

# THÈSE

---

## Étude de la transition laminaire-turbulente de couches limites dans les tuyères soniques de débitmétrie

---

Présentée par

**Bruno ZEBROWSKI**

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET  
D'AÉROTECHNIQUE

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022)

École doctorale

*Mathématiques, Informatique, Matériaux, Mécanique, Énergétique (ED n°651)*

Secteur de recherche

*Mécanique des milieux fluides*

Sous la direction de

Peter JORDAN

Co-encadrée par

Vincent JAUNET

### JURY

M. Christophe AIRIAU - <i>Professeur, Université Paul-Sabatier</i>	Rapporteur
M. Pierre DUPONT - <i>Chargé de Recherche CNRS, Université Aix-Marseille</i>	Rapporteur
M. Peter JORDAN - <i>Directeur de Recherche CNRS, Université de Poitiers</i>	Membre
M. Guillaume LEHNASCH - <i>Maître de Conférences, ISAE-ENSMA</i>	Membre
M. Lutz LESSHAFFT - <i>Directeur de Recherche CNRS, École Polytechnique</i>	Membre
M. Benoît PIER - <i>Directeur de Recherche CNRS, École Centrale Lyon</i>	Membre
Mme Estelle PIOT - <i>Directrice de Recherche, ONERA</i>	Membre
Mme Taraneh SAYADI - <i>Chargée de Recherche CNRS, Sorbonne Université</i>	Membre

Chercheur invité

M. Rémy MAURY - *Ingénieur R&D, CESAME-EXADEBIT*



## Remerciements

Au-delà du sujet d'application de cette thèse, je me suis engagé dans ces travaux de recherche avec comme objectif de comprendre le processus de formation de la connaissance scientifique et ainsi comprendre comment la science permet de décrire le monde qui nous entoure. Si la démarche hypothético-déductive, appliquée dans un certain nombre de sciences, est d'apparence simple et efficace, elle cache une étonnante complexité dans les détails de son application. D'ordre intellectuel, technique ou moral, j'ai affronté ces difficultés grâce à un grand nombre de personnes et d'institutions que je souhaite remercier ici.

Je tiens tout d'abord à remercier les rapporteurs, Christophe Airiau et Pierre Dupont, pour leur lecture critique et en profondeur de mon manuscrit. Les remarques que vous avez formulées m'ont permis de prendre du recul et dégager de nouvelles pistes pour progresser dans ce travail. Mes remerciements vont également aux membres du Jury, Benoît Pier, Estelle Piot et Taraneh Sayadi, pour avoir suivi avec intérêt l'exposé de mes travaux. Vous m'avez apporté, au travers de vos questions et commentaires, une discussion scientifique très enrichissante. J'ai été honoré et ravi de pouvoir partager ce moment avec vous.

La réalisation de ces travaux a été rendue possible grâce au soutien financier d'une part de la région Nouvelle-Aquitaine et d'autre part de l'entreprise CESAME-EXADEBIT, que je remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Je souhaite en particulier remercier les acteurs principaux de cette thèse au sein de CESAME-EXADEBIT : Henri Foulon pour l'accueil chaleureux lors de mes séjours au sein de l'entreprise, Christophe Auclercq pour la participation à la réalisation de la soufflerie et Remy Maury, pour ton intérêt et le temps que tu as passé à suivre mes travaux. Le transfert de connaissances entre recherche et applications industrielles est un élément important pour moi, et tu m'as permis de réaliser cela en m'impliquant dans des problématiques concrètes de CESAME.

J'ai une profonde gratitude envers mes directeurs de thèse, Peter Jordan et Vincent Jaunet, pour la qualité de l'encadrement dont vous m'avez fait bénéficier. Vous m'avez laissé naviguer dans l'univers des idées en apportant un regard critique pertinent sur chacune de mes propositions, me portant toujours plus loin. Je resterai marqué par les puissantes méthodes que vous m'avez enseignées, avec lesquelles vous avez précisément répondu aux questions qui m'ont poussé à faire un doctorat. Comme si cela ne suffisait pas, il a également fallu que vous soyez d'extraordinaires personnes en dehors du labo, Tour du Monde à Table, Saint-Patrick, Churrasco, simples échanges amicaux autour d'une bière (maison), vélo à 45 km/h face au vent pour rentrer du boulot... Je souhaite à tous les doctorants de pouvoir bénéficier du même encadrement. Eduardo, bien que les commentaires précédents soient les mêmes à ton égard, je tiens à te dédier des remerciements particuliers tant ma thèse n'aurait pas été la même sans toi. De mentor à ami, tu as marqué cette aventure d'innombrables souvenirs, dont le plus beau fut probablement PSA<sup>1</sup>.

---

1. Et je ne parle pas de *Parabolized Stability Analysis*...

Merci également Guillaume Lehnash d'avoir porté ce projet et de t'être investi dans les curiosités qui m'ont conduit à rédiger le dernier chapitre de cette thèse. Merci à toi et Andreas Spohn pour votre accueil dans l'équipe enseignante, j'ai beaucoup appris à vos côtés en tant qu'enseignant.

Je souhaite également remercier tous les acteurs ayant contribué aux travaux expérimentaux. Merci Stève Girard et Anton Lebedev de m'avoir accompagné au quotidien dans la manipulation de la soufflerie, d'avoir été deux sources inépuisables d'idées et de véritables machines à résoudre les problèmes techniques. Merci Redouane Kari pour l'immense travail réalisé pour la mise en place du contrôle commande de la soufflerie, toujours dans la bonne humeur. Merci Damien Esseyric de m'avoir aidé à instrumenter la soufflerie, et aussi de m'avoir aidé à comprendre à quel point il est difficile de mesurer une grandeur physique avec exactitude... Merci Eric pour la maintenance de la soufflerie et ton aide quotidienne pour résoudre les innombrables problèmes techniques que nous avons dû surmonter pendant ces trois années. Merci Thomas, Romain, Dominique, Patrick, Nicolas de permettre à ces installations de fonctionner et pour ces bons moments passés à Prometee. Finalement, merci Nicolas (Tchebotariov) de m'avoir permis de garder un pied au milieu des machines-outils ! Je remercie Matthieu Fenot et l'équipe COST pour le prêt de matériel ayant été nécessaire pour la réalisation des expériences, Noël Brunetière et l'équipe Tribolub pour avoir pris le temps de me former à l'utilisation de l'interféromètre optique pour la mesure des états de surface et aussi Médéric Morisset et l'équipe Endo pour m'avoir guidé dans la finition des maquettes expérimentales.

J'ai eu la chance d'atterrir au labo dans une équipe de chercheurs aussi sympathiques que talentueux : Igor mon fidèle compagnon de baignade nocturne par  $-4^{\circ}$ , Matteo (*'Je voudrais 20 punches d'Orléans s'il vous plaît !'*), Ugur et son incroyable cuisine turque, Robin<sup>2</sup>, Selene ma meilleure partenaire d'escalade<sup>3</sup> : merci encore plus pour tous les bons moments passés à Poitiers City (surtout au Clu, il faut l'avouer). Merci à tous ceux qui sont arrivés en cours de route : Barbara et nos innombrables souvenirs<sup>4</sup>, Bernardo un sacré compagnon d'escalade, Marios, Filipe : merci d'avoir égayé la fin, pas toujours facile, de cette aventure. Merci au gang des Australiens Marcus, Michael, Jayson, Ravee d'avoir rythmé de nouvelles découvertes notre train-train quotidien ! Merci Clément d'avoir partagé ce projet de recherche avec moi, pour toutes nos discussions philosophiques autour de la stabilité, les digressions interminables et nos plans sur la comète<sup>5</sup> élaborés autour de délicieux Négronis<sup>6</sup>.

Finalement, je remercie mes parents de m'avoir appris à être curieux et à aller au bout, avec amour et passion, de ce que j'entreprends. Merci à ma maman d'avoir traversé le globe pour venir me soutenir dans la dernière ligne droite. Merci aussi à mes sœurs d'être venues jusqu'à Poitiers pour m'encourager lors de ma soutenance.

---

2. My Love™

3. même en hiver quand il pleut !

4. Entre un déménagement et un Churrasco, on aura peut-être le temps de finir Retour vers le Futur...

5. Notamment notre avion qui n'aura jamais vu son envol

6. Je regrette de n'avoir jamais réussi à t'amener en baignade nocturne dans le Clain...

Ces quelques derniers mots sont pour toi, Paule. Ta volonté inflexible et ta force d'esprit rayonnent sur moi depuis que je te connais. À travers ton soutien et ta motivation, ces travaux sont, d'une certaine manière, aussi les tiens.



## *Résumé*

La débitmétrie gazeuse haute pression présente des enjeux majeurs pour un grand nombre de procédés industriels. En particulier, la mesure de précision des volumes échangés lors du transport de gaz, tel que le gaz naturel ou l'hydrogène, est parmi les applications les plus importantes compte tenu des volumes en jeu aux échelles industrielles. Les débitmètres de références pour ces mesures sont des tuyères convergentes-divergentes en régime critique, utilisées comme étalon sur des bancs de calibration. La confiance dans la mesure du débit par des tuyères étalons est établie sur des mesures empiriques complémentées par des modèles qui reposent sur nos connaissances de l'aérodynamique de ces mêmes tuyères.

Le développement d'une couche limite, entre autres, est un facteur qui influence considérablement le débit d'une tuyère. Lors de l'utilisation des tuyères dans différents régimes de fonctionnement, la couche limite peut se trouver dans un état laminaire ou turbulent. Si la modélisation de chacun de ces régimes dans les tuyères est aujourd'hui avancée, la transition d'un régime à l'autre reste inexplorée et cause une incertitude quant au choix du modèle de couche limite à utiliser pour des conditions de fonctionnement données.

Cette étude vise à comprendre les mécanismes de transition en jeu dans les tuyères pour établir les fondamentaux permettant d'identifier et modéliser les régimes de transition. Dans un premier temps, une campagne expérimentale est conduite pour identifier le rôle de la forme et de l'état de surface des tuyères sur la transition. Nous montrons que si dans certains cas la transition est induite par la rugosité de surface, ce n'est pas le cas pour les tuyères dont l'état de surface suit les standards industriels. Pour ces dernières, la géométrie et le bruit naturellement présent dans l'écoulement jouent un rôle déterminant dans l'occurrence de la transition. Dans un second temps, nous utilisons les outils de la stabilité linéaire des écoulements pour montrer que le mécanisme de transition est associé à de la croissance non-modale de perturbations présentes dans l'écoulement. Cette croissance transitoire est modulée par la force centrifuge qui s'exerce due à la courbure de la paroi des tuyères, conduisant à des stries instationnaires. Finalement, un modèle de transition est établi en s'appuyant sur l'étude de stabilité et les résultats expérimentaux.





---

 TABLE DES MATIÈRES
 

---

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Revue de la littérature</b>	<b>5</b>
1.1 Les tuyères soniques de débitmétrie . . . . .	5
1.1.1 Fonctionnement . . . . .	5
1.1.2 Tuyères pour la débitmétrie . . . . .	7
1.1.3 La transition de couches limites dans les tuyères . . . . .	12
1.1.4 Résumé . . . . .	15
1.2 Notion de stabilité . . . . .	15
1.2.1 Systèmes linéaires pour les petites perturbations . . . . .	16
1.2.2 Stabilité modale . . . . .	16
1.2.3 Stabilité non modale . . . . .	19
1.2.4 Stabilité secondaire . . . . .	21
1.2.5 Perturbations extérieures . . . . .	21
1.3 Stabilité des couches limites . . . . .	23
1.3.1 Transition modale . . . . .	23
1.3.2 Transition non modale . . . . .	26
1.3.3 Turbulence et critère de transition . . . . .	30
1.3.4 Effet de la rugosité sur la transition . . . . .	32
1.3.5 Résumé . . . . .	33
<b>2 Présentation du dispositif expérimental</b>	<b>37</b>
2.1 Soufflerie S150 . . . . .	37
2.1.1 Fonctionnement et capacités de l'installation . . . . .	37
2.1.2 Dimensionnement de la section d'essai . . . . .	39
2.2 Instrumentation . . . . .	41
2.2.1 Détection des gradients de pression . . . . .	41
2.2.2 Détection de la transition . . . . .	43
2.2.3 Mesure des grandeurs totales et synchronisation . . . . .	47
2.2.4 Mesure du taux de turbulence . . . . .	48
2.3 Conception des tuyères expérimentales . . . . .	49
2.3.1 Matériau et fabrication . . . . .	49

2.3.2	État de surface . . . . .	50
2.3.3	Caractéristiques des tuyères utilisées . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Résultats expérimentaux de transition</b>	<b>55</b>
3.1	Critère de transition . . . . .	55
3.2	Influence de la rugosité . . . . .	56
3.2.1	Configurations industrielles . . . . .	56
3.2.2	Tuyère à forte accélération . . . . .	59
3.2.3	Rugosité isolée - tuyère brûlée . . . . .	62
3.2.4	Résumé sur l'influence de la rugosité . . . . .	64
3.3	Influence de la géométrie de la tuyère . . . . .	64
3.4	Influence du rapport de contraction . . . . .	65
3.5	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Étude de stabilité spatiale</b>	<b>69</b>
4.1	Formulation . . . . .	69
4.1.1	Linéarisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	70
4.1.2	Hypothèses de calcul . . . . .	71
4.1.3	Définition du champ de base . . . . .	72
4.2	Stabilité modale . . . . .	74
4.2.1	Formulation du problème aux valeurs propres . . . . .	74
4.2.2	Critère de stabilité . . . . .	75
4.3	Stabilité non modale : croissance transitoire . . . . .	76
4.3.1	Parabolisation et filtrage . . . . .	78
4.3.2	Discrétisation et convergence . . . . .	79
4.4	Écoulement transsonique . . . . .	79
4.4.1	Blasius subsonique . . . . .	80
4.4.2	Blasius supersonique . . . . .	81
4.4.3	Blasius transsonique . . . . .	83
4.5	Effet du gradient de pression . . . . .	86
4.5.1	Stabilité modale . . . . .	86
4.5.2	Croissance transitoire . . . . .	88
4.6	Effet de la courbure . . . . .	91
4.6.1	Stabilité modale . . . . .	91
4.6.2	Croissance transitoire . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Modélisation de la transition</b>	<b>99</b>
5.1	Détermination de la longueur de transition . . . . .	100
5.2	Transition par perturbations de l'écoulement libre . . . . .	101
5.2.1	Critère de transition : facteur N . . . . .	101
5.2.2	Facteur N critique pour la transition . . . . .	102
5.3	Transition par la rugosité de surface . . . . .	105

5.3.1	Rugosités isolées . . . . .	106
5.3.2	Rugosités distribuées . . . . .	108
5.4	Conclusion . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Le cas des tuyères à col cylindrique</b>	<b>113</b>
6.1	Contextualisation . . . . .	113
6.2	Position du col et apparition de chocs . . . . .	115
6.2.1	Simulations numériques . . . . .	115
6.2.2	Modélisation de l'écoulement au col . . . . .	119
6.2.3	Vérification expérimentale . . . . .	130
6.2.4	Résumé . . . . .	131
6.3	Étude de la transition . . . . .	132
6.3.1	Étude expérimentale . . . . .	132
6.3.2	Transition en fin de convergent . . . . .	134
6.3.3	Transition dans la partie cylindrique . . . . .	134
6.4	Conclusion . . . . .	140
	<b>Conclusion générale</b>	<b>143</b>
	<b>Annexes</b>	<b>149</b>
A	Plan des tuyères expérimentales . . . . .	150
B	Traitement des images infrarouges . . . . .	153
B.1	Réflexions . . . . .	153
B.2	Position du col . . . . .	155
B.3	Images améliorées . . . . .	156
C	Solveur SU2 : simulation numérique de tuyère . . . . .	159
D	Contributeurs notables . . . . .	162
D.1	Installation expérimentale . . . . .	162
D.2	Code de stabilité . . . . .	162
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>



---

## INTRODUCTION

---

### CONTEXTUALISATION

La mesure de précision du débit massique de gaz est un enjeu industriel majeur. La plupart des procédés faisant appel à du gaz sous pression possèdent des organes de régulation ou de mesure du débit. Les domaines d'applications sont extrêmement variés, allant de l'utilisation de la débitmétrie pour le calcul de la poussée d'une fusée à la quantification des volumes échangés lors du transport de gaz naturel. Le développement de l'usage d'hydrogène à haute pression, jusqu'à 1000 bar, pour l'usage comme stockage et vecteur d'énergie dans les transports du futur, illustre l'importance du maintien des connaissances et du développement des débitmètres haute pression.

Les tuyères soniques se sont progressivement imposées comme dispositifs de référence en matière de débitmétrie. Leur principal avantage est la simplicité et la fiabilité du système. Ne mettant en œuvre aucune pièce mobile, les tuyères ne nécessitent que très peu d'interventions de maintenance et produisent des mesures reproductibles dans le temps. Elles permettent de mesurer des débits massiques sur d'importantes plages d'utilisations, pouvant varier de quelques grammes par seconde à plusieurs dizaines de kilogrammes par seconde, pour des pressions allant de quelques bars à quelques centaines de bars, avec une incertitude de mesure de l'ordre de 0.2 %. Les tuyères sont reconnues comme étant les débitmètres de gaz les plus fiables et sont à ce titre utilisées comme standard pour les comparaisons internationales.

### PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DES TUYÈRES

Le développement des tuyères de débitmétrie s'est basé sur l'effet Venturi, qui énonce que la pression d'un fluide circulant dans un tuyau diminue au passage d'une réduction de la section. Connaissant la masse volumique, les dimensions de la section du tuyau et de la section de la restriction, il est possible de déterminer le débit massique en mesurant la pression en amont de la restriction et au niveau de celle-ci. Cette méthode a l'inconvénient de mettre en œuvre la mesure de deux sections et de deux pressions pour pouvoir réaliser le calcul. De plus, le débit dépend de la pression en amont et en aval du système, limitant les possibilités de conditions d'opération. Le principe de fonctionnement a été simplifié par l'introduction de tuyères supersoniques.

En effet, si l'écoulement atteint la vitesse du son au niveau du col de la tuyère (section de passage la plus petite), le débit massique du gaz peut être calculé à partir de la mesure de la section au col, de la pression et la température génératrice de l'écoulement. Les

conditions pour lesquelles l'écoulement est supersonique au col de la tuyère sont bien maîtrisées : pour de l'air, il suffit que la pression en amont soit au moins deux fois supérieure à la pression dans le réservoir dans lequel se déverse l'écoulement. Cette démarche réduit le nombre de mesures à effectuer, augmentant ainsi la précision et la fiabilité de la mesure. De plus, l'indépendance du débit vis-à-vis de la pression en aval de la tuyère permet une plus grande flexibilité dans la mise en œuvre des mesures de débit.

Dans la pratique, le calcul du débit n'utilisant que les mesures de pression, température et section de passage fait intervenir un grand nombre de simplifications dans les équations de la dynamique des fluides. Parmi celles-ci, les plus importantes sont : l'écoulement est considéré unidimensionnel, le fluide doit être un gaz parfait et sa viscosité est nulle. Pour des tuyères soniques dont la conception est pensée pour se rapprocher de ces hypothèses, le débit peut être obtenu avec une erreur de l'ordre du pourcent.

Au regard des enjeux industriels, tel que les quelque 4 008 milliards de m<sup>3</sup> de gaz naturel produit en 2021 dans le monde (Losson, 2022), cette erreur n'est pas acceptable. Pour répondre aux exigences des industriels, et donc réduire l'erreur lors de l'estimation du débit, il est nécessaire de calibrer les tuyères de débitmétrie.

## CALIBRATION DES TUYÈRES ET ENJEUX

La méthode la plus courante pour la calibration des tuyères est appelée PVT,t (Pression, Volume, Température et temps). Elle est faite sur des bancs d'essais spécialisés, mettant en œuvre un grand volume d'air comprimé à haute pression. L'air comprimé est passé au travers de la tuyère, à une pression et température constante pendant une durée déterminée. L'air qui est passé par la tuyère est collecté dans un réservoir de stockage, dont le volume est précisément connu. À la fin de l'essai, la masse d'air collectée dans le réservoir de stockage est estimée, permettant de déterminer le débit massique de la tuyère. L'opération est répétée pour différentes pressions afin d'obtenir une courbe de calibration sur la plage de fonctionnement désirée. Cette méthode permet d'obtenir une incertitude sur le débit de l'ordre de 0.2 %, améliorant largement la précision des tuyères. Cependant, ces installations sont coûteuses et obtenir une courbe de calibration pour une large plage de pression peut prendre plus d'une semaine. Le coût d'une tuyère calibrée est ainsi très important. De plus, la confiance accordée aux courbes issues de calibrations dépend directement de notre connaissance de l'aérodynamique des tuyères. Ainsi, le besoin de modélisation est résumé par Arnberg (1962) :

*“Puisque l'on s'est toujours fié aux coefficients expérimentaux pour mesurer avec précision le débit, on peut se demander pourquoi une théorie est nécessaire. Dans les faits, une théorie ne serait pas nécessaire si un débitmètre ne devait être utilisé que dans les mêmes conditions que celles de son étalonnage. Mais dans de nombreux cas, [...] il est nécessaire pour des raisons économiques ou techniques d'utiliser les débitmètres dans des conditions de fonctionnement différentes de celles dans lesquelles ils ont été étalonnés. [...]. C'est ici qu'une base théorique pour la corrélation des données joue son rôle. La confiance avec laquelle un compteur peut être appliqué à de nouvelles*

*conditions de fonctionnement est une fonction directe de la confiance que l'on a dans l'exactitude des relations théoriques utilisées pour corrélérer les données disponibles, et dans la cohérence des corrélations disponibles. [...] plus les fonctions théoriques de débit peuvent être développées avec précision pour un type de débitmètre donné, plus celui-ci sera polyvalent et précieux.”<sup>7</sup>*

Pour permettre l'usage de tuyère sonique comme débitmètre avec une faible incertitude et à moindre coût, la norme ISO9300 a été mise en place. Le document technique donne les spécifications de géométrie, de fabrication et d'utilisation d'une certaine catégorie de tuyère, et fournit une courbe de calibration générique et les incertitudes associées. Cela permet d'utiliser des tuyères pour la débitmétrie avec une incertitude acceptable sans passer par l'étape de la calibration. La courbe de calibration générique est produite à partir de modèles simplifiés basés sur la dynamique des fluides et de coefficients calibrés à partir d'observations expérimentales. Seulement, chaque tuyère possède son propre comportement aérodynamique et l'usage d'une courbe générique reste moins précis que l'utilisation d'une tuyère calibrée. À ce titre, la norme est révisée au fur et à mesure que progressent les installations de calibrations et la compréhension du comportement aérodynamique des tuyères.

La modélisation aérodynamique porte un double enjeu, puisqu'en plus de permettre de s'affranchir de la calibration, elle permet de mieux comprendre et mieux maîtriser le comportement des tuyères. Une des composantes majeures de la modélisation est la prise en compte de la viscosité. La formation d'une couche limite en proche paroi, et donc une zone d'écoulement où la vitesse du fluide est plus lente que dans le reste de l'écoulement, contribue à réduire le débit d'air circulant à travers la tuyère. Ce développement est particulièrement complexe à modéliser, car il est dépendant de la température, de la pression et des détails de la géométrie de la tuyère. Tous les paramètres ayant une influence sur le développement de la couche limite auront un impact sur le débit des tuyères.

## POSITIONNEMENT DE L'ÉTUDE

De nombreuses études se sont penchées sur la formation de couches limites dans les tuyères. Il est reconnu par les industrielles et la communauté scientifique que celles-ci peuvent être laminares ou turbulentes, suivant le régime de fonctionnement et le type de tuyère considérée. Des modèles de couches limites laminares existent et permettent de prédire avec une bonne précision son impact sur le débit des tuyères. Quelques études sont disponibles sur les couches limites turbulentes de tuyère, il reste cependant des incertitudes à lever pour obtenir un modèle fiable. Les modèles analytiques pour la prédiction du débit des tuyères peuvent mettre en œuvre les modèles de couches limites, mais sont confrontés à une limitation à propos de la gamme de validité de chaque régime. Des études de calibration de tuyères montrent que la transition d'une couche limite laminaire à turbulente cause des variations non négligeables du débit, et que la transition peut se produire pour des conditions d'utilisations variables. Les mécanismes de transition

---

7. Traduit de l'anglais.

sont encore mal connus dans les tuyères, et la limite de validité des modèles laminaires et turbulents n'est par conséquent pas bien définie. Idéalement, il faudrait être capable de déterminer les conditions d'écoulement pour lesquelles la couche limite est laminaire ou turbulente, afin d'appliquer un modèle de couche limite adéquat aux conditions pour estimer le débit.

Cette étude a pour objectif de déterminer les causes de la transition de couches limites à l'œuvre dans les tuyères soniques et ainsi progresser dans la modélisation de la transition pour améliorer les modèles prédictifs de débitmétrie. Par ailleurs, une meilleure compréhension des mécanismes physiques permet le développement de nouveaux types de tuyères, toujours dans l'objectif de fiabiliser et d'améliorer la précision des estimations de débit.



---

 REVUE DE LA LITTÉRATURE
 

---

Cette revue de la littérature est scindée en trois sections. La première section décrit l'écoulement dans les tuyères de débitmétrie et les observations expérimentales ayant mis en avant la transition de couches limites. La deuxième section s'attache à présenter les outils permettant d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques, qui sont employés pour étudier la transition laminaire-turbulente de couche limite. La troisième section présente quelques études théoriques de transition en lien avec les couches limites de tuyère, permettant de dégager les principaux mécanismes physiques à l'origine de la transition et les caractéristiques importantes à prendre en compte pour cette étude.

## 1.1 LES TUYÈRES SONIQUES DE DÉBITMÉTRIE

## 1.1.1 Fonctionnement

*Tuyère et amorçage*

Une tuyère sonique est un tube dont la section initiale se contracte dans *le convergent* jusqu'à une section minimale, *le col*, puis finit par une section divergente, le *divergent*, tel qu'illustré sur la figure 1.1.

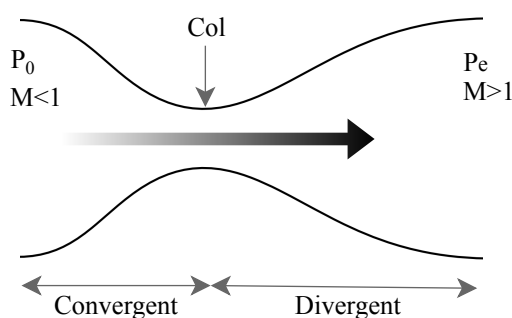


FIGURE 1.1 – Tuyère convergente-divergente supersonique. L'écoulement se fait de gauche à droite.

Le gaz est forcé dans la tuyère par un différentiel entre la pression totale en amont  $P_0$  et la pression statique en aval  $P_e$  de la tuyère. En prenant la pression en aval constante et

inférieure à la pression en amont, l'écoulement est forcé dans la tuyère par le convergent et sa vitesse augmente par conservation du débit, tandis que sa pression et sa densité diminuent, par conservation de l'énergie. Si le différentiel de pression est suffisamment important, l'écoulement atteint la vitesse du son au col de la tuyère, on le qualifie alors de sonique. On dit alors que la tuyère est amorcée. Pour que l'amorçage puisse s'effectuer, le rapport de pression doit respecter la condition

$$\frac{P_c}{P_0} \leq \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (1.1)$$

avec  $P_c$  la pression statique au col de la tuyère et  $\gamma$  le coefficient adiabatique du gaz considéré. Pour de l'air, le rapport de pression théorique pour obtenir une tuyère amorcée est  $P_c/P_0 = 0.528$ . Dans le cas où l'écoulement est supersonique dans la partie divergente, la pression  $P_e$  à la fin de la tuyère dépend du rapport entre la surface de la section au col et de la section où est évaluée  $P_e$ .

Dans le cadre des écoulements compressibles, la vitesse est exprimée par le nombre de Mach

$$M = u/c = \frac{u}{\sqrt{\gamma \mathcal{R} T}}, \quad (1.2)$$

avec  $u$  la vitesse du fluide,  $c$  la vitesse du son, qui peut être exprimée à l'aide de la température par  $c = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}$  avec  $\mathcal{R}$  la constante spécifique du gaz considéré. Dans une tuyère amorcée supersonique, l'écoulement est subsonique  $M < 1$  en amont du col, sonique  $M = 1$  au col et supersonique  $M > 1$  dans son divergent.

#### *Estimation du débit*

Pour utiliser une tuyère sonique comme organe de débitmétrie, il se doit de calculer le débit massique de gaz qui circule au sein de la tuyère. Il s'exprime fondamentalement par

$$\dot{m} = \rho u A, \quad (1.3)$$

avec  $\rho$  et  $u$  la densité et la vitesse de l'écoulement, estimés à une section de surface  $A$  dans la tuyère. Pour évaluer la densité et pouvoir estimer le débit, on utilise les relations de Saint-Venant et Wantzel (1839) que l'on obtient en faisant l'hypothèse que le fluide est non visqueux, que l'écoulement est isentropique et que le gaz peut être considéré thermodynamiquement parfait. Dans ce contexte, la densité et la pression du fluide peuvent être exprimées en fonction du nombre de Mach par les *relations isentropiques* :

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}}, \quad (1.4)$$

$$P = P_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (1.5)$$

avec  $\rho_0$  la densité totale de l'écoulement, qui peut être estimée à partir de l'équation d'état  $P_0 = \rho_0 \mathcal{R} T_0$ . À partir de ces relations, l'expression pour le débit, équation (1.3), peut s'exprimer par

$$\dot{m} = A \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{\mathcal{R}}} M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (1.6)$$

Dans le cas d'une tuyère supersonique, cette équation peut être simplifiée en considérant l'écoulement au col lorsque la section  $A$  est minimale et  $M = 1$ . Le débit d'une tuyère peut alors s'exprimer par

$$\dot{m}_{th} = A_c \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{\mathcal{R}}} \left( \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (1.7)$$

avec  $A_c$  la section au col de la tuyère. La découverte de cette formulation a été importante pour les procédés industriels, puisqu'elle met en avant que le débit peut être calculé à partir des simples mesures de la pression totale, de la température totale et de la section au col de la tuyère, et ce, à partir d'une formule simple à mettre en œuvre. Cela signifie également que le débit massique peut être simplement contrôlé en ne faisant varier que les grandeurs totales en amont de la tuyère.

Dans la pratique, cette formulation fait intervenir un certain nombre de simplifications qui engendrent une différence entre le calcul du débit théorique et le débit réel. D'une part, l'équation (1.7) indique que le débit est uniquement dépendant de l'écoulement au col de la tuyère. D'autre part, le passage de l'équation (1.6) à l'équation (1.7) suppose que l'écoulement au col de la tuyère est parfaitement uniforme et que le nombre de Mach est à l'unité dans toute la section. Dans la réalité, la viscosité du gaz entraîne le développement d'une couche limite proche de la paroi, une région où l'écoulement est lent. En proche paroi au col de la tuyère, il y aura donc un déficit de débit par rapport à ce qui est prédit par l'équation (1.7). De plus, le rayon de courbure de la paroi au col de la tuyère entraîne des effets centrifuges sur l'écoulement au col de la tuyère, et il n'est pas possible de considérer que le nombre de Mach est parfaitement à l'unité dans toute la section  $A_c$ . Il faut donc s'intéresser au détail de l'écoulement au col pour pouvoir estimer correctement le débit d'une tuyère.

### 1.1.2 Tuyères pour la débitmétrie

#### Géométries

La norme ISO9300 (2005) régit le principe d'utilisation et les tolérances dimensionnelles des tuyères pour l'usage comme débitmètre de gaz à haute pression. Il existe deux types de tuyères de débitmétrie utilisées comme références, nommées tuyère à col toroïdale et tuyère à col cylindrique.

La première est une tuyère axisymétrique avec une section convergente en arc-de-cercle se prolongeant jusqu'au divergent de la tuyère puis finissant par une partie divergente

conique. Cette tuyère est présentée sur la figure 1.2. Le rayon du convergent  $R$  est généralement de deux fois le diamètre du col  $D$ , le diamètre du tuyau d'acheminement du gaz doit être supérieur à quatre fois le diamètre du col  $D_p > 4D$ . Le demi-angle du divergent  $\alpha$  est compris entre  $2.5$  et  $6^\circ$ .

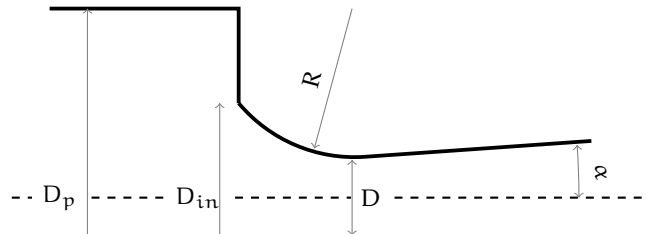


FIGURE 1.2 – Tuyère toroïdale ISO9300. L'écoulement se fait de gauche à droite.

Le convergent de la tuyère démarre à la position verticale pour laquelle l'intersection du convergent et du plan d'entrée forme un cercle ayant un diamètre de  $D_{in} = 2.5D$ .

La seconde tuyère possède un convergent ayant un rayon égal au diamètre  $R = D$ , un col cylindrique de longueur d'un diamètre au bout duquel se trouve une partie divergente conique de demi-angle  $\alpha$  entre  $3$  et  $4^\circ$ . Cette tuyère est présentée sur la figure 1.3. La connexion entre le divergent et le col cylindrique de la tuyère présente un angle vif. Le diamètre du tuyau d'acheminement du gaz doit respecter la même condition que précédemment, soit  $D_p > 4D$ .

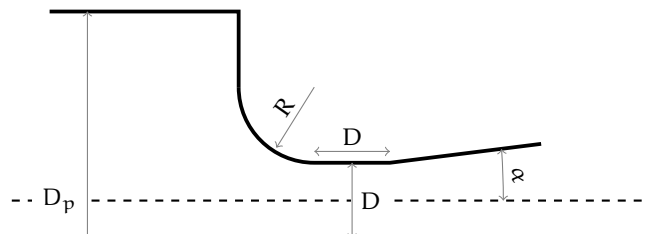


FIGURE 1.3 – Tuyère à col cylindrique ISO9300. L'écoulement se fait de gauche à droite.

Ces choix de géométries ne sont pas anodins, chaque détail répond à des attentes précises :

- La section divergente, ou encore diffuseur, a un angle de divergence  $\alpha$  relativement faible. Dans la pratique, l'utilisation d'un divergent long et avec un angle de divergence faible permet de créer un effet d'hystérésis. Lorsqu'une tuyère est correctement usinée et amorcée, il est possible d'observer des régimes d'écoulement sonique pour des rapports de pression jusqu'à  $P_e/P_0 \approx 0.95$  (Park et al., 2001 ; Smith et Matz, 1962). Cette hystérésis facilite l'utilisation des tuyères lors de procédures de calibration, en rendant possible l'établissement d'un régime d'écoulement sonique même avec un faible rapport de pression amont/aval.
- Un rapport de section  $D_p/D$  élevé permet de s'assurer que l'écoulement amont est à faible vitesse. Ainsi, les mesures de pression et température dans la section  $D_p$  sont

automatiquement associées à la mesure de la pression totale  $P_0$  et la température totale  $T_0$ , car le nombre de Mach  $y$  est faible ( $M \ll 1$ ).

- Le rayon du convergent  $R$  le plus petit possible permet de créer une forte accélération dans la tuyère. La couche limite au col de la tuyère influençant le débit réel de la tuyère, avec un gradient de pression favorable important on s'assure que la couche limite soit la plus fine possible au col de la tuyère, afin que celle-ci ait le moins d'influence possible sur le débit de la tuyère.

La littérature ne mentionne pas explicitement la raison de la co-existence de ces deux types de tuyère. Il semble raisonnable de penser que l'émergence de ces deux tuyères soit le résultat de la recherche et l'usage de plusieurs géométries simultanément (il est fait état de ces multiples géométries dans la revue de (Arnberg, 1962)), et que le standard ISO9300 s'est accommodé des géométries dont un certain nombre de résultats expérimentaux prouvent la répétabilité et la fiabilité des mesures. En effet, l'usage de ces tuyères pour la débitmétrie de précision est conditionné à la prise en compte des phénomènes listés plus haut, au travers d'un coefficient unique à chaque type de tuyère, que chacun doit pouvoir reproduire de manière fiable et à moindre coût.

Dans un premier temps, cette bibliographie est restreinte aux tuyères à col toroïdal. Le cas particulier des tuyères à col cylindrique sera traité à part, dans le chapitre 6 du manuscrit.

#### *Coefficient de décharge*

Pour quantifier l'écart entre le débit massique réel et celui obtenu théoriquement par l'équation (1.7), on introduit le coefficient de décharge

$$C_d = \frac{\dot{m}_{exp}}{\dot{m}_{th}}, \quad (1.8)$$

avec  $\dot{m}_{exp}$  le débit massique réel obtenu expérimentalement sur des bancs de calibration. La valeur du coefficient de décharge est majoritairement influencée par la couche limite qui se développe sur les parois des tuyères et est donc idéalement représenté comme une fonction du nombre de Reynolds

$$Re_t = \frac{\rho_t u_t D}{\mu_0}, \quad (1.9)$$

où  $\rho_t$  est la densité au col de la tuyère,  $u_t$  la vitesse au col de la tuyère et  $\mu_0$  la viscosité évaluée aux conditions d'arrêt, c'est-à-dire à  $T_0$ . Un exemple de courbe de calibration issue de l'interpolation de données expérimentales obtenue par Ishibashi (2015) est présenté sur la figure 1.4

Le débit réel d'une tuyère est toujours inférieur au débit théorique calculé par l'équation (1.7). Pour les nombres de Reynolds et la tuyère étudiés sur la figure 1.4, le débit réel est inférieur de 0.5 à 1 % par rapport au modèle théorique. Cet écart peut paraître faible dans l'absolu, mais il devient considérable lorsqu'il est appliqué à la mesure de millions de  $m^3$  de gaz naturel.

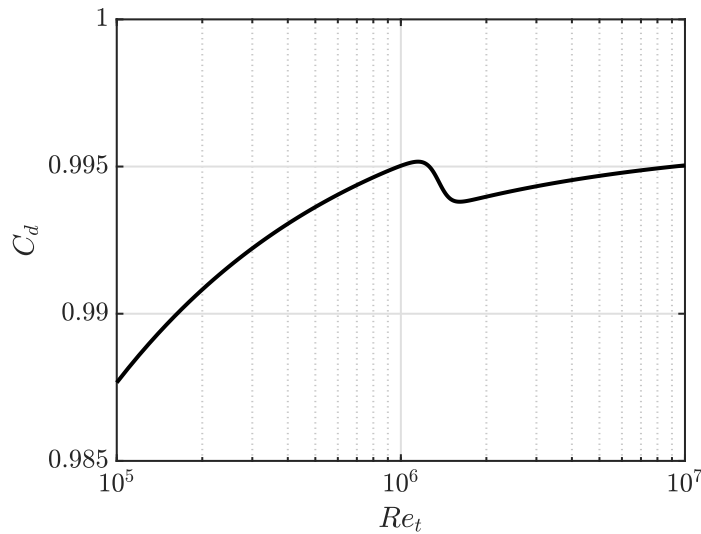


FIGURE 1.4 – Coefficient de décharge pour une tuyère toroïdale ISO9300  $R/D = 2$ , courbe obtenue par interpolation de données expérimentales, d'après Ishibashi (2015).

Pour étudier plus précisément les variables en jeu dans la formation du coefficient de décharge, il est généralement divisé en deux contributions (Stratford, 1964)

$$C_d = 1 - C_d^v - C_d^i, \quad (1.10)$$

avec  $C_d^v$  la contribution visqueuse due à la présence de la couche limite et  $C_d^i$  la contribution des effets non visqueux, due à courbure de la tuyère au col.

La contribution des effets non visqueux a été étudiée par de nombreux auteurs (Cuffel et al., 1969b; Hall, 1962; Kliegel et Levine, 1969b; Oswatitsch et Rothstein, 1949; Sauer, 1947; Stratford, 1964) et est reconnue comme étant l'effet de la force centrifuge sur l'écoulement au col de la tuyère. La force centrifuge, due à la courbure de la paroi, déforme la ligne sonique au col en créant une dépression proche de la paroi et une surpression au centre de la tuyère. Ainsi, dans le plan du col de la tuyère, le nombre de Mach est supérieur à 1.0 proche de la paroi et inférieur à 1.0 au centre de la section. Dans ces conditions, l'écoulement au col de la tuyère n'est donc pas uniformément sonique, et l'équation (1.7) n'est plus directement applicable. Cette contribution est ainsi dépendante du rayon de courbure de la tuyère au col, mais est indépendante du nombre de Reynolds. Pour une tuyère avec un col en arc-de-cercle  $R/D = 2$ , tel que présenté sur la figure 1.4, il est estimé que la contribution des effets non visqueux est constante et d'environ  $C_d^i \approx 0.0015$  (Stratford, 1964).

Une avancée majeure pour la prise en compte de la couche limite a été réalisée dans l'étude de Stratford (1964), dans laquelle il est proposé un modèle de couches limites laminares et turbulentes calculées par méthode intégrale. L'effet de la variation de la couche limite pour les deux régimes est résumé sur la figure 1.5. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le coefficient de décharge augmente car la couche limite au col de

la tuyère devient plus fine. Le modèle de couche limite permet de mettre en avant que la diminution du coefficient de décharge entre  $Re_t = 1 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 2 \cdot 10^6$  visible sur la figure 1.4 est dû à la transition laminaire turbulente de la couche limite. Dans les faits, les modèles de couche limite permettent de mettre en avant que pour un nombre de Reynolds de  $Re_t = 1 \cdot 10^6$ , l'épaisseur de déplacement de la couche limite laminaire est plus petite que celle de la couche limite turbulente, causant une diminution du coefficient de décharge localisée au moment de la transition laminaire-turbulente observée sur les coefficients de décharge obtenus expérimentalement.

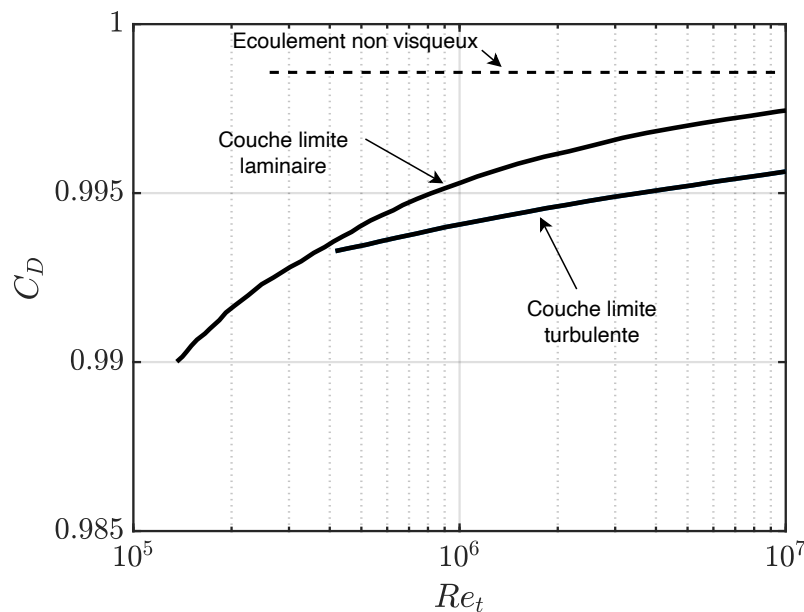


FIGURE 1.5 – Évolution du coefficient de décharge pour une tuyère toroïdale  $R/D = 2$  en fonction du régime d'écoulement de la couche limite. Adapté de Stratford (1964).

### Modélisation

Il est possible d'obtenir les courbes de coefficient de décharge pour chaque tuyère sur des installations dédiées à la calibration. C'est cependant un processus long et coûteux qui pourrait idéalement être remplacé par de la modélisation. De plus, étudier et comprendre le comportement aérodynamique des tuyères permet d'augmenter la confiance lors de l'usage des tuyères et des modèles employés pour la modélisation du débit. La compréhension des phénomènes physiques permet également de guider les choix techniques qui sont amenés à faire évoluer la norme ISO9300 (2005), et ainsi améliorer les performances des mesures de débit.

C'est dans ce contexte que les études théoriques ont émergé pour modéliser les effets de viscosité et de géométrie dans les tuyères. En comparant des modèles théoriques de coefficients de décharge et des données de calibrations réalisées sur un banc de précision, il a été montré récemment par Ishibashi (2015) que la combinaison des modèles de Geropp

(1971) pour la couche limite laminaire et Hall (1962) pour la contribution non visqueuse permet de modéliser avec fidélité le coefficient de décharge. Des études récentes, tel que celle de Lambert et al. (2021), montrent que la contribution de la couche limite turbulente est très variable suivant l'état de surface de la tuyère et que des études supplémentaires sont nécessaires pour modéliser correctement ce régime d'écoulement.

Indépendamment de la qualité des modèles de couches limites, la question du nombre de Reynolds auquel intervient la transition laminaire-turbulente se pose, afin de déterminer dans quel régime de fonctionnement chaque modèle doit ou peut être appliqué.

### 1.1.3 La transition de couches limites dans les tuyères

Les études expérimentales concernant la transition dans les tuyères sont plutôt rares, car c'est généralement un régime qui est évité pour ne pas avoir à en tenir compte. On résume ici les quelques mesures et prédictions de transition réalisées dans des tuyères, qu'elles soient pour la débitmétrie ou pour d'autres applications.

En se basant sur le nombre de Reynolds de la couche limite, Stratford (1964) suggérait que la transition n'a pas lieu avant un nombre de Reynolds  $Re_t > 10^7$  pour une tuyère lisse avec  $R/D = 2$  et un écoulement sans perturbation. Sans expérience de contrôle, cette prédiction n'est donnée que sur la base de la conscience, déjà à l'époque, qu'un gradient de pression favorable a tendance à retarder l'apparition de la transition, et que celle-ci devait se passer à des nombres de Reynolds plus importants.

La transition a été détectée expérimentalement à travers l'estimation du coefficient de décharge pour plusieurs configurations. Smith et Matz (1962) ont réalisé des mesures de coefficient de décharge pour une tuyère avec  $R/D = 1.8$  et  $D_{in}/D = 2.4$ . Il a été trouvé que la couche limite est complètement laminaire entre  $Re_t = 0.4 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 0.68 \cdot 10^6$  et complètement turbulente entre  $Re_t = 2.71 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 5.45 \cdot 10^6$ . Pour une tuyère similaire à  $R/D = 1.8$  et  $D_{in}/D = 2.4$ , Arnberg et al. (1974) ont observé une transition à  $Re_t = 2.2 \cdot 10^6$ . Pour une tuyère  $R/D = 2.3$  et ne présentant pas de discontinuité dans le convergent, il est reporté dans l'étude de Szaniszló (1975) un régime transitionnel pour des nombres de Reynolds entre  $Re_t = 0.8 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 1 \cdot 10^6$ . Ces quelques données indiquent que la transition est détectée pour des nombres de Reynolds variables autour de  $Re_t \approx 1 \cdot 10^6$  pour des tuyères avec  $R/D \approx 2$ .

Des mesures directes de couches limites dans des tuyères planes ont également été réalisées. L'étude de Sibulkin (1957) concernant les couches limites turbulentes au col des tuyères reporte, à l'aide de mesures au tube de Pitot dans la couche limite, que dans des tuyères planes avec  $R/D = 13.6$ ,  $R/D = 23.5$  et  $R/D = 37$ , aux nombres de Reynolds respectifs  $Re_t = 2.3 \cdot 10^6$ ,  $Re_t = 0.8 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 0.49 \cdot 10^6$ , les couches limites sont trouvées turbulentes. En utilisant une tuyère pour simuler l'écoulement autour d'un corps émoussé à haute vitesse, Demetriades (1981) a réalisé des mesures de la transition dans une tuyère plane  $R/D = 16$ , qu'il détecte à l'aide d'un film chaud en surface de la tuyère. Pour une tuyère à surface "lisse", la transition au col de la tuyère débute à partir



de  $Re_t = 0.16 \cdot 10^6$ . De plus, il montre que la transition démarre dans le divergent puis remonte dans la tuyère quand le nombre de Reynolds augmente. Pour des nombres de Reynolds suffisamment importants, la transition a lieu dans le convergent de la tuyère. En augmentant la rugosité de la surface, la transition apparaît de manière similaire, mais à des nombres de Reynolds plus faibles. Demetriades (1981) montre également qu'il existe une taille de rugosité critique, relative à la taille de la couche limite, pour que celle-ci ait une influence sur la transition de couche limite. La taille relative de la rugosité par rapport à la couche limite n'est pas disponible, mais il est fait mention d'une couche limite dont l'ordre de grandeur de l'épaisseur vaut 0.75mm pour des pics de rugosité allant de 0.1mm à 0.06mm, soit environ 10 à 0.1%. Il est montré que la transition est dépendante de la rugosité de surface, et que celle-ci se déroule à plus haut nombre de Reynolds pour les rugosités les plus petites. Finalement, il est indiqué que le processus de transition se déroule sur une longueur d'approximativement 30 fois l'épaisseur de la couche limite.

Dans le rapport AGARD (1997) portant sur la précision des débitmètres soniques et de la poussée des tuyères de moteur-fusée, il est mentionné (à propos de la transition de couche limite) : *"Ce qui peut se passer entre, disons,  $Re_t = 0.5 \cdot 10^6$  et environ  $Re_t = 3.5 \cdot 10^6$  est plus difficile à prévoir et peut dépendre sérieusement des détails des conditions en amont. [...] Des expériences de base doivent être réalisées à ces nombres de Reynolds avec différentes géométries et écoulements en amont [...]. Il sera souhaitable d'aller au-delà des comparaisons "simples" avec une tuyère de référence et d'inclure tous les moyens possibles d'observation de la couche limite. Cela permettrait de répondre à d'importantes questions pratiques sur la conception des débitmètres [...] Une compréhension approfondie de ces phénomènes simplifierait aussi grandement le fonctionnement des essais, augmenterait la confiance et, par conséquent, réduirait le coût global de ces processus d'étalonnage fastidieux."*<sup>1</sup>. Ce constat est établi en ayant observé des données expérimentales de calibration de coefficient de décharge pour les tuyères. Il montre que non seulement le nombre de Reynolds de transition n'est pas fixe, mais que la plage sur laquelle la transition est observée est large et qu'il est nécessaire d'étudier les paramètres ayant une influence sur la transition pour tenter de mieux prédire l'occurrence de la transition dans les tuyères.

La première étude concernant directement l'influence de la géométrie de la tuyère sur le coefficient de décharge a été réalisée par Ishibashi (2015). Dans un premier temps, c'est l'influence de la variation de R/D sur le coefficient de décharge et la transition qui est étudiée, en réalisant la calibration de plusieurs tuyères entre  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 2 \cdot 10^6$ . La mesure de la transition est ici indirecte, puisqu'elle est simplement traduite par la variation du coefficient de décharge lorsque la couche limite transitionne au col de la tuyère ou en amont de celui-ci, modifiant ainsi le débit. Les tuyères testées ont des convergents de  $R/D = [0.5; 0.8; 1; 1.1; 1.2; 1.3; 1.5; 1.8; 2.5]$ . Il est montré que pour les nombres de Reynolds étudiés, seule la tuyère au plus grand rayon de courbure  $R/D = 2.5$  transitionne aux alentours de  $Re_t = 1 \cdot 10^6$ . Pour les autres tuyères, la transition n'est pas

---

1. Traduit de l'anglais.

atteinte pour les nombres de Reynolds testés. Cela semble indiquer que réduire le rapport  $R/D$  retarde l'apparition de la transition.

Dans un second temps, Ishibashi (2015) montre aussi que la forme de la tuyère en amont du col joue un rôle non négligeable sur la transition, en comparant le coefficient de décharge de tuyères ayant le même rayon de courbure  $R/D = 2$  avec trois types de convergent : un convergent en quart-de-cercle continu, un convergent avec un arc-de-cercle tronqué et un convergent en arc-de-cercle tronqué plus un obstacle en amont, tel qu'illustré sur la figure 1.6.

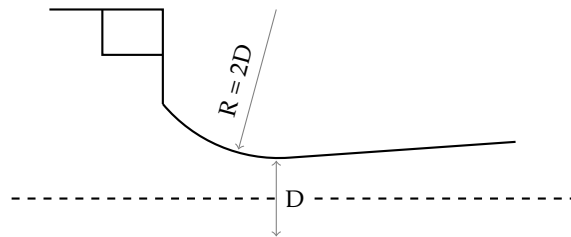


FIGURE 1.6 – Illustration des tuyères avec convergent en arc-de-cercle tronqué et la présence d'un obstacle testés par Ishibashi (2015).

Les courbes d'étalonnages obtenues pour les trois tuyères sont présentées sur la figure 1.7. Dans le cas du convergent en quart-de-cercle, la transition n'est pas atteinte, malgré

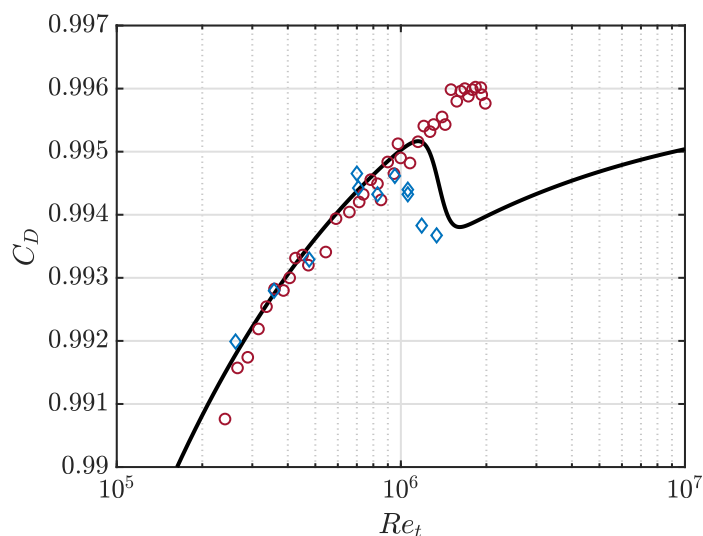


FIGURE 1.7 – Influence de la géométrie en amont de la tuyère sur le coefficient de décharge.  $\circ$  : convergent en quart-de-cercle ;  $-$  : convergent tronqué ;  $\diamond$  : convergent tronqué et obstacle. Données issues de Ishibashi (2015).

un nombre de Reynolds maximal de  $Re_t = 2 \cdot 10^6$ , et lorsque le convergent est tronqué, le début de la transition a lieu à environ  $Re_t \approx 1.1 \cdot 10^6$ . Lorsque l'obstacle est introduit, la transition débute à  $Re_t \approx 0.8 \cdot 10^6$ . On peut noter que la valeur du coefficient de décharge, lorsque la couche limite est laminaire, reste inchangée. Le développement de la couche limite n'a donc pas été sensible à ces modifications. L'introduction des diverses formes de convergents a simplement changé le nombre de Reynolds de transition. Cela illustre la

sensibilité de la couche limite aux perturbations qui peuvent être introduites en amont de la tuyère.

#### 1.1.4 Résumé

Le développement de couches limites dans les tuyères influe sur leur coefficient de décharge. En effet, l'épaisseur de déplacement de la couche limite contribue à réduire virtuellement la section de passage de l'écoulement sonique au col de la tuyère. L'évolution du coefficient de décharge avec le nombre de Reynolds peut être modélisé en connaissance du régime laminaire ou turbulent dans lequel se trouve la couche limite. Il est donc nécessaire de connaître le nombre de Reynolds auquel survient la transition laminaire-turbulente pour modéliser correctement le coefficient de décharge.

La transition laminaire-turbulente au col des tuyères est observée à des nombres de Reynolds variables suivant la géométrie de la tuyère et les conditions expérimentales dans lesquelles les études sont menées. Il n'existe pas suffisamment d'information dans la littérature pour pouvoir conclure sur des tendances dans l'occurrence de la transition dans les tuyères, peu d'efforts ayant été investis pour tenter de comprendre les paramètres influençant la transition. À notre connaissance, il n'y a ce jour pas d'étude théorique concernant la transition des couches limites de tuyères alors qu'un panel de connaissances et d'outils existe pour décrire la transition des couches limites canoniques. On s'intéressera particulièrement à l'étude de la transition de couches limites compressibles, soumise à un gradient de pression favorable et sur paroi courbe, telle que celles rencontrées au col des tuyères de débitmétrie.

## 1.2 NOTION DE STABILITÉ

L'étude de la transition à la turbulence a débuté au XIX<sup>e</sup> siècle avec notamment les études théoriques de Stokes (1843), Rayleigh (1879, 1887, 1895) et Kelvin (1888). La transition à la turbulence a été étudiée expérimentalement dans la fameuse expérience de Reynolds (1883) sur les écoulements hydrodynamiques dans un canal et par Tyndall (1867) sur la stabilité des flammes soumises à des ondes sonores. Un premier cadre mathématique pour les études de la stabilité a été introduit par Orr (1907). Ces travaux fondateurs, parmi d'autres, ont donné naissance à un large panel de théories et d'études dont est issu un corpus de connaissances et d'outils permettant d'étudier la stabilité des écoulements de toutes sortes.

Dans cette section, je présente une introduction générale aux formulations permettant d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques, utiles pour la compréhension de cette thèse. Une fois les concepts introduits, les résultats de la littérature ayant un intérêt pour l'étude de la stabilité des couches limites de tuyères sont présentés.

### 1.2.1 Systèmes linéaires pour les petites perturbations

L'analyse de la stabilité d'un système dynamique consiste à observer la réaction de celui-ci lorsqu'il est soumis à des perturbations. Si le système a tendance à s'éloigner de son point d'équilibre lorsqu'il est soumis à ces perturbations, il sera dit instable. S'il revient naturellement dans sa position d'équilibre, il sera dit stable.

Pour réaliser cette analyse, on considère dans un premier temps un système dynamique quelconque qui régit l'évolution d'un vecteur d'état  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , dans l'espace  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et dans de temps  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{D}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)), \quad (1.11)$$

avec  $\mathcal{D}$  l'opérateur non-linéaire du système qui peut, par exemple, représenter les équations de Navier-Stokes. On suppose que le vecteur d'état peut être décomposé de la manière suivante

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t), \quad (1.12)$$

avec  $\mathbf{q}'$  une composante de perturbation instationnaire et  $\bar{\mathbf{q}}$  une solution stationnaire du système dynamique, c.-à-d.  $\mathcal{D}(\bar{\mathbf{q}}) = 0$ . Dans la suite de ce manuscrit, le point fixe  $\bar{\mathbf{q}}$  sera également nommé *champ de base*. Dans le cadre de l'étude de la stabilité, on s'intéresse à la réaction du système dynamique à des petites perturbations  $\|\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)\| \ll 1$ , de telle sorte que les termes quadratiques des fluctuations puissent être négligés. En injectant (1.12) dans (1.11), on obtient le système dynamique linéarisé

$$\frac{\partial \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)), \quad (1.13)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire résultant de la linéarisation de  $\mathcal{D}$  autour du point fixe  $\bar{\mathbf{q}}$ . L'équation (1.13) dicte alors l'évolution des petites perturbations  $\mathbf{q}'$  autour de l'état de base  $\bar{\mathbf{q}}$ . C'est l'étude de ce nouveau système linéaire, que l'on peut désormais résoudre, qui permet de déterminer la stabilité du système dynamique autour du point fixe  $\bar{\mathbf{q}}$ .

### 1.2.2 Stabilité modale

#### *Stabilité temporelle globale*

Pour déterminer la stabilité du système linéarisé, on suppose que les perturbations peuvent s'écrire sous la forme de modes normaux

$$\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (1.14)$$

avec  $\omega$  la pulsation. L'équation (1.13) est alors reformulée sous la forme d'un problème aux valeurs propres, exprimé sous forme matricielle par

$$-i\omega\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}). \quad (1.15)$$

avec  $\mathbf{L}$  la forme matricielle de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . La résolution de ce problème aux valeurs propres conduit à l'obtention d'une matrice de valeurs propres  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  associées aux vecteurs propres  $\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_n]$ . Le système est dit globalement instable si il existe une ou plusieurs valeurs propres avec une partie imaginaire positive

$$\Im(\omega) > 0, \quad (1.16)$$

et le système est dit globalement stable si toutes les valeurs propres ont une partie imaginaire négative. L'analyse des vecteurs propres renseigne sur le support spatial des fonctions propres associées aux modes propres. Il est ainsi possible d'observer quelle région de l'écoulement est concernée par une instabilité, quand celle-ci existe.

Un système peut être globalement stable, mais présenter des instabilités convectives à l'échelle locale (Huerre et Monkewitz, 1985, 1990) qui sont susceptibles de provoquer la transition à la turbulence. Cette information est contenue dans les fonctions propres du système. La formulation d'un problème de stabilité globale est donc très complète. Cependant, la résolution de ce problème est généralement très coûteuse, car elle suppose à la fois de pouvoir fournir un champ de base  $\bar{\mathbf{q}}$  en trois dimensions, mais également de résoudre numériquement un problème aux valeurs propres de grande dimension. En supposant que le vecteur d'état contienne  $N_q$  variables, la taille de la matrice  $\mathcal{L}$  est de  $N_x \times N_y \times N_z \times N_q$ , conduisant rapidement à un coût de calcul important. Pour des écoulements qui présentent des instabilités convectives, il peut être plus intéressant d'étudier la stabilité à l'échelle locale. Il est possible de considérer la stabilité locale d'un écoulement plutôt que le système global lorsque celui-ci possède deux directions homogènes et sera alors qualifié qu'écoulement parallèle. Lorsque l'une des deux directions n'est pas homogène, mais qu'elle varie lentement (par rapport aux phénomènes étudiés), l'écoulement est faiblement non-parallèle et peut être traité à l'aide des équations de Navier-Stokes parabolisées (Herbert, 1997). Ces méthodes permettent d'étudier la stabilité d'un système à moindre coût, tout en permettant d'obtenir une vision détaillée des mécanismes d'instabilité. Par la suite, on s'intéresse à la stabilité locale des écoulements.

### *Stabilité temporelle locale*

Dans certains cas, il est possible de supposer que l'écoulement est homogène dans les deux directions de l'espace  $(x, z)$  permettant de redéfinir la forme des perturbations par

$$\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y})e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad (1.17)$$

avec  $\alpha$  le nombre d'onde spatial suivant la direction  $x$  et  $\beta$  le nombre d'onde spatial suivant la direction  $z$ . Ici, on considère que la direction  $y$  n'est pas homogène. En prescrivant des valeurs de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ , on retrouve un problème aux valeurs propres

$$-i\omega\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}) = \mathcal{L}_1(\alpha, \beta)\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}), \quad (1.18)$$

avec  $\mathcal{L}_1$  l'opérateur linéarisé autour du champ de base local  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{y})$  et qui est maintenant dépendant des nombres d'ondes  $\alpha$  et  $\beta$ . Les conditions pour obtenir un écoulement stable/instable sont les mêmes que précédemment, mais on parlera cette fois-ci de stabilité locale.

### Stabilité spatiale locale

Pour un certain nombre de problèmes pratiques, il est plus approprié d'étudier l'évolution spatiale des perturbations. Pour ce faire, les perturbations sont reprises sous forme de modes normaux comme à l'équation (1.17), mais cette fois-ci en prescrivant les valeurs de  $(\beta, \omega) \in \mathbb{R}$ , ce qui conduit à résoudre pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Cela donne le problème aux valeurs propres polynomial suivant

$$-i\omega\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}) = [\mathbf{A}_0(\beta) + \mathbf{A}_1(\beta)\alpha + \mathbf{A}_2\alpha^2]\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}), \quad (1.19)$$

avec  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  les matrices résultant de la linéarisation autour du champ de base local  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{y})$ . Comme pour les études temporelles, la résolution du problème aux valeurs propres renvoie les valeurs propres  $\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  et les vecteurs propres associés  $\hat{\mathbf{Q}}$ .

La stabilité associée à chaque valeur propre  $\alpha_n$  est plus difficile à déterminer dans le cadre spatial. Alors que dans un problème temporel la stabilité est associée au temps  $t$  qui ne s'écoule que dans une seule direction, la stabilité spatiale de chaque mode propre dépendra de sa direction de propagation dans l'espace, c'est-à-dire suivant  $x$  croissant ou  $x$  décroissant. La stabilité d'un mode sera alors donnée par

- Un mode qui se propage en  $x$  croissant est stable si  $\Im(\alpha) > 0$  et instable  $\Im(\alpha) < 0$ .
- Un mode qui se propage en  $x$  décroissant est stable si  $\Im(\alpha) < 0$  et instable  $\Im(\alpha) > 0$ .

Dans le cadre de la stabilité spatiale, il faudra donc dans un premier temps déterminer la direction de propagation de chaque mode.

### Caractérisation des ondes

À chaque combinaison de nombres d'ondes correspond une onde, qui est caractérisée le nombre d'onde

$$\vec{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

se propageant avec un angle  $\phi = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$ . La vitesse de phase de l'onde est donnée par

$$c_\phi = \frac{\omega}{\|\mathbf{k}\|}, \quad (1.21)$$

qui permet d'obtenir la vitesse du front de l'onde considérée. Pour étudier le sens de propagation d'une onde, on s'intéresse à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \|\mathbf{k}\|}. \quad (1.22)$$

La vitesse de groupe est aussi reconnue pour donner la vitesse de propagation de l'onde (Biot, 1957). Cela permet de caractériser le type d'ondes que l'on peut retrouver lors de la résolution des problèmes aux valeurs propres. Par exemple, une onde acoustique qui voyage à la vitesse du son,  $M = 1$ , dans un écoulement à la vitesse  $M_e$  aura une vitesse de groupe acoustique  $v_a^+ = M_e + 1$  si elle se propage dans le sens de l'écoulement et une vitesse de groupe acoustique  $v_a^- = M_e - 1$  si elle se propage dans le sens contraire de l'écoulement. Plus généralement, on aura

- Si  $v_g = M_e \pm 1$  on dira que l'onde est acoustique.
- Si  $v_g \in [M_e - 1, M_e[$  on dira d'une onde qu'elle remonte l'écoulement.
- Si  $v_g \in ]M_e, M_e + 1]$  on dira d'une onde qu'elle descend l'écoulement.
- Si  $v_g = M_e$  on dira d'une onde qu'elle est convectée par l'écoulement.

On peut alors utiliser la vitesse de groupe pour déterminer dans quel sens voyage une onde, et ainsi déterminer sa stabilité spatiale. Cependant, la vitesse de groupe donnée par l'équation (1.22) n'est correctement définie que pour des nombres d'ondes réels. Pour les modes propres ayant une partie imaginaire non-nulle, le sens de propagation d'un mode sera déterminé par le critère de Briggs-Bers (Bers, 1983; Briggs, 1964), qui sera détaillé dans le chapitre 4.

Le support spatial des fonctions propres  $\hat{q}$  renseigne également sur le type d'onde. Dans un écoulement de couche limite, une onde ayant du support à l'extérieur de la couche limite sera appelée *mode d'écoulement libre*, une onde qui aura du support dans la couche limite sera appelée *mode de couche limite*. La nature du mode peut être déterminée en regardant quelles sont les variables d'état de  $\hat{q}$  qui fluctuent. Pour un écoulement compressible, on pourra par exemple retrouver des modes dont les fluctuations principales sont les vecteurs vitesses (modes vorticaux et irrotationnels par exemple), tandis que d'autres seront des fluctuations de température (modes d'entropies).

### 1.2.3 Stabilité non modale

Plusieurs études ont relevé que la transition observée expérimentalement ne suit pas systématiquement les prédictions faites par la théorie de la stabilité linéaire modale. Dans ce contexte, il a été montré par Ellingsen et Palm (1975) qu'une perturbation dans un écoulement cisailé peut provoquer la croissance algébrique de perturbations dans l'écoulement, sans passer par un mécanisme de croissance modale. Par opposition aux instabilités modales, ce type de croissance est nommé *croissance non modale* ou encore *croissance algébrique*. Cette idée a été reprise par Landahl (1980), qui a montré que la croissance non modale de perturbation peut avoir lieu dans tous les écoulements cisailés

non visqueux, modalement stable ou instable, et que cette perturbation est différente de celle obtenue par l'analyse de stabilité modale. Contrairement aux types de perturbations obtenues par l'analyse de stabilité modale, l'instabilité n'est pas pilotée par un seul mode, mais une combinaison linéaire de plusieurs modes propres non orthogonaux. Il est montré qu'un mécanisme de croissance non modale dans les écoulements cisailés donne lieu à des perturbations de vitesse longitudinale, formant des stries de vitesse positive et négative. Cette perturbation naît par transport du champ de base cisailé par la présence vorticité dans le plan normal à la direction de l'écoulement et est nommée mécanisme de *lift-up*.

La formalisation de la théorie de la stabilité non modale est née avec les travaux ayant suivi (par exemple Butler et Farrell, 1992; Gustavsson, 1991; Reddy et Henningson, 1993; Trefethen et al., 1993), en montrant que le mécanisme de *lift-up* peut entraîner une forte croissance des perturbations dans une variété d'écoulements. Une revue de la théorie de croissance transitoire peut être retrouvée dans le livre de Schmid et Henningson (2001) et dans l'article de revue de Schmid (2007), dont on se sert ici pour donner quelques éléments sur la croissance non modale.

L'analyse modale ne s'intéresse qu'à chaque mode propre individuellement et à leur devenir asymptotique lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (ou  $x \rightarrow +\infty$  dans le cas des analyses spatiales). Cependant, dans le cas des équations de Navier-Stokes, et plus particulièrement pour les écoulements cisailés, l'opérateur linéarisé  $\mathcal{L}$  n'est pas orthogonal, donnant lieu à une base de vecteurs propres  $\hat{Q}$  non orthogonale (Reddy et Henningson, 1993). L'analyse de stabilité modale ne représente que l'évolution individuelle des modes normaux et ne traduit donc pas tout le potentiel de déstabilisation du système. Ainsi, il faut prendre en compte la combinaison linéaire des modes dans la base non orthogonale pour obtenir la dynamique complète du système. En effet, même lorsque les modes normaux vus précédemment sont asymptotiquement stables, la non-normalité de l'opérateur peut conduire à une croissance transitoire d'énergie à temps court. Ce phénomène est illustré sur la figure 1.8.

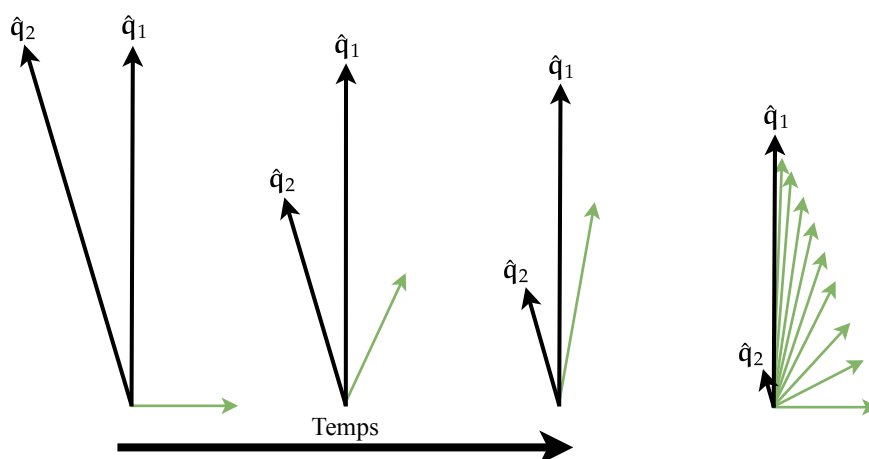


FIGURE 1.8 – Illustration du phénomène de croissance transitoire avec deux vecteurs non orthogonaux. Le vecteur en vert est la résultante de la composition  $\hat{q}_1$  et  $-\hat{q}_2$ . Même lorsque les vecteurs propres sont stables, la décroissance plus rapide de  $\hat{q}_2$  par rapport à  $\hat{q}_1$  conduit à faire croître l'amplitude de la résultante à temps court. Adapté de Schmid (2007).



L'étude de la croissance transitoire consiste à rechercher la perturbation initiale qui va provoquer le plus de croissance d'énergie à temps court. On cherche cette perturbation tel que le rapport entre l'énergie initiale à  $t = 0$  de la perturbation maximise l'énergie de celle-ci au temps  $t$ ,

$$G(t) = \max_{\mathbf{q}'(\mathbf{x},0)} \frac{\|\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)\|_E}{\|\mathbf{q}'(\mathbf{x}, 0)\|_E}, \quad (1.23)$$

où à chaque instant  $t$  correspond une perturbation initiale qui va maximiser le gain  $G(t)$ .

Comme précédemment, cette analyse peut être conduite de manière globale ou locale, suivant la manière dont le champ de perturbation  $\mathbf{q}'$  est exprimé. Il est également possible de réaliser une étude de croissance transitoire spatiale, bien que cela demande de prendre quelques dispositions concernant le sens de propagation de l'information (Andersson et al., 1999; Luchini, 2000; Reshotko et Tumin, 2000; Tumin et Reshotko, 2001). L'objectif n'est plus d'optimiser la perturbation au temps  $t$  (croissance transitoire temporelle), mais à la distance  $x$  (croissance transitoire spatiale). Le détail de la méthode pour le calcul de croissance transitoire est donné au chapitre 4.

#### 1.2.4 Stabilité secondaire

La croissance d'instabilité primaire dans l'écoulement n'est généralement pas la dernière étape avant l'apparition de la turbulence. Lorsque l'écoulement a subi une première phase de croissance modale de petites perturbations, ou alors de croissance transitoire, l'écoulement se trouve dans un nouvel état qui peut lui-même supporter de nouveaux types d'instabilités (Herbert, 1988). Il est possible d'étudier la stabilité de ce nouvel état en prenant comme point fixe un écoulement contenant les perturbations modales ou non modales. Cela constitue l'étude de la stabilité secondaire de l'écoulement.

#### 1.2.5 Perturbations extérieures

Il y a plusieurs chemins que peuvent emprunter les perturbations dans un écoulement pour conduire à la turbulence. La manière dont un écoulement va transitionner à la turbulence est variable suivant le niveau des perturbations auxquelles il est soumis. En général, lorsque le taux de turbulence de l'écoulement est faible, la transition est associée à la croissance exponentielle de mode instable. Ce taux de turbulence est généralement rencontré dans les souffleries dites silencieuses, conçues pour reproduire le taux de turbulence auquel est soumis un avion à son altitude de croisière. Pour un niveau de perturbation modéré, la croissance transitoire est généralement observée. Pour des taux de turbulences élevés, les perturbations dans l'écoulement activent directement les termes non-linéaires et que les analyses basées sur la stabilité linéaire ne sont plus valables. La transition à la turbulence se fait alors partout dans l'écoulement à partir du moment où les conditions

sont réunies pour que la turbulence puisse s'auto-entretenir (Andersson et al., 1999; Arnal, 1992).

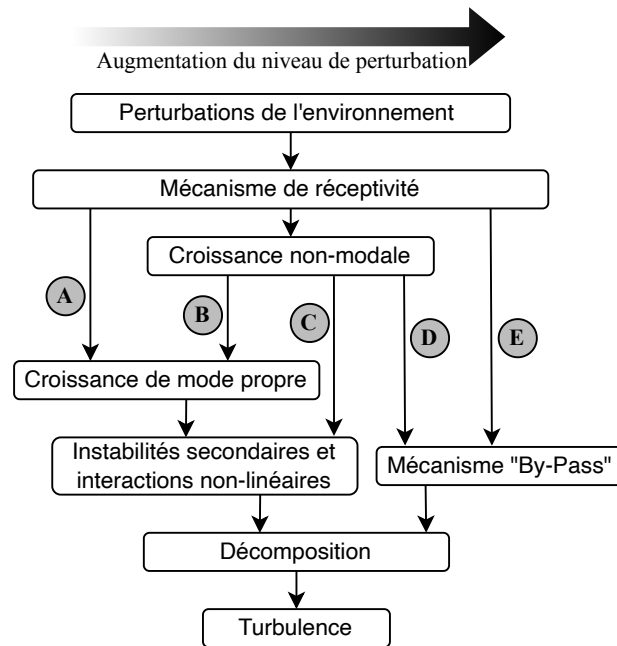


FIGURE 1.9 – Illustration des différents mécanismes pouvant conduire à la turbulence. Adapté de Fedorov (2011) et Morkovin et al. (1994).

Ces différents scénarios de transition sont résumés sur la figure 1.9. Le chemin **A** correspond à la croissance modale des modes instables dans un environnement dont les perturbations sont d'un niveau faible. Le chemin **B** illustre l'apparition de croissance transitoire due aux plus fortes perturbations de l'environnement. La croissance transitoire est ici faible et ne fait que moduler le taux de croissance modale des modes instables. Pour le chemin **C**, la croissance non modale est suffisamment importante pour directement faire émerger de nouveaux modes instables, qui sont donc des instabilités secondaires. Le chemin **D** implique une forte amplitude de la croissance non modale, conduisant directement à l'apparition d'interactions non-linéaires. Finalement, lorsque le niveau de perturbation de l'environnement est très important, l'ensemble des mécanismes sont contournés et les interactions non-linéaires dominant complètent le scénario de transition. Il faut noter que ces scénarios de transitions évoluent à mesure que la compréhension de la transition progresse, elle est donc amenée à être modifiée au cours des années à venir. On peut noter par exemple que Morkovin (1969) désignait la transition non modale comme "by-pass", avant qu'émerge la théorie de la croissance transitoire. On désigne aujourd'hui les mécanismes "by-pass" comme les scénarios de transition impliquant de fortes interactions non-linéaires, ne suivant donc pas la théorie de stabilité linéaire.

### 1.3 STABILITÉ DES COUCHES LIMITES

À notre connaissance, il n'existe pas d'étude de stabilité concernant les couches limites au col des tuyères soniques. Une revue de la littérature des différentes études ayant porté sur des couches limites pouvant présenter des aspects similaires à celles des tuyères, c'est-à-dire incluant les effets de compressibilité, de courbure et de gradient de pression favorable, est proposée. Cette bibliographie est notamment largement inspirée par les nombreuses études sur les corps émoussés en régimes supersoniques et hypersoniques, dont les couches limites au niveau de la pointe avant peuvent présenter les mêmes caractéristiques de courbure et gradient de pression dans un régime transsonique. Pour cette discussion, on considère une couche limite dont la direction principale de l'écoulement est suivant l'axe  $x$ , la direction transverse est suivant  $z$  et la direction normale à la paroi est suivant  $y$ .

#### 1.3.1 Transition modale

On s'intéresse dans un premier temps au cas canonique de la couche limite de plaque plane sans gradient de pression, appelée couche limite de Blasius (1908) incompressible. Cette couche limite supporte une instabilité visqueuse, dite onde de Tollmien-Schlichting (T.S.) (Schlichting, 1933 ; Tollmien, 1929). En accord avec le théorème de Squire (1933), qui démontre que pour les écoulements cisailés incompressibles les perturbations les plus instables sont planes, l'onde de T.S. est le plus instable à  $\beta = 0$  et ne devient instable qu'à partir d'un certain nombre de Reynolds. Un exemple de visualisation d'ondes de T.S. est

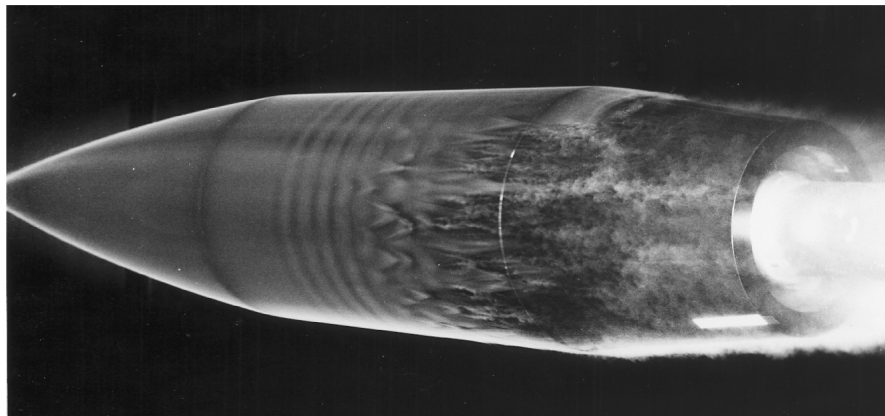


FIGURE 1.10 – Fumée dans l'écoulement autour d'un corps cylindrique montrant la transition naturelle de la couche limite. Les ondes de T.S. sont les bandes gris clair et foncé, qui sont plus loin tri-dimensionnalisées en formant des triangles avant de "breakdown" à la turbulence. Extrait de « [Stability and Transition](#) » (2013). Reproduit avec permission.

donné sur la figure 1.10, sur laquelle le développement, la tri-dimensionnalisation et le "breakdown" à la turbulence des ondes de T.S. sont visibles. La tri-dimensionnalisation correspond à une instabilité secondaire se développant sur les ondes de T.S..

Les effets de compressibilité ont été étudiés avec la version compressible de la couche limite de Blasius (Schlichting et Gersten, 2017b) par Mack (1975) et Mack (1984). Dans le cas d'une couche limite compressible, le mode de T.S. continu d'exister. Il reste le plus instable pour une onde plane jusqu'à  $M = 1$ , puis pour des ondes obliques,  $\phi = 55 - 60^\circ$  pour des nombres de Mach supérieurs à  $M = 1.6$  (Mack, 1975). De plus, il existe une classe de modes instables qui sont dus à l'existence d'un point d'inflexion généralisé<sup>2</sup> qui apparaît lorsque l'écoulement atteint un nombre de Mach suffisant ( $M > 2.2$ ). Ce sont des modes acoustiques piégés entre la paroi et la ligne sonique dans la couche limite (Fedorov, 2011; Mack, 1984).

Dans la littérature, l'ensemble de ces modes ont été initialement classifiés par Mack, et sont aujourd'hui appelés modes de Mack. La version compressible du mode de T.S. est le premier mode de Mack, les modes acoustiques qui apparaissent pour  $M > 2.2$  sont les modes suivant (second mode de Mack, etc...) et sont aussi appelés modes de Mack d'ordre supérieur. Cette terminologie est cependant en cours d'évolution, afin de mieux caractériser le rôle de chaque mode dans les couches limites supersoniques et hypersoniques (un lecteur intéressé par la nouvelle terminologie peut la retrouver dans la revue de Fedorov et Tumin, 2011).

On s'intéresse par la suite uniquement au mode de T.S. et à sa version compressible (premier mode de Mack), les modes de Mack acoustiques étant à des nombres de Mach trop élevés pour apparaître au col des tuyères.

### *Effet du gradient de pression*

Dans le cadre des équations de stabilité pour un écoulement localement parallèle, c'est-à-dire qui ne varie pas suivant la direction  $x$ , le gradient de pression ne peut pas être pris en compte sous la forme différentielle  $\partial p / \partial x$ . La stratégie consiste alors à calculer la forme d'un profil de couche limite soumise à un gradient de pression, et à l'utiliser comme champ de base dans les équations de stabilité. Le gradient de pression est généralement étudié en utilisant les équations de couche limite de Falkner-Skan, pour lesquelles un paramètre permet d'appliquer un gradient de pression, favorable ou adverse.

Dans un écoulement avec un gradient de pression défavorable (pression qui augmente dans le sens de l'écoulement), une couche limite de plaque plane est fortement déstabilisée, car son profil de vitesse présente un point d'inflexion, condition d'apparition d'une instabilité non visqueuse (d'après le théorème du point d'inflexion de Rayleigh, 1879). Dans le cas du gradient de pression favorable (pression qui diminue dans le sens de l'écoulement), le mode de T.S. est stabilisé (Obremski et al., 1969). Ce résultat classique est aussi repris dans les livres de Schlichting et Gersten (2017a) et Schmid et Henningson (2001). Dans sa version compressible, le mode de T.S. est également stabilisé par un

2. Rayleigh (1879) a montré que pour un fluide incompressible, un profil de vitesse présentant un point d'inflexion est instable pour un fluide non visqueux. Ce critère de stabilité a été étendu pour des fluides compressibles, prenant en compte la variation de densité dans le profil de couche limite considéré (Lees et Lin, 1946).

gradient de pression favorable et déstabilisé par un gradient de pression adverse (Masad et Zurigat, 1994).

#### *Effet de la courbure*

La courbure concave fait apparaître un nouveau type d'instabilité non visqueuse, résultant de l'influence de la force centrifuge sur l'écoulement. Cette instabilité prend la forme de rouleaux de vorticité contra-rotative alternant dans la direction transverse de l'écoulement, indépendant du temps et est nommée instabilité de Görtler (1941) (traduit en anglais dans Görtler, 1954). Cette instabilité est illustrée sur la figure 1.11. Avec un mécanisme similaire au *lift-up*, la vorticité forme des stries de haute et basse vitesse dans la couche limite. Dans les tuyères ISO9300, la courbure de la paroi dans le sens de l'écoulement au col est convexe et Floryan (1986) a montré qu'il n'existait pas d'instabilités similaires aux instabilités de Görtler pour les parois convexes. Les instabilités de Görtler ne sont donc pas étudiées par la suite. Le lecteur intéressé par ces instabilités peut se référer aux revues de Floryan (1991), Hall (1990) et Saric (1994).

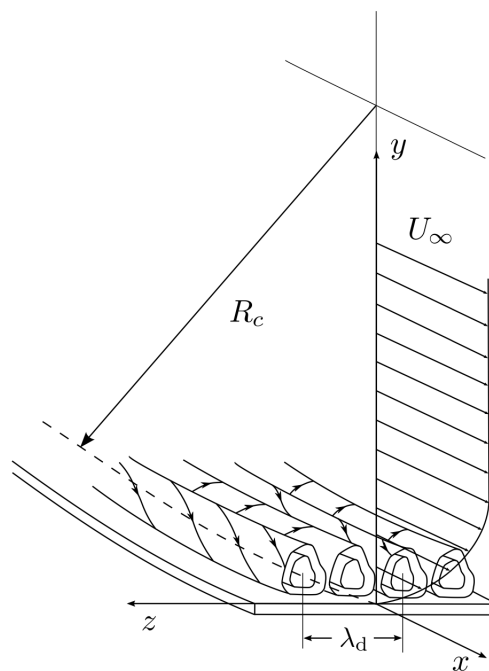


FIGURE 1.11 – Illustration des instabilités de Görtler sur une paroi concave.  
Issue de Saric (1994).

Les effets de la courbure convexe d'une paroi ne sont que rarement étudiés seuls. Parmi d'autres, l'étude de Saric et al. (2003) concernant une couche limite incompressible sur un bord d'attaque montre que la courbure a un effet stabilisant sur le mode de T.S., et que cet effet provient à la fois de l'inclusion des effets de courbure dans le champ de base, mais aussi du terme de force centrifuge dans les équations de stabilité. Cela confirme les observations expérimentales de Liepmann (1943a,b), qui montrent une couche limite

légèrement stabilisée sur une surface convexe (par rapport à une couche limite de plaque plane).

### 1.3.2 *Transition non modale*

Les cas précédents sont issus d'études considérant de faibles perturbations extérieures à la couche limite et concernent la croissance exponentielle de modes instables. Lorsque le niveau de perturbation est plus élevé, comme c'est généralement le cas dans les procédés industriels, il peut y avoir des effets de croissance transitoire en plus des instabilités modales.

Certaines études ont porté sur l'effet du taux de turbulence sur le nombre de Reynolds de transition. Il s'agissait dans un premier temps d'évaluer l'importance des conditions de l'écoulement sur l'amplification modale des perturbations, et de valider les modèles de transition faisant intervenir la croissance exponentielle des modes propres. Rapidement, lorsque les taux de turbulence de l'écoulement sont portés au-dessus de 0.1%, des transitions à la turbulence à des nombres de Reynolds sous-critique, c'est-à-dire à des nombres de Reynolds pour lesquels la théorie de la stabilité prédit des écoulements stables, sont observées. Ces mécanismes sont d'abord qualifiés de *by-pass* (Morkovin, 1969), mais les expériences sur les couches limites soumises à des taux de turbulence entre 0.1% et 6% montrent un certain schéma de transition. Les expériences de Klebanoff (1971), qui consistent en la mesure de fluctuations de vitesse dans la couche limite à l'aide d'un fil chaud, ont montré qu'il y avait des perturbations de vitesse longitudinale à basse fréquence dans la couche limite, dont l'amplitude augmente avec la distance suivant la direction de l'écoulement. Des observations similaires sont faites par Arnal et Jullien (1978) sur des couches limites autour de corps axisymétriques. Ces observations ont été poursuivies dans le travail expérimental de Kendall (1985), dans lequel la présence de vorticités dans la direction de l'écoulement au niveau de la couche limite est mise en avant. Ces perturbations ont par la suite été nommées *modes de Klebanoff*, bien que cette dénomination n'ait pas de lien avec la croissance de perturbation modale, à l'instar du mode de T.S.. Une visualisation des modes de Klebanoff est présentée sur la figure 1.12, où il est possible de voir la formation de structures allongées dans l'écoulement qui transitionnent à la turbulence.

L'observation de ce mode de transition non modale a conduit à faire le rapprochement entre la théorie de la croissance transitoire et la transition observée lors de la présence de modes de Klebanoff. La correspondance entre le calcul de croissance transitoire spatiale et les profils des perturbations de vitesse axiale obtenus expérimentalement par Westin et al. (1994) est montrée dans Andersson et al. (1999), renforçant la crédibilité des modèles de croissance transitoire pour expliquer la présence des modes de Klebanoff. Le développement spatial de la vitesse axiale de la perturbation observée expérimentalement par Matsubara et Alfredsson (2001) a été comparé à la théorie de la croissance transitoire de Luchini (2000) et le modèle de croissance transitoire suit les observations expérimentales.

Grâce à ces observations, la théorie de la croissance transitoire est admise comme l'outil adéquat pour décrire les observations expérimentales.



FIGURE 1.12 – Visualisation de structures allongées dans une couche limite incompressible, correspondant aux modes de Klebanoff. L'écoulement se fait de gauche à droite. Les zones claires correspondent à une concentration plus forte de fumée (écoulement basse vitesse), mettant en avant les perturbations de haute et basse vitesse longitudinale alternant dans la direction transverse de la couche limite. Issue de Alfredsson et Matsubara (2000).

Le potentiel de croissance transitoire dans les couches limites a notamment été étudié par Andersson et al. (1999), Luchini (2000) et Luchini (1996) pour des couches limites incompressibles et Hanifi et al. (1996) pour des couches limites compressibles. Il est montré que dans les deux cas, les perturbations optimales sont stationnaires et composées de tourbillons contra-rotatifs dans la couche limite. Lorsque l'écoulement se développe le long de la paroi, ces tourbillons contra-rotatifs entraînent l'écoulement haute vitesse dans la couche limite, et de l'écoulement basse vitesse proche de la paroi est soulevé dans la couche limite, suivant le mécanisme de *lift-up*. Cela crée alors des perturbations de vitesse longitudinale, dont le signe alterne périodiquement dans la direction transverse de l'écoulement, tel qu'illustré sur la figure 1.13. Les tourbillons contra-rotatifs sont espacés d'environ 1.4 fois la hauteur de la couche limite.

La mise en place de ces modèles de croissance transitoire a permis d'expliquer pourquoi la transition était parfois observée expérimentalement à des nombres de Reynolds sous-critique (nombre de Reynolds auxquels l'écoulement est prédit modalement stable) et d'expliquer, au moins en partie, les observations expérimentales qui ont trouvé une transition qui ne se déroule pas nécessairement en suivant la phase de croissance exponentielle de mode instable lorsque la turbulence de l'écoulement atteint un certain niveau. La croissance des stries de haute et basse vitesse peut entraîner la transition à la turbulence si l'amplitude des stries est suffisamment élevée (chemin **D** sur la figure 1.9) ou alors présenter des instabilités secondaires (chemin **B** sur la figure 1.9).

La méthode a alors été appliquée à d'autres cas, moins canoniques que ceux de plaques planes, pour tenter d'expliquer les tendances de transitions observées. Dans la suite, les

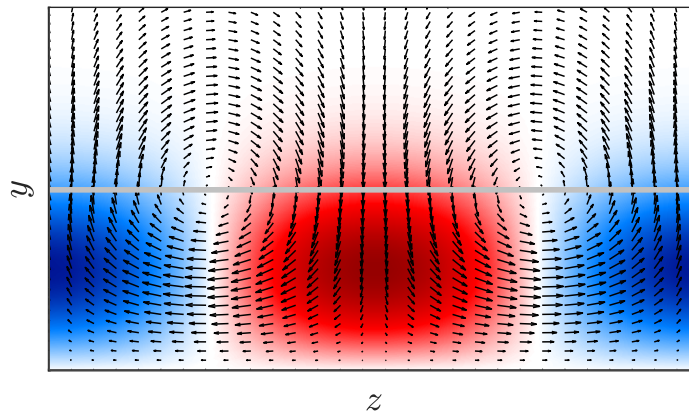


FIGURE 1.13 – Illustration du phénomène de croissance transitoire dans une couche limite. La direction principale de l'écoulement est dans la direction  $x$ , la direction normale à la paroi est suivant  $y$  et la direction transverse à l'écoulement suivant  $z$ . Le champ de vecteurs représente les vitesses  $(v, w)$  des perturbations formant les tourbillons contra-rotatifs dans la couche limite. Les zones rouges et bleues sont les excès et déficits de vitesse dus au *lift-up*, formant des perturbations de vitesse stationnaire. La ligne grise indique la limite entre la couche limite et l'écoulement libre.

perturbations de vitesse dans la couche limite issues de la croissance transitoire seront appelées *stries*, en référence à la dénomination anglaise *streaks* ou *Klebanoff modes*.

#### *Effet du gradient de pression*

La théorie de la croissance non modale dans les couches limites a été utilisée par Reshotko et Tumin (2000) pour expliquer la transition observée sur les avant-corps hémisphériques à des vitesses super/hypersoniques. En effet, cette région présente un fort gradient de pression favorable, elle est donc stable au regard des perturbations modales. Le gradient de pression favorable est inclus dans la formulation en utilisant une couche limite autosimilaire, mais la courbure de la paroi n'est pas prise en compte dans les équations de stabilité. Bien que modalement stable, la couche limite sous gradient de pression favorable présente un large potentiel de croissance transitoire pour des stries stationnaires.

Cette étude a été élargie par Tumin et Reshotko (2001) pour des écoulements de plaque plane, montrant explicitement que le gradient de pression favorable a un effet stabilisant sur le développement des stries stationnaires. Les stries stationnaires ont une plus faible amplitude lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression favorable. En faisant varier la pulsation des perturbations optimales, cette étude montre que les stries stationnaires atteignent une amplitude plus grande que des stries instationnaires (la comparaison n'implique que deux pulsations).



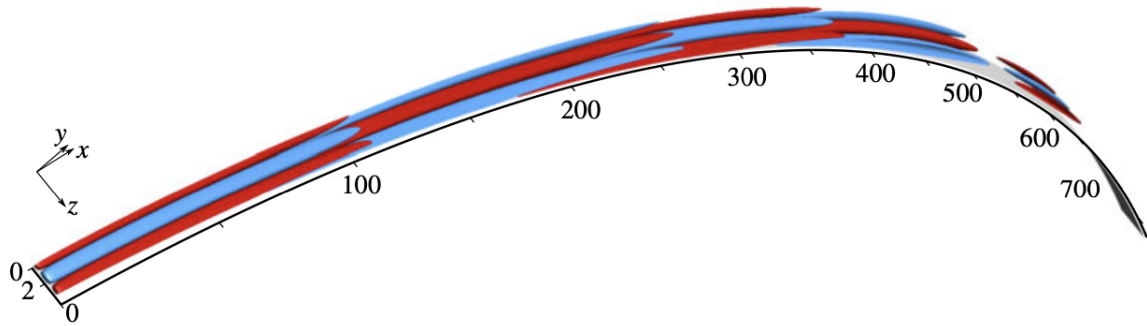


FIGURE 1.14 – Illustration du phénomène d’alternance des stries dans le cas d’une perturbation optimale stationnaire pour une couche limite sur paroi courbe. Ce résultat est issu d’une simulation numérique directe (DNS), dont une perturbation optimale est injectée à l’entrée du domaine de calcul, conduisant à la formation de stries de vitesse alternée. Issue de Karp et Hack (2018).

### Effet de la courbure

Dans Reshotko et Tumin (2004) l’effet d’une paroi ayant une courbure convexe est inclus dans les équations linéarisées en coordonnées sphériques, en faisant l’hypothèse d’un écoulement localement parallèle. Le calcul de croissance transitoire est réalisé au nombre de Mach de  $M = 0.8$  pour différents nombres de Reynolds et l’augmentation de la courbure a un effet stabilisant, réduisant l’amplification des stries stationnaires. Des résultats similaires sont trouvés dans Tumin et Reshotko (2004), pour lesquels les effets non-parallèles (divergence de l’écoulement autour de la sphère) sont pris en compte. Les résultats de Tempelmann et al. (2012) et Zuccher et al. (2006) montrent également que la courbure est stabilisante, en utilisant cette fois les équations de stabilité parabolisées<sup>3</sup>.

Les effets de courbure ont été plus tard considérés dans le cas d’écoulement incompressible par Karp et Hack (2018), et pour la première fois, la croissance optimale sur une paroi courbe (de type cylindrique) est obtenue pour des stries instationnaires. C’est par ailleurs la première fois qu’il est montré que des stries stationnaires peuvent osciller dans la direction de l’écoulement, tel qu’illustré sur la figure 1.14, passant de perturbations de vitesse longitudinale positive à négative, dont l’alternance est provoquée par l’action de la force centrifuge sur les stries.

L’effet de la force centrifuge combinée à des stries instationnaires provoque une plus forte amplitude des stries dans la couche limite. Karp et Hack (2018) trouvent que la pulsation optimale dépend du nombre de Görtler

$$Gö = Re\sqrt{\kappa}, \quad (1.24)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds et  $\kappa = \delta/R$  la courbure de la paroi estimée avec l’épaisseur de la couche limite  $\delta$  et le rayon de la paroi  $R$ . Lorsque le nombre de Görtler augmente,

3. L’utilisation des équations de Navier-Stokes parabolisées permet de prendre en compte une variation lente dans le sens de l’écoulement (Herbert, 1997).

l'énergie des stries stationnaires est diminuée, confirmant que la courbure convexe a un effet stabilisant.

### *Stabilité secondaire*

La stabilité secondaire des stries est hors du cadre de l'étude de ce manuscrit, mais brièvement présentée car elle est une composante importante de la transition à la turbulence. En effet, la formation de stries dans la couche limite n'est pas nécessairement la dernière étape avant le déclenchement de la turbulence. La présence des stries avec des vitesses axiales alternant dans la direction transverse de l'écoulement introduit des profils de vitesse ayant des points d'inflexions, condition produisant des instabilités non visqueuses fortement amplifiées. Dans le cadre de stries stationnaires, pour une couche limite incompressible, ces instabilités peuvent théoriquement apparaître pour des stries dont la vitesse atteint 26% de celle de l'écoulement libre (Andersson et al., 2001). En argumentant que des stries instationnaires sont plus représentatives du forçage auquel est soumis une couche limite dans des conditions réelles, Vaughan et Zaki (2011) ont montré que des stries instationnaires sont sujettes à des instabilités secondaires modales pour des amplitudes de l'ordre de 10 %. Ils concluent que des stries instationnaires peuvent ainsi promouvoir l'apparition de la transition.

Dans le cas des couches limites sur paroi concave, Karp et Hack (2018) trouvent que les stries sont sujettes aux mêmes types d'instabilités secondaires que pour les couches limites de plaque plane. Cependant, la force centrifuge a pour effet de réduire la longueur des stries, l'apparition d'instabilités secondaires est donc conditionnée par la courbure, le nombre de Reynolds, la pulsation et l'amplitude des stries. Pour des effets centrifuges plus importants (plus grand nombre de Görtler), il faut que l'amplitude des stries soit d'une plus grande amplitude pour promouvoir l'apparition d'instabilités secondaires. La courbure de la paroi a ainsi un effet stabilisant sur l'occurrence d'instabilités secondaires dans le cas étudié.

### 1.3.3 *Turbulence et critère de transition*

Le modèle de transition le plus populaire est la méthode  $e^N$ , initialement proposée indépendamment par Ingen (1956) et Smith et Gamberoni (1956). Cette méthode consiste à déterminer l'amplitude de la perturbation à partir de laquelle la transition sera observée. Le facteur N est défini par

$$N = \ln \left( \frac{A}{A_0} \right), \quad (1.25)$$

avec  $A_0$  l'amplitude initiale de la perturbation dans la couche limite et A l'amplitude de la perturbation à un instant ou une position donnée. S'il y a présence d'instabilité modale dans l'écoulement, celles-ci vont croître, et donc augmenter la valeur du facteur N. Ingen

(1956) a originalement proposé que la transition se déclenche à partir de  $N = 9$  pour les couches limites de plaque plane, d'après les expériences de l'époque (voir Ingen, 1956; van Ingen, 2008). Cette formulation a été revue lorsque les expériences ont montré que la transition est fortement dépendante des conditions d'écoulement, et notamment du taux de turbulence. Les nombreuses bases de données sur la transition ont permis de déterminer empiriquement de nouvelles formulations pour la valeur de  $N$  à laquelle la transition est observée

$$N_i = 2.13 - 6.18 \log_{10}(Tu), \quad (1.26)$$

$$N_f = 5 - 6.18 \log_{10}(Tu), \quad (1.27)$$

avec  $N_i$  le facteur pour lequel la transition débute (régime complètement laminaire) et  $N_f$  le facteur pour lequel la transition est complète (régime complètement turbulent) et  $Tu$  le taux de turbulence de l'écoulement

$$Tu = \text{rms}(u')/\bar{u}, \quad (1.28)$$

avec  $u'$  les fluctuations de vitesse autour de la vitesse moyenne  $\bar{u}$ . Dans les équations (1.26) et (1.27), le taux de turbulence est exprimé en %. Une formulation similaire a été proposée par Mack (1984)

$$N = -8.43 - 2.4 \ln(Tu), \quad (1.29)$$

avec cette fois  $Tu$  exprimé en valeur absolue. Les deux formulations donnent essentiellement les mêmes résultats. Ces formulations ont été déterminées à partir d'expériences mettant en jeu la croissance modale de perturbation, et ne sont donc de bonne approximation que dans ce même cadre. Plus de détails sont disponibles dans les revues de Arnal et al. (1994) et Reed et al. (1996)

Pour les taux de turbulence supérieurs à  $Tu \approx 0.5 - 1\%$ , les mécanismes non modaux font leur apparition et les valeurs de facteur  $N$  présentées plus haut ne sont plus valides. Des modèles de transition pour ces taux de turbulence ont été développés avant que les théories de croissance non modale émergent, en se basant sur le taux de turbulence et le nombre de Reynolds (par exemple Blumer et Van Driest, 1963), puis plus tard se basant sur la croissance des stries dans la couche limite. Dans le cas de la croissance non modale de strie, Andersson et al. (1999) ont proposé un modèle se basant sur l'amplitude des stries dans la couche limite

$$Re_T = \sqrt{\frac{K}{Tu}}, \quad (1.30)$$

avec  $Re_T$  le nombre de Reynolds pour lequel la transition est prédite, et  $K$  un coefficient obtenu empiriquement. Pour la croissance non modale, il est aussi possible de calculer une valeur de  $N$ , mais le mécanisme de transition à la turbulence étant différent de celui avec des perturbations modales, il n'est pas possible de faire de corrélation avec les équations (1.26), (1.27) et (1.29).

En plus du taux de turbulence, il est maintenant largement reconnu que la composition spectrale de la turbulence dans l'écoulement libre joue un rôle important sur la transition (Brandt et al., 2004; Fransson et Shahinfar, 2020; Zhao et Sandberg, 2020), ainsi les modèles ne prenant en compte que le taux de turbulence ne sont que des approximations de premier ordre.

Dans tous les cas, ces modèles indiquent que le nombre de Reynolds de transition est dépendant du taux de turbulence, et que l'augmentation du taux de turbulence cause une transition à nombre de Reynolds plus faible. Ainsi, il est important de déterminer le taux de turbulence dans les installations de débitmétrie pour pouvoir prédire la transition. Ce taux de turbulence n'est à ce jour pas pris en compte dans la norme régissant l'utilisation des débitmètres, et n'est par ailleurs que peu considéré dans la communauté travaillant sur les tuyères de débitmétrie.

La transition à la turbulence dans les tuyères de débitmétrie comporte un challenge supplémentaire dû à la contraction de l'écoulement dans le convergent de la tuyère. En effet, le taux de turbulence et le spectre de la turbulence d'un écoulement évoluent à travers une contraction à cause du gradient de pression et de l'accélération de l'écoulement. Dans le régime incompressible, une contraction réduit la turbulence axiale de l'écoulement, et dans certain cas peut augmenter la turbulence radiale (Ribner et Tucker, 1952; Tsugé, 1984). Les conditions auxquelles est soumise la couche limite dans la tuyère sont donc changeantes, ce qui rend l'investigation de la transition d'autant plus complexe.

#### 1.3.4 Effet de la rugosité sur la transition

La transition a jusqu'ici été présentée sans considération pour l'état de la surface sur laquelle se développe la couche limite. Lorsque l'écoulement rencontre un élément de rugosité isolé en surface dont la taille est comparable à l'épaisseur de la couche limite, il se forme un point d'arrêt et une zone de surpression devant la rugosité. De cette surpression surviennent un ou plusieurs tourbillons qui s'enroulent de part et d'autre de la rugosité, se prolongeant dans le sillage, formant un tourbillon en fer à cheval (Baker, 1979). Suivant la taille et la forme de la rugosité, il peut également exister une zone de recirculation derrière l'élément de rugosité.

Les déformations apportées par la rugosité dans l'écoulement peuvent conduire à l'occurrence d'instabilité, provoquant la transition à la turbulence du sillage, appelé transition induite par élément de rugosité isolé. L'étude concernant les mécanismes de transition de sillage de rugosité est un champ de recherche à part entière. L'influence de la rugosité sur la transition peut être traitée de deux manières : soit en considérant que le sillage de la rugosité déforme la couche limite initiale et en étudiant alors la stabilité du champ de vitesse déformé par la rugosité, soit en considérant que l'élément de rugosité introduit une perturbation dans la couche limite en ne déformant celle-ci que faiblement et en étudiant alors comment évolue cette perturbation imposée sur la couche limite initiale non déformée. Pour cette étude, il ne sera considéré que des corrélations permettant

d'estimer si un élément de rugosité est susceptible de causer la transition à la turbulence, en omettant les mécanismes physiques sous-jacents. Des détails sur ces mécanismes peuvent être retrouvés dans Loiseau et al. (2014) et Tullio et al. (2013) pour des éléments de rugosité isolés, et dans Piot et al. (2008) pour des éléments de rugosité multiples et leur interaction avec des modes de T.S..

Dans la perspective de la transition à la turbulence, les éléments de rugosité peuvent être catégorisés par le nombre de Reynolds basé sur la taille des éléments de rugosité

$$Re_{kk} = \frac{\rho_k u_k k}{\mu_w}, \quad (1.31)$$

avec  $\rho_k$  et  $u_k$  la densité et la vitesse du fluide, évaluées au sommet de la rugosité,  $k$  la hauteur de l'élément de rugosité et  $\mu_w$  la viscosité estimée au niveau de la paroi. Dans le cas des écoulements de plaque plane, une rugosité peut être dite sous-critique lorsque  $Re_{kk} < 400$ , ce qui signifie qu'elle modifiera l'écoulement dans son sillage sans nécessairement provoquer la transition. La formation de vorticité dans le sillage de la rugosité, similairement à ce qui est observé dans le cadre de la croissance non modale, peut modifier la croissance de perturbations modales pouvant exister dans la couche limite non déformée (Cossu et Brandt, 2002). Ce mécanisme a même été considéré comme un moyen de retarder la transition dans les couches limites (Fransson et al., 2004, 2005, 2006). Pour des rugosités critiques, lorsque  $Re_{kk} > 700$ , le sillage provoque d'importantes perturbations et devient systématiquement turbulent (Bernardini et al., 2014). Ce qui se passe entre  $400 < Re_{kk} < 700$  dépend de la géométrie de la rugosité et des conditions d'écoulements.

Lorsqu'il existe un point localisé de transition, nommé *spot* de transition, la turbulence se développe dans le sillage en s'élargissant dans la direction transversale lorsque l'écoulement se propage en aval du spot. Ainsi, il se forme une région de couche limite turbulente derrière l'élément de rugosité (*Turbulent spot* ou *turbulente wedge* dans la nomenclature anglo-saxonne), entouré de couche limite laminaire. La turbulence progresse transversalement de manière à former une région turbulente triangulaire de demi-angle variant entre 3 et 10  pour des nombres de Mach compris entre  $M = 0$  et  $M = 6$  pour des plaques planes sans gradient de pression (Fischer, 1972). Un exemple de visualisation de spot turbulent déclenché par un élément de rugosité est donné sur la figure 1.15. Un gradient de pression favorable réduit l'angle de dispersion latérale de la turbulence (Clark et al., 1994).

### 1.3.5 Résumé

La transition d'une couche limite   la turbulence peut suivre plusieurs chemins, qui dépendent du niveau de turbulence de l'écoulement libre. Dans le cas d'une couche limite de plaque plane à faible taux de turbulence, la transition s'effectue par la croissance modale du mode de T.S.. Dans le cas des couches limites compressibles, ce mode peut devenir oblique à partir de  $M > 1$  et peut se retrouver en compétition avec le mode de

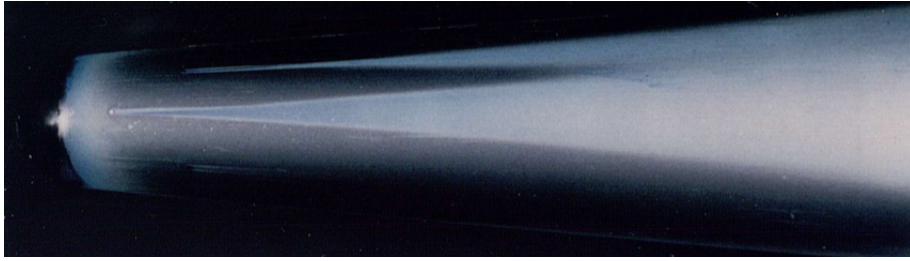


FIGURE 1.15 – Transition induite par un élément de rugosité isolé sur une configuration hémisphère-cône en régime hypersonique. Visualisation par cristaux liquides sensibles à la température. Issue de Zanchetta (1996).

Mack à partir de  $M > 2.2$ . Un gradient de pression favorable a un effet stabilisant sur ces modes, pouvant aller jusqu'à les rendre complètement stables.

La courbure de la paroi peut déstabiliser la couche limite. Quand celle-ci est concave, une instabilité non visqueuse, l'instabilité de Görtler, apparaît. Elle conduit à la formation de vorticités dans le plan perpendiculaire à l'écoulement et engendre la formation de stries de haute et basse vitesse. Dans le cas des courbures convexes, cette instabilité n'existe pas et la courbure convexe a simplement un effet stabilisant sur le mode de T.S..

Pour des taux de turbulences modérés, la transition peut être dominée par l'apparition de stries, ou modes de Klebanoff, qui sont des perturbations de vorticités dans le plan perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement. Ces perturbations conduisent à la formation de stries de haute et basse vitesse par le mécanisme de lift-up. Dans le cadre de la courbure concave, cela promeut l'apparition des instabilités de Görtler. Dans le cas de la courbure convexe, il existe toujours des modes de Klebanoff, mais ils sont stabilisés par la courbure de la paroi. Alors que ceux-ci sont le plus amplifiés à des fréquences nulles pour la plaque plane, la surface convexe peut promouvoir des modes de Klebanoff à des fréquences non-nulles, en fonction de la courbure et du nombre de Reynolds. Finalement, les modes de Klebanoff vont transitionner à la turbulence par des mécanismes d'instabilités secondaires. Sur plaque plane, ces mécanismes présentent une croissance plus forte pour des stries à fréquence non nulle.

Lorsque la surface sur laquelle se développe la couche limite présente des rugosités, celles-ci peuvent conduire à la transition. Le sillage de rugosité présente des tourbillons contra-rotatifs qui transitionnent à la turbulence sous l'effet d'instabilité modale. Lorsque les sillages sont turbulents, ils s'élargissent sous le mécanisme de *turbulence spreading*.

Les couches limites de tuyère se développent sur des parois convexes et subissent un fort gradient de pression favorable. Pour que la transition de la couche limite ait une influence sur le débit massique de la tuyère, il faut que la transition ait lieu avant le col de la tuyère, dans une région où l'écoulement varie de  $M = 0$  à  $M = 1$ . Dans ces conditions, seul le mode de T.S. et sa version compressible peuvent être instables. Il est cependant probable qu'il soit stabilisé par le gradient de pression favorable, auquel cas la transition serait non modale. Dans ce cas, on pourra alors explorer les perturbations optimales stationnaires et instationnaires, afin de déterminer quelles sont les perturbations les plus

susceptibles de provoquer la transition à la turbulence.

#### ORGANISATION DE L'ÉTUDE

Cette étude bibliographique nous apprend que la transition de la couche limite se déroule dans les tuyères pour des nombres de Reynolds variables suivant la géométrie et l'état de surface de la tuyère. Il n'y a cependant pas de données expérimentales claires nous permettant d'affirmer le rôle de la géométrie. De plus, si certaines études montrent que la rugosité peut provoquer la transition, il n'y a pas d'étude permettant de définir une valeur de rugosité critique provoquant la transition pour les tuyères de débitmétrie (c'est-à-dire dont les géométries sont proches des recommandations de la norme ISO9300).

À notre connaissance, il n'y a aucune étude théorique de stabilité sur les couches limites au col des tuyères et les mécanismes de transition ne sont donc pas connus pour ces configurations, or la connaissance de ceux-ci est essentielle pour modéliser correctement la transition. Les informations collectées sur la transition de couches limites montrent que le taux de turbulence de l'écoulement externe à la couche limite est une grandeur prédéterminante pour identifier le mécanisme de transition à la turbulence. Les études expérimentales concernant les tuyères de débitmétrie ne considèrent généralement pas ce paramètre, malgré les preuves de son importance.

Notre premier objectif est de clarifier le rôle de la géométrie de la tuyère et de son état de surface dans l'occurrence de la transition, et de déterminer par quels mécanismes physiques la transition à la turbulence se déroule. Une fois ces mécanismes identifiés, nous avons pour deuxième objectif de développer un modèle permettant d'estimer le nombre de Reynolds de transition pour une tuyère et des conditions de fonctionnement données.

Pour répondre à ces objectifs, nous réalisons dans un premier temps une campagne de mesures expérimentales de la transition dans les tuyères, mettant en œuvre plusieurs géométries de tuyère et plusieurs niveaux de rugosité, dans l'objectif d'obtenir des données de transition dans un environnement contrôlé et maîtrisé. Le chapitre 2 est dédié à la présentation du dispositif expérimental et aux méthodes de caractérisation des tuyères et de la soufflerie utilisée pour réaliser les expériences. Le chapitre 3 présente les résultats issus de ces mesures, permettant d'observer le rôle de la géométrie et de la rugosité sur la transition.

Dans un second temps, nous abordons le problème de la transition théoriquement avec les outils de la stabilité linéaire. Le chapitre 4 présente le modèle de stabilité développé pour cette étude et décrit de manière générale les mécanismes de transition dans les tuyères. L'influence des paramètres, tel que la géométrie et le nombre de Reynolds, sur les mécanismes de transition y sont discutés. Le chapitre 5 présente une méthode basée sur le facteur  $N$  permettant d'utiliser le modèle théorique basé sur des mécanismes physiques pour prédire la transition. Ces prédictions sont comparées aux résultats expérimentaux. Le

modèle de transition est mis en relation avec les expériences afin d'édicter les limitations du modèle.

Finalement, le chapitre 6 reprend l'ensemble des éléments présentés pour réaliser une étude de cas sur une tuyère à col cylindrique, présentant des particularités uniques à ce type de tuyère.



---

 PRÉSENTATION DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL
 

---

<b>1.1 Les tuyères soniques de débitmétrie . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1.1 Fonctionnement . . . . .	5
1.1.2 Tuyères pour la débitmétrie . . . . .	7
1.1.3 La transition de couches limites dans les tuyères . . . . .	12
1.1.4 Résumé . . . . .	15
<b>1.2 Notion de stabilité . . . . .</b>	<b>15</b>
1.2.1 Systèmes linéaires pour les petites perturbations . . . . .	16
1.2.2 Stabilité modale . . . . .	16
1.2.3 Stabilité non modale . . . . .	19
1.2.4 Stabilité secondaire . . . . .	21
1.2.5 Perturbations extérieures . . . . .	21
<b>1.3 Stabilité des couches limites . . . . .</b>	<b>23</b>
1.3.1 Transition modale . . . . .	23
1.3.2 Transition non modale . . . . .	26
1.3.3 Turbulence et critère de transition . . . . .	30
1.3.4 Effet de la rugosité sur la transition . . . . .	32
1.3.5 Résumé . . . . .	33

---

*Ce chapitre présente l'installation expérimentale utilisée pour caractériser l'écoulement, ainsi que la méthode employée pour détecter la transition laminaire-turbulente dans les tuyères de débitmétrie. Les capacités de la soufflerie ainsi que sa caractérisation sont présentées. Les choix techniques de dimensionnement et d'instrumentation sont justifiés.*

## 2.1 SOUFFLERIE S150

### 2.1.1 Fonctionnement et capacités de l'installation

Pour réaliser les expériences, nous utilisons la soufflerie supersonique S150 de l'Institut Pprime située sur la plateforme expérimentale PROMETEE, dont le schéma est présenté sur la figure 2.2. La pression génératrice de cette installation peut varier de 1 à 40 bar pouvant fournir un débit d'air jusqu'à 5kg/s. L'air sec est dans un premier temps stocké

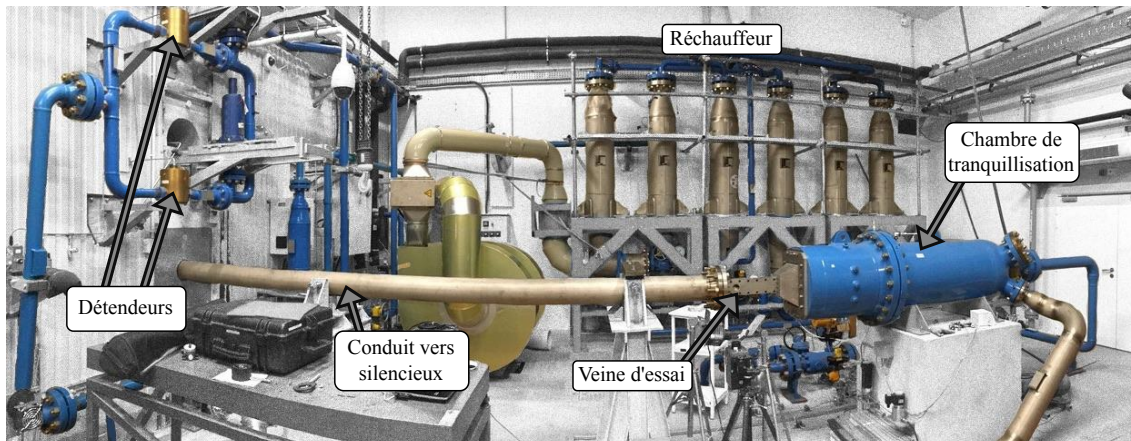


FIGURE 2.1 – Photographie de l'installation expérimentale S150.

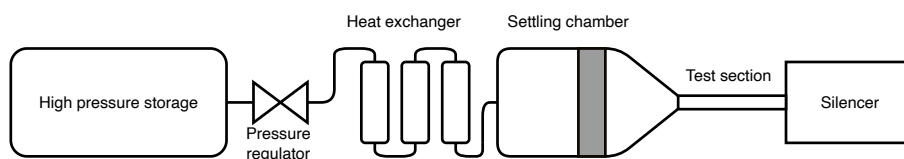


FIGURE 2.2 – Schéma de l'installation expérimentale S150.

dans un réservoir de  $50\text{m}^3$  à 200 bar. Il est ensuite détendu à une pression allant entre 1 et 40 bar à l'aide d'un détendeur à dôme, contrôlé en temps réel pour obtenir une pression constante. L'air refroidi à travers la détente par effet de Joules-Thomson est ensuite réchauffé en passant par un échangeur thermique, composé de 6 cylindres en acier remplis par 8 tonnes de billes en Nickel. La température du réchauffeur peut être sélectionnée entre 295 et 330 K en amont des essais. L'air est ainsi obtenu à une pression désirée avec une température totale constante dans la chambre de tranquillisation. Après le passage dans la section d'essai fermée, l'air est guidé jusqu'à la sortie dans un silencieux, à pression atmosphérique.

Le réchauffeur d'air est amené à la température désirée en amont de l'essai par un circuit secondaire composé d'un ventilateur-circulateur et d'une résistance électrique permettant de réchauffer l'air. Il faut approximativement 6h de chauffe pour monter la température du réchauffeur initialement à 273K à une température finale de 323K. Cette configuration permet de maintenir la température constante d'environ 5000 kg d'air, soit environ 1h d'essai en continu pour les tuyères présentées par la suite. Le choix de la température du réchauffeur est guidé par les contraintes de l'instrumentation et des matériaux employés pour la fabrication des tuyères (voir section 2.3).

Avant le démarrage des mesures expérimentales, la soufflerie est montée en pression jusqu'à atteindre un débit de  $2\text{ kg/s}$  d'air puis laissée en fonctionnement pendant 10 minutes. Cela permet de réchauffer la tuyauterie, la chambre de tranquillisation et la section d'essai, afin d'atteindre un régime de température stationnaire dans l'ensemble de la soufflerie.

### 2.1.2 Dimensionnement de la section d'essai

Pour pouvoir étudier expérimentalement la transition de couche limite, la configuration industrielle, avec des tuyères axisymétriques, est réduite à l'étude d'une tuyère plane. La tuyère plane est composée d'une demi-tuyère et d'un plan de symétrie, tel qu'illustré sur la figure 2.3. Sur le plan de symétrie, un hublot en saphir de 50x50x10mm est monté affleurant à de la paroi, afin de permettre l'accès optique au convergent, au col et une partie de la section divergente de la tuyère.

Pour coïncider avec les données disponibles dans la littérature, on utilise un nombre de Reynolds basé sur la hauteur du col de la tuyère

$$Re_t = \frac{\rho_t u_t D}{\mu_0}, \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la densité de l'air,  $u$  est la vitesse du fluide, l'indice  $(\cdot)_t$  indique des grandeurs évaluées au col de la tuyère,  $\mu_0$  est la viscosité de l'air évaluée avec la température totale  $T_0$  de l'écoulement par la formule de Sutherland

$$\mu_0 = \mu_{ref} \left( \frac{T_0}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S}{T_0 + S}, \quad (2.2)$$

avec  $\mu_{ref} = 1.716 \cdot 10^{-5}$  [kg.s<sup>-1</sup>.m<sup>-1</sup>],  $T_{ref} = 273.15$ K et  $S = 110.4$ K. La vitesse et la densité au niveau du col sont estimées en utilisant les relations isentropiques pour des écoulements compressibles

$$u = \sqrt{\gamma R T_t}, \quad (2.3)$$

$$T_t = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-1}, \quad (2.4)$$

$$\rho_t = \rho_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{\frac{-1}{\gamma - 1}}, \quad (2.5)$$

où  $\rho_0$  est la densité totale de l'écoulement et  $\gamma = 1.4$  est l'exposant adiabatique de l'air. Pour rester cohérent avec la littérature, le nombre de Reynolds est calculé avec la hauteur au col  $D = 2h$ , traitant alors le plancher de la soufflerie comme un plan de symétrie.

La hauteur de la section en amont de la tuyère est fixée à  $H = 25$ mm. La hauteur du col sonique  $h$  est définie de manière à obtenir une plage de nombre de Reynolds pour laquelle la transition est observée expérimentalement dans les tuyères de débitmétré. Nous choisissons une hauteur de col entre  $h = 2$ mm et  $h = 5$ mm, pour lesquelles est possible d'atteindre des nombres de Reynolds théorique entre  $Re_t = 2 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 5 \cdot 10^6$  en utilisant la pression totale maximale de 40 bar de la soufflerie. La norme ISO9300 (2005) requiert un état de surface proportionnel au diamètre de la tuyère, pouvant rendre le niveau de rugosité nécessaire, pour les tuyères avec un col de petit diamètre, hors d'atteinte. Des essais préliminaires de polissage ont montré qu'il est possible d'atteindre

les niveaux de rugosité souhaités pour ces hauteurs de col (voir section 2.3).

La largeur  $W$  de la section d'essai est limitée par le débit maximal que peut délivrer la soufflerie. Elle est prise la plus grande possible à  $W = 60\text{mm}$ , afin d'obtenir la configuration la plus proche possible d'un écoulement 2D.

Dans la section d'essais, l'écoulement en amont de la tuyère est subsonique,  $M = 0.117$  et  $M = 0.05$  pour les tuyères ayant un col de hauteur  $h = 5\text{mm}$  et  $h = 2\text{mm}$  respectivement. Lors du passage au niveau de la tuyère, l'écoulement accélère jusqu'à  $M = 1$  au col, produisant un fort gradient de pression favorable. L'écoulement continue d'accélérer dans la section divergente, jusqu'à environ  $M = 2$  avant d'être guidé jusqu'au silencieux.

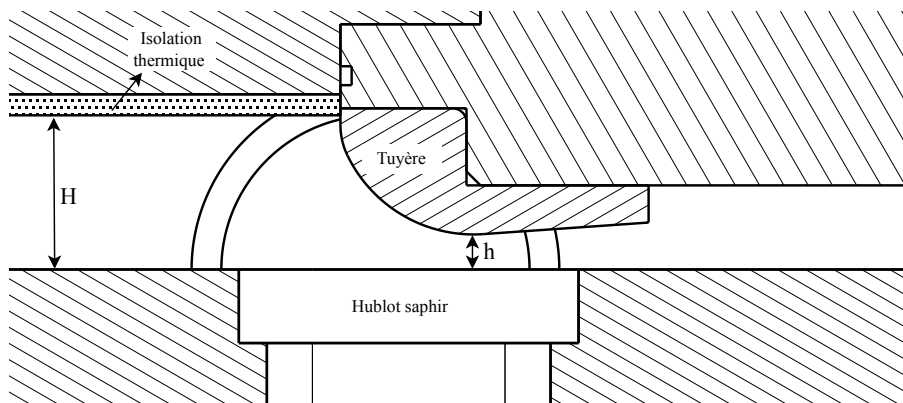


FIGURE 2.3 – Coupe latérale de la section d'essai en configuration demi-tuyère plane et plan de symétrie. L'écoulement se fait de gauche à droite. Le disque visible en fond d'image est l'un des deux hublots latéraux.

En plus du hublot sur le plancher, deux hublots circulaires sont disposés sur les parois latérales au niveau de la tuyère. Ils permettent un accès optique traversant, avec vue sur l'ensemble du convergent de la tuyère.

Une deuxième configuration sans plan de symétrie avec deux demi-tuyères planes, illustrée sur la figure 2.4, est possible. Cette configuration est nécessaire pour étudier en détail l'écoulement dans les tuyères à col cylindrique. En effet, certains phénomènes aérodynamiques sont sensibles aux variations de section dans le col de la tuyère, or la configuration avec plan de symétrie implique la présence d'une couche limite supplémentaire sur le plan de symétrie, ne permettant pas de reproduire fidèlement l'évolution de la section au col d'une tuyère à col cylindrique. Les phénomènes aérodynamiques impliqués par le col cylindrique seront détaillés au chapitre 6. L'utilisation de deux demi-tuyères ne laisse disponible que les deux hublots latéraux.

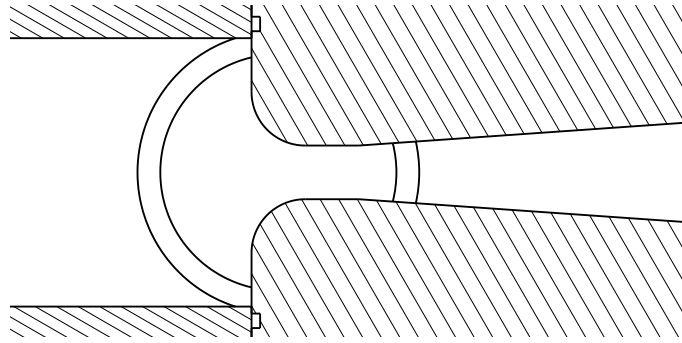


FIGURE 2.4 – Coupe latérale de la section d’essai en configuration 2 demi-tuyères planes. L’écoulement se fait de gauche à droite.

## 2.2 INSTRUMENTATION

### 2.2.1 Détection des gradients de pression

La strioscopie est une méthode de mesure permettant de visualiser les gradients de densité dans un fluide transparent. Une source de lumière est placée à la distance focale d’une lentille pour obtenir des rayons lumineux parallèles. Une fois que les rayons lumineux ont passé le fluide à observer, ils sont reconvergés à l’aide d’une deuxième lentille. Si des rayons lumineux rencontrent un gradient de densité dans le fluide, le changement d’indice de réfraction provoque la déviation ceux-ci et ne sont pas reconvergés au point focal avec les autres rayons lumineux restés parallèles. En plaçant une lame au point focal de la deuxième lentille, les rayons lumineux qui n’ont pas convergé sont arrêtés, et il apparaît une zone sombre à l’image. Cette zone sombre indique alors la présence d’un gradient de densité dans l’écoulement. Le schéma d’une installation type de strioscopie est montré sur la figure 2.5.

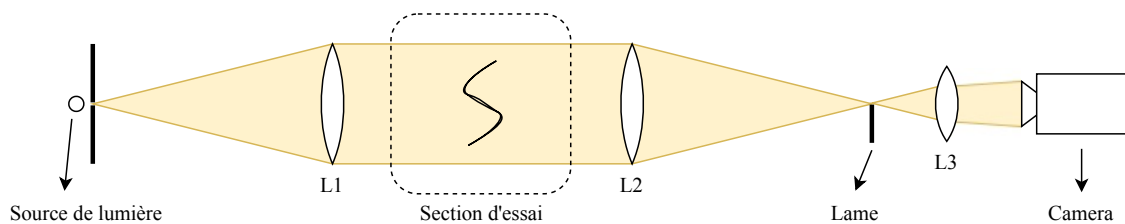


FIGURE 2.5 – Schéma du banc de strioscopie.

Dans cette étude, la strioscopie est utilisée pour étudier qualitativement l’écoulement. Elle permet de mettre en avant les variations de densité et ainsi d’identifier les gradients de pression. Elle permet aussi de vérifier que l’écoulement n’est pas pollué par des effets indésirables, tel que des chocs ou des gradients de pression inattendus.

Le choix de la source de lumière et des lentilles dépend des phénomènes à observer. La sensibilité de la strioscopie dépend de la taille de la source de lumière et de la longueur focale de la lentille L2. Pour augmenter la sensibilité, il faut diminuer la taille de la source

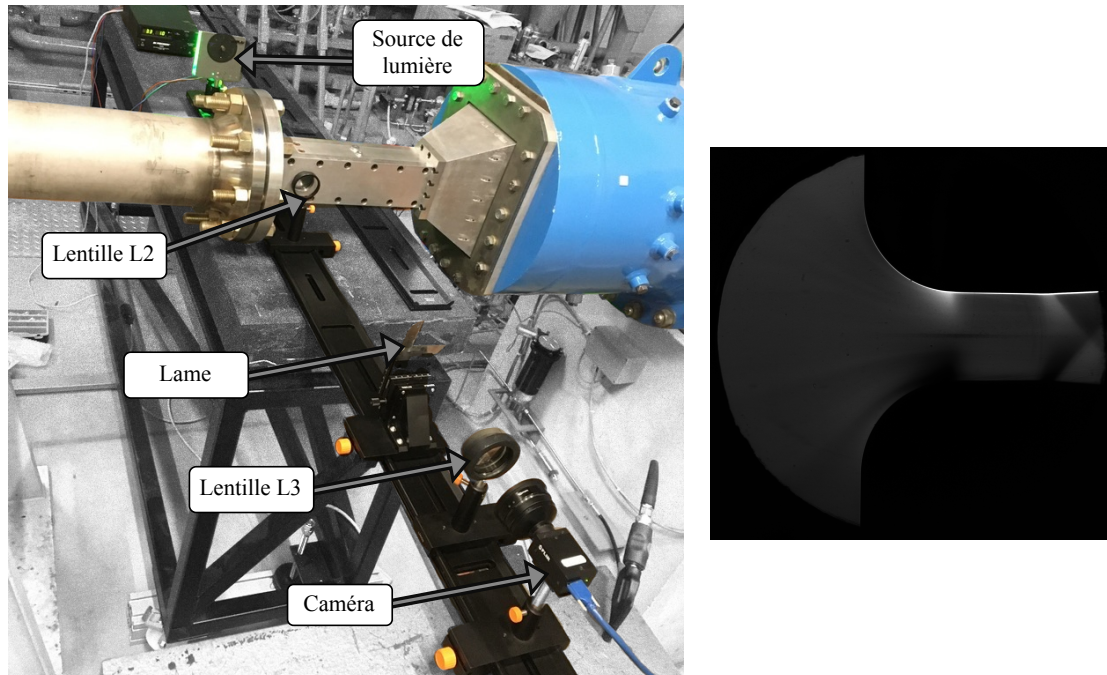


FIGURE 2.6 – Photographie de l'installation de strioscopie sur le banc d'essai S150 (gauche). Image obtenue par strioscopie de l'écoulement d'une tuyère à col plan (droite).

lumineuse et augmenter la longueur focale. Pour augmenter la résolution en temps, il faut augmenter la puissance de la source lumineuse pour compenser la diminution du temps d'ouverture de la caméra. Un système de strioscopie standard pour étudier des chocs stationnaires en écoulement supersonique aura une lentille L2 de longueur focale 1000mm et une source de lumière de quelques mm de diamètre. Pour étudier des événements dans un écoulement turbulent à  $M = 1$ , une lentille L2 de longueur focale 3000mm et une source de lumière de diamètre 1mm sont idéales. Plus de détails sur les installations de strioscopie sont disponibles dans Settles (2001).

Pour cette étude, nous utilisons une installation peu sensible, car le fort gradient de pression imposé par la tuyère saturerait rapidement l'image si la sensibilité était trop grande. Les lentilles L1 et L2 ont une longueur focale de 500mm et la source de lumière est une LED de 20W, complétée d'une plaque percée d'un trou de diamètre 2mm pour simuler une source de lumière ponctuelle. La lentille L3 est utilisée comme objectif, permettant de former l'image sur le capteur CCD de la caméra. La caméra utilisée est une FLIR Grasshopper3, dont le temps d'exposition est réglé entre 500 et 1500  $\mu\text{s}$ , selon la configuration à l'étude. Cette configuration permet de visualiser des phénomènes stationnaires, tel que les gradients de pression et d'éventuels chocs émanant de la géométrie à l'étude.

### 2.2.2 Détection de la transition

La mesure infrarouge est utilisée pour détecter la transition laminaire-turbulente de la couche limite. La méthode est basée sur la variation de la température de la paroi suivant l'état de la couche limite, laminaire ou turbulente.

#### Principe de fonctionnement

Lorsqu'un écoulement est compressible, la température adiabatique de récupération à la paroi d'une couche limite est donnée par

$$T_w^{\text{ad}} = T_\delta \left(1 + R \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2\right), \quad (2.6)$$

où  $T$  est la température et  $M$  le nombre de Mach de l'écoulement,  $R$  est le coefficient de récupération et l'indice  $(\cdot)_\delta$  indique les quantités évaluées au bord libre de la couche limite. En utilisant les relations isentropiques pour les écoulements compressibles, la température à la paroi peut être directement exprimée en fonction de la température totale de l'écoulement et du nombre de Mach

$$T_w^{\text{ad}} = T_0 \frac{(1 + R \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2)}{(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2)}. \quad (2.7)$$

Le coefficient de récupération vaut approximativement  $R \approx 0.84$  ou  $R \approx 0.90$  pour une couche limite respectivement laminaire ou turbulente (Tropea et al., 2007, p. 545-546). Ainsi, pour un écoulement tel que rencontré dans les tuyères soniques, à  $M_\delta = 1$  et ayant une température totale de  $T_0 = 300\text{K}$ , une différence de température de  $\Delta T_w^{\text{ad}} \approx 3\text{K}$  est attendue à la paroi entre une couche limite laminaire et turbulente.

La température de la paroi est obtenue à l'aide d'une caméra thermique qui mesure le rayonnement thermique de la paroi. Le flux thermique dû au rayonnement électromagnétique d'un corps est donné par

$$\dot{f} = \sigma \varepsilon T_w^4, \quad (2.8)$$

où  $\dot{f}$  est le flux rayonné,  $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann,  $\varepsilon$  l'émissivité de la surface considérée et  $T_w$  sa température.

#### Mise en pratique de la détection de transition

La mesure absolue d'une température est en pratique très difficile. En effet, cette formule s'applique au rayonnement d'un corps seul, pour lequel l'émissivité est connue. Lorsque l'émissivité d'une paroi est différente de  $\varepsilon = 1$  et qu'il est entouré d'autres objets à température non-nulle, il est nécessaire de prendre en compte les rayonnements émis par l'environnement extérieur qui sont réfléchis sur la paroi. De plus, la surface est ici observée

par l'intermédiaire d'un hublot, qui lui-même réfléchit une partie des rayonnements émis par l'environnement. En supposant que la paroi de la tuyère soit complètement opaque (coefficient de transmissivité  $\tau = 0$ ), et que le hublot n'absorbe aucun rayonnement (coefficient d'émissivité  $\varepsilon = 0$ ), les flux rayonnés peuvent être représentés selon la figure 2.8.

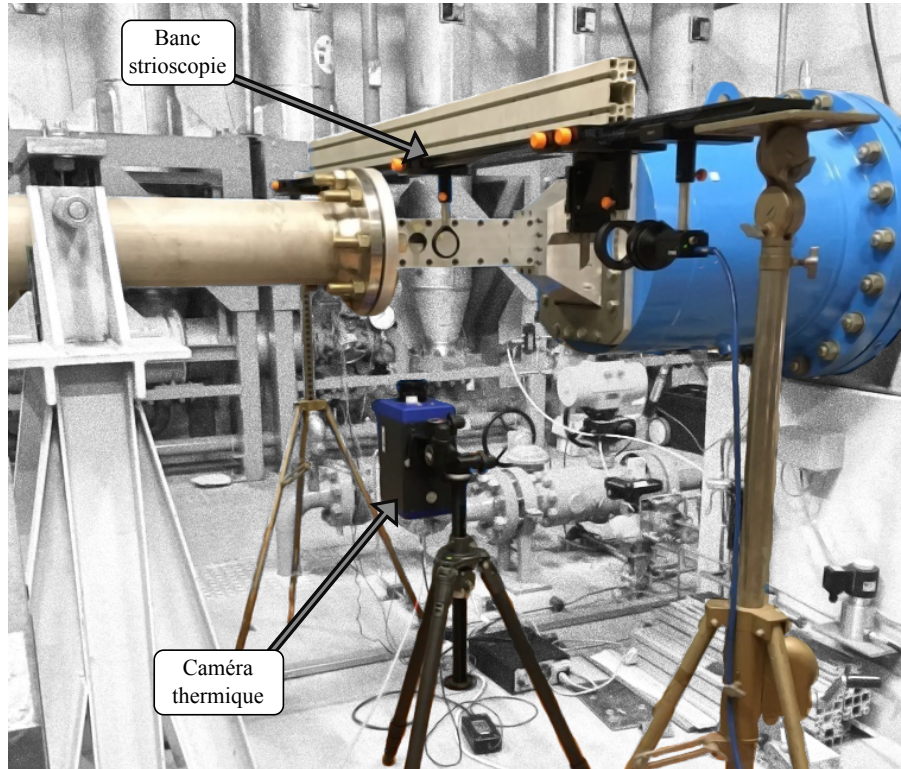


FIGURE 2.7 – Photographie de l'installation avec caméra infrarouge.

Le flux thermique que le capteur de la caméra perçoit est composé du rayonnement primaire  $F_1$  émis par la tuyère, diminué de la réflexion  $F_{1r}$  causée par le hublot, et des réflexions  $F_{2r}$  et  $F_{2_{trt}}$  issues du flux émis par la caméra thermique et réfléchies respectivement sur le hublot et sur la paroi de la tuyère.

L'émissivité d'une paroi est également fonction de son état de surface, il faudrait alors caractériser l'émissivité de chaque tuyère que l'on souhaite tester. Pour s'affranchir d'une telle mesure, il suffit de remarquer à l'équation (2.7) que le rapport de la température de la surface sur la température totale  $T_w^{ad}/T_0$  ne dépend que du nombre de Mach et du coefficient de récupération. Ainsi, il n'est pas nécessaire de mesurer la température exacte de la paroi. À nombre de Mach constants, c'est-à-dire à une position donnée dans la tuyère, la variation de la température avec le nombre de Reynolds indique un changement de coefficient de récupération et suffit ainsi à identifier la transition laminaire-turbulente de la couche limite.

Bien que la mesure exacte de la température ne soit pas un obstacle à la détection de la transition, les réflexions seront tout de même traitées afin d'obtenir des images les plus représentatives de l'aérodynamique en jeu dans la tuyère.



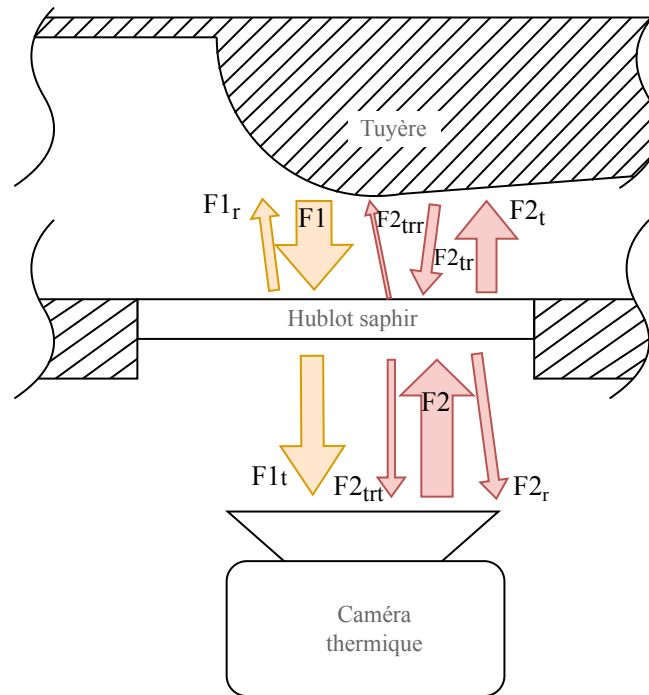


FIGURE 2.8 – Illustration des flux rayonnés lors d’une mesure infrarouge. Le flux F1 est issu du rayonnement de la paroi de la tuyère, le flux F2 est issu de l’environnement (ici la caméra thermique). Les indices r et t désignent les rayons réfléchis et transmis, respectivement.

### *Caractéristiques techniques caméra thermique*

Pour détecter les petites variations de température, la caméra thermique FLIR SC7200 est utilisée pour son Noise Equivalent Temperature Difference (NETD) de 25mK. Sa résolution est de 320x256 pixel, ce qui correspond à une résolution spatiale de 0.23mm/pixel pour l’installation expérimentale utilisée. La fréquence d’acquisition de la caméra est réglée à 10Hz, et son temps d’exposition est de 800 $\mu$ s.

La caméra est disposée sous la section d’essai et visualise la paroi de la tuyère à travers le hublot en saphir monté sur la paroi inférieure de la section d’essai, tel qu’illustré sur la figure 2.8.

### *Post-Traitement des images*

La figure 2.9 présente une image typique obtenue avec la caméra thermique durant un essai. Sur cette image, l’écoulement se fait de gauche à droite. Les tons clairs correspondent aux températures les plus élevées, les tons foncés aux températures les plus basses. Le champ visualisé sur les extrémités de l’image correspond à la paroi inférieure (plancher) de la section d’essai sur laquelle est monté le hublot. La ligne verticale grise correspond au début de la tuyère, où la section commence à se rétrécir. Le col de la tuyère est situé à  $x \approx 190$  pixel puis la tuyère diverge pour  $x > 190$  pixel.

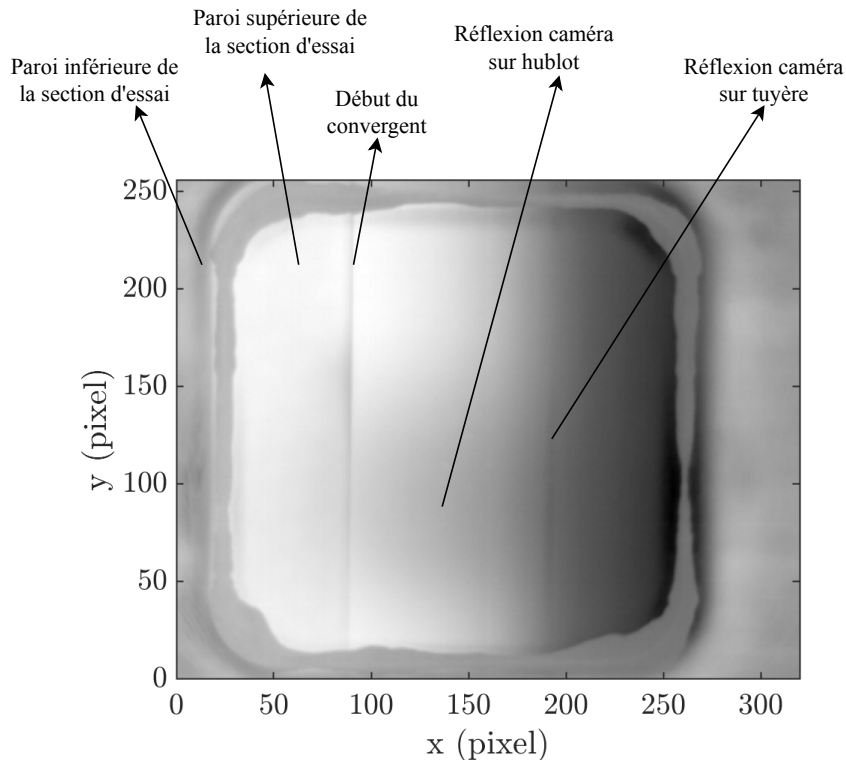


FIGURE 2.9 – Exemple d’image infrarouge non traitée de tuyère obtenue par la caméra thermique lors d’un essai. L’écoulement se fait de gauche à droite.

La première zone claire à gauche de l’image correspond à la paroi supérieure de la section d’essai, dans laquelle l’écoulement peut être considéré comme incompressible. La température maximale est alors attendue à la paroi. Lorsque l’écoulement accélère, il est détendu et la température  $T_\delta$  de l’air diminue. La température de récupération à la paroi est alors inférieure à la température totale. La diminution de la température avec l’augmentation du nombre de Mach est visible sur l’image infrarouge, la température décroît le long de la tuyère, au fur et à mesure de l’augmentation du nombre de Mach. En plus du gradient de température dû à la détente de l’air, on note une légère réflexion diffuse entre  $x \in [100 - 200]$  pixel et  $y \in [50 - 100]$  pixel, qui correspond à la réflexion de la caméra sur le hublot. Une deuxième réflexion, plus fine et verticale à  $x \approx 190$  pixel correspond à la réflexion de la caméra sur la tuyère.

Les images brutes sont traitées en subissant les opérations suivantes :

- L’image est redressée, de manière que la direction de l’écoulement soit alignée avec l’axe des abscisses.
- L’image est rognée, de manière à ne garder dans le champ de visualisation que la paroi supérieure de la section d’essai et la tuyère.
- Les réflexions de la caméra sont traitées en prenant une image de référence sans écoulement avant chaque essai. Cette image de référence est ensuite soustraite aux images obtenues durant les essais.

- Les axes sont adimensionnés par rapport à la hauteur du col de la tuyère et le zéro de l'axe des abscisses est positionné au niveau du col de la tuyère.

Un exemple d'image traitée, correspondant à l'image brute figure 2.9, est présenté sur la figure 2.10.

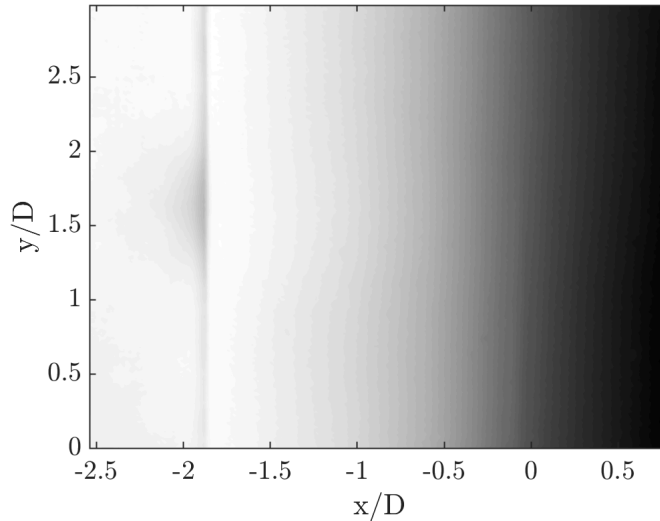


FIGURE 2.10 – Exemple d'image infrarouge de tuyère post-traitée obtenue par la caméra thermique lors d'un essai.

Les images ainsi obtenues sont utilisées qualitativement pour discuter des variations de température à un nombre de Reynolds donné, ou comparées entre elles à plusieurs nombres de Reynolds pour identifier les variations de température de la surface au cours des essais, et ainsi détecter la transition.

### 2.2.3 Mesure des grandeurs totales et synchronisation

La mesure de la pression totale est faite par un capteur de pression Keller série 33XX de 0-60 bar, par un piquage dans la chambre de tranquillisation. La mesure de pression est obtenue avec une erreur de  $\pm 60$  mbar. L'acquisition est cadencée à 5000 Hz.

La température est obtenue grâce à un thermocouple de diamètre 0.25 mm en amont de la tuyère, calibré à l'aide d'une sonde PT100, avec une erreur de  $\pm 0.2$  K. L'acquisition est cadencée à 5 Hz.

Les signaux sont enregistrés par une carte d'acquisition National Instruments NI cDAQ-9174. L'acquisition des images infrarouges est pseudo-synchronisée avec les mesures de pression et température. Pour ce faire, l'acquisition des images infrarouges est déclenchée par un générateur basses fréquences réglé à 10 Hz. Lorsque la caméra fait l'acquisition d'une image, elle renvoie un signal à la carte d'acquisition. La pression et la température sont ensuite moyennées sur 50 ms autour du signal de déclenchement. Ainsi, nous assurons que les grandeurs totales utilisées pour calculer les nombres de Reynolds correspondent bien aux instants où les images infrarouges sont acquises.

### 2.2.4 Mesure du taux de turbulence

Le taux de turbulence de la soufflerie est obtenu en plaçant un fil chaud simple de diamètre  $5\mu\text{m}$  au centre de la veine en amont de la tuyère, dans une zone de section constante sans gradient de pression tel qu'illustré sur la figure 2.11.

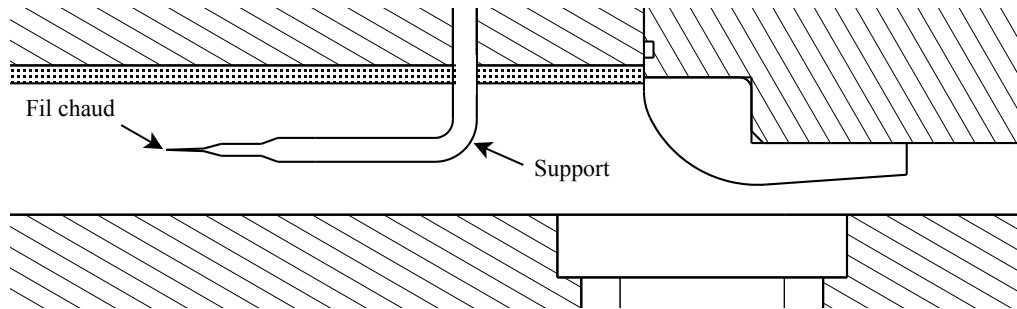


FIGURE 2.11 – Illustration du positionnement du fil chaud dans la veine d'essai. L'écoulement se fait de gauche à droite.

La présence du fil chaud et de son support introduit elle-même des perturbations en aval de l'écoulement, les mesures de taux de turbulence et de transition sont donc réalisées séparément pour éviter toute contamination des données de transition.

L'étalonnage du fil chaud est réalisé *in situ* en enregistrant la tension de sortie en faisant varier la pression totale de la soufflerie. Pour chaque palier de pression, la densité est indirectement mesurée en utilisant les mesures de pression et de température. La vitesse de l'écoulement est calculée à partir des mesures de température et du nombre de Mach au niveau du fil chaud. Le signal enregistré pour chaque palier de pression donne la courbe d'étalonnage du fil chaud, mettant en relation la tension mesurée par la centrale et le produit de la densité et de la vitesse

$$\bar{V} = f_{\text{cal}}(\bar{\rho}\bar{U}), \quad (2.9)$$

avec la tension moyenne  $\bar{V}$ , la vitesse moyenne  $\bar{U}$  et la densité moyenne  $\bar{\rho}$ . L'écoulement au niveau du fil chaud étant à des nombres de Mach faible, typiquement  $M < 0.2$ , il est considéré incompressible. Les variations de tension sont alors associées à des variations de vitesses et sont obtenues par la formule suivante

$$u'(t) = \frac{f_{\text{cal}}^{-1}(V(t))}{\bar{\rho}} - \bar{U}, \quad (2.10)$$

avec  $u'$  la vitesse fluctuante.

Finalement, le taux de turbulence est obtenu par

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{U}}, \quad (2.11)$$

et est calculé pour plusieurs nombres de Reynolds.

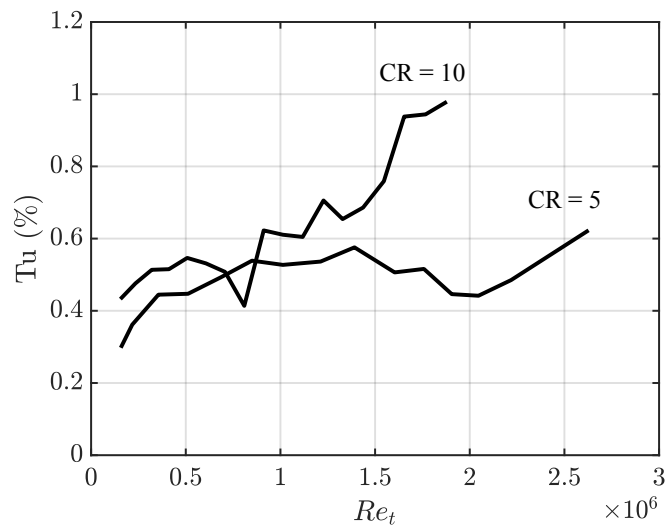


FIGURE 2.12 – Taux de turbulence en fonction du nombre de Reynolds pour les deux rapports de contractions CR = 10 et CR = 5.

Le taux de turbulence est obtenu grâce à une centrale CTA (Constant Temperature Anemometry), cadencée à une fréquence de 40kHz pour un temps d'acquisition de 30sec. La Figure 2.12 montre l'évolution du taux de turbulence en fonction du nombre de Reynolds pour les deux rapports de contraction étudiés. Le taux de turbulence augmente avec le nombre de Reynolds dans les deux cas, mais celui du taux de contraction de CR = 10 augmente plus rapidement, passant de  $Tu \approx 0.4\%$  à  $Tu \approx 1\%$  sur la gamme  $Re_t \approx [0.1 - 2] \cdot 10^6$ . Cette variation du taux de turbulence suivant le palier de pression peut influencer sur la transition et sera à prendre en compte lors des analyses des résultats expérimentaux.

Il faut noter que ces Tu ne sont pas représentatifs de la turbulence de l'écoulement du col de la tuyère. En effet, lorsque l'écoulement est accéléré, ici à des vitesses soniques, le niveau de turbulence change. En général, plus le rapport de contraction entre le col et la section amont est élevé, plus le taux de turbulence sera diminué (Tsugé, 1984). Ainsi, il est possible que le taux de turbulence au niveau du col de la tuyère soit plus faible pour les rapports de contraction plus élevés, contrairement à ce qu'indique la figure à première vue. Finalement, même si les données quantitatives du taux de turbulence dans la tuyère ne sont pas disponibles, ces données sont utiles pour observer l'effet qualitatif du taux de turbulence sur la transition.

## 2.3 CONCEPTION DES TUYÈRES EXPÉRIMENTALES

### 2.3.1 Matériau et fabrication

L'utilisation d'une caméra infrarouge pour détecter la transition contraint le choix des matériaux pour les tuyères. D'une part, pour que la température de la paroi soit

représentative des phénomènes au sein de l'écoulement, il faut que la paroi de la tuyère soit isolante, idéalement adiabatique. Cela permet de limiter les flux thermiques entre l'écoulement et la tuyère, mais aussi ceux ayant lieu au sein même de la tuyère par conduction. D'autre part, il faut que le matériau puisse être poli au niveau de rugosité requis tout en conservant une bonne émissivité. En effet, la plupart des matériaux, en particulier les métaux, ont une émissivité qui décroît considérablement lors du polissage, ce qui rend la mesure infrarouge difficile.

Pour notre étude, les tuyères expérimentales sont fabriquées en acide polylactique (PLA). Des essais préliminaires ont permis de mettre en avant les capacités du matériau en termes d'émissivité et de polissage. De plus, ce matériau est facilement mis en forme par fabrication additive à l'aide d'une imprimante 3D, permettant d'explorer de nombreuses géométries à moindre coût. Néanmoins, l'utilisation du PLA limite la température totale de l'écoulement à  $T_0 = 323\text{K}$ ; au-delà, le matériau atteint sa température de transition vitreuse et perd ses propriétés mécaniques, pouvant provoquer des rugosités indésirées en surface ou une déformation de la tuyère pendant les essais.

### 2.3.2 État de surface

Les tuyères brutes d'impression 3D ont une surface ondulée due au procédé d'impression couche par couche, tel qu'illustré sur la figure 2.13. Pour une épaisseur d'inter-couche de  $120\ \mu\text{m}$ , l'amplitude maximale de ces ondulations est d'environ  $50\ \mu\text{m}$ .

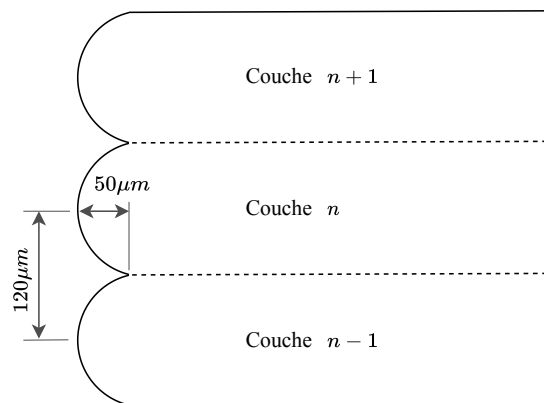


FIGURE 2.13 – Illustration des ondulations de la surface dues au procédé d'impression couche par couche.

Pour obtenir les états de surface désirés, les tuyères brutes sont dans un premier temps poncées au papier de verre p400<sup>1</sup> pour retirer environ  $50\ \mu\text{m}$ , afin que les ondulations de la surface soient complètement éliminées. La finesse du papier de verre est ensuite progressivement augmentée jusqu'à obtenir l'état de surface désiré. Pour cette étude, trois

1. La granulométrie du papier de verre est définie par la taille des particules abrasives du papier. Plus les particules abrasives sont petites, plus le nombre pXXX sera élevé.



FIGURE 2.14 – Exemple de demi-tuyère imprimée en 3D. Gauche : brute d'impression. Droite : polie à p4000.

niveaux de rugosités sont retenus, obtenus avec des papiers de verre ayant des grains p1200, p2000 et p4000.

L'état de surface est caractérisé sur un interféromètre optique TalySurf CCI 6000. La résolution de la mesure de rugosité normale à la paroi est de 0.01nm, la résolution latérale de 0.35 $\mu$ m et la surface couverte par une mesure est de 0.36  $\times$  0.36mm<sup>2</sup>. Chaque tuyère est mesurée au col en 3 positions latérales différentes. Pour s'affranchir de la courbure de la tuyère dans le calcul de la rugosité, le profil obtenu est filtré passe-haut. La rugosité ensuite est quantifiée en utilisant le critère de rugosité arithmétique

$$Ra = \frac{1}{l} \int_0^l |z(x)| dx, \quad (2.12)$$

avec  $z(x)$  le profil filtré de la surface.

Les états de surface obtenus pour les trois papiers de verre sont résumés dans la table 2.1. Elles sont données à titre indicatif pour démontrer les possibilités de polissage des tuyères en plastique. Pour quantifier la rugosité d'un point de vue aérodynamique, elle doit être comparée à la section au col de la tuyère.

Matériau	Papier de verre ( finition)	Rugosité (Ra) [ $\mu$ m]
Acide Polylactique (PLA)	P1200	0.656
	P2000	0.317
	P4000	0.051

TABLE 2.1 – Rugosités typiques obtenues par polissage au papier de verre.

Il est important de noter que la mesure de rugosité Ra est une représentation statistique de l'état de surface. Dans certains cas, nous utiliserons directement les profils des surfaces mesurées par l'interféromètre pour apporter des précisions sur l'état réel de la surface.

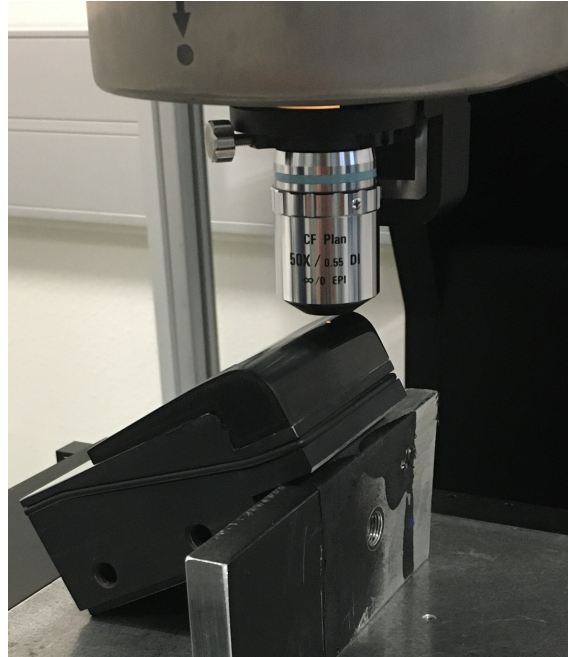


FIGURE 2.15 – Photographie illustrant la mesure de la rugosité d'une tuyère sur l'interféromètre TalySurf CCI 6000. Ici, la rugosité est mesurée dans le convergent.

### 2.3.3 Caractéristiques des tuyères utilisées

La géométrie des tuyères planes employées pour réaliser les expériences reprennent les principales caractéristiques des tuyères toroïdales industrielles de débitmétrie suivant la norme ISO9300 : le conduit amont forme un angle droit avec la tuyère, le convergent est en arc-de-cercle de rayon  $R$  jusqu'au divergent. L'angle du divergent est fixé à  $4^\circ$ . Le col sonique est la section minimale de hauteur  $h$ . La figure 2.16 présente un schéma d'une tuyère type installée dans la veine d'essais. Pour des raisons de contrainte d'espace dans la veine d'essais, tous les convergents des tuyères ne sont pas en quart-de-cercle. Dans ce cas, le convergent débute dans un premier temps par un petit rayon de courbure afin d'adapter la géométrie à l'espace disponible. Les caractéristiques géométriques de chaque tuyère sont visibles dans l'annexe A.

Pour évaluer indépendamment les effets de géométrie, de rugosité et de rapport de contraction, huit tuyères sont utilisées. Trois de ces tuyères ont les mêmes caractéristiques géométriques, mais des états de surface différents (tuyères R2C5S, R2C5M et R2C5R) ; trois des tuyères ont le même état de surface, mais des rayons de courbure différents (tuyères R1C5S, R2C5S et R4C5S) ; et finalement, trois de ces tuyères ont une géométrie similaire au cas précédent, mais pour un rapport de contraction différent (tuyères R1C10S, R2.4C11.8S et R4C10S). Les caractéristiques des tuyères sont récapitulées dans la table 2.2.

À titre de comparaison, la norme ISO9300 (2005) décrivant les caractéristiques des tuyères de débitmétrie industrielle requiert que celles-ci aient un état de surface dont la rugosité arithmétique soit inférieur à  $R_a < 15 \cdot 10^{-6}D$ . Au sein du groupe de tuyères



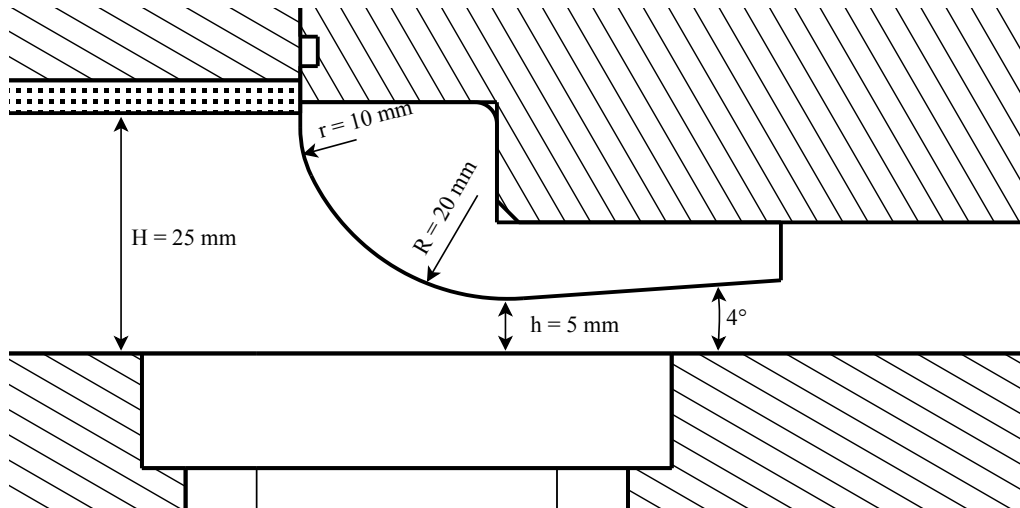


FIGURE 2.16 – Caractéristique géométrique de la tuyère R2C5.

Nom	Rayon	Hauteur col	Contraction	Rugosité	
	R/D	h (mm)	H/h	Papier	Ra/D · 10 <sup>6</sup>
R1C5S	1	5	5	P4000	6.4
R2C5S	2	5	5	P4000	5.5
R2C5M	2	5	5	P2000	31.6
R2C5R	2	5	5	P1200	65.6
R4C5S	4	5	5	P4000	9.0
R1C10S	1	2.5	10	P4000	23.2
R2.4C11.9S	2.4	2.1	11.9	P4000	19.9
R4C10S	4	2.5	10	P4000	26.4

TABLE 2.2 – Caractéristiques des tuyères expérimentales. Les noms de tuyère réfèrent à : R - Rayon de la tuyère ; C - contraction de la tuyère et les lettres S, M et R pour les papiers de verre utilisés pour le polissage (P4000 : *Smooth*, P2000 : *Medium* et P1200 : *Rough*).

étudiées, seules celles avec une finition "smooth" avec un col  $h = 5\text{ mm}$  respectent ce critère. La tuyère R2.4C11.9S présente un défaut de fabrication et devait initialement avoir un col de 2.5mm et un rayon de convergent  $R = 2D$  pour simuler la tuyère R2C5S avec un plus grand rapport de contraction  $H/h$ . Les données seront tout de même exploitées en prenant en compte ce défaut.



## 3

---

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE TRANSITION

---

<b>2.1 Soufflerie S150</b> . . . . .	<b>37</b>
2.1.1 Fonctionnement et capacités de l'installation . . . . .	37
2.1.2 Dimensionnement de la section d'essai . . . . .	39
<b>2.2 Instrumentation</b> . . . . .	<b>41</b>
2.2.1 Détection des gradients de pression . . . . .	41
2.2.2 Détection de la transition . . . . .	43
2.2.3 Mesure des grandeurs totales et synchronisation . . . . .	47
2.2.4 Mesure du taux de turbulence . . . . .	48
<b>2.3 Conception des tuyères expérimentales</b> . . . . .	<b>49</b>
2.3.1 Matériau et fabrication . . . . .	49
2.3.2 État de surface . . . . .	50
2.3.3 Caractéristiques des tuyères utilisées . . . . .	52

---

## 3.1 CRITÈRE DE TRANSITION

Pour pouvoir analyser les images infrarouges issues des expériences, il faut dans un premier temps définir un critère de transition. Pour établir ce critère, les essais de la tuyère R2C5S sont utilisés à titre d'exemple. On s'intéresse dans un premier temps à la transition de couche limite au col de la tuyère. Pour ce faire, la température est moyennée spatialement dans la direction transverse de l'écoulement. L'évolution de la température moyenne au col en fonction du nombre de Reynolds est présentée sur la figure 3.1. On peut voir que la température décroît dans un premier temps jusqu'à un minimum, puis se met à croître, atteint un maximum et se met à décroître à nouveau. Dans un cadre purement adiabatique, la température ne varie avec le nombre de Reynolds que lorsqu'il y a transition laminaire-turbulente, en augmentant. La diminution de température avant le minimum et après le maximum est ici associée au fait que la paroi de la tuyère n'est pas parfaitement adiabatique, ce qui rend le transfert de chaleur dépendant du nombre de Reynolds. En effet, un nombre de Reynolds plus grand conduit à une couche limite plus fine et une densité de l'air plus importante, par conséquent plus de transfert de chaleur. Cependant, malgré des conditions non adiabatiques, l'augmentation de la température de

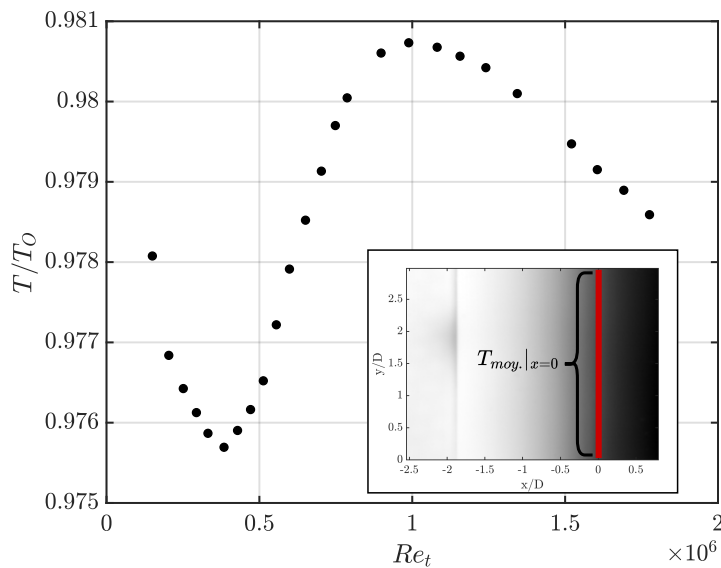


FIGURE 3.1 – Température de la paroi au col de la tuyère R2C5S. (moyennée spatialement dans la direction transverse à l'écoulement à  $x = 0$ ).

la paroi, entre le minimum et le maximum observés, ne peut qu'être due à la transition laminaire-turbulent, et est largement visible sur la figure 3.1. Dans cet exemple, le nombre de Reynolds auquel commence la transition est pris comme étant celui qui correspond au minimum de température. On suppose la transition complète lorsque le maximum de température est atteint. L'augmentation progressive de la température avec le nombre de Reynolds durant la transition reflète l'augmentation de l'occurrence d'événements turbulents au sein de la couche limite, jusqu'à ce qu'une couche limite complètement turbulente soit atteinte au point le plus élevé de température.

Cette analyse peut être répétée à diverses positions  $x/D$  dans la tuyère, pourvu que le nombre de Mach soit suffisamment grand pour que la variation de température de récupération entre une couche limite laminaire et turbulente soit suffisamment importante pour être détectée par la caméra thermique. La caméra peut détecter une variation de température de 25mK, ce qui correspond à la variation de température d'une paroi adiabatique due à la transition pour un nombre de Mach de  $M = 0.01$ . En pratique, la présence de réflexions, du bruit de la caméra et du transfert de chaleur à la paroi limite la détection de la transition pour des nombres de Mach approximativement  $M > 0.2$ .

## 3.2 INFLUENCE DE LA RUGOSITÉ

### 3.2.1 Configurations industrielles

Pour étudier l'influence de la rugosité sur la transition, les trois tuyères R2C5S, R2C5M et R2C5R, dont le contour est montré sur la figure 3.2 sont comparées. Les mesures infrarouges sont réalisées pour chaque tuyère pour des nombres de Reynolds entre  $Re_t =$

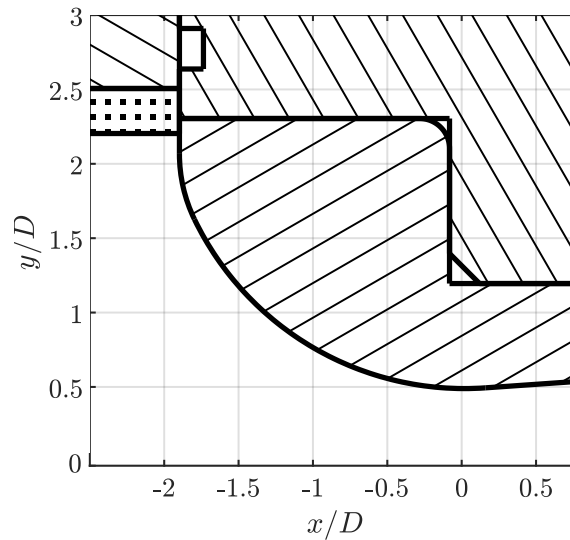


FIGURE 3.2 – Contour adimensionnel des tuyères R2C5.

$0.15 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 1.7 \cdot 10^6$ . Les températures des images thermiques sont moyennées dans la direction transverse de l'écoulement, et les points bas et haut de température sont relevés pour différentes positions  $x/D$ .

Les résultats de transition pour les différentes positions sont présentés sur la figure 3.3. Dans la zone considérée, entre  $x/D = -1$  et  $x/D = 0.9$ , on note que la couche limite est dans un premier temps laminaire jusqu'à  $Re_t \approx 0.4 \cdot 10^6$ , puis devient transitionnelle presque simultanément dans toute la région considérée. Dans la section divergente de la tuyère ( $x/D > 0$ ), la transition débute à des nombres de Reynolds légèrement inférieurs, à environ  $Re_t \approx 0.35 \cdot 10^6$ . Le nombre de Reynolds pour lequel la couche limite est complètement turbulente est quant à lui variable suivant la position dans la tuyère. La couche limite devient d'abord turbulente en fin de tuyère, puis le front de transition remonte dans la tuyère au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Dans l'ensemble, la dynamique de transition est la même pour les trois niveaux de rugosité, qui donnent des résultats très similaires du point de vue de la transition. La seule différence notable provient de la tuyère la plus rugueuse R2C5R, pour laquelle le régime complètement turbulent semble atteint significativement plus rapidement que les autres tuyères dans la partie divergente. En observant les images infrarouges pour cette tuyère sur la figure 3.4, pour des nombres de Reynolds correspondants aux régimes de couches limites transitionnelles, on remarque pour la première fois des régions claires dans le divergent. Elles sont de formes triangulaires, fortement allongées dans la direction de l'écoulement et partent d'un seul point d'origine, un *spot* turbulent. Cela indique des points de transition stationnaires et localisés typiques de la transition induite par le sillage de rugosités isolées présentes sur la paroi (Fischer, 1972). Le développement de ces sillages turbulents peut expliquer en partie l'arrivée prématurée de la transition dans le divergent pour cette tuyère plus rugueuse.

On note également que la transition induite par rugosités isolées intervient dans

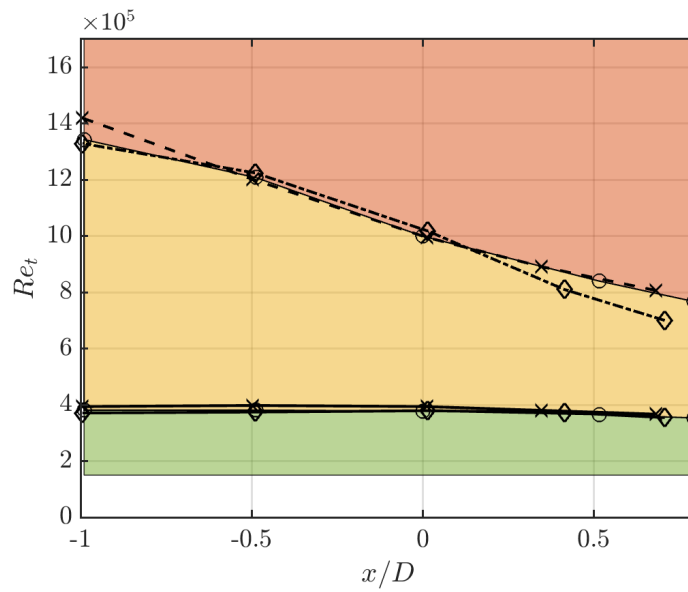


FIGURE 3.3 – Carte de transition dans les tuyères R2C5 pour différentes rugosités. Cercles (o) : R2C5S; Croix (x) : R2C5M; Losanges (◇) : R2C5R. Les zones verte, jaune et orange correspondent respectivement aux zones pour lesquelles la couche limite est laminaire, transitionnelle et turbulente pour la tuyère R2C5S.

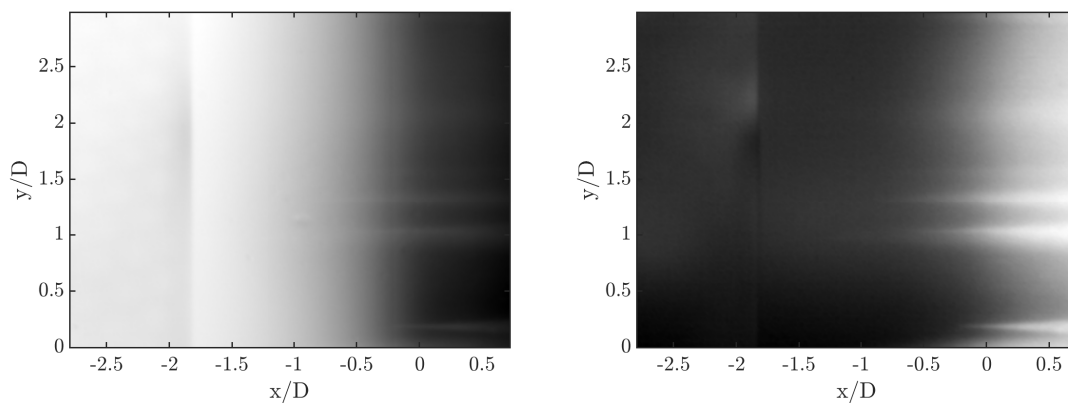


FIGURE 3.4 – Image infrarouge de la tuyère R2C5R à  $Re_t = 0.654 \cdot 10^6$ . À Gauche : image infrarouge originale. À droite : image infrarouge avec post-traitement permettant de mettre en valeur les zones de transition. Les zones claires correspondent ici aux événements turbulents.

le convergent et au col de la tuyère, mais que cette information n'est pas re-transcrite sur la figure 3.3. Au niveau du col de la tuyère, aucune différence dans les nombres de Reynolds de transition n'est observée entre les différents niveaux de rugosité, alors que des spots turbulents sont visibles sur la tuyère la plus rugueuse. En effet, même si des spots turbulents apparaissent, la température maximale, qui détermine la fin du passage à une couche limite turbulente, n'est atteinte que lorsque l'écoulement est turbulent sur toute la largeur de la tuyère à une position donnée  $x/D$ . La figure 3.3 nous indique alors qu'au col des tuyères testées, la rugosité ne domine pas la transition sur toute la largeur de la tuyère.

Ces résultats mettent en avant deux mécanismes de transition dans les tuyères de débitmétrie industrielle :

- un mécanisme qui n'est pas localisé et se développe en tout point de la tuyère, probablement lié à la croissance de perturbations excitées par le bruit naturel de l'écoulement en dehors de la couche limite, comme dans un mécanisme de croissance modale ou non modale (voir figure 1.9 issue des propositions de Fedorov (2011) et Morkovin et al. (1994)).
- un mécanisme associé aux éléments de rugosité isolés, qui peuvent développer un sillage turbulent dans certaines conditions (Bernardini et al., 2014).

Pour les trois tuyères présentées, la transition n'est pas dominée par la rugosité de la paroi, nous suspectons que la transition est associée à des mécanismes de croissance modale ou non modale. Ces résultats ne peuvent cependant pas être généralisés, comme vont le démontrer les essais réalisés sur la tuyère R1C10S dans la section suivante.

### 3.2.2 Tuyère à forte accélération

Le cas de la tuyère R1C10S est également intéressant du point de vue de la transition induite par des éléments de rugosités isolés.

L'évolution de la température au col de la tuyère R1C10S avec le nombre de Reynolds, présenté sur la figure 3.5, ne suit pas le schéma décrit dans la section 3.1.

En effet, l'évolution de la température avec le nombre de Reynolds ne présente pas de région d'augmentation de température clairement distincte, qui nous permettait précédemment d'identifier la gamme de nombre de Reynolds pour laquelle la couche limite était transitionnelle. La raison pour laquelle la variation de température associée à la transition n'apparaît pas clairement n'est pas connue. Cependant, nous pouvons supposer que ce phénomène soit associé à la taille de la tuyère. En effet, cette tuyère possède un col d'une hauteur de 2.5mm et un convergent de rayon 5mm, ce qui constitue une variation de géométrie quatre fois plus rapides que les tuyères R2C5. Dans des conditions adiabatiques, le gradient de température le long de la paroi de la tuyère est donc quatre fois plus important ici que pour les tuyères R2C5. Or, nous avons vu sur la figure 3.1 que la paroi de la tuyère n'est pas adiabatique, et qu'il existe probablement un transfert de chaleur dans la paroi de la tuyère, ce même transfert de chaleur qui dépend du gradient

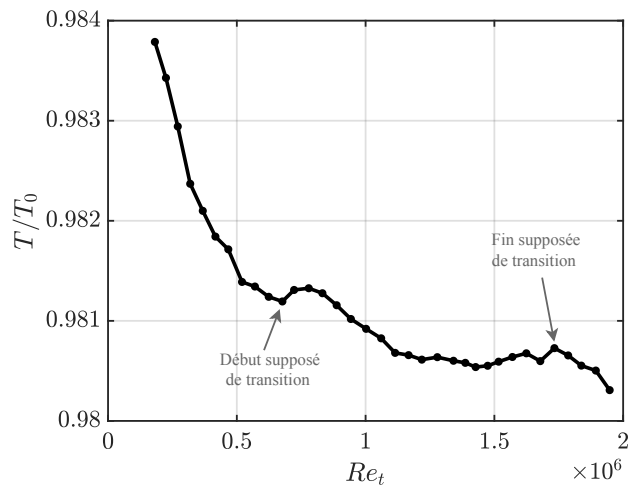


FIGURE 3.5 – Température de la paroi au col de la tuyère R1C10S. (moyennée spatialement dans la direction transverse à l'écoulement).

de température de la paroi. Ainsi, nous supposons ici que le flux de chaleur au sein de la matière constituant la tuyère est important, ce qui conduit à réduire le potentiel de détection de la transition. Malgré ceci, nous remarquons tout de même une augmentation soudaine de température au col de la tuyère à  $Re_t = 0.68 \cdot 10^6$  et une diminution monotone de la température à partir de  $Re_t = 1.73 \cdot 10^6$ . Nous supposons alors que la couche limite est transitionnelle entre ces deux nombres de Reynolds.

Ce diagnostic se confirme lorsque l'on observe les images infrarouges de la paroi de la tuyère à plusieurs nombres de Reynolds sur la figure 3.6. On remarque dans un premier temps que pour cette tuyère, il y a eu de la transition induite par éléments de rugosité isolés. On identifie sur les images infrarouges un spot turbulent à  $Re_t = 0.57 \cdot 10^6$ , trois spots turbulents à  $Re_t = 0.83 \cdot 10^6$  et six spots turbulents à  $Re_t = 1.22 \cdot 10^6$ . La visibilité que nous avons des spots turbulents nous indique qu'ils sont entourés d'une couche limite dont la température de récupération est plus faible que celle du sillage turbulent, donc d'une couche limite laminaire ou partiellement laminaire. À  $Re_t = 1.89 \cdot 10^6$ , il n'est presque plus possible de distinguer les spots turbulents, indiquant que la couche limite est turbulente sur l'ensemble de la tuyère.

Le spot turbulent visible à  $Re_t = 0.57 \cdot 10^6$  apparaît avant le début supposé de la transition à  $Re_t = 0.68 \cdot 10^6$ . Cette apparition n'est pas visible sur la figure 3.5 à cause d'un effet de moyenne, mais elle est clairement visible sur la figure 3.7, où on trace l'évolution de la température en fonction du nombre de Reynolds au col ( $x/D = 0$ ) à  $y/D = 5.5$ , position transversale à laquelle apparaît le spot turbulent. Nous pouvons voir que ce spot turbulent apparaît à partir de  $Re_t = 0.5 \cdot 10^6$ .

Contrairement aux tuyères de type R2C5 et malgré une rugosité  $Ra/D$  plus petite que les tuyères R2C5M et R2C5R, des éléments de rugosité ont ici clairement participé à la transition. La transition est même apparue de manière précoce par la présence d'un spot à  $y/D \approx 5.5$ . Pour un rayon de tuyère plus petit et un nombre de Reynolds plus élevé, la



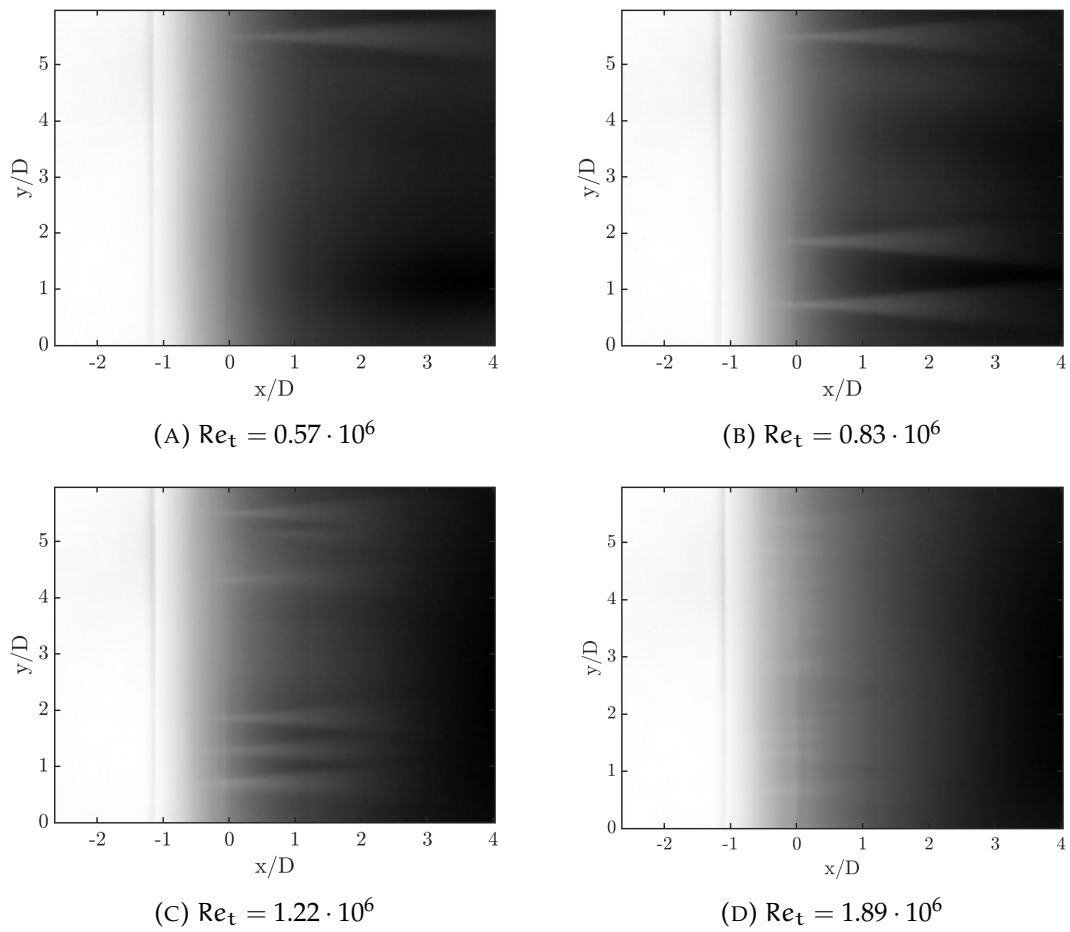


FIGURE 3.6 – Image infrarouge de la tuyère R1C10S pour quatre nombres de Reynolds. Les formes triangulaires qui se distinguent par leurs tons clairs correspondent à des régions turbulentes, dont l'origine se situe au sommet de chaque triangle.

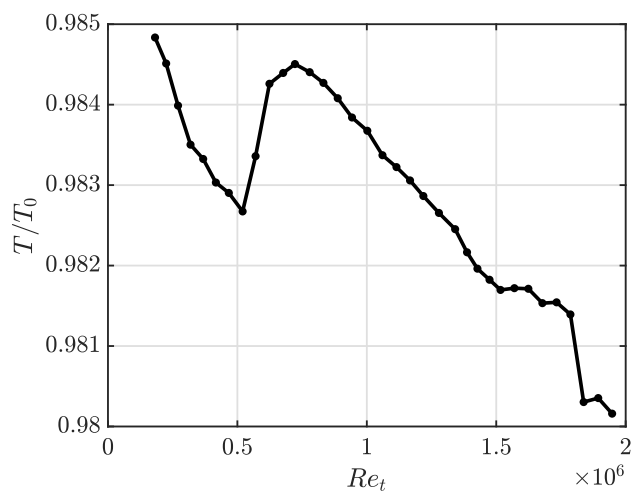


FIGURE 3.7 – Température de la paroi au col de la tuyère R1C10S à  $y/D = 5.5$ .

couche limite est plus fine que dans les cas des tuyères R2C5. Ainsi, on observe que la transition a ici été une combinaison de la transition induite par éléments de rugosité isolés et par les perturbations de l'écoulement externe à la couche limite.

Comme nous le verrons dans les section 3.3 et section 3.4, l'utilisation d'une tuyère ayant un rapport de contraction plus élevé et un rayon de convergent plus petit a conduit à augmenter le nombre de Reynolds pour lequel apparaît de la turbulence déclenchée par le bruit naturel de l'écoulement, laissant l'opportunité à la couche limite laminaire de s'affiner davantage. Ainsi, la taille relative de la rugosité par rapport à la couche limite augmente, et le potentiel de transition par éléments de rugosité isolés est plus important.

### 3.2.3 Rugosité isolée - tuyère brûlée

Lors du développement de la méthode expérimentale de détection de la transition, une erreur de manipulation de la soufflerie a conduit à observer un cas très particulier. Pour cet essai, une tuyère R1C5 a été utilisée. La pression totale a été augmentée brusquement de  $P_0 = 1\text{bar}$  à  $P_0 = 40\text{bar}$ , conduisant à augmenter la température totale de l'écoulement, par compression, au-delà de la température de consigne. La température totale a atteint  $T_0 = 348\text{K}$  pendant quelques secondes, soit  $\sim 20\text{K}$  au-dessus de la température de transition vitreuse du PLA.

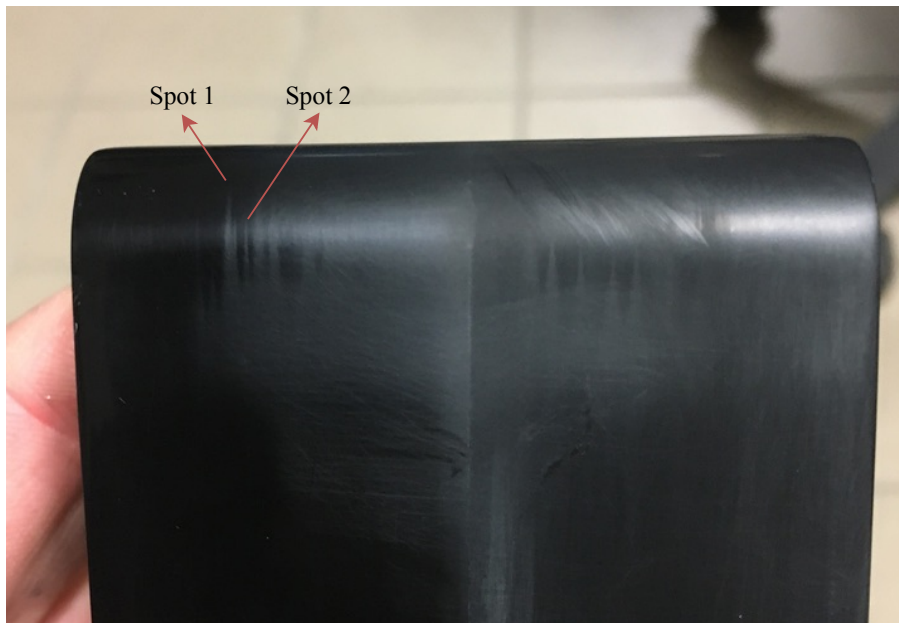


FIGURE 3.8 – Photographie après essai d'une tuyère R1C5 utilisée pour le développement de la méthode expérimentale. La surface de la tuyère est partiellement brûlée, laissant apparaître les zones qui ont été soumises à une couche limite turbulente chaude.

Une photographie de la tuyère après l'essai est présentée sur la figure 3.8, sur laquelle nous pouvons voir que la surface au col de la tuyère a été marquée par la forme des régions dans lesquelles l'écoulement était turbulent et à haute température. Les régions

d'écoulement laminaire n'ont pas été marquées. Cela est attribué au transfert de chaleur à la paroi, étant plus important pour couche limite turbulente qu'une couche limite laminaire. Les régions turbulentes ont eu le temps de brûler la tuyère, tandis que les régions laminaires sont restées intactes. Les régions brûlées sont bien définies et localisées, rappelant à nouveau le mécanisme de transition induit par des rugosités isolées.

En plus de la mise en avant visuelle de l'existence de spots de transition, la présence de la brûlure sur la paroi permet de localiser précisément le point à partir duquel la transition a débuté. Il est ainsi possible de mesurer le profil de la paroi pour identifier la cause de la transition. Les deux profils de paroi correspondants aux spots 1 et 2 sont présentés sur la figure 3.9. Les mesures de rugosité de paroi montrent clairement le pic de rugosité ayant

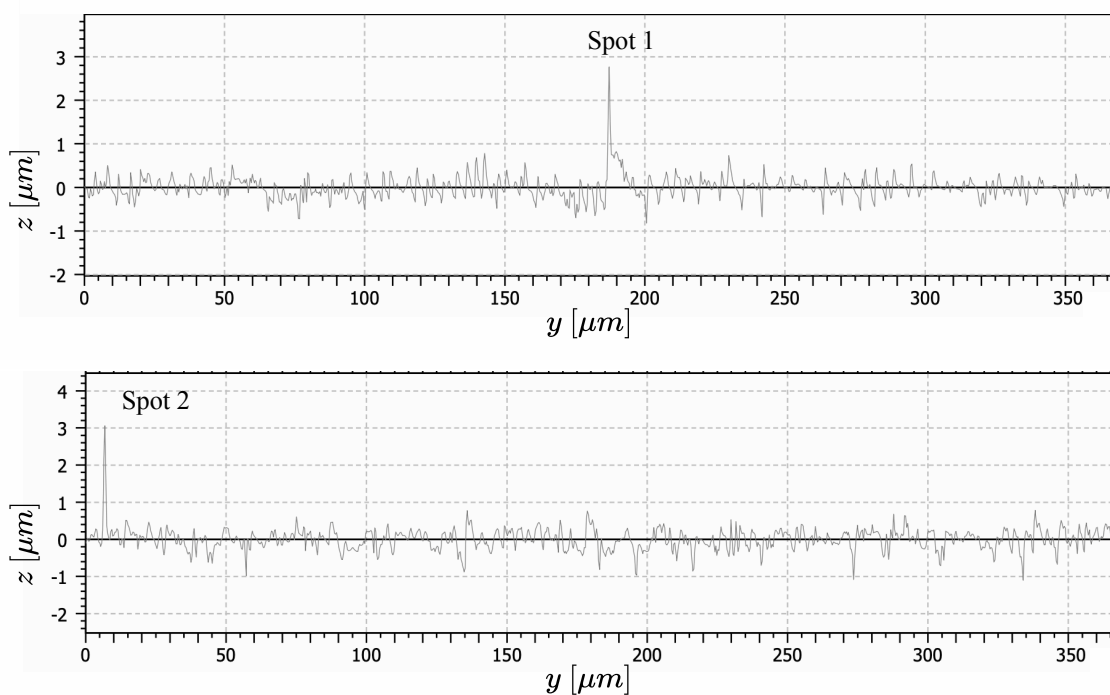


FIGURE 3.9 – Mesures de profils de surface de la tuyère dans deux régions correspondant aux débuts de deux traces de brûlures Spot 1 et Spot 2. Le zéro de l'axe des abscisses correspond au début de zone de mesure.

provoqué la transition. Les deux pics ont une taille d'environ  $3\mu\text{m}$ , et sont un ordre de grandeur plus élevé que les éléments de rugosités environnants.

La tuyère n'a pas été caractérisée et les grandeurs totales n'ont pas été enregistrées pendant l'essai, il n'est donc pas possible d'être quantitatif sur le nombre de Reynolds et la taille des éléments de rugosité relativement à la taille de la couche limite. En revanche, les mesures directes des éléments de rugosité au-devant des zones brûlées ne laissent aucun doute sur l'association des spots de transition, visibles sur les images infrarouges, avec de la transition induite par éléments de rugosité isolés. La visualisation directe des éléments de rugosité ayant provoqué la transition, en comparaison avec le profil  $z$  aux alentours, montre également que l'occurrence de ceux-ci relève soit d'un événement statistique de faible probabilité, soit d'un défaut de polissage. Quoi qu'il en soit, cela montre que

l'utilisation d'un critère basé sur la rugosité arithmétique, donc sur une valeur statistique, pour caractériser l'état de surface ne peut pas garantir l'absence de pic de rugosité dont la taille est d'un ordre de grandeur supérieur à la taille moyenne des éléments de rugosité rencontré pour un état de surface donné.

#### 3.2.4 Résumé sur l'influence de la rugosité

Ces observations indiquent que pour les tuyères  $R/D = 2$ , respectant un polissage proche des recommandations de la norme ISO9300 et pour les taux de turbulence étudiés, la transition est principalement due à des mécanismes associés au bruit dans l'écoulement libre. Pour des rugosités plus élevées, il est possible de voir apparaître des spots d'écoulements turbulents localisés, induits par des éléments de rugosité isolés. Il y a alors compétition entre la turbulence induite par la rugosité et celle induite par le bruit dans l'écoulement externe à la couche limite.

De manière plus générale, l'apparition de la transition due à la rugosité semble en partie conditionnée par le rapport entre l'épaisseur de la couche limite et la taille des éléments de rugosité. Aussi, lorsque le nombre de Reynolds  $Re_t$  augmente, la couche limite qui se développe dans la tuyère s'affine, augmentant relativement la taille des éléments de rugosité en surface. Pour chaque tuyère, il existe donc nécessairement un nombre de Reynolds  $Re_t$  pour lequel la taille relative des éléments de rugosités isolés devient critique vis-à-vis de la transition. Pour déterminer si la transition sera induite par des éléments isolés de rugosité, il faut dans un premier temps déterminer les conditions d'apparitions de la transition qui n'est pas induite par la rugosité de surface. C'est une caractéristique importante, puisque les recommandations industrielles pour la fabrication des tuyères ne s'intéressent qu'à la rugosité des tuyères, sans prendre en compte l'influence du taux de turbulence de l'écoulement externe à la couche limite sur la transition. Il est donc nécessaire de se pencher sur l'influence de la géométrie et du rapport de contraction sur la transition pour pouvoir complètement caractériser le type de transition attendu.

### 3.3 INFLUENCE DE LA GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE

Pour étudier l'influence du rayon de courbure de la tuyère sur la transition, les résultats expérimentaux des tuyères R1C5S, R2C5S et R4C5S sont comparées. Ces trois tuyères sont polies avec le meilleur état de surface possible, afin que la rugosité n'ait pas d'influence sur les résultats. Cela est vérifié sur les images infrarouges, en surveillant que des spots turbulents n'apparaissent pas avant d'obtenir une transition complète.

Pour chaque tuyère, la figure 3.10 présente la plage de nombre de Reynolds pour lesquelles la couche limite est transitionnelle. En dehors de la plage transitionnelle, la couche limite est laminaire pour les plus faibles nombres de Reynolds et turbulente pour les plus grands nombres de Reynolds.

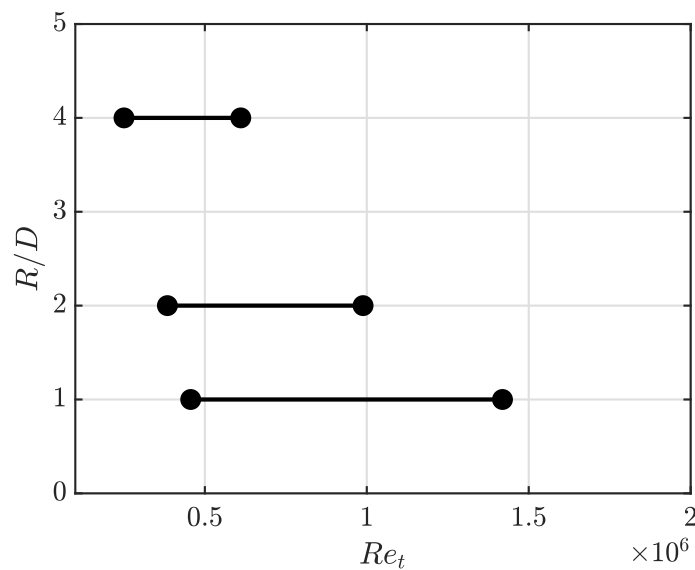


FIGURE 3.10 – Plage de nombre de Reynolds pour laquelle la couche limite est transitionnelle aux cols des tuyères en fonction du rayon de courbure.

Il est clair que la variation de  $R/D$  modifie le nombre de Reynolds de transition. La diminution de  $R/D$  augmente le nombre de Reynolds pour lequel la transition débute. La plage de régime transitionnelle est également élargie.

Lorsque le rayon de courbure de la tuyère est diminué, cela conduit à une plus forte accélération dans la tuyère. Il en résulte une couche limite plus fine. À  $Re_t$  équivalent, le nombre de Reynolds basé sur la couche limite est plus faible pour des tuyères ayant un rayon de courbure plus petit, ce qui permet d'expliquer en partie pourquoi les tuyères avec un petit rayon de courbure ont une couche limite au col qui transitionne plus tard.

### 3.4 INFLUENCE DU RAPPORT DE CONTRACTION

Les résultats expérimentaux des tuyères présentées précédemment sont maintenant comparés aux résultats des tuyères R1C10S, R4C10S et R2.4C11.8S. Ici, le rapport de contraction entre la section en amont des tuyères et les cols soniques a été doublé. Les tuyères sont encore une fois polies avec le meilleur état de surface possible, mais la réduction de la hauteur du col conduit à augmenter la rugosité relative  $Ra/D$ .

Les résultats de cette comparaison sont présentés sur la figure 3.11. On peut y voir que la plage de nombre de Reynolds pour laquelle la couche limite est transitionnelle intervient à plus haut nombre de Reynolds pour les plus grands rapports de contraction. La largeur de la plage transitionnelle ne semble pas ou peu affectée.

Pour les nombres de Reynolds considérés, les taux de turbulence en amont des tuyères étaient similaires, voir un peu plus élevé pour le taux de contraction  $CR = 10$ . Le taux de turbulence étant corrélé à l'occurrence de la transition dans les couches limites, on pourrait s'attendre à ce que la transition ait lieu à des nombres de Reynolds plus faibles

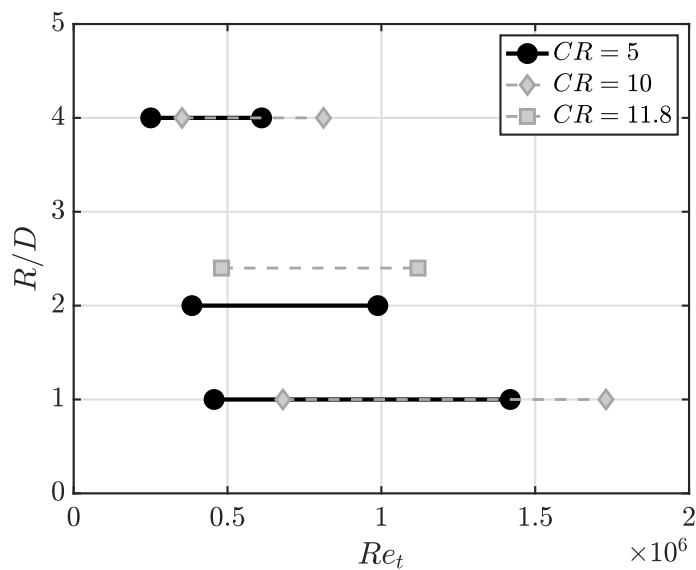


FIGURE 3.11 – Plage de nombre de Reynolds pour laquelle la couche limite est transitionnelle aux cols des tuyères en fonction du rayon de courbure pour plusieurs taux de contraction.

pour le taux de contraction plus élevé. Cependant, le taux de turbulence est diminué au passage d'une contraction et ceci d'autant plus que le taux de contraction est important (Ribner et Tucker, 1952; Tsugé, 1984). Ici, le décalage de la transition à des nombres de Reynolds plus élevé peut être causé par la réduction du taux de turbulence au col de la tuyère, dû au plus grand taux de contraction. Toutefois, la modification du taux de contraction ne modifie pas uniquement le taux de turbulence. La vitesse de l'écoulement en amont de la tuyère est également modifiée, de  $M = 0.117$  pour  $CR = 5$  à  $M = 0.05$  pour  $CR = 11.8$ . Ce changement peut être important pour la dynamique de l'écoulement dans l'angle formé par la paroi supérieure de la section amont et la tuyère, dans lequel il peut exister un point d'arrêt, et donc une zone de recirculation. Il est possible que cette zone de recirculation génère des fluctuations qui se propagent dans la couche limite de la tuyère et soit responsable de la transition. La présente expérience ne permet pas de séparer l'influence du taux de turbulence amont de l'existence de la zone de recirculation.

### 3.5 CONCLUSION

La transition dans les tuyères planes avec un convergent en arc-de-cercle trouve plusieurs origines.

Pour des tuyères avec un état de surface suffisamment lisse, la transition est engendrée par des perturbations présentes dans l'écoulement. Comme le montrent les expériences mettant en œuvre plusieurs taux de contraction, ce mode de transition est certainement sensible à l'intensité des perturbations dans l'écoulement extérieur à la couche limite, mais aussi au rayon de courbure du convergent de la tuyère. En effet, lorsque la courbure au

col est diminuée, la couche limite s'affine due à une plus forte accélération au passage de la tuyère. Ainsi, pour un même nombre de Reynolds basé sur la hauteur du col de la tuyère, une tuyère avec un rayon de courbure plus petit aura un nombre de Reynolds basé sur la couche limite plus petit, suggérant que la couche limite est moins sensible aux perturbations de l'écoulement.

Pour les tuyères  $R/D = 2$ , les expériences ont montré que la rugosité de surface n'a pas eu d'influence sur l'apparition globale, c'est-à-dire sur toute la largeur, de la transition au col de la tuyère, et ce même pour des niveaux de rugosité jusqu'à quatre fois supérieurs aux recommandations de la norme ISO9300. Cependant, nous avons vu apparaître localement de la transition induite par éléments de rugosité isolés dans le cas de la tuyère R2C5 la plus rugueuse, ou encore dans le cas de la tuyère R1C10S moins rugueuse, mais avec un taux de contraction plus important et un rayon de convergent plus petit. Dans nos expériences ayant montré de la transition par éléments de rugosité isolés, le processus de transition n'a jamais été complètement dominé par la rugosité de la surface, il a été aussi partiellement réalisé par d'autres mécanismes associés aux perturbations présentes dans l'écoulement. Il faut tout de même garder à l'esprit que ces données sont obtenues dans des conditions expérimentales différentes des installations industrielles, pour lesquelles un taux de contraction  $CR \geq 16$  est requis et dont le taux de turbulence n'est pas contrôlé.

Le rôle de la rugosité est subtil, car la hauteur de la rugosité, relative à la taille de la couche limite, augmente avec le nombre de Reynolds. Par ailleurs, nous avons vu que l'occurrence de la transition due aux perturbations de l'écoulement pouvait avoir lieu à des nombres de Reynolds variables suivant les conditions d'écoulement. Cela signifie qu'il va y avoir compétition entre l'occurrence de la transition due à la croissance de perturbations dans l'écoulement et l'occurrence de la transition due à la présence des rugosités. La question qui se pose est alors : est-ce que le bruit dans l'écoulement provoquera la transition avant que la couche limite laminaire soit suffisamment fine pour être impactée par un élément de rugosité isolé ?

Pour répondre à cette question, il faut s'intéresser à ces deux mécanismes de transition. Dans la suite de cette étude, on s'attachera principalement à comprendre et décrire les mécanismes de transition induits par le bruit naturel présent dans l'écoulement. La question de la rugosité sera partiellement abordée, en utilisant des résultats empiriques de la littérature.





## 4

---

 ÉTUDE DE STABILITÉ SPATIALE
 

---

<b>3.1 Critère de transition</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>3.2 Influence de la rugosité</b> . . . . .	<b>56</b>
3.2.1 Configurations industrielles . . . . .	56
3.2.2 Tuyère à forte accélération . . . . .	59
3.2.3 Rugosité isolée - tuyère brûlée . . . . .	62
3.2.4 Résumé sur l'influence de la rugosité . . . . .	64
<b>3.3 Influence de la géométrie de la tuyère</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>3.4 Influence du rapport de contraction</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>3.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>66</b>

---

*L'objectif de ce chapitre est de présenter en détail la méthode utilisée pour étudier la stabilité des couches limites dans les tuyères. L'analyse de stabilité comprend l'étude de la croissance modale de petites perturbations et l'étude non modale, dite de croissance transitoire. Une fois la formulation détaillée, les particularités du régime transsonique sont analysées afin de pouvoir appliquer correctement le cadre d'analyse de stabilité aux écoulements au col sonique des tuyères. Les effets du gradient de pression, dû à l'accélération de l'écoulement au col, et de la courbure de la paroi sur les propriétés de stabilité de l'écoulement sont ensuite discutés en détail.*

## 4.1 FORMULATION

La stabilité de l'écoulement est étudiée au travers des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible visqueux

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p = \text{div} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.1b)$$

$$\frac{R}{(\gamma - 1)} \rho \frac{DT}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{b} + \Phi, \quad (4.1c)$$

l'équation (4.1a) de continuité, les équations (4.1b) de conservation de la quantité de mouvement suivant les trois directions et l'équation (4.1c) du bilan d'énergie, complétées

par la relation des gaz parfait

$$p = \rho RT. \quad (4.2)$$

Le système d'équations (4.1) et (4.2) est exprimé dans une forme compacte par

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{NS}(\mathbf{q}), \quad (4.3)$$

avec  $\mathbf{q} = [\rho, u, v, w, T]^t$  le vecteur d'état comprenant la densité  $\rho$ , les trois composantes de vitesse  $u, v, w$ , la température  $T$ ,  $\mathcal{NS}$  l'opérateur de Navier-Stokes.

Pour cette étude, les équations (4.1) et (4.2) sont adimensionnées par la vitesse du son au bord de la couche limite  $a_\delta$ , la distance de référence est l'épaisseur de déplacement de la couche limite  $\delta_1$ , la température, la densité, la viscosité et la pression sont adimensionnées par leurs valeurs au bord de la couche limite, symbolisée par l'indice  $(\cdot)_\delta$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_\delta}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{a_\delta}, \quad T = \frac{T^*}{T_\delta}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_\delta a_\delta^2}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\delta}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{\delta_1},$$

où  $\mathbf{v} = [u, v, w]$  est le vecteur vitesse,  $p$  la pression et l'indice  $(\cdot)^*$  indique les grandeurs dimensionnelles. Cet adimensionnement conduit ainsi au nombre de Reynolds

$$Re_{\delta_1} = \frac{\rho_\delta u_\delta \delta_1}{\mu_\delta}. \quad (4.4)$$

#### 4.1.1 Linéarisation des équations de Navier-Stokes

La transition à la turbulence est généralement associée à la croissance de perturbations d'amplitudes infinitésimales au sein de l'écoulement. Pour étudier la dynamique de ces perturbations, les équations de N.S. sont linéarisées en introduisant la décomposition  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}'$ ,  $\bar{\mathbf{q}}$  étant le point fixe autour duquel les équations sont linéarisées. Dans le cas de la transition à la turbulence, ce point fixe est défini comme étant l'écoulement laminaire non perturbé et est appelé *champ de base*. Le vecteur d'état  $\mathbf{q}'$  est la partie fluctuante autour du champ de base. On considère que les perturbations ont une amplitude infinitésimale, les termes quadratiques de fluctuations sont alors considérés comme négligeables. Il en résulte les équations décrivant l'évolution des petites perturbations autour du champ de base étudié. Sous forme matricielle, ces équations s'expriment par

$$\mathbf{A}_t \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathbf{L} \mathbf{q}', \quad (4.5)$$

avec la matrice  $\mathbf{A}_t$  contenant la densité qui s'applique aux équations (4.1b) et  $\mathbf{L}$  l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé contenant toutes les informations concernant le champ de base, qui sera détaillé dans les sections suivantes, en fonction du contexte dans lequel l'équation (4.5) est employée.

## 4.1.2 Hypothèses de calcul

*Courbure de la paroi*

Les équations de stabilité sont dans un premier temps exprimées dans le système de coordonnées cylindriques, tel qu'illustré sur la figure 4.1. La direction principale de

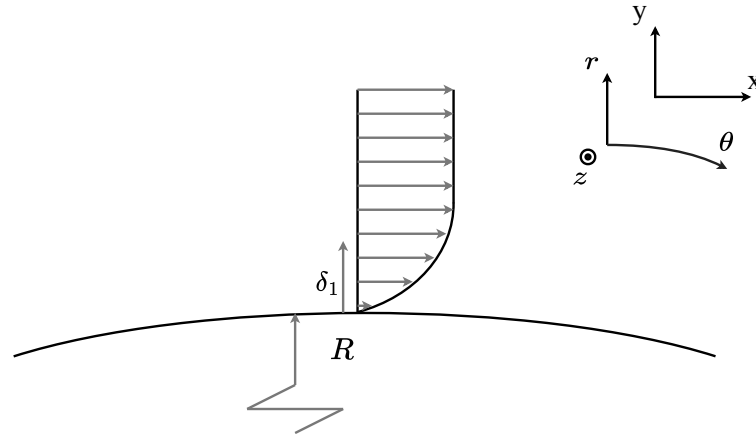


FIGURE 4.1 – Illustration de la couche limite dans une tuyère.

l'écoulement est sur l'axe  $\theta$ , de manière à tenir compte de la courbure du convergent de la tuyère. La courbure est définie comme  $\Gamma = \delta_1/R$ , où  $R$  est le rayon de courbure de la paroi au niveau du col de la tuyère et  $\delta_1$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite. En utilisant les résultats expérimentaux du chapitre précédent et un modèle de couche limite adapté (voir sous-section 4.1.3) pour calculer l'épaisseur de la couche limite aux nombres de Reynolds pour lesquels la transition est observée (voir figure 3.11), on peut estimer que la valeur de la courbure est entre  $\Gamma \approx 10^{-3}$  et  $\Gamma \approx 10^{-4}$ , en fonction des tuyères étudiées, lors de la transition.

La couche limite étant petite devant le rayon de courbure, il est possible d'appliquer une approximation de petite courbure  $\Gamma \ll 1$  pour éviter des problèmes de précision machine lors de la résolution numérique du problème. L'approximation de la petite courbure est effectuée dans les équations en considérant

$$\frac{\partial \cdot}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \rightarrow \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \cdot}{\partial x}, \quad (4.6)$$

de manière que la force centrifuge apparaisse dans les équations en coordonnées cartésiennes. Dans ce nouveau repère,  $x$  est désormais la direction principale de l'écoulement et  $y$  la direction normale à la paroi. Cette hypothèse est similaire à celle utilisée par Görtler (1941) pour déterminer la stabilité d'une couche limite incompressible pour une paroi concave et a conduit à la découverte des instabilités de Görtler. L'hypothèse est également utilisée dans Karp et Hack (2018) pour étudier la stabilité d'une couche limite incompressible sur paroi convexe.

*Écoulement 1D*

La couche limite de tuyère étant petite devant les dimensions de la tuyère, typiquement  $\delta_1 < D \cdot 10^{-2}$ , il est considéré que le champ de base  $\bar{\mathbf{q}}$  est localement parallèle. Les équations sont alors simplifiées en considérant la direction principale ( $x$ ) et transverse ( $z$ ) du champ de base comme homogène et l'indépendance en temps ( $t$ )

$$\bar{\mathbf{q}}(x, y, z, t) \rightarrow \bar{\mathbf{q}}(y), \quad (4.7)$$

ce qui ramène à l'étude de la stabilité d'un écoulement 1D stationnaire. On considère cependant toujours des perturbations tridimensionnelles évoluant dans le temps  $\mathbf{q}'(x, y, z, t)$  autour de ce champ de base.

*Conditions aux limites*

Pour modéliser une couche limite, une condition aux limites de Dirichlet est appliquée à la paroi pour imposer le non-glissement sur les composantes de vitesses. Dans cette étude, on se limite au cas des couches limites adiabatiques, et nous imposons que la perturbation n'échange pas de chaleur avec la paroi avec une condition de Dirichlet sur la température

$$u'(y = 0) = v'(y = 0) = w'(y = 0) = 0, \quad T'(y = 0) = 0.$$

*4.1.3 Définition du champ de base*

Le calcul de stabilité nécessite de préciser le champ de base. Celui-ci peut être obtenu expérimentalement, par des simulations numériques ou par des modèles de couches limites. Notre installation expérimentale ne permettant pas d'obtenir le profil de vitesse de la couche limite, on se propose d'utiliser un modèle simplifié basé sur les équations de la couche limite. Ce modèle est préféré aux simulations numériques, car sa simplicité permet d'explorer un grand nombre de configurations à moindre coût.

Le champ de base est obtenu à partir de la formulation proposée par Geropp (1971) qui permet d'obtenir analytiquement une couche limite pour des tuyères supersoniques. Ce modèle est basé sur les équations de couche limite compressible avec gradient de pression. Les équations sont simplifiées en considérant un nombre de Prandtl unitaire et une relation linéaire entre la viscosité et la température. Les équations sont résolues analytiquement en introduisant une classe de profils de vitesse autosimilaires, déterminée en estimant le gradient de pression au col de la tuyère.

La relation entre la distribution de vitesse  $u/u_\delta$  et la position normale à la paroi  $y$  est donnée par

$$y = \frac{D \left( \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{\gamma-1}{4(\gamma-1)}}}{\sqrt{R_0 m} M_\delta \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_\delta^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \left[ \sqrt{2} \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{2+u/u_\delta}{3}} - \sqrt{2} \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_\delta^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_\delta^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) \sqrt{\frac{u}{u_\delta} + 2} \right] \right], \quad (4.8)$$

où  $D$  est le diamètre du col de la tuyère, avec une valeur de vitesse  $u/u_\delta \in [0, 1]$ ,  $R_0 = a_0 D / \nu_0$  est un nombre de Reynolds basé sur les grandeurs totale, avec  $a_0$  la vitesse du son et  $\nu_0$  la viscosité cinématique, évalués à la température totale  $T_0$  et  $M_\delta$  le nombre de Mach évalué au bord de la couche limite. Le paramètre  $m$  est lié au gradient de pression au col de la tuyère. Pour une tuyère avec un convergent en arc-de-cercle, celui-ci est obtenu par

$$m = \frac{\sqrt{\frac{4}{\gamma+1} \frac{D}{R}}}{\left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma-1}}}. \quad (4.9)$$

Cette formule découle directement des équations isentropiques quasi 1D pour fluide compressible. Le profil de température est ensuite donné par la relation de Crocco-Busemann

$$\frac{T}{T_\delta} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\delta^2 \left( 1 - \left( \frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right), \quad (4.10)$$

et finalement, les profils de densité et viscosité sont obtenus par

$$\rho = \frac{T}{T_\delta} \rho_\delta, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{T}{T_\delta} \mu_\delta. \quad (4.11)$$

Le choix du nombre de Mach dans l'équation (4.8) est lié à la position dans la tuyère :  $M_\delta < 1$ ,  $M_\delta = 1$  et  $M_\delta > 1$  correspondent respectivement à une couche limite dans le convergent, au col et dans le divergent de la tuyère. Dans le reste de l'étude, nous étudions la couche limite au col de la tuyère en supposant  $M_\delta = 1$ .

Dans ce modèle, le gradient de pression est toujours imposé au col de la tuyère via l'équation (4.9). Le gradient de pression est alors défini pour l'ensemble de la tuyère de manière qu'une couche limite autosimilaire soit solution des équations de couche limite, ce qui fait que le gradient de pression dans l'ensemble de la tuyère obtenu par ce modèle n'est pas exactement le même que celui obtenu pour la géométrie d'origine, sauf au niveau du col.

La figure 4.2 présente la comparaison entre le contour et le gradient de pression obtenu pour une tuyère  $R/D = 2$  et ce qui est obtenu avec le modèle utilisé. On peut voir que le contour original de la tuyère en arc-de-cercle n'est pas exactement reproduit par le modèle de Geropp (1971). Ils diffèrent au début du convergent de la tuyère, mais sont similaires proche du col. Les gradients de pression associés sont similaires dans les

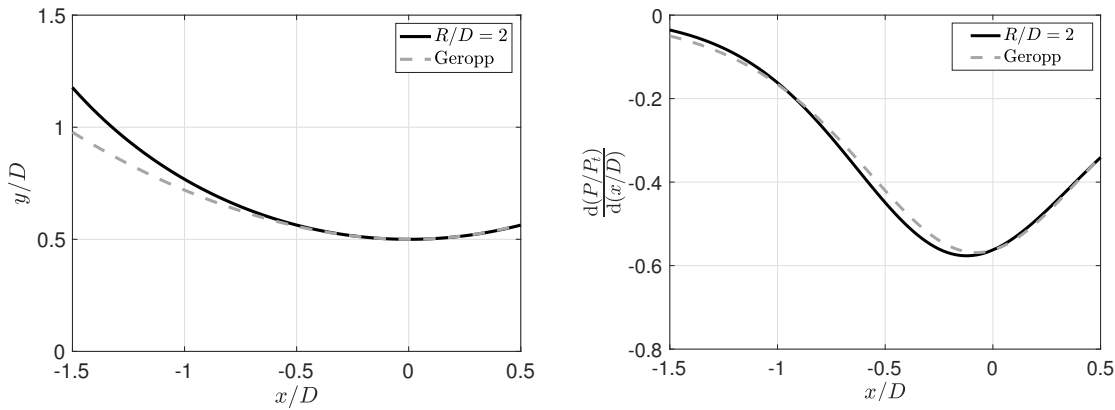


FIGURE 4.2 – Comparaison entre une tuyère  $R/D = 2$  et les données obtenues par le modèle de Geropp. Gauche : contour géométrique de la tuyère. Droite : Gradient de pression suivant la direction principale de l'écoulement obtenu à l'aide des relations isentropiques pour fluide compressible. La position  $x/D = 0$  indique le col de la tuyère.

deux cas et le gradient de pression est précisément le même au col de la tuyère, comme imposé par l'équation (4.9). En utilisant ce modèle, on peut estimer que la couche limite doit être d'environ  $\delta \approx 44.7 \mu\text{m}$  pour une tuyère  $R/D = 2$  avec un col de  $h = 5\text{mm}$  à  $Re_t = 0.7 \cdot 10^6$ , correspondant à un nombre de Reynolds pour lequel la transition est observée expérimentalement. La couche limite étant petite, typiquement  $\delta < D \cdot 10^{-2}$ , la différence de gradient de pression entre le modèle et celui de la tuyère  $R/D = 2$  le long de la tuyère ne devrait pas avoir d'impact significatif sur le profil de couche limite au niveau du col de la tuyère. Ainsi, la couche limite issue du modèle de Geropp (1971) paraît être représentative des couches limites rencontrées dans les configurations étudiées.

Cet argument a été indirectement vérifié par Ishibashi (2015), qui a réalisé des expériences visant à mesurer le débit de plusieurs tuyères ayant des convergents en arc-de-cercle. Les résultats expérimentaux ont été comparés avec un modèle de débit théorique utilisant le modèle de Geropp (1971) pour prendre en compte la viscosité. Il a été observé un bon accord entre le modèle et l'expérience dans les régions d'écoulement laminaire, montrant la pertinence du choix de ce modèle de couches limites pour représenter nos champs de base.

## 4.2 STABILITÉ MODALE

### 4.2.1 Formulation du problème aux valeurs propres

La stabilité des perturbations  $\mathbf{q}'$  autour du champ de base  $\bar{\mathbf{q}}$  est étudiée en introduisant des perturbations sous forme de modes normaux

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad (4.12)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les nombres d'onde suivant  $x$  et  $z$  et  $\omega$  la pulsation. En injectant l'équation (4.12) dans les équations de N.S. linéarisées (4.5), on trouve le problème aux valeurs propres suivant

$$i\omega \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{A}_0 + i\alpha \mathbf{A}_x + (i\alpha)^2 \mathbf{A}_{xx}] \hat{\mathbf{q}}, \quad (4.13)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{A}_x$  contiennent les termes qui dépendent de  $\beta$ . La stabilité spatiale est étudiée en choisissant  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et en résolvant pour des nombres d'onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Les valeurs propres  $\alpha$  sont alors obtenues par résolution numérique du système d'équations (4.13). Il est à noter que la stabilité temporelle peut également être étudiée avec cette formulation, en choisissant  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et en recherchant les solutions pour  $\omega \in \mathbb{C}$ .

#### 4.2.2 Critère de stabilité

La croissance spatiale d'une perturbation est donnée par l'équation (4.12). Lorsqu'une perturbation est propagée dans l'écoulement, la partie imaginaire de la valeur propre  $\alpha$  associée à cette perturbation renseigne sur sa stabilité. Dans le cas des perturbations se propageant dans le sens de l'écoulement ( $x$  croissant, que l'on notera  $x^+$ ), un mode est dit instable (respectivement stable) si sa partie imaginaire est négative (respectivement positive). Dans le cas des perturbations se propageant en remontant l'écoulement ( $x$  décroissant, que l'on notera  $x^-$ ), un mode est dit instable (respectivement stable) si sa partie imaginaire est positive (respectivement négative)

$$\begin{aligned} \text{Stable si} & \begin{cases} x^+ \text{ et } \Im(\alpha) > 0. \\ x^- \text{ et } \Im(\alpha) < 0. \end{cases} \\ \text{Instable si} & \begin{cases} x^+ \text{ et } \Im(\alpha) < 0. \\ x^- \text{ et } \Im(\alpha) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de déterminer la direction de propagation de chaque mode. Pour ce faire, le critère de Briggs-Bers (Briggs (1964) et Bers (1983)) est appliqué selon la méthode suivante. Le problème aux valeurs propres est résolu successivement en accroissant la partie imaginaire de la fréquence  $\omega$ . Dans la limite  $\Im(\omega) \rightarrow +\infty$ , les parties imaginaires des modes propres  $\Im(\alpha)$  tendent vers  $\pm\infty$ . Un mode se propage dans le sens  $x^+$  si

$$\lim_{\Im(\omega) \rightarrow +\infty} \Im(\alpha) = +\infty, \quad (4.14)$$

et se propage dans le sens  $x^-$  si

$$\lim_{\Im(\omega) \rightarrow +\infty} \Im(\alpha) = -\infty. \quad (4.15)$$

Le calcul successif des valeurs propres lorsque  $\Im(\omega)$  augmente permet de suivre l'évolution de celles-ci, depuis leur point de départ à  $\Im(\omega) = 0$ . L'incrémentation de  $\Im(\omega)$  doit être suffisamment petite pour permettre de suivre l'évolution des modes et d'identifier clairement leur position de départ et d'arrivée.

#### 4.3 STABILITÉ NON MODALE : CROISSANCE TRANSITOIRE

L'étude de la stabilité présentée dans la section précédente s'intéresse à l'évolution indépendante de chaque mode. Cependant, l'opérateur de NS pour les couches limites, et plus généralement pour le cisaillement, n'est pas orthogonal et peut donner lieu à de la croissance transitoire. Si la croissance transitoire est suffisamment importante, elle peut conduire à de nouveaux mécanismes d'instabilité et provoquer la transition à la turbulence.

Pour compléter la caractérisation de la stabilité de l'écoulement, il est alors nécessaire de prendre en compte la non-normalité de l'opérateur en observant le développement des perturbations à des distances finies. Pour étudier la croissance transitoire, on considère des perturbations sous forme de modes normaux

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y, x) e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad (4.16)$$

où la direction  $x$  n'est cette fois pas transformée en mode de Fourier. Les équations de N.S. linéarisées sont alors exprimées sous forme matricielle par

$$i\omega \mathbf{A}_t \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{A}_{xx} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x^2}. \quad (4.17)$$

La croissance transitoire spatiale consiste en la recherche du champ de perturbation initiale  $\tilde{\mathbf{q}}(y, x = 0)$  qui va maximiser l'énergie du champ de perturbation  $\tilde{\mathbf{q}}(y, x)$  à la distance  $x$ . Le rapport entre l'énergie de la perturbation initiale et l'énergie de la perturbation finale est donné par le gain

$$G(x, \beta, \omega) = \max_{\tilde{\mathbf{q}}_0} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}(y, x)\|_{\mathbb{E}}^2}{\|\tilde{\mathbf{q}}(y, 0)\|_{\mathbb{E}}^2}, \quad (4.18)$$

où la norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}^2$  est définie par  $\|\mathbf{q}\|_{\mathbb{E}}^2 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{E}} = \mathbf{q}^H \mathbf{W}_{\mathbb{E}} \mathbf{q}$ . En suivant les travaux de Chu (1965), Mack (1984) et Hanifi et al. (1996), la matrice donnant l'énergie pour un fluide compressible est choisie

$$\mathbf{W}_{\mathbb{E}} = \text{diag} \left( \frac{\bar{T}}{\bar{\rho}\gamma}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}\gamma(\gamma-1)} \right). \quad (4.19)$$

Le choix de  $\mathbf{W}_{\mathbb{E}}$  est important, car il peut considérablement modifier le résultat obtenu lors de l'optimisation du gain (Paredes et al., 2017). En suivant les travaux de Reddy et Henningson (1993) sur la croissance transitoire temporelle, et plus tard par Tumin et Reshotko (2001) sur la croissance transitoire spatiale, le champ de perturbation est obtenu



en réalisant la projection du vecteur d'état sur les vecteurs propres du problème adjoint

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, x) = \sum_{n=1}^N \kappa_n(x) \hat{\mathbf{q}}_n(\mathbf{y}), \quad (4.20)$$

où  $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y})$  sont les vecteurs propres obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres équation (4.13),  $N$  correspond au nombre de modes propres utilisés dans la projection et  $\kappa_n(x)$  sont les coefficients d'expansion, que l'on peut regrouper sous forme vectorielle  $\boldsymbol{\kappa}$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(0)e^{i\boldsymbol{\Lambda}x}, \quad (4.21)$$

où  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  est la matrice des valeurs propres  $\alpha_n$ , et  $\boldsymbol{\kappa}(0)$  est le vecteur des conditions initiales  $[\kappa_1(0), \kappa_2(0), \dots, \kappa_N(0)]^T$ .

En utilisant l'équation (4.20), on trouve

$$\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_E = \langle \hat{\mathbf{q}}\boldsymbol{\kappa}, \hat{\mathbf{q}}\boldsymbol{\kappa} \rangle_E = \boldsymbol{\kappa}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.22)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice de taille  $N \times N$  dont les coefficients sont donnés par :

$$M_{ij} = \hat{\mathbf{q}}_i^H \mathbf{W}_e \hat{\mathbf{q}}_j, \quad (4.23)$$

et qui possède la décomposition de Cholesky suivant :

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^H \mathbf{F}. \quad (4.24)$$

Finalement, le gain est reformulé comme suit :

$$G(x, \beta, \omega) = \max_{\hat{\mathbf{q}}(0)} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}(x)\|_E^2}{\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|_E^2} \quad (4.25)$$

$$= \max_{\boldsymbol{\kappa}(0)} \frac{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(x)\|_2^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_2^2} \quad (4.26)$$

$$= \max_{\boldsymbol{\kappa}(0)} \frac{\|\mathbf{F}e^{-i\boldsymbol{\Lambda}x}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_2^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_2^2} \quad (4.27)$$

$$= \|\mathbf{F}e^{-i\boldsymbol{\Lambda}x}\mathbf{F}^{-1}\|_2^2. \quad (4.28)$$

La norme  $L_2$  est calculée en appliquant la décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{F}e^{-i\boldsymbol{\Lambda}x}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (4.29)$$

où la plus grande valeur propre,  $\sigma_1$ , contenue dans  $\boldsymbol{\Sigma}$  correspond au gain recherché  $G(x) = \sigma_1^2$ . La perturbation initiale optimale associée est retrouvée en utilisant le vecteur d'entrée  $\mathbf{v}_1$  contenu dans  $\mathbf{V}$  par

$$\boldsymbol{\kappa}(0) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{v}_1, \quad (4.30)$$

et la réponse optimale associée est obtenue par l'équation (4.21)

$$\kappa(x) = e^{-i\Lambda x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v}_1. \quad (4.31)$$

Le vecteur d'état  $\tilde{\mathbf{q}}(x, y)$  et sa perturbation initiale sont finalement reconstruits à partir de l'équation (4.20).

Le problème tel quel, c'est-à-dire basé sur la propagation de la perturbation initiale aux travers de la base de vecteur propre, est mal posé. En effet, les équations de N.S. linéarisées étant hyperboliques, elles possèdent des valeurs propres qui se propagent à la fois suivant  $x^+$  et  $x^-$ , tandis que la formulation du problème de croissance transitoire ne permet de propager l'ensemble des modes sélectionnés à l'équation (4.20) que dans un seul sens à la fois. Pour obtenir une solution physique, il faut donc paraboliser le système afin de ne conserver qu'un sous-ensemble de modes qui se propagent dans la même direction.

#### 4.3.1 Parabolisation et filtrage

L'un des avantages de l'utilisation de la projection du vecteur d'état sur la base de vecteurs propres est la possibilité d'utiliser une base de vecteurs propres réduite. Lorsque la projection est effectuée à l'équation (4.20), on choisit d'utiliser un sous-espace de vecteurs propres se propageant uniquement suivant  $x^+$ , la solution est ainsi parabolisée lors de la sélection des modes (Jordan et al., 2017; Tumin et Reshotko, 2001). La direction de propagation de chaque mode propre est identifiée suivant la même méthodologie que celle employée dans la sous-section 4.2.2.

Certains modes, notamment ceux issus des branches acoustiques continues, peuvent être difficiles à converger numériquement et fausser les valeurs de gain obtenues. Cependant, Hanifi et al. (1996) ont montré que les branches acoustiques continues peuvent être omises du calcul sans que cela influence les résultats. Ainsi, dans le cadre de notre étude, ces branches sont retirées du calcul afin d'éviter tout problème de convergence. L'identification des modes acoustiques est réalisée en intégrant individuellement chaque fonction propre de pression, en dehors de la couche limite

$$Z_n = \int_{\delta}^{+\infty} \tilde{p}_n(y) dy, \quad (4.32)$$

et si la résultante  $Z_n$  dépasse une certaine limite, alors le mode  $n$  est considéré comme acoustique et retiré du sous-espace utilisé pour réaliser la projection du vecteur d'état.

La parabolisation et le filtrage ne sont utilisés que lors des calculs de croissance transitoire, les spectres de valeurs propres présentés dans ce manuscrit contiennent tous les modes sauf si explicitement spécifié.

## 4.3.2 Discrétisation et convergence

Le problème aux valeurs propres est traité numériquement par la méthode de collocation spectrale. La direction normale à la paroi est discrétisée en utilisant les points de collocation de Tchebychev. En suivant la discrétisation proposée par Hanifi et al. (1996), la distribution initiale des points  $-1 < \zeta < 1$  est projetée sur le domaine  $0 < y < y_{\max}$  par la fonction

$$y = a \frac{1 + \zeta}{b - \zeta}, \quad (4.33)$$

avec

$$\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{N_d}, \quad a = \frac{y_i y_{\max}}{y_{\max} - 2y_i} \quad \text{et} \quad b = 1 + \frac{2a}{y_{\max}}, \quad (4.34)$$

pour  $j \in \mathbb{N}$  allant de 1 à  $N_d$ , avec  $y_{\max}$  la limite supérieure du domaine de calcul. Cette distribution permet de placer la moitié des  $N$  points de collocation entre  $y = 0$  et  $y = y_i$ , et l'autre moitié entre  $y_i$  et  $y_{\max}$ , donnant la possibilité de raffiner la couche limite aux dépens de l'écoulement extérieur. Ici, nous choisissons de placer la moitié des points entre la paroi et la couche limite,  $y_i = \delta$ . Le nombre de points nécessaires pour obtenir des valeurs de gains convergées dépend du nombre de Reynolds. Dans cette étude, la convergence est systématiquement contrôlée en augmentant le nombre de points  $N_c$  jusqu'à obtenir des résultats indépendants de la discrétisation utilisée. En général, la convergence est toujours atteinte pour des valeurs de  $N_c > 100$ .

## 4.4 ÉCOULEMENT TRANSSONIQUE

Avant de commencer l'analyse de la stabilité des couches limites dans les tuyères, il est intéressant d'étudier des spectres de valeurs propres de couches limites de plaque plane transsoniques, sans courbure, car peu documentées dans la littérature. Pour ce faire, nous utilisons un profil de couches limites de Blasius compressible, dans un premier temps en régime subsonique et supersonique, puis dans un second temps, les particularités du spectre transsonique seront mises en évidence.

La composition d'un spectre est identifiée en observant la vitesse de phase des ondes. Dans le repère de l'onde, la vitesse de phase d'une onde est définie comme

$$c_\phi = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (4.35)$$

et l'angle du vecteur d'onde

$$\phi = \tan^{-1}(\beta/\alpha), \quad (4.36)$$

par rapport à la direction principale de l'écoulement. Dans le repère de l'écoulement, les ondes acoustiques se propagent en amont et en aval à un nombre de Mach  $M = -1$  et  $M = 1$ . Dans le repère de la paroi utilisé pour formuler des équations de stabilité, les

ondes acoustiques sont dites "rapides" si elles se propagent dans le sens de l'écoulement

$$c_a^+ = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = M \cos \phi + 1, \quad (4.37)$$

et les ondes acoustiques sont dites "lentes" si elles se propagent dans le sens contraire de l'écoulement

$$c_a^- = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = M \cos \phi - 1, \quad (4.38)$$

où  $M$  est le nombre de Mach de l'écoulement.

En plus des vitesses de phase des modes, la forme des fonctions propres qui leur sont associés renseigne sur leur support spatial. Un mode ayant un support uniquement dans la couche limite est appelé "mode de couche limite". Un mode ayant uniquement un support en dehors de la couche limite est appelé "mode d'écoulement libre".

L'analyse suivante pour les écoulements de couche limite subsonique et supersonique se base en partie sur les explications détaillées par Tumin (2007), qui sont reprises ici afin d'introduire les spectres aux valeurs propres de couches limites compressibles. Une fois les concepts introduits, nous traiterons le cas de la couche limite transsonique.

#### 4.4.1 Blasius subsonique

Le spectre de valeurs propres est calculé pour un écoulement à  $M = 0.5$  et est présenté sur la figure 4.3. Chaque point correspond à une valeur propre. Les lignes grises en tirets sont ajoutées en plus des valeurs propres et correspondent aux valeurs de  $\alpha_r$  qui définissent les limites entre lesquelles tous les modes sont acoustiques, tel que défini par les équations (4.37) et (4.38).

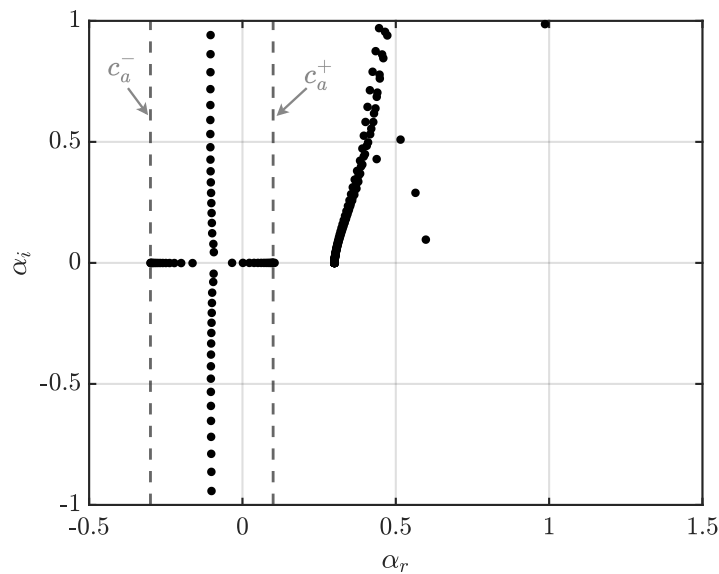


FIGURE 4.3 – Spectre de valeurs propres  $M = 0.5$ ,  $\beta = 0$ ,  $\omega = 0.15$ ,  $Re = 1000$ . Couche limite de Blasius.

Sur la croix que forment les modes acoustiques, les branches de gauche et du bas sont constituées de modes qui se propagent suivant  $x^-$  et correspondent aux modes acoustiques lents  $c_a^-$ . Les branches de droite et du haut sont constituées de modes qui se propagent suivant  $x^+$  et correspondent aux modes acoustiques rapides  $c_a^+$ . Les modes acoustiques situés sur l'axe  $\alpha_i = 0$  sont dits propagatifs, ils ne sont ni amplifiés ni amortis. Les modes acoustiques avec  $\alpha_i > 0$  se propagent dans le sens  $x^+$  et sont par conséquent amortis. Les modes acoustiques avec  $\alpha_i < 0$  se propagent dans le sens  $x^-$  et sont par conséquent également amortis. Les modes acoustiques dont la partie imaginaire est non-nulle sont tous stables et sont appelés *modes acoustiques évanescents*. Les *branches* formées par les modes acoustiques sont continues, nous n'en avons ici qu'une représentation discrète issue du traitement numérique du problème.

En plus des branches acoustiques, il apparaît sur le spectre deux branches continues qui prennent leurs origines à  $\alpha_r = 0.3$  et dont la partie imaginaire est positive. Elles correspondent pour l'une à des fluctuations de température appelées *modes d'entropie*, pour l'autre à des fluctuations de vitesses appelées *modes de vortacité*. Ces modes se propagent suivant  $x^+$  et sont par conséquent stables. Le calcul de la vitesse de phase dans la direction de l'écoulement indique que ces modes se propagent à la même vitesse que l'écoulement libre,  $c_\phi = M = 0.5$ . Ces modes sont donc convectés par l'écoulement en dehors de la couche limite. On remarque que lorsque les modes ont une partie imaginaire  $\Im(\alpha)$  croissante, leur partie réelle  $\Re(\alpha)$  croît également. Ceci est dû à la représentation discrète du problème. Lorsque le nombre de points utilisés pour discrétiser le problème est augmenté, la branche se redresse, jusqu'à devenir complètement verticale. Ainsi, tous les modes de cette branche sont donc bien convectés par l'écoulement.

Finalement, les modes restants à la droite de la branche d'entropie et de celle de vortacité ont du support uniquement dans la couche limite, ce sont les modes discrets de couche limite. Ils se propagent suivant  $x^+$  et sont donc stables dans cet exemple.

#### 4.4.2 Blasius supersonique

Le spectre de valeurs propres est maintenant calculé pour un écoulement à  $M = 2$  et est présenté sur la figure 4.4. Il présente les mêmes branches entropiques et de vortacité, ainsi que les modes discrets de couche limite que précédemment. En revanche, les branches acoustiques ont changé de nature : les modes acoustiques se trouvent maintenant à l'extérieur des limites acoustiques et l'ensemble des modes acoustiques sont désormais propagatifs. La branche acoustique de droite correspond aux modes acoustiques lents  $c_a^-$  et la branche acoustique de gauche correspond aux modes acoustiques rapides  $c_a^+$ . Dans un écoulement supersonique, tous les modes acoustiques se propagent suivant  $x^+$ .

La figure 4.5 présente le même spectre que précédemment, en ayant changé d'échelle pour prendre du recul sur le spectre. Il apparaît deux nouvelles classes de modes avec une partie réelle négative, l'une avec des modes ayant une partie imaginaire négative que l'on nomme modes  $A_n^-$  et l'autre avec des modes ayant une partie imaginaire positive que

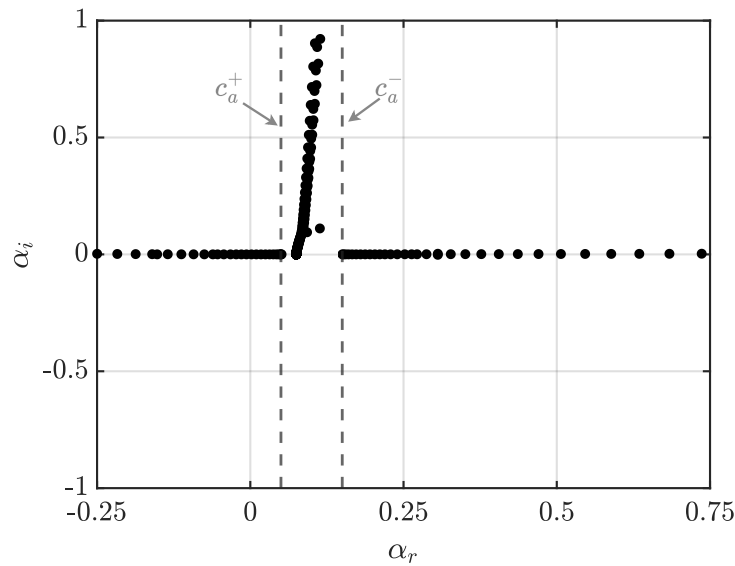


FIGURE 4.4 – Spectre de valeurs propres  $M = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\omega = 0.15$ ,  $Re = 1000$ .  
Couche limite de Blasius.

l'on nomme modes  $A_n^+$ . En regardant la vitesse de groupe de chacun de ces modes, nous trouvons que les modes  $A_n^-$  se propage suivant  $x^-$  et que les modes  $A_n^+$  se propagent suivant  $x^+$ . Tous ces modes sont par conséquent stables.

Les fonctions propres des modes  $A_n^+$  sont présentés sur la figure 4.6. Ces modes ont un support uniquement dans la couche limite, entre la paroi et le bord de la couche limite. Le mode  $A_1^+$  présente un lobe,  $A_2^+$  deux lobes et  $A_3^+$  trois lobes. De manière générale, le  $n^{\text{ième}}$  mode possède  $n$  lobes. L'apparition successive des lobes suggère que ces modes forment une famille de modes que l'on peut hiérarchiser selon leur ordre radial. Ces modes ont une vitesse de groupe qui correspond à des modes acoustiques, et le sens de propagation indique qu'ils sont tous stables. Ils ressemblent à ceux décrits par Mack (1984) et appelés *Noninflectional neutral waves*. Ils ont été étudiés par la suite par Ma et Zhong (2003), dans le cadre de l'étude de la réceptivité de la couche limite de plaque plane à  $M = 4.5$ , avec les mêmes fonctions propres dans la couche limite. À  $M = 4.5$  et pour différentes fréquences, ces modes peuvent être amenés à parcourir le spectre aux valeurs propres et échanger de l'énergie avec les modes de Mack instables lorsque leur fréquence se synchronise (Ma et Zhong, 2003; Mack, 1984). Plus de détails sur la formation de ces modes acoustiques sont trouvés lors de l'étude du spectre aux valeurs propres en régime transsonique.

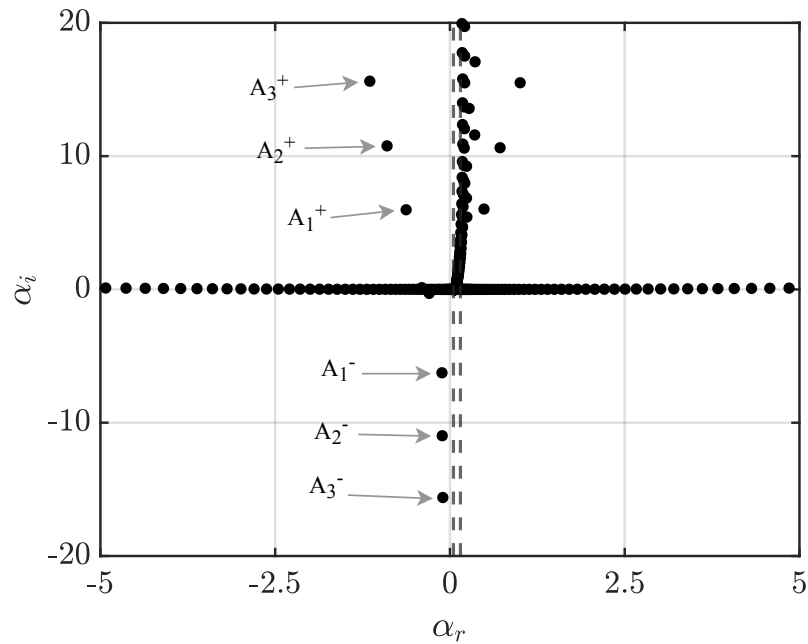


FIGURE 4.5 – Spectre de valeurs propres  $M = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\omega = 0.15$ ,  $Re = 1000$ .  
Couche limite de Blasius.

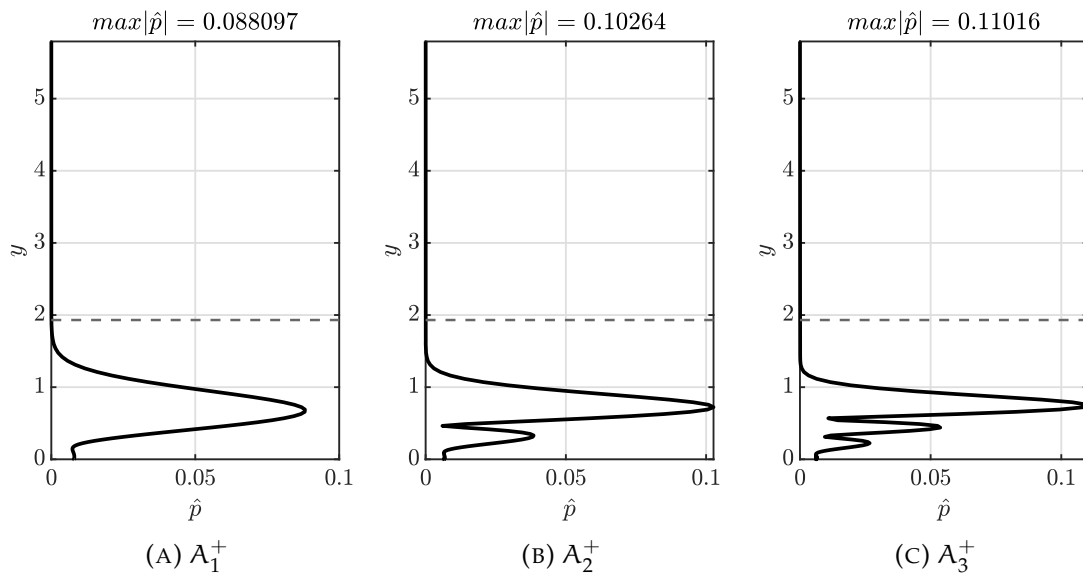


FIGURE 4.6 – Fonctions propres de pression des modes  $A_1^+$ ,  $A_2^+$  et  $A_3^+$  (en valeur absolue). La ligne en grise tiret représente l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ .

#### 4.4.3 Blasius transsonique

Les spectres de couches limites transsoniques ne sont que peu, voir pas du tout, étudiés dans la littérature. Pour pouvoir statuer sur la stabilité de la couche limite et réaliser l'étude de croissance transitoire, il est important de comprendre l'origine et le rôle de chaque mode propre. Afin de faciliter la discussion, nous rappelons sur la figure 4.7 la composition des

spectres d'une couche limite subsoniques et supersoniques. où nous notons les différentes

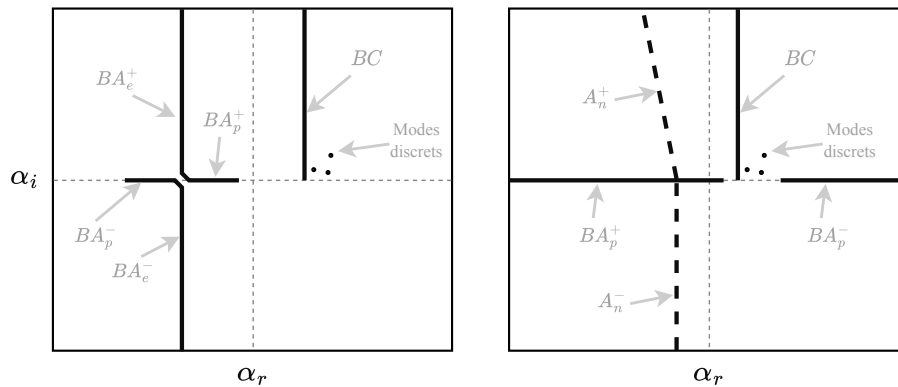


FIGURE 4.7 – Schématisation de spectres typiques d'une couche limite subsonique (gauche) et supersonique (droite).

composantes du spectre de la manière suivante.

- $BA_e$  : Branches Acoustiques évanescentes,
- $BA_p$  : Branches Acoustiques propagatives,
- $A_n$  : Modes acoustiques évanescents de couche limite,
- $BC$  : Branche de modes convectés par l'écoulement,
- Modes discrets : modes discrets de couche limite.

L'exposant indique le sens de propagation des modes concernés,  $+$  pour les modes se propageant en aval et  $-$  pour les modes se propageant en amont.

Pour comprendre les spectres de couche limite transsonique, les spectres aux valeurs propres sont présentés sur la figure 4.8 pour un écoulement dont le nombre de Mach varie de  $M = 0.95$  à  $M = 1.05$ . Initialement, à  $M = 0.95$ , les modes s'agencent dans le spectre de façon similaire au cas subsonique. Lorsque le nombre de Mach approche l'unité, les modes de la branche  $BA_e^+$  du spectre subsonique passent progressivement de la verticale à l'horizontale, en venant s'aligner sur l'axe neutre  $\alpha_i = 0$  pour devenir la branche  $BA_p^+$  spectre de couches limites supersoniques. Les branches acoustiques lentes  $BA_p^-$  et  $BA_e^-$  du spectre subsonique dégènèrent progressivement vers des valeurs  $\alpha_i$  négative. Le déplacement des branches acoustiques évanescentes  $BA_e^+$  et  $BA_e^-$  laisse apparaître les modes de couches limites  $A_n^+$  et  $A_n^-$ . Ces modes sont visiblement issus des branches acoustiques, ce qui renforce l'idée qu'ils sont des modes acoustiques évoluant au sein de la couche limite. Avec l'augmentation du nombre de Mach, la branche acoustique lente  $BA_p^-$  du spectre supersonique fait son apparition par les valeurs  $\alpha_i$  et  $\alpha_r$  positives. Quand l'écoulement est supersonique, cette branche s'approche de l'axe neutre et devient en majeure partie propagative ( $\alpha_i = 0$ ) à  $M = 1.05$ . À  $M = 1$ , il coexiste dans le spectre plusieurs branches acoustiques : les branches  $BA_p^-$  (notée ② sur le spectre à  $M = 1$ ) et  $BA_p^+$  (notée ① sur le spectre à  $M = 1$ ) du spectre supersonique et les branches acoustiques  $BA_p^-$  et  $BA_e^-$  du spectre subsonique (notées ③ sur le spectre à  $M = 1$ ). La position des deux branches acoustiques lentes (② et ③) est exceptionnelle, puisque leur partie imaginaire est non-nulle. Ce phénomène n'arrive que pour un écoulement transsonique. À  $M = 1$ , il



n'existe pas de modes propagatifs pour ces deux branches acoustiques, leurs modes sont tous évanescents.

Les modes d'écoulement libre convectés par l'écoulement sont quant à eux peu sensible au passage transsonique. Leur position dans le spectre n'est que marginalement affectée par le passage de subsonique à supersonique.

Le spectre aux valeurs propres transsonique possède deux caractéristiques intéressantes : les modes de couche limite  $A_n$ , qui sont stables, et le déplacement des branches acoustiques. Il est important d'identifier ces particularités, afin de pouvoir juger de la

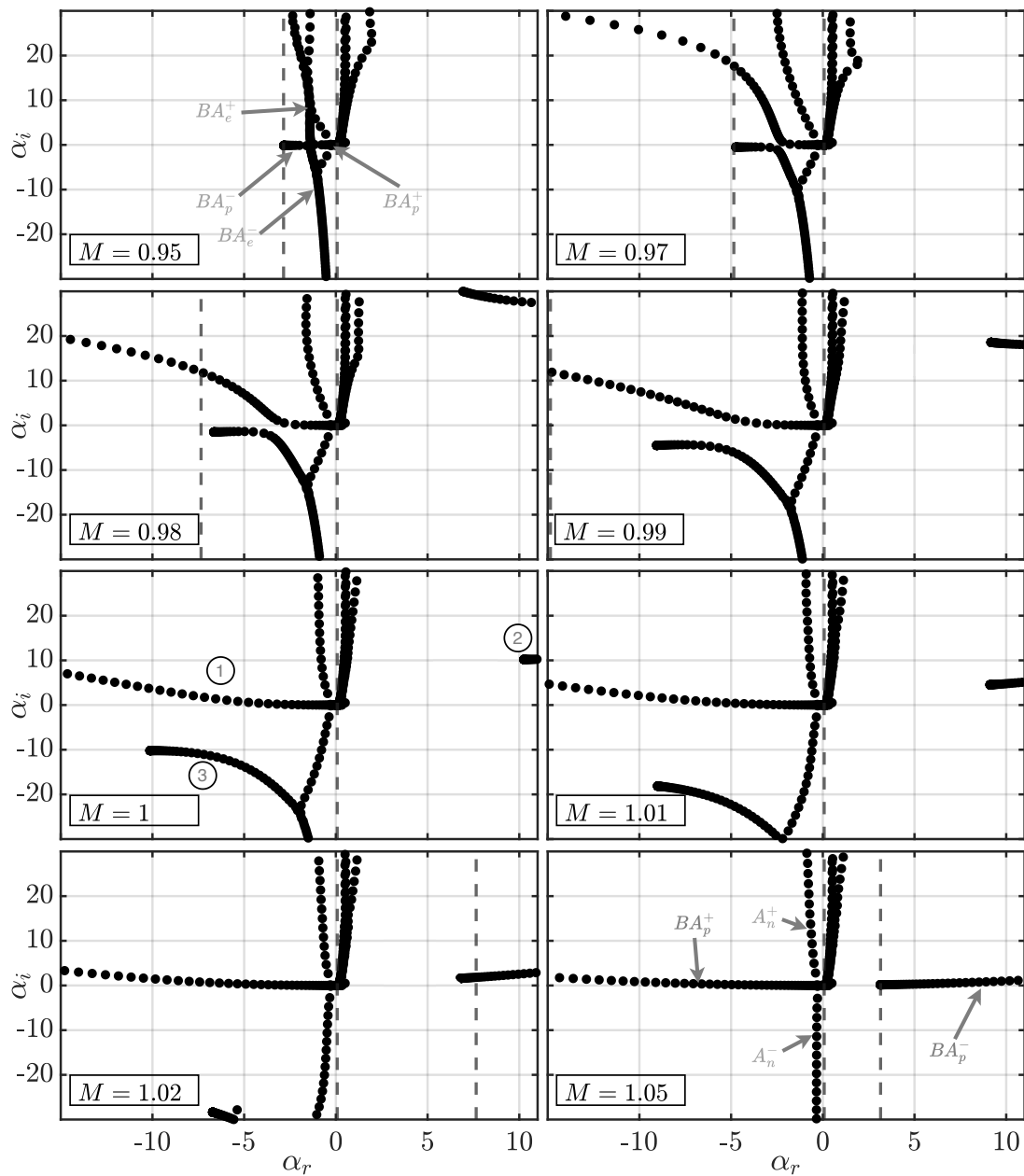


FIGURE 4.8 – Spectres de valeurs propres pour un nombre de Mach allant de  $M = 0.95$  à  $M = 1.05$ ,  $\beta = 0$ ,  $\omega = 0.15$ ,  $Re = 1000$ . Couche limite de Blasius.

stabilité modale de la couche limite, mais aussi pour la formulation de la croissance transitoire, qui nécessite d'utiliser une base réduite de vecteurs propres se propageant suivant  $x^+$ .

Maintenant que chaque mode est clairement identifié dans les écoulements transsoniques, nous pouvons nous tourner vers l'étude des couches limites de tuyère. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'effet du gradient de pression.

## 4.5 EFFET DU GRADIENT DE PRESSION

### 4.5.1 Stabilité modale

Pour étudier l'effet du gradient de pression, la couche limite de tuyère de Geropp (1971) est utilisée comme champ de base, dans un premier temps sans courbure, en imposant  $\Gamma = 0$  dans les équations de stabilité.

Le spectre d'une couche limite de tuyère à  $M = 1$  est présenté sur la figure 4.9. L'ajout du gradient de pression ne modifie que très peu l'aspect global du spectre aux valeurs propres et on y retrouve les mêmes composants introduits dans les sections précédentes. La composition du spectre peut être divisée en deux catégories de modes : les modes d'écoulement libre (représentés par des cercles) et les modes de couche limite (représentés par des croix). Il y a six branches continues de modes d'écoulement libre, dont trois sont des branches acoustiques (en cercles gris sur la figure 4.9).

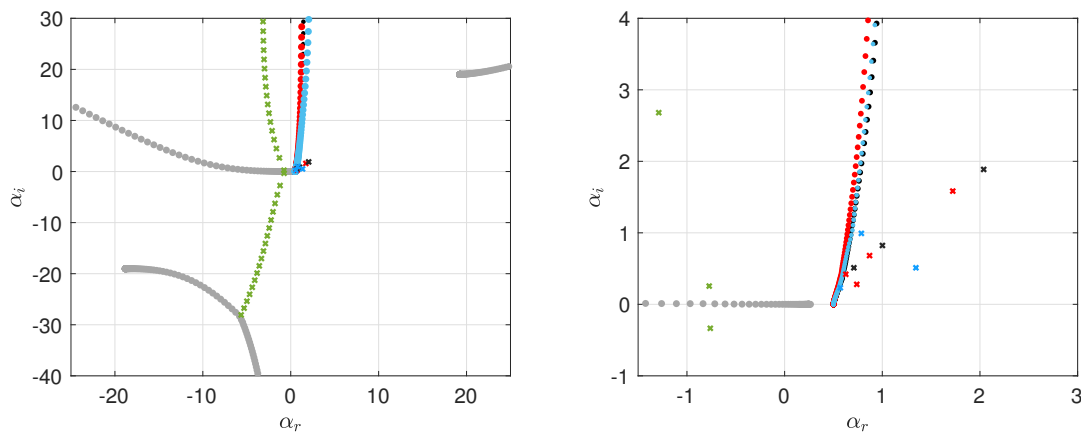


FIGURE 4.9 – Spectre aux valeurs propres spatial pour  $\omega = 0.5$ ,  $\beta = 0$ ,  $Re_{\delta_1} = 1000$  et  $\Gamma = 0$ . Les croix sont les modes de couches limites et les points sont des modes d'écoulement libre. Gris : modes acoustiques ; Vert : modes de Mack stables ; Rouge : modes d'entropie ; Bleu : modes vorticaux ; Noir : modes transverses.

Les branches supérieure droite et inférieure gauche ne sont positionnées ni verticalement, ni sur l'axe réel, car l'écoulement est sonique. Les trois autres branches de modes d'écoulement libre contiennent des modes de vorticité (en bleu), d'entropie (en rouge)

et des modes de fluctuations transversales de vitesse  $\hat{w}$  (en noir). La branche des fluctuations transversales de vitesse  $\hat{w}$  résulte du découplage de l'équation de la quantité de mouvement  $w$  lorsque  $\beta = 0$ . Lorsque le nombre d'onde  $\beta \neq 0$ , le couplage avec les autres équations est restauré et les modes de fluctuation  $\hat{w}$  acquièrent des composantes de fluctuation sur toutes les variables d'état  $\hat{q}$ . Dans la littérature, la différence entre la branche de mode vorticaux et la branche de mode  $\hat{w}$  n'est généralement pas faite et celles-ci sont considérées comme une seule et unique branche. Ces trois branches prennent naissance sur l'axe réel à  $\alpha_r = \omega$ , ce qui signifie que les modes associés ont une vitesse de phase égale à la vitesse de l'écoulement, et sont convectés par celui-ci.

En plus des branches continues, nous retrouvons les modes acoustiques discrets de couche limite avec  $\alpha_i$  positif et négatif (croix verte sur la figure 4.9). Finalement, les modes de la couche limite sont regroupés à droite des branches continues d'écoulement libre. Il s'agit de modes discrets, et nous en trouvons, à nouveau, trois types : vorticaux, entropiques et de fluctuations transverses  $\hat{w}$ . C'est généralement parmi les modes discrets que l'on peut trouver des modes instables susceptibles de causer la transition.

Dans le cas de la couche limite de Blasius, il n'existe qu'un seul mode instable, appelé mode de Tollmien-Schlichting (T.S.), qui est le plus instable pour une onde plane ( $\beta = 0$ ) (Özgen et Kırçalı, 2008). La figure 4.10 montre deux spectres, le premier pour une couche limite de Blasius sans gradient de pression, le deuxième pour une couche limite de tuyère, avec gradient de pression favorable à  $M = 1$ . On remarque sur le spectre de la couche limite de Blasius le mode discret de T.S. situé à  $\alpha = 0.22 - 0.005i$ . Ce mode se propage suivant  $x^+$ , il est donc instable.

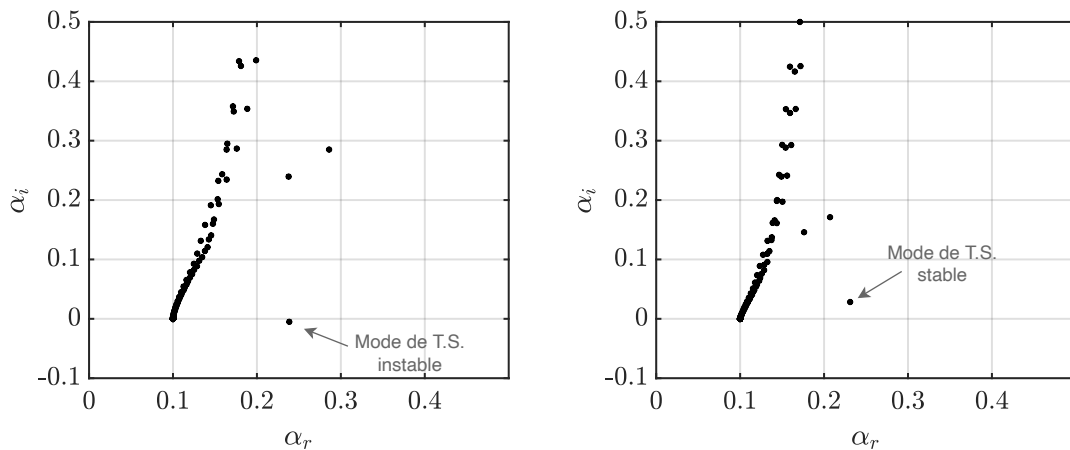


FIGURE 4.10 – Spectres aux valeurs propres pour une couche limite de Blasius sur plaque plane (gauche) et pour la couche limite de tuyère de Geropp (droite) pour  $\omega = 0.1$ ,  $\beta = 0$ ,  $Re_{\delta_1} = 1000$  et  $M = 1$ . (Les modes acoustiques ne sont pas montrés).

Comme on peut le voir sur la figure 4.10, lorsque l'on ajoute le gradient de pression favorable, le mode de T.S. remonte dans le demi-plan  $\alpha_i > 0$  et devient stable. Dans la gamme de nombre d'ondes testé  $\omega = [0 - 0.3]$  et  $\beta = [0 - 2]$ , qui comprend l'instabilité de

T.S. pour une couche limite de Blasius, il n'y a pas de mode instable qui survienne dans le spectre aux valeurs propres dans la couche limite de tuyère.

Dans ce scénario, il ne peut pas y avoir de transition modale, et il convient de vérifier la possibilité d'une transition par un mécanisme de croissance transitoire.

#### 4.5.2 Croissance transitoire

Pour illustrer l'effet du gradient de pression sur la croissance transitoire, nous comparons à nouveau une couche limite de Blasius avec la couche limite de tuyère à  $M = 1$  et  $\Gamma = 0$ . Pour calculer le gain, le problème aux valeurs propres est dans un premier temps résolu. Le spectre est ensuite filtré, ce qui permet de retirer les modes acoustiques (en gris et en vert sur la figure 4.9). Les modes restants, illustrés sur la figure 4.10, se propagent tous dans la direction de l'écoulement et sont donc utilisés dans le calcul du gain.

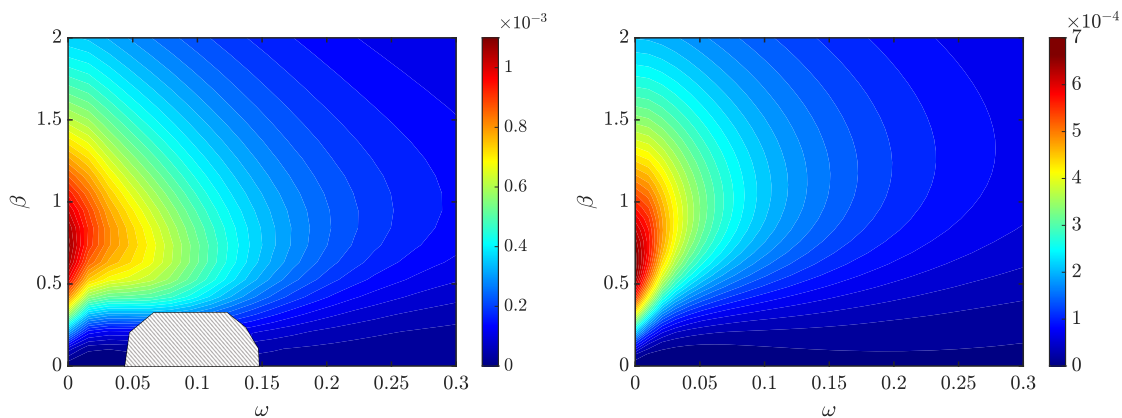
Pour comparer les gains sur une large plage de nombres d'ondes, nous ne retiendrons que la valeur maximale du gain obtenue pour chaque pair de nombres d'onde  $[\beta, \omega]$

$$G_{\max}(\omega, \beta) = \max_x G(\omega, \beta, x), \quad (4.39)$$

en prenant soin d'avoir choisi un intervalle de valeurs de  $x$  suffisamment large pour que le gain maximum soit atteint. La distance pour laquelle le gain maximal est atteint est appelée  $x_{\text{opt}}(\omega, \beta)$ .

Le gain max est calculé pour  $\omega \in [0, 0.3]$  et  $\beta \in [0, 2]$ , pour un total de 900 paires de nombres d'ondes. La figure 4.11 compare les cartes de gain obtenues pour les deux types de couche limites.

Dans le cas d'écoulement de plaque plane, avec ou sans gradient de pression, le gain



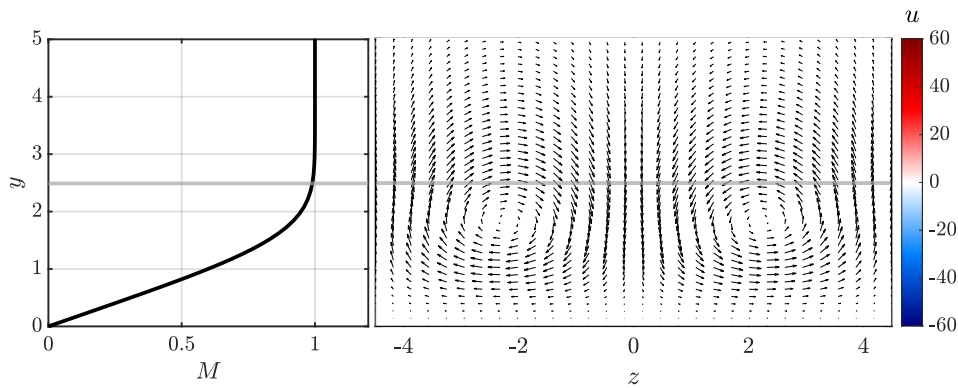
(A) Sans gradient de pression

(B) Avec gradient de pression

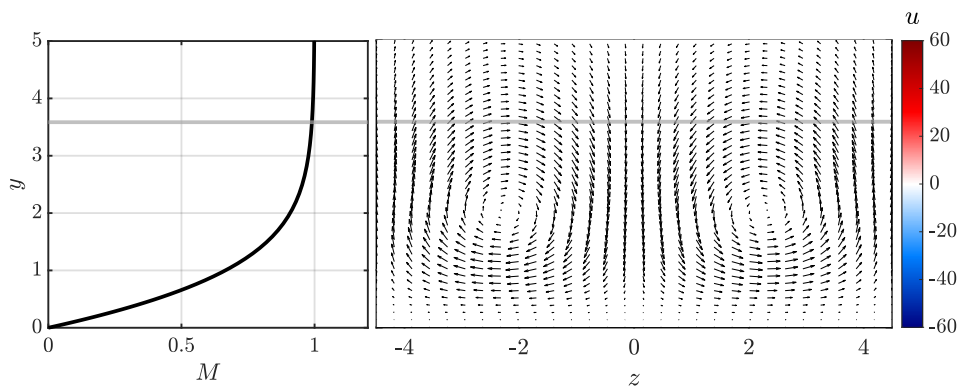
FIGURE 4.11 – Carte de gain  $G_{\max}/Re_{\delta_1}^2$ . Gauche : couche limite de Blasius. Droite : couche limite de tuyère avec gradient de pression à  $M = 1$  et  $\Gamma = 0$ . La zone grisée correspond aux fréquences pour lesquelles l'onde de T.S. est instable.

est directement proportionnel au nombre de Reynolds au carré (Hanifi et al., 1996; Tumin et Reshotko, 2001). La zone grisée visible sur la figure 4.11a correspond aux nombres d'onde pour lesquels l'onde de T.S. est instable. Lorsqu'une onde est instable, le gain croît de manière exponentielle avec  $x$ , sans jamais décroître, il n'est alors pas représenté.

De manière générale, les hauts gains sont confinés à de basses fréquences. Le gain maximal est atteint pour des perturbations stationnaires, à  $\omega = 0$ . Ces gains sont causés par des perturbations initiales qui prennent la forme de tourbillons contra-rotatifs dans la couche limite. Ces perturbations initiales sont illustrées sur la figure 4.12. Leur nombre d'onde transverse optimal est  $\beta \approx 0.7$ , ce qui correspond à des tourbillons espacés d'approximativement quatre épaisseurs de déplacement de la couche limite. Ces tourbillons entraînent de l'écoulement libre haute vitesse dans la couche limite, et transportent de l'écoulement basse vitesse en proche paroi plus haut dans la couche limite. Ce mécanisme a pour la première fois été décrit par Landahl (1980) et est nommé *lift-up*. Il est reconnu pour être le mécanisme principal de croissance transitoire dans les couches limites, et plus généralement dans les écoulements cisailés. L'action des tourbillons contra-rotatifs génère des zones alternées de hautes et basses vitesses dans la couche limite, appelées *strie* ou



(A) Couche limite de Blasius



(B) Couche limite de tuyère

FIGURE 4.12 – Perturbation optimale pour  $\omega = 0$  et  $\beta = 0.7$  à  $x = 0$  pour une couche limite de Blasius (A) et une couche limite de tuyère (B). À gauche : profil de couche limite. À droite : champ de vitesses transversales  $v$  et  $w$ . La ligne grise représente l'épaisseur de couche limite  $\delta$ .

*streaks* dans la littérature anglo-saxonne. C'est la croissance des stries longitudinales qui produit le gain.

Le gradient de pression favorable modifie légèrement la distribution du gain maximal en fonction du nombre d'onde  $\beta$  et de la fréquence  $\omega$ , mais les stries optimales restent pour des fréquences nulles. Cependant, le gradient de pression réduit le gain maximum atteint d'environ 30%. Le gradient de pression favorable a un effet stabilisant sur la croissance transitoire.

La raison de l'effet stabilisant du gradient de pression se trouve dans le profil de vitesse de la couche limite. La figure 4.12 présente côte à côte le champ de vitesse de la perturbation optimale à  $x = 0$  dans le plan normal à l'écoulement ( $y, z$ ) et le profil de couche limite associé, pour une couche limite de Blasius sans gradient de pression (figure 4.12a) puis pour une couche limite de tuyère avec gradient de pression (figure 4.12b). On remarque que le champ de perturbation initial pour les deux couches limites est similaire, mais le potentiel de mélange est plus faible pour la couche limite de tuyère. En effet, si on regarde la position normale à la paroi du centre de vorticité dans les profils de couches limites, on se rend compte que le gradient de vitesse est moins important lorsque

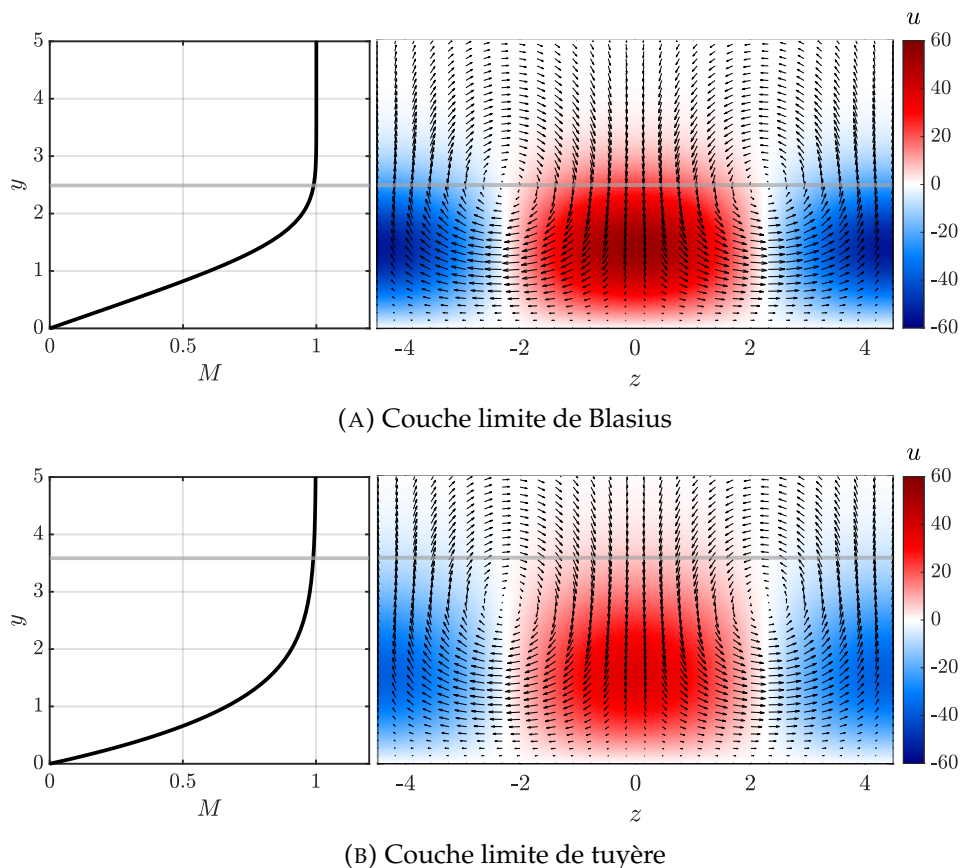


FIGURE 4.13 – Perturbation optimale pour  $\omega = 0$  et  $\beta = 0.7$  à  $x_{\text{opt}}$  pour une couche limite de Blasius (A) et une couche limite de tuyère (B). À gauche : profil de couche limite. À droite : champ de vitesses transversales  $v$  et  $w$ . La ligne grise représente l'épaisseur de couche limite  $\delta$ .

la couche limite est soumise à un gradient de pression, ce qui rend plus difficile le mélange de l'écoulement à haute et basse vitesse pour une même perturbation initiale.

Ce potentiel de mélange réduit se traduit par des stries d'amplitudes plus faibles. La figure 4.13 présente les champs de vitesse de la perturbation optimale à  $x = x_{\text{opt}}$  dans le plan normal à l'écoulement  $(y, z)$  avec et sans gradient de pression. Il est évident que l'amplitude de la vitesse longitudinale  $u$  au centre de la strie est plus faible pour une couche limite soumise à un gradient de pression.

## 4.6 EFFET DE LA COURBURE

### 4.6.1 Stabilité modale

La principale différence due à la courbure de l'écoulement s'opère à faible fréquence  $\omega$ . La figure 4.14 montre des spectres aux valeurs propres calculés avec gradient de pression à  $\omega = 0$  et  $\beta = 1$ , pour trois courbures  $\Gamma = 0$ ,  $\Gamma = 10^{-3}$  et  $\Gamma = 10^{-4}$ . Dans le cas sans courbure, les valeurs propres sont positionnées sur l'axe purement imaginaire. Ce qui semble être une seule branche est en fait trois branches, deux de vorticité et une d'entropie, comme vu précédemment. Lorsque la courbure est ajoutée, les deux branches de vorticité s'éloignent de part et autre de l'axe imaginaire. Plus la courbure est augmentée, plus les branches s'éloignent. De plus, la courbure a tendance à éloigner les branches de vorticité de l'axe réel, tout en rapprochant la branche d'entropie de ce même axe.

Les spectres calculés avec courbure, sur la figure 4.14b, présentent de nouveaux modes de couche limite discrets stables, qui se présentent par paire de part et autre de l'axe imaginaire du spectre. Ces modes discrets s'éloignent de l'axe imaginaire quand la courbure augmente (Karp et Hack, 2018). De plus, de nouveaux modes discrets émanent des deux branches de vorticité lorsque la courbure est augmentée. Ce processus est visible sur la

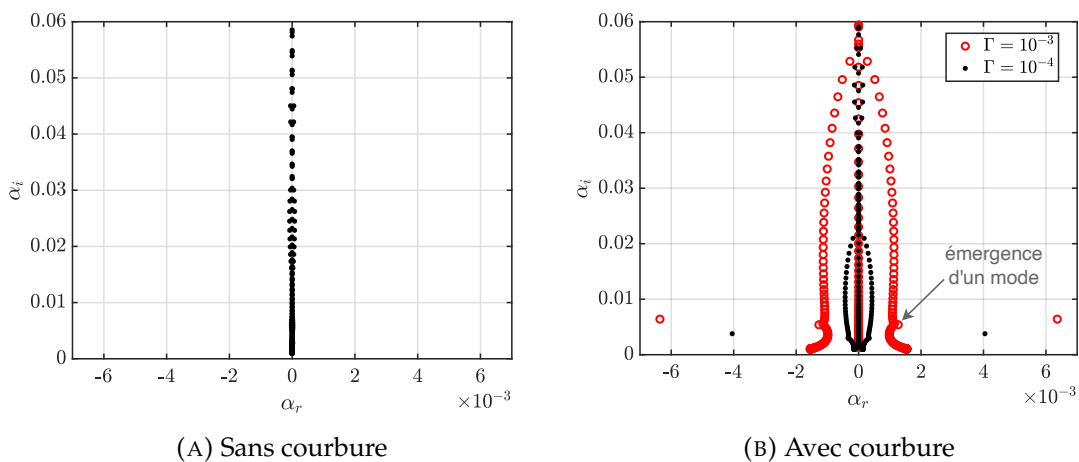


FIGURE 4.14 – Spectres aux valeurs propres pour une couche limite de tuyère.  $\omega = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $Re_{\delta_1} = 1000$  et  $M = 1$ .

figure 4.14b, à  $\alpha \approx \pm 0.0013 + 0.0054i$  et est indiqué sur la figure par une flèche grise pour le mode  $\alpha \approx 0.0013 + 0.0054i$ .

Pour les courbures rencontrées dans les problèmes industriels, de l'ordre de  $\Gamma = 10^{-4}$ , la stabilité modale n'est pas modifiée : il n'y a pas de nouveau mode instable, ni de mode qui se déplace dans le semi-plan instable.

#### 4.6.2 Croissance transitoire

Pour observer l'effet de la courbure sur la croissance transitoire, des cartes de gains sont calculées à un nombre de Reynolds fixe  $Re_{\delta_1} = 1000$  à  $M = 1$ , pour  $\beta \in [0, 2]$  et  $\omega \in [0, 0.3]$ , nombres d'ondes et pulsations pour lesquels il est trouvé d'important effet de croissance transitoire. La figure 4.15 présente quatre cartes de gain max, obtenues pour des courbures croissantes  $\Gamma = 0$ ,  $\Gamma = 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 10^{-3}$  et  $\Gamma = 10^{-2}$ .

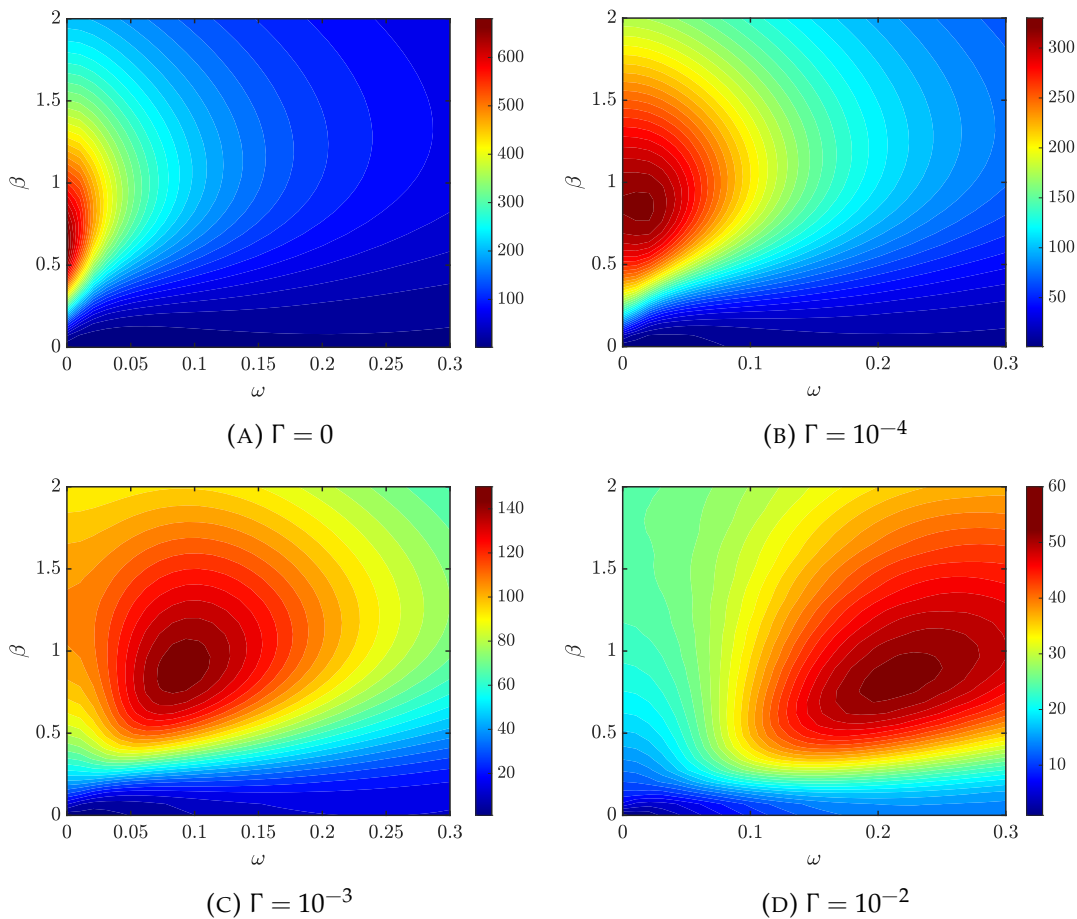


FIGURE 4.15 – Carte de gain  $G_{\max}$ . Couche limite de tuyère.  $Re_{\delta_1} = 1000$  et  $M = 1$ .

Dans le cas d'une courbure nulle, le gain maximal est atteint à  $\beta \sim 0.61$  et  $\omega = 0$ . Le champ de perturbation optimal est constitué de tourbillons contrarotatifs dans le sens de l'écoulement, présenté dans la sous-section 4.5.2, conduisant à des stries longitudinales



haute et basse vitesse. Lorsque la courbure est ajoutée, le gain des stries stationnaires est considérablement réduit. Les stries stationnaires subissent désormais la force centrifuge induite par la courbure convexe de la paroi, qui a tendance à les pousser en dehors de la couche limite. Ce mécanisme a été discuté par Karp et Hack (2018) pour les écoulements incompressibles sur des géométries convexes. La fréquence optimale pour la perturbation instationnaire est un équilibre entre le mécanisme de *lift-up*, et l'effet centrifuge qui réduit le gain à basse fréquence. En augmentant la courbure de l'écoulement, les effets de forces centrifuges sont accentués, le niveau du gain est globalement réduit et le gain optimal est trouvé à des fréquences  $\omega$  plus élevées. Le nombre d'onde transverse optimal est passé de  $\beta \sim 0.61$  pour un écoulement sans courbure, à  $\beta \sim 0.95$  avec courbure. Cela traduit un rapprochement des tourbillons contra-rotatifs et ne semble que faiblement dépendant de la courbure.

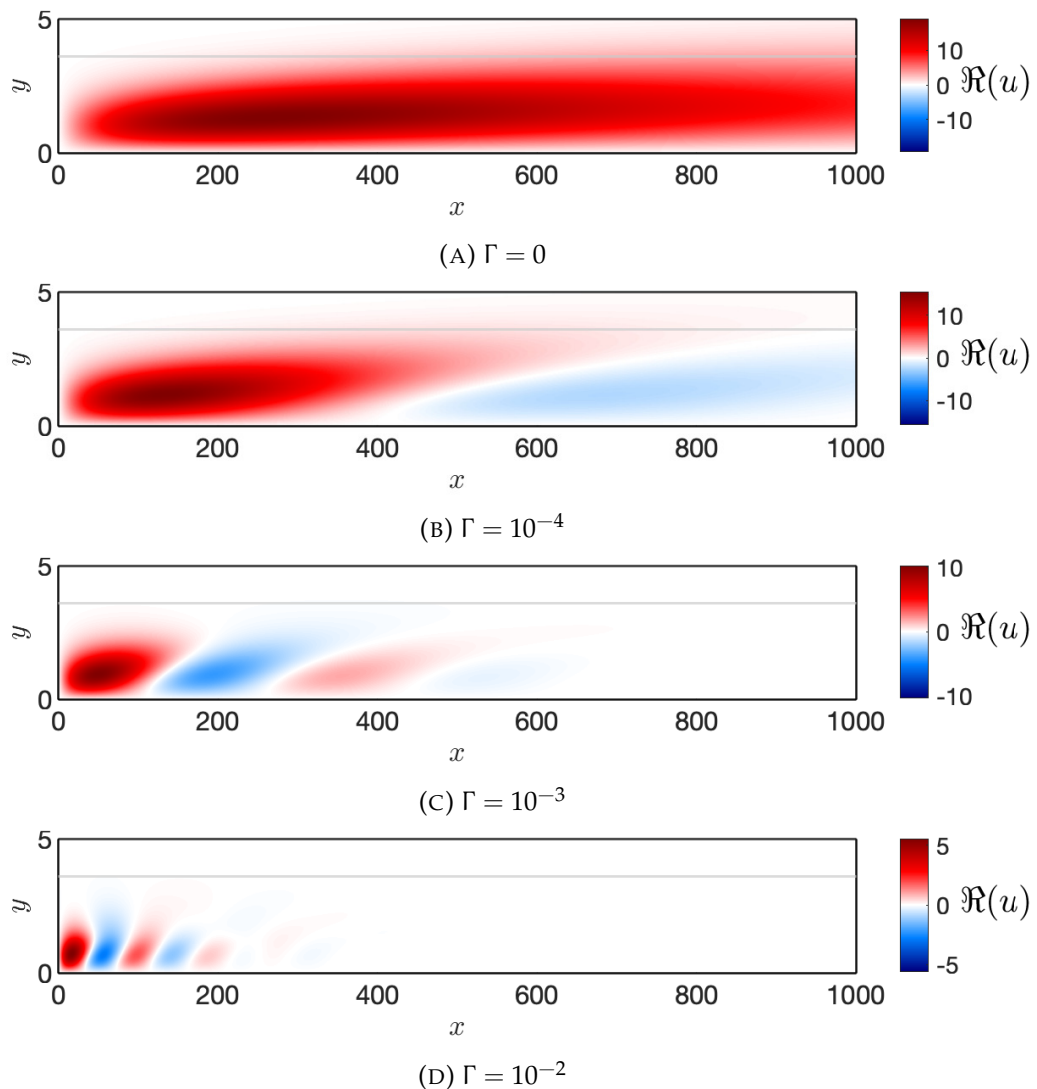


FIGURE 4.16 – Évolution d'une strie stationnaire optimale dans la direction de l'écoulement  $x$  pour différente courbure.  $M = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\beta = 1$  et  $Re_{\delta_1} = 1000$ .

Les effets de la force centrifuge sont clairement visibles lorsque le champ de vitesse  $u$  est présenté dans une coupe longitudinale de la strie. On illustre sur les figures 4.16a, 4.16b, 4.16c et 4.16d l'évolution de la perturbation optimale stationnaire dans la direction  $x$  de l'écoulement, pour les courbures  $\Gamma = 0$ ,  $\Gamma = 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 10^{-3}$  et  $\Gamma = 10^{-2}$ , respectivement. Lorsqu'il n'y a pas de courbure, la strie haute vitesse se développe en une seule fois, atteint son maximum de vitesse longitudinale, puis décroît. Lorsque la courbure est ajoutée, la strie se forme initialement de la même manière, mais finit par laisser place à une strie basse vitesse, avec une vitesse maximum  $|u|$  moins élevée. Lorsque la courbure est augmentée, ce phénomène s'opère à une fréquence spatiale plus élevée, résultant d'une plus forte action de la force centrifuge.

La figure 4.17 illustre le phénomène associé à l'alternance de stries hautes et basses vitesses. À l'étape 1, la perturbation optimale de l'écoulement est constituée de tourbillons contra-rotatifs. La vorticité induit du *lift-up* et crée les stries haute et basse vitesses primaires en entraînant l'écoulement haute vitesse dans la couche limite et en entraînant l'écoulement basse vitesse proche de la paroi vers le centre de la couche limite. Lorsque les stries sont formées à l'étape 2, elles subissent l'action de la force centrifuge. Les stries basse vitesse subissent une force centrifuge dirigée vers la paroi, tandis que les stries haute vitesse subissent une force centrifuge dirigée vers l'extérieur de la couche limite. À l'étape 3, le forçage induit par l'effet centrifuge conduit à la formation de tourbillons contra-rotatif dans le sens opposé à ceux d'origine (étape 1). Cette nouvelle vorticité réduit l'intensité des stries et débute l'inversion de vitesse des stries. Cette inversion est plus rapide en proche paroi, où le gradient du champ de vitesse est plus important. À l'étape 4, l'inversion de la vitesse des stries est complète. Elles ont une vitesse absolue moins importante que celle des stries primaires, il y a eu un amortissement au cours du processus. Le cycle (2-4) se répète jusqu'à ce que les stries soient complétement amorties.

Nous détaillons le phénomène d'alternance des stries avec le cas  $\Gamma = 10^{-3}$  sur la figure 4.18. Les images dans le plan  $(z, y)$  montrent la vitesse axiale  $u$  et les champs de vecteurs illustrent le champ de vitesse  $(v, w)$  à une position  $x$  donnée. À  $x = 0$ , le champ de vitesse

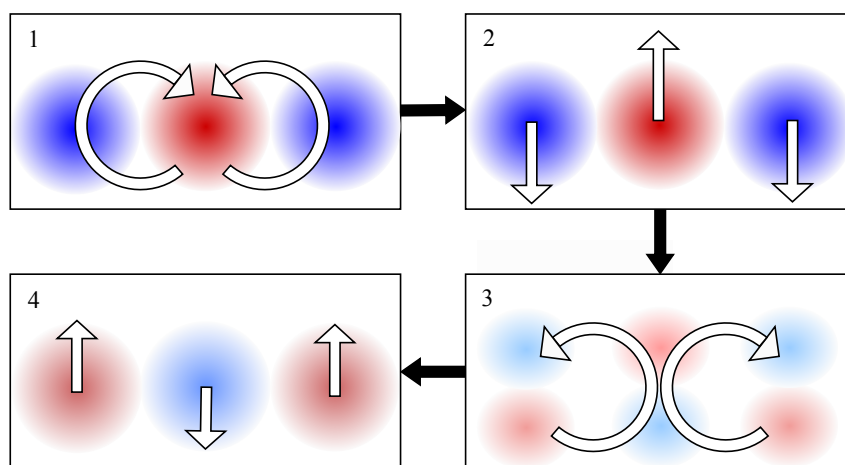


FIGURE 4.17 – Diagramme explicatif du phénomène d'alternance des stries.

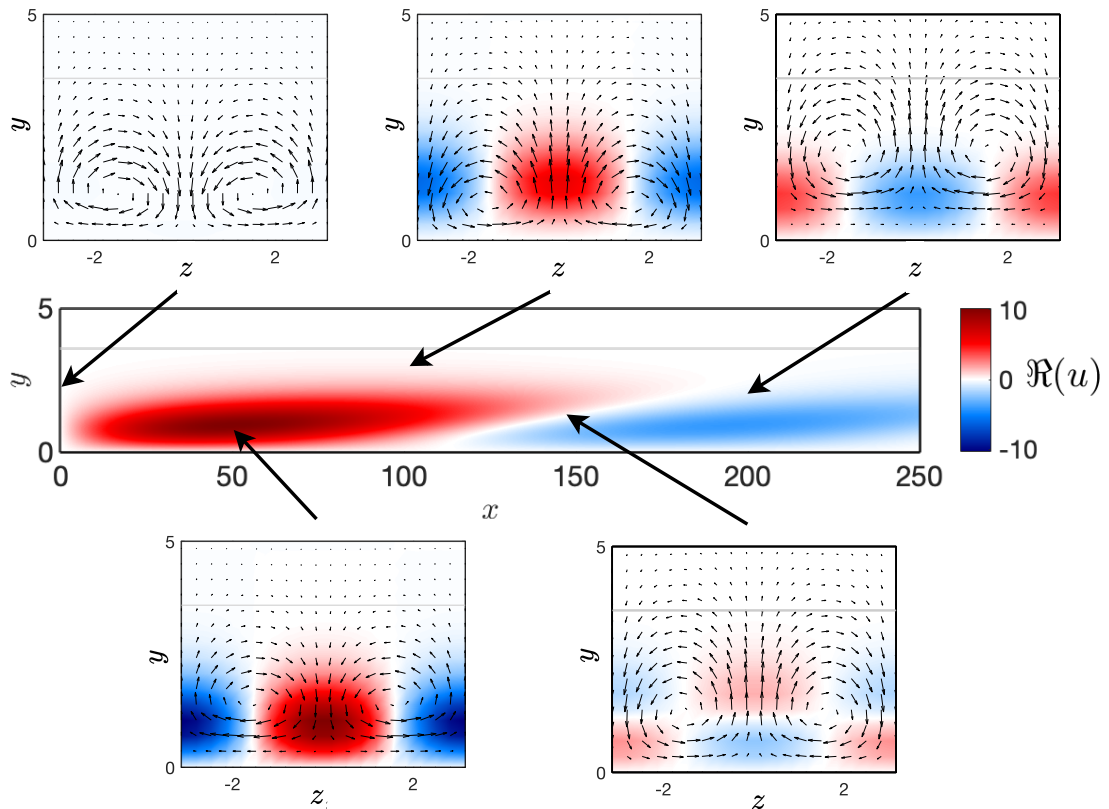


FIGURE 4.18 – Développement d'une strie à  $\Gamma = 10^{-3}$ .  $M = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\text{Re}\delta_1 = 1000$ .

est composé de la perturbation initiale optimale faite de tourbillons contra-rotatif. Par mécanisme de *lift-up*, cette vorticité produit des stries, qui atteignent un maximum à  $x = 50$ . Sous l'action de la force centrifuge, la vorticité s'inverse entre  $x = 50$  et  $x = 100$ .    $x = 150$ , l'inversion de vorticité conduit à inverser le signe des stries hautes et basses vitesses qui s'étaient initialement formées.    $x = 200$ , l'inversion des stries est complète, et les stries nouvellement formées ont une amplitude réduite. Les processus se répètent jusqu'à amortissement complet de la perturbation.

La figure 4.19 montre l'évolution du gain qui correspond au développement des perturbations optimales présentées sur la figure 4.16. Comme nous l'avons vu sur les cartes de gain à la figure 4.15, le gain maximal est plus faible pour des courbures plus importantes. Nous voyons également que lorsque la courbure est ajoutée, le gain oscille suivant la direction  $x$ . L'oscillation d'un maximum local   un autre correspond à l'alternance successive des stries : pour reprendre l'exemple illustré sur la figure 4.17, le gain est maximal à l'étape 2 et 4 et un minimum local du gain se trouve lorsque les stries s'inversent à l'étape 3. En effet, le gain, proportionnel à la vitesse  $|u|$  de la strie, oscille au fur et à mesure de la formation des stries. Il est maximum au maximum de vitesse  $|u|$ , et atteint un minimum local entre deux stries haute et basse vitesse. On remarque que le maximum est toujours atteint lors de la formation de la première strie, indépendamment de la courbure, et pour des distances de plus en plus courtes à mesure que la courbure est augmentée, de deux

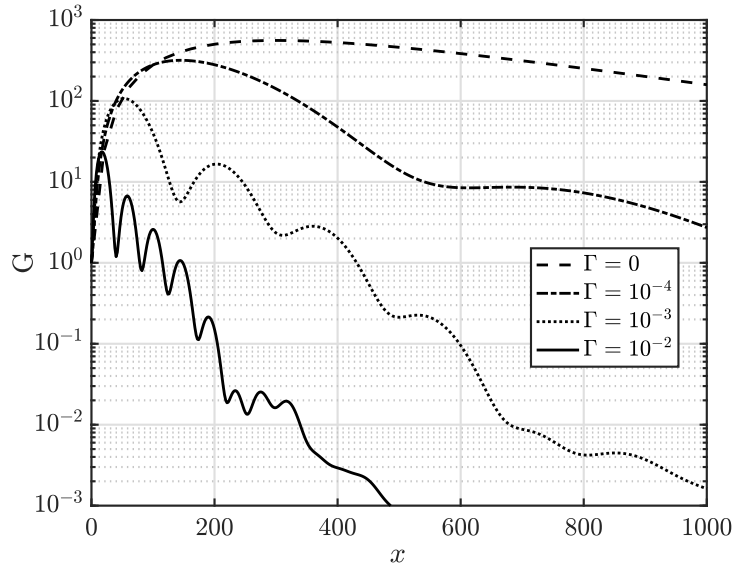


FIGURE 4.19 – Gain pour des perturbations optimales associées à diverses courbures.  $M = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\text{Re}\delta_1 = 1000$ .

ordres de grandeur entre le cas  $\Gamma = 0$  et  $\Gamma = 10^{-2}$ . La dissipation des stries est également plus rapide pour des courbures plus élevées. De manière générale, les stries sur paroi courbe ont moins de temps pour se développer avant de s'inverser, leur amplitude est donc plus faible, expliquant donc le gain plus faible associé aux plus grandes courbures.

Nous avons vu grâce aux cartes de gain sur la figure 4.15 qu'en présence de courbure, le gain maximal est atteint pour des perturbations instationnaires. Nous calculons donc à présent les perturbations aux pulsations optimales qui correspondent à chaque courbure. Étant donné que ces perturbations ont une pulsation non nulle, elles ont une orientation par rapport à la direction principale de l'écoulement. Pour rendre intelligible leur visualisation, nous choisissons de les présenter en additionnant la conjuguée de la composante suivant  $\beta$

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y, x) e^{-i\omega t} (e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}), \quad (4.40)$$

de manière à visualiser une strie équivalente sans orientation. Les parties réelles des perturbations, qui nous renseignent sur la structure des perturbations, et les valeurs absolues des perturbations, qui nous renseignent sur le support spatial, sont présentées sur la figure 4.20. Nous remarquons qu'à chaque courbure, il existe un paquet d'onde qui évolue. Avec l'augmentation de la courbure, le support spatial du paquet d'onde se raccourcit et la fréquence spatiale du paquet d'onde augmente. Il est intéressant de noter que, pour chaque courbure, le support spatial du paquet d'onde correspond approximativement au support spatial pour la première occurrence spatiale des stries stationnaires à la figure 4.16. Le gain étant proportionnel à  $|u|$ , nous voyons ici que le gain maximal est obtenu à la même longueur  $x$  pour les stries stationnaires et instationnaires.

En plus de la courbure, le gain est une fonction du nombre de Reynolds. La figure 4.21 montre l'évolution de la carte de gain en fonction du nombre de Reynolds, à courbure

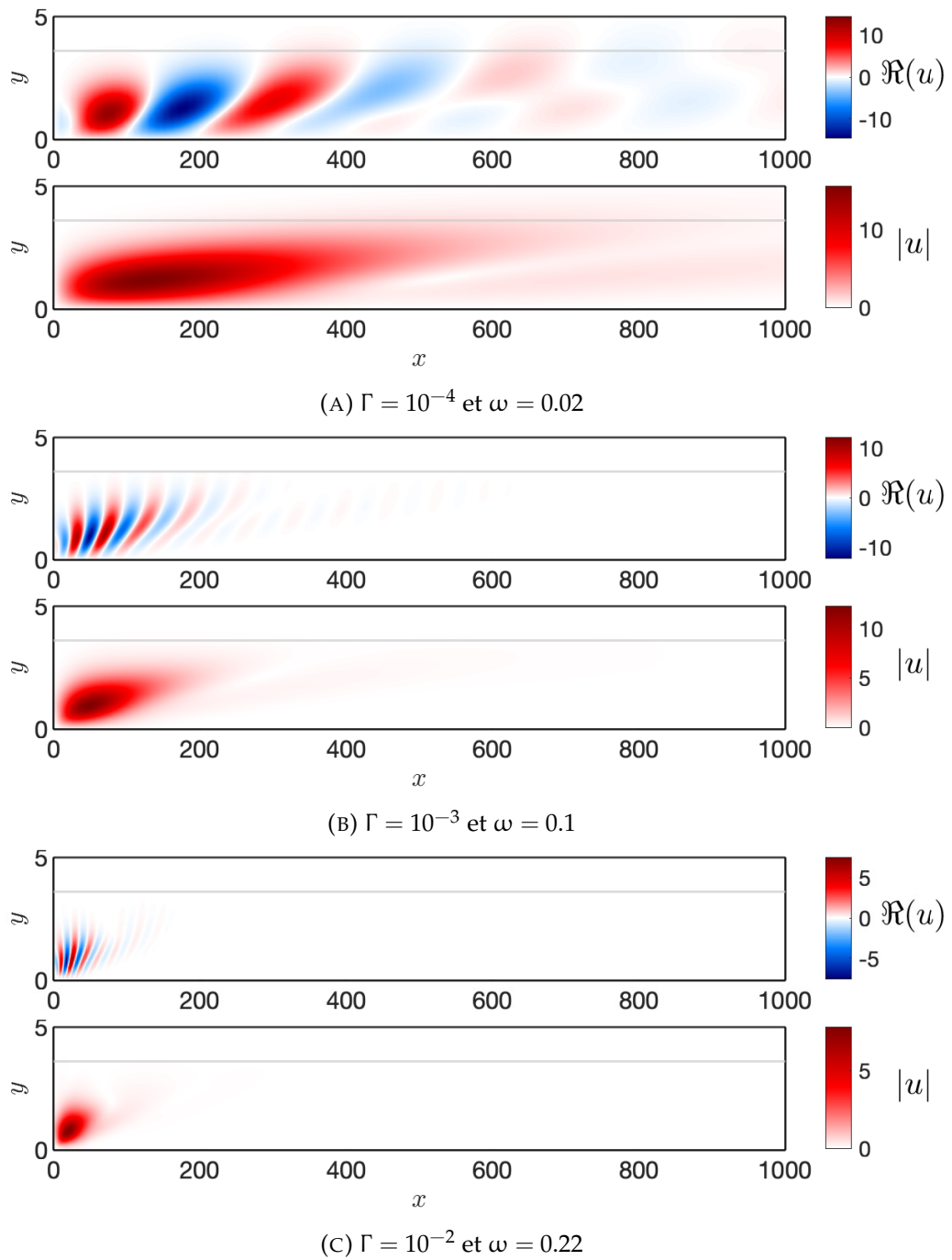


FIGURE 4.20 – Évolution d’une strie instationnaire optimale dans la direction de l’écoulement  $x$  pour différente courbure.  $M = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $Re_{\delta_1} = 1000$  à l’instant  $t = 0$ .

constante. On remarque qu'il y a toujours une augmentation du niveau de gain avec le nombre de Reynolds, mais la proportionnalité qui était trouvée précédemment sur plaque plane n'est ici plus valide. En effet, l'augmentation de  $Re$  augmente largement le gain pour les fréquences concentrées autour de la fréquence optimale ; les autres fréquences subissent aussi cette augmentation, mais dans une moindre mesure. La fréquence optimale est légèrement réduite lors de l'augmentation du nombre de Reynolds, passant dans notre exemple de  $\omega \approx 0.093$  à  $Re_{\delta_1} = 1000$  à  $\omega \approx 0.062$  à  $Re_{\delta_1} = 5000$ . L'augmentation du nombre de Reynolds a un effet négligeable sur la distribution du gain par rapport au nombre d'onde transverse.

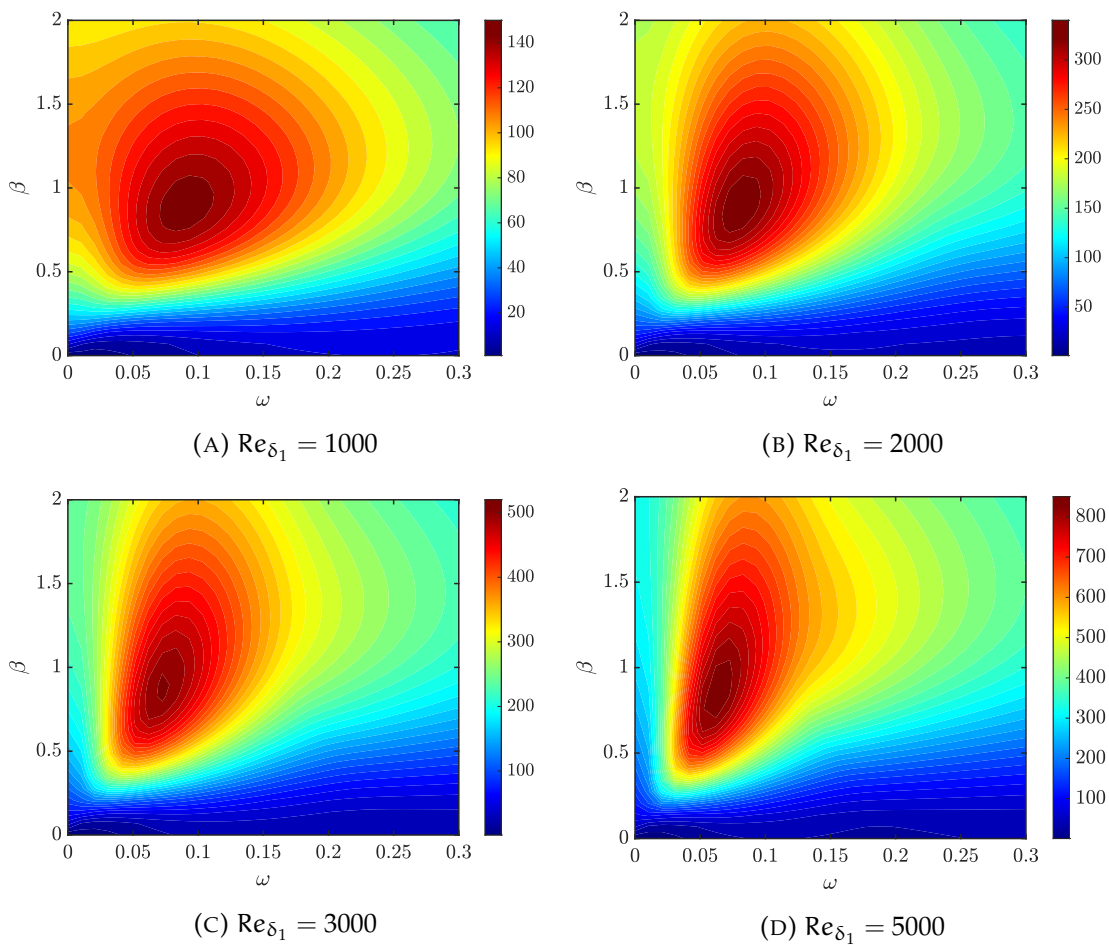


FIGURE 4.21 – Carte de gain  $G_{\max}$ . Couche limite de tuyère.  $\Gamma = 10^{-3}$  et  $M = 1$ .

Le mécanisme centrifuge étant dépendant du nombre de Reynolds et de la courbure, la fréquence qui maximise le gain change pour chaque condition  $Re$  et  $\Gamma$ . Il sera donc nécessaire de calculer une carte de gain pour chaque nombre de Reynolds, pour chaque géométrie de tuyère étudiée.

## 5

---

 MODÉLISATION DE LA TRANSITION
 

---

<b>4.1 Formulation</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1.1 Linéarisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	70
4.1.2 Hypothèses de calcul . . . . .	71
4.1.3 Définition du champ de base . . . . .	72
<b>4.2 Stabilité modale</b> . . . . .	<b>74</b>
4.2.1 Formulation du problème aux valeurs propres . . . . .	74
4.2.2 Critère de stabilité . . . . .	75
<b>4.3 Stabilité non modale : croissance transitoire</b> . . . . .	<b>76</b>
4.3.1 Parabolisation et filtrage . . . . .	78
4.3.2 Discrétisation et convergence . . . . .	79
<b>4.4 Écoulement transsonique</b> . . . . .	<b>79</b>
4.4.1 Blasius subsonique . . . . .	80
4.4.2 Blasius supersonique . . . . .	81
4.4.3 Blasius transsonique . . . . .	83
<b>4.5 Effet du gradient de pression</b> . . . . .	<b>86</b>
4.5.1 Stabilité modale . . . . .	86
4.5.2 Croissance transitoire . . . . .	88
<b>4.6 Effet de la courbure</b> . . . . .	<b>91</b>
4.6.1 Stabilité modale . . . . .	91
4.6.2 Croissance transitoire . . . . .	92

---

*Dans ce chapitre, nous utilisons les connaissances acquises sur la stabilité de couches limites de tuyères pour décrire la transition qui est observée expérimentalement. Un modèle de transition basé sur les perturbations dans l'écoulement est mis en place, puis comparé aux résultats expérimentaux. Les effets que peut avoir la rugosité sur la transition sont également étudiés, afin de déterminer son potentiel à contribuer à la transition. L'analyse concerne à la fois l'effet de la rugosité sur la croissance transitoire et sur la taille critique théorique d'un élément de rugosité isolé pour initier la transition.*

## 5.1 DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DE TRANSITION

Pour que le coefficient de décharge soit affecté par l'état de la couche limite, la transition doit se produire en amont du col de la tuyère. Dans le chapitre précédent, les calculs sont effectués en ayant sélectionné le profil de la couche limite à un nombre de Reynolds arbitraire et des conditions d'écoulement correspondant à la section critique de la tuyère à  $M = 1$ . Les calculs précédents correspondent ainsi à initialiser la croissance transitoire spatiale et à propager les perturbations en aval du col. Pour obtenir un gain optimal au niveau du col, nous utilisons une approche de premier ordre : d'abord, une carte de gain optimal est calculée pour les conditions du col. La longueur de développement  $x_{opt}$  associée au gain maximum est retenue, puis un second calcul de carte de gain est effectué, avec de nouvelles conditions  $M$ ,  $Re_{\delta_1}$  et  $\Gamma$  correspondant aux conditions d'écoulement à une distance de  $x_{opt}$  en amont du col. Cette procédure est appliquée pour les trois géométries de tuyère  $R/D = 1, 2$  et  $4$ , respectivement à  $Re_t = 0.4 \cdot 10^6, 0.7 \cdot 10^6$  et  $0.9 \cdot 10^6$ , correspondant à un nombre de Reynolds dans les régimes transitoires observés expérimentalement pour chaque tuyère. Le Tableau 5.1 résume les résultats obtenus.

Tuyère	Reynolds $Re_t$	Localisation	$G_{max}$	$x_{opt}$
$R/D = 1$	$0.9 \cdot 10^6$	Col	151	57
		Est. amont	140	59
$R/D = 2$	$0.7 \cdot 10^6$	Col	187	67
		Est. amont	169	69
$R/D = 4$	$0.4 \cdot 10^6$	Col	177	75
		Est. amont	159	75

TABLE 5.1 – Différence entre le calcul de croissance transitoire réalisé au col de la tuyère et en amont du col.

La différence entre l'estimation au niveau du col et celle en amont est plutôt faible : le gain maximal est inférieur de quelques pourcents et la distance optimale associée au gain maximal est pratiquement la même. Ceci est dû au fait que la couche limite est petite par rapport au rayon de la tuyère, d'où la petite valeur de  $x_{opt}$  lorsqu'elle est rapportée à l'échelle du rayon de courbure de la tuyère. Dans le cas  $R/D = 2$  à  $Re_t = 0.7 \cdot 10^6$ , la distance optimale  $x_{opt} = 69$  correspond à environ 4% du rayon d'entrée. Concrètement, pour une tuyère avec  $R/D = 2$  et un col de  $D = 10\text{mm}$ , cela signifie que le gain maximal par production de stries sera obtenu en  $0.8\text{mm}$ . Cette longueur de développement est compatible avec une transition au sein du col de la tuyère.

Dans ces conditions, effectuer le calcul au niveau du col de la tuyère est donc une bonne approximation. Le court développement des stries instationnaires renforce également la pertinence de l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle utilisée pour réaliser ces calculs. Les calculs suivants sont donc effectués au col, nous évitant de calculer deux fois les cartes de gain.



## 5.2 TRANSITION PAR PERTURBATIONS DE L'ÉCOULEMENT LIBRE

## 5.2.1 Critère de transition : facteur N

Pour établir un critère de transition, nous reprenons le principe de facteur N établi dans la littérature par Andersson et al. (1999), Ingen (1956) et Mack (1984). Le facteur N établit un lien entre les perturbations dans l'écoulement et l'amplification des perturbations dans la couche limite. Dans le chapitre précédent, nous avons mis en avant le mécanisme d'amplification des perturbations dans la couche limite, et nous avons montré que l'amplification maximale se trouve à des nombres d'onde transverses et des pulsations variables suivant la force centrifuge dans l'écoulement. Ainsi, pour comparer les résultats expérimentaux aux résultats théoriques de transition, nous commençons par calculer des cartes de gain pour chaque configuration étudiée expérimentalement, en variant le nombre de Reynolds entre  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 2 \cdot 10^6$ . Pour chaque forme de tuyère, à chaque nombre de Reynolds, le gain maximum est relevé

$$G_{\max}(R/D, Re_t) = \max_{\alpha, \omega, \beta} G(\omega, \beta, \alpha, R/D, Re_t), \quad (5.1)$$

de manière à ne conserver que les perturbations les plus amplifiées pour chaque configuration de tuyère et nombre de Reynolds. Pour évaluer le nombre de Reynolds de transition, les gains obtenus sont utilisés pour calculer le facteur N

$$N = \ln(G_{\max}). \quad (5.2)$$

L'évolution du facteur N en fonction du nombre de Reynolds pour les trois géométries de tuyères étudiées est présentée sur la figure 5.1. On observe dans un premier temps que le facteur N augmente avec le nombre de Reynolds  $Re_t$ , et que cette augmentation n'est pas linéaire. En effet, le taux d'amplification des perturbations est basé sur les caractéristiques de la couche limite au col de la tuyère. Si la masse volumique du fluide au col évolue linéairement avec  $Re_t$ , l'épaisseur de la couche limite varie suivant l'inverse de la racine de  $Re_t$  (voir la formulation de Geropp équation (4.8)). Ainsi, l'aplatissement de la courbe traduit la réduction de la taille de la couche limite au col lorsque le nombre de Reynolds  $Re_t$  augmente. De manière similaire, la diminution du facteur N avec la diminution du rayon de la section convergente de la tuyère est la conséquence de la réduction de la taille de la couche limite en présence du plus fort gradient de pression favorable associé aux plus petits rayons des convergents.

L'évolution du facteur N est en grande partie dictée par l'évolution du nombre de Reynolds basé sur la couche limite aux cols des tuyères, bien que modulée par les effets de force centrifuge propres à chaque configuration, tel que nous l'illustrons sur la figure 5.2 en présentant la pulsation des perturbations optimales en fonction de la tuyère et du nombre de Reynolds. Il a déjà été mentionné par Karp et Hack (2018) que l'action de la force centrifuge sur une couche limite incompressible conduit à obtenir des perturbations optimales

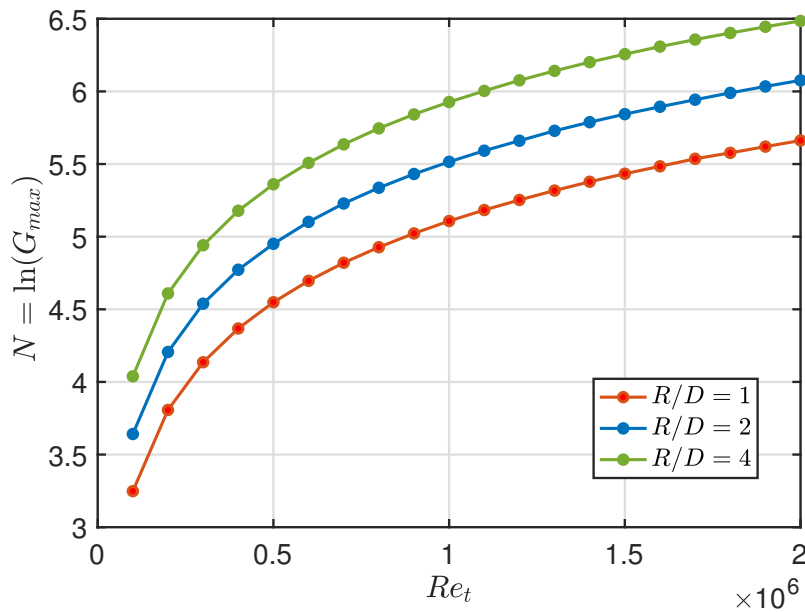


FIGURE 5.1 – Évolution du facteur  $N$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_t$  à partir de la formulation de croissance transitoire.

instationnaires, mais l'analyse est limitée à une seule pulsation. Notre analyse permet de mettre en avant que cela est également le cas pour les couches limites compressibles et montre explicitement l'évolution de la pulsation optimale en fonction des conditions de l'écoulement. En effet, la réduction de la taille de la couche limite avec l'augmentation de  $Re_t$  réduit la courbure relative  $\Gamma = \delta_1/R$ , réduisant la pulsation des perturbations optimales. À la limite  $\Gamma = 0$ , le gain optimal se trouve à pulsation nulle  $\omega = 0$ . À l'opposé, pour les faibles nombres de Reynolds, donc des couches limites plus épaisses, les effets de courbures sont importants et la pulsation des perturbations optimales augmente.

### 5.2.2 Facteur $N$ critique pour la transition

Les facteurs  $N$  seuls ne suffisent pas à déterminer le nombre de Reynolds de transition. La valeur de  $N$  pour laquelle la transition se déroule est généralement déterminée de manière empirique sur la base d'expérience dont l'environnement est contrôlé, c'est-à-dire à taux de turbulence connu. Dans le cas de la transition modale de couches limites de plaques plane et pour de faibles taux de turbulence, Ingen (1956) avait initialement suggéré  $N = 9$ . Cette valeur a plus tard été reconsidérée, car il a été trouvé qu'elle est fortement dépendante de la qualité de l'écoulement (van Ingen, 2008). Dans le cas des couches limites de tuyère, nous avons vu au chapitre 4 que la transition est dominée par des mécanismes non modaux. Ainsi, les valeurs de  $N$  que l'on retrouve classiquement dans la littérature sur plaque plane ne sont ici pas applicables.

Pour définir la valeur de  $N$  critique pour le déclenchement de la transition, nous utilisons la campagne expérimentale réalisée pour les tuyères R1C5S, R2C5S et R4C5S.

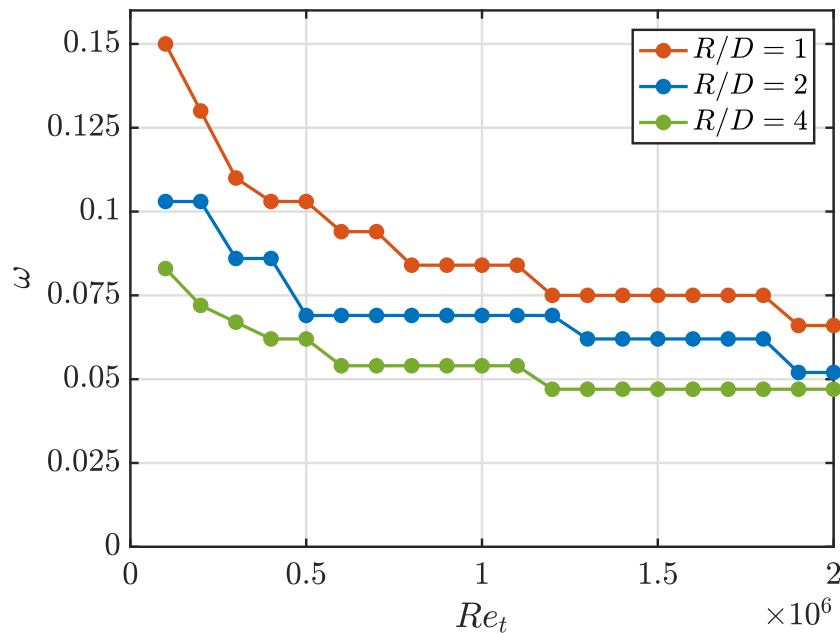


FIGURE 5.2 – Évolution de la pulsation des perturbations optimales en fonction du nombre de Reynolds. Les changements de pulsation par palier sont un effet de la discrétisation employée pour le calcul des cartes de gains.

Les données de transition de la tuyère R4C5S donnent les nombres de Reynolds pour lesquelles la transition a débuté,  $Re_t^i$ , et s'est achevée,  $Re_t^f$ . Les nombres  $N$  associés sont obtenus à l'aide de la figure 5.1 et sont reportés dans la table 5.2.

	Début de transition	Fin de transition
$Re_t$	$0.25 \cdot 10^6$	$0.61 \cdot 10^6$
$N$	4.79	5.52

TABLE 5.2 – Nombres de Reynolds et facteurs  $N$  pour la transition associée à la tuyère R4C5S.

En considérant que le facteur  $N$  critique pour la transition est indépendant de la géométrie de la tuyère à l'étude, les facteurs  $N$  déduits à l'aide des expériences pour la tuyère R4C5S peuvent être utilisés pour déterminer la transition dans les tuyères R1C5S et R2C5S. Pour ce faire, nous utilisons les courbes d'évolution du facteur  $N$ , présentées sur la figure 5.1, et nous déterminons les nombres de Reynolds de début et de fin de transition à partir des valeurs de  $N$  obtenus dans la table 5.2. La comparaison entre le modèle théorique calibré sur la tuyère R4C5S et les résultats expérimentaux de transition est présentée sur la figure 5.3. Nous remarquons que le modèle surestime le nombre de Reynolds de transition pour la tuyère  $R/D = 1$ , bien que la largeur de la plage de transition semble correctement estimée. Il y a plusieurs raisons qui peuvent expliquer ce décalage, qui est aussi légèrement visible sur le cas  $R/D = 2$ .

Dans un premier temps, le modèle que nous utilisons pour calculer la couche limite

utilise une approche quasi 1-D, et donc l'écoulement au col de la tuyère est toujours à  $M = 1$ . Or, il a été montré par Hall (1962), parmi d'autres, que la courbure de la tuyère au col induit des effets bi-dimensionnels importants, comme une force centrifuge non négligeable qui provoque une déformation de la ligne sonique au col. Pour une tuyère  $R/D = 1$ , le nombre de Mach en proche paroi (en dehors de la couche limite) peut atteindre  $M = 1.2$  au col de la tuyère. Cette augmentation locale de vitesse est due à la dépression en proche paroi provoquée par la force centrifuge dans la tuyère. Un nombre de Mach plus élevé en bord de couche limite conduirait à augmenter le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la couche limite, et ainsi contribuerait à augmenter le facteur  $N$  de la tuyère pour un nombre de Reynolds  $Re_t$  donné. La prise en compte de cet effet permettrait de réduire la surestimation du modèle de transition.

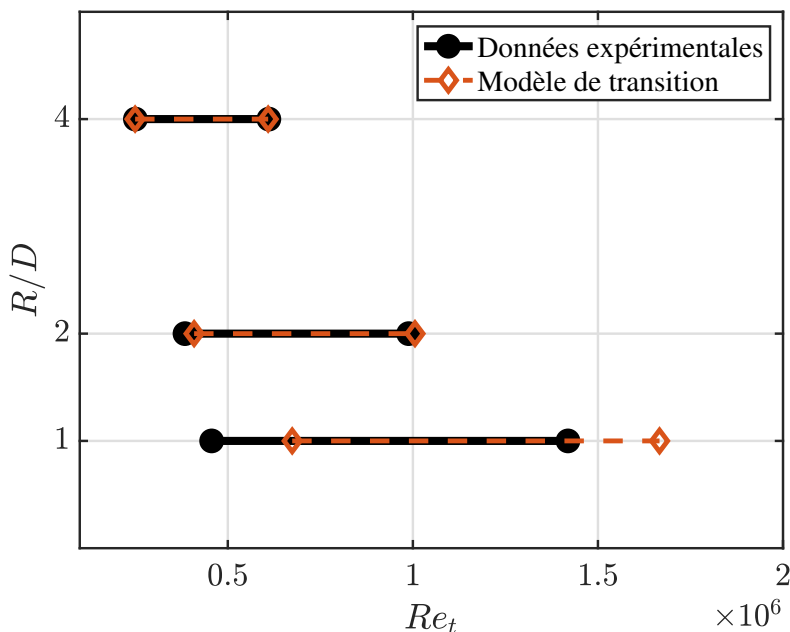


FIGURE 5.3 – Comparaison des nombres de Reynolds de transition entre les résultats expérimentaux et le modèle basé sur la croissance transitoire.

Dans un deuxième temps, la variation du taux de turbulence de la soufflerie avec le nombre de Reynolds n'est pas prise en compte par le modèle. En prenant un nombre  $N$  critique constant pour les tuyères, nous supposons que le taux de turbulence ne varie pas avec le nombre de Reynolds. La caractérisation de la soufflerie au chapitre 2 section 2.2.4 montre que pour un même taux de contraction, le taux de turbulence croît avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Le modèle est calibré avec la tuyère R4C5S, qui transitionne pour de faible nombre de Reynolds. À taux de turbulence constant, le nombre de Reynolds de transition de la tuyère R1C5S devrait être légèrement supérieur à ce que les résultats expérimentaux indiquent, rapprochant le modèle des observations expérimentales. La table 5.3 permet de se rendre compte de l'évolution du taux de turbulence aux points de transition au cours des essais. De plus, la figure 5.1 montre que les courbes de facteur  $N$

	Début de transition		Fin de transition	
	$Re_t$	$Tu$	$Re_t$	$Tu$
R/D = 4	$0.25 \cdot 10^6$	0.38%	$0.61 \cdot 10^6$	0.48%
R/D = 2	$0.38 \cdot 10^6$	0.44%	$0.99 \cdot 10^6$	0.53%
R/D = 1	$0.46 \cdot 10^6$	0.48%	$1.42 \cdot 10^6$	0.57%

TABLE 5.3 – Valeurs expérimentales du taux de turbulence aux nombres de Reynolds de transition transition pour les trois tuyères R1C5S, R2C5S et R4C5S.

croissent moins vite à haut nombre de Reynolds, ce qui suggère qu’une petite variation de facteur  $N$  cause une grande variation dans le nombre de Reynolds de transition. Ainsi, le point de transition des tuyères dont la transition se déroule à haut nombre de Reynolds aura tendance à être plus sensible aux variations du taux de turbulence de l’écoulement.

Troisièmement, le facteur  $N$  est ici basé sur le développement de stries instationnaires dans la couche limite, et représente essentiellement leurs amplitudes. De nombreuses études montrent que les stries ne sont généralement pas la dernière étape avant la transition à la turbulence, et que des instabilités modales se développent sur ses stries. L’amplitude des stries est un paramètre essentiel dans le développement de ces instabilités secondaires, mais ne donne qu’une vision partielle du processus de transition. Ainsi, l’étude de Vaughan et Zaki (2011) montre dans une étude de stabilité secondaire (de couches limites de plaque plane) que l’instationnarité des stries promeut la transition à la turbulence, et que la fréquence des stries est un paramètre important dans le processus de transition. L’étude de Karp et Hack (2018) mentionne également l’importance la longueur des stries dans le développement d’instabilités secondaires et affirme qu’une longueur suffisante est essentielle pour permettre la croissance d’instabilités secondaires. Dans notre cas, pour chaque tuyère et chaque nombre de Reynolds, les stries possèdent différentes pulsations optimales, comme illustré sur la figure 5.2. Ainsi, il est probable que les instabilités secondaires menant à la turbulence aient des taux de croissance variables suivant la configuration de la tuyère.

Finalement, et malgré les simplifications faites dans notre étude, le modèle basé sur la croissance transitoire permet tout de même de reproduire les tendances de la transition dans les tuyères : la plage de nombres de Reynolds pour laquelle la couche limite est transitionnelle augmente avec la diminution du rapport  $R/D$ , et cette diminution entraîne le retardement de l’apparition de la transition à de plus hauts nombres de Reynolds.

### 5.3 TRANSITION PAR LA RUGOSITÉ DE SURFACE

La présence de rugosité sur la surface des tuyères est une des causes possibles de transition. Bien que les expériences au chapitre 3 aient montré que la rugosité n’a pas d’influence sur la transition pour les niveaux de rugosité utilisés en configurations industrielles, nous avons vu qu’un certain niveau de rugosité peut engendrer le déclenchement

de la transition. Nous étudions donc ici le potentiel de transition par la rugosité de surface, afin d'approfondir et explorer les conditions pour lesquelles la rugosité de surface peut prendre part au processus de transition.

### 5.3.1 Rugosités isolées

Les éléments de rugosité isolée sont connus pour provoquer la transition vers la turbulence, à condition qu'ils soient suffisamment grands par rapport à l'épaisseur de la couche limite. Dans une campagne de simulation numérique, Bernardini et al. (2014) ont réalisé une étude paramétrique sur la transition induite par des éléments de rugosité. En variant la forme, la hauteur, le nombre de Reynolds et le nombre de Mach et ils trouvent que la taille critique d'un élément de rugosité menant à la transition est bien capturée par un nombre de Reynolds  $Re_{2k}$  basé sur la hauteur  $k$  de l'élément de rugosité, la vitesse  $u_k$  et la masse volumique  $\rho_k$  évaluée dans la couche limite non perturbée à la hauteur  $k$ , et la viscosité évaluée à la paroi. Les auteurs rapportent que le sillage de la rugosité provoque la transition à la turbulence pour un écoulement à  $M = 1$  pour un nombre de Reynolds  $Re_{2k} > [400 - 700]$ , la valeur exacte étant dépendante de la forme de l'obstacle. En reprenant ces observations et en utilisant le modèle analytique de couche limite pour des tuyères proposé par Geropp (1971), il est possible de déterminer le nombre de Reynolds  $Re_{2k}$  en fonction de la taille d'un élément de rugosité. Cette estimation est imparfaite puisque les valeurs critiques de  $Re_{2k}$  sont données pour une couche limite de plaque plane, mais permet d'obtenir une première estimation de la taille des éléments de rugosité pouvant mener à la transition dans les tuyères. La figure 5.4 présente l'évolution de la taille critique  $k/D$  d'un élément de rugosité qui mènerait à la transition en fonction du nombre de Reynolds  $Re_t$  pour les trois formes de tuyère étudiées  $R/D = 1; 2; 4$ . On remarque dans un premier temps que la taille de la rugosité critique diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, en raison de l'amincissement de la couche limite. À faibles nombres de Reynolds, la variation de l'épaisseur de couche limite est importante et implique une forte variation de la hauteur critique de la rugosité. La forme de la courbe implique qu'à faible nombre de Reynolds une petite variation de hauteur de rugosité critique implique une petite variation dans le nombre de Reynolds de transition, tandis qu'à haut de nombre de Reynolds, une faible variation de hauteur de rugosité critique implique une grande variation dans le nombre de Reynolds de transition. Il est donc potentiellement plus difficile d'estimer le nombre de Reynolds de transition à haut nombres de Reynolds, si la transition est induite par la rugosité de la tuyère.

Finalement, la figure 5.4 montre que le rayon de courbure de la tuyère n'a qu'une faible influence sur la taille critique de l'élément de rugosité. On note toutefois que plus le rayon du convergent de la tuyère est petit, plus la hauteur critique  $k/D$  est petite, en raison de l'amincissement de la couche limite.

Pour mettre en perspective ces résultats théoriques, nous utilisons les résultats expérimentaux de transition des tuyères et les mesures de rugosité associées. La rugosité de

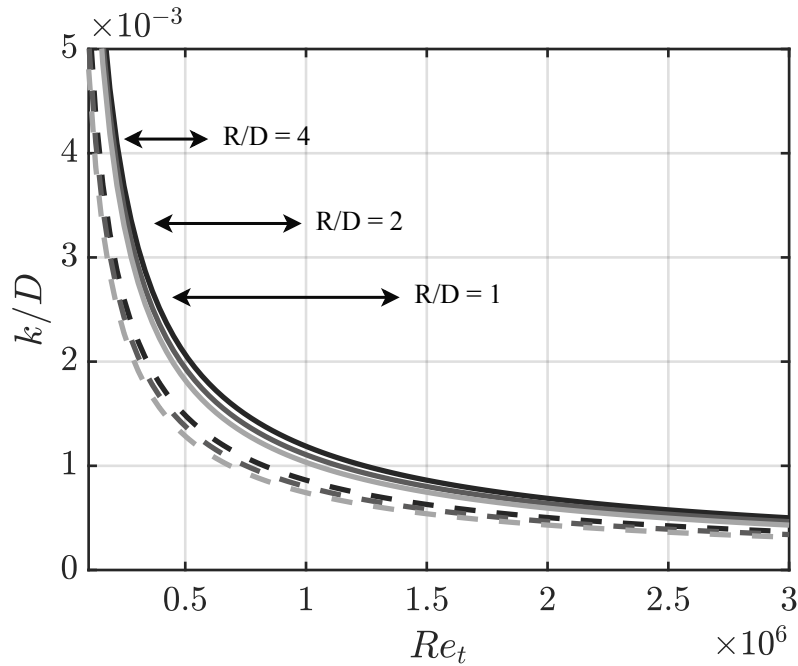


FIGURE 5.4 – Taille de la rugosité critique basée sur le nombre de Reynolds  $Re_{2k}$  pour des couches limites estimées au col des tuyères. Les courbes en tirets et pleines correspondent respectivement à la limite basse  $Re_{2k} = 400$  et haute  $Re_{2k} = 700$  du critère de transition. Les teintes de gris correspondent, de la plus claire à la plus foncée, à  $R/D = [1; 2; 4]$ . Les flèches noires indiquent les plages de transition observées expérimentalement pour les tuyères R1C5S, R2C5S et R4C5S (leurs positions sur l'axe des ordonnées sont arbitraires).

chaque tuyère a été caractérisée en réalisant une mesure par interférométrie sur trois zones d'une taille de  $0.36 \times 0.36 \mu\text{m}$  au col des tuyères. Pour chaque fenêtre de mesure, nous relevons la hauteur de l'élément de rugosité le plus grand. Ces résultats sont reportés dans la table 5.4. Les hauteurs maximales d'éléments de rugosité sont approximativement

Tuyère	Finition	Hauteur max de la rugosité $k/D \cdot 10^3$		
		Fenêtre 1	Fenêtre 2	Fenêtre 3
R1C5S	P4000	0.24	0.20	0.26
R2C5S	P4000	0.12	0.19	0.28
R2C5M	P2000	0.38	0.34	0.34
R2C5R	P1200	0.43	0.43	1.04
R4C5S	P4000	0.28	0.24	0.29

TABLE 5.4 – Hauteur de pics de rugosités isolés aux cols des tuyères.

comprises dans  $k/D \approx [0.1 - 0.3] \cdot 10^{-3}$ ,  $k/D \approx [0.3 - 0.4] \cdot 10^{-3}$  et  $k/D \approx [0.4 - 1] \cdot 10^{-3}$  pour les trois niveaux de finition P4000, P2000 et P1200. D'après le graphique figure 5.4, un élément de rugosité  $k/D < 0.4 \cdot 10^{-3}$  n'est pas la cause de la transition pour un nombre de Reynolds  $Re_t < 3 \cdot 10^6$ , et les observations expérimentales montrent que les couches limites des tuyères R1C5S, R2C5S, R2C5M et R4C5S ont déjà complètement transitionné

par d'autres mécanismes avant ce nombre de Reynolds. En revanche, la tuyère R2C5R suit une logique différente. En effet, sa surface présente des pics jusqu'à  $k/D = 1.04 \cdot 10^{-3}$  dans l'une des fenêtres de mesure. Pour cette taille de rugosité, le graphique figure 5.4 indique qu'une tuyère avec un convergent  $R/D = 2$  a un nombre de Reynolds critique  $Re_t = 0.7 \cdot 10^6$ , ce qui correspond à la plage de nombres de Reynolds transitionnels; il est ainsi probable que la rugosité de surface ait contribué à la transition à partir de ce nombre de Reynolds. En comparant les images infrarouges issues des expériences pour un nombre de Reynolds similaire sur la figure 5.5, nous voyons effectivement que la tuyère R2C5R présente des régions transitionnelles triangulaires qui sont des manifestations de transition induite par des éléments de rugosités isolés (voir chapitre 3), tandis que son homologue R2C5M avec un meilleur état de surface ne présente pas de trace de transition induite par rugosité, tel que prédit dans l'analyse. L'image infrarouge de la tuyère R2C5R montre que

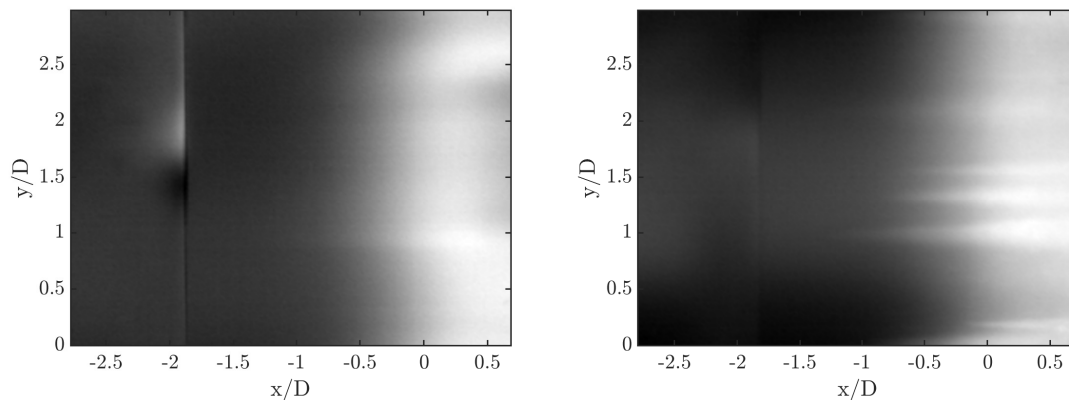


FIGURE 5.5 – Images infrarouges améliorées des tuyères R2C5M (à gauche) et R2C5R (à droite) à  $Re_t = 0.79 \cdot 10^6$ . La position  $x/D = 0$  correspond au col de la tuyère.

la transition est simultanément induite par la turbulence de l'écoulement (tache blanche diffuse) et par des éléments de rugosité localisés (taches triangulaires allongées dans le sens de l'écoulement).

### 5.3.2 Rugosités distribuées

Pour évaluer le potentiel de la rugosité distribuée à générer des perturbations de vorticité dans leur sillage pouvant produire des stries, et donc de la croissance transitoire, nous comparons un profil de rugosité mesuré sur une tuyère au profil de vitesse d'une perturbation optimale issu du calcul de de stabilité non modal. Pour être représentatif d'une perturbation pouvant émaner de la rugosité de la tuyère, la perturbation optimale est prise à pulsation nulle,  $\omega = 0$ . La comparaison entre le profil de rugosité et la perturbation théorique est présentée sur la figure 5.6. Pour faciliter la comparaison, un profil de rugosité idéalisé est ajouté sous la forme d'une sinusoïde en utilisant la longueur d'onde qui correspond à la perturbation optimale et l'amplitude est choisie de manière à obtenir la



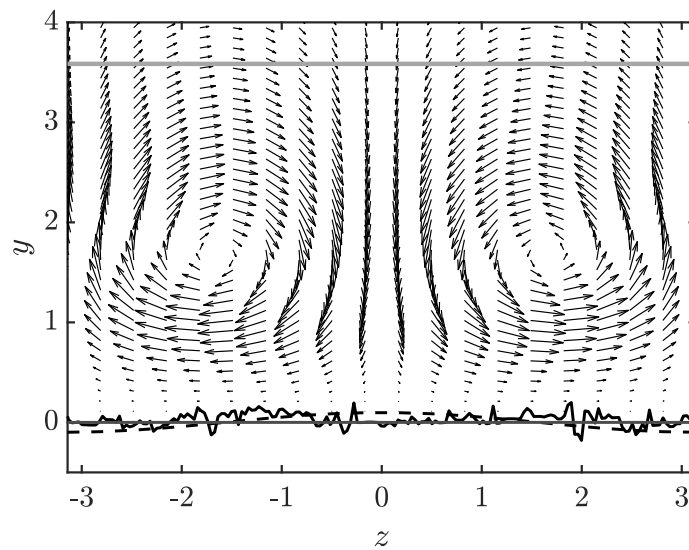


FIGURE 5.6 – Profil de vitesse de la perturbation optimale stationnaire à  $\omega = 0$ ,  $\beta = 0.95$  pour  $Re_t = 10^6$  pour une tuyère  $R/D = 2$ . La ligne grise représente l'épaisseur de la couche limite. À  $y = 0$ , la ligne droite représente une paroi idéale lisse, le profil continu correspond à la rugosité mesurée sur la tuyère R2C5R à  $Ra/D = 65.6 \cdot 10^6$  et la courbe en tiret est la rugosité idéalisée de même rugosité  $Ra/D$  présenté au nombre d'onde optimal  $\beta = 0.95$ .

même rugosité arithmétique  $Ra$  que celle de la surface de la tuyère. Ce faisant, le profil de rugosité idéalisé surestime la réalité de plusieurs ordres de grandeur, car nous concentrons ici la valeur de la rugosité arithmétique réelle en une seule longueur d'onde, nous donnant alors le profil de rugosité le plus favorable à la production de perturbations optimales. La taille de la rugosité est relative à l'épaisseur de la couche limite, on choisit ici de présenter la rugosité relative à une couche limite de la tuyère R2C5R à  $Re_t = 10^6$ , ce qui correspond au nombre de Reynolds pour lequel nous avons trouvé expérimentalement une couche limite dont la transition à la turbulence est complète (voir au chapitre 3). Bien que la rugosité utilisée ici pour la comparaison corresponde au plus grand  $Ra$  que nous ayons testé, on peut remarquer qualitativement que la hauteur de la rugosité idéalisée et celle de la rugosité mesurée sont d'un ordre de grandeur plus petit que la perturbation stationnaire conduisant aux stries et à la transition. Lorsque la même analyse est reproduite pour la plus petite rugosité de surface utilisée dans cette étude, nous trouvons qu'elle est de deux ordres de grandeur plus petite que la perturbation optimale.

De plus, il semble que le nombre d'onde de la rugosité mesurée ne soit pas compatible avec celui de la perturbation optimale. Pour s'en assurer, la densité spectrale de puissance (PSD) des différentes rugosités est calculée pour estimer la distribution de puissance dans le contenu fréquentiel de la paroi. Si  $\zeta(z)$  est le profil de rugosité de surface 1-D, la PSD

sous forme discrète est obtenue par

$$S_{xx}(\beta) = \frac{\Delta z}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \zeta(z_n) e^{-i2\pi\beta n\Delta z} \right|^2, \quad (5.3)$$

où  $\Delta_z$  est l'intervalle discret et  $N$  le nombre total d'intervalles. On rend  $\zeta$  et  $z$  non dimensionnels avec l'épaisseur de déplacement de la couche limite  $\delta_1$  afin que le nombre d'onde  $\beta$  soit comparable à celui utilisé dans les calculs de stabilité. Les unités dimensionnelles de  $S_{xx}$  et de  $\beta$  sont  $[m^3]$  et  $[m^{-1}]$  de sorte que l'aire sous  $S_{xx}(\beta)$  est la valeur efficace de la rugosité de surface en  $[m^2]$ . Lorsqu'elle est rendue non dimensionnelle, la valeur efficace peut être comparée à la rugosité de la surface montrée sur la figure 5.6. La PSD est calculée à l'aide de la méthode de Welch.

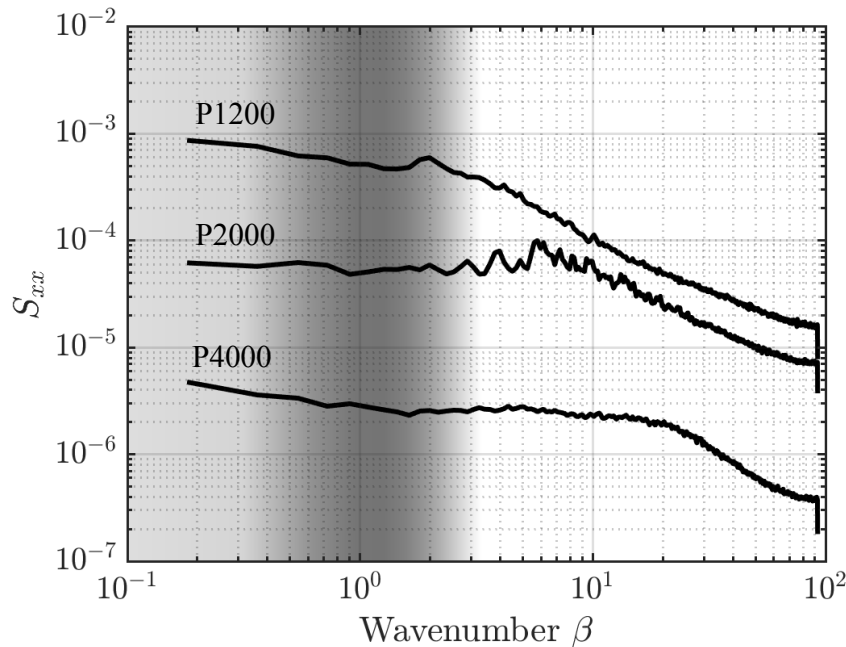


FIGURE 5.7 – Densité spectrale de puissance de la rugosité de surface. L'intensité du gris correspond au gain optimal  $G_{max}$  calculé à partir de la formulation de croissance transitoire aux nombres d'onde  $\beta$  correspondant pour une perturbation stationnaire  $\omega = 0$  et une tuyère  $R/D = 2$  à  $Re_t = 10^6$ . Les zones plus foncées correspondent à des gains plus élevés.

La figure 5.7 montre la PSD  $S_{xx}$  du profil de paroi pour chaque niveau de rugosité, mise à l'échelle par l'épaisseur de déplacement de la couche limite  $\delta_1$  à  $Re_t = 10^6$ . Comme attendu, nous remarquons que le niveau de puissance global de la PSD du profil de la paroi augmente avec le niveau de rugosité. Pour chaque rugosité, la distribution de la puissance dans le spectre est la suivante : elle commence par une distribution plate dans la gamme de nombres d'ondes la plus basse, comme le ferait un bruit blanc, et, à un nombre d'onde seuil, elle diminue de manière constante. Le nombre d'onde seuil auquel la décroissance de  $S_{xx}$  commence dépend de la rugosité de la surface : plus la rugosité est faible, plus

le seuil est élevé. La zone grisée indique les nombres d'ondes pour lequel un gain élevé de stries est susceptible de se produire, dans la plage  $\beta \approx [0.5 - 2]$  et nous pouvons voir que la surface de la paroi contient une rugosité de longueur d'onde pouvant initier la perturbation. Cependant, il est important de remarquer que l'amplitude des rugosités associées est de 3 à 5 ordres de grandeur inférieure à l'épaisseur de déplacement de la couche limite (voir figure 5.6). Ainsi, dans les expériences réalisées, la rugosité n'a pas atteint le niveau nécessaire pour affecter les nombres de Reynolds de transition par effet de rugosités distribuées. Nous tenons à souligner que certaines des rugosités testées ici sont jusqu'à quatre fois plus rugueuses que celles requises par la norme ISO9300 utilisée dans les applications de débitmètres industriels. Par conséquent, nous pensons que la transition due à la rugosité distribuée est donc peu probable dans les applications industrielles.

#### 5.4 CONCLUSION

Pour les niveaux de rugosité testés expérimentalement, nous avons conclu au chapitre 3 que la transition était principalement induite par le bruit naturellement présente dans l'écoulement en amont du passage de la tuyère. L'utilisation du facteur  $N$ , basé sur le modèle de croissance transitoire développé au chapitre 4, pour modéliser la transition dans les tuyères est probante et permet de se rendre compte de l'évolution du comportement de la transition avec des géométries variables.

L'analyse réalisée sur le potentiel de transition induit par des éléments de rugosité permet de quantifier la taille critique des éléments de rugosité, et malgré un modèle basé sur la transition observé sur plaque plane, nous retrouvons des valeurs de hauteurs critiques de rugosité cohérentes avec nos résultats expérimentaux. Les résultats sur la rugosité distribuée semblent indiquer qu'elle n'est pas la source de perturbations permettant la transition. Cela suggère que la turbulence induite par des éléments de rugosité isolés sera toujours prédominante au regard de la rugosité distribuée dans le scénario de transition.

Ces résultats de transition doivent être utilisés conjointement pour avoir une vision globale du scénario de transition dans les tuyères. En effet, même si ici la transition est principalement induite par la croissance transitoire de perturbations excitées par le bruit dans l'écoulement, les expériences ont montré qu'un taux de contraction important pouvait retarder l'apparition de la transition, probablement en raison de la diminution du taux de turbulence au niveau du col de la tuyère. Retarder la transition à de plus hauts nombres de Reynolds signifie également réduire la taille de la couche limite, et donc augmenter la taille relative des éléments de rugosité. Ainsi, il est possible d'imaginer qu'une réduction suffisante du taux de turbulence de l'écoulement puisse retarder suffisamment la transition induite par la turbulence de l'écoulement pour laisser place à une transition induite par la rugosité de surface.



---

## LE CAS DES TUYÈRES À COL CYLINDRIQUE

---

<b>5.1</b>	<b>Détermination de la longueur de transition . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Transition par perturbations de l'écoulement libre . . . . .</b>	<b>101</b>
5.2.1	Critère de transition : facteur N . . . . .	101
5.2.2	Facteur N critique pour la transition . . . . .	102
<b>5.3</b>	<b>Transition par la rugosité de surface . . . . .</b>	<b>105</b>
5.3.1	Rugosités isolées . . . . .	106
5.3.2	Rugosités distribuées . . . . .	108
<b>5.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>111</b>

---

*Nous avons étudié jusqu'à maintenant la transition dans les tuyères à col toroïdal. Ce chapitre se penche désormais sur le cas particulier des tuyères à col cylindrique et les spécificités associées. Avant d'étudier la stabilité de l'écoulement, nous réalisons dans un premier temps une analyse concernant l'écoulement général, sans considération pour la transition, afin d'identifier ses caractéristiques. Cette analyse permet de montrer que le col sonique peut se trouver à différentes positions dans la tuyère suivant le régime d'écoulement et joue un rôle majeur dans l'évaluation du coefficient de décharge. Nous présentons ensuite une campagne expérimentale qui vise à caractériser la transition de ces tuyères, puis nous décrivons la transition à l'aide des connaissances acquises dans les chapitres précédents. Un modèle de transition basé sur le facteur N est proposé.*

### 6.1 CONTEXTUALISATION

Les tuyères à col cylindrique sont des tuyères avec un convergent en arc-de-cercle qui se termine tangent à une section circulaire de diamètre constant, constituant le col cylindrique, qui lui-même se finit par une section divergente conique. Comme le montre la figure 6.1, elles ont la particularité d'avoir un col géométrique qui n'est pas défini en une seule position axiale, mais sur toute la longueur de la section circulaire. La norme industrielle de débitmétrie ISO9300 (2005) indique que le col cylindrique doit être long d'un diamètre.

La littérature n'est pas claire sur la raison de l'existence du col cylindrique, mais il semblerait qu'elle ait initialement été ajoutée afin d'éliminer l'influence de la force centrifuge dans l'estimation du débit, en obtenant une pression constante sur toute la

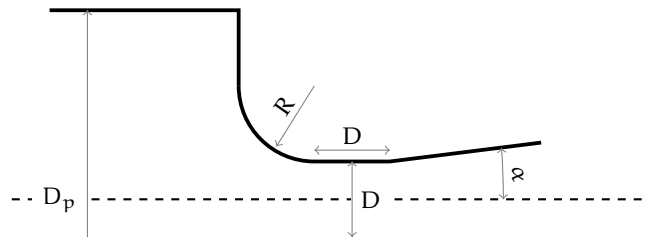


FIGURE 6.1 – Tuyère à col cylindrique ISO9300. L'écoulement se fait de gauche à droite.

section. Le convergent en arc-de-cercle maintient le même rôle que pour les tuyères à col toroïdal, c'est-à-dire produire une forte accélération de l'écoulement dans le but d'obtenir la couche limite la plus fine possible au col pour limiter sa contribution dans le coefficient de décharge. Cependant, ce type de géométrie a été pensé à une époque où les tuyères étaient utilisées comme débitmètre pour des écoulements en régime incompressible, où il était nécessaire de réaliser une mesure de pression au col pour déduire le débit de la tuyère. L'usage actuel des tuyères en régime critique, c'est-à-dire avec des écoulements supersoniques, implique de déterminer précisément la section critique. Le col cylindrique ne permet pas d'obtenir un écoulement sonique à  $M = 1$  dans l'ensemble de la partie cylindrique, puisque le développement d'une couche limite modifie la section effective du passage du fluide au travers de son épaisseur de déplacement. Pour estimer la contribution de la couche limite dans le coefficient de décharge, nous devons alors dans un premier temps déterminer quelle est la position réelle du col sonique.

Des recherches récentes visant à comprendre l'effet de la rugosité dans ces tuyères à hauts nombres de Reynolds (en régime turbulent) ont fait état de la présence d'ondes de choc dans le col cylindrique. Lors d'une campagne de simulations numériques, Lambert et al. (2019) reportent l'apparition de ces chocs dans le col cylindrique de la tuyère, et suggèrent que l'interaction entre les chocs obliques au col et la couche limite soit une source d'influence à prendre en compte pour l'évaluation de l'épaisseur de déplacement de la couche limite, et *in fine*, du coefficient de décharge. Des observations similaires sont reportées par Celep (2019) lors du développement d'un outil de simulation numérique pour l'estimation du coefficient de décharge. Deux exemples des observations rapportés par ces auteurs sont présentés sur la figure 6.2, sur lesquelles il est possible de voir l'occurrence de ces chocs dans le col cylindrique. On se propose alors également d'étudier ces chocs, pour déterminer leur condition d'apparition et leur prise en compte dans le coefficient de décharge des tuyères à col cylindrique.

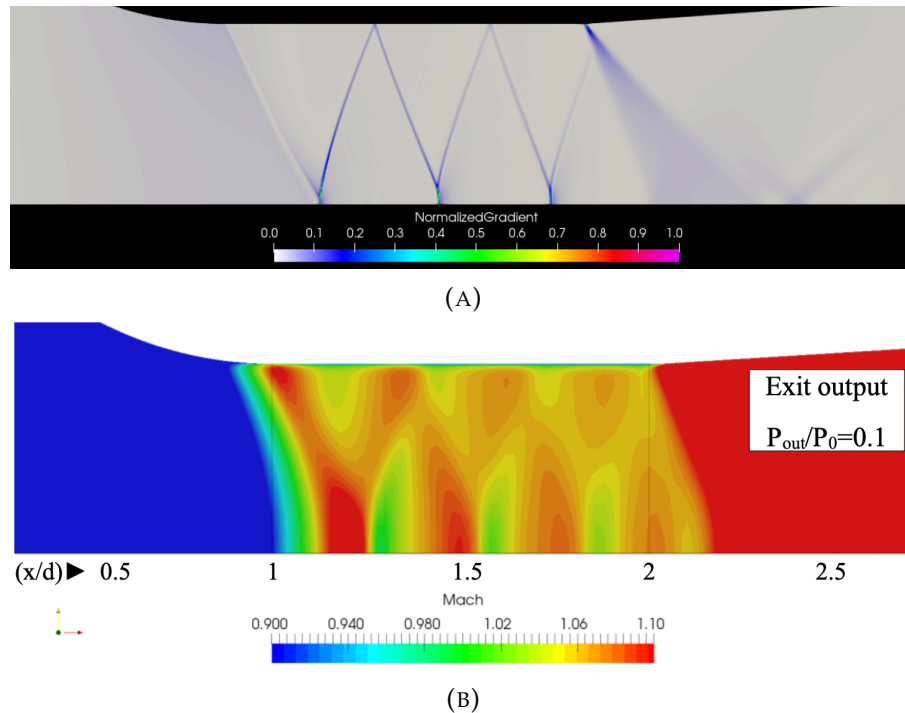


FIGURE 6.2 – Simulations numériques d’écoulement au col de tuyère cylindrique. 6.2a : simulation par les équations d’Euler, visualisation du gradient de masse volumique, issue de Celep (2019); 6.2b : simulation par des équations RANS, visualisation du champ de vitesse, issue de Lambert et al. (2019).

## 6.2 POSITION DU COL ET APPARITION DE CHOCS

### 6.2.1 Simulations numériques

Pour caractériser l’apparition des chocs dans les tuyères à col cylindrique, nous réalisons une campagne de simulations numériques à l’aide du solveur SU2 pour plusieurs nombres de Reynolds. Nous choisissons de ne pas simuler complètement l’amont et l’aval de la tuyère pour permettre un coût de calcul accessible, sans diminuer la fidélité des simulations. Nous simulons les équations de Navier-Stokes axisymétriques sans modèle de turbulence, mais en régime stationnaire ( $\partial \cdot / \partial t = 0$ ), de manière à obtenir un écoulement laminaire moyenné en temps. Nous utilisons un schéma convectif centré Jameson-Schmidt-Turkel d’ordre 2 associé à un schéma d’Euler implicite pour la discrétisation temporelle. Le schéma permet l’utilisation d’un CFL élevé, accélérant la convergence du calcul. Ici, le calcul est initialisé à un CFL de 10, et est porté à 50 une fois que l’écoulement supersonique est établi. Nous utilisons une condition adiabatique sur la paroi de la tuyère et imposons les grandeurs totales de l’écoulement. Le calcul est initié avec un écoulement au repos et en imposant une pression à la sortie du domaine (en bout du divergent de la tuyère). Cette pression d’initialisation que nous imposons est calculée manuellement, en utilisant les relations isentropiques 1D et le rapport des sections entre le col de la tuyère et la section de

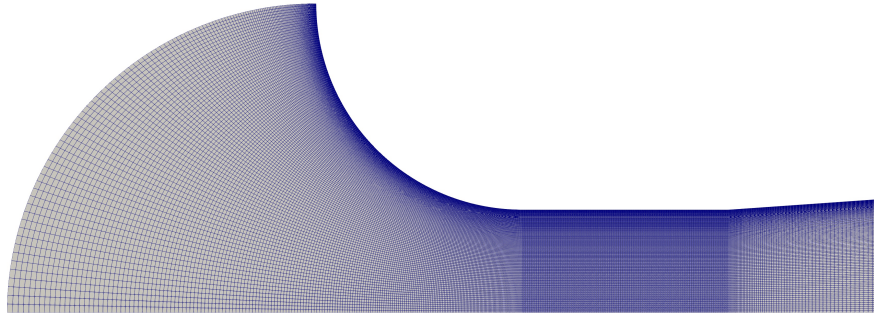


FIGURE 6.3 – Domaine de calcul et maillage de la tuyère pour la simulation à  $Re_t = 1 \cdot 10^6$ .

sortie du domaine. Le maillage de la tuyère est adapté en fonction du nombre de Reynolds utilisé, de manière à conserver un minimum de 100 mailles dans la couche limite la plus fine, à la fin du convergent de la tuyère. Le critère de convergence du solveur est basé sur la quantité de mouvement  $\rho u$ . Les simulations sont arrêtées lorsque  $RMS(\rho u) < 10^{-12}$ . La validation de ces choix numériques par comparaison avec des données de la littérature est montrée dans l'annexe C. Le domaine de simulation numérique est présenté sur la figure 6.3. Le maillage pour simuler l'écoulement à  $Re_t = 1 \cdot 10^6$  est composé de  $N_e = 90000$  éléments.

Le résultat des simulations numériques pour des nombres de Reynolds allant de  $Re_t = 0.2 \cdot 10^6$  à  $Re_t = 4.0 \cdot 10^6$  sont présentés sur la figure 6.4. Les champs de masses volumiques sont présentés avec une échelle de couleur centrée sur la masse volumique de l'écoulement à  $M = 1$ . À faibles nombres de Reynolds, le champ de masse volumique au col de la tuyère est homogène dans la direction radiale, et décroît légèrement le long de la tuyère. La couche limite est visible le long de la paroi grâce à l'augmentation de température dans la couche limite, et donc une diminution de la masse volumique de l'air. À la fin du convergent, proche de la paroi, se trouve une région de fluide de plus faible densité par rapport au reste de la section qui forme le début de la partie cylindrique de la tuyère. Cette "poche" de plus faible masse volumique apparaît par l'action de la force centrifuge sur l'écoulement, et l'effet est maximal à la fin du convergent, là où la vitesse du fluide est maximale. Une fois le convergent passé, il y a recompression de l'écoulement, puisque la force centrifuge ne s'applique plus dans le col de section constante.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, cette poche devient supersonique, puis s'étend vers le centre de la tuyère, jusqu'à former une perturbation qui s'étend dans toute la section, comme on peut le voir sur la figure 6.4d. À  $Re_t = 2 \cdot 10^6$ , la perturbation est contenue au début de la partie cylindrique du col. En augmentant le nombre de Reynolds, cette perturbation se propage dans l'ensemble du col de la tuyère, formant également des disques de recompression périodiques sur l'axe de symétrie, visibles sur la figure 6.4e. Pour s'intéresser de plus près à la formation de ces perturbations, nous calculons



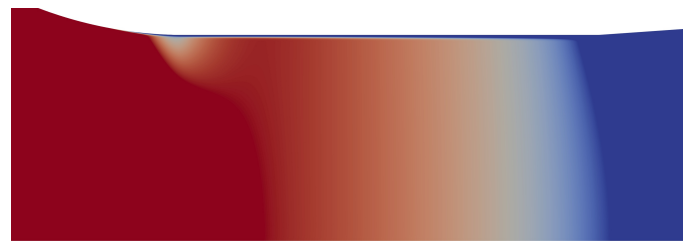
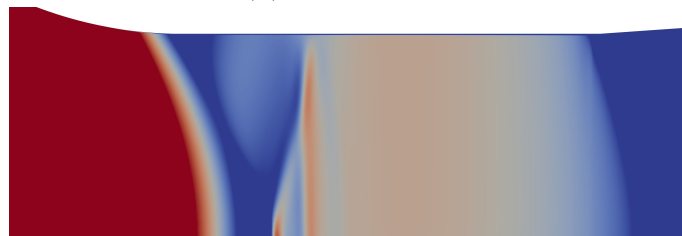
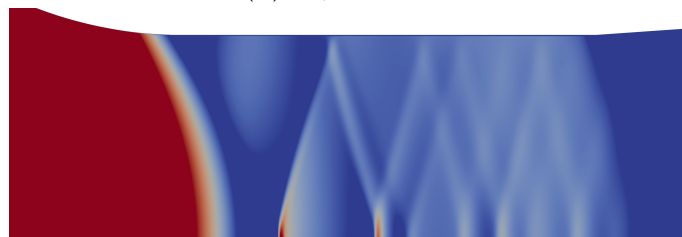
(A)  $Re_t = 0.2 \cdot 10^6$ (B)  $Re_t = 0.8 \cdot 10^6$ (C)  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ (D)  $Re_t = 2.0 \cdot 10^6$ (E)  $Re_t = 4.0 \cdot 10^6$ 

FIGURE 6.4 – Champ de masse volumique dans le col d’une tuyère à col cylindrique. Les échelles de couleurs correspondent aux masses volumiques de l’écoulement à  $M = 1$  à  $-5\%$  (saturation bleue) et  $+5\%$  (saturation rouge) à chaque nombres de Reynolds.

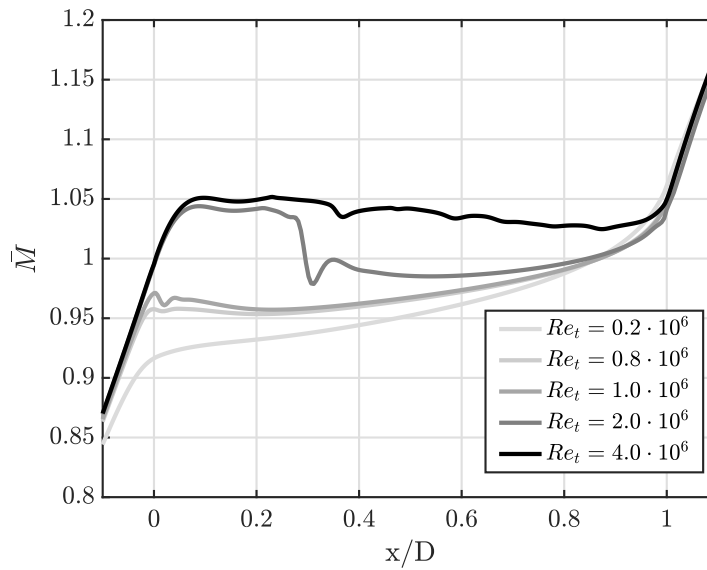


FIGURE 6.5 – Évolution du Mach moyen dans le col cylindrique de la tuyère. Le début du col cylindrique se trouve à  $x/D = 0$ , la fin du col cylindrique se trouve à  $x/D = 1$ .

l'évolution du nombre de Mach moyen le long de la partie cylindrique

$$\bar{M}(x) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} M(r, \theta, x) r dr d\theta}{\pi D(x)^2 / 4}, \quad (6.1)$$

avec  $x$  la coordonnée sur l'axe de symétrie de la tuyère,  $r$  la coordonnée radiale,  $D(x)$  le diamètre de la tuyère à la position  $x$  et  $\bar{M}(x)$  le nombre de Mach moyenné dans le plan  $(r, \theta)$  à la position  $x$ . Les résultats de ce calcul sont présentés sur la figure 6.5 et montrent que pour les nombres de Reynolds les plus petits, l'écoulement moyen est subsonique dans la majorité du col cylindrique, puis devient supersonique à  $x/D \approx 0.9$ . Lorsque le nombre de Reynolds est augmenté, le nombre de Mach augmente progressivement dans toute la partie cylindrique, en conservant un col à  $x/D \approx 0.9$ . La simulation à  $Re_t = 2.0 \cdot 10^6$  montre que l'écoulement devient supersonique dès l'entrée du col cylindrique, puis l'écoulement redevient subsonique à travers un choc de recompression à  $x/D \approx 0.3$ , ce qui correspond à ce que nous pouvons voir sur l'image 6.4d. L'écoulement finit par redevenir supersonique, toujours à  $x/D \approx 0.9$ . Finalement, à  $Re_t = 4.0 \cdot 10^6$ , l'écoulement reste supersonique tout le long du col cylindrique. Contrairement aux autres cas, le nombre de Mach baisse de manière régulière le long du col, passant initialement de  $\bar{M} \approx 1.05$  à  $\bar{M} \approx 1.03$  en fin de partie cylindrique. Cette dynamique s'explique par la variation de l'épaisseur de la couche limite avec la variation du nombre de Reynolds et l'action de la force centrifuge dans la fin de la partie convergente.

## 6.2.2 Modélisation de l'écoulement au col

## Col sonique à la fin de la partie cylindrique

Pour faciliter la discussion sur les phénomènes physiques en jeu, la figure 6.6 schématise l'écoulement dans le col cylindrique.

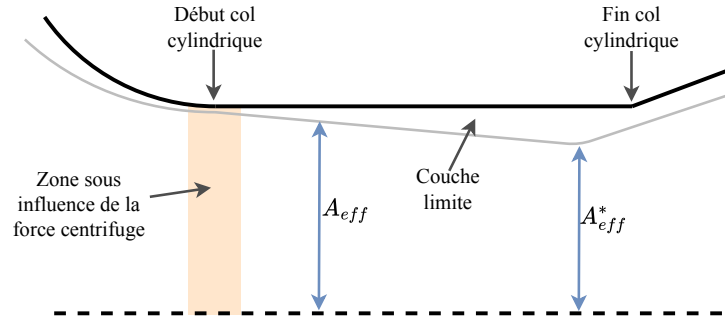


FIGURE 6.6 – Schéma illustrant l'écoulement dans la partie cylindrique de la tuyère pour des nombres de Reynolds allant de  $Re_t = 0.2 \cdot 10^6$  à  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ .

Initialement, à  $Re_t = 0.2 \cdot 10^6$ , l'épaississement de la couche limite dans le col cylindrique provoque la formation du col sonique à la fin de la partie cylindrique, à  $x/D = 0.9$ . Nous comprenons ici que la surface de passage effective du fluide est celle du diamètre de la tuyère, diminuée par l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

La relation entre la section critique, une section en amont du col et le nombre de Mach est donnée par la relation isentropique pour les fluides compressibles

$$\frac{A_{eff}}{A_{eff}^*} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{-\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \frac{\left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{M}, \quad (6.2)$$

avec  $A_{eff}$  la section effective de passage du fluide,  $A_{eff}^*$  la section effective formant le col sonique. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la couche limite s'affine, et le rapport  $A_{eff}/A_{eff}^*$  diminue pour s'approcher de l'unité. En conséquence, le nombre de Mach dans la section  $A_{eff}$  augmente et se rapproche de l'unité également. Cette dynamique est observée sur la figure 6.5 pour les nombres de Reynolds de  $Re_t = 0.2 \cdot 10^6$  à  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ , pour lesquelles le col sonique est toujours formé à la fin de la partie cylindrique.

L'augmentation du nombre de Mach au début de la partie cylindrique et à la fin du convergent provoque l'augmentation des effets de force centrifuge sur l'écoulement au début de la tuyère. Comme le montre la figure 6.7, le nombre de Mach dans le plan d'entrée du col n'est pas homogène, et la différence entre le nombre de Mach au centre de la tuyère et celui proche de la paroi augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds, jusqu'à atteindre une distribution qui n'évolue plus à partir de  $Re_t = 2.0 \cdot 10^6$ , ce qui correspond au nombre de Reynolds pour lequel les chocs commencent à apparaître sur les simulations. Comme nous allons le voir, c'est cette inhomogénéité de l'écoulement

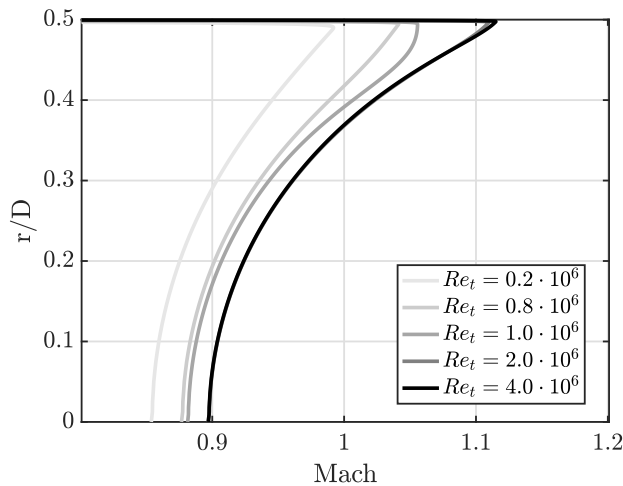


FIGURE 6.7 – Profil de Mach à l'entrée de la section cylindrique  $x/D = 0$ .

qui va être responsable du passage à un écoulement supersonique dès le début de la partie cylindrique.

#### *Col sonique au début de la partie cylindrique*

Nous venons de voir que la diminution de la taille de la couche limite avec l'augmentation du nombre de Reynolds était la raison de l'augmentation du nombre de Mach dans le col cylindrique en régime subsonique. Cependant, dans un cadre idéal où la couche limite serait infiniment mince, le rapport des sections effectives de passage du fluide atteint au mieux  $A_{eff}/A_{eff}^* = 1$ , produisant donc au mieux une augmentation du Mach jusqu'à  $M = 1$  d'après l'équation 6.2. Pour comprendre pourquoi l'écoulement devient supersonique à des nombres de Reynolds supérieurs, il faut prendre en compte la courbure de l'écoulement dans la région affectée par la force centrifuge, pour laquelle l'équation 6.2 n'est pas applicable, puisque déduite pour des écoulements isentropiques quasi-1D.

De nombreux travaux ont porté sur l'étude de l'influence de la force centrifuge au col sonique de tuyère, notamment pour les moteurs-fusées, le dimensionnement des souffleries supersoniques (Cuffel et al., 1969a; Hall, 1962; Kliegel et Levine, 1969a; Oswatitsch et Rothstein, 1949; Sauer, 1947) et pour les tuyères de débitmétrie (Stratford, 1964). Ces études montrent que la courbure de la paroi au col sonique réduit la surface effective de passage du fluide. Les résultats des calculs sont généralement présentés au travers du coefficient de décharge

$$C_d = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{th}}, \quad (6.3)$$

avec  $\dot{m}$  le débit réel de la tuyère, estimé sur un banc d'essai, et  $\dot{m}_{th}$  le débit théorique de la tuyère calculé avec les relations isentropiques 1D et la surface géométrique de la section au col de la tuyère pour un écoulement à  $M = 1$ . Dans le cas de gaz parfait, le coefficient de décharge est un coefficient qui permet de prendre en compte à la fois l'influence de la couche limite et celui de la déformation de la ligne sonique. Ces deux

effets sont généralement représentés comme des contributions indépendantes, de sorte que le coefficient de décharge puisse être exprimé comme la somme des deux phénomènes

$$C_d = 1 - C_d^v - C_d^i, \quad (6.4)$$

avec  $C_d^v$  la contribution de la viscosité du fluide au travers de la couche limite et  $C_d^i$  la contribution de la force centrifuge au travers de la déformation de la ligne sonique. Ces deux coefficients font généralement l'objet d'études séparées, le premier traitant des équations de couches limites sous gradient de pression favorable, le deuxième en faisant appel aux écoulements isentropiques.

On se propose d'adapter cette représentation à notre cas d'étude, dans un premier temps en négligeant la viscosité  $C_d^v = 0$ . Nous modélisons la contribution de la force centrifuge  $C_d^i$  en utilisant la solution analytique proposée par Hall (1962)

$$C_d^i \approx \frac{\gamma + 1}{R^2} \left( \frac{1}{96} - \frac{8\gamma + 21}{4608R} \right), \quad (6.5)$$

avec  $R$  le rayon du convergent de la tuyère au col adimensionné par le diamètre au col. Le coefficient de décharge étant une représentation du rapport entre le débit réel et le débit théorique 1D, nous avons

$$\dot{m} = C_d \dot{m}_{th} \quad (6.6)$$

avec un débit théorique estimé par les relations isentropiques

$$\dot{m}_{th} = \frac{A_c P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \quad (6.7)$$

avec  $A_c$  la section critique de la tuyère. Le débit dans le reste de la tuyère est exprimé par

$$\dot{m}(x) = \frac{A(x) P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M(x) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x) \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (6.8)$$

Par conservation du débit, il vient que

$$C_d \dot{m}_{th} = \dot{m}(x), \quad (6.9)$$

et en remplaçant  $\dot{m}_{th}$  et  $\dot{m}(x)$  par leurs expressions respectives dans l'équation (6.9) et en simplifiant, nous avons finalement

$$C_d \times A_c \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = A(x) M(x) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x) \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (6.10)$$

L'équation (6.10) permet de calculer le nombre de Mach à n'importe quelle position  $x$

dans la tuyère, en prenant en compte le coefficient de décharge, et donc les effets de force centrifuge.

Il s'agit maintenant d'appliquer cette formule à une tuyère à col cylindrique. Pour cela, nous considérons que la tuyère est amorcée au début de la partie cylindrique de la tuyère, et que l'effet de force centrifuge est maximal. Nous remarquons que la section à la fin de la partie convergente de la tuyère est constante, nous avons donc  $A_c = A(x)$  dans la partie cylindrique de la tuyère pour  $x = [0, 1]$ . Pour le col cylindrique, l'équation (6.10) devient

$$C_d \times \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = M(x) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x) \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \quad (6.11)$$

et nous permet d'obtenir le nombre de Mach dans la partie cylindrique de la tuyère. Appliqué à notre tuyère pour laquelle  $R/D = 1$ , nous trouvons  $C_d^i = 0.0082$  et  $C_d = 0.9918$ . Le nombre de Mach est obtenu par résolution numérique de l'équation (6.11) et nous trouvons  $M = 1.103$ . Nous obtenons donc bien un écoulement supersonique dans le col cylindrique de la tuyère, sous l'action de l'effet de la force centrifuge, tel que nous l'avons observé pour des nombres de Reynolds  $Re_t > 2 \cdot 10^6$  dans nos simulations. La force centrifuge, qui déforme la ligne sonique à l'entrée de la partie cylindrique, conduit à limiter le débit qui peut traverser la section. Par conservation du débit, lorsque l'écoulement est redressé dans la partie cylindrique, celui-ci est porté à une vitesse supersonique. Nous notons que le nombre de Mach que nous trouvons par le calcul théorique ( $M = 1.103$ ) est différent de celui observé sur les simulations numériques à la figure 6.5 ( $M = 1.05$ ). En effet, selon les sources que nous utilisons pour estimer la valeur du coefficient de décharge de l'équation (6.11), nous obtenons les nombres de Mach légèrement différents, tel que résumé dans la table 6.1.

Source	Coefficient de décharge		Mach estimé dans le col
	Type de tuyère	$C_d^i$	
Hall (1962)	Toroïdale	$1 - 0.9918$	1.103
Ishibashi (2015)	Toroïdale	$1 - 0.9958$	1.073
ISO9300 (2005)	Cylindrique	$1 - 0.9976$	1.055

TABLE 6.1 – Estimation du nombre de Mach dans le col cylindrique de la tuyère à partir de l'équation (6.11) en fonction du coefficient de décharge.

Nous ne cherchons pas à estimer la valeur exacte, mais plutôt à montrer qu'il est possible d'obtenir un écoulement supersonique dans la partie cylindrique dans le cas où le col se forme au début de celle-ci sous l'action de la force centrifuge. Les résultats de la table 6.1 semblent indiquer que calculer le coefficient de décharge dû à la force centrifuge à l'aide de tuyère toroïdale est une bonne approximation, mais que le nombre de Mach dans le col est légèrement surestimé par rapport au résultat de notre simulation numérique. Il est possible que la force centrifuge dans les tuyères à col toroïdal soit légèrement plus importante que dans une tuyère à col cylindrique. Une personne intéressée par l'estimation

du nombre de Mach dans une tuyère à col cylindrique devrait préférer l'usage des valeurs de coefficient de décharge pour les tuyères à col cylindrique<sup>1</sup>.

En ignorant la viscosité, l'écoulement dans le col de la tuyère devrait être toujours supersonique dans le col de la tuyère. Or, les simulations numériques montrent que ce n'est qu'à partir d'un certain nombre de Reynolds que l'écoulement devient supersonique. Il convient donc maintenant d'ajouter la viscosité pour comprendre le changement de position du col sonique de la fin vers le début de la partie cylindrique. Pour ce faire, nous schématisons sur la figure 6.8 le contour géométrique de la tuyère et un contour idéalisé qui représente les effets du coefficient de décharge  $C_d^i + C_d^v$  sur la section effective de passage de l'écoulement.

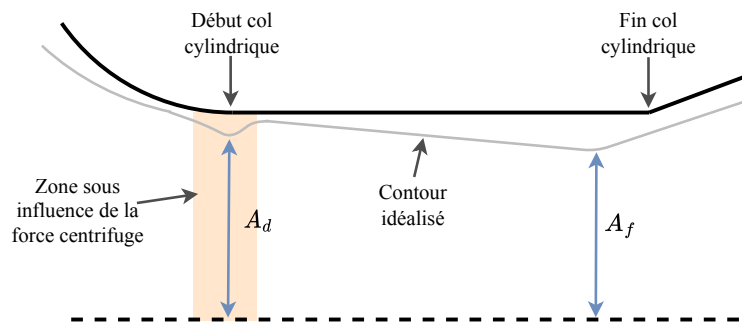


FIGURE 6.8 – Schéma illustrant le contour idéalisé de la tuyère après la prise en compte de la viscosité et de la force centrifuge.

Dans la section  $A_d$ , au début du col cylindrique à  $x = 0$ , le coefficient de décharge est composé de l'action de la force centrifuge et de la couche limite  $C_d|_{A_d} = 1 - C_d^i|_{A_d} - C_d^v|_{A_d}$ . À la fin du col cylindrique, le coefficient de décharge n'est constitué que de la contribution de la couche limite  $C_d|_{A_f} = 1 - C_d^v|_{A_f}$ . Pour déterminer quelle section de  $A_d$  ou  $A_f$  est celle où le col sonique se forme, nous calculons le coefficient de décharge de chacune des sections en supposant qu'elles soient soniques, indépendamment l'une de l'autre. Ce sera alors la section dont le coefficient de décharge qui est le plus petit qui sera la section critique.

Pour calculer le coefficient de décharge dans la section  $A_d$ , nous utilisons pour les effets de force centrifuge  $C_d^i = 1 - 0.99615$ , nous permettant de retrouver les valeurs de coefficient de décharge issues des simulations numériques, tout en étant cohérent avec les valeurs de la littérature présentées dans la table 6.1. La contribution visqueuse  $C_d^v$  est modélisée avec la formulation de couche limite compressible avec gradient de pression favorable de Geropp (1971). Pour la section  $A_f$ , nous utilisons une forme simplifiée des équations de couches limites pour estimer l'épaisseur de déplacement de celle-ci

$$\delta_1|_{A_f} = \frac{C1}{\sqrt{Re_t}}, \quad (6.12)$$

1. Il n'existe malheureusement pas de modèle analytique permettant d'obtenir ce coefficient de décharge pour les tuyères à col cylindrique. Cette valeur peut être déterminée par simulation numérique ou par l'expérience, en mesurant le coefficient de décharge des tuyères.

avec le coefficient  $C1 = 1.90$  (pour  $\delta_1$  adimensionnée par rapport au diamètre du col) estimé à l'aide des simulations numériques. L'épaisseur de déplacement est ensuite utilisée pour calculer le coefficient de décharge à la fin de la partie cylindrique

$$C_{d|Af} = \frac{(D/2 - \delta_1|_{Af})^2}{(D/2)^2}. \quad (6.13)$$

Les résultats de ces deux modèles sont présentés sur la figure 6.9. Le coefficient de décharge calculé en fin de partie cylindrique correspond bien à celui obtenu sur les simulations numériques SU2. Pour les plus petits nombres de Reynolds  $Re_t$ , le coefficient de décharge en fin de partie cylindrique  $C_{d|Af}$  est plus petit que celui en début de partie cylindrique et c'est donc la fin du col cylindrique qui sera la section limitante du débit et formera le col sonique de la tuyère. Lorsque  $Re_t > 2 \cdot 10^6$ , c'est le coefficient de décharge en début de partie cylindrique qui est le plus petit et la section  $Ad$  sera alors la section pour laquelle le col sonique se forme. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, pour un col formé en début de tuyère, l'écoulement sera supersonique dans le reste de la partie cylindrique. Ainsi, la variation de l'épaisseur de couche limite conditionne la position du col dans la tuyère.

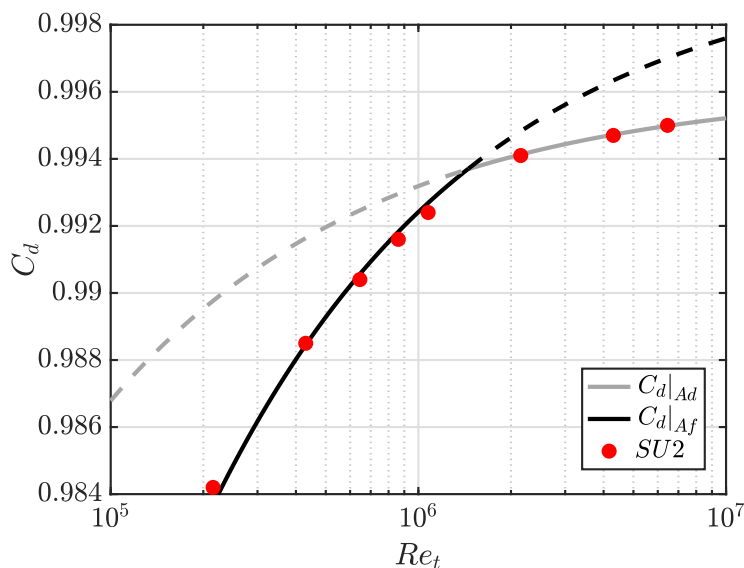


FIGURE 6.9 – Coefficient de décharge théorique pour une tuyère à col cylindrique calculé au début et à la fin de la partie cylindrique pour une couche limite laminaire.

Ce modèle correspond bien aux observations que nous faisons sur les simulations numériques, et en particulier sur le nombre de Mach moyenné dans le col de la tuyère à la figure 6.5. Le col sonique est bien formé en fin de partie cylindrique pour  $Re_t < 2 \cdot 10^6$  et est formé en début de partie cylindrique pour  $Re_t > 2 \cdot 10^6$ . Entre  $Re_t \approx 1 \cdot 10^6$  et  $Re_t \approx 2 \cdot 10^6$ , là où les deux courbes de coefficient de décharge se croisent, il existe un cas particulier où un double col se forme : l'écoulement devient supersonique en début de



partie cylindrique, un choc droit recomprime l'écoulement à  $x/D \approx 0.3$  puis un deuxième col se forme en fin de partie cylindrique.

Finalement, il est important de rappeler que la formulation proposée ici concerne les couches limites laminares. Une analyse similaire pourrait être réalisée pour des couches limites turbulentes, auquel cas une dynamique similaire devrait être observée, mais à des nombres de Reynolds et coefficients de décharge différents. En effet, une couche limite turbulente est plus épaisse qu'une couche limite laminaire à nombre de Reynolds équivalent. Ainsi, le changement de position du col sonique devrait s'effectuer à plus hauts nombres de Reynolds.

*Pourquoi l'apparition de chocs ?*

Nous avons jusqu'alors expliqué comment un écoulement supersonique pouvait se former dans le col cylindrique de la tuyère, et dans quelles conditions ce phénomène pouvait apparaître ( $C_{d|A_d} < C_{d|A_f}$ ). Nous proposons maintenant d'expliquer pourquoi lorsque l'écoulement devient supersonique dans le col, des chocs se forment. Pour ce faire, nous considérons un écoulement compressible non visqueux dans un tuyau de section circulaire. La direction principale de l'écoulement est suivant l'axe  $x$ , la direction radiale est dénotée  $r$  et  $\theta$  désigne la direction azimutale. L'écoulement est supposé parallèle et uniforme suivant la direction  $x$  dans toute la section et sur toute la longueur du tuyau.

Nous modélisons cet écoulement avec les équations d'Euler

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.14a)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p = 0, \quad (6.14b)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \quad (6.14c)$$

avec l'équation (6.14a) de continuité, les équations (6.14b) de la conservation de la quantité de mouvement et l'équation (4.1c) l'équation de la conservation de l'énergie avec  $s$  l'entropie. En considérant un écoulement 1D,

$$\mathbf{v} = [u, v = 0, w = 0]^t, \quad (6.15)$$

avec  $u$  la direction principale de l'écoulement suivant la direction  $x$ . Nous imposons également une condition aux limites de Neumann à la paroi

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\text{wall}} = 0. \quad (6.16)$$

En introduisant la décomposition de l'écoulement en un champ moyen et un champ de petites perturbations

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho',$$

les équations (6.14) sont linéarisées et peuvent ainsi s'exprimer par

$$D_0^3 p' - D_0 \nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla p') + 2\bar{c}^2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla p' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (6.17)$$

avec  $D_0$  la dérivée particulière

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.18)$$

L'équation (6.17) est connu pour être la forme générale de l'équation de propagation d'une onde dans un écoulement uniforme de tuyau. L'onde de pression qui se propage dans l'écoulement peut être représentée sous la forme de modes normaux

$$p'(x, r, \theta, t) = \hat{p}(r) e^{i(\omega t - kx - m\theta)} \quad (6.19)$$

avec  $\omega$  la pulsation,  $k$  le nombre d'onde axiale et  $m$  le nombre d'onde azimutal. En introduisant l'équation (6.19) dans l'équation (6.17), nous obtenons

$$\hat{p}'' + \frac{1}{r} \hat{p}' + \left( (\omega - Mk)^2 - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \hat{p} = 0, \quad (6.20)$$

où nous avons introduit le nombre de Mach  $M = u/c$  et  $\hat{p}'$  désigne la dérivée de  $\hat{p}$  par rapport à  $r$ . L'équation (6.20) décrit la manière dont une onde de pression évolue dans notre tuyau pour un écoulement compressible. L'objectif est maintenant de résoudre cette équation avec les conditions de notre problème d'écoulement de tuyère. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle variable

$$\alpha_m^2 = (\omega - Mk)^2 - k^2, \quad (6.21)$$

nous permettant de réduire l'équation (6.20) à une équation de Bessel

$$\hat{p}'' + \frac{1}{r} \hat{p}' + \left( \alpha_m^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \hat{p} = 0. \quad (6.22)$$

La résolution de l'équation (6.21) pour  $k$  permet d'obtenir la relation de dispersion de l'onde

$$k = \frac{-\omega M \pm \sqrt{\omega^2 - \xi^2 \alpha_m^2}}{\xi^2}, \quad (6.23)$$

avec  $\xi = \sqrt{1 - M^2}$ . La relation de dispersion permet de mettre en relation le nombre d'onde axial en fonction de la pulsation.

La solution à l'équation (6.22) est une fonction de Bessel de première espèce

$$\hat{p} = J_m(\alpha_m r), \quad (6.24)$$

dont la valeur de  $\alpha_m$  est obtenue en utilisant la condition limite à la paroi de notre tuyau (6.16), en ayant normalisée par le rayon du tuyau ( $r = 1$ )

$$J'_m(\alpha_m) = 0. \quad (6.25)$$

Le détail du développement réalisé jusqu'ici peut être retrouvé dans le cours d'acoustique de Rienstra (2015).

Nous avons désormais une relation nous permettant d'obtenir les nombres d'ondes axiaux des perturbations (équation (6.23)) et les fonctions associées qui représentent le champ de pression de ces perturbations (équation (6.24)). Pour appliquer ces relations à notre problème, nous constatons que les chocs apparaissent pour des simulations d'écoulements stationnaires, nous choisissons de ce fait une pulsation nulle pour les perturbations  $\omega = 0$ . Nos simulations sont axisymétriques, nous choisissons en conséquence un nombre d'onde azimutal nul également  $m = 0$ . En ajoutant ces considérations, l'équation (6.19) est simplifiée et les perturbations sont désormais exprimées par

$$p'(x, r, \theta, t) = \hat{p}(r)e^{-ikx}, \quad (6.26)$$

dont le nombre d'onde axial est maintenant trouvé par

$$k_n = \frac{\alpha_{0,n}}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (6.27)$$

et dont les fonctions de pression  $\hat{p}$  sont données par

$$\hat{p}_n = J_0(\alpha_{0,n} r), \quad (6.28)$$

où les coefficients  $\alpha_{0,n}$  sont obtenus en cherchant les racines de la fonction de Bessel de première espèce  $J'_0(\alpha_{0,n}) = 0$  avec  $n$  correspondant à la  $n^e$  racine de  $J'_0(\alpha_0)$ . Nous remarquons également que ce modèle est tout à fait analogue aux travaux de Pack (1950) concernant les chocs dans les jets supersoniques non adaptés, lesquels sont décrits par un modèle acoustique similaire. Le nombre de Mach à l'équation (6.27) est une donnée du problème que nous choisissons ici sur la base des résultats obtenus par les simulations numériques. Étant donné les champs de vitesse moyennée présentés sur la figure 6.5, nous choisissons d'utiliser  $M = 1.04$ , ce qui correspond au nombre de Mach observé au milieu de la partie cylindrique de la tuyère à  $Re = 4.0 \cdot 10^6$ , simulations pour laquelle les chocs sont pleinement développés dans le col de la tuyère.

La figure 6.10 présente le premier mode que nous calculons à partir des équations (6.26), (6.27) et (6.28). Le modèle d'acoustique de tuyau montre que lorsque l'écoulement est supersonique, il supporte des perturbations stationnaires composées de fluctuations

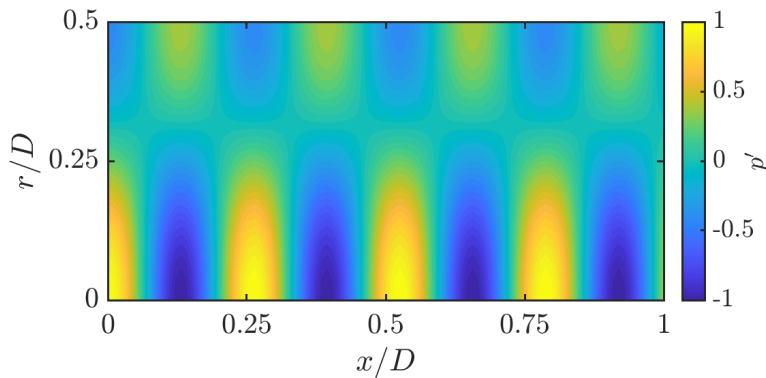


FIGURE 6.10 – Partie réelle du premier mode acoustique de tuyau à  $M = 1.04$ .

de pression similaires à l'occurrence de chocs dans la partie cylindrique de la tuyère.

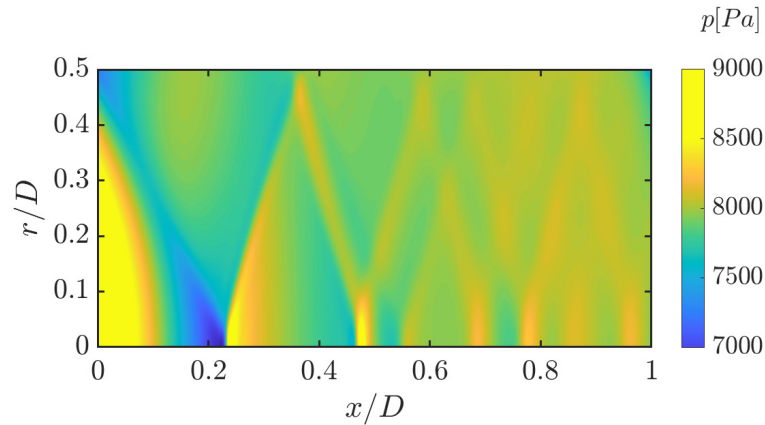
Pour représenter plus fidèlement la dynamique dans la tuyère, il convient d'ajouter plusieurs modes de tuyau

$$p' = \sum_{n=1}^N A_n \hat{p}_n e^{-ik_n x}, \quad (6.29)$$

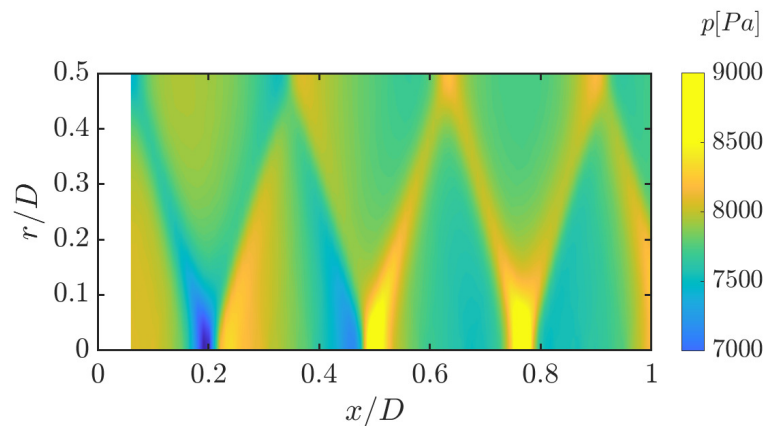
avec  $N$  le nombre de modes acoustiques retenus. Les coefficients  $A_n$  sont les amplitudes associées à chaque mode acoustique, que nous obtenons en réalisant une projection des modes acoustiques sur l'écoulement obtenu par simulation numérique avec SU2, en utilisant les propriétés d'orthogonalités des fonctions de Bessel

$$A_n = \frac{\int_0^r \hat{p}_n p_{\text{SU2}} r dr}{\int_0^r \hat{p}_n \hat{p}_n r dr}, \quad (6.30)$$

avec  $p_{\text{SU2}}$  un profil de pression radial sélectionné dans le col cylindrique de la tuyère. Nous choisissons de réaliser la projection à  $x = 0.07$  sur la simulation numérique, ce qui correspond à la position pour laquelle le nombre de Mach moyenné radialement atteint son maximal. La figure 6.11 montre la comparaison entre le champ de pression issue de la simulation numérique avec SU2 et le champ de pression obtenu à l'aide du modèle pour 10 modes. Avec l'ajout de modes supplémentaire, les chocs se dessinent plus finement sur la figure 6.11b. Il y a une différence notable entre le modèle et la simulation à partir de  $x/D \approx 0.5$ , c'est la présence d'un second train de choc qui se dessine sur la figure 6.11a, que l'on ne retrouve pas avec le modèle. En regardant de près la figure 6.11a, il semblerait que ce train de choc trouve son origine à la paroi, autour de  $x/D \approx 0.37$ , juste après la première interaction de l'onde de choc avec la couche limite, puis se focalise au centre de la tuyère à  $x/D \approx 0.56$ , juste derrière la focalisation de l'onde de choc principale à  $x/D \approx 0.48$ . En regardant le nombre de Mach dans la tuyère sur la figure 6.5, on s'aperçoit qu'il chute légèrement à  $x/D \approx 0.37$ . Il est donc probable que l'interaction de l'onde de choc avec la couche limite ait épaissi cette dernière, et que cette interaction soit à l'origine du second



(A) Simulation SU2



(B) Modèle acoustique (10 modes)

FIGURE 6.11 – Champ de pression dans le col de la tuyère pour  $Re_t = 4 \cdot 10^6$ . Le modèle est présenté avec un offset sur l'axe  $x$ , qui correspond à la position de la projection des modes du modèle acoustique sur la simulation numérique.

train de choc. Une autre différence entre la simulation et le modèle est l'amplitude de la perturbation, qui semble décroître dans la simulation SU2, tandis qu'elle est constante dans le modèle. Il est évident que ce modèle linéaire pour un écoulement parallèle non visqueux ne permet pas de prendre compte un certain nombre de paramètres, tel que la variation d'épaisseur de couche limite et la variation du nombre de Mach (tel que nous l'avons vu sur la figure 6.5) dans le col cylindrique. Malgré les nombreuses simplifications, ce modèle simple permet de comprendre comment ces perturbations peuvent apparaître dans la partie cylindrique de la tuyère et semble même être capable de prédire leur longueur d'onde.

Ce modèle permet aussi de comprendre l'origine des perturbations. Lorsque nous réalisons la somme des modes à l'aide de l'équation (6.29), nous choisissons de prendre  $x = 0$  pour l'ensemble des modes. Cela signifie que les modes sont tous propagés à partir de la même origine, au début du col cylindrique. Cela nous indique que c'est le passage de la section convergente, sous influence de la force centrifuge, à la section cylindrique, sans

influence de force centrifuge, qui provoque le forçage stationnaire initial pour créer ces perturbations. Ce modèle est donc tout à fait analogue à l'apparition de choc dans les jets supersoniques, dont la formation se fait par l'adaptation de la pression d'éjection du jet en fin de tuyère à la pression extérieure à la tuyère (Pack, 1950). Ici, c'est l'adaptation du profil d'écoulement déformé par la force centrifuge à l'écoulement dans le col cylindrique, sans force centrifuge, qui génère la perturbation nécessaire à l'apparition des chocs.

### 6.2.3 Vérification expérimentale

Pour vérifier l'existence de ces chocs, nous utilisons le dispositif expérimental présenté au chapitre 2, sans plan de symétrie. Le plan de la section d'essai utilisée pour l'expérience est présenté sur la figure 6.12. Le col est ici composé de deux plans parallèles d'une

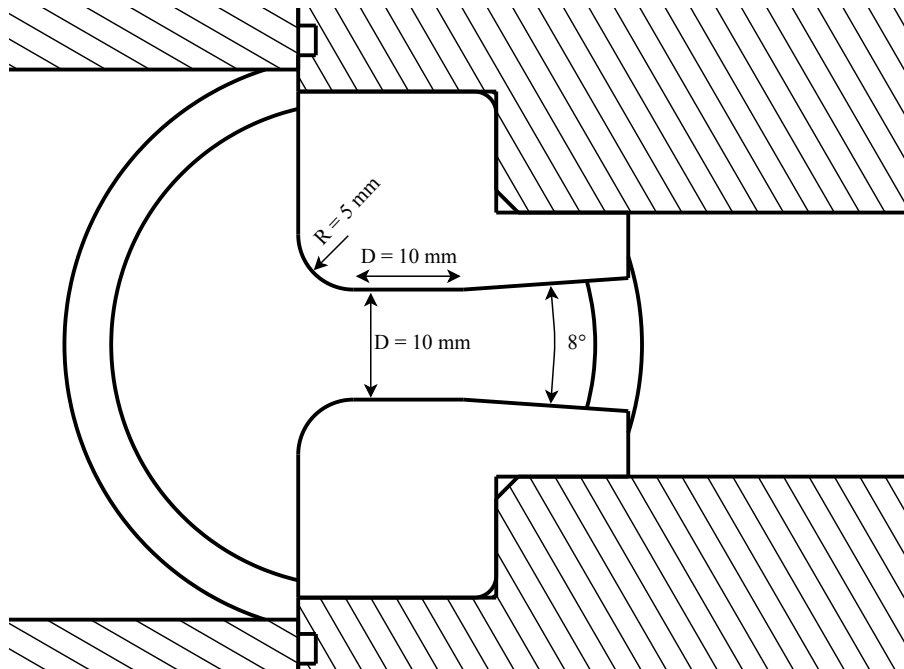


FIGURE 6.12 – Plan de la tuyère R05C5-Cyl.

longueur  $D$  égal à la hauteur entre les deux plans. Nous simulons ainsi le col cylindrique de la tuyère dans une version plane. Les tuyères que nous utilisons sont cette fois usinées en aluminium. Nous choisissons volontairement d'utiliser un ratio  $R/D$  très petit, pour faciliter l'apparition des chocs en augmentant l'effet de la force centrifuge à la fin du convergent de la tuyère. La figure 6.13 présente une image strioscopique de l'écoulement pour cette tuyère. Elle montre dans un premier temps des caractéristiques attendues pour une tuyère, tel que l'accélération à l'approche du col et le faisceau de détente à la fin de la partie cylindrique, au travers duquel l'écoulement atteint des vitesses supersoniques dans la partie divergente de la tuyère. Le réglage sensible de la strioscopie nous permet également de mettre en avant trois autres phénomènes : la présence d'un décollement de couche limite, qui est un décollement qui se forme dans l'angle formé par la tuyère et la

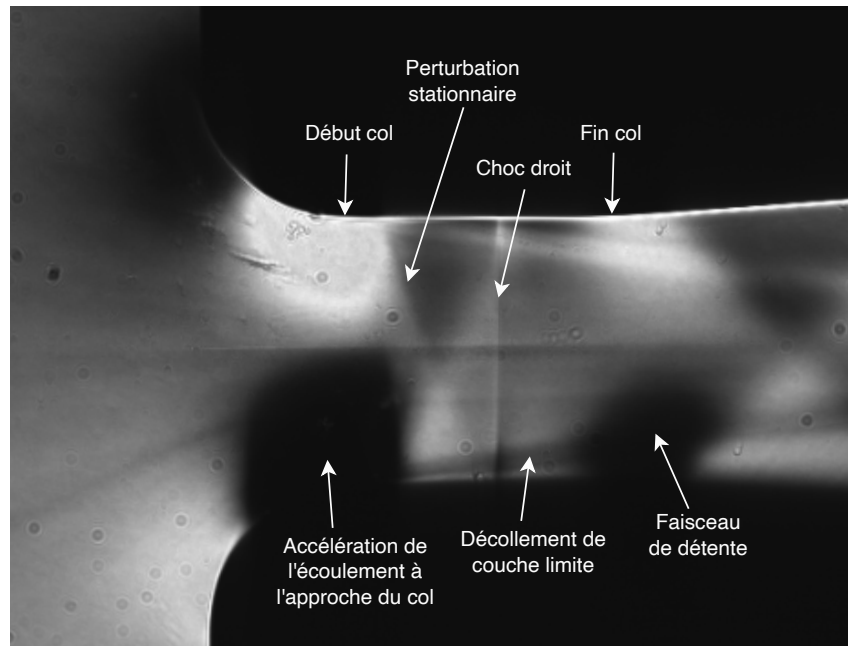


FIGURE 6.13 – Strioscopie de la tuyère R05C5-Cyl à  $Re_t = 1 \cdot 10^6$ .

paroi latérale (ici le hublot), la perturbation stationnaire recherchée et un choc droit. Cette configuration avec choc droit a été par ailleurs trouvée avec les simulations numériques à  $Re_t = 2.0 \cdot 10^6$ , visible sur la figure 6.4d.

Dans cette configuration expérimentale, l'écoulement conserve ces caractéristiques pour l'ensemble des nombres de Reynolds testés, de  $Re_t = 0.5 \cdot 10^6$  à  $Re_t = 6.0 \cdot 10^6$ . Il n'a pas été possible d'obtenir un écoulement au col sans choc droit. En effet, pour obtenir des perturbations stationnaires tel que simulé avec SU2, la section de passage effective de l'écoulement, prenant en compte l'épaisseur de déplacement de la couche limite, ne doit varier que de quelques microns, afin de conserver un écoulement supersonique au col. Ici, nous supposons que le décollement de couche limite dans les angles provoque une réduction de la section de passage effective, empêchant d'atteindre un écoulement pleinement supersonique dans le col de section géométrique constante. La configuration de tuyère plane n'est donc pas idéale pour obtenir les perturbations stationnaires recherchées dans le col de la tuyère, mais elle permet tout de même de valider leur existence expérimentalement.

#### 6.2.4 Résumé

Dans l'objectif d'identifier la position du col sonique dans les tuyères à col cylindrique, nous avons réalisé des simulations numériques qui mettent en avant deux dynamiques principales : à bas nombre de Reynolds, le col de la tuyère est formé à la fin de la partie cylindrique de la tuyère, puis à partir d'un certain nombre de Reynolds critique, celui-ci se déplace au début du col cylindrique. Le déplacement du col cylindrique de la fin au

début de la tuyère est le résultat de l'action combiné de l'amincissement de la couche limite lorsque le nombre de Reynolds augmente et de l'action de la force centrifuge qui existe à la fin de la partie convergente de la tuyère.

Lorsque le col sonique est formé au début de la partie cylindrique, des chocs y apparaissent. Ces chocs sont issus du forçage stationnaire provoqué par le passage d'un écoulement soumis à la force centrifuge en fin de partie convergente à un écoulement sans force centrifuge dans la partie cylindrique, de manière analogue aux chocs présents pour des jets supersoniques non adaptés. Puisque ces chocs ne se forment que lorsque le col est en amont de la partie cylindrique, ceux-ci n'ont pas d'influence sur le coefficient de décharge de la tuyère, le débit étant limité par la section sonique de la tuyère.

Dans le cadre des couches limites laminares, le changement de position du col sonique n'entraîne pas de variation brutale du coefficient de décharge de la tuyère, mais change la manière dont le coefficient de décharge croît avec le nombre de Reynolds. En effet, le coefficient de décharge pour une tuyère dont le col est en fin de partie cylindrique doit être modélisé avec une couche limite sans gradient de pression, tandis que le coefficient de décharge pour des conditions où le col se forme en début de partie cylindrique doit être modélisé en prenant en compte une couche limite sous gradient de pression favorable et des effets de force centrifuge sur le reste de la section de l'écoulement. Cette logique devrait également être suivie pour des couches limites turbulentes. Ce point est essentiel, car le changement de position du col sonique n'est aujourd'hui pas connu de la littérature ni pris en compte par les normes industrielles. Des recherches analogues à celle-ci devraient être conduites pour confirmer le changement de position du col concernant les couches limites turbulentes, afin de correctement caractériser la dynamique du coefficient de décharge.

### 6.3 ÉTUDE DE LA TRANSITION

Maintenant que la position du col est déterminée, nous nous intéressons à la transition de la couche limite dans la tuyère. Pour que la transition ait un effet sur le coefficient de décharge, celle-ci doit se dérouler en amont du col sonique de la tuyère. Comme nous avons vu précédemment que ce col pouvait prendre deux positions, nous proposons de caractériser la transition de la couche limite dans l'ensemble de la tuyère.

#### 6.3.1 Étude expérimentale

Pour étudier la transition, nous reprenons le dispositif expérimental présenté au chapitre 2. La tuyère axisymétrique à col cylindrique est réduite à l'étude d'une tuyère plane, avec un col de section constante permettant de simuler le col cylindrique. La configuration expérimentale est présentée sur la figure 6.14.

Les caractéristiques géométriques et de polissage sont récapitulées dans la table 6.2. La tuyère est imprimée en 3D en PLA, puis polie, de manière similaire aux tuyères présentées dans le chapitre 2. La méthode de détection de la transition est la même que celle utilisée



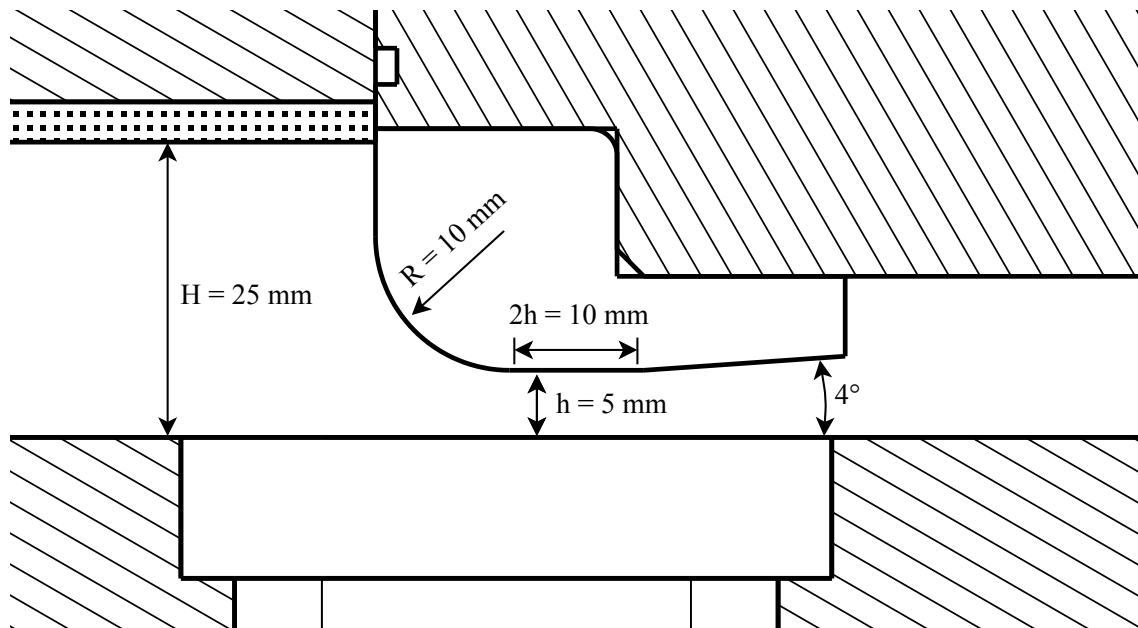


FIGURE 6.14 – Plan de la section d'essai avec la tuyère R1C5-Cyl.

Nom	Rayon	Hauteur col	Contraction	Rugosité	
	R/D	h (mm)	H/h	Papier	Ra/D · 10 <sup>6</sup>
R1C5S-Cyl	1	5	5	P4000	18

TABLE 6.2 – Caractéristiques de la tuyère à col plan.

au chapitre 3, moyennant une caméra infrarouge permettant de détecter les variations de température de la surface de la tuyère.

La figure 6.15 présente la cartographie de la transition dans le col géométrique de la tuyère. Nous remarquons que la transition se déroule en premier lieu en fin de partie cylindrique ( $x/D = 1$ ), puis remonte progressivement le col lorsque le nombre de Reynolds augmente. La plage de nombre de Reynolds sur laquelle on retrouve une couche limite transitionnelle augmente au fur et à mesure que l'on remonte dans le col, passant de  $\Delta Re_t = 0.4 \cdot 10^6$  à  $x/D = 0.9$  à  $\Delta Re_t = 0.9 \cdot 10^6$  à  $x/D = 0$ .

Il est également intéressant de remarquer que le nombre de Reynolds de transition à  $x/D = 0$  pour cette tuyère correspond à ce que nous avons observé pour la tuyère R1C5S au chapitre 3. En effet, les conditions au col sont similaires pour les deux tuyères, avec un fort gradient de pression favorable et une action de la force centrifuge, nous pouvons nous attendre à trouver les mêmes mécanismes de transition et donc les mêmes nombres de Reynolds de transition à conditions expérimentales équivalentes (c'est-à-dire à géométrie et taux de turbulence équivalent).

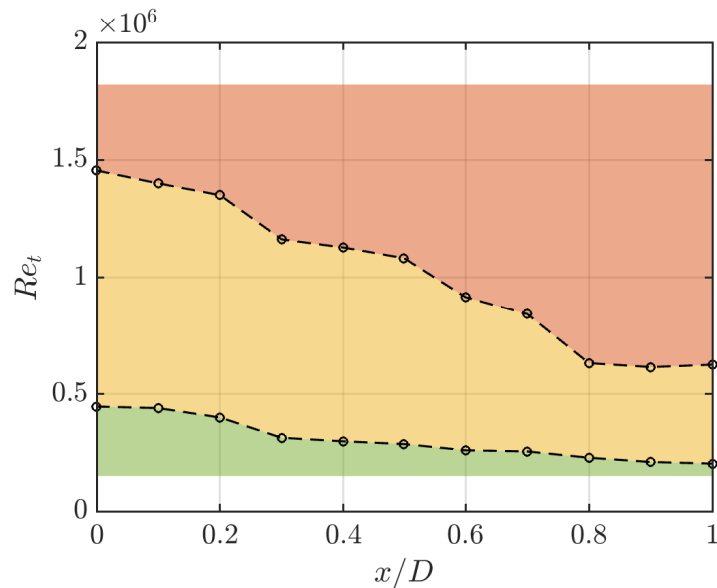


FIGURE 6.15 – Carte de la transition dans le col de la tuyère R1C5S-Cyl. Les zones verte, jaune et orange correspondent respectivement aux zones pour lesquelles la couche limite est laminaire, transitionnelle et turbulente.

Nom	Rayon R/D	Hauteur col h (mm)	Nombre de Reynolds de transition	
			Début	Fin
R1C5S-Cyl	1	5	$0.45 \cdot 10^6$	$1.46 \cdot 10^6$
R1C5S	1	5	$0.46 \cdot 10^6$	$1.42 \cdot 10^6$

TABLE 6.3 – Transition dans les tuyères R1C5S à col en arc-de-cercle et R1C5S-Cyl à col plan.

### 6.3.2 Transition en fin de convergent

Dans le cas où le col est formé en début de partie cylindrique, la position de transition qui nous intéresse se situe juste en amont du col de la tuyère, en fin de partie convergente. Ce cas correspond à ce que nous avons étudié expérimentalement et théoriquement dans les chapitres précédents de ce manuscrit. Nous avons vu que la couche limite était stable d'un point de vue modal, mais qu'elle était sujette à de la croissance transitoire. L'action de la force centrifuge montre que contrairement au cas classique de plaque plane, les perturbations optimales générant la croissance transitoire sont instationnaires et se développent sur de très courtes distances.

### 6.3.3 Transition dans la partie cylindrique

On s'intéresse maintenant à la transition dans la partie cylindrique de la tuyère. Dans l'objectif d'étudier l'influence de la transition sur le coefficient de décharge, nous considérons ici uniquement la configuration pour laquelle le col est formé à la fin de la partie

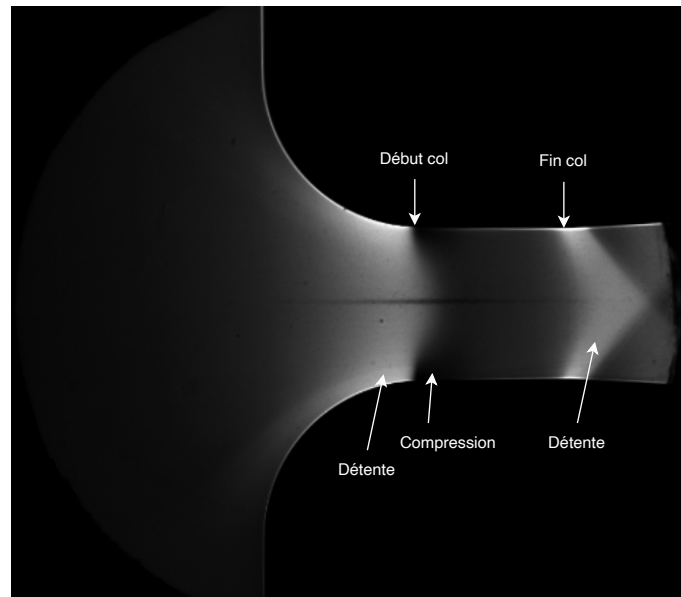


FIGURE 6.16 – Strioscopie mettant en avant les gradients de pression horizontaux. Tuyère R1C5S-Cyl à  $Re_t = 0.7 \cdot 10^6$ .

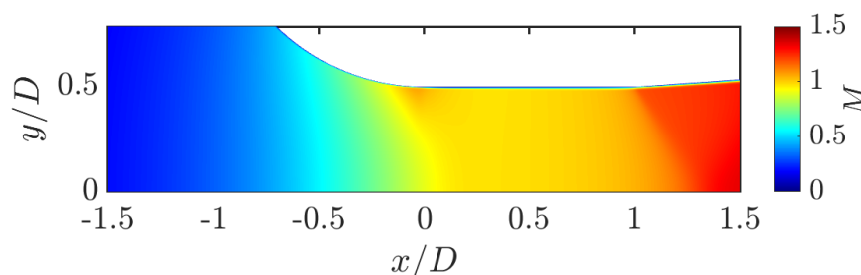


FIGURE 6.17 – Champ de vitesse obtenu par simulation numérique SU2 d'une tuyère plane R1C5-Cyl à  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$ .

cylindrique, pour laquelle il n'y a pas de chocs. Dans cette configuration, l'écoulement à l'entrée de la partie cylindrique est soumis à une force centrifuge causée par la courbure de la paroi à la fin du convergent. Lorsque le fluide atteint la partie cylindrique, qui n'est plus soumise à la force centrifuge, l'écoulement se redresse pour donner un profil de vitesse constant dans la direction perpendiculaire au sens de l'écoulement. Le passage de l'écoulement soumis à la force centrifuge à un écoulement qui n'est plus soumis à la force centrifuge provoque une recompression proche de la paroi. Cette recompression est visible sur les images de strioscopie, et est illustrée sur la figure 6.16. Elle induit un gradient de pression adverse au niveau de la paroi, qui peut déstabiliser la couche limite. Lorsque la zone de recompression est passée, la couche limite est soumise à un écoulement qui accélère légèrement jusqu'à  $M = 1$  à la fin de la partie cylindrique. Dans cette partie d'écoulement quasi constant, nous attendons alors un profil de couche limite proche de celui d'une couche limite de plaque plane sans gradient de pression.

Contrairement au cas des tuyères à col toroïdal, il n'existe pas de formule analytique

permettant d'obtenir les profils de couches limites dans le col cylindrique. Nous réalisons alors une simulation numérique avec SU2, pour une tuyère plane R1C5S-Cyl, à  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$  en réutilisant les choix numériques utilisés pour les simulations de tuyères axisymétriques. Le résultat de la simulation numérique est présenté sur la figure 6.17. Les profils de couches limites obtenus au début et au milieu de la partie cylindrique sont présentés sur la figure 6.18.

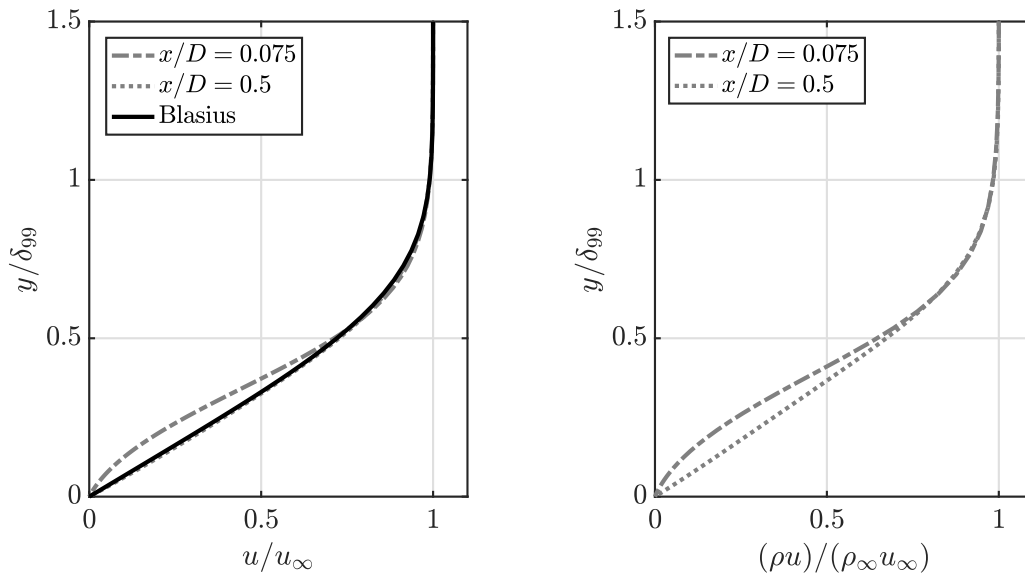
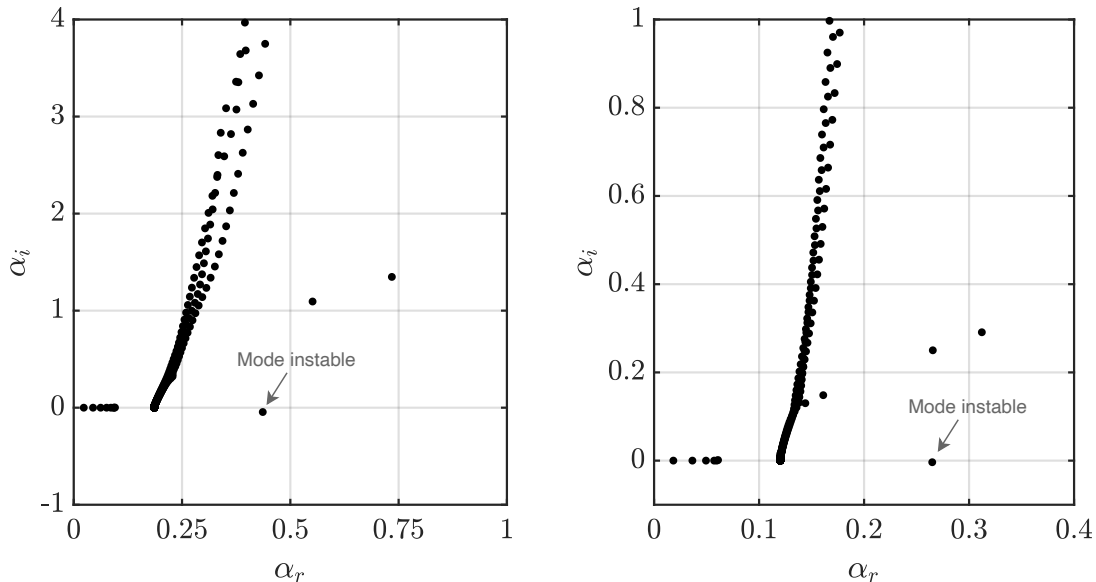


FIGURE 6.18 – Profils de couches limites dans une tuyère plane R1C5-Cyl obtenus avec SU2 à  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$ .



(A) Profil à  $x/D = 0.075$ .  $Re = 651$  et  $\omega = 0.187$  (B) Profil à  $x/D = 0.5$ .  $Re = 726$  et  $\omega = 0.118$

FIGURE 6.19 – Spectres aux valeurs propres pour des profils de couche limite à  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$ .

Il est clair que le gradient de pression défavorable provoque la présence d'un point d'inflexion généralisé dans le profil de la couche limite, qui est déstabilisant d'un point de vue de la stabilité linéaire (Lees et Lin, 1946). La couche limite dans la suite de la partie cylindrique est assimilable à une couche limite de Blasius de plaque plane, avec un profil de vitesse très légèrement plus convexe dû à la présence d'un léger gradient de pression favorable entre le début et la fin de la partie cylindrique.

Nous pouvons étudier la stabilité locale de ces deux profils de vitesse à l'aide des outils développés et présentés au chapitre 4. Nous calculons dans un premier temps les spectres aux valeurs propres en utilisant la formulation de stabilité locale spatiale. La figure 6.19 présente les deux spectres qui correspondent aux profils de couches limites présentés précédemment. Les deux couches limites possèdent un mode instable, et les spectres sont présentés aux pulsations respectives les plus instables. Pour le profil à  $x/D = 0.075$ , le mode instable est situé à  $\alpha = 0.4364 - 0.0446i$ . Celui du profil à  $x/D = 0.5$  est situé à  $\alpha = 0.2649 - 0.0036i$ . Le profil qui présente un point d'inflexion a un mode instable dont le taux de croissance est d'un ordre de grandeur supérieur à son homologue pour le profil dépourvu de point d'inflexion. Cependant, la région d'écoulement soumise à un gradient de pression adverse est relativement courte et est localisée au début de la partie cylindrique, jusqu'à  $x/D \approx 0.1$ , ne laissant que peu d'espace au mode pour croître. Il convient donc de rester prudent quant aux conclusions que l'on peut tirer de ce résultat issu d'une analyse de stabilité pour des écoulements localement parallèle. Pour déterminer le potentiel de croissance de ce mode instable, un calcul moyennant une méthode permettant de prendre en compte la variation du champ de base, tel que la PSE (Parabolized Stability Equations) ou la stabilité bi-globale, devrait être mise en œuvre.

Pour compléter l'analyse de stabilité, nous réalisons une analyse de croissance transitoire spatiale locale à l'aide du profil à  $x/D = 0.5$ . Le gain optimal est obtenu pour une perturbation stationnaire à  $\omega = 0.72$  et un nombre d'onde transverse  $\beta = 0$ . L'évolution

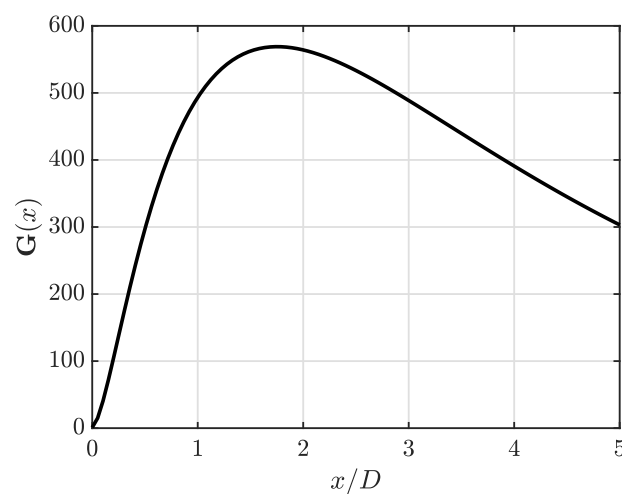


FIGURE 6.20 – Gain optimal pour la couche limite à  $x/D = 0.5$ .  $Re = 726$ ,  $\omega = 0$  et  $\beta = 0.72$ .

spatiale du gain de la perturbation optimale est présentée sur la figure 6.20. Il y a un potentiel de croissance transitoire significatif, avec un gain maximal de  $G_{\max} = 570$ , ce qui correspond à un facteur  $N = 6.35$ . Toutefois, ce gain maximal est atteint pour une distance  $x/D = 1.74$ , tandis que la longueur réelle de la partie cylindrique de la tuyère  $x/D = 1$ . Contrairement au cas des tuyères à col toroïdal, pour lesquelles le gain maximal était obtenu sur de très courtes distances, les perturbations optimales pour des écoulements de plaque plane sont plus longues à se développer. Le profil de vitesse utilisé pour réaliser l'étude de croissance transitoire étant au milieu de la partie cylindrique, la distance maximale restante avant l'entrée de l'écoulement dans la partie divergente de la tuyère est de  $x/D = 0.5$ . De plus, nous avons remarqué à l'aide des simulations numériques que le col se forme en général à  $x/D \approx 0.9$  (voir figure 6.5), ne laissant qu'une distance de  $x/D \approx 0.4$  aux perturbations optimales pour se développer. À cette distance, le gain est de  $G(x/D = 0.4) = 240$ , soit un facteur  $N = 5.48$ .

L'analyse locale ne permet pas de prendre en compte la variation de la couche limite le long de la partie cylindrique, il faut donc la considérer comme une approximation grossière de l'évolution des perturbations optimales. Cependant, nous remarquons que la valeur du facteur  $N$  correspond approximativement à ce que nous avons obtenu dans les cas des tuyères à col toroïdal au chapitre 5 (voir table 5.2). Il semble ainsi possible que la transition soit de nouveau dominée par la croissance transitoire, malgré la présence d'instabilités modales dans la couche limite.

Pour généraliser cette approche, nous considérons que les conditions d'écoulement ne varient pas le long de la partie cylindrique. Cette approximation est justifiée en observant que le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement de la couche limite ne varie que faiblement dans la tuyère, tel qu'illustré sur la figure 6.21. Nous réalisons un calcul de croissance transitoire en faisant l'approximation que la couche limite est

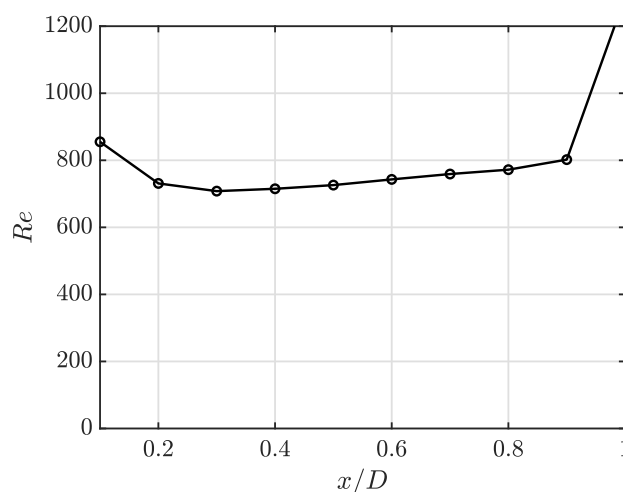


FIGURE 6.21 – Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement constaté dans la partie cylindrique de la tuyère à  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$ . Données issues de la simulation numérique SU2.

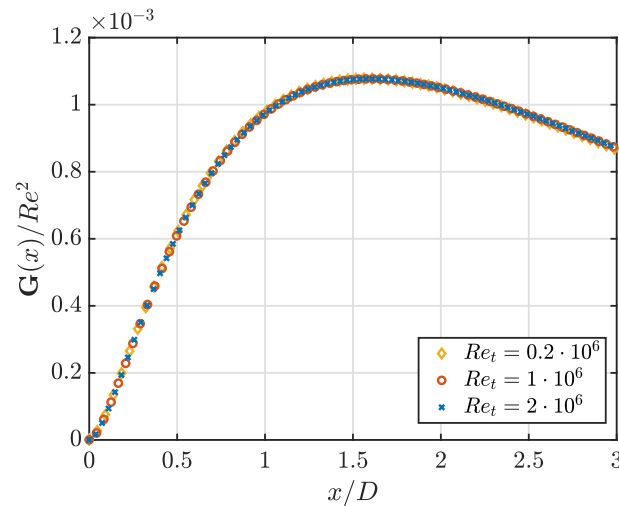


FIGURE 6.22 – Évolution spatiale du gain de la perturbation optimale à  $\omega = 0.72$  et  $\beta = 0$ .

constante le long de la partie cylindrique à un nombre de Reynolds moyen constaté dans la partie cylindrique entre  $x/D = 0.1$  et  $x/D = 0.9$  de  $Re = 744$  pour une épaisseur de déplacement moyenne de  $\delta_1/D = 0.0065$ .

Pour calculer la valeur du gain à plusieurs nombres de Reynolds, nous utilisons une approche simplifiée pour estimer la valeur de l'épaisseur de déplacement de la couche limite dans la tuyère en fonction du nombre de Reynolds

$$\delta_1 = \frac{C2}{\sqrt{Re_t}}, \quad (6.31)$$

avec la constante  $C2 = 2.04$  (pour  $\delta_1$  adimensionnée par la hauteur du col), déterminée à partir de la simulation numérique. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement est ensuite estimé par

$$Re = Re_t \frac{\delta_1}{D}. \quad (6.32)$$

En réalisant le calcul de croissance transitoire pour plusieurs nombres de Reynolds, présenté sur la figure 6.22, nous constatons que le gain des perturbations optimales est proportionnel à  $G \propto Re^2$ , ce qui avait déjà été observé par Hanifi et al. (1996) dans le cadre de l'étude de la croissance transitoire de couche limite sur plaque plane. Il est également montré dans la littérature que la longueur de développement des stries est proportionnelle à  $x \propto Re$ . Dans le cas des tuyères, nous constatons que la distance de développement est constante lorsque celle-ci est adimensionnée par la hauteur du col de la tuyère. Cela est une conséquence de l'amincissement de la couche limite lorsque le nombre de Reynolds est augmenté. Il est donc possible de réutiliser cette relation de proportionnalité pour obtenir simplement le facteur  $N$  pour plusieurs nombres de Reynolds dans le col de la tuyère.

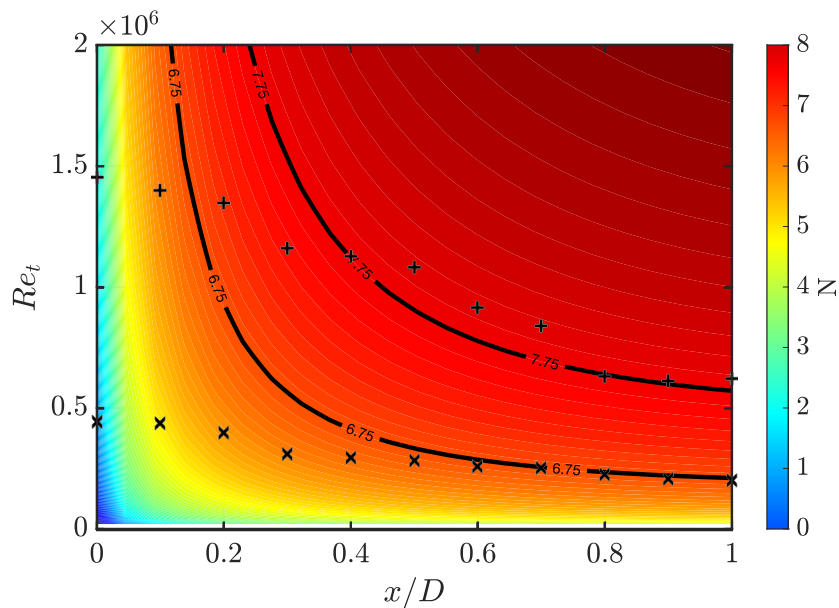


FIGURE 6.23 – Carte de facteur  $N$  issu de la croissance transitoire dans le col. Les deux lignes noires correspondent aux isocontours  $N = 6.75$  et  $N = 7.75$ . Les marqueurs sont les données expérimentales de transition : ( $\times$ ) pour le début de la transition, ( $+$ ) pour la fin de la transition.

La carte de facteur  $N$  est présentée sur la figure 6.23 avec les données expérimentales à titre de comparaison. Le facteur  $N$  correspond ici au développement d'une perturbation optimale dont l'origine est choisie à  $x/D = 0$  pour plusieurs nombres de Reynolds. Il est clair que le modèle ne permet pas de reproduire la dynamique de la transition au début du col, entre  $x/D = 0$  et  $x/D = 0.4$ , puisque les perturbations évoluant depuis l'amont du col ne sont pas prises en compte. En revanche, lorsque nous choisissons des facteurs  $N$  de manière à reproduire les observations expérimentales de transition, ici un début de transition à  $N = 6.75$  et une fin de transition à  $N = 7.75$ , le modèle et les données expérimentales ont des nombres de Reynolds de transition similaires entre  $x/D = 0.4$  et  $x/D = 1$ . Nous voyons ici clairement que l'amplitude des perturbations optimales est maximale en fin de col, menant la transition à se manifester en premier dans cette zone, puis à remonter progressivement l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds augmente.

#### 6.4 CONCLUSION

Les tuyères à col cylindrique ont la particularité d'avoir un col de section constante. Pour permettre de calculer le coefficient de décharge et déterminer l'influence de la transition sur celui-ci, nous avons réalisé des simulations numériques pour déterminer la position réelle du col sonique. Nous avons vu qu'à faibles nombres de Reynolds, le col sonique se forme à la fin de la partie cylindrique, mais que celui-ci se forme en début de partie cylindrique à plus haut nombre de Reynolds, sous l'influence combinée de la couche limite et de la force centrifuge. Cela provoque un changement de dynamique



dans l'évolution du coefficient de décharge qui n'a jamais été mis en avant auparavant. Si l'étude est ici réalisée pour des couches limites laminaires, nous devons nous attendre à obtenir un comportement similaire pour les couches limites turbulentes.

La formation du col sonique en début de partie cylindrique induit un écoulement légèrement supersonique dans la partie cylindrique de la tuyère. L'action de la force centrifuge sur l'écoulement dans le plan d'entrée provoque une perturbation stationnaire qui engendre la formation de chocs stationnaires dans la partie cylindrique supersonique. Ces chocs ne sont pas un problème dans la modélisation du coefficient de décharge, puisque qu'ils apparaissent en aval du col sonique et n'ont donc pas d'influence sur le débit de la tuyère.

L'analyse expérimentale de la transition de la couche limite dans le col montre que celle-ci débute en premier à la fin du col géométrique, puis remonte progressivement le col avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Les nombres de Reynolds de transition en fin de convergent, à l'entrée dans le col de section constante, correspondent à ceux que nous avons trouvés dans le cas de la tuyère à col toroïdale, indiquant que les mécanismes de transition sont similaires lorsque l'influence de la force centrifuge est présente. L'entrée de l'écoulement dans une section constante sans force centrifuge provoque la formation d'un gradient de pression adverse, déstabilisant la couche limite qui présente alors un point d'inflexion, source d'une instabilité non visqueuse. Cette région de gradient de pression adverse est localisée au début du col géométrique. Lorsque l'écoulement retrouve un profil constant dans le reste du col, la couche limite est assimilable à une couche limite de Blasius sans gradient de pression, pour laquelle le mode de T.S. est instable. En plus de ces instabilités, nous avons montré qu'un potentiel significatif de croissance transitoire pouvait avoir lieu dans cette région de la tuyère. La modélisation de la transition à l'aide d'un modèle basé sur la croissance transitoire et le facteur  $N$  semble reproduire les résultats expérimentaux de transition dans une partie du col, ce qui renforce l'idée que la transition soit dominée par des mécanismes non modaux, malgré la présence de modes instables. Une analyse de stabilité avec un outil permettant de prendre un compte la variation de la couche limite dans la direction de l'écoulement, tel qu'une analyse de stabilité 2D ou par méthode PSE, permettrait de confirmer notre analyse en incluant plus précisément le rôle des modes instables.



---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

### SYNTHÈSE DE L'ARGUMENTATION

Ce travail traite de la transition à la turbulence des couches limites au sein des tuyères supersoniques employées dans la débitmétrie des gaz. La variation de l'épaisseur de la couche limite lorsqu'elle passe d'un état laminaire à un état turbulent au col de tuyère entraîne une variation du coefficient de décharge. La transition peut survenir à des nombres de Reynolds variés suivant le type de tuyère et de conditions de fonctionnement, ce qui la rend difficile à prendre en compte pour modéliser avec fidélité le coefficient de décharge. L'objectif de ce travail de recherche est double : dans un premier temps, nous avons souhaité connaître précisément les raisons qui provoquent la transition à la turbulence dans ce type de tuyère et comment cette transition est affectée par des variations de conditions de fonctionnement ; dans un deuxième temps, nous avons souhaité modéliser les mécanismes de transition, afin de produire une base théorique permettant de modéliser le comportement de la transition. Néanmoins, cette recherche s'inscrit dans un contexte plus large, qui est de développer nos connaissances sur le comportement aérodynamique des tuyères dans le but de renforcer la confiance que nous avons dans les modèles prédictifs du débit et de permettre la progression des systèmes de débitmétrie.

Bien que la transition à la turbulence soit un sujet de recherche actif et extensivement étudié depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, la transition dans les tuyères de débitmétrie n'a, à notre connaissance, peu été étudiée. Dans un cadre général, la littérature nous apprend que la transition des couches limites résulte soit de la présence de rugosités sur la paroi, qui peuvent générer un sillage instable ou turbulent, soit de la croissance de perturbations dans la couche limite par la présence de bruit dans l'écoulement. Nous avons alors conçu une expérience permettant de détecter la transition au sein du col de tuyères planes, dont les caractéristiques aérodynamiques sont proches des tuyères industrielles. Grâce à une étude paramétrique expérimentale mettant en œuvre plusieurs rapports de contraction, niveaux rugosités de surface et formes de tuyère, nous avons exploré, respectivement, l'influence de la variation du bruit de l'écoulement, le rôle joué par la rugosité et le comportement de la transition en fonction du type de géométrie utilisé. C'est à notre connaissance la première fois qu'une expérience permet de visualiser directement l'influence de ces paramètres sur la transition au col d'une tuyère supersonique, ce qui constitue, à ce titre, un travail original. Les résultats expérimentaux sont interprétés par le biais d'une analyse de stabilité, grâce à un code de calcul développé pour des couches limites compressibles soumises à une force centrifuge, permettant l'étude des mécanismes modaux et non modaux de nos configurations expérimentales.

Finalement, nous avons utilisé les résultats de l'analyse de stabilité pour mettre au point un modèle prédictif de la transition, basé sur les mécanismes physiques en jeu. Ce modèle est comparé aux résultats expérimentaux pour appuyer sa validité. L'idée est ici de pouvoir fournir un outil simple, aidant au transfert des connaissances acquises sur la transition aux industriels de la débitmétrie et maximiser l'impact de la recherche.

#### LES MÉCANISMES DE TRANSITION À LA TURBULENCE DANS LES TUYÈRES À COL EN ARC-DE-CERCLE

La campagne expérimentale a tenu ses promesses et les images infrarouges nous ont permis d'identifier deux mécanismes de transition à la turbulence.

##### *Influence de la rugosité*

Nous avons trouvé que la transition se déroule systématiquement et indépendamment de la rugosité de surface, et ce, pour des tuyères dont la rugosité est jusqu'à quatre fois supérieure aux exigences des normes industrielles. C'est une indication claire que la transition est associée au bruit de l'écoulement, plutôt que la rugosité de surface. Cependant, pour les configurations les plus rugueuses, ou pour les conditions d'écoulement dont le bruit de l'écoulement est supposé faible, nous avons observé des régions de l'écoulement localement turbulentes alors que la couche limite reste laminaire aux alentours. En effet, des éléments de rugosités isolés, dont la taille est significativement plus grande que la taille de la rugosité moyenne environnante, peuvent générer un sillage turbulent. Pour les niveaux de rugosité testés, ce mécanisme de transition n'a jamais été la raison d'une transition complète au col. Les éléments isolés de rugosité sont restés la cause d'une transition locale, pendant que la couche limite laminaire environnante devenait turbulente sans influence de la rugosité.

##### *Influence des conditions d'écoulement*

Pour la transition qui n'est pas concernée par la rugosité, mais par le bruit de l'écoulement, nous avons trouvé que les différentes géométries de tuyères produisent des couches limites turbulentes à différents nombres de Reynolds. Dans des conditions de bruit de l'écoulement en amont de la tuyère constante, réduire la taille du rayon de la partie convergente de la tuyère a tendance à augmenter le nombre de Reynolds auquel se produit la transition. De plus, l'apparition de la turbulence au col des tuyères n'est pas brutale, mais relève d'un processus qui s'installe progressivement lorsque le nombre de Reynolds de la tuyère est augmenté. Ainsi, nous avons trouvé que la plage pour laquelle la couche est transitionnelle, c'est-à-dire laminaire et en présence d'événements turbulents, est plus importante pour les tuyères dont le rayon du convergent est plus petit. Finalement, pour une

tuyère de même géométrie, l'augmentation du taux de contraction repousse la transition à des nombres de Reynolds plus élevé. Nos expériences ne permettent pas de connaître le taux de turbulence au col de la tuyère, mais nous suspectons que l'augmentation du taux de contraction conduit à réduire le taux de turbulence au col de la tuyère, ce qui expliquerait le retardement de la transition.

Étant donné que la rugosité n'a affecté la transition que de manière localisée et pour des cas particuliers, nous avons concentré nos efforts de modélisation sur la transition induite par le bruit de l'écoulement. L'analyse de stabilité locale au col des tuyères révèle que le mode de Tollmien-Schlichting compressible (premier mode de Mack), qui est habituellement associé à la transition modale pour ces régimes d'écoulement, est stabilisé par le gradient de pression favorable résultant de l'accélération de l'écoulement au passage de la tuyère. De plus, la présence de force centrifuge agissant sur la couche limite n'a pas provoqué de nouvelles instabilités modales. Dès lors, puisque la couche limite s'est avérée modalement stable, nous avons exploré le potentiel de transition par mécanismes non modaux. Nous avons trouvé que la croissance non modale de perturbations est possible et importante. Tandis que les perturbations optimales pour les couches limites de plaque plane sont généralement stationnaires, nous avons montré que l'action de la force centrifuge au col des tuyères promeut des perturbations optimales instationnaires. Ce phénomène a été mis en avant par Karp et Hack (2018) pour les couches limites incompressibles, nous avons montré qu'un mécanisme similaire existe pour des couches limites compressibles. La pulsation des perturbations optimales instationnaire est variable suivant le nombre de Reynolds et la géométrie de la tuyère, ainsi, chaque configuration a une pulsation optimale pour laquelle le taux d'amplification des perturbations est maximal.

#### *Modélisation de la transition*

Pour concrétiser la description théorique du phénomène de transition, nous avons utilisé les résultats de la croissance non modale pour établir un modèle de transition basé sur le facteur  $N$ . Nous avons calculé pour chaque tuyère et plusieurs nombres de Reynolds le taux d'amplification d'énergie des perturbations (le gain) et obtenu des courbes de facteur  $N$ . Nous trouvons que le facteur  $N$  croît avec le nombre de Reynolds, et que celui-ci est plus élevé pour les tuyères avec les plus grands rayons de convergent. Cela reflète bien les résultats expérimentaux, pour lesquelles la transition est observée à des nombres de Reynolds plus faibles pour les tuyères avec les plus grands rayons de convergent. De plus, l'évolution logarithmique du facteur  $N$  avec le nombre de Reynolds nous explique pourquoi les plages de transition sont plus larges pour les tuyères dont le rayon du convergent est plus petit, reproduisant encore une fois le comportement de la transition obtenu par les expériences. Ce modèle permet de montrer que le nombre de Reynolds de transition est sensible au bruit de l'écoulement, et qu'il est nécessaire de caractériser ce bruit pour permettre de prédire précisément la transition. Ainsi, il est possible d'imaginer

une installation expérimentale ou industrielle avec un bruit très faible, en ayant un rapport de contraction élevé, ce qui aurait pour conséquence d'augmenter le nombre de Reynolds de transition. Puisque lorsque le nombre de Reynolds augmente la couche limite s'affine et la taille de la rugosité augmente relativement à celle-ci, la question du rôle de la rugosité se pose à nouveau. Nous avons alors proposé un modèle pour estimer la taille critique d'un élément isolé de rugosité pouvant induire un sillage turbulent en fonction du nombre de Reynolds et de la géométrie de la tuyère. Finalement, nous avons montré que, pour nos tuyères, la rugosité distribuée n'a pas les propriétés d'amplitudes et longueurs d'onde requises pour entraîner des perturbations pouvant exciter les mécanismes de croissance non modale. Elle n'a par conséquent pas d'influence sur la transition.

## LES TUYÈRES À COL CYLINDRIQUE

### *Position du col*

Les tuyères à col cylindrique ont la particularité d'avoir un col géométrique qui n'est pas défini en une seule position axiale, mais sur une portion de la tuyère. Pour rechercher la position de la section sonique limitatrice du débit d'un point de vue aérodynamique et ainsi permettre d'identifier la région dans laquelle la transition à la turbulence devait être étudiée, nous avons réalisé une campagne de simulation numérique. Les résultats nous ont permis de montrer que le col sonique se trouve en fin de partie cylindrique à bas nombre de Reynolds, mais que celui-ci peut se déplacer au début de la partie cylindrique à hauts nombres de Reynolds. Le changement de position du col entraîne un changement de comportement dans l'évolution du coefficient de décharge avec le nombre de Reynolds. C'est la première fois que ce phénomène est mis au jour. Le déplacement du col sonique provoque la mise en place d'un écoulement légèrement supersonique dans le reste de la partie cylindrique, provoquant l'apparition d'un réseau de choc. La partie cylindrique supersonique se comporte comme un tuyau supersonique qui supporte des chocs issus de l'adaptation de l'écoulement en fin de convergent, soumis à la force centrifuge, à un écoulement supersonique sans force centrifuge. Le retrait soudain de l'action de la force centrifuge agit comme un forçage stationnaire provoquant la formation d'ondes de choc. Bien que ce réseau de choc ait auparavant été identifié, nous sommes à notre connaissance les premiers à fournir une explication physique et un modèle quant à leur apparition.

### *Transition à la turbulence*

Lorsque le col sonique se trouve en fin de partie convergente, la couche limite en amont du col supporte deux types d'instabilités modales. Juste après la fin du convergent, la recompression de l'écoulement proche de la paroi provoque l'apparition d'une instabilité non visqueuse par la présence d'un point d'inflexion généralisée. La région qui supporte cette instabilité est localisée au début de la partie cylindrique. Dans le reste de

la partie cylindrique, seul le mode de Tollmien-Schlichting compressible (premier mode de Mack) est instable. Nous avons également montré que l'écoulement dans cette région cylindrique supporte de la croissance non modale. L'écoulement étant ici assimilable à une couche limite de plaque plane, les perturbations optimales sont donc stationnaires, comme attendu.

La présence de variations importantes dans l'écoulement entre le convergent de la tuyère et la section cylindrique ne permet pas l'usage des outils de stabilité locale pour identifier qui, des mécanismes modaux et non modaux, sera dominant dans le scénario de transition. Les mesures expérimentales pour une géométrie similaire en configuration plane nous ont cependant montré que la transition débutait en premier lieu en fin de tuyère, puis remontait progressivement l'écoulement. À conditions de fonctionnement équivalentes, la transition au début du col géométrique est obtenue pour le même nombre de Reynolds qu'une tuyère toroïdale avec un convergent similaire. C'est une indication que la transition à la turbulence dans cette région suit le même schéma que pour les tuyères à col en arc-de-cercle.

#### LIMITES ET PERSPECTIVES

Sur le plan expérimental, nous avons étudié la transition dans des tuyères planes en remplacement des tuyères industrielles axisymétriques. Cette substitution nous a permis de mesurer directement la transition dans le col des tuyères et ainsi de montrer que le modèle de transition basé sur la croissance non modale de perturbations produit des résultats en adéquations avec les observations expérimentales. L'ensemble de la démarche d'analyse de stabilité proposée dans ce manuscrit peut être reproduit dans le cas de tuyère axisymétrique sans modifications majeures. Une validation du modèle de transition pour des tuyères axisymétriques pourrait être réalisée à l'aide de la mesure du coefficient de décharge sur des bancs de calibration de tuyères. Une étude paramétrique de l'influence du taux de turbulence de l'écoulement amont, ou alors du rapport de contraction entre la section de la canalisation qui achemine le gaz et la section au col de la tuyère, doit être conduite pour déterminer les valeurs du facteur  $N$  de transition dans un environnement industriel.

Notre étude montre que la transition dans les tuyères de débitmétrie à col en arc-de-cercle est associée à la croissance de stries instationnaires. L'instationnarité est promue par la force centrifuge qui règne au sein du col de la tuyère. Notre modèle de transition se base sur la croissance de ces stries, le critère de transition n'est alors que basé sur l'amplitude maximale que les perturbations peuvent atteindre. Cependant, l'apparition de la turbulence n'est pas directement due à la croissance de strie, mais plutôt à la croissance modale d'instabilités sur ces stries. L'étude de Vaughan et Zaki (2011) montre que pour des stries instationnaires de plaque plane, les instabilités modales qui se développent sur les stries ont un taux de croissance variable suivant l'amplitude et la pulsation des stries. Or, notre étude de stabilité montre que les stries optimales ont des pulsations variables

suivant le nombre de Reynolds et la géométrie de la tuyère. Ainsi, réaliser une étude détaillée de la stabilité modale d'une couche limite déformée par les stries instationnaires dans le cas des tuyères est nécessaire pour avoir une vision d'ensemble sur le scénario de transition. Cela permettrait également de préciser le modèle de transition, prenant désormais en compte ces instabilités modales.

L'analyse de stabilité locale nous donne une première estimation des pulsations et nombres d'ondes optimaux pour la croissance de perturbations non modale. Une analyse de stabilité globale permettrait de les préciser en levant l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle et permettrait d'obtenir plus de détail sur l'amplification des perturbations de la couche limite. Une telle analyse permettrait par ailleurs de compléter le modèle de transition pour les tuyères à col cylindrique, pour lesquelles il existe de fortes variations du champ de base et la présence simultanée d'instabilités modales et non modales. Nos résultats ouvrent la voie à ces calculs de stabilité plus coûteux en fournissant une première approximation des mécanismes de transition attendus. Une analyse de stabilité globale permettrait également d'identifier l'origine des perturbations optimales dans l'écoulement en amont de la tuyère, de manière similaire à ce qui a été proposé par Martini et al. (2022) pour la transition sur les corps émoussés. Cela guiderait les futures investigations expérimentales dans l'étude de l'influence du bruit de l'écoulement sur la transition.

Finalement, des mesures directes des mécanismes de transition dans les tuyères permettraient d'appuyer les résultats de cette étude. Cela pose un certain nombre de défis pour les études expérimentales au regard de la taille de la couche limite, dont l'épaisseur est de l'ordre de  $\sim 30\mu\text{m}$  pour des tuyères de 10mm de diamètre aux nombres de Reynolds de transition. La difficulté est d'autant plus importante si on considère des tuyères axisymétriques, pour lesquelles l'accès optique est largement restreint. Une alternative viable serait alors d'étudier la transition en réalisant des simulations numériques haute-fidélité, qui auront également l'avantage de fournir un accès direct, et en tout point, à l'état de l'écoulement.



---

ANNEXES

---

---

## A PLAN DES TUYÈRES EXPÉRIMENTALES

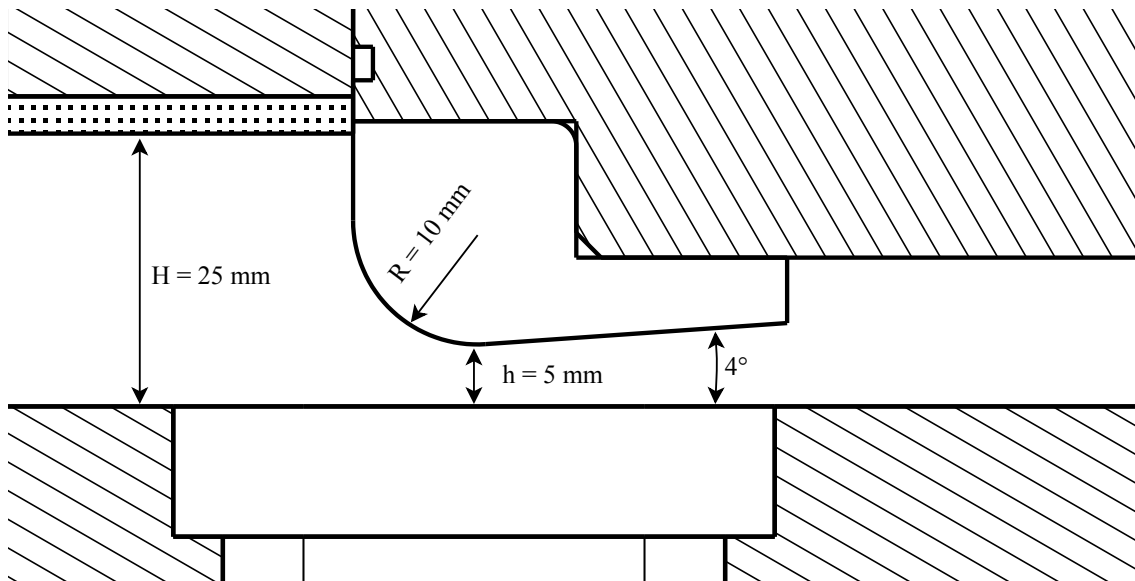


FIGURE A24 – Tuyère R1C5

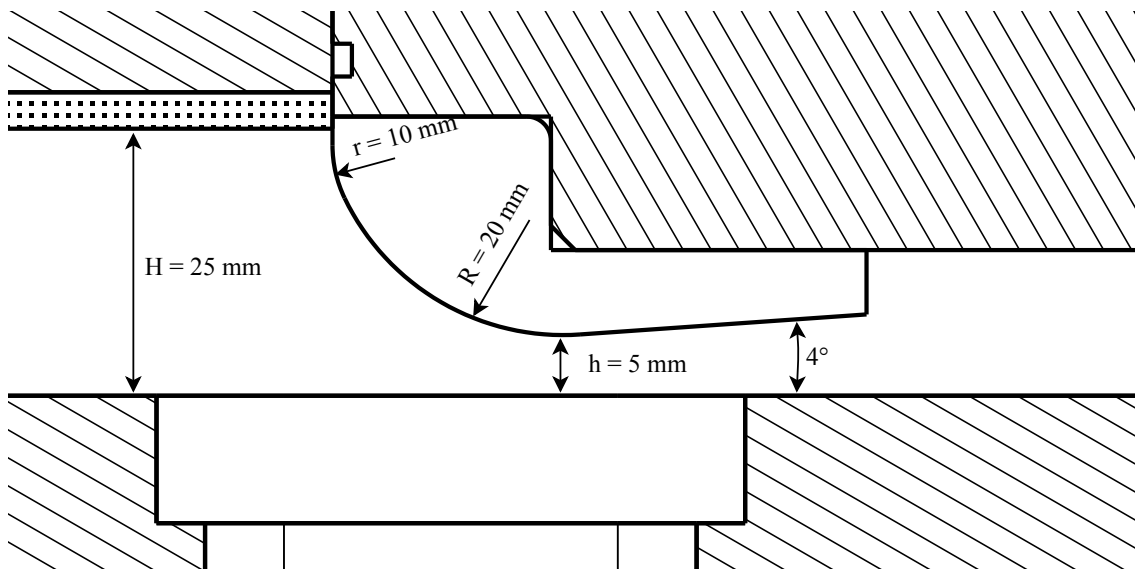


FIGURE A25 – Tuyère R2C5

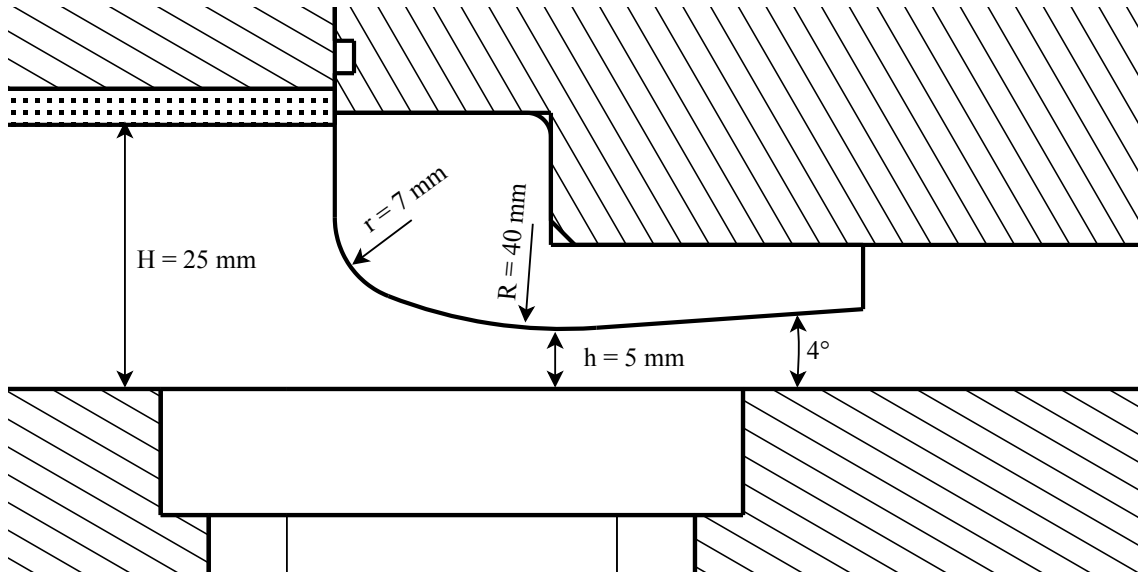


FIGURE A26 – Tuyère R4C5

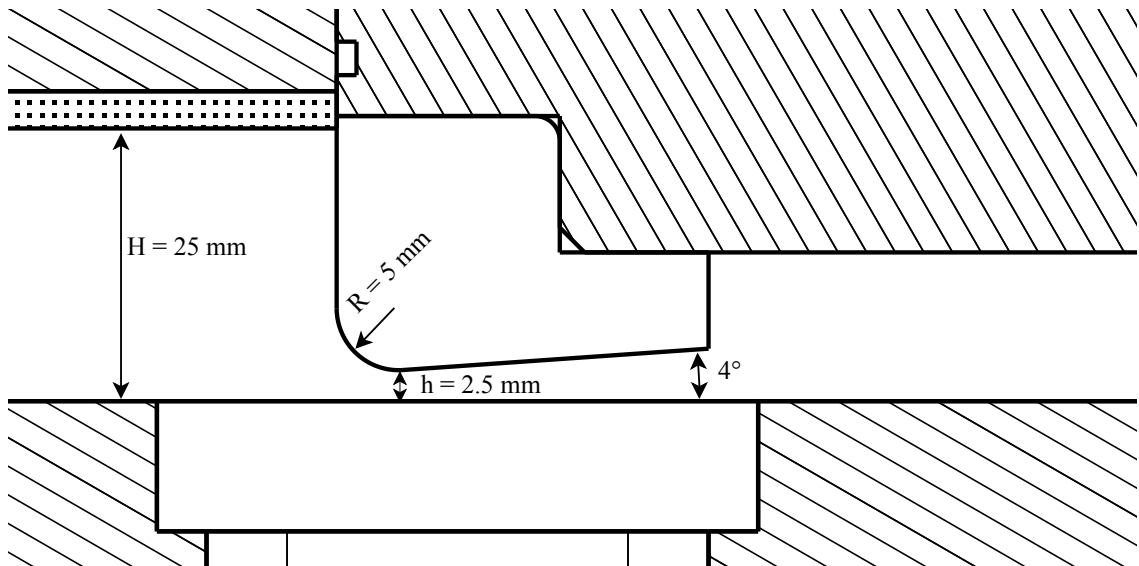


FIGURE A27 – Tuyère R1C10

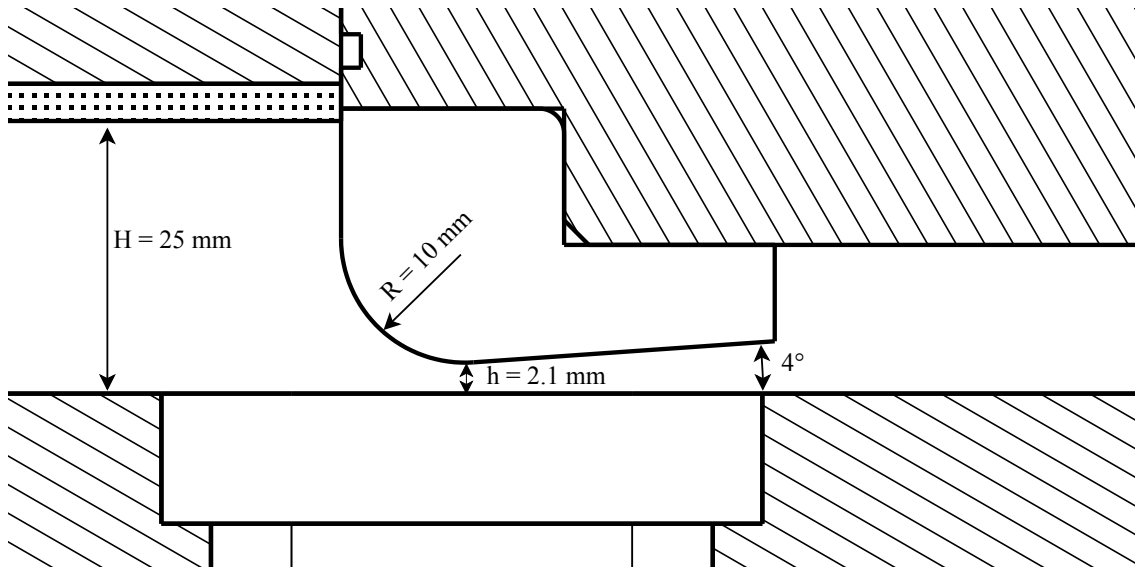


FIGURE A28 – Tuyère R2.4C11.9

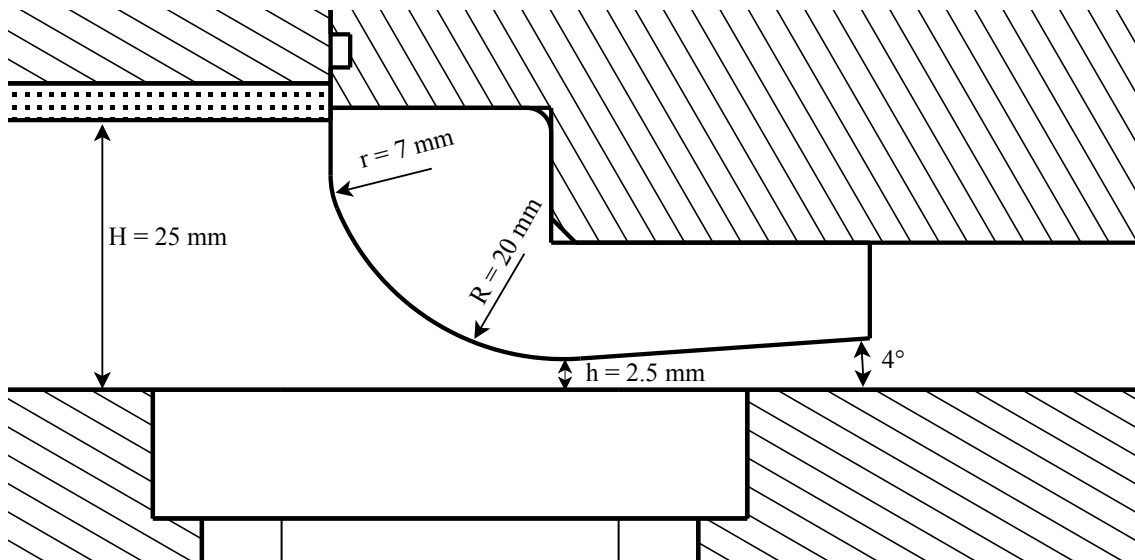


FIGURE A29 – Tuyère R4C10

## B TRAITEMENT DES IMAGES INFRAROUGES

## B.1 Réflexions

Pour traiter les réflexions de la caméra sur les tuyères, nous réalisons en début de chaque campagne expérimentale une image infrarouge de la tuyère sans écoulement. La figure B30 montre un exemple de cette image pour la tuyère R4C5. Dans les conditions pour lesquelles est acquise l'image infrarouge, la température de la tuyère est homogène. Les variations de température visible sur l'image infrarouge sont alors uniquement induites par des réflexions. La tache sombre circulaire entre  $x \approx -42\text{mm}$  et  $x \approx -28\text{mm}$  correspond à la réflexion du capteur de la caméra sur le hublot de la tuyère, tandis que la ligne sombre à  $x \approx -22\text{mm}$  correspond à la réflexion du capteur de la caméra sur la tuyère. Les zones de réflexions sont plus froides que le reste de la tuyère, car le capteur de la caméra thermique est refroidi à  $70^\circ\text{C}$  pour permettre la mesure des ondes infrarouges sans générer de bruit parasite. La température autour de ces deux tâches correspond à une composition entre la température réelle de la tuyère et un reflet, moins prononcé, du montant de l'objectif de la caméra thermique.

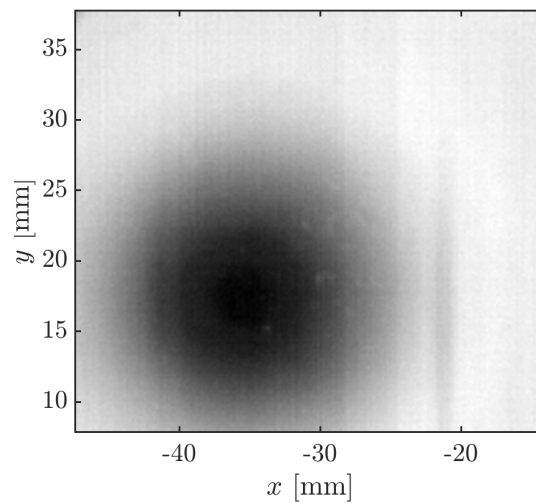


FIGURE B30 – Image infrarouge sans écoulement de la tuyère R4C5.

Le champ de température ainsi obtenu est normalisé entre  $T_{\min} = -1$  et  $T_{\max} = 0$  pour donner le champ de température appelé  $T_{\text{norm}}$ . À l'aide d'un thermocouple disposé sur le montant de l'objectif de la caméra, nous reconstruisons artificiellement le motif de température de la caméra par

$$T_{\text{cam}} = T_m + C3T_{\text{norm}}, \quad (33)$$

avec  $T_m$  la température du montant de la caméra et  $C3$  une constante qui représente la valeur de la température minimale de l'objectif de la caméra.

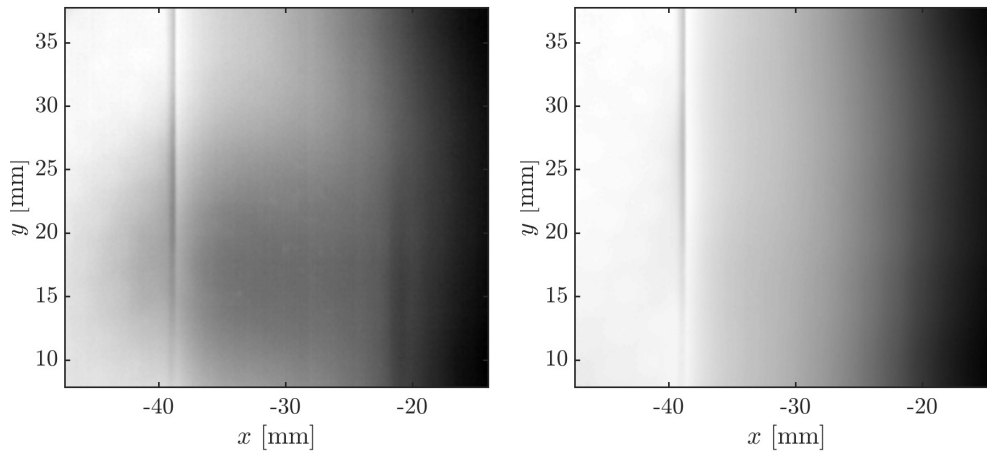


FIGURE B31 – Image infrarouge avec écoulement. Réflexions non traitées (gauche) contre réflexion traitée (droite)

Finalement, le champ de température réfléchi par la caméra est retiré des images infrarouges réalisées au cours de l'essai à l'aide des équations de rayonnement thermique

$$T_{\text{traitée}} = \left( \frac{T^4 - (1 - \varepsilon_g) T_{\text{cam}}^4}{\varepsilon_g} \right)^{1/4}, \quad (34)$$

avec  $T$  le champ de température dont nous souhaitons retirer la réflexion,  $\varepsilon_g$  une émissivité globale approximée. Pour pouvoir réaliser le calcul, les valeurs de  $C3$  et  $\varepsilon_g$  sont choisies pour chaque tuyère, de manière à minimiser la réflexion sur les images infrarouges traitées. Ces valeurs sont choisies constante au cours d'un essai, afin de traiter les images d'une même tuyère de la même manière pour éviter tout biais dans l'analyse des données de transition de couche limite. En revanche, chaque tuyère possédant son propre état de surface, et donc sa propre émissivité, les valeurs de  $C3$  et  $\varepsilon_g$  sont adaptés pour chaque tuyère.

La figure B31 présente le résultat du traitement d'une image infrarouge obtenue au cours d'un essai. Nous pouvons voir que les réflexions de la caméra sur le hublot et sur la tuyère sont largement réduites. Pour être plus quantitatif, la figure B32 présente un profil de température dans la direction transverse à l'écoulement avant et après traitement à une position axiale où la réflexion du capteur de la caméra sur le hublot était maximale. Nous voyons que le traitement de la réflexion permet d'obtenir un profil de température constant dans la direction transverse de la tuyère, tel qu'attendu. Avant traitement, la réflexion provoquait une diminution artificielle de la température d'environ 2K. Dans l'exemple que nous avons présenté, les valeurs  $C3 = 50$  et  $\varepsilon_g = 0.94$  sont utilisées. Bien que différentes pour chaque tuyère, ces valeurs sont représentatives de celles utilisées pour les autres tuyères.

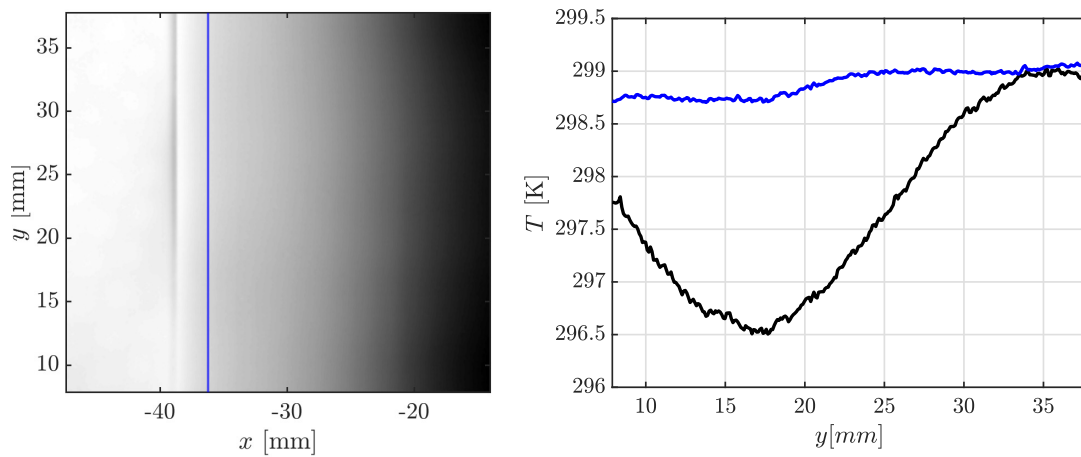


FIGURE B32 – Profil de température dans la direction transverse de l'écoulement à  $x = -36.23$ . Profil de température avant traitement (courbe noire) et après traitement (courbe bleue).

## B.2 Position du col

Pour étudier la transition, nous devons connaître la position du col sonique sur les images infrarouges. Les images infrarouges brutes ne permettent pas d'obtenir directement la position du col de la tuyère et même un placement minutieux de la caméra ne permet pas de déduire précisément la position du col à partir des plans de la section d'essai, notamment à cause de la perspective qui ne permet pas de définir la position exacte à laquelle l'écoulement entre dans la tuyère. Pour contourner ce problème, nous tirons avantage des réflexions de la caméra thermique sur la tuyère et le hublot.

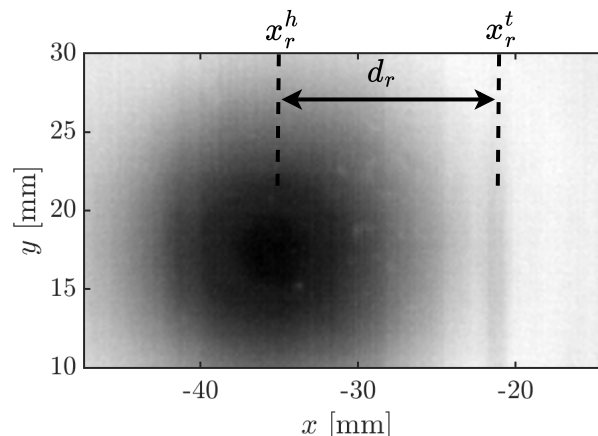


FIGURE B33 – Image infrarouge sans écoulement de la tuyère R4C5.

En supposant que la caméra pointe perpendiculairement au hublot en saphir, il est possible de déterminer la position du col, sachant que la tuyère possède un col en arc-de-cercle, par déductions trigonométriques

$$x_c = x_r^h + R \sin(\text{atan}(d_r/H)), \quad (35)$$

avec  $x_c$  la position du col,  $x_r^h$  la position du centre de la réflexion de la caméra sur le hublot,  $R$  le rayon au col de la tuyère à l'essai,  $d_r$  la distance axiale entre les deux réflexions (hublot et tuyère) et  $H$  la distance entre la tuyère et l'objectif de la caméra thermique. Ces variables sont illustrées sur la figure.

### B.3 Images améliorées

L'objectif des mesures infrarouges est de détecter la variation de température de récupération induite par la transition laminaire-turbulente de la couche limite. Cette petite variation de température est imbriquée dans la variation globale de la température de la paroi induite par l'accélération de l'écoulement le long de la tuyère. À l'exception d'une transition brutale entre une couche limite laminaire et turbulente, celle-ci n'est pas visible à l'œil nu sur les images infrarouges. Pour permettre de voir et discuter la transition sur les images infrarouges, ces dernières sont traitées et appelées images améliorées.

Le traitement consiste à retirer le gradient de température induit par l'accélération de l'écoulement, en conservant celui induit par le changement d'état de la couche limite. Pour ce faire, nous sélectionnons les données de mesures infrarouges d'une campagne expérimentale, puis nous identifions les images sur lesquelles l'écoulement est complètement laminaire, transitionnel et complètement turbulent en regardant la variation de la température en fonction du nombre de Reynolds à la fin de la tuyère. La figure B34 illustre l'identification des différents régimes de l'écoulement.

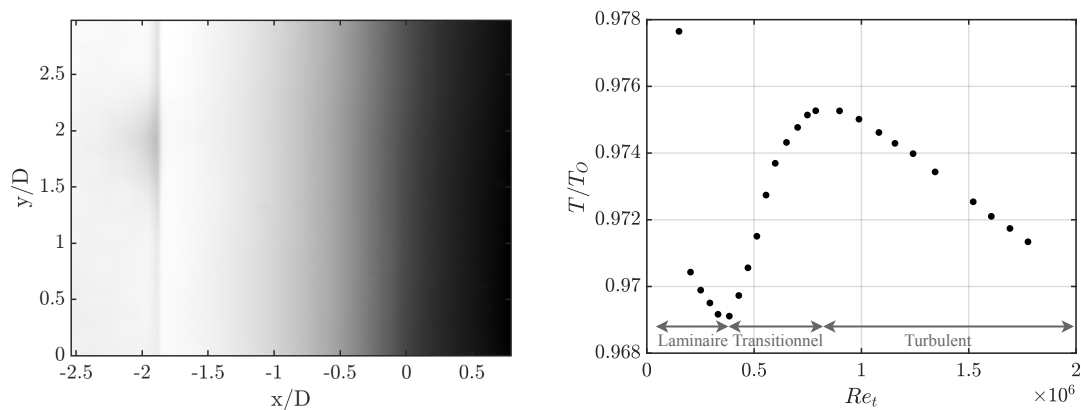


FIGURE B34 – Gauche : Image infrarouge de la tuyère R2C5S à  $Re_t = 0.33 \cdot 10^6$ . Droite : température moyenne mesurée à  $x/D = 0.5$ .

Une fois les régimes identifiés, nous relevons le nombre de Reynolds le plus élevé pour lequel la couche limite est laminaire. Dans l'exemple donné sur la figure B34, ce nombre de Reynolds est  $Re_t = 0.38 \cdot 10^6$ . Le champ de température de la tuyère  $T(x, y)$  correspondant à ce nombre de Reynolds est utilisé pour obtenir l'évolution de la température de la tuyère



suivant l'axe  $x$ , moyennée dans la direction transverse  $y$ , tel que

$$T_{\text{mean}}^{\text{lam}}(x) = \frac{\int_{y_{\text{min}}}^{y_{\text{max}}} T(x, y) dy}{\Delta y}, \quad (36)$$

avec  $\Delta y = y_{\text{max}} - y_{\text{min}}$ . Nous illustrons la valeur de  $T_{\text{mean}}^{\text{lam}}(x)$  pour la tuyère R2C5S sur la figure B35.

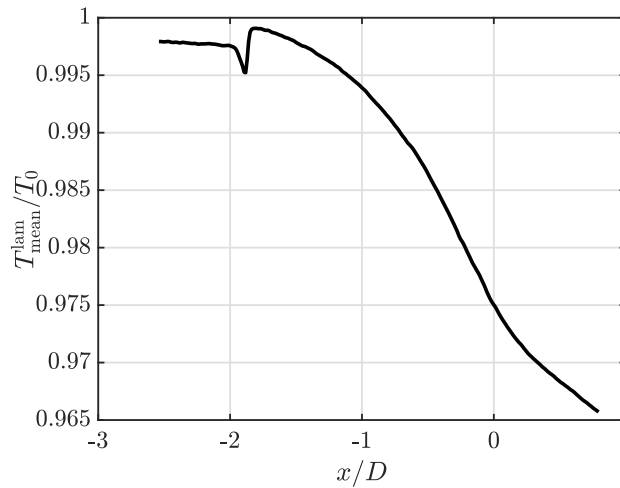


FIGURE B35 – Température moyenne dans la tuyère R2C5S à  $Re_t = 0.38 \cdot 10^6$

La diminution de température que nous pouvons voir sur la figure correspond à la diminution de la température de récupération à la paroi de la tuyère lorsque l'écoulement accélère à des vitesses supersoniques. Il suffit alors maintenant de soustraire cette température moyenne du champ laminaire à l'ensemble des essais pour obtenir les images améliorées

$$T_{\text{améliorée}}(x, y) = T(x, y) - T_{\text{mean}}^{\text{lam}}(x), \quad (37)$$

mettant ainsi en avant les gradients de température qui ne sont pas contenus dans la fonction  $T_{\text{mean}}^{\text{lam}}(x)$ . La température moyenne que nous obtenons à la figure B35 n'est pas exactement la même pour tous les nombres de Reynolds pour lequel l'écoulement est laminaire. Elles devraient l'être dans des conditions adiabatiques, mais celles-ci ne sont pas parfaitement atteintes dans l'expérience. Ainsi, pour réaliser le calcul de  $T_{\text{mean}}^{\text{lam}}(x)$ , nous choisissons de sélectionner un écoulement laminaire au plus haut nombre de Reynolds possible, afin de minimiser les effets de transferts de chaleur sur la qualité du traitement.

Finalement, la figure B36 présente la comparaison entre les images infrarouges améliorées et non améliorées pour la même tuyère à plusieurs nombres de Reynolds. Nous voyons très clairement qu'il n'est pas possible d'établir de différences entre les images infrarouges non traitées, tandis que la différence entre une couche limite complètement laminaire (figure B36a) est aisément distinguée des couches limites partiellement turbulentes (figures B36b, B36c et B36d). De plus, les images améliorées nous montrent la progression de la turbulence lorsque le nombre de Reynolds augmente.

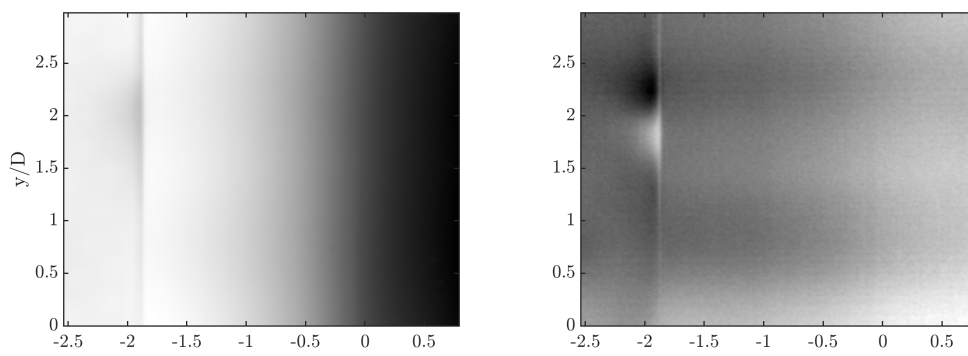
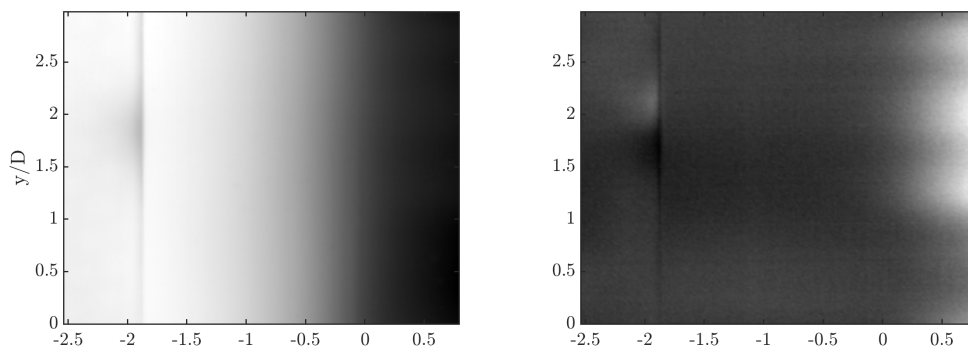
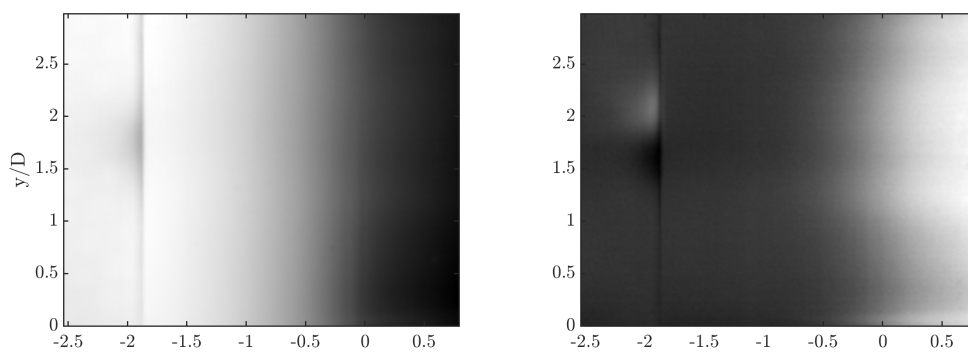
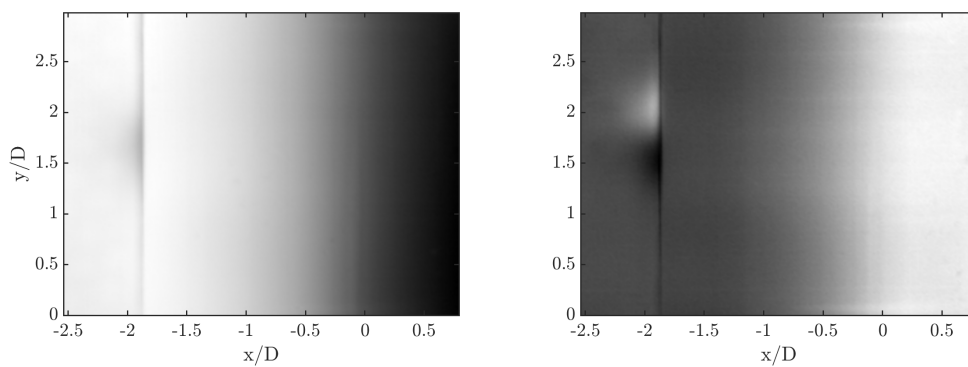
(A)  $Re_t = 0.20 \cdot 10^6$ (B)  $Re_t = 0.47 \cdot 10^6$ (C)  $Re_t = 0.70 \cdot 10^6$ (D)  $Re_t = 1.08 \cdot 10^6$ 

FIGURE B36 – Comparaison entre les images infrarouges (gauche) et les images infrarouges améliorées (droite).

## C SOLVEUR SU2 : SIMULATION NUMÉRIQUE DE TUYÈRE

SU2 est un code de calcul open source qui permet de réaliser des simulations numériques d'écoulement compressible par la méthode des volumes finis. Le détail des méthodes numériques et leurs implémentations peuvent être retrouvés sur le site internet officiel <https://su2code.github.io>.

Pour réaliser nos simulations numériques, nous utilisons les options pré-implémentées du solveur : un schéma convectif centré Jameson-Schmidt-Turkel d'ordre 2 associé à un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle. Nos simulations numériques sont réalisées avec un CFL entre 10 et 50.

Nous utilisons une condition adiabatique sur la paroi de la tuyère et imposons les grandeurs totales de l'écoulement. Le calcul est initié avec un écoulement au repos et en imposant une pression à la sortie du domaine. Cette pression d'initialisation que nous imposons est calculée manuellement, en utilisant les relations isentropiques 1D et le rapport des sections entre le col de la tuyère et la section de sortie du domaine. Le maillage de la tuyère est adapté en fonction du nombre de Reynolds utilisé, de manière à conserver un minimum de 100 mailles dans la couche limite la plus fine, à la fin du convergent de la tuyère. Le critère de convergence du solveur est basé sur la quantité de mouvement  $\rho u$ . Les simulations sont arrêtées lorsque  $\text{RMS}(\rho u) < 10^{-12}$ .

Pour valider ces choix numériques, nous réalisons une campagne de simulations numériques pour une tuyère à col toroïdal, avec un convergent de rayon  $R = 2D$ . C'est une tuyère très commune et largement étudiée par la communauté des industriels de la débitmétrie, ce qui nous permet d'obtenir des données à des fins de validation des choix numériques. Le domaine de calculé employé est montré sur la figure C37.



FIGURE C37 – Domaine de calcul de la tuyère  $R = 2D$ .

Le convergent est tronqué et consiste alors en un arc-de-cercle de  $45^\circ$ . Après le col, l'arc-de-cercle se poursuit et se termine tangent à une section conique divergente de demi-angle  $4^\circ$ , suivant les spécifications de la norme ISO9300 (2005). Le maillage du domaine de calcul est adapté au nombre de Reynolds  $Re_t$ , de manière qu'il y ait au moins 70 mailles

dans la couche limite au col, tel qu'illustré sur la figure C38 pour une simulation réalisée à  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ .

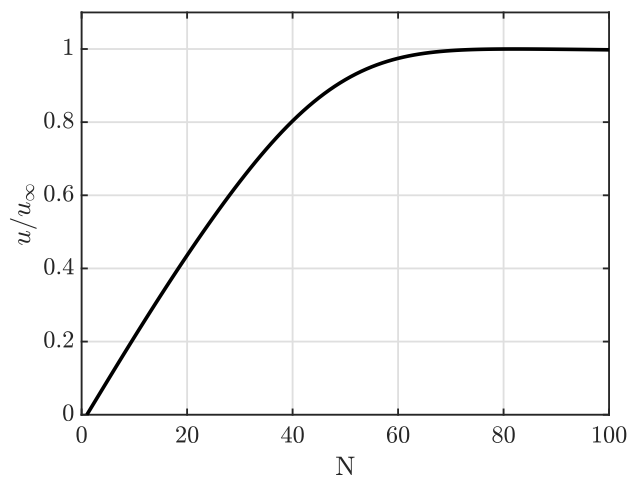


FIGURE C38 – Discretisation de la couche limite au col de la tuyère pour  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ .

Nous présentons sur la figure C39 le coefficient de décharge obtenu par simulation numérique pour 9 nombres de Reynolds compris entre  $Re_t = 0.1 \cdot 10^6$  et  $Re_t = 1.0 \cdot 10^6$ . Ces données sont comparées aux recommandations de la norme ISO9300 (2005) pour la même tuyère et à la courbe *sCURVE* obtenue par interpolation de donnée expérimentale par Ishibashi (2015).

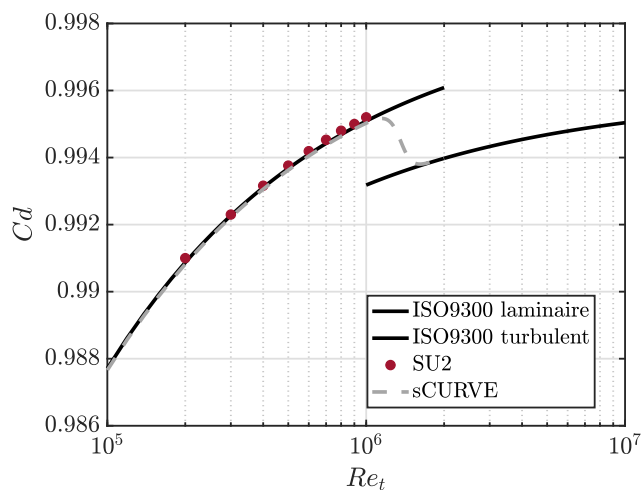


FIGURE C39 – Coefficient de décharge de la tuyère  $R = 2D$ .

Le coefficient de décharge est ici un bon critère pour mesurer la qualité de nos simulations, puisqu'il permet à la fois de prendre en compte la couche limite et la déformation de la ligne sonique dans le col de la tuyère.

Finalement, nous profitons des données produites par simulation numérique pour observer que les profils de couches limites obtenus au col de la tuyère sont proches de

ceux obtenus avec le modèle analytique proposé par Geropp (1971), comme montré sur la figure C40.

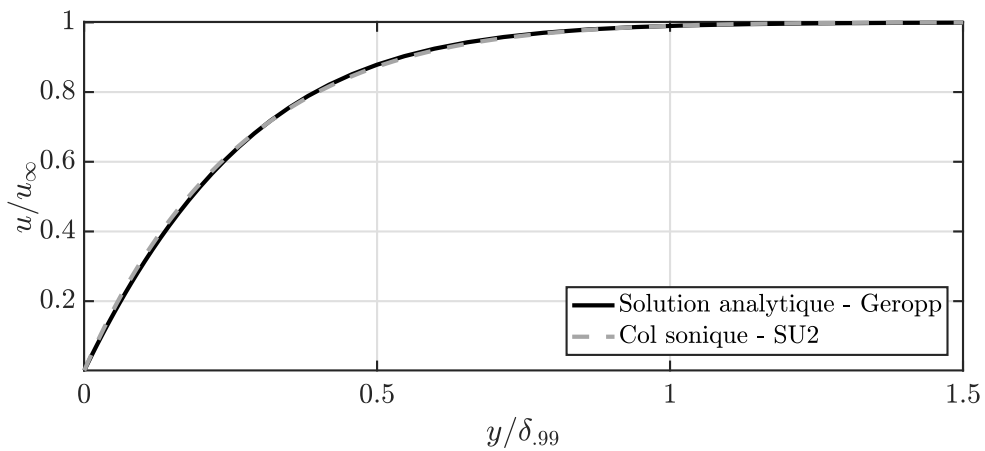


FIGURE C40 – Profil de vitesse de la couche limite au col de la tuyère  $R = 2D$ .

Malgré les simplifications faites pour obtenir une solution analytique, nous voyons que l'accord sur les profils de vitesse est remarquable. Nous concluons alors que les choix numériques qui sont réalisés sont pertinents pour obtenir des profils de couches limites au col des tuyères.

## D CONTRIBUTEURS NOTABLES

### D.1 *Installation expérimentale*

#### *Fonctionnement général de l'installation expérimentale*

L'installation expérimentale S150 de l'Institut Pprime et l'ensemble des systèmes permettant son fonctionnement sont entretenus par le personnel de la plateforme Prometee, qui compte un bureau d'étude composé d'ingénieurs et de techniciens. Ce travail de thèse s'est effectué en collaboration avec le personnel responsable de la plateforme pour répondre aux besoins techniques associés à la recherche effectuée dans le cadre de ce projet.

#### *Section d'essai*

La section d'essai utilisée dans le cadre de ce projet a été développée en collaboration avec le bureau d'études de l'entreprise CESAME-EXADEBIT, qui a assuré le dimensionnement structurel et la fabrication de la veine d'essai.

Les accès optiques pour la strioscopie et les mesures infrarouges, incluant le dimensionnement, la fabrication en sous-traitance et le montage, ainsi que la fabrication, la caractérisation et le montage des tuyères, est un travail réalisé par Bruno Zebrowski.

### D.2 *Code de stabilité*

Le code de calcul développé pour étudier la stabilité spatiale de couches limites a été développé spécifiquement pour cette étude. Il est le fruit d'une collaboration entre

- Dr. Eduardo Martini, ayant implémenté les équations de Navier-Stokes compressibles linéarisées pour des couches limites de plaque plane, la résolution des équations de la couche limite de Blasius compressible, la méthode de discrétisation et le solveur du problème aux valeurs propres en formulation temporelle et spatiale.
- Bruno Zebrowski, ayant implémenté les équations de Navier-Stokes compressibles linéarisées en coordonnées cylindriques, puis de plaque plane avec prise en compte de la force centrifuge, la croissance transitoire spatiale et les équations de couches limites de Geropp (1971) pour les tuyères.

La validation du code de calcul a été possible grâce aux données fournies par Dr. Iván Padilla Montero.

---

 BIBLIOGRAPHIE
 

---

- AGARD, éd. (1997). *Sonic Nozzles for Mass Flow Measurement and Reference Nozzles for Thrust Verification*. AGARD Advisory Report 321. AGARD.
- Alfredsson, P. et Matsubara, M. (2000). « Free-Stream Turbulence, Streaky Structures and Transition in Boundary Layer Flows ». In : *Fluids 2000 Conference and Exhibit*. Fluids 2000 Conference and Exhibit. Denver, CO, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Andersson, P., Berggren, M. et Henningson, D. S. (1999). « Optimal Disturbances and Bypass Transition in Boundary Layers ». In : *Physics of Fluids* 11.1, p. 134–150.
- Andersson, P., Brandt, L., Bottaro, A. et Henningson, D. S. (2001). « On the Breakdown of Boundary Layer Streaks ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 428, p. 29–60.
- Arnal, D. (1992). In : *Numerical Simulation of Unsteady Flows and Transition to Turbulence*. Sous la dir. d'O. Pironneau, W. Rodi, I. L. Ryhming, A. M. Savill et T. V. Truong. Cambridge University Press. Chap. Transition Description and Prediction, p. 303–316.
- Arnal, D. et Jullien, J. C. (1978). *Contribution Experimentale à l'Étude de la Réceptivité d'une Couche Limite Laminaire, à la turbulence de l'Écoulement General*. ONERA Rapport Technique No. 1/5018 AYD. ONERA.
- Arnal, D., Saric, W. et Reed, H. L. (1994). *Special Course on Progress in Transition Modelling : At the Universidad Politecnica de Madrid, Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Aeronauticos, Madrid, Spain, 22nd - 25th March 1993 and at the VKI, Rhodes-Saint-Genève, Belgium, 29th March - 1st April 1993 = Progrès Dans La Modélisation de La Transition*. AGARD Report 793. Neuilly-sur-Seine : AGARD. 276 p.
- Arnberg, B. T. (1962). « Review of Critical Flowmeters for Gas Flow Measurements ». In : *Journal of Basic Engineering* 84.4, p. 447–457.
- Arnberg, B. T., Britton, C. L. et Seidl, W. F. (1974). « Discharge Coefficient Correlations for Circular-Arc Venturi Flowmeters at Critical (Sonic) Flow. » In : *Journal of Fluids Engineering* 92.2, p. 111–123.
- Baker, C. J. (1979). « The Laminar Horseshoe Vortex ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 95.2, p. 347–367.
- Bernardini, M., Pirozzoli, S., Orlandi, P. et Lele, S. K. (2014). « Parameterization of Boundary-Layer Transition Induced by Isolated Roughness Elements ». In : *AIAA Journal* 52.10, p. 2261–2269.
- Bers, A. (1983). « Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective ». In : *Basic plasma physics*. T. 1. Amsterdam : North-Holland.
- Biot, M. A. (1957). « General Theorems on the Equivalence of Group Velocity and Energy Transport ». In : *Phys. Rev.* 105 (4), p. 1129–1137.

- Blasius, H. (1908). « Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung ». In : *Z Math. Phys.* 56, p. 1–37.
- Blumer, C. B. et Van Driest, E. R. (1963). « Boundary Layer Transition - Freestream turbulence and Pressure Gradient Effects ». In : *AIAA Journal* 1.6, p. 1303–1306.
- Brandt, L., Schlatter, P. et Henningson, D. S. (2004). « Transition in boundary layers subject to free-stream turbulence ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 517, p. 167–198.
- Briggs, R. J. (1964). *Electron-stream interaction with plasmas*. Rapp. tech. MIT Press.
- Butler, K. M. et Farrell, B. F. (1992). « Three-dimensional Optimal Perturbations in Viscous Shear Flow ». In : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 4.8, p. 1637–1650.
- Celep, M. (2019). « Numerical Prediction of Flow Structure in Venturi Nozzles ». Mém.de mast. École Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique.
- Chu, B.-T. (1965). « On the Energy Transfer to Small Disturbances in Fluid Flow (Part I) ». In : *Acta Mechanica* 1.3, p. 215–234.
- Clark, J. P., Jones, T. V. et LaGraff, J. E. (1994). « On the Propagation of Naturally-Occurring Turbulent Spots ». In : *Journal of Engineering Mathematics* 28.1, p. 1–19.
- Cossu, C. et Brandt, L. (2002). « Stabilization of Tollmien–Schlichting Waves by Finite Amplitude Optimal Streaks in the Blasius Boundary Layer ». In : *Physics of Fluids* 14.8, p. L57–L60.
- Cuffel, R. F., Back, L. H. et Massier, P. F. (1969a). « Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature. » In : *AIAA Journal* 7.7, p. 1364–1366.
- Cuffel, R. F., Back, L. H. et Massier, P. F. (1969b). « Transonic flowfield in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature. » In : *AIAA Journal* 7.7, p. 1364–1366.
- Demetriades, A. (1981). « Roughness Effects on Boundary-Layer Transition in a Nozzle Throat ». In : *AIAA Journal* 19.3, p. 282–289.
- Ellingsen, T. et Palm, E. (1975). « Stability of Linear Flow ». In : *Physics of Fluids* 18.4, p. 487.
- Fedorov, A. (2011). « Transition and Stability of High-Speed Boundary Layers ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1, p. 79–95.
- Fedorov, A. et Tumin, A. (2011). « High-Speed Boundary-Layer Instability : Old Terminology and a New Framework ». In : *AIAA Journal* 49.8, p. 1647–1657.
- Fischer, M. C. (1972). « Spreading of a Turbulent Disturbance ». In : *AIAA Journal* 10.7, p. 957–959.
- Floryan, J. M. (1986). « Görtler Instability of Boundary Layers over Concave and Convex Walls ». In : *Physics of Fluids* 29.8, p. 2380.
- Floryan, J. M. (1991). « On the görtler instability of boundary layers ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 28.3, p. 235–271.
- Fransson, J. H. M. et Shahinfar, S. (2020). « On the effect of free-stream turbulence on boundary-layer transition ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 899, A23.
- Fransson, J. H. M., Brandt, L., Talamelli, A. et Cossu, C. (2004). « Experimental and Theoretical Investigation of the Nonmodal Growth of Steady Streaks in a Flat Plate Boundary Layer ». In : *Physics of Fluids* 16.10, p. 3627–3638.



- Fransson, J. H. M., Brandt, L., Talamelli, A. et Cossu, C. (2005). « Experimental Study of the Stabilization of Tollmien–Schlichting Waves by Finite Amplitude Streaks ». In : *Phys. Fluids*, p. 16.
- Fransson, J. H. M., Brandt, L., Talamelli, A. et Cossu, C. (2006). « Delaying Transition to Turbulence by a Passive Mechanism ». In : *Physical Review Letters* 96.6, p. 064501.
- Geropp, D. (1971). *Laminare Grenzschichten in ebenen und rotationssymmetrischen Lavalduesen*. Rapp. tech. Deutsche Luft-und Raumfahrt Forschungsbericht.
- Gustavsson, L. H. (1991). « Energy Growth of Three-Dimensional Disturbances in Plane Poiseuille Flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 224, p. 241–260.
- Görtler, H. (1941). « Instabilität umt laminarer Grenzschichten an Konkaven Wiinden gegenüber gewissen dreidimensionalen Störungen ». In : *ZAMM* 21, p. 250–252.
- Görtler, H. (1954). *On The Three-Dimensional Instability Of Laminar Boundary Layers On Concave Walls*. NACA TM 1375. NACA.
- Hall, I. M. (1962). « Transonic Flow In Two-Dimensional and Axially-Symmetric Nozzles ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 15.4, p. 487–508.
- Hall, P. (1990). « Görtler vortices in growing boundary layers : The leading edge receptivity problem, linear growth and the nonlinear breakdown stage ». In : *Mathematika* 37.2, p. 151–189.
- Hanifi, A., Schmid, P. J. et Henningson, D. S. (1996). « Transient Growth in Compressible Boundary Layer Flow ». In : *Physics of Fluids* 8.3, p. 826–837.
- Herbert, T. (1988). « Secondary Instability of Boundary Layers ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 20.487-586.
- Herbert, T. (1997). « Parabolized Stability Equations ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 29.1, p. 245–283.
- Huerre, P. et Monkewitz, P. A. (1985). « Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 159, p. 151–168.
- Huerre, P. et Monkewitz, P. A. (1990). « Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 22.1, p. 473–537.
- ISO9300 (2005). *Measurement of gas flow by means of critical flow Venturi nozzles*. Standard. Geneva, CH : International Organization for Standardization.
- Ingen, J. L. v. (1956). « A Suggested Semi-empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. » In : *VTH-74*.
- Ishibashi, M. (2015). « Discharge Coefficient Equation for Critical-Flow Toroidal-Throat Venturi Nozzles Covering the Boundary-Layer Transition Regime ». In : *Flow Measurement and Instrumentation* 44, p. 107–121.
- Jordan, P., Zhang, M., Lehnasch, G. et Cavalieri, A. V. (2017). « Modal and Non-Modal Linear Wavepacket Dynamics in Turbulent Jets ». In : *23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Denver, Colorado : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Karp, M. et Hack, M. J. P. (2018). « Transition to Turbulence over Convex Surfaces ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 855, p. 1208–1237.

- Kelvin, L. (1888). « Stability of Fluid Motion : Rectilineal Motion of Viscous Fluid between two Parallel Planes ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 14, p. 359–368.
- Kendall, J. (1985). « Experimental Study of Disturbances Produced in a Pre-Transitional Laminar Boundary Layer by Weak Freestream Turbulence ». In : *18th Fluid Dynamics and Plasmadynamics and Lasers Conference*. 18th Fluid Dynamics and Plasmadynamics and Lasers Conference. Cincinnati, OH, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Klebanoff, P. S. (1971). « Effect of free stream turbulence on a laminar boundary layer ». In : *Bulletin of the American Physical Society* 16.8, p. 203–216.
- Kliegel, J. R. et Levine, J. N. (1969a). « Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles. » In : *AIAA Journal* 7.7, p. 1375–1378.
- Kliegel, J. R. et Levine, J. N. (1969b). « Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles. » In : *AIAA Journal* 7.7, p. 1375–1378.
- Lambert, M. A., Maury, R., Lehnasch, G., Foucault, E. et Valière, J.-C. (2021). « Experimental Investigations on cylindrical critical flow Venturi nozzles with roughness ». In : *Flow Measurement and Instrumentation* 81.
- Lambert, M. A., Maury, R., Valière, J.-C., Foucault, E. et Lehnasch, G. (2019). « Experimental and Numerical Investigations on the Shape and Roughness of Cylindrical Critical Flow Venturi Nozzles (CFVN) ». In : *19th International Congress of Metrology (CIM2019)*. 19th International Congress of Metrology (CIM2019). Sous la dir. de S. Gazal. Paris, France : EDP Sciences, p. 17003.
- Landahl, M. T. (1980). « A Note on an Algebraic Instability of Inviscid Parallel Shear Flows ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 98.2, p. 243–251.
- Lees, L. et Lin, C. C. (1946). *Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer*. NACA-TN-1115. National Advisory Committee for Aeronautics ; Washington, DC, United States.
- Liepmann, H. W. (1943a). *Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries*. NACA Wartime Report W-107. NACA.
- Liepmann, H. W. (1943b). *Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries*. ARC-RM-7302. ARC.
- Loiseau, J.-C., Robinet, J.-C., Cherubini, S. et Leriche, E. (2014). « Investigation of the Roughness-Induced Transition : Global Stability Analyses and Direct Numerical Simulations ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 760, p. 175–211.
- Losson, L. (2022). *Natural gas consumption posted a strong post-lockdowns recovery in 2021*. <https://www.cedigaz.org/natural-gas-consumption-posted-a-strong-post-lockdowns-recovery-in-2021/>. Accessed on 2022-09-20.
- Luchini, P. (2000). « Reynolds-Number-Independent Instability of the Boundary Layer over a Flat Surface : Optimal Perturbations ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 404, p. 289–309.
- Luchini, P. (1996). « Reynolds-Number-Independent Instability of the Boundary Layer over a Flat Surface ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 327, p. 101–115.

- Ma, Y. et Zhong, X. (2003). « Receptivity of a Supersonic Boundary Layer over a Flat Plate. Part 2. Receptivity to Free-Stream Sound ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 488, p. 79–121.
- Mack, L. M. (1975). « Linear Stability Theory and the Problem of Supersonic Boundary-Layer Transition ». In : *AIAA Journal* 13.3, p. 278–289.
- Mack, L. (1984). « Boundary layer stability theory ». In : *AGARD Report No. 709 : Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow*. AGARD.
- Martini, E., Caillaud, C., Schmidt, O., Lehnasch, G. et Jordan, P. (2022). « Non-Modal Mechanisms in the Flow over the Leading Edge of Blunt Bodies ». In : *Proceedings of the 12th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP12)*. 12th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP12). Osaka, Japan.
- Masad, J. A. et Zurigat, Y. H. (1994). « Effect of Pressure Gradient on First Mode of Instability in Compressible Boundary Layers ». In : *Physics of Fluids* 6.12, p. 3945–3953.
- Matsubara, M. et Alfredsson, P. H. (2001). « Disturbance Growth in Boundary Layers Subjected to Free-Stream Turbulence ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 430, p. 149–168.
- Morkovin, M. V. (1969). *Critical Evaluation of Transition From Laminar To Turbulent Shear Layers With Emphasis On Hypersonically Traveling Bodies*. Technical Report AFFDL-TR-68-149. Research Institute for Advanced Studies, p. 153.
- Morkovin, M. V., Reshotko, E. et Herbert, T. (1994). « Transition in Open Flow Systems - a Reassessment ». In : *Bulletin of the American Physical Society* 39.9.
- Obremski, H. J., Morkovin, M. V., Landahl, M., Wazzan, A. R., Okamura, T. T. et Smith, A. M. O. (1969). « A portfolio of stability characteristics of incompressible boundary layers ». In : *AGARD Report No. 134*. AGARD.
- Orr, W. M. (1907). « The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid. Part I : A Perfect Liquid ». In : *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences* 27.1, p. 9–68.
- Oswatitsch, K. et Rothstein, W. (1949). *Flow pattern in a converging-diverging nozzle*. NACA TM 1147. Translation of "Allgemeine Eigenschaften der Strömung durch Düsen in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit" - Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht N.1992. NACA.
- Pack, D. C. (1950). « A Note On Prandtl's Formula For The Wave-Length of a Supersonic Gas Jet ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 3.2, p. 173–181.
- Paredes, P., Choudhari, M. M. et Li, F. (2017). « Blunt-Body Paradox and Transient Growth on a Hypersonic Spherical Forebody ». In : *Physical Review Fluids* 2.5.
- Park, K. A., Choi, Y. M., Choi, H. M., Cha, S., T. et H., Y. B. (2001). « The evaluation of critical pressure ratios of sonic nozzles at low Reynolds numbers ». In : *Flow Measurement and Instrumentation* 12, p. 37–41.
- Piot, E., Casalis, G. et Rist, U. (2008). « Stability of the Laminar Boundary Layer Flow Encountering a Row of Roughness Elements : Biglobal Stability Approach and DNS ». In : *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 27.6, p. 684–706.

- Rayleigh, L. (1879). « On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-11.1, p. 57–72.
- Rayleigh, L. (1887). « On the Stability or Instability of certain Fluid Motions, II ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-19.1, p. 67–75.
- Rayleigh, L. (1895). « On the Stability or Instability of certain Fluid Motions, III ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-27.1, p. 5–12.
- Reddy, S. C. et Henningson, D. S. (1993). « Energy Growth in Viscous Channel Flows ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 252, p. 209–238.
- Reed, H. L., Saric, W. S. et Arnal, D (1996). « Linear Stability Theory Applied to Boundary Layers ». In : p. 40.
- Reshotko, E. et Tumin, A. (2000). « The Blunt Body Paradox — A Case for Transient Growth ». In : *Laminar-Turbulent Transition*. Sous la dir. de H. F. Fasel et W. S. Saric. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 403–408.
- Reshotko, E. et Tumin, A. (2004). « Role of Transient Growth in Roughness-Induced Transition ». In : *AIAA Journal* 42.4, p. 766–770.
- Reynolds, O. (1883). « An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. » In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 174, p. 935–982.
- Ribner, H. S. et Tucker, M. (1952). *Spectrum of Turbulence in a Contracting Stream*. NACA TN 2606. NACA.
- Rienstra, S. (2015). *Fundamentals of duct acoustics : notes of course "Progress in Simulation, Control and Reduction of Ventilation Noise", November 16-18, 2015*.
- Saric, W. S. (1994). « Görtler Vortices ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 26.1, p. 379–409.
- Saric, W. S., Reed, H. L. et White, E. B. (2003). « Stability and Transition of Three-Dimensional Boundary Layers ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 35.1, p. 413–440.
- Sauer, R. (1947). *General characteristics of the flow through nozzles at near critical speeds*. NACA TM 1147. Translation of "Das Strömungsfeld in einer Lavaldüse" - Jahrbuch 1942 Luftfahrtforschung. NACA.
- Schlichting, H. (1933). « Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung ». In : *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, p. 181–208.
- Schlichting, H. et Gersten, K. (2017a). Ninth Edition. Springer Berlin, Heidelberg.
- Schlichting, H. et Gersten, K. (2017b). « Stability and Transition ». In : *Boundary-Layer Theory*. Ninth Edition. Springer Berlin, Heidelberg. Chap. 10, p. 242–265.
- Schmid, P. J. et Henningson, D. S. (2001). *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer New York, NY.
- Schmid, P. J. (2007). « Nonmodal Stability Theory ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 39.1, p. 129–162.
- Settles, G. S. (2001). *Schlieren and Shadowgraph Techniques*. Springer Berlin, Heidelberg, p. XVIII, 376.

- Sibulkin, M. (1957). « Boundary-layer measurements at supersonic nozzle throats. » In : *Journal of Aerosol Science* 24.4, p. 249–252.
- Smith, A. M. O. et Gamberoni, N. (1956). *Transition, Pressure Gradient and Stability Theory*. Technical Report ES-26388. Douglas Aircraft Company.
- Smith, R. E. et Matz, R. J. (1962). « A Theoretical Method of Determining Discharge Coefficients for Venturis Operating at Critical Flow Conditions ». In : *Journal of Basic Engineering* 84.4, p. 434–445.
- Squire, H. B. (1933). « On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 142.847, p. 621–628.
- « Stability and Transition » (2013). In : *Incompressible Flow*. John Wiley & Sons, Ltd. Chap. 25, p. 737–771.
- Stokes, G. (1843). « On some cases of fluid motion. » In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 8, p. 105–137.
- Stratford, B. S. (1964). « The Calculation of the Discharge Coefficient of Profiled Choked Nozzles and the Optimum Profile for Absolute Air Flow Measurement ». In : *The Journal of the Royal Aeronautical Society* 68.640, p. 237–245.
- Szanişzlo, A. J. (1975). « Experimental and analytical sonic nozzle discharge coefficients for Reynolds numbers up to  $8 \times 10^6$  ». In : *Journal of Engineering for Power* 97.4, p. 521–525.
- Tempelmann, D., Hanifi, A. et Henningson, D. S. (2012). « Spatial Optimal Growth in Three-Dimensional Compressible Boundary Layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 704, p. 251–279.
- Tollmien, W. (1929). « Über die Entstehung der Turbulenz ». In : *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 21–44.
- Trefethen, L. N., Trefethen, A. E., Reddy, S. C. et Driscoll, T. A. (1993). « Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues ». In : *Science* 261.5121, p. 578–584.
- Tropea, C., Yarin, A. et Foss, J. (2007). *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*.
- Tsugé, S. (1984). « Effects of Flow Contraction on Evolution of Turbulence ». In : *Physics of Fluids* 27.8, p. 1948.
- Tullio, N. D., Paredes, P., Sandham, N. D. et Theofilis, V. (2013). « Laminar–Turbulent Transition Induced by a Discrete Roughness Element in a Supersonic Boundary Layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 735, p. 613–646.
- Tumin, A. (2007). « Three-Dimensional Spatial Normal Modes in Compressible Boundary Layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 586, p. 295–322.
- Tumin, A. et Reshotko, E. (2001). « Spatial Theory of Optimal Disturbances in Boundary Layers ». In : *Physics of Fluids* 13.7, p. 2097–2104.
- Tumin, A. et Reshotko, E. (2004). « Optimal Disturbances in the Boundary Layer over a Sphere ». In : *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Portland, Oregon : American Institute of Aeronautics and Astronautics.

- Tyndall, F. R. S. (1867). « On the action of sonorous vibrations on gaseous and liquid jets ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 33.224, p. 375–391.
- Van Ingen, J. (2008). « The eN Method for Transition Prediction. Historical Review of Work at TU Delft ». In : *38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Seattle, Washington : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Vaughan, N. J. et Zaki, T. A. (2011). « Stability of Zero-Pressure-Gradient Boundary Layer Distorted by Unsteady Klebanoff Streaks ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 681, p. 116–153.
- Westin, K. J. A., Boiko, A. V., Klingmann, B. G. B., Kozlov, V. V. et Alfredsson, P. H. (1994). « Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part 1. Boundary layer structure and receptivity ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 281, p. 193–218.
- Zanchetta, M. (1996). « Kinetic Heating and Transition Studies at Hypersonic Speeds ». London : Imperial College.
- Zhao, Y. et Sandberg, R. D. (2020). « Bypass Transition in Boundary Layers Subject to Strong Pressure Gradient and Curvature Effects ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 888.
- Zuccher, S., Tumin, A. et Reshotko, E. (2006). « Parabolic Approach to Optimal Perturbations in Compressible Boundary Layers ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 556, p. 189.
- Özgen, S. et Kırçalı, S. A. (2008). « Linear Stability Analysis in Compressible, Flat-Plate Boundary-Layers ». In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 22.1, p. 1–20.



**Titre :** Étude de la transition laminaire-turbulent de couches limites dans les tuyères soniques de débitmétrie

**Résumé :** La débitmétrie gazeuse haute pression présente des enjeux majeurs pour un grand nombre de procédés industriels. En particulier, la mesure de précision des volumes échangés lors du transport de gaz, tel que le gaz naturel ou l'hydrogène, est parmi les applications les plus importantes compte tenu des volumes en jeu aux échelles industrielles. Les débitmètres de références pour ces mesures sont des tuyères convergentes-divergentes en régime critique, utilisées comme étalon sur des bancs de calibration. La confiance dans la mesure du débit par des tuyères étalons est établie sur des mesures empiriques complétées par des modèles qui reposent sur nos connaissances de l'aérodynamique de ces mêmes tuyères. Le développement d'une couche limite, entre autres, est un facteur qui influence considérablement le débit d'une tuyère. Lors de l'utilisation des tuyères dans différents régimes de fonctionnement, la couche limite peut se trouver dans un état laminaire ou turbulent. Si la modélisation de chacun de ces régimes dans les tuyères est aujourd'hui avancée, la transition d'un régime à l'autre reste inexplorée et cause une incertitude quant au choix du modèle de couche limite à utiliser pour des conditions de fonctionnement données.

Cette étude vise à comprendre les mécanismes de transition en jeu dans les tuyères pour établir les fondamentaux permettant d'identifier et modéliser les régimes de transition. Dans un premier temps, une campagne expérimentale est conduite pour identifier le rôle de la forme et de l'état de surface des tuyères sur la transition. Nous montrons que si dans certains cas la transition est induite par la rugosité de surface, ce n'est pas le cas pour les tuyères dont l'état de surface suit les standards industriels. Pour ces dernières, la géométrie et le bruit naturellement présent dans l'écoulement jouent un rôle déterminant dans l'occurrence de la transition. Dans un second temps, nous utilisons les outils de la stabilité linéaire des écoulements pour montrer que le mécanisme de transition est associé à la croissance non-modale de perturbations présentes dans l'écoulement. Cette croissance transitoire est modulée par la force centrifuge qui s'exerce due à la courbure de la paroi des tuyères, conduisant à des stries instationnaires. Finalement, un modèle de transition est établi en s'appuyant sur l'étude de stabilité et les résultats expérimentaux.

**Mots clés :** Tuyères supersoniques, Couche limite laminaire, Couche limite turbulente, Stabilité, Croissance transitoire, Compressibilité, Bruit aérodynamique, Écoulement instationnaire (dynamique des fluides), Rugosité, Lois de parois

---

**Title :** Boundary layer transition in flowmeter nozzles

**Abstract :** Measurement of high-pressure gas flow presents major challenges for many industrial processes. In particular, the accurate measurement of volumes exchanged during the transport of gases, such as natural gas or hydrogen, is among the most important applications given the volumes involved at industrial scales. The reference flow meters for these measurements are convergent-divergent nozzles in critical regime, used as standard on calibration benches. The confidence in the flow measurement by standard nozzles is established on empirical measurements complemented by models based on our knowledge of the aerodynamics of these nozzles. Among other things, the development of a boundary layer is a factor that considerably influences the flow rate of a nozzle. When using nozzles in different operating regimes, the boundary layer can be in a laminar or turbulent state. While modelling of each of these regimes is now advanced, the transition from one regime to the other remains unexplored in nozzles and causes uncertainty as to which boundary layer model to use for given operating conditions.

This study aims at understanding the transition mechanisms at play in nozzles in order to establish the fundamentals to identify and model the transition regimes. First, an experimental campaign is conducted to identify the role of the shape and the surface condition of the nozzles on the transition. We show that if in some cases the transition is induced by the surface roughness, it is not the case for nozzles whose surface condition follows the industrial standards. For the latter, the geometry and the noise naturally present in the flow play a determining role in the occurrence of transition. In a second step, we use the tools of linear stability of flows to show that the transition mechanism is associated with the non-modal growth of disturbances present in the flow. This transient growth is modulated by the centrifugal force due to the curvature of the nozzle wall, leading to unsteady streaks. Finally, a transition model is established based on the stability study and the experimental results.

**Key words :** Supersonic nozzles, Laminar boundary layer, Turbulent boundary layer, Stability, Transient growth, Compressibility, Aerodynamic noise, Unsteady flow (Fluid dynamics)