



**HAL**  
open science

# Fluctuations d'interfaces et diagrammes de phases de systèmes de spins en dimension 2

Romain Durand

► **To cite this version:**

Romain Durand. Fluctuations d'interfaces et diagrammes de phases de systèmes de spins en dimension 2. Physique mathématique [math-ph]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALM053 . tel-04105063

**HAL Id: tel-04105063**

**<https://theses.hal.science/tel-04105063v1>**

Submitted on 24 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

École doctorale : MSTII - Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique

Spécialité : Mathématiques

Unité de recherche : Institut Fourier

**Fluctuations d'interfaces et diagrammes de phases de systèmes de spins en dimension 2**

**Fluctuating interfaces and phase diagram of spin systems in dimension 2.**

Présentée par :

**Romain DURAND**

Direction de thèse :

**Vincent BEFFARA**  
Directeur de recherche

Directeur de thèse

Rapporteurs :

**DAVID DEREUDRE**  
Professeur des Universités, UNIVERSITE DE LILLE  
**YVAN VELENIK**  
Professeur, Université de Genève

Thèse soutenue publiquement le **6 octobre 2022**, devant le jury composé de :

<b>VINCENT BEFFARA</b> Directeur de recherche, CNRS DELEGATION ALPES	Directeur de thèse
<b>ORIANE BLONDEL</b> Chargé de recherche, CNRS DELEGATION RHONE AUVERGNE	Examinatrice
<b>DAVID DEREUDRE</b> Professeur des Universités, UNIVERSITE DE LILLE	Rapporteur
<b>MARGHERITA DISERTORI</b> Professeur, Rheinische Friedrich- Wilhelms-Univ. Bonn	Examinatrice
<b>SANA LOUHICHI</b> Professeur des Universités, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES	Examinatrice
<b>MARIE THERET</b> Professeur des Universités, UNIVERSITE PARIS 10 - NANTERRE	Présidente
<b>YVAN VELENIK</b> Professeur, Université de Genève	Rapporteur



# Remerciements.

Au moment où j'écris ces lignes, j'en suis arrivé au moment le plus crucial et important de la thèse : écrire les remerciements et préparer un pot de thèse pour célébrer le chemin parcouru depuis le début de cette thèse, commencée il y a maintenant plus de cinq ans. Tant de choses se sont passées pendant cette période, et je n'aurais jamais réussi à en arriver là sans l'aide précieuse d'un ensemble de personnes que je suis très heureux d'avoir l'occasion de remercier proprement.

La première personne à remercier est évidemment Vincent Beffara, mon directeur de thèse. Merci infiniment Vincent d'avoir accepté de me prendre comme thésard et de m'avoir accompagné pendant ces nombreuses années. Je me souviens encore du moment où je t'ai contacté pour effectuer un stage puis une thèse avec toi, à l'époque où je te connaissais uniquement par le nom d'un théorème dans mon cours de Physique statistique. Merci de m'avoir transmis ton intérêt pour ces questions passionnantes mais également pour l'humanité et la bienveillance de ton accompagnement. Même dans les moments les plus difficiles, il suffisait d'une discussion ensemble pour que je reprenne confiance en notre travail et que je retrouve de l'enthousiasme pour me lancer dans la suite.

Je tiens à remercier très chaleureusement tou.te.s les membres de mon jury de thèse pour avoir accepté d'en faire partie : après avoir écrit vos noms comme jurys potentiels au tableau, le stress de la soutenance a presque disparu et a été remplacé par l'impatience de pouvoir vous présenter mes travaux. Merci particulièrement à David Dereudre et Yvan Velenik d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je tiens à te remercier spécifiquement Yvan, pour avoir été également dans mon comité de suivi et m'avoir accueilli plusieurs fois à Genève pour m'écouter et me faire profiter de ton recul sur toutes ces questions fascinantes et difficiles. Ces retours tout au long de mon travail m'ont été extrêmement bénéfiques et la forme actuelle de ce manuscrit te doit beaucoup.

Une personne qui a joué un rôle très important dans cette thèse, bien que de façon non officielle, est Loren Coquille. Merci infiniment Loren pour toutes les discussions que l'on a eues ensemble, ainsi que pour m'avoir inclus dans le projet Long Range. Faire partie de ce projet avec Wioletta Ruszel et toi m'a beaucoup apporté mathématiquement mais également humainement. Toutes ces discussions en visio m'ont fait beaucoup de bien dans une période de grande isolation où garder un lien avec la recherche n'était pas simple, et je souhaitais vous remercier toutes les deux pour ces moments.

Je souhaite également remercier tou.te.s mes enseignant.e.s de mathématiques puis plus spécifiquement de probabilités et de physique statistique, ainsi que mes différent.e.s encadrant.e.s de stage. Je pense notamment à Michel Gonnard, Stéphane Gonnord, Denis Choimet, Grégory Miermont, Amandine Véber, Christophe Garban, Emmanuel Jacob, Oriane Blondel et Samuel Herrmann. Merci de m'avoir transmis votre passion. Sans vous, je n'aurais probablement jamais commencé cette thèse.

J'ai beaucoup apprécié ces années à l'Institut Fourier dont je souhaite saluer chaleureusement tou.te.s les membres, permant.e.s comme non-permanent.e.s . Je pense notamment à toute

---

l'équipe de probabilités et les membres du groupe de travail (au rythme particulièrement régulier) avec qui j'ai appris plein de choses. Je n'oublie pas l'équipe des doctorant.e.s, notamment celle de cette dernière année sans laquelle mon année de rédaction aurait été bien plus triste culinairement et mes pauses bien moins éclatées au sol. Cette thèse doit beaucoup aux occupant.e.s présent.e.s, passé.e.s et futur.e.s du bureau 308, et notamment à deux personnes qui se reconnaîtront. Enfin je voulais remercier le comité écoresponsable pour tout ce qu'ils.elles font.

Merci également à toutes les personnes que j'ai rencontrées pendant ma thèse, souvent doctorant.e.s en probabilités ou grands frères de thèse, dont les conseils et les discussions m'ont beaucoup aidé.

Cette dernière année de rédaction a été particulière pour moi, et je suis extrêmement reconnaissant à l'équipe de la Prépa des INP pour leur accueil et leur confiance. Julien, Hélène et Nathalie, j'ai particulièrement apprécié travailler avec vous et j'ai énormément appris à votre contact. Je pense également à mes élèves qui m'ont fait confiance et qui sont (je l'espère) maintenant dans une école qui leur convient. Je souhaite également remercier les personnes qui m'ont aidé dans mon orientation et accompagné au long de mes candidatures, notamment Eric Dumas et Jean-Baptiste Gouéré qui m'ont aidé à traverser une période très stressante.

Je souhaite également rendre hommage au personnel administratif de toutes ces structures pour leur accueil toujours bienveillant, et sans lequel rien ne serait possible.

Merci à tou.te.s les personnes, ami.e.s ou famille, qui ont partagé ma vie ces dernières années, que ce soit dans le contexte associatif, pour un moment de musique, un thé, ou une partie de go. Je pense également à toutes les personnes qui comptent pour moi et que je n'ai plus ou rarement l'occasion de voir, et aux personnes qui auraient probablement aimé assister à cette soutenance mais n'ont pas pu.

Merci à vous, Marianne, Maureen, Lou, Pierre, Niols, Thomas <sup>(2)</sup>, Ronan, Sophie, Gwen, Simone et tou.te.s les autres. Merci également au Jardin du Thé d'être le meilleur endroit de Grenoble. Une pensée également pour toi, Paul.

Le mot de la fin revient à ma famille, aux gobelins, aux princesses grenoïes et particulièrement à ma mère et Clé. Merci. Sans vous, je n'aurais jamais réussi à aller au bout de cette thèse et ne serais pas la personne que je suis aujourd'hui.

# Résumé.

Ce travail de thèse porte sur l'étude des diagrammes de phase de systèmes de spins ferromagnétiques à très basse température en dimension 2. En partant d'outils développés pour le modèle d'Ising - qui est le mieux compris de cette classe de modèles - on cherche à illustrer le lien entre les fluctuations d'interfaces macroscopiques obtenues en forçant la coexistence de deux phases distinctes et la complétude du diagramme de phase, c'est-à-dire la description exhaustive de l'ensemble des mesures du système. Certains de ces outils sont de nature géométrique et peuvent être adaptés à une classe de modèles de spins assez large pourvu que l'on dispose d'une notion d'interface ayant les bonnes propriétés. On présentera ces outils ainsi que des pistes pour les appliquer à des modèles de spins autres que le modèle d'Ising.

La motivation principale de ce travail est de comprendre le diagramme de phase d'un système de longs bâtons interagissant par contrainte coeur dur. Ce modèle, introduit initialement pour comprendre des systèmes de longs polymères présents dans des cristaux liquides, présente une structure microscopique complexe rendant son étude exacte compliquée. Toutefois, en introduisant une bonne notion de spins, on peut associer à chaque configuration de bâtons une configuration de spins et ainsi pouvoir utiliser les techniques correspondantes. Une des contributions principales de ce travail de thèse est de montrer via un résultat d'unicité conditionnelle que pour montrer la complétude du diagramme de phase du système microscopique de bâtons, il suffit de la montrer pour le système de spins associé.

**Mots clés :** Interfaces, Systèmes de spins, Mesures extrémales, Pirogov-Sinai, Interactions coeur dur, Phase nématique.

# Table des matières

<b>1 Introduction</b>	<b>6</b>
1.1 Le modèle d'Ising.	7
1.1.1 Présentation du modèle.	7
1.1.2 Développement à basse température.	10
1.1.3 Fluctuations d'interfaces et théorème d'Aizenman-Higuchi.	13
1.2 Outils généraux : théorie de Pirogov-Sinai.	15
1.2.1 La cluster expansion.	15
1.2.2 Cadre de la théorie de Pirogov-Sinai.	17
1.2.3 États d'énergie minimale et contours.	18
1.2.4 Diagramme de phase.	21
1.3 Problématique et organisation de la thèse.	23
<b>2 Description du modèle de bâtons avec contrainte coeur dur.</b>	<b>26</b>
2.1 Présentation du modèle.	27
2.1.1 Description du modèle de bâtons durs.	27
2.1.2 Comportement attendu aux différentes densités.	29
2.1.3 Comparaison avec la version continue.	30
2.2 Comportements aux différentes densités.	33
2.2.1 Isotropie à faible densité.	33
2.2.2 Phase nématique à densité intermédiaire.	39
2.2.3 Exploration autour de la seconde transition de phase.	45
<b>3 Complétude du diagramme de phase à très basse température.</b>	<b>58</b>
3.1 Une technique géométrique à base de fluctuations d'interfaces.	59
3.1.1 Les interfaces traversantes partent de points diamétralement opposés.	60
3.1.2 Il y a au plus une interface traversante.	62
3.1.3 Décomposition de la mesure en mesures extrémales.	63
3.1.4 Conclusion et propriétés utilisées.	65
3.2 Fluctuations gaussiennes à partir d'une structure de renouvellement.	66
3.2.1 Contexte et résultat.	66
3.2.2 Cas d'une marche centrée conditionnée à revenir en $(0, 0)$ .	66
3.2.3 Preuve du résultat par biais exponentiel.	68
3.2.4 Théorème limite local.	70
3.3 Exemple de l'étude du modèle de Widom-Rowlinson.	71
3.3.1 Rappel du modèle et structure de renouvellement de l'interface.	72
3.3.2 Propriété de l'interface via le processus de renouvellement.	77
3.3.3 Preuve de la condition de séparation des masses.	83

3.3.4	Conclusion et obstacles.	86
<b>4</b>	<b>Unicité des mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins.</b>	<b>90</b>
4.1	Nouvelle notion de spins et propriétés des contours.	91
4.1.1	Définitions et notations.	91
4.1.2	Description des contours de la mesure de spins $\mu^h$ .	92
4.2	Unicité des mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins.	98
4.2.1	Présentation de la construction.	99
4.2.2	Preuve de la proposition.	102
4.3	Contrôle de la taille de $\Gamma_{max}$ par un argument de Peierls.	107
4.3.1	Preuve de la proposition.	107
4.3.2	Preuve des lemmes clés.	110
4.4	Annexe : Contrôle de la taille des contours originaux	111
4.5	Conclusion	113
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives.</b>	<b>115</b>
5.1	Retour sur les résultats de la thèse.	116
5.2	Interactions à longue portée.	116

# Chapitre 1

## Introduction



Cette thèse porte sur l'étude de systèmes de spins en dimension 2 à basse température, en particulier sur leur diagramme de phase et le lien entre la complétude de celui-ci et les fluctuations d'interfaces macroscopiques créées par des conditions au bord particulières.

Dans ce chapitre d'introduction, on cherchera à introduire les concepts généraux nécessaires pour comprendre ces problématiques ainsi que de donner les outils fondamentaux nécessaires pour comprendre les parties suivantes.

On présente dans un premier temps ces questions dans le cadre du *modèle d'Ising*, qui est le modèle pour lequel la plupart des techniques utilisées ont été introduites historiquement. Dans un deuxième temps, on présente le cadre de la *théorie de Pirogov-Sinai-Zahradnik* qui permet de généraliser les notions vues dans le modèle d'Ising et d'étudier des modèles de spins généraux. Enfin, on termine cette introduction par une partie détaillant les problématiques qui ont guidé ce travail de thèse ainsi que l'organisation et les résultats des chapitres suivants.

La présentation détaillée du modèle de bâtons durs avec interaction coeur dur, qui était notre motivation initiale, n'est pas présente dans ce chapitre car celle-ci constitue le coeur du chapitre suivant.

## 1.1 Le modèle d'Ising.

### 1.1.1 Présentation du modèle.

Commençons par introduire le modèle de spins le plus simple et le mieux compris : le modèle d'Ising. Introduit dans les années 1920 par Lenz et Ising, c'est un modèle conçu pour expliquer le phénomène d'aimantation spontanée de métaux ferromagnétiques : en chauffant un aimant métallique, on observe une température critique appelée *Température de Curie* notée  $T_c$  dépendant de la nature du métal, au-delà de laquelle le matériau perd brutalement ses propriétés d'aimantation (voir figure [1.1](#)).

Par souci de simplicité, présentons ce modèle uniquement dans sa version en dimension 2. Soit  $\Lambda$  un domaine fini connexe de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathcal{E}_\Lambda$  l'ensemble des arêtes du graphe  $\mathbb{Z}^2$  reliant des paires de points de  $\Lambda$ . Une configuration de spins  $\sigma$  dans  $\Lambda$  est un élément de  $\Omega_\Lambda := \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^2}$ . Pour  $x \in \Lambda$ , le spin en  $x$  est la valeur de  $\sigma_x$ , qui est donc un élément de  $\{+1, -1\}$  (on utilisera parfois seulement  $+$  et  $-$  pour faire référence aux valeurs  $+1$  et  $-1$  respectivement).

Pour un  $\beta \geq 0$ , l'*inverse de la température*, et  $h \in \mathbb{R}$ , la valeur du *champ magnétique extérieur*, on introduit le **Hamiltonien** du système associé à une configuration  $\sigma$ , qui représente le coût en énergie de la configuration  $\sigma$  et est défini par

$$H_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing(\sigma) = -\beta \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}_\Lambda} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x.$$

Une fois défini le Hamiltonien  $H_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing$ , on peut définir la mesure de probabilité associée sur  $\Omega_\Lambda$  par

$$\mu_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing(\sigma) := \frac{\exp(-H_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing(\sigma))}{Z_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing},$$

où  $Z_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing$  est une constante de normalisation appelée *fonction de partition* du système qui assure que la mesure ainsi définie est bien une mesure de probabilité :

$$Z_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \exp(-H_{\Lambda;\beta,h}^\varnothing(\sigma)).$$

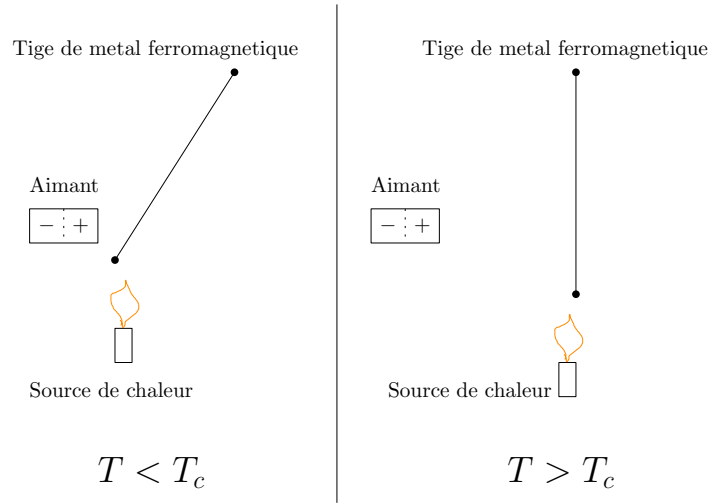


FIGURE 1.1 – Une expérience permettant de mettre en évidence la transition de phase à la température de Curie : en-dessous de  $T_c$ , la tige métallique est attirée par l'aimant (régime *basse température*), mais dès que la température dépasse  $T_c$ , la tige perd son aimantation et n'est plus attirée par l'aimant (régime *haute température*).

Ici, l'exposant  $\emptyset$  indique qu'il n'y a pas de condition au bord, mais on peut créer d'autres mesures en ajoutant une condition au bord. Notons  $\Omega = \Omega_{\mathbb{Z}^2} = \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^2}$  l'ensemble des configurations sur l'espace entier et soit  $\eta \in \Omega$ . On définit le Hamiltonien  $H_{\Lambda; \beta, h}^\eta$  du système avec condition au bord  $\eta$  à température inverse  $\beta$  avec un champ magnétique  $h$  en rajoutant un terme de bord au Hamiltonien  $H_{\Lambda; \beta, h}^\emptyset$  :

$$H_{\Lambda; \beta, h}^\eta(\sigma) = H_{\Lambda; \beta, h}^\emptyset(\sigma) - \beta \underbrace{\sum_{(x, y) \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}^2}, x \in \Lambda, y \notin \Lambda} \sigma_x \eta_y}_{\text{Terme de bord}}$$

À partir de ces Hamiltoniens, on peut définir  $Z_{\Lambda; \beta, h}^\eta$  et  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^\eta$  de façon analogue au cas précédent. Quand la condition au bord  $\eta$  est la configuration  $\eta \equiv +1$  (resp.  $\eta \equiv -1$ ) on utilisera directement la notation  $+$  (resp.  $-$ ) au lieu de l'exposant  $\eta$ . Ces deux mesures particulières joueront un rôle central dans la suite.

Toutes ces mesures vérifient une **propriété de Markov** spatiale qui s'exprime ainsi. Soient  $\Lambda' \subset \Lambda$  et  $\eta, \eta' \in \Omega$  deux conditions au bord telles que  $\eta'(x) = \eta(x)$  pour tout  $x \in \Lambda^c$ , on a alors

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^\eta(\cdot | \sigma|_{\Lambda'} = \eta'|_{\Lambda'}) = \mu_{\Lambda \setminus \Lambda'; \beta, h}^{\eta'}(\cdot).$$

Une autre propriété clé de ces mesures est l' **inégalité FKG** due à Fortuin, Kasteleyn et Ginibre. Cette inégalité traduit la corrélation positive de ces mesures due au caractère ferromagnétique du modèle et généralise l'intuition suivante : si on sait que dans une partie de  $\Lambda$ , la configuration  $\sigma$  est constituée de spins  $+$ , cela augmente la probabilité d'observer des spins  $+$  dans le reste du domaine. Mathématiquement, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions croissantes (pour l'ordre partiel de  $\Omega_\Lambda$ ) de carré intégrable sur  $\Omega_\Lambda$ , alors pour toute condition au bord  $*$ , en notant

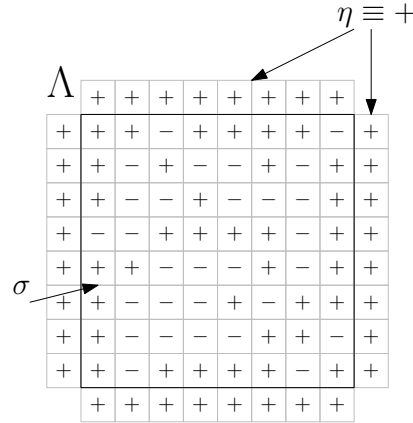


FIGURE 1.2 – Une configuration  $\sigma$  de spins dans  $\Lambda$  avec condition au bord  $+$ .

$\langle \cdot \rangle_{\Lambda; \beta, h}^*$  les espérances des mesures précédentes, on a

$$\langle fg \rangle_{\Lambda; \beta, h}^* \geq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^* \langle g \rangle_{\Lambda; \beta, h}^*.$$

En particulier, on peut montrer comme corollaire de ce résultat que si  $f$  est une fonction croissante et locale (c'est-à-dire dont le support est une partie  $A$  finie ne dépendant pas de  $\Lambda$ ), alors pour toutes conditions au bord  $\eta \leq \eta'$ , on a

$$\langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\eta \leq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\eta'} \leq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+.$$

et en particulier, comme les conditions au bord  $+$  et  $-$  sont *extrémales* pour l'ordre sur  $\Omega$ , les mesures induites dans  $\Lambda$  le sont également pour cette propriété (cette relation d'ordre est parfois appelé *domination au sens de FKG*).

On souhaite désormais regarder des mesures en volume infini, c'est-à-dire portant sur les configurations de  $\Omega$ . On dit qu'une suite  $(\mu_n)$  de mesures sur  $\Omega$  converge vers  $\mu$  si pour toute observable locale  $f$ , on a  $\mu_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(f)$ .

Pour une suite de domaines  $\Lambda_n$  tendant vers  $\mathbb{Z}^2$  au sens de Van Hove (on pourra penser à  $\Lambda_n = [-n, n]^2$ ), on peut montrer que pour toute observable  $f$  locale, la suite  $(\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^+(f))$  converge. En effet, si  $f$  est croissante, c'est le cas puisque le corollaire de l'inégalité FKG implique que la suite est en fait décroissante et donc converge; par ailleurs, à un support fixé, on peut trouver une base de fonctions croissantes de l'espace des fonctions locales ayant ce support, ce qui implique la convergence pour toute observable locale. Ainsi, il existe une mesure limite sur  $\Omega$ , notée  $\mu_{\beta, h}^+$ , obtenue comme limite des mesures en volume fini avec condition au bord  $+$ , et de même, il existe  $\mu_{\beta, h}^-$  limite des mesures en volume fini avec condition au bord  $-$ . On peut montrer que ces mesures ne dépendent pas de la suite de domaines  $(\Lambda_n)$  choisie et que celles-ci sont *invariantes par translation*.

Dans toute la suite, le champ magnétique sera pris égal à 0, donc on omettra les indices  $h$  des notations.

### 1.1.2 Développement à basse température.

Une fois construites les deux mesures en volume infini  $\mu_\beta^+$  et  $\mu_\beta^-$  comme limites des mesures avec condition au bord + et - respectivement, une question naturelle est la suivante : *ces deux mesures sont-elles distinctes ?*

Quand  $\beta = 0$ , comme la condition au bord n'a aucune influence, on a trivialement  $\mu_\beta^+ = \mu_\beta^-$ , et pour  $\beta = +\infty$ ,  $\mu_\beta^+$  est la mesure de Dirac en la configuration n'ayant que des spins + et de même pour  $\mu_\beta^-$  avec la configuration de spins - partout. Une question naturelle est donc de se demander ce qu'il se passe pour des températures non triviales.

**Proposition 1** (Transition de phase). *Il existe un paramètre critique  $\beta_c \in (0, +\infty)$  tel que :*

- Pour  $\beta < \beta_c$ , on a  $\mu_\beta^+ = \mu_\beta^-$ . (Régime haute température).
- Pour  $\beta > \beta_c$ , on a  $\mu_\beta^+ \neq \mu_\beta^-$  (Régime basse température).

Pour montrer ce résultat, on se base sur la notion d' **aimantation** que l'on introduit rapidement ici. En notant  $\Lambda_n = [-n, n]^2$ , on appelle aimantation la moyenne des spins du système avec une condition au bord +, donnée par la quantité suivante :

$$\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x \right\rangle_{\Lambda_n, \beta}^+.$$

On peut montrer que cette quantité est croissante en  $\beta$  et que de plus  $\mu_\beta^+ = \mu_\beta^-$  si, et seulement si,  $\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0$ . En définissant  $\beta_c = \sup\{\beta \geq 0 \mid \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0\}$ , on voit directement que  $\beta_c$  est un paramètre critique séparant deux régimes distincts comme voulu par la proposition. Le coeur de la proposition est donc de montrer que  $\beta_c$  est non trivial, c'est-à-dire que  $\beta_c \neq 0$  et  $\beta_c \neq +\infty$ .

On ne montrera ici que la preuve du cas de la basse température car celle-ci nous permet de présenter la notion de *développement basse température* qui est une construction cruciale pour comprendre la notion plus générale de contours introduite dans la suite. Pour une preuve du comportement à haute température, on pourra se référer à [EV17] par exemple ou adapter la preuve de percolation des zones de pertes de dépendance présentée dans le chapitre suivant (2.2.1).

Remarquons que pour un domaine fini  $\Lambda$  avec une condition au bord  $\eta$  sans champ extérieur, le Hamiltonien  $H_{\Lambda; \beta}^\eta$  s'écrit comme une somme sur les paires de sommets voisins de  $\Lambda$  (ou entre  $\Lambda$  et son complémentaire) et la contribution d'une paire de spins est de  $\beta$  ou  $-\beta$  selon que les deux spins sont opposés ou non. En particulier, en notant  $\mathcal{E}_{\Lambda^b}$  l'ensemble des arêtes du graphe incluant également celles joignant  $\Lambda$  et son complémentaire, et  $\bar{\sigma}(y) = \sigma(y)$  si  $y \in \Lambda$  et  $\bar{\sigma}(y) = \eta(y)$  si  $y \notin \Lambda$ , on peut réécrire le Hamiltonien du système sous la forme

$$H_{\Lambda; \beta}^\eta(\sigma) = -\beta \sum_{(x, y) \in \mathcal{E}_{\Lambda^b}} (1 - 2 \cdot 1_{\sigma_x \neq \bar{\sigma}_y}) = C_\beta + 2\beta \#\{(x, y) \in \mathcal{E}_{\Lambda^b}; \sigma_x \neq \bar{\sigma}(y)\}$$

où  $C_\beta$  est une constante ne dépendant pas de la configuration. La **représentation basse température** est une représentation graphique des configurations adaptée à cette écriture du Hamiltonien : en représentant les sites de  $\Lambda$  comme des cases de côté 1, à une configuration  $\sigma$  donnée, associons un ensemble de courbes  $\Gamma(\sigma)$  représentant les interfaces, c'est-à-dire séparant les zones de spins + et - (voir Figure 1.3). Pour cela, dans chaque case, pour chacune de ses quatre arêtes, on colorie cette arête si les spins dans les cases de part et d'autre de cette arête sont différents. On dira que chaque arête ainsi coloriée est une *arête frustrée*. On peut de plus fixer une règle arbitraire pour éliminer les ambiguïtés dans le cas où les courbes ainsi créées présentent des motifs en croix.

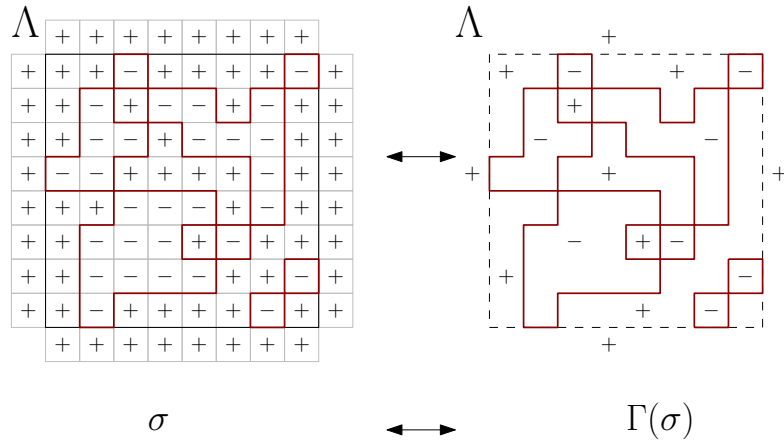


FIGURE 1.3 – Une configuration  $\sigma$  et ses contours  $\Gamma(\sigma)$  avec une condition au bord  $+$ .

On obtient ainsi une bijection entre toute configuration  $\sigma$  et ses contours  $\Gamma(\sigma)$ , et en notant  $|\gamma|$  la longueur d'une courbe  $\gamma$  de  $\Gamma(\sigma)$ , on peut réécrire le poids de toute configuration  $\sigma \in \Omega_\Lambda$  comme

$$\mu_{\Lambda; \beta}^+(\sigma) = \frac{\exp\left(-2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} |\gamma|\right)}{\sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda} \exp\left(-2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} |\gamma|\right)}.$$

En d'autres termes, le poids d'une configuration  $\sigma$  est exponentiellement petit en la longueur de ses contours  $\Gamma(\sigma)$ .

À partir de cette représentation, présentons *l'argument de Peierls*, introduit initialement dans [Pei36](#).

On veut montrer que pour  $\beta$  suffisamment grand, uniformément en  $n$  assez grand, on a  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta}^+ \geq c$  pour une certaine constante  $c > 0$ . Pour cela, on va majorer la probabilité que le spin en 0 soit  $-1$  quand la condition au bord est  $+$ .

Remarquons que si le spin en 0 est  $-$  dans la configuration  $\sigma$ , alors nécessairement, il existe un contour  $\gamma_0$  entourant 0 dans  $\Gamma(\sigma)$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\exists \gamma_0; \gamma_0 \text{ entourant } 0) \\
 &\leq \sum_{\gamma_0 \text{ entourant } 0} \mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\gamma_0 \in \Gamma(\sigma)) \\
 &\leq \sum_{\gamma_0 \text{ entourant } 0} \frac{\sum_{\sigma; \gamma_0 \in \Gamma(\sigma)} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\sigma'; \gamma \in \Gamma(\sigma')} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta|\gamma|}} \\
 &\leq \sum_{\gamma_0 \text{ entourant } 0} e^{-2\beta|\gamma_0|} \underbrace{\frac{\sum_{\sigma; \gamma_0 \in \Gamma(\sigma)} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma), \gamma \neq \gamma_0} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\sigma'; \gamma \in \Gamma(\sigma')} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta|\gamma|}}}_{=: A},
 \end{aligned}$$

où le quotient de sommes  $A$  qui apparaît est plus petit que 1. En effet, pour chaque configuration  $\sigma$  contenant  $\gamma_0$  dans ses contours, on peut construire une configuration  $\sigma^*$  obtenue en supprimant le contour  $\gamma_0$  des contours de  $\sigma$ , et cette opération est de plus injective et fait correspondre à chaque configuration contenant  $\gamma_0$  dans ses contours une configuration qui ne le contient pas. Comme le poids de la nouvelle configuration  $\sigma^*$  est exactement  $\prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma), \gamma \neq \gamma_0} e^{-2\beta|\gamma|}$ , le quotient  $A$  est en fait le poids de toutes les configurations  $\sigma^*$  possibles, renormalisé par la somme des poids de toutes les configurations, et est donc plus petit que 1. On obtient donc

$$\mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{\gamma_0 \text{ entourant } 0} e^{-2\beta|\gamma_0|}.$$

Pour obtenir le résultat, on va effectuer une *comparaison énergie/entropie* : chaque contour  $\gamma_0$  entourant 0 a un poids exponentiellement petit en sa longueur, et en sommant sur l'ensemble des longueurs de contours possibles, on va pouvoir montrer que cette probabilité peut être rendue arbitrairement petite lorsque  $\beta$  tend vers l'infini. Pour cela, on a besoin d'une borne sur le nombre de contours  $\gamma_0$  entourant 0 en fonction de sa longueur. Pour cela, remarquons qu'un contour entourant 0 touche nécessairement un point de la demi droite à hauteur 0 partant vers la droite. De plus, si un contour entourant 0 touche le point  $(m + \frac{1}{2}, 0)$ , alors nécessairement il est de longueur au moins  $2m$ . Enfin, comme ce sont des courbes sur un graphe de degré 4, le nombre de contours partant d'un point fixé d'une longueur  $l \geq 2$  fixée est d'au plus  $4 \cdot 3^{l-1}$ .

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \sum_{\gamma_0 \text{ entourant } 0} e^{-2\beta|\gamma_0|} \leq \sum_{m \geq 1} \sum_{\substack{\gamma_0 \text{ entourant } 0 \\ (m + \frac{1}{2}, 0) \in \gamma_0}} e^{-2\beta|\gamma_0|} \\
 &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{l \geq 2m} \#\{\gamma_0 \text{ touchant } (m + \frac{1}{2}, 0) \text{ de longueur } l\} e^{-2\beta l} \\
 &\leq \sum_{m \geq 1} \sum_{l \geq 2m} 4 \cdot 3^{l-1} e^{-2\beta l},
 \end{aligned}$$

et donc pour tout  $0 < q < 1$ , on peut prendre  $\beta$  suffisamment grand pour avoir

$$\mu_{\Lambda_n; \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{m \geq 1} q^{2m} \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, quand  $\beta \rightarrow +\infty$ , la probabilité d'avoir un spin opposé à la condition au bord en 0 tend vers 0, donc l'aimantation tend vers 1, et est notamment strictement positive pour  $\beta \geq \beta_0$  pour un certain  $\beta_0$ . En particulier,  $\beta_c < +\infty$ .

Cette méthode illustre la compétition entre l'énergie (valoriser les configurations ayant une énergie minimale) et l'entropie (favoriser les configurations désordonnées qui sont en beaucoup plus grand nombre) à l'intérieur du système, et est très généralisable dans l'esprit, comme on le verra par la suite. De façon générale, en référence à cette méthode, on appellera *argument de Peierls* toute méthode consistant à majorer la probabilité d'un évènement en le décomposant en éléments élémentaires d'un même coût et en comparant le nombre de scenarios possibles avec leur coût en énergie.

### 1.1.3 Fluctuations d'interfaces et théorème d'Aizenman-Higuchi.

On a vu comment construire des mesures en volume infini du modèle d'Ising à partir de limites de mesures en volume fini avec des conditions au bord données. Donnons un sens général à la notion de mesure en volume infini pour le modèle d'Ising. Une mesure  $\mu$  sur  $\Omega = \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^2}$  muni de la tribu cylindrique est appelée une **mesure de Gibbs en volume infini** du modèle d'Ising au paramètre  $\beta$  (ou *état de Gibbs en volume infini*) si elle vérifie la propriété de Dobrushin, Landford et Ruelle ([Dob68] et [LR69]) - appelée **Condition DLR** : "*pour tout domaine fini  $\Lambda$ , pour  $\mu$  presque toute configuration  $\eta \in \Omega$ , conditionnellement à la restriction  $\eta|_{\Lambda^c}$  de  $\eta$  au complémentaire de  $\Lambda$ , la loi conditionnelle dans  $\Lambda$  est exactement donnée par la mesure d'Ising dans le volume  $\Lambda$  avec la condition au bord  $\eta$* ", ce que l'on peut noter

$$\mu(\cdot | \mathcal{F}_{\Lambda^c})(\eta) = \mu_{\Lambda; \beta}^{\eta}(\cdot)$$

où  $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$  est la tribu des évènements mesurables à support dans  $\Lambda^c$ .

On note  $\mathcal{G}_{\beta}$  l'ensemble des mesures vérifiant cette propriété. On peut montrer que  $\mathcal{G}_{\beta}$  est un simplexe, et on dit qu'une mesure  $\mu \in \mathcal{G}_{\beta}$  est **extremale** si c'est un point extrémal de cet ensemble. On vérifie que les mesures  $\mu_{\beta}^{+}$  et  $\mu_{\beta}^{-}$  construites précédemment sont bien des éléments de  $\mathcal{G}_{\beta}$  et de façon générale, que si  $\mu$  est obtenue comme limite d'une suite  $\mu_{\Lambda_n; \beta}^{\eta_n}$  où les  $\Lambda_n$  sont une suite de domaines tendant vers  $\mathbb{Z}^2$  et  $(\eta_n)$  une suite de conditions au bord, alors  $\mu \in \mathcal{G}_{\beta}$  ainsi que tous les barycentres de mesures ainsi construites, et que toute mesure extremale peut être obtenue de cette façon.

Une des conséquences de la propriété FKG (1.1.1) est que les mesures  $\mu_{\beta}^{+}$  et  $\mu_{\beta}^{-}$  sont extrémales. La question de la complétude du diagramme de phases est la suivante : *Existe-t-il d'autres mesures extrémales que  $\mu^{+}$  et  $\mu^{-}$  ou bien toute mesure de Gibbs en volume infini est en fait un mélange de  $\mu_{\beta}^{+}$  et  $\mu_{\beta}^{-}$  ?* Cette question n'a d'intérêt que pour  $\beta > \beta_c$  car à haute température, on sait que toutes les conditions au bord en volume fini donnent lieu à la même mesure en volume infini, et qu'il y a donc une unique mesure en volume infini :  $\mathcal{G}_{\beta} = \{\mu_{\beta}^{\emptyset}\}$ .

En particulier, comme  $\mu_{\beta}^{+}$  et  $\mu_{\beta}^{-}$  sont invariantes par les transformations du réseau  $\mathbb{Z}^2$ , si  $\mathcal{G}_{\beta} = [\mu_{\beta}^{+}, \mu_{\beta}^{-}]$  alors toutes les mesures de Gibbs en volume infini sont invariantes par translation. Pour montrer que le diagramme de phases n'est pas complet, il suffirait de réussir à construire une mesure de Gibbs *non invariante par translation*.

Dans ce sens, Dobrushin introduisit un contre-exemple en dimension 3 ([Dob73]) en montrant que, pour des températures très faibles, dans un cube centré en 0, la condition au bord qui attribue à tous les sites du demi-espace supérieur un spin + et un spin - à tous les sites du demi-espace inférieur crée un état de Gibbs en volume infini qui n'est pas invariant par translation dans la 3e coordonnée. La raison est que cette condition au bord crée une *interface macroscopique* séparant les phases + et - et que les parties essentielles de celle-ci fluctuent très peu. Ainsi, dans la

mesure en volume infini correspondante, on garde trace de l'altitude à laquelle la condition au bord coupait l'espace en deux (voir figure 1.4) et la mesure en volume infini n'est pas invariante par translation selon la coordonnée correspondante. Quelques années plus tard, un argument analytique plus rapide fut trouvé par Van Beijeren ([Bei75]), mais l'analyse de la géométrie stochastique des contours macroscopiques de la preuve initiale est une idée très intéressante que l'on peut appliquer à d'autres contextes et qui souligne l'importance de l'étude de la géométrie de l'interface macroscopique.

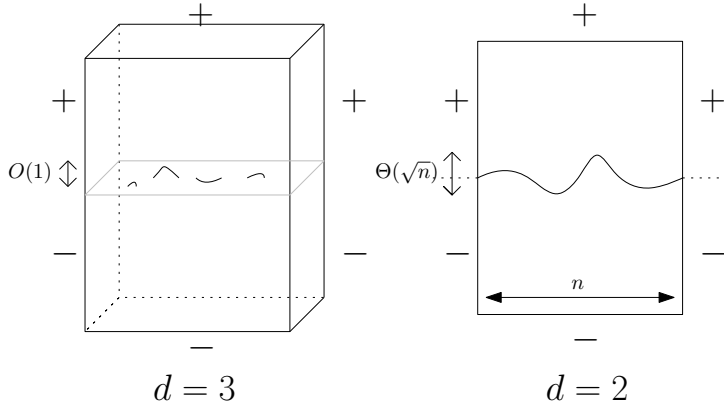


FIGURE 1.4 – Comparaison des conditions de Dobrushin en dimension 2 et 3 et fluctuation typique des interfaces macroscopiques correspondantes à très basse température.

En dimension 2, en étudiant les interfaces macroscopiques de la condition au bord de Dobrushin, Gallavotti ([Gal72]) réussit à montrer que les interfaces macroscopiques possèdent une *structure de renouvellement* et en particulier, ont des fluctuations Gaussiennes en la taille du domaine quand  $\beta$  est pris suffisamment grand. Une des conséquences est qu'alors, en notant  $\mu^\pm$  la limite des mesures en volume fini ayant des + sur le demi espace supérieur et - sur le demi espace inférieur, on a  $\mu_\beta^\pm = \frac{1}{2}(\mu_\beta^+ + \mu_\beta^-)$  et donc le contre-exemple de Dobrushin cassant l'invariance par translation en dimension 3 ne fonctionne plus. Ce résultat fut étendu plus tard par Abraham Reed et Messenger et Miracle-Sole ([AR76] [MMS77]). Enfin, en se basant sur des méthodes géométriques sur les composantes infinies de + et de -, Russo fit encore un pas de plus dans la direction de la complétude du diagramme de phases en montrant que si une autre mesure extrême que  $\mu_\beta^+$  ou  $\mu_\beta^-$  existait, alors nécessairement, celle-ci n'était ni invariante par translation dans aucune des directions du réseau, ni invariante par réflexion selon un axe du réseau ([Rus79]). À partir des méthodes développées par Russo, de façon parallèle, Aizenman ([Aiz80]) et Higuchi ([Hig79b]) publièrent chacun une preuve de la complétude du diagramme de phase du modèle d'Ising à basse température :

**Theoreme 1** (Aizenman, Higuchi (1980)). *Pour tout  $\beta$ , les mesures de Gibbs du modèle d'Ising en dimension 2 sont données par  $\mathcal{G}_\beta = [\mu_\beta^+, \mu_\beta^-]$ .*

Leurs preuves de ce résultat s'appuient toutes deux sur les travaux de Russo et passent par l'étude des mesures extrémales de  $\mathcal{G}_\beta$  en étudiant certains événements de percolation mesurables à l'infini afin de montrer que celles-ci sont nécessairement invariantes par translation. Le caractère



géométrique et non calculatoire de ces preuves est très élégant, et peut être adapté directement à d'autres modèles dont les contours ont une géométrie semblable comme le modèle de Widom-Rowlinson à coeur dur ([HT04]). En revanche, ces preuves n'utilisent que des considérations sur les mesures en volume infini et des événements mesurables à l'infini, c'est-à-dire qui ne dépendent pas de la configuration localement dans des volumes finis. Ainsi, celles-ci n'utilisent donc absolument pas le point de vue de fluctuation des interfaces qui peut guider l'intuition pour comprendre ce résultat d'instabilité de la coexistence de phases différentes et ne donnent pas d'information quantitative sur le comportement dans un volume fini. Enfin, du fait du caractère exact de ces constructions, celles-ci ne sont pas robustes si l'on modifie légèrement les systèmes étudiés (par exemple en perturbant légèrement le Hamiltonien ou en allégeant la condition de noyau dur dans le modèle de Widom-Rowlinson).

Une nouvelle preuve de ce résultat centrée sur la fluctuation des interfaces fut donnée bien plus tard par Coquille et Velenik ([CV12]). Leur preuve, qui repose sur une analyse en volume fini des interfaces macroscopiques créées par une condition au bord quelconque nous semble illustrer de façon claire la signification physique du résultat de non coexistence de phases pures. La stratégie de preuve est assez générale et peut être appliquée à d'autres modèles ressemblant suffisamment au modèle d'Ising ferromagnétique, comme ça a été le cas dans [CDCV14] pour le modèle de Potts. Cette preuve et la question de la généralisation possible de celle-ci à d'autres modèles occupent une place importante dans la démarche de cette thèse et seront détaillés plus loin (voir le paragraphe 3.1 pour plus de détails).

## 1.2 Outils généraux : théorie de Pirogov-Sinai.

Les problématiques exposées dans le cadre du modèle d'Ising ferromagnétique sont également pertinentes pour une classe de modèles de spins bien plus large. Toutefois, beaucoup de modèles ressemblant au modèle d'Ising n'ont pas les mêmes propriétés de symétrie ni de définition naturelle de contours et leur étude est donc plus complexe.

Cette section introduit des outils utilisables pour étudier ces questions de façon perturbative pour des modèles de spins généraux.

### 1.2.1 La cluster expansion.

Un outil analytique très utile pour l'analyse de modèles de spins à très basse température est le développement en clusters (*cluster expansion*). On présente ici l'idée générale ainsi qu'un critère de convergence pour celui-ci. Pour plus de détails, on pourra se référer au chapitre correspondant dans [FV17] ou à [Bry84] dont les approches sont assez complémentaires.

Le développement en clusters est un outil qui permet d'exprimer le logarithme de la fonction de partition de certains systèmes en tant que série convergente d'amas de bouts de configurations du système initial. L'étude du logarithme de la fonction de partition d'un système peut être très utile car en plus d'être directement liée à *la pression*, les dérivées de ce logarithme par rapport à certains des paramètres du système donnent une autre expression de l'espérance d'observables locales. Ainsi, connaître le logarithme de la fonction de partition donne beaucoup d'informations sur les propriétés statistiques de la mesure.

Soit  $\Lambda$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$ . Supposons que la fonction de partition  $Z_\Lambda$  s'écrive sous la forme d'un modèle de polymères :

$$Z_\Lambda = \sum_{\Gamma \in \Omega_\Lambda} \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma) \right) \varphi(\Gamma),$$

où chaque configuration  $\Gamma = \{\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  est un ensemble de *polymères*  $\gamma$  qui sont des objets élémentaires géométriques appartenant à un certain ensemble de polymères possibles contenus dans  $\Lambda$ . La fonction  $w$  est une fonction de poids associant à chaque polymère  $\gamma$  un poids  $w(\gamma)$ . Enfin, le terme  $\varphi(\Gamma)$  est une fonction d'interaction entre les différents polymères constituant  $\Gamma$  et est à valeurs dans  $[0, 1]$ . Dans tous les cas qui nous intéressent, celle-ci sera l'indicatrice que tous les polymères de la configuration interagissent par *contrainte coeur dur*, c'est à dire que deux polymères d'une configuration admissible ne peuvent pas se toucher.

Via la représentation basse température du modèle d'Ising pour une condition au bord  $+$ , on voit que celui-ci rentre dans ce cadre puisque le poids d'une configuration  $\sigma$  est proportionnel à  $\exp(-2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} |\gamma|)$ , et la fonction de partition pour cette écriture est donc

$$\tilde{Z}_{\Lambda; \beta}^+ = \sum_{\Gamma} \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma) \right) \varphi(\Gamma)$$

où chaque polymère  $\gamma$  est un contour dont l'activité est donnée par  $w(\gamma) = e^{-2\beta|\gamma|}$ , et l'indicatrice  $\varphi(\Gamma)$  est l'indicatrice que les contours  $\gamma$  de  $\Gamma$  ne se touchent pas (avec la règle de désambiguïsation dans les cas des sommets où arrivent 4 arêtes de contours).

Dans le cadre général, pour transformer analytiquement l'expression de la fonction de partition des polymères en faisant apparaître l'exponentielle de son logarithme, la première étape est de développer le terme d'interaction coeur dur  $\varphi(\Gamma)$  :

$$\varphi(\Gamma) = \prod_{\gamma \neq \gamma'} \mathbf{1}_{\gamma \cap \gamma' = \emptyset} = \prod_{\gamma \neq \gamma'} (1 - \mathbf{1}_{\gamma \cap \gamma' \neq \emptyset}) = \sum_{E' \subset E_{\Gamma}} \prod_{(\gamma, \gamma') \in E'} (-\mathbf{1}_{\gamma \cap \gamma' \neq \emptyset}),$$

où l'ensemble  $E_{\Gamma}$  est l'ensemble des arêtes du graphe complet dont chaque sommet correspond à un polymère  $\gamma$  de  $\Gamma$ . En développant l'indicatrice qui impose à  $\Gamma$  d'être totalement déconnecté, on obtient une somme sur des sous-graphes créés à partir des polymères constituant  $\Gamma$  mais dont toutes les arêtes doivent unir des polymères qui s'intersectent. Ainsi, cette opération permet de passer d'une somme sur des configurations où tous les polymères sont isolés à une somme où au contraire, aucun polymère n'est isolé (et même, en décomposant encore ces graphes en composantes connexes, on peut arriver à une somme sur des graphes connexes de polymères).

En poursuivant cette décomposition et en réarrangeant la somme, on obtient finalement, au moins formellement, l'écriture suivante :

$$Z_{\Lambda} = \exp \left( \sum_{m \geq 1} \sum_{\gamma_1} \dots \sum_{\gamma_m} \frac{1}{m!} \left( \prod_{i=1..m} w(\gamma_i) \right) \sum_{\substack{G \subset G_m \\ G \text{ connexe}}} \prod_{(i,j) \in G} (-\mathbf{1}_{\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset}) \right).$$

Ainsi, sous réserve de convergence, on a une écriture du logarithme de la fonction de partition du système sous la forme

$$\ln(Z_{\Lambda}) = \sum_{\Gamma \in \Omega_{\Lambda}} \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma) \right) \varphi^T(\Gamma)$$

où le terme  $\varphi^T(\Gamma)$  est un terme combinatoire dépendant uniquement du graphe d'adjacence des différents polymères constituant  $\Gamma$  et tel que  $\varphi^T(\Gamma) = 0$  si l'amas de polymères  $\Gamma$  n'est pas connexe. Remarquons que si  $\Lambda$  est fini,  $Z_{\Lambda}$  est une somme finie de termes non nuls à cause de la condition de non intersection, mais la somme donnée ici pour  $\ln(Z_{\Lambda})$  est une somme avec un nombre infini de termes non nuls même dans un domaine fini.

Une condition suffisante de convergence de la cluster expansion est la suivante :

**Proposition 2** (thm 5.4 de [EV17]). *Supposons qu'il existe une fonction  $a$  sur les polymères, positive et telle que, pour tout point  $\gamma^*$  fixé, on ait*

$$\sum_{\gamma \sim \gamma^*} |w(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq a(\gamma^*),$$

où  $\gamma \sim \gamma^*$  est l'ensemble des polymères  $\gamma$  touchant  $\gamma^*$ . Alors

$$1 + \sum_{k \geq 2} k \sum_{\gamma_2} \dots \sum_{\gamma_k} \varphi^T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \prod_{i=2..k} w(\gamma_i) \leq e^{a(\gamma_1)}.$$

En particulier, on a l'égalité

$$\ln(Z_\Lambda) = \sum_{\Gamma \in \Omega_\Lambda} \left( \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma) \right) \varphi^T(\Gamma).$$

L'inégalité donnée dans la proposition précédente permet d'avoir un contrôle exponentiel sur la taille des amas de polymères touchant un point donné dans le développement en clusters.

Remarquons que dans l'exemple du modèle d'Ising, la condition de convergence est bien vérifiée.

En effet, en prenant  $a(\gamma) = |\gamma|$  pour tout contour  $\gamma$ , comme il y a au plus  $4^m$  contours de taille  $m$  touchant un point donné, et que le plus petit contour possible est de taille 4, on a

$$\sum_{\gamma \sim \gamma^*} |w(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq \sum_{x \in \gamma^*} \sum_{m \geq 4} \sum_{\gamma \ni x; |\gamma|=m} e^{-2\beta|\gamma|} e^{|\gamma|} \leq |\gamma^*| \sum_{m \geq 4} 4^m e^{-(2\beta-1)m} \leq |\gamma^*|$$

pourvu que  $\beta$  soit pris assez grand ( $2\beta - 1 > \ln(4)$  par exemple). Le fait que ce développement soit valable seulement pour des très basses températures (comparer la valeur de  $\beta$  minimale avec les estimations de  $\beta_c \approx 0.44$ ) fait que cet outil est utile pour montrer des résultats de façon perturbative, et ne permet pas d'obtenir de résultat valable jusqu'au point critique a priori.

L'utilisation de cet outil sera omniprésente dans ce travail, mais un exemple d'utilisation simple de celui-ci peut être vu pour montrer l'isotropie à faible densité du modèle de bâtons durs, voir [2.2.1]

Remarquons pour conclure que si le modèle de polymères est tel que chaque polymère a un poids  $|w(\gamma)| \leq e^{-C_\beta|\gamma|}$  pour une certaine constante  $C_\beta$  et que les polymères sont des éléments connexes d'un graphe de degré borné, alors il existe une constante  $M > 0$  telle que le nombre d'éléments connexes de taille  $m$  touchant un point donné est borné par  $M^m$  (cette borne, extrêmement utile, est appelé *lattice animal*, voir section 5 de [Kes82]), et la même preuve nous donne la convergence du développement en clusters pourvu que la constante  $C_\beta$  puisse être prise suffisamment grande, ce qui sera le cas dans toutes les situations perturbatives que l'on rencontrera dans cette thèse.

## 1.2.2 Cadre de la théorie de Pirogov-Sinai.

Pour étudier des systèmes de spins plus généraux ayant des comportements "ressemblant" à celui du modèle d'Ising à basse température, il nous faut des outils plus génériques étendant la notion de contours telle qu'elle a été rencontrée dans le développement basse température du modèle d'Ising. C'est tout l'objet de la théorie de Pirogov-Sinai (ou Pirogov-Sinai-Zahradnik) développée historiquement dans [PS75], [PS76] puis étendue dans [Zah84] et parallèlement dans [KP84]. Leur but est le suivant : à partir de l'étude du Hamiltonien d'un système, identifier des états de référence (l'équivalent des deux configurations ayant uniquement des + ou uniquement des - pour le modèle d'Ising) et introduire une notion de *contours* comme étant les zones

d'interfaces séparant des zones occupées par ces états de références. Tout l'objectif est alors de montrer qu'à température suffisamment basse, si ces états satisfont une condition de stabilité (*condition de Peierls*), alors chacun de ces états donne une mesure de Gibbs en volume infini dont les configurations typiques ressemblent à des petites déformations de cet état de référence. De façon plus générale, à partir d'informations sur le diagramme de phases d'un système pour des paramètres fixés de référence, la théorie de Pirogov Sinai permet de déduire des informations similaires sur le système avec des paramètres proches de ceux de références. Dans le cadre d'une étude à très basse température par exemple, on compare le système à celui à température nulle. Dans l'étude de [DGI13] basée sur la théorie de Pirogov Sinai pour un système de bâtons durs qui est au coeur de cette thèse (voir 2.1.1), on a un exemple d'utilisation où le paramètre d'intérêt n'est pas la température, mais la densité de bâtons d'une orientation fixée, et on compare le système à un système où la densité de bâtons est nulle.

Dans le reste de cette section, on introduira les notions fondamentales de cette théorie, puis on donnera un aperçu des résultats que l'on peut obtenir avec. Pour plus de détails, on pourra consulter l'article original de Zahradnik simplifiant la construction initiale de Pirogov et Sinai ([Zah84]), le chapitre dédié dans [EV17] ou encore [Kof06].

### 1.2.3 États d'énergie minimale et contours.

Introduisons plus précisément les objets intervenant dans la théorie de Pirogov-Sinai. Pour plus de clarté, on introduira ces objets en dimension 2. On regarde des *configurations de spins*  $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \mathbb{Z}^2}$  où chaque spin  $\sigma_x \in S$  avec  $S$  est un ensemble fini donné. L'ensemble des configurations de spins est  $\Omega = S^{\mathbb{Z}^2}$ , et pour une configuration  $\sigma$  donnée et  $\Lambda$  un sous-domaine de  $\mathbb{Z}^2$ , on note  $\sigma_\Lambda$  la restriction de la configuration  $\sigma$  au domaine  $\Lambda$ .

On se donne une famille de potentiels d'interaction  $(\Phi_A)_{A \subset \mathbb{Z}^2}$  qui sont des fonctions sur  $S^A$  pour chaque sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{Z}^2$  et que l'on suppose être invariantes par translation et à portée finie  $r$ , c'est-à-dire que  $\Phi_A = 0$  si le diamètre de  $A$  est plus grand que  $r$ .

On définit alors le *Hamiltonien* de toute configuration  $\sigma$  dans un domaine fini  $\Lambda$  par

$$H_\Phi(\sigma_\Lambda) = \sum_{A \subset \Lambda} \Phi_A(\sigma),$$

et le Hamiltonien avec condition au bord  $\eta$  par

$$H_\Phi(\sigma|\eta) = \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma_\Lambda \vee \eta_\Lambda^c)$$

où  $\sigma_\Lambda \vee \eta_\Lambda^c$  est la configuration de spins coïncidant avec  $\sigma$  dans  $\Lambda$  et avec  $\eta$  dans  $\Lambda^c$ .

En revanche, le Hamiltonien de la configuration entière sur  $\mathbb{Z}^2$  n'a pas de sens car a priori, la somme des interactions présentes dans la configuration serait infinie. Pour  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Omega$ , on dira que  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  *coïncident à l'infini*, ce que l'on notera  $\sigma \stackrel{\infty}{\cong} \tilde{\sigma}$ , si en dehors d'un domaine fini  $\Lambda$ , on a  $\sigma_{\Lambda^c} = \tilde{\sigma}_{\Lambda^c}$ . Si  $\sigma \stackrel{\infty}{\cong} \tilde{\sigma}$ , on peut définir le **Hamiltonien relatif** de ces deux configurations par

$$H_\Phi(\tilde{\sigma}; \sigma) = \sum_A (\Phi_A(\tilde{\sigma}) - \Phi_A(\sigma)),$$

ce qui est alors bien défini car le potentiel est supposé être à portée finie.

On dit que  $\sigma \in \Omega$  est un **état d'énergie minimale** (pour  $\Phi$ ) - ou *état fondamental* - si

$$H_\Phi(\tilde{\sigma}; \sigma) \geq 0$$

pour toute configuration  $\tilde{\sigma} \stackrel{\infty}{\cong} \sigma$ . Physiquement, cela veut dire que toute *perturbation locale* de la configuration  $\sigma$  a un coût en énergie au moins plus grand que celui de  $\sigma$ . On notera  $g(\Phi)$  l'ensemble des états d'énergie minimale de  $\Phi$ . Dans la suite, on s'intéressera plus précisément aux états périodiques d'énergie minimale, c'est-à-dire les  $\sigma \in g(\Phi)$  tels que  $\sigma$  soit périodique, c'est-à-dire tels qu'il existe  $l_1, l_2$  tels que  $\sigma_x = \sigma_{x-(m_1 l_1, m_2 l_2)}$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ . On notera  $\Omega^{\text{per}}$  l'ensemble des configurations périodiques et  $g^{\text{per}}(\Phi)$  l'ensemble des états périodiques d'énergie minimale de  $\Phi$ .

**Exemple 1.2.1.** Illustrons ces notions avec deux exemples : le modèle d'Ising et le modèle de Widom-Rowlinson.

Pour le modèle d'Ising,  $S = \{+1, -1\}$  et on a  $\Phi_A(\sigma) = -\sigma_x \sigma_y$  si  $A$  est une paire de deux voisins  $x \sim y$  et  $\Phi_A = 0$  sinon. On peut également prendre le potentiel équivalent associé à la représentation basse température :  $\Phi_A(\sigma) = \mathbf{1}(\sigma_x \neq \sigma_y)$  pour  $A$  paire de deux voisins  $x \sim y$  et  $\Phi_A = 0$  sinon.

Pour le modèle de Widom-Rowlinson,  $S = \{+1, 0, -1\}$ , et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit le potentiel par  $\Phi_A^\lambda(\sigma) = \lambda \mathbf{1}(\sigma_x = 0)$  si  $A = \{x\}$ ,  $\Phi_A^\lambda(\sigma) = \mathbf{1}(\sigma_x \sigma_y = -1)$  si  $A = \{x, y\}$  avec  $x$  voisin de  $y$  et  $\Phi_A^\lambda = 0$  sinon.

Pour le modèle d'Ising, les deux seuls états périodiques d'énergie minimale sont les configurations constantes valant soit  $+$  soit  $-$  ( $g^{\text{per}}(\Phi) = \{+, -\}$ ) et pour le modèle de Widom-Rowlinson, cela dépend de la valeur de  $\lambda$  :

- Si  $\lambda > 0$ , on a également deux états périodiques d'énergie minimale  $g^{\text{per}}(\Phi^\lambda) = \{+, -\}$ .
- Si  $\lambda = 0$ ,  $g(\Phi^\lambda)$  contient notamment toutes les configurations constituées soit de  $+$  et de  $0$ , soit de  $-$  et de  $0$ . En particulier,  $g^{\text{per}}(\Phi^\lambda)$  et  $g(\Phi^\lambda)$  sont infinis.
- Si  $\lambda < 0$ , la seule configuration d'énergie minimale est la configuration constante valant  $0$  :  $g(\Phi^\lambda) = \{0\}$ .

Pour le modèle d'Ising par exemple, il existe des états d'énergie minimale non périodiques, par exemple la condition de Dobrushin  $\sigma_x = +1$  si  $x \cdot (0, 1) \geq 0$  et  $\sigma_x = -1$  sinon, et il en existe même une infinité en prenant la condition de Dobrushin penchée d'un angle  $\theta$  :  $\sigma_x = +1$  si  $x \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) \geq 0$  et  $\sigma_x = -1$  sinon.

Pour toute configuration périodique  $\sigma \in \Omega^{\text{per}}$ , on peut définir sa *densité d'énergie* (ou *énergie spécifique*) par

$$e_\Phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{A \cap \Lambda_n \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma),$$

où  $\Lambda_n = [-n, n]^2$ . En particulier, en notant  $e_\Phi = \inf_{\sigma \in \Omega^{\text{per}}} e_\Phi(\sigma)$ , on obtient une caractérisation qui justifie l'appellation d'états périodiques d'énergie minimale :  $\sigma \in g^{\text{per}}(\Phi)$  si, et seulement si,  $e_\Phi(\sigma) = e_\Phi$ .

La notion fondamentale suivante est la notion de *frontière* et de *contours* d'une configuration. Supposons que l'ensemble  $g^{\text{per}}(\Phi)$  soit fini et notons  $\eta^1, \dots, \eta^m$  ces états périodiques d'énergie minimale. Soit  $r > r(\Phi)$ , où  $r(\Phi)$  est la portée des interactions. Pour  $\sigma \in \Omega$  et  $\# \in \{1, \dots, m\}$ , on dit qu'un point  $x$  est **#-correct** si  $\sigma$  coïncide avec l'état  $\eta^\#$  sur la boule centrée en  $x$  de rayon  $r$  (pour la norme infinie).

On appelle alors **frontière d'une configuration**  $\sigma$  l'ensemble de ses sites qui ne sont pas #-correct pour aucun indice  $\#$ . La frontière d'une configuration sépare alors l'espace en régions correctes correspondant à des états périodiques d'énergie minimale. Un **contour de**  $\sigma$  est la donnée de la restriction de la configuration  $\sigma$  à l'une des composantes connexes finies de la frontière de  $\sigma$  (voir figure [1.5](#) pour un exemple). On définit naturellement l'*intérieur* et l'*extérieur*

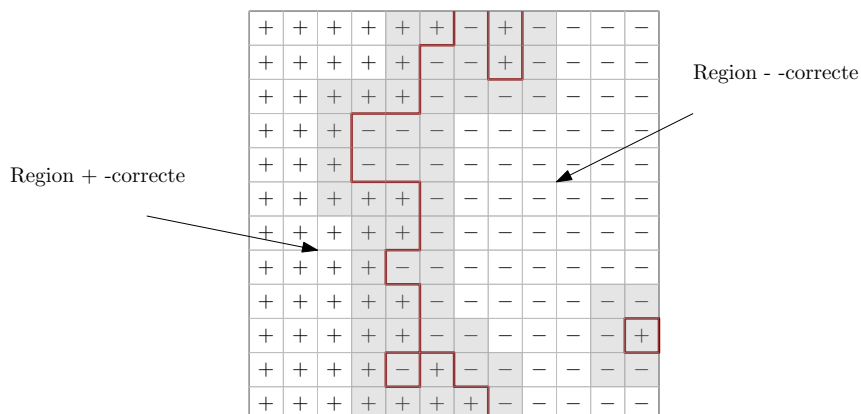


FIGURE 1.5 – Deux bouts de contours au sens de Pirogov-Sinai pour le modèle d’Ising. Les cases mauvaises sont grisées et la frontière est l’ensemble des cases grisées. Pour comparaison, on a également tracé en rouge les contours au sens de la représentation basse température du modèle d’Ising.

d’un contour  $\Gamma$  et on dit que  $\Gamma$  est un  $\#$ -contour si  $\Gamma$  touche une composante  $\#$ -correcte dans son extérieur, et on note  $\text{supp}\Gamma$  son support.

Pour  $\Gamma$  un  $\#$ - contour d’une configuration  $\sigma$ , définissons une notion d’énergie du contour  $\Gamma$  :

$$\Phi(\Gamma) = \sum_A (|A|^{-1} \cdot |A \cap \text{supp}\Gamma| \Phi_A(\sigma)) - e_{\#} |\text{supp}\Gamma|.$$

Cette définition ne dépend de  $\sigma$  que via sa restriction au support de  $\Gamma$  et donc n’importe quel choix de  $\sigma$  ayant  $\Gamma$  comme contour convient. De plus, par construction, pour tout domaine fini  $\Lambda$  et toute configuration  $\sigma$  dont les contours sont inclus dans  $\Lambda$ , on a

$$H(\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda^c}) = \sum_{\Gamma} \Phi(\Gamma) + \sum_{\#} e_{\#} |\Lambda_{\#}| + \sum_{A \not\subseteq \Lambda} \frac{|A \cap \Lambda^c|}{|A|} \Phi_A(\sigma),$$

où la première somme porte sur les contours de  $\sigma$  et  $\Lambda_{\#}$  est l’ensemble des points  $\#$ -corrects et des points appartenant au support d’un  $\#$ -contour. Comme les contours de  $\sigma$  sont dans  $\Lambda$ , par définition des contours, le dernier terme ne dépend pas de la configuration précise  $\sigma_{\Lambda}$ . En particulier, un Hamiltonien équivalent (c’est-à-dire dont la différence avec le Hamiltonien original est une constante ne dépendant pas de la configuration) est donné par

$$H(\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda^c}) = \sum_{\Gamma} \Phi(\Gamma) + \sum_{\#} e_{\#} |\Lambda_{\#}|.$$

On peut montrer que l’on peut majorer l’énergie d’un contour par un multiple de la taille de son support, mais une question importante est de savoir si à l’inverse, la présence d’un contour impose une augmentation de l’énergie d’au moins un multiple de la taille de son contour.

On dira qu’un potentiel d’interactions  $\Phi$  satisfait **la condition de Peierls** si, d’une part,  $g^{\text{per}}(\Phi)$  est fini et si d’autre part, il existe une constante  $\rho > 0$  telle que pour tout  $\Gamma$   $\#$ - contour

pour un indice  $\#$ , on ait

$$\Phi(\Gamma) > \rho|\text{supp}\Gamma|.$$

La condition de Peierls implique notamment que si l'on perturbe un potentiel d'interaction  $\Phi^0$  satisfaisant la condition de Peierls par un terme  $W$  suffisamment petit en un sens dépendant de la constante  $\rho$  précédente, alors on a

$$g^{\text{per}}(\Phi^0 + W) \subset g^{\text{per}}(\Phi^0).$$

### 1.2.4 Diagramme de phase.

Le but de la théorie de Pirogov-Sinai est de créer, à partir de l'étude des états périodiques d'énergie minimale d'un potentiel de référence et d'une certaine notion de stabilité, des mesures de Gibbs en volume infini à très basse température (pour le Hamiltonien correspondant au potentiel) correspondant à chaque état périodique d'énergie minimale stable.

Soit  $\Phi_0$  satisfaisant la condition de Peierls et  $\Phi$  une perturbation petite de  $\Phi_0$  telle que  $g^{\text{per}}(\Phi = \Phi^0 + W) \subset g^{\text{per}}(\Phi^0)$ . Pour  $\#$  correspondant à l'un des  $\eta^\# \in g^{\text{per}}(\Phi^0)$ , on peut définir une mesure de probabilité dans un domaine fini  $\Lambda$  au paramètre de température inverse  $\beta \geq 0$  par

$$\mu_{\Lambda; \Phi}^\#(\sigma_\Lambda) = \frac{\exp(-\beta H_\Phi(\sigma_\Lambda))}{Z_\Phi^\#(\Lambda)}$$

où les  $\sigma_\Lambda$  sont des configurations dans  $\Lambda$  respectant la condition au bord de contour  $\#$ , c'est-à-dire que tous les points à distance au plus  $r^*$  du bord du domaine sont  $\#$ -corrects, ou encore que les contours de  $\sigma_\Lambda$  ne soient pas à distance inférieure à  $r^*$  du bord de  $\Lambda$  et que tous les contours extérieurs sont des  $\#$ -contours.  $Z_\Phi^\#(\Lambda)$  est la fonction de partition du système associé, et est telle que  $\mu_{\Lambda; \Phi}^\#$  soit une mesure de probabilité.

Comme les contours d'une configuration dans  $\Lambda$  déterminent uniquement celle-ci, on peut chercher à réécrire la fonction de partition du système pour ne faire intervenir que les poids des contours du système avec la condition au bord de contour  $\#$ . Toutefois, les contours interagissent entre eux par une condition de compatibilité : si un contour est contenu dans l'intérieur d'autres contours, alors nécessairement, son type, c'est-à-dire la phase que voit son extérieur direct doit être le même que celui de l'intérieur du plus petit contour qui le contient (voir figure [1.6](#)).

On définit alors les *contours externes* de  $\sigma$  comme l'ensemble de ses contours contenus dans l'intérieur d'aucun autre de ses contours. En sommant sur toutes les façons de remplir son intérieur, on peut alors définir un poids  $w_\#(\gamma)$  pour tout contour externe de la configuration puis, en étudiant la fonction de partition de son intérieur, un poids pour les contours externes dans son intérieur, et ainsi de suite. De proche en proche, on obtient finalement des poids  $w_\#(\gamma)$  pour tous les contours  $\gamma$  et on peut réécrire la fonction de partition du système comme

$$Z_\Phi^\#(\Lambda) = e^{-\beta e_\#(\Phi)|\Lambda|} \sum_{\partial \in \mathcal{C}(\Lambda, \#)} \prod_{\gamma \in \partial} w_\#(\gamma)$$

où  $\mathcal{C}(\Lambda, \#)$  est l'ensemble des configurations de  $\#$ -contours ne se touchant pas à l'échelle  $r^*$  et respectant la condition au bord de contours  $\#$  dans  $\Lambda$ .

La somme dans le membre de droite est exactement de la forme nécessaire pour pouvoir utiliser la cluster expansion, mais il faut pour cela que les contours aient des poids qui ne soient pas trop grands par rapport à leur taille. Physiquement, dans le cas où  $\#$  correspond à une phase stable, on s'attend à ce qu'une configuration typique soit constituée uniquement de petites

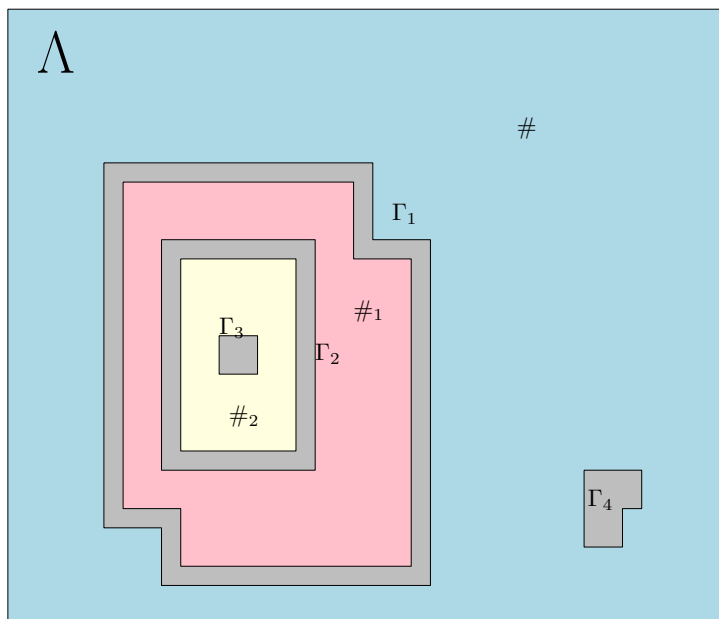


FIGURE 1.6 – Exemple de contours possibles sous la condition au bord de contours  $\#$  dans  $\Lambda$  : l'extérieur de  $\Gamma_2$  doit voir le même état  $\#_1$  que l'intérieur de  $\Gamma_1$  qui le contient, et l'extérieur de  $\Gamma_3$  voit  $\#_2$  qui est aussi l'état que voit l'intérieur de  $\Gamma_2$ . Les deux seuls contours externes sont  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_4$ .

déformations autour de la configuration de référence  $\eta^\#$  et les poids des contours devraient donc satisfaire cette condition.

Pour pouvoir utiliser la cluster expansion, on peut modifier les poids des contours en tronquant les poids trop élevés. Pour  $\tau > 0$  fixé, on définit de nouveaux poids

$$w'_\#(\gamma) = \min(w_\#(\gamma), e^{-\tau|\gamma|})$$

et on définit la fonction de partition  $Z'_\Phi^\#(\Lambda)$  en remplaçant  $w_\#(\gamma)$  par  $w'_\#(\gamma)$  dans l'expression de  $Z_\Phi^\#(\Lambda)$ . Pour ce système, on peut alors utiliser les techniques de cluster expansion pour obtenir une énergie libre pour ces nouveaux poids

$$f_\#(\Phi) = -\frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z'_\Phi^\#(\Lambda)$$

que l'on appelle *énergie libre métastable*. L'idée étant que si  $\#$  est un état de référence *stable*, alors les poids de ses contours devraient tous vérifier  $w_\#(\gamma) = w'_\#(\gamma)$ , et donc l'énergie libre métastable correspondrait a fortiori à l'énergie libre du système avec les poids initiaux. En revanche, si l'état est instable, c'est-à-dire que ses grands contours ne sont pas assez pénalisés, alors l'énergie libre métastable associée est strictement plus grande que l'originale.

Définissons alors pour chaque  $\#$

$$a_\#(\Phi) = f_\#(\Phi) - \min_{\#'} f_{\#'}(\Phi)$$



et on dira alors que  $\#$  est **stable pour**  $\Phi$  si  $a_{\#}(\Phi) = 0$ . Le théorème majeur s'exprime alors ainsi :

**Proposition 3** (Pirogov-Sinai-Zahradnik). *Pour  $\beta$  suffisamment grand, pour chaque  $\#$  stable pour  $\Phi$  il existe une mesure de Gibbs en volume infini  $\mu_{\beta}^{\#} \in \mathcal{G}_{\Phi}(\beta)$  qui est une perturbation de l'état  $\eta^{\#}$  : la densité de points  $\#$  corrects tend vers 1 et tous les contours de la configurations sont de taille finie. Chaque mesure  $\mu_{\beta}^{\#}$  est invariante par translation, extrémale et ergodique, et les mesures ainsi construites sont distinctes les unes des autres.*

De plus, on peut montrer que tout  $\eta^{\#} \in g(\Phi_0)$  peut être obtenu comme état stable de  $\Phi$  pour des perturbations  $\Phi$  arbitrairement petites de  $\Phi_0$  (l'article original donne d'ailleurs une description bien plus précise des états stables des perturbations autour de  $\Phi$ ).

Enfin, mentionnons un résultat partiel de complétude du diagramme de phases dû à Zahradnik :

**Proposition 4** (Corrolaire 3.2, [Zah84](#)). *Supposons que  $P$  soit un état de Gibbs associé au potentiel  $\Phi$  obtenu comme limite de mesures en volume fini avec des conditions au bord  $(\eta_n)$  et des domaines  $(\Lambda_n)$  tendant vers  $\mathbb{Z}^2$  au sens de Van Hove.*

*Si  $P$  est de plus invariant par translation, alors  $P$  peut être décomposé comme un mélange des mesures extrémales  $\mu_{\beta}^{\#}$  construites précédemment pour les  $\#$  stables pour  $\Phi$ .*

Ainsi, les mesures extrémales **invariantes par translation** de  $\mathcal{G}_{\Phi}(\beta)$  sont exactement celles correspondant aux états périodiques d'énergie minimale stables pour  $\Phi$ . Remarquons que ce résultat n'exclut en aucun cas l'existence d'autres états de Gibbs extrémaux qui ne seraient pas invariants par translation (comme c'est le cas pour le modèle d'Ising à très basse température en dimension  $d \geq 3$  par exemple). Dans tous les outils développés dans cette théorie, les hypothèses de périodicité et d'invariance par translation sont cruciales et ne peuvent pas être dépassées dans ce cadre. De façon générale, réussir à exclure l'existence d'états de Gibbs non Sinvariants par translation est l'une des difficultés majeures de l'étude des diagrammes de phases de systèmes de spins. Dans ce cadre, des avancées majeures ont été fournies par Dobrushin et Shlosman dans [DS85](#) pour des systèmes dont les Hamiltoniens vérifient des conditions proches de la condition de Peierls de la théorie de Pirogov-Sinai.

Toutefois, la notion de contours est très intéressante en soi et peut être appliquée à d'autres contextes pour représenter des interfaces entre deux phases.

## 1.3 Problématique et organisation de la thèse.

Ce travail de thèse a commencé par l'étude de [DGT13](#). Dans cet article, Disertori et Giuliani regardent un modèle de bâtons durs microscopiques introduit dans une plus grande généralité par Onsager dans [Ons49](#). Pour ce modèle, il était conjecturé que pour des densités intermédiaires de bâtons, le système s'organise comme un cristal liquide nématique, où les bâtons s'alignent en immense majorité dans l'une des deux orientations possibles, mais où la position précise des centres des bâtons reste très peu contrainte. Dans leur étude, en associant à chaque configuration de bâtons une configuration de spins et en utilisant des outils inspirés de la théorie de Pirogov-Sinai, Disertori et Giuliani ont réussi à montrer qu'en effet, pour des bâtons suffisamment grands, aux densités intermédiaires, il existe deux états de Gibbs distincts  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$  correspondant chacun à une orientation privilégiée (voir [2.2.2](#)).

La problématique initiale de cette thèse est donc la question naturelle suivante : "*Peut-on montrer que, au moins dans un régime restreint de paramètres, comme pour le modèle d'Ising, les deux mesures  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$  construites ainsi sont les seules mesures extrémales du système ?*".

En d'autres termes, peut-on montrer que le diagramme de phases du système de bâtons durs est complet dans un certain régime de paramètres avec  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$  pour seules mesures extrémales.

Puisque la théorie de Pirogov-Sinai et ses extensions s'appuient sur l'étude du Hamiltonien d'un système de spins, ses méthodes ne nous semblaient pas directement applicables car, du fait de la géométrie microscopique complexe du modèle, le Hamiltonien du système de spins obtenu par projection du modèle de bâtons durs sur un modèle de spins est très difficile à décrire. En revanche, comme dans [DGI13], on peut trouver une notion de contours pour ce modèle et ainsi obtenir une notion d'*interface de séparation entre deux phases*.

Or, dans [CV12], Coquille et Velenik développent une preuve géométrique du théorème de complétude du diagramme de phases d'Aizenman-Higuchi pour le modèle d'Ising à basse température en dimension 2. L'utilisation d'outils très précis spécifiques au modèle d'Ising leur permet d'obtenir la complétude du diagramme de phase pour toute température inférieure à la température critique, mais les idées à la base de cette preuve sont très générales, et devraient pouvoir être implémentées pour d'autres modèles sous des hypothèses de *fluctuations des interfaces* macroscopiques.

Afin de répondre à notre problématique, nous avons donc cherché à comprendre cette preuve et voir dans quelle mesure on pouvait l'adapter au modèle de spins correspondant au système de bâtons durs afin d'obtenir un résultat de complétude du diagramme de phases pour celui-ci. Dans un second temps, on a cherché à établir un lien entre le diagramme de phases du système de bâtons et celui du système de spins correspondant.

Les prochains chapitres sont organisés de la manière suivante.

- Dans le **Chapitre 2** on revient plus en détail sur le modèle de bâtons durs au coeur de cette thèse. On le définit précisément, et on explique son comportement (conjecturé ou prouvé) pour différents régimes de paramètres : isotropie aux densités très basses, comportement nématique aux densités moyennes, et structures sans orientation privilégiée aux très hautes densités.

Pour les basses densités, on montre l'unicité des mesures de Gibbs en volume infini en implémentant des outils simples de cluster expansion ou de percolation ; pour les densités intermédiaires, on donne plus de détails sur la construction de [DGI13] et pour les très hautes densités, on donne des arguments entropiques et dynamiques pour essayer de justifier cette seconde transition de phase.

- Le **Chapitre 3** est consacré à l'étude d'outils généraux pouvant permettre de montrer la complétude du diagramme de phases d'un système de spins en s'appuyant sur des méthodes de fluctuations d'interface.

Dans un premier temps, on expose les idées majeures de la construction de [CV12] qui souligne le lien entre fluctuations des interfaces et complétude du diagramme de phases, puis on discute des hypothèses nécessaires pour adapter cette construction à d'autres modèles de spins. Dans un deuxième temps, on montre un théorème central limite fonctionnel pour des processus de points obtenus comme points de renouvellement d'une interface. Ainsi, l'hypothèse centrale de fluctuations est vérifiée dès que l'on arrive à exhiber une structure de renouvellement pour l'interface. Enfin, dans un troisième temps, on montre comment exhiber une telle structure dans l'exemple des interfaces du modèle de Widom-Rowlinson, en se basant sur une construction de [HK02]. On termine ce chapitre par une discussion sur les problèmes techniques que peuvent poser le cas d'interfaces épaisses, comme c'est le cas pour le modèle de Widom Rowlinson.

- Le **Chapitre 4** est consacré au lien entre le diagramme de phases du système microscopique de bâtons et celui du système de spins correspondant. Ce chapitre contient des éléments nouveaux qui constituent une grosse partie de notre contribution personnelle à la problé-

matique de cette thèse. Dans celui-ci, on montre un théorème d'*Unicité conditionnelle* des mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins typique (théorème 5). Un corollaire direct de ce théorème est que, pour montrer la complétude du diagramme de phases du système microscopique, il est suffisant de le montrer pour le système de spins correspondant. Soit  $\mathcal{G}_{spins}$  et  $\mathcal{G}_{micro}$  les mesures de Gibbs du système de spins et de bâtons respectivement. Notons  $\mu^+$  et  $\mu^-$  les deux mesures microscopiques en volume infini, et  $\mu^h$  et  $\mu^v$  leurs projections respectives sur les systèmes de spins.

**Theoreme 2** (voir Corollaire 1 du Théorème 5). *Supposons que  $k$  est tel que l'ensemble des mesures de Gibbs du système de spins vérifie  $\mathcal{G}_{spins} = [\mu^v, \mu^h]$ . Alors on a également  $\mathcal{G}_{micro} = [\mu^-, \mu^+]$ .*

Pour cela, on commence par définir une nouvelle notion de spins plus naturelle mais plus complexe à manipuler et on montre que les contours pour cette notion de spins ont les mêmes propriétés statistiques pour les mesures  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$  que les contours originaux de [DGL3]. Pour cette nouvelle notion de spins, on est en mesure de montrer le résultat d'unicité conditionnelle annoncé. Le reste du chapitre est consacré à la preuve du théorème, qui peut être vue comme une adaptation compliquée des méthodes utilisées pour montrer l'isotropie à très faible densité.

- Enfin, le **Chapitre 5** est un chapitre de conclusion. Dans celui-ci, on commence par revenir sur les obstacles qu'il reste à dépasser pour répondre positivement à notre problématique initiale. On conclut ensuite cette thèse sur une ouverture sur les modèles à portée infinie, comme le modèle d'Ising en dimension 2 avec des interactions à décroissance polynomiale, pour lesquels les questions que nous nous posons dans cette thèse sont également pertinentes, et pour lesquels des méthodes géométriques à base de fluctuations d'interfaces pourraient fonctionner pourvu que l'on arrive à trouver une notion d'interface adaptée.

## Chapitre 2

# Description du modèle de bâtons avec contrainte coeur dur.

Le modèle à la base de notre étude est un modèle permettant de représenter de façon simplifiée des systèmes de très longs polymères unidimensionnels interagissant par des forces de répulsion très fortes agissant à très courte portée. Cela modélise par exemple des systèmes de molécules dans un colloïde, où le diamètre d'une particule est bien supérieur à la racine cubique de son volume. Ces systèmes, étudiés par Onsager dans [Ons49], peuvent avoir beaucoup de comportements différents, et présentent des structures de cristaux liquides dans un certain régime de paramètres, c'est-à-dire qu'ils peuvent avoir à la fois des corrélations à très longue portée au niveau de leur orientation et une structure libre pour les positions précises des particules. Plus précisément, le modèle étudié mathématiquement est un modèle de configurations de bâtons durs d'une longueur  $k$  fixée s'alignant sur une sous-partie de  $\mathbb{Z}^2$  et dont l'activité chimique est donnée par un paramètre  $z$ . Ce modèle, pourtant assez simple dans sa description, est très riche mathématiquement car il est supposé avoir deux transitions de phases distinctes, en passant d'un régime isotrope à faible densité à une structure de cristal liquide nématique aux densités intermédiaires, avant de redevenir isotrope à très haute densité.

Dans ce chapitre, on introduit précisément ce modèle, on montre comment on peut appliquer des techniques basiques issues de l'étude des systèmes de spins pour montrer certaines de ses propriétés, et on revient plus en détail sur les comportements attendus aux différentes densités.

## 2.1 Présentation du modèle.

### 2.1.1 Description du modèle de bâtons durs.

On regarde un modèle de configurations de bâtons sur une sous-partie de  $\mathbb{Z}^2$  pouvant prendre deux orientations (horizontale ou verticale) et interagissant entre eux par *contrainte coeur dur*, c'est-à-dire que seules les configurations où les bâtons ne s'intersectent pas sont admissibles. Formellement, on se donne deux paramètres,  $z > 0$  l'*activité* d'un bâton et  $k \geq 1$  un entier donnant la *taille* d'un bâton. On appelle bâton  $r$  la donnée de  $k$  sites consécutifs verticalement ou horizontalement de  $\mathbb{Z}^2$  et une configuration est la donnée d'un ensemble de bâtons :  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$  pour un certain nombre  $n$ , le nombre de bâtons dans la configuration  $R$ . Pour une région donnée  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ , on note  $\Omega_\Lambda$  l'ensemble des configurations de bâtons dans  $\Lambda$ , c'est-à-dire l'ensemble des configurations de bâtons  $R$  dont tous les bâtons ont leur centre dans  $\Lambda$ . Si  $k$  est impair, le centre du bâton est bien un site de  $\mathbb{Z}^2$  et il n'y a pas d'ambiguïté possible, et si  $k$  est pair, on définit arbitrairement le centre du bâton  $r$  comme étant le site de  $\mathbb{Z}^2$  directement à gauche (respectivement en dessous) du centre géométrique de  $r$  si  $r$  est horizontal (respectivement vertical).

On définit la fonction de partition  $Z_0(\Lambda)$  avec condition au bord ouverte de la façon suivante :

$$Z_0(\Lambda) = \sum_{R \in \Omega_\Lambda} z^{|R|} \varphi(R),$$

où  $|R|$  désigne le nombre de bâtons dans la configuration  $R$  et  $\varphi$  est l'indicatrice que  $R$  est compatible avec la condition de coeur dur

$$\varphi(R) = \prod_{r \neq r' \in R} \varphi(r, r'), \text{ où } \varphi(r, r') = 1_{\{r \cap r' = \emptyset\}}.$$

Si  $\Lambda$  est fini, à cause de la condition de compatibilité noyau dur, il y a un nombre fini de configurations admissibles, donc la fonction de partition est bien définie.

On regarde  $\langle \cdot \rangle_\Lambda$  la mesure sur  $\Omega_\Lambda$  associée, c'est-à-dire donnant un poids proportionnel à  $z^{|R|}$  à toute configuration de bâtons compatible  $R$ . On peut exprimer la densité asymptotique  $\rho$

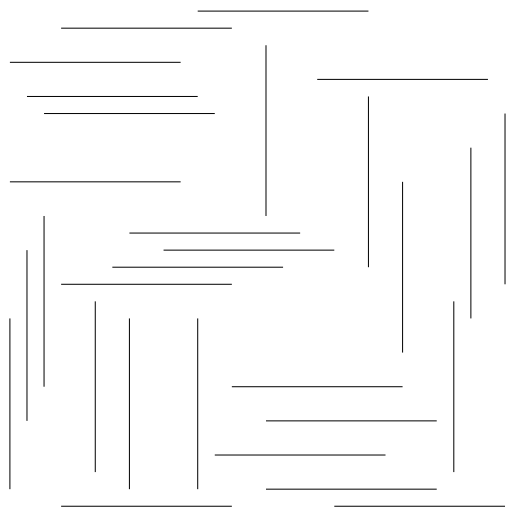


FIGURE 2.1 – Un exemple de configuration admissible de bâtons.

(qui est une fonction des paramètres  $k, z$ ) de la façon suivante :

$$\rho := \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \frac{\langle n \rangle_{\Lambda}}{|\Lambda|} = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \frac{\sum_{n \geq 0} n z^n w_n^{\Lambda}}{Z_0(\Lambda)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} z \partial_z (\ln Z_0(\Lambda)),$$

où  $w_n^{\Lambda}$  est le nombre de configurations admissibles avec exactement  $n$  bâtons dans  $\Omega_{\Lambda}$ . On remarque qu'à  $k$  fixé, c'est une fonction croissante de l'activité  $z$ , que  $\rho$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers 0 et vers  $1/k$  quand  $z$  tend vers l'infini. Cette densité est la densité de centres de bâtons, mais on pourrait obtenir la densité de sites occupés en la multipliant par  $k$ . On pourra également définir de façon similaire d'autres conditions au bord en changeant l'ensemble  $\Omega_{\Lambda}$  par exemple ou en changeant les poids de la configuration en fonction de la restriction de la configuration à une région à une distance donnée du bord du domaine. En notant  $q$  un type de condition au bord avec ensemble de configurations  $\Omega_{\Lambda}^q$  et  $\langle \cdot \rangle_{\Lambda}^q$  la mesure associée dans le volume  $\Lambda$ , pour  $A$  une observable locale, c'est-à-dire ne dépendant que de la donnée de la configuration sur une région  $X$  finie de  $\mathbb{Z}^2$ , on a

$$\langle A \rangle_{\Lambda}^q = \frac{1}{Z_q(\Lambda)} \sum_{R \in \Omega_{\Lambda}^q} z^{|R|} \varphi(R) 1_{\{R \in A\}}.$$

Si pour toute observable locale  $A$  cette quantité a une limite quand  $\Lambda$  tend vers le graphe  $\mathbb{Z}^2$  entier, on définit  $\langle \cdot \rangle^q$  la mesure sur les configurations de  $\mathbb{Z}^2$  telle que, pour toute observable locale  $A$ , on ait

$$\langle A \rangle^q = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \langle A \rangle_{\Lambda}^q.$$

Des exemples de conditions initiales que l'on peut regarder sont les conditions de bord dur (où l'on interdit aux bâtons des configurations de toucher la frontière du domaine  $\Lambda$ ), des conditions au bord périodiques (c'est-à-dire où les configurations sont vues sur un tore et où les bâtons qui sortent de  $\Lambda$  interagissent également avec ceux de l'autre côté du domaine  $\Lambda$ ), ou ce que l'on

appellera des conditions au bord  $+$  ou  $-$  respectivement où l'on interdira les bâtons proches du bord du domaine à prendre l'une des deux orientations. Pour une configuration  $\sigma$  de bâtons dans  $\mathbb{Z}^2$  compatible (c'est-à-dire n'ayant pas de bâtons qui s'intersectent), on peut également définir la condition au bord  $\sigma$  dans  $\Lambda$  où les configurations doivent en plus être compatibles avec la restriction de  $\sigma$  au complémentaire de  $\Lambda$ . Ces dernières conditions au bord sont très naturelles pour définir les mesures de Gibbs en volume infini. Pour des paramètres  $z, k$  fixés, on appelle **mesure de Gibbs du système aux paramètres**  $z, k$  toute mesure sur  $\Omega_{\mathbb{Z}^2}$  vérifiant les équations de compatibilité de Dobrushin-Lanford-Ruelle (*condition DLR*), c'est-à-dire les mesures  $\mu$  telles que pour  $\mu$ -presque tout  $\sigma$ , pour tout  $\Lambda$ , en conditionnant par  $\sigma$  hors de  $\Lambda$ , la loi induite dans le domaine  $\Lambda$  est la mesure en volume fini décrite précédemment avec la condition au bord  $\sigma$  :

$$\mu(\cdot | \sigma_{|\Lambda^c}) = \langle \cdot \rangle_{\Lambda}^{\sigma}.$$

On note  $\mathcal{G}(z, k)$  (ou  $\mathcal{G}$  quand il n'y a pas d'ambiguïté possible) l'ensemble des mesures de Gibbs du système, et on cherchera à le décrire en fonction des paramètres  $z, k$ .

### 2.1.2 Comportement attendu aux différentes densités.

Comme pour beaucoup de modèles de physique statistique, on cherche à étudier l'ensemble des mesures en volume infini du système. Ce modèle est d'un intérêt particulier car, pour différentes raisons, il est conjecturé qu'il y a *deux transitions de phases* quand la densité de la configuration varie (ou de façon équivalente, quand on fixe  $k$  et fait tendre l'activité vers  $+\infty$ ), au moins pour  $k$  assez grand.

En effet, on s'attend à avoir le comportement suivant (voir figure [2.2](#)) :

- Quand la densité est faible ( $\rho < \rho_1$ ), il existe une unique mesure en volume infini, et cette mesure est invariante par translation et isotrope (c'est-à-dire invariante par rotation de  $\pi/2$ ) ;
- Aux densités intermédiaire ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ), il existe au moins deux mesures en volume infini  $\mu^+$  et  $\mu^-$  distinctes, toutes deux invariantes par translation, et anisotrope (chacune favorisant une orientation de bâtons) ;
- Enfin, quand la densité devient proche de la densité maximale ( $\rho > \rho_2$ ), on s'attend à ce que le système redevienne isotrope : les mesures en volume infini deviennent désordonnées et sont invariantes par rotation de  $\pi/2$ .

L'intuition physique derrière ces différents comportements est la suivante : à faible densité, la densité de sites occupés est tellement faible que les bâtons sont typiquement très éloignés les uns des autres et l'orientation d'un bâton donné fait rarement une différence sur la compatibilité ou non de la configuration ; aux densités intermédiaires, la densité est suffisamment faible pour qu'à l'intérieur d'une zone avec des bâtons d'une certaine orientation, ceux-ci interagissent peu entre eux, mais que les bâtons horizontaux et verticaux interagissent très fortement les uns avec les autres, ce qui sépare l'espace en régions de bâtons soit uniquement verticaux, soit uniquement horizontaux, ce qui ressemble à un modèle ferromagnétique à basse température ; et pour des densités très élevées, l'interaction entre les bâtons de même orientation n'est plus négligeable et il devient entropiquement désavantageux d'avoir des configurations ordonnées avec une majorité des bâtons d'une orientation, ce qui fait que des motifs complexes utilisant des bâtons des deux orientations apparaissent pour maximiser l'entropie.

Une description plus détaillée des différents comportements du système sera présentée dans la section [2.2](#).

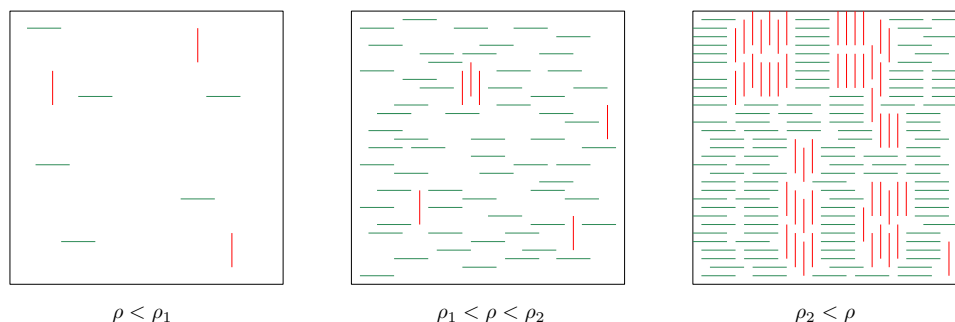


FIGURE 2.2 – Les trois différents régimes de densité et les comportements typiques attendus pour chacun d’entre eux.

### 2.1.3 Comparaison avec la version continue.

Pour comprendre la spécificité de ce modèle, on peut regarder ce qu’il se passerait dans la version continue de ce modèle où les centres de bâtons ne sont plus contraints à être des sites du réseau. Pour  $z, k$  fixés, on peut définir un modèle continu où les centres des bâtons seraient distribués selon une loi à densité par rapport à un processus ponctuel continu dans  $\mathbb{R}^2$ , toujours avec des orientations forcées à être verticales ou horizontales. Dans cette limite, les points correspondant à des bâtons de la même orientation n’interagissent pas presque sûrement, et le modèle devient un modèle de Widom Rowlinson à cœur dur.

De façon générale, on présente une preuve étendue de Ruelle [Rue71] pour montrer que dans le cas où il n’y a que des interactions entre bâtons d’orientations différentes, pour toute densité suffisamment grande, on peut construire  $\mu^+$  et  $\mu^-$  deux mesures de Gibbs en volume infini pour le système, distinctes et non isotropes.

Soit  $k \geq k_0$  fixé et  $z > 0$  le paramètre d’activité. On se place sur un sous-réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^2$  et on regarde des configurations de bâtons avec deux orientations possibles et contrainte cœur dur : une configuration est la donnée de deux fonctions  $\varepsilon_A, \varepsilon_B : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  et on dira que le site  $x$  a au moins une particule de type  $A$  si  $\varepsilon_A(x) > 0$  (et de même pour  $B$ ) et on note  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  les ensembles de sites ayant au moins une particule de type  $A$  ou  $B$  respectivement. Une configuration sera dite admissible si la distance en norme infinie entre  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  est supérieure à  $R = \frac{k}{2}$ . On note  $Z_1$  la fonction de répartition du gaz libre en un site :

$$Z_1 = Z_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n,$$

avec les  $c_n \geq 0$  et  $c_0 = 1$ . On suppose de plus que  $Z_1 > 1$ , c’est à dire que les  $c_n$  ne sont pas tous nuls pour  $n \geq 1$ .

On peut remarquer que quand  $c_n = \frac{1}{n!}$  cela correspond pratiquement au modèle continu précédent, en regardant le modèle continu sur  $\mathbb{R}^2$  où  $\varepsilon_A(x)$  est le nombre de bâtons de type  $A$  dont  $x$  est le plus proche sommet dans  $\Lambda$  (on oublie alors la position précise des bâtons autour de ce point, ce qui fait que ce n’est pas exactement la projection du modèle précédent). Quand  $c_0 = c_1 = 1$  et  $c_n = 0$  pour  $n \geq 2$ , on est dans le cas où on ne peut mettre qu’au plus un bâton par sommet, ce qui correspond au modèle initial où l’on a enlevé la condition de répulsion cœur dur entre bâtons de même orientation (bâtons infiniment fins).



On a alors :

**Proposition 5.** *Avec les notations précédentes, il existe un paramètre  $z_0$  tel que pour  $z > z_0$ , il y a un moins deux phases pures thermodynamiques distinctes.*

*Démonstration.* Commençons par rajouter au-dessus de  $\Lambda$  une grille de tuiles de taille  $d \times d$ , où  $d = \lfloor \frac{R}{3} \rfloor$  (on peut supposer que  $k_0 \geq 6$  pour que  $d \geq 1$ ). On note  $N$  le nombre de tuiles et on choisit la condition de bord suivante : dans les deux rangées de tuiles adjacentes au bord, aucune particule de type  $B$  n'est autorisée. Le choix de  $d$  impose que dans un carré de taille  $3d \times 3d$ , il ne peut y avoir qu'un seul type de particules. Si une particule de type  $B$  est présente dans une tuile, on colorie alors tout le carré de taille  $3d \times 3d$  autour de cette tuile centrale. On note  $\Gamma$  les bords de l'aire ainsi coloriée, que l'on décompose en composantes  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  où deux bouts de contours sont dans la même composante si ils sont à distance moins de  $R$  l'un de l'autre.

Pour borner le nombre de contours possibles, on remarque que si le polygone  $\gamma_i$  est de longueur  $ld$ , et a  $c$  composantes connexes, alors on peut le recouvrir par une marche sur la grille à  $m$  pas, où  $m \leq l + 12(c - 1)$  (on suit chaque composante connexe, et on peut passer de l'une à l'autre avec un pont de taille  $\leq 6d$ , et on a besoin d'au plus  $c - 1$  ponts). De plus, chaque composante connexe de  $\gamma_i$  a une taille d'au moins 12 donc  $l \geq 12c$  ce qui donne  $2l > m$ . En choisissant le point de départ parmi toutes les tuiles possibles et en utilisant une borne simple sur les chemins autoévitants, on obtient la borne suivante sur  $n(l)$ , le nombre de polygones de taille  $ld$  possibles pour une composante  $\gamma_i$  :

$$n(l) < N3^{2l}.$$

Pour faire marcher un argument de Peierls, il nous faut une borne exponentiellement petite sur la probabilité d'observer un contour donné en fonction de sa taille.

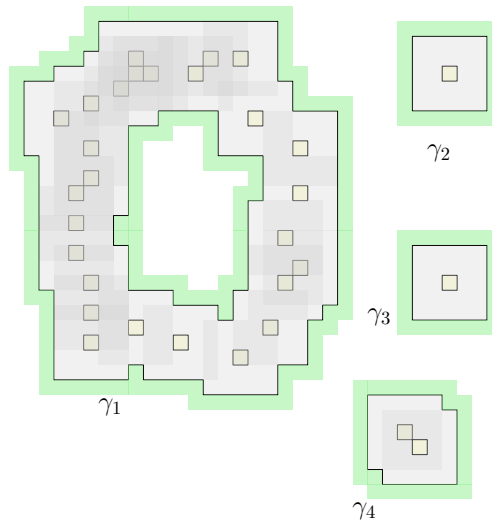


FIGURE 2.3 – Un exemple de contours obtenus : les particules de type  $B$  occupent les cases au centre des carrés coloriés délimités par  $\Gamma$ , et la partie à l'extérieur directe de  $\Gamma$  est  $G$ .

On note  $p(\gamma)$  la probabilité d'observer  $\gamma$  en tant que contour d'une configuration.

On suppose d'abord que  $\gamma$  est un contour extérieur de  $\Gamma$  (c'est-à-dire qu'on peut relier le bord du domaine à  $\gamma$  sans toucher un autre bout de contour de  $\Gamma$ ). Etant donné une configuration  $X$  produisant un contour  $\Gamma$  donnant  $\gamma$  comme contour extérieur, on construit  $X^*$  en échangeant

## 2.1. PRÉSENTATION DU MODÈLE.

toutes les particules de type  $B$  et de type  $A$  à l'intérieur de  $\gamma$  (c'est-à-dire pouvant être atteinte en partant du bord en croisant un nombre *impair* de fois  $\gamma$ ) puis, en définissant  $G$  comme l'ensemble des tuiles touchant par un côté ou un coin le bord de  $\gamma$ , on remplit  $G$  par un gaz libre de particules de type  $A$  ( $G$  était nécessairement composé de tuiles vides avant cette étape). Cela a pour effet d'effacer le contour extérieur  $\gamma$ , et le poids de la nouvelle configuration par rapport à l'ancienne dépend uniquement des ajouts de particules dans  $G$ . Notons que comme il n'y a pas d'interaction entre particules de type  $A$ , cela redonne une configuration compatible.

On a alors

$$p(\gamma) = \frac{Z(\gamma)}{Z} \leq \frac{Z(\gamma)}{Z(\gamma)Z_G} = \frac{1}{Z_G},$$

où  $Z$  est la fonction de partition générale,  $Z(\gamma)$  est la contribution des configurations ayant  $\gamma$  comme contour extérieur et  $Z_G$  est la fonction de partition du gaz libre de  $A$  dans le volume  $G$ . Comme le nombre de points dans  $G$  est plus grand que  $2\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor l \geq cd^2l$  avec  $c > 0$ , on a  $Z_G \geq Z_1^{cd^2l}$  ce qui donne donc

$$p(\gamma) \leq \exp(-\log(Z_1)cd^2l).$$

Pour conclure, regardons dans un premier temps la probabilité qu'une tuile donnée (notée  $0$ ) loin du bord du domaine  $\Lambda$  soit dans la composante connexe du bord de  $\Lambda$  dans la décomposition de l'espace induite par les contours  $\Gamma$  (on notera cet évènement  $0 \in Ext(\Gamma)$  et  $0 \notin Ext(\Gamma)$  son complémentaire si l'on fait référence à une famille de contours  $\Gamma$  spécifique, et on enlève la dépendance en  $\Gamma$  sinon). Remarquons que sur l'évènement  $0 \notin Ext(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  contient nécessairement un contour qui intersecte la ligne horizontale touchant  $0$  et même qui entoure  $0$ . Cette observation permet de faire fonctionner une comparaison énergie/entropie et conclure (argument de Peierls). Notons  $\mathbb{P}$  la mesure de probabilités des configurations dans le domaine  $\Lambda$  avec la condition au bord spécifiée plus haut.

On a donc, en utilisant cette remarque ainsi que les inégalités précédentes.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[0 \notin Ext] &= \sum_{\substack{\Gamma, 0 \notin Ext(\Gamma) \\ \Gamma \subset \Lambda}} \mathbb{P}[\Gamma] \leq \sum_{\Gamma, 0 \notin Ext(\Gamma)} \mathbb{P}[\Gamma] \\ &\leq \sum_{\gamma, 0 \in int(\gamma)} \sum_{\Gamma, \gamma \in \Gamma} \mathbb{P}[\Gamma] \leq \sum_{\gamma, 0 \in int(\gamma)} p(\gamma) \\ &\leq \sum_{M \geq 0} \sum_{\substack{\gamma, 0 \in int(\gamma) \\ (0, M) \in \gamma}} p(\gamma) \leq \sum_{M \geq 0} \sum_{l \geq 6+2M} \sum_{\gamma, |\gamma|=l, (0, M) \in \gamma} p(\gamma) \\ &\leq \sum_{M \geq 0} \sum_{l \geq 6+2M} 3^{2l} Z_1^{-cd^2l} \leq 2 \sum_{M \geq 0} q^{6+2M} \leq 4q^6 \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

dès que  $z$  est suffisamment grand pour que l'on ait  $3^2 Z_1^{-cd^2} < q \leq \frac{1}{2}$ . Comme cette quantité tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $+\infty$ , pour  $q \leq 1/2$  fixé, cela est toujours réalisé à partir d'un certain paramètre  $z_0$ .

De là, comme dans une tuile dans l'extérieur des contours, on ne peut avoir que des particules de type  $A$ , on obtient d'une part

$$\mathbb{P}[\sigma_B(0) \geq 1] \leq \mathbb{P}[0 \notin Ext] \leq 4q^6 \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0,$$

et d'autre part,

$$\mathbb{P}[\sigma_A(0) \geq 1] \geq \mathbb{P}[0 \in Ext] \mathbb{P}[\sigma_A(0) \geq 1 | 0 \in Ext] \geq (1 - 4q^6)(1 - \frac{1}{Z_1}) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, pour  $z$  suffisamment grand, ces deux quantités sont nécessairement distinctes, et en particulier, les mesures limites correspondant aux conditions au bord  $A$  (celle présentée ici) ou  $B$  (où l'on a interverti les rôles de  $A$  et  $B$  dans la construction précédente) sont nécessairement distinctes, ce qui prouve le résultat.  $\square$

Ce comportement, semblable à un modèle d'Ising ferromagnétique à basse température, pourra servir de guide pour l'intuition du comportement de notre système, mais comme on le verra, cette ressemblance n'est valable qu'à des densités suffisamment loin de la densité maximale. En effet, au delà d'une certaine densité, les interactions entre bâtons de même orientation ne sont plus du tout négligeables et semblent être à l'origine d'une seconde transition de phase (qui n'existe pas dans le modèle sans interaction entre bâtons de même orientation).

## 2.2 Comportements aux différentes densités.

Cette section vise à donner des éléments de compréhension pour les différents comportements du modèle, prouvés ou conjecturés, dans les différents régimes de densité. Elle s'appuie majoritairement sur des articles et des techniques déjà existants et comporte un résumé des explorations heuristiques que l'on a menées dans le but de comprendre la seconde transition de phase.

### 2.2.1 Isotropie à faible densité.

À basse densité, on s'attend à ce que le système soit *isotrope*, et on est en mesure de le prouver au moins de façon perturbative pour de faibles densités. L'ordre de grandeur des densités auxquelles on peut prouver ce résultat est comparable avec l'ordre de grandeur des densités où l'on s'attend à ce que ce résultat soit vrai.

**Proposition 6.** *Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tous  $z, k$  tels que  $zk^2 < \varepsilon$ , on ait  $\mathcal{G}(z, k) = \{\mu_0\}$  où  $\mu_0$  peut être vue comme la mesure limite obtenue à partir de conditions au bord vides. En particulier, l'unique mesure en volume infini est invariante par translation et par rotation de  $\pi/2$  (Isotropie).*

Notons que les invariances de la mesure découlent directement de l'unicité de la mesure en volume infini et des symétries du réseau.

On présente deux méthodes de preuve de ce résultat qui donnent deux points de vue complémentaires sur cette question en utilisant deux outils légèrement différents. Ces deux preuves utilisent deux idées qui seront généralisées dans un cadre plus complexe dans la construction majeure du Chapitre 4.

#### Méthode analytique : *Cluster Expansion*.

Une première méthode pour prouver ce résultat se base sur une méthode analytique également fondamentale pour les densités intermédiaires : le développement en clusters (*cluster expansion*) (voir 1.2.1 pour une introduction à ces techniques). Cette méthode peut sembler abstraite, mais cette preuve fournit un cadre simple d'application des techniques de développement en clusters qui seront cruciales pour la preuve des résultats aux densités intermédiaires dans un contexte plus complexe. De plus, voir les différents régimes de paramètres comme différentes régions de convergence ou non des développements en clusters peut donner une bonne intuition des différents comportements du système.

Dans un domaine fini  $\Lambda$ , en regardant un ensemble de bâtons possibles  $\Omega_\Lambda$  (éventuellement restreint par une condition au bord), et en notant  $Z_\Lambda$  la fonction de partition correspondante,

on va pouvoir trouver une expression analytique de  $\ln Z_\Lambda$  convergente quand la taille de  $\Lambda$  tend vers l'infini.

En effet, on peut voir l'ensemble  $\Omega_\Lambda$  comme un graphe où chaque site correspond à la position d'un centre et d'une orientation donnée d'un bâton. Chaque site a  $k^2+k$  voisins :  $k^2$  correspondant aux centres de bâtons de l'autre orientation dans le volume exclu créé par notre point et  $k$  pour ceux de même orientation. La mesure sur les configurations traduit que les points interagissent par contrainte de coeur dur et est telle que chaque point contribue au poids de la configuration via l'activité  $z$ . Une condition suffisante de convergence de la cluster expansion est la suivante (cf théorème 5.4 de [FV17]) : il existe une fonction  $a$  positive telle que, pour tout point  $\gamma^*$  fixé, on ait

$$\sum_{\gamma \sim \gamma^*} |w(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq a(\gamma^*),$$

où dans le cas qui nous intéresse,  $|w(\gamma)|$  est l'activité du bâton  $\gamma$  et  $\gamma \sim \gamma^*$  l'ensemble des bâtons voisins de  $\gamma^*$  dans le graphe défini précédemment.

Or, si  $3zk^2 \leq 1/e$ , en prenant  $a$  la fonction constante égale à 1 par exemple, on a

$$\sum_{\gamma \sim \gamma^*} |w(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq 2z(k^2 + k)e^a \leq 1 = a.$$

Ainsi, dans ce régime de paramètres, la condition est satisfaite pour notre système donc toutes les fonctions de partitions admettent un développement en cluster convergent.

Plaçons-nous dans ce régime de paramètres et fixons un domaine fini  $\Lambda$  et une condition au bord  $\sigma$  quelconque. Notons  $\mu_\Lambda^\sigma$  la mesure associée et  $Z_\Lambda^\sigma$  la fonction de partition correspondante. Notons également  $\mu_\Lambda^\emptyset$  et  $Z_\Lambda^\emptyset$  celles correspondantes à la condition au bord vide.

Fixons un évènement local  $A$  possible de la forme suivante : des bâtons fixés  $\{r_1, \dots, r_m\}$  sont présents dans la configuration et des bâtons fixés  $\{r_{m+1}, \dots, r_M\}$  sont absents de la configurations pour des entiers  $0 \leq m \leq M$  (les évènements de cette forme engendrent la tribu des évènements locaux). Notons  $\Omega_A^\sigma$  (resp.  $\Omega_A^\emptyset$ ) l'ensemble des configurations compatibles avec la condition au bord  $\sigma$  (resp. la condition au bord vide) et avec  $A$  au sens où ils ne contiennent pas les bâtons  $\{r_{m+1}, \dots, r_M\}$  et qui restent compatibles si on leur ajoute les bâtons  $\{r_1, \dots, r_m\}$ . On note également  $Z_A^\sigma$  (resp.  $Z_A^\emptyset$ ) leurs poids cumulés, de sorte à ce qu'on ait, pour  $q \in \{\emptyset, \sigma\}$ ,

$$\mu_\Lambda^q(A) = \frac{z^m Z_A^q}{Z_\Lambda^q}.$$

Notons  $D$  la distance entre le support de  $A$  et le bord du domaine  $\Lambda$ . On va montrer que  $\mu_\Lambda^\sigma(A) \underset{D \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_\Lambda^\emptyset(A)$ , ce qui suffit à prouver le résultat voulu. Grâce au développement en clusters, on a

$$\ln \mu_\Lambda^\sigma(A) = m \ln z + \ln Z_A^\sigma - \ln Z_\Lambda^\sigma = m \ln z + \sum_{R \in (\Omega_\Lambda^\sigma \setminus \Omega_A^\sigma)} w(R) \varphi^T(R)$$

et de même

$$\ln \mu_\Lambda^\emptyset(A) = m \ln z + \sum_{R \in (\Omega_\Lambda^\emptyset \setminus \Omega_A^\emptyset)} w(R) \varphi^T(R)$$

où  $w(R) = z^{|R|}$  représente le poids d'un amas  $R$  et  $\varphi^T(R)$  est un coefficient combinatoire dépendant de la géométrie de  $R$  et tel que  $\varphi^T(R) = 0$  si l'amas  $R$  n'est pas connexe. On remarque également que pour qu'un  $R$  appartienne à  $(\Omega_\Lambda^q \setminus \Omega_A^q)$  pour l'une des conditions au bord,  $R$  doit toucher le support de  $A$ .

En comparant les deux, on a donc

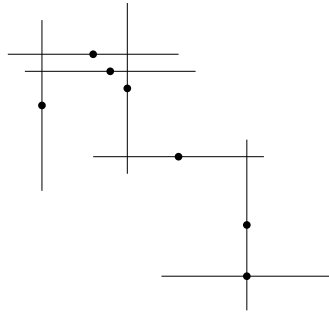


FIGURE 2.4 – Un amas de poids non nul dans le développement en clusters.

$$|\ln \mu_{\Lambda}^{\sigma}(A) - \ln \mu_{\Lambda}^{\theta}(A)| \leq \sum_{R \in (\Omega_{\Lambda}^{\sigma} \setminus \Omega_{\Lambda}^{\theta}) \Delta (\Omega_{\Lambda}^{\theta} \setminus \Omega_{\Lambda}^{\sigma})} |w(R)\varphi^T(R)|.$$

En particulier, tous les amas  $R$  présents dans la somme doivent nécessairement toucher le support de  $A$  mais également toucher la zone d'influence de la condition au bord, et comme tous les amas doivent être connectés et qu'un bâton permet au plus de franchir une distance  $k$ , un tel amas doit avoir au moins  $D/k$  bâtons pour joindre ces deux régions, ce qui est un scénario dont la probabilité est très bien contrôlée par la cluster expansion.

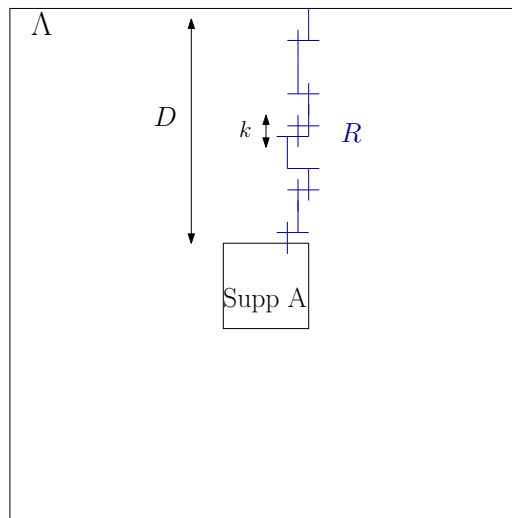


FIGURE 2.5 – Un exemple d'amas reliant le support de  $A$  et le bord du domaine

En sommant sur les points du support de  $A$  dont peuvent partir les amas et en se souvenant

uniquement de la contrainte sur le nombre de bâtons dans  $R$  pour pouvoir atteindre le bord de  $\Lambda$  à partir du support de  $A$ , on a finalement :

$$|\ln \mu_\Lambda^\sigma(A) - \ln \mu_\Lambda^\emptyset(A)| \leq |Supp(A)| \sum_{0 \in R; |R| > D/k} |w(R)\varphi^T(R)| \leq |Supp(A)| z(zk^2)^{D/k} \xrightarrow{D \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après ces calculs, on a donc  $\mu_\Lambda^\sigma(A) \underset{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2}{\sim} \mu_\Lambda^\emptyset(A)$ , donc si ces quantités convergent, elles ont la même limite. Par compacité et unicité de la limite, nécessairement, ces quantités convergent et ce pour toute une classe d'observables locales qui engendrent la tribu des événements locaux. Il y a donc une unique mesure en volume infini, et celle-ci est en particulier invariante par rotation de  $\pi/2$  et par translation.

Par l'analyticité du développement en cluster, on obtient également que les deux densités de centres de bâtons horizontaux et verticaux vérifient

$$\rho_h = \rho_v = z(1 + O(zk^2))$$

et la densité de centres de bâtons est alors donnée par

$$\rho = 2z(1 + O(zk^2)).$$

### Méthode géométrique : Percolation des zones de perte de dépendance.

Une autre façon de montrer ce résultat est de se baser sur des méthodes géométriques de percolation. En effet, une bonne façon de comprendre un résultat d'unicité de la mesure en volume infini est de le voir comme une perte de mémoire de la condition au bord : plus la distance entre le support d'une observable locale et le bord du domaine où s'exerce la condition au bord croît, plus il y a une forte probabilité que des événements de "*perte de mémoire*" apparaissent et séparent ces deux zones, rendant la configuration proche du centre de la boîte indépendante du choix de la condition au bord. Cette idée est à la base de la construction du chapitre [4](#) pour montrer un résultat d'unicité conditionnelle.

Plusieurs critères d'unicité ont été développés lors de l'introduction de ces problématiques, et on choisit de présenter ici une preuve inspirée de techniques de percolation de désaccord (*disagreement percolation*) comme présentées de façon générale par Van den Berg et Maes dans [BM94](#).

Soit  $\Lambda$  un domaine fini, et  $\sigma_1, \sigma_2$  deux conditions au bord quelconques. Sans perte de généralité, on pourra supposer que  $\Lambda$  est un domaine carré de côté  $Nk$  de sorte à ce que  $\Lambda$  soit pavable par des tuiles carrées de côté  $k$ .

La preuve s'appuie sur deux ingrédients clés :

- Si  $\Gamma$  est un circuit de tuiles partitionnant l'espace hors de  $\Gamma$  en deux composantes intérieure et extérieure, alors pour toutes configurations  $R_{int}$  et  $R_{ext}$  de bâtons compatibles contenues respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de  $\Gamma$ ,  $R_{int}$  et  $R_{ext}$  sont compatibles entre elles. En particulier, si une configuration est telle que l'on peut trouver un circuit  $\Gamma$  dont toutes les cases sont vides de tout bâton, alors elle peut être décomposée en deux configurations (intérieure et extérieure) automatiquement compatibles entre elles.
- Soit  $\Delta$  une tuile fixée et  $\omega$  une configuration de bâtons compatibles hors de  $\Delta$ , alors on a, pour n'importe quelle condition au bord  $q$  et pour tout  $p$  tel que  $3zk^2 < p$ ,

$$\mu^q(\Delta \text{ soit vide} \mid R = \omega \text{ sur } \Lambda \setminus \Delta) = \frac{1}{Z_\Delta^\omega} \geq \frac{1}{Z_\Delta^\emptyset} \underset{zk^2 \rightarrow 0}{\sim} e^{-2zk^2} = 1 - 2zk^2 + o(zk^2) \geq 1 - p,$$

où  $Z_{\Delta}^{\omega}$  et  $Z_{\Delta}^{\emptyset}$  sont les fonctions de partition dans la tuile  $\Delta$  avec condition au bord  $\omega$  et condition au bord vide respectivement.

Soit  $p > 0$  fixé et  $z, k$  tels que  $3zk^2 < p$ . Construisons un couplage entre les mesures  $\mu_{\Lambda}^{\sigma_1}$  et  $\mu_{\Lambda}^{\sigma_2}$  en explorant les configurations depuis le bord du domaine  $\Lambda$ . Pour cela, numérotions les tuiles pavant  $\Lambda$  en suivant "une forme d'escargot" : on attribue à la case la plus en haut à gauche le numéro 1 puis on numérote toute la rangée la plus haute du domaine de gauche à droite. Une fois arrivés à la fin de la première ligne, on continue la numérotation en descendant, jusqu'à atteindre le coin en bas à droite, puis on va vers la gauche jusqu'à atteindre le coin en bas à gauche, puis vers le haut jusqu'à atteindre la case la plus à gauche de la deuxième ligne. On tourne alors vers la droite jusqu'à atteindre la case la plus en haut à droite non encore numérotée et ainsi de suite jusqu'à avoir numéroté toutes les cases de  $\Lambda$ . On se donne une suite de variables aléatoires  $(U_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. et uniformes sur  $[0, 1]$ . On dira que deux cases sont voisines si elles se touchent soit par un côté, soit par un coin.

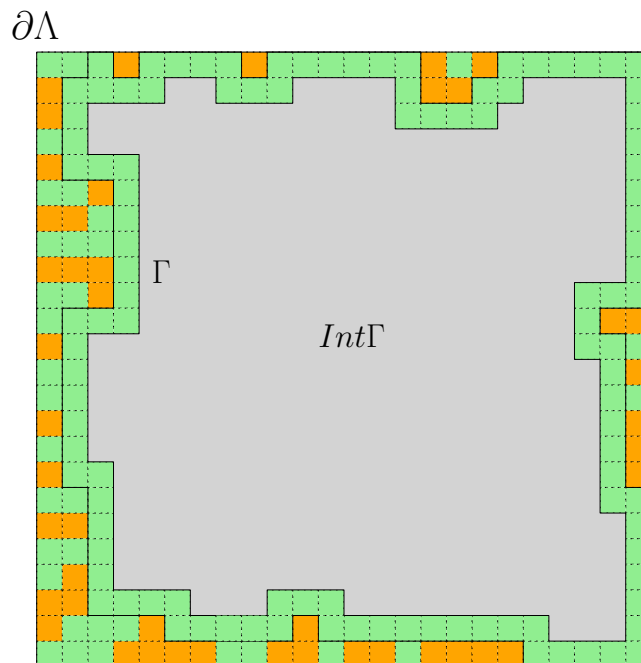


FIGURE 2.6 – Illustration de la procédure d'exploration à partir du bord pour trouver un chemin  $\Gamma$  de cases bonnes séparant le bord de l'intérieur du domaine. Les cases oranges représentent les cases mauvaises.

Construisons deux configurations  $R_1$  et  $R_2$  de proche en proche de la façon suivante.

- À l'étape 1, dans la première case  $\Delta_1$ , les deux conditions au bord induisent deux lois de probabilité sur les configurations restreintes à  $\Delta_1$ . Or, d'après le contrôle sur la probabilité qu'une case donnée soit vide, nécessairement, pour ces deux lois, la probabilité d'être vide dans  $\Delta_1$  est au moins égale à  $1 - p$ . Construisons donc les configurations  $R_1$  et  $R_2$  dans  $\Delta_1$  à l'aide de la variable aléatoire  $U_1$  de telle sorte à ce que  $R_1$  et  $R_2$  suivent les bonnes lois respectives, et que si  $U_1 \leq 1 - p$ ,  $R_1$  et  $R_2$  sont vides dans  $\Delta_1$ . Si  $U_1 > 1 - p$ , on dira

que la case  $\Delta_1$  est *bonne* et qu'elle est *mauvaise* sinon. On retient alors les configurations  $R_1$  et  $R_2$  dans cette case ainsi que le statut de la case.

- Pour  $n \geq 1$ , une fois l'étape  $n$  de l'algorithme réalisée, on a déjà exploré  $n$  cases et découvert les configurations dans ces cases, ainsi que leur statut. Soit  $i_n$  le minimum des indices de cases correspondant à une case adjacente au bord ou voisine d'une case mauvaise déjà explorée. Conditionnellement à  $R_1$  et  $R_2$ , on obtient deux lois de probabilités pour la restriction de la configuration à la case  $\Delta_{i_n}$ , qui vérifient toutes les deux que, quelles que soient  $R_1$  et  $R_2$ , la probabilité que la case soit vide est plus grande que  $1 - p$ . On construit donc  $R_1$  et  $R_2$  dans cette case à l'aide de  $U_{n+1}$  de telle sorte que les configurations aient les bonnes lois et que si  $U_{n+1} \leq 1 - p$ , les deux restrictions des configurations  $R_1$  et  $R_2$  sont vides dans  $\Delta_{i_n}$ .
- Si il n'y a plus de cases à explorer adjacentes soit au bord soit à une case mauvaise déjà explorée, l'algorithme s'arrête (et cela arrive toujours puisqu'il y a un nombre fini de cases). On est alors dans l'une des deux situations suivantes : soit on a exploré toutes les cases, et auquel cas  $R_1$  et  $R_2$  donnent des configurations dans  $\Lambda$  suivant les lois  $\mu_\Lambda^{\sigma_1}$  et  $\mu_\Lambda^{\sigma_2}$  respectivement ; soit toutes les cases non explorées sont dans les intérieurs de circuits de cases bonnes révélées par l'exploration. Dans ce cas, on construit les restrictions des configurations  $R_1$  et  $R_2$  dans chacun des intérieurs  $X_1, \dots, X_m$  de ces circuits avec  $R_1|_{X_i} = R_2|_{X_i}$  distribuées selon la loi  $\mu_{X_i}^0$ . D'après la première observation, cela définit bien deux variables aléatoires  $R_1$  et  $R_2$  ayant pour loi  $\mu_\Lambda^{\sigma_1}$  et  $\mu_\Lambda^{\sigma_2}$  respectivement.

Dans ce couplage, on a construit les configurations de telle sorte que les restrictions de  $R_1$  et  $R_2$  sont les mêmes dans toutes les cases bonnes ou contenues dans l'intérieur d'un circuit de cases bonnes. En particulier,  $R_1$  et  $R_2$  ne peuvent différer que sur des cases mauvaises révélées par l'exploration, donc nécessairement reliées par un chemin de cases mauvaises au bord.

Choisissons maintenant pour paramètre de l'exploration  $0 < p < \frac{1}{8}$ , et montrons qu'avec très grande probabilité, il existe un circuit de cases bonnes délimitant la composante connexe des cases mauvaises touchant le bord et ne s'éloignant pas de  $N^\alpha$  du bord, où  $\alpha > 0$  est un paramètre arbitrairement petit. Notons  $C(\alpha)$  cet évènement et  $P_N^{\sigma_1, \sigma_2}$  la loi du couplage. Remarquons que sur le complémentaire de cet évènement  $C(\alpha)^c$ , on a nécessairement un chemin auto-évitant de longueur  $N^\alpha$  de cases mauvaises partant d'une case du bord. Pour  $x \in \partial\Lambda$  une case du bord, notons  $\Gamma(x)$  l'ensemble des chemins auto-évitants partant de  $x$ . Comme le nombre de chemins ancrés en un point de longueur  $L$  est plus petit que  $7^L$  et que le nombre de points du bord  $\partial\Lambda$  est inférieur à  $C \cdot N$  pour une certaine constante  $C$ , en décomposant l'évènement  $C(\alpha)^c$  selon tous les chemins possibles de longueur au moins  $N^\alpha$  ancrés au bord, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N^{\sigma_1, \sigma_2}[C(\alpha)^c] &\leq \sum_{x \in \partial\Lambda} \sum_{L \geq N^\alpha} \sum_{\gamma \in \Gamma(x); |\gamma|=L} P_N^{\sigma_1, \sigma_2}[\gamma \text{ est constitué de cases mauvaises}] \\ &\leq \sum_{x \in \partial\Lambda} \sum_{L \geq N^\alpha} (7p)^L \leq CN(7p)^{N^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $A$  local dont le support est à distance au moins  $N^\alpha$  du bord, on a

$$|\mu_\Lambda^{\sigma_1}(A) - \mu_\Lambda^{\sigma_2}(A)| \leq P_N^{\sigma_1, \sigma_2}[C(\alpha)^c] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

et ce pour tout évènement local  $A$  et toutes conditions au bord  $\sigma_1, \sigma_2$ , ce qui montre l'unicité de la mesure en volume infini.



Remarquons que l'on aurait également pu prendre  $0 < p < p_c(G)$  où  $p_c(G)$  est le paramètre critique de la percolation par site sur le graphe  $G$  constitué des cases pavant  $\Lambda$  avec la relation de voisinage définie plus haut et utiliser la décroissance exponentielle des probabilités de connexion entre deux points dans une percolation sous-critique (la percolation des cases mauvaises dans ce cas) mais que la version que l'on présente ici a le mérite de donner des bornes simples et une preuve autocontenue.

### 2.2.2 Phase nématique à densité intermédiaire.

#### Construction originale.

L'article fondamental traitant des densités intermédiaires est l'article de M. Disertori et A. Giuliani [\[DG13\]](#). Dans celui-ci, il est prouvé l'existence d'un régime de paramètres dans lequel le système présente un comportement de cristal liquide nématique avec deux phases distinctes correspondant aux deux orientations de bâtons possibles. Nous présentons ici brièvement leurs résultats, en revenant sur les différentes constructions de l'article qui nous semblent cruciales pour comprendre les questions que nous nous sommes posées dans ce travail de thèse.

Leur idée est la suivante : pour pouvoir étudier analytiquement les deux mesures définies par des conditions au bord  $+$  et  $-$  naturelles correspondant aux deux orientations privilégiées, on peut d'abord recouvrir le réseau par des cases de taille de l'ordre de  $k$  (*coarse graining*) puis associer à chaque case un spin  $+$ ,  $0$  ou  $-$  en fonction de l'orientation des bâtons que l'on y voit, ce qui donne une représentation en spins du système. De façon similaire à ce qui est fait dans la théorie de Pirogov-Sinai-Zahradnik, on définit des contours correspondant aux régions où les spins ne sont pas tous localement tous donnés soit par  $+$  soit par  $-$ , et en associant un poids à chacun de ces contours, on réécrit la fonction de partition du système initial en une fonction de partition d'un système d'ensembles de contours. Cependant, à cause de la définition microscopique du modèle, les contours ainsi obtenus interagissent entre eux à longue portée, ce qui empêche d'étudier directement ces contours. Pour contourner cette difficulté, on réécrit le système de contours en un système de polymères basés sur les contours précédents avec une géométrie et des poids plus compliqués. Un polymère est un ensemble de contours au sens précédent avec des filaments de cases les séparant mais sont tels qu'ils interagissent entre eux uniquement par contrainte coeur dur. En contrôlant leur activité par rapport à leur taille, on est alors en mesure d'écrire un développement en clusters convergent, et cela permet d'étudier analytiquement les deux mesures d'intérêt.

Plus précisément, leur théorème est le suivant (la définition précise des mesures  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$  sera donnée dans la suite).

**Theoreme 3** (Disertori, Giuliani [\[DG13\]](#)). *Pour des  $z, k$  tels que  $zk$  est suffisamment petit et  $zk^2$  suffisamment grand, les deux mesures  $\langle \cdot \rangle^q$  pour  $q \in \{+, -\}$  existent. Elles sont invariantes par translation et distinctes. Il existe  $c > 0$  tel que pour toute case  $\Delta$  fixée, en notant  $\chi_\Delta^{-q}$  le poids de toutes les configurations pouvant donner un spin  $-q$  dans la case  $\Delta$ , on a*

$$\langle \chi_\Delta^{-q} \rangle^q \leq e^{-czk^2}.$$

De plus, si  $n_{x_0}$  est la fonction indicatrice qu'il y ait un bâton centré en  $x_0$ , alors

$$\rho = \langle n_{x_0} \rangle^+ = \langle n_{x_0} \rangle^- = z(1 + O(zk, e^{-czk^2})),$$

et

$$\langle n_x n_y \rangle^+ = \langle n_x n_y \rangle^- = \rho^2(1 + O(e^{-c|x-y|/k})).$$

On suppose que le domaine  $\Lambda$  est pavable par des cases carrées de côté  $l$  avec  $l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ .  $l$  est choisi de telle sorte à ce que dans une même case  $\Delta$ , il ne puisse pas y avoir deux centres de bâtons d'orientations différentes. On définit alors trois *spins*  $+, 0, -$  de la façon suivante : on attribue à chaque case ayant uniquement des bâtons horizontaux le spin  $+$ , le spin  $-$  aux cases ayant des bâtons verticaux, et  $0, +$  ou  $-$  aux cases vides. Remarquons que cette attribution n'est donc pas unique, ce qui ne sera pas un problème pour l'analyse faite dans [DG13], mais qui sera un problème crucial à contourner dans la suite. On attribue ensuite à chaque case  $\xi$  avec une configuration de bâtons restreinte  $R_\xi$  l'activité  $z(\xi)$  suivante :  $z(\xi) = z^{|R_\xi|}$  si le spin de  $\xi$  est  $+$  ou  $-$  et  $z(\xi) = -1$  si le spin est  $0$  (pour compenser le fait qu'une case vide est présente avec les trois spins différents).

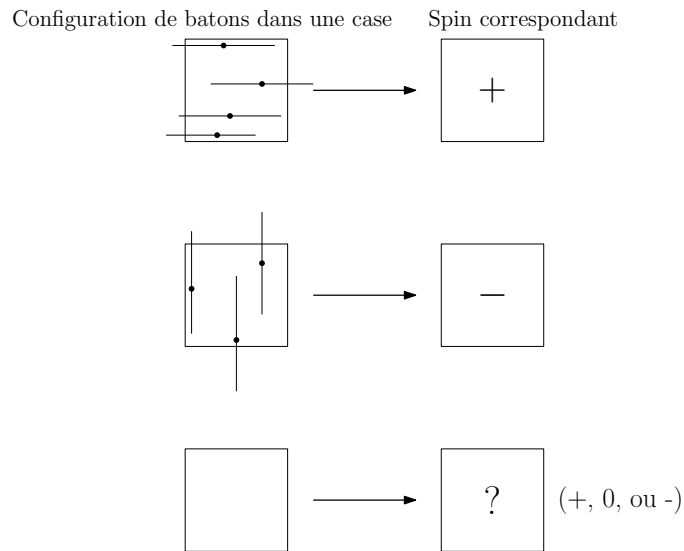


FIGURE 2.7 – Attribution des spins en fonction des bâtons présents dans la case. Dans le cas où la case n'a pas de bâtons, les trois spins sont possibles.

La fonction de partition canonique du système peut alors s'écrire

$$Z_0(\Lambda) = \sum_{\sigma \in \Theta_\Lambda} \sum_{R \in \Omega_\Lambda(\sigma)} \bar{\varphi}(R),$$

où la première somme porte sur toutes les attributions de spins possibles, et la seconde sur les configurations de bâtons compatibles avec cette attribution de spins, et où l'activité  $\bar{\varphi}(R)$  est définie par

$$\bar{\varphi}(R) := \left[ \prod_{\xi \in \Lambda'} z^{R_\xi} \right] \varphi(R),$$

où  $\varphi(R)$  est l'indicatrice de la condition coeur dur.

## 2.2. COMPORTEMENTS AUX DIFFÉRENTES DENSITÉS.

Pour  $q \in \{+, -\}$  on note  $\Theta_\Lambda^q$ , l'ensemble des configurations de spins compatibles avec la condition au bord  $q$  c'est-à-dire les attributions de spins telles que toutes les cases à distance inférieure à 5 du bord de  $\Lambda$  ont toutes un spin  $+$ , et on définit la fonction de partition associée par

$$Z(\Lambda|q) = \sum_{\sigma \in \Theta_\Lambda^q} \sum_{R \in \Omega_\Lambda(\sigma)} \bar{\varphi}(R).$$

Cela permet de définir les mesures  $\langle \cdot \rangle_\Lambda^q$  de façon similaire : si  $A_X$  est une observable locale dont le support  $X$  est inclus dans  $\Lambda$ , alors

$$\langle A_X \rangle_\Lambda^q = \frac{1}{Z(\Lambda|q)} \sum_{\sigma \in \Theta_\Lambda^q} \sum_{R \in \Omega_\Lambda(\sigma)} \bar{\varphi}(R) A_X(R).$$

Si toutes les quantités  $\langle A_X \rangle_\Lambda^q$  convergent quand  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{Z}^2$  pour toute observable locale  $A_X$ , on note  $\langle \cdot \rangle^q$  la mesure en volume infinie ainsi obtenue.

Pour une condition au bord  $q$  fixée, on peut étudier sa fonction de partition  $Z(\Lambda|q)$  en la comparant à  $Z^q(\Lambda)$  - la fonction de partition du modèle ayant uniquement des bâtons de l'orientation correspondant à  $q$  - en introduisant des contours semblables à ceux de la théorie de Pirogov-Sinai-Zahradnik. En effet, en supposant que le domaine  $\Lambda$  est pavable par des carrés de côté  $4l$ , c'est à dire constitués de 16 cases, on dira qu'un carré est *bon* si l'ensemble de ses cases ainsi que les 16 cases directement adjacentes au carré (sa *peau*) sont toutes du même spin  $+$  ou  $-$  et on que le carré est *mauvais* sinon. On définit alors la *frontière* d'une configuration de spins comme étant l'ensemble de ses carrés mauvais. On appellera **contours** les composantes connexes de cette frontière (où deux carrés sont connectés si ils se touchent par un bord ou un coin). La définition de la condition au bord est équivalente à dire que tous les carrés adjacents au bord du domaine sont bons avec une aimantation  $q$ , et on peut définir l'extérieur d'un paysage de spins comme l'ensemble des carrés bons de type  $q$  dans la composante connexe du bord.

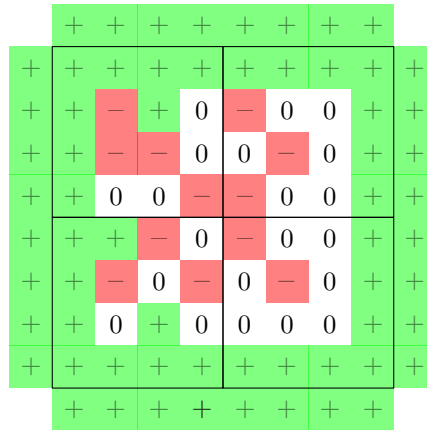


FIGURE 2.8 – Exemple d'un contour de type  $+$  constitué de 4 carrés mauvais.

Cette notion de contours permet de séparer l'espace en régions n'interagissant pas directement entre elles, c'est-à-dire que dans deux régions mauvaises déconnectées, quelles que soient

les configurations de bâtons compatibles avec la condition coeur dur et avec l'attribution des spins dans ces deux régions, les configurations sont nécessairement compatibles entre elles, et de même pour des configurations compatibles dans des régions bonnes n'appartenant pas à la même composante connexe.

Remarquons que tous les *contours extérieurs*, c'est-à-dire ceux contenus dans l'intérieur d'aucun autre contour - et donc touchant la composante connexe du bord du domaine - sont de type  $q$ , c'est-à-dire que les spins des cases de leur peau extérieure sont nécessairement  $q$ , mais que ça peut ne pas être le cas pour des contours non extérieurs.

On décompose ensuite la fonction de partition  $Z(\Lambda|q)$  en fonction des différents ensembles de contours possibles. Pour cela, il est pratique d'utiliser une notion de contour se souvenant de la configuration de bâtons  $R_\gamma$  à l'intérieur du support du contour  $\gamma$ . On définit également la *aimantation externe* et les *aimantations internes*  $m_{int}^j$  d'un contour comme étant le spin partagé par les cases de sa peau extérieure et de la peau de ses différents intérieurs  $Int_j\Gamma$  respectivement. On peut alors réécrire la fonction de partition  $Z(\Lambda|q)$  en fonction des contributions de ses différents ensembles de contours extérieurs :

$$Z(\Lambda|q) = \sum_{\partial \in \mathcal{C}_{ext}(\Lambda, q)} Z_\partial^q(\text{Ext}(\partial)) \prod_{\gamma \in \partial} \left[ \bar{\varphi}(R_\gamma) \prod_j Z_\gamma(Int_j\Gamma | m_{int}^j) \right],$$

où  $Z_\partial^q(\text{Ext}(\partial))$  est la fonction de partition dans l'extérieur des contours  $\partial$  où tous les bâtons doivent être de l'orientation  $q$  et  $Z_\gamma$  indique comme condition au bord supplémentaire d'être compatibles avec les bâtons présents dans les contours  $\gamma$  de  $\partial$ , et  $\mathcal{C}_{ext}(\Lambda, q)$  est l'ensemble des configurations de contours extérieurs possibles. Pour faire apparaître des activités de contours, cette décomposition peut ensuite être écrite sous la forme

$$\frac{Z(\Lambda|q)}{Z^q(\Lambda)} = \sum_{\partial \in \mathcal{C}_{ext}(\Lambda, q)} \prod_{\gamma \in \partial} \left[ \zeta_q^0(\gamma) \prod_j \frac{Z(Int_j\Gamma|q)}{Z^q(Int_j\Gamma)} \right] e^{-W_0^{ext}(\partial)}$$

avec l'activité  $\zeta_q^0(\gamma)$  d'un contour définie par

$$\zeta_q^0(\gamma) = \frac{\bar{\varphi}(R_\gamma)}{Z^q(\Gamma)} \prod_j \frac{Z_\gamma(Int_j\Gamma | m_{int}^j)}{Z(Int_j\Gamma|q)}$$

et le terme d'interactions entre les contours extérieurs de  $\partial$  est donné par

$$e^{-W_0^{ext}(\partial)} = \frac{Z_\partial^q(\text{Ext}(\partial)) \prod_{\gamma \in \partial} \left[ Z^q(\Gamma) \prod_j Z^q(Int_j\Gamma) \right]}{Z^q(\Lambda)}.$$

En développant de façon similaire les quotients de fonctions  $\frac{Z(Int_j\Gamma|q)}{Z^q(Int_j\Gamma)}$ , puis en itérant le processus jusqu'à n'avoir que des contours dont les intérieurs sont si petits qu'ils ne peuvent plus contenir de contours, on obtient une écriture sous la forme

$$Z(\Lambda|q) = Z^q(\Lambda) \sum_{\partial \in \mathcal{C}(\Lambda, q)} \left[ \prod_{\gamma \in \partial} \zeta_q(\gamma) \right] e^{-W(\partial)}$$

où  $\mathcal{C}(\Lambda, q)$  est l'ensemble des configurations de contours possibles,  $\zeta_q(\gamma)$  est un terme d'activité du contour  $\gamma$  (qui est exponentiellement proche de  $\zeta_0(\gamma)$  à des termes de développement en cluster près), et  $e^{-W(\partial)}$  est un terme d'interaction entre les contours de  $\partial$  où le potentiel  $W(\partial)$  s'écrit

en fonction de termes du développement en clusters des configurations de bâtons orientés selon la condition au bord et touchant les différents contours de  $\partial$ .

À cause du terme d'interaction  $e^{-W(\partial)}$ , cette représentation du système n'est pas suffisante pour conclure.

En revanche, en développant le terme d'interaction, on peut obtenir une représentation sous la forme d'un système de *polymères* (voir figure 2.9). Dans ce nouveau système, la seule interaction entre les polymères se fait par une contrainte de non intersection, ce qui permet d'utiliser de nouveau le développement en clusters une fois que l'on a contrôlé leur activité en fonction de leur taille.

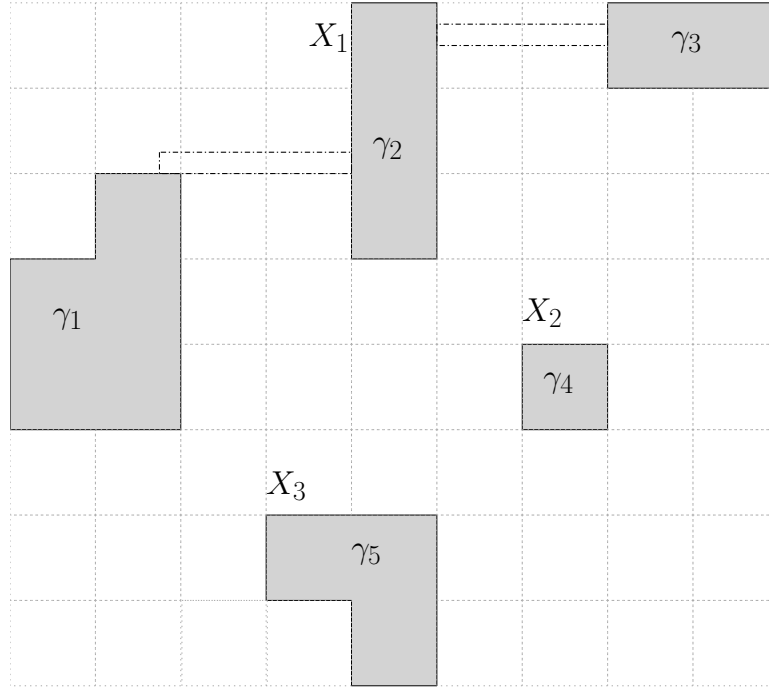


FIGURE 2.9 – Trois polymères  $X_1, X_2, X_3$  dans un environnement de bâtons horizontaux. Chaque polymère est constitué de bouts de contours  $\gamma_i$  reliés entre eux par des filaments horizontaux.

Par souci de concision, on ne donne pas ici la définition précise des polymères ni la définition de leur activité, mais on donne juste une idée graphique de la nature de ces polymères. A partir d'une configuration de contours  $\partial = \{\gamma\}_{\gamma \in \partial}$ , on va obtenir des configurations  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$  où chaque polymère  $X_i$  recouvre géométriquement un ou plusieurs contours  $\gamma$  et, s'il contient plusieurs contours, il doit contenir également des filaments, c'est-à-dire des lignes (ou colonnes, en fonction de  $q$ ) de cases reliant les différents contours entre eux de façon à ce que le polymère soit connecté. En notant  $K_q^{(\Lambda)}(X_i)$  l'activité du polymère  $X_i$  (qui dépend du domaine  $\Lambda$  mais converge exponentiellement vite vers sa limite), on a alors la représentation suivante de la fonction de partition du système :

$$\frac{Z(\Lambda|q)}{Z^q(\Lambda)} = 1 + \sum_{m \geq 1} \sum_{\{X_1, \dots, X_m\}} K_q^{(\Lambda)}(X_1) \dots K_q^{(\Lambda)}(X_m) \phi(\{X_1, \dots, X_m\}),$$

où  $\phi$  est la fonction indicatrice de noyau dur, c'est-à-dire de non intersection des différents polymères  $X_i$ .

Cette nouvelle représentation est exactement de la bonne forme pour pouvoir appliquer les techniques de développement en clusters, et après un travail de contrôle des activités des polymères  $K_q^{(\Lambda)}(X_i)$ , comme  $Z^q(\Lambda)$  et la fonction de partition du système de polymères admettent toutes deux des développements en cluster convergents, on obtient un développement en clusters convergent pour le système :

**Proposition 7.** *Pour  $zk$  et  $(zk^2)^{-1}$  suffisamment petits, on a l'écriture suivante*

$$\log(Z(\Lambda|q)) = \sum_{R \in \Omega_\Lambda^q} z^{|R|} \varphi^T(R) + \sum_{\mathcal{X} \subset \Lambda} \left[ \prod_{X \in \mathcal{X}} K_q^{(\Lambda)}(X) \right] \phi^T(\mathcal{X}).$$

Une fois cette écriture obtenue, on a une écriture analytique du logarithme de la fonction de partition en ses paramètres d'activité. En changeant le paramètre  $z$  en une famille de paramètres  $(z_x)_x$  où chaque bâton possible a son activité associée, on peut donc dériver le logarithme de la fonction de partition par rapport à ces paramètres et ainsi obtenir une nouvelle écriture de l'espérance de toute observable locale, ce qui permet d'obtenir le résultat.

### Liens avec les systèmes de spins.

Une fois ce résultat obtenu, on aimerait obtenir des résultats plus forts de complétude du diagramme de phases comme c'est le cas pour les modèles de spins habituels auxquels notre système ressemble fortement. Toutefois, la géométrie microscopique de ce modèle rend la description précise du modèle de spin associé assez complexe.

Notons d'abord que l'attribution des spins n'est pas mesurable par rapport à la configuration microscopique à cause des trois choix possibles pour le spin d'une case vide. En conséquence, si cela permet quand même d'étudier analytiquement la fonction de partition du système, cela ne permet par exemple pas de définir directement de mesure sur les configurations de spins ou les ensembles de contours. On pourrait utiliser une autre définition naturelle et mesurable de spins en attribuant un spin correspondant à  $+$  uniquement si la configuration possède au moins un bâton horizontal dans la case, et de même pour  $-$ , de sorte à ce que toutes les cases vides aient le spin vide. D'un point de vue physique, cela ne change pas grand chose puisque, aux densités considérées, une case de spin  $+$  a typiquement un nombre extrêmement grand de bâtons et donc a fortiori aurait le même spin dans la nouvelle définition de spin. Toutefois, le fait d'imposer à certaines cases d'avoir au moins un bâton brise la monotonie du système. En effet, à une configuration de spins donnés, une configuration admissible peut devenir non admissible si on lui enlève des bâtons, ce qui change beaucoup de choses pour l'étude du système (par exemple, on ne peut plus utiliser les techniques de développement en clusters dans les régions uniformément magnétisées, et on perd la propriété d'énergie finie puisque certains motifs de spins deviennent impossibles à réaliser). Dans le chapitre 4, on verra comment dépasser ces difficultés pour étudier le système avec cette nouvelle définition mesurable de spins. On verra que beaucoup des outils développés analytiquement ici permettent de développer une théorie de contours compatibles avec la définition mesurable de spins et que ceux-ci ont les mêmes propriétés statistiques que ceux présentés dans ce paragraphe.

Une seconde remarque fondamentale est que la plupart des modèles de spins étudiés en mécanique statistique sont définis à partir de la donnée d'un Hamiltonien et que la majorité des

outils développés pour étudier le diagramme de phases d'un système utilise de façon cruciale les propriétés de ce Hamiltonien. Or, quelle que soit la définition précise de spins que l'on utilise, le poids d'une configuration de spins est obtenu en regardant la somme des poids de ses préimages. Passer d'un tel poids à une écriture avec un Hamiltonien explicite semble a priori très compliqué si l'on considère la complexité des scénarios microscopiques possibles donnant lieu à un même paysage de spins. En revanche, au vu des propriétés microscopiques des bâtons (notamment la portée finie des interactions entre bâtons et la très faible dépendance spatiale passée une certaine distance critique), il devrait être possible de définir un Hamiltonien approché du système, et puisque les outils développés dans la théorie de Pirogov-Sinai-Zahradnik sont généralement stables par perturbations légères du Hamiltonien, on pourrait utiliser ces techniques.

Pourtant, du fait de la complexité du système, il n'est pas évident de trouver un bon choix de Hamiltonien même approché. Il semble clair que deux quantités particulières jouent cependant un rôle central : d'une part le défaut d'entropie d'une case vide, et d'autre part, le défaut d'entropie que crée une interface entre deux cases adjacentes de spins  $+$  et  $-$ . Afin de pouvoir étudier les propriétés des interfaces du système, une première approximation est de prendre un Hamiltonien qui donne un coût élémentaire compatible avec le cas le plus simple où l'interface est une ligne droite séparant deux demi-espaces de spins  $+$  et  $-$  respectivement.

En faisant ce choix, on tombe sur un modèle qui peut être vu comme un modèle de Widom-Rowlinson sur le réseau avec un terme d'interactions à coeur mou. En effet, les modèles de Widom-Rowlinson sont des modèles de présence de particules de deux types (notés généralement  $A$  et  $B$ ) où chaque particule contribue au poids du système par son activité, sans interaction entre particules du même type et où deux particules de types différentes interagissent par un terme de répulsion locale.

Pour deux coefficients positifs  $a, b$ , pour des configurations  $\sigma \in \{-, 0, +\}^\Lambda$ , le Hamiltonien d'une configuration peut être écrit

$$H(\sigma) = aN_{+-}(\sigma) + bN_0(\sigma)$$

où  $N_{+-}$  est le nombre de paires de cases de spins  $+$  et  $-$  adjacentes, et  $N_0$  est le nombre de cases avec le spin  $0$  dans  $\sigma$ .

Dans le chapitre suivant, on étudiera plus en détail ce modèle en montrant comment on peut lui appliquer différents outils existant pour le modèle d'Ising pour obtenir des résultats de complétude de son diagramme de phases.

### 2.2.3 Exploration autour de la seconde transition de phase.

Une de conjectures les plus intrigantes sur ce modèle est la suivante : pour des densités proches de la densité maximale, pour  $k$  suffisamment grand (la valeur conjecturée est  $k \geq 7$ ), il y a une autre transition de phase et le système redevient isotrope.

Cette conjecture est soutenue par plusieurs arguments, dont des arguments entropiques que l'on présente ici (qui sont issus de [GD07]). Depuis leur article initial, certains des auteurs ont réussi à dépasser les limitations de leur algorithme initial et ainsi pu obtenir des simulations numériques mettant en évidence la seconde transition de phase, au moins pour certaines tailles de bâtons ([KRDS12], [KRDS13]). Cependant, à l'heure actuelle, il n'y a pas de preuve rigoureuse de cette conjecture, et on ne sait pas non plus décrire avec précision les propriétés typiques qu'auraient les configurations à très haute densité. Dans les paragraphes suivants, en plus des arguments entropiques, on présente une approche dynamique que l'on a essayée pour chercher à comprendre cette éventuelle seconde transition de phase. À ce stade cependant, cela ne nous permet pas de tirer de conclusion additionnelle sur la validité de la conjecture ou sa preuve.

### Arguments entropiques.

Pour justifier heuristiquement la possibilité d'une seconde transition de phase, les auteurs s'appuient sur des outils numériques et entropiques. La première partie de leur étude consiste à explorer numériquement la phase nématique et notamment la proportion de bâtons de l'orientation minoritaire. A l'aide de simulations, ils obtiennent qu'en augmentant la densité dans la phase nématique, la proportion typique de bâtons minoritaires dans le système devient inférieure à 1 %.

Une description approchée du système dans la phase nématique est donc un système *essentiellement unidimensionnel* avec une densité  $\rho$  de bâtons d'une orientation donnée, et éventuellement des bâtons de l'autre orientation qui s'insèrent dans les espaces vides laissés par les bâtons majoritaires quand au moins  $k$  trous sont laissés successivement. (Dans tout ce paragraphe, la densité  $\rho$  est la densité de sites recouverts par un bâton et varie donc entre 0 et 1, la densité maximale. Elle diffère de la notation des paragraphes précédents par un facteur  $k$ .)

En se basant sur cette observation, ils font l'approximation que l'entropie des mesures de la phase nématique est comparable avec celle donnée par les configurations où les bâtons ne peuvent prendre qu'une orientation fixée.

À une densité  $\rho$  de cases recouvertes par un bâton (donc étant égale à  $k$  fois la densité des centres de bâtons), ils obtiennent ainsi une entropie de ces configurations nématique donnée par celle du système en dimension 1 à cette densité :

$$Z_{nem}(\rho) = \binom{N(1-\rho) - \frac{\rho}{k}N}{\frac{\rho}{k}N} = \frac{[N(\frac{\rho}{k} + 1 - \rho)]!}{(\frac{\rho}{k}N)!((1-\rho)N)!}$$

et donc

$$S_{nem}(\rho) = (1 - \rho + \frac{\rho}{k}) \ln(1 - \rho + \frac{\rho}{k}) - (1 - \rho) \ln(1 - \rho) - \frac{\rho}{k} \ln(\rho k).$$

On a alors  $S_{nem}(1) = 0$  et pour des densités  $\rho = 1 - \varepsilon$  proches de 1, en faisant un développement limité en  $\varepsilon$ , on obtient

$$S_{nem}(\rho = 1 - \varepsilon) = \varepsilon \ln\left(\frac{1}{k}\right) - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon + o(\varepsilon^2).$$

On peut ensuite comparer cette entropie avec celle de configurations *désordonnées* obtenues en enlevant une fraction  $\varepsilon$  de bâtons à des configurations *totalelement compactes* utilisant à part égale des bâtons horizontaux et verticaux.

Pour ces configurations désordonnées, on obtient une entropie approximative donnée par

$$S_{dis}(\rho = 1 - \varepsilon) \approx S_{dis}(1) + \frac{1}{k} \left( \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + (1 - \varepsilon) \ln\left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right) \right).$$

Pour estimer  $S_{dis}(1)$ , exhibons des configurations désordonnées à forte entropie quand  $\rho = 1$ .

La façon la plus simple d'en construire est de considérer un domaine pavable par des carrés de côté  $k$  et dans chaque carré, de mettre soit  $k$  bâtons horizontaux, soit  $k$  bâtons verticaux. Cela permet déjà d'obtenir une borne  $S_{dis}(1) \geq \frac{2}{k^2}$ . Toutefois, on peut construire d'autres configurations donnant une entropie bien plus grande (voir figure [2.10](#)).

Une autre construction que l'on propose (et que l'on peut raffiner pour obtenir de meilleures bornes) est la suivante. Supposons le domaine pavable par des carrés de côté  $2k$ . Dans chacun des carrés, coupons le domaine en deux rectangles de dimension  $k \times 2k$  dans l'un des deux sens possibles (ce qui n'a peu d'impact sur l'ordre de grandeur de l'entropie que l'on obtient pour de grandes valeurs de  $k$  mais peut être pertinent pour de faibles valeurs de  $k$ ). Dans un rectangle vertical par exemple, on peut construire  $k$  configurations distinctes en insérant un bloc



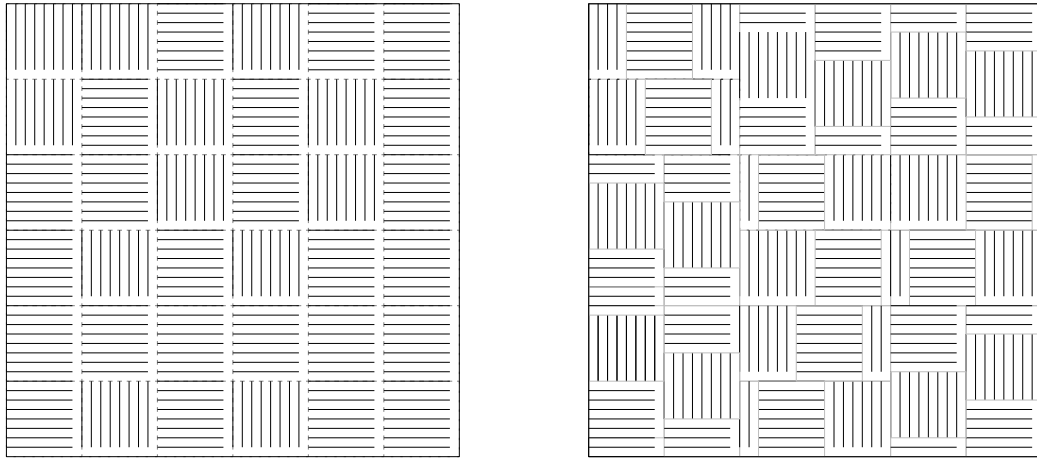


FIGURE 2.10 – Deux types de configurations désordonnées à la densité maximale : à gauche, à partir d'un pavage par carrés de  $k \times k$ , à droite par des rectangles de  $2k \times k$ .

de  $k$  bâtons verticaux à une hauteur donnée et en remplissant le reste du rectangle par des bâtons horizontaux. Cela fournit  $2k^2$  configurations différentes par carré et donc une entropie  $S_{dis}(1) \geq \frac{\ln k}{2k^2}$  (cf figure 2.10).

En utilisant ce type d'arguments multi-échelles, nous avons cherché à trouver d'autres types de motifs désordonnés fournissant une entropie plus grande, toutefois, nous n'avons pas réussi à trouver de types de configurations dépassant l'entropie des configurations découpées en bandes de largeur  $k$  (figure 2.11). En effet, si le domaine est de hauteur multiple de  $k$ , on peut le découper en bandes horizontales de largeur  $k$ , et remplir chaque bande par des blocs de  $k$  bâtons horizontaux séparés par des bâtons verticaux.

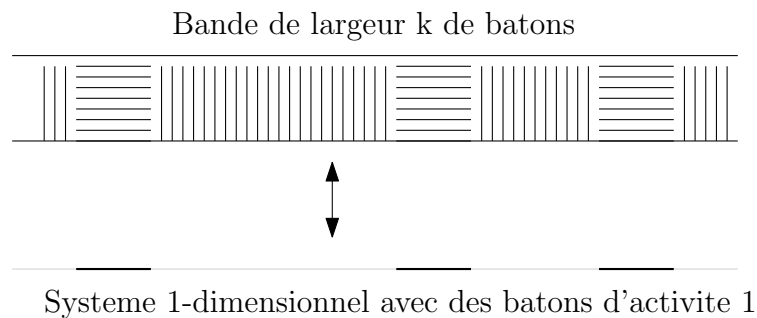


FIGURE 2.11 – Une configuration totalement compacte sur une bande et le système 1-dimensionnel correspondant.

Ce système étant essentiellement *1-dimensionnel*, pour calculer l'entropie de ces configurations, remarquons que sur une bande de dimension  $k \times N$ , en notant  $Z_N$  la fonction de partition,

la suite  $(Z_N)_N$  vérifie la relation de récurrence suivante : en fonction de si la première colonne est occupée par un bâton vertical ou par le début de  $k$  bâtons horizontaux, on a, pour  $N > k$

$$Z_N = Z_{N-1} + Z_{N-k},$$

et donc, en notant  $\lambda$  la plus grande solution de  $\lambda^k = \lambda^{k-1} + 1$ , on a  $Z_N^{1/N} \rightarrow \lambda$ .

Pour trouver une approximation de  $\lambda$  en fonction de  $k$  au moins pour les  $k$  grands, remarquons tout d'abord que nécessairement,  $1 < \lambda < 2$  et en notant  $\lambda = 1 + v_k$ , nécessairement  $v_k \rightarrow 0$  et en écrivant  $v_k = \frac{u_k}{k}$ , on a

$$k = u_k e^{(k-1) \ln(1 + \frac{u_k}{k})}$$

et on en déduit que  $u_k \sim \ln(k)$  (on peut aller plus loin et obtenir  $u_k$  de l'ordre de  $\ln(k) - \ln(\ln(k))$ , mais une telle précision ne change pas la validité de l'argument). Donc finalement, pour  $k$  grand, on a  $\lambda \approx 1 + \frac{\ln(k)}{k}$ . Cela fournit une borne approximative des configurations désordonnées totalement compactes :

$$S_{dis}(1) \geq \frac{\ln(\lambda)}{k} \approx \frac{\ln(k)}{k^2}.$$

Dans un article très récent [SDR2], en utilisant un argument de convexité, les auteurs montrent que cette borne est du bon ordre de grandeur.

En comparant ainsi les densités proches de la densité compacte, on voit que

$$S_{dis}(\rho = 1 - \varepsilon) > S_{nem}(\rho = 1 - \varepsilon)$$

pour des densités  $\rho > \rho^{(2)}$  pour un certain  $\rho^{(2)}$ , mais que comme  $S_{nem}$  croît en  $-\varepsilon \ln(\varepsilon)$  alors que  $S_{dis}$  croît en  $-\frac{\varepsilon}{k} \ln(\varepsilon)$ , nécessairement, les configurations nématiques deviennent celles avec la plus grande entropie pour une densité correspondant au  $\varepsilon$  tel que  $S_{dis}(1) - \frac{\varepsilon}{k} \ln(\varepsilon) = -\varepsilon \ln(\varepsilon)$ , ce qui, en prenant pour  $S_{dis}(1)$  l'ordre de grandeur de la borne obtenue plus tôt, donne une inversion des configurations d'entropie prédominante à une densité

$$\rho^{(2)} \approx 1 - \frac{C}{k^2},$$

ce qui est l'ordre de grandeur de la densité à laquelle on s'attend à avoir la seconde transition de phase.

### Stabilité des bâtons d'une orientation donnée.

Pour essayer de comprendre la potentielle seconde transition de phase, nous nous sommes demandés si l'on pouvait voir une différence de comportement sur des modèles simplifiés où l'on force l'apparition d'un bâton vertical dans un environnement rempli de bâtons horizontaux à l'équilibre. On regarde si le système de bâtons horizontaux à l'équilibre est *stable*, c'est-à-dire que dynamiquement, les bâtons verticaux pouvant ainsi apparaître finissent par être détruits par la dynamique, ou si ce système est *instable*, c'est-à-dire que l'apparition d'un bâton vertical peut créer un amas de bâtons verticaux stables au milieu des bâtons horizontaux.

**Description du modèle utilisé.** Pour un choix de paramètres  $k, z$ , on se place dans une bande horizontale de dimension que l'on précisera à chaque fois (de taille telle que l'on puisse avoir au plus un bâton vertical par colonne). On considère un système rempli de bâtons horizontaux à l'équilibre, et on introduit initialement un bâton vertical à une position donnée. Le système

évolue ensuite de la façon suivante : étant donnée l'ensemble des bâtons verticaux à un instant  $N$ , on obtient la nouvelle configuration soit en ajoutant un bâton dans la colonne directement à droite du bâton le plus à droite de la configuration, soit en supprimant le bâton le plus à droite de la configuration, et ce avec des poids respectifs compatibles avec le fait que l'environnement de bâtons horizontaux reste à l'équilibre.

Ainsi, on suit un ensemble de bâtons verticaux dans des colonnes successives dont le front avance ou recule de 1 à chaque étape. La dynamique s'arrête si l'on supprime le dernier bâton vertical.

On cherche à voir si il existe des domaines tels que le système ait des comportements différents en fonction de l'activité  $z$ .

Le paramètre clé du système est  $\lambda$ , le paramètre qui décrit la croissance exponentielle de la fonction de partition du système 1 dimensionnel  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (Z_n)^{1/n}$  de telle sorte que

$$\lambda^i \approx \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{Z_{N+i}}{Z_N}$$

(on fera cette approximation dans toute la suite) et qui vérifie la relation fondamentale  $\lambda^k = \lambda^{k-1} + z$ , où  $z$  est l'activité d'un bâton. En particulier, à  $k$  fixé, quand l'activité  $z$  tend vers  $+\infty$ ,  $\lambda$  se comporte comme  $z^{1/k}$ , et on a trivialement  $\lambda^k > z$ .

On considère la dynamique dans trois domaines différents : dans une bande de largeur  $k$ , dans une bande de largeur  $k+l$  avec  $1 \leq l < k$ , puis dans un domaine cylindrique de la forme  $\mathbb{Z}/(k+l)\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Ce dernier cas est le seul où l'on verra un comportement intéressant.

**Dynamique dans une bande de largeur  $k$ .** Dans une bande de largeur  $k$ , il n'y a que deux opérations élémentaires : soit ajouter un bâton vertical à droite du dernier, soit supprimer le dernier. Notons  $E_i$  l'état du système où le bâton le plus à droite est en position  $i$

Pour que les poids soient compatibles avec le fait que le système de bâtons horizontaux soit à l'équilibre dans le volume restant, ces poids doivent être proportionnels à

$$T(E_i \mapsto E_{i+1}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{z Z_N^k}{Z_{N+1}^k} = \frac{z}{\lambda^k},$$

et

$$T(E_i \mapsto E_{i-1}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{Z_{N+1}^k}{z Z_N^k} = \frac{\lambda^k}{z}$$

donc  $T(E_i \mapsto E_{i+1}) < T(E_i \mapsto E_{i-1})$  (car  $\lambda^k > z$ ), et donc si on regarde la variable aléatoire donnant  $i$  la position du dernier bâton avant de toucher 0, celle-ci est donnée par une marche aléatoire à plus proche voisin sur  $\mathbb{N}$  avec un biais négatif, et donc toute excursion revient à 0 en temps fini p.s., ce qui veut dire que pour notre dynamique, presque sûrement, il y a extinction des bâtons verticaux dans le système, donc le système composé uniquement de bâtons horizontaux à l'équilibre est *stable*.

**Dynamique dans une bande de largeur comprise entre  $k+1$  et  $2k-1$ .** On se place cette fois dans une bande de largeur  $k+l$  avec  $1 \leq l < k$  (les cas où la largeur est plus grande que  $2k$  ne sont pas traités, non par leur manque d'intérêt, mais à cause de la grande difficulté de dénombrer facilement les scénarios possibles).

Commençons par le cas où la largeur est de  $k+1$ . Un bâton vertical a donc exactement deux positions possibles, collé au bord haut ou au bord bas, ce que l'on appellera les deux *types* de bâtons. La dynamique est déjà plus complexe puisque les taux de progression vont dépendre du

dernier *motif* visible. Plus précisément, on peut classifier les configurations en deux parties. Soit tous les  $j \geq 2$  derniers bâtons ont le même type, et auquel cas, on dira que la configuration est de type  $E_j$ . Soit le dernier bâton n'a pas le même type que les précédents et dans ce cas, on dit que la configuration est dans  $F_i$  où  $i \geq 1$  est la longueur du groupement de bâtons de l'autre type précédant le dernier bâton (on dira qu'il y a un *trou* de longueur  $i$  - voir figure 2.12).

Les deux opérations d'ajout et de suppression du dernier bâton sont compatibles avec ces classes de configuration. En effet, après ajout d'un bâton, en fonction du type du bâton rajouté, en partant d'une configuration de  $E_i$ , la nouvelle configuration fait partie de  $E_{i+1}$  ou de  $F_i$ , et en partant de  $F_i$ , on obtient une configuration de  $E_2$  ou de  $F_1$ . De même pour la suppression d'un bâton : en partant d'une configuration de  $F_i$ , on obtient une configuration de  $E_i$ , et en partant d'une configuration de  $E_i$  avec  $i \geq 2$ , on tombe dans une configuration de  $E_{i-1}$  (avec la convention  $E_1 = \bigcup_{i \geq 1} F_i$ ).

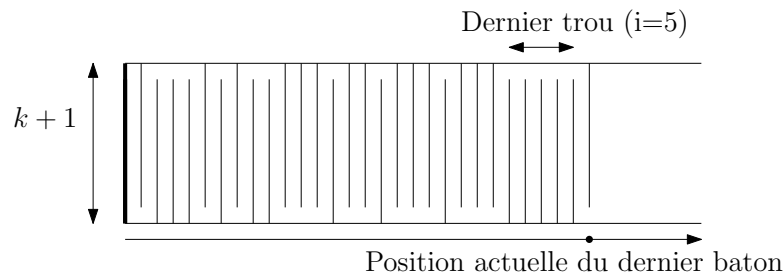


FIGURE 2.12 – Un exemple de configuration de  $F_5$ .

Pour calculer les taux de transition du système, on remarque que quand on ajoute un bâton d'un type différent des derniers, on crée de ce fait un trou de longueur  $i$ , ce qui se traduit en termes de fonctions de partition par un terme  $\frac{Z_i}{\lambda^i} = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_i \frac{Z_N}{Z_{N+i}}$ . On obtient alors, si  $i \geq 2$

$$T(E_i \rightarrow E_{i-1}) = \frac{\lambda^k}{z}; T(E_i \rightarrow E_{i+1}) = \frac{z}{\lambda^k}; T(E_i \rightarrow F_i) = \frac{z}{\lambda^k} \frac{Z_i}{\lambda^i}$$

et si  $i \geq 1$

$$T(F_i \rightarrow E_i) = \frac{\lambda^k}{z} \frac{\lambda^i}{Z_i}; T(F_i \rightarrow E_2) = \frac{z}{\lambda^k}; T(F_i \rightarrow F_1) = \frac{z}{\lambda^k} \frac{1}{\lambda}.$$

En calculant numériquement ces taux, on se rend compte que pour toute configuration initiale, en calculant la différence entre les taux de rajouts et de suppression d'un bâton, le biais est toujours négatif (c'est-à-dire qu'enlever un bâton est toujours favorisé par le système, voir figure 2.13), ce qui nous fait dire que le système de bâtons horizontaux à l'équilibre est *stable*.

Intéressons-nous désormais au cas de la largeur  $k+l$  avec  $1 \leq l < k$ . Cette fois, chaque bâton vertical a  $l+1$  positions possibles, ce qui nous donne  $l+1$  types possibles indexés par leur ligne la plus haute par exemple. La situation est semblable à celle pour la largeur  $k+1$  : l'ajout ou la suppression du dernier bâton libère des espaces vides bloqués auparavant par ce dernier bâton. Les taux font donc faire apparaître pour chacun de ces espaces un ratio de fonction de partitions dépendant de la taille du trou correspondant (ce qui concerne au plus  $l$  lignes).

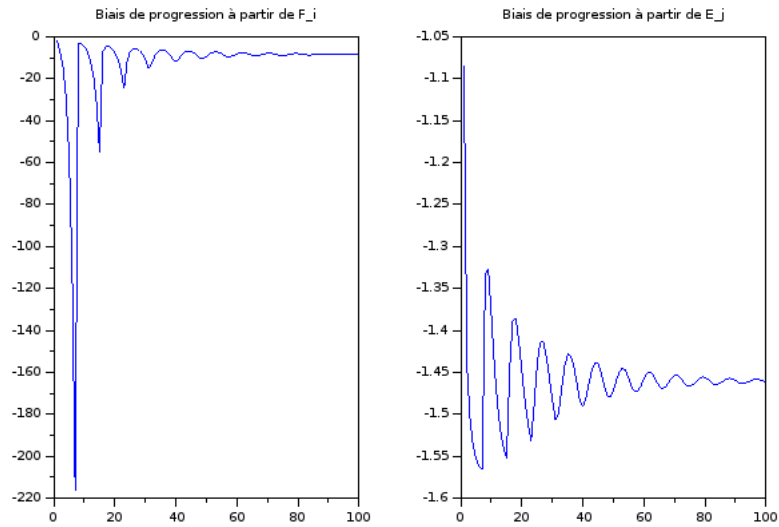


FIGURE 2.13 – Biais de progression entre les taux de rajout d'un bâton et de suppression du dernier bâton dans les situations  $F_i$  et  $E_j$ , pour  $k=10$  et  $z=100$ .

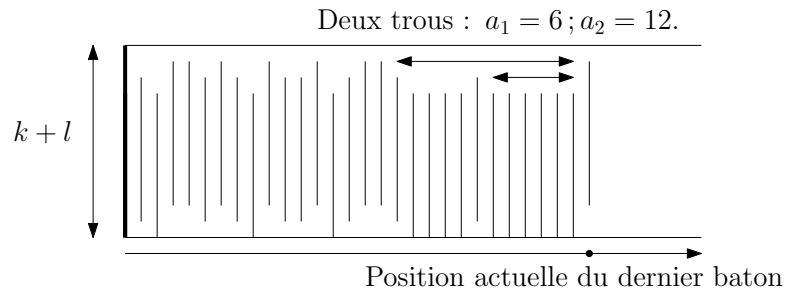


FIGURE 2.14 – Un exemple d'avancement de bâtons verticaux dans une bande de hauteur  $k+l$ .

Ainsi, quand on passe d'une configuration  $\eta$  à une configuration  $\eta'$  en ajoutant un bâton, on crée un nombre de trous dépendant de la différence entre le numéro du type du dernier bâton de  $\eta$  avec celui de  $\eta'$ , et en notant  $a_i$  les tailles de chaque trou, on obtient la formule suivante pour le taux de passage de  $\eta$  à  $\eta'$  :

$$T(\eta \rightarrow \eta') = \frac{z}{\lambda^k} \prod_{trous(\eta')} \frac{Z_{a_i}}{\lambda^{a_i}},$$

et donc en sommant sur toutes les images possibles de  $\eta$ , on obtient le taux d'avancement du

système à partir de  $\eta$ , donné par :

$$\tau(\eta) = \frac{z}{\lambda^k} \left( \sum_{j=1}^{l+1} \prod_i \frac{Z_{a_i^j}}{\lambda^{a_i^j}} \right) - \frac{\lambda^k}{z} \prod_i \frac{\lambda^{a_i^-}}{Z_{a_i^-}},$$

où l'exposant  $j$  fait référence à la configuration  $\eta^j$  obtenue en ajoutant à  $\eta$  un bâton d'indice  $j$ , et l'exposant  $-$  fait référence à la configuration  $\eta^-$  obtenue à partir de  $\eta$  en supprimant son dernier bâton, et les entiers  $a_i^*$  sont les longueurs des trous sur la  $i$ -ième ligne de la configuration correspondant à  $*$ .

Le comportement précis des rapports  $\frac{Z_a}{\lambda^a}$  est compliqué à étudier analytiquement, mais on peut montrer au moins numériquement que pour tout  $a \geq 1$ , on a  $\frac{Z_a}{\lambda^a} \leq \frac{1}{\lambda} < 1$  (figure 2.15).

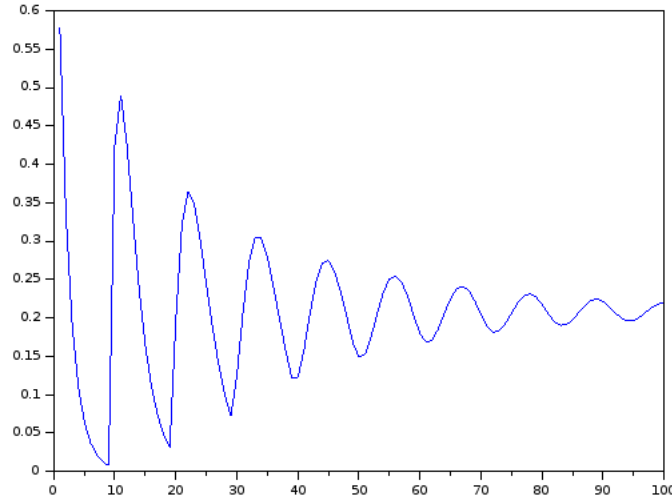


FIGURE 2.15 – Taux  $\frac{Z_i}{\lambda^i}$  pour  $k = 10$ ,  $z = 100$ .

On voit alors qu'une condition suffisante pour avoir un taux strictement négatif est la suivante :

$$\sum_{j=1}^{l+1} \prod_i \frac{Z_{a_i^j}}{\lambda^{a_i^j}} < \left( \frac{\lambda^k}{z} \right)^2.$$

On remarque ensuite qu'une configuration dont l'indice diffère de celui du dernier bâton de  $j$  crée nécessairement des trous sur au moins  $j$  lignes. On a donc une majoration sous forme d'une somme géométrique :

$$\sum_{j=1}^{l+1} \prod_i \frac{Z_{a_i^j}}{\lambda^{a_i^j}} \leq 1 + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \lambda^{-j} = 1 + \frac{2}{\lambda} \frac{\lambda^{-\lfloor k/2 \rfloor} - 1}{\lambda^{-1} - 1}.$$

Posons donc

$$T(k, z) = \left(\frac{\lambda^k}{z}\right)^2 - 1 + 2\frac{\lambda^{-\lfloor k/2 \rfloor} - 1}{\lambda - 1},$$

qui minore uniformément le biais vers la gauche du système. Ainsi, si cette quantité est strictement positive, il y a un biais de progression uniforme vers la gauche dans le système et donc la destruction du dernier bâton est toujours entropiquement favorisée et ce pour tout  $l < k$ . En faisant l'étude numérique, on se rend compte que c'est bien le cas (voir figure 2.16) : le biais augmente avec la taille  $k$  des bâtons, et à  $k$  fixé, cette quantité est toujours positive. Ainsi, les bâtons horizontaux à l'équilibre sont encore *stables*.

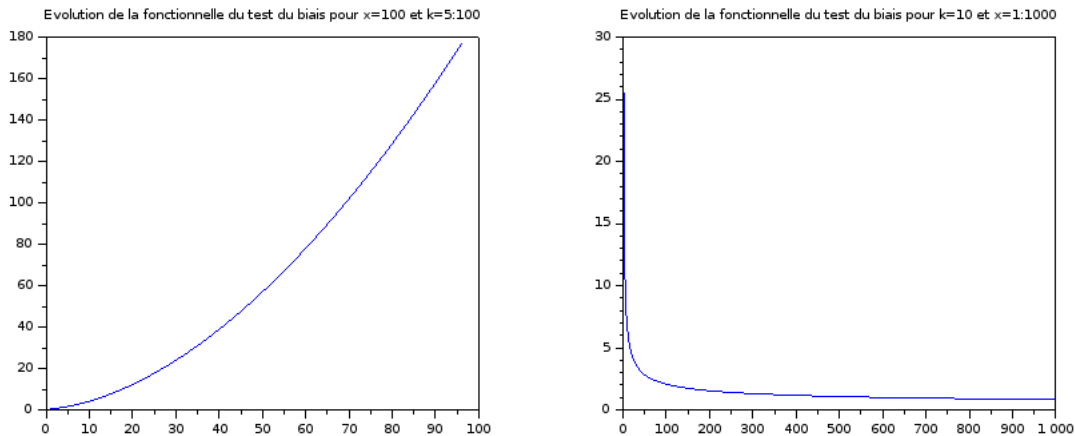


FIGURE 2.16 – Évolution de la fonctionnelle du biais en fonction de  $k$  et de l'activité (notée ici  $x$ ).

Puisque dans toutes les situations étudiées, on montre une stabilité du système de bâtons horizontaux à l'équilibre, on abandonne l'idée de voir apparaître la seconde transition de phase dans l'étude d'une dynamique d'apparition de bâtons verticaux dans un environnement de bâtons horizontaux pour ce type de domaines.

### Dynamique dans un environnement périodique.

On se place dans le cas périodique  $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Comme précédemment, les taux de suppression et d'ajout de bâtons se calculent en fonction des trous qui apparaissent ou disparaissent et il y a  $k$  positions de bâtons possibles qui donnent  $k$  types distincts.

Remarquons que si l'on force les deux configurations à avoir des bâtons successifs de types différents, la suppression du dernier bâton ouvre toujours un trou de taille 1, et les ajouts de bâtons n'ayant pas le même type que le dernier créent tous des trous de taille 1. Ainsi si l'on autorise uniquement la création de bâtons pour des types différents du dernier bâton, toutes les configurations ont les mêmes taux (voir figure 2.17). Pour cette dynamique, les taux d'avancée du système se calculent simplement et valent tous

$$T(k, z) = \frac{zk}{\lambda^{k+1}} - \frac{\lambda^{k+1}}{z}.$$

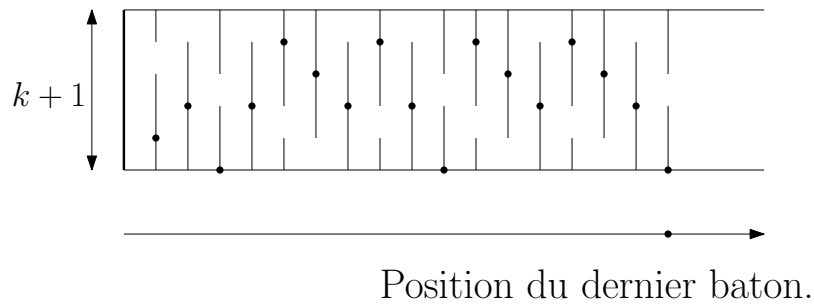


FIGURE 2.17 – Dynamique dans un environnement périodique où l'on se restreint aux configurations où l'on change d'indice entre chaque bâton.

Il est clair que la progression du front selon cette dynamique est dominée stochastiquement par celle de la dynamique étudiée précédemment. En particulier, si les taux sont positifs pour cette dynamique, ils sont également positifs pour la dynamique étudiée précédemment. Graphiquement (figure 2.18), on voit alors quelque chose de très intéressant : pour des activités suffisamment fortes, on a trois plages de comportements distincts en fonction de la taille des bâtons.

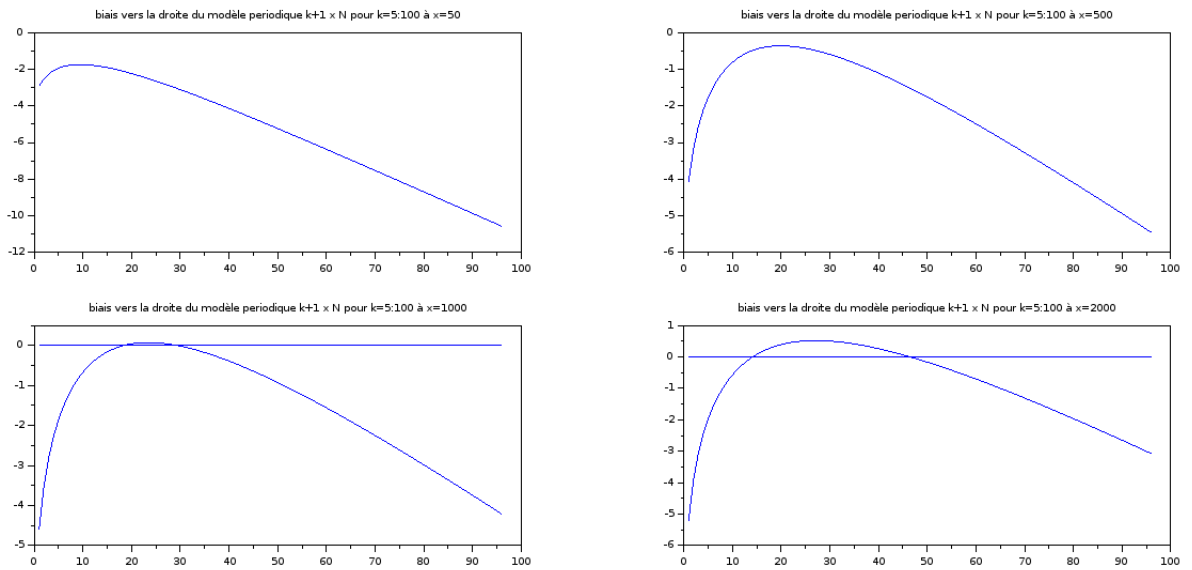


FIGURE 2.18 – Taux d'avancée en fonction de la taille des bâtons  $k$ , à plusieurs activités  $x$  ( $x = 50, 500, 1000, 2000$ ).



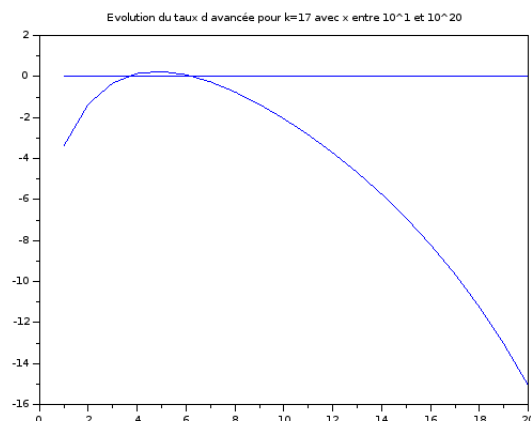


FIGURE 2.19 – Taux d'avancée à  $k$  fixé ( $k = 17$ ) pour des valeurs de l'activité allant de  $10^1$  à  $10^{20}$ .

À  $k$  fixé, comme  $\lambda > \frac{1}{z^{1/k}}$ , les taux vérifient

$$T(k, z) = \frac{zk}{\lambda^{k+1}} - \frac{\lambda^{k+1}}{z} \leq \frac{k}{z^{1/k}} - z^{1/k} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -\infty,$$

donc en particulier deviennent négatifs à très forte densité. Donc si  $k$  est tel que le taux devient positif à un moment, il y a **deux transitions de phases en  $z$** .

Avant de prouver ce résultat, commençons par trouver un encadrement de  $\lambda$ . Pour cela, comme  $\lambda^k - \lambda^{k-1} = z$ , on peut voir  $\lambda$  comme point fixe de l'expression  $f(u) = (\frac{z}{u-1})^{1/(k-1)}$ . Puisque  $\lambda$  est un point fixe et que  $f$  est décroissante, comme  $f(2) = z^{1/(k-1)}$ , on a les deux situations suivantes : si  $\lambda \leq 2$ , alors par décroissance,  $\lambda \geq f(2) = z^{1/(k-1)}$ , et si  $\lambda \geq 2$ , alors  $\lambda \leq z^{\frac{1}{k-1}}$ . Donc soit  $\lambda \in [2, z^{\frac{1}{k-1}}]$ , soit  $\lambda \in [z^{\frac{1}{k-1}}, 2]$ .

Une remarque est que cela permet déjà d'obtenir des approximations de  $\lambda$  à  $k$  fixé quand  $z$  tend vers l'infini car on a

$$|f'(\lambda)| < 1 \iff \frac{\lambda}{\lambda-1} = 1 + \frac{1}{\lambda-1} < k-1 \iff \lambda > 1 + \frac{1}{k-2},$$

ce qui est vérifié pour  $\lambda \geq 2$  par exemple, donc le point fixe est attracteur quand  $z^{\frac{1}{k-1}} \geq 2$ , et en itérant la fonction à partir de 2, on obtient des approximations successives de  $\lambda$ . Par exemple, en itérant deux fois, on obtient une quantité équivalente à  $z^{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{(k-1)^3}}$ , et en poursuivant, la suite des exposants de  $z$  que l'on obtient est une série alternée convergeant vers  $\frac{1}{k}$  ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur de  $\lambda \approx z^{\frac{1}{k}}$  donné plus tôt.

Nous pouvons désormais énoncer et démontrer notre résultat.

**Proposition 8.** Soit  $T(k, x) = \frac{zk}{\lambda^{k+1}} - \frac{\lambda^{k+1}}{z}$  le taux d'avancée du système de paramètres  $k$  et  $z$ . Pour  $k > 16$ ,  $T(k, z) > 0$  dès que  $z \in [\frac{2^{(k+1)}}{\sqrt{k}}, k^{(k-1)/4}]$ . De plus, il existe un  $A > 0$  tel que  $T(k, z) < 0$  pour tous les  $z > A$ .

*Démonstration.* Fixons  $k$ . Comme  $\lambda > z^{1/k}$ , on sait que  $T(k, z) < k/z^{1/k} - z^{1/k} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -\infty$ , donc pour  $z > A$ ,  $T(k, z) < 0$ .

Distinguons deux cas :

- Si  $z < 2^{k-1}$ , on a  $\lambda \in [z^{\frac{1}{k-1}}, 2]$  donc  $\lambda < 2$  et  $T(k, z) > \frac{zk}{2^{k+1}} - \frac{2^{k+1}}{z}$ . Or

$$\frac{kz}{2^{k+1}} - \frac{2^{k+1}}{z} > 0 \iff \sqrt{k} > \frac{2^{k+1}}{z} \iff 2^{k-1} > z > 2^{k-1} \frac{4}{\sqrt{k}},$$

ce qui est possible dans un intervalle non trivial si  $k > 16$ . Donc si  $k > 16$ ,  $T(k, x) > 0$  pour  $2^{k-1} \frac{4}{\sqrt{k}} < z < 2^{k-1}$ .

- Si  $z > 2^{\frac{1}{k-1}}$ , on a  $\lambda < z^{\frac{1}{k-1}}$ , donc  $T(k, z) > \frac{kz}{z^{\frac{k+1}{k-1}}} - \frac{z^{\frac{k+1}{k-1}}}{x} = \frac{k}{z^{\frac{2}{k-1}}} - z^{\frac{2}{k-1}}$  et

$$\frac{k}{z^{\frac{2}{k-1}}} - z^{\frac{2}{k-1}} > 0 \iff 2^{k-1} < z < k^{(k-1)/4},$$

ce qui fournit un autre intervalle non trivial dès que  $k \geq 16$ .

En regroupant ces deux cas, on a donc pour  $k > 16$ ,  $T(k, z) > 0$  dès que  $z \in [\frac{2^{(k+1)}}{\sqrt{k}}, k^{(k-1)/4}]$ .  $\square$

Ce résultat nous permet d'avoir une description heuristique de ce qui devrait se passer dans pour le système original dans ce domaine périodique (et de façon similaire quand la largeur du cylindre est entre  $k + 1$  et  $2k - 1$ ). Notons  $r$  le *paramètre nématique* du système, c'est-à-dire l'espérance de la proportion de bâtons verticaux sur l'ensemble des bâtons du système. On devrait alors avoir le comportement suivant en fonction de la densité  $\rho$  (voir figure 2.20) :

- Quand  $\rho$  est proche de 0, on est dans le même cadre que celui étudié à faible densité :  $r$  est proche de  $1/2$ . (On peut montrer que  $r = \frac{1}{2} + O(zk^2)$ ).
- Quand  $\rho$  devient plus grand, la forme du domaine favorise les bâtons verticaux, on est dans le cadre où les bâtons horizontaux sont stables et  $r$  s'éloigne inférieurement de  $1/2$ .
- Quand la densité devient encore plus forte, les bâtons verticaux qui apparaissent se stabilisent et envahissent le système :  $r$  augmente et dépasse  $1/2$ .
- Enfin, le comportement pour  $\rho$  proche de 1 n'est pas clair. Il est probable que  $r$  tende vers 0 car la plupart des motifs impliquant des bâtons verticaux créent des espaces vides, et donc un défaut de densité.

Le lien entre la dynamique dans un cylindre et celle dans le plan n'est pas clair, mais il est intéressant de voir que le système présente trois catégories de comportements distincts (avec le quatrième cas qui devrait être un artefact de la spécificité du domaine), qui correspondent au moins heuristiquement aux classes de comportements attendus pour le système dans le plan : des configurations sans orientation privilégiée à basse densité, puis une plage de densité où les configurations ordonnées selon une orientation prévalent, et enfin, à haute densité, les configurations ordonnées dans une direction ne sont plus stables et le système produit des configurations mixtes utilisant les deux types de bâtons.

### Remarque bibliographique.

Dans un article soumis pendant la rédaction de ce manuscrit de thèse ([SDR22]), certains des auteurs des articles précédents ont continué leur étude numérique et entropique de la seconde

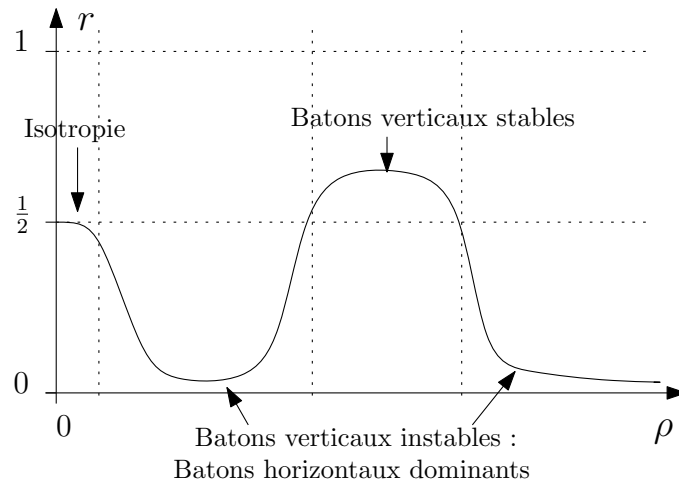


FIGURE 2.20 – Un comportement vraisemblable du paramètre nématique en conditions périodiques.

transition de phase. Si ce nouvel article ne donne pas de résultats de nature nouvelle permettant de prouver rigoureusement la conjecture sur la seconde transition de phase, les explorations numériques et entropiques ont des similarités avec ce que nous avons exploré de notre côté. Déjà dans la modification précédente de l'algorithme ([KRDS12] [KRDS13]), les bandes de tailles  $k \times \infty$  jouaient un rôle important, ce qui fait écho à notre étude du cas dans des bandes périodiques. Dans ce nouvel article, l'étude globale est faite pour ces bandes et la question de la généralisation à des bandes de hauteur plus grande est posée.

De plus, via leur étude de la phase qu'ils nomment HDD (*High Density Disordered*) et ses versions simplifiées  $HDD_1$  et  $HDD_2$ , on dispose désormais d'une meilleure représentation au moins heuristique de ce à quoi devrait ressembler une configuration typique dans ce régime de paramètres.

## Chapitre 3

# Complétude du diagramme de phase à très basse température.

L'objectif de ce chapitre est d'exposer une stratégie adaptée de techniques existant pour le modèle d'Ising pour montrer de façon générale la complétude du diagramme de phases à très basse température d'un système de spins. Par sa nature géométrique et perturbative, cette stratégie est assez robuste et devrait être adaptable à des systèmes de spins relativement généraux ressemblant au modèle d'Ising ferromagnétique à basse température.

### 3.1 Une technique géométrique à base de fluctuations d'interfaces.

Dans le modèle d'Ising à basse température, on sait que la complétude du diagramme de phase est fortement liée à la fluctuation des interfaces macroscopiques imposées par les conditions au bord. En effet, en dimension 3 ou plus, les interfaces macroscopiques créées par une condition au bord de Dobrushin (c'est-à-dire quand le domaine est plongé dans un demi espace de spins  $+$  d'une part et  $-$  d'autre part) ne fluctuent pas à très basse température, et créent ainsi des états qui ne sont pas invariants par translation et donc qui ne peuvent pas être combinaison de  $\mu^+$  et  $\mu^-$ . En dimension 2 en revanche, l'interface correspondante fluctue à une échelle mésoscopique et le diagramme de phase est complet : toute mesure de Gibbs du système est barycentre de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  (théorème d'Aizenman-Higuchi [Aiz80, Hig79b]).

Plusieurs preuves de ce résultat existent, mais nous allons présenter une version géométrique due à Loren Coquille et Yvan Velenik qui est un résultat en volume fini qui illustre le rôle crucial de la fluctuation des interfaces. Le résultat montré est le suivant :

**Theoreme 4** (Coquille, Velenik [CV12]). *Pour  $\beta > \beta_c$ , pour tout  $\xi < 1/2$ , et toute condition au bord  $\omega \in \Omega$ , pour tout  $0 < \delta < 1/2 - \xi$ , pour  $n$  suffisamment grand, on a des constantes  $\alpha^{n,\omega}(\beta)$  telles que pour toute fonction  $f \mathcal{F}_{\Lambda_n, \xi}$ -mesurable, on a la décomposition*

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta}^\omega = \alpha^{n,\omega}(\beta) \langle f \rangle_\beta^+ + (1 - \alpha^{n,\omega}) \langle f \rangle_\beta^- + O(\|f\|_\infty n^{-\delta}).$$

Ce résultat en volume fini a pour corollaire direct de montrer le théorème d'Aizenman Higuchi, c'est-à-dire que toute mesure en volume infini est un mélange de  $\mu_\beta^+$  et  $\mu_\beta^-$ . Leur preuve utilise des estimées très précises et spécifiques au modèle d'Ising ce qui permet d'obtenir ce résultat pour toutes les températures jusqu'à la température critique et d'avoir un terme d'erreur du bon ordre de grandeur, mais on peut utiliser des outils plus faibles et plus génériques pour généraliser leur stratégie de preuve à d'autres modèles, au prix d'avoir ce résultat uniquement de façon perturbative à très faible température. Nous présentons ici les trois grandes idées de leur preuve, ce qui nous permettra de comprendre les étapes clés et d'identifier les propriétés nécessaires pour les appliquer à d'autres modèles.

Heuristiquement, l'idée de la preuve est la suivante (voir figure 3.1). Toute condition au bord  $\omega$  induite par une configuration de spins comportant des spins  $+$  et  $-$  sur le bord de  $\Lambda_n$  force l'apparition d'interfaces dans les configurations de spins de  $\Lambda_n$  via la représentation basse température du modèle d'Ising. De telles interfaces macroscopiques partitionnent  $\Lambda_n$  en régions aléatoires voyant les conditions au bord  $+$  ou  $-$  sur leur bord. Or si on fixe une boîte de taille  $n^\xi$  centrée en l'origine, on peut montrer que, à cause de la fluctuation de ces interfaces macroscopiques qui se fait à un ordre de grandeur  $\sqrt{n}$  bien plus grand que le diamètre de la boîte de côté  $n^\xi$ , sur un événement dont la probabilité tend vers 1, cette boîte n'est pas traversée par une interface macroscopique et se situe donc totalement dans l'intérieur de l'une des régions aléatoires créées par les interfaces macroscopiques (et à grande distance du bord de cette région), et voit donc une condition au bord soit uniformément  $+$  soit uniformément  $-$ .

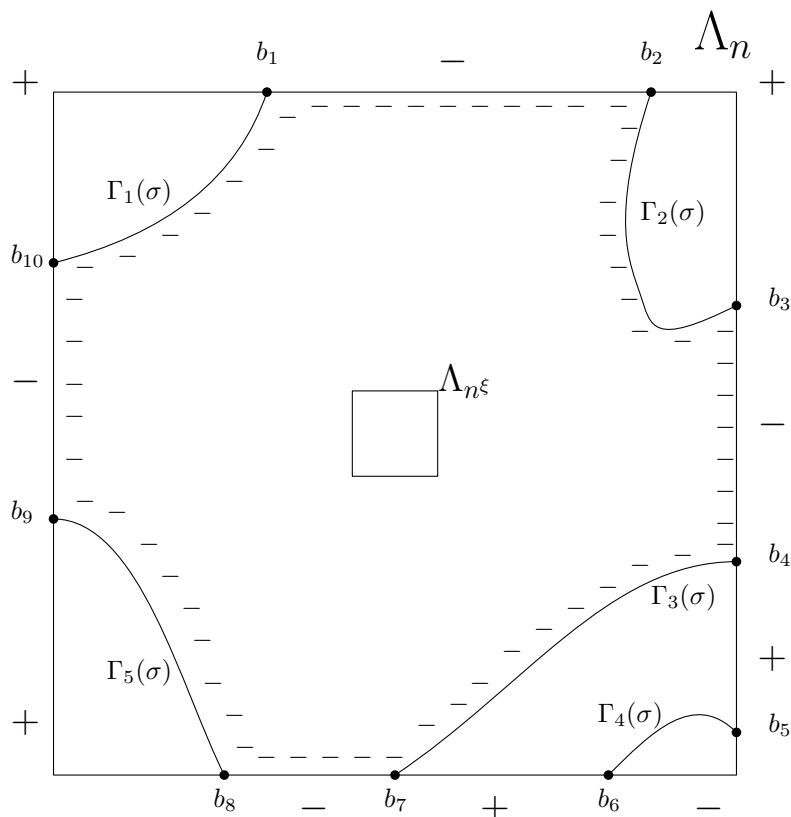


FIGURE 3.1 – Exemple de comportement typique des interfaces macroscopiques créées par une condition au bord arbitraire : toutes les interfaces macroscopiques  $\Gamma_i(\sigma)$  passent loin de  $\Lambda_{n^\xi}$  et la loi conditionnelle de la configuration dans  $\Lambda_{n^\xi}$  est très proche de  $\langle \cdot \rangle^-$ .

Ainsi, à un terme d'erreur près, la loi des configurations dans une boîte de côté  $n^\delta$  est donnée par un mélange des mesures  $\mu_\beta^+$  et  $\mu_\beta^-$ , où les coefficients du mélange sont les probabilités que la boîte soit totalement incluse dans une région délimitée par une condition au bord + ou – respectivement.

Dans les paragraphes suivants, on expliquera avec plus de détails les trois étapes importantes qui permettent de formaliser cette idée.

### 3.1.1 Les interfaces traversantes partent de points diamétralement opposés.

Plaçons-nous dans le cadre du théorème. Dans toute la suite, pour tout  $N$ , on notera  $\Lambda_N$  le domaine carré de côté  $N$  centré en l'origine. Fixons une configuration  $\omega \in \Omega$  qui induit une condition au bord dans le domaine  $\Lambda_n$ . La donnée de  $\omega$  sur le bord extérieur de  $\Lambda_n$  impose un

### 3.1. UNE TECHNIQUE GÉOMÉTRIQUE À BASE DE FLUCTUATIONS D'INTERFACES.

certain nombre d'interfaces macroscopiques à l'intérieur de  $\Lambda_n$ . En effet, en notant  $b_1, \dots, b_{2M}$  pour un certain entier  $M$  les points séparant des spins  $+$  et  $-$  sur le bord extérieur de  $\Lambda_n$  (il y en a nécessairement un nombre pair), on peut considérer la représentation basse température du modèle d'Ising pour les configurations dans  $\Lambda_n$ . Toutes les configurations de contours présentent un certain nombre de courbes fermées et nécessairement  $M$  courbes ouvertes reliant deux points distincts  $b_i, b_j$  pour des indices  $i \neq j$ . Ce sont ces  $M$  courbes ouvertes que l'on appellera des *interfaces macroscopiques* et pour une configuration  $\sigma$ , on notera  $\Gamma(\sigma) = \{\Gamma_1(\sigma), \dots, \Gamma_M(\sigma)\}$  l'ensemble de ses interfaces macroscopiques.

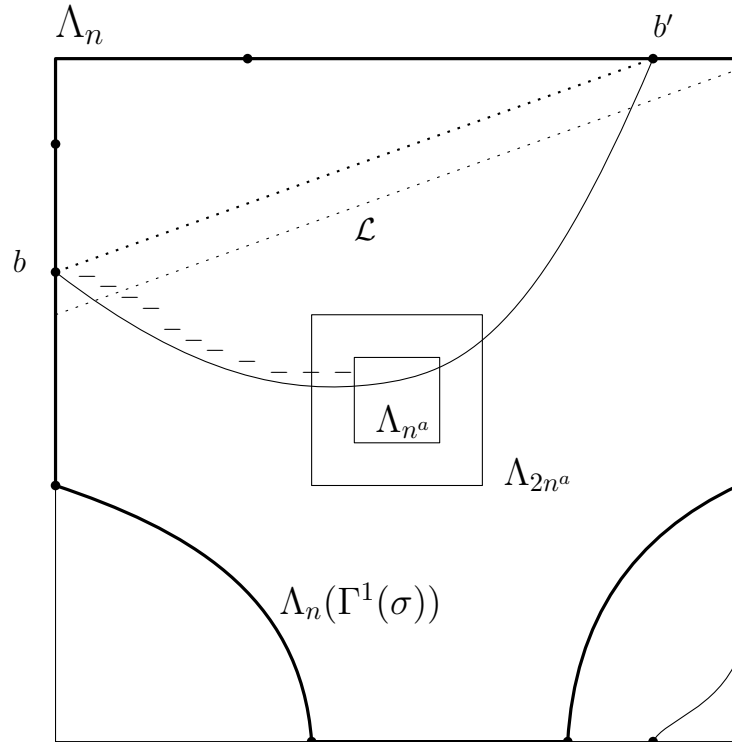


FIGURE 3.2 – La première étape de la preuve : si une interface macroscopique relie deux points non diamétralement opposés en touchant  $\Lambda_{n^a}$ , l'interface rencontre nécessairement  $\mathcal{L}$  et s'éloigne trop de son chemin le plus court.

Le premier point de la preuve est de montrer que si une interface macroscopique s'approche du centre du domaine  $\Lambda_n$ , ses extrémités  $b$  et  $b'$  sont presque diamétralement opposées sur le bord de  $\Lambda_n$  avec une très grande probabilité. Concrètement, on montre que la probabilité qu'il existe une interface macroscopique  $\Gamma_{b,b'}$  touchant  $\Lambda_{n^a}$  pour un  $a < 1$  fixé (et éventuellement pas trop petit) sans que le segment reliant  $b$  à  $b'$  ne touche  $\Lambda_{2n^a}$  est exponentiellement faible.

En effet, supposons que  $\omega$  ait des points  $b, b'$  tels que le segment correspondant ne touche pas la boîte  $\Lambda_{2n^a}$  (on peut supposer par exemple que ce segment passe strictement au dessus de cette boîte). Le segment  $[b, b']$  sépare le domaine en deux parties et, en conditionnant par

### 3.1. UNE TECHNIQUE GÉOMÉTRIQUE À BASE DE FLUCTUATIONS D'INTERFACES.

l'ensemble des interfaces macroscopiques dont les extrémités sont dans la partie inférieure de la boîte (que l'on note  $\Gamma^1(\sigma)$ ), on peut regarder la probabilité que  $b$  et  $b'$  soient reliés par une interface macroscopique  $\Gamma_{b,b'}$  et que celle-ci touche  $\Lambda_{n^a}$ .

En utilisant les équations DLR, comme l'ensemble de contours  $\Gamma^1$  induit une condition au bord  $\omega(\Gamma^1)$  sur un domaine aléatoire  $\Lambda(\Gamma^1)$  contenant  $b, b'$ , on a la décomposition suivante :

$$\mu_{\Lambda_{n^a}, \beta}^{\omega}(\Gamma_{b,b'} \cap \Lambda_{n^a} \neq \emptyset) = \sum_{\Gamma^1 \in \mathcal{C}_{b,b'}} \mu_{\Lambda_{n^a}, \beta}^{\omega}(\Gamma^1(\sigma) = \Gamma^1) \mu_{\Lambda(\Gamma^1), \beta}^{\omega(\Gamma^1)}(\Gamma_{b,b'} \cap \Lambda_{n^a} \neq \emptyset).$$

Puis, pour se débarrasser des interactions possibles entre les différentes interfaces macroscopiques, on va utiliser une caractérisation de l'évènement qui nous intéresse par des évènements décroissants et utiliser l'inégalité FKG et ses corollaires. Si l'on suppose sans perte de généralité que les spins directement au dessus de l'interface  $\Gamma_{b,b'}$  sont des spins  $-$ , sur l'évènement où  $\Gamma_{b,b'}$  touche  $\Lambda_{n^a}$ , on a nécessairement un chemin de spins  $-$  reliant  $b$  et  $b'$  à la droite  $\mathcal{L}$  définie comme la parallèle au segment  $[b, b']$  située à distance  $n^a$  de  $[b, b']$  entre ce segment et  $\Lambda_{n^a}$ . En notant cet évènement  $\{b, b'\} \xleftrightarrow{-} \mathcal{L}$  (qui est bien décroissant) on a, en appliquant l'inégalité FKG :

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda(\Gamma^1), \beta}^{\omega(\Gamma^1)}(\Gamma_{b,b'} \cap \Lambda_{n^a} \neq \emptyset) &\leq \mu_{\Lambda(\Gamma^1), \beta}^{\omega(\Gamma^1)}(\{b, b'\} \xleftrightarrow{-} \mathcal{L}) \\ &\leq \mu_{\Lambda_{n^a}, \beta}^{\pm(b, b')}(\{b, b'\} \xleftrightarrow{-} \mathcal{L}) \\ &\leq \mu_{\Lambda_{n^a}, \beta}^{\pm(b, b')}(\Gamma_{b,b'} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset), \end{aligned}$$

où la condition  $\pm(b, b')$  est la condition de Dobrushin de associée à  $b, b'$  : tous les spins dans la partie supérieure de l'espace délimitée par la droite  $(b, b')$  ont un spin  $-$  et un spin  $+$  sinon.

Or, sur l'évènement  $\Gamma_{b,b'} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ , l'interface  $\Gamma_{b,b'}$  s'éloigne fortement de son trajet optimal et cela permet de majorer cet évènement. Pour ce faire, dans l'article original, on utilise des représentations spécifiques au modèle d'Ising et des informations sur la stricte convexité de sa tension de surface. Toutefois, ce n'est pas nécessaire si l'on accepte d'avoir un résultat perturbatif. Si l'on sait par exemple que les interfaces créées par une condition de Dobrushin convergent vers un pont Brownien par exemple, on peut également montrer qu'il y a un surcoût exponentiellement cher dès que  $a > 1/2$ .

En combinant ces informations, on parvient à montrer la première étape du raisonnement : si une interface s'approche du centre du domaine, alors ses extrémités sont nécessairement presque *diamétralement opposées*.

#### 3.1.2 Il y a au plus une interface traversante.

Une fois que l'on sait que les interfaces *traversantes* (c'est-à-dire s'approchant du centre de la boîte) partent de points du bord presque diamétralement opposés, on peut montrer qu'avec une très grande probabilité, le nombre d'interfaces traversantes est au plus 1.

En effet, en se plaçant sur l'évènement où toutes les interfaces traversantes partent de points diamétralement opposés (qui est de probabilité proche de 1), si l'on a au moins 2 interfaces traversantes reliant  $b_1$  à  $b'_1$  et  $b_2$  à  $b'_2$  respectivement (de sorte à ce que  $b_1$  et  $b_2$  soient *du même côté*- voir figure [3.3](#)), on obtient que nécessairement, les points  $b_1$  et  $b_2$  sont relativement proches (et de même pour les  $b'_i$ ) :

$$\max(\|b_1 - b_2\|, \|b'_1 - b'_2\|) \leq Cn^a$$

pour une certaine constante  $C$  alors que les points  $b_i$  et  $b'_i$  sont à une distance de l'ordre de  $n$ .



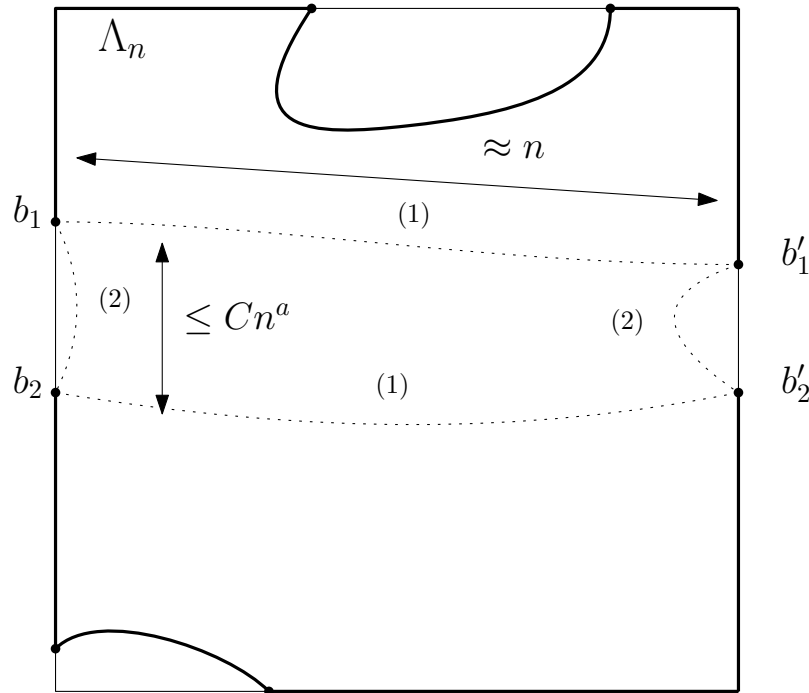


FIGURE 3.3 – La deuxième étape de la preuve : quand il y a deux interfaces traversantes - *scénario (1)*- il serait beaucoup moins coûteux pour le système de relier les points les plus proches ensemble - *scénario (2)* - ce qui utilise une longueur d'interface au plus de l'ordre de  $n^a$  au lieu des interfaces traversantes qui utilisent une longueur d'ordre  $n$ .

En conditionnant par les interfaces macroscopiques partant de points à l'extérieur du parallélogramme  $b_1, b_2, b'_2, b'_1$  et en utilisant la propriété de Markov forte, on obtient un domaine à l'intérieur duquel les interfaces macroscopiques joignent  $b_1$  à  $b'_1$  et  $b_2$  à  $b'_2$ . En comparant cet évènement à celui où dans le même domaine, les interfaces macroscopiques joignent  $b_1$  à  $b_2$  et  $b'_1$  à  $b'_2$  (qui sont beaucoup plus proches), on obtient une probabilité exponentiellement petite de cet évènement. Dans cette étape, on n'utilise que des estimées assez grossières sur l'interface puisqu'on utilise le coût en longueur de l'interface, et pas d'information fine sur ses fluctuations.

### 3.1.3 Décomposition de la mesure en mesures extrémales.

D'après les étapes précédentes, on sait que l'évènement  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1$  où le système n'a pas d'interface traversante ( $\mathcal{I}_0$ ) ou exactement une ( $\mathcal{I}_1$ ) se produit avec une très grande probabilité.

Or sur l'évènement  $\mathcal{I}_0$ , comme il n'y a pas d'interface traversante, pour  $\xi < a$ , le domaine  $\Lambda_{n,\xi}$  est à distance d'ordre au moins  $n^a$  de toute interface macroscopique. En particulier, elle est dans l'intérieur d'un contour macroscopique aléatoire  $\gamma$  dont l'intérieur est un domaine aléatoire

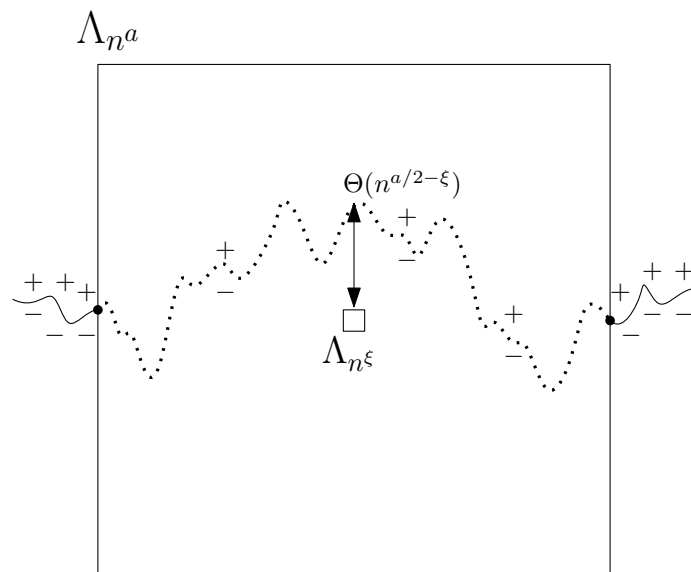


FIGURE 3.4 – Sur l'évènement  $\mathcal{I}_1$ , quand une interface macroscopique traverse  $\Lambda_{n^a}$ , l'interface macroscopique créée dans la boîte  $\Lambda_{n^a}$  par la condition au bord fluctue de façon Gaussienne et évite donc avec très grande probabilité la boîte  $\Lambda_{n^\xi}$ .

$\Lambda(\gamma)$ . On peut alors décomposer  $\mathcal{I}_0$  en deux évènements,  $\mathcal{I}_0^+$  et  $\mathcal{I}_0^-$  sur lesquels la condition au bord induite par le contour macroscopique  $\gamma$  est + (respectivement -). Or, uniformément en  $\gamma$  tel que l'on soit dans  $\mathcal{I}_0^+$ , par relaxation exponentielle vers les mesures en volume infini, comme le domaine  $\Lambda_{n^\xi}$  est à distance au moins  $n^a$  du bord du domaine  $\Lambda(\gamma)$ , la loi conditionnelle dans  $\Lambda_{n^\xi}$  est exponentiellement proche de la loi limite  $\langle \cdot \rangle^+$  en variation totale, donc

$$\langle f \rangle_{\Lambda(\gamma)}^+ = \langle f \rangle^+ + O(\|f\|_\infty e^{-Cn^a})$$

et de même pour les  $\gamma$  tels que l'on soit dans  $\mathcal{I}_0^-$ . En sommant sur toutes les contributions des  $\gamma$ , on obtient

$$\langle f | \mathcal{I}_0 \rangle_{\Lambda_n}^\omega = \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}_0^+ | \mathcal{I}_0) \langle f \rangle^+ + \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}_0^- | \mathcal{I}_0) \langle f \rangle^- + O(\|f\|_\infty e^{-Cn^a}).$$

D'autre part, sur l'évènement  $\mathcal{I}_1$  où il existe une interface traversante, on peut conditionner par les points d'entrée et de sortie de l'interface dans le domaine  $\Lambda_{n^a}$ . Par fluctuations gaussiennes de l'interface dans la boîte  $\Lambda_{n^a}$ , si  $\xi < a/2$ , avec une très grande probabilité, l'interface macroscopique n'intersecte pas la boîte  $\Lambda_{2n^\xi}$ , et sur cet évènement, la boîte  $\Lambda_{n^\xi}$  est à l'intérieur d'un domaine aléatoire de condition au bord soit + soit -, et est à une distance au moins  $n^\xi$  du bord. Comme précédemment, en décomposant  $\mathcal{I}_1$  en  $\mathcal{I}_1^+$  et  $\mathcal{I}_1^-$  selon si la condition au bord vue dans ce cas est + ou - et  $\mathcal{I}_1^{mix}$  si l'interface macroscopique touche la boîte  $\Lambda_{2n^\xi}$ , par relaxation

exponentielle, on obtient finalement

$$\langle f | \mathcal{I}_1 \rangle_{\Lambda_n}^\omega = \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}_1^+ | \mathcal{I}_1) \langle f \rangle^+ + \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}_1^- | \mathcal{I}_1) \langle f \rangle^- + O(\|f\|_\infty n^{\xi-a/2}).$$

En combinant les deux cas, et en notant  $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}_0^+ \cup \mathcal{I}_1^+$  et de même pour  $\mathcal{I}^-$ , on obtient

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n}^\omega = \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}^+) \langle f \rangle^+ + \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}^-) \langle f \rangle^- + O(\|f\|_\infty n^{\xi-a/2})$$

avec  $\mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}^+) + \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}^-) = 1 + O(n^{\xi-a/2})$ , soit le résultat voulu en posant  $\alpha^{n,\omega} = \mu_{\Lambda_n}^\omega(\mathcal{I}^+)$ .

### 3.1.4 Conclusion et propriétés utilisées.

Dans cette preuve, nous avons vu comment la présence d'une condition au bord quelconque influe sur la loi de la configuration dans une boîte macroscopique d'une échelle plus petite que celle du domaine. En l'occurrence, dans l'immense majorité des cas, cette boîte sera loin de toute interface macroscopique à cause de leurs fluctuations, et la loi vue au centre du domaine est donnée par un barycentre des deux mesures extrémales + et - à un terme d'erreur près qui tend vers 0 polynomialement vite en la taille du domaine.

Même si la preuve est plus difficile à mettre en oeuvre pour d'autres modèles, on s'attend à ce que ce type de comportement reste vrai au moins à très basse température pour toute une classe de modèles ressemblant au modèle d'Ising ferromagnétique.

Résumons ici les ingrédients clés utilisés pour faire fonctionner la preuve, afin de pouvoir voir les modèles où la preuve est susceptible de pouvoir être adaptée.

- Tout d'abord, on doit avoir une notion d'interface qui remplace celle utilisée ici issue de la représentation basse température du modèle d'Ising. Les interfaces doivent séparer les phases pures entre elles et avoir un coût proportionnel à leur longueur.
- Cette preuve utilise de façon cruciale la planarité du modèle et semble spécifique à la dimension 2.
- On a ici utilisé la monotonie du modèle qui découle du caractère ferromagnétique du modèle avec l'inégalité FKG. Cette propriété simplifie les arguments mais pourrait être remplacée par des inégalités de contrôle si le système n'est pas totalement ferromagnétique (si l'on ajoute des termes antiferromagnétiques de plus faible intensité par exemple).
- Pour pouvoir comparer la mesure dans un domaine aléatoire avec une condition au bord donnée par un même spin et la mesure en volume infini correspondante, on a besoin d'un résultat de relaxation vers les mesures en volume infini.
- Enfin, l'ingrédient essentiel est la fluctuation macroscopique de l'interface macroscopique induite par une condition de Dobrushin. Le fait que ces fluctuations soient gaussiennes n'est en revanche pas nécessaire tant que celles-ci sont macroscopiques.

Dans la section suivante, on verra comment obtenir des fluctuations gaussiennes d'interfaces macroscopiques à partir de propriétés de renouvellement de l'interface. Ainsi, pour une large classe de modèles ayant cette structure de renouvellement, les fluctuations de l'interface sont bien suffisantes pour appliquer la stratégie exposée dans cette partie.

## 3.2 Fluctuations gaussiennes à partir d'une structure de renouvellement.

### 3.2.1 Contexte et résultat.

Dans cette section, on montre un *théorème central limite fonctionnel* pour des courbes interpolant des points d'un processus de renouvellement sous des hypothèses de moment exponentiel. En particulier, une application directe sera de montrer que si une interface macroscopique est décomposable selon une *structure de renouvellement avec des moments exponentiels*, alors celle-ci fluctue de façon gaussienne.

**Remarque bibliographique.** Le résultat démontré dans cette section n'est pas nouveau. En effet, la question de la convergence des interfaces créées par des conditions au bord de Dobrushin vers des ponts browniens est assez naturelle et a été prouvée assez vite ([Hig79a]), puis des résultats de convergence plus larges ont été obtenus pour le modèle d'Ising ([DH96], [DH97]), ce qui peut être appliqué à d'autres modèles comme certaines versions du modèle de Widom-Rowlinson par exemple ([HMW04]). De façon générale, toute une théorie existe sur le sujet (voir par exemple [Iof15]).

Toutefois, nous avons choisi de consacrer cette partie à notre preuve de ce résultat afin de présenter un résultat autocontenu. La preuve présentée ici est celle à laquelle nous sommes arrivés avant de prendre connaissance des preuves existantes et les outils principaux sont évidemment les mêmes que dans d'autres preuves existantes (le théorème central limite local notamment). Cependant, certains des outils utilisés diffèrent un peu des autres preuves et nous semblent intéressants en soi (la méthode du biais exponentiel non constant par exemple).

**Contexte et énoncé.** Soit  $\mathcal{S}$  un processus ponctuel d'incrémentes i.i.d.  $X_i = (l_i, h_i)$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$  (ou un translaté de  $\mathbb{Z}^2$ ), avec des moments exponentiels, et tels que  $\mathbb{E}[h_1] = 0$  et  $l_1 > 0$  presque sûrement. On suppose de plus que le processus est apériodique, c'est-à-dire que les trajectoires ne se limitent pas à un sous-réseau possible, ou encore que pour tout  $x$  suffisamment grand, pour tout  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}[\exists N; \mathcal{S}_N = (x, y)] > 0$ . On identifiera  $\mathcal{S}$  avec la courbe affine par morceaux obtenue en reliant ses points (voir figure 3.5).

**Proposition 9.** *Supposons que  $\mathbb{E}[e^{c \cdot X_1}] < \infty$  pour tout  $c$  de norme suffisamment petite et que  $\mathbb{P}[\exists N; \mathcal{S}_N = (L, 0)] > 0$ . Alors, pour un certain  $\sigma > 0$ , on a :*

$$\left( \frac{(\mathcal{S}_{tN})_1}{L}, \frac{(\mathcal{S}_{tN})_2}{\sigma\sqrt{L}} \mid \exists N; \mathcal{S}_N = (L, 0) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} (t, \beta_t)_{t \in [0,1]},$$

où  $(\beta_t)_t$  est un pont brownien 1-dimensionnel.

Remarquons que quitte à soustraire à  $h$  son espérance, ce résultat donne également la convergence vers des ponts browniens inclinés d'un angle non trivial pour des  $h$  non centrés.

### 3.2.2 Cas d'une marche centrée conditionnée à revenir en $(0, 0)$ .

Dans un premier temps, on présente une preuve directe du cas le plus simple que l'on va chercher à adapter dans la suite. Soit  $(X_i)$  une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$ , de matrice de covariance  $\Sigma^2$ . On regarde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , et  $(\tilde{S}_t^N)_{t \in [0,1]}$  la courbe affine par

### 3.2. FLUCTUATIONS GAUSSIENNES À PARTIR D'UNE STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT.

---

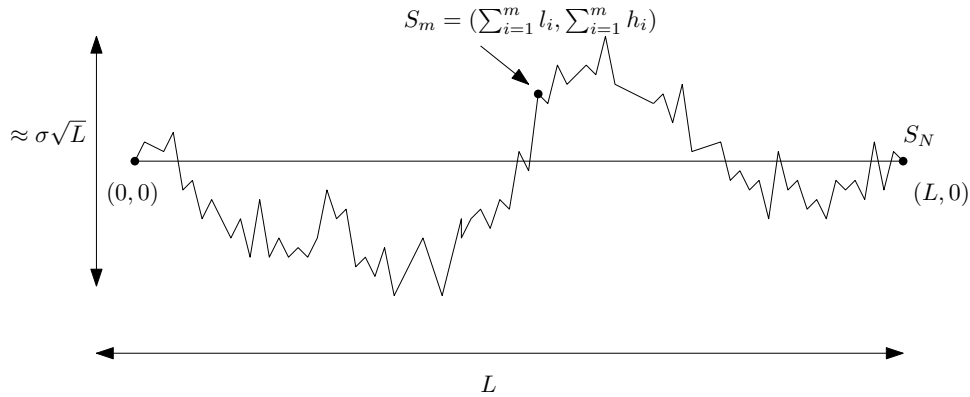


FIGURE 3.5 – Sous hypothèses de moments exponentiels, une marche aléatoire qui arrive en  $(L, 0)$  après  $N$  pas ressemble au graphe d'un pont brownien après changement d'échelle de  $L$  en temps et de  $\sqrt{L}$  en espace.

morceaux interpolant les  $N^{-1/2}\Sigma^{-1}S_{\lfloor tN \rfloor}$ . On suppose de plus que la marche est apériodique, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2$ , pour tout  $n$  suffisamment grand,  $\mathbb{P}[S_n = x] > 0$ .

On sait déjà par le théorème de Donsker que le processus  $(\tilde{S}_t^N)_{t \in [0,1]}$  converge vers un mouvement brownien quand  $N$  tend vers l'infini.

On montre comment, en utilisant l'absolue continuité du pont brownien par rapport au mouvement brownien et un théorème limite local (voir [3.2.4](#) pour une preuve dans un cadre plus général de ce résultat), on peut obtenir la convergence du processus conditionné à revenir à l'origine vers un pont brownien dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemme 1.** [Théorème limite local] Uniformément en  $x \in \mathbb{Z}^2$ , si les  $X_i$  sont centrés et de second moment fini, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [(2\pi n)\mathbb{P}(S_n = x) - |\Sigma|^{-1}e^{-\frac{1}{2n}(x \cdot \Sigma^{-2}x)}] = 0.$$

### 3.2. FLUCTUATIONS GAUSSIENNES À PARTIR D'UNE STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT.

Soit  $G : (\mathbb{R}^2)^k \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée et soient  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(\tilde{S}_{t_1}^N, \tilde{S}_{t_2}^N, \dots, \tilde{S}_{t_k}^N) | S_N = (0, 0)] &= \frac{\mathbb{E}[G(\tilde{S}_{t_1}^N, \tilde{S}_{t_2}^N, \dots, \tilde{S}_{t_k}^N) \mathbb{P}[S_N = (0, 0) | \tilde{S}_{t_k}^N]]}{\mathbb{P}[S_N = (0, 0)]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[G(\tilde{S}_{t_1}^N, \tilde{S}_{t_2}^N, \dots, \tilde{S}_{t_k}^N) \mathbb{P}[S_{(1-t_k)N} = -\Sigma N^{1/2} \tilde{S}_{t_k N}]]}{\mathbb{P}[S_N = (0, 0)]}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant le lemme [1](#), en notant  $V_N$  le volume élémentaire  $V_N = |N^{-1/2} \Sigma^{-1} [-1/2, +1/2]^2|$ , et  $f_{\sigma^2}$  la densité de la Gaussienne de covariance  $\sigma^2 I_2$ , on a

$$\frac{\mathbb{P}[S_{(1-t_k)N} = -\Sigma N^{1/2} \tilde{S}_{t_k N}]}{\mathbb{P}[S_N = (0, 0)]} = \frac{V_{(1-t_k)N} f_{(1-t_k)}(-\tilde{S}_{t_k}^N + o(V_N))}{V_N f_1(0, 0) + o(V_N)} = \frac{(1-t_k) f_{1-t_k}(-\tilde{S}_{t_k}^N)}{f_1(0, 0)} + o(1)$$

donc, en notant  $(B_t)$  un Brownien standard et  $(\beta_t)$  un pont brownien standard dans  $\mathbb{R}^2$ , et en utilisant d'abord le théorème de Donsker puis l'absolue continuité du pont brownien par rapport au mouvement brownien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(\tilde{S}_{t_1}^N, \tilde{S}_{t_2}^N, \dots, \tilde{S}_{t_k}^N) | S_N = (0, 0)] &= \mathbb{E}\left[G(\tilde{S}_{t_1}^N, \tilde{S}_{t_2}^N, \dots, \tilde{S}_{t_k}^N) \frac{(1-t_k) f_{1-t_k}(-\tilde{S}_{t_k}^N)}{f_1(0, 0)}\right] + o(1) \\ &= \mathbb{E}\left[G(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}) \frac{(1-t_k) f_{1-t_k}(-B_{t_k})}{f_1(0, 0)}\right] + o(1) \\ &= \mathbb{E}[G(\beta_{t_1}, \dots, \beta_{t_k})] + o(1) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du cas centré.

#### 3.2.3 Preuve du résultat par biais exponentiel.

**Méthode du biais exponentiel.** Si la loi d'une variable  $X$  n'est pas centrée mais possède un moment exponentiel suffisamment grand, on peut créer une loi annexe centrée en introduisant un *biais exponentiel* telle que les marches aléatoires associées aux deux lois ont la même loi conditionnellement au fait de revenir en l'origine au bout d'un certain nombre de pas.

On se donne  $X$  une variable aléatoire dans  $\mathbb{R}^d$  et on regarde  $\tilde{X}$  de loi

$$d\mathbb{P}(\tilde{X}) = \frac{e^{\alpha \cdot X}}{Z_\alpha} d\mathbb{P}(X),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  est une constante à ajuster et  $Z_\alpha = \mathbb{E}[e^{\alpha \cdot X}]$  est une constante de normalisation. On remarque que pour que la nouvelle loi soit bien définie, il est nécessaire que  $Z_\alpha = \mathbb{E}[e^{\alpha \cdot X}] < \infty$ .

En notant  $\Lambda(t) = \mathbb{E}[e^{t \cdot X}]$ , on voit que l'espérance  $y = \mathbb{E}[\tilde{X}] = \frac{\Lambda'(\alpha)}{\Lambda(\alpha)}$  est telle que  $\alpha$  maximise la quantité  $t \rightarrow y \cdot t - \log \Lambda(t)$ . En particulier, si  $\alpha$  est le paramètre maximisant  $t \rightarrow \log \Lambda(t)$  et que  $Z_\alpha$  est fini pour cet  $\alpha$ , alors la variable aléatoire  $\tilde{X}$  correspondante existe et est centrée. De plus, en notant  $S_n$  la somme de  $n$  copies indépendantes de la variable  $X$  et  $\tilde{S}_n$  la somme de  $n$  copies indépendantes de la variable aléatoire recentrée  $\tilde{X}$ , le processus  $(S_n)_{1 \leq n \leq N} | S_N = 0$  a la même loi que le processus  $(\tilde{S}_n)_{1 \leq n \leq N} | \tilde{S}_N = 0$ .

Enfin, si la loi de la variable  $X$  dépend d'un paramètre extérieur  $L$  tel que  $\mathbb{E}[X] \rightarrow 0$  quand  $L$  tend vers l'infini, mais que  $\text{Var}(X) = \Sigma^2$  ne dépend pas de  $L$ , on peut montrer que le biais à appliquer vérifie  $\alpha = \alpha(L) = \Theta(E[X]) \rightarrow 0$  et que  $\Sigma_\alpha^2$ , la matrice de covariance de  $\tilde{X}$ , vérifie  $\Sigma_\alpha^2 = \Sigma^2 + O(\alpha)$  quand  $L$  tend vers l'infini.

### 3.2. FLUCTUATIONS GAUSSIENNES À PARTIR D'UNE STRUCTURE DE RENOUELEMENT.

**Preuve de la proposition 9 :** Soit  $\mathcal{S}$  une marche aléatoire d'incrémentes i.i.d  $X_i = (l_i, h_i)$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}^2$  (ou un translaté de  $\mathbb{Z}^2$ ), apériodique, avec des moments exponentiels, et tels que  $\mathbb{E}[h_1] = 0$ , et  $l_1 > 0$  presque sûrement. On identifie  $\mathcal{S}$  avec la courbe affine par morceaux obtenue en reliant ses points et on veut montrer qu'il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$\left( \frac{(\mathcal{S}_{tN})_1}{L}, \frac{(\mathcal{S}_{tN})_2}{\sigma\sqrt{L}} \mid \exists N; \mathcal{S}_N = (L, 0) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} (t, \beta_t)_{t \in [0,1]}.$$

On remarque que par un argument de déviations modérées, on peut se restreindre au conditionnement où  $N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[\bar{l}]} \pm L^{0.6}]$  par exemple. Dans cette preuve, on utilise une version légèrement modifiée du théorème limite local, que l'on justifiera dans la section suivante (3.2.4).

Commençons par montrer la convergence pour un paramètre  $N$  fixé. Fixons un entier  $N$  vérifiant  $N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[\bar{l}]} \pm L^{0.6}]$  et introduisons les variables  $\bar{l}_i = l_i - \frac{L}{N}$  de façon à se ramener à un conditionnement en zéro. Les  $\bar{l}_i$  ont également un moment exponentiel, et leur espérance satisfait  $\mathbb{E}[\bar{l}_i] = O(L^{-0.4})$ . Le biais exponentiel à leur appliquer pour centrer la variable  $\bar{X} = (\bar{l}, \bar{h}) = (\bar{l}, h)$  est donc du même ordre :  $\alpha = O(L^{-0.4})$  (et en particulier, on peut appliquer la méthode du biais exponentiel pour  $L$  suffisamment grand).

On souhaiterait avoir un théorème limite local qui traite de la convergence de sommes de  $N$  variables aléatoires centrées de matrices de covariance  $\Sigma_\alpha^2 = \Sigma^2 + O(\alpha)$  uniformément en  $\alpha$  prenant des valeurs d'ordre  $O(L^{-0.4})$ , ce que l'on montrera dans la section suivante.

On note  $\mathcal{S}$  le processus biaisé et  $\tilde{\mathcal{S}}$  le processus renormalisé par un facteur  $\Sigma_\alpha\sqrt{N}$ . Conditionné à ce que  $\tilde{\mathcal{S}}_N = (0, 0)$ , sa loi est la même que le processus initial conditionné avec la même normalisation.

Montrons donc la convergence vers un pont brownien 2-dimensionnel de ce processus.

Soit  $G : (\mathbb{R}^2)^k \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée et soient  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ . On a alors, uniformément en  $N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[\bar{l}]} \pm L^{0.6}]$  (et  $\alpha$  correspondant) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(\tilde{\mathcal{S}}_{t_1}^N, \tilde{\mathcal{S}}_{t_2}^N, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_{t_k}^N) \mid \tilde{\mathcal{S}}_N = (0, 0)] &= \frac{\mathbb{E}\left[G(\tilde{\mathcal{S}}_{t_1}^N, \tilde{\mathcal{S}}_{t_2}^N, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_{t_k}^N) \mathbb{P}[\mathcal{S}_{(1-t_k)N} = -\Sigma_\alpha N^{1/2} \tilde{\mathcal{S}}_{t_k N}^N]\right]}{\mathbb{P}[\mathcal{S}_N = (0, 0)]} \\ &= \mathbb{E}\left[G(\tilde{\mathcal{S}}_{t_1}^N, \tilde{\mathcal{S}}_{t_2}^N, \dots, \tilde{\mathcal{S}}_{t_k}^N) \frac{(1-t_k)f_{1-t_k}^{(2)}(-\tilde{\mathcal{S}}_{t_k}^N)}{f_1^{(2)}(0, 0)}\right] + o(1) \\ &= \mathbb{E}\left[G(B_{t_1}^{(2)}, B_{t_2}^{(2)}, \dots, B_{t_k}^{(2)}) \frac{(1-t_k)f_{1-t_k}^{(2)}(-B_{t_k})}{f_1^{(2)}(0, 0)}\right] + o(1) \\ &= \mathbb{E}[G(\beta_{t_1}^{(2)}, \dots, \beta_{t_k}^{(2)})] + o(1), \end{aligned}$$

où les  $f^{(2)}$  désignent la densité d'une loi normale standard de dimension 2, et les  $B^{(2)}$  et les  $\beta^{(2)}$  désignent des mouvements browniens et des ponts browniens standards de dimension 2 respectivement, ce qui est la convergence souhaitée. La deuxième égalité provient du théorème limite local, la troisième égalité est l'application du théorème de Donsker au processus non conditionné, et la quatrième vient provient de l'absolue continuité de la loi des trajectoires du pont Brownien sur un intervalle de temps  $[0, a]$  par rapport à la loi du mouvement Brownien sur le même intervalle.

De là, avec la normalisation annoncée du théorème, on a

$$\left( \frac{S_{tN}^1}{L} \mid \mathcal{S}_N = (L, 0) \right)_t = \left( t + \frac{\sqrt{N}}{L} \frac{\tilde{S}_{tN}^1}{\sqrt{L}} + o(1) \mid \tilde{\mathcal{S}}_N = (0, 0) \right)_t = (t + o(1))_t$$

### 3.2. FLUCTUATIONS GAUSSIENNES À PARTIR D'UNE STRUCTURE DE RENOUVELLEMENT.

pour la première coordonnée (par le lemme de Slutsky) et sur la seconde,

$$\left( \frac{S_{tN}^2}{\sqrt{L}} | S_N = (L, 0) \right)_t = \left( \frac{\sqrt{N} \bar{S}_{tN}^2}{\sqrt{L} \sqrt{L}} | \bar{S}_N = (0, 0) \right)_t \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}[l]} (\beta_\Sigma^{(2)})_t^2 = (\tilde{\beta}_t)_t$$

où  $\tilde{\beta}$  est un pont brownien 1-dimensionnel d'une certaine variance  $\sigma^2$ .

Soit donc  $(\tilde{S}_t)$  le processus renormalisé comme dans l'énoncé, et  $G$  une fonction test bornée appropriée pour la topologie de convergence.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G((\tilde{S}_t)_t) | \exists N; S_N = (L, 0)] &= \frac{1}{\mathbb{P}[\exists N; S_N = (L, 0)]} \sum_{N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[l]} \pm L^{0.6}]} \mathbb{E}[G((\tilde{S}_t)_t) 1_{S_N = (L, 0)}] + o(1) \\ &= \sum_{N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[l]} \pm L^{0.6}]} \frac{\mathbb{P}[S_N = (L, 0)]}{\mathbb{P}[\exists N; S_N = (L, 0)]} \mathbb{E}[G((\tilde{S}_t)_t) | S_N = (L, 0)] + o(1) \\ &= \sum_{N \in [\frac{L}{\mathbb{E}[l]} \pm L^{0.6}]} \frac{\mathbb{P}[S_N = (L, 0)]}{\mathbb{P}[\exists N; S_N = (L, 0)]} \left( \mathbb{E}[G((t, \tilde{\beta}_t)_t)] + o(1) \right) + o(1) \\ &= \mathbb{E}[G((t, \tilde{\beta}_t)_t)] + o(1), \end{aligned}$$

où la première égalité vient de déviations modérées, la troisième égalité vient de la convergence en loi à  $N$  fixé, et la dernière est une application du théorème de convergence dominée. Ceci conclut la preuve de la proposition.

#### 3.2.4 Théorème limite local.

On prouve maintenant une généralisation du Lemme [1](#) qui est l'ingrédient central des preuves présentées plus haut.

Pour  $N$  fixé, on se donne des variables i.i.d.  $X_i^{(N)} = X_i$  dans  $\mathbb{Z}^2$  dont la loi peut dépendre de  $N$  mais reste nécessairement centrée et dont la matrice de covariance  $\Sigma_N^2$  est dans le voisinage d'une matrice de covariance fixée  $\Sigma^2$  ( $\Sigma_N^2 = \Sigma^2 + o(1)$ ), et  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  leur somme. On notera  $(P_N(x))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  la loi de  $S_N$ . On suppose de plus que la marche est apériodique, c'est-à-dire que  $|\varphi(\alpha)| = 1$  si, et seulement si toutes les coordonnées de  $\alpha$  sont des multiples de  $2\pi$ .

On veut montrer qu'uniformément en  $x$ , sous les hypothèses précédentes, on a :

$$(2\pi N)P_N(x) - \frac{e^{-\frac{(x \cdot \Sigma^{-2} x)}{2N}}}{|\Sigma|} \rightarrow 0.$$

On notera  $Q(x) = (x \cdot \Sigma^2 x)$  et  $Q_N(x) = (x \cdot \Sigma_N^2 x)$ . Notons  $\varphi$  la fonction caractéristique de la variable  $X$  (pour alléger les notations, on ne notera pas sa dépendance en  $N$ ). On a alors

$$(2\pi N)P_N(x) = \frac{N}{2\pi} \int_{\theta \in [-\pi, \pi]^2} \varphi^N(\theta) e^{-ix \cdot \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in [-\sqrt{N}\pi, \sqrt{N}\pi]^2} \varphi^N\left(\frac{\alpha}{\sqrt{N}}\right) e^{-\frac{ix \cdot \alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha.$$

On va montrer que pour  $A > 0$  assez grand, en notant  $K$  le compact  $[-A, A]^2$ , on a, uniformément en  $x$ ,



$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in [-\sqrt{N}\pi, \sqrt{N}\pi]^2} \varphi^N\left(\frac{\alpha}{\sqrt{N}}\right) e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in K} \varphi^N\left(\frac{\alpha}{\sqrt{N}}\right) e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha + o(1) + \varepsilon_A \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in K} e^{-\frac{1}{2}Q_N(\alpha)} e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha + o(1) + \varepsilon_A \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in K} e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha + o(1) + \varepsilon_A \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in \mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}Q(\alpha)} e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha + o(1) + \varepsilon'_A.
 \end{aligned}$$

La deuxième égalité dans ce cas provient du théorème de Taylor, la troisième est un théorème de convergence dominée, et  $\varepsilon_A$  et  $\varepsilon'_A$  sont des termes d'erreurs qui tendent vers 0 uniformément en  $N$  quand  $A$  tend vers l'infini.

En reconnaissant la transformée de Fourier de la densité gaussienne dans la dernière égalité, on obtient le résultat. Il reste donc à justifier la première égalité.

Pour cela, coupons le terme d'erreur en deux parties : pour  $r > 0$ , regardons les domaines  $D = \{|\alpha| \in [A, r\sqrt{N}]\}$ , et  $[-\sqrt{N}\pi, \sqrt{N}\pi]^2 \setminus D$ .

Remarquons d'abord que pour  $r$  suffisamment petit, pour  $\alpha \in D$ , on a  $|\varphi^N(\frac{\alpha}{\sqrt{N}})| \leq e^{-\frac{Q(\alpha)}{4}}$  et donc

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \in D} \varphi^N\left(\frac{\alpha}{\sqrt{N}}\right) e^{-\frac{i\pi\alpha}{\sqrt{N}}} d\alpha \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\alpha| > A} e^{-\frac{Q(\alpha)}{4}} d\alpha =: \varepsilon_A.$$

De plus, par apériodicité, pour tout  $r > 0$  fixé,  $|\varphi(u)| < 1 - \delta(r)$  pour un certain  $\delta(r)$  dès que  $r < |u| < \pi$ . Ce  $\delta(r)$  peut être choisi uniformément en la loi précise : puisque les lois ont toutes leurs matrices de covariance proches, toutes les fonctions caractéristiques sont uniformément proches de la fonction caractéristique limite donnée par la matrice de covariance  $\Sigma^2$ .

On peut donc trouver une constante  $C$  telle que l'intégrale de la fonction sur le domaine  $[-\sqrt{N}\pi, \sqrt{N}\pi]^2 \setminus D$  soit bornée par  $CN(1 - \delta(r))^N$  ce qui tend donc uniformément vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini.

Le terme en  $\varepsilon'_A$  s'obtient exactement de la même façon que  $\varepsilon_A$ , ce qui conclut la preuve.

### 3.3 Exemple de l'étude du modèle de Widom-Rowlinson.

Dans cette section, on va étudier les interfaces du modèle de Widom-Rowlinson dont on rappelle qu'au moins heuristiquement, il devrait bien représenter le modèle de bâtons avec interaction coeur dur aux densités intermédiaires. On va montrer sur cet exemple comment une structure de renouvellement peut émerger de façon naturelle dans l'étude des interfaces créées par une condition au bord de Dobrushin. Cette méthode est directement adaptée de l'article [HK02](#) sur les asymptotiques d'Ornstein-Zernike pour le modèle de Blume-Capel, qui est un modèle assez similaire à celui de Widom-Rowlinson. Cette méthode est elle-même basée sur les techniques développées pour le modèle d'Ising que l'on pourra retrouver dans [DKS92](#) et qui comporte certains détails omis ici (le traitement des effets de bord liés au domaine notamment).

### 3.3.1 Rappel du modèle et structure de renouvellement de l'interface.

#### Description du modèle et de ses contours.

On considère des configurations de spins  $\sigma \in \Omega = \{-, 0, +\}^{\mathbb{Z}^2}$ . À chaque configuration  $\sigma$  coïncidant avec une condition au bord  $\bar{\sigma}$  en dehors d'un domaine fini  $\Lambda$ , on associe le Hamiltonien suivant :

$$H_\Lambda(\sigma|\bar{\sigma}) = aN_{+-} + bN_0,$$

où  $a, b > 0$  sont deux paramètres et  $N_{+-}$  est le nombre de paires de sites adjacents (avec au moins un site dans  $\Lambda$ ) ayant des spins opposés  $+$  et  $-$ , et  $N_0$  le nombre de sites ayant le spin  $0$  dans  $\Lambda$ . Dans la suite, pour présenter la méthode en toute généralité, on posera  $\beta = \min(a, b)$  que l'on suppose tendre vers l'infini. De façon standard, on définit les mesures de Gibbs en volume fini correspondantes  $\mu_\Lambda^{\bar{\sigma}}$  et leur fonction de partition  $Z_\Lambda^{\bar{\sigma}}$ . Quand  $\bar{\sigma}$  est la configuration ayant uniquement des spins  $+$ , on notera cette configuration simplement  $+$  (et pareil pour la configuration  $-$ ).

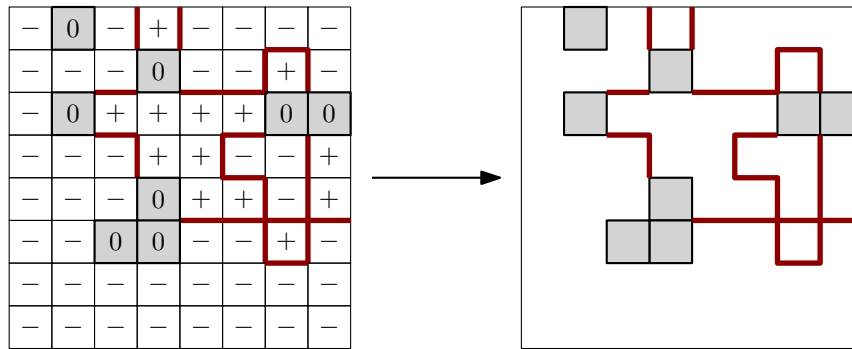


FIGURE 3.6 – Un exemple de configuration du modèle de Widom-Rowlinson et ses contours associés avec condition au bord libre ( $\bar{\sigma} \equiv 0$ ).

Il sera pratique de penser aux sites du réseau comme les faces du graphe dual de  $\mathbb{Z}^2$ , avec des arêtes séparant les différentes faces entre elles. A chaque configuration de spins on peut associer ses *contours*, constitué d'une part de l'ensemble des arêtes du graphe dual frustrées (c'est-à-dire séparant deux sites avec des spins  $+$  et  $-$  opposés), et d'autre part des cases de  $\Lambda$  ayant un spin  $0$ . Le Hamiltonien d'une configuration est alors  $a$  fois le nombre d'arêtes frustrées additionné à  $b$  fois le nombre de cases  $0$  constituant ses contours. On peut voir les contours comme éléments d'un graphe  $X$ , dont les sommets sont l'ensemble des faces et des arêtes du réseau  $\mathbb{Z}^2$  original, et où deux sommets du graphe sont connectés si les faces ou arêtes correspondantes sont connectées dans la représentation naturelle de  $\mathbb{Z}^2$ . Ainsi, un sommet associé à une face aura 20 voisins, et un sommet associé à une arête aura 12 voisins. En particulier,  $X$  est un graphe de degré borné. L'ensemble  $\Gamma = \{\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  des contours d'une configuration  $\sigma$  est obtenu en prenant les composantes connexes de l'ensemble des arêtes frustrées et des cases de  $0$ . Pour chacun de ces contours  $\gamma$ , on peut associer des nombres  $f, e, int$  de faces de spin  $0$ , d'arêtes frustrées et d'intérieurs distincts de  $\gamma$  respectivement (où un intérieur est une composante connexe de sites de  $\mathbb{Z}^2$  séparées de l'extérieur de  $\gamma$  par au moins une couche de  $0$  de  $\gamma$ ). On peut alors associer à

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

$\gamma$  un poids  $w(\gamma) = \exp(-af - be + \ln(2) \cdot \text{int})$ , de telle sorte à ce que la contribution à la fonction de partition d'un ensemble de contours  $\Gamma$  est  $\prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma)$  :

$$Z_{\Lambda}^{\bar{\sigma}} = \sum_{\Gamma = \{\gamma\}} \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma),$$

où la première somme est une somme sur tous les ensembles de contours  $\Gamma$  compatibles (c'est-à-dire dont les contours  $\gamma$  peuvent être obtenus comme composantes connexes de contours d'une configuration  $\sigma$  avec la condition au bord  $\bar{\sigma}$ ). En effet, étant donné un ensemble de contours possibles  $\Gamma$  issus d'une condition au bord  $\bar{\sigma}$ , on peut reconstruire exactement la configuration  $\omega$  à partir de ses contours à part dans les intérieurs de contours, où l'on a exactement 2 possibilités (symétriques l'une de l'autre en changeant les spins + en - et réciproquement). Notons  $\gamma$  la taille de  $\gamma$ , c'est-à-dire le nombre de cases plus le nombre d'arêtes frustrées dans  $\gamma$ . On a alors un contrôle sur le poids d'un contour en fonction de sa taille :  $w(\gamma) \leq e^{-(\beta - \beta_0)|\gamma|}$  avec  $\beta_0 = \ln(2)$ .

On peut désormais appliquer les résultats de la théorie du développement en clusters : une condition suffisante à vérifier est d'avoir  $\sum_{\gamma \ni x} |w(\gamma)| e^{D|\gamma|} < 1$  pour n'importe quel sommet  $x$  de  $X$  et  $D$  le degré maximal du graphe. Comme le graphe est de degré fini, le nombre de parties connexes de taille  $n$  fixée contenant un sommet  $x$  fixé est majoré par  $A^n$  pour une certaine constante  $A$ . En combinant cette remarque avec le contrôle sur le poids  $w(\gamma)$  en fonction de sa taille, on voit que la condition de convergence est satisfaite si  $\beta$  est pris suffisamment grand (ce que l'on supposera vrai dans la suite).

On a donc

$$Z_{\Lambda}^+ = \exp \left( \sum_{\Gamma \subset \Lambda} \varphi^T(\Gamma) \prod_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma) \right)$$

où les poids  $\varphi^T(\Gamma)$  dépendent de la géométrie de  $\Gamma$  et sont *nuls* si l'ensemble  $\Gamma = \cup \gamma$  n'est pas connexe. On a également le contrôle suivant sur les poids des ensembles de contours contenant un certain bout de contour  $\gamma_1$  :

$$1 + \sum_{k \geq 2} k \sum_{\gamma_2} \dots \sum_{\gamma_k} \phi^T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \prod_{i=2}^k w(\gamma_i) \leq e^{D|\gamma_1|}.$$

Notons que si l'on modifie les poids en  $\tilde{w}(\gamma) = e^{\kappa\beta|\gamma|} w(\gamma)$  pour  $0 < \kappa < 1$ , on peut également utiliser le développement en clusters quitte à prendre  $\beta$  suffisamment grand pour que la condition sur les poids soit encore vérifiée. En particulier, on peut obtenir la borne suivante à  $\kappa$  fixé

$$|\phi^T(\Gamma)| \leq e^{-\kappa(\beta - \beta_0)|\Gamma|},$$

où  $|\Gamma|$  est la taille de l'amas  $\Gamma$ .

Comme aux températures considérées, les deux mesures de Gibbs en volume infini  $\mu^+$  et  $\mu^-$  associées aux conditions au bord + et - respectivement sont différentes, il est intéressant de considérer des conditions au bord de Dobrushin, c'est-à-dire constituées de spins + sur le demi-plan supérieur (possiblement incliné d'un angle  $\theta$ ) et constituée de spins - sur le demi-plan inférieur. Le contact entre ces deux plans se fait soit directement (*type 1*), soit avec une case 0 (*type 2*).

Formellement, pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit  $\sigma^1(t) = +$  si  $t > 0$ ,  $\sigma^1(t) = -$  sinon, et  $\sigma^2(t) = \sigma^1(t)$  pour tout  $t \neq 0$ , et  $\sigma^2(0) = 0$ . Pour  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  on définit la condition au bord inclinée de type  $a$  inclinée d'un angle  $\theta$  par  $\sigma^{\theta, a}(k, l) = \sigma^a(l - \lfloor k \tan(\theta) \rfloor)$  où  $a \in \{1, 2\}$ , et la condition au bord

mixte  $\sigma^{\theta,a,b}(k,l) = \sigma^{\theta,a}(k,l)$  pour  $k < 0$  et  $\sigma^{\theta,a,b}(k,l) = \sigma^{\theta,b}(k,l)$  pour  $k \geq 0$ . On écrira  $Z_{\Lambda}^{\theta,a,b}$  pour la fonction de partition de condition au bord associée dans  $\Lambda$ . Les indices  $a, b \in \{1, 2\}$  de la fonction de partition n'ont aucun lien avec les paramètres  $a$  et  $b$  du Hamiltonien, cette notation étant celle de l'article original sur Blume-Capel.

Quand le domaine étudié est  $\Lambda_{L,M} = [-L, L] \times [-M, M]$ , on écrira simplement les indices  $L, M$  au lieu de  $\Lambda_{L,M}$ .

**Structure de renouvellement et condition de séparation des masses.**

On s'intéresse au comportement asymptotique de  $Z_{L,M}^{\theta,a,b}/Z_{L,M}^+$  en prenant d'abord  $M$  qui tend vers l'infini, puis  $L$ , pour des angles  $\theta < \pi/4$ , pour  $\beta$  suffisamment grand.

Observons que la condition au bord  $\sigma^{\theta,a,b}$  crée nécessairement une *interface macroscopique* (c'est-à-dire un contour ancré en les points de discontinuité de la condition au bord)  $I$  reliant les deux côtés du domaine. Notons  $\mathcal{I}_{L,M}^{\theta,a,b}$  l'ensemble de ces interfaces macroscopiques possibles. Chaque interface macroscopique sépare le domaine  $\Lambda$  en plusieurs parties : en notant  $\Delta(I)$  l'ensemble des sites qui lui sont adjacents, on notera  $\Lambda_{L,M}^+(I)$  le domaine connexe totalement contenu au-dessus de  $\Delta(I)$ ,  $\Lambda_{L,M}^-(I)$  la composante en-dessous de  $\Delta(I)$ , et  $Int(I)$  pour l'ensemble des composantes restantes de  $\Lambda_{L,M} \setminus \Delta(I)$  (voir figure 3.7).

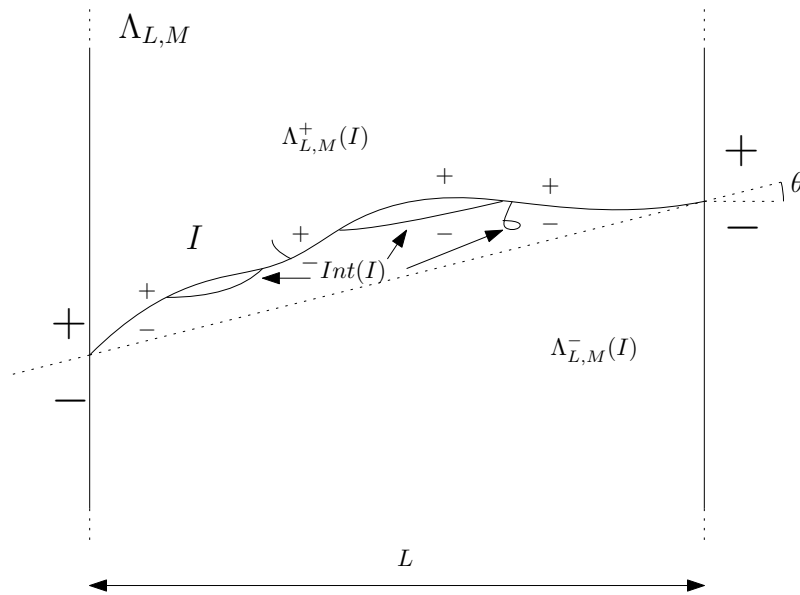


FIGURE 3.7 – Une interface  $I$  induite par une condition de Dobrushin inclinée d'un angle  $\theta$ .  $I$  sépare l'espace en deux demi espaces  $\Lambda_{L,M}^+(I)$  et  $\Lambda_{L,M}^-(I)$ , ainsi que des parties intérieures  $Int(I)$  séparées du reste du domaine par un circuit de cases 0.

A cause de la symétrie entre les spins + et −, on obtient alors

$$Z_{L,M}^{\theta,a,b} = \sum_{I \in \mathcal{I}_{L,M}^{\theta,a,b}} w(I) Z_{Int(I)}^+ Z_{\Lambda_{L,M}^+(I)}^+ Z_{\Lambda_{L,M}^-(I)}^-$$

puis, en utilisant le développement en clusters sur les différentes fonctions de partitions, on obtient

$$\mathcal{Z}_{L,M}^{\theta,a,b} \equiv \frac{Z_{L,M}^{\theta,a,b}}{Z_{L,M}^+} = \sum_{I \in \mathcal{I}_{L,M}^{\theta,a,b}} w(I) \exp \left( - \sum_{C \cap \Delta(I) \neq \emptyset} \phi^T(C) \right).$$

En écrivant  $e^{-\phi^T(C)} = (e^{-\phi^T(C)} - 1) + 1$ , on obtient

$$\mathcal{Z}_{L,M}^{\theta,a,b} = \sum_{I \in \mathcal{I}_{L,M}^{\theta,a,b}} w(I) \sum_{\substack{\mathcal{C} = \{C\} \\ C \cap \Delta(I) \neq \emptyset}} \prod_{C \in \mathcal{C}} (e^{-\phi^T(C)} - 1),$$

et grâce aux estimées sur  $\phi^T(C)$ , on a également  $|\psi(C)| \equiv |e^{-\phi^T(C)} - 1| \leq e^{-\kappa(\beta - \beta_0)|C|}$ .

En partant de cette expression, on voit que l'on peut écrire  $\mathcal{Z}_{L,M}^{\theta,a,b}$  comme une somme sur les paires  $(I, \mathcal{C})$ , où  $I$  est une interface, et  $\mathcal{C}$  une famille de contours attachés à  $I$  apparaissant dans les termes de développement en clusters. On dira que la colonne d'abscisse  $x$  est *régulière* dans  $(I, \mathcal{C})$  de type  $a \in \{1, 2\}$  si la ligne verticale de coordonnée  $x$  n'intersecte pas  $\mathcal{C}$ , et que l'interface  $I$  dans cette colonne coïncide avec la forme d'une colonne de la configuration  $\sigma^a$ , c'est-à-dire consiste uniquement en une arête frustrée ou une case 0. De façon naturelle, on peut alors décomposer  $(I, \mathcal{C})$  en composantes irréductibles (que l'on appellera des *agrégats*) en considérant les restrictions de  $(I, \mathcal{C})$  entre deux colonnes régulières (voir figure 3.8). On a alors une correspondance bijective entre  $(I, \mathcal{C})$  et les suites  $(I_A, \mathcal{C}_A)$  de types compatibles, où les types de chaque agrégat  $(I_A, \mathcal{C}_A)$  sont la donnée du type de sa colonne de départ et de sa colonne d'arrivée, et où la condition de compatibilité entre les agrégats est que le type de départ d'un agrégat et le même que celui de la fin du précédent.

On peut définir le poids d'un agrégat  $A = (I_A, \mathcal{C}_A)$  de façon cohérente en définissant

$$z(A) = w(I_A) \prod_{C \in \mathcal{C}_A} (e^{-\phi^T(C)} - 1)$$

ce qui nous donne la réécriture suivante :

$$\mathcal{Z}_{L,M}^{\theta,a,b} = \sum_{\mathcal{A}} \prod_{A \in \mathcal{A}} z(A)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des suites d'agrégats compatibles possibles.

Comme les poids sont exponentiellement proches de leur limite quand  $M$  tend vers l'infini, on utilisera dans toute la suite les quantités limites et on omettra l'indice  $M$ .

Pour des nombres complexes  $|u| < \nu$  où  $\nu$  est une borne à spécifier plus tard, on introduit la fonction de partition grand canonique par :

$$\mathcal{Z}_L^{a,b}(u) = \sum_k e^{\beta k u} \mathcal{Z}_L^{\theta_k, a, b}, \quad \forall L \geq 1 \text{ et } \mathcal{Z}_0^{a,b}(u) = \delta_{a,b},$$

où les  $\theta_k$  valent  $\theta_k = \arctan(\frac{k}{L})$ .

On fait apparaître alors une *structure de renouvellement* puisque cette fonction est reliée aux poids des agrégats par la relation

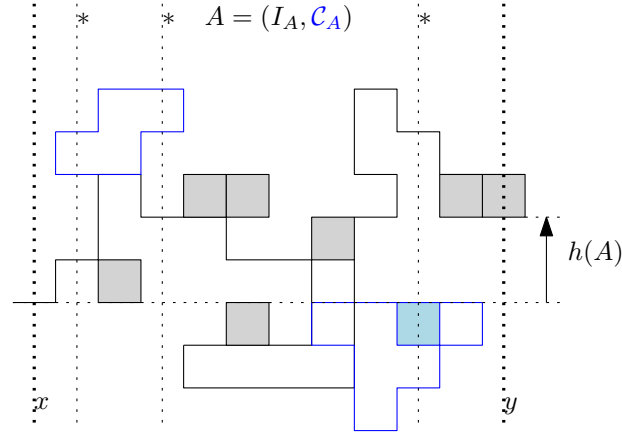


FIGURE 3.8 – Un agrégat compris entre deux colonnes régulières  $x$  (de type 1) et  $y$  (de type 2) de hauteur  $h(A)$  et de longueur  $l(A) = y - x + 1$ . Les décorations issues du développement en clusters sont en bleu. Sans celles-ci, les colonnes marquées d'une \* seraient également régulières.

$$\mathcal{Z}_L^{a,b}(u) = \sum_{j=1}^L \sum_{\substack{(m_i)_{i=1}^j \\ m_i \geq 1, \sum m_i = L}} \sum_{(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_j)} \prod_i z_{m_i}^{\sigma_{i-1}, \sigma_i}(u)$$

où les  $\sigma_i \in \{1, 2\}$  et  $\sigma_0 = a, \sigma_j = b$ , et

$$z_l^{a,b}(u) = \sum_{A \in \mathbb{A}_l^{a,b}} e^{h(A)\beta u} z(A),$$

où  $h(A)$  est la hauteur totale de l'agrégat  $A$ , et  $\mathbb{A}_l^{a,b}$  est l'ensemble de tous les agrégats possibles entre deux colonnes régulières de type  $a$  et  $b$  respectivement séparées par une distance  $l$ .

Pour chaque paire de conditions au bord possible, on définit deux séries entières :

$$\mathcal{F}_{a,b}(u, w) = \sum_{l=1}^{\infty} z_l^{a,b}(u) w^l, \quad \mathcal{Z}_{a,b}(u, w) = \sum_{L=1}^{\infty} \mathcal{Z}_L^{a,b}(u) w^L$$

et on note  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{Z}$  pour les matrices  $2 \times 2$  correspondantes. Du fait de la structure de renouvellement, quand les séries correspondantes convergent, elles satisfont  $\mathcal{Z} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}^n = [1 - \mathcal{F}]^{-1}$ .

Notons  $w_0(u)$  la plus petite solution strictement positive de l'équation  $\det[1 - \mathcal{F}(u, w)] = 0$ .

Pour obtenir les asymptotiques de  $\mathcal{Z}_L^{\theta, a, b}$ , on a besoin d'un écart non trivial entre les deux rayons de convergence des deux séries entières. Si l'on note  $r(u)$  le rayon de convergence de  $\mathcal{Z}(u, \cdot)$  (qui est le même que celui des  $\mathcal{Z}^{a,b}(u, \cdot)$ ), et  $R(u)$  celui de  $\mathcal{F}(u, \cdot)$ . On a directement l'encadrement suivant :

$$0 < r(u) \leq R(u).$$

L'inégalité *stricte*  $0 < r(u) < R(u)$  est appelée la condition de séparation des masses (*mass-gap condition*) et c'est l'inégalité cruciale pour pouvoir utiliser les techniques de renouvellement.

Pour obtenir cette condition, l'idée est de comparer les poids  $z_l(u)$  des configurations possibles entre deux colonnes régulières avec  $z_1^l(u)$ , c'est-à-dire le poids des configurations où l'on aurait eu uniquement des colonnes régulières sur la distance  $l$ . D'une part, par définition du rayon de convergence  $R(u)$ , cela nous donne une majoration du rayon  $R(u)$ , et d'autre part, comme  $r(u)$  est également la plus petite solution  $w_0(u)$  de  $\det[1 - \mathcal{F}(u, \cdot)] = 0$ , on peut comparer la matrice  $\mathcal{F}$  à la matrice  $\tilde{\mathcal{F}}(u, w) = \mathcal{F}^1(u) \cdot w$  où  $\mathcal{F}^1 = \{z_1(u)^{i,j}\}_{i,j \in \{1,2\}}$  la matrice où seuls les pas de distance 1 sont autorisés (ce qui correspond aux trajectoires créant uniquement des colonnes régulières). Pour cela, comme  $\det[1 - \tilde{\mathcal{F}}] = 1 - w \cdot \text{trace}(\mathcal{F}^1) + w^2 \det(\mathcal{F}^1)$ , on regarde  $w_1(u) = \text{trace}(\mathcal{F}^1(u))$  (qui est l'ordre de grandeur de l'énergie typique d'un pas entre deux colonnes régulières) et qui devrait vérifier  $r(u) \approx (w_1(u))^{-1}$ .

Pour différentes valeurs respectives des paramètres  $a$  et  $b$ , la méthode pour obtenir la condition de séparation des masses reste la même, mais les contrôles sur  $w_1(u)$  changent au cas par cas, en fonction du scénario coûtant le moins d'énergie pour relier deux colonnes régulières à distance 1 l'une de l'autre. On présente ici la méthode dans le cas où  $b < a/2$ , c'est-à-dire que les cases 0 sont fortement privilégiées par le système par rapport à la présence d'arêtes frustrées. Dans l'article original sur le modèle de Blume Capel [HK02], on peut voir le traitement d'autres cas, que l'on peut suivre pour obtenir la condition de séparation des masses pour le cas du modèle de Widom Rowlinson.

Dans ce cas, en regardant la matrice  $\mathcal{F}^1(u)$  quand  $u$  est d'ordre 1 et  $\beta = b \leq a/2$ , on pose  $\bar{w}_1(u) = e^{-b}(1 + 2 \cosh(\beta u)) = w_1(u)(1 + o(e^{-\beta}))$ . En comparant les poids à  $\bar{w}_1(u)$ , on obtient la condition de séparation de masses :

**Proposition 10.** *Il existe  $\gamma > 0, \tilde{\beta} > 0, \nu > 0$  tels que pour  $\beta$  suffisamment grand, on a les estimées suivantes uniformément en  $|u| < \nu$ , en les indices  $a, b \in \{1, 2\}$ , pour tout  $l \geq 1$  :*

$$\left| \frac{z_l^{a,b}}{(\bar{w}_1(u))^l} \right| \leq e^{-(\gamma l - \kappa)(\beta - \tilde{\beta})},$$

avec  $0 < \gamma < \kappa < 2\gamma$ . On a alors

$$R(u) \geq (\bar{w}_1(u))^{-1} e^{\gamma(\beta - \tilde{\beta})}$$

et  $r(u) \leq (\bar{w}_1(u))^{-1}(1 + o(1))$  pour  $\beta \rightarrow \infty$ , ce qui nous donne la condition de séparation des masses :

$$0 < r(u) < R(u).$$

### 3.3.2 Propriété de l'interface via le processus de renouvellement.

#### Décroissance exponentielle des incréments du processus de renouvellement.

Admettons temporairement le résultat précédent et revenons à notre problématique de points de renouvellement décrivant l'interface afin d'obtenir une convergence de l'interface vers un pont Brownien.

Dans la construction que l'on a choisie, le terme  $\bar{w}_1(u)$  qui sert à contrôler les poids est en fait le poids des interfaces utilisant uniquement des pas élémentaires joignant deux colonnes régulières successives en utilisant uniquement une case 0 et en faisant un déplacement de hauteur  $+1, 0$  ou  $-1$ . Dans le régime de validité de la séparation des masses, le contrôle sur les poids peut se réécrire, pour  $l \geq 2$ ,

$$\left| \frac{z_l(u)}{w_1^l} \right| \leq C e^{-\gamma(l-1)\beta},$$

pour une certaine constante  $C$ , ce qui donne un contrôle sur les poids des trajectoires utilisant des portions d'interfaces irréductibles de taille  $l \geq 2$ , puisque, uniformément en leur type, elles ont un poids exponentiellement faible.

En effet, à  $L$  et  $u > 0$  (par exemple) fixés, en notant  $\mu_L$  la loi de l'ensemble des  $(l_i, h_i)_i$  (avec  $\sum_i l_i = L$ ) donnant les écarts en longueur et hauteur entre les différents points de renouvellement de l'interface, c'est-à-dire les points d'entrée et de sortie dans les différentes colonnes régulières, et  $Z_\mu$  sa fonction de partition, on a

$$\mu_L[l_i = l] = \frac{1}{Z_\mu} \sum_{x=1}^L \mu_L(X(i) = x) \frac{1}{Z_\mu} \frac{z_l(u) Z_x Z_{L-l+x}}{Z_L} \leq \frac{z_l(u)}{w_1^l} \leq e^{-\gamma(l-1)\bar{\beta}},$$

où l'on a noté  $X(i)$  la position de la  $i$ -ième colonne régulière.

De plus, la loi de la hauteur conditionnée par la valeur de  $l$  vaut

$$\mu_L[h_i = h | l_i = l] = \frac{z_{l,h}}{z_l},$$

où  $z_{l,h}$  est la somme du poids de toutes les interfaces restreintes à celles où  $h(I) = h$  et  $l(I) = l$ .

Dans la preuve de la séparation de masses, on a montré qu'un amas de hauteur  $h$  constitué de  $n$  éléments sur une longueur  $l$  de colonnes irrégulières a son poids majoré par  $e^{u\beta h} \cdot (Ce^{-\beta})^{2l} (Ce^{-\beta})^{n-2l}$  pour une certaine constante  $C$ . Pour  $h$  positif et suffisamment grand, on a donc

$$\begin{aligned} \mu_L[h_i = h] &\leq \sum_{l \leq h/3} \mu_L[h_i = h | l_i = l] + \mu_L[l_i \geq h/3] \\ &\leq \sum_{l \leq h/3} e^{u\beta h} \sum_{n \geq h} (Ce^{-\beta})^{2l} (Ce^{-\beta})^{n-2l} \cdot ((Ce^{-\beta})^{-2l} e^{-u\beta 2h/3}) + c^{h/3} \\ &\leq \frac{h}{3} e^{u\beta h/3} (Ce^{-\beta})^{h/3} + c^{h/3} \\ &\leq c^h \end{aligned}$$

où les  $c$  et  $C$  sont des constantes (avec  $c < 1/2$ ) dont les valeurs peuvent changer d'une ligne à l'autre. Ce résultat reste vrai si  $h$  n'est pas du signe de  $u$  (et est plus simple à montrer car le biais  $u > 0$  incite  $h$  à être positif). Ainsi la variable  $|h_i|$  décroît exponentiellement et les variables  $(l_i, h_i)$  ont donc un *moment exponentiel non trivial*, et ce uniformément en  $L$  assez grand.

Comme la majorité des pas constituant une interface est typiquement composée de pas de longueur 1 et de variation de hauteurs  $+1, 0, -1$ , la marche aléatoire limite  $S_n = \sum_i (l_i, h_i)$  est bien *apériodique* et on est donc en mesure d'appliquer les résultats des paragraphes précédents pour obtenir la convergence vers un pont brownien du processus reliant les points de renouvellement quand on conditionne par  $\sum l_i = L$ .

Une fois les moments exponentiels sur  $l$  et  $h$  acquis, il est simple de contrôler également les variations de hauteur maximale de l'interface entre deux points de renouvellement.

Notons  $h_{int}$  la différence de hauteur entre le point le plus haut/bas de l'interface entre deux points de renouvellement consécutifs. Pour atteindre  $h_{int}$ , si  $l < h_{int}/4$ , cela contraint le morceau d'interface correspondant à avoir au moins  $h_{int}/2$  éléments en trop par rapport au nombre d'éléments minimal pour traverser la longueur  $l$ , et donc un coût exponentiellement élevé en le nombre de ces éléments en trop. Comme par ailleurs la longueur entre deux points de renouvellement est également de taille décroissant exponentiellement, on obtient que  $\mu[h_{int} \geq M] \leq c^M$ .

Par une borne d'union, on obtient que tous les  $h_{int}$  sont bornés par  $\varepsilon(L)$  avec une probabilité tendant vers 1 quand  $L$  tend vers l'infini pour toute fonction  $\varepsilon(L) \gg \log(L)$ .



Ainsi, pour les angles correspondants aux valeurs de  $u$  telles qu'on ait la condition de séparation de masses, on a bien convergence vers un pont Brownien pour l'interface macroscopique créée par la condition au bord de Dobrushin associée à cet angle  $\theta$ .

### Asymptotiques d'Ornstein-Zernike.

Pour comprendre le lien entre le paramètre  $u$  et l'angle de la condition au bord de Dobrushin associée, revenons rapidement au cadre des *asymptotiques d'Ornstein Zernike*, dont le résultat découle directement de la description des interfaces et de la condition de séparation des masses obtenues précédemment.

Dans cette partie, comme tous les contrôles sont uniformes en les types de conditions au bord  $a, b \in \{1, 2\}$ , on ne marquera pas ces indices pour alléger les notations. Regardons dans un premier temps  $Z(u, w) = \sum Z_L(u)w^L$  pour obtenir le comportement asymptotique de  $Z_L(u)e^{-f_\beta(u)L}$  quand  $L$  tend vers l'infini.

On a  $Z = (1 - F)^{-1}$  et  $r(u) = e^{-f_\beta(u)}$  est le plus petit réel positif tel que  $F(u, r(u)) = 1$  donc la condition de séparation des masses assure qu'alors  $Z$  a un pôle simple en  $r(u)$  par le théorème de Perron-Frobenius. En notant  $P(w) = (r(u) - w)Z(u, w)$ ,  $P$  est alors analytique (on notera  $c_m$  ses coefficients), et on a  $1 = Z(1 - F) = \frac{P(w)}{r-w}(1 - F(w))$ , ce qui donne, après dérivation en  $w$  et évaluation en  $w = r(u)$ ,

$$P(r(u)) = \frac{1}{F'(r(u))}.$$

De là, on a (en ne précisant pas la dépendance en  $u$ ) :

$$\begin{aligned} Z(w) &= \sum Z_L w^L = \frac{P(w)}{r-w} = \frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{z}{r}\right)^l \sum_m c_m z^m \\ &= \frac{1}{r} \sum_L r^{-L} \left( \sum_{m=1}^L c_m r^m \right) z^L \\ &= \sum_L \frac{1}{r} (P(r) + o(1)) r^{-L} z^L \end{aligned}$$

donc par unicité du développement, pour  $L$  tendant vers l'infini, on a :

$$Z_L r^L = \frac{1}{r F'(r)} (1 + o(1)).$$

Or  $r F'(r) = \sum_{l \geq 1} l z_l r^l = \mu[l]$ , où  $\mu[l]$  est la l'espérance de la longueur entre deux colonnes régulières. Ainsi

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} Z_L(u) e^{-f_\beta(u)L} = \frac{1}{\mu[l]}.$$

Pour obtenir le coefficient  $Z_L^\theta$  (quand  $L$  tend vers l'infini), on va pouvoir utiliser la méthode de Laplace :  $Z_L(u)$  est analytique en  $u$  et on peut donc regarder  $Z_L(u + iv)$  pour  $v$  un réel. Comme à  $u$  et  $L$  fixé, la partition grand canonique s'écrit

$$\mathcal{Z}_L^{a,b}(u) = \sum_k e^{\beta k u} \mathcal{Z}_L^{\theta_k, a, b},$$

on peut définir la loi de la hauteur totale  $H$  du point de sortie de l'interface macroscopique par  $\mathbb{P}_u[H = k] = \frac{e^{\beta k u} \mathcal{Z}_L^{\theta_k}}{\mathcal{Z}_L(u)}$ . Notons  $\mathbb{E}_u$  son esperance.

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

On fixe  $u$  tel que

$$\frac{d}{dv} \frac{1}{iL} \log(Z_L(u + iv))|_{v=0} = \mathbb{E}_u[H/L] = \tan(\theta).$$

On a alors

$$\begin{aligned} Z_L^\theta &= e^{-uL \tan(\theta)} Z_L(u) \frac{1}{2\pi} \int_{v \in [-\pi, \pi]} \frac{Z_L(u + iv)}{Z_L(u)} e^{-iLv \tan(\theta)} dv \\ &= e^{(f_\beta(u) - u \tan(\theta))L} (Z_L(u) e^{-f_\beta(u)L}) \frac{1}{2\pi} \int_{v \in [-\pi, \pi]} e^{-Lv^2 (\frac{1}{L} \log(Z_L(u + iv)))''(0) + LO(v^3)} dv \end{aligned}$$

Or en admettons provisoirement qu'il y a *localisation*, c'est-à-dire que l'intégrale prise en dehors de  $|v| < \varepsilon_L$  avec  $\varepsilon_L = K \frac{(\log L)^{1/2}}{L^{1/2}}$  tend vers 0 quand  $L$  tend vers 0, on obtient les asymptotes d'Ornstein-Zernike :

$$Z_L^\theta \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-L\tau_\beta(\theta)}}{\mu[l]} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\log(Z_L(u + iv)))''(0)}}$$

où  $\tau_\beta(\theta) = -(f_\beta(u) - u \tan(\theta)) = f_\beta^*(\tan(\theta))$  (avec  $f_\beta^*$  la transformée de Legendre de  $f_\beta$ ) donne la *tension de surface* du système.

Pour la localisation autour de 0, remarquons que

$$\frac{Z_L(u + iv)}{Z_L(u)} e^{ivL \tan(\theta)} = \mathbb{E}_u[e^{iv(H - L \tan(\theta))}]$$

où  $H$  est la hauteur totale au bout d'une largeur  $L$ . Or, en conditionnant par la valeur  $N$  du nombre de parties de l'interface (qui, avec très grande probabilité, vérifie  $L/N \in [\frac{\mu[l]}{1+\varepsilon}, \frac{\mu[l]}{1-\varepsilon}]$ ), on a

$$\mathbb{E}_u[e^{iv(H - L \tan(\theta))} | N] = \mu_u[e^{iv(h_1 - (L/N) \tan(\theta))}]^N.$$

Or, comme  $h_1$  n'est pas concentré sur un sous-réseau de  $\mathbb{Z}$ , pour  $x \in [\frac{\mu[l]}{1+\varepsilon}, \frac{\mu[l]}{1-\varepsilon}]$ , on a pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\sup_{\substack{|v| > \eta \\ x \in [\frac{\mu[l]}{1+\varepsilon}, \frac{\mu[l]}{1-\varepsilon}]}} |\mu_u[e^{iv(h_1 - x \tan(\theta))}]| = c < 1.$$

De plus, comme au voisinage de 0, uniformément en  $x \in [\frac{\mu[l]}{1+\varepsilon}, \frac{\mu[l]}{1-\varepsilon}]$ , pour  $\varepsilon_L \leq |v| \leq \eta$ ,

$$|\mu_u[e^{iv(h_1 - x \tan(\theta))}]| = e^{-Mv^2 + o(v^2)} \leq e^{-\gamma v^2} \leq L^{-\gamma K/L}$$

et pour  $L$  suffisamment grand, on a  $c < L^{-\gamma/L}$  également. Donc

$$\begin{aligned} \int_{|v| > \varepsilon_L} \frac{Z_L(u + iv)}{Z_L(u)} e^{ivL \tan(\theta)} dv &\leq \int_{|v| > \varepsilon_L} \sum_{N \in [\frac{L(1+\varepsilon)}{\mu_u[l]}, \frac{L(1-\varepsilon)}{\mu_u[l]}]} L^{-\frac{\gamma K(1-\varepsilon)}{\mu_u[l]}} + o(1) \\ &\leq \sum_{N \leq cL} L^{-\kappa} + o(1) \end{aligned}$$

avec  $\kappa > 1$  si l'on a choisi  $K$  suffisamment grand, donc la contribution de cette intégrale tend vers 0 quand  $L$  tend vers  $+\infty$  ce qui prouve la localisation.

**Angles couverts par ces résultats - cas presque horizontal.**

D'après le paragraphe précédent, on a la relation clé suivante :

$$\mathbb{E}_u \left[ \frac{H}{L} \right] = \tan(\theta).$$

Estimons cette espérance en donnant une autre représentation de la variable aléatoire  $H$ . Prenons d'abord une suite de longueurs  $(l_1, \dots, l_m)$  dont la somme vaut  $\sum l_i = L$  avec une probabilité proportionnelle à  $w_u(l_1, \dots, l_m) = \prod_i z_{l_i}(u)$ , ce qui donne une probabilité

$$\frac{w_1^L \prod_i \frac{z_{l_i}}{w_1^{l_i}}}{\mathcal{Z}_L(u)},$$

à toute suite telle que  $L = \sum_i l_i$ .

Puis, conditionnellement à la suite des longueurs (ainsi que la suite des types associés), donnons nous des variables aléatoires  $h_i$  i.i.d. de loi compatible avec les poids  $z_{l_i}(u)$ . Si la longueur  $l_i = 1$  et la colonne est de type  $(2,2)$ , la variable  $h_i$  est donnée par une copie indépendante de  $X$  où  $X = 1$  avec probabilité  $\frac{e^{\beta u}}{1+2 \cosh \beta u}$ ,  $X = 0$  avec probabilité  $\frac{1}{1+2 \cosh \beta u}$  et  $X = -1$  avec probabilité  $\frac{e^{-\beta u}}{1+2 \cosh \beta u}$ , ce qui fait que l'espérance d'un pas  $X$  est  $\frac{2 \sinh \beta u}{1+2 \cosh \beta u}$  ; et sinon, l'incrément  $h_i$  vérifie  $h_i = h$  avec probabilité

$$\frac{e^{h\beta u} \sum_{I; h(I)=h} e^{-\mathcal{E}(I)} X(I)}{z_{l_i}(u)}$$

où  $X(I)$  est la somme des poids de tous les clusters possibles  $\mathcal{C}$  que l'on peut attacher à  $I$  tels que  $(I, \mathcal{C})$  soit un bout d'interface admissible entre deux colonnes régulières à distance  $l_i$  l'une de l'autre.

Notons  $l_{irreg}$  la somme de toutes les distances  $l_i$  qui soient du second cas, c'est-à-dire que soit  $l_i \geq 2$ , soit  $l_i = 1$  mais les colonnes n'ont pas le bon type. Les poids correspondants vérifient  $\frac{z_l(u)}{w_1(u)} \leq e^{-\gamma(\beta-\tilde{\beta})l}$  et on a donc une densité très faible de ces blocs avec très grande probabilité puisqu'on peut dominer stochastiquement la loi des colonnes contribuant à  $l_{irreg}$  par des variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre  $\varepsilon_\beta = \frac{e^{-\gamma(\beta-\tilde{\beta})}}{1 + e^{-\gamma(\beta-\tilde{\beta})}}$ . En particulier, on a  $\mathbb{P}_u[l_{irreg} \geq 2\varepsilon_\beta] \leq e^{-cL}$  pour un certain  $c > 0$ .

Dans le cas où  $u$  est positif, on obtient donc

$$\mathbb{E}_u[H/L] \geq (1 - 2\varepsilon_\beta) \frac{2 \sinh \beta u}{1 + 2 \cosh \beta u} (1 - e^{-cL})$$

dont la limite quand  $L$  tend vers l'infini converge vers 1 dès que le produit  $\beta u \rightarrow \infty$  (ce que l'on peut faire en gardant  $u < \nu$ ). Comme  $\mathbb{E}_u[H/L]$  est croissante en  $u$  et  $\mathbb{E}_{u=0}[h/L] = 0$ , on peut donc obtenir tous les angles  $\theta \in ]-\pi/4, \pi/4[$  pourvu que  $\beta$  soit choisi assez grand.

**Angles couverts par ces résultats - cas presque diagonal.**

Pour avoir un résultat valide à  $\beta$  fixé couvrant l'ensemble des angles possibles, et donc notamment ceux proches de  $\pm\pi/4$ , une technique possible est de refaire la même analyse que précédemment bien à l'intérieur du domaine mais dans un nouveau réseau obtenu à partir du

premier en tournant le repère de  $\pi/4$ . Les colonnes de notre nouveau réseau sont alors constituées des diagonales du réseau précédent, et les contours sont donnés par les traces des contours précédents, c'est-à-dire des bouts de diagonales montantes ou descendantes (traces des arêtes frustrées) et de losanges ou demi-losanges (traces des cases de 0). Puisqu'on est dans le régime où le coût d'une arête frustrée vérifie  $a > \beta/2$ , on définit les colonnes régulières comme celles où l'intersection avec l'interface macroscopique est composée d'une diagonale d'une tuile 0. Pour ne pas surcharger cette section, nous ne donnons pas le détail des calculs, mais de façon similaire à [HK02], on peut analyser cette plage d'angles et obtenir une forme exponentiellement décroissante des poids comme pour le cas précédent :

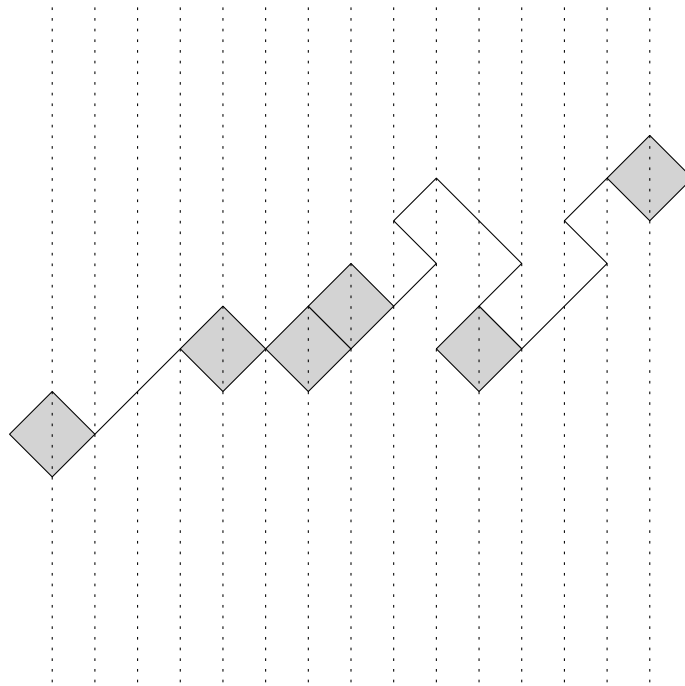


FIGURE 3.9 – Un bout d'interface dans la représentation diagonale du modèle.

**Lemma 1.** *Pour  $l \geq 3$ , en rajoutant aux poids un biais  $e^{u_\beta}$  avec  $|e^{u_\beta}| \leq c_\beta e^{-\beta/2}$ , avec  $c_\beta \rightarrow 0$  qui décroît vers 0 à vitesse polynomiale, on a*

$$\left| \frac{z_l(u)}{(e^{-\beta/2})^l} \right| \leq C(q_\beta)^{l-2},$$

où  $C$  est une constante et  $q_\beta \rightarrow 0$  polynomialement rapidement quand  $\beta$  tend vers  $+\infty$ .

On voit que seuls les espaces entre deux colonnes régulières à distance 3 ou plus sont pénalisés, donc les bouts d'interfaces typiques sont constitués de colonnes régulières à distance 1 ou 2 (que l'on appellera respectivement des *1-sauts* et des *2-sauts*). Comme auparavant, la contribution totale  $l_{\geq 3}$  des bouts d'interfaces qui ne sont pas des 1 ou des 2-sauts est très faible, et on peut

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

montrer que le contrôle sur les poids donne  $\mathbb{P}_{u_\beta}^{diag}[l_{\geq 3} \geq \varepsilon L] \leq (Cq_\beta)^{\varepsilon L/3}$  pour une certaine constante  $C$  par exemple.

De là, en prenant  $u_\beta > 0$  par exemple, dans une tranche de largeur  $L$  composée uniquement de 1 et de 2-sauts, l'espérance de la proportion de colonnes occupées par des 1-sauts est au moins égale à  $\frac{c_\beta^2}{2(c_\beta^2 + 1)}$ . Dans ce modèle, les 1-sauts et 2-sauts ont des poids respectifs

$$z_1(u_\beta) = e^{-\beta} 2 \cosh(u_\beta) \quad \text{et} \quad z_2(u_\beta) = e^{-\beta}.$$

En notant  $\tilde{Z}_L$  la fonction de partition correspondante, on a :

$$\tilde{Z}_L = z_1(u_\beta) \cdot \tilde{Z}_{L-1} + z_2(u_\beta) \tilde{Z}_{L-2}$$

donc comme

$$\frac{z_1(u_\beta) \cdot \tilde{Z}_{L-1}}{z_2(u_\beta) \tilde{Z}_{L-2}} \geq \frac{c_\beta^2 e^{-\beta} \tilde{Z}_{L-2}}{e^{-\beta} \tilde{Z}_{L-2}} = c_\beta^2,$$

l'espérance de la proportion de 1-sauts est d'au moins  $c_\beta^2/(c_\beta^2 + 1)$  et comme il y a au moins  $\lfloor \frac{L}{2} \rfloor$  sauts, on obtient le résultat.

Prenons  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , et notons comme précédemment  $H$  la hauteur au bout d'une distance  $L$ . Comme l'espérance de la contribution des sauts de longueur 3 ou plus est positive car  $u_\beta$  est positif, on obtient la minoration suivante

$$\mathbb{E}_{u_\beta}^{diag}[H/L] \geq (1 - (C'q_\beta)^{L/6}) \cdot \frac{c_\beta^2}{2},$$

ce qui tend vers  $c_\beta^2/2$  quand  $L$  tend vers  $+\infty$ .

Rappelons que dans le cas des angles presque horizontaux, on avait obtenu

$$\mathbb{E}_u[H/L] \geq (1 - 2\varepsilon_\beta) \frac{2 \sinh \beta u}{1 + 2 \cosh \beta u} (1 - e^{-cL})$$

donc pour obtenir tous les angles pour un même  $\beta$ , il suffit d'avoir  $c_\beta^2/2 \geq 3\varepsilon_\beta$  par exemple. Or  $\varepsilon_\beta$  décroît exponentiellement vite en  $\beta$  donc en prenant  $c_\beta = \frac{1}{\beta}$  par exemple, pour  $\beta$  suffisamment grand, en prenant l'union des angles que l'on peut atteindre par les cas presque horizontaux et par les cas presque diagonaux, on obtiendra le résultat simultanément pour tous les angles entre  $[-\pi/4, \pi/4]$ , et par symétrie, pour tous les angles possibles.

#### 3.3.3 Preuve de la condition de séparation des masses.

**Contrôle des poids  $z_i^{a,b}(u)$ .**

Dans ce qui précède, on a expliqué comment grâce au développement en clusters, on peut obtenir une structure de renouvellement en découpant la longueur  $L$  en tranches indépendantes pour les interfaces décorées de clusters.

Rappelons que les poids  $z_i^{a,b}$  sont donnés par

$$z_i^{a,b}(u) = \sum_{A \in \mathbb{A}_i^{a,b}} e^{h(A)\beta u} z(A)$$

où la somme porte sur les agrégats  $(I, \mathcal{C})$  entre deux colonnes régulières à distance  $l$ .

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

Fixons une interface  $I$  et contrôlons le poids de l'ensemble  $\mathcal{C}$  des contours décorant  $I$ , c'est-à-dire les contours apparaissant comme termes supplémentaires par le développement en clusters. On écrira  $w(I) = e^{-\mathcal{E}(I)}$  pour le poids de  $I$ . On a

$$\sum_{A; I_A=I} |e^{\beta h(I)u} z(A)| \leq e^{-\mathcal{E}(I)+\beta h(I)\nu} \sum_{\mathcal{C}} e^{-\kappa(\beta-\beta_0)|\mathcal{C}|}$$

où la somme porte sur les ensembles de contours  $\mathcal{C}$  décorant  $I$  et tels que les éléments  $\mathcal{C}$  touchent l'interface  $I$ . On dira qu'une colonne est *régulière* pour  $I$  si en prenant  $\mathcal{C} = \emptyset$ , elle devient régulière, et notons  $r(I)$  le nombre de colonnes régulières pour  $I$  (voir par exemple la figure [3.8](#)). Comme on doit nécessairement avoir au moins un morceau de contour décorant dans chacune de ces colonnes, on a  $|\mathcal{C}| \geq r(I)$ , et ainsi, pour tout  $\beta_1 > 0$ , on a

$$\sum_{\mathcal{C}} e^{-\kappa(\beta-\beta_0)|\mathcal{C}|} \leq e^{-\kappa(\beta-\beta_1-\beta_0)r(I)} \left(1 + \sum_{0 \in \mathcal{C}} e^{-\kappa\beta_1|\mathcal{C}|}\right)^{\Delta(I)} \equiv e^{-\kappa(\beta-\bar{\beta})r(I)} e^{\varepsilon\Delta(I)},$$

où  $\Delta(I)$  est la taille de l'interface épaissie de 1 et  $\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\beta_1 \rightarrow \infty$ . En décomposant  $I$  en ses  $r(I) + 1$  composantes irréductibles  $I_k$  séparées par des colonnes régulières pour  $I$ , on a donc

$$\sum_{A; I_A=I} |e^{\beta h(I)u} z(A)| \leq e^{\kappa(\beta-\bar{\beta})} \prod_k \tilde{z}(I_k)$$

où les  $\tilde{z}$  sont des nouveaux poids pour les bouts d'interfaces irréductibles  $I_k$  définis par

$$\tilde{z}(I) = e^{-(\mathcal{E}(I)-\varepsilon\Delta(I))+\beta h(I)\nu} e^{-\kappa(\beta-\bar{\beta})}.$$

Chaque bout d'interface  $I_k$  vient également avec des types  $a_k, b_k$  qui ont besoin d'être compatibles entre eux. Comme le graphe est de degré borné, la taille de l'interface épaissie  $\Delta(I)$  est contrôlée par son énergie :  $\Delta(I) \leq c/\beta \mathcal{E}(I)$  et donc  $\mathcal{E}(I) - \varepsilon\Delta(I) \geq (1 - \eta/\beta)\mathcal{E}(I) \equiv \lambda_\beta \mathcal{E}(I)$  pour une constante  $\lambda_\beta$  que l'on peut choisir arbitrairement proche de 1 pourvu que  $\beta$  soit pris suffisamment grand.

Contrôlons maintenant la somme  $\sum_{I \in \mathcal{I}_l^{a,b}} e^{-\lambda_\beta \mathcal{E}(I)+\beta h(I)\nu}$  où  $\mathcal{I}_l^{a,b}$  est l'ensemble des  $I$  irréductibles entre deux colonnes à distance  $l$ .

Pour avoir une borne sur l'énergie minimale  $\mathcal{E}(I)$  on va utiliser que chacune de ses colonnes intérieures est forcée à être mauvaise. Notons  $h(I)$  la différence de hauteur de l'interface. Remarquons que toute colonne intérieure contribue un facteur au moins  $e^{-2(\beta-\beta_0)}$  au poids total, et que comme l'interface est connectée, elle a au moins  $h$  éléments. On a également un facteur majoré par  $e^{-\beta}$  dû à la contribution des colonnes régulières de départ et d'arrivée.

On utilise de nouveau de façon cruciale que comme le graphe sur lequel vit  $I$  est de degré borné, il y a au plus  $A^n$  interfaces ancrés en un point donné et de taille  $n$ , pour une certaine constante  $A$ .

Quand  $h(I) \leq 2(l-1)$ , on a donc le contrôle suivant pour  $|u| < \nu$  et  $\beta$  suffisamment grand :

$$\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}_l^{a,b} \\ h \leq 2(l-1)}} e^{-\lambda_\beta \mathcal{E}(I)+\beta h(I)\nu} \leq e^{-\beta} e^{2\beta\nu(l-1)} \sum_{n \geq 2(l-1)} A^n e^{-\lambda_\beta(\beta-\beta_0)n} \leq e^{-\beta} C (Ae^{\beta\nu} e^{-\lambda_\beta(\beta-\beta_0)})^{2(l-1)},$$

où  $C$  est une constante.

Pour le cas où  $h > 2(l-1)$ , si de plus  $\nu < \lambda_\beta$ , alors

$$\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}_l^{a,b} \\ h > 2(l-1)}} e^{-\lambda_\beta \mathcal{E}(I)+\beta h(I)\nu} \leq e^{-\beta} \sum_{h > 2(l-1)} e^{\beta h\nu} \sum_{n \geq h} A^n e^{-\lambda_\beta(\beta-\beta_0)n} \leq e^{-\beta} C' (Ae^{\beta\nu} e^{-\lambda_\beta(\beta-\beta_0)})^{2(l-1)},$$

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

pour une autre constante  $C'$ .

Ainsi, dès que  $0 < c < \lambda_\beta - \nu < 1 - \nu$ , on a :

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_l^{a,b}} e^{-\lambda_\beta \mathcal{E}(I) + \beta h(I)\nu} \leq C e^{-\beta} e^{-c(\beta - \bar{\beta})2(l-1)}$$

où les valeurs de  $\bar{\beta}$  et  $C$  ont pu changer.

En revenant aux poids des paires  $(I, A)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_I \sum_{A; I_A=I} |e^{\beta h(I)u} z(A)| &\leq e^{\kappa(\beta - \bar{\beta})} \sum_{m=1}^l \sum_{l_1 + \dots + l_m = l} \sum_{*} \prod_{k=1}^m \sum_{I_k \in \mathcal{I}_{l_k}^{a,b}} e^{-\lambda_\beta \mathcal{E}(I_k) + \beta h(I_k)\nu} e^{-\kappa(\beta - \bar{\beta})} \\ &\leq e^{-2c(\beta - \bar{\beta})l} e^{\kappa(\beta - \bar{\beta})} \sum_{m=1}^l \sum_{l_1 + \dots + l_m = l} (e^{-(\beta - \bar{\beta})} e^{2c(\beta - \bar{\beta})} e^{-\kappa(\beta - \bar{\beta})})^m \\ &\leq C^l e^{-2c(\beta - \bar{\beta})l} e^{\kappa(\beta - \bar{\beta})} \end{aligned}$$

dès que  $2c - \kappa - 1 < 0$ , où l'indice de sommation  $*$  représente les différents ensemble de types compatibles et où la valeur de  $\bar{\beta}$  a pu changer de ligne à ligne pour absorber les constantes multiplicatives.

Ainsi, on obtient

$$\left| \frac{z_l^{a,b}(u)}{\bar{w}_1(u)^l} \right| \leq C^l e^{-2c(\beta - \bar{\beta})l + \beta l} e^{\kappa(\beta - \bar{\beta})} \leq e^{-((2c-1)l - \kappa)(\beta - \bar{\beta})}$$

pour un certain  $\tilde{\beta}$ . Si  $c$  vérifie aussi  $2c - 1 > 0$ , on a le résultat voulu.

Enfin, si  $\nu < 1/2$ , on peut prendre  $\beta$  assez grand pour que  $\lambda_\beta - \nu > 1/2$ , et choisir alors  $c$  tel que  $1/2 < c < 1 - \nu$ . Choisissons alors  $\kappa$  (quitte à augmenter  $\beta$  tel que  $0 < \kappa/2 < 2a - 1 < \kappa < 1$  de sorte à ce que, en posant  $\gamma \equiv 2a - 1 > 0$ , on ait

$$\left| \frac{z_l^{a,b}(u)}{\bar{w}_1(u)^l} \right| \leq e^{-(\gamma l - \kappa)(\beta - \bar{\beta})},$$

avec  $\gamma - \kappa < 0$ , et  $l\gamma - \kappa > 0$  pour tout  $l \geq 2$ .

#### Contrôle des rayons de convergence.

D'après l'inégalité sur les poids, on a, pour  $0 \leq u < \nu$  et pour tout  $l \geq 2$ ,

$$(z_l^{a,b})^{-1/l} \geq \frac{1}{\bar{w}_1(u)} \left| \frac{\bar{w}_1(u)^l}{z_l^{a,b}} \right|^{1/l} \geq (\bar{w}_1(u))^{-1} e^{(\gamma - 1/l)(\beta - \bar{\beta})}.$$

et donc  $R(u) \geq (\bar{w}_1(u))^{-1} e^{\gamma(\beta - \bar{\beta})}$ .

Pour  $r(u)$ , on sait que  $w$  est la plus petite solution positive  $w_0(u)$  de  $\det[1 - \mathcal{F}(u, \cdot)] = 1$ , et c'est également le plus petit  $r > 0$  tel que  $\text{spr}(\mathcal{F}(u, \cdot)) = 1$ . Définissons  $\tilde{\mathcal{F}}(u, w) = \mathcal{F}(u, w/\bar{w}_1(u))$ , de façon à ce que les  $\tilde{\mathcal{F}}$  soient les  $\frac{z_l^{a,b}(u)}{\bar{w}_1(u)^l}$ , qui tendent tous vers 0 pour  $l \geq 2$  quand  $\beta$  tend vers l'infini. Les coefficients correspondant à  $l = 1$  tendent alors vers la matrice

$$\mathcal{F}_0(w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}.$$

Comme le rayon spectral vérifie  $\text{spr}(\mathcal{F}) = \bar{w}_1(u) \text{spr}(\tilde{\mathcal{F}})$ , la plus petite solution  $\tilde{r}(u)$  de l'équation  $\det[1 - \tilde{\mathcal{F}}(u, \cdot)] = 1$  vérifie  $r(u) = \bar{w}_1(u)^{-1} \tilde{r}(u)$ . Or, d'après l'inégalité sur les poids, on a un contrôle sur  $\|\tilde{\mathcal{F}}(u, w) - \mathcal{F}_0(w)\|_\infty$  uniformément en  $|u| < \nu$  par un terme décroissant exponentiellement vite en  $\beta$ . On a donc

$$1 - \tilde{\mathcal{F}}(u, w) = 1 - \mathcal{F}_0(w) + \mathcal{F}_0(w) - \tilde{\mathcal{F}}(u, w) = \begin{bmatrix} 1 + O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty) & O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty) \\ O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty) & 1 - w + O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty) \end{bmatrix}$$

et donc

$$\det[1 - \tilde{\mathcal{F}}(u, w)] = 1 - w + O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty)$$

ce qui donne  $r(u) = \bar{w}_1(u)^{-1} \tilde{r}(u) = \bar{w}_1(u)^{-1} (1 + O(\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}_0\|_\infty)) = \bar{w}_1(u)^{-1} (1 + o(1))$  quand  $\beta$  tend vers l'infini, ce qui conclut la preuve du résultat.

### 3.3.4 Conclusion et obstacles.

Dans les paragraphes précédents, on a montré que dans le modèle de Widom-Rowlinson à température suffisamment faible, les interfaces macroscopiques créées par une condition au bord de Dobrushin présentent une *structure de renouvellement*, et que la loi des pas entre deux points de renouvellement a un *moment exponentiel*. D'après les outils développés précédemment, la loi de l'interface macroscopique dans un tel domaine converge vers la loi d'un pont brownien et donc a des *fluctuations gaussiennes*.

Puisque le modèle de Widom-Rowlinson a également les propriétés que l'on a dégagées comme essentielles pour adapter la preuve du comportement en volume fini créé par une condition au bord quelconque, on s'attend à ce que la preuve soit adaptable à ce modèle.

Toutefois, une différence majeure avec le modèle d'Ising est le fait que les interfaces ne sont pas des courbes simples. En effet, dans le modèle d'Ising, on peut représenter les contours par des circuits d'arêtes séparant des cases de spins opposés. Grâce à une règle de décision permettant de séparer les points où quatre bouts de contours arrivent en deux parties de courbes séparées, on obtient sans ambiguïté une représentation des contours en tant qu'ensemble de courbes fermées (si elles ne touchent pas le bord) ou ouvertes si elles sont induites par la condition au bord. Cette représentation est extrêmement pratique par sa non-ambiguïté puisque l'analyse de l'influence de la condition au bord est alors équivalente à l'étude des courbes ouvertes créées par celles-ci. Dans notre cas, l'interface peut être *épaisse*. Comme l'étude précédente porte sur les conditions au bord de Dobrushin induite par des lignes de séparation d'épaisseur 1, il faut être en mesure de se ramener à ce cas là.

Ceci crée une difficulté supplémentaire dans l'application de la stratégie de preuve, même si cette difficulté semble purement technique. En effet, l'étude de la structure de renouvellement montre justement que, bien à l'intérieur du domaine, la plupart des colonnes sont *régulières*, c'est-à-dire que justement, l'interface créée par une condition de Dobrushin a une épaisseur de 1 à cet endroit, et que les zones où celle-ci est plus épaisse ont des tailles exponentiellement petites et donc que l'interface est génériquement une courbe, à part à certains endroits où elle peut être légèrement plus épaisse.

Pour essayer de contourner cette difficulté, on peut s'inspirer des outils développés dans [CDCV14] pour généraliser [CV12] au modèle de Potts. On peut donc chercher à ajouter une étape de nettoyage des interfaces, en montrant qu'avec une très grande probabilité, en regardant la configuration au bord induite dans un domaine légèrement plus petit, seul un nombre d'interfaces macroscopiques contrôlé parvient jusqu'au bord de notre nouveau domaine. Toutefois, la condition au bord induite dans le nouveau domaine plus petit peut être également difficile



à traiter puisque chacune des interfaces macroscopiques peut arriver à la frontière du domaine dans une partie où elle est épaisse, et ne pas ressembler localement à une condition au bord de Dobrushin telle qu'étudiée dans les parties précédentes. Dans le modèle de Potts, cette difficulté peut être contournée car, même si les interfaces ne sont pas des courbes simples comme dans notre modèle, le modèle est en bijection avec le modèle de FK-percolation, et dans celui-ci, les questions se reformulent en l'existence de chemins simples joignant deux points, ce qui permet de travailler avec des courbes et non des objets potentiellement épais.

Ici encore, nous sommes persuadés que cette obstruction est technique et dépassable. En effet, voici ce que nous sommes en mesure de prouver. À partir de toute condition au bord on peut définir une notion de **contours essentiels** telle que tout ensemble de contours  $\Gamma$  peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints, un ensemble de contours dits *essentiels*  $\Gamma_{ess}$  et un ensemble de contours *non essentiels*  $\Gamma_{ne}$ . L'appellation de contours non essentiels vient du fait que pour tout couple  $\Gamma = (\Gamma_{ess}, \Gamma_{ne})$  compatible avec une condition au bord fixée, on peut construire une configuration d'énergie minimale ayant pour contours  $(\Gamma_{ess}, \emptyset)$  compatible avec la condition au bord. La notion de contours essentiels prolonge alors les interfaces macroscopiques créées par une condition au bord quelconque pour le modèle d'Ising.

Construction des contours essentiels : Notons  $\sigma$  la condition au bord. Si  $\sigma$  est identiquement 0, ou ne contient uniquement des + ou uniquement des -, alors les contours de toute configuration de contours  $\Gamma$  sont tous non essentiels et  $\Gamma$  se décompose en  $(\emptyset, \Gamma_{ne} = \Gamma)$ .

On suppose désormais que  $\sigma$  contient à la fois des spins + et - sur le bord du domaine (noté  $\Lambda$ ). Une première étape est de partitionner le bord du domaine en différentes zones : des zones *de type +*, des zones *de type -* et les zones restantes. Les contours essentiels seront un ensemble de contours qui représentent les interfaces macroscopiques entre les zones de type + et les zones de type -. On dit qu'un ensemble de spins de  $\sigma$  sur une partie connexe du bord de  $\Lambda$  est *une zone de type +* si ses deux spins extrémaux sont tous les deux +, que tous les spins entre ceux-ci sont + ou 0, et que cette partie est maximale pour cette propriété. On définit de même les zones de type -. Par construction, les zones restantes sont des zones entre les zones de type + et - constituées uniquement de spins 0.

Fixons un ordre arbitraire sur les sites de  $\Lambda$  et soit  $\Gamma$  un ensemble de contours compatible avec la condition au bord  $\sigma$ , avec  $\Gamma = \Gamma(\omega)$  pour un certain  $\omega$  (le choix d'un tel  $\omega$  peut ne pas être unique si  $\Gamma$  a des circuits fermés de 0 par exemple, mais la construction ne dépend pas du choix de  $\omega$ ).

On commence par explorer chacune des composantes connexes de chaque zone de type + ou - (où la notion de composante connexe est celle induite par les contours  $\Gamma$ ). Par définition, les frontières de ces composantes connexes sont des contours. Pour chaque bout de contour vu par deux explorations de type différent, c'est-à-dire séparant nécessairement deux composantes connexes de zones de types différents, on dit que ce bout de contour est *essentiel* et on l'ajoute à l'ensemble  $\Gamma_{ess}$ .

Si l'ensemble des contours révélé est entièrement essentiel, nécessairement, on a épuisé tout  $\Gamma$ . Sinon, on prend le premier élément de  $\Gamma$  révélé par exactement une exploration et on veut l'*effacer* comme expliqué ci-dessous. On suppose sans perte de généralité que l'élément de contour a été révélé par une exploration de type +, et la construction est totalement symétrique dans le cas où l'exploration est de type -.

- Si l'élément à effacer est une arête frustrée séparant un + et un -, on change  $\omega$  en  $\omega'$  où  $\omega'$  est obtenue à partir de  $\omega$  en changeant les spins de la composante connexe de - touchant l'élément de contour à effacer en +. Les contours de la nouvelle configuration sont strictement inclus dans ceux de  $\omega$ , et on *efface* dans  $\Gamma$  tous les contours n'appartenant pas à  $\Gamma(\omega')$ .

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

- Si l'élément à effacer est une case 0, on change  $\omega$  en  $\omega'$  où  $\omega'$  est obtenue à partir de  $\omega$  en changeant le spin correspondant à la case 0 en + ainsi que toute la composante connexe éventuelle de - touchant cette case. Comme auparavant, on efface alors dans  $\Gamma$  tous les contours n'appartenant pas à  $\Gamma(\omega')$ .

Les bouts de contours effacés par cette étape sont déclarés *non essentiels* et on les ajoute à l'ensemble  $\Gamma_{ne}$ . Remarquons que par définition des contours essentiels, cette étape ne peut pas effacer de bouts de contours essentiels.

Ensuite, on réitère la procédure à partir de  $\Gamma(\omega')$  : pour les nouveaux contours  $\Gamma(\omega')$ , on explore les composantes connexes des zones de type + et - de la condition au bord, et si de nouveaux bouts de contours deviennent essentiels pour  $\Gamma(\omega')$ , on les ajoute à  $\Gamma_{ess}$ . Ensuite, on continue la procédure en effaçant des bouts de contours de  $\Gamma(\omega')$  en partant du premier élément de contour non essentiel dévoilé par les explorations.

Quand la procédure se termine, on obtient bien deux sous-ensembles  $\Gamma_{ess}, \Gamma_{ne} \subset \Gamma$  et une configuration  $\omega_\infty$  tels que  $\Gamma_{ess} = \Gamma(\omega_\infty)$  pour la condition au bord  $\sigma$  et la décomposition de  $\Gamma_{ess}$  par l'algorithme est  $(\Gamma_{ess}, \emptyset)$ .

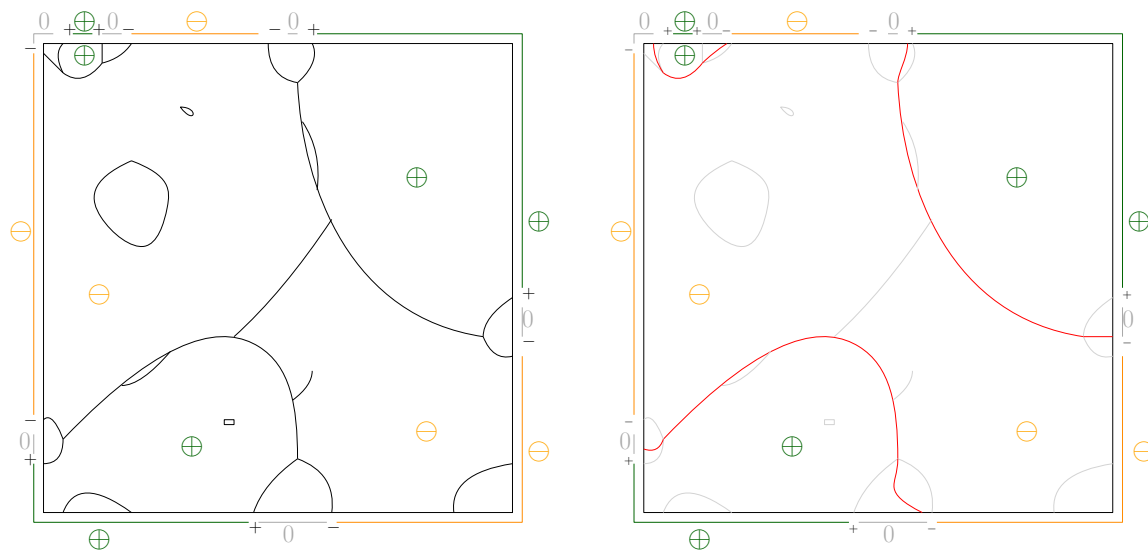


FIGURE 3.10 – Exemple de la procédure d'effacement des contours. À gauche, les contours vus par la première étape d'exploration, à droite, les contours essentiels de la configuration obtenus après avoir effacé les contours non essentiels de celle-ci. .

On dira que  $\Gamma_{ess}$  est l'ensemble des *interfaces essentielles* de  $\Gamma$ . On peut alors montrer la propriété suivante :

**Proposition 11.** *Pour  $\beta$  suffisamment grand, en notant  $\mathbb{P}_N^\sigma$  la loi des interfaces dans  $\Lambda_N = [-N, N]^2$  avec une condition au bord  $\sigma$  fixée, on a les propriétés suivantes uniformément en  $\sigma$  :*

- *Pour tout  $1/2 > \varepsilon > 0$  fixé, en notant  $M_{trav}$  le nombre d'interfaces essentielles de  $\Gamma$  reliant le bord de  $\Lambda_N$  au bord de  $\Lambda_{(1-\varepsilon)N}$ , il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que pour tout  $M \geq 1$*

$$\mathbb{P}_N^\sigma[M_{trav} = M] \leq e^{-c_1 N M}.$$

*En particulier, on peut fixer un  $M$  indépendant de  $N$  tel qu'avec une très grande probabilité, il y ait au plus  $M$  interfaces traversantes.*

### 3.3. EXEMPLE DE L'ÉTUDE DU MODÈLE DE WIDOM-ROWLINSON.

---

- Les parties non essentielles des contours ont une probabilité exponentiellement faible en leur taille : il existe  $c_2 > 0$  tel que pour tout  $x \in \Lambda_N$ , on ait pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}_N^\sigma[\Gamma_{ne} \text{ contient un contour } \gamma \text{ touchant le point } x \text{ de taille } |\gamma| = m] \leq e^{-c_2 \beta m}.$$

- Dans les contours  $\Gamma$ , la probabilité de voir un lacet est exponentiellement petite en la taille de ce lacet : il existe  $c_3 > 0$  tel que pour tout  $x \in \Lambda_N$ , on ait pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}_N^\sigma[\Gamma \text{ contient un lacet } \gamma \text{ touchant le point } x \text{ de taille } |\gamma| = m] \leq e^{-c_3 \beta m}.$$

Le premier point permet de réaliser la première étape de nettoyage des interfaces, et les deuxième et troisième points sont deux résultats quantitatifs qui devraient permettre de contrôler la géométrie des contours. L'étape suivante est de se ramener à une condition au bord propre, c'est-à-dire de trouver avec une très grande probabilité un domaine aléatoire  $\Lambda_{c_N}$  avec  $c_N$  légèrement plus petit que  $N$  tel que simultanément, les  $M$  interfaces traversantes sont d'épaisseur 1 sur le bord de  $\Lambda_{c_N}$ , ce qui permet alors d'étudier les  $M$  courbes macroscopiques créées par la condition au bord comme dans le cas du modèle d'Ising. Toutefois, à cause de la géométrie particulière des interfaces, nous ne sommes pas parvenus simplement à réaliser cette étape. En revanche, nous sommes convaincus qu'en utilisant les outils de contrôle de la géométrie des interfaces introduits dans [CIV03](#) pour prouver les asymptotiques d'Ornstein-Zernike pour le modèle d'Ising, cette étape de nettoyage des interfaces est réalisable même si peu évidente à formaliser.

Cette difficulté dépassée, le reste de la preuve découle directement de la méthode décrite au début de ce chapitre. En effet, sur l'évènement où l'on peut trouver un sous-domaine  $\Lambda_{c_n}$  tel que la trace des contours essentiels soit donnée par au plus  $M$  points distincts, par monotonie du modèle (qui vérifie bien la propriété FKG) la loi de chacune de ces  $M$  interfaces essentielles est comparable à celle créée par une condition de Dobrushin et converge donc vers un certain pont Brownien. En particulier, elle évite avec une très grande probabilité toute boîte centrée en l'origine de diamètre d'un ordre de grandeur inférieur à  $\sqrt{N}$ , l'ordre de grandeur des fluctuations de cette interface. Ainsi, avec une probabilité tendant exponentiellement vite vers 1 avec  $N$  la taille du domaine, l'origine se trouve soit très à l'intérieur d'une zone voyant une condition au bord uniformément  $+$ , soit très à l'intérieur d'une zone voyant une condition au bord uniformément  $-$ , et donc pour  $a$  suffisamment petit, la loi induite dans une boîte  $\Lambda_{N^a}$  est exponentiellement proche d'un mélange des lois  $\mu^+$  et  $\mu^-$ .

## Chapitre 4

# Unicité des mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins.

Dans ce chapitre, on part des résultats de [DG13] sur l'existence de deux mesures microscopiques distinctes que l'on notera ici  $\mu^+$  et  $\mu^-$  dans un certain régime de paramètres du modèle de bâtons rigides, et on avance dans la direction de la complétude du diagramme de phases en montrant un résultat d'*unicité conditionnelle*. Une conséquence majeure de ce résultat est que si l'on peut montrer que le diagramme de phases du système de spins correspondant est complet, alors celui du système microscopiques de bâtons l'est également.

## 4.1 Nouvelle notion de spins et propriétés des contours.

### 4.1.1 Définitions et notations.

On s'intéresse au système de bâtons rigides décrit précédemment : on note  $k$  la longueur d'un bâton,  $z$  l'activité d'un bâton - que l'on prendra dépendante de  $k$  de façon à être dans le contexte des résultats de [DG13]. Dans un domaine fini  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^2$ , une configuration  $\omega$  (qui consiste en la donnée d'un certain nombre de bâtons centrés en des sites de  $\Lambda$  et avec une orientation horizontale ou verticale) a un poids proportionnel à  $P_\Lambda(\omega) = z^{|\omega|}1(\omega)$  où  $|\omega|$  est le nombre de bâtons dans  $\omega$  et  $1(\omega)$  est l'indicatrice que  $\omega$  soit admissible, c'est-à-dire que ses bâtons ne se touchent pas.

Dans l'article original, on pave  $\Lambda$  en un sous-réseau  $\Lambda'$  constitué de cases carrées de côté  $l = k/2$  dans  $\Lambda$ , puis on attribue à chaque case  $x$  de  $\Lambda'$  un spin  $\sigma_x \in \{+, -, 0\}$  en fonction de si les bâtons à l'intérieur de cette case sont horizontaux, verticaux, ou si la case est vide. Cette attribution de spins permet une étude analytique de la fonction de partition qui ultimement sert à montrer l'existence de deux mesures distinctes en volume infini  $\mu^+$  et  $\mu^-$  en s'appuyant sur une théorie de contours proche de la théorie de Pirogov-Sinai-Zahradnik. Cependant, l'attribution de spins à une configuration de bâtons n'est pas uniquement définie à cause des cases vides (qui peuvent recevoir un spin  $+$ ,  $0$  ou  $-$ ) et les poids des configurations dans la nouvelle écriture de la fonction de partition peuvent être négatifs.

Dans ce chapitre, on va définir une nouvelle notion de spins, notés  $\eta$ , plus naturelle et qui aura la propriété d'être *mesurable* par rapport à la configuration de bâtons  $\omega$ , au détriment d'être plus complexe à manipuler. Pour le même pavage  $\Lambda'$  de  $\Lambda$ , on attribue à chaque case  $x$  de  $\Lambda'$  un spin  $\eta(x) \in \{h, v, \emptyset\}$  en fonction de si cette case contient des bâtons horizontaux, verticaux, ou est vide respectivement. La principale différence avec le système de spin introduit précédemment est que maintenant, une case de type  $h$  ou  $v$  doit nécessairement avoir **au moins un bâton**, ce qui casse les propriétés de monotonie sur les configurations de bâtons. En effet, étant donné un paysage de spins  $\sigma \in \{+, -, 0\}^{\Lambda'}$ , si une configuration  $\omega$  est admissible et compatible avec  $\sigma$ , toute configuration plus petite - c'est à dire obtenue en enlevant des bâtons à la première - reste compatible, ce qui n'est plus le cas pour un paysage de spin  $\eta \in \{h, v, \emptyset\}^{\Lambda'}$ .

On notera  $\mu^h$  et  $\mu^v$  les mesures sur les spins obtenues par projection des deux mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$  construites dans [DG13], ce qui est bien défini avec la nouvelle notion de spins.

Une des conséquences cruciales de la construction exposée dans l'article initial est la proposition suivante, sur laquelle on s'appuiera pour établir un résultat similaire pour les contours de spins créés par les mesures  $\mu^h$  et  $\mu^v$ . Par abus de langage, on parlera de contours pour la trace géométrique des contours de l'article original, c'est-à-dire en ne gardant que la donnée des spins des cases les composant ainsi que leur peau, sans leur associer une configuration de bâtons sous-jacente.

**Proposition 12.** *Soit  $z = k^{-1-\gamma}$  avec  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $k$  suffisamment grand et  $\Lambda$  un domaine simplement connexe pavable par des carrés de taille  $4l$ . Soit  $\partial$  un ensemble de contours extérieurs*

(c'est-à-dire contenus dans l'intérieur d'aucun autre contour) compatibles entre eux et avec la condition au bord.

Alors, en notant  $\partial \in \partial(\omega)$  le fait qu'une configuration  $\omega$  contienne  $\partial$  parmi ses contours extérieurs, on a l'existence d'une constante  $C_k$  tendant vers l'infini avec  $k$  uniformément en  $\Lambda$  telle que

$$\mu_{\Lambda}^+(\partial \in \partial(\omega)) \leq e^{-C_k |\partial|},$$

où  $|\partial|$  est la taille des contours composant  $\partial$ , c'est-à-dire le nombre de cases qu'ils comportent.

On détaillera la preuve de cette proposition dans l'annexe [4.4](#). Dans toute la suite, la notation  $\omega$  sera réservée aux configurations de bâtons,  $\sigma$  désignera des configurations de spins  $\{+, -, 0\}$  et  $\eta$  des configurations de spins  $\{h, v, \emptyset\}$ .

### 4.1.2 Description des contours de la mesure de spins $\mu^h$ .

Pour les constructions à venir, on aura besoin de propriétés sur les contours de la mesure  $\mu^h$  et plus précisément d'une description des contours extérieurs que l'on voit dans une configuration restreinte à un domaine connexe fini  $\Lambda$ .

Fixons  $\Lambda$  un domaine connexe suffisamment grand et pavable par des carrés de côté  $4l$ , chacun constitué de 16 cases de côté  $l$ , où  $l = k/2$ . Pour chacun de ces carrés, on appellera sa peau l'ensemble des 16 cases de son extérieur partageant un côté avec une case interne au carré. Pour chaque configuration  $\omega$ , on attribue à chaque case  $x \in \Lambda'$  un spin  $\eta_x$  comme précédemment, et on définit les contours du paysage de spins  $\eta$  de façon analogue à ceux de l'article initial : on dit qu'un carré est *h-correct* si toutes ses cases internes ainsi que sa peau sont toutes de spin  $h$ , et on définit les carrés *v-corrects* de façon similaire (voir figure [4.1](#)). On dit qu'un carré est *bon* s'il est soit *h-correct*, soit *v-correct*, et on dit qu'un carré est *mauvais* s'il n'est pas bon. On appelle *contours* de  $\eta$  les composantes connexes de ses carrés mauvais. Pour la suite, il sera utile de séparer les carrés mauvais en deux types. Pour chaque carré mauvais, on dira qu'il est *rouge* s'il contient - dans ses cases intérieures et sa peau - à la fois un spin  $h$  et un spin  $v$ , et qu'il est *gris* s'il contient uniquement des spins  $h$  et  $\emptyset$  (ou  $v$  et  $\emptyset$ ). Avec ces définitions, pour un paysage de spin  $\eta$ , en regardant  $\sigma$  un paysage de spins de type  $+, -, 0$  compatible avec  $\eta$ , c'est-à-dire pouvant être tous les deux obtenus à partir d'une même configuration  $\omega$ , les carrés bons pour  $\eta$  seront également bons pour  $\sigma$  (tel que défini dans l'article original), les carrés mauvais rouges seront toujours inclus dans les contours de  $\sigma$ , mais les carrés mauvais gris peuvent être ou ne pas être dans les contours de  $\sigma$  en fonction de l'attribution de spin dans  $\sigma$  des cases de spin  $\emptyset$ .

Une propriété cruciale des mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$  est que la contribution des configurations compatibles avec un paysage de spins  $\sigma$  est exponentiellement petite en la taille totale des contours extérieurs de  $\sigma$ . On aimerait en déduire un résultat similaire sur les paysages de spins  $\eta$ .

Pour cela, définissons la notion de *contour extérieur* pour un paysage  $\eta$  dans  $\Lambda$  avec une condition au bord  $h$  (c'est-à-dire en interdisant les spins  $v$  dans les cases à distance moins de 5 du bord). Sous cette condition au bord, tous les carrés touchant le bord sont nécessairement *h-corrects* ou gris. Dans un domaine  $\Lambda$  avec condition au bord  $h$ , l'*extérieur* d'un paysage de spins  $\eta$  est la composante connexe (où deux carrés sont voisins si ils se touchent par un côté) des carrés *h-corrects* touchant le bord du domaine  $\Lambda$ , ainsi que l'ensemble des carrés voisins de cette composante connexe. L'ensemble des carrés mauvais dont la peau intersecte cette composante connexe est appelé l'ensemble des contours extérieurs de  $\eta$ . On appellera *motif extérieur* dans un domaine  $\Lambda_0$  un ensemble  $\partial_0$  de spins  $\{h, v, \emptyset\}$  dans une sous-partie des cases de  $\Lambda_0$  telle que  $\partial_0$  puisse être obtenu comme extérieur d'une configuration admissible  $\eta$  dans le domaine  $\Lambda_0$  avec une condition au bord  $h$ . On cherche à montrer que sous  $\mu^h$ , la probabilité d'un motif extérieur

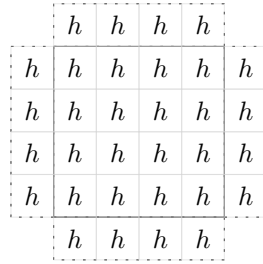


FIGURE 4.1 – Un carré  $h$ -correct (et sa peau représentée en pointillés).

$\partial_0$  est exponentiellement petite en la taille totale de ses contours extérieurs quand le domaine  $\Lambda_0$  est suffisamment grand.

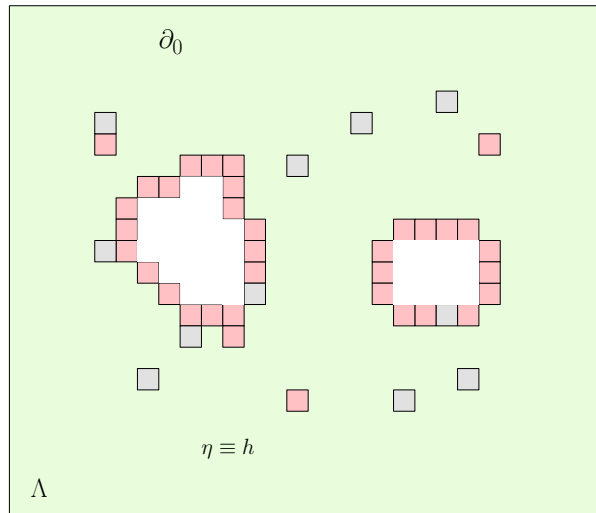


FIGURE 4.2 – Un exemple de motif extérieur  $\partial_0$  dans un environnement  $h$ .

Pour cela, à  $\partial_0$  et  $\Lambda_0$  suffisamment grand fixés, plaçons nous dans un domaine  $\Lambda$  plus grand et regardons les configurations de spins  $\sigma$  de  $\Lambda$  compatibles avec  $\partial_0$ . Parmi ces représentations, certaines n'ont pas le support de  $\partial_0$  dans leur extérieur, mais dans celles-ci, il y a alors au moins un contour extérieur entourant  $\Lambda_0$  et donc de taille plus grande que le périmètre de  $\Lambda_0$ , ce qui fait que ces configurations ont une contribution exponentiellement petite en la taille de  $\Lambda_0$  par un argument de Peierls.

Pour les autres configurations  $\sigma$  dans  $\Lambda$  compatibles avec  $\partial_0$ , les contours extérieurs dans  $\partial_0$  contraignent fortement  $\sigma$ . D'une part, comme toutes les tuiles des carrés  $h$ -corrects ont nécessairement un spin  $+$ , les carrés correspondants sont donc bons de type  $+$ , et donc le support de  $\partial_0$  est également compris dans l'extérieur de la représentation  $\sigma$ . Par ailleurs, chaque carré mauvais

rouge de  $\partial_0$  fait nécessairement partie d'un contour extérieur de  $\sigma$ . En revanche, pour les carrés mauvais gris, ceux-ci peuvent être présents ou non dans les contours de  $\sigma$ .

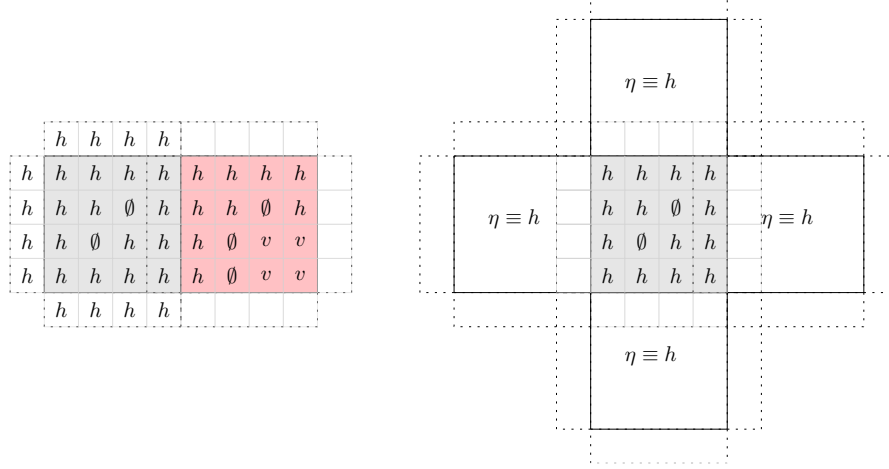


FIGURE 4.3 – Les deux types de carrés gris : à gauche, un carré gris non isolé (un de ses carré adjacent est mauvais) ; à droite, un carré gris isolé (tous ses carrés adjacents sont corrects).

Pour traiter ce problème, on peut encore séparer les carrés gris en deux catégories. D'une part, ceux *isolés*, c'est-à-dire dont tous les carrés adjacents sont soit  $h$ -corrects, soit également des carrés gris, et d'autre part ceux qui sont *adjacents* à au moins un carré rouge et qui seront donc adjacents à un contour extérieur dans  $\sigma$  (voir figure 4.3).

Pour montrer la propriété que l'on souhaite sur les contours extérieurs de  $\partial_0$ , on utilisera principalement ces deux observations. La preuve consiste à regarder tous les paysages  $\sigma$  compatibles avec un motif extérieur  $\partial_0$  donné, et voir que sur les paysages où  $\Lambda_0$  est dans l'extérieur de  $\Lambda$ , la compatibilité avec  $\partial_0$  impose à une partie des contours extérieurs de  $\partial_0$  d'être également présents en tant que contours extérieurs dans  $\sigma$  (les contours rouges et les contours gris où les cases vides ont été représentées par des +), et que cela impose déjà un poids exponentiellement petit en fonction de la taille de ces contours. Pour quantifier le fait que des contours gris extérieurs dans  $\partial_0$  aient pu disparaître des contours extérieurs de  $\sigma$ , on observe que si ces contours étaient isolés, la proportion de configurations de bâtons compatibles ayant une attribution  $\sigma$  mais compatible avec  $\partial_0$  est très faible puisqu'il est très improbable d'avoir une case vide dans un environnement où les bâtons proches sont tous horizontaux. Pour les autres contours extérieurs qui ne se retrouvent pas dans ceux de  $\sigma$ , puisque c'étaient nécessairement des carrés gris adjacents à un carré mauvais rouge, ce sont des carrés adjacents à un carré d'un contour extérieur de  $\sigma$ . Comme chaque carré mauvais rouge peut avoir au plus 8 carrés adjacents gris, on peut contrôler le nombre de telles cases par un multiple de la taille des contours extérieurs de  $\sigma$ , ce qui est suffisant.

**Proposition 13.** *Avec les notations précédentes, soit  $\partial_0$  un motif extérieur de spins  $\{h, v, \emptyset\}$  dans un domaine  $\Lambda_0$ . Il existe des constantes  $C_k$  tendant vers l'infini avec  $k$  telles que, en notant  $Cont(\partial_0)$  les contours extérieurs de  $\partial_0$  et  $|Cont(\partial_0)|$  le nombre total de cases composant  $Cont(\partial_0)$ , quand la taille de  $\Lambda_0$  tend vers l'infini, on a*

$$\mu^h(\partial_0) \leq e^{-C_k |Cont(\partial_0)|} + o(1).$$



Soit  $\Lambda_0$  un domaine suffisamment grand pavable par des carrés de côtés  $4l$  et  $\partial_0$  un motif de spins extérieurs. Comme  $\mu^h$  est la loi des configurations de spins  $\{h, v, \emptyset\}$  sous la loi  $\mu^+ = \lim_{\Lambda} \mu_{\Lambda}^+$  et que  $\omega \in \partial_0$  - l'évènement où  $\omega$  est compatible avec le motif  $\partial_0$  - est un évènement local, il suffit de montrer une égalité de ce type pour  $\mu_{\Lambda}^+$  uniformément en  $\Lambda$  assez grand. Soit donc  $\Lambda \supset \Lambda_0$  et  $\Lambda'$  sa version pavée.

On a

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}^+ \mu_{\Lambda}^+(\omega \in \partial_0) &= \sum_{\omega} p(\omega) 1(\omega \in \partial_0) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_{\Lambda'} \\ \sigma \in \partial_0}} \prod_{x \in \Lambda'} \left( \sum_{\omega_x} \zeta(\omega_x) 1(\omega_x \in \partial_0) \right) 1(\omega) \end{aligned}$$

où  $p(\omega)$  est le poids d'une configuration  $\omega$  et chaque configuration  $\omega_x$  est une configuration de bâtons dans la case  $x \in \Lambda'$  de l'orientation correspondante à  $\sigma(x)$ ,  $\zeta(\omega_x)$  est la contribution à l'activité de cette portion de configuration, et  $1(\omega)$  est l'indicatrice que la configuration obtenue en assemblant toutes les configurations partielles  $\omega_x$  est bien compatible pour la condition coeur dur et la condition au bord +.

Notons ensuite  $\Omega'_{reg}$  les attributions de spins  $\sigma$  telles que  $\Lambda_0$  est dans l'extérieur de  $\sigma$ , c'est à dire que  $\Lambda_0$  n'est contenu dans l'intérieur d'aucun contour extérieur de  $\sigma$ , et coupons la somme en deux parties  $A$  et  $B$  :

$$A := \sum_{\substack{\sigma \in \Omega'_{reg} \\ \sigma \in \partial_0}} \prod_{x \in \Lambda'} \left( \sum_{\omega_x} \zeta(\omega_x) 1(\omega_x \in \partial_0) \right) 1(\omega) \quad B := \sum_{\substack{\sigma \notin \Omega'_{reg} \\ \sigma \in \partial_0}} \prod_{x \in \Lambda'} \left( \sum_{\omega_x} \zeta(\omega_x) 1(\omega_x \in \partial_0) \right) 1(\omega)$$

Grâce aux contrôles sur les contours extérieurs des attributions de spins  $\sigma$ , comme une attribution  $\sigma \notin \Omega'_{reg}$  contient nécessairement un contour de taille au moins  $per(\Lambda_0)$ , le périmètre de  $\Lambda_0$ , on a

$$\frac{B}{Z_{\Lambda}^+} \leq e^{-C_k per(\Lambda_0)} = o(1)$$

et ce, uniformément en  $\Lambda$ . La notation  $C_k$  désignera des constantes positives dépendant uniquement de  $k$  et tendant vers l'infini quand  $k$  tend vers l'infini. Leur valeur exacte pourra changer d'une expression à l'autre.

Pour les  $\sigma \in \Omega'_{reg}$ , définissons une fonction de compatibilité  $f(\sigma, \partial_0)$  comme suit :

$$f(\sigma, \partial_0) = \frac{\prod_{x \in \Lambda'} \left( \sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega_x \in \partial_0) \right) 1(\omega)}{\prod_{x \in \Lambda'} \sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega)},$$

de sorte à ce que l'on ait :

$$A \leq \sum_{\substack{\sigma \in \Omega'_{reg} \\ \sigma \in \partial_0}} f(\sigma, \partial_0) \prod_{x \in \Lambda'} \sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega).$$

Notons  $\sigma_0$  la restriction de  $\sigma$  aux cases ayant un spin dans  $\partial_0$  ou dans un carré adjacent - remarquons que par définition des spins, les seules cases où  $\sigma$  n'est pas déterminé par  $\partial_0$  sont

celles de spin  $\emptyset$ . Ainsi, il y a au plus  $C^{|\emptyset(\partial_0)|}$  attributions  $\sigma_0$  possibles pour un  $\partial_0$  fixé, pour une certaine constante  $C > 0$  où  $|\emptyset(\partial_0)|$  désigne le nombre de spins  $\emptyset$  dans  $\partial_0$ . Notons de plus  $Isol(\sigma_0, \partial_0)$  l'ensemble des cases de  $\partial_0$  avec un spin  $\emptyset$  et appartenant à un carré gris isolé de  $\partial_0$  effacé dans  $\sigma$ , c'est-à-dire à un carrés gris isolé dans  $\partial_0$  qui est bon pour  $\partial$  car toutes ses cases  $\emptyset$  ont un spin  $+$  dans  $\sigma$ . La donnée de ces cases ne dépend que de la restriction  $\sigma_0$  de  $\sigma$  au support de  $\partial_0$ , et donc la notation  $Isol(\sigma_0, \partial_0)$  est bien définie.

**Lemme 2.** *Pour tout  $\sigma \in \Omega'_{reg}$ , et tout  $\partial_0$  admissible dans  $\Lambda_0$  suffisamment grand, on a*

$$f(\sigma, \partial_0) \leq g(\sigma_0, \partial_0) := e^{-C_k(Isol(\sigma_0, \partial_0))},$$

avec  $C_k$  une constante tendant vers  $+\infty$  avec  $k$ .

En admettant ce lemme pour l'instant, remarquons que pour  $\sigma_0$  fixé, pour toute représentation de spins  $\sigma \in \Omega'_{reg}$  prolongeant  $\sigma_0$ , la taille des contours extérieurs du motif  $\partial_0$  est contrôlable par le nombre de carrés gris isolés dans la représentation  $\sigma_0$  ainsi que la taille des contours extérieurs dans la représentation  $\sigma$ .

On a donc, en notant  $\sigma \supset \sigma_0$  les configurations de spins  $\sigma$  prolongeant  $\sigma_0$ ,  $\omega \in \sigma$  le fait que la configuration de bâtons  $\omega$  est compatible avec  $\sigma$ , et où l'on a noté  $\bar{\varphi}(\omega) = \prod_{x \in \Lambda'} \zeta(\omega_x) 1(\omega)$  :

$$\begin{aligned} \frac{A}{Z^+_\Lambda} &\leq \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} g(\sigma_0, \partial_0) \frac{1}{Z^+_\Lambda} \sum_{\sigma \supset \sigma_0} \prod_{x \in \Lambda'} \sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega) \\ &= \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} g(\sigma_0, \partial_0) \frac{1}{Z^+_\Lambda} \sum_{\sigma \supset \sigma_0} \sum_{\omega \in \sigma} |\bar{\varphi}(\omega)| \\ &\leq \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} g(\sigma_0, \partial_0) \frac{1}{Z^+_\Lambda} \sum_{\sigma; \Delta_0 \in \partial(\sigma)} \sum_{\omega \in \sigma} |\bar{\varphi}(\omega)| \\ &\leq \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} g(\sigma_0, \partial_0) e^{-C_k |\Delta_0|} \leq \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} e^{-C_k Isol(\sigma_0, \partial_0)} e^{-C_k |\Delta_0|} \\ &\leq \sum_{\sigma_0 \in \partial_0} e^{-C_k |Cont(\partial_0)|} \leq C^{|\emptyset(\partial_0)|} e^{-C_k |Cont(\partial_0)|} \leq e^{-C_k |Cont(\partial_0)|}, \end{aligned}$$

où l'on a noté  $\Delta_0$  les contours extérieurs présents dans  $\sigma_0$ ,  $|Cont(\partial_0)|$  la taille des contours présents dans  $\partial_0$ ,  $|\emptyset(\partial_0)|$  le nombre de cases  $\emptyset$  dans  $\partial_0$ , et où l'on a utilisé la proposition [12](#) sur les contours extérieurs d'une attribution  $\sigma$  ainsi que le lemme crucial suivant :

**Lemme 3.** *Soit  $\sigma_0 \in \partial_0$ . On a la relation suivante entre la taille des contours de  $\partial_0$ , le nombre de carrés gris isolés dans  $\omega'_0$  et la taille des contours extérieurs  $\Delta_0$  de  $\sigma_0$  :*

$$Isol(\sigma_0, \partial_0) + 9\Delta_0 \geq |Cont(\partial_0)|.$$

*Démonstration.* Remarquons qu'un carré présent dans les contours de  $\partial_0$  est soit nécessairement présent dans les contours des représentations de  $\partial_0$ , soit c'est un carré mauvais gris et auquel cas, dans une représentation  $\sigma_0$ , il est soit adjacent à un carré de  $\Delta_0$  soit est isolé. Comme un carré présent dans  $\Delta_0$  a 8 carrés voisins, on a bien l'inégalité voulue.  $\square$

Prouvons maintenant le Lemme [2](#) afin de terminer la preuve de la proposition.

*Démonstration.* Soient  $\sigma \in \Omega'_{reg}$  et  $\partial_0$  admissible. Rappelons l'expression de la fonction de compatibilité  $f$  :

$$f(\sigma, \partial_0) = \frac{\prod_{x \in \Lambda'} (\sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega_x \in \partial_0)) 1(\omega)}{\prod_{x \in \Lambda'} \sum_{\omega_x} |\zeta(\omega_x)| 1(\omega)}.$$

Remarquons que la fonction  $f$  peut être vue comme la probabilité d'être compatible avec  $\partial_0$ , sous une mesure de bâtons  $P$  qui est simplement la mesure de bâtons dans  $\Lambda$  associant à chaque configuration  $\omega$  admissible un poids proportionnel à  $z^{|\omega|}$ , où l'orientation des bâtons dans chaque carré  $x \in \Lambda'$  est imposée par le spin  $\sigma_x$  (et où une case avec un spin 0 impose qu'il n'y ait pas de bâtons à l'intérieur).

Cette fonction de compatibilité est donc simplement la probabilité que sous  $P$ , les configurations de bâtons dans le support de  $\partial_0$  respectent les spins  $h, v, \emptyset$  sachant les attributions de spins  $\sigma$  : c'est à dire que les configurations aient au moins un bâton dans chaque case de spin  $h$  ou  $v$  et que les cases avec le spin  $\emptyset$  soient vides de bâtons.

La restriction que les cases aient au moins un bâton est très peu contraignante, et la condition qu'une case de label 0 soit vide est toujours vérifiée. L'information que l'on souhaite retenir est celle des cases de spin  $\sigma_x \in \{+, -\}$  alors que la case correspondante a un spin  $\emptyset$  dans  $\partial_0$ .

Pour  $A$  un ensemble de cases, notons  $Vac(A)$  l'évènement où toutes les cases de  $A$  sont vides de bâtons, et appliquons cet évènement à l'ensemble de cases  $A = Isol(\sigma_0, \partial_0)$ , l'ensemble des cases de spins  $\emptyset$  de  $\partial_0$ , ayant un spin  $+$  dans  $\sigma_0$  et à distance au moins 3 de toute case de bâtons verticaux.

$$f(\sigma, \partial_0) \leq P[Vac(Isol(\sigma_0, \partial_0))],$$

où  $P$  est la mesure de probabilité sur les bâtons relative à  $\omega$  introduite précédemment. Sous  $P$ , on voit directement que la loi des centres des bâtons dans un sous-ensemble donné à l'environnement fixé est dominée stochastiquement par un processus ponctuel d'intensité  $z$  dans ce domaine.

Quitte à ne garder qu'une fraction des cases de  $Isol(\sigma_0, \partial_0)$ , on peut supposer de plus que sur chaque ligne, chacune de ces cases est à distance au moins 5 des autres. Fixons  $\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0)$  un tel ensemble de cases et notons  $m$  son nombre de cases (on peut choisir  $\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0)$  tel que  $m \geq \frac{|Isol(\sigma_0, \partial_0)|}{5}$ ). Introduisons les évènements  $F_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  où  $F_i$  est l'évènement où, pour la  $i$ -ième case de  $\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0)$ , les deux cases à gauche et les deux cases à droite ont chacune moins de  $l/6$  bâtons - tous ces bâtons étant horizontaux puisque tous les spins correspondants sont  $+$  par définition des carrés gris isolés.

Fixons n'importe quelle configuration de bâtons admissible selon  $P$  hors des  $m$  cases de  $\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0)$  ainsi que leurs deux cases de droite et de gauche, et notons  $\bar{\omega}$  cette restriction. Sous  $P(\cdot | \bar{\omega})$ , les lois des bâtons dans chacune des  $m$  zones autour des cases de  $\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0)$  sont indépendantes entre elles. Remarquons que sous l'évènement  $F_i$ , nécessairement  $l/3$  des lignes de la  $i$ -ième case peuvent avoir des bâtons sans rompre la condition de compatibilité cœur dur avec le reste de la configuration. Donc pour que  $Vac(\overline{Isol}(\sigma_0, \partial_0))$  soit réalisé, pour chacune des  $m$  cases, soit l'évènement  $F_i$  correspondant n'est pas réalisé (ce qui arrive avec une probabilité  $\epsilon_i$  tendant vers 0 uniformément en tout le reste), soit  $F_i$  est réalisé mais les  $l/3$  lignes libres sont vides (ce qui a une probabilité  $e^{-zl^2/3}$ ).

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

On a donc

$$\begin{aligned} f(\sigma, \partial_0) &\leq P[\text{Vac}(\overline{\text{Isol}}(\sigma_0, \partial_0))] \leq \sum_{\bar{\omega}} P(\bar{\omega}) P[\text{Vac}(\overline{\text{Isol}}(\sigma_0, \partial_0)) | \bar{\omega}] \\ &\leq \sum_{\bar{\omega}} P(\bar{\omega}) \prod_{i=1}^m ((P[F_i^c | \bar{\omega}] + P[\text{La } i\text{-ième case est vide} | F_i, \bar{\omega}]) \\ &\leq \sum_{\bar{\omega}} P(\bar{\omega}) \prod_{i=1}^m (\varepsilon_k + e^{-z l^2 / 3}) =: e^{-C_k m} \end{aligned}$$

En se souvenant que  $m \geq |\text{Isol}(\sigma_0, \partial_0)|/5$ , quitte à changer la constante  $C_k$  d'un facteur 5, on obtient bien le résultat du lemme.  $\square$

## 4.2 Unicité des mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins.

Grâce aux propriétés des contours des configurations de spins  $\eta$  sous  $\mu^h$ , on peut désormais prouver le théorème principal de ce chapitre.

Dans la suite, à  $z$  et  $k$  fixés, on considère l'ensemble des mesures  $\mathcal{G}_{micro}$  qui sont des mesures sur les configurations de bâtons dans  $\mathbb{Z}^2$  et qui vérifient la propriété suivante que l'on appellera une *propriété de Markov*.

On dit qu'une mesure  $\mu$  vérifie la propriété de Markov si pour tout domaine fini connexe  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^2$ , si on se donne une configuration  $\omega_{ext}$  de bâtons centrés dans le complémentaire de  $\Lambda$ , la mesure dans  $\Lambda$  conditionnellement à  $\omega_{ext}$  est la mesure associant à chaque configuration admissible un poids proportionnel à  $z^n$ , où  $n$  est le nombre de bâtons de la configuration, et où une configuration est dite admissible si la condition coeur dur est réalisée entre ses bâtons, et avec ceux de  $\omega_{ext}$ .

Soit  $z = k^{-1-\gamma}$  pour un  $\gamma \in (0, 1)$ . Soient  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}_{micro}$ , et  $A$  un évènement local dont le support est inclus dans un domaine  $\Lambda$  fini.

**Theoreme 5.** *Pour  $k$  suffisamment grand, et  $q \in \{h, v\}$  on a*

$$\mu^q [\mu_1(A | \eta|_{\Lambda_1}) - \mu_2(A | \eta|_{\Lambda_1})] \xrightarrow{\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{Z}^2} 0.$$

Fixons un pavage de  $\mathbb{Z}^2$  en cases de côté  $l$  et regardons la projection  $\pi$  qui a une configuration admissible associe l'ensemble de ses spins  $\{h, v, \emptyset\}$  dans chacune des cases (par définition,  $\pi(\mu^+) = \mu^h$  et  $\pi(\mu^-) = \mu^v$ ), et définissons  $\mathcal{G}_{spins} = \pi(\mathcal{G}_{micro})$ .

**Corrolaire 1.** *Supposons que  $k$  soit tel que  $\mathcal{G}_{spins} = [\mu^v, \mu^h]$ . Alors on a également*

$$\mathcal{G}_{micro} = [\mu^-, \mu^+].$$

Prouvons déjà le corollaire du théorème.

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \mathcal{G}_{micro}$ . Comme la loi  $\pi(\mu)$  des configurations de spins  $\eta$  appartient à  $\mathcal{G}_{spins}$ , par hypothèse il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $\pi(\mu) = \alpha \mu^h + (1 - \alpha) \mu^v$ . Montrons qu'on a alors  $\mu = \alpha \mu^+ + (1 - \alpha) \mu^-$ .

Fixons  $A$  un évènement local, et  $\Lambda_1$  un domaine contenant le support de  $A$ .

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

En décomposant  $\mu(A)$  selon les valeurs possibles de  $\eta|_{\Lambda_1}$ , on a alors

$$\mu(A) = \int \mu(A|\eta|_{\Lambda_1}) d\mu(\eta|_{\Lambda_1}) = \int \mu(A|\eta|_{\Lambda_1}) d\mu(\eta)$$

car  $\eta|_{\Lambda_1}$  est une fonction mesurable de  $\mathcal{F}_{spins}$ , la tribu des événements de spins sur le pavage de  $\mathbb{Z}^2$ .

On a ensuite

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \alpha \int \mu(A|\eta|_{\Lambda_1}) d\mu^h(\eta) + (1 - \alpha) \int \mu(A|\eta|_{\Lambda_1}) d\mu^v(\eta) \\ &= \alpha \mu^h[\mu(A|\eta|_{\Lambda_1})] + (1 - \alpha) \mu^v[\mu(A|\eta|_{\Lambda_1})] \end{aligned}$$

Or, comme  $\mu^+(A) = \mu^h[\mu^+(A|\eta|_{\Lambda_1})]$ , en appliquant le théorème à  $\mu$  et  $\mu^+$ , on a donc

$$\mu^h[\mu(A|\eta|_{\Lambda_1})] - \mu^+(A) = \mu^h[\mu(A|\eta|_{\Lambda_1}) - \mu^+(A|\eta|_{\Lambda_1})] \xrightarrow{\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{Z}^2} 0,$$

et de même pour la partie en  $\mu^v$ . On obtient donc

$$\mu(A) - [\alpha \mu^+(A) + (1 - \alpha) \mu^-(A)] \xrightarrow{\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{Z}^2} 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

### 4.2.1 Présentation de la construction.

Fixons donc  $A$  et un paysage de spins  $\eta$ , ainsi que  $\Lambda_1$ , un domaine connexe pavable par des cases de côté  $l$  et contenant  $\Lambda$ . On suppose que  $\eta$  a une unique composante connexe infinie, sur laquelle tous les spins valent  $h$ , ce qui permet une bonne définition de ses contours : comme précédemment, pour un pavage en carrés de côté  $4l$ , un carré est bon si toutes ses cases internes ainsi que celles orthogonalement adjacentes sont de même spin  $h$  (ou  $v$ ), et mauvais sinon, et les contours de  $\eta$  sont les composantes connexes des carrés mauvais de  $\eta$ .

Pour  $\omega, \omega'$  deux configurations de bâtons compatibles avec la restriction de  $\eta$  à  $\Lambda_1$ , on appellera *biconfiguration* la donnée simultanée du couple de configurations  $(\omega, \omega')$ .

Etant donnée la biconfiguration  $(\omega, \omega')$ , dans les composantes  $h$ -bonnes du paysage de spins, on dira qu'un segment de  $k$  sites alignés horizontaux est un *trou* si ni  $\omega$  ni  $\omega'$  n'ont de bâtons centrés dans ce segment (voir [4.4](#)). On définit la même notion dans les composantes  $v$ -bonnes du paysage de spins avec des segments verticaux. Un trou est donc une zone qui sépare une ligne en deux parties telles que les bâtons de part et d'autre ne peuvent pas interagir entre eux via la condition coeur dur.

On cherche à explorer la biconfiguration pour déterminer une *surface bloquante* de trous isolant une zone de l'extérieur. Pour cela, à partir de la donnée des trous de la biconfiguration ainsi que de  $\eta$ , on construit une relation d'équivalence sur les points de  $\Lambda_1$  par les règles suivantes :

- Tous les points d'un contour sont connectés entre eux ;
- Deux points sur la même ligne dans la composante infinie de cases de spin  $h$  sont connectés si sur la ligne horizontale qui les sépare, il n'y a pas de contour ni de trou (on appelle alors *cheveu* la ligne horizontale les séparant) et un point à l'extrême droite (resp. gauche) d'un contour est connecté aux cheveux qui touchent le point directement à sa droite (resp. gauche) ;

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

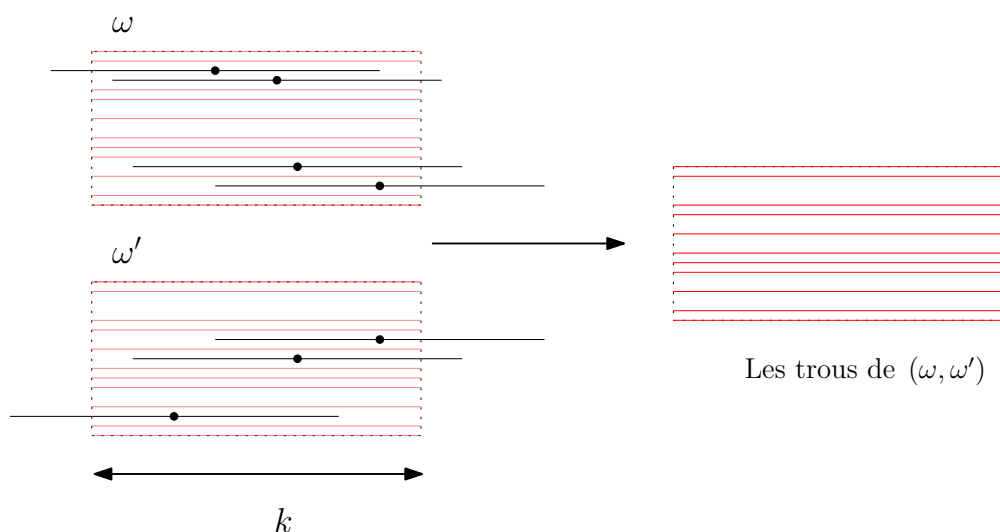


FIGURE 4.4 – Deux configurations  $\omega$  et  $\omega'$  et les trous correspondants pour la biconfiguration  $(\omega, \omega')$ .

- Enfin, si un point est sur un cheveu reliant deux contours, il est connecté à tous les points de sa case (ce qui forme des *tubes* dans les composantes bonnes du paysage de spins reliant différents contours).

Les composantes connexes de cette relation sont alors constituées de différentes parties : les contours, les tubes les reliant, et des cheveux n'appartenant à aucun tube, et par construction, toute composante connexe finie est séparée de l'extérieur par un ensemble de trous.

À partir de  $\Lambda$ , on cherche à explorer la biconfiguration pour trouver une surface aléatoire bloquante telle que les configurations à l'intérieur et à l'extérieur ne peuvent pas interagir entre elles. Si l'on arrive à séparer un domaine contenant  $\Lambda$  de l'extérieur par une couche de trous, alors les biconfigurations ne pourront pas interagir via la condition coeur dur entre l'intérieur et l'extérieur. Toutefois, il ne suffit pas de prendre la composante connexe de  $\Lambda$  pour la relation précédente car, du fait de la définition des spins, il peut y avoir un autre niveau d'interaction provenant du fait que dans chaque case de spin  $h$ , chaque configuration doit contenir au moins un bâton, ce qui crée une interaction supplémentaire à prendre en compte.

Construisons  $\Gamma_{max}$ , qui sera la donnée d'un ensemble géométrique de cases ainsi que d'un certain nombre de données sur la biconfiguration et son environnement direct que l'on appellera des marques.  $\Gamma_{max}$  sera construit de telle sorte à ce que l'intérieur de  $\Gamma_{max}$  soit séparé du reste de la configuration par des zones décorrélant les configurations. De plus, à l'intérieur de  $\Gamma_{max}$ , les configurations  $\omega$  et  $\omega'$  deviennent interchangeables indépendamment du reste des configurations à l'extérieur de  $\Gamma_{max}$ .

Définissons d'abord  $\Gamma = \Lambda$  (où l'on rappelle que  $\Lambda$  contient le support de  $A$ ) et  $\Gamma_{ext} = \emptyset$ . Si à tout moment de la construction,  $\Gamma \not\subset \Lambda_1$  ou  $\Gamma_{ext} \not\subset \Lambda_1$  on arrête la construction, et on définit  $\Gamma_{max} = \mathbb{Z}^2$ .

Explorons d'abord les cheveux touchant  $\Gamma$  : on ajoute à  $\Gamma$  sa composante connexe pour la relation définie précédemment. On définit ensuite la case *racine* d'un cheveu comme la case de  $\Lambda$  ou d'un contour de  $\eta$  dont part le cheveu et on appellera une *mèche* l'ensemble des  $l$  cheveux

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

partant d'une même case racine. La *gaine* d'une mèche est l'extérieur direct des cheveux la composant, c'est-à-dire l'ensemble des sites des cases touchant la mèche mais n'étant pas des cheveux, ainsi que la première case ne recontraant pas de cheveu de la mèche.

On explore ensuite les environnements directs des cheveux de  $\Gamma$ . Pour chaque case extérieure de la gaine d'un cheveu de  $\Gamma$ , on regarde si exactement une des deux configurations  $\omega, \omega'$  a des bâtons centrés dans les lignes non occupés par les cheveux de  $\Gamma$ , mais l'autre non. Une telle case sera dite mauvaise, et on dit qu'une mèche est *bonne* si elle ne rencontre aucune case mauvaise et est *mauvaise* sinon.

Pour chaque mèche bonne, on explore alors la composante connexe de sa gaine, et on l'ajoute à  $\Gamma_{ext}$ .

Si la mèche est mauvaise, on rajoute la gaine de la mèche à  $\Gamma$  et on réitère la construction en partant du nouveau  $\Gamma$ .

Si le processus s'arrête avec  $\Gamma, \Gamma_{ext} \subset \Lambda_1$ , on définit  $\Gamma_{max}$  comme étant la donnée de  $\Gamma, \Gamma_{ext}$  et de toutes les informations sur la biconfiguration  $(\omega, \omega')$  dévoilées lors de la construction. On dira que  $\Gamma_{max} \subset \Lambda_1$  si  $\Gamma, \Gamma_{ext} \subset \Lambda_1$ .

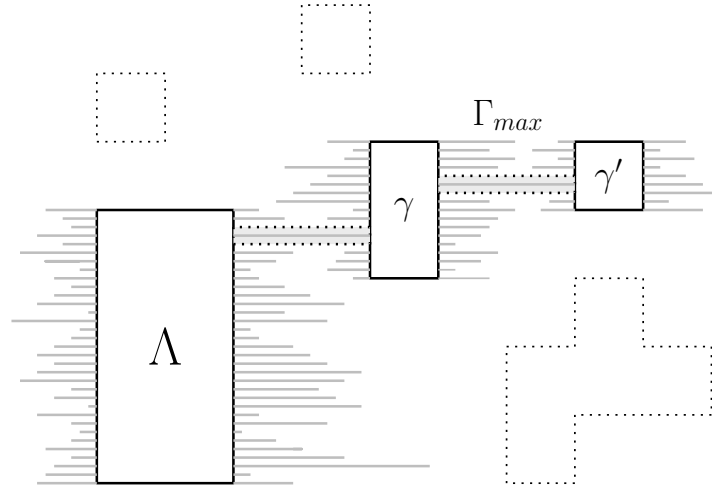


FIGURE 4.5 – Un exemple d'exploration  $\Gamma_{max}$  possible. En explorant les cheveux de  $\Lambda$ , l'un d'eux a rencontré  $\gamma$ , et en explorant les cheveux partant de  $\gamma$ , on a rencontré  $\gamma'$ . Tous les cheveux se sont ensuite arrêtés sans rencontrer d'autre contour et l'exploration se termine.

De là, pour toute construction  $\Gamma_{max} \subset \Lambda_1$  compatible avec  $\eta$  sur  $\Lambda_1$  et toutes configurations extérieures  $\omega_1, \omega_2$  sur le complémentaire du support de  $\Gamma_{max}$  et compatibles avec  $\eta$  sur  $\Lambda_1$ , on a :

$$Z \cdot \mu_1 \times \mu_2(\omega \in A | \Gamma_{max}, \omega_1, \omega_2, \eta|_{\Lambda_1}) = \sum_{\omega, \omega' \subset \Gamma_{max}} \mathbf{1}_A(\omega) z^{|\omega| + |\omega'|} \mathbf{1}_{\Gamma_{max}}(\omega, \omega') \mathbf{1}_{\omega_1}(\omega) \mathbf{1}_{\omega_2}(\omega')$$

où  $Z$  est une constante de normalisation ne dépendant pas de  $A$ ;  $\omega, \omega' \subset \Gamma_{max}$  désigne les couples de configurations sur le support de  $\Gamma_{max}$ ;  $\mathbf{1}_{\Gamma_{max}}(\omega, \omega')$  signifie que  $(\omega, \omega')$  est compatible

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

avec  $\Gamma_{\max}$ , et  $1_{\omega_1}(\omega), 1_{\omega_2}(\omega')$  sont les indicatrices que les configurations  $\omega, \omega'$  sont compatibles avec les configurations extérieures  $\omega_1$  et  $\omega_2$  respectivement.

Pour deux configurations  $\omega, \omega'$  telles que les trois dernières indicatrices valent 1, on définit la transformation de symétrisation partielle suivante : on échange les configurations  $\omega, \omega'$  sur  $\Gamma$  et on conserve  $\omega, \omega'$  à l'identique sur  $\Gamma_{ext}$ . La construction de  $\Gamma_{max}$  est faite pour que cette transformation donne une configuration également compatible avec  $\Gamma_{max}$  et  $\omega_1, \omega_2$ . En effet, toutes les marques de  $\Gamma_{max}$  sont symétriques en les deux configurations, et les sources de non compatibilité seraient que après transformation, la biconfiguration pourrait ne pas vérifier la condition que dans chaque case  $h$ , chaque configuration globale doit avoir au moins un bâton. Cette situation n'arrive pas car par construction de  $\Gamma_{ext}$ , toutes les cases rencontrant des mèches sont bonnes, c'est-à-dire qu'il y a déjà un bâton de chaque configuration dans chaque case grâce à la partie de la configuration dans  $\Gamma_{ext}$ . De plus, cette transformation est involutive et envoie les biconfigurations où  $\omega$  vérifie  $A$  sur les configurations où  $\omega'$  vérifie  $A$ .

Donc on a

$$\begin{aligned} \sum_{\omega, \omega' \subset \Gamma_{max}} 1_A(\omega) z^{|\omega|+|\omega'|} 1_{\Gamma_{\max}}(\omega, \omega') 1_{\omega_1}(\omega) 1_{\omega_2}(\omega') \\ = \sum_{\omega, \omega' \subset \Gamma_{max}} 1_A(\omega') z^{|\omega|+|\omega'|} 1_{\Gamma_{\max}}(\omega, \omega') 1_{\omega_1}(\omega) 1_{\omega_2}(\omega') \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mu_1 \times \mu_2(\omega \in A | \Gamma_{max}, \omega_1, \omega_2, \eta|_{\Lambda_1}) = \mu_1 \times \mu_2(\omega' \in A | \Gamma_{max}, \omega_1, \omega_2, \eta|_{\Lambda_1}),$$

et ce, pour tout  $\Gamma_{max} \subset \Lambda_1$  et toutes configurations extérieures  $\omega_1, \omega_2$  compatibles avec  $\eta|_{\Lambda_1}$ .

Pour obtenir le résultat, il ne reste qu'à prouver la proposition suivante :

**Proposition 14.** *Pour  $k$  suffisamment grand, on a*

$$\mu^h[\mu_1 \times \mu_2(\Gamma_{max} \subset \Lambda_1 | \eta|_{\Lambda_1})] \xrightarrow{\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{Z}^2} 1.$$

### 4.2.2 Preuve de la proposition.

La preuve de la proposition se fait en trois étapes : on contrôle d'abord la loi de la longueur maximale d'un cheveu partant d'une case, puis on quantifie la probabilité qu'une mèche soit mauvaise, et avec ces éléments, on définit un processus de percolation qui va dominer stochastiquement l'exploration.

Commençons par établir une domination stochastique qui sera cruciale pour obtenir nos différentes estimées.

#### i) Couplage monotone du nombre de bâtons par un processus de points.

Montrons une domination stochastique entre le nombre de bâtons du processus dans des cases données avec un environnement donné par un processus de point de paramètre  $z$  conditionné à avoir au moins un point par case.

À cause de la condition d'avoir au moins un bâton par case, on ne peut pas directement obtenir de couplage entre la loi des bâtons et une loi qui ne verrait pas la contrainte coeur dur. En revanche, on peut réussir à créer un couplage monotone entre leur nombre et celui du processus de point conditionné à avoir au moins un point par case.

En effet, le principal obstacle à un couplage monotone pour la position des bâtons est le fait que si ce couplage se fait par une dynamique de Glauber avec des horloges communes, un bâton



## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

commun aux deux configurations pourrait être détruit dans la plus grande configuration, mais sauvé dans la configuration plus petite si ce bâton est le seul restant dans la case (voir figure 4.6). En identifiant que ce scénario est le seul moment de *découplage* entre les configurations, on parvient à trouver un couplage monotone qui fonctionne entre le nombre de bâtons présents dans chaque case et celui dans un processus de point conditionné à avoir au moins un point dans chaque case.

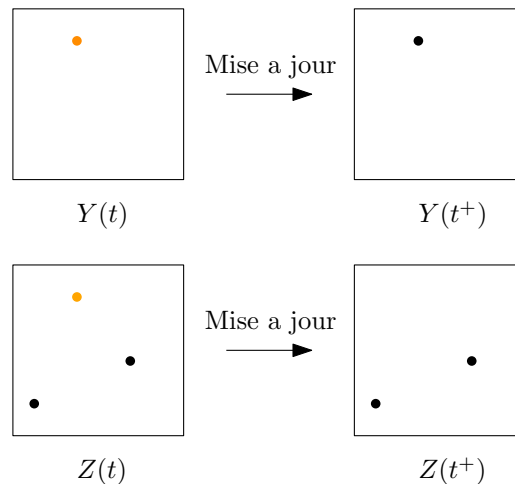


FIGURE 4.6 – Une situation de découplage des positions des centres de bâtons : dans la configuration  $Y(t)$  qui est plus petite que  $Z(t)$ , le point orange ne peut pas être supprimé car il doit y avoir au moins un bâton dans la case. Si son horloge sonne et qu'on devrait le supprimer, il est supprimé dans la configuration  $Z(t)$  mais pas dans  $Y(t)$ . En revanche, on garde  $|Y(t^+)| \leq |Z(t^+)|$ .

Pour cela, fixons l'environnement des cases dans la configuration et partons d'une configuration admissible quelconque dans les cases que l'on regarde. Dotons chaque site d'une horloge exponentielle de paramètre 1, toutes indépendantes et donnons nous un ensemble de variables uniformes  $X_i$  sur  $[0, 1]$  toutes indépendantes et indépendantes des horloges. Quand la  $i$ -ième horloge sonne sur un site, si le site est occupé par le centre d'un bâton et que la configuration reste admissible si l'on supprime ce bâton (c'est-à-dire que ce bâton n'est pas le seul présent dans la case), on le supprime si  $X_i \leq 1/(1+z)$ , et si le site correspondant à l'horloge est vide et que l'ajout d'un bâton centré en ce site est compatible avec la condition coeur dur, on le rajoute si  $X_i \leq z/(1+z)$ , et on ne change rien dans le reste des cas. On relance alors l'horloge et remplace  $X_i$  par une copie indépendante et on continue le processus. On vérifie que cette dynamique est bien une chaîne de Markov réversible et irréductible, dont la mesure invariante est la loi des bâtons dans ces cases conditionnée à l'environnement. On note  $(Y(t))_t$  le processus ainsi construit.

Une fois la trajectoire du processus de bâtons  $(Y(t))_t$  connue, on va créer un autre processus  $(Z(t))_t$  dont la mesure stationnaire est celle d'un processus de points de paramètre  $z$  conditionné à avoir un point dans chaque case. Partons de la configuration dans les cases avec des points en chaque centre de bâton. Construisons le processus à partir des mêmes horloges et variables uniformes que celles qui ont servi à créer le processus de bâtons. Tant que les centres des bâtons

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

sont inclus dans l'ensemble des points du processus de point (ce qui est le cas au début), quand une horloge sonne, si il y a un point présent sur le site de l'horloge, on le supprime si  $X_i \leq 1/(1+z)$  et si le site n'est pas occupé par un point, on le rajoute si  $X_i \leq z/(1+z)$ .

On remarque que si avant cette étape, les centres des bâtons étaient inclus dans l'ensemble des points du processus, le nombre de bâtons est nécessairement inférieur à celui de points et cette propriété reste vraie après application de la règle : il ne peut pas y avoir d'ajout de bâton non accompagné d'un ajout de point uniquement si l'étape de suppression tue un point qui n'est pas le centre d'un bâton, et que pour qu'une destruction supprime un point sans supprimer le bâton correspondant, il est nécessaire que le bâton soit le seul dans sa case mais qu'il y ait plus de deux points dans la case, ce qui fait que même après suppression d'un point, le nombre de bâtons dans la case reste inférieur ou égal au nombre de points dans cette case.

Remarquons que ce dernier scénario crée une situation où l'ensemble des centres des bâtons n'est plus inclus dans l'ensemble des points du second processus, mais que le nombre de bâtons est toujours plus petit que le nombre de points.

Pour chacune des cases, numérotions ses  $l^2$  sites et définissons une permutation  $\sigma(t)$  valant l'identité au temps 0. Si au temps  $t > 0$ , une horloge sonne et crée le scénario discuté au dessus (c'est à dire qu'après mise à jour, il reste un bâton dans la case mais qu'il n'est plus sous un point du second processus), on échange dans  $\sigma(t)$  les numéros du site correspondant au bâton et celui du premier site occupé par un point de la seconde configuration (ce qui est toujours possible). On remarque que grâce à cet ajout, au temps  $t$ , on a bien  $\sigma(t)(Y(t)) \subset Z(t)$ .

Pour la suite du processus, si une horloge sonne au temps  $t$  sur le site  $j$ , on met à jour le site  $i = \sigma(t)(j)$  correspondant dans le processus de point avec les mêmes règles qu'avant : si il y a un point présent sur le site, on le supprime si c'est possible si  $X_i \leq 1/(1+z)$  et si le site n'est pas occupé, on ajoute ce point au processus si  $X_i \leq z/(1+z)$ . Si à cette étape, le site  $j$  et son image par  $\sigma(t)$  sont tous deux occupés par un bâton et un point respectivement, et que l'étape détruit le point sans détruire le bâton car il est le seul dans sa case, on change  $\sigma(t)$  en la transposition entre  $j$  (le site encore occupé par un centre de bâton) et le numéro du premier site occupé par un point du second processus. Ainsi, on a encore  $\sigma(t)(Y(t)) \subset Z(t)$  après mise à jour, et en continuant ainsi la construction du second processus à partir du premier, on obtient un couplage tel qu'en tout temps  $t \geq 0$ , on ait la propriété  $\sigma(t)(Y(t)) \subset Z(t)$  donc en particulier, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $|Y(t)| \leq |Z(t)|$ , et ce dans toutes les cases regardées.

Comme les lois marginales des deux processus limites correspondent aux lois voulues, on a bien la domination stochastique annoncée entre la loi des bâtons et un processus de points conditionné à avoir au moins un point dans chaque case.

### ii) Contrôle de la taille d'une mèche de cheveux.

Fixons une case d'où partent des cheveux et notons  $L$  la longueur de la mèche associée, c'est-à-dire le nombre de cases à partir duquel soit tous ses cheveux ont rencontré un trou, soit un cheveu de la mèche a touché le bord d'un contour. Pour plus de clarté, on notera  $\mathbb{P}$  la mesure de probabilité régissant l'exploration, c'est-à-dire  $\mu_1 \times \mu_2(\cdot | \eta_{\Lambda_1})$ .

**Lemme 4.** *Indépendamment des contours présents dans  $\eta_{\Lambda_1}$ , il existe une constante  $L_0$  et une quantité  $\varepsilon_k$  tendant vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini telle que :*

$$\mathbb{P}[L \geq L_0 + m] \leq \varepsilon_k^m.$$

La première étape pour montrer ce résultat est d'obtenir une inégalité sur la probabilité de survie d'un cheveu donné sur un nombre de cases plus grand que  $m$  (c'est-à-dire de ne pas avoir de trou dans les  $m$  premières cases) de la forme

$$\mathbb{P}(\text{une ligne donnée survie au moins } m \text{ cases}) \leq c_k^m$$

## 4.2. UNICITÉ DES MESURES MICROSCOPIQUES CONDITIONNÉES PAR UN PAYSAGE DE SPINS.

pour une quantité  $c_k$  que l'on déterminera et qui tend suffisamment vite vers 0.

En effet, on a ensuite directement que l'espérance du nombre de cheveux restant dans une case donnée à distance  $m$  de la racine est majorée par  $lc_k^m$  par linéarité de l'espérance, et si tant est que cette quantité est plus petite que  $q^m$  pour un certain  $q < 1$  pour  $k$  suffisamment grand, on a alors une borne uniforme sur l'espérance de la variable  $L$ .

Pour prouver l'inégalité, on travaillera dans un environnement où tous les spins à droite de la case racine sont des spins  $h$ , c'est-à-dire qu'on exclut le cas où la mèche rencontre un contour, puisque ce cas donne des longueurs stochastiquement plus petites que celles du cas que l'on traite ici, donc toutes les majorations restent valables uniformément en le paysage de spin  $\eta$ .

Fixons donc une ligne. Pour chaque entier  $m$ , notons  $E_m$  l'évènement où la ligne survit au moins jusqu'à la case à distance  $6m$  de la racine. On veut contrôler la quantité  $\mathbb{P}(E_{m+1}|E_m)$ .

Pour  $m$  fixé, numérotons de 1 à 6 les cases  $6m+1, \dots, 6m+6$  qui sont cruciales pour déterminer cet évènement. Pour que  $E_{m+1}$  soit vérifié, il faut nécessairement que l'une des configurations ait au moins un bâton dans la case 3 ou 4 de la ligne qui nous intéresse. On a donc 4 scenarios possibles  $E_{m+1,3}, E'_{m+1,3}, E_{m+1,4}, E'_{m+1,4}$ , en fonction de si il y a un bâton de la première ou la seconde configuration, et de si celui-ci est dans la case 3e ou la 4e case.

Sans perte de généralité, contrôlons ici la probabilité pour  $E_{m+1,3}$ . Définissons  $F$  l'évènement où dans chacune des cases 1,2,4 et 5 il y a au plus  $l/12$  occupées par des bâtons de la première configuration. L'observation cruciale est que sur cet évènement, il y a au moins  $2l/3$  lignes qui sont vides simultanément dans les cases 1,2,4 et 5, et donc tous les emplacements de bâtons dans la case 3 sont possibles dans ces lignes, indépendamment des configurations précises dans les cases 1,2,4 et 5.

Écrivons donc

$$\mathbb{P}(E_{m+1,3}|E_m) \leq \mathbb{P}(E_{m+1,3} \cap F|E_m) + \mathbb{P}(F^c|E_m).$$

Pour le premier terme, comme les configurations où l'on a supprimé le bâton dans la ligne qui nous intéresse mais où il y a au moins un bâton dans les  $2l/3$  lignes disponibles grâce à l'évènement  $F$  sont admissibles,, on obtient la majoration suivante :

$$\mathbb{P}(E_{m+1,3} \cap F|E_m) \leq \frac{zl}{(1+zl)^{2l/3} - 1} < 2zl.$$

A l'aide de la domination stochastique, dans chacune des cases, la loi du nombre de points dans le processus dominant  $N_{PPP}$  vérifie

$$\mathbb{P}(N_{PPP} \geq l/12) \leq \frac{\mathbb{E}[N_{PPP}]}{l/12} \leq \frac{zl^2 + 1}{l/12} \leq 13zl.$$

Et ainsi, la probabilité de  $F^c$  est contrôlée par un multiple de  $zl$ , donc il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\mathbb{P}(E_{m+1,3}|E_m) \leq czl =: c'_k$$

et donc par produit, pour au moins  $m \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}(\text{une ligne donnée survit au moins } m \text{ cases}) \leq c_k^m$$

pour  $c_k := c'_k{}^{1/6}$ . Et on vérifie que grâce à la condition  $z = k^{-1-\gamma}$ , la condition  $lc_k^m \leq q^m$  est bien vérifiée avec un  $q < 1$  uniformément en  $k$  assez grand ce qui donne le résultat.

On obtient que pour tout environnement de spins, pour un certain  $L_0$ , et un  $\varepsilon_k < 1$  qui tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, la probabilité que la mèche survive jusqu'à une distance d'au moins  $m + L_0$  cases, c'est-à-dire qu'au moins l'une des  $l$  lignes ne rencontre pas de trou avant cette distance vérifie pour tout  $m \geq 0$

$$\mathbb{P}[\text{La mèche survit au moins } m + L_0 \text{ cases}] \leq \varepsilon_k^m.$$

**iii) Contrôle des cases mauvaises le long d'une mèche.**

Dans la construction de  $\Gamma_{max}$ , rappelons que si une des mèches du domaine exploré rencontre une case mauvaise à une étape donnée, il y a un *évènement de renouvellement*. On intègre à notre domaine exploré l'ensemble de la composante connexe de la case mauvaise rencontrée et on poursuit l'exploration à partir de celle-ci. Dans cette section, on souhaite contrôler la probabilité des évènements de renouvellement. Sur ces évènements, dans l'environnement direct de la mèche, la configuration extérieure *brise la symétrie* entre les deux configurations en imposant à l'une d'avoir au moins un bâton sur les lignes correspondants à ses cheveux mais pas à l'autre. Pour cela, conditionnellement à la longueur de la mèche, on va contrôler la probabilité qu'une case d'une mèche soit mauvaise, c'est-à-dire que son environnement n'ait des bâtons que dans l'une des deux configurations.

Pour cela, nous allons utiliser des techniques similaires à celles du paragraphe précédent pour contrôler l'environnement direct des cheveux.

Fixons une mèche de longueur finie  $L$  et numérotions les cases de cette mèche de 1 à  $L$ . Remarquons que le nombre de lignes non occupées par des cheveux dans chaque case est une suite croissante du numéro de la case, et que par construction, l'extérieur direct des cheveux dans la première case est dépourvu de bâtons. Notons  $E$  l'évènement où le nombre de lignes occupées par des cheveux dans la première case de la mèche est inférieur à  $\varepsilon l$  (pour un  $\varepsilon$  fixé vérifiant  $0 < \varepsilon < 1/100$ ).

Fixons  $i$  un indice compris entre 2 et  $L$ , et regardons la probabilité que la  $i$ -ième case soit mauvaise, c'est-à-dire que son extérieur direct (la configuration sur le complémentaire des lignes occupées par des cheveux dans la case) soit composé uniquement de bâtons d'une des deux configurations seulement.

Traisons dans un premier temps le cas où  $i \geq 4$ . Sur l'évènement  $E$ , on sait que l'on a au moins  $N$  lignes dans l'extérieur direct de l'exploration de chaque case, avec  $N > (1 - \varepsilon)l$ . Fixons  $N$  de ces lignes. Notons  $B_i$  le sous-évènement de  $E$  suivant : dans les  $N$  lignes fixées des cases  $i - 2, i - 1, i + 1$  et  $i + 2$ , le nombre de lignes vides dans les deux configurations est plus grand que  $\frac{11l}{12}$ . Ainsi, sur cet évènement, il reste au moins  $\frac{l}{3}$  lignes vides de bâtons des deux configurations dans les quatre cases simultanément.

De là, si  $X_i$  désigne l'évènement où la case  $i$  est mauvaise, on a

$$\mathbb{P}[X_i|L] \leq \mathbb{P}[X_i \cap E \cap B_i] + \mathbb{P}[E^c|L] + \mathbb{P}[E \cap B_i^c|L].$$

Traisons d'abord le premier terme. Sur l'évènement  $E \cap B_i$ , la case n'est pas mauvaise si il y a au moins un bâton dans les  $\frac{l}{3}$  lignes dont les cases voisines sont vides. Sur ces lignes là, tous les emplacements de bâtons sont possibles dans la  $i$ -ième case.

On a donc

$$\mathbb{P}[X_i \cap E \cap B_i] \leq \frac{2}{(1 + zl)^{l/3}}.$$

Par ailleurs, d'après le même couplage qu'au paragraphe précédent, on a une domination du nombre de lignes occupées par les bâtons d'une configuration par un processus de point conditionné à avoir au moins un bâton dans la case, donc

$$\mathbb{P}[E^c|L] \leq 2\mathbb{P}[N_{PPP} \geq \frac{\varepsilon l}{2}] \leq \frac{\mathbb{E}[N_{PPP}]}{\varepsilon l} \leq \frac{zl^2}{\varepsilon l} = \frac{zl}{\varepsilon}.$$

Enfin, pour contrôler la probabilité de  $E \cap B_i^c$ , remarquons que la construction du couplage peut être utilisée pour dominer la présence de bâton d'une configuration dans  $(1 - \varepsilon)l$  lignes fixées non occupées par des cheveux dans la première case par des processus de points d'intensité  $z$  et conditionnés à avoir au moins un bâton par case, et cela indépendamment de l'environnement.

En notant  $N'_{PPP}$  un processus de points dans les  $(1 - \varepsilon)l$  lignes, on a

$$\mathbb{P}[E \cap B_i^c | L] \leq 8\mathbb{P}[N'_{PPP} \geq l/12] \leq \frac{8(1 - \varepsilon)zl^2}{l/12} \leq 96zl.$$

On a donc, pour  $i \geq 4$ ,

$$\mathbb{P}[X_i | L] \leq 200zl + \frac{2}{(1 + zl)^{l/3}} =: p_k$$

Pour les cas 2 et 3 on obtient des majorations similaires. En effet, pour la case 3, la domination est encore plus simple, puisque dans l'évènement correspondant au  $B_i$  précédent, il ne faut contrôler que les cas 2, 4 et 5.

Pour la case 2, de façon similaire, il n'y a pas de contrôle à gérer sur la case 1, mais l'évènement  $B$  doit inclure le fait que dans la case racine de la mèche, il ne doit pas y avoir trop de lignes occupées par des bâtons horizontaux, ce qui se fait avec le couplage présenté au paragraphe 4.2.2 sans aucun ajustement supplémentaire.

Ainsi, la probabilité que la mèche soit mauvaise est majorée par

$$\mathbb{P}[\text{La mèche ait une de ses cases qui soit mauvaise}] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=2}^L \mathbb{P}[X_i | L] \right] \leq Mp_k < \varepsilon_k,$$

pour une constante  $\varepsilon_k < 1$  tendant vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini et où l'on a utilisé  $M$  une borne uniforme en  $k$  sur l'espérance de la longueur d'une mèche (qui existe d'après le lemme 4).

## 4.3 Contrôle de la taille de $\Gamma_{max}$ par un argument de Peierls.

### 4.3.1 Preuve de la proposition.

On va prouver que l'exploration reste confinée dans  $\Lambda_1$  suffisamment grand en utilisant un argument de type Peierls. Dans cette partie, pour plus de lisibilité, on notera  $\eta$  la variable aléatoire des spins dans  $\Lambda_1$  obtenue en prenant une configuration de spins selon  $\mu^h$  et en regardant sa restriction à  $\Lambda_1$ .

Pour cela, prenons un domaine  $\Lambda$  suffisamment grand contenant le support de  $A$  et inclus dans  $\Lambda_1$ , dont la distance au bord de  $\Lambda_1$  diverge avec la taille de  $\Lambda_1$ . On va faire la somme sur tous les chemins possibles  $\partial$  reliant le bord de  $\Lambda$  au bord de  $\Lambda_1$  et comparer chacun de ces chemins à son coût, et conclure avec une comparaison énergie/entropie, puisqu'une exploration sortant de  $\Lambda_1$  devra nécessairement emprunter l'un de ces chemins.

On peut supposer que  $\Lambda_1$  est pavable par des carrés de côté  $4l$ . Un chemin  $\partial$  est la donnée de segments horizontaux (à l'échelle du pavage  $l$ )  $L_1, \dots, L_m$  (avec chaque  $L_i$  qui est une succession de  $|L_i|$  cases de taille  $l$ ) et d'amas de blocs  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , où chaque  $\Delta_i$  est un ensemble de  $|\Delta_i|$  carrés connexes dans le pavage par carrés de taille  $4l \times 4l$  du domaine. On demande de plus que les amas de carrés  $\Delta_i$  soient disjoint les uns des autres, que les segments  $L_1, \dots, L_m$  sont également tous disjoints, et que l'ensemble formé des  $L_1, \dots, L_m$  et des amas  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  est connexe. Sous ces conditions, chaque segment  $L_i$  relie nécessairement deux amas  $\Delta_l$  et  $\Delta_j$ . On impose de plus que deux amas de carrés disjoints ne peuvent pas être reliés par plus d'un segment  $L_i$ . Comme cela impose au chemin d'alterner des segments et des amas, on a une relation sur leur nombre, car nécessairement,  $n \geq m - 1$  (voir figure 4.7 pour un exemple de chemin).

On dira qu'un paysage de spins  $\eta$  est compatible avec les amas  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  si d'une part  $\Lambda$  n'est inclus dans l'intérieur d'aucun contour extérieur de la restriction de  $\eta$  à  $\Lambda_1$ , et si d'autre

part,  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  sont inclus dans les supports des contours extérieurs de  $\eta$ . Pour un paysage de spins  $\eta$  compatible avec  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , on dira que l'exploration contient  $\partial$  si l'exploration inclut les segments  $L_1, \dots, L_m$  en tant que tubes de cheveux, c'est-à-dire que l'exploration touche les amas  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  et que les segments  $L_i$  qui les rejoignent sont des tubes pour l'exploration, c'est-à-dire qu'on a exploré les cheveux correspondants et que l'un d'eux a rencontré le contour extérieur suivant avant de rencontrer un trou. On inclut dans l'exploration d'un cheveu le fait qu'on ait pu tomber sur une mèche mauvaise et qu'on ait continué l'exploration, ainsi qu'une fois qu'une mèche de cheveu se termine dans  $\Gamma$ , on relance une exploration pour obtenir la composante connexe de son extérieur et l'ajouter à  $\Gamma_{ext}$ . On notera  $L_1, \dots, L_m \in \Gamma_{max}$  cet évènement, et  $\Delta_1, \dots, \Delta_n \in Ext(\eta)$  le fait que la configuration de spins  $\eta$  dans  $\Lambda_1$  soit compatible avec les amas  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ .

On aura besoin de deux lemmes que l'on prouvera dans le paragraphe suivant (4.3.2).

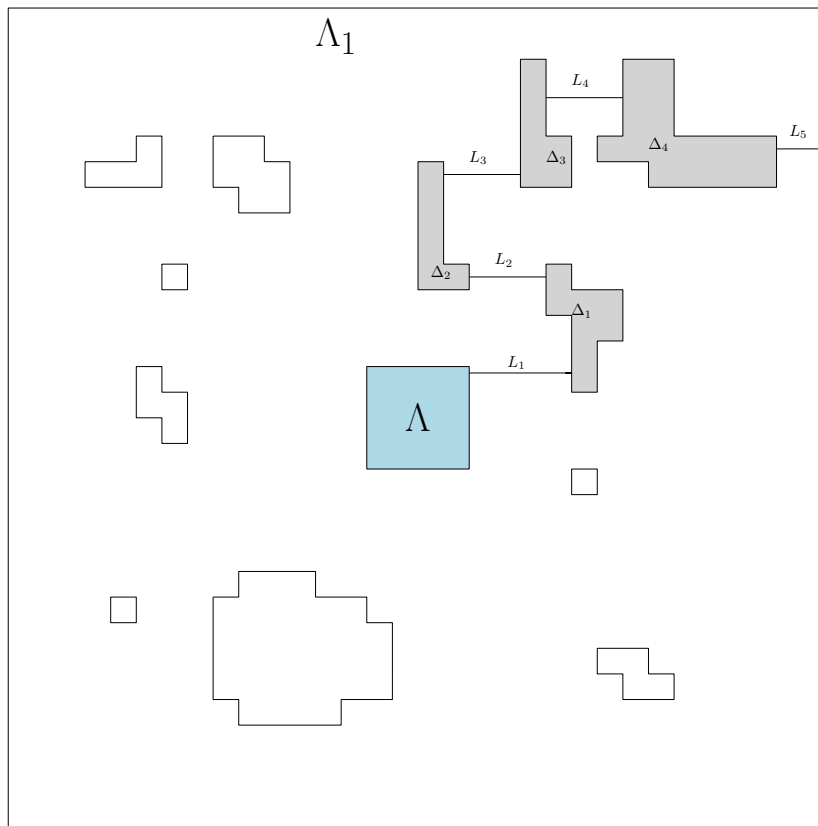


FIGURE 4.7 – Un exemple de  $\partial = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5; \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$  reliant  $\Lambda$  au bord de  $\Lambda_1$ .

**Lemme 5.** *Supposons que l'environnement  $\eta$  ait des segments  $L_1, \dots, L_m$  de longueurs  $l_1, \dots, l_m$  séparant des contours disjoints. Alors il existe un entier  $l_0$  tel que pour tout  $k$  suffisamment grand, on ait :*

$$\mu_1 \times \mu_2[L_1, \dots, L_m \in \Gamma_{max} | \eta] \leq \prod_{i=1..m} e^{-c_k l_i'}$$

avec  $c_k$  une constante tendant vers  $+\infty$  avec  $k$  et les  $l'_i = \max(l_i - l_0, 0)$  sont les longueurs tronquées, et ce indépendamment de  $\eta$ .

**Lemme 6.** *Pour  $k$  suffisamment grand, il existe des constantes  $c_k$  tendant vers l'infini avec  $k$  et  $\varepsilon_k$  tendant vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini telles que*

$$\mu^h[\Delta_1, \dots, \Delta_n \in Ext(\eta)] \leq \varepsilon_k^n e^{-c_k(\sum_i |\Delta_i|)}.$$

Démontrons maintenant la proposition [14](#)

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut prendre  $\Lambda = \Lambda_N = [-N, N]^2$  la boule de rayon  $N$  (en prenant  $N$  assez grand pour avoir le support de  $A$  inclus dans  $\Lambda$ ) et prendre  $\Lambda_1$  contenant  $\Lambda_{2N}$ . Puisque le contrôle que l'on a sur les contours concerne uniquement les contours extérieurs de la configuration, on fera une disjonction entre les environnements de spins où  $\Lambda$  est inclus dans l'intérieur d'un contour extérieur (ce qui implique l'existence d'un contour d'une taille d'au moins le périmètre de  $\Lambda$  et qui a un poids exponentiellement petit en  $N$ ) et ceux qui ne le sont pas. Notons  $\Lambda \in Ext(\eta)$  l'évènement où  $\Lambda$  n'est pas inclus dans un contour extérieur de  $\eta$  et  $\Lambda \notin Ext(\eta)$  son complémentaire.

Dans les différentes étapes de la preuve, on utilisera les notations  $c_k$  pour des quantités positives dépendant uniquement de  $k$  et tendant vers l'infini quand  $k$  tend vers l'infini, et  $\varepsilon_k$  pour des constantes positives tendant vers 0 quand  $k$  tend vers 0. Leur valeur précise peut changer d'une expression à l'autre.

D'après la preuve de la proposition [13](#) sur les contours extérieurs de  $\mu^h$ , on a d'une part

$$\mu^h [\mu_1 \times \mu_2[\Gamma_{max} = \mathbb{Z}^2|\eta].1_{\Lambda \notin Ext(\eta)}] \leq \mu^h[\Lambda \notin Ext(\eta)] \leq e^{-c_k N};$$

et d'autre part, pour les configurations restantes telles que  $\Lambda \in Ext(\eta)$ , on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} & \mu^h [\mu_1 \times \mu_2(\Gamma_{max} = \mathbb{Z}^2|\eta).1_{\Lambda \in Ext(\eta)}] \leq \mu^h [\mu_1 \times \mu_2[\Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c|\eta].1_{\Lambda \in Ext(\eta)}] \\ & \leq \sum_{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c} \mu^h \left[ \mu_1 \times \mu_2[\Lambda \overset{\partial}{\leftrightarrow} \Lambda_1^c|\eta].1_{\Lambda \in Ext(\eta)} \right] \\ & \leq \sum_{D \geq N} \sum_m \sum_{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c} \mu^h \left[ 1_{\partial \in \eta} \cdot \mu_1 \times \mu_2[A \overset{\partial}{\leftrightarrow} \Lambda_1^c|\eta] \right] \\ & \quad D(\partial) = D, m(\partial) = m \\ & \leq \sum_{D \geq N} \sum_m \sum_{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c} \sum_{\eta; \partial \in \eta} \mu^h[\eta] \cdot \mu_1 \times \mu_2[A \overset{\partial}{\leftrightarrow} \Lambda_1|\eta] \\ & \quad D(\partial) = D, m(\partial) = m \\ & \leq \sum_{D \geq N} \sum_m \sum_{\substack{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c \\ D(\partial) = D \\ \partial = (L_1, \dots, L_m; \Delta_1, \dots, \Delta_n)}} \mu^h(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \sup_{\eta; \partial \in \eta} \mu_1 \times \mu_2(L_1, \dots, L_m \in \Gamma_{max}|\eta) \\ & \leq \sum_{D \geq N} \sum_m \sum_{\substack{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c \\ D(\partial) = D \\ \partial = (L_1, \dots, L_m; \Delta_1, \dots, \Delta_n)}} \varepsilon_k^n e^{-c_k \sum_i |\Delta_i|} e^{-c_k \sum_i |L'_i|} \\ & \leq \sum_{D \geq N} \sum_m \sum_{\substack{\partial: \Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c \\ D(\partial) = D \\ \partial = (L_1, \dots, L_m; \Delta_1, \dots, \Delta_n)}} \varepsilon_k^n e^{-c_k(D - ml_0)} \end{aligned}$$

$$\leq 4N \sum_{D \geq N} C^D \left( \sum_{m \leq \frac{D}{2l_0}} e^{-\frac{c_k D}{2}} + \sum_{m \geq \frac{D}{2l_0}} \varepsilon_k^{m-1} \right) \leq \sum_{D \geq N} 4NC^D e^{-c_k D} \leq e^{-c_k N},$$

où l'on a utilisé les lemmes clés précédents ainsi que les notations suivantes.  $\Lambda \leftrightarrow \Lambda_1^c$  signifie qu'il existe un chemin de type  $\partial$  entre  $\Lambda$  et le bord de  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda \overset{\partial}{\leftrightarrow} \Lambda_1^c$  signifie que le chemin  $\partial$  joint  $\Lambda$  au bord de  $\Lambda_1$ . Pour un chemin  $\partial$  donné, on lui associe les quantités  $D(\partial)$  et  $m(\partial)$  qui sont respectivement la taille de  $\partial$  (c'est-à-dire son nombre de case total) et le nombre de segments  $L_i$  le composant et enfin  $\partial = (L_1, \dots, L_m; \Delta_1, \dots, \Delta_n)$  signifie que le chemin  $\partial$  est constitué des amas  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  et des segments  $L_1, \dots, L_m$ . De plus, par construction, le nombre d'amas présents dans le chemin vérifie  $n \geq m - 1$ , et si  $\sum |\Delta_i| + \sum |l_i| = D$ , alors nécessairement, avec la même définition des longueurs tronquées  $l'$  que dans le lemme 5, on a  $\sum |\Delta_i| + \sum |l'_i| \geq D - ml_0$ . Enfin, le nombre de chemins partant de  $\Lambda$  de longueur  $D$  est au plus  $4NC^D$  pour un  $C > 0$  où le facteur  $4N$  provient du nombre de point d'ancrage possible sur le bord de  $\Lambda$ .

En ajoutant les contributions des deux types d'environnements de spins possibles, on obtient l'inégalité suivante qui implique notre résultat quand  $N$  tend vers l'infini (i.e. quand  $\Lambda_1$  tend vers  $\mathbb{Z}^2$ ) :

$$\mu^h [\mu_1 \times \mu_2(\Gamma_{max} = \mathbb{Z}^2 | \eta)] \leq e^{-c_k N}.$$

□

### 4.3.2 Preuve des lemmes clés.

Pour conclure la preuve, il ne reste plus qu'à prouver les lemmes 5 et 6.

Le lemme 6 est une conséquence directe du fait que les contours extérieurs utilisés par l'exploration ont un coût exponentiellement cher en leur volume, et que la présence d'un amas implique un volume minimal de 16 pour le contour associé, donc on peut faire apparaître un coût constant de  $\varepsilon_k$  par bloc que l'on utilise.

Pour la preuve du lemme 5, remarquons qu'un segment peut être contenu dans l'exploration par une succession d'explorations de cheveux successives si la mèche est considérée mauvaise (et ce, potentiellement plusieurs fois de suite), et que quand une mèche prend fin et qu'elle est bonne, on explore une dernière fois la gaine de sa case de fin qui peut alors également toucher un contour.

De là, la probabilité qu'un segment de longueur  $l_1$  soit dans l'exploration est inférieure à la probabilité qu'une somme de  $T$  variables i.i.d.  $X_i$  soit supérieure à  $l_1$ , où  $T$  a la loi d'une variable géométrique de paramètre  $\varepsilon_k$  à laquelle on a rajouté 2, où  $\varepsilon_k$  est une borne sur la probabilité qu'une mèche soit mauvaise et le 2 provient de la première exploration, plus celle que l'on peut devoir effectuer pour connaître l'extérieur, et où les  $X_i$  sont i.i.d. de loi donnée par la loi dominant la longueur d'un cheveu dans un environnement  $h$  (voir les paragraphes 4.2.2iii et 4.2.2ii respectivement).

Pour un segment de longueur  $l$ , on veut montrer qu'il existe un certain  $l_0$  tel que  $\mu_1 \times \mu_2[L_1 \in \Gamma_{max} | \eta] \leq e^{-c_k l_1}$ , ce qui est impliqué par le fait que la variable  $Y = \sum_{i=1..T} X_i$  ait un moment exponentiel.

Dans la partie correspondante, on a montré que la variable  $X_1$  a un moment exponentiel.

On a donc, pour un nombre  $M$  fixé et pour  $s$  tel que  $\mathbb{E}[e^{sX_1}] \leq M < \infty$  (uniformément en  $k$  assez grand),

$$\mathbb{E}[e^{sY}] = \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}[T = n] \mathbb{E}[e^{sX_1}]^n \leq \sum_{n \geq 2} \varepsilon_k^n M^n < \infty$$



pour  $k$  suffisamment grand.

Comme on peut dominer conjointement la probabilité que tous les segments soient dans l'exploration par la probabilité que  $m$  copies i.i.d.  $Y_i$  de loi décrite au dessus valent  $Y_i \geq l_i$  pour chaque  $i$ , on obtient le résultat du Lemme.

## 4.4 Annexe : Contrôle de la taille des contours originaux

Dans cette section, on explicite la preuve du corollaire des résultats de [\[DG13\]](#) sur la taille de leurs contours. Pour cela, on va s'appuyer fortement sur des éléments pré-existant dans la preuve originale (voir pour référence [2.2.2](#)).

Pour  $q \in \{+, -\}$ , on peut d'abord réécrire la fonction de partition du modèle dans un domaine  $\Lambda$  avec condition au bord donnant la mesure  $\nu^q$  de la façon suivante :

$$Z(\Lambda|q) = Z^q(\Lambda) \sum_{\partial \in \mathcal{C}(\Lambda, q)} \left[ \prod_{\gamma \in \partial} \zeta_q(\gamma) \right] e^{-W(\partial)},$$

où la somme porte sur les  $\partial = \{\gamma\}_{\gamma \in \partial}$  qui sont des ensembles de contours admissibles pour le système, les  $\zeta_q(\gamma)$  sont des poids des contours  $\gamma$  et le terme  $e^{-W(\partial)}$  est un terme d'interactions entre ces différents contours.

En réappliquant des techniques de développement en cluster, on peut développer le terme d'interaction et réécrire la fonction de partition comme la fonction de partition d'une mesure produit sur des nouveaux objets qui sont des polymères disjoints ancrés sur les contours  $\gamma$  précédents : chaque polymère est un ensemble de contours disjoints  $\gamma$  reliés entre eux par des filaments dans la direction de la condition au bord qui représentent les possibilités d'interaction entre les deux contours. Avec les nouveaux poids correspondants, on obtient l'écriture suivante pour la fonction de partition :

$$\frac{Z(\Lambda|q)}{Z^q(\Lambda)} = 1 + \sum_{m \geq 1} \sum_{\{X_1, \dots, X_m\}} K_q(X_1) \dots K_q(X_m) \varphi(X_1, \dots, X_m),$$

où la fonction  $\varphi(X_1, \dots, X_m)$  quantifie la condition de répulsion coeur dur des polymères.

Il faut ensuite montrer, en s'appuyant le fait que les contours représentent des configurations de spins à haut cout en énergie, que les poids  $\zeta_q(\gamma_i)$  ont un coût exponentiellement petit en leur taille, et de même pour les poids des polymères  $K_q(X_i)$ .

Or, comme ces contrôles permettent d'utiliser des techniques de développement en clusters et donc de définir un logarithme de la fonction de partition  $\ln(Z(\Lambda|q))$  qui est analytique en tous les paramètres et a une limite analytique quand  $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2$ , toutes ces quantités permettent de définir les poids associés à chacun de ces ensembles de contours.

En effet, une technique classique en cluster expansion est de remplacer les poids  $\zeta_q(\gamma_i)$  par des poids  $\tilde{\zeta}_q(\gamma_i) = \zeta_q(\gamma_i) z_{\gamma_i}$ , où  $z_{\gamma_i}$  sont des nombres complexes associés à chaque contour géométrique  $\gamma_i$ . Dans la suite, on travaillera seulement avec les supports des contours précédents, ce qu'on appellera des *contours géométriques*. Pour ces nouveaux poids, toutes les considérations précédentes s'appliquent et les logarithmes des fonctions de partitions et leurs limites quand  $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2$  sont analytiques en les  $z_{\gamma_i}$  tant que ceux-ci sont dans une boule de taille  $M > 1$  fixée.

Dans un domaine fini  $\Lambda$  pavable de façon compatible avec les contours (on notera  $\Lambda'$  sa version pavée), on définit une relation d'équivalence sur les motifs de spins  $\{+, 0, -\}^{\Lambda'}$  : on dit que deux motifs  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont équivalents si ils ont les mêmes motifs de contours extérieurs, et on note  $[\partial]$  leur classe d'équivalence.

Pour un motif de spins  $\sigma \in \{+, 0, -\}^{\Lambda'}$ , définissons son poids signé  $P_\Lambda(\sigma)$  par

$$P_\Lambda(\sigma) = \sum_{R \in \Omega_\Lambda(\sigma)} \bar{\varphi}(R)$$

de sorte à ce qu'on ait  $Z(\Lambda|+) = \sum_\sigma P_\Lambda(\sigma)$ . En définissant le poids de la classe d'équivalence  $[\partial]$  par  $P_\Lambda([\partial]) = \sum_{\sigma \in [\partial]} P_\Lambda(\sigma)$ , on a également la représentation suivante :

$$Z(\Lambda|+) = \sum_{[\partial]} P_\Lambda([\partial]).$$

Par ailleurs, par construction des contours, le poids d'une classe de contours extérieurs  $[\partial]$  est exactement la somme des poids des ensembles de contours contenant ces contours comme contours extérieurs.

Ainsi, l'ensemble des motifs de spins ayant des contours fixés  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  a un poids qui est

$$P_\Lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = Z^+(\Lambda) \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{ext}(\partial)} \left[ \prod_{\gamma \in \partial} \zeta_+^0(\gamma) \right] e^{-W_0(\partial)},$$

et peut également être réécrit en terme de polymères qui contiennent nécessairement  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  dans leur squelette et en tant que contours extérieurs.

On peut ensuite majorer la valeur absolue de ces poids par l'ensemble des configurations de polymères ayant  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  dans leur squelette, et pas nécessairement en tant que contours extérieurs, ce qui donne pour la probabilité de voir un ensemble de contours  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  donné :

$$\frac{|P_\Lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_m)|}{Z^+(\Lambda)} \leq \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{ext}(\partial)} \left| \left[ \prod_{\gamma \in \partial} \zeta_+^0(\gamma) \right] e^{-W_0(\partial)} \right| \leq \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \partial} \left[ \prod_{\gamma \in \partial} |\zeta_+^0(\gamma)| \right] e^{-W_0(\partial)}.$$

Or cette expression peut encore être vue comme un ensemble de contours interagissant, avec chaque contour  $\gamma$  ayant le poids  $|\zeta_+^0(\gamma)|$ , et peut être transformée exactement de la même façon en fonction de polymères  $X$  construits exactement à l'identique que dans l'article original, mais avec  $\zeta_+(\gamma)$  remplacé par sa valeur absolue dans la définition des poids  $\tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X)$ . Toutes les majorations obtenues restent valables tant que l'on reste dans le domaine d'analyticité de ces fonctions.

Or du fait de l'expression en tant que mesure produit de polymères disjoints, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \partial} \left[ \prod_{\gamma \in \partial} |\zeta_+^0(\gamma)| \right] e^{-W_0(\partial)} &= \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_1) \dots \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_m) \varphi(X_1, \dots, X_m) \\ &\quad \times \left( 1 + \sum_{l \geq m+1} \sum_{X_{m+1}, \dots, X_l} \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_{m+1}) \dots \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_l) \varphi(X_1, \dots, X_l) \right) \\ &\leq \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_1) \dots \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_m) \\ &\quad \times \left( 1 + \sum_{l \geq m+1} \sum_{X_{m+1}, \dots, X_l} \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_{m+1}) \dots \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_l) \varphi(X_{m+1}, \dots, X_l) \right) \\ &\leq \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_1) \dots \tilde{K}_+^{(\Lambda)}(X_m) e^C \end{aligned}$$

## 4.5. CONCLUSION

où la notation  $\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  indique que chacun des  $X_i$  touche au moins un contour géométrique  $\gamma_j$  et réciproquement, tous les contours  $\gamma_j$  sont présents dans la configuration de polymères  $\{X_1, \dots, X_m\}$ . On a également utilisé le fait que la fonction de partition des polymères avait un logarithme convergent uniformément en  $\Lambda$  car les nouveaux poids restent dans le rayon d'analyticité de la fonction.

Il ne reste donc plus qu'à majorer la quantité  $\sum_{\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} K_+^{(\Lambda)}(X_1) \dots K_+^{(\Lambda)}(X_m)$  pour pouvoir conclure.

Une comparaison énergie/entropie va suffire à conclure en utilisant le fait que chaque  $X_i$  est une partie connexe d'un graphe de degré fini et doit toucher un contour spécifique, et qu'un polymère  $X_i$  a son poids exponentiellement petit en son volume.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\{X_1, \dots, X_m\} = \mathcal{C}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} K_+^{(\Lambda)}(X_1) \dots K_+^{(\Lambda)}(X_m) \varphi(X_1, \dots, X_m) \\ \leq \sum_{m=1..n} a_{m,n} \prod_{i=1..m} \sum_{|X_i| \geq d_i} C^{|X_i|} e^{-c_k |X_i|} \\ \leq \sum_{m=1..n} a_{m,n} e^{-c'_k (d_1 + \dots + d_m)} \leq a^n e^{-c''_k (|\gamma_1| + \dots + |\gamma_n|)} \\ \leq e^{-c'''_k (|\gamma_1| + \dots + |\gamma_n|)}, \end{aligned}$$

où  $a_{m,n}$  quantifie le nombre d'attributions possibles des  $n$  contours dans les  $m$  polymères, où  $c_k, c'_k, c''_k, c'''_k$  sont des constantes positives tendant vers l'infini quand  $k$  tend l'infini, et les  $d_i$  sont les tailles minimales des polymères sachant les attributions des contours.

Ainsi, on a bien

$$\frac{|P_\Lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_m)|}{Z^+(\Lambda)} \leq e^{-c_k (|\gamma_1| + \dots + |\gamma_m|)}$$

pour une constante  $c_k$  positive tendant vers l'infini avec  $k$  et ce, uniformément en  $\Lambda$  assez grand.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré que dans le régime nématique, pour les paysages de spins obtenus génériquement selon les mesures  $\mu^h$  et  $\mu^v$  qui sont les projections des deux mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$  construites dans [\[DGI13\]](#), il y a unicité de la mesure microscopique de bâtons conditionnée au paysage de spins. Ce résultat est suffisant pour conclure à la complétude du diagramme de phases quand le diagramme de phases pour les configurations de spins est lui-même complet, ce qui était notre motivation initiale.

Toutefois, la construction développée dans la preuve de ce résultat nous semble intéressante en soi et donne plus d'informations sur les mesures microscopiques conditionnées par un paysage de spins typique de  $\mu^h$  ou  $\mu^v$ . On peut par exemple obtenir sans plus de travail des propriétés de mélange de ces mesures conditionnées en adaptant la construction. En effet, si deux observables ont des supports dans des domaines  $A$  et  $B$  séparés d'une distance tendant vers l'infini, on peut leur associer deux domaines aléatoires  $\Gamma_{max}^A$  et  $\Gamma_{max}^B$  qui isolent la configuration sur  $A$  et  $B$  de leur extérieur, et avec une probabilité tendant vers 1 en la distance les séparant, ces deux domaines ne se rencontrent pas, et donc ces événements deviennent indépendants.

Finissons ce chapitre par une remarque sur les mesures microscopiques conditionnées à un paysage de spins. Dans ce chapitre, nous avons montré qu'en un sens, en conditionnant par des paysages de spins typiques de  $\mu^h$  et  $\mu^v$ , il y a unicité de la mesure microscopique conditionnée.

Si de plus, le théorème d'Aizenman-Higuchi est vrai pour le modèle de spins correspondant, alors tout environnement de spins obtenu depuis toute mesure de Gibbs est bien de cette forme. Toutefois, il est intéressant de se demander si ce résultat est vrai sans l'hypothèse que le paysage de spins  $\eta$  est typique de  $\mu^h$  ou  $\mu^v$ , c'est-à-dire si pour un environnement de spins  $\eta$  quelconque, il n'y a qu'une unique mesure microscopique conditionnellement à  $\eta$ .

Dans la preuve présentée ici, les contours de la configuration jouent un rôle particulier car ils correspondent à des zones où les bâtons de différentes orientations interagissent de façon compliquée à contrôler précisément, et notre approche consiste à ne pas traiter ces zones là et les inclure complètement dans le domaine  $\Gamma_{max}$ , en s'appuyant sur le fait qu'avec une probabilité proche de 1, les trous présents dans la composante infinie de spins  $h$  sont suffisamment nombreux pour isoler totalement l'exploration de son extérieur. On peut se demander si le traitement des *contours de grande taille* est uniquement une obstruction technique ou si la présence d'un contour infini dans un paysage de spins pourrait effectivement créer des dépendances à longue portée qui pourraient briser l'unicité de la mesure conditionnelle.

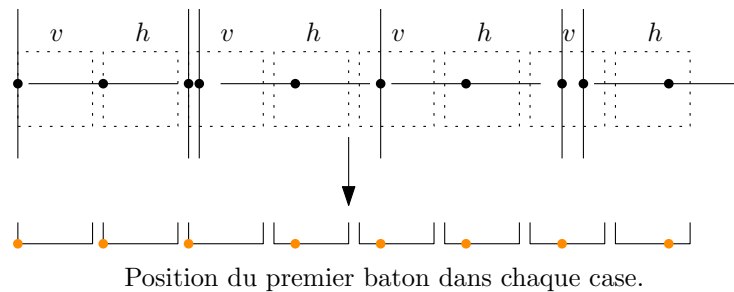


FIGURE 4.8 – Dans une ligne de cases de spins  $h$  et  $v$  alternés, la position du premier bâton est une suite croissante comprise entre 1 et  $k$ . Un tel motif peut briser l'unicité conditionnelle.

Montrons sur un exemple particulier de paysage de spin  $\eta$  que la présence de contours infinis peut briser l'unicité conditionnelle. Fixons une ligne de cases, et regardons la configuration de spins  $\eta$  valant alternativement  $h$  et  $v$  sur les cases de cette ligne, et  $h$  partout ailleurs. Numérotions les cases de cette ligne de gauche à droite en partant d'une case fixée, et pour une configuration de bâtons  $\omega$  compatible avec  $\eta$ , notons  $X_i$  la position horizontale (comptée entre 1 et  $l = \lfloor k/2 \rfloor$ ) du centre de bâton le plus à gauche dans chaque case. Du fait de la condition que chaque case contienne au moins un bâton de la bonne orientation et du volume exclu créé par un bâton vertical pour les bâtons horizontaux des cases voisines (et réciproquement), on observe que la suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est nécessairement une suite croissante. En particulier, en se plaçant dans un domaine fini donné, on peut trouver  $l$  conditions au bord différentes imposant à la suite des  $(X_i)$  d'être constante égale à une valeur donnée. En particulier, cela crée  $l$  mesures différentes compatibles avec la condition DLR et le paysage de spin  $\eta$ , et donc il n'y a pas unicité de la mesure microscopique en conditionnant par le paysage  $\eta$ .

Ainsi, la condition que le paysage de spins ne doive pas avoir de contours trop grands est nécessaire pour avoir un résultat d'unicité conditionnelle.

## Chapitre 5

# Conclusion et perspectives.

## 5.1 Retour sur les résultats de la thèse.

La problématique principale de cette thèse était d'essayer d'obtenir un résultat de complétude du diagramme de phases pour un système microscopique de bâtons durs que l'on pouvait projeter sur un système de spins ressemblant au modèle d'Ising ferromagnétique à très basse température.

Une contribution importante de cette thèse a été de montrer que, pour une notion de spins légèrement modifiée, il était suffisant d'obtenir le résultat de complétude du diagramme de phases sur le système de spins pour l'avoir automatiquement pour le système microscopique de bâtons correspondant. Pour montrer ce résultat sur le système de spins, une stratégie naturelle est d'adapter la méthode présentée dans le chapitre 3 à base de fluctuations d'interfaces pour ce système. Néanmoins, à ce stade, plusieurs obstacles restent à dépasser.

- Tout d'abord, pour contrôler les fluctuations des interfaces du système de spins, il semble nécessaire d'avoir une expression de son Hamiltonien, ce qui s'avère compliqué car celui-ci est à portée infinie et ses interactions dépendent subtilement de la géométrie du domaine. Toutefois, il est possible que cette construction puisse être réalisée pour une classe de Hamiltoniens approximant suffisamment bien le Hamiltonien réel (mais même le choix précis de tels Hamiltoniens ne nous semble pas évident). Il resterait à montrer que la construction proposée est stable par légère perturbation du Hamiltonien, ce qui devrait être vrai au vu des techniques utilisées, mais ne nous semble pas simple à réaliser techniquement.
- Le second obstacle, comme on l'a vu avec l'exemple du modèle de Widom-Rowlinson, est le traitement d'interfaces potentiellement épaisses. Nous pensons néanmoins que cette difficulté est essentiellement technique et pourrait être résolue en utilisant des techniques de nettoyage des interfaces et de grossissement de celles-ci comme celles utilisées dans [CIV03].

Au delà de ces deux obstacles, nous pensons cependant que la réponse à notre interrogation initiale est positive, c'est-à-dire que les seules mesures extrémales du système microscopiques de bâtons durs sont bien  $\langle \cdot \rangle^+$  et  $\langle \cdot \rangle^-$ , au moins bien à l'intérieur du régime nématique. En effet, au vu du comportement des interactions sur les spins correspondants dans le régime de paramètres étudié, nous ne voyons pas comment, au moins du point de vue physique, le système de spins correspondant n'aurait pas le même comportement que les systèmes de spins étudiés dans le chapitre 3. Puisque le résultat d'unicité conditionnelle prouvé dans le chapitre 4 exclut qu'une autre mesure extrémale existe pour le système de bâtons sans exister pour le système de spins, cela renforce notre réponse à cette question.

## 5.2 Interactions à longue portée.

Une autre raison d'essayer de développer un outil général et géométrique à base de fluctuations d'interfaces pour montrer la complétude du diagramme de phases est l'étude de modèles de spins à longue portée.

Un exemple d'un tel modèle est le modèle d'Ising à portée infinie, c'est-à-dire où toutes les paires de sommets  $(x, y)$  contribuent au Hamiltonien et pas uniquement les plus proches voisins, mais leur contribution est pondérée par un terme d'interaction  $J_{x,y}$  tendant vers 0 en décroissant lorsque la distance  $d(x, y) \rightarrow +\infty$ . Un exemple très intéressant en dimension 2 est le cas où

$$J_{x,y} = |x - y|^{-\alpha}$$

pour un  $\alpha > 2$ .

Dans [CVELNR18], Coquille, van Enter, Le Ny et Ruszel ont montré que dans ce cas, il n'y a pas d'états de Dobrushin, c'est-à-dire d'états limites de mesures en volume fini avec conditions au

bord de type Dobrushin qui ne soient pas invariants par translations. En particulier, puisque les états de Dobrushin sont pensés être les principaux candidats pour fournir des mesures non invariantes par translation, ce résultat suggère fortement que les seules mesures extrémales devraient être les mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$ .

Un cas particulièrement intéressant est le cas où  $2 < \alpha \leq 3$ , car dans ce régime, des quantités jouant un rôle semblable à la fluctuation des interfaces devraient varier macroscopiquement mais de façon non gaussienne. Il serait particulièrement intéressant d'arriver à définir un objet jouant le rôle d'interfaces et dont on arriverait à montrer les fluctuations macroscopiques, et auquel cas on pourrait théoriquement appliquer une preuve géométrique généralisée de la convergence des interfaces.

Une difficulté majeure pour traiter ces modèles est de trouver une notion d'interface adaptée. Dans la théorie de Pirogov-Sinai classique, le cas des interactions à portée finie se traite immédiatement par les outils existants car, quitte à changer l'espace de spins, on peut se ramener à une interaction à portée 1. Plus tard, Park [Par88] a étendu cette théorie aux interactions à portée infinie décroissant suffisamment rapidement en donnant une notion légèrement différente des contours, qui est très semblable à celle utilisée pour le système de bâtons durs. En effet, on peut voir le Hamiltonien comme une partie principale constituée de termes à portée finie perturbée par un terme ayant des interactions à portée infinie, et on peut obtenir un modèle de contours où chaque contour est un polymère constitué de bouts de frontière de la partie principale reliés entre eux par des filaments provenant de la perturbation du Hamiltonien. Néanmoins, si cela peut être appliqué à des modèles d'Ising à décroissance polynômiale, les cas  $2 < \alpha < 3$  sont à décroissance trop lente pour pouvoir utiliser ces outils.

Une autre piste pour généraliser la notion de contours est celle des contours  $(M, r, a)$  introduits dans [ABEH21]. La construction de ceux-ci est semblable à celle de Pirogov Sinai mais est plus complexe à mettre en place car elle repose sur un argument multi échelle. Cependant, cette piste semble prometteuse puisque cette notion permet aux auteurs de faire marcher un argument de Peierls similaire à celui du développement à basse température du modèle d'Ising à plus proche voisin. Il serait intéressant de voir si cette notion de contours peut être appliquée pour étudier des conditions au bord de Dobrushin dans un premier temps, puis des conditions au bord données par des configurations quelconques dans un second temps.

# Bibliographie

- [ABEH21] L. Affonso, R. Bissacot, E. O. Endo, and S. Handa. Long-Range Ising Models : Contours, Phase Transitions and Decaying Fields. *arXiv :2105.06103 [cond-mat, physics :math-ph]*, September 2021. arXiv : 2105.06103.
- [Aiz80] M. Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two dimensional Ising system. *Communications in Mathematical Physics*, 73(1) :83–94, May 1980.
- [AR76] D. B. Abraham and P. Reed. Interface profile of the Ising ferromagnet in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 49(1) :35–46, February 1976.
- [Bei75] H. van Beijeren. Interface sharpness in the Ising system. *Communications in Mathematical Physics*, 40(1) :1–6, January 1975.
- [BM94] J. Van Den Berg and C. Maes. Disagreement Percolation in the Study of Markov Fields. *The Annals of Probability*, 22(2), April 1994.
- [Bry84] D. C. Brydges. A short course on cluster expansions. *Les Houches*, (PART I), 1984.
- [CDCIV14] L. Coquille, H. Duminil-Copin, D. Ioffe, and Y. Velenik. On the Gibbs states of the noncritical Potts model on  $\mathbb{Z}^2$ . *Probability Theory and Related Fields*, 158(1-2) :477–512, February 2014.
- [CIV03] M. Campanino, D. Ioffe, and Y. Velenik. Ornstein-Zernike theory for finite range Ising models above  $T_c$ . *Probability Theory and Related Fields*, 125(3) :305–349, March 2003.
- [CV12] L. Coquille and Y. Velenik. A finite-volume version of Aizenman–Higuchi theorem for the 2d Ising model. *Probability Theory and Related Fields*, 153(1) :25–44, June 2012.
- [CvELNR18] L. Coquille, A. C. D. van Enter, A. Le Ny, and W. M. Ruszel. Absence of Dobrushin States for 2d Long-Range Ising Models. *Journal of Statistical Physics*, 172(5) :1210–1222, September 2018.
- [DG13] M. Disertori and A. Giuliani. The Nematic Phase of a System of Long Hard Rods. *Communications in Mathematical Physics*, 323(1) :143–175, October 2013.
- [DH96] R. Dobrushin and O. Hryniv. Fluctuations of shapes of large areas under paths of random walks. *Probability Theory and Related Fields*, 105(4) :423–458, December 1996.
- [DH97] R. Dobrushin and O. Hryniv. Fluctuations of the Phase Boundary in the 2D Ising Ferromagnet. *Communications in Mathematical Physics*, 189(2) :395–445, November 1997.



- [DKS92] R. L. Dobrushin, R. Kotecký, and S. Shlosman. *Wulff Construction : A Global Shape from Local Interaction*. American Mathematical Society, 1992. Google-Books-ID : ecyDAQAACAAJ.
- [Dob68] R. L. Dobrushin. The Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and Conditions of Its Regularity. *Theory of Probability & Its Applications*, 13(2) :197–224, January 1968.
- [Dob73] R. L. Dobrushin. Gibbs State Describing Coexistence of Phases for a Three-Dimensional Ising Model. *Theory of Probability & Its Applications*, 17(4) :582–600, September 1973.
- [DS85] R. L. Dobrushin and S. B. Shlosman. The problem of translation invariance of gibbs states at low temperatures. *Mathematical physics reviews*, 5 :53–195, 1985.
- [FV17] S. Friedli and Y. Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems : A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 1 edition, November 2017.
- [Gal72] G. Gallavotti. The phase separation line in the two-dimensional Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 27(2) :103–136, June 1972.
- [GD07] A Ghosh and D Dhar. On the orientational ordering of long rods on a lattice. *Europhysics Letters (EPL)*, 78(2) :20003, April 2007.
- [Hig79a] Y. Higuchi. On some limit theorems related to the phase separation line in the two-dimensional ising model. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 50(3) :287–315, January 1979.
- [Hig79b] Y. Higuchi. On the absence of non translation invariant Gibbs states for the two dimensional Ising model. *Colloquia Math. Societatis Janos Bolyai*, 27 :517–534, 1979.
- [HK02] O. Hryniv and R. Kotecký. Surface Tension and the Ornstein–Zernike Behaviour for the 2D Blume–Capel Model. *Journal of Statistical Physics*, 106(3) :431–476, February 2002.
- [HMW04] Y. Higuchi, J. Murai, and J. Wang. The Dobrushin–Hryniv Theory for the Two-Dimensional Lattice Widom–Rowlinson Model. *Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*, 39 :233–282, January 2004.
- [HT04] Y. Higuchi and M. Takei. Some results on the phase structure of the two-dimensional widom-rowlinson model. *Osaka Journal of Mathematics*, 41(2) :237–255, 2004.
- [Iof15] D. Ioffe. Multidimensional Random Polymers : A Renewal Approach. In *Random Walks, Random Fields, and Disordered Systems*, pages 147–210. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [Kes82] H. Kesten. *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1982.
- [Kot06] R. Kotecký. Pirogov-sinai theory. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 4 :60–65, 2006.
- [KP84] R. Kotecký and D. Preiss. An inductive approach to the pirogov-sinai theory. *Proceedings of the 11th Winter School on Abstract Analysis*, pages 161–164, 1984.
- [KRDS12] J. Kundu, R. Rajesh, D. Dhar, and J. F. Stilck. A Monte Carlo algorithm for studying phase transition in systems of hard rigid rods. pages 113–114, SRM University, Kattankulathur, Tamilnadu, India, 2012.

- [KRDS13] J. Kundu, R. Rajesh, D. Dhar, and J. F. Stilck. Nematic-disordered phase transition in systems of long rigid rods on two-dimensional lattices. *Physical Review E*, 87(3) :032103, March 2013.
- [LR69] O. E. Lanford and D. Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 13(3) :194–215, September 1969.
- [MMS77] A. Messager and S. Miracle-Sole. Correlation functions and boundary conditions in the ising ferromagnet. *Journal of Statistical Physics*, 17(4) :245–262, October 1977.
- [Ons49] L. Onsager. The effects of shape on the interaction of colloidal particles. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 51(4) :627–659, May 1949.
- [Par88] Y. M. Park. Extension of Pirogov-Sinai theory of phase transitions to infinite range interactions I. Cluster expansion. *Communications in Mathematical Physics*, 114(2) :187–218, June 1988.
- [Pei36] R. Peierls. On Ising’s model of ferromagnetism. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 32, pages 477–481. Cambridge University Press, 1936. Issue : 3.
- [PS75] S. A. Pirogov and Y. G. Sinai. Phase diagrams of classical lattice systems. *Theoretical and Mathematical Physics*, 25(3) :1185–1192, December 1975.
- [PS76] S. A. Pirogov and Y. G. Sinai. Phase diagrams of classical lattice systems continuation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 26(1) :39–49, January 1976.
- [Rue71] D. Ruelle. Existence of a Phase Transition in a Continuous Classical System. *Physical Review Letters*, 27(16) :1040–1041, October 1971.
- [Rus79] L. Russo. The infinite cluster method in the two-dimensional Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 67(3) :251–266, October 1979.
- [SDR22] A. Shah, D. Dhar, and R. Rajesh. Phase transition from nematic to high-density disordered phase in a system of hard rods on a lattice. *Physical Review E*, 105(3) :034103, March 2022.
- [Zah84] M. Zahradník. An alternate version of Pirogov-Sinai theory. *Communications in Mathematical Physics*, 93(4) :559–581, December 1984.