



**HAL**  
open science

# Spectre ordonné et branches analytiques d'une surface qui dégénère sur un graphe

Franchel Gatse

► **To cite this version:**

Franchel Gatse. Spectre ordonné et branches analytiques d'une surface qui dégénère sur un graphe. Physique mathématique [math-ph]. Université d'Orléans, 2020. Français. NNT : 2020ORLE3205 . tel-04104766

**HAL Id: tel-04104766**

**<https://theses.hal.science/tel-04104766>**

Submitted on 24 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

### *ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, PHYSIQUE THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES*

Institut Denis Poisson

**THÈSE** présentée par :

**Franchel GATSE**

soutenue le 11 septembre 2020

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : Mathématiques

Spectre ordonné et branches analytiques  
d'une surface qui dégénère sur un graphe

**THÈSE dirigée par :**

**HILLAIRET Luc**

Professeur, Université d'Orléans

**RAPPORTEURS :**

**ANNÉ Colette**

**BESSON Gérard**

Chargée de recherches, CNRS Nantes

Directeur de recherches, CNRS Grenoble

**JURY :**

**HUMBERT Emmanuel**

**HILLAIRET Luc**

**ANNÉ Colette**

**BESSON Gérard**

**OURMIÈRES-BONAFOS Thomas**

Professeur, Université de Tours - **Président du jury**

Professeur, Université d'Orléans

Chargée de recherches, CNRS Nantes

Directeur de recherches, CNRS Grenoble

Maître de conférences, Université d'Aix-Marseille

**Franchel GATSE**

## **Spectre ordonné et branches analytiques d'une surface qui dégénère sur un graphe**

Dans ce travail, nous donnons un cadre général de surfaces riemanniennes qui dégénèrent sur des graphes métriques que nous appelons surfaces décomposables en cylindres et en jonctions.

Les surfaces décomposables en cylindres et en jonctions dépendent d'un paramètre  $t$  qui traduit le mécanisme d'écrasement sur le graphe. Quand le paramètre  $t$  tend vers 0, les circonférences des cylindres tendent vers 0 et leurs longueurs restent fixes. On obtient ainsi les arêtes du graphe limite. Les jonctions, elles sont écrasées dans toutes les directions et donc dégénèrent sur les sommets du graphe limite.

Nous étudions alors le comportement asymptotique du spectre de ces variétés lors de cette déformation. Nous adoptons les points de vue de la convergence des valeurs propres ordonnées et de celle des branches analytiques. Ces deux approches sont fondamentalement différentes. Le cas des valeurs propres ordonnées est assez classique et nous retrouvons la convergence vers le spectre du graphe limite. L'étude des branches analytiques est plus originale. Nous montrons la convergence et donnons une caractérisation des limites possibles.

Ces résultats s'appliquent dans le cas des surfaces de translations qui possèdent une direction complètement périodique.

Mots clés : Géométrie spectrale, surfaces de translation, surfaces à petits carreaux, perturbations analytiques, graphe métrique, perturbations singulières

## **Ordered spectrum and analytical branches of a surface degenerates on a metric graph**

In this work, we give a general framework of Riemannian surfaces that can degenerate on metric graphs and that we call surfaces made from cylinders and connecting pieces.

The latter depend on a parameter  $t$  that describes the degeneration. When  $t$  goes to 0, the waists of the cylinders go to 0 but their lengths stay fixed. We thus obtain the edges of the limiting graph. The connecting pieces are squeezed in all directions and degenerate on the vertices of the limiting graph.

We then study the asymptotic behaviour of the spectrum of these surfaces when  $t$  varies from two different points of view, considering the spectrum either as a sequence of ordered eigenvalues or as a collection of analytic eigenbranches. In the case of ordered eigenvalues, we recover a rather classical statement, and prove that the spectrum converges to the spectrum of the limiting object. The study of the analytic eigenbranches is more original. We prove that any such eigenbranch converges and we give a characterisation of the possible limits.

These results apply to translation surfaces on which there is a completely periodic direction.

Keywords : Spectral geometry, translation surfaces, square-tiled surfaces, analytic perturbations, metric graph, singular perturbations

**Institut Denis Poisson**  
**Rue de Chartres B.P. 6759**  
**45067 ORLEANS CEDEX 2**





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Étude des tores plats</b>	<b>12</b>
1.1 Calcul du spectre . . . . .	12
1.1.1 Valeurs propres ordonnées ou branches analytiques . . . . .	18
<b>2 Définition des objets et position du problème</b>	<b>22</b>
2.1 Graphe . . . . .	23
2.1.1 Graphe combinatoire . . . . .	23
2.1.2 Graphes métriques . . . . .	25
2.1.3 Graphes quantiques . . . . .	28
2.1.4 Condition au bord associée à $A_{G_{\Sigma}}$ . . . . .	29
2.2 Surfaces décomposables en cylindres et en jonctions associées à des graphes . . .	30
2.2.1 Dégénérer sur le graphe . . . . .	33
<b>3 Convergence des valeurs propres ordonnées</b>	<b>36</b>
3.1 Un résultat de convergence spectral . . . . .	37
3.1.1 Contrôle des normes $\mathcal{H}^1$ des fonctions propres normalisées . . . . .	38
3.1.2 Étude de la limite . . . . .	42
3.2 Preuve du théorème 3.0.1 . . . . .	44
3.2.1 Une première estimation . . . . .	44
3.2.2 Fin de la preuve . . . . .	45
<b>4 Convergence des branches analytiques</b>	<b>46</b>
4.1 Renormalisation et théorie des perturbations analytiques . . . . .	46
4.2 Limites des branches analytiques . . . . .	48
4.2.1 Formule de Feynman-Hellman . . . . .	48
4.2.2 Décomposition en séries de Fourier partielles . . . . .	49
4.2.3 Preuve du lemme 4.2.3 . . . . .	52
4.3 Étude des limites possibles . . . . .	55
4.3.1 Non-concentration dans les cylindres . . . . .	55
4.3.2 Détermination des autres limites possibles . . . . .	59
<b>5 S.e.s.c., Surfaces polygonales, Surfaces à petits carreaux, Surfaces de Trans-</b>	<b>67</b>
<b>lation</b>	
5.1 Les surfaces euclidiennes à singularités coniques . . . . .	67
5.1.1 Construire une s.e.s.c. . . . .	69
5.2 Surfaces à petits carreaux . . . . .	72
5.2.1 Présentation combinatoire . . . . .	72
5.2.2 Par les revêtements ramifiés . . . . .	74
5.2.3 Cylindres dans une surface à petits carreaux . . . . .	75

5.3	Surfaces de translation . . . . .	78
5.3.1	Cylindres dans les surfaces de translations . . . . .	80
5.3.2	Action de $SL(2, \mathbb{R})$ et surfaces de Veech . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Rappels sur les opérateurs bornés et leur théorie spectrale</b>	<b>83</b>
A.0.1	Domaine, graphe et fermeture . . . . .	83
A.0.2	Adjoint . . . . .	85
A.0.3	Opérateurs symétriques, opérateurs autoadjoints . . . . .	87
A.0.4	Spectre . . . . .	91
A.0.5	Forme quadratique . . . . .	93
A.0.6	Principe de prolongement d'applications uniformément continues . . . . .	98
A.0.7	Complétude de $\mathcal{B}(E, F)$ . . . . .	100
A.0.8	Complété d'un espace métrique . . . . .	101
A.0.9	Complété d'un espace normé . . . . .	102
A.0.10	Preuve du théorème 6.0.2 . . . . .	105
A.0.11	Propriétés spectrales associées à une forme quadratique . . . . .	107

# Résumé

Dans ce travail, nous donnons un cadre général de surfaces riemanniennes qui dégénèrent sur des graphes métriques que nous appelons surfaces décomposables en cylindres et en jonctions. Les surfaces décomposables en cylindres et en jonctions dépendent d'un paramètre  $t$  qui traduit le mécanisme d'écrasement sur des graphes. Quand le paramètre  $t$  tend vers 0, les circonférences des cylindres tendent vers 0 et leurs longueurs restent fixes. On obtient ainsi les arêtes du graphe limite. Les jonctions, elles sont écrasées dans toutes les directions et donc dégénèrent sur les sommets du graphe limite.

Nous étudions alors le comportement asymptotique du spectre de ces variétés lors de cette déformation. Nous adoptons les points de vue de la convergence des valeurs propres ordonnées et de celle des branches analytiques. Ces deux approches sont fondamentalement différentes. Le cas des valeurs propres ordonnées est assez classique et nous retrouvons la convergence vers le spectre du graphe limite. L'étude des branches analytiques est plus originale. Nous montrons la convergence et donnons une caractérisation des limites possibles.

Ces résultats s'appliquent dans le cas des surfaces de translations qui possèdent une direction complètement périodique.

## Abstract

In this work, we give a general framework of Riemannian surfaces that can degenerate on metric graphs and that we call surfaces made from cylinders and connecting pieces. The latter depend on a parameter  $t$  that describes the degeneration. When  $t$  goes to 0, the waists of the cylinders go to 0 but their lengths stay fixed. We thus obtain the edges of the limiting graph. The connecting pieces are squeezed in all directions and degenerate on the vertices of the limiting graph.

We then study the asymptotic behaviour of the spectrum of these surface when  $t$  varies from two different points of view, considering the spectrum either as a sequence of ordered eigenvalues or as a collection of analytic eigenbranches. In the case of ordered eigenvalues, we recover a rather classical statement, and prove that the spectrum converges to the spectrum of the limiting object. The study of the analytic eigenbranches is more original. We prove that any such eigenbranch converges and we give a characterisation of the possible limits.

These results apply to translation surfaces on which there is a completely periodic direction.





# Remerciement

Au moment de remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de cette thèse, le mot merci me semble moins éloquent pour exprimer le sentiment qui m'envahit. J'adresse une prière à Dieu et lui demande de les protéger et de concrétiser leurs souhaits. Néanmoins, je dois leur dire un grand merci.

Mes premiers remerciements vont s'adresser à Monsieur Luc Hillairet, qui m'a encadré tout le long de cette thèse, et même pendant mes deux années de master. C'est grâce à lui que j'ai découvert des sujets de mathématiques passionnants et que j'ai pu effectuer ce travail. Je lui témoigne toute ma gratitude pour sa disponibilité, ses conseils, ses idées et parce qu'il a su conjuguer la rigueur et l'humanité.

Il m'a laissé une totale liberté, tout en répondant présent à chacun de mes appels. un grand merci pour tout.

Je remercie les rapporteurs pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture et la proposition des corrections à apporter à cette thèse. Un grand merci au professeur Colette Anné et au professeur Gérard Besson d'avoir accepté cette charge. Je suis très honoré des remarques fructueuses et de l'expertise qu'ils ont apporté à ce travail.

Je remercie sincèrement le professeur Emmanuel Humbert pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse, mais aussi pour les conseils qu'il m'a prodigué et sa gentillesse.

Je remercie également Monsieur Thomas Ourmières-Bonafos qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

Je remercie tous les enseignants que j'ai pu croiser tout au long de mes études, un grand merci pour le savoir qu'ils m'ont apporté.

En particulier, un grand merci au professeur Jean-Phillipe Anker pour sa gentillesse et toutes les aides dont j'ai pu bénéficier de sa part.

Je remercie les professeurs Romain Abraham, Julien Barré, Nils Berglund, Jean Renault, Magali Ribot, Michel Zinsmeister.

Je remercie aussi Pierres Debs, Diarra Fall, Michele Grillot et Kim Dang Phung pour leurs conseils et tout le soutien.

Je remercie tous les doctorants que j'ai côtoyé au sein du laboratoire pour l'ambiance chaleureuse.

Je souhaite encore remercier les membres de l'administration de l'institut Denis Poisson, Madame Marie Laurence (une maman de coeur), Madame Marie France, Madame Anne Liger. Un grand merci pour leur service, gentillesse, aides, conseils et disponibilité.

A mes chers parents, Frédéric Gatse et Yvette Mouanga, pour tous les sacrifices qu'ils ont consenti pour que je fasse des études et le soutien indéfectible que j'ai eu de leur part.

A Nelicha Gatse, Gaëlle Gatse, Yvéric Gatse, Charlène Gatse, Lygie Gatse, Romy Gatse, mes frères et soeurs qui ont toujours été là.

A Dahbia Chilla, Margarete Maluka, pour leur soutien.

Un grand merci à mon frère, Gatse Koumou Ray, et sa compagne, Jocelyne Missamou, pour mes séjours à Orléans.

A mon bébé, l'amour de ma vie, Aaliyah Gatse.

# Introduction

Cette thèse porte sur certaines familles de surfaces riemanniennes qui dégènèrent sur des graphes métriques. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la façon dont le spectre dépend du paramètre qui donne la dégénérescence des surfaces sur ces graphes.

Décrivons le mécanisme dans le cadre des tores plats. La dynamique du flot géodésique associé à la métrique plate sur un tore est bien comprise. Il existe deux types de directions :

- Les directions complètement périodiques ;
- Les directions denses.

Dans une direction complètement périodique, on peut voir le tore comme une bande de géodésiques de mêmes longueurs et on peut interpréter la longueur de ces géodésiques comme le paramètre qui traduit l'écrasement du tore. Quand on fait tendre cette longueur vers 0, le tore dégènère sur un cercle (graphe métrique).

Prenons l'exemple du tore plat construit à partir du rectangle.

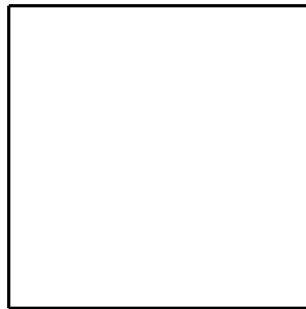


FIGURE 1 –  $\mathbf{T}_{a,b}^2 = [0; a] \times [0; b]$

Ecraser  $\mathbf{T}_{a,b}^2$  dans la direction verticale revient à se donner la famille de tores plats  $\mathbf{T}_{a,tb}^2$  construits à partir des rectangles  $[0; a] \times [0; tb]$ .

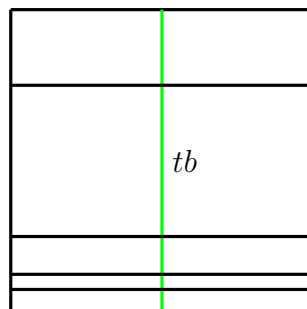


FIGURE 2 – Famille de tores  $\mathbf{T}_{a,tb}^2$

Notre objet d'étude principal sera le spectre du Laplacien associé. Dans cet exemple, on montre que les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_{m,n}^t = 4\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{(tb)^2} \right) \quad \text{avec } m, n \in \mathbb{N}.$$

On voit ainsi, que quand  $t$  tend vers 0, les premières valeurs propres sont obtenues en faisant  $n = 0$ . Elles convergent alors vers les  $4\pi^2 \frac{m^2}{a^2}$  qui est le spectre du cercle-limite.

Une autre façon d'étudier ce spectre consiste à fixer  $m$  et  $n$  et à étudier le comportement de la fonction analytique correspondante. Dans ce cas, on remarque que la branche analytique correspondant à  $(m, n)$ , renormalisée par  $t^2$  tend vers  $4\pi^2 \frac{n^2}{b^2}$  qui correspond au spectre du cercle transverse, le long duquel le tore a été écrasé.

Cet exemple met en lumière le fait que le comportement asymptotique du spectre est fondamentalement différent selon qu'on le regarde comme une suite de valeurs propres ordonnées ou comme une collection de branches analytiques.

Dans cette thèse, nous allons définir un cadre général dans lequel on peut définir ce type de dégénérescence et étudier les mêmes questions spectrales : celui des surfaces que nous avons appelé surfaces décomposables en cylindres et en jonctions.

Ces surfaces sont naturellement équipées d'une métrique plate dans les cylindres. Dans les jonctions, la métrique pourra être relativement arbitraire. Dans certains exemples, elle sera aussi plate à singularités coniques. On définira alors une déformation qui consiste à écraser les cylindres selon une direction alors que les jonctions seront elles dilatées dans toutes les directions. Ceci généralise le cas du tore précédent, et la surface s'effondre maintenant sur un graphe métrique (les arêtes viennent munies d'une longueur).

Nombre de mathématiciens se sont intéressés à ce type de perturbations singulières et aux liens entre le spectre des surfaces et l'objet limite. D'autres auteurs ont fait le chemin inverse. C'est-à-dire que pour comprendre le spectre de certains opérateurs différentiels définis sur un graphe, ils associent au graphe une surface qui s'effondre sur lui et ensuite ils essaient de comprendre comment obtenir ce spectre à partir de la surface.

Ces problèmes trouvent des applications en physique et en chimie, nous renvoyons aux références données dans les travaux de J.Rubinstein et M.Schatzman [41], P.Kuchment et H.Zeng [33], P.Exner et O.Post [14]. On peut aussi mentionner les travaux de C. Anné [1] et de K. Pankrashkin, S. Roganova et N. Yeganefar [39] pour des perturbations plus générales dans le même esprit. Tous ces travaux adoptent le point de vue des valeurs propres ordonnées. Le point de vue des branches analytiques est lui, développé notamment dans les papiers de L. Hillairet et C. Judge [24, 25, 26] et est utilisé pour démontrer des résultats spectraux génériques.

Les deux points de vue nécessitent des approches différentes. Pour la convergence des valeurs propres ordonnées, nous avons procédé en deux étapes. La première étape consiste à mettre en place un résultat de compacité pour une suite de fonctions propres associées à une suite de valeurs propres bornées. Le travail consiste alors à montrer que cette limite appartient au spectre de l'hamiltonien défini sur le graphe limite. Pour cela nous aurons besoin de théorèmes fondamentaux d'analyse hilbertienne et de théorie spectrale (injection compacte, convergence forte et faible notamment ...). On en déduit ensuite la convergence des valeurs propres ordonnées. Cette approche est légèrement différentes de celle utilisée dans [41], [33], [14] dans lesquelles on construit un opérateur de transfert qui transplante les fonctions de la surface qui s'effondre sur l'objet limite et vice-versa et qui permet de comparer les formes quadratiques de la surface et de l'objet limite. Un outil principal pour ces démonstration est le principe du min-max.

Pour l'étude des branches analytiques, on s'appuie sur la philosophie générale derrière les travaux de L. Hillairet et C. Judge. Il s'agit donc, dans un premier temps, de montrer que les

branches analytiques (éventuellement renormalisées) convergent et, dans un deuxième temps d'essayer de caractériser les limites possibles. Les démonstrations utilisent alors de façon cruciale la formule de Feynman-Hellmann qui donne la dérivée d'une branche analytique et des propriétés de concentration des fonctions propres. Les méthodes de [26] reposent sur la comparaison avec un opérateur modèle dans lequel on peut séparer les variables. Dans notre cas, pour les surfaces décomposables en cylindres et en jonctions, nous utiliserons aussi la séparation de variables dans les cylindres, qui à l'aide d'un développement en série de Fourier permet de ramener l'étude à des problèmes d'équations différentielles ordinaires (en dimension 1).

Une motivation pour l'étude spectrale des surfaces décomposables en cylindres et jonctions est l'étude des surfaces de translation. Ces dernières sont munies d'une structure euclidienne à singularités coniques et ont de nombreuses propriétés géométriques et dynamiques très intéressantes. Beaucoup de mathématiciens ont étudié ces surfaces, par exemple W.Veech qui fait partie des pionniers dans ce domaine [44, 45], J.C.Yoccoz, A.Zorich, H.Masur, M.Troyanov, S.Tabachnikov et la liste n'est pas exhaustive ([36, 42, 43, 48]). La plupart des travaux concernent le côté géométrique, du côté spectral on peut mentionner [22, 23]. Le cadre général de cette structure est très riche et de nombreuses questions (difficiles) restent ouvertes. Certaines classes particulières des surfaces ayant une structure euclidienne à singularités coniques ont été plus spécifiquement étudiées ou consacrées à des thèses et articles. Voir par exemple les thèses de Zmiaikou [47], Cabrol [6], Malouf [35] et les articles de Yoccoz [46], Zorich [48], et Kerckhoff-Masur-Smillie [32]. Parmi ces surfaces particulières mentionnons les surfaces à petits carreaux et plus généralement les surfaces de Veech. Sur ces dernières on peut montrer qu'il existe des directions complètement périodiques donc elles sont constituées de cylindres plats. En écrasant ces cylindres, on définit une déformation dans l'espace des surfaces de translation que les travaux présentés ici permettent d'étudier du point de vue spectral.

## Chapitre 1

On va étudier le spectre du tore plat comme prototype des surfaces décomposables en cylindres et en jonctions. Le tore faisant partie des rares variétés riemanniennes dont on peut expliciter le spectre, nous pouvons voir comment varie ce spectre quand on fait tendre les longueurs de géodésiques vers 0 dans une direction complètement périodique. L'étude du spectre des tores reste très instructive pour beaucoup de domaines des mathématiques.

## Chapitre 2

Ce chapitre a pour but d'introduire le cadre général dans lequel nos résultats vont s'appliquer.

On introduit les surfaces décomposables en cylindres et en jonctions associées au graphe. On définit les principaux éléments qui constituent ce type de surfaces. On dégage les propriétés géométriques et spectrales qui nous intéressent sur ces surfaces.

## Chapitre 3

Dans ce chapitre nous traitons la convergence des valeurs propres ordonnées. Outre le fait de généraliser ce qui se passe sur un tore plat, les techniques abordées dans cette thèse sont des cas particuliers des résultats plus généraux développés dans la littérature voir par exemple [41], [33], [14].

Le principal résultat est (voir théorème 3.0.1) :

**Théorème 0.0.1.** *Soit  $(X_{G_\Sigma}^t)_t$  la famille de surfaces décomposables en cylindres et en jonctions associée au graphe  $G_\Sigma$ . La  $k$ -ième valeur propre du spectre de  $X_{G_\Sigma}^t$  converge vers la  $k$ -ième*

valeur propre de  $G_\Sigma$ , i.e.

$$\forall k, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_k^t = \lambda_k^{G_\Sigma}.$$

## Chapitre 4

On étudie la convergence des branches analytiques des surfaces décomposables en cylindres et en jonctions. Ce résultat est obtenu grâce à la formule Feynman-Hellmann, qui donne la variation des valeurs propres, et le théorème spectral pour une forme quadratique. Nous nous sommes essentiellement inspirés des travaux de L.Hillairet et C.Judge. Dans notre cadre nous disposons d'un prototype, le tore plat, pour lequel on peut expliciter le spectre. On généralise le comportement des branches analytiques du tore sur une surface décomposable en cylindres et en jonctions quelconque.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant (voir théorème 4.2.1) :

**Théorème 0.0.2.** *Soit  $(\varphi^t, \mu^t)$  une branche analytique de  $(Q^t, \tilde{n}^t)$ . Alors, il existe  $\mu^0 \in [0, +\infty)$  tel que*

$$\mu^t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \mu^0.$$

On montre ensuite la caractérisation des limites possibles. Ou bien la limite  $\mu^0$  est une valeur propre d'un des cercles qui ont été écrasés (valeur propre transverse) ou bien  $\mu^0$  est une valeur propre d'une surface non-compacte obtenue en prolongeant les manchons cylindriques au bord d'une des jonctions par un demi-cylindre infini. (voir théorème 4.3.1)

## Chapitre 5

Ce chapitre a pour but de définir le cadre naturel qui a motivé l'introduction des surfaces décomposables en cylindres et en jonctions.

Nous allons commencer par introduire les surfaces munies d'une structure euclidienne à singularités coniques et ensuite donner des classes particulières de ces surfaces. Nous parlerons des surfaces à petits carreaux qui sont des exemples très particuliers des surfaces de Veech. Ces surfaces possèdent une géométrie très particulière et des propriétés dynamiques *proches* de celles d'un tore plat. Nous allons définir des surfaces de translation et en donner quelques exemples. Pour terminer ce chapitre nous énoncerons quelques propriétés des surfaces à petits carreaux.

## Chapitre A

Dans ce dernier chapitre qui sert d'annexe, nous présentons des rappels sur les opérateurs non bornés et leur théorie spectrale.

# Chapitre 1

## Étude des tores plats

Ce chapitre a pour but de présenter dans un cadre simple - celui des tores plats - le type de questions spectrales qui vont nous préoccuper. La première motivation pour étudier les tores plats est qu'ils font partie des rares variétés riemanniennes pour lesquelles on peut calculer le spectre explicitement. Une deuxième motivation est qu'on y observe les phénomènes que nous chercherons à généraliser par la suite.

Sur un tore, on comprend bien la dynamique du flot géodésique associé à la métrique plate (voir par exemple [42]). Il existe deux types de directions :

- les directions rationnelles, dans lesquelles toutes les trajectoires sont périodiques,
- les directions irrationnelles, dans lesquelles toutes les trajectoires sont denses.

On peut alors considérer la famille de tores obtenue en écrasant les géodésiques d'une direction périodique et étudier la façon dont le spectre se comporte. On verra alors que les résultats sont différents selon que l'on regarde ce problème du point de vue de la convergence des valeurs propres ordonnées ou de celui de la convergence des branches analytiques.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons des surfaces pour lesquelles on peut définir un type de déformations analogues et nous verrons que l'étude du spectre à la fois du point de vue des valeurs propres ordonnées et du point de vue des branches analytiques présente des similarités avec le cas des tores.

### 1.1 Calcul du spectre

Tout le long de ce chapitre, nous ferons occasionnellement l'identification  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ .

Il y a plusieurs manières de définir les tores plats. Nous choisissons le point de vue des surfaces polygonales, dont le concept sera précisé un peu plus loin dans cette thèse (voir chapitre 5). Ainsi, on construit un tore plat en partant d'un parallélogramme du plan euclidien dont on identifie les côtés parallèles par translation. La métrique provient alors de la métrique euclidienne ambiante.

En prenant une matrice  $2 \times 2$  inversible, on transforme un parallélogramme en un autre parallélogramme. Cette opération induit une action des matrices inversibles sur l'ensemble des parallélogrammes et, par conséquent sur les tores plats car les identifications sont préservées. L'étude de cette action permet de voir que tout tore plat est isométrique à un tore de la forme suivante muni de la métrique  $dx^2 + dy^2$  :

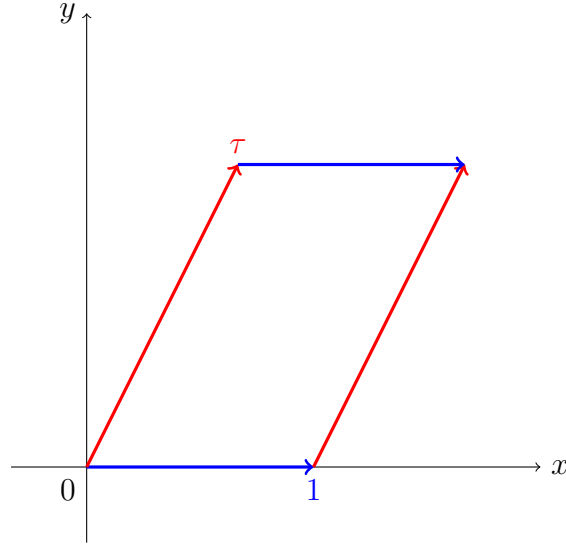


FIGURE 1.1 – Tore plat  $\mathbf{T}_\tau$

avec  $\tau$  dans

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0, |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2 \right\},$$

voir par exemple [13].

On associe au tore plat  $\mathbf{T}_\tau$  l'ensemble  $R(\tau) = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . C'est un sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$  qu'on appelle un réseau. On peut alors vérifier que la définition donnée (par les surfaces polygonales) du tore  $\mathbf{T}_\tau$  est équivalente à une autre définition classique disant que le tore  $\mathbf{T}_\tau$  est le quotient du plan par l'action des translations associées au réseau.

Une fonction  $f$  du tore  $\mathbf{T}_\tau$  est donc définie comme une fonction de  $\mathbb{R}^2$  qui satisfait la condition suivante :

$$\forall \xi \in R(\tau), f(X + \xi) = f(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

Une telle fonction est dite  $R(\tau)$  périodique. Pour tout  $k \geq 0$ , on définit les espaces de Sobolev du tore  $\mathbf{T}_\tau$  de la façon suivante (voir [5] pour la définition des espaces de Sobolev sur  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\mathcal{H}^k(\mathbf{T}_\tau) = \{ f \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2), f \text{ est } R(\tau) \text{ - périodique} \}.$$

L'opérateur de Laplace Beltrami associé à la métrique  $\mathbf{g} = dx^2 + dy^2$  est alors donné par :

$$\text{dom}(\Delta) = \mathcal{H}^2(\mathbf{T}_\tau), \quad \Delta = -\partial_x^2 - \partial_y^2.$$

Par régularité elliptique, une fonction propre  $f$ , solution de l'équation

$$\Delta f(x, y) = \lambda f(x, y),$$

sera automatiquement  $C^\infty$ .

Pour calculer le spectre de l'opérateur  $\Delta$  ainsi défini sur le tore  $\mathbf{T}_\tau$ , nous allons faire un changement de variables qui nous donnera un nouveau problème aux valeurs propres, posé maintenant sur le tore  $\mathbf{T}_{i\Im(\tau)}$ .

Pour cela, nous effectuons le changement de variables linéaire associé à la matrice

$$A_\tau = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Si on désigne par  $(x, y)$  les coordonnées de départ, les nouvelles coordonnées  $(u, v)$  sont donc données par :

$$A_\tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Géométriquement cela se traduit par la figure suivante :

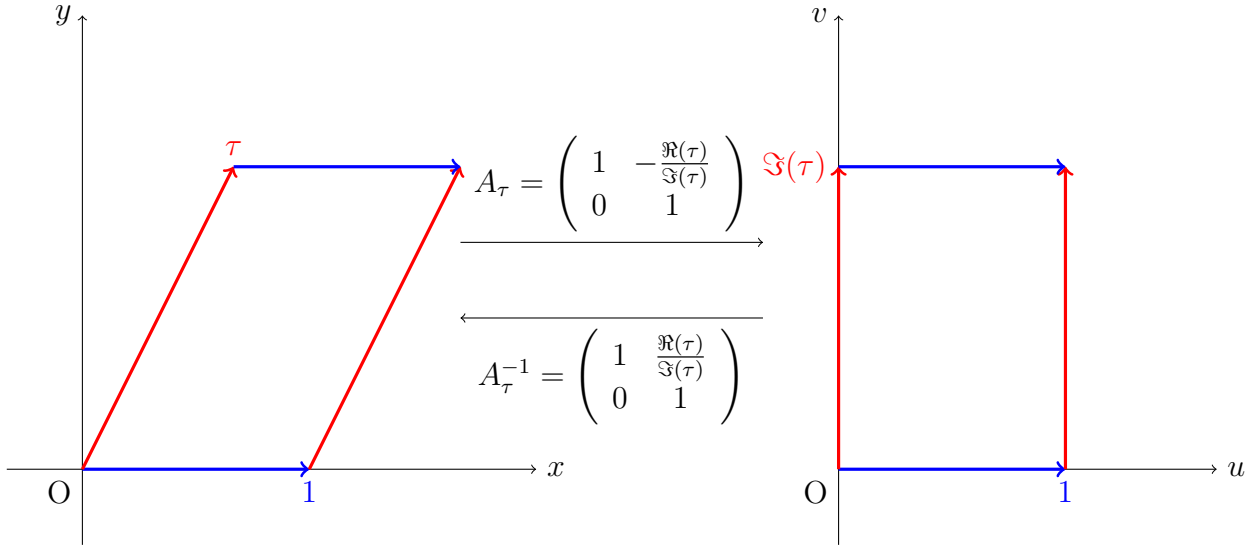


FIGURE 1.2 – Changement de variables

Grâce à ce changement de variables, nous pouvons traduire l'équation aux valeurs propres des coordonnées  $(x, y)$  dans les nouvelles coordonnées  $(u, v)$ .

Considérons une fonction  $f$  définie sur le tore  $\mathbf{T}_\tau$  et posons :

$$F := f \circ \varphi_\tau^{-1}.$$

On commence par montrer l'équivalence  $f$  est  $R(\tau)$  périodique si et seulement si  $F$  est  $R(i\Im(\tau))$  périodique.

Nous allons montrer une implication, l'autre se prouve de la même façon.

Supposons que  $f$  est  $R(\tau)$  périodique et montrons que  $F$  est  $R(i\Im(\tau))$  périodique.

Soient  $\eta \in R(i\Im(\tau))$  et  $Y \in \mathbb{R}^2$ . Un calcul simple montre que  $\varphi_\tau^{-1}(\eta) \in R(\tau)$ , ainsi :

$$\begin{aligned} F(Y + \eta) &= f \circ \varphi_\tau^{-1}(Y + \eta) \\ &= f(\varphi_\tau^{-1}(Y) + \varphi_\tau^{-1}(\eta)) \\ &= f(\varphi_\tau^{-1}(Y)) \\ &= F(Y). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi fini de montrer que  $f$  est  $R(\tau)$  périodique si et seulement si  $F$  est  $R(i\Im(\tau))$  périodique.

Calculons maintenant les dérivées partielles de  $F$

$$\begin{aligned} \partial_u F(u, v) &= dF(u, v)(1, 0) \\ &= \left( df(\varphi_\tau^{-1}(u, v)) \circ d\varphi_\tau^{-1}(u, v) \right)(1, 0) \\ &= df(\varphi_\tau^{-1}(u, v))(1, 0) \\ &= \partial_x f(\varphi_\tau^{-1}(u, v)), \end{aligned}$$

et donc :

$$\underline{\partial_u F = \partial_x f \circ \varphi_\tau^{-1}}.$$

$$\begin{aligned} \partial_v F(u, v) &= dF(u, v)(0, 1) \\ &= \left( df(\varphi_\tau^{-1}(u, v)) \circ d\varphi_\tau^{-1}(u, v) \right)(0, 1) \\ &= df(\varphi_\tau^{-1}(u, v))\left(\frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)}, 1\right) \\ &= \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_x f(\varphi_\tau^{-1}(u, v)) + \partial_y f(\varphi_\tau^{-1}(u, v)), \end{aligned}$$

et donc :

$$\underline{\partial_v F = \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_x f \circ \varphi_\tau^{-1} + \partial_y f \circ \varphi_\tau^{-1}}.$$

Ces deux calculs entraînent l'équivalence :

$$f \in \mathcal{H}^1(\mathbf{T}_\tau) \iff F \in \mathcal{H}^1(\mathbf{T}_{i\Im(\tau)}).$$

Par récurrence, on en déduit

$$\forall k \geq 0, f \in \mathcal{H}^k(\mathbf{T}_\tau) \iff F \in \mathcal{H}^k(\mathbf{T}_{i\Im(\tau)}).$$

De plus, en exploitant les expressions obtenues ci-dessus et les mêmes règles de calcul on a :

$$\bullet \partial_u^2 F = (\partial_x^2 f) \circ \varphi_\tau^{-1}; \tag{A_1}$$

$$\bullet \partial_v^2 F = \left( \frac{\Re(\tau)^2}{\Im(\tau)^2} \partial_x^2 f + 2 \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_{xy}^2 f + \partial_y^2 f \right) \circ \varphi_\tau^{-1}; \tag{A_2}$$

$$\bullet \partial_{uv}^2 F = \left( \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_x^2 f + \partial_{xy}^2 f \right) \circ \varphi_\tau^{-1}. \tag{A_3}$$

La relation

$$\left( 1 + \frac{\Re(\tau)^2}{\Im(\tau)^2} \right) (A_1) - 2 \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} (A_3) + (A_2)$$

donne

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{\Re(\tau)^2}{\Im(\tau)^2} \right) \partial_u^2 F - 2 \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_{uv}^2 F + \partial_v^2 F &= (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f) \circ \varphi_\tau^{-1} \\ &= -\Delta f \circ \varphi_\tau^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons traduire le problème aux valeurs propres de  $\mathbf{T}_\tau$  sur  $\mathbf{T}_{i\Im(\tau)}$

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f \\ f \in \mathcal{H}^2(\mathbf{T}_\tau) \end{cases} \iff \begin{cases} PF = \lambda F \\ F \in \mathcal{H}^2(\mathbf{T}_{i\Im(\tau)}) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

avec

$$P = - \left[ \left( 1 + \frac{\Re(\tau)^2}{\Im(\tau)^2} \right) \partial_u^2 - 2 \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \partial_{uv}^2 + \partial_v^2 \right],$$

de domaine  $\mathcal{H}^2(\mathbf{T}_{i\Im(\tau)})$ .

On appelle réseau dual de  $R(i\mathfrak{S}(\tau))$ , le réseau

$$R^*(i\mathfrak{S}(\tau)) = R\left(\frac{i}{\mathfrak{S}(\tau)}\right).$$

Fixons  $\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))$ . La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$F_\xi(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}(\tau)}} e^{2\pi i(\xi|Y)}$$

est  $R(i\mathfrak{S}(\tau))$ -périodique. En effet, pour  $\eta \in R(i\mathfrak{S}(\tau))$ , on a :

$$(\xi|\eta) \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui entraîne que :

$$F_\xi(Y + \eta) = F_\xi(Y) \quad \text{pour } Y \in \mathbb{R}^2, \eta \in R(i\mathfrak{S}(\tau)).$$

Nous allons montrer que les fonctions  $F_\xi$  sont fonctions propres de  $P$  et exhiber les valeurs propres qui leur sont associées.

On commence par observer que  $F_\xi$  est manifestement dans  $\mathcal{H}^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$ . Par ailleurs, par définition du réseau  $R^*(i\mathfrak{S}(\tau))$ ,

$$\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau)) \Leftrightarrow \exists(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{tel que } \xi = m + i\frac{n}{\mathfrak{S}(\tau)}.$$

Ainsi,

$$PF_\xi = \lambda_\xi(\tau)F_\xi \quad \text{avec } \lambda_\xi = \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}(\tau)^2} \left( |\tau|^2 m^2 - 2mn\Re(\tau) + n^2 \right).$$

On a montré que le couple  $(F_\xi, \lambda_\xi(\tau))$  est un couple d'éléments propres de  $P$ .

Nous allons montrer que tous les éléments propres de  $P$  sont de cette forme, ce qui démontrera le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1.** *L'opérateur  $P$  est auto-adjoint sur  $\mathcal{H}^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$  et son spectre est*

$$\sigma(P) = \left\{ \lambda_\xi \mid \xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau)) \right\} = \left\{ \lambda_{m,n}(\tau) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

*Les fonctions propres associées  $(F_\xi)_{\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))}$  forment une famille totale.*

*Preuve.* On commence par remarquer que la famille  $(F_\xi)_{\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))}$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$  pour la mesure  $dY$  (non-normalisée), comme produit tensoriel de deux bases hilbertiennes. Ainsi, toute fonction  $g \in L^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$  se décompose dans la base hilbertienne sous la forme

$$g = \sum_{\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))} c_\xi(g) F_\xi$$

où la somme est convergente dans  $L^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$ , et le coefficient de Fourier  $c_\xi$  est défini par

$$c_\xi(g) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}(\tau)}} \int_{\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)}} g(Y) e^{-2\pi i(\xi|Y)} dY.$$

Pour tout  $\lambda \notin \left\{ \lambda_\xi \mid \xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau)) \right\}$ , et tout  $g \in L^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$ , on peut résoudre le problème

$$(P - \lambda)f = g$$

de la façon suivante.

S'il existe un tel  $f$ , ces coefficients de Fourier doivent vérifier la relation

$$(\lambda_\xi - \lambda)c_\xi(f) = c_\xi(g).$$

On définit donc

$$f := \sum_{\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))} \frac{c_\xi(g)}{\lambda_\xi(\tau) - \lambda} F_\xi. \quad (1.1.2)$$

Comme l'ensemble  $\{\lambda_\xi(\tau), \xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))\}$  est discret fermé, et  $\lambda$  n'appartient pas à cet ensemble, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau)), \quad |\lambda - \lambda_\xi(\tau)| \geq \varepsilon.$$

On en déduit que la somme définissant  $f$  converge dans  $L^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$ .

Comme les  $(F_\xi)_{\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))}$  forment une base hilbertienne dans  $L^2$ , qui est également orthogonale dans  $\mathcal{H}^2$ . Nous allons montrer que la somme (1.1.2) converge normalement dans  $\mathcal{H}^2$ , ce qui donnera sa convergence au sens de la norme  $\mathcal{H}^2$  et par suite on en déduira par complétude que  $f \in \text{dom}(P)$ . Il faut donc montrer que la norme  $\mathcal{H}^2$  du terme général de la série 1.1.2 est contrôlée par le terme général d'une série convergente.

Commençons par calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de  $F_\xi$  :

$$\partial_j F_\xi = i2\pi \xi_j F_\xi,$$

et

$$\partial_{kj}^2 F_\xi = -4\pi^2 \xi_j \xi_k F_\xi.$$

Alors,

$$\|\partial_j F_\xi\|^2 = 4\pi^2 \xi_j^2 \quad (1.1.3)$$

et

$$\|\partial_{kj}^2 F_\xi\|^2 = 16\pi^4 \xi_j^2 \xi_k^2. \quad (1.1.4)$$

En comparant (1.1.3), (1.1.4) respectivement avec  $\lambda_\xi, \lambda_\xi^2$  et en utilisant un argument d'homogénéité, on a l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$\|F_\xi\|_{\mathcal{H}^2}^2 \leq C(1 + \lambda_\xi^2). \quad (1.1.5)$$

En effet, on étend à  $\mathbb{R}^2$  la définition de  $\lambda_\xi$  :

$$\lambda_\xi = 4\pi^2 \left[ \left(1 + \frac{\Re(\tau)^2}{\Im(\tau)^2}\right) \xi_1^2 - 2 \frac{\Re(\tau)}{\Im(\tau)} \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 \right].$$

Puis, on définit, pour  $j, k$  valant 1 ou 2, sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\alpha_j(\xi) = \frac{4\pi^2 \xi_j^2}{\lambda_\xi}, \quad \beta_{jk}(\xi) = \frac{16\pi^4 \xi_j^2 \xi_k^2}{\lambda_\xi^2}.$$

Ces fonctions sont homogènes de degré 0 sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , elles sont donc bornées, ce qui prouve l'estimation (1.1.5).

Ainsi :

$$\frac{c_\xi(g)^2}{(\lambda_\xi - \lambda)^2} \|F_\xi\|_{\mathcal{H}^2}^2 \leq C \frac{c_\xi(g)^2}{(\lambda_\xi - \lambda)^2} (1 + \lambda_\xi^2), \quad (1.1.6)$$

ce qui permet de conclure puisque la quantité

$$\frac{1 + \lambda_\xi^2}{(\lambda_\xi - \lambda)^2}$$

est bornée quand  $\xi$  parcourt  $R^*(i\mathfrak{S}(\tau))$ .

En effet, quand  $\lambda_\xi \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1+\lambda_\xi^2}{(\lambda_\xi-\lambda)^2} \rightarrow 1$  et pour  $\lambda_\xi > \lambda$ , cette fonction est continue et strictement positive. Ce qui permet de conclure, puisque, si  $\xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau))$  alors on a qu'un nombre fini de  $\lambda_\xi < \lambda$ .

Ainsi, si  $\lambda \notin \left\{ \lambda_\xi \mid \xi \in R^*(i\mathfrak{S}(\tau)) \right\}$ ,  $P - \lambda$  réalise une bijection de  $\mathcal{H}^2$  sur  $L^2$ . En effet, nous avons montré la surjectivité et l'injectivité résulte de l'unicité des coefficients de Fourier. En particulier,  $\lambda$  n'est pas une valeur propre.

La formule de Plancherel montre que l'opérateur  $P$  est symétrique sur  $\mathcal{H}^2(\mathbf{T}_{i\mathfrak{S}(\tau)})$ . La proposition A.0.5 du chapitre A conclut alors au fait qu'il est autoadjoint ; ce qui termine la preuve.  $\square$

D'après l'équivalence (1.1.1) on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.1.1.** *Le spectre du Laplacien euclidien sur le tore  $\mathbf{T}_\tau$  est l'ensemble :*

$$\sigma(\mathbf{T}_\tau) = \left\{ \lambda_{m,n}(\tau) := \frac{4\pi^2}{\mathfrak{S}(\tau)^2} \left( |\tau|^2 m^2 - 2mn\Re(\tau) + n^2 \right), m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### 1.1.1 Valeurs propres ordonnées ou branches analytiques

Considérons le tore plat associé au réseau  $\mathbb{Z} + i\sigma\mathbb{Z}$  (c'est-à-dire on prend  $\tau = i\sigma$ ). Ce tore est représenté par le rectangle euclidien dont les côtés parallèles sont identifiés par translation. Cela revient donc à faire le produit du cercle  $\mathbf{S}_1$  de longueur 1 et du cercle  $\mathbf{S}_\sigma$  de longueur  $\sigma$  :

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_\sigma$$

et écraser ce tore dans la direction verticale, revient alors à changer la longueur du deuxième cercle

$$\mathbf{T}^t = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{\sigma t}$$

avec  $0 < t \leq 1$  qui tend vers zéro ou encore à prendre le réseau  $\mathbb{Z} + it\sigma\mathbb{Z}$ .

D'après le corollaire 1.1.1, Le spectre de  $\mathbf{T}^t$  est donc donné par :

$$\left\{ \lambda_{m,n}(t) = 4\pi^2 \left( m^2 + \frac{n^2}{\sigma^2 t^2} \right); m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour  $m, n$  fixés,  $t \mapsto \lambda_{m,n}(t)$  est analytique sur  $]0; 1]$  et représente une valeur propre de  $\mathbf{T}^t$  : on parle de branche analytique (de valeur propre) et on observe que le spectre de  $\mathbf{T}^t$  est donc la réunion de ces branches analytiques.

Représentons graphiquement les branches analytiques de  $\mathbf{T}^t$

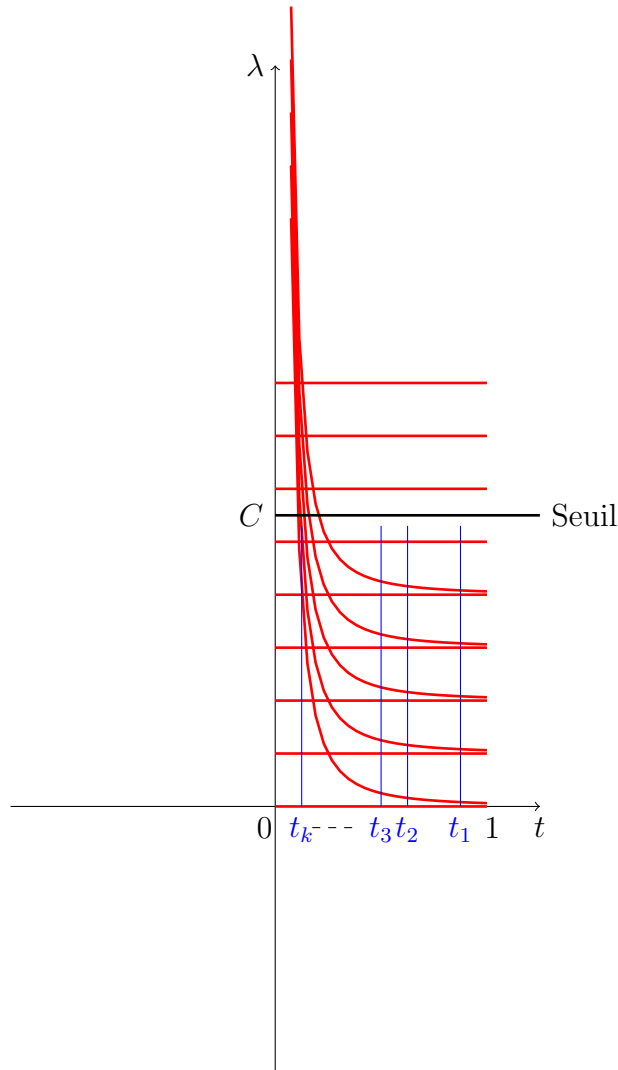


FIGURE 1.3 – Les branches analytiques de  $\mathbf{T}^t$

Ces branches analytiques mettent en évidence le comportement asymptotique du spectre quand le tore dégénère. Pour éviter d’avoir à traiter des branches qui tendent vers l’infini, il est naturel de renormaliser par  $t^2$  et donc de considérer

$$\mu_{m,n}^t = t^2 \lambda_{m,n}(t) = 4\pi^2 \left( m^2 t^2 + \frac{n^2}{\sigma^2} \right)$$

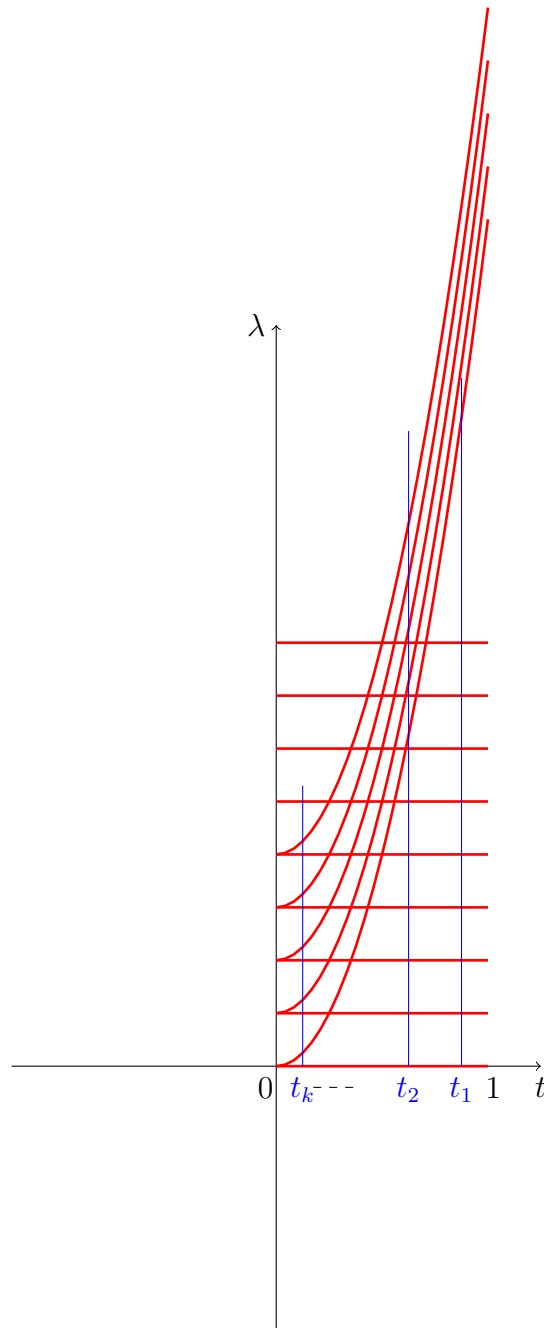


FIGURE 1.4 – Les branches analytiques de  $\mathbf{T}^t$  renormalisées

**Remarque :** On gardera à l'esprit que ces figures ne reflètent pas le fait qu'il y a une infinité de branches analytiques qui convergent vers chaque valeur propre transverse (Voir le chapitre 4 pour cette terminologie) : en effet, à  $n$  fixé, pour tout  $m$ , la branche  $\mu_{m,n}^t$  converge vers  $\frac{4\pi^2 n^2}{\sigma^2}$ . On observe le phénomène suivant : *les branches analytiques renormalisées convergent. Si  $\mu^0$  est la limite d'une telle branche alors il existe  $n$  tel que  $\mu^0 = \frac{4\pi^2 n^2}{\sigma^2}$ . Ces valeurs possibles  $(\frac{4\pi^2 n^2}{\sigma^2})_{n \in \mathbb{Z}}$  forment le spectre du cercle  $\mathbf{S}_\sigma$ .*

La convergence des valeurs propres ordonnées répond à une question différente : on se fixe  $k$ , et on étudie le comportement, quand  $t$  tend vers 0 de  $\tilde{\lambda}_k(t)$  qui est, par définition, la  $k$ -ième valeur propre de  $\mathbf{T}^t$ . D'après la figure représentant les  $\lambda_{m,n}(t)$ , et d'après l'expression du spectre, il est clair que pour  $t$  assez petit (mais dépendant de  $k$ ), les  $j$  premières valeurs propres de  $\mathbf{T}^t$  sont  $0, 4\pi^2, \dots, 4\pi^2 j^2$ , (qui correspondent à prendre  $n = 0$ ). Plus généralement, on observe le

résultat suivant : *Si on se fixe un seuil  $C$ , une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  tendant vers 0 et une suite de valeurs propres  $(\lambda^{t_n})_{n \geq 0}$  de  $\mathbf{T}^{t_n}$  bornée par  $C$  alors, les seules valeurs d'adhérence possibles sont  $\{4\pi^2 j^2, j \in \mathbb{N}\} \cap [0, C]$ . Ces valeurs possibles forment le spectre du cercle  $\mathbf{S}_1$ .*

- Quand on écrase le tore plat, les valeurs propres ordonnées convergent vers les valeurs propres de l'objet limite ;
- Les branches analytiques des valeurs propres renormalisées convergent vers des valeurs spécifiques, ici appelées valeurs propres transverses, terminologie qui sera précisée après.

Nous allons définir une classe plus large de variétés riemanniennes de dimension 2 pour lesquelles on pourra définir des déformations comparables à l'écrasement des cylindres. On étudiera ensuite les deux phénomènes décrits ci-dessus.



# Chapitre 2

## Définition des objets et position du problème

Ce chapitre a pour but de fixer le cadre dans lequel nos résultats spectraux s'appliqueront.

Reprenons l'exemple de la fin de la partie précédente, c'est-à-dire la famille de tores

$$\mathbf{T}^t = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_{\sigma t}.$$

Du point de vue dynamique, cela revient à faire tendre la longueur des géodésiques dans la direction verticale vers 0, nous reviendrons sur cette formulation au chapitre 5.

D'un point de vue plus naïf, on a écrasé le tore sur le cercle de longueur 1. On pourrait faire le chemin inverse partir du cercle limite et, en l'épaississant, reconstruire le tore.

Ce qui nous intéresse est de généraliser cette procédure en remplaçant le cercle limite par un graphe métrique. On veut ainsi étudier comment certaines surfaces dégénèrent sur des graphes, et comment reconstruire ces surfaces à partir de leur graphe limite.

Par exemple, considérons le graphe suivant :

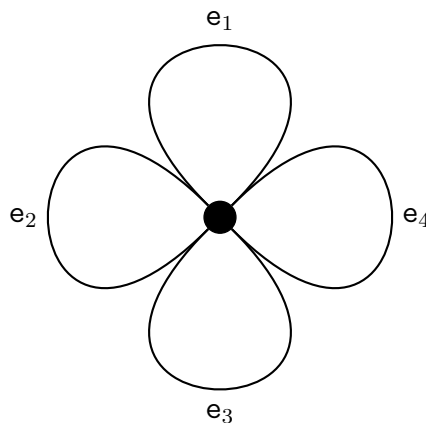


FIGURE 2.1 – Graphe limite d'une surface

Intuitivement, on peut associer à ce graphe limite une famille de surfaces qui s'effondrent sur lui comme suit :

- On épaissit chaque arête en cylindre dont les circonférences dépendent d'un même paramètre  $t$  ;

- On remplace le sommet par une surface dont les composantes de bords ont des voisinages isométriques aux bouts des cylindres précédents. Cette surface dépend donc de  $t$ . On appellera jonction ces morceaux.

Il suffit ensuite de recoller les composantes de bords des cylindres et celles de la surface associée au sommet d'une manière convenable pour avoir une surface. Lorsque  $t \rightarrow 0$  cette surface s'effondrera sur notre graphe pourvu que les jonctions puissent être remplacées, dans un sens convenable par les sommets.

Cette partie va consister à donner une définition mathématique des objets qui composent la surface : graphes, cylindres et jonctions.

On munira cette surface d'une métrique (éventuellement avec des singularités coniques dans les jonctions). Cette métrique dépendra du paramètre  $t$  qui donne la dégénérescence de la surface sur le graphe. L'objectif principal de la thèse sera de comprendre le comportement du spectre de cette métrique quand la surface s'écrase.

On commence par faire un bref rappel sur les graphes. Les définitions données ici sont en partie empruntées à [4].

## 2.1 Graphe

### 2.1.1 Graphe combinatoire

Le but de cette section n'est pas de faire une étude détaillée de la théorie des graphes. Nous allons donner des éléments qui serviront à la compréhension des surfaces que nous voulons introduire et de la théorie spectrale qu'on peut faire sur les graphes. Il y a plusieurs manières de considérer des graphes notamment, on peut privilégier un point de vue combinatoire ou un point de vue métrique. Commençons par le point de vue combinatoire.

Traditionnellement, un graphe  $G$  est formé d'un ensemble fini ou dénombrable infini de sommets  $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_j$  et un ensemble  $\mathcal{E} = (e_k)_k$  d'arêtes reliant les sommets. Dans cette présentation, il ne peut y avoir qu'une seule arête entre deux sommets. Pour autoriser les arêtes multiples, on se donne une fonction symétrique :

$$N : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}$$

qui donne le nombre d'arêtes qui relient deux sommets donnés. Autrement dit, si  $N(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = n$ , on considère qu'il y a  $n$  arêtes entre  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_j$ . Un graphe apparaît donc comme la donnée du couple  $(\mathcal{V}, N)$  et on continue à noter  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes que l'on supposera toujours fini.

**Remarque :** Dans la littérature, on appelle parfois multigraphe cette généralisation. Nous continuerons à utiliser le mot graphe.

Deux sommets  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sont dits adjacents (noté  $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ ) s'il existe au moins une arête les connectant, c'est-à-dire si  $N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) > 0$ .

L'application  $N$  nous permet aussi de définir la notion de chemin dans un graphe combinatoire.

**Définition 2.1.1.** Dans le graphe  $(\mathcal{V}, N)$ , on appelle chemin une suite de sommets  $(\mathbf{v}_j)_{1 \leq j \leq k}$  telle que :

$$\forall j, \quad N(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}) > 0.$$

On dira qu'un graphe combinatoire est connexe si, et seulement si pour deux sommets distincts, il existe toujours au moins un chemin les reliant.

Les figures suivantes illustrent cette notion sur deux exemples.

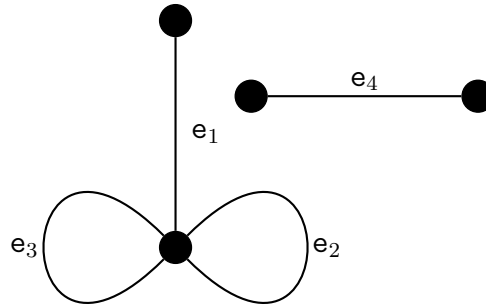


FIGURE 2.2 – Graphe non connexe

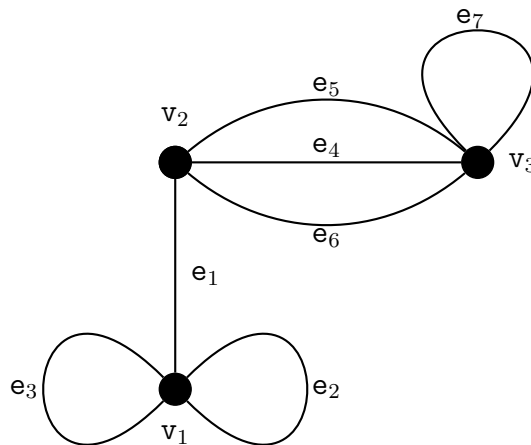


FIGURE 2.3 – Graphe connexe

Décrivons la fonction  $N$  associée au graphe 2.3

	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$	2	1	0
$v_2$	1	0	3
$v_3$	0	3	1

FIGURE 2.4 – Tableau de la fonction  $N$  du graphe 2.3

Une autre façon de définir le graphe est de se donner  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{E}$  et deux applications

$$o : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{et} \quad t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}.$$

On définit alors  $N(v_i, v_j)$  comme le nombre d'arêtes  $\mathbf{e}$  telles que soit  $o(\mathbf{e}) = v_i$  et  $t(\mathbf{e}) = v_j$ , soit  $o(\mathbf{e}) = v_j$  et  $t(\mathbf{e}) = v_i$ . Remarquons que définir  $o$  et  $t$  revient à choisir une orientation sur chaque arête : celle pour laquelle  $o(\mathbf{e})$  est l'origine et  $t(\mathbf{e})$  le point terminal.

On dira qu'une arête  $e$  est adjacente à un sommet  $v$  si ou bien  $t(e) = v$  ou bien  $o(e) = v$ . On le notera  $e \rightarrow v$ .

**Remarque :** Partant du graphe, pour définir  $o$  et  $t$  on choisit une orientation sur chaque arête. On a deux choix pour chaque arête.

Reprenons l'exemple du graphe 2.3 et donnons deux choix d'applications  $o$  et  $t$  possibles.

Les deux tableaux qui suivent donnent la première orientation.

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_1$	$v_1$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_2$	$v_3$

FIGURE 2.5 – Tableau de la fonction  $o$  du graphe 2.3

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_2$	$v_1$	$v_1$	$v_3$	$v_2$	$v_3$	$v_3$

FIGURE 2.6 – Tableau de la fonction  $t$  du graphe 2.3

Une autre orientation possible du graphe 2.3 est donnée par les deux tableaux suivants :

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_2$	$v_1$	$v_1$	$v_3$	$v_2$	$v_3$	$v_3$

FIGURE 2.7 – Tableau de la fonction  $o$  du graphe 2.3

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_1$	$v_1$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_2$	$v_3$

FIGURE 2.8 – Tableau de la fonction  $t$  du graphe 2.3

## 2.1.2 Graphes métriques

Nous allons maintenant associer aux graphes combinatoires construits dans la partie précédente une structure qui permettra de les voir comme des variétés singulières de dimension 1, munie d'une métrique.

**Remarque :** Il faut noter que notre terminologie diffère de celle habituellement utilisée pour laquelle un graphe métrique est simplement un graphe combinatoire muni de la distance combinatoire.

On part d'un graphe combinatoire noté  $G_c$  ; c'est à dire qu'on se donne  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}$  et les applications  $o$  et  $t$ . On se donne maintenant une application  $L$  de  $\mathcal{E}$  dans  $]0, +\infty[$  qui, à chaque arête  $e$  associe une longueur  $l_e$ .

Ceci nous permet de voir une arête abstraite comme un segment de longueur  $l_e$ .

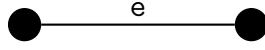


FIGURE 2.9 – Arête

On veut maintenant recoller ces segments en suivant la combinatoire donnée par  $G_c$ . On pose :

$$\hat{G} := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} [0, l_e] \cup \mathcal{V},$$

et on construit l'application :

$$i : \hat{G} \rightarrow G$$

telle que

- pour  $x \in [0; l_e]$ 
  - $i(x) = x$  si  $x \in ]0; l_e[$ ;
  - $i(0) = o(\mathbf{e})$ ;
  - $i(l_e) = t(\mathbf{e})$ ;
- pour  $v \in \mathcal{V}$ ,  $i(v) = v$ .

On définit le graphe métrique  $G = (G_c, L)$  comme le quotient de  $\hat{G}$  par cette application. Autrement dit, on identifie deux points qui ont la même image par  $i$ . Concrètement, la construction précédente revient à dire qu'on a identifié le sommet  $\mathbf{v}$  avec l'origine de  $[0, l_e]$  si  $o(\mathbf{e}) = \mathbf{v}$  et avec son point terminal si  $t(\mathbf{e}) = \mathbf{v}$ . L'ensemble des sommets  $\mathcal{V}$  apparaît donc comme une partie de  $G$ . Les points de notre graphe métrique  $G$  seront non seulement les sommets de  $G_c$  mais aussi tous les points intermédiaires sur l'arête  $\mathbf{e}$  identifiée à  $[0, l_e]$ . Plus précisément, un point  $m \in G \setminus \mathcal{V}$  appartient à un unique segment  $]0, l_e[$ .

Pour pouvoir faire de l'analyse sur le graphe  $G$ , il convient de définir des espaces fonctionnels adéquats. Une méthode consiste à définir une fonction sur  $\hat{G}$  qui passe au quotient.

Si  $X$  est un espace métrique, on peut ainsi définir l'espace  $C^0(G, X)$  des fonctions continues sur  $G$  à valeurs dans  $X$  : c'est l'espace des fonctions de  $\hat{G}$  dans  $X$  telles que

1. la restriction à chaque intervalle  $[0, l_e]$  est continue,
2. la fonction passe au quotient.

Autrement dit, si on se donne une énumération  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  de  $\mathcal{E}$  :

$$C^0(G, X) = \left\{ (f_1, \dots, f_k) \in \bigcup_i C^0([0; l_{\mathbf{e}_i}], X) \mid f_j(l_j) = f_i(0), \text{ chaque fois que } t(\mathbf{e}_j) = o(\mathbf{e}_i) \right\}.$$

**Remarque :** On pourrait définir une distance sur  $G$  en définissant la longueur de chemins dans le graphe  $G$ . La notion de fonction continue pour cette distance coïncide alors avec la définition précédente. Comme nous n'utiliserons pas cette distance et que les vérifications sont un peu fastidieuses, nous avons préféré donner directement la définition qui nous servira par la suite.

La présence de la coordonnée  $x$  le long des arêtes permet aussi de définir la mesure de Lebesgue  $dx$  sur chaque arête et, par suite sur le graphe. Avec cette mesure, on définit d'autres espaces fonctionnels standards sur  $G$ .

On introduit la notation  $\mathcal{H}^k(\mathbf{e})$  pour désigner l'espace de Sobolev des fonctions sur l'arête  $\mathbf{e}$ , i.e. des fonctions de l'espace  $L^2(\mathbf{e})$  dont toutes les dérivées au sens des distribution jusqu'à

l'ordre  $k$  appartiennent à  $L^2(\mathbf{e})$  (cf. [5]).

Partant de ces espaces, on a alors les définitions suivantes.

**Définition 2.1.2.** (1) *L'espace  $L^2(G)$  sur  $G$  est constitué des fonctions qui sont mesurables et de carré intégrable sur chaque arête  $\mathbf{e}$ , muni de la norme*

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \|f_{\mathbf{e}}\|_{L^2(\mathbf{e})}^2.$$

*En d'autres termes,  $L^2(G)$  est la somme directe orthogonale des espaces  $L^2(\mathbf{e})$ .*

(2) *L'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(G)$  est constitué de fonctions continues sur  $G$  telles que les restrictions de ces fonctions sur les arêtes  $\mathbf{e}$  sont dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{e})$ . La norme associée est*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(G)}^2 = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \|f_{\mathbf{e}}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{e})}^2.$$

La condition de continuité imposée sur les fonctions de l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(G)$  signifie que toute fonction  $f$  de cet espace prend la même valeur au sommet  $\mathbf{v}$  de toutes les arêtes adjacentes à  $\mathbf{v}$ , et ainsi  $f(\mathbf{v})$  est uniquement définie. C'est une condition naturelle pour les fonctions  $\mathcal{H}^1$  unidimensionnelles.

On pourrait définir de façon récursive des espaces de Sobolev d'ordre  $s$  supérieur mais ceux-ci ne seront plus nécessairement adaptés au cadre des graphes quantiques que nous définissons ci-dessous. Intuitivement, les sommets des arêtes sont des singularités et contrairement au cas  $k = 1$ , les fonctions de  $\mathcal{H}^k$  ne vérifient pas de conditions naturelles aux sommets. Nous verrons que les conditions aux sommets caractérisent l'opérateur qu'on étudie sur le graphe et pour plus de détails nous renvoyons à [4].

On définit néanmoins les espaces suivants :

**Définition 2.1.3.** *On note par  $\tilde{\mathcal{H}}^k(G)$  l'espace*

$$\tilde{\mathcal{H}}^k(G) := \bigoplus_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \mathcal{H}^k(\mathbf{e}),$$

*constitué des fonctions  $f \in L^2(G)$  qui sur chaque arête  $\mathbf{e}$  appartient à l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^k(\mathbf{e})$  et telles que*

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{H}}^k(G)}^2 = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \|f_{\mathbf{e}}\|_{\mathcal{H}^k(\mathbf{e})}^2.$$

**Remarque :** La définition de  $\mathcal{H}^1$  dit exactement que :

$$\mathcal{H}^1(G) := \tilde{\mathcal{H}}^1(G) \cap \mathcal{C}^0(G).$$

### 2.1.3 Graphes quantiques

Un graphe métrique devient quantique une fois qu'il est équipé d'une structure additionnelle : on lui assigne un opérateur différentiel d'ordre 2 et un domaine sur lequel il est autoadjoint. Conventionnellement cet opérateur est appelé hamiltonien.

Dans cette thèse, on va s'intéresser à l'hamiltonien qui agit comme le laplacien positif sur chaque arête :

$$f \mapsto -\partial_x^2 f.$$

Pour avoir un opérateur autoadjoint, des conditions supplémentaires sont requises sur les sommets. Pour s'en convaincre on peut se référer au cas classique des opérateurs différentiels sur un segment (qui correspond au cas d'un graphe avec une seule arête) (Cf [5], [4]).

Plus précisément la définition d'un graphe quantique est donnée par :

**Définition 2.1.4.** *Un graphe quantique est un graphe métrique muni d'un opérateur différentiel de second ordre (hamiltonien), avec des conditions appropriées aux sommets. Ainsi, un graphe quantique  $G$  est un triplet*

$$\{\text{graphe métrique } G, \text{ hamiltonien, conditions aux sommets}\}.$$

Dans tout ce qui suit, et pour assurer le caractère autoadjoint, on munira le graphe métrique d'une forme quadratique et l'opérateur associé à cette forme sera notre hamiltonien. La forme quadratique avec laquelle on travaille prescrira automatiquement les conditions aux sommets qui caractérisent le graphe quantique.

Pour une étude détaillée des conditions aux sommets qui caractérisent les graphes quantiques voir [4].

Soit le graphe métrique  $G$  défini dans la partie précédente. C'est-à-dire associé aux arêtes  $(e)_{e \in \mathcal{E}}$ , aux sommets  $V = (v)_{v \in \mathcal{V}}$  et aux longueurs  $(l_e)_{e \in \mathcal{E}}$ . Pour des raisons qui deviendront claires dans la partie suivante, on choisit aussi une famille de poids strictement positifs sur chaque arête,  $\Sigma = (\sigma_e)_{e \in \mathcal{E}}$ . On notera  $G_\Sigma$  le graphe ainsi pondéré.

On définit alors un produit scalaire  $n_{G_\Sigma}$  sur  $L^2(G)$  par

$$\forall u, v \in L^2(G), n_{G_\Sigma}(u, v) = \sum_e \int_0^{l_e} u(x) \overline{v(x)} \sigma_e dx,$$

et on définit la forme quadratique  $a_{G_\Sigma}$  sur  $\mathcal{H}^1(G)$  par :

$$\forall u, v \in \mathcal{H}^1(G), a_{G_\Sigma}(u, v) = \sum_e \int_0^{l_e} u'_e(x) \overline{v'_e(x)} \sigma_e dx.$$

La forme quadratique  $a_{G_\Sigma}$  est fermée et semi-bornée relativement à  $n_{G_\Sigma}$  (voir A.0.9). Elle définit donc un unique opérateur auto-adjoint (Voir A.0.1)  $A_{G_\Sigma}$ . Le domaine  $\text{dom}(A_{G_\Sigma}) \subset \mathcal{H}^1(G)$  est caractérisé par

$$u \in \text{dom}(A_{G_\Sigma}) \iff u \in \mathcal{H}^1(G) \text{ et } \exists C > 0, \forall v \in \mathcal{H}^1(G), |a_{G_\Sigma}(u, v)| \leq C n_{G_\Sigma}(v)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors

$$\forall u \in \text{dom}(A_{G_\Sigma}), \forall v \in \mathcal{H}^1(G), a_{G_\Sigma}(u, v) = n_{G_\Sigma}(A_{G_\Sigma} u, v) \quad (2.1.1)$$

L'ensemble  $\mathcal{H}^1(G)$  s'injecte compactement dans  $L^2(G)$ . Donc, le spectre de  $A_{G_\Sigma}$  est discret et s'accumule en  $+\infty$ . On désignera par  $(\phi_k^{G_\Sigma}, \lambda_k(G_\Sigma))$  un couple d'éléments propres de  $A_{G_\Sigma}$ .

### 2.1.4 Condition au bord associée à $A_{G_\Sigma}$

Dans cette partie, on détermine le comportement au voisinage des sommets des fonctions dans le domaine de  $A_{G_\Sigma}$ .

On commence par définir la notion de dérivée normale sortante au bord d'une arête  $\mathbf{e}$ . Avec l'identification  $\mathbf{e} \simeq [0; l_{\mathbf{e}}]$  et en désignant par  $\partial_n$  la dérivée normale sortante sur une arête  $\mathbf{e}$ , on pose :

- $\partial_n u_{\mathbf{e}}(l_{\mathbf{e}}) = u'(l_{\mathbf{e}})$ ;
- $\partial_n u_{\mathbf{e}}(0) = -u'(0)$ .

Le domaine de  $A_{G_\Sigma}$  est donné par :

$$\text{dom}(A_{G_\Sigma}) = \left\{ u \in \mathcal{H}^1(G); \exists C_u > 0, \forall v \in \mathcal{H}^1(G); a_{G_\Sigma}(u, v) \leq C_u n_{G_\Sigma}(v, v)^{1/2} \right\}.$$

Soit  $u \in \text{dom}(A_{G_\Sigma})$  et  $\mathbf{e}$  une arête fixée. On teste contre une fonction  $v$  telle que  $v_{\mathbf{e}} \in \mathcal{C}_0^\infty((0, l_{\mathbf{e}}))$  et  $v_{\mathbf{e}'} = 0$  pour les autres arêtes. La caractérisation des dérivées faibles implique alors  $u_{\mathbf{e}} \in \mathcal{H}^2(0, l_{\mathbf{e}})$  (cf [5]). Ainsi, toute fonction  $u \in \text{dom}(A_{G_\Sigma})$  est aussi dans  $\tilde{\mathcal{H}}^2(G)$ .

Une intégration par partie dans (2.1.1) donne alors, pour  $u \in \text{dom}(A_{G_\Sigma})$  et  $v \in \mathcal{H}^1(G)$  :

$$a_{G_\Sigma}(u, v) = - \sum_{\mathbf{e}} \int_0^{l_{\mathbf{e}}} \overline{v_{\mathbf{e}}(x)} u_{\mathbf{e}}''(x) \sigma_{\mathbf{e}} dx + \sum_{\mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}} \left[ u_{\mathbf{e}}'(x) \overline{v_{\mathbf{e}}(x)} \right]_0^{l_{\mathbf{e}}}. \quad (2.1.2)$$

On en déduit les deux points suivants :

1. Tout d'abord on a  $(A_{G_\Sigma} u)_{\mathbf{e}} = -u_{\mathbf{e}}''$ .

En remplaçant dans l'égalité précédente (2.1.2), on doit alors avoir :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}} \left[ u_{\mathbf{e}}'(x) \overline{v_{\mathbf{e}}(x)} \right]_0^{l_{\mathbf{e}}} &= \sum_{\mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}} \left( u_{\mathbf{e}}'(l_{\mathbf{e}}) \overline{v_{\mathbf{e}}(l_{\mathbf{e}})} - u_{\mathbf{e}}'(0) \overline{v_{\mathbf{e}}(0)} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}} \left( \partial_n u_{\mathbf{e}}(l_{\mathbf{e}}) \overline{v_{\mathbf{e}}(l_{\mathbf{e}})} + \partial_n u_{\mathbf{e}}(0) \overline{v_{\mathbf{e}}(0)} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \overline{v_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})} \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{e}} \partial_n u_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. On choisit, sur chaque arête  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}$  une fonction plateau qui vaut 1 sur le sommet qu'on veut évaluer et 0 sur l'autre on obtient :

$$\sum_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}} \sigma_{\mathbf{e}} \partial_n u_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) = 0. \quad (\text{K-N})$$

Les conditions K-N caractérisent  $A_{G_\Sigma}$  et sont appelées conditions de Kirchoff-Neumann.

Cette appellation est justifiée par le fait que cette condition sur un sommet libre est exactement la condition de Neumann et sur les autres sommets la condition peut-être retrouvée par les lois de courant dans un circuit électrique. En assimilant le graphe à un circuit électrique, les conditions de Kirchoff-Neumann sont exactement les lois du courant dans ce circuit avec des  $\sigma_{\mathbf{e}} = 1$ .



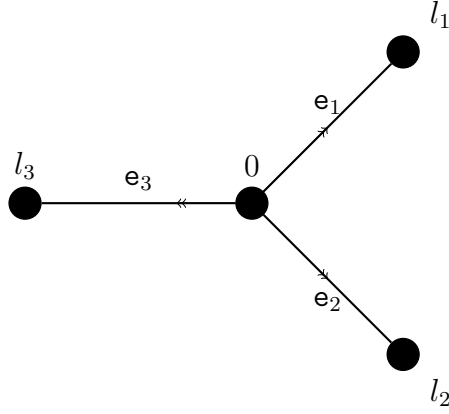


FIGURE 2.10 – Loi du courant

Dans la suite tous les graphes quantiques sur lesquels on travaillera seront de la forme  $(G, A_{G_\Sigma}, (\mathbf{K-N}))$  et on utilisera essentiellement la définition par une forme quadratique.

## 2.2 Surfaces décomposables en cylindres et en jonctions associées à des graphes

Nous commençons par introduire les éléments composant ces surfaces.

**Définition 2.2.1** (Cylindre). *On appelle cylindre, la surface à bord (avec deux composantes de bords)*

$$[0; l]_x \times \left( \mathbb{R}/\sigma\mathbb{Z} \right)_y$$

munie de la métrique  $\mathbf{g} = dx^2 + dy^2$ .

Cette surface est caractérisée par les deux paramètres réels positifs  $l$  et  $\sigma$  représentant respectivement la longueur et la circonférence du cylindre. Ce cylindre sera noté  $\mathbf{C}_{l,\sigma}$  et s'il n'y a pas d'ambiguïté il sera simplement noté par  $\mathbf{C}$ .

Nous introduisons également les objets mathématiques que nous appellerons “jonctions”.

**Définition 2.2.2** (Jonction). *Une jonction est une surface riemannienne à bord  $\mathbf{J}$  avec une métrique  $\mathbf{h}$  éventuellement avec des singularités coniques. Pour chaque composante de bord  $B$ , il existe un couple de réels positifs  $(l, \sigma)$  et un voisinage de  $B$  isométrique au cylindre  $\mathbf{C}_{l,\sigma}$ . On notera  $dm$  l'élément d'aire.*

On a défini, dans la partie précédente la notion de graphe pondéré  $G_\Sigma$ . En remplaçant les sommets de  $G_\Sigma$  par des jonctions adéquates, on définit ainsi une surface décomposable en cylindres et en jonctions  $X_{G_\Sigma}$ . Plus précisément on a la définition suivante :

**Définition 2.2.3.** *Soit  $G_\Sigma = (\mathcal{E} = (\mathbf{e}_k)_k, \mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_j, (l_{\mathbf{e}})_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}}, (\sigma_{\mathbf{e}})_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}})$  un graphe pondéré. Une surface sera dite décomposable en cylindres et jonctions si elle est obtenue en remplaçant*

- chaque arête  $\mathbf{e}$  par le cylindre  $\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}}$  ;
- chaque sommet  $\mathbf{v}$  par une jonction  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  ;
- pour chaque jonction, le nombre de composantes de bord d'une jonction  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  est le nombre d'arêtes  $\mathbf{e}$  telles que  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}$  ;
- on respecte l'identification des composantes de bord.

Une telle surface sera notée  $X_{G_\Sigma}$ .

**Remarque :** Pour l'identification des composantes de bord, on va commencer par fixer un choix de coordonnées euclidiennes.

Soient  $\epsilon$  et  $l$  deux réels. On prendra le cylindre de gauche isométrique à

$$\mathbf{C}_g = ]-\epsilon; 0] \times \mathbf{S}_l$$

et celui de droite isométrique à

$$\mathbf{C}_d = [0; \epsilon[ \times \mathbf{S}_l.$$

En désignant par  $(x_g, y_g)$  (resp.  $(x_d, y_d)$ ) les coordonnées euclidiennes de  $\mathbf{C}_g$  (resp.  $\mathbf{C}_d$ ), on identifie les cercles correspondant à  $x_g = 0$  et  $x_d = 0$  en introduisant la relation d'équivalence

$$(0, y_g) \sim (0, y_d) \iff y_g = y_d.$$

La surface  $X_{G_\Sigma}$  est, par construction munie de la métrique euclidienne dans les cylindres et de la métrique de la jonction dans ces dernières. Autrement dit la métrique  $\mathbf{g}$  est définie par

—  $\mathbf{g}_e = dx^2 + dy^2$  dans le cylindre  $\mathbf{C}_e = [0, l_e] \times \mathbf{S}_{\sigma_e}$ ,

—  $\mathbf{g}_v = \mathbf{h}_v$  dans la jonction  $\mathbf{v}$ .

Donnons un exemple pour illustrer cette définition.

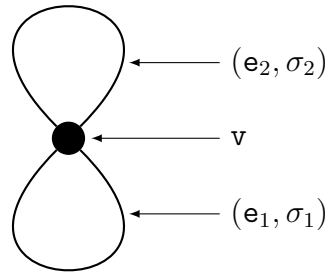


FIGURE 2.11 – Graphe  $G_\Sigma$  formé de deux arêtes.

Commençons par définir les cylindres associés aux arêtes et la jonction associée au sommet.

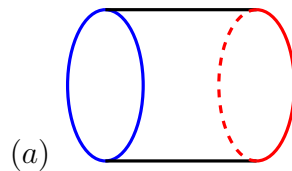


FIGURE 2.12 – Cylindre  $\mathbf{C}_{l_{e_1}, \sigma_{e_1}}$

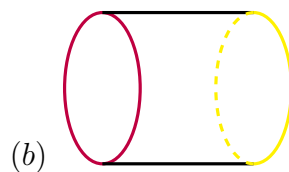


FIGURE 2.13 – Cylindre  $\mathbf{C}_{l_{e_2}, \sigma_{e_2}}$

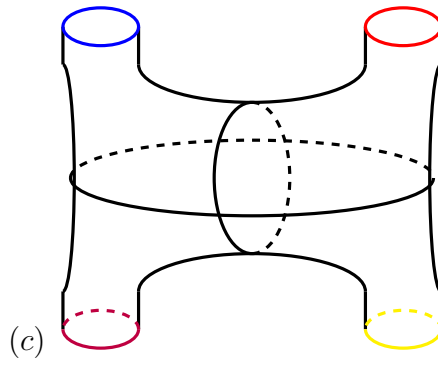


FIGURE 2.14 – Jonction  $\mathbf{J}_v$

On remarque que nous avons quatre composantes de bord, cela cadre bien avec la définition donnée. En effet, nous avons deux arêtes qui partent du sommet  $v$  et également deux qui arrivent.

Une surface décomposable en cylindres et en jonctions associée à ce graphe avec les trois données est la suivante :

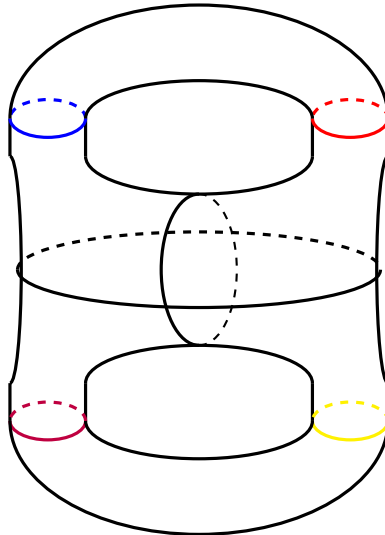


FIGURE 2.15 – Une surface décomposable en cylindres associée au graphe  $G_\Sigma$  ci-dessus

La construction géométrique de ces objets ne sera pas nécessaire pour les questions que nous allons traiter, on utilisera surtout les formes quadratiques. Mais sa compréhension reste toutefois fondamentale pour aborder ces questions.

Par exemple pour le graphe connexe de la figure 2.3, une surface décomposable en cylindres est donnée par sept cylindres  $(\mathbf{C}_{l_{e_k}, \sigma_{e_k}})_{1 \leq k \leq 7}$  et trois jonctions  $(\mathbf{J}_{v_j})_{1 \leq j \leq 3}$  dont les nombres de composantes de bord sont donnés par le graphe à savoir 5, 4 et 5.

## Espaces fonctionnels associés à $X_{G_\Sigma}$

Les espaces  $L^2(X_{G_\Sigma})$  et  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$  sont associés à la métrique riemannienne sur  $X_{G_\Sigma}$ . On utilisera sur  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$  la norme associée au gradient riemannien :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})}^2 = \int_{X_{G_\Sigma}} |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2 dm.$$

On peut identifier  $L^2(X_{G_\Sigma})$  avec la somme directe orthogonale

$$L^2(X_{G_\Sigma}) = \oplus_{\mathbf{e}} L^2(\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}}) \oplus_{\mathbf{v}} L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}}, \mathbf{h}_{\mathbf{v}}).$$

Ainsi, on verra un élément  $u \in L^2(X_{G_\Sigma})$  comme une collection  $u = ((u_{\mathbf{e}})_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}}, (v_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}})$ .

Les éléments de  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$  sont caractérisés par les trois propriétés suivantes :

- Pour tout  $\mathbf{e}$ ,  $u_{\mathbf{e}}$  est dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}})$  ;
- Pour tout  $\mathbf{v}$ ,  $v_{\mathbf{v}}$  est dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$  ;
- Pour tout  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}$ , en notant  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  le cercle à l'interface entre  $\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}}$  et  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  alors

$$\gamma_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} v_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} u_{\mathbf{e}},$$

où  $\gamma_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}}$  est l'opérateur de trace sur le bord  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  (noté abusivement de la même manière que l'on voit ce cercle comme un bord du cylindre ou de la jonction).

Cette caractérisation s'obtient grâce à la continuité  $\mathcal{H}^1$  de l'opérateur de trace au bord et à une formule d'intégrations par parties. Remarquons que tous ces calculs peuvent se faire dans un voisinage de  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  isométrique à  $] -\alpha, \alpha[ \times \mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$ .

### 2.2.1 Dégénérer sur le graphe

Il y a deux façons de décrire la déformation qui consiste à écraser une surface décomposable en cylindres sur le graphe initial. D'un point de vue géométrique, on veut remplacer la surface  $X_{G_\Sigma}$  par une surface  $X_{G_\Sigma}^t$  dans laquelle tous les cylindres  $\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}}$  ont été remplacés par les cylindres  $\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, t\sigma_{\mathbf{e}}}$  et il nous faut donc expliquer comment remplacer les jonctions. On veut donc remplacer une jonction  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  par une jonction  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^t$  pour laquelle la longueur des cercles du bord a été multipliée par  $t$ . Une façon simple de réaliser ceci est de munir  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  de la métrique  $t^2 \mathbf{h}_{\mathbf{v}}$ . On peut alors remarquer que la déformation des cylindres peut aussi se réaliser en munissant le cylindre initial  $\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}}$  de la métrique  $dx^2 + t^2 dy^2$ . Ce ci nous amène à la définition suivante :

**Définition 2.2.4** (Mécanisme d'écrasement). *Le mécanisme d'écrasement consiste à munir la surface  $X_{G_\Sigma}$  d'une famille de métrique  $(\mathbf{g}^t)_{t \in (0,1]}$  définie de la façon suivante.*

- Dans chaque cylindre  $(\mathbf{C}_{l_{\mathbf{e}}, \sigma_{\mathbf{e}}})$ , on pose  $\mathbf{g}_{\mathbf{e}}^t = dx^2 + t^2 dy^2$  ;
- Dans chaque jonction  $(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$ , on pose  $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^t = t^2 \mathbf{h}_{\mathbf{v}}$ .

Avec cette définition, la déformation géométrique *écraser les cylindres*, qu'on peut voir comme une famille de surfaces qui dégénère sur le graphe est réalisée en considérant une famille de métriques définies sur une variété fixe  $X_{G_\Sigma}$ . Les problèmes spectraux associés s'énoncent alors de façon beaucoup plus simple et deviennent posés dans un cadre fonctionnel fixe (voir aussi chapitre 5).

**Remarque :** Les calculs sur les tores effectués dans le chapitre 1 relèvent du même principe : on remplace l'étude d'un opérateur fixe  $(-\partial_x^2 - \partial_y^2)$  sur une famille de tores par une famille d'opérateurs (différentiels elliptiques d'ordre 2 et à coefficients constants) sur un tore fixe.

## Le problème spectral sur $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$

Le produit scalaire associé à la métrique  $\mathbf{g}^t$  restreinte à  $L^2(\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e})$  est donné par :

$$n_e^t(u_e, \varphi_e) = t \int_{\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}} u_e(x, y), \overline{\varphi_e(x, y)} dx dy.$$

et la forme quadratique associée au gradient riemannien, définie sur  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)$  s'écrit :

$$q_e^t(u_e) = t \int_{\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}} |\partial_x u_e|^2 dx dy + \frac{1}{t} \int_{\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}} |\partial_y u_e|^2 dx dy.$$

De même, si on note  $m_v$  la mesure riemannienne associée à la métrique  $\mathbf{h}_v$  sur  $\mathbf{J}_v$ . Le produit scalaire sur  $L^2(\mathbf{J}_v)$  associé à la métrique  $t^2 \mathbf{h}_v$  est :

$$n_v^t(v_v, \psi_v) = t^2 \int_{\mathbf{J}_v} v_v \overline{\psi_v} dm_v$$

et la forme quadratique associée est définie sur  $\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v)$  par :

$$q_v^t(u_v) = \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_{\mathbf{h}_v} u_v|^2 dm_v.$$

On définit alors le produit scalaire  $n^t$  sur  $L^2(X_{G_\Sigma})$  par

$$n^t = \sum_e n_e^t + \sum_v n_v^t,$$

et la forme quadratique  $q^t$  sur le domaine  $\mathcal{H}^1(G_\Sigma)$

**Remarque :** On peut remarquer que, pour  $t > 0$ , les normes  $n^t$  et les formes quadratiques  $q^t$  sont toutes équivalentes entre elles et que la norme de référence sur  $L^2(X_{G_\Sigma})$  correspond à prendre  $t = 1$ . On a un énoncé comparable au niveau des formes quadratiques.

Pour tout  $t > 0$ , la forme quadratique  $q^t$  étant fermée et semi-bornée inférieurement relativement à  $n^t$ , il existe donc un unique opérateur auto-adjoint  $\Delta^t$  de domaine  $\text{dom}(\Delta^t) \subset \mathcal{H}^1$  tel que :

$$\forall \varphi \in \text{dom}(\Delta^t), \forall \psi \in \mathcal{H}^1, \quad q^t(\varphi, \psi) = n^t(\Delta^t \varphi, \psi) \quad (2.2.1)$$

Les injections de Sobolev classiques montrent que  $\forall e \mathcal{H}^1(\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}) \hookrightarrow L^2(\mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}, t dx dy)$  compactement (voir par exemple [30]). Un résultat de ce type existe aussi dans les jonctions (y compris en présence de singularités coniques) voir par exemple Cheeger et Taylor [9]. On en déduit que l'injection de  $(\mathcal{H}^1, q^t)$  dans  $(L^2, n^t)$  est compact. Par suite  $\Delta^t$  est à résolvante compacte.

Les valeurs propres de  $\Delta^t$  seront rangées par ordre croissant et répétées suivant leur multiplicité. On les notera par  $0 = \lambda_0(X^t) < \lambda_1(X^t) \leq \dots \leq \lambda_k(X^t) \leq \dots$  et la  $k$ -ième fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_k(X^t)$  sera notée  $\varphi_k^t$ .

De (2.2.1), on voit que  $(\varphi_k^t, \lambda_k^t)$  est un couple d'éléments propres de  $\Delta^t$  si et seulement si  $\varphi_k^t \in \mathcal{H}^1$  et pour chaque  $\psi \in \mathcal{H}^1$ ,

$$q^t(\varphi_k^t, \psi) = \lambda_k^t \cdot n^t(\varphi_k^t, \psi). \quad (2.2.2)$$

La caractérisation du domaine de  $\Delta^t$  est donnée par :

$$\text{dom}(\Delta^t) = \{ \psi \in \mathcal{H}^1; \exists C_\psi > 0, \forall \varphi \in \mathcal{H}^1; q^t(\psi, \varphi) \leq C_\psi n^t(\varphi, \varphi)^{1/2} \}$$

voir par exemple [34].

On peut traduire l'équation (2.2.2) dans les cylindres et les jonctions en utilisant les fonctions tests localisées. On obtient les équations aux valeurs propres suivantes :

$$-t\partial_x^2 u_e^t - \frac{1}{t}\partial_y^2 u_e^t = t\lambda^t u_e^t \quad \text{dans } \mathbf{C}_{l_e, \sigma_e}. \quad (2.2.3)$$

et

$$-\Delta_v u_v^t = t^2 \lambda^t u_v^t \quad \text{dans } \mathbf{J}_v. \quad (2.2.4)$$

# Chapitre 3

## Convergence des valeurs propres ordonnées

Nous nous intéressons à la façon dont le spectre de  $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$  dépend de  $t$ , et plus particulièrement dans la limite  $t \rightarrow 0$ . Comme on l'a vu dans le cas du tore, l'étude est différente selon que l'on considère le spectre ordonné ou les branches analytiques de valeurs propres. Nos résultats généralisent alors ceux du tore :

- dans le cas des valeurs propres ordonnées, on montre que la  $k$ -ième valeur propre converge vers la  $k$ -ième valeur propre du graphe  $G_\Sigma$ .
- dans le cas des branches analytiques, on montre que toute branche (renormalisée) admet une limite lorsque  $t$  tend vers 0.

Dans ce chapitre, nous étudions le cas des valeurs propres ordonnées.

Il existe toute une littérature étudiant le spectre de surfaces (ou de domaines euclidiens) dégénérant sur un graphe [41], [14], [33], nos résultats peuvent se déduire de ces travaux (en montrant que les lemmes 3.1 et 3.2 de [33] s'appliquent). Nous avons toutefois préféré donner une preuve légèrement différente s'appuyant sur la proposition 3.1.1. Le fait que la métrique dans les jonctions est obtenue en dilatant une métrique fixe, c'est à dire de la forme  $t^2 \mathbf{h}$  permet aussi de simplifier les estimations et, finalement, un des points essentiels de la preuve sera l'estimation a priori donnée dans le lemme 3.1.1.

Commençons par rappeler le cadre général. Le graphe  $G_\Sigma$  est le graphe métrique, pondéré, que nous avons introduit dans le chapitre 2. A chaque arête  $\mathbf{e}$  sont associées une longueur  $l_{\mathbf{e}}$  et une circonférence  $\sigma_{\mathbf{e}}$ . Sur ce graphe, nous avons défini l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(G_\Sigma)$  et la forme sesquilinéaire hermitienne  $a_{G_\Sigma}$  définie par

$$a_{G_\Sigma}(u, v) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \int_0^{l_{\mathbf{e}}} u'_{\mathbf{e}}(x) \overline{v'_{\mathbf{e}}(x)} \sigma_{\mathbf{e}} dx.$$

L'opérateur associé est le Laplacien avec la condition de Kirchoff-Neumann K-N (voir le chapitre 2). Le spectre associé est discret et s'accumule en  $+\infty$  : on a noté  $(\lambda_k(G_\Sigma))_k$  ce spectre ordonné.

La surface  $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$  est obtenue en remplaçant chaque arête  $\mathbf{e} \in G_\Sigma$  par un cylindre  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}} = ([0, l_{\mathbf{e}}] \times \mathbb{R} / \sigma_{\mathbf{e}} \mathbb{Z}, dx^2 + t^2 dy^2)$  et en remplaçant les sommets par des jonctions  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^t = (\mathbf{J}, t^2 \mathbf{h}_{\mathbf{v}})$ . On obtient ainsi une surface riemannienne (en autorisant des singularités coniques dans les métriques  $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}$ ).

**Notation :** dans cette partie, le graphe  $G_\Sigma$  étant fixé, on notera  $X^t$  au lieu de  $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$ .

On rappelle que l'espace de Hilbert  $L^2(X_{G_\Sigma})$  et l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ , définis en 2,

ne dépendent pas de  $t$ . On munit  $L^2(X_{G_\Sigma})$  du produit scalaire :

$$\forall u, v \in L^2(X_{G_\Sigma}), \quad n^t(u, v) = \sum_{\mathbf{e}} t \int_{C_{\mathbf{e}}} u(x, y) \overline{v(x, y)} dx dy + \sum_{\mathbf{v}} t^2 \int_{J_{\mathbf{v}}} u \overline{v} dm_{\mathbf{v}} \quad (3.0.1)$$

La norme de référence sur  $L^2(X_{G_\Sigma})$  correspond à faire  $t = 1$  dans l'expression précédente. Pour ne pas surcharger les notations, on s'autorisera à écrire simplement  $L^2$ .

On définit aussi la forme sesquilinéaire  $q^t$  sur le domaine  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$

$$\forall u, v \in \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma}), \quad q^t(u, v) = \sum_{\mathbf{e}} \left[ \int_{C_{\mathbf{e}}} t \partial_x u \overline{\partial_x v} + \frac{1}{t} \partial_y u \overline{\partial_y v} dx dy \right] + \sum_{\mathbf{v}} \int_{J_{\mathbf{v}}} \nabla u \overline{\nabla v} dm_{\mathbf{v}}. \quad (3.0.2)$$

Là encore, la norme de référence sur  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$  correspond à  $t = 1$  et on autorise la notation  $\mathcal{H}^1$  quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Le laplacien riemannien  $\Delta^t$  (de Friedrichs en présence de singularités) est l'unique opérateur autoadjoint associé à  $q^t$  relativement à  $n^t$ . L'élément propre  $(\lambda, \phi)$  est donc caractérisé par

$$\begin{cases} \phi \in \mathcal{H}^1 \setminus \{0\}, \quad \forall v \in \mathcal{H}^1 \\ q^t(\phi, v) = \lambda \cdot n^t(\phi, v). \end{cases} \quad (3.0.3)$$

On notera  $(\lambda_k(X^t))_{k \geq 0}$  le spectre ordonné.

Le résultat principal de cette partie est le

**Théorème 3.0.1.** *Dans le cadre précédent, pour tout entier  $k$ , on a*

$$\lambda_k(X^t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \lambda_k(G_\Sigma).$$

La preuve de ce théorème se fait en deux temps, tout d'abord nous montrons un résultat de convergence pour une suite  $(\lambda^t, \varphi^t)_{t \in \mathbb{T}}$  (où  $\mathbb{T}$  est une suite qui tend vers 0) d'éléments propres de  $X^t$  sous la condition que la suite  $(\lambda^t)$  est bornée. La deuxième partie de la preuve s'appuie alors sur le résultat précédent et sur des arguments de type min-max pour comparer les spectres de  $G_\Sigma$  et de  $X^t$ .

**Remarque :** Dans la deuxième partie de la preuve, nous définirons un opérateur permettant de transporter sur la variété  $X^t$  une fonction définie initialement sur le graphe. Cet opérateur apparaît déjà dans [41], [33]. L'approche suivie dans ces références consiste alors à construire un opérateur qui transporte des fonctions de  $X^t$  vers des fonctions sur le graphe et à comparer les formes quadratiques pertinentes (voir le lemme 2.1. de [14] qui formalise cette stratégie).

### 3.1 Un résultat de convergence spectral

Dans cette partie, nous montrons la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $\mathbb{T}$  une suite qui tend vers 0 et  $\left( \varphi^t = ((u_{\mathbf{e}}^t)_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}}, (v_{\mathbf{v}}^t)_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}}), \lambda^t \right)_{t \in \mathbb{T}}$  une suite d'éléments propres de  $q^t$  telle que la suite  $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée. Alors on peut extraire une sous-suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  tendant vers 0 telle que  $\varphi^{t_k}$  converge dans  $L^2$  et  $\lambda^{t_k}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .*

*Si on note  $(\varphi^0, \lambda^0)$  la limite, alors il existe une fonction  $w^0$  définie sur le graphe et des constantes  $(C_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}}$  telles que :*

$$\varphi^0 = \left( (w_{\mathbf{e}}^0(x) \mathbf{1}_{S^{\sigma_{\mathbf{e}}}}(y))_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}}, (C_{\mathbf{v}} \mathbf{1}_{J_{\mathbf{v}}})_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \right).$$

*De plus,  $w^0$  est une fonction propre de  $A_{G_\Sigma}$  associée à la valeur propre  $\lambda^0$ .*



Le corollaire suivant en découle immédiatement.

**Corollaire 3.1.1.** *Si on sait, a priori, que la suite  $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{T}}$  converge, on obtient que la limite appartient à  $\text{Sp}(A_{G_\Sigma})$ .*

Nous allons établir la preuve de la proposition 3.1.1 en plusieurs étapes.

**Idée de la preuve :**

1. On commence par extraire une sous-suite convergente de  $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{T}}$ , et on note  $\lambda_0$  la limite.
2. On montre ensuite que, pour  $\varphi^{t_k} = ((u_e^{t_k})_{e \in \mathcal{E}}, (v_v^{t_k})_{v \in \mathcal{V}})$  la fonction propre de  $X^{t_k}$  associée à  $\lambda^{t_k}$ , alors :

- (a) Il existe une fonction  $(w_e^0)_{e \in \mathcal{E}} \in L^2(G_\Sigma)$  telle que

$$\forall e \quad u_e^{t_k}(x, y) \rightarrow u_e^0(x, y) = w_e^0(x) \mathbf{1}_{\mathcal{S}^{\sigma_e}(y)}$$

pour la convergence forte dans  $L^2(\mathbf{C}_e)$  ;

- (b) et des constantes  $(C_v)_{v \in \mathcal{V}}$  telles que

$$\forall v, \quad v_v^{t_k} \rightarrow v_v^0 = C_v \mathbf{1}_{J_v}$$

pour la convergence forte dans  $L^2(\mathbf{J}_v)$  ;

3. Enfin, on montre que  $(w^0 = (w_e^0)_{e \in \mathcal{E}}, \lambda^0)$  est un couple d'éléments propres de  $a_{G_\Sigma}$ .

Le premier point est immédiat en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. Le deuxième point s'appuie sur des estimations a priori. On utilise le fait que la suite de valeurs propres est bornée et l'équation aux valeurs propres pour montrer que, dans chaque cylindre, la norme  $\mathcal{H}^1$  est bornée. Des arguments classiques d'analyse hilbertienne permettent alors d'extraire des sous-suites convergentes et d'étudier la forme de la limite. Le cas des jonctions est un peu plus délicat car l'équation aux valeurs propres ne suffit plus pour obtenir la borne  $\mathcal{H}^1$ . On aura besoin, pour cela du lemme 3.1.1. Le troisième point s'obtient en utilisant la formulation variationnelle des valeurs propres et des fonctions tests bien choisies puis en passant à la limite.

**Remarque :** Tous les espaces utilisés  $\left( L^2(X_{G_\Sigma}), L^2(\mathbf{C}_e), \mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v) \text{ etc } \dots \right)$  viennent munis d'une famille de normes qui dépend de  $t$  et d'une norme de référence (obtenue en faisant  $t = 1$ ). Dans tous les énoncés, quand on parle de convergence dans un de ces espaces, c'est toujours relativement à la norme de référence.

### 3.1.1 Contrôle des normes $\mathcal{H}^1$ des fonctions propres normalisées

L'objectif est d'utiliser les injections de Sobolev pour construire des suites qui convergent au sens fort dans  $L^2$ . Pour cela, on va estimer les normes  $\mathcal{H}^1$  des  $\varphi^t = ((u_e^t)_{e \in \mathcal{E}}, (v_v^t)_{v \in \mathcal{V}})$

On commence par normaliser  $\varphi^t$  en imposant

$$\frac{1}{t} n^t(\varphi^t) = 1 \iff \sum_e \int_{\mathbf{C}_e} |u_e^t|^2 dx dy + t \sum_v \int_{\mathbf{J}_v} |v_v^t|^2 dm = 1. \quad (3.1.1)$$

Dans (3.0.3), on pose  $v = \phi = \varphi^t$  et on divise par  $t \neq 0$  pour obtenir

$$\sum_e \left( \int_{\mathbf{C}_e} |\partial_x u_e^t|^2 dx dy + \frac{1}{t^2} \int_{\mathbf{C}_e} |\partial_y u_e^t|^2 dx dy \right) + \frac{1}{t} \sum_v \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_v v_v^t|^2 dm = \lambda^t. \quad (3.1.2)$$

Cette estimation va nous permettre de contrôler les normes des dérivées des  $u_e^t$  et des  $v_v^t$ . On commence par étudier les fonctions définies dans les cylindres.

## Dans les cylindres

Fixons une arête  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ . De l'égalité (3.1.2), on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_e} |\partial_x u_e^t|^2 dx dy &\leq \sup_t \lambda^t, \\ \int_{\mathbf{C}_e} |\partial_y u_e^t|^2 dx dy &\leq t^2 \sup_t \lambda^t, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

et de (3.1.1) on tire

$$\int_{\mathbf{C}_e} |u_e^t|^2 dx dy \leq 1.$$

Cela entraîne que  $|u_e^t|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)}$  est bornée. Dans un espace de Hilbert, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Ainsi, il existe  $u_e^0 \in \mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)$  telle que, après extraction d'une sous-suite :

$$u_e^{t_k} \text{ converge faiblement vers } u_e^0 \text{ dans } \mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)$$

Comme  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)$  s'injecte compactement dans  $L^2(\mathbf{C}_e)$  (voir [5]), on peut extraire une nouvelle sous-suite telle que  $(u_e^{t_k})_{t_k}$  converge vers  $u_e^0$  fortement dans  $L^2(\mathbf{C}_e)$ .

Nous allons montrer que cette limite s'écrit

$$w_e^0(x) \mathbf{1}_{\mathbf{S}\sigma_e}(y)$$

avec  $w_e^0 \in \mathcal{H}^1(\mathbf{e})$ .

Puisque la suite  $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée, l'estimation (3.1.3) entraîne que  $\partial_y u_e^t$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(\mathbf{C}_e)$ . Comme on sait déjà que  $u_e^t$  converge faiblement vers  $u_e^0$  dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e)$ , on obtient que  $\partial_y u_e^t$  converge faiblement vers  $\partial_y u_e^0$  dans  $L^2(\mathbf{C}_e)$ .

En comparant les deux, on obtient

$$\partial_y u_e^0 = 0.$$

Par suite, il existe  $w_e^0 \in L^2(\mathbf{e})$  telle que

$$u_e^0(x, y) = w_e^0(x) \mathbf{1}_{\mathbf{S}\sigma_e}(y) \in \mathcal{H}^1(\mathbf{C}_e).$$

Le calcul de la dérivée faible de  $u_e^0$  par rapport à  $x$  entraîne  $w_e^0 \in \mathcal{H}^1(\mathbf{e})$  ; en effet, pour  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{C}_e)$ , on a :

$$\langle u_e^0, \partial_x \psi \rangle_{L^2(\mathbf{C}_e)} = -\langle \partial_x u_e^0, \psi \rangle_{L^2(\mathbf{C}_e)}. \quad (3.1.4)$$

En prenant un  $\psi$  de la forme  $\tilde{\psi}(x) \mathbf{1}_{\mathbf{S}\sigma_e}(y)$  avec  $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{e})$ , l'équation (3.1.4) devient :

$$\sigma_e \langle w_e^0, \tilde{\psi}' \rangle_{L^2(\mathbf{e})} = -\langle \partial_x u_e^0, \psi \rangle_{L^2(\mathbf{C}_e)}, \quad (3.1.5)$$

et donc

$$\begin{aligned} |\langle w_e^0, \tilde{\psi}' \rangle_{L^2(\mathbf{e})}| &\leq \frac{1}{\sigma_e} \|\partial_x u_e^0\|_{L^2(\mathbf{C}_e)} \|\psi\|_{L^2(\mathbf{C}_e)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sigma_e}} \|\partial_x u_e^0\|_{L^2(\mathbf{C}_e)} \|\tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbf{I}_e)}. \end{aligned}$$

L'arbitraire sur  $\tilde{\psi}$  implique alors  $w_{\mathbf{e}}^0 \in \mathcal{H}^1(\mathbf{e})$ .

Ainsi, pour toute arête on peut extraire une sous-suite telle que la suite correspondante  $(w_{\mathbf{e}}^{t_k})_{k \geq 0}$  converge vers une fonction ayant les propriétés annoncées. A priori, la sous-suite dépend de l'arête choisie mais, comme il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes, en traitant les arêtes successivement et en extrayant, à chaque fois une nouvelle sous-suite de la sous-suite obtenue à l'étape précédente, on peut trouver une sous-suite qui convient pour toutes les arêtes simultanément.

**Remarque :** On ne détaillera plus cet argument d'extraction successive qui sera donc utilisé implicitement plusieurs fois par la suite.

## Dans les jonctions

Montrons que, pour tout  $\mathbf{v}$ , à extraction d'une sous-suite,  $(v_{\mathbf{v}}^t)_t$  converge dans  $L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$  vers une fonction  $v_{\mathbf{v}}^0$ , puis montrons qu'il existe une constante  $C_{\mathbf{v}}$  telle que

$$v_{\mathbf{v}}^0 = C_{\mathbf{v}} \mathbf{1}_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}}.$$

Fixons un sommet  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . De l'égalité (3.1.2), on tire

$$\int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\nabla v_{\mathbf{v}}^t|^2 dm_{\mathbf{v}} \leq t \lambda^t,$$

avec  $\nabla = \nabla_{\mathbf{h}}$  le gradient riemannien associé à  $\mathbf{h}$ . Comme la suite  $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée, on en déduit que la suite

$$\left( \|\nabla v_{\mathbf{v}}^t\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 \right)_{t \in \mathbb{T}}$$

est elle aussi bornée.

Contrairement au cas des arêtes, la normalisation ne permet pas de contrôler la suite  $(v_{\mathbf{v}}^t)_{t \in \mathbb{T}}$  dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$ . En effet, la normalisation implique seulement :

$$t \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |v_{\mathbf{v}}^t|^2 dm \leq 1$$

et donc pour  $t$  petit, la norme  $L^2$  de  $v_{\mathbf{v}}^t$  pourrait être très grande.

Le lemme qui suit va nous permettre de contrôler cette quantité.

**Lemme 3.1.1.** *Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , il existe une constante  $C$  telle que,*

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\mathbf{J}_{\mathbf{v}}), \|v\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 \leq C \left( \|\nabla_{\mathbf{h}} v\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 + \|v|_{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{v}}}\|_{L^2(\partial \mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 \right).$$

*Preuve du lemme 3.1.1.* Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  fixé. On va raisonner par contradiction, et on suppose donc que, pour tout  $k > 0$ , il existe  $v_k \in \mathcal{H}^1(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$  tel que :

$$\|v_k\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 > k \left( \|\nabla v_k\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 + \|v_k|_{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{v}}}\|_{L^2(\partial \mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 \right).$$

Quitte à normaliser  $v_k$ , on en déduit l'existence d'une suite telle que

- $\|v_k\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 = 1$ , et

- $\|\nabla v_k\|_{L^2(\mathbf{J}_v)}^2 + \|v_k|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)}^2 \leq \frac{1}{k}$ .

Soit  $(\psi_j)_{j \geq 0}$  une base hilbertienne de fonctions propres du laplacien associé à  $\mathbf{h}$ , sur  $\mathbf{J}_v$  avec les conditions de Neumann. La fonction propre  $\psi_0$  est donc l'indicatrice normalisée. On décompose  $v_k$  dans cette base, ce qui s'écrit :

$$v_k = \langle v_k, \psi_0 \rangle \psi_0 + v_k^\perp.$$

On appelle  $\mu$  la première valeur propre non-nulle du Laplacien de Neumann sur  $\mathbf{J}_v$ . Le théorème spectral donne

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\mathbf{J}), \|\nabla v^\perp\|_{L^2(\mathbf{J}_v)}^2 \geq \mu \|v^\perp\|_{L^2(\mathbf{J}_v)}^2.$$

Cette estimation entraîne que :

$$\|v^\perp\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \|\nabla v^\perp\|_{L^2(\mathbf{J}_v)}^2.$$

Calculons maintenant  $\|\langle v_k, \psi_0 \rangle \psi_0|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)}^2$ . Tout d'abord, et puisque  $\psi_0$  est une fonction constante normalisée, on obtient

$$\frac{1}{|\mathbf{J}_v|} \left( \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{e}} \right) |\langle v_k, \psi_0 \rangle|^2 = \|\langle v_k, \psi_0 \rangle \psi_0|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)}^2$$

avec  $|\mathbf{J}_v|$  la mesure de  $\mathbf{J}_v$ .

Par ailleurs, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire, la continuité de la trace relativement à la norme  $\mathcal{H}^1$  et les estimations précédentes déduites de l'hypothèse de contradiction.

$$\begin{aligned} \|\langle v_k, \psi_0 \rangle \psi_0|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)} &= \|(v_k - v_k^\perp)|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)} \\ &\leq \|(v_k)|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)} + \|(v_k^\perp)|_{\partial\mathbf{J}_v}\|_{L^2(\partial\mathbf{J}_v)} \\ &\leq k^{-\frac{1}{2}} + C \|v_k^\perp\|_{\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v)} \\ &\leq C k^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ces deux calculs entraînent donc que

$$|\langle v_k, \psi_0 \rangle| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

On en déduit  $\|v_k\|_{L^2(\mathbf{J})} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ , ce qui contredit la normalisation.  $\square$

On peut maintenant revenir à l'étude de  $v_v$ .

Pour chaque arête  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}$ , notons  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  le cercle qui forme la frontière commune à  $\mathbf{J}_v$  et  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$ . Puisque la suite  $(u_{\mathbf{e}}^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ , la continuité de l'opération trace entraîne que la suite  $((u_{\mathbf{e}}^t)|_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}})_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $L^2(\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}})$ . Par définition de  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ , on en déduit que la suite  $((v_{\mathbf{v}}^t)|_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}})_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $L^2(\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}})$ . En faisant ce raisonnement pour toutes les composantes du bord de  $\mathbf{J}_v$ , on en déduit que la suite  $((v_{\mathbf{v}}^t)|_{\partial\mathbf{J}_v})_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $L^2(\partial\mathbf{J}_v)$ . Comme on sait déjà que  $(\nabla v^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $L^2(\mathbf{J}_v)$ , le lemme précédent permet d'assurer que  $(v^t)_{t \in \mathbb{T}}$  est bornée dans  $L^2(\mathbf{J}_v)$ .

On peut donc extraire une sous suite  $(v_v^{t_k})_{k \geq 0}$  qui converge faiblement dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v)$  vers une fonction  $v^0$ , en utilisant l'injection compacte de  $\mathcal{H}^1$  dans  $L^2$ , et quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que  $(v_v^{t_k})_{k \geq 0}$  converge fortement dans  $L^2$  vers  $v^0$ .

**Remarque :** Lorsque la jonction contient des singularités coniques, l'injection de  $\mathcal{H}^1$  dans  $L^2$  reste compacte (voir par exemple les travaux de Cheeger-Taylor [9]).

De la relation (3.1.2), on tire

$$\frac{1}{t} \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla v_v^t|^2 dm \leq \lambda^t.$$

En passant à la limite faible dans  $\mathcal{H}^1$  cela entraîne que  $\nabla v^0 = 0$  et donc que  $v^0$  est constante. Ainsi, il existe une constante  $C_v$  telle que

$$v_v^{t_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} C_v \mathbf{1}_{\mathbf{J}_v}.$$

Pour finir la preuve de la proposition 3.1.1, il reste donc à montrer que la limite est bien solution du problème aux valeurs propres sur  $G_\Sigma$ .

### 3.1.2 Étude de la limite

Commençons par montrer que la fonction définie par  $(w_e^0)_{e \in \mathcal{E}}$  appartient à  $\mathcal{H}^1(G)$ . On a déjà vu dans la partie sur les arêtes que

$$\forall e \in \mathcal{E}, w_e^0 \in \mathcal{H}^1(e),$$

de sorte qu'il suffit de montrer que la condition de continuité au sommet est satisfaite, c'est à dire que

$$\forall e, e' \rightarrow v, w_e^0(0) = w_{e'}^0(0),$$

(où on a paramétré chaque arête de sorte que  $v$  corresponde à 0).

Cette propriété est assurée par le lemme suivant.

**Lemme 3.1.2.** *Si  $e \rightarrow v$ , en utilisant une paramétrisation  $e = [0; l_e]$  telle que que  $v$  corresponde à 0, alors,*

$$w_e^t(0) = \frac{1}{\sigma_e} \int_0^{\sigma_e} u_e^t(0, y) dy \rightarrow w_e^0(0) = C_v.$$

*Preuve du lemme 3.1.2.* Commençons par définir la moyenne de  $u_e^t$  sur le cylindre par :

$$w_e^t(x) = \frac{1}{\sigma_e} \int_0^{\sigma_e} u_e^t(x, y) dy. \quad (3.1.6)$$

Soit  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty((0, l_e)_x)$ . On définit  $\tilde{\psi}$  sur  $C_e$  par

$$\tilde{\psi}(x, y) = \psi(x) \mathbf{1}_{\mathbf{S}_{\sigma_e}}(y).$$

Cette fonction est dans  $\mathcal{C}_0^\infty(C_e)$  et donc, en testant l'équation (2.2.3) sur  $\tilde{\psi}$ , on voit que  $w_e^t$  vérifie l'équation

$$-(w_e^t)'' = \lambda^t w_e^t \quad (3.1.7)$$

au sens des distributions dans  $(0, l_e)$ .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_e |w_e^t(x)|^2 dx &= \int_e \left| \frac{1}{\sigma_e} \int_0^{\sigma_e} u_e^t(x, y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\sigma_e} \int_e \left( \int_0^{\sigma_e} |u_e^t(x, y)|^2 dy \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\sigma_e}, \end{aligned}$$

en utilisant la normalisation (3.1.1).

Ce calcul montre aussi que l'opérateur de moyenne est continu de  $L^2(\mathbf{C}_e, dx dy)$  dans  $L^2(\mathbf{e}, dx)$ .

De l'équation (3.1.7), on tire alors que la suite  $(w_e^{t''})$  est bornée dans  $L^2$  puis dans  $\mathcal{H}^2(\mathbf{e})$ . Ainsi, à extraction d'une sous-suite près,  $(w_e^t)$  converge fortement dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{e})$ . Comme l'opération de moyenne est continue de  $L^2(\mathbf{C}_e)$  dans  $L^2(\mathbf{e})$ , la limite de  $(w_e^t)$  est forcément  $w_e^0$ .

Ainsi, à extraction d'une sous-suite, on a :

$$w_e^t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} w_e^0 \quad \text{dans } \mathcal{H}^1(\mathbf{e}).$$

Par continuité de la trace en 0 relativement à la norme  $\mathcal{H}^1(\mathbf{e})$ , on en déduit

$$\frac{1}{\sigma_e} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} u_e^t(0, y) dy = w_e^t(0) \xrightarrow[t_k \rightarrow 0]{} w_e^0(0).$$

D'autre part,  $v_v^t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} C_v \mathbf{1}_{\mathbf{J}_v}$  dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{J}_v)$ , car  $v_v^t \rightarrow v_v^0 = C_v \mathbf{1}_{\mathbf{J}_v}$  pour la convergence forte dans  $L^2(\mathbf{J}_v)$ , et

$$\int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_v v_v^t|^2 dm \leq t \lambda^t.$$

On en déduit, par continuité de la trace

$$\frac{1}{\sigma_e} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} (v_v^t)|_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} dy \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} C_v \text{ dans } L^2(\mathbf{S}_{\sigma_e}).$$

Ce qui conclut le lemme vu que  $(v_v^t)|_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} = u^t(0, \cdot)$ . □

On utilise maintenant la formulation variationnelle des valeurs propres pour montrer que  $w^0$  vérifie l'équation aux valeurs propres du problème limite. Il s'agit donc de montrer que

$$\forall f \in \mathcal{H}^1(G_\Sigma), \quad a_{G_\Sigma}(f, w^0) = \lambda^0 n_{G_\Sigma}(f, w^0)$$

Nous allons utiliser l'opérateur de transfert  $T$  introduit par Rubinstein et Schatzman dans sa version améliorée par Kuchment et Zeng [33].

Soit  $f = (f_e)_{e \in \mathcal{E}}$  une fonction définie sur le graphe  $G_\Sigma$ . On définit  $T[f]$  sur la surface  $X_{G_\Sigma}$  par

$$T[f] = \left( (f_e \mathbf{1}_{\mathbf{S}_{\sigma_e}})_{e \in \mathcal{E}}, (f(\mathbf{v}) \mathbf{1}_{\mathbf{J}_v})_{v \in \mathcal{V}} \right).$$

Par construction l'opérateur  $T$  ainsi défini applique  $\mathcal{H}^1(G_\Sigma)$  dans  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ .

Soit  $(\varphi^t, \lambda^t)$  un couple d'éléments propres de  $(q^t, n^t)$ , alors on a :

$$q^t(\varphi^t, T[f]) = \lambda^t n^t(\varphi^t, T[f]).$$

Ceci se réécrit, compte tenu des définitions de  $q^t$ ,  $n^t$  et  $T[f]$  :

$$\sum_e \int_{C_e} \partial_x f_e \overline{\partial_x u_e^t} dx dy = \lambda^t \left( \sum_e \int_{C_e} f_e \overline{u_e^t} dx dy + t \sum_v f(\mathbf{v}) \int_{\mathbf{J}_v} \overline{v_v^t} dm_v \right). \quad (3.1.8)$$

Le membre de gauche tend vers

$$\sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{e}} f'_{\mathbf{e}}(x) \overline{w_{\mathbf{e}}^{0'}(x)} \sigma_{\mathbf{e}} dx,$$

car  $u_{\mathbf{e}}^t$  converge vers  $w_{\mathbf{e}}^t 1_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}}$  faiblement dans  $\mathcal{H}^1(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ . De même, la première somme du membre de droite converge vers

$$\sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{e}} f_{\mathbf{e}}(x) \overline{w_{\mathbf{e}}^0(x)} \sigma_{\mathbf{e}} dx.$$

La deuxième somme converge vers

$$\sum_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) \overline{C_{\mathbf{v}}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} 1 dm_{\mathbf{v}}.$$

Vu le facteur  $t$  devant cette deuxième somme, on obtient bien la relation souhaitée :

$$\sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{e}} f'_{\mathbf{e}}(x) \overline{w_{\mathbf{e}}^{0'}(x)} \sigma_{\mathbf{e}} dx = \lambda^0 \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{e}} f_{\mathbf{e}}(x) \overline{w_{\mathbf{e}}^0(x)} \sigma_{\mathbf{e}} dx.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.

## 3.2 Preuve du théorème 3.0.1

On montre d'abord une majoration de  $\lambda_k^t$  uniforme en  $t$ . On montrera ensuite que la suite  $\lambda_k^t$  a pour unique valeur d'adhérence  $\lambda_k^{G_{\Sigma}}$ .

### 3.2.1 Une première estimation

A l'aide de l'opérateur de transfert  $T$  introduit dans la partie précédente, on montre le lemme suivant

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout  $t > 0$  et tout  $k \geq 0$  on a :*

$$\lambda_k^t \leq \lambda_k(G_{\Sigma}).$$

*Démonstration.* Soit  $F$  le sous-espace engendré par les  $k$  premières fonctions propres de  $a_{G_{\Sigma}}$ . Le théorème spectral entraîne

$$\forall f \in F \setminus \{0\}, \frac{a_{G_{\Sigma}}(f)}{\|f\|_{L^2(G_{\Sigma})}^2} \leq \lambda_k(G_{\Sigma}).$$

L'opérateur  $T$  étant linéaire,  $T[F]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}^1$ . De plus, d'après les calculs menant à (3.1.8) à la fin de la partie précédente :

$$\begin{aligned} \forall f \in F, q^t(T[f]) &= a_{G_{\Sigma}}(f) \\ \forall f \in F, n^t(T[f]) &\geq \|f\|_{L^2(G_{\Sigma})}^2. \end{aligned}$$

Ces inégalités entraînent d'une part que la restriction de  $T$  à  $F$  est injective, et donc que  $T[F]$  est de dimension  $k$ , et d'autre part :

$$\forall f \in F \setminus \{0\}, \frac{q^t(T[f])}{n^t(T[f])} \leq \frac{a_{G_{\Sigma}}(f)}{\|f\|_{L^2(G_{\Sigma})}^2} \leq \lambda_k(G_{\Sigma}).$$

Comme  $T[F]$  est de dimension  $k$ , le lemme s'en déduit par application du min-max. □

Nous pouvons maintenant montrer la convergence ordonnée des valeurs propres.

### 3.2.2 Fin de la preuve

Soit  $\nu$  une valeur d'adhérence (pour  $t$  tendant vers 0) de l'ensemble  $\{\lambda_k^t\}$ . Notons  $(t_n)_{n \geq 0}$  une suite tendant vers 0 telle que

$$\lambda_k^{t_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu.$$

Pour chaque valeur de  $n$ , choisissons une famille orthonormée de fonctions propres  $(\phi_j^{t_n})_{1 \leq j \leq k}$  associée aux  $k$  premières valeurs propres.

D'après le lemme 3.2.1, on a

$$\forall n \geq 0, \forall 1 \leq j \leq k, \lambda_j^{t_n} \leq \lambda_k^{t_n} \leq \lambda_k(G_\Sigma).$$

On peut donc trouver des  $\nu_j$  (avec  $\nu_k = \nu$ ) et des  $\phi_j^0$  et extraire une sous-suite (que l'on continue à noter  $(t_n)_{n \geq 0}$  telle que

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq k, \lambda_j^{t_n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu_j, \\ \forall 1 \leq j \leq k, \phi_j^{t_n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi_j^0 \text{ fortement dans } L^2(X_{G_\Sigma}), \end{aligned}$$

et, d'après la proposition 3.1.1,  $\nu_j$  est une valeur propre de  $G_\Sigma$ . Soit  $w_j^0$  la fonction sur  $G_\Sigma$  associée à  $\phi_j^0$ . D'après la convergence forte dans  $L^2(X_{G_\Sigma})$  et les calculs qui suivent l'équation (3.1.8),

$$\forall j, j', n^t(\phi_j^{t_n}, \phi_{j'}^{t_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle w_j^0, w_{j'}^0 \rangle_{L^2(G_\Sigma)}.$$

Ce qui assure que la famille  $(w_j^0)$  reste orthonormée dans  $L^2(G_\Sigma)$ . On en déduit qu'il y a au moins  $k - 1$  valeurs propres de  $G_\Sigma$  (comptées avec multiplicité) plus petites que  $\nu$  de sorte que

$$\nu \geq \lambda_k(G_\Sigma),$$

et par suite  $\nu = \lambda_k(G_\Sigma)$ . Ainsi,  $\{\lambda_k^t\}$  admet  $\lambda_k(G_\Sigma)$  pour unique valeur d'adhérence. Ce qui termine la preuve du théorème 3.0.1.



# Chapitre 4

## Convergence des branches analytiques

Dans cette partie, nous étudions le spectre de  $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$  du point de vue des branches analytiques. Ce point de vue est moins étudié dans la littérature que celui des valeurs propres ordonnées. Il permet de montrer des résultats génériques dans des familles de problèmes spectraux dépendant de paramètres géométriquement pertinents voir [24, 25]. Nous empruntons d'ailleurs à ces références la philosophie générale et certaines méthodes.

Comme nous l'avons vu dans le cas du tore (voir le chapitre 1), le comportement des branches analytiques est fondamentalement différent du comportement des valeurs propres ordonnées. Notre objectif principal est ici de montrer, qu'après renormalisation, toutes les branches analytiques de valeurs propres convergent quand  $t$  tend vers 0. Nous commençons par présenter le problème aux valeurs propres renormalisé ainsi que le théorème abstrait qui permet de définir les branches analytiques de valeurs propres. Nous montrons ensuite la convergence des branches analytiques. La preuve s'appuie d'une part sur la formule de variations des valeurs propres (formule de Feynman-Hellmann) et d'autre part sur des estimations a priori dans les cylindres. Une décomposition en série de Fourier permet alors de ramener ces estimations à l'étude de formes quadratiques en dimension 2. Nous terminerons cette partie par une caractérisation des limites possibles. Cette dernière repose sur la compréhension de la façon dont les fonctions propres peuvent se concentrer dans les cylindres ou dans les jonctions.

### 4.1 Renormalisation et théorie des perturbations analytiques

Il y a plusieurs notions de perturbations associées à un problème spectral. Le livre [31] fournit une approche très complète à ce type de problème. Dans cette partie, nous considérons des perturbations analytiques alors que le chapitre précédent rentrait plutôt dans le cadre des perturbations singulières.

La théorie des perturbations analytiques vise à comprendre sous quelles conditions les éléments propres d'un problème spectral dépendant analytiquement d'un paramètre  $t$  dépendent eux aussi analytiquement du même paramètre. Nous énonçons le théorème sous les hypothèses qui nous serviront par la suite. Nous renvoyons à [31] chapitre 7 pour plus de détails sur cette théorie et une preuve de ce théorème.

**Théorème 4.1.1** (Kato-Rellich). *Soit  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert. Soient  $Q^t, \tilde{n}^t$  deux familles de formes quadratiques dépendant analytiquement de  $t \in I_0$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ , telles que :*

- *les  $\tilde{n}^t$ , produits scalaires, définissent des normes équivalentes à  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{H}$*
- *le domaine de  $Q^t$ ,  $\text{dom}(Q^t) = \mathcal{D}$ , ne dépend pas de  $t$ , est dense et s'injecte compactement dans  $\mathcal{H}$ .*

*Alors il existe*

- une suite de fonctions à valeurs scalaires  $(\mu_k^t)_{k \geq 0}$  et
  - une suite de fonctions  $\varphi_k^t$  à valeurs dans  $\mathcal{D}$ ,
- analytiques sur  $I_0$  et telles que
- pour tout  $t$  dans  $I_0$ , et tout  $k \geq 0$ ,  $\varphi_k^t$  est vecteur propre de  $Q^t$  relativement à  $\tilde{n}^t$ , associé à la valeur propre  $\mu_k^t$ ,
  - les  $\varphi_k^t$  forment une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$  muni de  $\tilde{n}^t$ .

Donnons quelques précisions sur ce théorème, dans le cas où  $(0, 1] \subset I_0$  et où  $\|\cdot\|^2 = \tilde{n}^1$ .

- Pour tout  $t$ ,  $(\mathcal{H}, \tilde{n}^t)$  est un espace de Hilbert, et il existe une constante  $c(t) > 0$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad c(t) \cdot \tilde{n}^t(u) \leq \tilde{n}^1(u) \leq c(t)^{-1} \cdot \tilde{n}^t(u)$$

- pour tout  $t$ ,  $(\mathcal{D}, \tilde{n}^t)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ ;
- l'analyticité du couple  $(Q^t, \tilde{n}^t)$  se traduit par :
  - $\forall u \in \mathcal{H}$ ,  $t \mapsto \tilde{n}^t(u)$  est analytique;
  - $\forall u \in \mathcal{D}$ ,  $t \mapsto Q^t(u)$  est analytique.

Plaçons nous maintenant dans le cadre des surfaces décomposables en cylindres et en jonctions. Comme dans la partie précédente, on considère la famille  $(X_{G_\Sigma}, \mathbf{g}^t)$  qui dégénère sur le graphe  $G_\Sigma$  quand le paramètre  $t$  tend vers 0. Nous avons équipé les  $X_{G_\Sigma}$  des espaces fonctionnels  $\mathcal{H} = L^2(X_{G_\Sigma})$  et  $\mathcal{D} = \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$  (nous renvoyons au chapitre 2 et au chapitre précédent pour plus de détails).

Soient  $(n^t)_{t>0}$  et  $(q^t)_{t>0}$  les formes quadratiques de la partie précédentes définies respectivement sur  $L^2(X_{G_\Sigma})$  et  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ . On pose  $Q^t := tq^t$  et  $\tilde{n}^t := \frac{1}{t}n^t$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in L^2(X_{G_\Sigma}), \quad \tilde{n}^t(\psi) &= \sum_{\mathbf{e}} \int_{C_{\mathbf{e}}} |\psi_{\mathbf{e}}|^2 dx dy + t \sum_{\mathbf{v}} \int_{J_{\mathbf{v}}} |\psi_{\mathbf{v}}|^2 dm_{\mathbf{v}}, \\ \forall \psi \in \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma}), \quad Q^t(\psi) &= \sum_{\mathbf{e}} \left( t^2 \int_{C_{\mathbf{e}}} |\partial_x \psi_{\mathbf{e}}|^2 dx dy + \int_{C_{\mathbf{e}}} |\partial_y \psi_{\mathbf{e}}|^2 dx dy \right) + t \sum_{\mathbf{v}} \int_{J_{\mathbf{v}}} |\nabla \psi_{\mathbf{v}}|^2 dm_{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, les fonctions  $t \mapsto Q^t(\psi)$  et  $t \mapsto \tilde{n}^t(\psi)$  sont polynomiales en  $t$ , et donc analytiques par rapport à  $t$ . De plus on a choisi le domaine de  $Q^t$  indépendant de  $t$ .

Pour tout  $t \in (0, 1]$ , on a aussi :

$$t \cdot \tilde{n}^1 \leq \tilde{n}^t \leq \tilde{n}^1,$$

de sorte que toutes les normes  $\tilde{n}^t$  sont équivalentes à la norme  $\tilde{n}^1$  et donc elles sont toutes équivalentes entre elles.

Les hypothèses du théorème de Kato-Rellich sont donc toutes satisfaites et le spectre de  $Q^t$  relativement à  $\tilde{n}^t$  est organisé en branches analytiques.

Dans la suite de cette partie, on considère une branche analytique fixée  $(\varphi^t, \mu^t)_{t \in (0, 1]}$ . Rappelons que  $t \mapsto \varphi^t$  est analytique à valeurs dans  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ . Le problème aux valeurs propres s'écrit donc

$$\forall \psi \in \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma}), \quad Q^t(\varphi^t, \psi) = \mu^t \tilde{n}^t(\varphi^t, \psi). \quad (4.1.1)$$

En comparant avec le problème aux valeurs propres pour  $q^t$  relativement à  $n^t$ , on a donc la propriété suivante :

$$\forall t \in (0, 1], \exists k \geq 0, \quad \mu^t = t^2 \lambda_k^t.$$

Dans cette assertion, le numéro  $k$  de la valeur propre dépend a priori de  $t$ . Cela explique la différence entre considérer les valeurs propres ordonnées et l'étude des branches analytiques. On peut montrer que la fonction  $t \mapsto k(t)$  qui à  $\mu^t$  associe son numéro dans la liste des

valeurs propres ordonnées est constante au voisinage d'un  $t_0$  tel que la valeur propre  $\mu^{t_0}$  est simple. Passer d'une formulation à l'autre nécessite donc en général une compréhension soit des croisements de branches analytiques, soit une étude fine des valeurs propres multiples (cf [24]).

On aura besoin des expressions des dérivées par rapport à  $t$  de  $Q$  et  $\tilde{n}$ . En notant cette dérivation par un point, on calcule

$$\dot{\tilde{n}}^t(\psi) = \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\psi_{\mathbf{v}}|^2 dm \quad (4.1.2)$$

$$\dot{Q}^t(\psi) = 2t \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_x \psi_{\mathbf{e}}|^2 dx dy + \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\nabla \psi_{\mathbf{v}}|^2 dm_{\mathbf{v}}. \quad (4.1.3)$$

## 4.2 Limites des branches analytiques

Dans cette partie nous montrons le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $(\varphi^t, \mu^t)$  une branche analytique de  $(Q^t, \tilde{n}^t)$ . Alors, il existe  $\mu^0 \in [0, +\infty)$  tel que*

$$\mu^t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \mu^0.$$

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

1. Nous commencerons par utiliser la formule de Feynman-Hellmann pour avoir une expression de  $\dot{\mu}^t$ . Il suffira ensuite de minorer cette dérivée par une fonction de  $t$  intégrable au voisinage de 0 pour conclure (voir le lemme 4.2.3).
2. Pour obtenir des estimations sur  $\dot{\mu}^t$ , on se ramène d'abord à une expression qui fait intervenir la fonction propre uniquement dans les cylindres de  $X_{G_{\Sigma}}$ . Dans chaque cylindre, une décomposition en série de Fourier partielle nous amène à étudier des formes quadratiques dans  $\mathbb{C}^2$ .
3. On peut alors faire une étude directe de chaque problème et obtenir des estimations uniformes que l'on peut sommer pour revenir à  $\varphi^t$ .

### 4.2.1 Formule de Feynman-Hellman

Dans le cadre d'une perturbation analytique, la formule de Feynman-Hellmann exprime la variation des valeurs propres. Cette caractérisation s'avère importante pour la géométrie spectrale (voir [24]).

**Lemme 4.2.1** (Feynman-Hellmann). *Soit  $(\varphi^t, \mu^t)$  une branche analytique du problème spectral  $(Q^t, \tilde{n}^t)$ . Pour tout  $t \in I_0$ , on a la relation*

$$\dot{\mu}^t \cdot \tilde{n}^t(\varphi^t) = \dot{Q}^t(\varphi^t) - \mu^t \cdot \dot{\tilde{n}}^t(\varphi^t) \quad (\text{F-H})$$

*Preuve.* Soit  $\psi \in \mathcal{H}^1(X_{G_{\Sigma}})$ , le théorème de Kato-Rellich donne l'analyticité des applications

$$\begin{aligned} t &\mapsto Q^t(\varphi^t, \psi) \\ t &\mapsto \tilde{n}^t(\varphi^t, \psi) \\ t &\mapsto \mu^t. \end{aligned}$$

On peut donc dériver par rapport à  $t$  l'équation aux valeurs propres (4.1.1). On obtient

$$\dot{Q}^t(\varphi^t, \psi) + Q^t(\dot{\varphi}^t, \psi) = \dot{\mu}^t \cdot \tilde{n}^t(\varphi^t, \psi) + \mu^t \cdot \left( \dot{\tilde{n}}^t(\varphi^t, \psi) + \tilde{n}^t(\dot{\varphi}^t, \psi) \right).$$

Cette équation étant vraie pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ , on peut maintenant l'évaluer en  $\psi = \varphi^t$  :

$$\dot{Q}^t(\varphi^t, \varphi^t) + Q^t(\dot{\varphi}^t, \varphi^t) = \dot{\mu}^t \cdot \tilde{n}^t(\varphi^t, \varphi^t) + \mu^t \left( \dot{\tilde{n}}^t(\varphi^t, \varphi^t) + \tilde{n}^t(\dot{\varphi}^t, \varphi^t) \right). \quad (4.2.1)$$

La fonction  $t \mapsto \varphi^t$  est analytique à valeurs dans  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ . Ainsi,  $\dot{\varphi}^t \in \mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ . L'équation aux valeurs propres appliquée à  $\psi = \dot{\varphi}^t$  entraîne alors

$$Q^t(\dot{\varphi}^t, \varphi^t) = \mu^t \tilde{n}^t(\dot{\varphi}^t, \varphi^t).$$

On peut donc simplifier les termes contenant  $\dot{\varphi}^t$  dans l'équation (4.2.1), de sorte que

$$\dot{Q}^t(\varphi^t) = \dot{\mu}^t \cdot \tilde{n}^t(\varphi^t) + \mu^t \cdot \dot{\tilde{n}}^t(\varphi^t). \quad (4.2.2)$$

□

Les formules (4.1.2) et (4.1.3) donnent l'expression de  $\dot{Q}^t$  et  $\dot{\tilde{n}}^t$ . En remplaçant dans la formule de Feynman-Hellmann, on obtient :

$$\dot{\mu}^t \cdot \tilde{n}^t(\varphi^t) = 2t \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_x \varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy + \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\nabla \varphi_{\mathbf{v}}^t|^2 dm_{\mathbf{v}} - \mu^t \cdot \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\varphi_{\mathbf{v}}^t|^2 dm_{\mathbf{v}}. \quad (4.2.3)$$

Nous prendrons  $\varphi^t$  normalisée dans la suite, i.e.

$$\tilde{n}^t(\varphi^t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\varphi_{\mathbf{v}}^t|^2 dm_{\mathbf{v}} = \frac{1}{t} \left( 1 - \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy \right) \quad (4.2.4)$$

Cette normalisation et l'équation aux valeurs propres permettent d'exprimer le problème uniquement dans les cylindres. En effet, de l'équation aux valeurs propres (4.1.1) (écrite pour  $\varphi^t$  de norme 1) on tire

$$\sum_{\mathbf{v}} \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\nabla \varphi_{\mathbf{v}}^t|^2 dm_{\mathbf{v}} = \frac{\mu^t}{t} - \sum_{\mathbf{e}} \left( t \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_x \varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy + \frac{1}{t} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_y \varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy \right). \quad (4.2.5)$$

En utilisant (4.2.4) et (4.2.5) dans (4.2.3), on obtient :

$$\dot{\mu}^t = \frac{1}{t} \sum_{\mathbf{e}} \left( t^2 \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_x \varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy - \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\partial_y \varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy + \mu^t \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\varphi_{\mathbf{e}}^t|^2 dx dy \right). \quad (4.2.6)$$

Cette formule est le point de départ de notre analyse. Comme annoncé, elle ne fait intervenir que les cylindres. Dans les cylindres, nous pouvons faire une décomposition de Fourier partielle qui ramènera notre problème à l'étude d'une famille d'équations différentielles ordinaires sur un intervalle.

## 4.2.2 Décomposition en séries de Fourier partielles

Dans le cylindre  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$  de circonférence  $\sigma_{\mathbf{e}}$ , on note, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu_k(\mathbf{e}) := \frac{2k\pi}{\sigma_{\mathbf{e}}}$ , et, on définit  $e_k$  par  $e_k(y) := \sigma_{\mathbf{e}}^{-\frac{1}{2}} \exp(i\nu_k(\mathbf{e})y)$ .

**Remarque :** Dans toute cette section, nous allons paramétrer les intervalles de longueurs  $l_{\mathbf{e}}$  par longueur d'arc et on prendra toujours  $I_{\mathbf{e}} := [-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}; \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}]$  pour la commodité des calculs. On identifie donc  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$  à  $[-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}, \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}] \times \mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$ .

Soit  $\psi_{\mathbf{e}} \in L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ , le théorème de Fubini entraîne que, pour presque tout  $x$ , la fonction  $y \mapsto \psi_{\mathbf{e}}(x, y) \in L^2(\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}})$ . Pour presque tout  $x$ , on peut alors décomposer  $\psi_{\mathbf{e}}(x, \cdot)$  en série de Fourier par rapport à la deuxième variable. Dans  $L^2(\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}})$  on a alors :

$$\psi_{\mathbf{e}}(x, \cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{\mathbf{e},k}(x) e_k(\cdot),$$

avec

$$v_{\mathbf{e},k}(x) := \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{e}}}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{e}}} \exp(-i\nu_k(\mathbf{e})y) \psi_{\mathbf{e}}(x, y) dy.$$

De plus, en utilisant la formule de Plancherel et l'interversion somme-intégrale pour les fonctions positives, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\psi_{\mathbf{e}}(x, y)|^2 dx dy &= \int_{I_{\mathbf{e}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v_{\mathbf{e},k}(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{I_{\mathbf{e}}} |v_{\mathbf{e},k}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Cette identité entraîne d'une part que les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} J : L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}; L^2(I_{\mathbf{e}})) \\ \psi_{\mathbf{e}} & \longmapsto & (v_{\mathbf{e},k})_{k \in \mathbb{Z}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K : \ell^2(\mathbb{Z}; L^2(I_{\mathbf{e}})) & \longrightarrow & L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}}) \\ (v_{\mathbf{e},k})_{k \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{\mathbf{e},k} \otimes e_k \end{array}$$

sont bien définies et d'autre part que ce sont des isométries. (on rappelle que, par définition, si  $f$  est une fonction définie sur  $I_{\mathbf{e}}$  et  $g$  une fonction définie sur  $\mathbf{S}_{\mathbf{e}}$ ,  $f \otimes g$  est définie par  $[f \otimes g](x, y) = f(x) \cdot g(y)$ ).

En prenant  $\psi_{\mathbf{e}}$  sous la forme  $\chi \otimes e_k$  avec  $\chi \in C_0^\infty(I_{\mathbf{e}})$ , on voit que l'image de  $J$  contient le sous-espace  $\ell_0(\mathbb{Z}; C_0^\infty(I_{\mathbf{e}}))$  des suites à support fini dont tous les termes sont  $C^\infty$  à support compact. De plus, sur ce sous-espace, l'orthogonalité des  $e_k$  entraîne  $J \circ K = \text{id}$ . On en déduit que  $J$  est un isomorphisme isométrique et que  $K = J^{-1}$ . Cela se traduit en écrivant

$$\begin{aligned} \forall \psi_{\mathbf{e}} \in L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}}), \quad \psi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{\mathbf{e},k} \otimes e_k, \quad \text{avec} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad v_{\mathbf{e},k} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{e}}}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{e}}} \exp(-i\nu_k(\mathbf{e})y) \psi_{\mathbf{e}}(\cdot, y) dy. \end{aligned}$$

On dira que  $(v_{\mathbf{e},k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $\psi_{\mathbf{e},k}$ . On notera aussi  $\mathcal{X} = J^{-1}(\ell_0(\mathbb{Z}; C_0^\infty(I_{\mathbf{e}})))$  le sous-espace de  $L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$  formé des fonctions dans  $C_0^\infty(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$  dont la série de Fourier n'a qu'un nombre fini de termes.

La décomposition (partielle) en série de Fourier donne des formules simples pour les dérivées faibles. On les regroupe dans le lemme suivant.

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $\psi_{\mathbf{e}} \in L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ , et  $(v_{\mathbf{e},k})_{k \in \mathbb{Z}}$  la suite de ses coefficients de Fourier. Pour tout multi-indice  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}} \in L^2$ , on a :*

$$\begin{aligned} \left( \nu_k^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)} \right)_k &\in \ell^2(\mathbb{Z}; L^2(I_{\mathbf{e}})), \quad \text{et} \\ \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)} \otimes e_k. \end{aligned}$$

*Preuve.* On commence par tester  $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}} \in L^2$  sur une fonction  $\chi \otimes \bar{e}_k$  avec  $\chi \in C_0^\infty(I_{\mathbf{e}})$ .

$$\left( \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}}, \chi \otimes \bar{e}_k \right)_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = (i\nu_k)^\beta (-1)^\beta \int_{I_{\mathbf{e}}} v_{\mathbf{e},k}(x) \partial^\alpha \chi(x) dx,$$

où on a noté  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$  le crochet de dualité (bilinéaire) correspondant à l'évaluation d'une distribution.

On en déduit

$$\left| \left( (i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}, \chi \right)_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \right| \leq C \|\chi\|_{L^2}$$

Ainsi, pour tout  $k$ ,  $(i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}$  est  $L^2$ .

On teste ensuite  $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}} \in L^2$  sur une fonction  $\chi = \sum_{-N}^N \chi_{\mathbf{e},k} \otimes \bar{e}_k \in \mathcal{X} \subset C_0^\infty(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ . Par un calcul direct, on trouve

$$\left( \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi_{\mathbf{e}}, \chi \right)_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \sum_{-N}^N (i\nu_k)^\beta \left( v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}, \chi_{\mathbf{e},k} \right)_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors

$$\forall (\chi_{\mathbf{e},k})_{-N \leq k \leq N}, \left| \sum_{-N}^N \int_{I_{\mathbf{e}}} [(i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}](x) \chi_{\mathbf{e},k}(x) dx \right| \leq M \left( \sum_{-N}^N \|\chi_{\mathbf{e},k}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par densité, on peut utiliser cette inégalité pour des suites  $(\chi_{\mathbf{e},k}^n)_{n \geq 0}$  telles que

$$\forall -N \leq k \leq N, \chi_{\mathbf{e},k}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{(i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}} \text{ dans } L^2.$$

On en déduit

$$\sum_{-N}^N \|(i\nu_k)^\beta v_{\mathbf{e},k}^{(\alpha)}\|^2 \leq M^2.$$

Ce qui donne le premier résultat puisque  $N$  est arbitraire. Le deuxième s'en déduit d'après le calcul précédent et la densité de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

Ce lemme permet donc de dériver sous le signe somme au sens faible. On obtient notamment

$$\begin{aligned} \partial_x \psi_{\mathbf{e}}(x, y) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v'_{\mathbf{e},k}(x) e_k(y), \\ \partial_y \psi_{\mathbf{e}}(x, y) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} i\nu_k(\mathbf{e}) v_{\mathbf{e},k}(x) e_k(y). \end{aligned}$$

On utilise la formule de Plancherel pour prendre la norme  $L^2$  :

$$\begin{aligned} \|\partial_x \psi_{\mathbf{e}}\|_{L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v'_{\mathbf{e},k}\|_{L^2(I_{\mathbf{e}})}^2, \\ \|\partial_y \psi_{\mathbf{e}}\|_{L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k(\mathbf{e})^2 \|v_{\mathbf{e},k}\|_{L^2(I_{\mathbf{e}})}^2, \\ \|\psi_{\mathbf{e}}\|_{L^2(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|v_{\mathbf{e},k}\|_{L^2(I_{\mathbf{e}})}^2. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de la dérivée  $\dot{\mu}$  (équation (4.2.6)), on trouve finalement l'expression :

$$\dot{\mu}^t = t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |(v_{\mathbf{e},k}^t)'|^2 dx + \frac{(\mu^t - \nu_k(\mathbf{e}))^2}{t^2} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \right). \quad (4.2.7)$$

Notre objectif est maintenant de montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.2.3.** *Il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in ]0; 1]$ , on ait :*

$$\dot{\mu}^t \geq -tM.$$

En effet, avec ce lemme, on peut finir de démontrer le théorème 4.2.1.

*Fin de la preuve du théorème 4.2.1.* On définit la fonction  $f$  sur  $(0, 1]$  par

$$f(t) = \mu^t + \frac{t^2}{2}M.$$

Le lemme 4.2.3 implique que  $f$  est croissante sur  $]0; 1]$ . D'autre part la fonction  $f$  est bornée inférieurement par 0, puisque  $\mu^t$  l'est. On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \text{ existe et est positive.}$$

Par suite :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mu^t \text{ existe et est positive.}$$

□

### 4.2.3 Preuve du lemme 4.2.3

On part de l'équation (4.2.7) que l'on écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^t &= t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 < 0} \left( \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |(v_{\mathbf{e},k}^t)'|^2 dx + \frac{(\mu^t - \nu_k(\mathbf{e}))^2}{t^2} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \right) \\ &+ t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \left( \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |(v_{\mathbf{e},k}^t)'|^2 dx + \frac{(\mu^t - \nu_k(\mathbf{e}))^2}{t^2} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

On en déduit

$$\dot{\mu}^t \geq t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 < 0} \left( \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |(v_{\mathbf{e},k}^t)'|^2 dx + \frac{(\mu^t - \nu_k(\mathbf{e}))^2}{t^2} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \right). \quad (4.2.9)$$

En testant l'équation aux valeurs propres (4.1.1) contre une fonction de  $C_0^\infty(\mathbf{C}_{\mathbf{e}})$ , on observe que

$$-t^2 \partial_x^2 \varphi_{\mathbf{e}}^t - \partial_y^2 \varphi_{\mathbf{e}}^t = \mu^t \varphi_{\mathbf{e}}^t, \quad (4.2.10)$$

au sens faible.

En utilisant la même méthode que pour le lemme 4.2.2, on montre que si  $(v_{\mathbf{e},k}^t)_{k \in \mathbb{Z}}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $\varphi_{\mathbf{e}}^t$  alors

$$-t^2 \partial_x^2 \varphi_{\mathbf{e}}^t - \partial_y^2 \varphi_{\mathbf{e}}^t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-t^2 v_{\mathbf{e},k}^{t''} + \nu_k(\mathbf{e})^2 v_{\mathbf{e},k}^t) \otimes e_k.$$

Par unicité des coefficients de Fourier, les  $v_{\mathbf{e},k}^t$  sont donc solutions faibles de l'équation suivante posée dans  $\mathcal{D}'(I_{\mathbf{e}})$  :

$$-t^2(v_{\mathbf{e},k}^t)'' + (\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t)v_{\mathbf{e},k}^t = 0.$$

Par régularité elliptique (voir le théorème IX.26 de [5]), les  $v_{\mathbf{e},k}^t$  sont aussi solutions au sens fort. Définissons, pour  $k$  tel que  $\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t > 0$

$$\omega_{\mathbf{e},k}^t = \sqrt{\frac{\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t}{t^2}}.$$

Pour  $\omega > 0$ , on définit l'espace fonctionnel

$$E_{\mathbf{e},\omega} = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty\left(-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}; \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}; \mathbb{C}\right); -v'' + \omega^2 v = 0 \right\}.$$

D'après la théorie classique des équations différentielles linéaires à coefficients constants,  $E_{\mathbf{e},\omega}$  est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est  $(x \mapsto \exp(-\omega x), x \mapsto \exp(\omega x))$ .

Considérons les formes quadratiques  $A_{\mathbf{e},\omega}$  et  $N_{\mathbf{e}}$  définies sur  $E_{\mathbf{e},\omega}$  par :

$$A_{\mathbf{e},\omega}(v) = \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v'|^2 dx - \omega^2 \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v|^2 dx,$$

$$N_{\mathbf{e}}(v) = \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v|^2 dx.$$

On a alors, en utilisant la normalisation,

$$\sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_{\mathbf{e}}(v_{\mathbf{e},k}) = \sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{I_{\mathbf{e}}} |v_{\mathbf{e},k}^t(x)|^2 dx \leq 1 \quad (4.2.11)$$

et, en utilisant (4.2.9)

$$\dot{\mu}^t \geq t \cdot \sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{\mathbf{e},\omega_{\mathbf{e},k}^t}(v_{\mathbf{e},k}^t). \quad (4.2.12)$$

## Calcul des valeurs propres de $A_{\mathbf{e},\omega}$ relativement à $N_{\mathbf{e},\omega}$

Déterminons les expressions de  $N_{\mathbf{e}}$  et  $A_{\mathbf{e},\omega}$  dans la base  $(x \mapsto \exp(-\omega x), x \mapsto \exp(\omega x))$ .

Soit  $v \in E_{\mathbf{e},\omega}$  tel que

$$\forall x \in I_{\mathbf{e}}, v(x) = v_1 \exp(-\omega x) + v_2 \exp(\omega x).$$

On calcule

$$\forall x \in I_{\mathbf{e}}, |v(x)|^2 = |v_1|^2 \exp(-2\omega x) + \bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2 + |v_2|^2 \exp(2\omega x)$$

$$\forall x \in I_{\mathbf{e}}, |v'(x)|^2 = \omega^2 \left( |v_1|^2 \exp(-2\omega x) - \bar{v}_1 v_2 - v_1 \bar{v}_2 + |v_2|^2 \exp(2\omega x) \right).$$

Par intégration, on trouve :

$$N_{\mathbf{e}}(v) = -\frac{|v_1|^2}{2\omega} (\exp(-\omega l_{\mathbf{e}}) - \exp(\omega l_{\mathbf{e}})) + l_{\mathbf{e}}(\bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2) + \frac{|v_2|^2}{2\omega} (\exp(\omega l_{\mathbf{e}}) - \exp(-\omega l_{\mathbf{e}}))$$

$$= \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} |v_1|^2 + l_{\mathbf{e}}(\bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2) + \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} |v_2|^2,$$



et

$$A_{\mathbf{e},\omega}(v) = -2\omega^2 l_{\mathbf{e}} (\bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2)$$

Les matrices de ces formes quadratiques dans la base choisie s'écrivent donc (avec un abus de notations)

$$N_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} & l_{\mathbf{e}} \\ l_{\mathbf{e}} & \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{\mathbf{e},\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -2\omega^2 l_{\mathbf{e}} \\ -2\omega^2 l_{\mathbf{e}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Les valeurs propres cherchées sont les solutions de l'équation

$$\det(A_{\mathbf{e},\omega} - Z \cdot N_{\mathbf{e}}) = 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathbf{e},\omega} - Z \cdot N_{\mathbf{e},\omega}) &= \begin{vmatrix} -\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} Z & -2\omega^2 l_{\mathbf{e}} - Z l_{\mathbf{e}} \\ -2\omega^2 l_{\mathbf{e}} - Z l_{\mathbf{e}} & -\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} Z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} Z \right)^2 - \left( 2\omega^2 l_{\mathbf{e}} + Z l_{\mathbf{e}} \right)^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne les valeurs propres suivantes :

$$Z_{\mathbf{e}}^-(\omega) = \frac{-2\omega^2 l_{\mathbf{e}}}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} + l_{\mathbf{e}}}$$

et

$$Z_{\mathbf{e}}^+(\omega) = \frac{2\omega^2 l_{\mathbf{e}}}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} - l_{\mathbf{e}}}.$$

Les fonctions  $Z_{\mathbf{e}}^{\pm}$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$  et, pour  $\omega \geq 0$ ,  $Z_{\mathbf{e}}^-(\omega) < 0 < Z_{\mathbf{e}}^+(\omega)$ .  
Le théorème spectral donne donc :

$$\forall \omega \geq 0, \forall v \in E_{\mathbf{e},\omega}, Z_{\mathbf{e}}^-(\omega) N_{\mathbf{e}}(v) \leq A_{\mathbf{e},\omega}(v) \leq Z_{\mathbf{e}}^+(\omega) N_{\mathbf{e}}(v)$$

La fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\omega \mapsto \frac{2\omega^2 l_{\mathbf{e}}}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} + l_{\mathbf{e}}}$$

est continue, positive et ses limites en 0 et  $+\infty$  sont nulles. On peut donc définir

$$M_{\mathbf{e}} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} \frac{2\omega^2 l_{\mathbf{e}}}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} + l_{\mathbf{e}}} < \infty.$$

Ainsi, on obtient :

$$t \cdot \sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{\mathbf{e},\omega_{\mathbf{e},k}^t}(v_{\mathbf{e},k}^t) \geq -t \cdot \sum_{\mathbf{e}} \left( M_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 < 0} N_{\mathbf{e}}(v_{\mathbf{e},k}^t) \right).$$

On pose :

$$M := \max\{M_{\mathbf{e}}, \mathbf{e} \in \mathcal{E}\},$$

de sorte que

$$t \cdot \sum_{\mathbf{e}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{\mathbf{e},\omega_{\mathbf{e},k}^t}(v_{\mathbf{e},k}^t) \geq -Mt \cdot \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 < 0} N_{\mathbf{e},\omega}(v_{\mathbf{e},k}^t) \geq -M \cdot t, \quad (4.2.14)$$

en utilisant la majoration (4.2.11).

En remplaçant dans (4.2.12), on obtient  $\dot{\mu}^t \geq -Mt$ . Cela termine la preuve du lemme 4.2.3.

## 4.3 Étude des limites possibles

Dans cette partie, on cherche à caractériser quelles valeurs  $\mu^0$  peuvent être obtenues comme limites d'une branche analytique  $(\mu^t)_{t>0}$ . On a vu dans le cas du tore plat (carré de côté  $2\pi$ ), que les limites possibles sont seulement les entiers  $m^2$  : cela résulte du fait que les branches sont de la forme  $\lambda_{m,n}^t = n^2 + \frac{m^2}{t^2}$  et de la renormalisation qui consiste à multiplier par  $t^2$ . Cette question est par ailleurs motivée par les travaux [24] et [25] dans lesquelles une telle caractérisation est centrale. Ces travaux nous apprennent aussi que l'étude des limites est reliée aux phénomènes de concentration des fonctions propres.

Commençons par définir ce que nous entendons par valeurs propres transverses dans un cylindre  $\mathbf{C}_e$ .

**Définition 4.3.1.** *On appelle valeurs propres transverses du cylindre  $\mathbf{C}_e$  les éléments de l'ensemble  $\mathcal{N}_e$  défini par*

$$\mathcal{N}_e := \{\nu_k(\mathbf{e})^2; k \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit aussi :

$$\mathcal{N} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \mathcal{N}_e.$$

**Remarque :** L'ensemble  $\mathcal{N}_e$  est le spectre de l'opérateur  $-\partial_y^2$  dans  $\mathbf{C}_e$ .

Dans cette partie, on va considérer une branche analytique  $(\varphi^t, \mu^t)$  telle que

$$\mu^t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mu^0 \text{ et } \mu^0 \notin \mathcal{N}.$$

Sans perte de généralité, on peut de plus supposer que  $\varphi^t$  est normalisée ( $\forall t > 0, \tilde{n}^t(\varphi^t) = 1$ ). Comme  $\mathcal{N}$  est une partie discrète fermée, il existe  $\delta > 0$  et  $t_0 > 0$  tels que

$$\forall t < t_0, \forall e \in \mathcal{E}, \forall k \in \mathbb{N}, |\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t| > \delta. \quad (4.3.1)$$

On commence par montrer un phénomène de non-concentration dans les cylindres.

### 4.3.1 Non-concentration dans les cylindres

L'objectif de cette partie est de montrer que sous l'hypothèse sur  $\mu^0$ , on peut trouver une sous-suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  telle que la masse de  $(\phi^{t_n})_{n \geq 0}$  tend vers 0 dans chaque cylindre  $\mathbf{C}_e$ . Plus précisément, on montre la proposition suivante

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $\mu^t$  une branche analytique de valeurs propres telle que  $\mu^0 \notin \mathcal{N}$  et  $\varphi^t$  la branche de fonctions propres normalisées associée. Il existe une sous-suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  telle que, pour tout  $c < \min \{\frac{l_e}{4}, e \in \mathcal{E}\}$ ,*

$$\sum_e \int_{-\frac{l_e}{2}+c}^{\frac{l_e}{2}-c} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\varphi^{t_n}(x, y)|^2 dx dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Cette proposition exprime donc le fait que, sous l'hypothèse sur  $\mu^0$  et le long d'une sous-suite, la fonction propre associée se concentre dans les jonctions puisque sa masse dans les cylindres tend vers 0. La preuve nécessite de séparer, dans chaque cylindre les *grands* et les *petits* modes de la série de Fourier associée. Plus précisément, on note  $(v_{e,k}^t)_{k \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier de  $\varphi_e^t$  et on veut donc estimer, uniformément par rapport à  $k$ , la quantité

$$\int_{-\frac{l_e}{2}+c}^{\frac{l_e}{2}-c} |v_{e,k}^t(x)|^2 dx.$$

Le coefficient  $v_{\mathbf{e},k}^t$  est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$-v'' + \frac{\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t}{t^2}v = 0,$$

dont le comportement qualitatif change selon le signe de  $\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t$ . Il n'est donc pas surprenant de devoir utiliser des techniques différentes pour les petits modes (pour lesquels  $\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t < 0$ ) et les grands modes (pour lesquels  $\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t > 0$ ). L'hypothèse sur  $\mu^0$  et la définition de  $\delta$  entraînent que ces deux régimes sont bien séparés.

### Estimation des petits modes relativement à $\mu^t$

L'estimation pour les petits modes utilise de façon cruciale la formule de Feynman-Hellmann et le fait que les branches analytiques convergent.

On utilise notamment le lemme suivant et son corollaire.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $f$  une fonction continue positive sur un intervalle  $]0; a[$  avec  $a > 0$ .*

*Si*

$$\int_0^a \frac{f(t)}{t} < +\infty.$$

*Alors, il existe une sous-suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  qui tend vers 0 telle que  $f(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .*

*Preuve.* Nous allons raisonner par contraposition. S'il n'existe pas de sous-suite satisfaisant la conclusion du lemme alors on peut trouver  $\epsilon > 0$  et  $t_\epsilon$  tel que

$$\forall t < t_\epsilon, f(t) > \epsilon.$$

Pour  $t < t_\epsilon$ , on calcule alors

$$\frac{f(t)}{t} > \frac{\epsilon}{t} \implies \int_0^a \frac{f(t)}{t} = +\infty.$$

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3.1.** *Soit  $f$  continue positive sur  $]0, t_0]$  ; s'il existe une fonction intégrable  $g$  au voisinage de 0 telle que :*

$$\forall t \leq t_0, \frac{f(t)}{t} \leq g(t),$$

*alors il existe une sous-suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  qui tend vers 0 telle que  $f(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .*

Passons maintenant à la preuve du résultat principal de cette sous-section.

On repart de l'expression de  $\dot{\mu}^t$  donnée en (4.2.8). Dans cette expression, on utilise (4.2.14) pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^t + Mt &\geq t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \left( \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |(v_{\mathbf{e},k}^t)'|^2 dx + \omega_k^2 \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \right) \\ &\geq t \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \omega_k^2 \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx \end{aligned}$$

en posant  $\omega_k^2 = \frac{(\mu^t - \nu_k(\mathbf{e}))^2}{t^2}$ .

Par définition de  $\delta$ , on a

$$\forall t \leq t_0, \quad \forall \mathbf{e}, \forall k, \quad \omega_k \geq \frac{\sqrt{\delta}}{t}.$$

L'inégalité précédente devient alors :

$$\dot{\mu}^t + tM \geq \frac{\delta}{t} \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^t - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t|^2 dx$$

Comme la fonction majorante est intégrable au voisinage de 0, d'après le corollaire 4.3.1, il existe une sous-suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  qui tend vers 0 et telle que :

$$\sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^{t_n} - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$$

La proposition suivante récapitule l'estimation ainsi trouvée.

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $\mu^t$  une branche de valeur propre qui converge vers  $\mu^0 \notin \mathcal{N}$ , et  $\varphi^t$  la branche de fonction propre normalisée associée. Il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  tendant vers 0 telle que*

$$\sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mu^{t_n} - \nu_k(\mathbf{e})^2 \geq 0} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0,$$

où  $(v_{\mathbf{e},k}^{t_n})_{k \in \mathbb{Z}}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $\varphi^{t_n}$  dans  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$ .

### Estimations des grands modes relativement à $\mu^t$

Pour estimer les grands modes, on reprend les méthodes de la partie 4.2.3.

On rappelle qu'on a posé

$$\omega_{\mathbf{e},k}^t = \sqrt{\frac{\nu_k(\mathbf{e})^2 - \mu^t}{t^2}}.$$

et, pour  $\omega > 0$ ,  $E_{\mathbf{e},\omega}$  est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle  $-v'' + \omega^2 v = 0$  sur  $] -\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}, \frac{l_{\mathbf{e}}}{2} [$ .

Sur  $E_{\mathbf{e},\omega}$  on a défini la forme quadratique

$$N_{\mathbf{e}}(v) = \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v(x)|^2 dx.$$

Soit  $A > 0$ , et  $t < \frac{l_{\mathbf{e}}}{2A}$ , on définit sur  $E_{\mathbf{e},\omega}$  la forme quadratique

$$N_{\mathbf{e},A}^t(v) = \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + \frac{At}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - \frac{At}{2}} |v(x)|^2 dx.$$

Cette forme quadratique est évidemment positive (Elle est même définie positive puiqu'une fonction non-nulle de  $E_{\mathbf{e},\omega}$  ne peut pas s'annuler sur un intervalle ouvert).

**Remarque :** Pour obtenir la proposition 4.3.1, il suffirait d'étudier le cas  $A = \frac{2c}{t}$  mais on aura besoin du cas général dans la partie suivante.

Calculons les valeurs propres de  $N_{\mathbf{e},A}^t$  relativement à  $N_{\mathbf{e}}$ . En travaillant dans la base des solutions exponentielles, la matrice associée à la forme quadratique  $N_{\mathbf{e},A}^t$  est obtenue de la même façon que précédemment. Il suffit en effet de remplacer dans (4.2.13)  $l_{\mathbf{e}}$  par  $l_{\mathbf{e}} - At$ , on obtient :

$$N_{\mathbf{e},A}^t = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(\omega(l_{\mathbf{e}}-At))}{\omega} & l_{\mathbf{e}} - At \\ l_{\mathbf{e}} - At & \frac{\sinh(\omega(l_{\mathbf{e}}-At))}{\omega} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres cherchées sont alors obtenues en calculant

$$\det(N_{\mathbf{e},A}^t - \Lambda N_{\mathbf{e}}) = \left( \frac{\sinh(\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{\omega} - \Lambda \frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} \right)^2 - (l_{\mathbf{e}} - At - \Lambda l_{\mathbf{e}})^2.$$

On trouve les deux valeurs propres suivantes

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{e},\omega,A}^- &= \frac{\frac{\sinh(\omega(l_{\mathbf{e}}-At))}{\omega} - (l_{\mathbf{e}} - At)}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} - l_{\mathbf{e}}} \\ &= \frac{1 - \exp(-2\omega(l_{\mathbf{e}} - At)) - 2\omega(l_{\mathbf{e}} - At) \exp(-\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{1 - \exp(-2\omega l_{\mathbf{e}}) - 2\omega l_{\mathbf{e}} \exp(-\omega l_{\mathbf{e}})} \cdot \frac{\exp(\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{\exp(\omega l_{\mathbf{e}})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{e},\omega,A}^+ &= \frac{\frac{\sinh(\omega(l_{\mathbf{e}}-At))}{\omega} + (l_{\mathbf{e}} - At)}{\frac{\sinh(\omega l_{\mathbf{e}})}{\omega} + l_{\mathbf{e}}} \\ &= \frac{1 + \exp(-2\omega(l_{\mathbf{e}} - At)) + 2\omega(l_{\mathbf{e}} - At) \exp(-\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{1 + \exp(-2\omega l_{\mathbf{e}}) + 2\omega l_{\mathbf{e}} \exp(-\omega l_{\mathbf{e}})} \cdot \frac{\exp(\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{\exp(\omega l_{\mathbf{e}})}. \end{aligned}$$

On introduit les fonctions  $f_{\pm}$  définies sur  $[0, +\infty)$  par

$$f_{\pm}(x) = 1 \pm e^{-2x} \pm 2xe^{-x},$$

de sorte que

$$\Lambda_{\mathbf{e},\omega,A}^{\pm} = \frac{f_{\pm}(\omega(l_{\mathbf{e}} - At))}{f_{\pm}(\omega l_{\mathbf{e}})} e^{-\omega At}.$$

Comme  $f^{\pm}$  tend vers 1 en  $+\infty$ , il existe  $b$  tel que

$$\forall x \geq b, \quad \frac{1}{2} \leq f_{\pm}(x) \leq 2.$$

Pour  $t < \frac{l_{\mathbf{e}}}{2A}$ ,  $l_{\mathbf{e}} - At > \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}$ , de sorte que

$$\forall A > 0, \quad \forall t \leq \frac{l_{\mathbf{e}}}{2A}, \quad \forall \omega \geq \frac{\sqrt{\delta}}{t}, \quad \omega l_{\mathbf{e}} \geq \omega(l_{\mathbf{e}} - At) \geq \frac{l_{\mathbf{e}}\sqrt{\delta}}{2t}.$$

Dès que  $t$  est suffisamment petit pour que  $\frac{l_{\mathbf{e}}\sqrt{\delta}}{2t} > b$ , on aura alors

$$\Lambda_{\mathbf{e},\omega,A}^{\pm} \leq 4e^{-\omega At} \leq 4e^{-\frac{A\sqrt{\delta}}{2}}.$$

D'après le théorème spectral, on en déduit :

$$\forall t < \frac{l_{\mathbf{e}}\sqrt{\delta}}{2b}, \quad \forall A < \frac{l_{\mathbf{e}}}{2t}, \quad \forall \omega \geq \frac{\sqrt{\delta}}{t}, \quad \forall v \in E_{\mathbf{e},\omega}, \quad 0 \leq N_{\mathbf{e},\omega,A}(v) \leq 4e^{-\frac{A\sqrt{\delta}}{2}} N_{\mathbf{e}}(v).$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 4.3.3.** Soit  $\mu^t$  une branche de valeur propre qui converge vers  $\mu^0 \notin \mathcal{N}$ , et  $\varphi^t$  une branche de fonction propre associée. On note  $l_0 = \min\{l_{\mathbf{e}}, \mathbf{e} \in \mathcal{E}\}$  et  $(v_{\mathbf{e},k}^t)_{k \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier de  $\varphi^t$  dans le cylindre  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$ . Il existe  $\delta > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$\forall t < \frac{l_0 \sqrt{\delta}}{2b}, \quad \forall A < \frac{l_0}{2t}, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\nu_k(\mathbf{e})^2 > \mu^t \implies \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + \frac{At}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - \frac{At}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t(x)|^2 dx \leq 4e^{-\frac{A\sqrt{\delta}}{2}} \cdot \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^t(x)|^2 dx.$$

**Remarque :** Ici, il n'est pas nécessaire de normaliser la branche de fonction propre puisqu'on donne une estimation homogène et l'estimation est plus précise que si on avait borné par la norme de  $\tilde{n}^t(\varphi)$ . De plus, cette estimation est valable pour tout  $t$  assez petit, pas seulement le long d'une sous-suite.

### Preuve de la proposition 4.3.1

Soit  $(t_n)_{n \geq 0}$  la suite donnée dans la proposition 4.3.2 et  $c$  donné dans les hypothèses. On veut estimer

$$\sum_{\mathbf{e}} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + c}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - c} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} |\varphi^{t_n}(x, y)|^2 dx dy = \sum_{\mathbf{e}} \sum_k \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + c}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - c} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}(x)|^2 dx.$$

On découpe la somme sur  $k$  en petits modes et grands modes. Pour les grands modes, on utilise la proposition 4.3.3 avec  $A = \frac{2c}{t_n}$  ce qui est légitime puisque  $c < \frac{l_0}{4} \implies A < \frac{l_0}{2t_n}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 < \mu^{t_n}} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + c}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - c} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}(x)|^2 dx &\leq 4e^{-\frac{c\sqrt{\delta}}{t_n}} \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 < \mu^{t_n}} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}(x)|^2 dx \\ &\leq 4e^{-\frac{c\sqrt{\delta}}{t_n}} \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\varphi^{t_n}(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq 4e^{-\frac{c\sqrt{\delta}}{t_n}} \end{aligned}$$

dès que  $n$  est suffisamment grand pour que  $t_n < \frac{l_0 \sqrt{\delta}}{2b}$ .

Ainsi, la partie correspondant aux grands modes tend bien vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Pour les petits modes, on a

$$\sum_{\mathbf{e}} \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 > \mu^{t_n}} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} + c}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - c} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}(x)|^2 dx \leq \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 > \mu^{t_n}} \int_{-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}^{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}} |v_{\mathbf{e},k}^{t_n}(x)|^2 dx.$$

Cette partie tend donc vers 0 en utilisant la proposition 4.3.2. Ce qui finit de prouver la proposition 4.3.1.

## 4.3.2 Détermination des autres limites possibles

### Jonctions étendues

Pour identifier quelles sont les autres limites possibles, on aura besoin d'une collection de surfaces non-compactes  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$  obtenues, de façon informelle en collant sur chacune des composantes de bord de  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  un demi-cylindre infini. Cette partie décrit précisément cette construction.

Soit  $\mathbf{J}_v$  une jonction et  $\mathbf{S}_{\sigma_e}$  une de ses composantes de bord. Par définition, il existe  $\alpha > 0$  et un voisinage de cette composante isométrique à  $(-\alpha, 0]_\xi \times (\mathbf{S}_{\sigma_e})_\eta$  muni de la métrique  $d\xi^2 + d\eta^2$ . La surface  $\widehat{\mathbf{J}}_v$  est obtenue en étendant ce voisinage à  $(-\alpha, +\infty[_\xi \times (\mathbf{S}_{\sigma_e})_\eta$ . La surface  $\widehat{\mathbf{J}}_v$  est donc décrite comme

$$\widehat{\mathbf{J}}_v = \mathbf{J}_v \cup \bigcup_{e \rightarrow v} \widehat{\mathbf{C}}_e,$$

où  $\widehat{\mathbf{C}}_e$  est un demi-cylindre (infini) euclidien de circonférence  $\sigma_e$ . On utilisera systématiquement dans la suite l'identification :

$$\widehat{\mathbf{C}}_e = [0, +\infty[_\xi \times (\mathbf{S}_{\sigma_e})_\eta, \text{ muni de } d\xi^2 + d\eta^2.$$

On utilisera aussi le fait que ces coordonnées  $(\xi, \eta)$  se prolongent à  $(-\alpha, +\infty[_\xi \times (\mathbf{S}_{\sigma_e})_\eta$ . Comme précédemment, pour une fonction  $\hat{\psi}$  définie sur  $\widehat{\mathbf{J}}_v$ , on notera  $\hat{\psi}_v$  la restriction à  $\mathbf{J}_v$  et  $\hat{\psi}_e$  la restriction au cylindre  $\widehat{\mathbf{C}}_e$ .

La surface  $\widehat{\mathbf{J}}_v$  est munie de la métrique  $\hat{\mathbf{g}}$  qui coïncide avec la métrique de départ dans  $\mathbf{J}_v$  prolongée par la métrique euclidienne dans les cylindres. Notant  $d\hat{m}$  la mesure riemannienne associée on a les formules suivantes pour la norme  $L^2$ , la forme quadratique de Dirichlet et le laplacien :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\psi} \in L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v), \quad \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v} |\hat{\psi}|^2 d\hat{m} &= \int_{\mathbf{J}_v} |\hat{\psi}_v|^2 dm + \sum_{e \rightarrow v} \int_{\widehat{\mathbf{C}}_e} |\hat{\psi}_e(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \\ \forall \hat{\psi} \in \mathcal{H}^1(\widehat{\mathbf{J}}_v), \quad \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v} |\nabla_{\hat{\mathbf{g}}}\hat{\psi}|^2 d\hat{m} &= \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_g \hat{\psi}_v|^2 dm + \sum_{e \rightarrow v} \int_{\widehat{\mathbf{C}}_e} \left( |\partial_\xi \hat{\psi}_e(\xi, \eta)|^2 + |\partial_\eta \hat{\psi}_e(\xi, \eta)|^2 \right) d\xi d\eta, \\ \forall \hat{\psi} \in \text{dom}(\hat{\Delta}), \quad \hat{\Delta}\hat{\psi} &= \begin{cases} \Delta_g \hat{\psi}_v & \text{dans } \mathbf{J}_v \\ -\partial_\xi^2 \hat{\psi}_e - \partial_\eta^2 \hat{\psi}_e & \text{dans } \widehat{\mathbf{C}}_e. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le lemme suivant, on utilise, pour chaque cylindre  $\widehat{\mathbf{C}}_e$  les coordonnées  $(\xi, \eta)$  définies sur  $(-\alpha, +\infty) \times \mathbf{S}_{\sigma_e}$ .

A l'aide de la formule de Green, on montre le résultat suivant

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $\hat{\psi} \in L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)$  telle que*

$$\begin{aligned} \Delta_g^* \hat{\psi}_v &= f_v \in L^2(\mathbf{J}_v) \\ \forall e \rightarrow v, \quad (-\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2)^* \hat{\psi}_e &= f_e \in L^2(\widehat{\mathbf{C}}_e) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^* \hat{\psi} &= f_v + \sum_{e \rightarrow v} f_e \\ &\quad + \sum_{e \rightarrow v} [\gamma \partial_\xi \hat{\psi}_v - \gamma \partial_\xi \hat{\psi}_e] \delta_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} \\ &\quad + \sum_{e \rightarrow v} [\gamma \hat{\psi}_v - \gamma \hat{\psi}_e] \partial_x \delta_{\mathbf{S}_{\sigma_e}}, \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est l'opérateur de restriction au bord (défini sur  $\mathcal{H}^1$ ) et  $\delta_{\mathbf{S}_{\sigma_e}}$  est la mesure d'intégration sur  $\mathbf{S}_{\sigma_e}$ .

Sous les mêmes hypothèses sur  $\hat{\psi}$ , on a  $\hat{\psi} \in \text{dom}(\hat{\Delta})$  si et seulement si

$$\forall e \rightarrow v, \quad \gamma \hat{\psi}_v = \gamma \hat{\psi}_e \text{ et } \gamma \partial_\xi \hat{\psi}_v = \gamma \partial_\xi \hat{\psi}_e.$$

Dans ce cas, on a alors

$$\hat{\Delta} \hat{\psi} = f_v + \sum_{e \rightarrow v} f_e.$$

Le dernier résultat dont on aura besoin est un critère de compacité dans  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)$ . Pour l'énoncer, on définit, pour  $B > 0$ , la partie  $\widehat{\mathbf{J}}_v^B$  obtenue en restreignant tous les cylindres aux  $\xi \leq B$  (dès que  $B$  est suffisamment grand, c'est le voisinage de taille  $B$  dans  $\widehat{\mathbf{J}}_v$  du bord de  $\mathbf{J}_v$ ).

**Lemme 4.3.3.** *Soit  $\mathcal{K} \subset L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v) \cap H_{\text{loc}}^1(\widehat{\mathbf{J}}_v)$  vérifiant*

1.  $\mathcal{K}$  est bornée dans  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)$ ,
2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $B > 0$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{K}, \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^B} |u|^2 dv_g \leq \varepsilon,$$

3. Pour tout  $B$  suffisamment grand, il existe  $M_B$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{K}, \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v^B} |\nabla_{\hat{g}} u|^2 dv_g \leq M_B,$$

Alors  $\mathcal{K}$  est relativement compacte dans  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)$ .

*Démonstration.* Comme  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)$  est un espace métrique complet, il suffit de montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{K}$  est inclus dans un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ .

On fixe donc  $\varepsilon > 0$ , et d'après la deuxième hypothèse, il existe  $B$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{K}, \|u\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^B)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe maintenant une fonction de troncature  $\rho \in C^\infty(\widehat{\mathbf{J}}_v)$ , à support dans  $\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1}$ , et identiquement 1 dans  $\widehat{\mathbf{J}}_v^B$ . Par un calcul direct, la première et la troisième hypothèse entraînent que l'ensemble

$$\{u\rho, u \in \mathcal{K}\}$$

est borné dans  $\mathcal{H}_0^1(\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1})$ . Comme l'injection de  $\mathcal{H}_0^1(\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1})$  dans  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1})$  est compacte, on trouve une collection finie  $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$  telle que

$$\forall u \in \mathcal{K}, \exists i, \|u\rho - v_i\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1})} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note  $\tilde{v}_i$  la fonction  $v_i$  prolongée par 0 en dehors de  $\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1}$ . En utilisant que  $0 \leq 1 - \rho \leq \mathbb{1}_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^B}$ , on en déduit

$$\|u - \tilde{v}_i\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v)} \leq \|u\rho - v_i\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v^{B+1})} + \|u\|_{L^2(\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^B)} \leq \varepsilon.$$

Ce qui conclut la preuve. □

La surface  $\widehat{\mathbf{J}}_v$  est une surface à bouts cylindriques. Ce type de surface a été très étudié d'un point de vue spectral et notamment en théorie du scattering. (voir par exemple [11, 27] et le chapitre 7 de [38]). Le spectre comporte une partie continue dont la multiplicité augmente aux passages de *seuils* qui correspondent à nos valeurs propres transverses. Il peut aussi y avoir des valeurs propres plongées dans le spectre continu même si il est communément supposé que cela n'arrive pas génériquement.

Le théorème sur la détermination des limites s'énonce alors de la façon suivante.

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $\mu^t$  une branche analytique du problème spectral 4.1.1 qui converge vers  $\mu^0$ . Ou bien  $\mu^0$  est un élément de  $\mathcal{N}$  (et donc une valeur propre transverse), ou bien  $\mu^0$  est une valeur propre (donc plongée dans le spectre continu) d'une des surfaces à bouts cylindriques  $\widehat{\mathbf{J}}_v$ .*



**Remarque :** Si on sait a priori qu'aucune des surfaces  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$  n'admet de valeur propre plongée, alors le théorème entraîne que les seules limites possibles sont les valeurs propres transverses.

La suite de cette partie est consacrée à la preuve de ce théorème. L'idée est la suivante, on part de la sous-suite  $\varphi^{t_n}$  identifiée dans la partie précédente. En multipliant  $\varphi^{t_n}$  par une fonction de troncature nulle sauf au voisinage des jonctions, on associe à cette fonction une collection de fonctions vivant dans chaque  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$ . On cherche alors à extraire une sous-suite convergente pour obtenir à la limite une fonction propre ( $L^2$ ) du laplacien sur  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$ . On utilise pour cela le critère de compacité précédent pour lequel on a besoin d'une version raffinée de la non-concentration établie à la partie précédente.

## Troncature

Soit  $(t_n)_{n \geq 0}$  la suite donnée dans la proposition 4.3.2. Dans cette partie, on construit, à partir de  $\varphi^{t_n}$  et de fonctions de troncature une fonction  $\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n$  dans  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$ .

On choisit une fonction plateau  $\rho$  définie sur  $\mathbb{R}$ . C'est-à-dire une fonction  $C^\infty$ , décroissante, positive, nulle sur  $[1, +\infty]$  et identiquement 1 sur  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ . On choisit  $c < \frac{l_0}{4}$  et on définit la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  par  $A_n = \frac{2c}{t_n}$ .

Etant donné un cylindre  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}} \subset X_{G_{\Sigma}}$  que l'on paramètre par  $[0, l_{\mathbf{e}}] \times \mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$ , et  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  la jonction correspondant à  $x = 0$ . On définit, sur le cylindre  $[0, \infty)_{\xi} \times (\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}})_{\eta}$  la fonction  $\hat{\varphi}_{\mathbf{v}, \mathbf{e}}^n$  par

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{v}, \mathbf{e}}^n(\xi, \eta) = \sqrt{t_n} \varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(t_n \xi, \eta) \rho\left(\frac{\xi}{A_n}\right).$$

Cette définition a un sens dès que  $[\frac{\xi}{A_n} \leq 1] \implies t_n \xi \leq l_{\mathbf{e}}$ , autrement dit, dès que  $A_n \leq \frac{l_{\mathbf{e}}}{t_n}$ , ce qui est satisfait par hypothèse sur  $c$  et définitions de  $A_n$  et  $l_0$ .

La fonction  $\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n$  est alors définie sur  $\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$  par

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n = \begin{cases} \sqrt{t_n} \varphi^{t_n} & \text{dans } \mathbf{J}_{\mathbf{v}}, \\ \hat{\varphi}_{\mathbf{v}, \mathbf{e}}^n & \text{dans chaque cylindre } \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}. \end{cases}$$

Pour chaque  $\mathbf{v}$ , on calcule, en faisant le changement de variable  $(t_n \xi, \eta) = (x, y)$  dans les cylindres :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}} |\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n(m)|^2 d\hat{m} &= t_n \cdot \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\varphi_{\mathbf{v}}^{t_n}(m)|^2 dm + \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} t_n \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} \left| \varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(t_n \xi, \eta) \rho\left(\frac{\xi}{A_n}\right) \right|^2 d\xi d\eta \\ &= t_n \cdot \int_{\mathbf{J}_{\mathbf{v}}} |\varphi_{\mathbf{v}}^{t_n}(m)|^2 dm + \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} \int_0^{l_{\mathbf{e}}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{e}}} \left| \varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(x, y) \rho\left(\frac{x}{A_n t_n}\right) \right|^2 dx dy. \end{aligned}$$

On fait maintenant la somme sur  $\widehat{\mathbf{v}}$  et on regroupe les contributions des deux extrémités du même cylindre  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$ . Observons que, dans le calcul précédent, la coordonnée  $x$  dépend de l'extrémité choisie. Pour obtenir une formule lisible, on change de paramétrisation et on fait maintenant l'identification (comme dans la partie précédente)  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}} = [-\frac{l_{\mathbf{e}}}{2}, \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}] \times \mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\widehat{\mathbf{v}}} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_{\widehat{\mathbf{v}}}} |\hat{\varphi}_{\widehat{\mathbf{v}}}^n(m)|^2 d\hat{m} &= \sum_{\widehat{\mathbf{v}}} t_n \cdot \int_{\mathbf{J}_{\widehat{\mathbf{v}}}} |\varphi_{\widehat{\mathbf{v}}}^{t_n}(m)|^2 dm \\ &+ \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} \left| \varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(x, y) \rho\left(\frac{x + \frac{l_{\mathbf{e}}}{2}}{A_n t_n}\right) \right|^2 dx dy + \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} \left| \varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(x, y) \rho\left(\frac{\frac{l_{\mathbf{e}}}{2} - x}{A_n t_n}\right) \right|^2 dx dy \end{aligned}$$

Comme  $A_n t_n < \frac{l_e}{2}$ , les deux fonctions de troncature à chacune des extrémités sont à supports disjoints de sorte que, pour tout  $\mathbf{e}$  et  $x \in [-\frac{l_e}{2}, \frac{l_e}{2}]$ ,

$$0 \leq 1 - \rho\left(\frac{x + \frac{l_e}{2}}{A_n t_n}\right)^2 - \rho\left(\frac{\frac{l_e}{2} - x}{A_n t_n}\right)^2 \leq \mathbb{1}_{[-\frac{l_e}{2} + \frac{A_n t_n}{2}, \frac{l_e}{2} - \frac{A_n t_n}{2}]}(x).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mathbf{v}} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}} |\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n(m)|^2 d\hat{m} - \tilde{n}_{t_n}(\varphi^{t_n}) \right| &= \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{C}_{\mathbf{e}}} |\varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(x)|^2 \left[ 1 - \rho\left(\frac{x + \frac{l_e}{2}}{A_n t_n}\right)^2 - \rho\left(\frac{\frac{l_e}{2} - x}{A_n t_n}\right)^2 \right] dx \\ &\leq \sum_{\mathbf{e}} \int_{-\frac{l_e}{2} + \frac{A_n t_n}{2}}^{\frac{l_e}{2} - \frac{A_n t_n}{2}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{e}}} |\varphi_{\mathbf{e}}^{t_n}(x, y)|^2 dx dy \end{aligned}$$

Par définition  $\frac{A_n t_n}{2} = c$  et donc, en utilisant la proposition 4.3.1, on obtient la propriété suivante

$$\left| \sum_{\mathbf{v}} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}} |\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n(m)|^2 d\hat{m} - \tilde{n}_{t_n}(\varphi^{t_n}) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.3.2)$$

On utilisera cette propriété ci-dessous pour exclure le fait que les normes de toutes les fonctions  $\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n$  tendent vers 0.

Cette estimation assure aussi que la norme  $L^2(\widehat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}})$  de la suite  $(\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n)_{n \geq 0}$  est uniformément bornée. L'hypothèse 1. du lemme 4.3.3 est donc vérifiée.

### Calcul de $\hat{\Delta} \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n$ et estimations

Puisque  $\varphi^{t_n}$  est une fonction propre de  $Q^{t_n}$  relativement à  $\tilde{n}^{t_n}$  on a (en utilisant des coordonnées euclidiennes pour le cylindre)

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \Delta^* \varphi^{t_n} &= \mu^{t_n} \varphi^{t_n}, \text{ dans } \mathbf{J}_{\mathbf{v}} \\ \forall \mathbf{e}, [-t^2 \partial_x^2 - \partial_y^2] \varphi^{t_n} &= \mu^{t_n} \varphi^{t_n}, \text{ dans } \mathbf{C}_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Après changement de variables, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \hat{\Delta}^* \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n &= \mu^{t_n} \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n, \text{ dans } \mathbf{J}_{\mathbf{v}} \\ \forall \mathbf{e}, [-\partial_{\xi}^2 - \partial_{\eta}^2] \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n &= \mu^{t_n} \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n, \text{ si } \xi < A_n < \frac{l_e}{t_n}. \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}}$  un cylindre qui se raccorde à la jonction  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$  et  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  le cercle qui réalise la frontière commune. On peut choisir un voisinage  $V$  de  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  paramétré par des coordonnées euclidiennes  $(x, y) \in ]-\alpha, \alpha[ \times \mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$  telles que  $x = 0$  corresponde à  $\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}$ ,  $x < 0$  à  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}} \cap V$  et  $x > 0$  à  $\mathbf{C}_{\mathbf{e}} \cap V$ .

Si  $\psi$  est à support dans  $V$ , on a, en revenant aux définition de  $Q^t$  et  $\tilde{n}^t$  (et en utilisant que  $\varphi^t$  est à valeurs réelles)

$$\begin{aligned} t \int_{-\alpha}^0 \int_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} \nabla \varphi^t \cdot \nabla \psi + \int_0^{\alpha} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} t^2 \partial_x \varphi^t \partial_x \psi + \partial_y \varphi^t \partial_y \psi &= Q^t(\varphi^t, \psi) \\ &= \mu^t \tilde{n}^t(\varphi^t, \psi) \\ &= \mu^t \tilde{n}^t(\varphi^t, \psi) \\ &= \mu^t \left( t \cdot \int_{-\alpha}^0 \int_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} \varphi^t \psi + \int_0^{\alpha} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_{\mathbf{e}}}} \varphi^t \psi \right) \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green pour  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 0$ , on calcule

$$\int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} [t\partial_x\varphi_v^t(0, \cdot) - t^2\partial_x\varphi_e^t(0, \cdot)] \cdot \psi(0, \cdot) dy = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour toute fonction  $\psi$ , on en déduit que

$$\partial_x\varphi_v^t(0, \cdot) = t \cdot \partial_x\varphi_e^t(0, \cdot).$$

Ainsi, par construction, dans les coordonnées  $(\xi, \eta)$  (qui paramétrisent un voisinage de la même jonction  $\mathbf{S}_{\sigma_e}$ , vue maintenant dans  $\widehat{\mathbf{J}}_v$ ) on a

$$\partial_\xi\hat{\varphi}_v^n(0, \cdot) = \partial_\xi\hat{\varphi}_e^n(0, \cdot)$$

On a aussi

$$\hat{\varphi}_v^n(0, \cdot) = \hat{\varphi}_e^n(0, \cdot),$$

puisque  $\varphi^{tn}$  est dans  $\mathcal{H}^1(X_{G_\Sigma})$ . D'après le lemme 4.3.2, on a finalement

$$\widehat{\Delta}\hat{\varphi}^n = \mu^{tn}\hat{\varphi}^n, \text{ dans } \widehat{\mathbf{J}}_v^B \quad (4.3.3)$$

dès que  $A_n > B$ .

De même, dès que  $A_n > 2B$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v^B} |\nabla_{\mathbf{g}}\hat{\varphi}^n|^2 d\hat{m} &= t \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_{\mathbf{h}}\varphi_v^{tn}|^2 dm \\ &+ \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} t \int_{\xi=0}^{\xi=B} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\partial_\xi\hat{\varphi}_e^n|^2 + |\partial_\eta\hat{\varphi}_e^n|^2 d\xi d\eta \\ &= t \int_{\mathbf{J}_v} |\nabla_{\mathbf{g}}\varphi_v^{tn}|^2 dm \\ &+ \sum_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}} \int_{x=0}^{x=Bt} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} t^2 |\partial_x\hat{\varphi}_e^n|^2 + |\partial_y\hat{\varphi}_e^n|^2 dx dy \\ &\leq Q^{tn}(\varphi^{tn}) \\ &\leq \mu^{tn}. \end{aligned}$$

Cette estimation dit que la norme  $\mathcal{H}^1$  de  $(\hat{\varphi}_v^n)_{n \geq 1}$  sur  $\widehat{\mathbf{J}}_v^B$  est bornée uniformément dès que  $n$  est suffisamment grand. Ce qui est équivalent à la troisième hypothèse du lemme 4.3.3 (puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de conditions à rajouter).

La suite  $(\hat{\varphi}_v^n)_{n \geq 1}$  vérifie donc les premières et troisièmes hypothèses du lemme 4.3.3. Il reste à étudier la deuxième.

### Non-concentration améliorée

**Lemme 4.3.4.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $B_\varepsilon$  et  $n_\varepsilon$  tels que*

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \sum_{\mathbf{v}} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^B} |\hat{\varphi}^n|^2 d\hat{m} \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* soit  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $B_\varepsilon$  tel que  $4e^{-B_\varepsilon\sqrt{\delta}} < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $n_0$  tel que  $t_{n_0} < \frac{2c}{B_\varepsilon}$ . Pour tout  $n > n_0$ , on a  $B_\varepsilon < A_n$  de sorte que, en utilisant le fait que la fonction de troncature  $\rho$  est

toujours plus petite que 1, et en faisant le changement de variables  $(t_n \xi, \eta) = (x, y)$  on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^{B_\varepsilon}} |\hat{\varphi}^n|^2 d\hat{m} &\leq \sum_{\mathbf{e} \rightarrow v} t_n \int_{B_\varepsilon} \int_{\mathbf{S}_e} |\varphi_e^{t_n}(t\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq \sum_{\mathbf{e} \rightarrow v} \int_{B_\varepsilon t_n} \int_{\mathbf{S}_e} |\varphi_e^{t_n}(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq \sum_{\mathbf{e} \rightarrow v} \int_{B_\varepsilon t_n} \int_{\mathbf{S}_e} |\varphi_e^{t_n}(x, y)|^2 dx dy \end{aligned}$$

On fait la somme sur  $v$  de ces inégalités et on regroupe les termes correspondants aux deux extrémités du même cylindre. En revenant à la paramétrisation par  $[-\frac{l_e}{2}, \frac{l_e}{2}] \times \mathbf{S}_{\sigma_e}$  du cylindre  $\mathbf{C}_e$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_v \int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^{B_\varepsilon}} |\hat{\varphi}^n|^2 d\hat{m} &\leq \sum_e \int_{-\frac{l_e}{2} + B_\varepsilon t_n}^0 \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy \\ &\quad + \int_0^{\frac{l_e}{2} - B_\varepsilon t_n} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy \\ &\leq \sum_e \int_{-\frac{l_e}{2} + B_\varepsilon t_n}^{\frac{l_e}{2} - B_\varepsilon t_n} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy. \end{aligned}$$

On décompose une fois encore en petits et grands modes. En utilisant la proposition 4.3.3 (avec  $A = 2B_\varepsilon$ ) et le choix de  $B_\varepsilon$  on trouve qu'il existe  $n_2$  tel que, pour tout  $n > n_2$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{l_e}{2} + B_\varepsilon t_n}^{\frac{l_e}{2} - B_\varepsilon t_n} \int_{\mathbf{S}_{\sigma_e}} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy &\leq \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 < \mu^t} \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} |v_{\mathbf{e},k}|^2 dx + \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 > \mu^t} \int_{-\frac{l_e}{2} + B_\varepsilon t}^{\frac{l_e}{2} - B_\varepsilon t} |v_{\mathbf{e},k}|^2 dx \\ &\leq \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 < \mu^t} \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} |v_{\mathbf{e},k}|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbf{C}_e} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy. \end{aligned}$$

On fait maintenant la somme sur  $\mathbf{e}$  et on utilise la normalisation pour dire que

$$\sum_e \int_{\mathbf{C}_e} |\varphi_e^{t_n}|^2 dx dy \leq 1$$

On trouve que

$$\int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^{B_\varepsilon}} |\hat{\varphi}^n|^2 d\hat{m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_e \sum_{\nu_k(\mathbf{e})^2 < \mu^{t_n}} \int_{-\frac{l_e}{2}}^{\frac{l_e}{2}} |v_{\mathbf{e},k}|^2 dx.$$

D'après la proposition 4.3.2 la somme restante tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. On peut donc trouver un  $n_1$  tel que cette somme est plus petite que  $\frac{\varepsilon}{2}$  pour  $n \geq n_1$ . On obtient donc le résultat annoncé en posant  $n_\varepsilon = \max(n_2, n_1, n_0)$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.2.** *L'hypothèse 2 du lemme 4.3.3 est satisfaite.*

En effet, pour  $n < n_\varepsilon$ , on utilise le fait que  $\hat{\varphi}_v^n$  est  $L^2$  pour dire qu'il existe un  $B_n$  tel que

$$\int_{\widehat{\mathbf{J}}_v \setminus \widehat{\mathbf{J}}_v^{B_n}} |\hat{\varphi}_v^n|^2 d\hat{m} \leq \varepsilon,$$

et on prend ensuite  $B = \max\{B_\varepsilon, B_n, n \leq n_\varepsilon\}$

## Fin de la preuve

D'après ce qui précède, pour tout  $\mathbf{v}$ , on peut extraire de  $(\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n)_{n \geq 0}$  une sous suite qui converge fortement dans  $L^2(\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}})$ . Par extraction successive, on trouve une sous-suite (abusivement encore notée  $n$  dans ce qui suit) telle que

$$\forall \mathbf{v}, \exists \hat{\psi}_{\mathbf{v}}, \|\hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^n - \hat{\psi}_{\mathbf{v}}\|_{L^2(\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour tout  $A > 0$ , et pour tout  $n$  suffisamment grand (tel que  $A_n > A$ ), d'après l'équation (4.3.3) ci dessus,

$$\forall \mathbf{v}, \hat{\Delta}^* \hat{\varphi}_{\mathbf{v}}^{t_n} = \mu^{t_n} \varphi_{\mathbf{v}}^{t_n}, \text{ dans } L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^A).$$

Par continuité  $L^2$  des dérivées faibles, et passage à la limite, on en déduit

$$\forall \mathbf{v}, \hat{\Delta}^* \hat{\psi}_{\mathbf{v}} = \mu^0 \hat{\psi}_{\mathbf{v}}, \text{ dans } L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}}).$$

A ce stade, rien n'assure encore que  $\mu^0$  est une valeur propre de  $\hat{\Delta}^*$  car toutes les limites  $\hat{\psi}_{\mathbf{v}}$  pourraient être nulles. Mais ceci est exclu par l'estimation (4.3.2) qui entraîne (avec la normalisation de  $\hat{\varphi}^{t_n}$ ) par passage à la limite :

$$\sum_{\mathbf{v}} \|\psi_{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})}^2 = 1.$$

Ainsi, au moins une des fonctions  $\psi_{\mathbf{v}}$  n'est pas nulle. Cette dernière est donc une fonction propre  $L^2$  de  $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{v}}$  associée à  $\mu^0$ . Cela conclut la preuve du théorème 4.3.1.

# Chapitre 5

## S.e.s.c., Surfaces polygonales, Surfaces à petits carreaux, Surfaces de Translation

Dans ce chapitre nous définissons des classes de surfaces qui peuvent être décomposées en cylindres et en jonctions et pour lesquelles la déformation étudiée précédemment s'interprète géométriquement de façon intéressante. Nous présentons ainsi les surfaces à petits carreaux et les surfaces de translation. Ces dernières ont fait l'objet de nombreux travaux du point de vue dynamique [40], [48], [49], [37], [46], [20], [7] et il y a plusieurs façons équivalentes de les présenter. Notre travail concernant la métrique plate à singularités coniques dont on peut munir ce type de surface, ils nous a semblé plus cohérent de partir d'une classe plus générale : les surfaces euclidiennes à singularités coniques (ou surfaces polygonales).

Nous commencerons donc par définir ces surfaces euclidiennes à singularités coniques (s.e.s.c.) et une façon de les réaliser en recollant des polygones (surfaces polygonales). On définit ensuite la notion de surfaces à petits carreaux. Sur ces dernières, on définira la notion de direction complètement périodique et on montrera qu'on peut associer à une telle direction une décomposition en cylindres et en jonctions. On verra aussi que ce cadre correspond en fait à prendre un revêtement ramifié du tore ; ce qui explique la ressemblance avec les résultats présentés dans le chapitre 1 . On terminera cette partie en présentant les surfaces de translation du point de vue général et la relation entre la déformation que l'on a considérée et les travaux dynamiques dans l'espace des modules.

Dans ce chapitre, de nombreux résultats seront admis et présentés sans démonstration. Il s'agit pour nous de donner un contexte naturel dans lequel nos travaux s'insèrent.

### 5.1 Les surfaces euclidiennes à singularités coniques

Intuitivement une s.e.s.c. sera une surface qui ressemble localement soit à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soit à un secteur euclidien ou un cône euclidien. De façon formelle, nous définissons

**Définition 5.1.1.** *On appelle secteur euclidien d'angle  $\theta_{max}$ , l'ensemble*

$$\text{Sect}_{\theta_{max}} = \{(r, \theta) | r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{max}\} / \sim$$

*muni de la métrique  $\mathbf{g} = dr^2 + r^2 d\theta^2$  et où  $\sim$  est la relation d'équivalence qui identifie entre eux tous les points  $(0, \theta)$ .*

*Le cône euclidien d'angle  $\theta_{max}$ , suit la même définition où on a remplacé l'intervalle  $[0, \theta_{max}]$  par le cercle de longueur  $\theta_{max}$ . On le notera  $\text{Cone}_{\theta_{max}}$ .*

On observe que

- Par définition, un seul point correspond donc à  $r = 0$  : c'est le sommet (du secteur ou du cône).
- Le secteur euclidien d'angle  $\pi$  est isométrique à un demi-plan et le cône euclidien d'angle  $2\pi$  au plan.
- si  $\theta_{max} < 2\pi$ , alors  $\text{Sect}_{\theta_{max}}$  est isométrique à une partie de  $\mathbb{R}^2$  et cette isométrie est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi_\theta : \mathbf{S}_{\theta_{max}} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta); \end{aligned}$$

- si  $\theta_{max} > 2\pi$ , on peut se restreindre à des bandes de largeurs ( $< 2\pi$ ) et obtenir une collection  $(\phi_{\theta_i})_i$  des isométries précédentes. Le secteur d'angle  $\theta_{max}$  peut alors être vu en recollant les secteurs d'angle  $\theta_i$ . Nous reviendrons ci-dessous sur ce mécanisme de recollement.
- De même, le cône d'angle  $\theta_{max}$  peut être vu comme le secteur d'angle  $\theta_{max}$  sur lequel on a recollé les deux côtés  $[0, +\infty) \times \{0\}$  et  $[0, +\infty) \times \{\theta_{max}\}$ .

Nous pouvons maintenant définir une surface euclidienne à singularités coniques.

**Définition 5.1.2.** Soit  $S_{g,b}$  (notée  $S$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) une surface connexe compacte orientable de genre  $g$  et qui a  $b$  composantes de bord. Soit  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$  un ensemble fini de points sur cette surface. On suppose que toutes les composantes du bord de  $S$  sont des courbes fermées. On note  $\partial S$  le bord de  $S$  et par  $\text{Int}(S) = S \setminus \partial S$  l'intérieur de  $S$ .

On dit que  $S$  est une surface euclidienne à singularités coniques si  $S$  est munie d'une métrique qui est localement isométrique soit à un ouvert du plan euclidien, soit d'un secteur euclidien, soit d'un cône euclidien.

Plus précisément, on a la description suivante.

- Pour tout point  $x \in \text{Int}(S) \setminus \Sigma$ , il existe un voisinage  $U(x)$  isométrique à un disque ouvert dans le plan euclidien ;
- pour tout point  $s \in \Sigma \cap \text{Int}(S)$ , il existe un voisinage  $U(s)$  isométrique à un voisinage du sommet d'un cône euclidien d'angle  $0 < \theta_{max} < +\infty$ , avec  $\theta_{max} \neq 2\pi$  ;
- pour tout point  $x \in \partial S \setminus \Sigma$ , il existe un voisinage  $U(x)$  isométrique à un voisinage du sommet du secteur euclidien  $\varphi = \pi$  qui a comme sommet l'image de  $x$  ;
- pour tout point  $s \in \partial S \cap \Sigma$ , il existe un voisinage  $U(s)$  isométrique à un voisinage du sommet d'un secteur euclidien d'angle  $0 < \varphi_{max} < +\infty$  qui a comme sommet l'image de  $s$  avec  $\varphi_{max} \neq \pi$ .

**Remarque :** Il est parfois commode d'autoriser la présence de *fausses* singularités. C'est à dire de particulariser sur  $S$  un ensemble  $\Sigma' \subset S \setminus \Sigma$  et de penser les points de  $\Sigma'$  comme les sommets d'un cône euclidien d'angle  $2\pi$  ou d'un secteur euclidien d'angle  $\pi$ .

On ne propose pas ici une étude systématique des s.e.s.c. (voir par exemple Malouf [35] ou Troyanov [43]). On note toutefois que l'on peut prouver sur ces surfaces une formule de Gauss-Bonnet, qui permet par exemple de retrouver le genre de la surface si on connaît les angles des singularités. Cette formule s'énonce de la façon suivante (voir par exemple Ousama [35], Griffiths [18]).

**Proposition 5.1.1** (La formule de Gauss-Bonnet). Soit  $S$  une s.e.s.c. de genre  $g$  à bord avec  $b$  composantes, avec  $n$  singularités à l'intérieur et  $m$  singularités sur le bord. Soit  $(\theta_i)_i$  les angles des singularités à l'intérieur et  $(\varphi_j)_j$  les angles des singularités sur le bord.

Alors, on a :

$$\sum_i (2\pi - \theta_i) + \sum_j (\pi - \varphi_j) = (4 - 4g - 2b)\pi.$$

La caractéristique d'Euler pour une surface  $S$  de genre  $g$  avec  $b$  composantes de bord est donnée par

$$\chi(S) = 2 - 2g - b$$

Pour comparer avec la formule de Gauss-Bonnet habituelle, et puisque la courbure est nulle au voisinage d'un point régulier, il est commode de définir une courbure concentrée en chaque point singulier.

**Définition 5.1.3.** La courbure  $\kappa$  en un point singulier intérieur  $s$  d'angle  $\theta$  est donnée par

$$\kappa = 2\pi - \theta.$$

Si  $s$  est localisé sur le bord, son angle sera noté  $\varphi$  et sa courbure devient

$$\kappa = \pi - \varphi.$$

La courbure totale d'une s.e.s.c. est la somme de toutes les courbures aux points singuliers de la surface :

$$K = \sum_i (2\pi - \theta_i) + \sum_j (\pi - \varphi_j)$$

La formule de la proposition précédente devient alors :

$$K = 2\pi\chi(S),$$

ce qui justifie la terminologie *formule de Gauss-Bonnet*.

### 5.1.1 Construire une s.e.s.c.

Dans cette partie, on explique comment construire une s.e.s.c. à partir de polygones euclidiens.

On commence par remarquer qu'un polygone possède une structure de s.e.s.c.. On illustre ce fait dans le cas d'un triangle.

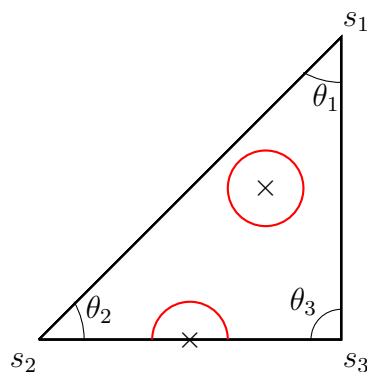


FIGURE 5.1 – Triangle d'angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Les sommets du triangle ont des voisinages isométriques à des secteurs euclidiens, les points sur le bord ont des voisinages isométriques à des demi-disques et ceux des points à l'intérieur sont isométriques à des disques.

Le même raisonnement s'applique pour n'importe quel polygone (c'est à dire d'une partie de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord est une ligne polygonale fermée sans point double).



Le concept de surfaces polygonales emprunté à [18] s'appuie sur la notion de recollement que l'on explique maintenant.

On considère deux polygones distincts  $P_1$  et  $P_2$  dans le plan euclidien. Sur chacun de ces polygones  $P_i$  on identifie un côté  $a_i$ . On suppose que  $a_1$  et  $a_2$  sont de même longueur  $L$ . Pour chaque  $i$  il y a deux façons de paramétrer  $a_i$  par longueur d'arc. Ces deux paramétrisations orientent  $a_i$  dans les deux sens possibles. On choisit la paramétrisation  $\gamma_i$  de telle sorte que le polygone  $P_1$  se retrouve à gauche de  $a_1$  et  $P_2$  à droite de  $a_2$ . Le recollement consiste alors à identifier les points  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  pour tout  $t \in [0, L]$ . On voit que la surface  $P_1 \cup P_2 / \sim$  (ou  $\sim$  est l'identification précédente) est une s.e.s.c..

Cette méthode de recollement est aussi valable pour identifier deux cotés de même longueur d'un même polygone. On autorisera donc aussi ce cas par la suite.

**Exemple :**

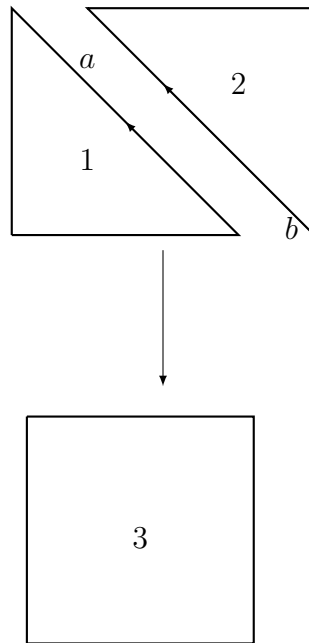


FIGURE 5.2 – Deux triangles rectangles qu'on recolle

**Définition 5.1.4** (Surface polygonale). *Une surface polygonale est une surface obtenue à partir d'une collection finie de polygones  $(P_i)_i$  plongés isométriquement dans le même plan orienté et recollés en suivant les deux règles suivantes :*

1. *Les recollements se font le long de côté de même longueur comme expliqué ci-dessus ;*
2. *Au plus deux polygones peuvent partager un même bord.*

## Exemples de surfaces polygonales

- a) Une surface polygonale avec des bords.

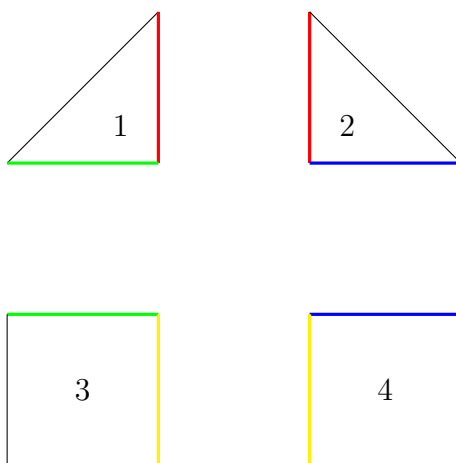


FIGURE 5.3 – Famille de quatre polygones

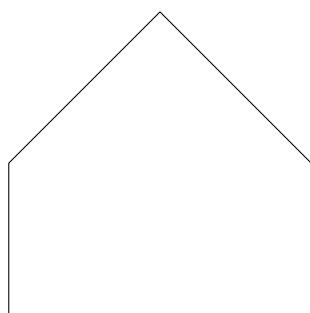


FIGURE 5.4 – Recollement des polygones suivant les couleurs

b) Une surface polygonale sans bord.

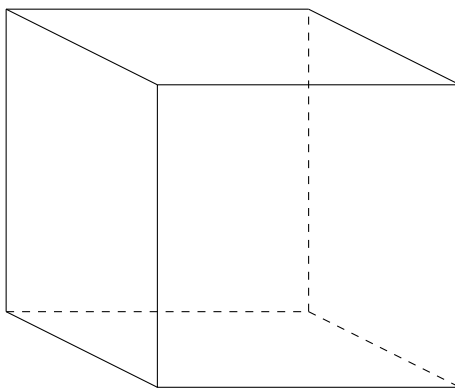


FIGURE 5.5 – Famille de six carrés recollés pour obtenir la surface d'un cube

**Remarques :**

1. Une façon équivalente de voir le recollement, consiste à définir  $J$  l'isométrie affine directe qui envoie  $a_1$  sur  $a_2$  et à poser

$$m_1 \in a_1 \sim m_2 \in a_2 \iff m_2 = J(m_1).$$

2. On peut montrer qu'en fait toute s.e.s.c. peut être obtenue comme une surface polygonale. Cela résulte du fait qu'on peut toujours trianguler une s.e.s.c. et que la structure de s.e.s.c. coïncide alors avec la surface polygonale obtenue en recollant ensemble tous les triangles obtenus.

Les surfaces de translations seront obtenues en requérant que tous les recollements sont faits à l'aide de translations. Avant de présenter la construction générale, nous allons faire un détour par les surfaces à petits carreaux.

## 5.2 Surfaces à petits carreaux

### 5.2.1 Présentation combinatoire

Pour motiver l'introduction des surfaces à petits carreaux considérons l'exemple suivant :

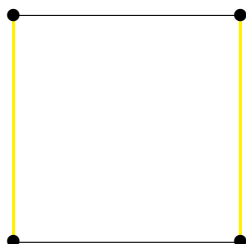


FIGURE 5.6 – tore plat

On peut identifier les bords verticaux et les bords horizontaux. La surface ainsi obtenue est alors un tore plat. La même construction peut se faire à partir de n'importe quel parallélogramme. Remarquons alors que les isométries affines directes associées à ces identifications sont des translations. Le sous-groupe engendré par ces deux translations donne alors le réseau  $R$  défini dans le chapitre 1.

Introduisons maintenant les surfaces à petits carreaux. On se donne une collection de  $N$  carrés euclidiens isométriques plongés dans un même plan orienté et dont les bords sont tous soit horizontaux soit verticaux. On les recolle en identifiant par translation chaque côté droit (resp. bas) d'un carré avec le côté gauche (resp. haut) d'un autre carré (éventuellement le même).

En numérotant les carrés par les entiers de 1 à  $N$ , cette façon de recoller correspond à se donner un couple de permutations  $(h, v) \in \mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_N$  tel que :

1.  $h(i) = j$  si le côté droit du carré  $i$  est collé au côté gauche du carré  $j$  ;
2.  $v(i) = k$  si le côté haut du carré  $i$  est collé au côté bas du carré  $k$ .

géométriquement cela se traduit par la figure 5.7.

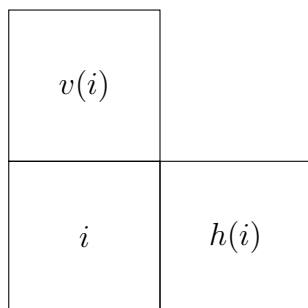


FIGURE 5.7 – Principe de recollement

Lorsque le groupe engendré par les permutations  $h$  et  $v$  agit transitivement sur  $\{1, \dots, N\}$  la surface obtenue ainsi est connexe et on parlera de la surface à petit carreaux encodée par le couple de permutation  $(h, v)$  et nous la noterons  $S_N(h, v)$ .

## Exemples de surfaces à petits carreaux

1. On commence par la surface à petits carreaux triviale qui est encodée par le couple  $(h = (1), v = (1))$ , topologiquement c'est le tore plat  $\mathbf{T}^2$

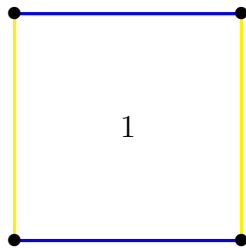


FIGURE 5.8 – Surface encodée par  $(h = (1), v = (1))$

2. On donne maintenant l'exemple d'une surface à petits carreaux formée de quatre carrés et encodée par le couple  $(h = (1, 2, 3), v = (1, 3, 4, 2))$

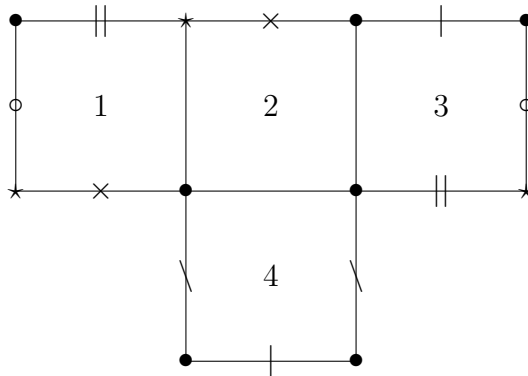


FIGURE 5.9 – Surface encodée par le couple  $(h = (1, 2, 3), v = (1, 3, 4, 2))$

Les points marqués sur les deux surfaces sont des singularités. Dans le cas du tore, on obtient en fait une fausse singularité.

De nombreuses propriétés de  $S_N(h, v)$  sont codées dans les permutations  $h$  et  $v$ . Par exemple, Le commutateur du couple de permutations encode le nombre de singularités de cette surface et caractérise également les angles de ces singularités. C'est ce qu'exprime le lemme suivant dont une preuve peut se trouver dans [22] ou [46].

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $c$  le commutateur de  $h$  et  $v$  ( $c = h^{-1}v^{-1}hv$ ). Dans la décomposition de  $c$  en produit de cycles de support disjoints, chaque cycle de longueur  $l$  correspond à une singularité conique d'angle  $2l\pi$ .*

Dans le cas des surfaces à petits carreaux, il est commode de revenir un peu sur la notion de singularités. On dit alors que chaque cycle du commutateur de  $h$  et  $v$  correspond à une singularité, y compris les points fixes (qui sont, en fait des fausses singularités puisqu'elles correspondent au cône d'angle  $2\pi$ , c'est à dire au plan).

### Exemples :

Le commutateur du couple de permutations  $(h = (1, 2, 3), v = (1, 3, 4, 2))$  est  $c = hvh^{-1}v^{-1} = (1)(2, 3, 4)$ , et on retrouve le fait que la surface à petits carreaux encodée par le couple  $(h = (1, 2, 3), v = (1, 3, 4, 2))$  a deux singularités d'angles respectifs  $2\pi$  et  $6\pi$ .

A l'aide du lemme précédent, et dans le cadre d'une surface à petits carreaux,  $S_N(h, v)$  présentant  $k$  singularités, la formule de Gauss-Bonnet donne alors le genre sous la forme

$$g = \frac{N - k + 2}{2}.$$

En effet, on décompose le commutateurs de  $h$  et  $v$  en  $k$  cycles de longueur  $l_1, \dots, l_k$  et on écrit la formule de Gauss-Bonnet.

$$\begin{aligned} (4 - 4g)\pi &= \sum_{i=1}^k (2\pi - \theta_i) \\ &= 2k\pi - 2\pi \sum_{i=1}^k l_i \\ &= 2k\pi - 2N\pi. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

Ainsi, par exemple pour le tore plat  $\mathbf{T}^2$  on retrouve bien que le genre est  $g = 1$ , et pour  $S_4(h = (1, 2, 3), v = (1, 3, 4, 2))$  le genre est  $g = 2$ .

Ces dernières décennies les surfaces à petits carreaux ont fait l'objet de plusieurs articles et thèses voir par exemple Yoccoz [46], Zmiaikou [47], Hillairet [22], Cabrol [6]. On trouvera dans ces ouvrages d'autres définitions possibles. Le fait de les voir comme des surfaces polygonales est sans doute la plus simple. Une autre présentation classique est par la théorie des revêtements (voir par exemple [46, 6]). Nous donnons quelques éléments relatifs à cette construction dont nous aurons besoin par la suite.

## 5.2.2 Par les revêtements ramifiés

La théorie des revêtements permet de transporter des informations d'une structure "simple" sur des structures plus complexes. Notamment comprendre certains aspects du groupe fondamental de l'espace topologique en haut à partir de celui du bas (Voir par exemple [16], [42] pour plus de détails).

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $n \geq 0$ . Soit  $\Pi : M \rightarrow N$  une application  $\mathcal{C}^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Soit  $U$  une partie ouverte et connexe de  $N$ . On dit que  $U$  est un ouvert élémentaire pour  $\Pi$  si  $\Pi^{-1}(U)$  est une réunion d'ouverts disjoints  $V_i$  de  $M$ , tels que la restriction de  $\Pi$  à chaque  $V_i$  soit un homéomorphisme de  $V_i$  sur  $U$ .

On dira que  $\Pi : M \rightarrow N$  est un revêtement si  $\Pi$  est surjective et si chaque point de  $N$  possède un voisinage qui est un ouvert élémentaire pour  $\Pi$ . Dans ce cas le revêtement sera désigné par le triplet  $(M, N, \Pi)$ .

Nous aurons besoin de la notion de revêtement ramifié. On le définit comme suit :

**Définition 5.2.1.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $\Pi : M \rightarrow N$  une application  $\mathcal{C}^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . On dit que  $\Pi$  est un revêtement ramifié s'il existe une partie discrète fermée  $F \subset M$  pour laquelle :

1.  $\Pi : M \setminus \Pi^{-1}(\Pi(F)) \rightarrow N \setminus \Pi(F)$  est un revêtement ;
2.  $\Pi(F)$  est une partie discrète et fermée de  $N$ .

Les points de  $F$  sont appelés des points de ramification ou des points de branchement de l'application  $\Pi$ .

Enonçons maintenant le résultat qui nous intéresse pour la proposition 5.2.1 .

**Théorème 5.2.1.** Soient  $(M, N, \Pi)$  un revêtement et  $\gamma : I = [0; 1] \rightarrow N$  un chemin dans  $N$ . Il existe un et un seul relèvement  $\mu$  de  $\gamma$  à  $M$  ayant une origine donnée. Si deux chemins  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  dans  $N$  sont homotopes à extrémités fixes et si  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont des relèvements de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  ayant même origine, alors  $\mu_0$  et  $\mu_1$  ont la même extrémité et sont homotopes.

Pour ce résultat et les définitions données sur les revêtements nous nous sommes essentiellement inspirés de [42].

La proposition qui suit est le point clé pour le reste de ce chapitre. Elle permettra essentiellement de transporter certaines propriétés du tore sur les surfaces à petits carreaux.

**Proposition 5.2.1.** Pour une surface à petits carreaux  $S = S_N(h, v)$  donnée, on note  $\Sigma$  l'ensemble des sommets des carrés de notre surface. Alors  $S_N(h, v)$  est un revêtement ramifié de  $\mathbb{T}^2$  et  $\Sigma$  représente les points de ramifications de cette projection. tous les points de  $\Sigma$  sont envoyés sur le même point.

*Preuve :* La surface  $S$  est obtenue en recollant  $N$  carrés  $C_1, \dots, C_N$ . On appelle  $T$  le tore obtenu à partir d'un carré  $C_0$  isométrique aux  $C_i$ . On vérifie alors que l'application  $\Pi$  définie de  $\bigcup C_i$  dans  $C_0$  qui, dans chaque  $C_i$ , coïncide avec la translation qui amène  $C_i$  sur  $C_0$ , passe au quotient au départ et définit un revêtement ramifié. Géométriquement, on peut le représenter schématiquement par la figure suivante.

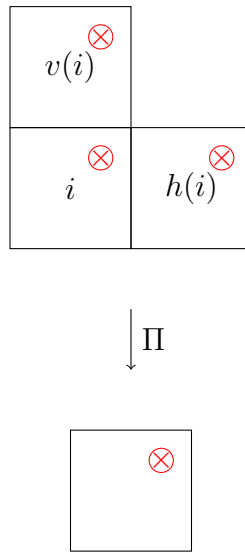


FIGURE 5.10 – Projection de  $S_N(h, v)$  sur  $\mathbb{T}^2$

□

### 5.2.3 Cylindres dans une surface à petits carreaux

Pour pouvoir voir une surface à petits carreaux comme une surface décomposable en cylindres et jonctions, il nous faut commencer par identifier des cylindres. Les circonférences d'un tel cylindre seront des géodésiques périodiques associées à la métrique plate et on doit donc comprendre les géodésiques périodiques. Comme une surface à petits carreaux est un revêtement ramifié du tore, on commence par étudier les géodésiques du tore. La dynamique sur le tore est un problème classique et très étudié (voir [16], Tabachnikov [42], Faure [15]).

Comme la métrique est plate, une géodésique du tore  $\mathbb{T}^2$  est une droite. Suivant la pente de la droite on a une dichotomie de leur comportement :

1. Si la pente est rationnelle, la droite se reproduit périodiquement sur le tore ;
2. Sinon elle est dense dans le tore.

On peut en fait être plus précis, on a le résultat suivant qui est valable pour n'importe quel tore  $n$ -dimensionnel avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . (voir [15] pour une preuve)

**Théorème 5.2.2** (équidistribution de Kronecker-Weyl, vers 1900). *Un vecteur  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  est dit rationnel (resp. irrationnel) si  $\frac{p_2}{p_1} \in \mathbb{Q}$  (resp.  $\frac{p_2}{p_1} \notin \mathbb{Q}$ ).*

Si  $V \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur irrationnel alors pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{T}^2)$  et tout point initial  $P_0 \in \mathbf{T}^2$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(V.t + P_0) dt = \int_{\mathbf{T}^2} f(x) dx,$$

c'est-à-dire la moyenne temporelle de  $f$  sur une trajectoire très longue devient égale à sa moyenne spatiale. En particulier, la trajectoire  $x(t) = P.t + P_0$  est dense sur le tore  $\mathbf{T}^2$ .

Illustrons géométriquement le théorème précédent

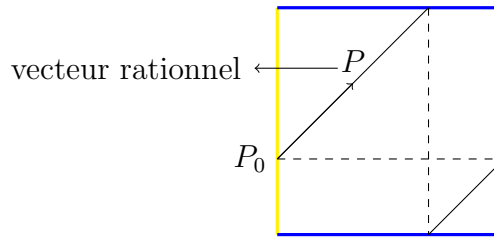


FIGURE 5.11 – Géodésique périodique sur  $\mathbf{T}^2$

Pour  $P$  vecteur irrationnel, la géodésique remplit le tore.

Dans la suite une direction  $\theta$  sera dite rationnelle (resp. irrationnelle) si la droite dans cette direction a une pente rationnelle (resp. irrationnelle). En utilisant l'application de revêtement  $\Pi$  définie précédemment, on peut alors caractériser les géodésiques périodiques d'une surface à petits carreaux.

**Proposition 5.2.2.** *Soit  $S_N(h, v)$  une surface à petits carreaux alors une géodésique est périodique si et seulement si sa direction est rationnelle.*

**Remarque :** En fait, sur une surface à petits carreaux, on peut être beaucoup plus précis concernant les directions irrationnelles et montrer une propriété d'unique ergodicité (voir [6]).

*Preuve de la proposition 5.2.2.* Il est évident qu'une géodésique périodique sur la surface à petits carreaux se projette sur une géodésique du tore. Cela entraîne que la direction est nécessairement rationnelle.

Réciproquement, soit  $x_0 \in \mathbb{T}^2 - \{0\}$  et  $\tilde{x}_0 \in \Pi^{-1}(\{x_0\})$

Nous allons désigner par  $\varphi_\theta$  le flot géodésique dans la direction rationnelle  $\theta$  sur le tore et par  $\tilde{\varphi}_\theta$  le flot géodésique dans la direction rationnelle  $\theta$  sur  $S_N(h, v)$ . Notons  $T$  période de la géodésique issue de  $x_0$  dans la direction  $\varphi_\theta$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{\varphi}_\theta^{nT}(\tilde{x}_0) \in \Pi^{-1}(\{x_0\}).$$

L'ensemble  $\Pi^{-1}(\{x_0\})$  étant fini, on peut trouver  $k_1$  et  $k_2$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :

$$\tilde{\varphi}_\theta^{(k_1-k_2)T}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0.$$

Ce qui montre que la géodésique issue de  $\tilde{x}_0$  dans la direction  $\theta$  est aussi périodique.  $\square$

En utilisant l'isométrie locale avec le plan euclidien en dehors des singularités, on voit qu'une géodésique périodique de longueur  $T$  qui évite les sommets admet un voisinage isométrique au cylindre  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \times \mathbf{S}_T$ . Ce cylindre peut être élargi tant que les trajectoires sur le bord ne rencontrent pas les singularités : on parle alors de cylindre maximal.

D'après ce qui précède, la surface à petits carreaux peut donc s'écrire comme une réunion de cylindre maximaux sur les bord desquels se trouvent des segments qui relient deux singularités (on parle de liens ou de connexions de selles). Si on enlève de chaque cylindre maximal un voisinage de taille  $\varepsilon$  de chacun de ses bords, on obtient alors une décomposition de la surface à petits carreaux en cylindres et jonctions.

### Exemple de $S_N(h, v)$ .

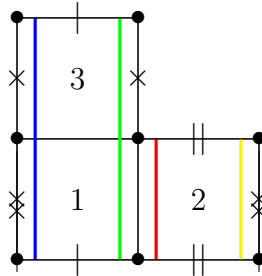


FIGURE 5.12 –  $S_3(h = (1, 2); v = (1, 3))$

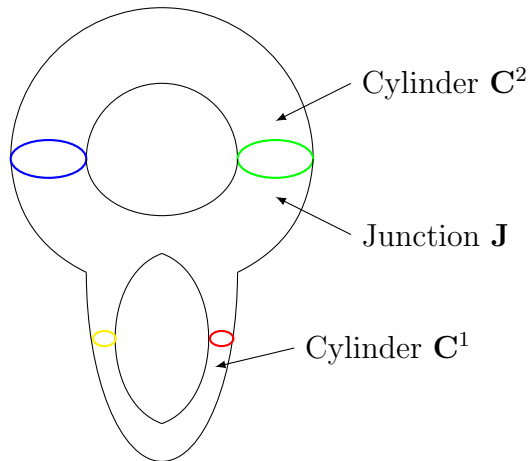


FIGURE 5.13 –  $S_3(h = (1, 2); v = (1, 3))$  en cylindres et jonction.

Si on applique à cette décomposition la déformation des parties précédente, le graphe associé est le suivant :



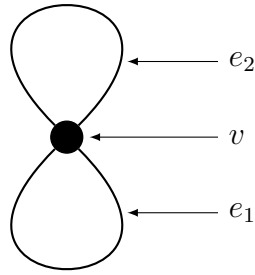


FIGURE 5.14 – Graphe de  $S_3(h = (1, 2); v = (1, 3))$ .

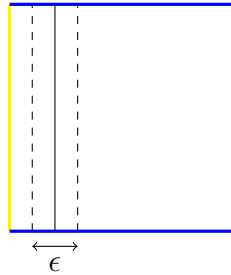


FIGURE 5.15 – Petit voisinage d’une géodésique sur  $\mathbb{T}^2$

### 5.3 Surfaces de translation

Les surfaces de translation sont des surfaces polygonales pour lesquelles tous les recollements sont faits à l’aide de translations. On a donc la définition suivante.

**Définition 5.3.1** (Surface de translation). *Une surface de translation est une collection finie de polygones plongés dans un même plan orienté, dont les côtés sont identifiés 2 à 2 par translation.*

Les polygones qui définissent une surface de translation doivent donc avoir des côtés qui peuvent être identifiés par paire d’une façon compatible avec l’orientation ; notamment les côtés d’une paire ont même longueur et sont parallèles.

#### Exemples de surfaces de translation

On peut construire une surface de translation à partir d’un polygone régulier qui a un nombre pair de côtés. Le genre de la surface obtenue peut alors être calculé à l’aide de la formule de Gauss-bonnet.

**Proposition 5.3.1.** *Soit un polygone régulier à  $n = 2k$  côtés dont les paires sont identifiés par translation, on a la dichotomie suivante :*

1. *Si  $k$  est pair, le polygone est une surface de translation ayant une singularité conique d’angle*

$$\theta = \pi(n - 2)$$

*et son genre est*

$$g = \frac{n}{4};$$

2. Si  $k$  est impair, le polygone est une surface de translation ayant deux singularités coniques de même angle

$$\theta = \frac{\pi(n-2)}{2}$$

et son genre est

$$g = \frac{n-2}{4}.$$

*Preuve.* On a déterminé les singularités de proche en proche, c'est-à-dire on représente ces polygones pour  $k=2,3,\dots$  et on détermine les singularités sur la figure. Les angles sont déterminés avec de la trigonométrie élémentaire et le genre est déterminé par la proposition 5.1.1.  $\square$

En partant du carré, on retrouve le tore plat  $\mathbb{T}^2$  qui a une singularité d'angle  $\theta = 2\pi$  et est du genre  $g = 1$ . Donnons deux autres exemples de polygones réguliers.

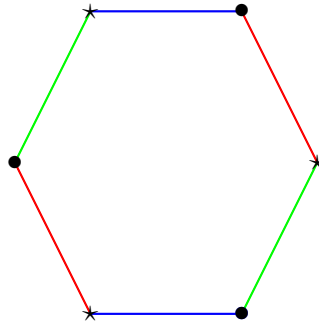


FIGURE 5.16 – Hexagone

On voit qu'on a deux singularités pour  $n=6$  d'angle  $\theta = 2\pi$  et de genre  $g = 1$ .

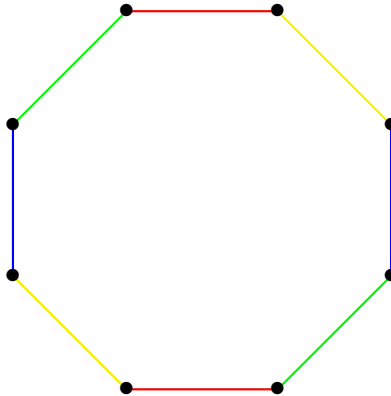


FIGURE 5.17 – Octogone

Pour l'octogone  $n = 8$ . On a une seule singularité d'angle  $\theta = 6\pi$  et le genre est  $g = 2$ .

On a vu, dans la partie précédente, qu'une surface à petits carreaux pouvait être décomposée en cylindres et jonctions dans toute direction rationnelle. Dans la suite de cette partie on essaie de voir si on peut toujours décomposer une surface de translation en cylindres et jonctions et si on peut, le cas échéant décrire pour quelles directions cela arrive.

### 5.3.1 Cylindres dans les surfaces de translations

On commence par chercher des cylindres plongés dans une surface de translation. Il suffit pour cela de trouver des géodésiques périodiques. En effet, comme dans le cas des surfaces à petits carreaux, une géodésique périodique arrivera toujours comme élément d'un cylindre maximal. C'est un fait général valable sur toute s.e.s.c.

**Proposition 5.3.2.** *Soit  $S$  une s.e.s.c. . S'il existe une géodésique simple fermée  $\gamma$  sur  $S$  qui ne passe par aucun point singulier, alors  $\gamma$  est contenue dans un cylindre. Si la surface  $S$  contient des vraies singularités, alors la géodésique  $\gamma$  est contenue dans un cylindre maximal à bord géodésique qui a des points singuliers.*

*Preuve.* Puisque  $\gamma$  est une géodésique qui ne passe par aucun point singulier alors pour tout point  $x$  de  $\gamma$  il existe un petit  $r_x$  tel que la boule  $B(x, r_x)$  ne contienne aucune singularité. La famille  $(B(x, r_x))_x$  recouvre  $\gamma$  et par compacité on a une famille finie qui recouvre  $\gamma$ . En prenant le minimum  $r = \min_x r_x$ , on peut construire un  $\epsilon$ -voisinage de  $\gamma$  qui ne contient pas des points singuliers ( $\epsilon < r$ ). Dans ce voisinage on a une famille de géodésiques parallèles à  $\gamma$  qui constituent un cylindre autour de  $\gamma$ . Cette famille peut-être élargie aussi loin qu'un voisinage régulier existe et ne peut pas être étendue au-delà des points singuliers.  $\square$

L'existence d'une géodésique périodique ne permet toutefois pas de conclure quant à la décomposition en cylindres et jonctions. En effet, une telle décomposition est liée à la propriété plus forte qui demande que, dans une certaine direction, toutes les géodésiques sont soit périodiques soit rencontre les singularités. Une telle direction est appelée complètement périodique.

Comprendre l'existence de directions complètement périodiques sur une surface de translation est en fait lié à la compréhension d'une autre particularité des surfaces de translation : l'existence d'un espace de déformations sur lequel on peut poursuivre des investigations dynamiques.

### 5.3.2 Action de $SL(2, \mathbb{R})$ et surfaces de Veech

Considérons une surface de translation, donnée comme une collection de polygones dont les côtés sont deux à deux identifiés par translation, et faisons agir une matrice de  $GL(2, \mathbb{R})$ . Chaque polygone devient un nouveau polygone et par linéarité, les côtés qui étaient identifiés restent parallèles de même longueur et compatibles avec l'orientation. Ainsi, on définit une nouvelle surface de translation. L'action des homothéties étant facile à comprendre, on se restreint à faire agir  $SL(2, \mathbb{R})$ .

L'étude de cette action est fondamentale dans l'étude des propriétés dynamiques des surfaces de translation depuis les travaux fondateurs de [45, 36]. Parmi les objets associés à cette action, on définit le groupe de Veech d'une surface de translation :

**Définition 5.3.2.** *Le stabilisateur d'une surface de translation  $X$  sous l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$  est appelé son groupe de Veech. Il sera noté par  $SL(X)$ .*

On peut déterminer si une matrice de  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  appartient au groupe de Veech d'une surface de translation donnée en examinant si les polygones obtenus après l'action de  $A$  peuvent être découpés de façon à reformer les polygones de départ après identifications par translation.

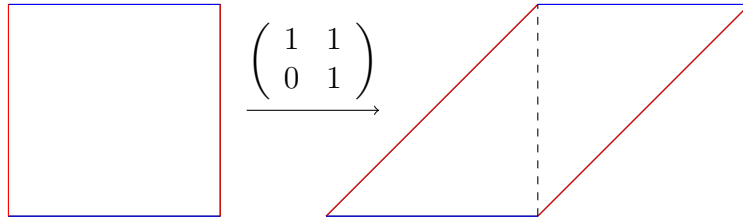


FIGURE 5.18 –  $\mathbb{T}^2$  représenté différemment

en découpant la surface transformée suivant les pointillés, on retombe sur  $\mathbb{T}^2$ . Autrement dit dans la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  appartient au groupe de Veech du tore.

De la même façon on montre que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{2}-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  appartient au groupe de Veech de l'octogone (voir [7]).

L'ensemble des propriétés des groupes de Veech que nous allons donner ici peuvent se trouver dans [44]. On commence par établir que le groupe de Veech ne peut pas être *trop gros*.

**Proposition 5.3.3.** *Le groupe de Veech d'une surface de translation  $X$  est un sous-groupe discret de  $SL(2, \mathbb{R})$  et le quotient  $SL(2, \mathbb{R})/SL(X)$  n'est jamais compact.*

Cela amène à définir une classe particulière des surfaces de translation.

**Définition 5.3.3.** *Une surface de translation est une surface de Veech si  $SL(X)$  est un réseau de  $SL(2, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire si  $SL(2, \mathbb{R})/SL(X)$  est de volume fini.*

On peut alors montrer que toute surface à petits carreaux est une surface de Veech et le théorème de Gutkin-Judge suivant caractérise les surfaces à petits carreaux en terme de leur groupe de Veech (voir [21]).

**Théorème 5.3.1.** *Une surface de translation est une surface à petits carreaux si et seulement si son groupe de Veech est arithmétique.*

On rappelle qu'un sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{R})$  est arithmétique s'il partage un sous-groupe d'indice fini avec  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Du comportement de l'orbite de  $X$  sous l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$  dans une strate, on peut déduire les propriétés des directions des flots sur une surface de translation. La dichotomie de Veech énoncée ci-dessous est une remarquable illustration de cela.

**Théorème 5.3.2** (Alternative ou dichotomie de Veech). *Soit  $X$  une surface de Veech. Alors pour chaque direction  $\theta$ , le flot géodésique  $\Phi_\theta$  dans cette direction est soit complètement périodique, soit uniquement ergodique.*

**Remarque :** Un système dynamique est ergodique pour une mesure si les ensembles invariants sont de mesure nulle, ou de complémentaire de mesure nulle. Il est uniquement ergodique si une telle mesure est unique.

D'une certaine façon, on peut voir cette alternative comme une généralisation de l'équidistribution de Kronecker-Weyl sur les tores. Les droites de pentes irrationnelles sont denses et les autres sont périodiques.

Comme on a pu le faire pour les surfaces à petits carreaux, déterminer toutes les directions périodiques et uniquement ergodiques, pour une surface de Veech quelconque ces directions sont en général inconnues.

On peut en dire d'avantage sur ces deux notions dans l'espace des modules des surfaces de translation. Les points des strates possédant une direction complètement périodique sont *peu nombreux* au sens de la mesure naturelle dont est munie une strate, la mesure de Masur-Veech. Plus précisément on a le théorème suivant.

**Théorème 5.3.3.** *L'ensemble des surfaces de translation admettant une direction complètement périodique est de mesure nulle.*

Des preuves de ce résultat peuvent se trouver dans [36] et [44].

Le théorème suivant est dû à Kerckhoff-Masur-Smillie, et il montre en quelque sorte que les directions périodiques sont rares sur les surfaces de translation.

**Théorème 5.3.4** (S.Kerckhoff, H.Masur, J.Smillie, 1986). *Soit  $X$  une surface de translation. Alors dans presque toute direction  $\theta$ , le flot géodésique est uniquement ergodique.*

Pour une preuve de ce résultat consulter par exemple [32] et pour plus de détails voir [17].

En conclusion de cette partie, les surfaces de Veech nous fournissent donc un cadre naturel dans lequel nos résultats spectraux pourront s'appliquer. En effet, dans une direction complètement périodique, on pourra faire la décomposition en cylindres et jonctions et ensuite écraser les cylindres.

Une dernière motivation pour ce type de déformation réside encore dans l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$ . En effet, un des arguments derrière la dichotomie de Veech consiste en fait à écrire une dichotomie pour un certain flot dans l'espace des surfaces de translations. Ce flot consiste à écraser les longueurs dans une direction et à les dilater dans la directions orthogonales. Notre déformation, à renormalisation près, consiste donc à suivre la surface de translation le long de ce flot. Comprendre l'évolution du spectre fournit donc un complément intéressant aux études principalement dynamiques menées jusqu'ici.

# Annexe A

## Rappels sur les opérateurs bornés et leur théorie spectrale

Nombre des opérateurs qui interviennent en théorie spectrale sont non bornées. En plus la théorie de ces opérateurs est intéressante en elle même. Nous allons faire une petite introduction de cette théorie.

Il s'agit essentiellement d'introduire les termes utilisés dans la thèse et de démontrer quelques résultats fondamentaux.

Ensuite, puisque les opérateurs avec lesquels nous travaillons sont obtenus à partir des "formes quadratiques" au sens des opérateurs non bornés. Nous donnerons un résultat qui lie les deux objets.

Nous allons commencer par donner un exemple d'opérateur non borné, qui sera le fil conducteur des notions que nous introduirons dans la suite.

**Exemple A.0.1.** *Considérons les espaces  $X, Y$  tels que  $X = Y = L^2(\mathbb{R})$  et l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ . On définit l'opérateur  $T$  par :*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto \partial f. \end{aligned}$$

*Il est clair que cette application est linéaire, si elle était en plus bornée nous aurions pu la prolonger à tout  $X$  par densité de  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$  (ce qui n'aurait pas eu de sens, puisque  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$  est strictement contenu dans  $L^2(\mathbb{R})$ ).*

Nous pouvons souligner un fait essentiel dans l'exemple précédent. Certes nous n'avons pas la "bornitude", mais on a que le "graphe" de  $T$  est fermé (par continuité de la dérivation faible). Les opérateurs ayant un graphe fermé possèdent des propriétés suffisantes pour les problèmes que nous allons regarder.

### A.0.1 Domaine, graphe et fermeture

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. L'espace de Hilbert  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  est muni du produit scalaire naturel :

$$((x, y)|(x', y'))_{\times} = (x|x')_{\mathcal{H}} + (y|y')_{\mathcal{H}}.$$

Notre exemple nous incite à définir un opérateur non borné comme étant une application linéaire partiellement définie. C'est l'objet de la définition qui suit.

**Définition A.0.1.** *Un opérateur  $T$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est une application linéaire d'un sous-espace vectoriel  $D(T)$  de  $\mathcal{H}$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ .  $D(T)$  est appelé le domaine de  $T$ .*

Dans certain cas, on est amené à noter l'opérateur  $T$  par le couple  $(T, D(T))$ .

**Définition A.0.2.** 1. Le graphe  $\Gamma(T)$  d'un opérateur  $(T, D(T))$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  défini par :

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx); x \in D(T)\}.$$

La linéarité de  $T$  implique que  $\Gamma(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , et un espace pré-hilbertien pour le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_\times$ .

2. On dit que  $(T', D(T'))$  est une extension de  $(T, D(T))$  si

$$\begin{cases} D(T) \subset D(T') \\ \text{et} \\ Tx = T'x \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in D(T).$$

Ce qui revient à dire que :  $\Gamma(T) \subset \Gamma(T')$ , et on le symbolise en écrivant  $T \subset T'$ .

3. L'opérateur  $T$  est fermé si son graphe est fermé dans  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  pour la topologie associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_\times$ .

4. Un opérateur  $T$  est fermable s'il possède une extension fermée. Si c'est le cas, il possède une plus petite extension fermée (au sens de l'inclusion des graphes) appelée fermeture de  $T$  et notée  $\overline{T}$ .

En désignant par  $\pi_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  les projections de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  données respectivement par  $\pi_1(x, y) = x$  et  $\pi_2(x, y) = y$ .

Nous introduisons le lemme suivant, qui nous sera d'une utilisation constante dans la suite. Il caractérise le graphe d'une application linéaire.

**Lemme A.0.1.** un sous-espace vectoriel  $G$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  est le graphe d'un opérateur si et seulement si

$$(0, y) \in G \implies y = 0. \tag{G}$$

*Preuve :* Si  $G$  est le graphe d'une application linéaire, la relation (G) est triviale.

Réciproquement si (G) est vérifiée, nous allons construire une application linéaire qui a pour graphe  $G$ .

Commençons par constater que :

$$\begin{array}{ccc} \tau : \pi_1(G) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

tel que  $(x, y) \in G$ , est bien définie. En effet :

$$\text{si } (x, y_1), (x, y_2) \text{ sont dans } G \text{ alors } y_1 = y_2.$$

Il est immédiat que l'application ainsi construite a pour graphe l'ensemble  $G$ . □

Le résultat qui suit, donne un critère simple pour caractériser des opérateurs fermables.

**Proposition A.0.1.**  $T$  est fermable si et seulement si  $\overline{\Gamma(T)}$  est le graphe d'un opérateur linéaire et alors :

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}.$$

*Preuve :* • Si  $\overline{\Gamma(T)}$  est un graphe, soit  $Q$  l'opérateur de domaine

$$D(Q) = \{\phi; \exists \psi \text{ tel que } (\phi, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}\},$$

et défini par

$$Q(\phi) = \psi.$$

Cette application est bien définie puisque pour  $\phi \in D(Q)$  donné, il existe exactement un  $\psi$  tel que  $(\phi, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$ .

Le graphe de l'opérateur  $Q$  est clairement  $\overline{\Gamma(T)}$ , et  $(Q, D(Q))$  est donc une extension fermée de  $T$ . Si  $R$  est une extension fermée de  $T$ , alors  $\Gamma(R)$  est un fermé contenant  $\Gamma(T)$ , donc aussi  $\overline{\Gamma(T)}$ . Il en résulte que  $Q = \overline{T}$ .

- Si  $T$  est fermable, soit  $S$  une extension fermée. Puisque  $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$ , la caractérisation évoquée dans le lemme 1.1 montre que  $\overline{\Gamma(T)}$  est un graphe. □

Le résultat suivant est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle des fermés, et s'avère très utile dans la pratique.

**Proposition A.0.2.** *Un opérateur  $(T, D(T))$  est fermé si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_n \subset D(T)$  telle que :*

$$\begin{cases} \lim_n x_n = x \\ \text{et} \\ \lim_n T(x_n) = y, \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} x \in D(T) \\ \text{et} \\ T(x) = y. \end{cases}$$

## A.0.2 Adjoint

Dans toute la suite un opérateur sera dit "densément défini", si son domaine est dense. De la même façon que nous avons défini l'adjoint d'un opérateur borné, nous allons construire l'adjoint d'un opérateur non borné. La difficulté ici vient du fait que nos opérateurs sont seulement partiellement définis, ainsi nous placerons dans une classe d'opérateurs "assez raisonnables", les opérateurs densément définis, pour définir les adjoints.

**Définition A.0.3.** *Soit  $(T, D(T))$  un opérateur densément défini, et considérons l'ensemble :*

$$D(T^*) = \{x \in \mathcal{H} \mid D(T) \ni y \mapsto (Ty|x)_{\mathcal{H}} \text{ soit continue}\}.$$

Grâce à la densité de  $D(T)$  dans  $\mathcal{H}$ , pour tout  $x \in D(T^*)$ , la forme linéaire  $y \mapsto (Ty|x)_{\mathcal{H}}$  s'étend à un unique élément de  $\mathcal{H}'$  (dual topologique de  $\mathcal{H}$ ) qu'on écrit par le théorème de représentation Riesz comme  $(\cdot|T^*x)_{\mathcal{H}}$ . La linéarité de  $T^*$  est immédiate, et on a :

$$\begin{cases} \forall x \in D(T^*), \forall y \in D(T) \\ (Ty|x)_{\mathcal{H}} = (y|T^*x)_{\mathcal{H}}. \end{cases}$$

L'opérateur  $(T^*, D(T^*))$  est appelé adjoint de  $(T, D(T))$ .

Nous avons une relation simple, mais importante, entre les graphes de  $T$  et  $T^*$  via l'isométrie surjective

$$\begin{aligned} J : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x). \end{aligned}$$

Nous avons besoin du résultat suivant, qui donne la stabilité de l'orthogonale par une isométrie surjective.



**Lemme A.0.2.** Soit  $\kappa : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une isométrie surjective, alors :

$$\forall E \subset \mathcal{H}, \quad \kappa(E^\perp) = \kappa(E)^\perp.$$

*Preuve :* Nous allons procéder par une double inclusion :

- Soit  $y \in \kappa(E^\perp) \Leftrightarrow \exists x \in E^\perp$  tel que  $y = \kappa(x)$ .  
 $\forall z \in E$ , une isométrie conservant le produit scalaire, on a :

$$(\kappa(x)|\kappa(z))_{\mathcal{H}} = (x|z)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \Rightarrow y \in \kappa(E)^\perp.$$

Ainsi :  $\kappa(E^\perp) \subset \kappa(E)^\perp$ .

- Le premier point donne :

$$\begin{aligned} \kappa^{-1}(\kappa(E)^\perp) &\subset (\kappa^{-1}(\kappa(E)))^\perp \\ \kappa^{-1}(\kappa(E)^\perp) &\subset E^\perp \\ \kappa(E)^\perp &\subset \kappa(E^\perp). \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. □

**Proposition A.0.3.** Soit  $(T, D(T))$  un opérateur densément défini. Alors :

- (a)  $\overline{\Gamma(T^*)} = J(\Gamma(T))^\perp$  ;
- (b)  $\overline{\Gamma(T)} = J(\Gamma(T^*))^\perp$ .

*Preuve :* (a) on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma(T^*) &\Leftrightarrow \forall z \in D(T), (Tz|x)_{\mathcal{H}} = (z|y)_{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \forall z \in D(T), ((x, y)|(-Tz, z))_{\otimes} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in J(\Gamma(T))^\perp. \end{aligned}$$

(b) Puisque  $\Gamma(T)^\perp$  est un espace vectoriel et que  $J^2 = -Id$ , il en résulte que :

$$\begin{aligned} \Gamma(T^*) &= J(\Gamma(T))^\perp \\ J(\Gamma(T^*)) &= J\left[J(\Gamma(T))^\perp\right] \\ J(\Gamma(T^*)) &= J^2(\Gamma(T))^\perp \\ J(\Gamma(T^*)) &= \Gamma(T)^\perp \\ J(\Gamma(T^*))^\perp &= \overline{\Gamma(T)}. \end{aligned}$$

□

**Proposition A.0.4.** Soit  $(T, D(T))$  un opérateur densément défini. Alors :

- (a)  $T^*$  est fermé ;
- (b)  $T$  est fermable si et seulement si  $D(T^*)$  est dense ;
- (c) Si  $T$  est fermable alors :

$$\begin{cases} \overline{T} = T^{**} \\ \text{et} \\ (\overline{T})^* = T^*. \end{cases}$$

*Preuve :* (a) est une conséquence de la proposition 2.1.

(b) Si  $T^*$  est à domaine dense, alors par la proposition 2.1, on a :

$$\Gamma(T^{**}) = J(\Gamma(T^*))^\perp = \overline{\Gamma(T)}. \quad (\text{A.0.1})$$

Par suite  $\overline{\Gamma(T)}$  est le graphe d'un opérateur et donc  $T$  est fermable par la proposition 6.0.1. D'autre part, si  $D(T^*)$  n'est pas dense, alors on peut trouver  $y \neq 0$  dans  $D(T^*)^\perp$ . Ainsi, on vérifie que  $(y, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$  et que  $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)} = J(\Gamma(T^*))^\perp$ . Toujours par la proposition 6.0.1, on a que  $T$  n'est pas fermable.

(c) La proposition 1.1 et (2.1) impliquent que  $T^{**} = \overline{T}$ . En utilisant l'égalité précédente avec le point (a), on voit que :

$$T^* = \overline{T^*} = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*.$$

□

### A.0.3 Opérateurs symétriques, opérateurs autoadjoints

Dans ce qui suit, tous les opérateurs pour lesquels on parle de l'adjoint seront supposés densément définis.

**Définition A.0.4.** *Un opérateur  $T$  est symétrique, ou formellement auto-adjoint, si  $T \subset T^*$ , i.e. :*

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T) \subset D(T^*) \\ \text{et} \\ Tx = T^*x \end{array} \right. \quad \text{pour tout } x \in D(T).$$

Autrement dit,

$$\forall x, y \in D(T), \quad (Tx|y)_\mathcal{H} = (x|Ty)_\mathcal{H}.$$

Un opérateur  $T$  est auto-adjoint si  $T = T^*$ , i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T) = D(T^*) \\ \text{et} \\ Tx = T^*x \end{array} \right. \quad \text{pour tout } x \in D(T).$$

#### Remarque :

(a) Un opérateur symétrique  $T$  est toujours fermable puisque  $D(T^*) \supset D(T)$  est dense (proposition 2.2).

(b) Si  $T$  est un opérateur symétrique, alors  $T^*$  et  $T^{**}$  sont deux extensions fermées de  $T$  avec :

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

(c) Si  $T$  est un opérateur symétrique fermé, alors :

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

(d) Si  $T$  est auto-adjoint, alors :

$$T = T^{**} = T^*.$$

Nous donnons un critère de base d'auto-adjonction.

Dans la suite nous désignerons par les lettres  $N$  et  $R$  respectivement le noyau et l'image. Pour sa preuve, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme A.0.3.** *Soit  $T$  un opérateur symétrique fermé et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors :*

$$N(T^* + \lambda) = R(T + \overline{\lambda})^\perp.$$

*Preuve* : Soit  $y \in R(T + \bar{\lambda})^\perp$ . Alors pour tout  $x \in D(T)$ , on a :

$$\begin{aligned}(Tx + \bar{\lambda}x|y)_\mathcal{H} &= 0 \\ (Tx|y)_\mathcal{H} &= -\bar{\lambda}(x|y)_\mathcal{H}\end{aligned}$$

et donc  $y \in D(T^*)$ ,  $T^*y = -\lambda y$ , ce qui prouve l'inclusion :

$$N(T^* + \lambda) \supset R(T + \bar{\lambda})^\perp.$$

Réciproquement, Soit  $y \in N(T^* + \lambda)$ . Pour tout  $z = Tx + \bar{\lambda}x$  avec  $x \in D(T)$ , un calcul simple donne :

$$(z|y)_\mathcal{H} = (Tx + \bar{\lambda}x|y)_\mathcal{H} = (x|T^*y + \lambda y)_\mathcal{H} = 0.$$

Donc  $y \in R(T + \bar{\lambda})^\perp$ . □

**Proposition A.0.5.** *Soit  $T$  un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $T$  est auto-adjoint ;
- (b)  $T$  est fermé, et  $N(T^* \pm i) = \{0\}$  ;
- (c)  $R(T \pm i) = \mathcal{H}$ .

*Preuve* : (a)  $\Rightarrow$  (b) : Soit  $T$  auto-adjoint et  $x \in D(T^*) = D(T)$  tel que  $x \in N(T^* \pm i)$ . Il suit alors :

$$\pm i(x|x)_\mathcal{H} = (\pm ix|x)_\mathcal{H} = (T^*x|x)_\mathcal{H} = (x|Tx)_\mathcal{H} = \mp i(x|x)_\mathcal{H}.$$

D'où  $x = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) : Soit  $y \in R(T \pm i)^\perp$ , alors pour tout  $x \in D(T)$ ,  $((T \pm i)x|y)_\mathcal{H} = 0$ . Il s'en suit que  $y \in D(T^*)$  et que  $T^*y = \pm iy$ . C'est à dire que  $y \in N(T^* \mp i) = \{0\}$  et donc que  $R(T \pm i)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Montrons que  $R(T \pm i)$  est fermé. En effet, on a pour tout  $x \in D(T)$

$$\|(T \pm i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2,$$

par symétrie de  $T$ . Ceci entraîne que si  $(x_n)_n \subset D(T)$  est une suite telle que  $(T \pm i)x_n \rightarrow y$ , alors  $x_n$  converge vers un certain  $x$ . Comme  $T$  est fermé on en déduit que  $x \in D(T)$  et  $(T \pm i)x = y$ . D'où  $y \in R(T \pm i)$  et on a ainsi  $R(T \pm i) = \mathcal{H}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) : Soit  $x \in D(T^*)$ , comme  $R(T \pm i) = \mathcal{H}$ , il existe  $y \in D(T)$  tel que  $(T - i)y = (T^* - i)x$ . Puisque  $T \subset T^*$ , on a alors  $x - y \in D(T^*)$  et  $(T^* - i)(x - y) = 0$ . Il en résulte que

$$x - y \in N(T^* - i) = R(T + i)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}.$$

D'où  $x = y \in D(T)$ . □

Comme pour les opérateurs bornés, les images et les noyaux des opérateurs  $T$ ,  $\bar{T}$  et  $T^*$  sont liés.

**Proposition A.0.6.** *Soit  $T$  un opérateur fermable densément défini. Alors on a :*

- (a)  $N(\bar{T}) = R(T^*)^\perp$  ;
- (b)  $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$  ;
- (c)  $N(T^*) = \overline{R(T)^\perp}$  ;
- (d)  $N(T^*)^\perp = R(T)$ .

*Preuve* : Nous allons établir les points (a) et (c) par une équivalence, les deux autres points s'en déduisent par passage à l'orthogonal.

Pour le point (a) on a :

$$\begin{aligned} y \in R(T^*)^\perp &\Leftrightarrow (\forall x \in D(T^*), (T^*x|y)_\mathcal{H} = 0) \\ &\Leftrightarrow (y \in D(T^{**}) = D(\overline{T}) \text{ et } \forall x \in D(T^*), (x|\overline{T}y)_\mathcal{H} = 0), \end{aligned}$$

$D(T^*)$  étant dense dans  $\mathcal{H}$ , on a  $\overline{T}y = 0$ , i.e.  $y \in N(\overline{T})$ .

Pour le point (c) on a :

$$\begin{aligned} y \in R(T)^\perp &\Leftrightarrow (\forall x \in D(T), (Tx|y)_\mathcal{H} = 0) \\ &\Leftrightarrow (y \in D(T^*) \text{ et } \forall x \in D(T), (x|T^*y)_\mathcal{H} = 0), \end{aligned}$$

on conclut pareillement. □

**Définition A.0.5.** *Un opérateur symétrique est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture  $\overline{T}$  est auto-adjointe.*

Le résultat qui suit, montre que nous pouvons parler sans ambiguïté d'extension auto-adjointe associée à un opérateur essentiellement auto-adjoint.

**Proposition A.0.7.** *Un opérateur  $T$  essentiellement auto-adjoint possède une unique extension auto-adjointe (qui est sa fermeture).*

*Preuve* : Soit  $S \supset T$ , une extension auto-adjointe de  $T$ . Alors  $S \supset T^{**} = \overline{T}$  et donc  $S \subset \overline{T}^* = \overline{T}$ . Ce qui donne bien le résultat souhaité. □

Du critère d'auto-adjonction des opérateurs auto-adjoints, découle une caractérisation simple des opérateurs essentiellement auto-adjoints.

**Corollaire A.0.1.** *Soit  $T$  un opérateur symétrique. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $T$  est essentiellement auto-adjoint ;
- (b)  $N(\overline{T^* \pm i}) = \{0\}$  ;
- (c)  $R(T \pm i) = \mathcal{H}$ .

*Preuve* : Puisque  $\overline{T}^* = T^*$ , (a)  $\Rightarrow$  (b) par la proposition 3.1 .

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) résultat du lemme 3.1 .

Enfin, (c)  $\Rightarrow$  (a) découle de la proposition 3.1, en observant que  $R(T \pm i) \subset R(\overline{T} \pm i)$  et le fait que, pour  $T$  fermé, l'image de  $T \pm i$  est fermée. □

Dans la pratique, nous sommes souvent amenés à se placer sur des parties denses du domaine d'un opérateur pour regarder un problème. D'où la nécessité d'introduire la définition suivante :

**Définition A.0.6.** *Un sous-espace vectoriel  $C$  contenu dans le domaine d'un opérateur fermé  $T$  est un cœur de  $T$ , si  $T$  est la fermeture de sa restriction à  $C$  :  $\overline{T|_C} = T$ . Autrement dit le graphe de  $T$  est la fermeture de celui de sa restriction à  $C$ .*

De même que pour un opérateur borné, nous allons construire un opérateur auto-adjoint "naturel" associé à un opérateur non borné.

Pour se faire nous avons besoin du lemme préliminaire suivant :

**Lemme A.0.4.** *Soit  $A$  un opérateur borné auto-adjoint de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  injectif. Alors  $(T = A^{-1}, R(A))$  est auto-adjoint.*

*Preuve* : Deux cas sont à distinguer :

(a)  $\overline{R(A)} = \mathcal{H}$ .

$T$  est borné par le théorème des isomorphismes de Banach. Une petite manipulation montre que  $T$  est auto-adjoint.

(b)  $\overline{R(A)} \neq \mathcal{H}$ .

Puisque  $A = A^*$ , alors :

$$\overline{R(A)} = \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp = \mathcal{H}.$$

La petite manipulation évoquée précédemment, montre que  $T$  est symétrique, et :

$$\begin{aligned} R(T + i) &= \{Tx + ix | x \in R(A)\} \\ &= \{TAx + iAx | x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{x + iAx | x \in \mathcal{H}\} \\ &= \{Ax - ix | x \in \mathcal{H}\} \\ &= R(A - i) \\ &= \mathcal{H}. \end{aligned}$$

□

**Proposition A.0.8.** *Soit  $T$  fermé densément défini. On définit*

$$D(T^*T) = \{x \in D(T) | Tx \in D(T^*)\}$$

*et  $T^*T$  sur  $D(T^*T)$  par  $T^*Tx = T^*(Tx)$ .*

*Alors  $(T^*T, D(T^*T))$  est auto-adjoint et  $D(T^*T)$  est un coeur de  $T$ .*

*Preuve :* On a montré que :

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \Gamma(T) \oplus^\perp J(\Gamma(T^*)).$$

Tout vecteur  $(x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$(x, y) = (x', Tx') + (-T^*y', y') \quad \text{avec } (x', y') \in D(T) \times D(T^*).$$

En prenant  $y = 0$ , on obtient :

$$\begin{cases} x &= x' - T^*y' \\ 0 &= Tx' + y', \end{cases}$$

d'où  $Tx' = -y' \in D(T^*)$  et  $x = (I + T^*T)x'$ .

On a ainsi montré que  $I + T^*T$  est surjectif.

Pour  $x \in D(T)$ , un petit calcul donne :  $\|(I + T^*T)x\| \geq \|x\|$ .

Cette estimation montre que  $I + T^*T$  est injectif.

On a établi que  $S = I + T^*T$  est bijectif de  $D(T^*T)$  sur  $\mathcal{H}$ .

Comme on le verra plus loin, le fait que  $S$  soit fermé entraîne que  $S^{-1}$  est borné. De plus  $S^{-1}$  est symétrique et partout défini, donc  $S^{-1}$  est auto-adjoint.

Par le lemme 3.2, on a que  $S$  est auto-adjoint.

Ainsi :

$$\begin{aligned} S &= S^* \\ I + T^*T &= I + (T^*T)^* \\ T^*T &= (T^*T)^*. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant que  $D(T^*T)$  est un coeur de  $T$ .

Il s'agit de montrer que :

$$\overline{\Gamma(T|_{D(T^*T)})}^{\|\cdot\|_{\oplus}} = \Gamma(T),$$

autrement dit le graphe de la restriction de  $T$  à  $D(T^*T)$  est dense dans  $\Gamma(T)$  au sens de la topologie associée à la norme  $\|\cdot\|_{\oplus}$ .

En effet, soit  $(x, Tx) \in \Gamma(T)$  orthogonal aux  $(y, Ty) \in \Gamma(T|_{D(T^*T)})$ , alors :

$$\begin{aligned} 0 &= (x|y)_{\mathcal{H}} + (Tx|Ty)_{\mathcal{H}} \\ &= (x|(I + T^*Ty))_{\mathcal{H}} \\ &= (x|Sy)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $x = 0$ , puisque  $R(S) = \mathcal{H}$ .

Ce qui donne le résultat souhaité. □

## A.0.4 Spectre

**Définition A.0.7.** Soit  $T$  un opérateur fermé. L'ensemble résolvant de  $T$  est l'ensemble, noté  $\rho(T)$ , des nombres complexes  $\lambda$  tels que

$$T - \lambda : D(T) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est bijectif. Le spectre de  $T$  est l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Pour  $\lambda \in \rho(T)$ , l'opérateur

$$R_{\lambda}(T) := (T - \lambda)^{-1}$$

est appelé la résolvante de  $T$  en  $\lambda$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$T - \lambda : D(T) \longrightarrow \mathcal{H}$$

n'est pas injective, c'est à dire qu'on peut trouver  $x \neq 0$  tel que

$$Tx = \lambda x.$$

On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$  et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . L'ensemble des valeurs propres est appelé spectre ponctuel.

**Proposition A.0.9.** Si  $\lambda \in \rho(T)$ ,  $R_{\lambda}(T)$  est un opérateur borné.

*Preuve :* Le graphe  $\Gamma(T - \lambda)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)_{\oplus}$ , puisque  $T - \lambda$  est fermé. L'application

$$\alpha : \begin{aligned} \Gamma(T - \lambda) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (x, (T - \lambda)x) &\longmapsto (T - \lambda)x \end{aligned}$$

est linéaire, continue et bijective. Par le théorème des isomorphismes de Banach  $\alpha^{-1}$  est continue. En désignant par  $\beta$  la projection de  $\Gamma(T - \lambda)$  sur sa première composante, elle est continue et en observant

$$(T - \lambda)^{-1} = \beta\alpha^{-1}$$

nous terminons notre preuve. □

**Proposition A.0.10.** Soit  $T$  un opérateur fermé. Alors :

- (a)  $\rho(T)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  ;
- (b) L'application

$$\rho(T) \ni \lambda \longmapsto R_\lambda(T)$$

est analytique ;

- (c) Pour  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ , on a l'équation de la résolvante (aussi appelée identité de Hilbert) :

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T) \\ &= (\lambda - \mu)R_\mu(T)R_\lambda(T). \end{aligned}$$

*Preuve :* (a) Soit  $\lambda_0 \in \rho(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)\| < 1.$$

Alors  $I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)$  est inversible et on observe que :

$$\begin{aligned} T - \lambda &= T - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda \\ &= (T - \lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)] \\ &= [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)](T - \lambda_0) \end{aligned}$$

Cela nous dit exactement que la boule de centre  $\lambda_0$  et de rayon  $\|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$  est contenue dans  $\rho(T)$ , l'arbitrairement sur  $\lambda_0$  implique que  $\rho(T)$  est voisinage de chacun de ses points.

Des égalités précédentes nous tirons les relations qui suivent, elles sont importantes dans la pratique

$$R_{\lambda_0}(T)(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1}R_{\lambda_0}(T) = R_\lambda(T). \quad (\text{Res})$$

(b) De (Res) avec  $\lambda \neq \lambda_0$ , on a :

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) &= R_{\lambda_0}(T) \sum_{n \geq 0} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^n \\ &= R_{\lambda_0}(T) + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)^2 + \sum_{n \geq 2} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1} \\ \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} &= R_{\lambda_0}(T)^2 + \sum_{n \geq 2} (\lambda - \lambda_0)^{n-1} R_{\lambda_0}(T)^{n+1}. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers  $\lambda_0$ , on obtient :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda_0}(T)^2,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

(c) L'équation de la résolvante découle de :

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= R_\lambda(T)(T - \mu)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(T - \lambda)R_\mu(T) \\ &= R_\mu(T)(T - \mu)R_\lambda(T) - R_\mu(T)(T - \lambda)R_\lambda(T). \end{aligned}$$

□

Comme pour les opérateurs bornés, le spectre d'un opérateur auto-adjoint non borné est contenu dans  $\mathbb{R}$ .

Ce fait n'est pas aussi évident que dans le cas borné.

**Proposition A.0.11.** *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint  $(T, D(T))$  est réel, i.e.  $\sigma(T) \in \mathbb{R}$  et on a la majoration :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

*Preuve :* Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  avec  $\lambda = \alpha + i\beta$  où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Nous allons montrer que  $T - \lambda$  est bijectif. Injective : Pour tout  $x \in D(T)$ , on a :

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)x\|^2 &= \|(T - \alpha)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \\ &\geq \beta^2 \|x\|^2, \end{aligned} \tag{Ad}$$

d'où l'injectivité de  $T - \lambda$ .

Surjectivité : Nous allons procéder en deux étapes :

- Montrons que  $R(T - \lambda)$  est fermée.

Soit  $(y_n)_n \subset R(T - \lambda)$  telle que  $y_n \rightarrow y$ , alors il existe  $(x_n)_n \subset D(T)$  telle que

$$y_n = (T - \lambda)x_n.$$

Il résulte de (Ad) que  $(x_n)_n$  converge vers un certain  $x \in \mathcal{H}$ . Comme  $T - \lambda$  est fermé, la suite  $(x_n, Tx_n) \in \Gamma(T - \lambda)$  converge dans  $\Gamma(T - \lambda)$  vers  $(x, y)$ . Par suite,  $x \in D(T)$  et  $y = (T - \lambda)x$ .

Ce qui montre que  $y \in R(T - \lambda)$ .

- Montrons que  $R(T - \lambda)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Soit  $z \in R(T - \lambda)^\perp$ . Alors pour tout  $x \in D(T)$ , on a :

$$\begin{aligned} ((T - \lambda)x|z)_\mathcal{H} &= 0 \\ (Tx|z)_\mathcal{H} &= \lambda(x|z)_\mathcal{H}. \end{aligned}$$

Il en découle que  $z \in D(T^*) = D(T)$  et  $T^*z = Tz = \bar{\lambda}z$ .

En remplaçant  $(T - \lambda)x$  par  $(T - \bar{\lambda})z$  dans (Ad), on a que  $z = 0$ .

On en déduit que  $R(T - \lambda) = \mathcal{H}$ .

Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $T - \lambda$  est inversible.

Par ailleurs de (Ad) on tire :

$$\forall y \in \mathcal{H}, \quad |\beta| \|(T - \lambda)^{-1}y\| \leq \|y\|,$$

d'où

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

□

## A.0.5 Forme quadratique

On qualifie de forme sesqui-linéaire, une application

$$\begin{aligned} B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto B(x, y), \end{aligned}$$

qui satisfait :

- $B(\lambda x + \beta y, z) = \lambda B(x, z) + \beta B(y, z)$  linéarité à gauche ;
- $B(x, \lambda y + \beta z) = \bar{\lambda} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z)$  anti-linéarité à droite ;
- $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$  le caractère hermitien de  $B$ .



Où  $(x, y, z, \lambda, \beta) \in \mathcal{H}^3 \times \mathbb{C}^2$ .

$B$  est continue, s'il existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}}.$$

Les formes sesqui-linéaires continues sont liées aux opérateurs bornés par le lemme suivant :

**Lemme A.0.5.** *Soit  $B$  une forme sesqui-linéaire continue sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , alors il existe un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$  tel que :*

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad B(x, y) = (Tx|y)_{\mathcal{H}}.$$

*Preuve :* Fixons  $x \in \mathcal{H}$ , et considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto B(x, y). \end{aligned}$$

$\varphi$  est une forme anti-linéaire continue. Le lemme de Riesz implique l'existence d'un unique vecteur  $z_x$  tel que pour tout  $y$  :

$$\varphi(y) = (z_x|y)_{\mathcal{H}}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto z_x. \end{aligned}$$

- Montrons que  $T$  est linéaire. En effet, pour  $(x_1, x_2, \lambda, \beta) \in \mathcal{H}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , on a :

$$B(\lambda x_1 + \beta x_2, y) = (T(\lambda x_1 + \beta x_2)|y)_{\mathcal{H}},$$

et

$$\begin{aligned} B(\lambda x_1 + \beta x_2, y) &= \lambda B(x_1, y) + \beta B(x_2, y) \\ &= (\lambda T(x_1) + \beta T(x_2)|y)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Par unicité de  $T(\lambda x_1 + \beta x_2)$ , on a :

$$T(\lambda x_1 + \beta x_2) = \lambda T(x_1) + \beta T(x_2).$$

- Montrons que  $T$  est continue. Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= (T(x)|Tx)_{\mathcal{H}} \\ &= B(x, Tx) \\ &\leq \|B\| \cdot \|Tx\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Cette estimation nous dit que  $T$  est continue et que sa norme n'excède pas  $\|B\|$ . □

Il est légitime de se demander si une telle relation existe entre opérateurs non bornés et formes sesqui-linéaires non continues. Plutôt que de parler de forme sesqui-linéaire non continue, nous utiliserons le terme "forme quadratique" au sens non habituel comme l'impose la tradition.

**Définition A.0.8.** *On appelle forme quadratique toute forme sesqui-linéaire définie sur un sous-espace vectoriel dense  $D(q)$  de  $\mathcal{H}$ .  $D(q)$  est le domaine de  $q$ .*

*Si la forme  $q$  est hermitienne, on dit que  $q$  est symétrique.*

*Si pour tout  $x \in D(q)$ ,  $q(x, x) \geq 0$ , on dit que  $q$  est positive, et  $q$  est semi-bornée s'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in D(q)$  :*

$$q(x, x) \geq -M\|x\|^2.$$

De même que pour les opérateurs non bornés, il existe une notion de forme quadratique fermable et de forme quadratique fermée.

Pour alléger les notations on pose  $q(x) = q(x, x)$ .

**Définition A.0.9.** Une forme quadratique semi-bornée  $q$  est fermée si son domaine  $D(q)$  est complet pour la norme :

$$\|x\|_{+1} = (q(x) + (M + 1)\|x\|_{\mathcal{H}})^{1/2}.$$

Il est clair qu'une suite  $(x_n)_n \subset D(q)$  converge vers  $x \in D(q)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{+1}$  si, et seulement si

$$x_n \rightarrow x \quad \text{dans } \mathcal{H} \quad \text{et} \quad q(x_n - x) \rightarrow 0.$$

On a le résultat plus précis suivant.

**Proposition A.0.12.** Une forme quadratique semi-bornée  $q$  est fermée si, et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

(P) Soit  $x \in \mathcal{H}$  et  $(x_n)_n \subset D(q)$  une suite telle que

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad q(x_n - x_m) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \rightarrow +\infty.$$

Alors  $x \in D(q)$  et  $q(x_n - x) \rightarrow 0$ .

*Preuve :* Supposons  $q$  fermée. Soit  $x \in \mathcal{H}$  et  $(x_n)_n \subset D(q)$  une suite telle que

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad q(x_n - x_m) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \rightarrow +\infty.$$

Alors la suite  $(x_n)_n$  est de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{+1}$ . Donc converge pour cette norme et forcément vers  $x$ . Par suite (P) est satisfaite.

Réciproquement supposons (P) satisfaite. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{+1}$ . La suite  $(x_n)_n$  est alors de Cauchy pour la norme de  $\mathcal{H}$ , donc converge vers  $x$ , et  $x \in D(q)$  par (P). Le fait que  $q(x_n - x) \rightarrow 0$  entraîne

$$\|x_n - x\|_{+1} \rightarrow 0.$$

□

La proposition qui suit, est l'un des outils fondamentaux qui nous serviront dans la suite. Elle permet d'associer des opérateurs auto-adjoints aux formes quadratiques fermées et semi-bornées.

**Théorème A.0.1.** Soit  $q$  une forme quadratique fermée semi-bornée. Il existe un unique opérateur auto-adjoint  $A$  de domaine  $D(A) \subset D(q)$  tel que :

$$\forall x \in D(A) \quad \forall y \in D(q), \quad q(x, y) = (Ax|y)_{\mathcal{H}}.$$

*Preuve :* Par commodité, nous supposons  $q \geq 0$ , autrement dit  $M = 0$ .

Existence : Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , l'application anti-linéaire :

$$l_x : \underbrace{(D(q), \|\cdot\|_{+1})}_{=: \mathcal{H}_q} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$y \longmapsto (x|y)_{\mathcal{H}}$$

est continue et sa norme n'excède pas  $\|x\|_{\mathcal{H}}$  (cela résulte du fait que  $\|\cdot\|_{+1} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ).

En appliquant le lemme de Riesz, il existe un unique vecteur  $x_q \in D(q)$  tel que :

$$\forall y \in D(q), \quad l(x) = (x_q|y)_{+1},$$

où  $(\cdot, \cdot)_{+1}$  est le produit scalaire associé à  $\|\cdot\|_{+1}$ .

De plus

$$\|x_q\|_{+1} = \|l_x\| \leq \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

De ce qui précède, l'application

$$B : (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \longrightarrow (D(q), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

$$x \longmapsto x_q$$

est bien définie.

Montrons que  $B$  est une application linéaire continue.

- La linéarité provient de l'unicité de  $x_q$ .
- Le fait que

$$\|Bx\|_{\mathcal{H}} \leq \|Bx\|_{+1} = \|l_x\|_{\mathcal{H}_q^*} \leq \|x\|_{\mathcal{H}}$$

entraîne que  $B$  est continue et que  $\|B\| \leq 1$ .

Montrons à présent que  $B$  est injective.

Soit  $x \in \mathcal{H}$  tel que  $Bx = 0$ . Donc, pour tout  $y \in D(q)$  :

$$(x|y)_{\mathcal{H}} = (Bx|y)_{+1} = 0,$$

$(D(q), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  étant dense dans  $\mathcal{H}$ , nous obtenons que  $x = 0$ .

Notons

$$C := B^{-1} : (R(B), \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}).$$

Soient  $x, y \in R(B)$  :

$$\begin{aligned} (Cx|y)_{\mathcal{H}} &= (B(Cx)|y)_{+1} \\ &= (x|y)_{+1} \\ &= \overline{(y|x)_{+1}} \\ &= \overline{(B(Cy)|x)_{+1}} \\ &= \overline{(Cy|x)_{\mathcal{H}}} \\ &= (x|Cy)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

$C$  est donc symétrique, un calcul simple montre que  $B$  l'est aussi. Ce qui implique que  $B$  est auto-adjoint puisqu'elle est continue.

Montrons que

$$\overline{R(B)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}.$$

puisque

$$\overline{D(q)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H},$$

il suffit de montrer que

$$\overline{R(B)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} = D(q).$$

En effet, la double inclusion

$$D(q) \subset \overline{R(B)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$$

donnera le résultat voulu.

La norme  $\|\cdot\|_{+1}$  contrôlant la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , la densité de  $(R(B), \|\cdot\|_{+1})$  dans  $(D(q), \|\cdot\|_{+1})$  implique celle de  $(R(B), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  dans  $(D(q), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ .

Soit  $y \in D(q) \cap (R(B)^{\perp}, (\cdot, \cdot)_{+1})$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}$

$$(x|y)_{\mathcal{H}} = (Bx|y)_{+1} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Tout  $x \in D(q)$  est limite d'une certaine suite  $(x_n)_n \in (R(B), \|\cdot\|_{+1})$ . Or

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{H}} \leq \|x_n - x\|_{+1},$$

d'où

$$\overline{R(B)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} = D(q).$$

Le lemme 3.2 montre que  $(C, R(B))$  est auto-adjoint.

Pour  $(x, y) \in \mathcal{H} \times D(q)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (x|y)_{\mathcal{H}} &= (Bx|y)_{+1} \\ (x|y)_{\mathcal{H}} &= q(Bx, y) + (Bx|y)_{\mathcal{H}} \\ ((I - B)x|y)_{\mathcal{H}} &= q(Bx, y). \end{aligned}$$

En posant  $Bx = x'$ , on a que  $x = Cx'$ . Ainsi nous obtenons :

$$q(x', y) = ((C - I)x'|y)_{\mathcal{H}},$$

et l'opérateur  $(A := C - I, R(B))$  répond à la question.

Unicité : Commençons par remarquer le fait suivant :

Soit  $(y, x) \times \mathcal{H} \times D(q)$  tel que pour tout  $z \in D(q)$ , on ait :

$$q(x, z) = (y|z)_{\mathcal{H}}.$$

Alors  $x \in D(A) = R(B)$  et  $y = Ax$ .

En effet on a :

$$\begin{aligned} q(x, z) + (x|z)_{\mathcal{H}} &= (x + y|z)_{\mathcal{H}} \\ (x|z)_{+1} &= (x + y|z)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

i.e.  $x = B(x + y)$ , d'où  $y = Ax$ .

Si  $(C', D(C'))$  est un autre opérateur auto-adjoint satisfaisant le problème.

La remarque précédente montre que

$$C' \subset C$$

et donc que

$$C = C'$$

puisque les deux opérateurs sont auto-adjoints.

En effet, pour  $(x, y) \in D(C') \times D(q)$ , on a :

$$q(x, y) = (C'x|y)_{\mathcal{H}}.$$

Soit

$$\begin{aligned} q(x, y) + (x|y)_{\mathcal{H}} &= ((C' + I)x|y)_{\mathcal{H}} \\ (x|y)_{+1} &= ((C' + I)|y)_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} (C' + I)x &= Bx \\ C'x &= Ax \quad \text{pour tout } x \in D(C'). \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que

$$C' \subset A.$$

Le fait que

$$A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$$

permet de conclure. □

Les indices de défaut d'un opérateur symétrique semi-borné inférieurement sont égaux. Il en résulte qu'un tel opérateur possède des extensions auto-adjointes. L'utilisation des formes quadratiques permet de distinguer une extension auto-adjointe particulière, appelée extension de Friedrichs. Par addition d'une constante, on se ramène au cas d'un opérateur positif.

**Théorème A.0.2.** *Soit  $(T, D(T))$  un opérateur symétrique positif sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et  $q$  la forme quadratique de domaine  $\mathcal{D}(q) = D(T)$  donnée par :*

$$\forall u \in D(T), \forall v \in D(T), \quad q(u, v) = (Tu|v)_{\mathcal{H}}.$$

*Cette forme possède une plus petite extension fermée  $\tilde{q}$ , et l'opérateur auto-adjoint  $\tilde{T}$  associé à  $\tilde{q}$  par la proposition(\*) est une extension auto-adjointe (extension de Friedrichs) de  $T$ .  $\tilde{T}$  est l'unique extension auto-adjointe de  $T$  dont le domaine soit contenu dans  $\mathcal{D}(\tilde{q})$ .*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, nous allons rappeler quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle qui sont d'une utilisation constante dans nos résultats.

## A.0.6 Principe de prolongement d'applications uniformément continues

C'est un outil efficace dans la construction de plusieurs objets mathématiques, parmi eux nous pouvons citer :

- La théorie  $L^2$  de la transformée de Fourier ;
- Le calcul fonctionnel continu en théorie spectrale ;
- La construction de l'intégrale de Riemann ...

et la liste est loin d'être exhaustive.

**Proposition A.0.13.** *Soient  $(E, d)$  un espace métrique,  $(E', d')$  un espace métrique complet et  $D$  une partie dense dans  $E$ .*

*Soit*

$$f : D \rightarrow F$$

*une fonction uniformément continue. Il existe une et une seule fonction*

$$\tilde{f} : E \rightarrow F$$

*qui coïncide avec  $f$  sur  $D$ . De plus, la fonction  $\tilde{f}$  est uniformément continue.*

Pour établir ce résultat, nous avons besoin du lemme ci-après.

**Lemme A.0.6** (Critère de Cauchy). *Soient  $(E, d)$  et  $(E', d')$  deux espaces métriques où  $E'$  est supposé complet. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $a \in \bar{A}$ . Une fonction*

$$f : A \rightarrow F$$

*admet une limite en  $a$  si, et seulement si  $f$  vérifie le critère de Cauchy en  $a$ , à savoir :*

- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que  $\forall x, y \in A$ ,
- $d(x, a) < \alpha$  et  $d(y, a) < \alpha$  alors  $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

*Preuve :* Supposons que  $f$  vérifie le critère de Cauchy en  $a$  et montrons que  $f$  admet une limite en  $a$ .

Soit  $(x_n)_n \subset A$  admettant  $a$  pour limite, le critère de Cauchy implique que  $(f(x_n))_n$  est une suite de Cauchy dans  $F$ ; celui-ci étant complet, la suite  $(f(x_n))_n$  est convergente.

Inversement, supposons que  $f$  possède une limite  $l$  en  $a$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$d(x, a) < \alpha \implies d'(f(x), l) < \epsilon/2.$$

Soient  $x$  et  $y$  dans  $A$  tels que  $d(x, a) < \alpha$  et  $d(y, a) < \alpha$ , l'inégalité triangulaire permet de conclure.  $\square$

Nous sommes en mesure de donner la preuve de la proposition 0.1 .

*Preuve :* • Construction d'un prolongement de  $f$ .

Soit  $a \in E$ . Puisque  $f$  est uniformément continue, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x, y \in D, d(x, y) < \alpha \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon. \quad (\text{A.0.2})$$

En particulier, si :

$$d(x, a) < \alpha/2 \quad \text{et} \quad d(y, a) < \alpha/2,$$

alors

$$d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Ainsi,  $f$  vérifie le critère de Cauchy en  $a$ , donc  $f$  admet une limite en  $a$ . On pose :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tilde{f}(a).$$

La continuité de  $f$  sur  $D$  montre que pour tout  $a \in D$ ,

$$f(a) = \tilde{f}(a)$$

et donc  $\tilde{f}$  est un prolongement de  $f$ .

◦ Montrons que  $\tilde{f}$  est uniformément continue sur  $E$ .

Soit  $\epsilon > 0$  et soit  $\alpha > 0$  associé à  $\epsilon$  par (0.1).

Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que

$$d(x, y) < \alpha/2.$$

Par densité de  $D$ , on a l'existence de deux suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  dans  $D$  telles que

$$\lim_n x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_n y_n = y.$$

La continuité de la distance permet d'écrire

$$d(x, y) = \lim_n d(x_n, y_n)$$

et donc par l'inégalité triangulaire renversée, à partir d'un certain rang  $n_0$ , on a :

$$d(x_n, y_n) < \alpha,$$

et donc

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon, \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Par construction

$$\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(y) = \lim_n f(y_n),$$

et donc

$$d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \epsilon.$$

Cela prouve que  $\tilde{f}$  est uniformément continue.

- Unicité d'un tel prolongement.  
Elle résulte du fait que pour  $f_1$  et  $f_2$  continues, l'ensemble

$$\{x \in E; f_1(x) = f_2(x)\}$$

est fermé. □

### A.0.7 Complétude de $\mathcal{B}(E, F)$

Soient  $(E, |\cdot|_E)$  et  $(F, |\cdot|_F)$  deux espaces normés,  $\mathcal{F}(E, F)$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ . Nous désignons par  $\mathcal{B}(E, F)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{F}(E, F)$  contenant les fonctions bornées.

Soit  $\mathbb{K}$  un corps donné, il est facile de vérifier  $\mathcal{F}(E, F)$  muni des opérations :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathcal{F}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, F) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda f, \quad ((\lambda f)(x) = \lambda f(x)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, F) \\ (f, g) &\longmapsto f + g, \quad ((f + g)(x) = f(x) + g(x)) \end{aligned}$$

est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et que  $\mathcal{B}(E, F)$  est son  $\mathbb{K}$  sous espace vectoriel.

On peut normer  $\mathcal{B}(E, F)$  par la norme :

$$f \mapsto |f|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|_F$$

dite norme de la convergence uniforme sur  $E$ .

Si  $(F, |\cdot|_F)$  est un espace de Banach, on a le résultat :

**Proposition A.0.14.**  $(\mathcal{B}(E, F), |\cdot|_\infty)$  est aussi complet.

*Preuve :* Elle se fait en trois parties.

Soit  $(f_n)_n \subset \mathcal{B}(E, F)$  de Cauchy.

- On va montrer que la suite  $(f_n)_n$  converge simplement.  
Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , pour tout  $p, q \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$ ,  $q > p$  :

$$|f_q - f_p|_\infty < \epsilon.$$

Alors pour tout  $x \in E$ , la suite  $(f_n(x))_n$  est une suite de Cauchy dans  $F$ . Puisque  $F$  est complet, cette suite converge vers une limite  $f(x)$ .

La suite  $(f_n)_n$  admet donc pour limite simple  $f$ .

- Montrons que  $f \in \mathcal{B}(E, F)$ .  
Toute suite de Cauchy étant bornée, il existe une constante  $M > 0$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|f_n|_\infty \leq M.$$

Pour  $x \in E$ , on a :

$$|f_n(x)|_F \leq M \implies |f(x)|_F \leq M.$$

L'arbitraire sur  $x$  permet de conclure.

- Montrons que  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .  
Le caractère Cauchy de la suite  $(f_n)_n$  permet d'écrire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in E$$

$$(p \geq n_0 \text{ et } q > p) \implies (|f_q(x) - f_p(x)|_F < \epsilon). \quad (\text{A.0.3})$$

En faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$  dans (0.2), les autres paramètres étant fixés, on a :

$$(p \geq n_0) \implies (|f(x) - f_p(x)|_F < \epsilon),$$

donc pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0 > 0$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$

$$(p \geq n_0) \implies (|f - f_p|_\infty < \epsilon).$$

Ce qui donne le résultat voulu. □

## A.0.8 Complété d'un espace métrique

La notion de complétude est fondamentale en mathématique. Elle concerne notamment les questions de convergences qui touchent plusieurs branches des mathématiques.

D'où l'intérêt de savoir comment se ramener à de tels espaces, plus précisément nous avons le résultat suivant.

**Théorème A.0.3.** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Il existe un espace métrique complet  $(\tilde{E}, \tilde{d})$  et une application isométrique*

$$\tilde{f} : E \longrightarrow \tilde{E}$$

*d'image dense.*

*L'espace  $(\tilde{E}, \tilde{d})$  est unique au sens suivant :*

*Soit  $(\hat{E}, \hat{d})$  un espace métrique complet et*

$$\hat{f} : E \longrightarrow \hat{E}$$

*une application isométrique d'image dense.*

*Alors il existe une application bijective et isométrique*

$$h : \tilde{E} \longrightarrow \hat{E}$$

*avec*

$$\hat{f} = h \circ \tilde{f}.$$

*Preuve :* • Existence :

Nous avons montré que  $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$  (l'ensemble des applications bornées) muni de la distance  $d_\infty$  associée à la norme sup  $\|\cdot\|_\infty$  est complet.

On commence par fixer  $x_0 \in E$  et on définit

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E &\longrightarrow \mathcal{B}(E, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto d(x, \cdot) - d(x_0, \cdot) \end{aligned}$$

i.e. pour tout  $x, t \in E$ ,

$$\tilde{f}(x)(t) = d(x, t) - d(x_0, t).$$



On a bien  $\tilde{f}(x) \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$  pour tout  $x \in E$ , cela résulte de l'inégalité triangulaire renversée.

Pour  $x, y \in E$ , on a :

$$d_\infty(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) = \sup_{t \in E} |d(x, t) - d(y, t)| \leq d(x, y).$$

D'autre part, en prenant  $t = y$ , on voit que

$$\sup_{t \in E} |d(x, t) - d(y, t)| \geq d(x, y).$$

On a ainsi :

$$d_\infty(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) = d(x, y),$$

et donc  $\tilde{f}$  est une isométrie.

Soit  $\tilde{E}$  l'adhérence de  $\tilde{f}(E)$  dans  $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ . Alors  $\tilde{E}$  est complet et

$$\tilde{f} : E \longrightarrow \tilde{E}$$

est isométrique et d'image dense.

- Unicité :

Soit  $(\hat{E}, \hat{d})$  un autre espace métrique complet et

$$\hat{f} : E \longrightarrow \hat{E}$$

une application isométrique d'image dense.

L'application

$$g := \hat{f} \circ \tilde{f}^{-1} : \tilde{f}(E) \longrightarrow \hat{E}$$

est isométrique. Par la proposition 1.1,  $g$  s'étend en une application

$$h : \tilde{E} \longrightarrow \hat{E}.$$

Il est clair que  $h$  est isométrique, il s'ensuit que

$$h(\tilde{E}) = \hat{f}(E)$$

est complet et donc fermé dans  $\hat{E}$ . comme  $\hat{f}(E)$  est dense, on a donc

$$h(\tilde{E}) = \hat{E}.$$

Par conséquent,  $h$  est une bijection isométrique.

Par définition de  $g$ , on a :

$$h \circ \tilde{f} = g \circ \tilde{f} = \hat{f}.$$

□

## A.0.9 Complété d'un espace normé

Nous allons essentiellement nous baser sur la section précédente. Le seul point qui va demander un peu de travail, est le transport de la structure d'espace vectoriel de l'espace de départ sur le complété.

Commençons par introduire quelques résultats intermédiaires.

Soit  $(E, |\cdot|_E)$  un  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) espace normé.

On vérifie aisément que l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_E \end{aligned}$$

est une distance et vérifie les deux propriétés suivantes :

a) Toute translation de vecteur  $a \in E$ ,

$$\begin{aligned} \tau_a : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

est une isométrie, i.e.

$$d(\tau_a(x), \tau_a(y)) = d(x, y);$$

b) Toute homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} h_\lambda : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

multiplie les distances par le module  $|\lambda|$ , i.e.

$$d(h_\lambda(x), h_\lambda(y)) = |\lambda|d(x, y).$$

Dans la suite nous dirons qu'une distance est compatible avec la structure d'espace vectoriel, si elle vérifie les points a) et b).

De tels espaces métriques sont normables. Le lemme qui suit donne une construction explicite d'une telle norme.

**Lemme A.0.7.** *Si  $(E, d)$  est un espace métrique compatible avec la structure d'espace vectoriel. L'application*

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto d(0, x) \end{aligned}$$

*est une norme.*

*Preuve :* On commence par remarquer que :

$$d(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ > 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

d'après l'axiome de séparation des distances.

Puisque l'homothétie  $h_\lambda$  multiplie la distance par  $|\lambda|$ ,

$$d(0, \lambda x) = |\lambda|d(0, x).$$

Nous terminons par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} d(0, x + y) &\leq d(0, x) + d(x, x + y) \quad \text{inégalité triangulaire pour } d \\ &\leq d(0, x) + d(0, y) \end{aligned}$$

la dernière inégalité résulte du fait que  $\tau_x$  est une isométrie. □

Si on se donne deux espaces normés  $(E, |\cdot|_E)$  et  $(F, |\cdot|_F)$ , on peut munir l'espace produit  $E \times F$  de la norme suivante :

$$|(x, y)|_1 = |x|_E + |y|_F.$$

Nous avons ainsi le lemme suivant :

**Lemme A.0.8.** *Soit  $(E, |\cdot|_E)$  un  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) espace normé avec  $\mathbb{K}$  muni de sa topologie canonique.*

1) l'application

$$\begin{aligned} S : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

est lipschitzienne ;

2) L'application

$$\begin{aligned} M : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, y) &\longmapsto \lambda y \end{aligned}$$

est continue.

*Preuve* : 1) Pour  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans  $E \times E$ , on a :

$$\begin{aligned} |S(x', y') - S(x, y)|_E &\leq |S(x', -x) + S(y', -y)|_E \\ &\leq |S(x', -x)|_E + |S(y', -y)|_E \\ &\leq |(x', y'), (x, y)|_1. \end{aligned}$$

2) De même, pour  $(\lambda, x)$  et  $(\lambda_0, x_0)$  dans  $\mathbb{K} \times E$ , on a :

$$\begin{aligned} |M(\lambda, x) - M(\lambda_0, x_0)|_E &= |\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0|_E \\ &\leq |\lambda||x - x_0|_E + |\lambda - \lambda_0||x_0|_E \end{aligned}$$

Soit  $\eta_0 > 0$  arbitraire, et supposons

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \eta_0.$$

On en déduit :

$$|M(\lambda, x) - M(\lambda_0, x_0)|_E \leq \max(|\lambda_0| + \eta_0, |x_0|_E)|(x, x_0)|_1$$

qui donne la continuité de  $M$  en  $(\lambda_0, x_0)$ . □

**Théorème A.0.4.** *Tout espace normé  $(E, |\cdot|_E)$  est un sous-espace normé partout dense d'un espace de Banach (unique à isomorphisme près d'espaces normés).*

*Preuve* : En désignant par  $d_E$  la distance associée à  $|\cdot|_E$ , on peut identifier  $(E, d_E)$  à un sous espace métrique de  $(\tilde{E}, \tilde{d}_E)$ . Il s'agira ensuite de montrer que  $(\tilde{E}, \tilde{d}_E)$  possède une structure d'espace normé et une seule, dont  $(E, d_E)$  est un sous espace normé.

Pour définir l'addition dans  $\tilde{E}$ , on a vu que

$$\begin{aligned} S : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

est une application 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

On peut toujours la considérer comme prenant ses valeurs dans  $\tilde{E}$ , qui est complet, elle se prolonge de façon unique en une application uniformément continue

$$\begin{aligned} \tilde{S} : \tilde{E} \times \tilde{E} &\longrightarrow \tilde{E} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

puisque  $E \times E$  est partout dense dans  $\tilde{E} \times \tilde{E}$ .

Les propriétés d'associativité

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

et de commutativité

$$x + y = y + x$$

se prolongent à  $\tilde{E}$ , puisqu'elles sont valables sur  $E$  qui est partout dense dans  $\tilde{E}$ , et qu'elles s'expriment en termes d'addition qui est une application continue.

On montrerait, de même, que la multiplication externe

$$\begin{aligned} M : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, y) &\longmapsto \lambda y \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application

$$\begin{aligned} \tilde{M} : \mathbb{K} \times \tilde{E} &\longrightarrow \tilde{E} \\ (\lambda, y) &\longmapsto \lambda y. \end{aligned}$$

On a ainsi muni  $\tilde{E}$  d'une structure d'espace vectoriel dont  $E$  est un sous espace vectoriel. Enfin on remarque que les applications

$$\begin{aligned} T_1 : \tilde{E} \times \tilde{E} \times \tilde{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, a) &\longmapsto \tilde{d}_E(x + a, y + a) - \tilde{d}_E(x, y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{K} \times \tilde{E} \times \tilde{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x, y) &\longmapsto \tilde{d}_E(\lambda x, \lambda y) - |\lambda| \tilde{d}_E(x, y) \end{aligned}$$

sont continues. Comme elles sont identiquement nulles respectivement sur les sous espaces  $E^3$  (partout dense dans  $\tilde{E}^3$ ) et  $\mathbb{K} \times E^2$  (partout dense dans  $\mathbb{K} \times \tilde{E}^2$ ), elles sont identiquement nulles partout, ce qui signifie que  $\tilde{d}_E$  est compatible avec la structure d'espace vectorielle de  $\tilde{E}$ .  $\square$

## Remarque :

Il existe plusieurs façons de construire un complété d'un espace normé, bien qu'il soit "unique" comme nous l'avons mentionné. Une des constructions possible est celle de l'injection d'un espace normé  $E$  dans son bidual topologique  $E^{**}$ .

### A.0.10 Preuve du théorème 6.0.2

On munit  $D(T)$  de la norme

$$|u|_{+1} = |u|_{\mathcal{H}} + q(u, u).$$

L'espace  $(D(T), |\cdot|_{+1})$  admet un complété  $\widetilde{D(T)}$ , et donc  $q$  peut-être prolongée en une forme quadratique fermée  $\tilde{q}$  de domaine  $\widetilde{D(T)}$ .

Il s'agira ensuite de montrer que  $\tilde{q}$  est fermée sur  $\mathcal{H}$ , i.e.  $\widetilde{D(T)} \subset \mathcal{H}$ .

Pour cela nous allons considérer l'application identique

$$j : (D(T), |\cdot|_{+1}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}),$$

qui est manifestement continue et de norme au plus 1.

Elle admet donc un prolongement, que nous continuerons d'appeler  $j$ , de  $\widetilde{D(T)}$  dans  $\mathcal{H}$ .

Prouvons que  $j$  ainsi prolongée est injective. Soit

$$v \in \widetilde{D(T)} \quad \text{tel que } j(v) = 0.$$

Il existe une suite  $(v_n)_n$  de  $D(T)$  de limite  $v$  au sens de  $|\cdot|_{+1}$  donc a fortiori

$$|v_n|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0.$$

En effet :

$$|v_n|_{\mathcal{H}} = |j(v_n)|_{\mathcal{H}} = |j(v_n) - j(v)|_{\mathcal{H}} \leq |v_n - v|_{+1}.$$

Prouvons maintenant que

$$|v_n|_{+1} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

ce qui entraînera  $v = 0$ , et donc l'injectivité de  $j$ .

$$\begin{aligned} |v_n|_{+1}^2 &= (v_n|v_n)_{+1} \\ &= (v_n|v_n - v_m + v_m)_{+1} \\ &\leq |v_n|_{+1}|v_n - v_m|_{+1} + |(v_n|v_m)_{+1}| \\ &\leq \underbrace{|v_n|_{+1}|v_n - v_m|_{+1}}_{(P1)} + \underbrace{|(v_n|Tv_m)_{\mathcal{H}}| + |(v_n|v_m)_{\mathcal{H}}|}_{(P2)} \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)_n$  converge au sens de la norme  $|\cdot|_{+1}$ , donc elle est bornée et de Cauchy pour cette norme. Ainsi, d'une part il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|v_n|_{+1} \leq C.$$

D'autre part, soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \cap [N(\epsilon); +\infty[, \quad |v_n - v_m|_{+1} \leq \epsilon.$$

Ce qui revient exactement à dire, pour  $\epsilon > 0$ , Il existe  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \cap [N(\epsilon); +\infty[, \quad (P1) \leq C\epsilon.$$

Fixons  $m \geq N(\epsilon)$ . La convergence forte entraînant la convergence faible, on a :

$$(P2) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il existe donc  $N'(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N'(\epsilon)$ ,

$$(P2) \leq \epsilon.$$

En posant  $N''(\epsilon) = \max(N(\epsilon), N'(\epsilon))$ , pour tout  $n \in \mathbb{N} \cap [N''(\epsilon); +\infty[$ ,

$$|v_n|_{+1} \leq C\epsilon.$$

Ce qui donne le résultat voulu.

Nous venons d'établir que  $(\tilde{q}, \widetilde{D(T)})$  est une forme quadratique fermée sur  $\mathcal{H}$ . On peut lui associer un unique opérateur auto-adjoint  $(\tilde{T}, D(\tilde{T}))$  tel que  $D(\tilde{T}) \subset \widetilde{D(T)}$  et pour tout  $u \in D(\tilde{T})$  et tout  $v \in \widetilde{D(T)}$

$$\tilde{q}(u, v) = (\tilde{T}u|v)_{\mathcal{H}}.$$

Par définition, pour tout  $u, v \in D(T)$ ,

$$\tilde{q}(u, v) = q(u, v) = (u|Tv)_{\mathcal{H}}. \tag{Fr}$$

On a manifestement  $D(T) \subset D(\tilde{T})$ . La continuité de l'application

$$u \longmapsto (u|Tv)_{\mathcal{H}}$$

permet de prolonger  $(Fr)$  sur  $D(\tilde{T}) \times D(T)$ . Ce prolongement se traduit comme suit :

$$\forall u \in D(\tilde{T}) \quad \forall v \in D(T), \quad (\tilde{T}u|v)_{\mathcal{H}} = (u|Tv)_{\mathcal{H}},$$

$v \in D(\tilde{T}^*) = D(\tilde{T})$ , et  $Tu = \tilde{T}u$ .

Ce qui montre que  $T \subset \tilde{T}$ .

Pour montrer l'unicité, nous allons prendre une extension symétrique quelconque  $S$  de  $T$  telle que  $D(S) \subset \widetilde{D(T)}$ . On retrouve  $\tilde{T}$  est une extension de  $S$ , et par suite si  $S$  est auto-adjoint, alors

$$S = \tilde{T}.$$

### A.0.11 Propriétés spectrales associées à une forme quadratique

Nous venons de montrer que les formes quadratiques fermées et semi-bornées étaient associées à un unique opérateur auto-adjoint. Dans la pratique le cas qui va nous intéresser est celui où l'opérateur associé est à résolvante compacte. Il suffira de montrer que le domaine de la forme quadratique s'injecte compactement dans l'espace ambiant.

La proposition qui suit donne une caractérisation fonctionnelle des opérateurs à résolvante compacte.

**Proposition A.0.15.** *Soit  $\lambda \in \rho(T)$ .  $R_\lambda(T)$  est à résolvante compacte si et seulement si  $D(T)$  s'injecte compactement dans  $\mathcal{H}$ .*

*Preuve :* Soit  $(\varphi_n)_n \subset D(T)$  bornée pour la norme du graphe, i.e  $\exists C > 0$  telle que  $\forall n$

$$\|T\varphi_n\| + \|\varphi_n\| \leq C.$$

Alors on a :

$$\|(T - \lambda)\varphi_n\| \leq (1 + |\lambda|)C,$$

$R_\lambda(T)$  étant compacte, on a que :

$$R_\lambda(T)(T - \lambda)\varphi_n = \varphi_n$$

admet une sous-suite convergente et donc  $D(T)$  s'injecte compactement dans  $\mathcal{H}$ .

La réciproque est évidente. □

## Le théorème spectral

Soit  $(q, D(q))$  une forme quadratique fermée et semi-bornée. En supposant de plus que  $D(q)$  s'injecte compactement dans  $\mathcal{H}$ , alors  $(A, D(A))$  l'unique opérateur associé à  $(q, D(q))$  est à résolvante compacte. En désignant par  $(\phi_n, \lambda_n)$  un couple d'éléments propres de  $(A, D(A))$  avec les valeurs propres ordonnées par ordre croissant, on voit que :

$$\forall u \in D(q), \quad q(u) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n |(u|\phi_n)|^2.$$

Partant de cette relation, on peut donner une caractérisation variationnelle des valeurs propres  $\lambda_n$  identique à celle des opérateurs symétriques en dimension finie.

**Théorème A.0.5.** *Pour tout  $n$*

$$\lambda_n = \min_{\substack{F \subset D(q) \\ \dim F = n}} \max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} \frac{q(u)}{\|u\|^2}$$

où  $\mathfrak{D}_n$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension  $n$ .  
Le minimum est atteint pour  $F = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ .

*Preuve :* Prenons  $F = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ . Si  $u \in F$ ,

$$q(u) \leq \lambda_n \|u\|^2$$

et pour  $u = \phi_n$ ,

$$q(u) = \lambda_n \|u\|^2.$$

Par suite

$$\lambda_n = \max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} \frac{q(u)}{\|u\|^2}.$$

De cette égalité nous en déduisons que

$$\min_{\substack{F \subset D(q) \\ \dim F = n}} \max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} \frac{q(u)}{\|u\|^2} \leq \lambda_n.$$

Soit maintenant  $W \subset D(q)$ , un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $F_{n-1} = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$ .  
Comme  $\dim W \geq \dim F_{n-1}$ , alors  $F_{n-1}^\perp \cap W \neq 0$ .

Or,  $\forall u \in F_{n-1}^\perp \cap W$ , on a :

$$q(u) \geq \lambda_n \|u\|^2.$$

$$\min_{\substack{F \subset D(q) \\ \dim F = n}} \max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} \frac{q(u)}{\|u\|^2} \geq \lambda_n.$$

□

De cette relation on tire le résultat suivant qu'on va qualifier de relation des traces.

**Théorème A.0.6.** *Pour tout  $n$*

$$\sum_{k \leq n} \lambda_k = \min_{\substack{F \subset D(q) \\ \dim F = n}} \text{tr}(A|_F)$$

où  $\text{tr}(A|_F)$  est la trace de la restriction de  $A$  à  $F$ .

*Preuve :* On commence par observer que :

$$\lambda_n(A|_F) = \min_{\substack{W \subset F \\ \dim W = n}} \max_{\substack{u \in W \\ u \neq 0}} \frac{q(u)}{\|u\|^2} \geq \lambda_n.$$

Ce qui implique que :

$$\text{tr}(A|_F) \geq \sum_{k \leq n} \lambda_k.$$

Si on prend  $F = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ , alors :

$$\text{tr}(A|_F) = \sum_{k \leq n} \lambda_k,$$

ce qui termine la preuve.

□

# Bibliographie

- [1] C. Anné. Spectre du laplacien et écrasement d'anses. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.(4)* 20, No. 2, 271–280, 1987
- [2] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet. Le spectre d'une variété Riemannienne. *Lecture Notes in Mathematics. 194*. Berlin-Heidelberg-New York : **Springer-Verlag**.(1971).
- [3] M. Berger et B. Gostiaux. Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. Mathématiques. Paris : **Presses Universitaires de France**. (1987).
- [4] G. Berkolaiko et P. Kuchment. Introduction to Quantum Graphs. *Mathematical surveys and monographs, 186*. Providence, RI : **American Mathematical Society**.(2013).
- [5] H. Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Paris : **Masson** (1994).
- [6] J. Cabrol. Origamis infinis : groupe de Veech et flot linéaire. *Thèse de doctorat*, Université Aix-Marseille, 2012.
- [7] K. Calta. Veech surfaces and complete periodicity in genus two.
- [8] B. Candelpergher. Calcul intégral. Paris : **Cassini** (2009).
- [9] J. Cheeger et M. Taylor. On the diffraction of waves by conical singularities. *Commun. Pure Appl. Math.* 35, 275–331, 1982.
- [10] M. Choulli Analyse fonctionnelle, Équations aux dérivées partielles. Paris : **Vuibert**. (2013).
- [11] T. Christiansen et M. Zworski. Spectral asymptotics for manifolds with cylindrical ends. *Ann. Inst. Fourier* 45, No. 1, 251–263, 1995.
- [12] E. Darrigrand et F. Mehats. Équations aux dérivées partielles elliptiques. Note de Cours, *Université Rennes 1*, 2015.
- [13] R.S. Earp et E. Toubiana. introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann. Paris : *Diderot Editeur*, (1997).
- [14] P. Exner et O. Post Convergence of Spectra of Graph-Like Thin Manifolds. *J. Geom. Phys.* 54, No. 1, 77–115, 2005.
- [15] F. Faure. Introduction au chaos classique et au chaos quantique. *in : Chaos en mécanique quantique. Journées mathématiques X-UPS 2014*. Palaiseau : Éditions de l'École Polytechnique. 1–52, 2014.
- [16] R. Godement. Analysis III, Analytic and Differential Functions, Manifolds and Riemann Surfaces. Cham : **Springer**. (2015).
- [17] S.Gouëzel et E.Lanneau Un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie : unique ergodicité sur les surfaces plates. *Séminaires et Congrès*, 20, 113–145, 2010.
- [18] H.B. Griffiths Surfaces. Paris : **Editions Cedic**. (1977).
- [19] P. Grisvard. Singularities in Boundary Value Problems. Paris : **Masson**. (1992).
- [20] J. Grivaux et P. Hubert. Les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller. *Astérisque* 361, 43–75, Exp. No. 1060, 2014.



- [21] E. Gutkin et C. Judge. Affine mappings of translation surfaces : geometry and arithmetic. *Duke Mathematical journal*, 103, No2, 191–214, 2000.
- [22] L. Hillairet Spectral Decomposition of square-tiled Surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, (260), 393-408, 2008.
- [23] L. Hillairet. Spectral theory of translation surfaces : A short introduction. *in : Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Année 2009–2010*. St. Martin d’Hères : Université de Grenoble I, Institut Fourier. 51–62, 2010.
- [24] L. Hillairet et C. Judge. Hyperbolic triangles without embedded eigenvalues. *Ann. Math. (2)* 187, No. 2, 301–377, 2018.
- [25] L. Hillairet et C. Judge. The eigenvalues of the laplacian on domains with small slits. *Trans. Am. Math. Soc.* 362, No. 12, 6231–6259, 2010.
- [26] L. Hillairet et C. Judge. Spectral simplicity and asymptotic separation of variables. *Commun. Math. Phys.* 302, No. 2, 291–344, 2011. Erratum, *Commun. Math. Phys.* 311, No. 3, 839–842, 2012.
- [27] L. Hillairet, V. Kalvin, et A. Kokotov. Spectral determinant on Mandelstam diagrams. *Commun. Math. Phys.* 343, No. 2, 563–600, 2016.
- [28] L. Hillairet et J. Marzuola. Nonconcentration in Partially Rectangular Billiards. *Anal. PDE* 5, No. 4, 831–854, 2012.
- [29] P. Hubert et S. Lelièvre. Non-congruence subgroups in  $\mathcal{H}(2)$ . *Int. Math. Res. Not.*, No. 1, 47–64, 2005.
- [30] A. Intissar. Analyse fonctionnelle et théorie spectrale pour les opérateurs compacts non auto-adjoints. Toulouse : **Cépaduès-éditions**. (1997).
- [31] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Series Profile. Band 132*. Berlin-Heidelberg-New York : **Springer-Verlag**. (1966).
- [32] S. Kerckhoff, H. Masur et J. Smillie. Ergodicité of billard flows and quadratic differentials. *Ann. Math. (2)* 124, 293–311, 1986.
- [33] P. Kuchment et H. Zeng. Convergence of Spectra of Mesoscopic Systems Collapsing onto a Graph. *J. Math. Anal. Appl.* 258, No. 2, 671–700, 2001.
- [34] P. Lévy-Bruhl Introduction à la théorie spectrale. Paris : **Dunod**. (2003).
- [35] O. Malouf. Géométrie des surfaces munies de métriques plates à singularités coniques : paramètres, fonctions longueur et espaces des déformations. *Thèse de doctorat*, université de Strasbourg, 2011.
- [36] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. Math. (2)* 115, 169–200, 1982.
- [37] C. Matheus. Quelques contributions à la théorie de l’action de  $SL(2, \mathbb{R})$  sur les espaces de modules de surfaces plates. <https://arxiv.org/abs/1612.02457>, 2016.
- [38] R. Melrose. Geometric scattering theory. Cambridge : **Cambridge Univ. Press** (1995).
- [39] K. Pankrashkin, S. Roganova et N. Yeganefar. Resolvent expansions on hybrid manifolds. *Integral Equations Oper. Theory* 71, No. 2, 199–223, 2011.
- [40] A. Randecker. Wild translation surfaces and infinite genus. *Algebr. Geom. Topol.* 18, No. 5, 2661–2699, 2018
- [41] J. Rubinstein et M. Schatzman. Variational Problems on Multiply Connected Thin Strips I : Basic Estimates and Convergence of the Laplacian Spectrum. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 160, No. 4, 271–308, 2001.

- [42] S. Tabachnikov. Billiards. *Panoramas et synthèses* 1, Paris : **S.M.F.**. (1995).
- [43] M. Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)* 32, 79–94, 1986.
- [44] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.* 97, No. 3, 553–583, 1989.
- [45] W. A. Veech. Gauss measures for transformations on the space on the space of interval exchange maps. *Ann. Math. (2)* 115, 201–242, 1982.
- [46] J.-C. Yoccoz. Surfaces à petits carreaux. *Cours du collège de France*, 2010-2011.
- [47] D. Zmiaikou. Origamis and permutation groups. *Thèse de doctorat*, université Paris-sud 11, 2011.
- [48] A. Zorich. Flat surfaces. *in : Frontiers in number theory, physics, and geometry I. On random matrices, zeta functions, and dynamical systems*. Papers from the meeting, Les Houches, France, March 9–21, 2003. Berlin : **Springer**. 437–583, 2006.
- [49] A. Zorich. Billards dans les polygones, surfaces plates, et dynamique dans les espaces de modules. *Ker Lann, Formation à la recherche*. 25 janvier 2011.