



HAL
open science

Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale

Gaëtan Planchon

► **To cite this version:**

Gaëtan Planchon. Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale. Psychologie et comportements. Université de Montpellier, 2022. Français. NNT : 2022UMONS081 . tel-04103500

HAL Id: tel-04103500

<https://theses.hal.science/tel-04103500>

Submitted on 23 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale Information, Structures, Systèmes

IMAG, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France

Relations entre connaissances universitaires et
connaissances enseignées dans le secondaire : la
seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale.

Présentée par Gaëtan Planchon
Le 2 décembre 2022

Sous la direction de Thomas Hausberger

Devant le jury composé de

Marianna Bosch, Professeur, Université de Barcelone, Espagne

Pierre Arnoux, Professeur des Universités, Université Aix-Marseille

Viviane Durand-Guerrier, Professeur Émérite, Université de Montpellier, France

Nicolas Grenier-Boley, Professeur des Universités, Université de Rouen, France

Thomas Hausberger, Maître de Conférences-HDR, Université de Montpellier, France

Carl Winsløw, Professeur, Université de Copenhague, Danemark

Présidente de jury

Examineur

Examinatrice

Rapporteur

Directeur

Rapporteur



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Résumé / Summary

Résumé

Félix Klein a mis en avant une double discontinuité dans le parcours d'étude en mathématiques : outre la transition secondaire-supérieur, une seconde discontinuité a lieu à la sortie de l'université lorsqu'un étudiant devient enseignant de mathématiques dans le secondaire. Ce dernier perçoit difficilement, en général, les relations entre les mathématiques enseignées au secondaire et les connaissances universitaires.

Cette thèse, qui s'inscrit dans le champ de la didactique des mathématiques, a pour but l'étude de la seconde discontinuité de Klein en la particulierisant à un objet de savoir : l'intégrale. Ce concept mathématique est enseigné en terminale en France, puis à l'université durant les trois premières années. Plusieurs théories de l'intégration sont étudiées dans le supérieur et les étudiants perçoivent en général assez mal les liens entre ces théories, ainsi qu'avec l'intégrale du lycée. Afin d'analyser les différents phénomènes didactiques qui en résultent, nous plaçons notre étude dans la perspective institutionnelle de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

Dans un premier temps, nous donnons une revue des travaux en didactique des mathématiques portant sur la seconde discontinuité de Klein ainsi que sur l'intégrale, ces derniers se limitant à la transition secondaire-supérieur. Puis nous présentons une étude épistémologique des principales théories de l'intégration qui sont rencontrées dans l'enseignement. Nous poursuivons avec l'étude de l'enseignement de l'intégrale à l'université en France, notamment la transposition didactique externe au sens de la TAD. Nous faisons état des débats qui ont eu lieu dans la noosphère (la communauté des mathématiciens) quant au choix des théories de l'intégration enseignées en licence et nous les mettons en regard avec ceux opérés par un panel d'universités. Les différents syllabus d'unités d'enseignements liées à l'intégrale sont étudiés à l'aide des outils de l'écologie des savoirs.

Notre étude de la transposition didactique de l'intégrale se particularise ensuite au cas de l'université de Montpellier. Des interviews d'enseignants-chercheurs nous permettent d'éclairer les raisons des choix des théories enseignées. L'étude praxéologique des documents de cours en deuxième et troisième années de Licence nous permettent de modéliser les connaissances des étudiants (leur équipement praxéologique) sous la forme de modèles praxéologiques dominants (au sens de la TAD). La mise en regard avec un modèle praxéologique dominant pour l'intégrale du lycée nous permet ensuite de pointer des liens et des ruptures dans ces ensembles de connaissances, en termes des blocs constitutifs des praxéologies mobilisant le concept d'intégrale. En particulier, nous montrons que la théorie intuitive des aires qui fonde l'intégrale du lycée n'est pas formalisée à l'université, outre la théorie de la mesure - d'un niveau de généralité et d'abstraction bien supérieur.

De fait, notre enquête épistémologique nous a permis d'identifier une théorie intermédiaire, la mesure de Jordan, à partir de laquelle nous avons élaboré une ingénierie qui

visée à rendre visibles les liens entre théorie de la mesure, intégrale de Riemann et théorie intuitive de l'aire. Ces relations sont décrites en termes de blocs des praxéologies. Ceci nous conduit à introduire la notion de praxéologies de Klein, lesquels visent un rapport intégrateur aux savoirs enseignés à l'université et dans le secondaire, et à préciser les organisations didactiques associées en adaptant les moments de l'étude de la TAD. Notre ingénierie, construite sous la forme d'une activité d'étude et de recherche au sens de la TAD, a été expérimentée dans le cadre du Master MEEF. Les analyses du travail des étudiants, menées avec les différents outils de la TAD (questionnaire, schéma herbartien et moments de l'étude), confirment les potentialités de notre dispositif tout en mettant en évidence des obstacles au développement des praxéologies de Klein.

Mots clés : Didactique et épistémologie des mathématiques, Théorie Anthropologique du Didactique, seconde discontinuité de Klein, praxéologies de Klein, intégrale et théorie de la mesure

Summary

Félix Klein has pointed out a double discontinuity in the mathematical study path: in addition to the transition from secondary to higher education, a second discontinuity occurs at the end of the university when a student becomes a mathematics teacher in secondary school. The latter generally has difficulty perceiving the relationship between the mathematics taught in secondary school and the knowledge acquired at university.

This thesis, which is part of the field of didactics of mathematics, aims at studying Klein's second discontinuity by particularizing it to an object of knowledge: the integral. This mathematical concept is taught in the final year of high school in France, and then at the university during the first three years. Several integration theories are taught in higher education and students generally do not perceive the links between these theories, as well as with the high school integral. In order to analyze the different didactic phenomena that result, we place our study in the institutional perspective of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD).

First, we give a review of the literature in mathematics education on Klein's second discontinuity as well as on the integral, the latter being limited to the secondary-tertiary transition. Then we present an epistemological study of the main integration theories that are encountered in teaching. We continue with a study of the teaching of the integral at the university in France, in particular the external didactic transposition in the sense of the ATD. We report on the debates that have taken place in the noosphere (the community of mathematicians) concerning the choice of theories to be taught in the bachelor's degree program and we compare them with those made by a panel of universities. The different syllabi of teaching units related to the integral are studied using the tools of the ecology of knowledge.

Our study of the didactic transposition of the integral is then particularized to the case of the university of Montpellier. Interviews with teacher-researchers allow us to shed light on the reasons for the choice of theories taught. The praxeological study of the course documents in the second and third years of the Bachelor's degree allows us to model the students' knowledge (their praxeological equipment) in the form of dominant praxeological models (in the sense of ATD). The comparison with a dominant praxeological model for the high school integral then allows us to point out links and breaks in these sets of knowledge, in terms of the constitutive blocks of praxeologies mobilizing the concept of integral. In particular, we show that the intuitive theory of areas which grounds the high school integral is not formalized at the university, apart from the theory of measurement - of a much higher level of generality and abstraction.

In fact, our epistemological investigation has allowed us to identify an intermediate theory, the Jordan measure, from which we have developed an engineering that aims at making visible the relationships between measure theory, the Riemann integral and the intuitive theory of areas. These relations are described in terms of blocks of praxeologies. This leads us to introduce the notion of Kleinian praxeologies, which aim at an integrative relation to the knowledge taught at the university and in the secondary school, and to specify the associated didactic organizations by adapting the moments of study of the ATD. Our engineering, built in the form of a study and research activity in the sense of the ATD, was experimented in the context of the Master MEEF (student teachers). The analyses of the students' work, carried out with the different ATD tools (Question-answer maps, Herbartian scheme and moments of study), confirm the potentialities of our device while highlighting obstacles to the development of Kleinian praxeologies.

Keywords: Didactics and epistemology of mathematics, Anthropological Theory of the Didactic, Klein's second discontinuity, Kleinian praxeologies, integral and measure theory

Remerciements

REMERCIEMENTS

La rédaction d'un manuscrit de thèse en étant salarié à plein temps est un long processus, sur lequel s'exerce un certain nombre de conditions et de contraintes. Créer des conditions favorables à ce travail ne peut pas se faire seul, et j'ai eu la chance de bénéficier d'un environnement personnel et professionnel qui, durant ces cinq années, a contribué à la réalisation de ce projet de thèse.

Je vais commencer ces remerciements par mon directeur de thèse. Thomas, merci d'avoir accepté de te lancer avec moi dans ce travail. Ce n'était pas facile, j'imagine, de me faire changer de posture et je crois que tu as bien réussi. Nos discussions scientifiques ont toujours été riches, et j'ai beaucoup apprécié ta capacité à formaliser les idées. J'ai eu le sentiment qu'on avançait ensemble dans la réalisation du projet, et j'ai réellement senti une vraie liberté sur le choix des outils. Merci d'avoir été si disponible pour moi pendant ces 5 années. Et merci aussi d'avoir partagé ces moments de convivialité entre Utrecht et Barcelone, si importants dans ce long travail !

Je remercie Carl et Nicolas d'accepter d'être rapporteurs pour cette thèse. Carl, tes écrits ont été mes premières lectures sur la thématique de la seconde discontinuité de Klein et ont inspiré une bonne partie de mes travaux. Nicolas, j'ai toujours pris plaisir à discuter lors des pauses à DEMIPS ou à INDRUM de nos problèmes communs dans le cadre du Master MEEF. J'ai aussi un excellent souvenir de tes retours sur mon travail aux journées jeune chercheur DEMIPS, c'est donc avec grand plaisir que je reçois ton acceptation d'être rapporteur.

Je remercie également Marianna et Pierre d'avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse. Marianna, les rencontres à Barcelone ont été des temps forts de mes cinq dernières années, et tes retours sur les outils théoriques mobilisés dans le cadre de ma recherche m'ont toujours été d'une grande aide.

Pierre, merci n'avoir montré ton intérêt pour mes travaux. Nous rencontrons certainement des questions professionnelles communes, j'espère que cette thèse contribuera modestement à apporter des réponses.

Viviane, je commence par te remercier d'avoir accepté de participer à ce jury. Mais bien sûr, mes remerciements dépassent largement cela. Nos discussions entre nos bureaux jusque tard le soir sur les phénomènes que nous rencontrions dans les amphithéâtres ou les salles de TD ont nourri mon questionnement didactique. Tes encouragements à m'engager dans la recherche aboutissent aujourd'hui à ce manuscrit.

L'environnement professionnel dont j'ai bénéficié à l'université de Montpellier a rendu possible la réalisation de ce travail. Je remercie donc le département de mathématiques de l'université de Montpellier d'avoir facilité mon organisation. Merci à l'équipe DEMa, à l'IMAG de m'avoir intégré au laboratoire, et d'avoir rendu possible ma participation à différents congrès, si importants pour mener ces activités de recherche.

Je remercie chaleureusement mes collègues du Master MEEF, Anne, Aurélie, Nicolas, Simon pour les nombreuses discussions que l'on a pu avoir sur la formation des enseignants et qui, de fait, rejaillissent dans cette thèse. Et merci aux collègues PFA

d'avoir assumé tant de tâches que je ne pouvais pas faire. Un remerciement particulier à Véronique : merci d'avoir accepté de mener des pré-pré expérimentations avec ton fils, puis d'avoir discuté des modèles praxéologiques pour l'intégrale au lycée. Merci aussi pour les vidéos dans les classes !

Je tiens également à remercier Louise : ton écoute, ton extrême bienveillance, ta disponibilité (oui !), ton humanité, nos discussions sur la formation des enseignants de maths ont été des éléments extrêmement précieux et déterminant pour la réalisation de cette thèse, et m'ont permis d'avancer sereinement dans ce travail. Je disais qu'il fallait un environnement professionnel favorable, tu y as grandement contribué. Merci pour tout.

Je remercie également les enseignants-chercheurs qui ont accepté les interviews et de partager leurs documents. J'aurais aimé en faire plus. C'est très précieux pour la recherche en didactique de profiter de ces données si riches. Un merci particulier à Marc Rogalski qui est venu travailler avec moi à Montpellier et qui a partagé ses photocopies. Nos discussions sur l'intégrale m'ont beaucoup apporté, et j'espère bien continuer à exploiter encore les données issues de ces discussions.

Merci aux étudiantes et étudiants du Master MEEF de Montpellier de ces dernières années (en particulier les M1 de 2020-2021), qui sont parfois sans le savoir des sujets d'expérimentation. J'ai presque envie de m'excuser pour les couacs de planning, d'organisation ou les délais de correction un peu long... J'avoue que le temps de la thèse a parfois pris le pas sur cela. Un merci tout particulier à Maurine que j'ai privée si longtemps de son précieux classeur de théorie de l'intégration et de théorie de la mesure. Ces données ont été un point clé dans la recherche. Merci plus généralement aux étudiantes et étudiants que j'ai eus dans mes classes, c'est grâce à vous que le métier d'enseignant est si passionnant et peut donner envie d'y consacrer une thèse !

Merci aussi aux jeunes chercheurs, avec qui nous pouvons partager nos moments de doutes : Marc, merci d'avoir pris régulièrement de mes nouvelles, et pour ces discussions si riches et si profondes. Je suis sûr qu'on travaillera ensemble bientôt ! Pierre-Vincent, je garde un excellent souvenir du WEJCH que tu as organisé dans cette belle ville de Rennes, tu n'étais pas loin de finir ta thèse quand je commençais la mienne, j'ai essayé de suivre ton chemin. Julie, merci d'avoir été toujours disponible quand je te harcelais par message pendant la rédaction de ce manuscrit. Nathan, nos discussions m'ont aussi toujours beaucoup apporté, sur la recherche comme sur le reste. Merci d'avoir été une oreille si attentive et bienveillante. Je suis à tes côtés pour les quelques semaines qui te restent !

Un petit mot pour ma famille, mes parents et mon frère. A mon père qui me faisait résoudre des problèmes de maths le soir avant de me coucher, et à ma mère qui m'emmenait dans ses classes à l'école me transmettre sa passion de l'enseignement : je fais l'hypothèse que vous n'êtes pas pour rien au fait que je me lance dans la recherche en didactique des mathématiques ! Et merci à mon frère pour son soutien et ses

REMERCIEMENTS

encouragements. Merci à tous les trois d'avoir pris le temps de relire des parties de ce manuscrit, d'avoir fait la connaissance de Klein, de Riemann, de Lebesgue et appris les mots praxéologie, noosphère, et surtout d'avoir toujours été si présents.

Je remercie mes merveilleuses filles, Sara et Adèle, d'avoir continué d'apporter autant de joie et de bonheur. Les moments passés avec vous sont si précieux et j'ai toujours fait en sorte d'en rater le moins possible pendant ces années de thèse. En tout cas rassurez-vous, je vais sûrement continuer à travailler le soir près de vous quand vous irez vous coucher. Enfin merci à mon Alex, avec qui je partage toutes mes aventures : nous avons tout construit à deux, cette thèse n'aurait pas pu aboutir sans ton soutien et ton amour indéfectible. Merci.

Table des matières

Résumé / Summary	i
Remerciements	v
Introduction	1
Émergence de notre problématique	2
Plan de la thèse	4
Chapitre 1 Revue de travaux	6
1.1 Connaissances mathématiques des enseignants : états des lieux de la recherche	7
1.2 Recherches portant sur la problématique des transitions en didactique des mathématiques	11
1.3 La deuxième discontinuité de Klein	13
1.3.1 Les écrits de Felix Klein	13
1.3.2 Le projet Klein et ses développements	15
1.3.3 L'approche par ingénierie	17
1.3.4 L'approche par la TAD	20
1.4 État des lieux de la recherche en didactique sur l'intégration et la mesure	24
1.4.1 Sur l'intégrale au lycée	24
1.4.2 L'intégrale à l'université	27
1.4.3 Sur la mesure	28
1.5 Conclusion	29
Chapitre 2 Cadre théorique, questions de recherche et méthodologie	32
2.1 Transposition didactique	33
2.2 Écologie des savoirs	35
2.3 Rapports personnels, institutions et rapports institutionnels	36
2.4 Praxéologies et modèles praxéologiques de référence	37
2.5 Ostensifs	39
2.6 Organisations didactiques et moments de l'étude	39
2.7 Paradigme du questionnement du monde et ses outils	41

TABLE DES MATIÈRES

2.8	Questions de recherches	44
2.9	Méthodologie générale de l'étude	46
2.9.1	Méthodologie relative à QR_1	46
2.9.2	Méthodologie relative à QR_2	47
2.9.3	Méthodologie relative à QR_3	48
Chapitre 3	Étude épistémologique	50
3.1	L'analyse épistémologique	51
3.1.1	Méthodologie de l'étude	52
3.1.2	Choix de la période sur laquelle porte notre étude	52
3.2	L'intégrale de Cauchy	53
3.2.1	Les résultats préliminaires de Cauchy	54
3.2.2	La construction de l'intégrale de Cauchy	55
3.2.3	Le lien avec la notion d'aire	57
3.2.4	Le lien avec la notion de primitive	58
3.3	L'intégrale de Riemann	59
3.3.1	Les questionnements à l'origine de l'émergence de la théorie de Riemann	59
3.3.2	La théorie de Riemann	61
3.3.3	Vers la construction de la théorie moderne de la mesure	64
3.4	L'intégrale de Lebesgue	68
3.4.1	La mesure de Lebesgue	69
3.4.2	Le lien avec l'intégrale	71
3.4.3	L'intégrale de Lebesgue et les primitives	73
3.4.4	Le problème de l'intégrale	75
3.4.5	Le développement de l'intégrale de Lebesgue	77
3.5	Conclusion	81
Chapitre 4	Étude de la transposition didactique externe du concept d'intégrale à l'université	84
4.1	Introduction	85
4.2	Méthodologie	85
4.3	Synthèse des débats	87
4.3.1	Le point de vue d'Hervé Queffélec	88
4.3.2	Le point de vue de Marc Rogalski	92
4.3.3	Le point de vue de Roger Cuculière	95
4.3.4	Conclusion	99
4.4	Les choix dans des universités françaises	101
4.4.1	Université de Lyon 1	102
4.4.2	Université de Strasbourg	111
4.4.3	Université de Grenoble	116

4.4.4	Sciences Sorbonne université (Paris)	119
4.4.5	Université de Reims Champagne-Ardenne	123
4.4.6	Université de Montpellier	129
4.5	Conclusion : réponses à QR_1	136
Chapitre 5 Étude de cas : la transposition didactique du concept d'intégrale à l'université de Montpellier		140
5.1	Introduction	141
5.2	Interviews	142
5.2.1	Analyse a priori du questionnaire	143
5.2.2	Grille d'analyse des interviews	147
5.2.3	Interview de EC1	148
5.2.4	Interview de EC2	153
5.2.5	Conclusion sur les interviews	156
5.3	Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier	157
5.3.1	Corpus de données et description du cours	157
5.3.2	Analyse praxéologique du secteur intégrale de Riemann	161
5.3.3	Conclusion sur le modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier	169
5.4	Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier	172
5.4.1	Corpus et analyse du cours	172
5.4.2	Analyse praxéologique du secteur Théorie générale de la mesure	173
5.4.3	Analyse praxéologique du secteur Théorie générale de l'intégration	190
5.4.4	Analyse praxéologique du secteur Mesures images et mesures produit	195
5.4.5	Analyse praxéologique du secteur Espaces L^p	199
5.4.6	Conclusion sur le modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier	200
5.5	Conclusion : réponses à QR_2	202
Chapitre 6 Une implémentation locale du plan B de Klein pour l'intégrale en formation des enseignants		204
6.1	Introduction	205
6.2	Le modèle praxéologique relatif à l'intégrale au lycée	205
6.2.1	Corpus	205
6.2.2	Construction du modèle	206
6.2.3	Le programme officiel	206
6.2.4	Mise en regard des modèles praxéologiques dominants	220

TABLE DES MATIÈRES

6.3	Une première expérimentation avec la modalité d'un problème de CAPES	221
6.3.1	Méthodologie de construction des types de tâche	222
6.3.2	Présentation du problème et analyse a priori	222
6.3.3	Analyse a posteriori	227
6.3.4	Conclusion de cette pré-expérimentation	230
6.4	Seconde expérimentation : méthodologie de construction	231
6.4.1	Présentation du logos Λ_M^*	234
6.4.2	Construction de la séquence et objectifs d'apprentissage	235
6.4.3	Analyse a priori de la première séance	239
6.4.4	Analyse a priori de la deuxième séance	252
6.4.5	Les praxéologies de Klein et les moments de l'étude	266
6.4.6	Conclusion du travail d'ingénierie	270
6.4.7	Analyse a posteriori	271
6.4.8	Conclusion de l'analyse a posteriori	323
6.5	Conclusion : réponses à QR_3	325
Chapitre 7 Conclusion et perspectives		328
7.1	Apports de nos travaux	329
7.2	Perspectives de recherches	334
Bibliographie		337
Références		337
Annexes		349
A	Interview d'EC1 (intégrale de Lebesgue)	350
A.1	Transcription de l'interview d'EC1	350
A.2	Tableau de transcription de l'interview d'EC1	357
B	Interview d'EC2 (intégrale de Riemann)	361
B.1	Transcription de l'interview d'EC2	361
B.2	Tableau de transcription de l'interview d'EC2	366
C	Travaux dirigés L2	368
D	Travaux dirigés L3	382
E	Problème de type CAPES	394
E.1	Énoncé du problème	394
E.2	Corrigé du problème	402
F	Documents pour notre expérimentation	415
G	Travaux des différents groupes	469
G.1	Transcription des dialogues	469
G.2	Documents partagés	491

Introduction

Émergence de notre problématique

Félix Klein, dans un discours célèbre de 1872 dans lequel il présentait son programme de recherche afin d'élaborer une synthèse des géométries, a mis en avant une double discontinuité : outre la transition secondaire-supérieur, une seconde discontinuité a lieu à la sortie de l'université lorsqu'un étudiant qui obtient un poste d'enseignant est chargé d'enseigner des mathématiques élémentaires (Klein, 1872)

Nos observations, en tant qu'enseignant à l'université et formateur, semblent confirmer le fait que les étudiants perçoivent difficilement, en général, les rapports que ces derniers entretiennent avec les connaissances universitaires plus avancées, voir indiquent même un rejet des mathématiques universitaires. Nous pouvons citer un étudiant qui, après avoir obtenu le CAPES et se retrouve dans les classes déclare : « cela fait du bien de ne plus faire de maths ! ».

L'accès aux métiers de l'enseignement en France peut se faire par de multiples voies, et conduit à différents statuts dans l'éducation nationale : l'agrégation et le CAPES de mathématiques sont les concours de recrutement des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire en France qui donne accès au statut d'enseignant titulaire. Chaque année depuis 10 ans, il y a entre 1210 et 1592 postes proposés au CAPES de mathématiques¹, et autour de 400 postes pour l'agrégation de mathématiques².

La préparation du CAPES, et celle de l'entrée dans le métier d'enseignant de mathématiques, se déroule dans le cadre d'un master à l'université, le master MEEF³. La formation dans le master MEEF articule les aspects théoriques et pratiques autour de périodes de stage et prépare au concours du CAPES. Il est piloté par les INSPE⁴. Le cadre des INSPE est précisé dans le décret du 23 août 2013 relatif au recrutement et à la formation initiale des personnels enseignants et d'éducation. Ainsi, le ministère de l'éducation nationale demande⁵

- au moins 45% du temps de formation consacré aux disciplines et à la maîtrise des savoirs fondamentaux ;
- au moins 30 % du temps dédié aux stratégies d'enseignement et d'apprentissage efficaces, à l'évaluation et à la gestion de classe ;
- au moins 15% du temps dédié à la recherche ;

1. d'après le rapport du jury du capes 2021 https://capes-math.org/data/uploads/rapports/rapport_2021.pdf

2. et celui de l'agrégation externe de mathématiques https://agreg.org/data/uploads/rapports/rapport_2021.pdf

3. Métier de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation

4. Institut national supérieure du professorat et de l'éducation

5. voir <https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid157781/reforme-de-la-formation-initiale-des-professeurs-et-des-conseillers-principaux-d-education-en-inspe.html>

- 10 % du temps réservé aux contexte et innovations propres de chaque Inspé.

Le Master MEEF apparaît ainsi comme un contexte où la construction de liens entre connaissances universitaires et connaissances enseignées est cruciale pour la formation. Les enjeux ne se limitent pas à la réussite au concours : en effet, être capable d'utiliser ses connaissances avancées afin d'exercer un contrôle sur les situations d'apprentissages proposées aux élèves est une compétence importante à développer par un enseignant de mathématiques. En définitive, organiser l'enseignement des mathématiques universitaires dispensé dans le master MEEF de façon à renforcer la visibilité des liens avec les connaissances du second degré apparaît comme un enjeu fort pour le formateur. Cependant, une telle démarche nécessite souvent de repenser les enseignements et de développer de nouvelles situations pour les apprentissages, en raison de la distance entre ces deux types de connaissances et de la complexité des liens qui les unissent, des points de vue mathématique et épistémologique. Quels sont les liens qui existent entre les mathématiques universitaires et les connaissances du secondaire ? Quels outils permettent de décrire ces liens ? Ces liens sont-ils perçus par les étudiants élèves-professeurs ? Et comment peut-on les mettre en lumière dans le cadre de situations d'apprentissage ?

Pour aborder cette problématique, nous avons choisi de particulariser l'étude à l'enseignement-apprentissage de l'intégrale dans le cadre de l'analyse mathématique. L'intégrale est définie en terminale comme l'aire sous la courbe. Les étudiants qui arrivent dans le parcours mathématiques en Master MEEF ont pour la plupart d'entre eux obtenu une licence de mathématiques et ont étudié plusieurs théories de l'intégration. Mais plusieurs théories de l'intégration peuvent être enseignées à l'université, dans les différents niveaux de licence, dont les principales sont l'intégrale de Riemann, de Lebesgue et la théorie générale de la mesure. L'enseignement de la théorie de Riemann s'avère peu reliée à la problématique de la mesure des grandeurs qui fonde l'intégrale du secondaire, alors que la théorie de la mesure tente de formaliser l'idée de mesurage, mais de façon axiomatique à un niveau d'abstraction très élevé. En définitive, un élément de transition apparaît manquant, si l'on souhaite rendre les connaissances du supérieur opérationnalisables en vue des pratiques du secondaire.

Néanmoins, d'autres intégrales peuvent être enseignées à l'université : l'intégrale par primitive, celle de Cauchy, de Kurzweil-Henstock. Quelle est la situation dans les différentes universités en France vis à vis des différentes théories de l'intégration enseignées ? Et comment peut-on expliquer les choix opérés ?

Dans le cadre du Master MEEF de l'université de Montpellier, nous avons élaboré puis expérimenté une ingénierie didactique qui vise à implémenter des idées de Klein. Cette expérimentation reprend les idées de Kondratieva et Winsløw (2017) et de Winsløw (2020) où les liens sont décrits à travers des relations entre blocs de la praxis et du logos (voir chapitre 2) relatifs aux connaissances mathématiques en jeu dans les institutions (dans notre cas, les différents concepts d'intégrale). L'expérimentation in vivo de notre ingénierie va nous permettre de développer des outils théoriques

pour l'étude de la seconde discontinuité de Klein, mais également de repérer d'éventuels points de blocage dans la réalisation des activités prévues.

Plan de la thèse

Pour aborder ce questionnement, nous allons commencer par mener un état de l'art des travaux menés en didactique concernant les différents aspects de notre étude. Nous commencerons par situer nos travaux dans le spectre des recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement, ce qui nous conduira à étudier les travaux concernant les phénomènes de transitions. Puis, à partir des écrits de Felix Klein, nous nous concentrerons sur les travaux en didactique qui se rapportent à la deuxième discontinuité. Nous verrons en particulier le point de vue de la théorie anthropologique du didactique sur cette deuxième discontinuité. Enfin, comme nous particularisons notre étude à l'enseignement-apprentissage de l'intégrale, nous dresserons un panorama de recherche menées en didactique sur l'intégrale. C'est l'objet du chapitre 1.

Ensuite, dans le chapitre 2, nous présenterons les cadres théoriques que nous allons mobiliser pendant notre étude. La modélisation de la deuxième discontinuité de Klein avec les outils des praxéologies va nous conduire à introduire différentes notions issues de la théorie anthropologique du didactique. L'introduction du cadre théorique va permettre d'affiner notre questionnement et de formaliser trois groupements de questions de recherche couvrant les différents aspects de notre étude.

Nous mènerons, dans le chapitre 3, une enquête sur l'épistémologie historique du concept d'intégrale, ce qui nous permettra d'étudier les raisons d'être de l'émergence des différentes théories de l'intégration dans l'histoire et des liens entre les différentes théories de l'intégration.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude de la transposition didactique de l'intégrale à l'université. Dans un article paru dans *La gazette des mathématiciens*, Queffélec (2012) annonce :

Quelle théorie de l'intégration enseigner à nos chers étudiants en voie de disparition, et qui bâillent discrètement, mais uniformément continûment, à chacune de nos explications ou démonstrations ? Riemann, Lebesgue, les deux ?

Le choix de théorie de l'intégration à enseigner est une question de transposition didactique externe (voir chapitre 2). La citation de Queffélec montre que cette question émerge dans ce que l'on appelle *la noosphère*. Notre étude de la transposition didactique externe de l'intégrale à l'université va donc commencer par un état des lieux de discussion faisant état de tensions quant au choix de théorie de l'intégration à enseigner à l'université.

Nous étudierons ensuite la situation de différentes universités en France concernant l'enseignement de l'intégrale, et des choix qui sont opérés dans les universités. Les outils de l'écologie des savoirs nous permettront de dresser un panorama de choix opérés dans les universités.

Nous examinerons alors le cas de l'université de Montpellier, qui fait l'objet du chapitre 5. L'interview de deux enseignants chercheurs responsables des unités d'enseignement portant sur l'intégration va nous permettre de comprendre les choix opérés à l'université de Montpellier et poursuivre de documenter le processus de transposition externe. Nous poursuivrons l'étude de la transposition didactique de l'intégrale en rendant compte des modèles praxéologiques dominants sur l'intégrale à l'université de Montpellier, ce qui clôturera le chapitre 5.

Une fois les différents modèles praxéologiques dominants à l'université de Montpellier construits, nous aborderons dans le chapitre 6 notre étude expérimentale. Nous construirons un modèle praxéologique dominant pour l'intégrale au lycée que nous mettrons en regard avec ceux construits à l'université. Ces modèles constituent la référence épistémologique des savoirs enseignés au lycée et à l'université, sur l'intégrale (dans l'optique de leur mise en relation), à partir de laquelle nous construirons notre situation d'apprentissage visant à renforcer les liens entre connaissances universitaires et connaissances plus élémentaires sur l'intégrale.

Nous développerons donc dans ce chapitre une ingénierie didactique. Après une présentation du dispositif expérimental, nous fournirons des analyses a priori et a posteriori, lesquelles sont comparées pour discuter la pertinence du dispositif. Nous introduirons également de nouveaux outils théoriques pour l'étude de la seconde discontinuité de Klein.

CHAPITRE 1

Revue de travaux

1.1. Connaissances mathématiques des enseignants : états des lieux de la recherche

Nous avons formulé dans l'introduction les questions à l'origine de nos travaux. Nous nous proposons maintenant d'en préciser les contours en effectuant un état de l'art des travaux relatifs à notre problématique. L'étude de la deuxième discontinuité de Klein est en fait l'étude d'une transition : celle qui concerne la sortie de l'université, c'est-à-dire la transition de l'université vers le monde du travail, de surcroît pour un public spécifique - les futurs enseignants de mathématiques de l'enseignement primaire et secondaire. Nous positionnerons donc la problématique de la seconde discontinuité de Klein dans le cadre plus général des travaux de recherches portant sur les problèmes de transition, avant d'aborder l'état de l'art de la recherche portant spécifiquement sur cette discontinuité pointée par Klein. En outre, cette discontinuité est liée à la question du savoir mathématique des enseignants.

Nous débiterons donc cette revue de travaux par un questionnement sur le savoir mathématique utile à l'enseignement : en quoi est-il spécifique ? Quels sont ses liens avec le savoir académique et avec les questions pédagogiques (et didactiques) ? Enfin, notre cas d'étude est le concept d'intégrale : nous terminerons donc cette revue de travaux par un état des lieux des recherches portant sur l'enseignement de l'intégrale au lycée et à l'université.

1.1 Connaissances mathématiques des enseignants : états des lieux de la recherche

La nécessité de solides connaissances mathématiques comme condition préalable à l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire et sa relation avec la connaissance du contenu pédagogique est largement reconnue. Cependant, répondre à ce besoin est une quête difficile. Par exemple, suivre des cours de niveau plus avancé ne semble pas se traduire par de meilleures pratiques d'enseignement ou une amélioration du rendement des élèves comme l'indique par exemple Darling-Hammond (1999) :

Subject matter knowledge is another variable that one might think could be related to teacher effectiveness. While there is some support for this assumption, the findings are not as strong and consistent as one might suppose. Studies of teachers' scores on the subject matter tests of the National Teacher Examinations (NTE) have found no consistent relationship between this measure of subject matter knowledge and teacher performance as measured by student outcomes or supervisory ratings.

Cette étude n'est pas spécifique aux mathématiques. Pour le cas des mathématiques, N. H. Wasserman (2018) illustre la nécessité de faire des mathématiques avancées par les recommandations officielles des programmes de mathématiques des filières de formation des enseignants. Par exemple aux États-Unis, un tel programme stipule :

it would be quite useful for prospective teachers to see how C can be “built” as a quotient of $\mathbb{R}[X]$ and, more generally, how splitting fields for polynomials can be gotten in this way. The quadratic formula, Cardano’s method, and the algorithm for solving quartics by radicals can all be developed from a structural perspective as a preview to Galois theory, bringing some coherence to the bag of tricks for factoring and completing the square that are traditional in high school algebra (CBMS, 2012)

Pour autant, peu d’études empiriques ont été réalisées afin de montrer l’importance du savoir universitaire dans la pratique professionnelle des enseignants (Hoth, Jeschke, Dreher, Lindmeier, & Heinze, 2020).

N. H. Wasserman (2018, p. 4) indique qu’au contraire, les recherches montrent que les enseignants et leurs élèves semblent tirer peu de profit de l’étude des mathématiques avancées par un enseignant :

By and large, despite the strong arguments for how and why studying advanced mathematics might benefit secondary teachers, much of the research has found the opposite to be true : teachers and their students appear to gain little from a teacher’s study of advanced mathematics.

Felix Klein a introduit l’expression : « mathématiques élémentaires d’un point de vue avancée ». Il a ainsi été l’un des premiers à montrer comment les mathématiques avancées sous-tendent les mathématiques plus élémentaires. Nous reviendrons sur ces idées. Mais l’état des recherches montre que le transfert des connaissances mathématiques avancées en des connaissances utiles pour l’enseignement n’est pas automatique : Wu (2011) parle de la « trickle-down theory » qui n’a pas lieu.

En France, Kuzniak (2007) évoque aussi la distance entre les notions mathématiques enseignées à l’université et celles qui le sont dans le secondaire :

La nature du savoir enseigné est ici questionnée par le processus de transposition scolaire même : la mathématique du lycée n’est pas la mathématique du supérieur ou du chercheur. Elle concerne des objets et des notions qui ne sont plus traités à l’université, comme la géométrie des configuration, ou qui appartiennent à des champs autres que les mathématiques.

De son côté, Cirade (2006, p. 185) définit les *mathématiques pour l’enseignement* comme des mathématiques qui sont des outils didactiques en vue de mettre en place dans la classe les organisations mathématiques à enseigner :

Les mathématiques pour l’enseignant sont constituées de toutes ces connaissances – techniques, technologiques, théoriques – sans lesquelles, déjà, le professeur de mathématiques a du mal à saisir les tâches didactiques qu’il

1.1. Connaissances mathématiques des enseignants : états des lieux de la recherche

lui échoit d'accomplir. Plus largement, on peut désigner, sous l'appellation de mathématiques pour l'enseignant, toutes les mathématiques que celui-ci peut trouver avantage à mobiliser pour outiller sa pensée et son action. Pourtant, la distinction ainsi ébauchée apparaît rapidement insuffisante : c'est cette insuffisance qui motive l'introduction d'une notion plus spécifique, celle de *mathématiques pour l'enseignement*.

Pour Cirade, les difficultés pour le professeur se révèlent en se confrontant à des situations au plus près des mathématiques à enseigner, *au chevet* de la classe :

La difficulté rencontrée en un tel contexte semble d'abord renvoyer à des mathématiques « savantes » qui, sans doute, peuvent être regardées comme participant des mathématiques pour l'enseignant. Mais, en nombre de cas aussi, ces mathématiques savantes se présentent dans une forme qui les rend impropres, si l'on peut dire, à la consommation professionnelle par le professeur - par le professeur en tant que professeur- et non pas seulement en tant qu'esprit curieux de mathématiques.

Pour la formation des enseignants, elle propose des *élaborations mathématiques intermédiaire* dont une part des matériaux vient des mathématiques savantes, mais dont une partie doit être créée « sur le terrain ».

Les travaux de Zazkis et Leikin (2010) confirment le fait que les enseignants en exercice pensent ne pas beaucoup utiliser leurs connaissances avancées.

La questions des connaissances professionnelles et de la préparation des enseignants a été considérablement influencée par les travaux théoriques de Shulman (1986). Pour théoriser les connaissances des enseignants, il a proposé la triade des types de connaissances : la connaissance du contenu (CK « Content Knowledge »), qui est une connaissance spécifique du domaine mathématique ; la connaissance du contenu pédagogique (PCK « Pedagogical Content Knowledge »), qui désigne les connaissances nécessaires pour rendre la matière accessible aux étudiants ; et les connaissances pédagogiques générales (GPK « General Pedagogical Knowledge »), qui sont indépendantes de la matière et font référence à des stratégies d'enseignement ou des organisations de la classe.

En particulier, le concept de PCK en tant qu'amalgame de contenu et de connaissances pédagogiques a eu une influence sur les approches théoriques et pratiques de la formation des enseignants et peut être relié à la notion de mathématiques pour l'enseignement. Le concept de PCK, a été ensuite précisé par Ball, Thames, et Phelps (2008) qui distinguent :

- Dans les connaissances du contenu :
 - Connaissances communes de la discipline (CCK « Common Content Knowledge »)

- Connaissance spécialisées de la discipline (SCK « Specialized Content Knowledge »)
- Connaissance de l’horizon (HCK « Horizon content Knowledge »)
- Dans les connaissance du contenu pédagogique :
 - Connaissance du contenu et des étudiants (KCS « Knowledge of Content and Students »);
 - Connaissance du contenu et de l’enseignement (KCT « Knowledge of Content and Teaching »);
 - Connaissance du curriculum

La connaissance de l’horizon (HCK) correspond au fait de savoir comment les mathématiques sont relié dans les curriculum d’étude.

Notre étude se centre sur les connaissances du contenu, et en particulier sur la connaissance spécialisée de la discipline. Ces connaissances permettent d’appréhender les problématiques rencontrées dans les classes :

The fourth category, specialized content knowledge (SCK), is mathematical knowledge beyond that expected of any well-educated adult but not yet requiring knowledge of students or knowledge of teaching. Many of the common tasks of teaching require significant mathematical resources, but do not yet necessarily require knowing about students or teaching. Ball et al. (2008, p. 9)

Durand-Guerrier, Winsløw, et Yoshida (2010) ont construit un modèle théorique de connaissances des enseignants de mathématiques fondé sur la théorie anthropologique du didactique (voir chapitre 2) et notamment les notions d’organisation mathématique et d’organisation didactique. Dans la mesure où les organisations didactiques qui se développent effectivement dans les classes s’appréhendent selon différentes perspectives, le modèle construit par les auteurs se fonde sur des « *tâches hypothétiques d’enseignant* » dans le but de décrire les parties des organisations didactiques directement liées à des organisations mathématiques. La pratique pédagogique enseignante est donc modélisée par une organisation didactique hypothétique simplifiée. Dans ce modèle, les connaissances de l’enseignant interviennent dans des praxéologies didactiques liées à des organisations mathématiques à développer par les élèves.

Durand-Guerrier et al. (2010) montrent également l’importance des modèles de référence pour les organisations mathématiques, dans la perspective de décrire les techniques didactiques qui ont pour objectif leur enseignement.

Notre revue de travaux met en évidence la nécessité de construire de nouvelles connaissances mathématiques spécifiques pour l’enseignement, s’appuyant sur le savoir

savant. Ces connaissances mathématiques spécifiques à construire, que Cirade (2006) appelle les mathématiques pour l'enseignement, sont à construire au plus près de la classe. En termes du cadre de Ball, ces connaissances mathématiques s'inscrivent dans la catégorie des SCK.

La section suivante va faire un état des lieux sur les recherches menées en didactique sur la problématique des transitions.

1.2 Recherches portant sur la problématique des transitions en didactique des mathématiques

La notion de transition, d'un état à un autre, renvoie à un processus de changement d'état. Ces changements, dans les systèmes éducatifs, se produisent partout. Neshet et Peled (1986) décrivent l'apprentissage comme un processus de transition : de l'état de novice à celui d'expert.

Dans les recherches en didactique des mathématiques, la notion de transition s'appréhende selon différentes perspectives : épistémologique, didactique, cognitive, institutionnelle, etc. (Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon, & Verschaffel, 2016).

Les transitions vers, à travers, et au-delà de l'université ont été étudiées spécifiquement par Hochmuth, Broley, et Nardi (2021) dans leur synthèse des travaux menées au sein du réseau international INDRUM. Les auteurs distinguent ainsi trois types de transitions : le type I qui désigne la transition entre le secondaire et l'université ; le type II celle interne à l'université, et le type III de l'université au monde du travail.

La transition du secondaire à l'université, donc celle de type I, est un premier enjeu important pour les étudiants : l'université en tant qu'institution et les mathématiques universitaires constituent un monde nouveau régi par de nouvelles règles (Gueudet et al., 2016). Ces nouvelles règles concernent par exemple les exigences accrues de rigueur et de précision.

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (voir chapitre 2), Winsløw (2008) montre que, dans le contexte de l'analyse, des praxéologies plus complètes apparaissent à l'université dans le cadre d'une pratique davantage théorique et abstraite, à l'inverse de l'activité mathématique du secondaire qui vise la maîtrise de techniques. Ainsi, la transition institutionnelle (du lycée à l'université) s'accompagne d'une transition épistémologique. C'est le *premier type de transition* dans l'activité mathématique de l'étudiant : le passage d'activité essentiellement centrée sur des blocs pratiques à un travail sur des praxéologies complètes, en *organisations mathématiques*. Cette première transition est source de difficultés chez les étudiants.

Puis, un *deuxième type de transition* apparaît : les types de tâche ne portent plus sur des objets « concrets » et « familiers » mais peuvent concerner des objets généraux (par exemple une fonction d'une classe singulière) ou même abstraits. Ces deux types de

transitions sont schématisés par Winsløw (2008, p. 4) sur la Figure 1.1 et le deuxième type de transition est liée au fait de *transformer la théorie en tâches*.

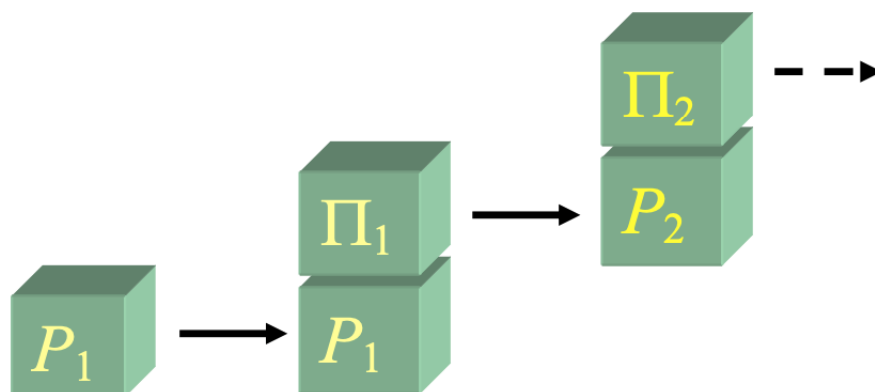


FIGURE 1.1 – Les deux types de transitions dans le domaine d’activité de l’étudiant de mathématiques

Cette transition à l’intérieur de l’université a aussi été étudié par McGowen et Tall (2010) qui a introduit le cadre du « met before ». Ce dernier est mobilisé par O’Shea (2016) dans le cadre de l’enseignement de la notion d’espace métrique à l’université. L’étude montre qu’en abordant les cours de topologie, les étudiants disposent de représentations de modèles dans \mathbb{R}^n (les boules ouvertes pensées comme des disques dans des espaces généraux) ce qui peut être la cause de difficultés. Il semble que la transition de l’analyse réelle aux espaces métriques nécessite également des changements cognitifs importants, y compris un niveau accru d’abstraction et une appréciation du rôle des définitions mathématiques.

Enfin, la transition de type III est donc la transition entre l’université et le monde du travail. La thèse de Quéré (2019) s’intéresse à la transition vers le monde de l’ingénierie et contient une étude des mathématiques utilisées par les ingénieurs dans leur pratique professionnelle à partir d’un questionnaire à destination d’ingénieurs.

La « seconde discontinuité », identifiée par Felix Klein concerne la transition de type III lorsque le lieu de travail est un établissement scolaire, dans laquelle l’ancien étudiant de l’université vient occuper une position d’enseignant.

Pour faciliter cette transition, Gueudet et al. (2016) préconisent que les formations à destination des enseignants permettent d’approfondir les connaissances du contenu mathématique et les connaissances du contenu pédagogique en relation avec les mathématiques scolaires, et en même temps établir des liens forts avec les pratiques pédagogiques réelles.

La deuxième discontinuité de Klein concerne donc ceux qui retournent à l’école en tant qu’enseignant. Nous consacrerons la section suivante à cette deuxième disconti-

nuité.

1.3 La deuxième discontinuité de Klein

1.3.1 Les écrits de Felix Klein

Felix Klein (1849-1925) est un mathématicien allemand dont les domaines de recherche sont la théorie des groupes, la géométrie non-euclidienne et l'analyse. Il a rédigé, en 1872, le fameux programme d'Erlangen dans lequel il propose un point de vue révolutionnaire sur la géométrie (Klein, 1872).

Tout au long de sa carrière, Felix Klein a souligné l'importance de réfléchir à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques d'un point de vue « mathématiques et psychologique ou pédagogique » (Weigand, McCallum, Menghini, & Neubrand, 2019, p. 1). A l'occasion de la présentation de son programme d'Erlangen, il déclare vouloir que les enseignants se placent « au-dessus de la matière », qu'ils aient une conception de l'état actuel des connaissances du domaine, et qu'ils soient capable d'en suivre l'évolution. Il a ensuite publié trois ouvrages *Elementary Mathematics from a higher standpoint* (Klein, Hedrick, & Novle, 2007) dans lesquels il développe ses idées pour l'enseignement des mathématiques à destination des futurs enseignants dans trois domaines des mathématiques en adoptant dans chaque volume des approches différentes. Dans le premier volume « Arithmetic, Algebra, Analysis », il montre à partir d'exemples comment trois branches apparemment indépendants des mathématiques peuvent être mobilisées ensemble.

Partant du constat qu'il n'existe pas de manuel qui propose une vision unifiée de la géométrie (comme il en existe pour l'algèbre et l'analyse), le deuxième volume « Geometry » donne un aperçu complet de la géométrie. La caractérisation novatrice de Klein des géométries comme les invariants de leurs groupes de symétrie, à partir de son célèbre programme d'Erlangen, constitue la base de sa discussion sur l'organisation de la géométrie (Kilpatrick, 2019). Enfin, Felix Klein présente le troisième volume « Precision Mathematics and Approximation Mathematics » en disant qu'il vise à « combler le vide entre les besoins des mathématiques appliquées et les recherches plus récentes en mathématiques pures ». L'objectif de Klein dans le troisième volume était d'aider le futur professeur de mathématiques à maintenir le lien entre les différents domaines scientifiques et à comprendre comment les mathématiques naissent de l'observation.

Dans le premier tome, Klein distingue deux processus dans le développement des mathématiques, qui se transposent en deux stratégies d'enseignement différentes. Dans le *plan A*, qui est le plus couramment suivi à l'école et même dans les universités, chaque branche des mathématiques est développée séparément pour elle-même et avec ses propres méthodes. Les grandes branches (analyse, algébrique et géométrie) se rencontrent occasionnellement mais ne sont pas unifiées. Le découpage en modules ou

unités d'enseignement indépendantes dans les universités correspond à ce plan.

Dans le *plan B*, les mathématiques doivent être considérées comme un tout connecté, où les mathématiques pures et appliquées sont unifiées. Les deux plans doivent être menés de pair, mais dans l'enseignement secondaire comme dans les premières années de l'université, Klein insiste sur la nécessité de mettre l'accent sur le plan B. C'est ce qu'il met en oeuvre dans le premier tome (Kilpatrick, 2019, p. 220).

Klein présente la deuxième discontinuité dans l'introduction du premier volume en indiquant :

The young university student finds himself, at the outset, confronted with problems, which do not remember, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgets all these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he becomes a teacher, he suddenly finds himself expected to teach the traditional elementary mathematics according to school practice; and, since he will be scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics, he will soon fall in with the time honoured way of teaching, and his university studies remain only a more or less pleasant memory which has no influence upon his teaching. (Klein et al., 2007, p. 1)

Plus tard, il utilise la métaphore d'un guide qui trace un chemin pour ses élèves, leur permettant d'éviter les écueils :

The teacher's knowledge should be far greater than that which he presents to his pupils. He must be familiar with the cliffs and the whirlpools in order to guide his pupils safely past them. (Klein et al., 2007, p. 162)

Puis, il insiste aussi sur l'importance d'une perspective sur les mathématiques dont doit disposer un enseignant débutant dans le cadre de sa pratique professionnelle, en particulier sur les liens entre l'intuition, le formalisme et l'abstraction dans la pratique mathématique :

If you lack orientation, if you are not well informed concerning the intuitive elements of mathematics as well as the vital relations with neighboring fields, if, above all, you do not know the historical development, your footing will be very insecure. You will then either withdraw to the ground of the most modern pure mathematics, and fail to be understood in the school, or you will succumb to the assault, give up what you learned at the university and even in your teaching allow yourself to be buried in the traditional routine. (Klein et al., 2007, p. 236)

La propre réponse de Klein au problème de la seconde discontinuité était que l'enseignement universitaire doit tenir compte des besoins de l'enseignant. Sa proposition

pour ce faire était une série de conférences spécialement conçues pour les aider à percevoir les liens entre les problèmes posés au sein des différents domaines mathématiques et surtout de souligner la relation de ces problèmes avec ceux des mathématiques scolaires. Il souligne que pour suivre ces cours magistraux, les étudiants doivent déjà connaître les principales caractéristiques des principaux domaines des mathématiques à la suite de leurs études universitaires antérieures. En substance, il prône donc l'introduction de ce qu'on appelle aujourd'hui des cours de type *capstone* pour les enseignants de mathématiques, c'est à dire des cours de synthèse à la fin de l'université qui visent à lier la formation académique aux besoins de l'activité professionnelle (Durel, 1993).

La proposition de Klein implique deux problèmes concrets : comment un cours de type *capstone* pourrait-il détecter et combler les écarts entre les connaissances des étudiants et les connaissances pertinentes pour l'enseignant, et quel est le « point de vue supérieur » (*higher standpoint*) approprié requis avant le cours de type *capstone* ?

1.3.2 Le projet Klein et ses développements

En 2008, IMU et ICMI ont initié un projet, the Klein Projet¹ dont le but est de rendre compte des développements mathématiques importants du 20ème siècle accessibles aux enseignants et source d'inspiration pour leur enseignement (Artigue, 2008). L'ambition du projet est la production d'un ouvrage à destination des enseignants du secondaire, mais également la production de vignettes proposant des ressources pour l'enseignement, et l'organisation de conférences et d'atelier mettant en relation des mathématiques, enseignants, et didacticiens.

Une vignette doit débiter par un objet technologique, une situation ou un problème, a priori susceptible de stimuler l'intérêt professionnel d'un enseignant du secondaire. La compréhension de l'objet, de la situation ou la résolution du problème doit conduire à des mathématiques du 20ème siècle. L'accent doit être mis sur les idées importantes et il n'est pas question d'y entrer trop avant dans des détails techniques pour rester accessible à des enseignants de lycée, mais cependant il nous semble essentiel que les mathématiques y soient bien visible. (Artigue, 2008)

Depuis le lancement du projet, de nombreuses vignettes ont été produites et sont disponibles en ligne². Le projet ne s'est pas développé autant que prévu, car, comme le souligne Michèle Artigue :

1. <https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/klein/project.html>

2. http://dmuw.zum.de/wiki/Klein_Vignettes

l'écriture de textes répondant aux ambitions que nous nous sommes données, et accessibles à des enseignants dont la formation et la culture mathématique peuvent être très divers suivant les régions du monde et les cultures éducatives, ne va en rien de soi.

Bien que l'ouvrage prévu dans le cadre du projet Klein n'a pas été publié, nous pouvons citer l'ouvrage *Understanding Analysis and its Connections to Secondary Mathematics Teaching* (N. Wasserman, Fukawa-Connelly, Weber, Mejía Ramos, & Abbott, 2022) qui propose un cours complet d'analyse réelle. Cet ouvrage est découpé en 12 chapitres, construit en suivant six grands principes d'enseignement (TP, Teaching Principle) :

- TP.1 : Acknowledge and revisit assumptions and mathematical constraints or limitations ;
- TP.2 : Consider and use special cases to test and illustrate mathematical ideas ;
- TP.3 : Expose logic as underpinning mathematical interpretation ;
- TP.4 : Use simpler objects to study more complex objects ;
- TP.5 : Avoid giving rules without accompanying mathematical explanations ;
- TP.6 : Seek out and give multiple explanations. (N. Wasserman et al., 2022, p. 2)

Pour les auteurs, ces six principes se situent à l'intersection entre les connaissances du contenu mathématiques et les connaissances pédagogiques. En ce sens, les connaissances en jeu sont ce que Ball et al. (2008) désignent comme les connaissances du contenu spécialisé (SCK). Chaque chapitre commence par un défi qui se pose dans l'enseignement. Un exemple de défi est par exemple donné par N. Wasserman et al. (2022, p. 192) dans le cadre de l'enseignement du théorème fondamental de l'analyse. Une explication de ce que signifie ce théorème par une enseignante à une classe est proposé, en partant d'un exemple (voir Figure 1.2).

Il s'agit ensuite de discuter de cette explication eu égard du programme de la classe à partir de la question : « How well does this example advance that agenda? Before moving on, think about what you, as a teacher, might do next. »

La suite du chapitre contient des développements sur le sujet mathématique et en lien avec le problème d'introduction ainsi qu'avec l'enseignement secondaire, pour découvrir un lien avec les cours d'analyse réelle (dans notre exemple, les étudiants sont amenés à voir le lien avec la notion de taux d'accroissement et de nombre dérivé). Enfin, chaque chapitre se termine par une série d'exercices qui demandent de réfléchir aux idées introduites dans le chapitre.

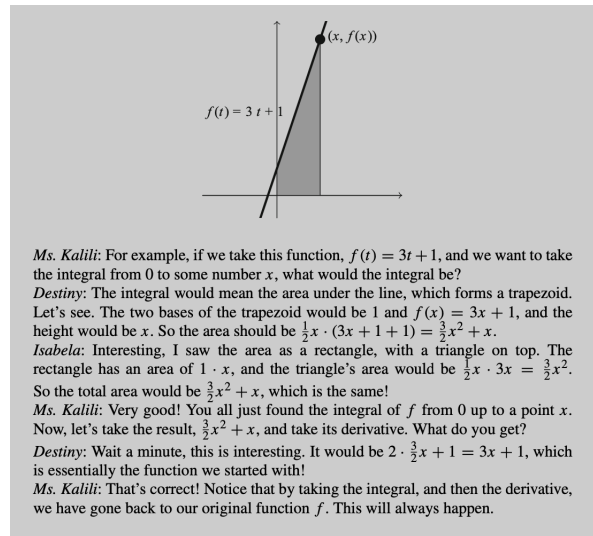


FIGURE 1.2 – Un exemple de défi dans le cadre de l'enseignement du TFA

1.3.3 L'approche par ingénierie

Biza et Nardi (2016) mènent une recherche qui visent à étudier comment le contenu mathématique et pédagogique abordé en formation des enseignants à l'université interagit avec la pratique professionnelle et avec la réflexivité sur les pratiques. Pour cette étude, une ingénierie est proposée en formation initiale à 17 élèves-professeurs. Cette ingénierie consiste en la demande d'une production de scénario de classe « fictif mais réaliste » qui se fonde sur la recherche et qui contient un problème mathématique, une production d'un ou plusieurs élèves sur le problème mathématique. Les élèves enseignants sont alors confrontés aux différents scénarios et les discussions lors des échanges constituent les données analysées dans la recherche. Les analyses sont structurées autour de quatre caractéristiques : cohérence (entre ce qu'imagine l'auteur du scénario et la pratique), spécificité (dans quelle mesure le scénario proposé est-elle effectivement une situation de classe possible), réification du discours pédagogique et réification du discours mathématique. Cette grille permet notamment d'étudier les défis auxquels sont confrontés les futurs enseignants lorsqu'ils traitent un contenu mathématique spécifique, dans la classe de mathématiques du secondaire.

Le fait que la « théorie du ruissellement » (Wu, 2011) ne se réalise pas a été également observé par Hanke et Schäfer (2018) : il ne suffit pas de suivre les cours de mathématiques à l'université pour acquérir un « point de vue supérieur » sur les mathématiques scolaire. Les auteurs ont alors imaginé une organisation spécifique des enseignements de mathématiques à l'université, qui vise à combler la deuxième discontinuité de Klein. Dans l'enseignement de l'analyse complexe à l'université, Hanke et Schäfer (2018) ont divisé la dernière partie du cours entre celle destinée aux futurs enseignants

et celle destinée aux futurs mathématiciens. Ce projet, « Spotlight-Y », vise à établir un lien institutionnel entre les mathématiques et l’enseignement des mathématiques, et à permettre aux étudiants de relier le contenu du cours d’analyse complexe à leur future pratique d’enseignant. Pour ce faire, la tâche demandée aux étudiants est de concevoir un projet d’enseignement qui sera expérimenté avec des élèves du secondaire. Il s’agit en fait d’articuler le contenu mathématique (CK), les connaissances du contenu spécialisé (SCK), et les connaissances du contenu commun (CCK) (Ball et al., 2008), ce qui est illustré par la figure 1.3.

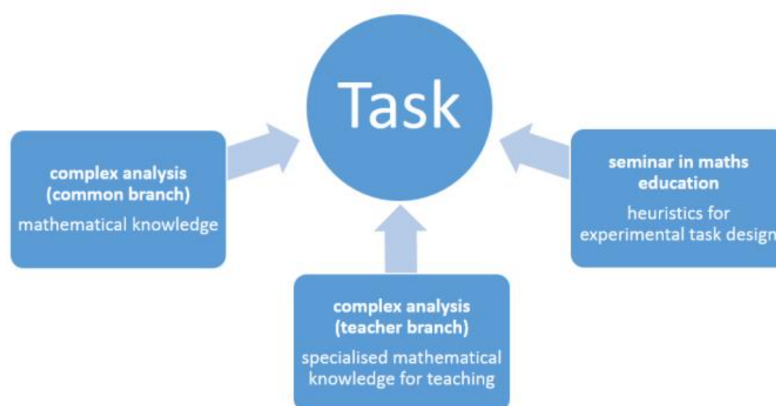


FIGURE 1.3 – Différentes composantes dans le processus de conception de tâches. Spotlight-Y

Les premiers résultats montrent que le dispositif a favorisé un engagement important des étudiants dans la réalisation des tâches. En revanche, les liens entre les SCK et les PCK sont à rendre explicites en formation et ne sont pas établis par les étudiants eux-même.

Les recherches menées par Stender et Stuhlmann (2018) se concentrent sur les méthodes mathématiques selon Pólya (1990). Les méthodes mathématiques décrivent comment les briques de l’activité mathématique (les définitions, les théorèmes, les preuves) sont créées ou étudiées par les mathématiciens. Sur la base des travaux de Pólya (1990), Stender et Stuhlmann (2018, p. 3) ont formulé une liste de stratégie à mettre en oeuvre dans le cadre de la résolution de problème (citons par exemple « comprendre le problème », « modifier la représentation », « considérer des cas particuliers », « diviser le problème en sous-problèmes », . . .). Des exemples de stratégies sont détaillés par Stender (2018). La figure 1.4 permet une visualisation des deux blocs dans l’activité mathématiques.

Pour les auteurs, la question des méthodes est transparente dans l’activité des mathématiciens, mais ne devrait pas l’être pour un futur enseignant qui aura à donner des explications aux élèves :

A mathematician often uses mathematical methods unconsciously. (...) For a future teacher it is much more important to be aware of his own methods as he or she shall later explain his actions to children. An explicit reference to his own methods is essential in these explanations. (Stender & Stuhlmann, 2018, p. 4-5)

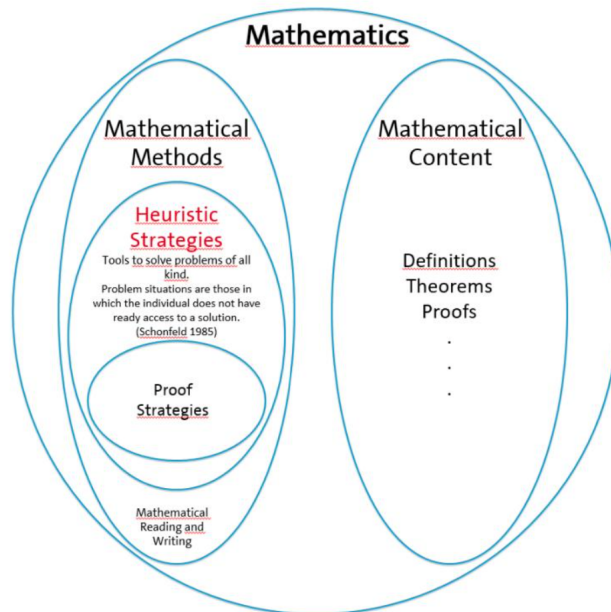


FIGURE 1.4 – Contenu et méthodes mathématiques

Les chercheurs conçoivent des séminaires à destination de volontaires, qui visent à aider les étudiants en formation des enseignants à comprendre le matériel de cours (en algèbre linéaire et analyse) et à introduire des stratégies heuristiques pertinentes pour ce matériel. Des entretiens menés avec 5 étudiants ayant participé au dispositif ont montré des résultats positifs. En particulier, ces derniers considèrent que l'enseignement de méthodes permet de lier les mathématiques de l'école et de l'université :

The students gave a positive feedback according to the heuristic strategies as a link between school and university. They said that it delivered a meaning to the fact that the content of the mathematical studies had hardly any connect to school mathematics. One student mentioned that he used heuristic strategies to explain mathematics when he was working in school as a substitute teacher. The students regard the workshops as very helpful for their learning progress. They emphasize the importance of developing proofs by their own to understand the lecture content. (Stender & Stuhlmann, 2018, p. 7-8)

Bien que la mise en œuvre d'enseignements de méthodes dans les cours de mathématiques à l'université soit un objectif, les auteurs mentionnent le défi potentiel de convaincre les enseignants de l'université de changer leurs habitudes et de l'inclure dans leur cours.

J. Rogalski et Rogalski (2015) ont proposé une implémentation d'un enseignement de méthodes dans le cadre de la résolution de problèmes portant sur les suites en licence de mathématiques, à l'université. Les auteurs ont également conclu sur la difficulté d'intégrer l'enseignement de méthodes dans les cours.

L'étude menée par Shamash, Barabash, et Even (2018) a pour but d'apporter une réponse à la question :

What might be the relevance and contribution of an abstract algebra course for developing expertise in secondary school mathematics instruction.

L'expérimentation a été menée à l'université dans le cadre d'une formation de deux ans pour les professeurs de mathématiques en exercice et sélectionnés pour y participer. Un cours d'algèbre abstraite a été spécialement conçu pour les enseignants de mathématiques du secondaire, en Israël, guidé par les principes suivants, que nous pouvons relier à ceux de Klein :

The motivation was to design a course for secondary school teachers that would provide an introduction to algebraic structures and modern abstract algebra, and link abstract algebra both to the high school curriculum in algebra and also to the mathematics curriculum in general. The underlying idea was the feeling that it is important for mathematics teachers to be aware of developments and current research in the discipline they teach, and that this kind of understanding and perspective are essential for teachers in planning high school syllabi and activities.

Les résultats de la recherche montrent que les enseignants qui ont suivi le programme considèrent que le cours construit a montré le rôle de l'algèbre dans d'autres domaines des mathématiques, mais les auteurs indiquent aussi la nécessité d'enrichir les critères permettant de mesurer la pertinence du cours proposé vis à vis des principes de Klein.

1.3.4 L'approche par la TAD

Une interprétation du plan B de Klein dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (voir chapitre 2) a été menée par Kondratieva et Winsløw (2017, 2018). Ce plan B est appliqué à la transition de type II introduite par (Winsløw, 2008), ce qui se situe en amont de la deuxième discontinuité de Klein. La recherche part du constat de la séparation dans les curriculums de « calculus » (qui traite par exemple l'étude

des fonctions à une ou plusieurs variable, le calcul intégral) et l'analyse (qui traite des questions plus théoriques, comme l'analyse réelle, l'analyse de Fourier). La transition entre le calculus et l'analyse représente un défi important pour les étudiants (Winsløw & Grønbæk, 2014).

Après avoir introduit la notion de *praxéologie* comme l'union de deux blocs $[\Pi_i, \Lambda_i]$ (le bloc Π_i étant le bloc de la praxis qui contient le type de tâche et la technique, alors que Λ_i désigne les éléments technologiques et théoriques) (voir chapitre 2), Kondratieva et Winsløw (2017) modélisent les deux plans de Klein comme suit :

- Le plan A consiste à mettre en lumière les liens entre Π_i et Λ_i dans les praxéologies de calculus et d'analyse ;
- Le plan B consiste à développer des relations entre des blocs de praxéologies différentes :
 - Soit en reliant Π_i avec Π_j , ou bien entre Λ_i et Λ_j ;
 - Soit en mettant en relation des blocs de praxis et de logos qui sont a priori sans rapport : Π_i avec Λ_j .

Les résultats de l'étude menée par Kondratieva et Winsløw (2017) montre comment la construction de blocs de la praxis permettent la réalisation du plan A de Klein, mais également comment établir des relations de Π_i avec Λ_j afin de réaliser le plan B. Deux exemples d'une telle réalisation sont détaillés par Kondratieva et Winsløw (2018) dans le contexte des angles puis dans celui des séries de Fourier. Nous détaillons l'exemple avec les séries de Fourier afin d'expliciter la méthodologie des auteurs : la première partie de l'activité proposée aux étudiants a pour but de déterminer la valeur exacte de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Plusieurs tâches (T_1, T_2, T_3, T_4) sont alors proposées qui correspondent à des praxis de calculus ($\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$). La deuxième partie de l'activité revient à prouver le théorème de Dirichlet³ dans le cas particulier de la fonction $f : x \mapsto x^2$. La technique à mettre en oeuvre est identique à celle de la première partie. Ainsi, les étudiants finissent par se rendre compte que la réalisation de la preuve du théorème de Dirichlet, qui est un élément du logos d'une praxéologie Λ_{DT} (l'indice fait référence à « Dirichlet Theorem ») combine des éléments de praxis de calculus ($\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$).

Les situations expérimentées se sont appuyées sur une étude des blocs théoriques des praxéologies d'analyse.

Kondratieva et Winsløw (2018, p. 18) insistent sur la nécessité de mener de manière approfondie l'analyse des blocs du logos :

To construct such situations clearly necessitates a careful analysis of (central) theory blocks of more advanced courses, and of resources found in

3. Si f est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Fourier associée à f converge vers $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

praxis blocks of previous courses; small scale trials, such as the ones reported here, can clearly be helpful to support and correct the details of such constructions.

Winsløw (2020) a introduit une modélisation de la deuxième discontinuité de Klein en utilisant les outils de la théorie anthropologique du didactique (voir chapitre 2).

Comme l'a relevé (Gueudet et al., 2016), le problème de la double discontinuité possède trois dimensions :

- Le contexte institutionnel (université / secondaire)
- Le rôle du sujet au sein de l'institution (étudiant à l'université et élève à l'école, puis enseignant de mathématique en secondaire)
- La différence de contenu mathématiques

L'analyse de la deuxième discontinuité de Klein correspond alors à une analyse de pratiques humaines et des institutions : le cadre de la théorie anthropologique du didactique est ainsi pertinent pour l'étude. La notation $R_I(x, o)$, introduite par (Chevallard, 1990), indique le rapport d'une position x (au sein d'une institution I) à un objet de savoir o et est décrit avec l'outil des praxéologies. Cette notation permet de représenter, de manière synthétique, les trois dimensions de la double discontinuité de Klein, comme les passages (indiqués par des flèches) :

$$R_{HS}(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \longrightarrow R_{HS}(t, o)$$

où o désigne un objet de savoir qui vit dans l'institution scolaire (High-School) et qui est rencontré par les élèves (s) ou par les enseignants (t) et ω désigne un objet travaillé à l'université par les étudiants (σ).

Mais dans le cadre de la formation des enseignants à l'université, la position d'étudiant, σ devient une position d'élève-professeur, ou d'étudiant en formation d'enseignant, que Winsløw (2020) note σ_t . De plus, l'auteur indique que la position t d'enseignant requiert une relation à o mais aussi la « tâche » de l'enseigner selon la pratique scolaire. Ainsi, un modélisation plus précise de la deuxième discontinuité est donc

$$R_{HS}(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \longrightarrow R_{HS}(t, \Pi(o))$$

avec $\Pi(o)$ qui désigne donc la praxis relative à la tâche « enseigner o selon la pratique scolaire ».

Mais il revient à la charge des universités de rendre explicite les liens entre ω (à l'université) et o (au secondaire) : le texte de Klein résulte de ses propres conférences aux futurs enseignants, donc en tant que professeur à l'université. Ainsi, lisser la

deuxième discontinuité peut consister à développer une nouvelle relation $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$, de sorte que le cursus de formation des enseignants peut se modéliser par :

$$R_{HS}(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \longrightarrow R_U(\sigma_t, o \cup \omega) \longrightarrow R_{HS}(t, \Pi(o)).$$

Ainsi, en suivant les principes de Klein, la responsabilité de l'université pour préparer $R_{HS}(t, \Pi(o))$ est de développer $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$ en se basant sur o , et en liant o au point de vue avancée de ω (Winsløw, 2020, p. 15). Et le cadre institutionnel pour ce type de développement est celui des cours de type *capstone*.

Winsløw et Grønbaek (2014) ont mené une enquête sur le travail d'étudiants qui suivent un cours de ce type à l'université de Copenhague sur le thème de l'analyse. L'enquête est basée sur une analyse praxéologique. L'étude a mis en évidence un certain nombre de défis et d'obstacles pour relier les praxéologies mathématiques de l'université et du secondaire.

At the same time, and in a sense before that, we must also face – and further investigate – a number of shortcomings in some university students' relation to mathematical practices which are or ought to be central also in their previous studies, such as the capacity to solve equations correctly (challenge 1), to make use of calculus techniques in non-standard problems (challenge 2), to make use of instrumented techniques to investigate concrete problems (challenge 3), to device simple but correct mathematical arguments (challenge 4), and to search and study mathematical literature in an autonomous way, for instance to identify alternative proofs under boundary conditions for the machinery to be deployed (challenge 5). In fact, all of these capacities should be established in analysis and algebra courses before “visits” to advanced topics more distant to high school calculus.

Par ailleurs, les auteurs insistent sur l'importance de développer les blocs théoriques des praxéologies développées au lycée.

As regards calculus praxeologies taught in high school, the increasing importance of instrumented techniques, as well as the informal nature of theoretical blocks, requires specific attention to the future high school teacher's preparation at university : they must be prepared to solve and construct tasks for his students which go beyond a sequence of unrelated which in the end amount to choosing relevant commands or buttons on a CAS device⁴.

Les auteurs évoquent enfin plus globalement les questions liées à l'analyse avec des recommandations sur ce que devrait connaître un futur enseignant :

4. Logiciel de calcul formel

He must, in particular, know a number of alternative approaches to the “hard” topological problems that, in calculus, are based on the completeness of real numbers - such as the definition and existence of central objects like elementary classes of functions, limits, derivatives and integrals.

1.4 État des lieux de la recherche en didactique sur l’intégration et la mesure

1.4.1 Sur l’intégrale au lycée

De nombreux travaux ont émergés dans la communauté de la recherche en didactique sur l’intégrale. L’intégrale est enseignée en fin de cycle secondaire et au début de l’université. C’est donc un objet intéressant pour l’étude de la transition secondaire/université.

Orton (1983) a ainsi menée une recherche destinée à mesurer ce que comprennent les élèves en intégration. Cette étude concerne l’intégrale enseignée en fin d’enseignement secondaire et début d’université en Angleterre, au début des années 80. Pour l’étude, 110 étudiants de 16 à 22 ans ont été soumis à un questionnaire qui contient différentes tâches mathématiques, certaines étant très liées aux approches scolaires, d’autres étant plus inhabituelles pour les étudiants.

Les résultats indiquent que les élèves (à la transition lycée-université) qui ont réalisé les tests ont des difficultés à concevoir l’intégrale comme des limites de sommes finies. Orton (1983, p. 9) parle même de « real stumbling block ». Il l’explique par le fait que l’enseignement de la notion de limite est négligée, et par les difficultés rencontrées par les élèves en algèbre élémentaire (par exemple pour le calcul des sommes). Pour cette raison, Orton recommande de fournir un travail important sur les calculs de sommes, par exemple celles de la forme $\sum k^p$, en utilisant différents cadres.

La difficulté de conceptualiser la définition de l’intégrale avec les sommes de Riemann est à relier avec une difficulté, plus large, identifiée par Tall et Vinner (1981). Il s’agit de l’écart entre les définitions formelles que les étudiants peuvent citer, et les critères qu’il utilisent pour vérifier les propriétés relatives aux fonctions.

Le problème de la notion de limite a aussi été identifié par Artigue (2002). Lors d’un projet de recherche sur les processus différentiels et intégraux, les étudiants (même ceux considérés comme de bons étudiants) ne sont pas en mesure d’expliquer le paradoxe qui consiste à montrer que la volume d’une boule de rayon R est $4\pi R^2$ en approchant le volume par des cylindres (alors que la réponse attendue est $\frac{4}{3}\pi R^3$). Le processus de triangulation, formalisé par Lebesgue (1975) n’apparaît pas comme un outil de contrôle.

Dans sa thèse, Schneider-Gilot (1988) part du constat partagé que « le théorème fondamental de passe pas », sachant que le théorème fondamental est le fait que la dérivée de l’intégrale d’une fonction continue est la fonction elle même. Dans son travail, elle

identifie des difficultés d'apprentissage relatives à la notion d'aire et à celle de volume. Ces difficultés sont essentiellement liées au processus de définition de l'aire comme limite d'une somme. Par exemple, elle montre que certains élèves trouvent « choquant » le fait qu'une aire calculée au moyen d'un processus infini soit un nombre décimal limité.

Sur la preuve du théorème fondamental, les élèves ont à considérer l'aire $S(x+h) - S(x)$ où $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ et son comportement lorsque h tend vers 0. Schneider (1991) a montré que pour certains élèves, qui d'un point de vue strictement visuel voient la surface hachurée se réduire à un segment (voir Figure 1.5), la mesure de cette surface a pour limite la mesure de ce segment, soit $f(x)$. Schneider parle ainsi de *l'obstacle de l'hétérogénéité des grandeurs*.

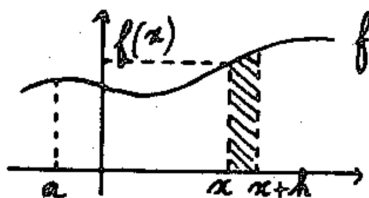


FIGURE 1.5 – Illustration de la preuve du théorème fondamental chez Maggy Schneider

Sur l'enseignement de l'intégrale au lycée en France, Daubelcour (1998) a publié un essai pédagogique pour l'enseignement du calcul d'aire et du calcul intégral en terminale Scientifique. Pour construire la séquence pédagogique, l'auteur reprend les idées développées par H. Lebesgue et défend « qu'il est utile et possible de respecter les fondements de la rationalité mathématiques lorsqu'on aborde par les aires le chapitre Intégrale en terminale S ».

Dans cet article, il propose d'étudier l'évolution historique du concept d'aire à travers le calcul d'aire du segment de parabole à la méthode d'Archimède, puis en utilisant les définitions posées par H. Lebesgue. Daubelcour fait ainsi référence à l'ouvrage « La mesure des Grandeurs » (Lebesgue, 1975), à visée didactique et s'adressant aux enseignants de la classe de mathématiques au début du 20ème siècle. Pour Daubelcour, le sens de la notion d'aire atteint un statut précis avec la définition de H. Lebesgue, et permet ensuite l'introduction de l'intégrale. Il signale aussi un autre objectif de la séquence :

Montrer comment, en terminale S, intervient l'intuition géométrique dans les démonstrations analytiques rigoureuses, et ainsi justifier la définition de l'intégrale comme une aire. Un exemple probant à cet égard est la démonstration de la proposition « la dérivée de l'aire sous la courbe est la fonction f elle-même ».

Précisons qu'au moment de la publication de l'article, le programme de terminale S était très différent du programme actuel. En 2002, puis en 2012, le fondement de l'intégrale sur la notion d'aire a été renforcé.

La thèse de Haddad (2012) précise les difficultés des étudiants à la transition Lycée/université sur le thème de l'intégrale (en fait à la fin du lycée), et propose une ingénierie didactique qui vise à rendre compte des liens entre aire, intégrale et primitive.

En effet, dans son étude, Haddad (2012, p. 203) identifie l'aire comme une « notion fondamentale dans l'enseignement de l'intégrale au lycée ». L'auteur a ainsi construit un questionnaire qui vise à « explorer les connaissances des élèves sur la notion d'aire et de ses propriétés élémentaires ». Parmi ces propriétés, l'auteur examine les connaissances sur les propriétés d'additivité de l'aire, mais également sur l'aire des points et des segments. A ce propos Haddad (2012, p. 208) note :

Il est à peine nécessaire d'insister sur le fait qu'il est crucial que les élèves sachent que les points et les lignes n'ont pas d'étendue mais aussi, et peut-être surtout, distinguer entre ensemble vide et ensemble d'aire nulle. Des connaissances inadéquates peuvent en effet constituer une source d'erreurs pour les élèves, voire se constituer en obstacle à la construction de nouvelles connaissances. Il est donc important de prévenir des erreurs possibles à propos de l'aire d'un point ou d'une ligne. D'ailleurs la nullité de l'aire d'une ligne est au cœur même de la propriété d'additivité.

Le test révèle « des ambiguïtés et des confusions qui risquent d'être à l'origine de difficultés potentielles au niveau de la notion d'intégrale » et que, « voir la notion d'aire comme intuitive, c'est se méprendre sur les difficultés inhérentes et permettre chez beaucoup d'élèves l'installation de certaines erreurs susceptibles de se constituer en obstacles à la construction de nouvelles connaissances. »

L'ingénierie proposée par l'auteur prévoit une formalisation avec la classe de la notion d'aire (avec la réserve « si tant est que l'on soit capable, à ce niveau, de préciser avec une quelconque rigueur en quoi consiste cette notion », p. 304), sous la forme d'un « cours dialogué », puis deux situations qui visent la démonstration de la dérivabilité de la fonction d'aire. Les résultats de la recherche indiquent que l'ingénierie proposée constitue un projet alternatif à celui que propose le manuel et est, pour l'auteur, préférable au projet du manuel de la classe.

Cette recherche donne ainsi une proposition d'enseignement de l'intégrale au lycée, qui a donné lieu à une expérimentation.

Citons également la thèse de Tran Luong (2006) qui propose une étude comparative de l'enseignement de l'intégrale entre la France et le Vietnam. Pour mener cette étude comparative qui est de fait institutionnelle, l'auteur mobilise des outils issus de la théorie anthropologique du didactique. Ainsi, il construit un modèle praxéologique de référence (fondé sur une analyse épistémologique), qui va permettre ensuite de mettre en évidence les écarts éventuels avec les organisations mathématiques à enseigner dans

les deux institutions scolaires, en France et au Vietnam. Ce modèle praxéologique de référence fait apparaître trois organisations mathématiques locales :

- OM_1 : Intégrabilité (avec les praxéologies liées aux types de tâches T_1 : *Etudier l'intégrabilité d'une fonction*, et T_2 : *Démontrer les propriétés reliant les opérations entre les fonctions à intégrer, les bornes d'intégration à la valeur de l'intégrale*)
- OM_2 : Antidérivation (avec les praxéologies liées aux types de tâches T_3 : *Calculer une primitive*, et T_4 : *Démontrer une égalité entre deux intégrales indéfinies*)
- OM_3 : Calcul d'aire ou d'autres grandeurs (avec les praxéologies liées aux types de tâches T_5 : *Calculer une intégrale*, T_6 : *Démontrer une égalité ou inégalité entre des intégrales définies*, T_7 : *Calculer approximativement une intégrale*, T_8 : *Calculer une grandeur autre que l'aire*).

L'auteur insiste sur l'absence de la raison d'être de la notion d'intégrale. L'étude menée montre que OM_1 est peu présente dans les organisations mathématiques en France et, au contraire, OM_3 est fortement présente. Enfin, la méthode des rectangles (voir des trapèzes) semble être la seule technique disponible pour la réalisation des tâches du type T_7 dans les institutions scolaires.

1.4.2 L'intégrale à l'université

Les études précédemment citées portent en fait sur l'intégrale enseignée au lycée.

Sur l'intégrale enseignée à l'université, Legrand, Grenier, et Richard (1986) ont construit une séquence d'enseignement de l'intégrale dans le cadre du débat scientifique, et qui se fonde sur des situations-problèmes. Ces situations problèmes, dont la situation fondamentale dite « situation du barreau », a pour but de dégager des idées directrices donnant une signification au concept d'intégrale et mettant en lumière la « procédure intégrale » (M. Rogalski, 2019). Cela conduit à la définition simple mais rigoureuse de l'intégrale de Riemann. La séquence permet effectivement aux étudiants de faire émerger les idées directrices de la procédure intégrale, mais comme le reconnaissent les auteurs, cela est redevable au débat scientifique.

Nous signalons aussi les travaux de Thompson et Silverman (2008) qui fondent l'idée du théorème fondamental de l'analyse sur la notion de fonction d'accumulation, puis ceux de Kouropatov et Dreyfus (2013, 2014) qui présentent une séquence complète sur l'intégrale basée sur cette notion de fonction d'accumulation.

González-Martín (2021) étudie l'enseignement de l'intégrale dans les cursus d'ingénieurs. L'institution sujet de l'étude diffère des institutions en jeu dans nos travaux.

Les travaux que nous avons cités portent spécifiquement sur l'intégrale de Riemann. Nous n'avons pas trouvé de travaux de recherche en didactique des mathématiques pre-

nant comme objet d'étude l'intégrale de Lebesgue. Par contre, nous avons trouvé différents articles issues de revues mathématiques qui abordent la question de l'enseignement de l'intégrale à l'université. Par exemple, Queffelec (2012) propose une réflexion sur le choix de la théorie de l'intégrale à enseigner à l'université à laquelle a répondu M. Rogalski (2013). Ces articles indiquent quelques tensions dans la communauté mathématiques sur le choix des théories de l'intégration enseigner. Nous étudierons particulièrement cette question dans le chapitre 4.

Nous avons vu que la notion de mesure des aires apparaît dans la littérature en didactique sur l'intégration comme une notion fondamentale. La théorie de la mesure, telle qu'elle est enseignée à l'université, ne fait pas à notre connaissance l'objet de recherches en didactique publiées. En revanche, la notion de mesure des aires en lien avec la notion de grandeur a été étudiée.

1.4.3 Sur la mesure

Comme nous l'avons vu dans la revue de travaux sur l'intégrale, la notion d'aire apparaît comme fondamentale dans l'étude de l'intégrale. Perrin-Glorian (1999) et Douady et Perrin-Glorian (1989) ont étudié le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple de l'aire. L'étude porte spécifiquement sur l'enseignement de la mesure au collège, mais elle donne des outils théorique qui pourront guider notre étude. Perrin-Glorian (1999, p. 3) rappelle :

Le plus souvent, dans l'enseignement on admet, à partir du choix d'une unité, l'existence d'une fonction qui, à une surface pas trop excentrique, associe sa mesure et on se contente de trouver des moyens de calculer ses valeurs à partir de certaines mesures de longueur. En fait il n'est pas nécessaire de supposer l'existence et on peut définir la fonction mesure en même temps que l'ensemble des surfaces sur lequel elle est définie.

Définir une mesure des aires, c'est définir une application μ définie sur une partie \mathcal{S} de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ à valeur dans \mathbb{R}^+ qui vérifie (Perrin-Glorian, 1999, p. 4) :

- μ est positive : $(\forall S \in \mathcal{S}), \mu(S) \geq 0$;
- μ est additive : $(\forall S_1 \in \mathcal{S})(\forall S_2 \in \mathcal{S}) [S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)]$
- μ est invariante par isométrie : pour toute isométrie f de \mathbb{R}^2 , on a $(\forall S \in \mathcal{S}, \mu(f(S)) = \mu(S)$

puis elle donne l'exposé de la mesure de l'aire par les quadrillage donnée par Lebesgue (1975). On retrouve ainsi la définition de l'aire vue précédemment dans l'article de Daubelcour (1998). Admettre l'exposé de Lebesgue ou utiliser une définition axiomatique des aires

permet ensuite la mise en oeuvre de démonstrations qui utilisent les aires (par exemple pour le théorème de Pythagore au collège, ou le théorème de Thalès).

Par ailleurs, elle expose des difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution de problèmes qui mobilisent la notion d'aire :

Comme nous l'avons analysé dans la partie théorique et comme il ressort de l'inventaire des situations concernant la mesure des aires, les élèves peuvent disposer de procédures relatives au cadre numérique ou au cadre géométrique, la difficulté réside dans les interrelations entre les deux cadres. Dans la recherche que nous avons menée avec Douady et Perrin-Glorian (1989), nous avons identifié deux conceptions de l'aire, l'une est liée au cadre numérique —l'aire est un nombre qui se calcule—, l'autre est liée au cadre géométrique —c'est un invariant d'une famille de surfaces. Les difficultés des élèves peuvent être analysées à partir de la difficulté à articuler ces deux conceptions.

Il semble donc nécessaire, pour que les enseignants soient à terme en mesure de proposer des situations pertinentes dans les classes, y compris au collège, qu'ils soient capable de maîtriser les interrelations entre le cadre géométrique et le cadre numérique, et distinguer ainsi ce qui concerne les raisonnements sur les grandeurs de celles sur les mesures. Nous verrons si les étudiants rencontrent des situations qui favorisent ces relations entre les deux cadres.

Enfin, elle aborde les problèmes d'encadrements et d'approximations :

Sur le plan théorique cette question est importante puisque c'est ce qui mènera à l'intégrale de Riemann. C'est aussi un exemple qui donne du sens à la notion de limite, par exemple pour calculer l'aire du disque ou du segment de parabole en classe de première.

1.5 Conclusion

Même s'il semble reconnu par l'institution chargée de leur formation que les enseignants de mathématiques du premier et du second degré ont besoin de pratiquer des mathématiques avancées pour enseigner, cela ne semble pas suffisant pour améliorer les pratiques enseignantes et permettre de meilleurs résultats des élèves dans les classes (N. H. Wasserman, 2018).

Différentes recherches ont mis en lumière la distance entre les notions mathématiques enseignées à l'université et celles qui le sont dans le secondaire (Kuzniak, 2007 ; Cirade, 2006 ; Zazkis & Leikin, 2010).

Les travaux de Ball et al. (2008), qui prolongent les travaux de Shulman (1986), ont apporté une classification des différentes dimensions des connaissances de enseignants.

Les outils de la TAD ont permis de construire un modèle théorique des connaissances des enseignants de mathématiques à travers des tâches didactiques qui se réfèrent à des organisations mathématiques.

Nous avons relevé dans les travaux la difficile quête qui consiste à décrire des mathématiques pour l'enseignement et leurs liens avec les mathématiques plus avancées. La classification du savoir mathématique pour enseigner de Ball et al. (2008) présente un cadre de référence pour l'étude des connaissances de l'enseignant à travers ses multiples dimensions. L'approche par la TAD a permis à Durand-Guerrier et al. (2010) de lier connaissances pédagogiques et mathématiques de l'enseignant, à travers la description de tâches didactiques, liées aux connaissances mathématiques qui constituent les objectifs d'apprentissage.

Cette question du transfert des connaissances mathématiques avancées en des connaissances utiles pour l'enseignement est en fait un problème de transition. La synthèse des travaux menés au sein du réseau INDRUM (Hochmuth et al., 2021) a permis de distinguer différents types de transitions dans le parcours en mathématiques des étudiants de l'université : celle de type I à l'arrivée à l'université (Gueudet, 2008 ; Gueudet et al., 2016), puis celle de type II tout au long du parcours au sein de l'université (Winsløw, 2008), et enfin celle de type III entre l'université et le milieu professionnel, lieu d'exercice d'un métier.

La transition de type III, dans le cas particulier du métier d'enseignant, a été qualifiée par Felix Klein de « seconde discontinuité », par rapport à la transition entre le lycée et l'université, qui fait l'objet de nombreux travaux de recherches en didactique des mathématiques. La volonté d'atténuer la seconde discontinuité apparaît comme une question de formation initiale des enseignants, qui nécessite d'approfondir les connaissances relatives au contenu mathématique et les connaissances pédagogiques, en relation avec les mathématiques scolaires (Gueudet et al., 2016). Nous avons identifié différentes approches de la deuxième discontinuité de Klein (Artigue, 2008 ; Biza & Nardi, 2016 ; Hanke & Schäfer, 2018 ; Stender & Stuhlmann, 2018 ; Shamash et al., 2018 ; N. Wasserman et al., 2022).

La modélisation de la deuxième discontinuité de Klein avec l'outil des praxéologies proposée par Winsløw (2020) permet une description fine des liens entre mathématiques universitaires et mathématiques scolaire. Cela offre une motivation pour le choix de notre outillage théorique. En particulier, Kondratieva et Winsløw (2018) nous permettent de voir ces outils en fonctionnement. En particulier, l'outillage par les praxéologies a permis une implémentation du plan B de Klein, où le travail d'ingénierie se fonde sur les descriptions praxéologiques des connaissances mathématiques. En revanche, il semble que le lien avec les mathématiques du secondaire soient encore à renforcer pour mettre en oeuvre les idées de Klein.

L'outil des praxéologies a également permis à Tran Luong (2006) de comparer l'enseignement de l'intégrale en France et au Vietnam par la confrontation de plusieurs

modèles praxéologiques de référence : ceci confirme la pertinence de la mobilisation des outils issus de la TAD, ici des modèles praxéologiques de référence. Les différentes études en didactique sur le concept d'intégrale ont permis d'identifier certaines difficultés des étudiants dans l'apprentissage du concept : la définition de l'intégrale comme une limite de somme de Riemann est un obstacle (Orton, 1983), que l'on peut expliquer à la fois par les difficultés en algèbre élémentaire et la difficulté plus large du formalisme (Tall & Vinner, 1981 ; Artigue, 2002 ; Hausberger, 2018).

La notion d'aire apparaît aussi comme centrale dans le processus d'apprentissage du concept d'intégrale, notamment au niveau du secondaire (Haddad, 2012) et les difficultés mises en lumière par Schneider-Gilot (1988) ; Schneider (1991) ; Artigue (2008) apparaissent comme des obstacles à la compréhension du lien entre intégrale et primitive. La proposition d'une séquence d'enseignement de l'intégrale proposée par Daubelcour (1998) renforce les liens entre aires et primitives, et se fonde sur l'axiomatique des aires proposée par Lebesgue (1975) et reprise par Perrin-Glorian (1999) ; Douady et Perrin-Glorian (1989) dans le cadre de l'enseignement de la notion d'aire.

Enfin, l'analyse épistémologique des notions en jeu apparaît aussi comme centrale dans les différents travaux de recherches en didactique portant sur l'intégrale. La notion de mesure, celle d'intégrale de Riemann, d'intégrale de Lebesgue, de primitive sont des notions en jeu dans notre étude. Un chapitre entier de ce manuscrit sera dédié à l'épistémologie de ces notions.

CHAPITRE 2

Cadre théorique, questions de recherche et méthodologie

Dans cette section, nous explicitons les outils et cadres théoriques qui participent à la construction de la méthodologie spécifique à notre étude, et à fournir des outils d'analyse des données expérimentales.

Notre étude s'inscrit dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), développée par Yves Chevallard et ses collaborateurs (Chevallard & Bosch, 2020). Dans la revue de travaux, nous avons mis en lumière une modélisation du problème de la double discontinuité de Klein à l'aide de la notion de relation aux objets de savoirs (Winslow, 2014 ; Winsløw, 2020). Cette modélisation, qui fait intervenir un objet *o* de savoir (qui sera pour nous l'intégrale) nécessite de cerner ce que recouvrent les savoirs auxquels un étudiant a réellement accès, et le rôle de l'institution apparaît comme centrale. Ainsi, les notions de transposition didactique et d'écologie des savoirs nous semble pertinentes.

Puis, l'outil des praxéologies et des organisations mathématiques nous offre un moyen de modéliser le savoir enseigné dans une institution donnée et donc le produit final de la transposition didactique.

Notre étude expérimentale vise l'implémentation du plan de Klein pour le cas de l'intégrale. L'outil des praxéologies didactiques en TAD va être la clef du travail d'ingénierie destiné à mettre en relation les savoirs du lycée et de l'université. Enfin, les outils du paradigme du questionnement du monde en TAD vont permettre une analyse fine du travail des étudiants, en particulier pour étudier le développement de nouvelles praxéologies.

2.1 Transposition didactique

La notion de *transposition didactique*, introduite par Verret (1975) puis précisée par Chevallard (1991) se fonde sur la distinction entre le savoir *savant* (celui qui se développe dans la science, dans les sphères savantes) et le savoir *enseigné* (celui qui se développe dans les systèmes d'enseignement).

D'une part, le savoir enseigné doit être vu par les « savants » eux-mêmes, comme *suffisamment proche du savoir savant*, afin de ne pas encourir le désaveu des mathématiciens, qui minerait la légitimité du projet social, socialement accepté et soutenu de son enseignement. D'autre part, et dans le même temps, le savoir enseigné doit apparaître comme *suffisamment éloigné du savoir des parents*. Là encore, un écart inadéquat conduit à mettre en cause la légitimité du projet d'enseignement. (Chevallard, 1991, p. 26)

Trois institutions interviennent dans le processus de transposition didactique : l'institution savante des producteurs et des utilisateurs de connaissances (les équipes ou communautés de recherche) ; l'institution scolaire à l'intérieur de laquelle est produit le savoir enseigné ; et entre les deux se trouve

CHAPITRE 2. CADRE THÉORIQUE, QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

une instance essentielle au fonctionnement didactique, sorte de coulisses du système d'enseignement, et véritable sas par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétale. (Chevallard, 1991, p. 24)

Cette instance, que Chevallard appelle la *noosphère*, participe à la sélection des objets de savoir savant qui deviendront des objets de savoir enseigné et joue le rôle de « tampon » entre les mathématiciens et les systèmes d'enseignement. La noosphère est ainsi un acteur du processus de transposition didactique.

Le processus de transposition didactique commence donc par la sélection et l'élaboration des *savoirs à enseigner* à partir des savoirs savants, c'est-à-dire l'organisation des connaissances telles qu'elles sont produites et diffusées par les communautés de recherche (au sens large). Cette phase, qui consiste donc à passer du savoir savant au savoir à enseigner, est désignée par la *transposition didactique externe*. Le processus de transposition didactique externe est mené par la noosphère.

Dans l'enseignement secondaire, l'inspection générale est responsable de l'élaboration des programmes officiels. Ces programmes sont alors les produits du processus de transposition externe.

Dans le cas de l'université, les trois institutions (savante, scolaire, noosphère) se chevauchent considérablement. Cependant, même si elles partagent un grand nombre de leurs agents, nous pouvons différencier les positions occupées par leurs sujets. Un chercheur en mathématiques peut agir en tant que sujet de l'institution savante lorsqu'il effectue des recherches et agit en tant qu'expert de la discipline. Il peut également agir en tant que sujet de la noosphère lorsqu'il prend des décisions concernant le programme d'études d'un diplôme donné et le syllabus de ses composantes. Enfin, il est le sujet de l'institution scolaire lorsqu'il enseigne une unité d'enseignement (UE) donnée. A l'université, le produit de la transposition didactique externe est le syllabus des différents modules ou unités d'enseignement d'un curriculum (Bosch, Hausberger, Hochmuth, Kondratieva, & Winsløw, 2021).

Bosch et al. (2021) ont étudié la transposition didactique externe à l'université, en distinguant ce qui concerne le produit de la transposition didactique externe (les aspects *statiques*), et ce qui concerne le processus lui-même (les aspects *dynamiques*). Pour étudier les aspects statiques, ils ont décrit, à partir des curriculums, les caractéristiques générales des programmes (durée des UE, flexibilité des parcours), les thèmes étudiés, la présence de modules qui ne sont pas dépendants d'un savoir particulier (par exemple les UE de méthodologie ou les UE d'utilisation des outils numériques), les modules optionnels d'approfondissement, puis les syllabus des UE.

Sur les aspects dynamiques (à la fois le processus d'élaboration des programmes, mais également le suivi et les processus de révision), deux types de conditions et contraintes s'exercent : le premier se situe au niveau interne (donc de la discipline même), et le deuxième au niveau externe (c'est à dire à un niveau plus élevé dans

l'échelle de codetermination didactique¹).

Nous adapterons la méthodologie d'analyse du processus de transposition didactique externe développé par Bosch et al. (2021), mais dans la mesure où notre étude porte sur un objet de savoir particulier, nous mobiliserons d'autres outils, issus de l'étude écologique (voir section suivante).

La deuxième phase est celle qui consiste à transformer le savoir à enseigner en savoir *enseigné*, c'est ce que Chevallard (1991, p. 30-31) nomme *transposition didactique interne*. Ce processus, à la charge des institutions scolaires (les enseignants), a pour produit le savoir apprêté c'est à dire le texte du savoir que le professeur a préparé pour donner son cours. Nous pouvons avoir accès à ce savoir apprêté à travers l'étude des photocopiés de cours et des corrigés d'exercices. A l'instar de Candy (2020, p. 7) nous faisons l'hypothèse que le savoir enseigné est proche de ce savoir apprêté dans la mesure où les documents de cours sont rédigés à destination des étudiants.

Ainsi, nous résumons ce processus de transposition didactique par la figure 2.1.

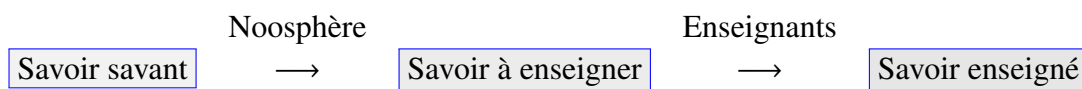


FIGURE 2.1 – Schéma de la transposition didactique

Avec la notion de transposition didactique, ce sont donc les savoirs mathématiques, qu'ils soient savants, à enseigner ou enseignés, qui se trouvent à l'origine de tout questionnement didactique.

Chevallard (1991, p. 126) l'indique : « l'analyse de la transposition didactique commence nécessairement par l'analyse du savoir savant ». Ainsi, nous commencerons l'étude de la transposition didactique de l'intégrale par l'étude de la production du concept mathématique d'intégrale.

2.2 Écologie des savoirs

L'étude de la transposition didactique de l'intégrale à l'université nous amène à nous interroger sur la problématique écologique de l'intégrale à l'université.

Artaud (1998, p. 101) présente la problématique écologique par les questions :

Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ?

1. voir (Chevallard, 2002)

Ainsi, des conditions et des contraintes de nature écologique pèsent sur le processus de transposition didactique, en particulier sur le processus de transposition didactique externe :

Toute introduction d'un objet de savoir mathématique dans un écosystème didactique n'est pas automatiquement viable, et l'existence de cet objet dans la noosphère ne garantit pas qu'il puisse être transplanté dans le système d'enseignement. (Artaud, 1998, p. 122)

Pour qu'un objet de savoir (par exemple pour nous, l'intégrale de Cauchy, ou l'intégrale de Riemann, ou encore l'intégrale de Lebesgue) soit viable, il est nécessaire de faire vivre autour de cet objet un complexe d'objets avec lesquels il rentre en relation : les différents lieux où vit l'objet d'étude sont appelés les *habitats*. Dans chaque habitat, la fonction de l'objet d'étude est la *niche écologique*.

Artaud (1998, p. 102) utilise le parallèle avec l'écologie biologique pour caractériser niches et habitats :

Il s'agit donc de considérer, dans l'étude d'un être vivant - plante, animal, etc. - non seulement les autres êtres vivants mais encore l'environnement physico-chimique dans lequel il vit. Et même de considérer que c'est cet environnement qui est le premier facteur explicatif du comportement, du devenir de cet être vivant.

Ainsi, nous serons amenés à analyser les syllabus des universités en précisant les différents habitats des théories de l'intégration ainsi que les niches écologiques (c'est à dire à quoi servent-elles ? Quels problèmes permettent-elles de résoudre ? Quels nouveaux problèmes mettent-elles en lumière ?) de ces théories.

Enfin, nous mettrons en lumière les outils qui permettent l'existence des différentes théories de l'intégration, c'est à dire les *besoins trophiques*. En utilisant de nouveau le parallèle avec l'écologie biologique, Artaud (1998, p. 113) décrit :

La notion de besoin trophique est liée en écologie à celle de chaîne trophique, soit de chaîne alimentaire du type A se nourrit de B qui se nourrit de C... Les besoins trophiques sont donc les besoins nutritionnels d'un organisme vivant, ce qu'il a besoin de manger pour vivre. En ce qui concerne les objets mathématiques, il s'agit semblablement des objets dont un objet mathématique donné a besoin pour vivre dans l'écosystème considéré.

2.3 Rapports personnels, institutions et rapports institutionnels

La TAD met en avant la relativité des objets de savoirs o aux institutions I qui les développent, les normalisent, les transmettent, ainsi que l'assujettissement des personnes

x à ces mêmes institutions (Chevallard, 1989; Chevallard & Bosch, 2020). Ainsi, la TAD ne va pas s'intéresser tant aux personnes qu'aux positions génériques p qu'elles occupent, notamment celle d'enseignant t ou d'étudiant s , du fait de cet assujettissement. Il s'agit ainsi d'étudier les relations institutionnelles $R_I(p, o)$ des individus de l'institution I , en position p , à l'objet de savoirs o .

Dans l'étude de la transposition didactique, nous serons amenés à interroger les rapports personnels et institutionnels des enseignants au concept d'intégrale. En effet, les enseignants-chercheurs à l'université entretiennent avec le concept d'intégrale plusieurs rapports. En tant que chercheur, ils peuvent avoir un rapport avec l'intégrale lorsque ce concept est mobilisé dans le cadre de leur recherche. Ou bien, s'ils font partie de commissions chargées de produire les curriculums à l'université, alors ils auront un rapport au concept d'intégrale en tant que membres de la noosphère. En tant que chargé de cours, ils auront un rapport à l'intégrale en tant qu'enseignants. Une partie de notre étude consistera à analyser l'impact de ces rapports dans le processus de transposition didactique.

Par ailleurs, le schéma repris de Winslow (2014) donné en écriture symbolique dans la section 1 sous la forme d'un diagramme de flèches, rappelé dans la figure (2.1), condense les différentes institutions (le lycée L et l'université U), positions institutionnelles (élève s au lycée, étudiant σ à l'université, et enseignant t au lycée) et objets de savoir (l'intégrale du lycée o , et l'intégrale de l'université ω) concernés par le problème de la double discontinuité de Klein. La première flèche désigne la première discontinuité, du lycée à l'université, alors que la flèche encadrée $\boxed{\longrightarrow}$ représente la deuxième discontinuité.

$$R_L(s, o) \longrightarrow R_U(\sigma, \omega) \boxed{\longrightarrow} R_L(t, o) \quad (2.1)$$

Le rapport institutionnel est donc un outil pour l'étude de cette double discontinuité. Pour Winslow (2020), une réponse au problème de Klein est d'instaurer un nouveau rapport dans l'institution université, qu'il note $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$. La notation σ_t permet d'indiquer que l'étudiant occupe une position nouvelle au sein de l'université dès qu'il devient élève-professeur dans une formation d'enseignant.

Et pour décrire les relations entre p et o au sein de l'institution I (c'est à dire $R_I(p, o)$) nous utiliserons l'outil des praxéologies décrit ci-après.

2.4 Praxéologies et modèles praxéologiques de référence

La *praxéologie*, en TAD, est l'outil clef pour décrire et analyser le rapport $R_I(p, o)$. C'est aussi un des fondements de la TAD, qui, comme son nom l'indique, place l'analyse des activités humaines au coeur de son propos. Ceci conduit à la notion de praxéologie (Chevallard, 1998, 2017; Chevallard & Bosch, 2020). La TAD postule que toute activité humaine peut se décomposer en tâches t_1, t_2, t_3, \dots , de certains types T_1, T_2, T_3, \dots

CHAPITRE 2. CADRE THÉORIQUE, QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

En mathématiques, la tâche « résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x + 3 = 0$ » est une tâche singulière, ou une instanciation, du type de tâche « résoudre dans \mathbb{R} une équation du premier degré ». Le type de tâche est la première composante d'une praxéologie. Chevallard (1998, p. 2) indique :

Tâche, types de tâches, ne sont pas des données de la nature : ce sont des « artefacts », des « oeuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique.

Un type de tâche T étant donné, une praxéologie relative à T précise une manière d'accomplir la tâche T : la *technique*, notée τ . La technique τ ne permet pas forcément d'accomplir toutes les tâches du type T : on parle alors de *portée de la technique* en considérant l'ensemble $P(\tau)$ des tâches du type T qui peuvent être accomplies par τ .

La technique τ est la deuxième composante d'une praxéologie, et le bloc $[T, \tau]$ est appelé le bloc *praxis*.

La troisième composante d'une praxéologie est la *technologie*, notée θ . C'est un discours qui a pour objet de justifier rationnellement la technique τ . La technologie a aussi pour fonction d'expliquer et de rendre intelligible la technique.

Enfin, la dernière composante d'une praxéologie est la *théorie*, notée Θ , qui offre à la praxis son fondement ultime en jouant vis à vis de θ le rôle de la technologie vis à vis de la technique.

Le bloc $[\theta, \Theta]$ forme le bloc du *logos* de la praxéologie P relative à T .

On notera alors

$$P = [\Pi, \Lambda] = [T, \tau, \theta, \Theta].$$

La TAD postule que le rapport $R_I(p, o)$ émerge des praxéologies où l'objet o intervient, aux différents niveaux possibles de la praxéologie.

$R_I(x, o)$ sera donc décrit par un ensemble de praxéologies où intervient o (qui sera, pour ce qui nous concerne, soit l'intégrale du lycée soit l'une des théories de l'intégration enseignée à l'université), sous la forme d'un modèle structuré que l'on appelle *modèle praxéologique de référence* (Florensa, Bosch, & Gascon, 2015). Ces modèles sont des reconstructions du savoir enseigné, obtenus en considérant différents niveaux de la transposition didactique (via l'épistémologie historique, les programmes officiels, les études de manuels et documents de cours). Nous décrirons les MPR en mettant en évidence l'unification des praxéologies ponctuelles autour de technologies communes, pour constituer des organisations mathématiques locales (OML), elles-mêmes unifiées par le niveau théorique au sein d'organisations régionales (OMR).

Pour préciser avec le formalisme décrit plus haut, une praxéologie $[T, \tau, \theta, \Theta]$ est appelé une organisation mathématique *ponctuelle* (OMP), alors que l'union des praxéologies $[T_1, \tau_1, \theta, \Theta], [T_2, \tau_2, \theta, \Theta], \dots, [T_n, \tau_n, \theta, \Theta]$ constitue une organisation mathématique locale (OML) autour de la technologie θ . Enfin, l'union d'OML autour d'une même théorie Θ forme une organisation mathématique régionale (OMR).

Les OMR correspondent en général aux secteurs et les OML aux thèmes qui structurent la présentation du cours. La mise en regard du cours et des exercices permet ainsi de construire des modèles qui rendent compte de l'écologie des objets de savoir au sein des institutions.

En fait, le MPR peut revêtir en TAD différentes fonctions dont les deux principales : soit décrire les savoirs tels qu'ils sont enseignés dans une institution donnée, on parle alors de *modèle praxéologique dominant* ; soit servir de point d'ancrage à une expérimentation, ce qui peut conduire le chercheur à enrichir, transformer son modèle praxéologique institutionnel en fonction des enjeux didactiques posés, on parle alors de modèle praxéologique de *référence*, au sens où il constitue la référence du chercheur dans sa recherche. Déclarer explicitement cette référence est un geste de la recherche en didactique.

2.5 Ostensifs

L'ensemble des praxéologies connues d'une personne constitue son *équipement praxéologique*. En fait, un apprenant peut s'avérer incapable de mobiliser une praxéologie dans une situation donnée, bien que cette praxéologie fasse partie de son équipement.

Pour analyser ces phénomènes, Bosch et Chevallard (1999) ont introduit la notion d'*ostensif* pour désigner les signes (sonores, visuels, matériels) auxquels nos sens nous donnent accès, engagés dans l'activité mathématique. Ces ostensifs renvoient à d'autres signes ou à des concepts (des non-ostensifs), ce que Bosch et Chevallard appellent la *valence sémiotique* d'un ostensif.

Les ostensifs portent donc le point de vue sémiotique en TAD. En particulier, un ostensif peut évoquer des praxéologies, donc ouvrir à un potentiel d'actions du sujet, ce que Bosch et Chevallard appellent la *valence instrumentale* de l'ostensif. L'absence de certains ostensifs clefs, comme le symbole P activant le secteur des probabilités lors du calcul d'une intégrale Gaussienne (Hausberger, Derouet, Hochmuth, & Planchon, 2021), est un facteur explicatif de non-activation de praxéologies attendues.

Un geste didactique de l'enseignant consiste alors à pointer l'ostensif manquant.

Un autre facteur est la perte d'instrumentalité liée à une praxis ou un logos déficient, si la technique est mal assimilée ou la technologie insuffisante pour permettre l'application de la technique dans un contexte en partie inhabituel (Hausberger et al., 2021).

2.6 Organisations didactiques et moments de l'étude

Lorsque les objectifs d'apprentissage sont élucidés à l'aide de la notion clef de praxéologie, se pose la question de la façon d'enseigner ces enjeux didactiques, c'est

à dire de l'*organisation didactique* (Chevallard, 1999) associée. C'est à ce niveau qu'interviennent les *moments de l'étude*, comme autant d'épisodes qui ont pour fonction de permettre le développement d'une praxéologie donnée.

Selon le modèle de la TAD, un processus d'étude d'une praxéologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est articulé autour de six moments :

- Groupe I (Activités d'étude et de recherche, AER)
 - Moment de la première rencontre avec la praxéologie P et identification du type de tâche T
 - Moment de l'exploration de T de de l'émergence de la technique τ ;
 - Moment de la construction du bloc technologico-théorique $[\theta; \Theta]$;
- Groupe II (synthèse)
 - Moment de l'institutionnalisation
- Groupe III (exercices et problèmes)
 - Moment du travail de l'organisation mathématique (en particulier de la technique)
- Groupe IV (Contrôles)
 - Moment de l'évaluation

Le moment de la *première rencontre* avec la praxéologie correspond donc au moment où le type de tâches est identifié.

Celui de l'*exploration* du type de tâches et d'*émergence d'une technique* et donc en temps exploratoire pour réaliser la tâche.

Le moment *technologico-théorique* est celui où la validité de la technique est discutée en appui sur un ensemble de connaissances (dont une partie a été posée en amont et a déjà servi à identifier le type de tâches, de sorte qu'une relation dialectique s'instaure en général avec le moment qui précède), le moment de *travail de la technique* et où l'on tend à améliorer et routiniser la technique.

Le moment de *l'institutionnalisation*, consiste à mettre en lumière, parmi les éléments qui ont participé à l'organisation mathématique, ceux qui intègrent l'organisation visée. Il s'agit de bien préciser l'organisation mathématique élaborée, à travers les quatre composantes.

Le moment exploratoire et d'émergence de la technique est fortement hypostasié lorsque l'organisation pédagogique se fonde sur le cours magistral, lequel met en avant la théorie mathématique qui sera appliquée ensuite pendant les travaux dirigés. Ceci tend à rendre invisibles les raisons d'être des concepts mathématiques, puisque ces derniers n'émergent pas des besoins d'enrichissement des techniques lors de la résolution de

problèmes, mais sont présentés comme des outils pré-construits, des oeuvres montrées par l'enseignant, qui demeurent peu questionnées.

C'est pour y remédier et renforcer le questionnement que la TAD a introduit une nouvelle approche, que l'on appelle en TAD *paradigme du questionnement du monde*, en opposition au *paradigme monumentaliste* (Chevallard, 2011), dont il est question dans la section suivante.

2.7 Paradigme du questionnement du monde et ses outils

Le paradigme de la visite des œuvres repose sur le fait que les connaissances sélectionnées qui constituent le curriculum sont censées avoir été choisies en raison de leur utilité dans le futur des étudiants, mais l'utilité est rarement prouvée, ni même explicitée. Dans ce paradigme, l'objectif principal d'un processus d'étude est la rencontre avec des praxéologies sélectionnées, puis la capacité de les activer (Bosch, 2018), mais pas nécessairement avec les raisons d'être.

L'évolution historique du curriculum que j'ai décrite sous le nom de monumentalisation est contemporaine de l'effacement des raisons d'être, de l'oubli de l'utilité des oeuvres mathématiques enseignées. Ces oeuvres deviennent alors semblables à des monuments que l'on visite par contrainte, dont on ignore et dont on ignorera à quoi ils pouvaient bien servir autrefois, lorsqu'ils étaient « vivants », et à quoi ils pourraient bien servir aujourd'hui. (Chevallard, 2012, p. 4)

A l'inverse du paradigme de visite des oeuvres, le paradigme de *questionnement du monde* se fonde sur le fait que :

l'on s'instruit en étudiant des questions auxquelles on essaie par là d'apporter des réponses, rassemblant et étudiant pour cela des oeuvres idoines, mathématiques et autres, en fonction des besoins. (Chevallard, 2012)

Ce paradigme invite à concevoir le savoir comme réponse à une question. Le processus d'étude qui consiste à rencontrer des oeuvres d'un secteur du programme en cherchant à enquêter à partir d'une question (dite génératrice) est développé au sein d'un *Parcours d'Étude et de Recherche* (PER). L'étude de la question génératrice qui est une question assez large, peut conduire à rencontrer des sous-questions qui génèrent à leur tour autant d'*Activités d'Étude et de Recherche* (AER); les réponses aux questions génératrices des AER sont les organisations mathématiques correspondant à des thèmes du programme.

Bosch (2018) modélise l'activité où le point de départ de l'étude est une question jugée utile par un collectif d'apprenants X , à partir de laquelle il enquête pour lui apporter une réponse à laquelle il tiendra pour son utilité. Cette question Q va conduire le collectif X d'apprenants (un groupe d'étudiants), aidés par un groupe Y d'aides à l'étude (qui peut être réduit à un seul enseignant), en d'autres termes un système didactique que l'on note $S(X; Y; Q)$, à mener une enquête.

Dans l'idée qu'une écriture symbolique est à même de synthétiser le discours, en complément des descriptions fournies en langue naturelle, un tel processus d'étude se note par son *schéma Herbartien* :

$$S(X; Y; Q) \mapsto R^\heartsuit \quad (2.2)$$

Chevallard (2017, p. 47) indique le sens du symbole \heartsuit :

L'habitude a été prise de noter R^\heartsuit la réponse R produite par $S(X; Y; Q)$, pour signifier que cette réponse est chère au *coeur* de la classe $C(X; Y; P)$, non pas tant parce qu'elle l'aurait produite elle-même (ce qui n'est d'ailleurs pas toujours le cas) que parce que cette réponse satisfait certaines contraintes propres à l'usage que la classe veut faire d'elle.

L'enquête menée par le collectif d'étude X , aidé par Y , va conduire le système $S(X, Y, Q)$ à produire un *milieu* M d'où émergera in fine une réponse R^\heartsuit à la question Q . Le milieu M est constitué des différents outils pour l'enquête :

- des nouvelles questions dérivées de la question Q : Q_1, Q_2, \dots
- des réponses à ces questions dérivées notées $A_1^\diamond, A_2^\diamond, A_3^\diamond, \dots$. Les A_i^\diamond sont des réponses que le groupe d'étude X , sous la supervision de Y , a découvert dans les institutions qui les entourent, et le losange (\diamond) indique que la réponse à la question Q_i est labellisée, ou poinçonnée, par l'institution qui la présente comme la réponse « officielle à Q_i » (Bosch, 2018, p. 4040)
- Les oeuvres visitées pendant l'enquête pour donner du sens aux réponses A_i^\diamond , sont notées O_1, O_2, \dots
- Enfin, des données peuvent être recueillies au cours de l'enquête, on les note D_i .

Le schéma herbartien *semi-développé* rajoute l'indication de l'élaboration d'un milieu lors du processus de l'étude au schéma herbartien (2.2) :

$$[S(X; Y; Q) \mapsto M] \mapsto R^\heartsuit \quad (2.3)$$

Le fruit de la *mésogenèse* (la genèse du milieu) est donné par le schéma Herbartien *développé*, c'est-à-dire en ajoutant au schéma herbartien semi-développé (2.3) le détail

du milieu M en donnant les nouvelles questions qui apparaissent dans le milieu, les réponses apportées (estampillées ou non), les oeuvres visitées. On notera alors :

$$M = \{Q_1, Q_2, \dots, R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, O_1, O_2, \dots\} \quad (2.4)$$

Le schéma herbartien est à la fois un outil d'analyse permettant de décrire les processus d'étude (dans le cadre d'une analyse a posteriori), mais également pour questionner les choix d'organisation didactique en apportant les réponses aux questions (Bosch, 2018, p. 4042) :

- Quelle est la question Q_0 ? D'où vient-elle ? Qui la pose ? Pourquoi y répondre ? Quel type de réponse faut-il y apporter ? A qui s'adresse-t-elle ?
- Quelles sont les questions dérivées qui apparaissent au cours du processus ? Lesquelles n'apparaissent pas ? Qui les pose ? Comment sont-elles traitées ? Par qui ? Quels types de réponses sont recherchés ? Comment sont-elles intégrées dans le milieu M ?
- Quels sont les principaux éléments initiaux du milieu M ? Comment sont-ils utilisés ? Comment évoluent-ils ?
- Comment s'établit le partage des responsabilités entre enseignant(s) et élèves ? Qui fait quoi ?

Il est classique en TAD d'étudier la *chronogenèse*, c'est-à-dire la temporalité du processus d'étude, à travers le diagramme des questions et de leurs réponses (dans leurs rapports dialectiques), telles qu'elles apparaissent dans le milieu. Ce diagramme, appelé *question-gramme*, peut se représenter sous la forme d'un arbre (Bosch, 2018, p. 4040). Nous avons choisi de rajouter au question-gramme les oeuvres visitées qui apparaissent comme des éléments charnières dans le développement du questionnement. Un exemple d'un tel diagramme est alors donné dans la figure 2.2, où la question génératrice est Q_0 , les sous questions sont notées $Q_{0,i}$ et les réponses à ces questions $R_{0,i}$.

Le dernier axe d'analyse, la *topogenèse*, consiste à décrire le rôle des différents acteurs, c'est-à-dire l'ensemble des activités des personnes (dans leur position institutionnelle) réalisées en autonomie par rapport aux autres positions institutionnelles.

Lorsque l'ensemble Y se réduit essentiellement à l'enseignant, qui dirige le processus d'étude, l'étude du topos de l'enseignant peut consister à indiquer les gestes didactiques de ce dernier, qui ont notamment vocation à faciliter, voire débloquent le processus d'étude aux moments opportuns. Lors des phases de travail en autonomie autour d'une question génératrice de l'AER, le topos offert à un groupe d'étudiants X peut être décrit à travers le question-gramme et le milieu du schéma herbartien a priori engendrés par cette question, tandis que le topos investi par X est reflété par le question-gramme et

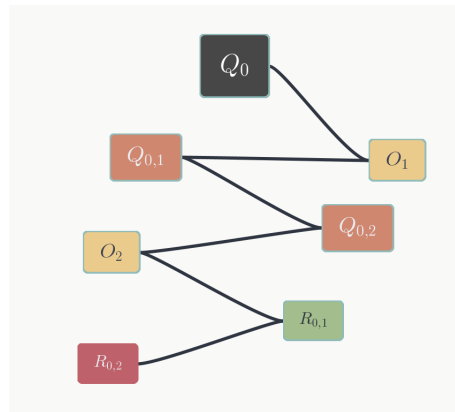


FIGURE 2.2 – Exemple d'un question-gramme

schéma herbartien a posteriori. Il est possible de décrire le topos individuel d'un étudiant x , dans une dialectique entre l'individuel et le collectif, mais nous n'aborderons pas ces aspects dans cette thèse.

2.8 Questions de recherches

Dans les sections précédentes, nous avons déjà listé des questions de recherche, que nous reprécisons ici, maintenant que les outils théoriques sont exposés.

L'objet d'étude, l'intégrale, est polysémique. Plusieurs théories de l'intégration sont manifestement étudiées à l'université en France. Avec le vocabulaire de la transposition didactique, la question de la caractérisation du savoir savant se pose, ce qui engendre l'étude de l'épistémologie du concept d'intégrale.

Nous chercherons alors à confronter notre étude épistémologique au fruit de la transposition didactique externe dans différentes universités françaises.

A travers une étude écologique, peut-on identifier des niches de la notion d'intégrale ? Quelles sont les réseaux trophiques auxquels elle appartient ? La théorie de Riemann est-elle systématiquement rencontrée par les étudiants en France, ou bien certaines universités ont-elles opéré d'autres choix ? L'intégrale est-elle essentiellement limitée aux fonctions continues (par morceaux), ou bien offre-t-elle une place à la problématisation de la question de l'intégrabilité ? La théorie de l'intégrale de Lebesgue est-elle systématiquement étudiée en L3, en lien avec la théorie générale de la mesure et l'apprentissage de la théorie des probabilités, ou bien observe-t-on en France d'autres choix écologiques et d'autres problématisations ?

Nous élargirons l'étude des syllabus en faisant un état des lieux des débats au sein de la communauté mathématique : quelles sont les raisons mises en avant par les mathématiciens, occupant une position de noosphérien, pour éclairer les choix opérés ? Ces

questions auxquelles nous apporterons des éléments de réponses se regroupent autour de notre premier groupe de questions de recherche, que l'on peut exprimer sous la forme synthétique suivante :

QR₁ : Comment expliquer, d'un point de vue épistémologique, la pluralité des théories de l'intégration enseignées à l'université ? Quels sont les différents choix de transposition didactique externe opérés par les universités françaises du concept d'intégrale ? Quelles sont les raisons de ces choix mises en avant par la noosphere ?

A partir de ce panorama de l'enseignement de l'intégrale en licence de mathématique en France, nous étudierons particulièrement le cas d'une université française : l'université de Montpellier.

En effet, les expérimentations que nous mènerons concerneront des étudiants de cette université, et plus spécifiquement les étudiants de première année de Master MEEF se destinant au métier d'enseignant de mathématiques. Ces derniers sont, en majorité, issus de la licence de l'université de Montpellier ou des classes préparatoires, ce qui motive un approfondissement de notre étude de la transposition didactique externe au cas de l'université de Montpellier : Comment les enseignants qui ont participé au travail des commissions expliquent-ils les choix de transposition didactique externe, relativement aux différents modules de licence qui traitent de l'intégrale, ainsi que leurs propres choix de transposition didactique interne lorsqu'ils sont chargés de ces enseignements ? Quelles sont les organisations mathématiques qui se développent dans les trois années du cursus universitaire de Licence en filière de mathématiques à Montpellier ? En particulier, trouve-t-on des tâches en lien avec la mesure des grandeurs qui ont motivé le développement de l'intégrale ? Plus généralement, les raisons d'être et les limites des différentes théories de l'intégration, identifiées lors de notre étude épistémologique, sont-elles mises en avant dans l'enseignement ? Comment ces problèmes et questionnements sont-ils traduits en types de tâches ? Quels liens peut-on identifier entre les organisations mathématiques relatives aux différentes théories de l'intégration enseignées ? Ces liens se situent-ils principalement au niveau des blocs de la praxis ou du logos, ou bien sur les deux niveaux ?

L'ensemble de ces questions sont constitutives de notre deuxième groupe de questions de recherche :

QR₂ : Quels sont les choix de transposition didactique externe et interne pour l'intégrale opérés à l'Université de Montpellier ? Quel(s) modèle(s) praxéologique(s) de référence sur l'intégration en licence de mathématiques à l'université de Montpellier proposer pour rendre compte de l'équipement praxéologique des étudiants et des liens entre les différentes théories de l'intégration (y compris celle enseignée dans le second degré) mis en avant par l'institution ?

Enfin, le troisième groupe de questions de recherche porte plus spécifiquement sur le problème de la seconde discontinuité de Klein. Le modèle de Winsløw de la double discontinuité de Klein met en exergue la nécessité de créer un nouveau rapport $R_U(\sigma_t, o \cup$

ω) favorisant le transfert des connaissances avancées, où les liens entre des praxéologies du lycée et de l'université sont décrits à travers les blocs du logos et de la praxis qui mobilisent ces connaissances. Comment décrire les liens entre connaissances mathématiques élémentaires et avancées, dans le cadre d'un processus d'étude? Peut-on caractériser le plan B de Klein avec l'outil des praxéologies? Comment implémenter le plan B de Klein pour l'intégrale, dans le cadre institutionnel du Master MEEF à l'université?

Dans notre étude, nous serons amenés à définir de nouvelles praxéologies : *les praxéologies de Klein*, destinées à générer le rapport $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$.

Comment développer ces nouvelles praxéologies? Quelle organisation didactique mettre en place, relativement à ces praxéologies? Dans le langage de la TAD, il s'agit d'adapter les moments de l'étude aux praxéologies de Klein, en tenant notamment compte du fait qu'elles s'appuient sur des praxéologies existantes. Puis, d'un point de vue méthodologique, comment analyser le travail des étudiants? Ces derniers développent-ils les praxéologies de Klein visées? Dans la négative, qu'est-ce qui fait obstacle au développement de praxéologies de Klein?

Ce dernier groupe de questions s'exprime sous la forme synthétique suivante :

QR₃ : Comment implémenter le plan B de Klein pour l'intégrale? En particulier, quelles nouvelles praxéologies (de Klein) s'agit-il d'introduire? Comment développer les praxéologies de Klein? Quels sont les obstacles au développement de ces praxéologies?

2.9 Méthodologie générale de l'étude

Dans cette partie, nous décrivons les différentes étapes de notre étude, et les différents types d'analyses que nous allons mener dans le cadre de notre thèse. Nous allons montrer comment les différents construits théoriques s'articulent et fournissent des outils afin de permettre d'obtenir des réponses aux questions de recherche. Il s'agit bien là d'une méthodologie globale. Des méthodologies plus précises seront redonnées au fur et à mesure de l'usage des outils d'analyse. Nous commençons la présentation de la méthodologie globale avec ce qui prendra place en premier dans cette thèse : l'analyse épistémologique.

2.9.1 Méthodologie relative à QR₁

Le premier groupement de questions de recherche porte essentiellement sur la transposition didactique de l'intégrale. A l'instar de nombreuses recherches en didactique des mathématiques (Hausberger, 2012; Modeste, 2012; Durand-Guerrier, Hausberger, & Spitalas, 2015; Lalaude-Labayle, 2016; Hausberger, 2017; Candy, 2020), notre thèse

commence par l'étude de l'épistémologie du concept d'intégrale, dont on a noté le caractère multiforme. Nous pensons, avec Dorier (1997, p. 17) que « toute analyse didactique doit englober un aspect de nature épistémologique ».

Notre enquête épistémologique n'est pas celle d'un historien et nous la mènerons guidés par nos questions de recherche spécifiques à l'émergence du concept d'intégrale dans l'histoire, aux raisons d'être des différentes théories de l'intégration, et aux liens entre les différentes théories. Lors de l'étude de la production du concept d'intégrale, nous suivrons Chevallard (1991, p. 126-127) qui étudie le concept de distance en « ne retenant que l'essentiel, indispensable à l'intelligence de notre propos, d'une histoire complexe et, au demeurant, passionnante du point de vue épistémologique. »

Cette étude, en plus de nous permettre « de se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle [la didactique] manipule » (Artigue, 1989), va être le point de départ de l'étude de la transposition didactique de l'intégrale. Pour Chevallard (1991, p. 20)

C'est à la confrontation de ces deux termes [savoir savant et savoir enseigné], à la distance qui les sépare, par delà ce qui les rapproche et impose de les confronter, que l'on peut le mieux saisir la spécificité du traitement didactique du savoir.

Notre étude suit ensuite l'évolution du savoir savant qui pénètre dans la noosphère, ce qui conduira au produit de la transposition didactique externe. Nous analyserons le discours de représentant de la noosphère de l'université à travers des articles dans des revues à destination de la communauté des mathématiciens, afin de connaître les arguments avancés par la noosphère sur certains choix de transposition didactique externe.

Nous analyserons également les produits du processus de transposition didactique externe de l'intégrale dans différentes universités en France. Pour cela, nous utiliserons les outils d'analyse (limités aux aspects statiques) de la transposition didactique externe à l'université donnée dans (Bosch et al., 2021) et décrits dans la section 2.1. L'outil de l'écologie des savoirs va nous permettre d'explicitier les choix de transposition en donnant les différents habitats de l'intégrale, les niches écologiques, les besoins trophiques des différentes théories de l'intégration.

Nous poursuivrons alors l'étude de la transposition didactique de l'intégrale à partir d'une étude de cas : celle de Montpellier.

2.9.2 Méthodologie relative à QR_2

Puis nous étudierons plus en détail le cas de l'université de Montpellier à l'aide d'interview d'enseignants-chercheurs, afin de répondre au deuxième groupement de questions de recherche. En effet, la seule analyse des produits finis des processus de transposition ne pouvait permettre d'étudier finement les conditions et les contraintes qui s'exercent sur les processus de transposition didactique, donc d'appréhender les raisons des choix opérés par les acteurs des institutions, en l'occurrence celle de l'université de

Montpellier. Nous avons donc choisi de compléter les études des produits de la transposition didactique par celle des processus en jeu via une interview des enseignants dont nous étudions les corpus de documents de cours.

Ces interviews permettent de documenter les processus de transposition didactique, en particulier sur les arguments mis en avant pour le choix d'une théorie de l'intégration à enseigner.

Elles fourniront également des éléments relatifs aux organisations didactiques mises en place par les enseignants, en lien avec les organisations mathématiques. Cela concerne en particulier les activités qui peuvent mettre en lumière les raisons d'être des théories de l'intégration, ou les liens entre les théories.

L'analyse des corpus des documents de cours, ainsi que celle des exercices abordés en travaux dirigés nous conduira au bout du processus de transposition didactique de l'université à Montpellier. Nous mobiliserons l'outil des praxéologies pour rendre compte du produit de la transposition, et ainsi, nous produirons un modèle praxéologique dominant à l'université de Montpellier qui sera, pour nous, notre modèle praxéologique de référence pour l'intégrale à l'université de Montpellier.

2.9.3 Méthodologie relative à QR_3

Le troisième groupement de questions de recherche porte spécifiquement sur une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale.

Notre travail se fonde sur la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 2020). Cette dernière divise classiquement le travail du chercheur en quatre phases : les analyses préliminaires ; la conception de l'expérimentation et les analyses a priori ; la réalisation de l'expérimentation et la collecte des données ; l'analyse a posteriori et la validation du dispositif. Cette validation est interne, au sens où elle s'effectue en comparant analyses a priori et a posteriori, c'est-à-dire en discutant si le dispositif produit ou non les effets prévus. Décrire plus précisément notre méthodologie consiste à préciser comment nous allons mener chacune des quatre phases.

Les analyses préliminaires

L'analyse épistémologique menée en réponse à QR_1 est un élément fondamental de nos analyses préliminaires.

Afin de décrire les liens entre mathématiques élémentaires et avancées, nous construirons un modèle praxéologique dominant pour l'intégrale au lycée, en nous appuyant sur les programmes officiels de mathématiques spécialité et de mathématiques complémentaires en terminale. Ce modèle sera pour nous un modèle praxéologique de référence pour l'intégrale au lycée. La confrontation des différents modèles nous permettra de

mettre en lumière les liens et les ruptures éventuelles. Pour instaurer un nouveau rapport $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$ visant à réaliser le plan de Klein, nous nous appuierons sur notre étude épistémologique de l'intégrale pour construire des praxéologies qui, pour nous, seront de nature à modifier l'équipement praxéologique des étudiants élèves-professeur de mathématiques et favorisant le transfert de connaissances avancées. Nos analyses préliminaires vont nous conduire à définir de nouvelles praxéologies : les praxéologies de Klein.

La conception de l'expérimentation

Nous compléterons ainsi les modèles praxéologiques précédemment élaborés à l'aide des nouvelles praxéologies (de Klein). Pour la conception de l'expérimentation, qui vise le développement de ces nouvelles praxéologies mathématiques, nous mobiliserons les outils des praxéologies didactiques.

L'utilisation d'outils décrits dans la section 2.7 permettant d'analyser l'évolution du milieu lors du processus d'étude (donc la chronogénèse et mésogénèse) nous a paru indispensable pour l'analyse a priori. Les modèles praxéologiques dominants qui décrivent l'équipement praxéologique des étudiants nous serviront pour déterminer le milieu de l'étude (donc le schéma herbartien).

Notre méthodologie se fonde ainsi sur une articulation fine entre la description du processus d'étude avec les outils des PER et les MPR fruits des analyses praxéologiques.

La réalisation de l'expérimentation et collecte des données

Après la conception de notre expérimentation viendra le temps de la réalisation de cette expérimentation. Elle se déroulera dans l'institution du Master MEEF à l'université de Montpellier, en 1ère année de ce master.

Le choix des données recueillies a été dicté par l'objectif de pouvoir établir le question-gramme et le schéma herbartien a posteriori, pour décrire la chronogénèse et la mésogénèse. Pour cela, nous enregistrerons les échanges audio des collectifs d'études, et disposerons également des traces écrites des travaux des étudiants.

Analyse a posteriori et validation du dispositif

L'analyse a posteriori sera menée à l'aide des outils classiques des PER, croisés avec notre modèle praxéologique de référence. L'examen du milieu est l'élément clef pour attester du développement de nouvelles praxéologies, tandis que le question-gramme a posteriori, en lien avec les moments de l'étude, nous renseigne sur un blocage éventuel au niveau d'une étape donnée du processus d'étude. Enfin, l'examen des ostensifs présents ou absents dans le milieu, en lien avec les notions de valence sémiotique et opératoire des ostensifs, nous permet d'éclairer les raisons de ces blocages éventuels, en partie sous la forme d'hypothèses.

CHAPITRE 3

Étude épistémologique

3.1 L'analyse épistémologique

L'enseignement de l'intégrale à l'université, compte tenu du caractère multiforme de l'intégrale, suscite de nombreuses questions. Comme le souligne (Queffélec, 2012), le choix de la théorie de l'intégration à enseigner est « la plus vieille question du monde » :

Quelle théorie de l'intégration enseigner à nos chers étudiants en voie de disparition, et qui bâillent discrètement mais continûment à chacune de nos explications ou démonstrations ? Riemann, Lebesgue, les deux ? Ou bien Henstock, Daniell, Denjoy-Perron ?

Il est incontestable que le concept d'intégrale est multiforme (primitive, notion intuitive d'aire au lycée, intégrales de Riemann et Lebesgue sur \mathbb{R}^n , intégrale par rapport à une mesure quelconque sur des espaces abstraits, etc.). Sans prétendre faire une étude complète de l'histoire de l'intégration, ni de celle de la notion d'aire, il nous semble nécessaire de décrire les différentes formes qu'a pris le concept d'intégrale dans l'histoire pour, ensuite, mettre en perspective les savoirs à enseigner.

Comme le souligne Hawkins (1975), Lebesgue a créé la première théorie générale de l'intégration. Et pour apprécier le travail effectué par Lebesgue, il faut le regarder à la lumière du contexte historique qui a permis le développement du point de vue général et abstrait de la théorie de la mesure et des problèmes théoriques mis en avant par la théorie de Riemann. Notre étude se situe à l'université, et donc nous la débiterons avec l'intégrale de Cauchy jusqu'aux théories de l'intégration plus récentes. L'étude de la transposition didactique est au centre de notre première question de recherche. Dans cette optique, comme le précise Artigue (1989), *l'analyse épistémologique est nécessaire au didacticien pour l'aider à mettre à distance et sous contrôle les représentations épistémologiques des mathématiques induites par l'enseignement.*

Ainsi, cette analyse va nous permettre de déceler les fondements épistémologiques des notions en jeu afin de percevoir les effets du processus de transposition didactique.

Les questions auxquelles nous souhaitons apporter des éléments de réponse sont des sous-questions de QR_1 et sont les suivantes :

Quelles sont les raisons d'être des différentes théories de l'intégration et pourquoi ont-elles émergé dans l'histoire ? Quels sont les liens entre les différentes théories de l'intégration ?

Ceci nous permettra ensuite de mettre en perspective le processus de transposition didactique externe et son produit pour répondre à la composante épistémologique de notre première question de recherche relative à la transposition didactique externe dans le cas de l'intégrale : *Comment expliquer, d'un point de vue épistémologique, la pluralité des théories de l'intégration enseignées à l'université ?*

3.1.1 Méthodologie de l'étude

Pour mener notre enquête épistémologique, à l'instar de Lalaude-Labayle (2016, p. 47), nous suivrons la méthodologie décrite par Dorier (1997, p. 29) qui propose de consulter des sources de natures différentes. Nous commençons par des sources générales puis plus spécifique, que sont des ouvrages d'histoire des mathématiques, puis de l'analyse, voir de l'intégration. Ceci nous permet de cibler la période de notre étude. Nous pourrions être amené à consulter des articles de recherche d'historiens ou de philosophe des mathématiques à même d'offrir des éclairages plus pointus. Et nous utiliserons ce que nous appelons des ressources primaires : ce sont des articles ou des thèses de mathématiciens qui exposent les théories en jeu dans notre étude.

Notre questionnement, résumé à travers la question QR_1 revêt bien une dimension épistémologique et nous avons explicité l'origine et le but didactique de ce questionnement. Il s'agit donc de mettre en lumière les éléments de l'histoire qui sont pertinents pour l'analyse didactique.

Nous utiliserons comme sources générales les ouvrages de Bourbaki (2007) et de Jahnke (2003) afin de situer les différentes théories de l'intégration dans l'histoire des mathématiques. Puis, nous utiliserons les sources plus spécifiques à l'intégration avec les ouvrages de Hawkins (1975) et de Michel (1992).

Les articles de Jean-Jacques Villeneuve (Villeneuve, 2014), (Villeneuve, 2009), (Villeneuve, 2007) nous permettrons de décrire les liens et relations entre les différentes théories avec des formulations contemporaines.

Enfin, nous utiliserons les sources primaires que sont la thèse de Lebesgue (1902), ses leçons (Lebesgue, 1902), les cours de Cauchy (1823), le mémoire de Riemann (1873a), de Jordan (1892), de Borel (1898) afin de mettre en perspective l'état actuel des mathématiques avec l'environnement mathématiques de la période de construction du savoir mathématique en jeu dans notre étude.

3.1.2 Choix de la période sur laquelle porte notre étude

L'intégration trouve ses origines dans les procédés de mesure des aires des surfaces que l'on trouve chez Euclide, Archimède avec la méthode d'exhaustion pour la quadrature de la parabole par exemple.

Le concept d'aire a ensuite connu de nouveaux développements au XVIIème siècle avec la notion d'indivisibles de Bonaventure Cavalieri (1598-1647). L'idée principale du concept d'indivisibles introduit par Cavalieri (1635) est de considérer les surfaces comme un ensemble infini de lignes (les indivisibles) et les volumes comme l'assemblage de surfaces. On retrouve dans ses travaux une idée très féconde pour le calcul intégral : donner du sens à une somme d'une infinité de termes dont chacun, pris isolément, est nul (Bourbaki, 2007, page 2).

Les travaux de Newton (1643-1727) et Leibniz (1646-1716) vont marquer des avan-

cées significatives vers les théories modernes de calcul intégral et infinitésimal. Newton traite de la rectification des courbes et de la quadrature des surfaces et considère l'intégration comme l'opération inverse de la dérivée, et qui permet de résoudre le problème des fonctions primitives : *trouver les fonctions $F(x)$ qui admettent pour dérivée une fonction donnée $f(x)$.*

La théorie de Newton et Leibniz est fondamentale pour comprendre le lien entre l'intégrale et la mesure des grandeurs. C'est sur cette période que Schneider (2011, p.175-206), par exemple, va centrer son étude épistémologique dans le but de développer dans ses classes des praxéologies qu'elle appelle « praxéologies de modélisation », dédiées à ancrer le calcul différentiel et intégral dans la mesure des grandeurs.

Notre but est tout autre : l'accent est mis sur les théories de l'intégrale enseignées à l'université, tout en faisant le lien avec l'intégrale du lycée (vue par l'enseignant du secondaire, dans le cadre de la seconde discontinuité de Klein). Nous débuterons donc notre étude avec l'intégrale de Cauchy, qui fonde sur le nombre l'intégrale du lycée (à travers les concepts de limite et de continuité) que nous poursuivrons avec l'intégrale de Riemann qui est la première théorie de l'intégration traditionnellement rencontrée à l'université. Cette étude nous mènera alors à la théorie de l'intégration de Lebesgue et de ses développements en théorie générale de la mesure. Dans notre analyse épistémologique, nous n'étudierons pas les intégrales plus récentes comme celle Daniell, Denjoy-Perron, ou Kurşweil-Henstock car notre choix est de restreindre au cadre classique que l'on peut observer au sein des savoirs universitaires en France.

3.2 L'intégrale de Cauchy

Notre étude commence avec l'émergence de l'intégrale de Cauchy. Le contexte de l'introduction de cette théorie est celui de l'entrée dans la rigueur dans le champ de l'analyse. Cette nécessité de rigueur correspond aussi à un besoin didactique des mathématiciens du XIX^{ème} siècle et la nécessaire précision des concepts à enseigner.

Teaching was another major main motivation behind the rigourisation of analysis. Several mathematicians found themselves in an awkward situation when they had to teach introduction to analysis, and therefore they decided to reform it. (Jahnke, 2003, p. 155)

Avant Cauchy, l'intégration était définie comme l'opération inverse de la dérivée. Mais à l'époque où le problème des fonctions primitives fut posé, le mot de fonction avait un sens mal défini. Il est intéressant de voir que la problématique de l'enseignement de l'analyse a engendré ce besoin de formalisation chez Cauchy.

3.2.1 Les résultats préliminaires de Cauchy

Newton et de Leibniz ne disposaient pas du concept de fonction. Leurs travaux portaient sur des quantités, et pas sur des fonctions au sens où on l'entend aujourd'hui. Les travaux de Cauchy marquent de ce point de vue une rupture dans l'analyse car il apporte une rigueur qui faisait défaut et propose une construction de l'intégrale d'une fonction continue.

Dans la perspective d'enseigner l'analyse, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) publie d'abord un premier ouvrage en 1821, *Cours d'analyse* (Cauchy, 1821), qui est un cours préliminaire au calcul différentiel et intégral, dans lequel il définit la notion de fonction :

Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondant de la fonction. (Cauchy, 1821, p. 21)

et de continuité grâce à une nouvelle définition de la limite :

la fonction f sera continue au point x si la valeur absolue de la différence $f(x + \alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α . (Cauchy, 1821, p. 34)

D'abord, il définit une *moyenne* entre des quantités (a, a', a'', \dots) comme étant un nombre compris entre la plus petite valeur et la plus grande valeur de l'ensemble $\{a, a', a'' \dots\}$. cette moyenne est notée $M(a, a', a'' \dots)$ (Cauchy, 1821, p. 14).

Il affirme de plus que pour tous a, a', a'', \dots et $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, le rapport $\frac{a\alpha + a'\alpha' + \dots}{\alpha + \alpha' + \dots}$ est une moyenne de a, a', a'', \dots (Cauchy, 1821, p. 27) et donc

$$a\alpha + a'\alpha' + \dots = M(a, a', \dots)(\alpha + \alpha' + \dots).$$

Ainsi, si on considère une fonction f définie sur un intervalle $[x, X]$ et une subdivision $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = X$, la combinaison

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

s'écrit comme le produit d'une moyenne de $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ avec $((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) = X - x$. Or, cette moyenne est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par f sur l'intervalle x . Ces valeurs sont des valeurs de l'expression $f(x_0 + t(X - x_0))$ lorsque t est dans $[0, 1]$. En reprenant, sans l'explicitement, le raisonnement produit dans la septième leçon des résumés (Cauchy, 1823) et que l'on peut considérer comme l'application du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $t \mapsto f(x_0 + t(X - x_0))$ sur $[0, 1]$, il affirme l'existence de $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = (X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0))$$

Dans le contexte des fonctions continues, il résout le problème de la recherche de primitive, et commence par démontrer, en toute généralité, l'existence des intégrales avant de faire connaître les diverses propriétés des primitives.

3.2.2 La construction de l'intégrale de Cauchy

La théorie de l'intégration de Cauchy a été présentée dans son *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*, publié en 1823, en particulier dans les chapitres 21 et 22 (Cauchy, 1823). Il y propose une construction de l'intégrale d'une fonction continue, dans la leçon 21. Dans ces travaux, Cauchy définit l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme le résultat d'un procédé calculatoire. Il écrit, dans la leçon 21 (Villeneuve, 2014, p. 4) :

Supposons que la fonction $y = f(x)$, étant continue par rapport à la variable entre deux limites finies $x = x_0$ et $x = X$, on désigne par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments :

(1) $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'origine de ce même élément, à savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1), \dots$, enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

(2) $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ la somme des produits ainsi obtenus.

Une somme de Cauchy associée à une fonction f sur un segment $[x_0; X]$ et à une partition P de $[x_0, X]$ est donc une somme :

$$S_C(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}).$$

A chaque partition $P = x_0 < x_1 \dots, x_n = X$, il associe le réel positif

$$d_P = \max(x_i - x_{i-1}).$$

La premier résultat utilisé par Cauchy, comme explicité dans 3.2.1, est qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = f(x_0 + \theta(X - x_0)). \quad (3.1)$$

Puis en prenant une partition Q de $[x_0; X]$, plus fine que P , il applique (3.1) à chaque subdivision de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, de sorte à obtenir un ensemble de nombres $(\theta_i)_{i \in [0, n-1]}$ tel que

$$S_C(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})). \quad (3.2)$$

CHAPITRE 3. ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

Enfin, en posant $\varepsilon_{i-1} = |f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})) - f(x_i)|$, il écrit que

$$f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})) = f(x_{i-1}) \pm \varepsilon_{i-1}.$$

et enfin que

$$S_C(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) + \varepsilon(X - x_0)$$

où ε est une *moyenne* des nombres ε_i et donne

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(X - x_0)$$

En fait, l'idée de Cauchy est de dire que lorsque d_P tend vers 0, alors les ε_i tendent vers 0 et ε est aussi proche que l'on veut de 0. Ici, il utilise implicitement la notion de continuité uniforme de la fonction f (le concept de continuité uniforme n'ayant pas encore été identifié à ce moment là). Ce dernier résultat permet de montrer que la suite $S_C(f, P, d_P)$ est une suite de Cauchy, et donc que la suite converge lorsque d_P tend vers 0.

L'intégrale définie est donc cette limite commune des sommes de Cauchy. En référence à Fourier, Cauchy utilise la notation actuelle (qui remonte à Leibniz) \int à laquelle il rajoute les bornes :

$$\int_{x_0}^X f(x)dx$$

A partir de cette définition calculatoire, Cauchy démontre certaines propriétés de l'intégrale définie :

- $\int_{x_0}^X af(x)dx = a \int_{x_0}^X f(x)dx$
- $\int_{x_0}^X (f(x) + g(x))dx = \int_{x_0}^X f(x)dx + \int_{x_0}^X g(x)dx$
- $\int_{x_0}^X f(x+a)dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)dx$
- $\int_{x_0}^c f(x)dx + \int_c^X f(x)dx = \int_{x_0}^X f(x)dx$ (relation de Chasles)

et calcule l'intégrale de la fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto a^x$.

L'écriture des sommes de Cauchy permet en fait de justifier le fait que $\int_{x_0}^X f(x)dx$ est un nombre compris entre $(X - x_0)m$ et $(X - x_0)M$ où m et M sont respectivement les minimum et maximum de f sur $[x, X_0]$. Ceci permet d'affirmer qu'il existe θ entre 0 et 1 tel que :

$$\int_{x_0}^X f(x)dx = (X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0)) \quad (3.3)$$

(Cauchy, 1823, p. 87).

Ce résultat, qui mobilise en fait la notion de continuité, va être fondamental pour Cauchy pour décrire à la fois le lien avec la notion d'aire, et le lien avec la notion de primitive.

3.2.3 Le lien avec la notion d'aire

Cauchy formalise le lien entre l'aire sous la courbe et l'intégrale définie, dans la leçon 23 (propriétés algébriques de l'intégrale définie - interprétation géométrique de l'intégrale définie). Villeneuve (2014, p. 11) indique que Cauchy utilise un argument géométrique, et, de nouveau, la notion de moyenne :

L'aire sera donc équivalente à un rectangle construit sur une ordonnée moyenne représentée par une expression de la forme $f(x_0 + \theta(X - x_0))$; de sorte qu'on aura $A = (X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0))$, θ désignant un nombre inférieur à l'unité.

Contrairement à l'intégrale, dont Cauchy pensait nécessaire la construction, l'aire semble ici une notion première. L'argument utilisé est que l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire d'un rectangle de base $X - x_0$ et de largeur le minimum de f et celle d'un autre rectangle de même base mais de longueur le maximum de f . La croissance de l'aire est en jeu ici, implicitement.

Pour relier l'intégrale définie à l'aire sous la courbe, il utilise le résultat précédent à chacun des sous-intervalles donnés par une partition quelconque de l'intervalle $[x_0, X]$. L'aire A est alors donnée par la somme

$$A = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})).$$

Cela mobilise, implicitement, l'additivité de l'aire.

Il s'agit d'une somme de Cauchy, et, en passant à la limite, on trouve l'intégrale définie, puisque le membre de droite converge vers $\int_{x_0}^X f(x)dx$. Cauchy conclut ainsi :

$$A = \int_{x_0}^X f(x)dx.$$

3.2.4 Le lien avec la notion de primitive

Enfin, la construction de Cauchy permet de revenir au problème du calcul de primitives avec les intégrales indéfinies : ceci est abordé dans la leçon 26. Il s'agit de lier l'intégrale définie à l'intégrale indéfinie, de sorte à ce que ce théorème soit vu comme une solution au problème d'inversion des opérateurs « intégrale » et « dérivée ». Pour faire ce lien, Villeneuve (2014) indique que Cauchy utilise la fonction d'aire :

$$\mathcal{A}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt = (x - x_0)f(x_0 + \theta(x - x_0))$$

où x est une variable et f une fonction continue, et $\mathcal{A}(x_0) = 0$. Il obtient, pour $\alpha > 0$:

$$\mathcal{A}(X + \alpha) - \mathcal{A}(X) = \int_{x_0}^{X+\alpha} f(t)dt - \int_{x_0}^X f(t)dt = \int_X^{X+\alpha} f(t)dt = \alpha f(X + \theta\alpha).$$

On retrouve ici, une nouvelle fois, la formule de la moyenne (3.3). Il peut dès lors affirmer que si la fonction f est continue en x_0 , alors \mathcal{A} est une fonction continue et dérivable en x_0 et dont le nombre dérivé est $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$ (p. 152) car :

à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathcal{A}(x)$.

Ainsi, la justification du théorème proposée ici par Cauchy repose sur la formule de la moyenne (3.3), ainsi que sur la relation de Chasles pour les intégrales définies.

Le recours à l'intuition sensible pour relier les formalisations mathématiques à la mesure des grandeurs demeure implicite et Cauchy fonde ses justifications sur les théorèmes d'analyse. On retrouvera ce type de preuve à l'université, dans le cadre plus général de la théorie de Riemann, dans laquelle la preuve du théorème fondamental de l'analyse mobilise le théorème des accroissements finis. Au lycée, la preuve de ce théorème fondamental de l'analyse se fonde sur la notion intuitive d'aire, et l'utilisation de la formule de la moyenne est remplacée par un encadrement par des aires de rectangles, qui porte l'intuition sensible.

Dans la suite de son exposé sur les intégrales indéfinies, Cauchy affirme qu'une fonction dont la dérivée est nulle est constante par morceaux, puis en déduit que les primitives d'une fonction donnée f diffèrent entre elles d'une constante. Enfin, si F est une primitive connue d'une fonction f , l'intégrale définie entre x_0 et x est alors donnée par $F(x) - F(x_0)$.

Ainsi, lorsque l'intégrale indéfinie permet de trouver une primitive, cette primitive permet de calculer l'aire sous la courbe.

Le procédé de calcul ne s'applique que pour un type de fonction fixé a priori (les fonctions continues). Nous retrouvons le lien entre calcul d'aire et calcul des primitives. C'est cette intégrale qui est enseignée au lycée actuellement en France (du moins, il

s'agit de l'intégrale qui lui correspond, dans le paradigme de rigueur de l'université ; rappelons que l'intégrale du lycée est fondée sur une notion intuitive d'aire).

Les apports de Cauchy sont donc :

- D'introduire l'intégrale définie comme technique générale pour calculer l'aire sous une courbe de fonction continue ;
- D'utiliser l'intégrale définie pour résoudre le problème de la recherche de primitives et de démontrer que toute fonction continue admet des primitives.

Ainsi, on passe de la donnée de règles opératoires (le calcul de Newton et Leibniz) à une théorie qui en fonde rigoureusement l'usage. La définition qu'il propose est donc analytique et constructive, et est maintenant liée à un processus d'approximation interprété comme un calcul d'aire.

La suite des recherches sur l'intégrale de Cauchy passera par l'étude des fonctions discontinues ayant une infinité de discontinuités, et ouvre ainsi une nouvelle voie de recherche sur l'intégration. Dirichlet énonce une première conjecture en 1829 : une fonction est intégrable si et seulement si l'ensemble de ses discontinuités est nulle part dense (Villeneuve, 2014, p. 17). Cette nouvelle voie allait se prolonger jusqu'aux travaux de Riemann.

3.3 L'intégrale de Riemann

3.3.1 Les questionnements à l'origine de l'émergence de la théorie de Riemann

Le contexte des travaux de Bernhard Riemann est celui des séries trigonométriques. Dans son mémoire « sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique » Riemann (1873a) expose l'importance des séries trigonométriques dans l'étude de phénomènes :

Les séries trigonométriques ainsi appelées par Fourier, c'est à-dire les séries de la forme

$$a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \dots + \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + \dots$$

jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires. On est même fondé à dire que les progrès les plus essentiels de cette partie des Mathématiques, si importantes pour la Physique, ont été subordonnés à la connaissance plus exacte de la nature de ces séries. Dès les premières recherches mathématiques qui

CHAPITRE 3. ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

ont conduit à la considération des fonctions arbitraires, s'est posée la question de savoir si une fonction entièrement arbitraire pouvait se représenter par une série de la forme ci-dessus. (loc. cit., p. 21).

Fourier a remarqué que si une fonction f s'écrit comme une série trigonométrique

$$f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \dots + \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + \dots$$

alors les coefficients sont nécessairement

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Peter Gustac-Lejeune-Dirichlet (1805-1859) a étudié les sommes partielles de la forme

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

où les a_k et b_k sont les coefficients de Fourier d'une fonction f . Il montre que les sommes partielles peuvent s'écrire

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)(t-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt$$

puis que $S_n(x)$ converge vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. Ainsi, pour Dirichlet, on peut représenter une fonction périodique par une série trigonométrique lorsque cette fonction :

- est susceptible d'intégration ;
- n'a pas un nombre infini de maxima et de minima ;
- prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité dans le cas où sa valeur varie brusquement.

Sur cette conclusion de Dirichlet, (Riemann, 1873b, p.32) déclare :

Une fonction qui jouit des deux premières propriétés, et non de la troisième, ne peut évidemment pas être représentée par une série trigonométrique : car la série trigonométrique qui la représenterait en dehors des discontinuités en différencierait aux points mêmes de discontinuité ; mais une fonction ne remplissant pas les deux premières conditions peut-elle, et dans quel cas peut-elle être représentée par une série trigonométrique ? C'est le point que les recherches de Dirichlet laissent indécis.

Les résultats de Fourier mentionne comme condition nécessaire l'intégrabilité au sens de Cauchy, puisqu'il faut être en mesure d'écrire l'expression de a_n et b_n . En d'autres terme, peut-on trouver d'autres fonctions que les fonctions continues sauf sur un ensemble nul part dense qui sont susceptibles d'intégration ? Cette question de la possibilité de représenter une fonction par une fonction trigonométrique allait conduire Riemann à étudier la notion d'intégrale et à se demander à quelles conditions sur la fonction le procédé décrit par Cauchy s'applique.

Au lieu de chercher *a priori* les fonctions pour lesquelles le procédé opératoire de Cauchy s'applique, il trouve une condition nécessaire et suffisante pour cela et énonce ce que l'on appelle *le critère de Riemann*, condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité. Cette classe de fonction est l'ensemble des fonctions intégrables, et les fonctions continues en forment une partie. La seule hypothèse est que la fonction soit une fonction bornée. Il prouve ainsi l'équivalence entre deux conditions d'intégrabilité, en généralisant les sommes de Cauchy :

Considérons une fonction f bornée sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et une subdivision $P = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$. On note $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ et $D_i = \sup_{x, y \in [x_i, x_{i-1}]} |f(x) - f(y)|$. La condition nécessaire et suffisante pour que les sommes de Cauchy convergent est

$$(R_1) \quad \lim_{\delta_i \rightarrow 0} (D_1 \delta_1 + \dots + D_n \delta_n) = 0$$

Cette condition est équivalente à la condition (R_2) : pour tout $\sigma > 0$, la somme des longueurs des intervalles où l'oscillation de la fonction est supérieure à σ est aussi petite que l'on veut.

Comme le souligne Hawkins (1975, p. 18), nous pouvons reconnaître dans les conditions (R_1) et (R_2) les prémices de concept de mesure de Jordan qui vont jouer un rôle important dans la constitution de la théorie moderne de l'intégration. Mais Riemann n'avait pas ces concepts de mesure pour reformuler les conditions (R_1) et (R_2) .

3.3.2 La théorie de Riemann

L'objectif de cette partie est de décrire ce que nous appellerons dans la suite « la théorie de Riemann ». Dans la partie précédente, nous avons décrit des raisons d'être de cette théorie, exposés par Riemann. Nous allons reprendre la synthèse des résultats de Riemann exposée par Lebesgue (1904) dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au collège de France*, à la lumière de quelques reformulations plus contemporaines, avant de discuter les prolongements qu'il propose. Nous considérerons que cela constituera le savoir savant de la théorie de Riemann (il s'agit en quelque sorte de la formulation « stabilisée » de cette théorie).

CHAPITRE 3. ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, Riemann a porté son attention sur la validité du procédé opératoire établi par Cauchy sur les fonctions continues. Comme le souligne Villeneuve (2007, p. 115) dans sa thèse :

Riemann a fait une étude plus générale et non une généralisation de l'intégrale de Cauchy, car il n'a pas introduit de nouvelles notions, mais démontré un critère d'intégrabilité pour étendre l'extension de ce qu'il croyait être l'intégrale de Cauchy.

Ainsi, Riemann n'a pas présenté de nouvelle façon de construire l'intégrale, mais a caractérisé les fonctions pour lesquelles le procédé de Cauchy s'applique, ce qui a été exposé dans la section précédente.

Une fonction est donc Riemann-intégrable si et seulement si elle vérifie la condition (R_1) , ce qui est équivalent à la condition (R_2) .

Villeneuve indique :

Darboux démontre, dans son long article *Mémoire sur les fonctions discontinues*, l'hypothèse de Riemann sur l'équivalence entre la condition d'intégrabilité (R_1) et la convergence des sommes de Cauchy. Cette démonstration le conduit à développer une nouvelle notion d'intégrale, soit l'intégrale de Riemann

Une reformulation de ce critère (R_1) a été proposée par Lebesgue (1904, p. 24) à partir des nombres *intégrale par excès* et *intégrale par défaut* définis par Gaston Darboux. En gardant les notations de Riemann, on peut associer à chaque fonction bornée f sur un segment $[a, b]$ et à chaque subdivision P de $[a, b]$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ell_i$$

et

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i L_i.$$

Ces deux sommes convergent vers des limites déterminées lorsque les δ_i tendent vers 0. Darboux appelle ces limites *intégrale par défaut* et *intégrale par excès* de f , que l'on peut noter

$$\int_a^b f = \sup_P s(f, P)$$

et

$$\int_a^b f = \inf_P S(f, P).$$

Ainsi, une fonction bornée est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\int_{a*}^b f = \int_a^{b*} f.$$

Et dans ce cas, on note $\int_a^b f$ ce nombre commun.

Contrairement aux sommes de Cauchy, les sommes de Riemann sont introduites par paires : les sommes inférieures et supérieures. Dans les sommes de Cauchy, nous avons remarqué la place accordée à la formule de la moyenne qui cachait les relations d'ordre. Avec les sommes de Riemann, on note une mise en lumière de l'ordre dans les réels.

Lebesgue (1904, p. 26) souligne, en référence au critère (R_2) :

La forme donnée par Riemann à la condition d'intégrabilité montre bien que les fonctions continues sont intégrables, mais elle ne met pas en évidence le rôle des points de discontinuité de la fonction.

Du Bois-Raymond va alors chercher à mettre en évidence le lien entre le critère d'intégrabilité et l'ensemble des points de discontinuité de la fonction. Il utilise pour cela la notion de groupe intégrable¹, ce dont ne disposait pas Riemann. Il montre qu'une fonction est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les points où l'oscillation est supérieure à $\varepsilon > 0$ est un groupe intégrable.

La lecture contemporaine par Lebesgue des travaux de Riemann conduira à une reformulation des critères d'intégrabilité de Riemann, avec la notion d'ensemble de *mesure nulle* : ce sont les ensembles dont les points peuvent être enfermés dans un nombre fini ou une infinité dénombrables d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut. Un groupe intégrable est donc un exemple d'ensemble de mesure nulle. Il montrera qu'une fonction bornée f est intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Mais il faudra la théorie de la mesure pour cela, dont le développement historique est décrit dans la section 3.3.3.

Dans son mémoire, Darboux (1875, p. 76) précise le lien entre intégrale et primitive :

Théorème 3.3.1. *Soit f une fonction susceptible d'intégration² sur $[a, b]$, et soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors la fonction f est la dérivée de F , pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est continue.*

La preuve de ce théorème donnée par Darboux mobilise plus explicitement la relation d'ordre et la continuité :

-
1. Un ensemble de points est appelé un groupe intégrable lorsque les points de l'ensemble peuvent être enfermés dans un nombre fini de segments dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut
 2. au sens de Riemann

si $f(x)$ est continue pour la valeur $x = x_0$, alors dans l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$, $f(x)$ sera comprise entre $f(x_0) + \sigma$ et $f(x_0) - \sigma$, avec σ qui tend vers 0 avec h

On reconnaît ici la définition en ϵ, η de la continuité. On a donc :

$$h(f(x_0) - \sigma) < F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt < h(f(x_0) + \sigma)$$

qui permet de conclure.

C'est également dans ce mémoire que l'on trouve les propriétés usuelles de l'intégrale de Riemann vis à vis des sommes dont :

Théorème 3.3.2. *Une série uniformément convergente de fonction intégrable est intégrable, et elle est intégrable terme à terme.*

Pour Michel (1992), le travail de Riemann marque un achèvement du côté de la recherche sur le thème de l'intégration, puisque le critère proposé est le plus général qu'on puisse donner de l'existence et de l'unicité des sommes de Cauchy. Le travail de Riemann permet de donner une nouvelle orientation : celle qui consiste à relier la question de l'intégrabilité à l'étude de l'ensemble des points de discontinuité, par la condition (\mathbb{R}_2). Cette orientation est un premier pas vers la notion de mesure des ensembles, en particulier sur la notion d'ensemble de mesure nulle. Cette notion n'est pas ici de nature topologique, mais il faudra attendre les travaux de Borel et Lebesgue pour la dégager.

3.3.3 Vers la construction de la théorie moderne de la mesure

La mesure de Peano

Parallèlement à l'évolution du concept d'intégrale, le concept de mesure des ensembles a émergé dans les travaux de Peano (1858-1932), Jordan (1838-1922), Borel (1871-1956).

Souhaitant renouer avec la définition de l'intégrale par l'aire, Peano a relevé l'insuffisance de fondements du concept d'aire, et le manque de précision de cette notion. Il montre qu'on ne peut définir l'aire d'une surface quelconque qu'à condition d'avoir montré que la borne supérieure de la classe des nombres mesurant l'aire des polygones inscrits et la borne inférieure des nombres mesurant l'aire des polygones circonscrits coïncide (Michel, 1992, p, 39). Dans son livre *Les applications géométriques du calcul infinitésimal* publié en 1887, Peano propose une définition de la *mesure de Peano*, que nous désignerons par P-mesure, d'un ensemble de point de \mathbb{R}^2 que l'on peut formuler avec des notations contemporaines :

Soit E un ensemble de point de \mathbb{R}^2 . Alors E est P-mesurable si les deux aires suivantes sont égales :

1. Le *contenu intérieur* est la borne supérieure des aires des polygones qui sont intérieurs à E , notée $c_i(E)$
2. Le *contenu extérieur* est la borne inférieure des aires des polygones qui sont extérieurs à E , notée $c_e(E)$

Cette définition s'adapte bien au cas des ensembles de \mathbb{R}^2 , voire de \mathbb{R}^3 . Mais l'extension à d'autres ensembles n'est pas possible en l'état.

En considérant une fonction positive f sur un intervalle $[a, b]$ et en notant E l'ensemble des points limités par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, on peut faire l'analogie avec la reformulation du critère (R_1) de Riemann par les intégrales par excès et par défaut de Darboux : la fonction f est intégrable si et seulement si l'ensemble E est P-mesurable et

$$\int_* f = c_i(E) ; \int^* f = c_e(E).$$

Par ailleurs, dans le cas du plan, Peano a établi la relation (en notant ∂E le bord de l'ensemble E , c'est à dire E privé de son intérieur) :

$$c_e(E) = c_i(E) + c_e(\partial E)$$

et l'ensemble E est P-mesurable si et seulement si $c_e(\partial E) = 0$.

Peano a donc relié le problème de l'aire, donc de la mesure, à celui de l'intégrale en partant de la condition d'intégrabilité de Riemann.

La mesure de Jordan

Le point de départ du questionnement de Jordan est d'étendre la théorie de l'intégration aux fonctions à plusieurs variables en adaptant les idées de Riemann aux fonctions à plusieurs variables.

Avant les travaux de Jordan, le traitement des intégrales à plusieurs variables a mis en lumière des problèmes dans le cadre de Riemann : Thomae (1883) a construit une fonction de deux variables f sur $[0; 1] \times [0; 1]$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : [0; 1] \times [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cette fonction est discontinue partout dans le carré $[0; 1]^2$ sauf sur la ligne $y = 1/2$. De ce fait, elle n'est pas Riemann intégrable. Pourtant

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1$$

et

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy$$

n'existe pas au sens de Riemann.

La complexité des ensembles qui interviennent dans le traitement des intégrales doubles deviennent trop élevée, et les outils adaptés de la théorie de Riemann ne peuvent plus s'appliquer. Cela change le regard porté sur l'intégrale : on ne s'intéresse pas seulement à la fonction à intégrer, mais au domaine d'intégration.

Jordan (1892, p69-70) déclare :

[Les résultats de Riemann et Darboux] sont très nets et éclaircissent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale. L'influence de la nature du domaine ne paraît pas avoir été étudié avec le même soin. Toutes les démonstrations reposent sur ce double postulat, que chaque domaine E a une étendue déterminée ; et si on le décompose en plusieurs parties E_1, E_2, \dots , la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de E . Or ces propriétés sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du domaine toute sa généralité.

La définition proposée par Jordan dans son article est proche de celle de Peano, mais s'interprète bien dans \mathbb{R}^n (contrairement à la mesure de Peano qui ne s'applique que dans \mathbb{R}^2 , voire dans \mathbb{R} et dans \mathbb{R}^3). Comme le dit Michel (1992, p. 43), la méthode de Jordan est la réactivation de la méthode grecque « d'exhaustion », qui consiste à approcher la surface à mesurer par l'extérieur et par l'intérieur par des surfaces que l'on sait mesurer. Pour sa définition, Jordan s'appuie sur la notion de quadrillage du plan (ou de n -cellules lorsque l'on est dans \mathbb{R}^n) : en se fixant un nombre r , on compte le nombre de n -cellules de côté r qui sont strictement à l'intérieur de l'ensemble à mesurer, et le nombre de n -cellules de côté r qui rencontrent l'ensemble. Ces n -cellules ont des étendues déterminées (l'aire d'un carré pour le cas du plan), r^n . La limite de ces nombres sur r^n , lorsque r tend vers 0, s'appelle l'*étendue intérieure* et l'*étendue extérieure* de l'ensemble. Et lorsque ces étendues sont égales, l'ensemble est J-mesurable (ou mesurable J), la limite commune est la J-mesure de l'ensemble ; si l'ensemble est plan, il est dit quarrable, et sa J-mesure est l'aire de l'ensemble (Jordan, 1892, p. 78).

Jordan prouve que la mesure ainsi définie est croissante et additive.

Avec cette nouvelle notion de mesure, Jordan peut alors reformuler la théorie de Riemann dans le cadre des fonctions de deux variables (Jordan, 1892, p. 87).

L'évolution est notable : les intégrales peuvent être considérées relativement à des ensembles mesurables quelconques et la présentation d'hypothèses générales de théorie de la mesure (mesurabilité, négligeabilité des frontières) vont permettre une nouvelle généralisation. Pour le cas de la mesure dans le plan, on peut appliquer la méthode de Jordan à partir de la famille des réunions finies de rectangles, ce qui donne la théorie

des ensembles quarrables du plan et qui constitue une théorie formalisée pour l'intégrale enseignée aujourd'hui au lycée (voir chapitre 5 de cette thèse). Dans son ouvrage *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Lebesgue (1904) formalise le lien entre la mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann, et entre la mesure de Jordan et la notion d'aire. Il définit les ensembles *quarrables* du plan comme étant les domaines dont l'étendue extérieure est égale à l'étendue intérieure ($c_e(A) = c_i(A)$). Il montre :

Pour qu'une fonction bornée f soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que $E(f)$ ³ soit J-mesurable.

La mesure de Borel

Pour (Michel, 1992, p. 45), c'est Emile Borel (1871-1956) qui formalisa le « bon » concept de mesure en introduisant la propriété d'additivité dénombrable. Ses travaux ne portent pas particulièrement sur l'intégration, mais sur la description des ensembles des points de convergence des séries de fonctions. Un exemple emblématique de son travail est la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|} \quad (3.5)$$

où (A_n) est une suite positive telle que la série $\sum \sqrt{A_n}$ converge et (a_n) une suite dense⁴ dans $[0; 1]$. Borel montre que l'ensemble D des réels où la série diverge peut être recouvert par une infinité dénombrable d'intervalles de longueurs arbitrairement petites et qui contient $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Mais la théorie de la mesure de Jordan ne permet pas de dire que l'ensemble D est de mesure nulle car c'est un ensemble qui n'est pas J-mesurable ($c_e(D) = 1$ et $c_i(D) = 0$). Cela pousse Borel à formuler plus nettement la condition de convergence de la série en termes de mesure : l'ensemble D est déclaré de mesure nulle. Il énonce ainsi les principes fondamentaux de la théorie, qui inclut la propriété importante de la σ -additivité :

- La mesure (de Borel, que nous noterons m_B) de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux est égale à la somme de leurs mesures :

$$m_B \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m_B(A_i);$$

- La mesure de la différence de deux ensembles dont l'un est contenu dans l'autre est égale à la différence de leurs mesures : si $E \subset E'$, alors $m_B(E \setminus E') = m_B(E) - m_B(E')$;

3. $E(f)$ est le domaine sous la courbe

4. l'adhérence de $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est $[0; 1]$

- La mesure n'est jamais négative.

En sachant que tout ensemble ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, la classe d'ensembles que l'on peut obtenir à partir des ensembles ouverts en itérant indéfiniment les opérations de réunion dénombrable et de différence est appelée depuis « classe des Boréliens ».

Contrairement à la définition de la mesure donnée par Jordan, Borel pose en principes les propriétés importantes requises dans la manipulation de la notion de mesure dans les preuves. Ces propriétés sont qualifiées de propriétés *constitutives* de la notion (Villeneuve, 2009, p. 7) et on assiste alors à un changement dans la compréhension de la notion : on met en évidence certaines propriétés qui forment maintenant la définition de la nouvelle notion. Borel (1898, p. 48) écrit :

On définit les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est à dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre.

Dans ce passage, on peut faire le lien avec la méthode axiomatique dans l'activité mathématique contemporaine, tel que le décrit l'épistémologue Blanché (2009, p55) :

Le but qu'on se propose quand on met sous forme axiomatique une théorie déductive, c'est de la dégager des significations concrètes et intuitives sur lesquelles elle a d'abord été construite, afin d'en faire clairement apparaître le schéma logique abstrait.

Borel n'a pas cherché à appliquer sa théorie de la mesure à l'intégration mais il a signalé en 1905 les applications de sa théorie de la mesure à la théorie des probabilités. Les ensembles « *B*-mesurables » (c'est à dire mesurable pour la mesure de Borel, terminologie introduite par Lebesgue) sont plus commodes à manier en théorie des probabilités (Michel, 1992, p. 58). Ce n'est qu'en 1933 que les axiomes de probabilité, qui reposent sur le théorie de la mesure furent établis, par Kolmogorov (Jahnke, 2003, p. 282). Mais Henri Lebesgue, élève de Borel et de quatre ans son cadet, sut tirer profit des travaux de Borel.

3.4 L'intégrale de Lebesgue

Pour mener cette étude sur la théorie de Lebesgue, nous nous appuyerons sur la thèse de Lebesgue, soutenue et publiée dans le journal Italien *Annali di Matematica* en 1902 (Lebesgue, 1902). C'est dans cette thèse que Lebesgue formalise les résultats de 5 années de recherche dont il avait rendu compte dans les comptes rendus de l'académie des Sciences, entre 1899 et 1901. Nous étudierons également un ouvrage à visée plus didactique, *leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées*

au collège de France, qui réunit les leçons professées par Lebesgue en tant que chargé de cours au collège de France pendant l'année 1902-1903. Ces ouvrages sont, pour nous, des sources primaires. Mais nous reprendrons aussi des travaux d'historiens et de philosophes des sciences, comme ceux déjà cités de Michel (1992), Hawkins (1975), Villeneuve (2009).

Dans l'introduction de sa thèse, Lebesgue (1902) expose les objectifs de son étude : d'une part, la définition de l'intégrale donnée par Riemann ne résout pas le problème de l'intégration (Lebesgue utilise l'expression *problème fondamental du calcul intégral*, puisqu'il existe des fonctions dérivées qui ne sont pas intégrables (et donc pour lesquelles les intégrales indéfinies n'existent pas). Pour Lebesgue, le problème fondamental de l'intégration n'est pas résolu. De plus, pour le calcul effectif d'intégrale de fonction définie par des séries, il souhaite pouvoir, sous certaines conditions, intégrer terme à terme des séries.

Puis, comme l'a également remarqué Jordan, l'aire des surfaces n'ayant pas des plans tangents continus n'est pas définie, ce qui fait dire à Lebesgue :

il y a donc lieu de chercher une définition de l'aire et peut-être aussi de modifier celle de longueur de façon que ces deux définitions soient aussi analogues que possibles.

3.4.1 La mesure de Lebesgue

Lebesgue commence par définir la mesure des ensembles, en s'inspirant de la méthode d'exposition de Borel : par ses propriétés essentielles, sous forme axiomatique. Il retient, comme Borel, la propriété de σ -additivité. Il énonce le *problème de la mesure* :

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
- Deux ensembles égaux ont même mesure ;
- La mesure de la somme⁵ d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles ;

(Lebesgue, 1904, p. 236)

Pour Hawkins (1975), Lebesgue a accepté le point de vue de Borel sur le fait que la mesure devait être σ -additive. Et même si sa définition de mesure extérieure a été

5. en fait l'union

guidée par les idées de Borel (à partir des sommes infinies de longueur de segment), la définition de mesurabilité et de mesure intérieure apparaît comme une généralisation des idées de Jordan. Pour définir la mesure, Lebesgue va considérer des sous-ensembles de \mathbb{R} , puis de \mathbb{R}^2 .

Si on se donne un ensemble E inclus dans \mathbb{R} , borné, Lebesgue appelle mesure extérieure le nombre :

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} L(I_n), E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\}$$

où les I_n sont des intervalles et $L(I_n)$ leur longueur. La mesure intérieure d'un ensemble E inclus dans un segment $[a, b]$ est

$$m_i(E) = b - a - m_e([a, b] \setminus E)$$

et un ensemble E est déclaré *mesurable* si les mesures extérieures et intérieures sont égales. Sa mesure est alors $m(E) = m_i(E) = m_e(E)$ (Lebesgue, 1902, p. 238).

Ainsi, il prouve que le problème de la mesure est possible pour les ensembles mesurables et que ce problème admet une unique solution. Il montre ensuite que l'union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et les propriétés suivantes :

- $m(E_1 \setminus E_2) = m(E_1) - m(E_2)$ quand $E_2 \subset E_1$;
- $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(E_n)$, lorsque $E_n \subset E_{n+1}$
- $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(E_n)$, lorsque $E_{n+1} \subset E_n$

Le cas du plan est traité de la même manière, mais au lieu de s'appuyer sur les longueurs de segments, il s'appuie sur la mesure des aires des triangles (comme étant la moitié du produit des nombres qui mesurent son côté et sa longueur). La mesure extérieure est alors la limite inférieure de la somme des mesures des triangles dans lesquels on peut enfermer E (Lebesgue, 1902, p. 244). Et Lebesgue déclare que les propriétés s'étendent sans peine aux ensembles d'un espace à plusieurs dimensions.

Enfin, Lebesgue fait le lien avec la mesure de Jordan et avec celle de Borel. Puisque pour tout ensemble borné E ,

$$c_i(E) \subset m_i(E) \subset m_e(E) \subset c_e(E) \tag{3.6}$$

alors tout ensemble mesurable pour la mesure de Jordan est donc mesurable.

De plus, il montre que si E est mesurable, alors il existe deux ensembles E_1 et E_2 mesurables pour la mesure de Borel tels que $E_2 \subset E \subset E_1$ et $m(E_1) = m(E_2) = m(E)$. Ainsi, il formalise ce qu'a affirmé Borel (1898, p. 48) :

Si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble E_1 , alors la mesure de E est supérieure à celle de E_1 , sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments d'un ensemble E alors la mesure de E est inférieure à celle de E_1 .

En fait, il énonce que les ensembles mesurables se distinguent des ensembles B -mesurable (qu'on nomme aujourd'hui des Boréliens) par des ensembles de mesure nulle.

3.4.2 Le lien avec l'intégrale

La mesure des ensembles étant construite, Lebesgue entend généraliser le lien décrit par Peano et Jordan entre la mesure des aires et l'intégrale de Riemann. Nous rappelons ici que pour une fonction f de signe quelconque, on note

$$\int_a^{b*} f = c_e(E^+) - c_i(E^-) \text{ et } \int_{a*}^b f = c_i(E^+) - c_e(E^-)$$

où E^+ et E^- désignent les régions limitées par la courbe représentative de f et dessus ou dessous l'axe des abscisses.

Si l'ensemble E est J -mesurable, alors E^+ et E^- le sont également. L'intégrale est alors $m(E^+) - m(E^-)$ (puisque les ensembles sont également mesurables). Lebesgue généralise alors ce résultat et pose :

si l'ensemble E est mesurable (auquel cas E^+ et E^- le sont), nous appellerons intégrale définie de f , prise entre a et b , la quantité

$$m(E^+) - m(E^-)$$

La fonction f est alors dite *sommable*. (Lebesgue, 1902, p. 250)

Grâce aux inégalités (3.6), il est clair qu'une fonction bornée sommable sur un segment est Riemann-intégrable, et les intégrales coïncident alors. La théorie de Lebesgue contient donc celle de Riemann. Mais pour montrer l'avantage de sa définition par rapport à ses prédécesseurs, Lebesgue devait obtenir une définition plus opérationnelle de l'intégrale. C'est ce qui concerne la deuxième partie de sa thèse et la définition analytique de l'intégrale.

Une fois la mesure construite, Lebesgue peut définir son intégrale avec une définition analytique. Il s'inspire des sommes de Riemann, mais propose un découpage de l'axe des ordonnées au lieu de l'axe des abscisses :

Soit $y(x)$ la fonction comprise entre m et M . Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < \dots < m_{p-1} < M = m_p;$$

$y = m$, quand x fait partie d'un ensemble E_0 ⁶; $m_{i-1} < y \leq m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i ⁷. Considérons l'une ou l'autre des deux sommes

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i ; m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i$$

(λ_i représente la mesure de E_i); si l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite intégrable. (Note des comptes rendus des séances de l'académie des sciences, séance du lundi 29 avril 1901)

Il montre aussi que les fonctions pour lesquelles, pour tout α, β , l'ensemble $\{x; \alpha < f(x) < \beta\}$ est mesurable sont des fonctions sommables. Aujourd'hui, on parle de fonctions *mesurables*. Il se servira de cette caractérisation pour étendre la définition aux fonctions non bornées, et à des ensembles d'intégration non bornée également. Lebesgue fera ainsi la distinction entre les fonctions *sommables* et les fonctions *sommables* et *intégrables* (celles qui sont sommables et dont l'intégrale existe). En particulier, une fonction sommable et non bornée n'est pas forcément intégrable.

Il montre en particulier que les fonctions continues sont sommables, et celles qui sont continues sauf sur un ensemble de mesure nulle sont mesurables. Ainsi les fonctions Riemann-intégrables sont mesurables; il fait ainsi le lien avec les théories de Riemann et de Cauchy : toute fonction continue sur un segment sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nul est intégrable, et l'intégrale de Lebesgue coïncide avec celle de Riemann.

L'intégrale ainsi construite possède les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, « relation de Chasles ») et l'ensemble des fonctions sommables sur un ensemble E est stable par les opérations arithmétiques usuelles. Mais ce qui marque l'accomplissement de la théorie de Lebesgue (Hawkins, 1975, p. 127) concerne les théorèmes portant sur les suites de fonctions :

Théorème 3.4.1. *Si f_n est une suite de fonctions mesurables (sommables) définies sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe, alors f est également mesurable.*

et l'extension au cas de l'intégration sur un ensemble E :

Théorème 3.4.2. *Si f_n est une suite de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable E et tel qu'il existe un réel B , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq B$ $[a, b]$ et si $f(x) =$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe, alors } \int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

6. $E_0 = \{x, f(x) = m\}$

7. $E_i = \{x, m_{i-1} < f(x) \leq m_i\}$

Ce théorème, appelé génériquement théorème de « convergence dominée » constitue pour Lebesgue, un succès dans le champ hérité des problèmes d'analyse. Le passage à la limite sur les suites d'intégrales n'est plus vraiment un problème et l'intégration terme à terme des séries permet de justifier rigoureusement et de manière concise des résultats ou des pratiques antérieures (Michel, 1992) : par exemple, le cas de l'intégration des séries uniformément convergentes devient un cas particulier du théorème de convergence dominée.

Ces théorèmes permettent de fournir des classes de fonctions sommables : les fonctions continues (car limites uniformes de suite de polynômes, eux même sommables), les limites de suites de polynômes (les fonctions de la *1ère classe de Baire*) (Lebesgue, 1902, p. 257), mais également de fournir des exemples de fonctions sommables non Riemann-intégrables. Le cas du « monstre de Dirichlet » en est un exemple emblématique.

3.4.3 L'intégrale de Lebesgue et les primitives

Dans sa thèse, Lebesgue donne la définition de *l'intégrale indéfinie* :

On appelle intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$, ayant une intégrale définie dans un intervalle $]\alpha, \beta[$, une fonction $F(x)$ définie dans $]\alpha, \beta[$ et telle que, quels que soient a et b compris entre α et β , on ait :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(Lebesgue, 1902, p. 260)

En particulier, on a, pour tout x dans $[a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

Lebesgue montre que l'intégrale indéfinie est une fonction continue dans le cas général (c'est à dire que f soit bornée ou non, du moment qu'elle possède une intégrale) et que, dans le cas où f est continue, la fonction F est dérivable de dérivée f . Ainsi, il y a identité entre intégrale indéfinie et primitive, pour le cas des fonctions continues, mais cela était déjà vu dans le cadre de la théorie de Riemann.

L'intégrale de Riemann n'a pas permis résoudre le problème posé par la relation

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

puisque'il existe des fonctions dérivables dont la dérivée est bornée mais non Riemann-intégrable.

Le théorème de convergence dominé (Théorème 3.4.2), appliqué à la fonction

$$h \mapsto g_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

permet de prouver le théorème suivant :

Théorème 3.4.3. *Si f' existe et est bornée sur $[a, b]$, alors f' est sommable et*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

La preuve utilise la continuité de f pour assurer que la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable, de dérivée f . Ainsi, toute fonction dérivée bornée admet une intégrale, et son intégrale coïncide avec ses primitives. Le calcul de ces primitives ne peut pas forcément se faire avec les sommes de Riemann.

Le théorème précédent suppose encore que la dérivée f' doit être bornée et Lebesgue a pu établir le théorème suivant :

Théorème 3.4.4. *Si f' est à valeurs finies⁸, alors f' a une intégrale si et seulement si f est à variation⁹ bornée. Dans ce cas, on a*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

et la variation de f est $\int_a^b |f'|$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une dérivée ait un intégrale est que sa fonction primitive soit à variation bornée. Dès que cela se produit, alors primitive et intégrale indéfinie coïncident. Pour autant, l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (fonction continue à variation non bornée, dérivable) donne une fonction f' , non bornée mais sommable, qui n'admet pas d'intégrale au sens de Lebesgue (mais qui admet, par définition une primitive). Ainsi, puisque l'intégrale ne donne pas un moyen de calcul pour obtenir les primitives de toutes les dérivées Lebesgue (1902, p. 272) déclare :

Le problème de la recherche des primitives n'est pas complètement résolu.

8. ne prenant pas les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$

9. la borne supérieure des sommes $\sum f(x_i) - f(x_{i-1})$ prises sur les subdivisions $\sigma = x_0 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$

3.4.4 Le problème de l'intégrale

Après la publication de sa thèse, Lebesgue a enseigné l'intégration au collège de France. Ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* présente une autre présentation de sa théorie, que nous allons analyser ici.

Après avoir donné la définition géométrique de l'intégrale de Riemann avec la mesure de Jordan, Lebesgue (1904), définit ce qu'il appelle *le problème d'intégration*. Au lieu de définir à priori la mesure (comme il l'avait fait dans sa thèse), Lebesgue s'appuie sur les travaux de Riemann pour dégager un certain nombre de propriétés simples que doit vérifier l'intégrale. Lebesgue (1904, p. 98) propose ainsi

d'attacher à toute fonction bornée $f(x)$ définie dans un intervalle fini $[a, b]$, un nombre fini, $\int_a^b f(x)dx$ que nous appelons l'intégrale de f dans $[a, b]$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

1. Quels que soient a, b, h , on a $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$;
2. Quels que soient a, b, c , on a $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$;
3. Quels que soient a, b , on a $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
4. Si $f \geq 0$ et $b > a$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
5. $\int_0^1 1dx = 1$;
6. Si f_n est une suite de fonctions bornées qui convergent ponctuellement en croissant vers une fonction bornée f , alors les intégrales des f_n convergent vers l'intégrale de f .

Les 5 premières conditions sont vérifiées par l'intégrale de Riemann, ce qui n'est pas le cas de la 6ème : la suite de fonctions f_n définie par $f_n = \mathbf{1}_{q_1, \dots, q_n}$ où q_k est le k -ième rationnel de $[0, 1]$ converge en croissant vers « le monstre de Dirichlet » qui n'est pas Riemann-intégrable alors que toutes les fonctions f_n le sont. Pour Lebesgue, la condition 6 est particulière et marque, d'un point de vue opératoire, la supériorité définitive de l'intégrale de Lebesgue sur celle de Riemann (Michel, 1992, p. 85). Bourbaki (2007, p. 280) désigne cette condition comme étant la pierre angulaire de l'exposé didactique de la théorie de Lebesgue.

Il s'agit d'une définition *descriptive* de l'intégrale (tandis que la définition de Riemann est *constructive*), c'est à dire que cette définition énonce des propriétés essentielles. C'est ce type de définition que Borel avait donné à propos de la théorie de la

mesure, puis Lebesgue lui-même, et qui conduit au point de vue axiomatique. Dans ses leçons, Lebesgue va donc chercher à résoudre ce problème de l'intégration, en établissant l'existence d'une classe d'objets qui vérifient les conditions énoncées, puis l'unicité de la classe constituée.

Des propriétés 3 et 4, on déduit une propriété d'homogénéité, que Lebesgue appelle la condition S : pour tout réel k ,

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Puis, il démontre que pour savoir calculer l'intégrale d'une fonction quelconque f , il suffit de savoir calculer l'intégrale de fonctions indicatrices d'ensembles. En effet, l'idée de Lebesgue est de considérer un découpage $l_0 < l_1 < \dots < l_n$ de l'intervalle $[\inf f, \sup f]$ (f est bornée), tel que pour tout i , $l_i - l_{i-1} < \varepsilon$. Il considère alors les ensembles $E_i = \{x \in [a, b], f(x) = l_i\}$ et $F_i = \{x \in [a, b], l_{i-1} < f(x) < l_i\}$ et les fonctions ψ_i fonction indicatrice de $E_i \cup F_i$. Il est clair que pour tout x ,

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n l_i \phi_i(x) \leq f(x) \leq \sum_{i=0}^n l_i \phi_i(x) = \phi(x)$$

Les fonctions ϕ et φ convergent uniformément vers f , et donc, pour Lebesgue, il suffit de savoir calculer l'intégrale d'une fonction indicatrice (puisque les fonctions φ et ϕ sont des combinaisons linéaires d'indicatrices) pour savoir calculer l'intégrale d'une fonction quelconque.

Cette question du calcul de l'intégrale d'une fonction indicatrice conduit Lebesgue à présenter *le problème de la mesure des ensembles*. En effet, il s'agit d'associer à chaque ensemble borné E , un nombre qui sera l'intégrale de l'indicatrice de E . La reformulation du problème de l'intégrale en termes de mesure revient en effet à attacher à chaque ensemble borné E de \mathbb{R} un nombre $m(E)$ tel que

- Deux ensembles égaux ont même mesure ;
- L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures ;
- La mesure de l'ensemble de tous les points de $[0, 1]$ est 1.

La deuxième condition, la σ -additivité, apparaît ainsi comme une nécessité due à la dernière condition du problème de l'intégration (qui est la propriété de convergence monotone) et est combinée à la propriété de linéarité que Lebesgue impose a priori à l'intégrale.

La suite de l'exposé consiste à définir, comme dans sa thèse, la mesure par la mesure extérieure et intérieure. Il précise alors que l'union et l'intersection dénombrable d'une famille d'ensembles mesurables est mesurable.

Enfin, il introduit la terminologie de fonctions mesurables (au lieu de fonction sommables dans sa thèse) et donne les définitions actuelles (Lebesgue, 1904, p. 111) :

Définition 3.4.1. *Une fonction f bornée ou non est mesurable si, pour tout α, β , l'ensemble $\{x; \alpha < f(x) < \beta\}$ est mesurable.*

Dans ce cas, les ensembles $\{x; f(x) = \beta\}$ et $\{x; \alpha < f(x)\}$ sont mesurables, et on peut effectuer sur les fonctions mesurables, toutes les opérations déjà évoquées.

La terminologie employée par Lebesgue a donc évolué en distinguant sommable et mesurable, comme il le précise dans une note (Lebesgue, 1904, p. 115) :

Je m'écarte ici du langage adopté dans ma thèse où j'appelais *fonctions sommables* celles que j'appelle maintenant *fonctions mesurables*. Avec les conventions du texte, le mot *sommable* joue dans la théorie de l'intégrale le même rôle que le mot *intégrable* dans la théorie riemannienne.

L'intégrale ainsi construite vérifie ainsi les points 1 à 5 du problème d'intégration. Et pour montrer le point 6, Lebesgue démontre le théorème : si les fonctions mesurables f_n , bornées dans leur ensemble, ont une limite f , alors l'intégrale de f_n tend vers celle de f . On reconnaîtra ici le théorème de convergence dominée déjà évoqué précédemment.

Enfin, Lebesgue revient sur le problème de la recherche de primitive et apporte, par rapport à sa thèse, un nouveau résultat :

Théorème 3.4.5. *L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable admet cette fonction pour dérivée sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.*

Autrement dit, si f est sommable sur un segment $[a, b]$, alors $\left(\int_a^x f\right)' = f$ presque partout¹⁰. La méthode pour la preuve est originale puisqu'elle utilise les fonctions caractéristiques (méthode qui deviendra classique) et dont l'origine est manifestement géométrique (Michel, 1992, p. 111).

La théorie exposée par Lebesgue dans ses écrits est une théorie de l'intégration portant sur les fonctions réelles, et l'intégrale est construite à partir de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Mais les méthodes qu'il a exposées vont ouvrir un champs important de recherches en mathématiques sur l'intégration.

3.4.5 Le développement de l'intégrale de Lebesgue

Dans cette section, nous utiliserons, en plus des ouvrages déjà cités, la deuxième édition des *Leçons sur l'intégration et la recherches des fonctions primitives professées au collège de France* (Lebesgue, 1928). Dans la préface à cette deuxième édition, Lebesgue indique avoir cherché à « grossir [l'ouvrage] des nombreux travaux publiés sur

10. La terminologie « presque partout » a été introduite plus tard par Lebesgue (Hawkins, 1975, p. 138)

ces sujets durant vingt-années », c'est à dire depuis la publication de sa thèse et de la première édition des leçons.

Hawkins (1975) le souligne : les travaux menés dans les premières années du 20ème siècle ont apporté la démonstration de la portée de la nouvelle théorie de l'intégration de Lebesgue. En particulier, Michel (1992, p. 122) indique que les recherches menées dans d'autres branches des mathématiques par Pierre Fatou (1878-1929), Ernst Sigismund Fisher (1875-1954), Maurice Fréchet 1878-1973, Frigyes Riesz (1880-1956) ont conduit à la généralisation des résultats de Lebesgue aux fonctions d'ensembles, puis aux mesures abstraites.

Un des progrès de la théorie de Lebesgue concerne les intégrales multiples. Nous avons déjà évoqué les limites de la théorie de Riemann vis à vis des intégrales multiples (voir la fonction de Thomae (3.4)). Dans sa thèse, Lebesgue (1902, p. 280) montre que lorsque la fonction $f(x,y)$ est limite simple de fonctions continues (par rapport à l'ensemble des variables) ou fonctions de première classe de Baire, ou limite simple d'une suite de fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe, et d'une manière générale toutes les fonctions de classe n , n étant fini ¹¹ alors il en est de même des fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ et on a :

$$\iint f(x,y)dx dy = \int dx \int f(x,y)dy \quad (3.7)$$

où l'intégrale est prise sur un rectangle. Fubini apporte un complément important à ce résultat en prouvant que si f est intégrable, alors l'ensemble des x tel que $y \mapsto f(x,y)$ n'est pas intégrable est de mesure nulle, ce qui permet donc d'étendre la formule (3.7) au cas des fonctions intégrables. Enfin, en cherchant à étendre les résultats sur les dérivées des intégrales simples au cas des intégrales multiples, Lebesgue introduit la notion de fonction d'ensemble associée à une fonction f , intégrable sur toutes les parties compactes de \mathbb{R}^n , par

$$F(E) = \int_E f(X)dX.$$

Il montre que cette fonction d'ensemble est *complètement additive* ¹² et *absolument continue* ¹³ et il généralise la notion de fonction à variation bornée aux fonctions mesurables. Bien qu'il se limite aux pavés de \mathbb{R}^n , cela allait aboutir à la notion générale de mesure que va définir J. Radon en 1913 (Bourbaki, 2007, p. 283). Mais avant la théorie générale de la mesure, nous parlerons de l'intégrale de Stilejès.

11. on parle de fonction de Baire (Lebesgue, 1902, p. 257) : une fonction de première classe est la limite simple d'une suite de fonctions polynomiales, une fonction de seconde classe est la limite de fonctions de première classe, etc. Lebesgue (1898) a étendu le résultat de Weirstrass sur l'approximation polynômiale au cas des fonctions de deux variables

12. L'image d'une union dénombrable et disjointe deux à deux d'ensemble est la somme des images

13. $F(E)$ tend vers 0 lorsque la mesure de E tend vers 0

L'origine des travaux de T-J Stieltjès (1856-1894) provient de l'étude des fractions continues. Selon Michel (1992, p. 131), Stieltjès construit son intégrale par analogie avec le *problème des moments* rencontré en physique classique : trouver une distribution de masses positives sur une droite connaissant les moments d'ordre k .

Considérons sur une droite infinie OX une distribution de masse (positive), la masse m_i se trouvant concentrée à la distance ξ_i de l'origine O . La somme $\sum m_i \xi_i^k$ peut être appelé *moment d'ordre k* de la masse par rapport à l'origine.

Stieltjès remarque que la donnée d'une telle distribution équivaut à la donnée d'une fonction croissante, φ , qui donne la masse totale contenue dans l'intervalle d'extrémités 0 et x pour $x > 0$ (Bourbaki, 2007, p. 284).

Pour une telle distribution de masse dans un intervalle $[a, b]$ (donc une fonction croissante), en posant $a = x_0$, $b = x_n$ et en intercalent entre x_0 et x_n les $n - 1$ valeurs $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, il forme la « somme de Riemann »

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^k (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))$$

qui correspond au *moment d'ordre k* . En reprenant les idées de Riemann, la limite d'une telle somme sera notée

$$\int_a^b x^k d\varphi(x)$$

et plus généralement, lorsque f est une fonction continue sur $[a, b]$ (le seul cas considéré par Stieltjès), il désigne par

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x)$$

la limite de la somme

$$\sum_{i=0}^n f(\xi_i) (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)).$$

En fait, Stieltjès ne se préoccupe pas de la classe des fonctions à intégrer, mais pour une même fonction f (en fait, il se limite aux fonctions continues), il définit autant d'intégrale que l'on veut (il suffit de se donner une fonction croissante ϕ).

Pour mettre en évidence l'extension de la notion d'intégrale présentée par Stieltjès, il faut attendre les travaux de Riesz qui, dans le cadre de la résolution d'un problème posé par Hadamard ¹⁴ montre que les intégrales de Stieltjès $f \mapsto \int_a^b f d\varphi$ sont les fonctionnelles linéaires continues les plus générales sur l'espace des fonctions continue sur

14. Chercher les fonctionnelles linéaires continues les plus générales sur l'espace des fonctions continues sur un segment, une fonctionnelle linéaire étant un opérateur qui à chaque fonction f appartenant à une certaine classe associe un nombre $A(f)$ tel que $A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2)$ et $A(f) \leq M \sup |f|$.

$I = [a, b]$. Michel (1992, p. 143) souligne que le fait de produire, à partir de φ , un opérateur linéaire bouleverse la conception de la théorie de l'intégration : l'attention porte sur l'opérateur plutôt que sur la « fonction-mesure φ ». De plus, le problème des moments conduit Riesz à reformuler un problème posé par Hilbert : étant donné un système orthogonal de fonctions f_n données et une suite de nombres a_n , quelles sont les fonctions ϕ ou φ qui vérifient, pour tout n

$$\int_a^b f_n(x)\phi(x)dx = a_n$$

ou encore

$$\int_a^b f_n(x)d\varphi(x) = a_n.$$

Le *théorème de représentation*, établi en 1907 indépendamment par Fréchet et Riesz, indique que si le système orthogonal f_n est de carré sommable, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction ϕ existe est que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. L'espace de fonction de carré intégrable sera noté L^2 , strictement inclus dans l'espace L^1 . L'espace L^2 possède des propriétés de structure spécifiques : il est muni d'une structure euclidienne et la convergence des suites y a lieu en moyenne quadratique¹⁵. Les espaces L^1 et L^2 sont des cas particuliers des espaces L^p des fonctions dites « de puissances p -ième sommables » qui allait conduire Banach à la théorie des espaces normés, cadre privilégié pour l'exposition de l'analyse moderne (Michel, 1992, p. 146)

Johann Radon (1887-1956), dans son mémoire *Theorie und Anwendungen des absolut additiven Mengenfunktionen* (Radon, 1913), allait produire une généralisation fertile en combinant les idées de Riez et Lebesgue : au lieu de partir de la mesure de Lebesgue, il considérera une fonction complètement additive d'ensemble, définie sur les ensembles mesurables (pour la mesure de Lebesgue) sur \mathbb{R}^n . Une telle fonction est une *mesure de Radon*. Il montre comment obtenir une nouvelle intégrale avec les procédés de Lebesgue en partant donc d'une mesure de Radon.

Bourbaki (2007, p. 286) considère que le mémoire de Radon marquait le moment de l'achèvement de la théorie générale de l'intégration. Pourtant, l'intégrale de Lebesgue a été considérée pendant longtemps par les mathématiciens comme un instrument de haute précision, de maniement délicat, et destiné à des recherches d'une extrême subtilité et d'une extrême abstraction. L'émergence des structures (l'ensemble des réels n'est plus posé que comme un exemple de corps, pourvu des propriétés qui rendent praticables les opérations de l'analyse) engendre l'inauguration d'un style structural, qui sépare la mise en oeuvre des méthodes traditionnelles avec l'investissement par les structures (Michel, 1992, p. 291). L'ouvrage de C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen* paru en 1927 (Carathodory, 1927) a permis de faire de l'intégrale de Lebesgue un instrument mathématiques d'usage courant et met définitivement l'accent

15. $\int |f_n - f|^2 \rightarrow 0$

sur la mesure au détriment de l'intégrale, avec un exposé axiomatisé. Le recours aux procédures de l'algèbre apparaît comme un moyen de dégager l'essentiel du concept, de se donner des outils de traitement global (Michel, 1992, p. 292). L'impact de la méthode axiomatique de Hilbert et de la réécriture conceptuelle de l'algèbre va conduire, par l'influence de Bourbaki, à la présentation structuraliste de toute la mathématique.

Les applications de l'intégrale de Lebesgue sont nombreuses et concernent notamment la théorie des probabilités (qui devient une branche de l'intégration), la théorie ergodique, la théorie spectrale et l'analyse harmonique.

3.5 Conclusion sur l'analyse épistémologique

L'analyse épistémologique que nous venons de mener nous apporte des éléments de réponses aux questions que nous rappelons : *Quelles sont les raisons d'être des différentes théories de l'intégration et pourquoi ont-elles émergé dans l'histoire ? Quels sont les liens entre les différentes théories de l'intégration ?*

Nous avons vu que l'émergence de la théorie de l'intégrale de Cauchy a été possible après l'entrée de la rigueur dans l'analyse, la formalisation de la notion de fonction, et de continuité. Cette volonté de rigueur a également été à l'origine du questionnement devant l'insuffisance de la définition de l'intégrale comme « aire sous la courbe ». Lebesgue (1928, p. 20) le souligne :

Pour démontrer l'existence des fonctions primitives des fonction continues, il suffit de reprendre la démonstration géométrique en faisant appel à la notion d'aire. Cette notion est assez délicate lorsqu'il s'agit de domaines limités par des courbes géométriques simples, le devient plus encore lorsqu'il s'agit des domaines intervenant dans la démonstration [de l'existence des fonctions primitives]. Les courbes qui limitent ces domaines ne sont plus nécessairement des courbes géométriques, elles peuvent être formées de parties de courbes géométriques qui peuvent être compliquées, sans savoir où s'arrête ces complications.

La notion de somme de Cauchy et la preuve de la convergence de ces sommes ont ainsi donné un moyen de calculer des primitives, quand les primitives servent à calculer des intégrales définies.

L'étude plus fine des fonctions numériques, en particulier à travers les séries trigonométriques a conduit Riemann à chercher les fonctions pour lesquelles les sommes de Cauchy convergent. L'exploration de \mathbb{R} à travers les sous-ensembles de discontinuité des fonctions a ainsi permis le développement de la théorie de Riemann, jusqu'à la caractérisation des fonctions Riemann-intégrable comme fonctions d'ensemble de discontinuité de mesure nulle (même si cette dernière formulation est due à Lebesgue). Cette

caractérisation permet de retrouver les propriétés de stabilité de l'ensemble des fonctions intégrables (fonctions obtenues par des opérations arithmétiques usuelles entre fonctions intégrables, limite uniforme d'une suite de fonctions) et la compatibilité avec l'intégrale ¹⁶.

Les études des sous-ensembles de \mathbb{R} , ensembles des points de discontinuité des fonctions, a ainsi nourri la théorie de la mesure, en parallèle de précisions sur le concept d'aire : d'abord par Peano, puis par Jordan qui ont été les premiers à formaliser une notion d'aire et de la relier à l'intégrale de Riemann via les sommes de Darboux : la condition de Riemann-intégrabilité (équivalente à la convergence des sommes de Darboux) est ainsi équivalente à l'égalité des mesures intérieures et extérieures de la surface limité par la courbe. La mesure des ensembles, en particulier de \mathbb{R}^2 , formalisée par Jordan ne dispose pas de la propriété d'additivité dénombrable. Mais c'est enfin le retour à l'étude des sous-ensemble de \mathbb{R} qui allait conduire Borel à introduire la notion de σ -additivité pour définir sa mesure, que retiendra ensuite Lebesgue.

Le lien entre primitive et intégrale est centrale dans les travaux de Lebesgue, comme celui entre l'intégrale et la mesure. Pour définir l'intégrale, il s'appuie donc sur la notion de mesure, qui, en quelque sorte, réalise la synthèse entre les travaux des Peano-Jordan et Borel : il définit la mesure des ensembles en sélectionnant, comme Borel, la σ -additivité. Puis il caractérise, comme Jordan, les ensembles mesurables comme ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales. Enfin, comme Jordan qui a relié l'aire et l'intégrale de Riemann, il définit son intégrale avec la mesure.

L'intégrale prolonge celle de Riemann et n'impose (presque) pas de condition sur la fonction (Lebesgue pensait que toutes les fonctions étaient mesurables), mais ne résout pas complètement le problème des primitives. Mais l'apport est notoire, en particulier pour les fonctions dérivées bornées. Le deuxième objectif de Lebesgue est de construire une intégrale pour laquelle $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f$, ce qu'il parvient à faire avec le théorème de convergence dominée. L'idée de σ -additivité est déjà présente dans les travaux de Borel qui a étudié l'ensemble des points singuliers d'une série de fonctions : la construction de la mesure de Lebesgue des sous-ensembles de \mathbb{R} reprend pas à pas la construction de la mesure de Borel, en introduisant une nouvelle classe d'ensembles qui contient les boréliens et les ensembles de mesure nulle.

La théorie de Lebesgue apparaît comme un objet central de l'analyse mathématique : à la fois comme conclusion d'une « aventure » qui démarre chez les grecs avec la mesure des aires, mais à la fois comme la porte d'entrée vers des développements dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique : mécanique quantique, probabilités, analyse fonctionnelle. Notre étude a mis en avant les problèmes (mathématiques) qui ont favorisé l'émergence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue à travers des questions théoriques posées par l'intégrale de Riemann. Nous avons aussi établi les

16. La limite uniforme d'une suite de fonction Riemann-intégrable est intégrable et la limite des intégrales est l'intégrale de la limite

différentes étapes de la formalisation de la théorie de la mesure, ses liens avec les théories de l'intégration et enfin ce qui a constitué une théorie plus générale de la théorie de la mesure et permis des développements importants.

L'étude épistémologique montre ainsi le caractère polysémique de l'intégrale lorsque l'on enseigne l'objet intégrale : l'intégrale définie comme Newton ($\int_a^b f = F(b) - F(a)$), ou bien en considérant comme notion primitive l'aire sous la courbe ; l'intégrale comme Cauchy, en se limitant aux fonctions continues ou continues par morceaux ; comme Riemann, comme Lebesgue, etc.

Nous avons ainsi identifié les différentes intégrales qui vont servir de référence aux différentes intégrales enseignées au lycée et à l'université. Mais cette étude soulève de nouvelles questions : quelles sont les théories de l'intégration dominantes dans les institutions universitaires en France ? En particulier à l'université de Montpellier ? Quels sont les éléments mis en avant par la noosphère sur les choix des théories à enseigner ? Les raisons d'être des différentes théories sont-elles mises en avant dans l'enseignement ? Et au niveau de l'enseignement secondaire, quels liens peut-on tirer de notre étude épistémologique entre l'intégrale enseignée au lycée et les théories de l'intégration plus avancées ?

CHAPITRE 4

Étude de la transposition didactique externe du concept
d'intégrale à l'université

4.1 Introduction

Notre étude de l'épistémologie historique a mis en lumière des théories de l'intégration pouvant servir de référence aux différentes théories de l'intégration enseignées dans les universités françaises durant les trois premières années de la licence de mathématiques (L1, L2, L3) : l'intégrale de Cauchy, l'intégrale de Riemann, l'intégrale de Lebesgue sont-elles effectivement les intégrales dominantes à l'université en France ? En particulier, le fait d'enseigner l'intégrale de Riemann puis l'intégrale de Lebesgue est-il le choix de la majorité des universités ?

Les programmes des universités, en France, sont à la charge de commissions formées d'enseignants-chercheurs des universités (Bosch et al., 2021) et en ce sens, nous pouvons considérer que ces commissions ont en charge le processus de transposition didactique externe, dont le produit est le programme d'étude, divisé en UE, et le syllabus de chacune des UE. Mais bien que cette étape de la transposition se déroule localement, au sein des universités, elle s'accompagne d'une dynamique communautaire où la réflexion sur l'enseignement est partagée et confrontée aux pairs, dans l'esprit du fonctionnement du monde académique. Les débats qui résultent de ce travail de fond sont alors visibles dans les journaux des sociétés savantes au sein desquels ils sont publiés. Ainsi, certaines revues comportent des sections « enseignement », c'est le cas, par exemple, du bulletin de la SMF¹. Quels sont les éléments que l'on trouve dans ces revues qui peuvent participer au processus de transposition didactique externe de l'intégrale ? Quelles tensions nous révèlent ces débats au sein de la noosphère ? Quelles sont les raisons de ces choix mis en avant par la noosphère ?

Puis, nous étudierons les différents choix de transposition didactique externe de l'intégrale dans différentes universités françaises. Quels sont les habitats des différents concepts d'intégrale dans ces universités ? Les niches écologiques dans ces universités ?

Le but de ce chapitre est donc de poursuivre l'étude de notre premier groupe de questions de recherches dont nous rappelons l'énoncé :

QR₁ : Comment expliquer, d'un point de vue épistémologique, la pluralité des théories de l'intégration enseignées à l'université ? Quels sont les différents choix de transposition didactique externe opérés par les universités françaises du concept d'intégrale ? Quelles sont les raisons de ces choix mis en avant par la noosphère ?

4.2 Méthodologie

Pour répondre à ces questions, nous allons d'abord sélectionner un corpus de données. Dans un premier temps, et parce que nous pensons que les débats sur l'enseignement au sein de la communauté des mathématiciens, notamment à travers les publica-

1. Société Mathématique de France

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

tions des sociétés savantes telles que la Société Mathématique de France, participent au processus de transposition didactique externe, nous analyserons différents articles que nous présentons rapidement ci-après.

Hervé Queffélec a publié en 2012 un article dans la gazette des mathématiques sur des "Réflexions sur l'enseignement de l'intégration" (Queffélec, 2012). L'auteur est Professeur de l'université de Lille 1 et mène ses recherches en analyse fonctionnelle et a été membre du jury de l'agrégation externe de mathématiques. Les réflexions qu'il propose, sur l'intégration, portent essentiellement sur l'intégrale de Riemann et sur l'introduction de l'intégrale de Lebesgue.

En réponse à l'article d'Hervé Queffélec, Marc Rogalski a publié un article dans la Gazette des mathématiciens : « sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure : faire simple et pédagogique ? » (M. Rogalski, 2013), en réponse à l'article de Queffélec.

Marc Rogalski est professeur émérite de l'université de Lille 1 et mène ses recherches en analyse et en didactique des mathématiques.

Enfin, nous analyserons aussi l'article de Roger Cuculière publié dans la revue repère-Irem : « quelle intégrale pour l'an 2000 » (Cuculière, 1998) qui préconise l'enseignement de l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

Puis, nous rendrons compte des choix opérés par des universités en France, pour lesquels le descriptif des enseignements de la licence était disponible en ligne. Les syllabus des universités (produits de la transposition didactique externe) sont pour nous les données que nous allons analyser. Pour chacune des universités, cette analyse comportera deux étapes :

1. La première partie concerne la structure du curriculum dans la licence de mathématiques. Nous nous appuyerons sur la grille d'analyse issue de (Bosch et al., 2021) :
 - Les caractéristiques générales des programmes (durée des UE, flexibilité des parcours) : nous donnerons en particulier le nombre d'heures « étudiant » consacrées aux modules d'intégrations, ainsi que les parties du curriculum spécifiques à l'intégration qui sont optionnelles dans les parcours « enseignements ».
 - Présence de modules qui ne sont pas dépendants d'un savoir particulier, par exemple les modules de type « calculus » qui peuvent être un habitat pour l'intégration.
 - Les modules optionnels pour les parcours « enseignements » ou « mathématiques fondamentales »
2. La deuxième partie concerne l'étude écologique des syllabus :
 - Quels sont les habitats des différents concepts d'intégrale ?

- Quelles sont les niches écologiques des différents concepts ?
- Quels sont les réseaux trophiques de chacun des concepts d'intégrale ?

Nous rendrons compte de cette analyse à l'aide de deux outils de représentation. D'abord, nous regrouperons les données qui concernent la structure du curriculum et celles qui concernent les niches et habitats sous la forme d'un tableau :

	L1	L2	L3
Théorie de l'intégration			

et

	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)		
Intégrale de Cauchy		
Intégrale de Riemann		
Intégrale de Lebesgue		
Théorie de la mesure		

Puis, les données qui concernent les réseaux trophiques seront représentées sous la forme d'un diagramme, où les flèches orientées signifient qu'un concept fait vivre un autre concept. L'étude de ces réseaux ne se fera qu'à partir des syllabus disponibles. Parfois, ces syllabus indiquent les pré-requis, ou bien ils indiquent en préambule des concepts à étudier. Ce sont ces éléments qui nous donneront les réseaux trophiques.

Cette partie de l'étude sera descriptive et permettra de dire si l'on peut considérer qu'un modèle est dominant.

4.3 Éléments de synthèse des débats au sein de la communauté des mathématiciens

Notre enquête épistémologique historique a donc montré le caractère polysémique de l'intégrale. Dès lors, la question du choix de la théorie à enseigner à l'université se pose. Ainsi le souligne Henri Queffélec :

Quelle théorie de l'intégration enseigner à nos chers étudiants en voie de disparition, et qui bâillent discrètement, mais uniformément continûment, à chacune de nos explications ou démonstrations ? Riemann, Lebesgue, les deux ? Ou bien Henstock, Daniell, Denjoy-Perron ? (Queffélec, 2012)

Notre objectif est ici de mettre en lumière les arguments mis en avant par des mathématiciens pour justifier le choix de l'enseignement d'une théorie de l'intégration plutôt qu'une autre.

4.3.1 Le point de vue d'Hervé Queffélec

L'article proposé par Queffélec (2012) comporte 3 grandes parties : la première sur l'intégrale de Riemann, la seconde sur l'intégrale de Lebesgue, et la troisième (très courte) sur l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

Le chapitre sur l'intégrale de Riemann expose des raisons écologiques de l'enseignement de l'intégrale de Riemann, alors que le chapitre sur l'intégrale de Lebesgue consiste en la donnée d'éléments théoriques sur l'intégrale de Lebesgue et des propositions de présentation de la théorie de la mesure. Il ne s'agit pas de la production de savoir enseigné, nous considérons donc que ces propositions participent au processus de transposition didactique externe, et que donc cet article peut apparaître comme un élément de la noosphère.

Queffélec décrit d'abord l'intégrale de Riemann comme une « théorie avec beaucoup d'applications », et se pose en opposition avec les propos de Jean Dieudonné sur la question. Dieudonné, Huet, et Julia (2003), en introduction du chapitre sur le calcul différentiel du tome 1 des *fondements de l'analyse moderne*, expliquent des raisons du choix de ne pas présenter la théorie de Riemann :

Le lecteur remarquera probablement l'absence d'un sujet vénérable des cours de Calcul infinitésimal, « l'intégrale de Riemann ». Il est probable que, n'eût été son nom prestigieux, elle aurait été abandonnée depuis longtemps, car (avec le respect dû au génie de Riemann) il est bien évident que pour tout mathématicien d'aujourd'hui une telle « théorie » a au plus l'importance d'un exercice moyennement intéressant de la théorie de la mesure et de l'intégration. Seul le conservatisme opiniâtre de la tradition académique a pu la maintenir comme partie obligée des cours. (...) Lorsqu'on a besoin d'un outil puissant, il n'y a pas de raison de s'arrêter à mi-chemin, et la seule attitude raisonnable est d'avoir recours à la théorie générale de l'intégration de Lebesgue.

Dans cet extrait, Dieudonné souligne que la tradition académique apparaît comme une contrainte dans le processus de transposition didactique, puisqu'il justifie l'enseignement de la théorie de Riemann par le conservatisme de la tradition académique. Dans

notre enquête historique, nous avons relevé que l'intégrale de Lebesgue a attendu 30 ans avant d'être effectivement reconnue par la communauté des mathématiciens, et par suite par les institutions d'enseignement. Il pense également que l'on peut limiter les procédés d'intégration à des classes de fonctions proches des fonctions continues (en fait les fonctions réglées) assez large pour toutes les applications de l'analyse élémentaires afin d'éviter d'avoir recours à la théorie de la mesure (Dieudonné et al., 2003, p. 150). Mais pour les besoins de l'activité mathématiques, il considère que la théorie générale de l'intégration de Lebesgue est à étudier.

Queffélec, explique que le choix d'une théorie de l'intégration dépend de ce que l'on veut en faire, puis souligne que l'intégrale de Riemann est une théorie avec beaucoup d'applications. Mais comme le soulignera Rogalski, les applications proposées par Queffélec sont d'un niveau mathématique avancé, malgré le fait que, pour Queffélec, la théorie de Riemann est d'exposition assez simple.

Les exemples proposés dans l'article couvrent un spectre assez large des mathématiques : la théorie de Riemann a pour niche la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz dans l'habitat du calcul différentiel, le théorème d'approximation polynomiale en analyse numérique, la transcendance de e et l'irrationalité de π^2 en théorie des nombres, ou le critère d'équidistribution de Weyl), puis dans l'habitat de l'analyse complexe, la formule de Cauchy et théorie de l'indice et l'analyse de Fourier.

Cela montre la portée de la théorie de Riemann et peut corroborer ce qui était décrit par Bourbaki (2007, p286) : l'intégrale de Lebesgue a été considéré pendant longtemps par les mathématiciens comme un instrument de haute précision, de maniement délicat, et destiné à des recherches d'une extrême subtilité et d'une extrême abstraction. Les exemples donnés ici montrent que, même avec la théorie de Riemann, il est possible de faire des mathématiques à un niveau avancé. Le statut des exemples qu'il propose n'est pas explicité : on peut imaginer que cela peut donner lieu à des problèmes, par exemple dans le cadre de la préparation aux concours d'entrée en école d'ingénieur. Si les contraintes le permettent dans l'écologie de la classe, certains de ces théorèmes pourront être choisis comme application de l'intégrale dans un cours, voire organiser une partie du cours par l'ensemble des pré-requis nécessaires à l'exposition de ce théorème.

Ainsi, nous retenons que la théorie de Riemann se trouve dans de nombreuses niches dans des habitats de mathématiques assez avancées. On retrouve ici une fonction de la noosphère qui est de réduire la distance entre les mathématiques à enseigner et la sphère savante.

En plus de ces applications, Queffélec signale la « robustesse » de la théorie : l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable sur un segment est une algèbre et est stable par limite uniforme : la limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrable est encore Riemann intégrable. Cela implique, en particulier, que si f est une fonction Riemann intégrable sur un segment $[a, b]$ et g une fonction continue sur $f([a, b])$, alors $g \circ f$

est encore Riemann-intégrable. Par ailleurs, il est possible de caractériser les fonctions Riemann-intégrable : ce sont celles qui ont un ensemble de points de discontinuité de mesure nulle, c'est à dire telle que l'on peut enfermer ses points de discontinuité dans des intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. Ces éléments sont constitutifs de la théorie de Riemann et sont effectivement bien connus. Ce sont ici des arguments structuralistes (le bon comportement de l'intégrabilité vis à vis des opérations arithmétiques usuelles et de passage à la limite uniforme) qui sont mis en avant par Queffélec.

Enfin, la théorie de Riemann fournit des outils techniques de calculs de primitives : la formule d'intégration par parties, la formule du changement de variable, et on dispose d'un théorème de convergence dominée :

Théorème 4.3.1. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues positives sur $[0, 1]$, convergeant simplement vers 0 et telle qu'il existe une fonction ϕ improprement intégrable sur $[0, 1]$ telle que $f_n \leq \phi$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$$

Ce théorème paraît révélateur : alors qu'une des forces de la théorie de Lebesgue est le théorème de convergence dominée, Queffélec insiste sur le côté « injuste » du reproche fait à la théorie de Riemann en ce qui concerne les théorèmes de convergence. Ce théorème se prolonge à des fonctions qui ont des discontinuités.

En ce qui concerne l'intégrale de Lebesgue, Queffélec apporte un jugement sur l'enseignement de la mesure en France : contrairement à la notion de nombre qui est enseignée avec précaution, la notion de mesure est traitée de manière plus « floue et désinvolte ». Il propose ainsi une approche de la théorie de la mesure qui, pour lui, est rendue aussi rigoureuse qu'une construction de \mathbb{R} .

L'objectif annoncé est de construire une notion de mesure sur \mathbb{R}^2 , en partant de la notion d'aire des rectangles : l'aire d'un rectangle R c'est, par définition, la longueur multipliée par la largeur et est notée $|R|$. Il souhaite, également, ne pas se lancer dans une « présentation axiomatique et pédagogiquement dissuasive à coups de tribus ». L'argument principal pour défendre sa présentation de la théorie de la mesure est donc un argument d'ordre didactique.

Le choix de Queffélec est de construire la mesure des ouverts de \mathbb{R}^2 . Pour cela, il associe à chaque partie de \mathbb{R}^2 l'élément

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |R_i|, A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i \right\},$$

c'est à dire que $m(A)$ est la borne inférieure des sommes des aires des rectangles fermés qui recouvrent A . Il montre ensuite que pour un rectangle R , on a bien $|R| = m(R)$. L'application m est sous-additive, c'est donc une mesure extérieure et elle vérifie la propriété

d'additivité simple pour les parties *fortement disjointes*² : lorsque A et B sont fortement disjointes, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Il s'agit en fait de la mesure extérieure qu'a déjà défini Lebesgue dans sa thèse : pour la mesure sur \mathbb{R} , il s'agissait de prendre la somme des mesures des segments, alors que pour la mesure sur \mathbb{R}^2 , Lebesgue s'appuyait sur la mesure des triangles. Il utilise alors l'idée de Carathéodory pour approcher toute partie A de \mathbb{R}^2 par l'intérieur en approchant le complémentaire de A par l'extérieur (et qui était, en fait, caché dans la définition de mesure intérieure de Lebesgue (Villeneuve, 2009, p19). Il déclare alors qu'une partie A est mesurable si et seulement si, pour toute partie T de \mathbb{R}^2 , on a

$$m(T \cap A) + m(T \cap A^c) = m(T).$$

Et lorsque A est mesurable, son complémentaire l'est aussi ; tous les ouverts sont mesurables, la réunion d'une suite de parties mesurables est mesurable, et on a la propriété de σ -additivité.

La mesure de Lebesgue des ouverts de \mathbb{R}^d est ainsi construite « à moindre frais ». Nous interprétons cela comme un jugement d'un besoin trophique assez faible. Mais il ne s'agit là que de la construction de la mesure de Lebesgue : il reste à prouver les théorèmes de convergence, et les théorèmes de Fubini. On peut noter qu'il n'introduit pas a priori des éléments de structure, comme la notion de tribu (pour Queffelec, cette notion n'est utile que lorsque l'on parle d'espérance conditionnelle, de martingales, de processus), et de mesure générale sur un ensemble. La construction proposée est très proche de ce que propose Lebesgue, même si elle porte directement sur les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , et pas seulement sur les ensembles bornés.

En conclusion, pour Queffelec, l'intégrale de Riemann devrait être enseignée pendant les trois années d'université, ce qui, de fait, exclut l'intégrale de Lebesgue des programmes de L3. Pour l'auteur, c'est en particulier suffisant pour les étudiants qui préparent le CAPES. Nous remarquons que cela est confirmé par le programme du concours (le programme du CAPES se limite même à l'intégrale de Cauchy). Mais il signale également que l'intégrale de Lebesgue est « incontestablement plus adaptée » pour un niveau plus avancé, en particulier pour l'étude des probabilités et l'utilisation des théorèmes de Fubini appliqués aux intégrales multiples. Il indique quelques habitats de l'intégrale de Lebesgue et de la théorie de la mesure notamment en probabilités (avec pour niches les probabilités conditionnelles, les martingales, les processus aléatoires) et en analyse (utilisation des théorèmes de type Fubini) Enfin, la dernière phrase de son texte indique le rôle assigné à cet article et au fait que

Chaque mathématicien a un avis fort sur l'intégration et la façon idéale de l'enseigner ! Nous espérons que ce texte encouragera d'autres collègues à donner leur avis, fût-il contradictoire, sur la question.

2. si d est une distance sur \mathbb{R}^d , deux parties A et B sont fortement disjointes lorsque $d(A, B) > 0$

Nous avons effectivement trouvé une réponse à cet article, publié de nouveau dans la Gazette des mathématiciens. C'est l'objet de la section suivante.

4.3.2 Le point de vue de Marc Rogalski

En réponse à l'article d'Hervé Queffélec, Marc Rogalski a publié un article dans la Gazette des mathématiciens : *sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure : faire simple et pédagogique ?* (M. Rogalski, 2013).

Cet article comporte deux parties : la première propose une introduction de l'intégrale en appui sur les phénomènes physiques et la mesure des grandeurs physiques, alors que la deuxième partie s'intéresse à la mesure des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 .

Dans cet article, l'auteur reconnaît l'utilité de la théorie de Riemann dans les applications proposées par Queffélec. Mais en notant que l'approche de la mesure des ouverts proposé par Queffélec est difficile (il s'agit donc d'un argument didactique), il va proposer une construction de la mesure qu'il estime « plus naturelle et plus pédagogique ». Dans la première partie, il propose d'établir une théorie de l'intégration à travers ses relations avec la physique et la mesure des grandeurs. L'objectif est de « créer chez les étudiants une intuition forte d'une procédure intégrale très générale ». Cette procédure très générale pourra ensuite déboucher sur les différentes théories de l'intégration, dont celles de Riemann et de Lebesgue. Il affirme :

Le sens d'une notion mathématique ne se comprend pas - et surtout du point de vue de son opérationnalité – uniquement par une définition formelle, on a besoin d'un contexte, de motivations, d'intuitions.

L'argument est une nouvelle fois un argument d'ordre didactique, puisque la volonté affichée est de permettre la « compréhension » et « l'opérationnalité » de la notion d'intégrale. La *procédure intégrale* décrite par Rogalski consiste en une suite d'étapes permettant de savoir à quelle condition on peut mesurer, ou même définir une grandeur $I(\Omega, f)$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω avec la mesure m (connue) et à une fonction f définie sur Ω . Par exemple, la densité en chaque point d'un volume Ω , pression en chaque point d'une surface Ω , hauteur au dessus de chaque point d'un segment Ω . On suppose également que l'on peut définir la mesure $m(A)$ d'une partie A de Ω . Les grandeurs considérées sont issues des mesures de grandeurs physiques produits.

Pour pouvoir parler de la grandeur $I(\Omega, f)$ cherchée, il impose des conditions *raisonnables*, issues de considérations physique :

- Si f est constante ($f = C$), alors $I(\Omega, f) = m(\Omega) \times C$;
- L'additivité simple : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $m(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$, alors $m(\Omega) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$.

- La croissance : si $f \leq g$, alors $I(\Omega, f) \leq I(\Omega, g)$.

Lorsque l'on est dans cette situation, la procédure intégrale consiste à :

- Découper l'ensemble Ω en un nombre fini de « petits morceaux » Ω_i ;
- Encadrer f entre m_i et M_i sur Ω_i ;
- Sommer : on encadre alors $I(\Omega, f)$ par des sommes inférieures et supérieures

$$s = \sum m_i m(\Omega_i) \text{ et } S = \sum M_i m(\Omega_i);$$

- On passe à la limite en prenant des ensembles Ω_i de plus en plus petits.

Dans le cadre du débat scientifique, une expérimentation visant à développer cette procédure intégrale a déjà été menée à l'université de Grenoble pendant quelques années. Cette expérimentation est détaillée par Legrand et al. (1986) à partir de la situation du barreau. Rogalski, qualifie cette dernière de « situation didactique ».

En ce qui concerne la théorie de la mesure, Rogalski propose de construire la mesure de Lebesgue des compacts de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , car ce sont les objets de la physique. Pour lui, cette théorie de la mesure peut être enseignée dès la L2 car il utilise la caractérisation de la compacité par les ensembles bornés et fermés, par les limites de suites convergentes (qui est traditionnellement enseignée en L2). Il explicite ainsi le besoin trophique de la théorie de la mesure des compacts.

La construction de la mesure des compacts s'appuie sur la notion de quadrillage : un quadrillage est la donnée de deux suites (a_n) et (b_n) de réels, strictement croissante, tel que tout segment de \mathbb{R} n'a qu'un nombre fini de terme de la suite, et telle que $\sup |a_{n+1} - a_n| < +\infty$.

On note alors un quadrillage $Q = (\sigma, \tau)$ où $\sigma = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\tau = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Pour un compact K du plan, il appelle mesure de Lebesgue de K la quantité

$$m(K) = \inf_Q m(K, Q)$$

où, lorsque Q est un quadrillage du plan,

$$m(K, Q) = \sum_{R_{n,p} \cap K \neq \emptyset} \text{aire}(R_{n,p})$$

et $R_{n,p} = [a_n, a_{n+1}] \times [b_p, b_{p+1}]$ est un rectangle parallèle aux axes, d'aire

$$\text{aire}(R_{n,p}) = (a_{n+1} - a_n)(b_{p+1} - b_p)$$

Queffélec définissait une mesure et caractérisait finalement les ensembles mesurables qui contiennent tous les ouverts. La mesure introduite par Rogalski définit une mesure sur l'ensemble des compacts : la question de la mesurabilité n'est pas discutée, puisque, pour tous les compacts K , le nombre $m(K)$ est bien défini. Ceci fait écho à l'affirmation de Queffélec :

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Ajoutons qu'il y a tellement de choses dix fois plus intéressantes en intégration que l'existence d'ensembles non-mesurables pathologiques ! Une introduction à cette intégrale qui ignore les difficultés de mesurabilité paraît donc tout à fait possible.

En définitive, Rogalski reprend les idées de Jordan, mais sans considérer la mesure intérieure. Remarquons qu'il existe des ensembles compacts qui ne sont pas Jordan-mesurable, comme l'ensemble de Cantor sur la droite. La mesure qu'il construit coïncide avec la mesure de Lebesgue pour les compacts du plan.

La mesure des compacts est une mesure simplement additive (l'union dénombrable de compact n'est pas forcément compact), donc la propriété de la σ -additivité générale de la mesure n'est pas vérifiée. En revanche, on peut démontrer que la propriété de passage à la limite : si (K_n) est une suite croissante de compacts dont la limite est encore un compact K , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(K_n) = m(K)$.

Enfin, Rogalski explicite une niche de la mesure des compacts avec les propriétés géométrique non abordées par Queffélec : la mesure des compacts est invariante par isométrie, c'est à dire que pour tout compact K de \mathbb{R}^2 et pour toute isométrie T de \mathbb{R}^2 , on a

$$m(T(K)) = m(K)$$

Les formules des surfaces géométriques du collège et du lycée peuvent être établies, en particulier l'aire du disque. Cette théorie de la mesure permet un retour sur l'intégrale enseignée en terminale : lorsque f est une fonction continue positive sur un segment $[a, b]$, l'ensemble

$$S(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est compact et on a bien l'égalité :

$$m(S(f)) = \int_a^b f(t) dt.$$

On retrouve aussi un lien avec les sommes de Riemann (intérieure). En effet, on peut construire une suite croissante de fonctions (f_n) en escalier qui converge vers f , de sorte à ce que la suite $S(f_n)$ soit une suite croissante de compacts qui converge vers $S(f)$. Par définition de l'intégrale des fonctions en escalier, $S(f_n) = \int_a^b f_n$ et donc

$$m(S(f)) = \lim m(S(f_n)) = \lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Ceci indique que, pour Rogalski, la formation des enseignants est un habitat possible de la mesure des compacts du plan (et de l'espace).

Une fois construite la théorie de la mesure de Lebesgue des compacts du plan (et de l'espace), Rogalski propose de la prolonger à la mesure des ouverts en définissant, pour U un ouvert de \mathbb{R}^2

$$m(U) = \sup_{K \text{ compact, } K \subset U} m(K)$$

puis qu'un ensemble borné A est mesurable si et seulement si

$$\sup_{K \text{ compact, } K \subset A} m(K) = \inf_{K \text{ compact, } K \supset A} m(K)$$

Après avoir traité la question des ensembles bornés mesurables, puis des ensembles mesurables de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , Rogalski propose de traiter les espaces généraux (Ω, \mathcal{A}, m) , dont la motivation peut être portée par l'enseignement des probabilités. Là encore, il indique un habitat important de la théorie générale de la mesure avec les probabilités, sans en spécifier les niches.

Nous pouvons retenir du discours de Rogalski une proposition d'organisation sur les trois années universitaires : d'abord une approche de l'intégration par la mesure des grandeurs et de la procédure intégrale. Cela permet d'appréhender la théorie de Riemann de l'intégrale par ses raisons d'être notamment en physique.

Puis, en L2, la mesure de Lebesgue des compacts de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 peut être traitée, avant d'aborder la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Enfin, la théorie générale de la mesure peut être étudiée en L3, ce qui est justifié par les besoins trophiques des probabilités et de l'analyse fonctionnelle notamment.

Il s'écarte ainsi de la proposition de Queffélec en affirmant qu'il n'est pas raisonnable de repousser l'enseignement de Lebesgue (et avec, les probabilités, les espaces de Banach que sont les espaces \mathcal{L}^p), en particulier parce que l'intégrale de Riemann vit dans de nombreuses niches en L1/L2. Par ailleurs, Rogalski évoque la formation des enseignants. Il affirme :

la présentation avec les quadrillages de l'aire et du volume des corps solides devrait éclairer les futurs enseignants de mathématiques qui devront parler de surfaces et de volumes dans les classes du secondaire(...) la définition de l'intégrale par l'aire du sous-graphe, en terminale, demande d'évoquer d'abord l'usage de quadrillages, sinon, de quoi parle-t-on ?

C'est donc enfin un argument d'ordre didactique qui est mobilisé par Rogalski pour justifier l'apprentissage de la théorie de la mesure des compacts.

4.3.3 Le point de vue de Roger Cuculière

Dans cette section, nous voudrions parler d'une autre intégrale : celle de Kurzweil-Henstock. C'est de cette intégrale qu'il s'agit dans l'article de Cuculière (1998). Cette

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

intégrale, qualifiée de « séduisante » par Queffelec (2012), est enseignée en premier cycle dans plusieurs universités en Belgique Francophone, et l'a été également à l'université de Grenoble avec Demailly. Pour l'auteur, cette intégrale peut représenter une solution d'avenir au problème « mathématico-pédagogique » (en fait, didactique) posé par le choix des théories de l'intégration.

Pour motiver le choix de cette intégrale, Cuculière évoque les différents changements de programme des classes préparatoires, c'est à dire le produit du processus de transposition didactique externe pour une institution donnée, celle des classes préparatoires. Remarquons que dans cette institution, le processus de transposition didactique externe est sous la responsabilité de l'inspection générale, et est contraint par les programmes de concours (Candy, 2020). Pendant les années 1990, ces programmes ont évolué : l'intégrale de Riemann a disparu des programmes des classes préparatoires et a été remplacée par l'intégrale des fonctions continues par morceaux (l'intégrale de Cauchy). La notion d'intégrabilité était devenue « hors programme ». Puis, le nouveau programme de 1996 ré-introduit une notion d'intégrabilité sur les intervalles non compacts avec une terminologie spécifique à l'institution des classes préparatoires : la notion d'intégrale impropre convergente est remplacée par la notion de fonction intégrable qui rappelle la notion de fonction intégrable au sens de Lebesgue. Mais alors, les théorèmes de convergence « à la Lebesgue » sont remplacés en rajoutant l'hypothèse forte que la fonction limite doit être continue par morceaux. Ainsi, devant le développement d'une théorie mathématique spécifique à une institution donnée et sans rapport avec le développement des mathématiques savantes, Cuculière (et avec lui Laurent Moonens, Jean Mawhin, Jean-Pierre Demailly) propose l'enseignement d'une théorie de l'intégration qui n'est pas une « invention purement pédagogique », mais avec une « définition d'une simplicité comparable à celle de Riemann et une puissance supérieure à celle de Lebesgue » (Cuculière, 1998). Cuculière occupe bien une position de noosphérien et propose de réduire la distance entre les institutions scolaires et les institutions savantes. Il s'étonne :

Mais ce qui est surprenant, c'est de ne voir mentionner nulle part dans ce débat une intégrale qui est apparue au début des années 60 , qui est une véritable découverte mathématique.

Puis plus tard, en parlant des exposés sur l'intégrale des fonctions continues par morceaux :

On ne sait plus si on parle d'intégrale ou de primitive et on aboutit à des exposés « bâtards » bricolés pour traiter « le programme », mais d'où ne se développent pas les idées du développement authentique des mathématiques.

Cette intégrale, découverte indépendamment par Jaroslav Kurweil et Ralph Henstock

en 1957 et 1961 reprend les sommes de Riemann en introduisant la notion de *jauge* et s'appuie sur les définitions suivantes :

Définition 4.3.1. Une *jauge* δ sur un segment $[a, b]$ est une fonction strictement positive sur $[a, b]$.

Définition 4.3.2. Une *subdivision pointée* du segment $[a, b]$ est une suite finie de couples réels (x_j, ξ_j) telle que

$$a = x_0 < \dots < x_n = b \text{ et, } \forall j \in \{1, \dots, n\}, \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

On note alors, pour une fonction f donnée et une subdivision pointée Π

$$S_\delta([a, b], f, \Pi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (\delta(x_j) - \delta(x_{j-1}))$$

Définition 4.3.3. Si δ est une *jauge* sur $[a, b]$ et $\Pi = (x_j, \xi_j)$ une *subdivision pointée* de $[a, b]$, on dit que Π est δ -fine si elle vérifie, pour tout j ,

$$0 < x_j - x_{j-1} < \delta(\xi_j).$$

Définition 4.3.4. Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite *KH-intégrable* sur $[a, b]$ s'il existe un réel H jouissant de la propriété suivante : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une *jauge* δ sur $[a, b]$ telle pour toute *subdivision pointée* δ -fine Π du segment $[a, b]$, on a

$$|S_\delta([a, b], f, \Pi) - H| \leq \varepsilon$$

Le réel H est la *KH-intégrale* de f sur $[a, b]$ et se note $H = \int_a^b f(t) dt$.

Ces définitions étant posées, on peut montrer que l'ensemble des fonctions KH-intégrables sur un segment est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et on a la propriété de linéarité et de positivité de l'intégrale, ainsi que la relation de Chasles.

Cette intégrale contient l'intégrale de Lebesgue et de Riemann, dans le sens où si une fonction est Riemann intégrable, alors elle est KH-intégrable, et si une fonction est Lebesgue intégrable, alors elle est KH-intégrable (et dans tous les cas les intégrales coïncident). De plus, il existe des fonctions KH-intégrable et non Lebesgue intégrable. Mais surtout, cette intégrale résout le problème des primitives :

Théorème 4.3.2. Toute fonction dérivée est KH intégrable et on a

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

sans condition sur f' .

Mais le principal défaut de la KH-intégrale est que c'est une intégrale non-absolue³ : c'est ce défaut qu'ont relevé Arnaudès et Fraysse dans leur cours de Mathématiques, considérant alors que cette intégrale est d'un intérêt limité.

Mais Cuculière insiste sur la « puissance » de l'intégrale : le théorème de convergence monotone reste vraie pour la KH-intégrale, de même que le théorème de convergence dominée (en remplaçant l'hypothèse de domination par un encadrement). Mais ce qui, pour Cuculière, justifie le caractère puissant de la théorie, c'est que si une fonction est L-intégrable, alors elle est KH-intégrable. Ainsi, l'intégrale de Lebesgue se trouve être une niche pour la KH-intégrable, ainsi que la théorie de la mesure.

L'auteur donne en conclusion quelques pistes pour organiser le curriculum sur l'intégrale. Il suggère un découpage de l'enseignement de l'intégration en première année, en 2 parties : d'abord, l'enseignement de l'intégrale avant Cauchy (intégrale de Newton). On admet l'existence des primitives pour les fonctions continues, et on pose, lorsque f est une fonction continue (dont F est une primitive),

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Les niches de cette intégrale sont nombreuses, notamment dans l'habitat de l'analyse réelle en premier cycle. Il indique :

Pensons aux techniques de recherche de primitives des fonctions usuelles, aux relations de comparaison locale, aux développements limités, aux formules de sommation (Taylor-Laplace, Euler-MacLaurin,...), aux calculs approchés d'intégrales définies (Poncelet, Simpson, Gauss, Legendre,...), aux évaluations asymptotiques, etc... Dans ces situations, on n'a pas besoin d'une puissante théorie de l'intégration, la primitivation suffit.

Puis, dans la deuxième partie, l'auteur pense qu'il faut enseigner l'intégrale *proprement dite* : l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Pour lui, cela permet de poser un problème, celui de l'intégrabilité, et la KH-intégrale permet d'en donner la réponse « la plus moderne » et d'obtenir une théorie qui contient les théories de Riemann et de Lebesgue.

Cela permet ensuite d'enseigner l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure (une fonction f est dite Lebesgue intégrable si et seulement si f et $|f|$ sont KH-intégrable) et de réaliser « le rêve d'enseigner l'intégrale de Lebesgue à bac+2 ».

Lors de l'étude des curriculums dans les universités, nous verrons si cette intégrale est d'avantage enseignée. L'auteur affirmait en 1998 que cette intégrale rencontre peu d'écho. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'au niveau des deux premières années à l'université, lorsque le formalisme et l'abstraction posent encore des difficultés aux étudiants, cette théorie peut paraître hors de portée. Et il faut alors repousser son enseignement à la L3, mais alors, comme l'indique Rogalski, cela oblige à repousser l'enseignement des

3. l'intégrabilité de f n'implique pas celle de $|f|$

probabilités. Et le fait que l'intégrale soit non absolue la rend difficilement exploitable en physique.

4.3.4 Conclusion

A travers ces trois articles, nous avons établi un panorama de tensions qui pourraient exister dans la communauté mathématique francophone autour de la question « quelle théorie enseigner à l'université ? ». Ces débats se fondent autour de l'intégrale de Newton (par les primitives), de Cauchy, de Riemann, de Lebesgue, de Kurzweil-Henstock. Au niveau de l'enseignement de la mesure, deux expositions ont été proposées : la première, par Queffélec est très proche de l'exposé de Lebesgue avec les mesures extérieures et intérieures des ouverts du plan. Les procédures utilisent les notions de topologie et permettent de construire la mesure de Lebesgue. Rogalski préfère définir la mesure des compacts du plan ou de l'espace avec la notion de quadrillage : l'argument principal étant d'outiller les futurs enseignants du secondaire. Nous pouvons remarquer que dans ces articles, l'entrée dans la théorie de la mesure par la notion de tribu et de mesure générale n'est pas préconisée.

Nous avons observé différents types d'arguments pour justifier une organisation relative à l'enseignement de l'intégrale :

- Le premier type porte sur les niches et habitats de l'intégrale. Ce sont essentiellement les arguments avancés par Queffélec : l'intégrale de Riemann permet de pratiquer des mathématiques à un niveau avancé, qui suffit jusqu'à la L3 ; Cette intégrale trouve des niches dans des habitats variés des curriculum de mathématiques. C'est aussi un argument utilisé par Cuculière sur l'enseignement de l'intégrale de Newton en 1ère année.
- Le besoin trophique d'autres objets mathématiques est un autre type d'argument. C'est un argument utilisé par Rogalski qui voit dans l'intégrale de Lebesgue « le meilleur chemin pour étudier les probabilités, qu'il ne paraît pas raisonnable de repousser trop loin dans le cursus ».
- Le troisième type d'arguments est « intra-théorique », c'est à dire qui concerne la structure de l'ensemble des fonctions que l'on peut intégrer, ou sur la « puissance » de la théorie : Queffélec avance que la théorie de Riemann est robuste, lorsque Cuculière parle de la stabilité de l'ensemble des fonctions KH-intégrables. La question de la « taille » de la classe des fonctions que l'on peut intégrer : l'ensemble des fonctions KH-intégrable contient les fonctions Lebesgue et Riemann intégrables. Mais c'est aussi un argument de ce type qui limite la portée de la KH-intégrales. Queffélec indique :

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

cette validité élargie se fait au prix d'un artifice (le δ assorti au ε n'est plus un nombre, mais une fonction), et nous semble la seule portée réelle de cette nouvelle théorie, fragile par certains côtés : le module d'une fonction Henstock-intégrable n'est pas toujours Henstock-intégrable

- Le quatrième type d'argument est « didactique ». L'enseignement de la théorie de la mesure des compacts du plan et de l'espace devrait « éclairer les futurs enseignants » pour Rogalski, alors que pour Queffelec, l'intégrale de Riemann est « sans doute suffisante pour la préparation au CAPES ». On note une différence notable : l'un parle d'outiller les enseignants, alors que l'autre parle de la préparation d'un concours. Les qualificatifs « simple », « pédagogique » sont employés par Rogalski (pour parler de la théorie de la mesure des compacts) et Queffélec (pour parler de l'exposition de la théorie de Riemann) alors que Rogalski juge l'approche de Queffélec par la mesure des ouverts « difficile » sont des arguments didactiques, alors que ce dernier trouve que l'exposé se fait « à moindre frais ». Cuculière aussi insiste sur la nécessité d'enseigner l'intégration proprement dite en disant que c'est un « objectif primordial de la formation à ce niveau » et qu'un enseignement de l'intégrale qui met en avant le problème de l'intégrabilité « peut faire réfléchir sur le développement historique des concepts mathématiques et la diversité des réponses successives à un problème donné, en l'occurrence celui de l'intégrabilité. »

Au niveau du processus de transposition didactique externe, nous résumons finalement trois propositions d'organisation de l'enseignement de l'intégrale, au niveau de la licence de mathématiques. La première, inspirée du discours de Queffélec, qui commence par l'intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux et l'intégrale de Riemann, pendant les 3 premières années de l'université. La deuxième, qui s'appuie sur l'article de Rogalski, introduit l'intégrale de Riemann à partir de la mesure de grandeurs physiques en L1/L2, puis aborde l'intégrale de Lebesgue en L3, à partir de la notion de mesure. Par ailleurs, la notion de mesure peut être abordée dès la L2 avec la mesure de Lebesgue des compacts du plan et de l'espace. Enfin, la 3ème proposition est fondée sur l'article de Cuculière. Il préconise en fait l'enseignement de l'intégrale de Riemann dès la terminale, de sorte à préparer l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Ensuite, dès la L2, il est possible d'enseigner l'intégrale de Lebesgue.

Nous modélisons sous la forme d'un tableau qui sera, pour nous, un modèle du curriculum en tant que produit de la transposition didactique externe de l'intégrale à l'université :

4.4. Les choix dans des universités françaises

	1ère année (L1)	2ème année (L2)	3ème année (L3)	Approche proposée de la théorie de la mesure
Organisation 1	Intégrale de Cauchy et intégrale de Riemann			Mesure des ouverts de \mathbb{R}^2 à partir de la mesure des rectangles
Organisation 2	Intégrale de Riemann en lien avec la physique		Intégrale de Lebesgue à partir de la mesure	Mesure de Lebesgue des compacts du plan
Organisation 3	Intégrale de Kurzweil-Henstock	Intégrale de Lebesgue définie à partir de l'intégrale de KH		A partir de l'intégrale de KH

4.4 Les choix dans des universités françaises

Pour étudier les choix dans différentes universités, nous avons sélectionné une panel de 6 universités des villes : Lyon, Strasbourg, Grenoble, Paris, Reims et Montpellier.

Depuis les sites internet des différentes universités, nous avons récolté les syllabus qui font office de documents de références pour les étudiants et les enseignants. Nous considérons donc que ces documents sont les produits de la transposition didactique externe dans chacune des institutions que constituent les différentes universités. Nous ne nous intéresserons qu'à la licence de mathématiques. Parfois, certaines universités proposent des parcours différenciés, dès la L2 ou la L3, qui orientent soit vers le Master MEEF, soit vers les Masters de mathématiques fondamentales et l'agrégation. Nous ferons état de ces différents parcours lorsque cela a lieu.

Bosch, Hausberger, Hochmuth, et Winsløw (2019) ont étudié le processus de transposition didactique externe à l'université. Les conclusions de l'étude indiquent qu'entre les universités, on retrouve une grande uniformité des contenus à enseigner, organisés autour d'un noyau commun, stable dans le temps, de modules (d'analyse et d'algèbre, notamment); les modules sont essentiellement décrits à travers une liste de notions et de théorèmes. Les types de tâches ou les problèmes que les étudiants doivent résoudre étant majoritairement absents des descriptifs.

Par ailleurs, Bosch et al. (2021, p. 23) ont mentionné une certaine inertie dans les changements de curriculum :

For instance, official regulations and requirements may be changed at the university level, at the national level or even (in Europe) at higher levels, and then the programmes need to adapt, with consequences also for the modules and their structure ; there is a tendency, then, to minimize the changes.

Substantial changes mainly occur as a result of a crisis, such as students' failure.

Les enseignements à l'université sont organisés autour d'*unité d'enseignement* (UE), ou de modules. A partir des différents descriptifs, nous mènerons une étude écologique du concept d'intégrale dans les différentes universités concernées.

4.4.1 Université de Lyon 1

Le descriptif des UE de la licence de mathématiques de l'université de Lyon 1 est disponible en ligne⁴.

La mention mathématiques se distingue en 4 parcours :

- Mathématiques générales et applications ;
- Mathématiques et Économie ;
- Mathématiques et informatique ;
- Mathématiques pour l'enseignement, accessible après les deux premières années du parcours Mathématiques générales et applications ou du parcours Mathématiques et informatique
- Mathématiques fondamentales (parcours sélectif géré par l'école normale supérieure de Lyon).

Ces parcours ont en commun les enseignements de première année. Nous limiterons notre étude aux parcours *mathématiques générales et applications* et *mathématiques pour l'enseignement*.

En première année, l'ensemble des enseignements de mathématiques sont contenus dans une UE par semestre : *Fondamentaux des mathématiques 1* et 2.

Au premier semestre, on trouve les thèmes Calculs algébriques, Nombres complexes, Bases de logique, Arithmétique, Polynômes sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , Pratiques sur les fonctions usuelles, Suites réelles, Limites et continuité des fonctions, Dérivabilité

L'intégrale apparaît dans le syllabus de l'UE *Fondamentaux des mathématiques 2* présenté sur la figure 4.1.

Le programme précise « intégrale des fonctions continues par morceaux » et la notion de primitive est annoncée après. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit de l'intégrale de Cauchy des fonctions continue par morceaux. La théorie de Riemann est évoquée à travers la convergence des sommes de Riemann, dont la preuve est prévue « dans le cas où f est C^1 ». Le programme indique également « Primitives », sans indiquer si l'existence des primitives de fonctions continue est admise. Par ailleurs, le descriptif

4. <http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=mathgenapplipro>

des notions à étudier dans le cadre de l'intégration contient les notions de fonctions en escalier et de fonctions continues par morceaux : ceci indique un besoin trophique de l'intégrale.

FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES II – MAT1046L

Calcul matriciel: Opérations, inverse, opérations élémentaires. Calcul de l'inverse. Interprétation matricielle d'un système linéaire.

Espaces vectoriels: Définition d'un corps commutatif (on se limitera à \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} dans ce cours). Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres, génératrices, bases (on se limitera à des familles finies). Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires. Espaces vectoriels de dimension finie. Exemples d'espaces vectoriels : \mathbb{R}^n , espaces de fonctions, de suites (suites récurrentes linéaires d'ordre deux), $\mathbb{K}^n[X]$.

Applications linéaires: Définition, matrice d'une application linéaire, noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre/génératrice/base, rang, théorème du rang. Retour sur les matrices : rang/noyau d'une matrice, transposition, $\text{rg}(A) = \text{rg}(tA)$, trace, changement de base, matrices équivalentes, matrices semblables. Endomorphismes, exemples : projections, symétries, rotations.

Les réels: Nombres décimaux, rationnels, approximation des réels par des nombres décimaux à 10^{-n} près. Borne supérieure/inferieure, application aux suites monotones (preuve) et au théorème des valeurs intermédiaires.

Fractions rationnelles: Forme irréductible d'une fraction rationnelle, fonction rationnelle, degré, partie entière, zéros, pôles, existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et \mathbb{R} (admis, on évitera toute technicité excessive dans les exemples).

Fonctions réelles: Réciproques des fonctions usuelles (arcsin, arccos, arctan). Comparaison locale des fonctions (o , O , \sim). Dérivées successives, fonctions de classe C^n et C^∞ .

Intégration: Fonctions en escaliers, Fonctions continues par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Sommes de Riemann : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors la somme de Riemann

$$(b-a)/n \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k(b-a)/n) \text{ tend vers l'intégrale de } f \text{ sur } [a, b].$$

Preuve dans le cas où f est C^1 . Primitives. Intégration par parties, changement de variables.

Formules de Taylor: Formule de Taylor reste intégrale à l'ordre n pour les fonctions C^{n+1} , inégalité de Taylor Lagrange et formule de Taylor-Young pour ces fonctions. Développements limités et exemple de développements asymptotiques.

Équations différentielles: Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

FIGURE 4.1 – Syllabus de l'UE fondamentaux des mathématiques 2 de l'université de Lyon 1

Enfin, la suite du programme se poursuit avec les différentes formules de Taylor, dont celle avec reste intégrale pour les fonctions de classe C^{n+1} , jusqu'aux développements limités. Et le programme se termine avec les équations linéaires du premier et du deuxième ordre à coefficients constants. Du fait de la précision des coefficients constants, nous faisons l'hypothèse que les techniques de calculs de primitive ne sont pas réinvesties. Le théorème de Cauchy-Lipchitz n'est pas évoqué non plus. L'intégrale correspond donc à un besoin trophique issu du concept de formule de Taylor.

Nous relevons donc un premier habitat de l'intégrale que nous nommons *analyse réelle*. Les différentes niches de l'intégrale dans cet habitat, donc la fonction de l'intégrale dans l'habitat de l'analyse réelle, semblent être de *déterminer la limite d'une somme de Riemann* (via un calcul d'intégrale), et *définir le développement limité d'ordre n d'une fonction*.

Au semestre 3, l'intégrale apparaît de nouveau dans différents chapitres de l'UE *analyse III* (voir le programme sur la figure 4.2), donc en tant que secteur du domaine de l'analyse réelle. Ainsi, l'intégrale ne change pas véritablement d'habitat, mais trouve

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

de nouvelles niches : le *calcul d'intégrales généralisées*, le *calcul d'intégrales doubles et triples* (le programme indique explicitement que cette partie est à traiter avec un point de vue « calculus »), puis le *passage à la limite sous l'intégrale* (pour les suites de fonctions), et les *intégrales à paramètres*.

Intégrales généralisées.

Séries numériques à valeurs réelles. Suites de Cauchy. Séries à termes positifs, absolue convergence, critère d'Abel.

Fonctions de plusieurs variables. Cette partie est à traiter avec un point de vue « calculus », les difficultés théoriques seront approfondies au semestre 4. Norme euclidienne dans \mathbb{R}^n , boules ouvertes et fermées de \mathbb{R}^n . Continuité, dérivées partielles, fonctions C^1 , C^2 , théorème de Schwarz (admis), matrice jacobienne, dérivée d'une composée (admis). Calculs d'intégrales doubles et triples.

Suites de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme. Propriété de la limite uniforme d'une suite de fonction : théorème de dérivation, passage à la limite sous l'intégrale (convergence monotone/dominée : admis).

Intégrales à paramètre.

FIGURE 4.2 – Syllabus de l'UE analyse 3 de l'université de Lyon 1

Au semestre 4, l'intégrale occupe un nouvel habitat puisqu'on trouve des concepts qui, même si cela n'est pas explicite, mobilisent l'intégrale. En effet, dans l'UE *algèbre 4*, dont le programme est donné sur la figure (4.3), on trouve le thème « Série de Fourier » en lien avec la notion de produit scalaire. Nous pouvons alors désigner ce nouvel habitat par *Algèbre bilinéaire*. Le programme indique que le théorème de convergence des séries de Fourier est étudié pour le cas des fonctions de classe C^1 . Nous faisons l'hypothèse que nous trouvons ici une nouvelle niche pour l'intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux, que nous désignons par *séries de Fourier*. Enfin, l'intégrale apparaît dans l'habitat de l'UE *analyse numérique*. On trouve une nouvelle niche : exemples de calculs approché d'intégrales.

ALGÈBRE IV – MAT2030L

Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Orthogonalité. Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Familles orthogonales, familles orthonormales. Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Bases orthonormales : existence dans un espace euclidien, expression d'une produit scalaire et de la norme. Produit mixte dans un espace euclidien orienté de dimension 3.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Supplémentaire orthogonal. Projection orthogonale : expression dans une base orthonormale. Distance d'un vecteur à un sous-espace.

Hyperplans affines d'un espace euclidien. Vecteur normal à un hyperplan affine. Équation d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal, exemple dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Isométries vectorielles d'un espace euclidien. Définition, image d'une base orthonormale. Symétries orthogonales, réflexion, $O(E)$. Matrices orthogonales, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$. Exemples des dimensions 2 et 3.

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

Séries de Fourier. (on se limitera au cas réel). Coefficients de Fourier, théorème de convergence pour les fonctions C^1 , égalité de Parseval.

FIGURE 4.3 – Syllabus de l'UE algèbre 4 de l'université de Lyon 1

Au semestre 5, on trouve dans l'UE *Topologie et équations différentielles* une nouvelle niche avec le théorème de Cauchy-Lipchitz, puis au semestre 6 avec la formule intégrale de Cauchy dans l'habitat de l'UE *Calcul différentiel et analyse complexe* ce qui fait écho à ce qu'a indiqué Queffélec.

L'UE *mesure et intégration* apparaît au semestre 5, ce qui constitue un domaine des mathématiques de L3. Le programme est donné par la figure 4.4. Dans cette UE est développé le concept d'intégrale de Lebesgue (par rapport à une mesure générale) :

l'habitat de l'intégrale de Lebesgue est donc ce domaine des mathématiques. La fonction de l'intégrale de Lebesgue dans cet habitat est de définir les espaces L^p , le produit de convolution, la transformée de Fourier.

MESURE ET INTÉGRATION – MAT3119L

Rappels sur la dénombrabilité et opérations sur les ensembles.

Notion de limsup et liminf.

Tribus, tribus engendrées, tribu borélienne.

Fonctions mesurables.

Mesures, exemples : mesure de comptage, mesure de Dirac, mesure de Lebesgue (admis).

Fonctions étagées, définition de l'intégrale.

Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.

Lien avec l'intégrale de Riemann.

Intégrales à paramètre : continuité, dérivabilité.

Mesure produit, théorème de Fubini (admis).

Changement de variables (admis).

Espaces L_p : définition, inégalité de Hölder, structure espace vectoriel normé, complétude, structure hilbertienne de L_2 .

Convolution, régularisation par convolution, lemme d'Urysohn.

Transformée de Fourier : classe de Schwartz, L_1 , extension à L_2 .

FIGURE 4.4 – Syllabus de l'UE mesure et intégration de Lyon 1

L'intégrale de Lebesgue ne trouve qu'un seul habitat au semestre 6 avec l'UE *probabilités et statistiques*, dont le programme est détaillé sur la figure 4.5. Les niches sont nombreuses : espaces probabilisés, lois discrètes et continues, indépendance, convergence,

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES – MAT3081L

Probabilités. Espaces probabilisés. Variables aléatoires : loi, moments, fonction de répartition. Lois usuelles discrètes et continues. Indépendance, conditionnement par un événement. Fonctions caractéristiques. Vecteurs aléatoires. Suites de variables aléatoires, convergence presque sûre, convergence en probabilité, convergence en loi, convergence dans L_p . Loi des grands nombres. Théorème central limite. Introduction aux chaînes de Markov sur un espace d'états fini.

Statistiques. Estimateur, exemples : estimateur des moments, estimateur du maximum de vraisemblance (admis). Intervalles de confiance. Test de la moyenne, d'une proportion.

FIGURE 4.5 – Syllabus de l'UE probabilités et statistiques de Lyon 1

Notons que l'UE *analyse matricielle* est un habitat pour l'intégrale de Cauchy avec la niche *Série de Fourier, transformée de Fourier rapide* (cette UE est partagée avec le parcours enseignement, dont l'intégrale de Lebesgue n'est pas au programme).

Dans le parcours *Mathématiques pour l'enseignement*, toutes les UE de L3 sont spécifiques, alors que celles de L2 sont communes avec le parcours *Mathématiques générales et applications*. En L3, l'intégrale apparaît dans une UE : *analyse réelle*. Le programme est donné sur la figure 4.6.

La théorie de l'intégration n'est pas précisée. Néanmoins, la présentation du parcours indique que les programmes et niveaux des UE sont adaptés à ceux exigés au

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

CAPES de mathématiques, qui lui, indique « Intégrale d'une fonction continue sur un segment »⁵. Nous faisons donc l'hypothèse que c'est l'intégrale de Cauchy des fonctions continues sur un segment qui est au programme de l'UE d'analyse réelle.

ANALYSE RÉELLE – MAT3125L

Suites. Suites bornées, suites convergentes, suites de Cauchy, suites récurrentes, théorème du point fixe.

Séries. Séries numériques, séries de fonctions, séries entières.

Fonctions réelles. Limite, continuité, dérivabilité, formules de Taylor, développements limités.

Intégration. Sommes de Riemann, primitives, intégration par parties, changement de variables, passage à la limite sous l'intégrale, intégrales à paramètre (continuité, dérivabilité), intégrales généralisées, intégrales doubles (calcul par intégrations successives, changements de variables ; cas du passage en coordonnées polaires).

FIGURE 4.6 – Syllabus de l'UE analyse réelle du parcours enseignement de Lyon 1

Enfin, l'UE *combinatoire, probabilité et statistique* est un habitat pour l'intégrale des fonctions continues.

Nous résumons donc ci-dessous les données concernant l'université de Lyon en distinguant les deux parcours.

Parcours mathématiques générales et applications

Il semble donc que l'intégrale définie avec les primitives n'est pas enseignée à l'université de Lyon. Pour cette raison, nous écrivons que cette intégrale ne trouve pas d'habitat. De même, la notion d'intégrale de Riemann n'apparaît pas dans les syllabus.

	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques au S2	Non	Oui : UE mesure et intégration
Théorie de l'intégration	Intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux		Théorie de Lebesgue

5. https://media.devenirensignant.gouv.fr/file/capes_externe/23/1/p2023_capes_ext_mathematiques_1426231.pdf

4.4. Les choix dans des universités françaises

	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Convergence des sommes de Riemann, calculs d'intégrales par différentes techniques, Formule de Taylor avec reste intégral Intégrales généralisées, à paramètres, passage à la limite dans l'intégrale
	Algèbre bilinéaire	Séries de Fourier
	Analyse numérique	Calcul approché d'intégrales
	Topologie et équations différentielles	Théorème de Cauchy-Lipschitz
	Calcul différentiel et analyse complexe	Formule de Cauchy
Intégrale de Riemann	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Lebesgue	Mesure et intégration	Espaces L^p , convolution, transformée de Fourier
	Probabilités et statistiques	Espaces probabilisés, lois discrètes et continues, convergence, ...

On remarque la variété des niches et habitats de l'intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux. L'intégrale de Riemann n'apparaît presque pas dans le syllabus (seulement dans le syllabus de l'UE Mesure et intégration avec la mention « lien avec l'intégrale de Riemann ») : nous n'avons pas trouvé de référence à la question de l'intégrabilité des fonctions qui est au cœur de la théorie de Riemann.

A l'inverse, l'intégrale de Lebesgue semble avoir deux habitats : le domaine « mesure et intégration » et le domaine « Probabilités et statistiques ».

Nous présentons enfin les réseaux trophiques pour les deux concepts d'intégrales : l'intégrale de Cauchy est sur la figure 4.7, et celle de Lebesgue sur la figure 4.8.

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

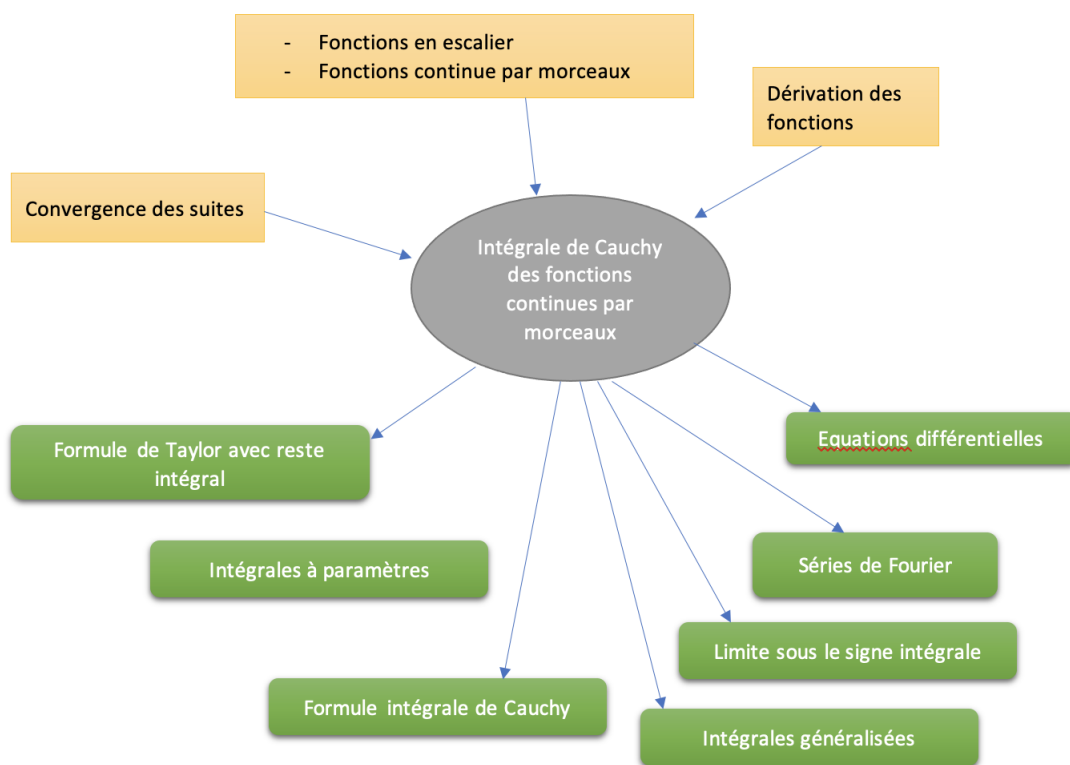


FIGURE 4.7 – Réseau trophique de l'intégrale de Cauchy en Licence mathématiques générales et application à Lyon 1

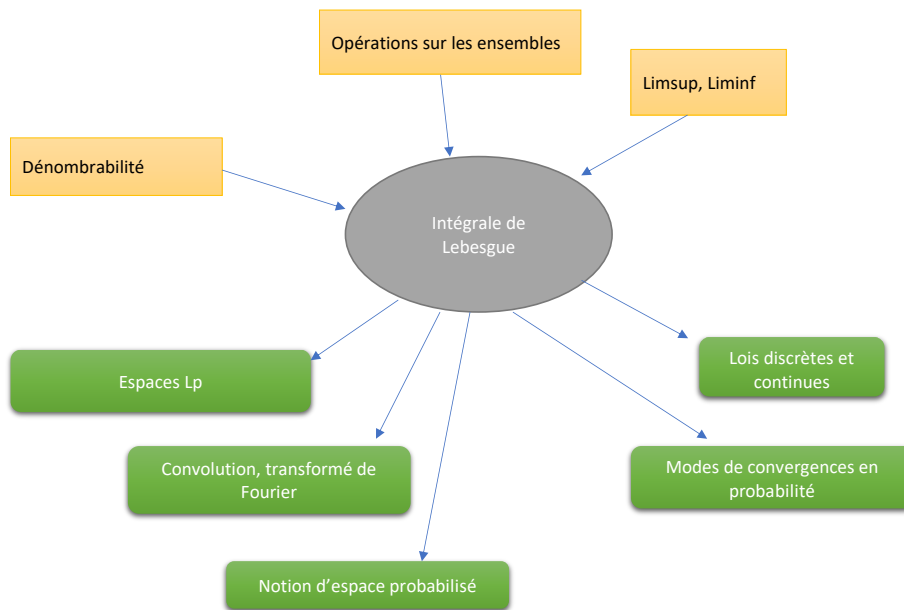


FIGURE 4.8 – Réseau trophique de l'intégrale de Lebesgue en Licence mathématiques générales et application à Lyon 1

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Parcours enseignement

Pour le parcours enseignement, les deux premières années sont communes avec le parcours mathématiques générales et applications. Nous avons remarqué que l'intégrale de Lebesgue n'est pas au programme de ce parcours. En revanche, l'intégrale trouve un nouvel habitat avec les différentes niches liées aux probabilités continues, dans l'habitat *probabilités et statistiques*.

Nous résumons donc l'étude écologique du concept d'intégrale sous la forme :

	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques au S2	Non, l'intégration est un thème d'analyse réelle	Non
Théorie de l'intégration	Intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux		

	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Convergence des sommes de Riemann, calculs d'intégrales par différentes techniques, Formule de Taylor avec reste intégral Intégrales généralisées, à paramètres, passage à la limite dans l'intégrale
	Algèbre bilinéaire	Séries de Fourier
	Analyse numérique	Calcul approché d'intégrales
	Analyse matricielle	Séries de Fourier et transformation de Fourier rapide
	Probabilités et statistiques	Variables aléatoires réelles, modes de convergence de suite de variables aléatoires

Intégrale de Riemann	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Lebesgue	\emptyset	\emptyset

4.4.2 Université de Strasbourg

La description de la licence de mathématiques de l'université de Strasbourg est disponible en ligne⁶.

Les deux premières années de la licence de mathématiques proposent deux parcours : le parcours *mathématiques* et le parcours *Mathématiques et physique Approfondies - Magistère*.

Le parcours *Mathématiques et Physique Approfondies - Magistère* est, d'après le descriptif, destiné aux étudiants qui visent l'intégration après la L2 en école d'ingénieur, ou bien vers une poursuite en magistère de mathématiques ou de physique en L3.

En troisième année, trois parcours sont proposés :

- Mathématiques pures
- Mathématiques appliquées
- Préparation au professorat du second degré en mathématiques
- Mathématiques, physique approfondie - Magistère
- Actuariat.

Dans le parcours *mathématiques* (L1 et L2), l'intégrale apparaît dans l'UE *analyse S1*. Le programme de cette UE annonce :

Limites de fonctions, DL, applications au tracé de graphe. Fonctions réciproques. Calcul de primitives : fonctions élémentaires, changement de variable, intégration par parties. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants.

Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit de calcul de primitive, sans la théorie de Cauchy ou de Riemann. C'est donc l'intégrale de Newton-Leibniz qui trouve un habitat en analyse réelle. Cela fait écho aux propos de Cuculière qui annonçait que l'intégrale par primitive suffisait pour la plupart des problèmes d'analyse réelle.

Au semestre 2, l'intégrale ne trouve pas d'habitat, mais le syllabus de l'UE *Analyse S2* indique que le but est :

6. <https://mathinfo.unistra.fr/formations/licence/mathematiques/>

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Résoudre de manière autonome des problèmes liés ou faisant appel aux formules de Taylor, au calcul intégral.

Ainsi, cette UE correspond à un besoin trophique de calcul intégral.

Au semestre 3, l'intégrale apparaît dans un intitulé d'UE : *Analyse : intégration et séries numériques*. Le programme de cette UE est donné par la figure 4.9

Description du contenu de l'enseignement

Suites de Cauchy.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact et à valeurs complexes : - L'espace vectoriel de ces fonctions. Norme infinie. - Equi-subdivisions et fonctions en escaliers. Densité de ces fonctions dans l'espace des fonctions continues. - Sommes de Riemann et intégrale d'une fonction continue (par morceaux). Propriétés de l'intégrale : linéarité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, stricte croissance : - Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Corollaires : formule du changement de variables, intégration par parties. - Pratique du calcul, détermination de primitives de fractions rationnelles. [Théorème de Liouville (admis) sur l'existence de primitives symboliques aux formules du type $A(X)\exp B(X)$ avec A, B rationnelles.] - Intégrales généralisées. Convergence absolue et critère d'Abel. Séries : - Séries numériques. Critères de convergences usuels (Cauchy, d'Alembert). - Convergence absolue. Comparaison série/intégrale. Echelle de Riemann et de Bertrand. - Formule sommatoire d'Abel et séries alternées. - Série semi-convergentes et théorème de permutation de Riemann.

FIGURE 4.9 – Syllabus de l'UE analyse : intégration et séries numériques de l'université de Strasbourg

Nous remarquons que la question de l'intégrabilité n'est pas évoquée. Dans la mesure où le programme se limite à l'intégrale des fonctions continues par morceaux, nous considérons que le concept d'intégrale en jeu est celui de Cauchy, et plus l'intégrale de Newton-Leibniz. Le domaine *Intégration et séries numériques* est donc un habitat pour l'intégrale et la fonction de l'intégrale dans cet habitat est l'étude des intégrales généralisées, l'étude des séries numériques avec le critère de comparaison série/intégrale. L'intégrale trouve deux nombreux habitats au semestre 4 :

- *suites et séries de fonctions* avec la niche *séries trigonométriques et séries de Fourier*;
- *Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n* avec la niche *intégration de formes différentielles, théorème de Stokes*;
- *Calcul scientifique* avec deux niches : *intégration des équations différentielles* dont on peut faire l'hypothèse que le besoin trophique concerne le calcul de primitives, puis *intégration numérique* qui concerne le calcul approché d'intégrales.

Pour la L3, nous ne nous intéresserons qu'aux parcours *Mathématiques pures et Préparation au professorat du second degré en mathématiques*.

Au semestre 5, les deux parcours ont en fait en commun 3 UE : *Algèbre S5, Calcul différentiel et intégral 1, Techniques d'analyses numérique 1*. Ainsi, on trouve un habitat

pour le concept d'intégrale puisque le syllabus de l'UE *Calcul différentiel et intégral 1* annonce :

Intégrales multiples : changements de variables, théorème de Fubini (admis), calculs d'aires, de volumes et de centres de gravité.

La niche de l'intégrale est ici le calcul de grandeurs (aires, volumes), et de centre de gravité. Le théorème de Fubini est évoqué et concerne sûrement les fonctions continues sur les rectangles fermés de \mathbb{R}^2 , mais ceci n'est pas précisé.

En revanche, le parcours *Mathématiques pures* possède une UE spécifique : *Mesure et intégration*. Il s'agit donc d'un nouvel habitat pour l'intégrale avec l'intégration de Lebesgue. Le programme annonce :

Tribus, boréliens, ensembles mesurables. Intégrale de Lebesgue. Convergence monotone, dominée. Intégrales dépendant d'un paramètre : continuité, dérivation. Théorème de Fubini. Changement de variables.

Il est donc question de l'intégrale par rapport à une mesure générale.

Enfin, au semestre 6, les deux parcours ont en commun l'UE *Équations différentielles* qui est un habitat pour l'intégrale dont la niche est le calcul de primitives. Un autre habitat de l'intégrale se trouve dans le parcours *Préparation au professorat du second degré en mathématiques* : il s'agit de l'analyse numérique avec la niche *intégration numérique*.

Dans le parcours *Mathématiques pures*, l'intégrale (de Lebesgue) trouve un habitat, les probabilités. Les différentes niches sont les lois continues, le conditionnement, les théorèmes de convergence.

Nous résumons ces données ci-après.

Parcours mathématiques pures

Parcours mathématiques pures de l'université de Strasbourg			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques au S1	Oui : Séries et intégration	oui : calcul différentiel et intégral; mesure et intégration
Théorie de l'intégration	Newton-Leibniz	Cauchy	Lebesgue

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Parcours mathématiques pure de l'université de Strasbourg		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Analyse élémentaire	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Calculs d'intégrales par différentes techniques
		Intégrales généralisées
	Suites et séries de fonctions	Séries de Fourier
	Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n	Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes
	Calcul scientifique	Intégration des équations différentielles
Intégrale de Riemann	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Lebesgue	Mesure et intégration	
	Probabilité	Variables aléatoires continues, convergence des suites de variables aléatoires
	Analyse complexe	Intégrale sur un chemin, calculs d'intégrales par la formule des résidus

Le réseau trophique du concept d'intégrale à l'université de Strasbourg, dans le parcours *mathématiques pures* et donné dans la figure 4.10.

Préparation au professorat du second degré en mathématiques

Dans ce parcours, dont les 2 premières années est commune avec le parcours mathématiques pures, le concept d'intégrale de Lebesgue n'a pas d'habitat.

Préparation au professorat du second degré en mathématiques de l'université de Strasbourg			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques au S1	Oui : Série et intégration	oui : calcul différentiel et intégral
Théorie de l'intégration	Newton-Leibniz	Cauchy	

4.4. Les choix dans des universités françaises

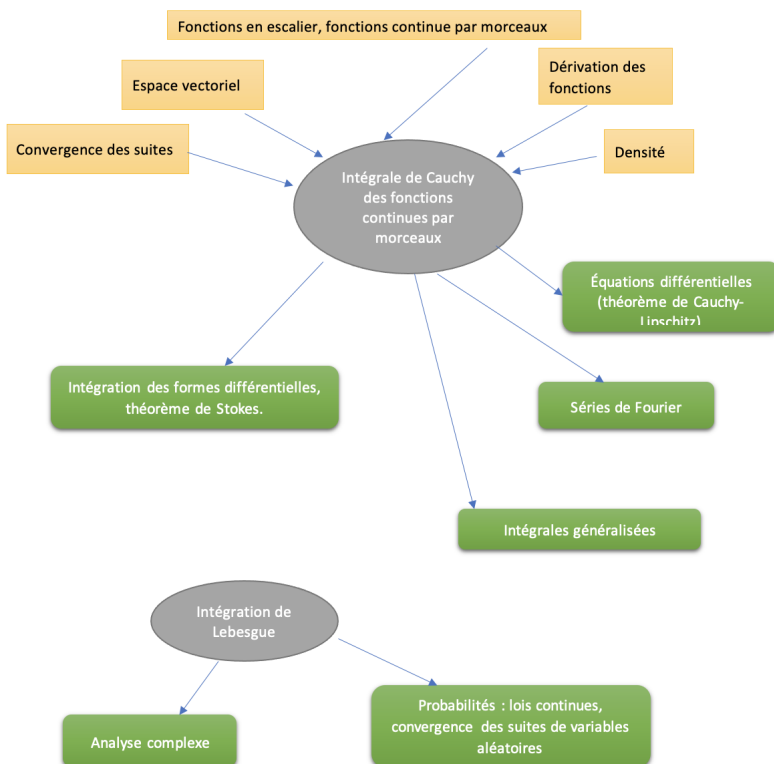


FIGURE 4.10 – Réseau trophique du concept d’intégrale dans le parcours Mathématiques pures à Strasbourg

Préparation au professorat du second degré en mathématiques		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Analyse élémentaire	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Calculs d’intégrales par différentes techniques Intégrales généralisées
	Suites et séries de fonctions	Séries de Fourier
	Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n	Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes
	Calcul scientifique	Intégration des équations différentielles
Intégrale de Riemann	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Lebesgue	\emptyset	\emptyset

Le réseau trophique du concept d'intégrale à l'université de Strasbourg se limite au réseau du concept d'intégrale de Cauchy des fonctions continues par morceaux.

4.4.3 Université de Grenoble

Les syllabus des deux premières années de l'université de Grenoble sont disponibles en ligne⁷.

On trouve au premier semestre une UE *Analyse élémentaire et introduction au calcul scientifique* de 54 heures qui consiste en un « approfondissement de la partie d'analyse de terminale », dont l'intégrale, où « l'accent est mis sur les techniques de calcul ». La mention de l'analyse de terminale et celle des techniques de calcul suggèrent qu'ils s'agit d'un habitat pour l'intégrale de Newton-Leibniz, dont une des niches est le calcul d'intégrales. Une deuxième niche est évoquée, dans l'habitat du calcul scientifique, avec l'intégration numérique.

L'intégrale apparaît ensuite dans l'UE *Approfondissements sur les séries et sur l'intégration* de 58 heures, au semestre 3. En plus des notions sur les séries numériques, le programme annonce l'intégrale de Riemann des fonctions continues sur un intervalle fermé borné, les techniques d'intégration usuelles puis l'intégrale sur des intervalles non compacts avec la notion d'intégrale absolument convergentes. La question des sommes de Riemann, ou de l'intégrabilité n'est pas évoquée. L'habitat du concept d'intégrale est donc celui de l'analyse réelle et les niches sont les calculs d'intégrales, et l'étude des intégrales impropre.

Au semestre 4, on trouve l'UE *suites et séries de fonctions, séries de Fourier*. Ainsi, la notion de série de Fourier est une niche pour le concept d'intégrale, dans l'habitat des suites et séries de fonctions.

On peut également remarquer que la notion d'espace probabilisé (dont la notion de tribus et de probabilités conditionnelles) est introduite dès le semestre 4, ainsi que les variables aléatoires à densité.

Enfin, en L3, deux parcours sont proposés : le parcours A qui prédispose aux masters recherche, et le parcours B qui prédispose plutôt au Master MEEF et au CAPES. Les syllabus des UE de L3 sont également disponibles en ligne⁸. Au semestre 5, les UE d'algèbre et de topologie sont différenciées.

L'intégration est présente dans les deux parcours, en lien avec les probabilités, au semestre 6.

Dans le parcours A, l'intégration est étudiée dans l'UE *Théorie de la mesure et introduction aux probabilités*. La théorie proposée est la théorie générale de la mesure, avec en plus le vocabulaire spécifique aux probabilités. Les théorèmes de convergence

7. <https://formations.univ-grenoble-alpes.fr/fr/catalogue-2021/licence-XA/licence-mathematiques-IAIC1RHZ.html>

8. https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/%7EL3maths/L3_programmes.pdf

de l'intégrale sont étudiés dans le cadre général de l'intégrale par rapport à une mesure positive des fonctions mesurables. Les niches de l'intégrale sont explicitées, avec l'objectif affiché de « faire le minimum utile pour les probabilités ». Cela concerne les espaces L^p , les espaces produits et la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^d , avant une partie réservée exclusivement aux probabilités, avec les différents modes de convergence de variables aléatoires.

Dans le parcours B, donc plutôt à destination des futurs candidats au CAPES, l'intégration de Lebesgue n'est pas au programme. On trouve un habitat de l'intégrale avec le calcul différentiel et la niche des équations différentielles linéaires, et celle qui concerne les propriétés métriques des surfaces. On trouve, de nouveau, le calcul intégral des fonctions continues par morceaux sur un segment de \mathbb{R} , puis la notion d'intégrale impropre et les intégrales en dimensions supérieures avec les énoncés admis des théorèmes de Fubini. Les applications aux probabilités sont attendues, mais sans les notions de théorie de la mesure, et les densités rencontrées sont limitées aux fonctions continues par morceaux, « telles qu'elles sont utilisées en terminale ». Les niches du concept d'intégrale sont explicitées : étude des intégrales à paramètre, intégrale curviligne, longueur d'une courbe paramétrée, convergence des sommes de Riemann.

Enfin, les deux parcours ont en commun l'UE *modélisation numérique* et l'UE *calcul différentiel* qui constituent des habitats pour l'intégration. En ce qui concerne la modélisation numérique, le syllabus indique :

Intégration : méthode des trapèzes, Simpson, ordre/erreur, quadratures de Gauss, accélération des trapèzes Richardson-Romberg, cas des fonctions périodiques, Monte-Carlo.

La fonction de l'intégrale consiste donc à la mise en oeuvre de méthodes numériques pour le calcul approché d'intégrale. Nous désignons cette niche *intégration numérique*. Pour le calcul différentiel, on retrouve la fonction de l'intégrale dans la résolution des équations différentielles.

Nous résumons le cas de l'université de Grenoble ci-dessous.

Cas du parcours A (mathématiques)

Parcours A de l'université de Grenoble			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques élémentaires au S1	Oui : Approfondissement sur les séries et l'intégration	oui : Théorie de la mesure, intégration et probabilité
Théorie de l'intégration	Newton-Leibniz	Cauchy	Lebesgue

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Parcours A de l'université de Grenoble		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Analyse élémentaire	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Calculs d'intégrales par différentes techniques
		Intégrales généralisées
	Suites et séries de fonctions	Séries de Fourier
	Analyse numérique	Intégration numérique
	calcul différentiel	Équations différentielles
Intégrale de Riemann	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Lebesgue	Mesure et intégration	espaces L^p , les espaces produits et la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^d
	Probabilité	Variables aléatoires continues, convergence des suites de variables aléatoires

Cas du parcours B (enseignement)

Dans le parcours B, il n'y a pas d'habitat pour l'intégrale de Lebesgue, alors que l'intégrale de Cauchy trouve d'avantage de niches que dans le parcours A.

Parcours B de l'université de Grenoble			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques élémentaire au S1	Oui : Approfondissement sur les séries et l'intégration	oui : Théorie de la mesure, intégration et probabilité
Théorie de l'intégration	Newton-Leibniz	Cauchy	

Parcours B de l'université de Grenoble		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Analyse élémentaire	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	Analyse réelle	Calculs d'intégrales par différentes techniques
		Intégrales généralisées
		Intégrale dépendant d'un paramètre
	Suites et séries de fonctions	Séries de Fourier
	Analyse numérique	Intégration numérique
	calcul différentiel	Équations différentielles
	Calcul intégral en dimension 2 ou 3	
Intégrales impropres : calcul de l'intégrale de la Gaussienne		
	Probabilité	Définition des variables aléatoires à densité, exemple de lois continues
Intégrale de Riemann	∅	∅
Intégrale de Lebesgue	∅	∅

4.4.4 Sciences Sorbonne université (Paris)

Le syllabus Sciences Sorbonne université est disponible en ligne⁹.

L'université propose quatre parcours dans la licence de mathématiques : deux parcours *mono-disciplinaires* (avec exclusivement des mathématiques, l'un étant considéré « intensif », donc plutôt destiné aux masters recherche), et deux parcours *bi-disciplinaires* (mathématiques et une autre discipline, intensif ou non). Ces deux parcours ont en commun les UE de mathématiques, mais le parcours intensif a une UE d'approfondissement par semestre en plus (d'analyse, d'algèbre, de projet, mais qui ne compte pas dans l'évaluation de la licence).

Nous nous limiterons aux parcours mono-disciplinaires car les UE de mathématiques du parcours bi-disciplinaires sont communes aux parcours mono-disciplinaires.

9. https://www.licence.math.upmc.fr/offre_de_formation/unites_enseignement/

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Dans ces deux parcours, seule une UE par semestre (à partir de la L2) est proposée pour le parcours intensif. La L1 est commune aux quatre parcours. Nous n'étudierons que le parcours mono-disciplinaire.

Le descriptif des UE disponibles sur le site internet de l'université mentionne l'intégrale dans l'UE *calculus* du premier semestre (avec le thème *calcul intégral* et dans l'UE *Suites et intégrale, algèbre linéaire* du deuxième semestre. La théorie de l'intégration enseignée n'est pas précisée, mais le syllabus indique néanmoins :

sommes de Darboux, propriétés de base, approximation par la méthode des rectangles, méthodes de calculs.

Notre interprétation est que le concept d'intégrale a un premier habitat, *calculus*, et la niche est le développement des calculs « élémentaires » d'intégrales par primitives. Ensuite, nous avons donc un deuxième habitat pour l'intégrale, celui de l'analyse réelle. La fonction de l'intégrale dans cet habitat est encore de calculer des intégrales, par des méthodes exactes ou approchées. La mention *sommes de Darboux* peut suggérer le calcul de limite de sommes et l'étude de la convergence vers une même limite des sommes de Darboux. Nous considérons que c'est un habitat pour l'intégrale de Riemann, mais que, dans cet habitat, la niche de l'intégrale est encore de développer des techniques de calcul d'intégrales. Une autre niche de l'intégrale est de développer des techniques de calcul approché. Du fait de la mention des sommes de Darboux, nous supposons également qu'une autre niche est le calcul de la limite de sommes.

L'intégrale trouve ensuite un nouvel habitat : *suites et séries de fonctions* avec comme niche l'étude des séries entières, et des séries de Fourier.

En deuxième année, l'intégrale apparaît l'UE *Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n* . Le syllabus de l'UE est donné sur la figure 4.11

Il s'agit de l'intégrale de Lebesgue pour la mesure de Lebesgue. Ainsi, l'habitat du concept d'intégrale est celui de l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . La fonction de l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est de justifier l'existence des mesures à densité (l'habitat est donc les probabilités), puis l'étude de problème d'inversion du signe sommes et intégrales, et d'intégrales à paramètres. Notons aussi que l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est un habitat pour l'intégrale de Riemann. En effet, le programme indique « définition de l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées ». La niche de l'intégrale de Riemann est de montrer l'apport de la théorie de Lebesgue vis à vis de celle de Riemann comme l'indique la phrase : « Différence pour les autres fonctions [celles qui sont non réglées] et les théorèmes de convergence ».

Le syllabus donne ensuite les niches de l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n : définition des espaces \mathcal{L}^p , des espaces produits, de la transformation de Fourier sur \mathbb{R}^n . dont l'habitat est celui de l'analyse fonctionnelle.

Les probabilités sont étudiées également en deuxième année, ce qui constitue un habitat pour l'intégrale de Lebesgue avec la niche *variables aléatoires à densité*, et les *convergences de variables aléatoires*.

LU2MA211 – INTÉGRALE DE LEBESGUE SUR \mathbb{R}^n
 6 ECTS, second semestre

- 24h de cours magistral,
- 36h de travaux dirigés.
- 1. Bases de théorie de la mesure et mesure de Lebesgue
 - Dénombrabilité. Définition et exemples dénombrable et non-dénombrable.
 - Ligne réelle achevée \mathbb{R}_+ : définition et « arithmétique »
 - Tribu et mesure. Tribu borélienne et mesure de Lebesgue (existence admise).
- 2. Intégration de Lebesgue
 - Fonctions étagées et fonctions mesurables. Stabilité sous les opérations arithmétiques usuelles ainsi que par passage aux limites (cf. question précédente).
 - Intégrale d'une fonction étagée positive. Propriétés élémentaires (sous combinaison linéaire, positivité, etc.).
 - Extension aux fonctions mesurables positives, aux fonctions mesurables réelles intégrables. Notion de parties positive et négative, lien avec la valeur absolue.
- 3. Théorème de convergences
 - Théorème de convergence monotone. Application à l'existence de mesures à densités
 - Lemme de Fatou, théorème de convergence dominée.
 - Applications : Interversions de somme et intégrale pour eds séries à termes positives puis et des séries à termes réels avec intégrabilité.
 - Continuité et dérivabilité sous l'intégrale.
- 4. Lien avec l'intégrale de Riemann
 - Définition de l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées. Coïncidence des définitions pour ces fonctions. Différence pour les autres fonctions et les théorèmes de convergence.
- 5. Inégalités
 - Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité de Hölder et définition des espaces L^p .
 - Inégalités de Markov et Bienaymé-Chebychev pour les mesures de probabilités à densités
- 6. Intégrales multiples : théorèmes généraux et calculs
 - Espaces produits et théorèmes de Fubini pour les fonctions positives et pour les fonctions intégrables. Tribu produit pour mesure σ -finies, mesure produit.
 - Formule de changement de variables. Notion de C^1 -difféomorphisme d'un ouvert vers un autre.
- 7. Transformation de Fourier sur \mathbb{R}^n .
 - Transformation de Fourier dans L^1 et L^2 .
 - Formule d'inversion. Formule de Parseval dans L^2 . Transformée de Fourier d'une convolution.
 - En pratique : calculs de transformée de Fourier, lien avec les fonctions caractéristiques en probabilités.

 FIGURE 4.11 – Syllabus de l'UE Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n de Sciences Sorbonne Université

Au semestre 5, nous trouvons une UE *théorie de la mesure et probabilité* qui pré-

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

sente la théorie de l'intégration sur des espaces généraux, basée sur la notion de mesure et de faire le lien avec la théorie des probabilités vues en L2 sans théorie de la mesure. Les théorèmes classiques vus dans le cadre de la mesure de Lebesgue sont attendus dans le cadre plus général des mesures quelconques. La théorie de la mesure et des probabilités est ainsi un habitat pour l'intégrale de Lebesgue.

Le semestre 6 contient deux UE, dont les probabilités et les statistiques en sont le thème (l'UE de statistique est optionnelle), et mobilisent la théorie de la mesure comme l'indique le syllabus : « Le cours présente l'essentiel des bases des probabilités avec la théorie de la mesure, en se focalisant sur l'indépendance, les propriétés asymptotiques et les notions de convergence. »

On trouve ce semestre une UE d'analyse fonctionnelle dont le syllabus, même s'il ne mentionne pas l'intégrale, indique des niches de l'intégrale : espaces L^p , Théorème de Radon-Nikodym, théorèmes de densité, produit de convolution, transformée de Fourier.

Notons qu'au semestre 6, il reste à choisir une UE parmi *histoire des mathématiques, formule de Stokes et EDP, projet* puis une autre à choisir parmi *Statistique, analyse complexe, projet*. Cela nous donne de nouveaux habitats potentiels pour le concept d'intégrale de Lebesgue.

Nous résumons les données ci-dessous.

Sciences Sorbonne Université, Paris			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non : l'intégration est un thème de l'UE de mathématiques élémentaires au S1	Oui : Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	Non, mais il y a une UE théorie de la mesure et probabilité
Théorie de l'intégration	Leibniz-Newton, Intégrale de Riemann	Intégrale de Lebesgue	

4.4. Les choix dans des universités françaises

Sciences Sorbonne Université, Paris		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Calculus	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Riemann	Analyse réelle	Calculs d'intégrales
		Calculs approchés d'intégrales
		Calculs de limites de sommes
	Suites et séries de fonctions	Étude des suites de fonctions
		Étude des séries entières
		Séries de Fourier
	Équations différentielles	Théorème de Cauchy-Lipschitz
		Résolution d'équations différentielles linéaires
Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	Calcul d'intégrales	
	Différence avec la théorie de Lebesgue	
Intégrale de Lebesgue	Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	Théorèmes de convergence (étude des séries de fonctions)
		Intégrales à paramètres
		Définition des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$
		Intégrales multiples
		Définition de la transformée de Fourier

4.4.5 Université de Reims Champagne-Ardenne

La licence de mathématiques de l'université de Reims Champagne-Ardenne propose deux parcours : le parcours mathématiques appliquées, et le parcours mathématiques fondamentales. Ces parcours sont des parcours de L3. Les enseignements de L1/L2 sont donc communs aux deux parcours. Par ailleurs, les enseignements de L1 sont mutualisés avec la licence d'informatique. Le descriptif de la licence est disponible en ligne ¹⁰.

10. <https://www.univ-reims.fr/formation/catalogue-de-formation/licence-mathematiques,23515,38949.html?args=R9qFsCnMmKDtxCa17YTDkHVqaqbFYRXwwTnCVt2witCDUIiVoUdkeMDp%>

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Nous ne nous intéresserons qu'au parcours mathématiques fondamentales, dont le descriptif décrit les débouchés : professeur de Mathématiques (CAPES, agrégation) en collège, lycée, IUT, CPGE, Professeur des écoles (PE), enseignant-chercheur ou chercheur (après un doctorat).

L'intégrale apparaît dans le descriptif de l'UE *outils mathématiques* au premier semestre (Primitives : définitions, primitives classiques, calcul par intégration, par parties et changement de variables). Ici, on retrouve l'habitat *calculus* et la niche du calcul d'intégrales.

L'intégrale apparaît ensuite dans l'UE *Analyse 2*, au semestre 3. Le descriptif est donné sur la figure 4.12.

Objectifs
Maîtriser la notion d'intégrale de Riemann sur un segment puis sur un intervalle quelconque.
Compétences spécifiques visées
Maîtriser toutes les techniques classiques de calculs d'intégrales.
Compétences générales visées
Être capable d'utiliser l'intégrale de Riemann comme outil mathématique, savoir étudier l'intégrabilité d'une fonction dans les cas simples. Savoir étudier et utiliser la convexité d'une fonction dans des cas simples.
Programme
- Fonctions convexes réelles : définition analytique, lemme des 3 pentes, caractérisation quand f dérivable ou deux fois dérivables, inégalité de Hölder. Autres inégalités de convexité en TD.- Continuité uniforme. Fonctions en escaliers, intégrale de Riemann sur un segment, propriétés. Techniques de calcul : changement de variable, intégration par parties.- Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale.- Intégrales impropres : intégration sur un intervalle quelconque, relations de comparaison (les intégrales à paramètres et les intégrales multiples sont faites en S4).- Comparaison série-intégrale.

FIGURE 4.12 – Syllabus de l'UE analyse 2, université de Reims

Le programme stipule l'intégrale de Riemann sur un segment (puis sur un intervalle quelconque) et l'intégrabilité d'une fonction. L'analyse réelle est donc ici un habitat pour l'intégrale de Riemann. Les niches de l'intégrale dans cet habitat sont les techniques de calculs, la formule de Taylor avec reste intégrale, les intégrales impropres, les séries numériques (avec la comparaison série-intégrale). Le programme indique aussi le besoin trophique de l'intégrale : la notion de continuité uniforme, de fonctions en escalier. Les développements limités seront étudiés au semestre 3 et le besoin trophique est la formule de Taylor avec reste intégral. Trois autres habitats de l'intégrale se trouvent au semestre 4 : d'abord l'habitat des suites et séries de fonctions, ainsi que les séries entières, puis avec l'habitat des fonctions de plusieurs variables avec l'étude des intégrales

2AXGEGm2SMIhvMbuZ3_kOrRxvJlk6dOorIryuNioRCyFFyPAvh19tCdwYdtHRrwAvNC1tDg_H&formation_id=47

à paramètre et le calcul des intégrales multiples. Enfin, on retrouve l'intégrale dans l'habitat de l'analyse numérique dont la niche est la mise en application des méthodes et outils numériques.

En L3, on trouve une UE spécifique à l'intégration, dont l'intitulé est *Intégration, séries de Fourier*. Le syllabus de l'UE est sur la figure 4.13. Cette UE est au semestre 6.

Le syllabus indique que les niches de l'intégrale de Lebesgue concernent plutôt des notions de niveau master (voir la section objectif sur la figure 4.13). Pour autant, on trouve dans ce syllabus des niches dans l'habitat de l'intégration : utilisation des théorèmes de convergence, étude des intégrales à paramètres, espaces L^p , intégrales multiples, puis, dans l'habitat des séries de Fourier, le calcul des coefficients de Fourier et de l'étude de la convergence des séries de Fourier (théorème de Jordan-Dirichlet).

Nous pouvons remarquer la présence de l'UE *probabilités et statistique*, toujours au semestre 6, dont le syllabus est sur la figure 4.14. Les besoins trophiques des différents concepts en jeu dans cette UE sont explicités : « UEs de maths des semestres S1 à S4, S5-MATH1 (calcul différentiel), S5-MATH2 (espaces métriques), Python ». L'intégrale de Lebesgue ne correspond pas à un besoin trophique des probabilités et statistique. Le syllabus (voir figure 4.14) ne mentionne pas la notion de mesure, ni celle d'espace probabilisé. L'intégrale n'apparaît pas dans le syllabus mais nous relevons tout de même un habitat pour l'intégrale de Riemann avec la niche de la définition des lois continues, la notion de convergence d'une suite de variables aléatoires.

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Objectifs
Acquérir les connaissances nécessaires pour une utilisation pratique de la théorie de l'intégration de Lebesgue et des séries de Fourier pour le master.
Compétences spécifiques visées
Maîtriser les outils de l'intégration de Lebesgue et les séries de Fourier.
Compétences générales visées
Savoir reconnaître si une fonction est mesurable ou intégrable sur un ensemble donné, savoir utiliser les développements en série de Fourier
Programme
- Espaces mesurables, tribu, mesure. Intégrale de Lebesgue (on ne construira pas la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}).- Théorèmes de convergence. Théorèmes de continuité, dérivabilité des intégrales à paramètre (admis).- Séries de Fourier : coefficients de Fourier, théorème de Jordan Dirichlet.- Espaces L^1 , L^p et L^∞ .- Théorème de Fubini (admis).

FIGURE 4.13 – Syllabus de l'UE Intégration, séries de Fourier de l'université de Reims, L3

Objectifs
Maîtriser les notions élémentaires de probabilité et initier à l'estimation et aux tests statistiques.
Compétences spécifiques visées
savoir identifier des loi usuelles, calculer leur espérance, leur variance ;savoir déterminer la loi de l'image d'une variable ou d'un vecteur aléatoire par un difféomorphisme (changement de variables), calculer les marges d'un vecteur, prouver que des variables sont indépendantes ou non ;savoir appliquer le théorème central limite pour construire des intervalles de confiance d'une moyenne ;savoir mettre en application des procédures de tests usuels dans des situations bien identifiées.
Connaissances requises
UEs de maths des semestres S1 à S4, S5-MATH1 (calcul différentiel), S5-MATH2 (espaces métriques), Python.
Programme
- Rappels sur la notion de probabilité (événement, probabilité, indépendance, probabilités conditionnelles), de variable aléatoire discrète (fonction de répartition, espérance, variance) et les lois classiques (Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson).- Variables aléatoires réelles à densité et modèles de lois classiques (exponentielles, uniformes, normales).- Couple de variables aléatoires réelles.- Convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires. Loi faible des grands nombres.- Fonctions caractéristiques, convergence en loi, Théorème Central Limite.- Introduction à la statistique inférentielle (notions d'estimateurs sans biais, d'erreur quadratique minimale, construction d'estimateur par les méthodes des moments et du maximum de vraisemblance).- Tests statistiques (vocabulaire, tests du rapport de vraisemblance, tests paramétriques usuels, dont Student, Fisher).

FIGURE 4.14 – Syllabus de l'UE probabilités et statistiques (S6) de l'université de Reims

Nous résumons les données pour l'université de Reims :

4.4. Les choix dans des universités françaises

Université de Reims			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non	Non	Oui : théorie de la mesure et intégration
Théorie de l'intégration	Leibniz-Newton	Intégrale de Riemann	Intégrale de Lebesgue

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Université de Reims		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Calculus	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Riemann	Analyse réelle	Calculs d'intégrales
		Étude des intégrales impropres
		Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale
		Comparaison série-intégrale
	Fonctions de plusieurs variables	Intégrales à paramètres
		Intégrales multiples
	Équations différentielles	Théorème de Cauchy-Lipschitz
		Résolution d'équations différentielles linéaires
	Probabilités et statistique	lois continues
		Convergence d'une suite de variables aléatoires
Intégrale de Lebesgue	Intégration	Théorèmes de convergence (étude des séries de fonctions)
		Intégrales à paramètres
		Définition des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$
		Intégrales multiples
	Séries de Fourier	Définition et calcul des coefficients de Fourier
		Étude de la convergence des séries de Fourier

4.4.6 Université de Montpellier

Nous décrivons ici le cas de l'université de Montpellier suivant la même méthodologie que dans les autres universités. Au chapitre suivant, nous mènerons des analyses complémentaires sur la transposition didactique de l'intégrale à Montpellier avec le produit de la transposition didactique interne. Précisons que nous faisons l'étude du syllabus correspondant à l'ancienne accréditation (la nouvelle maquette a été mise en oeuvre à la rentrée 2021), dans la mesure où celle-ci correspond au parcours vécu par les étudiants sujets de notre expérimentation.

À l'université de Montpellier, la licence de mathématiques propose 2 parcours différenciés au dernier semestre de la L3 : *mathématiques fondamentales* et *mathématiques CAPES*. Ce dernier est le parcours préférentiel pour ceux qui souhaitent poursuivre dans un Master MEEF (1er ou 2nd degré), alors que le premier permet une poursuite d'études dans un master de mathématiques fondamentales ou de mathématiques appliquées.

En première année, l'intégrale apparaît dans l'UE *calcul* : le syllabus indique les thèmes « Dénombrément, Identités remarquables, Dérivées, primitives, Calcul d'intégrales, Étude de fonctions, Nombres complexes, Équations différentielles du premier ordre ». Il s'agit d'une UE qui vise à développer des capacités que l'on peut qualifier de « techniques », c'est à dire centrées sur des techniques de calculs. L'intégrale en jeu est l'intégrale de Newton-Leibniz.

Nous pouvons penser qu'il y a une niche à cette intégrale en analyse réelle, puisque le syllabus de l'UE *analyse 2* indique, dans le thème « Dérivation et application », les formules de Taylor. Ceci doit inclure la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale.

L'intégrale apparaît de nouveau en S3, dans l'UE *analyse 3*, dont le programme est dans la figure 4.15 On remarque un thème dans le domaine de l'analyse : intégration. Le syllabus précise « fonctions Riemann Intégrables ». Le concept d'intégrale de Riemann trouve ainsi un premier habitat, l'analyse réelle. Les niches sont les techniques de calculs d'intégrales, les calculs de limites de sommes de Riemann et de Darboux, et l'étude des intégrales généralisées.

Au semestre 4, toujours dans le domaine de l'analyse réelle, on trouve une niche de l'intégrale dans l'étude des suites et séries de fonctions avec l'étude de la stabilité de l'intégration par convergence uniforme, puis l'intégrabilité d'une série de fonctions. Enfin, l'étude des séries de Fourier constituent un autre thème de l'analyse, et la définition des séries de Fourier, comme l'étude de la convergence des séries de Fourier sont des niches de l'intégrale.

Le domaine des probabilités constitue aussi un habitat pour l'intégrale de Riemann. En effet, après l'étude des probabilités discrète en S3, les variables aléatoires sont étudiées. Le syllabus indique « Objectif : A la suite de HLMA311 [Probabilités élémentaire, S3], présenter les variables aléatoires à densité, les vecteurs aléatoires, énoncer

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

HLMA302 Analyse 3 (S3, MG-MI, 36hCM + 39hTD)

I/ Intégration

- 1) Intégrale d'une fonction en escalier
- 2) Fonctions Riemann Intégrables
- 3) Primitive et Intégrales
- 4) Quelques méthodes de calculs (IPP, changement de variables)
- 5) Sommes de Riemann et de Darboux
- 6) Intégrales généralisées

II/ Dénombrabilité

-
- 1) Cardinaux, ensembles dénombrables, propriétés de stabilité de la dénombrabilité
 - 2) Exemples d'ensembles dénombrables et non dénombrable

III/ Sommes de termes positifs - Familles sommables de réels (espace l^1)

- 1) Somme d'une famille de termes positifs
Définition (comme sup sur les sommes finies), propriétés (additivité, homogénéité positive, sommation par paquet, Fubini positif, convergence monotone)
- 2) Famille sommable de réels
Définition (en utilisant parties positive et négative), propriétés (l^1 est un evn, la somme est linéaire, on peut se restreindre à un ensemble d'indice dénombrable, sommation par paquet, Fubini, convergence dominée)

IV/ Séries Numériques

- 1) Définitions (série, série convergente, absolument convergente, commutativement convergente)
- 2) Critères de convergence (comparaison série-intégrale, test de la loupe de Cauchy règles de Cauchy et de d'Alembert, transformation d'Abel, critère des séries alternées) et comparaisons de séries.
- 3) Exemples classiques

FIGURE 4.15 – Syllabus UE analyse 3, Université de Montpellier

quelques résultats de convergence (loi des grands nombres, TCL) et en donner quelques applications ». Bien que l'intégrale ne soit pas explicitée, nous considérons que les probabilités sont un habitat pour l'intégrale avec les niches de la définition des lois à densité, de la fonction de répartition, et des modes de convergence.

Au semestre 5, en commun aux deux parcours, on trouve une UE *mesure et intégration*, dont le syllabus est sur la figure 4.16.

On peut remarquer le besoin trophique du concept d'intégrale : la théorie des ensembles, la notion d'espace mesuré, les fonctions mesurables. Les niches de l'intégrale dans l'habitat mesure et intégration est l'étude des suites de fonctions (théorèmes d'in-

terversions limite-intégrale), et l'étude des intégrales à paramètre, puis l'étude des séries numériques (mesure discrète), des intégrales multiples. Enfin, l'intégrale de Lebesgue permet de définir et étudier les espaces L^p .

- I/ Élément de théorie des ensembles.
- II/ Espace mesuré.
 - 1) Définition, Exemple des mesures discrètes
 - 2) Propriétés générales des mesures
 - 3) Construction d'espace mesuré (Tribu engendrée. Tribu borélienne, Théorème de Carathéodory (admis)), caractérisation d'une mesure sur un pi système
 - 4) Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: Existence et propriétés
 - 5) Mesures produits. Exemple de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
- III/ Fonctions mesurables.
 - 1) Définition de la mesurabilité.
 - 2) Critères de mesurabilité.
 - 3) Mesure image d'une mesure par une fonction mesurable
 - 4) Fonctions simples.
 - 5) Densité des fonctions simples dans l'ensemble des fonctions mesurables positives.
- IV/ Construction de l'intégrale de Lebesgue et théorèmes d'interversion limite-intégrale
 - 1) Construction de l'intégrale (sur l'ensemble des fonctions mesurables positives et sur l'espace L^1), Propriétés (linéarité, croissance, inégalité de Markov ...), mesure à densité
 - 2) Théorèmes d'interversions limite-intégrale (cv monotone, Fatou, cv dominée)
 - 3) Intégrale dépendant d'un paramètre : critères de continuité et de dérivabilité
- V/ Quelques cas particuliers importants
 - 1) Intégration et mesure produit : le Théorème de Fubini
 - 2) Intégration et mesure discrète : application aux séries
 - 3) Intégration et mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (extension de l'intégration de Riemann, changement de variable)
 - 4) Intégration et mesure à densité

 - 5) Intégration et mesure image : le Théorème de transfert
- VI/ Espaces L^p
 - 1) Définition. Inégalités de Holder et de Minkowski.
 - 2) L^p est un Banach, L^2 un Hilbert

FIGURE 4.16 – Syllabus mesure et intégration, Université de Montpellier

Au semestre 6, les deux parcours ont en commun les UE de probabilité et statistique, et de calcul différentiel.

Les probabilités et statistiques constituent ainsi un habitat pour l'intégrale de Lebesgue. Le syllabus indique « A l'aide des résultats vus en théorie de la mesure, unifier

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

la présentation de la théorie des probabilités (cas discret, cas continu), et en démontrer certains des résultats les plus importants. Donner des applications à la statistique inférentielle ».

Les niches de l'intégrale de Lebesgue dans l'habitat des probabilités et statistiques sont la définition des variables aléatoires et de la loi d'une variables aléatoire et d'une famille de variables aléatoires (en lien avec les mesures produits), la notion d'espérance, de variance, de fonction de répartition, de fonction caractéristique, les modes de convergences, les applications en statistique.

En ce qui concerne le calcul différentiel, on trouve la niche de l'intégrale concernant les équations différentielles avec le théorème de Cauchy-Lipschitz et les résolutions d'équations différentielles générales.

La situation de Montpellier (au moment de notre étude) est donc :

Université de Montpellier			
	L1	L2	L3
Module spécifique à l'intégration	Non	Non	Oui : théorie de la mesure et intégration
Théorie de l'intégration	Leibniz-Newton	Intégrale de Riemann	Intégrale de Lebesgue

4.4. Les choix dans des universités françaises

Université de Montpellier		
	Habitat	Niche
Intégrale par primitive (Leibniz-Newton)	Calculus	Techniques de calculs de primitives
Intégrale de Cauchy	\emptyset	\emptyset
Intégrale de Riemann	Analyse réelle	Calculs d'intégrales
		Étude des intégrales impropres
		Formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale
		Séries de Fourier Comparaison série-intégrale
	Équations différentielles	Théorème de Cauchy-Lipschitz Résolution d'équations différentielles linéaires
	Probabilités et statistique	variables aléatoires à densité
		Convergence d'une suite de variable aléatoire.
Intégrale de Lebesgue	Intégration	Théorèmes de convergence (étude des séries de fonctions)
		Intégrales à paramètres
		Définition des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$
		Intégrales multiples
	Probabilités et statistique	variables aléatoires à densité
		Espérance, variance
		Fonction de répartition, fonction caractéristique
	Modes de convergence d'une suite de variable aléatoire	

Le réseau trophique du concept d'intégrale de Riemann est donné par la figure 4.17 et celui pour le concept d'intégrale de Lebesgue est donné par la figure 4.18.

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

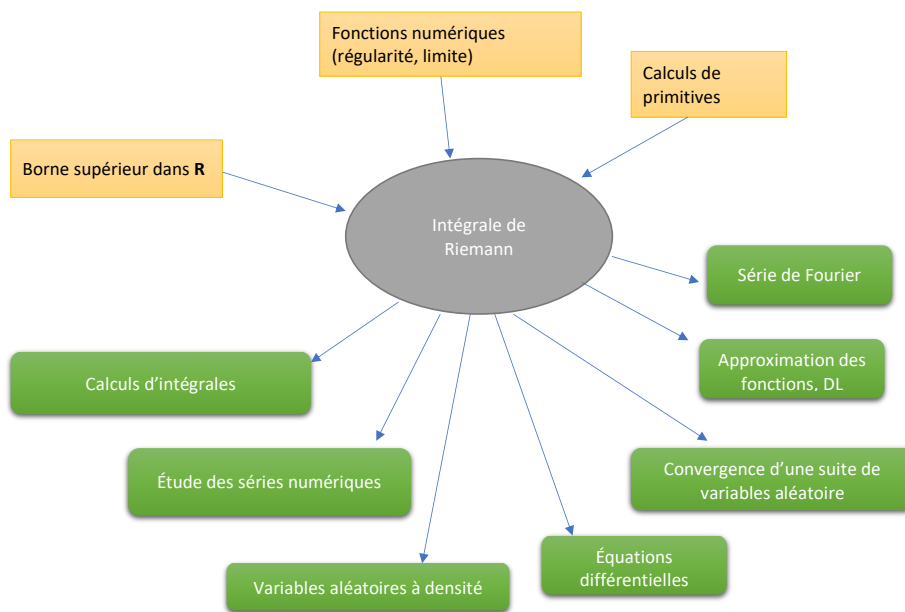


FIGURE 4.17 – Réseau trophique du concept d'intégrale de Riemann à Montpellier

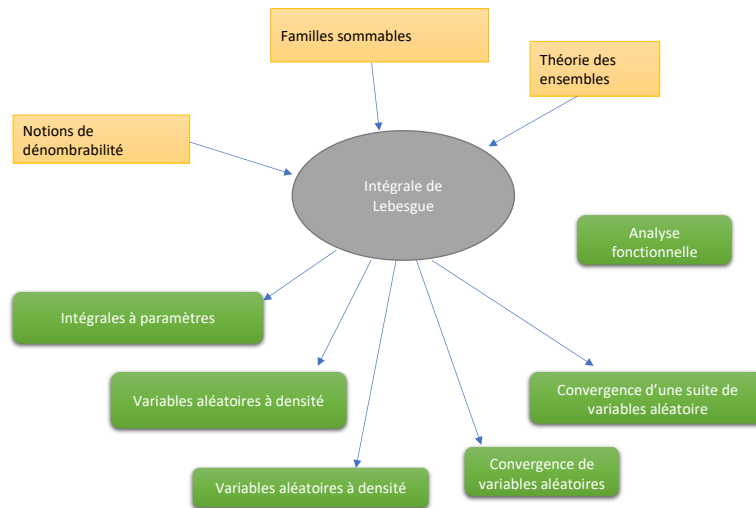


FIGURE 4.18 – Réseau trophique du concept d'intégrale de Lebesgue à Montpellier

4.5 Conclusion : réponses à QR_1

Avant d'apporter nos réponses à QR_1 , nous présentons sous la forme d'un tableau les résultats obtenus dans notre enquête : le premier tableau concerne les parcours enseignement des licences de mathématiques, et le deuxième les parcours de mathématiques fondamentales.

Dans ce tableau, nous désignerons par «Newton» l'intégrale des fonctions continues définies par les primitives (lorsque le syllabus n'indique que des calculs de primitives, d'intégrales définies par les primitives, et ne mentionne pas les sommes de Riemann ou de Darboux), par «Cauchy» l'intégrale de Cauchy (on identifie cette intégrale à l'intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux), «Riemann» l'intégrale de Riemann et «Lebesgue» l'intégrale de Lebesgue.

Parcours « mathématiques pour l'enseignement »			
Université	L1	L2	L3
Lyon	Cauchy	Cauchy	Cauchy
Strasbourg	Newton	Cauchy	Cauchy
Grenoble	Newton	Cauchy	Cauchy
Paris MC	Cauchy	Lebesgue	Lebesgue
Reims	Newton	Riemann	Lebesgue
Montpellier	Newton	Riemann	Lebesgue

et

Parcours « mathématiques pour la recherche »			
Université	L1	L2	L3
Lyon	Cauchy	Cauchy	Lebesgue
Strasbourg	Newton	Cauchy	Lebesgue
Grenoble	Newton	Cauchy	Lebesgue
Paris MC	Cauchy	Lebesgue	Lebesgue
Reims	Newton	Riemann	Lebesgue
Montpellier	Newton	Riemann	Lebesgue

Le but de ce chapitre était d'étudier le groupement de questions suivantes :

Comment expliquer, d'un point de vue épistémologique, la pluralité des théories de l'intégration enseignées à l'université ? Quels sont les différents choix de transposition didactique externe opérés par les universités françaises du concept d'intégrale ?

Quelles sont les raisons de ces choix mises en avant par la noosphère ?

Notre enquête montre qu'un modèle majoritaire pour la filière mathématiques générales est l'enseignement de l'intégrale de Newton ou de Cauchy en 1ère année et en 2ème année, puis l'intégrale de Lebesgue en 3ème année.

En revanche, les avis sont plus partagés en ce qui concerne les parcours enseignements.

Nous pouvons l'expliquer avec la recherche d'une adéquation au programme du concours, mais peut-être également au fait que les enseignants adaptent le niveau des cours au niveau des étudiants (Bosch et al., 2021).

Dans chacune des universités étudiées, l'habitat principal de l'intégrale en première et deuxième année est celui de l'analyse réelle : d'abord à travers la niche des calculs d'intégrales et de primitive, puis dans l'étude des séries numériques (comparaison séries-intégrales), des calculs de limites de sommes (via les sommes de Riemann), et enfin la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale. Nous retrouvons dans notre enquête différentes niches déjà citées par Queffelec.

Notre étude montre que l'intégrabilité (au sens de Riemann) des fonctions ne trouve pas véritablement d'habitat. En effet, le besoin trophique des différentes niches de l'intégrale de Riemann reste l'intégrale des fonctions continues par morceaux. Nous avons vu, dans notre étude épistémologique, que la notion d'intégrabilité a émergée, dans le cadre de l'étude des séries trigonométriques, autour de la convergence des sommes de Cauchy. Le fait de situer l'intégration dans le cadre des fonctions continues par morceaux rend difficile la problématisation de l'intégrale de Riemann. Nous pouvons aussi penser que le développement des connaissances des étudiants sur l'analyse réelle, en particulier sur les fonctions, limite l'étude de l'intégrale.

Notre enquête épistémologique a aussi montré que les recherches menées autour des critères d'intégrabilité de Riemann ont été déterminantes dans l'émergence de la notion de mesure. Peut-être que cette absence d'habitat explique les difficultés des étudiants à appréhender la théorie de la mesure.

L'étude des produits de la transposition didactique externe du concept d'intégrale à l'université montre que pour la moitié des universités étudiées, l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure ne trouve pas d'habitat dans le curriculum des étudiants qui se destinent au métier de l'enseignement. Nous pouvons l'expliquer par le fait que le programme du CAPES ne contient pas de notions spécifiques à la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Mais nous avons vu que cette tension spécifique sur le fait d'enseigner la théorie de Lebesgue ou non aux futurs enseignants de mathématiques s'exerce dans la noosphère, puisqu'Henri Queffelec pense que l'enseignement de la théorie de Riemann est suffisante pour la préparation du CAPES (Queffelec, 2012) alors que Marc Rogalski pense qu'il n'est pas raisonnable de se limiter à l'intégrale de Riemann en L3, y compris pour les futurs enseignants (M. Rogalski, 2013).

De plus, nous n'avons pas remarqué de niche qui concernent la mesure des grandeurs en lien avec l'intégrale dans les syllabus des universités étudiées. En particulier, la référence à la notion d'aire n'apparaît pas dans les syllabus. En L3, la notion de mesure semble majoritairement introduite à l'aide des notions de tribus, dans des espaces abstraits. Pourtant, Queffelec (2012, p. 54) affirme :

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ

Nous ne voulons à aucun prix nous lancer dans la présentation axiomatique et pédagogiquement dissuasive à coups de tribus.

Les produits de la transposition didactique externe ne semble pas suivre cela.

Les intégrales à paramètres, l'étude des suites et séries de fonctions, les intégrales multiples sont des niches pour différents concepts d'intégrales. Bien que l'intégrale de Lebesgue apporte des théorèmes de convergence dont la mise en oeuvre paraît plus simple que pour l'intégrale de Riemann, le fait de maintenir en première ou deuxième année les intégrales à paramètres ou les suites et séries de fonction comme des niches de l'intégrale de Riemann permet la mise en oeuvre de raisonnement « à ε près » qui sont important dans la formation, comme le souligne M. Rogalski (2013, p. 37) :

Utiliser des stratégies d'enseignement qui évitent la difficulté du raisonnement « à ε près » est une erreur pédagogique et épistémologique, car ce raisonnement est la seule manière de faire entrer les étudiants dans l'analyse mathématique et de rompre avec le seul point de vue algébrique en usage dans l'enseignement du second degré.

L'intégrale de Lebesgue trouve un habitat important à travers les probabilités et statistique. Il est intéressant de remarquer que l'université de Strasbourg, du fait de ne pas permettre d'habitat à l'intégrale de Lebesgue dans le parcours enseignement, fait le choix de ne pas avoir d'enseignement de probabilité. Le besoin trophique des notions de probabilités (espace probabilisé, variables aléatoires à densité, convergences de variables aléatoires, fonctions de répartition, ...) est l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure. Cela fait échos à ce qu'affirme M. Rogalski (2013, p. 42) sur la nécessité d'enseigner l'intégrale de Lebesgue en L3 :

Outre les arguments concernant la formation des maîtres, il faut prendre en compte le fait qu'on va déjà sans cesse utiliser cette intégrale [celle de Riemann] en L1 et L2 (avec des approches simples possibles), d'une part, et le fait qu'on ne peut pas repousser indéfiniment l'enseignement des probabilités, d'autre part. De plus il ne faut pas oublier l'utilité de disposer des exemples d'espaces de Banach que sont les espaces \mathcal{L}^p

Il avait aussi souligné la niche des espaces \mathcal{L}^p , nous avons remarqué, effectivement, que cette niche est présente dans toutes les universités qui enseignent l'intégrale de Lebesgue.

Aucun habitat pour l'intégrale de Kurzweil-Henstok dans les universités étudiées. Il est probable que le poids des habitudes dont parle Cuculière (1998) reste un argument pour justifier l'absence de cette théorie.

Cette étude confirme néanmoins une certaine stabilité dans le produit du processus de transposition didactique externe de l'intégrale et nous considérons que le modèle à l'université de Montpellier est le modèle dominant. De nouvelles question se posent

alors : Comment les enseignants qui ont participé au travail des commissions expliquent-ils les choix de transposition didactique externe, relativement aux différents modules de licence qui traitent de l'intégrale, ainsi que leurs propres choix de transposition didactique interne lorsqu'ils sont chargés de ces enseignements ? Nous poursuivons l'étude de la transposition didactique de l'intégrale à l'université de Montpellier.

CHAPITRE 5

Étude de cas : la transposition didactique du concept
d'intégrale à l'université de Montpellier

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la transposition didactique externe de l'intégrale à l'université. Cette étude nous a permis de faire un état des lieux de l'enseignement de l'intégrale dans quelques universités en France grâce à une étude écologique a priori à partir des syllabus de ces universités. Bien qu'un modèle soit dominant, notre étude montre malgré tout certains choix opérés par ces universités et nous avons montré les raisons écologiques de ces choix. Nous avons aussi mis en avant des arguments mis en avant par la noosphère.

Ce chapitre vise à apporter des réponses à notre deuxième groupement de question de recherche que nous rappelons ici :

QR₂ : Quels sont les choix de transposition didactique externe et interne pour l'intégrale opérés à l'Université de Montpellier et comment expliquer ces choix ? Quel(s) modèle(s) praxéologique(s) de référence sur l'intégration en licence de mathématiques à l'université de Montpellier proposer pour rendre compte de l'équipement praxéologique des étudiants et des liens entre les différentes théories de l'intégration mis en avant par l'institution ?

Des études du processus de transposition didactique externe ont déjà été menées par Bosch et al. (2021) et par Candy (2020), et ont montré que des conditions et des contraintes s'exercent sur ce processus.

Parmi les conditions et contraintes déjà identifiées dans les études citées, on trouve :

- la contrainte du temps didactique, le nombre d'heures d'enseignement dédié à chaque parcours, à chaque UE ;
- le laboratoire de recherche : les enseignements de licence peuvent être construits en fonction des parcours de masters de l'université, qui eux-même dépendent des thématiques de recherche du laboratoire ;
- la cohérence du cursus ;
- les programmes des concours :

La contrainte des concours de recrutement des enseignant·e·s provient de la spécificité française de la formation des professeur·e·s : les candidat·e·s de l'agrégation sont issu·e·s de masters de mathématiques, tout comme la majorité des candidat·e·s au CAPES possèdent une licence de mathématiques. (Candy, 2020, p. 335)

Afin d'étudier plus spécifiquement le processus de transposition didactique à l'université de Montpellier, il nous a semblé nécessaire de compléter la description du syllabus par des interviews d'enseignants responsables des cours en lien avec l'intégration et du processus de transposition. Notre questionnaire vise à la fois à compléter l'étude

menée dans le chapitre 4, en particulier sur les arguments qui justifient les choix d'une théorie de l'intégration à enseigner, à documenter le processus de transposition didactique externe, mais aussi à nous permettre d'analyser plus finement les produits de la transposition didactique interne. En effet, nous analyserons les documents de cours et de travaux dirigés dans le but de construire un modèle praxéologique dominant pour l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue. Ces modèles seront pour nous des outils pour rendre compte de l'équipement praxéologique des étudiants de l'université de Montpellier sur le concept d'intégrale.

Les analyses praxéologiques sont menées sur les documents de travaux dirigés et de cours fournis par les professeurs aux étudiants. En amont, une analyse des secteurs et des thèmes présents dans le programme officiel ou le syllabus, s'ils existent, complète les analyses praxéologiques. Les interviews que nous avons mené vont nous servir à la fois pour guider notre regard dans l'analyse des documents (à travers les tâches mise en avant dans les interviews) mais également dans la présentation du modèle. Afin de regrouper des tâches et identifier leurs techniques et technologies, nous nous demandons « quels sont les invariants dans ces tâches au niveau de la technique et qu'est-ce qui les justifie ? ». Ceci nous permet de mettre en avant des énoncés présentant un certain degré de généralité (correspondant à un type) et de décrire les techniques de résolution. C'est par exemple le cas lorsque des techniques sont exposées dans le cours. Tant cette description que la justification des techniques dépendent du logos disponible, donc des éléments de cours. C'est par un tel travail de cohérence que nous parvenons à calibrer le niveau de généralité des énoncés des types de tâches.

5.2 Interviews d'enseignants chercheurs

Les interviews sont semi-structurées, c'est-à-dire que nous nous appuyons sur un questionnaire qui est pour tous le même. Mais nous nous sommes permis de rebondir sur certaines réponses, soit parce qu'elles ne nous semblaient pas claires, soit parce qu'il nous semblait que quelque chose pouvait être approfondi.

Compte tenu de questions posées dans notre étude, notre questionnaire se décline en trois parties :

- Le rapport personnel des enseignants au concept d'intégrale : ce rapport personnel est façonné par le rapport institution, dans la double position d'enseignant et de chercheur ;
- Ce qui concerne la transposition didactique externe et son produit : nous cherchons à comprendre les choix qui sont fait à l'université de Montpellier, et ainsi à mettre en avant les arguments utilisés par les enseignants sur le choix des organisations mathématiques ;

- Ce qui concerne la transposition didactique interne : les tâches mises en avant par les enseignants, les liens entre les différentes théories enseignées à l'université mis en lumière dans les cours, la place accordées aux aspects théoriques, aux aspects pratiques.

La section suivante consiste en l'*analyse a priori* du questionnaire.

5.2.1 Analyse a priori du questionnaire

Cette analyse a priori doit nous permettre de nous assurer que les questions posées permettent bien d'apporter les éléments de réponses souhaités. Elle doit nous permettre également d'identifier des catégories pour l'analyse qualitative des interviews. Notre méthodologie d'analyse reprend celle de Candy (2020).

La première partie concerne le profil de l'enseignant chercheur interrogé. Nous cherchons à connaître des éléments permettant de décrire le rapport personnel de l'enseignant chercheur au savoir en jeu, ici l'intégrale. De plus, nous cherchons à connaître sa position institutionnelle dans le processus de la transposition didactique externe.

Les questions sont :

1. *Depuis combien de temps êtes-vous enseignant chercheur ?*
2. *Quel est votre champs de recherche et ses liens avec l'intégration ?*
3. *Quelle est, pour vous, la place de l'intégration dans les mathématiques ?*
4. *Quels modules en relation avec l'intégration enseignez-vous ou avez-vous enseigné ? Pouvez-vous décrire le contenu de ces modules, et en particulier pouvez-vous détailler les liens avec l'intégration ?*
5. *Dans votre université, avez-vous participé aux commissions de conception des référentiels/programme en cours, en particulier en ce qui concerne l'intégration ?*

Le deuxième groupe de questions porte spécifiquement sur la transposition didactique externe de l'intégrale à l'université. Nous chercherons à poursuivre la documentation sur les conditions et les contraintes qui pèsent sur la transposition didactique externe à l'université, en particulierisant au cas de l'intégrale. Certaines questions vise donc l'étude de ce processus. Mais nous cherchons aussi à mettre en lumière les arguments qui permettent de justifier les choix de la théorie de l'intégrale enseignée.

1. *Dans l'accréditation actuelle dans votre université, quelles sont les théories de l'intégration qui sont enseignées de la L1 à la L3 de mathématiques ? Comment est pensée l'articulation entre ces différentes théories dans votre université ?*

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Nous cherchons essentiellement à avoir une description de l'organisation des modules d'intégration. Cette description peut compléter le syllabus. Mais également, nous voulons obtenir de premiers éléments sur des liens entre les théories, et, dans le processus de transposition externe, nous voulons savoir si les liens sont pensés et explicites. Nous obtiendrons ici des informations sur le produit de la transposition didactique externe.

2. *Que pensez-vous de ce programme d'études en L1/L2/L3 sur le thème de l'intégration ?*

Cette question contribue à participer au débat sur le choix de la théorie d'intégration. Ici, nous souhaitons obtenir un avis personnel sur les choix opérés à l'université de Montpellier. Les arguments peuvent être de différents ordre : sur la cohérence globale des modules, sur la pertinence de choix des théories au regard des poursuites d'étude, sur l'adéquation de l'enseignement avec le niveau des étudiants. Nous mettrons en regard les arguments avec ceux mis en lumière dans l'étude des débats (voir chapitre 4). Nous distinguerons les arguments de type « niches et habitats » (la variétés des lieux dans lesquels vivent les concepts), les chaînes trophiques, de type intra-théorique, et didactique.

3. *Avez-vous des informations sur la manière dont a été produit le référentiel sur l'intégration ? Si oui, qu'est-ce qui a fait débat au sein de la commission des programmes ? Quels arguments ont permis de trancher ces débats ? Avez-vous identifié des contraintes dont la commission a tenu compte, ou pas ?*

Nous souhaitons encore des précisions sur le processus de transposition didactique externe à l'université de Montpellier. Les contraintes peuvent être de différents ordre : temps didactique, concours de recrutement, liées au laboratoire recherche ou à la cohérence du cursus.

4. *Dans quelles finalités ont été construit ces modules d'enseignements portant sur l'intégration ? (objectifs d'apprentissage, prise en compte du rapport à la recherche et aux différents parcours d'étude des étudiants)*

Nous cherchons de nouveaux à faire expliciter les raisons qui ont justifié les choix de la transposition didactique à Montpellier.

5. *Connaissez-vous le programme de Terminale S sur l'intégration ? Est-ce que la commission en a tenu compte dans l'élaboration des contenus des modules d'intégration ?*

Nous voulons savoir si les programmes de terminale sur l'intégration ont été un élément de la construction des programmes sur l'intégration, c'est à dire que c'est une contrainte qui pèse sur le processus.

La troisième partie porte plus spécifiquement sur la transposition didactique interne de l'intégrale. Nous avons distingué ce qui concerne la transposition de l'intégrale de Riemann, et ce qui concerne la transposition de la théorie de Lebesgue.

- Si vous enseignez l'intégrale de Riemann :
 - *Qu'est-ce qui vous paraît être important que les étudiants comprennent ? Quelles sont les tâches principales que vous demandez à vos étudiants ?*
 Cette question nous permettra de compléter les modèles praxéologiques de référence et de décrire des praxéologies complètes. Nous attendons une description assez générale : par exemple que les étudiants soient à l'aise sur les calculs d'intégrales, ou au contraire qu'ils connaissent bien des catégories de fonctions intégrables ou non, qu'ils soient capable de reproduire des preuves du cours,
 - *Comment introduisez-vous l'intégrale de Riemann ? Quelles sont les questions que vous mettez en avant pour problématiser le développement de la théorie ?*
 Nous cherchons à savoir ce qui est mis en avant lors de l'introduction du cours : la mesure des grandeurs, la recherche de condition de convergence des sommes de Cauchy ?
 - *Quelle place occupe les aspects théoriques de l'intégration ? En cours ? En TD ? Et les aspects pratiques ? Comment articulez-vous les aspects théoriques et pratiques dans les cours et TD sur l'intégration ?*
 Ces deux questions visent de nouveau à éclairer la construction du modèle praxéologique dominant, en particulier sur les différentes techniques de calculs d'intégrales mobilisées et les technologies en lien avec les différentes techniques.
 - *Quelles sont, pour vous, les applications de l'intégrale de Riemann , en mathématiques ou en relation avec les autres disciplines, et celles que vous travaillez avec les étudiants ?*
 Nous cherchons à savoir si la question des applications est un levier pour l'enseignant chercheur dans le choix de la théorie. Par ailleurs, cette question participe aussi à la description des praxéologies et donc à la construction du modèle praxéologique dominant. Par ailleurs, cette question est plutôt d'ordre épistémologique. Nous avons identifié des niches de l'intégrale dans d'autres université dans la section précédente. Nous cherchons à savoir si ces niches existent aussi à Montpellier.
 - *Savez vous si les étudiants utilisent l'intégrale dans d'autres enseignements ? En physique ? En Probabilités ? Les outils fournis par l'intégrale de Riemann sont-ils suffisants ?*

Cette question apporte un éclairage sur le processus de transposition didactique : est-ce que l'utilisation d'un concept dans un autre module est une contrainte ou non ?

- *Est-ce que vous prévoyez des tâches qui permettent de faire des liens avec d'autres théories de l'intégration ?*

Nous cherchons à savoir si l'enseignant chercheur prend en charge ses liens dans son enseignement. Ces liens peuvent être avec l'intégrale Newton-Leibniz, celle de Cauchy, ou celle de Lebesgue.

- *Est-ce que vous pensez qu'il serait pertinent d'enseigner la théorie de Lebesgue en L1/L2 ? Pourquoi ?*

Nous cherchons à participer aux débats sur le choix de la théorie.

- Si vous enseignez l'intégrale de Lebesgue

- *Qu'est-ce qui vous paraît être important que les étudiants comprennent ? Quelles sont les tâches principales que vous demandez à vos étudiants ?*

Cette question nous permettra de compléter les modèles praxéologiques dominant dans le cadre la théorie de Lebesgue. Nous attendons une description assez générale.

- *Les étudiants connaissent-ils une autre théorie de l'intégration ? Si oui, comment le prenez-vous en compte ?*

Nous cherchons à avoir une description des liens entre les théories et savoir si cela donne lieu à des praxéologies particulières.

- *Comment motivez-vous l'introduction de la théorie de l'intégration de Lebesgue ? Quelles sont les questions que vous mettez en avant pour problématiser le développement de la théorie ?*

Nous souhaitons documenter le processus de transposition didactique interne. Nous souhaitons en particulier savoir comment les enseignants-chercheur motivent la σ -additivité.

- *Quelle place occupe les aspects théoriques de l'intégration ? En cours ? En TD ? Et les aspects pratiques ? Comment articulez-vous les aspects théoriques et pratiques dans les cours et TD sur l'intégration ?*

Ces deux questions visent de nouveau à éclairer la construction du modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue, en particulier sur les différentes techniques mobilisées et les technologies en lien avec les différentes techniques.

- *Quelles sont, pour vous, les applications de l'intégrale de Lebesgue, en mathématiques ou en relation avec les autres disciplines, et celles que vous travaillez avec les étudiants ?*

Nous cherchons à savoir si la question des applications est un levier pour l'enseignant chercheur dans le choix de la théorie. Cette question participe aussi à la description des praxéologies et donc à la construction du modèle praxéologique de référence. Par ailleurs, cette question est plutôt d'ordre épistémologique. Nous avons identifié des niches de l'intégrale dans d'autres universités dans la section précédente. Nous cherchons à savoir si ces niches existent aussi à Montpellier.

- *Savez-vous si les étudiants utilisent l'intégrale dans d'autres enseignements ? En physique ? En Probabilités ? Les outils fournis par l'intégrale de Lebesgue sont-ils suffisants ?*

Cette question apporte un éclairage sur le processus de transposition didactique : est-ce que l'utilisation d'un concept dans un autre module est une contrainte ou non ?

- *Est-ce que vous prévoyez des tâches qui permettent de faire des liens avec d'autres théories de l'intégration ?*

Nous cherchons à savoir si l'enseignant chercheur prend en charge ses liens dans son enseignement. Ces liens peuvent être avec l'intégrale Newton-Leibniz, celle de Cauchy, ou celle de Riemann.

- *Est-ce que vous pensez qu'il serait pertinent d'enseigner la théorie de Lebesgue en L1/L2 ? Pourquoi ?*

Nous cherchons à participer aux débats sur le choix de la théorie.

Nous avons mené deux interviews à Montpellier : la première est celle d'un enseignant-chercheur responsable, au moment de l'étude, de la licence de mathématiques, de la L3, et du module mesure et intégration (c'est le cours où est enseignée l'intégrale de Lebesgue). Nous le noterons EC1.

La deuxième interview est celle de l'enseignant chercheur responsable de l'UE de L2 *analyse 3* au moment de l'étude, qui contient l'intégrale de Riemann. Nous le noterons EC2.

5.2.2 Grille d'analyse des interviews

L'analyse a priori que nous venons de mener met donc en évidence trois catégories : 1) Le rapport personnel de l'enseignant à l'intégrale, 2) Ce qui concerne le processus de transposition didactique externe et son produit ; 3) Le processus de transposition didactique interne en lien avec les organisations mathématiques. Pour chacune des rubriques, nous allons identifier différents thèmes (qui n'est pas à prendre au sens de le TAD, mais plutôt comme un filtre d'analyse).

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Ainsi, nous distinguerons deux thèmes dans la catégorie du rapport personnel de l'enseignant à l'intégrale en rapport aux institutions : d'une part sur le rapport à l'intégrale en tant qu'enseignant à l'université, et d'autre part à l'intégrale en tant que chercheur en mathématiques.

La catégorie du processus de transposition didactique externe et son produit, est raffinée en 5 thèmes : le premier concerne la participation ou non de l'enseignant au processus de transposition, le second la description du processus, le 3ème les conditions et les contraintes qui pèsent sur le processus, le 4ème porte sur la description du produit de la transposition didactique externe, et le 5ème sur les raisons mises en avant par l'enseignant sur le choix d'une théorie de l'intégration.

Enfin, dans la rubrique relative à la transposition didactique interne, nous déclinons 4 thèmes : le premier cible la problématisation de la théorie, le second les tâches principales mises en avant par l'enseignant (au sens des organisations mathématiques), le troisième porte sur les réseaux trophiques du concept d'intégrale et enfin le quatrième sur les liens entre les différentes théories de l'intégration.

Nous avons ainsi retranscrit les interviews et complété la grille d'analyse suivante. Ces grilles sont données en annexe A.2 et B.2.

Rapport personnel	
Enseignement de l'intégrale	
Activité de recherche	
Transposition didactique externe	
Participation au processus	
Description du processus	
Conditions et contraintes	
Description du produit	
Choix des théories	
Transposition didactique interne	
Problématisation	
Tâches mises en avant	
Réseau trophique	
Liens entre les théories	

5.2.3 Interview de EC1

La transcription de l'entretien est dans l'annexe A.1 et le tableau d'analyse est dans l'annexe A.2

Rapports personnels

EC1 est enseignant-chercheur à l'université de Montpellier depuis 20 ans. Sa thèse était dans le domaine des statistiques théoriques et des probabilités. Ses recherches utilisent les outils de la théorie de la mesure et de l'intégration, donc nous pouvons considérer qu'EC1 est un expert du domaine de la théorie de la mesure et de l'intégration : « Je continue à faire des probas, clairement j'utilise beaucoup d'intégration dans mes recherches, parce que le cadre des probas c'est la théorie de la mesure et l'intégration » (l. 5).

Au niveau de ses enseignements, il a enseigné dans la précédente habilitation dans une UE du semestre 5 *théorie de la mesure*, puis dans une UE du semestre 6 *probabilités et statistique* : il déclare (l. 26) « J'ai fait quelques années. J'ai fait 75h de mesure + 75h de proba, puis j'ai laissé les probas pour ne faire que la mesure »

Au moment de l'interview, EC1 est, en plus d'être responsable de la licence, responsable de l'UE *Théorie de la mesure et intégration*, de 75h, au semestre 5. De ce fait, il occupe une position de noosphérien. Il enseigne également les probabilités et l'analyse dans un parcours de préparation aux concours Sciences du Vivant, en L2.

Il considère que « l'intégration, au sens de Lebesgue, est incontournable pour quelqu'un qui veut faire des probabilités un peu théorique. Je pense aussi que c'est une théorie assez jolie. ».

Sur le processus de la transposition didactique externe

EC1 indique que le processus de transposition didactique externe est à la charge de commissions. Le produit de ce processus doit ensuite être validé par le département de mathématiques, puis par des instances supérieures.

La situation de l'enseignement de l'intégration au niveau de la L3 était différente avant l'accréditation, cadre de l'étude. Il s'agissait :

- d'une UE d'intégration de Riemann sur \mathbb{R}^d de 50h ;
- d'une UE mesure et probabilités de 50h.

Le processus de transposition didactique a abouti à la situation actuelle : une UE de 75h de mesure et intégration, et 75h de probabilités.

Pour expliquer ce changement, EC1 a d'abord indiqué deux contraintes : la première sur le temps didactique (l. 22, Sur le module de 50h de probabilité « En 50h c'est assez délirant. On y arrivait, mais je ne sais pas comment. »), puis sur la cohérence du cursus (l. 74 « C'était bizarre, parce que c'était concomitant avec ce qui se faisait dans mesure et proba ...il y a le point de vue mesure abstraite d'un côté, et de l'autre en complétant. »).

EC1 signale enfin « il y a énormément d'inertie, il y a des polys, etc ... » pour expliquer les faibles changements lors des changements d'accréditations. Nous avons

remarqué que la KH-intégrale n'était pas présente dans les différentes universités étudiées : une explication peut être cette « inertie », évoquée par EC1.

EC1 relève aussi des contraintes sur le processus de transposition didactique externe et qui concernent le fonctionnement de l'institution : la licence de mathématiques de Montpellier est une licence de mathématiques générales, et elle a été construite en fusionnant deux licences de mathématiques (la licence Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales, et la licence Mathématiques fondamentales et appliquée). Cette fusion des équipes pédagogiques, des étudiants, a nécessairement entraîné des choix de transposition, en particulier sur l'intégrale. Le lien entre la théorie de la mesure et les probabilités s'est trouvé renforcé par l'intitulé de l'UE (mesure et probabilité) juste après la fusion, ce qui peut être expliqué par l'importance des probabilités et des statistiques dans l'ancien parcours de mathématiques appliquées aux sciences sociales.

Sur le produit de la transposition didactique externe

Actuellement, l'intégration intervient explicitement dans 4 UE de la licence de mathématiques : dans l'UE *calculus*, dans l'UE *analyse 3*, dans l'UE *analyse 4*, et dans l'UE *théorie de la mesure et de l'intégration*. De plus, notre étude écologique a explicité d'autres habitats de l'intégrale : probabilités et statistique, calcul différentiel.

EC1 décrit : « Ici, en S3, on fait l'intégrale de Riemann. Il y a du calculus en L1, mais la construction est en S3. Puis au S5, on passe à l'intégrale de Lebesgue. Ce sont les 2 endroits avec de la théorie. On n'enseigne pas l'intégrale K-H. En S3, c'est Riemann et Riemann-généralisée. »

Notons que l'étude des suites de fonctions intégrables, au programme de l'UE d'analyse 4 (qui est l'habitat des niches sur les suites et séries de fonctions), n'est pas évoquée dans le discours, sûrement parce que cette UE n'est pas le lieu de la construction de l'intégrale. EC1 décrit l'évolution du programme en L3 lors des deux dernières accréditations : en L3, l'intégration était traité dans une UE d'analyse, et il était question de l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R}^d . L'intégrale de Lebesgue, pour la mesure de Lebesgue, était alors présentée « en complétant ». Par ailleurs, il y avait une UE (de 50 heures) spécifique à la théorie de la mesure et probabilité. Il était alors question de mesure abstraite. Notons que cette situation était assez proche de ce qui se fait à Sciences Sorbonne Université. Mais EC1 juge cette situation « bizarre, parce que c'était concomitant avec ce qui se faisait dans mesure et proba » (l. 74).

Au moment du changement d'accréditation, un changement a été opéré pour aboutir à la situation actuelle (au moment de notre étude) avec la production du syllabus de Montpellier, qui contient l'UE *théorie de la mesure et de l'intégration* dont l'entrée est par les mesures abstraites. C'est ce syllabus qui a fait l'objet de notre étude écologique.

Dans la théorie de Lebesgue, « la classe des fonctions est agrandie » (l. 62), et il donne comme intérêt de Lebesgue le passage à l'intégration sur \mathbb{R}^d , ou même à n'importe quel espace, ce qui est utile en probabilités. Il précise également que « du point de

vue des calculs concrets, ça ne change pas grand chose » (l. 61) .

Ainsi, deux types d'arguments sont utilisés par EC1 pour justifier l'enseignement de l'intégrale de Lebesgue : un argument de type intra-théorique (la classe des fonctions intégrable est agrandie), et le besoin trophique des probabilités.

Le choix d'enseigner la théorie de la mesure, en commençant par la notion de tribu, semble bien répondre au besoin trophique des probabilités pour EC1 : « Là, c'est le choix qui est très adapté aux probas. Tu peux prouver tous les résultats. C'est ce qui est le plus fructueux pour ceux qui vont faire des proba » (l. 81). Et cela répond aussi au besoin trophique d'autres concepts : « les grands résultats de théorie de la mesure sont vus. Les espaces L^p , les théorèmes de la mesure... l'intérêt de cette vision des mesures abstraite, c'est que c'est le plus général. »

Par ailleurs, EC1 signale que l'UE *analyse 3* contient une partie *sommes de termes positifs - Familles sommables de réels, espace ℓ^1* . Pour EC1, la notion de famille sommable est nécessaire avant d'aborder la théorie de la mesure. Il précise (l. 99-102) : « Tu apprends à manipuler les sommes infinies, et le sup, c'est un concept plus simple que la limite. Tu peux démontrer hyper facilement le théorème de Fubini. En fait, après, quand ils arrivent en théorie de la mesure, c'est plus facile ».

Nous n'avons pas identifié la notion de famille sommable comme un besoin trophique de l'intégrale de Lebesgue. C'est un argument didactique qui est utilisé pour justifier l'enseignement des familles sommables en S3. Il précise, l. 109, « Si on veut que la théorie de la mesure passe bien en L3, il faudrait insister sur les familles sommables ».

Il précise également qu'enseigner l'intégrale de Lebesgue en L2, « c'est difficile », surtout qu'il faut « faire la théorie des ensembles avant ». Nous avons donc un argument d'ordre didactique (c'est difficile pour les étudiants) qui est expliqué par le besoin trophique de l'intégrale de Lebesgue (la théorie des ensembles).

En ce qui concerne l'intégrale de Riemann, il pense nécessaire de le faire au plus tard en L2 car « Ça serait dommage de faire les séries sans parler d'intégrale de Riemann. Et tu ne vas pas attendre d'avoir fait Lebesgue ». C'est donc pour faire exister la niche des séries qu'il est important de faire l'intégrale de Riemann au plus tard en L2. Il dit aussi qu'il est important d'avoir déjà vu une construction d'intégrale avant d'aborder l'intégrale de Lebesgue.

Sur la transposition didactique interne

EC1 semble accorder une place importante aux aspects théoriques de la théorie de la mesure. En tout cas, c'est ce que semble ressentir les étudiants (l. 202) : « souvent, ils auraient voulu faire un peu moins de théorie, et plus d'intégration » mais il précise que la théorie de la mesure n'est pas une niche pour les calculs d'intégrales : « Mais en même temps, l'enjeu, ce n'est pas de faire les mêmes calculs qu'en L2 », puis (l. 217) « La partie de calcul, c'est en L2 que ça se joue, et en L1. C'est pour ça que c'est bien d'en faire

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

avant. Ça serait une erreur de commencer par un truc général. Le but du jeu, c'est qu'ils soient opérationnels sur les calculs de primitives ». La construction de la mesure de Lebesgue est présentée en cours, bien que celle-ci ne soit pas le plus « fondamental » pour EC1 (l. 208). Il préfère que les étudiants « comprennent la démarche » de la construction de la mesure de Lebesgue, la notion d'ensemble mesurable, puis qu'ils sachent utiliser les grands théorèmes (convergence monotone, convergence dominée, Fatou, Fubini). Ceci indique des éléments technologiques de praxéologies mathématiques.

Il attend aussi à ce que les étudiants disposent d'un « vestiaire de mesures », c'est à dire qu'ils aient rencontré un certain nombre de mesures qui font office de références. Il dit aussi que les étudiants doivent « avoir compris les espaces L^p ».

EC1 parle aussi du rôle *unificateur* de la théorie de la mesure vis à vis des probabilités (l. 210) : « Et il faut comprendre que ce qu'ils ont fait en probabilité ce sont des cas particuliers de mesure à densité. Ça permet de complètement unifier le discret et le continu ».

EC1 s'appuie sur l'intégrale de Riemann pour motiver l'étude d'une nouvelle intégrale en mentionnant le fait que l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable n'est pas complet, et que l'intégrale de Riemann se généralise mal au cas de \mathbb{R}^d .

Pour motiver la théorie de la mesure, EC1 s'appuie sur l'idée intuitive d'aire (l. 235-242) : « Quel est le point commun des mesures qu'on rencontre dans la vie de tous les jours ? C'est une application qui a un objet associé un nombre positif. Et puis la mesure d'une union disjointe, c'est la somme des mesures. Et puis je me sers de la mesure des aires. On veut que ce soit additif, mais on veut mieux ! On sait mesurer facilement l'aire d'un rectangle. Pour un cercle, la stratégie c'est d'utiliser des polygones inscrits à l'intérieur du cercle, et tu fais tendre le pas de la discrétisation vers 0. Et tu as un passage à la limite... et tu expliques du coup que tu as besoin de la σ -additivité. Et tu donnes l'axiome. Ça ne sort pas de nulle part, tu as besoin de la sigma-additivité. Et tu introduis la mesure ».

Il semble que ce discours meta soit à la charge de l'enseignant. EC1 mentionne une technique d'approximation de l'aire du disque par des encadrements de polygones, du type d'Archimède. Nous verrons si ce discours servira de support à des tâches pour les étudiants. Nous remarquons que la σ -additivité n'est pas nécessaire au calcul de l'aire du disque (la croissance de la mesure suffit). Une fois l'axiomatique de la mesure posée, EC1 motive la construction de la mesure de Lebesgue, toujours par un discours meta (l. 251-254) : « Je me sers des dessins, avec les aires, les longueurs. Intuitivement, c'est clair. On définit la surface d'un rectangle, mais je voudrais définir une application qui a les bonnes propriétés. Et là, tu commences à rentrer dans la construction de la mesure de Lebesgue ». Le mot *intuitivement* fait référence à la notion intuitive d'aire.

5.2.4 Interview de EC2

La transcription de l'entretien est dans l'annexe B.1 et le tableau d'analyse est dans l'annexe B.2

Rapports personnels

EC2 a une activité de recherche active depuis 8 ans, en incluant la thèse de doctorat. Ses recherches se situent dans le domaine du calcul des variations. Il décrit ce domaine comme étant des mathématiques pures, dont les problèmes viennent de la physique. Pour lui, l'intégration est complètement centrale dans sa recherche. Il déclare « j'ai du mal à imaginer un sujet qui peut m'intéresser et qui ne contient pas d'intégration ». Nous considérons qu'EC2 est expert dans le domaine de l'intégration.

Il est responsable du cours *analyse 3* dont un des thèmes est l'intégrale de Riemann. Il enseigne aussi l'algèbre et l'analyse en L1, et une UE d'équation aux dérivées partielles en M2 recherche.

Étant arrivé récemment à l'université, il n'a pas participé à l'élaboration des programmes.

Néanmoins, il évoque régulièrement son rapport personnel à l'intégrale et même plus généralement aux mathématiques. Par exemple, il dit (l. 138) : « Aujourd'hui, si on me demande un calcul d'intégrale, je ne prend pas un stylo, je prend un ordinateur et je fais le calcul. Aujourd'hui ça se fait comme ça »

Sur le processus de transposition didactique externe

Sur le processus lui-même, nous n'avons pas obtenu d'information sur le processus qui a conduit à la production du syllabus étudié puisque EC2 déclare : « Je n'ai pas participé aux commissions, c'était l'année avant mon arrivée ».

En revanche, en tant qu'enseignant chercheur, EC2 peut occuper la position de noosphérien et participer au (futur) processus de transposition didactique externe. Il donne des informations sur des conditions et contraintes qui s'exercent sur le processus et on peut constater que son rapport personnel influe sur ce processus.

En effet, en réponse à la question : « Et toi que penses-tu du programme sur l'intégration à l'université (calcul en L1, puis intégration de Riemann en L2, puis intégrale de Lebesgue en L3) », il répond (l. 68) : « si tu m'avais posé cette question il y a 2 ans, je t'aurais répondu qu'il fallait commencer avec la théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue, car c'est le plus général même si c'est plus compliqué ».

Il y a 2 ans, EC2 n'était pas en charge du cours d'intégration de Riemann. On peut dire que son rapport à l'intégration en tant que chercheur agit comme une contrainte sur le processus, ce qui conduit à penser à la théorie la plus générale à enseigner.

Plus tard, c'est son rapport à l'intégration en tant qu'étudiant qui est évoqué : (l. 88) « J'ai l'impression que j'ai oublié les difficultés que j'ai eu en tant qu'étudiant. (...) »

Quand tu commences à faire de la recherche, ça a développé une forme d'arrogance, ou moi je pensais qu'avant, je pouvais faire l'intégrale de Lebesgue. Probablement c'est faux. ».

Enfin, sur ce qui conduit EC2 à changer son point de vue sur les théories de l'intégration à enseigner, en particulier à ne pas aborder l'intégrale de Lebesgue en L1, il dit (l. 92) : « C'est à cause de mon enseignement direct. (...) c'est exactement un exemple qui montre que tu comprends l'enseignement que si on va sur le terrain. Il y a toujours besoin du rapport direct avec les élèves ».

Ainsi, c'est son rapport à l'intégrale en tant qu'enseignant qui le conduit à penser une nouvelle organisation de l'intégrale à l'université.

Enfin, la question du cursus global des étudiants est aussi une contrainte pour EC2 car il déclare : « le programme est assez cohérent et bien fait, pour ce qui est demandé aux étudiants dans cette université », ce qui indique bien une volonté de proposer un parcours cohérent aux étudiants.

Sur le produit de la transposition didactique externe

Le produit du processus de transposition didactique externe prévoit l'enseignement de l'intégrale sur les trois premières années de licence de mathématiques, avec d'abord l'intégrale par primitive en calculus, puis l'intégrale de Riemann en 2ème année, et enfin l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure en 3ème année.

Les habitats et les niches de l'intégrale à l'université de Montpellier ont été données dans la section précédente.

Sur cette organisation, EC2 déclare (l. 72) : « Une démarche, théorie de l'intégration de Riemann, et après Lebesgue, je la trouve correct, donc je suis d'accord avec ce programme. » et (l. 115) « A part la question de calculus, je suis d'accord avec le programme » et enfin « je commencerais l'intégration de Riemann en S2 après avoir fait des suites, les dérivées en S1. Mais je pense qu'il est nécessaire de faire des choses avec une théorie bien faite. Mon cours de S3, devrait être en S1 ou S2. ».

Il explicite des besoins trophiques de l'intégrale de Riemann, à savoir les suites, et les dérivées.

Nous remarquons que EC2 préconise d'aborder directement la théorie de Riemann au lieu de l'intégrale du calculus. Il le justifie d'abord par des arguments d'ordre didactique : « je ne trouve pas positif que les étudiants de mathématique (pas d'ingénierie) arrivent à faire des exercices sans comprendre que la théorie qu'il y a derrière, c'est absolument fondamental, ce n'est pas correct. Les étudiants qui arrivent chez moi et qui pensent connaître l'intégration de Riemann, c'était plus négatif que positif. . .ils savaient faire quelques petits calculs et donc ils pensaient connaître la théorie de Riemann. »

Mais il pense aussi que l'intégrale de calculus n'a pas beaucoup de niches dans les mathématiques à l'université. Pour le dire, il s'appuie sur sa propre pratique de mathématicien : « Aujourd'hui, si on me demande un calcul d'intégrale, je ne prends pas un

stylo, je prends un ordinateur et je fais le calcul. Aujourd'hui ça se fait comme ça. C'est quoi l'utilité des calculs qu'on vous fait faire ? Je suis honnête avec les étudiants ».

Sur l'intégrale de Lebesgue, il déclare « c'est le plus général » que nous interprétons par le fait que c'est une intégrale qui a de nombreux habitats en mathématiques. Il cite également la dénombrabilité et la notion de famille sommable comme répondant à un besoin trophique de l'intégrale de Lebesgue (l. 123) : « Bien sûr, quand tu fais la théorie de Lebesgue, il faut connaître la dénombrabilité parce que c'est là que tu commences à faire des choses différentes en théorie de la mesure ».

Sur la transposition didactique interne

EC2 a en charge le cours depuis deux ans, et il utilise le polycopié rédigé par son prédécesseur comme il l'indique (l. 25-29) : « C'était la première fois que je suis titulaire du cours d'intégration, même si je suivais le programme... c'est simple, c'est l'intégration basique de Riemann. Je dois dire qu'il y a eu un petit changement. La première année, j'ai suivi le polycopié qui existait, puis j'ai suivi un point de vue un peu plus supérieur ».

Il met en avant l'importance des aspects théoriques par rapport aux aspects plus pratiques. Les aspects pratiques de la théorie de Riemann seront les tâches que l'on peut qualifier de calculatoires, alors que les aspects théorique seront des tâches théoriques.

Nous faisons référence aux transitions de type 2 formalisées par Winsløw (2007).

Plus tard, EC2 dit (l. 146-151) « Alors, oui, faire une IPP, c'est important. Mais si un étudiant veut faire des études de mathématiques jusqu'à la fin, j'aimerais bien qu'il voit le théorème de la divergence (c'est un truc très technique d'analyse), qui est l'analogue de l'intégration par partie. J'exagère un peu. Sur les trucs techniques, je n'attends pas grand-chose. Je veux qu'ils comprennent l'importance de la théorie. »

Bien que l'intégrale des fonctions continues, et les calculs d'intégrales par différentes techniques font partie du syllabus, nous chercherons aussi à mettre en lumière des tâches qui sont de nature plus théorique (par exemple dont l'objet est une classe de fonction, et pas une fonction singulière) dans nos analyses praxéologiques.

Sur l'introduction du cours sur l'intégration de Riemann, EC2 présente l'intégrale en lien avec la mesure de grandeurs physiques, en disant que l'intégrale permet de modéliser tous les phénomènes physiques. Cela ne donne pas lieu à des tâches en charge des étudiants, ni à une formalisation comme le propose M. Rogalski (2013).

Il s'agit plutôt d'un discours meta énoncé au début du cours (l. 159-164) « Tous les phénomènes physiques que vous pouvez imaginer, vraiment tous, on peut le décrire avec des mathématiques, et tout ça concerne les ondes ou les énergies. C'est pas difficile d'imaginer ça. La raison la plus intelligente que l'homme a trouvé pour décrire l'énergie, c'est avec l'aire. Tu peux quantifier avec des petites choses. Exactement comme l'aire d'un tableau qui est un ensemble de petites choses. Dans ce cours, on va décrire l'intégrale comme une définition d'aire. ».

EC2 cherche à faire des liens avec la théorie de la mesure. En particulier, il évoque avec les étudiants la caractérisation des fonctions Riemann-intégrables comme étant celles dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure (de Lebesgue) nulle. Cette formulation n'est possible qu'avec la notion de mesure de Lebesgue, et est à la charge de l'enseignant (l. 49-55) : « Par exemple, tous les étudiants savaient que toutes les fonctions continues sauf sur un ensemble fini de points sont Riemann intégrables. Mais ils n'avaient pas bien compris le principe de caractérisation, qui est le moteur de la théorie de Riemann. Je dis, OK, le moteur c'est ça. Un étudiant me dit : combien de discontinuité on peut faire ? J'ai répondu que c'est une question à laquelle je n'ai pas à répondre ici, mais je vous donne la réponse sans la justifier : une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si la mesure de ses points de discontinuité est 0 ».

Ceci peut donner lieu à un élément de transition qui correspond à la construction historique de la notion de mesure (voir chapitre 3) et pourrait constituer une niche de l'intégrale de Riemann dans l'habitat de la théorie de la mesure.

5.2.5 Conclusion sur les interviews

A l'université de Montpellier, le processus de transposition didactique externe a donc produit un syllabus correspondant au modèle dominant de l'enseignement de l'intégrale : d'abord l'intégrale par primitive en calculus, puis la théorie de Riemann, et enfin l'intégrale de Lebesgue en L3 de mathématiques.

L'intégrale de Riemann semble jouer un rôle important dans le cursus des étudiants par ses aspects théoriques et sur le fait d'avoir déjà étudié la construction d'une intégrale avant la théorie de la mesure. Cela fait échos à ce qu'affirme Cuculière (1998, p. 115) :

On doit enseigner l'intégration proprement dite au niveau Math.Sup., car c'est une question mathématique de la plus haute importance, c'est un objectif primordial de l'instruction mathématique à ce niveau. Les mathématiques sont une discipline scientifique et intellectuelle à part entière, qui trouve en elle-même sa propre fin. Elles ne sont pas une discipline servile, et le contenu de leur enseignement ne saurait se décider en vertu d'arguments utilitaristes à courte vue, en fonction des besoins réels ou supposés d'autres disciplines.

Les discours des enseignants pour l'enseignement de l'intégrale de Riemann à l'université de Montpellier ne font pas tellement état des habitats possibles de l'intégrale, mais plutôt de l'importance d'avoir étudié la construction.

A l'inverse, l'enseignement de l'intégrale de Lebesgue est plutôt justifiée par les nombreux habitats de cette intégrale, notamment en probabilités et statistiques, mais aussi en analyse fonctionnelle.

Dans le processus de transposition didactique, le rapport de l'enseignant à l'intégrale en tant que chercheur semble être une contrainte forte.

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

La question de la mesure des grandeurs, en particulier la mesure des aires des surfaces du plan semble rester au niveau du discours meta des enseignants et ne donne pas lieu à une formalisation particulière, ni à des tâches à la charge des étudiants. La mesure des aires (intuitive) sert de support à l'introduction de la mesure de Lebesgue en L3, alors qu'elle sert aussi de moyen de représenter des grandeurs physiques en L2.

5.3 Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

5.3.1 Corpus de données et description du cours

Notre étude porte spécifiquement sur le cas de l'université de Montpellier. Pour construire notre modèle praxéologique dominant à l'université de Montpellier sur l'intégrale de Riemann, nous nous sommes limités à l'année universitaire 2018-2019. En effet, nous avons déjà identifié le fait que la théorie de Riemann est enseignée en 2ème année du cursus de licence de mathématiques et notre projet est de mener une expérimentation à destination des étudiants de la 1ère année de Master MEEF en 2020-2021. Ces étudiants étaient majoritairement en L2 en 2018-2019.

EC2 est responsable du cours *analyse 3* et, comme il le déclare dans son interview, « La première année, j'ai suivi le polycopié qui existait ». L'année 2018-2019 était la deuxième année, et le cours magistral a évolué. Néanmoins, les étudiants avaient toujours à disposition le polycopié de l'année 2016-2017. Ce polycopié va consister pour nous un premier recueil de données. Ce polycopié contient les listes d'exercices à faire en classe, en travaux dirigés. Étant nous même chargé de TD, nos éléments de correction vont constituer aussi des données. Les exercices donnés en classe constituent l'annexe C.

Le syllabus de l'UE *analyse 3* (figure 4.15) fait apparaître l'intégration comme un secteur du domaine de l'analyse réelle. Dans ce secteur, le produit de la transposition didactique externe indique une structure en six thèmes :

- L'intégrale des fonctions en escalier
- Les fonctions Riemann intégrables
- Primitives et intégrales
- Quelques méthodes de calculs
- Sommes de Riemann et de Darboux
- Intégrales généralisées.

Dans son interview, EC2 a explicité les éléments qui sont, pour lui, des éléments importants du cours. Il a d'abord mis en avant les aspects de construction de l'intégrale de Riemann et les conditions d'intégrabilité des fonctions. Puis, il mentionne les aspects plus « pratiques » que sont les calculs d'intégrales par primitives.

Le cours commence par définir l'intégrale des fonctions en escalier, en lien avec la notion de subdivision d'un intervalle :

Définition 5.3.1. *On dit que $f : [a, b] \rightarrow E$ est une fonction en escalier (resp. affine par morceaux) si il existe une subdivision $\sigma := (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ que l'on dira adaptée à f , telle que f soit constante (resp. affine) sur chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$.*

L'ensemble des fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a, b]$.

L'intégrale des fonctions en escalier est alors défini par :

Définition 5.3.2. *Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction en escalier et $\sigma := (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f , et soit α_i la constante telle que $f(t) = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in]a_{i-1}, a_i[$. Alors la somme*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}) \alpha_i$$

est indépendante du choix de σ et on la note

$$\int_a^b f.$$

On appelle cette quantité intégrale sur $[a, b]$ de la fonction en escalier f .

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier sont alors prouvées (linéarité, relation de Chasles, positivité/croissance de l'intégrale, valeur absolue, majoration de l'intégrale par $(b - a) \|f\|_\infty$)

Après cette partie sur l'intégrale des fonctions en escalier, la notion de fonction Riemann-intégrable est introduite :

Définition 5.3.3. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est Riemann intégrable ou intégrable au sens de Riemann si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow E$ et $\psi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que :*

$$\|f - \phi_\varepsilon\| \leq \psi_\varepsilon \text{ et } \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon$$

En particulier, une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ et telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

La définition de l'intégrale de Riemann découle de cette définition :

Théorème 5.3.1. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$. On prend $\varepsilon = 1/n$ et on appelle ϕ_n et ψ_n les deux suites de fonction données par la définition 5.3.3 et vérifiant :

$$|f - \phi_n| \leq \psi_n, \quad \int_a^b \psi_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite

$$\left(\int_a^b \phi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} donc converge et sa limite est l'intégrale de f sur $[a, b]$

Les propriétés déjà vues sur l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent au cas de l'intégrale de Riemann et les fonctions en escalier apparaissent comme un exemple de fonction Riemann-intégrable. L'espace des fonctions Riemann-intégrable est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions bornées sur $[a, b]$.

Puis d'autres classes de fonctions sont étudiées vis à vis de l'intégrabilité : c'est le cas des fonctions réglées (la preuve est à faire en exercice avec l'indication : « mettre en place ϕ_ε et Ψ_ε à partir de la définition d'une fonction réglée »), des fonctions continues par morceaux (la preuve est rédigée dans le cours et mobilise la définition des fonctions Riemann-intégrables).

Lors de l'interview d'EC2, la caractérisation des fonctions Riemann intégrable (comme fonctions dont la mesure de Lebesgue des points de discontinuité est nulle) a été évoquée comme étant de nature à « motiver » la notion de mesure, ce qui correspond une motivation de la construction du concept de mesure.

Plusieurs propriétés de l'intégrale de Riemann sont prouvées, en mobilisant des propriétés d'analyse réelle et les propriétés déjà prouvées de l'intégrale. Par exemple, le théorème de la moyenne est énoncé et prouvé à partir du théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 5.3.2. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et que g est Riemann intégrable positive. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

Ce théorème donne lieu à une tâche à faire en exercice :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt = \frac{f(0)}{2}.$$

De même étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$.

Le lien entre intégrale et primitive est établi à partir du théorème suivant, qui est justifié grâce à la définition de la continuité et de la dérivabilité, et des propriétés de l'intégrale :

Théorème 5.3.3. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow E$ une application Riemann intégrable sur tout segment de I , et soit $a \in I$. Pour tout $t \in I$, on pose $F(t) := \int_a^t f$. Alors l'application F est continue sur I . Elle est dérivable en tout point t_0 où f est continue et on a alors $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Ce théorème permet enfin de justifier le théorème de dérivation de la fonction $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ lorsque f est continue sur $[a, b]$ et le théorème :

Théorème 5.3.4. *Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue. Alors f admet des primitives sur I . Si F est une telle primitive, alors on a :*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) := [F(t)]_a^b.$$

Les primitives usuelles sont étudiées, ainsi que les différentes techniques de calcul d'intégrales de fonctions continues (changement de variables, intégration par parties). Les techniques spécifiques à des classes de fonctions (fractions rationnelles, fractions rationnelles en sinus et cosinus ; fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperboliques) sont présentées dans le cours également.

Enfin, les sommes de Darboux et de Riemann sont étudiées, dans le but de développer l'idée « d'approcher la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbes du graphe d'une fonction f à l'aide de petits rectangles ». Notons que l'ostensif « mesure » n'est pas présent, ni l'ostensif « aire ».

Définition 5.3.4. *Considérons un intervalle $[a, b]$. Soit $\sigma := (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points de $[a, b]$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$. Si f est une application de $[a, b]$ dans E , on posera*

$$S(f, \sigma, \xi) := \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)$$

On dira que $S(f, \sigma, \xi)$ est une somme de Riemann associée à la subdivision σ et à la famille de points ξ

Théorème 5.3.5. *Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction Riemann intégrable. Alors les sommes de Riemann de f tendent vers l'intégrale de f quand le pas de la subdivision tend vers 0 :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\sigma, \xi), \delta(\sigma) < \eta \implies \left\| \int_a^b f - S(f, \sigma, \xi) \right\| < \varepsilon$$

Les sommes de Riemann permettent le calcul d'intégrale : le cas de $\int_0^\pi \sin$ est exposé (en utilisant les sommes géométriques).

5.3.2 Analyse praxéologique du secteur intégrale de Riemann

Le fascicule de TD contient 27 exercices qui portent spécifiquement sur l'intégrale sur un segment. L'ensemble des exercices est dans l'annexe C.

Les exercices 6.9 et 6.10 (voir Figure 5.1) concernent spécifiquement la notion de primitive, en particulier la définition de la continuité et de la dérivabilité (et le nombre dérivée).

Exercice 6.9. Une fonction n'ayant pas de primitive sur \mathbb{R} .

On considère la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que H n'admet pas de primitive sur \mathbb{R} (considérer par exemple un taux d'accroissement).

Exercice 6.10. Une fonction discontinue ayant une primitive sur \mathbb{R} .

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.

2) On considère maintenant la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

FIGURE 5.1 – Exercices sur la notion de primitive

Plusieurs exemples ont été vu en cours (un exemple de fonction Riemann-intégrable n'ayant pas de primitive, un exemple de fonction non continue ayant une primitive) afin d'étudier la possibilité pour une fonction d'admettre une primitive. Nous modélisons deux premiers type tâche pour le secteur de l'intégrale de Riemann :

- T_{R,p_1} : montrer qu'une fonction f admet une primitive sur $[a, b]$;
- T_{R,p_2} : montrer qu'une fonction f n'admet pas de primitive;

Deux techniques τ_{R,p_1} et τ'_{R,p_1} sont disponibles :

- τ_{R,p_1} : justifier que la fonction f est une fonction continue sur $[a, b]$;
- τ'_{R,p_1} : on vérifie, F étant donnée, que f est la dérivée de F

La technique τ_{R,p_1} est justifiée par le théorème 5.3.3 alors que la technique τ'_{R,p_1} est justifiée par la définition d'une primitive. Ces éléments constituent la technologie $\theta_{R,p}$. L'exercice 6.10 est une instantiation de T_{R,p_1} et c'est la technique τ'_{R,p_1} qui est attendue.

L'exercice 6.9 est une instantiation du type de tâche T_{R,p_2} . La technique attendue est de mener un raisonnement par l'absurde : si f admet une primitive F , alors F est

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

dérivable en 0. L'écriture du taux d'accroissement abouti à une contradiction. Cette technique τ_{R,p_2} est explicitée dans le cours (pour montrer que la fonction partie entière n'admet pas de primitive). C'est la définition du nombre dérivée qui justifie la technique : nous rajoutons cet élément à $\theta_{R,p}$.

Nous avons donc une première organisation mathématique locale, autour de la technologie $\theta_{R,p}$:

OM _L : Primitive et intégrale				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{R,p_1}	T_{R,p_1} : montrer qu'une fonction f admet une primitive sur $[a, b]$	τ_{R,p_1} : on vérifie que la fonction f est continue sur $[a, b]$	$\theta_{R,p}$: Les fonctions continues sur un segment admettent des primitives	Θ_R : Théorie de l'intégration de Riemann
P'_{R,p_1}		τ'_{R,p_1} : on vérifie, F étant donnée, que f est la dérivée de F		
P_{R,p_2}	T_{R,p_2} : montrer qu'une fonction f n'admet pas de primitive	τ_{R,p_2} : on raisonne par l'absurde en utilisant le taux d'accroissement	Définition d'une primitive	

La fiche de TD contient de plus des tâches de calculs d'intégrales avec différentes techniques, qu'il ne nous semble pas nécessaire de détailler ici. Nous modélisons les types de tâche suivants :

- T_{R,I_1} : calculer une intégrale par un calcul de primitive ;
- T_{R,I_2} : calculer une intégrale par une intégration par partie ;
- T_{R,I_3} : calculer une intégrale par un changement de variable.

Le type de fonction qui intervient dans les différentes instanciations sont des variables didactiques, et les types de fonction ont été identifiées dans le cours (fractions rationnelles, fractions rationnelles en sinus et cosinus, fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperboliques). Les fonctions qui interviennent dans ces praxéologies sont toutes des fonctions continues sur le segment où l'on intègre.

La technologie $\theta_{R,I}$ qui unifie les praxéologies dont les types de tâches sont T_{R,I_1} , T_{R,I_2} et T_{R,I_3} contient le théorème 5.3.4, la formule d'intégration par partie et celle du

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

changement de variable. Notons que la mise en oeuvre de la technique T_{R,I_2} peut mobiliser P_{R,I_1} ou P_{R,I_3} (par exemple avec l'instanciation : calculer $I_2 = \int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$).

Le théorème 5.3.3, élément de la technologie $\theta_{R,p}$, devient un élément théorique puisqu'il justifie le théorème 5.3.4.

Nous modélisons une nouvelle organisation mathématique locale avec trois organisations mathématiques ponctuelles autour de la technologie $\theta_{R,I}$

OM _L : Calcul d'intégrale				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{R,I_1}	T_{R,I_1} : calculer l'intégrale d'une fonction continue f par un calcul de primitive	$\tau_{R,I}$: Déterminer une primitive F de f puis calculer $F(b) - F(a)$	$\theta_{R,I}$: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ lorsque F est une primitive quelconque de f	Θ_R : Théorie de l'intégration de Riemann
T_{R,I_2}	T_{R,I_2} : calculer une intégrale par une intégration par partie ;	τ_{R,I_2} : Identifier les différents paramètres de la formule d'intégration par partie, et appliquer la formule	Formule d'intégration par partie	
T_{R,I_3}	T_{R,I_3} : calculer une intégrale par une intégration par changement de variable ;	τ_{R,I_3} : identifier les différents paramètres de la formule de changement de variables, et on applique la formule	Formule du changement de variable	

Nous avons relevé une tâche singulière décrite dans le cours : calculer $\int_0^\pi \sin(t) dt$ à l'aide des sommes de Riemann. La technique décrite consiste à identifier la fonction à intégrer, puis de calculer la limite d'une somme de Riemann ou de Darboux. Le calcul des sommes n'est pas toujours possible. Notons que la mise en oeuvre de cette technique permet un calcul approché de l'intégrale : nous n'avons pas trouvé de trace de type de tâche concernant l'approximation d'intégrales, en particulier pour le calcul d'intégrale dont nous ne connaissons de primitive exprimée à l'aide des fonctions usuelles. La tâche décrite ici paraît comme une tâche artificielle, puisque le calcul de l'intégrale $\int_0^\pi \sin(t) dt$ est possible par un calcul de primitive. Compte tenu du fait que la tâche a été

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

traité dans le cours, nous modélisons une organisation mathématiques ponctuelle dont le type de tâche est P_{R,s_1} : calculer une intégrale à l'aide d'une somme de Riemann ou de Darboux. La technologie $\theta_{R,s}$ est de théorème de convergence des sommes de Riemann et de Darboux.

En revanche, nous avons relevé plusieurs instantiation d'un même type de tâche dans l'exercice 6.27 (voir Figure 5.2). La technique à mettre en oeuvre consiste à identifier les différents paramètres et reconnaître une somme de Riemann. Ensuite, on utilise le théorème de convergence des sommes de Riemann (Théorème 5.3.5) pour écrire la limite sous la forme d'une intégrale. Il reste à mettre en oeuvre une technique relative à l'un des types de tâche T_{R,I_1} , T_{R,I_2} ou T_{R,I_3} pour trouver la limite. La théorie contient la définition de l'intégrale des fonctions-Riemann intégrale et la définition de l'intégrale de Riemann.

Exercice 6.27. Sommes de Riemann.

1) Trouver la limite des suites

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}, x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

2) Trouver la limite des suites

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}, v_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

FIGURE 5.2 – Tâches sur les sommes de Riemann

Nous modélisons donc une nouvelle organisation mathématiques locale autour de la technologie $\theta_{R,I}$:

OM _L : Sommes de Riemann de de Darboux				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{R,s_1}	T_{R,s_1} : Calculer une intégrale à l'aide d'une somme de Riemann ou de Darboux	τ_{R,s_1} : On calcule les sommes de Riemann ou de Darboux et on calcule la limite	$\theta_{R,I}$: Théorème de convergence des sommes de Riemann et de Darboux	Θ_R : Théorie de l'intégration de Riemann
P_{R,s_2}	T_{R,s_2} : Calculer la limite d'une suite à l'aide des sommes de Riemann et de Darboux	τ_{R,s_1} : Identifier les paramètres pour écrire la suites comme une somme de Riemann, puis calculer l'intégrale correspondante		

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

Les praxéologies que nous venons de décrire correspondent à ce qu'EC2 appelle des « aspects pratiques ». Dans notre interview, nous avons mis en lumière l'importance qu'il souhaitait accorder aux aspects plus théoriques, notamment sur la notion d'intégrabilité.

Une fois la définition de l'intégrabilité posée, deux types de tâche « naturels » peuvent être modélisés :

- T_{R,r_1} : montrer qu'une fonction (ou une classe de fonction) est Riemann-intégrable
- T_{R,r_2} : montrer qu'une fonction n'est pas Riemann-intégrable

La construction du cours donne plusieurs techniques pour la réalisation de T_{R,r_1} .

A travers l'exemple de la classe des fonctions en escalier ou bien de celle des fonctions réglées, nous avons une première technique : fixer ε dans la définition 5.3.3, puis justifier l'existence des fonctions ϕ_ε et ψ_ε de la définition en utilisant des propriétés de la fonction (ou des fonctions de la classe) considérée.

Cette technique est explicitée dans la preuve de la proposition 2.2 (voir Figure 5.3).

Proposition 2.2. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Alors f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.*

Démonstration. A faire en exercice. Indication. Mettre en place deux suites de fonctions en escaliers $(\phi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ définies sur un intervalle $[\alpha_n, \beta_n]$ bien choisi. Prolonger ces deux fonctions à l'intervalle $[a, b]$ de manière adéquate en utilisant le caractère borné de f . \square

FIGURE 5.3 – Exemple de mise en oeuvre de τ_{R,r_1}

Mais à travers l'étude de classes de fonctions Riemann-intégrable, le développement du cours donne de fait d'autres techniques pour la réalisation de T_{R,r_1} . On peut alors montrer que la fonction considérée est continue, ou bien réglée, ou bien en escalier ou bien vérifie les hypothèses de la proposition 2.2 de la figure 5.3.

Les tâches des exercices 6.31 et 6.32 (voir figure 5.4) sont des instanciations de T_{R,r_1} .

Concernant l'exercice 6.31, il s'agit de montrer la proposition 2.2, avec la définition. Il s'agit bien d'une instanciation de T_{R,r_1} (via la notion d'élément générique). Puis, pour la fonction f singulière, il est facile de voir qu'elle vérifie les hypothèses de la proposition 2.2.

De même, concernant l'exercice 6.32, la technique consiste à montrer que la fonction de Thomae est en fait une fonction réglée sur tout segment (et donc Riemann-intégrable sur tout segment).

Enfin, la technique pour le type de tâche T_{R,r_2} mobilise un raisonnement par l'absurde, en supposant que la fonction considérée est en escalier.

Nous modélisons alors une nouvelle organisation mathématique locale avec 3 praxéologies ponctuelles :

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exercice 6.31. Montrer la proposition 2.2. En déduire que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est Riemann intégrable sur $[0, 1]$. Cette fonction est-elle réglée ?

Exercice 6.32. Fonction de Thomae.

Soit f la fonction dite fonction de Thomae définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = p/q \text{ et } \text{pgcd}(p, q) = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel non nul.
- 2) On souhaite montrer que f est continue en tout point irrationnel x_0 . On se donne $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon$.
 - a) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels p/q avec $q \leq N$ appartenant à l'intervalle $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ est fini. On note S cet ensemble et soit $\delta := \min\{|x - y| ; y \in S\}$.
 - b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et conclure.
- 3) En déduire que f est Riemann intégrable sur tout segment $[a, b]$ (utiliser la remarque 2.9 admise). Que vaut son intégrale ?

FIGURE 5.4 – Tâches sur l'intégrabilité de fonctions

OM _L : Riemann-intégrabilité				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{R,r_1}	T_{R,r_1} : montrer qu'une fonction (ou une classe de fonctions) est Riemann-intégrable	τ_{R,r_1} : montrer que la fonction considérée vérifie la définition	$\theta_{R,r}$: Définition des fonctions Riemann-intégrables les fonctions en escalier, continue, réglées, Riemann-intégrable sur tout intervalle, sont Riemann-intégrables	Θ_R : Théorie de l'intégration de Riemann
P'_{R,r_1}		τ'_{R,r_1} : montrer que la fonction considérée appartient à une classe de fonctions Riemann-intégrable		
P_{R,r_2}	T_{R,r_2} : montrer qu'une fonction n'est pas Riemann-intégrable	τ_{R,r_2} : Reasonner par l'absurde en supposant la fonction Riemann-intégrable		

Dans le polycopié du cours, nous avons remarqué une section « formule de la

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

moyenne » qui énonce et prouve plusieurs propriétés qui interviennent dans la preuve de la formule de la moyenne, et qui mobilisent la notion de continuité (voir Figure 5.5). Nous trouvons des invariants dans les techniques affichées : on raisonne d'abord par élément générique (« soit f une fonction continue ») puis on utilise une propriété de la continuité de f (théorème des valeurs intermédiaires, définition avec ε , η , théorème de la borne atteinte) puis on mobilise une propriété de l'intégrale (croissance, linéarité, relation de Chasles).

On retrouve des tâches isolées théorique dans le fascicule de TD à travers la preuve de l'intégralité de Cauchy-Schwarz (figure 5.6) et une variante de la formule de la moyenne (seconde formule de la moyenne, figure 5.7). Ces tâches abstraites témoignent de la transition de type II formalisée par Winslow (2014) qui débute.

La mise en oeuvre de la technique décrite pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz consiste à utiliser la linéarité de l'intégrale pour obtenir l'inégalité avec le signe du discriminant.

Pour la seconde formule de la moyenne, c'est la propriété de l'image d'un segment qu'il faut mobiliser, puis la formule d'intégration par partie (ou la linéarité de l'intégrale) et enfin le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance de l'intégrale.

Nous modélisons ces deux tâches comme des tâches isolées abstraites $t_{R,p,CS}$ et $t_{R,p,Moy}$.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU
CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Proposition 2.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable positive telle qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$ et tel que f soit continue au point t_0 . Alors $\int_a^b f > 0$.

Démonstration. On suppose $t_0 < b$. Par continuité de f , on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(t) > f(t_0)/2$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \eta]$. On a alors

$$\int_a^b f \geq \int_{t_0}^{t_0+\eta} f \geq \int_{t_0}^{t_0+\eta} f(t_0)/2 = \eta f(t_0)/2 > 0.$$

Si $t_0 = b$, on considère un intervalle du type $[t_0 - \eta, t_0]$. □

Corollaire 2.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

La propriété suivante est dite première formule de la moyenne.

Théorème 2.7. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et que g est Riemann intégrable positive. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Démonstration. L'image de $[a, b]$ par f est un segment $[m, M]$ (théorème des bornes⁵). Comme g est positive, on déduit :

$$\forall t \in [a, b], \quad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

En intégrant, on obtient

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

D'où si $\int_a^b g = 0$, on déduit $\int_a^b fg = 0$ et n'importe que point c convient. Sinon, on a $m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires (théorème des bornes), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$. □

Application de la formule de la moyenne (exercice). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt = \frac{f(0)}{2}.$$

FIGURE 5.5 – Exemples de propriétés de l'intégrale

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

Exercice 6.30. Inégalité de Cauchy-Schwarz. On souhaite montrer le résultat suivant. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

1) Montrer le résultat lorsque la fonction g est nulle.

2) On suppose la fonction g non nulle. On considère le polynôme du second degré $\lambda \mapsto P(\lambda)$ défini par :

$$P(\lambda) := \int_a^b (f + \lambda g)^2.$$

En utilisant le discriminant de P , montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

FIGURE 5.6 – Inégalité de Cauchy-Schwartz

Exercice 6.34. Seconde formule de la moyenne. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.1. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1 , positive, décroissante et que g est continue. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

1) Posons $G(x) = \int_a^x g$ la primitive de g qui s'annule au point a . Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq G(t) \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$.

2) a) Montrer que :

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'(t)G(t))dt.$$

b) En déduire que l'on a $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.

3) Conclure en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la première formule de la moyenne.

FIGURE 5.7 – Seconde formule de la moyenne

5.3.3 Conclusion sur le modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

Notre analyse praxéologique nous permet de dresser le modèle praxéologique dominant à l'université de Montpellier du secteur de l'intégrale de Riemann avec 5 organisations mathématiques locales. Nous pouvons représenter ce modèle par la figure 5.8.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

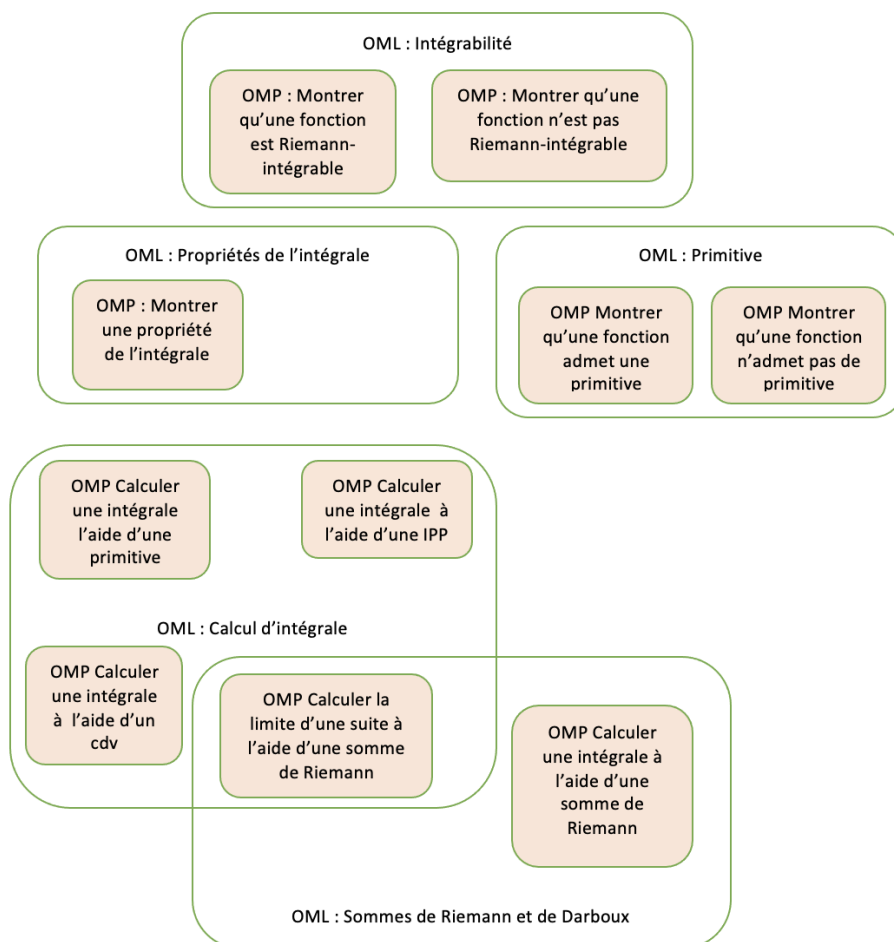


FIGURE 5.8 – Modèle dominant relatif à l'intégrale de Riemann à l'université de Montpellier

5.3. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Riemann à Montpellier

La théorie Θ_R qui unifie ce secteur contient la définition de l'intégrale de Riemann, et la notion d'intégrabilité. Les définitions de continuité, de limite sont des éléments qui, de fait, font partie intégrante du discours qui justifie les différentes technologies, comme la logique élémentaire.

L'OM_L intégrabilité apparaît comme fondamentale dans notre modèle dominant. Ceci a été appuyé par l'enseignant EC2, et le sujet du premier contrôle continu de l'UE en 2018 (voir Figure 5.9) propose une instantiation du type de tâche T_{R,r_1} puisqu'il est question de montrer que les fonctions monotones sont Riemann-intégrable. La technique à mettre en oeuvre est la technique τ_{R,r_1} .

Exercice 1

(1) Donner la/une définition

- i) d'une partition de l'intervalle $[0, 1]$;
- ii) d'une fonction en escalier sur $[0, 1]$;
- iii) d'une fonction Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

(2) On suppose maintenant que f est décroissante.

i) Pour $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ par quoi peut-on minorer $\inf_{x \in]\alpha, \beta[} f(x)$ et par quoi peut-on majorer $\sup_{x \in]\alpha, \beta[} f(x)$?

ii) Soit $P_n = \{\frac{k}{n}\}_{k=0, \dots, n}$. Ecrire les sommes supérieures et inférieures $S(f, P_n)$ et $s(f, P_n)$.

iii) A l'aide de la question i), majorer $S(f, P_n) - s(f, P_n)$ puis en déduire que f est R.I. sur $[0, 1]$.

FIGURE 5.9 – Extrait d'un contrôle continu avec une instantiation de T_{R,r_1}

On remarque aussi que l'intégrale des fonctions continues occupe une place importante dans notre modèle, puisqu'elle intervient dans toutes les autres OM_L.

Enfin, nous n'avons pas modélisé de praxéologies portant sur le calcul approché d'intégrales : les praxéologies de l'OM_L Sommes de Riemann et de Darboux ne sont pas relatives au calcul approché.

Nous limiterons notre étude à l'intégrale de Riemann sur un segment et donc nous ne modélisons par l'OML sur les intégrales généralisées. Cette OML, s'articule autour de la notion d'intégrale convergente et mobilise les propriétés d'analyse élémentaires ainsi que les propriétés des limites.

5.4 Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

5.4.1 Corpus et analyse du cours

Le cours est organisé en 5 chapitres :

- Chapitre 1 : Théorie générale de la mesure ;
- Chapitre 2 : Théorie générale de l'intégration ;
- Chapitre 3 : Intégration par quelques exemples de mesures
- Chapitre 4 : Espaces \mathcal{L}^p et L^p .
- Chapitre 5 : Construction de mesures

Nous nommerons nos secteurs comme les intitulés de ces parties, et ces différents secteurs correspondent chacun à une feuille d'exercices de TD. L'ensemble des fiches de TD constituent l'annexe D.

Nous pouvons remarquer une réorganisation des regroupements par thèmes prévus par le syllabus de l'UE : les notions d'espaces mesurés et de fonctions mesurables sont étudiées dans le premier chapitre, alors que la construction de la mesure de Lebesgue est traitée dans le chapitre 5, et les mesures produits sont traités dans le chapitre 3 ; Les théorèmes d'interversion limite/intégrale sont traités dans le chapitre 2 ; enfin, le chapitre 3 concerne les exemples de mesures et l'intégrale par rapport à ces mesures, et le chapitre 4 concerne la structure des espaces L^p . Le dernier chapitre concerne la construction de mesures, dont la mesure de Lebesgue.

L'interview d'EC1 avait indiqué que la construction était faite en cours, mais que cela ne paraissait pas fondamental. Ceci explique sûrement le fait de placer ce chapitre en fin de cours. La construction de la mesure de Lebesgue ne donne pas lieu à des tâches pour les étudiants, ce qui indique que ce secteur est dans le topos de l'enseignant. Nous ne modéliserons pas d'organisation mathématique de ce secteur.

Les fiches de TD sont structurées en deux parties : une première série d'exercices qui seront traités en classe et corrigés avec l'enseignant, et une deuxième série « destinée à l'entraînement » qui vise à reproduire des techniques travaillées dans les exercices travaillés en classe. Pour nous, nous pourrions nous appuyer sur ces exercices supplémentaires pour déceler les tâches routinières.

5.4.2 Analyse praxéologique du secteur Théorie générale de la mesure

Ensembles et fonctions mesurables

L'introduction de la théorie de la mesure est motivée dans le cours par le fait de mesurer le volume des solides (généralisés) de \mathbb{R}^n , avec comme objectif d'obtenir une application définie sur l'ensemble des parties de \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R}_+ , et qui vérifie certains axiomes :

- la mesure de l'ensemble vide est 0 ;
- la mesure coïncide avec le volume sur les pavés de \mathbb{R}^n ;
- la mesure est invariante par déplacement ;
- la mesure est additive.

Une première tâche est proposée, en cours, aux étudiants : montrer que ces axiomes impliquent, en dimension $n = 2$, que l'aire d'un triangle est donnée par la formule habituelle. Cette tâche, manifestement à la charge des étudiants, n'est pas traitée dans le cours.

Le paradoxe de Banach-Tarski est énoncé : dans \mathbb{R}^3 , la boule unité est dédoublable selon le groupe des déplacements, ce qui conduit à renoncer à mesurer toutes les parties de \mathbb{R}^n .

Ces remarques s'apparentent à un discours meta de l'enseignant, au sens de Dorier (Dorier, 1995). Il vise à introduire la notion d'ensemble mesurable.

Dans ce premier secteur de la théorie générale de la mesure, deux thèmes apparaissent :

- *les ensembles et les fonctions mesurables ;*
- *les mesures.*

La notion d'espace mesurable (et ensuite celle d'espace mesuré) est une structure au sens du structuralisme mathématique. Nous avons dit dans notre analyse épistémologique, que la réécriture conceptuelle de l'algèbre avait engendré sous l'influence de Bourbaki, à la présentation axiomatique de la mathématiques. On retrouve l'impact de la méthode axiomatique de Hilbert.

Les notions de tribu et de mesure sont des concepts structuralistes de la théorie de la mesure en tant que théorie structuraliste. Les dialectiques concret/abstrait et particulier/général, que (Hausberger, 2017) a subsumé sous le nom de dialectique des objets et des structures, s'appliquent ainsi dans ce contexte.

Tout comme Hausberger (2018) dans son étude du structuralisme algébrique et Candy (2020) dans le cas particulier de la structure d'idéal, on sera attentif, dans la description des types de tâches, à repérer celles qui sont contextualisées à un domaine particulier d'objets (un ensemble donné muni d'une tribu donnée, une mesure particulière) et celles qui sont décontextualisées.

Les praxéologies décontextualisées visent, en général, à démontrer certaines propriétés générales des structures étudiées. Ces dernières permettent ensuite de développer des praxéologies structuralistes contextualisées, c'est-à-dire faisant apparaître les propriétés des objets étudiés, à démontrer, comme des conséquences de propriétés générales des structures.

Par ailleurs, la méthode structuraliste procède par des raisonnements en termes de classes d'objets, de stabilité des propriétés des structures par des opérations sur les structures, dont des opérations ensemblistes. Une typologie de ces praxéologies structuralistes a été proposée par Candy (2020) dans sa thèse et appliquée au cas du concept d'idéal.

Nous pouvons faire l'hypothèse que de tels principes structuralistes vont guider la présentation du cours donné par l'enseignant ainsi que les types de tâches proposés. Nous serons donc attentifs à dégager de tels principes structuralistes et les praxéologies structuralistes développées, dans nos analyses.

La première partie sur les ensembles mesurables permet à l'enseignant de développer des éléments technologiques autour de la notion de tribu, dans le cadre général de la théorie des ensembles. La définition axiomatique d'une tribu sur un ensemble X est donnée comme suit :

Définition 5.4.1. *Une tribu \mathcal{D} sur un ensemble X est un ensemble tel que :*

- \emptyset et X sont dans \mathcal{D} ;
- pour tout $A \in \mathcal{D}$, le complémentaire A^c de A dans X , est dans \mathcal{D} ;
- pour tout suite dénombrable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{D} , $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est dans \mathcal{D} .

Nous avons mis en avant dans notre étude épistémologique des raisons d'être de cette définition, au sein de la théorie de la mesure, notamment dans le cadre de l'étude des ensembles de convergence des séries de fonctions. Ces raisons d'être n'apparaissent pas à ce niveau du cours, au sein du corpus.

Rappelons que nos données ne nous permettent pas d'analyser un éventuel discours méta de l'enseignant, sous forme orale, qui n'aurait pas été retranscrit par l'étudiant dont nous avons repris les notes de cours. En revanche, l'interview de EC1 indique une problématisation de la notion de tribu à partir de la mesure de l'aire du disque et du passage à la limite qui rend, pour l'enseignant, la σ -additivité nécessaire.

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

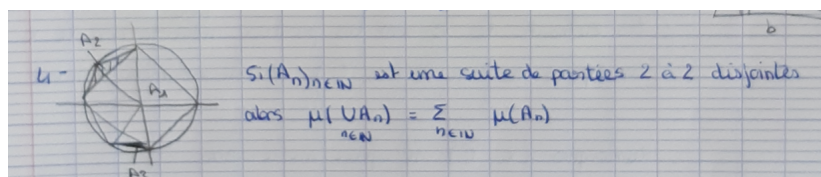


FIGURE 5.10 – Aire du disque

On trouve une trace de ce discours sur le cahier étudiant (voir figure 5.10), avec la représentation de ce que peut être la méthode d'Archimède pour la mesure de l'aire du disque, et la propriété de σ -additivité.

Une première tâche est pointée dans le cours, en référence à la feuille de TD1 :

Soit X un ensemble et $\mathcal{D} = \{A \subset X, A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$.
Montrer que \mathcal{D} est une tribu sur X .

Le type de tâche est ici de montrer qu'un ensemble donné de parties de X est une tribu sur X , et la technique consiste à vérifier que les trois axiomes de la définition sont satisfaits.

On notera que cette première tâche est déjà relativement abstraite : les deux variables didactiques du types de tâches sont les ensembles X et \mathcal{D} . Pour la tâche en question, X est un ensemble abstrait et \mathcal{D} est également défini abstraitement par une propriété. Il s'agira donc d'utiliser des techniques et résultats généraux de théorie des ensembles, sans s'appuyer sur des propriétés relatives à des domaines d'objets (ce que l'on sait dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n , etc.). Ceci vient souligner l'importance d'une reprise des éléments de théorie des ensembles.

Un ensemble muni d'une tribu est appelé *espace mesurable*, au sens de susceptible d'être muni d'une mesure, et les éléments de \mathcal{D} sont appelés les ensembles mesurables, au sens d'être susceptible de recevoir une mesure (être mesuré). Ces éclaircissements terminologiques ne sont pas apportés explicitement dans le cours.

L'adjectif mesurable revêt également deux sens différents (bien que proches), selon qu'il s'applique à l'espace X tout entier ou à un sous-ensemble. On peut faire l'hypothèse que, pour un étudiant, le sens s'éclaircira a posteriori, lorsque la clef de voûte sera posée : la notion de mesure.

Conformément au développement des cours faisant intervenir des structures, la notion de tribu engendrée par une partie est introduite, avec comme objectif de décrire économiquement un objet général, ici une tribu. Comme pour les groupes et autres structures, la structure engendrée par une partie est la plus petite sous-structure, au sens de l'inclusion, contenant cette partie, et elle est construite en prenant l'intersection de toute les structures contenant la partie.

Cela vient questionner la stabilité par intersection (quelconque), pour le concept de tribu : l'intersection des éléments d'une famille de tribus est encore une tribu. La preuve

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{D} = \{A \subset X \mid A \text{ dénombrable, ou } A^c \text{ dénombrable}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que \mathcal{D} est une tribu sur X .

On note $\mathcal{C} = \{\{x\} \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ la classe des singletons (ie. des parties à un seul élément). Comparer \mathcal{D} et $\sigma(\mathcal{C})$.

Sur \mathbb{N} , quelle est la tribu engendrée par les singletons ?

Exercice 2. Soit X un ensemble, (Y, \mathcal{B}) un espace mesuré, et $f : X \rightarrow Y$ un application. On note

$$f^*(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

1. Montrer que $f^*(\mathcal{B})$ est une tribu sur X .

2. On suppose que \mathcal{A} est une tribu sur X . Montrer que f est \mathcal{A} - \mathcal{B} -mesurable si et seulement si $f^*(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_a = \{A \subset \mathbb{R} \mid A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur \mathbb{R} .

2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a$, puis que $\mathcal{C}_a = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

FIGURE 5.11 – TD1, Exercices sur le thème des tribus

consiste à mettre en oeuvre la technique pour prouver qu'un ensemble donné est une tribu, dans un cadre abstrait (en appui sur la théorie des ensembles). Cette propriété conduit à la notion de tribu engendrée par une classe (un ensemble \mathcal{C} de parties de X), énoncée comme suit :

Définition 5.4.2. Si \mathcal{C} est une classe sur X , la tribu engendrée par \mathcal{C} est $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \mathcal{A}$ où \mathcal{A} parcourt l'ensemble des tribus sur X qui contiennent \mathcal{C} .

Ainsi, $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant \mathcal{C} . On retrouve donc bien ici une organisation mathématique spécifique aux structures : après la définition d'une structure (ici celle de tribu), on définit la plus petite sous-structure (au sens de l'inclusion) contenant une partie donnée.

La tribu borélienne sur un espace métrique (X, d) est étudiée et définie comme la tribu engendrée par les ouverts. Néanmoins, c'est le cas particulier $X = \mathbb{R}$ qui est étudié en détail et de nouveaux éléments technologiques sont introduits : la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée indifféremment par les intervalles ouverts, ou semi-ouverts, ou bien fermés.

La notion de tribu apparaît explicitement dans 3 exercices de la première fiche de TD (Figure 5.11), lesquels font apparaître 2 types de tâches dont les techniques ont été introduites dans le cours :

- T_{M,t_1} : montrer qu'un ensemble donné \mathcal{D} est une tribu sur un ensemble X ;
- T_{M,t_2} : montrer qu'une tribu \mathcal{D} est engendrée par une classe donnée \mathcal{C}

Explicitons une technique pour la réalisation d'une tâche du type T_{M,t_2} .

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

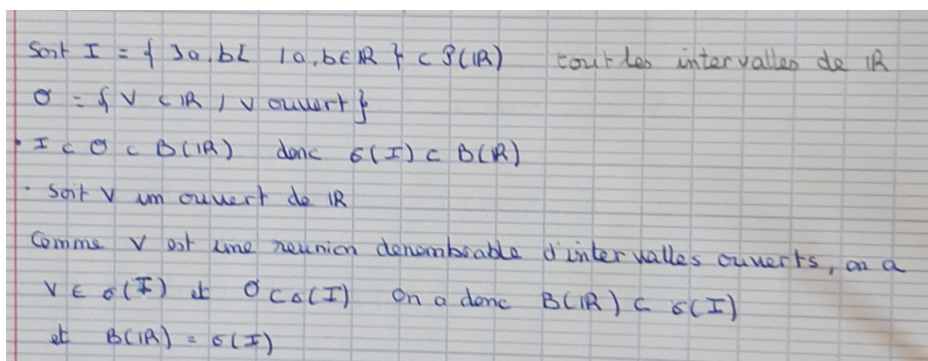


FIGURE 5.12 – Cours-Technique tribu engendrée-

La deuxième tâche de l'exercice 1 consiste à montrer que la tribu \mathcal{D} est la tribu engendrée par la classe des singletons sur X , et apparaît comme une tâche du type T_{M,t_2} . La technique à mettre en oeuvre (prise dans le corrigé) est ici :

- On montre que $\mathcal{D} \subset \sigma(C)$: il s'agit de montrer que tous les éléments de \mathcal{D} s'obtiennent à partir d'opérations sur les éléments de C qui caractérisent les tribus. Si A est dans \mathcal{D} , alors A est dénombrable ou cA est dénombrable ; si c'est A qui est dénombrable, A est l'union dénombrable de singletons ; et si cA est dénombrable, alors cA est l'union de singleton, donc A est l'intersection dénombrable de complémentaires de singletons, c'est donc un élément de $\sigma(C)$. Une autre technique consiste à dire que si cA est dénombrable, alors cA est dans $\sigma(C)$, mais alors ${}^c({}^cA)$ est aussi dans $\sigma(C)$ car c'est une tribu (cette deuxième technique n'est pas dans le cahier).
- On montre que $C \subset \mathcal{D}$: c'est évident ici puisque les singletons sont des parties dénombrables. Comme $\sigma(C)$ est la plus petite tribu contenant C , on en déduit $\sigma(C) \subset \mathcal{D}$.

La définition de tribu et celle de tribu engendrée justifient donc cette technique.

De plus, cette technique a été mise en oeuvre dans le cours par l'enseignant pour caractériser la tribu borélienne sur \mathbb{R} (voir Figure 5.12). Cette tribu est définie comme la tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R} , mais est aussi la tribu engendrée par les intervalles (ouverts, semi-ouvert, les intervalles fermés). La tribu borélienne apparaît, dans le cours, comme un domaine de contextualisation des notions de tribu et de tribu engendrée qui se révélera paradigmatique de la théorie de la mesure.

La technique attendue pour la tâche T_{M,t_2} consiste donc à montrer que \mathcal{D} est inclus dans $\sigma(C)$ (ou encore que tout élément de \mathcal{D} peut être construit à partir de C par union et passage au complémentaire), puis que tous les éléments de C sont dans \mathcal{D} . Comme $\sigma(C)$ est la plus petite tribu qui contient C , nous savons alors que $\sigma(C) \subset \mathcal{D}$.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Ces deux types de tâche génèrent une première organisation mathématique locale autour de la définition d'une tribu, avec les deux praxéologies ponctuelles :

OM _L : Tribu sur un ensemble				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{M,t_1}	T_{M,t_1} : montrer qu'un ensemble \mathcal{D} est une tribu sur un ensemble X	τ_{M,t_1} : On vérifie que l'ensemble \mathcal{D} vérifie les 3 axiomes donnés par la définition d'une tribu	$\theta_{M,t}$:	Θ_M :
P_{M,t_2}	T_{M,t_2} : Montrer qu'une tribu \mathcal{D} est engendrée par une classe \mathcal{C}	τ_{M,t_2} : On montre que \mathcal{D} est inclus dans $\sigma(\mathcal{C})$ et que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$	définition d'une tribu	Théorie de la mesure

La deuxième partie du cours est consacrée aux applications mesurables entre deux ensembles mesurables. Ceci complète le thème *ensembles et fonctions mesurables*, dans le secteur de la théorie de la mesure.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse épistémologique, les fonctions mesurables sont celles pour lesquelles l'intégrale sera définie. Nous avons aussi vu l'importance de la construction des fonctions mesurables à partir de fonctions élémentaires (les fonctions étagées) dans la perspective de construire l'intégrale de Lebesgue à partir de l'intégrale des fonctions étagées. La notion de mesure image, qui donne du sens à la notion de fonction mesurable complétera le bagage praxéologique des étudiants.

Dans le cours de l'université de Montpellier, les fonctions mesurables sont introduites également par leur définition générale et abstraite, basée sur la notion d'espace mesurable précédemment introduite, en appui sur la théorie des ensembles. La définition est :

Définition 5.4.3. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurables.

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mesurable si

$$\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Les raisons d'être des fonctions mesurables ne semblent pas explicitées ici, au moins à l'écrit. Peut-être que la définition a été accompagnée par un discours meta de l'enseignant. Nous n'en avons pas de trace ici.

En lien avec la notion de tribu engendrée, nous trouvons une caractérisation des fonctions mesurables lorsque la tribu de l'espace d'arrivée est engendrée par une classe de parties de l'espace d'arrivée :

Proposition 5.4.1. Une fonction entre deux ensembles (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) (où \mathcal{A} est une tribu sur X et \mathcal{B} une tribu sur Y engendrée par une classe \mathcal{C}) est dite mesurable lorsque pour tout $C \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

La suite du développement du cours peut également être lu à travers la perspective structuraliste : d'abord, lorsque l'ensemble d'arrivée des fonctions est un anneau, on se demande si la somme, le produit de fonctions mesurable est mesurable ; puis, lorsque l'espace d'arrivée est un corps, si le quotient de fonctions mesurable est encore mesurable ; si l'ensemble d'arrivée est totalement ordonné, on se demande si le max et le min de fonctions mesurables est encore mesurable ; enfin, si l'espace d'arrivée est un espace métrique, se pose la question de savoir si la limite (ou la borne supérieure, la borne inférieure, la limite supérieure, la limite inférieure) d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

Tout ces questionnements, dont nous venons de préciser le cadre naturel dans lequel chacun se pose indépendamment (cela dépend des structures qui viennent se combiner à celle d'espace mesurable), se retrouvent simultanément dans le cas des fonctions à valeur réelles.

Nous allons voir que ces questions sont toutes abordées dans ce cadre, qui sert de paradigme. Nous faisons également l'hypothèse que l'enseignant-mathématicien est guidé par la perspective structuraliste, qui apparaît en filigrane. Mais nous n'avons pas d'élément dans l'interview sur ce point.

Dans le cours étudié ici, dès la définition générales des fonctions mesurables posées, les fonctions considérées sont contextualisées au cas des fonctions à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'espace d'arrivée est donc un corps totalement ordonné et un espace métrique. Nous allons voir que cette contextualisation au cadre des fonctions à valeurs réelles permet une activation des praxéologies de l'analyse élémentaire.

Trois exercices du TD portent sur ce thème (Figure 5.13).

Les tâches présentes dans ces trois exercices font apparaître deux types de tâches :

- T_{M,f_1} : montrer qu'une application entre deux espaces mesurables est mesurable ;
- T_{M,f_2} : montrer qu'un ensemble est mesurable.

Le type de tâche T_{M,f_1} est travaillé dans l'exercice 3, où trois fonctions distinctes sont proposées ; un exemple de tâche du type T_{M,f_1} est donné dans l'exercice 5 et enfin, un exemple de tâche du type T_{M,f_2} est donné à l'exercice 4. Une tâche du type T_{M,f_1} se trouve dans un des exercices d'entraînement, à travers la tâche : montrer que les fonctions convexes sont mesurables, donc sur une classe de fonctions, ce qui représente un plus haut degré d'abstraction par rapport aux tâches contextualisées à des fonctions spécifiées définies sur \mathbb{R} et à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Un exemple de résolution d'une tâche du type T_{M,f_1} est développé dans le cours : il s'agit de démontrer que les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont mesurables (voir figure 5.14). Cette tâche est ainsi contextualisée à la classe des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , \mathbb{R} étant muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'exemple que nous avons qualifié de paradigmatique. Toutes les tâches de type T_{M,f_1} proposées en TD seront

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exercice 3. On considère les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\cos(xe^n)) \quad \text{et} \quad h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\arctan(f(x^n) + n^3 x^7))$$

Montrer que ces fonctions sont boréliennes.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est croissante, montrer que f est borélienne.
2. Si f est dérivable, montrer que f' est borélienne.

Exercice 5. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

1. Montrer que les ensembles $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ sont mesurables.
2. Si $A \subset X$ est mesurable, montrer que la fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est mesurable.

FIGURE 5.13 – Tâches - Fonctions et ensembles mesurables

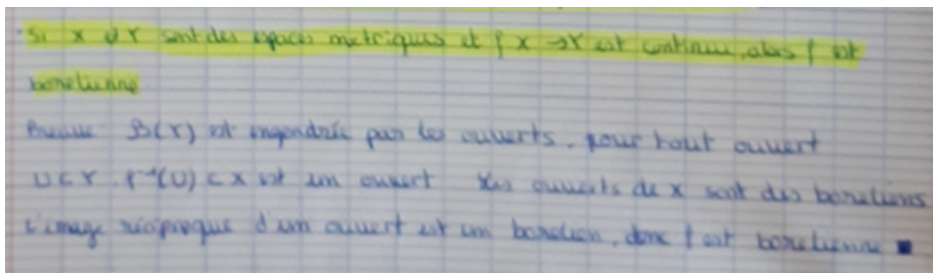


FIGURE 5.14 – Mesurabilité des fonctions continues

d'ailleurs contextualisées de la sorte et se résumeront donc à réaliser le sous-type de tâche : démontrer qu'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est borélienne.

La technique proposée est la suivante :

- On identifie $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ à la tribu engendrée par les ouverts. Il suffit donc de montrer la propriété qui définit une fonction mesurable pour un ouvert.
- On affirme que si \mathcal{U} est un ouvert, alors $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de \mathbb{R} (propriété des fonctions continues)
- $f^{-1}(\mathcal{U})$ est donc un borélien de \mathbb{R} .

On note ici une mobilisation des outils d'analyse réelle et de topologie.

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

La mise en oeuvre de de cette technique est détaillée dans le cours, et s'appuie sur l'élément technologique θ_{M,f_2} énoncé dans le cadre général dans la proposition 5.4.1.

Cette technique est à mettre en oeuvre dans l'exercice 4, avec la tâche : montrer que les fonctions croissantes sont mesurables. Pour autant, une connaissance d'analyse réelle sur les fonctions croissantes est nécessaire à faire le lien : si une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est croissante, alors l'image réciproque d'un intervalle $]a, b[$ est un intervalle.

Conformément au développement classique d'un point de vue structuraliste, l'enseignant étudie la mesurabilité d'une combinaison linéaire, du produit, du max, du min, du quotient des fonctions mesurables. Ces opérations sont licites car les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} .

L'enseignant montre alors que la somme, le produit, le max, le min, le quotient des fonctions mesurables est encore mesurable, et s'appuie sur le fait que la fonction $x \mapsto (f(x), g(x))$ est mesurable dès que f et g le sont, et que les fonctions continues sont mesurables. Cette praxéologie est familière des étudiants qui ont déjà opéré des raisonnements similaires pour montrer qu'une fonction donnée est continue, en partant de l'hypothèse de continuité des fonctions de référence.

On notera cependant que la classe des opérations permises est ici augmentée dans le cas de la propriété d'être borélienne par rapport à la continuité : se rajoute dans un premier temps le max et le min.

Le fait que les fonctions continues de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ soient mesurables et les propriétés des opérations sur les fonctions vis à vis de la propriété d'être borélienne vont ainsi permettre de justifier une nouvelle technique : pour montrer qu'une fonction f de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, on montre que f est la somme, le produit, le max, le min, le quotient des fonctions mesurables.

Cette technique est à mettre en oeuvre dans l'exercice 3 (Figure 5.13) : la technique consiste à écrire $f(x) = e^x 1_{\mathbb{Q}} + \frac{1}{x} 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ et donc écrire f comme la somme de deux fonctions mesurables. On notera que la fonction caractéristique fait un lien entre les types de tâches T_{M,f_1} et T_{M,f_2} : 1_E est mesurable si et seulement si E est mesurable.

Enfin, le fait d'étudier l'ensemble des fonctions mesurables pour des fonctions à valeur dans \mathbb{R} permet de s'interroger sur la limite simple d'une suite de fonctions, ainsi que la limite supérieure et la limite inférieure, puisque l'espace d'arrivée est muni d'une distance. Ainsi, une nouvelle proposition est énoncée en cours :

Proposition 5.4.2. *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables de (X, \mathcal{A}) vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, alors $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont des fonctions mesurables. Et si (f_n) converge simplement vers une fonction f , alors f est aussi mesurable.*

La preuve de cette proposition mobilise la définition de tribu et la définition d'une applications mesurables.

Cette proposition justifie donc une nouvelle technique pour montrer qu'une fonction est mesurable : il suffit de la voir comme le sup, l'inf, la limite d'une suite de fonctions mesurables.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Cette technique est ainsi à mettre en oeuvre dans l'exercice 3 (Figure 5.13) pour les fonctions g et h .

Pour résumer, le type de tâches T_{M,f_1} présente un spectre assez large de techniques qui sont justifiées par un ensemble d'éléments technologiques d'inspiration structuraliste, sous la forme de bonnes propriétés d'opérations variées sur les fonctions boréliennes. Nous notons $\theta_{M,f}$ l'ensemble de tous ces éléments technologiques.

Enfin, l'exercice 5 propose trois tâches du même type T_{M,f_2} . La technique à mettre en oeuvre est d'écrire l'ensemble en question comme l'image réciproque d'un ensemble mesurable. La technique est justifiée par $\theta_{M,f}$ et la définition d'une fonction mesurable.

Les fonctions mesurables ne sont donc étudiées que pour des fonctions à valeurs dans l'espace métrique \mathbb{R} , muni de sa tribu des boréliens. Pour conclure, nous formalisons l'organisation mathématique locale autour de la technologie $\theta_{M,f}$, qui développe quatre praxéologies :

OM _L : Ensembles et fonctions mesurables				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{M,f_1}	T_{M,f_1} : Montrer qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est mesurable	τ_{M,f_1} : On montre que pour tout ouvert \mathcal{U} , ou pour tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un borélien	$\theta_{M,f}$: Définition d'une fonction mesurable et de la tribu des boréliens de \mathbb{R} ; bonnes propriétés d'opérations sur les fonctions boréliennes	Θ_M : Théorie de la mesure
P'_{M,f_1}		τ'_{M,f_1} : f est la limite, le sup, le min, la limsup, la liminf d'une suite de fonctions mesurables		
P''_{M,f_1}		τ''_{M,f_1} : f est la somme, le produit, le max, le min, le quotient de fonctions mesurables		
P_{M,f_2}	T_{M,f_2} : Montrer qu'un sous ensemble de \mathbb{R} est mesurable	τ_{M,f_2} : On montre que l'ensemble considéré est l'image réciproque d'un ensemble mesurable par une application mesurable		

Notons que les praxéologies P'_{M,f_1} et P''_{M,f_1} se distinguent de P_{M,f_1} par le fait qu'elles ne se limitent pas aux définitions, mais utilisent des théorèmes sur les structures. Tous les éléments technologiques sont groupés pour former l'OML.

Mesures

La notion de mesure est introduite dans le secteur de la théorie générale de la mesure. Elle trouvera des niches dans les différents secteurs du domaine de la théorie de l'intégration. Nous nous limiterons ici au secteur de la théorie générale de la mesure.

Motivée par l'introduction, la définition d'une mesure sur un ensemble mesurable est introduite, dans un cadre abstrait :

Définition 5.4.4. Une mesure (positive) sur (X, \mathcal{A}) est une application μ de \mathcal{A} dans $[0; +\infty]$ telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables 2 à 2 disjointes, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Deux applications sont alors introduites comme des exemples de mesure : la mesure de Dirac, la mesure de comptage. Il s'agit donc de vérifier les axiomes, pour une application et un ensemble mesurable donnés.

Cette technique est mise en oeuvre trois fois dans le cours, et il faudra la mettre en oeuvre deux fois dans le TD. Le type de tâche est donc identifiable dès le cours, dans lequel le professeur mentionne : « Exercice : montrer que c'est une mesure » (en parlant de la mesure de comptage) (voir figure 5.15)

La mesure de Lebesgue est définie et son existence est admise :

Définition 5.4.5. La mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ tel que, pour tout pavé $P_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ de \mathbb{R}^n , on a

$$\lambda(P_n) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Enfin, des propriétés importantes des mesures (qui interviendront aux niveaux de la technologies de nouvelles praxéologies qui vont être développées en TD) sont introduits (voir Figure 5.16) :

- la croissance de la mesure ;
- la sous-additivité ;
- la limite croissante ;
- la limite décroissante.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

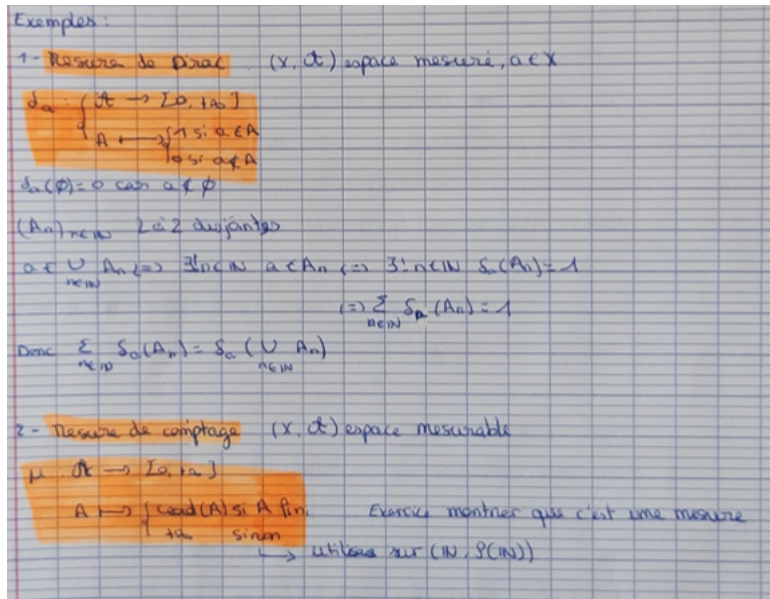


FIGURE 5.15 – Exemples de mesures

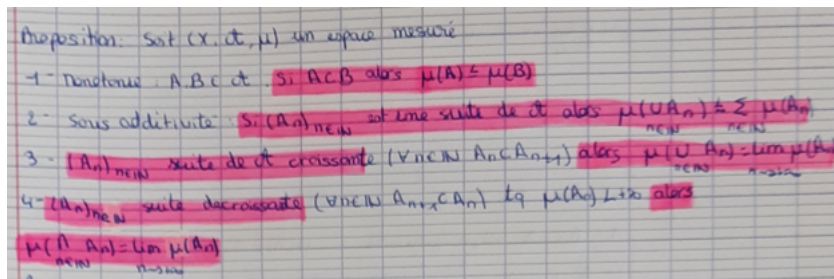


FIGURE 5.16 – Éléments du logos de la mesure : propriété des mesures

La preuve de ces éléments du logos de la mesure est à la charge de l'enseignant, et mobilise des éléments de la théorie des ensembles.

Enfin, le cours se termine par la notion de mesure complète, motivée par le fait qu'il existe des boréliens (non dénombrables) de mesure nulle qui contiennent des parties non boréliennes : la tribu de Lebesgue est alors définie comme la tribu obtenue en complétant la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

La fiche de TD comporte une partie spécifique sur la notion de mesure avec 6 exercices proposés aux étudiants (voir figure 5.17). Nous retrouvons notamment une répétition d'un type de tâches : montrer qu'une application donnée est une mesure (exercice 7 et exercice 10.3), dont la technique, fondée sur la définition, a été mise en oeuvre dans le cours sur deux exemples.

Ainsi, nous avons une nouvelle praxéologie du secteur de la théorie générale de la

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

Mesures

\ **Exercice 6.** Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère λ la mesure de Lebesgue, $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k$ et $\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \delta_k$. Pour chacune de ces mesures, calculer les mesures des ensembles suivants :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [n, n + 1 + \frac{1}{n^2}]$, $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$;
2. $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$ et $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$

\ **Exercice 7.** Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $A \in \mathcal{A}$ une partie mesurable. Montrer que l'application $\mu_A : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .

\ **Exercice 8.** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lambda(A) = 0$. Montrer que A est d'intérieur vide.

\ **Exercice 9.** Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$, et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables telle que $\forall n \in \mathbb{N} \mu(A_n) = \mu(X)$. Montrer que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(X)$.
Le résultat est-il encore vrai si on a $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$.

- \ 1. Montrer que $\mathcal{C}_a = \{A \subset \mathbb{R} \mid A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur \mathbb{R} .
- \ 2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a$, puis que $\mathcal{C}_a = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- \ 3. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $\mu(A) = \lambda(A + a)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application μ ainsi définie est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
4. Dédire de ce qui précède que la mesure de Lebesgue est invariante par translation: pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.

Exercice 11. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$.
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

- $\mu([0, 1]) = 1$;
- Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$ on ait $\mu(I + a) = \mu(I)$.

Le but est de montrer que μ est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que la mesure μ est diffuse.
2. Montrer que $\mu([0, x]) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pourra commencer par le montrer pour tout rationnel $x \in \mathbb{Q}_+^*$.
3. En déduire que $\mu = \lambda$.

FIGURE 5.17 – Exercices sur la notion de mesure

mesure :

P_{M,m_1} : une application est une mesure	
T_{M,m_1}	Montrer qu'une application donnée est une mesure
τ_{M,m_1}	On montre que l'application donnée vérifie les axiomes de la mesure
$\theta_{M,m}$	Définition axiomatique d'une mesure
Θ_M	Théorie de la mesure

L'analyse de la fiche de TD fait apparaître deux types de tâches :

- T_{M,m_2} : Mesurer des ensembles pour une mesure donnée ;
- T_{M,m_3} : Démontrer des propriétés de mesures spécifiées.

L'exercice 6 consiste en plusieurs occurrences du type de tâches T_{M,m_2} puisqu'il s'agit de calculer la mesure pour la mesure de Lebesgue puis pour des sommes de Dirac de sous-ensembles de \mathbb{R} . La technique à mettre en oeuvre consiste à identifier comment est construit l'ensemble à mesurer vis à vis des opérations ensemblistes qui caractérisent les tribus, puis d'utiliser les propriétés de la mesure considérée.

L'exercice 8 consiste à montrer que les parties Lebesgue-mesurables de \mathbb{R}^n de mesure nulle sont celles d'intérieur vide. La technique consiste à supposer, par l'absurde, qu'il existe une partie mesurable d'intérieur non vide : elle contient alors un pavé de mesure ε^n , ce qui est absurde. La croissance de la mesure justifie cette technique, avec la définition de la mesure de Lebesgue. La définition des mesures et les propriétés du cours justifient cette technique.

L'exercice 9 est un exercice plus théorique qui vise à montrer une propriété spécifique aux mesure finies (voir Figure 5.17). La technique à mettre en oeuvre est d'écrire :

$$X = (\cap A_n) \cup (\cap A_n)^c = (\cap A_n) \cup (\cup A_n^c).$$

Puis, comme $\mu(\cup A_n^c) \leq \sum \mu(A_n^c)$ et que $\mu(A_n^c) = 0$ par hypothèse, on a bien $\mu(X) = \mu(\cap A_n)$.

Enfin, l'exercice 11 vise à montrer que la seule mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation est la mesure de Lebesgue, ce qui apparaît comme une caractérisation structuraliste de la mesure de Lebesgue.

La première tâche consiste à montrer qu'une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et invariante par translation est diffuse. Il s'agit donc de montrer une propriétés des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et invariantes par translation. Au vu des solutions présentées en TD, nous pouvons avoir relevé deux techniques décrites dans les corrigés :

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

- $\tau_{M,m_3,1}$: Par l'absurde (en supposant que la mesure n'est pas diffuse, alors le segment unité contient autant de point de mesure strictement positive, ce qui est impossible), qui reprend la technique mise en oeuvre dans l'exercice 8 ;
- $\tau_{M,m_3,2}$: En écrivant $[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{n-1} [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}[$ et donc, $\mu[0, 1/n[= 1/n$ puis $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1/n[$ et on conclut par un passage à la limite. Ce qui justifie cette technique est l'additivité de la mesure, et la propriété de limite décroissante.

Enfin, la dernière tâche consiste à démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\mu([0, x]) = x.$$

Voici la technique attendue :

- On montre que $\mu([0, x]) = x$ pour x rationnel. En effet, si $x = p/q$, alors $[0, x[= \bigcup_{k=0}^{p-1} [\frac{k}{q}; \frac{k+1}{q}[$. Ces intervalles ont la même mesure (invariance par translation) donc $\mu([0, p/q]) = p\mu([0, 1/q])$. Le même argument donne que $q\mu([0, 1/q]) = 1$, donc finalement $\mu([0, p/q]) = p/q$. Cette technique a pu être mise en oeuvre dans la réalisation de la tâche précédente.
- Si x est réel, alors x est limite croissante d'une suite (r_n) de rationnels et $\bigcup [0, r_n[= [0, x[$. Par le théorème de limite croissante, $\lim \mu([0, r_n]) = \lim r_n = x = \mu([0, x])$. Une autre technique pour cette tâche consiste à encadrer $[0, x[$ par deux suites d'intervalles rationnels et donc d'utiliser la croissance de la mesure.

On retrouve ici une occurrence du type de tâche T_{M,m_1} puisque la tâche est ici de mesurer les segments d'origine 0, qui apparaît donc comme un sous-type de tâche de T_{M,m_2}

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU
CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

OM _L : Propriétés de la mesure				
Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{M,m_1}	T_{M,m_1} : Montrer qu'une application donnée est une mesure	τ_{M,m_1} : On montre que l'application donnée vérifie les axiomes de la mesure	$\theta_{M,m}$: Définition axiomatique de la mesure, mesures usuelles, propriétés des mesures	Θ_M : Théorie de la mesure
P_{M,m_2}	T_{M,m_2} : Mesurer un ensemble pour une mesure donnée	τ_{M,m_2} : Identifier comment est construit l'ensemble à mesurer vis à vis des opérations ensemblistes qui caractérisent les tribus, puis d'utiliser les propriétés de la mesure considérée		
P_{M,m_3}	T_{M,m_3} : Démontrer une propriété de mesure spécifique	τ_{M,m_3} : Reasonner à partir des propriétés générales des mesures à utiliser, par un raisonnement direct ou par l'absurde		

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

Finalement, nous modélisons le secteur *Théorie générale de la mesure* par trois organisation mathématiques ponctuelles et 2 organisations mathématiques locales :

Organisation mathématique régionale : Théorie de la mesure				
Praxéologie	Type de tâche	Technique	Technologie	Théorie
P_{M,t_1}	T_{M,t_1} : montrer qu'un ensemble donné \mathcal{D} est une tribu sur un ensemble X	τ_{M,t_1} : Vérifier que l'ensemble \mathcal{D} vérifie les 3 axiomes donnés par la définition d'une tribu	$\theta_{M,t}$: définition d'une tribu, d'une tribu engendrée par une classe	Θ_M : Théorie de la mesure
P_{M,t_2}	T_{M,t_2} : montrer qu'une tribu \mathcal{D} est engendrée par une classe donnée C	τ_{M,t_2} : Montrer que \mathcal{D} est inclus dans $\sigma(C)$ et que $C \subset \mathcal{D}$		
P_{M,f_1}	T_{M,f_1} : montrer qu'une application donnée est mesurable	τ_{M,f_1} : Montrer que pour tout ouvert \mathcal{U} , ou pour tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un borélien	$\theta_{M,f}$: Définition d'une fonction mesurable et de la tribu des boréliens de \mathbb{R} , propriétés des ensembles de fonctions mesurables	
P'_{M,f_1}		τ'_{M,f_1} : f est la limite, le sup, le min, la limsup, la liminf d'une suite de fonctions mesurables		
P''_{M,f_1}		τ''_{M,f_1} : f est la somme, le produit, le max, le min, le quotient de fonctions mesurables		
P_{M,f_2}	T_{M,f_2} : montrer qu'un ensemble donné est mesurable	τ_{M,f_2} : Montrer que l'ensemble considéré est l'image réciproque d'un ensemble mesurable par une application mesurable		

P_{M,m_1}	T_{M,m_1} : montrer qu'une application donnée est une mesure	τ_{M,m_1} : Montrer que l'application donnée vérifie les axiomes de la mesure	$\theta_{M,m}$: Définition axiomatique de la mesure, mesures usuelles, propriétés des mesures
P_{M,m_2}	T_{M,m_2} : Mesurer des ensembles pour une mesure donnée	τ_{M,m_2} : Identifier comment est construit l'ensemble à mesurer vis à vis des opérations ensemblistes qui caractérisent les tribus, puis d'utiliser les propriétés de la mesure considérée	
P_{M,m_3}	T_{M,m_3} : Démontrer des propriétés de mesures spécifiées	τ_{M,m_3} : Reasonner à partir des propriétés générales des mesures à utiliser, par un raisonnement direct ou par l'absurde	

5.4.3 Analyse praxéologique du secteur Théorie générale de l'intégration

Une fois construite la notion générale de mesure, le développement du domaine mesure et intégration se poursuit avec le secteur de la théorie générale de l'intégration. La notion de mesure trouve donc un habitat et correspond au besoin trophique de l'intégrale.

On se place sur un ensemble mesuré (X, \mathcal{A}, μ) . L'intégrale par rapport à la mesure μ est d'abord définie pour les fonctions étagées à valeurs positives. Cette intégrale vérifie les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, croissance). L'intégrale d'une fonction mesurable quelconque f est alors définie comme la borne sup de l'ensemble

$$\left\{ \int_X v d\mu, v \text{ en escalier et positive, } v \leq f \right\}.$$

Cette intégrale, qui est un élément de $[0; +\infty]$ vérifie la propriété de croissance.

Cette propriété de croissance permet d'aboutir au théorème de convergence monotone :

Théorème 5.4.1 (Convergence monotone). *Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives sur (X, \mathcal{A}, μ) et si $f = \lim f_n$, alors*

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu.$$

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

Ce théorème mobilise de fait un élément technologique du secteur de la théorie de la mesure, que l'on a inclus dans $\theta_{M,f}$ (la limite d'une suite de fonction mesurable est mesurable). Il permet aussi de justifier la propriété de linéarité de l'intégrale (des fonctions mesurables positives) et de démontrer le lemme de Fatou.

A partir de l'intégrale des fonctions mesurables positives, la suite du cours est consacrée à l'intégrale des fonctions de signes quelconques.

Définition 5.4.6. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un ensemble mesuré. Soit f une fonction mesurable de X dans \mathbb{R} . On note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. f est intégrable si $\int |f| d\mu < +\infty$ et on a alors

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

L'espace des fonctions intégrables sur X est alors noté $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Enfin, après la définition de l'intégrale de fonctions mesurables à valeurs complexes (définie à partir de la partie réelle et de la partie imaginaire), le cours énonce le théorème de convergence dominée de Lebesgue puis les théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales à paramètres. Notons que les fonctions considérées sont des fonctions définies sur $X \times S$ avec (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et S un espace métrique, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Notons que dans le cours, nous ne trouvons aucun exemple. Mais dans l'interview de EC1, nous avons noté qu'un des objectifs était l'application des théorèmes cités (convergence monotone, lemme de Fatou, convergence dominée).

La fiche de TD, dont la première page est sur la figure 5.18, montre d'abord le développement d'une organisation mathématique ponctuelle autour du type de tâches $T_{I,s}$ que l'on peut formuler de la façon suivante : déterminer la limite d'une suite d'intégrales.

En effet, la technique attendue pour résoudre la tâche « calculer $\int_X f d\lambda$ avec $f(x) = \sum f_n(x)$ » de l'exercice 2 consiste à voir f comme la limite croissante d'une suite de fonctions mesurable positives ($g_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$) puis d'appliquer le théorème de convergence monotone.

De même, pour la tâche de l'exercice 5, il suffit d'écrire l'intégrale comme étant $\int_0^{+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n x^p 1_{[0,n]} dx$ et d'appliquer le théorème de convergence dominée.

C'est aussi le cas de l'exercice 6 (voir figure 5.19) où il faut mobiliser la mesure de comptage et appliquer le théorème de convergence dominée.

La même technique est à mettre en oeuvre dans l'exercice 3 et dans l'exercice 4.

Une deuxième organisation mathématique ponctuelle est développée à partir des tâches de l'exercice 1 (et dans l'exercice 11).

La technique à mettre en oeuvre consiste à vérifier la propriété (celle du 2.(a) de l'exercice 1) pour les fonctions étagées positives puis à utiliser le fait que toute fonction mesurable est limite croissante d'une suite de fonctions étagées. Le théorème de

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exercice 1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \varphi d\mu.$$

- Montrer que ν est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .
- On souhaite déterminer quelle est l'intégrale d'une fonction pour la mesure ν .
 - Pour toute fonction mesurable positive $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, montrer qu'on a $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$.
On commencera par le montrer pour les fonctions étagée positives.
 - Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ si et seulement si $f \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.
Lorsque c'est le cas, montrer que $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$.

Remarque : une mesure ν de cette forme est appelée *mesure à densité par rapport à μ* , la fonction φ étant la fonction densité.

Exercice 2. Soit $X = [1, +\infty[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ .

- Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = ne^{-nx}$ est simplement convergente sur X . On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.
- Justifier que f est borélienne sur X et calculer $\int_X f d\lambda$.

Exercice 3. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ .

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{[x, +\infty[} f d\lambda = 0$.
- On suppose que f est décroissante. En déduire que f est positive et montrer qu'il existe une constante C telle que $f(x) \leq \frac{C}{x}$ pour tout $x > 0$.
- Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement f positive.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x)$.

Exercice 5.

- Montrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geq -n$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n x^p dx = p!$.

FIGURE 5.18 – Première page du TD Théorie générale de l'intégration

Exercice 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{n}{nk^2 + k + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$

FIGURE 5.19 – Exercice 6 du TD théorie générale de l'intégration

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

convergence monotone permet de conclure. Nous modélisons le type de tâches par $T_{I,p}$: montrer une propriété de l'intégrale.

Lors de l'interview de EC1, nous avons noté la volonté de l'enseignant de faire « comprendre la démarche ». Il nous semble que la praxéologie développée ici correspond à cette attente, dans le sens où la technique est celle qui a été exposé en cours pour montrer les propriétés de l'intégrale. Le fait d'introduire un élément de la technique « on commencera par le montrer pour les fonctions étagées positives » renvoie au développement du cours et aux preuves de différentes propriétés de l'intégrale (par exemple la linéarité de l'intégrale qui est prouvée pour les fonctions étagées positives, puis pour les fonctions mesurables par passage à la limite). Ici, c'est la méthode qui fonde la praxéologie.

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}$.

1. Montrer que la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ . Calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x > 0$ on a $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
3. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus et déterminer F .
4. Dédurre des questions précédentes la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

FIGURE 5.20 – Exercice 8 du TD théorie générale de l'intégration

Une troisième praxéologie ponctuelle se développe à partir des tâches de l'exercice 8 (voir figure 5.20). La question 1) consiste à montrer que l'intégrale à paramètre,

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} dt$ est bien définie et continue, c'est à dire à étudier la continuité d'une intégrale à paramètre. La technique associée consiste à vérifier que les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique. La question 2) consiste à montrer que la fonction F est dérivable et à en calculer la dérivée. La technique est ici de vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale et d'appliquer ce théorème. Puis, le calcul de la dérivée implique la mobilisation de technique de calcul différentiel.

Nous modélisons alors deux praxéologies à partir des types de tâche :

- T_{I,r_1} : Montrer qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est continue.
- T_{I,r_2} : Montrer qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est dérivable et calculer sa dérivée.

La technologie est constituée des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégrale. Ces théorèmes sont justifiés par le théorème de convergence dominée.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Enfin, une partie du cours est consacrée à des exemples d'intégrale par rapport à une mesure : il s'agit de l'intégrale par rapport à la mesure de Dirac, par rapport à la mesure de comptage, et par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On y trouve le lien entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue :

Théorème 5.4.2. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable, alors f est intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$ et $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$*

ce qui doit constituer un élément technologique pour justifier la technique de calcul d'intégrale. Néanmoins, ce théorème est dans le topos de l'enseignant : nous n'avons pas identifié de tâche qui mobilise explicitement ce théorème, ce qui indique que le travail technique sur des fonctions singulières ne semble pas développé ici.

Nous modélisons le secteur *Théorie générale de l'intégration* par deux organisations mathématiques locales.

Organisation mathématique régionale : Théorie générale de l'intégration				
Praxéologie	Type de tâche	Technique	Technologie	Théorie
P_{I,s_1}	T_{I,s_1} : Déterminer la limite d'une suite d'intégrales $\int_X f_n$	τ_{I,s_1} : On identifie le comportement de la suite (f_n) puis on calcule $\int \lim f_n(x)$	θ_I : Théorème de convergence monotone, de convergence dominée Lemme de Fatou	Θ_I : Théorie de l'intégration
P_{I,s_2}	T_{I,s_2} : Démontrer une propriété de l'intégrale	τ_{I,s_2} : On montre que la propriété est valable pour les fonctions étagées, puis on passe à la limite par convergence monotone		
P_{I,r_1}	T_{I,r_1} : Démontrer qu'une fonction définie avec une intégrale à paramètre est continue	τ_{I,r_1} : On vérifie que les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées	θ_r : Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous l'intégrale	
P_{I,r_2}	T_{I,r_2} : Démontrer qu'une fonction définie avec une intégrale à paramètre est dérivable	τ_{I,r_2} : On vérifie que les hypothèses du théorème de dérivabilité sous le signe intégrale sont vérifiées		

5.4.4 Analyse praxéologique du secteur Mesures images et mesures produit

Le développement praxéologique se poursuit avec un nouveau secteur : celui des mesures images et mesures produit.

La notion de mesure image s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 5.4.3. *Si (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) sont deux ensembles mesurables, $T : X \rightarrow Y$ une application mesurable, et μ une mesure sur (X, \mathcal{A}) . Alors l'application définie pour tout $B \in \mathcal{B}$ par $(T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B))$ est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) .*

La preuve de ce théorème consiste à la mise en oeuvre de τ_{M, m_1} , technique de la praxéologie P_{M, m_1} : montrer qu'une application est une mesure.

La mesure ainsi construite est appelée la mesure image de μ par T et est notée $T_*\mu$. Une niche importante de la notion de mesure image est en probabilité puisque la notion de mesure image permet de définir la loi d'une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé.

Le secteur mesures images et mesures produits va ensuite se développer autour de la notion de tribu produit et celle de mesure produit.

La fiche de TD montre le développement d'une organisation mathématique ponctuelle dont le type de tâche est :

- $T_{P,i}$: déterminer une mesure image.

La technique à mettre en oeuvre consiste à utiliser la définition de la mesure image et les bonnes propriétés de la mesure considérée. Le choix de la fonction mesurable T et la mesure μ sont des variables didactiques. Trois occurrences de ce type de tâche se trouvent dans la fiche de TD.

La contextualisation des mesures et des tribus produits au cas de la tribu borélienne sur \mathbb{R} et à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} permet de justifier que la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est le produit n -fois de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Enfin, les deux théorèmes de Fubini (Fubini-Tonelli et Fubini) sont énoncés. Notons que la preuve du théorème de Fubini-Tonelli consiste en la mise en oeuvre de la technique τ_{I, s_2} : démontrer une propriété de l'intégrale, puisqu'il s'agit de montrer l'égalité pour les fonctions étagées, puis de passer à la limite par le théorème de convergence monotone. Enfin, le théorème de Fubini se prouve à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli.

On trouve dans le cours deux exemples qui sont développés :

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} f d\lambda_2$ où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$.

La technique exposée en cours consiste à reconnaître une fonction positive, puis que $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$ et d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli.

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} f d\lambda_2$ où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = \frac{e^{-y} \sin(xy)}{1+x^2}$.

La technique exposée en cours consiste à justifier par le théorème de Fubini-Tonelli que la fonction f est dans $L^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ puis d'appliquer le théorème de Fubini pour effectuer le calcul.

Nous modéliserons donc deux nouvelles praxéologies ponctuelles dont les types de tâches sont :

- T_{P,f_1} : Calculer l'intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à une mesure produit.
- T_{P,f_2} : Calculer l'intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une mesure produit.

La technologie $\theta_{P,f}$ contient donc le théorème de Fubini-Tonelli et le théorème de Fubini, ainsi que la notion de mesure produit. Plus précisément, Le théorème de Fubini-Tonelli, qui est la technologie de la praxéologie relative à T_{I,s_1} devient un élément de la théorie de la praxéologie relative à T_{I,s_2} .

On remarque aussi de nouvelles techniques pour le type de tâches T_{M,m_2} : mesurer des ensembles de \mathbb{R}^n pour une mesure donnée.

En effet, les exercices 3, 6 et 8 ont pour but la mesure de sous-ensembles de \mathbb{R}^n . La technique consiste à écrire que la mesure de l'ensemble A est $\int_{\mathbb{R}^n} 1_A d\mu$ puis d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli, c'est à dire de mettre en oeuvre T_{P,f_1} . Précisons l'exercice 3, dont l'énoncé est rappelé sur la Figure 5.21. Il s'agit de déterminer la mesure de Lebesgue de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq f(x)\}$ pour une fonction mesurable positive f .

\ **Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Montrer que V est une partie mesurable de \mathbb{R}^2 , et calculer sa mesure (pour la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2)

FIGURE 5.21 – Exercice 3 : mesure de Lebesgue de V

Dans cet exercice, la tâche « montrer que V est une partie mesurable de \mathbb{R}^2 » est une occurrence du type de tâche T_{M,f_2} : montrer qu'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est mesurable. La technique à mettre en oeuvre est donc τ_{M,f_2} .

La deuxième tâche est de calculer la mesure de V pour la mesure de Lebesgue.

C'est une occurrence du type de tâche T_{M,m_2} mais la portée de la technique τ_{M,m_2} n'en permet pas la mise en oeuvre. La technique τ'_{M,m_2} est ici d'écrire $\lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_V d\lambda_2$, puis, en utilisant le fait que la mesure λ_2 est la mesure produit de λ_1 par elle-même ($\lambda_2 =$

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

$\lambda_1 \otimes \lambda_1$ on arrive par application du théorème de Fubini-Tonelli à $\lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_1$ et donc on met en oeuvre τ_{p,f_1} . La trace de cette technique est sur la Figure 5.22.

Un élément de la technique est d'écrire $\lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_V d\lambda_2$. Dans un cas plus général, nous pouvons énoncer que lorsque μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) alors pour tout élément A de \mathcal{A} , on a $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A d\mu$. Ce qui justifie la technique est donc ici, la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.

$$\lambda_2(V) = \lambda_2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\})$$

$$= \lambda_2 \text{ mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^2 \cdot \lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_V d\lambda_2$$

$$\text{Comme } \lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1 \text{ on a } \lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(V_{2,x}) d\lambda_1(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(V_{2,x}) d\lambda_1(x)$$

$$\text{soit } x \in \mathbb{R} \quad V_{2,x} = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in V\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$=]0, f(x)]$$

$$\text{donc } \lambda_1(V_{2,x}) = f(x) \text{ et } \lambda_2(V) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_1(x)$$

FIGURE 5.22 – Correction de l'exercice 3 : mesure de Lebesgue de V

On peut remarquer que lorsque f est une fonction continue positive sur un segment, la mesure de Lebesgue de V correspond à $\int_a^b f(t) dt$ (où l'intégrale est à prendre au sens de Riemann), ce qui est justifié par le théorème 5.4.2. Nous ne trouvons pas de trace de ce discours dans les écrits, ce qui peut laisser penser que le théorème 5.4.2 reste dans le topos de l'enseignant.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Nous modélisons le secteur *Théorie générale de l'intégration* par deux organisations mathématiques locales.

Organisation mathématique régionale : Mesures images et mesures produits				
Praxéologie	Type de tâche	Technique	Technologie	Théorie
$P_{P,i}$	$T_{P,i}$: Déterminer une mesure image $T_*\mu$ lorsque $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable et μ une mesure sur Y	$\tau_{P,i}$: Calculer, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}(A))$	Définition d'une mesure image	Θ_P : Mesures images et mesures produits
P_{P,f_1}	T_{P,f_1} : Calculer l'intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à une mesure produit	τ_{P,f_1} : On utilise le théorème de Fubini-Tonelli puis on effectue le calcul des intégrales	Théorème de Fubini-Tonelli	
P_{P,f_2}	T_{P,f_2} : Calculer l'intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport à une mesure produit	τ_{P,f_2} : On utilise le théorème de Fubini puis on effectue le calcul des intégrales	Théorème de Fubini	
P_{M,m_2}	T_{M,m_2} : Mesurer un sous-ensemble U de \mathbb{R}^n pour une mesure donnée μ	τ'_{M,m_2} : on calcule $\int_{\mathbb{R}^n} 1_U d\mu$	Définition de l'intégrale des fonctions en escalier	

5.4.5 Analyse praxéologique du secteur Espaces L^p

Ce secteur vise à énoncer des résultats théoriques portant sur la structure des espaces $L^p(X)$, $p \in [1; +\infty]$.

La première partie du cours concerne les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ des fonctions d'un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , mesurables et telles que $\int_X f d\mu < +\infty$.

L'inégalité de Holder, puis l'inégalité de Minkowski permettent de montrer que l'espace $\mathcal{L}^p(X)$ est un espace vectoriel. L'application $\mathcal{L}^p(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui à f associe $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ puisqu'il existe des fonctions non nulles telles que $\left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} \neq 0$.

L'espace L^p , quotient de $\mathcal{L}^p(X)$ par l'égalité μ -presque partout¹ et l'espace $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet : c'est un espace de Banach.

Enfin, un résultat de densité est énoncé :

Théorème 5.4.4. *Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace des fonctions continues à support compact dans U est un sous-espace dense de $L^p(U, \lambda_n)$ (où λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n), et l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans U est un sous-espace dense de $L^p(U, \lambda_n)$.*

Seulement cinq exercices sont proposés aux étudiants. Les trois premiers exercices mobilisent l'inégalité de Hölder et apparaissent comme des tâches théoriques, ce qui donne une organisation mathématiques locale autour de l'inégalité de Hölder, laquelle fait office de technologie unificatrice.

L'exercice 4 donnent deux instanciations du type de tâche

- T_{L^p, f_1} : montrer qu'une fonction est dans $L^p(\mathbb{R})$ et calculer sa norme $\|\cdot\|_p$.

La technique à mettre en oeuvre consiste à calculer explicitement $\|\cdot\|_p$ en utilisant le théorème 3.6 puis à calculer l'intégrale par un calcul de primitive, puis de conclure par un calcul de limite.

Enfin, l'exercice 5 apparaît également comme une tâche théorique isolée, et nous n'avons pas trouvé, dans le cours, d'élément technologique permettant de justifier la technique². Nous ne modélisons pas de praxéologie relative à cette tâche isolée.

1. $f = g$ μ -presque partout si et seulement si il existe $A \subset X$, $\mu(A) = 0$ tel que pour tout $x \in X \setminus A$, $f(x) = g(x)$. L'égalité μ -presque partout est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables sur X

2. Si (f_n) converge vers f en norme L^p , alors il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ -presque partout.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE CAS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU
CONCEPT D'INTÉGRALE À L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exercice 1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Si $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, montrer qu'on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 2. Inclusions entre espaces L^p .

1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$.
2. On considère \mathbb{N} muni de la mesure de comptage. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $\ell^p \subset \ell^q$.
3. On considère \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$. Donner un exemple de fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^q(\mathbb{R})$, et un exemple de fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$ telle que $g \notin L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Inégalité d'interpolation.

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $p < r < q$. Montrer que pour toute fonction $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ on a $f \in L^r(X)$.

Indication: montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{(1-a)}{p} + \frac{a}{q}$, et utiliser l'inégalité de Hölder avec des exposants bien choisis.

Exercice 4. On considère \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue λ .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = e^{-n|x|}$. Montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_p$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n(x) = \frac{1}{(n+|x|)^2}$. Montrer que $g_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|g_n\|_p$.
3. On considère les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ces normes sont-elles comparables ?

Exercice 5. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q \in [1, +\infty]$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$;
- f_n converge vers g dans $L^p(X)$;
- f_n converge vers h dans $L^q(X)$.

Montrer que $g = h$ μ -p.p..

FIGURE 5.23 – Fiche de TD sur les espaces $L^p(X)$

5.4.6 Conclusion sur le modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

Pour notre étude, nous avons analysé différents supports (le syllabus, les feuilles de travaux dirigés, leurs corrigés et les notes de cours prises par un étudiant) de l'unité d'enseignement « mesure et intégration », de la troisième année de Licence de mathé-

5.4. Modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue à Montpellier

matiques de l'université de Montpellier, en 2020, ainsi que l'interview de l'enseignant responsable de l'UE et de la licence au moment de l'accréditation.

Notre analyse praxéologique fait apparaître quatre secteurs, au sens de la TAD. Le premier s'articule autour des notions de tribu et de mesure, qui sont des concepts de la théorie de la mesure en tant que théorie structuraliste. Les besoins trophiques des concepts de ce secteurs sont du domaine de la théorie des ensembles. La dialectique des objets et des structures s'appliquent ainsi dans ce contexte (Hausberger, 2017). La méthode structuraliste, qui procède par des raisonnements en termes de classes d'objets, de stabilité des propriétés des structures par des opérations sur les structures, dont des opérations ensemblistes, guide la présentation du cours donné par l'enseignant ainsi que les types de tâches proposés.

Le secteur « Théorie générale de l'intégration » est un habitat pour la théorie générale de la mesure. En effet, le choix didactique opéré dans le cours est de définir l'intégrale des fonctions étagées à partir de la notion de mesure. La théorie Θ_I (relative à l'intégration) contient donc la théorie Θ_M (relative à la mesure). Les théorèmes de convergences et de continuité/dérivabilité structurent le secteur en deux thèmes inter-reliés : l'élément technologique du théorème de convergence dominé permet de justifier les théorèmes de continuité/dérivabilité sous le signe intégrale : la théorie de l'intégration contient finalement les théorèmes de convergence.

La σ -additivité est ici un élément crucial dans la construction de l'intégrale et fonde la validité des éléments technologiques introduits dans ce secteur.

Le troisième secteur concerne celui des mesures images et mesures produits. Ces secteurs sont inter-reliés aux secteurs précédents puisque le premier élément technologique est la définition d'une mesure image, qui est un exemple de mesure. Avec la notion de mesure produit sont introduits les éléments technologiques qui structurent le secteur en deux thèmes : le théorème de Fubini-Tonelli, puis le théorème de Fubini. On observe de nouveau l'intégration de la technologie (le théorème de Fubini-Tonelli) à la théorie d'une praxéologie ultérieure, puisque ce théorème permet de justifier le théorème de Fubini.

Enfin, le dernier secteur est celui des espace $L^p(X)$. Nous avons mis en lumière les différents éléments technologiques développés dans le cours, lesquels génèrent des tâches théoriques isolées, portant essentiellement sur des éléments structuralistes des espaces $L^p(X)$.

5.5 Conclusion : réponses à QR_2

Dans ce chapitre, nous avons mis en lumière certains éléments qui viennent éclairer les choix de transposition didactique externe effectués à l'université de Montpellier. La théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue permet l'étude, dès la L3, de notions qui offrent de nombreux habitats à cette intégrale, notamment en probabilité et statistique, mais également en analyse fonctionnelle. L'entrée par la théorie générale de la mesure apparaît particulièrement pertinente pour l'enseignement des probabilités. Les discours des enseignants mettent en avant l'utilité de l'intégrale de Riemann pour confronter les étudiants à une construction de l'intégrale avant d'aborder la théorie de Lebesgue.

Les enseignants interrogés ont, tous les deux, indiqué mettre l'accent sur les aspects « théoriques » relativement aux aspects « pratiques ». En ce sens, l'OML Intégrabilité apparaît comme fondamentale dans le modèle praxéologique relatif à l'intégrale de Riemann. Notre analyse épistémologique avait montré qu'un apport essentiel de la théorie de Riemann était précisément l'étude des conditions d'intégrabilité. En revanche, nous n'avons pas relevé d'organisation mathématique en lien avec les séries trigonométriques. Le lien entre l'intégrale de Cauchy et l'intégrale de Riemann ne semble pas, ici, mis en lumière. Le développement praxéologique autour du calcul approché d'intégrales ne paraît pas très riche, ce qui pourrait expliquer les difficultés identifiées par Orton (1983) sur la conceptualisation de l'intégrale via les sommes de Riemann. Les praxéologies liées aux sommes de Riemann paraissent artificielles dans notre modèle praxéologique.

EC2 a évoqué l'usage d'un discours meta pour motiver l'introduction de la théorie de la mesure, en lien avec la caractérisation de l'intégrabilité. Nous n'avons pas trouvé de trace de reprise de ce discours dans les données dont nous disposons pour la L3. Notre analyse épistémologique avait montré l'importance du rôle joué par l'étude des ensembles de discontinuité dans le développement de la théorie de la mesure : ces éléments peuvent être de nature à mettre en avant des liens entre les théories enseignées en L2 et en L3 à travers le développement de nouvelles praxéologies.

EC1 a indiqué l'usage d'une activité introductive à la théorie de la mesure soulignant le rôle de l'axiome de σ -additivité : il s'agit de la mesure de l'aire du disque. Cette activité semble cependant peu reliée à des éléments praxéologiques mis en avant dans le développement de la théorie de Riemann, ce qui nuit à la conceptualisation du processus sous-jacent à l'intégrale. De plus, la σ additivité n'est pas nécessaire. En revanche, la praxéologie P_{M,m_2} semble, pour nous, éclairer les liens entre mesure des aires, mesure générale, et intégrale. Un discours meta de l'enseignant à ce moment là peut aider les étudiants à percevoir ces liens.

Le développement praxéologique de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue suit les principes structuralistes. En effet, après l'introduction d'une structure,

celle de tribu, différentes notions métriques et topologiques viennent structurer le développement praxéologique autour de tâches théoriques. La méthode axiomatique est mise en avant dans les différents secteurs relatifs à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, toujours dans un cadre général. Ceci nous permet de mettre en lumière des besoins trophique du concept d'intégrale de Lebesgue.

Le dernier secteur concerne les espaces L^p qui apparaissent comme des exemples d'espace de Banach. M. Rogalski (2013) avait rappelé qu'il ne fallait pas oublier l'importance de disposer de ces exemples d'espaces de Banach. Les tâches proposées aux étudiants restent à un niveau théorique, et les différentes niches des espaces L^p ne sont pas explicitées ici.

L'équipement praxéologique des étudiants, lauréats de la licence de mathématiques de Montpellier en 2020, est constitué de ces organisations mathématiques. Nos modèles praxéologiques fournissent ainsi des éléments que l'on peut attendre de la part des étudiants et observer dans leurs productions.

Ces modèles seront pour nous des outils pour la conception et la mise en oeuvre de notre expérimentation.

CHAPITRE 6

Une implémentation locale du plan B de Klein pour l'intégrale en formation des enseignants

6.1 Introduction

Cette section vise l'étude de notre troisième groupement de questions de recherche que nous rappelons ici :

QR₃ : Comment implémenter le plan B de Klein pour l'intégrale ? En particulier, quelles nouvelles praxéologies (de Klein) s'agit-il d'introduire ? Comment développer les praxéologies de Klein ? Quels sont les obstacles au développement de ces praxéologies ?

Nous suivrons la méthodologie de l'ingénierie didactique rappelée dans le chapitre 2.

Dans notre revue de travaux, nous avons mis en lumière des expérimentations menées par Kondratieva et Winsløw (2017, 2018); Winsløw (2020) qui se fondent sur la TAD et la notion de modèle praxéologique de référence.

Dans ces travaux, l'étude de la seconde discontinuité de Klein se fonde sur la description des rapports institutionnels par les individus occupant différentes positions dans les institutions et ces rapports sont décrits au moyen des praxéologies.

Notre expérimentation sera menée avec les étudiants de Master MEEF 1ère année de l'université de Montpellier, en 2020.

Les modèles dominants pour l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue à Montpellier sont pour nous des modèles praxéologiques de référence, en tant qu'outil pour l'étude de la discontinuité de Klein pour l'intégrale et la conception d'une expérimentation visant à l'élaboration du plan B de Klein, en renforçant les liens avec l'intégrale du secondaire.

Ainsi, avec les notations introduites dans le chapitre 2, nos modèles décrivent $R_U(s, \omega)$. Nous allons dans un premier temps compléter notre étude avec la constitution d'un modèle praxéologique dominant en terminale en France pour l'intégrale.

6.2 Le modèle praxéologique relatif à l'intégrale au lycée

6.2.1 Corpus

Notre étude est ici institutionnelle. L'institution que l'on considère pour notre étude est la classe de terminale en 2020/2021 en France. L'intégrale, en terminale, est enseignée dans la spécialité mathématiques et dans l'option mathématiques complémentaires.

- Les programmes officiels de la spécialité mathématiques (*Programme de spécialité de mathématiques de terminale générale*, 2019)

- Les programmes officiels de mathématiques complémentaires (*Programme officiel de l'option maths complémentaire*, 2019)
- Les manuels en ligne Sesamaths (Arnaud, Couteau, Fournet-Fayas, & Goarin, 2020; Arnaud, Fournet-Fayas, & Goarin, 2020)

Nous relevons ainsi les différents types de tâches présents au lycée. Les corrigés des exercices des manuels ainsi que le programme officiel nous permettront de décrire les praxéologies qui vivent au lycée, dans le cadre de la spécialité mathématiques.

6.2.2 Construction du modèle

6.2.3 Le programme officiel

Le programme d'analyse de spécialité mathématiques est découpé en chapitres : suites, compléments sur la dérivation, continuité des fonctions, fonction logarithme, fonctions sinus et cosinus, primitives et équations différentielles, calcul intégral. Pour chacun des chapitres du programme de spécialité mathématiques, le programme est découpé en 5 parties : contenus, capacités attendues, démonstrations, approfondissements possibles, exemples d'algorithme. Dans ce programme, la notion de primitive est traitée dans un chapitre séparé du calcul intégral. Compte tenu du rôle particulier que va jouer la notion de primitive dans le chapitre d'intégration, le chapitre est traité en amont du calcul intégral. Une primitive d'une fonction f est définie comme une fonction dérivable solution de l'équation différentielle $y' = f$. Le calcul des primitives est ainsi obtenu par reconnaissance des dérivées. L'opération de calcul de primitive est ainsi une anti-dérivation.

Le programme de maths complémentaire propose un découpage en secteurs d'études : modèles définis par une fonction d'une variable, modèles d'évolution, approche historique de la fonction logarithme, calculs d'aires, répartition des richesses, inégalités, inférence bayésienne, répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage, temps d'attente, corrélation et causalité. Le thème d'étude du programme qui est en relation avec le calcul intégral est le thème calcul d'aire. Le programme annonce :

Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d'approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l'aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral. Ce thème est l'occasion de revoir les aires des figures planes usuelles : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques,

ainsi que l'utilisation de propriétés classiques : additivité, invariance par symétrie et translation. Les calculs d'aires par approximations successives se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre d'algorithmes notamment dans le cas d'aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. Leur histoire et les différentes méthodes peuvent aussi être sources d'exposés réalisés par les élèves. Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, parabolôïde de révolution ...).

Les contenus mathématiques associés au thème calcul d'aire sont les limites de suites, l'intégrale d'une fonction continue et positive, les primitives, continuité et dérivation, probabilités. Les problèmes possibles ne concernent que les méthodes de calcul approché d'aire (quadrature de la parabole, de l'hyperbole, courbe exponentielle).

Du point de vue de l'intégration, le programme de mathématiques complémentaire précise la notion intuitive d'aire rencontrée au collège en évoquant « les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie » de la notion d'aire.

Le programme donne également une liste de « capacités », que nous interprétons comme des types de tâches à proposer aux élèves :

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Le manuel de mathématiques complémentaires ne tient pas compte d'un découpage en thème et traite le thème calcul intégral autour des contenus suivants :

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f .

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

L'ouvrage que nous étudions reprend un découpage en chapitres qui suivent cette liste de contenus.

Le programme de mathématiques spécialité ne propose pas de découpage en thème, mais décrit les contenus à enseigner. En guise d'introduction, le programme indique :

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives. On met en regard les écritures $\int_a^b f(x)dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$.

On remarque ici une disparition des propriétés de la notion d'aire (additivité, invariance par translation et symétrie) présentes dans le programme de mathématiques complémentaires.

Des éléments technologiques sont donnés dans la rubrique *contenus* : définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment comme aire sous la courbe, existence de primitive pour les fonctions continues positives sur un segment, relation qui relie intégrale et primitive pour les fonctions continues et positives, définition de l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque par les primitives, propriétés de l'intégrale, valeur moyenne, intégration par partie.

Les démonstrations à travailler avec les élèves sont les preuves du théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions positives et croissantes, et la formule d'intégration par partie.

Nous retrouvons, dans le manuel que nous analysons, le découpage en chapitre qui suit la liste des contenus.

Le programme donne également une liste de « capacités », que nous interprétons comme des types de tâche à proposer aux élèves :

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.

- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Les manuels étudiés commencent par des activités qui visent à réactiver les praxéologies antérieures du calcul d'aire : d'abord un encadrement d'aire de surface en unité d'aire en comptant les carrés (praxéologies du cycle 3). On remarque ici la fondation de la notion intuitive d'aire fondée sur une praxis qui consiste à compter des carrés.

Puis les formules d'aire de surfaces usuelles (triangle, rectangle, trapèze, disque) sont réinvesties.

Les éléments que nous venons d'identifier vont fonder l'intégrale au lycée, en mathématiques spécialité comme en mathématiques complémentaires. Nous notons cet ensemble Θ_{aire}

Le cours suit donc les instructions du programme (de spécialité mathématiques et de mathématiques complémentaires) : l'intégrale d'une fonction continue positive f est définie comme étant l'aire du domaine sous la courbe représentative de f et est notée $\int_a^b f(x)dx$. L'hypothèse de continuité ne semble pas discutée dans le cours. Nous pouvons faire l'hypothèse que compte tenu de l'appui sur l'intuitif qui est attendu ici, le point de vue de la continuité comme étant des fonctions dont la courbe se trace « sans lever le crayon » donne des surfaces fermées dont on peut considérer un domaine auquel attribuer une aire.

La relation de Chasles pour les intégrales est illustrée par un dessin, de même que le fait que $\int_a^a f(t)dt = 0$ (qui est justifié par le fait que l'aire d'un segment est nulle). Le théorème fondamental de l'analyse pour le cas d'une fonction continue positive sur un segment est démontré dans le cas d'une fonction monotone et énoncé dans le cas quelconque :

Théorème 6.2.1. *Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et, pour tout x dans $[a, b]$, $F'(x) = f(x)$.*

La preuve de ce théorème est exigible et mobilise la notion intuitive d'aire et s'appuie sur un dessin. Les différentes propriétés sont lues sur la figure.

Nous trouvons une première praxéologie $P_{L,1}$ autour du type de tâche :

- T_{L,a_1} : Déterminer la valeur exacte d'une intégrale d'une fonction positive par un calcul d'aire.

Un exemple de tâche est donné par la figure 6.1.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0,5x dx$ b) $\int_{-2}^4 (3 - 0,5x) dx$

Solution

a) On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 0,5x$ sur $[0 ; 6]$ et f est une fonction linéaire continue et positive sur $[0 ; 5]$.

$\int_0^6 0,5x dx$ est donc l'aire du triangle rectangle OAB.

D'où $\int_0^6 0,5x dx = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$.

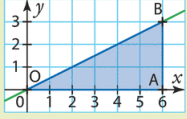


FIGURE 6.1 – Exemple de tâche du type T_{L,a_1}

Notons qu'un élément de la technique est d'appliquer la formule adéquate pour le calcul de l'aire d'une surface (triangle, rectangle). Ces formules d'aires sont des éléments technologiques de cette praxéologie mais sans justification théorique dans l'institution considérée, ici le lycée. Ce qui constitue la technologie est donc la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment comme aire sous la courbe, et les formules supposées connues des aires de figures usuelles. La théorie est ici la notion intuitive d'aire fondée sur une praxis « compter des carrés ».

Dans l'exemple donné dans 6.1, la technique est décrite : il s'agit d'interpréter l'intégrale comme une aire, puis de reconnaître une surface usuelle dont on connaît la formule de l'aire qu'il suffit d'appliquer. De plus, il est attendu un changement de registre (Duval, 1993) pour passer du registre algébrique des formules ($\int_a^b f(x)dx$) au registre graphique et mobiliser le cadre géométrique et les formules d'aires.

P_{L,a_1} : calcul de l'aire d'une surface usuelle	
T_{L,a_1}	déterminer la valeur exacte d'une intégrale par un calcul d'aire
τ_{L,a_1}	On trace la courbe représentative de f et on reconnaît une surface élémentaire, puis on applique la formule d'aire adéquate
θ_{L,a_1}	définition de l'intégrale d'une fonction positive et continue est l'aire du domaine ; formules d'aire
Θ_{aire}	Notion intuitive d'aire

La deuxième praxéologie P_{L,a_2} est relative aux sommes de Riemann, autour du type de tâche

- T_{L,a_2} : Estimer ou encadrer une intégrale par la méthode de rectangles.

Ce type de tâche se trouve dans l'organisation en maths complémentaires, comme en spécialité maths.

6.2. Le modèle praxéologique relatif à l'intégrale au lycée

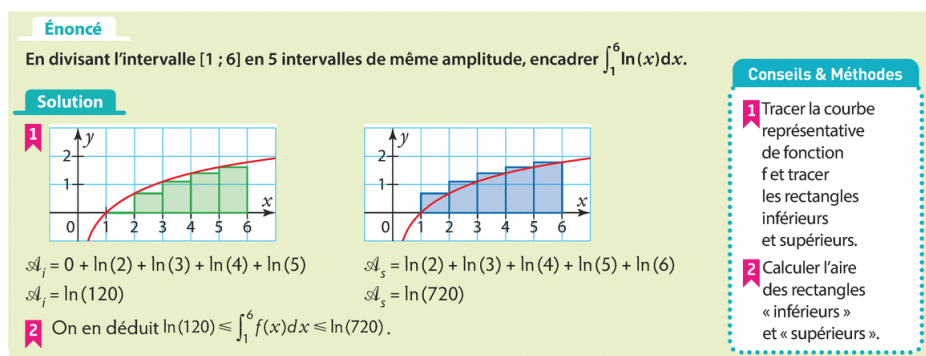


FIGURE 6.2 – Exemple de tâche du type T_{L,a_2}

La technique consiste à représenter la fonction dont on cherche à estimer l'intégrale, puis d'interpréter l'intégrale comme une aire, de découper l'intervalle d'étude $[a, b]$ en un nombre fini d'intervalles de même longueur et à sommer les aires des rectangles « inférieurs » et des rectangles « supérieurs ». Dans le cas des fonctions croissantes, l'union des rectangles à gauche contient la surface limitée par la courbe représentative de f , et l'union des rectangles à droite est contenue dans la surface limitée par la courbe représentative de f . La croissance de l'aire, intuitive, permet alors un encadrement de l'intégrale.

Notre enquête épistémologique nous fait reconnaître l'utilisation des sommes de Darboux. Mais le cas particulier rencontré au lycée est celui des fonctions monotones.

Notons que la théorie, qui est encore la notion intuitive d'aire, est enrichie d'un nouvel élément : la croissance de l'aire.

Ceci permet de formaliser une nouvelle praxéologie :

P_{L,a_2} : estimer ou encadrer une intégrale par la méthode des rectangles	
T_{L,a_2}	Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale par la méthode des rectangles
τ_{L,a_2}	on représente la fonction et on trace les rectangles inférieurs et supérieurs, puis on calcule l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs et on en fait la somme
θ_{L,a_2}	Définition de l'intégrale comme aire sous la courbe, croissance de l'aire
Θ_{aire}	Notion intuitive d'aire

Par ailleurs, nous trouvons également une tâche singulière qui apparaît en mathématiques complémentaires. Il s'agit de la tâche : « trouver une approximation de π à partir de l'aire du disque ». Nous la notons $t_{\pi,a}$. Le programme officiel indique, dans les *problèmes possibles* : « Approximation de π et aire d'un disque ». Cette tâche est illustrée par la figure 6.3.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

B ▶ Entre deux hexagones réguliers

Ci-dessous, l'hexagone ABCDEF est inscrit dans \mathcal{C} (Figure ①). L'hexagone IJKLMN est exinscrit, soit tangent à \mathcal{C} en A, B, C, D, E et F. (Figure ②)

1. En se plaçant dans AOH, montrer que

$$OH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ et } AH = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

En déduire l'aire du triangle OAB, puis de l'hexagone ABCDEF.

2. Montrer que $AI = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Quelle est l'aire de l'hexagone IJKLMN ?

3. En déduire un nouvel encadrement de π .

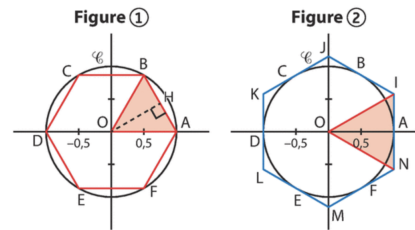


FIGURE 6.3 – Approximation de π par la méthode d'Archimède

La technique consiste à encadrer l'aire du disque unité par des polygones réguliers, dont on peut calculer l'aire grâce aux formules d'aires de triangle et l'invariance par isométrie. La croissance de l'aire permet alors d'avoir un encadrement de l'aire du disque. Du fait qu'elle soit considérée comme un problème possible, nous ne modélisons pas un type de tâche, bien que l'on pourrait relier la technique à τ_{L,a_2} relative à l'encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles.

La propriété de dérivabilité de l'intégrale est énoncé dans le cas d'une fonction continue et positive. Nous nommerons ce théorème théorème fondamental de l'analyse dans la suite (TFA).

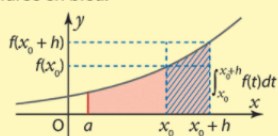
La preuve de ce théorème apparaît comme exigible dans le programme de terminale, en mathématiques spécialité comme en mathématique complémentaire. La réalisation de cette tâche consiste à appliquer la définition de la dérivée et est détaillé dans certains manuels, dont le manuel Sesamath de spécialité mathématiques (voir Figure 6.4) Nous noterons cette tâche singulière $t_{TFA,a}$: « démontrer que, lorsque f est une fonction continue positive sur $[a,b]$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout x dans $[a,b]$, $F'(x) = f(x)$. »

La réalisation de cette tâche $t_{TFA,a}$ consiste à montrer qu'une fonction est dérivable grâce au taux d'accroissement, dans le contexte spécifique où intervient une intégrale. Des propriétés des aires sont appliquées en actes en appui sur la figure (croissance de l'aire, aire d'un rectangle, additivité de l'aire) (voir Figure 6.4). Cela permet de se ramener à effectuer un calcul de limites en utilisant la notion de continuité. Des praxéologies d'analyse sont ainsi mobilisées (montrer qu'une fonction est dérivable avec la définition, calculer une limite d'une fonction continue en un point, calculer une limite par encadrement) tandis que les éléments praxéologiques spécifiques à l'intégrale mobilisés restent en grande partie implicites. Pour ce qui est explicité, ces éléments praxéologiques se limitent à la relation de Chasles qui est également illustré graphiquement.

Ainsi, les techniques pour réaliser les deux tâches singulières $t_{\pi,a}$ et $t_{TFA,a}$ mobilisent

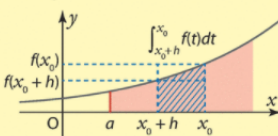
Rédiger

Étape 1 On s'intéresse à la limite à droite. $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ correspond à l'aire de la surface hachurée en bleu.



Par croissance de f , l'aire de la surface sous la courbe de f entre x_0 et $x_0 + h$ est encadrée par l'aire du rectangle de dimensions h et $f(x_0)$ et celle du rectangle de dimensions h et $f(x_0 + h)$.

Étape 2 On s'intéresse à la limite à gauche. Cette fois $x_0 + h < x_0$, on obtient un encadrement de $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ par une aire de rectangle.



Étape 3 On conclut. $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, F_a est la primitive de f qui s'annule en a .

La démonstration rédigée

Soit $x_0 \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$.
 Si $h > 0$: d'après la relation de Chasles, on a :
 $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.
 f est croissante, on a l'encadrement suivant :
 $hf(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq hf(x_0 + h)$
 D'où : $f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$.
 f est continue, $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Ainsi :
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Si $h < 0$: d'après la relation de Chasles, on a :
 $F_a(x_0) - F_a(x_0 + h) = -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.
 f est croissante, on a l'encadrement suivant :
 $-hf(x_0 + h) \leq -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq -hf(x_0)$
 $f(x_0 + h) \leq \frac{F_a(x_0) - F_a(x_0 + h)}{h} \leq f(x_0)$ et donc
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F_a(x_0) - F_a(x_0 + h)}{h} = f(x_0)$.

La limite à gauche est égale à la limite à droite de 0 donc
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi F_a est dérivable en x_0
 et $F'_a(x_0) = f(x_0)$. F_a est dérivable sur $[a; b]$ et $F'_a = f$.

FIGURE 6.4 – Réalisation de la tâche $t_{TFA,a}$

les éléments de θ_{aire} .

Ce théorème change de position dans l'organisation mathématique relative à l'intégrale du lycée, puisqu'il permet ensuite de justifier que toutes les fonctions continues sur un segment admettent des primitives (grâce aussi à l'existence d'un minimum pour une fonction continue sur un segment : si une fonction f est continue mais non nécessairement positive, alors elle admet un minimum m , la fonction définie par $g(x) = f(x) - m$ est positive, admet une primitive et donc f aussi). L'existence des primitives permet d'énoncer une propriété, non démontrée dans le manuel (bien que la preuve soit à la portée des élèves, et sûrement discutée en classe) :

Proposition 6.2.1. Si f est une fonction continue positive sur $[a; b]$ et si F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Enfin, cette propriété sert de justification à la nouvelle définition de l'intégrale d'une

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

fonction continue, non nécessairement positive :

Définition 6.2.1. Si f est une fonction continue et positive sur une intervalle $[a, b]$, alors on définit l'intégrale de f par

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f .

La question de l'indépendance de la définition vis à vis du choix de la primitive n'est pas discutée dans le manuel, mais sûrement signalée dans le discours des enseignants.

Énoncé

Conseils & Méthodes

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx$ b) $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+2x} dx$

Solution

1 Chercher une primitive de f notée F .

2 Calculer l'intégrale c'est calculer $F(4) - F(-1)$.

3 Un candidat primitive est $\ln(v)$.
 $(\ln(v(x)))' = \frac{2x+2}{x^2+2x}$ d'où une primitive de g .

4 Calculer $H(e) - H(1)$.

a) La fonction $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ admet pour primitive la fonction
 $F: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$. **1** $\int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^4 = \frac{269}{6}$. **2**

b) Soit h définie sur $[1; e]$ par $h(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$. On reconnaît une expression ressemblant à $\frac{v'}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 2x$ et $v'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Donc une primitive est
 $H: H(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2 + 2x)$ est une primitive de h . **3**

$\int_1^e \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \left[\frac{1}{2} \times \ln(x^2 + 2x)\right]_1^e = \frac{1}{2} \times \ln(e^2 + 2e) - \frac{1}{2} \times \ln(2) = 1 + e - \frac{1}{2} \ln 2$ **4**

FIGURE 6.5 – Exemple de tâche du type T_{L,p_1} avec description de la technique

Dès lors, les élèves sont confrontés à de nombreuses tâches liées au calcul de primitives, puisqu'ils devront réaliser des calculs explicites d'intégrales. Les deux techniques attendues sont celles qui consistent à reconnaître une primitive, et d'utiliser l'intégration par partie. Ces techniques de calculs sont donc justifiées par la nouvelle définition de l'intégrale. Le TFA et l'existence des primitives deviennent alors un élément qui justifie cette définition, et le TFA devient donc un élément de la théorie, que nous allons noter $\Theta_{aire,integrale}$.

P_{L,p_1} : Intégrale et primitive	
T_{L,p_1}	Calculer une intégrale de f à l'aide d'une primitive
τ_{L,p_1}	On calcule une primitive F de f et on effectue le calcul $F(b) - F(a)$
θ_{L,p_1}	Définition de l'intégrale d'une fonction continue comme différence entre $F(b)$ et $F(a)$
$\Theta_{aire,integrale}$	Théorème fondamental de l'analyse

et

P_{L,p_2} : Intégration par parties	
T_{L,p_2}	Calculer une intégrale de f à l'aide d'une intégration par partie
τ_{L,p_2}	on applique la formule d'intégration par partie puis on réalise τ_{L,p_1}
θ_{L,p_2}	Formule d'intégration par partie
$\Theta_{intégre}$	Définition de l'intégrale par les primitives, calcul différentiel

Nous noterons que la praxéologie P_{L,p_2} est spécifique à la spécialité mathématiques puisqu'elle n'est pas développée dans l'organisation mathématiques en mathématiques complémentaires.

Le type de tâche T_{L,p_1} est donc un sous-type de tâche mathématique de T_{L,p_2} . Mais c'est également un sous-type de tâche du type de tâche :

- T_{L,p_3} : Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.

Un exemple de ce type de tâche est donné dans 6.6. La technique à mettre en oeuvre est d'encadrer la fonction considérée par deux fonctions dont on connaît des primitives. Ensuite, on utilise la croissance de l'intégrale comme élément technologique pour en déduire, via la réalisation du type de tâche T_{L,p_1} , un encadrement de l'intégrale donnée. Notons que ce qui justifie la technologie « croissance de l'intégrale » est la définition de l'intégrale par les primitives et la linéarité de l'intégrale.

Méthode
6 Majorer (ou minorer) une intégrale

Énoncé

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 f(x) dx$.

Solution

1. Une exponentielle est positive donc $f(x) \geq 0$.
 Si $x \geq 1$, $x^2 \geq x$ donc $-x^2 \leq -x$.
 La fonction exponentielle est croissante, donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. On en déduit $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
2. $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et les 3 fonctions $x \rightarrow 0$; f et $x \rightarrow e^{-x}$ sont continues.
 On en déduit que $\int_1^2 0 dx \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 e^{-x} dx$.
 $\int_1^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2} \leq e^{-1}$ puisque $e^{-2} > 0$. On a donc $0 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{1}{e}$.

Conseils & Méthodes

- 1 Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.
- 2 Utiliser l'hypothèse $x \geq 1$.
- 3 À partir de l'inégalité de la fonction, en déduire l'inégalité des intégrales.

FIGURE 6.6 – Exemple de tâche du type T_{L,p_3} avec description de la technique

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

P_{L,p_3} : Encadrement de l'intégrale d'une fonction	
T_{L,p_3}	Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction f sur $[a, b]$
τ_{L,p_3}	On encadre f par deux fonctions g et h , puis on encadre $\int_a^b f(x)dx$ par $G(b) - G(a)$ et $H(b) - H(a)$ où G et H sont des primitives de g et h
θ_{L,p_3}	Croissance de l'intégrale : $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
$\Theta_{integrale}$	Définition de l'intégrale par primitive et linéarité de l'intégrale

Enfin, le type de tâche T_{L,p_1} apparaît aussi comme sous-type de tâche d'une autre praxéologie liée au calcul d'aire. Il s'agit du type de tâche

- T_{L,a_4} : calculer l'aire d'une surface entre deux courbes C_f et C_g avec $f \leq g$.

La technique à mettre en oeuvre est de calculer $\int_a^b g(x) - f(x)dx$. Cette propriété (l'aire entre deux courbes est l'intégrale) est justifiée dans le cas particulier où $g = 0$ et f une fonction négative. L'aire comprise entre la droite d'équation $y = 0$ et la courbe d'équation $y = f(x)$ est $-\int_a^b f(x)dx$ par un argument de symétrie : on utilise, de fait, une propriété de la mesure d'aire : l'invariance par symétrie (voir figure 6.7).

P_{L,a_3} : Aire entre deux courbes	
T_{L,a_3}	calculer l'aire d'une surface entre deux courbes représentatives de fonctions continues f et g sur un segment, avec $f \leq g$
τ_{L,a_3}	Calculer $\int_a^b g(x) - f(x)$
θ_{L,a_3}	L'aire entre deux courbes est l'intégrale, définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire sous la courbe
$\Theta''_{aire,integrale}$	Notion intuitive d'aire, invariance par symétrie

Enfin, le dernier type de tâche que nous relevons est :

- T_{L,p_4} : Calculer une valeur moyenne et l'interpréter dans un contexte issu d'une autre discipline.

Un exemple de tâche du type de T_{L,p_4} est donné dans la question 2 de la figure 6.8. La technique décrite dans le manuel consiste à identifier différents paramètres (la fonction

6.2. Le modèle praxéologique relatif à l'intégrale au lycée

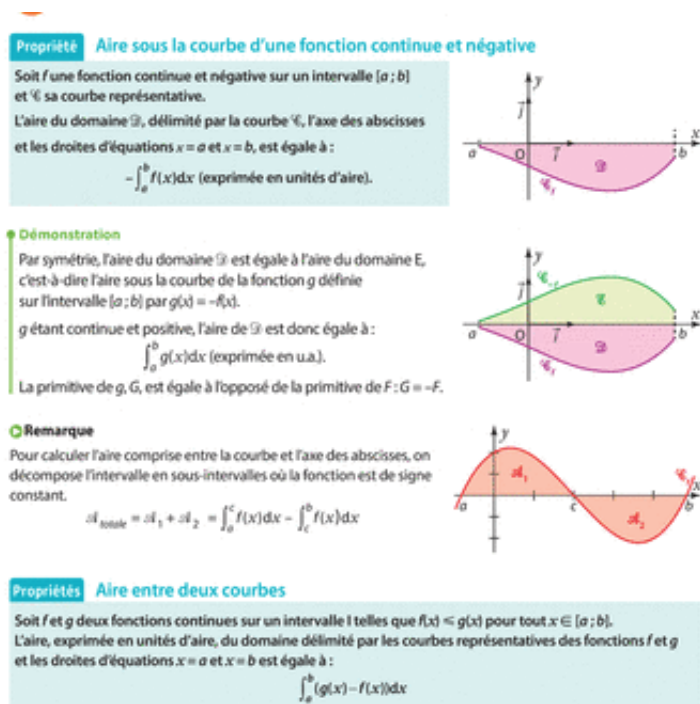


FIGURE 6.7 – Technologie de $P_{L,a4}$

f en jeu et les bornes de l'intervalle $[a, b]$ sur lequel on cherche la valeur moyenne) puis calculer $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Enfin, il reste à calculer cette intégrale et à mobiliser les praxéologies $P_{L,p1}$ et $P_{L,p2}$. Et l'élément technologique principal est la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

$P_{L,p4}$: Valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline	
$T_{L,p4}$	Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline
$\tau_{L,p4}$	Identifier la fonction f , a et b puis calculer $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
$\theta_{L,p4}$	Définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$
$\Theta_{intégrale}$	Théorie de l'intégrale du lycée

Finalement, l'étude praxéologique de l'intégrale du lycée fait apparaître deux organisations mathématiques locales : l'une autour de la notion d'aire (définition de l'intégrale d'une fonction continue positive comme aire sous la courbe, formules d'aires des figures usuelles, propriétés de l'aire), et l'autre autour de la définition de l'intégrale

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5; 18]$ par :

$$f(x) = 4 \ln(3x + 1) - x + 3.$$

1. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0,5; 18]$ par :

$$F(x) = \frac{4}{3}(3x + 1)\ln(3x + 1) - \frac{x^2}{2} - x.$$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0,5; 18]$.

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^8 f(x)dx$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

2. On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

D'après Bac ES 2012

Solution

1. a) $F(x) = \frac{4}{3}(3x + 1)\ln(3x + 1) - \frac{x^2}{2} - x$ est dérivable sur $[0,5; 18]$ et

$$F'(x) = \frac{4}{3}(3x + 1) \times \frac{3}{3x + 1} + 4\ln(3x + 1) - \frac{2x}{2} - 1$$

$$F'(x) = 4 + 4\ln(3x + 1) - x - 1$$

$$F'(x) = f(x) \quad F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [0,5; 18].$$

b) $\int_1^8 f(x)dx = F(8) - F(1) = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{64}{2} - 8 - \frac{16}{3}\ln(4) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38,5.$

$$\int_1^8 f(x)dx \approx 61,4 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

2. x est exprimé en centaines de pièces donc une production entre 100 et 800 pièces correspond à $1 \leq x \leq 8$.

La valeur moyenne de la fonction f est égale à $\mu = \frac{1}{8-1} \int_1^8 f(x)dx$ ou encore $\mu = \frac{1}{7} \left(\frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38,5 \right)$; $\mu = 8,772\,755$.

f s'exprime en milliers d'euros donc $\mu = 8,772\,755$ milliers d'euros ou $\mu = 8\,772,755$ euros.

Une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près est 8 700 euros.

Conseils & Méthodes

1 Calculer la dérivée de F .

2 Étudier les unités du problème.

FIGURE 6.8 – Exemple de tâche du type T_{L,p_4}

d'une fonction continue à l'aide des primitives (et les propriétés de l'intégrale : croissance, linéarité, relation de Chasles).

Ces deux OML sont unifiées par une théorie de l'intégration du lycée qui s'enrichit au fur et à mesure du développement praxéologique. D'abord, on complète une théorie intuitive de l'aire fondée sur une praxis du décompte de carrés par la croissance de l'aire, puis par l'invariance par symétrie.

Le TFA joue un rôle central entre ces deux OML : la preuve repose sur la théorie intuitive d'aire, avec des propriétés lues sur la figure, pour ensuite permettre l'introduction d'une nouvelle définition de l'intégrale par les primitives. Les propriétés de l'intégrale (linéarité, croissance) viennent encore enrichir le bloc théorique.

6.2. Le modèle praxéologique relatif à l'intégrale au lycée

Praxéologie	Type de tâche	technique	technologie	théorie
P_{L,a_1}	T_{L,a_1} : Déterminer la valeur exacte d'une intégrale par un calcul d'aire	τ_{L,a_1} : Tracer la courbe reconnaître une surface élémentaire, puis appliquer la formule d'aire adéquate	θ_{aire} : définition de l'intégrale d'une fonction positive et continue comme l'aire sous la courbe ; formules d'aire et propriétés	$\Theta^{intégrale}$: Théorie de l'intégrale du lycée : théorie intuitive de l'aire
P_{L,a_2}	T_{L,a_2} : Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale par la méthode des rectangles	τ_{L,a_2} : Tracer la courbe puis les rectangles à gauche et à droite, et en faire la somme des aires		croissance de l'aire
P_{L,a_3}	T_{L,a_3} : calculer l'aire d'une surface entre deux courbes représentatives de fonctions continues f et g sur un segment avec $f \leq g$	τ_{L,a_3} : Calculer $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$		invariance par symétrie
P_{L,p_1}	T_{L,p_1} : Calculer une intégrale de f à l'aide d'une primitive	τ_{L,p_1} : Déterminer une primitive F de f puis effectuer $F(b) - F(a)$	θ_{prim} : Définition de l'intégrale d'une fonction continue comme différence entre $F(b)$ et $F(a)$ et propriétés de l'intégrale	Théorème fondamental de l'analyse
P_{L,p_2}	T_{L,p_2} : Calculer une intégrale de f à l'aide d'une intégration par partie	τ_{L,p_2} : Appliquer la formule d'intégration par partie et se ramener au type de tâche T_{L,p_1}		propriétés de l'intégrale (linéarité, croissance)
P_{L,p_3}	T_{L,p_3} : Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction f sur $[a, b]$	τ_{L,p_3} : On encadre f par deux fonctions g et h , puis on encadre $\int_a^b f(x)dx$ par $G(b) - G(a)$ et $H(b) - H(a)$ où G et H sont des primitives de g et h		
P_{L,p_4}	T_{L,p_4} : Calculer une valeur moyenne et l'interpréter dans un contexte issu d'une autre discipline	τ_{L,p_4} : Identifier la fonction f , a et b puis calculer $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$		

6.2.4 Mise en regard des modèles praxéologiques dominants

La confrontation des modèles praxéologiques pour l'intégrale au lycée, pour l'intégrale de Riemann, et l'intégrale de Lebesgue, met en lumière une sorte de continuité au niveau des blocs praxis.

Les types de tâches T_{L,p_1} , T_{L,p_2} du lycée se retrouvent également dans le modèle dominant relatif à l'intégrale de Riemann sous la forme des types de tâche T_{R,I_1} (calculer l'intégrale d'une fonction continue par un calcul de primitive) et T_{R,I_2} (calculer une intégrale par une intégration par partie), et sont des sous-types de tâche de T_{P,f_1} et T_{P,f_2} (calculer l'intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une mesure produit) du modèle dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue.

A l'université, une plus grande diversité de techniques permet de calculer la valeur exacte d'une intégrale (les fonctions étudiées sont plus riches, et de nouvelles techniques sont formalisées, comme le changement de variables).

Au lycée, les techniques τ_{L,p_1} et τ_{L,p_2} sont justifiées par la définition de l'intégrale du lycée, elle-même justifiée par le théorème fondamental de l'analyse dont la preuve mobilise la notion intuitive d'aire.

A l'université, la théorie de Riemann vient justifier la technologie $\theta_{R,I}$. Cette théorie comprend la définition de l'intégrale de Riemann ainsi que des notions qui fondent l'analyse comme la borne supérieure.

Le type de tâche T_{L,a_2} (Estimer ou encadrer une intégrale par la méthode de rectangles) du modèle praxéologique dominant au lycée n'apparaît pas dans le modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale de Riemann, ni dans celui relatif à l'intégrale de Lebesgue. Dans l'OML relative aux sommes de Riemann et de Darboux, nous avons relevé les types de tâches T_{R,s_1} (calculer une intégrale à l'aide d'une somme de Riemann ou de Darboux) et T_{R,s_2} (Calculer la limite d'une suite à l'aide des sommes de Riemann et de Darboux). La technique à mettre en oeuvre pour la réalisation de T_{R,s_1} contient des éléments de τ_{L,a_2} (découper l'intervalle d'étude avec une subdivision régulière, former les sommes de Riemann ou de Darboux, ...).

De nouveau, ce qui justifie la technique τ_{L,a_2} modélisée dans le modèle praxéologique dominant au lycée est la notion intuitive d'aire, dont la propriété de croissance. A l'université, c'est la définition de l'intégrale de Riemann qui permet de justifier la technique. De nouvelles praxéologies apparaissent également à cette occasion, notamment des types de tâches plus théoriques, par exemple « Montrer qu'une fonction donnée est Riemann-intégrable », dont les techniques correspondantes sont justifiées par la théorie de Riemann.

Dans le modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue, l'intégrabilité est remplacée par la mesurabilité dans le sens où on trouve la praxéologie P_{M,f_1} (montrer qu'une fonction est mesurable). En revanche, les techniques du modèle dominant relatif à l'intégrale de Riemann deviennent obsolètes. Ce qui fonde la théorie de l'intégration dans le modèle dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue et, en fait,

6.3. Une première expérimentation avec la modalité d'un problème de CAPES

la théorie générale de la mesure. On note ici une organisation à rapprocher de celle de l'intégrale du lycée qui se fonde sur la mesure des aires.

Le modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue à l'université contient une OML articulée autour de l'axiomatique de la mesure, avec des praxéologies nouvelles telles que P_{M,m_1} (une application est une mesure), P_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée), P_{M,m_3} (démontrer une propriété de mesure spécifique).

A travers l'étude de cette OML, les étudiants peuvent trouver les idées générales d'une formalisation possible de la notion intuitive d'aire, qui fonde l'intégrale du lycée. Cependant, cette théorie abstraite demeure probablement hors de portée de nombreux étudiants qui abordent le cycle de formation des enseignants et elle ne figure pas au programme officiel du CAPES.

6.3 Une première expérimentation avec la modalité d'un problème de CAPES

Fort de nos résultats sur la confrontation des modèles praxéologiques, nous avons mené une expérimentation visant la mise en œuvre du plan de Klein pour l'intégrale.

Cette première expérimentation s'est déroulée dans le cadre de la première année de Master MEEF, en 2019. Il s'agit de la première année du cursus de formation des enseignants de mathématiques pour le collège et le lycée, en France. Pendant ce cursus, les étudiants doivent réussir un concours, le capes de mathématiques, pour ensuite devenir fonctionnaire stagiaire enseignant de mathématiques et poursuivre la formation. Ce concours comporte deux épreuves : une épreuve d'admissibilité et une épreuve d'admission. Le programme de ces épreuves est fixé par le *Journal officiel du 8 décembre 2015, texte 8*.

Dans le Master MEEF, les étudiants sont préparés aux épreuves du CAPES de mathématiques, par la réalisation régulière de problèmes de type CAPES.

Le cadre de la seconde épreuve écrite du CAPES semble être favorable à une implémentation du type plan B de Klein puisque le programme de cette épreuve « est constitué des programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master ».

Nous avons donc élaboré un problème du type écrit 2 du capes de mathématiques, construit à partir de nos résultats sur la confrontation des modèles praxéologiques de référence.

6.3.1 Méthodologie de construction des types de tâche

Les résultats de notre confrontation nous a donc permis de mettre en lumière le fait que le logos des praxéologies sur l'intégrale au lycée se fonde sur une théorie faisant appel à la notion intuitive d'aire. Dans le modèle praxéologique sur l'intégrale au lycée, nous n'avons pas trouvé de formalisation de la notion d'aire. En théorie de la mesure, la notion de mesure est formalisée, sans que cela paraisse directement mobilisable pour aborder les problèmes plus élémentaires sur la mesure des aires. Or l'étude épistémologique a révélé une mesure adaptée à la mesure des aires : il s'agit de la mesure de Jordan. Contrairement à la mesure de Lebesgue, cette mesure ne dispose pas de la propriété d'additivité dénombrable.

Dans son ouvrage, Lebesgue (1975, p. 44) montre que l'aire est entièrement déterminée par les conditions suivantes :

- A chacun des domaines d'une famille de domaines dont font partie tous les polygones est attaché un nombre positif que l'on appelle son aire ;
- A un domaine formé par la réunion de deux autres extérieurs l'un à l'autre est attaché comme aire la somme des aires des deux autres ;
- A deux domaines égaux sont attachés des aires égales.

Notre méthodologie consiste à construire des tâches qui se fondent sur une axiomatique de l'aire telle que formulée par Lebesgue et Jordan et qui vont permettre de justifier avec la rigueur de l'université le théorème fondamentale de l'analyse, dont on a montré le caractère central dans notre modèle praxéologique de référence sur l'intégrale au lycée.

Enfin, les tâches doivent aussi mobiliser des outils d'autres domaines des mathématiques à l'université : la géométrie, l'analyse, l'algèbre, dans l'esprit du plan *B* de Klein.

Lebesgue (1975, p. 77) le souligne :

l'étude que nous venons de faire [sur les aire] me paraît recommandable aux futurs professeurs comme un exemple de ces efforts de compréhension par rapprochement de chapitres éloignés des mathématiques, en l'espèce la géométrie élémentaire et le calcul intégral, qui peuvent leur servir à dominer l'enseignement qu'ils auront à donner que l'on devrait exiger d'eux.

6.3.2 Présentation du problème et analyse a priori

Dans cette section, nous ne détaillerons pas l'ensemble des questions. Le corrigé complet du problème constitue l'annexe E.1. La rédaction détaillé de ce corrigé (annexe E.2) va nous permettre de valider si les tâches dont nous proposons la réalisa-

tion engageant différents domaines de mathématiques, mais également si elles permettent d'aborder des mathématiques du lycée avec un point de vue universitaire.

Notre problème comporte quatre parties. La première partie commence par la définition axiomatique d'une mesure des aires, inspirée de celle proposée par Perrin (2005). Cette axiomatique repose sur ce que Lebesgue considère comme les éléments essentiels que doit vérifier une mesure des aires (Lebesgue, 1975), mais en renforçant le rôle des transformations géométriques du plan, dans l'esprit de l'algèbre moderne.

Voici un extrait de la première partie :

Dans cette partie, on considère un sous ensemble Q de parties de E , appelé *ensemble des parties quarrables de E* qui contient les points, les segments, les polygones usuels, les cercles, qui est stable par union finie et on suppose qu'il existe une application μ définie sur Q à valeur dans \mathbb{R}^+ qui vérifie :

- (axiome 1) Si C est l'ensemble des points intérieurs au carré unité construit sur le repère (O, I, J) (c'est à dire l'ensemble des (x, y) dans E tel que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$) alors $\mu(C) = 1$.
- (axiome 2) Si X et Y sont des éléments de Q disjoints ($X \cap Y = \emptyset$), alors $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.
- (axiome 3) Si X est un élément de Q et φ une isométrie de E , alors $\varphi(X) \in Q$ et $\mu(\varphi(X)) = \mu(X)$.
- (axiome 4) Si X est un élément de Q et h une homothétie de E de rapport k , alors $h(X) \in Q$ et $\mu(h(X)) = k^2\mu(X)$.

Dès que $X \in Q$, $\mu(X)$ est appelé l'aire de X .

Cette mesure consiste donc en la donnée d'une application μ définie sur un ensemble Q appelé ensemble des parties *quarrables* du plan. Contrairement à l'axiomatique contemporaine de théorie de la mesure, μ n'est pas supposée σ -additive mais simplement additive (la mesure d'une union disjointe est la somme des mesures), d'où sa propriété de croissance (pour l'inclusion).

On suppose de plus qu'elle vérifie les propriétés d'invariance par isométrie et d'homogénéité par rapport aux homothéties ($\mu(h(X)) = k^2\mu(X)$) pour une homothétie h de rapport k). Ces propriétés sont démontrées par Lebesgue mais nous les considérons comme faisant partie des axiomes. La mesure du carré unité est 1. Cette axiomatique constitue le fondement du logos, que nous noterons Λ_0 .

Les tâches demandées dans la partie 1 consistent à démontrer un certain nombre de formules élémentaires de calculs d'aires (aire d'un rectangle, découpages dans un triangle, aire d'un parallélogramme) en s'appuyant sur l'axiomatique précédente. Le travail proposé consiste donc à appliquer la méthode axiomatique travaillée à l'université (autant en algèbre qu'en topologie ou théorie de la mesure) pour fonder des praxis

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

enseignées à l'école et au collège. En vertu de la sémantique des objets et du type de formalisme, ce travail est à rapprocher de praxéologies de théorie de la mesure (P_{M,M_2} et P_{M,m_3} , voir Chapitre 5) ou encore de raisonnements ensemblistes en théorie des probabilités menés dans le secondaire.

Mais il s'agit également d'intégrer des éléments de géométrie (usage des transformations), de numération (approximation des réels par des suites de rationnel), d'analyse (théorème d'encadrement des limites de suites). Ainsi, à partir de tâches qui sont à priori du domaine de la géométrie, des praxéologies relatives à d'autres secteurs de mathématiques sont mobilisées.

La deuxième partie de ce problème consiste à montrer que, sous l'hypothèse d'existence de la mesure μ et de « quarrabilité » de la surface sous la courbe $\Omega_x = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq x, 0 \leq y \leq f(t)\}$, la fonction d'aire $x \mapsto \mu(\Omega_x)$ est dérivable de dérivée f (théorème fondamental de l'analyse, TFA). Deux exemples sont proposés pour débiter : le cas des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$. La réalisation de ces tâches mobilisent des techniques spécifiques aux calculs de sommes, et aux calculs de limites de suites. Les tâches suivantes correspondent aux étapes de la preuve du TFA rencontrée au lycée (donc sous l'hypothèse de monotonie de f), qui s'appuient sur la figure et l'encadrement classique par des rectangles comme dans la praxis de la praxéologie liée à $t_{TFA,a}$. Mais il est attendu des étudiants qu'ils exercent le niveau de rigueur de l'université, c'est-à-dire qu'ils justifient les propriétés habituellement lues sur la figure en s'appuyant sur l'axiomatique (cela correspond aux questions B.3.1 de la figure 6.9).

B.3. Soit f est une fonction définie, positive et continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et $\Omega = \{(x, y), x \in [a, b], y \leq f(x)\}$. Pour chaque $t \in [a, b]$, on note $S(t) = \mu(\Omega_t)$ où

$$\Omega_t = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

B.3.1. On suppose f croissante sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

B.3.1.1. Soit $h > 0$. Que représente $S(x_0 + h) - S(x_0)$? En déduire un encadrement de $S(x_0 + h) - S(x_0)$

B.3.1.2. Montrer alors que S est dérivable à droite en x_0 .

B.3.1.3. Soit $h < 0$. Donner un encadrement de $S(x_0 + h) - S(x_0)$.

B.3.1.4. Montrer alors que S est dérivable à gauche en x_0 .

B.3.1.5. Justifier enfin que S est dérivable en x_0 et que $S'(x_0) = f(x_0)$.

B.3.2. On ne suppose plus f croissante, ni même monotone. Soit $x_0 \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$.

B.3.2.1. Justifier qu'il existe $\eta > 0$ qui vérifie :

$$\forall h \in]-\eta, \eta[, \forall t \in [x_0, x_0 + h], f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon.$$

B.3.2.2. En déduire un encadrement de $\frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} - f(x_0)$ pour $h \neq 0$.

B.3.2.3. En déduire que S est dérivable en x_0 et que $S'(x_0) = f(x_0)$.

FIGURE 6.9 – Extrait de la deuxième partie du problème

6.3. Une première expérimentation avec la modalité d'un problème de CAPES

Dans notre analyse à priori, nous nous sommes assurés que les résultats obtenus dans les questions précédentes permettent bien une preuve rigoureuse et fondée sur l'axiomatique. Dans le corrigé manuscrit (Figure 6.10), Plusieurs sous-tâches sont à réaliser : d'abord remarquer que $\mu(\Omega_{x_0+h}) - \mu(\Omega_{x_0})$ représente la mesure de $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$ grâce à l'axiome d'additivité de μ , puis encadrer $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$ par deux rectangles de largeur h et de longueurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.

B3.1. f est croissante sur $[a, b]$.

B3.1.1. $S(x_0+h) - S(x_0) = \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0})$
 et $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0} = \{(x, y) \in E, x_0 < x < x_0+h, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Comme f est croissante, $h f(x_0) \leq S(x_0+h) - S(x_0) \leq h f(x_0+h)$

B3.1.2. $\forall h > 0, f(x_0) \leq \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$
 et, à passage à la limite : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} = f(x_0)$
 (car f continue en x_0)

B3.1.3. De même, $-h f(x_0+h) \leq S(x_0) - S(x_0+h) \leq -h f(x_0)$
 donc $f(x_0+h) \leq \frac{S(x_0) - S(x_0+h)}{-h} \leq f(x_0)$
 et, à passage à la limite : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{S(x_0) - S(x_0+h)}{-h} = f(x_0)$

FIGURE 6.10 – Corrigé de la partie B.3.1

Bien que la justification de cet encadrement est possible (et attendu) à l'aide de l'algèbre, le passage au cadre graphique permet sûrement d'obtenir plus facilement cet encadrement. On peut faire l'hypothèse que si l'encadrement est obtenu par l'étudiant, le registre graphique a été mobilisé au moins au brouillon. L'avant dernière étape mobilise à la fois la croissance de μ et la formule de la mesure d'un rectangle afin d'aboutir à l'encadrement $hf(x_0) \leq \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}) \leq hf(x_0+h)$. Enfin, la dérivabilité (à droite) de $t \mapsto \mu(\Omega_t)$ en x_0 est une conséquence du théorème des gendarmes.

Les techniques spécifiques à l'analyse sont mobilisées.

La dernière tâche généralise le résultat aux fonctions continues quelconques, ce qui nécessite de raisonner en termes de ε et η comme de coutume dans les praxéologies d'analyse à l'université. La réalisation des différentes étapes visent ici la réalisation de la technique permettant la résolution de tâche $t_{L,a}$ (démontrer le TFA dans le cas monotone) au lycée, mais avec un niveau de rigueur qui évite le recours à la notion intuitive d'aire.

La troisième partie vise à construire une mesure vérifiant l'axiomatique, ce qui nécessite de définir la notion d'ensemble quarrable du plan. Cette construction, exposée par Lebesgue (1975, p. 35), s'appuie sur des quadrillages du plan, de plus en plus fins,

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

pour définir des mesures “extérieures” et “intérieures” des sous-ensembles du plan, lesquels sont dits quarrables en cas d'égalité. L'introduction à cette partie et la construction effective de la mesure μ est donnée par la figure 6.11.

Dans cette partie, on va définir l'ensemble \mathcal{Q} des ensembles quarrables, et une application μ qui vérifie les axiomes de la première partie.

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage \mathcal{Q}_i du plan dont les sommets sont les points $(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i})$ où a et b sont des entiers relatifs. Un carré fermé de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est à dire qui est contenue dans un carré), on considère l'ensemble des carrés fermés de niveau i , contenus dans S , et on note s_i leur réunion, et n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les carrés fermés de niveau i qui rencontrent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, et on a $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

Par exemple, dans la figure 1, le quadrillage \mathcal{Q}_0 est représenté, $n_0 = 1$ et $N_0 = 10$.

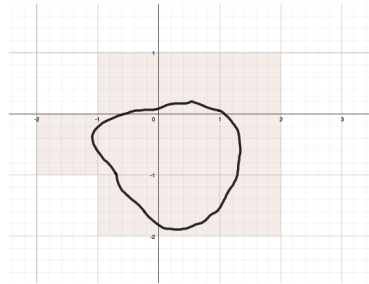


FIGURE 1. Exemple de quadrillage

On dira que S est quarrable lorsque $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i$. La limite commune est alors notée $\mu(S)$.

FIGURE 6.11 – Définition de la mesure des ensembles quarrables par les quadrillages

A l'aide des praxéologies du domaine des suites numériques, on étudie la quarrabilité de certains ensembles (les rectangles, l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré unité) puis on démontre que la mesure satisfait les propriétés que pose l'axiomatique. La dernière tâche de cette partie consiste à prouver un critère de quarrabilité : une surface S est quarrable si et seulement si il existe deux suites de polygones (P_n) et (Q_n) telles que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ et Q_n sont quarrables ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \subset S \subset Q_n$
3. $\lim \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0$

La fonction de ce critère apparaît par la suite. En effet, on montre dans la dernière partie, en appliquant ce critère, que Ω_x est quarrable (sous l'hypothèse $f \geq 0$). Comme précédemment, on commence par le cas f monotone. On effectue une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $(b - a)/n$: les unions des rectangles que l'on obtient par la praxis Π_{L, a_3} donnent deux suites qui répondent au critère. En fait, il s'agit de l'analogie de la preuve que les fonctions monotones sont Riemann-intégrables. Cette tâche permet donc de relier le logos Λ_O au logos de l'OMR relative à l'intégrale de Riemann, que l'on note Λ_R .

6.3.3 Analyse a posteriori

Nous avons soumis ce problème à 19 étudiants de la première année du master MEEF de l'université de Montpellier, dans les conditions du concours (épreuve de 5 heures sans document). Par rapport au projet global de notre recherche, cette phase correspond à une pré-expérimentation. En effet, le dispositif d'ingénierie est amené à évoluer avec la recherche jusqu'à sa forme finale présentée dans ce manuscrit (une AER). Nous restreindrons donc nos analyses aux tâches qui ont servi aux développements ultérieurs. Précisément, nous analyserons les productions des étudiants relativement à des tâches issues des deux premières parties du problème dans lesquelles on teste la capacité des étudiants à mobiliser le logos Λ_o pour justifier d'une part, des calculs d'aires (première partie), d'autre part les inférences qui permettent d'établir le TFA (deuxième partie) dans le cas d'une fonction monotone positive. Ainsi :

- La première tâche dont on va analyser est la tâche $t_{PB,1}$:

Soit A un point de E . En considérant l'homothétie h de centre A et de rapport 2, montrer que $\mu(A) = 0$.

- La seconde tâche que nous analysons ici est $t_{PB,2}$

Soient X, Y deux parties de E . Montrer que

$$X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y).$$

- Enfin, la troisième tâche est la preuve du TFA dont l'énoncé a été rappelé sur la figure 6.9, en se limitant au cas monotone.

La première tâche, $t_{PB,1}$, n'a pas posé problème aux étudiants puisque les 19 copies montrent une réponse correcte, correspondant à ce qui était attendu dans l'analyse a priori et reproduit sur la figure 6.12.

La réussite à cette question indique que les étudiants se sont appropriés l'axiomatique. On peut y voir un impact du travail sur les axiomatiques effectué à l'université,

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

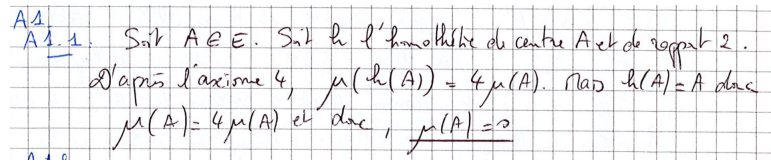


FIGURE 6.12 – Procédure attendue pour la réalisation de la tâche $T_{PB,1}$

autant en algèbre qu'en analyse. Nous pouvons relier aussi cette question à une propriété de la mesure de Lebesgue (en fait, de toute mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ invariante par translation) qui est de ne pas charger les points c'est à dire d'être *diffuse*. L'axiome 4, introduit ici pour renforcer les liens avec la géométrie permet de simplifier la preuve, ce qui correspond à une demande institutionnelle d'avoir des premières questions dans les problèmes qui soient accessibles au plus grand nombre.

La seconde tâche est de montrer que la mesure μ est une mesure croissante. Même si la mesure considérée n'est pas une mesure au sens de la théorie de la mesure, nous pouvons considérer que cette tâche est une instanciation du type de tâche T_{M,m_3} (démontrer des propriétés de mesures spécifiées) du modèle praxéologique relatif à l'intégrale de Lebesgue. Ainsi, la mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_3} est possible, et est bien justifiée par le nouveau logos Λ_o , puisque la positivité et l'additivité simple de μ suffisent. En effet, Si $X \subset Y$, alors $Y = X \cup (Y \setminus X)$ et X et $Y \setminus X$ sont disjoints, donc $\mu(Y) = \mu(X \cup (Y \setminus X)) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X) \geq \mu(X)$ car $\mu(Y \setminus X) \geq 0$.

Sur les 19 copies, 10 ont tenté de mettre en oeuvre cette technique, mais seulement 5 ont produit une réponse complète. Les cinq autres ont proposé une preuve partielle en affirmant que Y pouvait être partitionnée en deux parties disjointes, sans expliciter davantage le raisonnement. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette tâche a été identifiée par les 10 étudiants comme étant une tâche déjà rencontrée, et que la praxéologie P_{M,m_3} était disponible. Cette propriété de croissance de la mesure nous paraît importante car elle sera mobilisée dans la preuve du TFA.

La troisième tâche étudiée (question B.3.1, voir figure 6.9) consiste à démontrer le TFA. Les différentes sous-tâches conduisent essentiellement à reproduire la preuve vue en lycée en justifiant avec la norme de rigueur de l'université, à l'aide de l'axiomatique, les propriétés de l'aire habituellement lues sur la figure. Sur les 19 copies, 10 étudiants ont réussi à obtenir l'encadrement

$$hf(x_0) \leq S(x_0 + h) - S(x_0) \leq hf(x_0 + h).$$

Seulement 3 étudiants ont effectivement tracé une figure. On reconnaît le dessin que l'on trouve habituellement dans les ouvrages de terminale, lequel constitue un bon support à la preuve, comme par exemple sur la figure 6.13.

Nous faisons néanmoins l'hypothèse que tous les étudiants qui ont su donner l'encadrement attendu de $S(x_0 + h) - S(x_0)$ ont mobilisé le cadre graphique, ne serait-ce

6.3. Une première expérimentation avec la modalité d'un problème de CAPES

qu'à travers une image mentale d'un tel dessin. Par exemple l'étudiant, dont le travail est présenté dans la figure 6.14, note R_1 et R_2 les deux domaines qui permettent d'encadrer l'aire sous la courbe. Ces notations qui font directement référence à la méthode des rectangles et montre un début de formalisation. La notion de croissance de la mesure μ n'est pas évoquée.

Parmi les 10 étudiants à avoir proposé le bon encadrement, seulement 3 d'entre eux ont évoqué l'axiomatique, même simplement en utilisant la notation μ (Figure 6.13). Cependant, la propriété de croissance de μ n'est jamais explicitement utilisée et il n'est pas fait référence au résultat précédemment établi sur la mesure des rectangles, ce qui laisse supposer que ce dernier a également été mobilisé sur une base essentiellement intuitive.

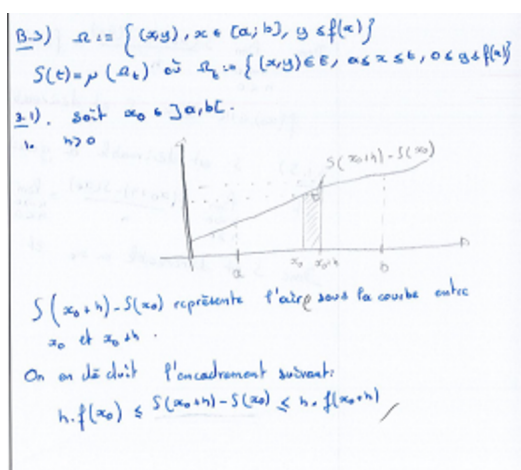


FIGURE 6.13 – Mobilisation du registre graphique dans la réalisation de la preuve du TFA

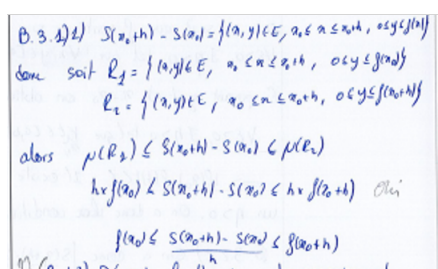


FIGURE 6.14 – Formalisation dans la preuve du TFA

Parmi les 9 étudiants restants et qui n'ont donc pas su donner l'encadrement attendu de $S(x_0+h) - S(x_0)$, cinq étudiants n'ont pas abordé cette question. Les autres apparaissent bloqués ou mis en défaut par l'interprétation de l'ensemble $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$, sans doute face au grand nombre de variables et paramètres dans les écritures algébriques.

Par exemple, un étudiant a considéré l'ensemble Ω_{x_0} comme étant un rectangle. Il n'a visiblement pas perçu la dépendance en x dans l'expression des ordonnées, ou mal interprété cette dépendance dans la conversion vers le registre graphique. On peut donc faire l'hypothèse que le formalisme a été un obstacle majeur pour ceux qui n'ont pas interprété directement $S(t)$ comme une aire.

6.3.4 Conclusion de cette pré-expérimentation

Dans le contexte institutionnel de la formation des enseignants du secondaire en France, nous avons élaboré un problème de CAPES qui vise à créer des liens entre l'intégrale du lycée, l'intégrale de Riemann, et la théorie de la mesure. Ce problème répond à une demande institutionnelle, notifiée dans les programmes du concours de recrutement, d'aborder les objets de savoirs du secondaire avec le recul des connaissances de licence.

Interprétant cette injonction dans l'esprit du plan B de Klein (comme remède à la seconde discontinuité), nous avons suivi la méthodologie proposée par Kondratieva et Winsløw (2018).

L'élaboration du problème se fonde ainsi sur un modèle praxéologique dominant pour l'intégrale du lycée, pour l'intégrale de Riemann et pour l'intégrale de Lebesgue. Ceci a permis de construire des tâches autour d'un nouveau logos Λ_0 pour l'intégrale du lycée, à destination de l'enseignant. Du point de vue historique, ce logos correspond à une formalisation de la mesure antérieure à celle de la théorie contemporaine de la mesure (celle-ci inclut la σ -additivité), mais reformulée en partie en termes de transformations du plan (rôle des isométries et homothéties).

Les liens que le problème cherche à établir ont été décrits en termes de relations entre blocs du logos et de la praxis de praxéologies mobilisant l'intégrale du lycée, celle de Riemann et celle de Lebesgue, ainsi que différentes praxéologies de calculus et de théorie des ensembles.

En effet, nous pouvons identifier la tâche $t_{PB,1}$ et la tâche $t_{PB,2}$ comme étant deux instanciations du type de tâche T_{M,m_3} . Ainsi, dès lors que le type de tâche est identifié, la mise en oeuvre de la technique peut s'opérer. En revanche, ce travail nécessite une réflexion sur le logos, car nous avons modifié une composante de P_{M,m_3} en remplaçant le logos par Λ_0 . Pour renforcer l'identification du type de tâche, nous supprimerons l'axiome 4 qui, même s'il renforce les liens avec la géométrie, ne permet pas la mise en oeuvre de τ_{M,m_3} et la confrontation des logos.

Finalement, la praxéologie que l'on vise est constituée d'un bloc de la praxis du modèle relatif à l'intégrale de Lebesgue, mais d'un bloc de logos « simplifié » et relié à l'intégrale du lycée.

L'étude empirique a montré que les étudiants, dans leur majorité, ont réussi à se saisir de l'axiomatique dans les premières questions du problème. On peut y voir l'impact du travail sur les axiomatiques effectué à l'université, autant en algèbre qu'en analyse

(topologie, théorie de la mesure) ou en probabilités, mais aussi un transfert réussi de techniques élémentaires travaillées à propos de la théorie de la mesure.

Le contraste est alors saisissant lorsque ces derniers s'engagent dans la preuve du TFA en restant à un niveau de justifications faisant appel à des propriétés de l'aire lues sur la figure plutôt que de mobiliser l'axiomatique. Dans ce contexte, la fonction de l'axiomatique semble non perçue par les étudiants.

Outre la persistance du contrat didactique du second degré, ce phénomène peut également s'expliquer par l'obstacle du formalisme et un déficit de flexibilité cognitive dans l'articulation entre les registres graphiques et formels.

Finalement, la tâche dont on demande la réalisation est en fait $t_{TFA,a}$, qui est une tâche du modèle praxéologique de référence pour l'intégrale du lycée. En revanche, le bloc du logos est en quelque sorte « augmenté », puisqu'on remplace le logos Λ_{aire} par Λ_0 .

Notre étude confirme que le transfert des connaissances universitaires en des connaissances utiles pour l'enseignant est très loin d'être automatique.

La modalité en terme de problème de CAPES, si elle répond à une demande institutionnelle, s'avère insuffisante pour produire les effets recherchés sur les apprentissages, ce que l'on peut lier à une insuffisance de rétroactions du milieu.

Ceci suggère qu'une modalité sous forme d'un processus d'étude permettant la mise en place d'une dialectique fertile entre médias et milieux, dans la lignée des travaux récents en TAD, serait davantage appropriée. C'est ce travail que nous proposons d'entreprendre, comme prolongement de cette première expérimentation.

6.4 Seconde expérimentation : méthodologie de construction

Notre étude vise l'implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. Les copies du problème de CAPES issues de notre précédente expérimentation constituent des données insuffisantes pour comprendre les obstacles aux transferts des connaissances universitaires sur l'intégrale. En effet, l'analyse des copies lors de la résolution de la tâche $t_{PB,3}$ a montré que la mobilisation du logos développé dans le cadre du problème n'est pas automatique, dès qu'il s'agit de résoudre une tâche du lycée. La construction de la nouvelle activité se fonde sur la transformation du problème de CAPES en un guide d'AER.

Le modèle de Winsløw met en exergue la nécessité de créer un nouveau rapport $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$ favorisant le transfert des connaissances avancées, où les liens entre des praxéologies du lycée et de l'université sont décrits à travers les blocs du logos et de la praxis qui mobilisent ces connaissances. o désigne pour nous l'intégrale du lycée, et ω l'intégrale à l'université (ce qui inclut donc l'intégrale de Riemann et l'intégrale de

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Lebesgue et la théorie de la mesure). A partir de nos modèles praxéologiques dominants, nous allons alors formaliser une organisation mathématique, que l'on notera OM_M^* qui, selon nous, réalise le plan de Klein pour l'intégrale dans le sens où elle mobilisera des éléments de logos et de praxis des modèles praxéologiques relatifs à l'intégrale du lycée, de Riemann et de Lebesgue.

Pour réaliser le plan de Klein, et renforcer les liens entre les mathématiques du lycée sur l'intégrale et les mathématiques de l'université sur l'intégrale, nous avons basé notre construction à partir de la preuve d'un manuel du théorème fondamental de l'analyse, et telle qu'elle est exigible au lycée. La preuve de ce manuel est sur la figure 6.15

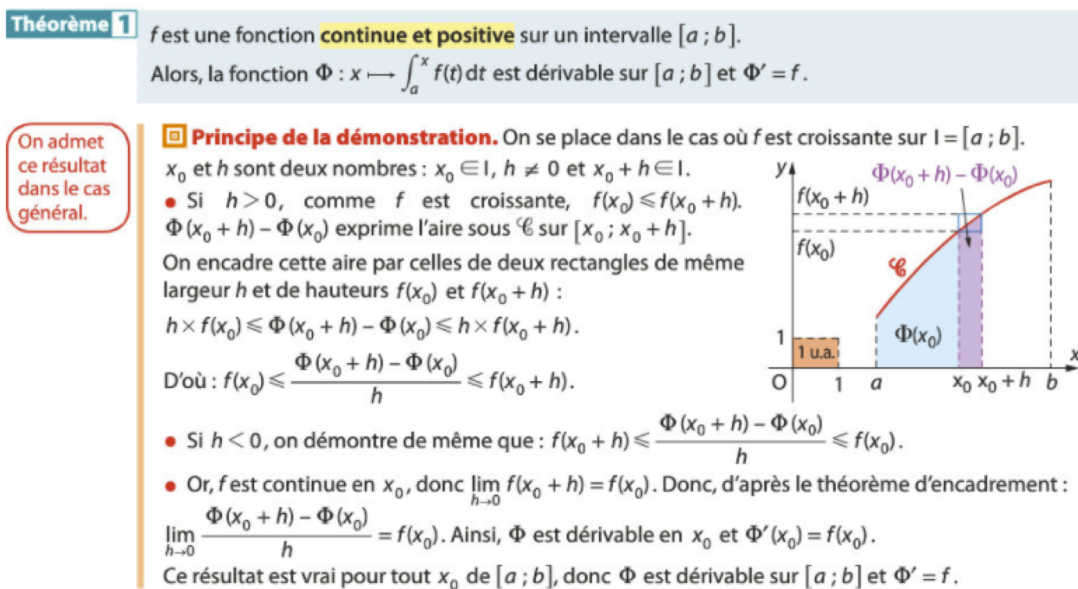


FIGURE 6.15 – Caption

L'analyse praxéologique de la tâche $t_{TFA,a}$ avait mis en lumière la notion intuitive d'aire dans cette preuve. Cette preuve mobilise différentes propriétés de l'aire :

- La surface sous la courbe d'une fonction continue (même seulement croissante) et positive admet une aire ;
- l'aire est additive ;
- l'aire d'un segment est 0 ;

- l'aire est croissante.

Notre objectif est donc de construire un logos Λ_M^* qui permet de justifier, dans la norme de rigueur de l'université, les différentes étapes de la preuve de ce théorème. Notre enquête épistémologique a permis d'identifier la théorie de mesure de Jordan des ensembles quarrables comme étant sous-jacente à la théorie des aires. Notre projet est donc d'utiliser cet élément de transition, la mesure de Jordan des ensembles quarrables, pour mettre en lumière les liens entre les différentes théories.

Nous commencerons par décrire le nouveau logos Λ_M^* et nous présenterons le guide d'AER. Puis, nous détaillerons, dans l'analyse a priori, les praxéologies mathématiques en jeu dans cette organisation mathématique OM_M^* .

Dans cette organisation mathématique, nous distinguerons des praxéologies dont les types de tâches sont issus d'un modèle praxéologique de l'université mais dont nous modifierons les blocs du logos, et les praxéologies dont les types de tâches sont issus du modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale du lycée, mais dont on aura modifié le bloc du logos.

Ceci nous amènera à noter P^* une praxéologie qui trouve sa source dans le modèle praxéologique dominant de l'institution Université mais dont le travail d'ingénierie a modifié certaines composantes en vue de liens entre o et ω (lesquels apparaîtront ultérieurement dans le processus d'étude). D'autre part, nous notons P^\sim des praxéologies qui proviennent de l'institution Lycée mais qui se trouvent, au cours du processus de l'étude, enrichies par des éléments praxéologiques relatifs à ω . Cette idée nous est venue de la lecture de Hochmuth (2022), lequel considère l'enrichissement de praxéologies élémentaires de calculus par intégration d'éléments praxéologiques tirés de mathématiques plus avancées (en analyse non linéaire). Ces nouvelles praxéologies visent à engendrer le rapport $R_U^*(\sigma_t, o \cup \omega)$. Les deux types de praxéologies sont donc également reliés. En rajoutant ces praxéologies aux modèles praxéologiques dominants, nous obtenons notre modèle praxéologique de référence, pour l'expérimentation que nous avons menée autour de la notion d'intégrale.

Une fois l'organisation mathématique précisée, il s'agit ensuite de concevoir une séquence permettant de répondre à la question : quelle organisation didactique mettre en place, relativement à ces praxéologies ?

Dans le langage de la TAD, il s'agit d'adapter les moments de l'étude à ces praxéologies, en tenant notamment compte du fait qu'elles s'appuient sur des praxéologies existantes.

Dans le paradigme monumentaliste,

la TAD postule que toute étude comporte une série de moments (moment de la première rencontre avec et de l'identification du type de tâches, moment de l'exploration du type de tâches, moment de l'émergence d'une technique, moment technologico-théorique, etc...) qui selon les déroulements concrets des séances d'étude vont être plus ou moins accentués

(Sierra, Ruiz Olarría, Bourgade, & Lécureux-Têtu, 2013)

Du fait que les praxéologies font intervenir des blocs de praxéologies déjà construites, c'est à dire faisant partie de l'équipement praxéologique des étudiants, nous adapterons les moments de l'étude à ces praxéologies.

6.4.1 Présentation du logos Λ_M^*

Dans notre revue de travaux, nous avons cité les travaux de Daubelcour (1998); Douady (1987); Perrin-Glorian (1999) qui ont mis en avant la mesure de Jordan pour la mesure des aires. La théorie qui va fonder notre organisation mathématique est donc la mesure des ensembles quarrables, dont l'exposé a été proposé par (Lebesgue, 1975) :

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage Q_i du plan euclidien E , rapporté à un repère orthonormé, dont les sommets sont les points de coordonnées $(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i})$, où a et b sont des entiers relatifs. Une surface carrée fermée (au sens de la topologie usuelle du plan) de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est-à-dire qui est contenue dans une surface carrée), on considère l'ensemble des surfaces carrées fermées de niveau i contenues dans S et on note s_i leur réunion ainsi que n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les surfaces carrées fermées de niveau i qui intersectent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, de sorte que $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

On dira que S est *quarrable* lorsque $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i$. La limite commune est alors notée $\mu(S)$ et appelée *aire* de la surface S (au sens de Lebesgue).

Cette définition sera pour nous la théorie Θ_M^* .

La mesure μ jouit des différentes propriétés qui sont mobilisées dans la preuve du théorème fondamental de l'analyse :

- elle est simplement additive¹
- elle est invariante par isométrie;
- la mesure du carré unité est 1;
- la mesure d'un segment est 0;
- la mesure est croissante.

Ces éléments seront pour nous les éléments technologiques de Λ_M^* , que l'on notera donc θ_M^* .

1. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

6.4.2 Construction de la séquence et objectifs d'apprentissage

La nouvelle modalité que nous proposons pour réaliser le plan de Klein pour l'intégrale est donc de type AER et, pour cela, cette modalité doit organiser la rencontre avec le logos Λ_M^* . Les étudiants travaillent à partir d'un document support (les guides d'AER) mettant en avant six tâches et un extrait de manuel.

Notre organisation mathématique régionale OM_M^* fondée sur un bloc technico-théorique $\Lambda_M^* = [\theta_M^*, \Theta_M^*]$. Ce logos est pertinent pour fonder l'intégrale du lycée dans le sens où ce logos va permettre de justifier, par une axiomatique, le théorème fondamental de l'analyse du lycée. Ce logos a été décrit dans la section précédente.

La séquence sera découpée en deux séances, que nous considérerons comme deux sous-AER distinctes, avec un temps prévu de travail personnel entre les deux séances. Lors de la première séance, les trois tâches permettent la rencontre avec les éléments cités de θ_M^* . La présentation par l'axiomatique de la mesure des aires doit favoriser la mise en lumière de liens avec la théorie de la mesure, dont on vu que la présentation est axiomatique. Les guides d'AER donnés aux étudiants constituent l'annexe F.

Le premier document, le guide d'AER, pose ainsi une notion, appelée mesure des aires, définie axiomatiquement comme suit :

On suppose qu'il existe un sous-ensemble Q de parties de \mathbb{R}^2 qui contient les points, segments, polygones, stable par intersection et union finie. Une mesure des aires est une application μ définie sur Q à valeurs dans \mathbb{R}^+ simplement additive, invariante par isométrie, et telle que la mesure du carré $[0, 1[\times [0, 1[$ est 1.

Lors de notre pré-expérimentation, nous avons remarqué que l'axiome d'homogénéité de la mesure vis à vis des homothéties, même s'il permettait de renforcer les liens avec la géométrie, ne favorisait pas la mise en oeuvre de techniques du modèle praxéologique de référence relatif à l'intégrale de Lebesgue. Nous avons fait le choix de supprimer l'axiome d'homogénéité avec les homothéties afin de favoriser la mobilisation des techniques propres à OM_{ω_L} (ces dernières pourraient être "court-circuitées" par l'usage de cet axiome).

L'axiome d'invariance par isométrie peut être remplacé par l'invariance par translation, mais nous avons choisi de conserver l'énoncé le plus fort pour simplifier quelques preuves (par exemple pour le calcul de l'aire d'un rectangle non parallèle aux axes de coordonnées).

De surcroît, le document commence par un discours de nature méta problématisant les trois tâches, dont un extrait de l'épistémologue Blanché (2009) pour éclairer le rôle des axiomatiques dans l'activité mathématique contemporaine (dégager une théorie de son substrat intuitif pour faire apparaître le schéma logique abstrait). Ce discours vient poser la question génératrice de notre AER, qui est Q_0 : « comment fonder axiomatiquement la théorie intuitive des aires sur laquelle repose l'intégrale du lycée ? »

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Les extraits de textes proposés dans l'introduction ont pour but de fixer le contrat didactique : nous faisons mention du programme de lycée mais aussi de l'enseignement de la notion d'aire à l'école et d'une axiomatique des aires qui relève de l'enseignement supérieur. L'énoncé précise que le travail attendu est de dégager la notion d'aire, introduite au primaire, d'un point de vue intuitif qui perdure dans la théorie de l'intégration du lycée. C'est en définitive le projet de Lebesgue, dans son ouvrage « La mesure des grandeurs » (Lebesgue, 1975) rédigé à destination des enseignants de mathématiques, que nous reprenons ici. L'axiomatique de Lebesgue est une des sources de la théorie de la mesure, laquelle est enseignée à Montpellier en L3 au sein de l'UE « théorie de la mesure et intégration ».

L'introduction s'achève par la donnée des axiomes qui définissent une mesure finiment additive (voir Figure 6.16).

On définit tout d'abord un sous-ensemble \mathcal{Q} du plan (affine euclidien \mathbb{R}^2), appelé *ensemble des parties quarrables*, par une liste d'axiomes, dont les suivants :

- \mathcal{Q} contient les points, les segments et les polygones (avec ou sans les frontières);
- \mathcal{Q} est stable par union finie et par intersection finie;
- \mathcal{Q} est stable par isométrie (si $A \in \mathcal{Q}$ et s est une isométrie, alors $s(A) \in \mathcal{Q}$).

Une *mesure d'aire* est alors une application $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes suivants :

- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{Q}^2$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité);
- Si $A \in \mathcal{Q}$ et s est une isométrie, alors $\mu(s(A)) = \mu(A)$ (invariance par isométrie);
- $\mu(C) = 1$, où C est le carré unité semi-ouvert $[0, 1[\times [0, 1[$ (normalisation).

FIGURE 6.16 – Axiomatique des aires, dans le guide d'AER.

Cette notion, la mesure des aires, constitue l'objet de la première rencontre avec l'organisation mathématique visée.

Les trois tâches assignées sont :

- t_1 : montrer que la mesure des aires est une mesure diffuse;
- t_2 : déterminer la mesure d'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions en justifiant;
- t_3 : en appui sur la mesure des aires, réécrire la preuve du TFA extraite du manuel avec la norme de rigueur de l'université.

Le choix des tâches t_1 et t_2 se fonde sur notre modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue à l'université. En particulier, nous avons choisi d'utiliser le mot *diffuse* dans la description de la tâche t_1 pour faire explicitement référence à une tâche déjà rencontrée par les étudiants (montrer qu'une mesure sur \mathbb{R} invariante par translation est diffuse) et ainsi activer la praxéologie P_{M,m_3} .

De même, la tâche t_2 constitue une instanciation d'un type de tâche déjà rencontré, T_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée).

La réalisation de ces deux tâches vise la construction de θ_M^* (avec les éléments déjà identifiés : la mesure est croissante, la mesure des segments est nulle, et celle des rectangles est le produit de la longueur par la largeur).

Enfin, la tâche t_3 se fonde sur la tâche $t_{TFA,a}$ identifiée dans le modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale du lycée, puisque la tâche consiste à ré-écrire la preuve d'un manuel (figure 6.15).

Les éléments de logos θ_M^* vont permettre une formalisation de la preuve déjà produite, en admettant le fait que la surface sous la courbe admet bien une aire. Cela fera l'objet de la séance 2.

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage \mathcal{Q}_i du plan euclidien E , rapporté à un repère orthonormé, dont les sommets sont les points de coordonnées $\left(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i}\right)$, où a et b sont des entiers relatifs. Une surface carrée fermée (au sens de la topologie usuelle du plan) de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est-à-dire qui est contenue dans une surface carrée), on considère l'ensemble des surfaces carrées fermées de niveau i contenues dans S et on note s_i leur réunion ainsi que n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les surfaces carrées fermées de niveau i qui intersectent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, de sorte que $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

On dira que S est *quarrable* lorsque $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i$. La limite commune est alors notée $\mu(S)$ et appelée *aire* de la surface S (au sens de Lebesgue).

FIGURE 6.17 – Définition des ensembles quarrables

Comme pour la première séance, le guide d'AER de la deuxième séance commence par un discours de nature méta qui spécifie la problématique de la deuxième AER :

Le but de cette activité est de construire une mesure d'aire, au sens de l'axiomatique donnée par Lebesgue dans son ouvrage *La mesure des grandeurs* (paru en 1935), tout en tissant des liens avec les théories de l'intégration enseignées à l'université. Comme le décrivent les didacticiennes Douady et Perrin-Glorian, la notion d'aire est introduite dès l'école élémentaire : La présentation standard actuelle consiste à recourir au pavage de surfaces, en passant rapidement au pavage avec des carrés et à compter les carreaux pour déterminer l'aire de surfaces quadrillées. Elle consiste ensuite, pour des rectangles ou carrés, à trouver des moyens économiques de comptage, puis à introduire les unités légales avec multiples et sous multiples et selon le cas, avant ou après cela, à établir les formules de calcul

d'aire des rectangles en fonction des longueurs des côtés. On raccroche ensuite à ces formules celles relatives au triangle et à d'autres quadrilatères (losange, parallélogramme, trapèze). (Douady, 1987)

Nous allons suivre les grandes lignes de la construction donnée par Lebesgue dans son ouvrage.

Le guide d'AER de la seconde AER pose alors la définition proposée par Lebesgue des ensembles quarrables du plan à l'aide des quadrillages du plan, et une application définie sur cet ensemble à valeur dans \mathbb{R}^+ (Figure 6.17).

Le but de cette seconde AER est donc de compléter le logos Λ_M^* qui, in fine, fonde le théorème fondamental de l'analyse.

Le collectif d'étude sera alors confronté à trois tâches :

- t_4 : *Démontrer que le carré unité semi-ouvert, $C = [0; 1[\times [0; 1[$, est quarrable et d'aire de Lebesgue égale à 1.*
- *Démontrer que l'application μ vérifie également l'axiome d'additivité.*
- t_5 : *Quelles sont les propriétés de μ qui sont mobilisées dans le raisonnement présenté sur la figure 6.18 ? Relier ces propriétés aux axiomes ou à des propositions générales qui, au besoin, pourront être tenus comme de nouveaux axiomes. Pour la dernière tâche, nous avons décidé d'écrire un raisonnement non complètement formalisé qui prolonge, en fait, le texte d'un extrait de manuel présenté dans la figure 6.3. Dans le manuel, la notion intuitive d'aire permet de justifier un encadrement de π . Il s'agit en fait de la méthode d'Archimède pour le calcul de l'aire du disque. Le raisonnement que nous présentons dans le guide d'AER est donné dans la figure 6.18.*

Dans le problème de CAPES, nous avons proposé la tâche suivante :

Démontrer la proposition suivante : une surface S est quarrable si et seulement si il existe deux suites de polygones (P_n) et (Q_n) tel que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ et Q_n sont quarrables ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \subset S \subset Q_n$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0$

L'examen des copies avait montré que les étudiants n'avaient pas réussi à mettre en oeuvre une technique efficace, sûrement à cause des difficultés de formalisation des sommes à plusieurs indices. Mais nous faisons l'hypothèse que l'élaboration de la technique pour la formalisation de la preuve 6.18 est à même de faire émerger la caractérisation des ensembles quarrables du plan.

- t_6 : montrer que la surface limitée par la courbe d'une fonction croissante est quarrable. Même question en remplaçant croissante par continue. A travers la mise en oeuvre d'une technique pour la réalisation de cette tâche, nous attendons la mobilisation de l'élément technologique introduit lors de la réalisation de la tâche t_5 et l'activation d'éléments de praxéologies relatives à l'intégrale de Riemann.

Dans son traité (environ 250 avant J.-C.), Archimède démontre que le disque a même aire que le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives le rayon et la circonférence de ce cercle. Voici une interprétation de sa démarche avec une reformulation contemporaine, notamment avec la notion de limite et les propriétés des fonctions trigonométriques :

On considère un cercle de rayon 1, et on appelle π la longueur de son demi-périmètre. Pour tout entier n non nul, on note P_n et Q_n les polygones réguliers à n côtés inscrits et circonscrits au cercle. Le polygone P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB et le polygone Q_n est l'union de n triangles isométriques à OGF (voir Figure 1).

Les aires de Lebesgue de ces polygones sont $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. La différence des aires de Q_n et P_n tend vers 0, donc le disque est quarrable et son aire vaut $\lim \mu(Q_n) = \pi$.

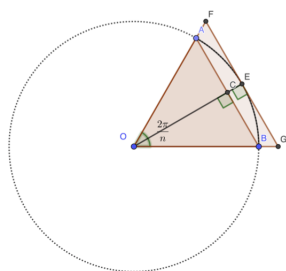


FIGURE 6.18 – Raisonnement non formalisé dans le guide d'AER

Dans les sections suivantes, nous allons faire l'analyse a priori pour chacune des deux séances.

6.4.3 Analyse a priori de la première séance

Les étudiants, en groupes, disposent de 30 minutes pour le temps d'exploration de la tâche. Le moment de la première rencontre est réalisé à travers l'étude de la définition axiomatique de la mesure des aires. La lecture du guide d'AER, avec l'axiomatique, constitue la phase de la première rencontre avec l'organisation mathématique visée.

A travers la réalisation des tâches t_1 et t_2 , le collectif, dans le processus d'étude, va enrichir son équipement praxéologique et constituer un environnement technologico-théorique générateur de techniques pour la réalisation de la tâche t_3

Analyse a priori de la 1ère tâche

La première tâche est t_1 « démontrer que μ est une mesure diffuse » et la question qui est reliée est celle de la technique pour réaliser cette tâche t_1 ($Q_1 = Q_{\tau_1}$) :

Q_1 « comment montrer que la mesure des aires est une mesure diffuse » Cette question est naturellement produite par le milieu et indique le temps d'exploration de la tâche.

Il s'agit donc de démontrer une propriété de la mesure des aires, et la tâche apparaît comme une instanciation du type de tâches T_{M,m_3} rencontré par les étudiants avec la tâche singulière t_{M,m_3} : montrer qu'une mesure sur \mathbb{R} invariante par translation est diffuse, dans le contexte de la mesure de Lebesgue.

La valence sémiotique des ostensifs « mesure » et « diffuse » permet une réactivation de la praxéologie P_{M,m_3} (montrer une propriété de la mesure), en particulier de l'instanciation t_{M,m_3} (montrer qu'une mesure sur \mathbb{R} invariante par translation est diffuse) et se pose la question de l'application de la technique τ_{M,m_3} .

Ainsi, l'oeuvre Π_{M,m_3} (praxis de la praxéologie P_{M,m_3}) est visitée et se pose la question de l'application de la technique τ_{M,m_3} (Raisonnement à partir des propriétés générales des mesures à utiliser, par un raisonnement direct ou par l'absurde).

L'identification du type de tâche T_{M,m_3} et la disponibilité des techniques τ_{M,m_3} nous semblent des éléments favorisant la mise en oeuvre d'une technique permettant la réalisation de la tâche t_1 .

Pour favoriser l'identification du type de tâche, l'enseignant peut renforcer la valence sémiotique de l'ostensif « diffuse » en produisant de nouvelles questions : Connaissez-vous des mesures diffuses ? Des mesures qui ne sont pas diffuses ?

Il peut aussi chercher à renforcer la valence opératoire en demandant la mise en oeuvre d'une technique par la question : comment avez-vous montré que la mesure de Lebesgue est diffuse ?

Ceci conduit à une nouvelle question dans le milieu :

$Q_{1,1}$: « quelles sont les propriétés générales des mesures qui sont encore valables dans le cadre de la mesure des aires ? »

Cette question apparaît comme le début du moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique.

La question $Q_{1,1}$ fait alors émerger les deux sous-questions $Q_{1,2}$ et $Q_{1,3}$.

$Q_{1,2}$: « Quelles sont les propriétés générales des mesures ? »

puis

$Q_{1,3}$: « Comment ont été démontrées ces propriétés ? »

Ainsi, l'oeuvre $\theta_{M,m}$ (définition et propriétés générales des mesures) est visitée.

La réponse $R_{1,2}^\diamond$ coïncide avec l'oeuvre $\theta_{M,m}$ et la réponse $R_{1,3}^\diamond$ est apportée par la visite de l'oeuvre Θ_M .

Cette visite apporte la réponse :

$R_{1,2}^\diamond$: Les propriétés générales des mesures sont la σ -additivité, la croissance (monotonie), la sous-additivité, la limite croissance, la limite décroissante, et, en particulier à la mesure de Lebesgue, l'invariance par translation.

$R_{1,3}^\diamond$: la σ -additivité est un axiome de la mesure, la monotonie utilise la positivité et l'additivité simple, la sous-additivité utilise la σ -additivité, de même que les propriétés de limite croissante et décroissante, et l'invariance par translation est par unicité de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Ces réponses sont estampillées car ce sont des éléments d'OM de l'équipement praxéologique de la classe.

L'étude des preuves permet ainsi de discriminer les propriétés des mesures générales qui s'appliquent dans le contexte particulier de la mesure des aires : l'invariance par translation et la croissance de la mesure sont conservées.

Ceci constitue donc la réponse $R_{1,1}$ à la question $Q_{1,1}$ et ainsi permet la constitution d'un nouveau bloc du logos Λ_M^* d'une nouvelle praxéologie que l'on va noter P_{M,m_3}^* , dont le type de tâche peut se formuler de la façon suivante :

- T_{M,m_3}^* : Montrer une propriété de la mesure des aires.

Le bloc du logos contient donc l'invariance par translation et la croissance de la mesure des aires.

La technique τ_{M,m_3}^* pour réaliser T_{M,m_3}^* permet alors deux raisonnements :

1. Raisonnement par l'absurde : on suppose qu'il existe un point dont la mesure est $\varepsilon > 0$. Alors, par invariance par translation, $\mu(\{0\}) = \varepsilon$. Or, comme \mathbb{R} est archimédien, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > 1$. Mais le carré unité contient au moins l'ensemble $E = \{(0, \frac{1}{k}); k \in \{1, \dots, n\}\}$. Mais alors, par croissance de l'aire, $1 < \mu(E) \leq \mu(C) = 1$ ce qui est absurde.
2. Raisonnement direct : par invariance par translation, tous les points ont même mesure. Montrons que $\mu(\{0\}) = 0$. On peut affirmer que pour tout entier naturel n non nul, $\{0\} \subset C_{1/n}$ où $C_{1/n}$ est le carré parallèle aux axes, de côté $1/n$. Par croissance de la mesure des aires, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(\{0\}) \leq \mu(C_{1/n})$. Or, par invariance par translation on a $\mu(C_{1/n}) = 1/n^2$ (tous les carrés ont même mesure d'aire, et l'union des n^2 carrés donne le carré unité). On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(\{0\}) \leq 1/n^2$$

d'où $\mu(\{0\}) = 0$.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Notons que dans les deux raisonnements, l'élément technologique mobilisé est la croissance de la mesure. Cette croissance se prouve, comme dans l'organisation mathématique relative à la théorie de la mesure :

Si $A \subset B$, alors $B = A \cup B \setminus A$. Comme $A \cap B \setminus A = \emptyset$, on en déduit par l'additivité de la mesure des aires : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Comme la mesure des aires est positive, $\mu(B) \geq \mu(A)$.

Dans notre organisation didactique, ces deux techniques, ainsi que la discussion sur les blocs technico-théorique seront exposées par l'enseignant lors du moment d'institutionnalisation.

Le moment du travail de la technique est ensuite laissé aux étudiants en travail à la maison avec la tâche : montrer que la mesure des aires ne charge pas les segments de \mathbb{R}^2 . Le temps de travail de la technique n'est pas un enjeu ici. Ce qui est visé n'est pas tant la mise en oeuvre d'une technique, mais l'enrichissement du logos nécessaire, ensuite, à la réalisation de la tâche t_3 .

Finalement, la praxéologie développée ici peut se formuler de la façon suivante :

P_{M,m_3}^*	
T_{M,m_3}^*	Montrer une propriété de la mesure des aires
τ_{M,m_3}^*	On identifie les propriétés de la mesure des aires et on raisonne par un raisonnement direct ou par l'absurde
$\theta_{M,m}^*$	Propriétés de la mesure des aires : invariance par translation, croissance de la mesure des aires
Θ_M^*	Axiomatique de la mesure des aires

Le question-gramme a priori est donné dans la figure 6.19

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

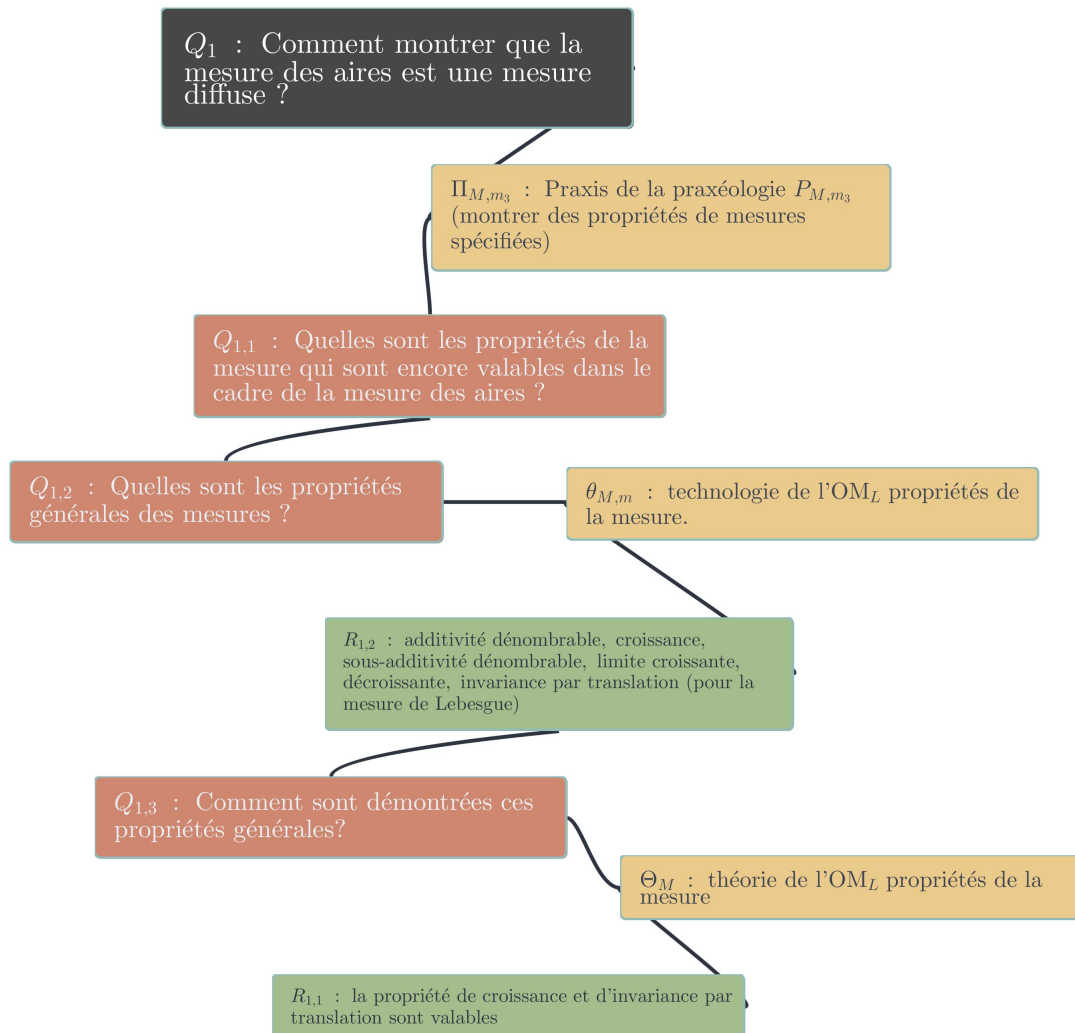


FIGURE 6.19 – Question-gramme a priori pour la question 1

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Le schéma herbartien pour la première question est :

$$[S(X; Y; Q_1) \Rightarrow M_1] \Rightarrow R_1^\heartsuit = \tau_{M,m_3}^*$$

avec $M_1 = \{Q_1, Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, R_{1,2}^\diamond, R_{1,3}^\diamond, R_{1,1}\Pi_{M,m_3}, \Lambda_M\}$.

Bien que la réponse se limite à la technique, l'intégralité de la praxéologie P_{M,m_3}^* est développée au cours de l'étude à travers la construction du milieu M_1 .

Notre analyse a priori nous conduit à produire une adaptation des moments de l'étude, puisque la praxéologie développée est fondée sur un bloc praxis existant. La mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_3}^* consiste à identifier le type de tâche T_{M,m_3} issu du modèle praxéologique dominant relatif à l'intégrale de Lebesgue, puis à adapter la technique au contexte singulier de la mesure des aires.

Dans le tableau suivant, nous précisons les différents moments de l'étude du groupe I afin de proposer une modélisation de l'étude qui servira de référence pour l'analyse a posteriori. Nous précisons les questions qui génèrent ces différents moments ou bien les oeuvres visitées qui attestent du déroulement de ces moments.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Évocation de T_{M,m_3} (ostensifs relatifs à l'intégrale de l'université)
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Éléments de mise en oeuvre de $\tau_{M,m_3,1}$ ou de $\tau_{M,m_3,2}$. Visite de Π_{M,m_3}
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	Adaptation de τ_{M,m_3} , mobilisation de l'additivité simple, de l'invariance par translation, et de la croissance. Visite de Λ_M et Λ_M^*
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Rédaction de la preuve, justification de la croissance

Si le moment d'identification du type de tâche n'est pas vécu par le collectif, alors l'aide à l'étude peut augmenter la valence sémiotique des ostensifs « diffuse » et « mesure » en introduisant la sous-question : « connaissez-vous des mesures diffuses ? Des mesures qui ne le sont pas ? »

En revanche, si la génération du moment de la tentative de mise en oeuvre n'est pas engendré, il n'est pas prévu un nouveau travail des techniques de L3. Le média du cours de L3 peut être mobilisé. Si ce moment n'est pas engendré, alors nous en concluons que la valence opératoire de l'ostensif « diffuse » est trop faible, et que les praxéologies de L3 en jeu ne sont pas disponibles.

Enfin, pour favoriser la confrontation des logos, l'aide à l'étude peut introduire la question « comment avez-vous montré que la mesure de Lebesgue est diffuse », puisque la réponse à cette question conduit à la visite de la technologie de la praxéologie P_{M,m_3} .

Analyse a priori de la 2ème tâche

La deuxième tâche rencontrée dans l'AER est proposée sous la forme d'une question :

Q_2 : « que vaut la mesure d'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions ? »

Cette tâche suit la tâche décrite ci-dessus et l'équipement praxéologique des étudiants contient une nouvelle praxéologie, P_{M,m_3}^* , en particulier l'élément de logos relatif à la croissance de la mesure ainsi que la propriété de la mesure d'aire d'un segment nulle.

Cette tâche est une instanciation du type de tâche T_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée). Une tâche singulière de ce type a déjà été rencontrée par les étudiants à travers la tâche t_{M,m_2} (montrer que pour tout réel positif x , $\mu([0, x]) = x$ lorsque μ est une mesure invariante par translation sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).

Pour la réalisation de cette dernière, la technique mise en oeuvre était de distinguer le cas x entier naturel, puis x rationnel et enfin, par un passage à la limite, le cas x réel (comme limite d'une suite de rationnels).

L'identification du type de tâche T_{M,m_2} et en particulier de son instanciation t_{M,m_2} est un élément du moment d'exploration du type de tâche.

Ainsi, la praxis Π_{M,m_2} de la praxéologie P_{M,m_2} est la première oeuvre visitée et ceci induit une nouvelle question :

$Q_{2,1}$: « que vaut la mesure d'aire d'un rectangle lorsque ses dimensions sont des entiers naturels ? »

La technique τ_{M,m_2} peut être mise en oeuvre, mais adaptée à la mesure des aires introduite ici : il ne s'agit plus d'identifier comment est construit l'ensemble à mesurer vis à vis des opérations ensemblistes qui caractérisent les tribus, mais seulement celles qui caractérisent l'ensemble \mathcal{Q} , c'est à dire les unions finies (et non plus dénombrables), ce qui amène la sous-question :

$Q_{2,1,1}$: « Comment décomposer un rectangle dont les côtés sont des entiers à l'aide d'ensembles élémentaires ».

La réponse devrait être produite par le milieu dans ce cas particulier :

$R_{2,1,1}$: « Un rectangle de côtés n et m est l'union disjointe de $n \times m$ carrés »

Enfin, la visite de l'oeuvre $\theta_{M,m}^*$ amène à affirmer que la mesure des rectangles à côtés entiers est le produit des longueurs des côtés et la réponse à $Q_{2,1}$ peut être produite :

$R_{2,1}$: un rectangle de côtés n et m a pour mesure d'aire $n \times m$.

Après le cas des entiers, une nouvelle question est produite par le milieu :

$Q_{2,2}$: Que vaut la mesure d'aire d'un rectangle parallèle aux axes lorsque les côtés sont des rationnels (p/q et m/n) ?

Conformément à la réalisation de la tâche t_{M,m_2} (et d'ailleurs à des praxéologies d'analyses qui s'appuient sur l'articulation $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) une nouvelle question devrait être produite par le milieu :

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

$Q_{2,2,1}$: Comment se ramener au cas des entiers ?

La réponse à cette question conduit ainsi à la réponse à la question $Q_{2,2}$:

$R_{2,2,1}$: L'union de $q \times n$ rectangles de côtés p/q et m/n , parallèles aux axes, est un rectangle de côté p et m ;

puis

$R_{2,2}$: un rectangle de côté p/q et m/n a pour mesure d'aire $\frac{pm}{qn}$.

Après le cas des entiers et des rationnels, le cas des réels quelconques peut être abordé et la question $Q_{2,3}$ puis la sous-question $Q_{2,3,1}$, en supposant dans un premier temps que les rectangles considérés sont parallèles aux axes :

$Q_{2,3}$: Que vaut la mesure d'aire d'un rectangle lorsque les côtés sont des réels x et y ?

$Q_{2,3,1}$: Comment encadrer un rectangle de côtés x et y réels par des rectangles de côtés rationnels ?

Ce passage aux nombres réels indique un changement du moment didactique pour constituer l'environnement technologico-théorique, avec la notion de croissance et la propriété de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

L'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$: densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est visitée (moyennant le théorème que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels) et cela produit une réponse

$R_{2,3,1}$: il existe quatre suites de rationnels (x_n) , (X_n) et (y_n) , (Y_n) qui convergent respectivement vers x et y , avec $x_n \leq x \leq X_n$ et $y_n \leq y \leq Y_n$; les rectangles $[0, x_n] \times [0, y_n]$ et $[0, X_n] \times [0, Y_n]$ conviennent.

L'oeuvre $\theta_{M,m}^*$ est de nouveau visitée avec la croissance de la mesure des aires et cela amène la production de la réponse

$R_{2,3}$: un rectangle de côtés x et y et parallèle aux axes a pour mesure d'aire xy .

Enfin, l'invariance par isométrie permet de produire la réponse

R_2^\heartsuit : un rectangle de côté x et y réels a pour mesure d'aire xy .

La praxéologie visée est modélisée par :

P_{M,m_2}^*	
T_{M,m_2}^*	Mesurer un ensemble avec la mesure des aires
τ_{M,m_3}^*	On décompose l'ensemble à mesurer par des ensembles élémentaires
$\theta_{M,m}^*$	Propriétés de la mesure des aires : invariance par translation, croissance de la mesure des aires
Θ_M^*	Axiomatique de la mesure des aires

Le question-gramme a priori pour cette question est donné par la figure 6.20

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction



FIGURE 6.20 – Question-gramme a priori pour la question 2

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Le schéma herbartien pour la deuxième question est

$$[S(X; Y; Q_2) \Rightarrow M'] \rightsquigarrow R_2^\heartsuit$$

avec $M' = \{Q_2, Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}, Q_{2,1,1}, Q_{2,2,1}, Q_{2,3,1}, R_{2,1}, R_{2,1,1}, R_{2,2,1}, R_{2,2}, R_{2,3,1}, R_{2,3}, \Pi_{M,m_2}, \theta_{M,m}^*, O_{\mathbb{R}}\}$.

La réponse R_2^\heartsuit vient enrichir la technologie $\theta_{M,m}^*$.

De nouveau, puisque la praxéologie développée se fonde sur une praxis existante, nous adaptons les moments de l'étude :

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche issu de P	Évocation de T_{M,m_2}
Mise en oeuvre d'une technique τ issue de P pour le cas des entiers et rationnels	Visite de $\Pi_{M,m_2}(Q_{2,1}, Q_{2,2})$
Élaboration d'une technique pour le cas réel non rationnel	$Q_{2,3}$; oeuvre $\theta_{\mathbb{R}}$ et croissance de la mesure d'aire (θ_M^*)
mise en oeuvre de τ^*	Production de R_2^\heartsuit

Analyse a priori de la 3ème tâche

La dernière tâche porte sur une analyse de la preuve du théorème fondamental de l'analyse extraite d'un manuel scolaire et sa réécriture dans la norme de rigueur de l'université. Il s'agit de mobiliser le logos Λ_M^* qui vient d'être construit.

La tâche $t_{TFA,a}$ (montrer que, lorsque f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout x dans $[a, b]$, $F'(x) = f(x)$) est une tâche rencontrée par les élèves de lycée comme décrit dans notre modèle praxéologique dominant du lycée.

Le travail qui est attendu dans notre AER est donc la réalisation de la tâche, notée $t_3 = \tilde{t}_{TFA,a}$, où le logos Λ_M^* remplace la théorie intuitive de l'aire pour permettre la justification des techniques.

En effet, nous avons identifié dans notre analyse des manuels l'absence d'un discours qui fonde les propriétés de l'aire appliquées en acte dans la réalisation de cette tâche $t_{TFA,a}$.

La question génératrice est Q_3 : « comment rendre rigoureuse la preuve du théorème fondamental de l'analyse du manuel en s'appuyant sur l'axiomatique des aires ? »

La première sous-question est donnée par

$Q_{3,1}$: où intervient la notion intuitive d'aire dans la preuve du manuel ?

L'ostensif aire est présent dans la démonstration. La valence sémantique de cet ostensif a été modifié par l'activité menée à travers les 2 questions. Par ailleurs, l'ostensif intégrale renvoie à l'aire sous la courbe à travers l'oeuvre θ_{aire} . La visite de cette oeuvre et la lecture de la démonstration permettent alors d'apporter la réponse à la question $Q_{3,1}$:

$R_{3,1}$: $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ est l'aire sous la courbe ; on encadre l'aire de la surface limité par la courbe par l'aire de deux rectangles ; l'aire du rectangle est $hf(x_0)$.

L'identification de ces moments où intervient la notion intuitive d'aire conduit à l'introduction dans le milieu de la nouvelle question :

$Q_{3,2}$: comment justifier par l'axiomatique de la mesure des aires ces affirmations ?

Le logos Λ_M^* développé lors des deux questions précédentes permet de produire la réponse $R_{3,2}$ après un travail de formalisation comme suit :

- On pose $\Omega_t = \{(x, y), a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Ainsi $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ représente $\mu(\Omega_{x_0+h}) - \mu(\Omega_{x_0})$: par additivité de la mesure, cette différence correspond à $\mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0})$, qui est donc la mesure de la surface en gris foncé (on notera que la mesure des segments est nulle pour ne pas s'occuper des frontières : c'est le point de vue des mesures diffuses vu à travers Q_1) (axiome d'additivité)
- Comme f est croissante, on a : pour tout $x \in [x_0, x_0 + h]$,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

et donc la surface gris foncé est comprise (au sens de l'inclusion) entre deux rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$$R_{x_0} \subset \Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0} \subset R_{x_0+h}$$

On notera que ceci n'est pas lu sur la figure : cela résulte d'encadrements portant sur les nombres réels. Par *croissance* de μ , on a donc

$$\mu(R_{x_0}) \leq \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}) \leq \mu(R_{x_0+h})$$

- Comme on connaît la *mesure d'un rectangle*, on a

$$hf(x_0) \leq \phi(x_0 + h) - \phi(x_0) \leq hf(x_0 + h)$$

La réponse R_3^\heartsuit consiste donc à désigner les objets géométriques en jeu, les lier à des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , enfin à pointer les propriétés de l'aire qui ont été mobilisées aux endroits opportuns. Il s'agit donc d'une technique, que l'on va noter $\tau_{L,a}^\sim$, pour réaliser le type de tâche $T_{L,a}^\sim$: « Réécrire la preuve d'une proposition qui mobilise la notion intuitive d'aire avec la norme de rigueur de l'université ». Cela revient à remplacer la

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

praxéologie $P_{L,a}$ par $P_{L,a}^{\sim}$ en incorporant le nouveau logos Λ_M^* , mais également le texte de Blanché et meta-concept de preuve à l'université. Le logos Λ_M^{\sim} coïncide avec Λ_M^* pour sa partie mathématique. Bien que la tâche $t_{TFA,a}$ soit isolée, le procédé de passage de $t_{TFA,a}$ à $t_{TFA,a}^{\sim}$ que décrit R_3^{\heartsuit} a ainsi une portée générale.

L'analyse que nous venons de mener nous amène à modéliser la praxéologie développée par

$P_{L,a}^{\sim}$	
$t_{L,a}^{\sim}$	Réécrire la preuve d'une proposition qui mobilise la notion intuitive d'aire avec la norme de rigueur de l'université
$\tau_{L,m}^{\sim}$	Désigner les objets géométriques en jeu, les lier à des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , enfin à pointer les propriétés de l'aire qui ont été mobilisées aux endroits opportuns
$\theta_{M,m}^{\sim}$	Propriétés de la mesure des aires : invariance par translation, croissance de la mesure des aires, mesure des rectangles, texte de Blanché
Θ_M^{\sim}	Axiomatique de la mesure des aires, notion de preuve à l'université

La technique associée τ^{\sim} consiste à identifier où intervient la notion intuitive d'aire, à formaliser, et enfin à identifier les axiomes et propriétés de la mesure des aires qui interviennent. On peut considérer que cette praxéologie P^{\sim} se doit de figurer dans l'équipement praxéologique du professeur dans la philosophie de Klein.

Le temps de travail de cette technique est prévu lors de la deuxième séance.

Le question-gramme a posteriori est donné par la figure 6.21

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

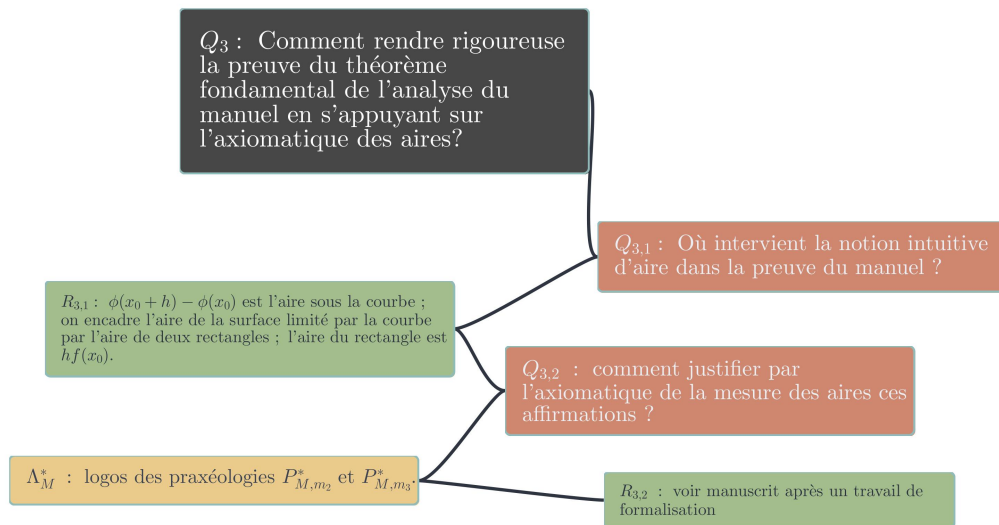


FIGURE 6.21 – Question-gramme a priori pour la question 3

Le schéma herbartien pour la troisième question est

$$[S(X; Y; Q_3) \Rightarrow M''] \Rightarrow R_3^\heartsuit = \tau$$

avec $M'' = \{Q_3, Q_{3,1}, Q_{3,2}, R_{3,1}, R_{3,2}, \theta_{aire}, \Lambda_M^\sim\}$.

Nous décrivons maintenant les différents moments de l'étude de la praxéologie développée. Cette fois, la praxéologie se fonde sur une praxis du lycée, contrairement aux praxéologies décrites précédemment qui se fondent sur une praxis de l'université. Le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique visée est de nouveau le logos Λ_M^* (pour la partie mathématique), augmenté d'éléments sur la notion de preuve à l'université, dont le texte de Blanché. Nous notons ce logos Λ_M^\sim .

Lors de la phase d'élaboration de la technique et de la constitution du bloc technico-théorique, le premier moment est celui de l'étude du produit de l'application de la technique $\tau_{L,a}$ qui est donnée via le média manuel scolaire. La confrontation des logos Λ_M^\sim et Λ_{aire} (ce logos justifie la technique $\tau_{L,a}$) engendre alors le moment de l'élaboration de la technique $\tau_{L,a}^\sim$ (formalisation, conversion des registres, mobilisation des propriétés de μ) et la validation de la technique par θ_M^\sim .

Moment de l'étude	Indicateurs
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire.	Identification de la notion d'aire, $Q_{3,1}$
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_M^\sim	traduction des objets géométriques en sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , $Q_{3,2}$ et texte de Blanché
Élaboration de τ_L^\sim et validation par θ_L^\sim	Production de R_3^\heartsuit

6.4.4 Analyse a priori de la deuxième séance

La deuxième séance pose la construction de la mesure des aires des ensembles quarrables, comme présentée par Lebesgue (1975). Nous en rappelons ici cette construction pour faciliter la lecture du manuscrit :

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage Q_i du plan euclidien E , rapporté à un repère orthonormé, dont les sommets sont les points de coordonnées $(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i})$, où a et b sont des entiers relatifs. Une surface carrée fermée (au sens de la topologie usuelle du plan) de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est à dire qui est contenue dans une

surface carrée), on considère l'ensemble des surfaces carrées fermées de niveau i contenues dans S et on note s_i leur réunion ainsi que n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les surfaces carrées fermées de niveau i qui intersectent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, de sorte que $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

Nous rappelons les tâches proposées aux étudiants dans le cadre de l'étude :

- t_4 : *Démontrer que le carré unité semi-ouvert, $C = [0; 1[\times [0; 1[$, est quarrable et d'aire de Lebesgue égale à 1.*
- t'_4 : *Démontrer que l'application μ vérifie également l'axiome d'additivité.*
- t_5 : *Quelles sont les propriétés de μ qui sont mobilisées dans le raisonnement présenté sur la figure 6.18 ? Relier ces propriétés aux axiomes ou à des propositions générales qui, au besoin, pourront être tenues comme de nouveaux axiomes.*
- t_6 : *montrer que la surface limitée par la courbe d'une fonction croissante est quarrable. Même question en remplaçant croissante par continue. A travers la mise en oeuvre d'une technique pour la réalisation de cette tâche, nous attendons la mobilisation de l'élément technologique introduit lors de la réalisation de la tâche t_5 et l'activation d'éléments de praxéologies relatives à l'intégrale de Riemann.*

Analyse a priori de la première tâche

La tâche t_4 est en fait découpée en deux sous-tâches : la sous-tâche $t_{4,1}$ est « montrer que le carré $[0; 1[\times [0; 1[$ est quarrable d'aire de Lebesgue égale à 1, c'est à dire que l'axiome de normalisation est vérifié », et la sous-tâche $t_{4,2}$ est « montrer que μ vérifie l'axiome d'additivité ».

La question Q_4 est :

Q_4 : Comment démontrer que l'application est une mesure d'aire ?

La reconnaissance du type de tâche T_{M,m_1} (Montrer qu'une application est une mesure) conduit à s'interroger sur la possibilité pour que μ vérifie les axiomes de la mesure. La confrontation du logos Λ_M avec Λ_M^* conduit à ne conserver que les axiomes de la mesure des aires. Les sous-questions $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$ et $Q_{4,3}$ se posent :

- $Q_{4,1}$: Comment montrer que la mesure μ vérifie l'axiome de normalisation ?
- $Q_{4,2}$: Comment montrer que la mesure μ vérifie l'axiome d'additivité ?
- $Q_{4,3}$: Comment montrer que la mesure μ vérifie l'axiome d'invariance par isométrie ?

La réponse $R_{4,3}$ est apportée par le guide d'AER car il énonce explicitement que l'on admet le fait que μ vérifie l'axiome d'invariance par isométrie.

Pour la suite de cette activité, nous admettrons que l'application μ est bien invariante par isométrie.

Les tâches $t_{4,1}$ et $t_{4,2}$ correspondent aux questions $Q_{4,1}$ et $Q_{4,2}$.

Pour répondre à la question $Q_{4,1}$, la sous-question $Q_{4,1,1}$ est induite par la visite de Λ_M^* : $Q_{4,1,1}$: à i fixé, que valent les nombres n_i et N_i de la définition des ensembles quarrables ?

La réponse $R_{4,1,1}$ peut être apportée :

$R_{4,1,1}$: Le nombre n_i est $100^i - (10^i + 10^i - 1)$. Le nombre N_i est $n_i + (10^i + 10^i - 1) + (10^i + 10^i + 1)$.

Puis, une nouvelle question apparaît :

$Q_{4,1,1,1}$: Comment montrer que les suites (u_i) et (v_i) convergent vers la même limite ?

L'identification d'une praxéologie d'analyse élémentaire (relié au type de tâche « déterminer la limite d'une suite »), et la mise en oeuvre d'une technique pour montrer que deux suites convergent vers la même limite permettent d'apporter la réponse

$R_{4,1,1,1}$: les suites (u_i) et (v_i) convergent vers 1. ²

2. En effet, $u_i = \frac{N_i}{100^i} = 1 - (\frac{2}{10^i} - \frac{1}{100^i})$ et $v_i = u_i + \frac{4}{10^i}$

La question $Q_{4,2}$ conduit à la sous-question

$Q_{4,2,1}$: Si A et B sont disjoints et dans \mathcal{Q} , comment montrer que $A \cup B$ est dans \mathcal{Q} et que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Après la visite de la définition de l'application μ , la formalisation attendue consiste donc à introduire, à i fixé, le nombre de carrés de niveau i qui sont inclus dans A , dans B , et dans $A \cup B$, ainsi le nombre de carrés de niveau i qui rencontrent A , B , et $A \cup B$. Ainsi, en notant a_i, b_i, d_i les carrés du quadrillage \mathcal{Q}_i qui sont dans A, B, D et A_i, B_i, D_i ceux qui rencontrent A, B, D , deux nouvelles questions émergent

$Q_{4,2,1,1}$: Comment comparer d_i et D_i avec a_i, b_i et A_i, B_i ?

$Q_{4,2,1,2}$: Comment montrer que $(\frac{d_i}{100^i})$ et $(\frac{D_i}{100^i})$ convergent vers la même limite ?

Les considérations sur les ensembles en jeu (A , B et $A \cup B$) permettent alors d'apporter la réponse

$R_{4,2,1,1}$: $a_i + b_i \leq d_i \leq D_i \leq A_i + B_i$ ³

La visite du théorème des suites adjacentes (que l'on va noter O_{adj}) permet d'apporter la réponse $R_{4,2,1,2}$:

$R_{4,2,1,2}$: les suites $(d_i/100^i)$ et $(D_i/100^i)$ convergent vers la même limite car elles sont adjacentes ⁴

Ainsi, $A \cup B$ est quarrable.

Enfin, la dernière question qui émerge est relative à la valeur de la limite commune des suites (d_i) et (D_i) :

$Q_{4,2,1,3}$: Comment déterminer la limite de (d_i) et (D_i) ?

La visite de la technique d'analyse réelle (de la praxéologie « déterminer la limite d'une suite ») pour déterminer la limite d'une suite par encadrement (O_{limite}) permet de mobiliser l'encadrement apporté par la réponse $Q_{4,2,1,1}$. Ainsi, en notant $\delta = \lim \frac{d_i}{100^i}$:

$R_{4,2,1,3}$: d'après l'encadrement trouvé,

$$0 \leq \frac{d_i}{100^i} - \left(\frac{a_i}{100^i} + \frac{b_i}{100^i} \right) \leq \frac{A_i}{100^i} + \frac{B_i}{100^i} - \left(\frac{a_i}{100^i} + \frac{b_i}{100^i} \right) = \frac{A_i - a_i}{100^i} + \frac{B_i - b_i}{100^i}$$

et donc $\delta = \mu(A) + \mu(B)$

La praxéologie que l'on développe ici est modélisée par :

P_{M,m_1}^*	
T_{M,m_3}^*	Montrer qu'une application est une mesure des aires
τ_{M,m_1}^*	On vérifie que l'application donnée vérifie les axiomes de la mesure des aires
$\theta_{M,m}^*$	Définition axiomatique de la mesure des aires
Θ_M^*	Axiomatique de la mesure des aires

3. En fait, les carrés de niveau i qui sont dans A le sont dans $A \cup B$, de même pour ceux dans B , et ne peuvent pas être comptés deux fois (puisque $A \cap B = \emptyset$, donc $a_i + b_i \leq d_i$).

4. $0 \leq \frac{D_i - d_i}{100^i} \leq \frac{A_i + B_i - (a_i + b_i)}{100^i} = \frac{A_i - a_i}{100^i} + \frac{B_i - b_i}{100^i}$ et les suites $(d_i/100^i)$ et $(D_i/100^i)$ sont de monotonie contraire

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

La chronogénèse est décrite par le question-gramme a priori (Figure 6.22).

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

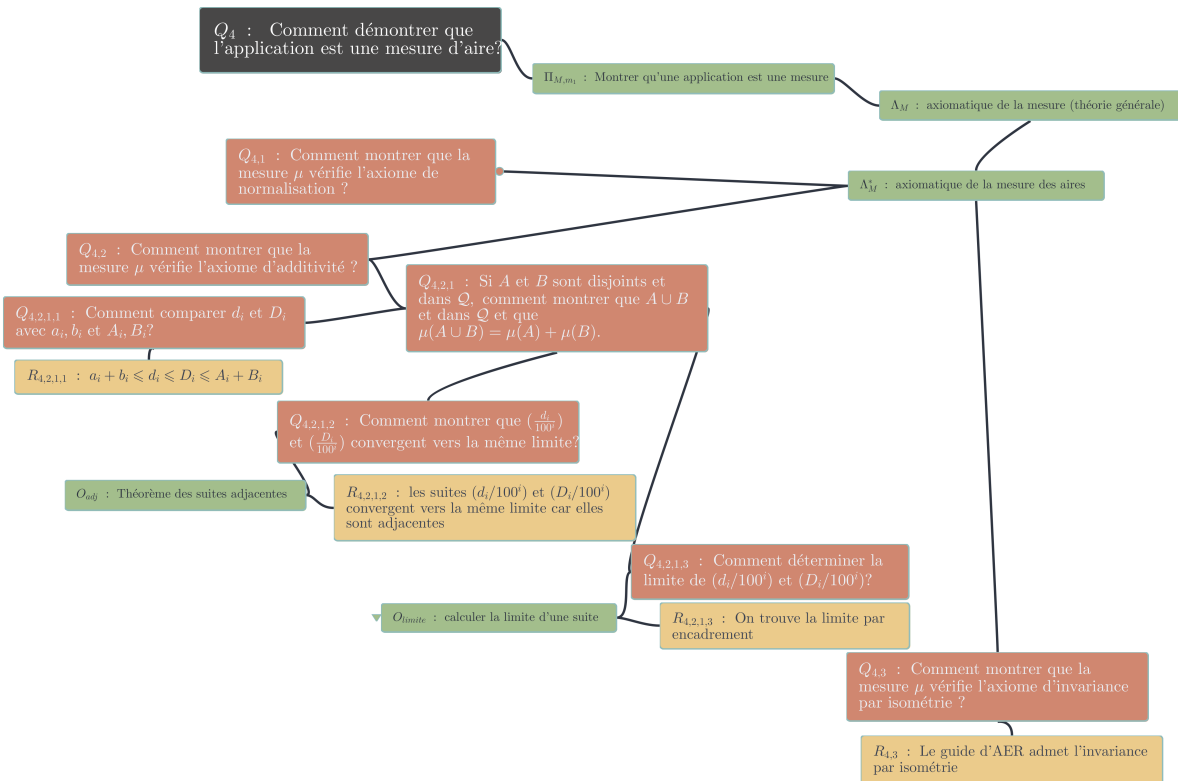


FIGURE 6.22 – Question-gramme a priori pour la question 4

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

La topogénèse est décrite par le schéma herbartien a priori :

$$[S(X; Y; Q_4) \Rightarrow M_4] \Rightarrow R_4^\heartsuit$$

avec $M_4 = \{Q_4, Q_{4,1}, Q_{4,2}, Q_{4,3}, Q_{4,1,1}, Q_{4,2,1}, Q_{4,2,1,1}, Q_{4,2,1,2}, R_{4,1}, R_{4,2}, R_{4,3}, R_{4,1,1}, R_{4,2,1}, R_{4,2,1,1}, R_{4,2,1,2}, \Pi_{M,m}, \Lambda_M, \Lambda_M^*, O_{adj}, O_{limite}\}$.

Nous modéliserons également les moments de l'étude. Le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique visée est de nouveau par le logos Λ_M^* avec la définition des ensembles quarrables du plan et la définition constructive de la mesure μ .

La question que l'on a modélisé, Q_4 , n'est pas explicitement posée dans le guide d'AER, et est peut-être hors du topos des étudiants. Poser cette question peut conduire à l'identification du type de tâche T_{M,m_1} (montrer qu'une application est une mesure). La confrontation des logos Λ_M et Λ_M^* peut alors s'opérer, puisqu'il s'agira de ne conserver que les axiomes encore valables avec la mesure des aires. Les sous-questions $Q_{3,1}, Q_{3,2}, Q_{3,3}$ explicitement posées risquent d'atrophier ce moment de l'étude.

Le temps d'élaboration de la technique τ_{M,m_1}^* va impliquer la mobilisation d'outils d'analyse, relatifs à la notion de limite, mais également des outils de dénombrement et de théorie des ensembles. Il est possible que cela soit des éléments bloquants à la réalisation du dernier moment de l'étude. Il nous semble que la reconnaissance du type de tâche τ_{M,m_1} peut être un moment peu vécu par les collectifs, sans que cela soit un élément bloquant. En effet, dans la réalisation de cette technique τ_{M,m_1}^* , il se joue une analogie avec la technique τ_{M,m_1} qui consiste en la vérification des axiomes (les axiomes de la mesure générale pour τ_{M,m_1} et ceux de la mesure des aires pour τ_{M,m_1}). En ce sens, nous considérons que la mise en oeuvre de τ_{M,m_1}^* s'apparente à une adaptation de τ_{M,m_1} .

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Évocation de T_{M,m_1} (ostensifs relatifs à à l'intégrale de l'université)
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Éléments de mise en oeuvre de τ_{M,m_1} (vérification des axiomes). Visite de Π_{M,m_1}
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	Mobilisation de la définition des ensembles quarrables et de l'application μ , Visite de Λ_M et Λ_M^* , question $Q_{4,1}, Q_{4,2}$ et $Q_{4,3}$
Élaboration de $\tau_{M,m}^*$ et validation par θ_M^*	recherche d'encadrements, calculs de limites

Analyse a priori de la deuxième tâche

La deuxième tâche, t_5 , est en fait une nouvelle instanciation du type de tâche $T_{L,a}^{\sim}$ (Réécrire la preuve d'une proposition qui mobilise la notion intuitive d'aire avec la norme de rigueur de l'université), que l'on va noter $t_{\pi,a}^{\sim}$ en référence à la tâche singulière $t_{\pi,a}$ (trouver une approximation de π à partir de l'aire du disque) que l'on a modélisé lors de l'étude praxéologique de l'intégrale au lycée. Ainsi, cette tâche revient à poser la question génératrice Q_5 : comment rendre rigoureux le raisonnement proposé dans la figure 6.18 avec l'axiomatique des aires ?

La première sous-question qui émerge est explicitement formulée dans le guide d'AER :

$Q_{5,1}$: quelles sont les propriétés de μ qui sont mobilisées dans le raisonnement présenté dans la figure 6.18 ?

ce qui conduit à la sous-question :

$Q_{5,1,1}$: où intervient la notion d'aire dans le raisonnement ?

Dans le raisonnement, des ostensifs qui renvoient à la notion d'aire permettent d'apporter une réponse à $Q_{5,1,1}$. En effet, l'ostensif « aire » est présent, mais également les ostensifs « polygone », « triangle », « isométriques » qui sont associés à la notion d'aire.

On obtient alors

$R_{5,1,1}$: La notion d'aire intervient dans le calcul de l'aire des polygones P_n et Q_n puis sur le fait que le disque est quarrable d'aire π .

Une fois cette identification effectuée, la visite de l'oeuvre Λ_M^* permet d'apporter la réponse à la question $Q_{5,1}$:

$R_{5,1}$: Les propriétés de la mesure μ mobilisées sont la mesure du rectangle, l'invariance par isométrie, et l'additivité de la mesure.

En effet, Le triangle OAB a pour aire de Lebesgue le rectangle de côté AC et OC (invariance par isométrie) donc qui vaut $\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})$ (mesure du rectangle).

Comme le polygone P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB , et que l'aire de Lebesgue est invariante par isométrie, on trouve bien

$$\mu(P_n) = n\mu(OAB) = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

De même pour le calcul de l'aire de Lebesgue de Q_n

Enfin, il reste la caractérisation des ensembles quarrables. Ainsi, une nouvelle question émerge :

$Q_{5,2}$: Quelles propriétés de μ peuvent justifier que le disque est quarrable d'aire de Lebesgue π ?

La visite de Λ_M^* montre qu'il n'y a pas d'axiome qui permette de justifier directement cette caractérisation. En revanche, le guide d'AER suggère de formuler une proposition générale qui peut « être tenu comme un nouvel axiome », puis de le démontrer après la validation de l'énoncé par l'enseignant.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Une réponse possible est :

$R_{5,2}$: Une propriété de μ qui peut justifier la dernière assertion est : Une surface S est quarrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une surface quarrable I intérieure à D et une surface quarrable E extérieure à D telles que $\mu(E) - \mu(I) < \varepsilon$.

Une autre formulation est possible :

$R'_{5,2}$: Une propriété de μ qui peut justifier la dernière assertion est : Une surface S est quarrable si et seulement si, il existe deux suites de polygones (P_n) et (Q_n) tel que, pour tout n , P_n est intérieur et Q_n extérieur à D telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0$.

Pour justifier cette proposition générale, on mobilise la notion de limite et la définition des ensembles quarrables du plan :

Soit $\varepsilon > 0$. Soient E et I deux parties quarrables telles que

$$I \subset D \subset E$$

et

$$\mu(E) - \mu(I) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient (U_i) et (V_i) les suites associées à I , (U'_i) et (V'_i) les suites associées à E et (u_i) et (v_i) les suites associées à D .

Il existe un entier i tel que

$$V_i - U_i \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$V'_i - U'_i \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

De plus, $U_i \leq u_i \leq v_i \leq V'_i$. Enfin,

$$v_i - u_i \leq V'_i - U_i = (V'_i - U'_i) + (U'_i - V_i) + (V_i - U_i)$$

$$v_i - u_i \leq \frac{\varepsilon}{3} + \mu(E) - \mu(I) + \frac{\varepsilon}{3}$$

et enfin

$$v_i - u_i \leq \varepsilon.$$

La réponse $R_{5,2}^\diamond$ doit être validée par l'enseignant, ce qui est indiqué par le symbole \diamond .

Ainsi, le logos Λ_M^* contient un nouvel élément technologique avec la caractérisation des ensembles quarrables du plan.

La chronogénèse est décrite par le question-gramme a priori sur la figure 6.23.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

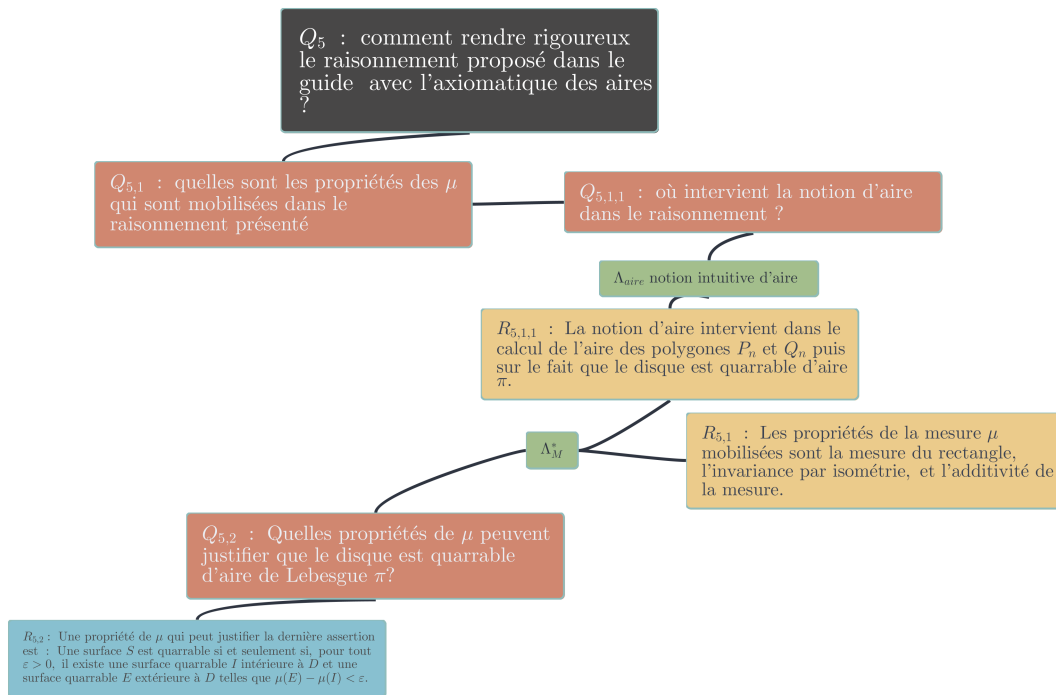


FIGURE 6.23 – Question-gramme a priori pour la question 5

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

La topogénèse est décrite par le schéma herbartien pour la question 5 :

$$[S(X; Y; Q_5) \Rightarrow M_5] \Rightarrow R_5^\heartsuit$$

avec $M_5 = [Q_5, Q_{5,1}, Q_{5,1,1}, Q_{5,2}, R_{5,1}, R_{5,1,1}, R_{5,2}^\diamond, \Pi_{M,m}, \Lambda_M, \Lambda_M^*, O_{limite}]$.

Enfin, nous indiquons les différents moments de l'étude pour une praxéologie de type P^\sim .

Moment de l'étude	Indicateurs
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire.	Identification de la notion d'aire dans la démonstration, $Q_{5,1,1}$
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_L^\sim	Identification des propriétés de μ mobilisées et formulation d'un besoin d'une caractérisation des ensembles quarrables
Élaboration de τ_L^\sim et validation par θ_L^\sim	Production de R_3^\heartsuit , et formalisation de $R_{5,2}$ qui vient enrichir Λ_M^\sim

Analyse a priori de la troisième tâche

La troisième tâche consiste à démontrer que l'ensemble limité par la courbe d'une fonction croissante et positive, puis celui limité par la courbe d'une fonction continue positive est un ensemble quarrable.

Le guide d'AER formalise l'ensemble à considérer :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

La première question qui se pose est donc :

Q_6 : Comment démontrer que Ω est quarrable dans le cas où f est croissante et positive ?

et la sous-question, avec un niveau de généralité supérieur :

$Q_{6,1}$: Comment démontrer qu'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 est quarrable ?

L'oeuvre Λ_M^* (dont la partie mathématique coïncide avec Λ_L^*) contient la caractérisation des ensembles quarrables, et donc donne une réponse estampillée :

$R_{6,1}^\diamond$: Il suffit de montrer que l'ensemble vérifie la caractérisation des ensembles quarrables.

Une nouvelle question est alors produite :

$Q_{6,1,1}$: Comment obtenir deux suites de polygones (P_n) et (Q_n) comme dans la caractérisation des ensembles quarrables ?

Pour apporter une réponse à cette question, on peut faire le lien avec la praxéologie P_{R,r_1} du modèle relatif à l'intégrale de Riemann : montrer qu'une fonction est Riemann-intégrable, et l'instanciation t_{R,r_1} du type de tâches T_{R,r_1} : montrer que les fonctions croissantes sont Riemann-intégrable. La mise en oeuvre de la technique τ_{R,r_1} donne :

Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$. Pour tout n non nul, on définit les fonctions φ_n et ψ_n respectivement par $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + k \frac{b-a}{n})$ et $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + k \frac{b-a}{n})$. On a bien, pour tout n dans \mathbb{N}^* , $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ (car f est croissante) et $\int_a^b \psi_n - \varphi_n \rightarrow 0$.

La confrontation du bloc du logos Λ_R de P_{R,r_1} avec Λ_M^* conduit à une nouvelle question :

$Q_{6,1,1,1}$: Comment adapter la preuve de la Riemann-intégrabilité des fonctions croissantes ?

et à sa réponse qui s'obtient via une formalisation des ensembles en jeu et en reconnaissant dans la preuve ci-dessus des sommes de mesure d'aire de rectangles :

$R_{6,1,1,1}$: Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on considère les unions de rectangles

$$r_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a + k \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + (k+1) \frac{b-a}{n}, 0 \leq y \leq f(a + k \frac{b-a}{n})\}$$

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

et

$$R_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a + k \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + (k+1) \frac{b-a}{n}, f(a + (k+1) \frac{b-a}{n})\}$$

pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

En posant $P_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} r_k$ et $Q_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \subset \Omega \subset Q_n$$

et

$$\mu(Q_n) - \mu(P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

On en conclut alors que Ω est bien quarrable.

La réponse $R_{6,1,1,1}$ contient en fait la réponse $R_{6,1,1}$ que l'on peut formuler par :

$R_{6,1,1}$: on cherche à adapter la condition de Riemann-intégrabilité

Le question-gramme a priori pour la question 6 est donné par la figure 6.24

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

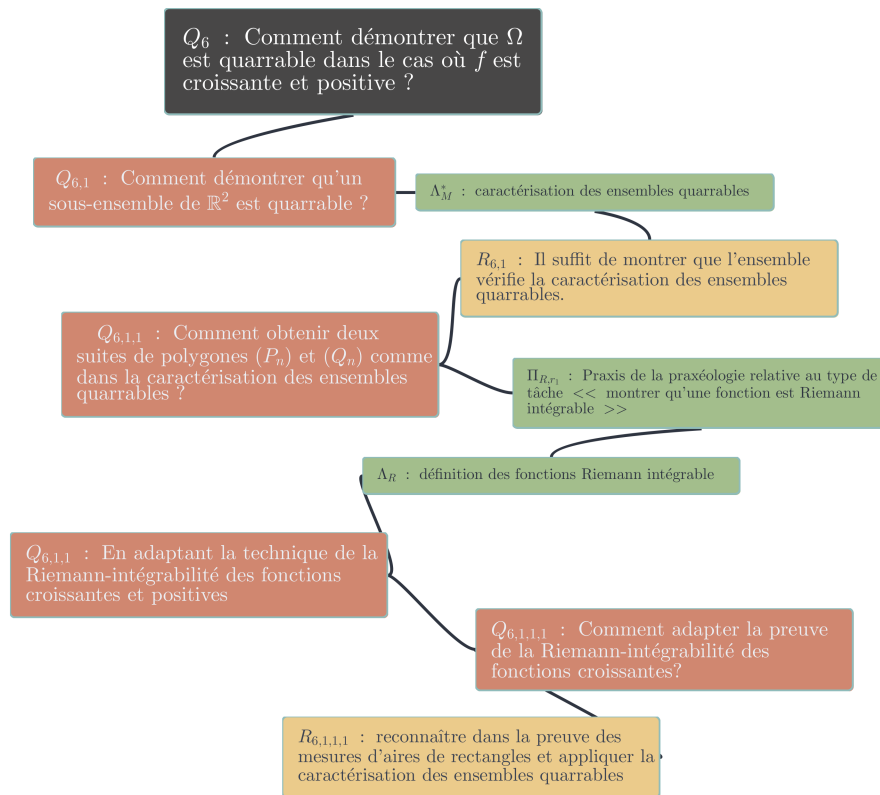


FIGURE 6.24 – Question-gramme a priori pour la question 6

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

La topogénèse est décrite par le schéma herbartien pour la question 6 :

$$[S(X; Y; Q_6) \Rightarrow M_5] \Rightarrow R_6^\heartsuit$$

avec $M_6 = \{Q_6, Q_{6,1}, Q_{6,1,1}, Q_{6,1,1,1}, R_{6,1}^\diamond, R_{6,1,1}, R_{6,1,1,1}, \Pi_{R,r_1}, \Lambda_R, \Lambda_M^*\}$.

Enfin, les différents moments de l'étude pour une praxéologie de type P^* sont décrits dans le tableau ci-dessous. Le moment de l'identification du type de tâche T_{R,r_1} peut être favorisé par le passage au cadre graphique, de nature à réactiver la praxéologie P_{R,r_1} .

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif ω_R	Évocation de T_{R,r_1} , présence de l'ostensif « Riemann-intégrable », représentation graphique
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Éléments de mise en oeuvre de τ_{R,r_1} : écriture de sommes de Riemann ou de Darboux associées à f
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	Mobilisation de la définition des ensembles quarrables et de l'application μ , Visite de Λ_M et Λ_M^*
Élaboration de $\tau_{M,m}^*$ et validation par θ_M^*	Traduction des sommes de Riemann en termes de mesure d'aire de rectangles

6.4.5 Les praxéologies de Klein et les moments de l'étude

L'analyse a priori que nous avons menée nous a conduit à formaliser de nouvelles praxéologies autour d'un logos, Λ_M^* . En effet, notre organisation mathématique contient deux types de praxéologies :

- Le premier, de type P^* se fonde sur une praxéologie existante dans l'équipement praxéologique des étudiants et rencontrée dans l'institution universitaire, dont nous modifions certaines composantes. Les praxéologies du type P^* s'appuient donc sur des praxéologies déjà construites.
- Le deuxième, de type P^\sim se fonde sur une praxéologie existante dans l'institution du lycée mais pour laquelle le logos sera augmenté

La schéma de la figure 6.25 illustre cette construction. Sur ce schéma, le premier bloc indique une praxéologie issue de l'institution université. La praxis $\Pi_{M,m}$ fonde une nouvelle praxéologie, où le logos Λ_M a été remplacé par Λ_M^* . La flèche sur le schéma, indique que c'est la praxis qui fonde la praxéologie. Cela est illustré par le passage de la praxéologie P_{M,m_3} à la praxéologie P_{M,m_3}^* , par exemple. Le deuxième

bloc indique une praxéologie issue de l'institution lycée. La praxis Π_a (par exemple avec les tâches $t_{TFA,a}$ et $t_{\pi,a}$) fonde une nouvelle praxéologie dans laquelle le logos a été augmenté par rapport au logos Λ_{aire} . Ce logos contient le logos Λ_M^* pour sa partie mathématique, mais contient aussi la notion de preuve à l'université et la notion paramathématique de rigueur. Le type de tâche est également modifié puisqu'il s'agit de ré-écrire une preuve existante avec un niveau de rigueur correspondant à ce qui est attendu à l'université. Ceci est illustré par le passage de $P_{L,a}$ à $P_{L,a}^{\sim}$.

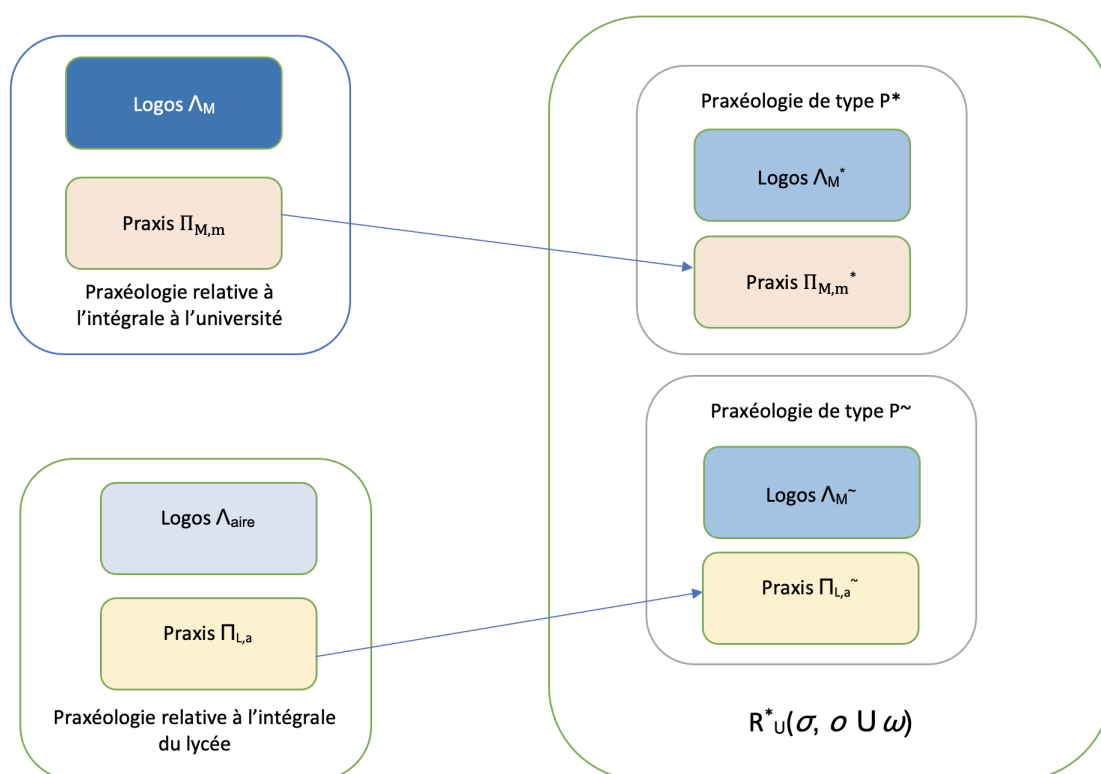


FIGURE 6.25 – Représentation des praxéologies de Klein P^* et P^{\sim}

Nous nommerons ces praxéologies des *Praxéologies de Klein*.

De plus, dans notre analyse a priori, nous avons été amené à adapter les moments de l'étude.

Dans le chapitre 2, nous avons explicité le modèle des temps de l'étude d'une praxéologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ introduit par Chevallard (2002), articulé autour de six moments :

- Groupe I (Activités d'étude et de recherche)
 - Moment de la première rencontre avec T

- Moment de l'exploration de T de de l'émergence de la technique τ ;
- Moment de la construction du bloc technologico-théorique $[\theta; \Theta]$;
- Groupe II (synthèse)
 - Moment de l'institutionnalisation
- Groupe III (exercices et problèmes)
 - Moment du travail de l'organisation mathématique (en particulier de la technique)
- Groupe IV (Contrôles)
 - Moment de l'évaluation

Comme l'organisation mathématique visée repose sur des praxéologies existantes (dans lesquelles nous avons modifié certains éléments) nous avons adapté ce modèle de l'étude pour notre expérimentation.

Pour l'étude d'une praxéologie de type P^* , le moment de la première rencontre avec T^* , est, en fait, celui avec le logos : nous avons choisi d'introduire l'activité par la donnée de l'axiomatique des aires. Ainsi, nous identifions le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique.

Le deuxième moment de l'étude consiste à identifier le type de tâche du modèle praxéologique dominant relatif à la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. Une fois le type de tâche identifié (ici $T_{M,m}$), le troisième temps de l'étude consiste à tenter la mise en oeuvre d'une technique (ici $\tau_{M,m}$), ce qui, dans le contexte de la mesure des aires, peut ne pas s'avérer possible. Ce moment engendre alors le quatrième moment de l'étude : la confrontation des logos Λ_M et Λ_M^* . Dans ce moment, il s'agit de discriminer les propriétés de la mesure (au sens de la théorie de la mesure) qui restent valables dans le cadre de la théorie des aires. Cette confrontation vise l'adaptation de la technique $\tau_{M,m}$ au contexte de la théorie des aires. Enfin, le dernier moment du groupe 1 constitue celui de l'élaboration de τ_M^* et de la validation par θ_M^* .

Après la réalisation de ces quatre moments, nous avons prévu un temps d'institutionnalisation dans un format monumentaliste : il s'agit, dans ce moment, de décrire les oeuvres visitées lors de l'étude de l'organisation mathématique. Ainsi, nous afficherons avec un diaporama les techniques $\tau_{M,m}$ issues du MPD relatif à la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue, et discuterons collectivement de la validité de ces techniques dans le cadre de la mesure des aires. Nous pointerons ainsi les propriétés spécifiques de la mesure qui se transposent au cas de la mesure des aires, et celles qui ne se transposent pas. Enfin, nous afficherons les adaptations des techniques τ_M de sorte à produire τ_M^* , que nous validerons avec les éléments de θ_M^* .

Le troisième groupe, celui consacré au travail de la technique, est laissé en temps libre, en dehors de la séance. Les propriétés à démontrer pourront être admises pour la suite de l'activité. Nous ne prévoyons pas de temps d'évaluation.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

Nous résumons donc notre modèle des moments de l'étude par le tableau suivant :

Moments de l'étude pour une praxéologie type P^*	
Groupe I	Moment de la première rencontre avec l'OM, via le logos
	Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université (Riemann ou Lebesgue)
	Mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$
	Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*
	Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*
Groupe II	Institutionnalisation
Groupe III	Travail de la technique

Pour l'étude d'une praxéologie de type P^\sim , en l'occurrence ici pour nous $P_{L,a}^\sim$ (dont on a vu deuxinstanciations) le moment de la première rencontre est de nouveau via le logos : en plus de l'axiomatique des aires et le logos Λ_M^* , le texte de Blanché fixe le contrat didactique et le rôle des axiomatiques dans l'activité mathématique. Le logos contient, de plus, des éléments sur la notion de preuve à l'université. La preuve à ré-écrire (la preuve du TFA extraite d'un manuel, ou bien la méthode d'Archimède pour l'aire du disque) est donnée. Ainsi, le deuxième moment va consister à lire la preuve proposée. Cette preuve est valide dans le cadre de l'institution lycée et s'appuie sur la notion intuitive d'aire, et les propriétés mobilisant l'aire sont lues sur une figure.

Le troisième moment va consister en la confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_M^\sim . Les éléments de logos sur la preuve, et la notion de rigueur à l'université, vont conduire à identifier la présence de la notion intuitive d'aire, et donc à mobiliser les éléments de Λ_M^* , via une formalisation, afin de permettre la ré-écriture de la preuve. Enfin, le quatrième temps va consister en la ré-écriture de la preuve, et de sa validation par θ_M^\sim .

La phase d'institutionnalisation va consister en la levée des implicites de la preuve en mettant en lumière la présence de la notion intuitive d'aire, et le rôle joué par l'axiomatique dans la ré-écriture de la preuve.

Notre modèle des moments de l'étude pour les praxéologies de type P^\sim est donc :

Moments de l'étude pour une praxéologie type P^\sim	
Groupe I	Moment de la première rencontre avec l'OM, via le logos
	Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire.
	Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_M^\sim
	Élaboration de $\tau_{L,a}^\sim$ et validation par θ_M^\sim
Groupe II	Institutionnalisation
Groupe III	Travail de la technique

6.4.6 Conclusion du travail d'ingénierie

L'organisation mathématique en jeu dans l'AER s'articule autour du logos Λ_M^* . Ce logos permet de fonder l'intégrale du lycée et de justifier, avec la rigueur de l'université, la preuve attendue du théorème fondamental de l'analyse du lycée.

Le moment de la première rencontre avec l'OM s'effectue à partir de l'axiomatique de la mesure des aires. L'étude permet ensuite aux étudiants d'enrichir le logos et d'apporter de nouveaux éléments à Λ_M^* : la croissance de la mesure d'aire, la mesure des points et des segments, des rectangles, la définition constructive de la mesure des aires, la caractérisation des ensembles quarrable. Ce logos peut permettre la réalisation de la tâche $t_{TFA,a}$ du type T^\sim (à travers l'étude de la question 3). Une nouvelle instantiation de ce type de tâche a lieu à la deuxième séance (étude de la question 5), de sorte à procéder à un travail de la technique.

Dans notre analyse a priori, nous avons mis en lumière les liens entre les différentes praxéologies rencontrées dans l'AER. Cette analyse a priori nous a conduit à introduire la notion de praxéologies de Klein. Par rapport à la modélisation du plan de Klein proposée par Winsløw, nous avons finement décrit ces liens au niveau des blocs praxis et logos de praxéologies de lycée : d'un côté, les praxéologies de type P^* se fondent sur une praxis universitaire mais opèrent un changement de logos avec le remplacement de Λ_M par Λ_M^* . Les tâches t_1 , t_2 , t_3 et t_6 sont des tâches de ce type. D'une autre côté, nous avons modélisé des praxéologies de type P^\sim . Ces praxéologies se fondent sur un bloc praxis issu du modèle praxéologique dominant du lycée. Le type de tâche consiste à ré-écrire la preuve d'une proposition mobilisant la notion intuitive d'aire. Les tâches t_3 et t_5 en sont des instantiations.

L'étude de la mésogénèse a priori lors du développement de ces praxéologies (à partir de l'étude des différentes questions de l'AER) fait apparaître finement les éléments de différentes composantes des praxéologies issues des modèles praxéologiques relatifs au lycée et à l'université : d'abord les éléments de praxéologies de l'organisation mathématique locale autour de la notion de mesure à l'université (pour les tâches t_1 et t_2), mais également des blocs du logos pour adapter les techniques, puis des éléments de praxis de $P_{L,a}$. Le schéma herbartien montre bien la mobilisation de ces différents éléments dans le milieu. Nous y avons aussi précisé les oeuvres visitées issues de praxéologies non modélisées (par exemple des praxéologies du domaine de l'analyse réelle et de la construction des domaines de nombres).

Cette articulation entre différentes composantes de praxéologies relatives à l'intégrale du lycée et de l'université (matérialisée par les oeuvres qui émergent dans le milieu) nous indique que le développement de ces praxéologies de Klein doit, pour nous, engendrer le nouveau rapport $R_U(\sigma_t, o \cup \omega)$.

Nous avons aussi décrit les moments de l'étude qui doivent être vécus par les collectifs. Le caractère spécifique de notre organisation mathématique avec des praxéologies de type P^* et P^\sim nous a conduit à modéliser ces différents moments de sorte à les adap-

ter à l'étude des praxéologies de Klein. En effet, les techniques en jeu sont disponibles, et le travail d'élaboration de l'organisation mathématique requiert une dialectique entre l'adaptation d'une praxis connue et la mise en regard des deux blocs technologico-théoriques du lycée et de l'université.

Les données issues de l'expérimentation seront analysés avec les mêmes outils : pour chacun des groupes d'étudiants, nous construirons un question-gramme a posteriori, le schéma herbartien, et décrirons les moments de l'étude vécus. Cela va nous permettre de valider le dispositif qui vise le développement des praxéologies de Klein ou, à défaut, de mettre en lumière certains points de blocage dans leur développement.

6.4.7 Analyse a posteriori

L'expérimentation a été menée avec un groupe de 16 étudiants de première année de Master MEEF, de l'université de Montpellier. Le contexte institutionnel de cette expérimentation est une unité d'enseignement de didactique et d'épistémologie du second semestre. Cette UE a pour vocation de travailler certains éléments d'épistémologie et de didactique de contenus particuliers issus des programmes du secondaire. Les deux séances concernées par l'expérimentation sont donc affichées comme des séances portant sur l'intégration.

L'expérimentation a eu lieu dans le contexte particulier de la pandémie de covid-19, en avril-mai 2021. A ce moment là, les enseignements à l'université étaient dispensés à distance, et les étudiants étaient confinés à leur domicile, seuls. L'expérimentation a été répartie sur 2 séances de 3h. Pour chacune des séances, les étudiants avaient à leur disposition une "fiche-étudiant" (le guide d'AER) comportant les éléments décrits dans l'analyse a priori. Nous avons organisé un travail collaboratif avec différents outils fournis par notre institution :

- La plate-forme BigBlueButton (BBB) permet la création de salles virtuelles : nous avons ainsi créé une salle "commune", réservée aux phases de mise en commun et de dévolution, puis 4 salles individuelles dans lesquelles pouvaient discuter les groupes d'étudiants. Toutes les salles étaient enregistrées, et nous avons retranscrit les échanges entre les étudiants et les interventions de l'enseignant (annexe)
- La plate-forme googleDoc : chaque groupe disposait d'un document partagé sur googledoc et avait pour consigne d'y reporter les traces de travail. Ces documents sont donnés en annexe.

Selon la méthodologie de l'ingénierie didactique, nous allons analyser, avec les mêmes outils, les données empiriques recueillies lors de l'expérimentation avec les étudiants. Il s'agit de suivre l'évolution des milieux que les groupes d'étudiants, dotés d'un équipement praxéologique acquis par l'étude de l'intégrale durant les années de licence, constituent pour la réalisation des tâches proposées.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Pour traiter ces données, nous allons reporter certains échanges saillant dans un tableau à deux colonnes : la colonne de gauche comportera les éléments de discours de groupes et des éléments de traces écrites, et la colonne de droite comportera les questions posées, les reformulations éventuelles reliées à l'analyse a priori, et les rôles joués par les individus dans la dynamique du travail de groupes.

Nous produirons ainsi un schéma herbartien correspondant à chaque système didactique généré par la question génératrice : ces sous-systèmes didactiques correspondent à chaque sous-groupe A, B, C et D et seront notés $S(X_A, Y, Q_i)$, $S(X_B, Y, Q_i)$, $S(X_C, Y, Q_i)$, $S(X_D, Y, Q_i)$ et les individus du groupe A seront notés A_1, A_2, A_3 et A_4 et de même pour les autres groupes. Dans ces systèmes didactiques, l'aide à l'étude est assumée par le professeur, noté P . A chaque question Q_i le système didactique du groupe j produira des sous-questions que nous noterons $Q_{i,k}^j$.

Enfin, nous réaliserons un question-gramme a posteriori à l'issue de chaque phase de mise en commun, dans lequel nous indiquerons les questions soulevées par les groupes pendant les temps de travail individuel.

La phase de mise en commun joue le rôle d'institutionnalisation, conformément au modèle des moments de l'étude. Ainsi, les questions prévues dans l'analyse a priori sont explicitées par l'enseignant sur un diaporama, et les réponses aux questions également. Nous analyserons les questions que suscite la confrontation à des éléments de praxéologies du MPR relatif à la théorie de la mesure, et en rendrons compte dans l'analyse a posteriori.

La comparaison des question-grammes et des schémas herbartiens a priori et a posteriori permettra in fine de valider le dispositif, ou bien d'envisager de nouvelles évolutions à prévoir pour favoriser le développement des praxéologies P^* et P^\sim .

Nous limiterons notre analyse a posteriori à la première séance, c'est à dire aux questions 1, 2 et 3. Notre projet consiste à déceler d'éventuels points de blocage pour le développement des praxéologies de Klein que l'on a identifié. La première séance consiste au développement de deux praxéologies de type P^* et d'une praxéologie de type P^\sim . L'analyse a priori de la séance 1 nous permettra d'obtenir de premiers résultats sur le développement de ces praxéologies.

Analyse a posteriori de la première séance

La première séance vise au développement d'une organisation mathématique autour du type de tâche que nous avons problématisé sous la forme de la question Q_0 : Comment fonder l'intégrale du lycée sur une axiomatique des aires adaptée à l'enseignement secondaire ? Le développement praxéologique se déroule autour des trois tâches décrites dans l'analyse a priori. Nous présentons donc le travail de chacun des groupes.

Le travail est présenté par l'enseignant P . Il présente ainsi l'organisation du dispositif, puis le but de la séance. Il insiste sur la nécessité de formuler les questions que

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

se posent les groupes, et de noter chacune de ces questions ainsi que les traces de recherches dans les fichiers partagés.

Le temps d'exploration de chaque tâche est de 30 minutes. L'enseignant peut intervenir dans chacun des groupes dans le rôle d'aide à l'étude. A l'issue de chaque temps d'exploration se déroule donc la phase d'institutionnalisation, en commun.

Nous rendons compte du travail des 4 groupes, à l'issue de la phase de dévolution.

Premier groupe - Première question -

Les quatre étudiants du groupe A sont donc notés A_1, A_2, A_3 et A_4 . Le professeur, seule aide à l'étude, est noté P .

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>A_1 : déjà moi, une mesure diffuse, je ne sais pas ce que c'est</p> <p>A_3 : C'est écrit en dessous... en fait, il faut montrer que la mesure d'un point est nulle.</p> <p>A_2 : C'est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}. Il faut montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse.</p> <p>A_1 : ah oui, là ça me parle mieux.</p>	<p>$Q_{1,1}^A$: qu'est-ce qu'une mesure diffuse ?</p> <p>A_3 apporte la réponse $R_{1,1}^\circ$. Moment de découverte</p> <p>A_2 utilise l'ostensif « mesure de Lebesgue » pour réactiver une praxéologie du MPR relatif à la théorie de la mesure.</p> <p>Le type de tâche T_{M,m_3} est identifié et va favoriser le passage au moment d'élaboration de la technique</p>
<p>A_2 : OK. Il faut faire par l'absurde. On va supposer que la mesure d'un point c'est epsilon. Une aire c'est un ensemble de points.</p> <p>A_1 : je suis en train de me demander s'il ne faut pas faire avec les convergences.</p>	<p>l'ostensif "il faut faire par l'absurde" indique la technique $\tau_{M,m_3,1}$. Élaboration de la technique</p> <p>A_1 propose une nouvelle technique et résiste au raisonnement par l'absurde. Nous faisons l'hypothèse que l'ostensif "convergence" renvoie à la technique de limite décroissante</p> <p>$Q_{1,2}^A$: « peut-on mettre en oeuvre la technique $\tau_{M,m_3,2}$ »</p>
<p>A_2 : en fait non, avec ce qui est dit en introduction, ce qui est donné sur la mesure devrait suffire</p> <p>A_1 : ah ok, c'est le truc de base</p> <p>A_2 : On a la mesure de l'union qui est la somme des mesures</p>	<p>Constitution de l'environnement technologico-théorique</p> <p>A introduit un élément de $\theta_{M,m}^*$</p>
<p>A_2 : On avait fait en L3 cet exercice avec Lebesgue. (s'adresse à A_3) Tu t'en souviens de cet exercice ?</p> <p>A_3 : Oui, je m'en souviens. Je ne saurai pas le refaire mais je m'en souviens.</p>	<p>Le système didactique cherche à introduire dans le milieu l'oeuvre $\tau_{M,m,3}$.</p>
<p>A_1 : mais c'était pas énoncé comme ça...</p> <p>A_2 : oui, c'était guidé. Il fallait montrer que c'était invariable par isométrie.</p>	<p>Mise en lumière d'un élément de $\theta_{M,m}^*$: l'invariance par isométrie.</p>
<p>A_2 : Du coup, on ne connaît que la mesure du carré, pas de l'intervalle. On est obligé de travailler avec la dimension 2.</p>	<p>La technique mise en oeuvre dans le MPR de la théorie de la mesure portait sur la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}, ce qui confirme la visite de l'oeuvre $\Pi_{M,m,3}$.</p>

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

<p>A_2 : comme tu connais la mesure du carré est 1, tu supposes que la mesure du point est supérieure à 1...et on va utiliser une isométrie! On peut utiliser les translations ?</p>	<p>Retour à la preuve par l'absurde et ainsi la mise en oeuvre d'une technique τ_{M,m_3}.</p> <p style="background-color: #e0e0e0;">$Q_{1,3}^A$: peut-on utiliser les translations ?</p>
<p>P : Avez-vous le droit d'utiliser l'additivité ?</p> <p>A_2 : non, car l'intersection n'est pas vide.</p>	<p>intervention de l'enseignant par la question $Q_{1,4}^A$: dans la technique mise en oeuvre, peut-on utiliser l'additivité ?</p> <p>A_2 apporte la réponse $R_{1,4}^A$ grâce à l'élément théorique de $P_{M,m}^*$: l'additivité de la mesure des aires</p>
<p>A_1 : est-ce qu'il faut pas faire tous les cas ?</p> <p>A_2 : c'est fini, la mesure est la même sur tout ton ensemble. On translate.</p>	<p style="background-color: #e0e0e0;">$Q_{1,5}^A$: tous les points ont-ils même mesure ?</p> <p>A_2 donne la réponse $R_{1,5}$.</p>
<p>A_2 : On va supposer que la mesure de (1,1) est $\varepsilon > 0$.</p> <p>A_1 : je me demande s'il ne faut pas utiliser la continuité du carré ?</p> <p>A_2 : c'est à dire ?</p> <p>A_1 : ...continu ...avec des points très très proches.</p>	<p>Nouvelle tentative de mise en oeuvre de la technique $\tau_{M,m_3,1}$.</p> <p style="background-color: #e0e0e0;">$Q_{1,6}^A$: peut-on utiliser la continuité du carré ?</p> <p>La phase d'étude s'arrête là, et le groupe produit un écrit</p>

La chronogénèse est décrite avec le question-gramme de la Figure 6.26

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

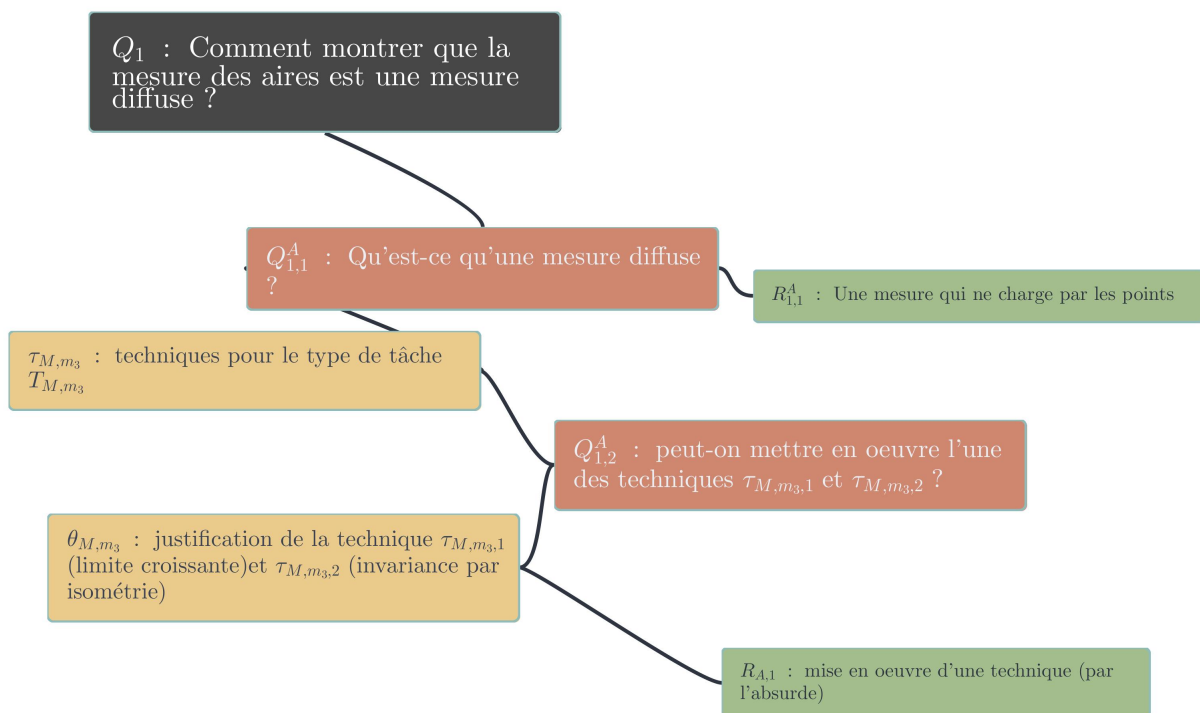


FIGURE 6.26 – Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe A

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

Soit $\varepsilon > 0$

$\mu(\{1,1\}) = \varepsilon$ donc $\mu(\{1,1\}) + \mu(\{3/2,3/2\}) = 2\varepsilon$ car $\mu(s(\{3/2,3/2\})) = \mu(\{3/2,3/2\}) = \mu(\{1,1\})$

Donc $\mu(\{3/2,3/2\}) = \varepsilon$ par ce raisonnement tous les points ont une mesure ε
OR notre figure C à un nombre infini de point ON pose $n \in \mathbb{N}$ tel que le n soit plus grand que $1/\varepsilon$

on a alors pour tout $i \in [0,1[$, $\mu(\text{Union } i=1 \text{ à } n \{i,i\}) =$ somme de $i=1$ à n des $\{i,i\}$ qui est plus grand que 1 mais qui est contenue dans le carré or, le carré à une mesure de 1.

Donc il y a une contradiction d'où $\mu(\{1,1\}) = 0$

FIGURE 6.27 – Production d'une technique par le groupe 1

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Le schéma Herbartien pour ce système est :

$$[S(X_A; P; Q_1) \Rightarrow M_{A,1}] \rightsquigarrow R_{1,A}^\heartsuit = \tau_{M,m_3}^*$$

avec $M_{A,1} = [Q_1, Q_{1,1}^A, Q_{1,2}^A, Q_{1,3}^A, Q_{1,4}^A, R_{1,1}^{A,\diamond}, R_{1,2}^A, R_{1,3}^A, R_{1,4}^A, T_{M,m_3}, \tau_{M,m_3}, \theta_{M,m}]$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Évocation de T_{M,m_3} (mesure de Lebesgue)
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Éléments de mise en oeuvre de $\tau_{M,m_3,1}$ ou de $\tau_{M,m_3,2}$. Visite de Π_{M,m_3}
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	$Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ et $Q_{1,3}$; oeuvre $\theta_{M,m}$ et $\Theta_{M,m}$: Le groupe interroge la technologie de $\tau_{M,m_3,2}$ et identifie deux éléments de θ_M^* (l'additivité finie et l'invariance pas translation)
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Production de R_1^\heartsuit valide sur le document partagé.

La dynamique de ce groupe a été portée par les échanges de trois étudiants, A_1 , A_2 et A_3 . A_4 n'a pas participé aux débats.

L'ostensif « diffuse » a favorisé l'identification du type de tâche T_{M,m_3} (démontrer une propriété de mesure spécifique) du MPR relatif à la théorie de la mesure par le collectif (comme l'indique l'intervention de A_2 "Il faut montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse", qui est une instantiation de T_{M,m_3}). Deux techniques ont été explorées : la technique $\tau_{M,m_3,1}$ (par l'absurde) et la technique $\tau_{M,m_3,2}$ (preuve directe) ce que nous interprétons comme la visite de l'oeuvre Π_{M,m_3} , praxis de la praxéologie P_{M,m_3} .

La mise en oeuvre de la technique $\tau_{M,m_3,2}$ a suscité une question du collectif ("je suis en train de me demander s'il ne faut pas faire avec les convergences") et la réponse apportée par A_2 ("ce qui est dit en introduction devrait suffire, on a la mesure de l'union qui est la somme des mesures") laisse penser que la σ -additivité, élément de θ_{M,m_3} , a été identifiée comme un élément déterminant dans la mise en oeuvre de $\tau_{M,m_3,2}$. Nous relevons ici une mise en regard des technologies $\theta_{M,m}$ (technologie de la praxéologie "démontrer une propriété de mesure spécifique" du MPR de la théorie de la mesure, qui contient l'axiomatique de la mesure dont la σ -additivité) et $\theta_{M,m}^*$. Mais cette technique ne sera pas complètement mise en oeuvre.

Ici, la dynamique du groupe a permis cette discussion sur les blocs technologiques.

La première tentative de démonstration par l'absurde, n'a pas abouti à une technique valide (6.28), et l'intervention de l'enseignant P avec la question $Q_{1,4}^A$ a permis

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

on a $[0,1[*[0,1[$ et $\{1,1\}$ a une intersection vide.
 donc $\mu([0,1[x[0,1[\cup \{1,1\}) = \mu([0,1[*[0,1[) + \mu(\{1,1\})$
 on suppose que $\mu\{1,1\} > 0$.
 donc $\mu([0,1[x[0,1[\cup \{1,1\}) > 1$
 Soit S la translation de vecteur directeur $(-1/2, -1/2)$
 $\mu([0,1[*[0,1[) + \mu(s\{1,1\}) = \mu([0,1[*[0,1[) + \mu(\{1,1\}) > 1$
 Cependant $\mu(s\{1,1\}) = \{1/2, 1/2\}$ et $\{1/2, 1/2\}$ appartient à $[0,1[x[0,1[$
 $\mu([0,1[x[0,1[\cup s(\{1,1\})) = 1$
 on a alors une contradiction
 donc forcément $\mu\{1,1\} = 0$ et la mesure est diffuse.

FIGURE 6.28 – Première technique invalide du groupe A

d'invalider la technique mise en oeuvre par la mise en lumière d'un élément de $\theta_{M,m}^*$: l'additivité simple.

Le rejet de la technique précédente et l'accent mis sur l'invariance par translation conduit à une nouvelle tentative de mise en oeuvre d'une technique τ_{M,m_3}^* , à partir d'un raisonnement par l'absurde, avec la proposition de A_2 .

A_2 : on va supposer que la mesure de $(1, 1)$ est $\varepsilon > 0$.

Le collectif a ainsi pu mettre en oeuvre une technique τ_{M,m_3}^* (voir 6.27). tout en justifiant la technique par des éléments du logos de $P_{M,m}^*$: l'invariance par translation qui permet de justifier que tous les points ont même mesure, l'additivité de la mesure qui permet de conclure. La question de la croissance de la mesure des aires n'est pas évoquée par ce collectif, peut-être est-elle encore trop naturalisée.

Ceci constitue la réponse $R_{1,A}^\heartsuit$ de ce système didactique. Dans le processus d'étude, le troisième moment a été favorisé par l'identification du type de tâche T_{M,m_3} . Nous avons ainsi observé le passage de $\theta_{M,m}$ à $\theta_{M,m}^*$ et la mise en lumière d'éléments de logos de la praxéologie P_{M,m_3}^* (montrer une propriété de la mesure des aires) : l'invariance par translation, et l'additivité simple.

Deuxième groupe - Première question -

Les étudiants du groupe B sont notés B_1, B_2, B_3, B_4 . L'enseignant est noté P .

La dynamique du groupe, dans cette partie, repose également sur les interventions d'un élément, B_1 .

Nous relevons également, à l'aide d'un tableau, les éléments saillants issus de la transcription ce qui rend compte de la topognèse.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

<p>B_1 : j'ai une idée : peut-être qu'on peut prendre 2 sous-ensembles A et B, par exemple 2 carrés, qui s'intersectent, et on essaie de faire comme une suite de sorte à diminuer cette intersection et obtenir un point. Avec l'additivité, montrer que ça va être 0. Qu'est-ce que vous en pensez ?</p>	<p>Les ostensifs "suite" et "intersection" font référence à la technique $\tau_{M,m_3,2}$. Nous ne pouvons pas affirmer que le type de tâche T_{M,m_3} ai été identifié. Ceci constitue le temps d'exploration de la technique $Q_{1,1}^B$: peut-on mettre en oeuvre la technique $\tau_{M,m_3,2}$?</p>
<p>[peu de questions émergent et l'enseignant va en produire]</p>	<p>$Q_{1,2}^B$: Est-ce que vous avez déjà entendu parler de mesure diffuse ? P, dans le rôle de guide à l'étude, met l'accent sur l'ostensif <i>diffuse</i> pour réactiver des praxéologies de L3</p>
<p>B_2 : oui, en théorie de la mesure. B_3 : oui, en licence, j'ai eu une UE de théorie de la mesure B_1 : pour moi, ça me fait penser aux probabilités. Par exemple, si on prend une proba continue, la mesure d'un point est 0. B_2 : la mesure de Lebesgue est diffuse</p>	<p>La réponse $R_{1,2}^B$ est apportée et pourrait favoriser l'identification de T_{M,m_2}. La valence opératoire de l'ostensif diffuse semble faible P introduit une nouvelle question $Q_{1,3}^B$: Comme avez-vous montré que la mesure de Lebesgue est diffuse ?</p>
<p>B_1 : Je ne sais pas si tout le monde voit le petit dessin que je fais [en fait, il n'y a pas de trace de ce dessin] B_3 : On doit montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ? B_1 : non, pas vraiment. C'est pour la mesure mu qui est la mesure d'aire. Ce n'est pas la mesure de Lebesgue.</p>	<p>$Q_{1,4}^B$: doit-on montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ? Identification du type de tâche T_{M,m_3}. Réponse $R_{1,4}^B$ apportée par B_1 qui montre la prise en compte d'une distinction de la mesure des aires et de la mesure de Lebesgue.</p>
<p>B_1 : On peut prendre 2 carrés unité semi-ouverts car on connaît la mesure. Ce que je veux faire, c'est montrer que l'intersection c'est juste un point</p>	<p>B_1 tente la mise en oeuvre d'une nouvelle technique, mais en se limitant aux intersections finies</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>B_3 :Mais le truc, c'est que je vois pas en quoi ça va nous aider. (...) On a juste les 3 propriétés qu'il a données, on ne peut rien faire...on sait juste que la mesure d'un carré est un et on sait que c'est ça par isométrie, on sait que si l'intersection est nulle alors il y a l'additivité mais pour l'intersection qui a un point on sait rien donc je vois pas du tout ou quoi ça peut nous aider</p> <p>B_3 : j'ai compris ton idée, mais je vois pas en quoi ça peut aboutir.</p>	<p>B_3 remet en cause la technique, et insiste sur les axiomes et construit θ_M^*</p>
<p>P : que peut-on dire de la mesure de deux points du plan</p>	<p>Nouvelle intervention de P</p> <p>$Q_{1,5}^B$: Que peut-on dire de la mesure de deux points du plan ?</p>
<p>B_3 : ils ont la même mesure.</p> <p>B_1 : car l'un est l'image de l'autre par une isométrie.</p>	<p>B_3 apporte la réponse $R_{1,5}^B$ et B_1 en apporte la justification et construit $\theta_{M,m}^*$.</p>
<p>P : bon, et si vous supposez que la mesure de O est de mesure non nulle...</p>	<p>$Q_{1,6}^B$: si on suppose que la mesure de O est de mesure non nulle, que peut-on dire ? (nouvelle intervention de P).</p>
<p>B_1 : Si on prend n points distincts, la mesure de l'union est n fois la mesure d'un point.</p>	<p>La technique τ_M^* est partiellement mise en oeuvre, reste à choisir n.</p>

La chronogénèse est décrite avec le question-gramme a posteriori 6.29.

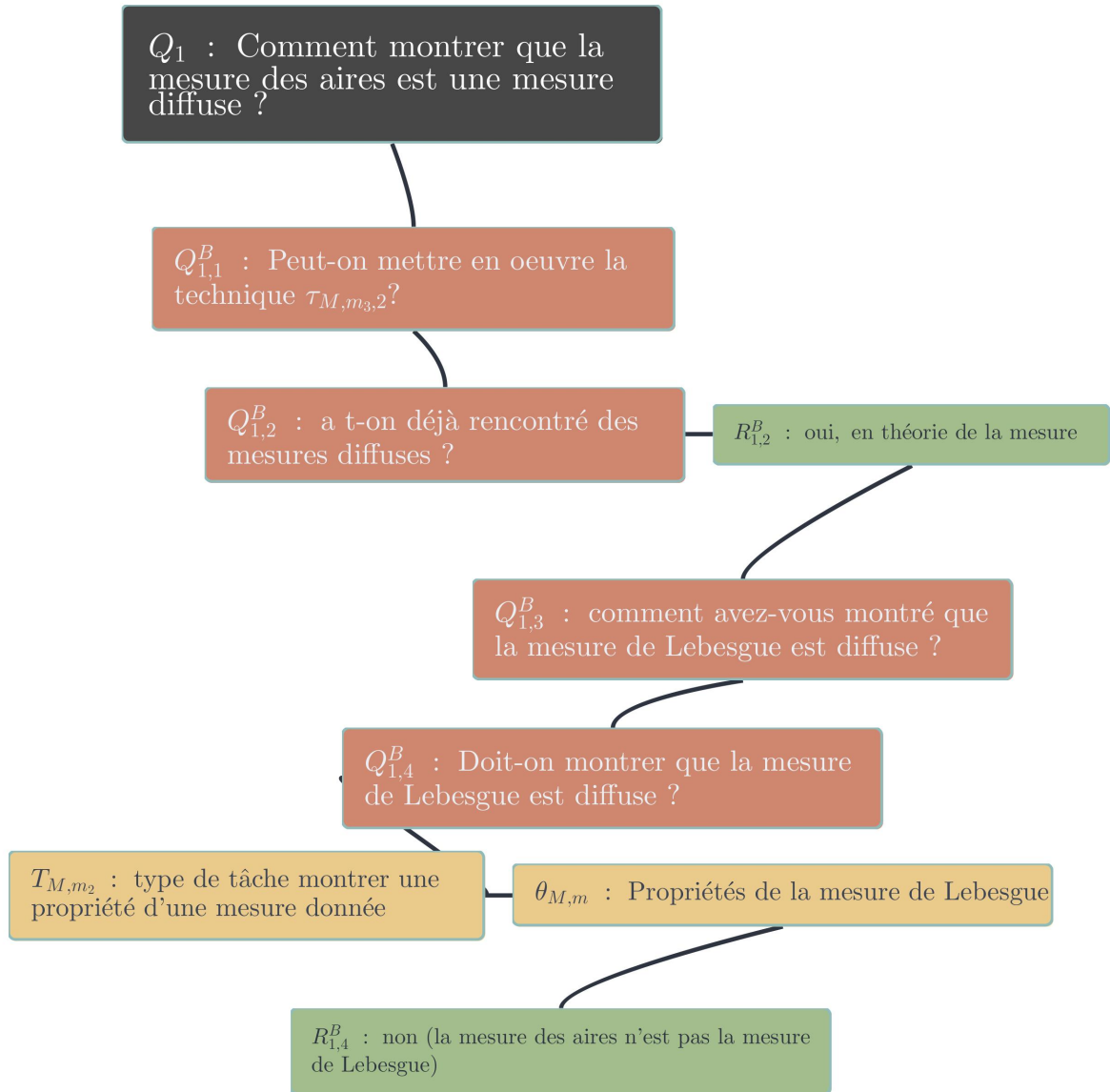


FIGURE 6.29 – Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe B

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Le schéma Herbartien pour ce système est :

$$[S(X_B; P; Q_1) \Rightarrow M_{B_1}] \Rightarrow R_1^\heartsuit$$

avec $M_{B,1} = [Q_1, Q_{1,1}^B, Q_{1,2}^B, Q_{1,3}^B, Q_{1,4}^B, Q_{1,5}^B, Q_{1,6}^B, R_{1,2}^B, R_{1,3}^B, R_{1,4}^B, R_{1,5}^B, T_{M,m_3}, \theta_{M,m}]$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	engendré par les questions de l'aide à l'étude $Q_{1,2}^B$, et montré par $Q_{1,4}^B$
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	absence de mise en oeuvre explicite d'une telle technique comme indiqué par la non production de $R_{1,3}^B$
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	absence de mise en oeuvre explicite d'une telle technique comme indiqué par la non production de $R_{1,3}^B$
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Production de \mathbb{R}_1^\heartsuit très partielle

La question $Q_{1,1}^B$ (que nous avons reformulée en "peut-on mettre en oeuvre la technique τ_{M,m_2} ?") n'a manifestement pas été étudiée par le système. Nous n'avons pas d'élément laissant penser que le type de tâche T_{M,m_2} a été identifié par le collectif à ce moment là de l'étude.

L'enseignant a apporté de nouvelles questions dans le milieu. Il faut noter qu'il n'avait pas conscience des échanges (rappelons le dispositif particulier du travail à distance), et qu'il aurait sûrement été pertinent de discuter de la technique proposée par B_1 et d'engendrer l'identification du type de tâche T_{M,m_2} .

L'enseignant, dans le rôle d'aide à l'étude a ainsi produit différentes questions. D'abord la question $Q_{1,2}^B$ ("est-ce que vous avez entendu parler de mesure diffuse ?") qui vise à mettre en lumière l'ostensif "diffuse" de sorte à réactiver des praxéologies du secteur de la théorie de la mesure. Ainsi, cette question cherche à insister sur la valence semiotique de l'ostensif « diffuse ». Puis, la question $Q_{1,3}^B$ ("comment avez-vous montré que la mesure de Lebesgue est diffuse") a pour objectif d'accroître la valence opératoire de l'ostensif diffuse, mais l'absence de réponse atteste d'un équipement praxéologique qui ne permet pas la mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_3} . Cette question vise à engendrer le moment de la mise en oeuvre d'une technique τ issue de P . Malgré le fait qu'aucune réponse à cette question n'ait été apportée par le collectif d'étude, cette question a favorisé l'identification de T_{M,m_3} . En effet, La question $Q_{1,4}^B$ ("doit-on montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ?") indique le moment d'identification du type de tâche T_{M,m_3} et la réponse $R_{1,4}^B$ apportée indique une mise en regard d'éléments des technologies $\theta_{M,m}$ et $\theta_{M,m}^*$, puisque la mesure d'aire est distinguée de la mesure de Lebesgue par B_1 .

La question $Q_{1,5}^B$ (que peut-on dire de la mesure de deux points du plan) introduite par l'enseignant conduit à une réponse produite par le système (ils ont la même mesure), et la justification par l'axiomatique indique un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique et une construction partielle du logos de P_{M,m_3}^* . On observe ainsi une dialectique entre les moments d'exploration de la technique et de la constitution technologico-théorique et le milieu produira le début d'une technique (par l'absurde) sans aboutir à la construction complète de la praxéologie visée : la réponse apportée est ainsi une technique partielle (nous faisons l'hypothèse qu'avec un temps didactique plus long, cette technique par l'absurde aurait pu aboutir) et certains éléments du logos de P_{M,m_3}^* ont été construits (invariance par translation).

Troisième groupe - Première question -

Les quatre étudiants sont désignés par C_1 , C_2 , C_3 et C_4 . Pour aider à la lecture du tableau, nous interprétons ici la technique (erronée) mise en oeuvre et exclusivement discutée :

Soit A un point du plan.

1er cas : si A est extérieur au carré C , alors il existe une isométrie s tel que $s(A) \in C$. Alors $\mu(C) + \mu(A) = \mu(C) + \mu(s(A)) = \mu(C)$. Or $\mu(C) = 1$, donc $\mu(A) = 0$.

2ème cas : si A est dans le carré, alors $\mu(C) = \mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C)$ donc $\mu(A) = 0$.

Dans les 2 cas, la technique ne peut pas être mise en oeuvre en l'état puisque $A \cap C$ ou $s(A) \cap C$ n'est pas vide.

TABLE 6.1 – Mise en oeuvre d'une technique erronée par le groupe C

La tableau ci-dessous rend compte de la dynamique de ce groupe, et le jeu des questions/réponses.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

<p>C_4 : moi, je pense qu'il faut prendre le carré unité, parce qu'on connaît que ça, et ensuite on prend un point à l'extérieur, et l'union des 2. Vous validez ? La technique est formulée dans le document partagé :</p> <p>1. <i>On pose A un point quelconque B un carré unité $u(B \text{ union } A) = u(B) + u(A) = 1 + u(A)$ (ici on veut prouver que $u(A) = 0$.) $u(B \text{ union } A) - u(A) = 1$ (idée on translate par translation le point A dans le carré unité afin que b inter A est le carré unité.) $u(B \text{ union } A) = u(B) = 1$ Ainsi $1 - u(A) = 1$ donc $u(A) = 0$</i></p>	<p>C_4 engage le collectif dans le moment d'exploration de la tâche et de l'élaboration d'une technique. Cette technique (reformulée dans 6.1) s'avère erronée mais sera la source de discussions.</p>
<p>C_3 : Et comment tu sais que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$?</p> <p>C_4 : bin c'est marqué sur le document C_4 : déjà, le point, je pense qu'il faut le prendre hors du carré. Et après, avec une isométrie, on le ramène dans le carré.</p>	<p>C_3 interroge la technologie τ_{M,m_3}^* et la question posée par C_4 marque un moment de constitution de bloc technologico-théorique $Q_{1,1}^C$: comment justifier que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$? C_4 apporte la réponse $R_{1,1}^{C, \diamond}$ C_4 explicite une technique τ_{M,m_3}^*, avec un élément particulier de $\theta_{M,m}^*$ (l'invariance par isométrie)</p>
<p>C_1 : Je vais partir sur autre chose, mais c'est compliqué. Comme A est une partie du carré, je vais regarder le cardinal du carré par rapport à A. On faisait pareil en L3, tu ne te rappelles pas ? C_3 : mais comment le cardinal, ça peut te montrer ?</p> <p>C_1 : si t'avais une partie avec un certain cardinal, et si tu as une partie d'un cardinal plus petite, tu pouvais considérer qu'elle était comme incluse dans la partie précédente, et du coup tu pouvais faire la somme des cardinaux, et tu arrivais à une contradiction.... on avait fait comme ça avec Lebesgue.</p>	<p>Nouveau temps de constitution de la technique : C_1 cherche à activer une praxéologie de L3 : identification du type de tâche T_{M,m_3}. C_3 interroge la technologie de la technique proposée par C_1 $Q_{1,2}^C$ peut-on utiliser la notion de cardinal ? C_1 incite le groupe à visiter les praxéologies de L3. La question du cardinal n'est pas explorée.</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>Est-ce que vous vous rappelez comment on faisait pour montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ? C_4 : aucune idée.</p>	<p>$Q_{1,3}^C$: comment montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ? Bien que le type de tâche T_{M,m_3}, le collectif ne semble pas disposer de technique. Déficit de la valence opératoire de l'ostensif diffuse par rapport à sa valence sémiotique</p>
<p>C_2 : mais en fait, ce qu'on fait, ça ne peut pas marcher, car l'intersection n'est pas vide. C_4 : en vrai je pense qu'on y est presque, mais je ne vois pas du tout. C_4 : j'ai capté le problème... on a le droit de faire ça, mais ça ne nous aide pas en fait. C_3 : Juste avec les 3 axiomes, on doit montrer ça...</p>	<p>C_2 invalide la technique initialement proposée par C_4. Le collectif n'a pas produit de technique valide.</p>

Le schéma Herbartien pour ce système est :

$$[S(X_C; P; Q_1) \Rightarrow M_{1,C}] \Rightarrow R_{1,C}^\heartsuit = \emptyset$$

avec $M_{1,C} = [Q_1, Q_{1,1}^C, Q_{1,2}^C, Q_{1,3}^C, Q_{1,4}^C, Q_{1,5}^C, Q_{1,6}^C, R_{1,1}^{C\diamond}]$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Le type de tâche T_{M,m_3} a été identifié (« on faisait pareil en L3 »)
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Non : Pas de réponse à $Q_{1,3}^C$
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	ce moment n'est pas vécu par le collectif, les éléments de Λ_M ne sont pas évoqués.
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Production de R_1^\heartsuit très partielle

La prise de position rapide de C_4 a enfermé le collectif dans une démarche erronée à travers la mise en oeuvre de la technique décrite dans 6.1. La technique a finalement bien été invalidée par le groupe par la mobilisation d'un élément du logos de $\theta_{M,m}^*$: l'additivité simple. Dans les échanges, un élément du collectif, C_1 , semble mentionner une technique de L3 comme l'indique la présence de l'ostensif "contradiction" qui renvoie à la technique $\tau_{M,m_3,2}$ déjà décrite pour montrer qu'une mesure invariante par translation est une mesure diffuse mais cela n'a pas été exploité par le groupe. Nous faisons l'hypothèse que le type de tâche T_{M,m_3} a été identifié ("on faisait pareil en L3") ce qui peut laisser penser que l'ostensif diffuse dispose d'une valence sémiotique suffisante,

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

mais le collectif ne semble pas en mesure de reproduire de technique (pas de réponse à la question $Q_{1,3}^C$) posée par C_1 ("vous vous rappelez comment on faisait?"). La valence opératoire de l'ostensif diffuse est sûrement trop faible chez ce groupe. Ainsi, le seul élément visité de Π_{M,m_3} est le type de tâche T_{M,m_3} . L'absence d'aide à l'étude et la non disponibilité d'une technique τ_{M,m_3} n'a pas permis l'émergence d'une réponse $R_{1,C}^\heartsuit$.

Quatrième groupe - Première question -

Les 4 étudiants du groupe 4 sont désignés par D_1 , D_2 , D_3 et D_4 . Nous précisons que sur les 4 membres du groupe, 2 sont lauréats d'une L3 de mathématiques à Montpellier et ont ainsi déjà suivi une UE d'intégration et de théorie de la mesure, et 2 sont lauréats d'une L3 de mathématiques dans laquelle n'apparaît pas d'unité d'enseignement relative à l'intégration de Lebesgue ni à la théorie de la mesure. Ainsi, pour ces deux étudiants, nous pouvons faire l'hypothèse que la valence sémiotique de l'ostensif diffuse, comme de l'ostensif Lebesgue est nulle.

La tableau ci-dessous rend compte de la dynamique de ce groupe, et du jeu des questions/réponses. La colonne de droite contient les questions reformulées par nos soins, la colonne de gauche contient les formulations originales.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

<p>D_1 : on ne peut s'appuyer que sur les axiomes</p> <p>D_1 : peut-on dire qu'un point est l'intersection ?</p> <p>D_2 (document partagé) : L'intersection de deux droites ou segments ne semblent rien apporter puisque l'on ne connaît pas l'aire d'une droite.</p>	<p>D_1 précise, en quelque sorte, le contrat, et évoque la technologie θ_{M,m_3}^*.</p> <p>D_1 cherche à voir le point comme une intersection. C'est une sorte de décomposition de l'ensemble réduit à un point. Ceci évoque la technique τ_{M,m_2} (technique de la praxéologie P_{M,m_2} "mesurer un ensemble pour une mesure donnée") mais sans que le type de tâche ne soit identifié.</p> <p>$Q_{1,1}^D$: comment décomposer un point à l'aide d'ensembles que l'on sait mesurer ?</p> <p>Cette intervention de D_2 invalide le choix de la technique décrite ci-dessus.</p>
<p>D_1 : On peut dire que l'image d'un point par une isométrie est un point. Donc déjà, c'est plutôt bien, on sait que l'aire sera nulle dans les 2 cas.</p> <p>D_4 (dans le document partagé) : si on prend plusieurs points, ils sont invariants par isométrie.</p> <p>D_2 (dans le document partagé) : Comment exploiter le fait que l'aire d'un point soit invariant par isométrie ?</p>	<p>Réalisation d'une partie de la technique τ_{M,m_3}^* et mise en lumière d'un élément de θ_{M,m_3}^* (tous les points ont même mesure)</p> <p>$Q_{1,2}^D$: comment utiliser le fait que les points ont même mesure ?</p>
<p>D_2 : je n'ai pas trop d'idée</p> <p>D_1 : un point, on ne sait pas trop décomposer</p>	<p>D_1 confirme l'idée de décomposer l'ensemble à mesurer et la visite de Π_{M,m_2}.</p>
<p>D_1 : on peut dire qu'un point est le centre d'une boule ouverte, et comme Lebesgue, c'est pour les carrés, on prendrait des carrés, c'est-à-dire pas des boules au sens rond ...</p>	<p>D_1 explore une autre technique. L'ostensif "Lebesgue" indique une identification du type de tâche T_{M,m_3}, et on reconnaît une exploration de $\tau_{M,m_3,2}$ (preuve directe).</p>
<p>D_1 : Toute boule ouverte, on peut la décomposer comme étant l'union de plein de carrés unité. On considère une boule quelconque, mais carrée.</p> <p>D_1 : on peut trouver l'aire d'une boule carré grâce à la mesure de Lebesgue ?</p>	<p>$Q_{1,3}^D$: peut-on trouver l'aire d'un carré grâce à la mesure de Lebesgue ?</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>D_1 : concrètement, on ne peut connaître que l'aire des polygones... et encore je ne sais pas comment on peut les calculer.</p>	<p>$Q_{1,4}^D$: comment déterminer la mesure d'aire d'un polygone ?</p>
<p>D_2 : tu dois pouvoir décomposer en carré.</p>	<p>D_2 apporte une réponse $R_{1,4}^D$.</p>
<p>D_1 (document partagé) : est-ce que l'aire d'un polygone est la même avec ou sans ses frontières ?</p>	<p>$Q_{1,5}^D$: la mesure d'aire d'un segment est-elle nulle ?</p>
<p>D_2 (document partagé) : Notons C ce carré (d'aire 1) et R la rotation de centre $(0,1)$ et d'angle π. $C \cap R(C) = M$ (un point). $\mu(C \cap R(C)) = \mu(C) + \mu(R(C)) = 2\mu(C) - \mu(M)$ (avec les frontières) $\mu(C \cap R(C)) = \mu(C) + \mu(R(C)) = 2\mu(C)$ (sans les frontières)</p>	<p>Tentative d'explicitation d'une technique par D_2 qui s'avère erronée (au delà de la confusion entre intersection et union) Il n'y a pas de conclusion, la question des frontières a été bloquante.</p>

Le question-gramme a posteriori est donné dans la figure 6.30.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

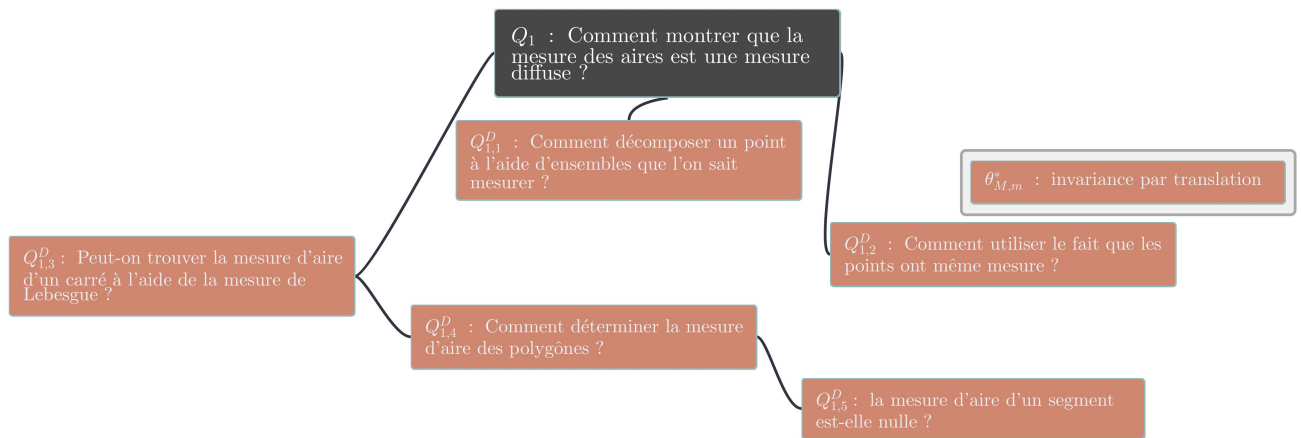


FIGURE 6.30 – Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe D

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Le type de tâche T_{M,m_3} n'a pas été identifié malgré l'ostensif (« comme Lebesgue »). Le collectif semble considérer que la tâche est une instanciation de T_{M,m_2}
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Ébauche d'une mise en oeuvre de $\tau_{M,m_2,2}$
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	les éléments technologiques de $\tau_{M,m_3,2}$ ne sont pas identifiés
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Production de R_1^\heartsuit absente

L'étude débute par la tentative d'une décomposition de l'ensemble à mesure à l'aide d'ensembles élémentaires. Nous pouvons faire l'hypothèse que le type de tâche T_{M,m_3} (démontrer une propriété de mesure) n'a pas été identifié. La technique mise en oeuvre correspond plutôt au type de tâche T_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée). L'ensemble à mesurer étant ici un singleton. Nous reconnaissons ainsi la mise en oeuvre de la technique $\tau_{M,m_2,2}$, mais qui n'aboutit pas ici, comme le signale l'intervention de D_2 dans le document partagé ("L'intersection de deux droites ou segments ne semblent rien apporter puisque l'on ne connaît pas l'aire d'une droite"), puis celle de D_1 ("un point, on ne sait pas trop décomposer"). Il n'est pas fait référence ici à une praxéologie de L3.

La question $Q_{1,2}^D$ ("comment utiliser le fait que les points ont même mesure?") indique un moment de construction de la technique suivi d'un moment d'élaboration du bloc du logos visé par l'AER puisque l'invariance par isométrie est évoquée pour justifier que tous les points ont même mesure.

Enfin, il y a une référence à la mesure des polygones, en particulier des carrés, pour la mesure de Lebesgue. Le type de tâche T_{M,m_2} est évoqué ("décomposer une boule comme union de plein de carré"), mais il semble qu'aucune technique ne soit disponible.

En revanche, on remarque l'étude d'un lien entre la mesure de Lebesgue et la mesure des aires ($Q_{1,3}^D$: peut-on trouver l'aire d'un carré grâce à la mesure de Lebesgue?), sans que le collectif n'apporte une réponse et cela illustre l'absence de visite de l'oeuvre $\theta_{M,m}$. En effet, il n'y a pas d'élément montrant ce qui caractérise la mesure de Lebesgue et la mesure des aires et donc pas de mise en relation de $\theta_{M,m}$ avec θ_{M,m_3}^* : le moment de cette confrontation n'a pas eu lieu dans ce collectif.

Dans le processus d'étude prévu, le fait que la valence sémiotique de l'ostensif diffuse soit trop faible n'a pas permis la génération du moment de confrontation de Λ_M et Λ_M^* .

Le schéma Herbartien pour ce système est :

$$[S(X; Y; Q_1) \Rightarrow M_1^4] \Rightarrow R_1 = \emptyset$$

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

avec $M_1^D = [Q_1, Q_{1,1}^D, Q_{1,2}^D, Q_{1,3}^D, Q_{1,4}^D, Q_{1,5}^D, R_{1,1}^D, T_{M,m_3}]$.

Conclusion- Première question -

Pour conclure, nous allons mettre en regard l'analyse a priori avec les données que nous avons analysées, avec les différents outils présentés.

Un seul groupe, le groupe A, a été en mesure de produire une technique pour la réalisation de la première tâche : lors de la phase dialectique d'élaboration de la technique et la constitution du bloc technologico-théorique, les différents moments de l'étude ont été vécus par le collectif. Dans ce groupe, le type de tâche T_{M,m_3} a été identifié et les techniques $\tau_{M,m_3,1}$ et $\tau_{M,m_3,2}$ paraissaient disponibles. Nous avons aussi remarqué la mise en regard des technologies $\theta_{M,m}$ et $\theta_{M,m}^*$ à travers l'opportunité de mettre en oeuvre la technique $\tau_{M,m_3,1}$. Lors du moment de la validation de la technique τ_{M,m_3}^* par $\theta_{M,m}^*$, la question de la croissance est restée implicite.

Le groupe B et le groupe C ont identifié le type de tâche T_{M,m_3} (et donc la valence sémiotique de l'ostensif diffuse est importante) mais il semble qu'aucune technique n'était disponible, ce qui n'a pas permis la construction complète de la praxéologie $P_{M,m}^*$. Nous expliquons cela par la faiblesse de la valence opératoire de l'ostensif diffuse. Ceci est donc un point bloquant dans la réalisation de la tâche.

Enfin, le premier moment de l'étude, lors de l'élaboration de la technique, n'a pas été vécu par le groupe D puisque le type de tâche T_{M,m_3} n'a pas été identifié. L'aide à l'étude n'a pas pu intervenir dans ce groupe, ce qui explique peut-être que ce moment n'ait pas été généré.

Analyse a posteriori de la deuxième question

L'équipement praxéologique des étudiants a été modifié par la première partie de l'AER. Il s'agit maintenant d'enrichir encore le bloc du logos de P_{M,m_3}^* à travers l'étude de la question

Q_2 : « que vaut la mesure d'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions ? »

La réponse ne doit pas poser de problème puisque la réponse attendue est le produit de ses dimensions. En revanche les différents collectifs doivent s'interroger sur la mise en oeuvre d'une technique pour prouver la réponse.

Chaque groupe dispose de 30 minutes pour le temps de l'étude, avant la phase d'institutionnalisation.

Premier groupe - Deuxième question -

<p>A_2 : tu découpes ton rectangle en carrés, etc, j'ai pensé au dessin de Fibonacci. Tu es d'accord Baptiste? Il faut écrire maintenant.</p>	<p>A_2 conduit le collectif à l'exploration d'une technique de découpage d'un rectangle. Nous notons des éléments de la technique τ_{M,m_2} sans que le type de tâche ne soit, à ce stade, identifié.</p>
<p>A_3 : indication : on pourra discuter selon le domaine de nombre ? A_2 : c'est quoi le domaine ? A_3 : genre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, peut-être. Enfin, peut-être pas \mathbb{C} A_2 : ah...! Si tu mesures un ensemble de relatif, ou de rationnel, c'est nul, car c'est dénombrable. Tu mesures un ensemble d'irrationnels, c'est non nul.</p>	<p>A_3 occupe le rôle d'aide à l'étude et interroge l'indication de l'énoncé</p> <p>Le cas des entiers n'est pas évoqué ici Identification du type de tâche T_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée) et proposition d'une technique avec explicitation d'un élément technologique de Λ_{M,m_2} (la mesure de Lebesgue d'un ensemble dénombrable de \mathbb{R} est 0)</p>
<p>A_2 : mais je sais pas du tout où ça mène... Moi je veux découper mon rectangle !</p> <p>A_3 : en vrai, j'aimerais bien voir ce que ça donne, si on essaye de mesurer ? A_2 : On arrive quand même à un truc compliqué au 3ème carré. Mais on sait que ce découpage se ramène au rectangle d'or. P : Il y avait quand même une indication qui était de regarder en fonction des ensembles de nombres des longueurs des côtés ? Par exemple pour un rectangle de côté 2 et 3 ?</p> <p>A_2 : Là, on avait l'idée de découper en carrés unité.</p> <p>P : OK. Et comment peut-on faire si on a un rectangle de côté $7/3$ et $3/5$</p>	<p>A_2 confirme sa volonté de poursuivre sur sa piste.</p> <p>$Q_{2,1}^A$ Comment découper un rectangle ?</p> <p>A_3 suit la piste de A_2, en découplant le rectangle avec des carrés. Le collectif arrête la piste de découpage du rectangle d'or.</p> <p>Intervention de l'enseignant dans le rôle d'aide à l'étude et le choix de deux entiers doit induire la procédure par découpage en carrés unité</p> <p>$Q_{2,2}^A$ Comment obtenir la mesure d'aire d'un rectangle de côté 2 et 3 ?</p> <p>Description de la technique pour le cas des entiers : $R_{2,2}^A$</p> <p>Nouvelle question produite par l'enseignant avec le choix de deux rationnels</p> <p>$Q_{2,3}^A$ Comment obtenir la mesure d'aire d'un rectangle de côté $7/3$ et $3/5$?</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>A_2 : on peut découper en petits carrés aussi, il faudrait toujours les mêmes côtés. . .il faudrait trouver les rapports entre le longueurs</p>	<p>La technique pour le cas des rationnels est évoquée, mais pas complètement mise en oeuvre. $R_{2,3}^A$</p>
<p>A_2 : mais si on passe dans les réels, c'est toujours possible de faire ça? A_3 : le truc c'est que je ne sais pas comment faire s'il y a des longueurs bizarres A_2 : Ah mais pour passer aux réels, on utilise la densité ! On prend deux suites adjacentes. A_1 : Oui, j'ai pensé à la densité. A_3 : oui, on prend un rectangle un peu plus petit et un un peu plus grand avec des côtés dans \mathbb{Q}.</p>	<p>$Q_{2,4}^1$: Comment passer au cas des réels ? Visite de l'oeuvre $\theta_{\mathbb{R}}$ avec la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} $R_{2,4}^1$</p>
<p>Technique décrite sur le document partage (voir Figure 6.32</p>	

La chronogénèse de ce groupe A est donnée par le question-gramme de la figure 6.31.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

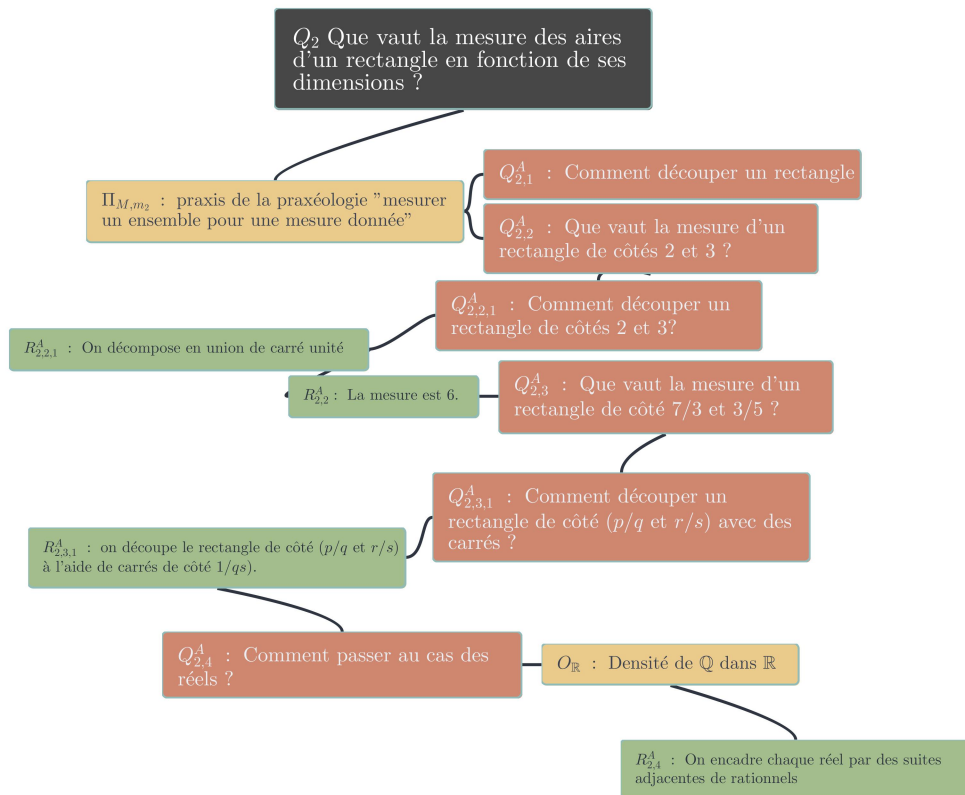


FIGURE 6.31 – Question-gramme a posteriori du groupe A, question 2

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Découper $L \times l$ avec L et l entier en carrée de même longueur.

Découper $L \times l$ avec L et l rationnel ,

idem pour les Réels : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , de plus suite adjacente avec un carrée plus grand et plus petit et même limite vers un rationnel .

FIGURE 6.32 – Réponse $R_{2,1}^\heartsuit$ du groupe 1

Le schéma herbartien de ce système est :

$$[S(X_A; P; Q_2) \Rightarrow M_2^A] \Rightarrow R_2^{A\heartsuit} = \ell \times L$$

avec $M_2^D = [Q_2, Q_{2,1}^A, Q_{2,2}^A, Q_{2,2}^A, Q_{2,3}^A, Q_{2,4}^A, R^{A2,2}, R^{A2,3}, R^{A2,4}, \theta_{\mathbb{R}}]$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Évocation de T_{M,m_2}
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Moment engendré par les questions $Q_{2,2}^A$ et $Q_{2,3}^A$ de l'enseignant ; Visite de Π_{M,m_2} et mise en oeuvre de la technique pour le cas entier et rationnel
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	$Q_{2,3}$; visite de l'oeuvre $\theta_{\mathbb{R}}$ mais la croissance de la mesure d'aire (θ^*) n'est pas identifiée
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	Production de \mathbb{R}_2^\heartsuit

Sous l'impulsion d'un élément du collectif, A_2 , le temps d'exploration de la tâche consiste à étudier une technique de découpage du rectangle en considérant des carrés inscrits avec le plus grand côté possible. Bien que la technique consiste ici à découper l'ensemble à mesurer, le découpage n'a pas permis d'aboutir à une technique. Le temps d'élaboration de cette technique s'arrête par l'intervention de A_3 : « on arrive quand même à un truc compliqué au 3ème carré ». En revanche, le type de tâche T_{M,m_2} (mesurer un ensemble pour une mesure donnée) du MPR relatif à la théorie de la mesure a été identifié comme l'atteste l'affirmation de A_2 : "Si tu mesures un ensemble de relatif, ou de rationnel, c'est nul, car c'est dénombrable". Il s'agit d'un élément de la technique τ_{M,m_2} que A_2 justifie par un élément technologique de θ_{M,m_2} : la mesure de Lebesgue d'un ensemble dénombrable est nulle. Notons qu'ici, la technique n'est pas licite : l'ensemble à mesurer (un rectangle), n'est pas un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}^2 . Et par

ailleurs, la σ -additivité de la mesure de Lebesgue, qui permet de justifier la technologie, n'est pas une propriété de la mesure des aires. Ces questions ne sont pas étudiées ensuite.

L'intervention de P à travers la question $Q_{2,2}^A$ (comment obtenir la mesure d'aire d'un rectangle de côté 2 et 3) permet d'engendrer le moment de mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_2} et la réponse $R_{2,2}^A$ est partiellement produite ("on découpe"). De même, la réponse à la question $Q_{2,3}^A$ (comment obtenir la mesure d'aire d'un rectangle de côté $7/3$ et $3/5$) est partielle. Elle consiste en l'évocation de la technique τ_{M,m_2} mais on peut penser à ce que la mise en oeuvre soit possible.

Enfin, le cas des rectangles de côtés réels non rationnels est étudié par le collectif. L'oeuvre $\theta_{\mathbb{R}}$ est évoquée à travers la propriété de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . La propriété de croissance n'est pas, une nouvelle fois, identifiée comme cruciale.

La production écrite de ce groupe est dans 6.32 mais ne rend pas vraiment compte d'une technique aboutie.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Deuxième groupe - Deuxième question -

<p>B_3 : J'imagine que si on a un rectangle de côté, 2, 3, on prend des petits carrés, et on fait la somme non ? B_2 : oui, mais ça marche pour des nombres entiers</p>	<p>$Q_{2,1}^B$: peut-on découper un rectangle dont les longueurs sont des entiers ? Une réponse est apportée avec un exemple générique, mais la technique n'est pas explicitée</p>
<p>B_2 : Je ne suis pas sûr que ça marche avec des nombres à virgule. Si la longueur est 3,7 et la largeur 6,9, je suis pas sûr qu'on puisse faire rentrer des petits carrés dedans. B_1 : mais quand on a vu la démonstration de 1 point, on a pris des carrés de mesure $1/n^2$, donc c'est plus petit que 1. B_1 : Si on a un rectangle de côté 0,5 et 1, on peut prendre 2 carrés de côté 0,5. B_3 : oui, ça va ce que tu as dit. B_1 : et donc la mesure d'un rectangle, c'est encore la somme des petits carrés.</p>	<p>$Q_{2,2}^B$: peut-on découper un rectangle dont les longueurs sont des décimaux ? Activation d'un élément de $\theta_{M,m}^*$ construit dans la question 1. $R_{2,3}^B$: Description d'une technique pour le cas décimal</p>
<p>P : mais si on a un rectangle de côté $7/3$ et $10/7$? B_1 : d'abord, on prend 2 carrés de côté 1, il nous reste $1/3$.</p>	<p>$Q_{2,3}^B$: quelle est l'aire d'un rectangle dont les côtés sont $7/3$ et $10/7$? L'enseignant, dans le rôle d'aide à l'étude, produit une nouvelle question pour faire adapter la technique proposée, au cas de rationnels non décimaux. La mise en oeuvre de la technique s'arrête ici</p>
<p>B_1 : Il faut voir combien de carré de côté 1 on peut coller, et on voit ce qui reste. B_3 : je suis pas sûr d'avoir compris jusqu'à la fin, j'ai essayé... regarde si c'est par exemple 0,5 donc on prend le carré de mesure $0,5*0,5$. Donc on peut prendre les carrés plus petits que de côté 1 non ? B_1 : bah oui c'est pas ça le problème. Regarde ma démonstration : mes carrés sont pas de côté 1...ils sont de côté $1/\text{longueur} \times \text{largeur}$ donc le côté du carré c'est pas un nombre entier, le problème c'est pas ça.</p>	<p>tentative d'élaboration de la technique τ_{M,m_2} Mise en oeuvre d'une technique pour le cas entier : $R_{2,1}^B$.</p>

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

B_1 : Ben personnellement pour les rationnels, je vois pas.

Si la longueur L et la largeur l du rectangle sont des nombres entiers on peut reconstituer le rectangle avec des petits carrés de côté $1/Ll$. On aura alors $L^2/l = L$ et $Ll/l = l$ donc il faudra $L^2 \cdot l^2$ carrés de côté $1/Ll$ soit $(Ll)^3$ carrés de côté $1/Ll$ (attention $(Ll)^3$ doit être un entier !!!). La mesure d'aire d'un carré de côté $1/Ll$ est $1/(Ll)^2$ donc la mesure du rectangle est $(Ll)^3 / (Ll)^2 = Ll$

Comment faire si L et l ne sont pas des entiers?

FIGURE 6.33 – Réponse $R_{B,2}^\heartsuit$ du groupe B

Le schéma herbartien pour ce groupe est donc :

$$[S(X_B; P; Q_2) \Rightarrow M_2^B] \Rightarrow R_{B,2}^\heartsuit$$

avec $M_2^B = \{Q_2, Q_{2,1}^B, Q_{2,2}^B, Q_{2,3}^B, R_{2,1}^B, \theta_{M,m}^*\}$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	Aucun ostensif relatif à ω n'est présent ici
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Moment engendré par les questions $Q_{2,2}^A$ et $Q_{2,3}^A$ et $Q_{2,4}^B$ de l'enseignant; Visite de Π_{M,m_2} et mise en oeuvre de la technique pour le cas entier
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	Pas de discussion sur les blocs du logo
Élaboration de τ_M^* et validation par θ_M^*	R_2^\heartsuit : technique formulée pour le cas entier mais sans validation par la technologie

Ce collectif a donc mis en oeuvre une technique pour la tâche singulière où les ensembles de nombres sont limités aux entiers (6.33) : il s'agit de la mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_2}^* dans le cas des rationnels. La preuve n'est pas formalisée, et fait encore un usage assez fort de l'intuition portée par les figures (comme l'indiquent les mots « on peut reconstituer », « petits carrés »). Il n'y a pas de trace d'échange de validation de la technique avec le logos.

Le cas des décimaux et des rationnels a été exploré et donc le temps de la tentative de mise en oeuvre d'une technique a bien été vécu par ce groupe. Mais la question posée

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

par l'enseignant ($Q_{2,3}^B$ n'a pas aidé le groupe à produire une technique. La représentation des rationnels comme étant un nombre sous la forme $n + p/q$ avec $p < q$ n'a pas favorisé la procédure de découpage et semble un élément bloquant dans la mise en oeuvre de la technique. Le cas rationnel n'est pas traité, bien que la technique exposée dans (6.33 s'adapte au cas des entiers. Il est dommage que l'aide à l'étude n'ait pas favorisé l'émergence de la technique pour le cas entier, en introduisant la question : « comment adapter cette technique au cas d'un rectangle de côté p/L et q/l ? »

Bien que différentes propriétés des nombres aient été visitées (écriture décimale des nombres rationnels), la propriété de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ne semble pas avoir été convoquée.

La valence sémiotique de l'ostensif ("domaines de nombres") a été faible pour ce groupe.

Troisième groupe - Deuxième question -

Dans ce groupe, deux questions ont été explicitement posées et formulées comme suit dans le document partagé :

- Q : combien y a-t-il de carrés de côté $1/qs$ dans un rectangle de côtés p/q et r/s ?
- Quelle est la mesure d'un carré de côté $1/qs$?

Nous retenons dans ce tableau les éléments saillants des discussions dont la transcription globale est en annexe.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>C_3 : on va commencer simple, pour essayer de faire un truc.</p> <p>C_4 : Moi je pense que dans un rectangle de longueur L et de largeur ℓ, on peut faire rentrer $\ell \times L$ carrés unité. Et c'est pour ça que l'aire c'est $\ell \times L$. En fait on compte le nombre de carrés unité qu'on peut faire rentrer dans le rectangle.</p> <p>C_3 : ah oui, tu as raison, il faut faire un truc comme ça.</p>	<p>Le cas des entiers est réalisé. Le rectangle est décomposé, ce qui correspond à la mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_3} pour le cas entier.</p>
<p>C_3 : le plus pénible, c'est le cas des réels. Mais ça me fait trop penser à quelque chose qu'on a déjà fait... ! Commencer par les entiers, ensuite on passe à autre chose, on a déjà fait ça ! Finir par les réels.</p> <p>C_3 : Mais attends, il n'y a pas une étape avant de passer aux réels ?</p> <p>C_1 : Tu peux faire avec des rationnels.</p>	<p>La situation réactive des situations déjà rencontrées, en particulier en analyse. La valence sémiotique de l'indication est importante</p> <p>$Q_{2,1}^C$: comment passer des entiers aux réels ?</p> <p>Visite partielle de l'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$ puisqu'il n'est pas question de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}.</p>
<p>C_1 : Regarde, si c'est des rationnels, tu peux fonctionner de la même manière. Si des longueurs sont p/q et r/s, tu peux découper en carrés de longueur 1 sur...</p> <p>C_3 : mais tu vas essayer de rentrer le plus de carrés unité... je vois ce que tu veux dire, il faut prendre la partie entière non ?</p> <p>Voilà, on fait avec des carrés unités. Mais attend, il n'y a pas une étape avec de passer aux réels.</p>	<p>C_1 hésite mais semble être en mesure de produire une technique : temps d'élaboration de la technique</p> <p>C_3 interroge la technique de C_1 et reste sur l'idée de décomposer l'ensemble à l'aide des ensembles élémentaires : les carrés unité. L'adaptation de la technique τ_{M,m_3} n'est pas effective.</p> <p>La question $Q_{2,1}^C$ est toujours vive.</p>
<p>C_3 : j'ai compris qu'on pouvait découper en carrés de mesure $1/qs$. Mais c'est quoi la mesure d'un tel carré ? Et faut savoir combien il y en a.</p> <p>C_1 : oui...</p> <p>C_3 : si on arrive à trouver ça, c'est fini. Je vais l'écrire.</p>	<p>$Q_{2,2}^C$: quelle la mesure d'un carré de côté $1/qs$?</p> <p>La technique pour le cas des rationnels est établie, ce qui va constituer la réponse du système.</p> <p>La densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} n'est pas évoquée et le passage aux réels non rationnels n'est pas établi. La réponse $R_{2,1}^C$ n'est pas apportée.</p>

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

C_1 : mais regarde, si on a un carré de côté $1/n$, son aire c'est $1/n^2$. On l'a vu tout à l'heure !	Réponse $R_{2,2}^{\diamond,3}$, justification par le logos de P^* .
--	--

La réponse de ce collectif est ainsi rédigé dans le document partagé :

Soit un rectangle R de longueur L et de largeur l

- si l et L sont des entiers positifs, alors on peut découper le rectangle en $l \times L$ carrés unités. Ces carrés étant disjoints on a que $\mu(R) = l \times L$, ($\mu(R) = \mu(C) \times l \times L$ car $\mu(C) = 1$.)
- si L et l sont des rationnels, soit p,q,r et s des entiers positifs tel que $L = \frac{p}{q}$ et $l = \frac{r}{s}$
 on découpe le rectangle en carré de côté $1/(qs)$.
 Il y a pr carrés de côté $[0, 1/qs[\times [0, 1/qs[$, notons le D.

On sait que $\mu(C) = 1$.

$$\mu(D) = 1/qs \times \mu(C) = 1/qs \times 1 = 1/qs$$

FIGURE 6.34 – Réponse $R_{2,C}^{\heartsuit}$ du groupe C à la question 2

Le schéma herbartien pour le groupe 3 est :

$$[S(X; Y; Q_2) \Rightarrow M_2^3] \Rightarrow R_2^3$$

avec $M_2^C = [Q_2, Q_{2,1}^C, Q_{2,2}^C, R_{2,2}^{C\diamond}, \theta_{M,m}^*]$.

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Cas des entiers, puis le moment engendré par les questions $Q_{2,1}^C$; Visite de Π_{M,m_2} et mise en oeuvre de la technique pour le cas entier et rationnel
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	évocation de la mesure d'aire des carrés de côté $1/n$. Mais la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} n'est pas introduite.
Élaboration de τ_{M,m_2}^* et validation par θ_M^*	τ_{M,m_2}^* produite dans le cas entier et rationnel, et justification par θ_M^*

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

L'absence de réponse à la question $Q_{1,2}^C$ n'a pas permis de réellement mettre en oeuvre une technique complètement valide pour répondre à Q_2 . Le temps d'étude du collectif est resté centré sur l'élaboration de la technique dans le cas entier puis rationnel. Le seul moment de la confrontation des logos est la réponse apportée à la question $Q_{2,2}^C$ (quelle est la mesure d'un carré de côté $1/qs$) : cette réponse va constituer une justification de la technique pour le cas rationnel et entier. La propriété de la mesure nulle des segments n'est pas citée, mais le découpage proposé est à partir des carrés semi-ouverts : ceci indique une visite de l'oeuvre $\theta_{M,m}^*$. Il n'y a pas d'indicateur disant que le type de tâche a bien été identifié. Mais la technique τ_{M,m_2} est bien mise en oeuvre.

La valence opératoire de l'ostensif "ensembles de nombres" est faible comme l'indique la phrase de C_3 : « ça me fait trop penser à quelque chose qu'on a déjà fait...commencer par des entiers, ensuite tu passes à autre chose, on a déjà fait ça, finir par les réels ». Nous avons interprété cela par la question $Q_{2,1}^C$ mais le milieu n'a pas produit de réponse. La propriété de densité n'a pas été évoquée. Nous faisons l'hypothèse que l'absence de visite de l'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$ a été un élément bloquant dans la mise en oeuvre de la technique : on peut supposer aussi qu'une réactivation encore plus explicite d'éléments de praxéologies d'analyse (densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}) aurait pu permettre l'élaboration complète de la réponse R_2^\heartsuit .

Quatrième groupe - Deuxième question -

Voici le compte-rendu des travaux de ce groupe.

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>D_1 : je ne sais pas si le prof a rajouté des choses...</p>	<p>D_1 a eu des problèmes de connexion et n'a pas participé à la mise en commun, ce qui change son équipement praxéologique.</p>
<p>D_2 : En indication, ils disent de discuter en fonction du domaine des nombres, on peut déjà discuter si ce sont des entiers. D_1 : Oui, c'est vrai, parce que si ce sont des entiers, c'est facile. Parce qu'on peut décomposer à l'aide de petits carrés unité. D_2 : voilà, on va retrouver longueur×largeur.</p>	<p>$Q_{2,1}^D$: quelle est la mesure d'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont des entiers. La construction de la technique pour le cas entier ne pose pas de problème. La technique τ_{M,m_2} est mise en oeuvre pour le cas entier : temps d'élaboration de la technique</p>
<p>D_1 : malgré tout, deux petits carrés côte à côte, il va rester l'intersection commune, c'est le côté du carré. D_2 : oui, mais vu qu'on admet que la mesure du segment est nulle... D_1 : ah mais, oui, bien vu. Oui, donc du coup, ça change rien. Donc il suffit de compter les carrés. Si c'est des entiers, ça va.</p>	<p>D_1 interroge la validité de la technique : constitution de l'environnement technologico-théorique Ce nouvel élément technologique a été introduit à partir du travail sur la question 1. Ceci achève le cas entier. Le cas des entiers est traité par le collectif. Cela constitue la réponse $R_{2,1}^D$.</p>
<p>D_1 : Si on a un rectangle dont les longueurs des côtés sont réels, bah on peut prendre la partie entière de chaque côté, on va obtenir un sous-rectangle, qu'on va décomposer en sous carré, et il va rester un bandeau. D_1 : si ta longueur fait 23,74 cm, et le carré unité est 1 cm². Tu auras 23 carrés entiers, et il reste 74 mm, et ça sera sur toute la largeur du rectangle...Comment faire?</p>	<p>Le collectif passe directement des entiers aux réels quelconques (mais en fait par les décimaux). La technique de décomposition est encore mise en oeuvre. L'exemple choisi ici montre que ce sont bien les décimaux qui sont étudiés à ce moment de l'étude. $Q_{2,2}^D$: Comment faire pour calculer la mesure d'aire d'un rectangle dont les côtés sont des décimaux ?</p>
<p>D_1 : J'allais dire, l'homothétie c'est une isométrie, mais non. Les agrandissements et réductions, c'est des isométries non ?</p>	<p>Tentative de mise en oeuvre d'une technique, qui utilise l'homogénéité vis à vis des homothéties.</p>

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

<p>D_2 : bah non, ça ne conserve pas les distances.</p>	<p>$Q_{2,3}^D$: Les homothéties sont-elles des isométries ?</p> <p>Réponse $R_{2,3}^D$ apportée par D_2.</p>
<p>D_1 : Ça ne conserve pas, mais on connaît les rapports. Si on agrandi notre figure de sorte à arriver à des longueurs entières ?</p> <p>D_1 : Pas forcément. Si on reprend 23,74, tu sais qu'en multipliant par 100, tu as un entier.</p> <p>D_2 : Mais si en largeur tu as 12,218, en multipliant par 100, tu n'as pas un entier.</p> <p>D_1 : Oui, mais du coup, il faut choisir entre longueur et largeur, celui qu'il faut multiplier par le plus grand nombre pour avoir un entier.</p> <p>D_2 : ça c'est pour les décimaux...</p> <p>D_1 : Oui, voilà, c'est ça. Donc ça marche pour les décimaux. Mais bon, petit à petit...</p>	<p>La formulation fait encore référence aux homothéties (ostensif agrandissement)</p> <p>L'invariance par isométrie et un découpage d'un plus grand rectangle n'ont pas été évoqués.</p> <p>Le collectif semble valider la technique.</p>
<p>D_2 : déjà, pour les décimaux, ça doit aller. Après, ça voudrait dire diviser par...</p> <p>D_1 : si on multiplie par k les longueurs, l'aire est multipliée par k^2.</p> <p>D_2 : mais ça il faut le démontrer.</p>	<p>Le collectif garde un doute ("ça doit aller")</p> <p>La propriété d'homogénéité est citée.</p> <p>$Q_{2,4}^D$: comment démontrer la propriété d'homogénéité de la mesure d'aire ?</p>
<p>D_1 : j'étais en train de réfléchir avec d'autres types de nombres...</p> <p>D_2 : après il y a les irrationnels.</p> <p>D_1 : il faudrait voir si on a 2 irrationnels. Est-ce qu'on peut se ramener à une décomposition ?</p>	<p>A priori, le cas des rationnels n'est pas évoqué.</p> <p>La technique τ_{M,m_2} est encore évoquée.</p>
<p>D_2 : après, si on fait avec les rationnels, on peut utiliser la limite ?</p> <p>D_1 : Oui, c'est pas bête.</p> <p>D_2 : Si on prend un irrationnel, il y aura toujours une suite de rationnel qui va converger.</p>	<p>Cette intervention va permettre de visiter l'oeuvre $\theta_{\mathbb{R}}$.</p> <p>$Q_{2,5}^D$: peut-on utiliser la notion de limite ?</p> <p>La densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est convoquée et permet d'apporter la réponse $R_{2,5}^\circ$</p>
<p>D_2 : déjà, faudrait faire avec les rationnels.</p>	<p>La visite de l'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$ induit un retour vers les rationnels (la densité de \mathbb{D} dans \mathbb{R} n'a pas été citée).</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

<p>D_1 : oui. On peut dire que l'idée est la même, un rationnel, on peut l'écrire p/q, donc on va pouvoir trouver un entier par lequel le multiplier pour avoir un entier.</p>	<p>La même technique que pour les décimaux est évoquée.</p>
<p>D_2 : en fait, j'ai pensé à la limite parce que tout à l'heure, quand il a montré pour le point, il a utilisé les intersections de carré, lorsqu'à l'infini, ça tend vers le point. Du coup, sur les aires, il a fait les limites des intersections...</p>	<p>L'équipement praxéologique apporté par l'étude de la question 1 a favorisé l'émergence d'une technique.</p>

Les éléments de réponse à la question Q_2 apportés par ce collectif sont donnés par la figure 6.35.

Si l et L sont des entiers on peut décomposer le rectangle en $l \times L$ carré unité. Donc on a un rectangle de mesure $l \times L \times \mu(C) = l \times L$

pour les décimaux choisir celui qui a la plus grande partie décimale, et le multiplier de telles sorte à obtenir un entier. on multiplie l'autre par le même rapport on aura nécessairement un entier aussi. et ensuite le décomposer comme avec les entiers (on fait donc un agrandissement)

Mais il faut ensuite diviser l'aire par k^2

Si l et L sont des irrationnels, il existe deux suites (r) et (r') telles qu'elles convergent respectivement vers l et L . Le rectangle R de dimension r et r' à pour mesure $\mu(R)$. L'aire du rectangle R tend vers celle du rectangle de dimension $l \times L$. Donc(?) l'aire du rectangle de dimension $l \times L$ est la limite de celle du rectangle R .

FIGURE 6.35 – Éléments de la Réponse $R_{2,D}^\heartsuit$ du groupe D à la question 2

Le schéma herbartien pour le groupe D est :

$$[S(X; Y; Q_2) \Rightarrow M_2^4] \rightsquigarrow R_2^4$$

avec $M_2^D = [Q_2, Q_{2,1}^D, Q_{2,2}^D, Q_{2,3}^D, Q_{2,4}^D, Q_{2,4}^D, Q_{2,5}^D, R_{2,1}^D, R_{2,3}^D, R_{2,5}^{4\heartsuit}, \Pi_{M,m_2}, O_{\mathbb{R}}]$.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

Moment de l'étude	Indicateurs
Identification du type de tâche du MPR relatif à l'intégrale de l'université	l'ostensif « décomposition » est présent
Tentative de mise en oeuvre d'une technique $\tau_{M,m}$	Cas des entier étudié au début de l'étude, puis le moment engendré par les questions $Q_{2,1}^D$ et $Q_{2,2}^D$; Visite de Π_{M,m_2} et mise en oeuvre de la technique pour le cas entier et rationnel
Confrontation des logos Λ_M et Λ_M^*	La propriété de l'homogénéité de l'aire vis à vis des homothéties est évoquée, mais rejetée par le collectif (« ça, il faut le démontrer »)
Élaboration de τ_{M,m_2}^* et validation par θ_M^*	τ_{M,m_2}^* produite dans le cas entier et décimal, et justification par θ_M^*

La dynamique de ce quatrième groupe a été portée par seulement deux étudiantes sur les quatre que comporte ce groupe. Rappelons que dans ce groupe, 2 étudiants n'ont pas suivi d'UE de théorie de la mesure. L'indication apportée par l'énoncé a été prise en compte par le groupe et le temps d'élaboration de la technique pour le cas entier a abouti à la production d'une technique dans ce cas particulier. L'intervention de $D1$ ("il va rester l'intersection commune") indique un moment de confrontation des logos et la justification de la technique par la propriété de la mesure nulle des segments.

Pour le cas des décimaux et des rationnels (p/q et r/s), c'est au contraire l'union de $q \times s$ tels rectangles qui donne un rectangle de côté $p \times r$. L'invariance par isométrie et la mesure des rectangles à côtés entiers permet de conclure, mais le groupe a plutôt pensé à mobiliser les homothéties de rapport $q \times s$. Ce qui n'est pas légitime ici. La question de l'homogénéité de l'aire vis à vis des homothéties a été discutée et correspond à un nouveau moment de confrontation des logos. Par rapport au problème de CAPES déjà expérimenté, nous avons décidé de supprimer l'axiome des homothéties favoriser la mise en lumière du lien entre mesure et ensemble de nombres. Ce temps d'étude s'achève avec la question $Q_{2,4}^D$ dont le collectif n'apporte pas de réponse.

Enfin, le cas des irrationnels a été évoqué, et l'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$ portant sur la densité de \mathbb{R} a bien été convoqué. L'exploration d'une technique qui utilise la notion de limite a été favorisée par la technique τ_{M,m_3} élaborée lors du temps d'étude précédent (en réponse à Q_1). Le moment de la confrontation des blocs du logos n'a pas été vécu à ce moment de l'étude, puisque la notion de croissance de l'aire n'a pas remplacé la limite.

Il paraît donc que la valence opératoire de l'ostensif « ensemble de nombre » soit ici encore un peu faible puisque finalement, la technique pour le passage de \mathbb{Q} à \mathbb{R} n'a pas été menée : il n'y a pas eu de formalisation de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ce qui n'a pas permis de discuter du bloc technologico-théorique, en particulier la question de la croissance de l'aire.

Conclusion - Deuxième question

Lors de l'étude, la technique τ_{M,m_2} a été mise en oeuvre par les 4 groupes pour le cas particulier des entiers. Un groupe a validé la technique par un élément technologique introduit lors de l'étude précédente : la mesure d'aire des segments est nulle. Cet élément technologique permet de prolonger la propriété d'additivité à des ensembles dont l'intersection est de mesure nulle. Un autre groupe a procédé par un découpage en ensembles élémentaires : les carrés semi-ouverts.

La valence sémiotique de l'ostensif « domaine de nombre » est assez élevé et a réactivé des praxéologies antérieures chez 2 groupes (« on a déjà fait ça », « il faut utiliser la densité »). Néanmoins, même si la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est évoquée, la notion n'est pas opérationnelle (l'ostensif densité a une valence opératoire faible). Le moment de confrontation des logos, qui aurait conduit à la mise en lumière de la croissance de l'aire, n'a été vécu par aucun groupe.

Cette partie de l'AER a mis en lumière la difficulté du changement de registre des figures géométriques vers les nombres.

Le moment d'institutionnalisation a mis en lumière les éléments issus du MPR relatif à la théorie de la mesure et de l'intégration qui ont permis la construction de l'organisation mathématique visée. La technique τ_{M,m_2}^* a ainsi été exposée, et les différents éléments de θ_{M,m_2}^* justifiant la technique sont pointés. L'équipement praxéologique des étudiants contient donc une nouvelle praxéologie.

Analyse a posteriori de la troisième question**Premier groupe - Troisième question -**

<p>A_3 : est-ce que vous voyez un problème dans la démonstration ? Pour moi, c'est ok.</p> <p>A_1 : il ne faut pas voir de problème non ?</p> <p>A_3 : il faut la formaliser ...</p> <p>A_1 : la question, c'est bien de la mettre à notre niveau ?</p> <p>A_3 : en gros, faut ré-écrire la preuve en se servant des axiomes.</p>	
<p>A_3 : au début, y a rien à toucher. Là où ça commence, c'est à partir de la ligne 4. Ça marche par additivité... il faut que l'intersection soit disjointe.</p> <p>A_1 : en fait, je ne vois pas ce qu'on peut faire de plus rigoureux.</p> <p>A_3 : En fait, c'est surtout que eux ils disent : $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ c'est l'aire sous la courbe, je suppose qu'il faut l'expliquer avec l'additivité de la mesure.</p>	<p>Identification de l'ostensif « aire » et justification à partir d'un élément de Λ_M^* (additivité de la mesure des aires). Moment d'identification de la notion d'aire dans la preuve du manuel</p>
<p>A_1 : entre les lignes il suffit juste de rajouter l'intégrale ?</p> <p>A_2 : mais pourquoi tu veux parler d'intégrale ?</p> <p>A_1 : parce que $\phi(x)$ est définie comme ça !</p> <p>A_2 : c'est juste une aire, on n'a pas intégré, on n'a pas de théorie de l'intégration</p>	<p>A_2 se place dans la position de l'élève dans l'institution L en précisant que le bloc du logos relatif à la tâche t_L est faible</p>
<p>A_1 : c'est pas Riemann ? Avec des subdivisions,...</p> <p>A_2 : c'est que du Riemann, tu as raison. En fait, je ne vois pas ce qui manque de rigueur.</p> <p>A_1 : je suis sûr qu'il faut faire la valeur absolue, majorer. Dans ma tête, je l'ai apprise comme ça. On faisait le taux d'accroissement, et on majore par quelque chose de fini.</p>	<p>Le collectif mobilise la technique $\tau_{U,R,1}$ du type de tâche $T_{U,R,1}$: montrer qu'une fonction est Riemann-intégrable.</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Moments de l'étude pour P_L^{\sim}	
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire	Moment vécu (« est-ce que vous voyez un problème? »)
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_L^{\sim}	Visite de Λ_M^* (« c'est l'aire sous la courbe, n je suppose qu'il faut expliquer avec l'additivité »)
Élaboration de τ_L^{\sim} et de la validation par θ_L^{\sim}	Pas de conversion du registre géométrique au registre numérique

Le collectif d'étude s'est engagé dans le premier temps d'étude après un moment d'exploration de la tâche (« il faut la formaliser », « la question c'est bien de la mettre à notre niveau? », « il faut ré-écrire en se servant des axiomes ») non sans une certaine réticence (« pour moi, la preuve comme ça, c'est ok »). La remarque « la question c'est bien de la mettre à notre niveau? » atteste d'une confrontation des logos sur la preuve au lycée et à l'université. La mise en oeuvre de la technique τ_L^{\sim} est partielle puisque le temps de l'étude qui consiste à identifier la présence de la notion d'aire est écourté par l'intervention de A_1 et la question « c'est pas Riemann »? Cela conduit alors le groupe à tenter la mise en oeuvre d'une technique du MPR relatif à l'intégrale du Riemann. Ce qui n'est la tâche attendue ici, et peut indiquer une difficulté à accepter le changement de contrat. Le média du texte de Blanché n'a pas joué de rôle ici et n'a, semble-t-il, pas généré le moment de traduction des ensembles géométriques du plan en sous-ensembles de \mathbb{R}^2 . En effet, bien que la notion d'aire soit identifiée, ainsi que la notion d'additivité, la propriété semble encore lue sur la figure : le passage du cadre géométrique au cadre numérique n'a pas été effectué.

Deuxième groupe - Troisième question -

<p>B_3 : Il faut exprimer l'aire à l'aide de cette mesure ? Donc à la place de f, il faut écrire une mesure c'est ça ? Après... B_2 : ce n'est pas à la place de f mais à la place de ϕ B_3 : oui, pardon, je voulais dire ϕ</p>	<p>Moment d'exploration de la tâche</p>
<p>P : Comment vous pourriez réécrire la preuve à l'aide de la mesure μ que l'on a vu, tout à l'heure ? Vous comprenez bien la preuve ? Tous : oui. La mesure d'aire pas trop. P : Oui, mais la preuve s'appuie sur la mesure d'aire. C'est ça qu'il faudrait identifier. P : Avez-vous identifié ce qui fait appel à la notion intuitive d'aire ? B_1 : La quantité $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ P : D'accord. La quantité $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$. Ça correspond à quoi ? B_3 c'est l'aire sous la courbe entre x_0 et x_{0+h}.</p>	<p>P cherche à générer le temps d'identification de la notion d'aire dans la preuve $Q_{3,1}^B$ Où est-ce qu'on utilise la notion d'aire dans la preuve ? Identification d'un moment de la preuve qui mobilise la notion d'aire : réponse $R_{3,1}^B$. $Q_{3,2}^B$ à quoi correspond $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ $Q_{3,2}^B$ vise à générer le moment de traduction des ensembles géométriques en sous-ensembles de R^2 Le collectif semble ne pas opérer de transfert entre le géométrique et le numérique.</p>

$$[S(X; Y; Q_3) \Rightarrow M_3^B] \Rightarrow R_{B,3}^\heartsuit$$

avec $M_3^B = \{Q_3, Q_{3,1}^B, Q_{3,2}^B, R_{3,1}^B, R_{3,2}^B\}$.

Moments de l'étude pour P_L^\sim	
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire	Moment vécu avec l'identification de la présence de la notion intuitive d'aire ($R_{3,2}^B$).
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_L^\sim	Ce moment n'est pas vécu par le groupe : la réponse $R_{3,2}^B$ indique que le groupe n'interroge pas le logos
Élaboration de τ_L^\sim et de la validation par θ_L^{tilde}	Pas de conversion du registre géométrique au registre numérique

L'identification de la notion d'aire a été effectuée à la ligne 4 de la preuve. Le milieu construit par le collectif lors de cette phase d'étude n'a pas abouti à la production d'une

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

réponse $R_{B,3}^\heartsuit$. L'aide à l'étude a été apportée puisque deux questions ont été produites par l'enseignant, avec l'objectif de générer les moments de l'étude identifiés dans l'analyse a priori. La question $Q_{3,1}^B$ a en effet permis de formaliser l'identification de la notion d'aire. Mais la réponse $R_{3,2}^B$ indique que les propriétés restent lues sur la figure et ainsi, il n'y a pas de transfert entre le géométrique et le numérique. L'oeuvre apportée par le média qu'est le texte de Blanché n'a pas été visité et ainsi, le moment de traduction des ensembles géométriques du plan en sous-ensembles de \mathbb{R}^2 n'a pas été vécu.

Troisième groupe - Troisième question -

<p>C_4 : Je sais pas comment on écrit l'aire sous la courbe avec la notation μ...</p> <p>C_3 : Moi non plus. En fait, je pense que c'est ça le plus dur, se ramener à du μ.</p> <p>C_4 : parce qu'on a que des lignes droites avec le μ.</p> <p>C_3 : les aires du rectangles, tu les mets en μ, et l'aire du milieu, on laisse en ϕ. Non, le truc du milieu aussi, il faut le mettre en μ?</p> <p>C_4 : je pense...</p> <p>C_1 : bah oui, c'est la mesure du truc que tu cherches, donc il faut le mettre avec μ.</p>	<p>Cette phase correspond à un temps de découverte de la tâche</p> <p>C_4 semble penser que seuls les polygones admettent une aire.</p> <p>Ces échanges marquent le moment d'élaboration d'une technique et cela permet de formaliser une première question produite par le milieu : $Q_{3,1}^4$: comment formuler à l'aide de μ?</p> <p>La question de l'appartenance à \mathcal{Q} des surfaces limitées par la courbe des fonctions continues n'est pas identifiée. Mais ce passage va permettre une certaine forme de formalisation. Et ceci apporte la réponse $R_{3,1}^4$: on formule en introduisant des sous-ensembles de \mathbb{R}^2.</p>
<p>C_4 : oui tu as raison. On note A le sous-espace, la partie, comprise entre x_0 et $x_0 + h$, sous la courbe et au dessus de la droite des abscisses. C'est un peu long, mais je ne sais pas comment on peut faire sinon. On lui donne un nom et voilà.</p> <p>C_1 : oui, tu notes A la partie comprise entre x_0 et $x_0 + h$, sous la courbe et au dessus de la droite des abscisses.</p> <p>C_4 : moi je pense qu'il faut expliquer pourquoi on peut mettre ça avec μ</p>	<p>Le collectif s'engage dans une formalisation et poursuit la mise en oeuvre d'une technique.</p> <p>Le groupe produit un écrit, voir figure</p> <p>C_4 fait référence à l'encadrement $\mu(R) \leq \mu(A) \leq \mu(R')$ et la question est explicitement posée dans le fichier partagé : ceci correspond au moment de constitution de bloc technologico-théorique</p>

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

C_1 : ah oui.	$Q_{3,2}^C$: Comment justifier $\mu(R) \leq \mu(A) \leq \mu(R')$?
C_3 : ça c'est ce qu'on a vu juste avant, dans la question 2. L'aire des rectangles.	Cette justification explique plutôt les valeurs de $\mu(R)$ et $\mu(R')$.
C_4 : Pourquoi il y a les plus petits ou égal ? Parce que oui, l'aire d'un rectangle on sait le calculer, mais on n'a pas ...	C_4 insiste sur la question des inégalités.
C_1 : est-ce que ça suffit de justifier que les rectangles sont plus petits, et du coup l'aire est plus petite.	La formulation de C_1 n'est pas encore optimale, et ne satisfait pas le collectif.
C_4 : ah mais non, c'est parce que μ elle est croissante !	La visite de l'oeuvre Λ_M^* permet de justifier la technique.
C_4 : il faut dire qu'ils sont inclus... .	
C_1 : oui, R inclus dans A et A est inclus dans R'.	La formalisation est alors dans le fichier partagé (figure)

Ce groupe a ainsi produit une formalisation de la preuve dans le document partagé, fruit de discussions pendant le temps de l'étude (figure 6.36).

Notons A la partie comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=x_0$ et $x=x_0+h$

Soit R un rectangle de longueur $f(x_0)$ et de largeur h.

Soit R' un rectangle de longueur $f(x_0 + h)$ et de largeur h.

$R \subset R'$

on a $R \subset A \subset R'$ et par croissance de μ :

$$\mu(R) \leq \mu(A) \leq \mu(R')$$

$$f(x_0) h \leq \mu(A) \leq f(x_0+h) h$$

$$f(x_0) \leq \mu(A) / h \leq f(x_0+h) \text{ (car on a supposé } h \neq 0 \text{)}$$

FIGURE 6.36 – Éléments de la Réponse $R_{3,C}^\heartsuit$ du groupe C à la question 3

Les deux questions posées par le groupe sont les questions $Q_{3,1}^C$ et $Q_{3,2}^C$ et le collectif a pu y apporter les réponses $R_{3,1}^3$ et $R_{3,2}^3$. Le schéma herbartien pour le groupe C est :

$$[S(X; Y; Q_3) \rightsquigarrow M_3^3] \rightsquigarrow R_{3,3}^\heartsuit = \tau_L^\sim.$$

avec $M_3^3 = \{Q_3, Q_{3,1}^C, Q_{3,2}^C, R_{3,1}^C, R_{3,2}^C, \Lambda_M^*\}$.

6.4. Seconde expérimentation : méthodologie de construction

Moments de l'étude pour P_L^{\sim}	
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire	Moment vécu avec l'identification de la présence de la notion intuitive d'aire : aire des rectangles, $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$, encadrement par des rectangles
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_L^{\sim}	Moment vécu : « il faut mettre avec du μ », « les aires des rectangles, tu les mets en μ »
Élaboration de τ_L^{\sim} et de la validation par $\theta_L^{tildede}$	Mise en oeuvre de la technique, mais sans transfert explicite vers le registre des nombres. Validation de la technique par la mesure des rectangles, la croissance de la mesure.

Le collectif a identifié la présence de la notion d'aire et a généré le premier moment lors de la phase d'élaboration de la technique. Ensuite, le deuxième moment de l'étude est illustré par la phrase « mettre avec du μ » : ceci indique une volonté d'écrire les ensembles en jeu, et de remplacer la notion d'aire par l'image par μ d'un ensemble. Ce temps d'étude a ainsi abouti à la désignation des ensembles en jeu, qui ne marque pas le passage au numérique. La question de l'additivité de la mesure n'est pas évoquée et reste lue sur la figure : l'objet en jeu (surface sous la courbe) est directement désigné par la lettre A . Ensuite, le moment d'identification des propriétés de μ mobilisées dans la preuve s'engage. Ce moment est engendré par la question $Q_{3,2}^C$ et la justification de l'encadrement par les mesures des rectangles. La discussion s'engage sur les éléments technologico-théorique et le collectif tire profit du nouvel équipement praxéologique issu de l'étude des questions Q_1 et Q_2 : la croissance de l'aire est mobilisée, la mesure des rectangles également.

Nous considérons donc que la praxéologie P_L^{\sim} a été construite par ce collectif et montre la pertinence du travail mené en amont pour la réalisation de la tâche.

Quatrième groupe - Troisième question -

<p>D_1 Le début, on peut le garder (f croissante, f continue).</p> <p>Là où il va y avoir un truc à changer, c'est quand on a $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$.</p>	<p>Premier moment de l'étude : identification de la présence de la notion d'aire.</p> <p>$Q_{3,1}^D$: Où intervient la notion d'aire ?</p>
--	--

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

D_1 Donc il faut que tout soit justifié par nos axiomes et les propriétés.	
D_2 Donc déjà quand il parle de l'aire des rectangles. . .	
D_2 Il faut justifier chaque phrase avec la mesure. . .l'aire du rectangle : pourquoi on peut encadrer ? Bin. . .c'est la croissance, ce genre de chose. Je ne suis pas sur que ce soit ça. . .	$Q_{3,2}^D$: pourquoi peut-on encadrer ? $R_{3,2}^D$: grâce à la croissance. Identification d'un élément de Λ_M^* justifiant un élément de la preuve.

$$[S(X; Y; Q_3) \leftrightarrow M_3^D] \mapsto R_{B,3}^\heartsuit$$

avec $M_3^D = \{Q_3, Q_{3,1}^D, Q_{3,2}^D, R_{3,1}^D, R_{3,2}^D\}$.

Moments de l'étude pour P_L^\sim	
Étude du produit de la mise en oeuvre d'une technique du lycée qui mobilise la notion d'aire	Moment vécu avec l'identification de la présence de la notion intuitive d'aire : aire des rectangles, $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$, encadrement par des rectangles
Confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_L^\sim	Moment vécu : « Donc il faut que tout soit justifié par nos axiomes et les propriétés », « pourquoi on peut encadrer ? Bin. . .c'est la croissance »
Élaboration de τ_L^\sim et de la validation par θ_L^\sim	pas de transfert vers le registre des nombres.

Bien que la question $R_{3,1}^D$ n'ait pas été formulée par le collectif, nous pouvons admettre que c'est le fait d'apporter une réponse à cette question que le groupe a généré le premier moment de l'étude : l'ostensif « aire » a été repéré et a favorisé l'identification de la notion intuitive d'aire. Le deuxième moment, celui de la confrontation des logos, a été vécu par le collectif comme l'indique « Donc il faut que tout soit justifié par nos axiomes et les propriétés », « pourquoi on peut encadrer ? C'est la croissance ». Ce moment engendre alors un temps de dialectique entre l'élaboration de la technique et la justification par la technologie θ_M^* : la propriété de croissance est évoquée pour justifier l'encadrement proposé dans la preuve en réponse à la question $R_{3,2}^D$.

Néanmoins, les objets géométriques ne sont pas convertis en sous-ensembles de \mathbb{R}^2 . La propriété d'additivité n'est pas mobilisée. Finalement, ce groupe ne proposera pas une réponse à la question Q_3 .

Conclusion - Troisième question -

La tâche en jeu ici ne renvoie pas à un type de tâche qui figure dans les objectifs d'apprentissage visés par l'institution.

Le questionnement autour de la notion de rigueur est apparu dans chacun des groupes, ce qui est attesté par les remarques : « il faut que tout soit justifié par nos axiomes », « il faut se ramener à du μ », « il faut mettre la preuve à notre niveau » . La confrontation des logos Λ_{aire} et $\Lambda_{\tilde{M}}$ a donc été vécue par les différents collectifs.

Cette confrontation des logos permet à la plupart des groupes de se saisir de la nécessité de la formalisation, mais ces derniers n'ont pas été capables de la mettre en oeuvre, sauf le groupe C. En effet, ce groupe a nommé les objets géométriques en jeu par une écriture symbolique de sorte à mobiliser la mesure μ . La formalisation n'est pas complètement aboutie, car les objets manipulés n'apparaissent pas comme des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 de sorte que des propriétés sont encore lues sur la figure. Néanmoins, nous constatons, chez ce groupe, des gestes de formalisation. Ce groupe est le seul à avoir proposé une réécriture de la preuve du manuel.

La conversion du registre géométrique au registre des nombres nécessite de traduire les objets géométriques en sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , et cela engage aussi la théorie des ensembles et dépasse ainsi le cadre des changements de registre du lycée. C'est un moment clé de la réalisation de la tâche. Nos résultats suggèrent que cette conversion reste un obstacle pour les étudiants futurs enseignants.

6.4.8 Conclusion de l'analyse a posteriori

La comparaison du schéma herbartien du groupe A avec celui présenté dans l'analyse a priori montre que la question génératrice Q_1 relative à la tâche t_1 a effectivement engendré le milieu prévu : les oeuvres issues du MPR relatif à la théorie de la mesure et de l'intégration ont été visitées par le collectif. L'analyse en termes des moments de l'étude indique également que, pour ce groupe, les différents moments de la construction d'une praxéologie de Klein de type P^* ont été vécus : l'identification du type de tâches et la mise en oeuvre d'une technique existante dans le MPR de l'université, la confrontation des logos, puis l'adaptation de la technique. Le moment de validation de la technique demeure faiblement vécu ; à ce moment de l'étude, la fonction de l'axiomatique n'est pas encore pleinement perçue et la propriété de croissance demeure implicite. La valence instrumentale de l'ostensif « diffuse » paraît un point clé de l'étude de la question Q_1 : le groupe A a ainsi produit une technique τ_{M,m_3}^* , alors que deux autres groupes ont été bloqués par la perte d'instrumentalité de l'ostensif « diffuse ». En effet, bien que les milieux produits par ces groupes contiennent l'oeuvre Π_{M,m_3} , ce qui indique l'identification du type de tâche, le moment de l'étude correspondant à la mise en oeuvre de la technique τ_{M,m_3} n'a pas été vécu, et l'absence de ce moment bloque la mise en oeuvre de τ_{M,m_3}^* .

Lors de l'étude générée par la question Q_2 , relative à la tâche t_2 , la technique attendue pour le cas particulier des entiers a été mise en oeuvre par les quatre groupes. Dans le milieu construit par le groupe D, nous avons remarqué la validation de la technique par un élément technologique introduit lors de l'étude précédente : la mesure d'aire des segments est nulle. Cet élément technologique permet de prolonger la propriété d'additivité à des ensembles dont l'intersection est de mesure nulle, ce qui indique une prise de recul vis à vis de la notion intuitive d'aire et une appropriation de l'axiomatique. La valence sémiotique de l'ostensif « domaine de nombres » est assez élevée puisque cet ostensif a renvoyé à d'autres signes (l'articulation entre \mathbb{N} , \mathbb{Q} et \mathbb{R}) chez trois groupes. Néanmoins, même si la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est évoquée (l'oeuvre $O_{\mathbb{R}}$ est présente dans les milieux de deux groupes), la notion de densité n'est pas opératoire, en particulier le lien entre la densité et la relation d'ordre dans \mathbb{R} , qui conduit à la mise en oeuvre d'encadrements, n'est pas observé dans les productions de ces étudiants. Le moment de confrontation des logos Λ_M et Λ_M^* , qui aurait conduit à la mise en lumière de la croissance de l'aire, n'a été vécu par aucun groupe. En définitive, la technique τ_{M,m_2} développée lors de la réalisation de la tâche t_{M,m_2} en cours de théorie de la mesure n'a pas été mise en oeuvre (en vue de son adaptation au nouveau contexte). On peut faire l'hypothèse que cette faiblesse au niveau de l'équipement praxéologique des étudiants est lié aux difficultés conceptuelles de la notion de densité précisées ci-dessus. Ceci fait obstacle au développement de la praxéologie de Klein visée, autour de la technique τ_{M,m_2}^* .

Enfin, lors de l'étude générée par la question Q_3 à partir de la tâche t_3 , le questionnement autour de la notion de rigueur est apparu dans chacun des groupes. Ainsi, le moment de la confrontation des logos Λ_{aire} et Λ_M^{\sim} a été vécue par les différents collectifs, et les éléments θ_{aire} et Λ_M^{\sim} sont présents dans les milieux produits. Cette confrontation des logos a permis aux différents groupes de se saisir de la nécessité de la formalisation, mais ces derniers n'ont pas été capables de la mettre en oeuvre, sauf le groupe C. En effet, ce groupe a nommé les objets géométrique en jeu par une écriture symbolique de sorte à mobiliser la mesure μ . La formalisation n'est pas complètement aboutie, car les objets manipulés n'apparaissent pas comme des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 de sorte que des propriétés sont encore lues sur la figure. Néanmoins, nous constatons, chez ce groupe, des gestes de formalisation. Ce groupe est le seul à avoir proposé une réécriture de la preuve du manuel. La conversion du registre géométrique au registre des nombres nécessite de traduire les objets géométriques en termes de sous-ensembles de \mathbb{R}^2 , ce qui engage la théorie des ensembles et dépasse ainsi le cadre des changements de registre du lycée. C'est un moment clé de la réalisation de la tâche. Nos résultats suggèrent que cette conversion reste un obstacle pour les étudiants futurs enseignants, ce qui fait obstacle au développement de la praxéologie de Klein visée, de type P^{\sim} . La construction préalable des praxéologies de type P^* sur lesquelles s'appuient la praxéologie P^{\sim} se sont ainsi révélées insuffisantes pour la construction de cette dernière. La faible au niveau de

l'équipement praxéologique des futures enseignants se situe du côté des praxéologies de formalisation et de modélisation. On peut faire l'hypothèse qu'elles sont insuffisamment développées dans les curricula actuels.

6.5 Conclusion : réponses à QR_3

Ce chapitre avait pour but de répondre au troisième groupement de questions de recherche QR_3 : *Comment implémenter le plan B de Klein pour l'intégrale ? En particulier, quelles nouvelles praxéologies (de Klein) s'agit-il d'introduire ? Comment développer les praxéologies de Klein ? Quels sont les obstacles au développement de ces praxéologies ?*

Nous avons proposé une expérimentation visant à étudier la problématique de la seconde discontinuité de Klein à travers un dispositif réalisant le plan B de Klein, pour l'intégrale du lycée dans ses liens avec la théorie de la mesure enseignée à l'université et à l'intégrale de Riemann. Les liens dont il est question sont formalisés à l'aide de l'outil des praxéologies. Les modèles praxéologiques dominants à l'université de Montpellier pour l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue (voir chapitre 5) nous servent ainsi de référence pour l'équipement praxéologique des étudiants qui réaliseront l'activité. Nous avons complété ces modèles par un modèle praxéologique que nous considérons dominant pour l'enseignement de l'intégrale au lycée en France.

La confrontation des modèles praxéologiques nous a permis d'identifier que l'intégrale du lycée se fonde sur une théorie intuitive d'aire. Cette notion intuitive sert de support à l'introduction de l'intégrale de Riemann mais également à la théorie de la mesure en L3 avec un discours meta sur l'aire du disque dont la fonction est de convaincre de la nécessité de la σ -additivité.

En nous fondant sur notre étude épistémologique (voir Chapitre 3) ainsi que notre revue de travaux, nous avons identifié la mesure de Jordan comme étant de nature à fonder axiomatique la mesure des aires (Perrin-Glorian, 1999 ; Douady, 1987 ; Daubelcour, 1998 ; Perrin, 2005 ; M. Rogalski, 2001). Nous avons ainsi formalisé un bloc de logos de nature à fonder l'intégrale du lycée. Notre pré-expérimentation a consisté à proposer selon la modalité d'un problème de type CAPES une liste de tâche qui vise le développement de ce logos et dont la réalisation mobilise différentes techniques développées dans différents domaines de l'université. La méthodologie de construction des tâches suit celle décrite par Kondratieva et Winsløw (2018) : les liens que le problème cherche à établir ont été décrits en termes de relations entre blocs du logos et de la praxis de praxéologies mobilisant l'intégrale du lycée, celle de Riemann et celle de Lebesgue, ainsi que différentes praxéologies de calcul et de théorie des ensembles. Les résultats de notre pré-expérimentation montrent que le transfert des connaissances universitaires en des connaissances utiles pour l'enseignant est très loin d'être automatique (Wu, 2011). La modalité de type problème de capes ne permet pas de rétroactions

CHAPITRE 6. UNE IMPLÉMENTATION LOCALE DU PLAN B DE KLEIN POUR L'INTÉGRALE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

du milieu, et cela nous a suggéré une nouvelle modalité d'expérimentation sous la forme d'un processus d'étude réalisé par des collectifs d'étudiants et mettant en place une dialectique entre médias et milieux.

La formalisation en termes de praxéologies nous a conduit à enrichir les modèles praxéologiques dominants du lycée et de l'université avec des praxéologies d'un type nouveau : les praxéologies de Klein, qui sont de deux types, P^* et P^\sim . Le premier type P^* consiste à modifier certaines composantes d'une praxéologie de l'université P relative à l'intégrale à l'université pour en souligner les liens avec l'intégrale du lycée. Dans notre cas, il s'est agi d'adapter des praxéologies modélisées dans nos modèles praxéologiques dominant relatif à la théorie de la mesure ou à l'intégrale de Riemann au cas de la dimension deux (mettant en avant l'ostensif aire), pour développer une praxéologie locale unifiée par l'axiomatique de la mesure des aires (repérée dans l'histoire des mathématiques). Le second type P^\sim met en avant l'apport des praxéologies P^* (de l'université) à l'étude de l'intégrale du lycée, en s'ancrant cette fois sur une praxéologie P du lycée qui se trouve enrichie par des éléments praxéologiques issus des praxéologies P^* . Dans notre cas, le logos des P^* permet de rendre explicites les appels à l'intuition sensible dans la preuve du TFA au programme du lycée et dans la recherche de l'aire du disque par la méthode d'Archimède, ou toute preuve mobilisant la notion intuitive d'aire (d'où la praxéologie P sous-jacente). Le type de tâche sous-jacent à une praxéologie de type P^\sim peut être considérée comme un type de tâche d'organisation didactique de l'enseignant (justifier une praxis faisant intervenir la notion intuitive d'aire avec la norme de rigueur de l'université).

Nous avons également proposé une adaptation des moments de l'étude au cas des praxéologies de Klein, pour préciser l'organisation didactique de notre dispositif. Nous avons distingué les deux types de praxéologie de Klein. Ainsi, l'usage du schéma herbartien développé dans les analyse a priori montre l'émergence dans les milieux des différents blocs de praxéologies issues des modèles dominants à l'université.

Les analyses du travail des étudiants ont été menées avec les différents outils développés dans le cadre des recherches portant sur le paradigme du questionnement du monde, en TAD (notamment les question-grammes et le schéma herbartien, pour analyser la chronogenèse et la mésogenèse, respectivement). L'analyse a posteriori a confirmé la potentialité de notre dispositif pour le développement des praxéologies de Klein : lors de chaque sous-AER, les principaux moments de l'étude ont été vécus par des collectifs d'étude, en particulier la confrontation de différents blocs de logos. La finesse des outils d'analyse a également permis de situer les obstacles au développement des praxéologies de Klein par rapport à ces moments de l'étude, puis de relier les difficultés observées à des pertes d'instrumentalité de certains ostensifs clefs et à des faiblesses de l'équipement praxéologique des étudiants. Ces faiblesses concernent à la fois des praxéologies de théorie de la mesure, des praxéologies d'analyse mobilisant la relation d'ordre dans \mathbb{R} et des praxéologies de formalisation-modélisation, en appui sur la théorie des en-

sembles. Nos résultats suggèrent ainsi qu'une certaine évolution du curriculum serait bénéfique, voire nécessaire, au développement de praxéologies de Klein, sur ces différents aspects.

CHAPITRE 7

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de recherche, nous avons contribué à l'étude de la seconde discontinuité de Klein avec l'intégrale. Nous rappelons maintenant les résultats de nos travaux et envisageons ensuite des perspectives de recherche en lien avec ceux-ci.

7.1 Apports de nos travaux

Notre présentation des travaux concernant la formation des enseignants a permis de situer notre recherche dans celles menées en didactique concernant les connaissances mathématiques des enseignants. S'il est nécessaire de pratiquer des mathématiques plus avancées pour enseigner, cela ne suffit pas pour améliorer les résultats des élèves (N. H. Wasserman, 2018). Ceci conduit à penser à des connaissances mathématiques « intermédiaires », réalisant un lien entre connaissances avancées et connaissances plus élémentaires (Kuzniak, 2007 ; Cirade, 2006 ; Zazkis & Leikin, 2010).

La question du transfert des connaissances mathématiques avancées en des connaissances utiles pour l'enseignement est un problème de transition. Nous avons effectué une synthèse des travaux menés au sein du réseau INDRUM (Hochmuth et al., 2021) sur les phénomènes de transition. Notre étude concerne la transition de type III, que Felix Klein a qualifiée de seconde discontinuité. Nous nous sommes interrogés sur des outils pour décrire les liens dont parle Felix Klein, et sur le point de vue avancé sur les contenus enseignés dans le secondaire. La théorie anthropologique du didactique fournit un cadre pour la modélisation de la seconde discontinuité (Winsløw, 2020) et pour la réalisation du plan B de Klein (Kondratieva & Winsløw, 2017, 2018).

Pour l'étude de cette seconde discontinuité, nous avons choisi un objet de savoir, l'intégrale qui se développe durant le cursus en mathématiques à différents niveaux, depuis la terminale jusqu'à la troisième année de licence. Différentes théories de l'intégration sont ainsi étudiées par les étudiants, et nous avons centré notre étude sur trois théories de l'intégration : celle de Cauchy, celle de Riemann, et celle de Lebesgue. L'analyse épistémologique joue un rôle crucial au sein d'une étude comme celle-ci où le savoir en jeu est un savoir mathématique universitaire. Nous nous sommes demandés : *Quelles sont les raisons d'être des différentes théories de l'intégration et pourquoi ont-elles émergé dans l'histoire ? Quels sont les liens entre les différentes théories de l'intégration ?* Nous avons relevé que c'est l'étude fine des fonctions numériques, en particulier à travers les séries trigonométriques, qui a conduit Riemann à chercher les fonctions pour lesquelles les sommes de Cauchy convergent. La notion de fonction intégrable est donc centrale dans la théorie de Riemann, et l'exploration de \mathbb{R} à travers les sous-ensembles de discontinuité des fonctions a ainsi permis le développement de la théorie de Riemann, jusqu'à la caractérisation des fonctions Riemann-intégrables comme fonctions d'ensemble de discontinuité de mesure nulle. Les études des ensembles des points de discontinuité des fonctions ont ainsi nourri la théorie de la mesure, en parallèle de la formalisation du concept d'aire : d'abord par Peano, puis par Jordan qui ont été les

premiers à formaliser une notion d'aire et à la relier à l'intégrale de Riemann via les sommes de Darboux : la condition de Riemann-intégrabilité (équivalente à la convergence des sommes de Darboux) est ainsi équivalente à l'égalité des mesures intérieures et extérieures de la surface limitée par la courbe. La mesure des ensembles, en particulier de \mathbb{R}^2 , formalisée par Jordan ne dispose pas de la propriété d'additivité dénombrable. Cette dernière, appelée σ -additivité, a été sélectionnée par Borel dans le cadre de l'étude des séries de fonctions.

Lebesgue s'appuie sur les propriétés de l'intégrale de Riemann pour définir le problème de l'intégration, et ajoutera l'axiome de convergence monotone. Pour résoudre le problème de l'intégration, il s'appuie sur la notion de mesure, qui en quelque sorte réalise la synthèse entre les travaux de Peano-Jordan et Borel : il définit la mesure des ensembles en sélectionnant, comme Borel, la σ -additivité. La théorie de Lebesgue apparaît comme un objet central de l'analyse mathématique : à la fois comme conclusion d'une « aventure » qui démarre chez les grecs avec la mesure des aires, mais à la fois comme la porte d'entrée vers des développements dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique : mécanique quantique, probabilités, analyse fonctionnelle.

Cette analyse nous a ainsi permis de mettre en lumière certaines raisons historiques de l'émergence des concepts, et des liens entre les différentes théories de l'intégration. Mais l'étude de la deuxième discontinuité de Klein nécessite d'étudier le savoir enseigné à l'université. Face à la pluralité des théories de l'intégration qui ont émergé dans l'histoire, nous avons formulé notre premier groupement de questions de recherche :

QR₁ : Comment expliquer, d'un point de vue épistémologique, la pluralité des théories de l'intégration enseignées à l'université ? Quels sont les différents choix de transposition didactique externe opérés par les universités françaises du concept d'intégrale ? Quelles sont les raisons de ces choix mis en avant par la noosphère ?

La communauté des mathématiciens ne semble pas unanime sur le choix des théories de l'intégration à enseigner en licence : nous avons mis en lumière différentes organisations de l'enseignement du concept d'intégrale en licence de mathématiques et les types d'arguments avancés par des mathématiciens en position de noosphérien. L'intégrale de Riemann permet de pratiquer des mathématiques à un niveau avancé et trouve des niches dans des habitats variés des curricula de mathématiques. Cependant, les besoins trophiques d'autres objets mathématiques nécessitent l'intégrale de Lebesgue : c'est par exemple le cas des probabilités ou de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces \mathcal{L}^p comme exemples d'espaces de Banach). Nous avons relevé aussi des arguments que l'on a qualifié d'intra-théoriques, portant par exemple sur la structure de l'ensemble des fonctions que l'on peut intégrer, ou sur la « puissance » de la théorie. La question de la « taille » de la classe des fonctions que l'on peut intégrer est aussi mise en avant. Enfin, nous avons relevé des arguments de type didactique. Par exemple, l'enseignement de la théorie de la mesure des compacts du plan et de l'espace devrait « éclairer

les futurs enseignants » tandis que l'intégrale de Riemann est « sans doute suffisante pour la préparation au capes ». A travers les discussions dans la noosphère, nous avons retenu trois propositions d'organisation de l'enseignement de l'intégrale durant les trois années de la licence de mathématiques que nous avons mis en regard avec les produits de la transposition didactique externe relative à l'enseignement de l'intégrale dans un panel d'universités françaises.

Nous avons ainsi étudié, avec les outils de l'écologie des savoirs, ces différents produits de la transposition didactique externe. Cette étude montre que toutes les universités enseignent l'intégrale de Lebesgue en L3 dans les parcours qui conduisent aux Masters de mathématiques fondamentales et à la recherche. A l'inverse, l'intégrale de Lebesgue n'est pas enseignée dans les parcours enseignement de la moitié des universités. Par ailleurs, notre étude montre que l'intégrabilité (au sens de Riemann) des fonctions ne trouve pas véritablement de niche. En effet, les besoins trophiques des différentes niches de l'intégrale de Riemann se limitent à l'intégrale des fonctions continues par morceaux. Nous avons vu, dans notre étude épistémologique, que la notion d'intégrabilité a émergé, dans le cadre de l'étude des séries trigonométriques, autour de la convergence des sommes de Cauchy. Le fait de situer l'intégration dans le cadre des fonctions continues par morceaux rend difficile la problématisation de l'intégrale de Riemann. Nous pouvons aussi penser que le développement des connaissances des étudiants sur l'analyse réelle, en particulier sur les fonctions, limite l'étude de l'intégrale. Notre enquête épistémologique a aussi montré que les recherches menées autour des critères d'intégrabilité de Riemann ont été déterminantes dans l'émergence de la notion de mesure. Peut-être que cette limitation de l'habitat de l'intégrale de Riemann explique en partie les difficultés des étudiants à appréhender la théorie de la mesure.

Nous avons ensuite poursuivi l'étude de la transposition didactique de l'intégrale avec l'étude du cas de l'université de Montpellier. Ceci nous a amené à l'étude de notre deuxième groupement de questions de recherche :

QR₂ : Quels sont les choix de transposition didactique externe et interne pour l'intégrale opérés à l'Université de Montpellier ? Quel(s) modèle(s) praxéologique(s) de référence sur l'intégration en licence de mathématiques à l'université de Montpellier proposer pour rendre compte de l'équipement praxéologique des étudiants et des liens entre les différentes théories de l'intégration (y compris celle enseignée dans le second degré) mis en avant par l'institution ?

Nous avons construit un questionnaire à destination des enseignants responsables des unités d'enseignement en lien avec l'intégration au moment de notre étude. Ce questionnaire vise à compléter la documentation sur le processus de transposition didactique externe, à connaître les raisons des choix de transposition didactique externe mis en avant par les enseignants, mais également à étudier le produit de la transposition didactique interne. En effet, nous avons étudié le produit de la transposition didactique interne

en analysant, avec l’outil des praxéologies, les documents de cours et fascicules de travaux dirigés de l’université de Montpellier. Nos interviews nous ont aussi aidé à mettre en perspective ces données. A l’université de Montpellier, la théorie de Riemann est étudiée en deuxième année et la question de la Riemann-intégrabilité est mise en avant. La théorie de la mesure et de l’intégration de Lebesgue permettent l’étude, dès la L3, de notions qui offrent de nombreux habitats à cette intégrale, notamment en probabilité et statistique, mais également en analyse fonctionnelle. L’entrée par la théorie générale de la mesure apparaît particulièrement pertinente pour l’enseignement des probabilités. Les discours des enseignants mettent en avant l’utilité de l’intégrale de Riemann pour confronter les étudiants à une construction de l’intégrale avant d’aborder la théorie de Lebesgue. Nous avons ensuite produit deux modèles praxéologiques dominants (au sens de la TAD, c’est-à-dire rendant compte des praxéologies développées au sein de l’institution étudiée) : l’un pour l’intégrale de Riemann, et le second pour la théorie de la mesure et l’intégrale de Lebesgue. Par ces modèles, nous avons décrit $R_U(s, \omega)$ où ω est l’intégrale à l’université, et U est l’université de Montpellier. L’équipement praxéologique des étudiants, lauréats de la licence de mathématiques de Montpellier en 2020, est constitué des organisations mathématiques que l’on a modélisées dans l’étude. Nos modèles praxéologiques ont été pour nous des outils pour la conception et la mise en oeuvre de notre expérimentation. En effet, maintenant que nous disposons d’un modèle des connaissances des étudiants sur l’intégrale, nous pouvons étudier notre troisième groupement de questions de recherches :

QR₃ : Comment implémenter le plan B de Klein pour l’intégrale ? En particulier, quelles nouvelles praxéologies (de Klein) s’agit-il d’introduire ? Comment développer les praxéologies de Klein ? Quels sont les obstacles au développement de ces praxéologies ?

Nous avons construit une ingénierie qui suit les principes du plan B de Klein, que nous avons expérimentée auprès d’une population d’étudiants en première année de Master MEEF à l’université de Montpellier. Les modèles praxéologiques que nous avons construits étaient pour nous des modèles praxéologiques de référence, dans le contexte de l’ingénierie. Dans un premier temps, nous avons construit un modèle praxéologique (dominant) pour l’intégrale au lycée, afin de mettre en lumière des liens avec les mathématiques de l’université sur l’intégrale. La mise en regard des modèles praxéologiques a montré une évolution notable des logos : la théorie qui fonde l’intégrale du lycée est la notion intuitive d’aire. Cette notion justifie le théorème fondamental de l’analyse, qui à son tour devient un élément théorique pour justifier la technologie qui engendre les techniques de calcul d’intégral. Ces mêmes techniques sont justifiées par la même technologie dans l’organisation mathématique relative à l’intégrale de Riemann, mais se fonde sur la définition de l’intégrale de Riemann et la notion de borne supérieure. Le modèle praxéologique relatif à l’intégrale de Lebesgue fait apparaître quatre secteurs dont le développement contient de nombreuses praxéologies reliées à

des tâches théoriques (ou abstraites, au sens où les variables des types de tâches ne sont pas contextualisées). Néanmoins nous avons relevé l'étude d'une OML (relative à la théorie de la mesure) dans laquelle les étudiants peuvent trouver les idées générales d'une formalisation possible de la notion intuitive d'aire, qui fonde l'intégrale du lycée. Notre enquête épistémologique nous a permis d'identifier une théorie que l'on peut qualifier d'intermédiaire entre la théorie de la mesure et la théorie intuitive de l'aire. A partir de cette théorie, nous avons mené une pré-expérimentation sous la forme d'un problème de type CAPES. Les tâches que nous avons proposées se fondent sur ce nouveau logos, et la réalisation de ces tâches mobilisent différents blocs de praxéologies issues de différents domaines de mathématiques, dans l'esprit de Klein. Mais la modalité en termes de problème de CAPES, si elle répond à une demande institutionnelle, s'avère insuffisante pour produire les effets recherchés sur les apprentissages, ce que nous relierons à une insuffisance de rétroactions du milieu. Afin de renforcer le questionnement des étudiants, notre nouveau dispositif est de type AER. Pour la conception de notre AER, nous mettons en avant l'idée que le logos de Jordan-Lebesgue permet de fonder avec la rigueur de l'université l'intégrale du lycée. La formalisation en termes de praxéologies nous a conduit à enrichir les modèles praxéologiques dominants du lycée et de l'université avec des praxéologies d'un type nouveau : les praxéologies de Klein, dont nous avons formalisé la notion.

Deux types de praxéologies de Klein ont émergé. Le premier type, que l'on a noté P^* , se fonde sur une praxéologie P relative à l'intégrale à l'université, dans laquelle sont modifiées certaines composantes. Dans notre cas, les types de tâches des praxéologies P et P^* sont identiques, mais la modification du logos de P par celui de P^* (le remplacement de l'axiomatique d'une mesure par le logos des aires) entraîne la nécessité d'une adaptation de la technique. Le second type P^\sim s'ancre cette fois sur une praxéologie P du lycée, mais qui se trouve enrichie par des éléments praxéologiques issus des praxéologies P^* . Dans notre cas, le logos des P^* permet de rendre explicites les appels à l'intuition sensible dans la preuve du TFA au programme du lycée et dans la recherche de l'aire du disque par la méthode d'Archimède, ou toute preuve mobilisant la notion intuitive d'aire (d'où la praxéologie P sous-jacente). Le type de tâche sous-jacent à une praxéologie de type P^\sim peut être considéré comme un type de tâche d'une organisation didactique de l'enseignant (justifier une praxis faisant intervenir la notion intuitive d'aire avec la norme de rigueur de l'université). La formalisation de ces praxéologies de Klein repose donc sur une analyse fine des blocs de logos. C'était une « recommandation » de Kondratieva et Winsløw (2018, p. 18)

To construct such situations clearly necessitates a careful analysis of (central) theory blocks of more advanced courses, and of resources found in praxis blocks of previous courses ;

Nous avons également proposé une adaptation des moments de l'étude au cas des praxéologies de Klein, pour préciser l'organisation didactique de notre dispositif. Nous avons

distingué les deux types de praxéologie de Klein. Ainsi, l'usage du schéma herbartien développé dans les analyses a priori montre l'émergence dans les milieux des différents blocs de praxéologies issues des modèles dominants à l'université. Ceci constitue un apport majeur de nos travaux dans l'étude de la seconde discontinuité de Klein : le modèle des moments de l'étude pour le développement des praxéologies de Klein permet de décrire finement les liens entre savoirs universitaires et les savoirs du secondaire, au cours du processus de construction des connaissances mathématiques.

Les analyses du travail des étudiants ont été menées avec les différents outils développés dans le cadre des recherches portant sur le paradigme du questionnement du monde et l'analyse a posteriori a confirmé la potentialité de notre dispositif pour le développement des praxéologies de Klein. La finesse des outils d'analyse a également permis de situer certains obstacles au développement des praxéologies de Klein par rapport à ces moments de l'étude : nous avons relié les difficultés observées à des pertes d'instrumentalité de certains ostensifs clefs et à certaines faiblesses de l'équipement praxéologique des étudiants, en particulier concernant des praxéologies de théorie de la mesure, mais également des praxéologies d'analyse. Ces praxéologies mobilisent la relation d'ordre dans \mathbb{R} ou la notion de densité. Mais nous avons aussi relevé certaines faiblesses concernant des praxéologies de formalisation-modélisation, en appui sur la théorie des ensembles. Le développement de ces praxéologies dans les curriculum de licence serait bénéfique, voire nécessaire, au développement de praxéologies de Klein.

7.2 Perspectives de recherches

Nous abordons maintenant les limites de notre étude et quelques perspectives de recherche que notre travail laisse entrevoir.

Une partie de nos travaux est consacrée à l'enseignement-apprentissage de l'intégrale à l'université et aux liens entre les différentes théories de l'intégration. Notre étude s'est limitée à une institution, celle de l'université en France, et présente à ce titre des spécificités liées à ce contexte. Les tensions dans la noosphère sur le choix des théories de l'intégration que nous avons mises en avant existent-elles dans d'autres institutions, notamment dans un contexte international ? Une étude comparative de la transposition didactique externe de l'intégrale dans différentes universités de différents pays peut apporter des réponses et prolonger les travaux de Bosch et al. (2021). Nous avons aussi évoqué la théorie de l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Nos lectures suggèrent que cette théorie est enseignée dans certaines universités de Belgique mais n'est jamais apparue dans notre panel d'universités. Il serait intéressant d'étudier le cas plus spécifique des universités qui ont fait le choix de cette intégrale afin de comprendre ce choix.

L'analyse épistémologique a mis en avant les liens entre les théories de l'intégration et certaines raisons d'être. L'étude de la transposition didactique à l'université de Montpellier montre que ces liens épistémologiques entre les différentes théories sont

peu travaillés avec les étudiants. Peut-on construire des situations d'apprentissage qui permettent de mettre en lumière ces liens? Sans vouloir faire passer les étudiants par tous les méandres de l'histoire, nous faisons l'hypothèse qu'un travail sur les raisons d'être des différentes théories de l'intégration peut aider à atténuer certaines transitions au sein de l'université, en particulier entre l'apprentissage de la théorie de Riemann et celle de Lebesgue. Comme le montre notre étude épistémologique, les problématiques qui émergent de l'étude de la convergence des sommes de Cauchy sont reliées à l'étude des sous-ensembles de \mathbb{R} . Il apparaît donc qu'un travail sur l'ensemble des nombres réels, sur la relation d'ordre et l'articulation entre le discret, le dense et le continu (ainsi que les notions liées à la dénombrabilité), est propice pour aborder ces questions. Enfin, nous avons cité dans notre revue de littérature les travaux de Legrand et al. (1986) et de M. Rogalski (2019) où les auteurs construisent une situation fondamentale d'introduction de l'intégrale à l'université en lien avec la mesure des grandeurs physiques. De telles situations peuvent-elles vivre en situation ordinaire à l'université? Peuvent-elles permettre de rendre plus visibles les liens entre les théories de l'intégration et avec la mesure des grandeurs? A partir d'une analyse praxéologique de l'organisation proposée par Legrand et al. (1986), il est possible d'adapter le dispositif à un *parcours d'étude et de recherche*. Les outils d'analyse du PER peuvent nous permettre d'étudier les points de blocage au développement des praxéologies visées, mais également d'identifier les oeuvres visitées lors de ce développement.

Par ailleurs, nous avons développé des outils pour l'étude de la seconde discontinuité de Klein. Ce travail ouvre de nombreuses perspectives. L'analyse a posteriori que nous avons proposée n'a concerné qu'une partie du dispositif. Il conviendrait de poursuivre les analyses à partir des données que nous avons recueillies lors de la seconde séance (concernant les tâches t_5 , t_6 , t_7), avec les mêmes outils que nous avons développés, dans le but de poursuivre l'investigation des points de blocage au développement des praxéologies de Klein.

En outre, nous avons cité les travaux de Shamash et al. (2018); Biza et Nardi (2016); Hanke et Schäfer (2018); N. H. Wasserman (2018); N. Wasserman et al. (2022) qui rendent compte d'innovations pédagogiques ciblant la seconde discontinuité de Klein. Une analyse praxéologique des dispositifs d'enseignement à l'aide des praxéologies de Klein peut nous permettre d'affiner la description théorique de ces praxéologies (par exemple, sous forme d'une typologie) et de leurs moments de l'étude associés. Nous pensons que cela peut aussi contribuer à rendre visibles les liens entre les mathématiques universitaires et du secondaire. Cela fait écho aux conclusions de Shamash et al. (2018) qui indiquait la nécessité d'enrichir les critères permettant de mesurer la pertinence du cours proposé vis à vis des principes de Klein. Ces formalisations peuvent ensuite donner lieu à des expérimentations d'activités d'étude mettant en lumière des liens entre des connaissances mathématiques de l'université et des connaissances mathématiques du secondaire à partir des situations proposées dans la littérature.

Mais la méthodologie que nous avons développée dans notre thèse peut également permettre de mener des études de la deuxième discontinuité de Klein à travers les liens entre d'autres objets mathématiques : la théorie des groupes et la géométrie, l'algèbre linéaire et la géométrie analytique, la notion d'idéal et l'arithmétique élémentaire, l'arithmétique des polynômes et les équations, etc. La multiplication des exemples fournira une base empirique à partir de laquelle la description théorique des praxéologies de Klein sera plus fine. De plus, ce sera également l'occasion de tester la robustesse des méthodologies que nous proposons pour le travail d'ingénierie des activités et pour l'analyse des données recueillies.

Enfin, les praxéologies P^{\sim} pourraient également être enrichies par la prise en compte de praxéologies didactiques P de l'enseignant. Ces praxéologies didactiques peuvent être fondées sur des tâches hypothétiques de l'enseignant (Durand-Guerrier et al., 2010), mais elles peuvent aussi concerner des tâches comme « évaluer la validité de réponses apportées par des élèves », « construire des exemples vérifiant certaines propriétés pour des activités en classe », « concevoir une évaluation », « préparer la preuve d'un théorème à présenter à la classe », etc. D'autres dimensions entrent en jeu dans la réalisation des types de tâche didactique, mais nous pensons qu'une modélisation en termes de praxéologie de Klein du type P^{\sim} est possible. Nous faisons l'hypothèse que cela peut rendre compte du rôle des mathématiques du supérieur dans le travail des enseignants. Ceci nécessite de croiser nos recherches avec des travaux portant sur les gestes professionnels des enseignants, lesquels seront à exprimer dans le langage des praxéologies en vue de leur articulation avec nos modèles praxéologiques.

Références

- Arnaud, D., Couteau, J., Fournet-Fayas, T., & Goarin, M. (2020). *Maths terminale spécialité - manuel en ligne sésamath*. (Magnard éd.). Consulté sur https://manuel.sesamath.net/numerique/?ouvrage=mstscomp_2020
- Arnaud, D., Fournet-Fayas, T., & Goarin, M. (2020). *Maths Terminale complémentaires- Manuel en ligne sésamath*. (Magnard éd.). Consulté sur https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstscomp_2020
- Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la neuvième Ecole d'été de didactique des mathématiques* (ARDM & IUFM éd., pp. 101–139). Caen.
- Artigue, M. (1989). Epistémologie et didactique. , 10/2.3.
- Artigue, M. (2002, janvier). What Can We Learn from Educational Research at the University Level? In (Vol. 7, pp. 207–220). doi: 10.1007/0-306-47231-7_21
- Artigue, M. (2008). L'enseignement des fonctions à la transition lycée-université..
- Artigue, M. (2020). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, Second Edition* (pp. 53–61). Springer.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. Consulté sur <https://doi.org/10.1177/0022487108324554> (_eprint : <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>) doi: 10.1177/0022487108324554
- Biza, I., & Nardi, E. (2016). Consistency, specificity, reification of pedagogical and mathematical discourses in student teacher narratives on the challenges of their

- school placement experience. In *INDRUM2016 Proceedings* (pp. 425–426). University of Montpellier.
- Blanché, R. (2009). *L'axiomatique* (3e éd éd.). Paris : PUF.
- Borel, E. (1898). *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars et fils éd.).
- Bosch, M. (2018). Study and Research Paths : a model for inquiry. In B. Sirakov, P. Ney de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM2018)*, vol. 4 (pp. 4033–4054). World Scientific Publishing.
- Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124.
- Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., Kondratieva, M., & Winsløw, C. (2021, avril). External Didactic Transposition in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(1), 140–162. Consulté sur <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00132-7> doi: 10.1007/s40753-020-00132-7
- Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., & Winsløw, C. (2019, février). External Didactic Transposition in Undergraduate Mathematics. In U. T. Jankvist, M. v. d. Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. TWG14). Utrecht, Netherlands : Freudenthal Group. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422580> (Backup Publisher : Utrecht University Issue : 07)
- Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Berlin Heidelberg New York : Springer.
- Candy, J. (2020). *Etude de la transposition didactique du concept d'idéal : écologie des savoirs et problématique de l'entrée dans la pensée structuraliste, en France et en Suisse romande*. (Thèse de doctorat, Université de Montpellier). Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03119093>
- Carathodory, C. (1927). *Vorlesungen Uber Reelle Funktionen*. (OCLC : 1130016674)
- Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, par M. Augustin-Louis Cauchy, 1ère partie. Analyse algébrique* (Paris éd.). Consulté sur <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073247>
- Cauchy, A. (1823). *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, par M. Augustin-Louis Cauchy, ... Tome Ier* (Imprimerie Royale, Debure Frère éd.). Paris. Consulté sur <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073456>
- Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir : Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. (Place : LSD2-IMAG)
- Chevallard, Y. (1990). On Mathematics Education and Culture : critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 3–27.

- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* (2. éd éd.). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1998, juillet). Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. (Place : La Rochelle)
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In D. J.-I, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3–22). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2011). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. In A. Bronner et al. (Eds.), *Actes de la 16^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 85–120). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2012). Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement.. Consulté sur <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-chevallard>
- Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. In *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. (pp. 27–65). Consulté sur <https://citad4.sciencesconf.org>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Didactic Engineering in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, Second Edition* (pp. 202–206). Springer.
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. (Theses, Université de Provence - Aix-Marseille I). Consulté sur <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>
- Cuculière, R. (1998, avril). Quelle intégrable pour l'an 2000 ? *Repère IREM*(31).
- Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. Consulté sur <http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.122/>
- Darling-Hammond, L. (1999, novembre). Teacher Quality and Student Achievement : A Review of State Policy Evidence. *Education Policy Analysis Archives*, 8.
- Daubelcour, J.-P. (1998). Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique. *Repères IREM*(31).
- Dieudonné, J., Huet, D., & Julia, G. (2003). *Éléments d'analyse. Tome I, Tome I*.
- Dorier, J.-L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175–197. Consulté

BIBLIOGRAPHIE

- sur <http://www.jstor.org/stable/3482902> (Publisher : Springer)
- Dorier, J.-L. (1997). *RECHERCHES EN HISTOIRE ET EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES SUR L'ALGÈBRE LINÉAIRE - PERSPECTIVE THÉORIQUE SUR LEURS INTERACTIONS* (Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph-Fourier - Grenoble I). Consulté sur <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400>
- Douady, R. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*(5). Consulté sur http://www.numdam.org/item/PSMIR_1987-1988__5_A3_0/ (Publisher : Département de Mathématiques et Informatique, Université de Rennes)
- Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un Processus D'apprentissage du Concept D'aire de Surface Plane : (A Learning Process for the Concept of Area of Plane Surfaces). *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387–424. Consulté sur <http://www.jstor.org/stable/3482315> (Publisher : Springer)
- Durand-Guerrier, V., Hausberger, T., & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 20, 101–148. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01083840> (Publisher : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM))
- Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., & Yoshida, H. (2010). A model of mathematics teacher knowledge and a comparative study in Denmark, France and Japan. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 15, 141–166. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00804029> (Publisher : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM))
- Durel, R. J. (1993). The Capstone Course : A Rite of Passage. *Teaching Sociology*, 21, 223.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. V.5., pp.5-20.
- Florensa, I., Bosch, M., & Gascon, J. (2015). The epistemological dimension in didactics : Two problematic issues. *CERME9, TWG17*.
- González-Martín, A. (2021, juillet). The use of integrals in engineering programmes : a praxeological analysis of textbooks and teaching practices in strength of materials and electricity and magnetism courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7. doi: 10.1007/s40753-021-00135-y
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254.
- Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education* (G. Gueudet, M. Bosch, A. d. Sessa, O. N. Kwon, & L. Verschaffel, Eds.). Springer. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01315211> doi: 10.1007/978-3-319-31622-2

- Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien*. (Theses, Paris 7; ISEFC de Tunis). Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01087840>
- Hanke, E., & Schäfer, I. (2018, avril). Learning complex analysis in different branches – Project Spotlight-Y for future teachers. In *INDRUM 2018*. Kristiansand, Norway : INDRUM Network, University of Agder. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849968>
- Hausberger, T. (2012, février). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In Dorier, J.-L., Coutat, & S. (Eds.), *EMF 2012* (pp. 425–434). Genève, Switzerland. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797628>
- Hausberger, T. (2017). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Éducation & Didactique*, 11(2), 131–151. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01323673> (Publisher : Presses Universitaires de Rennes) doi: 10.4000/educationdidactique.2750
- Hausberger, T. (2018). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 74–93. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01668169> (Publisher : Springer) doi: 10.1007/s40753-017-0063-4
- Hausberger, T., Derouet, C., Hochmuth, R., & Planchon, G. (2021). Compartmentalisation of mathematical sectors : the case of continuous probability distributions and integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(3), 490–518.
- Hawkins, T. (1975). *Lebesgue's theory of integration* (Chelsea Publishing Company éd.).
- Hochmuth, R. (2022). Analysis tasks based on a theorem in Nonlinear Approximation theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1113–1132. (Publisher : Taylor & Francis)
- Hochmuth, R., Broley, L., & Nardi, E. (2021, février). Transitions to, across and beyond university. In (pp. 191–215). doi: 10.4324/9780429346859-14
- Hoth, J., Jeschke, C., Dreher, A., Lindmeier, A., & Heinze, A. (2020, octobre). Ist akademisches Fachwissen hinreichend für den Erwerb eines berufsspezifischen Fachwissens im Lehramtsstudium ? : Eine Untersuchung der Trickle-down-Annahme. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 329–356. (Publisher : Springer) doi: 10.1007/s13138-019-00152-0
- Jahnke, H. (2003). *A History of Analysis*. American Mathematical Society. Consulté sur <https://books.google.es/books?id=c8AjDwAAQBAJ>
- Jordan, C. (1892). Remarques sur les intégrales définies. *Journal de mathématiques*

- pures et appliquées*, 69–100.
- Kilpatrick, J. (2019). A Double Discontinuity and a Triple Approach : Felix Klein's Perspective on Mathematics Teacher Education. In H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 215–226). Cham : Springer International Publishing.
- Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen... Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der K. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen* (A. Deichert éd.). Erlangen.
- Klein, F., Hedrick, E. R., & Novle, C. A. (2007). *Elementary mathematics from an advanced standpoint : arithmetic, algebra, analysis*. New York : Cosimo.
- Kondratieva, M., & Winsløw, C. (2017). *A praxeological approach to Klein's plan B : Cross-cutting from calculus to Fourier analysis*. CERME 10.
- Kondratieva, M., & Winsløw, C. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis : Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *International Journal of research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 119–138.
- Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation : Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44, 641–651.
- Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM - Mathematics Education*, 46(4), 533–548.
- Kuzniak, A. (2007, octobre). Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche & formation*, 27–40. doi: 10.4000/rechercheformation.855
- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique* (Thèse de doctorat, UPPA (LMA-Pau)). Consulté sur <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01419021>
- Lebesgue, H. (1898). Sur l'approximation des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques. Deuxième série..*
- Lebesgue, H. (1902). *Intégrale, Longueur, Aire* (Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris). Consulté sur <https://archive.org/details/annalidimatemat01unkngoog/page/n253/mode/1up?view=theater>
- Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au collège de France*. Cambridge.
- Lebesgue, H. (1928). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France, deuxième édition*. Gauthier-villars et compagnie.
- Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard.
- Legrand, M., Grenier, D., & Richard, F. (1986). *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année*. Cahiers de didactique des mathématiques 22, IREM, Université Paris-Diderot.

- Mcgowen, M., & Tall, D. (2010, septembre). Metaphor or Met-Before? The effects of previous experience on practice and theory of learning mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29, 169–179. doi: 10.1016/j.jmathb.2010.08.002
- Michel, A. (1992). *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*. J.Vrin.
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique, pourquoi? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques?* (PhD Thesis). Consulté sur <http://www.theses.fr/2012GRENM077>
- Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 17(1), 67–79. Consulté le 2022-09-08, sur <http://www.jstor.org/stable/3482192> (Publisher : Springer)
- Orton, A. (1983, février). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1–18. Consulté sur <https://doi.org/10.1007/BF00704699> doi: 10.1007/BF00704699
- O'Shea, A. (2016, mars). Concept Images of Open Sets in Metric Spaces. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Montpellier, France. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337909>
- Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école* (Cassini éd.).
- Perrin-Glorian, M.-J. (1999). *Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires*. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385025>
- Programme de spécialité de mathématiques de terminale générale*. (2019, juillet). BO spécial n°8 du 25 juillet 2019. Consulté sur https://cache.media.eduscol.education.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf
- Programme officiel de l'option maths complémentaire*. (2019, juillet). BO spécial n°8 du 25 juillet 2019. Consulté sur https://cache.media.eduscol.education.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/13/4/spe265_annexe_1159134.pdf
- Pólya, G. (1990). *How to solve it : a new aspect of mathematical method* (2. ed éd.). London : Penguin Books.
- Queffelec, H. (2012, avril). Réflexions sur l'enseignement de l'intégration. *Gazette des mathématiciens* n°132..
- Queffelec, H. (2012, avril). Réflexions sur l'enseignement de l'intégration. *La gazette des mathématiciens*, 132, 47–60. Consulté sur <https://smf.emath.fr/system/files/filepdf/G132-bd.pdf>
- Quéré, P.-V. (2019). *Les mathématiques dans la formation des ingénieurs et sur leur lieu de travail : études et propositions (cas de la France)* (PhD Thesis). Consulté sur <http://www.theses.fr/2019BRES0041/document>
- Radon, J. (1913). *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*. Hölder. Consulté sur <https://books.google.fr/books?id=xM1LAAAAYAAJ>

BIBLIOGRAPHIE

- Riemann, B. (1873a). Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 79–96. Consulté sur http://www.numdam.org/item/BSMA_1873__5__79_1/
- Riemann, B. (1873b). *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (PhD Thesis, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5). Consulté sur https://hist-math.fr/users/Histoires/textes/Riemann1873_SeriesTrigonometriques.pdf
- Rogalski, J., & Rogalski, M. (2015, octobre). Rogalski, J., & Rogalski, M. (2015). Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problème : un exemple en licence. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage Actes du colloque EMF2015 – GT7* (pp. 687-700)..
- Rogalski, M. (2001). *Carrefours entre analyse algèbre géométrie* (Ellipses éd.).
- Rogalski, M. (2013, juillet). Sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure : faire simple et pédagogique? *Gazette des mathématiciens n°137*..
- Rogalski, M. (2019, juillet). Procédure Différentielle et Intégrale en Mathématiques et Physique..
- Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 11(2.3), 241–294. Consulté sur <https://revue-rdm.com/1991/un-obstacle-epistemologique/>
- Schneider, M. (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*. Editions La pensée sauvage.
- Schneider-Gilot, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. (Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain, Faculté des sciences, Louvain-la-neuve). Consulté sur <http://www.ladimath.ulg.ac.be/recherche/TheseSchneider.pdf>
- Shamash, J., Barabash, M., & Even, R. (2018, janvier). From Equations to Structures : Modes of Relevance of Abstract Algebra to School Mathematics as Viewed by Teacher Educators and Teachers. In (pp. 241–262). doi: 10.1007/978-3-319-99214-3_12
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. Consulté le 2022-09-09, sur <http://www.jstor.org/stable/1175860> (Publisher : [American Educational Research Association, Sage Publications, Inc.]
- Sierra, T. A., Ruiz Olarría, A., Bourgade, J.-P., & Lécureux-Têtu, M.-H. (2013, août). Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. In *17e école d'été de didactique des mathématiques : Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*. Nantes, France. Consulté sur

- <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02190611>
- Stender, P. (2018, avril). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM*, 50(1), 315–326. Consulté sur <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5> doi: 10.1007/s11858-017-0901-5
- Stender, P., & Stuhlmann, S. (2018, avril). Fostering Heuristic Strategies in Mathematics Teacher Education. In *INDRUM 2018*. Kristiansand, Norway : INDRUM Network, University of Agder. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849972>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981, mai). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12. doi: 10.1007/BF00305619
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection : Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43–52). Washington : MAA.
- Tran Luong, C. K. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam* (PhD Thesis, Grenoble 1). Consulté sur <http://www.theses.fr/2006GRE10286>
- Verret, M. (1975). *Le temps des études I*. Paris : Librairie Honoré Champion.
- Villeneuve, J.-P. (2007). *Types de généralisations et épistémologie des mathématiques : de l'intégrale de Cauchy à l'intégrale de Lebesgue* (Thèse de doctorat non publiée). Université de Montréal, Département de philosophie, Faculté des arts et des Sciences.
- Villeneuve, J.-P. (2009). Le processus d'abstraction dans le développement des premières théories de la mesure.
- Villeneuve, J.-P. (2014). *Cauchy, une nouvelle conception du calcul intégral*. Bibnum. Consulté sur <http://journals.openedition.org/bibnum/597>
- Wasserman, N., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejía Ramos, J. P., & Abbott, S. (2022). *Understanding analysis and its connections to secondary mathematics teaching*. Cham : Springer. (OCLC : 1290841782)
- Wasserman, N. H. (Ed.). (2018). *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (1st ed. 2018 éd.). Cham : Springer International Publishing : Imprint : Springer. doi: 10.1007/978-3-319-99214-3
- Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., & Neubrand, M. (2019). *The legacy of Felix Klein* (Cassini Open éd.).
- Winslow, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited : what use is university mathematics to high school calculus? *Recherche en didactique des mathématiques*, 34(1).
- Winsløw, C. (2007, janvier). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 12, 189–204.

- Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier (Ed.), *Actes de la XIIIème école d'été en didactique des mathématiques*. Éditions la Pensée Sauvage.
- Winsløw, C. (2020, septembre). Professional and academic bases of university mathematics teaching for the 21st century : the anthropological approach to practice based research. In *INDRUM 2020*. Cyberspace (virtually from Bizerte), Tunisia : Université de Carthage, Université de Montpellier. Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03114001>
- Winsløw, C., & Grønbaek, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited : contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 34(1), 59–86. Consulté sur <https://revue-rdm.com/2014/kleins-double-discontinuity-revisited/>
- Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*, 58(3), 372–384.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2010, octobre). Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice : Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 263–281. doi: 10.1080/10986061003786349

Table des figures

1.1	Les deux types de transitions dans le domaine d'activité de l'étudiant de mathématiques	12
1.2	Un exemple de défi dans le cadre de l'enseignement du TFA	17
1.3	Différentes composantes dans le processus de conception de tâches. Spotlight-Y	18
1.4	Contenu et méthodes mathématiques	19
1.5	Illustration de la preuve du théorème fondamental chez Maggy Schneider	25
2.1	Schéma de la transposition didactique	35
2.2	Exemple d'un question-gramme	44
4.1	Syllabus de l'UE fondamentaux des mathématiques 2 de l'université de Lyon 1	103
4.2	Syllabus de l'UE analyse 3 de l'université de Lyon 1	104
4.3	Syllabus de l'UE algèbre 4 de l'université de Lyon 1	104
4.4	Syllabus de l'UE mesure et intégration de Lyon 1	105

4.5	Syllabus de l'UE probabilités et statistiques de Lyon 1	105
4.6	Syllabus de l'UE analyse réelle du parcours enseignement de Lyon 1 . . .	106
4.7	Réseau trophique de l'intégrale de Cauchy en Licence mathématiques générales et application à Lyon 1	108
4.8	Réseau trophique de l'intégrale de Lebesgue en Licence mathématiques générales et application à Lyon 1	109
4.9	Syllabus de l'UE analyse : intégration et séries numériques de l'univer- sité de Strasbourg	112
4.10	Réseau trophique du concept d'intégrale dans le parcours Mathéma- tiques pures à Strasbourg	115
4.11	Syllabus de l'UE Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n de Sciences Sorbonne Université	121
4.12	Syllabus de l'UE analyse 2, université de Reims	124
4.13	Syllabus de l'UE Intégration, séries de Fourier de l'université de Reims, L3	126
4.14	Syllabus de l'UE probabilités et statistiques (S6) de l'université de Reims	126
4.15	Syllabus UE analyse 3, Université de Montpellier	130
4.16	Syllabus mesure et intégration, Université de Montpellier	131
4.17	Réseau trophique du concept d'intégrale de Riemann à Montpellier . . .	134
4.18	Réseau trophique du concept d'intégrale de Lebesgue à Montpellier . .	135
5.1	Exercices sur la notion de primitive	161
5.2	Tâches sur les sommes de Riemann	164
5.3	Exemple de mise en oeuvre de τ_{R,r_1}	165
5.4	Tâches sur l'intégrabilité de fonctions	166
5.5	Exemples de propriétés de l'intégrale	168
5.6	Inégalité de Cauchy-Schwartz	169
5.7	Seconde formule de la moyenne	169
5.8	Modèle dominant relatif à l'intégrale de Riemann à l'université de Mont- pellier	170
5.9	Extrait d'un contrôle continu avec une instanciation de T_{R,r_1}	171
5.10	Aire du disque	175
5.11	TD1, Exercices sur le thème des tribus	176
5.12	Cours-Technique tribu engendrée-	177
5.13	Tâches - Fonctions et ensembles mesurables	180
5.14	Mesurabilité des fonctions continues	180
5.15	Exemples de mesures	184
5.16	Éléments du logos de la mesure : propriété des mesures	184
5.17	Exercices sur la notion de mesure	185
5.18	Première page du TD Théorie générale de l'intégration	192
5.19	Exercice 6 du TD théorie générale de l'intégration	192

TABLE DES FIGURES

5.20	Exercice 8 du TD théorie générale de l'intégration	193
5.21	Exercice 3 : mesure de Lebesgue de V	196
5.22	Correction de l'exercice 3 : mesure de Lebesgue de V	197
5.23	Fiche de TD sur les espaces $L^p(X)$	200
6.1	Exemple de tâche du type T_{L,a_1}	210
6.2	Exemple de tâche du type T_{L,a_2}	211
6.3	Approximation de π par la méthode d'Archimède	212
6.4	Réalisation de la tâche $t_{TFA,a}$	213
6.5	Exemple de tâche du type T_{L,p_1} avec description de la technique	214
6.6	Exemple de tâche du type T_{L,p_3} avec description de la technique	215
6.7	Technologie de P_{L,a_4}	217
6.8	Exemple de tâche du type T_{L,p_4}	218
6.9	Extrait de la deuxième partie du problème	224
6.10	Corrigé de la partie B.3.1	225
6.11	Définition de la mesure des ensembles quarrables par les quadrillages	226
6.12	Procédure attendue pour la réalisation de la tâche $T_{PB,1}$	228
6.13	Mobilisation du registre graphique dans la réalisation de la preuve du TFA	229
6.14	Formalisation dans la preuve du TFA	229
6.15	Caption	232
6.16	Axiomatique des aires, dans le guide d'AER.	236
6.17	Définition des ensembles quarrables	237
6.18	Raisonnement non formalisé dans le guide d'AER	239
6.19	Question-gramme a priori pour la question 1	243
6.20	Question-gramme a priori pour la question 2	247
6.21	Question-gramme a priori pour la question 3	251
6.22	Question-gramme a priori pour la question 4	257
6.23	Question-gramme a priori pour la question 5	261
6.24	Question-gramme a priori pour la question 6	265
6.25	Représentation des praxéologies de Klein P^* et P^\sim	267
6.26	Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe A	276
6.27	Production d'une technique par le groupe 1	277
6.28	Première technique invalide du groupe A	279
6.29	Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe B	283
6.30	Question-gramme a posteriori pour la question 1 du groupe D	293
6.31	Question-gramme a posteriori du groupe A, question 2	299
6.32	Réponse $R_{2,1}^\heartsuit$ du groupe 1	300
6.33	Réponse $R_{B,2}^\heartsuit$ du groupe B	303
6.34	Réponse $R_{2,C}^\heartsuit$ du groupe C à la question 2	307
6.35	Éléments de la Réponse $R_{2,D}^\heartsuit$ du groupe D à la question 2	312

6.36 Éléments de la Réponse $R_{3,C}^\heartsuit$ du groupe C à la question 3 320

A Interview d'EC1 (intégrale de Lebesgue)

A.1 Transcription de l'interview d'EC1

1 **G : Depuis combien de temps êtes-vous enseignant chercheur ?**

2 EC1 : 18 ans EC à Montpellier. Thèse à Paris 6, en stat théorique probabilité.

3

4 **G : Quel est votre champ de recherche et ses liens avec l'intégration ?**

5 EC1 : Je continue à faire des probas, clairement j'utilise bp d'intégration dans mes
6 recherches, parce que le cadre des proba c'est la théorie de la mesure et l'intégration

7

8 **G : Quelle est, pour vous, la place de l'intégration dans les mathématiques ?**

9 EC1 : Pour quelqu'un qui veut faire des proba un peu théorique, c'est relativement
10 incontournable, l'intégration au sens de Lebesgue. Je pense aussi que c'est une théorie
11 assez jolie. C'est important pour les stats théoriques et les proba. Pour les autres domaines,
12 je ne suis pas expert. J'imagine que la notion de mesure est importante, mais je ne suis pas
13 expert.

14

15 **G : Quels modules en relation avec l'intégration enseignez-vous ou avez-vous
16 enseigné ?**

17 EC1 : J'ai enseigné le module mesure et probabilité (50h). Il n'y avait pas de module
18 d'intégration de Lebesgue. Puis ce module est passé à 100h. Puis on a dissocié, avec 75h
19 de mesure et intégration, et 75h de proba.

20

21 **G : Tu te rappelles ce qui a poussé à changer de stratégie ?**

22 EC1 : J'ai beaucoup milité pour ce changement... En 50h c'est assez délirant. J'ai travaillé
23 avec Pascal Azerad en binôme, et on y arrivait, mais je ne sais pas comment. On avait des
24 étudiants remarquables, qui sont maintenant MCF. Ils avaient beaucoup apprécié ce cours,
25 mais c'était un peu dur.

26

27 **G : OK, donc il y a un changement à 100h. Tu intervenais dans quelles UE ?**

28 EC1 : J'ai fait quelques années, et cela m'a été reproché, mais ça a bien évolué. J'ai fait 75h
29 de mesure + 75h de proba, puis j'ai laissé les probas pour ne faire que la mesure à l'arrivée
30 d'une collégue.

31

32 **G : Tu intervies dans d'autres UE avec l'intégration ?**

33 EC1 : Oui, dans les SV Concours., c'est des calculs d'intégrale de Riemann, mais même
34 pas Riemann, c'est du calcul d'intégrales de fonctions continues par morceaux. Et il y a des
35 probas aussi.

36

37 **G : D'ailleurs, ça suffit pour cette filière ?**

38 EC1 : Oui, on travaille sur \mathbb{R} , on ne démontre aucun théorème limite. En fait, quand tu
39 enseignes les probas, tu as 2 attitudes :

40 1) Ne pas mentionner la notion de tribu. Tu définis les probas sur une classe de
41 partie...on s'arrange pour prendre toutes les parties, des fois ce n'est pas possible,
42 mais on ne dit rien d'autre.

43 2) Tu dis pourquoi tu fais ça, en disant que c'est purement culturel (dans le sens que
44 c'est de la culture pour les étudiants. Tu parles d'évènement comme une assertion
45 logique liée à l'expérience, et tu peux associer à un sous ensemble, et l'ensemble
46 des évènements c'est l'ensemble des parties. Tu parles de proba là-dessus, ça
47 ressemble à la notion de surface (somme union disjoint). Mais dans le cas continue,
48 il y a des ensembles qu'on ne peut pas vraiment mesurer...et la tu ne peux pas
49 donner d'exemple. Si je veux donner une définition rigoureuse, je dois introduire la
50 notion de tribu. Mais ils n'en font rien.

51

52 **G : OK. Est-ce que tu peux me faire un panorama des différentes théories de
53 l'intégration enseignée dans les filières de maths.**

54 EC1 : Ici, en S3, on fait l'intégrale de Riemann. JE crois qu'il y a du calculus en L1, mais la
55 construction est en S3. Puis au S5, on passe à l'intégrale de Lebesgue. Ce sont les 2
56 endroits avec de la théorie. On n'enseigne pas l'intégrale KH. En S3, c'est Riemann et
57 Riemann-généralisée.

58
59

60 **G : Est-ce qu'il y eu une réflexion sur l'articulation entre les théories ?**

61 Non, je pense que ce n'est pas très clair... On leur explique quand on passe à Lebesgue,
62 qu'on va généraliser. Évidemment la classe des fonctions va être agrandie... L'intégrale de
63 Riemann est construite sur \mathbb{R} , pas sur \mathbb{R}^d , et un des intérêts de l'intégrale de Lebesgue
64 c'est de pouvoir à peu de prix intégrer sur \mathbb{R}^d , ou même sur n'importe quel espace.

65 Et puis surtout, il y a cette notion de mesure qui va être très utile en proba. On leur dit aussi
66 qu'au niveau des calculs concrets, ça ne change pas grand-chose.

67 Mais à part ça... mais on pourrait expliquer qu'on va compléter... sur \mathbb{R} déjà on espace un
68 espace complet. Mais on ne peut pas leur en parler, car ils n'ont pas fait de topo.

69

70 Tiens, j'ai oublié de mentionner qu'au moment des 50h, en L3, il y avait une UE d'analyse
71 avec de l'intégrale de Riemann en dimension d , et il me semble qu'ils parlaient aussi de
72 l'intégrale de Lebesgue, mais par rapport à la mesure de Lebesgue, mais pas par rapport à
73 une mesure abstraite, mais en complétant. C'était bizarre, parce que c'était concomitant
74 avec ce qui se faisait dans mesure et proba... il y a le point de vue mesure abstraite d'un
75 côté, et de l'autre en complétant.

76

77

78 **G : donc aujourd'hui, ce sont avec les mesures abstraites.**

79 EC1 : oui, il y a d'autres choix possibles, de passer par les mesures de Radon. Là, c'est le
80 choix qui est très adapté aux probas. Tu peux prouver tous les résultats. C'est ce qui est le
81 plus fructueux pour ceux qui vont faire des proba..

82 Ce qu'il faut expliquer, c'est que la licence est une licence de maths générale, c'est la fusion
83 de deux licences : la licence MFA et la licence MASS. On y fait de l'analyse, de l'algèbre, de
84 l'analyse numérique, des maths discrètes.

85 A priori, la présentation de la théorie de la mesure qui est adaptée aux probas c'est par la
86 notion de mesure.

87

88

89 **G : Du coup, le fait que tu aies participé aux programmes et que tu sois probabiliste,
90 ça a surement une influence sur l'organisation du curriculum sur l'intégrale.**

91 EC1 : Oui, bien sûr. Après, c'est très classique. Même si ce n'est pas parce que c'est
92 classique que c'est bien.

93 Après, je trouve que ce qui manque en L2, c'est une présentation des familles sommables
94 qui va ressembler à la construction de l'intégrale de Lebesgue. Parce que c'est assez
95 élémentaire. Tu démontres exactement ce qu'ils vont démontrer en L3. Tu relies ça aux
96 séries numériques en disant que dans le cas des séries à terme positif, c'est pareil. Un des
97 intérêts des familles sommable, c'est qu'il n'y a pas de question d'ordre de sommation. Tu
98 apprends à manipuler les sommes infinies, et le sup, c'est un concept plus simple que la
99 limite. Tu peux démontrer hyper facilement le théorème de Fubini. En fait, après, quand ils
100 arrivent en théorie de la mesure, c'est plus facile. Et ça, tu peux le faire en 15 jours...

101 En fait, en S3, je trouve que ça ne va pas assez vite, et les familles sommables ne sont pas
102 faites.

103

104 Tous les ans, les étudiants qui arrivent en L3 trouvent qu'on ne fait pas assez d'analyse en
105 L2.

106

107 Si on veut que la théorie de la mesure passe bien en L3, il faudrait insister sur les familles
108 sommables. En L2, ça devrait être le thème principal. Et ça colle.

109

110

111 **G : Mais la notion de sup, ça ne passe pas si bien.**

112 EC1 : Mais ça devrait être le cœur de cette UE. Ce n'est pas pour avoir 3 critères, est-ce
113 que la série diverge ou converge ? Ca ne mange pas tellement de pain de faire ensuite les
114 intégrales généralisées.

115

116

117 **G : Là, on fait plutôt le contraire : intégrale généralisées et séries.**

118 EC1 : oui, c'est bizarre, tu as quand même le cas discret d'un côté, et continue de l'autre.
119 On fait pas de topo de \mathbb{R}^d , pas de calcul diff élémentaire...

120

121

122 **G : Ce qui est étonnant, c'est que les étudiants en S4 n'ont pas l'impression de
123 s'appuyer sur le S3, ils utilisent plutôt ce qui est fait en S2.**

124 EC1 : c'est vraiment pas étonnant que ce soit dur pour nos étudiants qui arrivent en L3. Je
125 passe 3 semaines à faire ce qui est au programme de S3. Je suis obligé de le faire.

126 Comment en 75h on peut faire aussi peu de choses...

127

128

129 **G : Mais la construction de Riemann, ça prend du temps.**

130 EC1 : mais faut aller à l'essentiel. J'en parle en L3 de l'intégrale de Riemann, pour montrer
131 que quand tu intègres une fonctions \mathbb{R} -intégrable, les deux intégrales coïncident. Je suis
132 obligé d'en parler. La construction est quand même simple : fonction en escalier, l'aire au-
133 dessus et l'aire en dessous, et si le sup de ce qui est en dessous est égale à l'inf de ce qui
134 est au dessus, c'est fini. Et après, tu démontres la linéarité, Chasles, croissance (ça c'est
135 évident). TDI

136

137

138 EC1 : en tout cas, le programme me paraît cohérent si on rajoute les familles sommables.

139

140

141 **G : Et comment s'est fait ce programme ?**

142 EC1 : On a fait des commissions, après le LMD3. Au début du LMD3, il y avait énormément
143 de modules (6 ou 7 par semestre). A la fin du LMD3, je commençais. On a pris le parti de
144 réduire le nombre d'UE. A une époque, chaque équipe voulait placer des enseignants, pour
145 avoir des postes. On est sorti de ça, mais en même temps on est sorti de rien... il y a
146 énormément d'inertie, il y a des polys, etc.

147 Il n'y a pas eu de débat sur les familles sommables, et personne ne s'est opposé. Par
148 contre, je ne suis pas sûr que les gens sont convaincus de l'importance que ça a. Le cadre
149 est plus simple... mais je dis plus simple... l'axiome de sigma-additivité c'est déjà...

150 En fait, ça je m'en suis aperçu après, j'ai fait beaucoup de TD de proba en L2. Les familles
151 sommables, ça permet de démontrer tous les résultats classiques des proba discrètes. Par
152 exemple le théorème de transfert. Ce résultat n'est pas démontré, alors qu'il tombe tout
153 seul. Tu peux tout faire dans le cas discret. Ça serait une très bonne idée de s'appuyer
154 dessus en proba discrète. Tu montres l'intérêt de la théorie mathématiques, et tu démontres
155 les choses bien.

156

157 (11 :00 de la 2^{ème} piste)

158

159 **G : Je reviens sur l'intégration. Tu connais d'autres finalités de l'intégration.**

160 Oui, il y a des gens qui faisaient ici de l'analyse convexe, qui modélisait les phénomènes
161 physique avec la mesure de young.

162

163 **G : Mais le programme a été pensé pour les probas ?**

164 EC1 : non, finalement, les grands résultats de théorie de la mesure sont vus. Les espaces
165 L^p , les théorèmes de la mesure... l'intérêt de cette vision des mesures abstraite, c'est que
166 c'est le plus général.

167

168 Radon, tu vas être sur des ss-espace de R^d , des sous-espaces topologiques localement
169 compact, c'est moins général.

170 Et c'est pas si abstrait : si tu sais ce que c'est qu'une somme, il n'y a rien de plus naturel
171 qu'une mesure, une surface...

172 Et savoir ce qu'est une somme, ça doit s'enseigner en 1 semestre.

173

174 **G : Mais c'est marrant, tu ne parles pas vraiment de la théorie de Riemann.**

175 EC1 : Si, tu peux parler de Riemann comme un moyen de faire des sommes continues. Et
176 c'est accessible en L2, ça colle quand même. Ca serait dommage de faire les séries sans
177 parler d'intégrale de Riemann. Et tu ne vas pas attendre d'avoir fait Lebesgue. Ou alors, tu
178 peux faire l'intégrale de Lebesgue en 2^{ème} année, mais ça me paraît quand même difficile.
179 Mais il faut faire la théorie des ensembles... En L1, il n'y pas grand-chose sur la
180 dénombrabilité. C'est en S3 qu'il faut faire ça.

181

182 **G : Ce qui est décrit dans le LMD4, c'est quand même ce que tu as proposé qui a été
183 retenu.**

184 EC1 : oui, sur la première version. Mais cela n'a jamais été fait. Les collègues font au final ce
185 qu'ils veulent, et les familles sommables ne sont pas faites...

186

187 G : Est-ce que vous regardez les programmes de terminales ?

188 Non. Pour être franc, je ne m'occupe pas des programmes de L1, et donc je ne regarde pas
189 les programmes de terminale

190

191 Dernière partie sur la TDI

192

193 **G : Qu'est-ce qui paraît important à retenir en fin de L3 sur la mesure et intégration.?**

194 Ils sont peu habitués à la théorie des ensembles, donc ça leur fait un choc. Définir une
195 mesure, c'est bien. Tu traites le cas des mesures discrètes, c'est facile. Mais après, tu dois
196 construire la mesure de Lebesgue, ou tu l'admetts... Mais moi, je la construis. Tu te sers du
197 théorème de Carathéodory qui te donne un moyen de construire...

198 Cette partie là, elle est vraiment difficile pour eux. Puis, il y a la partie plus opérationnelle...
199 souvent, ils auraient voulu faire un peu moins de théorie, et plus d'intégration.

200 Mais en même temps, l'enjeu, ce n'est pas de faire les mêmes calculs qu'en L2. Mais bon,
201 on apprend à utiliser la cv monotone, dominée, Fatou, fubini. Et puis l'intégrale sur R^d . Ca,
202 c'était plus facile.

203

204 **G : Mais qu'est-ce qui te paraît vraiment important à retenir ?**

205 Je veux pas dire que la construction de la mesure de L est le plus fondamentale. Il faut avoir
206 compris la démarche générale, et qu'ils sachent utiliser les grands thms.

207 Après, ils doivent avoir un vestiaire de mesure. Et il faut comprendre que ce qu'ils ont fait
208 en probabilité ce sont des cas particuliers de mesure à densité. Ca permet de

209 complètement unifier le discret et le continue. C'est quand même une belle théorie. Et il faut
210 avoir compris les espaces L^p , et les modes de convergences. Après, dans la partie proba,

211 ça va permettre de démontrer tous les grands théorèmes. Avec ça, ils vont voir qu'avec ça,
212 tu peux déterminer les lois du hasard, et ça fonctionne ! Le jeu en vaut la chandelle.

213

214 La partie de calcul, c'est en L2 que ça se joue, et en L1. C'est pour ça que c'est bien d'en
215 faire avant. Ca serait une erreur de commencer par un truc général. Le but du jeu, c'est
216 qu'ils soient opérationnels sur les calculs de primitive. Et c'est bien qu'ils aient vu une
217 construction d'intégrale avant.

218

219 **G : Mais comment tu t'appuies sur la construction de Riemann ?**

220 Tu peux commencer montrer que l'espace des fonctions R-intégrales n'est pas complet. Et
221 c'est embêtant. Je le mentionne. On veut faire une intégrale sur \mathbb{R}^d , Et avec Riemann,
222 c'est possible, mais c'est lourd... avec l'histoire d'image réciproque, l'espace de départ n'a
223 pas d'importance.

224

225 La HK-intégrale, il y en a qui le font en L2 à la place de Riemann. Donc pourquoi pas...mais
226 je trouve que c'est bien de voir l'analogie discret-continue.

227

228 **G : Comment tu motives l'introduction de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue ?**

229 La première motivation, c'est la notion de mesure. C'est un objet hyper naturel, ce n'est pas
230 compliqué !! On le rencontre dans la vie de tous les jours. On apprend à mesurer des
231 ensembles.

232 Quel est le point commun des mesures qu'on rencontre dans la vie de tous les jours ? C'est
233 une application qui a un objet associé un nombre positif. Et puis la mesure d'une union
234 disjointe, c'est la somme des mesures. Et puis je me sers de la mesure des aires. On veut
235 que ce soit additif, mais on veut mieux ! On sait mesurer facilement l'aire d'un rectangle.

236 Pour un cercle, la stratégie c'est d'utiliser des polygones inscrits à l'intérieur du cercle, et tu
237 fais tendre le pas de la discrétisation vers 0. Et tu as un passage à la limite...et tu expliques
238 du coup que tu as besoin de la sigma-additivité. Et tu donnes l'axiome. Ca ne sort pas de
239 nulle part, tu as besoin de la sigma-additivité. Et tu introduis la mesure.

240 Ça ne devrait pas être un gros problème, mais ils ne sont pas à l'aise avec la théorie des
241 ensembles.

242

243 **G : Mais si tu te limite à une mesure additive ça suffit pour tes exemples non ?**

244 Oui, c'est vrai. Mais c'est pour l'asymptotique. Par exemple en proba, tu as les lois du 0-1.
245 Ce sont des événements limites. Pour ça, tu as vraiment besoin de la sigma-additivité.

246

247 **G : Et comment tu articules les aspects théoriques et pratiques en cours et en TD ?**

248 Je me sers des dessins, avec les aires, les longueurs.

249 Intuitivement, c'est clair. On définit la surface d'un rectangle, mais je voudrais définir une
250 application qui a les bonnes propriétés. Et là, tu commences à rentrer dans la construction
251 de la mesure de Lebesgue.

252 Mais tu as besoin d'un peu de topologie... C'est le lemme de Riemann-Lebesgue.

253

254 Pour construire, je fais Carathéodory. Je travaille sur un semi-anneau. La classe des pavés,
255 c'est un semi-anneau. Pour définir la surface, tu prends l'inf sur tous les recouvrements par
256 ce type d'objet. Mais bizarrement, on ne mesure pas tous les ensembles. Je montre un
257 exemple d'ensemble non mesurable.

258

259 Une bonne moitié de mon cours est réservée aux aspects théoriques.

260

261 **G : Et dans les aspects pratiques ?**

262 Les gros théorèmes limites, Fubini, ça vient à la fin. Mais dans les aspects pratiques, il y a la
263 mesurabilité.

264 Certaines années, j'ai réussi à parler de la transformée de Fourier d'une mesure.

265

266 **G : Pour la formation des enseignants, est-ce que tu penses qu'il faut faire l'intégrale**
267 **de Lebesgue en L3 ?**

268 C'est sûr qu'au Capes, il n'y a pas de théorie de la mesure, mais c'est une aventure
269 intellectuelle. Et ça se prépare en 2^{ème} année. Et ce semestre, ça permet aux étudiants de
270 savoir s'ils vont aller en capes ou agreg.

271 Pour les proba, c'est une certaine vision. Je pense que c'est utile. Sur l'intégrale, c'est
272 moins utiles... j'ai l'impression que s'il connaît bien le calculus, ça suffit.

273

274 G : Oui, mais en terminale, l'intégrale est définie comme l'aire sous la courbe... Et il y a
275 besoin d'une axiomatique des aires. Et a priori, c'est pas travaillé à un autre moment qu'en
276 théorie de la mesure.

277

278 Oui...Mais chez Riemann aussi on parle d'aire, avec ces encadrements. On ne parle pas de
279 mesure, mais on parle d'aire.

280 En théorie de la mesure, on définit l'application qui a un pavé associe le pavé des
281 longueurs. Dans \mathbb{R}^2 , c'est l'aire. C'est une définition. A partir de là, on montre que ça
282 s'étant sur un tribu qui contient les pavé, et pas tout le monde.

283

284 Chez Riemann, on dit quand même qu'on a l'aire des rectangles. Et dont on a l'aire des
285 fonctions en escalier en dessous et au dessus. Et on va définir l'aire sous la courbe
286 comme...Si on insiste là-dessus, ça peut suffire. Mais pour les probas, ça ne suffit pas pour
287 les gros théorèmes.

288

289

290

291

292

293

A.2 Tableau de transcription de l'interview d'EC1

TABLE DES FIGURES

Rapport personnel	
Enseignement de l'intégrale	A enseigné plusieurs années dans les UE de mesure et probabilité. Enseigne aussi dans une UE de parcours SV concours, avec des calculs d'intégrales.
Activité de recherche	En Statistiques théorique. « Je continue à faire des probas, clairement j'utilise bp d'intégration dans mes recherches, parce que le cadre des proba c'est la théorie de la mesure et l'intégration » (l.5-6)
Transposition didactique externe	
Participation au processus	Oui, en tant que responsable de la licence.
Description du processus	« On a fait des commissions » L. 141. « il n'y a pas eu de débats », « personne ne s'est opposé », (l. 147)
Conditions et contraintes	Contraintes des postes dans les laboratoires ; Forte inertie « il y a les polys » l. 146, « c'est classique » l. 92 ; Réduction du nombre d'UE « il y avait énormément de modules (...), on a pris le parti de réduire le nombre d'UE » ; contrainte de l'université « la licence est une licence de maths générale, c'est la fusion de deux licences : la licence MFA et la licence MASS » (l. 83), Cohérence du parcours « les étudiants qui arrivent en L3 trouvent qu'on ne fait pas assez d'analyse en L2 » (l. 104) ;
Description du produit	Calculus, Riemann, Lebesgue (l. 55)
Choix des théories	Chaîne trophique « c'est dommage de faire les séries sans parler d'intégrale de Riemann, et on ne va pas attendre d'avoir fait Lebesgue » (l. 177), « notion de mesure qui va être très utile en proba » (l. 65), « [sur le choix d'introduire la théorie abstraite de la mesure] c'est le choix qui est très adapté aux probas. Tu peux prouver tous les résultats » (l. 80). « , il y a des gens qui faisaient ici de l'analyse convexe, qui modélisait les phénomènes physique avec la mesure de young (...) l'intérêt de cette vision des mesures abstraite, c'est que c'est le plus général » (l. 160-166), « dans la partie proba, ça va permettre de démontrer tous les grands théorèmes. Avec ça, ils ont vu qu'avec ça, tu peux déterminer les lois du hasard, et ça fonctionne » (l. 210) ; subjectif « C'est quand même une belle théorie » (l. 209) ;

	<p>Didactique « Et c'est bien qu'ils aient vu une construction d'intégrale avant. » (l. 216) : « Au Capes, il n'y a pas de théorie de la mesure, mais c'est une aventure intellectuelle» (l. 268)</p>
<p>Transposition didactique interne</p>	
<p>Problématisation</p>	<p>Structure de l'espace des fonctions Riemann-intégrables « Tu peux commencer montrer que l'espace des fonctions Riemann-intégrables n'est pas complet. Et c'est embêtant. Je le mentionne » (l. 220);</p> <p>Généralisation : « On veut faire une intégrale sur \mathbb{R}^d, Et avec Riemann, c'est possible, mais c'est lourd...avec l'histoire d'image réciproque, l'espace de départ n'a pas d'importance. » (l. 221-223);</p> <p>Lien avec l'intuitif : « La première motivation, c'est la notion de mesure. C'est un objet hyper naturel, ce n'est pas compliqué!! On le rencontre dans la vie de tous les jours. On apprend à mesurer des ensembles » (l. 229-231); « Et puis je me sers de la mesure des aires. On veut que ce soit additif, mais on veut mieux. On sait mesurer facilement l'aire d'un rectangle. Pour un cercle, la stratégie c'est d'utiliser des polygones inscrit à l'intérieur du cercle, et tu fais tendre le pas de la discrétisation vers 0. Et tu as un passage à la limite... et tu expliques du coup que tu as besoin de la σ-additivité » (l. 230-241);</p>

TABLE DES FIGURES

	<p>Besoin trophique « [Sur la σ-additivité] C'est pour l'asymptotique. Par exemple en proba, tu as les lois du 0-1. Ce sont des évènements limites. Pour ça, tu as vraiment besoin de la sigma-additivité » (l. 244)</p>
Tâches mises en avant	<p>Tâches théorique « l'enjeu, ce n'est pas de faire les mêmes calculs qu'en L2 » (l. 200); Tâches pratiques « on apprend à utiliser la cv monotone, dominée, Fatou, fubini. Et puis l'intégrale sur \mathbb{R}^d » (l. 201); logos « Il faut avoir compris la démarche générale [de la construction de l'intégrale de Lebesgue] » (l. 210), « il faut avoir compris les espaces L^p, et les modes de convergences », « Mais dans les aspects pratiques, il y a la mesurabilité » (l. 262).</p>
Réseau trophique	<p>Topologie « Mais tu as besoin d'un peu de topologie », <i>théorie des ensembles</i> « mais ils ne sont pas à l'aise avec la théorie des ensembles » (l. 240).</p>
Liens entre les théories	<p>Liens avec l'intégrale de Riemann « J'en reparle en L3 de l'intégrale de Riemann, pour montrer que quand tu intègres une fonctions R-intégrable, les deux intégrales coïncident » (l. 130-135); « Mais chez Riemann aussi on parle d'aire, avec ces encadrements. On ne parle pas de mesure, mais on parle d'aire. En théorie de la mesure, on définit l'application qui a un pavé associe le pavé des longueurs. Dans \mathbb{R}^2, c'est l'aire. C'est une définition. A partir de là, on montre que ça s'étant sur un tribu qui contient les pavé, et pas tout le monde » (l. 278-282);</p>

B Interview d'EC2 (intégrale de Riemann)

B.1 Transcription de l'interview d'EC2

1 **G : Depuis combien de temps êtes-vous enseignant chercheur ?**

2

3 Je suis dans la recherche active depuis 8 ans, si on considère la thèse.

4

5 **G : Quel est votre champ de recherche et ses liens avec l'intégration ?**

6 L'intégration est complètement centrale dans ma recherche. Je fais du calcul des variations, même si ce n'est pas explicite. C'est un domaine des mathématiques pures, dont les problèmes viennent de la physique.

9

10 **G : Quelle est, pour vous, la place de l'intégration dans les mathématiques ?**

11 Dans les mathématiques de ma recherche, et dans ce que j'ai vu dans les conférences, c'est fondamental et fondante. J'ai franchement du mal à imaginer un sujet qui peut m'intéresser et qui ne contient pas d'intégration.

14

15 **G : Et au niveau de l'enseignement.**

16 J'ai commencé en biomaths.

17 J'ai enseigné en L1, l'analyse. Puis j'ai fait 3 ans en M2 dans une UE d'EDP. Et j'enseigne en analyse 3

19 En Biomath, il y a un peu d'intégration cachée. Pour moi, on ne devrait pas utiliser d'intégration car on ne sait pas de quoi on parle, mais on doit résoudre des équations différentielles linéaires (13 :40)

22 EDP2, ce sont des choses très avancées.

23 En analyse 3, en L2, j'y enseigne depuis 2 années consécutives. On a suivi à peu près le même cours.

25 C'était la première fois que je suis titulaire un cours d'intégration, même si je suivais le programme... c'est simple, c'est l'intégration basique de Riemann. JE dois dire qu'il y a eu un petit changement. La première année, j'ai suivi le polycopié qui existait, mais je ne le trouvais pas hyper bien. C'était pas hyper clair d'un point de vue didactique.

29 J'ai suivi un point de vue un peu plus supérieur. J'ai commencé avec une définition un peu plus abstraite. Je dis que l'intégration c'est un truc naturel et sympa, mais je commence quand même par un point de vue. La mathématique c'est l'art de l'absorption... le début, c'est un peu plus dur que ce que vous pensez. Tout le monde pensait connaître l'intégration, mais connaître la théorie, c'est un peu plus compliqué.

34 Mon point de vue, c'est que le fait de commencer à faire des choses un peu plus sérieuses, même s'il y a des difficultés pour certains étudiants, c'est plus simple à enseigner, c'est plus linéaire. Et à la fin, moi j'ai trouvé que ça a apporté des choses. J'ai même eu des redoublants qui m'ont dit que cette nouvelle approche est plus clair. Moi je pense avoir fait un truc plus difficile, d'un point de vue technique. La progression des arguments était plus sérieuse. S'il faut faire le détail, on fait le détail.

40 Un truc que j'ai trouvé motivante pour une petite partie des étudiants, c'est souvent je donne des exos très très difficile, en disant que c'est très simple quand vous allez connaître le dernier monstre de l'intégration, l'intégrale de Lebesgue. Mais on peut faire tout ça tout simplement.

44 J'ai même fait un peu de théorie de la mesure, sur une séance, et ça leur a plu beaucoup.

45 J'ai dit que l'intégrale de Lebesgue était un peu le père de l'intégrale de Riemann.

46

47 **G : Mais comment tu as fait ça ?**

48

49 Il y a une chose que tu ne peux pas faire avec la théorie de Riemann. Par exemple, tous les
50 étudiants savaient que toutes les fonctions continues sauf sur un ensemble fini de point sont
51 R-intégrable. Mais ils n'avaient pas bien compris le principe de caractérisation, qui est le
52 moteur de la théorie de Riemann. Je dis, OK, le moteur c'est ça. Un étudiant me dit :
53 combien de discontinuité on peut faire ? J'ai répondu que c'est une question à laquelle je
54 n'ai pas à répondre ici, mais je vous donne la réponse sans la justifier : une fonction est R-
55 intégrable ssi la mesure de ses points de discontinuité est 0.
56 J'ai donné la définition de la mesure extérieure de Hausdorff dans \mathbb{R} , c'est faisable avec les
57 intervalles. Je n'ai pas démontré le théorème.
58 La caractérisation ne peut se faire qu'avec la théorie de la mesure. Tu ne peux pas le faire
59 sans la théorie de Lebesgue. C'était un peu spoiler.
60 Mon impression est que le point de vue supérieur sur l'intégration est positif. Je pense qu'il
61 faut faire les choses difficiles, le plus simplement possible.

62

63 **G : Tu n'avais pas participé à la conception des programmes ?**

64 Non, c'était l'année avant mon arrivée.

65

66 **G : Et toi que penses-tu du programme sur l'intégration à l'université (je rappelle**
67 **l'organisation),**

68 C'est un peu compliqué de répondre... si tu m'avais posé cette question il y a 2 ans, je
69 t'aurais répondu qu'il fallait commencer avec la théorie de la mesure et l'intégration de
70 Lebesgue, car c'est le plus général même si c'est plus compliqué. Maintenant, je pense que
71 c'est une erreur.

72 Une démarche, théorie de l'intégration de Riemann, et après Lebesgue, je la trouve correct,
73 donc je suis d'accord avec ce programme.

74 Si je dois donner mon point de vue très personnel, que j'aurais du mal à dire dans une
75 commission, car ça nécessiterait une petite révolution, moi je ne trouve pas positif que les
76 étudiants arrivent à faire des exercices, ceux de mathématique (pas d'ingénierie), faire des
77 matières sans comprendre que la théorie qu'il y a derrière, c'est absolument fondamental,
78 ce n'est pas correct. Les étudiants qui arrivent chez moi et qui pensent connaître
79 l'intégration de Riemann, c'était plus négatif que positif... ils savaient faire quelques petits
80 calculs et donc ils pensaient connaître la théorie de Riemann. Mon point de vue personnel,
81 c'est que faire des exos, ce n'est pas faire des mathématiques.

82 Si j'étais le champion du monde de l'enseignement, je commencerais l'intégration de
83 Riemann en S2 après avoir fait des suites, les dérivées en S1. Mais je pense qu'il est
84 nécessaire de faire des choses avec une théorie bien faite. Mon cours de S3, devrait être en
85 S1 ou S2.

86

87 **G : Mais pourquoi ton point de vue a changé en 2 ans ?**

88 C'est à cause de mon enseignement direct. J'ai l'impression que j'ai oublié les difficultés que
89 j'ai eu en tant qu'étudiant. J'ai l'impression qu'en corrigeant les copies, cela m'a rappelé les
90 difficultés que j'ai du avoir. Quand tu commences à faire de la recherche, ça a développé une
91 forme d'arrogance, ou moi je pensais qu'avant, je pouvais faire l'intégrale de Lebesgue.
92 Probablement c'est faux. En regardant l'enseignement d'une façon directe...c'est
93 exactement un exemple qui montre que tu comprends l'enseignement que si on va sur le
94 terrain. IL y a toujours besoin du rapport direct avec les élèves.

95

96 **G : Ce que tu dis, c'est qu'un point important est qu'il faut enseigner et construire des**
97 **théories bien faites. Mais la théorie de Lebesgue est surement inaccessible en 1^{ère} année.**
98 **Mais la théorie de Riemann reste une théorie bien construite, et on peut l'enseigner en**
99 **1^{ère} ou 2^{ème} année.**

100

101 B : Oui, c'est un bon résumé.

102

103 **G : A ton avis, comment a été construit ce programme, avec quels objectifs sur la poursuite**
104 **d'étude ? Est-il adapté ?**

105 Oui, le programme est assez cohérent et bien fait, pour ce qui est demandé aux étudiants
106 dans cette université. Je ne peux pas répondre avec une total certitude, car je suis en 2^{ème}
107 année, et en 5^{ème} année, donc il y a un trou que je ne connais pas.

108 Je pense qu'il y a une très bonne importance pour trouver la poursuite et se spécialiser en
109 M1.

110 Donc donner une direction rapidement aux étudiants, c'est une chose positive. Je pense que
111 le fait de faire les calculs avant la théorie est dans cette direction, mais je suis un peu opposé
112 à ce système...

113 Le côté négatif de les lancer dans le monde des applications, tu caches les choses théoriques
114 qu'ils aimeraient faire.

115 A part la question de calculus, je suis d'accord avec le programme.

116 Dans mon cas, c'est particulier, on me demande de faire la dénombrabilité, je trouve ça un
117 peu absurde. J'aurai fait ça en L1, dans un UE d'algèbre, et en une semaine tu fais la
118 dénombrabilité.

119

120 **G : Et tu ne penses pas que l'étude de la dénombrabilité, les familles sommables, c'est un**
121 **bon moyen d'entrer dans la théorie de Lebesgue.**

122 Oui, absolument. C'est bien de le faire là aussi, en S3. Ça fait du bien de répéter les choses. Il
123 faudrait le faire plus tôt. Bien sûr, quand tu fais la théorie de Lebesgue, il faut connaître la
124 dénombrabilité parce que c'est là que tu commences à faire des choses différentes en
125 théorie de la mesure.

126 Si à la fin de la première année, on ne sait pas répondre à la question « qu'est-ce qu'un
127 ensemble dénombrable »... c'est pas un concept difficile. C'est une chose qu'il faut savoir
128 avant d'arriver en deuxième année.

129

130

131 %%%%%%%%%%

132 20 :00

133

134 **G : Qu'est-ce que tu penses important à la sortie du cours d'analyse 3 ?**

135 EC2 : pour moi, la théorie est très importante. Plus que le calcul... Si on comprend bien la
136 théorie, la technique arrive toute seul. Les mathématiques, c'est comme jouer aux échecs, la
137 tactique déroule de la stratégie. Moi je le vois comme ça.

138 Aujourd'hui, si on me demande un calcul d'intégrale, je ne prends pas un stylo, je prends un
139 ordinateur et je fais le calcul. Aujourd'hui ça se fait comme ça. C'est quoi l'utilité des calculs
140 qu'on vous fait faire ? Je suis honnête avec les étudiants.

141 Moi, chaque année, quand je commence le cours, je ne suis pas en mesure de calculer
142 beaucoup d'intégrales. Après, je fais un peu d'exercice, et j'arrive à le faire. C'est une

143 gymnastique mentale. Comment intégrer ce type d'intégrale, vous allez l'oublier dans 6
144 mois ? Mais la chose importante, c'est ce qu'il y a derrière. La mathématiques, c'est l'art de
145 l'absorption.

146 Alors, oui, faire une IPP, c'est important. Mais si un étudiant veut faire des études de
147 mathématiques jusqu'à la fin, j'aimerais bien qu'il voit le théorème de la divergence (c'est un
148 truc très technique d'analyse), qui est l'analogue de l'intégration par partie. J'exagère un
149 peu. Je t'explique en 2 mots (24 :10)

150 Sur les trucs techniques, je n'attends pas grand-chose.

151 Je veux qu'ils comprennent l'importance de la théorie.

152

153 **G : Quand tu as commencé ton cours, comment tu as problématisé l'introduction ?**

154 Pour les intégrales généralisées, j'ai parlé du paradoxe de Zenon, j'y suis revenu sur la
155 dénombrabilité.

156 Pour l'intégrale de Riemann, j'ai fait le parallèle avec la vitesse. Si vous allez à une vitesse v_1
157 puis à une vitesse v_2 , et vous voulez faire la moyenne, c'est assez simple. Par contre, si vous
158 pondérez avec le temps passé, ça vous donne la distance, c'est linéaire. OK. Après, il se
159 trouve que tous les phénomènes physiques que vous pouvez imaginer, vraiment tous, on
160 peut le décrire avec des mathématiques, et tout ça concerne les ondes ou les énergies. C'est
161 pas difficile d'imaginer ça. La raison la plus intelligente que l'homme a trouvée pour décrire
162 l'énergie, c'est avec l'aire. Tu peux quantifier avec des petites choses. Exactement comme
163 l'aire d'un tableau qui est un ensemble de petites choses. Dans ce cours, on va décrire
164 l'intégrale comme une définition d'aire.

165

166 **G : Lien avec les autres théories de l'intégration ?**

167 L'autre chose que j'ai fait, c'est de démontrer que le pi n'est pas un rationnel, que tu peux
168 démontrer facilement avec la théorie de l'intégration de Riemann.

169 C'est super simple et super joli. C'était un peu dur pour eux.

170

171 **G : Est-ce que tu es revenu sur la mesure des grandeurs ?**

172 Non, tu as raison, c'est un truc que je n'ai pas fait. Voir l'intégrale de R comme un opérateur
173 linéaire, donc un truc logique pour décrire les concepts linéaires, je ne l'ai pas fait. Mais je
174 voulais le faire ! Je regrette de ne pas l'avoir fait cette année.

175

176 **G : Comment tu motiverais la nécessité de la sigma-additivité en théorie de la mesure ?**

177 Voyons... tu me prends un peu au dépourvu...

178 Le problème, c'est dans la théorie géométrique de la mesure. C'est une théorie qui étudie
179 des problèmes géométriques avec la théorie de la mesure. Avec la mesure de Riemann, tu ne
180 peux rien faire, rien du tout. Au niveau de l'enseignement basique, j'ai du mal à trouver la
181 motivation.

182 Avec Riemann, tu peux faire beaucoup de chose, mais si tu arrêtes aux mathématiques du
183 19^{ème} siècle.

184 Le monde des mathématiques est malheureusement plus compliqué que ce qu'on attend.

185 La motivation scientifique tu peux pas faire une bonne théorie des fonctions sans expliquer.

B.2 Tableau de transcription de l'interview d'EC2

Rapport personnel	
Enseignement de l'intégrale	Enseigne depuis 2 ans dans l'UE d'analyse 3 (qui contient l'intégrale de Riemann) ; Enseigne depuis 3 ans dans une UE d'EDP en M2 et en biomaths.
Activité de recherche	Recherche active depuis 8 ans. Expert en intégration « L'intégration est complètement centrale dans ma recherche. Je fais du calcul des variations »
Transposition didactique externe	
Participation au processus	Pas de participation au processus : « C'était l'année avant mon arrivée » (l. 64)
Description du processus	Evocation des commissions : « j'aurais du mal à dire dans une commission, car ça nécessiterait une petite révolution » (l. 74)
Conditions et contraintes	Rapports personnels « J'ai l'impression que j'ai oublié les difficultés que j'ai eu en tant qu'étudiant. J'ai l'impression qu'en corrigeant les copies, cela m'a rappelé les difficultés que j'ai du avoir. », « Quand tu commences à faire de la recherche, ça a développé une forme d'arrogance » (l. 88-92), « Mon point de vue, c'est que le fait de commencer à faire des choses un peu plus sérieuses, même s'il y a des difficultés pour certains étudiants, c'est plus simple à enseigner » (l. 35)

B. Interview d'EC2 (intégrale de Riemann)

	<p>Cohérence du parcours : « Donc donner une direction rapidement aux étudiants, c'est une chose positive » (l. 108), « le programme est assez cohérent et bien fait, pour ce qui est demandé aux étudiants dans cette université. » (l. 105)</p>
Description du produit	<p>Oui « Une démarche, théorie de l'intégration de Riemann, et après Lebesgue, je la trouve correct, donc je suis d'accord avec ce programme. » (l. 72); « A part la question de calculus, je suis d'accord avec le programme » (l. 115)</p>
Choix des théories	<p>Didactique : « Je pense qu'il est nécessaire de faire des choses avec une théorie bien faite », « Si j'étais le champion du monde de l'enseignement, je commencerais l'intégration de Riemann en S2 après avoir fait des suites, les dérivées en S1 » (l. 82), « , il y a 2 ans [avant d'enseigner en L2], je t'aurais répondu qu'il fallait commencer avec la théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue, car c'est le plus général même si c'est plus compliqué. Maintenant, je pense que c'est une erreur. » (l. 68)</p>
Transposition didactique interne	
Problématisation	<p>Discours meta « Pour l'intégrale de Riemann, j'ai fait le parallèle avec la vitesse. Si vous allez à une vitesse v_1 puis à une vitesse v_2, et vous voulez faire la moyenne, c'est assez simple. Par contre, si vous pondérez avec le temps passé, ça vous donne la distance, c'est linéaire. OK. Après, il se trouve que tous les phénomènes physiques que vous pouvez imaginer, vraiment tous, on peut le décrire avec des mathématiques, et tout ça concerne les ondes ou les énergies. C'est pas difficile d'imaginer ça. La raison la plus intelligente que l'homme a trouvé pour décrire l'énergie, c'est avec l'aire. » (l. 156-164)</p>

TABLE DES FIGURES

Tâches mises en avant	<p>Aspects théoriques « la théorie est très importante. Plus que le calcul » (l. 135), « Je veux qu'ils comprennent l'importance de la théorie »</p> <p>Aspects théoriques « Alors, oui, faire une IPP, c'est important » (l. 146), « Sur les trucs techniques, je n'attends pas grand-chose » (l. 150), « J'ai montré que π n'est pas un rationnel, que tu peux démontrer facilement avec la théorie de l'intégration de Riemann »</p>
Liens entre les théories	<p>Lien avec la mesure des grandeurs « Voir l'intégrale de Riemann comme un opérateur linéaire, donc un truc logique pour décrire les concepts linéaires, je ne l'ai pas fait. Mais je voulais le faire » (l. 172)</p> <p>Besoin trophique Dénombrabilité avant d'aborder Lebesgue « quand tu fais la théorie de Lebesgue, il faut connaître la dénombrabilité parce que c'est là que tu commences à faire des choses différentes en théorie de la mesure. » ;</p> <p>Lien avec la théorie de Lebesgue « J'ai répondu que c'est une question à laquelle je n'ai pas à répondre ici, mais je vous donne la réponse sans la justifier : une fonction est Riemann-intégrable ssi la mesure de ses points de discontinuité est 0. La caractérisation ne peut se faire qu'avec la théorie de la mesure. Tu ne peux pas le faire sans la théorie de Lebesgue. C'était un peu spoiler »</p>

C Travaux dirigés L2

Cette annexe contient les énoncés des travaux dirigés de l'UE d'analyse3 jusqu'en 2019. Cette dans cette UE qu'est abordée l'intégration de Riemann à l'université de Montpellier.

6.2 Exercice sur l'intégration

Exercice 6.9. Une fonction n'ayant pas de primitive sur \mathbb{R} .

On considère la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que H n'admet pas de primitive sur \mathbb{R} (considérer par exemple un taux d'accroissement).

Exercice 6.10. Une fonction discontinue ayant une primitive sur \mathbb{R} .

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.

2) On considère maintenant la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

Exercice 6.11. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_0 = \int_0^x t \sin(t^2) dt, \quad I_1 = \int_0^{4\pi} \cos t e^{\sin t} dt, \quad I_2 = \int_0^1 t^2 \arctan t dt, \quad I_3 = \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt,$$

Exercice 6.12. Soit $a > 1$ un réel. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a - \cos x}$.

Exercice 6.13. Calculer une primitive de $x \mapsto \arctan(\sqrt[3]{x})$.

Exercice 6.14. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 6.15. Calculer les primitives suivantes (on précisera l'intervalle de définition) ainsi que les intégrales :

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x^4-x^2-2} dx, \quad \int \frac{x^2+x+1}{x^4+1} dx, \quad \int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \quad \text{avec } (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Exercice 6.16. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

(Indication : poser $x = \cos t$ pour I_1 , $u = \sqrt{\cos x}$ pour I_2).

Exercice 6.17. 1) Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt.$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt,$$

(Indication : utiliser une formule de trigonométrie).

Exercice 6.18. (Fractions rationnelles en sinus et cosinus).

Calculer les primitives des fonctions suivantes (on prendra soin de préciser l'intervalle sur lequel la primitive est calculée). Utiliser éventuellement la règle de Bioche.

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx, \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx, \int \frac{3 - \sin x}{\cos x + 3 \tan x} dx, \int \cos^2 x \sin^2 x dx.$$

(Indication : linéariser pour la dernière).

Exercice 6.19. (calculs divers). Calculer les primitives suivantes :

$$\int \ln(1 + x^2), \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx, \int \sqrt{x^2 + 1} dx, \int (\arcsin x)^2 dx, \int \frac{1}{1 + x^3} dx$$

(Indication : IPP pour la première, changement de variable pour la seconde, changement de variable hyperbolique pour la troisième, poser $u = \arcsin x$ dans la quatrième, décomposer en éléments simples dans la dernière).

Exercice 6.20. Calculer les intégrales (faire $I + J$ et $I - J$)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Exercice 6.21. Calculer une primitive des fonctions suivantes (préciser si besoin l'intervalle de définition) :

$$f_0(x) := \frac{\ln x}{x}, \quad f_1(x) = xe^x, \quad f_2(x) = \ln x, \quad f_3(x) = 1/\cosh x, \quad f_4(x) = \tan^3 x, \quad f_5(x) = 1/\sin x, \quad f_6(x) = 1/\cos x.$$

Exercice 6.22. Calculer une primitive de $x \mapsto x\sqrt{x^2 + x + 1}$ (utiliser un changement de variable logarithmique).

Exercice 6.23. Calculer $\int_0^1 x^a(1-x)^b$ où $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.24. Intégrales de Wallis Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1) Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

2) En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 6.25. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On note $\|f\|_\infty$ son supremum sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty.$$

Exercice 6.26. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann intégrable bornée et soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx = \ell.$$

Exercice 6.27. Sommes de Riemann.

1) Trouver la limite des suites

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}, \quad x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

2) Trouver la limite des suites

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad v_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6.28. Sommes de Riemann (suite). Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On pose

$$u_n := \int_0^\pi f(t) |\sin nt| dt.$$

1) Etablir l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) \sin u du.$$

2) Déterminer la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin u du.$$

3) En déduire la limite de la suite u_n .

Exercice 6.29. Aire d'un disque.

1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer une primitive de la fonction $x \in [0, 1] \rightarrow \sqrt{1-x^2}$.

2) En déduire l'aire d'un disque de rayon 1.

3) Retrouver ce résultat en utilisant un changement de variable.

Exercice 6.30. Inégalité de Cauchy-Schwarz. On souhaite montrer le résultat suivant. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right) \left(\int_a^b g^2\right).$$

1) Montrer le résultat lorsque la fonction g est nulle.

2) On suppose la fonction g non nulle. On considère le polynôme du second degré $\lambda \mapsto P(\lambda)$ défini par :

$$P(\lambda) := \int_a^b (f + \lambda g)^2.$$

En utilisant le discriminant de P , montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les exercices qui suivent sont plus difficiles.

Exercice 6.31. Montrer la proposition 2.2. En déduire que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est Riemann intégrable sur $[0, 1]$. Cette fonction est-elle réglée ?

Exercice 6.32. Fonction de Thomae.

Soit f la fonction dite fonction de Thomae définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = p/q \text{ et } \text{pgcd}(p, q) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel non nul.

2) On souhaite montrer que f est continue en tout point irrationnel x_0 . On se donne $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/N < \varepsilon$.

a) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels p/q avec $q \leq N$ appartenant à l'intervalle $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ est fini. On note S cet ensemble et soit $\delta := \min\{|x - y| ; y \in S\}$.

b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et conclure.

3) En déduire que f est Riemann intégrable sur tout segment $[a, b]$ (utiliser la remarque 2.9 admise). Que vaut son intégrale ?

Exercice 6.33. Fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. On souhaite montrer que cette fonction n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$. On suppose qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} - \varphi| \leq \psi$.

1) Montrer que $\varphi - \psi \leq \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \leq \varphi + \psi$.

2) a) En utilisant que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} , montrer que $\varphi - \psi \leq 0 \leq 1 \leq \varphi + \psi$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).

b) En déduire que $\psi \geq 1/2$ sauf éventuellement sur un ensemble fini et montrer que $\int_0^1 \psi \geq \frac{1}{2}$.

3) Par ce qui précède, montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 6.34. Seconde formule de la moyenne. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.1. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1 , positive, décroissante et que g est continue. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

1) Posons $G(x) = \int_a^x g$ la primitive de g qui s'annule au point a . Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq G(t) \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$.

2) a) Montrer que :

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'(t)G(t))dt.$$

b) En déduire que l'on a $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$.

3) Conclure en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la première formule de la moyenne.

Exercice 6.35. Lemme de Riemann-Lebesgue On souhaite montrer le lemme suivant.

Lemme 6.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt = 0.$$

1) a) Montrer le résultat si $f = 1$.

b) En déduire le résultat pour une fonction f en escalier.

2) a) On suppose dorénavant que f continue et soit g une fonction en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Montrer que $|\int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t} dt| \leq \varepsilon(b - a)$.

b) Conclure en utilisant la première question.

6.3 Exercices sur les intégrales généralisées

Exercice 6.36. Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeurs $\int_0^1 \ln(t) dt$, $\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2} dt$, $\int_0^1 \arctan(\frac{1}{t}) dt$, $\int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$.

Exercice 6.37. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 4t + 1}; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2t + 1}; \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + \cos^2 x}; \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + \ln x} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2(1-t))^{\frac{1}{3}}} dt; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x+1)}; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx; \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\sin 5t - \sin 3t}{t^{\frac{5}{3}}} dt;$$

Exercice 6.38. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}; \int_{-1}^1 x \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} dx; \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan x}}; \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}}; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+\cos x + e^x} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx;$$

Exercice 6.39. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx, \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 6.40. Etudier la convergence de l'intégrale de Fresnel I définie par $I := \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Exercice 6.41. Règle d'Abel pour les intégrales.

Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[1, +\infty[$. On suppose que f est de classe C^1 , positive, décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0$. On suppose que $G(x) := \int_1^x g$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

1) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x fg$$

existe dans \mathbb{R} . (Indication : montrer que $\int_1^x fg$ vérifie le critère de Cauchy en utilisant la seconde formule de la moyenne).

2) Soit $0 < \alpha \leq 1$. On considère les deux fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1/x^\alpha$ et $g(x) = \sin(x)$. Quel résultat retrouve-t-on par la première question ?

Exercice 6.42. 1) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ converge si et seulement si $s > 0$. Dans ce cas on note $\Gamma(s)$ cette intégrale.

3) a) Montrer que $\Gamma(s) = s\Gamma(s-1)$ pour tout $s > 1$. En déduire que $\Gamma(n) = n!$.

b) Montrer que $I = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Exercice 6.43. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$ converge, et calculer sa valeur.

Exercice 6.44. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier l'existence de I .

2. En effectuant un changement de variables, montrer que $I = J$. En déduire que J existe.

3. En effectuant un changement de variables, montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) dt = I$.

4. Montrer que $I + J = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + I$, puis déterminer I .

Exercice 6.45. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a l'équivalent :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 6.46. 1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge.

2. Montrer, en posant $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

3. Pour $a > 0$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2a} \ln a$.

Exercice 6.47. 1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

3) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge.

Problème de synthèse : calcul de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt.$$

1. Justifier l'existence de I_n .

2. A l'aide d'une formule de trigonométrie, montrer que $I_{n+1} - I_n = 0$ puis que $I_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $f' \leq 0$.

4. A l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(t) \sin((2n+1)t) dt \right| \leq \left| \frac{f(\pi/2)}{2n+1} \right|.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$.

5. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

6. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt.$$

7. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ puis la calculer.

6.4 Exercices sur les séries numériques

Exercice 6.48. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$, $\sum_{n=3}^{+\infty} e^{-n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

Exercice 6.49. Déterminer la nature des séries

$$\sum e^{-1/n} \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} e^{-1/n} \quad \sum \frac{e^n}{n!} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 6.50. Déterminer la nature des séries

$$\sum \frac{n^2}{n^3+1} \quad \sum e^{-n^2} \quad \sum \frac{(\ln n)^{123456}}{n^{1,1}} \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \sum \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}.$$

$$\sum \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2} \quad \sum 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(2n+7)}}.$$

Exercice 6.51. Etudier la nature des séries suivantes (ci-dessous, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) :

$$\sum \frac{x^n}{y^n+n}, \quad \sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}), \quad \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

Exercice 6.52. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ (ci-dessous, $\alpha \in \mathbb{R}$) où le terme général u_n est donné par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } u_n \text{ un carre,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n), \quad u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n, \quad u_n = ne^{-\sqrt{n}}, \quad u_n = \frac{(-1)^n + \alpha}{n^2+1}, \quad u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \quad u_n = \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}.$$

Exercice 6.53. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = an \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - b \cos\left(\frac{1}{n}\right) + c \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ où a , b , et c sont trois réels.

Exercice 6.54. Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k}$.

Exercice 6.55. On admet que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$ puis $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$.

Exercice 6.56. On définit la suite (u_n) par $u_{2p} = \left(\frac{2}{3}\right)^p$ et $u_{2p+1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^p$. Tester le critère de d'Alembert puis de Cauchy pour étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 6.57. On suppose $u_n > 0$. On définit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum w_n$ converge, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 6.58. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. A l'aide de la transformation d'Abel, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est semi-convergente.

Exercice 6.59. Etudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{\ln n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 6.60. Série harmonique alternée.

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.
- 2) On note S_n la suite des sommes partielles de cette série. Montrer que :

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$$

(utiliser que $1/(p+1) = \int_0^1 t^p dt$).

- 3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 6.61. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}$ n'est pas absolument convergente, puis grâce à un développement asymptotique montrer qu'elle est convergente.

Exercice 6.62. Règle de Duhamel

Soit $\sum x_n$ une série à termes positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(1/n).$$

1) Soit $y_n = 1/n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\alpha \neq \lambda$, alors on a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \sim \frac{\alpha - \lambda}{n}.$$

2) Montrer que si $\lambda > 1$, alors la série converge, et si $\lambda < 1$, alors la série diverge.

Exercice 6.63. Constante d'Euler.

On cherche un développement asymptotique de la série harmonique $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On pose :

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \ln n - \ln(n-1), \quad z_n = x_n - y_n.$$

1) a) Montrer que la série $\sum_n z_n$ converge et que $z_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

b) On note R_n le reste de la série $\sum_{n \geq 1} z_n$. Montrer que $R_n \sim -\frac{1}{2n}$.

2) Démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^n x_k = \ln n + \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k\right) - R_n.$$

3) En déduire qu'il existe une constante γ (la constante d'Euler) telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 6.64. Formule de Stirling. On souhaite montrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On pose $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ et $b_n = \ln a_n - \ln a_{n-1}$.

1) Par un développement limité montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $b_n = \frac{c}{n^2} + O(1/n^3)$. En déduire que la série $\sum b_n$ converge.

2) a) Montrer qu'il existe une constante c' telle que $\ln a_n = c' + \frac{1}{12n} + o(1/n)$.

b) Déduire que $n! \sim \ell \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

3) On rappelle le résultat suivant concernant la valeur des intégrales de Wallis $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (voir chapitre intégrale). On a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2p+1} = \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

a) Montrer que $I_n \rightarrow 1$ lorsque n tend vers l'infini (découper par exemple l'intégrale sur $[0, 1 - \eta]$ et sur $[1 - \eta, 1]$).

b) En étudiant un équivalent du quotient I_{2p}/I_{2p+1} , déduire de la question 3a) que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 6.65. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. On pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_p u_q$. En utilisant l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique), montrer que $|w_n| \geq \frac{2n}{n+2}$ puis que la série $\sum w_n$ diverge.
3. Que dit cet exercice par rapport au théorème sur le produit de Cauchy ?

Exercice 6.66. Critère de la loupe. On considère une suite de réels $(u_n)_{n \geq 0}$ positive décroissante. En sommant par paquet, montrer que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ converge.

Exercice 6.67. Etudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4 \sin^2 t}$$

(Indication : à l'aide d'un changement de variable, ramener l'étude de la convergence de I à celle d'une série $\sum_n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{1 + (u+n\pi)^4 \sin^2 u}$, et utiliser la minoration $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $[0, \pi/2]$).

6.5 Exercices sur les ensembles dénombrables et les familles sommables

Exercice 6.68. 1) Est-ce que les ensembles $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, \mathbb{D} , \mathbb{C} , et $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ sont dénombrables ? (Ici \mathbb{D} désigne l'ensemble des décimaux).

2) L'ensemble $A := \{z \in \mathbb{C} ; \exists q, q' \in \mathbb{Q} ; z = q + iq'\}$ est-il dénombrable ?

Exercice 6.69. Pour chaque entier $m \in \mathbb{N}$ soit $f_m : \mathbb{N} \rightarrow J_m$ une application surjective.

1) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \quad \text{avec} \quad f(m, n) = f_m(n),$$

est bien définie et surjective.

2) En déduire le résultat du cours disant que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

3) Donner un exemple montrant que le résultat est faux en général quand l'ensemble d'indices n'est pas dénombrable.

Exercice 6.70. Soit J un ensemble dénombrable non vide.

1) Montrer que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des parties finies de J ayant au plus n éléments est dénombrable.

2) En déduire que l'ensemble de toutes les parties finies de J est dénombrable.

3) L'ensemble de toutes les parties de J est-il dénombrable ?

Exercice 6.71. On rappelle qu'une suite d'éléments d'un ensemble non vide est par définition une application de \mathbb{N} dans X . Pour un sous-ensemble X d'un espace vectoriel E avec $0 \in X$ on dit qu'une suite $q : \mathbb{N} \rightarrow X$ de X est nulle à partir d'un certain rang quand il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de la suite) telle que pour tout entier $n \geq N$ on ait $q_n = 0$. On note $c_{00}(X)$ l'ensemble de ces suites.

1) Montrer que l'ensemble $c_{00}(\mathbb{Q})$ est dénombrable.

2) Est-ce que $c_{00}(\mathbb{R})$ est dénombrable ?

3) L'ensemble de toutes les suites de rationnels est-il dénombrable ?

Exercice 6.72. Etudier les sommes suivantes (discuter en fonction du paramètre si nécessaire) :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(i+j)^\alpha}, \quad \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha},$$

Exercice 6.73. Non intervention des sommations.

1) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Montrer que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}^*, q \neq p} \frac{1}{p^2 - q^2}$ converge.

2) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2 - q^2}, & p \neq q, \\ 0, & p = q. \end{cases}$$

Montrer que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q} \right) = - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q} \right).$$

Quelle propriété ce résultat montre-t-il ?

Exercice 6.74. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de réels telle que la famille $(ka_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit sommable. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ka_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j.$$

Exercice 6.75. Soit la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+j}}, & i \text{ et } j \text{ pairs} \\ -\frac{1}{2^{i+j}}, & i \text{ et } j \text{ impairs} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que cette famille est sommable et calculer sa somme.

Exercice 6.76. On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, p|q} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p,q)=1} \frac{1}{p^2 q^2},$$

Exercice 6.77. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Qu'en est-il pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Exercice 6.78. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble E . Montrer que l'ensemble $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.

Exercice 6.79. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p_1, \dots, p_n n nombres premiers distincts. Montrer que \mathbb{N}^n est dénombrable (considérer l'application $\phi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$).

2) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?

Exercice 6.80. Un nombre réel est dit algébrique s'il existe un polynôme P à coefficients dans \mathbb{Z} tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit transcendant. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice de synthèse

Exercice 6.81. Fonction ζ de Riemann et nombres premiers.

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, et soit $\zeta(s)$ la fonction définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

- 1) a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n^s}$ converge pour $s > 1$ (utiliser par exemple $\ln(1-x) < x$ pour $x \in [0, 1[$).
b) Montrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n \cdot s}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

- 2) a) Soit m et M deux entiers strictement positifs. Montrer l'égalité

$$\prod_{k=1}^m \left(\sum_{i_k=0}^M \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m})^s}.$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers m_0 et M_0 strictement positifs tels que :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^{m_0} \left(\sum_{i_k=0}^{M_0} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

c) En déduire que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s} \right).$$

3) a) Montrer que $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1 (minorer par exemple ζ par une somme partielle et utiliser la série harmonique).

b) On suppose que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Montrer alors que le produit

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

converge. On note ℓ la valeur de ce produit.

c) Montrer l'inégalité $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ et en déduire que $\zeta(s) < \ell$ pour tout $s > 1$.

d) Conclure que la série $\sum_n \frac{1}{p_n}$ diverge.

Références

- [1] J.-M. ARNAUDIÈS, H. FRAYSSE, *Cours de Mathématiques 1, algèbre*, Dunod, 1994.
- [2] M. ALFARO, *GLMA 302*, Poly d'Analyse 3, 2013-2014.
- [3] M. BRIANE, G. PAGÈS, *Théorie de l'intégration, Licence de Mathématiques - Cours et Exercices*, Vuibert 2000.
- [4] S. FRANCINO, H. GIANELLA, *Oraux X-ENS, Analyse 1*, Cassini, 2012.
- [5] D. MONASSE *Cours complet Prépa MP et MP* Mathématiques*, Vuibert, 1998.
- [6] J.-P. RAMIS, A. WARUSFEL, *Mathématiques : tout-en-un pour la licence Niveau 1, 2ème édition*, DUNOD, 2006.

D Travaux dirigés L3

Cette annexe contient les énoncés des travaux dirigés de l'UE de théorie de la mesure et d'intégration à partir de 2020. Cette dans cette UE qu'est abordée l'intégration de Lebesgue à l'université de Montpellier.



HLMA 503 : Théorie de la Mesure et Intégration Chapitre 1 : Théorie Générale de la Mesure

Philippe Castillon ⁽¹⁾

Espaces mesurables, Applications mesurables

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{D} = \{A \subset X \mid A \text{ dénombrable, ou } A^c \text{ dénombrable}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que \mathcal{D} est une tribu sur X .

On note $\mathcal{C} = \{\{x\} \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ la classe des singletons (ie. des parties à un seul élément). Comparer \mathcal{D} et $\sigma(\mathcal{C})$.

Sur \mathbb{N} , quelle est la tribu engendrée par les singletons ?

Exercice 2. Soit X un ensemble, (Y, \mathcal{B}) un espace mesuré, et $f : X \rightarrow Y$ un application. On note

$$f^*(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

1. Montrer que $f^*(\mathcal{B})$ est une tribu sur X .

2. On suppose que \mathcal{A} est une tribu sur X . Montrer que f est \mathcal{A} - \mathcal{B} -mesurable si et seulement si $f^*(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Exercice 3. On considère les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\cos(xe^n)) \quad \text{et} \quad h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\arctan(f(x^n) + n^3 x^7))$$

Montrer que ces fonctions sont boréliennes.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est croissante, montrer que f est borélienne.
2. Si f est dérivable, montrer que f' est borélienne.

Exercice 5. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables.

1. Montrer que les ensembles $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ sont mesurables.
2. Si $A \subset X$ est mesurable, montrer que la fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est mesurable.

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mél : philippe.castillon@umontpellier.fr

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a & \text{si } f(x) > a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

est mesurable.

4. Soit $h : X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. Montrer que $|h|$ est mesurable et qu'il existe $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $|\alpha(x)| = 1$ et $h(x) = \alpha(x) \cdot |h(x)|$ pour tout $x \in X$.

Mesures

Exercice 6. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère λ la mesure de Lebesgue, $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k$ et $\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \delta_k$. Pour chacune de ces mesures, calculer les mesures des ensembles suivants :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [n, n + 1 + \frac{1}{n^2}]$, $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$;
- $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$ et $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$

Exercice 7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $A \in \mathcal{A}$ une partie mesurable. Montrer que l'application $\mu_A : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lambda(A) = 0$. Montrer que A est d'intérieur vide.

Exercice 9. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$, et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables telle que $\forall n \in \mathbb{N} \mu(A_n) = \mu(X)$. Montrer que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(X)$.

Le résultat est-il encore vrai si on a $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$.

- Montrer que $\mathcal{C}_a = \{A \subset \mathbb{R} \mid A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a$, puis que $\mathcal{C}_a = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $\mu(A) = \lambda(A + a)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application μ ainsi définie est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- Déduire de ce qui précède que la mesure de Lebesgue est invariante par translation: pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.

Exercice 11. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$.

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

- $\mu([0, 1]) = 1$;
- Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$ on ait $\mu(I + a) = \mu(I)$.

Le but est de montrer que μ est la mesure de Lebesgue.

- Montrer $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que la mesure μ est diffuse.
- Montrer que $\mu([0, x]) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pourra commencer par le montrer pour tout rationnel $x \in \mathbb{Q}_+^*$.
- En déduire que $\mu = \lambda$.

Pour s'entraîner

Exercice 12. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et soit $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Déterminer $\sigma(\mathcal{C})$.

Exercice 13. Soit X un ensemble et (A_1, \dots, A_n) une partition finie de X . Montrer que $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$ est une tribu.

Soit $A \subset X$, déterminer $\sigma(\{A\})$.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$ deux parties telles que $A \neq B$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A, B\})$. *Indication: distinguer certains cas particuliers comme $A \subset B$ ou $A \cap B = \emptyset$.*

Exercice 14. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) des espaces mesurés, et $f : X \rightarrow Y$ une application. On note

$$f_*(\mathcal{A}) = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que $f_*(\mathcal{A})$ est une tribu sur Y . Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $f_*(\mathcal{A})$ pour que f soit \mathcal{A} - \mathcal{B} -mesurable.

Exercice 15. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe est mesurable.

On rappelle que les intervalles sont les seules parties convexes de \mathbb{R} : $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0, 1] \quad (1-t)x + ty \in A$.

Exercice 16. Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , δ_0 la mesure de Dirac en 0, et $\mu = \lambda + \delta_0$.

1. Calculer $\mu(\bigcap_{n \geq 1} A_n)$, où $A_n = [0, \frac{1}{n}[$;
2. Calculer $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$, où $A_n = [\frac{1}{n}, 1[$;
3. Calculer $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$, où $A_n = [-\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}[$;
4. Calculer $\mu(\bigcap_{n \geq 1} A_n)$, où $A_n = [-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

Exercice 17. Pour tout $A \subset \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $A+n = \{p+n \mid p \in A\}$. Soit μ est une mesure sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ telle que $\mu(A+n) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que μ est un multiple de la mesure de comptage.

Exercice 18. On munit \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 de leurs tribus boréliennes. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \mid B_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur \mathbb{R}^2 . En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, A_x est mesurable.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application partielle $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_x(y) = f(x, y)$ est mesurable.

Exercice 19. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) des espaces mesurables et $F : X \rightarrow Y$ une application mesurable. Si μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) , on note $F_*\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $(F_*\mu)(B) = \mu(F^{-1}(B))$.

1. Montrer que $F_*\mu$ est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) . On l'appelle *mesure image de μ par F* .
2. Pour $a \in X$, déterminer $F_*\delta_a$.
3. Si μ et ν sont des mesures sur X et si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, montrer que $F_*(\alpha\mu + \nu) = \alpha F_*\mu + F_*\nu$.
4. On dit qu'une application $G : X \rightarrow X$ préserve la mesure μ si $G_*\mu = \mu$.
 - (a) Soit $a \in X$. À quelle condition l'application G préserve-t-elle la mesure δ_a ?
 - (b) À quelle condition une application $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ préserve-t-elle la mesure de comptage ?



HLMA 503 : Théorie de la Mesure et Intégration Chapitre 2 : Théorie Générale de l'intégration

Philippe Castillon ⁽¹⁾

Exercice 1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \varphi d\mu.$$

1. Montrer que ν est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .
2. On souhaite déterminer quelle est l'intégrale d'une fonction pour la mesure ν .
 - (a) Pour toute fonction mesurable positive $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, montrer qu'on a $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$.
On commencera par le montrer pour les fonctions étagées positives.
 - (b) Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ si et seulement si $f\varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.
Lorsque c'est le cas, montrer que $\int_X f d\nu = \int_X f \varphi d\mu$.

Remarque : une mesure ν de cette forme est appelée *mesure à densité par rapport à μ* , la fonction φ étant la fonction densité.

Exercice 2. Soit $X = [1, +\infty[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ .

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = ne^{-nx}$ est simplement convergente sur X . On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.
2. Justifier que f est borélienne sur X et calculer $\int_X f d\lambda$.

Exercice 3. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{[x, +\infty[} f d\lambda = 0$.
2. On suppose que f est décroissante. En déduire que f est positive et montrer qu'il existe une constante C telle que $f(x) \leq \frac{C}{x}$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement f positive.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x)$.

Exercice 5.

1. Montrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geq -n$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n x^p dx = p!$.

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mél : philippe.castillon@umontpellier.fr

Exercice 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{n}{nk^2 + k + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$

Exercice 7. On considère $[-1, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ . Pour tout $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f_n(t) = n \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

1. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite de la suite $(\int_{[-1,1]} f_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.
2. Soit $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-1,1]} \varphi f_n d\lambda = \int_{[-1,1]} \varphi d\delta_0$.

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}$.

1. Montrer que la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ . Calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x > 0$ on a $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
3. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus et déterminer F .
4. Dédire des questions précédentes la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un fonction Lebesgue intégrable sur \mathbb{R} , et soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi_h(x) = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[x, x+h]} d\lambda.$$

1. Montrer que la fonction ϕ_h ainsi définie est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_h(x) = 0$.

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. En considérant les fonctions $f_n(t) = e^{-nbt}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} d\lambda(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(a + nb)^2}.$$

En déduire une expression intégrale de $\frac{\pi^2}{6}$.

Pour s'entraîner

Exercice 11. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable, μ_1 et μ_2 deux mesures sur (X, \mathcal{A}) et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note

$$\mu(A) = \alpha_1 \mu_1(A) + \alpha_2 \mu_2(A)$$

1. Montrer que μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .
2. Pour toute fonction mesurable positive $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, montrer qu'on a $\int_X f d\mu = \alpha_1 \int_X f d\mu_1 + \alpha_2 \int_X f d\mu_2$. On commencera par le montrer pour les fonctions étagées positives.

3. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu_1) \cap \mathcal{L}^1(X, \mu_2)$. Lorsque c'est le cas, montrer que $\int_X f d\mu = \alpha_1 \int_X f d\mu_1 + \alpha_2 \int_X f d\mu_2$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon[} f d\lambda = 0$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Que peut-on dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{ax}^{bx} f(t) dt$?

Exercice 13. On considère \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ . Pour tout $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(t) = \frac{n}{t^2+n^2}$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont mesurables et calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ pour tout $n \geq 1$.
2. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.

Exercice 14. Soit $b > 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-bx} d\lambda(x)$.

Exercice 15. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ et que $\int_X f d\mu = \int_X f^2 d\mu$. Montrer qu'il existe une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ telle que $f = \mathbb{1}_A$.

Exercice 16. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ . On suppose que f est décroissante, montrer que f est positive et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$. *Indication: utiliser la première question de l'exercice 3.*

Exercice 17. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x, t) = e^{itx} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Montrer que la fonction $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ est bien définie et dérivable sur \mathbb{R} .
2. Déterminer deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $a(x)F'(x) + b(x)F(x) = 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus et déterminer F .



HLMA 503 : Théorie de la Mesure et Intégration Chapitre 3 : Mesures images, mesures produit

Philippe Castillon ⁽¹⁾

Exercice 1. Soit $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ une application mesurable.

1. Montrer que pour toute mesure μ_1, μ_2 sur (X, \mathcal{A}) et tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, on a $T_*(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1T_*\mu_1 + \alpha_2T_*\mu_2$.

2. Soient $a_1, \dots, a_n \in X$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, déterminer $T_*\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{a_k}\right)$.

Exercice 2. Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurés. On munit $X \times Y$ de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et on considère les deux projections $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ définies par $p(x, y) = x$ et $q(x, y) = y$.

1. Soit μ une mesure sur (X, \mathcal{A}) et ν une mesure sur (Y, \mathcal{B}) telles que $\mu(X) = \nu(Y) = 1$. Déterminer $p_*(\mu \otimes \nu)$ et $q_*(\mu \otimes \nu)$.

2. Soient $a_1, a_2 \in X$ et $b_1, b_2 \in Y$. On suppose maintenant que $\mu = \frac{1}{2}\delta_{a_1} + \frac{1}{2}\delta_{a_2}$ et $\nu = \frac{1}{2}\delta_{b_1} + \frac{1}{2}\delta_{b_2}$. Déterminer $\mu \otimes \nu$.

On considère ρ , mesure sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, définie par $\rho = \frac{1}{2}\delta_{(a_1, b_1)} + \frac{1}{2}\delta_{(a_2, b_2)}$. Déterminer $p_*\rho$ et $q_*\rho$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Montrer que V est une partie mesurable de \mathbb{R}^2 , et calculer sa mesure (pour la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2)

Exercice 4. On considère $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ . Soit $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Montrer que F est mesurable et déterminer $F_*\lambda$.

Exercice 5. Soient $a > 0$ et $f :]0, a[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$, $g(x) = \int_{[x, a[} \frac{f(t)}{t} d\lambda(t)$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction $g :]0, a[\rightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est intégrable sur $]0, a[$ et que $\int_{]0, a[} g(x) d\lambda(x) =$

$$\int_{]0, a[} f(x) d\lambda(x).$$

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mél : philippe.castillon@umontpellier.fr

Exercice 6. On considère, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, la mesure de Lebesgue λ et la mesure $\mu = \delta_1 + \sqrt{2}\delta_2$. On note $\rho = \lambda \otimes \mu$, mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Déterminer $\rho(D)$ dans les cas suivants :

1. $D = [-a, a]^2$, où $a > 0$.
2. D est le disque euclidien fermé de rayon 2 et de centre $(0, 0)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin x e^{-xy}$.

1. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, mais que, pour tout $T > 0$, f est intégrable sur $[0, T] \times [0, +\infty[$.
2. En utilisant le théorème de Fubini, calculer l'intégrale (au sens de Riemann) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 8. Calcul du volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note λ_n la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, et $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ la boule de rayon $r \geq 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le but de l'exercice est de calculer $\omega_n = \lambda_n(B_1^n)$. Dans la suite on identifiera \mathbb{R}^{n+1} à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. En particulier, on pourra noter (x, t) les éléments de \mathbb{R}^{n+1} , où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda_{n+1} = \lambda_n \otimes \lambda_1$.

On note $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(x, t) = e^{-t} \mathbf{1}_{\|x\|^2, +\infty[}(t)$$

1. Montrer que pour tout $r \geq 0$ on a $\lambda_n(B_r^n) = \omega_n r^n$.
2. Montrer que f est mesurable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, calculer $\int_{[0, +\infty[} f(x, t) d\lambda_1(t)$ et en déduire que $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f d\lambda_{n+1} = \pi^{\frac{n}{2}}$. (On pourra utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} d\lambda_1(s) = \sqrt{\pi}$)
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) d\lambda_n(x)$, et exprimer $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f d\lambda_{n+1}$ en fonction de ω_n et de la fonction Γ .
4. conclure.

Pour s'entraîner

Exercice 9. Dans ce qui suit, les mesures considérées sont les mesures de Lebesgue sur \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 .

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La fonction $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(x, y) = f(x)$ est-elle intégrable ? Si oui, calculer son intégrale.
2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables. Les fonctions ϕ et ψ définies sur \mathbb{R}^2 par $\phi(x, y) = f(x)g(y)$ et $\psi(x, y) = f(x) + g(y)$ sont-elles intégrables ? Si oui, calculer leurs intégrales.
3. Même question que ci-dessus, mais avec f et g définies et intégrables sur $[0, 1]$ (et par conséquent, ϕ et ψ définies sur $[0, 1]^2$).

Exercice 10. On considère $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage χ . Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ et que $\chi \otimes \chi$ est la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

Exercice 11. Calculer l'intégrale $\int_D \frac{1}{x^2 y} d\lambda(x, y)$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$

Exercice 12. En calculant de deux manières l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} d\lambda(x, y)$, déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt$

Exercice 13. Soit $D = [1, +\infty[\times [0, +\infty[$ et $f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(2y)e^{-xy}$. Montrer que f est intégrable sur D et en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} \sin(2y)}{y} dy = \arctan 2$.

Exercice 14. Calculer l'aire délimitée par une ellipse dont les axes sont de longueurs $2a$ et $2b$. On prendra par exemple l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan \mathbb{R}^2 rapporté à un repère orthonormé.

En déduire le volume délimité par l'ellipsoïde de \mathbb{R}^3 d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. On pourra commencer par montrer que l'intersection de l'ellipsoïde avec un plan d'équation $z = t$ est une ellipse dont les longueurs des axes s'expriment en fonction de a, b, c et t .

Exercice 15. Soient $0 < a < b$ deux réels et soit $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^y$. Montrer que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

Exercice 16. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x, y) = e^{-x^2 - \alpha xy - y^2}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur \mathbb{R}^2 et, quand elle est intégrable, calculer son intégrale I_α (On pourra utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$)



HLMA 503 : Théorie de la Mesure et Intégration

Chapitre 4 : Espaces L^p .

Philippe Castillon ⁽¹⁾

Exercice 1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Si $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, montrer qu'on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 2. Inclusions entre espaces L^p .

1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$.
2. On considère \mathbb{N} muni de la mesure de comptage. Si $p, q \in [1, +\infty]$ vérifient $p < q$, montrer que $\ell^p \subset \ell^q$.
3. On considère \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$. Donner un exemple de fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^q(\mathbb{R})$, et un exemple de fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$ telle que $g \notin L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Inégalité d'interpolation.

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $p < r < q$. Montrer que pour toute fonction $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ on a $f \in L^r(X)$.

Indication: montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{(1-a)}{p} + \frac{a}{q}$, et utiliser l'inégalité de Hölder avec des exposants bien choisis.

Exercice 4. On considère \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue λ .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = e^{-n|x|}$. Montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [0, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_p$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n(x) = \frac{1}{(n+|x|)^2}$. Montrer que $g_n \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [0, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|g_n\|_p$.
3. On considère les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ces normes sont-elles comparables ?

Exercice 5. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et $p, q \in [1, +\infty]$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$;
- f_n converge vers g dans $L^p(X)$;
- f_n converge vers h dans $L^q(X)$.

Montrer que $g = h$ μ -p.p..

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mél : philippe.castillon@umontpellier.fr

Pour s'entraîner

Exercice 6. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des nombres réels deux à deux distincts, et soit $\mu = \delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_n}$, mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $f = g$ μ -p.p. ?
2. Montrer que pour tout $p, q \in [0, +\infty]$ on a $L^p(\mathbb{R}, \mu) = L^q(\mathbb{R}, \mu)$.
3. Montrer que $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ est un espace vectoriel de dimension finie et en donner une base.

Exercice 7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\alpha > 0$, où

$$\alpha = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) > 0\}.$$

1. Donner un exemple d'espace mesuré ayant cette propriété.
2. Soit $p \in [0, +\infty[$, et soit $f \in L^p(X)$.
 - (a) Soit $c < \|f\|_\infty$. Montrer qu'il existe une partie mesurable E telle que $\mu(E) > 0$ et $|f(x)| \geq c$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\int_X |f|^p d\mu \geq C^p \alpha$.
 - (b) Montrer que $\|f\|_\infty \leq \alpha^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$.
3. Soient $p, q \in [0, +\infty[$ tels que $p < q$. En utilisant ce qui précède, montrer que $\|f\|_q \leq \alpha^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$.
4. Que disent ces inégalités sur les inclusions entre espaces $L^p(X)$ et $L^q(X)$?

E Problème de type CAPES

E.1 Énoncé du problème

PROBLÈME N° 4

HMEF101

Dans tout le problème, on considère le plan affine euclidien E , munit d'un repère orthonormé (O, I, J) . On notera, dès que $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \max\{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$ la partie entière de x , qui vérifie :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Enfin, on note $[[m, n]]$ l'ensemble des entiers compris entre m et n .

On pourra utiliser les résultats d'analyse suivants :

- Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Toute fonction continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On notera, dès que $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \max\{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$ la partie entière de x , qui vérifie :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Enfin, on note $[[m, n]]$ l'ensemble des entiers compris entre m et n .

Lorsque f est une fonction définie sur $[a, b]$ et positive, on appelle hypographe de f l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Dans ce problème, nous commencerons par travailler à partir d'une axiomatique de la mesure des aires et démontrerons des formules élémentaires. Puis, à partir de cette axiomatique, nous verrons le lien entre aire et primitives. Enfin, dans la partie 3, nous construirons une mesure des aires et nous démontrerons que l'hypographe d'une fonction positive est quarrable dans la partie 4.

A. PREMIÈRE PARTIE : AUTOUR D'UNE AXIOMATIQUE DE LA MESURE

Dans cette partie, on considère un sous ensemble \mathcal{Q} de E , appelé *ensemble des parties quarrables de E* qui contient les points, les segments, les polygones usuels, les cercles, qui est stable par union fini et on suppose qu'il existe une application μ définie sur \mathcal{Q} à valeur dans \mathbb{R}^+ qui vérifie :

- (axiome 1) Si C est l'ensemble des points intérieurs au carré unité construit sur le repère (O, I, J) (c'est à dire l'ensemble des (x, y) dans E tel que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$) alors $\mu(C) = 1$.
- (axiome 2) Si X et Y sont des éléments de \mathcal{Q} disjoints ($X \cap Y = \emptyset$), alors $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

- (axiome 3) Si X est un élément de \mathcal{Q} et φ une isométrie de E , alors $\varphi(X) \in \mathcal{Q}$ et $\mu(\varphi(X)) = \mu(X)$.
- (axiome 4) Si X est un élément de \mathcal{Q} et h une homothétie de E de rapport k , alors $h(X) \in \mathcal{Q}$ et $\mu(h(X)) = k^2\mu(X)$.

Dès que $X \in \mathcal{Q}$, $\mu(X)$ est appelé l'aire de X .

A.1.

A.1.1. Soit A un point de E . En considérant l'homothétie h de centre A et de rapport 2, montrer que $\mu(A) = 0$.

A.1.2. Soient A et B deux points de E , distincts, et on considère le segment $[AB]$. On note $m = \mu([AB])$.

A.1.2.1. Vérifier que $\mu([AB]) = m$.

A.1.2.2. Soit C le milieu de $[AB]$. Justifier que $\mu([AC]) = \mu([CB])$, puis, en remarquant que $[AB] = h([AC])$ (où h est l'homothétie de la question précédente), conclure que $m = 0$.

A.1.3. Soient X, Y deux parties de E . Montrer que

$$X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y).$$

A.1.4. Soit C_3 le carré fermé $\{(x, y) \in E, 0 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$. Justifier que $\mu(C_3) = 9$.

A.1.5. Soit a un réel strictement positif. On note C_a l'ensemble des points intérieurs au carré O, A, B, C où $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$. Montrer que $\mu(C_a) = a^2$.

Nous admettons que ce résultat reste valable pour des carrés non parallèles aux axes

A.2. Les découpages fondamentaux.

A.2.1. On considère l'ensemble Π des points de E intérieurs (au sens large) à un parallélogramme $ABCD$. On note T_1 (resp. T_2) l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC (resp. ACD). Montrer que

$$\mu(T_1) = \mu(T_2) = \frac{1}{2}\mu(\Pi).$$

A.2.2. Soit ABC un triangle, et soit A' le milieu de $[BC]$. On note T_3 (resp. T_4) l'ensemble des points intérieurs à un triangle ABA' (resp. $AA'C$). Montrer que

$$\mu(T_3) = \mu(T_4)$$

A.2.3. Soit encore ABC un triangle et soit D un point quelconque de la parallèle à (AB) passant par C . On note T_5 l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC et T_6 l'ensemble des points intérieurs à ABD . Montrer que

$$\mu(T_5) = \mu(T_6).$$

A.3. Mesure du rectangle. Soient a, b deux réels strictement positifs. On considère les points $A(a, 0)$, $B(a, b)$ et $C(0, b)$. On note R l'ensemble des points intérieurs au rectangle $0ABC$.

A.3.1. On suppose d'abord que a et b sont des entiers naturels. Montrer alors que $\mu(R) = ab$.

A.3.2. On suppose maintenant que a et b sont rationnels. On note alors $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$. En remarquant que $a = \frac{ps}{qs}$ et $b = \frac{rq}{qs}$, montrer que $\mu(R) = ab$.

A.3.3. On suppose enfin que a, b sont des réels.

A.3.3.1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, il existe x_n et y_n dans \mathbb{D} tels que

$$\begin{cases} x_n \leq a < x_n + \frac{1}{10^n} \\ y_n \leq b < y_n + \frac{1}{10^n} \end{cases}$$

A.3.3.2. Montrer que la suite (x_n) converge vers a et que (y_n) converge vers b .

A.3.3.3. En déduire que $\mu(R) = ab$.

Nous admettons que ce résultat se généralise aux rectangles dont les côtés ne sont pas nécessairement parallèles aux axes

A.4. Mesure du triangle. Soit T l'ensemble des points intérieurs à un triangle ABC , et soit AH la hauteur issue de A . Montrer que

$$\mu(T) = \frac{1}{2}BC \times AH.$$

B. DEUXIÈME PARTIE : L'INTÉGRALE

Uniquement pour cette section, nous admettons que dès que f est une fonction définie, positive et continue sur $[a, b]$ ($a < b$), l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ est un ensemble quarrable (nous démontrerons ce résultat dans la dernière partie du problème). Le but est de s'appuyer sur les résultats de la section précédente pour calculer des aires de surfaces, et démontrer certaines propriétés de μ (dont nous avons admis l'existence).

B.1.

B.1.1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

B.1.2. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = x^2$. On note $\Omega = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x^2\}$.

B.1.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout entier $k \in [0, n - 1]$,

$$\frac{k^2}{n^3} \leq \mu(\omega_k) \leq \frac{(k+1)^2}{n^3}$$

où $\omega_k = \{(x, y) \in E, \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, 0 \leq y \leq x^2\}$.

B.1.2.2. En déduire que $\mu(\Omega) = \frac{1}{3}$.

B.2. On considère maintenant la fonction f définie pour tout $x \in [0; 1]$ par $f(x) = e^x$. Par une méthode analogue, calculer $\mu(\Omega)$ où $\Omega = \{(x, y) \in E, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$.

B.3. Soit f est une fonction définie, positive et continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et $\Omega = \{(x, y), x \in [a; b], y \leq f(x)\}$. Pour chaque $t \in [a, b]$, on note $S(t) = \mu(\Omega_t)$ où

$$\Omega_t = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

B.3.1. On suppose f croissante sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in]a, b[$.

B.3.1.1. Soit $h > 0$. Que représente $S(x_0 + h) - S(x_0)$? En déduire un encadrement de $S(x_0 + h) - S(x_0)$

B.3.1.2. Montrer alors que S est dérivable à droite en x_0 .

B.3.1.3. Soit $h < 0$. Donner un encadrement de $S(x_0 + h) - S(x_0)$.

B.3.1.4. Montrer alors que S est dérivable à gauche en x_0 .

B.3.1.5. Justifier enfin que S est dérivable en x_0 et que $S'(x_0) = f(x_0)$.

B.3.2. On ne suppose plus f croissante, ni même monotone. Soit $x_0 \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$.

B.3.2.1. Justifier qu'il existe $\eta > 0$ qui vérifie :

$$\forall h \in]-\eta, \eta[, \forall t \in [x_0, x_0 + h], f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon.$$

B.3.2.2. En déduire un encadrement de $\frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} - f(x_0)$ pour $h \neq 0$.

B.3.2.3. En déduire que S est dérivable en x_0 et que $S'(x_0) = f(x_0)$.

Nous venons de prouver que S est une fonction dérivable sur $]a, b[$ et que pour tout $x \in]a, b[$, $S'(x) = f(x)$. Le prolongement à a et b ne présente pas de difficulté, nous admettons donc que S est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $S'(x) = f(x)$. S est donc une primitive de f , avec $S(a) = 0$ et $S(b) = \mu(\Omega)$.

B.4. Nous conservons les notations de la question précédente. On suppose alors que f admette une autre primitive F . Montrer que $S(b) = F(b) - F(a)$.

B.5. Retrouver alors les résultats des questions A.3, B.1.2 et B.2.

Dans la suite, lorsque f est continue positive sur $[a, b]$, nous noterons $S(b) = \int_a^b f(x)dx$.

B.6. Soit h une fonction continue sur $[a, b]$, mais non nécessairement positive sur $[a; b]$

B.6.1. Justifier que h admet des primitives.

B.6.2. Soit H_1 et H_2 deux primitives de h . Montrer que $H_1(b) - H_1(a) = H_2(b) - H_2(a)$.
On définit alors, dès que h est une fonction continue sur $[a, b]$

$$\int_a^b h(t)dt = H(b) - H(a)$$

où H est une primitive quelconque de h .

B.7. Montrer que pour toutes fonctions f_1 et f_2 continue sur $[a, b]$ et pour tout réel λ ,

$$\int_a^b f_1(t) + \lambda f_2(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + \lambda \int_a^b f_2(t)dt.$$

C. TROISIÈME PARTIE : CONSTRUCTION D'UNE MESURE

Dans cette partie, on va définir l'ensemble \mathcal{Q} des ensembles quarrables, et une application μ qui vérifie les axiomes de la première partie.

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage \mathcal{Q}_i du plan dont les sommets sont les points $(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i})$ où a et b sont des entiers relatifs. Un carré fermé de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est à dire qui est contenue dans un carré), on considère l'ensemble des carrés fermés de niveau i , contenus dans S , et on note s_i leur réunion, et n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les carrés fermés de niveau i qui rencontrent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, et on a $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

Par exemple, dans la figure 1, le quadrillage \mathcal{Q}_0 est représenté, $n_0 = 1$ et $N_0 = 10$.

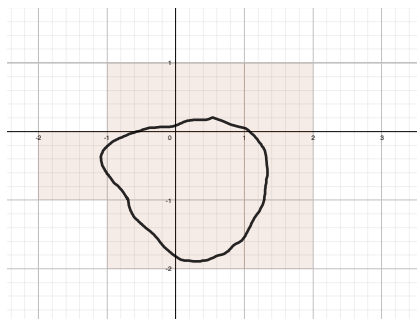


FIGURE 1. Exemple de quadrillage

On dira que S est quarrable lorsque $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i$. La limite commune est alors notée $\mu(S)$.

C.1. Généralités.

Soit donc S une partie bornée, les suites $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définies comme ci-dessus.

C.1.1. On considère dans cette question que S est le carré unité $OABC$ avec $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. Donner, pour tout entier n_i et N_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

C.1.2. Dans le cas général, justifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$n_{i+1} \geq 100n_i.$$

En déduire la monotonie de la suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$

C.1.3. Montrer que la suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

C.1.4. Justifier que les suites $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Donner enfin une condition nécessaire et suffisante sur les suites $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pour que S soit quarrable.

C.2. Un exemple de partie non quarrable. On considère l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in E, x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$ des points intérieurs au carré unités à coordonnées rationnelles.

C.2.1. Justifier que pour tout entier naturel i , $n_i = 0$ et $N_i \geq 100^i$.

C.2.2. L'ensemble Γ est-il quarrable ?

C.3. Un exemple de partie quarrable : le rectangle.

On considère les points $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, b)$ (avec $a, b, c > 0$) et l'ensemble R des points intérieurs au rectangle $OACB$.

C.3.1. Soit i un entier. Justifier l'existence de deux entiers k_i et l_i tels que

$$\frac{k_i}{10^i} \leq a < \frac{k_i + 1}{10^i} \text{ et } \frac{l_i}{10^i} \leq b < \frac{l_i + 1}{10^i}.$$

C.3.2. Exprimer alors n_i et N_i en fonction de k_i et l_i

C.3.3. Conclure.

On admet pour la suite que les polygones de E sont des ensembles quarrables, que les segments sont quarrables (et de mesure nulle).

C.4. Vérification de quelques propriétés de l'aire.

C.4.1. Soient A et B deux parties quarrables du plan. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\mu(A) \leq \mu(B)$.

C.4.2. Soient A et B deux parties quarrables du plan telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est quarrable, et que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

On admet que ce résultat reste valable dès que $A \cap B$ est une réunion finie de segments.

C.4.3. Soit A une partie bornée de E . Montrer que A est quarrable si et seulement si il existe deux suites de polygone (P_n) et (Q_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } Q_n \text{ sont quarrables} \\ \forall n \in \mathbb{N} P_n \subset A \subset Q_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0 \end{cases}$$

Ce dernier résultat peut permettre, entre autre, de montrer que les disques sont quarrables. Nous admettrons les dernières propriétés de μ , à savoir l'invariance par isométrie, et l'homogénéité par homothétie.

D. QUATRIÈME PARTIE : RETOUR SUR LES HYPOGRAPHES DE FONCTIONS

Dans cette partie, nous nous intéressons aux hypographe de fonctions, et nous montrons que sous certaines conditions, l'hypographe est quarrable. Soit donc f une fonction définie sur $[a, b]$, avec $a < b$ et positive. On note $\Omega = \{(x, y) \in E, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

D.1. On suppose dans cette question que f est une fonction croissante. Montrer que Ω est un ensemble quarrable.

D.2. Dans cette partie, on ne suppose plus f croissante, mais f continue (et toujours positive) sur $[a, b]$.

D.2.1.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \eta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

D.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit η_n donné par la question D.2.1, $N = E(\frac{b-a}{\eta_n})$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$:

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_N < b = a_{N+1}$$

où, pour tout $i \in [[0; N]]$, $a_i = a + i\eta_n$. On note, pour tout entier i ,

$$m_i = \min_{x \in [a_i, a_{i+1}]} \{f(x)\} \text{ et } M_i = \max_{x \in [a_i, a_{i+1}]} \{f(x)\}.$$

D.2.2.1. Justifier l'existence de m_i et M_i .

D.2.2.2. Déterminer deux polygones r_n et R_n tel que $r_n \subset \Omega \subset R_n$ et $\mu(R_n) - \mu(r_n) < \frac{b-a}{n}$.

D.2.2.3. Conclure.

E.2 Corrigé du problème

A - PREMIERE PARTIE

A1
A1.1. Soit $A \in E$. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.
D'après l'axiome 4, $\mu(h(A)) = 4\mu(A)$. Mais $h(A) = A$ donc
 $\mu(A) = 4\mu(A)$ et donc, $\mu(A) = 0$

A1.2
A2.2.1 $[AB] \cap B = \emptyset$ donc $\mu([AB]) = \mu([AB] \cup B) + \mu(B)$
mais $\mu(B) = 0$ donc $\mu([AB]) = m$.

A1.2.2 Soit I le milieu de $[AB]$, et soit s_I la symétrie centrale de centre I . On a: $s_I([AI]) = [IB]$.

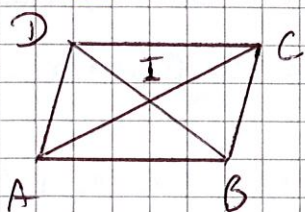
donc $\mu(s_I([AI])) = \mu([IB]) = \mu([AI])$ (axiome 3)
De plus, $[AB] = [AI] \cup [IB]$ et $[AI] \cap [IB] = \emptyset$.
donc $\mu([AB]) = 2m$ et donc $m = 2m$ soit $m = 0$

A1.3 Soient $X, Y \in E$. Supposons $X \subset Y$.
On a: $Y = (Y \setminus X) \cup X$ et $(Y \setminus X) \cap X = \emptyset$ donc
 $\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X)$. Mais $\mu(Y \setminus X) \geq 0$ donc
 $\mu(Y) \geq \mu(X)$.

A1.4 C_3 contient exactement 9 carrés unités, donc
 $\mu(C_3) = 9$.

A1.5 Soit h_a l'homothétie de centre O et de rapport a .
Alors, $h_a(C) = C_a$ donc $\mu(C_a) = a^2 \mu(C) = a^2$.

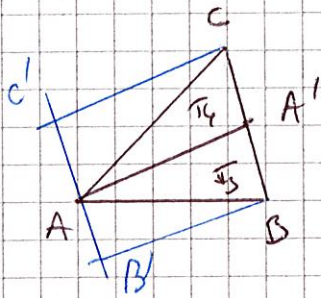
A2
A2.1



Soit I le centre du parallélogramme $ABCD$
On note s_I la symétrie centrale de centre I .
 $ABC = s_I(ACD)$ donc $\mu(T_1) = \mu(T_2)$.
Par ailleurs, $\mu(T_1 \cup T_2) = \mu(T_1) + \mu(T_2) = \mu(\pi)$

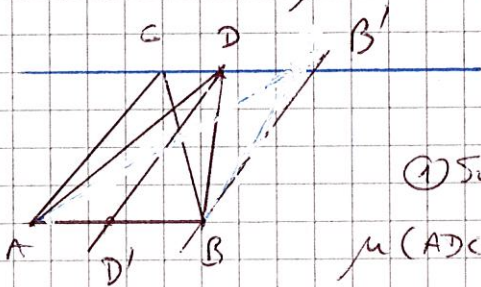
donc $\mu(T_2) = \frac{1}{2} \mu(T_1)$.

A 22



On considère les parallèles \tilde{a} (AA') passant par B et C, et la parallèle \tilde{c} (BC) passant par A. $CB'B'C'$ est un parallélogramme car, comme A' est le milieu de $[BC]$, A est le milieu de $[B'C']$. $AA'BB'$ est l'image de $CA'AC'$ par la translation de vecteur $\vec{CA'}$, donc $\mu(AA'BB') = \mu(CA'AC')$. De plus, ces parallélogrammes sont partagés en deux triangles de même aire donc $\mu(T_3) = \mu(T_4)$.

A 23



On considère la parallèle \tilde{a} (AC) passant par D et la parallèle \tilde{c} (AC) passant par B.

① Supposons que $D' \in [AB]$ (intérieur de d_1) $\cap c \cap (AB)$

$$\mu(ADC) = \mu(AD'D) \text{ et } \mu(D'DB) = \mu(BDB')$$

Ainsi, $2\mu(ABD) = \mu(ACB'B) = 2\mu(ACB)$ car $AB'B'B$ est un parallélogramme d'où $\mu(ABD) = \mu(ACB)$. Le cas $D' \notin [AB]$ est à résoudre à l'aide de la figure.

A 3

A 3.1

On suppose que $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Alors, R est la réunion presque disjointe de $a \times b$ carrés unités donc $\mu(R) = ab$.

A 3.2

$$a = \frac{p}{q} = \frac{ps}{qs} \text{ et } b = \frac{r}{s} = \frac{rq}{qs}$$

On considère C le carré de côté $\frac{1}{qs}$. Alors R est la réunion presque disjointe de $ps \times rq$ carrés de côté $\frac{1}{qs}$ et donc

$$\mu(R) = ps \times rq \times \left(\frac{1}{qs}\right)^2 = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = ab.$$

A 33

A 3.3.1

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(10^n a) \leq 10^n a < E(10^n a) + 1.$$

$$\text{donc } \frac{1}{10^n} E(10^n a) \leq a < \frac{1}{10^n} E(10^n a) + \frac{1}{10^n}$$

$$\text{On pose } x_n = \frac{E(10^n a)}{10^n} \in \mathbb{D}, \text{ et } x_n \leq a < x_n + \frac{1}{10^n}$$

De même pour b, en posant $y_n = \frac{b(10^{-n})}{10^n}$, on a:

$$y_n \leq b \leq y_n + \frac{1}{10^n}$$

A 3.3.2

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a - \frac{1}{10^n} < x_n \leq a$ donc $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow b$.

$$b - \frac{1}{10^n} < y_n \leq b$$

A 3.3.3 Int(R) est inclus dans le rectangle de côté $\frac{1}{10^n}$ de

de $\frac{1}{10^n}$ en $a - \frac{1}{10^n}$ et x_n, y_n et $a + \frac{1}{10^n}, y_n + \frac{1}{10^n}$.

D'après l'axiome de l'aire $x_n y_n \leq \mu(R) \leq (x_n + \frac{1}{10^n})(y_n + \frac{1}{10^n})$

D'après le théorème des gendarmes, $\mu(R) = ab$ (car $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow b$)

A 4

Soit ABC un triangle, H la hauteur issue de A.

1^{er} cas: $H \in [BC]$ Alors AHB et AHC sont des demi-rectangles

$$\text{et } \mu(AHB) = \frac{1}{2} BH \times HA \text{ et } \mu(AHC) = \frac{1}{2} AH \times HC.$$

$$\text{Or, } \mu(T) = \mu(AHB) + \mu(AHC) \text{ donc } \mu(T) = \frac{1}{2} AH \times BC.$$

2^{es} cas: $H \notin [BC]$, par exemple $H \in [BC]$. Alors

$$\mu(ABC) = \mu(ABH) - \mu(ACH) \text{ et on retrouve bien:}$$

$$\mu(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC.$$

B - Deuxième partie.

B1 - B1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouvons: $P(n): \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(1)$ est vraie ($1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$)

Pq: $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Si l'on suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ donc } P(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion - D'après le théorème de récurrence, on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \int_0^1 \frac{h^2}{n^3} \frac{n(n+1)h^2}{6}$

B1.2, $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{E}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq n^2\}$
 $n \mapsto x^2$

B1.2.1 Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in [1, n-1]$.

On note $\omega_{m,h}$ le rectangle $A_h^n, B_h^n, C_h^n, D_h^n$ où

$$A_h^n \left(\frac{h}{n}, 0, \frac{h+1}{n}, \frac{h}{n} \right), B_h^n \left(\frac{h+1}{n}, 0, \frac{h+1}{n}, \frac{h+1}{n} \right), C_h^n \left(\frac{h}{n}, \left(\frac{h}{n}\right)^2, \frac{h+1}{n}, \left(\frac{h}{n}\right)^2 \right), D_h^n \left(\frac{h+1}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2, \frac{h+1}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2 \right)$$

et $R_{m,h}$ le rectangle $A_h^n, B_h^n, E_h^n, F_h^n$ où

$$E_h^n \left(\frac{h}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2, \frac{h+1}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2 \right) \text{ et } F_h^n \left(\frac{h+1}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2, \frac{h+1}{n}, \left(\frac{h+1}{n}\right)^2 \right)$$

Il est clair que $\omega_{m,h} \subseteq \omega_h \subseteq R_{m,h}$.

$$\text{d'où } \mu(\omega_{m,h}) \leq \mu(\omega_h) \leq \mu(R_{m,h})$$

$$\frac{1}{m} \times \left(\frac{h}{n}\right)^2 \leq \mu(\omega_h) \leq \frac{1}{m} \left(\frac{h+1}{n}\right)^2$$

$$\text{d'où } \frac{h^2}{m^2} \leq \mu(\omega_h) \leq \frac{(h+1)^2}{m^2}$$

B1.2.2 $m \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités trouvées en B1.2.1.

$$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h^2}{m^2} \leq \sum_{h=0}^{n-1} \mu(\omega_h) \leq \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(h+1)^2}{m^2}$$

$$\text{Or: } \sum_{h=0}^{n-1} \mu(\omega_h) = \mu \left(\bigcup_{h=0}^{n-1} \omega_h \right) = \mu(\Omega)$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{h^2}{m^2} = \frac{1}{m^2} \sum_{h=0}^{n-1} h^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \frac{(h+1)^2}{m^2} = \frac{1}{m^2} \sum_{h=1}^n h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d'où finalement: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \leq \mu(\Omega) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où, en passant à la limite: $\mu(\Omega) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

B2. On m'ôte $\omega_R = \left\{ (n,y) \in E, \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, 0 \leq y \leq e^x \right\}$. (3)

On conserve les notations (parallèles) de la fonction B2.21.

Or, toujours, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{h=0}^{n-1} \mu(R_{n,h}) \leq \mu(\Omega) \leq \sum_{h=0}^{n-1} \mu(R_{n,h})$

où $\mu(R_{n,h}) = \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}}$ et $\mu(R_{n,h}) = \frac{1}{n} e^{\frac{k+1}{n}}$.

De plus, $\sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} (e^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{\frac{1}{n}n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$

et $\sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k+1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{1 - e^{\frac{1}{n}n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

donc $\mu(\Omega) = e - 1$

B3. $S(t) = \mu(\Omega_t) = \mu\left\{ (n,y) \in E, a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$.

B3.1. f est croissante sur $[a, b]$.

B3.1.1. $S(x_0+h) - S(x_0) = \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0})$

et $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0} = \left\{ (n,y) \in E, x_0 < x \leq x_0+h, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$

Comme f est croissante, $h f(x_0) \leq S(x_0+h) - S(x_0) \leq h f(x_0+h)$

B3.1.2. $\forall h > 0$, $f(x_0) \leq \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$

et, en passant à la l.i.m.: $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} = f(x_0)$
(car f continue en x_0)

B3.1.3. De même, $-h f(x_0+h) \leq S(x_0) - S(x_0+h) \leq -h f(x_0)$

donc $f(x_0+h) \leq \frac{S(x_0) - S(x_0+h)}{-h} \leq f(x_0)$

et, en passant à la l.i.m.: $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{S(x_0) - S(x_0+h)}{-h} = f(x_0)$

B3.1.4. S est dérivable à gauche et à droite de x_0 , et $S'_d(x_0) = S'_g(x_0) = f(x_0)$

donc S est dérivable en n_0 et $S'(n_0) = f(n_0)$.

B3.2 f continue sur $[a, b]$, $n_0 \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$.

B3.2.1 Comme f est continue en n_0 : $\exists \eta > 0, \forall n \in [a, b]$,
 $|n - n_0| < \eta \Rightarrow |f(n) - f(n_0)| < \varepsilon$.

Soit $h \in]-\eta, \eta[$. Alors, si $t \in [n_0, n_0 + h]$,
 $|t - n_0| < |h| < \eta$, donc $-\varepsilon < f(t) - f(n_0) < \varepsilon$
d'où le résultat.

B3.2.2 ε est fixé, η donné par B3.2.1.

$\forall h \in]0, \eta]$, $h(f(n_0) - \varepsilon) \leq S(n_0 + h) - S(n_0) \leq h(f(n_0) + \varepsilon)$

$$\text{donc } -\varepsilon \leq \frac{S(n_0 + h) - S(n_0) - f(n_0)h}{h} \leq \varepsilon$$

$\forall h \in]-\eta, 0[$, $-h(f(n_0) - \varepsilon) \leq S(n_0) - S(n_0 + h) \leq -h(f(n_0) + \varepsilon)$
 $f(n_0) - \varepsilon \leq \frac{S(n_0) - S(n_0 + h)}{h} \leq f(n_0) + \varepsilon$

donc : $\forall h \in]-\eta, \eta[$, $h \neq 0$ $-\varepsilon \leq \frac{S(n_0 + h) - S(n_0)}{h} - f(n_0) \leq \varepsilon$

B3.2.3 D'après 3.2.2, on :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad -\varepsilon \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{S(n_0 + h) - S(n_0) - f(n_0)h}{h} \leq \varepsilon.$$

$$\text{donc } \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{S(n_0 + h) - S(n_0)}{h} = f(n_0)$$

$$\text{De même, } \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{S(n_0 + h) - S(n_0)}{h} = f(n_0)$$

d'où : S est dérivable en n_0 et $S'(n_0) = f(n_0)$.

B4 Soit F une primitive de f . Alors $(F - S)$ est dérivable sur $[a, b]$ et $(F - S)' = 0$. $F - S$ est donc une fonction constante : $\exists K \in \mathbb{R} +, \forall n \in [a, b], F(n) - S(n) = K$.

En particulier : $F(a) - S(a) = K$, i.e. $K =$ une constante :

$$F(a) = K \text{ et } F(b) = S(b) = F(a) \text{ d'où}$$

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

B5

On retrouve. $\mu(\mathbb{R}) = \left[\int_0^a t^0 \right]_0^a = ab$

(4)

$\mu(\mathcal{P}) = \left[\int_0^1 \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$ $\bar{\mu} \mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{E}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$

$\mu(\mathbb{E}) = \left[\int_0^1 e^t \right]_0^1 = e - 1$ $\bar{\mu} \mathbb{E} = \{(x,y) \in \mathbb{E}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$

B6

B6.1

h est continue sur $[a,b]$ donc admet un minimum m :

$\forall t \in [a,b] \quad h(t) \geq m$. Soit $k: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\left. \begin{array}{l} \cdot k \text{ est continue sur } [a,b] \\ \cdot k \text{ est positive sur } [a,b] \end{array} \right\} k \text{ admet donc une primitive } K.$

On pose $H: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto K(t) + mt$.

On a: $\forall t \in [a,b], H'(t) = K'(t) + m = h(t) + m + m = h(t)$

Mat donc une primitive de h .

B6.2

Soit $\tilde{H} = H_1 - H_2$. \tilde{H} est dérivable et sa dérivée est nulle

C'est donc une fonction constante: $\exists \lambda \in \mathbb{R} \forall t$:

$\forall x \in [a,b], H_1(x) - H_2(x) = \lambda$.

En particulier: $H_1(a) - H_2(a) = H_1(b) - H_2(b)$

d'où $H_1(b) - H_1(a) = H_2(b) - H_2(a)$.

B7

Soit F_1 une primitive de f , F_2 une primitive de f_2 .

$F_1 + \lambda F_2$ est donc une primitive de $f_1 + \lambda f_2$.

$\int_a^b (f_1(t) + \lambda f_2(t)) dt = \left[F_1(t) + \lambda F_2(t) \right]_a^b$

$= F_1(b) + \lambda F_2(b) - (F_1(a) + \lambda F_2(a))$

$= F_1(b) - F_1(a) + \lambda (F_2(b) - F_2(a))$

$= \int_a^b f_1(t) dt + \lambda \int_a^b f_2(t) dt$.

C. TROISIÈME PARTIE.

C1.1 S est le carré unité donc $m_0 = 1$ et $N_0 = 9$.

$$m_1 = 100 \text{ et } N_1 = 400 + 100 + 40 + 4 = 144$$

$$m_2 = 10\,000 \text{ et } N_2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404.$$

C1.2 Si C_i est un carré de niveau i inclus dans S , alors C_i contient 100 carrés de niveau $i+1$ inclus dans S donc

$$m_{i+1} \geq 100 m_i.$$

Alors $\frac{m_{i+1}}{100^{i+1}} \geq \frac{m_i}{100^i}$ soit $m_{i+1} \geq m_i$ et (m_i) est une suite croissante.

C1.3 De même, si C_i est un carré de niveau i qui ~~rencontre~~ ^{rencontre} S , les 100 carrés de C_i de niveau $i+1$ ne sont pas dans

Soit C_i un carré de niveau i qui rencontre S .

• Si $C_i \subset S$, alors les 100 carrés de niveau $i+1$ de C_i rencontrent S .

• Si $C_i \not\subset S$, alors il y a au plus les 100 carrés de niveau $i+1$ de C_i qui rencontrent S donc :

$$N_{i+1} \leq 100 N_i$$

et donc $n_{i+1} \leq n_i$ et (n_i) est décroissante.

C1.4. On a : $\forall i \in \mathbb{N}, m_0 \leq m_i \leq n_i \leq n_0$.

• (m_i) est croissante majorée donc convergente.

• (n_i) est décroissante minorée donc convergente.

(m_i) et (n_i) convergent vers la même limite ssi (n_i) et (m_i) sont adjacents,

c'est à dire :
$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{n_i - m_i}{100^i} = 0$$

C2 $\mathcal{R} = \{ (x,y) \in E, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \}$. (5)

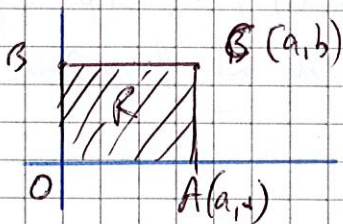
C2.1: Soit $i \in \mathbb{N}$. Soit C_i un carré de niveau i . Chaque carré de niveau i de $[0,1] \times [0,1]$ contient un point de \mathcal{R} .

Ainsi : $m_i > 0$ et $N_i \geq 100^i$

donc $\mu_i = 0$ et $\nu_i \geq 1$.

Les suites (μ_i) et (ν_i) ne sont donc pas adjacentes et \mathcal{R} n'est pas quarrable.

C3 Soit $i \in \mathbb{N}$. On pose $k_i = E(10^i a) \in \mathbb{N}$.



Ainsi $k_i \leq 10^i a < k_{i+1}$

donc $\frac{k_i}{10^i} \leq a < \frac{k_{i+1}}{10^i}$.

De même on pose $l_i = E(10^i b) \in \mathbb{N}$.

$\frac{l_i}{10^i} \leq b < \frac{l_{i+1}}{10^i}$.

C3.2 On a : $\forall i \in \mathbb{N}, m_i = k_i l_i$ ~~$k_i 10^i$~~

$N_i = (k_{i+1})(l_{i+1})$

C3.3 $\forall i \in \mathbb{N}, \frac{m_i}{100^i} = \frac{k_i}{10^i} \times \frac{l_i}{10^i}$

or, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{10^i} = a$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l_i}{10^i} = b$ do. $\frac{m_i}{100^i} \rightarrow ab$.

$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{N_i}{100^i} = \frac{k_{i+1}}{10^i} \times \frac{l_{i+1}}{10^i} \rightarrow ab$.

Conclusion: \mathcal{R} est quarrable et $\mu(\mathcal{R}) = ab$.

C4.1 Supposons $A \cap B = \emptyset$. On note m_i, N_i, μ_i, ν_i les suites définies pour A , et $\tilde{m}_i, \tilde{N}_i, \tilde{\mu}_i, \tilde{\nu}_i$ celles pour B .
 $\tilde{m}_i, \tilde{N}_i, \tilde{\mu}_i, \tilde{\nu}_i$ celles pour $A \cup B$.

Si C_i est un carré de niveau i qui est inclus dans A , alors il est dans $A \cup B$; s'il est dans B , il est dans $A \cup B$. Et comme $A \cup B = \emptyset$, on a :

$$m_i + m'_i \leq \tilde{m}_i.$$

Si C_i est un carré de niveau i qui rencontre $A \cap B$, alors il rencontre A ou B , donc $\tilde{N}_i \leq N_i + N'_i$.

Alors :

$$m_i + m'_i \leq \tilde{m}_i \leq \tilde{N}_i \leq N_i + N'_i.$$

Comme A et B sont quarrable, $m_i \rightarrow \mu(A)$, $N_i \rightarrow \mu(A)$
 $m'_i \rightarrow \mu(B)$, $N'_i \rightarrow \mu(B)$

Par encadrement, (\tilde{m}_i) et (\tilde{N}_i) convergent et ont la même limite : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

C4.2 En conservant les notations.

Il est clair que $m_i \leq m'_i \leq N'_i \leq N_i$.
 donc $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \mu(A)$.
 d'où le résultat

C4.4 \Rightarrow Ce sens est évident : il suffit de considérer S_n et S'_n .

\Leftarrow Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\mu(Q_n) - \mu(P_n) < 2\varepsilon$.

Comme Q_n et P_n sont quarrable, $\exists i \in \mathbb{N}$ tq

$$\mu(Q_n) - \mu(S_i) < \varepsilon$$

$$\mu(S_i) - \mu(P_n) < \varepsilon.$$

Alors,

$$\frac{N_i - m_i}{100^i}$$

\Leftarrow Soit $\varepsilon > 0$. $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq m_0$, $\mu(Q_n) - \mu(P_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $m \geq m_0$. P_m et Q_m sont quarrable et $P_m \subset A \subset Q_m$.

$$\exists i_0 \in \mathbb{N}, \forall i \geq i_0, \frac{\tilde{N}_{i,n}}{100^i} - \mu(Q_m) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\mu(P_m) - \frac{\tilde{m}_{i,n}}{100^i} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{où } \tilde{N}_{i,n} \text{ est le nombre}$$

de carré de niveau i qui rencontrent P_n et $\hat{m}_{i,n}$ est le nombre de carré de niveau i qui est inclu dans P_n . On a donc :

$$\frac{\hat{m}_{i,n}}{100^i} \leq \frac{M_i}{100^i} \leq \frac{N_i}{100^i} \leq \frac{\tilde{N}_{i,n}}{100^i}$$

Alors,
$$\frac{N_i - n_i}{100^i} \leq \frac{\tilde{N}_{i,n} - \hat{m}_{i,n}}{100^i} \leq \frac{\tilde{N}_{i,n}}{100^i} - \mu(P_n) + \mu(P_n) - \mu(P_n) + \mu(P_n) - \frac{\hat{m}_{i,n}}{100^i} < \epsilon$$

Conclusion: $\exists \delta \in \mathbb{N}, \forall i \gg \delta, \frac{N_i - n_i}{100^i} < \epsilon$.
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_i - n_i}{100^i} = 0$ et donc, A est quarrable.

D. QUATRIEME PARTIE

D1. f est croissant. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$P_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} p_k \text{ et } Q_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} q_k \text{ où}$$

$$p_k = \left\{ (n,y) \in E, a + \frac{k(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}, 0 \leq y \leq \overbrace{f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)} \right\}$$

$$q_k = \left\{ (n,y) \in E, a + \frac{k(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}, 0 \leq y \leq \overbrace{f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)} \right\}$$

P_n et Q_n sont des polygones, et, comme f est croissant,

$$P_n \subset A \subset Q_n$$

Par ailleurs,
$$\mu(P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

$$\mu(Q_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)$$

$$\text{donc } \mu(Q_n) - \mu(P_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q_n) - \mu(P_n) = 0$$

d'après C.4, A est quarrable.

D2

D2.1

f est uniformément continue sur $[a, b]$ donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists \eta_m > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \eta_m \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{m}$$

D2.2

$$N = E\left(\frac{b-a}{\eta_m}\right)$$

D2.2.1

$\forall i \in [0, N]$, f est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ donc admet un maximum et un minimum sur $[a_i, a_{i+1}]$.

D2.2.2

$$r_m = \bigcup_{i=0}^N \{ (x, y) \in E, a_i \leq x \leq a_{i+1}, 0 \leq y \leq m_i \}$$

$$R_m = \bigcup_{i=0}^N \{ (x, y) \in E, a_i \leq x \leq a_{i+1}, 0 \leq y \leq \pi_i \}$$

$$\mu(R_m) - \mu(r_m) = \sum_{i=0}^N (a_{i+1} - a_i) (\pi_i - m_i)$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N (a_{i+1} - a_i)$$

$$\leq \frac{1}{m} (b-a) \quad \text{et } r_m \subset \Omega \subset R_m.$$

D2.2.3

D'après la question C4.4, Ω est un ensemble qu'onable.

F Documents pour notre expérimentation

Cette annexe contient tous les documents utilisés par les étudiants au moment de notre expérimentation : les guides d'AER ainsi que les diaporama utilisés pendant les phases d'institutionnalisation.

Le document guide d'AER pour la première séance :

Didactique et épistémologie 2. Intégration

Avril 2021

1 Introduction

Les élèves rencontrent la notion d'aire dès l'école élémentaire. Au secondaire, le travail sur la notion d'aire se poursuit jusqu'au calcul intégral. Dans le programme actuel de Terminale (en spécialité mathématiques, comme en option mathématiques complémentaires), le programme demande de fonder la théorie de l'intégrale au lycée sur « la notion intuitive d'aire ».

Nous souhaitons, par ce travail, mobiliser vos connaissances mathématiques (en particulier en théorie de la mesure) afin de fonder la notion intuitive d'aire sur une axiomatique adaptée à l'enseignement secondaire. Selon l'épistémologue Blanché (*L'Axiomatique*, PUF, p. 55) :

Le but qu'on se propose quand on met sous forme axiomatique une théorie déductive, c'est de la dégager des significations concrètes et intuitives sur lesquelles elle a d'abord été construite, afin d'en faire clairement apparaître le schéma logique abstrait.

Dans son ouvrage rédigé à destination des enseignants (*La mesure de grandeurs*, 1935, p. 44-45), Lebesgue propose une liste d'axiomes qui peut-être retranscrite¹ comme suit.

On définit tout d'abord un sous-ensemble \mathcal{Q} du plan (affine euclidien \mathbb{R}^2), appelé *ensemble des parties quarrables*, par une liste d'axiomes, dont les suivants :

- \mathcal{Q} contient les points, les segments et les polygones (avec ou sans les frontières) ;
- \mathcal{Q} est stable par union finie et par intersection finie ;
- \mathcal{Q} est stable par isométrie (si $A \in \mathcal{Q}$ et s est une isométrie, alors $s(A) \in \mathcal{Q}$).

Une *mesure d'aire* est alors une application $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes suivants :

- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{Q}^2$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité) ;
- Si $A \in \mathcal{Q}$ et s est une isométrie, alors $\mu(s(A)) = \mu(A)$ (invariance par isométrie) ;
- $\mu(C) = 1$, où C est le carré unité semi-ouvert $[0, 1[\times [0, 1[$ (normalisation).

Lebesgue généralisera ensuite cette axiomatique au cas de \mathbb{R}^n et rajoutera la notion de σ -additivité. Ces travaux sont donc les précurseurs de la théorie de Lebesgue enseignée en L3, ainsi que de la théorie de la mesure.

1. en utilisant le point de vue, plus contemporain, des transformations en géométrie

2 Consignes

Question 1 :

Soit μ une mesure d'aire. Démontrer que μ est une mesure *diffuse*, au sens de la théorie de la mesure, c'est-à-dire que la mesure d'un point est toujours nulle.

Vous travaillerez par groupes de 4 pendant 30 min à la résolution de cette question. Le document partagé en ligne servira de cahier de recherches et de support à la synthèse collective de votre travail. Vous y retranscrirez donc vos pistes de résolution, même incomplètes, en prenant soin de faire apparaître les questions que vous vous posez (à formuler explicitement, à l'interrogative), les éléments de réponses que vous avez réussi à apporter, et les liens que vous pouvez faire avec les théories de l'intégration enseignées à l'université. Les éléments que vous souhaitez partager à vos camarades seront soulignés en gras et présentés par un porte-parole de chaque groupe lors de la phase de mutualisation.

On peut démontrer qu'un segment est également de mesure nulle pour une mesure d'aire μ (c'est un bon exercice, à réaliser à la maison). Ce résultat sera admis par la suite.

Question 2 :

Soit μ une mesure d'aire. Que vaut la mesure d'un rectangle (en fonction de ses dimensions, qui sont a priori deux nombres réels positifs quelconques)? Justifier votre réponse. (Indication : on pourra discuter selon le domaine de nombres)

Mêmes consignes qu'à la question précédente. Durée de cette phase : 30 min

Question 3 :

Le programme de terminale (en spécialité mathématiques et en option mathématiques complémentaires) sur l'intégration énonce la directive suivante : « On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège ». Certaines propriétés de l'aire sont ainsi lues sur la figure, par une saisie qui engage l'intuition sensible.

On souhaite que l'axiomatique de Lebesgue joue le rôle que lui assigne Blanché, c'est-à-dire que toute assertion soit justifiée à partir des axiomes. Réécrire la preuve du manuel pour atteindre ce niveau plus élevé de rigueur.

Mêmes consignes qu'à la question précédente. Durée de cette phase : 30 min

Théorème 1

f est une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

Alors, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.

On admet
ce résultat
dans le cas
général.

Principe de la démonstration. On se place dans le cas où f est croissante sur $I = [a; b]$.

x_0 et h sont deux nombres : $x_0 \in I$, $h \neq 0$ et $x_0 + h \in I$.

- Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.
 $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous \mathcal{C} sur $[x_0; x_0 + h]$.

On encadre cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h).$$

$$\text{D'où : } f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- Si $h < 0$, on démontre de même que : $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

- Or, f est continue en x_0 , donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0). \text{ Ainsi, } \Phi \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } \Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Ce résultat est vrai pour tout x_0 de $[a; b]$, donc Φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.

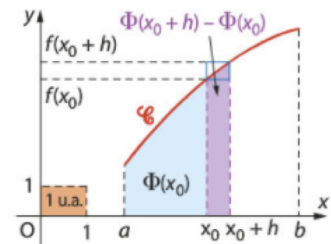


TABLE DES FIGURES

Le document guide d'AER pour la deuxième séance :

Didactique et épistémologie 2. Intégration

Avril 2021

Document étudiant 2/2

Le but de cette activité est de construire une mesure d'aire, au sens de l'axiomatique donnée par Lebesgue dans son ouvrage *La mesure des grandeurs* (paru en 1935), tout en tissant des liens avec les théories de l'intégration enseignées à l'université.

Comme le décrivent les didacticiennes Douady et Perrin-Glorian, la notion d'aire est introduite dès l'école élémentaire :

La présentation standard actuelle consiste à recourir au pavage de surfaces, en passant rapidement au pavage avec des carrés et à compter les carreaux pour déterminer l'aire de surfaces quadrillées. Elle consiste ensuite, pour des rectangles ou carrés, à trouver des moyens économiques de comptage, puis à introduire les unités égales avec multiples et sous multiples et selon le cas, avant ou après cela, à établir les formules de calcul d'aire des rectangles en fonction des longueurs des côtés. On raccroche ensuite à ces formules celles relatives au triangle et à d'autres quadrilatères (losange, parallélogramme, trapèze).

Nous allons suivre les grandes lignes de la construction donnée par Lebesgue dans son ouvrage. Dans notre langage mathématique contemporain, le procédé peut être décrit de la façon suivante :

Pour tout entier naturel i , on appelle *quadrillage de niveau i* le quadrillage \mathcal{Q}_i du plan euclidien E , rapporté à un repère orthonormé, dont les sommets sont les points de coordonnées $\left(\frac{a}{10^i}, \frac{b}{10^i}\right)$, où a et b sont des entiers relatifs. Une surface carrée fermée (au sens de la topologie usuelle du plan) de niveau i est un ensemble du type $\{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x \leq \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y \leq \frac{b+1}{10^i}\}$. Si S est une partie bornée du plan (c'est-à-dire qui est contenue dans une surface carrée), on considère l'ensemble des surfaces carrées fermées de niveau i contenues dans S et on note s_i leur réunion ainsi que n_i leur nombre. On a donc $s_i \subset S$. De même, on considère les surfaces carrées fermées de niveau i qui intersectent S , on note N_i leur nombre, S_i leur réunion, de sorte que $S \subset S_i$. On pose enfin $u_i = \frac{n_i}{100^i}$ et $v_i = \frac{N_i}{100^i}$.

On dira que S est *quarrable* lorsque $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_i$. La limite commune est alors notée $\mu(S)$ et appelée *aire* de la surface S (au sens de Lebesgue).

Question 1

1. Démontrer que le carré unité semi-ouvert $^2 C = [0; 1[\times [0; 1[$ est quarrable et d'aire de Lebesgue égale à 1. Autrement dit, l'axiome de normalisation est vérifié.
2. Démontrer que l'application μ vérifie également l'axiome d'additivité.

Vous travaillerez par groupes de 4 pendant 30 min à la résolution de cette question. Le document partagé en ligne servira de cahier de recherches et de support à la synthèse collective de votre travail. Vous y retranscrirez donc vos pistes de résolution, même incomplètes, en prenant soin de faire apparaître les questions que vous vous posez (à formuler explicitement, à l'interrogative), les éléments de réponses que vous avez réussi à apporter, et les liens que vous pouvez faire avec les théories de l'intégration enseignées à l'université. Les éléments que vous souhaitez partager à vos camarades seront soulignés en gras et présentés par un porte-parole de chaque groupe lors de la phase de mutualisation.

Pour la suite de cette activité, nous admettrons que l'application μ est bien invariante par isométrie. On pourra consulter l'ouvrage d'Henri Lebesgue (p. 41-44) pour une preuve détaillée. L'invariance par isométrie et l'additivité permettent de démontrer que tout polygone convexe, et même toute réunion finie de polygones convexe, est quarrable, et l'aire de Lebesgue d'un polygone convexe est la somme des aires de Lebesgue des triangles de n'importe quelle décomposition.

-
2. On pourra noter que le résultat demeure vrai que la frontière soit incluse ou non

Question 2

Dans son traité (environ 250 avant J.-C.), Archimède démontre que le disque a même aire que le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs respectives le rayon et la circonférence de ce cercle. Voici une interprétation de sa démarche avec une reformulation contemporaine, notamment avec la notion de limite et les propriétés des fonctions trigonométriques :

On considère un cercle de rayon 1, et on appelle π la longueur de son demi-périmètre. Pour tout entier n non nul, on note P_n et Q_n les polygones réguliers à n côtés inscrits et circonscrits au cercle. Le polygone P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB et le polygone Q_n est l'union de n triangles isométriques à OGF (voir Figure 1).

Les aires de Lebesgue de ces polygones sont $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et $n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. La différence des aires de Q_n et P_n tend vers 0, donc le disque est quarrable et son aire vaut $\lim \mu(Q_n) = \pi$.

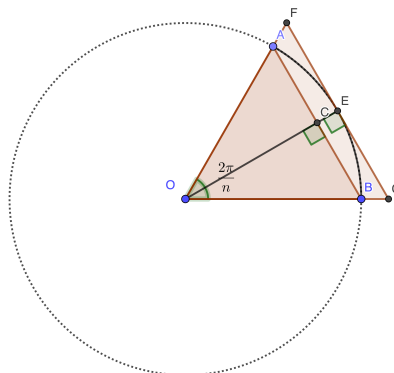


FIGURE 1 – Aire du disque

Quelles sont les propriétés de μ qui sont mobilisées dans le raisonnement ci-dessus ? Relier ces propriétés aux axiomes ou à des propositions générales qui, au besoin, pourront être tenus comme de nouveaux axiomes. Essayer de démontrer ces propositions, après validation de leur énoncé par l'enseignant.

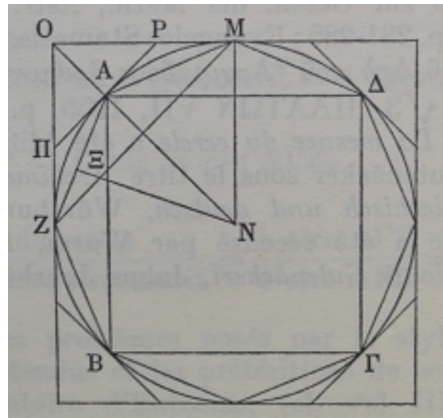
Mêmes consignes qu'à la question précédente. Durée de cette phase : 30 min. Nous ne nous interrogerons pas ici sur les définitions des fonctions trigonométriques.

Question 3

Soit f une fonction à valeurs réelles, bornée et positive sur un segment $[a, b]$. On considère l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

1. On suppose f croissante sur $[a, b]$. L'ensemble Ω est-il quarrable ?
2. Même question en remplaçant "croissante" par "continue".
3. Quels liens pouvez-vous faire avec les notions de la théorie de l'intégration de Riemann ?

Mêmes consignes qu'à la question précédente. Durée de cette phase : 30 min



Le diaporama utilisé lors de la première séance :

Didactique et épistémologie 2 - Intégration -

Gaëtan Planchon

gaetan.planchon@umontpellier.fr

2 mai 2021

Est-ce que je connais des mesures diffuses et des mesures non diffuses, en théorie de la mesure ?

- ▶ La mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas diffuse ;
- ▶ La mesure de Dirac en un point n'est pas diffuse ;
- ▶ La mesure de Lebesgue est une mesure diffuse ;

Comment peut-on prouver que la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est une mesure diffuse ?

Si (x, y) est un point de \mathbb{R}^2 , alors

$$\{(x, y)\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[$$

Comme la mesure de Lebesgue est σ -additive, on en déduit que

$$\lambda(\{(x, y)\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda\left(\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0.$$

Cette preuve est-elle possible dans le cadre de la mesure μ ?

Que sait-on sur la mesure μ ?

- ▶ Additivité (finie)
- ▶ Invariance par isométrie
- ▶ Normalisée

La preuve précédente n'est pas possible car la mesure μ n'est pas σ -additive.

Comment adapter la preuve ?

Soit M un point du plan ; par invariance de la mesure par isométrie, donc par translation (de vecteur \overrightarrow{OM}), il suffit de montrer que $\mu(\{O\}) = 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = [0, \frac{1}{n}[\times [0, \frac{1}{n}[$ le carré de côté $1/n$.

Pour tout entier naturel n non nul, $\mu(\{(0,0)\}) \leq \mu(C_n)$, Or $\mu(C_n) = \frac{1}{n^2} \mu(C_1)$ et donc, pas passage à la limite, $\mu(\{(0,0)\}) = 0$.

Pourquoi la mesure μ est-elle croissante ?

Considérons deux ensembles de \mathcal{Q} notés X et Y avec $X \subset Y$. Alors $Y = X \cup Y \setminus X$. Comme la mesure est additive, on trouve que $\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X) \geq \mu(X)$.

Et pourquoi la mesure d'aire du carré est $\frac{1}{n^2} \mu(C_1)$.

En utilisant l'invariance par translation : C_1 est l'union de n^2 carrés isométriques à C_n donc $\mu(C_1) = n^2 \mu(C_n)$.

Une autre preuve est-elle possible ?

Supposons que $\mu(\{O\}) = \varepsilon > 0$. Comme \mathbb{R} est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $n\varepsilon > 1$. On considère l'ensemble de points $\{A_k, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$ où pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $A_k = (\frac{k}{n}, 0)$. Comme la mesure μ est invariante par translation, on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \mu(\{A_k\}) = \mu(\{0\}) = \varepsilon.$$

Mais alors, comme $\bigcup_{k=0}^n A_k \subset C$ (avec les notations de l'énoncé), on déduit par croissance de la mesure et par additivité simple que $\mu(C) \geq n\varepsilon > 1$ ce qui est impossible.

Conclusion

La mesure μ est bien diffuse, et pour le prouver, on a utilisé :

- ▶ L'additivité de μ ;
- ▶ L'invariance par translation ;
- ▶ La croissance de la mesure.

Pour poursuivre

La mesure d'aire d'un segment quelconque de \mathbb{R}^2 est 0.

Comment montrer que l'aire d'un rectangle est bien le produit longueur par largeur ?

Comme à l'école, si les longueurs de côtés sont des entiers :
Considérons un rectangle parallèle aux axes donc les longueurs sont des entiers, m et n . Alors, le rectangle est l'union disjointe (modulo "chevauchement" de quelques segments) de $m \times n$ carrés de côté 1. La mesure du rectangle est donc $m \times n$ (les côtés comptés deux fois dans la somme sont de mesure nulle).

Comment montrer que la mesure d'aire d'un rectangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles est ce que l'on attend ?

Lorsque les côtés sont de longueurs des nombres rationnels $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$, alors le rectangle est l'union (presque) disjointe de $mq \times pn$ carrés de côté $\frac{1}{nq}$. La mesure du rectangle est donc $\frac{mq \times pn}{n^2 q^2} = \frac{mp}{nq}$.

On peut aussi remarquer que le rectangle est l'union de rectangles de côtés de longueurs $1/n$ et $1/q$. Le carré unité contient nq rectangles de ce type, donc la mesure d'aire de ces rectangles est bien $1/nq$.

Et comment passer au cas des réels ?

Comment utiliser la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ? Les côtés du rectangle R sont de mesures des réels positifs x et y . Il existe quatre suites (q_n) , (q'_n) , (r_n) et (r'_n) de rationnels tels que :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \leq x \leq q'_n$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \leq y \leq r'_n$;
- ▶ Les suites (q_n) et (q'_n) convergent vers x ;
- ▶ Les suites (r_n) et (r'_n) convergent vers y ;

Le rectangle R est alors compris entre deux suites de rectangles (R_n) et (R'_n) de longueurs de côté respectifs q_n, r_n et q'_n, r'_n . Alors : $\mu(R_n) \leq \mu(R) \leq \mu(R'_n)$ soit $q_n r_n \leq \mu(R) \leq q'_n r'_n$. Ce qui donne le résultat par encadrement !

Conclusion

- ▶ L'additivité de μ ;
- ▶ L'invariance par translation ;
- ▶ La croissance de la mesure.
- ▶ La normalisation

Prolongement

Quelle est la mesure d'aire d'un triangle ?

A quelles axiomes fait référence la notion intuitive d'aire du programme ?

- ▶ L'additivité de μ ;
- ▶ L'invariance par translation ;
- ▶ La normalisation.

Où intervient la notion intuitive d'aire ?

- ▶ Ligne 4 : $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ exprime l'aire sous \mathcal{C} ;
- ▶ On encadre cette aire par des rectangles
- ▶ Les formules d'aires du rectangle
- ▶ L'existence de l'aire sous la courbe.

Pourquoi la surface limitée par les courbes de fonctions continue positive admet une aire

Comment formaliser la preuve ?

- ▶ On admet que pour tout $t \in [a, b]$, Ω_t est dans \mathcal{Q} et on note $\mu(\Omega_t)$ la mesure d'aire de Ω_t .
- ▶ Si $h > 0$, $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)$ représente $\mu(\Omega_{x_0+h}) - \mu(\Omega_{x_0})$. Par additivité de la mesure, cette différence correspond à $\mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0})$, qui est donc la mesure de la surface foncée (les mesures des segments sont nuls) (axiome d'additivité)
- ▶ Comme f est croissante, on a : pour tout $x \in [x_0, x_0 + h]$,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

et donc la surface foncée est comprise (au sens de l'inclusion) entre deux rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$$R_{x_0} \subset \Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0} \subset R_{x_0+h}$$

(on note que ceci n'est pas lu sur la figure : cela résulte d'encadrements portant sur les nombres réels)

Le diaporama utilisé lors de la deuxième séance :

Didactique et épistémologie 2 - Intégration -

Gaëtan Planchon

gaetan.planchon@umontpellier.fr

3 mai 2021

Rappels

Dans la première séance, nous avons défini une mesure sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 par une axiomatique. Nous avons montré qu'avec une telle mesure :

- ▶ La mesure de points et des segments est 0 ;
- ▶ La mesure d'un rectangle est le produit des longueurs de côtés ;
- ▶ Si l'hypographe d'une fonction continue f est mesurable, alors la fonction d'aire est dérivable, de dérivée f .

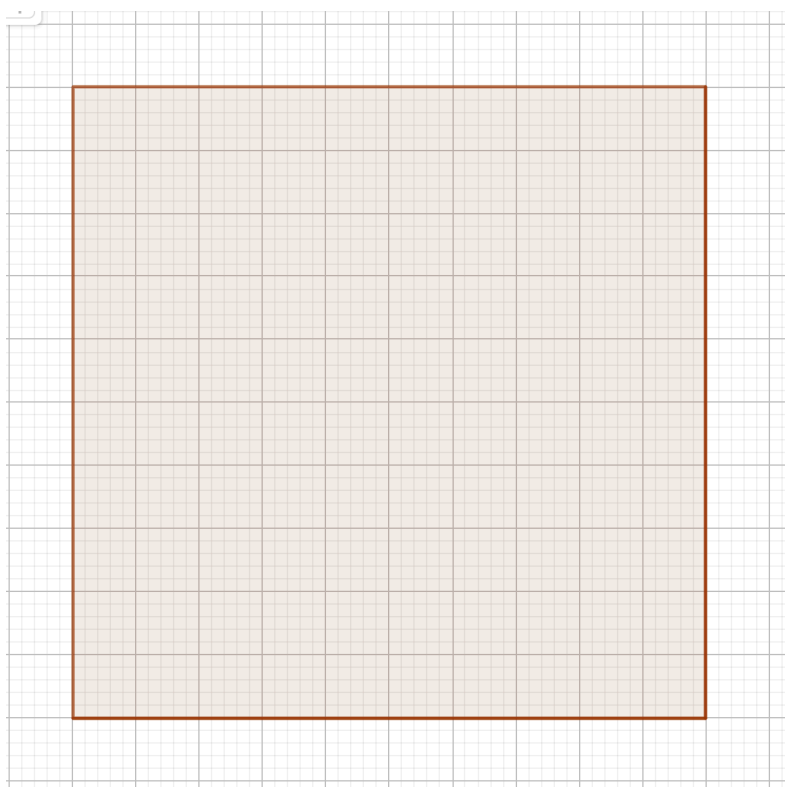
Pourquoi la mesure μ est diffuse

- ▶ Qu'est-ce qu'une mesure diffuse ?
- ▶ La mesure de Lebesgue est-elle diffuse ?
- ▶ Comment peut-on adapter la preuve à la mesure μ ?
- ▶ Pourquoi la mesure μ est croissante ?

La mesure du rectangle

- ▶ Comment montrer que la mesure du rectangle est le produit des longueurs ?
- ▶ Lorsque les côtés sont à mesure entière ?
- ▶ A mesure rationnelle ?
- ▶ Comment utiliser la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ?

Comment se représenter le processus de Lebesgue ?



Que vaut alors les n_i et N_i ?

Soit i un entier naturel non nul.

Le nombre n_i est

$$n_i = 100^i - (10^i + 10^i - 1).$$

Le nombre N_i est

$$N_i = 100^i).$$

Le carré est-il quarrable ?

Oui ! On trouve que $\frac{n_i}{100^i}$ tend vers 1 et $\frac{N_i}{100^i}$ également.

Le carré unité est quarrable et son aire de Lebesgue est bien 1.

Quel est l'axiome d'additivité ?

Si A et B sont des ensembles quarrables disjoints, alors $A \cup B$ est quarrable et

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Quelles sont les suites à considérer ?

Soient A et B deux éléments disjoints de \mathcal{Q} . On pose $D = A \cup B$.
On note a_i, b_i, d_i les carrés du quadrillage \mathcal{Q}_i qui sont dans A, B, D
et de même A_i, B_i, D_i ceux qui rencontrent A, B, D .

Comment peut-on comparer ces suites ?

On a

$$a_i + b_i \leq d_i \leq D_i \leq A_i + B_i$$

Comment conclure ?

Par encadrement :

$$\frac{a_i + b_i}{100^i} \leq \frac{d_i}{100^i} \leq \frac{D_i}{100^i} \leq \frac{A_i + B_i}{100^i}.$$

$$\text{donc } \lim \frac{d_i}{100^i} = \frac{D_i}{100^i} = \mu(A) + \mu(B).$$

Comment justifier que l'aire de Lebesgue de P_n est $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$?

Le triangle OAB a pour aire de Lebesgue le rectangle de côté AC et OC (invariance par isométrie) donc qui vaut $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Comme le polygone P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB , et que l'aire de Lebesgue est invariante par isométrie, on trouve bien $\mu(P_n) = n\mu(OAB) = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. De même pour le calcul de la mesure de Lebesgue de Q_n .

Comment justifier que le disque est quarrable ?

Théorème 1

Une surface S est quarrable si et seulement si il existe deux suites de polygones (I_n) intérieure à D et $u(E_n)$ extérieure à D telles que $\lim \mu(E_n) = \lim \mu(I_n)$.

Théorème 2

Une surface S est quarrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une surface quarrable I intérieure à D et une surface quarrable E extérieure à D telles que $\mu(E) - \mu(I) < \varepsilon$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Soient E et I deux parties quarrables telles que

$$I \subset D \subset E$$

et

$$\mu(E) - \mu(I) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient (U_i) et (V_i) les suites associées à I , (U'_i) et (V'_i) les suites associées à E et (u_i) et (v_i) les suites associées à D .

Il existe un entier i tel que

$$V_i - U_i \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$V'_i - U'_i \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

De plus, $U_i \leq u_i \leq v_i \leq V'_i$.

Enfin,

$$v_i - u_i \leq V'_i - U_i = (V'_i - U'_i) + (U'_i - V_i) + (V_i - U_i)$$

$$v_i - u_i \leq \frac{\varepsilon}{3} + \mu(E) - \mu(I) + \frac{\varepsilon}{3}$$

puis

$$v_i - u_i \leq \varepsilon.$$

On cherche deux suites de polygones comme précédemment

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on considère les unions de rectangles

$$r_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a+k\frac{b-a}{n} \leq x \leq a+(k+1)\frac{b-a}{n}, 0 \leq y \leq f(a+k\frac{b-a}{n})\}$$

et

$$R_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a+k\frac{b-a}{n} \leq x \leq a+(k+1)\frac{b-a}{n}, f(a+(k+1)\frac{b-a}{n}) \leq y \leq f(a+k\frac{b-a}{n})\}$$

pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\text{On pose } P_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} r_k \text{ et } Q_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k,$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \subset \Omega \subset Q_n$$

et

$$\mu(Q_n) - \mu(P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

On en conclue alors que Ω est bien quarrable.

Que se passe t-il dans le cas continue ?

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on considère les unions de rectangles

$$r_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a + k \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + (k+1) \frac{b-a}{n}, 0 \leq y \leq m_k \right\}$$

et

$$R_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a + k \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + (k+1) \frac{b-a}{n}, M_k \right\}$$

où m_k (resp. M_k) est le minimum (resp. le maximum) de f sur $\left[a + (k-1) \frac{b-a}{n}; a + k \frac{b-a}{n} \right]$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

En posant $P_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} r_k$ et $Q_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \subset \Omega \subset Q_n$$

et

$$\mu(Q_n) - \mu(P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k - m_k.$$

Comment utiliser la continuité ?

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[a, b]$, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \mu(Q_n) - \mu(P_n) < \frac{b-a}{n} \frac{n\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Finalement, $\lim(\mu(Q_n) - \mu(P_n)) = 0$ et Ω est quarrable.

Lorsque f est une fonction continue positive sur $[a, b]$ son hypographe admet bien une aire.

Quels liens avec la théorie de Riemann ?

Rappels :

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On note

$\int_* f = \sup\{\int \phi, \phi \text{ en escalier}, \phi \leq f\}$ et

$\int^* f = \inf\{\int \psi, \psi \text{ en escalier}, \psi \geq f\}$.

f est dite Riemann-intégrable si et seulement si $\int_* f = \int^* f$.

Quels liens avec la théorie de Riemann

Lorsque f est bornée, on peut lui associer les quarrables (P_n) et (Q_n) . On a ainsi :

$$\mu(P_n) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq \mu(Q_n)$$

On a montré que lorsque f est continue, $\lim \mu(P_n) = \lim \mu(Q_n)$ donc f est Riemann-intégrable.

Remarque

On peut démontrer qu'une fonction bornée est Riemann-intégrable si et seulement si son hypographe est quarrable.

G Travaux des différents groupes

G.1 Transcription des dialogues

Les séances ont été enregistrées. Ces annexes contiennent les transcriptions des séances.

Salle du premier groupe

A3 : A première vue, je n'ai aucune idée.

A1: déjà moi, une mesure diffuse, je ne sais pas ce que c'est.

A3: C'est écrit en dessous... en fait, il faut montrer que la mesure d'un point est nulle.

A2 : C'est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Il faut montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse.

A1 : ah oui, là ça me parle mieux.

A2 : OK. Il faut faire par l'absurde. On va supposer que la mesure d'un point c'est. Une aire c'est un ensemble de point

A1 : il faudrait pas prendre un intervalle par hasard ?

A2 : oui, peut-être

A2 : on fait plutôt la première idée ou la 2^{ème} ?

A1 : moi je pense la 2^{ème}.

A2: donc avec $[AB]$ (fermé) et $]AB[$ ouvert. Il faut une fonction continue. Il faudrait utiliser les axiomes...

A2: on a la mesure μ , le segment $[AB[$, et le singleton B.

A1: je suis en train de me demander s'il ne faut pas faire avec les convergences.

A2: en fait non, avec ce qui est dit en introduction, ce qui est donné sur la mesure devrait suffire

A1 : ah ok, c'est le truc de base

A2: On a la mesure de l'union qui est la somme des mesures

A1: et sinon, on prend un ensemble D du plan, qui contient des points, au lieu d'un segment.

A2 : oui, tu prends ton polygone D, et tu suppose que $\mu([AB[UB)$ (à réécouter) On avait fait en L3 cet exercice avec Lebesgue. Baptiste, tu t'en souviens de cet exercice ?

A3: Oui, je m'en souviens. Je ne saurais pas le refaire mais je m'en souviens.

A1: mais c'était pas énoncé comme ça...

A2: oui, c'était guidé. Il fallait montrer que c'était invariable par isométrie.

Ah, A1 s'en rappelle !

A1 : moi je trouve la question est très dur ! Si un point n'a pas de mesure, il n'a pas de taille.

A3: avant on disait, un point c'est fini, donc de mesure nul.

A2: oui, c'était Lebesgue. Est-ce qu'on peut utiliser le carré unité semi-ouvert ? Et on va le fermer en fait.

A3 : on pourrait juste dire que la mesure de C plus le singleton x... qui referme le carré, on n'a pas la mesure de cet ensemble, mais on sait que ça fait 1. Les 2 ensembles sont d'intersection vide, donc la mesure de l'union c'est la somme... On est un peu bloqué

A2: je me rappelle qu'il y avait une stratégie : si tu l'avais c'était gagné, sinon c'est perdu.

A2: Du coup, on connaît que la mesure du carré, pas de l'intervalle. On est obligé de travailler avec la dimension 2.

A3: tu supposes que la réunion de 2 est supérieure à 1 ?

A2: comme tu connais la mesure du carré est 1, tu supposes que la mesure du point est supérieure à 1... Bon, si vous avez une idée de génie dites-le !

A3: j'aimerais bien...

A2: et on va utiliser une isométrie ! On peut utiliser les translations ?

A3: en fait, avec l'isométrie, si on pouvait combler le point...

A3: si tu translate le point, tu peux le ramener sur $(1/2, 1/2)$. (voir le fichier)

A2: ça vous va ? Je ne sais pas si c'est très juste, ou s'il y a une erreur... Est-ce que mon erreur vient du fait que je fais la translation que sur le singleton ?

A1 : pour moi, la contradiction ne veut pas dire que la mesure est 0

A2: si, une mesure est toujours positive.

A1: est-ce qu'il ne faut pas faire tous les cas

A2: c'est fini, la mesure est la même si tout ton ensemble.

A1 : d'accord

A1: un point n'a pas de taille.

A2: mais il y a des mesures qui mesurent les points, comme les indicatrices.

A1 : mais dire qu'une mesure est égale à 0, ça veut dire qu'il a pas de taille

A2: ça veut dire que c'est négligeable pour la mesure. Taille est mal choisi

A1 : ok

P : Est-ce que là, vous pouvez utiliser l'additivité ?

A2: non, car l'intersection n'est pas vide...

A1: tu ne peux pas faire Chasles ? Mettre inférieur ou égal ?

P : si vous arrivez à montrer que la mesure de $(1,1)$ est 0, est-ce que ça veut dire que la mesure est diffuse ?

A2: bin après, on translate sur $(1,1)$.

A1: franchement je ne vois pas

A2: ok. On va supposer que la mesure de $(1,1)$ est $\epsilon > 0$

(...)

A1 : je me demande s'il ne faut pas utiliser la continuité du carré...

A2: c'est à dire ?

A1: ce n'est pas lié aux fonctions mesurable ? Du coup, la mesure c'est l'intégrale de l'indicatrice de l'ensemble ?

A2: non, ça dépend de la mesure... la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$, c'est $b-a$, tu intègre rien du tout. Mais tu veux utiliser que le carré c'est compact ? Dense ?

A1 : continu... avec des points très très proche.

(...) Mais on peut parler d'intégrale au sens de Riemann ?

(...)

Mise en commun

Retour à -1 :29

A2: ah je suis deg, je n'étais pas loin !

A2: tu découpes ton rectangle en carré, etc, j'ai pensé au dessin de Fibonacci. Tu es d'accord Baptiste ? Il faut écrire maintenant...

A3: indication : on pourra discuter selon le domaine de nombre ?

A2: c'est quoi le domaine ?

A3: genre \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , peut-être. Enfin, peut-être pas \mathbb{C} ...

A2: ah... ! Si tu mesure un ensemble de relatif, ou de rationnel, c'est nul, car c'est dénombrable. Tu mesure un ensemble d'irrationnels, c'est non nul.

A3: OK.

A2: (...) mais je sais pas du tout où ça mène.... Moi je veux découper mon rectangle !

A3: en vrai, j'aimerais bien voir ce que ça donne, si on essaye de mesurer ?

(Essayent avec le découpage à la fibonacci)

A2: il devrait y avoir une autre preuve...

A3: mais c'est la seule unité d'aire... on doit utiliser les carrés

A2: (retour sur les axiomes). On ne connaît pas les rapports quand on réduit en carré.

A3: oui, donc ça marche plus

A2: A1, tu as une idée ?

A3: mais en fait, je crois qu'il y a moyen de définir l'aire de chaque carré en fonction des précédents ? Avec une suite récurrente d'ordre au moins 2 ?

A2: si on ne sait pas mesurer les carrés, ça ne sert à rien avec Fibonacci.

A1: et avec Pythagore ?

A3: et comment tu voudrais utiliser Pythagore ?

A1: On connaîtrait la diagonale, et pour avoir le carré, on fait $\times 2$, et ensuite la somme des carrés...

A3: quel enfer ces questions

A1: toutes les questions c'est un enfer.

A3: pour l'aire du premier carré, c'est juste qu'on peut le découper en carré d'unité d'aire...

A1 : (retourne sur pythagore)

B : j'avoue que je ne vois pas...

A2 : On arrive quand même à un truc compliqué au 3^{ème} carré. Mais on sait que ce découpage se ramène au rectangle d'or.

P : Il y avait quand même une indication qui était de regarder en fonction des ensembles de nombres des longueurs des côtés ? Par exemple pour un rectangle de côté 2 et 3 ?

A2: Là, on avait l'idée de découper en carré unité.

P : OK. Et comment peut-on faire si on a un rectangle de côté $7/3$ et $3/5$

A2: on peut découper en petit carré aussi, il faudrait toujours les mêmes côtés... il faudrait trouver les rapports entre les longueurs... mais si on passe dans les réels, c'est toujours possible de faire ça ?

P : effectivement. Mais vous avez déjà fait ça, de voir ce qui se passe sur les entiers, les rationnels. Et après comment on passe aux réels ?

Bon, on va passer dans la salle commune...

A2: t'avais la bonne idée A3... fallait répondre au prof !!

A3: le truc c'est que je ne sais pas comment faire s'il y a des longueurs bizarres

A1: franchement, les questions sont dures et je ne vois pas où il veut nous mener...

A2: Ah mais pour passer aux réels, on utilise la densité ! On prend deux suites adjacentes. (-54 :50)

A1 : Oui, j'ai pensé à la densité. En fait, je crois qu'il veut nous amener aux fonctions monotones...

A2: tu penses ?

A1 : le rapport entre Riemann et Lebesgue, il y a que les fonctions monotones

A3: pour moi Riemann c'est limite de suites adjacente, et Lebesgue la notion de borne supérieur, c'est la seule différence que je vois entre les 2

A1 : oui, pareil. Après, Riemann ça mesure la hauteur de l'aire, que Lebesgue c'est la taille de la figure...

A3: c'est ça, on fait un découpage selon des axes différents.

A2: OK. Avec les commentaires, vous êtes d'accord (voir doc partagé)

A3: oui, on prend un rectangle un peu plus petit et un un peu plus grand avec des côtés dans \mathbb{Q} .

(ils lisent la consigne)

2:17

A3: est-ce que vous voyez un problème dans la démo ? Pour moi, c'est ok.

A1: il ne faut pas voir de problème non ?

A3: il faut la formaliser...

A2: avec notre mesure non ?

A2: en fait, dans le découpage, tu as un petit triangle. Tu as de tout petits triangles qui se forment car il y a très peu de variations.

A3: ouais...

A2: je n'ai aucune idée.

A1 : la question, c'est bien de la mettre à notre niveau.

A3: en gros, faut réécrire la preuve en se servant des axiomes.

A1 : des axiomes du début, c'est ça ?

A3: au début, n'y a rien à toucher. Là où ça commence, c'est à partir de la ligne 4. Ça marche par additivité...il faut que l'intersection soit disjointe.

A2: En fait, c'est $\mu(\phi)$?

A3: ouais c'est ça.

A2: Tu écris ?

A3: déjà, le début, je peux le garder.

Et là (voir doc), c'est avec l'axiome d'additivité.

A1 : en fait, je ne vois pas encore...

(...)

A3: (-21 :20) En fait, on doit juste réécrire la preuve mais en justifiant chaque affirmation

A1: moi, je n'ai rien compris en fait de base. Il faut un niveau plus élevé de rigueur.

A2: Théorème d'encadrement. Vous connaissez le théorème d'encadrement ?

Ce n'est pas le théorème des gendarmes ? On avait vu le théorème des sandwiches en topo ?

A1: en fait, je ne vois pas ce qu'on peut faire de plus rigoureux.

A3: En fait, c'est surtout que eux ils disent : $\phi(x_0+h) - \phi(x_0)$ c'est l'aire sous la courbe, je suppose qu'il faut l'expliquer avec l'additivité de la mesure.

A1 : entre les lignes il suffit juste de rajouter l'intégrale ?

A2: mais pourquoi tu veux parler d'intégrale ?

A1: parce que $\phi(x)$ est définie comme ça !

A2: c'est juste une aire, on n'a pas intégré, on n'a pas de théorie de l'intégration

A1 : je ne veux pas intégrer, juste réécrire. Juste on développe.

A2: on refait le TFa, on est d'accord ? Je viens de capter.

A1 : mais il y a écrit avec un peu plus de rigueur !

A3: en soit, le théorème il est bon.

A2: Je suis perplexe.

A1 : c'est pas Riemann ? Avec des subdivisions, ...

A2: c'est que du Riemann, tu as raison. En fait, je vois pas ce qui manque de rigueur.

A3: on écrit exactement pareil. Franchement c'est bien. Ca fini à 15 ou à 30 ? On a fini là non ?

A1 : euh...

A2: moi, ce qui m'embête, c'est la limite.

A1: qu'est-ce que nous dit que x_0 n'est pas l'infini.

A2: x_0 est un point.

A1 : je suis sur qu'il faut faire la valeur absolue, majorer. Dans ma tête, je l'ai apprise comme ça. On faisait le taux d'accroissement, et on majore par quelque chose de fini.

A1: ici, on n'a pas l'assurance que tout reste positif.

A2: ah oui...

P : je vais vous interrompre...

A2 : on va dire que c'est dur.

Salle du deuxième groupe

B3 : il nous laisse 30min par question.

B1 : là, j'essaie de comprendre la question 1, je n'ai pas vraiment compris pour être honnête.

B2 : il faut montrer que la mesure d'un point c'est 0. Je réfléchis à comment faire ça.

B1 : j'ai une idée : peut-être qu'on peut prendre 2 sous-ensembles A et B, par exemple 2 carrés, qui s'intersectent, et on essaie de faire comme une suite de sorte à diminuer cette intersection et obtenir un point. Avec l'additivité, montrer que ça va être 0.

Qu'est-ce que vous en pensez ?

B3 : je sais pas du tout comment faire, je ne suis pas vraiment doué en analyse. Je trouve ça très compliqué comme question.

P : n'hésitez pas à écrire les questions que vous vous posez...

B2 : oui, en théorie de la mesure.

B3: oui, en licence, j'ai eu une UE de théorie de la mesure.

P : ok. Est-ce que vous avez des exemples de mesure diffuse, et d'autre qui ne le sont pas.

B1 : pour moi, ça me fait penser aux probabilités. Par exemple, si on prend un proba continue, la mesure d'un point est 0.

B2 : la mesure de Lebesgue est diffuse

P : et des mesures pas diffuse ?

B1 : pour une loi de proba discrète, ce n'est pas diffuse.

P : bon, pour la mesure de Lebesgue, est-ce que vous vous rappelez comment le démontrer ?

B1 : Je ne sais pas si tout le monde voit le petit dessin que je fais (doc partagé)

B3 : On doit montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ?

B1 : non, pas vraiment. C'est pour la mesure μ qui est la mesure d'aire. Ce n'est pas la mesure de Lebesgue.

On peut prendre 2 carrés unité semi-ouvert car on connaît la mesure. Ce que je veux faire, c'est montrer que l'intersection c'est juste un point... attendez.

B3 : Mais le truc, c'est que je vois pas en quoi ça va nous aider. Même si on sait que l'intersection est un point, ça pourquoi ça va nous aider même si on a que l'intersection c'est un point comment tu veux montrer qu'après elle est de mesure nulle parce qu'on a rien. On a juste les 3 propriétés qu'il a donné on peut on peut rien faire...on sait juste que la mesure d'un carré de un ou on sait que c'est ça par isométrie, on sait que si l'intersection est nulle alors il y a l'additivité mais pour l'intersection qui a un point on sait rien donc je vois pas du tout ou quoi ça peut nous aider

B1 : En fait ce que je veux dire c'est que on a 2 carrés qui interceptent comme j'ai montré sur l'image et on veut mesurer l'intersection de 2 carrés donc on peut prendre $B \cap C$ et on sait que on donc on a 3 carrés. Je vais prendre 2 min pour formaliser mon idée qui est très floue.

B3 : j'ai compris ton idée, mais je ne vois pas en quoi ça peut aboutir.

B1 : regarde, on peut prendre 3 sous-ensembles disjoints. On peut utiliser l'additivité. (- 2 :26)

Ce que je veux dire, c'est que $\mu(B \cup \dots)$

B4 : peut-on vraiment prendre l'intersection de 2 carrés ?

B1 : Mais pourquoi on ne peut pas prendre l'intersection de carrés ?

B4 : car ils sont semi-ouverts, ils n'ont pas de bord droit et haut.

B1 : on peut prendre un carré semi ouvert, et prendre une symétrie centrale.

B4 : en fait, on n'a rien vu dessus. On a pas fait de théorie de Lebesgue et de mesure

B1 : D'abord on prend un carré, C , comme dans la définition. Puis, on prend une symétrie centrale par rapport à $(0,0)$. Le point va être inclus.

B3 : personnellement je ne vois pas ou tu veux en venir ni comment tu pourras calculer la mesure de l'intersection de deux éléments. Mais si tu penses y arriver essaye et tu nous dis si tu arrives à quelque chose

B1 : je vais essayer de dire mieux.

P : Sur la question de l'invariance par isométrie, cela vous permet de dire quoi ? Par exemple, si je prends 2 points, du plan, que peut-on dire ?

B1 : l'intersection est vide. Donc la mesure de l'union est la somme des mesures.

B3 : ils ont la même mesure.

P : oui, pourquoi ?

B1 : car l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

P : oui. Donc si vous savez que la mesure d'un point est 0, tous les points sont de mesure nulle.

P : bon, et si vous supposez que la mesure de O est de mesure non nulle.

B1 : Si on prend n points distincts, la mesure de l'union est n fois la mesure d'un point.

B1 : donc la mesure d'un point est la mesure de l'ensemble sur n .

P : je vous laisse terminer (-2:05)

(...)

%%%%%%%%%

-1 :22

B1 : je n'ai pas compris que quand on prend un carré unité, on découpe, et ça fait $1/n^2$. Je suis bloqué sur la démonstration. J'imagine que si on a rectangle de côté, 2, 3, on prend des petits carrés, et on va la somme non ?

B3: oui, mais ça marche pour des nombres entiers, je ne suis pas sûr que ça marche avec des nombres à virgule. Si la longueur est 3,7 et la largeur 6,9, je ne suis pas sûr qu'on puisse faire rentrer des petits carrés dedans.

B1 : mais quand on a vu la démonstration de 1 point, on a pris des carrés de mesure $1/n^2$, donc c'est plus petit que 1.

B3: ??

B1 : Si on a un rectangle de côté 0,5 et 1, on peut prendre 2 carrés de côté 0,5.

B3: oui, ça va ça que tu as dit.

B1 : et donc la mesure d'un rectangle, c'est encore la somme des petits carrés.

B1 : mais les nombres sont que rationnels ? Et s'ils ne le sont pas ? Je suis d'accord avec toi que c'est plus difficile, il faudra une infinité de petits carrés non ?

(-1 :15)

B1 : par exemple pour un rectangle de côté 1, $\text{Sqrt}(2)$?

P : je vois que vous avez fait le cas où le rectangle a des côtés entiers.

B3: en fait on a fait avec des côtés rationnels.

P : Mais comment vous faites pour reconstituer un rectangle avec des petits carrés ?

B3: avec un rectangle de côté l et L , on prend des carrés de côté $1/l$ et $1/L$

P : mais ça, ça marche avec des entiers. Ca marche aussi avec des rationnels ?

B3: ah non, effectivement, ça marche qu'avec les entiers.

B1 : Je n'ai pas trop compris. Si on prend 1 et $\frac{1}{2}$, ça marche. Et on peut faire toujours comme ça.

P : oui, mais si on a un rectangle de côté $\frac{7}{3}$ et $\frac{10}{7}$?

B1 : d'abord, on prend 2 carrés de côté 1, il nous reste $\frac{1}{3}$.

Il faut voir combien de carré de côté 1 on peut coller, et on voit ce qui reste.

P : oui, il faut l'écrire.

B1 : mais ça ne marche pas pour les irrationnels.

B3: je suis pas sûr que j'ai compris jusqu'à la fin, j'ai essayé... regarde si c'est par exemple 0,5 donc on prend le carré de mesure $0,5 \times 0,5$. Donc on peut prendre les carrés plus petits que de côté 1 non ?

B1: bah oui c'est pas ça le problème. Regarde ma démonstration, mes carrés ne sont pas de côté 1...ils sont de côté $\frac{1}{\text{longueur} \times \text{largeur}}$ donc le côté du carré c'est pas un nombre entier le problème c'est pas ça.

En gros remplir ton rectangle il te faut un nombre entier de carré ! Tu ne vas pas prendre 3 carrés et demi pour remplir ton rectangle dans ton exemple. Et c'est pour ça que j'ai fait ça. Ça marche que si la longueur et la largeur sont des entiers. Sinon à la fin en gros ça ça me dira pour combler le rectangle, il me faut 3 et demi carrés. Il prendre la moitié du carré, on ne peut pas. Enfin on pourrait mais on connaît pas la mesure de la moitié du carré. Du coup ça ne marche pas.

B3 : OK, on doit prendre les carrés de différentes tailles en fait non ? D'abord on peut remplir les grands carrés, après on doit soustraire. Si c'est en rectangle de côté 1 et $\frac{1}{2}$ d'abord on prend le carré de côté un et après 0,5 donc on doit soustraire et prendre le carré plus petit non ?

B1 : Je sais pas du tout en fait je ne sais pas moi j'ai fait un truc pour tes entiers donc comme j'ai fait ça fonctionne. Mais après si ce n'est pas des entiers je sais pas du tout comment on peut faire ! On peut essayer de prendre des carrés de différentes tailles comme tu dis et je sais pas si on arrivera si on arrivera à un nombre entier de carré.

Je ne sais pas si un rectangle peut forcément être rempli par des carrés...peut être que forcément, à un moment faudrait quelque chose qui n'est pas carré.

Enfin peut être que ça ne marche pas je ne sais pas si tout n'importe quel rectangle on peut le combler avec un carré.

B3: oui je comprends ce que tu dis je pense qu'on peut le faire. J'imagine qu'on peut le faire avec les rationnels aller jusqu'à un moment quand ça se fini.

Mais par contre avec les irrationnels comme ça ce n'est pas fini je pense peut être qu'on va arriver.

B1: Ben personnellement pour les rationnels, je vois pas.

Je ne sais pas si vous avez une idée, moi j'ai fait la démonstration là pour si c'est des entiers sur le document partagé. Si tu as des idées pour le rationnel fait de même mais moi je ne vois pas

1h45

(...)

1h47

B3 : en fait je n'arrive pas à écrire. Je pense que j'ai compris ton idée Marie. Si on prend un rectangle, on prend le plus petit côté, et on regarde combien de carré on peut faire rentrer. Il reste un rectangle. Et on continue, on prend le petit côté.

B1: Mais qui te dit que tu peux faire ça indéfiniment ? il y a là toujours avec un rectangle ! Mais du coup tu prendras des petits carrés, et il restera un petit rectangle. Comment tu es sûr que à la fin tu vas réussir à combler ton rectangle avec que des carrés ? Comment tu peux savoir qu'à la toute fin il te resteras pas un petit rectangle que tu pourras pas combler ? Ou alors c'est infini à la fin tu vas te retrouver avec des carrés qui font, je ne sais pas 0,00000000001 de côté. Mais à chaque fois, tu vas réduire tes carrés, mais à la fin, tes carrés sont infimes, peut-être que tu vas te retrouver avec un petit rectangle que tu ne pourras pas remplir.

B3: Oui, je comprends.

B1 : Oui, Lucile a raison, on fait que déplacer le problème.

B3: D'accord.

1:49.

P: on se retrouve dans la salle mise en commun.

2:14 (reprise)

(Lecture de la consigne)

B3: Il faut exprimer l'aire à l'aide de cette mesure ? Donc à la place de f , il faut écrire une mesure c'est ça ? Après...

B2: ce n'est pas à la place de f mais à la place de ϕ

B3: oui, pardon, je voulais dire ϕ

B3: On avance pas trop.

P: Comment vous pourriez réécrire la preuve à l'aide de la mesure μ que l'on a vu tout à l'heure?

Vous comprenez bien la preuve ?

Tous: oui. La mesure d'aire pas trop.

P: Oui, mais la preuve s'appuie sur la mesure d'aire. C'est ça qu'il faudrait identifier.

Avez-vous identifié ce qui fait appel à la notion intuitive d'aire ? Ou est-ce qu'on utilise la notion d'aire dans la preuve ? Vous n'identifiez pas ou la notion d'aire est mobilisée ?

Sisi : La quantité $\phi(x_0+h)-\phi(x_0)$

P: D'accord. La quantité $\phi(x_0+h)-\phi(x_0)$. Ca correspond à quoi ?

2:26

Alors, ce n'est pas vraiment un rectangle.

B3: c'est l'aire sous la courbe entre x_0 et x_0+h .

P: OK.

Est-ce qu'on pourrait reformuler avec la mesure μ ? Est-ce qu'on peut mobiliser les axiomes ?

2:27

Plus d'échange audio

Transcription du Troisième groupe

C4 : moi, je pense qu'il faut prendre le carré unité, parce qu'on connaît que ça, et ensuite on prend un point à l'extérieur, et l'union des 2. Vous validez ?

C2 : je vous avoue que l'analyse, ce n'est pas mon fort. Mais il va falloir qu'on s'appuie sur la définition qui est au-dessus.

C4 : est-ce que vous voyez ce que j'ai écrit ?

1. On pose A un point quelconque
B un carré unité
 $u(B \cup A) = u(B) + u(A) = 1 + u(A)$
(ici on veut prouver que $u(A) = 0$.)

$$u(B \cup A) - u(A) = 1$$

(idée on translate par translation le point A
dans le carré unité afin que b inter A est le carré unité.)

$$u(B \cup A) = u(B) = 1$$
$$\text{Ainsi } 1 - u(A) = 1 \text{ donc } u(A) = 0$$

En gros, il faut montrer que la mesure d'un point est 0.

C3 : Et comment tu sais que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

C4 : bin c'est marqué sur le document (n'a pas vu l'intersection)

C2 : je suis en train de voir comment construire mon carré, parce que comme on a les isométries...

C4 : déjà, le point, je pense qu'il faut le prendre hors du carré. Et après, avec une isométrie, on le ramène dans le carré.

C4 : mais si on translate un point, faut tout traduire non ?

C3 : moi, je vais prendre un peu de temps, parce que je ne comprends rien.

C2 : je pense que j'ai trouvé. On a $\mu(A) = \mu(s(A))$.

C3 : mais c'est toi qui décides à quoi s'applique ta translation (réponse à Mo).

C1 (22') : Je vais partir sur autre chose, mais c'est compliqué. En gros, je voulais regarder, comme A c'est une partie, je vais regarder le cardinal du carré par rapport à A . On faisait pareil en L3, tu ne te rappelles pas ?

C3 : mais comment le cardinal, ça peut te montrer ?

C1 : si t'avais une partie avec un certain cardinal, et si tu as une partie d'un cardinal plus petite, tu pouvais considérer qu'elle était incluse dans la partie précédente, et du coup tu pouvais faire la somme des cardinaux, et tu arrivais à une contradiction.... On avait fait comme ça avec Lebesgue.

Est-ce que vous vous rappelez comment on faisait pour montrer que la mesure de Lebesgue est diffuse ?

C4 : aucune idée. Mais C2 tu as fait le 2ème cas ? Si A est dans C ? Parce que ça ne va pas te donner d'information sur la mesure de A. Tu auras $\mu(A \cup C) = \mu(C)$ et tu peux pas faire sortir ton $\mu(A)$...

C3 : ça me paraît tellement flou tout ça...mais ça marche plus là, son truc... On peut l'écrire que si A et B sont distinct, et elle vient de le projeter dans le carré.

Je ne vois pas comment tu peux faire les 2 cas.

C1: justement, le cas hors carré, il faut l'écrire comme une union disjointe.

C3 : bah ça l'est pas

C1: mais il faut ! Comme en proba ! Tu peux l'écrire comme une union disjointe. Tu peux dire que c'est...

Ma : tu veux que je l'écrive ça ?

C1: oui, si tu veux.

C4 : c'est quoi que tu n'as pas compris ?

C3: la preuve en rouge

C4 : oui, moi je n'ai pas distingué les cas. C'est C2 qui en a parlé.

C3 : je vais voir ce qu'elle a fait.

C4 : en fait elle a fait une symétrie.

C1: le truc c'est que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, mais il faut que $A \cap B$ soit vide.

C2 : pour l'instant, j'en suis juste au cas où l'intersection est vide !

C1 : faudrait écrire avec une intersection disjointe.

C4 : ton μ de l'union, c'est que $\mu(C)$ vu que tu as fait translater ton A dans le carré

C2 : je suis en train de regarder autre chose, ça ne peut pas nous aider ?

C2 : mais en fait, ce qu'on fait, ça ne peut pas marcher, car l'intersection n'est pas vide.

C4 : en vrai je pense qu'on y est presque, mais je vois pas du tout.

Mais non je sais, $\mu(A \cup C)$ c'est forcément $\mu(C)$. C'est sûr ! C'est de la proba. Si le point appartient au carré... on n'utilise aucune propriété là.

C2: mais non, tu peux pas le dire.

C1: non, elle ne veut pas dire que c'est l'union des 2. Comme $s(A)$ est inclus dans C, $\mu(C \cup s(A))$ c'est $\mu(C)$

C1: moi j'ai une question. Le point A, quand vous le mettez sur le carré, vous le mettez sur un segment ou dans le carré ?

C4 : j'ai capté le problème... on a le droit de faire ça, mais ça ne nous aide pas en fait.

Juste avec les 3 axiomes, on doit montrer ça...

C3 : Tu vas voir, il va faire la correction, ça va prendre 2 lignes et ça va être trop simple.

C2: le prof il va péter un plomb quand il va voir ce qu'on a...je crois qu'il faut retourner dans l'autre salle.

(reprise à 1:18:25)

C3 : Est-ce que vous avez lu la consigne de la question 2? A un moment, il est écrit "indication...", je ne sais même pas ce que c'est...

C2: bah si c'est un entier, réels, complexe...Un truc du style. Le domaine, c'est est-ce qu'on s'arrête aux entiers.

C3: on va commencer simple, pour essayer de faire un truc.

C4: Moi je pense que dans un rectangle de longueur L et de largeur l , on peut faire rentrer $l \times L$ carrés unité. Et c'est pour ça que l'aire c'est $l \times L$. En fait on compte le nombre de carré unité qu'on peut faire rentrer dans le rectangle.

C3: ah oui, tu as raison, il faut faire un truc comme ça. Après, je pense qu'il faut utiliser le truc qu'on a montré, que la mesure est diffuse. Parce que son histoire comme quoi la mesure du segment est 0, ça doit servir. Sinon, il ne l'aurait pas dit juste avant.

C1: moi je pensais à découper, et à faire un quadrillage. Et comme on connaît la mesure de chaque quadrillage, on aura la mesure du rectangle.

C3 : c'est pour ça qu'il faut considérer les différents ensembles de nombres ! Si on prend des entiers on peut mettre des entiers dedans, mais si c'est des décimaux, il faudra les découper, ça va être pénible.

Déjà, si on prend un rectangle...

C4 : je pense que la longueur des segments ça va intervenir, car on parle des carrés semi-ouverts.

C1: pour que le truc des quadrillages marche, il faudrait que les figures soient équidécomposables, dans \mathbb{C} .

C3 : le plus chiant c'est le cas des réels. Mais ça me fait trop penser à quelque chose qu'on a déjà fait... ! Commencer par les entiers, ensuite du passe à autre chose, on a déjà fait ça ! finir par les réels

Voilà, on fait avec des carrés unités (voir document). Mais attend, il n'y a pas une étape avec de passer aux réels.

C1 : Tu peux faire avec des rationnels.

Regarde, si ce sont des rationnels, tu peux fonctionner de la même manière. Si des longueurs sont p/q et r/s , tu peux découper en carrés de longueur 1 sur...

C3 : mais tu vas essayer de rentrer le plus de carré unité... je vois ce que tu veux dire, il faut prendre la partie entière non ?

C1: mais non, regarde, Si des longueurs sont p/q et r/s , tu peux découper en carrés de longueur 1 sur qs .

C3 : mais $1/qs$ c'est un entier ?

C1: Non, c'est un rationnel

C3 : Mais moi je veux savoir combien de carré unitaire je peux mettre au max, puis combien je peux rajouter de carré découpé.

C2 : Que tu prennes 1 carré et un demi, c'est pareil que prendre 1,5 carré ...

C3: mais ce qu'il faut montrer, c'est que la mesure d'un carré de côté 0,5, c'est $0,5 \times 0,5 \dots$

C1: si tu découpe en carré de côté q (montre sur le dessin), tu pourras en rentrer en nombre fini (1.33.30)

Ma: mais combien on en rentre des carrés.

K: mais on s'en fout !! Si la longueur de chaque petit côté est $1/qs$, la mesure du rectangle sera $p/q \times r/z$.

C3 : j'ai compris qu'on pouvait découper en carré de mesure $1/qs$. Mais c'est quoi la mesure d'un tel carré ? Et faut savoir combien il y en a.

C1 : oui...

C3: si on arrive à trouver, ça, c'est fini. Je vais l'écrire.

C1: mais regarde, si on a un carré de côté $1/n$, son aire c'est $1/n^2$. On l'a vu tout à l'heure !

C3: j'ai encore un problème... la mesure de du carré de côté $1/qs$ c'est $1/1/qs$. On est en train de s'embrouiller...

C1: bah oui, si on prend un carré de côté $1/qs$, la mesure mu sera $1/(qs)^2$ mu(C_1).

C3 : bon, je vais écrire.

C4 : problème, il n'y a pas la multiplication dans les axiomes. Il manque des justifications.

C3: non, mais c'est bon, il n'y a pas de produit ! Regarde avec les entiers. (voir document partagé).

En fait, c'est le $\mu(C_1)=1$, c'est là le problème.(1:50:000).

Retour à 2:19:00

C4 : je ne sais pas comment on écrit l'aire sous la courbe avec le mu.

C3: oui, c'est ça le plus dur, c'est de se ramener à du mu.

C4: oui, avec mu, on n'a que des lignes droites, pas des courbes.

C3 : le truc du milieu aussi, il faut le faire avec des mu ?

C4 : c'est une intégrale. Sous forme d'intégrale on peut le mettre, mais sous forme de mu...

C3: ce qu'on a vu au début, ça ne nous aide aps... les 3 axiomes...

On a qu'a noter l'aire sous la courbe et on note $\mu(A)$.

C4 : mais du coup, c'est plus l'aire ! Sinon, tu as 2 fois l'aire.

C3 : ah oui. On note A le sous-espace qui est compris entre 0 et x_0 plus h et qui est sous la courbe et au-dessus de la courbe des de la droite des abscisses c'est un peu long mais je ne sais pas comment on pouvait faire sinon.

C1 : moi je dis qu'on note A comme ça. (Ils écrivent) (2:23:22)

C1: il faut dire qu'on gros tu peux encadrer par 2 rectangles de même largeur...

C3: mais on va pas tout réécrire...

C4 : moi je pense qu'il faut expliciter ça (?), avec mu.

C3 : ça c'est la question 2, avec l'aire des rectangles.

C3 : pourquoi il y a les inférieurs ou égale. Pourquoi il y les signes. Par ce que oui, l'aire d'un rectangle, on sait le calculer, mais on n'a pas...

C1: est-ce que ça suffit que les rectangles sont plus petits et du coup l'aire est plus petite ?

C3 : mais c'est parce que mu elle est croissante !!

C1: voilà et que du coup, comme les rectangles sont plus petit, on a ça.

C3: il faut dire qu'ils sont inclus. R inclus dans R' donc voilà, et par rapport à A

C1: et que A il est inclus dans...(2:25:00) écrivent dans le doc...

3ème question – 2:19:40

C4 : Je ne sais pas comment on écrit l'aire sous la courbe avec la notation mu...

C3: Moi non plus. En fait, je pense que c'est ça le plus dur, se ramener à du mu.

Mo : parce qu'on a que des lignes droites avec le mu.

C3 : les aires du rectangle, tu les mets en mu, et l'aire du milieu, on laisse en phi. Non, le truc du milieu aussi, il faut le mettre en mu ?

C4 : je pense...

C1: bah oui, c'est la mesure du truc que tu cherches, donc il faut le mettre avec mu.

C3: C'est une intégrale en fait. Sous forme d'intégrale on peut le mettre, mais sous forme de mu...

C4 : je ne sais pas. Dans les axiomes du début, ça ne nous aide pas. Sinon, on n'a qu'à noter A l'aire, et du coup c'est $\mu(A)$.

C3: mais du coup, c'est plus l'aire, parce que $\mu(A)$, tu as 2 fois l'aire...

: oui tu as raison. On note A le sous-espace, la partie, comprise entre x_0 et x_0+h , sous la courbe et au-dessus de la droite des abscisses. C'est un peu long, mais je ne sais pas comment on peut faire sinon. On lui donne un nom et voilà.

C1: oui, tu notes A la partie comprise entre x_0 et x_0+h , sous la courbe et au-dessus de la droite des abscisses.

C3: après, il faut diviser par h

C1: oui, il fallait dire que tu peux encadrer la partie par 2 rectangles de même largeur h.

C3 : mais faut pas tout écrire...enfin je pense. C'est juste qu'il faut utiliser mu. Je pense.

C4 : moi je pense qu'il faut expliquer pourquoi on peut mettre ça avec mu (??)

C1: ah oui.

C3 : ça c'est ce qu'on a vu juste avant, dans la question 2. L'aire des rectangles.

C1: oui, mais...ce qu'elle veut dire, c'est pourquoi on peut écrire ça.

C4 : oui, pourquoi il y a les plus petits ou égal ? Parce que oui, l'aire d'un rectangle on sait le calculer, mais on n'a pas...

C1: est-ce que ça suffit de justifier que les rectangles sont plus petit, et du coup l'aire est plus petite.

C4: mais ça ça vient après...

C1: de quoi ?

C4: ah mais non, c'est parce que mu elle est croissante !

C1: voilà

C4 : il faut dire qu'ils sont inclus...

C1: oui, R inclus dans A et A est inclus dans R'.

Transcription pour le quatrième groupe

D1: on ne peut s'appuyer que sur les axiomes...

D1 : peut-on dire qu'un point est l'intersection... on peut dire que l'image d'un point par une isométrie est un point. Donc déjà, c'est plutôt bien, on sait que l'aire sera nulle dans les 2 cas.

D2 : je n'ai pas trop d'idée

D1 : un point, on ne sait pas trop décomposer

D1 : on peut dire qu'un point est le centre d'une boule ouverte, et comme Lebesgue, c'est pour les carrés, on prendrait des carrés, c'est-à-dire par des boules au sens rond...

D2: après on a le carré unité

D1 : Toute boule ouverte, on peut la décomposer comme étant l'union de plein de carré unité. On considère une boule quelconque, mais carré.

D1: on peut trouver l'aire d'une boule carré grâce à la mesure de Lebesgue ?

D1: concrètement, on ne peut connaître que l'aire des polygones... et encore je ne sais pas comment on peut les calculer.

D2: tu dois pouvoir décomposer en carré.

D1: ce n'est pas comme Riemann et Lebesgue : pour Riemann tu décomposes en rectangle, et pour Lebesgue en carré ? C'est un peu l'idée non ?

D2 : oui je sais plus trop comme il faisait

D1 : je ne sais pas comment ont fait les autres groupes...

D2 : après, si on fait la rotation ?

D1 : oui, le truc des isométries, il faudrait en faire un truc. Attendez, je regarde les axiomes.

P: comment vous pouvez exploiter cette question des isométries?

D1: on est complètement en galère, parce que personne n'a pas fait la théorie de la mesure (NB: ce qui est faux...).

P : mais a-t-on la mesure de Lebesgue ici ?

D1 : ah non !

D1 : mais il ne faut pas utiliser les axiomes ? Je croyais que c'était la mesure de Lebesgue.

P: Qu'est-ce que je peux dire si je prends 2 points du plan ?

D1: C'est la même mesure non ?

D1: je vois pas ce qu'on peut en faire.

Retour à 54:00

D1: je ne sais pas si le prof a rajouté des choses...

Non, il n'a rien rajouté

D1: ok, parce qu'on peut partir sur la décomposition du rectangle en petit carré.

D2: En indication, ils disent de discuter en fonction du domaine des nombres, on peut déjà discuter si ce sont des entiers.

D1: Oui, c'est vrai, parce que si c'est des entiers, c'est facile. Parce qu'on peut décomposer à l'aide petit carrés unité.

D2: voilà, on va retrouver longueur+largeur

D1: malgré tout, deux petits carrés côte à côte, il va rester l'intersection commune, c'est le côté du carré.

D2: oui, mais vu qu'on admet que la mesure du segment est nulle...

D1: ah mais, oui, bien vu. T'es intelligente... c'est là que je me rends compte que l'ordre ça compte... Oui, donc du coup, ça ne change rien. Donc il suffit de compter les carrés. Si ce sont des entiers, ça va.

D1: bon, et si c'est des réels... On peut décomposer le sous rectangle avec entier, mais il va rester une infime partie...

D2 : attend répète ?

D1: Sinon a un rectangle dont les longueurs des côtés sont réels, bah on peut prendre la partie entière de chaque côté, on va obtenir un sous-rectangle, qu'on va décomposer en sous carré, et il va rester un bandeau.

D2: Quand il a fait la démonstration de la question 1, tu l'as vu ?

D1: Non, j'ai été déconnectée.

D2: Dans les trucs qu'il a fait, il a utilisé le fait que l'aire d'un carré de côté n , c'est n^2 ... et si on prend n un réel, c'est bon.

D1: si ta longueur elle fait 23,74 cm, et le carré unité est 1cm^2 . Tu auras 23 carrés entiers, et il reste 74mm, et ça sera sur tout la largeur du rectangle...Comment faire ?

J'allais dire, l'homothétie c'est une isométrie, mais non. Les agrandissements et réductions, c'est des isométries non ?

D2: bah non, ça conserve par les distance.

D1: Ca conserve pas, mais on connaît les rapports. Si on agrandi notre figure de sorte à arriver à des longueurs entières ?

D2: mais est-ce qu'on peut toujours le faire?

D1: c'est ce que je me demande

D2: Ca supposerai que les longueurs et largeurs ont des multiples commun ?

D1: Pas forcément. Si on reprend 23,74, tu sais qu'en multipliant par 100, tu as un entier.

D2 : Mais si en largeur tu as 12,218, en multipliant par 100, tu n'as pas un entier.

D1: Oui, mais du coup, il faut choisir entre longueur et largeur, celui qu'il faut multiplier par le plus grand nombre pour avoir un entier.

D2: ça c'est pour les décimaux...

D1: Oui, voilà, c'est ça. Donc ça marche pour les décimaux. Mais bon, petit à petit...

D2: oui. De toute façon, faut séparer.

D1: c'est sur que si la longueur est un irrationnel, par exemple racine de 2... j'avoue que je ne sais pas.

D2 : déjà, pour les décimaux, ça doit aller. Après, ça voudrait dire diviser par...

D1: si on multiplie par k les longueurs, l'aire est multipliée par k^2 .

D2 : mais ça il faut le démontrer.

D1: je sais pas du tout, mais ça peut être une piste.

(Écriture dans le fichier partagé)

D1: j'étais en train de réfléchir avec d'autres types de nombres...

D2: après il y a les irrationnels.

D1: pour les rationnels, si on a p/q ... Ah bah si si. Enfin, je ne sais pas, je suis perdue.

D1: il faudrait voir si on a 2 irrationnels. Est-ce qu'on peut se ramener à une décomposition ? Le truc, c'est que les irrationnels, par définition...

D2: après, si on fait avec les rationnels, on peut utiliser la limite?

D1: Oui, c'est pas bête. Mais la limite de la longueur ? Ou de l'aire directement ?

D2 : Si on prend un irrationnel, il y aura toujours une suite de rationnel qui va converger.

D1: oui

D2: Du coup, si on prend quelque chose avec des longueurs qui sont une suite de rationnels, il vont converger vers l'irrationnel qui nous intéresse.

D1 : oui, faudrait le formaliser.

D2 : déjà, faudrait faire avec les rationnels.

D1: oui. On peut dire que l'idée est la même, un rationnel, on peut l'écrire p/q , donc on va pouvoir trouver un entier par lequel le multiplier pour avoir un entier.

1:17:37 :

D1: après, la question de la limite de l'aire, Est-ce que ce sera exactement l'aire au finale. En fait, non, parce que c'est une limite.

D2: en fait, j'ai pensé à la limite parce que tout à l'heure, quand il a montré pour le point, il a utilisé les intersections de carré, lorsqu'à l'infini, ça tend vers le point. Du coup, sur les aires, il a fait les limites des intersections...

D1 : Ça gêne. En fait, c'est que vu que vous avez dit qu'il fallait qu'on utilise la notion de mesure... Ben on s'est dit que on allait quand même partir sur l'encadrement de l'aire sous la courbe avec les 2 rectangles.

Et du coup les rectangles on pourra exprimer leur aire avec la notion de mesure. Sauf que l'intégrale si on la voit comme étant l'aire sous la courbe, on ne peut pas dériver.

Le début, on peut le garder (f croissante, f continue).

Là ou il va y avoir un truc à changer, c'est quand on a $\phi(x_0+h) - \phi(x_0)$.

D2 : cette question me perd...

Donc il faut que tout soit justifié par nos axiomes et les propriétés.

Oui...

D2 : Donc déjà quand il parle de l'aire des rectangles...

D1 : Moi, cette partie me perd complètement. J'ai bien compris qu'il fallait intégrer les notions plus avancées, de mesure, et pas seulement de parler d'aire sous la courbe. Mais bon...

S : Parce que je pense qu'on peut encadrer avec les mesures d'aires : on se retrouverait avec $f(x_0) \leq \text{mesure d'aire du grand rectangles} - \text{aire du petit} \leq f(x_0+h)$. Mais je ne pense pas que c'est ce qu'il attend.

D2 : du coup, on écrit ce qui nous gêne ?

D1 : bin oui, on peut mettre ce qui nous pose problème...

D2 : le truc c'est qu'on n'arrive pas à intégrer les justifications qui vont avec.

D1: en fait, c'est faire le lien entre l'intégrale du lycée, et la théorie de la mesure. Mais je...

D1 : Est-ce qu'en calculant une intégrale, on calcule en réalité la mesure d'aire sous la courbe ? Tout à l'heure, on a décomposé avec des carrés, mais avec l'intégrale, on fait pas du tout ça.

D2 : bin à la base, si un peu.

D1 : oui, à la base oui. Mais on n'explique pas comme ça aux élèves... Enfin moi j'ai jamais eu un prof qui m'a expliqué ça comme ça quoi. On cherche juste une primitive et on te dit parce que justement, grâce à ce théorème-là tu as tout ça. On dit qu'il faut trouver une primitive quoi.

D2 : Mais on ne t'a jamais parlé d'aire sous la courbe ?

D1 : Bah si enfin on m'a expliqué. De façon usuelle, on te dit enfin, en pratique, on cherche directement la primitive pour calculer l'aire sous la courbe.

D2: Mais à la base avec les fonctions positives que c'est défini et que comme là on est sur le positive donc, techniquement, on peut s'en sortir avec juste ça sans passer par les primitives

D1 : Oui, oui, oui, je. Il me semblait que on faisait... en gros on mesurait l'aire du rectangle inférieur, puisque ça on peut la faire facilement. Et après, pour le petit bout qui manquait, on prenait un carré unité qui était plus petit et on essaie de combler comme ça je crois.

D2 : ouais

D2 : Il faut justifier chaque phrase avec la mesure... bon bin l'aire du rectangle. Pourquoi on peut encadrer, bin c'est la croissance, ce genre de chose. Je ne suis pas sur que ce soit ça...

P : Ou vous en êtes ?

D1 : On a quand même beaucoup de mal à intégrer ce que l'on a vu aujourd'hui.

P : Déjà, la première chose, c'est se demander où intervient la notion d'aire.

D1 : Quand ils font $\phi(x_0+h) - \phi(x_0)$. On s'est dit que ça correspondait à l'aire d'un rectangle...

Fin.

G.2 Documents partagés

Chaque groupe avait à sa disposition un document partagé en ligne. Ces annexes contiennent ces documents.

Document partagé du groupe 1

Ecrivez vos nom/prénom avec les couleurs

Séance 1 du lundi 19 avril 2021

Hassna

Baptiste

Armand

Jouweyrya

- Chaque personne du groupe choisit une couleur et l'utilise là quand vous écrivez du texte.
- Si possible, n'effacez rien
- Pour des formules mathématiques, allez dans *Insertion-Equation*

On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \mu(x) = 0$

Soit C le carrée unité semi ouvert

1)

ou que $\mu(C)$ sur $[0,1[\times [0,1[$

on a $[0,1[\times [0,1[$ et $\{1,1\}$ a une intersection vide.

donc $\mu([0,1[\times [0,1[\cup \{1,1\}) = \mu([0,1[\times [0,1[) + \mu(\{1,1\})$

on suppose que $\mu(\{1,1\}) > 0$.

donc $\mu([0,1[\times [0,1[\cup \{1,1\}) > 1$

Soit S la translation de vecteur directeur $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\mu([0,1[\times [0,1[) + \mu(s\{1,1\}) = \mu([0,1[\times [0,1[) + \mu(\{1,1\}) > 1$

Cependant $\mu(s\{1,1\}) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ et $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ appartient à $[0,1[\times [0,1[$ donc

$\mu([0,1[\times [0,1[\cup s(\{1,1\})) = 1$

on a alors une contradiction

donc forcément $\mu(\{1,1\}) = 0$ et la mesure est diffuse.

Soit $\varepsilon > 0$

$\mu(\{1,1\}) = \varepsilon$ donc $\mu(\{1,1\}) + \mu(\{3/2, 3/2\}) = 2\varepsilon$ car $\mu(s(\{3/2, 3/2\})) = \mu(\{3/2, 3/2\}) = \mu(\{1,1\})$

Donc $\mu(\{3/2, 3/2\}) = \varepsilon$ par ce raisonnement tous les points ont une mesure ε

OR notre figure C a un nombre infini de point ON pose $n \in \mathbb{N}$ tel que le n soit plus grand que $1/\varepsilon$

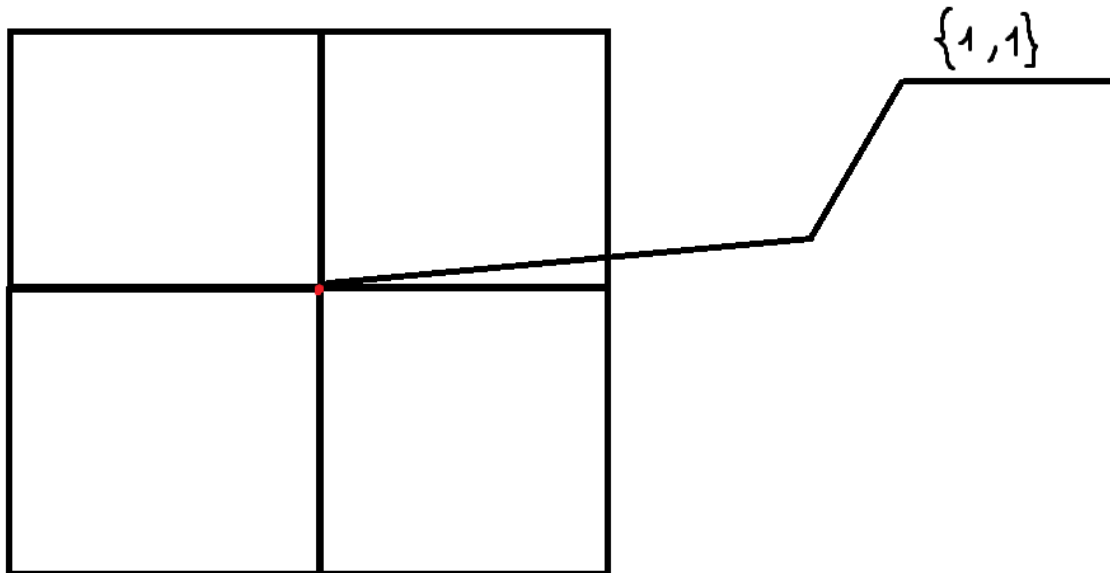
on a alors pour tout $i \in [0,1[$, $\mu(\text{Union } i=1 \text{ à } n \{i,i\}) =$ somme de $i=1$ à n des $\{i,i\}$ qui est plus grand que 1 mais qui est contenue dans le carrée or, le carrée a une mesure de 1.

Donc il y a une contradiction d'où $\mu(\{1,1\}) = 0$

2)

En utilisant les isométries, si on effectue des rotations d'angle $\pi/2$ et que l'on dispose 4 carrés de tel sorte que le point $\{1,1\}$ soit l'intersection des diagonales du grand carré C ainsi obtenu. Alors par additivité de la mesure, ce grand carré est de mesure $4 \cdot 1 = 4$.

De plus, $\{1,1\} \cap C = \emptyset$



Idée :



En superposant deux figures de l'énoncé dont l'une est la rotation de l'autre par un angle π , on obtient une nouvelle figure étant un "carré complet".

Si on note $\{1,1\}$ le point rouge et $\{0,0\}$ le point vert, J_1 la figure initiale et J_2 son image par la rotation alors $\mu(J_1) = \mu(J_2) = 1$,

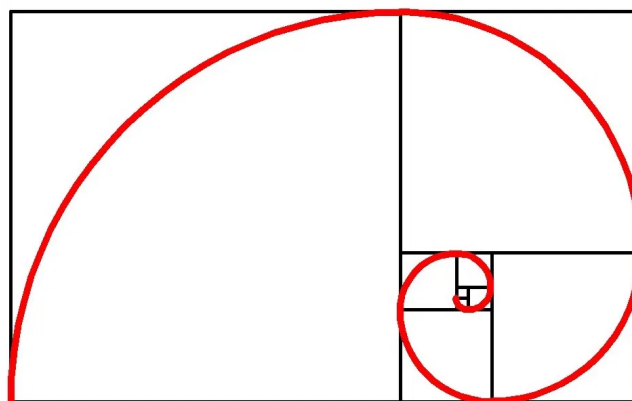
On peut peut-être utiliser la convergence ?

Le point n'a pas de "taille" ?

QUESTION 2 :

Montrons

idée: découper le rectangle en plusieurs carrés (penser à la suite de fibonacci)



Soit un R_1 rectangle de côté L et l avec $L \geq l$

On découpe un carré C_1 dans le rectangle de côté l . on a ainsi R_2 un rectangle de côté $L-l$; l avec $L-l < l$

DE plus $R_1 = C_1 \cup R_2$

De même on découpe le rectangle R_2 d'un carré C_2 de côté $L-l$

R_3 a comme côté $L-l$ et $2 \cdot (L-l)$

etc...+

on a ainsi un découpage du rectangle R_1 dont la mesure vaut l'union finie des carrés C_n

Qui vaut la somme des mesures des carrés.

Sachant qu'à chaque étape on rétrécit le carré, nous avons donc un nombre fini de carrés dont les derniers ont une mesure proche de zéro.



On peut toujours se ramener à un rectangle tel que si l'on note l sa largeur et L sa longueur, alors $L < 2l$. (il faudra juste rajouter un certain nombre de carré de côté l) si $L = K \cdot l$ avec K entier.

Montrons que la mesure d'un carré est côté*côté.

soit C' carré de côté x .

$C' = x \cdot C$ où C est le carré de côté 1.

Découper $L \cdot l$ avec L et l entier en carrés de même longueur.

Découper $L \cdot l$ avec L et l rationnel ,

idem pour les Réels : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , de plus suite adjacente avec un carré plus grand et plus petit et même limite vers un rationnel .

théorème fonction monotone?

QUESTION 3 :

On se place dans le cas où f est croissante sur $I=[a;b]$

X_0 et h sont deux nombres : $X_0 \in I$, h différent de 0 et $X_0+h \in I$

Si $h>0$, comme f est croissante, $f(X_0) \leq f(X_0+h)$.

$$\Phi(X_0+h) - \Phi(X_0) = \int_{X_0}^{X_0+h} f(x) dx$$

$$| \Phi(X_0+h) - \Phi(X_0) - h \cdot f(X_0) | = \int_{X_0}^{X_0+h} |f(x) - f(X_0)| dx \leq \epsilon (X_0+h-X_0)$$

Séance n°2:

Comment commencer ?

D'où sortent les 10^{-i} ? Les coordonnées des points sont $a/10^i$ et $b/10^i$

mesure de Dirac ?

Suite adjacentes?

S est le carré de côté 1

on va approcher S par les suites s_i (inférieur à S) et S_i (supérieur à S)

$$\{(x, y) \in E, a/10^i \leq x \leq a+1/10^i \text{ et } b/10^i \leq y \leq b+1/10^i\}.$$

Essayons de mesurer cet ensemble au sens de Lebesgue.

sommets des carrés $\{(a,b);(a+1,b);(a+1,b+1), (a,b+1)\}$

n_i est inclus dans N_i

i finesse du quadrillage

Faire une récurrence?

$I=0$ $a=0$, $b=0$, $a+1=1$ et $b+1=1$... NON!

$i=1$, le carré unité est divisé en 10 portions... $\{(x, y) \in E, a/10 \leq x \leq a+1/10 \text{ et } b/10 \leq y \leq b+1/10\}$.

x peut prendre des valeurs réelles sur un carré de côté $1/10$.

$$u_i = (10^i - 1)/10^i \text{ et } v_i = 1$$

lim quand $i \rightarrow +\infty$ de u_i est $10^i/10^i$ qui tend vers 1 (équivalent en $+\infty$) $10^i/10^i$ qui tend vers 1.

Donc S est quarrable.

oui, par suite adjacente.

Question 2:

On mobilise l'invariance par isométrie et l'additivité car les triangles sont disjoints à segment près. Mais les segments sont Lebesgues- négligeables donc on peut mesurer que des parties disjointes et faire la somme .

On utilise également des suites adjacentes .

$P_n - q_n = n \sin(\pi/n) [\cos(\pi/n) - 1/\cos(\pi/n)]$. a pour limite 0.
car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\pi/n) = 1$.

faisons un DL. $\cos(\pi/n) = 1 + o(\pi/n)$
 $\sin(\pi/n) = \pi/n + o(\pi/n)$
et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\pi/n) \cos(\pi/n) = \pi$

croissance de la mesure.
Montrons que le disque est quarrable. caractérisé quarrable.

reconstituer des carrés à l'aide des triangles rectangles?

Question 3:

question 1: on prend la fonction qui à n associe $b - (1/n)$ croissant et non quarrable.

question 2:

ok on crée deux suites de fonctions en escalier dont une sera sous la courbe de f et l'autre au-dessus de la courbe de f.

Ces deux suites auront la même limite et on va créer des "escaliers de plus en plus petits" c'est-à-dire que la limite de ces suites ont pour limite la fonction.

utilisation du théorème 2 sur le fait que pour tout epsilon, la différence des deux suites sera plus petite que epsilon.

Comme ce sont des fonctions en escalier. La mesure de l'aire sous la courbe est la somme de rectangle, qui sont quarrables. donc la fonction continue sera quarrable.

question 3: c'est exactement Riemann

Document partagé du groupe 2

Ecrivez vos nom/prénom avec les couleurs

Lucile ROUSSEAU

Tatehau SANFORD

Marie JOUVE

Madina Akchurina

Séance 1 du lundi 19 avril 2021

- Chaque personne du groupe choisit une couleur et l'utilise là quand vous écrivez du texte.
- Si possible, n'effacez rien
- Pour des formules mathématiques, allez dans *Insertion-Equation*

Question 1:

Comment montrer qu'une mesure est diffuse?

Faut-il faire une intersection d'ensembles pour obtenir un point et mesurer celle-ci?
En prenant par exemple 2 carrés qui s'intersectent un 1 point.

Un point n'a pas d'aire donc si A est un point, il n'a pas d'aire ainsi la mesure de ce point par cette mesure est nulle.

Faut-il donc prouver que l'aire d'un point est nulle?

Si on prend deux points distincts du plan, que peut-on dire ? Ils ont la même mesure.

On suppose qu'on a un point x qui n'est pas de mesure nulle. Donc si on a n points distincts, comme ils sont de même mesure, la mesure de l'union de ces points est n fois la mesure de x

Question 2:

Que vaut la mesure d'un rectangle?

Soit un rectangle ABCD de longueur L et de largeur l

On sait que les mesures des points est nulle et la mesure des segments également.

L et l peuvent-ils être des réels ou des entiers naturels?

Si la longueur L et la largeur l du rectangle sont des nombres entiers on peut reconstituer le rectangle avec des petits carrés de côté $1/LI$. On aura alors $L^2/LI=L$ et $LI^2/LI=l$ donc il faudra $L^2 \cdot LI^2$ carrés de côté $1/LI$ soit $(LI)^3$ carrés de côté $1/LI$ (attention $(LI)^3$ doit être un entier !!!). La mesure d'aire d'un carré de côté $1/LI$ est $1/(LI)^2$ donc la mesure du rectangle est $(LI)^3/(LI)^2=LI$

Comment faire si L et l ne sont pas des entiers?

Question 3:

L'aire sous la courbe entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h est encadrée par l'aire de 2 rectangles. On connaît la mesure d'aire d'un rectangle donc on peut encadrer avec notre mesure d'aire.

Elle est encadrée par un rectangle de longueur $f(x_0)$ et de largeur h et un rectangle de longueur $f(x_0+h)$ et de même largeur h

Séance 2 du 3 mai :

Question 1

1. Comment on trouve les valeurs de a et b ? Cela dépend du niveau choisi ?
2. Pour le niveau 0: $a = 0$, $b = 0$ pour le carré fermé ($C_f : [0,1] \times [0,1]$) et C inclus dans ce carré. Mais il n'y a pas de carré qui sont inclus dans C Donc $n_0 = 0$ et $N_0 = 1$.
3. Pour le niveau 1: $n_1 = 9 \cdot 9 = 81$ et $N_1 = 10 \cdot 10 = 100$
4. Pour le niveau 2 : $n_2 = 99 \cdot 99$ et $N_2 = 100 \cdot 100$
 $u_2 = n_2 / 100^2 = 99 \cdot 99 / 100000$ et $v_2 = 1$.
5. Pour le niveau i on observe que $v_i = 1$ et u_i tend vers 1 quand i tend vers l'infini

Pour i quelconque on obtient $N_i = 10^{2i} = 100^i$ donc $V_i = 100^i / 100^i = 1$ pour tout i
et $n_i = (10^i - 1)^2 = 10^{2i} - 2 \cdot 10^i + 1$
donc $U_i = (100^i - 2 \cdot 10^i + 1) / 100^i = 1 - (2 \cdot 10^i + 1) / 100^i$
Ainsi U_i tend vers 1 quand i tend vers $+\infty$

Donc on a bien $\lim U_i = \lim V_i = 1$ donc $\mu(C) = 1$

Question 2

P_n est la réunion de n triangles isométriques qu'on notera T_i avec i de 1 à n
Les triangles sont deux à deux disjoints et la somme de leurs aires vaut l'aire de P_n donc on utilise la sigma-additivité pour P_n et de même pour Q_n .

On obtient par ceci 2 suites $\mu(P_n)$ et $\mu(Q_n)$ dont une croissante et l'autre décroissante. Leur différence tend vers 0 ce sont des suites adjacentes qui tendent donc vers une même limite.

Pourquoi $\mu(D)$ existe? (Avec D le disque unité)

On sait que P_n est inclus dans D et D inclus dans Q_n
 P_n et Q_n sont quarrables donc $\mu(P_n)$ existe et $\mu(Q_n)$ aussi.

Question 3 :

1. On subdivise $[a,b]$ en intervalles de longueur $(b-a)/n$
On peut alors prendre I_n et E_n des réunions de rectangles tels que $\mu(I_n) = (b-a)/n$ *
somme de 0 à $n-1$ de $f(a+k(b-a)/n)$
et $\mu(E_n)$ de même mais avec la somme allant de 1 à n .

Document partagé du groupe 3

maurine et kolya

Marie-Cécile

Morgane

Séance 1 du lundi 19 avril 2021

- Chaque personne du groupe choisit une couleur et l'utilise là quand vous écrivez du texte.
- Si possible, n'effacez rien
- Pour des formules mathématiques, allez dans *Insertion-Equation*

Question 1:

Les questions qu'on se pose:

- *Qu'est ce qui, dans la définition, nous permet de montrer que l'image d'un point est nul ?*
- *En quoi la position du point demande une disjonction de cas ?*
- *y a t-il une différence si A est sur un bord du carré ou à l'intérieur ?*

Morgane

On pose A un point quelconque

B un carré unité

$$u(B \text{ union } A) = u(B) + u(A) = 1 + u(A)$$

(ici on veut prouver que $u(A) = 0$.)

$$u(B \text{ union } A) - u(A) = 1$$

(idée on translate par translation le point A dans le carré unité afin que b inter A est le carré unité.)

$$u(B \text{ union } A) = u(B) = 1$$

$$\text{Ainsi } 1 - u(A) = 1 \text{ donc } u(A) = 0$$

Soit μ une mesure d'aire. Démontrons que μ est une mesure diffuse, au sens de la théorie de la mesure, c'est-à-dire que la mesure d'un point est toujours nulle.

Soit A un point quelconque .

Montrons que $\mu(A) = 0$.

Soit C le carré unité semi-ouvert $[0,1[\times [0,1[$. On a $\mu(C) = 1$ par définition.

- Si A n'appartient pas à C . Alors, il existe une isométrie s tel que $\mu(A) = \mu(s(A))$ avec $s(A)$ appartient à C . On a $\mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C) = \mu(s(A)) + \mu(C) = \mu(s(A) \cup C)$ car $\mu(s(A) \cup C) = \mu(C)$
Donc
- Si A appartient à C .
 $\mu(A \cup C) = \mu(C) = 1$ et on sait aussi que

et donc $\mu(A) + \mu(C) = 1$ on en déduit que $\mu(A) = 0$.

C le carré unitaire

A un point quelconque

- si $A \cap C$ est vide $\mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C)$
-

Question 2:

question qu'on s'est posée:

- combien y a-t-il de carré de côté $1/q$ dans un rectangle de côtés p/q et r/s ?
- quelle est la mesure d'un carré de côté $1/q$?

Idée

Dans un rectangle de longueur L et de largeur l , on peut faire "rentrer" $l \cdot L$ carrés unité semi ouvert $[0, 1[\times [0, 1[$.

Soit μ une mesure d'aire.

Soit C le carré unitaire.

Soit R un rectangle de longueur L et de largeur l .

idée: Alors on peut considérer une fonction f définie sur un intervalle J de longueur l tel que pour tout x appartenant à J , $f(x) = L$. Problème, on peut pas utiliser la mesure

idée: Si L et l sont des réels positifs tel que $l \leq L$. Alors l'aire du rectangle R est la somme de l'aire du carré C_1 de côté l et du rectangle R_1 de côté $L-l$ et l .

$\mu(C_1 \cup R_1) = \mu(C_1) + \mu(R_1)$. Mais l'aire de R_1 est la somme de l'aire du carré C_2 de côté $L-l$ et du rectangle R_2 de côté.... Non finit

Soit un rectangle R de longueur L et de largeur l

- si l et L sont des entiers positifs, alors on peut découper le rectangle en $l \cdot L$ carrés unités. Ces carrés étant disjoints on a que $\mu(R) = l \cdot L$, ($\mu(R) = \mu(C) \times l \times L$ car $\mu(C) = 1$.)

- si L et l sont des rationnels, soit p, q, r et s des entiers positifs tel que $L = \frac{p}{q}$

et $l = \frac{r}{s}$

on découpe le rectangle en carré de côté $1/(qs)$.

Il y a pr carrés de côté $[0, 1/qs[\times [0, 1/qs[$, notons le D .

On sait que $\mu(C) = 1$.

$$\mu(D) = 1/qs \times \mu(C) = 1/qs \times 1 = 1/qs$$

Question 3:

Questions:

- Comment formuler l'aire sous la courbe avec μ ?
- Comment justifier que $\mu(R) \leq \mu(A) \leq \mu(R')$?

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. x_0 et h sont deux nombres tel que $x_0 \in [a, b]$, $h \neq 0$, $x_0 + h \in [a, b]$.

Notons A la partie comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=x_0$ et $x=x_0+h$

Soit R un rectangle de longueur $f(x_0)$ et de largeur h .

Soit R' un rectangle de longueur $f(x_0 + h)$ et de largeur h .

$$R \subset R'$$

on a $R \subset A \subset R'$ et par croissance de μ :

$$\mu(R) \leq \mu(A) \leq \mu(R')$$

$$f(x_0) h \leq \mu(A) \leq f(x_0+h) h$$

$$f(x_0) \leq \mu(A) / h \leq f(x_0+h) \quad (\text{car on a supposé } h \neq 0)$$

Séance 2 du lundi 3 mai 2021:

Question 1:

1) Les questions que l'on s'est posées:

- Comment poser a et b?
- Qui sont n_i et N_i ?
- Comment exprimer n_i en fonction de i ?
- Comment exprimer N_i en fonction de i ?

erreur d'énoncé: avec b c'est y qui est encadré

Démontrons que le carré unité semi ouvert C est quarrable et d'aire de Lebesgue égale à 1.

Une surface du carré unité de niveau i est un ensemble du type

$$A = \{(x, y) \in E, \frac{a}{10^i} \leq x < \frac{a+1}{10^i} \text{ et } \frac{b}{10^i} \leq y < \frac{b+1}{10^i}\}.$$

or on sait que $x \in [0, 1[$ et $y \in [0, 1[$. Donc $a=0$ et $b=0$.

pour un quadrillage de niveau 1, c'est-à-dire $i=1$:

$[0,1]$ est découpé en 10 morceaux, mais nous nous intéressons à $[0,1[$

donc $N_i=10*10=100$

et $n_i=10*10-(20-1)$

pour un quadrillage de niveau 2, c'est-à-dire $i=2$:

$[0,1]$ est découpé en 100 morceaux égaux, mais nous nous intéressons à $[0,1[$

$$\text{Donc } N_i = 100 \times 100 = 10^2 \times 10^2 = 10^{(2 \times 2)}$$

$$n_i = 10^{(2 \times 2)} - (100 \times 2 - 1) = 10^{(2 \times 2)} - (2 \times 10^2 - 1) = 10^{(2 \times 2)} -$$

Ainsi pour tout entier i, on a

pour un quadrillage de niveau i:

$[0,1]$ est découpé en 10^i morceaux

donc $N_i=10^i*10^i$

et $n_i=10^{2i}-(2*10^i-1)$

$$u_i = \frac{10^{2i} - 2 \cdot 10^i + 1}{100^i} = 1 - \frac{2}{10^i} + \frac{1}{100^i}$$

$$v_i = \frac{10^{2i}}{100^i} = \frac{100^i}{100^i} = 1$$

Donc $\lim u_i = \lim v_i = 1$ donc $\mu(C)=1$

2)

question 2:

Les questions que l'on s'est posées:

P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB.

Propriété utilisée:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Soit A le triangle OAB:

$$\mu(\cup_{i=1}^n A) = n \times \mu(A) = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

La différence des aires de Q_n et P_n tend vers 0.

Propriété utilisée

$$\lim n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = n \times \frac{\pi}{n} = \pi \text{ (par un développement limité)}$$

$$\lim n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = n \times \frac{\pi}{n} = \pi$$

“Le polygone P_n est l'union de n triangles isométriques à OAB et le polygone Q_n est l'union de n triangles isométriques à OGF”

Propriété utilisée: additivité de μ

notons H le pied de la hauteur issue de O du triangle OAB

$$\text{Aire}(OAB) = 2 \times \text{Aire}(OAH) = 2 \times \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = 2 \times \frac{AH \times OH}{2}$$

$$\sin(\hat{O}) = \frac{AH}{OA}$$

$$\sin\left(\frac{360}{2n}\right) = \frac{AH}{OA}$$

$$AH = 1 \times \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos(\hat{O}) = \frac{OH}{OA}$$

$$\cos\left(\frac{360}{2n}\right) = \frac{OH}{OA}$$

$$OH = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\text{Aire}(OAB) = 2 \times \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \right)$$

Propriétés utilisées: additivité de μ et invariance par isométrie (ici une rotation)

même raisonnement pour aire de OGF

question 3

Idée

On prend plusieurs rectangles d'aires $(x_{i+1} - x_i) f(x_i)$
et d'autres rectangles d'aires $(x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$

Soit n un entier naturel non nul.

Considérons un découpage de $[a; b]$ par des segments de longueur $(b-a)/n$.

Alors, pour le premier segment $[a; a+(b-a)/n]$ la hauteur $f(a)$ est inférieure ou égale à la courbe et la hauteur $f(a+(b-a)/n)$ est supérieure à la courbe.

posons $m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}; x_i]} f(t)$

et $M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}; x_i]} f(t)$

$$s = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) * m_i$$

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) * M_i$$

on a $s \subset \Omega$ et $\Omega \subset S$

de plus $\lim(s) = \lim(S) =$

tDocument partagé du groupe 4

Ecrivez vos nom/prénom avec les couleurs

Séance 1 du lundi 19 avril 2021

- Chaque personne du groupe choisit une couleur et l'utilise là quand vous écrivez du texte.
- Si possible, n'effacez rien
- Pour des formules mathématiques, allez dans *Insertion-Equation*

Séliane: bleu

Question 1

CONSIGNE: Soit μ une mesure d'aire. Démontrer que μ est une mesure diffuse, au sens de la théorie de la mesure, c'est-à-dire que la mesure d'un point est toujours nulle. Vous travaillerez par groupes de 4 pendant 30 min à la résolution de cette question. Le document partagé en ligne servira de cahier de recherches et de support à la synthèse collective de votre travail. Vous y retranscrirez donc vos pistes de résolution, même incomplètes, en prenant soin de faire apparaître les questions que vous vous posez (à formuler explicitement, à l'interrogative), les éléments de réponses que vous avez réussi à apporter, et les liens que vous pouvez faire avec les théories de l'intégration enseignées à l'université. Les éléments que vous souhaitez partager à vos camarades seront soulignés en gras et présentés par un porte-parole de chaque groupe lors de la phase de mutualisation.

Thamara : rouge

Ping-Ine : noir

yamina vert

si on prend plusieurs points, ils sont invariants par isométrie.

démonstration en s'appuyant uniquement sur les axiomes dont on dispose
on sait que l'isométrie d'un point est un point

On essaye de définir un point comme l'intersection de deux éléments de L . L'intersection deux droites ou segments ne semblent rien apporter puisqu'on ne connaît pas l'aire d'une droite.

Comment exploiter le fait que l'aire d'un point soit invariant par isométrie ?

Est-ce que l'aire d'un polygone est la même avec ou sans ses frontières ?

considérons une boule ouverte carrée qqc qu'on décompose en union de carrés unités
intersection de deux boules carrées ouvertes: leur frontière ont une intersection qui est un point

invariance de l'aire par isométrie: si on considère un point l'aire de l'image sera la même.

Et si on considère deux points?

Peut-on prendre plusieurs points dans le plan et considérer le polygone dont les sommets sont définis par les points? par ex un carré

Si on considère 4 points qui forment un carré, on fait la rotation autour d'un des sommets

Donc intersection = à ce point en question

si on considère les boules ouvertes, donc sans frontière, l'intersection est vide (donc utilisation premier axiome)

mais si on considère les boules fermées, l'intersection est ce point, donc l'aire de l'union n'est pas égale à la somme des aires

Mais est-ce que l'aire d'un polygone fermé (avec frontière) est la même que celle du polygone ouvert (sans frontière)?

et avec une symétrie?

Notons C ce carré (d'aire 1) et R cette rotation. $C \cap R(C) = M$ (un point).

$\mu(C \cap R(C)) = \mu(C) + \mu(R(C)) - \mu(M) = 2\mu(C) - \mu(M)$ (avec les frontières)

$\mu(C \cap R(C)) = \mu(C) + \mu(R(C)) = 2\mu(C)$ (sans les frontières)

L'union de deux points?

si l'union de plusieurs point forme une mesure de longueur...

Question 2

Soit μ une mesure d'aire. Que vaut la mesure d'un rectangle (en fonction de ses dimensions, qui sont a priori deux nombres réels positifs quelconques) ? Justifier votre réponse. (Indication : on pourra discuter selon le domaine de nombres) Mêmes consignes qu'à la question précédente. Durée de cette phase : 30 min

On note l la longueur du rectangle et L sa largeur.

Si l et L sont des entiers on peut décomposer le rectangle en $l \times L$ carré unité. Donc on a un rectangle de mesure $l \times L \times \mu(C) = l \times L$

pour les décimaux choisir celui qui a la plus grande partie décimale, et le multiplier de telles sorte à obtenir un entier. on multiplie l'autre par le même rapport on aura nécessairement un

entier aussi. et ensuite le décomposer comme avec les entiers (on fait donc un agrandissement)

Mais il faut ensuite diviser l'aire par k^2

Ces opérations conservent-elles la bonne aire, et peut-on les faire?

Si largeur et longueur ne sont pas dans le même ensemble de nombres, comment faire?

Pour les rationnels peut-on utiliser exactement la même méthode que pour les décimaux, et donc est-il nécessaire de séparer ces deux ensembles de nombres?

Pour les irrationnels, peut on utiliser le fait que pour tous irrationnels x , il existe une suite de rationnels qui converge vers x ?

Si l et L sont des irrationnels, il existe deux suites (r) et (r') telles qu'elles convergent respectivement vers l et L . Le rectangle R de dimension r et r' a pour mesure $\mu(R)$. L'aire du rectangle R tend vers celle du rectangle de dimension $l \times L$. Donc(?) l'aire du rectangle de dimension $l \times L$ est la limite de celle du rectangle R .

La limite qu'on obtiendra sera-t-elle l'aire exacte?

Question 3

Comment faire le lien entre la notion d'intégrale qu'on a vu au lycée et la notion de mesure ?

Comment intégrer les justifications à l'aide des axiomes à la démonstration ?

Séance 2 du lundi 5 mars 2021

Question 1

1. si on quadrille le carré unité avec $i = 1$ on a $n_i = 81$ car le carré unité est semi ouvert donc on exclut la dernière "ligne" et la dernière "colonne" de petits carrés
si on prend i quelconque, toujours pareil, on enlève dernière ligne et dernière colonne

est-ce qu'on peut exprimer n_i en fonction de i uniquement? $(10^i - 1)^2$

pour les S_i : s_i intersecte C , mais il faut en plus rajouter les carrés fermés qui intersectent C à la frontière

$$N_i = 10^{2i}$$

comparer les limites de u_i et v_i , en infini:

$\lim v_i$ vaut 1

$\lim u_i$ vaut 1 aussi 1

donc $\mu(C) = 1$

2. on prend A et B deux ensembles disjoints. l'union s_i des carrés contenus dans $A \cup B$ est $a_i \cup b_i$. (a_i est l'union des surfaces carrés contenus dans A et b_i celle contenus dans B)

Question 2

L'aire d'un segment est nulle.

L'aire d'un point est nulle.

L'aire est invariante par isométrie.

Les triangles OAB et OGF sont quarrables.

Si l'intersection de A et B est un point ou un segment alors l'aire de $A \cup B$ est l'aire de A + l'aire de B.

si A est inclus dans B alors la mesure de $B \setminus A$ est égale à la mesure de B moins la mesure de A

Question 3

1) Soit f une fonction croissante.

On encadre la surface sous la courbe représentative de f entre les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ par des rectangles

pour n quelconque

on prend une subdivision de notre intervalle $[a;b]$, et on encadre avec des rectangles "inférieurs" et des rectangles "supérieurs" par rapport à la courbe

P_n est l'union des rectangles inf et Q_n l'union des rectangles sup

et donc la mesure de $Q_n - P_n$ tend vers 0

donc Omega est quarrable et son aire vaut $\mu(P_n)$