



HAL
open science

Etude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini

Samuel Zamour

► **To cite this version:**

Samuel Zamour. Etude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022LYSE1114 . tel-04115879v2

HAL Id: tel-04115879

<https://theses.hal.science/tel-04115879v2>

Submitted on 2 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT :
2022LYSE1114

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale N° 512
Info Maths

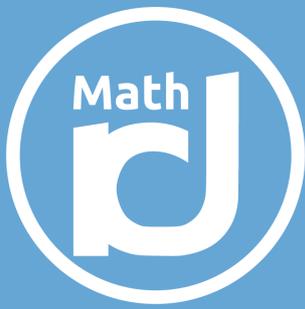
Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 04 juillet 2022 par :
Samuel Zamour

**Etude des quasi-groupes de Frobenius et
des K-boucles de rang de Morley fini**

devant le Jury composé de :

M. Tuna Altinel	Maître de conférences habilité Université Lyon 1	Examineur
M. Adrien Deloro	Maître de conférences habilité Sorbonne Université	Rapporteur
M. Olivier Frécon	Maître de conférences habilité Université de Poitiers	Examineur
Mme. Françoise Point	Professeure Université de Mons	Présidente
Mme. Katrin Tent	Professeure Université de Münster	Rapporteuse
M. Frank Wagner	Professeur Université Lyon 1	Directeur de thèse



**Institut
Camille
Jordan**

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

Étude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini

Samuel Zamour

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard



Lyon 1

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Frank Wagner, pour m'avoir toujours réservé un accueil courtois et attentif. Ses questions, remarques et commentaires ont constitué une aide inestimable au fil des années et se sont révélés essentiels en maintes occasions. Qu'il soit également chaleureusement remercié pour ses relectures minutieuses.

Je voudrais sincèrement remercier Adrien Deloro et Katrin Tent d'avoir accepté le rôle de rapporteur pour cette thèse et d'avoir accompli cette tâche avec diligence.

Finalement, je sais gré à Tuna Altinel, Adrien Deloro, Olivier Frécon, Françoise Point et Katrin Tent de leur présence dans le jury.

Table des matières

1	Préliminaires	8
1.1	Quelques outils de la théorie des modèles	8
1.1.1	Ultrafiltre et théorème de Łos	9
1.1.2	Généralités sur les théories ω -stables	9
1.1.3	Groupes ω -stables	11
1.2	Propriétés des groupes rangés	13
1.2.1	Généricité et générosité	13
1.2.2	Le théorème des indécomposables et quelques résultats de génération	14
1.2.3	Linéarisation	15
1.2.4	Structure des groupes nilpotents	15
1.2.5	Structure de la torsion	16
1.2.6	Quelques propriétés des groupes résolubles	17
1.2.7	Semi-simplicité	17
1.2.8	Unipotence	19
2	Presque-domaines rangés et demi-plongement	21
2.1	Préliminaires sur les groupes strictement 2-transitifs	21
2.1.1	Les groupes strictement 2-transitifs vus comme groupes de transformations affines d'un presque-domaine	22
2.1.2	Premières propriétés des K-boucles	25
2.2	Étude des presque-corps rangés	28
2.2.1	Le cas $\text{car}(M) \neq 2$	28
2.2.2	Le cas $\text{car}(M) = 2$	30
2.3	Brève étude des presque-domaines rangés	32
2.4	Un autre regard sur les K-boucles : la théorie du demi-plongement . . .	35
2.4.1	Définition et premières propriétés du demi-plongement	35
2.4.2	Quelques applications de la théorie du demi-plongement	38
3	Théorie des modèles des K-boucles ω-stables	41
3.1	Premiers résultats	41
3.1.1	Conditions de chaîne et enveloppe définissable	41
3.1.2	Quelques résultats de classification pour les K-boucles sans point fixe	43
3.2	Symétrons et K-boucles uniquement 2-divisibles	45
3.3	Symétrons et ensembles convexes	47
3.3.1	Conditions de chaîne, symétriseurs et types génériques	47

3.3.2	Le théorème des indécomposables	49
3.4	Les K -boucles uniquement 2-divisibles ω -stables à la lumière des symétrons 50	
3.4.1	Connexité et analyse de Lascar	50
3.4.2	Un résultat de classification pour les K -boucles uniquement 2- divisibles sans point fixe ω -stables	53
4	Quasi-groupes de Frobenius dimensionnels	57
4.1	Groupes dimensionnels et théorème de Bachmann	58
4.2	Le cas o-minimal	62
4.3	Le cas rangé	64
4.3.1	Esquisse d'une théorie générale	64
4.3.2	Une caractérisation de la 2-torsion	66
4.3.3	Le groupe de Weyl	68
4.3.4	À la recherche d'un sous-groupe de Borel fortement standard . .	70
4.3.5	Théorèmes de classification	75
5	Quasi-groupes de Frobenius définissablement linéaires rangés	83
5.1	Propriétés des groupes définissablement linéaires rangés	83
5.1.1	Rappels sur les groupes définissablement linéaires rangés	83
5.1.2	Quelques propriétés intéressantes	85
5.2	Les mauvaises paires définissablement linéaires rangées pour la caractéristique nulle	88
5.2.1	Contre-exemples à la conjecture de Cherlin-Zilber en caractéristique nulle	88
5.2.2	Quelques tentatives de caractérisation des mauvaises paires rangées	90
5.3	Classification des quasi-groupes de Frobenius rangés du point de vue linéaire	97

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des *groupes de rang de Morley* (RM) fini, *i.e.*, des groupes abstraits dont les ensembles interprétables admettent une bonne notion de dimension qui généralise la dimension de Zariski pour les variétés algébriques. On parlera aussi de *groupes rangés*.

Plus précisément, le rang de Morley, dans notre cas à valeurs dans les entiers, satisfait les axiomes suivants (voir p.57 de [BN94]) :

- Axiome A (monotonie) : Soit A un ensemble interprétable. Alors $RM(A) \geq n+1$ si et seulement si A contient une infinité d'ensembles interprétables deux-à-deux disjoints de rang supérieur ou égal à n .
- Axiome B (définissabilité) : Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction interprétable entre deux ensembles interprétables A et B , alors pour tout entier n , le sous-ensemble $\{b \in B : RM(f^{-1}(b)) = n\}$ est interprétable.
- Axiome C (additivité) : Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction interprétable surjective, et si $RM(f^{-1}(b)) = n$ pour tout $b \in B$ alors $RM(A) = n + RM(B)$.
- Axiome D (élimination du quantificateur infini) : Pour toute fonction interprétable $f : A \rightarrow B$, il existe un entier m tel que pour tout $b \in B$, la fibre $f^{-1}(b)$ est infini dès qu'elle contient au moins m éléments.

Les propriétés du rang de Morley nous permettent de définir une notion de *composante connexe* analogue au cas des groupes algébriques. Nous obtenons également une notion de *partie générique* : une partie interprétable est générique si elle est de rang maximal.

L'étude des groupes rangés est principalement motivée par la conjecture suivante, formulée par G. Cherlin et B. Zilber :

Un groupe simple (infini) rangé est isomorphe à un groupe algébrique (affine).

Le programme de Borovik s'est révélé le plus fécond pour aborder cette conjecture. Il nous invite, en s'inspirant de la classification des groupes simples finis, à distinguer plusieurs cas suivant la structure des 2 -Sylow^o (voir plus bas pour une définition précise) :

1. le cas dégénéré : le groupe ne contient pas d'involutions.
2. le cas pair : les 2 -Sylow^o sont des 2 -groupes connexes nilpotents d'exposant borné (2 -groupes unipotents).
3. le cas impair : les 2 -Sylow^o sont le produit direct d'un nombre fini de 2 -groupes de Prüfer (cet entier est appelé le *rang de Prüfer*).

4. le cas mixte : les 2 -Sylow^o s'écrivent comme le produit central d'un 2 -tore et d'un 2 -groupe unipotent.

Remarquons qu'une réponse a été apportée dans [ABC08] pour le cas pair et le cas mixte : il n'existe pas de groupe simple rangé mixte et les groupes simples rangés pairs sont bien isomorphes à des groupes algébriques affines (sur un corps de caractéristique égale à deux).

Dans le cas impair, un certain nombre de configurations minimales lorsque le rang de Prüfer est inférieur ou égal à deux ont été mises au jour (voir par exemple [CJ04], [Del07] ou [DJ16]) et résistent pour le moment à l'analyse.

Notre travail peut être envisagé comme une contribution au cas impair. L'étude des *groupes de Frobenius* de type impair, et plus généralement des *quasi-groupes de Frobenius* de type impair, est au coeur de notre analyse. Donnons maintenant quelques définitions.

Soit $C < G$ une paire de groupes rangés, on dit que C est *TI* si $C \cap C^g \neq \{1\}$ implique que $C^g = C$. Le sous-groupe C est *presque-autonormalisant* si C est d'indice fini dans $N_G(C)$. Une paire de groupes connexes rangés $C < G$ est un *quasi-groupe de Frobenius* si C est TI et presque-autonormalisant. De plus, il est de type impair s'il contient des involutions mais pas de 2 -groupe unipotent.

Les groupes de Frobenius ($N_G(C) = C$) connexes de type impair, et plus spécifiquement les groupes strictement 2 -transitifs, *i.e.*, G agit strictement 2 -transitivement sur G/C , sont des exemples paradigmatiques.

La classification des groupes strictement 2 -transitifs rangés (de type impair) constitue le point de départ de notre travail et fait l'objet du chapitre deux. Ces groupes peuvent être envisagés comme les groupes de transformations affines de structures algébriques munies de deux opérations binaires, appelées *presque-domaines*.

À cet égard, on peut formuler deux conjectures. D'une part, un presque-domaine rangé est un presque-corps, *i.e.*, un corps gauche sans distributivité à droite (le groupe strictement 2 -transitif associé sera alors scindé). D'autre part, un presque-corps rangé est un corps algébriquement clos (le groupe strictement 2 -transitif associé sera alors *standard*, *i.e.*, il pourra s'écrire sous la forme $K^+ \rtimes K^\times$ pour un corps algébriquement clos K). En prolongeant les résultats obtenus dans [ABW19], nous étudions les presque-corps rangés de caractéristique 2 et sous une hypothèse technique assez forte, nous démontrons le résultat suivant :

Un presque-corps rangé de caractéristique 2 est un corps algébriquement clos.

On remarque que la partie additive $(D, +, 0)$ d'un presque-domaine D forme ce qu'on appelle une *K-boucle* :

- Les équations du type $x + a = b$ et $a + y = b$ admettent une unique solution dans D .
- (identité de Bol) : $a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c$ pour tous $a, b, c \in D$.
- (propriété de l'inversion par automorphisme) : $-(a + b) = -a - b$ pour tous $a, b \in D$.

Ce type de structures a été étudié de manière détaillée par G. Glauberman en mobilisant le concept de *demi-plongement* [Gla64]. Nous généralisons légèrement son analyse au cas rangé et nous caractérisons ainsi les presque-domaines rangés qui ne sont pas des presque-corps en termes des propriétés algébriques de la K-boucle additive :

1. Soit B une K-boucle où tous les éléments sont d'ordre fini impair qui est définissable et qui est demi-plongée dans un groupe rangé G . Alors $\langle B \rangle$ est un groupe définissable. De plus, $\langle B \rangle$ est un groupe résoluble ssi B est une boucle résoluble.
2. Soit D un presque-domaine rangé (de caractéristique différente de 2) qui n'est pas un presque-corps. Alors D^+ est une K-boucle (uniquement 2-divisible) simple.

Dans le chapitre trois, nous développons la théorie des modèles des K-boucles (essentiellement 2-divisibles) ω -stables. En effet, en sus de son intérêt intrinsèque, l'étude des K-boucles du point de vue de la théorie des modèles s'avère utile dans la classification des groupes strictement 2-transitifs rangés, et plus généralement des groupes de Frobenius connexes rangés de type impair. Notre analyse mobilisera de façon cruciale la théorie des *symétrons* développée par B. Poizat [Poi21]. À partir d'une nouvelle forme du théorème des indécomposables, on produira notamment un analogue de l'analyse de Lascar dans ce nouveau contexte. On abordera également la question des K-boucles sans point fixe ω -stables *génériquement commutatives*. Voici les deux principaux résultats obtenus dans ce chapitre :

1. Soit B une K-boucle uniquement 2-divisible automorphique de RM fini. Alors $Th(B)$ est fini-dimensionnelle et le rang de Lascar coïncide avec le rang de Morley.
2. Soit B une K-boucle uniquement 2-divisible sans point fixe ω -stable. Si B est génériquement commutative, alors B est un groupe abélien.

Dans le chapitre quatre, nous abordons le problème de la classification des quasi-groupes de Frobenius de type impair. Sur la base des résultats de A. Deloro et de J. Wiscons [DW20], nous envisageons cette question dans un cadre qui, du point de vue de la théorie des modèles, englobe les univers rangés et les structures o-minimales. On parlera ainsi de quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*. Les groupes classiques $SO_3(\mathbb{R})$, $PGL_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^+ \rtimes \mathbb{C}^\times$ en constituent des exemples particulièrement remarquables.

Ce sont les méthodes de l'école de Bachmann qui joueront un rôle prépondérant pour interpréter $SO_3(\mathbb{R})$ dans un cadre dimensionnel. Remarquons qu'un tel groupe ne peut pas exister dans un univers rangé (car les corps rangés sont algébriquement clos).

En ce qui concerne les quasi-groupes de Frobenius rangés de type impair, nous étudions de façon détaillée les produits des involutions. Il s'agira de démontrer l'existence d'un sous-groupe de Borel, *i.e.*, d'un sous-groupe définissable connexe résoluble maximal, dont la structure est analogue à celle des sous-groupes de Borel de $PGL_2(\mathbb{C})$. Les méthodes de [DJ16] occuperont une place importante. Ce chapitre est soumis pour publication dans le journal *Model theory*.

Nous démontrons les trois théorèmes de classification suivants :

1. Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius dimensionnel avec involutions mais sans 2-groupe unipotent infini et tel que C est abélien. Si $\bigcup_G C^g$ contient tous les produits de deux involutions alors $G \simeq SO_3(K, f)$ où K est un corps interprétable et f une forme quadratique anisotrope. Si on suppose de plus que $C < G$ est

définissable dans une structure o-minimale, $Z(G) = \{1\}$ mais C est seulement nilpotent, alors $G \simeq \mathrm{SO}_3(R)$ où R est un corps réel clos interprétable.

2. Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair tel que $N_G(C)/C$ est d'ordre pair (non-trivial). Si les sous-groupes de Borel de G sont généreux alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$ pour un corps interprétable K de caractéristique différente de 2.
3. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe de type impair avec C abélien. Si les sous-groupes de Borel de G sont généreux alors G est résoluble et scindé.

Dans un cinquième et dernier chapitre, nous explorons les liens entre la classification des quasi-groupes de Frobenius rangés et les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé. On dit qu'un groupe est *définissablement linéaire rangé* (ou bien définissablement linéaire sur un corps rangé) s'il est définissable dans un corps rangé K et s'il se plonge dans $\mathrm{GL}_n(K)$ pour un certain $n \geq 1$.

Après avoir isolé dans les travaux de B. Poizat et Y. Mustafin ([Poi01] et [Mus04]) un critère pour éliminer les *mauvais groupes*, *i.e.*, les groupes rangés non-résolubles dont les sous-groupes définissables connexes propres sont nilpotents, nous étudions les quasi-groupes de Frobenius de type impair scindés. On caractérisera également les contre-exemples potentiels à la Conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé de caractéristique nulle.

Nous démontrons ainsi les théorèmes suivants :

1. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius définissablement linéaire rangé connexe de type impair. Alors G est scindé.
2. Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius de type impair avec $N_G(C)/C$ d'ordre pair, définissablement linéaire sur un corps rangé. Alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$ pour un corps interprétable K de caractéristique différente de 2.
3. S'il existe un groupe simple non-algébrique définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique nulle, alors il existe un groupe de Frobenius $C < G$ simple (non-algébrique) définissablement linéaire rangé, sans involutions, composé d'éléments semi-simples et tel que $G = \bigcup_G C^g$. Le groupe G est modèle de la théorie universelle des sous-groupes de type fini engendrés par des parties (finies) non-entièrement contenues dans un conjugué de C .
4. Soit $G = A \rtimes C$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Alors C est définissablement linéaire sur un corps rangé. De plus, si la caractéristique est positive, alors C est abélien ; si la caractéristique est nulle, C est recouvert par ses tores linéaires maximaux.

Chapitre 1

Préliminaires

Notation

Soit G un groupe, $H \leq G$ signifie que H est un sous-groupe de G . Pour $x \in G$, on pose $x^g = g^{-1}xg$.

Soit $X \subseteq G$, on pose : $X^* = X \setminus \{1\}$ et $X^G = \{x^g : x \in X, g \in G\}$.

On définit le *normalisateur* et le *centralisateur* de X : $N_G(X) = \{g \in G : x^g \in X, \forall x \in X\}$ et $C_G(X) = \{g \in G : x^g = x, \forall x \in X\}$.

On définit les *commutateurs* $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ pour $x, y \in G$. Pour $X, Y \subseteq G$, $[X, Y]$ désigne le sous-groupe engendré par $\{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$.

Les sous-groupes G^n et $G^{(n)}$ sont définis inductivement :

$$G^0 = G^{(0)} = G, \quad G^1 = G^{(1)} = [G, G], \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}], \quad G^{n+1} = [G, G^n].$$

On dit que G est le *produit central* de H_1, \dots, H_n , noté $G = H_1 * \dots * H_n$, si $G = \langle H_1, \dots, H_n \rangle$ et $[H_i, H_j] = \{1\}$ pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

Si tous les éléments de G sont d'ordre fini plus petit qu'un entier n , on dit que le groupe est d'*exposant fini*. Le plus petit entier n qui satisfait cette propriété est appelé l'*exposant* de G .

On dit que G est *n-divisible* si pour tout $1 \neq g \in G$, il existe $h \in G$ tel que $g = h^n$. Le groupe G est *divisible* s'il est *n-divisible* pour tout n .

On note $I = \{1 \neq i \in G : i^2 = 1\}$ l'ensemble des *involutions* de G . L'ensemble $I \cdot I = \{ij : i \in I, j \in I\}$ désigne l'ensemble des *translations*.

On note \mathfrak{M} une \mathfrak{L} -structure quelconque. Si \mathfrak{N} est une sous-structure élémentaire de \mathfrak{M} , on écrit $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$. Les formules sont notées $\phi(\bar{v}_n), \psi(\bar{v}_n), \dots$ (où on fait apparaître les variables libres). On désigne par $S_n(A)$ l'ensemble des *n-types* complets au-dessus d'un ensemble de paramètres A .

1.1 Quelques outils de la théorie des modèles

Nous supposons connues les notions de base de la théorie des modèles (notamment les concepts de compacité, de types, de saturation...). On pourra consulter par exemple les premiers chapitres de [Las09] ou bien de [TZ12]. Notre référence pour la théorie des modèles sera le livre de D. Lascar [Las09].

1.1.1 Ultrafiltre et théorème de Los

Définition 1.1.1.1. Soit I un ensemble infini. Un filtre sur I est une partie \mathfrak{F} de $\mathfrak{P}(I)$ qui possède les propriétés suivantes :

1. $I \in \mathfrak{F}$ et $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. Si $X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in \mathfrak{F}$, alors $X \cap Y \in \mathfrak{F}$.
3. Si $X \in \mathfrak{F}$ et $X \subseteq Y$, alors $Y \in \mathfrak{F}$.

Un ultrafiltre sur I est un filtre \mathfrak{U} tel que pour tout $J \subseteq I$, $J \in \mathfrak{U}$ ou bien $I \setminus J \in \mathfrak{U}$. On dit qu'il est principal s'il existe $a \in I$ tel que $\mathfrak{U} = \{J \subseteq I : a \in J\}$.

Fait 1.1.1.2. [Las09, Proposition 1.2. Sec.1. Chap.2] Soit \mathfrak{F} un filtre sur I . Alors il existe un ultrafiltre sur I contenant \mathfrak{F} .

Définition 1.1.1.3. Soit \mathcal{L} un langage et $(\mathfrak{M}_i : i \in I)$ une famille de \mathcal{L} -structures. Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre non-principal sur I . On définit une \mathcal{L} -structure appelée ultraproduit $\prod_{\mathfrak{U}} \mathfrak{M}_i$. L'ensemble de base est obtenu en quotientant $\prod_{i \in I} M_i$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(a_i)_{i \in I} \approx (b_i)_{i \in I} \quad \text{ssi} \quad \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathfrak{U}.$$

Fait 1.1.1.4. (Théorème de Los) [Las09, Théorème 1.5. Chap 2] Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre (non-principal) sur I , et pour chaque $i \in I$, soit \mathfrak{M}_i une \mathcal{L} -structure. Alors pour toute formule $\phi(v_1, \dots, v_n)$ de \mathcal{L} et tous éléments a^1, \dots, a^n de $\prod_{i \in I} M_i$, on a :

$$\prod_{\mathfrak{U}} \mathfrak{M}_i \models \phi(a^1/\mathfrak{U}, \dots, a^n/\mathfrak{U}) \quad \text{ssi} \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \in \mathfrak{U}.$$

Définition 1.1.1.5. Soit \mathfrak{M} une \mathcal{L} -structure. On dit que \mathfrak{M} est pseudo- P si elle satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. \mathfrak{M} est élémentairement équivalente à un ultraproduit de \mathcal{L} -structures \mathfrak{M}_i satisfaisant la propriété P .
2. Pour tout \mathcal{L} -énoncé ϕ , $\mathfrak{M} \models \phi$ implique l'existence d'une structure \mathfrak{M}_0 satisfaisant P telle que $\mathfrak{M}_0 \models \phi$.

1.1.2 Généralités sur les théories ω -stables

Soit T une \mathcal{L} -théorie. On fixe un modèle *monstre*, i.e., très saturé et très homogène, \mathfrak{C} de T . En particulier, tous les modèles de T qui nous intéressent peuvent être identifiés à des sous-structures élémentaires de \mathfrak{C} .

On rappelle que l'on peut associer à toute théorie T une théorie T^{eq} qui élimine les imaginaires, i.e., dans \mathfrak{C}^{eq} , pour tout classe définissable $D \subseteq (C^{eq})^n$, il existe un paramètre α tel que α est exactement fixé par les automorphismes de la structure qui laissent globalement invariant D . On dit dans ce cas que α est un *paramètre canonique* pour D . Pour plus détails concernant cette construction, nous renvoyons à [Las09, Sec.4. Chap.5].

Définition 1.1.2.1. Pour un ensemble définissable $X \subseteq \mathfrak{C}^n$, on définit inductivement sur l'ordinal α , le rang de Morley, noté RM :

- $RM(X) \geq 0$ ssi X est un ensemble définissable non-vide.

- $RM(X) \geq \alpha + 1$ ssi il existe une famille (infinie) $(X_i : i \in \omega)$ de sous-ensembles de X définissables deux-à-deux disjoints tel que $RM(X_i) \geq \alpha$.
- Si α est limite, $RM(X) \geq \alpha$ ssi $RM(X) \geq \beta$, pour tout ordinal $\beta < \alpha$.

On dit que $RM(X) = \alpha$ si $RM(X) \geq \alpha$ mais $RM(X) \not\geq \alpha + 1$ et $RM(X) = \infty$ si $RM(X) \geq \alpha$ pour tout ordinal α .

Définition 1.1.2.2. On dit qu'une théorie T est ω -stable (de façon équivalente, totalement transcendante) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout sous-ensemble définissable $X \subseteq \mathfrak{C}^n$, on a $RM(X) < \infty$.

Fait 1.1.2.3. Si T est ω -stable alors T^{eq} est ω -stable.

Dans la suite de la section, on suppose que T est une théorie ω -stable.

Fait 1.1.2.4. [Las09, Sec.5. Chap.6] Soit X un ensemble définissable avec $RM(X) = \alpha$. On peut décomposer X en un nombre fini de sous-ensembles définissables deux-à-deux disjoints X_1, \dots, X_n tel que $RM(X_i) = \alpha$ et tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i ne peut pas s'écrire comme l'union deux sous-ensembles définissables disjoints de rang α . Cet entier est appelé le degré de Morley de X , noté $DM(X)$.

On cite un résultat sur l'existence des modèles premiers.

Fait 1.1.2.5. [Las09, Proposition 3. Sec.2. Chap.8] Soit $A \subset \mathfrak{C}$, alors il existe un modèle \mathfrak{M} absolument premier sur A , i.e., il existe une énumération de $M = \{m_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (où λ est un ordinal) tel que pour tout $\alpha < \lambda$, $tp(m_\alpha/A \cup \{m_\beta : \beta < \alpha\})$ est isolé. En particulier, \mathfrak{M} est premier sur A .

On peut étendre le rang et le degré de Morley aux types.

Définition 1.1.2.6. Soit $A \subset \mathfrak{C}$ et soit p un n -type sur A (non-nécessairement complet). On pose :

$$RM(p) = \inf\{RM(\phi(\bar{v}_n)) : \phi(\bar{v}_n) \text{ est conséquence de } p\}$$

De plus, on définit le degré de Morley de p , noté $DM(p)$, comme :

$$DM(p) = \inf\{DM(\phi(\bar{v}_n)) : \phi(\bar{v}_n) \text{ est conséquence de } p \text{ et } RM(\phi(\bar{v}_n)) = RM(p)\}$$

Voici comme se comporte le rang de Morley vis-à-vis de la clôture algébrique :

Fait 1.1.2.7. [Las09, Proposition 1.4. Sec.1. Chap.6] Soient $A \subset \mathfrak{C}$ et \bar{a}, \bar{b} des suites finies d'éléments de \mathfrak{C} . Si $\bar{a} \in \text{acl}(\bar{b} \cup A)$, alors $RM(tp(\bar{a}/A)) = RM(\bar{a}/A) \leq RM(\bar{b}/A)$.

On caractérise la *déviante* dans le contexte d'une théorie ω -stable.

Définition 1.1.2.8. Soient $p \subset q$ deux types tels que $p \in S_n(A)$ et $q \in S_n(B)$, avec $A \subseteq B \subset \mathfrak{C}$. On dit que q est une extension non-déviante de p si $RM(p) = RM(q)$.

Il est possible de définir une autre notion de rang sur les types, le *rang de Lascar*.

Définition 1.1.2.9. Soit $A \subset \mathfrak{C}$ et soit $p \in S_n(A)$. On définit $U(p)$ le rang de Lascar de p inductivement sur l'ordinal α :

1. $U(p) \geq 0$ si p est consistant.
2. $U(p) \geq \alpha$ si pour tout $\beta < \alpha$, il existe B , avec $A \subseteq B \subset \mathfrak{C}$ et q une extension déviante de p telle que $U(q) \geq \beta$.

On dit que $U(p) = \alpha$ si $U(p) \geq \alpha$ mais $U(p) \not\geq \alpha + 1$ et $U(p) = \infty$ si $U(p) \geq \alpha$ pour tout ordinal α .

Fait 1.1.2.10. Soit $A \subset \mathfrak{C}$ et soit $p \in S_n(A)$, on a $U(p) \leq RM(p)$.

La (non)-déviation présente des propriétés remarquables dans le contexte d'une théorie ω -stable.

Définition 1.1.2.11. Soit $p \in S_n(M)$ où M est un modèle et $q \in S_n(B)$, avec $M \subseteq B \subset \mathfrak{C}$. On dit que q est l'héritier de p si pour toute formule $\phi(\bar{v}_n, \bar{b}) \in q$ et toute suite finie $\bar{b} \in B^k$, il existe $\bar{m} \in M^k$ tel que $\phi(\bar{v}_n, \bar{m}) \in p$.

Fait 1.1.2.12. [Las09, Théorème de la relation d'équivalence finie. Sec.4. Chap.6] Soit $p \in S_n(A)$, pour $A \subset \mathfrak{C}^{eq}$ avec $acl^{eq}(A) = A$. Alors le type p est stationnaire, i.e., il admet une unique extension non-déviant sur tout B avec $A \subseteq B$. En particulier, si $A = M$ est un modèle, l'unique extension non-déviant de p est son héritier.

Définition 1.1.2.13. Soient $A \subset \mathfrak{C}$ et soit $p \in S_n(A)$. Soit $\phi(\bar{v}_n, \bar{w}_m)$ une formule, on dit que le type p est ϕ -définissable par la formule $D_\phi(\bar{w}_m)$ si pour tout $\bar{a} \in A$, on a :

$$\phi(\bar{v}_n, \bar{a}) \in p \quad \text{ssi} \quad \models D_\phi(\bar{a}).$$

Le type p est définissable s'il est ϕ -définissable pour toute formule ϕ .

Fait 1.1.2.14. [Las09, Théorème 4.6. Sec.4. Chap.6] Soit $p \in S_n(M)$ où M est un modèle. Alors p est définissable.

Grâce à la déviation, on peut définir une relation d'indépendance, notée \perp .

Définition 1.1.2.15. Soit $A \subset \mathfrak{C}$ et \bar{a}, \bar{b} des suites finies de \mathfrak{C} . On pose :

$$\bar{a} \perp_A \bar{b} \quad \text{ssi} \quad RM(\bar{a}/A \cup \bar{b}) = RM(\bar{a}/A).$$

Fait 1.1.2.16. [Las09, Paragraphe 2.10. Sec.2. Chap.6] Soient $A \subseteq B \subset \mathfrak{C}$ et \bar{a}, \bar{b} des suites finies de \mathfrak{C} . La relation d'indépendance \perp satisfait les propriétés suivantes :

- (invariance par automorphisme) Si f est un automorphisme, en posant $A' = f(A)$, $\bar{a}' = f(\bar{a})$, $\bar{b}' = f(\bar{b})$, on a : $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ ssi $\bar{a}' \perp_{A'} \bar{b}'$.
- (symétrie) $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ ssi $\bar{b} \perp_A \bar{a}$.
- (transitivité) $\bar{a} \perp_A \bar{b}\bar{c}$ ssi $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ et $\bar{a} \perp_{A\bar{b}} \bar{c}$.
- (extension) Il existe \bar{a}' tel que $\bar{a}' \equiv_A \bar{a}$, avec $\bar{a}' \perp_A B$.
- (caractère local) Il existe $A_0 \subseteq A$ fini tel que $\bar{a} \perp_{A_0} A$.
- (caractère fini) $\bar{a} \perp_A B$ ssi pour toute suite finie \bar{b} de B , on a : $\bar{a} \perp_A \bar{b}$.

1.1.3 Groupes ω -stables

Passons maintenant aux propriétés des groupes ω -stables. On pourra consulter [Las09, Sec.4 Chap.7] et [Poi87].

Définition 1.1.3.1. Un groupe G est ω -stable si sa théorie, $Th(G)$, est ω -stable. Il est de RM fini si de plus $RM(X) < \omega$ pour tout sous-ensemble définissable $X \subset \mathfrak{G}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, où \mathfrak{G} est le modèle monstre de $Th(G)$.

Remarquons que le groupe G est considéré dans un langage potentiellement enrichi qui étend le pur langage des groupes. Les sous-groupes définissables ne sont pas en général des sous-structures au sens de la théorie des modèles. Par ailleurs, sauf mention explicite, on ne distinguera pas les ensembles définissables des ensembles interprétables (Fait 1.1.2.3).

De plus, étudier un groupe dont la théorie est ω -stable ou bien un groupe définissable dans une théorie ω -stable revient au même grâce au théorème suivant :

Fait 1.1.3.2. [Poi85, Corollaire 12.31] (*séparation des paramètres*) Soient M un modèle d'une théorie ω -stable T , et deux formules $\phi(\bar{v}_n)$ sans paramètre et $\psi(\bar{v}_n, \bar{b})$ avec paramètres dans M ; alors il existe une formule $\chi(\bar{v}_n, \bar{a})$, dont les paramètres satisfont $\phi(\bar{v}_n)$, et qui est équivalente à $\phi(\bar{v}_n) \wedge \psi(\bar{v}_n, \bar{b})$.

Tout d'abord, remarquons que les groupes ω -stables satisfont la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables. Cela nous permet notamment de définir la *composante connexe* G° de G (il s'agit de l'intersection des sous-groupes définissables d'indice fini, c'est le plus petit sous-groupe définissable d'indice fini). De manière analogue, pour une partie $X \subseteq G$, on peut définir la *clôture définissable* de X , notée $d(X)$, comme l'intersection de tous les sous-groupes définissables de G contenant X .

Fait 1.1.3.3. [Las09, Proposition 4.2. Sec.4. Chap.7]

1. Soient $H_2 \leq H_1$ deux sous-groupes définissables de G . Si $(H_1 : H_2)$ est fini, alors $RM(H_1) = RM(H_2)$ et $DM(H_1) = DM(H_2) \times (H_1 : H_2)$; sinon, on a $RM(H_2) < RM(H_1)$.
2. Il n'existe pas de chaîne infinie strictement décroissante de sous-groupes définissables dans G .

Notons également que dans un groupe ω -stable il n'y a de chaîne infinie strictement croissante de sous-groupes uniformément définissables.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de *stabilisateur* d'un type.

Définition 1.1.3.4. Soit $p \in S_1(G)$ et $g \in G$. On pose :

$$g \cdot p = \{\phi(v_1) : \phi(v_1) \text{ est une formule à paramètres dans } G \text{ et } \phi(g \cdot v_1) \in p\}$$

Le stabilisateur de p , noté $Stab(p)$, est le sous-groupe :

$$Stab(p) = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

La définissabilité des types et la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables entraînent la définissabilité du stabilisateur.

Fait 1.1.3.5. [Las09, Proposition 4.4. Sec.4. Chap.7]

1. Le stabilisateur d'un type $p \in S_1(G)$ est un sous-groupe définissable de G .
2. Si $G \preceq G'$ et p' est l'héritier de p sur G' , alors $Stab(p)$ et $Stab(p')$ sont définis par la même formule.
3. $RM(p) \geq RM(Stab(p))$.

Les éléments *génériques* jouent un rôle majeur dans la théorie des groupes ω -stables.

Définition 1.1.3.6. Soit $A \subseteq G$. On dit que $p \in S_1(A)$ est générique si $RM(p)$ est maximal. Un élément $a \in G$ est générique sur A si $tp(a/A)$ est un type générique. On dit également qu'une formule est générique si elle est de rang maximal.

Fait 1.1.3.7. [Las09, Propositions 1, 2 et 5. Sec.4. Chap.7]

1. Un type $p \in S_1(G)$ est générique ssi $Stab(p)$ est d'indice fini dans G .
2. G est connexe ssi G a un unique type générique ssi $DM(G) = 1$.
3. Soit $a \in G$, alors $a = g_1 \cdot g_2$ où g_1 et g_2 sont génériques sur a .

On peut étendre la notion de type et de formule génériques aux sous-groupes non-définissables de G (voir [Wag90]).

Définition 1.1.3.8. Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe (non-nécessairement définissable). On dit qu'une formule $\phi(v_1) = X$ à paramètres dans G est générique pour H s'il existe des éléments $h_1, \dots, h_n \in H$, et $g_1, \dots, g_n \in G$, avec $H \subseteq h_1 X g_1 \cup \dots \cup h_n X g_n$. On dit qu'un type $p \in S_1(A)$, $A \subseteq G$, est générique pour H s'il ne contient que des formules génériques pour H .

Fait 1.1.3.9. [Wag90] Soit un type $p \in S_1(A)$ générique pour un sous-groupe H (en particulier, il est finiment satisfaisable dans H), alors $Stab(p) = d(H)^\circ$. Réciproquement, soit $p \in S_1(A)$ un type finiment satisfaisable dans H , alors si $Stab(p) = d(H)^\circ$, le type p est générique pour H .

Corollaire 1.1.3.10. [Wag90] Un type p est générique pour H ssi c'est un type générique de $d(H)$.

1.2 Propriétés des groupes rangés

Nous passons désormais aux groupes rangés ; nous citons plusieurs faits plus ou moins spécialisés qui seront utilisés tout au long de ce travail. Les livres [BN94] et [ABC08] sont nos deux principales références.

Tout d'abord, commençons par le résultat fondamental de B. Poizat qui établit l'équivalence entre la notion de groupe rangé et celle de groupe de rang de Morley fini.

Fait 1.2.0.1. [Poi87, Corollaire 2.14 et Théorème 2.15] Un groupe est rangé si et seulement si c'est un groupe de rang de Morley fini.

Nous avons vu qu'un groupe rangé admet une notion de composante connexe et que pour toute partie X , on peut considérer sa clôture définissable $d(X)$. Si $X = H$ est un sous-groupe (non-définissable), on pose $H^\circ = d(H)^\circ \cap H$.

Un certain nombre de propriétés sont préservées lorsque l'on passe à la clôture définissable.

Fait 1.2.0.2. [BN94, Corollaire 5.38] Soit H un sous-groupe définissable d'un groupe rangé G . Si H est résoluble (respectivement, nilpotent) de classe n alors $d(H)$ a les mêmes propriétés.

1.2.1 Généricité et générosité

L'étude des parties génériques joue un rôle majeur dans la compréhension des groupes rangés, en particulier des groupes connexes. En effet, dans un groupe rangé connexe,

deux parties génériques s'intersectent toujours non-trivialement, et même génériquement.

Introduisons un peu de terminologie. Soit G un groupe rangé. On dira qu'un sous-groupe définissable H est *généreux* si $\bigcup_{g \in G} H^g$ est générique. On dira également qu'un sous-groupe définissable H est *presque-autonormalisant* si H est d'indice fini dans son normalisateur. Enfin, un sous-groupe définissable H est *génériquement disjoint de ses conjugués* dans G si $H \setminus \bigcup_{g \in G \setminus N(H)} (H \cap H^g)$ est générique dans H . On indique plusieurs résultats concernant la générosité des sous-groupes définissables (voir [Jal06]) :

- Fait 1.2.1.1.** 1. [ABC08, Lemme IV.1.2] Soient G un groupe rangé connexe et H un sous-groupe définissable presque-autonormalisant et génériquement disjoint de ses conjugués. Alors H est généreux dans G .
2. [ABC08, Lemme V.1.25] Soient G un groupe rangé connexe et H un sous-groupe définissable connexe presque-autonormalisant. On considère \mathfrak{F} la famille des conjugués de H . Alors H est généreux si et seulement si l'ensemble définissable $H_0 = \{h \in H : \{X \in \mathfrak{F} : h \in X\} \text{ est fini}\}$ est générique dans H .
3. [Jal06, Lemme 3.3] Soient G un groupe rangé connexe, H un sous-groupe définissable et Y le sous-ensemble définissable de H qui consiste des éléments contenus dans un nombre fini de conjugués de H . Alors pour tout sous-ensemble définissable U de H tel que $U \cap Y \neq \emptyset$, on a $N_G(U)^\circ \leq N_G(H)^\circ$.

1.2.2 Le théorème des indécomposables et quelques résultats de génération

De façon analogue aux groupes algébriques, les groupes rangés satisfont un théorème de génération (le théorème des indécomposables de Zilber) qui garantit l'existence de groupes définissables engendrés par des parties indécomposables. On dit qu'une partie définissable X d'un groupe G est *indécomposable* si pour tout sous-groupe définissable H , l'ensemble X est contenu dans un unique translaté de H ou bien intersecte une infinité de translatés de H . On utilisera les deux faits suivants :

Fait 1.2.2.1. [BN94, Corollaire 5.28] Soit G un groupe rangé. Alors le sous-groupe engendré par une famille d'ensembles définissables indécomposables contenant l'élément neutre est définissable et connexe.

Fait 1.2.2.2. [BN94, Corollaires 5.29 et 5.32] Soit G un groupe rangé.

1. Soit $H \leq G$ un sous-groupe définissable connexe et X une partie arbitraire. Alors le sous-groupe $[H, X]$ est définissable et connexe.
2. Soit $H \leq G$ un sous-groupe définissable. Les sous-groupes $(H)^n$ et $(H)^{(n)}$ de la série centrale descendante et de la série dérivée sont définissables. Si H est connexe, ces groupes sont connexes également.

Le Socle, le Fitting et le Radical résoluble d'un groupe rangé sont définissables.

Fait 1.2.2.3. [BN94, Théorème 7.3] Soit G un groupe rangé et soit $R(G)$ le groupe engendré par les sous-groupes normaux résolubles (le radical résoluble). Alors c'est un sous-groupe (caractéristique) définissable et résoluble.

Fait 1.2.2.4. [BN94, Théorème 7.3] Soit $F(G)$ le groupe engendré par les sous-groupes normaux nilpotents (le sous-groupe de Fitting). Alors c'est un sous-groupe (caractéristique) définissable et nilpotent.

Fait 1.2.2.5. [BN94, Théorème 7.8] Soit $S(G)$ le groupe engendré par les sous-groupes normaux minimaux (le socle). Si $Z(G^\circ) = \{1\}$, alors c'est un sous-groupe définissable. De plus, si G est connexe et de centre trivial, alors $S(G) = A_1 \times \dots \times A_n$ où A_i est un sous-groupe définissable G -minimal simple ou abélien pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (on remarque que si $R(G) = \{1\}$, les sous-groupes A_i sont simples).

1.2.3 Linéarisation

Un aspect important de la théorie des groupes rangés renvoie à la question de la linéarisation : à quelles conditions est-il possible d'interpréter un corps et plus généralement des actions linéaires ? On mentionnera les trois faits suivants :

Fait 1.2.3.1. [BN94, Théorème 9.1] Soit $G = A \rtimes H$ un groupe rangé où A et H sont des groupes définissables abéliens infinis. Si A est H -minimal et $C_H(A) = \{1\}$ alors on a :

1. Le sous-anneau $K = \mathbb{Z}[H]/\text{ann}_{\mathbb{Z}[H]}(A)$ de $\text{End}(A)$ est un corps algébriquement clos interprétable ; il existe un entier m tel que tout élément de K peut être représenté comme un endomorphisme $\sum_{i=1}^m h_i$ (avec $h_i \in H$).
2. $A \simeq K^+$, H est isomorphe à un sous-groupe T de K^\times et agit sur A par multiplication.
3. En particulier, H agit de façon régulière sur A et $K = T + \dots + T$ (m fois).

Fait 1.2.3.2. [BN94, Théorème 9.5] Soit $A \rtimes G$ un groupe rangé connexe avec G définissable, et A définissable, abélien, G -minimal tel que $C_G(A) = \{1\}$. Supposons que G contient un sous-groupe infini définissable abélien normal H . Alors $C_A(G) = \{1\}$, H est central dans G , l'anneau $K = \mathbb{Z}[H]/\text{ann}_{\mathbb{Z}[H]}(A)$ est un corps interprétable algébriquement clos. De plus, A est un K -espace vectoriel de dimension finie (disons n), l'action de G sur A est par automorphisme linéaire et via cette action, on a $G \leq GL_n(K)$. Finalement, $H \leq Z(G) \leq Z(GL_n(K)) \simeq K^\times$ et agit par multiplication scalaire.

Fait 1.2.3.3. [LW93, Théorème 4] Soit $A \rtimes G$ un groupe rangé, tel que G est infini définissable et que A est un groupe infini définissable abélien divisible sans torsion. Supposons de plus que A est G -minimal et que $C_G(A) = \{1\}$. Alors il existe un corps interprétable K et un sous-groupe définissable $A_1 \leq A$ tel que $A_1 \simeq K^+$ et $G \leq GL_n(K)$.

On rappelle que d'après un théorème de A. Macintyre les corps rangés sont algébriquement clos [BN94, Théorème 8.1].

1.2.4 Structure des groupes nilpotents

Dans le contexte des groupes rangés, il est possible de démontrer des théorèmes de structure assez forts pour les groupes abéliens et les groupes nilpotents.

Fait 1.2.4.1. [BN94, Théorème 6.7] Soit G un groupe rangé abélien. Alors :

1. $G = D \oplus B$ où D est un sous-groupe divisible et B un sous-groupe d'exposant fini (ces deux sous-groupes ne sont pas forcément définissables).
2. $D \simeq \bigoplus_p \text{premier} (\bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}) \bigoplus_I \mathbb{Q}$ où les indices I_p sont finis.

3. $G = D + B$ où D, B sont des sous-groupes définissables caractéristiques, D est divisible, B est d'exposant fini et $D \cap B$ est fini. Le sous-groupe D est connexe. Si G est connexe, on peut supposer que B est connexe.

Le résultat de structure sur les groupes abéliens peut être généralisé au cas nilpotent. De manière plus générale, les groupes rangés nilpotents possèdent un certain nombre de propriétés remarquables qui rappellent celles des groupes algébriques nilpotents.

Fait 1.2.4.2. [BN94, Théorèmes 6.8 et 6.9; Lemme 6.2 et 6.3] Soit G un groupe rangé nilpotent, alors :

1. $G = B * D$ où B et D sont des sous-groupes définissables caractéristiques, D est divisible et B est d'exposant fini.
2. Soit T le groupe de torsion de D . Alors T est central dans D et il existe un sous-groupe N nilpotent sans torsion tel que $D = T \times N$.
3. $Z(G)$ est infini si G est infini.
4. Soit H un sous-groupe définissable de G d'indice infini. Alors H est d'indice infini dans son normalisateur.

1.2.5 Structure de la torsion

Les groupes rangés peuvent être analysés *via* leurs éléments de torsion. Il existe une théorie des p -Sylow (p -groupes maximaux) mais elle n'est pleinement développée que pour $p = 2$ ou dans le contexte des groupes (connexes) résolubles rangés.

Tout d'abord, dans un groupe rangé, il est possible de relever les éléments d'ordre fini d'une section définissable.

Fait 1.2.5.1. [BN94, exercice 13p.73] Soit H un sous-groupe normal définissable de G . Si \bar{x} est un p -élément de G/H alors il existe un p -élément $y \in xH$.

On rappelle le fait suivant pour les p -groupes localement finis (pour $p = 2$, cette condition est équivalente à celle d'être un 2-groupe). On clarifie ainsi les notions abordées dans l'introduction pour décrire la conjecture de Cherlin-Zilber.

Fait 1.2.5.2. [BN94, Proposition 6.18-6.19, Corollaire 6.20]

1. Pour tout p premier, un p -groupe localement fini d'un groupe rangé est nilpotent-par-fini.
2. Soit P un p -groupe nilpotent-par-fini d'un groupe rangé. Alors $P^\circ = T * B$ où T est un p -groupe abélien divisible et B un groupe d'exposant fini définissable connexe.
3. Pour $p = 2$, les 2-Sylow sont conjugués.

Dans cette perspective, un p -groupe unipotent est un p -groupe (nilpotent) définissable connexe (infini) d'exposant fini. On dira qu'un groupe rangé est U_p^\perp s'il ne contient pas de p -groupe unipotent. Un p -tore est *a contrario* un p -groupe abélien divisible isomorphe à une somme finie de p -groupes de Prüfer. Le p -rang de Prüfer d'un groupe rangé désigne alors le p -rang d'un p -tore maximal. Le cas $p = 2$ revêt une importance particulière en raison du résultat de conjugaison évoqué précédemment. De plus, bien qu'on ne dispose pas d'un analogue du théorème de Feit-Thompson qui éliminerait le cas dégénéré, les involutions comme dans le cas des groupes simples finis sont souvent au coeur de l'analyse.

Fait 1.2.5.3. [BN94, Lemme 10.1, Proposition 10.2, Théorème 10.5]

1. Soient $i \neq j$ deux involutions. Alors i et j inversent leur produit ij .
2. Soit G un groupe rangé et $i \neq j$ deux involutions. Alors i et j sont soit $d(ij)$ -conjuguées soit commutent avec une autre involution de $d(ij)$.
3. Soit G un groupe rangé et soit i une involution tel que $C_G(i)$ est fini. Alors G° est un groupe abélien inversé par i et $[G^\circ, i] = G^\circ$.

Dans le cas d'un groupe rangé connexe, la structure de la p -torsion satisfait la propriété additionnelle suivante :

Fait 1.2.5.4. [BBC07] Soit G un groupe rangé connexe dont les p -Sylow sont finis. Alors G ne contient pas de p -éléments.

On cite une autre conséquence de l'analyse de la torsion dans les groupes connexes :

Fait 1.2.5.5. [BBC07], [ABC08, IV. Corollaire 4.18] Soit G un groupe rangé connexe. Alors $C_G(g)^\circ$ est infini pour tout $g \in G$.

1.2.6 Quelques propriétés des groupes résolubles

L'étude d'un groupe rangé passe en général par une compréhension de ses *sous-groupes de Borel*, i.e., de ses sous-groupes définissables connexes résolubles maximaux. Plus généralement, nous allons nous intéresser aux propriétés des sous-groupes définissables (connexes) résolubles.

Fait 1.2.6.1. [BN94, Corollaire 9.9] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors G' est nilpotent.

La structure de la torsion est particulièrement bien comprise dans les groupes connexes résolubles comme en témoignent les deux faits suivants :

Fait 1.2.6.2. [BN94, Théorème 9.29 et 9.35]

1. Dans un groupe rangé résoluble G , les p -Sylow sont conjugués.
2. Dans un groupe rangé connexe résoluble G , les p -Sylow sont connexes.

1.2.7 Semi-simplicité

En exploitant l'analogie avec les groupes algébriques affines, on peut introduire pour les groupes rangés une notion de tore (éléments semi-simples) et de radical unipotent. Idéalement un groupe rangé connexe résoluble devrait pouvoir s'écrire comme produit semi-direct d'un radical unipotent et d'un tore.

On commence par caractériser la semi-simplicité dans le contexte des groupes rangés. Nous pourrions également mieux comprendre la nature des éléments génériques. Un sous-groupe définissable abélien divisible est un *tore décent* si c'est la clôture définissable de sa torsion ; c'est un *bon tore* si cette propriété est héréditaire pour les sous-groupes définissables infinis. Un *pseudo-tore* est un groupe abélien divisible rangé tel qu'aucune section définissable n'est isomorphe à K^+ pour un corps interprétable K .

Le groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique positive est un exemple typique de bon tore comme le prouve le fait suivant qui se base sur des travaux de F.O. Wagner :

Fait 1.2.7.1. [Wag01] Soit $\langle K, \dots \rangle$ un corps rangé de caractéristique positive $p > 0$ (avec une structure additionnelle) tel qu'une certaine puissance de l'endomorphisme de Frobenius $x \rightarrow x^p$ est un automorphisme de $\langle K, \dots \rangle$. Alors $\langle F_p^{\text{alg}}, \dots \rangle$ est une sous-structure élémentaire. En particulier, si $T \leq K^\times$ est un sous-groupe définissable propre (on parle de mauvais corps), $\langle F_p^{\text{alg}}, (F_p^{\text{alg}} \cap T) \rangle$ est une sous-structure élémentaire de $\langle K, T \rangle$.

Fait 1.2.7.2. [ABC08, Proposition 4.20] Soit K un corps rangé de caractéristique positive. Alors K^\times est un bon tore.

Remarquons également que le résultat suivant de F.O. Wagner nous permet de conjecturer la non-existence des mauvais corps, *i.e.*, des corps rangés tel que le groupe multiplicatif contient un sous-groupe définissable propre, en caractéristique positive :

Fait 1.2.7.3. [Wag03] S'il existe une infinité de p -nombres premiers de Mersenne, *i.e.*, de la forme $(p^n - 1)/(p - 1)$, alors il n'existe pas de mauvais corps de caractéristique positive $p > 0$.

En caractéristique nulle, des mauvais corps rangés ont été construits [BHMPW07]. Néanmoins, il semble raisonnable de conjecturer qu'un sous-groupe multiplicatif définissable propre est un pseudo-tore (on renvoie à [Fre09] pour plus de détails). On dira que le groupe satisfait l'hypothèse (PT).

Grâce aux travaux de G. Cherlin et T. Altinel puis d'O. Frécon notamment, on sait que le comportement des tores décents (et des pseudo-tores) présente des similitudes avec celui des tores algébriques.

- Fait 1.2.7.4.**
1. [Che05] Soit G un groupe rangé. Alors les tores décents maximaux sont conjugués.
 2. [Fre09, Théorème 1.7] Soit G un groupe rangé. Alors les pseudo-tores maximaux sont conjugués.
 3. [Fre06b, Lemme 3.1] Soit G un groupe rangé et N un sous-groupe définissable normal. Soit T un tore décent maximal alors TN/N est un tore décent maximal de G/N et tous les tores décents ont cette forme.
 4. [Fre09, Corollaire 2.9] Soit G un groupe rangé connexe. Le pseudo-tore maximal de $F(G)$ est central dans G .
 5. [AB09, Théorème 1] Soit T un tore décent d'un groupe rangé connexe G . Alors $C_G(T)$ est connexe, généreux dans G et $N_G(C_G(T))^\circ = C_G(T)$.
 6. [Fre09, Corollaire 2.12] Soit T un pseudo-tore d'un groupe rangé connexe G . Alors $C_G(T)$ est connexe, généreux dans G et $N_G(C_G(T))^\circ = C_G(T)$.

On cite également un fait qui décrit la structure de la p -torsion lorsque la partie p -unipotente est triviale.

- Fait 1.2.7.5.**
1. [BC09, Théorème 3] Soit G un groupe rangé connexe, et soit g un p -élément tel que $C_G(g)^\circ$ est U_p^\perp . Alors g appartient à un p -tore.
 2. [BC09, Théorème 5] Soit G un groupe rangé connexe tel que $N_G(T)/C_G(T) = W(G)$ est d'ordre impair pour un tore décent maximal T . Soit r le plus petit nombre premier (impair) divisant l'ordre de $W(G)$ alors ou bien un r -élément x

représentant un élément d'ordre r dans $W(G)$ centralise un r -groupe unipotent ou bien un r -élément toral centralise un r -groupe unipotent.

Il s'agit d'un principe de *toralité*.

Une autre façon d'approcher la semi-simplicité consiste à s'intéresser aux *sous-groupes de Carter*, i.e., aux sous-groupes définissables connexes nilpotents presque-autonormalisants. Remarquons que dans les groupes algébriques réductifs, les sous-groupes de Carter sont exactement les tores (algébriques) maximaux. Voici les principales propriétés des sous-groupes de Carter :

- Fait 1.2.7.6.**
1. [FJ08, Théorème 3.11] Soit G un groupe rangé. Alors G contient un sous-groupe de Carter.
 2. [Jal06, Théorème 3.1] Soit G un groupe rangé connexe. Alors les sous-groupes de Carter généreux sont conjugués.
 3. [Wag94, Théorème 29] Soit G un groupe rangé. Si G est résoluble alors ses sous-groupes de Carter sont conjugués.
 4. [Fre09, Corollaire 2.10] Soit G un groupe rangé. Alors tout pseudo-tore de G est contenu dans un sous-groupe de Carter.
 5. [Fre06b, Théorèmes 1.1 et 1.2] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors tout sous-groupe H contenant un sous-groupe de Carter est définissable, connexe et autonormalisant.
 6. [FJ08, Théorème 3.11] Soit G un groupe rangé résoluble. Alors ses sous-groupes de Carter sont génériquement disjoints de leurs conjugués et généreux.
 7. [ABC08, I. Corollaire 8.30] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors $G = G'Q$ où Q est un sous-groupe de Carter.

1.2.8 Unipotence

Nous passons maintenant à l'analyse de l'unipotence. En caractéristique $p > 0$, un p -groupe unipotent est simplement un p -groupe définissable connexe nilpotent d'exposant fini. On a le fait suivant :

Fait 1.2.8.1. [Bur06, Fait 1.1] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors il existe un unique p -groupe unipotent maximal $U_p(G)$ et $U_p(G) \leq F(G)^\circ$.

En caractéristique nulle, une théorie robuste de l'unipotence a été élaborée par J. Burdges (voir [Bur04] et [Bur06]).

On dira qu'un groupe définissable connexe abélien A est *indécomposable* s'il ne peut pas s'écrire comme la somme de sous-groupes propres définissables. Son *radical* $J(A)$ désigne l'unique sous-groupe propre définissable connexe maximal.

Pour un groupe rangé G , on définit :

$$U_{0,r}(G) = \langle A \leq G \text{ abélien indécomposable tq } RM(A/J(A)) = r \rangle$$

et on note $U_0(G)$ pour r maximal. On appelle un $U_{0,r}$ -groupe, un groupe rangé G tel que $G = U_{0,r}(G)$. Les $\{0, r\}$ -Sylow sont les $U_{0,r}$ -groupes nilpotents définissables (connexes) maximaux. Voici quelques faits qui caractérisent l'unipotence en caractéristique nulle pour les groupes rangés :

- Fait 1.2.8.2.** 1. [Bur04, Lemme 2.11] Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme définissable entre des groupes rangés. Alors $f(U_{0,r}(G)) \leq U_{0,r}(H)$ est un $U_{0,r}$ -groupe. Si $U_{0,r}(H) \leq f(G)$ alors $f(U_{0,r}(G)) = U_{0,r}(H)$.
2. [Bur04, Théorème 2.15] Soit G un groupe rangé connexe résoluble tel que $U_p(G) = \{1\}$ pour tout nombre premier p et $U_0(G) = \{1\}$. Alors G est un bon tore.
3. [Bur04, Théorème 2.16] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors $U_0(G) \leq F(G)^\circ$.
4. [Bur06, Corollaire 3.6] Soit G un groupe nilpotent rangé. Alors $G = d(T) * [U_{0,1}(G) * \dots * U_0(G)] * [U_2(G) \times \dots \times U_{p_{\max}}(G)]$.
5. [Bur06, Théorème 5.7] Soit G un groupe rangé connexe résoluble et Q un sous-groupe de Carter. Alors $U_{0,r}(G')U_{0,r}(Q)$ est un $U_{0,r}$ -Sylow. De plus, tous les $U_{0,r}$ -Sylow sont de cette forme pour un sous-groupe de Carter Q .

On peut définir donc un ordre sur l'unipotence. Les tores décents sont les moins unipotents, puis viennent les $U_{0,r}$ -groupes (classés selon r) et enfin les p -groupes unipotents (classés de manière décroissante selon p). On notera ρ un paramètre d'unipotence arbitraire

On a le théorème de génération suivant :

Fait 1.2.8.3. [FJ08, Proposition 2.10] Soit $G = NC$ un groupe rangé où C et N sont nilpotents définissables et N normal dans G . Supposons que $N = \langle U_\rho(N) : \rho \text{ paramètre d'unipotence} \rangle$ et $C = \langle U_{\rho'}(C) : \rho' \text{ paramètre d'unipotence} \rangle$ tels que $\rho' \geq \rho$. Alors G est nilpotent.

Remarquons que les sous-groupes définissables connexes d'un $U_{0,r}$ -groupe ne sont pas forcément des $U_{0,r}$ -groupes. Si c'est le cas, on parle de $U_{0,r}$ -groupe homogène. Ce constat a conduit O. Frécon à introduire la notion de U -groupe : un groupe rangé G est un U -groupe si $G = U(G)$ où $U(G)$ est le groupe engendré par les sous $U_{0,r}$ -groupes (définissables) homogènes normaux et les p -sous-groupes unipotents pour p premier. On a les faits suivants :

- Fait 1.2.8.4.** 1. [Fre06a, Théorème 4.11] Soit G un groupe rangé connexe et H un sous $U_{0,r}$ -groupe définissable. Alors $[G, H]$ est un $U_{0,r}$ -groupe homogène.
2. [Fre06a, Théorème 5.3] Soit G un U -groupe rangé alors $G = B * U_{0,1}(G) * \dots * U_{0,RM(G)}(G)$ où B est définissablement caractéristique d'exposant fini, $U_{0,r}$ est homogène et les intersections sont finies.
3. [Fre06a, Théorème 6.8] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors G' est un U -groupe.

Chapitre 2

Presque-domaines rangés et demi-plongement

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la classification des groupes strictement 2-transitifs rangés en privilégiant le point de vue algébrique des presque-domaines et des K-boucles. On examinera également la possibilité d'étendre nos résultats à la classe plus large des groupes de Frobenius rangés connexes de type impair.

2.1 Préliminaires sur les groupes strictement 2-transitifs

Définition 2.1.0.1. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . On dira que G agit 2-transitivement si pour tout $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in X^2$ où les x_i (resp. les x'_i) sont distincts, il existe $g \in G$ tel $(x'_1, x'_2) = (g.x_1, g.x_2)$. L'action est strictement 2-transitive si un tel g est unique.*

On notera le stabilisateur d'un point $Stab(x)$ par $C_x = C$. Si G est strictement 2-transitif, il s'agit d'un sous-groupe propre qui est *malnormal* : $N_G(C) = C$ et pour tout $g \notin N_G(C)$, l'intersection $C^g \cap C$ est trivial. On appelle *groupe de Frobenius* un groupe qui contient un sous-groupe propre malnormal (appelé le *complément de Frobenius*).

Remarquons tout d'abord qu'un groupe strictement 2-transitif contient nécessairement des involutions : il suffit de considérer un élément g qui échange deux points. On dira que le groupe G est de *caractéristique 2* ($car(G) = 2$) (respectivement, de *caractéristique différente de 2*, $car(G) \neq 2$) si C ne contient pas d'involutions (respectivement, C contient des involutions).

Le groupe des transformations affines d'un corps K , que l'on peut écrire sous la forme $K^+ \rtimes K^\times$, est un exemple typique de groupe strictement 2-transitif. Voici quelques propriétés satisfaites en général par les groupes strictement 2-transitifs :

Fait 2.1.0.2. [BN94, Lemmes 11.44, 11.45, 11.47] *Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif.*

1. *Le sous-groupe C contient au plus une involution (qui est donc forcément centrale dans C).*
2. *L'ensemble I des involutions forme une classe de conjugaison.*

3. $I = j^C$ pour toute involution j si $\text{car}(G) = 2$; $I = i \cup j^C$ pour $i \in C$ et $j \notin C$, sinon.
4. On a $I \cdot I \cap \bigcup_{g \in G} C^g = \{1\}$.
5. Si $\text{car}(G) \neq 2$, alors l'ensemble $I \cdot I \setminus \{1\}$ forme une classe conjugaison. De plus, $G = iIC = IiC$, pour i l'involution de C .
6. Le groupe G est scindé, i.e., $G = A \rtimes C$ ssi $I \cdot I$ est un sous-groupe ssi $I \cdot I = iI$ pour une involution $i \in I$, si $\text{car}(G) \neq 2$ ou bien $I \cdot I = I \cup \{1\}$, sinon.
7. Si $\text{car}(G) \neq 2$, l'action naturelle de G est équivalente à l'action de G par conjugaison sur I .

Si le groupe G est de caractéristique différente de 2, on dira qu'il est de *caractéristique nulle* (respectivement, de *caractéristique* $p > 0$) si toutes les translations (qui sont conjuguées) sont d'ordre infini (respectivement, d'ordre $p > 0$).

Dans un univers rangé, nous obtenons des informations supplémentaires.

Fait 2.1.0.3. [BN94, Lemmes 11.19 et 11.60]

1. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé. Alors C est définissable dans la pure structure de groupe.
2. Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif rangé. Alors G et C sont connexes.

Deux conjectures (vérifiées pour les groupes finis et les groupes algébriques) nous guident dans le projet de classification des groupes strictement 2-transitifs rangés :

- (A) Un groupe strictement 2-transitif rangé $C < G$ est scindé.
- (B) Un groupe strictement 2-transitif rangé $C < G$ scindé est standard, i.e., $G = K^+ \rtimes K^\times$, pour un corps K algébriquement clos.

Remarque 2.1.0.4. Des groupes strictement 2-transitifs infinis non-scindés ont été construits, par exemple dans [RST17]. Travailler dans un univers rangé n'est donc pas une hypothèse superflue.

2.1.1 Les groupes strictement 2-transitifs vus comme groupes de transformations affines d'un presque-domaine

Lorsque l'étude des groupes strictement 2-transitifs a été initiée de manière systématique (notamment par H. Karzel, W. Kerby, J. Tits et H. Wefelscheid), on a montré qu'il est possible d'associer à chaque groupe strictement 2-transitif une structure algébrique appelée un *presque-domaine*.¹ De cette façon, le groupe strictement 2-transitif peut être réalisé comme le groupe des transformations affines du presque-domaine associé. À cet égard, il devient également possible de reformuler les deux conjectures précédentes en termes purement algébriques :

- (A') Un presque-domaine rangé est un presque-corps.
- (B') Un presque-corps rangé est un corps algébriquement clos.

1. En français, la terme de *domain* devrait être traduit par *anneau sans diviseur de zéro*. En effet, un *anneau intègre* est forcément commutatif. Pour simplifier notre terminologie, nous avons décidé de traduire *domain* de manière littérale par *domaine*. Par conséquent, on dira *presque-domaine* pour *near-domain*.

Nous allons maintenant donner les définitions d'un presque-domaine et d'un presque-corps et expliciter succinctement le lien avec les groupes strictement 2-transitifs. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la monographie de W. Kerby [Ker74].

Définition 2.1.1.1. Soit $(D, +, \times, 0, 1)$ une structure avec deux opérations binaires. On dit que D est un presque-domaine si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. — $a + 0 = 0 + a$ pour tout $a \in D$.
— les équations $x + a = b$ et $a + y = b$ ont une unique solution dans D pour tous $a, b \in D$.
— $a + b = 0$ implique $b + a = 0$ pour tous $a, b \in D$.
2. $(D \setminus \{0\}, \times, 1)$ est un groupe.
3. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
4. Pour tous $a, b, c \in D$, on a $a : c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.
5. Pour tous $a, b \in D$, il existe $d_{a,b} \in D \setminus \{0\}$ tel que pour tout $c \in D$:

$$a + (b + c) = (a + b) + d_{a,b} \cdot c.$$

Remarquons dès à présent qu'une structure $(D, +, 0)$ qui satisfait les deux premiers points de la propriété 1 est appelée une *boucle*.

Passons maintenant à la définition d'un presque-corps.

Définition 2.1.1.2. Soit $(D, +, \times)$ un presque-domaine. On dit que D est un presque-corps si de plus $(D, +, 0)$ est un groupe (commutatif).

Une notion de *caractéristique* peut être définie pour un presque-domaine D : il s'agit du plus petit entier n tel que $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$ (cette somme est bien définie). S'il n'existe

pas de tel entier, on dit que D est de caractéristique nulle. On la note $car(D)$. Elle correspond à la caractéristique du groupe strictement 2-transitif associé.

Introduisons un autre concept important de la théorie des presque-domaines : le *noyau*.

Définition 2.1.1.3. L'ensemble $ker(D) = \{x \in D : \forall y, z \in D, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x\}$ est un sous-groupe de D^\times contenant $Z(D^\times)$, appelé le *noyau du presque-domaine*.

Considérons maintenant $T_2(D)$ l'ensemble des transformations affines du presque-domaine D :

$$T_2(D) = \{\tau_{b,a} : D \longrightarrow D, a, b \in D : \tau_{b,a}(x) = b + a \cdot x\}$$

Nous cherchons à munir cet ensemble d'une structure de groupe. Notons que

$$\tau_{b',a'} \tau_{b,a}(x) = b' + a' \cdot (b + a \cdot x) = b' + (a' \cdot b + a' \cdot a \cdot x) = (b' + a' \cdot b) + d_{b',a'b} \cdot a' \cdot a \cdot x.$$

En identifiant $T_2(D)$ à $D^+ \times D^\times$, il s'agit alors de vérifier que l'opération "*" suivante définit bien une structure de groupe :

$$(b', a') * (b, a) = (b' + a' \cdot b, d_{b',a'b} \cdot a' \cdot a)$$

$$(b, a)^{-1} = (-(a^{-1} \cdot b), a^{-1})$$

Le groupe $T_2(D)$ est donc un groupe interprétable dans la structure $(D, +, \cdot)$, qui agit de plus strictement 2-transitivement sur le presque-domaine. Il a la forme d'un *produit*

quasi-direct, une généralisation du produit semi-direct.

Afin de comprendre la façon dont un groupe strictement 2-strictement est isomorphe au groupe des transformations affines d'un presque-domaine, il nous faut procéder maintenant à des rappels sur la théorie des boucles et des produits quasi-directs.

Soit $(B, +, 0)$ une boucle, et soit S_B son groupe de permutation. Pour tout a dans B , on définit la *translation à gauche* $g_a : x \rightarrow a + x$ et on considère le groupe engendré par les translations (à gauche) :

$$M_g(B) = \langle g_a : a \in B \rangle \leq S_B.$$

Remarquons que les translations sont des bijections définissables (et donc leurs inverses sont aussi des bijections définissables). Nous pouvons dès lors définir les *applications de précession* (à gauche) $\delta_{a,b} = g_{a+b}^{-1}g_a g_b$. Elles sont caractérisées par la propriété suivante :

$$a + (b + c) = (a + b) + \delta_{a,b}(c).$$

Le groupe des *applications intérieures* (à gauche) est alors :

$$D(B) = \langle \delta_{a,b} : a, b \in B \rangle \leq S_B.$$

Dans le cas d'un presque-domaine, pour chaque application de précession $\delta_{a,b}$, il existe un élément $d_{a,b} \in D \setminus \{0\}$ tel que $\delta_{a,b}(x) = d_{a,b} \cdot x$ pour tout $x \in D$.

Remarque 2.1.1.4. On peut aussi définir la *translation à droite* $r_b : x \rightarrow x + b$ pour $b \in B$ et ainsi considérer le groupe des *translations bilatères* :

$$M(B) = \langle g_a, r_b : a, b \in B \rangle.$$

Passons désormais au produit quasi-direct (voir section C.2. de [Kie02]).

On dira qu'un sous-groupe T de $\text{Aut}(B)$ est un *transassociant* si T contient $D(B)$ (en particulier, dans cette définition du transassociant, on suppose que $D(B)$ consiste d'automorphismes).

Soient B une boucle et T un transassociant. Alors $B \times_Q T$ est un groupe, appelé *produit quasi-direct*. Il est défini par les opérations suivantes :

$$(a, \alpha).(b, \beta) = (a + \alpha(b), \delta_{a, \alpha(b)}\alpha\beta)$$

et

$$(a, \alpha)^{-1} = (\alpha^{-1}(a'), \alpha^{-1}\delta_{a, a'}^{-1})$$

où a' est l'inverse à droite de a .

Nous allons maintenant voir que l'on peut canoniquement associer une boucle à une action de groupe sur un ensemble. Sous certaines conditions, il sera également possible de réaliser le groupe comme un produit quasi-direct.

Si G agit transitivement sur X , on rappelle que cette action est équivalente à l'action de G sur G/C où C est le stabilisateur d'un point. Si un sous-ensemble B contient un unique élément de chaque translaté de C , on dira que B est une *transversale* pour l'action.

Si B est une transversale, on note $\sigma : G/C \rightarrow B$ l'application qui à gC associe l'unique élément de $B \cap gC$.

Fait 2.1.1.5. [Kie02, Théorèmes 2.7 et 2.8] Soit G un groupe agissant transitivement sur G/C et B une transversale. On considère l'application $\theta : G \rightarrow S_B$ qui à g associe $\theta_g : B \rightarrow B$, avec $\theta_g(a) = \sigma(gaC)$, Pour tous $a, b \in B$, on pose $a + b = \sigma(abC)$. Alors, on a :

1. $(B, +)$ est une boucle ssi gBg^{-1} est une transversale pour tout $g \in G$.
2. θ est un homomorphisme de noyau $\bigcap_G C^g = N$ qui induit une action de G sur B équivalente à l'action de G sur G/C .
3. Si B engendre G comme groupe alors $\theta(G) = M_g(B)$, $\theta(C) = D(B)$ et donc $D(B) \simeq C/N$
4. Si $cBc^{-1} \subseteq B$ pour tout $c \in C$ alors $D(B) \subseteq \theta(C) = \text{Inn}(C) \subseteq \text{Aut}(B)$.

Le fait suivant explicite le lien entre le produit quasi-direct et la boucle définie à partir d'une transversale :

Fait 2.1.1.6. [Kie02, Théorème 2.16] Mêmes hypothèses et notations que le Fait 2.1.1.5. Si $B^c \subseteq B$ pour tout $c \in C$, alors $\theta(C)$ est un transassociatif pour B et l'application $f : B \times_Q \theta(C) \rightarrow \theta(G)$; $(a, \alpha) \mapsto g_a \alpha$ est un isomorphisme.

Soit maintenant $C < G$ un groupe strictement 2-transitif. Si $\text{car}(G) = 2$ (respectivement, $\text{car}(G) \neq 2$), alors I (respectivement iI) est une transversale B pour l'action de G sur G/C (équivalente à l'action naturelle de G). On peut donc munir B d'une structure de boucle. De plus, $\bigcap_{g \in G} C^g = \{1\}$ et $I^C \subseteq I$ (respectivement, $(iI)^C \subseteq iI$, pour i l'involution de C). Le sous-groupe C contient $D(B)$ et agit par automorphisme, c'est donc un transassociatif. Finalement, $G \simeq B \times_Q C$.

De plus, l'action de C sur $B \setminus \{0\}$ est régulière (par définition de la stricte 2-transitivité), choisissons donc $b \in B \setminus \{0\}$ et pour tout $a \in B$, notons μ_a l'unique élément de C tel que $\mu_a(b) = a$. On peut définir une opération "·" sur $B \setminus \{0\}$:

$$x \cdot y = \mu_x(y), \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \cdot y = 0, \quad \text{sinon.}$$

La structure $(B, +, 0, \cdot, b = 1_B)$ est alors un presque-domaine et l'application

$$\phi : T_2(B) \rightarrow B \times_Q C; \quad \tau_{b,a} \rightarrow (b, \mu_a), \quad a, b \in B, b \neq 0$$

définit un isomorphisme (nous renvoyons à [Kie02, Section D] pour plus de détails).

2.1.2 Premières propriétés des K-boucles

Nous venons donc de brièvement expliciter la correspondance entre les groupes strictement 2-transitifs et les presque-domaines. Du point de vue de la structure additive, la boucle associée au presque-domaine satisfait des propriétés additionnelles et forme ce qu'on appelle une *K-boucle* [Kie02, Théorème 7.10].

Définition 2.1.2.1. Soit $(B, +, 0)$ une boucle. On dit que B est une *K-boucle* si :

1. (Condition de Bol) Pour tous $a, b, c \in B$, on a :

$$a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c.$$

2. (Propriété de l'inversion par automorphisme) Pour tous $a, b \in B$, on a :

$$-(a + b) = -a - b.$$

Remarque 2.1.2.2. *Si une boucle satisfait seulement la condition de Bol, on parle de boucle de Bol. Notons que cette condition est suffisante pour démontrer l'existence d'une unique inverse.*

On dit que la K-boucle est *uniquement 2-divisible* si l'application $x \mapsto x + x$ définit une bijection. Voici quelques exemples de K-boucles (uniquement 2-divisibles) :

1. La partie additive d'un presque-domaine de caractéristique différente de 2.
2. Un groupe uniquement 2-divisible avec l'opération $x + y = x^{1/2}yx^{1/2}$.
3. Si α est un automorphisme involutif d'un groupe G , l'ensemble $X = \{\alpha(g)g^{-1} : g \in G\}$ peut être muni d'une structure de K-boucle si X est uniquement 2-divisible.

Pour montrer qu'un presque-domaine est un presque-corps, il suffit de démontrer que la K-boucle additive est un groupe, qui sera alors nécessairement abélien.

Dans les K-boucles, un certain nombre de propriétés sont satisfaites, ce qui facilite les calculs. En particulier, l'opération $a \cdot n = \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ fois}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

Fait 2.1.2.3. (voir [Kie02])

1. $a + b = \delta_{a,b}(b + a)$.
2. Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \cdot n + (a \cdot m + x) = a \cdot (n + m) + x$.
3. Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, $\delta_{a \cdot m, a \cdot m} = Id$.
4. $\delta_{a,b}^{-1} = \delta_{b,a}$.
5. $\delta_{a,b} = \delta_{-b, b+a}$.
6. $\delta_{a, b+a} = \delta_{a,b}$.
7. Les applications de précession sont des automorphismes de la K-boucle.
8. $(a + b) \cdot 2 = a + (b \cdot 2 + a)$
9. L'application $x \mapsto x \cdot 2$ est injective ssi K ne contient pas d'élément d'ordre 2.
10. Si B est une K-boucle uniquement 2-divisible et si ϵ est un automorphisme involutif sans point fixe de B alors $\epsilon(x) = -x$ pour tout $x \in B$.

Remarque 2.1.2.4. *Les trois premières propriétés restent vraies lorsque l'on considère seulement une boucle de Bol. En particulier, tout élément d'une boucle de Bol engendre un groupe cyclique.*

Dans les boucles de Bol (et donc *a fortiori* dans les K-boucles), les sous-boucles peuvent être caractérisées assez aisément :

Proposition 2.1.2.5. [NS02, Lemme 1.3] *Soit B une boucle de Bol alors $C \subseteq B$ est une sous-boucle ssi C est stable par inversion et addition.*

Démonstration. Puisque C est stable par inversion et addition $a - a = 0 \in C$, pour $a \in C$. De plus, $a + (-a + x) = (a - a) + \delta_{a, -a}(x) = x$ et donc l'équation $a + x = b$ a une unique solution dans C .

En utilisant l'identité de Bol, on remarque que :

$$(-a + [(a + b) - a]) + a = -a + [(a + b) + (-a + a)] = -a + (a + b) = b$$

Par conséquent, $-a + ((a + b) - a)$ est l'unique solution de l'équation $x + a = b$ et elle appartient à C . \square

Remarque 2.1.2.6. *Les sous-boucles d'une K-boucle sont des K-boucles.*

Définition 2.1.2.7. *On dit qu'une K-boucle B est sans point fixe, si toute application intérieure (à gauche) non-triviale $\phi \in D(B)$ n'a pas de point fixe non-triviale.*

La boucle additive d'un presque-domaine est une K-boucle sans point fixe. Remarquons que dans une K-boucle sans point fixe B , un automorphisme de précession $\delta_{a,b}$ est définissable sur $(a + b), (b + a)$.

En effet, si $\delta_{x,y}(b + a) = \delta_{a,b}(b + a) = (a + b)$ alors $\delta_{b,a}\delta_{x,y}(b + a) = b + a$ et donc $\delta_{b,a}\delta_{x,y}$ admet un point fixe. Puisque $\delta_{b,a}\delta_{x,y} \in D(B)$, on obtient que $\delta_{a,b} = \delta_{x,y}$.

De plus, dans ce contexte, les automorphismes de précession peuvent être caractérisés encore plus précisément :

Lemme 2.1.2.8. *[KW 72b][KW 74] Soit B une K-boucle sans point fixe, alors :*

1. $\delta_{\delta_{x,y}(a), \delta_{x,y}(b)} = \delta_{x,y}\delta_{a,b}\delta_{y,x}$
2. $\delta_{a,b}\delta_{b+a,c} = \delta_{a,b+c}\delta_{b,c}$

Démonstration. Pour le point 1, on a :

$$\delta_{x,y}(a + (b + c)) = \delta_{x,y}((a + b) + \delta_{a,b}(c)) = (\delta_{x,y}(a) + \delta_{x,y}(b)) + \delta_{x,y}\delta_{a,b}\delta_{y,x}\delta_{x,y}(c)$$

$$\delta_{x,y}(a + (b + c)) = (\delta_{x,y}(a) + (\delta_{x,y}(b) + \delta_{x,y}(c))) = (\delta_{x,y}(a) + \delta_{x,y}(b)) + \delta_{\delta_{x,y}(a), \delta_{x,y}(b)}\delta_{x,y}(c)$$

Finalement, on obtient que $\delta_{\delta_{x,y}(a), \delta_{x,y}(b)} = \delta_{x,y}\delta_{a,b}\delta_{y,x}$.

Pour le point 2, on a :

$$a + (b + (c + x)) = a + ((b + c) + \delta_{b,c}(x)) = (a + (b + c)) + \delta_{a,b+c}\delta_{b,c}(x)$$

$$\begin{aligned} a + (b + (c + x)) &= (a + b) + \delta_{a,b}(c + x) \\ &= ((a + b) + \delta_{a,b}(c)) + \delta_{a+b, \delta_{a,b}(c)}\delta_{a,b}(x) \\ &= (a + (b + c)) + \delta_{\delta_{a,b}(b+a), \delta_{a,b}(c)}\delta_{a,b}(x) \\ &= (a + (b + c)) + \delta_{a,b}\delta_{b+a,c}(x) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que $\delta_{a,b}\delta_{b+a,c} = \delta_{a,b+c}\delta_{b,c}$. \square

Dans le cas d'un presque-domaine, l'identification de $D(B)$ à un sous-groupe de D^\times nous fournit des informations supplémentaires :

Fait 2.1.2.9. *[KW 72a]*

1. *Si $d_{a,b}$ est central dans D^\times , alors $d_{a,b} = 1$.*
2. *Si l'ensemble $\{d_{a,b} : a, b \in D\}$ est fini, alors $(D, +, \times)$ est un presque-corps.*

2.2 Étude des presque-corps rangés

Avant d'aborder la question délicate de la classification des presque-domaines rangés, nous préférons au préalable nous engager dans l'étude des presque-corps rangés. D'une part, ces structures semblent plus aisées à manipuler car nous n'avons pas à traiter le défaut d'associativité de l'opération additive. D'autre part, la conjecture (B') est bien indépendante de la conjecture (A') et il semble raisonnable d'en espérer une résolution favorable.

Soit $(M, +, \times)$ un presque-corps rangé infini. Tout d'abord, remarquons que M est additivement connexe : soit A un sous-groupe propre additif définissable d'indice fini, alors $I = \bigcap_{x \in M^\times} xA$ est trivial (c'est un idéal à gauche en utilisant la distributivité à gauche et si $0 \neq m \in I$, alors $m^{-1}m = 1 \in I$ et $I = M$), égal à une sous-intersection finie, donc c'est un idéal d'indice fini, contradiction. Il existe donc un unique type générique additif et par conséquent, un unique type de rang maximal qui est aussi l'unique type générique multiplicatif. Le groupe M^\times est donc lui aussi connexe.

Or, tout élément de M^\times définit une action (définissable) sans point fixe sur M^+ . Soit $T \leq M^\times$ un sous-groupe définissable connexe abélien. En considérant un sous-groupe $A \leq M^+$ qui est T -minimal, on peut utiliser le Fait 1.2.3.1 pour définir un corps K tel que $T \hookrightarrow K^\times$. En caractéristique positive, on peut donc en déduire que T est un bon tore (Fait 1.2.7.2). Nous allons désormais considérer deux cas : $\text{car}(M) = 2$ et $\text{car}(M) \neq 2$.

2.2.1 Le cas $\text{car}(M) \neq 2$

Nous démontrons dans cette sous-section qu'un presque-corps rangé de caractéristique différente de 2 est un corps algébriquement clos. Il s'agit du principal résultat de [ABW19]; nous suivons cet article dans notre exposition.

Nous utiliserons notamment le fait suivant :

Fait 2.2.1.1. [BN94, Corollaire 11.67] *Soit M un presque-corps rangé. Si $\ker(M)$ est infini (en particulier, si $Z(M^\times)$ est infini), alors M est un corps algébriquement clos.*

On démontre tout d'abord que les sous-groupes de Borel de M^\times sont des groupes abéliens. Il s'agira de bons tores si la caractéristique est positive.

Le lemme suivant caractérise l'action d'un groupe rangé connexe résoluble sur un groupe abélien.

Lemme 2.2.1.2. *Soit $A \rtimes B$ rangé tel que B est définissable connexe résoluble et A est définissable abélien B -minimal. De plus, $C_B(A) = \{1\}$. Alors B est en fait abélien.*

Démonstration. Le groupe dérivé B' est définissable et connexe par le Fait 1.2.2.2. Supposons que B' n'est pas trivial, par connexité, il est infini. Par le Fait 1.2.6.1, B' est nilpotent, en particulier $Z(B')$ est infini (Fait 1.2.4.2). On remarque que $Z(B')$ est caractéristique dans B (il est en particulier normal). Par le Fait 1.2.3.1, il existe un corps définissable K tel que A est un K -espace vectoriel de dimension finie (disons n), B agit linéairement et $Z(B')$ agit scalairement (on raisonne de manière assez analogue à la démonstration de [BN94, Théorème 9.8])

Les éléments de $Z(B')$ sont de déterminant 1 (puisque $\det(x^{-1}y^{-1}xy) = 1$) et donc agissent sur A comme racine n -ème de l'unité. Par conséquent, $Z(B')$ est fini (l'action est fidèle), contradiction. Le groupe dérivé est donc trivial et par conséquent B est abélien. \square

Définition 2.2.1.3. *Soit G un groupe rangé connexe. On dit que les sous-groupes de Borel de G sont héréditairement conjugués si les sous-groupes de Borel de G sont conjugués et si pour tout sous-groupe définissable connexe H , les sous-groupes de Borel de H sont conjugués (dans H).*

Corollaire 2.2.1.4. *Soit M un presque-corps rangé. Alors les sous-groupes de Borel de M^\times sont abéliens. De plus, si $\text{car}(M) \neq 0$, les sous-groupes de Borel sont exactement les bons tores maximaux, ils sont en particulier héréditairement conjugués.*

Dans [ABW19], les trois auteurs obtiennent un théorème sur la 2-torsion généralisé dans [DW20] de la façon suivante :

Fait 2.2.1.5. *[DW20, Théorème B] Soit G un groupe rangé connexe, U_2^\perp , tel que les sous-groupes de Borel sont nilpotents et héréditairement conjugués. Alors la 2-torsion (potentiellement triviale) est centrale.*

Corollaire 2.2.1.6. *Soit M un presque-corps rangé, $\text{car}(M) > 2$, alors la 2-torsion (non-triviale) de M^\times est donc centrale.*

En suivant [ABW19], on complète un peu le résultat précédent en montrant que :

Proposition 2.2.1.7. *Soit G un groupe rangé connexe tel que les sous-groupes de Borel sont des bons tores. Alors $G = \bigcup_G B^g$ où B est un sous-groupe de Borel.*

Démonstration. Soit B un sous-groupe de Borel. Puisque, par hypothèse, B est un bon tore maximal, tous les sous-groupes de Borel sont conjugués à B (Fait 1.2.7.4).

Soit $g \neq 1$, le sous-groupe $C_G(g)$ est infini par le Fait 1.2.5.5. Il contient un sous-groupe définissable (infini) abélien et donc un bon tore T . On considère donc T un bon tore maximal de $C_G(g)$. Or, $C_G(T)$ est connexe et donc $g \in C_G(T) = C_G(T)^\circ$.

Supposons que $g \in C_G(T) \setminus T$. On considère $C_G(T)/T = C$; c'est un groupe connexe. Si C est infini, alors le centralisateur de gT contient un sous-groupe infini définissable connexe abélien A/T . Le groupe A est donc définissable connexe résoluble; il est contenu dans un sous-groupe de Borel (qui est aussi un bon tore maximal) de $C_G(g)^\circ$. Par conséquent, A est un bon tore de $C_G(g)$ contenant strictement T , contradiction avec la maximalité de T . \square

Corollaire 2.2.1.8. *Soit M un presque-corps rangé de caractéristique $p > 0$. Alors M^\times est recouvert par ses sous-groupes de Borel qui sont exactement les bons tores maximaux.*

Démontrons maintenant le théorème principal de [ABW19].

Théorème 2.2.1.9. *Soit M un presque-corps rangé de caractéristique différente de 2. Alors M est un corps algébriquement clos*

Démonstration. En caractéristique nulle, $\ker(M) \geq Z(M^\times)$ est infini et donc par le Fait 2.2.1.1, M est un corps algébriquement clos.

En caractéristique $p > 2$, on remarque que la 2-torsion multiplicative n'est pas triviale et qu'elle est infinie par le Fait 1.2.5.4 (M^\times est connexe). Or, d'après ce qui précède, la 2-torsion est centrale. On conclut de même par le Fait 2.2.1.1. \square

2.2.2 Le cas $\text{car}(M) = 2$

Nous allons étudier les presque-corps rangés de caractéristique égale à deux. Sous une hypothèse technique assez forte, nous serons en mesure de démontrer que ce sont des corps algébriquement clos. Dans ce qui suit, M désigne un presque-corps rangé de caractéristique égale à deux.

Proposition 2.2.2.1. *Soit $T \leq M^\times$ un sous-groupe définissable connexe résoluble maximal. Alors il existe une chaîne ascendante finie de sous-groupes additifs définissables (connexes) abéliens T -invariants $A_0 = \{0\} \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = M$ tel que $A_{i+1}/A_i \simeq K_i^{+i}$ et $T \hookrightarrow K_i^{\times i}$ pour un corps définissable $(K_i, +_i, \times_i)$, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Démonstration. Soit $T \leq M^\times$ un groupe résoluble définissable connexe (il est abélien par le Corollaire 2.2.1.4, c'est même un bon tore). On va construire la suite des sous-groupes A_i par récurrence. On pose $A_0 = \{0\}$.

Le groupe T agit sur M^+/A_0 par multiplication à gauche par automorphisme additif définissable. De plus, cette action est sans point fixe (elle est en particulier fidèle) : $t \cdot m = m$ implique que $t = 1$. Soit A_1^+ un sous-groupe additif T -minimal. Par le Fait 1.2.3.1, il existe donc un corps définissable K_0 tel que $A_1^+ \simeq K_0^{+0}$ en tant que K_0 -espace vectoriel de dimension 1 et $T \hookrightarrow K_0^{\times 0}$, où K_0 est l'anneau des endomorphismes de A_1^+ , engendré par T .

Supposons que la construction a été faite jusqu'à l'étape i . Par hypothèse de récurrence, T agit sans point fixe (non-trivial) sur M/A_i , le sous-groupe A_{i+1}/A_i est T -minimal pour un sous-groupe T -invariant A_{i+1} et $A_{i+1}^+ \simeq K_i^{+i}$. Montrons maintenant que T agit sans fixe sur M/A_{i+1} pour l'action définie par $t \cdot \bar{m} = \overline{tm}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $t \neq 1$, $m \in M \setminus A_{i+1}$ et $a_{i+1} \in A_{i+1}$ tel que $tm = m + a_{i+1}$. Construisons maintenant un point fixe modulo A_i afin d'obtenir la contradiction.

Soient $a'_{i+1} \in A_{i+1} \setminus A_i$ et $0 \neq a_i \in A_i$ tel que

$$a_{i+1} = a'_{i+1} + a_i.$$

Pour tout $a''_{i+1} \in A_{i+1} \setminus A_i$, on a :

$$t(m - a''_{i+1}) = m + a'_{i+1} - ta''_{i+1} \pmod{A_i}.$$

Par hypothèse de récurrence le corps K_i agit par multiplication scalaire sur A_{i+1}/A_i . On considère $(t-1)$ qui a un inverse $\alpha \in K_i$ au sens de $K_i^{\times i}$ (mais pas forcément au sens de M^\times). On pose $a''_{i+1} = \alpha \cdot a'_{i+1} \pmod{A_i}$. On a donc :

$$(t-1) \cdot a''_{i+1} = a'_{i+1} \pmod{A_i}.$$

$$ta''_{i+1} - a''_{i+1} = a'_{i+1} \pmod{A_i}.$$

par conséquent,

$$m - a''_{i+1} = m + a'_{i+1} - ta''_{i+1} \pmod{A_i}.$$

Finalement,

$$t(m - a''_{i+1}) = m - a''_{i+1} \pmod{A_i},$$

contradiction.

Nous avons donc construit une chaîne strictement ascendante de sous-groupes définissables connexes, par conséquent il existe un entier n tel que $A_n = M$.

Remarquons que dans la construction précédente nous avons identifié T à son image dans le corps K_i : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on envoie $t \in T$ sur $t \cdot \bar{a}_i = \overline{ta_i} \in A_i/A_{i-1}$, pour $a_i \in A_i \setminus A_{i-1}$. En particulier, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $(t +_i t') \cdot \bar{a} = \overline{ta + t'a}$ mais on ne sait pas *a priori* si $\overline{ta + t'a} = \overline{(t + t')a}$, pour $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Il existe un autre point de vue équivalent : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère $a_i^{-1}(A_i/A_{i-1})$ pour $a_i \in A_i \setminus A_{i-1}$, il s'agit d'un groupe T^{a_i} -minimal. Dans ce cas, on envoie $t^{a_i} \in T^{a_i}$ sur $t^{a_i} \cdot \bar{1} = \overline{t a_i}$. On identifie ainsi l'addition du corps à l'addition définie sur le quotient correspondant. \square

On travaille maintenant sous l'hypothèse suivante (H) :

$$T^{a_i} \cup \{0\} = K_i \quad \text{et} \quad T + 1 = T.$$

Proposition 2.2.2.2. *On se place sous les mêmes hypothèses et notations que la Proposition 2.2.2.1. Supposons que (H) est vérifiée. Soient $t \in T$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, alors il existe $t' \in T$ tel que pour tout $a \in A_i \setminus A_{i-1}$, on a :*

$$ta + a = t'a \pmod{A_{i-1}}.$$

Si de plus $t' = (t + 1)$ pour tout $t \in T$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors M est un corps algébriquement clos.

Démonstration. Le premier point est clair d'après la Proposition 2.2.2.1 (on remarque que la multiplication scalaire définit sur les quotients une action régulière et distributive à droite).

Par hypothèse, on a donc pour tout $1 \leq i \leq n$, tout $x \in A_i$ et tout $t \in T$:

$$tx + x - (t + 1)x = 0 \pmod{A_{i-1}}.$$

En particulier en prenant $i = n$, donc pour $M = A_n$, on a pour tout $m \in M$:

$$tm + m - (t + 1)m = 0 \pmod{A_{n-1}}.$$

Montrons que la distributivité à droite est vraie sans quotienter par A_{n-1} . Par hypothèse, on a bien que $t(t + 1) = (t + 1)t$ pour tout $t \in T$. On considère les morphismes suivants (nous sommes en caractéristique 2 ce qui élimine les problèmes de signe, en particulier $(t + 1)^2 = t^2 + 1$ pour tout $t \in T$) :

$$f_t : x \longrightarrow tx + x + (t + 1)x.$$

$$t f_t : x \longrightarrow t^2 x + tx + t(t + 1)x.$$

$$f_{t^2} : x \longrightarrow t^2x + x + (t+1)^2x.$$

On a :

$$f_{t^2}(x) + f_t(x) + tf_t(x) = x + x + tx + tx + t^2x + t^2x + (t+1)(x + tx + (t+1)x) = (t+1)f_t(x).$$

Par conséquent, $f_{t^2}(x) = f_t(f_t(x))$. On obtient par récurrence que $f_{t^{2^n}} = f_t^{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a montré que pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout $t \in T$:

$$f_t(A_i) \subseteq A_{i-1}.$$

En itérant, on obtient pour un entier n suffisamment grand, $f_t^n(M) = \{0\}$ pour tout $t \in T$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_t^{2^k}(M) = \{0\}$ pour tout $t \in T$. Soit $t \in T$, il existe $t' \in T$ tel que $t'^{2^k} = t$ par 2-divisibilité de T . On a en particulier :

$$f_t(M) = f_{t'}^{2^k}(M) = 0, \text{ i.e., } tm + m = (t+1)m.$$

On a donc pour tous $t_1, t_2 \in T$:

$$(t_1 + t_2)m = t_2(t_2^{-1}t_1 + 1)m = t_2(t_2^{-1}t_1m + m) = t_1m + t_2m.$$

On en déduit la distributivité à droite pour tous les conjugués de T . En effet, pour tous $m, m' \in M$, nous avons :

$$(mt_1m^{-1} + 1)m' = m(t_1 + 1)m^{-1}m' = m(t_1m^{-1}m' + m^{-1}m') = mt_1m^{-1}m' + m'.$$

Par la Proposition 2.2.1.7, les sous-groupes de Borel (qui sont aussi les tores maximaux) sont conjugués et recouvrent M . Soient $m_1, m_2, m \in M$, on remarque que $m_2^{-1}m_1$ appartient à un sous-groupe de Borel $T' = T^{m'}$ pour $m' \in M$, on a donc :

$$(m_1 + m_2)m = m_2(m_2^{-1}m_1 + 1)m = m_1m + m_2m.$$

M est donc un corps gauche rangé. Finalement, M est un corps algébriquement clos [BN94, Théorème 8.10]. \square

Remarque 2.2.2.3. *Si M contient un sous-corps définissable K , on ne peut pas a priori munir M^+ d'une structure de K -espace vectoriel de dimension finie en utilisant la multiplication du presque-corps. En effet, la distributivité à droite fait précisément défaut.*

2.3 Brève étude des presque-domaines rangés

Dans cette section, nous donnons quelques critères pour montrer qu'un presque-domaine est un presque-corps.

La situation des presque-domaines de caractéristique égale à deux est complètement élucidée par le fait suivant :

Fait 2.3.0.1. [ABW19, Théorème 2] *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe avec des involutions. Si C ne contient pas d'involutions, alors il existe un sous-groupe définissable normal N contenant toutes les involutions tel que $N \cap C = \{1\}$.*

Corollaire 2.3.0.2. [ABW19, Corollaire 4] Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif rangé avec $\text{car}(G) = 2$. Alors G est scindé.

Démonstration. On remarque tout d'abord que $RM(G) = 2RM(C)$ (car $G = C \cup CgC$ et $C \cap Cg = \{1\}$, pour $g \notin C$). De plus, $RM(G) = RM(i^G) + RM(C_G(i)) = RM(i^G) + RM(C)$.

Le groupe C ne contient pas d'involutions, par conséquent il existe un sous-groupe définissable normal N qui contient toutes les involutions et tel que $N \cap C = \{1\}$. Mais alors $RM(N) \geq RM(i^G) = RM(C)$ et donc $2RM(C) \leq RM(NC) \leq 2RM(C)$. Par connexité de G , on obtient bien que $G = N \rtimes C$. \square

Nous allons donc concentrer notre attention sur les presque-domaines rangés de caractéristique différente de 2. Remarquons tout d'abord que D contient un sous-presque-corps maximal (infini) [BN94, Théorème 11.55] :

$$E = \{d \in D : 1 + d = d + 1\}$$

D'après le Théorème 2.2.1.9, le presque-corps E est en fait un corps algébriquement clos.

Comme en témoigne le fait suivant, l'étude du noyau $\ker(D)$ semble pertinente pour la question qui nous occupe :

Fait 2.3.0.3. [Ker74, Théorème 8.5] Si $\text{car}(D) \neq 2$ et $(1 + \ker(D) \setminus \{0\}) \cap (\ker(D) \setminus \{0\}) \neq \emptyset$, alors D est un presque-corps.

Corollaire 2.3.0.4. [BN94, Théorème 11.73] Soit D un presque-domaine rangé tel que $\text{car}(D) \neq 2, 3$. Si tous les éléments d'ordre 3 et d'ordre 6 de E^\times sont dans $Z(D^\times)$ alors D est un presque-corps. En particulier, si E^\times est contenu dans un sous-groupe nilpotent normal dans D^\times , alors D est un presque-corps.

Démonstration. Puisque E est un corps algébriquement clos, E contient une racine troisième primitive de l'unité x . On a donc $1 + x + x^2 = 0$ et $-(x^2)$ est une racine sixième de l'unité. Par hypothèse, $x, -(x^2) \in Z(D^\times)$, et donc $1 + x = -(x^2) \in (\ker(D) \setminus \{0\}) \cap (1 + (\ker(D) \setminus \{0\}))$ et on conclut.

Si E est contenu dans un groupe nilpotent normal, on a $E \leq F(D^\times)$. Par conséquent, la torsion divisible est centrale dans D^\times . Or, puisque E est un corps algébriquement clos, il contient des racines troisième primitives de l'unité. On conclut comme précédemment. \square

E.V. Bugaeva, E.B. Durakov et A.I. Sozutova démontrent un autre critère utile. Le langage des groupes strictement 2-transitifs semble le plus approprié pour rendre compte de ce résultat.

Théorème 2.3.0.5. [BDS14] Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif. Supposons que G contient un sous-groupe de Frobenius $H = U \rtimes (C \cap H)$, $i \in H \cap C$ pour i l'involution de C et $U^* = H \setminus \bigcup_H (C \cap H)^h$. Si $C \cap H$ contient un sous-groupe T (d'ordre strictement supérieur à deux) normal dans C et $i \in T$, alors G est scindé.

Démonstration. On utilisera librement le Fait 2.1.0.2.

Affirmation 1. On a $T^G = T^*iI \cup \{1\} = iTT^* \cup \{1\} = (T^*)^g i^g I \cup \{1\}$, pour tout $g \in G$.

Démonstration. On considère le groupe de Frobenius $U \rtimes T \leq H$ (on a $i \in T$). On a $T^*iI = (T^*ij)^C$ pour une involution $i \neq j \in U \rtimes T$. Remarquons que $U \rtimes T \subseteq iTT$. Or, $(T^*ij)^C \subseteq (T^*)^G$ car pour tout $t \neq 1$, on a $tij \in T^h$, avec $h \in H$. Pour l'autre inclusion, par stricte 2-transitivité, pour tout $g \in G \setminus C$, il existe $c_1, c_2 \in C$ tel que $g = c_1 j c_2$. Par conséquent, pour tout $t \in T$, $t^g = (t^{c_1})^{j c_2} = t'^{j c_2}$. Mais $t'^j \in iTT^*$ et donc $t^g \in iTT^* = T^*iI$. On a donc $(T^*)^G = iTT^* = T^*iI$. \square

Affirmation 2. Soient $g, cg \in T^G$ avec $c \in C$. Alors $c \in T$.

Démonstration. Il existe $k, j \in I$ et $t, t' \in T$ tel que $g = tij$ et $cg = ctij = t'ik$, par conséquent $k^i j^i \in C$ et donc $k = j$. Finalement, on a bien $c \in T$. \square

Montrons maintenant que pour tout $j \in I$, $iI \subseteq jI$. Remarquons qu'il existe $1 \neq g \in G$ tel que $i^g = j$. Soit $i^g k \in i^g I$, on a que $i^g k = cil$ pour $c \in C_i$ et $il \in iI$ car $G = CiI = iIC$.

Soit maintenant $1 \neq t \in T$, on remarque que $til = i^g m t'^g$ pour $t' \in T$ et $m \in I$ (Affirmation 1). Puisque l'ordre de T^g est plus que grand que 2, il existe $1 \neq t''^g \in T^g$ tel que $1 \neq (t' t'')^g \in T^g$. Par conséquent, $t i l t''^g = i^g m (t' t'')^g \in i^g iTT^{*g} = T^*iI$ et donc $i l t''^g \in T^*iI$ (Affirmation 1).

Mais d'autre part, $i^g k t''^g = c i l t''^g \in i^g I (T^*)^g = T^*iI$ (Affirmation 1) et finalement, $c \in T$ (Affirmation 2). Or, $i^g k \notin T^*iI = (T^*)^G$, par conséquent, $c = 1$ et $i^g k = il$.

On montre l'autre inclusion de manière analogue et on conclut grâce au Fait 2.1.0.2. \square

Corollaire 2.3.0.6. Soit D un presque-domaine avec $\text{car}(D) \neq 2$. Si D contient un sous-corps E avec $T \leq E^\times$ un sous-groupe normal dans D^\times (et d'ordre supérieur ou égal à trois), alors D est un presque-corps.

Démonstration. On peut supposer que T contient -1 . On considère $T_2(D)$ le groupe (strictement 2-transitif) des transformations affines de D . Il suffit de remarquer que $H = E^+ \rtimes E^\times$ est un groupe de Frobenius, avec $-1 \in E^\times$ et $E^+ = H^* \setminus \bigcup_H (E^\times)^h$. Le groupe $T_2(D)$ est donc scindé par le Théorème 2.3.0.5 et donc D est un presque-corps. \square

Sur la base du résultat précédent, nous avons également :

Proposition 2.3.0.7. Soit D un presque-domaine rangé avec $\text{car}(D) \neq 2$. Si $d_{a,b} \cdot E \subseteq E$ pour tous $a, b \in D$, alors D est un corps algébriquement clos.

Démonstration. Pour tous $a, b \in D$, on a donc $d_{a,b} \cdot E \subseteq E$. Or, E est stable par multiplication et donc $d_{a,b} \in E$. Remarquons que $X = \{d_{a,b} : a, b \in D\}$ est un sous-ensemble normal de D^\times (Fait 2.1.2.9) ; il engendre donc un sous-groupe T normal dans D^\times qui est de plus contenu dans E . On distingue deux cas : si T est fini, on conclut par le Fait 2.1.2.9 ; si ce groupe est infini, on utilise le Corollaire 2.3.0.6 (le presque-corps E est un corps algébriquement clos et $T \leq E$ est normal dans D^\times). \square

2.4 Un autre regard sur les K-boucles : la théorie du demi-plongement

2.4.1 Définition et premières propriétés du demi-plongement

Caractériser la structure de la K-boucle associée à un presque-domaine semble pertinent du point de vue du problème de la classification des presque-domaines rangés.

À cet égard, G. Glauberman a étudié de façon détaillée les *B-boucles* (il s'agit des K-boucles dont tous les éléments sont d'ordre fini impair). Un certain nombre de résultats valables pour les groupes peuvent ainsi être transférés aux K-boucles *via* la construction de ce qu'il appelle un *demi-plongement*.

Définition 2.4.1.1. *Un K-boucle B est demi-plongée dans un groupe G s'il existe une injection $\eta : B \rightarrow G$ tel que $\eta(B) \subseteq G$ satisfait les conditions suivantes :*

$$1 \in \eta(B), \quad \eta(B)^{-1} \subseteq \eta(B), \quad a\eta(B)a \subseteq \eta(B) \quad \text{pour tout } a \in \eta(B).$$

On suppose de plus que l'application d'élévation au carré (au sens de l'opération du groupe) est bien définie et bijective sur $\eta(B)$.

Fait 2.4.1.2. *[Kie02, Théorème 6.15] Soient B une K-boucle uniquement 2-divisible et $T \subseteq \text{Aut}(B)$ un transassociant. Alors l'injection naturelle :*

$$\eta : B \rightarrow B \times_Q T$$

est un demi-plongement.

Le fait suivant illustre le lien entre les K-boucles uniquement 2-divisibles et les *sous-groupes tordus*.

Fait 2.4.1.3. *[Kie02, Théorème 6.14] Soit G un groupe avec un sous-ensemble $B \subseteq G$ tel que $1 \in B$. Supposons que $B^{-1} \subseteq B$, $aBa \subseteq B$ pour $a \in B$, et que l'application $x \mapsto x^2$ est bien définie et bijective sur B (on parle de sous-groupe tordu). Posons*

$$a \circ b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}$$

Alors on a :

1. *(B, \circ) est une K-boucle uniquement 2-divisible avec 1 comme élément neutre. Les puissances des éléments dans B et G coïncident.*
2. *B est commutative ssi $[a, b] = [a^{-1}, b^{-1}]$ pour tous $a, b \in B$.*
3. *B est un groupe commutatif ssi $[a, [b, c]] = 1$ pour tous $a, b, c \in B$.*

La théorie du demi-plongement est riche de conséquences car elle permet d'établir une correspondance entre les propriétés des sous-boucles de la boucle demi-plongée et celles des sous-groupes du groupe ambiant. Nous aimerions en particulier étudier le lien entre la résolubilité du groupe engendré par une boucle et un analogue de la résolubilité pour la boucle elle-même. Rappelons maintenant quelques définitions sur les boucles.

En général, la notion de quotient d'une K-boucle B par une sous K-boucle B' n'a pas de sens : la relation $x \equiv y$ ssi $x - y \in B'$ n'est pas forcément une relation d'équivalence.

Néanmoins, sous certaines conditions, un quotient bien défini peut être muni d'une structure de boucle. D'après le paragraphe IV.1 de [Bru71], une sous-boucle C est *normale* si elle satisfait les conditions suivantes :

$$b + C = C + b, \quad (a + b) + C = a + (b + C), \quad C + (a + b) = (C + a) + b$$

On peut également caractériser les sous-boucles normales en introduisant une notion appropriée de groupe d'applications intérieures.

Définition 2.4.1.4. *Soit B une boucle. On définit $I(B)$, le groupe des applications intérieures, comme le sous-groupe de $M(B) = \langle g_a, r_b : a, b \in B \rangle$, engendré par les applications suivantes :*

$$r_{a,b} = r_a r_b r_{a+b}^{-1}, \quad g_{a,b} = g_a g_b g_{b+a}^{-1}, \quad c_a = r_a g_a^{-1}.$$

Fait 2.4.1.5. [Bru71, Sec.1. Chap IV] *Soit B une boucle.*

1. *Le groupe $I(B)$ correspond exactement à l'ensemble des applications $\alpha \in M(B)$ qui fixe 0.*
2. *Une sous-boucle $B' \leq B$ est normale ssi elle est stable sous l'action de $I(B)$.*

Le noyau d'un homomorphisme de boucles est toujours une sous-boucle normale. Les résultats valables pour les groupes se généralisent alors dans notre contexte :

Fait 2.4.1.6. [Bru71, Section IV.1]

1. *Si C est une sous-boucle normale de B alors l'application $x \mapsto x + C$ définit un homomorphisme de boucles entre B et B/C . De plus, si C est le noyau d'un homomorphisme de boucles ϕ alors ϕ induit un isomorphisme naturel entre B/C et $\phi(B)$.*
2. *Si C est une sous-boucle engendrée par un ensemble de sous-boucles normales alors C est une sous-boucle normale.*
3. *Si C et D sont des sous-boucles telles que D est normale dans la sous-boucle $\langle D, C \rangle$ engendrée par D et C , alors $\langle D, C \rangle = C + D = D + C$, $C \cap D$ est une sous-boucle normale de C ; $C + D/D \simeq C/(C \cap D)$.*

On parlera de boucle (définissablement) *lagrangienne* si étant donné une sous-boucle (définissable), on peut partitionner la boucle avec les translatés de la sous-boucle. On dira également que la boucle est (définissablement) *hamiltonienne* si toutes les sous-boucles (définissables) sont normales. Remarquons que les groupes commutatifs sont des K-boucles hamiltoniennes.

Nous pouvons passer maintenant aux résultats de Glauberman sur le demi-plongement. Ces derniers ont été initialement formulés pour les B-boucles mais pour la plupart, ils se généralisent immédiatement aux K-boucles uniquement 2-divisibles.

Fait 2.4.1.7. *Soit (B, \circ) une K-boucle uniquement 2-divisible demi-plongée dans un groupe G . Alors on a :*

1. [Gla64, Lemme 6] *Pour tous $x, y, z \in B$, en posant $w = yx(x^2 \circ y^2)^{-\frac{1}{2}}$, on a : $(x^2 \circ y^2)^{-1} \circ (x^2 \circ (y^2 \circ z)) = z^w$. En particulier, on définit une application intérieure et $K^w = K$ pour toute sous-boucle normale K de B .*

2. [Glaub4, Théorème 1] $\langle B \rangle = T(B)B = BT(B)$ où $T(B)$ est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $yx(x^2 \circ y^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour $x, y \in B$.

Remarque 2.4.1.8. Ici $T(B) \simeq D(B)$ par unique 2-divisibilité. Pour obtenir un produit quasi-direct, il suffit de vérifier que B est une transversale pour $T(B)$ (et que la représentation induite est fidèle). Par exemple si nous avons affaire à un groupe strictement 2-transitif de caractéristique différente de deux, c'est bien le cas : $ijT(B) = ikT(B)$ implique que $kj \in T(B) \leq C$ et donc $k = j$.

Fait 2.4.1.9. [Glaub4, Lemme 5] Soit (B, \circ) une B -boucle demi-plongée dans un groupe G . Si N est un sous-groupe normal de G , $N \cap B$ est une sous-boucle normale de B et $B/N \cap B$ est une B -boucle demi-plongée dans G/N .

Remarque 2.4.1.10. Si B est seulement une K -boucle uniquement 2-divisible alors B/N peut être identifié à un sous-groupe tordu de G/N mais ce n'est plus forcément un ensemble uniquement 2-divisible. A priori, on ne peut pas le munir d'une structure de K -boucle (quotient).

Fait 2.4.1.11. [Glaub4, Théorème 3] Soit (B, \circ) une K -boucle uniquement 2-divisible demi-plongée dans un groupe G et K une sous-boucle normale (uniquement 2-divisible) de B . Soit N le sous-groupe engendré par les sous-groupes $\langle K \rangle^x$, pour $x \in B$. Alors on a :

1. Si $w = yx(x^2 \circ y^2)^{-\frac{1}{2}}$, alors la boucle K contient $k^x k^{-1}, k^w, k^{yx} k^{y^{-1}x^{-1}}$ pour tout $k \in K$.
2. Pour tous $k, k' \in K$ et tout $x \in B$, on a $k^x k' k^{x^{-1}} \in K$.
3. $\langle K \rangle$ est un sous-groupe normal de N et N est un sous-groupe normal de $\langle B \rangle$.

Du point de vue de la théorie des modèles, on obtient un résultat de définissabilité pour le groupe engendré par une K -boucle demi-plongée et définissable dans un groupe rangé.

En effet, pour tous x, y appartenant à un groupe G , l'opération $y(x^{-1}y) = s(x, y)$ détermine une structure d'espace symétrique (nous définirons précisément cette notion dans le chapitre suivant). Or, une K -boucle demi-plongée dans un groupe G est stable par l'opération précédente ; on dit que c'est un *ensemble convexe*. Remarquons qu'il en est de même pour les sous-boucles normales. Le résultat suivant de B. Poizat élucide la question de la définissabilité du groupe engendré par une partie convexe définissable :

Fait 2.4.1.12. [Poi18, Proposition 13] Dans un groupe G rangé, le groupe H engendré par une partie convexe définissable S contenant l'élément neutre est définissable.

Corollaire 2.4.1.13. Soit G un groupe rangé et B une K -boucle uniquement 2-divisible définissable demi-plongée dans G . Alors $\langle B \rangle$ est un sous-groupe définissable. De même, si B_1 est une sous-boucle normale (uniquement 2-divisible) de B définissable, alors $\langle B_1 \rangle$ est un sous-groupe définissable.

Notons que la K -boucle associée à un presque-domaine de caractéristique différente de 2 admet un demi-plongement dans le groupe de ses transformations affines (qui est lui-même rangé). La boucle correspond dans ce cas à un ensemble de la forme iI pour une involution fixée i .

En réalité, ce résultat est valable pour une classe plus large de groupes de Frobenius : les groupes de Frobenius avec beaucoup d'involutions.

On dit qu'un groupe de Frobenius $C < G$ a *beaucoup d'involutions* si l'ensemble des involutions est non-trivial et agit transitivement sur G/C et si de plus, C contient au plus une involution.

Fait 2.4.1.14. [BN94, Lemme 11.20] Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé. Alors les involutions de G sont conjuguées, C en contient un nombre fini (elles sont C -conjuguées) et elles sont centralisées par C° .

Proposition 2.4.1.15. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe tel que C contient des involutions. Alors c'est un groupe de Frobenius avec beaucoup d'involutions. De plus, iI est un sous-groupe tordu uniquement 2-divisible (définissable) de G . Il s'agit d'une K -boucle (uniquement 2-divisible) sans point fixe et $G \simeq iI \times_Q C$.

Démonstration. Le complément de Frobenius C est connexe et il contient donc une unique involution i . On remarque de plus que les involutions forment une classe de conjugaison.

L'action de G sur G/C est équivalente à celle de G sur I par conjugaison (l'équivalence est donnée par l'application $f : G/C \rightarrow I$ qui a gC associe $i^{g^{-1}}$). Or, d'après le Lemme 6.5 de [CT21], pour deux involutions i et j , il existe une unique involution k telle que $j = i^k$; autrement dit, I agit transitivement par conjugaison.

Montrons que iI est un sous-groupe tordu de G . On a bien $ii = 1 \in iI$. De plus, $(ij)^{-1} = ji = ij^i \in iI$. Enfin, $(ik)(ij)(ik) = ij^{ik} \in iI$.

Le sous-groupe tordu iI est bien uniquement 2-divisible : il existe une unique involution k tel que $i^k = j$ et donc $(ik)^2 = ij$. De plus, $(ik)^2 = (il)^2$ implique que $i^l = i^k$ et donc par unicité $l = k$. D'après le Fait 2.4.1.3, l'ensemble iI peut être muni d'une structure de K -boucle uniquement 2-divisible.

La K -boucle ainsi obtenue est bien sans point fixe. En effet, $(iI)^c \subseteq iI$ pour tout $c \in C$ et donc $D(iI) \leq \hat{C}$. Mais C agit sur iI (par conjugaison) sans point fixe : $(ij)^c = ij$ implique que $j \in C_G(i) = C$, et $i = j$.

De plus, d'après le Fait 2.1.1.5, $G \simeq iI \times_Q C$. □

Remarque 2.4.1.16. L'idée d'utiliser les K -boucles et les sous-groupes tordus pour analyser les groupes de Frobenius rangés (connexes) apparaît pour la première fois dans [CT21].

2.4.2 Quelques applications de la théorie du demi-plongement

Il nous est désormais possible d'établir une correspondance entre les propriétés de la K -boucle (uniquement 2-divisible) et celle du groupe dans lequel elle est demi-plongée. Nous obtiendrons en particulier de nouveaux critères pour classifier les presque-domaines. On pourra les formuler en termes des propriétés algébriques de la boucle.

On dit qu'une boucle B est *résoluble* s'il existe une suite (finie) de composition de sous-boucles B_i , $0 \leq i \leq n$ avec :

$$\{0\} = B_n \triangleleft \dots \triangleleft B_1 \triangleleft B_0 = B$$

et tel que B_{i-1}/B_i est un groupe abélien pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nous allons légèrement généraliser le résultat suivant de Glauberman valable pour les

B-boucles d'ordre fini.

Fait 2.4.2.1. [Glaub4, Théorème 6] Soit B une B -boucle d'ordre fini demi-plongée dans un groupe G .

1. Si $\langle B \rangle$ est résoluble, alors B est résoluble.
2. Si B est résoluble, alors $\langle B \rangle$ est résoluble.
3. Supposons que B est résoluble. Alors B est une p -boucle (les ordres des éléments sont de la forme p^k , pour un nombre premier $p > 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$) ssi $\langle B \rangle$ est un p -groupe.

Démonstration. Nous ne démontrons que le point 2 et renvoyons à l'article de Glauberman pour les deux autres parties du théorème.

Il existe une suite de composition pour B et on note $d(B)$ la longueur minimale d'une telle suite. On procède par récurrence sur $d(B)$. Si $d(B) = 0$, on a $B = \{0\}$.

Supposons $d(B) > 0$. On considère B_1 le premier facteur dans la suite de composition, en particulier B/B_1 est un groupe abélien. Soit N le groupe engendré par les sous-groupes $\langle B_1 \rangle^x$, $x \in B$. D'après le Fait 2.4.1.11, N est normal dans $\langle B \rangle$ et chaque groupe $\langle B_1 \rangle^x$ est normal dans N . Puisque $B_1 \leq N$, $B/B \cap N$ est un groupe abélien demi-plongé dans le groupe G/N et donc $\langle B \rangle/N$ est résoluble (Fait 2.4.1.3).

Comme $d(\langle B_1 \rangle^x) = n - 1$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à ces groupes. Or, N est engendré par un nombre fini de groupes résolubles normaux, c'est donc un groupe résoluble. \square

Nous pouvons désormais généraliser le résultat précédent dans le contexte rangé.

Proposition 2.4.2.2. Soit B une B -boucle demi-plongée et définissable dans un groupe G rangé. Si B est définissablement résoluble (i.e., admet une suite de composition dont les facteurs sont définissables). Alors $\langle B \rangle$ est un groupe résoluble définissable.

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur d'une suite de composition (définissable) de longueur minimale. Soit B_1 le premier facteur (définissable) de la suite de composition. Le groupe $N = \langle B_1 \rangle$ est définissable d'après le Corollaire 2.4.1.13.

D'après le Fait 2.4.1.11, pour tout $x \in B$, N^x est un sous-groupe normal de $H = \langle N^x : x \in B \rangle$, lui-même normal dans $\langle B \rangle$. Les sous-groupes N^x sont des sous-groupes normaux du sous-groupe définissable $\bigcap_{x \in B} N_G(N^x) \geq H$. Mais par hypothèse de récurrence, les sous-groupes N^x sont résolubles; ils sont donc contenus dans $R(\bigcap_{x \in B} N_G(N^x))$ qui est résoluble (Fait 1.2.2.3). Finalement, on conclut que H est résoluble. On procède maintenant comme dans la démonstration du Fait 2.4.2.1. \square

Remarque 2.4.2.3. Comme le quotient d'un sous-groupe tordu uniquement 2-divisible n'est pas forcément uniquement 2-divisible, travailler avec une B -boucle n'est pas une hypothèse surperflue.

Nous appliquons les résultats précédents à l'étude des groupes de Frobenius connexes.

Proposition 2.4.2.4. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé tel que C contient des involutions. Alors si la K -boucle iI est une B -boucle définissablement hamiltonienne (respectivement, définissablement résoluble) alors G est scindé.

Démonstration. On remarque tout d'abord que la K-boucle $iI = B$ est définissable et demi-plongée dans G .

Supposons que B est une boucle définissablement hamiltonienne. D'après [CT21, Lemme 6.5], $iI = \bigcup_{j \in I} C_G(ij) = \bigcup_{j \in I} A_j$ où $C_G(ij) = A_j$ est un groupe abélien 2-divisible. On considère la boucle quotient B/A_j , qui s'écrit comme l'union de groupes abéliens définissables infinis. Il suffit de prendre $A_k A_j / A_j$ puis de répéter la construction pour obtenir une suite de composition (avec facteurs définissables) pour B . La boucle B est (définissablement) résoluble.

Remarquons que pour $kl \in I \cdot I$, on a $kl = (ik^i)(il)$. Le groupe $\langle iI \rangle = \langle I \cdot I \rangle$ est donc un sous-groupe définissable normal résoluble par la Proposition 2.4.2.2. Par conséquent, le groupe G contient un sous-groupe (infini) A définissable abélien normal. Il est de plus d'intersection triviale avec C : sinon, pour $1 \neq a \in C \cap A$, $A \leq C_G(a) \leq C$ et donc $G = C$, contradiction. On peut conclure grâce à [BN94, Lemme 11.21]. \square

Comment caractériser la K-boucle d'un presque-domaine rangé qui n'est pas un presque-corps ? Nous démontrons que dans ce cas nous obtenons une K-boucle simple (en tant que boucle).

Proposition 2.4.2.5. *Soit D un presque-domaine rangé de caractéristique différente de deux qui n'est pas un presque-corps. Alors D^+ est une K-boucle simple.*

Démonstration. On considère le groupe (définissable) des transformations affines, $G = D^+ \times_Q D$. Pour $-1 = i$ l'involution de D , on identifie D^+ à iI où I désigne l'ensemble des involutions de G .

On remarque tout d'abord que $\langle iI \rangle = \langle I \cdot I \rangle$ est l'unique sous-groupe normal minimal : soit $N \leq G$ un sous-groupe normal non-trivial et soit $1 \neq n \in N$, la translation $inin^{-1}$ est contenue dans N et puisque les translations sont conjuguées, $I \cdot I \subseteq N$. Par conséquent, le socle $S(G)$ de G est égal à $\langle I \cdot I \rangle$. Il s'agit d'un groupe simple, sinon d'après le Fait 1.2.2.5, il contiendrait un sous-groupe (définissable) abélien normal dans G qui serait donc scindé.

La boucle $iI = D^+$ est demi-plongée dans le groupe simple $S(G)$. Montrons que D^+ est simple. Soit D_1 une sous-boucle propre normale, par simplicité et en appliquant le Fait 2.4.1.11, on obtient que $\langle D_1 \rangle = S(G) = \langle D \rangle$. Mais d'après le Fait 2.4.1.7, on aurait $S(G) = D_1 \times_Q D(D_1) = D \times_Q D(D)$, et donc pour $d \in D \setminus D_1$, $d = d't$, avec $d' \in D_1$ et $1 \neq t \in C$, contradiction car D est une transversale pour $G/T(D)$. \square

Chapitre 3

Théorie des modèles des K-boucles ω -stables

Nous cherchons maintenant à entreprendre une analyse des K-boucles ω -stables (essentiellement uniquement 2-divisibles) du point de vue de la théorie des modèles. Elles seront considérées dans leur langage naturel qui inclut l'opération de la boucle et une constante pour l'élément neutre. En particulier, on ne supposera pas l'existence d'un demi-plongement dans un groupe ω -stable.

L'étude pour elle-même des K-boucles (en particulier uniquement 2-divisibles) nous semble revêtir un intérêt propre mais elle sera également susceptible de nous fournir des informations utiles sur les groupes rangés de type impair et de type dégénéré.

La notion de symétron introduite par B. Poizat (voir [Poi21]) jouera dans cette perspective un rôle prééminent.

3.1 Premiers résultats

3.1.1 Conditions de chaîne et enveloppe définissable

Par commodité, nous rappelons tout d'abord la définition d'une K-boucle. Par la suite, on utilisera librement les propriétés démontrées dans le chapitre deux notamment pour effectuer les calculs au sein de la K-boucle.

Définition 3.1.1.1. *Soit $(B, +, 0)$ une structure munie d'une opération binaire avec un élément neutre 0. On dit que B est une K-boucle si :*

1. *Les équations $x + a = b$ et $a + x = b$ ont une unique solution dans B pour tous $a, b \in B$.*
2. *(Condition de Bol) Pour tous $a, b, c \in B$, on a :*

$$a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c.$$

3. *(Propriété de l'inversion par automorphisme) Pour tous $a, b \in B$, on a :*

$$-(a + b) = -a - b.$$

Quelles propriétés pertinentes du point de vue de la théorie des modèles peut-on établir pour les K-boucles ω -stables ?

L'étude des conditions de chaîne constitue un préalable indispensable.

Soient B une K-boucle ω -stable et C une sous-boucle définissable. Soit $x \in B \setminus C$, on remarque que $C \cap C + x = \emptyset$: si $c + x = c'$ alors $-c + (c + x) = x = -c + c'$. Notons de plus que $RM(C) = RM(C + x)$.

Par conséquent, ou bien le rang de C ou bien son degré est strictement inférieur. Nous venons donc d'établir une condition de chaîne descendante sur les sous-boucles définissables. En particulier, toute partie non-vide est contenue dans une plus petite sous-boucle définissable.

Si une sous-boucle est un groupe abélien, son enveloppe définissable est-elle un groupe abélien ? Nous allons voir que c'est bien le cas pour le groupe cyclique engendré par un élément si on suppose que la K-boucle est sans point fixe et ω -stable.

Soit B une K-boucle sans point fixe (Définition 2.1.2.7). Rappelons que dans ce cas $b + b' = b' + b$ est équivalent à $\delta_{b,b'} = \delta_{b',b} = Id$.

On définit pour un élément $x \in B$, le *centralisateur* :

$$C_B(x) = \{b \in B : \delta_{x,b} = \delta_{-x,b} = Id\}$$

Nous pouvons maintenant introduire le *centre* du centralisateur :

$$Z(C_B(x)) = \{b \in C_B(x) : \delta_{b,b'} = Id, \text{ pour tout } b' \in C_B(x)\}$$

Lemme 3.1.1.2. *Soit B une K-boucle sans point fixe. L'ensemble $C_B(x)$ est stable par l'application $y \mapsto y \cdot n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, $Z(C_B(x))$ est un sous-groupe abélien définissable contenant le groupe engendré par x .*

Démonstration. Tout d'abord, si $b \in C_B(x)$, alors $b - x = -x + b$ et donc $-b + x = x - b$ (propriété de l'inversion par automorphisme). On procède par récurrence. Supposons que $b \cdot n + x = x + b \cdot n$. On a :

$$\begin{aligned} b \cdot (n + 1) + x &= (b + b \cdot n) + x = b + (b \cdot n + x) = b + (x + b \cdot n) \\ &= (b + x) + \delta_{b,x}(b \cdot n) = (b + x) + b \cdot n = (x + b) + b \cdot n = x + b \cdot (n + 1). \end{aligned}$$

Les autres cas se traitent de façon analogue. On remarque que pour tout $b \in C_B(x)$, on a : $b + x \cdot n = x \cdot n + b$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Puisque x engendre un groupe abélien, on a bien $\langle x \rangle \subseteq Z(C_B(x))$.

Il suffit de vérifier que $Z(C_B(x))$ est stable par addition et par inversion (Proposition 2.1.2.5).

Soit $b_1 \in Z(C_B(x))$ et soit $b \in C_B(x)$, on note tout d'abord que $b_1 - b = -b + b_1$ car $-b \in C_B(x)$. Par conséquent, $-b_1 + b = b - b_1$ (propriété de l'inversion par automorphisme).

Soient $b_1, b_2 \in Z(C_B(x))$ et $b \in C_B(x)$. On doit montrer que $b_1 + b_2$ commute avec b (c'est suffisant car la boucle est sans point fixe). Notons que $\delta_{b,b_1} = \delta_{b,b_2} = \delta_{b_1,b_2} = Id$.

$$b + (b_1 + b_2) = (b + b_1) + b_2 = (b_1 + b) + b_2 = b_1 + (b + b_2) = b_1 + (b_2 + b) = (b_1 + b_2) + b.$$

Il s'agit donc d'une sous-boucle définissable mais puisque tous ses éléments commutent entre eux, c'est un groupe commutatif. \square

Corollaire 3.1.1.3. *Soit B une K -boucle sans point fixe qui contient un élément d'ordre infini. Alors B contient un sous-groupe abélien définissable infini.*

Démonstration. Il suffit de considérer $Z(C_B(x))$ pour un élément x d'ordre infini. \square

Corollaire 3.1.1.4. *Soit B une K -boucle sans point fixe et ω -stable. Alors pour tout $x \in B$, la sous-boucle $d(x) = d(\langle x \rangle)$ est un groupe commutatif.*

Nous pouvons également caractériser les K -boucles minimales.

Corollaire 3.1.1.5. *Soit B une K -boucle sans point fixe ω -stable qui contient un élément d'ordre infini. Si B est minimale, i.e., ses sous-boucles définissables propres sont finies, alors B est un groupe abélien.*

Remarque 3.1.1.6. *Dans [CT21], les deux auteurs montrent qu'une K -boucle uniquement 2-divisible fortement minimale demi-plongée dans un groupe rangé G est un groupe abélien.*

3.1.2 Quelques résultats de classification pour les K -boucles sans point fixe

Les K -boucles d'ordre fini et les K -boucles constructibles, i.e., définissables dans un pur corps algébriquement clos, sont des exemples de K -boucles ω -stables. Nous est-il possible d'établir une classification des K -boucles sans point fixe constructibles ?

Les résultats de G. Glauberger sur les B -boucles clarifient considérablement la situation des K -boucles sans point fixe d'ordre fini. Nous devons d'abord définir la notion de nilpotence appropriée pour les boucles.

Définition 3.1.2.1. *Soit B une boucle. On définit les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} N_r(B) &= \{a \in B : \forall x, y \in B, \quad a + (x + y) = (a + x) + y\} \\ N_m(B) &= \{a \in B : \forall x, y \in B, \quad x + (a + y) = (x + a) + y\} \\ N_l(B) &= \{a \in B : \forall x, y \in B, \quad x + (y + a) = (x + y) + a\} \\ Z(B) &= \{a \in N_l(B) \cap N_m(B) : \forall x \in B, \quad x + a = a + x\} \end{aligned}$$

Fait 3.1.2.2. [Kie02, Théorème 5.10] *Soit B une K -boucle. Alors on a :*

1. $Z(B) = N_l(B) = N_m(B) \leq N_r(B)$.
2. *Si B est sans point fixe, alors ou bien $Z(B) = N_r(B) = N_m(B) = N_l(B) = \{0\}$ ou bien $B = Z(B)$ est un groupe abélien.*

On dit qu'une boucle B est *centralement-nilpotente* s'il existe une suite finie de composition de sous-boucles normales :

$$B_0 = B \geq B_1 \geq \dots \geq B_n = 0$$

telle que B_{i-1}/B_i est contenue dans $Z(B/B_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. En particulier, le centre d'une boucle centralement nilpotente non-triviale est lui-aussi non-trivial. On dit qu'une K -boucle est une p -boucle si tous ses éléments ont pour ordre une puissance de p , pour un nombre premier p fixé.

Fait 3.1.2.3. [Gla64, Théorème 7] Pour $p > 2$, une p - K -boucle d'ordre fini est centralement nilpotente.

Corollaire 3.1.2.4. Pour $p > 2$, une p - K -boucle d'ordre fini sans point fixe est un groupe abélien.

Nous allons généraliser le résultat précédent aux K -boucles sans point fixe pseudo-localement finies qui sont des p -boucles.

Proposition 3.1.2.5. Soit B une K -boucle 2-localement-finie sans point fixe. On suppose, de plus, que c'est une p -boucle pour un nombre premier $p > 2$. Alors B est un groupe abélien.

Démonstration. Soient $a, b \in B$, la K -boucle engendrée par a, b est une p - K -boucle d'ordre fini sans point fixe donc c'est un groupe abélien. Par conséquent, $\delta_{a,b}(b+a) = a+b = b+a$ et donc $\delta_{a,b}$ est trivial. \square

Avant de généraliser les résultats précédents aux K -boucles pseudo-localement finies, il convient de souligner que la propriété d'être sans point fixe est élémentaire : pour tout entier n , on peut dire par un énoncé au premier ordre que n'importe quel produit de n automorphismes de précession est trivial s'il admet un point fixe non-trivial (l'inverse d'un automorphisme de précession est un automorphisme de précession).

Proposition 3.1.2.6. Soit B une K -boucle pseudo-2-localement-finie sans point fixe d'exposant fini. On suppose de plus que c'est une p -boucle pour un nombre premier $p > 2$. Alors B est un groupe abélien.

Démonstration. La boucle B est élémentaire équivalente à un ultraproduit de K -boucles 2-localement-finies. De plus, les K -boucles 2-localement-finies qui apparaissent dans l'ultraproduit sont sans point fixes car être sans point fixe est une propriété élémentaire.

Par le Fait 1.1.1.4, on en déduit que chaque boucle 2-localement-finie qui apparaît dans l'ultraproduit est une K -boucle sans point fixe tel que chaque élément est d'ordre une puissance de p ; ce sont donc des groupes abéliens. Par le Fait 1.1.1.4 encore, on obtient que B est un groupe abélien. \square

Corollaire 3.1.2.7. Soit B une K -boucle sans point fixe d'exposant fini qui est de plus une p -boucle pour un nombre premier $p > 2$. Supposons qu'elle est définissable dans un pur corps algébriquement clos, un corps pseudo-fini ou un corps de RM fini de caractéristique positive $p > 0$ dont la structure additionnelle est préservée par l'automorphisme de Frobenius. Alors B est un groupe abélien.

Démonstration. On reprend la démonstration du Théorème 4.1 de [Poi87]. Dans un pur corps algébriquement clos, par élimination des imaginaires, on peut supposer que la structure B et ses fonctions définissables sont définissables par des formules $\phi(\bar{a})$. On peut supposer que les paramètres \bar{a} suffisent pour définir la structure et ses fonctions (définissables); la satisfaction d'un énoncé par B se traduit donc par la satisfaction d'une formule $\psi(\bar{a})$ dans le langage des corps. Mais $\exists x\psi(x)$ est satisfait dans un corps algébriquement clos, et donc cet énoncé est aussi satisfait dans la clôture algébrique

L des corps finis de caractéristique p pour un certain nombre premier p (pour la caractéristique nulle, on remarque qu'étant donné un ultrafiltre \mathfrak{U} (non-principal) sur les nombres premiers, l'ultraproduit $\prod_{\mathfrak{U}} F_p^{alg}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle).

Soit $\bar{b} \in L^n$ satisfaisant $\psi(\bar{b})$. La boucle $B_1 \subseteq L^n$ définie à partir de \bar{b} comme B est définie à partir de \bar{a} satisfait l'énoncé en question. De plus, elle est localement finie.

En effet, soient $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k \in L^n$, il existe un corps fini k contenant tous ces éléments (ainsi que \bar{b}). Puisque le corps k est parfait, l'opération (définissable) de la boucle n'a pour image que des uplets contenus dans k . La boucle $B_1 \cap k^n$ est donc finie et par conséquent, B_1 est localement finie.

La K -boucle B est donc pseudo-localement finie. On conclut par la Proposition 3.1.2.6.

Pour un corps pseudo-fini, on note qu'un tel corps est élémentairement équivalent à un ultraproduct de corps finis de caractéristique positive. La boucle B est pseudo-finie et donc *a fortiori* pseudo-localement finie. On conclut comme au paragraphe précédent.

Un corps rangé qui satisfait les hypothèses du théorème a une sous-structure élémentaire qui est localement-finie (Fait 1.2.7.1). La boucle B est encore une fois pseudo-localement-finie. \square

Corollaire 3.1.2.8. *Un groupe de Frobenius avec beaucoup d'involutions définissable dans l'une des structures précédentes et donc la K -boucle associée est une p -boucle d'exposant fini pour un nombre premier $p > 2$, est scindé. En particulier, un groupe strictement 2-transitif de caractéristique positive définissable dans l'une des structures précédentes est scindé.*

3.2 Symétrons et K -boucles uniquement 2-divisibles

Précisons maintenant les liens entre les symétrons et les K -boucles.

Définition 3.2.0.1. *Soit X un ensemble et $s(x, y)$ une opération binaire. On dit que (X, s) est un espace symétrique si l'opération s satisfait les conditions suivantes :*

1. $s(x, x) = x$
2. $s(s(x, y), y) = x$
3. $s(s(x, z), s(y, z)) = s(s(x, y), z)$

Définition 3.2.0.2. *On notera $s_y(x) = s(x, y)$ et on parlera de symétrie de centre y . Un symétron est un espace symétrique tel que pour tous x, y il existe un unique z qui vérifie $s_z(x) = y$. On dira alors que $z = m(x, y)$ est le milieu entre x et y .*

Remarquons que les applications $s(\cdot, y)$ et $m(\cdot, y)$ sont des bijections (définissables).

Proposition 3.2.0.3. *Soit $(B, +)$ une K -boucle uniquement 2-divisible. Alors c'est un symétron pour l'opération $s(x, y) = y + (-x + y)$.*

Démonstration. On vérifie successivement les quatres conditions.

$$s(x, x) = x + (-x + x) = x$$

De plus,

$$\begin{aligned} s(s(x, y), y) &= y + [-(y + (-x + y)) + y] \\ &= y + [(-y + (x - y)) + y] \\ &= y + [-y + (x + (-y + y))] \\ &= y + (-y + x) = x. \end{aligned}$$

Pour ce qui est de la troisième condition, on obtient :

$$\begin{aligned} s(s(x, z), s(y, z)) &= (z + (-y + z) + [-(z + (-x + z)) + (z + (-y + z))] \\ &= (z + (-y + z)) + [(-z + (x - z)) + (z + (-y + z))] \\ &= (z + (-y + z)) + [-z + (x + (-z + (z + (-y + z))))] \\ &= (z + (-y + z)) + [-z + (x + (-y + z))] \\ &= z + [-y + (z + (-z + (x + (-y + z))))] \\ &= z + [-y + (x + (-y + z))] \\ &= z + [(-y + (x - y)) + z] \\ &= s(s(x, y), z). \end{aligned}$$

Montrons finalement qu'entre deux points a et b , il existe un unique milieu.

Soit $a \in B$, on note que $s(0, a/2) = a/2 + (-0 + a/2) = a$ et donc $a/2$ est le milieu entre 0 et a (par unique 2-divisibilité). On veut trouver une unique solution z à l'équation $s(a, z) = b$. Or, par unique 2-divisibilité, l'équation $s(0, z) = s(b, a/2)$ a une unique solution, $z = s(b, a/2)/2$. Montrons que $s(a, s(s(b, a/2)/2, a/2)) = b$:

$$\begin{aligned} s(a, s(s(b, a/2)/2, a/2)) &= s(s(0, a/2), s(s(b, a/2)/2, a/2)) \\ &= s(s(0, s(b, a/2)/2), a/2) \\ &= s(s(b, a/2), a/2) = b. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.0.4. Dans [NS02], les auteurs montrent qu'une boucle de Bol unique-ment 2-divisible est déjà un espace symétrique (proposition 9.2). Nous reprenons la démonstration qu'ils donnent de l'existence d'un unique milieu.

De façon réciproque, on peut définir une structure de \mathbf{K} -boucle uniquement 2-divisible à partir de la structure de symétron. En fait, la notion de symétron au sens de [Poi01] coïncide avec la notion de *quasi-groupe symétrique* étudiée dans [NS02, Sec. 9-11]. En effet, (X, s) est un symétron ssi $(X, +)$ est un quasi-groupe symétrique où $x + y = s(y, x)$. Le fait suivant nous indique la façon d'interpréter la structure de \mathbf{K} -boucle.

Fait 3.2.0.5. [NS02, Proposition 9.11 et Remarque 10.1] Soit $a \in (X, +)$ où $(X, +)$ est un quasi-groupe symétrique. Notons $L_y(x) = y + x = s(x, y)$ et $R_y(x) = x + y = s(y, x)$ et considérons ces applications comme des éléments du groupe symétrique de X . Alors l'opération

$$x \underset{a}{+} y = R_a^{-1}(x) + L_a(y) = s(L_a(y), R_a^{-1}(x)) = s(s(y, a), m(x, a)).$$

définit sur X une structure de K -boucle uniquement 2-divisible (on note (X, s^a) le symétron associé). De plus, l'application s_u définit un isomorphisme de boucles entre $(X, +)$ et $(X, +_{s_u(a)})$.

L'application $m(x, a)$ définit quant à elle un isomorphisme de symétrons entre (X, s^a) et (X, s) .

Dans la mesure où la structure de symétron et celle de K -boucle (uniquement 2-divisible) sont mutuellement interprétables, les propriétés caractéristiques de la théorie des modèles — stabilité, RM fini, ... — se transfèrent d'un point de vue à l'autre.

En revanche, le groupe dans lequel une K -boucle uniquement 2-divisible est plongée n'est pas forcément interprétable à partir la structure de boucle (ni de symétron).

3.3 Symétrons et ensembles convexes

Dans cette section, nous présentons la théorie des modèles des symétrons développée par B. Poizat dans [Poi21]. Comme contribution originale, nous généralisons la version du théorème des indécomposables donnée pour les symétrons de rang de Morley fini.

3.3.1 Conditions de chaîne, symétriseurs et types génériques

Commençons par deux définitions :

Définition 3.3.1.1. *Soit Y un sous-ensemble du symétron S . Le sous-ensemble Y est une partie convexe si $s_y(x) \in Y$, pour tous $y, x \in Y$. On dira que Y est clos par prise de milieu si pour tous $x, y \in Y$, on a $m(x, y) \in Y$. Enfin, le symétriseur de Y , $Sym(Y)$, est l'ensemble des points x tel que $s_x(Y) = Y$.*

On remarque que le symétriseur est un ensemble convexe. Soit $x, x' \in Sym(Y)$, et $y \in Y$. Il existe donc $y' \in Y$ tel que $y = s_x(y')$. Par conséquent, $s(y, s(x', x)) = s(s(y', x), s(x', x)) = s(s(y', x'), x) \in Y$ car $s(y', x') \in Y$. On peut inverser les rôles de x et x' .

De plus, $Sym(Y)$ s'injecte dans Y si Y est non-vide : pour un $y \in Y$ fixé, à chaque $x \in Sym(Y)$, on associe l'élément $s_x(y)$ qui appartient à Y .

Pour le moment, nous n'avons pas fait d'hypothèses qui relèvent de la théorie des modèles. Néanmoins, dans le cas ω -stable et *a fortiori* si le RM est fini, la théorie des symétrons présente des aspects remarquables.

Fait 3.3.1.2. [Poi21, Théorème4] *Soit X une partie définissable du symétron ω -stable S . Alors X est convexe ssi X est clos par prise de milieu. De plus, X est égal à son symétriseur. On parlera de sous-symétron.*

Notons que la propriété de convexité est préservée par intersection finie.

Remarque 3.3.1.3. *Il n'y a pas de chaîne infinie descendante de sous-symétrons définissables.*

Démonstration. En effet, soit $Y \subset S$ un sous-symétron définissable, et soit $x \in S \setminus Y$. Pour tout $y \in Y$, $s_y(x) \in S \setminus Y$ (car Y est clos par les symétries ainsi définies et ce sont des applications involutives) et donc l'application qui à y associe $s_y(x)$ définit

une injection de Y vers $S \setminus Y$. Par conséquent, ou bien $RM(Y) < RM(S)$ ou bien $RM(Y) = RM(S)$ mais $DM(Y) < DM(S)$. \square

Dans le contexte d'un symétron ω -stable, il est possible d'étudier les types, et en particulier les types génériques (*i.e.* de rang maximal) du point de vue de leur symétriseur. Soient p et q deux types, on note $Sym(p \longleftrightarrow q)$ l'ensemble des x tels que $s_x(p) = q$; en raison de la définissabilité des types et de la condition de chaîne descendante sur les sous-symétrons définissables, il s'agit d'un ensemble définissable.

Les ensembles $Sym(p) = Sym(p \longleftrightarrow p)$ et $Sym(p_1, \dots, p_n)$ où les p_i sont permutés par symétrie sont des convexes définissables. En effet, si x et y sont dans $Sym(p_1, \dots, p_n)$ alors pour une réalisation a_i de p_i ,

$$s(a_i, s(x, y)) = s(s(a_j, y), s(x, y)) = s(s(a_j, x), y) = s(a_k, y) = a_m$$

avec a_j, a_k, a_m des réalisations de types appartenant à l'ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$.

On remarque qu'étant donné deux génériques indépendants x et y , le milieu z est un générique indépendant de x et de y , de même x et $s_y(x)$ sont des génériques indépendants. Nous obtenons une caractérisation des génériques similaire à la situation rencontrée pour les groupes ω -stables :

Fait 3.3.1.4. [Poi21, Théorèmes 12 et 13]

1. Dans un symétron S ω -stable, toute partie convexe définissable non-vide est le symétriseur de ses types génériques; elle se décompose de manière unique en un nombre fini, qui est impair, de sous-ensembles définissables convexes disjoints de degré de Morley égal à un.
2. Une partie X définissable est générique ($RM(X) = RM(S)$) ssi S est recouvert par un nombre fini de translatés de X , *i.e.* de parties de la forme $s_u s_v X$.

Nous pouvons obtenir un analogue du Lemme 2.3 de [Poi87] dans le contexte des symétrons ω -stables :

Lemme 3.3.1.5. Soit S un symétron ω -stable. On considère $S' = Sym(p_1, \dots, p_n)$ (pour des types p_i de même rang). Alors $RM(S') \leq RM(p_i)$, $1 \leq i \leq n$. Si $S' = Sym(p)$ et si $RM(p) = RM(S')$, un générique de S' est au milieu de p et d'un élément $c \in S$.

Démonstration. On remarque que S' est le symétriseur de ses types génériques. On réalise p_i par a et un type générique de S' par b , de manière indépendante. On a donc :

$$RM(b/S) = RM(b/S \cup a) = RM(s_b(a)/S \cup a) \leq RM(s_b(a)/S) = RM(p_j) = RM(p_i),$$

où on obtient la deuxième égalité en remarquant que chaque point du triplet $\{a, b, s_b(a)\}$ est définissable sur les deux autres.

Supposons désormais que $S' = Sym(p)$. En cas d'égalité, le $tp(s_b(a)/S \cup a)$ est l'héritier de $tp(s_b(a)/S)$. Or, $m(s_b(a), a) = b \in Sym(p)$ donc par héritage il existe $c \in S$ tel que $m(s_b(a), c) \in Sym(p)$. Puisque $s_b(a)$ réalise p , le type "milieu" $m(p, c)$ satisfait la formule définissant $Sym(p)$ et donc il s'agit d'un générique de $Sym(p)$ (car il est de même rang que p). \square

3.3.2 Le théorème des indécomposables

Dans les symétrons de RM fini, il est possible de démontrer un analogue du théorème des indécomposables. Nous donnons ici une version légèrement différente du théorème obtenu par B. Poizat dans [Poi21].

Définition 3.3.2.1. *On dit qu'un symétron ω -stable est connexe s'il ne contient pas de sous-symétron définissable propre de même rang.*

Définition 3.3.2.2. *Soit A une partie définissable d'un symétron. On dit qu'elle est indécomposable si pour toute famille finie d'ensembles convexes définissables deux-à-deux disjoints ($X_i : 1 \leq i \leq n$), on a : $A \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_n$ implique $A \subseteq X_i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Le lemme suivant montre que l'indécomposabilité est préservée par prise de symétrie :

Lemme 3.3.2.3. *Soit A une partie définissable indécomposable d'un symétron ω -stable S . Alors $s(A, x)$ est une partie définissable indécomposable pour tout $x \in S$.*

Démonstration. Soit $x \in S$, supposons par l'absurde que $s(A, x)$ n'est pas indécomposable. Il existe donc une famille finie d'ensembles convexes définissables deux-à-deux disjoints A_1, \dots, A_n tel que $s(A, x) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ et $s(A, x) \cap A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, avec $n \geq 2$. Or, s_x est une bijection définissable qui préserve la convexité. Par conséquent, $s(s(A, x), x) = A \subseteq s(A_1, x) \cup \dots \cup s(A_n, x)$ et $A \cap s(A_i, x) \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, contradiction. \square

Proposition 3.3.2.4. *(à comparer avec [Poi87, Théorème 2.7]) Soit A une partie définissable d'un symétron ω -stable. Alors $A = X_1 \cup \dots \cup X_n$ où les X_i sont des parties définissables indécomposables deux-à-deux disjointes.*

Démonstration. Si A est indécomposable, on conclut. Sinon, il existe des parties convexes définissables deux-à-deux disjointes X_1, \dots, X_n (avec $n \geq 2$) telles que

$$A = (A \cap X_1) \cup \dots \cup (A \cap X_n),$$

où de plus, $A \cap X_i \neq \emptyset$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Si par exemple $A \cap X_1$ n'est pas indécomposable, alors il existe des parties convexes définissables deux-à-deux disjointes $X_{1,1}, \dots, X_{1,k}$ (avec $k \geq 2$) avec :

$$A \cap X_1 = (A \cap (X_1 \cap X_{1,1})) \cup \dots \cup (A \cap (X_1 \cap X_{1,k}))$$

où de plus, $A \cap X_{1,j} \neq \emptyset$, pour tout $1 \leq j \leq k$. Mais $X_1 \cap X_{1,1}$ est une partie convexe définissable strictement contenue dans X_1 (sinon, $X_1 \subseteq X_{1,1}$, et $X_{1,1} \cap X_{1,2} \neq \emptyset$, contradiction). Par la condition de chaîne descendante sur les parties convexes définissables, on construit un arbre à branchement fini et branches finies. Par le lemme de König, cet arbre est lui-même fini. \square

Remarque 3.3.2.5. *Une partie définissable convexe connexe est indécomposable.*

Considérons maintenant une partie définissable X d'un symétron ω -stable S et un sous-symétron (définissable) S' . On dit que X engendre elliptiquement S' s'il existe un entier n fixé, tel que tout élément de S' est obtenu par au plus n applications successives de prises de symétrie et de prises de milieu à partir d'éléments de X .

Théorème 3.3.2.6. (à comparer avec [Poi21, Théorème 14]) Soit S un symétron de RM fini. Soit $(A_i : i \in I)$ une famille de parties définissables indécomposables telles que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ engendre un symétron définissable connexe qui est en fait elliptiquement engendré par un nombre fini de A_i .

Démonstration. Pour chaque suite $s = (i_1, \dots, i_n)$ et pour chaque n , on note $X_s = \bigcup_{i \in s} A_i$. Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. On considère X de rang maximal parmi les parties définissables elliptiquement engendrées à partir d'un X_s (on utilise ici que le rang de Morley de S est fini). Soit maintenant p un type générique de X .

Pour chaque A_i , l'ensemble $s_{A_i}(p)$ ne contient qu'un nombre fini de types $\{p_1, \dots, p_n\}$ de même rang que p (on remarque que $s_x(p)$ appartient à cette famille finie). En effet, pour chaque $a_i \in A_i$, l'ensemble $s_{a_i}(X)$ est une partie définissable elliptiquement engendrée à partir d'un certain X_s telle que $RM(s_{a_i}(X)) = RM(X)$. Si $s_{A_i}(p)$ était infini, alors $s_{A_i}(X)$ serait une partie définissable elliptiquement engendrée par notre famille qui serait de rang strictement supérieur à celui de X , contradiction.

On peut donc décomposer A_i en un nombre fini de parties définissables deux-à-deux disjointes $A_{i,1}, \dots, A_{i,n}$, où $A_{i,j} = A_i \cap Sym(p \longleftrightarrow p_j)$, $1 \leq j \leq n$. Or, A_i est indécomposable et donc $A_i = A_i \cap Sym(p \longleftrightarrow p_j)$ pour un certain j avec $1 \leq j \leq n$. Chaque A_i est donc inclus dans le convexe définissable $S' = Sym(p \longleftrightarrow s_x(p))$. On a donc :

$$RM(p) \leq RM(X) \leq RM(S') \leq RM(p).$$

Finalement, $RM(X) = RM(S')$. Comme tous les A_i sont dans la même composante connexe (par indécomposabilité, les A_i sont contenus dans $Sym(p' \longleftrightarrow s_x(p'))$ pour p' un type générique de S'), on peut supposer que S' est connexe. Finalement, tout élément de S' est au milieu de deux points génériques et donc de deux points de X ; par conséquent, $S' = m(X, X)$ et S' est elliptiquement engendré par les A_i , $i \in s$. \square

3.4 Les K-boucles uniquement 2-divisibles ω -stables à la lumière des symétrons

Nous considérons maintenant une K-boucle uniquement 2-divisible ω -stable et nous cherchons à exploiter la théorie des symétrons pour étudier ses propriétés du point de vue de la théorie des modèles.

3.4.1 Connexité et analyse de Lascar

On peut tout d'abord établir une correspondance entre certaines parties convexes définissables et les sous K-boucles définissables.

Proposition 3.4.1.1. Soit B une K-boucle uniquement 2-divisible ω -stable. Une partie définissable $X \subseteq B$ est une sous K-boucle ssi elle est convexe et contient 0. De plus, une sous K-boucle définissable est uniquement 2-divisible.

Démonstration. Le sens direct est clair. Supposons que X est une partie définissable convexe (et donc aussi close par prise de milieu) contenant 0. On remarque que X est stable par inversion : pour $x \in X$, on a $s(x, 0) = 0 + (-x + 0) = -x$. D'après la Proposition 2.1.2.5, il suffit de montrer que X est stable par addition. Remarquons

tout d'abord que X est stable par passage au double et par extraction des moitiés : $s(0, x) = x \cdot 2$ et $s(0, x/2) = x$.

Soit $x, y \in X$, on considère $(x + y) \cdot 2$. Or, d'après le Fait 2.1.2.3, on a $(x + y) \cdot 2 = x + (y \cdot 2 + x) = s((-y) \cdot 2, x)$, mais $(-y) \cdot 2 \in X$, et donc $(x + y) \cdot 2 \in X$. Finalement, par extraction des moitiés, on obtient que $(x + y) \in X$.

Finalement, remarquons qu'une sous K -boucle B_1 définissable est une partie convexe définissable donc close par prise de milieu. Pour tout $a \in A$, l'élément $a/2$ est le milieu de a et 0 , on a bien $a/2 \in B_1$. \square

Corollaire 3.4.1.2. *On peut associer à chaque partie convexe définissable X une sous-boucle définissable de même rang (à savoir $s(X, x/2)$ pour $x \in X$).*

Remarque 3.4.1.3. *L'image d'une partie convexe définissable par un automorphisme définissable est une partie convexe définissable. En particulier, l'image d'une partie indécomposable par un automorphisme définissable reste indécomposable.*

Nous pouvons désormais clarifier la notion de connexité dans notre contexte.

Définition 3.4.1.4. *Une K -boucle uniquement 2-divisible ω -stable est b -connexe si elle ne contient pas de sous-boucle définissable propre de même rang.*

Proposition 3.4.1.5. *Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible ω -stable. La boucle B est b -connexe ssi elle est connexe (en tant que symétron) ssi son degré de Morley est égal à un.*

Démonstration. Supposons que le degré de Morley de B est égal à un. Si la boucle contenait un sous-symétron X propre définissable de même rang alors $B \setminus X$ serait également une partie générique définissable disjointe de X (car X s'injecte dans $B \setminus X$), contradiction.

Si B est connexe alors B est b -connexe : une sous-boucle propre définissable de même rang est en particulier un sous-symétron propre définissable de même rang.

Si B est b -connexe alors le degré de B est égal à un. Sinon, il y aurait au moins deux types génériques distincts. Soient p_1, \dots, p_n les types génériques, pour $1 \leq i \leq n$, les parties de la forme $Sym(p_1 \longleftrightarrow p_i)$ sont des convexes définissables qui contiennent un unique générique et qui sont deux-à-deux disjoints. Une de ces parties contient 0 et forme donc une sous-boucle définissable propre de même rang, contradiction. \square

Définition 3.4.1.6. *Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible ω -stable. On dira que la sous-boucle connexe de même rang que B est la composante connexe (principale) de B et on la notera B° .*

Si la boucle B est en plus de RM fini, on obtient une version particulièrement commode du théorème des indécomposables.

Corollaire 3.4.1.7. *Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible de RM fini et soit $(A_i : i \in I)$ une famille de parties définissables indécomposables contenant 0 . Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ engendre une sous K -boucle connexe définissable qui est en fait elliptiquement engendrée par un nombre fini de A_i .*

Nous pouvons dès lors tenter d'adapter l'analyse de Lascar aux K -boucles uniquement 2-divisibles de RM fini. Le principal obstacle réside dans la construction d'une sous-

boucle normale à partir d'ensembles indécomposables. En effet, dans une boucle, il n'y a pas forcément de groupe définissable d'automorphismes intérieurs.

Définition 3.4.1.8. *On dit qu'une boucle B est automorphique si $I(B)$, le groupe des applications intérieures (Définition 2.4.1.4), est composé d'automorphismes.*

On rappelle qu'une sous-boucle est normale ssi elle est stabilisée par le groupe $I(B)$ des applications intérieures. Une boucle est définissablement hamiltonienne si toute sous-boucle définissable est normale.

Le lemme suivant nous indique que le fait d'être une K -boucle uniquement 2-divisible automorphique passe au quotient.

Lemme 3.4.1.9. *Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible automorphique ω -stable et soit B_1 une sous-boucle définissable normale. Alors la boucle quotient B/B_1 est une K -boucle uniquement 2-divisible automorphique.*

Démonstration. La boucle quotient B/B_1 est une K -boucle car les propriétés équationnelles sont préservées par passage au quotient. De plus, elle est bien 2-divisible car $\bar{a} = \overline{a' + a'} = \bar{a}' + \bar{a}'$ pour $a = a' + a'$. On remarque que si $\bar{a} \cdot 2 = \bar{0}$ alors $a \cdot 2 \in B_1$. Mais B_1 est une partie convexe définissable ; c'est donc un ensemble clos par prise de moitié ; on a donc $a \in B_1$. La K -boucle quotient B/B_1 ne contient pas d'élément d'ordre 2 et par le Fait 2.1.2.3, on en déduit que l'application qui à \bar{a} associe $\bar{a} \cdot 2$ est injective.

Pour ce qui est du fait d'être automorphique, on utilise [BP56, Théorème 2.2]. □

Théorème 3.4.1.10. *(à comparer avec [Poi87, Théorème 2.13]) Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible de RM fini (ω -saturée) qui est de plus automorphique (respectivement, définissablement hamiltonienne). Alors il existe des formules fortement minimales ϕ_1, \dots, ϕ_n telles que dans toute extension élémentaire propre, l'ensemble des réalisations d'au moins une de ces formules augmente.*

Démonstration. Soit A une partie définie par une formule fortement minimale. D'après la Proposition 3.3.2.4, il existe une partie définissable A' , de même rang et même degré qui est indécomposable. Or, pour $x \in A'$, $s(A', x/2) = A_1$ est une partie définissable fortement minimale indécomposable qui contient 0.

On considère la famille $(f(A_1) : f \in I(B))$. Remarquons que pour tout $f \in I(B)$, $f(s(a, a')) = s(f(a), f(a'))$ et $f(m(a, a')) = m(f(a), f(a'))$ pour $a, a' \in A_1$. Appliquons le Théorème 3.3.2.6 à la famille $(f(A_1) : f \in I(B))$: on obtient une sous K -boucle définissable connexe normale B_1 elliptiquement engendrée à partir d'une partie définissable fortement minimale (la sous-boucle ainsi obtenue est bien quasi-fortement minimale).

Si $B_1 = B^\circ$, on arrête ; sinon, on considère la K -boucle interprétable B°/B_1 (par connexité, $B_1 \subseteq B^\circ$) et on répète le même procédé.

Nous obtenons une suite de sous K -boucles définissables connexes : $B_1 \triangleleft \dots \triangleleft B_n = B^\circ$. En passant à une extension élémentaire propre, l'ensemble des réalisations d'une des formules fortement minimales déterminant les quotients doit augmenter.

Dans le cas d'une boucle définissablement hamiltonienne, il suffit de considérer la boucle engendrée par une partie indécomposable contenant 0. □

Remarque 3.4.1.11. *On va voir que les formules fortement minimales obtenues dans le théorème précédent peuvent être prises à paramètres dans le modèle premier de $Th(B)$. L'hypothèse sur la saturation n'est donc pas nécessaire.*

Définition 3.4.1.12. *Soit T une théorie ω -stable et soient p, q deux types. On dit que p et q sont orthogonaux si pour tout ensemble A contenant une base de p et de q , toute réalisation \bar{a} d'une extension non-déviante de p à A est indépendante de toute réalisation \bar{b} d'une extension non-déviante de q à A .*

Définition 3.4.1.13. *Soit T une théorie ω -stable. On dit qu'elle est fini-dimensionnelle s'il existe une famille finie de types stationnaires telle que toute type non-algébrique est non-orthogonal à un des types de la famille.*

Corollaire 3.4.1.14. *Soit B une K -boucle uniquement 2-divisible de RM fini. Si B est automorphique (respectivement, définissablement hamiltonienne), alors $Th(B)$ est fini-dimensionnelle. De plus, les formules fortement minimales qui déterminent les dimensions peuvent être prises à paramètres dans le modèle premier.*

Démonstration. Soit \mathfrak{B} un modèle monstre de $Th(B)$ et soit $A \subset \mathfrak{B}$. Soient ϕ_1, \dots, ϕ_n les formules fortement minimales obtenues dans le Théorème 3.4.1.10. On considère un type non-algébrique p sur A .

Prenons un modèle B suffisamment saturé contenant A et les paramètres des ϕ_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit $p' \in S_n(B)$ une extension non-déviante de p et $\bar{a} \models p'$. D'après le Fait 1.1.2.5, il existe un modèle B' absolument premier sur $B \cup \{\bar{a}\}$. Or, d'après le Théorème 3.4.1.10, on peut supposer qu'il existe $\bar{b} \in \phi_1[B'] - \phi_1[B]$. Mais $tp(\bar{b}/B \cup \bar{a})$ est isolé et donc $\bar{a} \not\perp_B \bar{b}$. Par conséquent, le type p n'est pas orthogonal au type fortement minimal déterminé par ϕ_1 .

Une théorie fini-dimensionnelle n'a pas la propriété du recouvrement fini et donc une formule minimale est fortement minimale (voir [Poi87, Théorème 2.13] ou bien [Wag97, Proposition 4.7.4 et Lemme 4.7.5]). Il suffit de procéder comme dans la démonstration du Théorème 3.4.1.10 en considérant le modèle premier de $Th(B)$. \square

Fait 3.4.1.15. *[Poi87, Corollaire 2.14] ou [Wag97, Proposition 4.7.10] Dans une théorie fini-dimensionnelle où les dimensions sont portées par des types fortement minimaux, le rang de Morley est fini et il égal au rang de Lascar. De plus, pour tout entier n , l'ensemble $\{a : RM(\phi[x, a]) = n\}$ est définissable.*

Corollaire 3.4.1.16. *Dans une K -boucle uniquement 2-divisible de RM fini qui est de plus automorphique, le rang de Lascar et le rang de Morley coïncident. C'est une K -boucle rangée au sens de Borovik.*

3.4.2 Un résultat de classification pour les K -boucles uniquement 2-divisibles sans point fixe ω -stables

Nous conjecturons que les K -boucles uniquement 2-divisibles sans point fixe ω -stables (ou au moins de RM fini) sont des groupes abéliens. Il s'agit précisément du type de K -boucles qui apparaît dans l'étude des groupes de Frobenius rangés connexes de type impair. Rappelons que dans ce contexte la commutativité de l'opération implique son associativité.

Dans le cas d'un presque-domaine (Fait 2.1.2.9), nous savons que s'il y a un nombre

fini d'automorphismes de précession $d_{a,b}$ — en particulier, chaque $d_{a,b}$ est algébrique sur le vide — alors le presque-domaine est un presque-corps. Si nous nous plaçons dans une théorie ω -stable, cette condition implique notamment que pour une paire générique (a, b) , les éléments $a + b$ et $b + a$ sont interalgébriques.

Plus généralement dans le cas d'une K-boucle (uniquement 2-divisible) sans point fixe ω -stable (connexe), nous allons montrer que si la somme $a + b$ dépend "génériquement" de la somme $b + a$ alors la K-boucle est un groupe commutatif.

Définition 3.4.2.1. *On dit qu'une boucle est génériquement commutative si pour tous génériques a, b indépendants sur A , on a $a : a + b = b + a$. La boucle sera génériquement algébriquement dépendante si on a $\text{acl}(a + b/A) = \text{acl}(b + a/A)$.*

Notons que dans un groupe ω -stable connexe les deux conditions sont équivalentes et impliquent la commutativité du groupe.

On considère jusqu'à la fin de la section une K-boucle B uniquement 2-divisible sans point fixe ω -stable et connexe. Dans ce qui suit, nous utiliserons librement les éléments imaginaires et nous identifierons donc le graphe d'une fonction définissable et son paramètre canonique. Pour simplifier les notations, nous supposons que $A = \emptyset$.

Proposition 3.4.2.2. *Soient a et b deux génériques indépendants. Alors :*

1. *Si a et b commutent, $\delta_{a,b}$ est égal à l'identité.*
2. *Si $\text{acl}(a' + b') = \text{acl}(b' + a')$ pour toute paire a', b' de génériques indépendants, alors $\delta_{a,b} \in \text{acl}(a) \cap \text{acl}(b)$.*

Démonstration. La première propriété est une conséquence directe du Fait 2.1.2.3. Supposons que $a + b$ et $b + a$ sont interalgébriques. Comme $\delta_{a,b}$ est définissable sur $\{a + b, b + a\}$, on voit que $\delta_{a,b}$ est algébrique sur $a + b$ et sur $b + a$. Or, d'après le Fait 2.1.2.3, $\delta_{a,b} = \delta_{-b, b+a}$, mais $-b + (b + a) = a$, et donc $\delta_{a,b}$ est algébrique sur a (on remarque que $-b$ et $b + a$ sont des génériques indépendants). Comme $\delta_{b,a} = \delta_{a,b}^{-1}$, on en déduit que $\delta_{a,b}$ est aussi algébrique sur b . \square

Proposition 3.4.2.3. *Si la boucle B est génériquement algébriquement dépendante alors elle est génériquement commutative.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, pour tous a et b génériques indépendants, $\delta_{a,b}$ est algébrique sur a et sur b et donc ne dépend pas du choix de la paire de génériques indépendants. Par conséquent, $\delta_{a,b}^2 = Id$ (car $\delta_{a,b} = \delta_{b,a}$).

L'application $\delta_{a,b}$ est donc soit l'inversion soit l'identité (Fait 2.1.2.3). Supposons par l'absurde que $\delta_{a,b}$ est l'inversion. On a alors $\delta_{a,b}(b + a) = -b - a = a + b$ et donc $s(b, -a) = b$. Mais par unicité du milieu, on obtient que $-a = b$, ce qui contredit l'indépendance de a et b . \square

Théorème 3.4.2.4. *Si la boucle B est génériquement commutative alors c'est un groupe commutatif.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'opération est commutative. Soit $a, b \in B$. On considère a_1 générique sur a . Les éléments $-a_1$ et $a_1 + a$ restent génériques sur a et on a $a = -a_1 + (a_1 + a)$. On procède de même pour b : on a

$b = -b_1 + (b_1 + b)$ avec b_1 générique sur b . On note $-a_1 + a = a_2$ et $-b_1 + b = b_2$. On peut supposer que b_i est générique sur a, b pour $i \in \{1, 2\}$ et que a_j est générique sur b, a, b_1, b_2 pour $j \in \{1, 2\}$. Remarquons que b_j et $\delta_{a_1, a_2}(b_j)$ sont génériques sur a_1, a_2, a, b pour $j \in \{1, 2\}$. En effet, pour $j \in \{1, 2\}$, on a :

$$RM(\delta_{a_1, a_2}(b_j)/a_1, a_2, a, b) = RM(b_j/a_1, a_2, a, b) = RM(b_j/a, b) = RM(b_j).$$

En particulier, $a_i \downarrow \delta_{a_1, a_2}(b_j)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ &= a_1 + (a_2 + \delta_{a_2, a_1}(b_1 + b_2)) \\ &= a_1 + ((a_2 + \delta_{a_2, a_1}(b_1)) + \delta_{a_2, a_1}(b_2)) \\ &= a_1 + ((\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_2) + \delta_{a_2, a_1}(b_2)) \\ &= a_1 + (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + (a_2 + \delta_{a_2, a_1}(b_2))) \\ &= (a_1 + \delta_{a_2, a_1}(b_1)) + (a_2 + \delta_{a_2, a_1}(b_2)) \\ &= (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_1) + (\delta_{a_2, a_1}(b_2) + a_2) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + (a_1 + (\delta_{a_2, a_1}(b_2) + a_2)) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + ((a_1 + \delta_{a_2, a_1}(b_2)) + a_2) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + ((\delta_{a_2, a_1}(b_2) + a_1) + a_2) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + (\delta_{a_2, a_1}(b_2) + (a_1 + a_2)) \end{aligned}$$

On remarque que d'une part $a_1 + \delta_{a_2, a_1}(b_1)$ et a_2 , et d'autre part, b_2 et $\delta_{b_1, a}(a_i)$, pour $i \in \{1, 2\}$, sont des génériques indépendants. Nous pouvons calculer la somme $a + b$ d'une autre façon :

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ &= ((a_1 + a_2) + b_1) + \delta_{a, b_1}(b_2) \\ &= (a_1 + (a_2 + \delta_{a_2, a_1}(b_1))) + \delta_{a, b_1}(b_2) \\ &= (a_1 + (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_2)) + \delta_{a, b_1}(b_2) \\ &= ((a_1 + \delta_{a_2, a_1}(b_1)) + a_2) + \delta_{a, b_1}(b_2) \\ &= (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_1) + (a_2 + \delta_{a, b_1}(b_2)) \\ &= (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_1) + \delta_{a, b_1}(\delta_{b_1, a}(a_2) + b_2) \\ &= (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_1) + \delta_{a, b_1}(b_2 + \delta_{b_1, a}(a_2)) \\ &= (\delta_{a_2, a_1}(b_1) + a_1) + (\delta_{a, b_1}(b_2) + a_2) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + (a_1 + (\delta_{a, b_1}(b_2) + a_2)) \\ &= \delta_{a_2, a_1}(b_1) + (\delta_{a, b_1}(b_2) + (a_1 + a_2)) \end{aligned}$$

En mettant ensemble les deux équations, on obtient que $\delta_{a, b_1}(b_2) = \delta_{a_2, a_1}(b_2)$ et donc $\delta_{a, b_1} = \delta_{a_2, a_1}$ (car la boucle est sans point fixe).

Or, puisque la boucle est sans point fixe et que b_1 est générique sur a, a_1, a_2 , le Fait 2.1.2.8 nous donne :

$$\delta_{a_2, a_1}^2 = \delta_{a_2, a_1} \delta_{a_1 + a_2, b_1} = \delta_{a_2, a_1 + b_1} \delta_{a_1, b_1} = (Id)^2 = Id$$

Par conséquent, $\delta_{a_2, a_1}^2 = Id$. Mais par le Fait 2.1.2.3, l'automorphisme δ_{a_2, a_1} est soit l'identité soit l'inversion. On peut procéder de même pour b_1, b_2 : l'automorphisme

δ_{b_1, b_2} est soit l'identité soit l'inversion (puisque δ_{b_1, b_2} est définissable sur b_1, b_2 , cela ne dépend que du type de b_1, b_2). Or, nous avons :

$$a + b = \delta_{a_2, a_1}(b_1) + (\delta_{a_2, a_1}(b_2) + (a_1 + a_2)) = \delta_{a_2, a_1}(b) + \delta_{\delta_{a_2, a_1}(b_1), \delta_{a_2, a_1}(b_2)}(a) = \underline{+}b \underline{+} a.$$

De plus, on peut supposer que $-a, b \neq 0$ et $-a \neq b$.

Si $a + b = -b + a$ alors $s(-a, b) = a$ et par unicité du milieu $b = 0$.

Si $a + b = -b - a$ alors $s(-a, b) = -a$ et par unicité du milieu, $b = -a$.

Si $a + b = b - a$, alors $b = -a + (b - a) = s(-b, -a)$. Mais par unicité du milieu, on obtient que $a = 0$.

Par conséquent, $a + b = b + a$. □

Remarque 3.4.2.5. *Si on ne suppose pas que la K -boucle est sans point fixe mais qu'elle est "génériquement associative" ($\delta_{a,b} = Id$ pour une paire (a, b) de génériques indépendants) le théorème de Weil-Hrushoski [Poi87, Théorème 5.23] nous donne un groupe définissable connexe et une bijection définissable qui transforme génériquement l'opération de la boucle dans l'opération du groupe.*

Chapitre 4

Quasi-groupes de Frobenius dimensionnels

Dans ce chapitre, nous considérons une classe de groupes munis d'une dimension finie, qui inclut à la fois les groupes rangés et les groupes définissables dans une structure o-minimale. Cette partie a été soumise pour publication au journal *Model Theory*. Nous étudions dans ce cadre un certain type de groupes - les quasi-groupes de Frobenius - dont la structure généralise celle des groupes de Frobenius.

Disons d'abord quelques mots sur l'analogie entre la dimension o-minimale et le rang de Morley.

Les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos sont des exemples typiques de groupes rangés. Du point de vue du comportement de leur dimension, ils ressemblent aux groupes de Lie réels et plus généralement aux groupes définissables dans les structures o-minimales. Ces derniers peuvent en effet être également caractérisés par une fonction de dimension qui présente de nombreux points communs avec le rang de Morley : elle satisfait les axiomes B et C de l'introduction mais pas l'axiome A. Dans les deux cas, nous disposons d'une notion appropriée de généralité qui s'applique aux parties définissables de dimension maximale.

Du point de vue de la théorie des modèles, il semble donc possible de décrire dans un cadre commun - celui des groupes dimensionnels - les groupes de Lie (réels) et les groupes algébriques (sur un corps algébriquement clos).

On peut illustrer ce principe méthodologique en considérant les groupes $SO_3(\mathbb{R})$ et $PGL_2(\mathbb{C})$. Ce sont des groupes dimensionnels qui présentent une structure interne très proche, se reflétant dans la géométrie d'incidence induite par les involutions. Comme le font remarquer J. Wiscons et A. Deloro dans [DW20], les involutions forment un plan projectif dans $SO_3(\mathbb{R})$; les axiomes sont satisfaits seulement génériquement dans $PGL_2(\mathbb{C})$. Il s'agira de déterminer dans quelle mesure cette géométrie des involutions permet de caractériser ces groupes classiques parmi les groupes dimensionnels.

Pour établir cette théorie commune, nous sommes conduits à introduire la définition suivante.

Une paire $C < G$ de groupes dimensionnels (o-minimaux ou rangés) connexes, *i.e.*, sans sous-groupe définissable d'indice fini, est un *quasi-groupe de Frobenius* (QF) si C est d'indice fini dans son normalisateur et s'il est TI ($C^g \cap C = \{1\}$ pour tout $g \notin N_G(C)$). Si l'indice de C dans son normalisateur est pair (respectivement impair, trivial), on parlera de quasi-groupe de Frobenius pair (QFP) (respectivement de quasi-groupe de Frobenius impair (QFI), de groupe de Frobenius connexe).

Rappelons que $\mathrm{GA}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^+ \rtimes \mathbb{C}^\times$, le groupe des transformations affines complexes, est un exemple de groupe de Frobenius connexe rangé. Les involutions induisent également une géométrie d'incidence, mais cette dernière se distingue assez nettement de la géométrie observée précédemment (pour plus de détails, on peut consulter [CT21]).

Nous cherchons à classifier les quasi-groupes de Frobenius dimensionnels, en distinguant d'une part, les (QFP) et d'autre part, les groupes de Frobenius connexes. En général, nous supposons que les groupes en question sont U_2^\perp : il n'y a pas de 2-groupe abélien élémentaire infini. Du point de vue des (QFP), nous pouvons formuler les deux conjectures suivantes :

1. (Conjecture A_1 de [DW20]) Soit $C < G$ un (QFP) rangé, contenant des involutions et U_2^\perp . Alors G est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(K)$ pour un corps algébriquement clos K .
2. Soit $C < G$ un (QFP) définissable dans une structure o-minimale. Si $\bigcup_G C^g$ contient toutes les translations, *i.e.*, les produits de deux involutions, alors G est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(R)$ pour un corps réel clos R .

L'étude de ce type de configurations trouve son origine dans les articles [Nes89] et [NPR91]. Les groupes $\mathrm{PGL}_2(K)$ et $\mathrm{SO}_3(R)$ y sont identifiés parmi les groupes dimensionnels de petite dimension (inférieure ou égale à trois). Par ailleurs, les quasi-groupes de Frobenius apparaissent naturellement dans l'étude des contre-exemples minimaux à la conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes rangés de type impair (voir [CJ04], [Del07] et [DJ16]).

Pour ce qui est des groupes de Frobenius connexes de type impair, nous nous limiterons au cas rangé et nous verrons sous quelles conditions ils sont scindés. Cela prolongera les résultats du chapitre 2.

Remarquons que la classification des groupes de Frobenius définissables dans une structure o-minimale est élucidée dans une large mesure par les articles [Tent00] et [MMT00] (les groupes de permutation définissables dans une structure o-minimale y sont étudiés en détail). En particulier, dans [Tent00], l'auteure montre qu'un groupe strictement 2-transitif est isomorphe au groupe des transformations affines d'un corps (potentiellement non-commutatif) définissable. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(R)$, où R est un corps réel clos, y est également identifié comme groupe strictement 3-transitif.

4.1 Groupes dimensionnels et théorème de Bachmann

Étant donné une structure M , on dira qu'un groupe G définissable dans M est *dimensionnel* si on peut munir les ensembles définissables de G et de ses puissances cartésiennes d'une dimension finie \dim satisfaisant les axiomes suivants (voir [BJO12] et [BJO14]) :

- (A₁) Si f est une fonction définissable entre deux sous-ensembles définissables A et B , alors $\{b \in B : \dim(f^{-1}(b)) = n\}$ est définissable.
- (A₂) Si f est une fonction définissable entre deux sous-ensembles définissables A et B , telle que les fibres sont de dimension constante égale à m alors $\dim(A) = \dim(\text{Im}(f)) + m$.
- (A₃) A est fini si et seulement si $\dim(A) = 0$.
- (A₄) $\dim(A \cup B) = \max\{\dim(A), \dim(B)\}$.

Les groupes de rang de Morley fini, les groupes définissables dans une structure o-minimale, dans le corps des nombres p -adiques, dans un corps P -minimal sont des exemples de groupes dimensionnels.

On parlera de groupe *dimensionnel*^o si de plus le groupe satisfait la condition de chaîne descendante pour les sous-groupes définissables et si la dimension peut être étendue aux sous-ensembles interprétables du groupe (l'existence d'un choix définissable fort ou l'élimination des imaginaires rendent possible une telle extension). En particulier, on peut attacher une dimension aux sections définissables.

Les groupes définissables dans une structure o-minimale [Ed03, Théorème 7.2] et les groupes rangés (par définition) sont des exemples de groupes *dimensionnels*^o (mais ce n'est plus le cas des groupes définissables dans le corps des nombres p -adiques, par exemple).

Comme pour les groupes ω -stables, un groupe *dimensionnel*^o G admet une composante connexe G° , *i.e.*, un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini : il suffit de considérer l'intersection de tous les sous-groupes définissables d'indice fini. On dira qu'il est *connexe* si $G^\circ = G$. De plus, chaque sous-ensemble $X \subseteq G$ est contenu dans un plus petit sous-groupe définissable (noté $d(X)$). Remarquons que, comme dans le cas rangé, certaines propriétés sont préservées lorsque l'on passe à la clôture définissable d'un sous-groupe (non-définissable) H [BJO14, Lemmes 3.3 et 3.4] :

- Soit $K \subseteq G$. Si H est K -invariant alors $d(H)$ est K -invariant.
- Si H est nilpotent de classe n , alors $d(H)$ est nilpotent de classe n .

La condition de chaîne descendante pour les sous-groupes définissables rend également possible le relèvement de la torsion :

Soit H un sous-groupe définissable normal tel que xH soit un p -élément dans G/H alors il existe un p -élément dans xH [BJO12, Fait 3.9].

L'existence d'une dimension finie permet de caractériser facilement les parties qui sont, en un certain sens, "larges". On dira qu'une partie Y est *générique* si elle contient une partie définissable X tel que $\dim(X) = \dim(G)$. On dira que X est *large* si $\dim(G \setminus X) < \dim(G)$. De plus, étant donné un sous-groupe définissable H , l'équation $\dim(G) = \dim(G/H) + \dim(H)$ montre qu'un sous-groupe définissable H est d'indice fini dans G ssi H est générique dans G .

Par ailleurs, l'additivité de la dimension et l'élimination des imaginaires permettent d'effectuer des calculs de dimension analogues à ceux conduits dans [Jal06].

Définissons donc précisément ce qu'on entend par un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o :

Définition 4.1.0.1. Soient G un groupe et C un sous-groupe propre. Alors on dit que la paire de groupes $C < G$ est un quasi-groupe de Frobenius si C est d'indice fini dans son

normalisateur et s'il est TI, i.e., $C^g \cap C = \{1\}$ pour tout $g \notin N_G(C)$. Le sous-groupe C est un quasi-complément de Frobenius. De plus, on dira que $C < G$ est un quasi-groupe de Frobenius dimensionnel^o si C et G sont des groupes dimensionnels^o connexes.

On remarque que $N_G(C)^\circ = C$ et que $C_G(g)^\circ \leq C$, pour tout $1 \neq g \in C : C_G(g) \leq N_G(C)$ par la propriété TI et $C_G(g)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$.

Avant de mener à bien l'analyse des quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o, il nous faut souligner une différence essentielle entre le contexte rangé et le contexte o-minimal. Pour un groupe connexe rangé G , la notion de largeur et celle de généricité coïncident alors que ce n'est pas forcément le cas pour un groupe connexe définissable dans une structure o-minimale. En particulier, deux parties génériques ne s'intersectent pas forcément.

De plus, l'action des automorphismes définissables involutifs peut être caractérisée de façon commode dans le contexte rangé (mais pas forcément dans le cas o-minimal) : si un automorphisme définissable involutif d'un groupe rangé connexe a un nombre fini de points fixes, alors l'action se fait par inversion et le groupe est abélien. Or, la compréhension de l'action des involutions se révèle indispensable à notre étude des quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o. Nous sommes donc conduits à proposer un nouvel axiome pour identifier une sous-classe des groupes *dimensionnels*^o :

(A₅) Pour tout sous-groupe interprétable H et tout automorphisme involutif interprétable i de H , si $C_H(i)$ est fini, alors H° est abélien inversé par i .

Nous ne savons pas si un tel axiome (vérifié par les groupes rangés) reste valable pour une sous-classe naturelle de groupes définissables dans une structure o-minimale (par exemple, pour les groupes définissablement simples et/ou définissablement compacts). Dans la suite, nous indiquerons à quel moment (A₅) semble requis.

Notation : Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o. Pour $x \in \bigcup_G C^g$, on note C_x le conjugué de C contenant x .

Nous allons poursuivre l'étude des translations menée dans [DW20] et nous utiliserons les méthodes de l'école de Bachmann pour interpréter $SO_3(K)$ dans un cadre dimensionnel.

Jusqu'à la fin de la section, soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o qui contient des involutions, U_2^\perp , tel que $\bigcup_G C^g$ contient tous les 2-éléments (dans le cas rangé, l'hypothèse U_2^\perp suffit).

Nous supposons que toutes les translations (les produits de deux involutions) sont contenues dans $\bigcup_G C^g$.

Lemme 4.1.0.2. *Le sous-groupe C est d'indice pair dans son normalisateur. De plus, il existe une involution $1 \neq k \in N_G(C) \setminus C$.*

Démonstration. Soit i une involution contenue dans C et $j \neq i$ une autre involution contenue dans un conjugué C_j distinct de C . Par hypothèse, la translation $x = ij$ est contenue dans un conjugué C_x de C . On a donc $C_G(x)^\circ \leq C_x$; de plus i et j

appartiennent à $N_G(C_G(x)^\circ) \leq N_G(C_x)$. Si i et j étaient contenues dans C_x , alors on aurait d'une part $C_x \cap C \neq \{1\}$ et d'autre part $C_x \cap C_j \neq \{1\}$ et finalement $C = C_x = C_j$, contradiction.

Par conséquent, i et j appartiennent à $N_G(C_x) \setminus C_x$. \square

On dit qu'un groupe est *semi-simple* s'il n'y a pas de sous-groupe abélien normal infini. Les quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o ont un centre fini : soit $x \in Z(G)$, et supposons que $Z(G)$ est infini, alors $Z(G) \leq N_G(C)$ et donc $Z(G)^\circ \leq C$, contradiction.

Lemme 4.1.0.3. *Le groupe $C < G$ est semi-simple.*

Démonstration. Soit A un sous-groupe abélien normal infini. Quitte à considérer la composante connexe de son enveloppe définissable, on peut supposer que A est définissable et connexe. Si $A \cap C \neq \{1\}$, soit $1 \neq x \in A \cap C$ alors $A \leq C_G(x)^\circ \leq C$ et donc $C = G$, contradiction.

On a donc $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$. Le groupe A est en particulier 2-divisible car il ne contient pas d'involutions. Soit i une involution, le sous-groupe $C_A(i)$ est fini et il existe donc un élément $a \in A$ tel que $a^i a^{-1} = b \in A$ est non-trivial et inversé par i . Mais alors $1 \neq b^2 \in A$ et $b^2 = bib^{-1}i = i^{b^{-1}}i \in \bigcup_{g \in G} C^g$, contradiction.

Par conséquent, il n'y a pas de sous-groupe abélien normal infini. \square

On suppose désormais que $C < G$ satisfait également (A_5) .

Lemme 4.1.0.4. *Soit k une involution telle que $k \in N_G(C) \setminus C$, alors $C_C(k)$ est fini. De plus, C est abélien 2-divisible inversé par k (et donc $C \subseteq I \cdot I$).*

Démonstration. Supposons que $C_C(k)$ est infini, on a donc $C_C(k)^\circ \leq C_k \cap C$ et finalement $C_k = C$, contradiction. Par (A_5) , l'action de k est donc bien par inversion et C est abélien. C'est un groupe 2-divisible car il contient un nombre fini d'involutions : l'élevation au carré définit un homomorphisme de groupe définissable de noyau fini, puisque le groupe est connexe, c'est un homomorphisme surjectif. \square

Remarque 4.1.0.5. *Si on suppose que C est abélien, alors (A_5) n'est plus nécessaire pour montrer que l'action est par inversion.*

On pose $X = \{a^k a^{-1} : a \in A\}$ (c'est un ensemble définissable inversé par k). Les fibres de l'application définissable $\phi : A \rightarrow X$, définie par $\phi(a) = a^k a^{-1}$, ont même dimension que $C_A(k)$, qui est un groupe fini. Par conséquent, l'additivité de la dimension nous donne que $\dim(X) = \dim(A)$. Le sous-groupe formé par les éléments inversés par k est générique et donc il est égal à A par connexité.

L'axiome (A_5) n'est plus utilisé par la suite.

Lemme 4.1.0.6. *Le sous-groupe (abélien) C contient une unique involution et toutes les involutions de $N_G(C) \setminus C$ appartiennent au même translaté.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $i \neq j$ sont deux involutions distinctes appartenant à C . Soit $\alpha \in N_G(C) \setminus C$ une involution. Puisque l'involution α agit par inversion, elle commute avec l'involution $x = ij$ mais x appartient à $C_G(C_\alpha)$ (car i et j agissent par inversion sur C_α) donc $x \in C_\alpha$ (puisque C_α ne contient qu'un nombre fini d'involutions), contradiction.

Soient $j, k \in N_G(C) \setminus C$, alors puisque l'action est par inversion, $jk \in C_G(C)$. Mais alors $C \leq C_G(jk)^\circ \leq C_{jk}$ et donc $C_{jk} = C$ et $jk \in C$. Finalement, $k \in jC$ et donc toutes les involutions de $N_G(C) \setminus C$ sont égales modulo C . \square

En procédant comme dans la démonstration du Théorème 3.31 de [Poi87], on peut munir l'ensemble des involutions d'une structure de plan projectif : à chaque involution (point), on lui associe la ligne $D_i = \{k \in I : ki = ik\} \setminus \{i\} = \{k \in I : k \in N_G(C_i) \setminus C_i\} = kC_i$ pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$.

Dans ce cas, par deux points distincts $i \neq j$ passe une unique ligne à savoir D_k où k est l'unique involution de C_{ij} . En effet, i et j inversent C_{ij} (mais n'appartiennent pas à C_{ij}). De plus si $i, j \in D_l \neq D_k$, alors $i, j \in N_G(C_l) \setminus C_l$ et donc $x = ij \in C_l$, finalement $C_l = C_x = C_k$, contradiction.

De plus, deux lignes D_i et D_j s'intersectent en un seul point k , *i.e.*, l'unique involution contenue dans C_{ij} . En effet, pour une telle involution k , on a bien $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ et $k \in N_G(C_j) \setminus C_j$ car $k \in C_G(i) \cap C_G(j)$. Soit $l \neq k \in D_j \cap D_i$, alors $lk \in C_i \cap C_j$, et $C_i = C_j$, contradiction. En particulier, pour deux involutions distinctes $i \neq j$, il existe une unique involution k (distincte de i et de j) qui commute avec les deux.

Finalement, on remarque que trois involutions (distinctes) i, j, k sont collinéaires ssi ijk est une involution : ijk est une involution ssi ij est inversé par k (et ij n'est pas une involution) ssi $k, i, j \in D(l)$ où l est l'involution contenue dans C_{ij} . On peut dès lors appliquer une forme du théorème de Bachmann :

Fait 4.1.0.7. [BN94, Fait 8.15],[Schr82] *Soit G un groupe contenant des involutions. Si on peut munir l'ensemble des involutions I d'une structure de plan projectif tel que trois involutions i, j et k sont collinéaires ssi ijk est une involution, alors le sous-groupe $\langle I \rangle = I \cdot I$ est isomorphe à $SO_3(K, f)$ pour un corps K interprétable dans G et une forme quadratique anisotrope f définie sur K^3 .*

Il suffit de remarquer que $I \cdot I = \bigcup_G C^g$ est un sous-groupe définissable de même dimension que G (en utilisant [Jal06], on montre que $\dim(\bigcup_G C^g) = \dim(G/N_G(C)) - \dim(C) = \dim(G) + \dim(C) - \dim(C) = \dim(G)$) et donc lui est égal par connexité.

Dans un univers rangé, un corps interprétable K est algébriquement clos et toute forme quadratique définie sur un K -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à deux est alors forcément isotrope. Par conséquent, comme corollaire, on obtient le Théorème A de [DW20] :

Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé, U_2^\perp , alors $\bigcup_G C^g$ ne contient pas toutes les translations.

4.2 Le cas o-minimal

Même si l'axiome (A_5) pourrait ne pas être vrai en général pour les groupes définissables dans une structure o-minimale, il est possible de démontrer un résultat analogue en supposant que le quasi-complément de Frobenius est nilpotent (et donc en affaiblissant

l'hypothèse de commutativité de la Remarque 4.1.0.5).

Nous mobilisons la théorie des sous-groupes de Carter et de Cartan développée dans [BJO14]. Un sous-groupe de Cartan Q est un sous-groupe nilpotent maximal tel que pour tout sous-groupe $X \leq Q$ normal d'indice fini, X est un sous-groupe d'indice fini dans $N_G(X)$. D'après [BJO14], on sait que les sous-groupes de Cartan d'un groupe définissable dans une structure o-minimale sont définissables. De plus, les sous-groupes de Carter, *i.e.*, les sous-groupes définissables connexes nilpotents d'indice fini dans leur normalisateur correspondent aux composantes connexes des sous-groupes de Cartan. Il est possible de caractériser précisément la structure de sous-groupes de Cartan des groupes définissablement simples définissables dans une structure o-minimale (et plus généralement des sous-groupes définissables semi-simples).

Fait 4.2.0.1. [BJO14, Théorème 57] *Soit G un groupe définissablement simple définissable dans une structure o-minimale. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Il y a un nombre fini (supérieur ou égal à un) de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan.*
2. *Si Q_1 et Q_2 sont des sous-groupes de Cartan et $Q_1^\circ = Q_2^\circ$, alors $Q_1 = Q_2$.*
3. *Les sous-groupes de Cartan de G sont abéliens et ont tous la même dimension.*

Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius (avec involutions) définissable dans une structure o-minimale tel que $\bigcup_G C^g$ contient les 2-éléments et les translations. Nous savons déjà que $C < G$ est semi-simple. Les deux faits suivants nous donnent beaucoup d'informations sur la structure des groupes semi-simples.

Fait 4.2.0.2. [PPS00a, Théorème 4.1] *Soit G un groupe semi-simple (définissable dans une structure o-minimale). Alors $G/Z(G)$ est le produit direct de sous-groupes définissables (dans la pure structure de groupe G) H_1, \dots, H_k tel pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, il existe un corps réel clos R_i et un isomorphisme définissable entre H_i et un groupe semi-algébrique de $GL_{n_i}(R_i)$. Chaque H_i est définissablement simple (pour la pure structure de groupe H_i) et sa composante connexe H_i° est définissablement simple.*

Fait 4.2.0.3. [Fre17, Proposition 2.11] *Soit G un groupe définissable dans une structure o-minimale M . Alors G° , sa composante connexe au sens de M , est définissable dans la pure structure de groupe.*

Nous supposons désormais que le centre de G est trivial et que C est nilpotent (c'est donc un sous-groupe de Carter).

Remarque 4.2.0.4. *Comme le centre est fini, $G/Z(G)$ est de centre trivial mais ce n'est plus forcément un quasi-groupe de Frobenius.*

Comme G a des involutions, on peut supposer que H_1 contient des involutions. Soit $i \in H_1 \cap C_i$, alors $H_2 \leq C_G(i)^\circ \leq C_i$, contradiction. Le groupe G est donc bien définissablement simple. D'après le Fait 4.2.0.1, ses sous-groupes de Carter sont abéliens (et de même dimension). Or, C est un sous-groupe de Carter, c'est donc un groupe abélien. On peut désormais appliquer les résultats de la section précédente.

Montrons désormais que le corps K interprétable est réel clos et que la forme quadratique anisotrope correspond à un produit scalaire. Nous avons besoin du fait suivant :

Fait 4.2.0.5. [Pill88, Théorème 3.9] Un corps infini K définissable dans une structure o-minimale est soit réel clos (et $\dim(K) = 1$) soit algébriquement clos.

Puisque la forme quadratique est anisotrope, le corps K est réel clos. Finalement, le théorème d'inertie de Sylvester nous permet de conclure que $G \simeq \mathrm{SO}_3(K)$ où K est réel clos.

4.3 Le cas rangé

4.3.1 Esquisse d'une théorie générale

Nous commençons à élaborer une théorie générale des quasi-groupes de Frobenius rangés. Un certain nombre de résultats valables pour les groupes de Frobenius rangés (étudiés notamment dans [BN94]) se généralisent à ce cadre plus général. Remarquons que nous faisons usage de manière cruciale d'arguments impliquant l'étude de la généricité et de la générosité dans les groupes connexes (ce qui les rend difficilement généralisables au cas o-minimal).

Lemme 4.3.1.1. Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé et $H < G$ un sous-groupe définissable connexe tel que $H \cap C \neq \{1\}$. Alors $H \cap C < H$ est TI et d'indice fini dans son normalisateur. De plus, $H \cap C$ est infini et connexe. Finalement, pour tout conjugué C_1 de C tel que $(H \cap C_1) \neq \{1\}$, il existe $1 \neq h \in H$, tel que $H \cap C_1 = (H \cap C)^h$.

Démonstration. Montrons que $H \cap C$ est TI. Supposons que $(H \cap C)^h \cap (H \cap C) \neq \{1\}$, on a donc $C^h \cap C \neq \{1\}$ et par conséquent $C^h = C$. Le même raisonnement montre que $N_H(H \cap C) \leq N_G(C)$ et donc $N_H(H \cap C)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$, i.e., $N_H(H \cap C)^\circ \leq H \cap C$. Le groupe $H \cap C$ est donc TI et d'indice fini dans son normalisateur.

On remarque que pour $1 \neq c \in H \cap C$, $C_H(c) \leq N_H(H \cap C)$ et donc $C_H(c)^\circ \leq N_H(H \cap C)^\circ$. Or, d'après le Fait 1.2.5.5, $C_H(c)$ est infini donc $H \cap C$ est infini.

Si $H \cap C$ n'était pas connexe alors $(H \cap C)^\circ$ et $(H \cap C) \setminus (H \cap C)^\circ = X$ seraient généreux. En effet, $(H \cap C)^\circ$ et X sont invariants sous l'action de $N_H(H \cap C)$; de plus, si X^h ou $(H \cap C)^{oh}$ intersecte $(H \cap C)$ non-trivialement alors $(H \cap C) \cap (H \cap C)^h$ est non-trivial et donc $h \in N_H(H \cap C)$. Par conséquent, les ensembles $\bigcup_H X^h$ et $\bigcup_H (H \cap C)^{oh}$ sont génériques, contradiction.

Soit $(H \cap C_1) \neq \{1\}$. Par ce qui précède, c'est un sous-groupe généreux (dans H), tout comme $(H \cap C)$. Par connexité de H , il existe $1 \neq h \in H$, tel que $(H \cap C) \cap (H \cap C_1)^h \neq \{1\}$. Par conséquent, $C_1^h = C$ et finalement $(H \cap C) = (H \cap C_1)^h$. \square

Lemme 4.3.1.2. (voir [DW20, Proposition 1]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé. Alors C est généreux et pour tout $1 \neq c \in C$, $C_G(c)^\circ \leq C$. Si de plus, G est U_2^\perp , alors les 2-éléments appartiennent à des tores décents et sont contenus dans $\bigcup_G C^g$.

Démonstration. On a $RM(\bigcup_G C^g) = RM(G) - RM(N_G(C)) + RM(C) = RM(G)$. Soit $1 \neq c \in C$, alors $C_G(c) \leq N_G(C)$ puisque C est TI et donc $C_G(c)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$. Puisque G ne contient pas de 2-groupe unipotent, par toralité, les involutions appartiennent à des tores décents (Fait 1.2.7.5).

Soit T un tore décent maximal. Puisque $C_G(T)^\circ = C_G(T)$ est généreux (Fait 1.2.7.4), quitte à conjuguer, il existe $1 \neq x \in C \cap C_G(T)$ et donc $T \leq C_G(x)^\circ \leq C$. \square

Lemme 4.3.1.3. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors $G = G' \rtimes C$ avec C abélien. De plus, on peut interpréter un corps K tel que $C \hookrightarrow K^\times$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe définissable connexe nilpotent normal alors $H \cap C = \{1\}$. En effet, soit $1 \neq c \in H \cap C$ alors $Z(H)^\circ$ (infini car H est infini connexe nilpotent) commute avec c et donc $Z(H)^\circ \leq C$. Mais alors $H \leq C_G(Z(H)^\circ)^\circ \leq C$ et donc $C = G$, contradiction.

Le groupe G' est un groupe définissable connexe nilpotent normal et donc $G' \cap C = \{1\}$. Par conséquent, C est abélien et c'est un sous-groupe de Carter (il est en particulier autonormalisant, Fait 1.2.7.6). On remarque que $C = C_G(c)$ pour tout $c \in C$. D'après le Fait 1.2.7.6, on a donc $G = G' \rtimes C$.

Soit $B \leq G'$ un sous-groupe définissable abélien C -minimal (on peut supposer qu'il est connexe). On a bien $C_C(B) = \{1\}$: soit $1 \neq c \in C_G(B)$, alors $B \leq C_G(c)^\circ \leq C$, contradiction. On peut donc appliquer le Fait 1.2.3.1 pour conclure. \square

Corollaire 4.3.1.4. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors G est un groupe de Frobenius connexe.*

Lemme 4.3.1.5. *Soit $G = U \rtimes C$ un groupe rangé où U est définissable connexe nilpotent et C agit sur U en fixant un nombre fini de points. Alors $U^* = G \setminus \bigcup_G C^g$.*

Démonstration. Par l'exercice 10.a p.98 de [BN94], on a $U = [U, c]$ pour $c \in C$. Soit $g = uc \in G \setminus U$ avec $u \in U$ et $c \in C$. Soit $u_1 \in U$ tel que $u = [u_1^{-1}, c^{-1}]$. Alors $g^{u_1} \in C$. \square

Corollaire 4.3.1.6. *Soit $G = G' \rtimes C$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors $G' = F(G)^\circ$*

Il nous est également possible de caractériser la structure de l'unipotence.

Lemme 4.3.1.7. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble et soit ρ un paramètre d'unipotence. Alors tout ρ -Sylow de G est soit contenu dans G' , soit contenu dans un conjugué de C .*

Démonstration. On sait que $G = G' \rtimes C$. Pour un p -groupe unipotent, on applique le Fait 1.2.8.1.

Soit maintenant un $U_{0,r}$ -Sylow S de G . D'après le Fait 1.2.8.2, on a $S = U_{0,r}(G')U_{0,r}(Q)$ pour Q un sous-groupe de Carter de G . Mais C est un sous-groupe de Carter (c'est un quasi-complément de Frobenius) et d'après le Fait 1.2.7.6, les sous-groupes de Carter sont conjugués, par conséquent Q est un quasi-complément de Frobenius.

Comme le groupe S est nilpotent, on a $Z(S)^\circ \neq \{1\}$; soit $1 \neq c \in U_{0,r}(Q)$, on a $Z(S)^\circ \leq C_G(c)^\circ \leq Q$ et donc $U_{0,r}(G') \leq C_G(Z(S)^\circ)^\circ \leq Q$. On a donc soit $S = U_{0,r}(G')$, soit $S = U_{0,r}(Q)$ \square

4.3.2 Une caractérisation de la 2-torsion

Ce sont les quasi-groupes de Frobenius contenant des involutions qui nous intéressent principalement. Nous montrons un certain nombre de résultats qui clarifient la situation de la 2-torsion dans ce contexte.

Pour les groupes de Frobenius connexes, nous avons la situation suivante :

Proposition 4.3.2.1. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe avec involutions. Alors G est U_2^\perp ssi C contient des involutions.*

Démonstration. Supposons que G contient un 2-groupe abélien élémentaire infini A . Supposons par l'absurde que C contient des involutions. Puisque par le Fait 2.4.1.14 les involutions forment une classe de conjugaison, on aurait $I \subseteq \bigcup_G C^g$. En particulier, il existe $1 \neq x \in A \cap C$ (quitte à conjuguer) ; par malnormalité, $A \leq C_G(x) \leq C$. Mais C ne contient qu'un nombre fini d'involutions par le Fait 2.4.1.14, contradiction. Donc C ne contient pas d'involutions.

Réciproquement, supposons que C ne contient pas d'involutions. Alors les 2-Sylow $^\circ$ de G sont d'exposant fini (et en particulier contiennent des 2-groupes abéliens élémentaires infinis). En effet, soit S un 2-Sylow $^\circ$ et supposons qu'il contient un 2-tore ; on peut l'étendre en un tore décent maximal T . Mais $C_G(T)$ est généreux et il existe donc $1 \neq y \in C_G(T) \cap C^g$. Par malnormalité, $T \leq C_G(y) \leq C^g$, contradiction. \square

Corollaire 4.3.2.2. *Soit G un groupe de Frobenius rangé connexe. Alors G ne peut pas être de type mixte.*

Remarque 4.3.2.3. *T . Clausen et K. Tent aboutissent à un résultat similaire (voir Proposition 6.2 de [CT21])*

Pour les quasi-groupes de Frobenius en général, la démonstration précédente ne fonctionne que si on suppose que C contient un nombre fini d'involutions. Pour cette raison, nous nous limiterons aux quasi-groupes de Frobenius U_2^\perp , i.e., de type impair. A. Deloro et J. Wiscons dans [DW20] étudient de façon détaillée les (QFP) rangés de type impair.

Nous rappelons maintenant quelques faits concernant les groupes de type impair dont le rang de Prüfer est égal à un.

Fait 4.3.2.4. [DJ10, Proposition 1] *Soit G un groupe rangé connexe de type impair, de rang de Prüfer égal à un. Alors il y a trois possibilités pour le type d'isomorphisme des 2-Sylow (S° est un 2-tore de rang 1) :*

1. $S = S^\circ \rtimes \langle i \rangle$ pour i une involution agissant sur S° par inversion (type $PGL_2(\mathbb{C})$).
2. $S = S^\circ \cdot \langle w \rangle$ pour w un élément d'ordre 4 agissant sur S° par inversion. On a de plus que w^2 est l'involution de S° (type $SL_2(\mathbb{C})$).
3. $S = S^\circ$.

Fait 4.3.2.5. [Del09] *Soit G un groupe rangé, U_p^\perp , et soit $x \in G$ un p -élément tel que $x^{p^n} \in Z(G)$. Alors l'exposant du groupe $C_G(x)/C_G(x)^\circ$ divise p^n .*

La proposition suivante caractérise complètement la structure de la 2-torsion :

Fait 4.3.2.6. [DW20, Proposition 1] Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair. Alors G a les mêmes 2-Sylow que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (en particulier le rang de Prüfer est égal à un). De plus, on a $N_G(C) = C \rtimes \langle k \rangle$ avec k une involution agissant par inversion. En particulier, C est un groupe abélien.

Démonstration. On reproduit la démonstration donnée dans [DW20]. Puisque $N_G(C)/C$ est d'ordre pair, il existe un 2-élément $x \in N_G(C) \setminus C$ (relèvement de la torsion) que l'on prend d'ordre minimal de sorte que $x^2 \in C$. Mais $C_x \neq C$, donc $x^2 \in C \cap C_x = \{1\}$ et x est une involution. Comme $C_x \neq C$, le groupe $C_C(x)$ est fini et donc x agit sur C par inversion.

Par conséquent, pour tout involution i dans C , on a $C_G(i)^\circ = C$; de plus, i normalise $C_x \neq C$ et agit par inversion. Le groupe C contient une unique involution et donc par le Fait 4.3.2.4, G a les mêmes 2-Sylow que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

On remarque que $N_G(C) = C_G(i)$. Mais par le Fait 4.3.2.5, le groupe $C_G(i)/C_G(i)^\circ$ est d'exposant 2. Par la structure des 2-Sylow, $N_G(C) = C \rtimes \langle k \rangle$. \square

On remarque que dans ce cas $N_G(C) \setminus C$ est composé d'involutions agissant par inversion. En effet, $ckck = cc^{-1} = 1$; soit j une telle involution, on a $C^j = C$ et l'action est par inversion car $C_j \neq C$ (sinon, $C_C(j)^\circ \leq C_j$ et $C_j = C$ contiendrait deux involutions distinctes).

On peut déterminer de la même manière la structure des 2-Sylow pour les groupes de Frobenius connexes de type impair. En effet, le rang de Prüfer est égal à un (Proposition 4.3.2.1 et Fait 2.4.1.14).

Proposition 4.3.2.7. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe de type impair. Alors les 2-Sylow de G sont soit connexes, soit du type $SL_2(\mathbb{C})$

Démonstration. Soit S un 2-Sylow et S° sa composante connexe; on peut l'étendre à un tore décent maximal T . Il existe donc un conjugué C^g tel que $T \leq C^g$. On note i l'involution contenue dans C^g .

Soit $j \neq i$ une involution et C_j le conjugué de C qui la contient. Si j agissait par inversion sur S° alors j commuterait avec i . Par conséquent, $1 \neq i \in C_j$, contradiction. Donc les 2-Sylow ne sont pas du type $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, et on conclut par le Fait 4.3.2.4. \square

Pour les (QFI) de type impair, nous n'avons pas de contrôle sur le rang de Prüfer. Néanmoins, nous disposons d'un critère de scission valable pour tous les quasi-groupes de Frobenius de type impair.

Proposition 4.3.2.8. (à comparer avec le Lemme 11.21 de [BN94]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair tel qu'il existe un groupe A définissable connexe normal (infini) d'intersection triviale avec C . Alors il existe un groupe définissable connexe abélien A_1 tel que $G = A_1 \rtimes C$.

Démonstration. Soit $i \in C$, l'involution i agit par inversion sur A ; sinon, $C_A(i)^\circ \leq C$, contradiction. Le groupe A est donc abélien uniquement 2-divisible; si A contenait une involution j alors on aurait $A \leq C_j$ et donc $C_j = G$, contradiction.

On considère maintenant $C_G(A)^\circ$. On a bien $C_G(A)^\circ \cap C_i = \{1\}$; sinon, soit $1 \neq x \in C_G(A)^\circ \cap C_i$, alors $A \leq C_G(x)^\circ \leq C_i$, contradiction. L'involution i agit aussi par inversion sur $C_G(A)^\circ$, qui est donc abélien. On a de plus $C_G(C_G(A)^\circ)^\circ = C_G(A)^\circ$, quitte à remplacer A par $C_G(A)^\circ$, on peut supposer que $C_G(A)^\circ = A$.

Soit $g \in G$, alors $[i, g] \leq C_G(A)$. En effet, i et i^g agissent par inversion et $[i, g] = ii^g$. Par conséquent, $[i, G] \leq C_G(A)^\circ = A$. Soit $g \in G$, on considère $a = [i, g]$; puisque A est 2-divisible, il existe $a' \in A$ tel que $a = a'^2 = [i, a']$. Par conséquent, on a :

$$[i, ga'^{-1}] = ia'g^{-1}iga'^{-1} = a'^i[i, g]a'^{-1} = a'^{-1}a'^2a'^{-1} = 1.$$

On a donc $G = AC_G(i) = C_G(i)A$, mais $C_G(i) \cap A = \{1\}$ (sinon, A contiendrait un élément a tel que $a^i = a = a^{-1}$, *i.e.*, une involution, contradiction), par conséquent, $G = A \rtimes C_G(i)$. Finalement, on déduit que $C_G(i) = C_G(i)^\circ = C$ et donc $G = A \rtimes C$. \square

4.3.3 Le groupe de Weyl

Les quasi-groupes de Frobenius de type impair se distinguent en partie selon la structure de leur 2-torsion. Une autre façon de les analyser consiste à s'intéresser à $N_G(C)/C$, une forme de *groupe de Weyl*. En effet, pour un groupe algébrique réductif, le groupe de Weyl désigne $N_G(T)/C_G(T)$ où T est un tore (algébrique) maximal. Or, pour les groupes de Frobenius algébriques connexes, le complément de Frobenius est précisément un tore maximal. De même dans $\mathrm{PGL}_2(K)$ qui est l'exemple paradigmatique de groupe algébrique (QFP), le quasi-complément de Frobenius est un tore (algébrique) maximal.

En général dans le contexte rangé, plusieurs notions de groupes de Weyl peuvent être envisagées. Nous montrons que sous l'hypothèse supplémentaire que le quasi-complément de Frobenius est résoluble, elles coïncident toutes pour les quasi-groupes de Frobenius de type impair. Nos résultats s'inspirent largement de [ABF13] qui étudie les groupes de Weyl des groupes simples minimaux connexes rangés, *i.e.*, des groupes simples rangés tels que les sous-groupes définissables connexes propres sont résolubles.

Il nous faut d'abord décrire la structure des sous-groupes de Carter dans les quasi-groupes de Frobenius.

Lemme 4.3.3.1. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C résoluble. Alors C contient un sous-groupe de Carter généreux (pour G). De plus, un sous-groupe de Carter est soit généreux contenu dans un conjugué de C , soit il n'est pas généreux, intersecte trivialement C et ses conjugués, et il est produit de p -groupes unipotents.*

Démonstration. D'après le Fait 1.2.7.6, le groupe C contient un sous-groupe de Carter Q . Or d'après le Fait 1.2.7.6, les sous-groupes de Carter d'un groupe connexe résoluble sont auto-normalisants, conjugués, génériquement disjoints de leurs conjugués et généreux. Puisque C est généreux (et connexe), le groupe Q est un sous-groupe de Carter généreux de G (car $N_G(Q)^\circ = N_C(Q)^\circ = Q$). En particulier, tous les sous-groupes de Carter de C sont des sous-groupes de Carter généreux de G .

Si Q_1 est un sous-groupe de Carter généreux de G , alors $Q_1 \cap C$ (quitte à conjuguer C) est non-trivial. On a donc $Q_1 \leq C$ (il suffit de considérer le sous-groupe infini $Z(Q_1)^\circ$).

Inversement, si Q_1 est un sous-groupe de Carter qui intersecte C non-trivialement, alors $Q_1 \leq C$ et c'est un sous-groupe de Carter générique.

Si Q_1 intersecte trivialement C et ses conjugués, il ne contient pas de torsion divisible. Par le Fait 1.2.8.2, on peut donc supposer que $Q_1 = U_{0,1}(Q_1) * \dots * U_{0,RM(Q_1)}(Q_1) * U_3(Q_1) \times \dots \times U_{pmax}(Q_1)$. \square

Proposition 4.3.3.2. (à comparer avec [ABF13, Proposition 3.2]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Alors on a $N_G(C) = CN_G(T)$ où T est un tore décent maximal de C .

Si de plus, C est résoluble alors $W(G) = N_G(T)/C_G(T) \simeq N_G(Q)/Q \simeq N_G(C)/C$ où Q est un sous-groupe de Carter générique.

Démonstration. Soit T un tore décent maximal de C . On remarque que les tores décents maximaux sont conjugués (dans C). On applique un argument de Frattini au groupe $N_G(C)$: soit $n \in N_G(C)$, on a $T^n \leq C$ et par conjugaison des tores décents maximaux, il existe $c \in C$ tel que $c^{-1}n \in N_G(T)$, par conséquent $N_G(C) = CN_{N_G(C)}(T)$. Mais $N_G(T) \leq N_G(C)$, par conséquent $N_G(C) = CN_G(T)$

Supposons maintenant que C est résoluble. Soit Q un sous-groupe de Carter générique, quitte à conjuguer, on peut supposer que $T \leq Q \leq C$. On rappelle que les sous-groupes de Carter de C sont conjugués et autonormalisants. Un argument de Frattini appliqué à $N_G(C)$ nous donne : $N_G(C) = CN_G(Q)$ (car $N_{N_G(C)}(Q) = N_G(Q)$). Par conséquent, $N_G(C)/C \simeq N_G(Q)/(C \cap N_G(Q)) = N_G(Q)/Q$. De plus, $Q \leq C_G(T)$. Cette fois-ci un argument de Frattini appliqué à $N_G(T)$ nous donne $N_G(T) = C_G(T)N_G(Q)$ (car $N_G(Q) \leq N_G(T)$ puisque T est caractéristique dans Q). Puisque Q est autonormalisant dans $C_G(T)$, on a $N_G(T)/C_G(T) \simeq N_G(Q)/Q$. Finalement, $W(G) \simeq N_G(Q)/Q \simeq N_G(C)/C$. \square

Proposition 4.3.3.3. (à comparer avec [ABF13, Corollaire 3.4]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C résoluble. Alors pour un p -tore maximal non-trivial S , on a $N_G(S)/C_G(S) \simeq W(G)$.

Démonstration. Le groupe S est contenu dans un tore décent maximal $T \leq Q$ où Q est un sous-groupe de Carter générique (contenu dans C quitte à conjuguer). On a : $Q \leq C_G(S)^\circ = C_G(S) \leq C$. On applique un argument de Frattini à $N_G(S)$ pour obtenir $N_G(S) = C_G(S)N_{N_G(S)}(Q)$. Mais S est caractéristique dans Q , et donc $N_{N_G(S)}(Q) = N_G(Q)$. Par conséquent, $N_G(S)/C_G(S) \simeq N_G(Q)/N_G(Q) \cap C_G(S) \simeq N_G(Q)/Q$ (car Q est autonormalisant dans $C_G(S)$). \square

Corollaire 4.3.3.4. (à comparer avec [BC09, Corollaire 5.2]) Soit $C < G$ un (QFI) rangé de type impair avec C résoluble. Alors $W(G)$ n'est pas trivial. Soit p le plus petit diviseur premier (impair) de l'ordre de $W(G)$. Alors il existe $x \in N_G(T) \setminus C_G(T)$ un p -élément représentant un élément d'ordre p dans $W(G)$ tel que $C_G(x)^\circ$ contient un p -groupe unipotent.

Démonstration. On suit la démonstration de [BC09, Corollaire 5.2]. Supposons que pour tout p -élément x représentant un élément d'ordre p dans $W(G)$, le groupe $C_G(x)^\circ$ ne contient pas de p -groupe unipotent. Alors d'après le Fait 1.2.7.5, x appartient à un p -tore

T . De plus, par le Fait 1.2.7.5, il existe un p -élément toral y tel que $C_G(y)^\circ$ contient un p -groupe unipotent. Or, y est dans un conjugué de C et $C_G(y)^\circ \leq C$ est résoluble. En particulier, $U_p(C_G(y)^\circ) \neq \{1\}$. Par conjugaison des tores décents maximaux, on peut supposer que x et y appartiennent au même p -tore T . Par conséquent, $x \in T \leq C_G(y)$ et puisque les p -Sylow du groupe résoluble $C_G(y)^\circ$ s'écrivent comme produit central d'un p -tore et d'un p -groupe unipotent, on a $U_p(C_G(y)) \leq C_G(T) \leq C_G(x)^\circ$, contradiction. \square

Corollaire 4.3.3.5. *Soit $C < G$ un (QFI) rangé de type impair avec C résoluble. Alors le 2-rang de Prüfer est supérieur ou égal à deux.*

Démonstration. Supposons que le sous-groupe C contient un 2-tore maximal T_2 de rang de Prüfer égal à un. D'après la proposition 4.3.3.3, $N_G(T_2)/C_G(T_2) \simeq N_G(C)/C \neq \{1\}$. Or, d'après le Fait 29 de [DJ10], $Aut(T_2) \simeq Z_2^\times$ et le seul automorphisme d'ordre fini non-trivial est l'inversion. Le groupe $N_G(C)/C$ serait d'ordre 2, contradiction. \square

4.3.4 À la recherche d'un sous-groupe de Borel fortement standard

L'étude des involutions et des translations constitue un pan essentiel de l'analyse des groupes de type impair. A. Deloro et J. Wiscons montrent un résultat très important sur la situation des translations dans notre contexte :

Fait 4.3.4.1. [DW20, Théorème A] *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius de type impair. Alors $\bigcup_{g \in G} C^g$ ne contient pas toutes les translations.*

Remarque 4.3.4.2. *Si $C < G$ est un groupe de Frobenius connexe de type impair, aucune translation n'est contenue dans $\bigcup_{g \in G} C^g$: soit $x = ij \in C^g$, alors $i, j \in N_G(C^g) = C^g$, et donc $i = j$ (car le complément de Frobenius contient une unique involution).*

Sur la base de ce théorème, nous allons montrer l'existence d'un sous-groupe de Borel non-nilpotent qui intersecte C (quitte à conjuguer) dans une partie infinie mais qui n'est pas contenu dans C . Idéalement, on conjecture qu'un tel sous-groupe de Borel devrait contenir tout C .

Définition 4.3.4.3. *Soit B un sous-groupe de Borel d'un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair $C < G$. On dira que B est faiblement standard si B est non-nilpotent d'intersection infinie avec C mais n'est pas contenu dans C , standard si de plus $B \cap C$ contient une involution, et enfin fortement standard si B contient C .*

Autrement dit, nous allons montrer que G contient un sous-groupe de Borel faiblement standard. On utilise le terme "standard" car dans le cas d'un (QFP), nous cherchons à identifier un sous-groupe de Borel dont la structure est similaire à celle des sous-groupes de Borel de $PGL_2(K)$ à savoir isomorphes au groupe strictement 2-transitif $K^+ \rtimes K^\times$. Remarquons que dans $PGL_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe de Borel est généreux mais il n'est pas génériquement disjoint de ces conjugués. En effet, soient $B \neq B^g$ deux sous-groupes de Borel, ils s'intersectent dans un tore maximal T qui est auto-centralisant dans G (groupe réductif). Or, $C_B(T) = T$ est généreux dans B , par conséquent $RM(B \setminus \bigcup_{G/N_G(B)} B^g) < RM(B)$.

Pour les groupes de Frobenius connexes, nous cherchons plutôt à montrer qu'ils sont résolubles.

La question de l'existence d'un tel sous-groupe de Borel fortement standard est centrale dans la classification des groupes de type impair de petit rang de Prüfer : une réponse positive permettrait l'élimination de nombre de configurations pathologiques du point de vue de la conjecture d'algébricité. Dans notre perspective, nous remplaçons une hypothèse globale de minimalité sur le groupe (être minimal simple connexe ou bien N°) par une étude locale d'un groupe connexe résoluble au sein d'un quasi-groupe de Frobenius. Démontrer l'existence d'un sous-groupe de Borel fortement standard nous apparaît tout à fait hors de portée mais nous espérons mettre en exergue les conséquences structurelles induites par le fait d'être un quasi-groupe de Frobenius.

Tout d'abord, voici un lemme extrait de la démonstration du Théorème B de [DW20].

Lemme 4.3.4.4. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Soient x une translation et i une involution qui l'inverse. Si C est (x, i) -invariant alors $x \in \bigcup_G C^g$.*

Démonstration. On distingue deux cas :

a) Supposons que i inverse C . Soit $t \in T \leq C$ où T est un tore décent maximal, en calculant on obtient :

$$t^x = t^{-xi} = t^{-ix^{-1}} = t^{x^{-1}}$$

Par conséquent, x^2 centralise t et $x^2 \in C_G(T) \leq C$.

b) Supposons que i n'inverse pas C . Alors $C_C(i)^\circ \leq C_G(i)^\circ$ est infini. Mais $C_G(i)^\circ \leq C_i$. On a donc que $C \cap C_i \neq 1$ et puisque C est TI, $C = C_i$. Par conséquent, $i \in T \leq C$, en calculant on obtient (on remarque que x normalise C) :

$$x^{-1} = x^i = xi^xi \in xC$$

Par conséquent, $x^2 \in C$. On a donc montré qu'il existe un conjugué de C contenant x^2 .

Montrons maintenant que x appartient à $\bigcup_G C^g$. Si x est une involution, alors $x \in C_x$ et on conclut. On peut donc supposer que $1 \neq x^2 \in C$. Comme C est TI, on a donc $x \in N_G(C)$ (car $(x^2)^x = x^2$).

Si $N_G(C)/C$ est d'ordre impair alors $x \in C$. Sinon, par le Fait 4.3.2.6, $N_G(C) = C \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'involution agit par inversion et $N_G(C) \setminus C$ est composé d'involutions. Par conséquent, ou bien $x \in C$ ou bien x est une involution contenue dans un conjugué de C . \square

Le résultat suivant permet de caractériser les groupes abéliens inversés par des involutions.

Lemme 4.3.4.5. *Soit A un groupe définissable abélien 2-divisible inversé par deux involutions $i \neq j$. Soit $a \in A$, alors $a \in iI \cap jI$*

Démonstration. : Soit $a' \in A$. On obtient :

$$a'^2 = (a'^{-1})^i a' = ii^{a'} \in iI$$

Par 2-divisibilité de A , pour tout $a \in A$, il existe $a' \in A$ tel que $a = (a')^2 \in iI$. On raisonne de la même façon pour obtenir que $a \in jI$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

Théorème 4.3.4.6. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Alors il existe un groupe A définissable connexe abélien inversé par (au moins) deux involutions $i \neq j$ tel que $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$, et maximal pour ces propriétés. De plus, on a les propriétés suivantes :*

1. A est soit TI, soit normal.
2. $C_G(A)^\circ = A$.
3. A n'est pas presque-autonormalisant et $N_G(A)^\circ = N^\circ = A \rtimes (N^\circ \cap C)$.

Démonstration. Par le Fait 4.3.4.1, on trouve une translation $x = ij$ qui n'est pas contenue dans $\bigcup_G C^g$, pour deux involutions $i \neq j$. On considère $A = C_G(x)^\circ$ (qui est infini par le Fait 1.2.5.5). Remarquons qu'il s'agit d'un groupe (x, i, j) -invariant.

Supposons que le groupe (x, i) -invariant $C_A(i)^\circ$ est infini. On a donc $C_A(i)^\circ \leq C_G(i)^\circ \leq C_i$. Puisque C_i est TI, il est aussi (x, i) -invariant et on aurait $x \in \bigcup_G C^g$ (Lemme 4.3.4.4), contradiction.

Par conséquent, les groupes $C_A(i)$ et $C_A(j)$ sont finis et donc A est un groupe définissable connexe abélien inversé par i et j . De plus, $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$. ; le groupe A est en particulier uniquement 2-divisible.

Il existe donc un groupe définissable connexe abélien inversé par au moins deux involutions et d'intersection triviale avec les conjugués de C . On prend A maximal pour ces propriétés et on note $i \neq j$ deux involutions l'inversant. Si A n'est pas normal, supposons par l'absurde qu'il existe un conjugué $A' \neq A$ et soit $1 \neq x' \in A' \cap A$.

On a donc $x' \in iI \cap jI$ (Lemme 4.3.4.5). De plus, $A, A' \leq C_G(x')^\circ = A_1$. En raisonnant comme précédemment, on obtient que le groupe A_1 est abélien inversé par i et j (sinon, puisque A_1 est (x', i, j) -invariant, x' appartiendrait à $\bigcup_G C^g$ par le Lemme 4.3.4.4). Par ailleurs, $A_1 \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$ et donc par maximalité de A , on obtient que $A = A_1 = A'$ contradiction.

On considère $C_G(A)^\circ$, c'est un groupe (i, j) -invariant, inversé par i, j . De plus, $C_G(A)^\circ \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$. Par maximalité de A (et puisque A est abélien), on a $C_G(A)^\circ = A$

Si $N_G(A)^\circ = A$, alors le groupe A serait généreux et donc intersecterait un conjugué de C , contradiction. Le groupe A n'est donc pas presque-autonormalisant.

On note $N_G(A) = N$. Remarquons que $i, j, x \in N$. Si les groupes $C_N(i)$ et $C_N(j)$ étaient finis alors i, j inverseraient le groupe abélien N° . En particulier, $N^\circ = C_G(A)^\circ = A$, contradiction. On peut donc supposer que $C_N^\circ(i) \leq N \cap C_i$ est infini.

En considérant i^{N° , on raisonne comme dans la Proposition 4.3.2.8 pour obtenir que $N_G(A)^\circ = A \rtimes (C_i \cap N_G(A)^\circ)$. \square

Remarque 4.3.4.7. *Dans [CT21], les auteurs obtiennent un énoncé plus précis lorsqu'il s'agit d'un groupe de Frobenius.*

Si C est résoluble, pour obtenir un sous-groupe de Borel faiblement standard, il suffit de considérer un sous-groupe de Borel B contenant le groupe connexe résoluble N° . Le Lemme 4.3.1.3 nous permet de conclure que B est non-nilpotent et $B = B' \rtimes (B \cap C)$ (c'est un groupe de Frobenius scindé).

Remarque 4.3.4.8. *Dans un groupe strictement 2-transitif, on a $N_G(C_G(ij)) = C_G(ij) \rtimes N_C(C_G(ij)) = K^+ \rtimes K^\times$ (Théorème 2.2.1.9). Il s'agit en particulier d'un sous-groupe de Borel standard (car $C_G(ij) = iI \cap jI$, [BN94, Lemme 11.50]), et pour donc pour tout groupe B définissable connexe résoluble contenant $N_G(C_G(ij))$, on a $C_G(ij) = B'$.*

Remarque 4.3.4.9. *On rappelle qu'un sous-groupe de Borel faiblement standard B s'écrit sous la forme $B = B' \rtimes (B \cap C)$, avec $(B \cap C) \hookrightarrow K^\times$, pour un corps K . Par conséquent, si B contient un p -groupe unipotent alors sous l'hypothèse de l'infinité des p -nombres premiers de Mersenne, le Fait 1.2.7.3 nous permet de conclure que B est un sous-groupe de Borel standard.*

Considérons maintenant A le groupe obtenu dans le Théorème 4.3.4.6. Si $N_G(A)^\circ = N^\circ$ contient des involutions (en particulier, si N° contient un p -groupe unipotent et si on suppose qu'il n'existe pas de mauvais corps en caractéristique positive), alors nous obtenons un sous-groupe de Borel standard que l'on peut caractériser assez précisément.

Proposition 4.3.4.10. *Sous les mêmes hypothèses et notations que le Théorème 4.3.4.6, supposons de plus que $i, j \in N^\circ = A \rtimes (C_i \cap N^\circ)$ avec N° résoluble. Alors N° est un sous-groupe de Borel.*

Démonstration. Il existe un sous-groupe de Borel B tel que $N^\circ \leq B$. Le groupe B est un quasi-groupe de Frobenius résoluble et donc d'après le Lemme 4.3.1.3 et le Lemme 4.3.1.5, on a $B = B' \rtimes (B \cap C)$ et $B' = B \setminus \bigcup_B (C \cap B)^b$. Par conséquent, $A \leq B'$ et B' est définissable connexe abélien inversé par i et j (et intersecte trivialement C et ses conjugués). Par maximalité de A , on a donc $A = B'$. Par conséquent, $B = N_G(A)^\circ$. \square

Pour un tel sous-groupe de Borel standard, il nous est dès lors possible de déterminer les intersections avec ses conjugués d'une façon qui rappelle ce qui se passe par exemple dans les N° -groupes (voir [DJ10]).

Proposition 4.3.4.11. *Sous les mêmes hypothèses et notations que le Théorème 4.3.4.6, supposons de plus que $N^\circ = B$ est un sous-groupe de Borel standard et que C est résoluble. Pour $B \neq B^g$, on note $I_g = (B \cap B^g)^\circ$. Alors l'un des deux cas suivants se produit :*

1. I_g est trivial, i.e., $B \cap B^g$ est fini.
2. I_g est un tore, i.e., un groupe définissable abélien divisible.

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que G n'est pas résoluble. Supposons que $I_g = (B \cap B^g)^\circ$ est non-trivial. Si $I_g \cap C$ n'est pas trivial (quitte à conjuguer C), par le Lemme 4.3.1.1, on sait que cette intersection est infinie. Supposons que $I_g \neq (I_g \cap C)$. Par le Lemme 4.3.1.3, on a : $I_g = F(I_g)^\circ \rtimes (C \cap I_g)$. Le groupe $F(I_g)^\circ$ est contenu dans $F(B)^\circ \cap F(B^g)^\circ$ (Lemme 4.3.1.5). Mais d'après le Théorème 4.3.4.6, on a $F(B)^\circ = F(B^g)^\circ$ (par la propriété TI).

On considère désormais $N_G(F(B))^\circ$ qui contient B et B^g . C'est un quasi-groupe

de Frobenius de type impair. Par la proposition 4.3.2.8, le groupe est scindé et donc résoluble. On a donc $B = B^g$, contradiction.

Si $I_g \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$ alors $I_g \leq F(B)^\circ \cap F(B^g)^\circ$ et on raisonne comme au paragraphe précédent.

On a donc $I_g \leq C \cap (B \cap B^g)$ (quitte à conjuguer). Mais le groupe $C \cap B$ est un quasi-complément de Frobenius dans B et donc $I_g \leq K^\times$. Il s'agit bien d'un tore. \square

Comment obtenir un sous-groupe de Borel fortement standard? Dans [FJ08], les auteurs considèrent plusieurs conjectures de généralité, notamment la *générosité des sous-groupes de Borel* (GB) et la *générosité des sous-groupes de Carter* (GC) (dans le deuxième cas, par [Jal06], cela implique la conjugaison des sous-groupes de Carter). On peut envisager ces hypothèses de généralité comme la reformulation dans le contexte rangé d'hypothèses topologiques de densité.

L'hypothèse (GB) est suffisante pour démontrer que nous avons des sous-groupes de Borel fortement standards si le quasi-complément de Frobenius est abélien et même nilpotent (modulo l'hypothèse (PT), voir p. 18). Remarquons que O.Frécon a montré dans [Fre08] que les groupes simples minimaux connexes satisfont (GC). Néanmoins, les configurations pathologiques de petit rang de Prüfer ont des sous-groupes de Borel non-généreux (voir [Del07] et [DJ16]).

Lemme 4.3.4.12. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C abélien ou bien C nilpotent (sous l'hypothèse (PT)). Soit B un sous-groupe de Borel faiblement standard. Alors si B est généreux, on obtient que $C \leq B$.*

Démonstration. Par le Lemme 4.3.1.3, $B = B' \rtimes (B \cap C)$. Notons que $B \cap C$ est un groupe abélien divisible (car il se plonge dans K^\times pour un corps définissable K). Si la caractéristique est positive, c'est un bon tore, en particulier c'est un groupe central dans C . Si la caractéristique est nulle, alors, par hypothèse, c'est un pseudo-tore, central dans C également.

On remarque que $B \cap C$ est généreux dans B . Or, puisque B est généreux (dans G) et presque-autonormalisant, il existe une partie définissable générique X tel que pour tout $x \in X$, l'élément x est contenu dans un nombre fini de conjugués de B (Fait 1.2.1.1).

Par connexité de B , il existe $1 \neq c \in C \cap X$ (quitte à conjuguer). Mais c est central dans C , par conséquent $c \in B \cap B^{c'}$ pour $c' \in C$.

Le groupe $C \cap N_G(B)$ est donc générique dans C et par connexité de C , on obtient que $C \leq N_G(B)^\circ = B$. \square

Pour conclure cette section, donnons un critère pour déterminer la généralité d'un sous-groupe de Borel standard.

Lemme 4.3.4.13. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Soit B un sous-groupe de Borel standard. Si toutes les intersections $B \cap B^g$ sont finies alors B est généreux.*

Démonstration. On considère la famille uniformément définissable $\{B \cap B^g : g \in G\}$. Si tous les membres de cette famille sont finis alors il existe une borne n pour leur

cardinalité (Axiome D).

Or, B ne peut pas être génériquement d'exposant n . Sinon, B satisferait génériquement une équation du type $x^{n'} = 1$. Mais d'après la proposition IV 4.16 de [ABC08], $O_2(B)$ (le 2-groupe normal maximal, *a priori* non-définissable) serait unipotent et donc trivial, et $B/O_2(B) = B$ serait sans involutions, contradiction.

Le groupe B est donc génériquement disjoint de ses conjugués et puisque il est presque-autonormalisant, on peut conclure que B est génèreux par le Fait 1.2.1.1. \square

4.3.5 Théorèmes de classification

Nous pouvons maintenant démontrer nos deux théorèmes de classification :

Théorème 4.3.5.1. *Les (QFP) rangés de type impair tels que les sous-groupes de Borel sont génèreux (ou bien qui contiennent un sous-groupe de Borel fortement standard) sont isomorphes à $PGL_2(K)$ pour un corps K (rangé) algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

Théorème 4.3.5.2. *Les groupes de Frobenius connexes rangés de type impair avec complément abélien (respectivement, nilpotent satisfaisant (PT)) tels que les sous-groupes de Borel sont génèreux (ou bien qui contiennent un sous-groupe de Borel fortement standard) sont résolubles et scindés.*

Nous formulerons certains lemmes intermédiaires sous l'hypothèse de l'existence d'un sous-groupe de Borel faiblement standard (ou standard). Nous souhaitons dans la mesure du possible éviter d'utiliser toute la force de l'hypothèse de l'existence d'un sous-groupe de Borel fortement standard.

Pour les (QFP), nous savons que le quasi-complément de Frobenius est abélien. Néanmoins, comme indiqué précédemment, il pourrait s'agir d'un sous-groupe de Borel (une situation fortement non-algébrique). On retrouve là l'un des contre-exemples (C_{20}) minimaux potentiels à la Conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes de petit rang de Prüfer (voir [DJ16]). Une résolution complète de la conjecture A_1 de [DW20] permettrait donc l'élimination de cette configuration pathologique.

L'identification de $PGL_2(K)$ se fait *via* l'existence d'une (B, N) -paire scindée spéciale de rang 1. Dans tout groupe algébrique réductif, un sous-groupe de Borel B et $N_G(T)$ où T est un tore maximal contenu dans B forment une (B, N) -paire. Le rang de la (B, N) -paire correspond au nombre d'involutions qui engendrent le groupe $N/B \cap N$. Plus spécifiquement, dans $PGL_2(K)$, une telle (B, N) -paire est scindée de rang 1 (on a en effet $B = B_u \rtimes T$ où B_u est le radical unipotent et T le tore algébrique maximal). De plus, dans ce cas, un tore maximal T est un groupe TI presque-autonormalisant tel que $N_G(T)/T$ est d'exposant 2.

Nous nous inspirons de la stratégie employée dans [DJ16] (voir en particulier la Proposition 3). Nous renvoyons également à [Del07].

Une (B, N) -paire scindée spéciale de rang 1 est un quadruplet de groupes $B, N, H = N \cap B$ avec H normal dans N et U un groupe nilpotent, qui satisfait les axiomes suivants :

1. $G = \langle B, N \rangle$.

2. $[N : H] = 2$.
3. Pour tout $k \in N \setminus H$, on a $H = B \cap B^k$, $G = B \cup BkB$, et $B^k \neq B$.
4. $B = U \rtimes H$.

Les deux théorèmes suivants permettent d'identifier des groupes algébriques *via* des (B, N) -paires dans le contexte rangé.

Fait 4.3.5.3. (adapté de [DMT08, Théorème 2.1]) *Dans un univers rangé, soit (B, N, U, H) une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1 tel que U est divisible sans torsion. Alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$.*

Fait 4.3.5.4. (adapté de [Wis11, Théorème 1.2]) *Dans un univers rangé, soit (B, N, U, H) une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1. Supposons que de plus U contient un élément d'ordre $p > 2$. Soient $L = \bigcap_G B^g$ et $M = \langle U^g : g \in G \rangle L$; si $H \neq L$ et si $(H \cap M)/L$ ne contient pas de p -groupe abélien élémentaire, alors $G/L \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$.*

Rappelons que dans un quasi-groupe de Frobenius résoluble B , on a $B' = F(B)^\circ$. De plus, le rang de Prüfer d'un (QFP) ou d'un groupe de Frobenius connexe de type impair est égal à un.

Lemme 4.3.5.5. *Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair tel qu'il existe un sous-groupe de Borel fortement standard B , i.e., $B = B' \rtimes C_i$. Alors $B^k \neq B$ pour tout $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$. De plus, B est autonormalisant.*

Si $C < G$ est un groupe de Frobenius connexe de type impair et sous les mêmes hypothèses autrement, B est autonormalisant.

Démonstration. On rappelle que si G est un (QFP) alors $N_G(C_i) \setminus C_i$ consiste d'involutions (voir Fait 4.3.2.6).

Soit $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ une involution. Supposons par l'absurde que $B^k = B$. Le groupe $C_B(k)^\circ$ est infini (sinon B serait abélien). D'après, le Lemme 4.3.1.1, $C_k \leq B$ et donc $k \in B$. Mais d'après le Corollaire 4.3.1.3, B est un groupe de Frobenius et donc $k \in C_i$, contradiction.

Montrons maintenant que B est autonormalisant. Soit $g \in N_G(B) \setminus B$, le groupe C_i^g est un quasi-complément de Frobenius de B et par le Lemme 4.3.1.1, il existe $b \in B$ tel que $C_i^{gb^{-1}} = C_i$. On a : $g \in B$ ssi $gb^{-1} \in B$. On peut donc supposer que $g \in N_G(C_i)$, si $g \in C_i$ alors on conclut, sinon g est une involution normalisant C_i et B , le paragraphe précédent montre qu'alors $g = i \in C_i$.

Si $C_i < G$ est un groupe de Frobenius alors en raisonnant comme dans le paragraphe précédent, il existe un $b \in B$ tel que $C_i^{gb^{-1}} = C_i$, mais $gb^{-1} \in N_G(C_i) = C_i$ et par conséquent $g \in B$. Le groupe B est bien autonormalisant. \square

Lemme 4.3.5.6. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair avec C résoluble (et de rang de Prüfer égal à un). Soit B un sous-groupe de Borel standard, i.e., $B = B' \rtimes (B \cap C_i)$ avec $i \in B$. Supposons de plus que $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$.*

Soit $T_B(k) = \{b \in B : b^{-1} = b^k\}$ où k est une involution ne normalisant pas B . Alors ou bien G est résoluble ou bien $i^G \setminus N_G(B)$ et

$$K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : \mathrm{RM}(T_B(k)) \geq \mathrm{RM}(B) - \mathrm{RM}(C_G(i))\}$$

sont génériques dans i^G .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le Corollaire 4.3.3.5, le groupe $C < G$ ne peut pas être un (QFI).

Les involutions de G forment une classe de conjugaison i^G . Par hypothèse, $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$. Supposons que $i^G \setminus N_G(B)$ n'est pas générique dans i^G , i.e., $i^G \cap N_G(B) = i^G \cap B$ est large dans i^G . Le groupe $N = \bigcap_G B^g = \bigcap_{1 \leq i \leq n} B^{g_i}$ est un groupe définissable normal contenant toutes les involutions (car $i^G \setminus \bigcup_G B^g = i^G \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} B^{g_i}$ est non-générique); c'est en particulier un sous-groupe infini.

Si $H = C \cap N^\circ$ est trivial, alors par la Proposition 4.3.2.8, $G = A \rtimes C$ pour un sous-groupe définissable abélien A et G est résoluble. On peut donc supposer que H est non-trivial.

Le groupe N° est i -invariant. Si $C_{N^\circ}(i)$ était fini alors N° serait abélien. Mais il existerait $1 \neq h \in H$ et donc on aurait $N^\circ \leq C_G(h)^\circ \leq C_i$, contradiction. On peut donc supposer que H est infini.

Le groupe $H < N^\circ$ est donc un quasi-groupe de Frobenius; mais pour tout $g \in G$, il existe $n \in N^\circ$ tel que $H^g = H^n$. Par conséquent, $G = N^\circ$. $N_G(H)$.

Mais $N_G(H) \leq N_G(C)$. Or, $N_G(C)$ est résoluble. Le groupe G est donc résoluble.

Supposons maintenant que $i^G \setminus N_G(B)$ est générique dans i^G . Dans la suite, nous reprenons la démonstration de la Proposition 2 de [DJ16] pour obtenir que

$$K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$$

est aussi générique dans i^G .

On considère la fonction définissable $\phi : i^G \setminus N_G(B) \rightarrow G/B$ qui envoie k sur sa classe kB .

Le domaine est de rang $RM(i^G) = RM(G) - RM(C_G(i))$ et l'image de rang au plus $RM(G) - RM(B)$. La fibre $\phi^{-1}(\phi(k))$ pour k générique dans i^G est donc de rang au moins $RM(B) - RM(C_G(i))$. Mais si k et j appartiennent à la même fibre, on a $jB = kB$ et donc $kj \in T_B(k)$.

Par conséquent, pour k une involution générique, on a

$$RM(T_B(k)) \geq RM(\phi^{-1}\phi(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i)).$$

□

Remarque 4.3.5.7. *Les hypothèses du lemme précédent sont en particulier satisfaites si B est fortement standard. En effet, d'après le Lemme 4.3.5.5, on a $N_G(B) = B$.*

Lemme 4.3.5.8. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair avec C résoluble (et de rang de Prüfer égal à un). Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel fortement standard $B = B' \rtimes C$. Supposons de plus que $i^G \setminus B$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G . Alors pour toute involution $k \in K_B$, le groupe $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est un conjugué de C contenant une involution j_k .*

Démonstration. Comme précédemment, le groupe $C < G$ ne peut pas être un (QFI). On a tout d'abord $RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i)) = RM(F(B))$. On remarque que $T_B(k) \subseteq (B \cap B^k)$ et donc $RM(I_k) \geq RM(F(B)^\circ)$. Le groupe I_k est k -invariant. Supposons que $C_{I_k}(k)^\circ \leq C_k$ est infini : le groupe $B \cap C_k$ est un quasi-complément de Frobenius de B donc conjugué à C et finalement $C_k \leq B$, contradiction.

Le groupe I_k est donc abélien inversé par k . Par le Fait 1.2.8.2,

$$I_k = d(T) * U_{0,1}(I_k) * \dots * U_0(I_k) * [U_3(I_k) \times \dots \times U_{pmax}(I_k)]$$

On remarque qu'un $U_{0,k}$ -Sylow de I_k s'étend en un $U_{0,k}$ -Sylow de B (et de B^k). Or, d'après le Lemme 4.3.1.7, les $U_{0,k}$ -Sylow de B sont soit contenus dans B' soit contenus dans un conjugué de C (de même pour B^k). De plus, $d(T)$ s'étend en un tore décent maximal et il est donc contenu dans un conjugué de C .

Montrons d'abord que $d(T) \neq \{1\}$ ou bien $U_{0,k}(I_k) \neq \{1\}$ pour un $U_{0,k}$ -groupe contenu dans C .

Supposons par l'absurde que :

$$I_k = U_{0,1}(I_k) * \dots * U_0(I_k) * [U_3(I_k) \times \dots \times U_{pmax}(I_k)] \leq B'$$

Les ρ -groupes qui apparaissent sont contenus dans $B' \cap (B^k)'$ et donc $I_k \leq B' \cap (B^k)'$. Puisque k agit par inversion et $RM(T_k(B)) \geq RM(B')$, on a $B' = (B^k)'$.

On considère $N_G(B')^\circ$ qui contient B et B^k . Mais alors $N_G(B')^\circ$ est un quasi-groupe de Frobenius contenant un groupe définissable connexe normal B' d'intersection triviale avec C_i et donc par la Proposition 4.3.2.8, $N_G(B')^\circ = A \rtimes C_i$ où A est abélien. Le groupe $N_G(B')^\circ$ est définissable connexe résoluble et contient B et B^k , contradiction (car k ne normalise pas B).

Le groupe abélien I_k est donc contenu dans conjugué C_{j_k} qui intersecte B et B^k (l'intersection définit un quasi-complément de Frobenius dans B et B^k). Par conséquent, $C_{j_k} \leq B^k \cap B$ et donc $C_{j_k} = I_k$. \square

Corollaire 4.3.5.9. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé de type impair. Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel standard $B = B' \rtimes C$. Alors G est résoluble et donc scindé.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.3.5.6, ou bien G est résoluble ou bien $i^G \setminus N_G(B)$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G .

On peut donc supposer que nous sommes dans le deuxième cas. Mais d'après le Lemme 4.3.5.8, pour $k \in K_B$, le groupe $(B \cap B^k)^\circ = I_k$ est un conjugué de C . Mais on a alors $k \in N_G(I_k)$ et donc $k \in I_k \leq B$, contradiction car k ne normalise pas B .

Le groupe $C < G$ est donc résoluble et on conclut par la Proposition 4.3.1.3 \square

Corollaire 4.3.5.10. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé de type impair tel que C est résoluble et les sous-groupes de Borel de G sont conjugués (respectivement, les sous-groupes de Borel sont généreux et C est nilpotent et satisfait (PT) ou bien est abélien). Alors G est résoluble et scindé.*

Démonstration. : D'après la Proposition 4.3.4.6, il existe un sous-groupe de Borel B faiblement standard. Supposons que C est un sous-groupe de Borel alors par hypothèse B serait un conjugué de C , contradiction (une translation ne peut pas être contenue dans un conjugué de C). Le groupe C est contenu strictement dans un sous-groupe de Borel et on conclut par le Corollaire 4.3.5.9

Si C est nilpotent et satisfait l'hypothèse (PT) (ou bien si c'est un groupe abélien) et si B est généreux, alors par le Lemme 4.3.4.12, on a donc $C \leq B$. Nous pouvons conclure comme précédemment. \square

Remarque 4.3.5.11. Dans [CT21], T. Clausen et K. Tent aboutissent également à un résultat de classification des groupes de Frobenius connexes de type impair avec complément nilpotent. Ils font l'hypothèse de l'absence de mauvais corps en caractéristique nulle.

Si nous identifions $N_G(A)^\circ = N^\circ$ à un sous-groupe de Borel, où A est le groupe obtenu au Théorème 4.3.4.6 (en présence d'involutions par exemple), il nous est possible de donner une version plus spécialisée du Lemme 4.3.5.8. Nous pourrions ainsi analyser plus précisément certains groupes de Frobenius, en particulier les groupes strictement 2-transitifs.

Lemme 4.3.5.12. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe de type impair tel que $B = N^\circ$ est un sous-groupe de Borel (standard) et C est résoluble. Alors l'une des deux possibilités suivantes se produit :

1. G est résoluble.
2. $T_B(k)$ est fini, pour $k \in K_B$; de même que $B \cap B^k$.

Si de plus, si $RM(B) > RM(C)$ alors G est résoluble.

Démonstration. On obtient que $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$: soit $j \in N_G(B)$, alors $C_B(j)^\circ \leq C_j \cap B$ est infini et donc $C_j \cap B$ est un complément de Frobenius dans B ; ce sous-groupe est donc conjugué à $B \cap C_i$. Il contient l'involution j (la seule involution de C_j).

D'après le Lemme 4.3.5.6, si G n'est pas résoluble, alors $i^G \setminus N_G(B)$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : T_B(k) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G .

Supposons que $T_B(k)$ est infini pour $k \in K_B$. Le groupe $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est abélien inversé par k : sinon, $C_B(k)^\circ = B \cap C_k$ est infini et en raisonnant comme précédemment on obtient que $k \in B$, contradiction.

Puisque par hypothèse, on a $N^\circ = B$, d'après la Proposition 4.3.4.11, $I_k \leq C$ (quitte à conjuguer). Donc par k -invariance, on a $I_k \leq C_k$ et donc $B \cap C_k$ est un quasi-complément de Frobenius dans B et en raisonnant comme précédemment on obtient que $k \in B$, contradiction.

Si $RM(B) > RM(C)$, alors $RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C) > 0$ et donc G est résoluble. \square

Corollaire 4.3.5.13. Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif rangé de type impair et soit $B = N_G(C_G(ij))$ pour deux involutions $i \neq j$. Alors l'un des deux cas suivants

se produit :

1. G est résoluble et donc scindé.
2. Pour $k \in K_B(k)$, $T_B(k)$ et l'intersection $B^k \cap B$ sont finis.

Démonstration. On remarque que G est un groupe de Frobenius connexe. Soient $i \neq j$ deux involutions. Le groupe $N_G(C_G(ij)) = C_G(ij) \rtimes (N_C(C_G(ij)))$ est un groupe strictement 2-transitif par la Proposition 11.51 de [BN94]. Mais le Théorème 2.2.1.9 nous donne : $N_G(C_G(ij)) = K^+ \rtimes K^\times$, pour K un corps interprétable algébriquement clos. Le groupe $N_G(C_G(ij))$ est le sous-groupe de Borel standard que l'on cherche. Il nous suffit donc d'appliquer le théorème précédent. \square

Nous pouvons désormais compléter la suite des lemmes précédents pour identifier $\mathrm{PGL}_2(K)$ parmi les (QFP).

Lemme 4.3.5.14. *Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair. Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel fortement standard, $B = B' \rtimes C_i$.*

De plus, supposons que $i^G \setminus B$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G et que d'autre part pour tout involution $k \in K_B$, $I_k = (B \cap B^k)$ est un conjugué de C contenant une involution j_k .

Alors pour tout $g \in G \setminus B$, on a $G = B \cup BgB$ et donc G est un groupe 2-transitif (pour l'action sur G/B).

Démonstration. On rappelle que par le Lemme 4.3.5.5, le groupe B est autonormalisant.

On remarque de plus que $RM(T_B(k)) = RM(I_k) \geq RM(B) - RM(C_i) = RM(B')$. Mais $I_k < B$ est un quasi-groupe de Frobenius et par conséquent on peut interpréter un corps K tel que $RM(B') \geq RM(K^+) = RM(K^\times) \geq RM(I_k)$ et donc $RM(B') = RM(I_k) = RM(C_i)$. Cette égalité est vraie pour les conjugués de B et les conjugués de C qui y sont contenus. En particulier, B' est soit un groupe abélien divisible sans torsion soit un p -groupe abélien élémentaire.

Il existe une fonction définissable de K_B vers i^B qui à chaque $k \in K_B$ associe l'unique involution j_k de I_k . De plus, si $j_k = j_l$ alors $B \cap B^l = B \cap B^k$ et donc l normalise le conjugué $C_{j_k} = I_k$, i.e., $l \in C_G(j_k)$. Les fibres sont de rang $RM(C_G(i))$. On a donc :

$$\begin{aligned} RM(G) - RM(C_G(i)) &= RM(i^G) = RM(K_B) \leq RM(i^B) + RM(C_G(i)) \\ &= RM(i^B) + RM(C_B(i)) = RM(B) \end{aligned}$$

Finalement, $RM(G) \leq RM(B) + RM(C_i) = RM(B) + RM(B')$.

Soit $g \in G \setminus B$. On considère $X = (C_i \cap B^g)^\circ$

Supposons que X n'est pas trivial; on aurait $X = C_i$ (TI et conjugaison des quasi-compléments de Frobenius). On note $I_g = (B \cap B^g)^\circ$. Si $I_g = C_i$ alors $B' \cap B^g$ est fini. Sinon, $C_i < I_g$ est un quasi-groupe de Frobenius résoluble (non-nilpotent). D'après le Lemme 4.3.1.3, on a $I_g = I'_g \rtimes C_i$. D'après le Fait 4.3.1.5, on a $I'_g \leq B' \cap (B^g)'$ et comme ces groupes sont abéliens, on a $B', (B^g)' \leq N_G(I'_g)^\circ$. Mais on a aussi $C_i \leq N_G(I'_g)^\circ$ et

donc $B, B^g \leq N_G(I'_g)^\circ$. Finalement par la Proposition 4.3.2.8, on déduit que $N_G(I'_g)^\circ$ est résoluble et donc $B = N_G(I'_g)^\circ = B^g$, contradiction.

Par conséquent, ou bien $(B' \cap B^g)^\circ$ ou bien $(C_i \cap B^g)^\circ$ est trivial. Les fibres de l'application de $B' \times B$ (respectivement $C_i \times B$) vers $B'gB$ (respectivement $C_i gB$) qui à (f, b) associe fgb (respectivement qui à (t, b) associe tgb) sont finies. On a donc $RM(B'gB) = RM(G)$ (respectivement $RM(C_i gB) = RM(G)$). Dans les deux cas la double classe BgB est générique.

Par conséquent, pour tous $g, g' \in G \setminus B$, les doubles classes BgB et $Bg'B$ sont génériques dans G et donc par connexité de G , $g \in Bg'B$. On a donc $G = B \cup Bg'B$. Le groupe G est donc 2-transitif pour l'action de G sur G/B . \square

Remarque 4.3.5.15. *Le calcul de rang mis en oeuvre dans la démonstration précédente utilise pleinement l'hypothèse de l'existence d'un sous-groupe de Borel fortement standard.*

On peut désormais conclure la démonstration du Théorème 4.3.5.1

Démonstration. D'après le Fait 4.3.2.6, le groupe C est connexe abélien et contient une unique involution i . Il existe un sous-groupe de Borel B qui contient strictement C_i , *i.e.*, un sous-groupe de Borel fortement standard. En effet, d'après le Théorème 4.3.4.6, il existe un sous-groupe de Borel B faiblement standard et puisque, par hypothèse, B est généreux, le Lemme 4.3.4.12 montre que B est en fait un sous-groupe de Borel fortement standard.

Nous allons montrer que $(B, N_G(C_i))$ induit une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1.

D'après le Lemme 4.3.5.5, pour tout $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$, $B^k \neq B$. De plus, B est autonormalisant.

Soit $T_B(k) = \{b \in B : b^{-1} = b^k\}$ où k est une involution ne normalisant pas B . D'après le Lemme 4.3.5.6, l'ensemble $K_B = \{k \in N_G(B) \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ est générique dans i^G .

On a bien $B \cap N_G(C_i) = C_i$ car $C_i < B$ est un groupe de Frobenius connexe. On a donc $[N_G(C_i) : (N_G(C_i) \cap B)] = 2$ (car $N_G(C_i)/C_i$ est d'exposant 2, Fait 4.3.2.6). De plus, pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$, $C_i \leq B \cap B^k$ et $(B \cap B^k) = C_i$ (car $(B \cap B^k)^\circ$ est abélien inversé par k et $N_B(C_i) = C_i$). Par ailleurs, $B = B' \rtimes C_i$ où B' est abélien. On a donc vérifié l'axiome 4, l'axiome 2 et une partie de l'axiome 3.

Soit $k \in K_B$, alors d'après le Lemme 4.3.5.8, $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est un conjugué de C_i contenant une involution j_k .

Finalement par le Lemme 4.3.5.14, on obtient :
 $G = B \cup BkB$ pour tout $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ et $G = \langle B, N \rangle$.

On a donc montré que $(B, N_G(C_i), C_i, B')$ forme une BN -paire (définissable) scindée

spéciale de rang 1.

Or, $\bigcap_{g \in G} B^g$ est trivial. En effet, on a $B \cap B^k = C_i$ pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ et donc $\bigcap_{g \in G} B^g \leq C_i$. Par la propriété TI, $G = N_G(\bigcap_{g \in G} B^g)^\circ \leq N_G(C_i)^\circ = C_i$.

Si B' est un p -groupe abélien élémentaire, alors en remarquant que $U_p(C_i) = \{1\}$ (on peut interpréter un corps K tel que $C_i \leq K^\times$) on applique le Fait 4.3.5.4 et on a $G / \bigcap_{g \in G} B^g \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$ et donc $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$.

Sinon, B' est abélien divisible sans torsion et on applique le Fait 4.3.5.3. Dans les deux cas, on obtient $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$. \square

En guise de conclusion, notons que tout l'enjeu est de montrer que le sous-groupe de Borel faiblement standard est un sous-groupe de Borel fortement standard. Il s'agit d'un problème difficile dont la résolution nous semble hors de portée pour le moment. Cependant, nous espérons que les résultats présentés dans ce chapitre seront susceptibles de motiver une approche inductive de cette question, au moins en caractéristique positive (où l'existence de mauvais corps est improbable).

Chapitre 5

Quasi-groupes de Frobenius définissablement linéaires rangés

Dans ce chapitre, nous travaillons la plupart du temps avec une hypothèse plus restrictive que le fait d'être rangé en considérant les *groupes définissablement linéaires rangés* (on dira également groupes définissablement linéaires sur un corps rangé), *i.e.*, les groupes définissables dans un corps rangé K (potentiellement avec une structure additionnelle) que l'on peut plonger dans $\mathrm{GL}_n(K)$ pour un certain $n \geq 1$. Remarquons que les groupes algébriques (affines) sur un corps algébriquement clos sont des exemples de groupes définissablement linéaires rangés. La conjecture de Cherlin-Zilber a été établie pour les groupes simples définissablement linéaires rangés en caractéristique positive. On dira quelques mots sur la structure d'un contre-exemple hypothétique pour la caractéristique nulle.

Nous reprendrons ensuite à nouveaux frais notre projet de classification des quasi-groupes de Frobenius dans ce contexte. L'analyse des groupes définissablement linéaires rangés nous donnera également de précieuses informations sur les quasi-groupes de Frobenius rangés scindés de type impair.

5.1 Propriétés des groupes définissablement linéaires rangés

5.1.1 Rappels sur les groupes définissablement linéaires rangés

L'étude des groupes définissablement linéaires rangés a été initiée par B. Poizat puis prolongée par Y. Mustafin.

Pour un sous-groupe $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$, on note \overline{G} sa clôture de Zariski, *i.e.*, le plus petit sous-groupe fermé qui contient G .

On rappelle qu'un élément *semi-simple* est un élément diagonalisable de $M_n(K)$. Un élément *unipotent* u est un endomorphisme linéaire qui s'écrit comme la somme de l'identité et d'un endomorphisme nilpotent (c'est équivalent au fait d'avoir 1 comme unique valeur propre). Les unipotents de $\mathrm{GL}_n(K)$ forment un fermé défini par l'équation $(x - \mathrm{Id})^n = 0$ (en caractéristique $p > 0$, les unipotents sont exactement les p -éléments).

Fait 5.1.1.1. [Mus04, Lemme 1.2] Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé et H un sous-groupe normal définissable relativement Zariski-clos dans G ,

i.e., $\overline{H} \cap G = H$. Alors G/H est canoniquement isomorphe à un sous-groupe du groupe algébrique $\overline{G}/\overline{H}$; de plus G/H est définissablement isomorphe à un groupe linéaire.

Définition 5.1.1.2. Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps K rangé de caractéristique nulle. On désigne par G_U le groupe engendré par tous les éléments unipotents de G .

Fait 5.1.1.3. [Mus04, Lemme 1.7] Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps K rangé de caractéristique nulle. Alors G_U est un sous-groupe fermé.

La décomposition de Jordan reste valable pour les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé.

Fait 5.1.1.4. [Mus04, Proposition 1.11] Soit $G \leq GL_n(K)$ un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé K .

1. Tout élément g de G s'écrit de façon unique comme produit d'un élément unipotent g_u et d'un élément semi-simple g_s qui commutent.
2. Si $gh = hg$ alors $(gh)_s = g_s h_s$ et $(gh)_u = g_u h_u$.
3. Si $g \in G$, alors $g_s \in G$ et $g_u \in G$.
4. Soit A un sous-groupe abélien définissable de G , alors $A_u = \{g \in A : g = g_u\}$ et $A_s = \{g \in A : g = g_s\}$ sont des sous-groupes définissables. De plus, $A = A_s \times A_u$.
5. Soit $f : G \rightarrow GL_m(K)$ un homomorphisme définissable. Alors $f(g_u) = f(g)_u$ et $f(g_s) = f(g)_s$.

On dispose d'une notion de tore (linéaire) qui généralise celle de tore algébrique.

Fait 5.1.1.5. [Mus04, Lemme 1.12] Soit G un groupe définissablement linéaire rangé. Un sous-groupe définissable T est un tore linéaire, i.e., un sous-groupe définissable connexe diagonalisable (abélien) si et seulement si T est un groupe abélien divisible sans unipotents.

Fait 5.1.1.6. [Mus04, Proposition 1.15] Soit G un groupe définissablement linéaire rangé et soit T un tore linéaire. Alors $C_G(T)$ est d'indice fini dans $N_G(T)$.

Définition 5.1.1.7. Soit G un groupe définissablement linéaire. On désigne par G_T le groupe engendré par les tores linéaires maximaux (définissable par le théorème des indécomposables).

Fait 5.1.1.8. [Mus04, Lemme 1.19] Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé K et soit F une extension élémentaire de K . Alors $(G_T^F) = (G_T)^F$, en particulier G est engendré par ses tores linéaires si et seulement si G^F est engendré par ses tores linéaires.

Fait 5.1.1.9. Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé K et soit $f : G \rightarrow GL_n(K)$ un homomorphisme définissable. Alors $f(G_T) = (f(G))_T$.

On cite un théorème sur le relèvement des tores linéaires maximaux.

Fait 5.1.1.10. [Mus04, Corollaire 2.17] Soit $f : G \rightarrow GL_m(K)$ un homomorphisme définissable, avec G un groupe définissablement linéaire rangé connexe. Si T est un tore linéaire de $f(G)$ alors il existe un tore linéaire T' de G tel que $f(T') = T$.

Les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé satisfont toutes les conjectures de conjugaison naturelles dans le contexte rangé.

Fait 5.1.1.11. *Soit G un groupe définissablement linéaire rangé connexe. Alors :*

1. [Mus04, Proposition 2.11] *Les sous-groupes de Borel de G sont conjugués.*
2. [Mus04, Proposition 2.12] *Les sous-groupes de Carter de G sont conjugués.*
3. [Mus04, Proposition 2.16] *Les tores linéaires maximaux de G sont conjugués.*

Dans un groupe définissablement linéaire rangé, le *radical unipotent*, noté $U(G)$, désigne le plus grand sous-groupe normal unipotent. C'est un sous-groupe définissable (et relativement Zariski-clos) nilpotent ; en caractéristique $p > 0$, il correspond au plus grand p -sous-groupe normal (voir [Mus04]). Les groupes résolubles définissablement linéaires rangés connexes sont scindés et s'écrivent comme le produit semi-direct de leur radical unipotent et d'un tore linéaire maximal :

Fait 5.1.1.12. [Mus04, Corollaire 2.18] *Soit G un groupe résoluble définissablement linéaire rangé connexe. Alors $G = U(G) \rtimes T$ où $U(G)$ est le radical unipotent et T un tore linéaire maximal.*

En caractéristique positive, nous avons la situation suivante :

Fait 5.1.1.13. [Mus04, Théorème 2.8] *Soit G un groupe définissablement linéaire connexe sur un corps rangé de caractéristique positive. Alors $G = U(G) \cdot G_T$.*

5.1.2 Quelques propriétés intéressantes

Dans [Poi01], B. Poizat démontre la conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes simples définissablement linéaires sur un corps rangé de caractéristique positive.

Fait 5.1.2.1. [Poi01, Théorème 1] *Si K est un corps de rang de Morley fini et de caractéristique non-nulle, tout sous-groupe définissable simple G de $GL_n(K)$ est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur K .*

Nous nous inspirons largement des méthodes utilisées dans cet article pour éliminer les *mauvais groupes*. Ce sont des configurations particulièrement pathologiques, fortement non-algébriques. Il existe plusieurs notions ; pour le moment, on dira qu'un groupe rangé connexe G est un *mauvais groupe* si G est non-résoluble et si ses sous-groupes propres définissables connexes sont tous nilpotents.

La plupart des résultats de cette sous-section peuvent être probablement obtenus en remarquant que les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé de caractéristique $p > 0$ sont des K -groupes, *i.e.*, des groupes rangés dont les sections simples définissables sont des groupes algébriques (nous renvoyons au chapitre 4 de [Tind13] pour plus de détails).

Fait 5.1.2.2. [Poi87, Théorème 3.31 et Corollaire 3.32]

1. *Un mauvais groupe a un quotient définissable qui est un mauvais groupe simple.*
2. *Un mauvais groupe satisfait un énoncé qui est faux dans tout groupe localement fini, i.e., un mauvais groupe n'est pas pseudo-localement fini.*

On isole de la démonstration du Théorème 1 de [Poi01] un lemme qui permet d'éliminer les mauvais groupes définissablement linéaires en caractéristique $p > 0$.

Lemme 5.1.2.3. *Soit G un groupe définissablement linéaire rangé connexe (sur un corps de caractéristique positive). Alors G ne peut pas être un mauvais groupe.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que G est un mauvais groupe. Si G était d'exposant fini, sa clôture de Zariski serait aussi d'exposant fini et ce serait un groupe nilpotent. Il existe donc un $g \in G$ d'ordre infini dans une extension élémentaire saturée tel que $g = g_s g_u$. Or, en caractéristique $p > 0$, les unipotents sont les p -éléments; quitte à élever g à une puissance suffisamment grande, on trouve un élément g' semi-simple d'ordre infini qui appartient à un tore linéaire (pour le raisonnement précédent, voir la démonstration du Théorème 1 de [Poi01]). Dans l'extension saturée, le groupe G_T , *i.e.*, le groupe engendré par les tores linéaires maximaux de G est définissable et connexe (infini) par le théorème des indécomposables. Par le Fait 5.1.1.8, cela reste le cas dans le groupe de départ.

D'après le Fait 5.1.1.13 et le Fait 5.1.1.9, on a $(G/U(G))_T = G/U(G)$ (le groupe $G/U(G)$ est définissablement linéaire car $U(G)$ est relativement Zariski-clos dans G). De plus, $G/U(G)$ est un mauvais groupe; on peut donc supposer que G est un mauvais groupe (définissablement linéaire) engendré par ses tores linéaires maximaux.

Par le théorème des indécomposables et la conjugaison des tores linéaires maximaux, G s'écrit comme un produit fini $T^{g_1} \dots T^{g_n}$.

On remarque que G est définissable avec paramètres dans la structure $\langle K, T \rangle$ (où on oublie la structure additionnelle). Or, puisque le groupe T est uniquement p -divisible (par le Fait 5.1.1.5, le sous-groupe T est divisible et nous sommes en caractéristique $p > 0$), l'automorphisme de Frobenius respecte la structure $\langle K, T \rangle$. Par le Fait 1.2.7.1, il existe une sous-structure élémentaire $\langle \mathbb{F}_p^{alg}, \mathbb{F}_p^{alg} \cap T \rangle$ localement finie.

Le groupe G est donc pseudo-localement fini. Or, G a une structure de mauvais groupe. D'après le Fait 5.1.2.2, G a une section définissable qui est un mauvais groupe simple, de plus cette section est interprétable dans $\langle K, T \rangle$ et même définissable par élimination des imaginaires (voir [Wag01]), c'est donc un groupe pseudo-localement fini. Finalement, on obtient la contradiction par le Fait 5.1.2.2. \square

La situation en caractéristique $p > 0$ est idéale et on retrouve beaucoup de propriétés valables pour les groupes algébriques affines. Néanmoins, le théorème suivant ne dépend pas de la caractéristique.

Théorème 5.1.2.4. ([Hum75, Théorème §19.2] pour le cas algébrique) *Soit G un groupe résoluble définissablement linéaire rangé connexe. Alors G est nilpotent si et seulement si G_s est un groupe central (égal au tore linéaire maximal).*

Démonstration. On procède par récurrence sur le rang.

Par le Fait 5.1.1.12, $G = U(G) \rtimes T$ où T est un tore linéaire (maximal) et $U(G)$ est le radical unipotent. Supposons que G est nilpotent.

Par le Fait 1.2.4.2, $Z(G)$ est infini, on remarque de plus que $Z(G)$ est relativement Zariski-clos dans G , *i.e.*, $Z(G) = \overline{Z(G)} \cap G$. On peut donc supposer que le groupe $G/Z(G)$ est nilpotent définissablement linéaire rangé (Fait 5.1.1.1) de rang inférieur.

Soit $s \in G$ semi-simple, par induction, $[s, g] \in Z(G)$ pour tout $g \in G$. Or, $G' \leq \overline{G'}$ est composé d'unipotents par le théorème de Lie-Kolchin. On a donc $s[s, g] = [s, g]s = s^g$, mais s^g est un élément semi-simple et la décomposition de Jordan reste valide pour G , *i.e.*, tout élément s'écrit de manière unique comme produit d'un élément unipotent et

d'un élément semi-simple qui commutent et par conséquent, $[s, g] = 1$.

Supposons maintenant que $G_s \leq Z(G)$; il y a donc un unique tore linéaire maximal T qui est central dans G . Par conséquent, $G = T \times U(G)$; le groupe $G/Z(G)$ est donc isomorphe à un groupe nilpotent (le radical unipotent est nilpotent) et G est lui-aussi nilpotent. \square

Voici une propriété que l'on aimerait valable dans le contexte rangé.

Proposition 5.1.2.5. (*[Hum75, Proposition B. § 21.4] pour le cas algébrique*) Soit G un groupe définissablement linéaire rangé connexe, sur un corps de caractéristique $p > 0$. Si les sous-groupes de Borel de G sont nilpotents alors G est nilpotent.

Démonstration. On remarque que si G est résoluble alors c'est son propre sous-groupe de Borel.

Supposons par l'absurde que G n'est pas résoluble. Si tous les sous-groupes définissables connexes propres sont nilpotents, alors G est un mauvais groupe. Sinon, il existe un sous-groupe propre définissable connexe non-résoluble dont les sous-groupes de Borel sont nilpotents (les sous-groupes de Borel de G sont nilpotents). Quitte à remplacer G , par la condition de chaîne descendante, on peut supposer que G est un mauvais groupe. On obtient la contradiction par le Lemme 5.1.2.3. \square

Remarque 5.1.2.6. *On peut produire une démonstration analogue pour les groupes algébriques en utilisant le fait que les groupes définissables dans un pur corps algébriquement clos sont pseudo-localement finis [Poi87, Théorème 4.1]. Remarquons que la démonstration habituelle mobilise les propriétés des variétés complètes (pour un groupe algébrique affine connexe G et un sous-groupe de Borel B , l'espace homogène G/B peut être muni d'une structure de variété projective donc complète).*

Dans le cas définissablement linéaire en caractéristique $p > 0$, les sous-groupes de Carter sont totalement analogues aux sous-groupes de Cartan algébriques : ce sont précisément les centralisateurs des tores maximaux.

Corollaire 5.1.2.7. (*[Hum75, §21.4] pour le cas algébrique*) Soit G un groupe définissablement linéaire rangé connexe, sur un corps de caractéristique $p > 0$. Si G a un unique tore linéaire maximal alors G est nilpotent. En particulier, $C_G(T) = C_G(T)^\circ$, où T est un tore (linéaire) maximal, est nilpotent.

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout tore T , le groupe $C_G(T)$ est connexe : par le Fait 1.2.7.2, T est un tore décent et par le Fait 1.2.7.4, les centralisateurs des tores décents sont connexes.

Soit T l'unique tore linéaire maximal de G et B un sous-groupe de Borel le contenant. Alors T est normal et même central dans B (puisque $B = U(B) \rtimes T$), par conséquent $B = T \times U(B)$ et B est nilpotent (Théorème 5.1.2.4). Or, d'après le Fait 5.1.1.11, les sous-groupes de Borel sont conjugués, ils sont donc tous nilpotents. Par la Proposition 5.1.2.5, G est nilpotent.

Le groupe $C_G(T)$ contient un unique tore linéaire maximal par conjugaison des tores linéaires maximaux, il est donc nilpotent. \square

Nous terminons cette section par un résultat sur l'interprétation d'un corps au sein de la pure structure de groupe d'un groupe définissablement linéaire rangé (en caractéristique positive).

Théorème 5.1.2.8. *Soit G un groupe définissablement linéaire rangé connexe sur un corps K de caractéristique $p > 0$. Alors l'un des deux cas suivants se produit :*

- G est nilpotent.
- G n'est pas nilpotent et contient un sous-groupe définissable résoluble non-nilpotent qui interprète (dans le pur langage des groupes) un corps définissablement isomorphe à K .

Démonstration. Supposons que G n'est pas nilpotent. Soit H un sous-groupe définissable connexe non-nilpotent de rang minimal. Les sous-groupes propres connexes de H sont nilpotents. Or, H ne peut pas être un mauvais groupe donc H est résoluble non-nilpotent. En considérant un sous-groupe H -minimal du centre de H' , on peut interpréter un corps k qui est définissablement isomorphe à K par la preuve du Théorème 1 de [Poi01]. \square

5.2 Les mauvaises paires définissablement linéaires rangées pour la caractéristique nulle

5.2.1 Contre-exemples à la conjecture de Cherlin-Zilber en caractéristique nulle

Quelle est la situation en caractéristique nulle ? Suite aux travaux de A. Borovik et J. Burdges (voir [BB09]), nous savons qu'un groupe simple non-algébrique définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique nulle est recouvert par ses tores linéaires maximaux. De plus, il ne contient pas d'involutions. On améliorera un peu ce résultat (voir *infra*).

Lemme 5.2.1.1. *Soit G un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique nulle. Si $T \leq G$ est un tore décent définissable alors T est un tore linéaire.*

Démonstration. D'après le Fait 5.1.1.4, $T = T_u \times T_s$. Mais en caractéristique nulle, les éléments de torsion sont semi-simples et donc toute la torsion est contenue dans le sous-groupe définissable T_s . Mais T est la clôture définissable de sa torsion, par conséquent $T = T_s$. On conclut par le Fait 5.1.1.5. \square

Proposition 5.2.1.2. *(Nous réécrivons la démonstration de [BB09].) Soit G un groupe simple non-algébrique définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique nulle. Alors les sous-groupes de Borel coïncident avec les tores linéaires maximaux, ils sont autonormalisants et recouvrent G . Le groupe G ne contient pas d'involutions. De plus, les tores linéaires maximaux sont relativement Zariski-clos dans G .*

Démonstration. D'après le Fait 5.1.1.3, G_U est un sous-groupe fermé normal contenant tous les éléments unipotents. Puisque G est un groupe simple qui n'est pas Zariski-clos, $G_U = \{1\}$ et donc tous les éléments de G sont semi-simples.

Soit B un sous-groupe de Borel, par le théorème de Lie-Kolchin, $B' \leq \overline{B}'$ consiste

d'éléments unipotents ; B est donc abélien, c'est un tore linéaire maximal. De plus, par le Fait 2.2.1.5, G ne contient pas d'involutions.

Le groupe G est U_p^\perp pour tout nombre premier p : si G contenait un p -groupe nilpotent infini d'exposant fini alors G contiendrait un groupe abélien p -élémentaire infini dont la clôture définissable serait contenu dans un tore linéaire, contradiction.

Montrons que les sous-groupes de Borel, *i.e.*, les tores linéaires maximaux sont autonormalisants. On peut supposer que G contient de la torsion ; sinon, soit B un sous-groupe de Borel, $N_G(B)/B$ serait sans torsion et donc $N_G(B) = B$ (car $B = N_G(B)^\circ = C_G(B)^\circ$ puisque B est un tore linéaire et donc $N_G(B)/B$ est fini). Soit T un groupe divisible de torsion maximal (qui existe car d'après le Fait 1.2.7.5 tout élément d'ordre fini est contenu dans un tore décent). D'après le Fait 1.2.7.5, $N_G(T) = C_G(T)^\circ$ car G ne contient aucun p -groupe unipotent et aucune involution.

Soit $B = T'$ un sous-groupe de Borel contenant $d(T)$ (ce groupe est un tore décent contenu dans un tore linéaire maximal). Le groupe T est caractéristique dans B et donc $N_G(B) \leq N_G(T) = C_G(T)^\circ$. Or d'après le Lemme 1.2 de [BC09], le groupe $C_G(T)^\circ/d(T)$ est sans torsion ; il en est de même du groupe $N_G(B)/B$ et donc $N_G(B) = B$.

Soit g d'ordre fini, d'après le Fait 1.2.7.5, g est contenu dans un tore décent que l'on peut étendre à un tore linéaire maximal car il n'y a pas d'unipotents. Soit maintenant g d'ordre infini, il est contenu dans un tore algébrique $\bar{T} \leq \bar{G}$ et $\bar{T} \cap G$ est infini. L'élément g est contenu dans un groupe définissable abélien diagonalisable maximal dont la composante connexe est un tore linéaire maximal. Puisque les tores linéaires maximaux sont autonormalisants, on conclut.

Soit T un tore linéaire maximal, on a $T \leq \bar{T} \cap G$. Mais $\bar{T} \cap G$ est abélien et on a égalité puisque T est autonormalisant. \square

Nous introduisons une classe de groupes de Frobenius qui généralisent les mauvais groupes simples au sens de Poizat. Une *mauvaise paire* est un groupe de Frobenius $C < G$ rangé connexe tel que les conjugués de C recouvrent G . Voici quelques propriétés des mauvaises paires rangées.

Fait 5.2.1.3. [Poi18, Lemme 15] *Soit $C < G$ une mauvaise paire rangée. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Le sous-groupe C est définissable connexe infini.*
2. *Tout sous-groupe fini ou résoluble est contenu dans un conjugué de C . Le groupe G ne contient pas d'involutions.*
3. *Soit H est un sous-groupe définissable connexe qui n'est contenu dans aucun conjugué de C et tel que $(H \cap C) \neq \{1\}$. Alors $(H \cap C) < H$ est une mauvaise paire et $(C' \cap H)$ est un complément de Frobenius pour tout C' conjugué de C tel que $C' \cap H \neq \{1\}$.*
4. *G contient une mauvaise paire spéciale définissable : une mauvaise paire définissable connexe tel que le complément de Frobenius et ses conjugués sont précisément les sous-groupes définissables maximaux. Tout sous-groupe définissable est alors contenu dans un conjugué du complément de Frobenius. Il s'agit de plus d'un groupe simple.*

Remarque 5.2.1.4. *Les mauvaises paires ont été introduites pour la première fois par E. Jaligot dans [Jal01] sous le nom de "full Frobenius groups". Le terme de "mauvaise paire" vient de [Poi18].*

Voici un fait utile qui caractérise les automorphismes involutifs des groupes sans involutions (on y fera surtout référence dans l'analyse des mauvaises paires) :

Fait 5.2.1.5. [Poi18, Lemme 9]

Soit G un groupe rangé sans involutions et soit ι un automorphisme involutif (définissable) de G . On note F l'ensemble (définissable) des éléments fixés et I l'ensemble (définissable) des éléments inversés. Alors pour tout $1 \neq g \in G$, il existe un unique $f \in F$ et un unique $i \in I$ tels que $g = f \cdot i$. De plus, aucun élément de F autre que l'identité n'est conjugué à un élément de I .

Nous allons voir qu'à partir d'un contre-exemple hypothétique à la conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé de caractéristique nulle, on peut définir une mauvaise paire spéciale définissablement linéaire rangée (qui sera donc un groupe de Frobenius simple non-algébrique définissablement linéaire rangé).

Proposition 5.2.1.6. *Soit G un groupe simple non-algébrique définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique nulle. Alors on peut interpréter une mauvaise paire spéciale avec complément de Frobenius abélien, définissablement linéaire rangée.*

Démonstration. On sait que G ne contient que des éléments semi-simples, que ses sous-groupes de Borel sont des tores linéaires maximaux autonormalisants qui recouvrent le groupe. De plus, G ne contient pas d'involutions (Proposition 5.2.1.2).

Soit I une intersection maximale entre deux tores linéaires maximaux (comme les tores linéaires maximaux sont conjugués, la famille formée des intersections de deux tores linéaires maximaux est uniformément définissable; par la condition de chaîne ascendante sur les sous-groupes uniformément définissables, une telle intersection maximale existe). C'est un groupe relativement Zariski-clos dans G puisque les tores maximaux sont relativement Zariski-clos.

On considère le groupe $H = C_G(I)^\circ/I$ qui est définissablement linéaire car I est relativement Zariski-clos (Fait 5.1.1.1). Ce groupe est composé uniquement d'éléments semi-simples et ne contient pas d'involutions (sinon on pourrait les relever en des 2-éléments du groupe initial). Le groupe H est donc recouvert par ses tores linéaires maximaux, qui sont de plus autonormalisants.

De plus, soient $\overline{T}_1, \overline{T}_2$ des tores linéaires maximaux de H tel que $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 = \overline{I} \neq \overline{1}$. Or d'après le Fait 5.1.1.10, les tores linéaires se relèvent complètement, on peut donc relever \overline{I} en I' , l'intersection de deux tores linéaires maximaux, qui contient strictement I , contradiction.

Le groupe H est donc une mauvaise paire. Par le Fait 5.2.1.3, il existe un sous-groupe définissable connexe qui est une mauvaise paire spéciale qui est de plus définissablement linéaire rangée. \square

5.2.2 Quelques tentatives de caractérisation des mauvaises paires rangées

Idéalement, nous devrions être en mesure d'éliminer les mauvaises paires spéciales rangées, au moins dans le cas définissablement linéaire. Dans cette perspective, nous proposons différentes caractérisations de tels groupes.

Remarquons tout d'abord que les groupes de Frobenius peuvent être envisagés comme

des groupes de permutation. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius, alors G agit sur G/C de façon transitive non-régulière tel que seule l'identité fixe deux éléments.

Proposition 5.2.2.1. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé qui contient un sous-groupe définissable connexe normal N . Alors deux cas se présentent :*

1. $N \cap C = \{1\}$ et N agit semi-régulièrement, i.e., $n \cdot x = x$ implique que $n = 1$, pour $n \in N$.
2. $N \cap C \neq \{1\}$, N agit transitivement et $G = N \cdot C$.

Démonstration. On remarque que G agit sur $X = G/C$ et on peut identifier C à $Stab_G(x)$ pour $x \in X$. Supposons que $N \cap C = \{1\}$. Pour tout $x \in X$, on a $N \cap Stab_G(x) = \{1\}$. Or, $n.x = x$ implique que $n \in Stab_G(x)$ et donc $n = 1$. L'action est semi-régulière.

Sinon, $N \cap C < N$ est un sous-groupe de Frobenius. Or, pour tout $g \in G$, $N \cap C$ et $N \cap C^g$ sont généreux dans N (c'est un groupe connexe) et donc pour tout $g \in G$, il existe $n \in N$ tel que $N \cap C^g = N \cap C^n$. Par malnormalité dans G , $C^g = C^n$ et donc $n^{-1}g \in C$. On a donc en particulier que $G = N \cdot C$. De plus, l'action de G est équivalente à l'action par translation sur $N \cdot C/C = G/C$ et par conséquent N agit transitivement. \square

Définition 5.2.2.2. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . On dit que l'action est primitive si pour $x \in X$, le sous-groupe $Stab(x)$ est maximal. Si de plus l'action est définissable, on dit que l'action est définissablement primitive si $Stab(x)$ est un sous-groupe définissable maximal.*

Lemme 5.2.2.3. *Une mauvaise paire spéciale rangée $C < G$ est un groupe de permutation primitif.*

Démonstration. On identifie encore C au stabilisateur d'un point pour l'action de G sur G/C . D'après le Fait 5.2.1.3, le sous-groupe C et ses conjugués sont les sous-groupes définissables maximaux. L'action est donc définissablement primitive. Mais C est infini et donc d'après la Proposition 2.4 de [MP95], l'action est primitive. \square

Disposer d'une action primitive donne quelques informations sur le groupe : il préserve la structure d'un graphe. On rappelle qu'un *graphe (non-orienté)* est une ensemble de points muni d'une *relation d'adjacence* (on parlera d'*arêtes* non-orientées). On dira qu'il est *connexe* (comme graphe) si entre deux points quelconques il existe un *chemin* (non-orienté), i.e., une suite d'arêtes adjacentes.

Proposition 5.2.2.4. *Soit $C < G$ une mauvaise paire rangée. On peut interpréter un graphe $H = (X, R)$ sur lequel G agit primitivement, où $X = G/C$. De plus, en tant que graphe, H est connexe et la relation R est antisymétrique.*

Démonstration. Le groupe G agit diagonalement sur $X \times X$ où l'action est définie par $g.(x, y) = (g.x, g.y)$. Une orbite O sous l'action diagonale (étant donné un couple (x, y) avec $x \neq y$) permet de définir une structure de graphe : les sommets sont les points de X et la relation d'adjacence R est définie par $x_1 R y_1$ ssi $(x_1, y_1) \in O$ ssi il existe $g \neq 1$ tel $(g.x_1, g.y_1) = (x, y)$. D'après le Théorème 3.7 de [BMMN98], l'action de G préserve

la structure du graphe.

La relation R est antisymétrique : sinon, il existerait un élément g échangeant deux points distincts, *i.e.*, une involution, contradiction.

Enfin pour toute orbite O (orbital) pour l'action de G sur X^2 (et différente de la diagonale) on a $RM(O) = RM(G)$ (G agit régulièrement sur un orbital) : l'application définissable qui à tout g associe $g.(x, y) \in O$ est bijective; $(g.x, g.y) = (g'.x, g'.y)$ implique que $g'^{-1}g$ fixe (x, y) et donc $g' = g$ (groupe de Frobenius). \square

Dans le cas définissablement linéaire rangé, nous avons affaire à une mauvaise paire spéciale dont le complément de Frobenius est abélien. Il s'agit d'un exemple de groupe CSA .

Définition 5.2.2.5. *Un groupe G est CSA si les centralisateurs des éléments (non-triviaux) sont autonormalisants et abéliens. On dira qu'il est CSA^* si de plus il ne contient pas d'involutions.*

Remarque 5.2.2.6. *Les groupes libres, les groupes limites et les groupes hyperboliques sans torsion sont des exemples de groupes CSA^* .*

Voici quelques propriétés intéressantes des groupes CSA :

Fait 5.2.2.7. *[Ould08, Lemme 2.4] Soit G un groupe CSA . Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *S'il contient un sous-groupe abélien normal, alors c'est un groupe abélien.*
2. *S'il est fini, alors c'est un groupe abélien.*

Lemme 5.2.2.8. *Soit $C < G$ une mauvaise paire rangée, avec C abélien. Alors c'est un groupe CSA^* non-abélien. De plus, tout sous-groupe de type fini engendrée par une partie (finie) qui n'est pas entièrement contenue dans un conjugué de C est un sous-groupe CSA^* non-abélien infini.*

Démonstration. Notons tout d'abord que G ne contient pas d'involutions. Soit $x \in G$, puisque $C < G$ est une mauvaise paire, on a $x \in C'$, pour un conjugué C' de C . Or, C' est malnormal et abélien, par conséquent, $C' = C_G(x)$. Comme les centralisateurs des éléments (non-triviaux) sont abéliens et malnormaux, il s'agit donc d'un groupe CSA^* . Soit $\{c_1, \dots, c_n\}$ une partie finie qui n'est pas entièrement contenue dans un conjugué de C ; on considère $H = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$. On remarque tout d'abord que H n'est pas abélien. Soit $h \in H$, comme G est une mauvaise paire, il existe un conjugué C'' de C tel que $h \in C''$. Mais alors $(C'' \cap H) < H$ est un groupe de Frobenius avec complément abélien. Par conséquent, $C_H(h) \leq (C'' \cap H) \leq C_H(h)$. Les centralisateurs des éléments non-triviaux sont donc abéliens et malnormaux; le groupe sous-groupe H est un groupe CSA^* non-abélien (il est en particulier infini). \square

Nous allons caractériser les mauvaises paires (spéciales) rangées avec complément abélien en étudiant leurs sous-groupes de type fini. Cette description fera en particulier sens dans le cas définissablement linéaire. Nous verrons qu'une large classe de sous-groupes présente beaucoup de similitudes avec les *groupes limites* (non-abéliens).

Définition 5.2.2.9. *Soit G un groupe de type fini. On dit que G est un groupe limite s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. G est complètement résiduellement libre, i.e., pour toute famille finie d'éléments distincts x_1, \dots, x_n , il existe un morphisme h de G vers un groupe libre tel que $h(x_1), \dots, h(x_n)$ sont distincts.
2. G est modèle de la théorie universelle du groupe libre.
3. G est un sous-groupe d'un groupe libre non-standard.

Remarque 5.2.2.10. Pour des définitions alternatives des groupes limites plus en lien avec la théorie géométrique des groupes, nous renvoyons le lecteur intéressé à [CG05].

Fait 5.2.2.11. [CG05, Proposition 3.1] Soit G un groupe limite (de type fini). Alors on a :

1. G est sans torsion et CSA.
2. Tout sous-groupe de type fini de G est lui-même limite.
3. Deux éléments distincts de G engendrent soit un groupe libre abélien $(\{1\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2)$, soit un groupe libre non-abélien.

La pertinence de l'étude des groupes limites et de la théorie universelle des groupes libres (non-abéliens) pour le problème des mauvaises paires rangées est révélée par le résultat suivant :

Fait 5.2.2.12. [MusP06, Corollaire B] Tout modèle superstable de la théorie universelle des groupes libres est commutatif.

Proposition 5.2.2.13. Soit $C < G$ un groupe avec C un sous-groupe propre tel que $\bigcap_G C^g = \{1\}$. Alors G est modèle de la théorie universelle des sous-groupes de type fini engendrés par des parties (finies) qui ne sont pas entièrement contenues dans un conjugué de C .

Démonstration. Soit $I = \{ \text{parties finies de } G \text{ qui ne sont pas entièrement contenues dans un conjugué de } C \}$.

Pour tout $i \in I$, on considère $G_i = \langle i \rangle$ et $I_i = \{j \in I : i \subseteq j\}$.

On vérifie que $B = \{I_i : i \in I\}$ est une base de filtre, i.e., est clos par intersection finie : $I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_n} = \{j \in I : i_k \subseteq j, k \in \{1, \dots, n\}\} = \{j \in I : \bigcup_{k=1}^n i_k \subseteq j\} = I_{\bigcup_{k=1}^n i_k} \in B$ car $\bigcup_{k=1}^n i_k \in I$.

On considère $\mathfrak{F} = \{J \subseteq I : \exists i \in I, I_i \subseteq J\}$, c'est un filtre qui est donc contenu dans un ultrafiltre \mathfrak{U} .

Le groupe s'injecte dans $\prod_{i \in I} G_i$ pour l'injection $h(g) = [\delta_i(g)]$ où $\delta_i(g) = g$ si $g \in G_i$, et $\delta_i(g) = 1$, sinon.

Définissons maintenant un plongement h^* de G vers $\prod_{\mathfrak{U}} G_i$ par $h^*(g) = [h(g)]_{\mathfrak{U}}$. Le plongement est bien défini car pour $h \neq g$, il est bien défini sur $I_{g, h, h'} \in \mathfrak{F}$ pour h' tel que $\{g, h, h'\}$ n'est pas contenu dans un conjugué de C . Par le théorème de Łos, en tant que sous-structure de $\prod_{\mathfrak{U}} G_i$, le groupe G est modèle de la théorie universelle des G_i . \square

Un résultat de cette nature ne fait vraiment sens que dans un contexte où il nous est possible de décrire précisément la classe des sous-groupes de type fini considérés (et d'extraire ainsi des informations sur leur théorie universelle). Pour les mauvaises paires linéaires avec complément abélien, nous sommes dans la situation suivante :

Corollaire 5.2.2.14. *Soit $C < G$ une mauvaise paire rangée avec C abélien. Supposons que G est linéaire composé d'éléments semi-simples. Alors G contient un sous-groupe de type fini engendré par une partie (finie) non entièrement contenue dans un conjugué de C qui n'est pas un groupe limite mais qui est un groupe CSA infini non-abélien composé d'éléments semi-simples.*

Pour éliminer les mauvaises paires définissablement linéaires rangées en caractéristique nulle, il faudrait tenter de mieux comprendre la structure des groupes linéaires CSA* de type fini et notamment étudier leurs liens avec les groupes limites. Il s'agirait en particulier de décrire leur théorie universelle et de faire le lien avec la superstabilité du groupe ambiant. Nous suggérons quelques pistes en ce sens.

Les groupes de type fini linéaires peuvent être décrits assez précisément : ils sont résiduellement finis et admettent une topologie naturelle qui en fait des groupes topologiques.

Fait 5.2.2.15. *[Dix71, Corollaire 10.2] Soit $G \leq GL_n(K)$ un groupe linéaire de type fini. Alors il existe $m > 0$ tel que pour tout $1 \neq g \in G$, il existe un corps fini F_g et un homomorphisme $\psi_g : G \rightarrow GL_m(F_g)$ tel que $\psi_g(g) \neq 1$. Le groupe G est donc résiduellement fini. En particulier, un groupe linéaire infini de type fini ne peut pas être simple.*

Fait 5.2.2.16. *[Dix71, Théorème 10.5A] Soit G un groupe linéaire de type fini. Alors $\Phi_{fin}(G)$ l'intersection des groupes maximaux d'indice fini est nilpotent. En particulier, $\Phi(G)$, i.e., le groupe de Frattini (intersection des sous-groupes maximaux) est nilpotent.*

Fait 5.2.2.17. *[Weh73, Théorème 10.16] (alternative de Tits) Soit G un groupe linéaire de type fini. Alors ou bien G est résoluble-par-fini ou bien G contient un groupe libre non-cyclique.*

Puisque les groupes linéaires de type fini sont résiduellement finis, on peut les munir de la topologie profinie [Hall50].

Soit G un groupe résiduellement fini (de type fini). Les sous-groupes normaux d'indice fini forment une base de voisinage pour l'identité. De plus, cette topologie est séparée et totalement discontinue. On remarque qu'un groupe N normal d'indice fini est un ouvert-fermé : il est ouvert par hypothèse et $G \setminus N = g_1N \cup \dots \cup g_kN$ est ouvert (les translations sont des homéomorphismes). En particulier, l'intersection de tous les sous-groupes normaux d'indice fini est trivial. Le complété \hat{G} de G est un groupe profini, limite projective de quotients finis de G , (donc compact) dans lequel G est dense. Si G est lui-même compact alors $G = \hat{G}$.

On pourrait se demander si les groupes de Frobenius linéaires de type fini (donc résiduellement finis) sont scindés et admettent un complément nilpotent. La réponse est négative : il suffit de considérer les groupes libres (non-abéliens) de type fini.

Il en va différemment pour les groupes de Frobenius profinis. Pour une présentation des notions pertinentes, nous renvoyons au chapitre 2 [RZ10].

On appelle n un entier supernatural un nombre $n = \prod_p p^{n_p}$, où n_p peut être un entier ou un symbole ∞ . On définit le $pgcd(n_i)_{i \in I} = \prod p^{\min(n_{ip})}$ et le $ppcm(n_i)_{i \in I} = \prod p^{\max(n_{ip})}$.

Soit E l'ensemble des sous-groupes normaux ouverts (de façon équivalente les sous-groupes normaux fermés d'indice fini), pour H un sous-groupe fermé, on définit l'indice $[G : H]$ comme le $\text{ppcm}\{[G/U : HU/U] : U \in E\}$. Pour π un ensemble de nombre premier, un π -groupe de Hall est un sous-groupe fermé tel H est un π -groupe (les facteurs premiers sont dans π) et l'indice de H dans G est un π' -groupe (les facteurs premiers sont dans π' et $\pi' \cap \pi = \emptyset$). On peut donc énoncer le théorème :

Fait 5.2.2.18. [GHR79, Théorème 3.6] Soit $C < G$ un groupe profini tel que C est malnormal. Supposons de plus que C est un π -sous groupe de Hall. Alors $G = K \rtimes C$, K est un sous-groupe ouvert-fermé nilpotent normal et C est un sous-groupe fermé (et fini).

Remarque 5.2.2.19. On appelle groupe de Frobenius profini un groupe profini qui est limite projective de groupes de Frobenius finis. C'est une formulation équivalente des hypothèses du théorème précédent

Corollaire 5.2.2.20. Soit G un groupe CSA non-abélien linéaire de type fini. Alors son complété profini n'est pas un groupe de Frobenius profini.

Démonstration. Supposons que \hat{G} est un groupe de Frobenius profini. Alors d'après le Fait 5.2.2.18, \hat{G} contient un sous-groupe K normal d'indice fini nilpotent fermé. C'est un sous-groupe ouvert. Mais G est dense dans \hat{G} et donc G intersecte non-trivialement K : G contient donc un sous-groupe normal résoluble, contradiction. \square

Pour le moment, nous n'avons pas utilisé le fait que que l'on peut supposer que la mauvaise paire est composée d'élément semi-simples (sur un corps de caractéristique nulle). Or, comme en témoigne la démonstration de l'alternative de Tits, les éléments semi-simples interviennent de manière privilégiée pour construire des groupes libres (à travers une forme appropriée du Lemme du ping-pong). À cet égard, le résultat suivant pourrait être utile.

Définition 5.2.2.21. [GP06] Soient $(K, |\cdot|)$ un corps local, i.e. un corps topologique localement compact, E un K -espace vectoriel (normé) de dimension finie et $g : E \rightarrow E$ un endomorphisme semi-simple (donc diagonalisable). On dit que $E = X_+ \oplus X_0 \oplus X_-$ est une g -décomposition de E s'il existe des réels $r > s > 0$ avec $X_+ \neq \{0\}$ engendré par les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres dont la valeur absolue est supérieure ou égale à r , $X_- \neq \{0\}$ engendré par les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres dont la valeur absolue est inférieure ou égale à s , et X_0 engendré par le reste des sous-espaces propres.

Fait 5.2.2.22. [GP06, Théorème 2.5] Soit E un K -espace vectoriel de dimension fini pour un corps local K . Supposons que g, h sont des éléments semi-simples de $GL(E)$ et soient $E = X_+ \oplus X_0 \oplus X_-$ et $E = Y_+ \oplus X_0 \oplus X_-$ une g -décomposition et une h -décomposition. Si toutes les intersections $X_{+,-} \cap (Y_0 \oplus Y_{+,-})$, $Y_{+,-} \cap (X_0 \oplus X_{+,-})$ sont triviales, alors pour tous entiers m, n suffisamment grands, le groupe $\langle g^n, h^m \rangle$ est libre.

Remarque 5.2.2.23. Dans la démonstration de l'alternative de Tits, pour un sous-groupe linéaire de type fini (sur un corps de caractéristique nulle), on considère le corps finiment engendré par les coefficients des générateurs. Comme c'est une extension de type fini de \mathbb{Q} , pour tout élément x non-nul qui n'est pas racine de l'unité, on peut

plonger cette extension dans un corps local $(K, |\cdot|)$ tel que $|x| > 1$. Pour plus de détails sur l'alternative de Tits, nous renvoyons à [Ben97].

Nous sommes conduits à poser deux questions :

1. Peut-on classifier les groupes de type fini linéaires *CSA* composé d'éléments semi-simples ? Est-il possible de décrire précisément leur théorie universelle ?
2. Des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration de l'alternative de Tits pourraient-ils nous permettre d'établir des critères pour déterminer si un groupe linéaire de type fini *CSA* est un groupe limite ?

Nous proposons maintenant une dernière caractérisation des mauvaises paires spéciales qui apparaissent comme contre-exemples potentiels à la conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes rangés définissablement linéaires en caractéristique nulle.

Soit G un groupe rangé et X un ensemble définissable. On dit qu'une action (définissable) transitive G sur X (notée $(G : X)$) est *génériquement n -transitive* si l'action induite sur X^n admet une orbite générique. De plus, on définit le *plus grand degré de transitivité générique* d'une action $(G : X)$:

$$gdt(G : X) = \sup\{n : (G : X) \text{ est génériquement } n\text{-transitive}\}$$

Nous reprenons ici les notions de degré de transitivité générique introduites par V. Popov (voir [Pop05]) pour les groupes algébriques puis par A. Borovik et G. Cherlin pour les groupes rangés [BorC08]. Remarquons que la démonstration de la scission des groupes strictement 2-transitifs linéaires repose sur ces idées (voir [GG14]). On rappelle qu'un groupe algébrique est *réductif* si son radical unipotent est trivial. De plus, dans un groupe réductif, le centralisateur d'un élément semi-simple est lui-aussi réductif [Hum75, Chapitre VIII. Section 26].

Fait 5.2.2.24. 1. [GG14, Corollaire 2.16] Soit G un groupe algébrique connexe et $H < M < G$ des sous-groupes fermés. Alors $gdt(G : G/M) \geq gdt(G : G/H)$.
 2. [GG14, Théorème 2.17] Soient $H < G$ des groupes algébriques réductifs. Alors $gdt(G : G/H) = 1$

Proposition 5.2.2.25. (voir [GG14]) Soit $C < G$ un groupe de Frobenius linéaire tel que C contient un élément semi-simple c central dans C . Si l'action de \overline{G} sur $\overline{G}/\overline{C}$ est génériquement 2-transitive alors G a un sous-groupe normal abélien non-trivial.

Démonstration. Supposons que G ne contient pas de sous-groupe normal abélien. Quitte à quotienter par le radical unipotent de \overline{G} , on peut supposer que \overline{G} est réductif (l'intersection entre le groupe nilpotent $R_u(\overline{G})$ et G est trivial).

Puisque $C = C_G(c)$, on a $\overline{C} \leq C_{\overline{G}}(c)$. Or, le groupe $C_{\overline{G}}(c)$ est réductif. Par le Fait 5.2.2.24, on a :

$$gdt(\overline{G} : \overline{G}/C_{\overline{G}}(c)) \geq gdt(\overline{G} : \overline{G}/\overline{C}) > 1$$

Mais pour des groupes algébriques réductifs G, H , le Fait 5.2.2.24 nous donne $gdt(\overline{G} : \overline{G}/C_{\overline{G}}(c)) = 1$, contradiction \square

Corollaire 5.2.2.26. Soit $C < G$ une mauvaise paire linéaire contenant uniquement des éléments semi-simples, avec C abélien. Alors $gdt(\overline{G} : \overline{G}/\overline{C}) = 1$.

Remarquons que pour les groupes strictement 2-transitifs linéaires, l'existence d'une décomposition de Bruhat ($G = C \cup CgC$) permet de conclure que le degré de transitivité générique est supérieur ou égal à 2 quand on passe à la clôture de Zariski. De manière plus générale, la décomposition de Bruhat (*via* les sous-groupes paraboliques) pour les groupes algébriques réductifs joue un rôle essentiel dans [Pop05] pour établir une classification des groupes algébriques (réductifs) selon le degré de transitivité générique (notamment pour borner ce degré).

5.3 Classification des quasi-groupes de Frobenius rangés du point de vue linéaire

Dans le cadre des groupes définissablement linéaires sur un corps rangé, il est possible d'établir une classification complète des quasi-groupes de Frobenius de type impair. Nous obtenons donc :

1. Les (QFP) de type impair définissablement linéaires sur un corps rangé sont isomorphes à $\mathrm{PGL}_2(K)$.
2. Les groupes de Frobenius connexes de type impair définissablement linéaires sur un corps rangé sont scindés. Ils sont de plus résolubles si la caractéristique est non-nulle.

Théorème 5.3.0.1. *Soit $C < G$ un (QFP) de type impair définissablement linéaire sur un corps rangé. Alors $G \simeq \mathrm{PGL}_2(K)$.*

Démonstration. On rappelle que C est abélien (Fait 4.3.2.6). Supposons par l'absurde que C est un sous-groupe de Borel. Soit B un sous-groupe de Borel faiblement standard (non-nilpotent). D'après le Fait 5.1.1.11, il existe $g \in G$ tel que $B = C^g$, contradiction. Par conséquent, il existe un sous-groupe de Borel fortement standard. On conclut par le Théorème 4.3.5.1. \square

La situation des groupes de Frobenius algébriques est complètement élucidée par le fait suivant :

Fait 5.3.0.2. *[Her71, Théorème 4] Soit $C < G$ un groupe de Frobenius algébrique. Alors G est scindé.*

Théorème 5.3.0.3. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé de type impair définissablement linéaire. Alors G est scindé.*

Démonstration. On peut supposer que $R(G) = \{1\}$: sinon, G contiendrait un sous-groupe abélien normal A tel que $A \cap C = \{1\}$ et d'après [BN94, Lemme 11.21], G serait scindé. Comme le centre de G est trivial, G contient donc un sous-groupe définissable simple normal S (il suffit de considérer l'une des composantes du socle $S(G)$).

On procède par récurrence sur le rang de G . Soit G un contre-exemple de rang minimal. Si G était simple et algébrique alors il serait scindé par le Fait 5.3.0.2, contradiction. De plus, en caractéristique nulle, si G était simple et non-algébrique, il ne contiendrait pas d'involutions, contradiction (Proposition 5.2.1.2).

On peut donc supposer que S est un sous-groupe propre. Si $S \cap C = \{1\}$, on conclut par le Fait 4.3.2.8.

Sinon, on peut supposer que $(S \cap C) < S$ est un groupe de Frobenius simple. S'il était algébrique, il contiendrait donc une involution. Or, par hypothèse de récurrence, il serait scindé, contradiction. Le groupe G est donc scindé en caractéristique positive (Fait 5.1.2.1).

En caractéristique nulle, on peut donc supposer que $(S \cap C) < S$ est un groupe de Frobenius simple non-algébrique qui ne contient pas d'involutions. Il ne contient donc que des éléments semi-simples, il est recouvert par ses tores linéaires maximaux qui sont conjugués et autonormalisants (Proposition 5.2.1.2). De plus, S admet des automorphismes involutifs (soit i une involution, i agit sur S non-trivialement car sinon, on aurait $S \leq C_G(i) \leq C_i$).

Le complément $S \cap C$ contient un tore linéaire maximal : comme S est recouvert par les tores linéaires maximaux, il existe $1 \neq g \in (S \cap C) \cap T$, où T est un tore linéaire maximal et donc $T \leq C_S(g) \leq (S \cap C)$. Par conjugaison des tores linéaires maximaux (Fait 5.1.1.11), on a $S = \bigcup_{s \in S} T^s \leq \bigcup_{s \in S} (S \cap C)^s$. Le groupe $(S \cap C) < S$ est donc une mauvaise paire simple.

Soit i l'involution contenue dans C , i définit donc un automorphisme involutif (définissable) de S dont le groupe de points fixes est $S \cap C$. Puisque $S = F \cdot I$ (Fait 5.2.1.5), il existe $1 \neq s \in S$ inversé par i contenu dans un conjugué $(S \cap C')$ de $(S \cap C)$ puisque $(S \cap C) < S$ est une mauvaise paire.

Comme $(S \cap C') \cap (S \cap C)^i \neq \{1\}$, on a $(S \cap C')^i = (S \cap C')$. Mais i ne fixe aucun élément non-trivial de $(S \cap C')$ car $C' \neq C$ et donc il inverse $(S \cap C')$ (Fait 5.2.1.5). Mais $(S \cap C')$ est un conjugué de $(S \cap C)$, contradiction (Fait 5.2.1.5). \square

Les propriétés des groupes définissablement linéaires rangés nous permettent également de décrire la structure des quasi-groupes de Frobenius scindés de type impair. En un certain sens, ces groupes sont "standards" : on peut plonger le complément dans un groupe définissablement linéaire sur un corps rangé et en caractéristique positive $p > 0$, il s'agit d'un bon tore. Nous obtenons un résultat analogue au théorème principal de [CGNV91] qui décrit la structure des groupes linéaires (sur un corps algébriquement clos) strictement transitifs pour leur action naturelle.

Théorème 5.3.0.4. *Soit $G = A \rtimes C$ un quasi-groupe de Frobenius rangé scindé de type impair. Alors l'un des deux cas suivants se produit :*

1. $C \leq GL_n(K)$, où K est de caractéristique positive $p > 0$, et C est un bon tore.
2. $C \leq GL_n(K)$, où K est de caractéristique nulle et si C n'est pas abélien alors C a une structure analogue à celle d'un mauvais groupe : il est recouvert par ses tores linéaires maximaux. De plus, sa clôture de Zariski est génériquement composée d'éléments semi-simples.

Démonstration. Soit $A_1 \leq A$ un sous-groupe définissable infini C -minimal. Le groupe A_1 est abélien et connexe. On remarque que C agit fidèlement sur A_1 : soit $1 \neq c \in C$ tel que $A_1 \leq C_G(c)$, on a $A_1 \leq C_G(c)^\circ \leq C$, contradiction. En particulier, C est un groupe infini d'automorphismes de A_1 . On distingue deux cas : ou bien A_1 est divisible sans torsion ou bien A_1 est d'exposant fini.

a) A_1 est d'exposant fini $p \neq 0$: Soient $B \leq C$ un sous-groupe définissable connexe

résoluble maximal, et $A_2 \leq A_1$ un sous-groupe définissable (infini) B -minimal. On remarque que l'action reste fidèle. D'après le Lemme 2.2.1.2, le sous-groupe B est abélien et on interprète un corps K de caractéristique $p > 0$ tel que $B \leq K^\times$. D'après le Fait 1.2.7.2, B est un bon tore. Par le Fait 2.2.1.5, la 2-torsion infinie de C est centrale, en particulier $Z(C)$ est infini.

Par le Fait 1.2.3.2, il existe un corps définissable K tel que A_1 est un K -espace vectoriel de dimension finie et C agit linéairement. On peut donc identifier C à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ où K est un corps rangé (définissable dans G). Quitte à enrichir le langage L_R (le langage des anneaux) d'un prédicat pour C , on peut supposer que C est définissable dans K (la structure reste de RM fini).

D'après le Fait 5.1.1.4, la décomposition de Jordan reste valable pour les groupes définissablement linéaires rangés. Montrons que C ne contient pas d'unipotents et donc seulement des éléments semi-simples. Soit $c \in C$ unipotent, sa seule valeur propre est donc égale à un, le sous-espace propre associé $\{a \in A_1 : c \cdot a = a\}$ est de dimension au moins égale à un, ce qui implique que c a un nombre infini de points fixes, contradiction. On peut supposer que C n'est pas résoluble, sinon on conclut par le Lemme 2.2.1.2.

Les sous-groupes de Borel de C sont abéliens (ce sont des tores linéaires car les groupes abéliens composés d'éléments semi-simples sont diagonalisables) et forment une classe de conjugaison générique. En effet, soit $B \leq C$ un sous-groupe de Borel, le groupe dérivé de sa clôture de Zariski est composé d'unipotents (de même que B'), ce qui implique que B est abélien. On conclut grâce à la Proposition 5.1.2.5.

b) A_1 est divisible sans torsion. Par le Fait 1.2.3.3, il existe un corps définissable K (de caractéristique nulle) tel que $C \leq \mathrm{GL}_n(K)$. Le sous-groupe C est donc définissablement linéaire sur un corps rangé. De plus, en procédant comme précédemment, on obtient que C est composé d'éléments semi-simples et qu'il est donc engendré par ses tores linéaires non-algébriques. On peut aussi supposer que C n'est pas résoluble.

Soit \overline{C} la clôture de Zariski de C . La fonction f qui à chaque élément de $\mathrm{GL}_n(K)$ associe sa partie semi-simple (décomposition de Jordan) est une fonction définissable. D'après le Théorème 1.11 de [Mar96], on peut trouver une fraction rationnelle r telle que $\{c \in \overline{C}, f(c) = r(c)\}$ définit un ouvert générique de \overline{C} , qui reste générique pour C . Or, sur C la condition fermée $r(c) = c$ est vérifiée, elle est donc vraie pour \overline{C} : sur une partie générique \overline{C} est composé d'éléments semi-simples (sur la partie non-générique la fraction rationnelle ne définit pas forcément la même chose que f). \square

Corollaire 5.3.0.5. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius de type impair définissablement linéaire sur un corps rangé de caractéristique $p > 0$. Alors G est résoluble.*

Le résultat précédent pourrait nous aider à caractériser les sous-groupes de Frobenius d'un groupe de Frobenius connexe de type impair lorsqu'on ne suppose pas que le complément de Frobenius est résoluble.

Bibliographie

- [ABC08] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank*. AMS, 2008
- [ABF13] T. Altinel, J. Burdges et O. Frécon, On Weyl groups in minimal simple groups of finite Morley rank. *Israel J. Math.*, **197** (1), p.377-407, 2013
- [ABW19] T. Altinel, A. Berkman et F.O. Wagner, Sharply 2-transitive permutation groups of finite Morley rank. hal-01935537v2, 2019
- [AB09] T. Altinel et J. Burdges, On analogies between algebraic groups and groups of finite Morley rank. *J. Lond. Math. Soc.* **78** (1), 2009
- [BJO12] E. Baro, E. Jaligot et M. Otero, Commutators in groups definable in o-minimal structures. *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (10), p.3629-3643, 2012
- [BJO14] E. Baro, E. Jaligot et M. Otero, Cartan subgroups of groups definable in o-minimal structures. *J. Inst. Math. Jussieu* **13** (4), p.849–893, 2014
- [BHMPW07] A. Baudisch, M. Martin, A. Martin-Pizarro et F.O. Wagner, Die böse Farbe. *Jour. Inst. Math. Jussieu* **8** (3), p.415–443, 2007
- [Ben97] Y. Benoist, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie*. 1997 European Summer School in Group Theory Luminy July 7-18
- [BMMN98] M. Bhattacharjee, D. Macpherson, R. Möller et P. Neumann, *Notes on infinite permutation groups*, Lectures notes in Math. **1618**, Springer, 1998
- [BB09] A. Borovik et J. Burdges, Linear groups of finite Morley Rank. arXiv :0801.3958v2 prépublication, 2009
- [BBC07] A. Borovik, J. Burdges et G. Cherlin, *Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate case*. *Selec. Math.* **13** (1), p.1-22, 2007
- [BorC08] A. Borovik et G. Cherlin, *Permutation groups of finite Morley rank*. in *Model Theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **350**, p.59–124, 2008
- [BN94] A. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*. Oxford Logic Guides **26**, 1994
- [Bru71] H. Bruck, *A survey of binary systems*. Springer, 3ème ed., 1971
- [BP56] H. Bruck et L.J. Paige, Loops whose inner mappings are automorphisms. *Ann. Math.* **63** (2), p.308-324, 1965
- [Bur04] J. Burdges, A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **274**, p.215–229, 2004
- [Bur06] J. Burdges, Sylow 0-unipotent subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.467-481, 2006

- [BC09] J. Burdges et G. Cherlin, Semisimple torsion in groups of finite Morley rank. *J. Math. Logic* **09** (2), p.183-200, 2009
- [BDS14] E.V. Bugaeva, E.B. Durakov et A.I. Sozutova, On certain near-domains and sharply transitive groups, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN* **20** (2), p.277–283, 2014
- [CG05] C. Champetier et V. Guiradel, Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.* **146**, p. 1-75
- [Che05] G. Cherlin, Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **8**, p.613–621, 2005
- [CJ04] G. Cherlin, E. Jaligot, Tame minimal simple groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **276** (1), p.13-79, 2004
- [CGNV91] G. Cherlin, T. Grundhöfer, A. Nesin et H. Völklein, Sharply transitive linear groups over algebraically closed fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (2), p. 541-550, 1991
- [CT21] T. Clausen et K. Tent, Mock hyperbolic reflection spaces and Frobenius groups of finite Morley rank, prépublication arXiv :2104.10096v1, 2021
- [DMT08] T. De Medts et K. Tent, Special abelian Moufang sets of finite Morley rank. *J. Group Theory* **11** (5), p.645–655, 2008
- [Dix71] J. Dixon, *The Structure of linear groups*. Van Nost. Rei. Math. Studies **37**, 1971
- [Del07] A. Deloro, Thèse de doctorat *Groupes simples connexes minimaux de type impair*. Université Paris Diderot, 2007
- [Del09] A. Deloro, Steinberg’s torsion theorem in the context of groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **12** (5), p.709-710, 2009
- [DJ10] A. Deloro et E. Jaligot, Small groups of finite Morley Rank with involutions. *J. Reine Angew. Math.* **644**, p.23–45, 2010
- [DJ12] A. Deloro et E. Jaligot, Groups of finite Morley rank with solvable local subgroups. *Comm. Algebra* **40** (3), p.1019–1068, 2012
- [DJ16] A. Deloro et E. Jaligot, Involutive automorphisms of N_0° -groups of finite morley rank. *Pacific J. Math.* **285** (1), p.111–184, 2016
- [DW20] A. Deloro et J. Wiscons, The geometry of involutions in ranked groups with TI-subgroups. *Bull. London Math. Soc.* **52** (3), p.411-428, 2020
- [Ed03] M.J Edmundo, Solvable groups definable in o-minimal structures. *J. Pure. Appl. Algebra* **185**, p.103-145, 2003
- [Fre00] O. Frécon, Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **229** (1), p.118-152, 2000
- [Fre06a] O. Frécon, Around unipotence in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.341–359, 2006
- [Fre06b] O. Frécon, Carter subgroups in tame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.361–367, 2006
- [Fre08] O. Frécon, Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Math. Logic* **8** (1), p.41–92, 2008
- [Fre09] O. Frécon, Pseudo-tori and subtame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **12** (2), p.305–315, 2009

- [Fre17] O. Frécon, Linearity of groups definable in o-minimal structures. *Selecta Math.* **23**, p.1563-1598, 2017
- [FJ08] O. Frécon et E. Jaligot, *Conjugacy in groups of finite Morley rank*. in *Model Theory and Applications to Algebra and Analysis. vol 2*, Lond. Math. Soc. Lectures Notes Series **350**, 2008
- [GG14] Y. Glasner et D. Gulko, Sharply 2-transitive linear groups. *Inter. Math. Research Notices* **10**, p.2691–2701, 2014
- [Gla64] G. Glauberman, On Loops of odd order. *J. Algebra* **1**, p.374-396, 1964
- [GHR79] D. Gildenhuys, W. Herfort et L. Ribes, Profinite Frobenius groups. *Arch. Math.* **33**, p.518-528, 1979
- [GP06] J.Z. Gonçalves et D.S. Passman, Linear groups and group rings. *J. Algebra* **295**, p.94–118, 2006
- [Gro02] L.C. Grove, *Classical groups and geometric algebra*, Graduate text in mathematics, AMS, 2002
- [Hall50] M. Hall, A topology for free groups and related groups. *Ann. Math.* **52** (1), p.127-139, 1950
- [Her71] D. Herzig, The structure of Frobenius algebraic groups. *Amer. J. Math.* **83** (3), p.421-431, 1961
- [Hum75] J. Humphreys, *Linear algebraic groups*. Graduate text in Mathematics **21**, Springer, 1975
- [Jal01] E. Jaligot, Full Frobenius Groups of finite Morley rank and the Feit-Thompson Theorem. *Bull. Symbolic Logic* **7** (3), p.315-328, 2001
- [Jal06] E. Jaligot, Generix never gives up. *J. Symbolic Logic* **71**, p.599-610, 2006
- [Ker74] W. Kerby, *On sharply multiply transitive groups*. Ham. Math. Ein. , 1974
- [KW 72a] W. Kerby et H. Wefelscheid, Conditions of finiteness on sharply 2-transitive groups. *Aequa. Math.* **8**, p.287-290, 1972
- [KW 72b] W. Kerby et H. Wefelscheid, Bemerkungen fiber Fastbereiche und seharf zweifaeh transitive Gruppen. *Abhand. Math. Seminar. Univ. Hamburg* 37 1972/73, 1972
- [KW 74] W. Kerby et H. Wefelscheid, The Maximal Sub Near-Field of a Near-Domain. *J. Algebra* **28**, p.319-325, 1974
- [Kie02] H. Kiechle, *Theory of K-loops*. Lecture Notes in Mathematics **1778**, Springer, 2002
- [Las09] D. Lascar, *La théorie des modèles en peu de maux*. Cassini, 2009
- [LW93] J. Loveys et F. Wagner, Canada semi-dry. *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1), p.217-221,1993
- [MP95] H. Macpherson et A. Pillay, Primitive permutation groups of finite Morley rank, *Proc. London Math. Soc.* **70**, p.481-504, 1995
- [Mar96] D. Marker, Introduction to the model theory of fields. in *Model theory of fields*. Lecture Notes in logic **5**, Springer, 1996
- [MMT00] D. Macpherson, Mosley and K. Tent, Permutation groups in o-minimal structures, *J. London Math. Soc.* **62** (2), p. 650-670, 2000

- [Mus04] Y. Mustafin, Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini. *J. Algebra* **218** (1), p.753-773, 2004
- [MusP06] Y. Mustafin et B. Poizat, Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$. *J. Algebra* **297** (1), p. 155-167, 2006
- [NS02] P. Nagy et K. Strambach, *Loops in group theory and lie theory*. De Gruyter, 2002
- [Nes89] A. Nesin, Non-solvable groups of Morley rank 3. *J. Algebra* **124**, p.199-218, 1989
- [NPR91] A. Nesin, A. Pillay et V. Razenj, Groups of dimension two and three over o-minimal structures. *Ann. Pure. App. Logic* **53**, p.279-296, 1991
- [Ould08] A. Ould Houcine, On superstable CSA groups. *Ann. Pure. App. Logic* **154**, p. 1-7
- [PPS00a] Y. Peterzil, A. Pillay et Y. Starchenko, Definably Simple Groups in o-minimal Structures. *Tran. Amer. Math. Soc.* **352**, p.4397-4419, 2000
- [Pill88] A. Pillay, On groups and fields definable in o-minimal structures. *J. Pure Applied Algebra* **53**, p.239-255, 1988
- [Poi85] B. Poizat, *Cours de théorie des modèles : une introduction à la logique mathématique contemporaine*. Nur al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985
- [Poi87] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de réconciliation entre la Géométrie Algébrique et la Logique Mathématique*. Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987
- [Poi01] B. Poizat, Quelques modestes remarques sur une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner. *J. Symbolic Logic* **66** (4), p.1637-1646, 2001
- [Poi18] B. Poizat, Milieu et symétrie, étude de la convexité dans les groupes sans involutions. *J. Algebra* **497**, p.143-163, 2018
- [Poi21] B. Poizat, Symétries et transvections, principalement dans les groupes de rang de Morley fini sans involutions. *J. Symbolic Logic* **86** (3), 2021
- [Pop05] V. Popov, Generically multiply transitive algebraic group action. in *Pro. Int. Colloquium "Algebraic Groups and Homogeneous Spaces" 2004, Tata Inst. Fund. Research 2007*, p. 481-523, 2005
- [RZ10] L. Ribes et P. Zalesskii, *Profinite groups*. A Series of Modern Surveys in Mathematics **40**, Springer, 2010
- [RST17] E. Rips, Y. Segev et K. Tent, A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup. *J. Eur. Math. Soc.* **19** (10), p.2895-2910, 2017
- [Schr82] E.M. Schröder, Eine Gruppentheoretisch-Geometrische kennzeichnung der projektiv-metrischen geometrien. *J. Geometry* **18**, 1982
- [Tent00] K. Tent, Sharply n-transitive groups in o-minimal structures, *Forum Math.* **12** (1), p. 65-75, 2000
- [TZ12] K. Tent et M. Ziegler, *A course in model theory*. Lectures notes in logic **40**, CUP, 2012
- [Tind13] J. Tindzogh Ntsiri, Thèse de doctorat, *Étude de quelques liens entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires*. Université de Poitiers, 2013

- [Wag90] F.O. Wagner, Subgroups of stable groups. *J. Symbolic Logic* **55**, p.151-156, 1990
- [Wag94] F.O. Wagner, Nilpotent complements and Carter subgroups in stable p -groups. *Arch. Math. Logic* **33** (1), p.23-34, 1994.
- [Wag97] F.O. Wagner, *Stable Groups*. London Math. Soc. Lecture Note Series **240**, CUP
- [Wag01] F.O. Wagner, Field of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic* **66** (2), p.703-706, 2001
- [Wag03] F.O. Wagner, Bad fields in positive characteristic. *Bull. Lond. Math. Soc.* **35**, p.499-502, 2003
- [Weh73] B. Wehrfritz, *Infinite Linear Groups : An Account of Group-theoretic Properties of Infinite Groups of Matrices*. Springer, 1973
- [Wis11] J. Wiscons, On groups of finite Morley rank with a split BN-pair of rank 1. *J. Algebra* **330**, p.431-447, 2011

Étude des quasi-groupes de Frobenius et des K-boucles de rang de Morley fini

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude de certains groupes de rang de Morley fini de type impair. Dans un premier chapitre, nous considérons le problème de la classification des groupes strictement 2-transitifs rangés du point de vue algébrique des presque-domaines et des presque-corps. Nous étudions les presque-corps rangés de caractéristique égale à deux et sous une hypothèse technique assez forte, nous démontrons que ce sont des corps algébriquement clos. Une caractérisation des presque-domaines en termes des propriétés du demi-plongement de la K-boucle additive est également esquissée. Dans un deuxième chapitre, nous établissons un certain nombre de résultats sur la théorie des modèles des K-boucles uniquement 2-divisibles ω -stables. Le lien avec la notion de symétron introduite par B. Poizat est exploité. Nous donnons dans ce contexte un analogue de l'analyse de Lascar des groupes de rang de Morley fini. Dans un troisième chapitre, la classe des quasi-groupes de Frobenius - qui contient notamment $SO(3, \mathbb{R})$, $PGL(2, \mathbb{C})$ et $GA(1, \mathbb{C})$ - sera l'objet de notre attention. La question de l'identification de ces groupes classiques dans un contexte qui étend celui des univers rangés et des structures o-minimales est discutée en détail. Dans un quatrième et dernier chapitre, nous examinons le lien entre le projet de classification des quasi-groupes de Frobenius rangés et les groupes définissablement linéaires sur un corps rangé. Une caractérisation des mauvaises paires rangées définissablement linéaires en caractéristique nulle est proposée. On considère également le problème de la résolubilité des quasi-groupes de Frobenius scindés de type impair.

Mots clés : groupe de rang de Morley fini, presque-domaine, groupe de Frobenius, K-boucle, symétron.

Study of quasi-Frobenius groups and K-loops of finite Morley rank

Abstract : This thesis is devoted to the study of certain groups of finite Morley rank and odd type. In the first chapter, we consider the problem of the classification of ranked sharply 2-transitive groups from the algebraic point of view of near-domains and near-fields. We study ranked nearfields of characteristic equal to two and under a rather strong technical hypothesis, we prove that they are algebraically closed fields. A characterization of the near-domains in terms of the properties of the half-embedding of the additive K-loop is also sketched. In a second chapter, we establish a number of results on the model theory of uniquely 2-divisible ω -stable K-loops. The link with the notion of "symétron" introduced by B. Poizat is exploited. We give in this context an analogue of Lascar's analysis of groups of finite Morley rank. In a third chapter, the class of quasi-Frobenius groups - which contains in particular $SO(3, \mathbb{R})$, $PGL(2, \mathbb{C})$ and $GA(1, \mathbb{C})$ - will be in focus. The question of the identification of these classical groups in a context that extends ranked universes and o-minimal structures is discussed in detail. In a fourth and last chapter, we examine the link between the classification project of ranked quasi-Frobenius groups and definably linear groups over a ranked field. A characterization of definably linear bad pairs in zero characteristic is proposed. We also consider the problem of the solvability of split quasi-Frobenius groups of odd type.

Keywords : group of finite Morley rank, near-domain, Frobenius group, K-loop, symmetric space.

