



HAL
open science

Développement de différentes méthodes pour la prise en compte de couches limites turbulentes non-homogènes dans les simulations vibro-acoustiques

Corentin Guillon

► **To cite this version:**

Corentin Guillon. Développement de différentes méthodes pour la prise en compte de couches limites turbulentes non-homogènes dans les simulations vibro-acoustiques. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022ISAL0079 . tel-04104727

HAL Id: tel-04104727

<https://theses.hal.science/tel-04104727>

Submitted on 24 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2022ISAL0079

**THÈSE de DOCTORAT DE L'INSA DE LYON,
membre de l'Université de Lyon**

**École doctorale N° 162
Mécanique - Énergétique - Génie civil - Acoustique**

Spécialité de doctorat : Acoustique

Soutenue publiquement le 06/10/2022, par :
Corentin Guillon

**Développement de différentes méthodes
pour la prise en compte de couches
limites turbulentes non-homogènes
dans les simulations vibro-acoustiques**

Devant le jury composé de :

Totaro, Nicolas	Professeur, INSA Lyon	Président
Perrey-Debain, Emmanuel	Professeur, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
Berry, Alain	Professeur, Université de Sherbrooke	Rapporteur
Gobert, Marie-Laure	Maître de conférences, INSA Centre Val de Loire	Examinatrice
Maxit, Laurent	Maître de conférences HDR, INSA Lyon	Directeur de thèse
Redon, Emmanuel	Maître de conférences, Université de Bourgogne	Encadrant

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<p><u>CHIMIE DE LYON</u> https://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr</p>	<p>M. Stéphane DANIELE C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne directeur@edchimie-lyon.fr</p>
E.E.A.	<p><u>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> https://edeea.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Philippe DELACHARTRE INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 philippe.delachartre@insa-lyon.fr</p>
E2M2	<p><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u> http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</p>	<p>Mme Sandrine CHARLES Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX sandrine.charles@univ-lyon1.fr</p>
EDISS	<p><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</u> http://ediss.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</p>	<p>Mme Sylvie RICARD-BLUM Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</p>
INFOMATHS	<p><u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u> http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr</p>	<p>M. Hamamache KHEDDOUCI Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</p>
Matériaux	<p><u>MATÉRIAUX DE LYON</u> http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr</p>	<p>M. Stéphane BENAYOUN Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 stephane.benayoun@ec-lyon.fr</p>
MEGA	<p><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Jocelyn BONJOUR INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</p>
ScSo	<p><u>ScSo*</u> https://edsciencessociales.universite-lyon.fr Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr</p>	<p>M. Bruno MILLY Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 bruno.milly@univ-lyon2.fr</p>

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Cette thèse est accessible à l'adresse : <https://theses.insa-lyon.fr/publication/2022ISAL0079/these.pdf>

Remerciements

Cette thèse a commencé le 1^{er} octobre 2018 et s'est achevée 4 ans plus tard. Elle a été effectuée au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon et été financée par une bourse du Ministère des Armées, via la Direction Générale de l'Armement et l'Agence Innovation Défense. Ce travail, comme toute production scientifique, est un travail collaboratif que je n'aurais pu accomplir seul.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Laurent Maxit et Emmanuel Redon, pour m'avoir encadré durant ce long travail, pour leur disponibilité, les nombreux retours et les fréquents entretiens dont j'ai pu bénéficier. J'ai progressé en rigueur dans mon travail et en capacité de synthèse auprès d'eux, grâce à leur suivi régulier et leurs conseils.

Je remercie également les rapporteurs et examinateur-rices d'avoir accepté de participer à mon jury et pris le temps de lire et commenter mon manuscrit. J'ai pu apporter certains éclaircissements à ce manuscrit suite à leurs retours.

Je remercie encore les post-docs, doctorant-es et stagiaires que j'ai pu rencontrer et côtoyer au laboratoire (ielles sont trop nombreuses pour être citées) et également en dehors. La vie de labo n'aurait pas été la même sans leur contact et surtout sans les grilles de mots-croisés, parties de fléchettes, de Puissance 4 et bien d'autres.

Je remercie enfin les permanent-es du laboratoire, pour leur accueil et l'excellent cadre qu'a été le LVA durant ma thèse.

Résumé

Résumé étendu

L'objectif de cette thèse est de développer des approches permettant de prendre en compte l'évolution spatiale de la couche limite turbulente (CLT) dans les calculs prédisant le comportement vibro-acoustique de structures déformables excitées par un écoulement. L'application finale visée est la prédiction du bruit rayonné par les pales d'un propulseur de véhicule sous-marin. Or, les modèles vibro-acoustiques disponibles dans la littérature scientifique, généralement employés pour des structures de grandes dimensions et faibles courbure, font l'hypothèse de CLT uniformément développées et homogènes. Pour notre application, la rapide croissance de la CLT, déclenchée au bord d'attaque de la pale, doit être prise en compte dans les calculs.

En repartant de cas de plaques planes excitées par des CLT homogènes et à l'aide de données expérimentales, les méthodes existantes ont été adaptées aux CLT non-homogènes, en réalisant certaines hypothèses. D'abord, la faible corrélation spatiale du champ de pressions pariétales sous la CLT est exploitée afin de formuler une première approche en espace. En passant dans le domaine des nombres d'onde par transformée de Fourier, le problème est traité en découpant la surface excitée en plusieurs zones décorrélées sur lesquelles on suppose des CLT localement homogènes. Pour se passer de l'hypothèse de décorrélation et améliorer la précision de l'approche, une variante est proposée en ajoutant des termes d'interaction entre les zones voisines. Le découpage doit cependant vérifier, pour chacune de ces approches, un critère basé sur la longueur de cohérence des champs de pression. Une dernière approche, basée sur la synthèse des champs de pression par une série d'ondes planes pariétales décorrélées (OPPD), est adaptée pour des CLT non-homogènes. La méthode est d'abord formulée en conservant le principe de découpage en zones, avant de présenter une variante permettant de traiter l'évolution de la CLT de manière continue (C-OPPD). Cette dernière méthode est particulièrement adaptée aux simulations numériques, car le champ de pressions synthétisées peut être directement appliqué aux nœuds d'un maillage éléments finis de la structure excitée. L'intérêt de la prise en compte de la variation spatiale des paramètres de CLT est mis en avant, pour chacune des approches, pour le cas de la plaque plane mince d'épaisseur variable soumise à une CLT déclenchée sur l'arrête amont.

Dans le dernier chapitre, on applique la méthode C-OPPD à un cas de pale de propulseur simplifiée, placée en eau, excitée par une CLT non-homogène et rayonnant dans un milieu infini. Les

paramètres de la CLT sur le profil sont déterminés par une simulation sur le logiciel XFOIL et le problème est modélisé par éléments finis, en prenant en compte l'effet de couplage entre le fluide lourd et la structure déformable. Pour cette application plus pratique, l'effet de masse ajoutée par le fluide est mis avant, ainsi que l'écart de rayonnement en champ lointain entre différents modes de déformation de la pale simplifiée.

Short abstract

This thesis focuses on computing the radiated sound field emitted by the blades of a submarine propeller. Numerical methods are developed to include the spatial evolution of the turbulent boundary layer (TBL) in calculations predicting the vibroacoustic behavior of viscoelastic structures excited by a flow. The rapid growth of the TBL triggered at the leading edge of submarine blades needs to be considered to enhance the vibroacoustic models found in the literature. These latter are based on uniformly developed homogeneous TBL and were designed for low curvature and large-scale structures. Considering flat rectangular plates, the existing methods have been customized to be used with non-homogeneous loadings, using some hypothesis. Firstly, in the space domain, by considering the weak spatial correlation of the wall pressure field (WPF), then in the wavenumber domain, by dividing the excited surface in several sub-areas. The last presented method relies on the synthesis of pressure fields by sums of uncorrelated wall plane waves (UWPW) and allows to deal with the evolution of the TBL continuously (C-UWPW). The interest of considering the spatial variation of TBL parameters in the model is highlighted over the study of a thin plate with varying thickness loaded by a TBL triggered on its upstream edge. Finally, the C-UWPW method is applied to a real-case scenario : a simplified propeller blade placed in water, excited by a non-homogeneous TBL and radiating in a semi-infinite space. In this application, the TBL parameters are estimated using XFOIL and the coupling between the viscoelastic structure and the fluid is solved with finite element models.

Sommaire

Remerciements	5
Résumé	7
Nomenclature	13
Introduction	17
1 Étude bibliographique	21
1.1 Chargement par couche limite turbulente	21
1.1.1 Couche limite turbulente	21
1.1.1.1 Nombre de Reynolds et nombre de Mach	22
1.1.1.2 Paramètres de la couche limite turbulente	22
1.1.1.3 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes	24
1.1.1.4 Détermination des paramètres de CLT	24
1.1.2 Autospectres de fluctuation de pression pariétale	26
1.1.2.1 Fonctions de corrélation de pression pariétale	26
1.1.2.2 Forme générale de l'autospectre et loi d'échelle	27
1.1.2.3 Différents modèles d'autospectres	28
1.1.2.4 Comparaison des modèles	30
1.1.3 Interspectres de fluctuations de pression pariétale	32
1.1.3.1 Description générale du spectre	33
1.1.3.2 Vitesse de convection	34
1.1.3.3 Différents modèles d'interspectre	35
1.1.3.4 Comparaison des modèles	41
1.2 Vibrations de structures excitées par une CLT	42
1.2.1 Excitation par CLT dans un modèle vibratoire	42
1.2.1.1 Méthode spatiale	43
1.2.1.2 Méthode nombre d'onde	45
1.2.1.3 Méthode basée sur le principe de réciprocité	46
1.2.1.4 Méthodes des ondes planes pariétales décorrélées	46
1.2.1.5 ROF : rain on the roof	47
1.2.1.6 Lois de similitude	48

1.2.2	Modèle analytique pour une plaque plane mince	49
1.2.3	Méthodes prédictives en vibration ou vibro-acoustique	50
1.2.3.1	Méthodes basses fréquences	50
1.2.3.2	Méthodes hautes et moyennes fréquences	52
1.2.4	Patch Transfer Function	54
1.3	Méthodologie de l'étude	55
2	Étude d'une plaque excitée par une CLT homogène	59
2.1	Cas d'application en air	59
2.1.1	Description du dispositif expérimental	60
2.1.2	Calcul numérique de la réponse vibratoire	62
2.1.3	Filtrage en nombre d'onde	64
2.1.4	Superposition modale : filtrage modal	65
2.1.5	Convergence de la méthode OPPD	67
2.1.5.1	Présentation de la méthode OPPD	67
2.1.5.2	Méthodes de Monte-Carlo	67
2.1.5.3	Application numérique	69
2.1.6	Comparaison du temps de calcul avec différents méthodes	69
2.2	Cas d'application en eau	71
2.2.1	Description du dispositif expérimental	71
2.2.2	Autospectres de FPP	72
2.2.3	Analyse modale en fluide lourd	74
2.2.4	Réponse vibratoire en fluide lourd	75
2.3	Conclusion	76
3	Évolution spatiale de la CLT : principe du découpage en zones	79
3.1	Avant-propos	79
3.2	Introduction	81
3.3	Flat plate excited by a homogeneous turbulent boundary layer	85
3.3.1	Formulation in the space domain	85
3.3.2	Formulation in the wavenumber domain	86
3.3.3	Analytical equations for a simply supported rectangular plate	87
3.4	Spatially varying boundary layer	89
3.4.1	Varying TBL in the space domain	89
3.4.2	Sub-area decomposition technique with uncorrelated sub-areas	90
3.4.3	Sub-area decomposition technique with corrective term	92
3.5	Numerical application with a homogeneous TBL	93
3.5.1	Presentation of the case	93
3.5.2	Wavenumber approach : influence of the convective peak	94
3.5.3	Spatial approach : validation of the assumption of weak spatial correlation	95
3.5.4	Definition of a criterion on the sub-area length	95
3.5.5	Methodology for extracting the criteria	97
3.5.6	Spatial white-noise excitation	98
3.5.7	TBL excitation	100
3.6	Illustration of application for a non-homogeneous TBL	100
3.6.1	The plate model	101
3.6.2	Analytical model of a turbulent boundary layer over a flat plate	102
3.6.3	Results	104
3.7	Conclusion	106

4	Évolution spatiale de la CLT par synthèse d'ondes planes	109
4.1	Avant-propos	109
4.2	Introduction	111
4.3	Reminder of different formulations for a panel excited by a homogeneous TBL	114
4.3.1	Spatial formulation	114
4.3.2	Wavenumber formulation	115
4.3.3	Uncorrelated wall planes waves method	116
4.4	Panel excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer	117
4.4.1	Spatial formulation	117
4.4.2	Wavenumber formulation : sub-area decomposition technique	118
4.4.3	Uncorrelated wall planes waves applied to the sub-area decomposition	119
4.5	Numerical applications	120
4.5.1	Turbulent boundary layer parameters	120
4.5.2	Pressure fields synthetized with the L-UWPW and G-UWPW methods	121
4.5.3	Plate vibratory model	125
4.5.4	Comparison of the vibratory response prediction	126
4.5.5	Panel with free edges : role of the convective peak	129
4.5.6	Influence of the non-homogeneity of the TBL	132
4.6	Conclusion	134
5	Application à la prédiction du rayonnement acoustique d'une pale droite immergée en eau	137
5.1	Validation de la procédure de calculs sous ACTRAN	138
5.1.1	Définition du cas test	138
5.1.2	Modélisation par éléments finis	140
5.1.3	Vitesse vibratoire	140
5.1.4	Rayonnement acoustique	141
5.2	Application à la prédiction du rayonnement d'une plaque immergée soumise à une CLT non-homogène	145
5.2.1	Plaque plane mince à épaisseur constante	145
5.2.1.1	Chargement par CLT	145
5.2.1.2	Vitesse vibratoire	145
5.2.1.3	Rayonnement acoustique	147
5.2.2	Plaque mince avec variation d'épaisseur	147
5.2.2.1	Analyse éléments finis	147
5.2.2.2	Vitesse vibratoire et rayonnement acoustique	149
5.2.2.3	Conclusion sur le modèle de la plaque plane	150
5.3	Application à la prédiction du rayonnement d'une pale immergée soumise à une CLT croissante depuis le bord d'attaque	152
5.3.1	Modélisation éléments finis	152
5.3.1.1	Modèle de pale	152
5.3.1.2	Domaine fluide extérieur	155
5.3.2	Excitation par CLT	155
5.3.2.1	Calculs hydrodynamiques avec XFOIL	155
5.3.2.2	Champs de pression appliqués	158
5.3.3	Résultats des simulations éléments finis	158
5.3.3.1	Vitesse vibratoire	158
5.3.3.2	Rayonnement	160
5.4	Conclusion	163
	Conclusion	165

A	Calculs vibratoires analytiques pour une plaque plane mince	169
A.1	Équations du mouvement	169
A.2	Réponse quadratique moyennée spatialement	171
B	Calculs de paramètres de CLT avec XFOIL	173
C	Compléments sur les cas présentés avec la méthode SDT	177

Nomenclature

Lettres latines

c	corde du profil
c_0	célérité des ondes acoustiques
D	rigidité en flexion
E	module d'Young
f	fréquence
f_{coinc}	fréquence de coïncidence aéro/hydrodynamique
h	épaisseur plaque
$H_v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \omega)$	fonction de transfert en vitesse
$\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)$	fonction de sensibilité en vitesse
$\mathbf{k} = (k_x, k_z)$	nombre d'onde de l'excitation
$k_0 = \omega/c_0$	nombre d'onde acoustique
$k_c = \omega/U_c$	nombre d'onde convectif
k_f	nombre d'onde de flexion
\tilde{k}_f	nombre d'onde de flexion de la plaque couplée
k_m, k_n	nombre d'onde modaux
\bar{k}	nombre d'onde de coupure
L_x, L_z	dimensions de la plaque
m, n	indices modaux
$\mathcal{M} = U_0/c_0$	nombre de Mach
M_{mn}	masse généralisée du mode (m, n)
N	nombre de zones
N_r	nombre de réalisations
p_b	pression bloquée
r	indice de réalisation
Re	nombre de Reynolds
$R_{pp}(\vec{\xi}, t)$	intercorrélation spatio-temporelle de pression bloquée

$S_{pp}(\vec{\xi}, \omega)$	intercorrélacion espace-fréquence de pression bloquée
$S_{pp}(\omega)$	autospectre de fluctuations de pression pariétale
$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega)$	autospectre de vitesse quadratique vibratoire
$\bar{S}_{vv}(\omega)$	autospectre de vitesse quadratique moyenne
U_0	vitesse d'écoulement libre fluide
U_c	vitesse de convection
U_e	vitesse externe de couche limite
$u_\tau = \sqrt{\tau/\rho_0}$	vitesse de cisaillement
$v(\mathbf{X}, \omega)$	vitesse vibratoire
$w(\mathbf{X}, \omega)$	déplacement normal
$W_{mn}(\mathbf{X})$	déformée modale du mode (m, n)

Lettres grecques

α_x, α_z	coefficients du modèle de Corcos
$\beta_C = (\theta/\tau)(dp)/(dx)$	paramètre de Clauser
$\Gamma(\vec{\xi}, \omega)$	fonction de cohérence des fluctuations de pression
δ	épaisseur de couche limite turbulente
δ^*	épaisseur de déplacement de couche limite turbulente
$\delta k_x, \delta k_z$	pas de discrétisation en nombre d'onde
$\delta x, \delta z$	pas de discrétisation en espace
ζ	indice de zone
η	taux d'amortissement
θ	moment d'épaisseur de couche limite turbulente
κ, μ	paramètre du nombre d'onde de coupure
$\lambda_c = U_c/\omega$	longueur d'onde de convection
$\lambda_f = 2\pi/k_f$	longueur d'onde de flexion
Λ_x, Λ_z	longueur de cohérence de l'interspectre
ν	viscosité cinématique
ν_P	coefficient de Poisson
$\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_z)$	séparation entre deux points
Π_r	puissance acoustique rayonnée
ρ_0	masse volumique fluide
ρ_p	masse volumique matériau
σ_r	efficacité de rayonnement
Σ	surface de la plaque
τ	contrainte de cisaillement à la paroi
$\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$	interspectre des fluctuations de pression sous la CLT
$\tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$	interspectre normalisé des fluctuations de pression
φ	phase aléatoire
Ψ_{pp}	interspectre de fluctuations de pression pour une CLT homogène
$\omega = 2\pi f$	pulsation circulaire

ω_{mn}	pulsation du mode (m, n)
$\tilde{\omega}_{mn}$	pulsation du mode mouillé (m, n)
$\Omega_{\mathbf{k}}$	ensemble de nombres d'onde

Acronymes

CLT	couche limite turbulente
DGA	direction générale de l'armement
EF	éléments finis
FRF	fonction de réponse en fréquence
FS	fonction de sensibilité
OPPD	ondes planes pariétales décorréées
C-OPPD	ondes planes pariétales décorréées-continu
PML	<i>perfectly marched layer</i>
RANS	<i>Reynolds-averaged Navier-Stokes simulation</i>
ROF	<i>rain on the roof</i>
SEA	<i>statistical energy analysis</i>
SONAR	<i>sound navigation and ranging</i>
ZPG	<i>zero pressure gradient</i>

Acronymes dans les articles en anglais

FEM	<i>finite element model</i>
FRF	<i>frequency response function</i>
SMVA	<i>spatial mean of the velocity autospectrum</i>
SDT	<i>sub-area decomposition technique</i>
SF	<i>sensitivity function</i>
TBL	<i>turbulent boundary layer</i>
UWPW	<i>uncorrelated wall plane wave</i>
C-UWPW	<i>continuous-UWPW</i>
G-UWPW	<i>global-UWPW</i>
L-UWPW	<i>local-UWPW</i>
WPF	<i>wall pressure fluctuation</i>

Introduction

Dans un contexte de surveillance du milieu marin, l'utilisation d'ondes électromagnétiques n'est pas efficace à cause de la forte atténuation de ce type d'onde par l'eau salée. L'utilisation d'ondes acoustiques est ainsi privilégiée pour la localisation et l'identification des cibles (navires, sous-marins et mines) à partir de systèmes appelés SONAR (*SONd Navigation And Ranging*), équivalent acoustique des RADAR (*RAdio Detection And Ranging*) [84] utilisés au-dessus de la surface sur la base des ondes électromagnétiques.

Un enjeu primordial pour les différentes forces armées est donc de concevoir des bâtiments le plus discrets possibles pour qu'ils ne soient pas détectables par des SONAR adverses.

Le bruit émis par un navire a principalement trois origines différentes (voir Fig. 1) :

- ① le bruit interne, c'est-à-dire le bruit dû à l'activité des machines et de l'équipage à l'intérieur du navire (moteurs, pompes, électrovannes, etc.) ;
- ② le bruit hydrodynamique de carène qui résulte du rayonnement acoustique de la coque du bâtiment excitée par l'écoulement turbulent développée sur le bordé ;
- ③ le bruit de propulseur, que l'on va détailler ci-dessous car il fait l'objet de la présente étude.

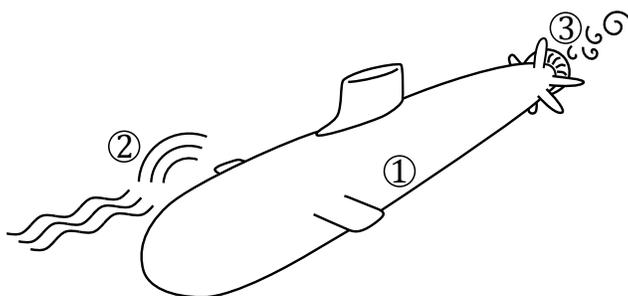


FIGURE 1 – Sources de bruit sur un sous-marin.

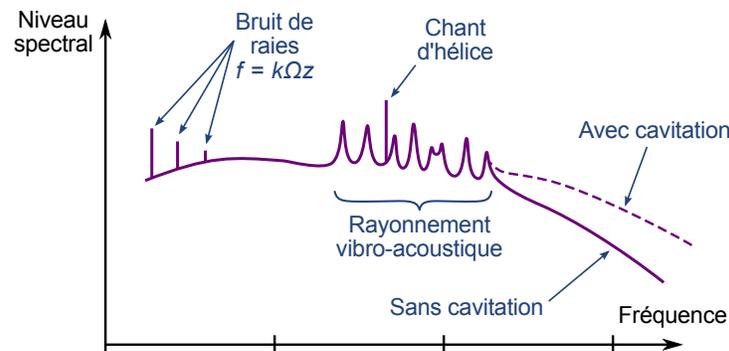


FIGURE 2 – Spectre type de bruit de propulseur (d’après [23, Fig. 2]).

Un spectre type du bruit de propulseur est représenté sur la Fig. 2. Il est décomposable selon plusieurs composantes :

- un bruit de raies (voir Fig. 2) [6] nommé BR pour *blade rate*. Les raies se situent aux fréquences $f = k\Omega z$, où k est un entier (généralement $k = 1, 2$ ou 3), z le nombre de pales du propulseur et Ω la vitesse de rotation de l’hélice en rad/s. Elles correspondent au volume de fluide chassé et remplacé à chaque passage d’une pale. En raison de sa grande longueur d’onde, ce bruit se propage à grande distance et peut être détecté par les SONAR. Il fournit des informations sur le nombre de pales de l’hélice et sa vitesse de rotation ;
- le chant d’hélice [6], qui apparaît à une fréquence particulière. Pour une certaine vitesse de rotation, sont formés au bord de fuite de la pale des tourbillons qui peuvent exciter un mode de vibration, dont la ligne nodale est voisine du bord de fuite, générant à la fois un bruit tonal notable (raie pure) et une usure aggravée du propulseur ;
- le bruit propre créé par l’interaction entre la pale solide (considérée infiniment rigide) et les turbulences de sa propre couche limite turbulente ou laminaire. Brooks et al. [15] détaillent cinq mécanismes de nature différente à l’origine de ce bruit propre et présentent un ensemble de mesures en tunnel aérodynamique pour chacun de ceux-ci ;
- le bruit d’ingestion de turbulences (ou bruit de bord d’attaque), généré par l’interaction entre les turbulences de l’écoulement incident et le bord d’attaque du profil. Ce bruit peut-être prédit par des modèles analytiques dépendant de la géométrie du profil [2, 57] ;
- la cavitation : lorsque la vitesse d’écoulement est élevée, la pression locale descend sous la valeur de pression de vapeur saturante de l’eau, des bulles se forment, qui implosent instantanément. Ce phénomène est extrêmement bruyant et provoque une usure accélérée des pales par érosion. Les propulseurs de sous-marins sont conçus pour éviter la cavitation ;
- le rayonnement vibro-acoustique des pales : sous l’effet des fluctuations de pression dues à l’écoulement turbulent, les pales vont vibrer selon leurs modes et rayonner un bruit en champ lointain. Sur le spectre, on observe des pics correspondant aux fréquences modales des déformées des pales.

Cette thèse s’inscrit dans un contexte de conception de propulseurs silencieux pour les navires de surface et les véhicules sous-marins. Afin de maîtriser les performances acoustiques des propulseurs dès la phase de préconception, il est nécessaire de disposer d’outils de simulations acoustiques fiables,

rapides et bien adaptés à l'intégration dans un processus d'optimisation global. De tels outils sont essentiels pour la conception des propulseurs de bâtiments militaires pour lesquels une faible signature acoustique est exigée, en particulier pour les propulseurs. Ces bâtiments étant produits à quelques exemplaires, la réalisation d'un prototype à taille réelle n'est pas envisageable, et la définition de la géométrie du propulseur repose principalement sur l'utilisation d'outils numériques intégrés dans une chaîne de conception et de moyens d'essais sur modèle réduit (tunnel hydrodynamique). Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement à la modélisation du rayonnement acoustique de modes de pale d'un propulseur de navire en phase de fonctionnement.

Le processus de calcul permettant de prédire le bruit émis par une structure excitée par une couche limite turbulente est généralement décomposé en trois étapes comme schématisées sur la Fig. 3 :

1. un premier calcul hydrodynamique permet de caractériser les paramètres de la couche limite turbulente qui se développe à la surface de l'objet en mouvement ;
2. les fluctuations de pression induites par les turbulences dans la couche limite turbulente sont ensuite décrites par des modèles statistiques semi-empiriques de la littérature (Goody, Corcos, Chase, etc.) et les paramètres de couche limite turbulente obtenus lors du calcul hydrodynamique ;
3. finalement, un modèle vibro-acoustique déterministe est employé pour prédire le comportement vibratoire de la pale en fonction de la pression excitatrice et du couplage solide-fluide.

L'objectif de ces travaux de thèse était de développer une approche originale pour prédire le rayonnement acoustique de modes d'un propulseur de navire en moyennes fréquences lorsque les pales sont soumises aux fluctuations de pression induites par l'écoulement turbulent. On s'intéresse plus particulièrement à la prise en compte de couches limites turbulentes non-homogènes telles qu'elles peuvent se développer à la surface des pales d'un propulseur.

Une analyse de la bibliographie est présentée au chapitre 1 sur les modèles de fluctuations de pression induites par une couche limite turbulente homogène et les différentes méthodes pour introduire ces modèles dans les calculs vibro-acoustiques. A l'issue de ce chapitre, l'objectif scientifique de la présente étude est présenté au regard de l'état de l'art ainsi que la méthodologie utilisée pour atteindre cet objectif.

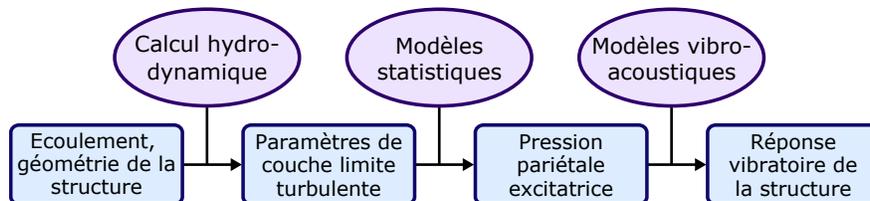


FIGURE 3 – Étapes du calcul pour prédire le bruit émis par un structure excitée par une couche limite turbulente.

CHAPITRE 1

Étude bibliographique

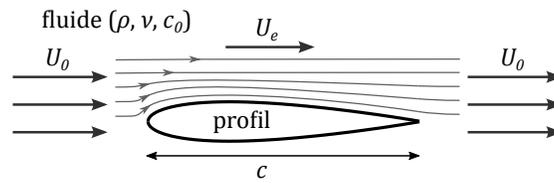
Ce chapitre constitue une étude bibliographique des différentes problématiques couvertes par le sujet décrit en introduction. Dans une première section, nous nous intéresserons à la couche limite turbulente, en se focalisant sur les différentes grandeurs physiques permettant de la caractériser, et les méthodes pour les estimer. Nous verrons ensuite comment modéliser l'excitation exercée par cette couche limite sur la structure, sous forme de pression aléatoire. Dans une deuxième section, nous aborderons le couplage entre l'excitation par pression fluctuante et les modèles vibratoires déterministes des structures élastiques. Finalement, on introduira les méthodes innovantes développées dans ce manuscrit.

❖ 1.1 Chargement par couche limite turbulente

1.1.1 Couche limite turbulente

L'interaction entre un écoulement de fluide visqueux et un solide génère à sa surface une zone de faible épaisseur dans laquelle les propriétés de l'écoulement sont affectées. Celui-ci est cisailé entre une partie hors de cette zone, se déplaçant librement, et une partie au contact, ralentie par la viscosité, faisant apparaître des structures tourbillonnaires. Cette zone est appelée la couche limite turbulente [19, 121].

La couche limite turbulente est un concept relativement bien connu et étudié depuis longtemps, en mécanique des fluides, aéronautique et ingénierie navale [13, 16, 17, 135]. Les avancées en matière

FIGURE 1.1 – Profil solide de corde c placé dans un écoulement.

de puissance de calculs ont permis de développer des modèles de plus en plus précis et des codes de plus en plus rapides, permettant de déterminer les caractéristiques physiques d'une couche limite turbulente.

1.1.1.1 Nombre de Reynolds et nombre de Mach

On considère un profil solide comme sur la Fig. 1.1, placé dans un écoulement de fluide de masse volumique ρ_0 , de viscosité cinématique ν et où les ondes acoustiques se déplacent à la célérité c_0 . Le fluide se déplace à la vitesse U_0 par rapport au profil. Pour caractériser la turbulence, on emploie le nombre de Reynolds :

$$Re_c = \frac{U_0 c}{\nu}, \quad (1.1)$$

où c est une longueur caractéristique du problème (ici la corde du profil). Le nombre de Reynolds peut être vu comme le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses et sert à caractériser le régime de l'écoulement. On définit aussi le nombre de Mach :

$$\mathcal{M} = \frac{U_0}{c_0}. \quad (1.2)$$

Dans ce manuscrit seront traités des cas dans lesquels le nombre de Reynolds est de l'ordre de grandeur de 10^6 et le nombre de Mach de 10^{-1} (en air) ou 10^{-3} (en eau).

1.1.1.2 Paramètres de la couche limite turbulente

Au contact du profil, la vitesse du fluide est nulle, par non glissement pour un fluide visqueux. En s'éloignant de la paroi, sa vitesse augmente jusqu'à atteindre la vitesse externe de couche limite U_e , qui est proche de la vitesse incidente U_0 . Il n'y a pas de frontière explicite à la couche limite, cependant son épaisseur, notée δ , est une grandeur très utilisée et définie comme la distance à la paroi pour laquelle la vitesse moyenne de l'écoulement atteint 99% de la vitesse externe. On dit que la couche limite est laminaire tant que l'écoulement reste ordonné. On considère plusieurs couches de fluide superposées verticalement, dans lesquelles le champ de vitesse est parallèle à la surface et la vitesse croissante de manière continue en s'éloignant perpendiculairement de la surface (voir un profil de vitesse sur la Fig. 1.2).

Lorsque le nombre de Reynolds relatif à la position $Re_x = xU_e/\nu$ augmente et dépasse une valeur critique, il y a une transition vers la couche limite turbulente. Les petites perturbations au sein de l'écoulement laminaire deviennent instables et sont rapidement amplifiées. La couche limite turbulente est caractérisée par un comportement chaotique : la vitesse, la masse volumique et la pression fluctuent

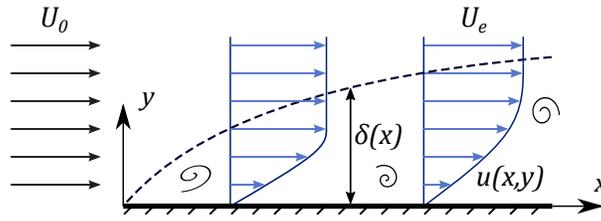
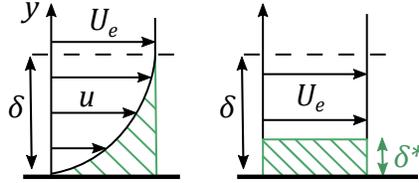


FIGURE 1.2 – Représentation d’une couche limite sur une plaque plane.

FIGURE 1.3 – Représentation géométrique de δ^* .

de manière aléatoire autour de valeurs moyennes. Le Reynolds critique, pour une plaque plane lisse, est d’environ $3 \cdot 10^5$ [121], mais la transition intervient plus tôt sur des surfaces rugueuses. À la transition, on observe un épaissement notable de la couche limite. Sur une plaque plane et lisse [120], on considère que l’épaisseur de couche limite δ évolue en $x^{1/2}$ dans le cas laminaire et en $x^{4/5}$ dans le cas turbulent.

On décompose la couche limite turbulente (CLT) en deux régions. Au contact de la paroi, sur une épaisseur très fine, les effets de viscosité du fluide dominent. En s’éloignant de la paroi, l’écoulement n’est plus affecté par la viscosité et sa vitesse moyenne est proche de la vitesse externe. On dit alors qu’il existe une région interne (ou visqueuse) et une région externe.

U_e et δ caractérisent la région externe et sont qualifiées de variables externes. Dans la région interne, une grandeur caractéristique est la contrainte de cisaillement à la paroi τ :

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (1.3)$$

où $\mu = \nu \rho_0$ est la viscosité dynamique et ρ_0 la masse volumique de fluide. Le cisaillement peut aussi être caractériser par la vitesse de friction qui s’écrit, pour des écoulements incompressibles (ce qui est le cas si $\mathcal{M} \ll 1$) :

$$u_{\tau \text{ incomp.}} = \sqrt{\tau / \rho_0}. \quad (1.4)$$

On définit l’épaisseur de déplacement, la distance de laquelle un écoulement de fluide parfait serait “déplacé” pour conserver un débit identique, en tenant compte du ralentissement par la viscosité. Cette grandeur elle est telle que les deux aires sur la Fig. 1.3 sont égales :

$$\delta^*_{\text{incomp.}} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy. \quad (1.5)$$

Finalement, on introduit l’épaisseur de quantité de mouvement θ , homogène à une longueur, qui

représente la perte de quantité de mouvement due à la couche limite :

$$\theta_{\text{incompr.}} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy. \quad (1.6)$$

Pour un écoulement autour d'un profil réel (par exemple, le profil NACA0014 représenté à la Fig. 1.1), la forme concave va favoriser l'apparition d'un gradient de pression positif, causant un ralentissement de l'écoulement. On parle alors de gradient de pression adverse (APG pour *adverse pressure gradient*). Selon les conditions de l'écoulement, on peut également rencontrer des cas avec gradient négatif (FPG pour *favorable pressure gradient*). Dans le cas d'une surface plane, le gradient de pression est nul (ZPG pour *zero pressure gradient*).

Des études [108, 124, 122] ont cherché à identifier les effets du gradient de pression sur la couche limite, ceux-ci seront abordés dans la suite du manuscrit. Le gradient de pression est généralement décrit à travers le paramètre de Clauser :

$$\beta_C = \frac{\theta}{\tau} \frac{dp}{dx}, \quad (1.7)$$

où p est la pression statique locale.

1.1.1.3 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

La prédiction de la réponse vibro-acoustique d'une structure excitée par une CLT nécessite de modéliser l'énergie transmise par la CLT à la structure, exprimée sous la forme d'un spectre de fluctuations de pression pariétale en fonction de la fréquence. Des estimations précises de ces spectres peuvent être obtenues par résolution numérique des équations de Navier-Stokes. La DNS (*direct numerical simulation*) vise la solution des des équations en trois dimensions, en utilisant un maillage spatial plus fin que le plus petit tourbillon attendu dans la CLT, estimé par la longueur d'échelle de Kolmogorov [121] $\ell_K = (\nu^3/\tilde{\epsilon})^{1/4}$, où $\tilde{\epsilon}$ est le taux moyen de dissipation d'énergie turbulente cinétique. La DNS reste limitée aux écoulements à faibles nombres de Reynolds et géométries simples.

La LES (*large eddy simulation*) [58, 109] se base sur un maillage plus grossier et un moyennage des équations aux plus faibles échelles. Les calculs sont alors allégés par rapport à la DNS. Néanmoins, cette méthode reste également cantonnée aux faibles Reynolds et à des cas d'écoulement simples (souvent une surface plane).

Finalement, une méthode plus couramment utilisée au niveau industriel est la méthode RANS (*Reynolds averaged Navier-Stokes simulation*). Celle-ci est basée sur un moyennage des équations à toutes les échelles. Elle requière un maillage beaucoup moins dense que ceux nécessaires pour les méthodes DNS et LES. La prédiction du spectre des fluctuations de pression pariétale à partir des paramètres de l'écoulement turbulent obtenus par résolution des équations RANS permet un gain de temps considérable par rapport aux méthodes DNS et LES [79, 115].

1.1.1.4 Détermination des paramètres de CLT

Une méthode encore plus rapide consiste à utiliser des spectres semi-empiriques de la littérature. Ils sont établis à partir de mesures expérimentales sur des plaques planes et pour des CLT homogènes

et des lois d'échelle, écrites avec des paramètres d'adimensionnement dépendant de l'écoulement. L'utilisation de ces spectres est simple, et les modèles dépendent de constantes ajustées par les auteurs et des paramètres de la CLT. Il suffit donc de déterminer les paramètres de la CLT puis d'injecter ces données dans des modèles semi-empiriques de spectres de la littérature scientifique. Ces paramètres de CLT peuvent être estimés grâce aux méthodes numériques citées ci-dessus, ou en utilisant des alternatives.

XFOIL est un logiciel libre, développé par Mark Drela au MIT aux États-Unis [43, 42], pour l'analyse de l'écoulement autour de profils en deux dimensions, dans un cas subsonique. Le code repose sur la modélisation de l'interaction entre les parties visqueuses et non-visqueuse de l'écoulement, cette dernière étant décrite par la formulation intégrale des équations d'Euler en considérant des lignes de courant. Le système est résolu à l'aide d'une méthode de Newton. Une description détaillée de la méthode peut être trouvée dans [41]. XFOIL permet notamment, à partir des nombres de Reynolds et de Mach et d'un angle d'attaque, de calculer les paramètres de la CLT, cependant sans donner d'information sur le profil de vitesses dans la couche limite. Il est possible de forcer la zone de transition entre couche limite laminaire et turbulente et d'utiliser un profil personnalisé. L'intérêt de XFOIL est qu'il est simple à prendre en main et très rapide (quelques secondes pour un calcul).

Une autre méthode existe dans le cas d'une plaque plane. En effet, pour ce cas académique, un modèle analytique peut être utilisé pour estimer les paramètres de CLT avec un système d'équations simples. Le modèle suivant est détaillé par Sanders [120]. Pour une plaque, on suppose que la vitesse externe U_e est égale à la vitesse de l'écoulement libre U_0 et que le gradient de pression est nul ($\beta_C = 0$). Les autres paramètres sont donnés par [120, Eq. (9.1) et (9.3)] :

$$\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{1/5}} = 0.37 \left(\frac{v}{U_0} \right)^{1/5} x^{4/5}, \quad (1.8a)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \frac{0.0592}{Re_x^{1/5}} = \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 0.0592 \left(\frac{v}{U_0 x} \right)^{1/5}. \quad (1.8b)$$

Pour le calcul de δ^* et θ , on peut utiliser la relation empirique de Prandtl :

$$\frac{u(y)}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}, \quad (1.9)$$

où $5 < n < 7$. En combinant cette dernière avec les Eq. (1.5) et Eq. (1.6) on obtient :

$$\delta^* = \frac{\delta}{n+1} \text{ et } \theta = \frac{\delta}{(n+1)(n+2)}, \quad (1.10)$$

pour une CLT homogène sur une surface plane.

1.1.2 Autospectres de fluctuation de pression pariétale

1.1.2.1 Fonctions de corrélation de pression pariétale

Dans les calculs vibro-acoustiques, on fait l'hypothèse d'un couplage faible entre la pression fluctuante sous la couche limite turbulente et la structure, c'est-à-dire que les vibrations de la structure induites par l'écoulement n'affectent pas l'écoulement en retour. On peut alors caractériser la pression turbulente sur une surface rigide que l'on nomme pression bloquée et que l'on note p_b . Ces pressions bloquées peuvent dans un second temps être introduites comme terme d'excitation d'un problème vibro-acoustique. Les vibrations de la structure induisent alors des efforts de réaction à l'interface fluide-structure, conduisant à un rayonnement acoustique.

Les fluctuations de pression pariétale p_b étant totalement aléatoires, elles sont alors décrites par leur second moment statistique. On considérera alors que le champ de pression est stationnaire, homogène spatialement et ergodique. On introduit l'intercorrélation spatio-temporelle R_{pp} , une fonction du décalage spatial $\vec{\xi}$ et temporel τ [94] :

$$R_{pp}(\vec{\xi}, \tau) = \mathbb{E} \left[p_b(\vec{x}, t) p_b^*(\vec{x} + \vec{\xi}, t + \tau) \right]_t, \quad (1.11)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]_t$ désigne la moyenne par rapport à la variable t et $*$ le complexe conjugué. L'exception à cette notation sera δ^* , qui désigne l'épaisseur de déplacement de couche limite turbulente, une longueur réelle.

L'hypothèse d'ergodicité permet de remplacer l'espérance (moyenne d'ensemble) par une moyenne temporelle. Puisque l'on considère des systèmes stationnaires, on ne va pas s'intéresser aux variations du signal dans le temps mais plutôt chercher à obtenir les propriétés permanentes de l'excitation. La description en fréquence permet de directement relier l'excitation aux modes de vibration mécaniques de la structure. En prenant la transformée de Fourier temporelle de l'intercorrélation, on obtient l'interspectre des fluctuations de pression dans le domaine "espace-fréquence" :

$$S_{pp}(\vec{\xi}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{pp}(\vec{\xi}, \tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau, \quad (1.12)$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

De plus en appliquant une transformée de Fourier spatiale, on exprime l'interspectre dans le domaine "nombre d'onde-fréquence" :

$$\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \iint_{\infty} S_{pp}(\vec{\xi}, \omega) \exp\{i\mathbf{k} \cdot \vec{\xi}\} d\vec{\xi}, \quad (1.13)$$

où \mathbf{k} est le vecteur nombre d'onde de l'excitation. On retrouve l'interspectre dans le domaine "espace-fréquence" par transformée de Fourier inverse du spectre "nombre d'onde-fréquence" :

$$S_{pp}(\vec{\xi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \exp\{-i\vec{\xi} \cdot \mathbf{k}\} d\mathbf{k}. \quad (1.14)$$

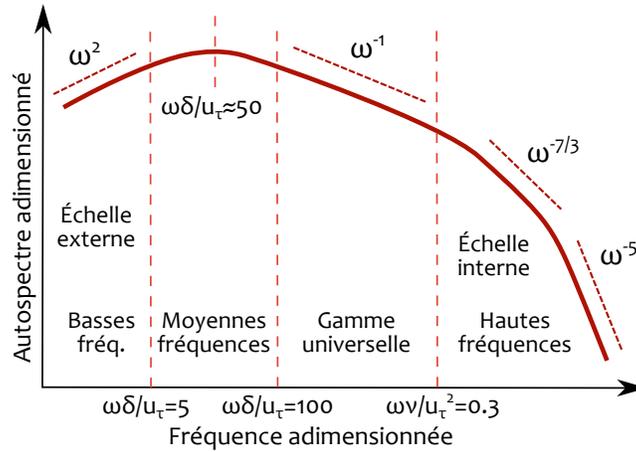


FIGURE 1.4 – Allure générale d'un autospectre adimensionné de fluctuations de pression pariétale pour une CLT en échelle log-log (d'après [66, Fig. 1]).

L'autospectre (c'est-à-dire l'interspectre pour $\vec{\xi} = \vec{0}$) indique la répartition de l'énergie en fréquence et se déduit de l'Eq. (1.14) :

$$S_{pp}(\vec{0}, \omega) = S_{pp}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \quad (1.15)$$

1.1.2.2 Forme générale de l'autospectre et loi d'échelle

On trouve dans la littérature scientifique des modèles analytiques semi-empiriques d'autospectres. Ces modèles sont mis au point dans des cas académiques, en considérant des surfaces planes, lisses, sans gradient de pression, avec une couche limite pleinement développée et homogène sur toute la surface. Les auteurs ont cherché à employer des lois d'échelle [24, 66]. En identifiant un jeu de paramètres physiques jouant un rôle dans les fluctuations de pression, on représente ainsi le spectre adimensionné en fonction de la fréquence adimensionnée à l'aide de ces paramètres.

Cependant, à cause de l'écart de taille des différentes structures tourbillonnaires sous la couche limite, chacune contribuant dans un domaine de fréquences différent, il n'est pas possible de déterminer un seul jeu de variables d'adimensionnement permettant d'obtenir des résultats cohérents sur toute la gamme de fréquences. Les auteurs vont donc choisir certaines grandeurs d'adimensionnement selon les domaines de fréquence. Nous avons vu que des variables différentes permettent de rendre compte du comportement sous la couche limite. Pour l'autospectre, on classe d'une part les variables externes (U_e, δ, δ^*) de la couche limite, associées aux basses fréquences, et d'autre part les variables internes (τ, u_τ, ν), liées aux hautes fréquences.

L'allure générale d'un autospectre adimensionné est généralement décomposée en quatre régions en fréquences [66, 17], représentées sur la Fig. 1.4 :

- (1) les basses fréquences, où l'autospectre adimensionné suit une pente ω^2 ;
- (2) les moyennes fréquences, où sont utilisées des variables mixtes (mélange de variables internes et externes), et qui contient le maximum du spectre ;

- (3) la « gamme universelle », qui existe lorsque $Re_\theta = U_e \theta / \nu > 3500$ d'après Smol'yakov [125]. Le spectre suit une pente $\omega^{-\alpha}$, où α prend la valeur 0.775 pour Goody [59] et 1.1 pour Smol'yakov [125]. Le gradient de pression semble également avoir une influence sur la valeur de α [30];
- (4) les hautes fréquences, où le spectre adimensionné suit une pente $\omega^{-7/3}$ puis ω^{-5} .

Nous allons voir dans la suite différents modèles issus de la littérature. La liste dressée ci-dessous n'est pas exhaustive.

1.1.2.3 Différents modèles d'autospectres

Chase (1980 & 1987)

Chase [21] sépare la pression excitatrice en deux termes, l'interaction turbulence-cisaillement moyen (M pour *mean shear*) et l'interaction turbulence-turbulence (noté T pour *turbulence*) :

$$S_{pp}(\omega) = P_M(\omega) + P_T(\omega), \quad (1.16)$$

avec :

$$P_M(\omega) = r_M a_+ \rho_0^2 u_\tau^4 \omega^{-1} \alpha_M^{-3} (1 + \mu_M^2 \alpha_M^2), \quad (1.17a)$$

$$P_T(\omega) = r_T a_+ \rho_0^2 u_\tau^4 \omega^{-1} \alpha_T^{-3} (1 + \alpha_T^2). \quad (1.17b)$$

Les paramètres α_M et α_T sont donnés par :

$$\alpha_i^2 = 1 + \left(\frac{U_c}{b_i \omega \delta} \right)^2, \quad i = M \text{ ou } T, \quad (1.18)$$

où U_c est la vitesse de convection, c'est-à-dire la vitesse à laquelle sont convectées les structures turbulentes dans la couche limite. Chase définit le rapport U_c/U_0 comme une constante comprise entre 0.6 et 0.8. Il préconise des valeurs numériques aux paramètres du modèle :

$$r_T = 0.389, r_M = 1 - r_T, a_+ = 0.766, b_T = 0.378, b_M = 0.756 \text{ et } \mu_M = 0.176. \quad (1.19)$$

Cependant, Finnveden et al. [50], avec des mesures en tunnel aérodynamique pour $\mathcal{M} \approx 0.3$, et Ciappi et al. [25], en eau pour $\mathcal{M} \approx 0.003$, ont montré que la valeur de ces paramètres doit être ajustée selon le cas considéré. Chase a ensuite amélioré son modèle en présentant une deuxième version [22]. Les équations sont tirées de [66] :

$$P_M(\omega) = 2\pi C_M \rho_0^2 u_\tau^4 \omega^{-1} \alpha^{-3} (1 + \mu_M \alpha^2), \quad (1.20a)$$

$$P_T(\omega) = 3\pi C_T \rho_0^2 u_\tau^4 \omega^{-1} \alpha^{-3} (1 + \alpha^2), \quad (1.20b)$$

$$\alpha_M^2 = \alpha_T^2 = \alpha^2 = 1 + \left(\frac{U_c}{b \omega \delta} \right)^2. \quad (1.20c)$$

Les valeurs des constantes conseillées sont alors :

$$C_T = 0.0047, C_M = 0.155, b = 0.75, \mu_M = 0.176. \quad (1.21)$$

Cependant, à cause de la pente ω^{-1} en hautes fréquences, ces modèles ne sont pas adaptés au-delà de la gamme universelle (c'est-à-dire pour $\omega v/u_\tau > 0.3$) [66].

Smol'yakov (2000)

Smol'yakov [125] découpe le spectre en trois zones (basses fréquences, gamme universelle et hautes fréquences) et définit une expression spécifique à chaque zone. Il emploie des variables internes sur toute la gamme de fréquence pour l'adimensionnement.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{v}{u_\tau^2}, \quad \bar{S}_{pp}(\omega) = S_{pp}(\omega) \frac{u_\tau^2}{\tau^2 v}, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{pp}(\omega) &= 1.49 \times 10^{-5} Re_\theta^{2.74} \bar{\omega}^2 (1 - 0.117 Re_\theta^{0.44} \bar{\omega}^{0.5}), & \text{si } \bar{\omega} < \bar{\omega}_0 = 49.35 Re_\theta^{-0.88}, \\ \bar{S}_{pp}(\omega) &= 2.75 \bar{\omega}^{-1.11} (1 - 0.82 e^{-0.51(\bar{\omega}/\bar{\omega}_0 - 1)}), & \text{si } \bar{\omega}_0 < \bar{\omega} < 0.2, \\ \bar{S}_{pp}(\omega) &= (38.9 e^{-8.35 \bar{\omega}} + 18.6 e^{-3.58 \bar{\omega}} + 0.31 e^{-2.14 \bar{\omega}}) \dots \\ &\quad \times (1 - 0.82 e^{-0.51(\bar{\omega}/\bar{\omega}_0 - 1)}), & \text{si } \bar{\omega} > 0.2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Goody (2004)

Goody [59] a exploité les résultats d'un grand nombre d'expériences en eau et en air pour établir l'expression de son modèle semi-empirique. L'adimensionnement est réalisé avec des variables mixtes et les effets du nombre de Reynolds sur le spectre sont pris en compte via le terme R_T . Ce modèle est connu être fiable dans les cas sans gradient de pression, aussi bien en air qu'en eau.

$$\frac{S_{pp}(\omega) U_e}{\tau^2 \delta} = \frac{c_2 (\omega \delta / U_e)^2}{[(\omega \delta / U_e)^{0.75} + c_1]^{3.7} + [c_3 R_T^{-0.57} (\omega \delta / U_e)]^7}, \quad (1.24a)$$

$$R_T = \frac{\delta / U_e}{v / u_\tau^2}. \quad (1.24b)$$

Les constantes du modèle sont $c_1 = 0.5$, $c_2 = 3$ et $c_3 = 1.1$. R_T représente le rapport entre les échelles de temps externe et interne. Il compare donc l'intensité des phénomènes laminaires et visqueux et il est semblable au nombre de Reynolds, ce qui permet au modèle d'être valide sur une très large gamme de nombre de Reynolds.

Rozenberg (2012)

Dans des situations réelles, la CLT présente souvent un gradient de pression. C'est par exemple le cas sur l'extrados d'un profil ou d'une pale, où un gradient de pression adverse est présent. Les modèles abordés précédemment ne sont pas adaptés pour ces conditions. Schloemer [122] a observé que les niveaux de l'autospectre sont plus élevés dans les basses fréquences en présence d'un gradient de pression adverse, ce qui a été vérifié plus tard par d'autres expérimentateurs [86, 118]. Simpson et al. [124] suggèrent un adimensionnement de l'autospectre avec le maximum local de la contrainte de cisaillement $\tau_{MAX} = \max[\mu(du/dy)]$.

Rozenberg et al. [117] ont cherché à prendre en compte les effets du gradient de pression adverse (APG) dans un modèle d'autospectre analytique. Leur spectre est basé sur celui de Goody, sur lequel plusieurs modifications ont été apportées, en se basant sur cinq études, dont quatre numériques (RANS et DNS [108]) et une expérimentale [122]. Les différences avec le modèles de Goody sont :

- normalisation avec δ^* au lieu de δ ;
- normalisation avec τ_{MAX} , la contrainte de cisaillement maximale selon la direction verticale, au profit du τ à la paroi ;
- dans la gamme universelle, on doit garder une pente proportionnelle à $\omega^{-\alpha}$, avec α qui prend des valeurs supérieures à 0.775 ;
- le niveau global du spectre augmente avec le gradient de pression.

$$\frac{S_{pp}(\omega)U_e}{\tau_{\text{MAX}}^2 \delta^*} = \frac{[2.82\Delta^2(6.13\Delta^{-0.75} + F_1)^{A_1}][4.2(\Pi/\Delta) + 1]\omega_*^2}{[4.76\omega_*^{0.75} + F_1]^{A_1} + [c'_3 R_T^{-0.57} \omega_*]^{A_2}}, \quad \omega_* = \frac{\omega \delta^*}{U_e}, \quad (1.25)$$

$$\Delta = \delta / \delta^*, \quad (1.26a)$$

$$\Pi = 0.8(\beta_C + 0.5)^{3/4}, \quad (1.26b)$$

$$A_1 = 3.7 + 1.5\beta_C, \quad (1.26c)$$

$$\beta_C = (\theta / \tau)(dp/dx), \quad (1.26d)$$

$$A_2 = \min(3; 19/\sqrt{R_T}) + 7, \quad (1.26e)$$

$$F_1 = 4.76(1.4/\Delta)^{0.75}[0.375A_1 - 1], \quad (1.26f)$$

$$R_T = (\delta/U_e)/(v/u_\tau^2), \quad (1.26g)$$

$$c'_3 = 8.8. \quad (1.26h)$$

Ce modèle est plus complexe que celui de Goody et comporte bien plus de constantes et de paramètres empiriques. Par ailleurs, il est validé sur un plus faible nombre de cas. Il est plus prudent dans le cadre de notre étude, qui ne porte pas sur les effets complexes du gradient de pression, d'exploiter des modèles d'autospectre pour gradient de pression nul. Dans la suite, le modèle de Rozenberg ne sera pas utilisé, au profit de modèles ayant été validés dans un plus grand nombre de cas expérimentaux et d'études.

1.1.2.4 Comparaison des modèles

Pour comparer les résultats des différents modèles présentés ci-dessus, nous nous appuyerons sur des données expérimentales, relevées en tunnel aérodynamique subsonique [118]. Bien que ces mesures soient réalisées pour des cas de gradient de pression adverse, favorable et nul, nous nous intéressons aux cas où le gradient de pression est nul sur la section étudiée.

Sur les Fig. 1.5 et 1.6 on trace les spectres des modèles de Goody, Chase et Smol'yakov obtenus avec les paramètres de CLT pour une vitesse de fluide $U_0 = 11 \text{ m/s}$ ($\delta^* = 3.1 \text{ mm}$, $\theta = 2.0 \text{ mm}$, $u_\tau = 0.48 \text{ m/s}$) et un gradient de pression nul. Le modèle de Rozenberg n'est pas représenté ici car le gradient de pression est nul. Les mesures sont réalisées pour quatre vitesses d'écoulement, avec

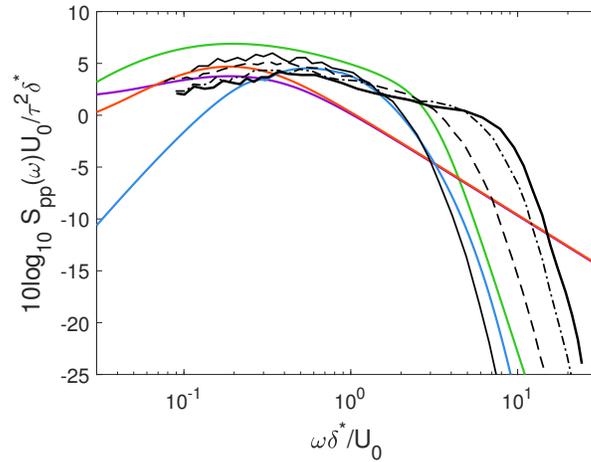


FIGURE 1.5 – Autospectres expérimentaux de fluctuations de pression pariétale pour une couche limite turbulente sans gradient de pression : - 11 m/s, - 25 m/s, - 36 m/s, - 45 m/s. Mesures issues de Salze et al. [118, Fig. 8]; normalisation par variables mixtes. Modèles semi-empiriques tracés pour $U_0 = 11$ m/s, vert : Goody (Eq. (1.24)), violet : Chase (I) (Eq. (1.17)), rouge : Chase (II) (Eq. (1.20)), bleu : Smol'yakov (Eq. (1.22)).

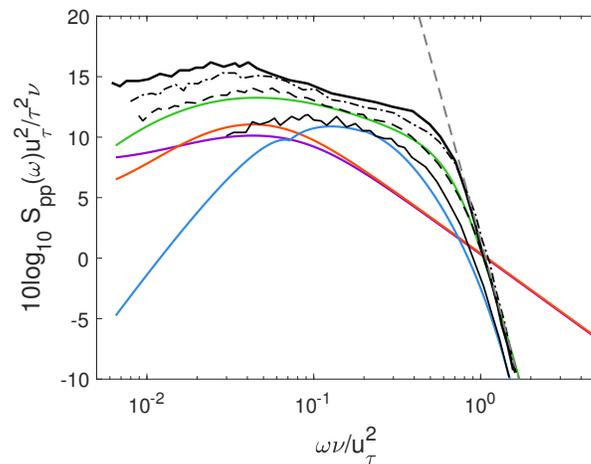


FIGURE 1.6 – Idem à la Fig. 1.6; normalisation par variables internes. Gris pointillé : pente ω^{-5} .

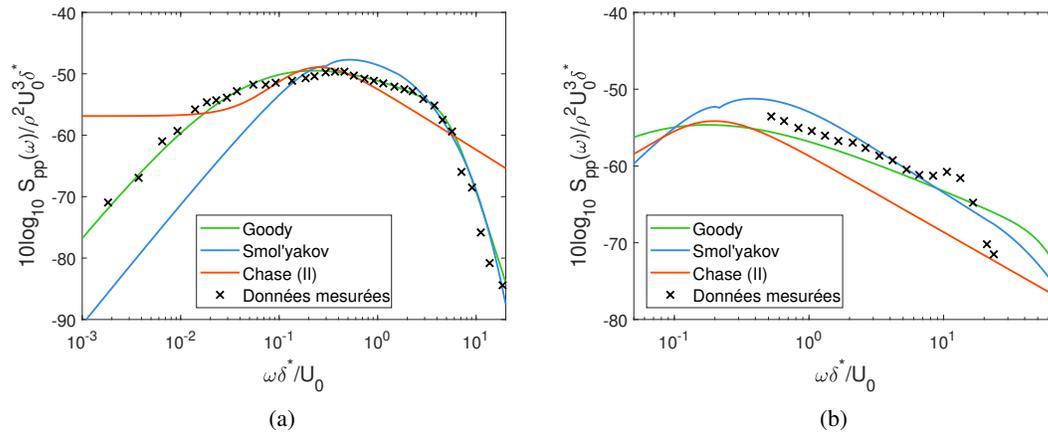


FIGURE 1.7 – Autospectres normalisés de pression pariétale avec variables mixtes ;
 (a) : surface plane en tunnel aérodynamique ; (b) : maquette de véhicule marin.
 Paramètres de TBL et données mesurées issues de [66, Fig. 4, 7, Table 1].

un Reynolds Re_θ de 1 600, 3 600, 5 700 et 8 400 (soit $U_0 = 11$ m/s, 25 m/s, 36 m/s et 45 m/s). Les courbes sont adimensionnées avec des jeux de variables mixtes sur la Fig. 1.5 et internes sur la Fig. 1.6. Lorsque l'adimensionnement est réalisé avec des variables mixtes, on observe une superposition des courbes expérimentales en moyennes fréquences. Pour l'adimensionnement avec des variables internes, en revanche, les courbes se rejoignent en hautes fréquences, en suivant la décroissance en ω^{-5} . On notera que le spectre de Goody est celui qui donne la meilleure prédiction de l'autospectre de pression pariétale.

Deux nouveaux cas expérimentaux d'autospectres de pression pariétale mesurés sous un CLT et présentés par Hwang et al. [66], sont donnés sur la Fig. 1.7, afin de comparer les modèles semi-empiriques. Le premier cas, sur la Fig. 1.7(a), est celui d'une surface plane en tunnel aérodynamique, pour une vitesse d'écoulement de $U_0 = 15.5$ m/s, ce qui donne un nombre de Reynolds $Re_\theta = 3400$. Le deuxième cas, sur la Fig. 1.7(b), correspond à des mesures sur une coque de véhicule marin, pour un nombre de Reynolds $Re_\theta = 70500$. Pour des fluides et des nombres de Reynolds différents, le spectre de Goody est celui qui offre le meilleur accord avec les mesures, en particulier dans la gamme universelle, où la pente $\omega^{-0.775}$ est plus adaptée que les pentes ω^{-1} et $\omega^{-1.1}$ des modèles de Chase et Smol'yakov respectivement. Pour la suite, c'est le modèle de Goody qui sera préférablement utilisé dans les calculs.

1.1.3 Interspectres de fluctuations de pression pariétale

L'interspectre en fréquence-nombre d'onde donne une information sur les fluctuations de pression exprimées en fonction des nombres d'onde longitudinal et transverse. Dans la suite la direction \vec{x} correspond à celle de l'écoulement, la direction \vec{z} à la direction transverse et \vec{y} désigne l'axe vertical. La pression excitatrice est décrite par sa pulsation ω et son vecteur nombre d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$.

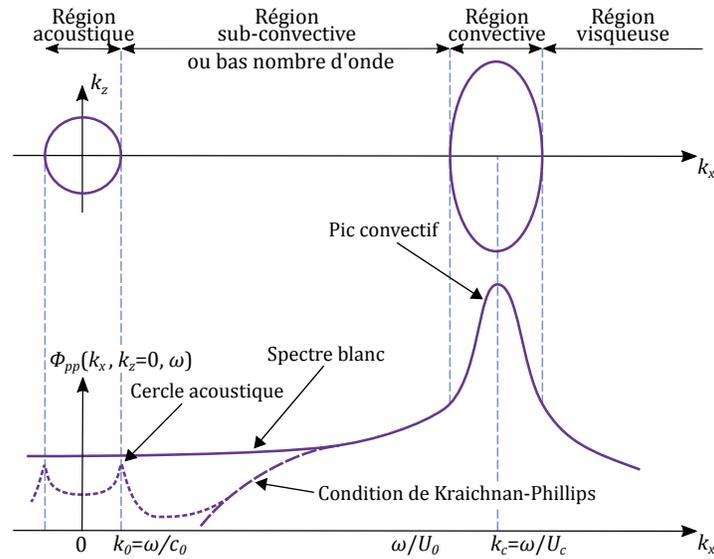


FIGURE 1.8 – Allure générale du spectre de fluctuations de pression en nombre d’onde (d’après [105, Fig. 6.1] et [14, Fig. 2]).

1.1.3.1 Description générale du spectre

L’allure théorique d’un spectre en nombre d’onde-fréquence des fluctuations de pression pariétale est représentée sur la Fig. 1.8. Les structures turbulentes sont convectées par la couche limite à la vitesse de convection U_c . L’énergie est majoritairement concentrée autour du pic convectif, centré en $(k_x = k_c, k_z = 0)$, où $k_c = \omega/U_c$ est le nombre d’onde convectif. Le théorème de Kraichnan-Phillips stipule que pour une couche limite turbulente dans un écoulement incompressible, le spectre doit tendre vers 0 pour les bas nombres d’onde, selon une pente en k_x^{-2} . Ce théorème est en contradiction avec l’observation empirique d’un “nombre d’onde blanc” [14] dans le domaine des bas nombres d’onde.

Dans le cas d’un fluide compressible, il y a présence d’un domaine acoustique, selon le cercle d’équation $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = k_0$, avec $k_0 = \omega/c_0$ le nombre d’onde acoustique. Les niveaux du spectre dans les domaines subconvectif et acoustique sont faibles par rapport au domaine convectif. D’après Arguillat et al. [4], l’ordre de grandeur du pic acoustique est de 5% celle du pic convectif (en air, $\mathcal{M} = 0.13$ à $f = 1$ kHz).

Les auteurs se sont principalement concentrés sur la modélisation la plus fidèle possible du pic convectif, puisque celui-ci contient la majorité de l’énergie de l’excitation et qu’il est plus aisé de le mesurer. En effet, il est délicat d’obtenir des informations expérimentales sur les domaines subconvectif et acoustique, en raison de la présence du pic convectif. Cependant, pour l’analyse des vibrations d’une structure, on observe un filtrage des hauts nombres d’onde. Il est alors attendu que le domaine des faibles nombres d’onde joue un rôle important dans l’excitation de la structure, même si le niveau d’énergie globale y est bien plus faible qu’autour du pic convectif.

En eau, les faibles vitesses de déplacement considérées pour les véhicules déplace le pic convectif vers les hauts nombres d’onde ($k_c = \omega/U_c \approx \omega/U_0$). La structure vibrante répondant aux excitations qui sont inférieures à son nombre d’onde de flexion, on peut la considérer comme un filtre bas nombre

d'onde. On pourra même envisager que le pic convectif ne contribue pas, ou très peu, à la réponse vibratoire. Par ailleurs, la célérité des ondes acoustiques c_0 étant plus élevées en eau, le domaine acoustique se déplace vers les très bas nombres d'onde, étendant ainsi le domaine subconvectif. C'est alors la modélisation de ce domaine qui est primordiale dans un cas marin. Il est fait ici l'hypothèse que les composantes acoustiques de l'interspectre n'ont pas d'effet sur la réponse structurelle, même si cette hypothèse semble difficilement acceptable pour les cas en air [4].¹

Deux méthodes permettent d'obtenir des informations sur ce domaine du spectre. La première consiste à mesurer directement la pression à l'aide d'antennes de capteurs, puis d'exploiter une méthode de post-traitement permettant de filtrer le spectre grâce à une combinaison des signaux [4, 88, 118]. La deuxième consiste à mesurer la réponse vibratoire d'une structure adaptée servant de filtre, excitée par une couche limite turbulente [14, 46, 78, 92]. Le comportement modal de la structure est déterminé de manière précise expérimentalement ou numériquement au préalable, ce qui permet d'obtenir indirectement le spectre excitateur responsable des vibrations observées. Cette méthode dite inverse consiste à ajuster les niveaux du spectre de pression pariétale pour les nombres d'onde modaux permettant de retrouver les niveaux vibratoires mesurés.

1.1.3.2 Vitesse de convection

On rappelle que la vitesse de convection U_c est la vitesse à laquelle sont convectées par l'écoulement les turbulences sous la couche limite. Celle-ci est déterminée à partir de la phase Θ de l'interspectre de fluctuation de pression entre deux points séparés par la distance ξ dans le sens de l'écoulement : $U_c = -\omega\xi/\Theta$. Quel que soit le gradient de pression, on observe que la vitesse de convection est croissante selon la séparation, jusqu'à se stabiliser à une valeur constante [122].

Sur la Fig. 1.9(a) on représente les mesures de Blake [13], Bull [16] et Ciappi et al. [25] de la vitesse de convection en fonction de la séparation longitudinale adimensionnée par δ^* . Les deux premiers ont réalisé des mesures en tunnel aérodynamique pour des vitesses allant respectivement de 22 à 38 m/s et de 100 à 165 m/s. Pour le troisième cas, les mesures ont été réalisées en eau, sur une maquette de catamaran tractée en bassin d'essai.

En fréquences, on considère généralement que la vitesse de convection varie avec la pulsation adimensionnée $\omega\delta^*/U_0$. Lorsque la pulsation augmente, la vitesse de convection se rapproche d'une constante. Le modèle le plus simple consiste à définir le rapport U_c/U_0 comme une constante égale à une valeur comprise entre 0.6 et 0.8 [21], même si d'autres modélisations existent. Sur la Fig. 1.9(b) on représente les mesures de Salze et al. [118], Blake [13], Bull [16], Magionesi et al. [86] et Schloemer [122] de la vitesse de convection en fonction de la pulsation adimensionnée $\omega\delta^*/U_0$, ainsi que l'équation du modèle de Smol'yakov [126] :

$$\frac{U_c}{U_0} = \frac{a(\omega\delta^*/U_0)}{1 + b(\omega\delta^*/U_0)^2} + c, \quad (1.27)$$

avec $a = 1.6$, $b = 16$, $c = 0.6$. Ce modèle correspond aux observations, en air et avec un gradient de pression nul, qui sont représentées sur la Fig. 1.9(b). La vitesse de convection augmente jusqu'à une valeur maximale de $0.8U_0$ atteinte pour $\omega\delta^*/U_0 = 0.25$, puis redescend pour se stabiliser autour de

1. Paragraphe et Fig. 1.8 modifiés après la soutenance.

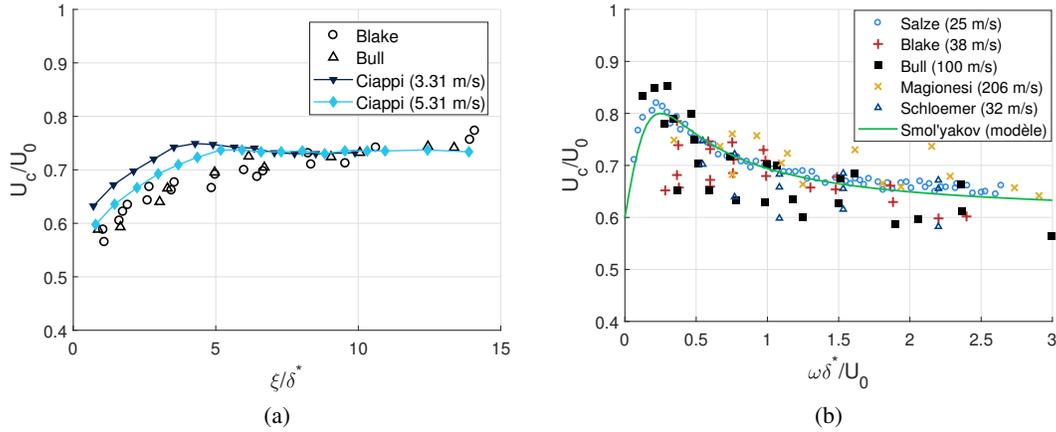


FIGURE 1.9 – Vitesse de convection pour CLT sans gradient de pression ;
 (a) : en fonction de la séparation longitudinale ; (b) : en fonction de la pulsation adimensionnée.
 Mesures : [13, 16, 25, 86, 118, 122]. Modèle : Eq. (1.27).

$0.6U_0$. Salze et al. [118] recommandent même des jeux de valeurs modifiées pour a , b et c quand le gradient de pression n'est pas nul.

On citera également la formule de Ko [70] :

$$U_c/U_0 = 0.6 + 0.4e^{-0.8\omega\delta^*/U_0}. \quad (1.28)$$

La courbe de ce modèle n'est pas tracée sur la Fig. 1.9(b) pour des raisons de lisibilité, mais on fait les remarques suivantes. Pour une pulsation adimensionnée $\omega\delta^*/U_0 > 0.5$, le modèle de Ko est proche de celui de Smol'yakov. Cependant, quand la pulsation adimensionnée tend vers une valeur nulle, à cause de l'exponentielle, le rapport U_c/U_0 tend vers 1, ce qui ne correspond pas aux observations expérimentales.

Le gradient de pression adverse influence également la vitesse de convection, la principale conséquence étant la diminution du rapport U_c/U_0 [108, 122], tandis qu'il augmente en présence d'un gradient favorable. Cependant, comme nous l'avons vu, ses effets ne seront pas pris en compte dans notre étude.

1.1.3.3 Différents modèles d'interspectre

On présente dans la suite plusieurs modèles d'interspectre, donnés sous leur forme normalisée $\tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ introduite par Graham [60] :

$$\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{S_{pp}(\omega)}{k_c^2} \tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.29)$$

où $\tilde{\Phi}_{pp}$ est le spectre normalisé :

$$\iint_{\infty} \tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} = (2\pi k_c)^2. \quad (1.30)$$

Corcos (1964)

Pour le modèle de Corcos [32], la fonction d'intercorrélation est d'abord donnée en espace-fréquence sous la forme $S_{pp}(\vec{\xi}, \omega) = S_{pp}(\omega)\Gamma(\vec{\xi}, \omega)$ où Γ est une fonction de cohérence entre deux points selon leur éloignement :

$$S_{pp}(\xi_x, \xi_z, \omega) = S_{pp}(\omega) \exp\{-\alpha_x k_c |\xi_x|\} \exp\{-\alpha_z k_c |\xi_z|\} \exp\{-i\xi_x k_c\}, \quad (1.31)$$

où $k_c = \omega/U_c$ est le nombre d'onde convectif et ξ_x et ξ_z correspondent aux distances de séparation entre deux points selon l'axe longitudinal et l'axe transverse respectivement. Les valeurs des constantes α_x et α_z pour une plaque plane ont été estimées par différents auteurs. On donnera, à titre d'exemple [45] :

$$\alpha_x = 0.10, \quad \alpha_z = 0.77, \quad (1.32)$$

même si des valeurs dépendant de la fréquence peuvent également être utilisées [50, 89].

Le passage en fréquence-nombre d'onde est réalisé simplement par une transformée de Fourier spatiale, d'après l'Eq. (1.13) :

$$\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) = \frac{4\alpha_x \alpha_z}{[\alpha_z^2 + (k_z/k_c)^2][\alpha_x^2 + (k_x/k_c - 1)^2]}. \quad (1.33)$$

Cette modélisation suppose une séparation des variables d'espace et repose sur une représentation exponentielle de la perte de cohérence, ce qui est conforme aux observations. Ce modèle a une expression très simple, à la fois dans le domaine spatial et le domaine nombre d'onde, il contient seulement deux constantes empiriques et est connu pour offrir une représentation fidèle du pic convectif. Les longueurs de cohérence de l'excitation suivant les directions longitudinale et transverse sont respectivement :

$$\Lambda_x = 1/\alpha_x k_c, \quad \Lambda_z = 1/\alpha_z k_c. \quad (1.34)$$

Il présente cependant plusieurs défauts. Tout d'abord les longueurs de corrélation ainsi exprimées tendent vers l'infini pour les basses fréquences, ce qui est physiquement non possible. Les longueurs de cohérence sont dépendantes de la taille des structures turbulentes et leur distance à la paroi. À hautes fréquences, le comportement est déterminé par la région interne, et à basses fréquences par la région externe [77, 113]. En pratique, les longueurs de cohérence sont majorées. Ensuite, il surestime largement les niveaux dans le domaine subconvectif, d'environ 20dB [14].

Chase (1980 & 1987)

Chase [21] propose un modèle de spectre qui respecte le théorème de Kraichnan-Phillips, exprimé directement dans l'espace des nombres d'onde. Contrairement aux autres modèles, celui-ci n'est pas

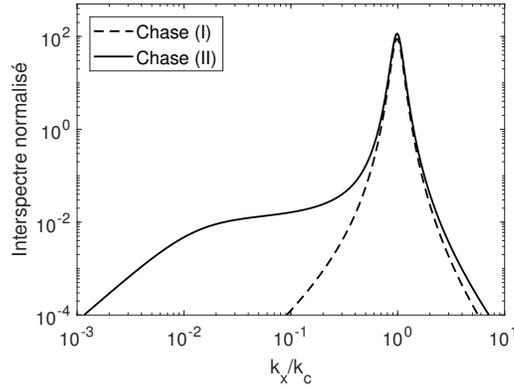


FIGURE 1.10 – Interspectres normalisés : Chase (I) (Eq. (1.35)) et Chase (II) (Eq. (1.37)).

transformable en espace :

$$\tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_c^2}{S_{pp}(\omega)} \rho_0^2 u_\tau^3 \left(\frac{c_M k_x^2}{[K_+^2 + (b_M \delta)^{-2}]^{5/2}} + \frac{c_T |\mathbf{k}|^2}{[K_+^2 + (b_T \delta)^{-2}]^{5/2}} \right), \quad (1.35)$$

$$|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad (1.36a)$$

$$K_+^2 = \left(\frac{\omega - U_c k_x}{h u_\tau} \right)^2 + |\mathbf{k}|^2, \quad (1.36b)$$

$$c_T = (3/2) a_+ r_T / (\pi h) = 0.0474, \quad c_M = c_T (r_T^{-1} - 1) = 0.0745. \quad (1.36c)$$

On se référera à l'Eq. (1.16) et l'Eq. (1.17) pour l'équation de l'autospectre et l'Eq. (1.19) pour les valeurs des constantes. Ce modèle sous-estime les niveaux dans le domaine des très faibles nombres d'onde, notamment puisqu'il ne prend pas en compte le "nombre d'onde blanc". Chase a ensuite modifié son modèle [22]. Le modèle respecte toujours le théorème de Kraichnan-Phillips, mais les niveaux prédits dans le domaine subconvectif sont réhaussés. Les deux spectres de Chase sont tracés sur la Fig. 1.10.

$$\tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_c^2}{S_{pp}(\omega)} \frac{\rho_0^2 u_\tau^3}{[K_+^2 + (b\delta)^{-2}]^{5/2}} \left(C_M k_x^2 + C_T |\mathbf{k}|^2 \frac{K_+^2 + (b\delta)^{-2}}{|\mathbf{k}|^2 + (b\delta)^{-2}} \right). \quad (1.37)$$

Dans cette équation, le modèle de l'autospectre est issue de l'Eq. (1.20). et les constantes de l'Eq. (1.21). L'auteur propose un autre modèle qui ajoute des termes au modèle (1.37) pour prendre en compte les effets de compressibilité dans le domaine acoustique. Cependant, ce modèle ne pouvant pas être écrit sous une forme normalisée [60], il ne sera pas donné ici.

Efimtsov (1982)

Efimtsov [45] reprend le modèle de Corcos, en proposant cependant une nouvelle expression des longueurs de cohérence, afin qu'elles ne tendent pas vers des valeurs infinies en basses fréquences, tout

en respectant la décroissance proportionnelle à l'inverse de la fréquence observée empiriquement [4, 118] pour les fréquences élevées. En effet, les tourbillons les plus larges, responsables des excitations basses fréquences, étant limités en taille par l'épaisseur de couche limite, les longueurs de cohérence ne peuvent donc pas croître indéfiniment. On indique ci-dessous les longueurs de cohérence du modèle d'Efimov :

$$\Lambda_x = \delta \left[\left(\frac{a_1 Sh}{U_c/u_\tau} \right)^2 + \frac{a_2^2}{Sh^2 + (a_2/a_3)^2} \right]^{-1/2}, \quad (1.38a)$$

$$\Lambda_z = \delta \left[\left(\frac{a_4 Sh}{U_c/u_\tau} \right)^2 + \frac{a_5^2}{Sh^2 + (a_5/a_6)^2} \right]^{-1/2}. \quad (1.38b)$$

Les valeurs des constantes sont $a_1 = 0.10$, $a_2 = 72.8$, $a_3 = 1.54$, $a_4 = 0.77$, $a_5 = 548$ et $a_6 = 13.5$. $Sh = \omega \delta / u_\tau$ est le nombre de Strouhal. En basses fréquences, ces longueurs de cohérence sont fonction de δ , tandis qu'en moyennes et hautes fréquences, les valeurs numériques se confondent avec celles du modèle de Corcos.

On reprend ensuite l'équation du modèle de Corcos (1.33) en utilisant les nouveaux coefficients $\alpha_j = 1/k_c \Lambda_j$ pour $j = x, z$. Des expérimentateurs ayant réalisé des mesures en vol [113], en tunnel aérodynamique [118] et sur des maquettes de navire [86], indiquent cependant que les valeurs des constantes a_{1-6} doivent être ajustées selon les cas considérés.

Mellen (1990)

Mellen [104] observe que le modèle de Corcos consiste en une fenêtre spatiale en forme de losange. La présence d'angles donne lieu à des irrégularités lors du passage en nombre d'onde par transformée de Fourier. Il montre que la forme rhombique de la fenêtre est responsable des niveaux trop élevés dans les bas nombres d'onde, et propose une reformulation avec une fenêtre lisse elliptique du même modèle :

$$S_{pp}(\xi_x, \xi_z, \omega) = S_{pp}(\omega) \exp \left\{ -\sqrt{(\alpha_x k_c \xi_x)^2 + (\alpha_z k_c \xi_z)^2} - i \xi_x k_c \right\}. \quad (1.39)$$

Les coefficients α_x et α_z sont ceux du modèle de Corcos, mais il n'y a plus de séparation des variables d'espace. Miller [105] donne la forme normalisée en nombre d'onde de ce spectre, qui s'obtient par transformée de Fourier :

$$\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) = \frac{2\pi \alpha_x^2 \alpha_z^2 k_c^3}{[(\alpha_x \alpha_z k_c)^2 + (\alpha_x k_x)^2 + \alpha_z^2 (k_x - k_c)^2]^{3/2}}. \quad (1.40)$$

Smol'yakov (2006)

Smol'yakov [126] observe également que l'épaisseur de couche de limite empêche la longueur de cohérence d'atteindre des valeurs infinies en basses fréquences. Par ailleurs, en hautes fréquences, la longueur de cohérence ne peut pas tendre vers 0 lorsque $\omega \rightarrow \infty$, puisque la plus petite taille possible de tourbillon est imposée par les forces visqueuses et est de l'ordre de grandeur de l'échelle de Kolmogorov.

Dans le modèle proposé, les longueurs de cohérence Λ_x et Λ_z sont fonction de l'épaisseur de déplacement de couche limite δ^* en basses fréquences et du rapport v/u_τ en hautes fréquences. L'expression du spectre en espace est :

$$S_{pp}(\xi_x, \xi_z, \omega) = S_{pp}(\omega) \left[h \exp \left\{ -\sqrt{-(\xi_x/\Lambda_x)^2 + (\xi_z/\Lambda_z)^2} \right\} \exp \{-i\xi_x k_c\} \dots \right. \\ \left. -(h-1) \exp \left\{ -\sqrt{-(\xi_x/l)^2 + (\xi_z/l)^2} \right\} \exp \{-im_1 \xi_x k_c\} \right], \quad (1.41)$$

où les longueurs de cohérences sont :

$$\Lambda_x = \frac{U_c}{B\omega}, \quad \Lambda_z = \frac{U_c}{m_0 B \omega} \quad (1.42)$$

et la vitesse de convection est donnée par l'Eq. (1.27). Les autres paramètres sont donnés par :

$$B = \frac{A}{1 + SA(\omega v)/(u_\tau U_c)}, \\ A = 0.124 \left(1 - 0.25 \frac{U_c}{\omega \delta^*} + \left[0.25 \frac{U_c}{\omega \delta^*} \right]^2 \right)^{1/2}, \\ m_1 = \frac{1+B^2}{5n-4+B^2}, \quad h = \left[1 - \frac{m_1 B}{m_0 n^2 G^{1/2}} \right]^{-1}, \quad G = 1 + B^2 - nm_1, \\ l = \frac{U_c}{\omega} \sqrt{\frac{n}{m_1 G}}, \quad m_0 = 6.45, \quad n = 1.005. \quad (1.43)$$

Par calcul analytique (transformée de Fourier puis normalisation), on trouve :

$$\check{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) = 2\pi k_c^2 \left[\frac{h\Lambda_x\Lambda_z}{[1 + \Lambda_x^2(k_c - k_x)^2 + (\Lambda_z k_z)^2]^{3/2}} \dots \right. \\ \left. \frac{(h-1)l^2}{[1 + l^2(m_1 k_c - k_x)^2 + (lk_z)^2]^{3/2}} \right]. \quad (1.44)$$

Le modèle est basé sur une fenêtre elliptique, comme pour Mellen. D'après son auteur, ce modèle présente plusieurs intérêts :

- prise en compte des effets du nombre de Reynolds à travers l'autospectre (Eq. (1.22) et Eq. (1.23));
- la vitesse de convection U_c n'est plus constante et dépend de la pulsation normalisée $\omega \delta^*/U_e$;
- le modèle est exprimé en fonction des longueurs de cohérence Λ_x et Λ_z explicitées dans l'Eq. (1.42);
- le paramètre empirique S permet de quantifier les effets de la viscosité ($S = 0$ absence de viscosité). Une valeur entre 70 et 150 est recommandée et Smol'yakov fixe $S = 100$. On remarquera que $\Lambda_x \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} Sv/u_\tau$.

D'après les mesures de Salze et al. [118], l'expression de la vitesse de convection (1.27) est satisfaisante en l'absence d'un gradient de pression. Cependant, les niveaux prédits en bas nombres d'onde

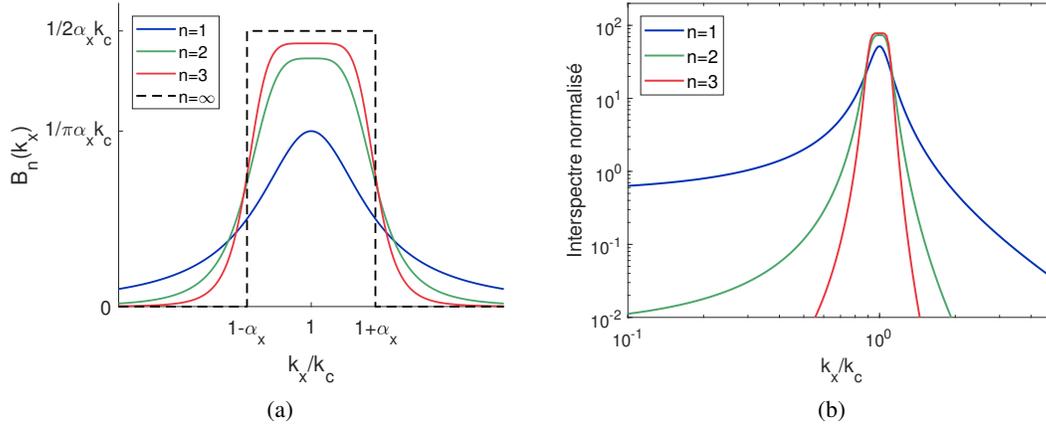


FIGURE 1.11 – Modèle de Corcos généralisé ;
 (a) : filtre de Butterworth B_n pour différents ordres n (Eq. (1.45)) ;
 (b) : interspectres de Corcos généralisés pour différents ordres n ($m = 1$).

pour ce modèle sont trop bas.

Caiazzo (2016)

Caiazzo et al. [18] ont proposé une reformulation du modèle de Corcos, pour créer un nouveau modèle conservant sa formulation mathématique simple, mais avec des niveaux corrigés d'environ 20dB dans le domaine subconvectif. L'Eq. (1.31) est interprétée comme un ensemble d'onde planes $e^{-ik_c x}$ passant à travers une fenêtre spatiale. On donne la formulation du filtre de Butterworth dans l'espace complexe :

$$B_n(k_x) = \frac{A_x}{1 + \left[\frac{k_x/k_c - 1}{\alpha_x} \right]^{2n}}, \quad B_m(k_z) = \frac{A_z}{1 + \left[\frac{k_z/k_c}{\alpha_z} \right]^{2m}}, \quad (1.45)$$

où n ou m est l'ordre du filtre, α_x et α_z les paramètres du modèle de Corcos (voir Eq. (1.32)) et A_x, A_z les facteurs d'amplification :

$$A_x = \frac{n \sin(\pi/(2n))}{\pi \alpha_x k_c}, \quad A_z = \frac{m \sin(\pi/(2m))}{\pi \alpha_z k_c}. \quad (1.46)$$

Lorsque $n = 1$, le filtre a l'allure d'une fonction lorentzienne en cloche. Quand n croît, la forme du filtre se rapproche d'une porte rectangulaire centrée en k_c , comme on peut le voir sur la Fig. 1.11. En remarquant que le spectre de Corcos est un cas particulier pour $n = m = 1$, on peut écrire le spectre de Corcos dit généralisé, dans le cas où n et m sont quelconques $\Phi_{pp}(k_x, k_z, \omega) = S_{pp}(\omega) B_n(k_1) B_m(k_3)$. Le nouveau spectre comporte deux paramètres qui permettent de modifier sa forme. Les auteurs re-

commandent $n = 2$ et $m = 1$, ce qui donne sous forme normalisée :

$$\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) = \frac{4\sqrt{2}\alpha_z\alpha_x^3}{[\alpha_z^2 + (k_z/k_c)^2][\alpha_x^4 + (k_x/k_c - 1)^4]}. \quad (1.47)$$

La forme pour n et m quelconque n'est pas détaillée ici mais est donnée dans [18].

Sur la Fig. 1.11, on observe l'effet du paramètre n du modèle pour $m = 1$. Le cas $n = m = 1$ correspond au modèle de Corcos original. Augmenter n permet de réduire les niveaux dans le domaine subconvectif, mais la forme du pic convectif est affectée : celui-ci est réhaussé et sa forme devient anguleuse. Cependant, dans notre cas d'étude, le niveau dans le domaine subconvectif est plus important que la modélisation correcte du pic convectif, puisque celui-ci est filtré par la structure vibrante. Ce modèle permet de conserver la séparation des variables du modèle de Corcos et la possibilité de passer du domaine spatial au domaine nombre d'onde, tout en corrigeant les niveaux dans le domaine subconvectif.

1.1.3.4 Comparaison des modèles

On trace sur la Fig. 1.12 les interspectres normalisés $\tilde{\Phi}_{pp}$ pour un nombre d'onde transverse $k_z = 0$. On compare sur la même figure les modèles de Corcos (Eq. (1.33)), Mellen (Eq. (1.40)), Chase (Eq. (1.37)) et Caiazzo (Eq. (1.47)). Pour les modèles théoriques, on utilise les paramètres de CLT sur une maquette de catamaran ($\mathcal{M} \approx 0.002$) [25, Table 1]. Sont également indiquées les mesures de l'interspectre en bas nombres d'onde de Bonness et al. [14] et Evans et al. [46] pour les vibrations d'une section de conduite cylindrique en aluminium dans laquelle s'écoule de l'eau ($\mathcal{M} \approx 0.004$), et Martin et Leehey [92] dans le cas des vibrations d'une membrane élastique rectangulaire ($\mathcal{M} \approx 0.1$). Il est ici fait l'hypothèse que le niveau en bas nombres d'onde de l'interspectre est constant en nombre d'onde (spectre blanc), indépendamment des conditions expérimentales (vitesse, fluide, matériau et épaisseur de la structure). Evans et al. [46] ont toutefois relevé une augmentation de ce niveau pour une surface rugueuse par rapport à une surface lisse.

Pour une surface lisse et selon ces hypothèses, les niveaux prédits par le spectre de Mellen sont réduits d'environ 8 dB par rapport au spectre de Corcos, ce qui représente une amélioration, qui semble toutefois insuffisante. On observe que le spectre de Chase est plus fidèle aux mesures, mais les niveaux en très bas nombre d'onde sont faibles à cause de la condition de la décroissance lorsque $k_x \rightarrow 0$. Le modèle de Smol'yakov, qui n'est pas tracé ici, sous-estime largement les niveaux. Le modèle de Caiazzo fournit une bonne estimation des niveaux compte tenu des données expérimentales exploitées.

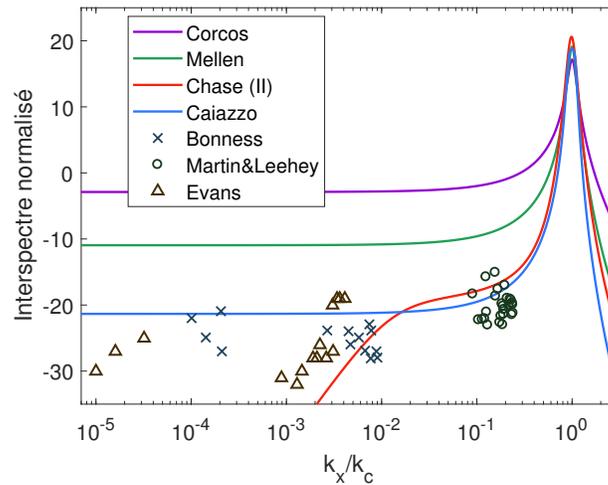


FIGURE 1.12 – Interspectres en nombre d’onde normalisés ; modèles semi-empiriques et données expérimentales (Bonness et al. [14], Martin et Leehey [92], Evans et al. [46]).

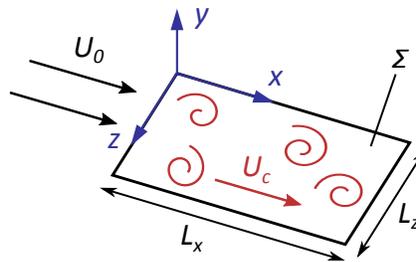


FIGURE 1.13 – Repère et dimensions d’une plaque plane rectangulaire.

❖ 1.2 Vibrations de structures excitées par une CLT

Dans cette partie, on cherche à établir les équations du problème vibro-acoustique d’une structure excitée par une couche limite turbulente. On considère une plaque élastique de surface Σ , soumise à un écoulement turbulent dans la direction \vec{x} qui est également la direction longitudinale de la plaque. La direction transversale est \vec{z} , tandis que l’axe normal ascendant est orienté par \vec{y} , comme représenté sur la Fig. 1.13. Comme évoqué au début de ce chapitre, on fait l’hypothèse d’un couplage faible. La couche limite turbulente est supposée stationnaire et homogène sur toute la surface de la plaque.

1.2.1 Excitation par CLT dans un modèle vibratoire

Dans cette section, nous allons détailler différentes méthodes issues de la littérature pour introduire une excitation par CLT dans un calcul vibratoire (voir [102]). La difficulté repose dans le couplage fluide-structure, avec d’une part des phénomènes aléatoires décrits d’un point de vue statistique, et

d'autre part des modèles mécaniques déterministes.

1.2.1.1 Méthode spatiale

La première méthode consiste en une formulation en espace des équations [97, 130, 36]. La vitesse normale vibratoire de la plaque $v(\mathbf{X}, t)$ s'exprime comme le produit de convolution de la pression bloquée $p_b(\mathbf{X}, t)$ avec $h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, t)$, la réponse impulsionnelle en vitesse au point \mathbf{X} pour un effort normal unitaire au point $\tilde{\mathbf{X}}$:

$$v(\mathbf{X}, t) = \iint_{\Sigma} \int_{\infty}^{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, t - \tilde{\tau}) p_b(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.48)$$

La fonction d'intercorrélation de vitesse normale vibratoire entre deux points \mathbf{X} et \mathbf{X}' s'écrit :

$$R_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = \mathbb{E} [v(\mathbf{X}, \tau) v^*(\mathbf{X}', t + \tau)] = \int_{\infty}^{\infty} v(\mathbf{X}, \tau) v^*(\mathbf{X}', t + \tau) d\tau. \quad (1.49)$$

En remplaçant la vitesse par l'expression de l'Eq. (1.48) on obtient :

$$R_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \iiint_{\infty}^{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \tau - \tilde{\tau}) p_b(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\tau}) p_b^*(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\tau}) h_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, t + \tau - \tilde{\tau}) d\tau d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.50)$$

On effectue le changement de variable $(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}) \rightarrow (\tilde{\beta}, \tilde{\beta})$ tel que $\tilde{\beta} = \tau - \tilde{\tau}$ et $\tilde{\beta} = \tau - \tilde{\tau}$. Le jacobien a une valeur unitaire. L'Eq. (1.50) devient :

$$R_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \iiint_{\infty}^{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta}) p_b(\tilde{\mathbf{X}}, \tau - \tilde{\beta}) p_b^*(\tilde{\mathbf{X}}, \tau - \tilde{\beta}) \dots \times h_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, t + \tilde{\beta}) d\tau d\tilde{\beta} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.51)$$

On isole l'intégrale sur τ dans l'expression précédente. On réalise le changement de variable $\hat{\tau} = \tau - \tilde{\beta}$ qui nous permet de reconnaître l'intercorrélation de pression bloquée :

$$\int_{\infty}^{\infty} p_b(\tilde{\mathbf{X}}, \tau - \tilde{\beta}) p_b^*(\tilde{\mathbf{X}}, \tau - \tilde{\beta}) d\tau = \int_{\infty}^{\infty} p_b(\tilde{\mathbf{X}}, \hat{\tau}) p_b^*(\tilde{\mathbf{X}}, \hat{\tau} + \tilde{\beta} - \tilde{\beta}) d\hat{\tau} = R_{pp}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta} - \tilde{\beta}). \quad (1.52)$$

En remplaçant cette intercorrélation dans l'Eq. (1.51) :

$$R_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \iiint_{\infty}^{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta}) R_{pp}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta} - \tilde{\beta}) h_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, t + \tilde{\beta}) d\tilde{\beta} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.53)$$

On rappelle que l'intercorrélation en fréquence s'obtient par transformée de Fourier temporelle de

la fonction de corrélation. On multiplie l'Eq. (1.53) par $e^{i\omega t}$ et on intègre sur la variable temporelle t :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \iiint_{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta}) \exp\{-i\omega\tilde{\beta}\} R_{pp}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta} - \tilde{\beta}) \exp\{+i\omega(\tilde{\beta} - \tilde{\beta})\} \dots \\ \times h_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, t + \tilde{\beta}) \exp\{+i\omega(t + \tilde{\beta})\} dt d\tilde{\beta} d\tilde{\beta} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.54)$$

Dans cette équation, on pose le changement de variable $(\tilde{\beta}, t, \tilde{\beta}) \rightarrow (\mu, \tilde{\mu}, \tilde{\mu})$ tel que $\mu = \tilde{\beta}$, $\tilde{\mu} = t + \tilde{\beta}$ et $\tilde{\mu} = \tilde{\beta} - \tilde{\beta}$. Le jacobien est encore unitaire. On sépare alors les intégrations sur les variables de temps :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \int_{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \mu) \exp\{-i\omega\mu\} d\mu \times \int_{\infty} R_{pp}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mu}) \exp\{+i\omega\tilde{\mu}\} d\tilde{\mu} \dots \\ \times \int_{\infty} h_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mu}) \exp\{+i\omega\tilde{\mu}\} d\tilde{\mu} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.55)$$

On voit apparaître la transformée de Fourier de $h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \mu)$. Selon la convention de signe :

$$H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) = \int_{\infty} h_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, t) \exp\{-i\omega\mu\} d\mu. \quad (1.56)$$

$H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega)$ est la fonction de transfert en vitesse, c'est-à-dire la réponse en vitesse observée au point \mathbf{X} pour une force ponctuelle en $\tilde{\mathbf{X}}$. On procède de manière similaire pour son complexe conjugué. Par ailleurs, on identifie également le spectre espace-fréquence des fluctuations de pression (voir Eq. (1.12)). On peut finalement écrire :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) S_{pp}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) H_v^*(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}, \omega) d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.57)$$

Pour la formulation du problème vibro-acoustique en espace, on exploite l'Eq. (1.57) en prenant $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ pour obtenir l'autospectre, puis on discrétise par méthodes des rectangles :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) \approx \sum_{\mathbf{X}_1} \sum_{\mathbf{X}_2} H_v(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \omega) S_{pp}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \omega) H_v^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}_2, \omega) \delta x^2 \delta z^2, \quad (1.58)$$

où δx et δz sont les pas de discrétisation spatiale dans la direction de l'écoulement et la direction transverse respectivement. Si on suppose que la CLT est homogène, le spectre de fluctuation de pression pariétale en espace s'écrit :

$$S_{pp}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \omega) = S_{pp, \text{HOMO}}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \omega) = S_{pp}(\omega) \Gamma(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \omega). \quad (1.59)$$

où Γ est la fonction de cohérence spatiale des fluctuations de pression. En remplaçant dans l'Eq. (1.58) :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{X}_1} \sum_{\mathbf{X}_2} H_v(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \omega) S_{pp}(\omega) \Gamma(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \omega) H_v^*(\mathbf{X}, \mathbf{X}_2, \omega) \delta x^2 \delta z^2. \quad (1.60)$$

Cette formulation est contraignante, car elle est lourde numériquement à cause de la double intégration et elle nécessite de connaître une expression en espace de l'interspectre de fluctuations de pression, qui ne s'obtient analytiquement que pour certains modèles. Par ailleurs, la discrétisation en espace est assez fine, car elle est basée sur un critère variant en ω^{-1} . En effet, les pas de discrétisation doivent respecter la contrainte suivante :

$$\delta x \leq \frac{1}{4}\lambda_c, \quad \delta z \leq \frac{1}{4}\Lambda_z, \quad (1.61)$$

où $\lambda_c = U_c/f$ est la longueur de convection et la longueur de corrélation transverse Λ_z dépend du modèle d'interspectre (voir Eq. (1.34) à titre d'exemple).

Dans la suite de ce rapport, les résultats seront présentés pour la réponse en vitesse quadratique moyenne :

$$\bar{S}_{vv}(\omega) = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) d\mathbf{X}. \quad (1.62)$$

dont une expression analytique pour une plaque plane mince peut être trouvée en Annexe A.2.

1.2.1.2 Méthode nombre d'onde

De part la discrétisation de la surface de la plaque, et la nécessité de calculer les fonctions de transfert entre tous les points, la méthode spatiale est coûteuse numériquement. L'idée est de reformuler les équations dans l'espace des nombres d'onde, ce qui amène plusieurs simplifications [102]. Si on suppose que la CLT est homogène, l'intercorrélation en espace ne dépend que de la séparation $\vec{\xi}$ entre deux points, et plus de leur position. L'interspectre en nombre d'onde-fréquence est calculé par transformée de Fourier inverse du spectre en espace (voir Eq (1.14)).

En faisant apparaître l'interspectre en nombre d'onde de la pression bloquée dans l'Eq. (1.57) :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \int_{\infty} H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) \exp\{+i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{X}}\} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \dots \\ \times H_v^*(\mathbf{X}, \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \omega) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\} d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{X}} d\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}. \quad (1.63)$$

On définit les fonctions de sensibilité :

$$\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega) = \int_{\Sigma} H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{X}}} d\tilde{\mathbf{X}}. \quad (1.64)$$

C'est la réponse en fréquence observée au point \mathbf{X} lorsque la plaque est excitée par une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} . L'Eq. (1.63) devient alors :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} |\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \quad (1.65)$$

Finalement, on discrétise l'intégrale sur les nombres d'onde par troncature du domaine infini :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} |\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \delta k_x \delta k_z, \quad (1.66)$$

où $\Omega_{\mathbf{k}}$ est l'ensemble des nombres d'onde. Le domaine nombre d'onde est discrétisé régulièrement, avec un pas δk_x et δk_z . Le domaine est délimité en valeur absolue par le nombre d'onde de coupure \bar{k} dans les deux directions. Le critère de discrétisation pour une plaque plane mince est :

$$\delta k_x < \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{L_x}, \quad \delta k_z < \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{L_z}, \quad (1.67)$$

Le calcul de la vitesse quadratique moyennée spatialement $\bar{S}_{vv}(\omega)$ est détaillé dans l'Annexe A.2 (voir Eq. (A.12)).

1.2.1.3 Méthode basée sur le principe de réciprocité

Cette méthode, présentée par Marchetto et al. [91], est formulée dans le domaine nombre d'onde. L'intérêt de l'approche est que les fonctions de sensibilité sont déterminées expérimentalement grâce au principe de réciprocité [48], à partir de mesures de réponse de la structure excitée par des forces ponctuelles. Le principe de réciprocité stipule que la réponse d'un système est identique en inversant le point d'excitation et d'observation. Si on prend deux points \mathbf{X} et $\tilde{\mathbf{X}}$ appartenant tous deux à Σ , cela peut se traduire par l'équation suivante :

$$H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, \omega) = H_v(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \omega). \quad (1.68)$$

Par transformée de Fourier :

$$\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega) = \iint_{\Sigma} H_v(\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \omega) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}\}. \quad (1.69)$$

La fonction de sensibilité au point \mathbf{X} est interprétée comme la transformée de Fourier par rapport à $\tilde{\mathbf{X}}$ de la réponse au point $\tilde{\mathbf{X}}$ pour une force ponctuelle appliquée au point \mathbf{X} . Ainsi, la fonction $\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)$ est obtenue en réalisant des transformées de Fourier spatiales des fonctions de transfert entre une vitesse mesurée et un effort ponctuel appliqué. Un ensemble de points $\tilde{\mathbf{X}}$ définit un maillage de la surface Σ . Le maillage doit permettre de rendre compte de l'évolution spatiale de la vitesse vibratoire. Pour une plaque mince, un critère de 4 points par longueur d'onde de flexion maximale est suggéré.

1.2.1.4 Méthodes des ondes planes pariétales décorréliées

Pour l'étude vibroacoustique, l'excitation ergodique peut être modélisée par un ensemble d'ondes planes pariétales décorréliées [95, 68], notée OPPD. Un champ de pression est généré analytiquement, en fonction des modèles de l'interspectre des fluctuations de pression et d'une phase aléatoire, et constitue un cas de chargement. Le processus est réitéré pour plusieurs réalisations, dont le nombre est noté N_f .

La première étape de la méthode OPPD est de calculer la pression bloquée aux nœuds d'un maillage spatial de la surface excitée, selon la formule :

$$p_b^r(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \frac{\sqrt{\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \delta k_x \delta k_z}}{2\pi} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + \varphi_{\mathbf{k}}^r)\}, \quad (1.70)$$

où $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ est l'interspectre des pressions, $\varphi_{\mathbf{k}}^r$ est une phase prise aléatoirement entre 0 et 2π qui retranscrit la non-corrélation des ondes et l'exposant r désigne une réalisation.

La seconde étape du calcul est d'estimer la réponse vibratoire $v^r(\mathbf{X}, \omega)$ à ce champ de pression pour chacune des N_r réalisations. On peut montrer que la réponse à une CLT est la moyenne des réponses pour un nombre infini de réalisations [95]. En pratique, un nombre fini de réalisations est suffisant. La dernière étape consiste à estimer la réponse vibratoire par le calcul de la moyenne :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} |v^r(\mathbf{X}, \omega)|^2. \quad (1.71)$$

Le maillage spatial, aux nœuds duquel la pression bloquée est calculée, doit respecter un critère de discrétisation par rapport au nombre d'onde de coupure \bar{k} du domaine $\Omega_{\mathbf{k}}$:

$$\delta x < \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\bar{k}}, \quad \delta z < \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\bar{k}}, \quad (1.72)$$

où δx et δz sont les pas de discrétisation dans les directions x et z .

La convergence en fonction du nombre de réalisations de cette méthode sera étudiée dans la suite ce manuscrit. Maxit [95] recommande un nombre de 30 réalisations.

1.2.1.5 ROF : rain on the roof

La méthode *rain on the roof* (ou ROF) permet de simuler des excitations large bande et décorréelées. Le spectre de l'excitation est du type $C_{\text{exc}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) = C^{\text{eq}}(\omega) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}')$, où δ est la fonction de Kronecker et $C^{\text{eq}}(\omega)$ une excitation équivalente qui apporte la même quantité d'énergie à la structure que l'excitation spatialement corrélée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^{\text{eq}}(\omega) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') d\mathbf{X} d\mathbf{X}' d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{exc}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) d\mathbf{X} d\mathbf{X}' d\omega, \quad (1.73)$$

$$C^{\text{eq}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\text{exc}}(\mathbf{X}, \omega) d\mathbf{X} d\mathbf{X}'. \quad (1.74)$$

Ceci constitue la formulation spatiale de la ROF. Les fluctuations de pression sont totalement décorréelées, ce qui est valable pour une excitation par une CLT pour des hautes fréquences, quand les longueurs de corrélation de l'interspectre sont très courtes devant les dimensions de la plaque [114, 87].

Ichchou et al. [67] écrivent la relation d'équivalence dans l'espace des nombres d'onde, ce qui permet d'obtenir un modèle d'excitation équivalent à une ROF pour des sources spatialement cohérentes, modélisant par exemple un champ acoustique diffus ou une couche limite turbulente. Dans ce dernier cas, cette modélisation convient aux moyennes et hautes fréquences, aux alentours et au-dessus de la

fréquence de coïncidence aérodynamique, contrairement à la formulation précédente :

$$\int_{k=k_-}^{k_+} \int_{\theta=0}^{2\pi} C^{\text{eq}}(\omega) k dk d\theta = \int_{k=k_-}^{k_+} \int_{\theta=0}^{2\pi} C_{\text{exc}}(k \cos \theta, k \sin \theta, \omega) k dk d\theta, \quad (1.75)$$

où k_- et k_+ sont des nombres de coupure définis en fonction de l'effet de filtrage de la plaque. On remplace ensuite $C^{\text{eq}}(\omega)$ par l'interspectre $\tilde{\Phi}_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$ dans l'équation précédente :

$$C^{\text{eq}}(\omega) = \frac{1}{\pi(k_+^2 - k_-^2)} \int_{k=k_-}^{k_+} \int_{\theta=0}^{2\pi} \tilde{\Phi}_{pp}(k \cos \theta, k \sin \theta, \omega) k dk d\theta. \quad (1.76)$$

1.2.1.6 Lois de similitude

Pour l'analyse de structures complexes de grandes dimensions, la fabrication d'un prototype et la mise en place des conditions expérimentales peut être coûteuse. Il est alors indiqué de réaliser un modèle d'échelle réduite, de dimensions plus raisonnables, qui permet de déduire le comportement du modèle taille réelle. La théorie de la similitude suggère que deux modèles puissent être reliés l'un à l'autre par une transformation à l'aide d'un simple facteur d'échelle [34].

Franco et al. [52] proposent une étude des lois de similitude pour des plaques planes rectangulaires excitées par une CLT. Ils distinguent deux similitudes : la similitude exacte, qui fournit un double parfait du modèle étudié, et la similitude déformée (*distorted similitude*), qui présente des modifications par rapport au système de départ. Les auteurs comparent le comportement vibratoire de plaques planes (simulations analytiques ou numériques, et mesures expérimentales), en faisant varier leur envergure, épaisseur et matériau. Des similitudes exactes, qui relient les caractéristiques de la plaque, la vitesse d'écoulement ou les paramètres du matériau, sont mises en avant dans les cas analytiques et expérimentaux. Dans le cas des matériaux composites, la variation de l'épaisseur des couches donne naissance à des similitudes déformées.

De Rosa et Franco [37] suggèrent un cas particulier des lois de similitude, qui permet de réduire les coûts de calcul à partir d'une formulation spatiale du problème [36, 51] et lorsque la densité modale est élevée. Pour vérifier cette condition, on emploie le facteur de recouvrement modal μ , défini par le produit de la fréquence d'excitation, la densité modale et le facteur d'amortissement de la plaque. La méthode s'applique pour $\mu \gg 1$. Cette méthode, nommée ASMA (*asymptotical scaled modal analysis*), s'inscrit dans la catégorie des similitudes déformées.

L'idée est d'utiliser les lois de similitude pour créer un modèle de la plaque à échelle réduite, ce qui diminue la dimension du maillage spatial, tout en conservant la même énergie vibratoire. Toutes les dimensions linéaires non impliquées dans la transmission d'énergie structurelle doivent être multipliées par un facteur σ . Les grandeurs du modèle simulé sont notées : $\bar{L}_x = \sigma L_x$ et $\bar{L}_z = \sigma L_z$. Ainsi, un modèle à l'échelle σ est créé, avec $0 < \sigma < 1$. Pour conserver l'énergie lors du passage au modèle à l'échelle, l'amortissement doit être changé par $\bar{\eta} = \eta / \sigma^2$. Cependant, cette méthode fournit une estimation de la réponse globale, moyennée sur les modes.

Les fréquences modales sont déplacées dans les plus hautes fréquences $\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} / \sigma^2$. L'épaisseur et le matériau restant inchangés, le nombre d'onde de flexion du modèle à l'échelle est le même, mais la densité modale diminue. Si NM est le nombre de modes dans la plage de fréquences initialement considérée, il y aura $NM\sigma^2$ modes pour le modèle à l'échelle. On peut vérifier que le facteur

de recouvrement modal reste inchangé. En conservant le même critère de discrétisation spatiale, le nombre d'éléments est réduit. Il y a donc un gain de temps conséquent, au détriment de l'information sur les résonances ou sur la réponse locale.

1.2.2 Modèle analytique pour une plaque plane mince

Nous nous intéressons dans cette section au comportement modal d'une plaque élastique plane rectangulaire (voir Fig. 1.13) d'un point de vue analytique. La plaque est simplement supportée sur ses bords. On suppose que la plaque est modélisable par la théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff [62]. Les dimensions de la plaque sont notées L_x et L_z dans les directions \vec{x} et \vec{z} respectivement, tandis que h désigne l'épaisseur, très faible devant L_x et L_z . Sa surface est notée Σ . La rigidité en flexion et la masse volumique de la plaque sont désignées par D et ρ_p . Le déplacement normal $w(\mathbf{X}, t)$ d'un point $\mathbf{X} \in \Sigma$ est déterminé, dans le cadre d'oscillations forcées, par l'équation suivante :

$$D\nabla^4 w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_F, \quad (1.77)$$

où $\nabla^4 = \partial_x^4 + \partial_z^4 + 2\partial_x^2 \partial_z^2$ est le double Laplacien et p_F le terme excitateur.

Dans le cas d'une plaque simplement supportée, les conditions aux limites sont telles que :

$$w(0, z) = w(L_x, z) = w(x, 0) = w(x, L_z) = 0, \quad \forall x \in [0, L_x], \quad \forall z \in [0, L_z]. \quad (1.78)$$

On applique la méthode de superposition modale. Le déplacement s'exprime par l'équation :

$$w(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) W_{mn}(\mathbf{X}), \quad (1.79)$$

dans laquelle les a_{mn} sont les amplitudes modales, les W_{mn} les déformées modales, m et n les indices modaux longitudinal et transversal respectivement et $\mathbf{X} = (x, z)$ le vecteur position. En négligeant l'inertie rotationnelle de la plaque, on donne les déformées modales :

$$W_{mn}(x, z) = \sin\left(x \frac{m\pi}{L_x}\right) \sin\left(z \frac{n\pi}{L_z}\right), \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2. \quad (1.80)$$

On pose les nombres d'onde modaux $k_m = m\pi/L_x$ et $k_n = n\pi/L_z$.

Pour un couple d'indices (p, q) quelconques, on retrouve la propriété d'orthogonalité des modes :

$$\iint_{\Sigma} W_{mn}(\mathbf{X}) W_{pq}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \begin{cases} 0 & \text{si } (m, n) \neq (p, q), \\ \frac{L_x L_z}{4} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.81)$$

On calcule le double Laplacien de l'Eq. (1.80) et en l'injectant avec l'Eq (1.79) dans l'Eq. (1.77) pour un mouvement libre (terme excitateur nul) et en supposant une dépendance temporelle harmo-

nique en $e^{j\omega t}$, on obtient :

$$\sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \frac{D}{\rho_p h} (k_m^2 + k_n^2)^2 W_{mn}(\mathbf{X}) - \sum_{m,n}^{\infty} \omega^2 a_{mn}(\omega) W_{mn}(\mathbf{X}) = 0. \quad (1.82)$$

On multiplie par une déformée modale W_{pq} , où p et q sont des indices quelconques, puis on intègre l'Eq (1.82) sur la surface Σ :

$$\iint_{\Sigma} \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \frac{D}{\rho_p h} (k_m^2 + k_n^2)^2 W_{mn}(\mathbf{X}) W_{pq}(\mathbf{X}) - \sum_{m,n}^{\infty} \omega^2 a_{mn}(\omega) W_{mn}(\mathbf{X}) W_{pq}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 0. \quad (1.83)$$

En exploitant la propriété d'orthogonalité des modes, on est amené à, pour des oscillations libres :

$$\forall (m, n), a_{mn}(\omega) \frac{L_x L_z}{4} \left[\frac{D}{\rho_p h} (k_m^2 + k_n^2)^2 - \omega^2 \right] = 0. \quad (1.84)$$

Or $a_{mn}(\omega) \neq 0$, sinon le déplacement est nul. Pour chaque paire d'indice modaux (m, n) , il y a donc une solution :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{h\rho_p} (k_m^2 + k_n^2)}, \quad (1.85)$$

qui sont les pulsations modales de la plaque plane rectangulaire non amortie. Les amplitudes modales, qui sont les solutions de l'Eq (1.77) avec le terme excitateur, sont calculées en Annexe A.

1.2.3 Méthodes prédictives en vibration ou vibro-acoustique

Dans cette section, nous allons aborder, de manière non exhaustive, différentes méthodes numériques couramment utilisées dans le contexte industriel. En vibro-acoustique, le domaine d'application de ces méthodes prédictives est largement délimité par la plage de fréquences d'intérêt (selon la densité modale ou la longueur d'onde acoustique). Nous verrons en premier lieu les méthodes adaptées aux basses fréquences, puis les méthodes énergétiques, adaptées aux hautes fréquences, enfin les méthodes hybrides.

1.2.3.1 Méthodes basses fréquences

Méthodes des éléments finis : FEM

La méthode des éléments finis (ou FEM pour *finite element method*) est une des méthodes numériques les plus utilisées pour l'étude de systèmes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles [40]. Elle s'applique à la plupart des problèmes industriels et repose sur la discrétisation en petits éléments du système étudié. Ces petits éléments sont des sous-systèmes du système global étudié, délimités par plusieurs nœuds et peuvent être à une, deux ou trois dimensions.

Une fois le système d'équations aux dérivées partielles posés, la méthode des résidus pondérés permet de passer à la formulation intégrale (ou formulation variationnelle) du problème. Après avoir soigneusement défini les éléments et les nœuds du maillage, la formulation intégrale est discrétisée

puis approximée sur les éléments du maillage. L'assemblage permet de construire le système linéaire global, par expansion des systèmes élémentaires grâce à l'ajout de zéros. Cela produit des matrices à coefficients réels, symétriques et creuses. Le système est résolu après l'introduction des conditions aux limites.

La FEM s'applique aussi bien à des structures mécaniques qu'aux domaines acoustiques bornés. Pour le calcul de rayonnement acoustique d'une structure dans un domaine infini, un domaine de fluide fini entourant la structure doit être discrétisé, et une condition de non-réflexion des ondes acoustiques doit être appliquée sur la frontière extérieure du fluide. Cette condition peut être réalisée à l'aide de PML (*perfectly matched layer*), une méthode par introduite par Berenger [7] dans le cas de problèmes électro-magnétiques, qui consiste à appliquer une couche d'éléments absorbants sur la frontière du volume. La couche permet de simuler une condition de Sommerfeld et d'empêcher toute réflexion vers le milieu fluide borné. La méthode a été étendue aux problèmes acoustiques [116, 82] et intégrée à certains logiciels, par exemple ACTRAN [53, Chap. 23]. Le maillage volumique du milieu fluide va cependant considérablement augmenter le nombre d'éléments et donc le temps de calcul.

Dans le cas de problèmes de grandes dimensions, le nombre d'éléments à considérer augmente, et donc la taille des matrices également. Une méthode pour accélérer la résolution est de diviser le système global en sous-systèmes. Les analyses éléments finis sont réalisées sur les sous-systèmes séparément avant assemblage. Cette méthode est aussi adaptée dans le cas d'interaction fluide-structure, où le fluide est défini comme un sous-système [134, 111]. Dans le cas d'un fluide contenu dans une structure élastique, l'interaction entre les deux modifie les modes de la structure. Des procédures de couplage fluide-structure permettent d'obtenir un système matriciel réduit symétrique.

Cette méthode est toutefois restreinte au domaine des basses fréquences. En effet, lors de la discrétisation du domaine, il est nécessaire de prévoir un certain nombre d'éléments (au moins quatre) par longueur d'onde acoustique dans le fluide ou de flexion de la structure. Lorsque la fréquence maximale considérée augmente, ces longueurs d'onde diminuent de manière critique et la FEM est impraticable concrètement.

Méthode des éléments de frontière : BEM

La méthode des éléments de frontière (ou BEM pour *boundary element method*) [28], comme la FEM, est une méthode numérique de résolution d'équations aux dérivées partielles qui repose également sur le principe de discrétisation et la théorie de la formulation intégrale. Cette méthode requiert la connaissance de fonctions de Green pour le problème étudié. Les équations sont écrites à la frontière du domaine acoustique, sur un maillage de la surface de la structure en contact avec le fluide occupant un milieu infini. La condition de non-réflexion est respectée avec la formulation intégrale. En générale, les matrices sont de plus petite taille que pour la FEM, mais elles sont pleines et à coefficients complexes. Liu [83] réalise un état de l'art de la BEM en acoustique, et présente plusieurs méthodes de résolution accélérées des équations, notamment la FMM (*fast multipole methods*) [110].

Puisqu'elle respecte automatiquement la condition de non-réflexion de Sommerfeld, la BEM est particulièrement adaptée pour l'étude de la propagation en milieu infini, comme le rayonnement d'une structure. Pour un problème fluide-structure en domaine infini, la méthode BEM peut être employée avec la sous-structuration. Des méthodes mixtes FEM-BEM ont été développées pour profiter des avantages des deux méthodes. Le fluide acoustique est analysé par BEM (condition de non réflexion,

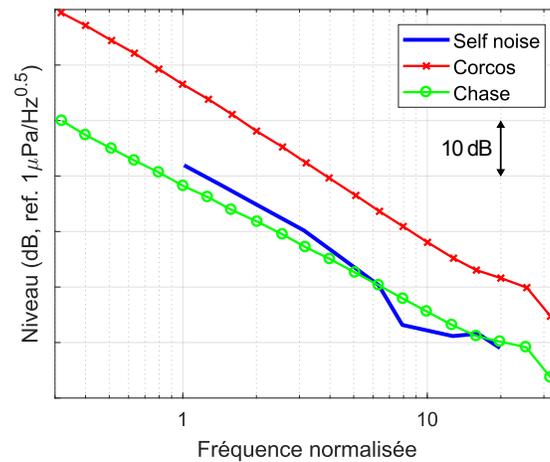


FIGURE 1.14 – Niveau de pression dans la cavité sonar : comparaison de l’approche SEA au bruit propre mesuré en mer ([96, Fig. 9]).

maillage de surface), tandis que la structure élastique est discrétisée par FEM (inhomogénéité ou anisotropie du matériau, non-linéarité). Le couplage entre les deux modèles est une étape délicate, car la matrice du système BEM est pleine et non symétrique, à l’inverse de celle de la FEM, et plusieurs méthodes ont été proposées [56, 35, 127, 128], dont la plupart permettent d’utiliser des maillages indépendants à l’interface commune entre les deux sous-domaines.

1.2.3.2 Méthodes hautes et moyennes fréquences

Les méthodes énergétiques sont utilisées pour modéliser le comportement de systèmes complexes à hautes fréquences, pour des densités modales élevées. Elles reposent souvent sur des moyennes en fréquence et en espace des grandeurs étudiées.

Statistical Energy Analysis

La méthode pour les études vibro-acoustiques de systèmes complexes en hautes fréquences la plus répandue est la SEA (*statistical energy analysis*) [76, 85, 47, 137]. La réponse est calculée en considérant une moyenne spatiale sur les points d’excitation et les points d’observation et une moyenne fréquentielle sur des bandes d’octave ou tiers-d’octave. Le système est divisé en sous-systèmes et la puissance échangée entre les sous-systèmes est supposée proportionnelle à leur différence d’énergie, les constantes de proportionnalité étant les facteurs de perte par couplage entre les sous-systèmes, appelés les CLF (*coupling loss factor*). Les données d’entrée sont la puissance injectée à chaque sous-système, les facteurs de perte interne et les CLF. Un certain nombre d’hypothèses sont faites pour cette méthode : un faible couplage entre les sous-systèmes, une forte densité modale et une répartition uniforme des modes des sous-systèmes sur les différentes bandes tiers d’octave. Cette méthode est adaptée aux excitations large bande et incohérentes (type *rain on the roof*). Maxit et Audoly [96] ont appliqué cette méthode au cas d’une cavité d’un sonar de sous-marin en mouvement. Les résultats avec la méthode SEA (pour deux interspectres) sont comparés à des mesures sur la Fig. 1.14.

Autres méthodes énergétiques

D'autres méthodes énergétiques ont été développées, souvent pour répondre à certaines critiques faites à la SEA, à savoir des hypothèses restrictives, la difficulté à déterminer les CLF ou la réponse moyennée qui ne fournit aucune information spatiale. Certaines de ces méthodes sont abordées ci-dessous.

La méthode des mobilités énergétiques [112] permet, pour des systèmes isolés ou couplés, de lier la réponse ponctuelle en vitesse quadratique moyennée sur une bande de fréquences à la puissance moyenne injectée sur un ensemble de points. Des facteurs de connexion entre sous-systèmes doivent être déterminés au points de couplage. La théorie du flou structurel (*structural fuzzy*) [129] peut être utilisée dans les moyennes fréquences pour décrire un système composé d'un ensemble de sous-systèmes, non modélisables car leurs caractéristiques sont inconnues ou incertaines, reliés à une structure maîtresse déterministe dont les propriétés sont connues.

Certaines méthodes se rapprochent de la SEA et cherchent à l'améliorer. La méthode "*power flow analysis*", ou "*vibrational conductivity approach*", repose sur une formulation différentielle des hypothèses de la SEA, ce qui conduit à une analogie avec l'équation de la chaleur. Elle permet d'obtenir une distribution spatiale de la densité d'énergie du système. Cette méthode est adaptée pour les systèmes à une dimension [20], mais peut être utilisée pour de systèmes à deux dimensions sous certaines hypothèses [72, 75]. La WIA (*wave intensity analysis*) [71] est présentée comme une extension de la SEA. La réponse de chaque sous-système est définie en terme d'ondes aléatoires. Contrairement à la SEA, qui est une méthode modale, il n'y a ni hypothèse de champ diffus, ni hypothèse d'équipartition d'énergie entre les modes. La EFEA (*energy finite element analysis*) [141], qui constitue également une approche "onde", est formulée à partir d'équations différentielles sur la densité d'énergie moyenne, qui sont résolues sur un maillage éléments finis comportant un faible nombre d'éléments. La méthode a été appliquée à des plaques planes minces immergées, suivant la théorie de Kirchhoff, avec effet de chargement du fluide lourd [142]. Han et al. [64] applique la EFEA pour des plaques excitées par un écoulement moyen en prenant en compte la masse ajoutée par le fluide lourd et nomme cette méthode la EFA (*energy flow analysis*).

Pour l'application de la SEA, la détermination des CLF est généralement complexe. Maxit et Guyader [98, 99] développent la SmEdA (*statistical modal energy distribution analysis*), une méthode numérique qui s'intéresse à l'énergie des modes plutôt qu'à l'énergie des sous-systèmes. L'hypothèse d'équipartition de l'énergie entre les modes est ainsi abandonnée. Les CLF sont calculés à partir du comportement vibratoire des sous-systèmes isolés, qui peut-être obtenu par une analyse FEM préalable. Les échanges d'énergie entre deux sous-systèmes sont donnés par les échanges d'énergie entre chaque mode des sous-systèmes. Totaro et Guyader [132] présentent une extension de la SmEdA permettant d'estimer la répartition spatiale de l'énergie.

Méthodes hybrides

D'une part la méthode par éléments finis est restreinte aux basses fréquences, à cause de la taille du maillage dépendant des longueurs d'onde caractéristiques du problème. D'autre part, la SEA est limitée aux hautes fréquences, de par les conditions de densité modale élevée pour chaque sous-système et de couplage faible entre les sous-systèmes (y compris le fluide). De plus, la SEA fournit des réponses moyennées et ne donne pas d'information spatiale sur la réponse. Il existe donc un domaine de

fréquences intermédiaires dans lequel les modèles éléments finis ne sont pas applicables et les hypothèses de la SEA ne sont pas respectées. Ainsi, des méthodes hybrides, tirant parti des méthodes vues précédemment, pour les problèmes vibro-acoustiques dans le domaine des moyennes fréquences ont été développées.

Dans l'approche hybride FE-SEA, le système complexe est divisé en sous-systèmes déterministes, étudiés par l'approche FEM, et en sous-systèmes statistiques (nombreux modes, sensibles aux incertitudes sur l'excitation) modélisés par la SEA. Les modèles sont unis par le principe d'énergie réciproque entre le champ direct et le champ réverbérant créé par les différentes réflexions [123]. Cette méthode a été numériquement et expérimentalement validée [140, 33, 29]. Müller et Buchschmid [106] l'appliquent dans le cas d'une cavité acoustique, en prenant en compte l'interaction fluide-structure, le couplage fort entre les sous-systèmes et l'influence des conditions aux limites (présence d'absorbeurs), ce qui serait impossible avec la méthode SEA seule. Par ailleurs, Gao et al. [55] proposent une autre approche hybride consistant à coupler la méthode SEA à la méthode des éléments finis de frontière, la BE-SEA.

1.2.4 Patch Transfer Function

La méthode PTF (*patch transfer function* ou fonction de transfert par pavé), développée par Maxit et al. [100], est adaptée pour les problèmes acoustique en basses et moyennes fréquences et repose sur la sous-structuration du domaine étudié. Chaque sous-système est étudié séparément et les interfaces entre ceux-ci sont discrétisées en surfaces élémentaires appelées pavés. Pour chaque sous-système découpé, les fonctions de transfert moyennées spatialement sur les pavés sont calculées et correspondent à des impédances acoustiques. La méthode permet de combiner plusieurs approches de natures différentes : analytique, numérique (FEM, BEM) ou expérimentale, puisque chaque sous-système est étudié indépendamment. Même lorsque la FEM est utilisée, la taille de chaque sous-système isolé est plus petite que celle du système global. Le couplage est réalisé en assemblant les surfaces de contacts en utilisant le principe de superposition et les relations de continuité sur les pressions et les vitesses sur les pavés à l'interface. Les systèmes numériques obtenus sont pleins, à coefficients complexes, mais symétriques et de dimension égale au nombre de pavés. La méthode peut être utilisée avec des maillages non-compatibles puisque les fonctions de transfert sont moyennées sur les pavés.

La PTF peut s'appliquer à des cas de couplages avec des fluides lourds. Maxit et al. [101] ont utilisé la méthode dans un cas de couplage structure-cavité. Le volume de fluide est séparé en deux sous-structures, le champ proche de la paroi excitatrice, fortement discrétisé pour modéliser le coupage, et le reste de la cavité acoustique pour le champ lointain. L'interface cavité-cavité est constitué de pavés plus larges, comme représenté sur la Fig.1.15. La méthode permet la réduction temps de calcul par rapport à l'approche éléments finis classique. Aucejo [5] traite le cas d'une cavité acoustique d'eau excitée par un fluide extérieur. La modélisation de l'excitation par CLT dans la méthode PTF est faite grâce à la méthodes des ondes planes pariétales décorréliées, le domaine extérieur semi-infini constitue un autre sous-domaine modélisée par une méthode intégrale et la cavité est séparée sous-structurée en deux cavités selon la méthode décrite précédemment. Berton [11] l'utilise pour le cas d'une plaque plane en acier chargée par un fluide lourd et excitée par une CLT. Le couplage fort est réalisé à l'aide méthode PTF, en découpant un sous-système structure et un sous-système fluide. L'effet réactif du

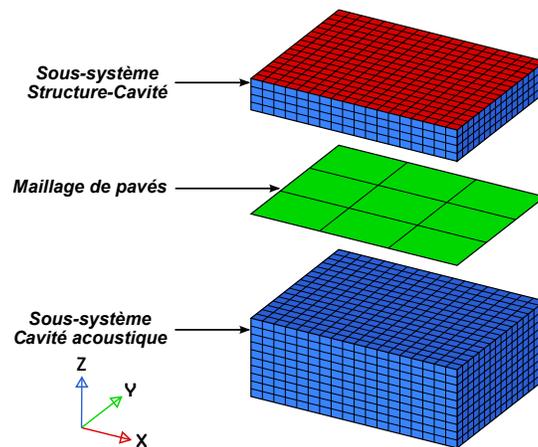


FIGURE 1.15 – Modèle PTF composé d’un sous-système structure-cavité et un sous-système cavité en champ lointain ([5, Fig. 3.4]).

fluide est intégré dans le calcul des fréquences propres de la structure.

❖ 1.3 Méthodologie de l’étude

L’objectif de ces travaux est de proposer une méthode permettant de prédire le rayonnement acoustique d’une structure élastique immergée dans un fluide lourd et excitée par une couche limite turbulente non-homogène. L’application industrielle visée à terme est la prédiction du bruit rayonné par un propulseur de navire hors cavitation.

Dans l’analyse de la bibliographie, nous avons vu dans un premier temps différentes méthodes hydrodynamiques pour prédire les paramètres de couche limite turbulente à la surface d’un objet en mouvement dans un fluide. Ces paramètres peuvent varier spatialement dû à l’évolution naturel de la couche limite et/ou à la présence de gradients de pression (induit par exemple par une courbure de la surface de l’objet). Par ailleurs, des modèles ont été développés depuis plus d’un demi-siècle pour relier ces paramètres de couche limite aux spectres des fluctuations de pression qui viennent exciter l’objet déformable. Nous avons comparé ces modèles entre eux et avec des données expérimentales issues de la littérature. Dans un deuxième temps, nous avons étudié les différentes méthodes permettant de faire le lien entre les modèles stochastiques de l’excitation couche limite turbulente et les modèles vibro-acoustiques généralement déterministes. Ces méthodes requiert l’estimation de fonctions de transfert (fonctions de réponse en fréquence ou fonctions de sensibilité). Des calculs semi-analytiques peuvent être menés dans le cas de structures simples telle qu’une plaque plane. Pour des géométries plus complexes, les méthodes basées sur la discrétisation en éléments sont généralement bien adaptées aux basses fréquences alors que des méthodes énergétiques telles que la méthode

SEA permettent d'affronter les hautes fréquences. Les méthodes vues à la section 1.2 faisant le lien entre l'excitation couche limite et le modèle vibro-acoustique considèrent une couche limite turbulente homogène, c'est-à-dire que les paramètres de couche limite ne varient pas spatialement. Or, pour de nombreux cas pratiques, la couche limite turbulente évolue spatialement à la surface de la structure considérée. L'objectif scientifique de cette thèse est donc d'étudier différentes méthodes pour prendre en compte l'évolution spatiale de la couche limite turbulente dans les calculs vibro-acoustiques. Nous ferons l'hypothèse que les modèles de fluctuation de pression qui ont été établis pour des couches limites turbulentes homogènes restent valables localement pour des couches limites variant spatialement. Le caractère aléatoire des phénomènes intervenant dans la couche limite turbulente font que l'historique d'une particule dans l'écoulement est peu prépondérant et rend cette hypothèse acceptable. On ne considérera néanmoins pas les basses fréquences pour lesquelles phénomènes à grandes échelles peuvent intervenir.

Les investigations ont été menées en quatre étapes.

- La première, qui constitue le chapitre 2, porte sur la modélisation du comportement vibratoire d'une plaque soumise à une excitation CLT homogène. Elle a pour objectif de cerner les paramètres de calcul de trois techniques permettant de coupler le modèle d'excitation au modèle vibratoire : la méthode spatiale, la méthode dans les nombres d'onde et la méthode des ondes planes décorréelées. On cherche notamment à déterminer les paramètres optimaux pour réduire les temps calculs tout en conservant une prédiction précise. On considère également le cas d'une plaque en eau pour investiguer la prise en compte d'un fluide lourd dans le calcul vibratoire.
- La seconde étape consiste à étendre la méthode dans les nombres d'onde pour prendre en compte l'évolution des paramètres de CLT. Ces travaux ont fait l'objet d'un article publié au *Journal of Fluids and Structures* tel que présenté au chapitre 3. Le principe de décomposition de la surface excitée en différentes sous-zones tel qu'initié par Berton et al. [12] est repris. Celui-ci suppose que les pressions fluctuantes entre les zones sont décorréelées entre elles. Une étude numérique met en évidence les limites de cette approche et conduit à introduire des termes d'interaction entre les sous-zones. Un critère de validité sur la taille des sous-zones est proposé avant d'appliquer la méthode sur le cas d'une plaque d'épaisseur variable et excitée par une couche limite turbulente déclenché sur l'arrête amont à l'écoulement.
- La troisième étape se base sur la méthode de décomposition en sous-zone pour proposer une extension de la méthode des ondes planes décorréelées. Cette extension permet de synthétiser des champs de pression correspondant à des CLT inhomogènes. Les champs synthétisés peuvent alors être utilisés comme chargements d'un modèle vibro-acoustique. Ces travaux ont été publiés au *Journal of the Acoustical Society of America* et sont présentés au chapitre 4. Les investigations menées nous conduisent à relaxer certaines hypothèses de la méthode de décomposition en sous-zone et à proposer différentes variantes de la méthode. Dans sa version la plus aboutie, les contributions convectives et une variation continue de l'évolution de la CLT sont prises en compte.
- La quatrième étape consiste à appliquer les méthodes développées précédemment pour prédire le rayonnement acoustique d'une pale immergée en eau et excitée par une couche limite turbulente non-homogène. Les calculs sont menés à partir de calculs éléments finis avec des éléments infinis en frontière de domaine pour représenter des conditions de non-réflexion. Dans un premier temps, on valide le processus de calcul sur un cas de plaque immergée en eau. Les résultats

de simulation permettent également d’appréhender le rayonnement acoustique de la plaque lors d’une excitation par une CLT non homogène. Dans un second temps, on applique le processus au cas de la pale à partir des calculs hydrodynamiques sous XFOIL. Les différentes étapes du process sont illustrées et on cherche à mettre en avant les intérêts de l’approche développée ainsi que ses limitations. Ces investigations sont présentés au chapitre 5.

Une synthèse de l’ensemble de ces travaux ainsi que les perspectives scientifiques et de valorisations industrielles sont finalement présentées dans la conclusion.

CHAPITRE 2

Étude d'une plaque excitée par une CLT homogène

Ce chapitre traite du cas de plaques élastiques rectangulaires excitées par des couches limites turbulentes homogènes. Deux cas issus de la littérature scientifique, pour lesquels on dispose des résultats de mesures vibratoires, sont étudiés. Le premier cas consiste en une plaque testée dans la soufflerie anéchoïque de l'université de Sherbrooke [91], alors que le second consiste en une plaque fixée sur une maquette catamaran et immergée en eau [25]. Pour ces deux cas, des simulations numériques de la réponse vibratoire sont réalisées, soit avec l'approche dans les nombres d'onde (présentée à la section 1.2.1.2) soit avec la méthode des ondes planes décorréelées (présentée à la section 1.2.1.4). L'influence de différents paramètres de calculs est étudiée pour optimiser le processus. Par ailleurs, les résultats sont obtenus avec différents modèles de description des fluctuations de pression induit par la couche limite turbulente.

❖ 2.1 Cas d'application en air

Nous allons nous intéresser dans cette section à un cas d'étude de vibrations d'une plaque excitée par une CLT homogène en air, en appliquant la méthode nombre d'onde. Des données expérimentales permettront d'évaluer les modèles décrits au chapitre précédent. Le rôle du pic convectif recevra une attention particulière. En effet, lorsqu'on se place au-dessus de la fréquence de coïncidence aérodynamique, on verra qu'il est possible, par un filtrage en nombre d'onde, de réduire le temps de

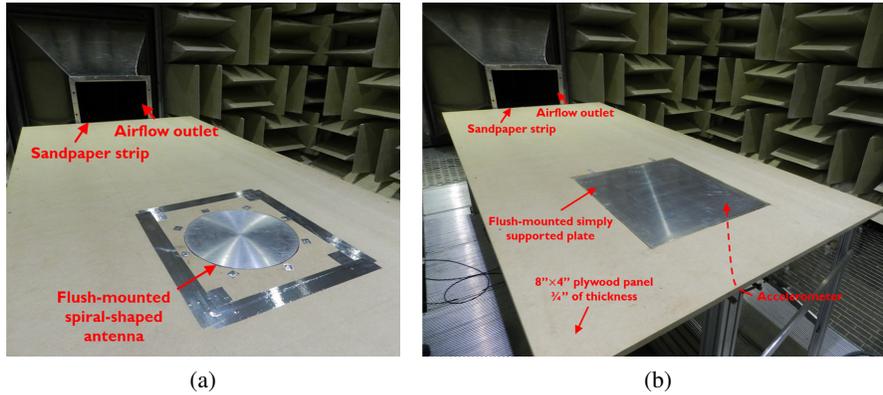


FIGURE 2.1 – Installations expérimentales ; (a) : mesures des fluctuations de pression avec une antenne de microphones affleurants en spirale, (b) : plaque d'aluminium excitée par une CLT (images issues de [91]).

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Longueur	L_x	[cm]	48
Largeur	L_z	[cm]	42
Épaisseur	h	[mm]	3.17
Masse volumique	ρ_p	[kg/m ³]	2740
Module d'Young	E	[GPa]	68.9
Coefficient de Poisson	ν_p		0.3

TABLE 2.1 – Dimensions et propriétés mécaniques de la plaque en aluminium [91, Table 1].

calcul.

2.1.1 Description du dispositif expérimental

Marchetto [89, 91] a étudié un panneau rectangulaire en aluminium dans un tunnel aérodynamique, pour deux vitesses d'écoulement, $U_0 = 20$ et $U_0 = 40$ m/s. Les dimensions de la plaque et les propriétés mécaniques de l'aluminium sont données dans la Table 2.1. Les pressions bloquées sont mesurées avec 61 microphones disposés en spirale. Un traitement des mesures de pression est réalisé avec MATLAB pour déterminer empiriquement les coefficients du modèle de Mellen (α_x , α_z et la vitesse de convection U_c) en fonction de la fréquence. Ces trois grandeurs sont données sur la Fig. 2.2. L'autospectre des fluctuations de pression pariétale a été obtenu en moyennant les autospectres mesurés par les différents microphones de l'antenne en spirale.

D'après la vitesse de convection mesurée, à 2000 Hz le nombre d'onde convectif est $k_c = 488$ rad/m et à 40 m/s et 1113 rad/m à 20 m/s. Pour caractériser la réponse de la plaque rectangulaire, on utilise

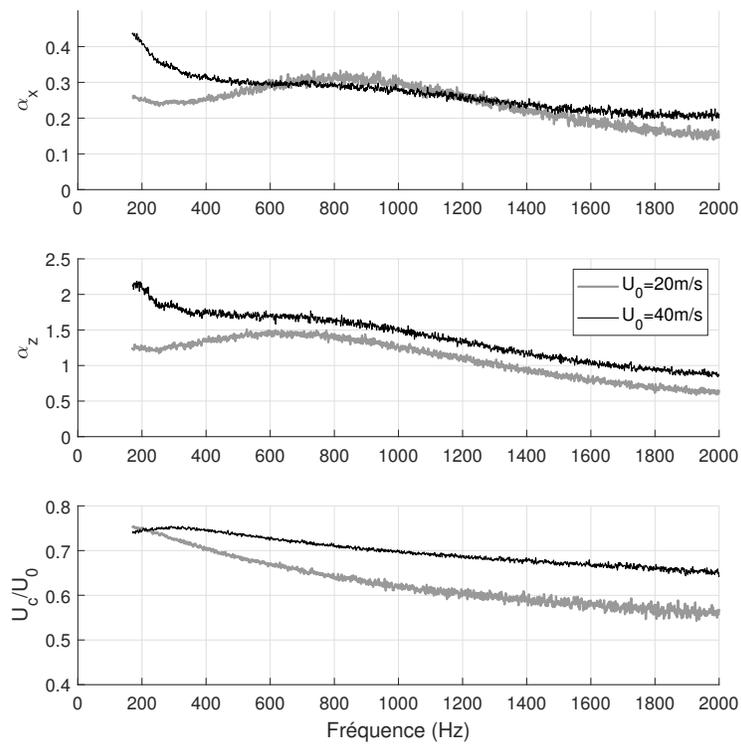


FIGURE 2.2 – Coefficients du modèle de Mellen et vitesse de convection déterminés expérimentalement [89].
Trait noir fin : $U_0 = 40\text{m/s}$, trait gris épais : $U_0 = 20\text{m/s}$.

le nombre de de flexion k_f défini par :

$$k_f = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho_p h}{D}}} = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{12\rho_p(1-\nu_p^2)}{Eh^2}}}, \quad (2.1)$$

où ρ_p , D , E et ν_p sont respectivement la densité, la rigidité en flexion, le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau et h l'épaisseur de la plaque. Pour la plaque employée, à 2000 Hz, $k_f = 51$ rad/m. Il est clair que le pic convectif est filtré par la plaque, puisque k_c est au moins 9 fois plus grand que k_f à cette fréquence. Il peut cependant jouer un rôle dans la réponse vibratoire à des fréquences plus basses.

2.1.2 Calcul numérique de la réponse vibratoire

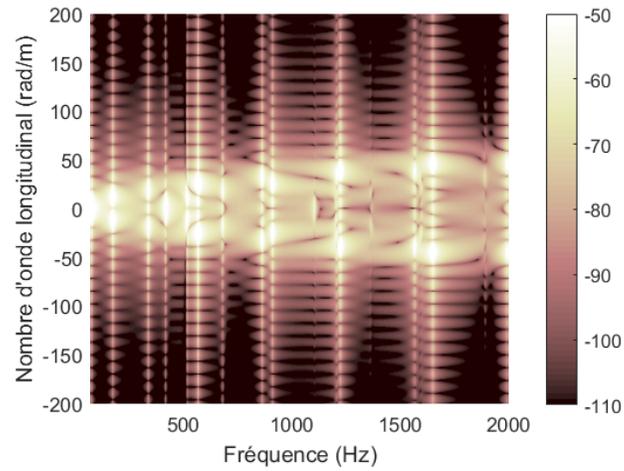
Pour une vitesse d'écoulement de $U_0 = 40$ m/s on pose une valeur constante de $U_c = 28$ m/s, soit un ratio U_c/U_0 à 0.7 (la moyenne de la vitesse de convection mesurée est de 27.9 m/s). On utilise les paramètres constants de l'interspectre ($\alpha_x = 0.10$ et $\alpha_z = 0.77$) donnés par l'Eq. (1.32). Pour illustrer l'effet de filtrage par la structure des composantes dans les hauts nombres d'onde des fluctuations de pression, on représente dans le plan (f, k_x) pour $k_z = 0$, sur la Fig. 2.3, le module au carré de la fonction de sensibilité $|\hat{H}_v(\mathbf{X}, k_x, 0, f)|^2$ en $\mathbf{X} = (0.18; 0.09)$. Le calcul de cette fonction est donnée dans l'Annexe A (voir Eq. (A.9) en particulier). On représente également l'interspectre de Mellen normalisé $\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, 0, f)$ (voir Eq. (1.40)) et le produit de ces deux termes. Sur la Fig. 2.3(a), on voit bien le domaine de sensibilité de la plaque délimité par le nombre d'onde de flexion, évoluant en $\sqrt{\omega}$. Sur la Fig. 2.3(b), le pic convectif est caractéristique de l'interspectre des fluctuations de pression dans le domaine nombre d'onde. La croissance du nombre d'onde convectif $k_c = \omega/U_c$ est nettement supérieure à celle du $k_f \propto \omega^{1/2}$. En basses fréquences, sur la Fig. 2.3(c), on voit que le pic convectif progressivement estompé par l'effet filtrant de la plaque. Le produit $|\hat{H}_v|^2 \times \tilde{\Phi}_{pp}$ est la quantité à intégrer pour obtenir la vitesse quadratique (d'après l'Eq. (A.12)).

Les mesures sont réalisées à partir de 170 Hz, alors que la première fréquence de résonance de la plaque est égale à 76 Hz. Dans les simulations numériques on descend jusqu'à 65 Hz pour inclure ce mode. Nous effectuons alors un calcul numérique avec la méthode nombre d'onde, en supposant constants les coefficients du modèle de Mellen et la vitesse de convection. Aucune mesure des paramètres de CLT n'est disponible pour cette expérience, l'autospectre mesuré est donc repris dans un premier temps pour notre modélisation.

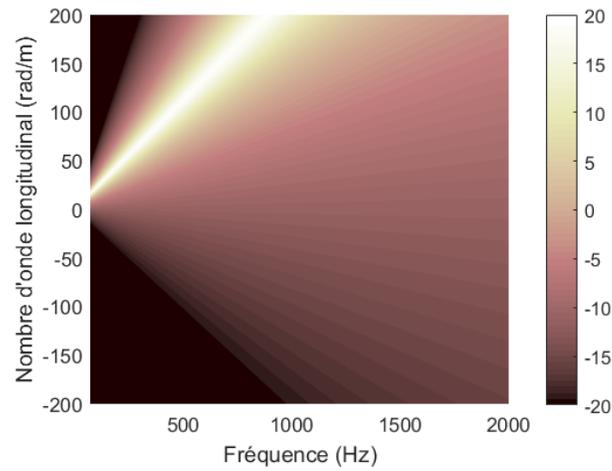
La fréquence de coïncidence aérodynamique f_{coinc} est la fréquence pour laquelle les nombres d'ondes convectif et de flexion sont égaux, soit :

$$f_{\text{coinc}} = \frac{U_c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_p h}{D}}. \quad (2.2)$$

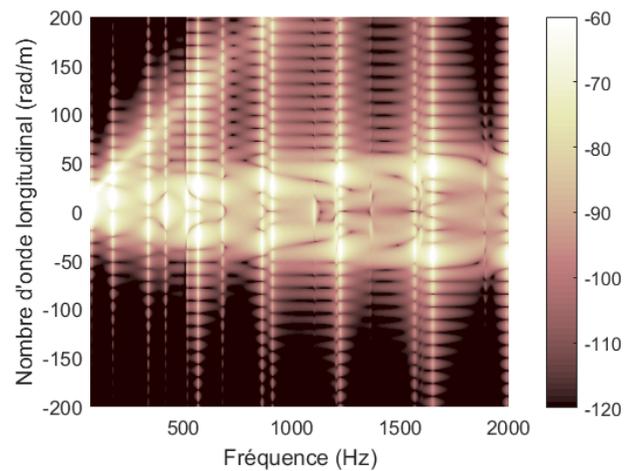
Dans le cas actuel, la fréquence de coïncidence est $f_{\text{coinc}} = 26$ Hz. À 649 Hz, le nombre d'onde convectif est égal au quintuple du nombre d'onde de flexion, on estime donc qu'au-delà, le pic convectif ne joue aucun rôle sur la réponse. On se base sur cette fréquence pour déterminer le nombre d'onde de



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.3 – (a) : module carré de la fonction de sensibilité $|\hat{H}_v(\mathbf{X}, k_x, k_z = 0, f)|^2$ en $\mathbf{X} = (0.18; 0.09)$ de la plaque d'aluminium ; (b) : interspectre normalisé de Mellen $\check{\Phi}_{pp}(k_x, k_z = 0, f)$ pour $U_c = 28$ m/s, $\alpha_x = 0.10$, $\alpha_z = 0.77$; (c) : produit de (a) et (b).

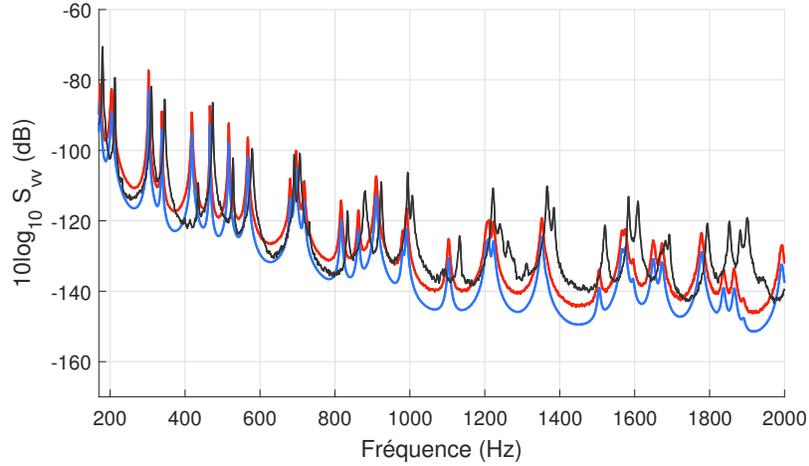


FIGURE 2.4 – Niveaux de vitesse quadratique à $\mathbf{X} = (0.18; 0.09)$ pour $U_0 = 40$ m/s.
 Noir : mesures à l'accéléromètre. Couleur : calculs en considérant les paramètres α_x , α_z et U_c suivants :
 rouge : mesures par Marchetto et al. [91] (voir Fig. 2.2);
 bleu : utilisé couramment dans la littérature $\alpha_x = 0.10$, $\alpha_z = 0.77$, $U_c = 0.7 \times U_0$.

coupure, qui est $\bar{k} = 218$ rad/m, soit approximativement 1.5 fois le nombre d'onde convectif à 649 Hz. Le pas de discrétisation est de $\delta k = 1$ rad/m, ce qui respecte le critère de l'Eq. (1.67) pour les dimensions de la plaque.

On compare la vitesse quadratique au point $\mathbf{X} = (0.18; 0.09)$, obtenue d'une part en utilisant les paramètres de l'interspectre de Mellen ajustés empiriquement par Marchetto (Fig. 2.2), et d'autre part en utilisant les paramètres constants donnés ci-dessus. Les mesures de vitesse à ce point sont également représentées. Les courbes sont tracées sur la Fig. 2.4. On remarque une sous-estimation des prédictions par le spectre de Mellen considérant les paramètres originaux couramment utilisés dans la littérature. Ces différences peuvent s'expliquer par la différence de valeur entre les coefficients α_x et α_z donnés dans la littérature et ceux mesurés empiriquement. En supposant que l'on est bien en-deçà du pic convectif ($k_c \gg k_x$), on peut simplifier l'Eq. (1.40) en faisant tendre le nombre d'onde convectif vers l'infini :

$$\lim_{k_c \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}_{pp} = \frac{2\pi\alpha_x^2}{\alpha_z(\alpha_x^2 + 1)^2}, \quad (2.3)$$

ce qui revient à dire que le niveau du spectre en bas nombres d'onde dépend uniquement des paramètres α_x et α_z .

2.1.3 Filtrage en nombre d'onde

Dans un second temps, un nombre d'onde de coupure dépendant de la fréquence, proportionnel au nombre d'onde de flexion de la plaque, est choisi :

$$\bar{k} = \kappa k_f, \quad (2.4)$$

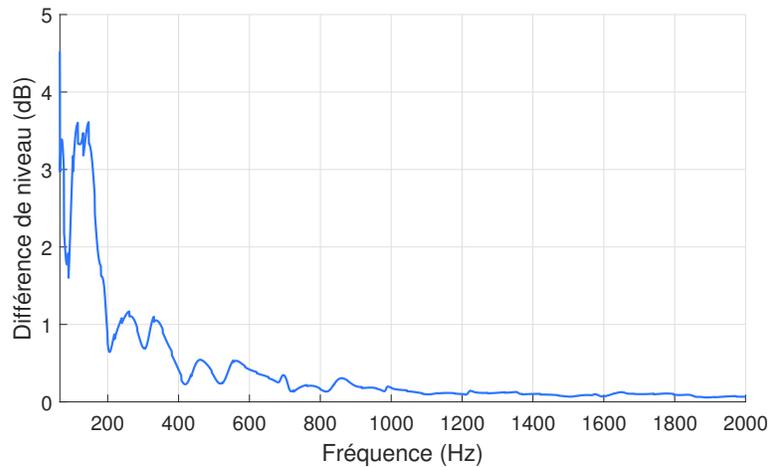


FIGURE 2.5 – Écart de niveaux de vitesse quadratique avec et sans le pic convectif; $f_{\text{coinc}} = 26$ Hz.

avec κ un paramètre fixé à 1.3. Le nombre d'onde de coupure de l'Eq. (2.4) permet de prendre en compte le domaine de sensibilité de la plaque, car supérieur à k_f , tout en filtrant les composantes liées au pic convectif. Dans le cas considéré, en air, pour des vitesses subsoniques, le nombre d'onde convectif est nettement supérieur au nombre d'onde de flexion; excepté en basses fréquences, pour lesquelles ils sont du même ordre de grandeur. L'effet du pic convectif est ainsi supposé être minime, voire négligeable. Si tel est le cas, le nombre d'onde de coupure de l'Eq. (A.12) peut-être fixé par l'Eq. (2.4), réduisant grandement le domaine d'intégration et le temps de calcul.

Sur la Fig. 2.5 on présente l'écart de niveau de vitesse quadratique moyenne pour les calculs avec et sans le pic convectif, en utilisant un $\bar{k} = 218$ rad/m puis un nombre d'onde de coupure défini par l'Eq. (2.4). Le plus grand écart entre les deux prédictions se trouve effectivement en basses fréquences. Le calcul avec pic convectif filtré sous-estime le niveau par rapport à la référence d'au maximum 3 dB en dessous de 200 Hz, c'est-à-dire pour les deux premiers modes de résonance. Par ailleurs, le calcul avec pic convectif filtré est environ 20 fois plus rapide. Pour des grandes vitesses d'écoulements, des écoulements transsoniques, le nombre d'onde convectif diminue et le pic convectif peut jouer un rôle important sur la réponse dans les moyennes fréquences. À plus basses vitesses cependant, le nombre d'onde k_c croît plus vite, et le pic convectif devient plus rapidement négligeable. Dans notre cas, nous nous intéressons à ces écoulements lents en eau, nous pourrions donc considérer que le pic convectif joue un faible rôle sur la réponse vibratoire. Il sera souvent filtré par le choix du nombre d'onde de coupure.

2.1.4 Superposition modale : filtrage modal

On s'intéresse ici au calcul de la vitesse vibratoire par la méthode analytique de superposition modale, vue à la section 1.2.2 et détaillée en Annexe A. En particulier, on applique une méthode visant à réduire le temps de calcul, en appliquant un filtre sur les modes.

En théorie, la superposition modale est réalisée sur un nombre infini de modes (voir Eq. (1.79)).

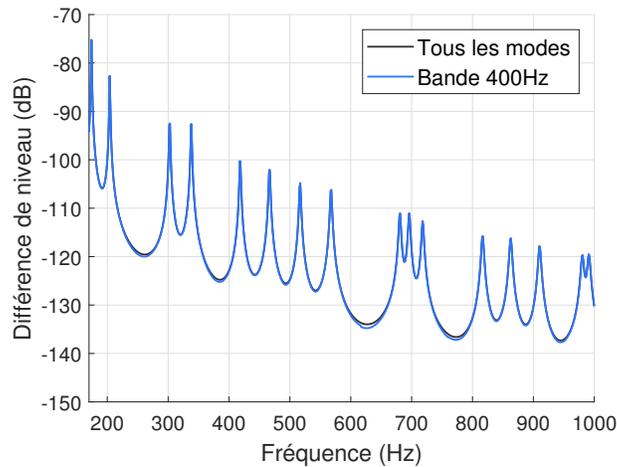


FIGURE 2.6 – Vitesse quadratique moyenne en appliquant des bases modales réduites.

En pratique, on inclut dans le calcul seulement les modes dont la fréquence de résonance est comprise dans une plage de fréquences légèrement plus large que la gamme de fréquence étudiée. Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) et fonctions de sensibilité (FS) pour une plaque plane mince rectangulaire en air (fluide léger) suppose une somme sur tous les modes (voir Annexe A.1). Si la gamme de fréquences est large, ou que la densité modale est élevée, l'augmentation du nombre de modes implique la manipulation de matrices de plus grande taille. Cependant, un mode donné joue un rôle sur la réponse seulement autour sa propre fréquence de résonance. Ainsi il est possible d'optimiser les calculs de ce point de vue.

Le temps de calcul peut être réduit en utilisant des bases modales restreintes pour la méthode d'expansion modale, décrite par Franco et al. [51]. À chaque fréquence du calcul, seuls les modes ayant une résonance comprise dans un intervalle autour de ladite fréquence sont considérés. Plus cet intervalle est étroit, moins nombreux seront les modes et plus le calcul est accéléré. La méthode de la base modale réduite est plus efficace avec une faible densité modale, quand la réponse à une fréquence donnée dépend de peu de modes, ce qui permet de grandement réduire la dimension des matrices.

La base modale réduite est appliquée avec la méthode nombre d'onde, pour la plaque d'aluminium, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont données dans la Table 2.1, placée en air et excitée par un écoulement à la vitesse $U_0 = 40\text{ m/s}$. L'interspectre de Mellen est choisi, le nombre d'onde de coupure est fixé à $\bar{k} = 218\text{ rad/m}$. La vitesse quadratique moyenne est calculée dans deux conditions : (i). un calcul exact, (ii). avec une base modale de largeur 400 Hz.

La vitesse quadratique moyenne obtenue pour les deux conditions est tracée sur la Fig. 2.6. Avec la base modale réduite, le temps de calcul est divisé approximativement par 3. Les maximums de différence sont observables aux anti-résonances, là où plusieurs modes peuvent contribuer. Aux résonances, l'erreur commise est négligeable. Il est toutefois à noter que l'écart reste inférieur à 1 dB dans cette simulation. Dans le cadre d'un calcul analytique, la base modale réduite peut-être utilisée pour réduire le temps de calcul en conservant une bonne précision des résultats.

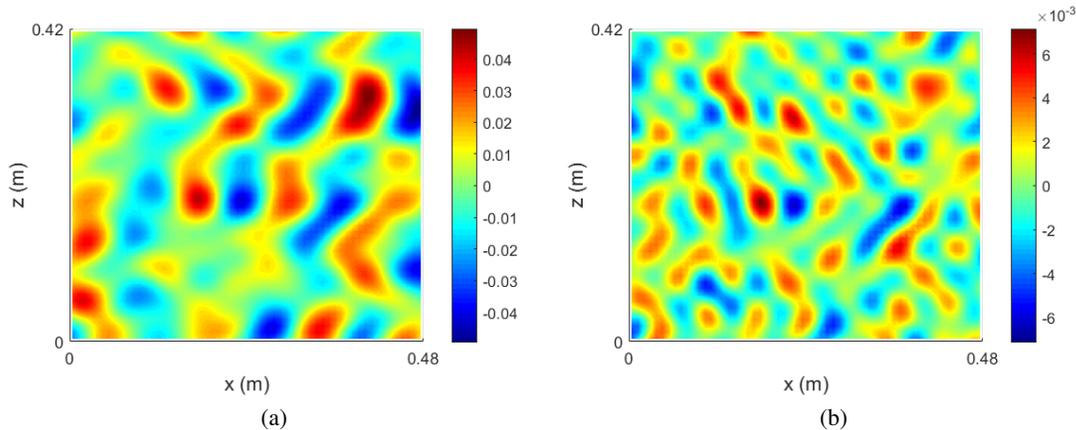


FIGURE 2.7 – Champ de pression pour une réalisation ; (a) 200 Hz ; (b) 800 Hz. (Échelle : Pa)

2.1.5 Convergence de la méthode OPPD

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode par synthèse d’ondes planes pariétales décorréliées, vue à la section 1.2.1.4. Dans un premier temps, nous effectuons un rappel sur cette méthode. Ensuite, nous l’analyserons comme une méthode numérique utilisant une variable aléatoire. En utilisant deux théorèmes fondamentaux des mathématiques statistiques nous obtiendront la vitesse de convergence de la méthode.

2.1.5.1 Présentation de la méthode OPPD

La méthode OPPD est appliquée au cas de la section, c’est-à-dire une vitesse de convection $U_c = 28 \text{ m/s}$ et une plaque en aluminium (voir Table 2.1). Sur la Fig. 2.7 sont représentés deux champs de pression bloquée, calculés par l’Eq. (1.70), pour une réalisation à deux fréquences différentes, pour un nombre d’onde de coupure $\bar{k} = 100 \text{ rad/m}$. La longueur d’onde du champ de pression est donnée par la longueur d’onde de convection $\lambda_c = U_c/f$, ce qui explique l’aspect différent des champs de pression pour les deux fréquences.

On calcule la réponse en vitesse de la plaque pour un champ de pression calculé par l’Eq. (1.70). Cette étape est répétée pour un ensemble de 30 réalisations et les réponses sont moyennées. Sur la Fig. 2.8 sont tracées en trait fin gris les réponses pour chacune des réalisations, la moyenne de cet ensemble de réponses en rouge et la vitesse quadratique estimée par la méthode nombre d’onde en trait-pointillés noirs.

2.1.5.2 Méthodes de Monte-Carlo

L’appellation “méthode de Monte-Carlo” désigne des méthodes numériques utilisant le tirage au sort de nombres aléatoires. Elles sont utilisées dans différents domaines de la physique, notamment pour la résolution numérique d’équations aux dérivées partielles [73]. Ces méthodes reposent sur une quantité physique à approcher interprétée comme une espérance mathématique et la loi des grands

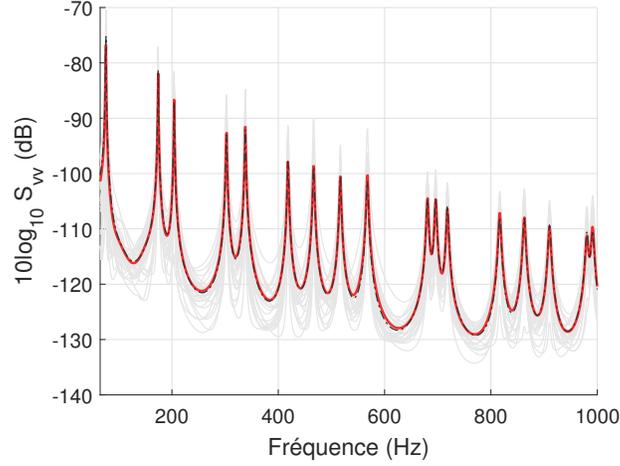


FIGURE 2.8 – Vitesse quadratique moyenne par méthode OPPD.
Gris : réponses pour 30 réalisations ; rouge : moyenne des réponses ;
pointillés noirs : méthode nombre d'onde (référence).

nombres. La méthode OPPD décrite par l'Eq. (1.71) est donc une méthode Monte-Carlo dans laquelle les variables aléatoires sont les phases φ et la quantité à approcher la vitesse quadratique S_{vv} .

Soit une variable aléatoire φ selon une loi uniforme entre 0 et 2π , notée $\varphi \sim \mathcal{U}[0; 2\pi]$. On dispose de N réalisations $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ indépendantes et uniformément distribuées de la loi φ qui permettent d'estimer la vitesse quadratique :

$$S_{vv} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N |v(\varphi_r)|^2, \quad (2.5)$$

où $v(\varphi_r)$ est la vitesse vibratoire pour une réalisation r d'un champ d'ondes planes décorréliées et S_{vv} la moyenne empirique des réponses aux réalisations. Pour la suite, on désignera cette moyenne par l'estimateur $\hat{\theta}_N$. La loi forte des grands nombres nous assure la convergence de la méthode :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\theta}_N = \mu, \quad (2.6)$$

où μ est l'espérance mathématique, soit la vitesse que l'on cherche à approcher.

L'erreur commise est évaluée par $\varepsilon_N = \hat{\theta}_N - \mu$. Le théorème central limite nous dit que, pour N "assez grand" :

$$\frac{\hat{\theta}_N - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \varepsilon_N \text{ converge en loi vers } G \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.7)$$

où G est une variable aléatoire, $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi gaussienne centrée réduite et σ est la variance de $\hat{\theta}_N$. Cette variance n'étant pas connue, on l'approche par l'estimateur suivant :

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \left(|v(\varphi_r)|^2 - S_{vv} \right)^2. \quad (2.8)$$

Dans la pratique, l'erreur ε_N est remplacée par une gaussienne centrée de variance σ/N^2 . Pour

α	1%	2%	3%	5%	7.5%	10%	15%	20%
$z_{1-\alpha/2}$	2.58	2.33	2.17	1.96	1.78	1.65	1.44	1.29

TABLE 2.2 – Extrait de la table des quantiles de la loi normale centrée réduite.

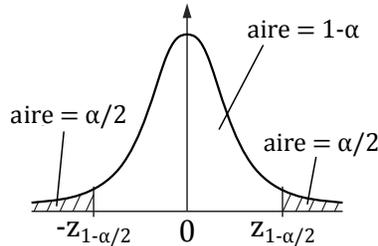


FIGURE 2.9 – Représentation graphique des quantiles pour la loi gaussienne centrée réduite.

les méthodes de Monte-Carlo, l'erreur n'est pas bornée. On donne la précision de l'estimation sous la forme d'un intervalle de confiance, dont la largeur dépend de la fonction de répartition de la loi gaussienne. Ainsi, l'intervalle de confiance qui a $1 - \alpha$ pour cent de chance de contenir μ s'écrit :

$$\hat{\theta}_N - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\theta}_N + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile de la loi normale, dont les valeurs sont données dans la Table 2.2. Les quantiles correspondent à la probabilité $\mathbb{P}(-z_{1-\alpha/2} < G < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, où G suit la loi normale centrée réduite. Une représentation graphique des quantiles se trouve en Fig. 2.9.

La convergence avec le nombre d'échantillons en σ/\sqrt{N} est plutôt lente pour les méthodes de Monte-Carlo. La méthode OPPD converge donc en $N^{1/2}$, avec N le nombre de réalisations.

2.1.5.3 Application numérique

En reprenant le même cas, des calculs avec la méthode OPPD et la méthode nombre d'onde ont été effectués. La prédiction par la méthode nombre d'onde est prise comme référence pour la comparaison avec la méthode OPPD. Les courbes sont tracées sur la Fig. 2.10, pour 30 réalisations avec la méthode OPPD. Un intervalle de confiance (voir Eq. (2.9)) à 98% est tracé sur la figure également. Sur la Fig. 2.11, on trace l'écart de l'intervalle de confiance en dB en fonction du nombre de réalisations. La courbe converge effectivement en $N_r^{-1/2}$. Ainsi, multiplier le nombre de réalisations par 4 permet de diviser seulement par 2 la taille de l'intervalle de confiance.

2.1.6 Comparaison du temps de calcul avec différentes méthodes

Dans cette section¹, on compare les temps de calcul de trois différentes méthodes de couplage vibro-acoustique, à savoir les méthodes spatiale, nombre d'onde et OPPD, dans le cas expérimental introduit à la section 2.1.1.

1. Section rajoutée après la soutenance.

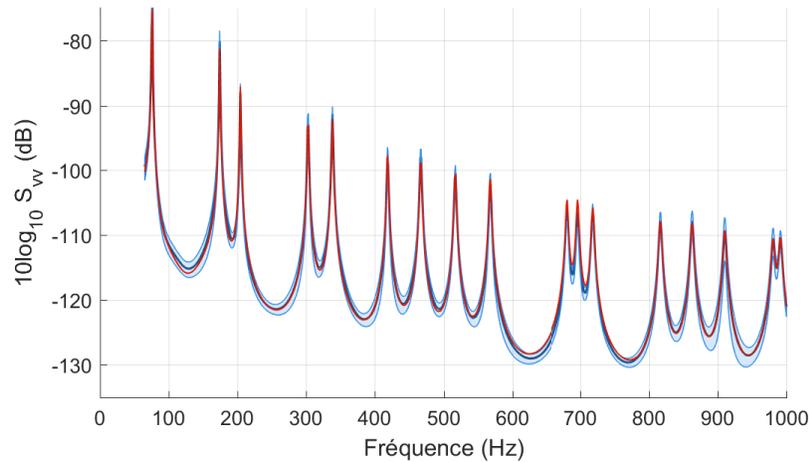


FIGURE 2.10 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque d'aluminium.
Noir : méthode OPPD avec 30 réalisations. Bleu : intervalle de confiance à 98%.
Rouge : méthode nombre d'onde.

	f_{MAX}	Avec pic	Sans pic
Spatial	300 Hz	60 min	/
Nombre d'onde	800 Hz	1 min	<10 s
OPPD (30 réalisations)		10 min	<10 s

TABLE 2.3 – Comparaison des temps de calcul de vitesse vibratoire pour une plaque rectangulaire simplement supportée.

Dans ce cas (plaque mince rectangulaire simplement supportée), les fonctions de transfert $H_v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \omega)$ et $\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)$ utilisées dans les méthodes spatiale et nombre d'onde respectivement sont connues et obtenues de manière analytique. Dans le cas inverse, une étape supplémentaire de calcul des fonctions de transfert doit être réalisée[90].

Pour la méthode spatiale, le critère indiqué par l'Eq. (1.61) nous indique que le nombre d'éléments à considérer augmente proportionnellement à la fréquence dans les deux directions. De plus, la double somme (voir Eq. (1.60)) amène la manipulation de grandes matrices (taille du maillage au carré).

Dans le domaine des nombres d'onde, en admettant que le pic convectif de l'interspectre soit correctement décrit par le pas en nombre d'onde δk , ce dernier dépend la pseudo-période des fonctions de sensibilité (voir Eq. (1.67)) et ne change pas avec la fréquence. Le nombre d'onde de coupure \bar{k} en revanche augmente avec la fréquence, selon ω si il suit k_c et selon $\sqrt{\omega}$ si il suit k_f (voir Eq. (2.1)). En considérant le pic convectif filtré, la méthode nombre d'onde devient bien plus efficace lorsque la fréquence augmente.

Concernant la méthode OPPD, le pas en nombre d'onde doit seulement permettre de décrire le pic convectif (si celui-ci est pris en compte dans les calculs). Le pas en espace diminue lorsque le nombre de coupure augmente (voir Eq. (1.72)). Par ailleurs, le calcul vibratoire doit être répété pour plusieurs réalisations (voir Eq. (1.71)).

Les temps de calcul de la vitesse quadratique moyenne sont donnés dans la Table 2.3 (Intel i5-

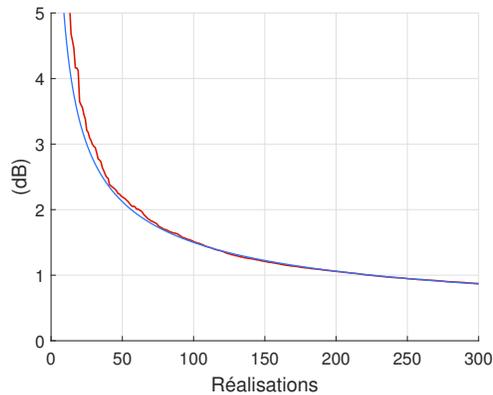


FIGURE 2.11 – Largeur de l’intervalle de confiance à 98% pour le calcul de la Fig. 2.10 en fonction du nombre de réalisations (rouge) et courbe proportionnelle à $N_r^{-1/2}$ (bleu).

4590, 8Go, Windows 7). Pour la méthode spatiale, la fréquence maximale est plus basse pour éviter d’aboutir à des systèmes de dimension prohibitive. Notons aussi que le calcul des fonctions de réponse en fréquence est effectué par superposition modale et qu’une plage de fréquence restreinte permet d’inclure moins de modes.

Pour les méthodes nombres d’onde et OPPD, l’intérêt de filtrer le pic convectif est démontré (voir Fig. 2.5 pour l’effet du filtrage du pic convectif sur la réponse vibratoire).

❖ 2.2 Cas d’application en eau

L’influence du fluide est étudiée dans cette section, à l’aide d’un cas de la littérature scientifique. La description générale de l’expérimentation et sa reproduction numérique sont abordées dans une première partie. L’effet du fluide est ensuite intégré par une masse ajoutée impactant les fréquences de résonance, obtenues ici par deux calculs dont les résultats sont comparés. Finalement, les résultats vibratoires prédits par les différents interspectres et autospectres sont comparés aux mesures expérimentales [25].

2.2.1 Description du dispositif expérimental

Dans les sections précédentes, la plaque étant excitée par un fluide léger et l’analyse modale a été réalisée *in vacuo*. Pour l’étude des pales d’un propulseur, il est nécessaire de prendre en compte l’effet de masse ajoutée par fluide lourd en dessous de la fréquence critique. Le cas test considéré par Ciappi et al. [25] est composée d’une plaque plane rectangulaire en Plexiglas, fixée sous la coque d’un

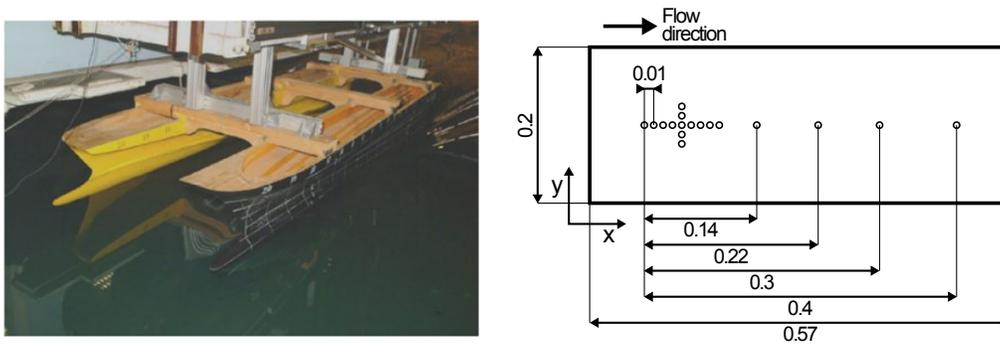


FIGURE 2.12 – Maquette du catamaran en bassin [25, Fig. 1] et disposition des capteurs de pression [25, Fig. 2].

	Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Plaque	Longueur	L_x	[cm]	58
	Largeur	L_z	[cm]	20
	Épaisseur	h	[mm]	3
	Masse volumique matériau	ρ_p	[kg/m ³]	1190
	Module d'Young	E	[GPa]	3.2
	Coefficient de Poisson	ν_p		0.4
Fluide	Masse volumique eau	ρ_0	[kg/m ³]	1026
	Célérité des ondes acoustiques	c_0	[m/s]	1480
	Viscosité cinématique	ν	[m ² /s]	$1.0 \cdot 10^{-6}$

TABLE 2.4 – Dimensions et propriétés mécaniques de la plaque en Plexiglas [26, Table 2] et caractéristiques de l'eau.

modèle de catamaran à l'échelle 1:15. Le modèle, visible sur la Fig. 2.12, est tracté dans un bassin d'essai d'une longueur de 220 mètres. La vitesse vibratoire est mesurée par un accéléromètre, placé à une position aléatoire à chacun des huit essais effectués. Les dimensions de la plaque, les propriétés du Plexiglas et les caractéristiques de l'eau sont données dans la Table 2.4. L'expérience est réalisée pour deux vitesses, $U_0 = 3.31$ m/s et $U_0 = 5.31$ m/s.

2.2.2 Autospectres de FPP

La zone centrale de la coque, là où est positionnée la plaque, est plane et suffisamment loin de la proue pour que la couche limite turbulente soit homogène sur la plaque. Les paramètres de CLT

U_0 (nœuds)	U_0 (m/s)	δ (mm)	δ^* (mm)	θ (mm)	u_τ (m/s)	Re_θ
25	3.31	120	14.2	11.2	0.11	29 535
40	5.31	113	13.7	10.5	0.1626	42 807

TABLE 2.5 – Paramètres moyens de CLT obtenus par simulation numérique [25, Table 1].

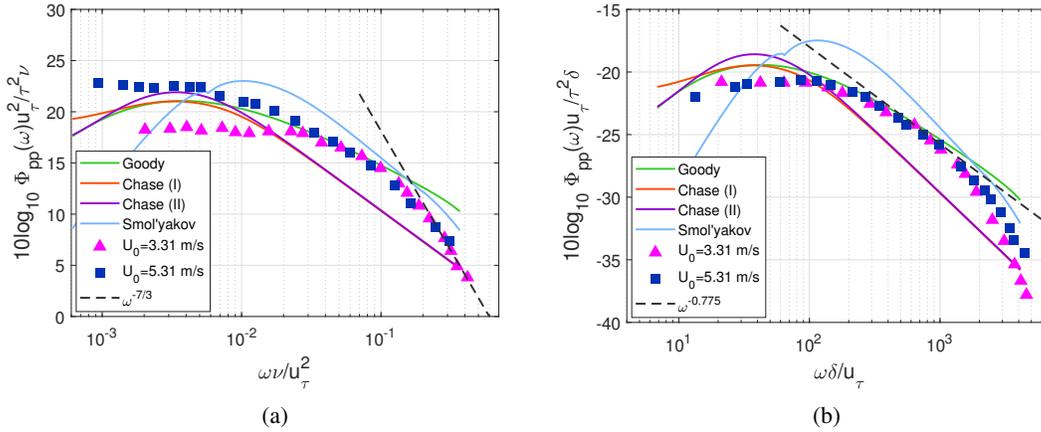


FIGURE 2.13 – Autospectres de pression pariétale sur la coque du catamaran [25].
 (a) : normalisation par variables internes ; (b) : normalisation par variables mixtes ;
 modèles semi-empiriques tracés pour $U_0 = 3.31$ m/s (paramètres dans Table 2.5).
 Chase (I) : Eq. (1.17), Chase (II) : Eq. (1.20), Goody : Eq. (1.24), Smol'yakov : Eq. (1.22).

moyens sur la plaque sont obtenus par les auteurs par des calculs RANS sur l'ensemble de la coque. Le processus est décrit dans la référence [24] et les paramètres sont indiqués dans la Table 2.5. Le gradient de pression est considéré nul sur la section. La pression pariétale sur la plaque de Plexiglas est mesurée par un total de dix-sept transducteurs piézoélectriques, dont la position est indiquée sur la Fig. 2.12.

On utilise les paramètres de CLT calculés pour représenter les autospectres de fluctuation de pression pariétale adimensionnés, conformément aux lois d'échelles (Fig. 1.4). On a vu dans la section 1.1.2.2 qu'en hautes fréquences, on adimensionne les autospectres en utilisant les variables internes (ν , u_τ , τ). Dans les moyennes fréquences, on emploie les variables mixtes, un mélange de variables internes et externes. Les autospectres mesurés sont tracés sur la Fig. 2.13 pour deux adimensionnements différents, d'abord avec des variables internes sur la Fig. 2.13(a), puis avec des variables mixtes sur la Fig. 2.13(b). Les variables mixtes sont utilisées pour comparer la pente des spectres en gamme universelle (voir Fig. 1.4).

Avec les variables internes, les mesures coïncident en hautes fréquences et suivent une pente $\omega^{-7/3}$. Le modèle de Smol'yakov présente une décroissance adaptée en hautes fréquences, mais s'écarte trop des mesures en basses fréquences. Les modèles de Chase ne sont pas adaptés en hautes fréquences, à cause de la simple pente en ω^{-1} . Avec l'adimensionnement par variables mixtes, les mesures aux deux vitesses différentes se superposent dans les moyennes fréquences et suivent une pente proche de $\omega^{-0.775}$. La pente $\omega^{-1.11}$ du modèle de Smol'yakov décroît trop rapidement. Le modèle de Goody lui est adapté en moyennes fréquences et hautes dans les cas hydrodynamiques, grâce à sa modélisation en $\omega^{-0.775}$ puis en ω^{-5} . C'est le modèle qui est choisi pour les simulations dans la suite de ce manuscrit.

2.2.3 Analyse modale en fluide lourd

Lorsque la structure est placée dans un fluide lourd, comme l'eau, le comportement vibratoire est affecté par la présence du fluide. Ce dernier génère une masse ajoutée, qui augmente l'inertie de la plaque et diminue les fréquences de résonance [131]. De plus l'amortissement apparent, qui décrit à la fois les pertes internes dans la structure et les pertes par rayonnement dans le fluide, augmente pour les plaques immergées [49, 133]. Par ailleurs, le milieu fluide génère un effet de couplage entre les différents modes, qui ne sont plus exactement orthogonaux, comme vu à l'Eq. (1.81) pour des vibrations *in vacuo* [138, 74]. Dans cette section, ce phénomène de couplage est négligé et le calcul par superposition modale est conservé.

L'amortissement est évalué empiriquement par Ciappi et al. [25] pour la plaque de Plexiglas immergée grâce à un marteau à impact. Sa valeur va de 3.4% pour les premiers modes à une valeur constante d'environ 1.9% pour les plus hauts modes.

Ici, les pulsations naturelles *in vacuo*, sans effet de fluide, sont notées ω_{mn} , et on note $\tilde{\omega}_{mn}$ les pulsations naturelles en présence du fluide lourd, dites mouillées. Dans l'expérience de la plaque de Plexiglas, les seize premières pulsations modales de la structure mouillée sont déterminées expérimentalement. Une estimation pour les pulsations d'ordre plus élevé est donnée par l'expression analytique suivante [25], valide pour $k_f \gg k_0$:

$$\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \left(1 + \frac{\rho_0}{\rho_p h \sqrt{k_m^2 + k_n^2}} \right)^{-1/2}, \quad (2.10)$$

où $k_m = m\pi/L_x$ et $k_n = n\pi/L_z$ sont les nombres d'ondes modaux. Nous utiliserons cette équation pour les premiers modes également.

Les pulsations naturelles de la structure mouillée peuvent également être calculées numériquement, à l'aide de logiciel utilisant les éléments finis (EF), tels que MSC NASTRAN [107]. Ce dernier permet d'effectuer une analyse modale (SOL 103), avec la possibilité de prendre en compte l'influence d'un fluide lourd sur les pulsations de résonance, avec le module MFLUID. Les modes de la structures sont d'abord calculés *in vacuo*, puis la masse ajoutée est prise en compte pour extraire les pulsations de la structure mouillée. Le fluide peut "mouiller" les deux faces, ou une seule face de la plaque. Dans ce cas, l'autre face est considérée en contact avec le vide. Le maillage utilisé est composé de 94×33 éléments quadrilatères (CQUAD4), soit 16 éléments par longueur d'onde de flexion λ_f *in vacuo* à 1000 Hz, avec :

$$\lambda_f = \frac{2\pi}{k_f}. \quad (2.11)$$

La propriété de coque fine (PSHELL) est attribuée au éléments, et les propriétés du Plexiglas, matériau isotrope (MAT1), sont issues de la Table 2.4.

Les fréquences naturelles de la plaque de Plexiglas en contact avec l'eau sont calculées analytiquement avec l'Eq. (2.10), puis numériquement grâce au modèle éléments finis et le logiciel NASTRAN. Elles sont représentées sur la Fig. 2.14, avec les seize fréquences mesurées expérimentalement. Dans le cas présenté, les fréquences naturelles mouillées estimées numériquement et analytiquement sont en très bon accord entre elles et avec celles mesurées.

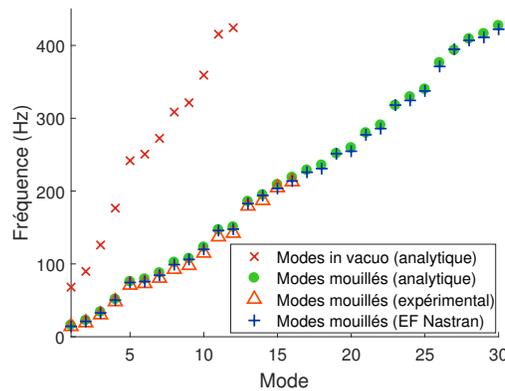


FIGURE 2.14 – Fréquences naturelles *in vacuo* et mouillées pour la plaque de Pexiglas. Analytiques : Eq. (1.85) et Eq. (2.10). Expérimental : [25].

2.2.4 Réponse vibratoire en fluide lourd

Le spectre d'accélération moyenne quadratique est calculé par la méthode nombre d'onde en utilisant les modèles de spectre de fluctuations de pression décrits dans les sections 1.1.2 et 1.1.3, les modes mouillés calculés par l'Eq. (2.10) et la vitesse de convection à l'aide du modèle de Smol'yakov (Eq. (1.27)). Expérimentalement, la moyenne des accélérations a été estimée à partir de huit points répartis aléatoirement sur la plaque.

Puisque la densité modale est élevée ici, les résultats sont affichés en bande $\frac{1}{3}$ -d'octave pour plus de lisibilité. Le niveau moyen de vitesse sur une bande est défini par :

$$S_{vv} = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} \bar{S}_{vv}(f) df, \quad (2.12)$$

où f est la fréquence et f_1, f_2 sont les bornes de chacune des bandes, qui vérifient la relation $f_2 = 2^{1/3} f_1$.

La vitesse quadratique moyenne est présentée sur la Fig. 2.15. Plusieurs modèles sont comparés : d'une part les modèles d'interspectre de Corcos, Mellen et Caiazzo avec le modèle d'autospectre de Goody, qui est celui qui convient le mieux pour les modèles en eau, puis le modèle de Chase (II). L'interspectre de Chase (Eq. (1.37)) a été normalisé par l'autospectre associé (Eq. (1.20)) et par le modèle de Goody. Comme attendu, le modèle de Corcos surestime les niveaux d'au moins 20 dB. Le modèle de Chase (II) sous-estime les niveaux. Les meilleurs résultats sont obtenus avec le modèle de Chase (II) et le modèle Caiazzo combinés à l'autospectre de Goody. Cependant, le modèle de Chase repose sur un grand nombre de paramètres empiriques qu'il faut déterminer au préalable pour chaque cas, ce qui peut être pénalisant pour une étude en phase de pré-conception. Le modèle de Caiazzo réduit sensiblement les niveaux par rapport au modèle de Corcos et donne de bons résultats avec seulement deux paramètres.

D'après les mesures expérimentales de ce cas, et celles présentées sur la Fig. 1.12, les modèles d'interspectre les plus adaptés lorsque l'effet du pic convectif est négligeable et en fluide lourd sont les modèles de Caiazzo et Chase (II). Ce dernier dépendant de nombreux paramètres, son utilisation ne

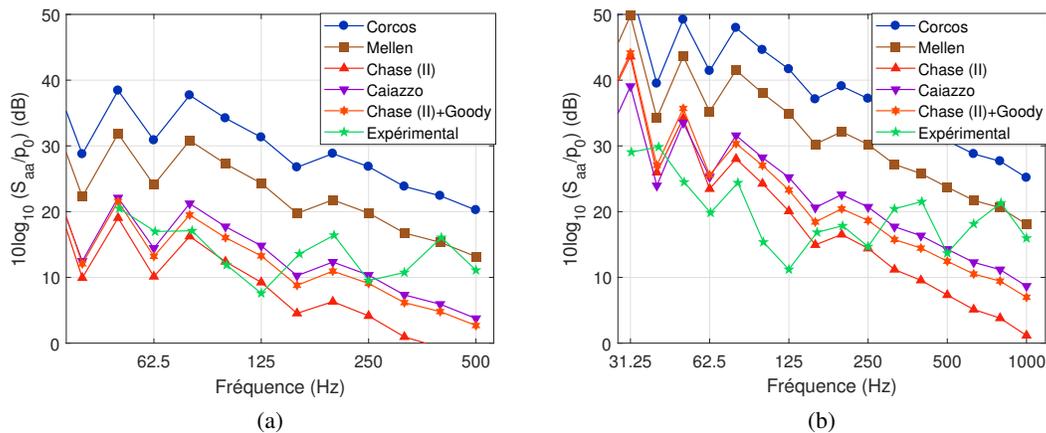


FIGURE 2.15 – Niveaux d'accélération moyens par bande $1/3$ -d'octave, mesures et prédictions.
 (a) : $U_0 = 3.31$ m/s; (b) : $U_0 = 5.31$ m/s; pression référence $p_0 = 1 \mu\text{Pa}$.

sera pas privilégiée dans la suite du manuscrit. Le modèle de Mellen surestime les niveaux vibratoires pour le cas en eau, mais il a donné des résultats satisfaisants pour le cas en air. Il constitue un bon compromis entre le modèle de Corcos et celui de Caiazzo. Il conserve une expression simple reposant sur un faible nombre de paramètres, et est basé sur une observation physique (forme elliptique du pic convectif dans l'espace nombres d'onde). De plus, pour l'autospectre, le modèle de Goody est le plus versatile. Il présente les prédictions les plus satisfaisantes à la fois en air et en eau, par rapport aux différentes mesures présentées (large variété de nombres de Reynolds). Dans la suite, le modèle de Goody sera systématiquement utilisé pour les simulations numériques.

❖ 2.3 Conclusion

Dans le cadre de l'étude des vibrations d'une plaque plane mince rectangulaire excitée par une couche limite turbulente homogène, différents cas expérimentaux de la littérature scientifique ont été reproduits numériquement en appliquant des modèles de spectres et des méthodes vibratoires vus au chapitre précédent. Ces cas ont permis d'appliquer certaines hypothèses et de valider les différents modèles qui seront utilisés dans la suite.

Dans un premier temps, un premier cas expérimental en air, considéré comme un fluide léger, a été étudié. Il est supposé ici que le fluide n'a pas d'influence sur le comportement mécanique de la structure. Dans le cas des méthodes vibratoires utilisant le domaine des nombres d'onde (méthode nombre d'onde, méthodes par ondes planes, Rain On the roof), un paramètre fondamental réside dans le nombre d'onde de coupure du domaine nombre d'onde lors de l'approximation de l'intégrale

sur un domaine infini. La structure, se comportant comme un filtre bas nombre d'onde, est sensible aux excitations en-dessous de son nombre de flexion. L'excitation quant à elle est caractérisée par le nombre d'onde convectif, généralement sensiblement plus élevé que le nombre d'onde de flexion. On peut alors distinguer trois cas de figures :

1. la vitesse d'écoulement est faible. C'est le cas dans lequel on se retrouve pour les écoulements en eau, qui constituent nos cas d'intérêt. Le nombre d'onde convectif ($k_c \propto U_0^{-1}$) est grand devant le nombre d'onde de flexion ($k_c \gg k_f$). Le pic convectif est alors négligeable dans les calculs et le nombre d'onde de coupure est fixé par rapport au nombre d'onde de flexion ;
2. la vitesse d'écoulement est élevée. Dans des cas d'écoulements en air à des vitesses de l'ordre de grandeur de la vitesse du son (applications aéronautiques), le k_c est proche du k_f . Le nombre d'onde convectif est cependant suffisamment bas pour servir de nombre d'onde de coupure sans alourdir les calculs ;
3. dans les cas intermédiaires, la fréquence de coïncidence ($k_c(f_{\text{coinc}}) = k_f(f_{\text{coinc}})$) est dans le domaine de fréquences considéré. Le nombre de coupure doit être judicieusement choisi. Une méthode alternative consiste à appliquer la méthode Rain On the roof, qui fournit de bonnes estimation aux alentours de la fréquence de coïncidence.

Par ailleurs, en plus du filtrage nombre d'onde, il est également possible de réduire le temps de calcul par un filtrage modal. Le calcul vibratoire repose sur une décomposition modale. L'influence d'un mode donné est limitée sur une petite plage de fréquences autour de sa résonance. Il est possible d'accélérer le calcul en conservant, à chaque fréquence, les modes dont la résonance est comprise dans une fenêtre autour de cette fréquence. Cette méthode est appelée la base modale réduite. Une application numérique a été présentée. Le filtrage modal a permis de diviser par 3 la durée du calcul avec un très faible écart par rapport au calcul non filtré.

Nous nous sommes ensuite concentré sur la méthode par synthèse d'ondes planes. Le tirage d'un nombre donné de phases aléatoires, servant à modéliser une série d'ondes planes décorréliées est un procédé de Monte-Carlo. Les méthodes de Monte-Carlo désignent les méthodes numériques ayant pour objectif d'approcher une valeur à partir de générations de variables aléatoires. La convergence en fonction du nombre de réalisations de la méthode OPPD, en $N_r^{-1/2}$, où N_r est le nombre de réalisations, est déduite grâce à la mise en place du contexte statistique des méthodes de Monte-Carlo. Un critère sur le nombre de réalisations a été proposé.

Finalement, un deuxième cas d'application, en eau, a été étudié. Ici, l'eau est un fluide lourd et son influence sur le comportement de la structure est à prendre en compte. Avec la décomposition modale, on estime les modes mouillés de la structure. Les déformées et la masse modales demeurent inchangées, et l'influence du fluide lourd est prise en compte par l'effet de masse ajoutée, traduit par les fréquences modales, qui sont abaissées. Dans le cas de la plaque de Plexiglas, ces fréquences sont estimées par différentes méthodes (mesures expérimentales, formule analytique et calcul numérique par éléments finis). Les trois méthodes présentent des résultats en très bonne adéquation. La suite du calcul s'effectue classiquement, en utilisant les fréquences modales mouillées.

Pour la suite du manuscrit, l'attention est portée aux variations spatiales de la CLT. L'étude préalable réalisée dans ce chapitre permet de valider le filtrage du pic convectif pour les écoulements subsoniques et le filtrage modal.

CHAPITRE 3

Évolution spatiale de la CLT : principe du découpage en zones

❖ 3.1 Avant-propos

Auteurs et affiliations

- Corentin Guillon, INSA-Lyon, LVA,
- Laurent Maxit, INSA-Lyon, LVA,
- Emmanuel Redon, INSA-Lyon, LVA, Université de Bourgogne, ESIREM, Dijon.

Date d'acceptation : 16 août 2021. Disponible en ligne 17 septembre 2021.

Revue : Journal of Fluids and Structures. Volume 106 (2021).

Lien : <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103378>

Titre : Modeling vibrating panels excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer.

Titre français : Modéliser des panneaux vibrants excités par une couche limite turbulente non-homogène.

Contribution au mémoire : Dans les différentes méthodes de calcul vibro-acoustique évoquées à la section 1.2.1, il est presque toujours nécessaire de faire l’hypothèse d’une excitation spatialement homogène, en particulier dans les modèles écrits dans le domaine nombre d’onde. De plus, les modèles semi-empiriques de la littérature (sections 1.1.2 et 1.1.3) permettant d’estimer les spectres de fluctuations pariétales sont établis pour des CLT homogènes, pleinement développées, sur des surfaces planes. Cet article vise à décrire une méthode permettant de prendre en compte des cas de chargement par CLT non-homogènes, en partant de la méthode de prédiction de comportement vibro-acoustique la plus simple, la méthode nombre d’onde (section 1.2.1.2) et en l’adaptant pour l’application avec des cas de chargement par CLT non-homogène. L’idée de décomposer en zones la surface excitée a d’abord été implémentée par Berton [12, 11]. Le découpage permet d’appliquer des CLT avec des paramètres différents sur chacune des zones préalablement définies.

Par ailleurs, la méthode spatiale (section 1.2.1.1) est également adaptée, sur d’autres hypothèses, à un cas de chargement non-homogène. Cela donne deux méthodes différentes de prédiction de comportement vibro-acoustique, dont les résultats pourront être comparés entre eux pour validation, avant d’être appliquées à un cas numérique de CLT non-homogène pour observer l’impact de la non-homogénéité.

Résumé français : Prédire la réponse vibratoire d’une structure élastique excitée par un écoulement turbulent est un enjeu pour les applications de transport civil et militaires. Les modèles proposés dans la littérature scientifique sont généralement écrits sur l’hypothèse que la couche limite turbulente excitant la structure est spatialement homogène. Cependant, cette hypothèse est rarement validée, en particulier quand la surface excitée est proche du déclenchement de la TBL ou que la structure est incurvée. Pour apporter une solution à ce problème, cet article propose de développer deux méthodes habituellement utilisées pour des cas de CLT homogènes, la méthode nombre d’onde et spatiale. Le développement de l’approche spatiale est relativement direct et donne une référence, au prix d’un calcul lourd. Inversement, le développement de la méthode nombre d’onde requiert plus de calculs et d’hypothèses, qui ont conduit les auteurs à écrire la méthode de décomposition en zones (SDT pour *sub-area decomposition technique*). Elle consiste à découper la surface excitée en zones, en supposant un champ de pressions turbulentes homogène sur chaque zone, puis à négliger certaines interactions entre les zones. Un critère sur la taille des zones écrit comme une fonction de la plus petite longueur d’onde du champ de pression est donné en se basant sur un ensemble de simulations. Un cas test sur une plaque d’épaisseur non constante excitée par une CLT non-homogène permet de mettre en avant que : (1) l’intérêt de la SDT comparativement à un calcul utilisant une CLT homogène ; (2) l’efficacité de la SDT du point de vue du temps de calcul en comparaison de la méthode spatiale.

Abstract

Predicting the vibration response of an elastic structure excited by a turbulent flow is of interest for the civil and military transportation sector. The models proposed in the literature are generally based on the assumption that the turbulent boundary layer (noted TBL in the following) exciting the structure is spatially homogeneous. However, this assumption is not always fulfilled in practice, in particular when the excited area is close to the starting point of the TBL or with curved structures. To overcome this issue, this work proposes to extend two approaches generally used for dealing with homogeneous TBL, namely the spatial and the wavenumber approaches. The extension of the spatial approach to non-homogeneous excitation is relatively straightforward and gives us a reference, however with costly computation. On the contrary, extending the wavenumber approach requires more developments and assumptions that have led the authors to develop a sub-area decomposition technique (SDT). It consists in partitioning the excited area in several sub-areas, assuming a homogeneous TBL pressure field on each sub-area and neglecting certain interactions between the sub-areas. A criterion on the sub-area size as a function of the minimum wavelength of the wall pressure field is proposed on the basis of the numerical calculations. A test case on a plate with varying thickness and excited by a growing TBL allows us to highlight : (1) the interest of the SDT compared to a classical calculation considering a homogeneous TBL ; (2) the efficiency of the SDT in terms of computing time compared to the spatial approach.

❖ 3.2 Introduction

For a vehicle moving inside a fluid, the elastic structures forming the body may vibrate due to the pressure fluctuations on the exterior wall related to the turbulent boundary layer (TBL) that develops on their surface. These vibrations can cause disturbing noise or accelerate structure wear. In the case of military vessels and submarines in particular, noise radiated by the hull can be spotted by enemy sonars and reveal their position. It is necessary to have models that predict the vibrations of structures excited by random turbulent pressures in an early design stage, so as to develop new tools to minimize these vibrations. In this article, we will focus on taking the non-homogeneous TBL into account in the vibroacoustic model. Rectangular flat plates will be considered for this study.

When an elastic structure is set in a flow, a TBL appears on its surface. Turbulences are convected at convective velocity U_c , which varies between 0.6 and 0.8 times the flow speed. U_c is linked to the size of the structures within the TBL and therefore depends on TBL parameters and frequency [118, 3, 126]. In the wavenumber domain, the energy is concentrated around the convective wavenumber $k_c = \omega/U_c$, where ω is the angular pulsation. Elastic panels respond essentially to the pressure fluctuations characterized by wavenumbers below the panel flexural wavenumber k_f . When ω increases, the convective wavenumber k_c moves in the high-wavenumber region, further away from k_f , and the main contributing part becomes the low-wavenumber region of the spectrum. Well above

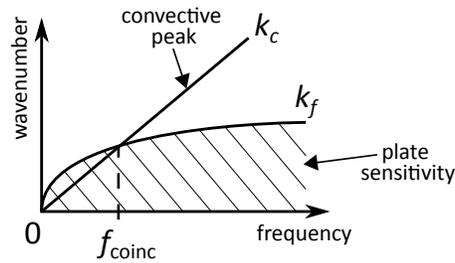


FIGURE 3.1 – Plot on the wavenumber-frequency domain of k_c , k_f and f_{coinc} .

the aerodynamic coincidence frequency f_{coinc} (where $k_c = k_f$) panels behave like low wavenumber filters. Wavenumbers k_f and k_c are represented in a frequency-wavenumber plane in Fig. 3.1.

The calculation processes described in the literature generally assume that the TBL is spatially homogeneous [93, 63, 25, 102]. For practical applications, this assumption is rarely met. The growth of the TBL from its starting point may be at the origin of significant inhomogeneity which can affect the vibration of the excited structure. The goal of the present paper is to propose a calculation process taking into account inhomogeneity through the spatial variations of TBL parameters. Before introducing this process, let us look at how to model the exciting pressure under a TBL and different techniques for estimating the vibration response due to a homogeneous TBL.

The pressure under a homogeneous TBL is random and must be described with a cross-correlation function. The time-Fourier transform of this function gives the space-frequency wall pressure fluctuation (WPF) spectrum. The WPF spectrum is generally divided into two parts : firstly, the autospectrum that expresses the magnitude as a function of frequency, and secondly, the normalized cross-spectrum that contains the spatial correlation of the WPF. Using a spatial-Fourier transform, the cross-spectrum can be expressed in the wavenumber-frequency domain. Fig. 3.2 presents a schematic drawing of a typical WPF cross-spectrum in the wavenumber domain.

Concerning the autospectrum over a flat plate, Hwang et al. [66] performed a comparative study of semi-empirical models : a dimensionless spectrum is given as a function of dimensionless frequency according to different scaling laws, depending on the frequency range [24, 26]. Goody [59] suggested a semi-empirical model exploiting a wide variety of experimental pressure data for rigid flat plates set in air and water flows. The model contains a Reynolds-number dependent term, and can therefore be extrapolated to various flow conditions. However, vehicle structures are rarely flat and generally present a curvature which generates a pressure gradient. Schloemer [122] showed that the pressure gradient has a strong influence on convective speed, confirmed by Magionesi et al. [86]. Rozenberg et al. [117] proposed a Goody-inspired model that fits experimental data in the presence of an adverse pressure gradient.

The comparative study by Graham [60], one of many references, presents several cross-spectrum models. The most common one is the Corcos model [32], because (1) its simple expression can be easily transformed into both space and wavenumber domains ; and (2) it depends on only two parameters. In the space domain, the decay of cross-correlation as a function of separation is described by an exponential profile that fits with the experimental observations [119]. However, with the Corcos model, the coherence lengths of the WPF tend to infinite values in the low frequencies, which is not

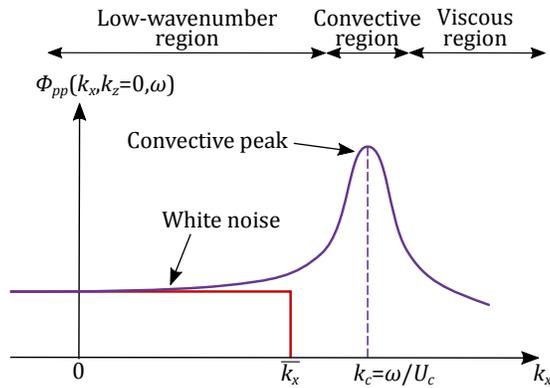


FIGURE 3.2 – WPF wavenumber cross-spectrum.

physically possible. The coherence lengths exhibit different behaviors over the frequency range [113] and some authors have proposed different models for these quantities (see for instance [126, 45]). Although it provides a good description of the convective peak, the Corcos model is known to over-predict spectrum levels by around 20 dB in the low-wavenumber region [14]. This model could be interpreted as a diamond shape window in the spatial domain; that is why Mellen [104] suggested a Corcos-based model using a smooth elliptical window instead of the original angular shape. In the low wavenumber region, levels of the elliptical model drop by 8 dB from Corcos predictions. Another well-known model is the Chase model [21, 22], but it is expressed in the wavenumber domain and its analytical expression cannot be transformed into the space domain. Additionally, it relies on many empirical parameters. Finnveden et al. [50] showed that the value of the parameters given by Chase must be corrected depending on the case conditions, meaning this model needs a preliminary calibration study. A more recent model of interest is given by Caiazzo et al. [18]. They interpreted the Corcos model as a product of Butterworth filters of order one in complex space, and developed a “Generalized Corcos” model by changing the order of the filter along the streamwise direction from one to two. The levels predicted were 18 dB lower than those of the original Corcos model, but the convective peak was distorted, its shape becoming more rectangular when the filter order increased. While it tackles the issue of the Corcos model in the low-wavenumber region, this modification was based on mathematical rather than physical considerations.

Considering the low-wavenumber filtering effect, the key to choose a suitable cross-spectrum model is its behavior in the low wavenumber region, below the convective peak. Due to the dominant levels of the convective peak, measurement data in the low wavenumber region are difficult to obtain. However, in experimental set-ups where the flow conditions are controlled and where the vibrating structure is designed as a low wavenumber filter, so that the convective peak can be neglected, it is possible to derive exciting spectrum levels from vibrational behavior. Martin et Leehey [92] implemented this inverse method with a rectangular membrane. Then Bonness et al. [14] and Evans et al. [46] used an aluminum cylindrical pipe excited by a water flow. Their measurements suggest that the low-wavenumber region of the WPF spectrum, between the acoustic and convective regions, is wavenumber-white, with a constant level for the normalized cross-spectrum.

The usual flow-induced vibrations calculation process is divided into 3 steps :

1. A hydrodynamic computation to obtain TBL parameters. The most popular method uses RANS

(Reynolds-Averaged Navier-Stokes) equations, but under the condition that the Reynolds number is low enough, LES (Large Eddy Simulation) computation can be performed on a high-end machine [30];

2. The TBL parameters are then used as input data in an appropriate semi-empirical WPF model described above;
3. A deterministic vibro-acoustic calculation gives the structure response to the WPF induced by the TBL.

The last step concerns the subject of this article. It consists in coupling a stochastic excitation model with a deterministic vibro-acoustic model. Several authors have studied different ways to achieve this coupling for spatially homogeneous TBL. Maxit et al. [102] summarized five techniques for coupling stochastic TBL and deterministic vibro-acoustic structure models :

- The spatial method is based on a regular discretization of the excited surface. The discretization step must be substantially smaller than the convective wavelength $\lambda_c = 2\pi/k_c$ [102], which gives a dense mesh, especially when the frequency increases, and therefore significant computing time. Franco et al. [51] present three time saving approaches applied with FEM model. De Rosa et Franco [36, 37] developed the scaled procedure ASMA, that gives a good approximation to the quadratic mean response while reducing calculation time.
- The Cholesky method uses a Cholesky decomposition of the matrix representation of the WPF space spectrum [136]. The vibro-acoustic model is used to evaluate the panel response for several calculations of the random pressure fields. The Cholesky decomposition in itself is nonetheless time consuming and this method has the same drawback concerning mesh size.
- The wavenumber method allows interpreting the vibratory response as the WPF spectrum passing through a filter, this filter being the sensitivity function of the plate [93]. Models may be made simpler well above the aerodynamic coincidence frequency, since the convective contributions of the WPF are negligible. Some spectra, like the Chase model, have an analytical expression in the wavenumber domain that cannot be transformed into the spatial domain.
- The previous method requires knowledge of the structure displacement response for harmonic plane waves. The Lyamshev reciprocity principle can be used to interpret the sensitivity functions as the plate point-response expressed in the wavenumber domain for a unit force [48]. The reciprocity method was used by Maxit et al. [103] to calculate the sound radiated by a cylindrical shell. Marchetto et al. [91] estimated a panel sensitivity function from measurements of velocity response when the plate was excited by mechanical forces instead of plane waves, using the reciprocity principle.
- Maxit [95] showed that, in the wavenumber domain, the exciting WPF can be simulated with a set of uncorrelated wall plane waves (UWPW). The vibroacoustic response to this WPF is calculated with the modal expansion method, when the modal shapes and modal angular frequencies are known. The process is reiterated at each frequency for several random calculations of the pressure field. The definitive response is the average of the responses for all the calculations. Karimi et al. [68] described a hybrid approach where the WPF obtained with the UWPW method is used as an input at the mesh points of an FEM of the structure.

For applications with large structures, for instance a ship hull, the TBL can be assumed fully developed with fairly constant parameters over a large part of the hull. However, for smaller structures,

the fast growth from the tip can have an influence on the overall vibrational response. This paper proposes two methods to take the spatial variations of the TBL parameters into account in vibroacoustic coupling models. The first one is an adaptation of the spatial method whereas the second one, based on the wavenumber formulation, introduces the concepts of sub-area decomposition and sub-area sensitivity functions. The formulation in the wavenumber domain will preserve the interest of filtering the convective contributions that have a negligible effect on the vibrational response. Moreover, the surface excited by the TBL will be decomposed into sufficiently small sub-areas, allowing us to assume a homogeneous TBL on each sub-area and different types of assumptions concerning the interaction between the sub-areas. Using the methods proposed for describing the effect of a non-homogeneous TBL, the authors will use a test case to highlight the role of the spatially varying TBL parameters on vibrational levels.

The paper is organized as follows : section 3.3 recalls the space and wavenumber approaches for a structure excited by a homogeneous TBL. The issue of non-homogeneous TBL is then addressed in section 3.4. Sub-section 3.4.1 shows how the spatial approach can be easily adapted to these cases. The results obtained will be considered in the following as references, but they require considerable computing time. An alternative method is then proposed in sub-section 3.4.2, the so-called sub-area decomposition technique related to the wavenumber formulation. Two types of assumptions between the sub-areas will be introduced. In section 3.5, a numerical study is carried out to evaluate the area of validity of the sub-area decomposition technique, with regard to the assumptions. It will lead to the definition of a criterion on the size of the sub-areas. The test cases are proposed in section 3.6, through three numerical applications with a plate of non-constant thickness excited by a growing TBL. The interest and limits of the approach proposed are discussed in the conclusion 3.7.

❖ 3.3 Flat plate excited by a homogeneous turbulent boundary layer

3.3.1 Formulation in the space domain

Let us consider a thin flat rectangular plate of surface Σ . The plate is placed in air and excited on one side by a turbulent flow in the \vec{x} direction, while \vec{y} orients the vertical axis and \vec{z} the cross-stream direction. The fluid is characterized by a free flow speed U_0 , a density ρ_0 , a kinematic viscosity ν and a sound velocity c_0 . Plate length and width are L_x in the streamwise direction and L_z in the crosswise direction respectively, as shown in Fig. 1.13, in section 1.1.3. A TBL develops over the plate and the turbulences are convected under this TBL at speed U_c .

The TBL parameters are : the external velocity U_e , the boundary layer thickness δ and the wall shear stress τ . For a flat plate, two assumptions are made :

- the external velocity U_e is constant and equal to U_0 ;
- the pressure gradient is null.

In this part, the TBL is assumed stationary, spatially homogeneous and ergodic. We assume a weak coupling between the elastic plate and the fluid, which means the vibrations of the structure do not impact back on the TBL. Under this hypothesis, the plate is simply excited by the fluctuating wall pressure produced by the TBL on an infinitely rigid plate.

Let \mathbf{M} be a point of the surface Σ and v the plate velocity response at this point. The autospectrum of the velocity response v is given by [93] :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

where $H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ is the frequency response function (FRF) in velocity at point \mathbf{M} for a unit force applied at point $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ is the WPF space-frequency cross-spectrum. The exponent * indicates the complex conjugate.

If the TBL is homogeneous, the WPF cross-spectrum function no longer depends on the position of the two points, but only on their spatial separation $\xi = \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$. One can then write :

$$\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Psi_{pp}(\xi, \omega), \quad \forall (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in (\Sigma \times \Sigma), \quad (3.2)$$

where Ψ_{pp} is the WPF cross-spectrum of a homogeneous TBL.

Introducing Eq. (3.2) in Eq. (3.1) gives :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp}(\xi, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

In practice, the 2-dimensional integrals are approximated by summations through a discretization of the plate area. \mathbf{X}_1 and \mathbf{X}_2 are the nodes of the spatial mesh, while δx and δz are the discretization steps in the \vec{x} and \vec{z} directions :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) \approx \sum_{\mathbf{X}_1} \sum_{\mathbf{X}_2} H_v(\mathbf{M}, \mathbf{X}_1, \omega) \Psi_{pp}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \mathbf{X}_2, \omega) \delta x^2 \delta z^2. \quad (3.4)$$

This expression permits evaluating S_{vv} at \mathbf{M} from the cross-spectrum of the WPF expressed in the frequency-space domain and the velocity transfer functions between \mathbf{M} and all the grid points of the discretization of the panel area.

3.3.2 Formulation in the wavenumber domain

Because of the double summation in Eq. (3.4), the spatial method is time consuming, especially for high frequencies where the convective length λ_c , which defines the finesse of the mesh, is small. It is then of interest to move into the wavenumber domain to drastically improve the algorithm speed.

Let us consider the WPF cross-spectrum in the wavenumber domain $\Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$, defined as the spatial Fourier transform of $\Psi_{pp}(\xi, \omega)$. In Eq. (3.3), the cross-spectrum $\Psi_{pp}(\xi, \omega)$ is then replaced by :

$$\Psi_{pp}(\xi, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi} d\mathbf{k}, \quad (3.5)$$

where i is the imaginary unit and $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ is the wavevector. One obtains [93, 102] :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\infty} |\hat{H}_v(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \quad (3.6)$$

where

$$\hat{H}_v(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) = \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{x}}} d\tilde{\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

is called the sensitivity function (SF) and is the response in velocity at \mathbf{M} when the plate of surface Σ is excited by a plane wave of wavevector \mathbf{k} .

By truncating the wavenumber domain to cutoff wavenumbers (\bar{k}_x, \bar{k}_z) and discretizing it with a sampling resolution $(\delta k_x, \delta k_z)$, Eq. (3.6) is approximated by :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} |\hat{H}_v(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) \delta k_x \delta k_z, \quad (3.8)$$

where $\Omega_{\mathbf{k}}$ is the set of points in the truncated and discretized wavenumber domain. This expression presents only a single summation, compared to the double summation in Eq. (3.4).

Furthermore, in the wavenumber domain, it is possible to assimilate the plate as a low wavenumber filter for a more computationally efficient model for frequencies well above the aerodynamic coincidence frequency f_{coinc} , say for frequencies above three times f_{coinc} . Indeed, it is known that for these frequencies, the contributions of the convective peak of the WPF have a negligible effect on the panel response [92].

In the following, the assumption that the contributions of the convective peak in Eq. (3.8) are negligible for the flow speed considered will be verified. The following criterion on the cutoff wavenumbers will be applied :

$$\bar{k}_x = \bar{k}_z = \mu k_f, \quad (3.9)$$

where μ is a coefficient between 1.1 and 1.8 and k_f is the flexural wavenumber. The role of μ is to delimit a domain of integration including the flexural wavenumber and excluding the convective wavenumber.

3.3.3 Analytical equations for a simply supported rectangular plate

In this sub-section, the calculation of the frequency response function and sensitivity function of the out-of-plane displacement of a rectangular plate is presented briefly, using the Kirchhoff-Love plate theory and modal expansion. Plate flexural rigidity is noted D , material density ρ_p and plate

thickness h . For a simply supported rectangular plate, the modal wavenumbers k_m and k_n , the modal shape W_{mn} , the modal angular frequency ω_{mn} , the modal mass M_{mn} and the flexural wavenumber k_f are given respectively by :

$$k_m = \frac{m\pi}{L_x}, \quad k_n = \frac{n\pi}{L_z}, \quad (3.10)$$

$$W_{mn}(x, z) = \sin(xk_m) \sin(zk_n), \quad (3.11)$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{h\rho_p}} (k_m^2 + k_n^2), \quad (3.12)$$

$$M_{mn} = \iint_{\Sigma} h\rho_p W_{mn}^2(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}} = h\rho_p \frac{L_x L_z}{4}, \quad (3.13)$$

$$k_f = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{h\rho_p}{D}}}, \quad (3.14)$$

where the indices m and n designate the longitudinal and transverse modal order, respectively.

The FRF in velocity $H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ used in the spatial approach (Eq. (3.4)) is given analytically by :

$$H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{i\omega W_{mn}(\mathbf{M}) W_{mn}(\tilde{\mathbf{x}})}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 + i\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2)}, \quad (3.15)$$

with η the structural damping.

Applying a Fourier transform over the space variable $\tilde{\mathbf{x}}$ on Eq. (3.15) gives the sensitivity function in the wavenumber approach (Eq. (3.8)) :

$$\hat{H}_v(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{i\omega W_{mn}(\mathbf{M}) \hat{W}_{mn}(\mathbf{k})}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 + i\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2)}, \quad (3.16)$$

where $\hat{W}_{mn}(\mathbf{k})$ is the Fourier transform of the shape $W_{mn}(\tilde{\mathbf{x}})$:

$$\hat{W}_{mn}(k_x, k_z) = \frac{k_m k_n}{(k_m^2 - k_x^2)(k_n^2 - k_z^2)} [(-1)^{m+1} \exp(iL_x k_x) + 1] [(-1)^{n+1} \exp(iL_z k_z) + 1]. \quad (3.17)$$

❖ 3.4 Spatially varying boundary layer

3.4.1 Varying TBL in the space domain

Let us assume that the TBL thickness δ and the shear stress τ depend on the spatial position x in the streamwise direction, while the TBL is invariant in the cross-stream direction \vec{z} . It can be seen that the cross-spectrum of the WPF between two points $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$ does not depend only on their separation ξ (as supposed in section 3.3.1 with Eq. (3.2)). In Eq. (3.1), $\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega)$ needs to be evaluated for a non-homogeneous TBL. LES calculation could provide this information but it requires considerable computing time [30] and powerful machines. An alternative consists in making several assumptions in order to build this quantity from those defined separately at $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$, considering the WPF for a homogeneous model.

On one hand, the WPF of a TBL is weakly correlated spatially. The coherence lengths Λ_x and Λ_z in directions \vec{x} and \vec{z} of the cross-spectrum, explicitly defined in the Corcos and Mellen models, constitute a relevant indicator of the decay of spatial correlation. If the distance between the two points is typically greater than four times the coherence length, the cross-spectrum of the WPF $\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}})$ may be negligible.

On the other hand, for a TBL presenting relatively small variations of its parameters along less than four coherence lengths, the WPF around two points $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$, whose separation is less than four times the coherence length, can be assumed to exhibit strong similarities. Hence, the cross-spectrum of the WPF $\bar{\Gamma}_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega)$ may be approximated by considering the spectrum calculated with an arithmetic mean of the TBL parameters at the 2 points.

For the Corcos and Mellen models, the coherence lengths in the streamwise and cross-wise directions are :

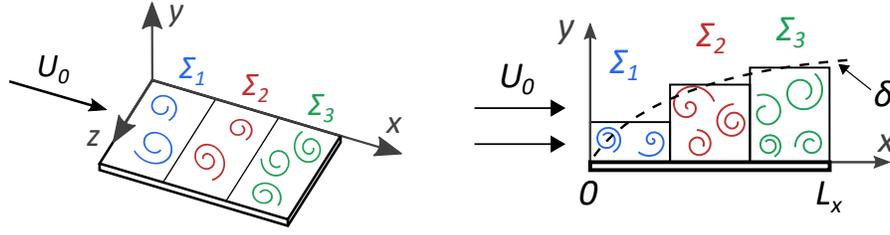
$$\Lambda_x(\omega) = \frac{U_c}{\alpha_x \omega} \quad \text{and} \quad \Lambda_z(\omega) = \frac{U_c}{\alpha_z \omega}, \quad (3.18)$$

where the two parameters $\alpha_x = 0.10$ and $\alpha_z = 0.77$ are the constants of the Corcos model.

For the Mellen elliptical model, these assumptions can be expressed by the following equation :

$$\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega) = \begin{cases} \bar{\Gamma}_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega) & , \text{ if } \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\| < 4\sqrt{\Lambda_x(\omega)^2 + \Lambda_z(\omega)^2}, \\ 0 & , \text{ if } \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\| > 4\sqrt{\Lambda_x(\omega)^2 + \Lambda_z(\omega)^2}. \end{cases} \quad (3.19)$$

The validity of these assumptions will be verified in section 3.5.3. The spatial approach based on Eq. (3.1) and Eq. (3.19) will be used in comparison to the sub-area decomposition technique presented in the following.


 FIGURE 3.3 – Surface Σ divided in 3 sub-areas and TBL discretization.

3.4.2 Sub-area decomposition technique with uncorrelated sub-areas

The wavenumber formulation consists in applying the space Fourier-transform to the WPF cross-spectrum defined on a given area, thus for the whole plate in the case of a homogeneous TBL (see section 3.3.2). Hence, the plate surface is divided into N sub-areas along the streamwise direction. For each of these sub-areas, the TBL is assumed homogeneous, as represented in Fig. 3.3 in the case of 3 sub-areas. Constant TBL parameters are then attributed to each sub-area, equal to their mean value observed for the sub-area concerned. For each sub-area Σ_ζ , $1 \leq \zeta \leq N$, the cross-spectrum of the WPF is defined by :

$$\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Psi_{pp,\zeta}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega), \text{ if } (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in (\Sigma_\zeta \times \Sigma_\zeta), \quad (3.20)$$

where $\Psi_{pp,\zeta}$ is the cross-spectrum of the WPF considering the constant TBL parameters attributed to Σ_ζ .

For the sake of simplification, let us suppose that the surface Σ is divided into 2 sub-areas Σ_1 and Σ_2 , so that $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ and $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Introducing the sub-area decomposition into Eq. (3.3) gives :

$$\begin{aligned} S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) &= \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \\ &+ \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \\ &+ \iint_{\Sigma_2} \iint_{\Sigma_1} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \\ &+ \iint_{\Sigma_2} \iint_{\Sigma_2} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

where :

$$\mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega). \quad (3.22)$$

The second line of the right term of Eq. (3.21) contains the cross-spectrum $\Gamma(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ with $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma_2$ and $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma_1$. As seen in section 3.4.1, the cross-spectrum is a decreasing function of space that is negligible as soon as the distance between the two points is greater than four times the coherence length. Consequently, for $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{x}}$ situated in different sub-areas, it is assumed that their separation is large enough for the corresponding cross-spectrum to be considered as null :

$$\forall (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in (\Sigma_2 \times \Sigma_1), \Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = 0. \quad (3.23)$$

Obviously, this is not strictly true for two points close to a common sub-area edge.

This is equivalent to say that excitation on two sub-areas is decorrelated. The same assumption is applied for the third term of Eq. (3.21), which becomes :

$$\begin{aligned}
 S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) &= \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp,1}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \\
 &+ \iint_{\Sigma_2} \iint_{\Sigma_2} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp,2}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

With the same method applied for an arbitrary number N of sub-areas and assuming the sub-area excitation is decorrelated, Eq. (3.24) is generalized as follows :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \sum_{\zeta=1}^N \iint_{\Sigma_\zeta} \iint_{\Sigma_\zeta} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp,\zeta}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}. \tag{3.25}$$

Replacing $\Psi_{pp,\zeta}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ by its Fourier transform $\Phi_{pp,\zeta}(\mathbf{k}, \omega)$, Eq. (3.25) becomes :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\zeta=1}^N \iint_{\infty} |\hat{H}_{v,\zeta}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp,\zeta}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \tag{3.26}$$

where

$$\hat{H}_{v,\zeta}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) = \iint_{\Sigma_\zeta} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} d\tilde{\mathbf{x}}. \tag{3.27}$$

The latter quantity can be interpreted as the plate response in velocity at \mathbf{M} when the surface Σ_ζ is excited by a wall plane wave of wavevector \mathbf{k} . In the following, this will be referred to as the sub-area sensitivity function. It can be estimated with an expression similar to Eq. (3.16) :

$$\hat{H}_{v,\zeta}(\mathbf{M}, k_x, k_z, \omega) = \sum_{m,n} \frac{i\omega W_{mn}(\mathbf{M}) \hat{W}_{mn}^{\Sigma_\zeta}(k_x, k_z)}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 + i\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2)}, \tag{3.28}$$

where :

$$\hat{W}_{mn}^{\Sigma_\zeta}(k_x, k_z) = \int_0^{L_z} \int_{X_\zeta^0}^{X_\zeta^1} W_{mn}(x, z) e^{i(xk_x + zk_z)} dx dz, \tag{3.29}$$

with X_ζ^0 and X_ζ^1 the x coordinates of the two edges of the sub-area Σ_ζ in ascending order $X_\zeta^0 < X_\zeta^1$. Here, the plate surface Σ is divided only in the stream direction, as illustrated in Fig. 3.3, because the considered TBL is invariant in the \vec{z} direction.

Two assumptions have been made in this section : the first is that sub-area excitation is decorrelated, which means that coherent turbulent structures located on the borderline between two sub-areas are omitted from the calculation. Then, ideally, the number of sub-areas should be as low as possible. The second assumption is that the TBL can be correctly described by a model with discrete parameters. Hence, the number of sub-areas needs to be chosen to approach the continuous evolution of the TBL parameters. The optimum sub-area discretization will be addressed in section 3.5.7.

3.4.3 Sub-area decomposition technique with corrective term

The assumption made previously that the sub-area excitation is decorrelated may be too strong. In this section, a corrective term for Eq. (3.26) is introduced, in order to take into account interactions between the neighboring sub-areas. This added term is expected to improve the accuracy of the prediction, with a weak additional assumption on the variation of the TBL between two sub-areas. Indeed, it is supposed that the cross-spectrum of the WPF between two points located on two adjoining sub-areas can be approximated by considering the arithmetic mean of the TBL parameters specific to the two sub-areas. If the TBL varies moderately between the two sub-areas, this assumption may certainly be valid and allow us to take interactions between adjoining sub-areas. The cross-spectrum of the WPF between two points belonging to two neighboring sub-areas can be written :

$$\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \approx \Psi_{pp, \zeta \cup (\zeta+1)}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega), \quad (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in (\Sigma_\zeta \times \Sigma_{\zeta+1}), \quad (3.30)$$

where :

- ζ and $\zeta + 1$ are the sub-area indices of two neighboring areas ($1 \leq \zeta \leq N - 1$);
- $\Psi_{pp, \zeta \cup (\zeta+1)}$ is the cross-spectrum of WPF evaluated with the arithmetic mean of the TBL parameters of the two sub-areas Σ_ζ and $\Sigma_{\zeta+1}$.

Using $\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Gamma_{pp}^*(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$, the sum of the second and third lines of Eq. (3.21) is :

$$\iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} + \iint_{\Sigma_2} \iint_{\Sigma_1} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} = 2\Re \left[\iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} \mathcal{H}(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \right]. \quad (3.31)$$

Considering Eq. (3.30), this term can be rewritten :

$$\begin{aligned} & 2\Re \left[\iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp, 1 \cup 2}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \right] \\ &= 2\Re \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} \iint_{\infty} H_v(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Phi_{pp, 1 \cup 2}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})} H_v^*(\mathbf{M}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\mathbf{k} d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} 2\Re \left[\iint_{\infty} \hat{H}_{v,1}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) \Phi_{pp, 1 \cup 2}(\mathbf{k}, \omega) \hat{H}_{v,2}^*(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

where $\Phi_{pp, 1 \cup 2}(\mathbf{k}, \omega)$ is the spatial Fourier transform of $\Psi_{pp, 1 \cup 2}$.

From Eq. (3.21) it leads to :

$$\begin{aligned} S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} \left(|\hat{H}_{v,1}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp,1}(\mathbf{k}, \omega) + |\hat{H}_{v,2}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp,2}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \right. \\ &\quad \left. \dots + \iint_{\infty} 2\Re [\hat{H}_{v,1}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) \Phi_{pp, 1 \cup 2}(\mathbf{k}, \omega) \hat{H}_{v,2}^*(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)] d\mathbf{k} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

The process can be extended to an arbitrary number N of sub-areas ($N \geq 2$) taking only the interactions between neighboring sub-areas into account. By truncating the wavenumber domain to cutoff

Plate		Material		
L_x	L_z	E	ν_P	ρ_p
1.00 m	0.35 m	68.9 GPa	0.35	2740 kg.m ⁻³

TABLE 3.1 – Plate dimensions and material characteristics.

wavenumbers (\bar{k}_x, \bar{k}_z) , the expression is therefore :

$$S_{vv}(\mathbf{M}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \left(\sum_{\zeta=1}^N |\hat{H}_{v,\zeta}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp,\zeta}(\mathbf{k}, \omega) \right. \\ \left. \dots + \sum_{\zeta=1}^{N-1} 2\Re \left[\hat{H}_{v,\zeta}(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) \Phi_{pp,\zeta \cup (\zeta+1)}(\mathbf{k}, \omega) \hat{H}_{v,\zeta+1}^*(\mathbf{M}, \mathbf{k}, \omega) \right] \right) \delta k_x \delta k_z. \quad (3.34)$$

The second term of Eq. (3.34) is the corrective interaction term.

❖ 3.5 Numerical application with a homogeneous TBL

3.5.1 Presentation of the case

Before dealing with the case of non-homogeneous TBL, a homogeneous TBL is considered to fulfill three purposes :

- first, to verify that the contributions of the convective peak of the WPF have a negligible effect on the vibrations of the panel considered ;
- second, to verify the assumption made by Eq. (3.19) for the spatial approach ;
- last, to define validity criteria for the assumptions of the sub-area decomposition technique.

Let us consider a flat plate in an air flow and excited by a homogeneous TBL. The plate is made of aluminum. Plate dimensions L_x and L_z , material Young's modulus E , Poisson's ratio ν_P and mass density ρ_p are given in Table 3.1. The plate thickness is $h = 4$ mm. The fluid density ρ_0 and kinematic viscosity ν , TBL external velocity U_e , thickness δ and shear stress τ are given in Table 3.2. Structural damping η is set at 1% for all modes. Flexural rigidity D , found in Eq. (3.12) and Eq. (3.14), is deduced from E and ν_P :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_P^2)}. \quad (3.35)$$

The WPF wavenumber-frequency spectrum can be expressed in function of an autospectrum

Fluid		TBL		
ρ_0	ν	U_e	δ	τ
1.22 kg.m ⁻³	1.5 × 10 ⁻⁵ m ² .s ⁻¹	40 m.s ⁻¹	1.0 cm	2.7 Pa

TABLE 3.2 – Fluid and homogeneous TBL parameters.

$S_{pp}(\omega)$ and a normalized cross-spectrum $\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega)$ [60] :

$$\Phi_{pp}(k_x, k_z, \omega) = S_{pp}(\omega) \tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) k_c^{-2}. \quad (3.36)$$

For a flat plate with a zero pressure gradient, the Goody model [59] is considered for the autospectrum :

$$S_{pp}(\omega) = \frac{\delta \tau^2}{U_e} \times \frac{c_2 (\omega \delta / U_e)^2}{[(\omega \delta / U_e)^{0.75} + c_1]^{3.7} + [c_3 R_T^{-0.57} (\omega \delta / U_e)]^7}, \quad (3.37)$$

where $R_T = (\delta / U_e) / (\nu / u_\tau^2)$ and the constants are $c_1 = 0.5$, $c_2 = 3$ and $c_3 = 1.1$. For an incompressible flow, the friction velocity $u_\tau = \sqrt{\tau / \rho_0}$ is calculated with the TBL shear stress τ and the fluid density ρ_0 , whereas for a flat plate, external velocity U_e is equal to free flow speed U_0 .

For the normalized cross-spectrum of the WPF, the Mellen elliptical model [104] has been chosen because of its simple expression and its more realistic prediction in the low wavenumber region than the Corcos model :

$$\tilde{\Phi}_{pp}(k_x, k_z, \omega) = \frac{2\pi \alpha_x^2 \alpha_z^2 k_c^3}{\sqrt{(\alpha_x \alpha_z k_c)^2 + (\alpha_x k_z)^2 + \alpha_z^2 (k_x - k_c)^2}}, \quad (3.38)$$

where coefficients α_x and α_z are given in section 3.4.1. For the sake of simplicity, convective speed U_c is assumed to be a constant fraction of the external velocity U_e :

$$U_c = 0.7 U_e. \quad (3.39)$$

3.5.2 Wavenumber approach : influence of the convective peak

In order to evaluate the influence of the convective peak on the panel response, two calculations using the wavenumber method are achieved. The first one uses the cutoff wavenumbers μk_f defined by Eq. (3.9) with $\mu = 1.2$. For the second one, cutoff wavenumbers \bar{k}_x and \bar{k}_z have both been set to 160 rad/m, which is equal to 1.2 times the convective wavenumber k_c at 600 Hz. In the first scenario, the cutoff wavenumber is smaller than the convective wavenumber on the frequency range considered, so this calculation neglects the influence of the convective peak. On the contrary, the second calculation includes the effect of the convective peak of the WPF.

The results of the two calculations are shown in Fig. 3.4, in terms of the spatial mean of the velocity autospectrum (SMVA) on the plate. Since the first resonance of the studied plate occurs at $f_{11} = 89$ Hz, the lower bound of the frequency band of interest has been set at 80 Hz. Good agreement can be observed between predictions both with and without the convective peak. The main discrepancy is located in the lower frequencies, where the convective peak slightly influences the vibrational response. This

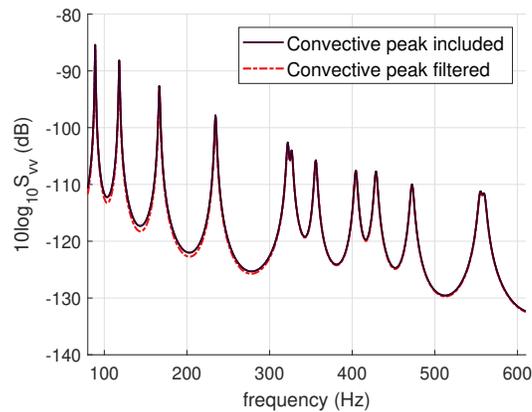


FIGURE 3.4 – Level of the spatial mean velocity autospectrum of the panel excited by a homogeneous turbulent boundary layer. Comparison of two wavenumber calculations, including the convective peak or not (dB, ref. $1 \text{ (m/s)}^2/\text{Hz}$).

difference is below 0.5 dB above 300 Hz confirming that the convective components of the WPF make negligible contributions to the panel vibrations for frequencies well above f_{coinc} .

3.5.3 Spatial approach : validation of the assumption of weak spatial correlation

In section 3.4.1, it has been stated that since the WPF of a TBL is weakly correlated spatially, the cross-spectrum of the WPF can be negligible when the separation between the two points is significant relatively to the coherence length. In Fig. 3.5, the SMVA is plotted considering a spatial calculation and a homogeneous TBL. Two cases are compared : Eq. (3.4) with Eq. (3.2) considers the cross-correlation of the WPF between all the couples of grid points of the spatial mesh, whereas the second one considers the assumptions made in Eq. (3.19) (that is to say that the cross correlations of the WPF are neglected when the separation between two grid points is greater than four times the coherence length).

Good agreement between the two spatial calculations can be observed in Fig. 3.5. The conclusion drawn here is that when two points are distant enough, their correlation plays a negligible role in the vibrational response, and Eq. (3.19) is a good approximation.

3.5.4 Definition of a criterion on the sub-area length

The sub-area decomposition technique was introduced in sections 3.4.2 and 3.4.3. For both approaches, interactions between neighboring sub-areas have been either neglected or approximated. A minimum number of sub-areas is necessary to have an accurate description of TBL evolution. However, increasing the number of sub-areas may increase the error, because of the approximations made

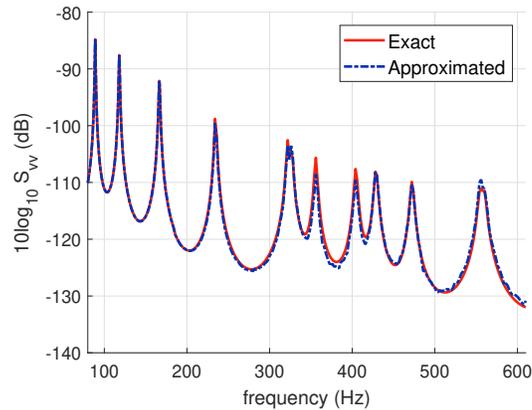


FIGURE 3.5 – Level of spatial mean of the velocity autospectrum under a homogeneous TBL. Comparison of : exact spatial, considering all grid point couples, and approximated spatial, with the assumption of Eq. (3.19) (dB, ref. $1 \text{ (m/s)}^2/\text{Hz}$).

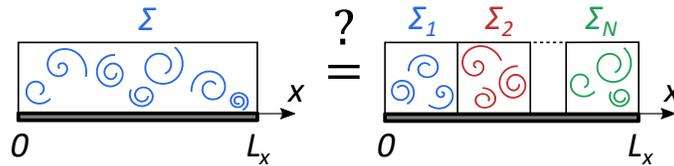


FIGURE 3.6 – Illustration of the SDT application for a homogeneous TBL.

on the TBL spatial correlation at the borderlines of the sub-areas. In this section, a criterion applied to the size of the sub-areas to minimize errors while preserving an optimal description of the TBL variations is suggested. This criterion will be established on the basis of numerical comparisons on the panel test case considering a homogeneous excitation. The assumptions concerning the interactions between sub-areas occur either for a homogeneous TBL and for a non-homogeneous one. However, we can easily obtain a reference result for the former that can be compared to the SDT results with different numbers of sub-areas, as illustrated in Fig. 3.6. Indeed, the discrepancy between the results considering one area and those considering N sub-areas corresponds to the error introduced by neglecting certain sub-area interactions.

Two SDT calculations are performed : the first one leaving out the interactions between the sub-areas, as described in section 3.4.2, and the second one considering the interactions between the neighboring sub-areas, as described in section 3.4.3. Fig. 3.7 shows the absolute difference of the SMVA between the SDT with $N = 1$ and with $N = 8$. As expected, the difference is always greater without the interactions, except below 100 Hz. Above 150 Hz, the absolute difference is never higher than 0.4 dB with the interaction term whereas it reaches 2.4 dB without taking it into account. This highlights the benefit of corrective terms in the SDT. Moreover, the maxima of the error are observed at the resonant frequencies (symbolized by squares on Fig. 3.7). In the following, the errors will be estimated at these resonant frequencies only.

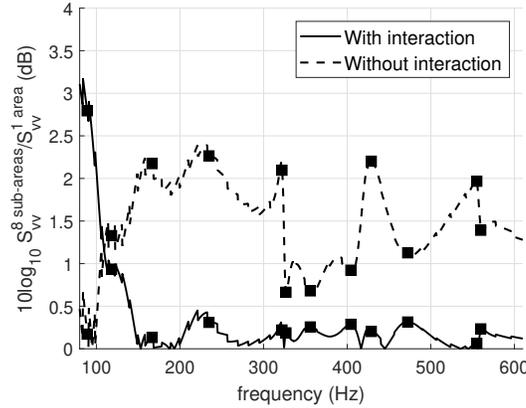


FIGURE 3.7 – Difference of the spatial mean of the velocity autospectrum between the calculations considering 8 sub-areas and 1 area (squares indicate modal frequencies).

3.5.5 Methodology for extracting the criteria

Previously, it was shown that the convective peak of the WPF has a negligible effect on the plate vibrations because flexible structures are mainly sensitive to the sub-convective part of the WPF spectrum for frequencies well above the aerodynamic coincidence frequency. The result is that the wavenumber calculations related to the SDT can be truncated to cutoff wavenumbers defined by Eq. (3.9). The truncated spectrum of the TBL WPF is relatively flat and can be roughly represented by a white-noise spectrum, as illustrated in red in Fig. 3.2. In the first step, the panel will be excited by a homogeneous random excitation with a low-wavenumber white noise spectrum. Considering this academic excitation instead of the TBL excitation permits studying the influence of the cutoff wavenumbers independently of the presence of the convective peak of a TBL excitation. In others words, calculations with different values of cutoff wavenumber of the white noise spectrum can be carried out without specific precautions compared to the convective wavenumber.

The Fourier transform of a gate function, that gives the spatial cross-spectrum of the WPF, is a cardinal sinus function :

$$\Gamma_{pp}(x, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\bar{k}_x}^{\bar{k}_x} \int_{-\bar{k}_z}^{\bar{k}_z} e^{-i(xk_x + zk_z)} dk_x dk_z = \frac{\bar{k}_x \bar{k}_z}{\pi^2} \text{sinc}(\bar{k}_x x) \text{sinc}(\bar{k}_z z). \quad (3.40)$$

The spatial coherence of the form $\text{sinc}(\bar{k}_x x)$ corresponds to the one of a diffuse field [31] when $\bar{k}_x = k_0$, the acoustic wavenumber. However, in the present case, \bar{k}_x can be chosen independently of the acoustic wavenumber for the purpose of the study.

The higher \bar{k}_x is, the lower the half period of the cardinal sinus function, thus the lower the coherence length of the pressure field in the stream direction. The influence of the spatial correlation of the WPF on the accuracy of the SDT will be studied through the variations of \bar{k}_x . It is expected that the lower the coherence length of the WPF, the higher the number of the sub-areas that can be considered in the SDT will be. In the following, the discrepancies of SMVA between the reference calculation and the SDT calculations will be observed.

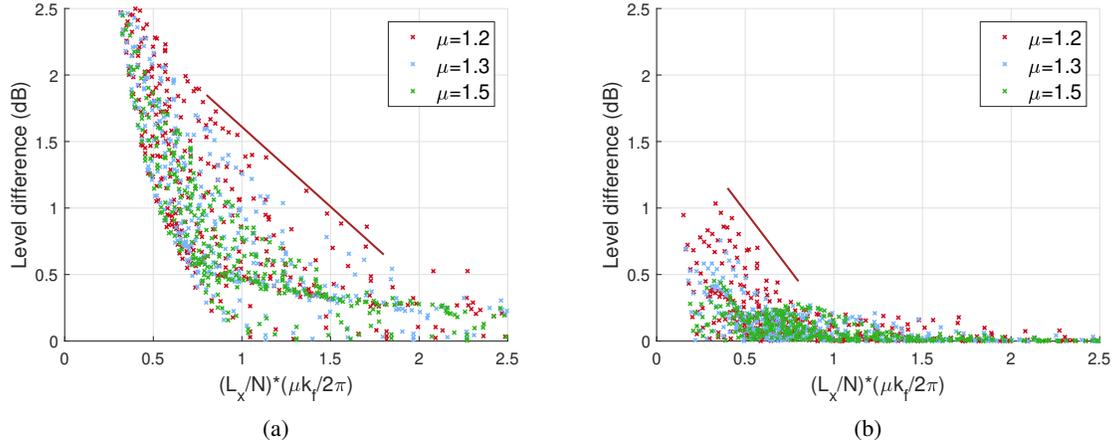


FIGURE 3.8 – Differences of spatial mean of velocity autospectrum at resonant frequencies between the SDT calculation considering $N \in [2; 12]$ and the reference calculation $N = 1$; $L_x = 1$ m, $L_z = 0.35$ m; (a), without interaction; (b), with interaction.

Let us consider sub-areas of the same size. For N sub-areas, their length is L_x/N . This sub-area length is compared to the coherence length of the white spectrum $2\pi/\bar{k}_x$, in order to extract a criterion for the cases with and without interactions between neighboring sub-areas.

These criteria will first be defined for the white noise excitation in the section 3.5.6 and their validity will be verified in section 3.5.4.

3.5.6 Spatial white-noise excitation

The rectangular plate, whose thickness and material are described by the parameters given in Table 3.1, is excited by a spatially homogeneous random excitation having a white noise cross-spectrum in the wavenumber domain. The amplitude of the spectrum is set to a unit value, whereas the cutoff wavenumber in the streamwise direction is defined by $\bar{k}_x = \mu k_f$. Changing the value of μ will change the value of \bar{k}_x .

SDT calculations were carried out for a number of sub-areas N ranging from 2 to 12. These quantities are plotted on 3 figures as a function of the ratio of the sub-area length in the streamwise direction over the coherence length associated with the white-noise excitation. Every dot on the graphs represents the difference of mean velocity at a modal frequency between a calculation considering $N \in \{2, \dots, 12\}$ sub-areas and another one considering only one area. The results have been plotted for different values of μ and different plate sizes :

- $L_x = 1.0$ m, $L_z = 0.35$ m (initial plate dimensions) on Fig. 3.8;
- $L_x = 0.5$ m, $L_z = 0.35$ m on Fig. 3.9;
- $L_x = 1.0$ m, $L_z = 0.20$ m on Fig. 3.10.

A general trend on all the figures can be observed : the discrepancies decrease globally when the sub-area length increases. Moreover, as expected, the discrepancies are smaller when the interactions

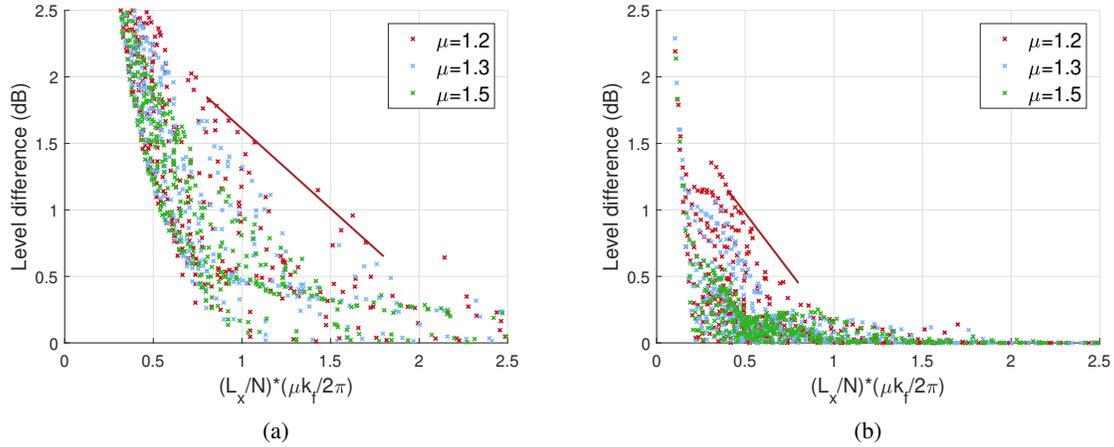


FIGURE 3.9 – Same type of results than Fig. 3.8;
 $L_x = 0.5$ m, $L_z = 0.35$ m; (a), without interaction; (b), with interaction.

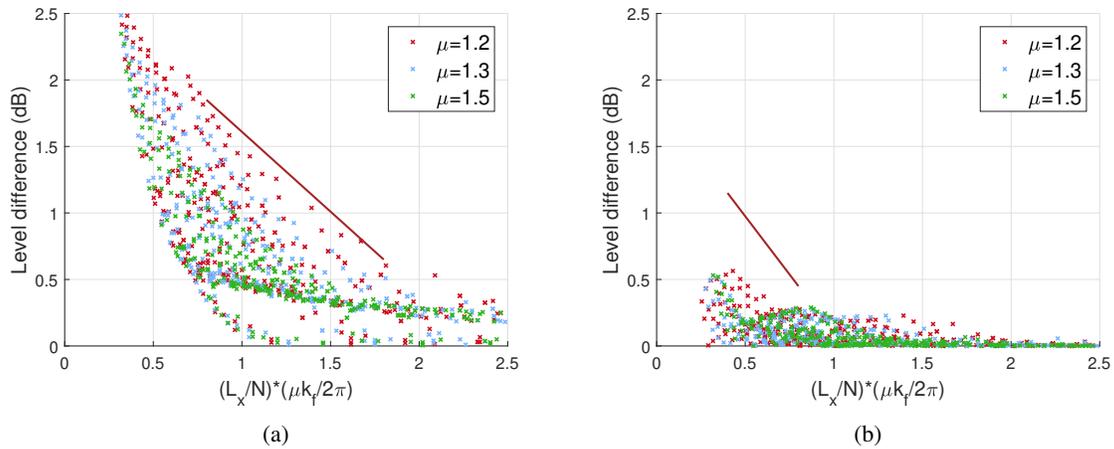


FIGURE 3.10 – Same type of results than Fig. 3.8;
 $L_x = 1$ m, $L_z = 0.20$ m; (a), without interaction; (b), with interaction.

with the neighboring sub-areas are taken into account. This leads us to define two criteria : one for each type of calculation.

For both with and without interactions, a linear curve has been drawn as a full line on the different figures corresponding to plates of different sizes. They constitute envelopes for the different data whatever the plate considered. Therefore, criteria can be deduced from these curves and reasonably extrapolated to rectangular plates with a wide variety of dimensions. Considering that an error lower than 1 dB is acceptable in practice, the criterion for the SDT without interaction terms is set to :

$$\frac{L_x}{N} > \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{\bar{k}_x}, \quad (3.41)$$

whereas that for the SDT with the interaction terms is set to :

$$\frac{L_x}{N} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\bar{k}_x}, \quad (3.42)$$

where $2\pi/\bar{k}_x = \lambda_f/\mu$.

3.5.7 TBL excitation

Eq. (3.41) and Eq. (3.42) have been defined considering plates excited by a random excitation with a white noise spectrum. Now, their validity will be verified for plates excited by a TBL excitation when the convective components of the WPF can be neglected, as discussed in section 3.5.2. To do this, the Mellen model is considered with different values of μ to filter the low wavenumber components of the WPF using Eq. (3.9). The results are plotted in Fig. 3.11 for the plate and flow characteristics presented in Table 3.1 and Table 3.2 respectively. The envelopes defined in the previous section is also carried over on this figure for comparison. They remain globally valid for the TBL excitation. However, some points are above these curves, especially for the higher values of μ and when the interaction with the neighboring sub-areas are not taken into account. This can be explained by the fact that in the lower part of the frequency range, some components of the convective peak are taken into account when considering the highest values of μ . This shows that the criteria proposed are suitable when the convective components of the WPF can be neglected.

❖ 3.6 Illustration of application for a non-homogeneous TBL

The sub-area decomposition technique is now applied and numerically verified for a non-homogeneous TBL. The considered test case is composed of a thin rectangular plate mounted in an infinitely rigid baffle and an air flow on one side of the plate in the \vec{x} direction. The TBL is supposed to start at the

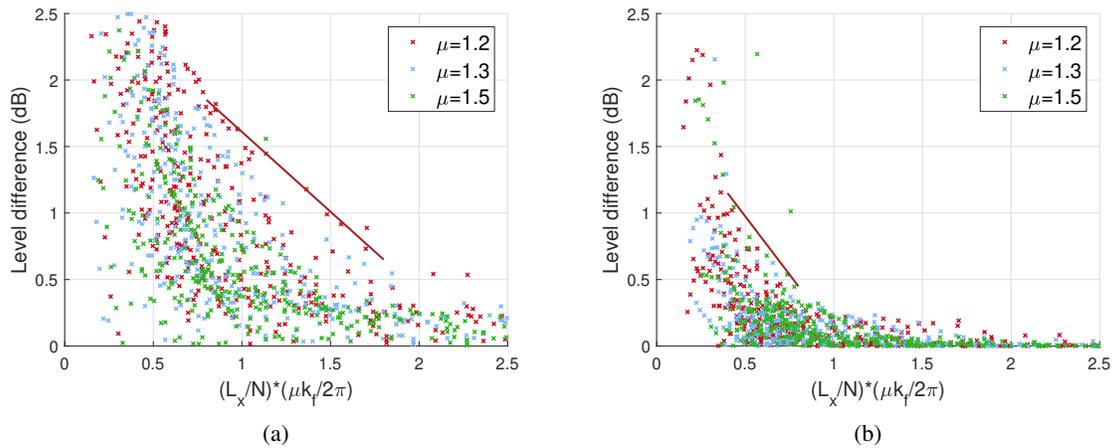


FIGURE 3.11 – Same simulations as in Fig. 3.8 with a TBL excitation (Mellen model); $L_x = 1$ m, $L_z = 0.35$ m; (a) without interaction; (b) with interaction.

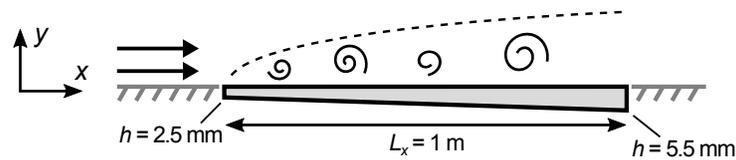


FIGURE 3.12 – 2-D view of the baffled plate excited by a one-sided flow.

plate leading edge $x = 0$, then grow until the trailing edge $x = L_x$, leading to a non-homogeneous loading of the vibrating plate. To accentuate the effect of the non-homogeneous excitation on the plate vibrations, the thickness of the plate h varies linearly between its leading edge and its trailing edge.¹ The plate is assumed to be simply supported on its four edges and to be made of aluminum (see mechanical parameters in Table 3.1). A 2-D view of the plate mounted in the baffle and excited by the growing TBL is shown in Fig. 3.12. The figure is not at scale. It is assumed that the weak slope of the plate surface has no effect on the flow. The model of TBL over a flat plate is therefore preserved (with $U_e = U_0$).

3.6.1 The plate model

The normal modes of the plate are now extracted from a finite element calculation using the MSC NASTRAN software. A mesh composed of 160×56 nodes and 8745 quadrilateral linear elements (CQUAD4) is considered. This gives around 30 elements per flexural wavelength and 7 elements per convective wavelength at 600 Hz, while the usual criterion is 4 elements per flexural wavelength.

Shell properties (PSHELL) are attributed to the elements and the thickness is given at the four nodes of each quadrilateral element. Isotropic material properties (MAT1) are defined using the characteristics from Table 3.1. The plate modes are extracted with a normal modal analysis (SOL103).

1. Voir l'Annexe C pour plus d'explications concernant l'épaisseur.

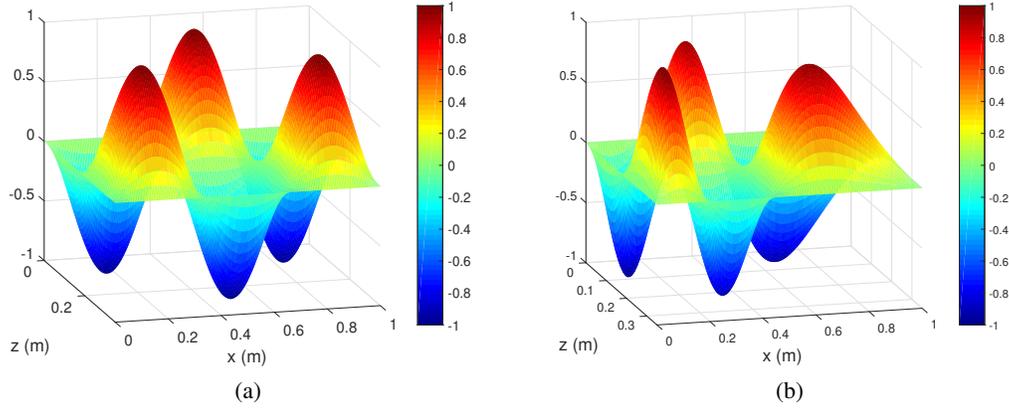


FIGURE 3.13 – 8th mode shape; (a) constant thickness 403 Hz; (b) non-constant thickness 404 Hz.

To illustrate the effects of non-constant thickness, the modal shape of the 8th mode is shown in Fig. 3.13 for the test plate and for an equivalent plate with a constant thickness of 4 mm. For the latter plate, the mode follows the sinusoidal shape of Eq. (3.11), with a constant distance between the nodal line (i.e. 0.33 m in the \vec{x} direction). Conversely, for the former one, the distance between the nodal line along the \vec{x} direction changes from 0.20 m for the thinner part of the plate to 0.46 m for the thicker part.

To perform the calculation with the SDT, the modal frequencies and the modal shapes are imported in MATLAB. Fast Fourier transforms are used for expressing the mode shapes in the wavenumber domain that intervenes in the calculation of the sub-area sensitivity functions with Eq. (3.28) and Eq. (3.29).

Moreover, the cutoff wavenumber in the streamwise direction \bar{k}_x used to filter the convective peak is defined as $\bar{k}_x = \mu k_f^{2.5\text{mm}}$, where $k_f^{2.5\text{mm}}$ is the flexural wavenumber of a flat plate with a constant thickness equal to the minimum thickness of the test plate, that is to say 2.5 mm. As the flexural wavenumber considered is related to the thinner part of the panel, the criterion on the cutoff wavenumber includes the dynamic behavior of the other part of the panel. In the following, μ is set to 1.3.

3.6.2 Analytical model of a turbulent boundary layer over a flat plate

The plate is inserted in a baffle and excited by a TBL starting at $x = 0$ where the \vec{x} axis corresponds to the streamwise direction. By neglecting static pressure gradients and laminar/transitional areas of the TBL, the parameters of the TBL induced by the constant flow can be estimated with an analytical model from Sanders [120], where TBL thickness δ and shear stress τ are functions of the local Reynolds number $Re_x = U_0 x / \nu$:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{0.37x}{Re_x^{1/5}}, \\ \tau &= \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \frac{0.0592}{Re_x^{1/5}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

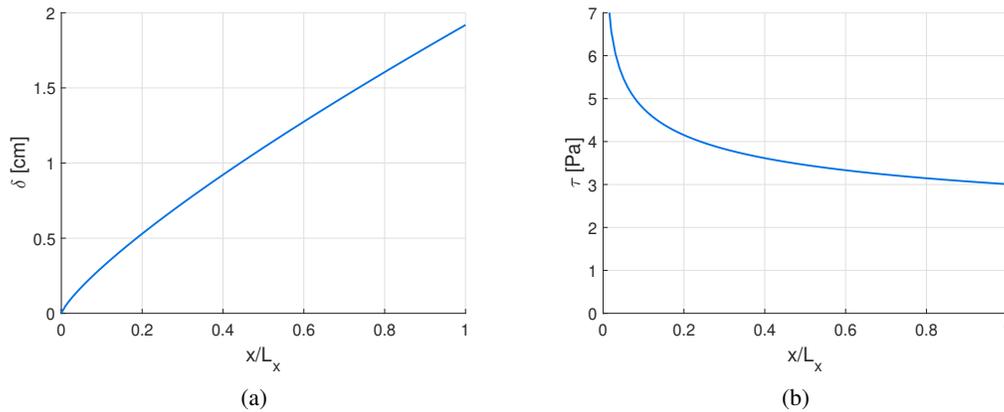


FIGURE 3.14 – Analytical model of the flat plate for (a), the TBL thickness δ and (b), the shear stress τ ; $U_0 = 40$ m/s.

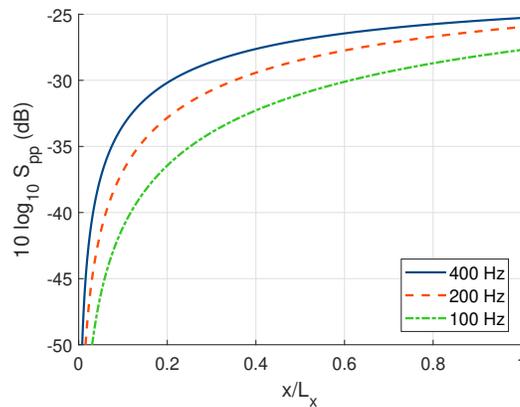


FIGURE 3.15 – Goody autospectrum resulting from Eq. (3.43) and Eq. (3.37); $U_0 = 40$ m/s.

Using these equations, the TBL parameters are plotted in Fig. 3.14 along the \vec{x} direction, for a flow speed $U_0 = 40$ m/s. From these parameters and Eq. (3.37), Goody autospectrum can be evaluated along the streamwise direction. The result is shown in Fig. 3.15. The energy of the excitation is concentrated near the trailing edge of the plate, which corresponds to the area where the boundary layer thickness is the highest, as shown in Fig. 3.14(a). Moreover, the variations of the autospectrum along the \vec{x} direction depend on the frequency. The spatial approach as well as the SDT are able to take into account these variations through their process described in the sections 3.4.1 and 3.4.3, respectively. Let it be noted that for the present case, the TBL parameters and therefore the WPF autospectrum are invariant in the \vec{z} crosswise direction.

3.6.3 Results

The vibration velocity autospectrum of the plate with a varying thickness is calculated with four methods :

- first, the spatial approach with a homogeneous TBL (i.e. Eq. (3.4)). The TBL parameters were set to the spatial average of the varying TBL parameters shown in Fig. 3.14, that is to say $\delta = 1.07$ cm and $\tau = 3.76$ Pa ;
- second, the wavenumber approach considering the same homogeneous TBL (i.e. with Eq. (3.8)). Contrary to the spatial approach, this calculation does not take the convective contributions into account ;
- third, the spatial approach described in section 3.4.1, that takes into account the spatial variations of the WPF. It gives us a point of comparison for verifying the validity of SDT and the criterion proposed for this case, and for highlighting the interest of SDT in terms of computing time. Due to this computing time, the frequency step for spatial methods is $\Delta f = 2$ Hz ;
- fourth, the SDT taking into account the interactions between the neighboring sub-areas as described in section 3.4.3 (i.e. Eq. (3.34)). 5 sub-areas were considered, to conform to the criterion of Eq. (3.42) above the first modal frequency at 83 Hz. With this model, the frequency step is $\Delta f = 0.5$ Hz.

The comparison of the results of the spatial and of the wavenumber approaches for the homogeneous TBL allows us to verify the negligible influence of the convective contributions for frequencies above three times the aerodynamic coincidence frequency attributed to the thinner part of the plate, that is to say above 96 Hz (comparison not shown).

The results in terms of the spatial mean of the velocity autospectrum (SMVA) on the plate as a function of the frequency are plotted in Fig. 3.16. The results of the SDT with 5 sub-areas are compared with the wavenumber approach considering the homogeneous TBL. Some differences can be noticed that highlight the importance of taking the spatial variations of the TBL parameters through the variations of the autospectrum of the WPF and the sub-area decomposition. For instance, at 100 Hz, the autospectrum of the WPF estimated with the mean TBL values over the whole plate surface was -30.6 dB. This value was taken into account in the wavenumber approach considering the homogeneous TBL, whereas the values for the 5 sub-areas of the SDT were : -40.8 dB, -33.9 dB, -31.1 dB, -29.3 dB and -28.2 dB from leading to trailing edge. These values are coherent with the autospectrum displayed in Fig. 3.15.

In Fig. 3.17, the difference of the mean plate velocity in dB between a calculation taking the TBL variations into account and another one considering the homogeneous TBL with averaged parameters, separately for the spatial and SDT approaches, is plotted in function of the frequency. Results are colored in gray below 96 Hz, that is to say three times the aerodynamic coincidence frequency (where $k_f^{2.5\text{mm}} = k_c$). The good agreement between the two approaches that can be observed in Fig. 3.17 permits to validate numerically the ability of the SDT to describe the effect of a growing TBL on the panel vibration.

A difference of globally 2 to 3 dB between the non-homogeneous TBL calculation and homogeneous TBL one occurs, as it can be observed in Fig. 3.17. Furthermore, two jumps appear, at 279

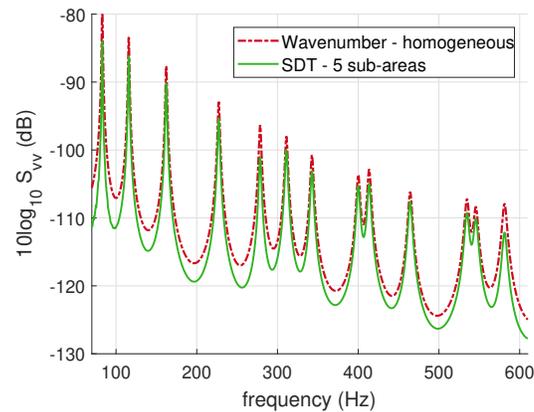


FIGURE 3.16 – Level of the spatial mean of the velocity autospectrum of the considered test case. Comparison of two calculations : wavenumber approach considering a homogeneous TBL (dashed line), SDT considering the growing TBL through 5 sub-areas with interactions (continuous line) (dB, ref. $1 \text{ (m/s)}^2/\text{Hz}$).

and 581 Hz with a difference of 4.6 and 4.2 dB respectively. When looking at the modal frequencies, these two frequencies correspond to the 5th and 13th modes. The modal shapes of these two modes are plotted in Fig. 3.18. The first half (*i.e.* $0 < x < L_x/2$), where the plate is thinner, is deformed, while the second half (*i.e.* $L_x/2 < x < L_x$), remains undeformed. As highlighted in Fig. 3.15, the TBL excitation is maximum near the trailing edge (x close to L_x) whereas it is negligible near the leading edge (x close to 0). The exciting pressure fails to excite these modes and so their response is lower compared to the one obtained supposing a homogeneous TBL. For other modes like the one presented in Fig. 3.13(b), the effect of the non-homogeneity is less important on the panel response than for the 5th and 13th modes because they exhibit deformations on all the plate surface. These results highlights the interest of describing the effect of the spatial variations of the TBL in vibratory calculations.

The same type of results as Fig. 3.17 are obtained for two additional velocities : a lower velocity, 20 m/s and a higher one, 60 m/s. The results are shown in Fig. 3.19. As the same mesh was used for the different flow speed, the upper frequency of convergence for the spatial approach (based on a criterion on the convective wavelength) depends on the flow speed. For $U_0 = 20 \text{ m/s}$, it is of 350 Hz whereas it is well above 600 Hz for $U_0 = 60 \text{ m/s}$. The results of the spatial approach are then plotted up to 350 Hz in Fig. 3.19(a). Moreover, the curve of SDT in Fig. 3.19(b) is colored in gray below 218 Hz, that corresponds to three times the aerodynamic coincidence frequency. A good agreement can be observed between the SDT and the spatial approach for these two supplementary flow speeds. Moreover, higher the flow speed is, higher the difference with the homogeneous TBL calculation is. These increases in the difference with the flow speed is however not uniform in the whole frequency range. For instance, if one focus on the difference at 279 Hz corresponding to the frequency of the 5th mode, the differences are 3.2, 4.6 and 5.8 dB, respectively at 20 m/s, 40 m/s, and 60 m/s, whereas at 350 Hz which does not correspond to a particular mode, the differences are 1.7, 2.3 and 3.0 dB for the same flow speeds. The increase at 279 Hz from 20 m/s to 60 m/s is then 2.6 dB whereas it is only of 1.3 dB at 350 Hz. The proposed SDT is able to describe these variations in accordance with the spatial approach.

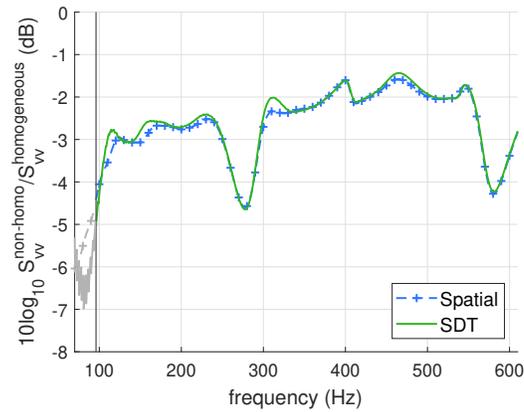


FIGURE 3.17 – Influence of TBL inhomogeneity : difference between a non-homogeneous TBL calculation and a homogeneous TBL one. Comparison of two types of non-homogeneous TBL calculation : SDT (5 sub-areas, with interactions) and the spatial approach. $U_0 = 40$ m/s. Vertical black line : lower frequency limit for SDT (i.e. $3 \times f_{\text{coinc}}$).

Finally, let us focus on computing time. The calculations were performed on a server computer (Intel Core i7-4930K 3.40 Ghz, 64 Go RAM). The spatial method required around 100 hours of computation whereas the SDT results were obtained in under 30 minutes. This highlights the huge time-benefit of the sub-area decomposition technique compared to the spatial method, especially considering the difference in frequency step (i.e. 2 Hz for the spatial approach compared to 0.5 Hz for the SDT), while the predictions are similar for both approaches for a non-homogeneous excitation.

❖ 3.7 Conclusion

In this paper, we focused on the prediction of the dynamic behavior of panels excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer. The investigations started from the two approaches generally used for dealing with homogeneous TBL, namely the spatial and the wavenumber approaches. While the extension of the spatial approach to non-homogeneous excitations was relatively straightforward, the extension of the wavenumber approach required more developments and assumptions that led to the sub-area decomposition technique (SDT). The result was that the latter required much less computation time than the former. Two versions of the SDT were proposed : the first assumed homogeneous TBL excitation on each sub-area and neglected the interaction between the different sub-areas. This latter assumption can be justified at first sight by the fact that the coherence length of the WPF of the TBL was generally small in comparison to the sub-area sizes considered. However, it was observed numerically that this assumption may be too strong in some situations. To circumvent this issue, the

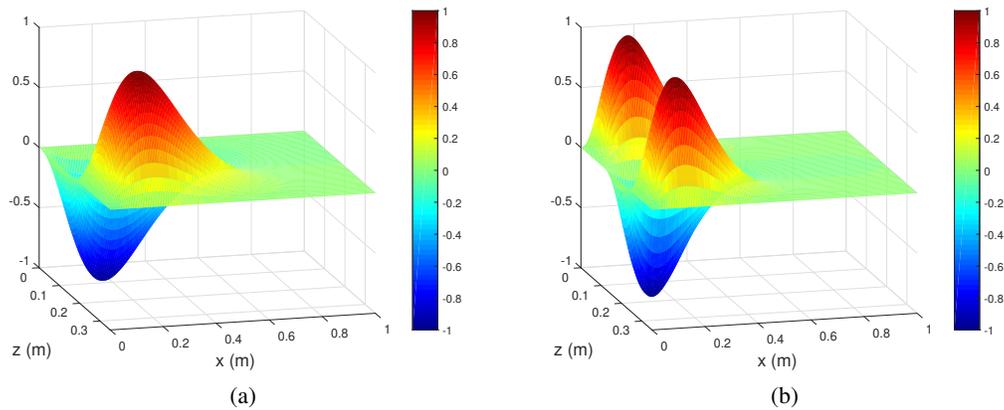


FIGURE 3.18 – (a) : 5th and (b) : 13th modal shapes ; 279 Hz and 581 Hz respectively.

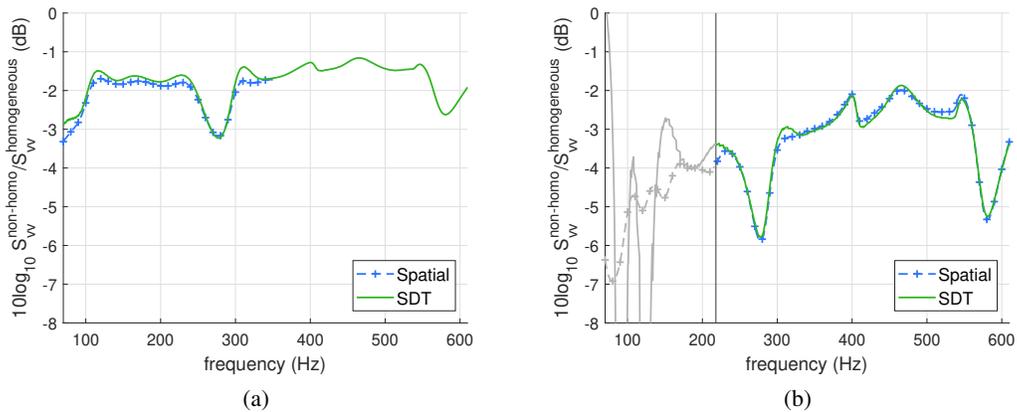


FIGURE 3.19 – Influence of TBL inhomogeneity : same type of results than Fig. 3.17 for two different flow speed. (a), $U_0 = 20$ m/s; (b), $U_0 = 60$ m/s. Vertical black line : lower frequency limit for SDT (i.e. $3 \times f_{\text{coinc}}$).

second version took the interactions with the neighboring sub-areas into account. As the two versions of SDT were based on a simplifying assumption concerning the spatial correlation of the WPF, a numerical study was carried out to propose criteria for the minimum sizes of the sub-areas as a function of the minimum wavelength of the WPF. The criterion of Eq. (3.41) for the SDT version without interaction between sub-areas was naturally more restrictive than that of Eq. (3.42) for the SDT version with interaction with neighboring sub-areas.

The numerical simulations carried out and compared with the spatial approach showed that the SDT is suitable when the convective components of the WPF can be neglected, that is to say for frequencies that are at least three times greater than the aerodynamic coincidence frequency. In this condition and when the criterion of Eq. (3.41) or Eq. (3.42) (depending of the SDT version) is respected, the approach proposed gave accurate results.

An application to a rectangular plate with linearly varying thickness under an increasing TBL allo-

wed us to highlight the interest of describing the effect of the spatial variations of the WPF with SDT compared to a prediction assuming a homogeneous TBL. These approaches exhibits a global difference of 2 to 6 dB, depending on the flow speed. In particular, we observed that significant differences (up to 6 dB) could be observed for certain resonant frequencies. These frequencies concerned modes of the plate that were weakly deformable on an area highly excited by the TBL. Only approaches taking into account the spatial variations of the TBL parameters like the spatial method and the SDT are capable of describing such phenomenon. However, the SDT was significantly less demanding in terms of computer resources than the spatial approach, the downside being that the SDT was valid when the convective peak was negligible. It appears that this approach is not dedicated to the aeronautical applications for which the flow speed is high. However, it can be adapted to the automotive applications for which the considered speeds are relatively low as well as to the naval applications characterized by thick structures and low speeds.

CHAPITRE 4

Évolution spatiale de la CLT par synthèse d'ondes planes

❖ 4.1 Avant-propos

Auteurs et affiliations :

- Corentin Guillon, INSA-Lyon, LVA,
- Emmanuel Redon, INSA-Lyon, LVA, Université de Bourgogne, ESIREM, Dijon,
- Laurent Maxit, INSA-Lyon, LVA.

Date d'acceptation : 08 janvier 2022. Disponible en ligne le 15 février 2022.

Revue : Journ. of the Acoustical Society of America. Volume 151 (2022).

Lien : <https://asa-scitation-org.docelec.insa-lyon.fr/doi/full/10.1121/10.0009368>

Titre : Synthesis of wall pressure fields of non-homogeneous turbulent boundary layers for vibroacoustic simulations.

Titre français : Synthèse de champs de pression pariétale de couches limites turbulente non-homogènes pour simulations vibroacoustiques.

Contribution au mémoire : Dans les chapitre précédent, les méthodes spatiale et nombre d'onde ont été modifiées pour prendre en compte les variations spatiales de la CLT. Chacunes de ces méthodes reposent sur de lourdes hypothèses. La méthode OPPD [95], plus récemment proposée, peut également être approfondie pour être utilisée avec des cas de chargement par CLT non-homogène. Dans un premier temps, le principe de découpage en zones peut être appliqué pour réaliser un parallèle avec la méthode développer au chapitre précédent. Des discussions sur les hypothèses respectives des méthodes permettent d'améliorer le modèle OPPD et de proposer plusieurs variantes.

Finalement, une forme finale de la méthode OPPD est proposée, nommée C-OPPD pour la représentation continue de l'évolution des paramètres de CLT. En reprenant le cas numérique précédent, l'application de cette nouvelle méthode permet de la comparer aux méthodes du chapitre 3, en termes de domaine de validité et de temps de calcul. Des calculs supplémentaires permettent également d'observer l'effet du pic convectif sur la réponse.

Résumé français : Dans ce papier, une approche numérique est présentée pour la prédiction de la réponse de structures vibrantes excitées par une couche limite turbulente non-homogène. Celle-ci est basée sur la synthèse de différentes réalisations du champ de pressions fluctuantes aléatoires qui est utilisé comme chargement dans le modèle vibroacoustique. La réponse vibratoire est finalement déduite en réalisant la moyenne de l'ensemble des réponses pour tous les chargements. Dans une première approche, les pressions aléatoires de la couche limite turbulente non-homogène sont générées séparément sur différentes zones de la structure en utilisant la méthode des ondes planes pariétales décorrélées et les paramètres de CLT moyens. Une évolution de cette approche élémentaire consiste à prendre en compte les interactions entre les zones et un perfectionnement de la décomposition en zones. Les fluctuations de pression pariétale étant liées à la couche limite évoluant de manière continue peuvent ainsi être intégrées dans le modèle vibroacoustique. La précision de l'approche proposée est investiguée sur un panneau rectangulaire excité sur une face par une couche limite turbulente grandissante déclenchée à une extrémité de la plaque. Des comparaisons avec l'approche spatiale et l'approche nombre-d'onde utilisant la décomposition en zones sont présentées. Les avantages de l'approche proposée en termes de précision et de temps de calcul sont discutés.

Abstract

In this paper, a numerical process is presented for predicting the response of vibrating structures excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer. This one is based on the synthesis of different realizations of the random pressure fluctuations that can be introduced as loading of a vibroacoustic model. The vibratory response is finally deduced by averaging together the responses of the different loads. As a first approach, the pressure fluctuations of the non-homogeneous turbulent boundary layer can be generated separately for different sub-areas of the structure by using the uncorrelated wall plane waves technique and mean boundary layer parameters. An extension of this basic approach consists in taking into account the interaction between the sub-areas and a refinement of the sub-area decomposition. Wall pressure fluctuations related to a continuous evolution of the boundary layer can then be generated and introduced in the vibroacoustic model. The accuracy of the proposed approach is studied on a rectangular panel excited on one side by a growing fully turbulent boundary layer triggered at one edge of the plate. Comparisons with the spatial approach and the wavenumber approach using the sub-area decomposition technique are proposed. Interests of the proposed approach in term of accuracy and computing times are discussed.

❖ 4.2 Introduction

Vibrations induced by the wall pressure under a turbulent boundary layer is a major concern in the design of vehicles. Such vibrations cause structure wear and are a source of disturbing interior noise. Predicting the vibroacoustic behavior of structures excited by a turbulent flow is an important issue for improving vehicle longevity and passenger comfort.

Most of the literature focusing on the vibratory response of structures excited by turbulent boundary layer (TBL) consider a spatially homogeneous excitation (see for instance Graham [60], Hambric et al. [63], De Rosa et Franco [36], Ciappi et al. [25], Franco et al. [51], Maxit et Denis [97], Ciappi et al. [27], Marchetto et al. [91]). However, many industrial applications show vibrating structures underneath a growing TBL or with curved surfaces for which the pressure loading can no longer be considered homogeneous spatially. This situation occurs on the sonar bow of a vessel or on the appendices of a submarine vehicle (steering rods, sail, rudder), on the windshield and the roof of a passenger car, or on the cockpit of an aircraft to cite few examples. For these cases, the spatial variations of the TBL is generally due to the growing of the TBL from its starting point and to the pressure gradients induced by the curvature of the flow. Few attention has been carried out to this topic whereas the influence of an inhomogeneous TBL can not be negligible on the vibroacoustic behavior of the structure. This has been have recently highlighted by the present authors on a rectangular plate with varying thickness and excited by a TBL triggered at the upstream edge of the plate [61]. In this context, this article aims to propose a efficient and versatile process for predicting the vibratory response of a structure excited by a non-homogeneous TBL. This process relies on an extension of the uncorrelated wall plane waves method developed some year ago for homogeneous TBL [95]. It

consists in the synthesis of different realizations of the TBL wall pressure field taking into account the spatial variations of the TBL parameters. These realizations can then be easily used as loadings of any vibroacoustic model. For sake of conciseness and simplicity, a flat plate excited by a TBL triggered at one of its edge will be considered as an example. No static pressure gradient will then be considered. That will allow us using models of the wall pressure fluctuation (WPF) developed during these last seventy years as discussed below. Considering a case with pressure gradients would have required the use of dedicated models of the WPF that are currently under developments by teams specialized in fluid mechanics (see for instance Rozenberg et al. [117], Salze et al. [118]). As these models are not yet fully validated, it had appeared more relevant for these first developments concerning a structure excited by non-homogeneous TBL excitations to consider a case without pressure gradient.

The phenomena occurring underneath the TBL are random and it generally requires impractical computing time to get the solutions of the Navier-Stokes equations. Direct numerical simulations (DNS) and large eddy simulations (LES) are limited to low Reynolds numbers and canonical flow conditions [30] and are nonviable in terms of time consumption for engineering applications. Many researchers have then focused on the characterization of the power spectral density of the random turbulent pressure, generally from experimental measurements. Wall pressure fluctuation (WPF) models have been established from analytical expressions depending on the TBL parameters and on unknown parameters determined by fitting the model to experimental data for flat surfaces and fully developed TBL with zero pressure gradient [59, 32, 104, 21]. These models are composed of the auto-spectrum which characterizes the power of the excitation and of the normalized cross-spectrum which expresses the spatial correlation of the pressure fluctuations. Auto-spectrum semi-empirical models are generally built following scaling laws [24, 66]. The space-frequency cross-spectrum, in the case of a spatially homogeneous TBL, is a function of 2-point spatial separation, representing the decay of the correlation [32, 104]. Considering a space Fourier transform of the cross-spectrum, expressions in the wavenumber domain can be obtained like for the Chase model [21].

These models of WPF are generally used for estimating the vibroacoustic response of a panel excited by a TBL. The calculation process can be decomposed in 3 steps :

- a hydrodynamic calculation is used to estimate the TBL parameters as functions of space, from the problem geometry and flow characteristics ;
- the WPF spectrum is evaluated with an appropriate model proposed in the literature as described previously and from the space-average of the TBL parameters as an input ;
- the vibratory response of the panel is calculated using a vibroacoustic model considering the WPF spectrum as an input.

The main difficulty related to this process is the coupling of the random model of the wall pressure fluctuations induced by the TBL to the deterministic vibroacoustic model. Five methods are discussed in Maxit et al. [102]. Three of them will be used and adapted in this paper to take into account the spatial inhomogeneity of the TBL :

- the first one, the most common, is based on a formulation in the spatial domain. It requires to discretize the panel surface with a fine grid and to estimate the frequency response functions (FRF) between the different points of the grids [65]. As the grid should be sufficiently fine to capture the small variations due to the convection of the vortices, the number of FRF to be calculate can be high and the computing time can be huge [26]. Alternative methods in discrete

coordinates have been proposed to circumvent this issue. For instance, the frequency modulated pseudo-equivalent deterministic excitation (PEDE_M) [39, 38] can be cited as an effective method for the mid to high frequency ranges. Its fundamentals are based on the pseudo excitation method [139, 81], an exact method relying on the modal decomposition of the cross-spectrum at each frequency, and on the introduction of approximations on the WPF spectrum representation in order to reduce significantly the computational costs ;

- the second one is based on a wavenumber formulation [93]. The panel response is estimated through the sensitivity functions that correspond to the panel response to wall plane waves. This method is substantially faster when the convective ridge of the TBL can be neglected, since the cutoff wavenumbers can be defined in this case from the panel characteristics [14, 63] ;
- the last one consists in interpreting the random excitation of the WPF as a set of uncorrelated wall plane waves (UWPW) and to synthesize different realizations of the wall pressure field from an analytical formula [95]. This one depends on the amplitudes of the wall plane waves that are directly related to the WPF spectrum expressed in the frequency-wavenumber domain. The wall pressure fields are used as loading of the vibroacoustic model of the panel. The panel response is then deduced by averaging the responses to the different realizations of the WPF [68, 69].

In the present paper, we propose to extend the UWPW technique for the non-homogeneous flow. Compared to the spatial and wavenumber approaches, this one has the advantage that it can be easily used in standard element-based codes [68] while saving computing time [102]. The process for synthesizing the WPF for non-homogeneous TBL will be based, in a primary version, on the same assumptions that the sub-area decomposition technique (SDT) [61]. The excited surface of the panel will be decomposed in different sub-areas. For each sub-area, the WPF will be estimated independently of the other sub-areas considering the superposition of uncorrelated wall plane waves. In an advanced version, the phase of the uncorrelated wall plane waves will be unchanged from one sub-area to another, that will permit to describe the correlations between the different sub-areas. The proposed technique will be compared on a test case to the spatial and the wavenumber methods that have been extended recently to non-homogeneous TBL excitation [61].

The paper is organized as follows :

- the section 4.3 reminds the principle of the three methods evoked previously (i.e. spatial, wavenumber and UWPW) in the case of a homogeneous TBL excitation ;
- then, the section 4.4 deals on the extension of these methods to the non-homogeneous TBL. First, the principles of the spatial approach and the wavenumber approach, called the sub-area decomposition technique (SDT) [61] are presented. Then, the theoretical framework of the extension of the UWPW method is proposed in order to take the spatial variations of the TBL into account.
- the section 4.5 concerns the numerical applications and the comparisons of these different methods in the case of a growing TBL. Interests and limitations of these approaches are discussed before to conclude.

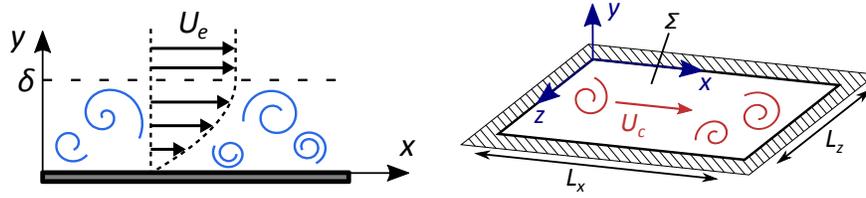


FIGURE 4.1 – Rectangular baffled panel excited by a homogeneous TBL.

❖ 4.3 Reminder of different formulations for a panel excited by a homogeneous TBL

In this section, we consider a baffled elastic panel excited by a stationary and homogeneous TBL as schematically represented in the Fig. 4.1. For simplicity of the presentation, the panel of area Σ is supposed rectangular, in the plane (\vec{x}, \vec{z}) , of length L_x and width L_z . The flow goes in the direction \vec{x} at the external flow speed U_e . The TBL thickness and the convective speed are noted δ and U_c , respectively. A weak coupling is assumed between the panel and the TBL, which means that panel vibrations do not interfere with the turbulent flow. The wall pressure field induced by the TBL is characterized by the WPF cross-spectrum Ψ_{pp} , which is supposed to be known from the TBL parameters (i.e. input data of the calculation). The panel response to be estimated from the WPF cross-spectrum will be characterized by auto-spectrum density (ASD) of the panel velocity at point $\mathbf{X} \in \Sigma$. In the next three subsections, we remind the theoretical background for predicting this response with three different approaches : the spatial, the wavenumber and the UWPW approaches.

4.3.1 Spatial formulation

Let \mathbf{X} be a point on the surface Σ and v the velocity response of the plate at this point. The auto-spectrum of the plate velocity v is given by Strawderman [130], Maury et al. [93] :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (4.1)$$

where $H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ is the panel FRF in velocity at point \mathbf{X} for a normal unit force applied at point $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ is the space-frequency WPF cross-spectrum.

Semi-empirical models of the WPF spectrum have been established for flat surfaces and fully developed homogeneous TBL, where statistical properties of the pressure field are independent of the position. Hence, the WPF cross-spectrum for homogeneous TBL, Ψ_{pp}^h only depends on the space separation $\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ and can be written on the form [17] :

$$\Psi_{pp}^h(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) S_{pp}(\omega), \quad (4.2)$$

where $\Gamma_{pp}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ is the spatial coherence function of the separation $\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ and $S_{pp}(\omega)$ is the WPF

auto-spectrum.

Assuming that $\forall(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in \Sigma^2$, $\Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \Psi_{pp}^h(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$, Eq. (4.1) leads to :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} H_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) \Psi_{pp}^h(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}, \omega) d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.3)$$

Excepted for academic panels (such as simply supported rectangular panel), the FRFs appearing in this equation cannot be obtained analytically. Usually, the integrals are then replaced by discrete sums and the FRFs between the different grid points are evaluated by a numerical approach.

4.3.2 Wavenumber formulation

The wavenumber formulation is based on the use of the spatial Fourier transform of the WPF spectrum. Indeed, the wavenumber-frequency spectrum $\Phi_{pp}^h(\mathbf{k}, \omega)$ is defined by :

$$\Phi_{pp}^h(\mathbf{k}, \omega) = \iint_{\infty} \Psi_{pp}^h(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega) e^{i(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{k}} d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (4.4)$$

where $i^2 = -1$.

Introducing this equation in Eq. (4.3) leads to the formulation in the wavenumber domain :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\infty} |\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}^h(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \quad (4.5)$$

where $\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)$ is called the velocity sensitivity function (SF). It corresponds to the velocity response at \mathbf{X} when the panel is excited by a wall plane wave of wavenumber \mathbf{k} (see Marchetto et al. [91] for further details).

To integrate Eq. (4.5), the infinite space must be truncated with the cutoff wavenumber \bar{k} and discretized. The set of wavevectors $\Omega_{\mathbf{k}}$ is bounded by $-\bar{k}$ and $+\bar{k}$ in both directions (i.e. the streamwise and transverse directions) and regularly discretized with the wavenumber step δk . The integral is then approximated and the velocity ASD becomes :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} |\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}^h(\mathbf{k}, \omega) \delta k^2. \quad (4.6)$$

For frequencies well above the aerodynamic coincidence frequency, the panel can generally be seen as a low-wavenumber filter and the convective contributions of the WPF have a negligible effect on the plate response. It results that the cutoff wavenumber can be defined according to the flexural wavenumber of the plate k_f (see for instance Karimi et al. [69]) :

$$\bar{k} = \mu k_f, \quad (4.7)$$

where μ is a margin parameter, typically equal to 1.3. Otherwise, the convective peak of the WPF

spectrum should be included in $\Omega_{\mathbf{k}}$ with a \bar{k} higher than the convective wavenumber k_c .

4.3.3 Uncorrelated wall planes waves method

The UWPW method consists in generating different realizations of the WPF induced by the TBL and to use them as loadings of a vibroacoustic model, typically a FEM model [95, 68, 69]. The pressure fields are synthesized by considering a set of uncorrelated wall plane waves mimicking the TBL. The process related to this approach can be decomposed in 3 steps [95] :

- (i) N_r realizations of the UWPW field are generated. For each realization r , the blocked pressure is calculated at the nodes $\mathbf{X} \in \Sigma$ of the FEM mesh :

$$p_b^r(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{S_{A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}}(\omega)} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + \varphi_{\mathbf{k}}^r)\}, \quad (4.8)$$

where $\varphi_{\mathbf{k}}^r$ are random phases uniformly distributed in $[0; 2\pi]$ expressing the fact that the waves are uncorrelated and the wave amplitude auto-spectrum is given by :

$$S_{A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}}(\omega) = \frac{\Phi_{pp}^h(\mathbf{k}, \omega) \delta k^2}{4\pi^2}; \quad (4.9)$$

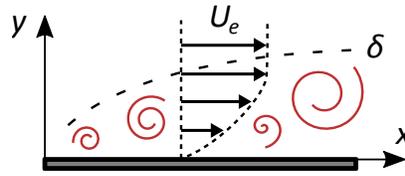
- (ii) the panel response at node \mathbf{X} in velocity to the r -th realization of the synthesized WPF, noted $v^r(\mathbf{X}, \omega)$, is computed with the vibroacoustic model. The process is iterated for all realizations $r \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$;
- (iii) the velocity auto-spectrum at \mathbf{X} in response to the TBL excitation is the ensemble average of the responses $v^r(\mathbf{X}, \omega)$ for $r \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$:

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbb{E} [v^r(\mathbf{X}, \omega) (v^r(\mathbf{X}, \omega))^*]_r = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} |v^r(\mathbf{X}, \omega)|^2, \quad (4.10)$$

where $\mathbb{E}[\cdot]_r$ is the ensemble average.

When a finite element model is considered for the panel [68, 95], the element size in the streamwise and crosswise directions, δx and δz , should respect the following criterion :

$$\delta x < \frac{\pi}{k_x}, \quad \delta z < \frac{\pi}{k_z}. \quad (4.11)$$

FIGURE 4.2 – Spatially varying TBL along stream direction \vec{x} .

❖ 4.4 Panel excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer

The methods for predicting the vibrational response of a panel for a homogeneous excitation have been given in the previous section. In the following, the TBL is no longer spatially homogeneous. A typically case that will be considered for the numerical applications is the growing of a fully turbulent boundary layer triggered at one edge (for instance with a sand paper strap), as schematically represented in Fig. 4.2. For such case, the laminar and transition regions are supposed small compared to the plate surface. That permits to approximate the TBL as fully turbulent over all the plate surface. Using some hypotheses, the previous methods can be adapted to estimate the panel response to these non-homogeneous excitations. It was the purpose of the work presented in [61] for the spatial and the wavenumber approaches. We are going to remind the main results for these two approaches before to extend the UWPW method, that constitutes the novelty of the present paper. The results predicted by the different approaches will be compared and discussed in the section 4.5.

4.4.1 Spatial formulation

Eq. (4.1) can be used to evaluate the panel response to a non-homogeneous excitation. However, the difficulty to apply this formula relies on the estimation of the cross-spectrum of WPF, $\Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega)$, for all the couple of points on the plate, $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}) \in \Sigma^2$. However, the WPF of a TBL is weakly correlated spatially. The coherence length Λ is an indicator of the decay of the spatial correlation of the pressure field. For two points whose separation distance is small compared to the coherence length, it can be assumed that the TBL presents small variations and that the WPF could be approximated by considering a local homogeneous TBL. When the separation becomes large compared to the coherence length, the correlation tends to zero. Under these simplifying assumptions, the cross-spectrum of the WPF between $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$ can be approximated by [61] :

$$\Psi_{pp}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}, \omega) \approx \begin{cases} [S_{pp}(\omega)\Gamma_{pp}(\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}-\tilde{\mathbf{x}}, \omega)]_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}]} & \text{if } \|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}-\tilde{\mathbf{x}}\| < 4\Lambda(\omega), \\ 0 & \text{if } \|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}-\tilde{\mathbf{x}}\| \geq 4\Lambda(\omega), \end{cases} \quad (4.12)$$

where Λ is the coherence length of the WPF and the quantities S_{pp} and Γ_{pp} are calculated using the arithmetic mean of TBL parameters at $\tilde{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$.

It is important to note that the spatial method is not valid for low frequencies. Indeed, the Corcos

model predicts a ω^{-1} decay rate of the coherence length which has been verified experimentally [118]. In the low frequency range, the coherence length is large and it can then be of the same order than the length of the panel. The assumption of a local homogeneous TBL cannot be applied. In contrary, in the mid and high frequencies, the coherence length is much smaller compared to the length of the panel and the assumption of a local homogeneous TBL model can be applied when the TBL parameters do not vary significantly along a coherence length. In the following, the scope will be focused on frequencies where the coherence is at least two times smaller than the panel length.

4.4.2 Wavenumber formulation : sub-area decomposition technique

Supposing the spatially homogeneous excitation in Eq. (4.3) and introducing the space Fourier transform allowed us to propose the wavenumber formulation in section 4.3.2. This mathematical operation can obviously not be performed directly in Eq. (4.1) for a spatially varying TBL. Nevertheless, the panel surface Σ can be divided into N sub-areas along the streamwise direction \vec{x} . Then a locally homogeneous TBL is assumed on each sub-area, as shown in Fig. 3.3. Eq. (4.1) can be rewritten :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \iint_{\vec{x} \in \Sigma_p} \iint_{\vec{\tilde{x}} \in \Sigma_q} H_v(\mathbf{X}, \vec{x}, \omega) \Psi_{pp}(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}, \omega) H_v^*(\mathbf{X}, \vec{\tilde{x}}, \omega) d\vec{x} d\vec{\tilde{x}}. \quad (4.13)$$

Eq. (4.13) contains $N \times N$ terms, with N the number of sub-areas. The equation may be made simpler, as some terms can be neglected considering the properties of the WPF :

- on one side, for two points belonging to the same sub-area, TBL parameters are assumed constant and a cross-spectrum for a homogeneous excitation can be used ;
- on the other side, the spatial correlation is a decreasing function of the two points spatial separation. It is assumed that, when the two points belong to distinct sub-areas, their spatial separation is high compared to the coherence length so that their correlation is negligible.

Following these assumptions, a growing TBL is approximated by the sequence of homogeneous TBL as illustrated on Fig. 3.3 for 3 sub-areas.

These assumptions can be translated into the following equation :

$$(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}) \in (\Sigma_p \times \Sigma_q), \Psi_{pp}(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}, \omega) = \begin{cases} \Psi_{pp}^{h,\zeta}(\vec{\tilde{x}} - \vec{x}, \omega) & \text{if } p = q = \zeta, \\ 0 & \text{if } p \neq q, \end{cases} \quad (4.14)$$

with $\Psi_{pp}^{h,\zeta}$ is the cross-spectrum of the WPF for a homogeneous load, attributed to the sub-area ζ which is estimated considering an arithmetic mean of TBL parameters on surface Σ_ζ .

It results that each sub-area ζ of surface Σ_ζ is associated with a locally homogeneous spectrum. Introducing Eq. (4.14) into Eq. (4.13), only the terms $p = q$ remain. It is then possible to define the wavenumber-frequency cross-spectrum $\Phi_{pp}^{h,\zeta}(\mathbf{k}, \omega)$ of the sub-area ζ as the Fourier transform of

$\Psi_{pp}^{h,\zeta}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}, \omega)$. Finally, the velocity auto-spectrum can be written [61] :

$$S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\zeta=1}^N \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \left| \hat{H}_v^{\zeta}(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega) \right|^2 \Phi_{pp}^{h,\zeta}(\mathbf{k}, \omega) \delta k^2, \quad (4.15)$$

where $\hat{H}_v^{\zeta}(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)$ is the plate response in velocity at \mathbf{X} when the panel is excited by a wall plane wave on surface Σ_{ζ} .

This approach has been called the sub-area decomposition technique (SDT). With the SDT, because of the spatial correlation of the WPF, the length of the sub-area needs to respect a criterion related to the cutoff wavenumber [61] :

$$\frac{L_x}{N} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{k}. \quad (4.16)$$

Moreover, the SDT is valid when the convective wavenumber k_c is significantly greater than the flexural wavenumber k_f . Under this condition, it is assumed that the convective peak has a weak role in the vibrational panel response and that it can be neglected. Therefore, the convective peak can be filtered out of the integration domain, according to Eq. (4.7).

4.4.3 Uncorrelated wall planes waves applied to the sub-area decomposition

In this subsection, the UWPW method is extended to calculate the panel response to non-homogeneous TBL excitations. The same principle than the SDT described previously is considered at first. The excited surface of the panel is decomposed in N sub-areas and a wavenumber-frequency cross-spectrum $\Phi_{pp}^{h,\zeta}(\mathbf{k}, \omega)$ is associated to each sub-area $\zeta \in \llbracket 1, N \rrbracket$ (as in the previous section). Moreover, in a first approach and as for the SDT, the pressures acting on two different sub-areas are supposed to be uncorrelated (as expressed by Eq. (4.14)). The pressure field can then be determined on each sub-area, separately. This pressure field should correspond to the one of a locally homogeneous TBL characterized by the cross-spectrum $\Phi_{pp}^{h,\zeta}(\mathbf{k}, \omega)$ in the sub-area ζ . The Eq. (4.8) defining the blocked pressure for a homogeneous TBL can be reused for defining the blocked pressure related to the sub-area ζ . The cross-spectrum of the WPF related to the sub-area ζ should be considered. The random phases occurring in Eq. (4.8) have to be chosen different from one sub-area to another due to the fact that the pressures acting on different sub-areas are uncorrelated. These random phases are noted ${}^{\zeta}\phi_{\mathbf{k}}^r$, where we remind that \mathbf{k}, r, ζ are, respectively, the wall plane wave index, the realization index, and the sub-area index.

The blocked pressure on the sub-area $\zeta \in \llbracket 1, N \rrbracket$ can then be expressed by :

$$\mathbf{X} \in \Sigma_{\zeta}, \quad p_b^r(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{S_{A_{\mathbf{k}}^{\zeta} A_{\mathbf{k}}^{\zeta}}(\omega)} \exp \left\{ i \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + {}^{\zeta}\phi_{\mathbf{k}}^r \right) \right\}, \quad (4.17)$$

$$\text{with } S_{A_{\mathbf{k}}^{\zeta} A_{\mathbf{k}}^{\zeta}}(\omega) = \frac{\Phi_{pp}^{h,\zeta}(\mathbf{k}, \omega) \delta k^2}{4\pi^2}. \quad (4.18)$$

Realizations of the wall pressure field can be generated using this formula for the different sub-

areas. As for the homogeneous excitation, the WPF can be introduced as loads in the panel vibratory model to deduce the panel response. An ensemble average on the panel response to the different realizations is then performed to estimate the panel response to the non-homogeneous TBL. The synthesis of these WPF by this process supposes that the pressures acting on distinct sub-areas are uncorrelated. This approach named the “local” uncorrelated wall plane wave (L-UWPW) technique is equivalent to the SDT method and should give the same predictions.

For the SDT, the decorrelation of the WPF spectrum between the different sub-areas is a mandatory condition to perform a spatial Fourier transform. However, with the UWPW method, this condition can be easily relaxed by taking the same phases, $\varphi_{\mathbf{k}}^r$, for the different sub-areas. This supposes that the wall plane waves are defined globally on the whole excited surface, but their amplitudes can vary from one sub-area to another. Under this condition (i.e. $^{\zeta}\varphi_{\mathbf{k}}^r = \varphi_{\mathbf{k}}^r$, for $\zeta \in \llbracket 1, N \rrbracket$) the wall pressure field of the realization r is given by :

$$\mathbf{X} \in \Sigma_{\zeta}, p_b^r(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{S_{A_{\mathbf{k}}^{\zeta} A_{\mathbf{k}}^{\zeta}}(\omega)} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + \varphi_{\mathbf{k}}^r)\}. \quad (4.19)$$

As the wall plane waves are defined on the global scale of the panel, it is name the “global” uncorrelated wall plane wave (G-UWPW) technique.

We have presented two alternative approaches to take the spatial variations of the TBL parameters into account in the UWPW method. In the next section, we are going to assess the validity of these two approaches by comparing their results to the ones obtained both by the spatial approach and the SDT, that we have described in the sections 4.4.1 and 4.4.2, respectively. We will also present a third version of the extension of the UWPW method for a non-homogeneous TBL.

❖ 4.5 Numerical applications

4.5.1 Turbulent boundary layer parameters

The 1 meter long and 0.35 meter large rectangular panel shown in Fig. 4.2 is set in a flow of free stream velocity equal to 40 m/s, \vec{x} corresponding to the streamwise direction. The TBL is supposed triggered by a sandpaper strip at the plate edge $x = 0$. The TBL parameters will be estimated with an analytical model for a flat smooth plate [120]. This model for 2-D (\vec{x}, \vec{y}) incompressible flow supposes a zero pressure gradient and external velocity U_e constant and equal to the free stream velocity. Moreover, the laminar and transitional regions are neglected. Under these assumptions, the TBL thickness

and the shear stress can be estimated by [120, 121] :

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{1/5} x^{4/5}, \quad (4.20)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \rho_0 U_e^2 0.0592 \left(\frac{\nu}{U_e x} \right)^{1/5}. \quad (4.21)$$

The TBL parameters estimated with this model are plotted on Fig. 3.14. The TBL thickness increases along the length of the plate, whereas the shear stress decreases significantly along the first third of the length of the plate and then remains roughly constant. Considering an arithmetic average of these quantities, 10.7 mm is obtained for the TBL thickness and 3.76 Pa for the shear stress. These averaged values would be the ones considered if the TBL would be supposed homogeneous (as it will be the case in the section 4.5.6 for comparison).

In the following, the Goody model [59] will be considered for the auto-spectrum of the WPF whereas the Mellen model [104] will be considered for the normalized cross-spectrum. Hence, the wavenumber-frequency cross-spectrum of the WPF will be estimated by :

$$\Phi_{pp}(k_x, k_z, \omega) = S_{pp}(\omega) \cdot \frac{2\pi \alpha_x^2 \alpha_z^2 k_c}{((\alpha_x \alpha_z k_c)^2 + (\alpha_x k_z)^2 + \alpha_z^2 (k_x - k_c)^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$

with :

$$S_{pp}(\omega) = \frac{\delta \tau^2}{U_e} \cdot \frac{c_2 (\omega \delta / U_e)^2}{[(\omega \delta / U_e)^{0.75} + c_1]^{3.7} + [c_3 ((\delta / U_e) / (\rho_0 \nu / \tau))^{-0.57} (\omega \delta / U_e)]^7}, \quad (4.23)$$

where $c_1 = 0.5$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1.1$, $\alpha_x = 0.10$, $\alpha_z = 0.77$ and $k_c = \omega / U_c$ is the convective wavenumber.

4.5.2 Pressure fields synthetized with the L-UWPW and G-UWPW methods

Realizations of the blocked pressure p_b are calculated with Eq. (4.17) and Eq. (4.19), corresponding to the L-UWPW and G-UWPW methods, respectively. One realization for each method is shown in the (\vec{x}, \vec{z}) plane at 100 Hz on Fig. 4.3, when considering 5 sub-areas.

Fig. 4.3(a) corresponds to the L-UWPW method. The intensity of the pressure field is increasing in the streamwise direction, which is consistent with the growing of the TBL. However, some discontinuities of the pressure field can be clearly observed at the sub-area boundaries. Independent random wall plane wave phases $\zeta \phi_{\mathbf{k}}^r$ have been considered in order to simulate uncorrelated pressure fields from one sub-area to another as in the SDT [61]. This assumption has been useful for establishing the formulation, but the discontinuities observed resulting of this assumption are not representative of the TBL pressure fluctuations.

On the other hand, Fig. 4.3(b) shows the results for the G-UWPW method that supposes identical wall plane wave phases for the different sub-areas. The resulting pressure field is spatially continuous,

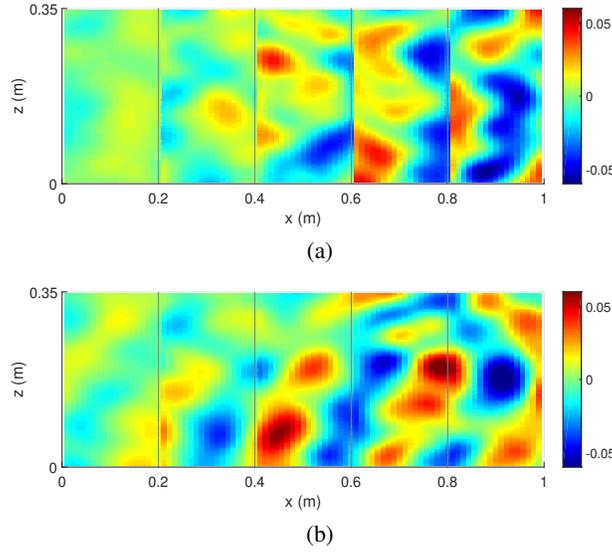


FIGURE 4.3 – Two examples of realization of the pressure field (Pa) at 100 Hz ;
 (a) : L-UWPW method ; (b) : G-UWPW method.
 Black vertical lines indicate the sub-area boundaries.

even through the sub-area boundaries, that is consistence with the physic of the TBL. The intensity of the pressure is still increasing along the \vec{x} axis.

In order to further assess the pressure synthesized with the two proposed methods, an ensemble of N_r realizations are used to calculate the auto-spectrum of the synthesized pressure field $S_{p_b p_b}$ at a point \mathbf{X} , with the following equation :

$$S_{p_b p_b}(\mathbf{X}, \omega) = \mathbb{E} [p_b^r(\mathbf{X}, \omega) (p_b^r(\mathbf{X}, \omega))^*]_r. \quad (4.24)$$

The estimated auto-spectrum considering the blocked pressure calculated with Eq. (4.19), for three different positions along \vec{x} axis, is plotted in Fig. 4.4(a) and compared to the auto-spectrum of the Goody model from Eq. (4.23). Since only the information at the point \mathbf{X} is relevant, the L-UWPW and the G-UWPW methods display the same prediction. The difference of levels for the different observation points as well as the global frequency variations are well described by the synthesized pressures. In order to inspect more in details the convergence of the process, the Fig. 4.4(b) shows the average absolute error on the frequency band [50, 700] Hz between the auto-spectrum of the synthesized pressure field and the Goody model, as a function of the number of realizations. It can be observed that the errors decrease globally when the number of realization increases whatever the point considered. The average error is below 1 dB above 20 realizations. Consequently, adopting a margin to guarantee an error below 1 dB, it can be presumed that the convergence is reached for 30 realizations.

Now, let us focusing on the spatial coherence of the pressure fields synthesized by the two UWPW methods as a function of the distance from a fixed observation point \mathbf{X}_0 . The coherence is then calcu-

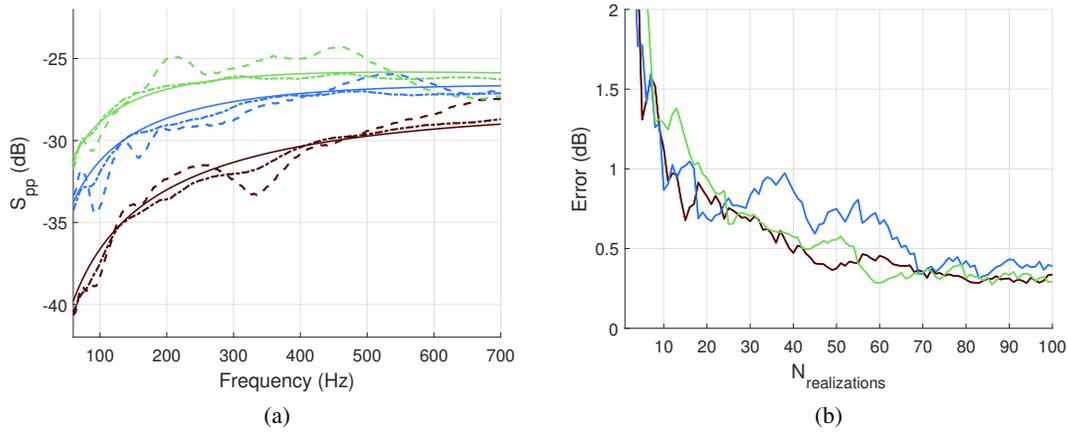


FIGURE 4.4 – Analysis of the synthesized pressure field at 3 points : green $x = 0.2L_x$, blue $x = 0.5L_x$, brown $x = 0.8L_x$. (a) : Auto-spectrum for the synthesized pressure field (dB, ref. $1 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$). Three calculations (G-UWPWP) : dashed line, 20 realizations ; dash-dot line, 200 realizations ; continuous line, analytical with Goody model (reference). (b) : Average in the frequency band [50 - 700] Hz of the absolute errors between the G-UPWP prediction and the Goody model in function of the number of realizations.

lated with the following formula :

$$\Gamma_{p_b p_b}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}, \omega) = \frac{|\mathbb{E} [p_b^r(\mathbf{X}_0, \omega) (p_b^r(\mathbf{X}, \omega))^*]_r|}{\left(\mathbb{E} [|p_b^r(\mathbf{X}_0, \omega)|^2]_r \mathbb{E} [|p_b^r(\mathbf{X}, \omega)|^2]_r \right)^{1/2}}. \quad (4.25)$$

The spatial coherence $\Gamma_{p_b p_b}$ considering the L-UWPW method is plotted along the stream direction \vec{x} on Fig. 4.5, at two frequencies $f = 100\text{Hz}$ and $f = 400\text{Hz}$ for $\mathbf{X}_0 = (L_x/2; L_z/2)$. The vertical dark dotted lines indicate the sub-areas boundaries and the dotted curve corresponds to the exponential decay of the Mellen model given by :

$$\Gamma_{pp}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}, \omega) = \exp \{ -\alpha_x \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| k_c \}. \quad (4.26)$$

Within the sub-area containing the point \mathbf{X}_0 , the decay of the coherence of the synthesized pressure field is in agreement with the Mellen model. However, the drop of the coherence when crossing a sub-area boundary expresses that the pressure fields applied on two different sub-areas are uncorrelated, which is not consistent with the Mellen model.

When considering the G-UWPW method, the coherence $\Gamma_{p_b p_b}$ shown on Fig. 4.6, is continuous even through the sub-area boundaries and globally in agreement with the decrease of the Mellen model. This agreement seems well better with 200 realizations than with 20 realizations. However, it will be seen later that the convergence of the panel vibration prediction is achieved with only 30 realizations as it was pointed out for homogeneous excitations in Maxit [95]. This can be explained by the fact that the weakly correlated contributions of the WPF have few influence on the panel response and therefore it is not necessary to predict them accurately.

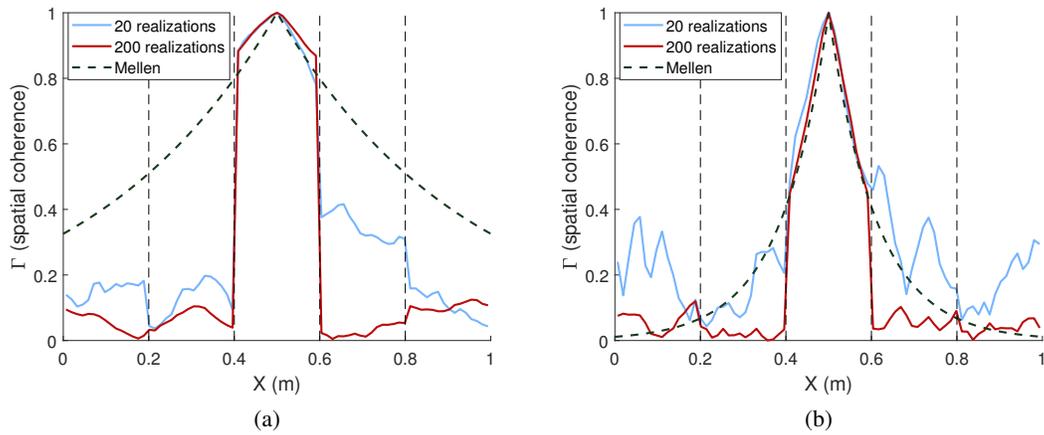


FIGURE 4.5 – Spatial coherence of the pressure field synthesized by the L-UWPW method considering 5 sub-areas. (a) : 100 Hz; (b) : 400 Hz.

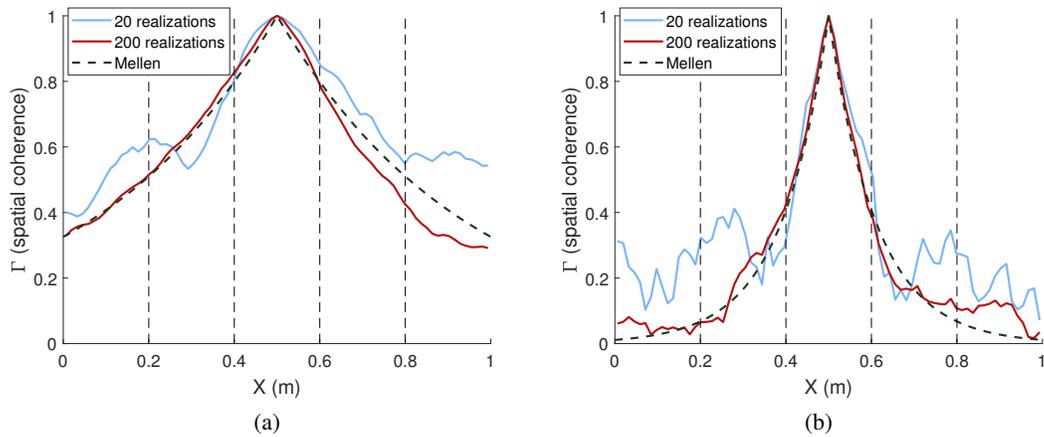
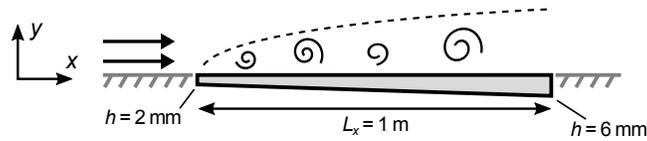


FIGURE 4.6 – Spatial coherence of the pressure field synthesized by the G-UWPW method with 5 sub-areas. (a) : 100 Hz; (b) : 400 Hz.

FIGURE 4.7 – 2-D panel view (width $L_z = 0.35$ m).

4.5.3 Plate vibratory model

A rectangular aluminum panel simply supported on its four edges is considered for the following numerical applications. The material Young's modulus E , Poisson's ratio ν_p and mass density ρ_p are respectively, 68.9 GPa, 0.35 and 2740 kg/m³. The panel dimensions are 1 m and 0.35 m in the streamwise and crosswise directions, respectively. The panel thickness h linearly varies along the x -axis from 2 mm at the leading edge to 6 mm at the trailing edge as schematically represented on Fig. 4.7. A varying thickness has been chosen in order to stress the effect of the spatial variation of the excitation, while keeping an almost canonical case. Indeed, because of the symmetry of the modal shapes for a simply supported plate with constant thickness, the influence of the spatial evolution of the TBL on the vibration behavior is flattened. This symmetry of the mode shapes is broken when considering a variation of the thickness in the streamwise direction, the modes can then be excited with different strengths depending on the spatial distribution of the loadings due to the TBL. It is assumed that the slope resulting from this spatial variation of the thickness is weak and does not affect the TBL compared to a flat panel.

The normal modes of the undamped panel have been extracted from a finite element model using the MSC NASTRAN software. Two 2-D meshes composed of quadrilateral linear elements (CQUAD4) have been considered :

- the coarser one is composed of 2759 nodes : 89 along \vec{x} and 31 along \vec{z} . This mesh is adapted for the UWPW and SDT calculations that considered wall pressure fields filtered at a given cutoff wavenumber \bar{k} . The element-size criterion defined by Eq. (4.11) is respected even when the cutoff wavenumber in the streamwise direction is defined regarding the convective wavenumber. This will make it possible to perform UWPW calculations including the convective contributions even if in general they will have a negligible effect on the vibrations of the panel ;
- the finer one, composed of 29344 nodes : 131 along \vec{x} and 224 along \vec{z} . This mesh is adapted for the spatial calculations. It permits to describe the variations of the WPF due to the flow convection as well as the small coherence length of the WPF in the transverse direction. Indeed, the mesh exhibits 5 elements per convective wavelength in the \vec{x} direction and 5 elements per coherence length in the \vec{z} direction at the highest frequency of interest.

Shell properties (PSHELL) and isotropic material properties (MAT1) have been used. Respective thicknesses are assigned at the four nodes of each quadrilateral element for describing the plate thickness variations. The plate modes are extracted with a normal modal analysis using the Lanczos method (SOL103) up to 1000 Hz. The vibratory responses of the panel induced by the WPF have then been estimated using the modal expansion technique with a damping loss η factor set at 1% for all the modes.

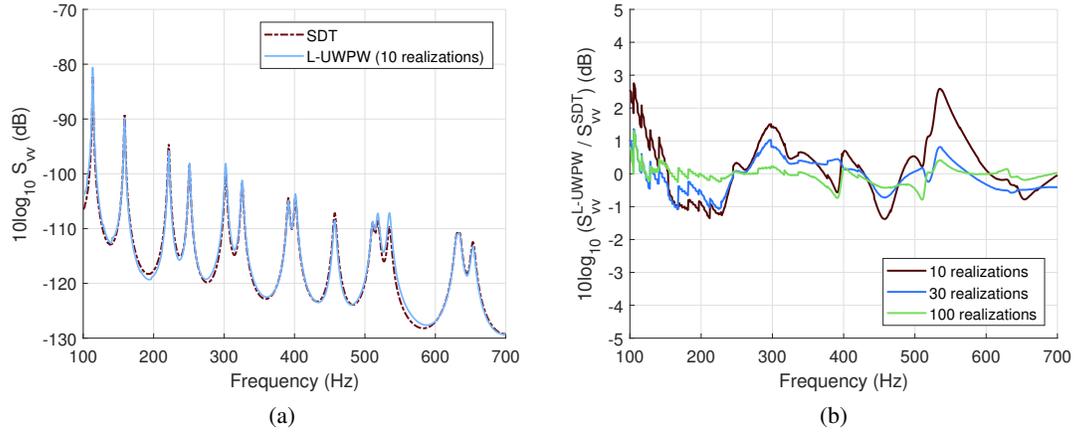


FIGURE 4.8 – Spatial mean square velocity predicted by the SDT and the L-UWPW method considering 5 sub-areas. (a) : Velocity level (dB, ref. $1 \text{ (m/s)}^2/\text{Hz}$). (b) : Difference between the L-UWPW method and the SDT predictions for different number of realizations.

4.5.4 Comparison of the vibratory response prediction

Let us compare the plate velocity response predicted by the different methods presented in the section 4.4. The flow conditions considered in these calculations are the ones presented in the section 4.5.1. In particular, the flow speed is 40 m/s and the TBL parameters vary spatially according to Fig. 3.14.

The SDT method and the L-UWPW method, that both consider uncorrelated pressure fields on the different sub-areas, are compared in Fig. 4.8(a) in terms of spatial mean square velocity of the plate :

$$\bar{S}_{vv}(\omega) = \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} S_{vv}(\mathbf{X}, \omega) d\mathbf{X}. \quad (4.27)$$

The vibratory calculations were achieved considering 5 sub-areas and using 10 realizations of the pressure field for the L-UWPW method. The choice of the number of sub-areas have been the subject of a discussion in Guillon et al. [61]. Increasing the number of sub-areas leads to a better representation of the continuous growth of the TBL, at the cost of the loss of global spatial correlation of the excitation, in particular for the formulation with uncorrelated sub-areas used here. When the convective peak is filtered, a suggested criterion based on the cutoff wavenumber is given in Eq. (4.16). Frequency range starts at 100 Hz, where the coherence length Λ is at least two times smaller than the panel length. As expected, both methods give very similar results. Fig. 4.8(b) shows the difference of prediction between the L-UWPW method and the SDT for different number of realizations. It can be observed that higher is the number of realizations in the L-UWPW method, lower is the discrepancy between the two methods. An average of these discrepancies over the studied frequency range gives 0.76 dB with 10 realizations, 0.41 dB with 30 realizations and it goes down to 0.18 dB with 100 realizations. In the following, 30 realizations will be used for the computation of the pressure field with UWPW methods.

Now, the results of the L-UWPW and G-UWPW methods are compared with the ones of the spatial

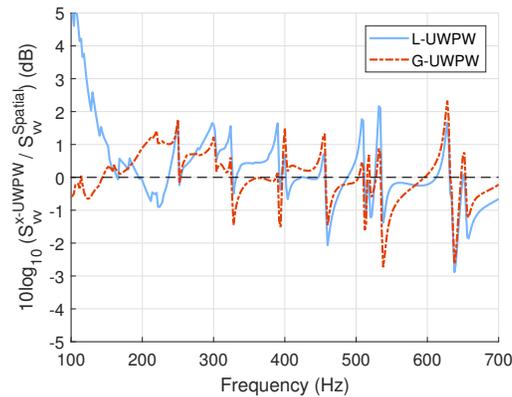


FIGURE 4.9 – Difference of mean square velocity level between the spatial approach and the L-UWPW or the G-UWPW approaches. 30 realizations and 5 sub-areas.

method that can be seen as a reference. The discrepancies of the prediction between the two UWPW approaches and the spatial approach are shown in Fig. 4.9 in function of the frequency. Overall, the differences with the spatial approach are similar for the two UWPW approaches for the frequencies above the third mode, that is to say above 159 Hz. Average error comparing the spatial method for the L-UWPW method is 0.62 dB whereas it is 0.61 dB with the G-UWPW method in the frequency range [159-700] Hz. At some frequencies close to the resonance frequencies, the differences can be more significant (around 1 or 2 dB) with a change of sign at the resonances. This can be explained by a shift of the resonant frequencies predicted by using two different meshes (i.e. the coarser mesh for the UWPW calculations and the finer one for the spatial calculation). The C-UWPW processes are then not directly at the origin of these discrepancies. A supplementary C-UWPW calculation have been performed considering the modal frequencies calculated by FEM with the finer mesh. In this case, the differences between the C-UWPW and the spatial results are less than 1 dB over all the frequency range (result not shown). The differences observed in Fig. 4.9 can then be attributed to discrepancies in the modal frequencies predictions with the two meshes and not to the accuracy of the C-UWPW approach. Nonetheless, the L-UWPW predictions diverge in the low frequencies. This result could be expected as the L-UWPW approach supposes, as SDT, that the pressure fields acting on the different sub-areas are uncorrelated. The validity criterion on the minimum sub-area size defined by Eq. (4.16) that was originally defined for the SDT should also be respected for the L-UWPW method. When the frequency decreases, the flexural wavenumber and then the cutoff wavenumber \bar{k} defined by Eq. (4.7) decreases. This implies that fewer sub-areas must be considered in the low frequency range compared to upper frequencies in order to respect the criterion of Eq. (4.16). Whereas the L-UWPW approach is not well adapted for the low frequencies, one can emphasize that the G-UWPW gives accurate results in the whole frequency range as observed in Fig. 4.9.

As the G-UWPW approach does not consider that the pressure fields acting on different sub-areas are uncorrelated, it does not require to fulfill the criterion (4.16) on the minimum sub-areas sizes. An “asymptotic” formula can be then proposed by considering a number of sub-areas N equal to the number of nodes of the plate mesh, so that each node is associated to its own sub-area. The blocked

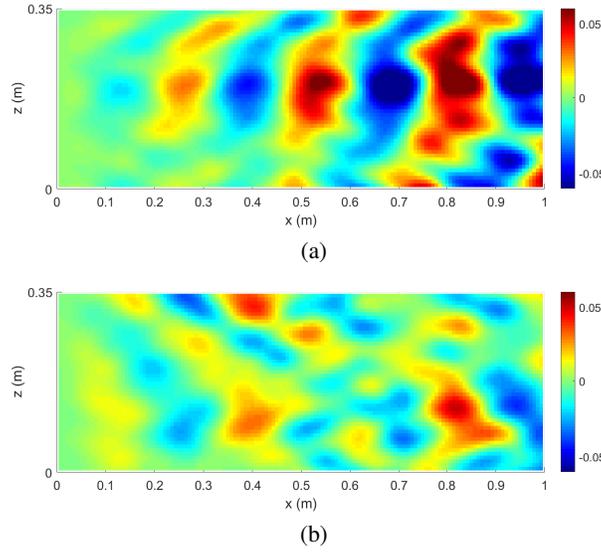


FIGURE 4.10 – Two examples of realization of the pressure field (Pa) at 100 Hz generated by the C-UWPW method.

pressure at node \mathbf{X} can then be calculated by :

$$p_b^r(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{k}}} \sqrt{S_{A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}}(\mathbf{X}, \omega)} \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} + \varphi_{\mathbf{k}}^r)\}, \quad (4.28)$$

$$\text{with } S_{A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}}(\mathbf{X}, \omega) = \frac{\Phi_{pp}^{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, \omega) \delta k^2}{4\pi^2}, \quad (4.29)$$

where $\Phi_{pp}^{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, \omega)$ is the WPF spectrum calculated with the TBL parameters at \mathbf{X} .

As the concept of sub-area decomposition does not appear explicitly in this last formulation and the pressure can vary from one node to another, the process related to Eq. (4.28) is named the “continuously” varying uncorrelated wall plane waves (C-UWPW) technique. For illustration, Fig. 4.10 presents two realizations of the WPF synthesized with the C-UWPW for the same situation than Fig. 4.3. The WPF varies well continuously and the strength is growing gradually from the leading edge to the trailing edge.

It can also be underlined that as the assumption consisting in neglecting the convective contributions was related to the sub-area decomposition [61], the C-UWPW can likely describe these convective contributions when it is necessary (for instance, for frequencies below or close to the aerodynamic coincidence frequency). In order to verify that the C-UWPW calculation converges well when the convective contributions are taken into account (even if these contributions have a negligible effect on the panel vibrations), the method is applied with two different cutoff wavenumbers : first with a \bar{k} defined by Eq. (4.7), which means that the contributions of the convective of the WPF are neglected and second with $\bar{k} = 180 \text{ rad/m}$, which is higher than the maximum convective wavenumber k_c at 700 Hz, meaning that the contributions of the convective of the WPF are taken into account. The difference of prediction with the spatial approach for the C-UWPW method with and without the convective contributions are displayed in Fig. 4.11. First, it can be observed that the discrepancies with

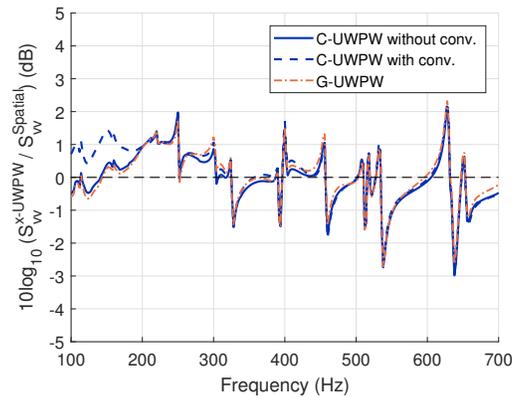


FIGURE 4.11 – Difference of mean square velocity level between the spatial approach and the C-UWPW approach, with and without the convective contributions (30 realizations). Results of the G-UWPW approach from Fig. 4.9 added for comparison.

the spatial approach are smaller than 0.5 dB in general. As for Fig. 4.9, some more significant discrepancies close to the resonant frequencies can be attributed to difference of prediction of the resonant frequencies using the two different meshes. The results in Fig. 4.11 are then satisfying and validates the C-UWPW approach for the present case. Second, the two C-UWPW calculations match very well above 200 Hz whereas they are close to each other below this frequency. Average error regarding to the spatial method is 0.61 and 0.72 dB with 30 realizations, respectively without and with the convective contributions. This shows that taking the convective contributions do not induce a divergence of the process. However, for the present case and the frequencies considered well above the aerodynamic coincidence frequency, the effect of the convective contributions is negligible on the panel vibrations.

Finally, two realizations of the pressure field used in the G-UWPW calculation with the convective peak are displayed in Fig. 4.12(a) and (c) and Fig. 4.13(a) and (c), at two given frequencies. In Fig. 4.12, 159 Hz corresponds to a resonance (the third natural mode of the panel) and in Fig. 4.13, 277 Hz corresponds to an anti-resonance, halfway through the fifth and sixth natural modes (first natural mode is below 100 Hz). The panel velocity field resulting from each pressure field are plotted respectively in Fig. 4.12(b) and (d) and Fig. 4.13(b) and (d). For the resonance, the velocity figures show that the modal shape dominates the plate behavior for any load. At the anti-resonance, different plate responses could be observed for different pressure fields. The said responses are still summations of modal shapes.

4.5.5 Panel with free edges : role of the convective peak

To highlight the effect of the convective contributions in some situations and to verify the accuracy of the C-UWPW approach for such cases, let us considered a second test case. The plate dimensions and the material remain unchanged, but the two edges of the panel perpendicular to the flow stream are set free, as represented in Fig. 4.14. The edges boundary conditions are free-simply supported-free-simply supported (F-SS-F-SS). As explained by Hambric et al. [63], panels with free edges reacts more to the convective contributions of the WPF than the panels with simply-supported or clamped

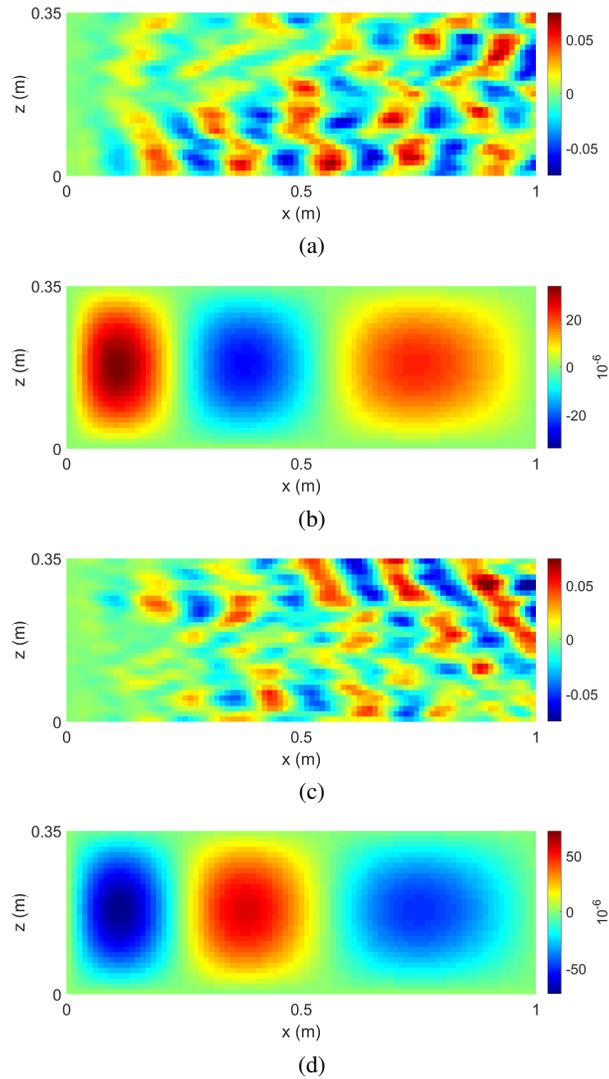


FIGURE 4.12 – (a), (c) : pressure fields (Pa) at the nodes of the spatial grid, generated by the C-UWPW method and (b), (d) : their respective corresponding velocity fields (m/s), for a resonance (159 Hz).

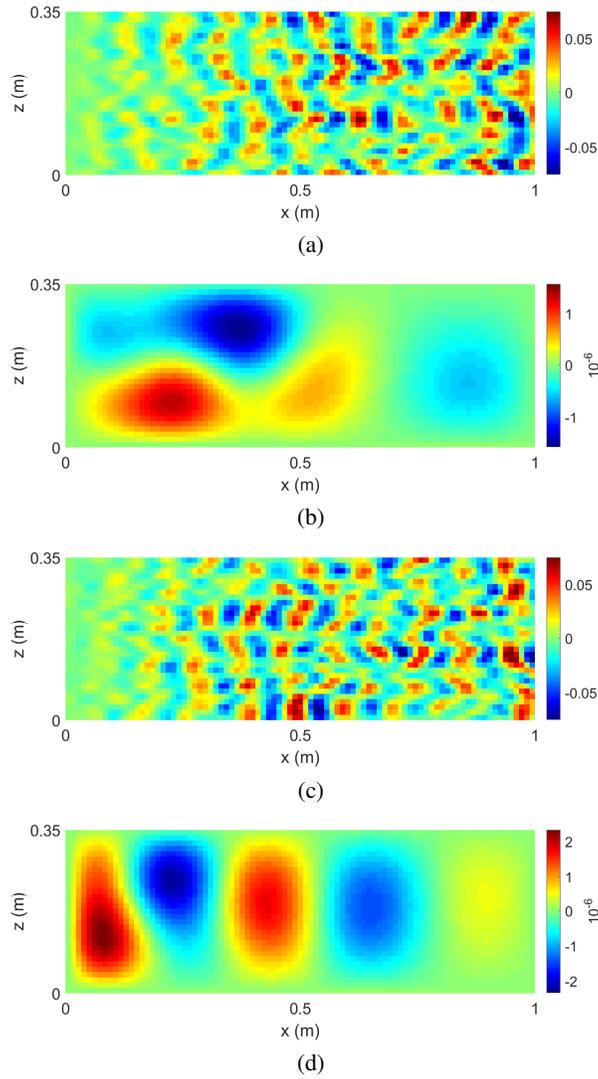


FIGURE 4.13 – (a), (c) : pressure fields (Pa) at the nodes of the spatial grid, generated by the C-UWPW method and (b), (d) : their respective corresponding velocity fields (m/s), for an anti-resonance (277 Hz).

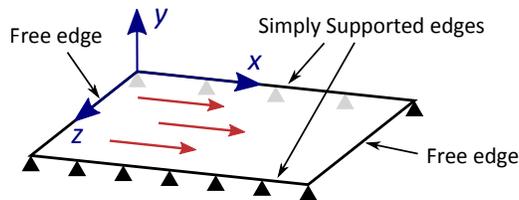


FIGURE 4.14 – Rectangular panel with F-SS-F-SS boundary conditions.

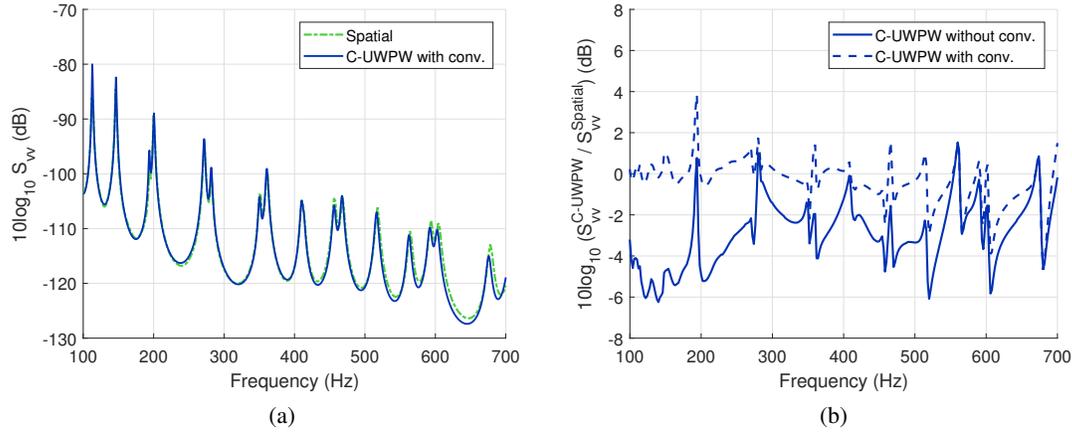


FIGURE 4.15 – (a) : Level of the spatial mean square velocity (dB, ref. $1 \text{ (m/s)}^2/\text{Hz}$) calculated with the spatial method and the C-UWPW method including the convective contributions (30 realizations). Plate with F-SS-F-SS boundary condition. (b) : Difference between the spatial method and the C-UWPW method with or without the convective contributions.

boundary conditions. In other words, the panel filtering effect in the wavenumber space is less significant for the former than for the latter.

The plate mean square velocity predicted with C-UWPW model is compared to the spatial one on Fig. 4.15. Compared to the simply supported plate considered in the previous sections, the resonant frequencies are shifted toward the low frequencies. For instance, the third mode is moved from 159 Hz to 113 Hz. Fig. 4.15 shows a good agreement between the spatial results and the C-UWPW results when the convective contributions are taken into account. The small differences that can be observed in the higher part of the frequency range can be attributed to the fineness of the mesh used for the UWPW calculations that can not fully describe the small wavelength related to the convection. Fig. 4.15(b) shows that, if the convective contributions are neglected, the errors of the C-UWPW approach can be significant. In this case, the C-UWPW approach generally underestimates the plate velocity.

4.5.6 Influence of the non-homogeneity of the TBL

Finally, a last set of simulations is carried out for highlighting the effects of the non-homogeneity of the TBL on the panel vibratory response. The plate considered and the flow conditions is the one described in section 4.5.3 (i.e. plate with simply supported boundary conditions and a flow speed of 40 m/s). Results of calculations taking the spatial variations of the TBL into account are compared to the ones obtained by supposing that the TBL is homogeneous. The former results are obtained with the spatial and the C-UWPW approaches described in the section 4.4 whereas the latter ones are obtained with the spatial approach described in the section 4.3. The parameters for the supposed homogeneous TBL correspond to a spatial arithmetic mean of the varying TBL parameters : $\delta = 10.7 \text{ mm}$ and $\tau = 3.76 \text{ Pa}$.

The differences of plate mean square velocity for the non-homogeneous TBL and for the supposed

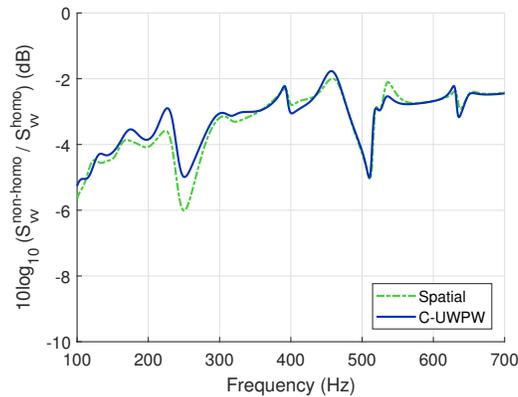


FIGURE 4.16 – Difference of mean square velocity between non-homogeneous and homogeneous TBL for spatial and C-UWPW (30 realizations) approaches.

homogeneous TBL are plotted in Fig. 4.16. Three observations can be made : first, the curve related to the spatial approach and the one related to the C-UWPW approach are very close on the whole frequency range. This shows that the C-UWPW approach is well adapted to describe the effect of the spatial variations of the TBL on the plate vibrations. Second, significant differences (between 2 and 6 dB) can be observed on the whole frequency ranges between homogeneous and non-homogeneous cases. This shows that supposing the TBL as homogeneous can lead to important errors. Finally, the differences are not monotonic in frequency. For some particular frequencies (around 250 Hz and 510 Hz), the absolute differences can be significantly higher than for the others frequencies. They correspond to particular modes exhibiting deformations on the thinner part of the plate (i.e. close to the leading edge). As the TBL is growing from the leading edge, this thinner part is less excited than the rest of the panel and then these modes reacts less than in the case of a homogeneous TBL. This phenomena had already be observed with the SDT (see the reference Guillon et al. [61] for more details on this aspect).

In terms of computing time, the spatial method has required 32 minutes per frequency point whereas only 1 minute has been necessary for the C-UWPW method. The former requires to calculate all the FRF between the couples of nodes of the FE mesh and to perform the double summation in Eq. (4.1) which are time consuming. In contrary, the C-UWPW method only requires to generate few realizations (typically 30) of the wall pressure field using Eq. (4.28), to calculate the vibroacoustic response of the panel to these pressure fields and to average the different responses. The reduction of the computing time of a factor greater by 50 is one of the main advantages of the C-UWPW method compared to the spatial one. Moreover, the C-UWPW is a non intrusive method. This means that it can be easily used with any vibroacoustic code. In the present case, the pressure fields have been calculated with MATLAB and have then be exported to be used as loadings of the MSC NASTRAN calculations. A last advantage of the method is that the same set of pressure fields can be used for different panels as long as the size of the panels and the flow conditions remain the same.

❖ 4.6 Conclusion

A numerical process has been proposed for predicting the response of vibrating structures excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer. This original process makes it possible to take into account the spatial variations of the TBL parameters in vibroacoustic simulations. It consists in a first step to generate different realizations of the random pressure fluctuations induced by the inhomogeneous TBL by using the analytical expression of Eq. (4.28). This expression gives the blocked pressure at a given node \mathbf{X} of the vibroacoustic model from the spectrum of the WPF estimated with the TBL parameters at \mathbf{X} . In a second step, the different synthesized wall pressure fields of the inhomogeneous TBL are used as different loadings of the vibroacoustic model. Finally, after calculation of the vibroacoustic responses to the different loadings, an ensemble average of the different responses is performed to deduce the vibroacoustic response to the inhomogeneous TBL. This approach has been called the Continuously varying Uncorrelated Wall Plane Waves (C-UWPW) method as it consists in an extension of the UWPW technique developed some years ago for homogeneous TBL [95].

The results of the C-UWPW method have been confronted to the ones obtained by the spatial approach and the Sub-area Decomposition Technique (SDT). This latter approach has been proposed recently by the present authors [61] as a primary approach to take the non-homogeneous TBL into account and it has been used in the present paper as a base to develop the theoretical fundamentals of the C-UWPW method. The test case considered consisted in a rectangular plate excited on one side by a growing fully turbulent boundary layer triggered at one edge of the plate. The plate thickness was linearly varying in the stream-wise direction to stress the effect of the spatial evolution of the TBL. The following conclusions can be drawn from these comparisons :

- the C-UWPW results in terms of plate vibratory response converge toward the ones of the spatial method as soon as 30 realizations are considered in the process ;
- contrary to the SDT, the C-UWPW method can describe the convective contributions of the WPF when these ones have a significant influence on the panel response. However, as for the SDT, when these contributions can be neglected (for instance for frequencies well above the aerodynamic coincidence frequency for some panels), they can be easily filtered thanks to an appropriate cutoff wavenumber. This generally makes it possible to save significant computing time because a coarser mesh can be used in this case ;
- the C-UWPW method is significantly less time consuming in terms of computation than the spatial approach because it does not necessarily require a double summation on transfer functions that should be estimated between many nodes (see Eq. (4.3)). In the C-UWPW method, the number of vibroacoustic calculations is limited to the number of realizations considered. When the convective contributions can be neglected, the gain in computing times is even more important (due to the use of a coarse mesh as evoked previously) ;
- comparison of a C-UWPW calculation describing the non-homogeneous TBL and another one supposing the TBL as homogeneous shows a significant difference (up to 6 dB) on the panel velocity response. This stresses the importance of taking the spatial variations of the TBL parameters into vibroacoustic simulations, for instance with the proposed C-UWPW approach.

The investigations discussed in this paper will deserve to be continued in two directions in the future : first, the proposed approach has been validated by comparison with others numerical methods which are more time consuming. The gain in terms of computing is very significant. However, only an experimental validation would validate the whole process. In particular, the vibration results depend on the accuracy of the WPF model considered in the calculation. At the authors' knowledge, experimental data allowing this validation are not available in the open literature. A dedicated study has to be carried out. The present approach could be used as a starting point to define plate cases highlighting the influence of the spatial variations of the TBL parameters (as the plate varying thickness considered in this paper). Wall pressure field, flow and vibration measurements will then be necessary on these cases in an aerodynamic or hydrodynamic tunnel ; second, a case without static pressure gradient has been considered as it allowed us using the zero pressure gradient models of the WPF deeply studied and validated in the literature. However, the cases of non-homogeneous TBL resulting of pressure gradients are commonly met in practice. The proposed approach could be applied to these cases as soon as accurate models of the WPF in adverse or favorable pressure gradients will be available. The developments of these WPF models are then in the natural prolongation of the present work.

CHAPITRE 5

Application à la prédiction du rayonnement acoustique d'une pale droite immergée en eau

Dans ce chapitre, un calcul vibro-acoustique est réalisé pour prédire le rayonnement acoustique d'une pale immergée avec prise en compte de la variation spatiale des paramètres de CLT en utilisant l'approche C-OPPD. Contrairement au cas simple de la plaque mince rectangulaire étudiée dans les chapitres précédents pour développer les méthodes, la géométrie de la pale nécessite l'utilisation d'un modèle éléments finis pour le calcul des modes de la structure. Par ailleurs, le couplage entre la structure vibrante et le fluide (c-à-d l'eau) doit être décrit finement. Le logiciel ACTRAN [53, 54] est utilisé à cette fin ainsi que pour le calcul du rayonnement en champ lointain. Dans un premier temps, une étude préalable de validation du procédé de calculs est réalisée sur le cas d'une plaque rectangulaire bafflée en contact avec l'eau sur un seul côté. Les résultats ACTRAN sont alors comparés à un calcul analytique basé sur le calcul des impédances de rayonnement modal. Dans un second temps, le procédé est appliqué à une pale droite immergée. Le profil de la pale considérée est celui d'une maquette générique utilisée à DGA Techniques hydrodynamiques. La pale est soumise à la CLT croissante depuis le bord d'attaque, à la fois sur l'extrados et l'intrados. Le rayonnement est discuté selon la nature de la structure et l'excitation.

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Longueur	L_x	[cm]	45.5
Largeur	L_z	[cm]	37.5
Épaisseur	h	[mm]	1
Masse volumique	ρ_p	[kg/m ³]	7700
Module d'Young	E	[GPa]	195
Coefficient de Poisson	ν_p		0.28

TABLE 5.1 – Dimensions et propriétés mécaniques de la plaque en acier [8].

❖ 5.1 Validation de la procédure de calculs sous ACTRAN

Dans cette section est d'abord traité le cas d'une plaque plane mince, simplement supportée sur ses quatre bords, excitée par une CLT homogène, rayonnant en eau. Les résultats, en termes de vibrations et de rayonnement en champ lointain, sont comparés aux résultats obtenus avec une méthode analytique applicable dans le cas d'une plaque rectangulaire mince. L'objectif est de valider l'utilisation d'ACTRAN pour aller vers des cas plus complexes, à la fois pour l'excitation et la structure.

5.1.1 Définition du cas test

La plaque choisie est une plaque en acier, utilisée par Berry [8], dont les dimensions, ainsi que les caractéristiques utilisées pour l'acier, sont données dans la Table 5.1. Pour cet exemple de validation, on considère un écoulement d'eau ($\rho_0 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $c_0 = 1480 \text{ m/s}$) sur une seule face, l'autre face étant en contact avec de l'air de masse supposée négligeable comparée à celle de l'eau. Elle est soumise, sur sa face chargée par l'eau, à une CLT homogène. L'épaisseur de plaque étant très petite devant ses autres dimensions, on se place dans un problème à deux dimensions.

La surface de la plaque est discrétisée en quadrilatères selon un critère de 14 éléments par longueur d'onde de flexion (calculée par l'Eq. (2.1)), ce qui donne 65 éléments dans la longueur et 54 dans la largeur à une fréquence 1000 Hz. D'après le critère de convergence de la méthode OPPD (Eq. (1.72)), on peut déduire un nombre de coupure maximum pour ce calcul de $\bar{k}_{\max} = 450 \text{ rad/s}$.

Il faut cependant prendre en compte l'effet de masse ajoutée par l'eau. On peut estimer le nombre d'onde de flexion de la plaque chargée par le fluide avec l'équation suivante :

$$\tilde{k}_f = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\rho_p h + m_{\text{ajout}}}{D}}}, \quad (5.1)$$

où la masse surfacique ajoutée peut être estimée par [25] :

$$m_{\text{ajout}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}}. \quad (5.2)$$

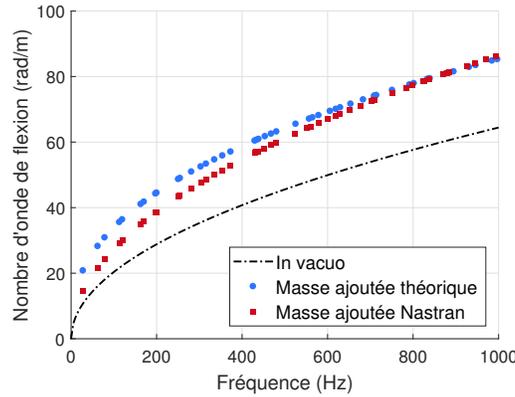


FIGURE 5.1 – Nombre de flexion de la plaque en acier *in vacuo* (Eq. (2.1)) et avec couplage fluide : théorique (Eq. (5.3)) et éléments finis (Eq. (5.4)).

Le nombre d'onde de flexion théorique de la plaque couplée s'écrit :

$$\tilde{k}_f^{\text{th}} = \sqrt{\omega_{mn} \sqrt{\frac{\rho_p h + \rho_0 (k_m^2 + k_n^2)^{-1/2}}{D}}}. \quad (5.3)$$

Cette valeur théorique est comparée à celle obtenue en utilisant les pulsations modales avec effet de masse ajoutée par le fluide, calculées avec NASTRAN (voir un calcul similaire à la section 2.2.3) :

$$\tilde{k}_f^{\text{EF}} = \sqrt{\tilde{\omega}_{mn}^{\text{EF}} \sqrt{\frac{\rho_p h}{D}}}. \quad (5.4)$$

On trace les nombres d'onde de flexion de la plaque *in vacuo* et couplée sur la Fig. 5.1. En considérant le couplage avec le fluide, pour les deux méthodes de calcul du \tilde{k}_f , la longueur de flexion correspondante est 1.3 fois plus courte à 1000 Hz. La discrétisation employée revient donc à prendre 10 éléments par longueur d'onde de flexion pour la plaque couplée.

Dans le cas d'une plaque disposée en eau, le modèle d'autospectre choisi est le modèle de Goody. Les paramètres de la CLT sont les suivants :

$$U_e = U_0, \quad \delta = 4.6 \text{ mm}, \quad \tau = 118.4 \text{ Pa}. \quad (5.5)$$

Ces valeurs correspondent à la moyenne arithmétique des paramètres donnés par l'Eq. (1.8) sur la plaque étudiée. Pour le choix de l'interspectre, on se réfère à la section 2.2.4, qui présente un comparatif des modèles dans un cas en eau. Pour les simulations en eau, le modèle de Caiazzo est privilégié, par rapport à celui de Mellen, pour son niveau plus adapté en bas nombres d'onde.

On se place sur une plage de fréquences de 100 à 1000 Hz. La vitesse de l'écoulement est de $U_0 = 8 \text{ m/s}$ et la vitesse de convection U_c est fixée à 5 m/s , ce qui donne un rapport $U_c/U_0 = 0.6$. Avec cette vitesse de convection, on suppose que le pic convectif ne joue pas de rôle sur le comportement vibratoire de la plaque pour les fréquences considérées. Par ailleurs, et en se fiant à la Fig. 5.1, on choisit un nombre d'onde de coupure $\bar{k} = 140 \text{ rad/m}$ supérieur à \tilde{k}_f et permettant de filtrer le pic

convectif.

Une fois les données du cas posées, les pressions bloquées p_b^f sont calculées aux nœuds du maillage, à chaque fréquence, pour 20 réalisations. L'étape suivante est la création du maillage du milieu fluide environnant.

5.1.2 Modélisation par éléments finis

Le calcul du rayonnement de la plaque est opéré dans une demi-sphère en trois dimensions discrétisée à l'aide du logiciel HYPERMESH [1]. Pour le volume du fluide, le dimensionnement est proposé à l'aide de la relation entre la longueur d'onde acoustique, la célérité des ondes acoustiques dans le milieu et la fréquence :

$$\lambda = \frac{c_0}{f}. \quad (5.6)$$

La longueur d'onde λ est estimée à 15 m et 1.5 m à 100 et 1000 Hz respectivement, pour $c_0 = 1500$ m/s. La taille des éléments dans le fluide est fixée à 0.215 m afin d'avoir 7 éléments par longueur d'onde acoustique à la fréquence maximale. Le rayon de la sphère est de 8 mètres.

Le centre de la sphère est placé au centre de la plaque, positionnée dans le plan (x, z) . Le maillage final contient 17 400 éléments de surface triangles sur la demi-sphère extérieure et 1 024 801 éléments tétraédriques dans le volume, le maillage étant plus fin proche de la surface de la plaque.

Dans ACTRAN, on effectue un calcul direct (FREQUENCY_DOMAIN). La plaque modélisée par éléments minces (DSHELL) et un matériau isotrope (ISOTROPIC_SOLID). Le volume est occupé par un fluide (ACOUSTIC), et la surface extérieure de la demi-sphère est recouverte par des éléments infinis (INFINITE_DOMAIN) pour éviter les réflexions sur la surface externe et permettant de calculer le rayonnement en champ lointain dans un milieu infini. Les éléments infinis dans ACTRAN sont une alternative aux PML, dont il a été question à la section 1.2.3.1.

5.1.3 Vitesse vibratoire

Afin de valider l'utilisation du logiciel ACTRAN, les résultats de vitesse vibratoire et rayonnement acoustique, pour une plaque mince avec effet de masse ajoutée par le fluide, sont comparés à ceux obtenus par une autre méthode, entièrement analytique, qui servira de référence. Elle utilise un code développé par un membre du laboratoire. Le calcul de la matrice d'impédance modale est réalisé à l'aide d'une méthode rapide proposée par Li et Gibeling [80]. Cette impédance $Z_{mn,m'n'}$ caractérise comment la pression générée par un mode peut en exciter un autre. C'est-à-dire que l'effet de couplage intermodal, décrit à la section 2.2.3, est ici pris en compte. L'algorithme exploite notamment les propriétés de symétrie et de parité de la matrice. La pression rayonnée en champ lointain est ensuite calculée à l'aide d'une intégrale de Rayleigh à partir du champ de vitesse.

Dans un premier temps, la vitesse normale quadratique moyenne est observée. Les courbes sont représentées sur la Fig. 5.2, en bandes fines et en bandes $\frac{1}{3}$ -d'octave. En bandes fines, on observe une légère différence de prédiction des fréquences de résonance selon les deux modes de calcul, ce

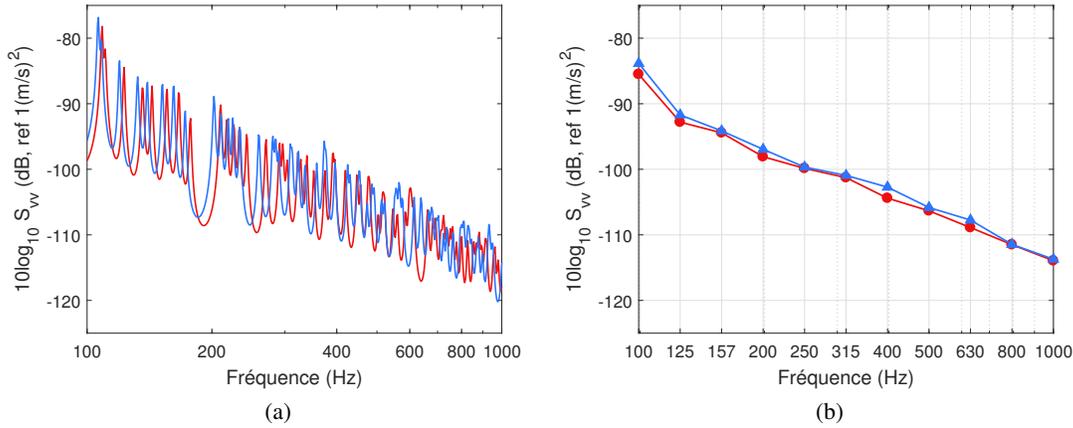


FIGURE 5.2 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque d’acier immergée.
Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique ;
(a) bandes fines ; (b) bandes $\frac{1}{3}$ -d’octave.

qui provoque un décalage en fréquences des courbes. Pour améliorer la lisibilité, on trace à côté la vitesse quadratique moyenne sur des bandes $\frac{1}{3}$ -d’octave, conformément à l’Eq. (2.12). L’écart de niveau en bandes $\frac{1}{3}$ -d’octave est de l’ordre de 1 dB. On considère ici que l’accord entre les méthodes est satisfaisant.

5.1.4 Rayonnement acoustique

On s’intéresse maintenant au rayonnement en champ lointain de la structure vibrante. ACTRAN nous fournit directement la puissance rayonnée par la plaque sur les éléments infinis. Pour la méthode analytique, une étape de calcul supplémentaire est nécessaire.

Pression acoustique

La pression acoustique rayonnée en champ lointain dans le demi-espace $y > 0$ est calculée à l’aide d’une intégrale de Rayleigh [9, 10], en utilisant le système de coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) , schématisé sur la Fig. 5.3 :

$$p_{\text{rayonné}}(R, \theta, \phi, \omega) = j\rho_0\omega \frac{e^{-jk_0R}}{2\pi R} \hat{v}(\lambda, \mu, \omega), \quad (5.7)$$

où R est le rayon de la demi-sphère ($R \rightarrow \infty$), ρ_0 la densité du fluide, $k_0 = \omega/c_0$ le nombre d’onde acoustique et $\hat{v}(\lambda, \mu, \omega)$ la transformée de Fourier du champ de vitesse $v(x, z, \omega)$:

$$\hat{v}(\lambda, \mu, \omega) = \iint_{\Sigma} v(x, z, \omega) \exp \left\{ j \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\} dx dz, \quad (5.8)$$

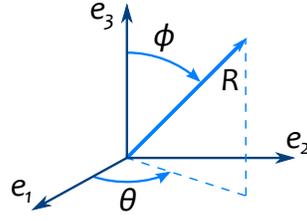


FIGURE 5.3 – Coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) .

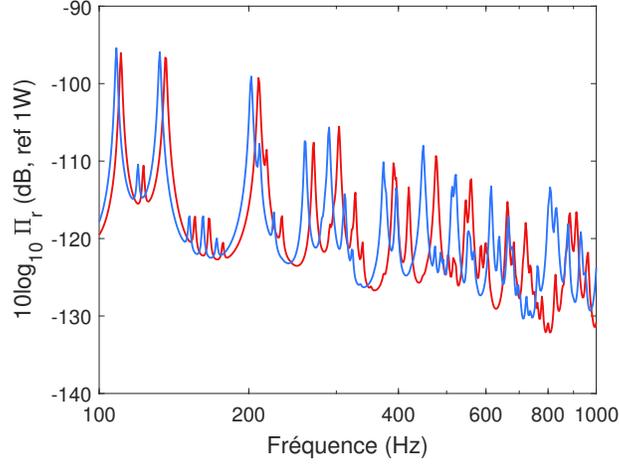


FIGURE 5.4 – Puissance acoustique rayonnée par la plaque d’acier immergée.
Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique.

où λ et μ sont définis par :

$$\lambda = k_0 \sin \theta \cos \phi, \quad \mu = k_0 \sin \theta \sin \phi. \quad (5.9)$$

Puissance acoustique

La pression acoustique est ensuite utilisée pour calculer la puissance acoustique rayonnée :

$$\Pi_r(\omega) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{|p_{\text{rayonné}}(R, \theta, \phi, \omega)|^2}{2\rho_0 c_0} R^2 \sin \phi d\theta d\phi. \quad (5.10)$$

La puissance rayonnée calculée par ACTRAN est comparée à la puissance acoustique obtenue en combinant les Eq. (5.7) et (5.10), et le champ de vitesse estimé par le code analytique, sur la Fig. 5.4. Comme pour la vitesse vibratoire moyenne, les deux méthodes donnent des résultats en accord.

Par ailleurs, on remarque que toutes les résonances vibratoires observables sur la Fig. 5.2 ne rayonnent pas efficacement en champ lointain. Certains pics disparaissent ou restent limités à une faible intensité. On s’intéresse en particulier à la plage $[100, 310\text{Hz}]$, sur laquelle on représente la vitesse quadratique moyenne et la puissance rayonnée, prédites avec ACTRAN, sur la Fig. 5.5. Trois modes rayonnants efficacement sont repérés sur la figure par des lignes noires en pointillés.

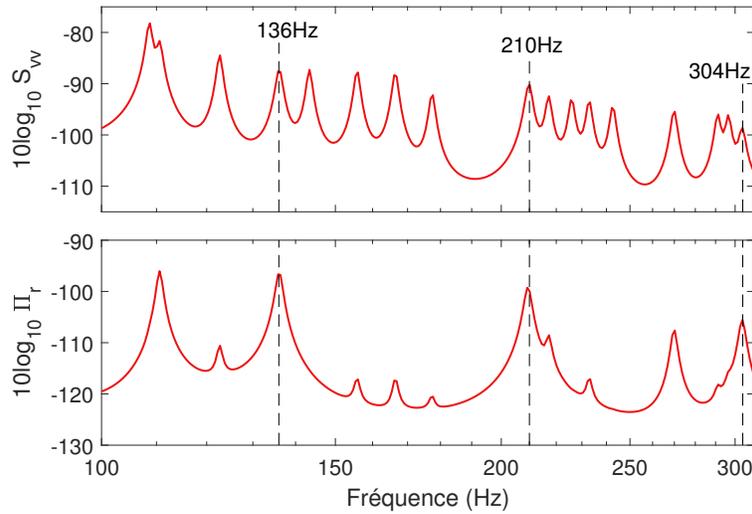


FIGURE 5.5 – Vitesse quadratique moyenne et puissance rayonnée prédites par ACTRAN.

Sur la Fig. 5.6 on trace le champ de vitesse quadratique moyenné sur les 20 réalisations $S_{vv}(\mathbf{X}, \omega)$ aux trois fréquences identifiées sur la Fig. 5.5, qui correspondent à des résonances de la plaque couplée. Les champs de vitesse obtenus peuvent être assimilés à des déformées de modes pour la plaque *in vacuo*. En effet le motif est proche des déformées des modes (5, 1), (6, 1) et (7, 1) respectivement. On remarque toutefois l’influence du couplage avec le fluide, car les “ventres” ne sont pas réguliers. Le calcul avec des “modes mouillés” ne permet pas d’inclure cette influence du fluide sur la réponse de la structure.

Efficacité de rayonnement

L’efficacité de rayonnement, grandeur sans dimension, est utilisée pour évaluer le rayonnement d’une structure. Elle est définie comme la rapport de la puissance rayonnée par unité de surface sur la puissance rayonnée par un piston de vitesse équivalente :

$$\sigma_r(\omega) = \frac{\Pi_r(\omega)}{\frac{\rho_0 c_0}{2} \Sigma \bar{S}_{vv}(\omega)}, \quad (5.11)$$

où $\Sigma = L_x L_z$ est la surface de la plaque.

L’efficacité de rayonnement est tracée sur la Fig. 5.7. On a repéré, sur la figure, trois maximums locaux de l’efficacité qui correspondent aux trois résonances identifiées sur les Fig. 5.5 et 5.6. Des calculs, effectués avec un spectre blanc (champ de pression spatialement décorrélé) et avec un écoulement dans la direction \vec{z} (problème tourné à 90°) donnent les mêmes résultats de rayonnement.

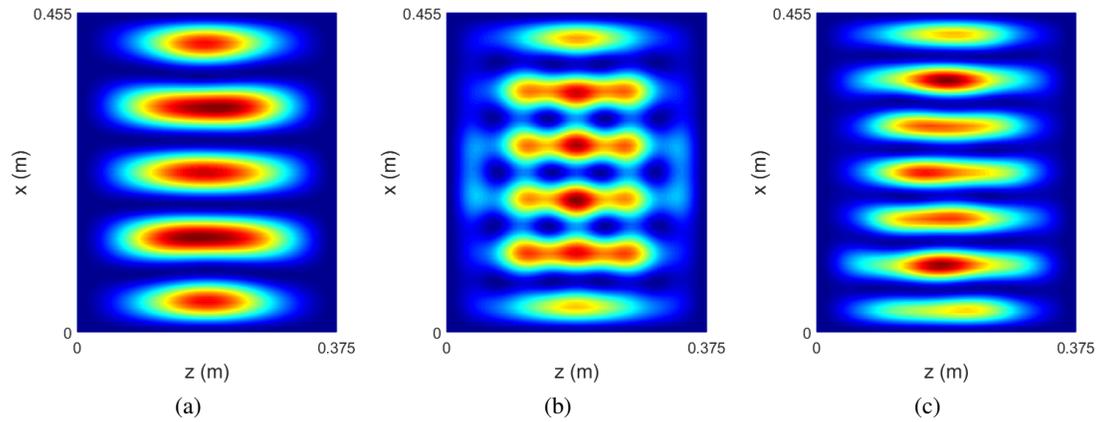


FIGURE 5.6 – Champs de vitesse quadratique avec ACTRAN, moyenne sur 20 réalisations pour trois modes rayonnants : (a) 136 Hz ; (b) 210 Hz ; (c) 304 Hz.

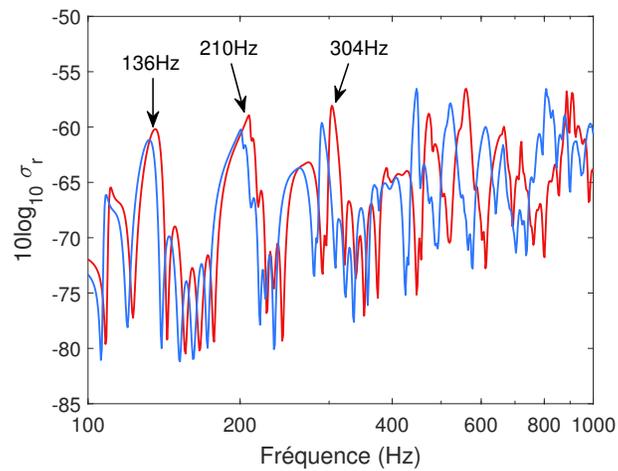


FIGURE 5.7 – Efficacité de rayonnement de la plaque d'acier immergée.
Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique.

❖ 5.2 Application à la prédiction du rayonnement d'une plaque immergée soumise à une CLT non-homogène

Dans cette section, avec le cas de la plaque mince rectangulaire, on considère maintenant une CLT non homogène sur la plaque. Dans un premier temps, la même plaque est utilisée, ce qui permet de conserver le modèle analytique. Dans un second temps, une variation d'épaisseur dans la direction de l'écoulement est ajoutée, afin d'accentuer l'effet de non-homogénéité de l'excitation. L'influence de la variation des paramètres de CLT est ainsi mise en avant.

5.2.1 Plaque plane mince à épaisseur constante

5.2.1.1 Chargement par CLT

On considère un écoulement d'eau dans le demi-plan $y > 0$, à la vitesse U_0 , dans la direction \vec{x} , passant au-dessus d'une plaque mince placée dans le plan (x, z) . Une CLT se développe sur la surface de la plaque, déclenchée au bord d'attaque de la plaque repéré par la position $x = 0$. Dans le cas d'une plaque plane sans incidence (c'est-à-dire parallèle à la direction de l'écoulement), le modèle analytique de l'Eq. (1.8) est employé. La vitesse externe U_e est égale à la vitesse de l'écoulement U_0 , le gradient de pression est nul.

Comme dans le cas précédent, les spectres de Goody et Caiazzo sont choisis. Les paramètres mécaniques étant inchangés, le nombre de coupure l'est également. Les vitesses U_0 et U_c sont toujours de 8 m/s et 5 m/s respectivement. Les pressions aux nœuds sont calculées pour 20 réalisations.

Sur la Fig. 5.8 sont représentés, dans le plan de la plaque, des champs de pression p'_b pour une réalisation r , pour deux fréquences. À 100 Hz, on observe bien la croissance de l'autospectre, due à la variation spatiale des paramètres de CLT. Leur allure est décrite par une courbe similaire à celle de la Fig. 3.14 (même modélisation, pour un fluide différent). Cette croissance de l'autospectre est moins visible à 1000 Hz. Si on s'intéresse à de dernier, tracé en fonction de la position x sur la Fig. 5.9, on remarque qu'il est presque constant à 1000 Hz. La variation des paramètres de CLT reste toutefois assez limitée pour le cas d'une plaque plane.

5.2.1.2 Vitesse vibratoire

Comme dans le cas précédent, le modèle éléments finis et le code analytique sont employés. L'écart en dB, entre la prédiction de vitesse normale quadratique moyenne $\bar{S}_{vv}(\omega)$ pour les deux CLT est affichée sur la Fig. 5.10, en bandes fines et en bandes tiers-d'octave. Les mêmes observations que dans le cas précédent peuvent être faites : un bon accord entre les modèles éléments finis et analytique, avec une légère différence de valeurs des fréquences de résonance. Par ailleurs, pour une plaque d'épaisseur constante, il y a un écart de l'ordre de 1 dB entre la CLT non-homogène et la CLT avec des paramètres moyennés spatialement (cas traité dans la section 5.1).

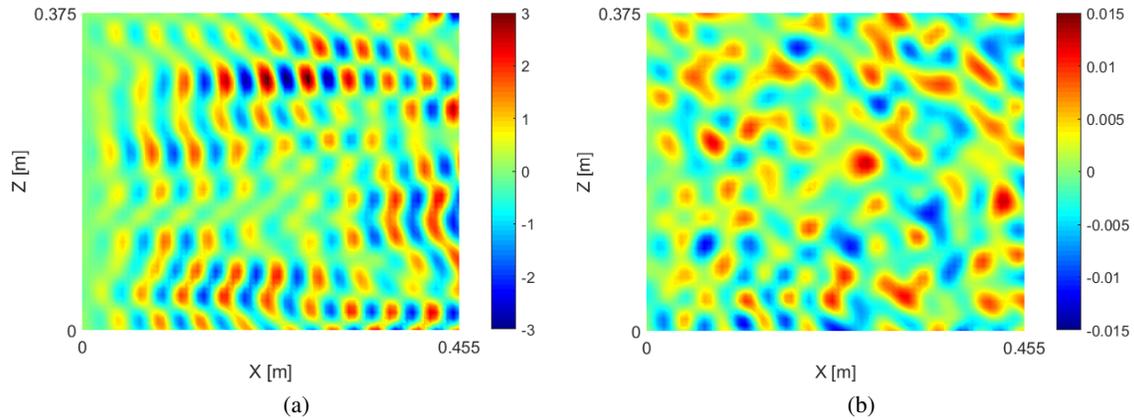


FIGURE 5.8 – Champ de pression (pour une réalisation) appliqué aux nœuds du maillage 65×54 .
(a) 100 Hz, (b) 1000 Hz.

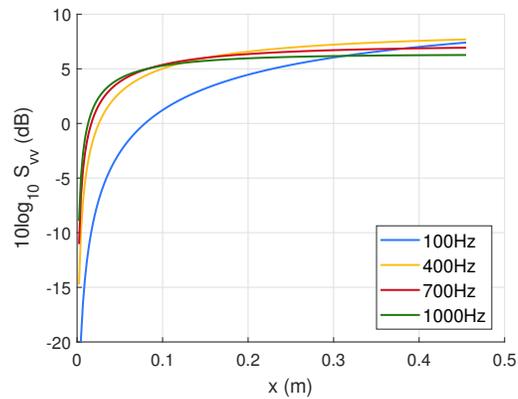


FIGURE 5.9 – Autospectre de fluctuations de pression (modèle de Goody)
pour une CLT sur une plaque plane (Eq. (1.8)), en eau, $U_0 = 8$ m/s.

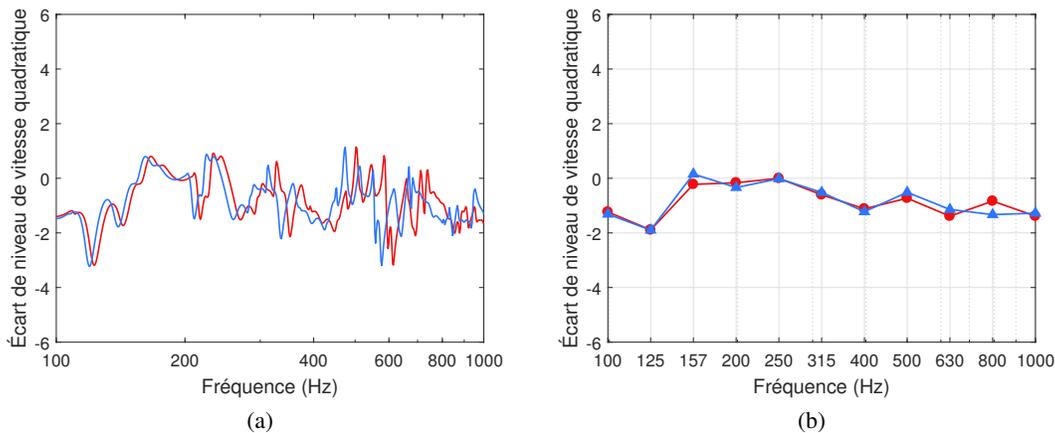


FIGURE 5.10 – Écart de vitesse quadratique moyenne de la plaque d’acier immergée, CLT non-homogène par rapport à la CLT homogène. Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique ; (a) bande fine, (b) bande $\frac{1}{3}$ -d’octave.

5.2.1.3 Rayonnement acoustique

L’écart de puissance acoustique rayonnée, entre les deux CLT, est affiché sur la Fig. 5.11. On trace également l’écart d’efficacité de rayonnement sur la Fig. 5.12. Ici encore, les deux méthodes (numérique et analytique) présentent un bon accord et l’écart entre la CLT homogène et la CLT non-homogène n’est pas significatif.

5.2.2 Plaque mince avec variation d’épaisseur

5.2.2.1 Analyse éléments finis

Afin d’accentuer les effets de la variation spatiale des paramètres de CLT, on simule un dernier cas. On conserve la CLT sur une plaque plane et on ajoute une variation d’épaisseur, dans le sens de l’écoulement, à la plaque plane. Comme vu aux chapitres 3 et 4, cela permet de mettre en avant la spatialisation de l’excitation sur certains modes. La variation d’épaisseur est linéaire, de 1 mm au bord d’attaque à 3 mm au bord de fuite. À cause de l’augmentation de l’épaisseur moyenne de la plaque, le nombre de résonances dans la plage de fréquence considérée diminue.

Pour la modélisation par éléments finis, le même nombre d’éléments quadrilatères est conservé. En effet, d’après l’Eq. (2.1), la longueur d’onde de flexion λ_f est plus grande avec une épaisseur plus importante. Par conséquent, on peut supposer que le maillage utilisé, qui a été défini par rapport à l’épaisseur minimale de la plaque, est suffisant pour décrire les mouvements de la plaque. Par ailleurs, puisqu’il n’existe pas de modèle analytique de la plaque mince à épaisseur non constante, le code analytique n’est plus utilisé ici.

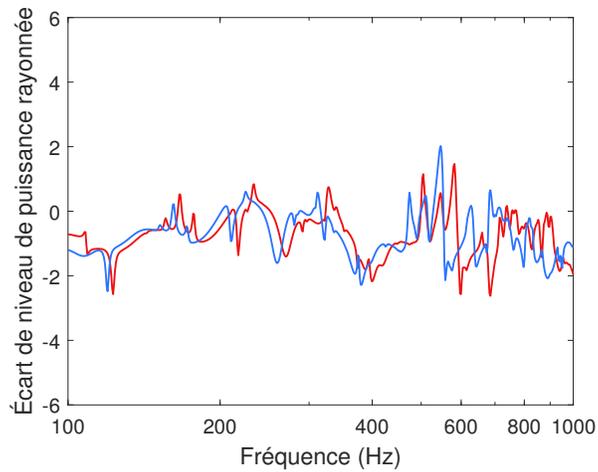


FIGURE 5.11 – Écart de puissance acoustique rayonnée par la plaque d’acier immergée, CLT non-homogène par rapport à la CLT homogène. Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique.

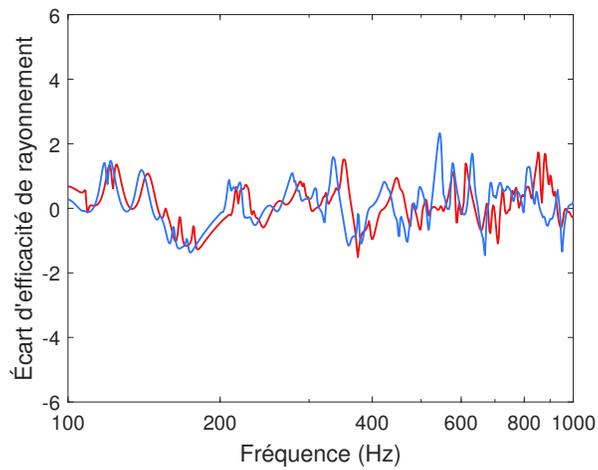


FIGURE 5.12 – Écart d’efficacité de rayonnement de la plaque d’acier immergée, CLT non-homogène par rapport à la CLT homogène. Rouge : éléments finis ACTRAN ; bleu : méthode analytique.

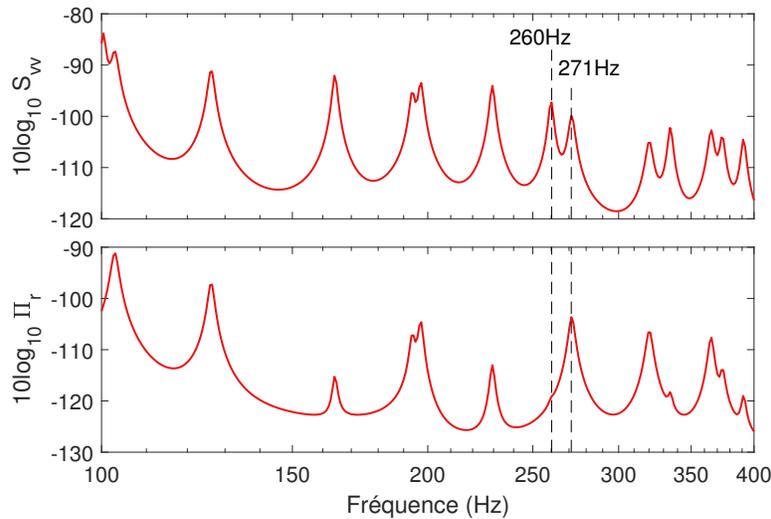


FIGURE 5.13 – Niveau de vitesse quadratique moyenne et de puissance acoustique rayonnée pour la plaque en acier immergée avec variation d'épaisseur et excitée par une CLT homogène (Caiazzo+Goody).

Nastran	103	107	130	166	197	199	231	290	272	322
Actran	100	103	127	164	193	197	229	260	271	320

TABLE 5.2 – Fréquences de résonance (Hz) de la plaque en acier immergée avec variation d'épaisseur estimées avec NASTRAN (masse ajoutée, sans couplage intermodal) et ACTRAN.

5.2.2.2 Vitesse vibratoire et rayonnement acoustique

Cette plaque d'épaisseur non constante est excitée par les deux séries de réalisations de champs de pression synthétisée décrites précédemment : d'une part pour simuler la CLT non-homogène au-dessus d'une plaque plane et d'autre part pour la CLT homogène en utilisant les paramètres moyennés. Dans un premier temps, on compare la vitesse quadratique et le rayonnement acoustique pour la plaque excitée par la CLT homogène sur la Fig. 5.13. Deux résonances en vitesse sont repérées sur la figure et reportées sur le spectre de pression rayonnée. Seulement l'une des deux correspond à un rayonnement efficace. Les champs de vitesse quadratique à ces deux fréquences sont représentés sur la Fig. 5.14.

Les dix premières fréquences de résonance supérieures à 100 Hz calculées avec NASTRAN (analyse modale avec masse ajoutée par l'eau sur une face de la plaque, sans couplage intermodal) puis identifiées sur la courbe de vitesse obtenue avec ACTRAN sont données dans la Table 5.2.

On trace l'écart de vitesse quadratique et de puissance acoustique rayonnée entre les deux CLT sur la Fig. 5.15. Le cas détaillé ici est similaire aux cas exploités dans les chapitres 3 et 4, en ajoutant ici l'écart de puissance rayonnée. Les mêmes remarques que pour la vitesse peuvent être faites pour la puissance rayonnée. Là où, pour la plaque d'épaisseur constante, l'écart entre CLT non-homogène et CLT homogène, se situait sous les 2 dB, il est autour des 4 dB en basses fréquences, et atteint 6 dB à la fréquence de 229 Hz pour la plaque avec variation d'épaisseur. Le champ de vitesse quadratique à cette fréquence est affiché sur la Fig. 5.16. Il correspond à la réponse d'un mode dont la déformée est du même type que celles identifiées aux chapitres 3 et 4 pour lesquelles les écarts les significatifs

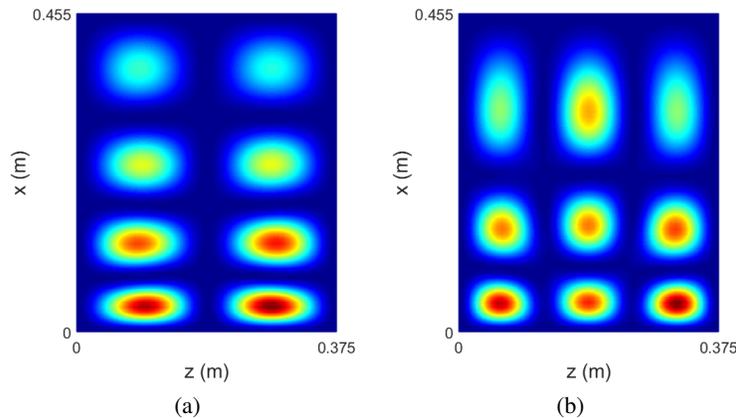


FIGURE 5.14 – Champ de vitesse quadratique avec ACTRAN, moyenne sur 20 réalisations pour deux résonances : (a) 260 Hz ; (b) 271 Hz (voir Fig. 5.13).

avaient été observés. Ce mode présente une déformée importante là où l'excitation par la CLT est la plus faible. Par ailleurs, on l'avait déjà remarqué sur la Fig. 5.9, l'écart entre la CLT non-homogène et la CLT homogène est plus important en basses fréquences. À 1000 Hz, l'autospectre tracé était presque homogène spatialement.

Pour finir, on trace l'efficacité de rayonnement pour les deux excitations sur la Fig. 5.17. L'écart d'efficacité de rayonnement entre les deux cas est inférieur à 1 dB, ce qui montre qu'elle ne dépend pas de l'excitation dans le cas de la plaque plane.

5.2.2.3 Conclusion sur le modèle de la plaque plane

Dans les deux dernières sections, nous avons continué d'exploiter le modèle de la plaque plane mince et rectangulaire. L'accent a été mis sur le couplage avec l'eau, en terme de masse ajoutée et de couplage intermodal, et le rayonnement acoustique en champ lointain. Un modèle analytique intégrant ces éléments a été comparé à une modélisation par éléments finis. Les prédictions sont en accord pour les deux modèles.

Les différences de comportement pour une plaque d'épaisseur constante, entre une CLT homogène et un CLT non-homogène étant faibles, une variation d'épaisseur dans la direction de l'écoulement a été ajoutée. Pour cette plaque, il n'existe plus de modèle analytique. Comme il a été vu dans les chapitres précédents, un écart plus important de niveau en dB de vitesse vibratoire a été observée. Cet écart atteint des maximums pour des résonances dont le champ de déplacement ne coïncide pas avec le maximum d'intensité de l'autospectre des fluctuations de pression pariétale. Par ailleurs, la spatialisation de l'excitation est plus marquée en basses fréquences.

Pour approfondir l'analyse, il faut s'éloigner du modèle de la plaque plane rectangulaire. Dans la section suivante, un modèle de pale éléments finis, en trois dimensions, est proposé. Le modèle analytique de CLT sur une plaque plane laisse place à une autre méthode d'estimation des paramètres de CLT prenant en compte la courbure du profil. L'objectif est de proposer un cas qui se rapproche de la géométrie d'une pale de propulseur.

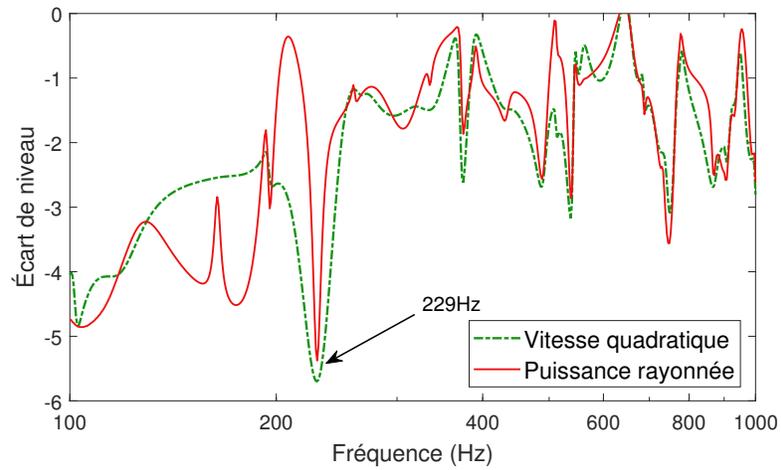


FIGURE 5.15 – Écart de niveau de vitesse quadratique moyenne et de puissance acoustique rayonnée pour la plaque d’acier immergée avec variation d’épaisseur.

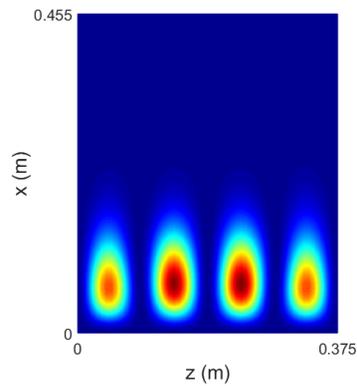


FIGURE 5.16 – Champ de vitesse quadratique avec ACTRAN, moyenne sur 20 réalisations, 229 Hz (voir Fig. 5.15).

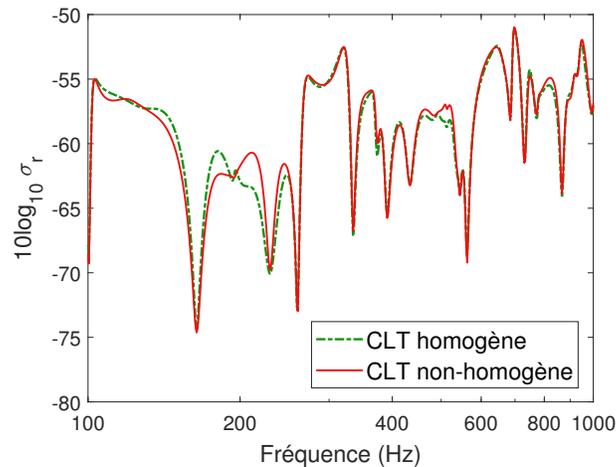


FIGURE 5.17 – Efficacité de rayonnement de la plaque d’acier immergée et excitée par une CLT sur une plaque plane (Caiazzo+Goody).

❖ 5.3 Application à la prédiction du rayonnement d’une pale immergée soumise à une CLT croissante depuis le bord d’attaque

Le rayonnement d’un modèle simplifié de pale de propulseur excitée par une CLT est analysée dans cette section. La pale est constituée d’un profil, extrudé dans la direction perpendiculaire à l’écoulement, pour créer une pale de section constante. Le profil est modélisé en éléments finis et placé en eau. Le rayonnement est calculé à la surface d’une demi-sphère englobant la pale. Les paramètres de CLT sur le profil sont calculés à l’aide du logiciel XFOIL et les pressions bloquées excitatrices sont appliquées aux nœuds du profil par la méthode C-OPPD.

5.3.1 Modélisation éléments finis

5.3.1.1 Modèle de pale

Le profil étudié est issu d’un montage expérimental réalisé au centre d’essai de la DGA à Val-de-Reuil. La vue de coupe du profil est visible sur la Fig. 5.18. La corde de la pale, pour notre simulation, est fixée à $c = 30$ cm. L’épaisseur maximale du profil est de 2.4 cm à 7 cm du bord d’attaque (soit une épaisseur de 8% à 25% de la corde). On discrétise la forme du profil en éléments triangulaires de taille 5 mm. Le maillage est affiné au bord d’attaque et au bord de fuite avec des éléments de plus petite taille. Il y a au total 441 éléments triangulaires, qui sont visibles sur la Fig. 5.19.

On crée une pale d’envergure $L = 50$ cm avec une section constante. La taille des éléments dans cette direction est aussi de 5 mm, ce qui donne un total de 44 100 éléments en trois dimensions pour

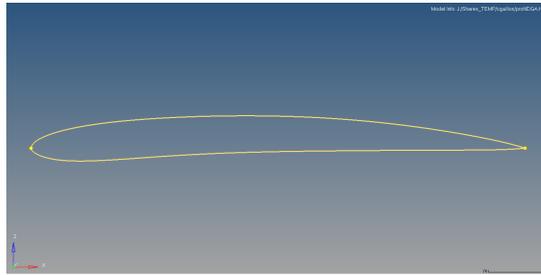


FIGURE 5.18 – Vue de la section de profil employé dans les calculs visualisée sur HyperMesh.

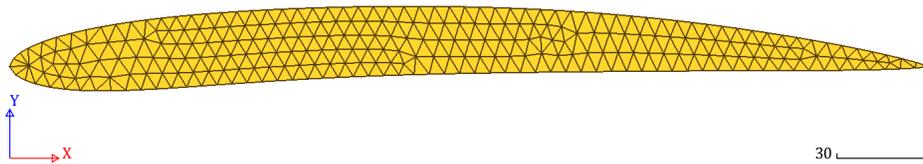


FIGURE 5.19 – Discrétisation éléments finis du profil réalisée sur HyperMesh.

le solide (voir Fig. 5.20). La propriété de solide isotrope est appliquée à ces éléments en utilisant les valeurs de de l'acier (Table 5.1). La surface extérieure du profil est composée de 6 300 éléments quadrilatères à la surface sur l'extrados et 6 200 sur l'intrados. Ce sont ces éléments qui seront chargés par les pressions bloquées calculées en fonction des paramètres de CLT.

Une analyse modale du profil *in vacuo* est réalisé à l'aide du logiciel ACTRAN. Une fois la pale placée en eau, ses fréquences de résonance vont diminuer, donc l'analyse sans fluide est réalisée jusqu'à 2000 Hz pour une étude avec fluide à 1000 Hz. Une des faces latérales de la pale est supposée encastree et son déplacement est bloqué. Plusieurs déformées modales de la pale sont affichées sur la Fig. 5.21. Pour s'assurer de la validité de ce maillage, un profil identique est maillé en utilisant des éléments de plus petite taille. Selon les analyses modales, les fréquences de résonance obtenues pour les deux modèles sont en accord suffisant. On considère la discrétisation suffisamment fine et on utilise les éléments solide de taille 5 mm dans la suite.

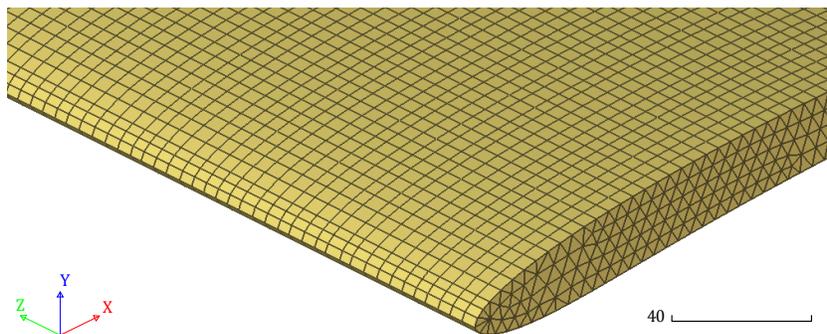


FIGURE 5.20 – Zoom sur le modèle éléments finis 3D de la pale.

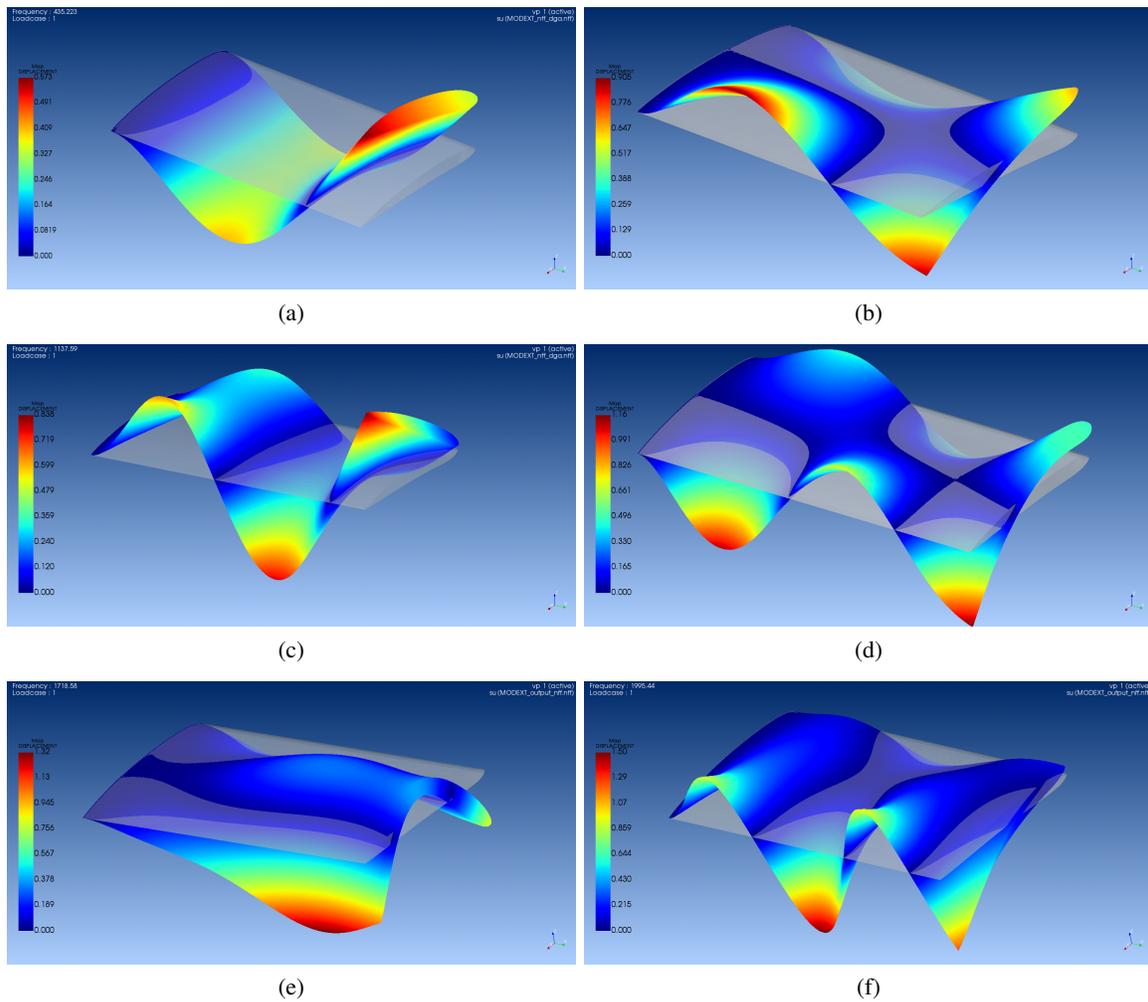


FIGURE 5.21 – Déformées de six modes de la pale simplifiée *in vacuo* :
(a) : mode n°3, 435 Hz - (b) : mode n°5, 866 Hz - (c) : mode n°6, 1138 Hz -
(d) : mode n°7, 1589 Hz - (e) : mode n°8, 1719 Hz - (f) : mode n°9, 1995 Hz.

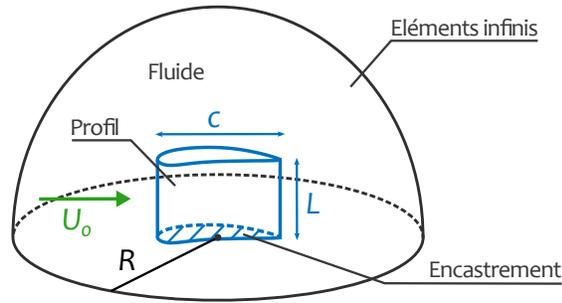


FIGURE 5.22 – Représentation schématique de la pale dans la demi-sphère de fluide.

5.3.1.2 Domaine fluide extérieur

Soit une demi-sphère, de rayon $R = 7$ m, dont le centre est le milieu du profil. La face encastree de la pale est positionnée sur la base de la demi-sphère. Elle est discrétisée avec des éléments de taille 215 mm, ce qui correspond à 7 éléments par longueur d'onde acoustique à 1000 Hz. Le volume de la demi-sphère est composée de 2 585 023 éléments fluide auxquels on associe les propriétés de l'eau ($\rho_0 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $c_0 = 1480 \text{ m/s}$). La surface extérieure de la demi-sphère est couverte de 15 871 éléments infinis. Le modèle décrit est schématisé sur la Fig. 5.22.

5.3.2 Excitation par CLT

5.3.2.1 Calculs hydrodynamiques avec XFOIL

Paramètres de CLT et autospectre

Pour déterminer les efforts appliqués au modèle de pale, les paramètres de CLT doivent être déterminés. En raison de la courbure du profil, le modèle analytique de plaque plane ne peut être raisonnablement utilisé ici. Nous avons vu en section 1.1.1 que les méthodes numériques exactes sont difficilement applicables. Un calcul RANS est une option envisageable pour parvenir aux informations nécessaires, mais une méthode encore plus rapide à mettre en place est employée. L'utilisation du logiciel XFOIL, dans le cas d'un écoulement en deux dimensions autour d'un profil, est avantageuse par sa simplicité et sa rapidité de calcul. Dans le cas du modèle de plaque plane, Sanders [120] a montré que XFOIL donne des résultats très proches du modèle analytique utilisé dans les chapitres précédents de ce manuscrit.

Les nœuds du contour du profil visible sur la Fig. 5.19 sont isolés, puis introduits dans XFOIL. Une routine interne au logiciel effectue un re-maillage le profil, en augmentant notamment la densité nodale au bord d'attaque. Le profil visualisé sur XFOIL est visible sur la Fig. 5.23. Le profil est dimensionné pour avoir une corde de 30 cm et le déclenchement de couche limite turbulente est forcée au bord d'attaque. Les paramètres de fluide suivants sont imposés :

$$Re = \frac{U_0}{\nu} = 8.0 \cdot 10^6, \quad \mathcal{M} = \frac{U_0}{c_0} = 5.33 \cdot 10^{-3}. \quad (5.12)$$

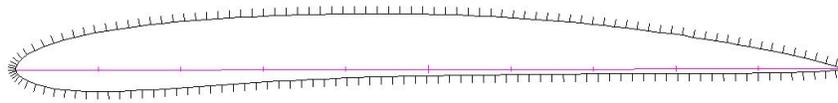


FIGURE 5.23 – Maillage du profil après importation et conditionnement sur XFOIL.

Le calcul est lancé en imposant un angle d'incidence de 2° . Le détail des commandes utilisées dans XFOIL pour réaliser le calcul est donné en Annexe B.

Les paramètres de CLT estimés par XFOIL sont donnés sur la Fig. 5.24, en fonction de l'abscisse curviligne s le long du profil, sur les deux faces du profil. L'attention est portée aux paramètres d'entrée du modèle de Goody (à savoir U_e , δ et τ) et au gradient de pression, à travers le paramètre de Clauser β_C (voir Eq. (1.7)). Ce dernier semble suggérer que le gradient de pression est faible et qu'un modèle d'autospectre pour CLT avec gradient de pression nul (ZPG) pourrait convenir. Il est également à noter que XFOIL ne fournit aucune information sur le profil de vitesse. Ainsi, la contrainte de cisaillement τ est estimée à la paroi et son maximum selon l'axe vertical τ_{MAX} , utilisé dans le modèle de Rozenberg [117], ne peut être calculé. Par ailleurs sur l'intrados, le gradient de pression prend des valeurs négatives pour $s > 10$ cm et les auteurs indiquent que ce modèle ne peut pas être utilisé pour les situations où le gradient est négatif (FPG). Pour ces raisons, même si nous n'avons pas à faire à une plaque plane, le modèle de Goody est toujours utilisé.

Afin de s'assurer la validité de ce choix, on vérifie le spectre obtenu avec modèle de Rozenberg, en remplaçant toutefois le τ_{MAX} par τ . La courbe n'est pas montrée, mais les spectres avec les modèles de Goody et Rozenberg sont de niveaux très proches. L'influence du gradient de pression est donc négligée dans la suite.

L'autospectre, avec le modèle de Goody, est représenté sur la Fig. 5.25, aux fréquences 100 Hz et 1000 Hz, à l'extrados et à l'intrados. Les niveaux sont du même ordre de grandeur et la différence de niveau entre l'extrados et l'intrados est au maximum de l'ordre de 2 dB. Par ailleurs, comme observé sur la plaque plane, notamment à la Fig. 5.9, la croissance de la CLT est plus marquée en basses fréquences. À 1000 Hz, le niveau est presque uniforme spatialement.

Vitesse de convection

La vitesse de convection U_c n'a pas fait l'objet d'étude particulière dans le cas de la plaque plane : sa valeur avait été fixée à une grandeur constante dépendant uniquement de U_0 . Dans le cas la CLT non-homogène sur un profil, on s'intéresse alors aux deux modèles de calcul de vitesse de convection introduits à la section 1.1.3.2, les modèles de Smol'yakov et Ko. Ceux-ci sont des fonctions de la pulsation adimensionnée $\omega\delta^*/U_e$. Au bord d'attaque du profil, l'épaisseur de déplacement δ^* tend vers 0, et donc cette pulsation adimensionnée également. Or, nous avons vu que le modèle de Smol'yakov est plus adapté quand $\omega\delta^*/U_e < 0.25$. Puisque la valeur de la pulsation adimensionnée descend sous cette valeur pour notre CLT, on privilégie le modèle de Smol'yakov. La vitesse de convection en fonction de l'abscisse curviligne s est tracée, en utilisant les paramètres de CLT calculés précédemment avec XFOIL, sur la Fig. 5.26.

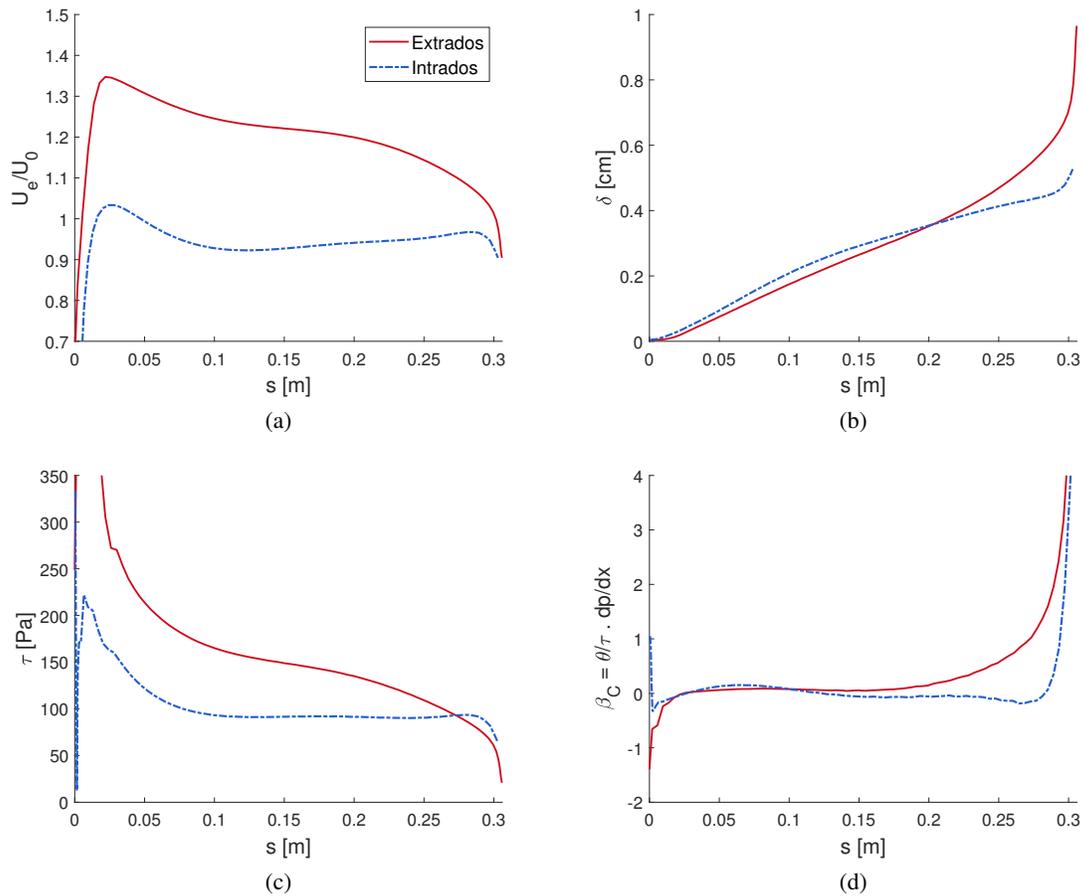


FIGURE 5.24 – Paramètres de CLT sur le profil en fonction de l’abscisse curviligne, $U_0 = 8$ m/s, en eau, angle d’incidence de 2° ; (a) : ratio de vitesses U_e/U_0 , (b) : épaisseur de CLT δ , (c) : contrainte de cisaillement τ , (d) : paramètre de Clauser β_C .

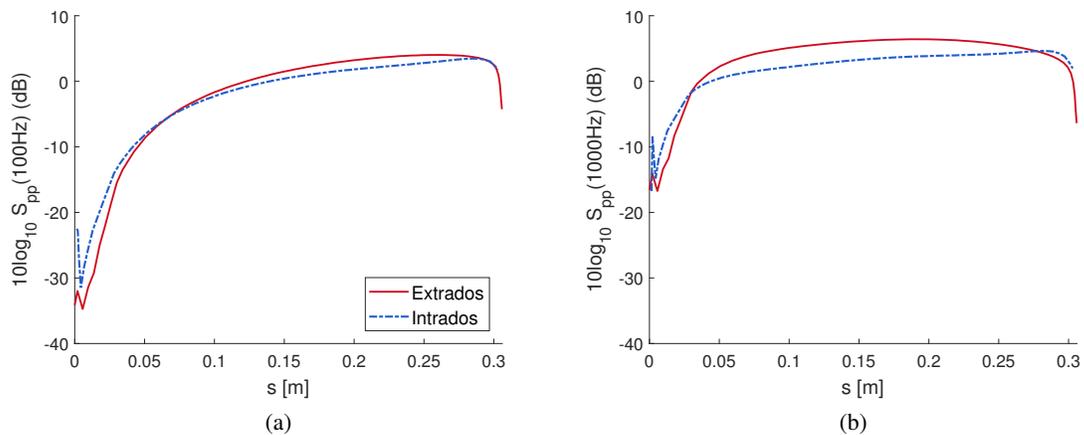


FIGURE 5.25 – Autospectre de Goody en fonction de l’abscisse curviligne à (a) 100 Hz, (b) 1000 Hz.

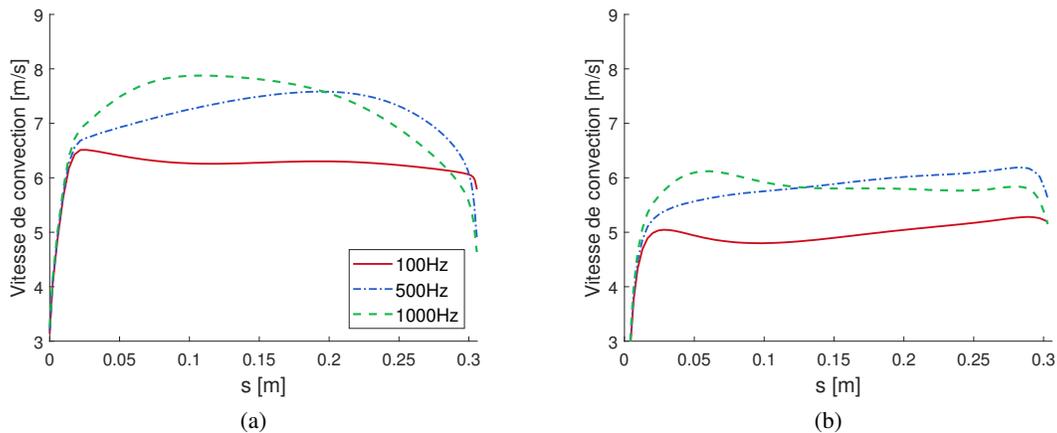


FIGURE 5.26 – Vitesse de convection, d’après le modèle de Smol’yakov, en fonction de l’abscisse curviligne à $U_0 = 8$ m/s pour trois fréquences. (a) : extrados, (b) : intrados.

5.3.2.2 Champs de pression appliqués

En utilisant les paramètres de CLT estimés avec XFOIL et le maillage éléments finis de la surface du profil, on calcule les réalisations de champs de pression bloquée. On rappelle qu’on utilise les modèles de spectres de Goody et de Caiazzo. Une réalisation est affichée sur la Fig. 5.27, pour deux fréquences et en séparant l’extrados et l’intrados. Comme dans les situations précédentes (avec un modèle de CLT analytique) et comme le montre la Fig. 5.25, la croissance de la CLT et surtout marquée en basses fréquences.

Par ailleurs, on précise qu’il s’agit d’un champ de pression synthétisée, sensé reproduire les contributions significatives de la CLT dans la vibration du profil. Ce champ de pression n’est pas identique à celui que l’on retrouverait sous la CLT. Des composantes qui ne contribuent pas à la réponse vibratoire ne sont pas reproduites, en particulier celles correspondant au pic convectif. Pour illustrer ce phénomène, on affiche sur la Fig. 5.28 deux réalisations, à 200 Hz, du champ de pression bloquée. Dans un cas, un nombre de coupure de $\bar{k} = 150$ rad/m, inférieur au nombre d’onde convectif à cette fréquence, est utilisé (comme pour notre calcul vibro-acoustique). Dans le second cas, un nombre de coupure $\bar{k} = 300$ rad/m, supérieur au nombre d’onde convectif, est utilisé. Les contributions dues au pic convectif, qui sont dominantes lorsque celui-ci n’est pas filtré, ne sont pas comptabilisées dans les champs de pression synthétisée utilisés comme donnée d’entrée dans nos simulations.

5.3.3 Résultats des simulations éléments finis

5.3.3.1 Vitesse vibratoire

On lance les calculs sur ACTRAN, pour plusieurs cas de chargement de la pale par des champs de pression synthétisés. À la fois l’extrados et l’intrados sont en contact avec le fluide et soumis à des pressions, contrairement au cas de la plaque traité jusqu’ici. On donne la vitesse quadratique moyenne

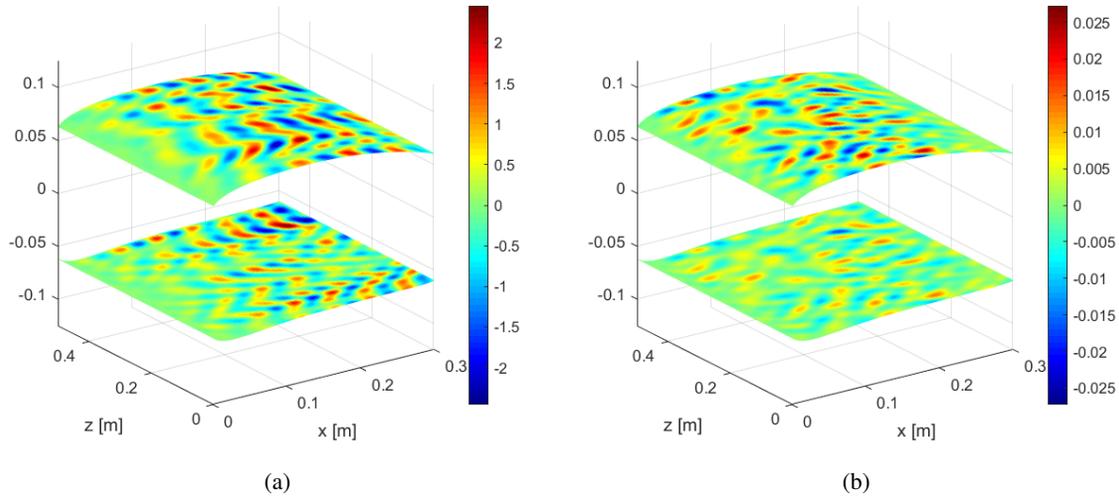


FIGURE 5.27 – Champs de pression bloquée synthétisée (pour une réalisation) à l'extrados (en haut) et à l'intrados (en bas); (a) 100 Hz; (b) 1000 Hz.

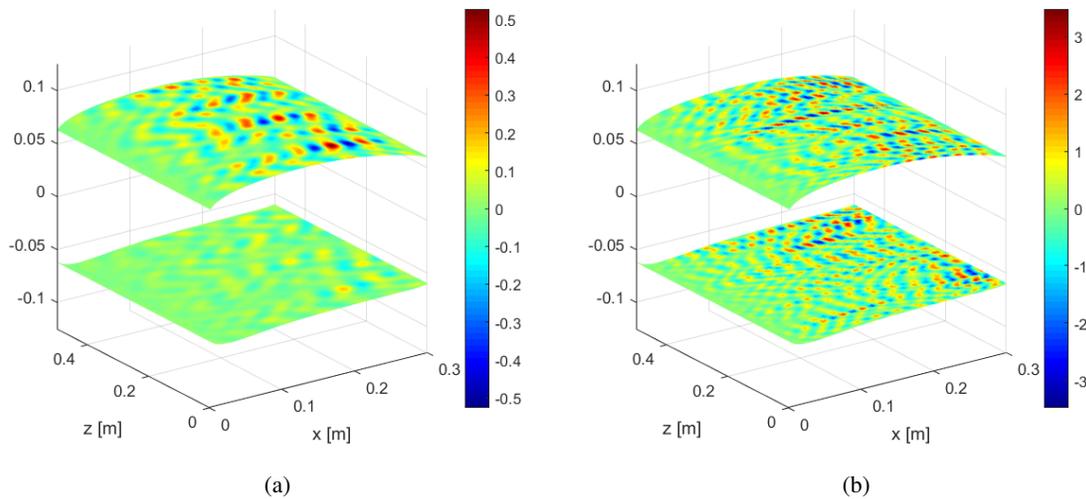


FIGURE 5.28 – Champs de pression bloquée synthétisée à l'extrados (en haut) et à l'intrados (en bas) à 200 Hz; (a) : $\bar{k} = 150 \text{ Hz} < k_c$; (b) : $\bar{k} = 300 \text{ Hz} > k_c$.

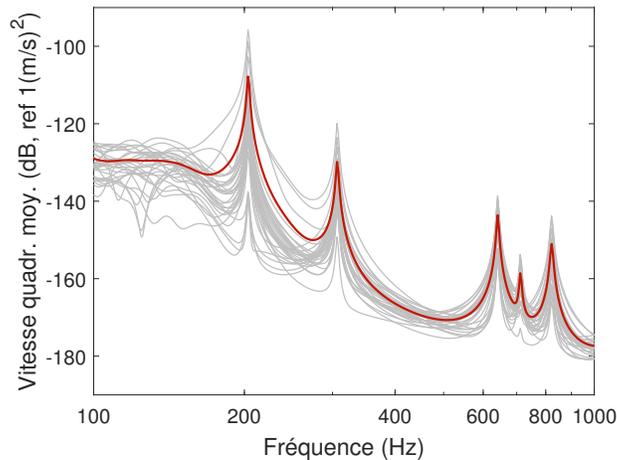


FIGURE 5.29 – Vitesse quadratique moyenne des éléments de surfaces de la pale (30 réalisations) pour chaque réalisation (gris) et moyenne d'ensemble (rouge).

pour les éléments de surfaces (extrados et intrados) de la pale sur la Fig. 5.29. On remarque cinq résonances dans la plage de fréquences employée.

On s'intéresse à ces résonances. Sur la Fig. 5.30, on représente le champ de déplacement, en valeur absolue, selon la direction verticale \vec{y} , sur l'extrados de la pale simplifiée, aux fréquences de résonance. Le champ de déplacement est affiché suivant la courbure de l'extrados du profil. En observant les déformées modales *in vacuo* de la Fig. 5.21, on peut faire une analogie entre ces résonances (en eau) et les modes naturels découplés. Les déformées pour la pale immergée à 203 Hz, 306 Hz, 641 Hz, 711 Hz et 822 Hz peuvent être respectivement reliées aux modes à 1719 Hz, 435 Hz, 866 Hz, 1138 Hz et 1589 Hz. On observe que : i. les fréquences de résonance sont abaissées par la présence du fluide ; ii. elles ne sont pas affectées de manière linéaire (en particulier la déformée du mode n°8 apparaît en-dessous de la déformée du mode n°3).

5.3.3.2 Rayonnement

L'attention est ensuite portée à la pression acoustique rayonnée en champ lointain, calculée par ACTRAN sur les éléments infinis sur la surface de la demi-sphère de fluide. La puissance rayonnée est tracée sur la Fig. 5.31. On retrouve les cinq résonances de la vitesse, même si certaines sont atténuées (en particulier celles à 641 Hz et 711 Hz). On note aussi qu'il y a plus de dispersion entre les réalisations pour la puissance rayonnée que pour la vitesse.

Finalement, on trace sur la Fig. 5.32 l'efficacité de rayonnement pour la pale (voir Eq. (5.11)). Les cinq résonances sont reportées par des traits pointillés verticaux sur la figure. On observe bien des minimums locaux de l'efficacité de rayonnements aux résonances à 641 Hz et 711 Hz. Comme dans le cas de la plaque plane, le rayonnement pour certaines résonances en vitesse est plus important que pour d'autres, selon le champ de déplacement associé.

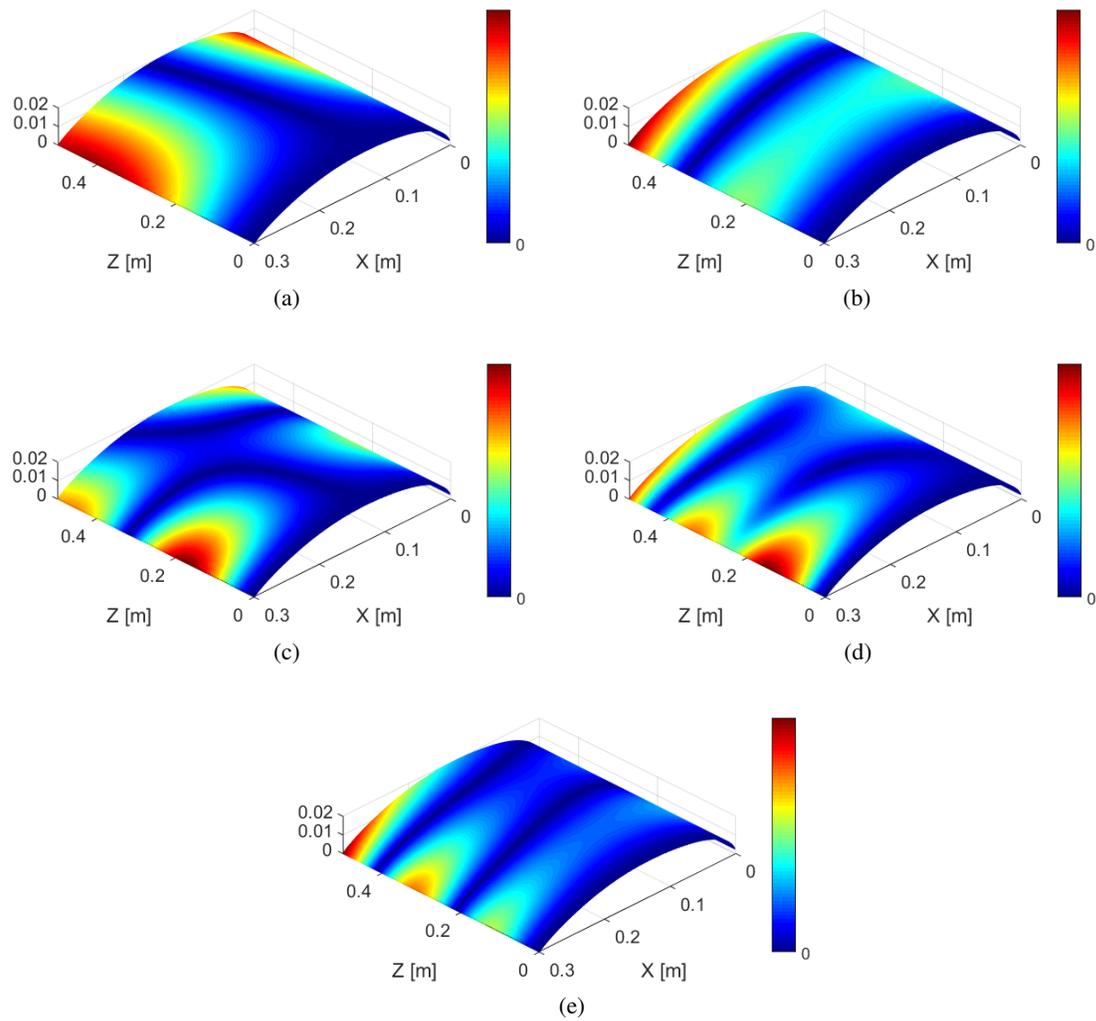


FIGURE 5.30 – Valeur absolue du déplacement selon la direction verticale pour les éléments de surface de l'extrados de la pale aux résonances en vitesse ; (a) 203 Hz ; (b) 306 Hz ; (c) 641 Hz ; (d) 711 Hz ; (e) 822 Hz (pale encastrée en $z = 0$).

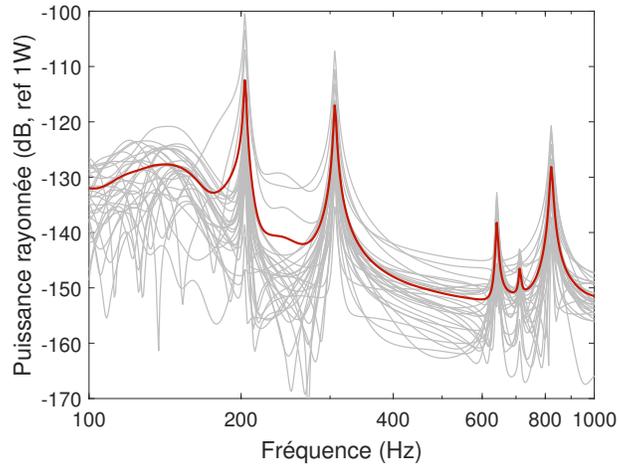


FIGURE 5.31 – Puissance acoustique rayonnée par la pale (idem Fig. 5.29).

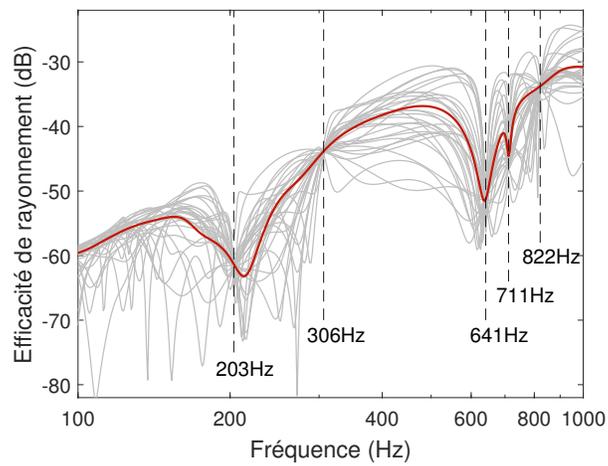


FIGURE 5.32 – Efficacité de rayonnement, résonances repérées par des traits pointillés (idem Fig. 5.29).

❖ 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode C-OPPD, permettant de prendre en compte une excitation par couche limite turbulente non-homogène dans les calculs vibro-acoustiques, a été appliquée à un cas de pale de propulseur simplifiée. L'étude de ce cas a permis de se rapprocher du cas d'application industriel d'intérêt (c-à-d un propulseur de véhicule sous-marin), en modélisant par éléments finis la structure en trois dimensions par la théorie de l'élasticité et intégrant l'interaction entre la structure vibrante et le fluide environnant (l'eau).

Le chapitre a commencé par une phase de validation préalable de l'utilisation du logiciel éléments finis ACTRAN. La plaque plane mince a été placée dans une demi-sphère de fluide, dont la surface extérieure a été recouverte d'éléments infinis pour simuler un rayonnement en champ lointain. Le calcul par éléments finis est comparé à un modèle analytique de la plaque plane mince, incluant les effets de couplage dus à la présence du fluide, grâce au calcul de la matrice d'impédance intermodal $Z_{mnm'n'}$. Le rayonnement acoustique, pour la méthode analytique, est estimé à partir du champ de vitesse par une intégrale de Rayleigh. Les deux méthodes sont d'abord employées avec une CLT homogène. Les deux calculs donnent des résultats proches. Certaines déformées, associées à des résonances en vitesse, rayonnent bien plus efficacement que d'autres, à tel point que des pics disparaissent du spectre de puissance rayonnée.

Une CLT non-homogène, en suivant le modèle analytique des chapitres précédents, est ensuite appliquée à la plaque. Pour la plaque mince à épaisseur constante, l'écart en termes de vitesse quadratique, entre la CLT non-homogène et la CLT homogène avec paramètres moyennés, se limite à un maximum de 2 dB. En ajoutant une variation d'épaisseur dans le sens de l'écoulement, on trouve un écart de l'ordre de 6 dB. Ce résultat avait déjà été observé dans les chapitres précédents pour une plaque d'aluminium en air. Les mêmes tendances sont retrouvées pour une plaque d'acier immergée dans un fluide lourd. De plus, la courbe d'écart de puissance acoustique rayonnée pour les deux CLT a la même allure que celle de la vitesse quadratique.

Dans un second temps, le processus numérique basé sur l'approche C-OPPD et ACTRAN a été appliqué pour prédire le rayonnement acoustique d'une pale immergée. La pale considérée est composée d'un profil de forme constante dans la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement. Une analyse modale *in vacuo* a permis de définir le maillage de la structure et d'obtenir les déformées modales tandis que les paramètres de CLT ont été obtenus par un calcul hydrodynamique effectué avec XFOIL. On a supposé que le gradient de pression sur l'extrados et l'intrados était nul, ce qui a permis de conserver les modèles de spectres de fluctuations de pression utilisés jusqu'à présent (Goody et Corcos généralisés). Les champs de pression synthétisée avec l'approche C-OPPD reproduisant l'effet de la CLT sur l'extrados et l'intrados ont servi comme chargements du modèle sur ACTRAN. Après avoir effectué les simulations, les réponses vibratoires et acoustiques ont été moyennées suivant les différentes réalisations. La réponse en vibration montre cinq résonances entre 100 Hz et 1000 Hz alors que la réponse acoustique montre que certains modes rayonnent plus que d'autres. Ces simulations illustrent l'application de l'approche développée à partir de simulations éléments finis pour des structures immergées.

Conclusion

Ce travail de thèse a visé à développer des approches numériques pour prendre en compte l'effet de l'évolution spatiale de la couche limite turbulente sur le rayonnement acoustique d'une structure vibrante. Dans le contexte naval de défense, le rayonnement vibro-acoustique des pales de propulseur de véhicules sous-marins est une source de bruit importante, qu'il est essentiel de chercher à maîtriser pour des raisons de discrétion. Les méthodes de couplage entre les modèles stochastiques des pressions fluctuantes et les modèles vibro-acoustiques déterministes des structures vibrantes qui sont proposées dans la littérature supposent des couches limites turbulentes homogènes. Or, pour une pale de propulseur, le fort devers et la faible distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite ne permettent pas a priori de faire l'hypothèse d'une couche limite turbulente uniformément développée. Cette étude a donc consisté à proposer des processus de calcul originaux pour prendre en compte des couches limites non-homogènes spatialement dans les calculs vibro-acoustiques.

En préambule, on s'est appliqué à modéliser le comportement vibratoire de différentes plaques planes excitées par une couche limite turbulente homogène pour lesquelles des résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature. Cette étude a permis d'étudier différentes hypothèses usuellement considérées dans les calculs vibro-acoustiques. On a pu mettre en évidence l'effet de filtrage de la structure sur les fluctuations de pression pariétale, notamment concernant les composantes liées à la convection. Il en résulte que lorsque les calculs sont effectués dans le domaine des nombres d'onde, un nombre d'onde de coupure basé sur des critères vibratoires peut être employé afin de réduire grandement la lourdeur des calculs numériques. Par ailleurs, lors du calcul de la réponse vibratoire par la méthode de superposition modale (que ce soit en air avec les modes *in vacuo* ou en eau avec les modes mouillés), un filtrage peut être appliqué sur les modes pour ne conserver que ceux ayant une fréquence contenue dans une fenêtre autour de la fréquence de calcul considérée. Pour la méthode des ondes planes pariétales décorréélées (OPPD), on a pu observer que la convergence des calculs en fonction du nombre de réalisation N_r était en $1/\sqrt{N_r}$ et qu'une trentaine de réalisations suffisait pour avoir une convergence acceptable d'un point de vue pratique. Les comparaisons avec les résultats expérimentaux ont montré que le modèle d'autospectre de Goody donnait les meilleurs résultats alors que pour l'interspectre normalisé, le modèle de Mellen était le plus adapté en air tandis que les modèles Caiazzo et Chase II semblaient les mieux adaptés en eau.

Nous nous sommes intéressés ensuite aux cas de couches limites turbulentes non-homogènes pour lesquelles il n'existe pas de méthode bien établie pour les traiter. L'objectif a été de partir des méthodes existantes pour les cas homogènes (méthodes spatiale, nombre d'onde et OPPD) puis de les faire évoluer pour qu'elles puissent prendre en compte l'évolution spatiale des paramètres de couche limite turbulente. Dans un premier temps, la méthode spatiale a été étendue assez simplement en utilisant la faible corrélation du champ de pression pariétale. Les nœuds du maillage spatial de la structure sont traités deux à deux : pour deux points suffisamment proches, la couche limite turbulente est supposée homogène, tandis que deux points éloignés sont supposés totalement décorrélés. Dans un second temps, la méthode basée sur les fonctions de sensibilité dans le domaine des nombres d'onde a été étendue en découpant la surface de la structure excitée en plusieurs zones élémentaires. Pour chaque zone, on considère que la couche limite turbulente est homogène et que ses paramètres caractéristiques correspondent à la moyenne spatiale arithmétique des paramètres sur la zone considérée. Deux variantes de l'approche SDT (*sub-area decomposition technique*) ont été proposées : pour la première, il est considéré que les pressions fluctuantes entre deux zones différentes sont décorrélées alors que pour la seconde, des termes d'interactions entre zones voisines sont ajoutées à la première. Des comparaisons avec l'approche spatiale ont montré que l'approche SDT était valide quand les composantes convectives des fluctuations de pression avaient un effet négligeable sur la vibration de la structure. Par ailleurs, pour l'approche SDT, plus le nombre de zones envisagées est important, plus la description de la variation spatiale de la couche limite turbulente est fine. En revanche, plus les erreurs induites par les hypothèses inhérentes à la méthode sont importantes (c-à-d cohérences partielles entre zones négligées). Il en résulte qu'un compromis doit être trouvé. Nous avons alors cherché à définir des critères sur la taille des zones qui permettait de s'assurer d'avoir une approximation acceptable (voir Eq. (3.41) et (3.42)). Comme les hypothèses sont moins fortes pour la seconde variante, la taille des zones peut être plus petite que pour la première variante.

Les deux variantes de l'approche SDT ont été appliquées sur un cas de plaque plane rectangulaire avec une épaisseur variable, excitée par une couche limite turbulente déclenchée sur l'arête amont de la plaque. Les deux variantes donnent des résultats proches et en accord avec l'approche spatiale mais avec des temps calculs réduits par rapport à cette dernière. La comparaison entre la couche limite turbulente non-homogène et celle avec des paramètres moyennés sur la surface de la plaque met en avant une différence de 6 dB sur le niveau de vitesse vibratoire quadratique moyenne pour certains modes. Ceci met en évidence l'intérêt de prendre en compte la variation des paramètres de couche limite turbulente dans les calculs vibro-acoustiques.

Par la suite, la méthode par ondes planes pariétales décorrélées (OPPD) a été adaptée aux excitations non-homogènes. Elle consiste à synthétiser des champs de pression pariétale induite par la couche limite turbulente qui peuvent ensuite être utilisés comme chargements du modèle vibro-acoustique. Le formalisme initial proposé est basé sur une reproduction de champs de pression pariétale équivalents à ceux considérés dans l'approche SDT (c-à-d avec une hypothèse de décorrélation des pressions pariétales entre les zones). Les résultats de la première variante de l'approche SDT peuvent alors être retrouvés. Cependant, en considérant des phases identiques entre les différentes zones pour une même onde plane pariétale, on aboutit à une approche qui permet de décrire des corrélations partielles entre les pressions pariétales ainsi que les contributions convectives de la couche limite turbulente. Comme le critère sur la taille des zones est alors relaxé, on aboutit à une formulation asymptotique pour laquelle les champs de pression synthétisés évoluent de manière continue (mo-

dèle nommé C-OPPD). Chaque élément d'un maillage surfacique de la structure excitée est soumis à une onde plane pariétale dont l'amplitude est calculée à l'aide des modèles de spectre de fluctuations de pression pariétale en utilisant les paramètres locaux de couche limite turbulente. La méthode C-OPPD a aussi été appliquée dans le cas de la plaque à épaisseur variable soumise à une couche limite turbulente évolutive. Elle permet de s'affranchir de nombreuses hypothèses contraignantes de la méthode de découpage en zones, en conservant un temps de calcul réduit par rapport à la méthode spatiale. Par ailleurs, elle s'adapte parfaitement à la modélisation par éléments finis puisque les efforts sont directement appliqués sur les nœuds du modèle. L'approche est notamment bien adaptée pour la réanalyse : une fois les pressions pariétales synthétisées, elles peuvent être appliquées à différents modèles éléments finis tant que le maillage de la surface excitée reste identique entre les différents modèles.

Dans une dernière partie, on s'intéresse à l'application de la méthode C-OPPD pour prédire la puissance rayonnée d'une structure vibrante en eau excitée par une couche limite turbulente non-homogène. Afin de valider le processus de calcul basé le couplage d'éléments finis et d'éléments infinis (qui sont proposés dans le logiciel ACTRAN pour simuler les conditions de Sommerfeld), le cas d'une plaque plane est reproduit dans un premier temps. Les résultats numériques sont comparés à ceux d'un calcul analytique développé dans la littérature initialement pour une plaque soumise à un effort ponctuel. Le code est adapté pour que les forces généralisées soient calculées à partir d'un champ de pression appliqué à l'ensemble des nœuds de la surface. L'effet de masse ajouté par le fluide sur les vibrations de la structure sont bien représentés, avec un décalage des fréquences de résonance vers les basses fréquences par rapport au cas *in vacuo* et un couplage inter-modal. Par ailleurs, le spectre de la puissance rayonné met bien en évidence que certains modes rayonnent plus que d'autres. Le processus est appliqué, comme précédemment, pour une plaque d'épaisseur variable soumise à une couche limite turbulente déclenchée sur l'arête amont, en ajoutant le fluide lourd. Comme pour le cas *in vacuo* traité dans les chapitres précédents, on a mis en évidence l'intérêt de prendre en compte l'évolution spatiale des paramètres de couche limite turbulente pour ce cas en eau, à la fois pour la réponse vibratoire et pour la puissance acoustique rayonnée. Dans un second temps, le processus est appliqué à un cas simplifié de pale de propulseur immergée en eau pour illustrer son application à un cas pratique. La pale simplifiée est constituée d'une section constante dans la direction perpendiculaire à l'écoulement alors que le profil correspond à celui d'une pale étudiée au grand tunnel hydrodynamique de la DGA. Les paramètres de couche limite turbulente sur les surfaces intrados et extrados de la pale ont été calculés à l'aide d'une modélisation en deux dimensions sous le logiciel XFOIL. Ces paramètres sont supposés constants dans la direction de l'envergure de la pale et la pale est supposée encadrée à une de ses extrémités. Des champs de pression pariétale ont été synthétisés par l'approche C-OPPD pour l'intrados et l'extrados. Ceux-ci sont alors venus charger un modèle éléments finis volumiques (c-à-d éléments solides isotropes) de la pale. Le modèle C-OPPD proposé, couplé à un calcul préalable des paramètres de CLT (calcul XFOIL ou méthode RANS par exemple) et un modèle éléments finis de la pale, permet de faire abstraction de l'hypothèse de CLT homogène sans alourdir les calculs, en utilisant des champs de pression synthétisés dépendant directement de paramètres de CLT locaux. Pour une CLT sans gradient de pression et en utilisant le modèle d'autospectre de Goody, il semblerait que l'influence de l'évolution spatiale des paramètres de CLT soit plus forte en basses fréquences.

Les travaux effectués dans cette thèse offrent différentes perspectives :

- le modèle de pale peut être complexifié pour s'approcher de la forme d'une pale d'un propul-

seur réel. Pour les calculs hydrodynamiques, plusieurs solutions peuvent être envisagées. Un gradient de vitesse dans la direction de l'envergure, fonction de la distance à l'axe de rotation de la pale, peut-être pris en compte. En conservant l'utilisation de XFOIL, la pale peut être découpée en "tranches", pour lesquelles un profil en deux dimensions et une vitesse d'écoulement uniques sont considérés. On obtiendra alors des cartographies en deux dimensions sur l'intrados et l'extrados de la pale des paramètres de couche limite turbulente. Celles-ci pourraient être utilisés comme données d'entrée des modèles de fluctuations de pression pariétale. En alternative, une modélisation RANS pourrait être effectuée. Cependant, cette solution risque d'être très coûteuse en ressources informatiques ;

- le processus numérique développé sur l'approche C-OPPD suppose que les modèles de fluctuation de pression proposés dans la littérature sur des cas homogènes restent valables localement pour des excitations non-homogènes. Le processus mériterait donc d'être validé expérimentalement. Pour cela, les vibrations et le rayonnement acoustique de plaques ayant des épaisseurs variables dans le sens de l'écoulement pourraient être étudiés en tunnel aérodynamique. La précision de prédiction du processus pourrait être étudiée en fonction de la position relative de la plaque par rapport au point de déclenchement de la couche limite turbulente ;
- par ailleurs, les modèles semi-empiriques de fluctuations de pression pariétale mériteraient d'être affinés. Dans ce manuscrit, on a traité le cas d'écoulements sans gradient de pression. Pour des propulseurs plus réalistes, cette hypothèse ne paraît cependant pas très réaliste. Des travaux récents [117] proposent des modèles pour des gradients de pression adverses. Ces travaux doivent être poursuivis et validés afin de disposer d'un processus de calcul entièrement validé ;
- l'utilisation d'un modèle éléments finis pour représenter le comportement vibro-acoustique du système étudié limite les prédictions aux basses et moyennes fréquences pour lesquelles les longueurs d'onde en jeu restent relativement grandes. Pour les hautes fréquences, où la densité modale relative à la structure vibrante devient importante, une approche SEA (*statistical energy analysis*) paraît plus appropriée. Une extension de l'approche C-OPPD pourrait être envisagée pour estimer la puissance injectée dans le modèle SEA pour des couches limites non-homogènes.

ANNEXE A

Calculs vibratoires analytiques pour une plaque plane mince

❖ A.1 Équations du mouvement

Fonctions de réponse en fréquence

On cherche à calculer les fonctions de réponse en fréquence (FRF) et les fonctions de sensibilité (FS) d'une plaque plane mince rectangulaire. En utilisant la superposition modale (Eq. (1.79)), on doit déterminer les amplitudes a_{mn} dans le cas où le mouvement est forcé par une action mécanique extérieure. Ce sont les solutions de l'équation modale, dont l'écriture met en avant une masse généralisée, un amortissement généralisé et une force généralisée.

On repart de l'Eq (1.82), en ajoutant un terme exciteur à droite du signe égal :

$$\sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} D (k_m^2 + k_n^2)^2 W_{mn}(\mathbf{X}) - \sum_{m,n}^{\infty} \omega^2 \rho_p h a_{mn} W_{mn}(\mathbf{X}) = p_F, \quad (\text{A.1})$$

où p_F est homogène à une pression. On fait apparaître les pulsations modales (Eq. (1.85)) à gauche du signe soustraction. On reconnaît ensuite la forme de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_{mn} . On ajoute un terme d'amortissement :

$$\sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} \rho_p h \omega_{mn}^2 W_{mn}(\mathbf{X}) - \sum_{m,n}^{\infty} j\eta a_{mn} \rho_p h \omega_{mn} \omega W_{mn}(\mathbf{X}) - \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} \rho_p h \omega^2 W_{mn}(\mathbf{X}) = p_F, \quad (\text{A.2})$$

où η est le facteur d'amortissement. On multiplie chaque terme par la déformée W_{pq} , $(p, q) \in \mathbb{N}$ et on

intègre sur la surface Σ :

$$\rho_p h \iint_{\Sigma} \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(\mathbf{X}) W_{pq}(\mathbf{X}) [\omega_{mn}^2 - j\eta \omega_{mn} \omega - \omega^2] d\mathbf{X} = \iint_{\Sigma} \sum_{m,n}^{\infty} W_{pq}(\mathbf{X}) p_F d\mathbf{X}. \quad (\text{A.3})$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des modes (Eq (1.81)), tous les termes de la somme sont nuls, à l'exception des termes tel que $m = q$ et $n = p$.

$$\forall(m,n), a_{mn} \iint_{\Sigma} \rho_p h W_{mn}^2(\mathbf{X}) d\mathbf{X} [\omega_{mn}^2 - j\eta \omega_{mn} \omega - \omega^2] = \iint_{\Sigma} W_{mn}(\mathbf{X}) p_F d\mathbf{X}. \quad (\text{A.4})$$

On définit la masse généralisée :

$$\forall(m,n), M_{mn} = \iint_{\Sigma} \rho_p h W_{mn}^2(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \rho_p h \frac{L_x L_z}{4}. \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas des FRF, l'effort extérieur est une force unitaire appliquée en un point $\mathbf{X}' \in \Sigma$. On écrira donc $p_F = \delta(\mathbf{X}')$, où $\delta(\cdot)$ est une fonction de Dirac :

$$\forall(m,n), a_{mn} M_{mn} [\omega_{mn}^2 - j\eta \omega_{mn} \omega - \omega^2] = W_{mn}(\mathbf{X}'). \quad (\text{A.6})$$

Cette équation permet de retrouver les amplitudes a_{mn} . En les injectant dans l'Eq (1.79), on obtient la FRF en déplacement. En exploitant les propriétés de dérivation temporelle, on trouve la FRF en vitesse en multipliant par $j\omega$:

$$H_v(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \omega) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{j\omega W_{mn}(\mathbf{X}) W_{mn}(\mathbf{X}')}{M_{mn} (\omega_{mn}^2 - j\eta \omega_{mn} \omega - \omega^2)}. \quad (\text{A.7})$$

Fonctions de sensibilité

Pour le calcul des fonctions de sensibilité (notées FS), on peut remplacer la pression excitatrice à droite du signe égal dans l'Eq (A.4) par une onde plane de nombre d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$, soit $p_F = e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}$. Cela revient à calculer la transformée de Fourier du déplacement modal, qui est la force généralisée F_{mn} :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} W_{mn}(\mathbf{X}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} d\mathbf{X} &= F_{mn}(\mathbf{k}) \\ &= \int_0^{L_x} \sin(k_m x) \exp\{jk_x x\} dx \int_0^{L_z} \sin(k_n z) \exp\{jk_z z\} dz \\ &= \frac{k_m}{k_m^2 - k_x^2} \left[(-1)^m \exp\{jL_x k_x\} - 1 \right] \times \frac{k_n}{k_n^2 - k_z^2} \left[(-1)^n \exp\{jL_z k_z\} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La FS en vitesse pour une plaque plane s'écrit :

$$\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{j\omega W_{mn}(\mathbf{X}) F_{mn}(\mathbf{k})}{M_{mn} (\omega_{mn}^2 - j\eta \omega_{mn} \omega - \omega^2)}. \quad (\text{A.9})$$

❖ A.2 Réponse quadratique moyennée spatialement

Ci-dessous, on détaille le calcul de la réponse quadratique moyenne $\bar{S}_{vv}(\omega)$ (voir Eq. (1.62)). En repartant de l'Eq. (1.65) formulée en nombre d'onde :

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{vv}(\omega) &= \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\infty} |\hat{H}_v(\mathbf{X}, \mathbf{k}, \omega)|^2 \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\mathbf{X} \\
&= \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\infty} \left| \sum_{m,n} \frac{j\omega W_{mn}(\mathbf{X}) F_{mn}(\mathbf{k})}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - j\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2)} \right|^2 d\mathbf{X} \cdot \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\infty} \left(\sum_{m,n} \frac{j\omega W_{mn}(\mathbf{X}) F_{mn}(\mathbf{k})}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - j\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2)} \right) \dots \\
&\quad \times \left(\sum_{p,q} \frac{j\omega W_{pq}(\mathbf{X}) F_{pq}(\mathbf{k})}{M_{pq}(\omega_{pq}^2 - j\eta\omega_{pq}\omega - \omega^2)} \right)^* d\mathbf{X} \cdot \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \sum_{m,n} \sum_{p,q} \frac{\omega^2 \iint_{\Sigma} W_{mn}(\mathbf{X}) W_{pq}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} F_{mn}(\mathbf{k}) F_{pq}^*(\mathbf{k}) \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}}{M_{mn} M_{pq} (\omega_{mn}^2 - j\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2) (\omega_{pq}^2 - j\eta\omega_{pq}\omega - \omega^2)^*}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Grâce à l'intégration sur Σ , on utilise les propriétés d'orthogonalité des modes, ce qui transforme la double somme en simple somme :

$$\bar{S}_{vv}(\omega) = \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Sigma} \sum_{m,n} \frac{\omega^2 |F_{mn}(\mathbf{k})|^2 \iint_{\Sigma} W_{mn}^2(\mathbf{X}) d\mathbf{X}}{M_{mn}^2 |\omega_{mn}^2 - j\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2|^2} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}. \tag{A.11}$$

En utilisant le résultat de l'Eq. (A.5), on fait apparaître $L_x L_z / 4 = \Sigma / 4$:

$$\bar{S}_{vv}(\omega) = \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\Sigma} \sum_{m,n} \frac{\omega^2 |F_{mn}(\mathbf{k})|^2}{M_{mn}^2 |\omega_{mn}^2 - j\eta\omega_{mn}\omega - \omega^2|^2} \Phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \tag{A.12}$$

ce qui est l'équation de la vitesse quadratique moyenne pour une plaque plane mince rectangulaire.

ANNEXE B

Calculs de paramètres de CLT avec XFOIL

Dans cette partie, nous montrons comment les paramètres de CLT ont été estimés avec XFOIL. Cette annexe peut servir de tutoriel pour toute personne cherchant à prendre en main le logiciel. Pour une explication détaillée du fonctionnement du logiciel, se reporter au manuel utilisateur [44].

XFOIL est un logiciel utilisé pour le design et l'analyse de profils en deux dimensions en écoulement subsoniques. Nous nous concentrerons ici sur le calcul des paramètres de couche limite (laminaire ou turbulente) parmi d'autres fonctionnalités du logiciel. Celui-ci se présente sous la forme de menus à travers lesquels l'utilisateur navigue en entrant des commandes texte, souvent de quatre lettres. À tout moment, il est possible de taper un point d'interrogation ? dans la console pour afficher la liste des commandes disponibles. Le point . derrière un nom de commande indique que celle-ci ouvre un sous-menu. Un retour chariot (appuyer sur la touche Entrée) permet de sortir d'un sous-menu et de revenir au menu parent.

Chargement d'un profil

Le profil étudié peut être spécifié par la commande `naca` suivie de la désignation à 4 ou 5 chiffres ou en chargeant un profil personnalisé avec la commande `load` suivie d'un nom de fichier, au format `.dat`. Dans ce cas, les coordonnées en 2-D des nœuds constituant le pourtour du profil doivent être notées sous la forme suivante :

Airfoil name	#	string
X(1)	Y(1)	
X(2)	Y(2)	
⋮	⋮	

Les lignes commençant par # sont reconnues comme des commentaires. Les coordonnées (X, Y) partent du bord de fuite, remontent jusqu'au bord d'attaque avant de revenir au bord de fuite, en commençant par parcourir l'intrados ou l'extrados au choix.

Nombre de Reynolds et corde du profil

L'écoulement est caractérisé par le nombre de Reynolds et le nombre de Mach. La corde du profil est donnée dans les coordonnées des nœuds du profil chargé avec la commande `load`. Dans le cas où le profil n'a pas la bonne corde, il est possible de redimensionner le profil avec la commande dédiée `scal`.

Transition couche turbulente laminaire/turbulente

Dans XFOIL, la transition entre la couche limite laminaire et turbulente est peut être déclenchée de deux manières. La transition naturelle est gérée par le paramètre "Ncrit", qui est indicateur de la turbulence de l'écoulement. La valeur par défaut de ce paramètre est de 9 pour un tunnel aérodynamique. Pour un environnement turbulent, le paramètre doit être plus faible. En eau, une valeur de 3 est recommandée. La transition peut également être forcée plus tôt par la commande `xtr`, dans le menu `vpar` en précisant la localisation de la transition pour l'extrados et l'intrados en fraction de la corde du profil, la valeur 0 étant proscrite (valeur par défaut 1).

Angle d'attaque

Dans le menu de calcul `oper`, une fois que les nombres de Reynolds et Mach ont été précisés, la commande `alfa` permet d'imposer un angle d'attaque (en degré) et de lancer le calcul. Pour des angles d'attaque non nul, il est conseillé d'utiliser la commande `aseq`, qui permet de lancer une séquence d'angles d'attaque, afin de faire varier celui-ci progressivement.

Exemple de commande d'entrée pour un calcul avec XFOIL

Une série de commande permettant d'effectuer un calcul de paramètres de CLT est présenté dans la Table B.1. Les commandes `dump` et `cpwr` permettent, après calcul, de créer des fichiers contenant les paramètres pour chaque nœud du profil.

Format de sortie des paramètres de couche limite

Les paramètres de CLT doivent être récupérés dans deux fichiers. Le fichier "dump" contient, pour chaque nœud, les coordonnées x et y , l'abscisse curviligne s , le ratio de vitesses U_e/U_0 , l'épaisseur de déplacement δ^* , la quantité de mouvement θ et le coefficient de frottement C_f . Le fichier "cpwr" contient le coefficient de pression C_p .

Parmi les paramètres de CLT fournis dans le fichier "dump" ne figure pas l'épaisseur de couche limite δ , car celle-ci n'est pas directement calculée par XFOIL. Une formule donnée par Drela et Giles [43] permet de l'estimer à partir de l'épaisseur de déplacement et du moment d'épaisseur de la couche limite :

$$\delta = \theta \left(3.15 + \frac{1.72}{H-1} \right) + \delta^*, \quad (\text{B.1})$$

```

load chemin/profil.dat
gdes                # ouvre le menu de géométrie
scal 0.3            # multiplie les dimensions du profil par 0.3
exec                # appliquer les modifications
                   # retour chariot, sortir du menu gdes

oper
iter 100           # nombre maximum d'itérations
vpar               # ouvre le menu des paramètres de couche limite
xtr .001 .001     # définit une transition laminaire/turbulente à 0.1% de la corde
N 3                # modifie le paramètre Ncrit pour la gestion de la transition
                   # sortir du menu vpar

visc 8.0e6         # spécifie un nombre de Reynolds / fluide visqueux
mach 5.33e-3       # spécifie un nombre de Mach
aseq 0 2 0.2       # séquence d'angle d'attaque, de 0° à 2° avec un pas de 0.2°
dump nomdefichier # crée un fichier contenant X, Y, Ue/U0, delta_star, theta, Cf, H
cpwr nomdefichier # crée un fichier contenant Cp
                   # sortir du menu oper, retour menu principal
quit               # fermer XFOIL

```

TABLE B.1 – Instructions pour effectuer un calcul avec XFOIL

où $H = \delta^*/\theta$ est le paramètre de forme.

Le cisaillement τ quand à lui s'obtient à partir du coefficient de frottement C_f :

$$\tau = \frac{1}{2}\rho U_0^2 C_f. \quad (\text{B.2})$$

Finalement, le gradient de pression dp/dx s'obtient à partir du coefficient de pression C_p , que l'on trouve dans le fichier "cpwr" :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \frac{dC_p}{dx}. \quad (\text{B.3})$$

La dérivée du coefficient de pression est estimée par un schéma à l'ordre 1 avec un pas irrégulier :

$$\frac{dC_p}{dx}(i) = \frac{C_p(i+1) - C_p(i-1)}{x(i+1) - x(i-1)} + \mathcal{O}(x), \quad (\text{B.4})$$

où i est l'indice du nœud.

ANNEXE C

Compléments sur les cas présentés avec la méthode SDT

Applications avec d'autres configurations d'épaisseur

Afin de justifier le choix d'une plaque d'épaisseur variable dans les cas montrés dans les chapitres 3 et 4, des calculs complémentaires sont donnés dans cette annexe. Ceux-ci n'avaient pas été abordés dans les articles par soucis de concision. Ils consistent en deux nouveaux calculs de vitesse vibratoire proches du cas final présenté (paramètres de CLT donnés par le modèle analytique de l'Eq. (3.43) utilisés avec les spectres de Goody et Mellen).

Premièrement un calcul pour une plaque équivalente avec une épaisseur constante, afin de démontrer la nécessité d'un ajout de variation d'épaisseur. Le processus de calcul est identique et une analyse modale d'une plaque de 4 mm d'épaisseur (moyenne de l'épaisseur de la plaque utilisée) est réalisée sur NASTRAN avec le même maillage.

Le deuxième utilise la plaque avec une épaisseur variant linéairement de 2.5 mm à 5.5 mm (utilisée dans le chapitre 3), mais retournée suivant l'axe \bar{x} . Ce calcul permet de justifier le choix du sens de la variation d'épaisseur dans l'application numérique. Les plaques sont représentées sur la Fig. C.1.

On rappelle ici les préliminaires du calcul. Pour la méthode SDT, le nombre d'onde de coupure du domaine d'intégration est fixé $\bar{k} = 1.3 \times k_f$, avec k_f calculé pour la plus petite épaisseur ($h = 2.5$ mm ou 4 mm selon le cas). En utilisant le critère de l'Eq. (3.42), on obtient 5 zones à par-

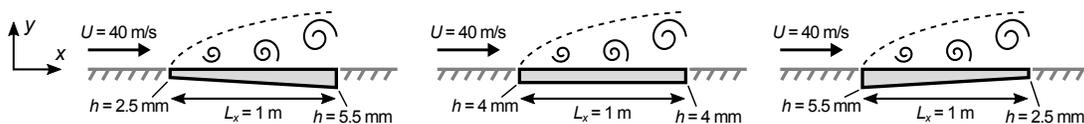


FIGURE C.1 – Configurations de l'épaisseur de la plaque rectangulaire.

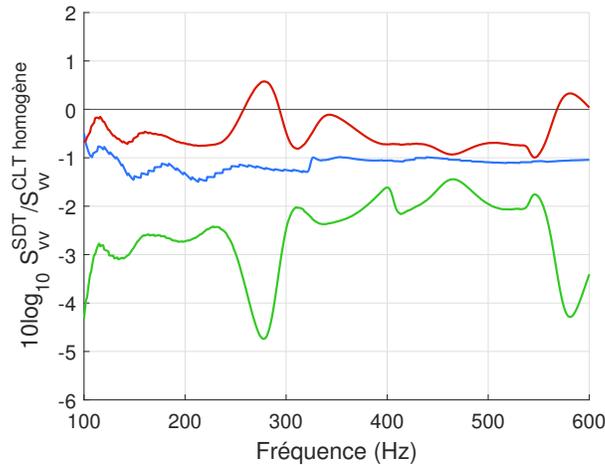


FIGURE C.2 – Écart entre la méthode SDT (avec terme d'interaction - 5 zones) et la méthode nombre d'onde (paramètres de CLT moyennés sur la plaque).
Vert : plaque à épaisseur croissante ; bleu : épaisseur constante ; rouge : épaisseur décroissante.

5 zones	6 zones	7 zones	8 zones	9 zones	10 zones
90 Hz	129 Hz	176 Hz	230 Hz	291 Hz	359 Hz

TABLE C.1 – Évolution possible du nombre de zones en fonction de la fréquence respectant le critère donné par l'Eq (3.42).

tir de 90 Hz. Par ailleurs, pour pouvoir négliger le rôle du pic convectif, on se place au-dessus de $3 \times f_{\text{coinc}} = 97 \text{ Hz}$ (pour $U_c = 0.7 \times U_0 = 28 \text{ m/s}$). Les résultats sont donc montrés à partir de 100 Hz, soit à partir du deuxième mode pour les deux plaques (116 Hz et 118 Hz).

Pour la plaque d'épaisseur constante, on observe une différence de niveau globale (environ 1 dB). À cause de la réponse sous forme de superposition modale et de la régularité spatiale des déformées (produit de fonctions sinus dans les deux directions), la non-homogénéité de l'excitation n'a pas d'effet significatif. Une plaque d'épaisseur variable est ensuite proposée pour tenter d'accentuer l'effet de l'évolution spatiale.

Pour la plaque d'épaisseur décroissante (allant de 5.5 mm à 2.5 mm), les déformées à 279 Hz et 581 Hz se distinguent sur la courbe (voir section 3.6.3 et Fig. 3.18). L'effort appliqué par la CLT étant concentré sur la deuxième moitié de la plaque et donc sur les ventres de ces déformées (la plaque étant retournée selon \vec{x}), ceux-ci sont d'autant plus excités par la CLT non-homogène. Avec la plaque d'épaisseur décroissante, l'effet de la non-homogénéité de l'excitation est encore plus visible.

Précision sur le nombre de zones avec la SDT

Par ailleurs, le découpage en zones selon les critères donnés par les Eq. (3.41) et (3.42) dépend de la fréquence à travers k_f . La taille de zone peut être recalculée à chaque fréquence selon le \bar{k} pour définir un nouveau nombre de zones (les calculs présentés sont réalisés avec un nombre constant de 5 zones). Dans la Table C.1 on donne le nombre de zones en fonction de la fréquence pour le cas présenté ci-dessus (plaque en aluminium de 1 m de long avec épaisseur variant de 2.5 à 5.5 mm).

Bibliographie

- [1] *HyperMesh 14.0 User Guide*. Altair Engineering Inc., Troy, MI, USA, 2015.
- [2] R. Amiet. Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *Journal of Sound and Vibration*, 41(4) :407–420, 1975.
- [3] B. Arguillat, D. Ricot, G. Robert, et C. Bailly. Measurements of the wavenumber-frequency spectrum of wall pressure fluctuations under turbulent flows. In *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Mai 2005.
- [4] B. Arguillat, D. Ricot, C. Bailly, et G. Robert. Measured wavenumber frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 128(4) :1647–1655, 2010.
- [5] M. Aucejo. *Vibro-acoustique des structures immergées sous écoulement turbulent*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, Novembre 2010.
- [6] M. Aucher. Hélices marines. In *Ingénierie des transports | Transport fluvial et maritime*. Techniques de l'ingénieur, 1996.
- [7] J.-P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [8] A. Berry. A new formulation for the vibrations and sound radiation of fluid-loaded plates with elastic boundary conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(2) :889–901, 1994.
- [9] A. Berry, J.-L. Guyader, et J. Nicolas. A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(6) :2792–2802, 1990.
- [10] A. Berry, O. Robin, F. Franco, S. De Rosa, et G. Petrone. Similitude laws for the sound radiation of flat orthotropic flexural panels. *Journal of Sound and Vibration*, 489 :115636, 2020.

- [11] M. Berton. *Modélisation de la réponse vibro-acoustique d'une structure excitée par une couche limite turbulente en présence d'un gradient de pression statique*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, France, Juillet 2014.
- [12] M. Berton, L. Maxit, D. Juvé, et C. Audoly. Réponse vibro-acoustique d'une structure excitée par une couche limite turbulente : vers la prise en compte de l'évolution spatiale de la CLT. In *Congrès Français d'Acoustique*, pages 1455–1461, Avril 2014.
- [13] W. K. Blake. Turbulent boundary-layer wall-pressure fluctuations on smooth and rough walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(4) :637–660, 1970.
- [14] W. K. Bonness, D. E. Capone, et S. A. Hambric. Low-wavenumber turbulent boundary layer wall-pressure measurements from vibration data on a cylinder in pipe flow. *Journal of Sound and Vibration*, 329(20) :4166–4180, 2010.
- [15] T. F. Brooks, D. S. Pope, et M. A. Marcolini. Airfoil self-noise and prediction. Technical Report NASA RP-1218, NASA, Juillet 1989.
- [16] M. K. Bull. Wall-pressure fluctuations associated with subsonic turbulent boundary layer flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 28(4) :719–754, 1967.
- [17] M. K. Bull. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers : some reflections on forty years of research. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :299–315, 1996.
- [18] A. Caiazzo, R. D'Amico, et W. Desmet. A generalized Corcos model for modelling turbulent boundary layer wall pressure fluctuations. *Journal of Sound and Vibration*, 372 :192–210, 2016.
- [19] S. Candel. *Mécanique des fluides - Cours*. Dunod, Paris, France, 2ème édition, 1990.
- [20] A. Carcaterra et A. Sestieri. Energy density equations and power flow in structures. *Journal of Sound and Vibration*, 188(2) :269–282, 1995.
- [21] D. Chase. Modeling the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 70(1) :29–67, 1980.
- [22] D. Chase. The character of the turbulent wall pressure spectrum at subconvective wavenumbers and a suggested comprehensive model. *Journal of Sound and Vibration*, 112(1) :125–147, 1987.
- [23] F. Chevalier, B. Saussereau, et E. Honoré. Numerical approach for propeller blade vibration noise prediction. In *International Conference on Advances and Challenges in Marine Noise and Vibration*, Septembre 2012.
- [24] E. Ciappi et F. Magionesi. Characteristics of the turbulent boundary layer pressure spectra for high-speed vessels. *Journal of Fluids and Structures*, 21 :321–333, 2005.
- [25] E. Ciappi, F. Magionesi, S. De Rosa, et F. Franco. Hydrodynamic and hydroelastic analyses of a plate excited by the turbulent boundary layer. *Journal of Fluids and Structures*, 25 :321–342, 2009.

- [26] E. Ciappi, F. Magionesi, S. De Rosa, et F. Franco. Analysis of the scaling laws for the turbulence driven panel responses. *Journal of Fluids and Structures*, 32 :90–103, 2012.
- [27] E. Ciappi, S. De Rosa, F. Franco, P. Vitiello, et M. Miozzi. On the dynamic behavior of composite panels under turbulent boundary layer excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 364 : 77–109, 2016.
- [28] R. Ciskowski et C. Brebbia, editors. *Boundary Element Methods in Acoustics*. Computational Mechanics Publications et Elsevier Applied Science, 1991.
- [29] A. Clot, J. Meggitt, R. Langley, A. Elliott, et A. Moorhouse. Development of a hybrid FE-SEA-experimental model. *Journal of Sound and Vibration*, 452 :112–131, 2019.
- [30] E. Cohen et X. Gloerfelt. Influence of pressure gradients on wall pressure beneath a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 838 :715–758, 2018.
- [31] R. K. Cook, R. Waterhouse, R. Berendt, S. Edelman, et M. Thompson. Measurements of correlation coefficients in reverberant sound fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 27(6) :1072–1077, 1955.
- [32] G. Corcos. The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(3) :353–378, 1964.
- [33] V. Cotoni, P. Shorter, et R. Langley. Numerical and experimental validation of a hybrid finite element-statistical energy analysis method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122 (1) :259–270, 2007.
- [34] C. Coutinho, A. Baptista, et J. Rodrigues. Reduced scale model based on similitude theory : A review up to 2015. *Engineering Structures*, 119 :81–94, 2016.
- [35] O. Czygan et O. von Estorff. Fluid-structure interaction by coupling BEM and nonlinear FEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26 :773–779, 2002.
- [36] S. De Rosa et F. Franco. Exact and numerical responses of a plate under a turbulent boundary layer excitation. *Journal of Fluids and Structures*, 24 :212–230, 2008.
- [37] S. De Rosa et F. Franco. A scaling procedure for the response of an isolated system with high modal overlap factor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :1549–1565, 2008.
- [38] S. De Rosa, F. Franco, et E. Ciappi. PEDE^M : a new method for the analysis of the stochastic response. *Aerotecnica Missili & Spazio*, 92(3-4) :87–93, 2013.
- [39] S. De Rosa, F. Franco, et E. Ciappi. A simplified method for the analysis of the stochastic response in discrete coordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 339 :359–375, 2015.
- [40] G. Dhatt et G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Éditeur Paris et Les Presses de l'Université Laval Québec, 1981.
- [41] M. Drela. *Two-dimensional transonic aerodynamic design and analysis using the Euler equations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, MA, USA, Décembre 1985.

- [42] M. Drela. XFOIL : an analysis and design system for low Reynolds number airfoils. In *Conference on low Reynolds number airfoil aerodynamics*, June 1989.
- [43] M. Drela et M. B. Giles. Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 25(10) :1347–1355, 1987.
- [44] M. Drela et H. Youngren. *XFOIL 6.9 User Primer*, Novembre 2001.
- [45] B. Efimtsov. Characteristics of the field of turbulent wall pressure fluctuations at large Reynolds numbers. *Sov Phys Acoust*, 30(1) :289–292, 1982.
- [46] N. D. Evans, D. E. Capone, et W. K. Bonness. Low-wavenumber turbulent boundary layer wall-pressure measurements from vibration data over smooth and rough surfaces in pipe flows. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :3463–3473, 2013.
- [47] F. Fahy. Statistical Energy Analysis : a critical overview. *Philosophical transactions of the Royal Society A*, 346 :431–447, 1994.
- [48] F. Fahy. Some applications of the reciprocity principle in experimental vibroacoustics. *Acoustical Physics*, 49(2) :217–229, 2003.
- [49] P. Filippi, C. Maury, D. Habault, et P.-O. Mattei. The role of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure. *Journal of Sound and Vibration*, 239(4) :639–663, 2001.
- [50] S. Finnveden, F. Birgersson, U. Ross, et T. Kremer. A model of wall pressure correlation for prediction of turbulence-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 20(8) :1127–1143, 2005.
- [51] F. Franco, S. De Rosa, et E. Ciappi. Numerical approximations of the predictive responses of plates under stochastic and convective loads. *Journal of Fluids and Structures*, 42 :296–312, 2013.
- [52] F. Franco, O. Robin, E. Ciappi, S. De Rosa, A. Berry, et G. Petrone. Similitude laws for the structural response of flat plates under a turbulent boundary layer excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 129 :590–613, 2019.
- [53] *Actran 19.1 User's Guide, Volume 1 : Installation, Operations, Theory and Utilities*. Free Field Technologies SA, Mont-Saint-Guibert, Belgique, Mai 2019.
- [54] *Actran 19.1 User's Guide, Volume 2 : Extended DAT Input File Syntax*. Free Field Technologies SA, Mont-Saint-Guibert, Belgique, Mai 2019.
- [55] R. Gao, Y. Zhang, et D. Kenedy. A hybrid boundary element-statistical energy analysis for the mid-frequency vibration of vibro-acoustic systems. *Computers and Structures*, 203 :34–42, 2018.
- [56] L. Gaul et W. Wenzel. A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26 :629–636, 2002.

- [57] J. Gershfeld. Leading edge noise from thick foils in turbulent flows. *Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3) :1416–1426, 2004.
- [58] S. Ghosal et P. Moin. The basic for the Large Eddy Simulation of turbulent flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 118 :24–37, 1995.
- [59] M. Goody. Empirical spectra model of surface pressure fluctuations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 42(9) :1788–1794, 2004.
- [60] W. Graham. A comparison of models for the wavenumber-frequency spectrum of turbulent boundary layer pressures. *Journal of Sound and Vibration*, 206(4) :541–565, 1997.
- [61] C. Guillon, L. Maxit, et E. Redon. Modeling vibrating panels excited by a non-homogeneous turbulent boundary layer. *Journal of Fluids and Structures*, 116 :103378, 2021.
- [62] J.-L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermès Science Publications, Paris, France, 2002.
- [63] S. A. Hambric, Y. Hwang, et W. K. Bonness. Vibrations of plates with clamped and free edges excited by low-speed turbulent boundary layer flow. *Journal of Fluids and Structures*, 19 : 93–110, 2004.
- [64] J.-B. Han, S.-Y. Hong, et J.-H. Song. Energy flow model for thin plate considering fluid loading with mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :5326–5346, 2012.
- [65] C. Hong et K.-K. Shin. Modeling of wall pressure fluctuations for finite element structural analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :1673–1685, 2010.
- [66] Y. Hwang, W. K. Bonness, et S. A. Hambric. Comparison of semi-empirical models for turbulent boundary layer wall pressure spectra. *Journal of Sound and Vibration*, 319 :199–217, 2009.
- [67] M. Ichchou, B. Hiverniau, et B. Troclet. Equivalent ‘rain on the roof’ loads for random spatially correlated excitations in the mid-high frequency range. *Journal of Sound and Vibration*, 322 : 926–940, 2009.
- [68] M. Karimi, P. Croaker, L. Maxit, O. Robin, A. Skvortsov, S. Marburg, et N. Kessissoglou. A hybrid numerical approach to predict the vibrational responses of panels excited by a turbulent boundary layer. *Journal of Fluids and Structures*, 92 :102814, 2020.
- [69] M. Karimi, L. Maxit, V. Meyer, S. Marburg, et R. Kirby. Non-negative intensity for planar structures under stochastic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 488 :115652, 2020.
- [70] S. H. Ko. Performance of various shapes of hydrophones in the reduction of turbulent flow noise. *Journal of the Acoustical Society of America*, 93(3) :1293–1299, 1993.
- [71] R. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3) :483–502, 1992.

- [72] R. Langley. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4) :637–657, 1995.
- [73] B. Lapeyre, E. Pardoux, et R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer, 1998.
- [74] M. Lax. The effect of radiation on the vibrations of a circular diaphragm. *Journal of the Acoustical Society of America*, 16(1) :5–13, 1944.
- [75] A. Le Bot. Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4) :637–647, 1998.
- [76] A. Le Bot. *Foundation of statistical energy analysis in vibroacoustics*. Oxford University Press, 2015.
- [77] D. Leclercq et X. Bohineust. Investigation and modelling of the wall pressure field beneath a turbulent boundary layer at low and medium frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 257(3) :477–501, 2002.
- [78] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas, et W. Bi. Extraction of the acoustic component of a turbulent flow exciting a plate by inverting the vibration problem. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2505–2519, 2014.
- [79] Y.-T. Lee, W. K. Blake, et T. M. Farabee. Modeling of wall pressure fluctuations based on time mean flow field. *Journal of Fluids Engineering*, 127 :233–240, 2005.
- [80] W. Li et H. Gibeling. Determination of the mutual radiation resistances of a rectangular plate and their impact on the radiated sound power. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5) :1213–1233, 2000.
- [81] J. Lin, Y. Zhang, et Y. Zhao. Pseudo Excitation Method and some recent developments. *Procedia Engineering*, 14 :2453–2458, 2011.
- [82] Q.-H. Liu et J. Tao. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :2072–2082, 1997.
- [83] Y. Liu. On the BEM for acoustic wave problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 107 :53–62, 2019.
- [84] X. Lurton. *Acoustique sous-marine*. Édition IFREMER, Plouzané, France, 1998.
- [85] B. Mace. Statistical energy analysis, energy distribution models and system nodes. *Journal of Sound and Vibration*, 264 :391–409, 2003.
- [86] F. Magionesi, E. Ciappi, R. Camussi, T. Pagliaroli, A. Di Mascio, B. Imperatore, et A. Marino. Measurement and modeling of turbulent boundary layer excitation for naval and aeronautical applications. In *Noise and Vibration : Emerging Methods*, Avril 2012.
- [87] G. Maidanik. Use of delta function for the correlations of pressure fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 30(11) :1598–1606, 1961.

- [88] G. Maidanik et D. Jorgensen. Boundary wave-vector filters for the study of the pressure field in a turbulent boundary layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42(2) :494–501, 1967.
- [89] C. Marchetto. *Caractérisation expérimentale de la réponse vibro-acoustique de panneaux sous excitations aléatoires par mesure de fonctions de sensibilité*. PhD thesis, Sherbrooke University, Québec, Canada, Décembre 2017.
- [90] C. Marchetto, L. Maxit, O. Robin, et A. Berry. Vibroacoustic response of panels under diffuse acoustic field excitation from sensitivity functions and reciprocity principles. *Journal of the Acoustical Society of America*, 141(6) :4508–4521, 2017.
- [91] C. Marchetto, L. Maxit, O. Robin, et A. Berry. Experimental prediction of the vibration response of panels under a turbulent boundary layer excitation from sensitivity functions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 143(5) :2954–2964, 2018.
- [92] N. C. Martin et P. Leehey. Low wavenumber wall pressure measurements using a rectangular membrane as a spatial filter. *Journal of Sound and Vibration*, 52(1) :95–120, 1977.
- [93] C. Maury, P. Gardonoio, et S. Elliott. A wavenumber approach to modelling the response of a randomly excited panel, part I : general theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(1) : 83–113, 2002.
- [94] J. Max et J.-L. Lacoume. *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod, Paris, France, 5ème édition, 2000.
- [95] L. Maxit. Simulation of the pressure field beneath a turbulent boundary layer using realizations of uncorrelated plane waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 140(2) :1268–1285, 2016.
- [96] L. Maxit et C. Audoly. Hydrodynamic noise prediction inside a sonar dome : injected power estimation from the wavevector-frequency spectrum of turbulent wall pressure. In *Noise and Vibration : Emerging Methods*, Avril 2005.
- [97] L. Maxit et V. Denis. Prediction of flow induced sound and vibration of periodically stiffened plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1) :146–160, 2013.
- [98] L. Maxit et J.-L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :907–930, 2001.
- [99] L. Maxit et J.-L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part II : numerical applications. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :931–948, 2001.
- [100] L. Maxit, C. Cacciolati, et J.-L. Guyader. Airborne noise prediction using patch acoustic impedance. In *9th International Congress on Sound and Vibration*, 2002.

- [101] L. Maxit, M. Aucejo, et J.-L. Guyader. Improving the Patch Transfer Function approach for fluid-structure modelling in heavy fluid. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134, 2012.
- [102] L. Maxit, M. Berton, C. Audoly, et D. Juvé. Discussion about different methods for introducing the turbulent boundary layer excitation in vibroacoustics models. In *Flinovia - Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects*, pages 249–278, Cham, Switzerland, 2015. Springer.
- [103] L. Maxit, M. Karimi, V. Meyer, et N. Kessissoglou. Vibroacoustic responses of a heavy fluid loaded cylindrical shell excited by a turbulent boundary layer. *Journal of Fluids and Structures*, 92, 2020.
- [104] R. H. Mellen. On modeling convective turbulence. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(6) :2891–2893, 1990.
- [105] T. Miller. *Turbulent boundary layer models for acoustic analysis*. PhD thesis, Wichita State University, KS, USA, Mai 2011.
- [106] G. Müller et M. Buchschmid. Hybrid approaches for vibroacoustical problems based on the finite element method and statistical energy analysis. *Wave Motion*, 51 :622–634, 2014.
- [107] *MSC Natran Quick Reference Guide*. MSC Software, Newport Beach, CA, USA, Décembre 2017.
- [108] Y. Na et P. Moin. The structure of wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 377 :347–373, 1998.
- [109] S. Nagarajan, S. K.L., et J. Ferziger. A robust high-order compact method for large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 191 :392–419, 2003.
- [110] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Review*, 55(4) :299–324, 2002.
- [111] R. Ohayon. Reduced models for fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :139–152, 2004.
- [112] G. Orefice, C. Cacciolati, et J. Guyader. The energy mobility. *Journal of Sound and Vibration*, 254(2) :269–295, 2002.
- [113] D. Palumbo. Determining correlation and coherence lengths in turbulent boundary layer flight data. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :3721–3737, 2012.
- [114] J. Park, T. Siegmund, et L. Mongeau. Analysis of the flow-induced vibrations of viscoelastically supported rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 261 :225–245, 2003.
- [115] L. Peltier et S. A. Hambric. Estimating turbulent-boundary-layer wall-pressure spectra from CFD RANS solutions. *Journal of Fluids and Structures*, 23 :920–937, 2007.
- [116] Q. Qi et T. L. Geers. Evaluation of the Perfectly Matched Layer for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 139 :166–183, 1998.

- [117] Y. Rozenberg, G. Robert, et S. Moreau. Wall-pressure spectral model including the adverse pressure gradient effects. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 50(10) : 2168–2179, 2012.
- [118] E. Salze, C. Bailly, O. Marsden, E. Jondeau, et D. Juvé. An experimental characterization of wall pressure wavevector-frequency spectra in the presence of pressure gradients. In *20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, page 2909, Juin 2014.
- [119] E. Salze, C. Bailly, O. Marsden, E. Jondeau, et D. Juvé. An experimental investigation of wall pressure fluctuations beneath pressure gradients. In *21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Juin 2015.
- [120] M. Sanders. *The Boundary Layer over a Flat Plate*. Bachelor thesis, University of Twente, Netherland, Juillet 2014.
- [121] H. Schlichting et K. Gersten. *Boundary-Layer Theory*. Springer, Berlin Heidelberg, Allemagne, 9ème édition, 2017.
- [122] R. H. Schloemer. Effects of pressure gradients on turbulent-boundary-layer wall-pressure fluctuations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42 :93–113, 1967.
- [123] P. Shorter et R. Langley. Vibro-acoustic analysis of complex structure. *Journal of Sound and Vibration*, 288 :669–699, 2005.
- [124] R. Simpson, M. Ghodbane, et M. B.E. Surface pressure fluctuations in a separating turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :167–186, 1987.
- [125] A. Smol'yakov. Calculation of the spectra of pseudosound wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers. *Acoustical Physics*, 46(3) :342–447, 2000.
- [126] A. Smol'yakov. A new model for the cross spectrum and wavenumber-frequency spectrum of turbulent pressure fluctuations in a boundary layer. *Acoustical Physics*, 52(3) :393–400, 2006.
- [127] D. Soares et L. Godinho. An optimized BEM-FEM iterative coupling algorithm for acoustic-elastodynamic interaction analyses in the frequency domain. *Computers and Structures*, 106-107 :68–80, 2012.
- [128] D. Soares, O. von Estorff, et W. Mansur. Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses. *Computational Mechanics*, 34 :67–73, 2004.
- [129] C. Soize. A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 95(2) :849–865, 1993.
- [130] W. A. Strawderman. Turbulence-induced plate vibrations : an evaluation of finite- and infinite-plate models. *Journal of the Acoustical Society of America*, 46(5) :1294–1307, 1969.
- [131] W. A. Strawderman et R. Christman. Turbulence-induced plate vibrations : some effects of fluid loading on finite and infinite plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 52(5) : 1537–1552, 1972.

- [132] N. Totaro et J. Guyader. Extension of the statistical modal energy distribution analysis for estimating energy density in coupled subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :3114–3129, 2012.
- [133] V. H. Vu, M. Thomas, A. Lakis, et L. Marcouiller. Effect of added mass on submerged vibrated plates. In *25th Seminar on Machinery Vibration*, Janvier 2007.
- [134] J. Wandinger. A symmetric Craig-Bampton method of coupled fluid-structure systems. *Engineering Computations*, 15(4) :450–461, 1998.
- [135] W. Willmarth et C. Wooldridge. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(2) :187–210, 1962.
- [136] L. Wittig et A. Sinha. Simulation of multicorrelated random processes using the FFT algorithm. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58(3) :630–634, 1975.
- [137] J. Woodhouse. An approach to the theoretical background of statistical energy analysis is applied to structural vibration. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69(6) :1695–1709, 1981.
- [138] Z. Wu, X. Ma, P. Brett, et J. Xu. Vibration analysis of submerged rectangular microplates with distributed mass loading. *Proceedings of The Royal Society*, 465 :1323–1336, 2009.
- [139] Y. Xu, W. Zhang, J. Ko, et J. Lin. Pseudo-excitation method for vibration analysis of wind-excited structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 83 :443–454, 1999.
- [140] Y. Yan, P. Li, et H. Lin. Analysis and experimental validation of the middle-frequency vibro-acoustic coupling property for aircraft structural model based on the wave coupling hybrid FE-SEA method. *Journal of Sound and Vibration*, 371 :227–236, 2016.
- [141] W. Zhang, A. Wang, et N. Vlahopoulos. An alternative energy finite element formulation based on incoherent orthogonal waves and its validation for marine structures. *Finite Element in Analysis and Design*, 38 :1095–1113, 2002.
- [142] W. Zhang, A. Wang, N. Vlahopoulos, et K. Wu. High-frequency vibration analysis of thin elastic plates under heavy fluid loading by an energy finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 263 :21–46, 2003.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON.

NOM : Guillon

DATE de SOUTENANCE : 06/10/2022

Prénom : Corentin

TITRE : Développement de différentes méthodes pour la prise en compte de couches limites turbulentes non-homogènes dans les simulations vibro-acoustiques

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2022ISAL0079

Ecole doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Acoustique

RÉSUMÉ : L'objectif de cette thèse est de développer des approches permettant de prendre en compte l'évolution spatiale de la couche limite turbulente (CLT) dans les calculs prédisant le comportement vibro-acoustique de structures déformables excitées par un écoulement. L'application finale visée est la prédiction du bruit rayonné par les pales d'un propulseur de véhicule sous-marin. Or, les modèles vibro-acoustiques disponibles dans la littérature, généralement employés pour des structures de grandes dimensions et faibles courbure, font l'hypothèse de CLT uniformément développées et homogènes. Pour notre application, la rapide croissance de la CLT, déclenchée au bord d'attaque de la pale, doit être prise en compte dans les calculs. En repartant de cas de plaques planes excitées par des CLT homogènes, des méthodes existantes ont été adaptées aux CLT non-homogènes, en réalisant certaines hypothèses. D'abord en espace, en exploitant la faible corrélation spatiale du champ de pressions pariétales, puis dans le domaine des nombres d'onde, en découpant la surface excitée en plusieurs zones. La dernière approche présentée repose sur la synthèse des champs de pression par des séries d'ondes planes pariétales décorrélées (OPPD) et permet de traiter l'évolution de la CLT non-homogène de manière continue (C-OPPD). L'intérêt de la prise en compte de la variation spatiale des paramètres de CLT est mis en avant pour le cas d'une plaque plane mince d'épaisseur variable soumise à une CLT déclenchée sur l'arrête amont. Dans le dernier chapitre, on applique la méthode C-OPPD à un cas de pale de propulseur simplifiée, placée en eau, excitée par une CLT non-homogène et rayonnant dans un milieu infini. Pour cette application plus pratique, les paramètres de la CLT sur le profil sont déterminés à l'aide de XFOIL et le problème est modélisé par éléments finis, en prenant en compte l'effet de couplage entre le fluide lourd et la structure déformable.

MOTS-CLÉS : Couche limite turbulente, vibro-acoustique, couplage fluide-structure, réponse vibratoire, rayonnement acoustique, XFOIL, synthèse de champs de pression, excitation non-homogène

Laboratoire de recherche : Laboratoire Vibrations Acoustique (LVA)

Directeur de thèse : Laurent Maxit

Président de jury : xxx

Composition du jury : Perrey-Debain Emmanuel (rapporteur), Berry Alain (rapporteur), Gobert Marie-Laure (examinatrice), Totaro Nicolas (examineur), Maxit Laurent (directeur de thèse), Redon Emmanuel (examineur)