



HAL
open science

Étude sur le fonctionnement du joint radial segmenté pour une application turbomachine

Samia Dahite

► **To cite this version:**

Samia Dahite. Étude sur le fonctionnement du joint radial segmenté pour une application turbomachine. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Poitiers, 2020. Français. NNT : 2020POIT2263 . tel-04118618

HAL Id: tel-04118618

<https://theses.hal.science/tel-04118618v1>

Submitted on 6 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique,
Énergétique – SIMME

Secteur de Recherche : Génie mécanique

Présentée par :

Samia DAHITE

Etude sur le fonctionnement du joint radial segmenté pour une application turbomachine

Directeur de Thèse : Mihai ARGHIR

Soutenue le 22 Juin 2020

devant la Commission d'Examen

JURY

Daniel NELIAS	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
Paolo PENNACCHI	Professeur, Institut Polytechnique de Milan	Rapporteur
Mihai ARGHIR	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
Noel BRUNETIERE	Directeur de recherche, CNRS	Examineur
Koffi Espoir KOUMI	Docteur, Ingénieur de recherche SAE	Examineur

Résumé

Les joints radiaux segmentés (JRS) font partie des systèmes d'étanchéités dynamiques utilisés dans les industries aéronautique et spatiale. Selon leurs constructeurs, ces joints se présentent sous plusieurs types, dont les trois principaux sont; le JRS doté de patins sans poches, le JRS doté de patins avec poches et le JRS à portance augmentée (JRSP) reposant sur un rotor à rainures inclinées. L'objectif de ces différentes configurations est de créer une force d'ouverture du joint pour minimiser le contact entre le rotor et les segments et préserver sa durée de vie, tout en limitant les fuites.

Ce travail présente dans un premier temps le développement d'un modèle numérique permettant la caractérisation statique du fonctionnement des JRS avec et sans poches, afin de déterminer le débit de fuite et les différents efforts appliqués sur le joint. Une étude thermo-hydrodynamique a été effectuée et les résultats numériques ont pu être confrontés à des résultats expérimentaux.

La deuxième partie est dédiée à l'étude du JRSP dont le fonctionnement est non stationnaire. Un traitement numérique spécial du motif des rainures inclinées du rotor a été mis en place. Le développement d'un modèle dynamique a ensuite permis de déterminer les caractéristiques de fonctionnement du joint : le jeu radial, la puissance dissipée et le débit de fuite.

Mots clés: Etanchéité dynamique, Joint radial segmenté, Equation de Reynolds, Etude thermo-hydrodynamique, Analyse dynamique.

Abstract

Annular segmented seals belong to the category of dynamic sealing systems used in aeronautics and space industries. Depending on the manufacturers, these seals can be of several types. The three main ones are: the ASS with smooth pads, the ASS with pocketed pads, and the ASS with increased lift effect operating with a grooved rotor with inclined grooves. The aim of these designs is the creation of an opening force that minimizes the contact between the rotor and the segments but also limits the leakage flow.

The present work starts with the development of a numerical model for the static characterization of the characteristics of the ASS with and without pockets, in order to determine the leakage rate and the different forces applied to the seal. A thermo-hydrodynamic study was conducted and the numerical results were compared to some experimental results.

The second part is dedicated to the study of ASS with increased lift. A special numerical treatment was developed for taking into account the inclined grooves of the rotor. The development of a dynamic model then made possible the calculation of the operating characteristics of the seal: the radial clearance, the dissipated power and the leakage rate.

Key words: Dynamic seal, Annular segmented seal, Reynolds equation, Thermo-hydrodynamic study, Grooved rotor, Dynamic analysis.

Remerciement

Les travaux de cette thèse ont été réalisés en partenariat entre le Département Génie mécanique et Systèmes Complexes de l'institut PPRIME de l'Université de Poitiers, dirigé par M. Mihai ARGHIR et Le département Roulements, Etanchéités, Fixations de Safran Aircraft Engines - Villaroche, dirigé par M. Alban LEMAITRE. Je tiens donc tout d'abord à les remercier pour m'avoir donné l'occasion de réaliser cette thèse.

Je remercie tout particulièrement mon directeur de thèse M. Mihai ARGHIR pour son encadrement et son aide précieuse et indispensable tout au long de cette thèse. Je tiens aussi à remercier M. Paolo PENNACCHI et M. Daniel NELIAS pour avoir rapporté ce travail, mais également M. Noel BRUNETIERE pour avoir présidé le jury de thèse. J'adresse un remerciement particulier à mon encadrant industriel M. Koffi Espoir KOUMI pour avoir pris part au jury de thèse et avoir examiné ce travail, mais également pour sa présence, ses conseils, son implication et son soutien absolu durant ces trois années de thèse.

Je remercie le personnel du D3 de l'institut PPRIME pour leur accueil et leur sympathie, merci à vous, Laurence, Michel, Pascal, Noel (que je remercie encore une fois), Jean, Catherine, Estelle, ...

Je remercie mes fidèles amis et collègues de bureaux Hiba, Omar, Younes, Shuhui et Ferdaws. Je remercie également Lahna, Anastassios, Guitri, Prasanth, Ahn, Yongfan, Erwan et Thibaud pour leur présence et le temps passé ensemble. Je remercie les anciens thésards, Silun, Louis et Mathieu, ainsi que toute autre personne ayant croisé mon chemin durant ce parcours. Sans votre présence cette thèse n'aurait en aucun cas été la même.

En dehors des murs du laboratoire je tiens à remercier mes amies de longue date Zineb et Houda qui ont inlassablement été présentes depuis le début de mon parcours académique et qui n'ont épargné aucun effort pour me soutenir malgré la distance.

Finalement, j'exprime ma plus profonde reconnaissance et ma gratitude à ma mère, à mon père et à ma sœur. Merci pour votre soutien permanent et votre amour inconditionnel. Je vous remercie d'être toujours là pour m'aider, me réconforter et m'encourager. Cette thèse vous est dédiée.

A ma mère,

A mon père,

A ma sœur

Table des Matières

Nomenclature.....	10
Liste des figures.....	12
1 Contexte de l'étude.....	16
1.1 Joints utilisés dans l'industrie aéronautique.....	18
1.1.1 Le joint labyrinthe.....	18
1.1.2 Le joint à brosse.....	19
1.1.3 Le joint à faces radiales (garniture mécanique)	19
1.1.4 Le joint à bague flottante	20
1.1.5 Le joint radial segmenté	21
1.2 Etude bibliographique sur le joint radial segmenté	24
1.3 Plan de la thèse	25
2 Etude du joint radial segmenté (JRS).....	27
2.1 Introduction.....	27
2.2 Calcul des charges générées dans le JRS	28
2.2.1 Equations du film mince compressible et non-isotherme	28
2.2.2 Résolution de l'équation de Reynolds.....	31
2.2.3 Calcul des charges de contact	38
2.3 Etude thermique du JRS	41
2.3.1 Résolution de l'équation de l'énergie dans le film mince	41
2.3.2 Calcul du flux de chaleur généré dans le film mince	50
2.3.3 Résolution de l'équation de la chaleur.....	56
2.3.4 Couplage Rotor-Segment-Film fluide	65
2.4 Equilibre des efforts appliqués sur le segment	70
2.4.1 Etude du mouvement du segment à 1 degré de liberté	73
2.4.2 Equilibre du segment à 3 degrés de liberté.....	75
2.5 Résultats	78
2.5.1 Joint radial segmenté à poches de diamètre modéré.....	78
2.5.2 Joint radial segmenté de grand diamètre	82
2.6 Conclusions.....	92
3 Etude du joint radial segmenté à portance (JRSP)	93
3.1 Introduction.....	93
3.2 Modélisation du joint radial segmenté à portance (JRSP)	95

3.2.1	Description de la géométrie et du fonctionnement.....	95
3.2.2	Traitement de l'aspect non stationnaire	97
3.2.3	Discrétisation du film fluide	99
3.3	Résolution de l'équation de Reynolds sur un maillage triangulaire.....	99
3.3.1	Discrétisation de l'équation	99
3.3.2	Conditions aux limites	103
3.3.3	Résolution de l'équation de Reynolds compressible et sans discontinuités (matrice Jacobienne incomplète)	104
3.3.4	Prise en compte des discontinuités du film dans l'équation de Reynolds discrétisée	105
3.3.5	Résolution de l'équation de Reynolds avec matrice Jacobienne complète	109
3.3.6	Prise en compte du terme non-stationnaire de l'équation de Reynolds	112
3.4	Résultats	113
3.4.1	Approche simplifiée.....	113
3.4.2	Approche complète	121
3.5	Conclusions.....	130
4	Conclusions et perspectives	131
	Annexe A : Résultats thermiques du joint de grand diamètre	133
	Annexe B : Paramètres de calcul de la charge de contact	153
	Annexe C : Calcul de la force fluide sous le nez	154
	Annexe D : Algorithmes de résolution de systèmes non linéaire	155
	Annexe E : Défauts de forme de la lèvre	156
	Annexe F : Formule d'ondulations de surfaces	158
	Annexe G : Influence de la profondeur de la poche sur la portance	159
	Bibliographie.....	160

Nomenclature

A	Constante de Sutherland
A_{cac}	Amplitude crête à crête des ondulations [m]
C_f	Couple de frottement [N.m]
E	Module d'Young [Pa]
e_x	Déplacement du segment selon la direction X [m]
e_y	Déplacement du segment selon la direction Y [m]
F	Force [N]
f	Coefficient de frottement Carbone
g	Ouverture « gap » [m]
h	Epaisseur du film fluide [m]
h_{conv}	Coefficient de convection de l'air [$W m^{-2} K^{-1}$]
h_{poche}	Profondeur des poches [m]
h_{rain}	Profondeur des rainures [m]
J	Flux massique élémentaire [$Kg m^{-1} s^{-1}$]
k_a, k_t	Conductivité thermique de l'air, du solide [$W m^{-1} K^{-1}$]
l_{ij}	Distance entre deux points indicés respectivement en i et j [m]
L_x, L_y	Longueur selon les axes x, y [m]
M	Moment [N.m]
\dot{m}	Flux massique traversant une cellule de maillage
n_x, n_y, n_z	Nombre de cellules du maillage selon x, y, z
P	Pression [Pa]
\mathcal{P}_r	Puissance [W]
Q, q	Flux [W]
Q_m	Débit de fuite joint [g/s]
R	Rayon [m]
\mathcal{R}	Constante des gaz parfaits [$J Kg^{-1} K^{-1}$]
S	Surface [m^2]
T	Température [K]
t	Coordonnée temporelle [s]
U_x	Vitesse de déplacement de la paroi selon x [m/s]
u, v, w	Vitesse du fluide selon les axes x, y, z [m/s]
V_n	Vitesse du fluide selon la direction n [m/s]
x, y, z	Coordonnées selon les directions x, y, z [m]
ΔP	Différence de pression [bar]
Δt	Pas de temps [s]
θ	Coordonnée angulaire [rad]
θ_s	Demi-amplitude du segment [rad]
μ	Viscosité dynamique [Pa.s]
ρ	Densité [kg/m^3]
φ	Rotation du segment autour de l'axe Z [m]
η	Densité de surface des aspérités [m^{-2}]
Ω	Vitesse de rotation [rad /s]
γ	Longueur d'une arête [m]
Δ	Compressibilité
σ	Ecart type de rugosité de surface [m]

ν	Coefficient de Poisson
τ	Taux de cisaillement [Pa]
ϕ	Diamètre [m]
\mathcal{V}	Aire d'une cellule de maillage [m^2]
κ	Rapport des chaleurs spécifiques

Liste des figures

Figure 1. Circuit d'huile dans un moteur aéronautique	16
Figure 2. Schéma de principe du système d'étanchéité autour d'un roulement de moteur aéronautique	17
Figure 3. Turbopompe à oxygène liquide utilisée pour les moteurs fusées et détail d'une étanchéité destinée à séparer la partie turbine entraînée par des gaz (à droite dans l'image) de la partie pompe (à gauche)	17
Figure 4. Exemples de mise en œuvre de l'étanchéité des roulements dans les moteurs aéronautiques	18
Figure 5. Joint labyrinthe [3]	19
Figure 6. Joint à brosse [3]	19
Figure 7. Schématisation d'une garniture mécanique [6]	20
Figure 8. Schéma de principe d'une bague flottante [8]	21
Figure 9. Schéma du premier joint segmenté [9]	21
Figure 10. Joint radial segmenté actuel [8]	22
Figure 11. Bilan des forces sur un JRS	23
Figure 12. Géométrie des segments et des patins pour chaque type de JRS/JRSP	24
Figure 13. Etanchéités d'une turbopompe à oxygène liquide testé par Oike et al. [12]	25
Figure 14. Segments du patin a) avec poches b) sans poches [8]	27
Figure 15. Déplacement du segment selon les trois degrés de liberté	28
Figure 16. Modélisation du joint et du rotor	29
Figure 17. Cellule de discrétisation en volumes finis	31
Figure 18. Maillage fluide d'un patin avec et sans poche	31
Figure 19. Pression atmosphérique appliquée sur la face "Est" d'un volume de contrôle	33
Figure 20. Représentation d'une discontinuité sur les faces des cellules d'un maillage rectangulaire	35
Figure 21. Modélisation de la surface somme	39
Figure 22. Modélisation de la surface rugueuse selon les hypothèses de GW	40
Figure 23. Schématisation d'un patin pour la résolution de l'équation de l'énergie	41
Figure 24. Volume de contrôle et les notations utilisées pour les faces et les volumes adjacents	42
Figure 25. Discrétisation selon l'épaisseur du film (direction z)	44
Figure 26. Algorithme de résolution de l'équation de l'énergie en 3D	45
Figure 27. Champ de température moyennée selon la direction z (Cas 1)	46
Figure 28. Champ de pression dans le patin (Cas 1)	46
Figure 29. Champ de température moyennée selon la direction z (Cas 2)	47
Figure 30. Champ de pression dans le patin (Cas 2)	47
Figure 31. Températures moyennées et pression du plan du milieu du patin (Cas 1)	49
Figure 32. Températures moyennées pour le milieu du patin selon la direction y (Cas 2)	49
Figure 33. Températures maximales dans le patin en fonction de la vitesse U_x	50
Figure 34. Création du flux Q entre le segment et le rotor	51
Figure 35. Modélisation du triplet Segment-Rotor-Film Fluide	51
Figure 36. Modélisation du segment	52
Figure 37. Vue de dessous d'un segment à trois patins avec et sans poches	52
Figure 38. Modélisation du rotor et vue de gauche d'une coupe du rotor	53

Figure 39. Vue de face d'un rotor complet avec joint.....	54
Figure 40. Vue isométrique de la partie gauche du rotor	54
Figure 41. Parallélépipède avec notations des faces	56
Figure 42. Maillage structurel du segment et du rotor sur la zone du premier patin	56
Figure 43. Volume 2D avec température imposée sur la face « East ».....	58
Figure 44. Volume 2D avec flux imposée sur la face « East »	59
Figure 45. Volume 2D avec condition de convection libre sur la face « East ».....	59
Figure 46. Deux éléments de volume en 2D avec condition de périodicité.....	61
Figure 47. Position des éléments <i>ai</i> dans la matrice hepta diagonale K.....	63
Figure 48. Representation des températures pour différentes couches de maillage du parallélépipède	63
Figure 49. Structure de la matrice de l'équation (186)	64
Figure 50. Schématisation des différentes couches du segment et du rotor	65
Figure 51. Origine des flux extérieurs affectant les volumes de la couche inférieure du segment...	66
Figure 52. Algorithme du couplage thermo-gaso-dynamique	69
Figure 53. Bilan des forces sur un segment (ajouter la vitesse de rotation).....	71
Figure 54. Representation du contact Nez-Stator.....	72
Figure 55. Déplacement du segment selon la direction X.....	74
Figure 56. Forces et couple créés dans le segment en fonction de la position <i>eX</i> pour une vitesse de $\Omega=500$ rad/s.....	75
Figure 57. Schéma représentant <i>hmin</i> et <i>Fcontact</i>	76
Figure 58. Traçage de la fonction $fx = 2\pi \tan - 1x\epsilon s$ pour $\epsilon s = 10 - 7$	77
Figure 59. Géométrie déroulée d'un segment [10].....	78
Figure 60. Déplacement radial <i>eX</i> , tangentiel <i>eY</i> et rotation ϕ du segment	79
Figure 61. Valeur minimale de l'épaisseur du film <i>hmin</i> et débit massique du joint.....	79
Figure 62. Couple et puissance dissipée dans le joint.....	80
Figure 63. Température du segment and du rotor (<i>FressortCirc</i> = 5N, <i>Fressort_ax</i> = 20N). 80	
Figure 64. Valeur maximale de la température du segment et température de surface du rotor (<i>FressortCirc</i> = 5N, <i>Fressort_ax</i> = 20N)	81
Figure 65. Pourcentage de flux d'échauffement dû au contact (<i>FressortCirc</i> = 5N, <i>Fressort_ax</i> = 20N).....	81
Figure 66. Configuration du joint a) N°1 b) N°2 c) N°3.....	82
Figure 67. Disposition des joints pour les trois campagnes d'essais [39]	82
Figure 68. Résultats adimensionnés: joint N°1 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar.. 86	
Figure 69. Résultats adimensionnés: joint N°1 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1$ bar..... 87	
Figure 70. Résultats adimensionnés: joint N°2 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar.. 88	
Figure 71. Résultats adimensionnés: joint N°2 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1$ bar..... 89	
Figure 72. Résultats adimensionnés: joint N°3 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°3 - $\Delta P = 0,4$ bar.. 90	
Figure 73. Résultats adimensionnés: joint N°3 (<i>hond</i> = 0) - Campagne d'essais N°3 - $\Delta P = 1$ bar..... 91	
Figure 74. Modélisation du rotor rainuré [43]	93
Figure 75. Segment d'un joint radial segmenté à portance (JRSP)	93
Figure 76. Volume de contrôle considéré par Whipple pour étudier la présence d'une infinité de rainures [44]	94
Figure 77. Représentation a) d'un palier à chevrons [53] b) de la surface rainurée d'un palier à rainures spiralées [52]	94

Figure 78. Représentation d'un motif de rainures et ses dimensions	96
Figure 79. Modélisation de parties du rotor comportant un motif et du patin en vis à vis.....	97
Figure 80. Segments et rotor rainuré : a – système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant.....	97
Figure 81. Représentation du mouvement du rotor texturé : a- système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant	98
Figure 82. Représentation du domaine d'étude pour a) système de coordonnées fixe b) approche simplifiée dans un repère tournant c) approche complète dans un repère tournant.....	98
Figure 83. Maillage de a) l'approche simplifiée b) l'approche complète	99
Figure 84. Élément du maillage triangulaire	100
Figure 85. Schématisation des différents points caractéristiques permettant le calcul de la dérivée de la pression	100
Figure 86. Représentation des pressions au milieu de deux cellules adjacentes ainsi que le vecteur de vitesse normale associé à l'arête	102
Figure 87. Pression atmosphérique appliquée sur un bord du domaine.....	103
Figure 88. Conditions aux limites appliquées sur les bords d'un domaine	104
Figure 89. Représentation de deux éléments présentant une discontinuité.....	105
Figure 90. Maillage et pression dans un patin comportant une rainure statique inclinée ($h_{film} = 1 \mu m$, $h_{rain} = 10 \mu m$).....	109
Figure 91. Triangle principale et ses adjacents dans deux différentes configurations	110
Figure 92. Algorithme de résolution de l'équation de Reynolds.....	112
Figure 93. Bilan des efforts appliqués sur le patin (Approche simplifiée)	113
Figure 94. Pression sur le patin et sur la lèvre pour un calcul en position imposée.....	115
Figure 95. Modélisation de l'équilibre du patin entre deux positions ex1 et ex2.....	116
Figure 96. Cas 1 : Position axiale $y_0 - 15\%$	117
Figure 97. Cas 2 : Position axiale $y_0 - 5\%$	118
Figure 98. Cas 3 : Position axiale $y_0 + 5\%$	119
Figure 99. Cas 4 : Position axiale $y_0 + 15\%$	120
Figure 100. Déplacement radial et débit massique pour $U_x = \pm 50 m/s$	121
Figure 101. Représentation du mouvement du rotor texturé : a- système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant avec rainures axiales profondes en déplacement	121
Figure 102. Champs de pression dans le patin pour une position imposée $ex = 4 \mu m$ a) sans isobare b) avec présence d'une isobare stationnaire sur le 2ème motif.....	122
Figure 103. Bilan des efforts appliqués sur le patin (Approche complète).....	122
Figure 104. Variation de la charge dans le patin en fonction du temps ($dt=1.E-5 s$, maillage de 20000 trgs et $U_x=-50 m/s$) pour une épaisseur de film imposée de a) $ex=4\mu m$ b) $ex=2\mu m$	123
Figure 105. Etude de la convergence des résultats en pas de temps et nombre d'elements de maillage	124
Figure 106. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 5N$, $U_x = -50 m/s$)	126
Figure 107. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 10N$, $U_x = -50 m/s$)	127
Figure 108. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 5N$, $U_x = -12 m/s$)	128
Figure 109. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 10N$, $U_x = -12 m/s$)	129

Liste des tableaux

Tableau 1 Avantages et inconvénient du joint à bague flottante [9].....	21
Tableau 2. Avantages et inconvénients du JRS [9]	24
Tableau 3 Résultante des efforts en position d'équilibre potentiel en 1D	74
Tableau 4 Conditions aux limites appliqués au segment et au rotor - joint de diamètre modéré	78
Tableau 5 Conditions aux limites appliqués au segment et au rotor - joint de grand diamètre	83
Tableau 6. Paramètres de calcul en position imposée.....	114
Tableau 7. Résultats de calcul en position imposée pour les données duTableau 6	114
Tableau 8. Débits pour différents ΔP et vitesses de rotation mettant en évidence l'effet de pompage (résultats obtenus avec les données du Tableau 6)	115

1 Contexte de l'étude

Les rotors des moteurs aéronautiques sont guidés en rotation par des roulements à billes et à rouleaux lubrifiés avec une huile sous pression. La Figure 1 présente l'alimentation en huile d'un moteur aéronautique. La même huile peut être utilisée pour alimenter les amortisseurs à film fluides éventuellement installés entre la bague extérieure du roulement et le carter du moteur et destinés à diminuer les amplitudes aux passages des modes propres. Cette huile doit rester confinée au voisinage du roulement et doit être entièrement récupérée. La Figure 2 présente un schéma de principe des étanchéités typiquement mises en place. Le roulement est entouré d'une première chambre où l'huile est injectée et récupérée par un drain. Cette chambre est entourée par une deuxième enceinte où l'air pressurisé récupéré sur un étage du compresseur du moteur est injecté. Pour que l'huile reste emprisonnée dans la première chambre, la pression dans l'enceinte extérieure est légèrement supérieure. L'air injecté dans l'enceinte pressurisée va s'évacuer soit vers la chambre destinée à contenir l'huile lubrifiant, soit vers l'extérieur. De cette manière, l'enceinte contenant l'air pressurisé sépare l'huile lubrifiant du milieu extérieur. Pour limiter le débit d'air et pour maintenir sa pression, des étanchéités dynamiques isolent l'enceinte pressurisée par rapport à l'extérieur (étanchéités air/air sur la figure) et par rapport à la chambre contenant le lubrifiant (étanchéités air/huile). Le roulement sera alors entouré d'un mélange air/huile dont la fraction volumique d'huile est inférieure à 10%. La chambre pressurisée joue le rôle d'un joint tampon. La surpression dans cette chambre n'est pas élevée (autour de 0,2 bar ..0,5 bar) et elle est associée à des vitesses modérées du rotor (de 1000 *tr/min* jusqu'à 5000 *tr/min*). Toutefois les diamètres sont importants (de l'ordre d'une centaine de mm).

Des étanchéités dynamiques performantes et fiables sont nécessaires pour assurer un fonctionnement normal du moteur. Il existe plusieurs types d'étanchéités mais elles ne sont pas toutes éligibles pour étancher les chambres des roulements. En effet, l'étanchéité ne doit pas être seulement fiable et avoir une très faible fuite, mais elle doit pouvoir supporter les vitesses linéaires élevées du rotor et les déplacements radiaux et axiaux de celui-ci puisque les rotors des moteurs aéronautiques sont longs et flexibles. Pour cette raison, ils se déforment axialement lors de la mise en fonctionnement du moteur (les déplacements axiaux étant de l'ordre de 1/10 mm) et sont soumis à des déplacements dynamiques radiaux provenant des vibrations du rotor.

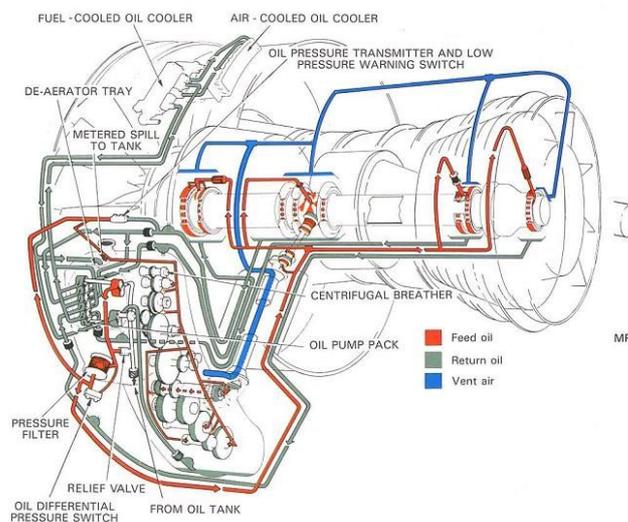


Figure 1. Circuit d'huile dans un moteur aéronautique

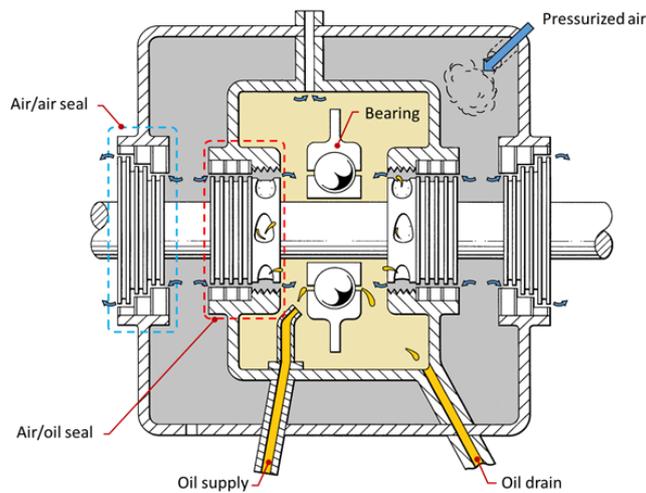


Figure 2. Schéma de principe du système d'étanchéité autour d'un roulement de moteur aéronautique

Des problèmes similaires sont rencontrés pour les turbopompes des moteurs fusées. La Figure 3 présente la turbopompe d'oxygène liquide installée sur le moteur principal de la fusée Ariane V. La turbopompe aspire et refoule l'oxygène et est entraînée par la détente de l'hydrogène dans la turbine. L'oxygène et l'hydrogène sont séparés par l'injection d'un gaz inerte (par exemple l'hélium) fourni par un réservoir spécialement dédié. Des étanchéités dynamiques délimitent l'enceinte où ce gaz inerte est injecté des parties pompe (fonctionnant en oxygène) et turbine (fonctionnant en hydrogène). Les étanchéités dynamiques ont donc une importance capitale sur la fiabilité de la turbopompe. Tout comme pour le moteur aéronautique, les étanchéités doivent fonctionner avec des débits réduits et s'adapter aux déplacements axiaux et radiaux du rotor. Toutefois, les conditions de fonctionnement pour les turbopompes utilisées par les moteurs des fusées sont complètement différentes des moteurs aéronautiques. Les vitesses de rotation sont plus élevées (les vitesses linéaires restent à peu près du même ordre de grandeur que pour les moteurs aéronautiques puisque les diamètres sont plus faibles) mais surtout les pressions à étancher sont plus élevées. De même, les durées de vie attendues sont beaucoup plus faibles dans le transport spatial.

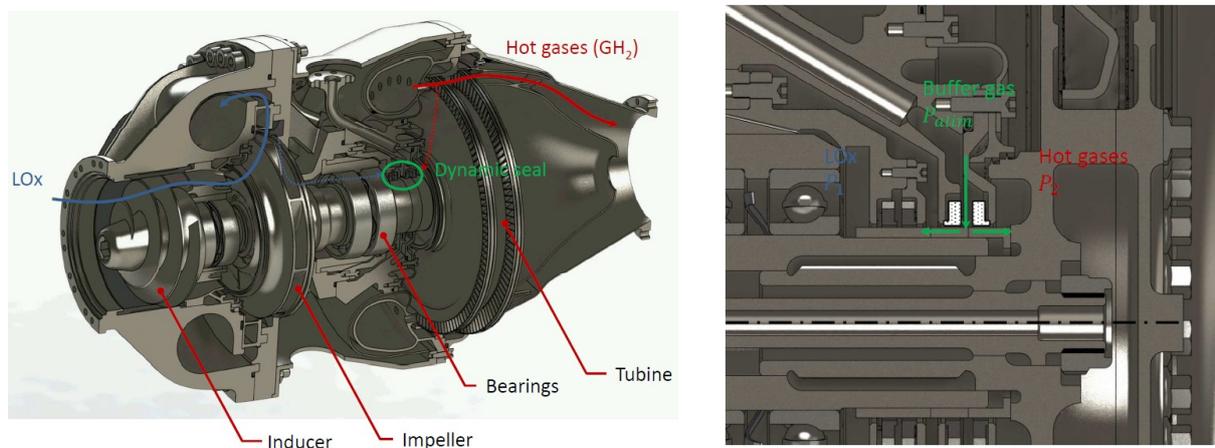


Figure 3. Turbopompe à oxygène liquide utilisée pour les moteurs fusées et détail d'une étanchéité destinée à séparer la partie turbine entraînée par des gaz (à droite dans l'image) de la partie pompe (à gauche)

La Figure 4 présente des exemples de mise en œuvre de l'étanchéité des roulements dans les moteurs aéronautiques. Sur la Figure 4a, l'étanchéité air/huile est réalisée avec un joint à faces radiales tandis que l'étanchéité air/air est réalisée avec un joint labyrinthe, sur la Figure 4b elle est réalisée avec un joint à brosse.

Chacune de ces solutions a des avantages et des désavantages. Les joints à faces radiales ont de très faibles fuites mais ne sont pas faciles à installer et ne s'adaptent pas très bien aux déplacements axiaux du rotor. Les joints labyrinthes sont simples, mais les fuites y sont élevées. Les joints à brosse sont relativement simples, s'adaptent bien à tous les déplacements du rotor mais ont une durée de vie limitée due à leur usure inhérente.

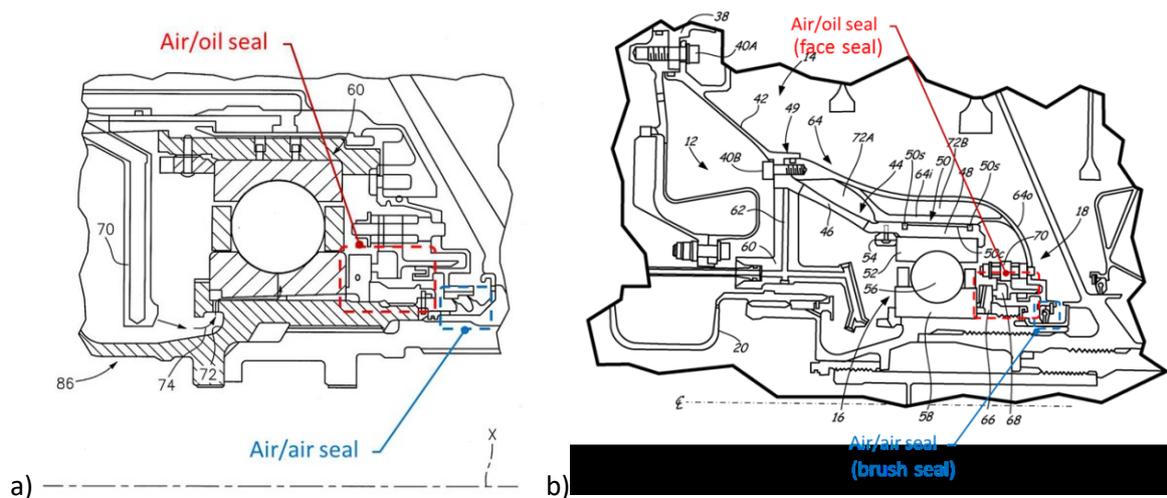


Figure 4. Exemples de mise en œuvre de l'étanchéité des roulements dans les moteurs aéronautiques

1.1 Joints utilisés dans l'industrie aéronautique

1.1.1 Le joint labyrinthe

Le joint labyrinthe est l'une des plus anciennes étanchéités dynamiques [1]. Il consiste en un passage tortueux réalisé avec des chicane où le fluide à étancher dissipe une partie de l'énergie potentielle. L'efficacité est assez limitée car le joint doit pouvoir s'adapter aux déplacements dynamiques du rotor. En effet, les rotors des moteurs aéronautiques sont flexibles et présentent des déplacements radiaux importants suite aux vibrations du rotor ou durant les phases de vol. Les jeux radiaux dans les labyrinthes doivent alors être assez importants pour éviter tout contact entre la partie fixe et tournante mais cette contrainte mène à des fuites importantes. Une solution pour diminuer le jeu radial est de réaliser la partie fixe du labyrinthe avec un matériau abradable [2] dans lequel les dents du rotor vont creuser des sillons. La durée de vie de cette solution est limitée mais a l'avantage de pouvoir être assez bien prédite. Le joint labyrinthe peut être vu comme un joint annulaire prévu avec des dents sur le stator et/ou sur le rotor.

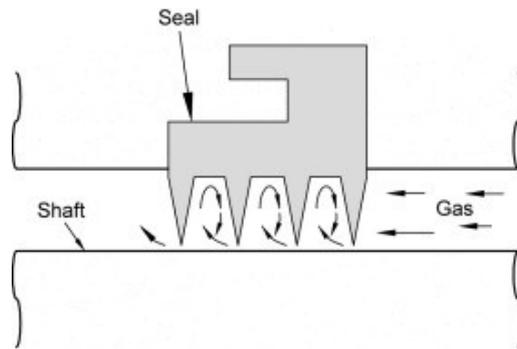


Figure 5. Joint labyrinthe [3]

1.1.2 Le joint à brosse

Les joints à brosse sont la première étanchéité compliant utilisée à l'échelle industrielle [4]. Ils présentent une conception particulière qui repose sur l'encastrement de plusieurs fils entre deux plaques et constituent ainsi une évolution des joints labyrinthes. L'ensemble de ces fils forment une brosse qui vient interférer avec le rotor pour former la zone d'étanchéité. Ces fils sont montés inclinés dans le sens de rotation du rotor d'un angle pouvant aller de 30° à 55° et sont fabriqués en alliage de Cobalt. L'étanchéité créée à l'aide de ce dispositif est généralement employée pour des fluides compressibles. Comparés aux joints labyrinthes, les joints à brosse démontrent un débit de fuite moindre et un encombrement plus faible. Leurs diamètres peuvent atteindre l'ordre du mètre pour des vitesses linéaire allant jusqu'à 400 m/s et des différences de pression pouvant atteindre les 20 bar [1].



Figure 6. Joint à brosse [3]

1.1.3 Le joint à faces radiales (garniture mécanique)

Le joint à faces radiales est une étanchéité dynamique utilisée dans un large panel de domaines industriels. Il est composé de deux éléments principaux : une bague liée à la partie tournante et une bague liée au stator. Ces deux bagues sont en contact sur la face constituant l'étanchéité principale du joint. Dans la majorité des cas, la bague liée au rotor (le grain mobile) est gardée en contact contre la bague fixe grâce à un ressort lui permettant de bénéficier d'un degré de liberté axial. L'étanchéité principale est maintenue grâce à la surpression créée entre les deux anneaux en mouvement relatif. Cette étanchéité est réputée pour ces performances remarquables et sa longévité. Elle est utilisée dans les conditions de fonctionnement les plus rudes (tel que des

températures faibles ou élevées), et n'a pas de restriction quant aux fluides à étancher. Les diamètres fonctionnels dépassent les 500 mm pour des vitesses linéaires supérieures à 500 m/s [5].

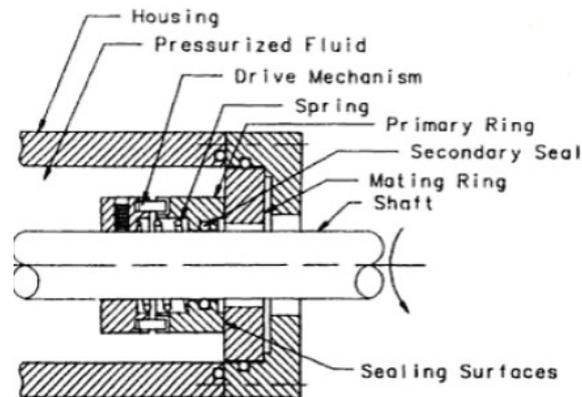


Figure 7. Schématisation d'une garniture mécanique [6]

1.1.4 Le joint à bague flottante

La conception du joint à bague flottante [7] découle de celle du joint annulaire simple où le jeu est assez élevé (généralement supérieur à 50 μm) pour pouvoir contenir les déplacements dynamiques du rotor. Ce joint est réputé pour bien répondre à des différences de pression élevées et de grandes vitesses de rotation. Contrairement au joint annulaire et pour limiter le débit de fuite, le jeu de fonctionnement de la bague flottante est limité à 25 μm . Une face de cette bague reste plaquée contre le carter mais peut glisser dans un plan normal à l'axe de rotation. La bague peut alors suivre les déplacements dynamiques du rotor. Le principe met en évidence deux surfaces d'étanchéité (Figure 8):

- Une étanchéité principale qui s'opère entre le rotor et la face intérieure de la bague. Les efforts hydrodynamiques générés dans l'étanchéité principale peuvent être assimilés à des effets de raideurs et d'amortissements du film fluide. Un bon asservissement de la bague passe par la garantie d'une raideur directe importante. Plusieurs aspects géométriques peuvent être pris en compte dans ce but tel que l'usinage de poches circonférentielles ou encore le rajout d'orifices d'alimentation sur la surface intérieure de la bague [8].
- Une étanchéité secondaire située entre le nez du joint et le stator. Le « nez » du joint est constamment en contact avec la partie statique, ce qui conduit à de forte dissipation par frottement lors du suivi des vibrations du rotor. Ce paramètre est donc très pénalisant et limite la durée de vie du joint. Pour remédier à ça, plusieurs configurations du nez ont été adoptées pour permettre de limiter les efforts générés par frottement [7].

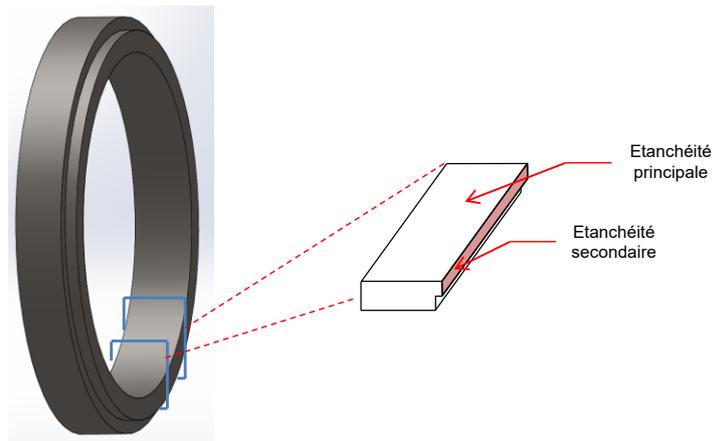


Figure 8. Schéma de principe d'une bague flottante [8]

Le Tableau 1 présente les différents avantages et inconvénient du joint à bague flottante.

Tableau 1 Avantages et inconvénient du joint à bague flottante [9]

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Suivi des vibrations du rotor -Faible jeu radial -Faible usure et faibles puissances dissipées -Fonctionnement à vitesses et à différences de pression élevés. -Simplicité de la géométrie. 	<ul style="list-style-type: none"> -Débit de fuite plus élevé qu'un joint radial segmenté. -Jeu radial sensible aux différences de températures et de pressions élevées.

1.1.5 Le joint radial segmenté

Le joint radial segmenté (JRS) est une évolution du joint à bague flottante, et leurs fonctionnements sont assez similaires. Le premier modèle du joint segmenté dérivait d'un joint à bague flottante séparé radialement en plusieurs segments qui étaient par la suite maintenus autour du rotor à l'aide d'un ressort circonférentiel (Figure 9). Cette conception venait de la volonté de rendre le joint compliant pour permettre plus de liberté dans le suivi des vibrations de l'arbre. Les segments ne disposaient pas d'étanchéités aux extrémités successives et pour cette raison les fuites étaient élevées.



Figure 9. Schéma du premier joint segmenté [9]

Une nouvelle conception du JRS a donné lieu au rajout de mortaises dans les zones de recouvrement en liant chaque segment à son voisin¹. Le JRS est donc constitué de trois ou de six segments rassemblés autour du rotor par un ressort circonférentiel. L'ensemble est ensuite plaqué par des ressorts axiaux contre le stator. A l'arrêt le jeu radial est nul. Durant le fonctionnement, les effets de portance hydrodynamique créée par les patins soulèvent légèrement les segments.

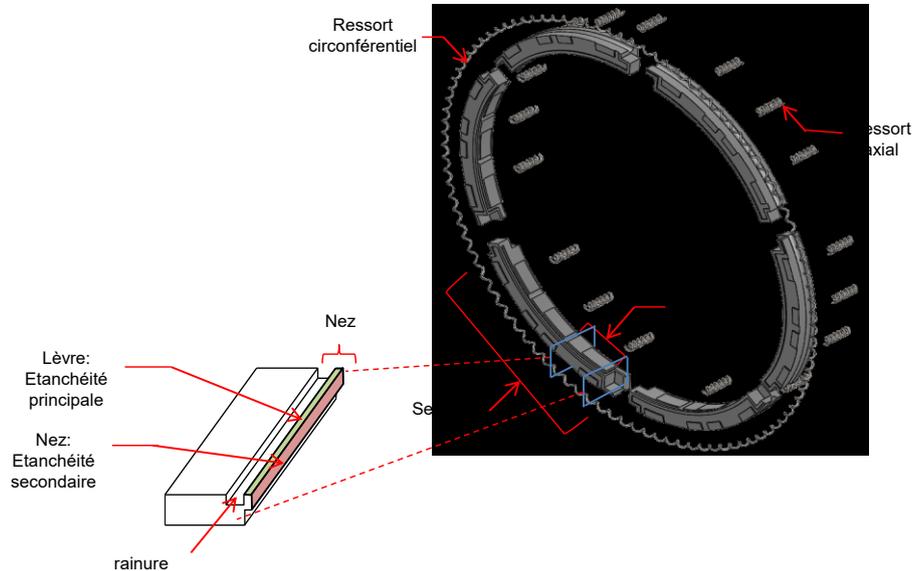


Figure 10. Joint radial segmenté actuel [8]

Chaque segment comporte un ou plusieurs patins. Généralement, le matériau utilisé pour la fabrication des joints dépend des conditions de fonctionnement et des caractéristiques du fluide à étancher. Dans le cas du JRS, le carbone graphité a souvent démontré de bonnes performances vis-à-vis des conditions des fluides cryogéniques utilisés dans les turbopompes, où les températures peuvent facilement varier de -200°C à 500°C . Contrairement au joint à bague flottante, le JRS est majoritairement utilisé pour étancher des gaz [9].

Similairement au joint à bague flottante, le JRS se compose de deux étanchéités (Figure 10) :

- Une étanchéité principale s'opérant entre le rotor et la lèvre.
- Une étanchéité secondaire entre le nez du joint et le stator.

Contrairement à l'usage, l'étanchéité principale du JRS n'est fonctionnelle que sur la zone restreinte de la lèvre. Cette configuration apporterait plus de retenue et le débit de fuite s'en trouverait réduit.

Comme mentionné précédemment, le joint est retenu autour du rotor à l'aide d'un ressort circonférentiel qui applique une charge radiale visant à refermer le joint. Une charge axiale est ensuite appliquée par plusieurs ressorts axiaux dans le but de plaquer le nez contre le stator. A l'arrêt, et en négligeant la force de la gravité, ces deux efforts sont les seules forces externes

¹ Le joint radial segmenté a été initialement utilisé dans des turbopompes des moteurs spatiaux et a commencé à être mentionné dans la littérature vers les années 70. Dans [9] Burcham présente une description détaillée des différents systèmes d'étanchéités utilisées dans les turbopompes spatiales, ainsi que les éventuels problèmes et contraintes techniques de fonctionnement. Le joint radial segmenté y est présenté comme un élément à conception très développé et dont le débit de fuite est largement inférieur aux autres joints annulaires.

appliquées sur le segment. Un troisième effort radial est dû à la force de frottement sur le nez du segment.

Lors du fonctionnement, la pression P_{amont} règne dans la zone à l'amont de l'étanchéité principale et la pression P_{aval} dans la zone après étanchéité (Figure 11). Ainsi, comme pour le joint à bague flottante, la différence de pression entre l'amont et l'aval crée une charge axiale qui viendra se rajouter aux efforts des ressorts axiaux pour plaquer le joint contre le stator. Un très faible écoulement s'établira toujours sous l'étanchéité secondaire car le contact entre le stator et le nez n'est jamais parfait à cause des rugosités des surfaces. La force hydrostatique normale qui en découle complètera l'équilibre axial du joint.

Les patins usinés sur la face radiale de chaque segment ont le rôle de créer la portance hydrodynamique pour ouvrir le joint. La force de frottement découlant du contact nez-stator viendra ensuite compléter l'effort radial du ressort circonférentiel et contrer l'ouverture du joint.

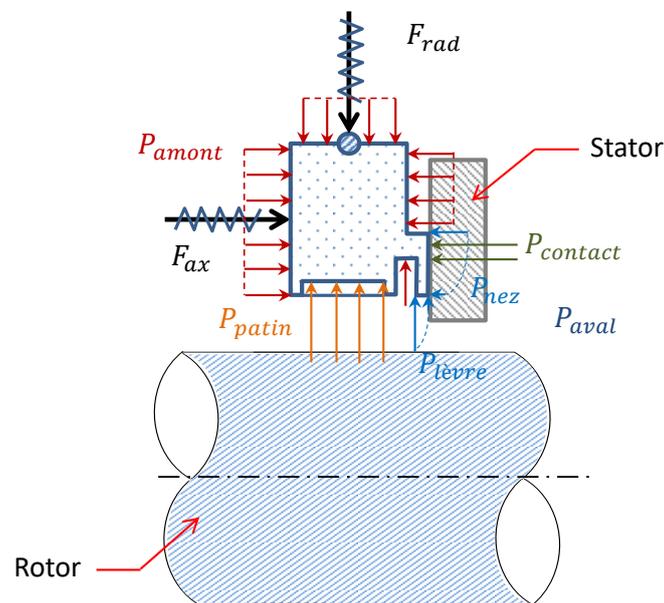


Figure 11. Bilan des forces sur un JRS

La création de la portance est l'un des points centraux d'un joint radial segmenté. Cet aspect fait son originalité dans le monde des étanchéités dynamiques. Les patins placés sur la face intérieure des segments ont pour rôle de créer cette portance et ce à travers différents motifs géométriques. Ainsi, le joint radial segmenté étudié dans le cadre de cette thèse se présente sous trois différentes configurations (Figure 12) :

- le joint radial segmenté avec patins sans poches,
- le joint radial segmenté avec patins dotés de poches,
- le joint radial segmenté à portance.

La première configuration du joint est dotée de patins lisses usinés sur le segment et séparés par des rainures profondes. La portance est principalement créée par la géométrie réelle du patin qui tient compte des rugosités, des ondulations et des défauts de forme.

Comme la configuration précédente, le deuxième modèle est doté de patins mais cette fois-ci avec poches. Durant le fonctionnement, chacune des poches agira comme un patin de Rayleigh [11] et la charge hydrodynamique créée contribuera à l'ouverture du joint.

En dernier lieu, la troisième configuration présente un segment muni d'un seul patin qui repose sur un rotor rainuré. Cette conception est singulière et assez récente. La charge hydrodynamique qui en découle est non stationnaire et nécessite une étude dynamique.

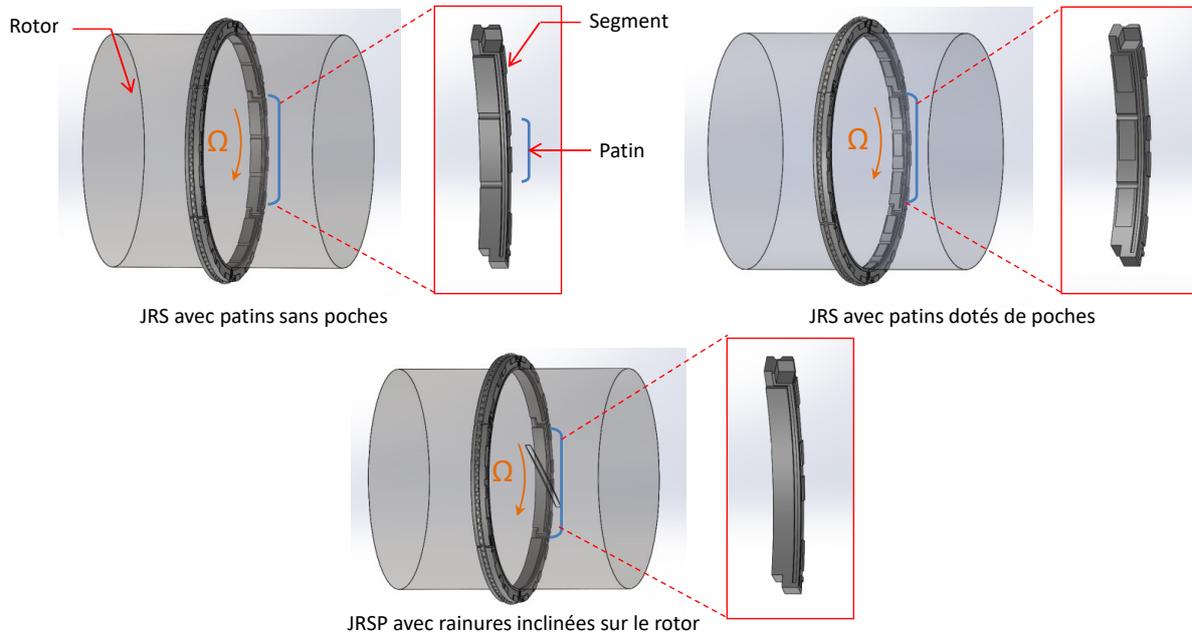


Figure 12. Géométrie des segments et des patins pour chaque type de JRS/JRSP

Le Tableau 2 présente les différents avantages et inconvénient du joint radial segmenté.

Tableau 2. Avantages et inconvénients du JRS [9]

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Faible débit de fuite comparé aux joints annulaires. -Suivi des vibrations du rotor. 	<ul style="list-style-type: none"> -Débit de fuite plus élevé qu'un joint à face radial. -La portance du joint peut conduire aussi à des débits plus importants. -Utilisation limitée aux faibles ΔP -Le Couple de torsion et les puissances dissipées sont élevés

1.2 Etude bibliographique sur le joint radial segmenté

En 1987, Oike et al. ont analysé expérimentalement les performances du système d'étanchéité d'une turbopompe à oxygène liquide [12]. La Figure 13 montre une vue en coupe de ce système. Les joints sont montés en configuration de joint tampon. Deux joints radiaux segmentés sont présents dans ce système. Ils sont montés en vis-à-vis et une injection d'hélium gazeux est effectuée entre les deux pour garantir une séparation complète des fluides à étancher. Chaque joint radial segmenté utilisé opère à une différence de pression 0,6 bar (pression d'injection de l'hélium), à un diamètre de 100 mm et une vitesse de rotation de 20 000 tr/min. En 1990, Oike et al. présentent différents

résultats caractérisant l'usure de ce joint [13]. Ils étudient entre autre l'influence de la pression d'injection de l'Hélium sur l'évolution de l'usure et sur le débit de fuite. Ils en concluent que l'utilisation de revêtements (disulfure de molybdène MoS_2 sur le joint et du plasma de Cr_2O_3 sur le rotor) s'avère efficace pour diminuer le coefficient de frottement et freiner l'usure.

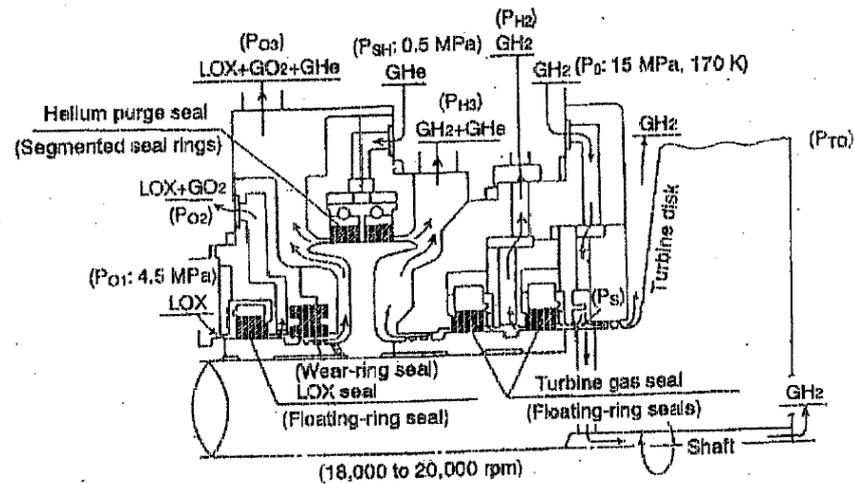


Figure 13. Etanchéités d'une turbopompe à oxygène liquide testé par Oike et al. [12]

Les conditions de fonctionnement du domaine spatial diffèrent de ceux de l'aéronautique. Les différences de pression opérationnelles des joints peuvent dépasser les 10 bar [12]. Mais le JRS n'opère généralement qu'à des ΔP modérés [13]. Les diamètres utilisés suivent des exigences de conception visant la réduction de la masse et de l'encombrement et varient de 25 à 50mm. L'augmentation des vitesses de rotations s'en suit également pour garantir une performance de fonctionnement. Une turbopompe spatiale dépasse ainsi généralement les 10 000tr/min. La condition thermique s'impose aussi comme contrainte inhérente, puisque les liquides cryogéniques utilisés comme ergols peuvent atteindre des températures extrêmes.

Plusieurs autres études expérimentales ont été dédiées au comportement de ces joints et de leurs différentes conditions de fonctionnement ([14], [15], [16]), mais plus récemment, en 2015, Mariot [8], [17] exposa pour la première fois des résultats théoriques d'études menées sur des joints radiaux segmentés avec et sans poches. Cette étude était la première en son genre, puisque jusqu'alors, la littérature ne présentait que des applications expérimentales. Une étude paramétrique a ainsi permis de caractériser le fonctionnement isotherme statique d'un JRS destiné à une turbopompe spatiale. Ce travail présenta différents critères de conception et l'étude menée a permis d'ouvrir des perspectives et d'orienter la conception selon les exigences de chaque constructeur.

1.3 Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en trois parties.

Le 1^{er} chapitre est celui qui vient d'être présenté ci-haut. Il a dressé le contexte de l'étude et l'état de l'art de quelques étanchéités dynamiques utilisés dans le domaine aéronautique. Ce chapitre s'est clôturé par une présentation du principe de fonctionnement du joint radial segmenté avec et sans poches, et par une analyse bibliographique des différents travaux trouvés dans la littérature.

Le 2^{ème} chapitre sera consacré à l'étude des deux premières configurations du JRS et constituera une continuation des travaux de Mariot [8]. Cette partie traitera principalement de la modélisation de l'effet thermique dans le joint. Les différentes équations et phénomènes servant ce propos y seront présentés et les résultats sur deux joints de diamètres différents seront exposés. Une confrontation numérique-expérimentale sera aussi étudiée.

Le 3^{ème} chapitre présentera l'étude de la troisième configuration du joint qui repose sur un rotor rainuré et qui confère de ce fait, un aspect non stationnaire à l'étude. La géométrie et le fonctionnement seront d'abord dressés, avant de présenter l'équation de Reynolds et sa résolution. Les résultats pour deux approches différentes seront exposés. Une approche simplifiée qui ne prend pas en compte l'effet non stationnaire et une approche complète. Un système de coordonnées tournant sera utilisé pour les deux approches.

Le manuscrit sera clôturé par un chapitre présentant les conclusions et les perspectives.

2 Etude du joint radial segmenté (JRS)

2.1 Introduction

L'étude du comportement du joint radial segmenté nécessite la prise en compte de plusieurs paramètres, certains en relation directe avec la nature du fluide (compressibilité, température...) et ses conditions de fonctionnement, et d'autres affectant principalement la géométrie du joint.

Ce chapitre s'intéresse à la présentation des équations gouvernant le fonctionnement du joint radial segmenté avec et sans poches.

La caractérisation passe d'abord par la détermination du champ de pression du film fluide à travers la résolution de l'équation de Reynolds. La pression dépend principalement de la géométrie des patins et des caractéristiques du fluide. Le joint étudié fonctionne à l'air et à de très faibles épaisseurs de film combinées à des vitesses linéaires importantes. Le contact est donc inhérent et les puissances dissipées peuvent très vite devenir importantes. Une étude thermique s'impose. Celle-ci passe par la résolution de l'équation de l'énergie couplée à l'équation de Reynolds. La diffusion de la chaleur dans le joint et le rotor sera prise en compte à travers la résolution de l'équation de la chaleur.

Les segments étant identiques, leur comportement l'est considéré aussi. L'étude qui s'en suivra sera donc conduite sur un seul segment.

Présentation de la géométrie du segment avec et sans poches

La Figure 14 présente des segments du JRS avec et sans poches. La face intérieure est constituée de plusieurs patins séparés par des rainures axiales profondes. Ces patins peuvent être prévus avec des poches pour créer un effet de portance augmentée. Les poches ont généralement une forme rectangulaire et sont de profondeur constante ou variable. Comme il a été présenté dans le chapitre introductif, la lèvre s'étend sur toute la longueur du segment du côté de la face aval. Elle est séparée des patins par une rainure profonde (Figure 14). L'écoulement sous la lèvre représente l'étanchéité principale. La face aval du joint est prévue avec un « nez » en contact permanent avec une surface plane fixe du stator. Ce nez joue le rôle d'étanchéité secondaire.

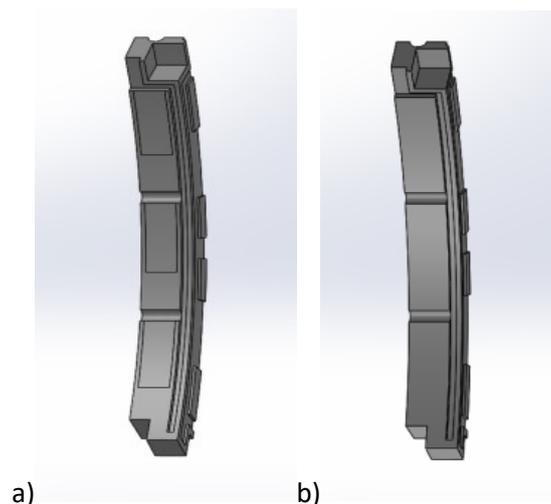


Figure 14. Segments du patin a) avec poches b) sans poches [8]

Degrés de liberté du segment

Le segment a un mouvement plan (X, Y) guidé par le contact du nez sur la surface du stator. Le segment possède donc trois degrés de liberté. La Figure 15 détaille le mouvement et représente les déplacements correspondant à ces trois degrés de liberté. Chacun des trois déplacements a une contribution à l'épaisseur de film. Celle-ci sera donc la somme des hauteurs engendrées par chacun de ces déplacements et qui dépendra de la position angulaire θ :

$$h_x(\theta) = e_x \cos \theta + \frac{e_x^2 \sin \theta}{2R} \quad h_y(\theta) = e_y \sin \theta + \frac{e_y^2 \cos \theta}{2R} \quad h_\varphi(\theta) = -R \left[\varphi \sin \theta + \frac{(\varphi \sin \theta)^2}{2} \right] \quad (1)$$

Ainsi :

$$h(\theta) = h_x(\theta) + h_y(\theta) + h_\varphi(\theta) \quad (2)$$

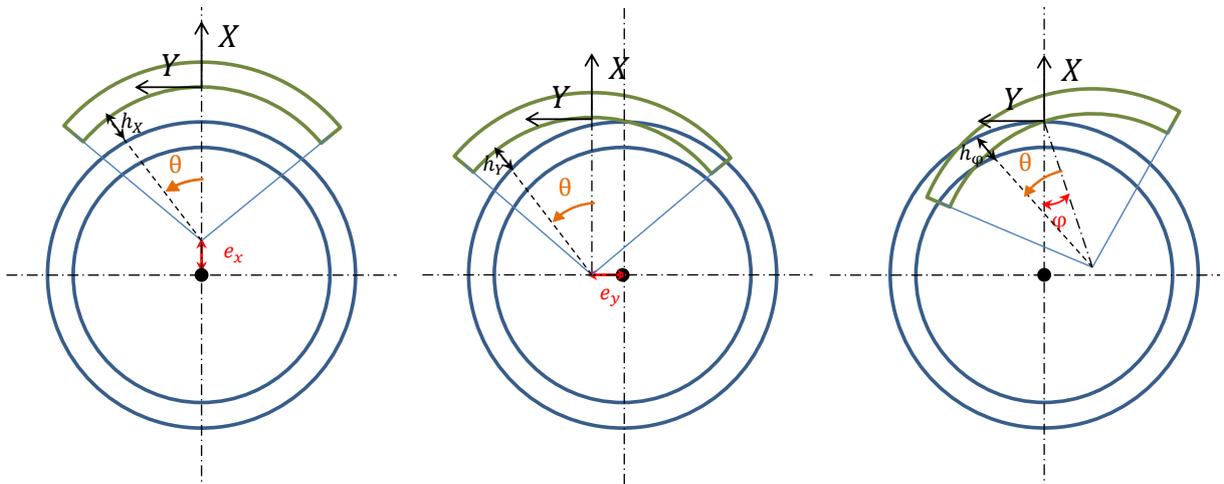


Figure 15. Déplacement du segment selon les trois degrés de liberté

2.2 Calcul des charges générées dans le JRS

La première étape sera de déterminer les forces hydrodynamiques et les forces de contacts appliquées sur les patins à travers la résolution de l'équation de Reynolds et un modèle de contact.

2.2.1 Equations du film mince compressible et non-isotherme

L'écoulement dans le film mince compressible et non-isotherme est décrit par l'équation de Reynolds généralisée et par l'équation de l'énergie. L'équation de Reynolds découle des équations de Navier auxquelles sont appliquées les hypothèses de lubrification hydrodynamique en film mince [11]. Les effets de courbure sont ainsi négligés car l'épaisseur du film est inférieure au rayon de plusieurs ordres de grandeur. L'équation de Reynolds généralisée pour un écoulement compressible en régime non stationnaire dans un système de coordonnées cartésiennes local (x, y) (Figure 16) a la forme suivante [18]:

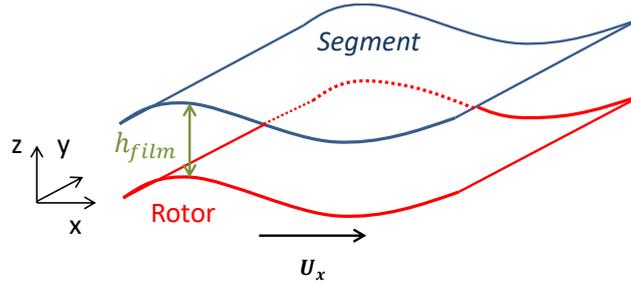


Figure 16. Modélisation du joint et du rotor

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\mathcal{F}_2 + \mathcal{G}_1) \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mathcal{F}_2 + \mathcal{G}_1) \frac{\partial P}{\partial y} \right] = h \frac{\partial(\rho U_{x2})}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(U_{x2} - U_{x1})(\mathcal{F}_3 + \mathcal{G}_2)}{\mathcal{F}_3} + U_{x1} \mathcal{G}_3 \right] + \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + (\rho w)_2 - (\rho w)_1 \quad (3)$$

où :

$$\mathcal{F}_0 = \int_0^h \frac{dz}{\mu} \quad \mathcal{F}_1 = \int_0^h \frac{z dz}{\mu} \quad z^* = \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_0} \quad \mathcal{F}_2 = \int_0^h \frac{\rho z}{\mu} (z - z^*) dz \quad \mathcal{F}_3 = \int_0^h \frac{\rho z}{\mu} dz \quad (4)$$

$$\mathcal{G}_1 = \int_0^h \left[z \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\int_0^z \frac{z}{\mu} dz - z^* \int_0^z \frac{dz}{\mu} \right) \right] dz \quad \mathcal{G}_2 = \int_0^h \left[z \frac{\partial \rho}{\partial z} \int_0^z \frac{dz}{\mu} \right] dz \quad \mathcal{G}_3 = \int_0^h z \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \quad (5)$$

La forme conservative de l'équation de l'énergie pour le film mince en régime non stationnaire et en coordonnées cartésiennes est :

$$C_p \left[\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \phi_c + \phi_D \quad (6)$$

Le premier terme représente le transport convectif de la température, le deuxième représente la diffusion de la température à travers le film mince et les deux derniers termes sont respectivement la chaleur de compression ϕ_c et la dissipation ϕ_D :

$$\phi_c = \beta T \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \phi_D = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Les composantes des vitesses sont obtenues à partir d'une approximation Couette-Poiseuille de l'écoulement [18] :

$$u(x, y) = U_{x1} + \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^z \frac{z}{\mu} dz + \left(\frac{U_{x2} - U_{x1}}{\mathcal{F}_0} - z^* \frac{\partial P}{\partial x} \right) \int_0^z \frac{dz}{\mu} \quad (8)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y} \int_0^z \frac{z}{\mu} dz - z^* \frac{\partial P}{\partial y} \int_0^z \frac{dz}{\mu} \quad (9)$$

L'équation de Reynolds généralisée et l'équation de l'énergie sont couplées par l'équation d'état :

$$P = \rho \mathcal{R}T \quad (10)$$

et par la loi de Sutherland :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \left(\frac{1 + \frac{A}{T_0}}{1 + \frac{A}{T}} \right) \quad (11)$$

L'équation (10) est l'équation d'état pour un gaz idéal. Des formes plus compliquées sont utilisées pour les gaz réels mais l'équation d'état relie essentiellement les trois paramètres thermodynamiques (pression, densité et température) en une seule équation. Suite à l'approximation du film mince, la pression est constante sur toute l'épaisseur du film tandis que la température donnée par l'équation d'énergie (6) est variable. Les équations (10) et (11) montrent que la densité et la viscosité dynamique varient à travers l'épaisseur du film en raison des variations de température et génèrent un fort couplage entre l'équation de Reynolds généralisé et l'équation de l'énergie. Ce couplage mène à des temps de calcul longs. Mahner et al. [19] ont montré que pour les gaz, le couplage peut être simplifié avec une bonne précision en remplaçant la température locale dans l'équation d'état (10) par la température moyenne suivant l'épaisseur du film :

$$T^*(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h T(x, y, z) dz \quad (12)$$

La densité et la viscosité dynamique dans les équations (10) et (11) sont alors des valeurs moyennées suivant l'épaisseur du film mince, $\rho^*(x, y)$ et $\mu^*(x, y)$:

$$P = \rho^* \mathcal{R}T^* \quad \mu^* = \mu(T^*) \quad (13)$$

et l'équation de Reynolds généralisée et l'équation de l'énergie sont considérablement simplifiées :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^* h^3}{12\mu^*} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho^* h^3}{12\mu^*} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{U_x}{2} \frac{\partial(\rho^* h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho^* h)}{\partial t} \quad (14)$$

$$C_p \left[\frac{\partial(\rho^* T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^* u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho^* v T)}{\partial y} + \rho^* \frac{\partial(w T)}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \phi_c + \phi_D^* \quad (15)$$

L'hypothèse de considérer la densité constante suivant l'épaisseur du film est mentionné par Dowson [18] qui l'attribue à Halton [20]. Les équations (14) et (15) ont été utilisées depuis des années par San Andres [21] et par Daejong Kim [22] pour l'analyse non-isotherme des paliers à gaz. Toutefois, l'analyse systématique de la précision de cette approche simplifiée n'est présentée que dans la référence [19]. Par la suite, pour simplifier les notations, l'exposant « * » sera omis pour les valeurs moyennées de la densité et la viscosité suivant l'épaisseur du film mince.

L'étude du JRS ci-après sera conduite en statique, les équations de Reynolds et de l'énergie seront donc considérées sous leurs formes stationnaires.

2.2.2 Résolution de l'équation de Reynolds

2.2.2.1 Définition du maillage

L'équation de Reynolds (12) est discrétisée par la méthode des volumes finis [23] [24], où l'intégration se fait sur un volume de contrôle représentant une cellule du maillage (Figure 17). Le domaine de discrétisation est d'abord construit avant d'affecter les nœuds aux centres des volumes. Chaque nœud P se verra adjacent à quatre autres. Ces derniers seront indexés respectivement par N, S, W, E, en référence à "North", "South", "West", et "Est".

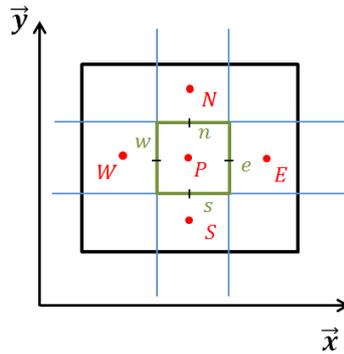


Figure 17. Cellule de discrétisation en volumes finis

Deux maillages différents seront définis pour les segments de la Figure 14 représentant des patins avec et sans poches. Le maillage du patin sans poche est régulier et les nombres de mailles selon les deux directions x et y sont à définir pour le générer. Le maillage du patin avec poche débute par un maillage régulier de la zone de la poche avant de mailler le reste du patin, quatre paramètres sont alors nécessaire dans ce cas (Figure 18).

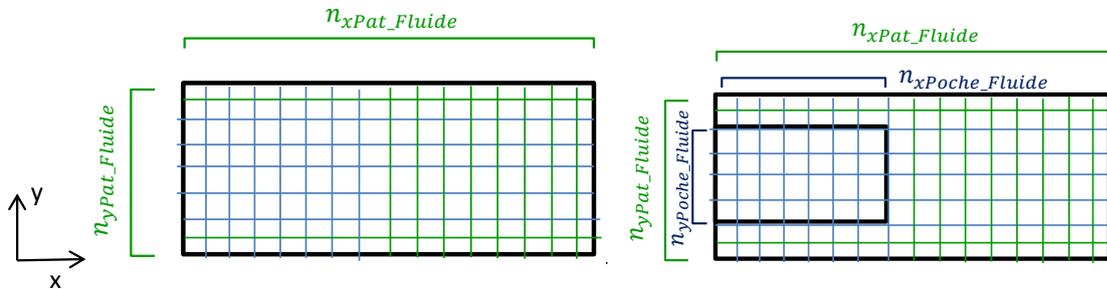


Figure 18. Maillage fluide d'un patin avec et sans poche

2.2.2.2 Discrétisation de l'équation

Le fluide utilisé pour les travaux de la thèse est principalement l'air. En supposant que ce dernier se comporte comme un gaz parfait, la densité dans l'équation (14) est exprimée à partir de l'équation d'état (10). Il en résulte :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\rho} h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{\rho} h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{U_x}{2} \frac{\partial(\tilde{\rho} h)}{\partial x} \quad (16)$$

$\tilde{\rho}$ est une densité interpolée par « upwind » sur les faces de la cellule de discrétisation [24]. La densité ainsi interpolée sur les faces de chaque élément de maillage sera calculée en fonction de la vitesse du fluide sur chaque face et des pressions dans les deux éléments adjacents. Pour les faces

"Est" et "North", et selon les directions conventionnées dans le schéma de la Figure 17, la pression en « upwind » aura pour expression :

$$\tilde{\rho}_{e,n} = \begin{cases} \rho_P & \text{si } u_{e,n} > 0 \\ \rho_{E,N} & \text{si } u_{e,n} < 0 \end{cases} \quad (17)$$

De même pour les faces "West" et "South" :

$$\tilde{\rho}_{v,s} = \begin{cases} \rho_{W,S} & \text{si } v_{w,s} > 0 \\ \rho_P & \text{si } v_{w,s} < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Qui peuvent se réécrire sous une forme plus compacte :

$$\tilde{\rho}_{e,n} = \rho_P \frac{1 + \text{sign}(u_{e,n})}{2} + \rho_{E,N} \frac{1 - \text{sign}(u_{e,n})}{2} \quad (19)$$

$$\tilde{\rho}_{v,s} = \rho_{W,S} \frac{1 + \text{sign}(v_{w,s})}{2} + \rho_P \frac{1 - \text{sign}(v_{w,s})}{2} \quad (20)$$

et en plus simplifié comme suit :

$$\tilde{\rho}_{e,n} = \rho_P \delta_{e,n} + \rho_{E,N} (1 - \delta_{e,n}) \quad \delta_{e,n} = \frac{1 + \text{sign}(u_{e,n})}{2} \quad (21)$$

$$\tilde{\rho}_{w,s} = \rho_{W,S} \delta_{w,s} + \rho_P (1 - \delta_{w,s}) \quad \delta_{w,s} = \frac{1 + \text{sign}(v_{w,s})}{2} \quad (22)$$

L'expression de la vitesse du fluide sur les faces d'une cellule du maillage est obtenue à partir des flux élémentaires J traversant cette face :

$$u_i, v_j = \frac{J_{i,j}}{\rho_{i,j} h_{i,j}} \quad i = e, w \quad j = n, s \quad (23)$$

Avec :

$$J_{e,w} = -\frac{\rho_{e,w} h_{e,w}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{e,w} + \rho_{e,w} \frac{U_x h_{e,w}}{2} \quad (24)$$

$$J_{s,n} = -\frac{\rho_{s,n} h_{s,n}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{s,n} \quad (25)$$

Ainsi en intégrant l'équation (16) sur un volume de contrôle (cellule de maillage), l'équation discrétisée obtenue est la suivante :

$$\tilde{\rho}_e \beta_e (P_E - P_P) - \tilde{\rho}_w \beta_w (P_P - P_W) + \tilde{\rho}_n \beta_n (P_N - P_P) - \tilde{\rho}_s \beta_s (P_P - P_S) = \gamma_e \tilde{\rho}_e - \gamma_w \tilde{\rho}_w \quad (26)$$

Avec :

$$\beta_e = \frac{h_e^3}{12\mu} \frac{y_n - y_s}{x_E - x_P} \quad \beta_w = \frac{h_w^3}{12\mu} \frac{y_n - y_s}{x_P - x_W} \quad \beta_n = \frac{h_n^3}{12\mu} \frac{x_e - x_w}{y_N - y_P} \quad \beta_s = \frac{h_s^3}{12\mu} \frac{x_e - x_w}{y_P - y_S} \quad (27)$$

Et :

$$\gamma_e = \frac{U_x h_e}{2} (y_n - y_s) \qquad \gamma_w = \frac{U_x h_w}{2} (y_n - y_s) \quad (28)$$

Qui peut être réécrite en rassemblant les termes selon les pressions :

$$a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - a_P P_P = b_P \quad (29)$$

Avec :

$$a_E = \tilde{\rho}_e \beta_e \qquad a_W = \tilde{\rho}_w \beta_w \qquad a_N = \tilde{\rho}_n \beta_n \qquad a_S = \tilde{\rho}_s \beta_s \quad (30)$$

Et :

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (31)$$

$$b_P = \gamma_e \tilde{\rho}_e - \gamma_w \tilde{\rho}_w \quad (32)$$

2.2.2.3 Prise en compte des conditions aux limites

Lors de la résolution, il est nécessaire de prendre en compte les conditions aux limites du domaine d'intégration. La Figure 19 présente l'exemple d'une pression atmosphérique limitant le côté « East » d'un volume de contrôle.

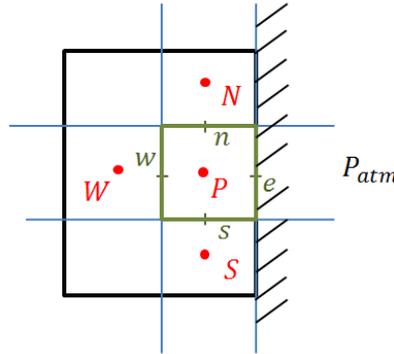


Figure 19. Pression atmosphérique appliquée sur la face "Est" d'un volume de contrôle

La dérivée de la pression coté « East » est réécrite :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e = \frac{P_{atm} - P_P}{x_e - x_P} \quad (33)$$

et l'équation de Reynolds sera donc :

$$a^*_E P_{atm} + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - a_P P_P = b_P \quad (34)$$

Avec :

$$a^*_E = \tilde{\rho}_e \frac{h_e^3}{12\mu} \frac{y_n - y_s}{x_e - x_P} \quad (35)$$

Le terme $a^*_E P_{atm}$ ne comportant plus d'inconnue en pression sera placé du côté droit (RHS) de l'équation :

$$a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - a_P P_P = b_P - a^*_E P_{atm} \quad (36)$$

et :

$$a_P = a_W + a_N + a_S + a^*_E \quad (37)$$

Ce même calcul est répété sur chacune des faces du domaine comportant une condition aux limites à pression imposée.

2.2.2.4 Résolution de l'équation par la méthode de Newton-Raphson (NR)

Après discrétisation, l'équation (16) et puis (29) se met sous la forme :

$$[A(P)]\{P\} = \{B(P)\} \quad (38)$$

Cette dernière étant non linéaire, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour sa résolution [25]. La méthode stipule la considération d'un résidu $R(P)$ du système (38) qui sera minimisé jusqu'à atteindre l'erreur souhaitée :

$$R(P^{(k)}) + \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{P_k} (P^{(k+1)} - P^{(k)}) = 0 \quad (39)$$

L'erreur² étant :

$$\varepsilon = \|R(P^{(k)})\|_{\infty} \quad (40)$$

Pratiquement l'équation (39) est réécrite :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{P_k}^{-1} R(P^{(k)}) \quad (41)$$

Avec le résidu suivant découlant de (29) :

$$R(P) = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S - a_P P_P - b_P \quad (42)$$

Les éléments constituant la matrice Jacobienne, après calcul sont :

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_E} = 2 \frac{\beta_e}{\mathcal{R}T_E} (1 - \delta_e) P_E + \left[\frac{\beta_e}{\mathcal{R}T_P} \delta_e - \frac{\beta_e}{\mathcal{R}T_E} (1 - \delta_e) \right] P_P - \frac{\gamma_e}{\mathcal{R}T_E} (1 - \delta_e) \quad (43)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_W} = 2 \frac{\beta_w}{\mathcal{R}T_W} \delta_w P_W + \left[\frac{\beta_w}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_w) - \frac{\beta_w}{\mathcal{R}T_W} \delta_w \right] P_P + \frac{\gamma_w}{\mathcal{R}T_W} \delta_w \quad (44)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_N} = 2 \frac{\beta_n}{\mathcal{R}T_N} (1 - \delta_n) P_N + \left[\frac{\beta_n}{\mathcal{R}T_P} \delta_n - \frac{\beta_n}{\mathcal{R}T_N} (1 - \delta_n) \right] P_P \quad (45)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_S} = 2 \frac{\beta_s}{\mathcal{R}T_S} \delta_s P_S + \left[\frac{\beta_s}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_s) - \frac{\beta_s}{\mathcal{R}T_S} \delta_s \right] P_P \quad (46)$$

² Pour les calculs qui s'en suivront dans ce rapport a été fixé à $\varepsilon = 10^{-10}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(P)}{\partial P_P} = & \frac{\beta_e}{\mathcal{R}T_P} \delta_e P_E + \frac{\beta_w}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_w) P_W + \frac{\beta_n}{\mathcal{R}T_P} \delta_n P_N + \frac{\beta_s}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_s) P_S \\ & - \left(\frac{\beta_e}{\mathcal{R}T_P} \delta_e + \frac{\beta_w}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_w) + \frac{\beta_n}{\mathcal{R}T_P} \delta_n + \frac{\beta_s}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_s) \right) P_P - a_P \\ & - \left(\frac{\gamma_e}{\mathcal{R}T_P} \delta_e - \frac{\gamma_w}{\mathcal{R}T_P} (1 - \delta_w) \right) \end{aligned} \quad (47)$$

2.2.2.5 Prise en compte de la discontinuité du film

Dans le cas du segment doté de poches, il est nécessaire de prendre en compte la discontinuité de l'épaisseur de film engendrée par cet élément. En effet, la valeur de la pression aux frontières des poches (aux discontinuités) est continue mais sa dérivée ne l'est pas. Ces calculs sont issus de [26].

Dans le cas d'un maillage rectangulaire, la discontinuité de film sera alignée suivant les directions x et y et chaque cellule sera caractérisée par cinq hauteurs :

- la hauteur au centre,
- les quatre hauteurs sur ses arêtes.

Un calcul pour la prise en compte d'une discontinuité de film en 1D (selon l'axe x) sera utilisée pour illustrer la démarche ; les résultats pourront être transposés au deuxième axe.

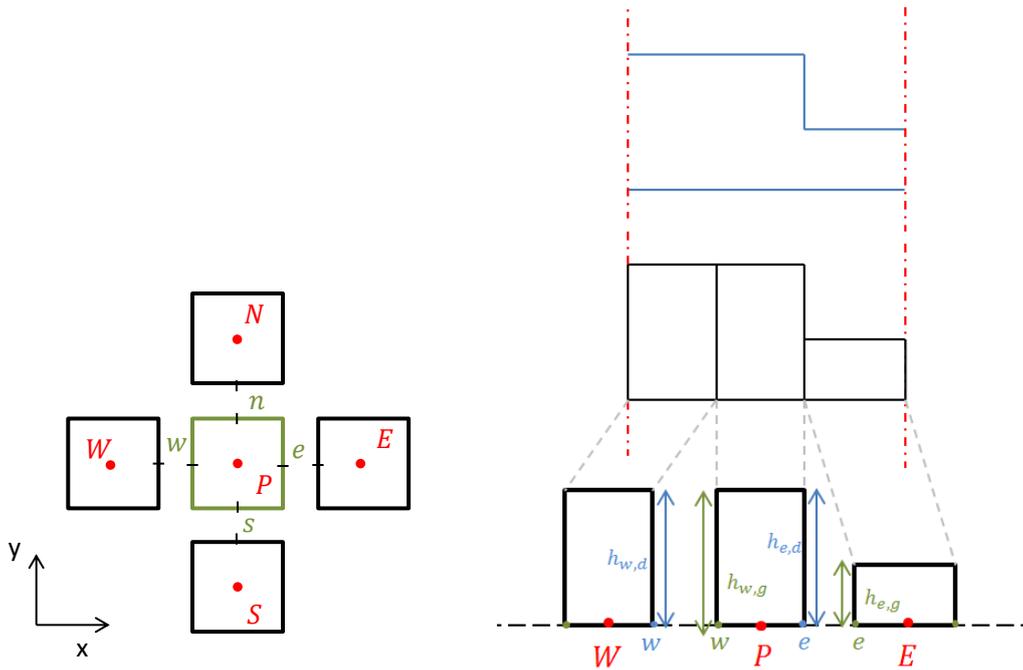


Figure 20. Représentation d'une discontinuité sur les faces des cellules d'un maillage rectangulaire

La conservation du flux traversant l'arête « est » de la cellule P, adjacente à l'arête « west » de la cellule E s'écrit sous la forme :

$$J_e^{(P)} = J_w^{(E)} \quad (48)$$

Avec :

$$J_e^{(P)} = -\frac{\rho_e h_{e,d}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{e,d} + \frac{\rho_e U_x h_{e,d}}{2} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{e,d} = \frac{P_e - P_p}{x_e - x_p} \quad (49)$$

$$J_w^{(E)} = -\frac{\rho_e h_{e,g}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{e,g} + \frac{\rho_e U_x h_{e,g}}{2} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{e,g} = \frac{P_E - P_e}{x_E - x_e} \quad (50)$$

Cette égalité nous permet d'obtenir la pression dans le point « e » :

$$P_e = \frac{C_P^e}{C_P^e + C_E^w} P_p + \frac{C_E^w}{C_P^e + C_E^w} P_E + \frac{U_x (h_{e,d} - h_{e,g})}{2} \frac{1}{C_P^e + C_E^w} \quad (51)$$

Avec :

$$C_P^e = \frac{h_{e,d}^3}{12\mu(x_e - x_p)} \quad C_E^w = \frac{h_{e,g}^3}{12\mu(x_E - x_e)} \quad (52)$$

En recalculant $J_e^{(P)}$ et en substituant P_e par son expression, on obtient :

$$J_e^{(P)} = -\frac{\rho_e C_P^e C_E^w}{C_P^e + C_E^w} (P_E - P_p) + \frac{\rho_e U_x}{2} \frac{C_P^e h_{e,g} + C_E^w h_{e,d}}{C_P^e + C_E^w} \quad (53)$$

où l'on mettra :

$$\widetilde{C}_e = \frac{C_P^e C_E^w}{C_P^e + C_E^w} \quad \widetilde{h}_e = \frac{(C_P^e h_{e,g} + C_E^w h_{e,d})}{C_P^e + C_E^w} \quad (54)$$

$J_e^{(P)}$ prendra la forme suivante :

$$J_e^{(P)} = -\rho_e \widetilde{C}_e (P_E - P_p) + \frac{U_x}{2} \rho_e \widetilde{h}_e \quad (55)$$

De la même manière qu'auparavant, la conservation du flux traversant l'arête « West » de la cellule P, adjacente à l'arête « est » de la cellule W s'écrit sous la forme :

$$J_w^{(P)} = J_e^{(W)} \quad (56)$$

Avec :

$$J_w^{(P)} = -\frac{\rho_w h_{w,g}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{w,g} + \frac{\rho_w U_x h_{w,g}}{2} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{w,g} = \frac{P_p - P_w}{x_p - x_w} \quad (57)$$

$$J_e^{(W)} = -\frac{\rho_w h_{w,d}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{w,d} + \frac{\rho_w U_x h_{w,d}}{2} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{w,d} = \frac{P_w - P_W}{x_w - x_W} \quad (58)$$

La conservation du débit permet de la même manière d'exprimer la pression dans le point « w » :

$$P_w = \frac{C_P^w}{C_P^w + C_W^e} P_p + \frac{C_W^e}{C_P^w + C_W^e} P_W + \frac{U_x (h_{w,d} - h_{w,g})}{2} \frac{1}{C_P^w + C_W^e} \quad (59)$$

Avec :

$$C_P^w = \frac{h_{w,g}^3}{12\mu(x_p - x_w)} \quad C_W^e = \frac{h_{w,d}^3}{12\mu(x_w - x_W)} \quad (60)$$

En remplaçant encore cette formule dans l'expression du flux, on obtient :

$$J_w^{(P)} = -\rho_w \widetilde{C}_w (P_P - P_W) + \rho_w \frac{U_x}{2} \widetilde{h}_w \quad (61)$$

Avec :

$$\widetilde{C}_w = \frac{C_P^w C_W^e}{C_P^w + C_W^e} \quad \widetilde{h}_w = \frac{C_P^w h_{w,d} + C_W^e h_{w,g}}{C_P^w + C_W^e} \quad (62)$$

Réciproquement, en considérant une discontinuité suivant la direction y , les mêmes calculs sont repris et les expressions des flux deviendront :

$$J_n^{(P)} = -\rho_n \widetilde{C}_n (P_N - P_P) \quad (63)$$

Avec :

$$\widetilde{C}_n = \frac{C_P^n C_N^s}{C_P^n + C_N^s} \quad \widetilde{h}_n = \frac{C_P^n h_{n,g} + C_N^s h_{n,d}}{C_P^n + C_N^s} \quad (64)$$

Pour la direction « South » aussi :

$$J_s^{(P)} = -\rho_s \widetilde{C}_s (P_P - P_S) \quad (65)$$

$$\widetilde{C}_s = \frac{C_P^s C_S^n}{C_P^s + C_S^n} \quad \widetilde{h}_s = \frac{(C_P^s h_{s,d} + C_S^n h_{s,g})}{C_P^s + C_S^n} \quad (66)$$

De nouvelles expressions des flux faisant intervenir des hauteurs apparentes sont obtenues. Le calcul des vitesses du fluide et des différents autres paramètres faisant intervenir les hauteurs se fera dorénavant en considérant les expressions développées ci-haut.

L'équation (29) garde la même forme:

$$\tilde{\alpha}_E P_E + \tilde{\alpha}_W P_W + \tilde{\alpha}_N P_N + \tilde{\alpha}_S P_S - \tilde{\alpha}_P P_P = \tilde{b}_P \quad (67)$$

Avec de nouveaux coefficients :

$$\tilde{\alpha}_E = \tilde{\rho}_e \tilde{\beta}_e \quad \tilde{\alpha}_W = \tilde{\rho}_w \tilde{\beta}_w \quad \tilde{\alpha}_N = \tilde{\rho}_n \tilde{\beta}_n \quad \tilde{\alpha}_S = \tilde{\rho}_s \tilde{\beta}_s \quad (68)$$

$$\tilde{\alpha}_P = \tilde{\alpha}_E + \tilde{\alpha}_W + \tilde{\alpha}_N + \tilde{\alpha}_S \quad (69)$$

$$\tilde{b}_P = \tilde{\gamma}_e \tilde{P}_e - \tilde{\gamma}_w \tilde{P}_w \quad (70)$$

Tel que :

$$\tilde{\beta}_e = \widetilde{C}_e (y_n - y_s) \quad \tilde{\beta}_w = \widetilde{C}_w (y_n - y_s) \quad \tilde{\beta}_n = \widetilde{C}_n (x_e - x_w) \quad \tilde{\beta}_s = \widetilde{C}_s (x_e - x_w) \quad (71)$$

Et

$$\tilde{\gamma}_e = \frac{U_x \widetilde{h}_e}{2} (y_n - y_s) \quad \tilde{\gamma}_w = \frac{U_x \widetilde{h}_w}{2} (y_n - y_s) \quad (72)$$

Les vitesses du fluide sur les faces des cellules se réécrivent aussi en fonction de ces coefficients

$$\tilde{u}_{e,w} = \frac{J_{e,w}^{(P)}}{\rho_{e,w} \tilde{h}_{e,w}} \quad \tilde{u}_{n,s} = \frac{J_{n,s}^{(P)}}{\rho_{n,s} \tilde{h}_{n,s}} \quad (73)$$

Ce qui donne :

$$\tilde{\delta}_{e,w} = \frac{1 + \text{sign}(\tilde{u}_{e,w})}{2} \quad \tilde{\delta}_{n,s} = \frac{1 + \text{sign}(\tilde{u}_{n,s})}{2} \quad (74)$$

Et ainsi les expressions des éléments de la matrice Jacobienne avec prise en compte de la discontinuité du film deviennent :

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_E} = 2 \frac{\tilde{\beta}_e}{\mathcal{RT}_E} (1 - \tilde{\delta}_e) P_E + \left[\frac{\tilde{\beta}_e}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_e - \frac{\tilde{\beta}_e}{\mathcal{RT}_E} (1 - \tilde{\delta}_e) \right] P_P - \frac{\gamma_e}{\mathcal{RT}_E} (1 - \tilde{\delta}_e) \quad (75)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_W} = 2 \frac{\tilde{\beta}_w}{\mathcal{RT}_W} \tilde{\delta}_w P_W + \left[\frac{\tilde{\beta}_w}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_w) - \frac{\tilde{\beta}_w}{\mathcal{RT}_W} \tilde{\delta}_w \right] P_P + \frac{\gamma_w}{\mathcal{RT}_W} \tilde{\delta}_w \quad (76)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_N} = 2 \frac{\tilde{\beta}_n}{\mathcal{RT}_N} (1 - \tilde{\delta}_n) P_N + \left[\frac{\tilde{\beta}_n}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_n - \frac{\tilde{\beta}_n}{\mathcal{RT}_N} (1 - \tilde{\delta}_n) \right] P_P \quad (77)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_S} = 2 \frac{\tilde{\beta}_s}{\mathcal{RT}_S} \tilde{\delta}_s P_S + \left[\frac{\tilde{\beta}_s}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_s) - \frac{\tilde{\beta}_s}{\mathcal{RT}_S} \tilde{\delta}_s \right] P_P \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(P)}{\partial P_P} = & \frac{\tilde{\beta}_e}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_e P_E + \frac{\tilde{\beta}_w}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_w) P_W + \frac{\tilde{\beta}_n}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_n P_N + \frac{\tilde{\beta}_s}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_s) P_S \\ & - \left(\frac{\tilde{\beta}_e}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_e + \frac{\tilde{\beta}_w}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_w) + \frac{\tilde{\beta}_n}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_n + \frac{\tilde{\beta}_s}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_s) \right) P_P - \tilde{\alpha}_P \\ & - \left(\frac{\tilde{\gamma}_e}{\mathcal{RT}_P} \tilde{\delta}_e - \frac{\tilde{\gamma}_w}{\mathcal{RT}_P} (1 - \tilde{\delta}_w) \right) \end{aligned} \quad (79)$$

2.2.3 Calcul des charges de contact

Le contact rugueux est inévitable en toute étude tribologique, d'où son importance majeure et son implication dans les problèmes d'étanchéité. Les charges générées sous les patins ne sont donc pas uniquement hydrodynamique, mais aussi de contact. On peut caractériser un contact rugueux entre deux surfaces de deux manières différentes ([27], [28], [29], [30]) :

Les approches déterministes : qui consistent en une description numérique globale de la géométrie de surface. Cette approche n'est pas sans conséquences car elle conduit à des temps de calculs importants et à l'utilisation d'un espace mémoire conséquent.

Les approches stochastiques : qui reposent en premier sur une détermination théorique de la pression de contact d'une seule aspérité, pour ensuite la généraliser à une surface rugueuse décrite statistiquement. Ces approches font preuve d'efficacité en termes de temps de calcul et peuvent être classées en trois catégories principales :

- les modèles de contact purement élastique,
- les modèles de contact élasto-plastique,

- les modèles de contact purement plastique.

Pour étudier le contact des deux surfaces rugueuses l'on a généralement recours au concept de surface somme [30] qui permet de combiner les paramètres de deux surfaces rugueuses et d'étudier plus simplement le contact d'une seule surface rugueuse et d'une surface lisse.

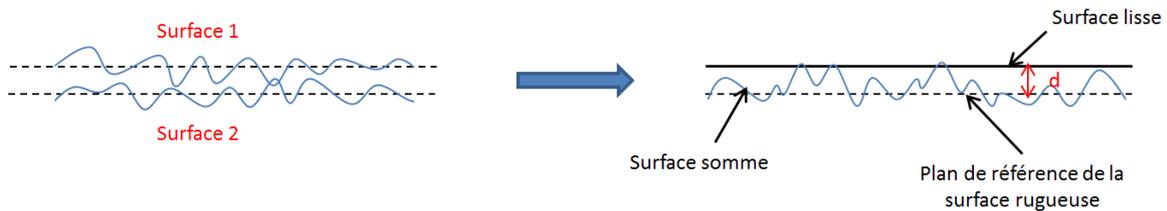


Figure 21. Modélisation de la surface somme

Les paramètres de la surface somme sont obtenus à partir de ceux des deux surfaces. Ils peuvent de même être classés en trois différentes catégories:

- Les paramètres moyens de la surface, qui sont obtenus à partir de la sommation directe des paramètres des deux surfaces. (ex : densité de surface des aspérités $\eta = \eta_1 + \eta_2$)
- Les paramètres en moyenne quadratique (ex: écart type des rugosités $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$)
- Les paramètres de distance, où le résultat est la moyenne des deux paramètres respectifs. (ex: rayon commun des aspérités $= \frac{R_1 + R_2}{2}$)

La dureté et la limite d'élasticité de la surface somme sont celle du matériau le plus tendre. Le module d'élasticité prend la forme suivante :

$$\frac{1}{E_q} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (80)$$

Pour le calcul de la pression de contact, l'approche stochastique a été considérée pour la suite de l'étude et le contact sera considéré entre une surface rugueuse et un plan lisse (concept de la surface somme). Le contact entre l'acier et le carbone est considéré élastique. Le modèle de Greenwood et Williamson [31] a donc été choisi pour le calcul de la pression de contact.

2.2.3.1 Modèle de contact de Greenwood et Williamson (GW)

Le modèle de Greenwood et Williamson [31] est considéré comme l'une des références des études stochastiques du contact entre surfaces.

Ses principales hypothèses sont :

- 1) surface rugueuse isotrope,
- 2) sommets des aspérités de forme sphérique et de même rayon,
- 3) répartition normale des hauteurs des sommets des aspérités,
- 4) indépendance de la déformation de chaque aspérité par rapport aux autres (absence d'interaction entre les aspérités),
- 5) déformation des aspérités uniquement élastique.

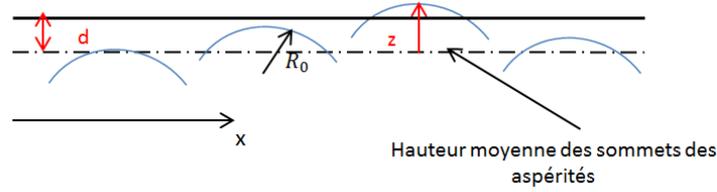


Figure 22. Modélisation de la surface rugueuse selon les hypothèses de GW

La modélisation du contact entre une aspérité et un plan suit la théorie de Hertz pour le contact élastique d'une sphère de rayon R_0 et d'un plan.

L'aire de contact pour une seule aspérité est alors :

$$A_{sph} = \pi R_0 w = \pi R_0 (z - d) \quad (81)$$

La force de contact varie tel que :

$$F_{cntct.sph} = \frac{4}{3} E_q R_0^{1/2} (z - d)^{3/2} \quad (82)$$

Et la pression maximale de contact est :

$$P_{cntct.max} = \frac{3 F_{cntct.sph}}{2 A_{sph}} \quad (83)$$

En considérant l'hypothèse d'une distribution normale des hauteurs des sommets des aspérités, Greenwood et Williamson généralisent l'étude pour un contact rugueux ayant une densité η de rugosités par unité de surface. Pour une surface apparente de contact A_0 le nombre n total des aspérités qui rentrent en contact, l'aire réelle (totale) de contact A et la pression de contact P sont :

$$n = \eta A_0 F_0(\bar{d}) \quad (84)$$

$$A = \pi \eta A_0 R_0 \sigma F_1(\bar{d}) \quad (85)$$

$$P_{cntct} = \frac{4}{3} \eta E_q R_0^{1/2} \sigma^{3/2} F_3(\bar{d}) \quad (86)$$

Avec $F_n(\bar{d}) = \int_{\bar{d}}^{\infty} (\bar{z} - \bar{d})^n \phi^*(\bar{z}) d\bar{z}$ avec $\phi^*(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}$ décrivant une distribution normale.

Ce qui intéressera l'étude par la suite est la pression de contact P_{cntct} donnée par le modèle et qui permettra de calculer la force induite.

Malgré l'hypothèse de la déformation élastique, Greenwood et Williamson donnent aussi l'expression de la probabilité d'un contact plastique et en déduisent l'expression de l'aire totale des contacts devenant plastique :

$$A_p = \pi \eta R_o A_0 \sigma \int_{\bar{d}+w_p^*}^{\infty} (\bar{z} - \bar{d})^n \Phi^*(\bar{z}) d\bar{z} \quad (87)$$

Avec $w_p^* = \frac{w_p}{\sigma} = \frac{R_o}{\sigma} \left(\frac{H}{E_q} \right)^2$ et $n = \frac{3}{2}$.

2.3 Etude thermique du JRS

2.3.1 Résolution de l'équation de l'énergie dans le film mince

La résolution de l'équation de l'énergie (15) en régime stationnaire considère la géométrie 3D du film mince présentée en Figure 23 [18] ; les notations qui y sont indiquées seront utilisées tout au long de cette partie. Le volume de contrôle représenté sur la Figure 24 est utilisé pour la discrétisation de l'équation (15) par la méthode des volumes finis. Après intégration sur le volume et contrôle et discrétisation, l'équation (15) prend la forme suivante [32] :

$$a_E^T T_E + a_W^T T_W + a_N^T T_N + a_S^T T_S + a_T^T T_T + a_B^T T_B - a_P^T T_P = b_P^T \quad (88)$$

Avec :

$$a_P^T = a_E^T + a_W^T + a_N^T + a_S^T + a_T^T + a_B^T \quad (89)$$

Et :

$$a_E^T = \beta_e \left(\frac{\text{sign}(u_e) - 1}{2} \right) \quad a_W^T = \beta_w \left(\frac{\text{sign}(u_w) + 1}{2} \right) \quad (90)$$

$$a_N^T = \beta_n \left(\frac{\text{sign}(v_n) - 1}{2} \right) \quad a_S^T = \beta_s \left(\frac{\text{sign}(v_s) + 1}{2} \right) \quad (91)$$

$$a_T^T = \beta_t \left(\frac{\text{sign}(w_t) - 1}{2} \right) + \gamma_t \quad a_B^T = \beta_b \left(\frac{\text{sign}(w_b) + 1}{2} \right) + \gamma_b \quad (92)$$

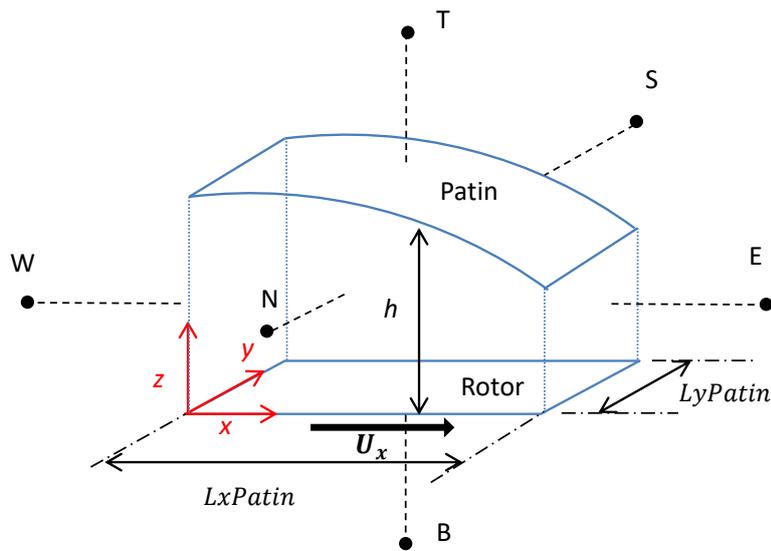


Figure 23. Schématisation d'un patin pour la résolution de l'équation de l'énergie

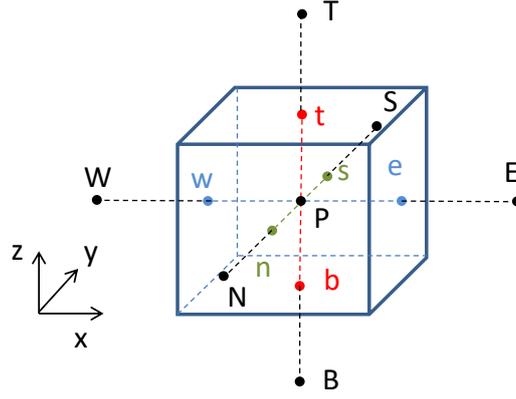


Figure 24. Volume de contrôle et les notations utilisées pour les faces et les volumes adjacents

Où chacun des termes β a l'expression suivante :

$$\beta_e = C_p \rho_e u_e (y_n - y_s)(z_t - z_b) \quad \beta_w = C_p \rho_w u_w (y_n - y_s)(z_t - z_b) \quad (93)$$

$$\beta_n = C_p \rho_n v_n (z_t - z_b)(x_e - x_w) \quad \beta_s = C_p \rho_s v_s (z_t - z_b)(x_e - x_w) \quad (94)$$

$$\begin{cases} \beta_t = C_p \rho_t w_t (x_e - x_w)(y_n - y_s) \\ \gamma_t = \frac{k_a (x_e - x_w)(y_n - y_s)}{(z_T - z_P)} \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_b = C_p \rho_b w_b (x_e - x_w)(y_n - y_s) \\ \gamma_b = \frac{k_a (x_e - x_w)(y_n - y_s)}{(z_P - z_B)} \end{cases} \quad (95)$$

Le second membre de l'équation contient les chaleurs de compression et de dissipation :

$$b_P^T = -\phi_{CP} \mathcal{V}_P - \phi_{DP} \mathcal{V}_P \quad (96)$$

\mathcal{V}_P est le volume de la cellule P :

$$\mathcal{V}_P = (x_e - x_w)(y_n - y_s)(z_t - z_b) \quad (97)$$

$$\phi_{CP} = \left[u_P \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_P + v_P \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_P \right] \quad \phi_{DP} = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_P^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_P^2 \right] \quad (98)$$

Les vitesses u et v sont calculées à partir des équations (8) et (9) de l'approximation de Couette-Poiseuille et de la pression calculée par l'équation de Reynolds [11].

$$u(x, y) = \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \left(\frac{hz}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - U_x \right) \quad v(x, y) = \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \left(\frac{hz}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (99)$$

La vitesse w n'a pas d'expression explicite, elle est calculée numériquement à partir d'une discrétisation de l'équation de continuité.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (100)$$

En isolant le terme $\frac{\partial w}{\partial z}$ de l'équation (100) on peut obtenir la dérivée seconde de la vitesse w :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial z \partial y} \right] \quad (101)$$

Avec :

$$\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial z \partial y} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (102)$$

Les dérivées des vitesses peuvent être obtenues directement à partir de leurs expressions (99) , et les dérivés des densités sont obtenues par différences finies.

L'équation (101) est réécrite:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (103)$$

En l'intégrant numériquement sur l'épaisseur du film représentée sur la Figure 25. Pour un volume de contrôle unidimensionnel centré en P :

$$\int_{z_b}^{z_t} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz = \int_{z_b}^{z_t} f(x, y, z) dz \quad (104)$$

On obtient :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_t - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_b = f_P(z_t - z_b) \quad (105)$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_t = \frac{w_T - w_P}{z_T - z_P} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_b = \frac{w_P - w_B}{z_P - z_B} \quad (106)$$

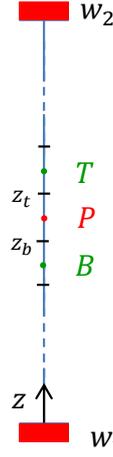


Figure 25. Discrétisation selon l'épaisseur du film (direction z)

On se retrouve avec l'équation discrétisée suivante :

$$a_T^w w_T + a_B^w w_B - a_P^w w_P = b_P^w \quad (107)$$

Où :

$$a_T^w = \frac{1}{z_T - z_P} \quad a_B^w = \frac{1}{z_P - z_B} \quad (108)$$

$$a_P^w = a_T^w + a_B^w \quad (109)$$

$$b_P^w = f_P(z_t - z_b) \quad (110)$$

Les vitesses w_1 et w_2 aux parois inférieure et supérieure sont imposées (conditions de Dirichlet). Pour la face supérieure par exemple, l'équation (107) deviendra :

$$a_B^w w_B - a_P^{w*} w_P = b_P^{w*} \quad (111)$$

Avec :

$$a_P^{w*} = a_B^w + a_T^{w*} \quad b_P^{w*} = b_P^w - a_T^{w*} v_2 \quad (112)$$

Et :

$$a_T^{w*} = \frac{1}{z_t - z_P} \quad (113)$$

Le système d'équation de tous les éléments selon la direction z a une matrice tri diagonale, et donc simple à résoudre.

Ayant obtenu les vitesses u , v et w , la résolution de l'équation de l'énergie se fera par relaxation de Gauss selon l'une des trois directions (x, y, z) , il s'agira ensuite de résoudre un système à matrice penta diagonale pour chaque étape de discrétisation de la direction choisie. Par exemple, si la direction de relaxation est z , le système composé des équations suivantes sera résolu pour chaque étage :

$$a_E^T T_E + a_W^T T_W + a_N^T T_N + a_S^T T_S - a_P^T T_P = b_P^T - a_T^T T_T - a_B^T T_B \quad (114)$$

Sa résolution directe se fait en utilisant la fonction DLXLGX de la bibliothèque IMSL [38]

Les trois conditions aux limites classiques (Dirichlet, Neumann et Robin) sur les faces du patin seront traitées en détail dans une partie ultérieure (voir 2.3.3).

La résolution thermique globale se fait par couplage avec l'équation de Reynolds (16) selon l'algorithme itératif de la Figure 26, en utilisant l'équation d'état et la loi de Sutherland pour la viscosité.

Pour mettre en application la résolution et le couplage, deux cas de calcul seront présentés. Le domaine considéré est un patin incliné **droit** (Figure 23), dont les dimensions sont les suivantes :

$LxPatin [m]$	$LyPatin [m]$	$h_1 [m]$	$h_2 [m]$
$20 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$

Les paramètres de calculs sont :

Densité de référence $\rho_0 [kg/m^3]$	1,225
Viscosité de référence $\mu_0 [Pa.s]$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Pression atmosphérique $P_a [Pa]$	10^5
Température de référence $T_0 [K]$	293
Conductivité thermique $k_a [W m^{-1}K^{-1}]$	0,025
Chaleur spécifique $C_p [J kg^{-1}K^{-1}]$	1004
Constante de la loi de Sutherland $A [K]$	120
Constante de la loi des gaz parfaits $\mathcal{R} [J kg^{-1}K^{-1}]$	287
Vitesse de déplacement de la paroi inférieure $U_x [m/s]$	20

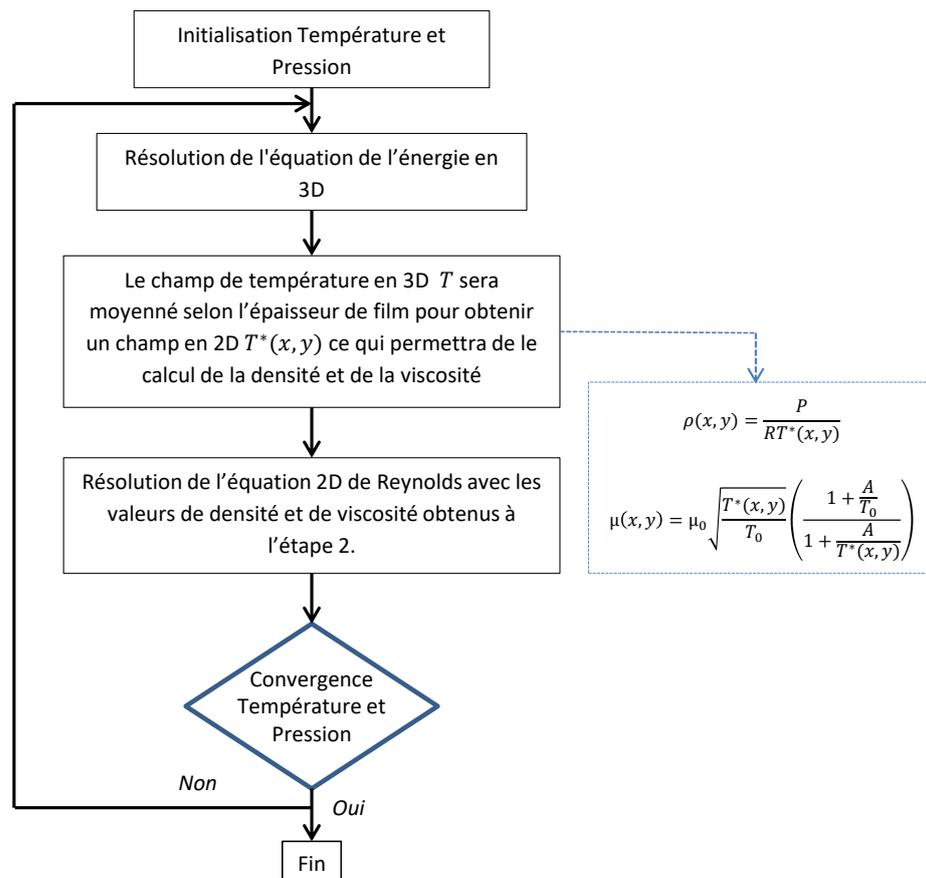


Figure 26. Algorithme de résolution de l'équation de l'énergie en 3D

Pour le premier cas, les conditions aux limites thermiques ci-dessous ont été appliquées aux parois du domaine :

TOP	BOTTOM	WEST	EAST	SOUTH	NORTH
Flux imposé (Neumann) $q_{Top} = 10 W$	Température de paroi imposée(Dirichlet) $T_{BOTTOM} = 293 K$	Température de paroi imposée(Dirichlet) $T_{West} = 293 K$	Libre	Libre	Libre

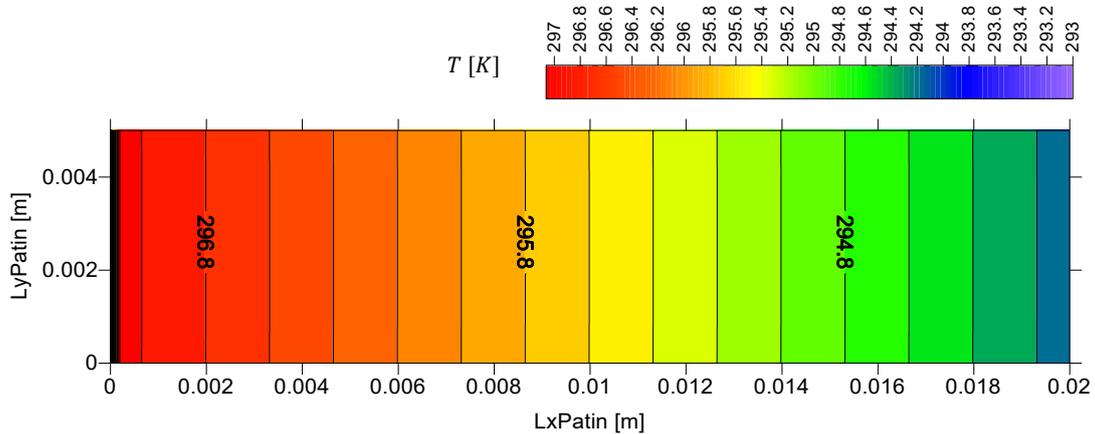


Figure 27. Champ de température moyennée selon la direction z (Cas 1)

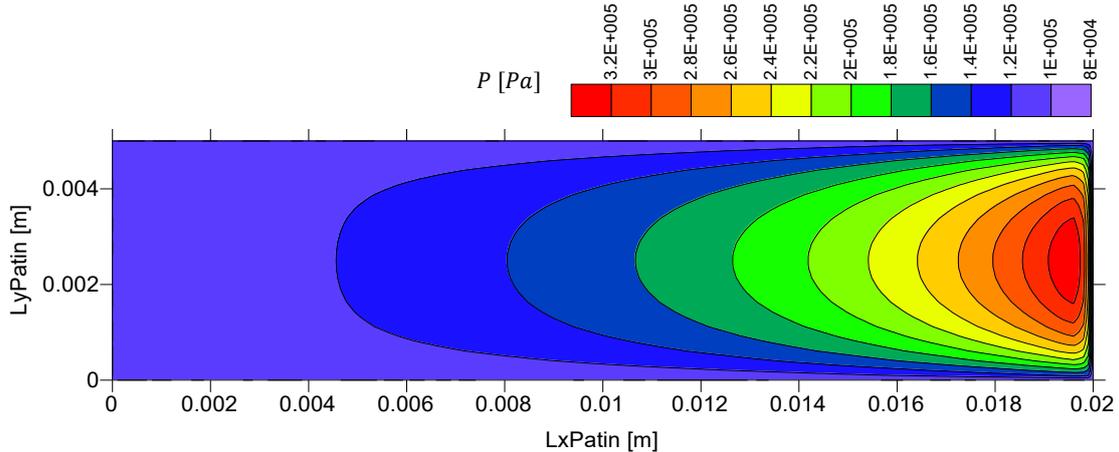


Figure 28. Champ de pression dans le patin (Cas 1)

Le deuxième cas présente la même géométrie que le cas antérieur avec les conditions aux limites sont les suivantes :

TOP	BOTTOM	WEST	EAST	SOUTH	NORTH
Convection libre (Robin) $H = 10 W K^{-1}m^{-2}$ $T_{paroi} = 373 K$	Température de paroi imposée(Dirichlet) $T_{BOTTOM} = 293 K$	Température de paroi imposée(Dirichlet) $T_{West} = 293 K$	Libre	Libre	Libre

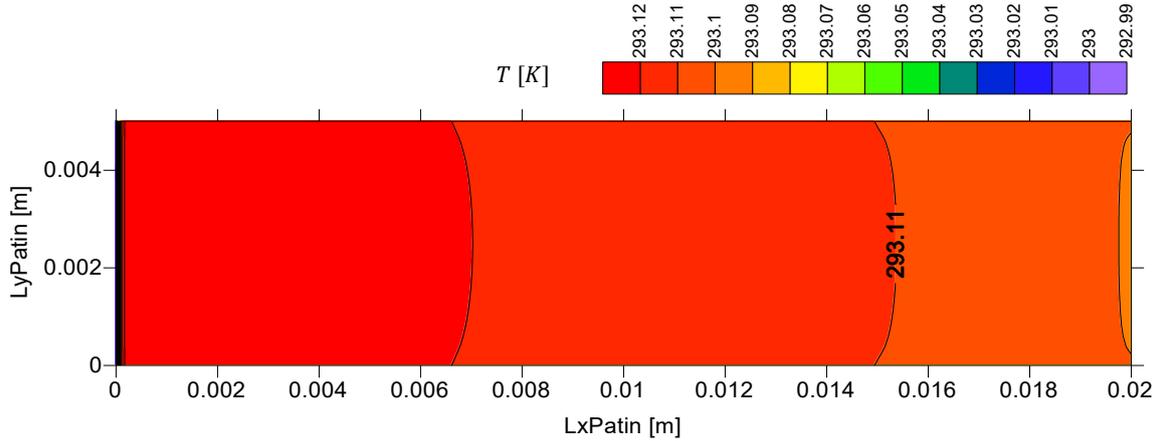


Figure 29. Champ de température moyennée selon la direction z (Cas 2)

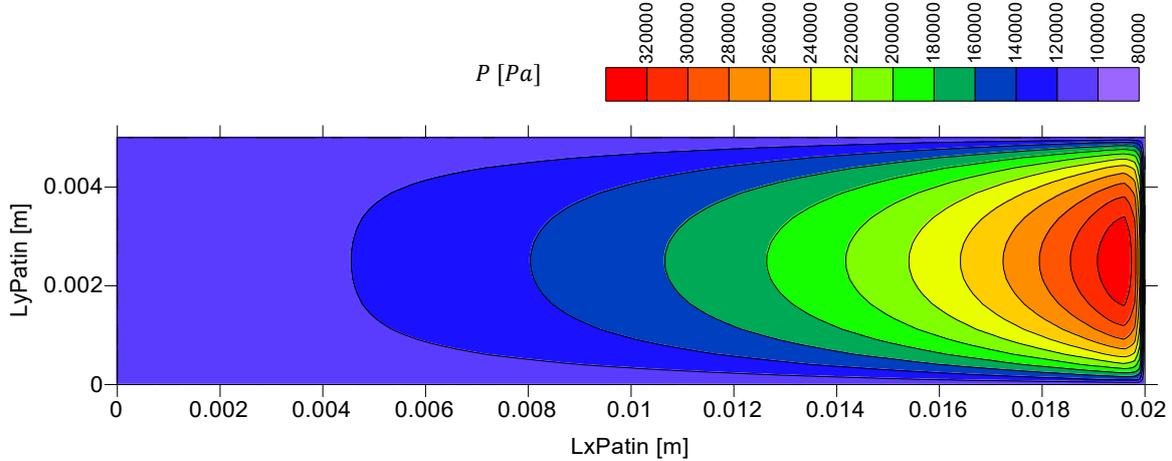


Figure 30. Champ de pression dans le patin (Cas 2)

Les températures du premier cas sont plus élevées que ceux du deuxième, montrant qu'un flux de chaleur directe modérée reçu sur une paroi reste supérieur au flux pouvant être généré à travers une convection libre même à température de paroi élevée.

Avant de passer à l'étape suivante du modèle, l'influence de chacun des termes de l'équation de l'énergie sur l'échauffement résultant sera analysée pour mettre en évidence l'ordre de grandeur de chaque terme et proposer une forme simplifiée.

2.3.1.1 Simplification de l'équation de l'énergie

La discrétisation de l'équation de l'énergie complète implique des matrices à trois dimensions, ce qui nécessite un espace de mémoire important. La résolution couplée avec l'équation de Reynolds implique aussi un grand effort de calcul. La partie qui suit se propose de simplifier l'équation de l'énergie pour le cas d'un fluide compressible.

L'équation de l'énergie (en régime stationnaire) écrite sous forme adimensionnée est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{Pr Re} \frac{h}{L} \left(\frac{\partial(\bar{u}\bar{T})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{T})}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{T})}{\partial\bar{z}} \right) \\ = \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} + \text{Pr Ec} \left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} \right)^2 \right] + \text{Pr Re} \frac{h}{L} \text{Ec Eu} \left(\bar{u} \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}} \right) \end{aligned} \quad (115)$$

Les variables adimensionnées sont :

$$\bar{T} = \frac{T}{\Delta T}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{z} = \frac{z}{L}, \bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{u} = \frac{u}{U_x}, \bar{v} = \frac{v}{U_x}, \bar{w} = \frac{w}{U_x} \frac{L}{h}, \bar{P} = \frac{P}{P_{atm}} \quad (116)$$

et les nombres adimensionnés :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}, \quad Re = \frac{\rho U_x h}{\mu}, \quad Ec = \frac{U_x^2}{C_p \Delta T}, \quad Eu = \frac{P_{atm}}{\rho U_x^2} \quad (117)$$

Le nombre de Reynolds varie entre 10 et 100 pour des vitesses linéaires allons de 20 m/s à 200 m/s. Le nombre de Prandtl est de $Pr = 0,71$ pour l'air (contre 7,2 pour l'eau) et le rapport h/L est de l'ordre de 10^{-3} dans nos applications. Ainsi le coefficient $Pr Re \frac{h}{L}$ a un ordre de grandeur de $10^{-2} \dots 10^{-1}$ pour l'air par rapport à $10^{-1} \dots 1$ pour l'eau. L'importance du terme de transport convectif est proportionnelle à $Pr Re \frac{h}{L}$. Un écoulement incompressible est donc caractérisé par un transport convectif prononcé tandis que ce dernier est négligeable pour un fluide compressible comme l'air. Dans ce dernier cas, la chaleur se propage principalement par diffusion ce qui permet de simplifier considérablement l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \beta T \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (118)$$

Cette équation sera résolue selon la direction z pour chaque élément de surface de coordonnées (x, y) .

Ainsi, en l'intégrant sur un élément de contrôle P selon la direction z (Figure 25), l'on obtient :

$$\int_{z_b}^{z_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz = \int_{z_b}^{z_t} -(\phi_C + \phi_D) dz \quad (119)$$

$$k_a \left[\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b \right] = -(\phi_{CP} + \phi_{DP})(z_t - z_b) \quad (120)$$

Avec

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_t = \frac{T_T - T_P}{z_T - z_P} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b = \frac{T_P - T_B}{z_P - z_B} \quad (121)$$

On se retrouve avec l'équation discrétisée suivante :

$$a_T^S T_T + a_B^S T_B - a_P^S T_P = b_P^S \quad (122)$$

Où :

$$a_T^S = \frac{k_a}{z_T - z_P} \quad a_B^S = \frac{k_a}{z_P - z_B} \quad (123)$$

$$a_P^S = a_T^S + a_B^S \quad (124)$$

$$b_P^S = -(\phi_{CP} + \phi_{DP})(z_t - z_b) \quad (125)$$

La prise en compte des conditions aux limites est identique au cas 3D.

NB : Contrairement à la résolution de l'équation de l'énergie sous sa forme complète, l'équation de l'énergie simplifiée est résolue à l'aide d'un système à matrice tri diagonale, ce qui rend la présence d'une condition de température imposée (condition de Dirichlet) indispensable sur au moins l'une des faces. Numériquement, le coefficient a_p^S de la diagonale principale doit être supérieur ou égal à la somme $a_T^S + a_B^S$ pour tous les points du maillage. Une condition d'égalité stricte partout conduirait à un mauvais conditionnement de la matrice du système [23].

Pour comparer les résultats obtenus par les résolutions complète et simplifiée, les deux cas présentés précédemment ont été repris.

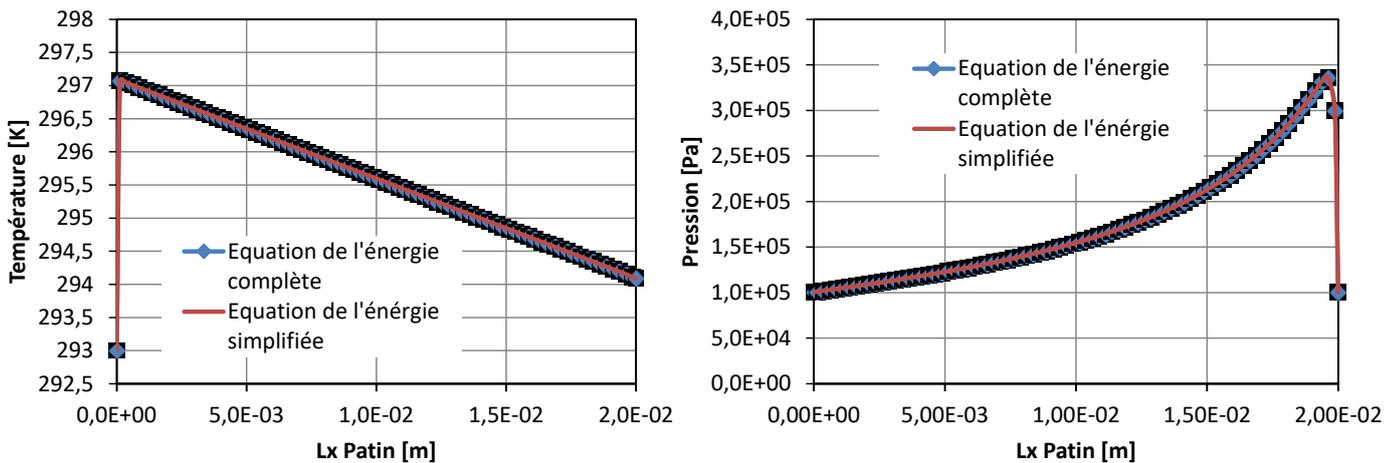


Figure 31. Températures moyennées et pression du plan du milieu du patin (Cas 1)

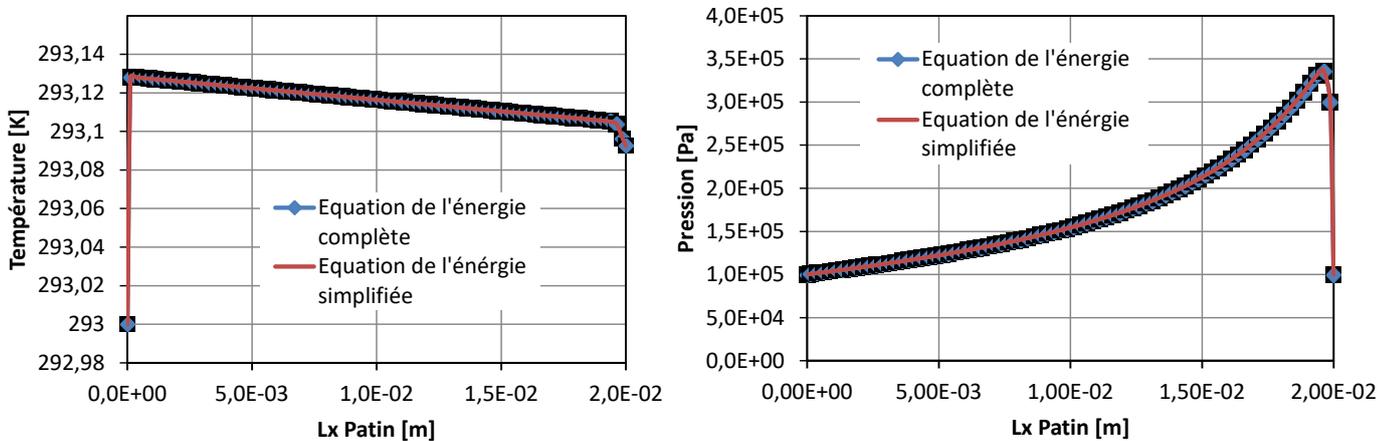


Figure 32. Températures moyennées pour le milieu du patin selon la direction y (Cas 2)

Les Figure 31 et Figure 32 montrent les températures moyennées et les pressions dans le plan milieu du patin considéré. Ces figures illustrent des résultats identiques pour les deux résolutions.

La Figure 33 présente une comparaison entre les températures maximales atteintes en résolvant l'équation générale et l'équation simplifiée dans le cas d'une face supérieure adiabatique $q = 0$ et d'une face inférieure en température imposée $T = 293 K$ et pour différentes vitesses linéaires.

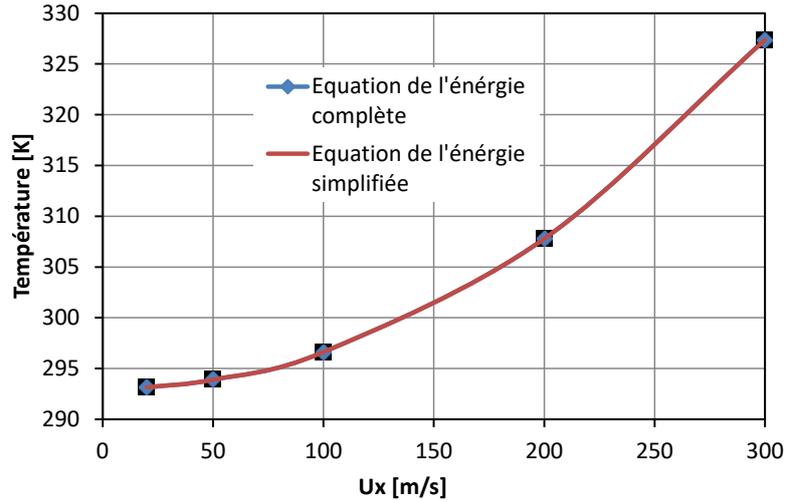


Figure 33. Températures maximales dans le patin en fonction de la vitesse U_x

Les températures sont là encore identiques, ce qui montre que le terme de convectif peut bien être négligé devant les autres termes dans le cas d'un fluide compressible tel que l'air.

2.3.2 Calcul du flux de chaleur généré dans le film mince

L'équation (118) permet d'obtenir un champ de température en 3D, mais pour pouvoir calculer les flux provenant du cisaillement aux parois, il faut intégrer l'équation suivant toute l'épaisseur du film :

$$\int_S \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz dS = - \int_S \int_0^h (\phi_C + \phi_D) dz dS \quad (126)$$

En mettant :

$$Q_{Fluide} = \int_S \int_0^h (\phi_C + \phi_D) dz dS \quad (127)$$

On a

$$\left[\left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right)_h - \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right)_0 \right] S = -Q_{Fluide} \quad (128)$$

Ainsi Q_{Fluide} est un flux généré par cisaillement entre le segment et le rotor. Il est partagé entre le rotor et le segment :

$$Q_{Fluide} = Q_{Seg} + Q_{Rot} \quad (129)$$

$$Q_{Seg} = \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right)_h S \quad Q_{Rot} = - \left(k_a \frac{\partial T}{\partial z} \right)_0 S \quad (130)$$

Toutefois Q_{Fluide} n'est pas le seul flux de chaleur dans la zone du film mince. Un deuxième flux est dû aux contacts entre les aspérités.

Le contact entre aspérités a été traité, et le modèle choisit a permis le calcul d'une pression de contact qui dépend de la hauteur du film et de plusieurs autres paramètres des deux surfaces. Le flux de chaleur généré par le contact entre aspérités fait intervenir la force tangentielle de contact découlant de cette pression.

$$Q_{contact} = f P_{Contact} S U_x \quad (131)$$

Avec f le coefficient de frottement et S est la surface du segment.

Ce flux est partagé entre le rotor et le segment. Avec les hypothèses faites jusqu'à présent il n'est pas possible de déterminer comment $Q_{contact}$ se partage entre le rotor et le stator. Pour cette raison le modèle thermique va prendre en compte le flux total Q (Figure 34) :

$$Q = Q_{Fluide} + Q_{Contact} \quad (132)$$

Le départage du flux Q entre les faces du rotor et du stator sera à posteriori déterminé à travers les conditions aux limites et des hypothèses appliquées sur les surfaces du rotor et du stator.

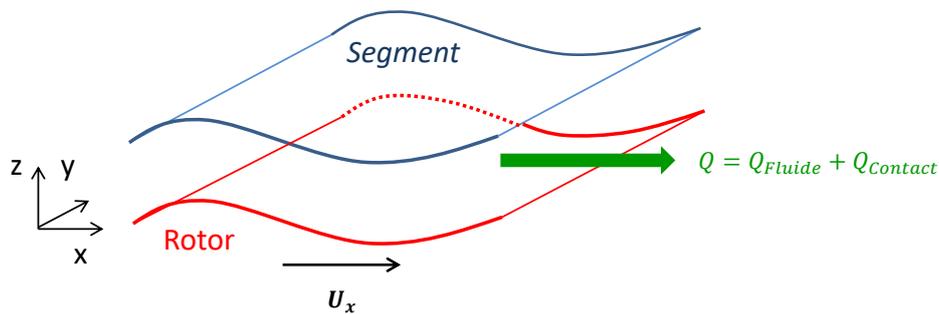


Figure 34. Création du flux Q entre le segment et le rotor

Cette partie a donc permis de calculer le flux généré entre le rotor et le segment. La partie qui suit traitera de la modélisation thermique du rotor et du segment et de leur couplage.

2.3.2.1 Modélisation du transfert de chaleur dans le segment et le rotor

Le joint radial segmenté est composé de trois ou six segments, mais comme il a été mentionné précédemment, l'étude ne fera intervenir qu'un seul et le comportement du reste des segments est supposé identique. Le rotor sur lequel repose le joint est creux. Il ne sera donc considéré dans la suite que la partie du rotor en vis-à-vis direct avec le segment. L'épaisseur du film est très faible par rapport aux dimensions du segment et du rotor, les effets de courbure seront négligés. Ainsi le segment et la partie du rotor étudiée seront modélisés par des parallélépipèdes rectangles (Figure 35).

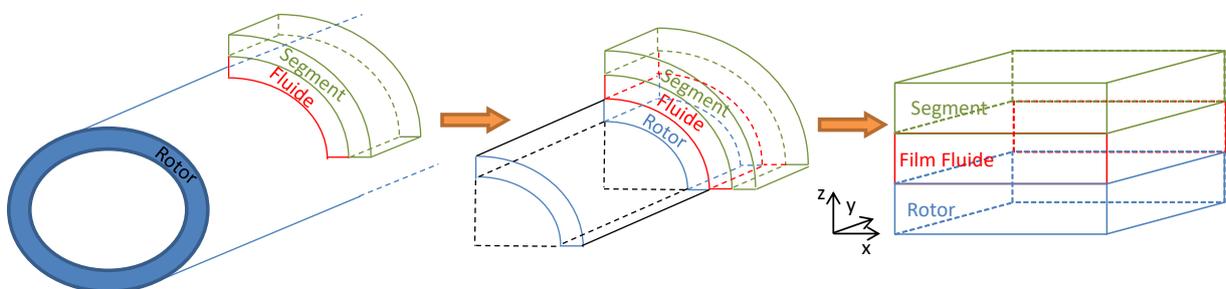


Figure 35. Modélisation du triplet Segment-Rotor-Film Fluide

Le transfert thermique dans le segment et le rotor est gouverné par l'équation de la chaleur et des conditions aux limites adéquates. L'équation se présente sous la forme suivante et ne représente que la diffusion de la chaleur dans le solide :

$$\nabla(k_t \nabla T) = 0 \quad (133)$$

2.3.2.2 Géométrie et conditions aux limites thermiques du segment

Le segment sera modélisé comme représenté sur la Figure 36.

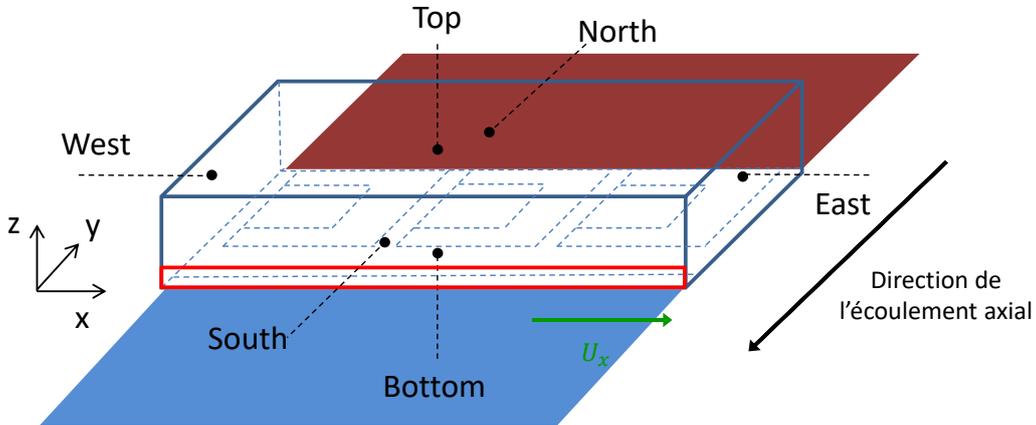


Figure 36. Modélisation du segment

Les deux faces « East » et « West » du segment sont directement en contact avec deux autres segments de part et d'autres. Ces faces seront donc considérées adiabatiques et une condition de flux nul sera appliquée aux deux.

Les faces « Top » et « North » étant les seuls à être complètement en contact avec le milieu extérieur, elles seront considérées soit en convection libre (condition de Robin), soit isothermes (condition de Dirichlet).

La face « South » nécessite un traitement particulier à cause de la présence du nez contrôlant l'étanchéité secondaire. Le nez étant en contact direct avec le stator, cette partie sera considérée adiabatique et une condition de flux nul y sera appliquée. Le reste de la face « South » subira le même traitement que les faces « Top » et « North ».

La face « Bottom » est la plus importante dans cette étude thermique. Elle est particularisée par sa géométrie selon le type du JRS choisi (avec ou sans poches). Chaque zone de cette face se verra attribuer les conditions adéquates.

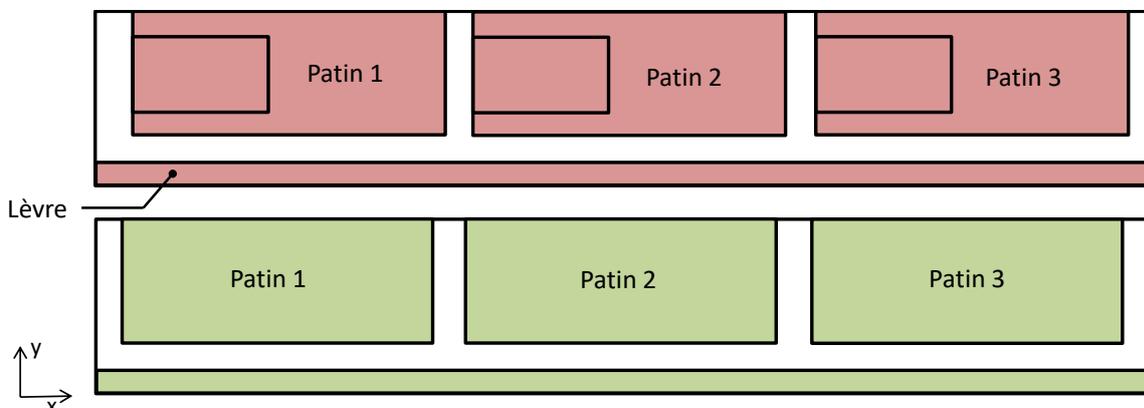


Figure 37. Vue de dessous d'un segment à trois patins avec et sans poches

Les zones grisées de la Figure 37 forment les parties les plus importantes pour l'échauffement. Les trois patins sont la principale source de portance et de frottement, conditionnant ainsi l'ouverture et l'échauffement du joint, tandis que la lèvre sert d'étanchéité principale. Ces zones sont généralement soumises à un régime de lubrification mixte. Ainsi, le contact entre aspérités et le cisaillement du fluide dans ces zones génèrent un flux qui se partagera entre le segment et le rotor. Une condition de flux *non nul* imposé sera appliquée sur toute la zone grisée (patins et lèvre). Le reste des gorges axiales et la rainure circonférentielle ne recevront aucun flux et seront considérées adiabatiques.

2.3.2.3 Géométrie et conditions aux limites du rotor

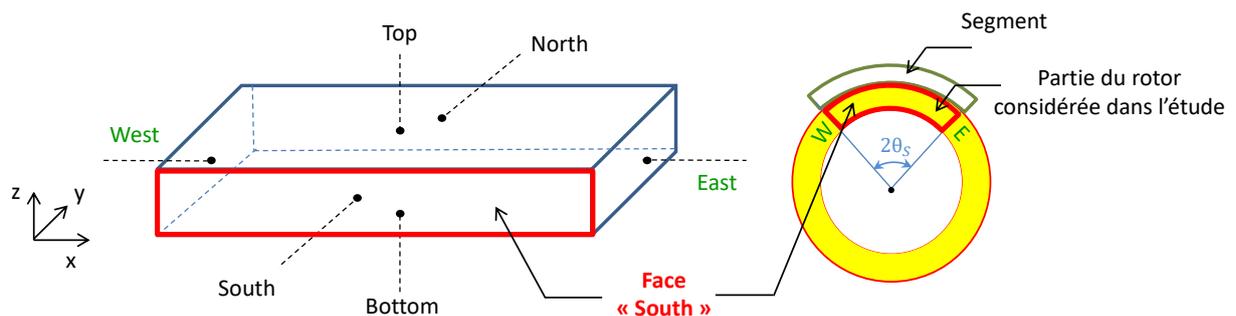


Figure 38. Modélisation du rotor et vue de gauche d'une coupe du rotor

Le rotor sera représenté par un parallélépipède similaire à celui du segment. La géométrie est néanmoins beaucoup plus simple. La face « Bottom » est la seule en contact direct avec le milieu extérieur ; elle sera soit en convection libre, soit considérée isotherme. La face « Top » subira le même traitement que la face « Bottom » du segment ; elle recevra un flux imposé provenant du contact et du cisaillement du fluide. Les faces « East » et « West » correspondent à des coupes destinées à isoler un secteur circonférentiel du rotor (Figure 38) et elles se verront attribuées des conditions de périodicités. Les faces restantes « North » et « South » correspondent à la direction axiale et feront intervenir pour leur traitement le reste de la géométrie du rotor comme montré sur la Figure 39.

Le flux sur les faces « South » et « North » sera calculé à partir d'un bilan effectué sur une longueur finie du rotor de part et d'autre du segment. Ceci permettra de modéliser l'échauffement ou le refroidissement du rotor par le milieu environnant.

Pour appliquer des conditions aux limites de refroidissement, on considèrera une longueur de rotor d'un ordre de grandeur supérieure à la largeur du joint (Figure 39).

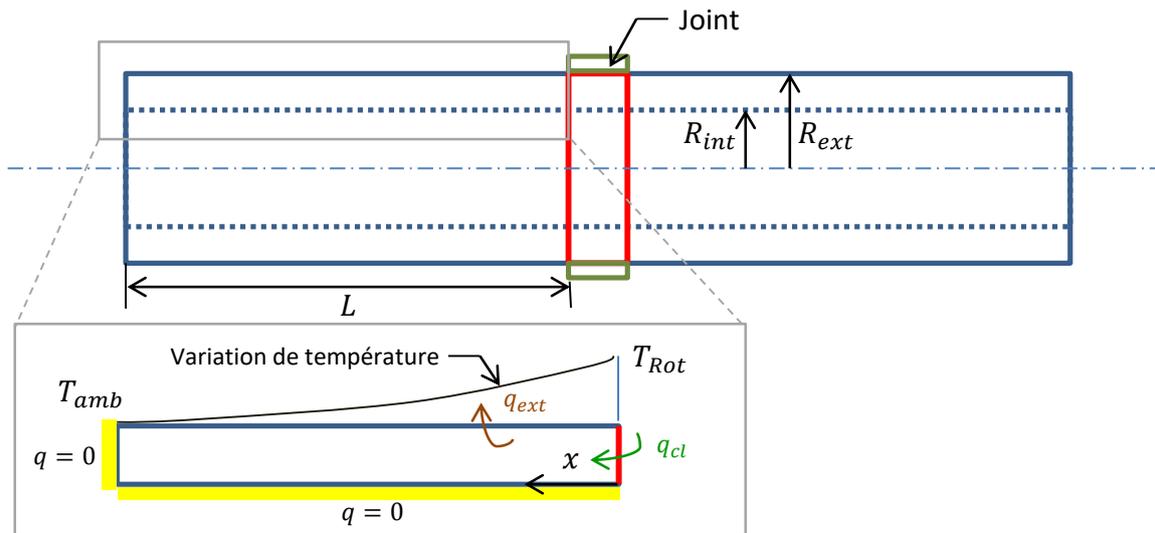


Figure 39. Vue de face d'un rotor complet avec joint

Le cylindre creux représenté sur la Figure 40 est la partie gauche de la zone de contact entre le segment et le rotor.

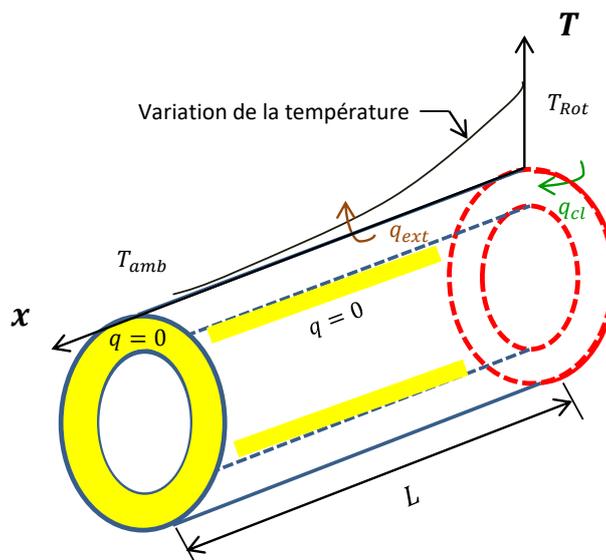


Figure 40. Vue isométrique de la partie gauche du rotor

On supposera qu'aucun échange thermique avec le milieu extérieur n'a lieu sur la face intérieure. Toute la chaleur générée dans la partie opérationnelle du rotor (ici représentée par q_{cl}) est évacuée par la surface extérieure du cylindre via le flux q_{ext} . De même, on suppose que la longueur L est suffisamment grande pour que le flux sur la face gauche de la Figure 40 soit nul. Le bilan des flux se voit donc simplifié à (134) :

$$\int_0^L 2\pi R_{ext} q_{ext} dx = \pi(R_{ext}^2 - R_{int}^2) q_{cl} \quad (134)$$

Le calcul du flux q_{cl} passe par le calcul du flux évacué q_{ext} . La température au voisinage immédiat du joint sera considéré égale à la température de la surface du rotor T_{Rot} . Le rotor se refroidit sur toute

la longueur L pour atteindre la température ambiante. Il est supposé que la température a la variation suivante :

$$T = \frac{a}{x + b} \quad (135)$$

Les conditions aux limites :

$$\begin{cases} x = 0, & T = T_{Rot} \\ x = L, & T = T_{amb} \end{cases} \quad (136)$$

mènent aux expressions des deux coefficients a et b :

$$a = \frac{T_{Rot}T_{amb}}{T_{Rot} - T_{amb}}L \quad b = \frac{T_{amb}}{T_{Rot} - T_{amb}}L \quad (137)$$

Ayant maintenant l'expression de la température, l'on peut calculer le flux q_{ext} , avec

$$q_{ext} = h_{ext}(T - T_{amb}) \quad (138)$$

Où h_{ext} le coefficient de convection forcée de l'air.

En remplaçant l'équation (135) dans (138), la nouvelle expression du flux q_{ext} est :

$$q_{ext} = h_{ext} \frac{\left(1 - \frac{x}{L}\right) T_{amb}}{\frac{x}{L} + \frac{T_{amb}}{T_{Rot} - T_{amb}}} \quad (139)$$

En intégrant ce flux sur toute la longueur L , on obtient

$$\int_0^L q_{ext} dx = LT_{amb}h_{ext} \left[\frac{\alpha}{\alpha - 1} \ln(\alpha) - 1 \right] \quad (140)$$

Avec

$$\alpha = \frac{T_{Rot}}{T_{amb}} \quad (141)$$

Ainsi

$$q_{cl} = \frac{R_{ext}}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} LT_{amb}h_{ext} \left[\frac{\alpha}{\alpha - 1} \ln(\alpha) - 1 \right] \quad (142)$$

Le flux du côté droit du segment (Figure 39) est calculé de manière identique, une différence interviendra uniquement si la longueur L n'est pas la même.

Ce flux q_{cl} est calculé pour toute la face latérale circulaire en rouge sur la Figure 40, mais l'étude ne considèrera que la partie correspondante à la brique qui modélise le rotor. Il est nécessaire donc de corriger l'expression de q_{cl} :

$$q_{cl} = \frac{\theta_s}{\pi} \frac{R_{ext}}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} LT_{amb}h_{ext} \left[\frac{\alpha}{\alpha - 1} \ln(\alpha) - 1 \right] \quad (143)$$

avec θ_s la demi amplitude angulaire du segment. On notera que ce flux dépend de la température de la zone du contact rotor/segment via le paramètre α . Cet aspect interviendra dans la résolution et sera traité dans le couplage du champ de température du segment et du rotor.

2.3.3 Résolution de l'équation de la chaleur

Dans ce qui suit sera présentée la résolution de l'équation de la chaleur dans le cas général d'un parallélépipède rectangle (Figure 41) à partir d'une discrétisation en volumes finis. La prise en compte des conditions aux limites sera ensuite traitée avant de présenter la modélisation retenue pour le rotor et pour le segment.

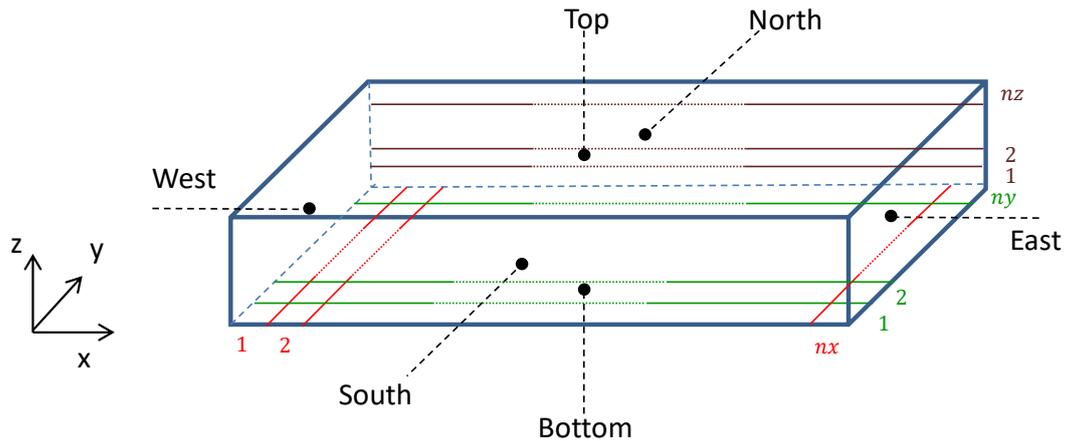


Figure 41. Parallélépipède avec notations des faces

2.3.3.1 Maillage du segment et du rotor

Comme il a été présenté avant, la géométrie du segment est beaucoup plus complexe que celle du rotor. Pour simplifier le traitement de l'analyse thermique et pour faire économie de quelques tableaux, on adoptera le même maillage pour le segment et pour le rotor pour les directions x et y uniquement.

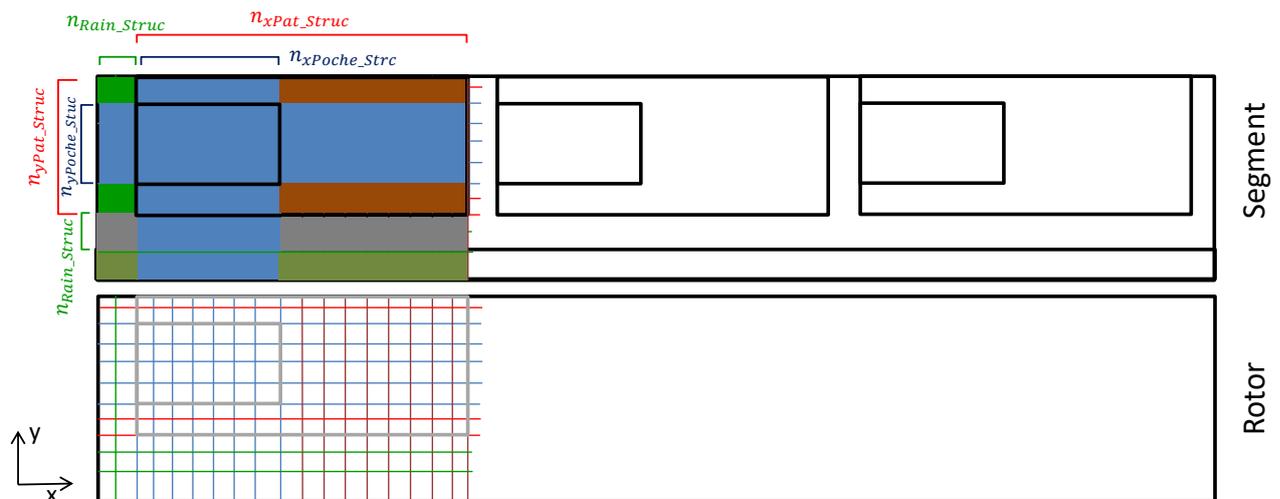


Figure 42. Maillage structurel du segment et du rotor sur la zone du premier patin

Les maillages du segment et du rotor portent le nom de maillages structurels parce qu'ils servent aux calculs des températures dans les structures (rotor ou segment) et sont liés aux structures parallélépipédiques représentés sur la Figure 36 et la Figure 38. Ce maillage nécessite les paramètres suivants (Figure 42) : n_{xPat_Struct} , n_{yPat_Struct} , n_{xPoche_Struct} , n_{yPoche_Struct} et n_{Rain_Struct} . La lèvre ne comporte qu'une seule maille suivant la direction y .

2.3.3.2 Discrétisation en volumes finis

La méthode des volumes finis a été choisie pour discrétiser l'équation de la chaleur. La modélisation du segment et du rotor comme un parallélépipède rectangle permet l'utilisation d'un maillage rectangulaire. Le volume de contrôle sera donc parallélépipédique et identique à celui de la figure (Figure 24).

L'équation (133) est intégrée sur le volume de contrôle présenté sur la Figure 24 :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz = 0 \quad (144)$$

L'application de la relation de Gauss-Ostrogradski donne :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} \left[k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy dz \quad (145)$$

La dérivée première est calculée par différences finies centrés, ce qui permet d'écrire :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = k_t \left(\frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} - \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} \right) (y_n - y_s)(z_t - z_b) \quad (146)$$

Le même calcul est reproduit pour les dérivées secondes selon les directions y et z :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz = k_t \left(\frac{T_T - T_P}{y_N - y_P} - \frac{T_P - T_S}{y_P - y_S} \right) (x_e - x_w)(z_t - z_b) \quad (147)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz = k_t \left[\left(\frac{T_E - T_P}{z_T - z_P} \right) - \left(\frac{T_P - T_W}{z_P - z_B} \right) \right] (x_e - x_w)(y_n - y_s) \quad (148)$$

L'équation discrétisée pour un seul volume de contrôle aura la forme :

$$a_E^K T_E + a_W^K T_W + a_N^K T_N + a_S^K T_S + a_T^K T_T + a_B^K T_B - a_P^K T_P = b_P^K \quad (149)$$

Avec :

$$a_E^K = \frac{k_t (y_n - y_s)(z_t - z_b)}{(x_E - x_P)} \quad a_W^K = \frac{k_t (y_n - y_s)(z_t - z_b)}{(x_P - x_W)} \quad (150)$$

$$a_N^K = \frac{k_t (x_e - x_w)(z_t - z_b)}{(y_N - y_P)} \quad a_S^K = \frac{k_t (x_e - x_w)(z_t - z_b)}{(y_P - y_S)} \quad (151)$$

$$a_T^K = \frac{k_t(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{(Z_T - Z_P)} \quad a_B^K = \frac{k_t(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{(Z_P - Z_B)} \quad (152)$$

$$a_P^K = a_E^K + a_W^K + a_N^K + a_S^K + a_T^K + a_B^K \quad (153)$$

Avec $b_P^K = 0$ si le volume n'est pas adjacent à une face portant des conditions aux limites

2.3.3 Implémentation des conditions aux limites

L'étude nécessitera l'utilisation de quatre conditions aux limites : 1) la condition de température imposée (condition de Dirichlet) 2) la condition de flux ou de première dérivée de la température imposée (Condition de Neumann) 3) la condition de convection libre ou forcée (condition de Robin) 4) une condition de périodicité qui impose la continuité de la température et du flux sur des faces opposées du domaine.

Les conditions aux limites qui seront présentés ici-bas peuvent de la même manière être applicables à la résolution de l'équation de l'énergie discrétisée (88). L'exposant K réfère aux éléments discrétisés de l'équation de la chaleur sera donc omis dans la présentation de ces conditions aux limites.

Les coordonnées des centres des cellules seront représentées en majuscules X et ceux des faces en minuscule x .

Condition de Dirichlet

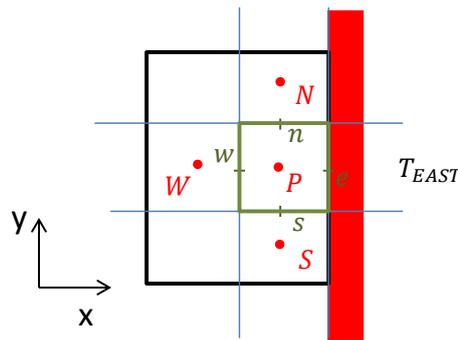


Figure 43. Volume 2D avec température imposée sur la face « East »

Si une condition de température imposée est appliquée sur la face « East » de la cellule étudiée, le terme a_E est modifié :

$$a_E^* = \frac{k_t(y_n - y_s)(z_t - z_b)}{(x_e - X_P)} \quad (154)$$

et l'équation pour la cellule P devient :

$$a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B - a_P^* T_P = b_P \quad (155)$$

avec :

$$b_P = -a_E^* T_{EAST} \quad (156)$$

$$a_P^* = a_E^* + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (157)$$

Conditions de Neumann

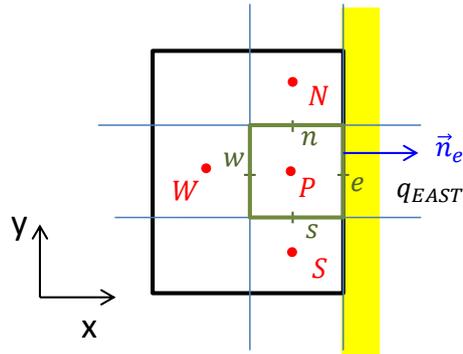


Figure 44. Volume 2D avec flux imposée sur la face « East »

On impose cette fois-ci un flux sur la face East de la cellule P :

$$q_{EAST} = k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_e} \quad (158)$$

et l'équation(145) devient :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} \left[q_{EAST} - k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy dz \quad (159)$$

Ainsi l'équation pour une cellule P devient :

$$a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B - a_p^* T_P = b_p \quad (160)$$

Avec :

$$a_p^* = a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (161)$$

$$b_p = -q_{EAST} (y_n - y_s) (z_t - z_b) \quad (162)$$

Conditions de Robin

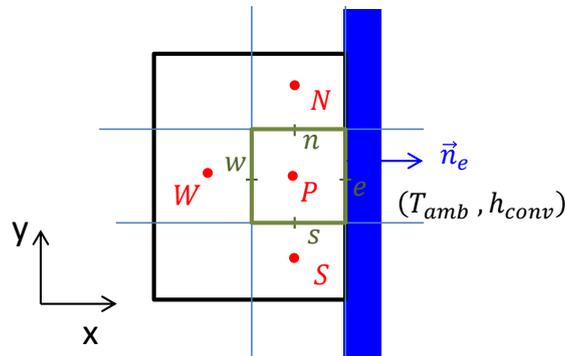


Figure 45. Volume 2D avec condition de convection libre sur la face « East »

Supposons une condition de convection sur la face «East », à coefficient de convection h_{conv} et à température ambiante T_{amb} :

$$q_{EAST} = k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_e} = h_{conv}(T_{amb} - T_e) \vec{x} \cdot \vec{n} \quad (163)$$

où \vec{n} est la normale sortante de la face sur laquelle la condition au limite est appliquée. Ceci revient à écrire :

$$k_t \frac{T_e - T_P}{x_e - X_P} = h_{conv}(T_{amb} - T_e) \quad (164)$$

Ainsi on obtient l'expression de T_e en fonction de T_P et de T_{amb} :

$$T_e = \frac{1}{1 + \alpha_e} T_P + \frac{\alpha_e}{1 + \alpha_e} T_{amb} \quad (165)$$

où :

$$\alpha_e = \frac{h_{conv}}{k_t} (x_e - X_P) \quad (166)$$

Cette expression est ensuite utilisée pour le calcul de la dérivée première de la température au point « e » :

$$k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_e} = k_t \frac{T_e - T_P}{x_e - X_P} = \frac{k_t}{x_e - X_P} \frac{\alpha_e}{1 + \alpha_e} (T_{amb} - T_P) \quad (167)$$

Ainsi, en remplaçant cette dérivée dans l'équation (145), l'équation(149) devient :

$$a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B - a_p^* T_P = b_P \quad (168)$$

avec :

$$a_p^* = a_E^* + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (169)$$

$$b_p = -a_E^* T_{amb} \quad (170)$$

$$a_E^* = \frac{k_t (y_n - y_s) (z_t - z_b)}{(x_e - X_P)} \frac{\alpha_e}{1 + \alpha_e} \quad (171)$$

Conditions de périodicité

Supposons la présence d'une périodicité entre les faces « East » et « West » du domaine représenté sur la Figure 41. Cette condition se traduit par l'égalité des températures de part et d'autre, ainsi que l'égalité de leurs dérivées premières.

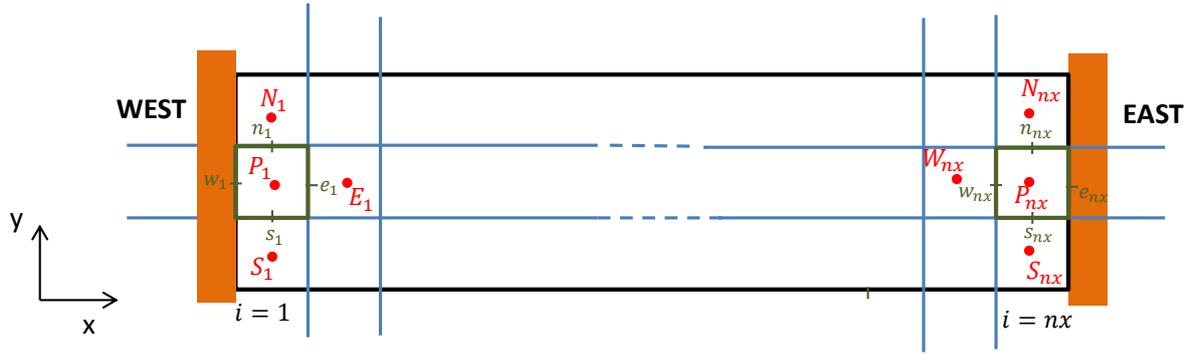


Figure 46. Deux éléments de volume en 2D avec condition de périodicité

Traitement de la face EAST du volume de contrôle P_{nx}

Le terme $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e$ de l'équation (145) s'écrira ainsi d'une autre manière :

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} \left[k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \right] dy dz \quad (172)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_{P_1} - T_{P_{nx}}}{(x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}}) + (X_{P_1} - x_{w_1})} \quad (173)$$

Ainsi, l'équation (145) prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz \\ &= \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \left[\frac{T_{P_1} - T_{P_{nx}}}{(x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}}) + (X_{P_1} - x_{w_1})} - \frac{T_{P_{nx}} - T_{W_{nx}}}{X_{P_{nx}} - X_{W_{nx}}} \right] dy dz \end{aligned} \quad (174)$$

et conduira après réarrangement à la nouvelle expression de (149) :

$$a_{CE_{nx}} T_{P_1} + a_{W_{nx}} T_{W_{nx}} + a_{N_{nx}} T_{N_{nx}} + a_{S_{nx}} T_{S_{nx}} + a_{T_{nx}} T_{T_{nx}} + a_{B_{nx}} T_{B_{nx}} - a_{P_{nx}} T_{P_{nx}} = b_{P_{nx}} \quad (175)$$

Avec :

$$a_{CE_{nx}} = \frac{k_t (y_n - y_s) (z_t - z_b)}{(x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}}) + (X_{P_1} - x_{w_1})} \quad (176)$$

$$a_{P_{nx}} = a_{CE_{nx}} + a_{W_{nx}} + a_{N_{nx}} + a_{S_{nx}} + a_{T_{nx}} + a_{B_{nx}} \quad (177)$$

L'expression des autres termes $a_i, i = W, N, S, T, B$ reste inchangée

On remarquera que l'équation d'un élément de volume adjacent la face « East » fait maintenant intervenir aussi la température du volume symétriquement opposé sur la face « West ».

Traitement de la face WEST du volume de contrôle P_1

Respectivement, les mêmes étapes sont refaites sur la face « West »..

$$\int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} \left[k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - k_t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy dz \quad (178)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = \frac{T_{P_1} - T_{P_{nx}}}{(X_{P_1} - x_{w_1}) + (x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}})} \quad (179)$$

L'équation (145) s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_{x_w}^{x_e} \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz \\ &= \int_{y_b}^{y_t} \int_{z_s}^{z_n} k_t \left[\frac{T_{E_1} - T_{P_1}}{X_{E_1} - X_{P_1}} - \frac{T_{P_1} - T_{P_{nx}}}{(x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}}) + (X_{P_1} - x_{w_1})} \right] dy dz \end{aligned} \quad (180)$$

et le réarrangement de (149) conduit cette fois-ci à :

$$a_{CW_1} T_{P_{nx}} + a_{E_1} T_{E_1} + a_{N_1} T_{N_1} + a_{S_1} T_{S_1} + a_{T_1} T_{T_1} + a_{B_1} T_{B_1} - a_{P_1} T_{P_1} = b_{P_1} \quad (181)$$

avec :

$$a_{CW_1} = \frac{k_t (y_n - y_s) (z_t - z_b)}{(X_{P_1} - x_{w_1}) + (x_{e_{nx}} - X_{P_{nx}})} \quad (182)$$

$$a_{P_1} = a_{CW_1} + a_{E_1} + a_{N_1} + a_{S_1} + a_{T_1} + a_{B_1} \quad (183)$$

2.3.3.4 Le système des équations discrétisées

Ainsi, selon les conditions qu'on applique aux différentes faces (ou aux éléments de la face) du domaine représenté sur la Figure 41, on obtient un système rassemblant toutes les équations (149). Ce système aura la taille $n = nx ny nz$ et peut se mettre sous la forme

$$[K]\{T\} = \{Q\} \quad (184)$$

où $[K]$ est une matrice creuse hepta-diagonale (exceptant le cas avec des conditions de périodicité, où des termes sur d'autres diagonales se rajoutent), symétrique et définie positive contenant les éléments a^K_i , $i = P, E, W, N, S, T, B$; $\{T\}$ est le vecteur inconnu contenant les températures et $\{Q\}$ est un vecteur contenant les éléments du second membre des équations (149) (les flux et les conditions de températures sur les faces).

En se référant à la Figure 24 et dans un ordre de parcours des cellules du parallélépipède (Figure 41) allant de $x \rightarrow y \rightarrow z$, une cellule P et ses voisins seront positionnés dans la matrice comme montré dans Figure 47. La ligne numérotée *ind* de la matrice regroupera donc la cellule principale d'indice *ind* et ses voisins.

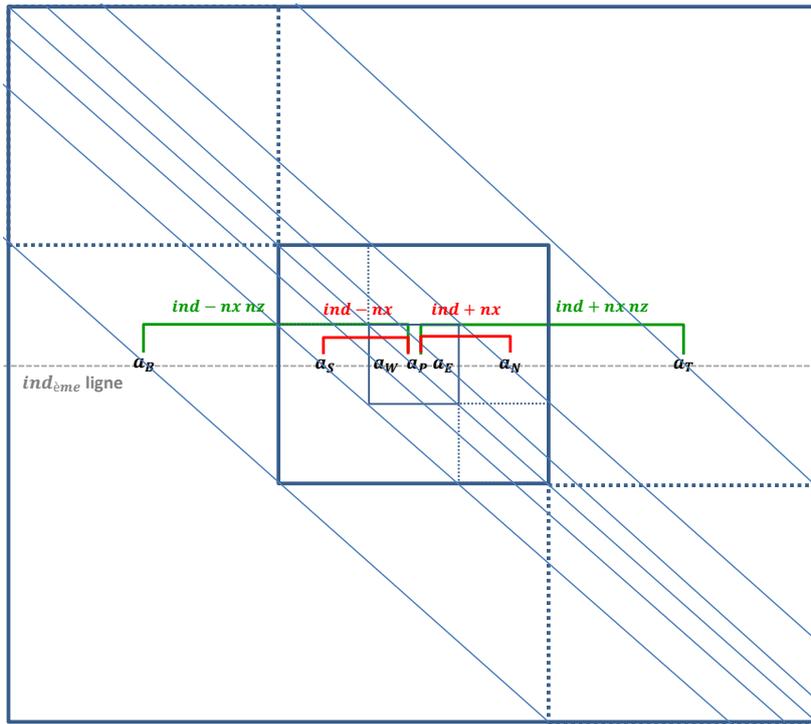


Figure 47. Position des éléments a_i dans la matrice hepta diagonale K

2.3.3.5 Condensation statique des degrés de liberté

Ce qui intéressera l'étude par la suite, c'est d'accéder aux températures des faces « Top » ou « Bottom », selon qu'il s'agisse du segment ou du rotor, là où se transmet le flux de chaleur généré dans le film mince.

La condensation statique [33] permet d'éliminer tous les degrés de liberté internes d'un système (dans notre cas les températures des volumes internes de la structure) qui ne sont pas connectés à l'élément de frontière désiré (température de la face « Top » ou « Bottom »). La matrice $[K]$ du système (184) est une matrice creuse de très grande taille ($n = nx ny nz$). Son stockage seul est très gourmand en taille mémoire et sa manipulation nécessitera aussi un temps de calcul considérable. Ainsi la condensation statique s'avère une solution adéquate pour contourner ces deux problèmes.

Pour présenter la méthode de condensation statique des degrés de liberté, il est nécessaire de revenir au parallélépipède de la Figure 41, où l'on s'intéressera au calcul des températures de sa face « Bottom » (le calcul des températures de la face « Top » pour le rotor sera similaire). Les notations de la Figure 48 seront adoptées.

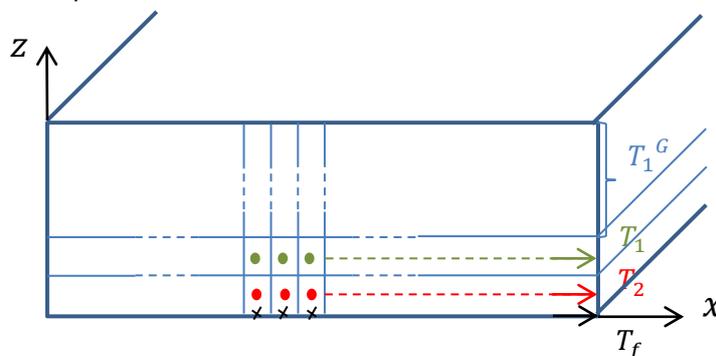


Figure 48. Representation des températures pour différentes couches de maillage du parallélépipède

Etant donné que la méthode des volumes finis ne permet d'obtenir les températures qu'aux centres des volumes, une extrapolation sera nécessaire pour accéder aux températures des faces.

Le vecteur T_2 est de dimension $nx ny$ et contient les températures des éléments de volume de la première couche à partir du bas ($k = 1$), tandis que T_1 contient les éléments de volume de la deuxième couche ($k = 2$) ; T_{1G} est de taille $n - 2nx ny$ et contient les températures du reste des volumes.

Les vecteurs T_1 et T_2 ont été séparés du reste du vecteur T_{1G} parce qu'ils servent à l'extrapolation permettant d'obtenir T_f . Ces éléments-là représenteront les degrés de liberté internes connectés au degré de liberté recherché sur la frontière.

$$\{T_f\} = [A_e]\{T_1\} + [B_e]\{T_2\} \quad (185)$$

Avec A_e et B_e des matrices contenant les éléments d'extrapolation.

Le système d'équation (184) peut donc être réécrit sous la forme (186) dont la matrice est présentée sur la Figure 49 :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & A_e & B_e & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^G \\ T_1 \\ T_2 \\ T_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^G \\ Q_1 \\ Q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (186)$$

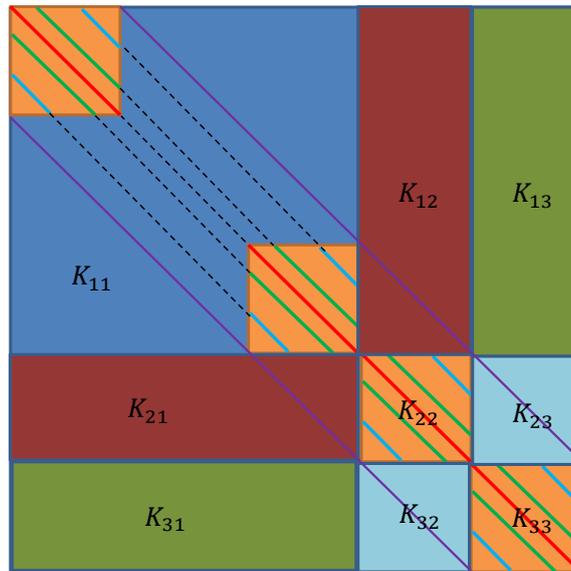


Figure 49. Structure de la matrice de l'équation (186)

Quelques opérations matricielles permettent d'aboutir aux vecteurs T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} \{T_1\} = [A_1]\{Q_2\} + [B_1]\{Q_1\} + [C_1]\{Q_1^G\} \\ \{T_2\} = [A_2]\{Q_2\} + [B_2]\{Q_1\} + [C_2]\{Q_1^G\} \end{cases} \quad (187)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= K_{32}^{-1} + K_{32}^{-1}K_{33}N_1^{-1}N_3K_{32}^{-1} & A_2 &= -N_1^{-1}N_3K_{32}^{-1} \\ B_1 &= -K_{32}^{-1}K_{33}N_1^{-1} & B_2 &= N_1^{-1} \\ C_1 &= K_{32}^{-1}K_{33}N_1^{-1}N_4 & C_2 &= -N_1^{-1}N_4 \end{aligned} \quad (188)$$

$$N_1 = N_2 - N_3 K_{32}^{-1} K_{33} \quad N_2 = K_{23} \quad N_3 = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} \quad N_4 = K_{21} K_{11}^{-1}$$

En remplaçant T_1 et T_2 par leurs expressions(187), on obtient :

$$\{T_f\} = [M_1]\{Q_1\} + [M_{1G}]\{Q_1^G\} + [M_2]\{Q_2\} \quad (189)$$

Avec :

$$M_1 = A_e B_1 + B_e B_2 \quad M_2 = A_e A_1 + B_e A_2 \quad M_{1G} = A_e C_1 + B_e C_2 \quad (190)$$

Rappelons que Q_1^G contient les éléments du second membre b^k_p des équations (149) de tous les volumes pour $k \in \llbracket 3, nz \rrbracket$, avec k l'indice parcourant la direction z , Q_1 contient les éléments du second membre pour $k = 2$ et enfin Q_2 contient ces éléments pour $k = 1$.

Le Watt est l'unité de mesure des éléments du vecteur b_p et par conséquent, les éléments des vecteurs Q_1^G , Q_1 et Q_2 , seront dorénavant appelés « flux » quelle que soient les conditions aux limites appliquées.

2.3.4 Couplage Rotor-Segment-Film fluide

2.3.4.1 Couplage structural Rotor-Segment

Le couplage du segment et de la partie du rotor étudiée requiert l'accès aux températures de leurs faces en contact, i.e. la face « Bottom » du segment, et la face « Top » du rotor (Figure 50).

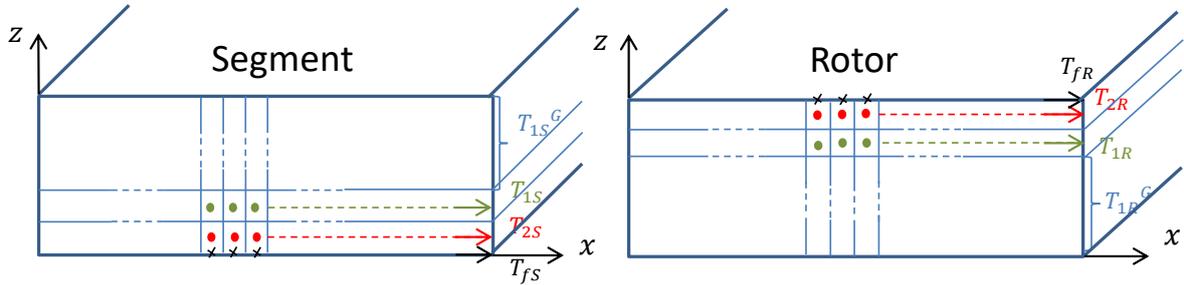


Figure 50. Schématisation des différentes couches du segment et du rotor

Ainsi, après condensation les systèmes d'équations du segment et du rotor s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} K_{S11} & K_{S12} & 0 & 0 \\ K_{S21} & K_{S22} & K_{S23} & 0 \\ 0 & K_{S32} & K_{S33} & 0 \\ 0 & A_S & B_S & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{1S}^G \\ T_{1S} \\ T_{2S} \\ T_{fs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{1S}^G \\ Q_{1S} \\ Q_{2S} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (191)$$

et :

$$\begin{bmatrix} K_{R11} & K_{R12} & 0 & 0 \\ K_{R21} & K_{R22} & K_{R23} & 0 \\ 0 & K_{R32} & K_{R33} & 0 \\ 0 & A_R & B_R & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{1R}^G \\ T_{1R} \\ T_{2R} \\ T_{fr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{1R}^G \\ Q_{1R} \\ Q_{2R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (192)$$

pour enfin aboutir aux équations des faces « Bottom » du segment et « Top » du Rotor suivantes :

$$\begin{cases} \{T_{fS}\} = [M_{2S}]\{Q_{2S}\} + [M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} \\ \{T_{fR}\} = [M_{2R}]\{Q_{2R}\} + [M_{1R}]\{Q_{1R}\} + [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} \end{cases} \quad (193)$$

Les vecteurs Q_{2S} et Q_{2R} rassemblent les éléments des seconds membres de l'équation (149) des volumes de la couche en contact direct avec le film fluide (pour le segment et le rotor). Parmi ces volumes, ceux situés sur l'une des quatre faces latérales (« East », « West », « South » et « North » de la Figure 41), reçoivent également les conditions aux limites appliquées à ces faces. La Figure 51 représente les flux Q_{2fS} et Q_{2BS} que les nœuds de la face « Bottom » du segment vont recevoir.

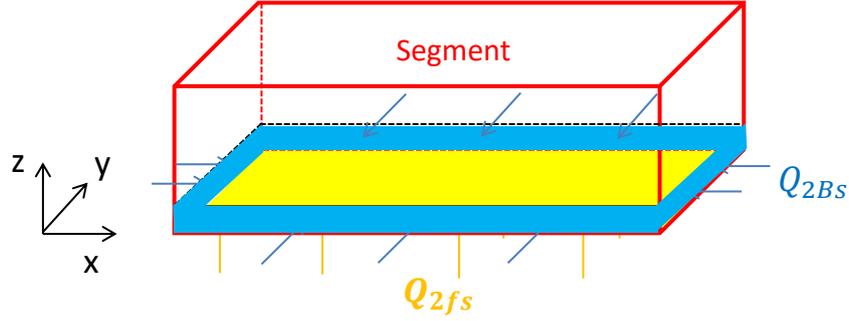


Figure 51. Origine des flux extérieurs affectant les volumes de la couche inférieure du segment

Le flux Q_{2i} , $i=S,R$ se partage donc en deux flux différents.

$$\begin{cases} Q_{2S} = Q_{2BS} + Q_{2fS} \\ Q_{2R} = Q_{2BR} + Q_{2fR} \end{cases} \quad (194)$$

Q_{2Bi} , $i=S,R$ qui provient des faces latérales et Q_{2fi} , $i=S,R$ qui provient de la face en contact avec le fluide. Ceci revient à écrire :

$$\begin{cases} \{T_{fS}\} = [M_{2S}]\{Q_{2BS} + Q_{2fS}\} + [M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} \\ \{T_{fR}\} = [M_{2R}]\{Q_{2BR} + Q_{2fR}\} + [M_{1R}]\{Q_{1R}\} + [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} \end{cases} \quad (195)$$

Ces deux systèmes d'équations contiennent quatre vecteurs inconnus liés à la face de contact : $\{T_{fS}\}$, $\{T_{fR}\}$, $\{Q_{2fS}\}$, $\{Q_{2fR}\}$ chacun de taille $nxy = nx ny$. Les autres flux proviennent des conditions aux limites imposées sur les autres faces. Ces derniers sont constants durant toute l'étude dans le cas du segment ($\{Q_{2BS}\}$, $\{Q_{1S}\}$, $\{Q_{1S}^G\}$), mais dans le cas du rotor ils dépendent de la température T_{fR} , car $\{Q_{2BR}(T_{fR})\}$, $\{Q_{1R}(T_{fR})\}$, $\{Q_{1R}^G(T_{fR})\}$ dépendent du flux $q_{cl}(T_{Rot} = T_{fR})$ donné par l'équation (143). Cette non linéarité sera traité durant la résolution.

Pour résoudre le système (195), deux autres systèmes d'équations de taille $nxy = nx ny$ sont nécessaires. Les deux flux Q_{2fS} et Q_{2fR} sont le résultat des puissances dissipées dans le film mince. On notera donc Q le flux généré entre le segment et le rotor et qui a été calculé dans 2.3 et donné par l'équation (132). Ceci nous procure un des systèmes d'équations de taille nxy :

$$Q = Q_{2fS} + Q_{2fR} \quad (196)$$

Pour obtenir le dernier système d'équations de taille nxy , on supposera que la température de la face « Top » du rotor est constante et qu'elle est la moyenne des températures de la face « Bottom » du segment. Cette moyenne sera pondérée par la surface de chaque cellule de discrétisation dans le plan (x, y) :

$$T_{fR} = \sum_{i=1}^{nxy} \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{S_R} T_{fSi} \quad (197)$$

Ceci est une hypothèse plausible si l'on considère que la surface extérieure du rotor parcourt périodiquement tous les points du segment. Considérer la température du rotor comme étant constante est une hypothèse qui a été introduite pour la première fois dans [34] et une valeur moyenne de surface de la température du rotor a également été utilisée dans [35]. Cependant, ce n'est pas la seule possibilité. Un flux thermique moyen du rotor a été défini dans [36] et pourrait également être utilisé dans le présent contexte.

On notera l'équation (197) ceci sous la forme matricielle suivante :

$$\{T_{fR}\} = [M_n]\{T_{fS}\} \quad (198)$$

M_n est une matrice carrée de taille $n \times nxy$ contenant les éléments de pondération pour effectuer la moyenne. Ce dernier système d'équations permet de résoudre le système global de taille $4 \times nxy$.

Ainsi, après quelques opérations, on obtient :

$$\{Q_{2fR}\} = [M_{2fR}]^{-1} \left\{ [M_n] \left[[M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} + [M_{2S}]\{Q_{2BS} + Q\} \right] - [M_{1R}]\{Q_{1R}\} \right. \\ \left. - [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} - [M_{2R}]\{Q_{2BR}\} \right\} \quad (199)$$

avec :

$$[M_{2fR}] = [M_{2R}] + [M_n][M_{2S}] \quad (200)$$

et donc :

$$\{Q_{2fS}\} = \{Q\} - \{Q_{2fR}\} \quad (201)$$

On remplacera directement Q_{2fS} dans (195) pour obtenir les températures des faces inférieure du segment et supérieure du rotor :

$$\{T_{fR}\} = [M_{1R}]\{Q_{1R}\} + [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} + [M_{2R}]\{Q_{2BR}\} \\ + [M_{2R}][M_{2fR}]^{-1} \left([M_n] \left([M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} + [M_{2S}]\{Q_{2BS} + Q\} \right) \right. \\ \left. - [M_{1R}]\{Q_{1R}\} - [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} - [M_{2R}]\{Q_{2BR}\} \right) \quad (202)$$

$$\{T_{fS}\} = [M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} + [M_{2S}]\{Q_{2BS}\} + [M_{2S}]\{Q\} \\ - [M_{2S}][M_{2fR}]^{-1} \left([M_n] \left([M_{1S}]\{Q_{1S}\} + [M_{1GS}]\{Q_{1S}^G\} + [M_{2S}]\{Q_{2BS} + Q\} \right) \right. \\ \left. - [M_{1R}]\{Q_{1R}\} - [M_{1GR}]\{Q_{1R}^G\} - [M_{2R}]\{Q_{2BR}\} \right) \quad (203)$$

Les termes en rouge sont ceux qui dépendent directement de la température de la face du rotor T_{fR} .

2.3.4.2 Couplage Rotor-Segment-Film fluide

La mise en application de l'étude thermique ci-dessus nécessite un couplage avec la résolution de l'équation de Reynolds vue précédemment. Ce couplage (que l'on appellera dorénavant thermo-gaso-dynamique) se fera selon l'algorithme décrit sur la Figure 52. La résolution de l'équation de l'énergie simplifiée interviendra après le calcul des températures T_{fR} et T_{fS} et servira le calcul de température régnant dans le film fluide à partir de deux conditions aux limites de Dirichlet sur la paroi supérieure (segment) et inférieure (rotor).

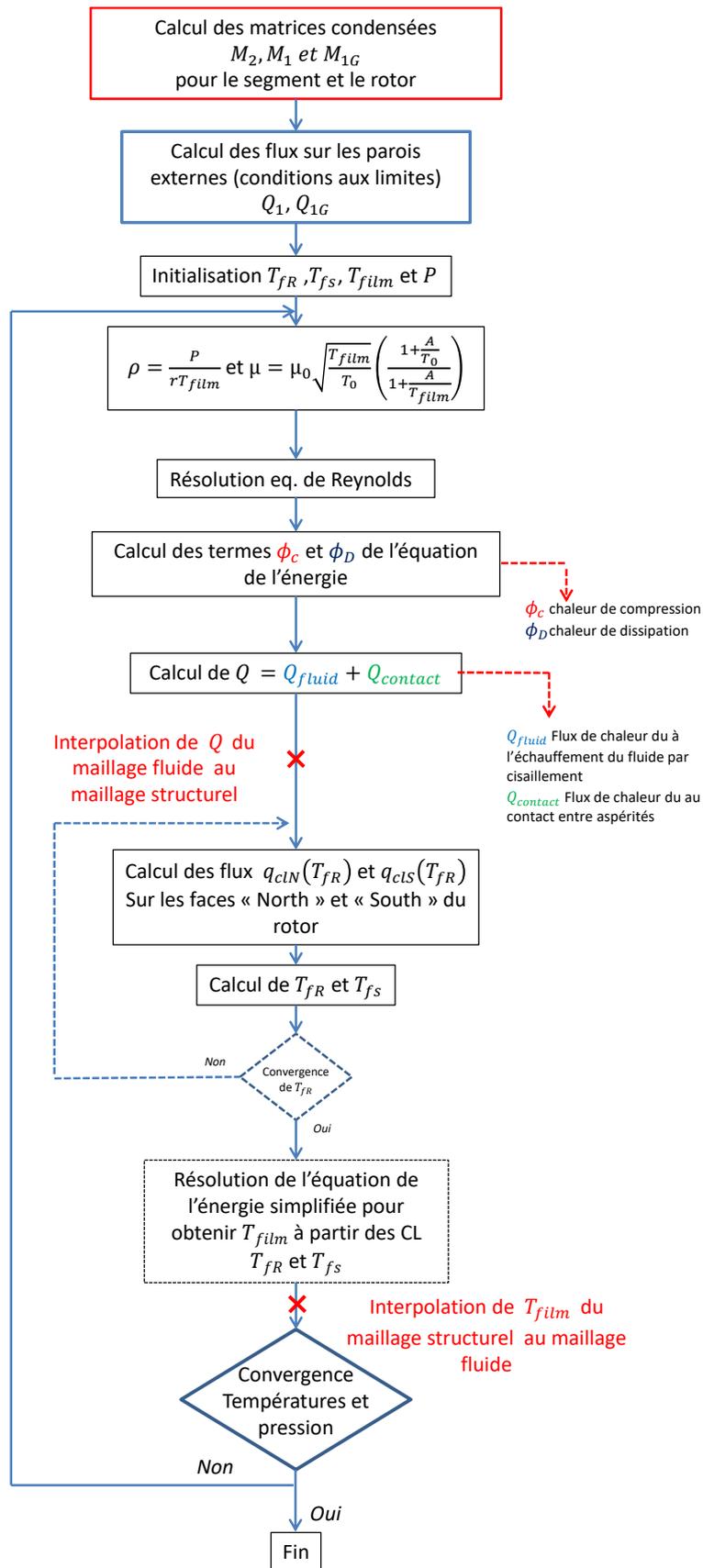


Figure 52. Algorithme du couplage thermo-gaso-dynamique

Les flux évacués par le rotor, de part et d'autre des faces « South » et « North », calculés auparavant dépendent de la température T_{fR} de la face du rotor. Cette dépendance exige une première convergence interne de T_{fR} avant de passer aux autres étapes de la boucle. Cette convergence n'est pas nécessaire à chaque itération de la boucle thermo-gaso-dynamique si l'erreur sur T_{fR} diminue de manière quadratique, ce qui s'est avéré être le cas. On se passera donc par la suite de la boucle intérieure marquée en pointillés sur la Figure 52.

L'équation de Reynolds et l'équation de l'énergie (ainsi que le calcul des flux générés dans le film fluide) sont calculées uniquement sur les patins en utilisant le maillage du fluide présenté en Figure 18. Les autres flux sur les faces ainsi que les termes de l'équation de la chaleur sont calculés sur le maillage structurel présenté en Figure 42. Le maillage fluide est généralement beaucoup plus raffiné que le maillage structurel, puisque la pression gaso-dynamique dans le film mince peut avoir des variations plus rapide que la température dans le segment et dans le rotor. Les maillages structurels du segment et du rotor sont plus contraignants en terme d'espace mémoire et c'est pour cette raison que la condensation statique a été appliquée.

La Figure 52 montre qu'une interpolation des températures et des flux intervient à certaines étapes entre les maillages structurels et le maillage fluide.

2.4 Equilibre des efforts appliqués sur le segment

La dernière partie du chapitre 1 a dressé les efforts appliqués sur un segment au cours de son fonctionnement. La partie qui suit détaillera le calcul de ces efforts.

On a d'abord les efforts générés à l'intérieur du segment (dans la zone des patins et de la lèvre), qui sont de deux types : forces de portance et forces de contact.

Les forces de portances sont générées par la pression dans le film mince créée dans chacun des patins et par la pression (considérée hydrostatique) créée sous la lèvre. Les forces de contact sont quant à elles issues du contact potentiel entre les aspérités du segment et du rotor (patins et lèvre). Chacune de ces deux forces est constituée d'une composante normale et d'une composante tangentielle.

Pour l'effort de portance:

$$\vec{F}_{portance} = F_p \vec{n} + F_\tau \vec{t} \quad (204)$$

Avec :

$$F_p = \iint_S P dS \quad F_\tau = \iint_S \tau dS \quad (205)$$

P étant la pression locale calculée à partir de la résolution de l'équation de Reynolds, τ le taux de cisaillement représentant le frottement fluide, \vec{n} et \vec{t} étant les directions normale et tangentielle au segment.

Pour la force de contact :

$$\vec{F}_{contact} = F_c \vec{n} + f F_c \vec{t} \quad (206)$$

F_c étant la Force locale de contact issue du modèle vu précédemment et f le coefficient de frottement.

La projection de ces forces selon les directions (X, X) et le couple autour de Z au point A sont (Figure 53) :

$$\begin{cases} F_{XSeg} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} [F_n(\theta) \cos \theta - F_t(\theta) \sin \theta] d\theta \\ F_{YSeg} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} [F_n(\theta) \sin \theta + F_t(\theta) \cos \theta] d\theta \\ M_{ZSeg A} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} \left[2R F_t(\theta) \sin^2 \frac{\theta}{2} - R F_n(\theta) \sin \theta \right] d\theta \end{cases} \quad (207)$$

Où :

$$F_n = F_p + F_c \qquad F_t = F_\tau + f F_c \quad (208)$$

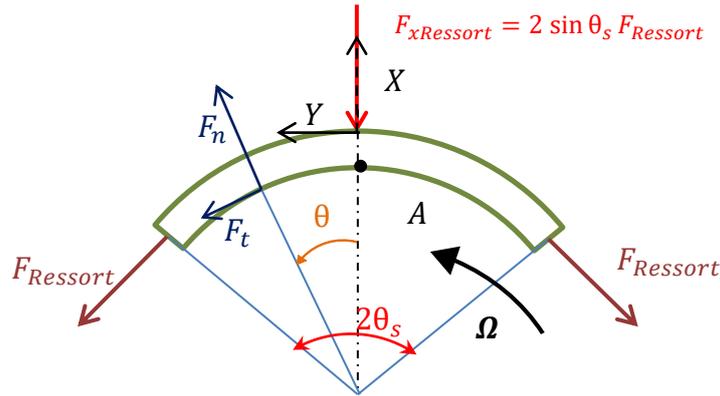


Figure 53. Bilan des forces sur un segment (ajouter la vitesse de rotation)

Parmi les autres efforts appliqués au segment, il y a la force du ressort circonférentiel, qui n'a qu'une contribution selon la direction X :

$$F_{XRessort} = 2 \sin \theta_s F_{Ressort_circ} \quad (209)$$

La force appliquée par les ressorts axiaux rentre directement dans le calcul de la force de frottement issue du contact nez-stator dont l'expression est la suivante :

$$F_f = f F_z \quad (210)$$

où F_z est la force de contact normale appliquée sur le nez. Celle-ci est obtenue en effectuant l'équilibre statique des efforts appliqués sur le nez : l'effort appliqué par les ressorts axiaux, l'effort généré par la différence de pression et la portance hydrostatique créée par l'écoulement sous le nez³.

Ainsi :

$$F_z = F_{\Delta P} + F_{ax} - F_{fluide_nez} \quad (211)$$

Avec :

$$F_{\Delta P} = P_{amont} S_{ext_nez} - P_{aval} S_{int_nez} \quad (212)$$

³ Le nez est une étanchéité secondaire, normalement fermée mais où subsiste un très faible débit de fuite dû aux rugosités et à l'effet hydrostatique.

S_{ext_nez} et S_{int_nez} représentent respectivement les surfaces globale et intérieure du nez, comme le montre la Figure 54.

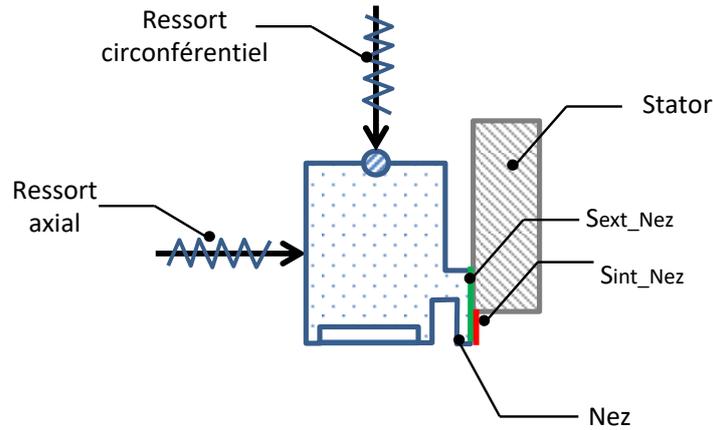


Figure 54. Representation du contact Nez-Stator

La force hydrostatique a pour expression (Annexe C) :

$$F_{fluide_nez} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 1} \frac{P_{aval}^{\frac{2\kappa+1}{\kappa}} - P_{amont}^{\frac{2\kappa+1}{\kappa}}}{P_{aval}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} - P_{amont}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}} S_{cont_nez} \quad (213)$$

Ou κ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Chaque segment est retenu par plusieurs ressorts axiaux, la charge axiale globale du segment représentera la somme des forces exercées par chacun de ces ressorts. On ne s'intéressera qu'à leur contribution appliquée sur la surface de contact du nez, donc :

$$F_{ax} = n_{ressort_ax_segm} F_{ressort_ax} \frac{S_{cont_nez}}{S_{cont_nez} + 2S_{recouv}} \quad (214)$$

La force de frottement calculée est prise en compte dans le calcul à travers ces projections sur les différents axes. Le segment ayant trois degrés de liberté, chaque point M du segment effectue deux translations et une rotation. Ce déplacement est source d'une force de frottement élémentaire donc la contribution suivant les axes du système de coordonnées a été détaillée dans [8] :

$$F_{f,X} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} f_f(\theta) \frac{e_X - 2R\varphi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(e_X - 2R\varphi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2})^2 + (e_Y - 2R \sin^2\frac{\theta}{2})^2}} R d\theta \quad (215)$$

$$F_{f,Y} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} f_f(\theta) \frac{e_Y - 2R \sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(e_X - 2R\varphi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2})^2 + (e_Y - 2R \sin^2\frac{\theta}{2})^2}} R d\theta \quad (216)$$

$$C_{f,A} = \int_{-\theta_s}^{\theta_s} f_f(\theta) \frac{[e_X - 2R\varphi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}] R \sin\theta + [e_Y - 2R \sin^2\frac{\theta}{2}] R (1 - \cos\theta)}{\sqrt{(e_X - 2R\varphi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2})^2 + (e_Y - 2R \sin^2\frac{\theta}{2})^2}} R d\theta \quad (217)$$

Avec :

$$f_f(\theta) = \frac{F_f}{2\theta_s R} \quad (218)$$

Finalement la dernière contribution dans ce bilan de force est celle des zones de recouvrement. La force de frottement au niveau de ces zones a pour expression :

$$F_s = f \left(P_{amont} 2S_{recouv} + n_{ressort_ax_Segm} F_{ressort_ax} \frac{2S_{recouv}}{S_{cont_nez} + 2S_{recouv}} \right) \quad (219)$$

Cette force regroupe les contributions des deux zones de recouvrement de chaque segment et elle est également projetée suivant les axes du système de coordonnées. Le calcul de cette force et de ces projections est entièrement détaillé dans [8].

Calcul du couple et du débit

L'épaisseur du film sous la lèvre est identique à celle sous les patins, mais en raison de sa faible longueur axiale, les forces d'inertie convectives peuvent devenir importantes dès lors que la différence de pression étanchée par le joint est élevée. Par conséquent, le calcul du débit sous la lèvre se fait donc à travers l'équation 1D suivante qui modélise cet écoulement.

$$\frac{4f_f dz}{D_h} = \frac{(1 - M^2) dM^2}{\kappa M^4 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)} \quad (220)$$

où $f_f = 64/Re$ est le coefficient de frottement fluide, $Re = \frac{\rho V D_h}{\mu}$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement axial sous la lèvre et M le nombre de Mach.

La solution numérique de cette équation permet d'obtenir la variation de la pression sous la lèvre et le débit de fuite de l'étanchéité principale du joint. Ces calculs ont bien été détaillés dans [8].

Le couple de frottement est calculé à partir des contraintes fluides et des forces de contact de la lèvre.

$$C_f = \left(f F_c + \iint_S \tau dS \right) R \quad (221)$$

2.4.1 Etude du mouvement du segment à 1 degré de liberté

Le premier pas dans l'étude de l'équilibre du segment sous l'effet des forces hydrodynamiques, de contact et de frottement est de considérer le mouvement du segment suivant un seul degré de liberté. Il est ainsi supposé que le segment ne peut se déplacer que selon la direction X (Figure 55).

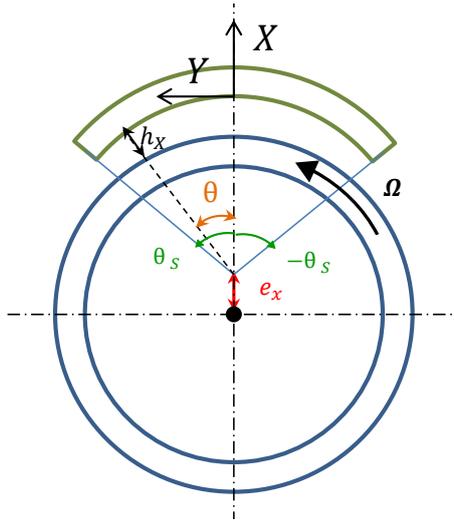


Figure 55. Déplacement du segment selon la direction X

L'épaisseur du film ne sera représentée que par la contribution de la direction X

$$h_x(\theta) = e_x \cos \theta + \frac{e_x^2 \sin \theta}{2R} \quad (222)$$

où $\theta \in [-\theta_s, \theta_s]$.

Le joint utilisé est le JRS N°1 (voir partie ultérieure 2.5.2) et dont les caractéristiques de fonctionnement sont les suivantes :

Ω [rad/s]	$F_{Ressort_circ}$ [N]	$F_{Ressort_ax}$ [N]	$n_{ressort_ax/segment}$	ΔP [bar]
500	5	1,25	4	1 bar

La Figure 56 montre les charges résultantes d'un déplacement e_x . On remarquera que la projection de la charge selon la direction X est beaucoup plus importante que selon Y pour de faibles e_x . Ces efforts deviennent du même ordre de grandeur à partir de $e_x = 8 \cdot 10^{-7} m$. La barre horizontale noire représente la projection selon X de la force appliquée par le ressort circconférentiel additionnée à la projection de la force de frottement. L'intersection de cet effort avec la charge résultante F_{XSeg} a lieu pour $e_x = 9,2 \cdot 10^{-7} m$. Le Tableau 3 résume les valeurs des efforts relevés pour cette valeur de e_x .

Tableau 3 Résultante des efforts en position d'équilibre potentiel en 1D

$F_{X,Seg} = 8,3 N$	$F_{X,Ressort} = 5 N$	$F_{f,X} = 3,3 N$
$F_{Y,Seg} = 5,1 N$	$F_{Y,Ressort} = 0$	$F_{f,Y} = 0$
$M_{Z,Seg/A} = 9 \cdot 10^{-2} Nm$	$C_{XRessort} = 0$	$C_{f,Z} = 0$

La charge selon Y et le couple autour du point A sont importants et doivent donc être pris en compte pour l'équilibre du segment. L'équilibre à un seul degré de liberté n'est alors pas suffisant et le modèle doit prendre en compte les trois degrés de liberté.

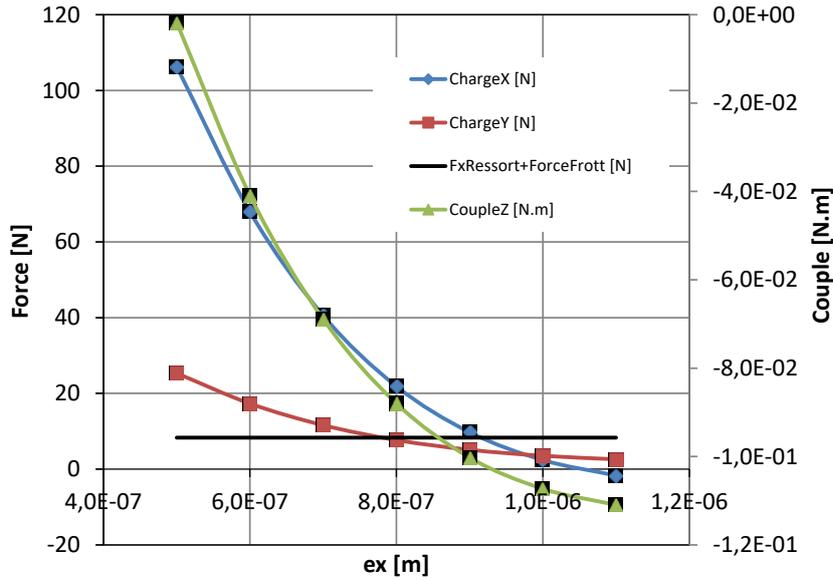


Figure 56. Forces et couple créés dans le segment en fonction de la position e_x pour une vitesse de $\Omega=500$ rad/s

2.4.2 Equilibre du segment à 3 degrés de liberté

Pour l'étude à 3 degrés de liberté, la translation e_y selon la direction Y et la rotation φ autour de l'axe Z se rajouteront à la translation e_x selon la direction X vue précédemment. La hauteur du film sera donc la somme des hauteurs engendrées par ces trois déplacements i.e. l'équation (1). La Figure 15 représente les déplacements correspondant à ces trois degrés de liberté.

Les efforts générés à l'intérieur des patins ont été présentés précédemment au travers des équations (207) et (219).

L'équilibre du segment se traduit par la résolution du système d'équation suivant :

$$\{R_{xyz}\} = \begin{Bmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{X,Seg} - (F_{X,Ressort} + F_{f,X} + F_{s,X}) \\ F_{Y,Seg} - (F_{f,Y} + F_{s,Y}) \\ M_{Z,Seg/A} - (C_{f,A} + C_{s,A}) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (223)$$

L'Annexe D présente les différents algorithmes de résolution de système non linéaires utilisés durant cette étude.

Traitement de l'interférence Segment-Rotor

L'obtention de la position d'équilibre du segment à 3ddl passe par la résolution du système d'équations non linéaires (223). Les méthodes de résolution sont toutes itératives, et compte tenu des faibles épaisseurs de film fluide, une interférence entre une partie de la surface du segment et celle du rotor peut avoir lieu au cours de la résolution. Cela se traduit mathématiquement par une épaisseur de film négative, non-physique et qui entraîne l'arrêt de la résolution. Imposer des conditions de non interférence est donc nécessaire. Pour ce faire, l'on considèrera l'une des méthodes usuelles du traitement du contact, qu'est celle des pénalités. Le but est de rajouter une contrainte $h_{film} > 0$ au système d'équations (223). La méthode des pénalités permet de convertir le problème initialement à contrainte en un problème sans contraintes en rajoutant des termes au système d'équations (223). Ces termes traduiront les projections de la force de contact nécessaire pour rétablir l'équilibre en cas d'interférence [37]. L'énergie potentielle ajoutée par la méthode des pénalités est :

$$\Pi = \frac{1}{2} \varepsilon_c g^2 \quad (224)$$

où ε_c [N/m] est le paramètre de pénalité qui est choisi de façon à obtenir le plus de précision possible. Le paramètre g correspond à l'épaisseur minimale du film fluide. Dans notre cas $h_{film} > 0 \Leftrightarrow h_{min} > 0$. Les équations d'équilibre (223) peuvent être considérées comme étant obtenues par la minimisation de l'énergie potentielle du système. L'ajout de l'énergie potentielle (224) avec $g = h_{min}$ et la minimisation de l'énergie potentielle totale conduisent à un nouveau système d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{xSeg} - (F_{xRessort} + F_{f,x} + F_{s,x}) + \frac{\partial}{\partial e_x} \left(\varepsilon_c \frac{h_{min}^2}{2} \right) \\ F_{ySeg} - (F_{f,y} + F_{s,y}) + \frac{\partial}{\partial e_y} \left(\varepsilon_c \frac{h_{min}^2}{2} \right) \\ M_{zSegA} - (C_{f,A} + C_{s,A}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varepsilon_c \frac{h_{min}^2}{2} \right) \end{array} \right\} = \{0\} \quad (225)$$

Détermination de l'épaisseur de film minimale h_{min}

Pour un segment rigide, l'épaisseur de film minimale ne peut se situer qu'à l'une des deux extrémités ; elle est donc obtenue pour $\theta = \theta_s$ ou pour $\theta = -\theta_s$

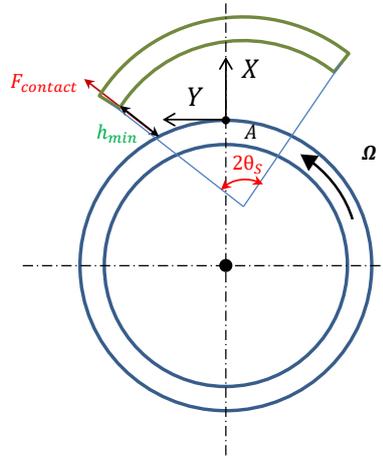


Figure 57. Schéma représentant h_{min} et $F_{contact}$

Pour le cas $\theta = \theta_s$, l'épaisseur du film est :

$$h_1 = e_x \cos \theta_s + \frac{e_x^2 \sin \theta_s}{2R} + e_y \sin \theta_s + \frac{e_y^2 \cos \theta_s}{2R} - R \left[\varphi \sin \theta_s + \frac{(\varphi \sin \theta_s)^2}{2} \right] \quad (226)$$

et pour le cas $\theta = -\theta_s$

$$h_2 = e_x \cos \theta_s - \frac{e_x^2 \sin \theta_s}{2R} - e_y \sin \theta_s + \frac{e_y^2 \cos \theta_s}{2R} - R \left[-\varphi \sin \theta_s + \frac{(\varphi \sin \theta_s)^2}{2} \right] \quad (227)$$

Supposons que $h_1 > h_2$, cela signifierait que $h_{min} = h_2$. En soustrayant l'équation (226) à (227), l'on aboutit à une condition :

$$\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi > 0 \quad (228)$$

Réciproquement si l'on suppose que $h_2 > h_1$, alors $h_{min} = h_1$, et le terme $\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi$ devient négatif. La combinaison de ces deux conditions permet d'obtenir une formulation de l'épaisseur de film minimale h_{min} :

$$h_{min} = \frac{h_2 + h_1}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2} \text{sign} \left(\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi \right) \quad (229)$$

La fonction *sign* peut être approximée mathématiquement par la fonction *arctan*. La Figure 58 présente cette fonction. ε_s est généralement de l'ordre $\varepsilon_s \approx 10^{-7}..10^{-8} m$.

$$\text{sign} \left(\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi \right) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right) \quad (230)$$

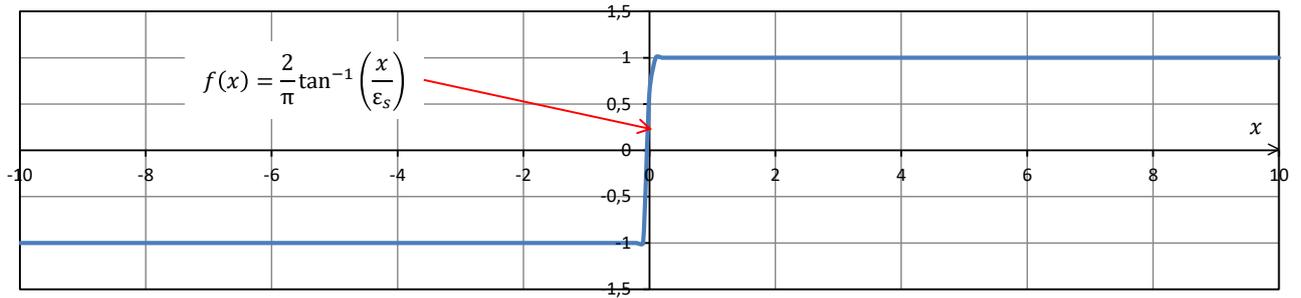


Figure 58. Traçage de la fonction $f(x) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon_s} \right)$ pour $\varepsilon_s = 10^{-7}$

En développant le calcul, on arrive à l'expression suivante :

$$h_{min} = \left[e_x \cos \theta_s + \frac{e_x^2 \sin \theta_s}{2R} - \frac{R (\varphi \sin \theta_s)^2}{2} \right] + \left[\frac{e_y^2 \sin \theta_s}{2R} + e_y \sin \theta_s - R \varphi \sin \theta_s \right] \cdot \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{e_x^2}{2R} + e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right) \quad (231)$$

Qu'on peut simplifier en ne tenant compte que des termes du 1^{er} ordre :

$$h_{min} = e_x \cos \theta_s + (e_y - R\varphi) \sin \theta_s \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right) \quad (232)$$

Ainsi, les dérivées dont on aura besoin pour la résolution du système (225) sont :

$$\frac{\partial h_{min}}{\partial e_x} = \cos \theta_s \quad (233)$$

$$\frac{\partial h_{min}}{\partial e_y} = \sin \theta_s \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right) + \frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \sin \theta_s \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right)^2} \quad (234)$$

$$\frac{\partial h_{min}}{\partial \varphi} = -R \sin \theta_s \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right) - R \frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \sin \theta_s \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{e_y - R\varphi}{\varepsilon_s} \right)^2} \quad (235)$$

2.5 Résultats

2.5.1 Joint radial segmenté à poches de diamètre modéré

Une analyse paramétrique a été réalisée sur un JRS de 100 mm de diamètre issu de [10]. Le joint est composé de 6 segments, comportant chacun 3 patins identiques avec poches. La géométrie développée d'un segment est représentée sur la Figure 59. Le maillage considéré pour chaque patin est composé de 80 cellules circonférentielles et de 20 cellules dans la direction axiale. Le fluide à étancher est l'air à $P_{amont} = 6 \text{ bar}$ et 11 bar pour une pression de sortie $P_{aval} = 1 \text{ bar}$ (l'étude sera donc effectuée pour deux différences de pression $\Delta P = 5 \text{ bar}$ et 10 bar). La température ambiante est de $T_{amb} = 293 \text{ K}$. La vitesse de rotation varie de $\Omega = 100 \text{ rad/s}$ à 2000 rad/s . Les efforts des ressorts circonférentiel et axial sont $F_{Ressort_Circ} = 5 \text{ N}$ et $F_{Ressort_ax} = 20 \text{ N}$. Deux profondeurs de poches différentes ont été considérées, $h_{poche} = 10 \mu\text{m}$ et $15 \mu\text{m}$. Aucun écart d'ondulation de surface n'a été pris en compte dans ce calcul. Les paramètres de rugosités de surfaces utilisés sont en Annexe B.

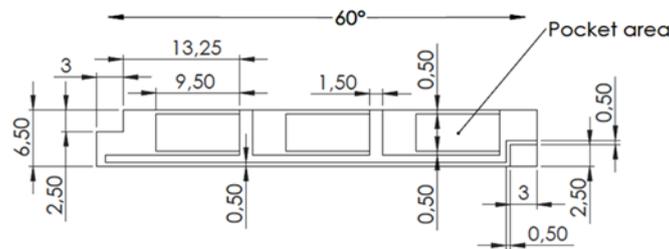


Figure 59. Géométrie déroulée d'un segment [10]

Les conditions aux limites thermiques correspondent aux explications données lors de la modélisation du segment et du rotor et sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4 Conditions aux limites appliqués au segment et au rotor - joint de diamètre modéré

Segment					
Top	Bottom	West	East	North	South
Convection libre H $= 10 \text{ W.K}^{-1}.m^{-2}$ $T_{amb} = 293 \text{ K}$	Flux imposé (Flux calculé dans le film fluide)	Flux nul imposé	Flux nul imposé	Surface isotherme $T=293 \text{ K}$	Surface isotherme $T=293 \text{ K}$
Rotor					

Top	Bottom	West	East	North	South
Flux imposé (Flux calculé dans le film fluide)	Convection libre $H = 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ $T_{amb} = 293 \text{ K}$	Conditions de périodicité	Conditions de périodicité	Flux imposé (Calculé à partir de la modélisation du rotor)	Flux imposé (Calculé à partir de la modélisation du rotor)

La Figure 60 présente les déplacements e_X , e_Y et la rotation φ du segment en fonction de la vitesse de rotation. Les résultats montrent une même tendance avec une augmentation du déplacement e_X pour l'augmentation de la vitesse de rotation, et une rotation φ qui diminue et change de signe. Le déplacement latéral e_Y est limité. L'augmentation de e_X avec la vitesse de rotation et le changement de signe de la rotation φ indiquent que la force engendrée sous le patin augmente avec la vitesse de rotation et change aussi de direction. L'épaisseur minimale du film est illustrée sur la Figure 61a et se situe au bord d'attaque du segment (côté droit du segment illustré sur la Figure 57). Sa tendance est très similaire au déplacement radial e_X ce qui montre l'influence majeure de ce paramètre sur l'ouverture du joint.

Le déplacement radial e_X , la rotation φ et l'épaisseur minimale du film diminuent avec l'augmentation de la pression amont P_{amont} et la profondeur de la poche h_{poche} . L'augmentation de P_{amont} ferme le joint tandis que l'augmentation de h_{poche} réduit l'effort de portance engendré par les patins.

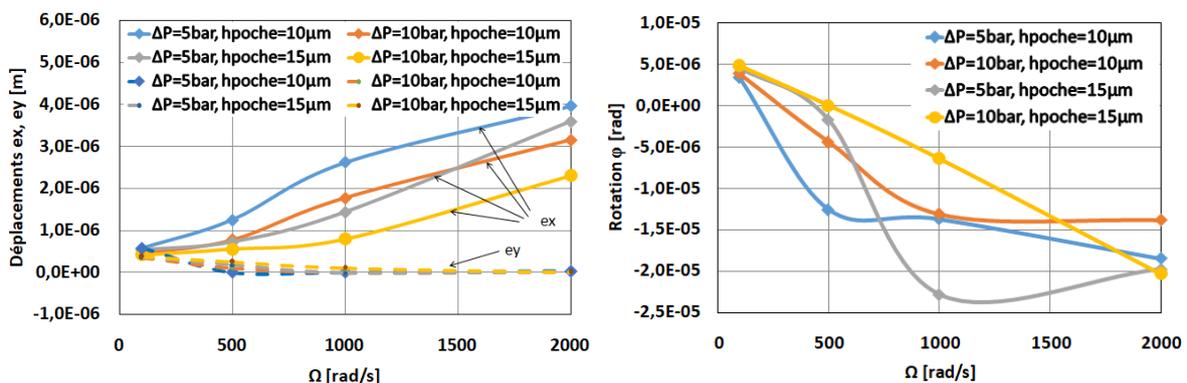


Figure 60. Déplacement radial e_X , tangentiel e_Y et rotation φ du segment

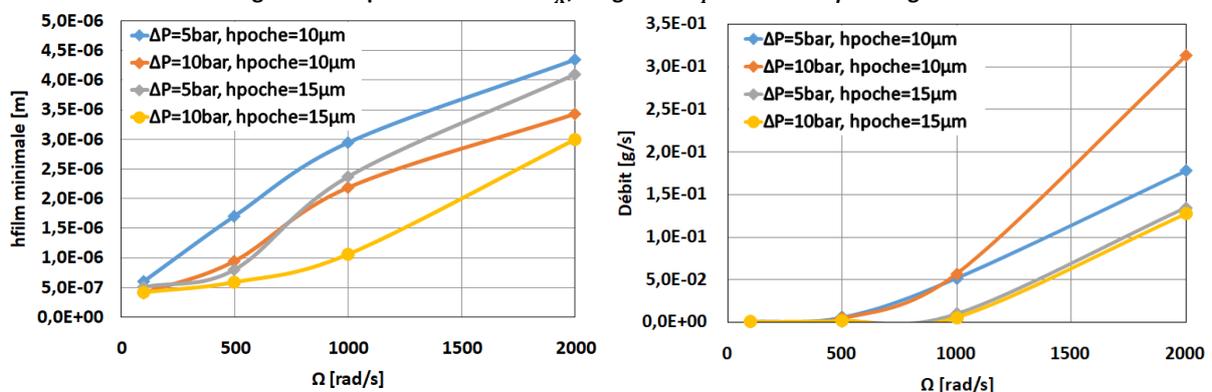


Figure 61. Valeur minimale de l'épaisseur du film h_{min} et débit massique du joint

Le débit massique du joint est représenté dans le Figure 61b. Ce dernier augmente avec la vitesse de rotation puisque les efforts de portance augmentent. Comme il a été mentionné précédemment,

l'augmentation de la profondeur de poche fait diminuer les forces de portance et provoque la fermeture du joint ce qui engendre une diminution du débit de fuite. La différence de pression ΔP a deux impacts sur le débit massique. D'une part, son augmentation ferme le joint et tend donc à diminuer le débit massique, mais d'autre part le ΔP augmente l'effet hydrostatique à travers la lèvres, ce qui est directement responsable du débit massique.

Le couple et la puissance dissipée dans le joint sont décrits dans Figure 62. Le couple est bien corrélé à l'épaisseur minimale du film: il diminue avec la vitesse de rotation et augmente avec la différence de pression et la profondeur de poche. Ces trois paramètres sont responsables de la génération de portance dans le segment et leur influence indique que le couple est principalement dû au contact. Il sera par la suite montré que la puissance dissipée représentée sur la Figure 62b est bien corrélée avec les températures du joint.

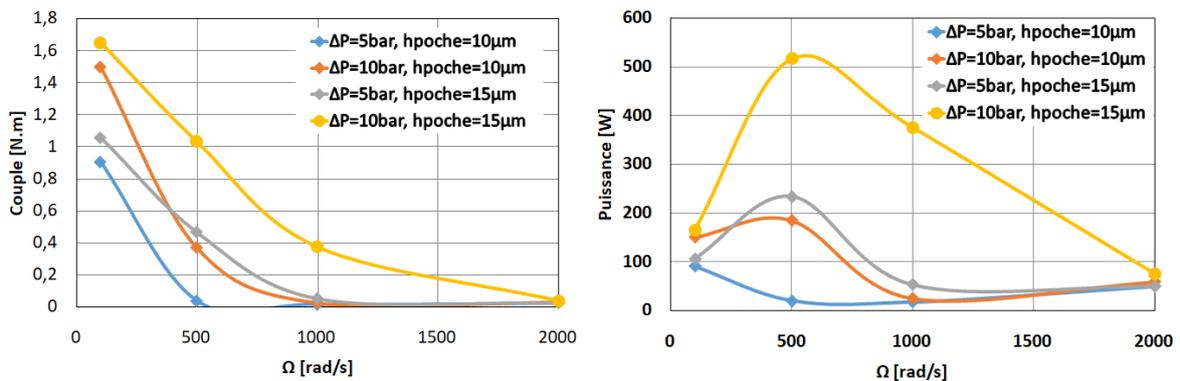


Figure 62. Couple et puissance dissipée dans le joint

Les températures sur la surface du segment pour $\Omega=500$ rad/s sont représentées sur la Figure 63. L'échauffement est plus important sur le premier patin suivant le sens de rotation ce qui est cohérent avec le fait que l'épaisseur minimale du film se trouve au bord d'attaque du segment. Le rectangle jaune positionné sur l'échelle des températures de chaque image indique la température moyenne de la surface du rotor en contact avec le segment. Les températures maximales varient beaucoup entre les cas $\Delta P = 5$ bar, $h_{poche} = 10 \mu m$ et $\Delta P = 10$ bar, $h_{poche} = 15 \mu m$. Pour le premier cas, la lèvres et un des bords du patin montrent aussi de températures importantes.

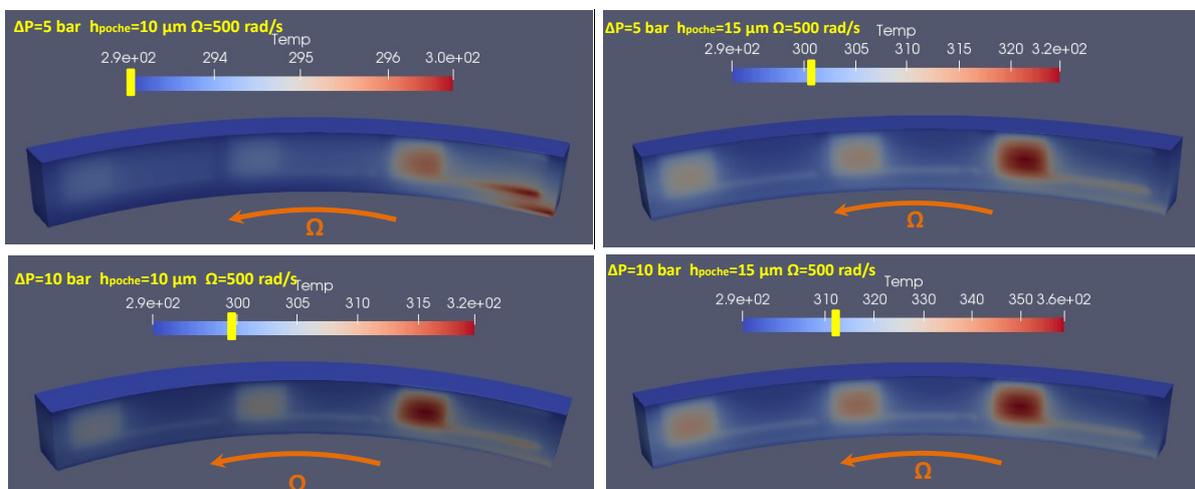


Figure 63. Température du segment and du rotor ($F_{Ressort_{circ}} = 5N$, $F_{Ressort_{ax}} = 20N$)

La température maximale du segment et les températures moyennes du rotor sont tracées sur la Figure 64. Les deux courbes sont très similaires, avec des températures moyennes moins élevées pour le rotor. Cependant, les différences entre la température maximale du segment et la température moyenne du rotor ne sont pas les mêmes pour tous les cas et toutes les vitesses de rotation. La plus grande différence est pour le cas $\Delta P = 10 \text{ bar}$ et $h_{\text{poche}} = 15 \mu\text{m}$ à des vitesses autour de $\Omega = 500..600 \text{ rad/s}$. Ceci correspond au cas quand le déplacement radial est le plus faible et la pression de contact entre aspérités est élevée. En revanche, pour le cas $\Delta P = 5 \text{ bar}$ et $h_{\text{poche}} = 10 \mu\text{m}$ lorsque les déplacements radiaux ont les valeurs les plus importantes, les écarts de température sont limités à 5K et sont quasi constants avec la vitesse de rotation. Ces tendances sont bien illustrées par la puissance dissipée représentée sur la Figure 62b.

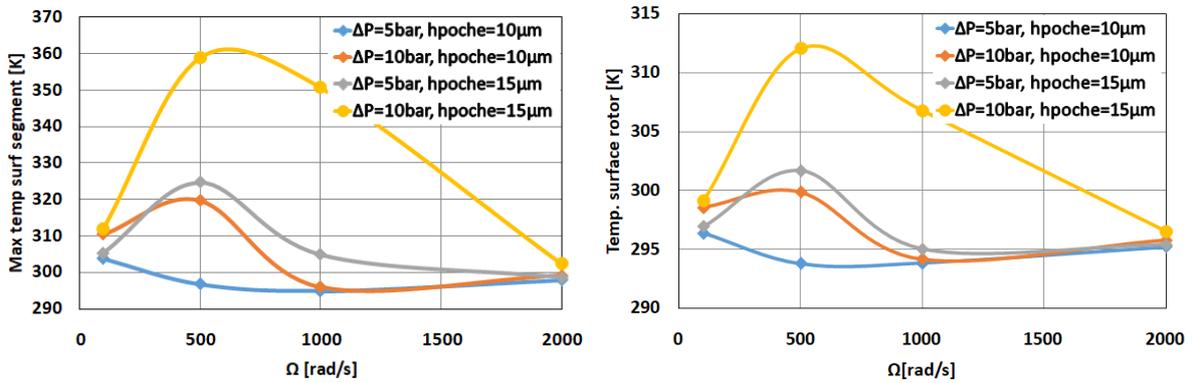


Figure 64. Valeur maximale de la température du segment et température de surface du rotor ($F_{\text{Ressort}_{\text{circ}}} = 5N$, $F_{\text{Ressort}_{\text{ax}}} = 20N$)

Le flux de chaleur total généré entre le segment et rotor a été calculé à partir des équations (127) et (131). Il est dû à la pression de contact, à la chaleur de compression ϕ_c et à la chaleur de dissipation ϕ_D dans la zone du film mince. Sa valeur est équivalente à la puissance dissipée, puisque les pressions de contact et les contraintes de cisaillement dans le film sont également à l'origine du couple. Le seul terme qui fait la différence est la chaleur de compression qui reste négligeable puisque l'écoulement sous le patin est dû aux effets aérodynamiques et non aérostatiques. La Figure 65 illustre le pourcentage du flux de chaleur dû au contact. La puissance dissipée de la Figure 62b et le pourcentage de la Figure 65 sont corrélés et montrent que le flux de chaleur principal est dû aux pressions de contact.

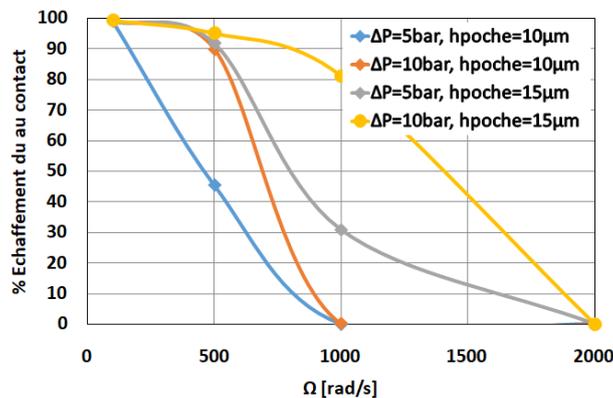


Figure 65. Pourcentage de flux d'échauffement dû au contact ($F_{\text{Ressort}_{\text{circ}}} = 5N$, $F_{\text{Ressort}_{\text{ax}}} = 20N$)

2.5.2 Joint radial segmenté de grand diamètre

La partie qui suit présente les résultats pour trois types de joints dont la géométrie est présentée dans la Figure 66. Les joints N°1 et 2 sont des JRS classiques sans poches composés respectivement de quatre et de trois patins par segment. Des patins de surface réduite sont présents aux deux extrémités du 2^{ème} joint et seront inclus dans la modélisation. Le joint N°3 est constitué d'uniquement trois patins portant des poches à profil bombé.



Figure 66. Configuration du joint a) N°1 b) N°2 c) N°3

Ces résultats numériques ont été comparés à des résultats expérimentaux effectués dans le cadre d'une thèse actuellement en cours portant sur l'étude expérimentale des étanchéités aéronautiques [39]. La Figure 67 montre le montage expérimental mis en place. Des capteurs mesurent la température de la surface du rotor. Ces capteurs sont installés à très faible distance sous la surface du rotor.

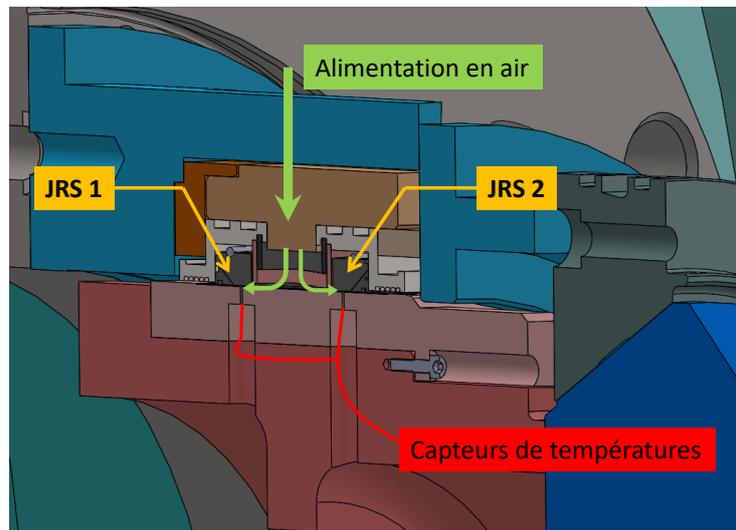


Figure 67. Disposition des joints pour les trois campagnes d'essais [39]

Les résultats adimensionnés suivants sont présentés de la Figure 68 à la Figure 73 en fonction de la vitesse de rotation : position d'équilibre (e_x, e_y, φ), débit, température de la face supérieure du rotor T_{fr} , température maximale atteinte sur la face du segment $Max(T_{fs})$, couple, flux d'échauffement et sa répartition entre le contact et la dissipation/compression,. La confrontation expérimentale-

numérique a porté sur le débit, la température et le couple. L'adimensionnement des résultats a été effectué en utilisant la valeur maximale de chaque paramètre retenu sur les tous les calculs effectués.

Les conditions aux limites suivantes ont été considérées pour les résultats numériques

Tableau 5 Conditions aux limites appliqués au segment et au rotor - joint de grand diamètre

Segment					
Top	Bottom	West	East	North	South
Convection libre H $= 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ $T_{amb} = 298 \text{ K}$	Flux imposé (Flux calculé dans le film fluide)	Flux nul imposé	Flux nul imposé	Surface isotherme $T = 298 \text{ K}$	Surface isotherme $T = 298 \text{ K}$
Rotor					
Top	Bottom	West	East	North	South
Flux imposé (Flux calculé dans le film fluide)	Convection libre H $= 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ $T_{amb} = 298 \text{ K}$	Conditions de périodicité	Conditions de périodicité	Flux imposé (Calculé à partir de la modélisation du rotor)	Flux imposé (Calculé à partir de la modélisation du rotor)

Joint radial segmenté N°1 (4 patins sans poches/segment)

Les Figure 68 et Figure 69 présentent les résultats du joint N°1 pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ et $\Delta P = 1 \text{ bar}$. Les surfaces du joint sont considérées rugueuses mais sans ondulations dans un premier temps. Le calcul du débit numérique s'est fait en utilisant des défauts de formes des lèvres [39] et qui se trouvent en Annexe E. Les débits calculés et mesurés sont du même ordre de grandeur et présentent un écart allant de 3 % pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ à 30 % pour $\Delta P = 1 \text{ bar}$ avec des valeurs plus importantes pour les résultats numériques. Les températures mesurées et calculées sur la surface du rotor ont la même tendance d'évolution et les écarts relatifs ne dépassent pas 2 %. L'évolution du couple expérimental présente par contre une diminution suivie d'une augmentation contre une augmentation pour le couple numérique. L'écart entre les valeurs est aussi important. La première phase de diminution du couple expérimental se traduit par une ouverture du joint conduisant à une diminution du contact. La deuxième phase correspondant à une légère augmentation est due à l'importance du cisaillement fluide pour de fortes vitesses de rotation. Pour le couple numérique, la courbe est légèrement ascendante puisque la position d'équilibre ne varie pas ou peu. On remarquera que la position e_x est presque constante et que le seul changement de l'équilibre vient de l'augmentation de e_y et φ . Cette augmentation ne permet pas de se défaire du contact d'une façon marquée et ne permet donc pas la diminution du couple. L'augmentation de la vitesse de rotation augmente par contre légèrement le couple.

Aucune ondulation de surface n'a été considérée dans les exemples présentés de la Figure 68 à la Figure 69. La portance créée provenait uniquement de la disposition des patins pour chaque position d'équilibre. Les figures présentées dans l'Annexe A (Figure A- 1, Figure A- 8) montrent les résultats correspondant à des écart d'ondulations de surfaces dans une seule, puis dans deux directions avec des amplitudes crête à crête $A_{cac} = 1,5 \mu\text{m}$, et $A_{cac} = 3 \mu\text{m}$, pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ et puis $\Delta P = 1 \text{ bar}$. La formule de calcul de ces ondulations se trouve en Annexe F.

Les ondulations sur les surfaces des patins n'ont pas pu être mesurées expérimentalement à cause de la courbure des patins et à cause de problème d'accessibilité.

En prenant en considération des ondulations de surface, le joint ne réagit plus de la même manière. La variation du déplacement e_x dans les quatre cas étudiés traduit une ouverture plus importante quand les ondulations sont uniquement dans la direction circonférentielle x du patin. Les résultats des Figure A- 2 et Figure A- 6 montrent par exemple une chute de la température $Max(T_{fs})$ qui traduit un décollement du joint et une absence de contact ; la diminution du couple s'en suit. En confrontant ces résultats aux données expérimentales, on remarquera que les débits restent toujours du même ordre de grandeur, les couples ont la même tendance de variation, mais l'évolution des températures n'est plus la même. Ces conclusions sont valables aussi bien pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ que pour $\Delta P = 1 \text{ bar}$. En considérant maintenant des ondulations dans les deux directions du patin (Figure A- 4 à Figure A- 8), la variation du déplacement e_x n'est plus aussi importante que dans le cas précédent. Ceci permet de garder une partie du segment en contact même à haute vitesse de rotation et donc d'aboutir à des températures plus importantes. Le couple en est de même plus important. Les résultats numériques et expérimentaux ont ainsi la même évolution et sont du même ordre de grandeur pour les trois paramètres comparés (le débit, la température et le couple).

Joint radial segmenté N°2 (3+2 patins sans poches/segment)

Les résultats de la deuxième géométrie du joint sans ondulations de surfaces pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ et $\Delta P = 1 \text{ bar}$ sont présentés de la Figure 70 à la Figure 71. Globalement, ce joint se comporte numériquement de la même manière que son précédent avec un déplacement e_y et une rotation φ un peu plus importants. Les débits numériques ont été calculés grâce à un deuxième set de défauts de forme des lèvres (Annexe E). Les débits expérimentaux et numériques sont tous les deux faibles par rapport à ceux du joint N°1 mais les écarts entre eux sont très prononcés, ce qui entend qu'expérimentalement le joint s'ouvre beaucoup plus que ce qui est prédit numériquement. Le couple numérique est ainsi plus élevé que celui mesuré expérimentalement. Les températures sont quant à elles du même ordre de grandeur.

Similairement au cas précédent, des ondulations de surfaces ont été rajouté pour étudier leur effet. Les résultats obtenu avec des ondulations de surface en une seule direction du patin (circonférentielle) sont présentés sur la Figure A- 9, Figure A- 10, Figure A- 13 et la Figure A- 14. Numériquement le joint s'ouvre davantage dans ces cas, ce qui conduit à un débit plus important mais qui reste éloigné du débit expérimental. Cette ouverture fait chuter le couple ainsi que la température et élargit l'écart entre les résultats confrontés.

En prenant en considération des ondulations dans les deux directions (Figure A- 11, Figure A- 12, Figure A- 15, Figure A- 16) l'ouverture n'est plus aussi grande que le cas avec des ondulations dans une seule direction. Le couple numérique en est donc plus grand ce qui le rapproche des valeurs mesurées. Les températures mesurées expérimentalement restent largement plus grandes que ceux calculées numériquement.

NB: Le dispositif expérimental présente deux joints en vis à vis espacé d'une faible distance. Dû au faible débit, l'air a la tendance de stagner dans la chambre ainsi formée entre les deux joints et il est probable qu'il soit chauffé par le rotor et les segments. La température à l'entrée du joint sera donc augmentée. Cet effet n'a pas été pris en compte dans les simulations numériques.

Joint radial segmenté N°3 (3 patins avec poches/segment)

Finalement le 3ème joint étudié est constitué de patins portant une poche de grande profondeur. La Figure 72 et la Figure 73 montrent les résultats pour $\Delta P = 0,4 \text{ bar}$ et $\Delta P = 1 \text{ bar}$. La présence de la poche a permis au joint de s'ouvrir plus notablement que dans les deux cas précédents. Les résultats expérimentaux présentent un débit important et qui est là encore largement supérieur au débit numérique pour les deux ΔP étudiées. Le couple expérimental est également plus important que le couple numérique, mais ils ont tous les deux, tendance à diminuer. Les températures sont du même ordre de grandeurs. Ces disparités se traduisent par une éventuelle ouverture plus importante du joint en conditions expérimentales.

Il est possible de montrer numériquement qu'une poche très profonde n'est pas optimale pour créer la portance. La Figure A- 19 et la Figure A- 20 montrent les résultats obtenus avec une poche de profondeur modérée. La portance créée dans ce cas a permis de se défaire complètement du contact et ainsi diminuer le couple et l'échauffement engendré. Elle a aussi permis d'augmenter le débit mais qui reste tout de même assez éloigné des résultats mesurés expérimentalement. Un calcul en position imposée et à différentes profondeurs de poche a été présenté en Annexe G.

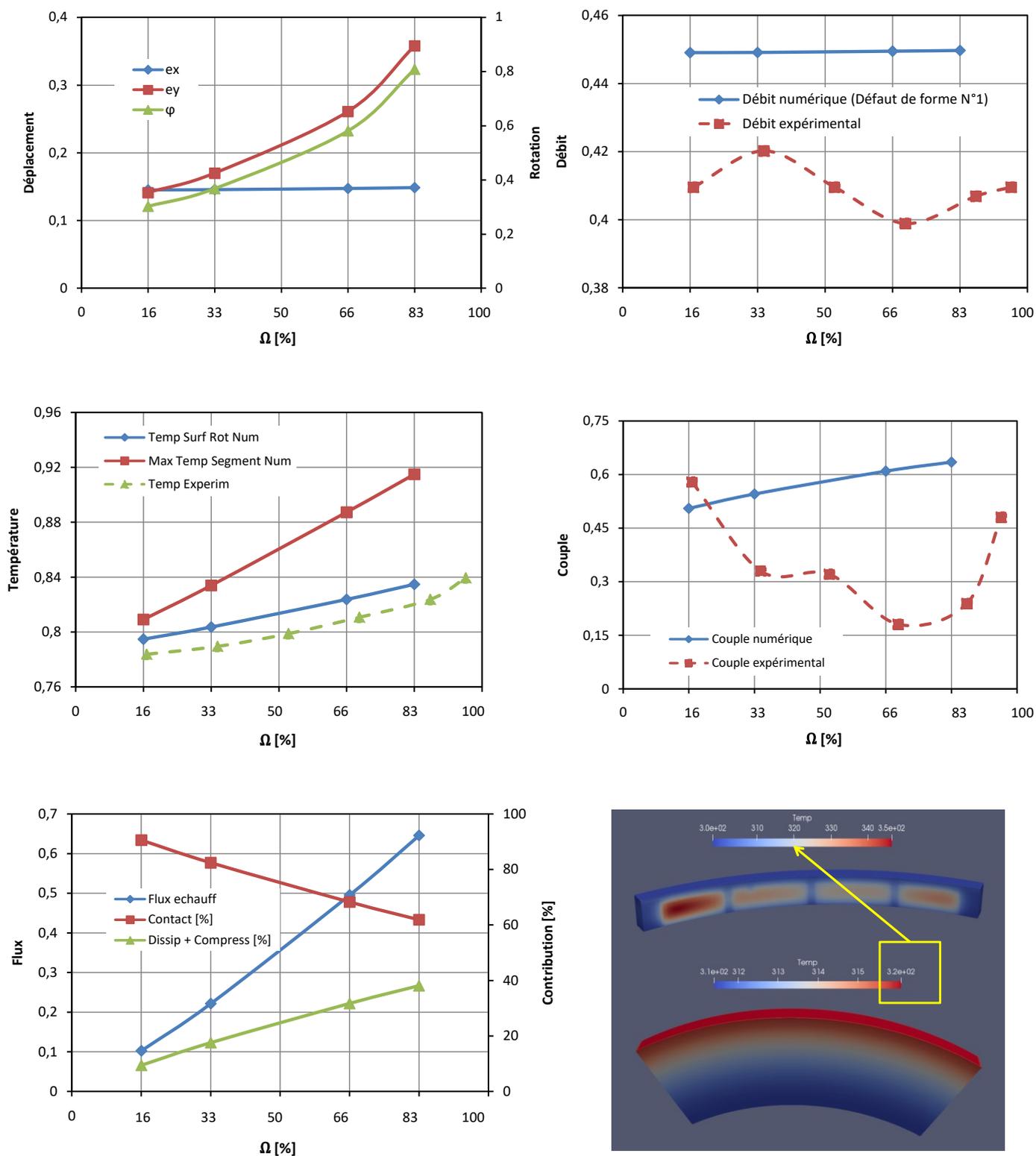


Figure 68. Résultats adimensionnés: joint N°1 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar

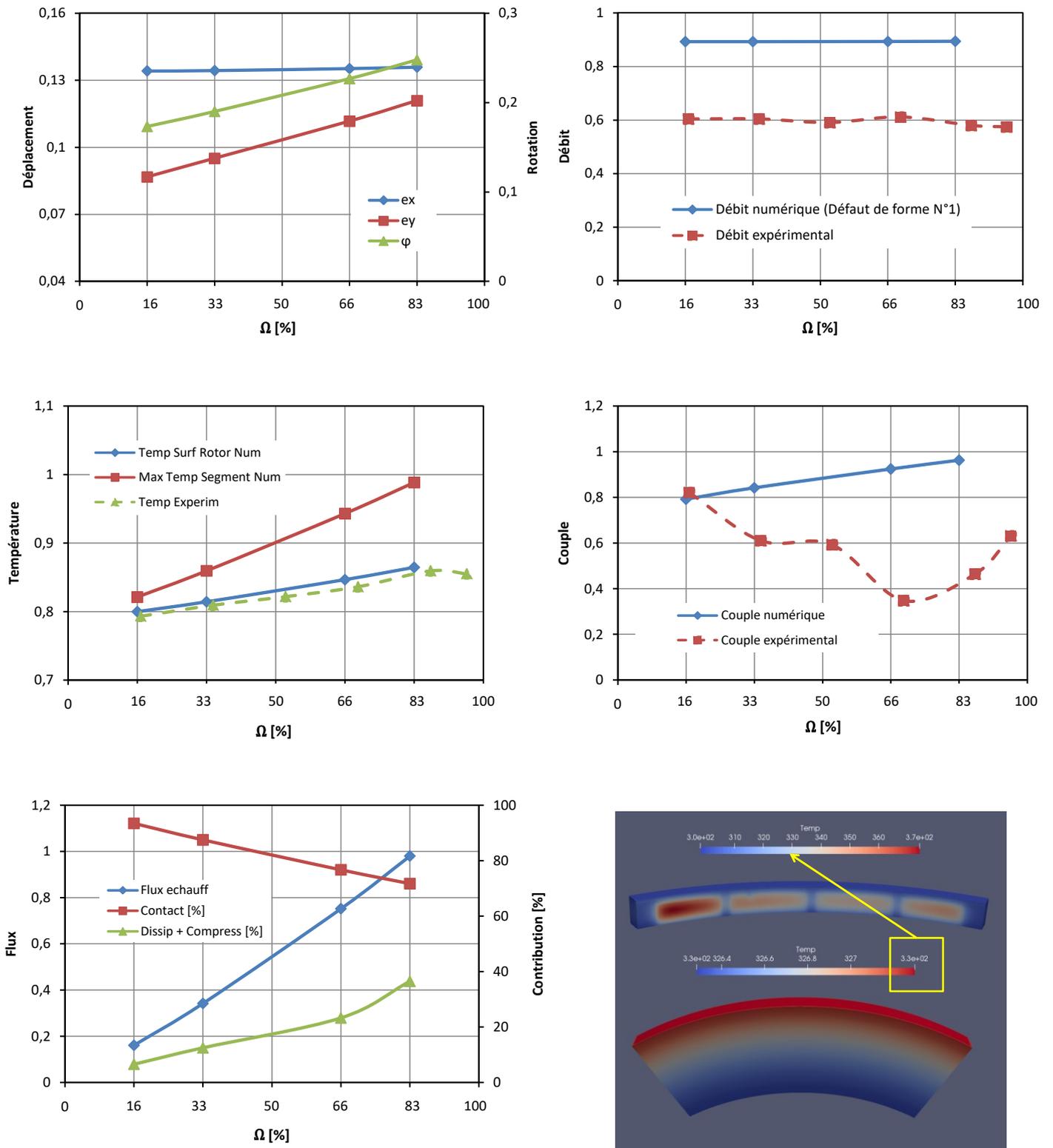


Figure 69. Résultats adimensionnés: joint N°1 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1$ bar

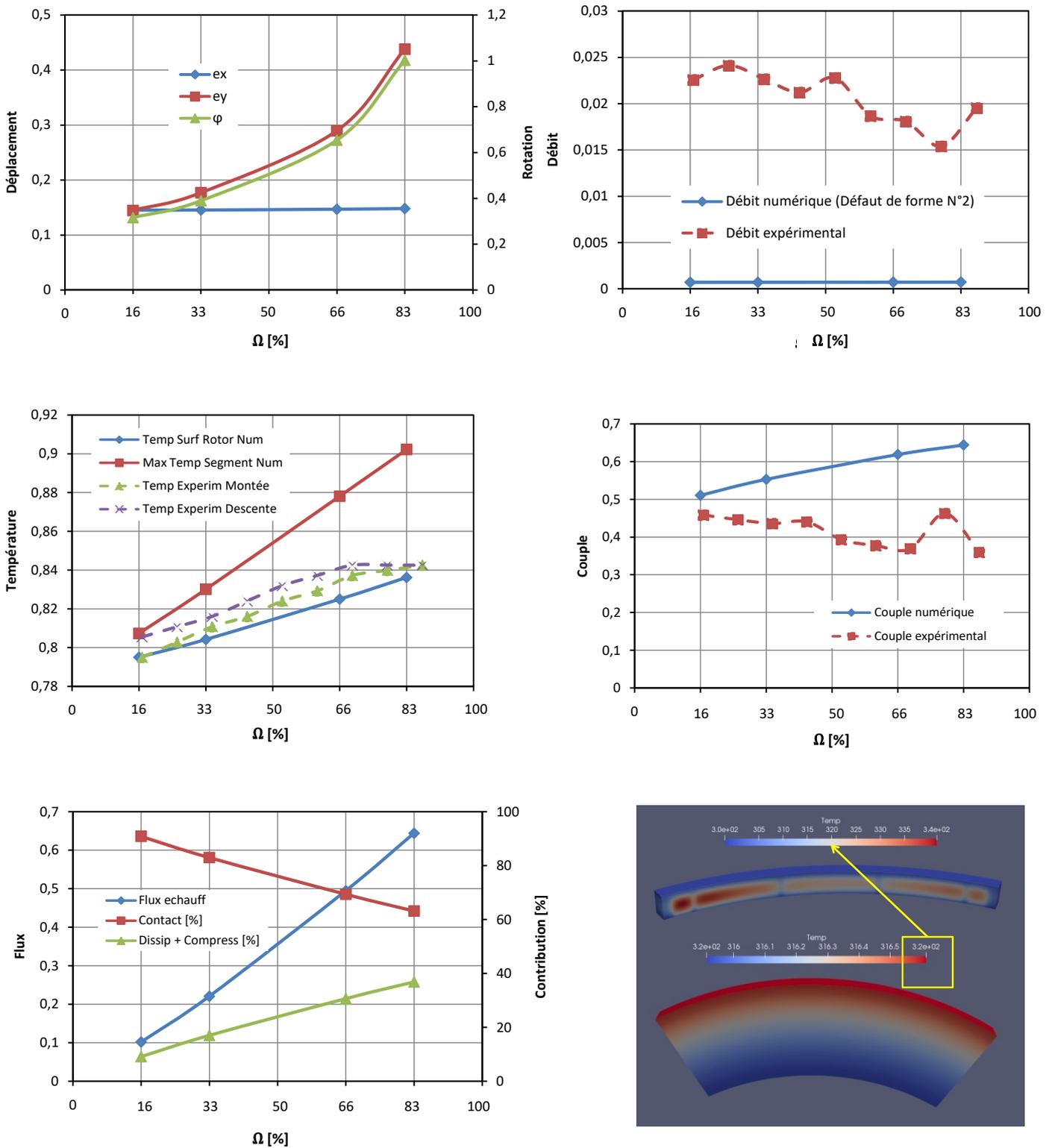


Figure 70. Résultats adimensionnés: joint N°2 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar

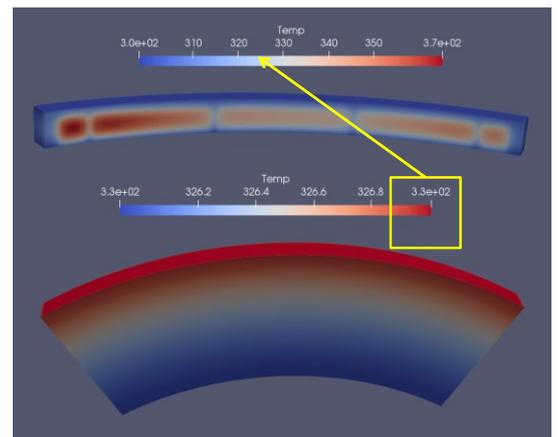
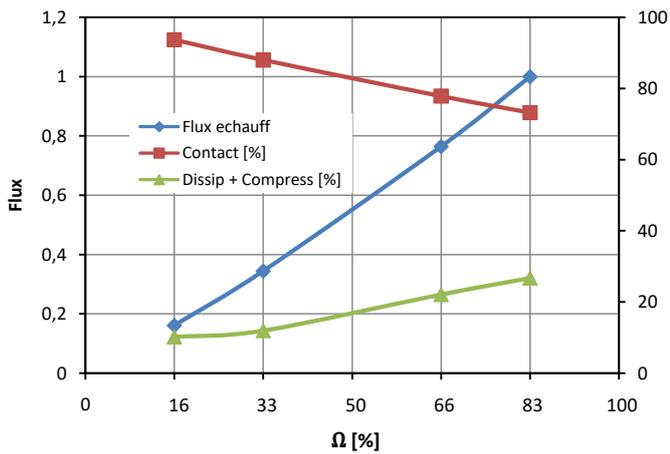
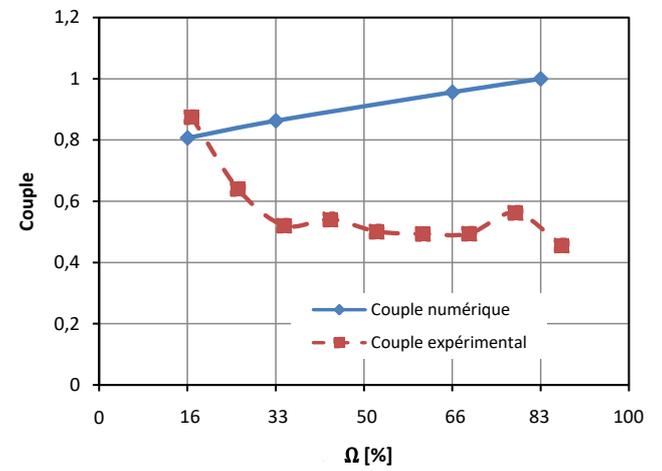
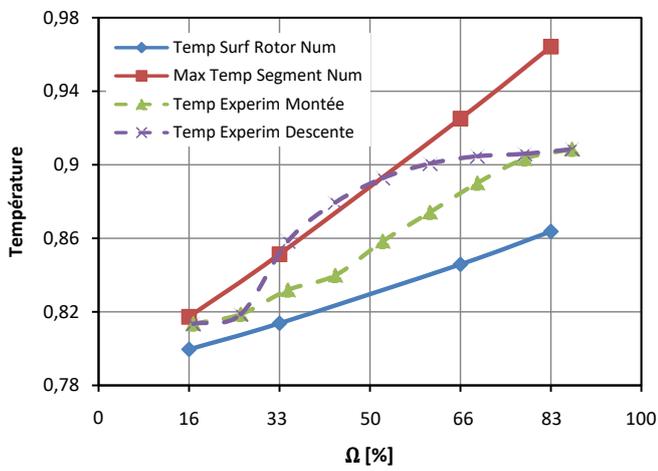
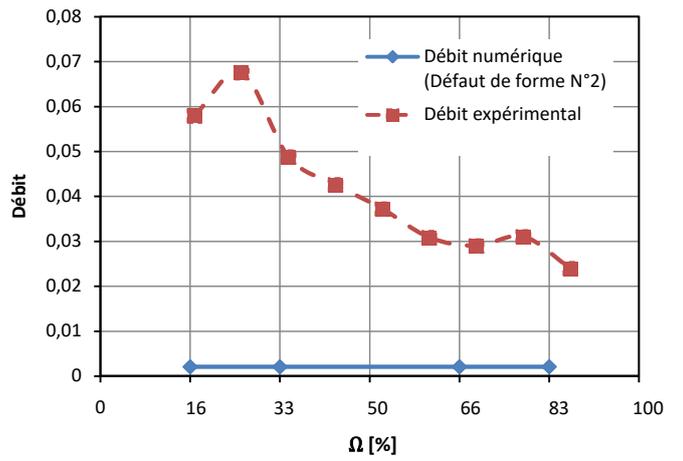
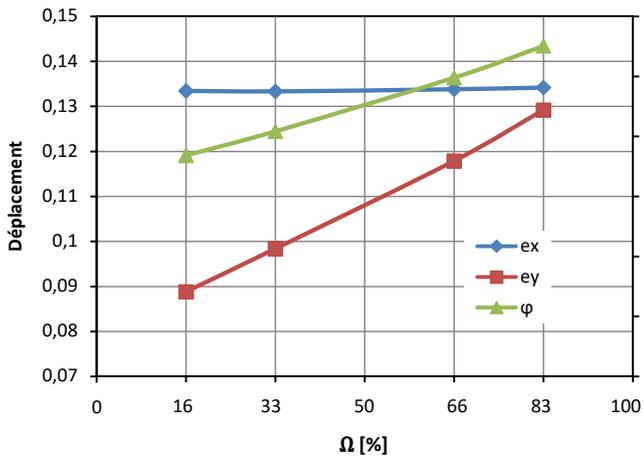


Figure 71. Résultats adimensionnés: joint N°2 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1$ bar

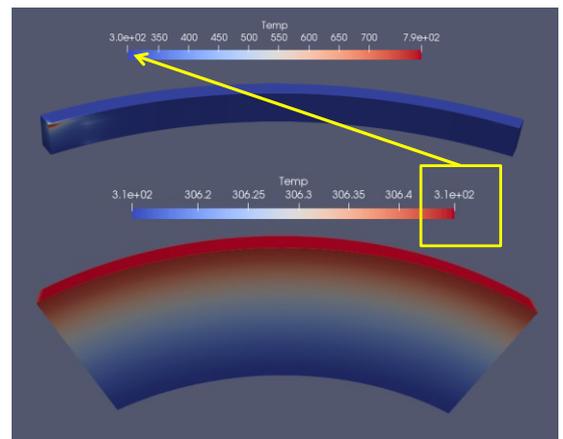
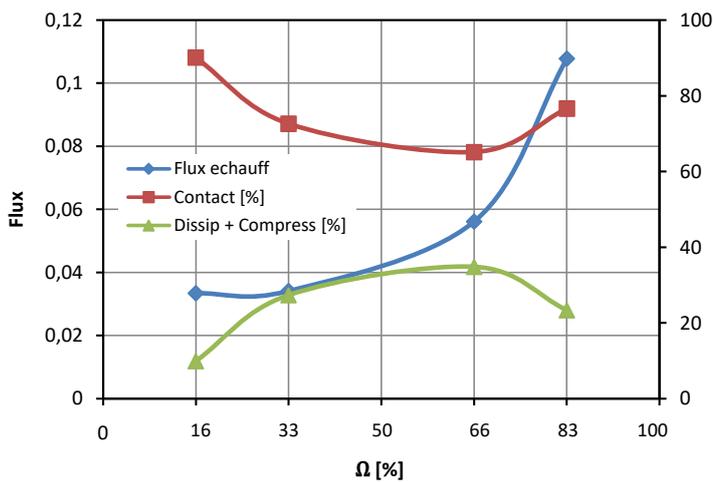
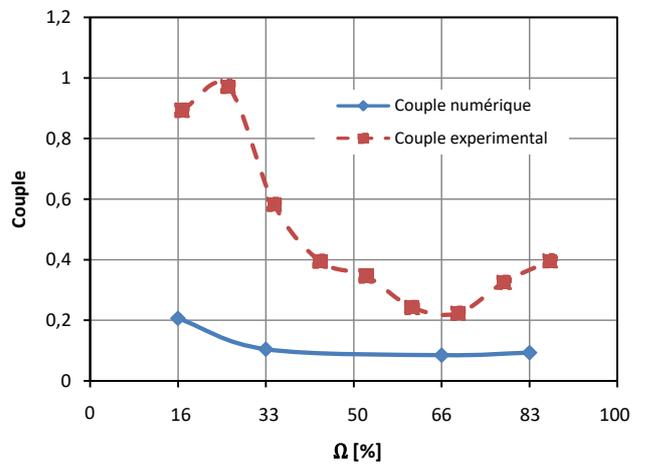
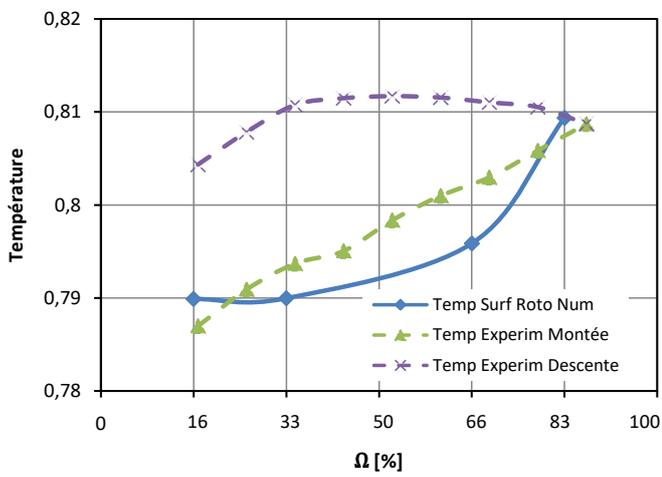
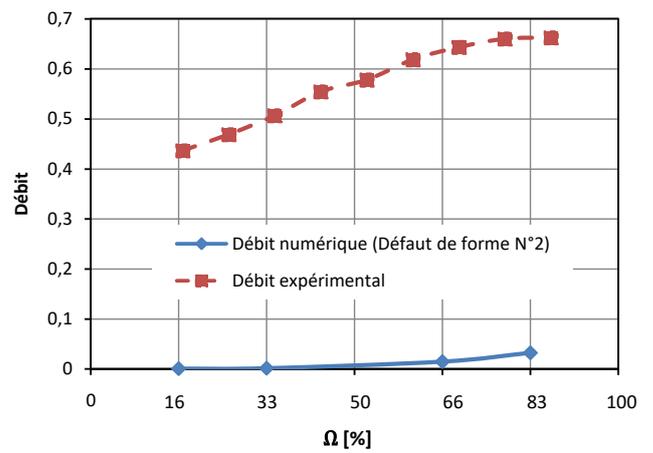
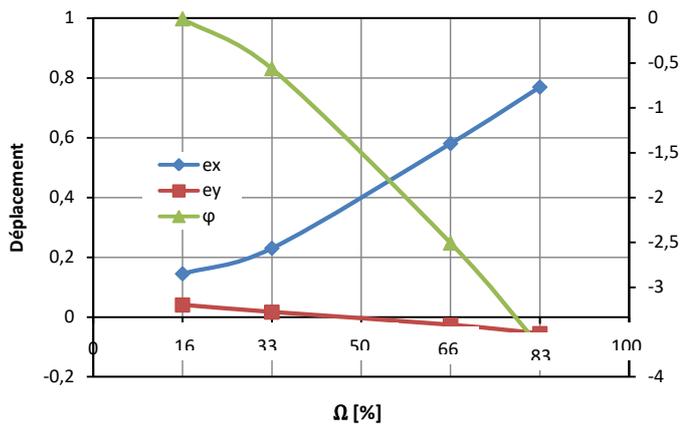


Figure 72. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°3 - $\Delta P = 0,4$ bar

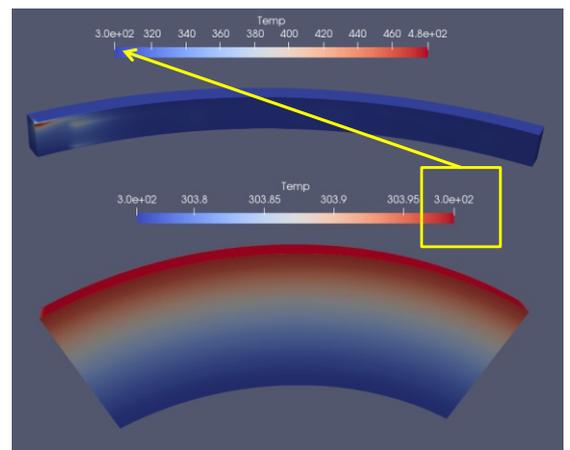
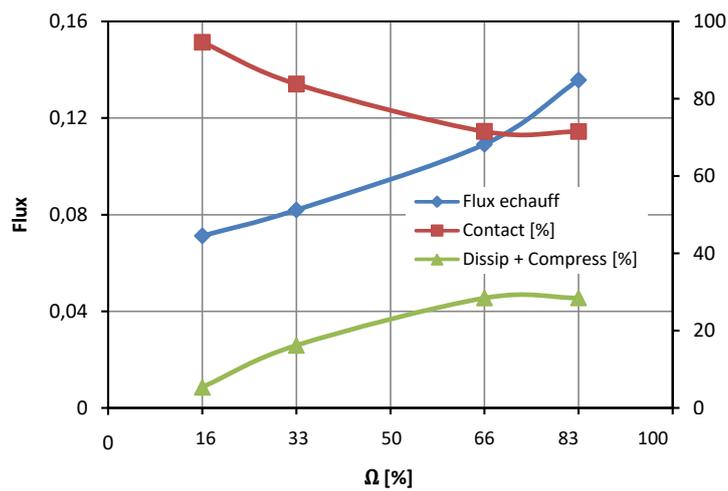
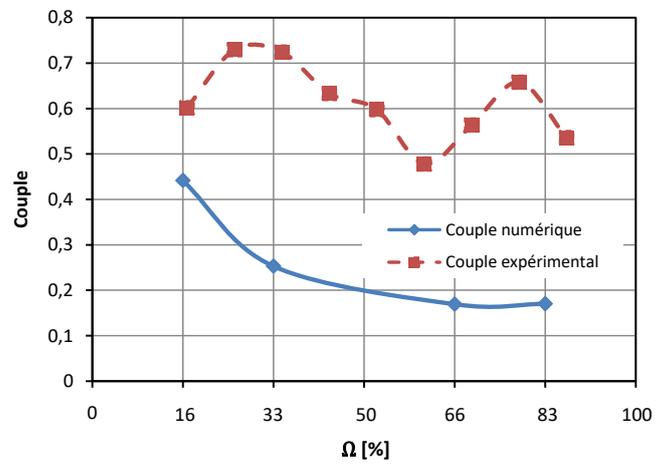
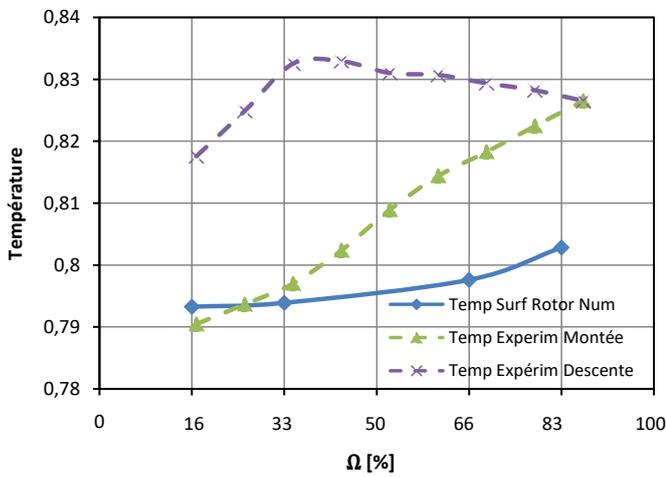
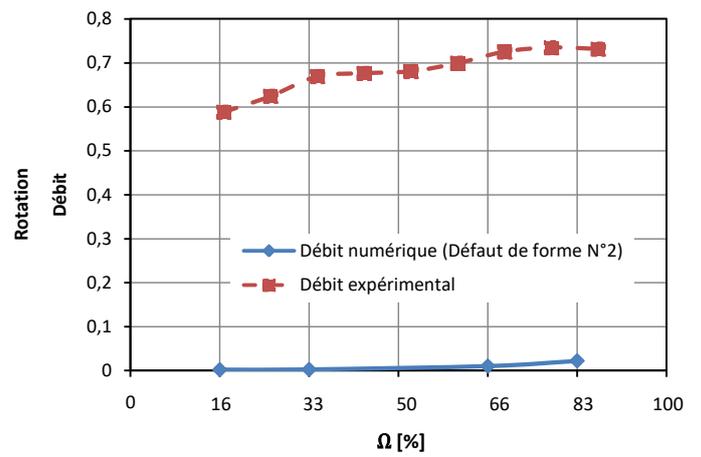
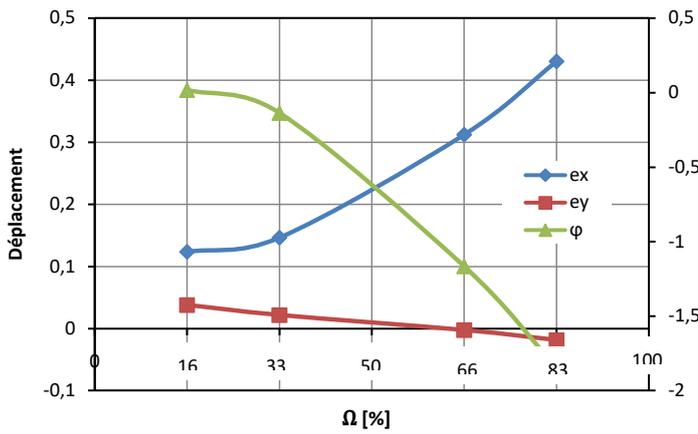


Figure 73. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0$) - Campagne d'essais N°3 - $\Delta P = 1$ bar

2.6 Conclusions

Ce chapitre a présenté la modélisation de l'effet thermique du joint radial segmenté. Le traitement des effets thermiques dans le fluide passa d'abord par une résolution de l'équation de l'énergie complète dans le film. Il a été démontré que dans le cas d'un film mince compressible, une simplification de cette équation était possible. Ceci a permis de calculer le flux dissipé par cisaillement du fluide et celui provenant du contact entre aspérités. La diffusion de la chaleur dans le segment et dans le rotor fut ensuite traitée par la résolution de l'équation de la chaleur via une condensation statique des degrés de liberté non-utilisés. Le couplage segment-rotor-film fluide a fait intervenir tous les éléments précédemment cités. Un exemple permettant l'étude de l'équilibre du segment à 1ddl puis à 3ddl a été présenté. L'étude a été menée sur des joints de deux diamètres différents et les résultats ont tous montrés l'importance de l'analyse thermique.

Cette étude a permis de conclure que le contact entre les surfaces du joint et du rotor était la principale source d'échauffement. Les températures du segment peuvent ainsi rapidement augmenter. Une amélioration de la durée de vie du joint devrait donc passer la minimisation de la puissance dissipée en favorisant les géométries de patin qui génèrent de la portance.

L'étude a aussi permis de prendre conscience de l'influence des ondulations des surfaces sur la portance du segment. Le recours à des ondulations a permis de valider les résultats numériques par rapport aux résultats expérimentaux. Toutefois, ce paramètre peut jouer en faveur de la création de portance comme en sa défaveur. L'étude de l'impact d'une surface générée aléatoirement sur la portance hydrodynamique et sur l'échauffement doit être analysée statistiquement ce qui n'a pas été l'objectif de cette étude. Récemment Brunetière et Francisco [42] ont mené une étude similaire et ont présenté les effets de rugosités (pris en compte de manière déterministe) entre deux surfaces parallèles.

En réalité un frottement fort entraîne de l'usure et ponctuellement une modification de la surface du joint. Ceci peut avoir de l'influence sur le comportement du joint en modifiant l'équilibre des segments et les zones soumises aux grands échauffements. Les températures calculées numériquement et mesurées expérimentalement sont aussi assez importantes pour entraîner des déformations thermiques. Les perspectives pour la suite de travail seront axées sur ces points.

3 Etude du joint radial segmenté à portance (JRSP)

3.1 Introduction

La génération de portance pour la troisième configuration du JRS se fait à travers un rotor à rainures inclinées (Figure 74). Cette solution a été proposée et brevetée par Garrison [43] pour obtenir un joint radial où tout contact avec le rotor serait évité. La caractéristique principale est l'utilisation de rainures inclinées usinées sur le rotor pour créer la portance qui va soulever le segment. La présence de plusieurs patins n'est donc plus nécessaire du point de vue du fonctionnement. Ainsi cette nouvelle géométrie du JRS (appelé désormais JRSP) est représentée par un segment ne comportant qu'un seul patin (Figure 75). Chaque segment comporte une rainure circumférentielle séparant le patin de la lèvre (étanchéité principale), ainsi qu'une rainure axiale placée à l'extrémité et délimitant la zone du patin. A l'intérieur de ces rainures règne la pression P_{amont} .

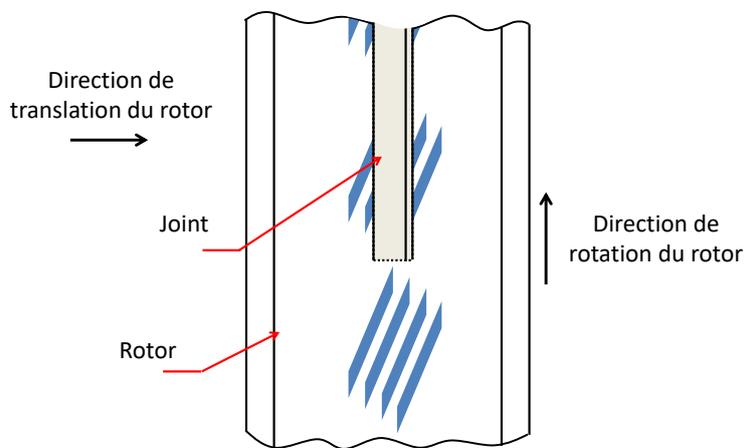


Figure 74. Modélisation du rotor rainuré [43]

Cet aspect géométrique introduit une non-stationnarité dans le fonctionnement et dans la résolution. Cette configuration est récente dans le domaine des étanchéités, mais le traitement de surfaces texturées a déjà été abordé en littérature pour le cas des paliers.

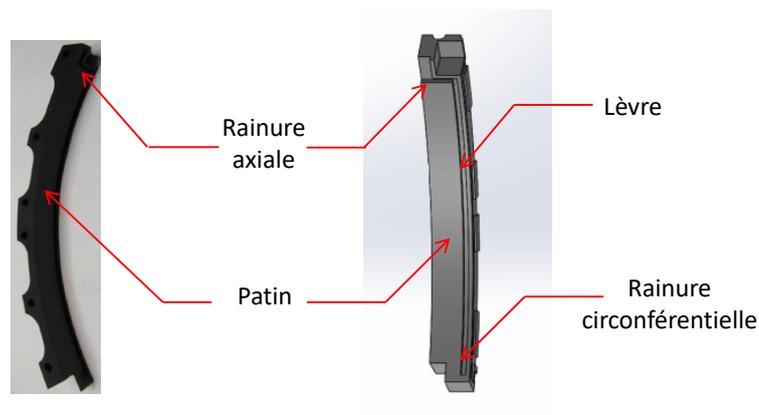


Figure 75. Segment d'un joint radial segmenté à portance (JRSP)

Le traitement de surfaces mobiles texturées a débuté avec la mise en place de la théorie des rainures étroites (*Narrow Groove Theory* \equiv *NGT*) par Whipple en 1949 [44]. Cette théorie servait l'étude du

mouvement de surfaces rainurées en vis-à-vis et fut par la suite utilisée pour deux applications; les butées à rainures spiralées (*Spiral Groove Thrust Bearings*), et les paliers à chevrons (*Herringbone Grooved Journal Bearings*). La NGT repose sur l'hypothèse de présence d'une infinité de rainures de très faible épaisseur sur une surface donnée. Elle propose une reformulation de l'équation de Reynolds en faisant intervenir un volume de contrôle englobant une partie de la discontinuité introduite par la rainure (Figure 76).

Plusieurs auteurs ont par la suite adopté cette théorie et ont contribué à son développement. En 1972 Hsing [45] postule une formulation de la NGT prenant en compte les effets de la turbulence et l'applique à une pompe visqueuse à rainures spirales. Smalley [46] présente une formulation généralisée applicable à différentes géométries de paliers. Castelli et Vohr [47] étudient et développent un modèle prenant en compte les effets de grandes excentricités et du désalignement sur un palier à chevron. Ils comparent ensuite leurs résultats numériques à des résultats expérimentaux [48].

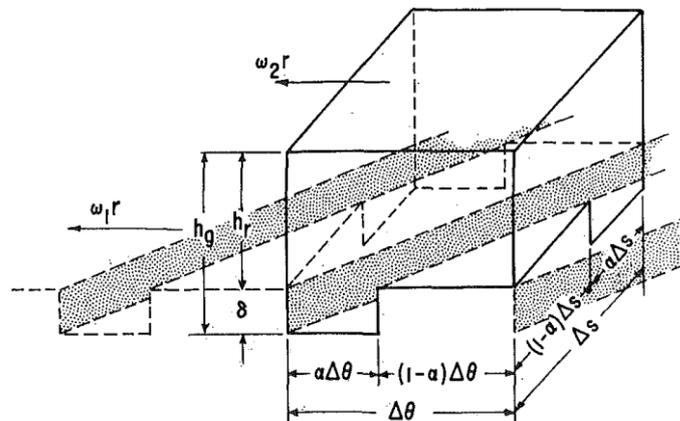


Figure 76. Volume de contrôle considéré par Whipple pour étudier la présence d'une infinité de rainures [44]

Il est à noter que la présence des rainures sur la surface mobile introduit un fonctionnement non-stationnaire. Toutefois, la périodicité du volume de contrôle dans la NGT et la considération d'un nombre infini de rainures permet un traitement numérique quasi-stationnaire.

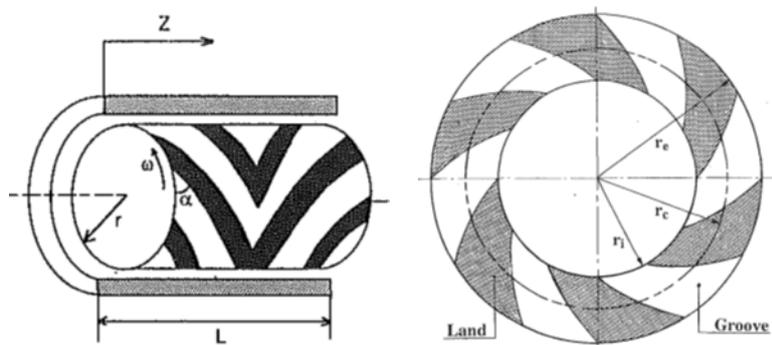


Figure 77. Représentation a) d'un palier à chevrons [53] b) de la surface rainurée d'un palier à rainures spiralées [52]

Plusieurs autres études ont aussi adopté la NGT ([49], [50],...), mais d'autres ont privilégié la considération d'une résolution directe de l'équation de Reynolds. Lesdites études peuvent être classées en trois différentes catégories.

La première catégorie est celles des études faisant intervenir des rainures placées sur une face statique. On retrouve ainsi toutes les études des butées à rainures spiralées et des garnitures mécaniques rainurées. Le traitement de la discontinuité du film a jusqu'à là été le principal défi. En 1968, en étudiant une butée à rainures spiralées, Wildmann [51] fait l'hypothèse de rainures sinusoïdales pour contourner les discontinuités de film causées par les rainures. Il choisit ensuite de chercher une solution linéarisée de la pression, corrélée à la géométrie de ses rainures. Dans [52], Bonneau et al. présentent une méthode optimisée de résolution de l'équation de Reynolds par la méthode des éléments finis. Le recours à une intégration par parties a permis de réduire les dérivées impliquant une discontinuité d'épaisseur de film.

Dans la deuxième catégorie viennent les études qui font intervenir des rainures sur les surfaces mobiles. Ces études sont beaucoup plus rares et traitent principalement des paliers à chevron (Figure 77). La non-stationnarité de la résolution et la présence de rainures mobiles sont l'une des particularités de ces études. Bonneau et Absi [53] publient une résolution en élément finis de l'équation de Reynolds pour un fluide compressible appliqué à un palier à chevrons. Ils comparent ensuite leurs résultats à ceux de la NGT. Le traitement du terme non-stationnaire de l'équation de Reynolds est mentionné, mais n'est pas clairement développé. Zirkelback et San Andrés [54] marchent sur les pas de Bonneau et Absi et se concentrent sur une étude paramétrique permettant d'aboutir à des coefficients dynamiques optimaux.

La troisième catégorie regroupe ceux qui traitent de la présence de rainures sur les deux faces, fixe et mobile. L'une des applications phares est la butée doublement spiralée (*double sided spiral groove thrust bearing*). Lehn et Schweizer [55] traitent la résolution de l'équation de Reynolds dans le cas généralisé de conditions aux limites arbitraires et l'appliquent au cas de la butée doublement spiralée. Pour se défaire de la non stationnarité du problème, ils décident d'étudier un fluide incompressible et considèrent un problème quasi-stationnaire (stationnaire à plusieurs instants, et pour plusieurs instants différents).

3.2 Modélisation du joint radial segmenté à portance (JRSP)

3.2.1 Description de la géométrie et du fonctionnement

Comme les autres joints radiaux segmentés, le JRSP est composé de plusieurs segments identiques rassemblés autour du rotor à l'aide d'un ressort circonférentiel. Des ressorts axiaux plaquent chaque segment contre le stator (Figure 10). Chaque segment est prévu avec un seul patin (et non plus trois comme pour les JRS précédents), une lèvre et un nez. Une rainure profonde sépare le patin de la lèvre et délimite le patin dans la direction circonférentielle (Figure 75). Le nez est toujours situé sur la face axiale aval. Les étanchéités principale et secondaire restent les mêmes. Le jeu radial entre la lèvre et le rotor représente l'étanchéité principale (la fuite a toujours lieu dans la direction axiale). L'étanchéité secondaire est réalisée par la surface du nez en contact permanent avec le stator ; son fonctionnement est le même que celui décrit dans le chapitre précédent.

Comme les patins ne possèdent plus des poches, l'effort radial d'ouverture du joint est dû à des rainures inclinées sur le rotor qui génèrent un effet de portance comme pour les paliers présentés dans le paragraphe précédent. Toutefois, comme montré sur la Figure 74, les rainures ne sont plus périodiques, mais groupées en motifs périodiques.

Le rotor comportera donc un nombre n_{motif} de motifs équidistants repartis sur toute la circonférence. Un motif sera constitué de plusieurs rainures⁴ identiques (Figure 78) ayant la même profondeur h_{rain} . Les dimensions de la rainure seront respectivement $LxRain$ et $LyRain$.

La Figure 78 montre que la projection de la géométrie du patin sur le motif de rainures met en évidence un paramètre supplémentaire, la distance y_0 . Ce paramètre permet le positionnement axial du motif par rapport au patin et permet de prendre en compte un éventuel déplacement axial du rotor.

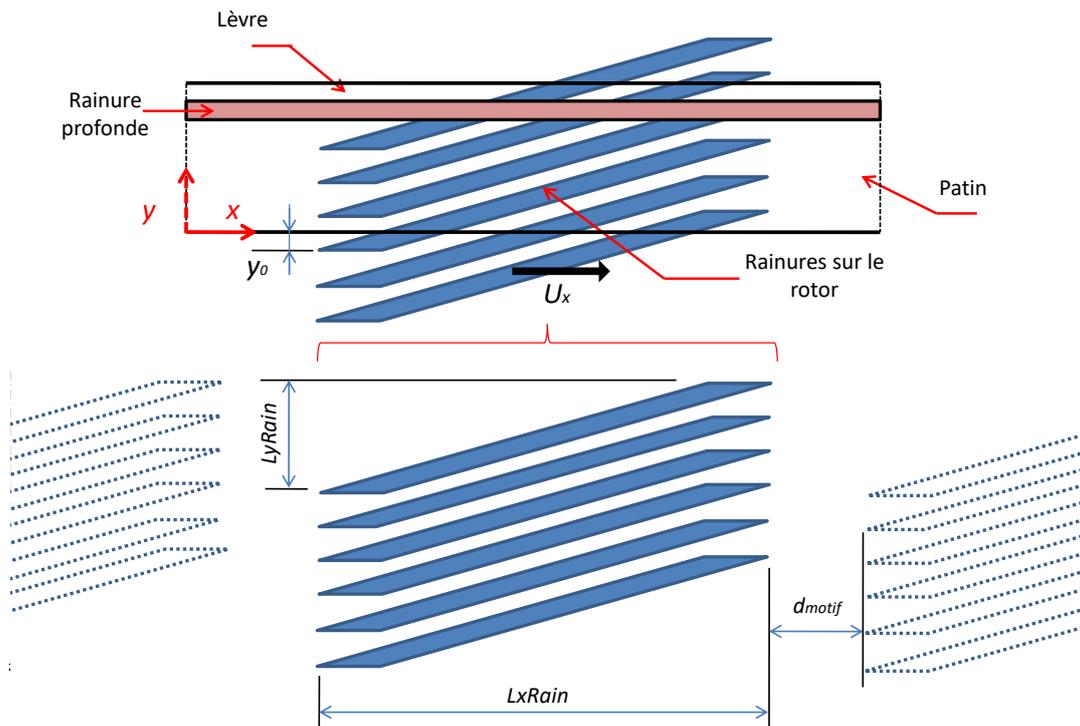


Figure 78. Représentation d'un motif de rainures et ses dimensions

Sur la Figure 78 les deux rainures supérieures du motif sont débordantes et dépassent la partie supérieure de la lèvre. Comme la profondeur des rainures est d'un ordre de grandeur supérieure au jeu radial dans l'étanchéité principale, un débit de fuite élevé pourrait s'établir entre l'amont (zone haute pression) et l'aval du joint (zone basse pression). Ce débit pourrait être limité si le déplacement des rainures créé un effet de pompage de l'aval du joint vers son amont. Cette situation est présentée sur la Figure 79. Si les rainures étaient les filets d'une vis, la rotation ferait avancer le rotor dans la direction axiale dans un sens orienté de l'amont vers l'aval du joint. Ceci créé un effet de pompage du fluide de l'aval vers l'amont qui aura tendance à contrer le débit de fuite créé par la différence de pression (sens amont - aval) et explique la possibilité d'utiliser des rainures qui dépassent la lèvre. Si elles sont correctement inclinées, les rainures ne contribuent pas exclusivement à la création de portance, mais aussi à la diminution du débit de fuite.

⁴ Le motif apparaît comme si les rainures étaient chacune issue d'un filetage sur le rotor. Il est à noter que le motif n'est pas unique, et dépend principalement du constructeur.

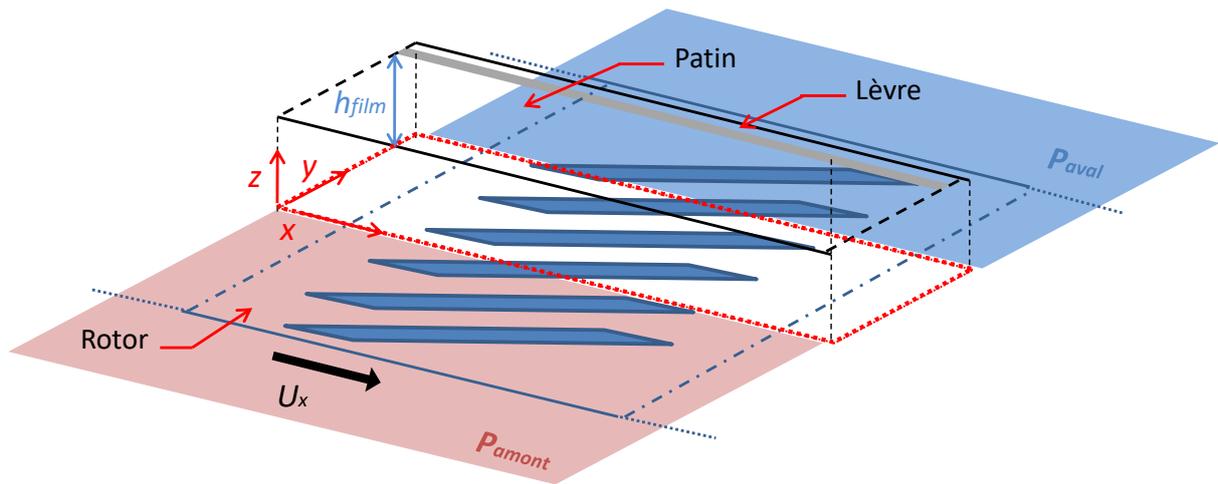


Figure 79. Modélisation de parties du rotor comportant un motif et du patin en vis à vis

3.2.2 Traitement de l'aspect non stationnaire

La butée à rainures spiralées et le palier à chevrons mentionnés précédemment présentent tous les deux des rainures répétitives permettant l'application de la NGT. Ceci n'est pas le cas pour le JRSP qui est caractérisé par la répétitivité d'un motif de rainures et non pas d'une seule rainure (Figure 78). De plus, comme montré sur la Figure 80a et contrairement à un palier, le joint radial segmenté n'a pas une périodicité circulaire car chaque segment est délimité de ses voisins par des rainures axiales profondes où règne la pression amont.

L'écoulement dans le joint radial segmenté à portance est non stationnaire à cause des rainures sur le rotor. Comme la solution numérique de l'écoulement se fera à l'aide de l'équation de Reynolds présentée dans le chapitre précédent, le caractère non-stationnaire nécessiterait le traitement des dérivés $\partial(Ph)/\partial t$. Dans les conditions où la dérivée $\partial h/\partial t$ dans le système de coordonnées fixe est discontinue dû au déplacement des rainures. Une solution plus simple est possible en considérant un système de coordonnées tournant.

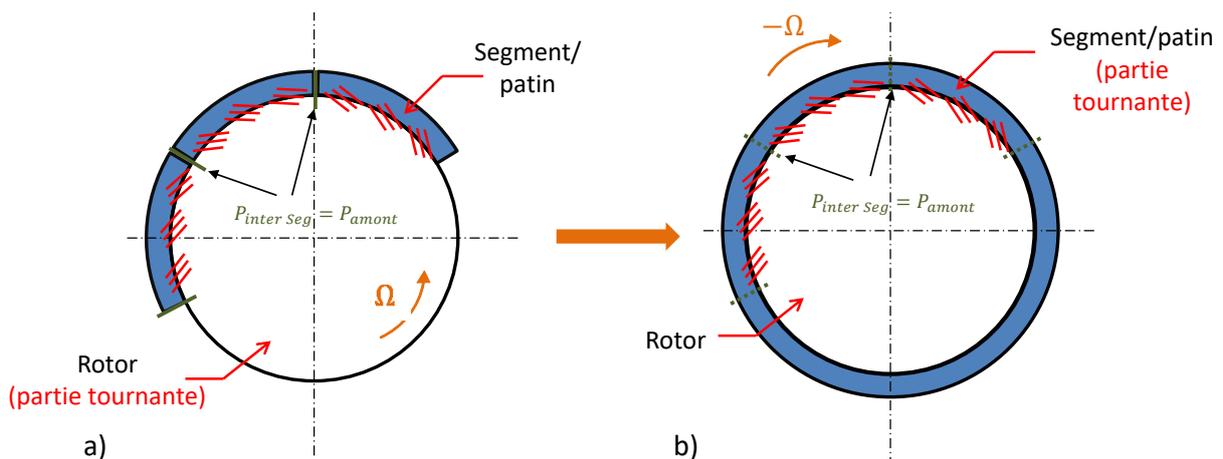


Figure 80. Segments et rotor rainuré : a – système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant

La Figure 81a montre schématiquement le déplacement de la rainure sur le rotor par rapport au patin (segment) qui est fixe. Un système de coordonnées tournant avec $-U_x$ comme montré sur la Figure 81b permet de s'affranchir de l'effet non-stationnaire introduit par la présence des rainures sur le rotor. Dans une première approximation, un observateur situé sur le rotor verrait passer la

surface lisse du patin. Si le joint avait une périodicité circulaire, l'écoulement dans le système de coordonnées tournant serait stationnaire. Toutefois, dans le système tournant, les rainures axiales profondes représentées sur la Figure 80b et qui délimitent les patins seront animées par une vitesse $-\Omega$ ($-U_x$ sur la Figure 81b). Il en résulte que même dans le cas d'un système de coordonnées tournant, l'écoulement serait non-stationnaire dû au déplacement « artificiel » des rainures axiales qui délimitent les patins. En revanche, le terme non-stationnaire de l'équation de Reynolds, $\partial(Ph)/\partial t$, sera plus facile à traiter car la dérivée $\partial h/\partial t$ ne représentera que la vitesse radiale de la paroi (écrasement du film) et sera continue dans le système de coordonnées tournant.

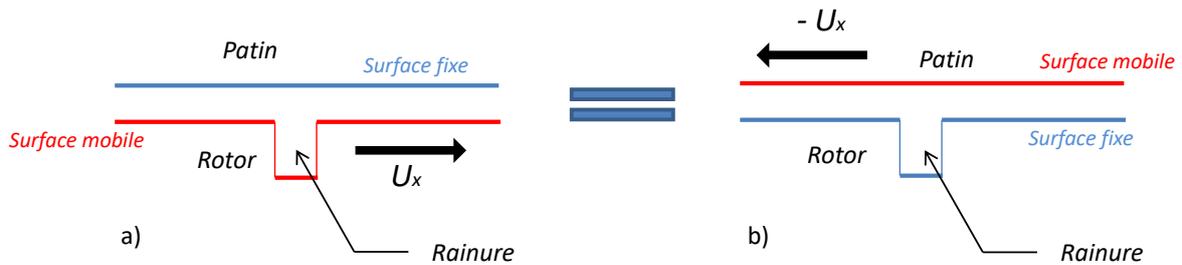


Figure 81. Représentation du mouvement du rotor texturé : a- système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant

L'écoulement dans un joint radial segmenté à portance ne sera donc pas traité dans un système de coordonnées fixe (Figure 82a) mais dans un repère tournant. Dans une première approche la présence de la rainure axiale délimitant le patin sera négligé et la force d'ouverture du segment sera calculée à partir d'un seul motif modélisé avec des conditions aux limites de périodicité (Figure 82b). Le déplacement de la rainure axiale sera pris en compte dans une deuxième approche. Le domaine analysé aura la longueur circonférentielle du patin et la rainure axiale sera modélisée comme une frontière à pression imposée P_{amont} qui se déplace avec la vitesse $-U_x$ (Figure 82c). L'effort d'ouverture du segment sera alors non-stationnaire.

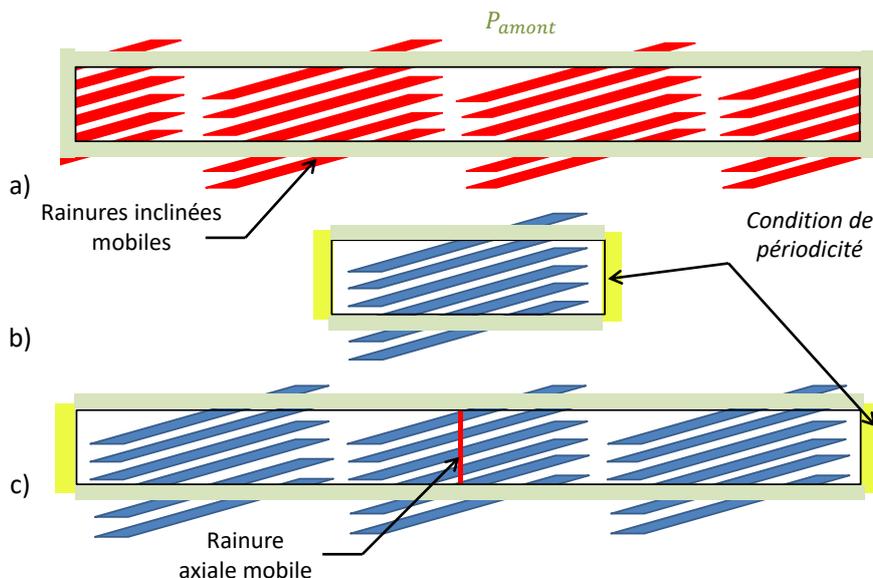


Figure 82. Représentation du domaine d'étude pour a) système de coordonnées fixe b) approche simplifiée dans un repère tournant c) approche complète dans un repère tournant

3.2.3 Discrétisation du film fluide

Comme mentionné dans le chapitre précédent pour les poches situées sur les patins, les frontières des rainures doivent coïncider avec des faces des cellules du maillage du film mince. La présence de rainures inclinées nécessite l'utilisation d'un maillage non-structuré. Pour cette étude, le choix a porté sur un maillage triangulaire. Une discrétisation idéale serait constituée de triangles équilatéraux de taille égale mais, en pratique, cette condition n'est (presque) jamais vérifiée. L'algorithme de Delaunay permet de générer des triangles aussi réguliers que possible à partir d'une discrétisation des frontières et des rainures du patin comme montré sur la Figure 83. La génération du maillage a été réalisée à l'aide du programme FreeFem++ [56]. Le maillage du patin et de la lèvre ont été réalisé indépendamment. Les maillages représentés sur la Figure 83a contiennent approximativement 2000 triangles pour le patin et 300 triangles pour la lèvre tandis que les maillages représentés sur la Figure 83b contiennent 10000 et 1300 triangles pour le patin et la lèvre.

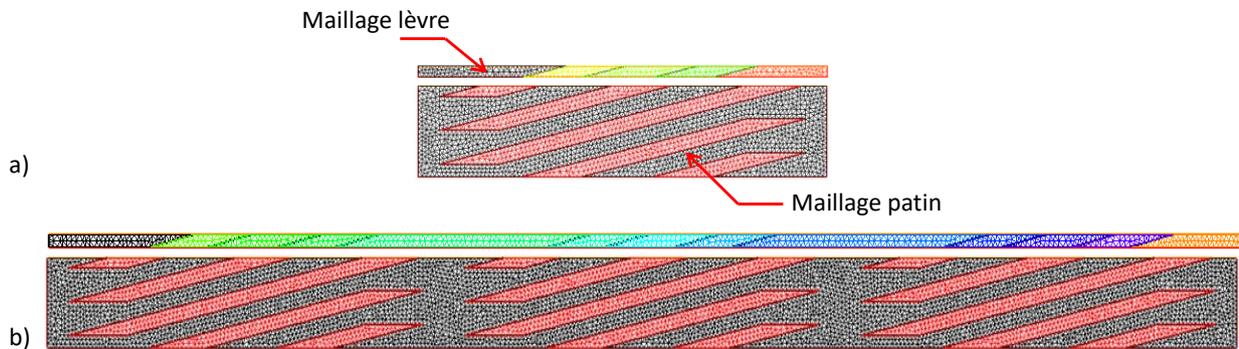


Figure 83. Maillage de a) l'approche simplifiée b) l'approche complète

3.3 Résolution de l'équation de Reynolds sur un maillage triangulaire

Dans ce qui suit sera présentée la résolution de l'équation de Reynolds pour un maillage à éléments triangulaires, d'abord pour le cas d'un film mince sans rainures, ensuite avec la prise en compte des discontinuités.

3.3.1 Discrétisation de l'équation

Par analogie à l'équation de Reynolds en coordonnées Cartésiennes (16) vu dans le chapitre 2 et en appliquant la formule de Green-Ostrogradski :

$$\int_v \text{div} \vec{J} = \oint_s \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (236)$$

L'équation de Reynolds en écoulement compressible pour un maillage non rectangulaire (et notamment triangulaire) devient :

$$\int_{\Gamma} \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial n} d\gamma = \int_{\Gamma} \frac{\rho h}{2} \vec{U}_x \vec{n} d\gamma \quad (237)$$

Γ étant le contour d'intégration

\vec{n} la direction perpendiculaire à une arête

γ la dimension de l'arête

Cette équation sera intégrée puis discrétisée sur le volume de contrôle représenté sur la Figure 84.

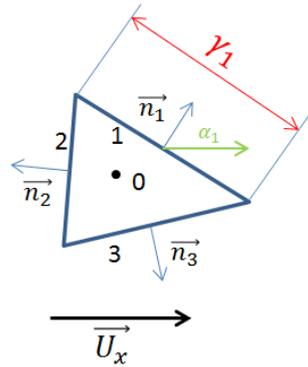


Figure 84. Élément du maillage triangulaire

En intégrant l'équation (237) sur ce volume de contrôle et en utilisant l'hypothèse d'un écoulement isotherme et la méthode de l'« upwind » (2.2.2.2) pour calculer les pressions sur les faces, l'équation à résoudre est :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{P}_i h_i^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i \gamma_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{P}_i h_i}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i \quad (238)$$

L'expression de la dérivée de la pression par rapport à la normale sur une arête sera calculée à partir d'une interpolation. On part de l'expression littérale sur les deux triangles adjacents communs à cette arête représentée sur la Figure 85 :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01} = \frac{P_a - P_0}{l_{0a}} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10} = \frac{P_b - P_1}{l_{1b}} \quad (239)$$

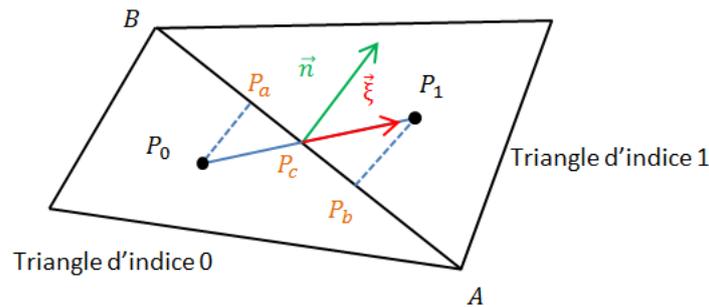


Figure 85. Schématisation des différents points caractéristiques permettant le calcul de la dérivée de la pression

Ces deux termes sont égaux et seront donc aussi égaux à leur somme :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01} = \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10} = \frac{P_1 - P_0}{l_{0a} + l_{1b}} + \frac{P_a - P_b}{l_{0a} + l_{1b}} \quad (240)$$

avec :

$$l_{0a} = l_{0c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad l_{1b} = l_{1c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (241)$$

et donc :

$$l_{0a} + l_{1b} = l_{01} \cos(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (242)$$

L'interpolation linéaire des pressions permet d'avoir P_a et P_b en fonction de la pression en milieu d'arête P_c :

$$P_a = P_c + \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} l_{ca} \quad P_b = P_c - \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} l_{cb} \quad (243)$$

avec :

$$l_{ca} = l_{0c} \sin(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad l_{cb} = l_{1c} \sin(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (244)$$

et là encore :

$$l_{ca} + l_{cb} = l_{01} \sin(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (245)$$

on obtient donc :

$$P_a - P_b = \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} l_{01} \sin(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (246)$$

En remplaçant dans la première expression de la dérivée (240), et en généralisant pour un indice i , ($i = 1,2,3$) on obtient finalement :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_i = \frac{P_i - P_0}{l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} + \frac{P_{Bi} - P_{Ai}}{\gamma_i} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \quad (247)$$

La pression sur le sommet d'un triangle est estimée à partir d'une interpolation faisant intervenir les pressions aux centres de tous les triangles communs à ce sommet, ainsi que leurs aires, par exemple :

$$P_{Ai} = \frac{\sum_j P_j \mathcal{V}^j}{\sum_j \mathcal{V}^j} \quad (248)$$

avec l'indice j qui parcourt tous les triangles dont le point A_i est sommet.

L'équation de Reynolds à résoudre devient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{P}_i h_i^3 \gamma_i}{12\mu l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} P_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{P}_i h_i^3 \gamma_i}{12\mu l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} P_0 \\ = \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \end{aligned} \quad (249)$$

En simplifiant l'écriture on peut la mettre sous la forme :

$$\sum_{i=1}^3 a_i P_i - a_0 P_0 = b_0 \quad (250)$$

Avec :

$$a_i = \frac{\tilde{P}_i h_i^3 \gamma_i}{12\mu l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad a_0 = \sum_{i=1}^3 a_i \quad (251)$$

$$b_0 = \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \quad (252)$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme $[A(P)]\{P\} = \{B(P)\}$, tel (38) avec la pression $\{P\}$ comme inconnue.

Similairement au cas du maillage rectangulaire présenté dans le chapitre précédent, l'expression « upwind » de la pression sur les faces de chaque cellule du maillage sera calculée à partir de la vitesse normale du fluide V_{ni} sur chaque face et des pressions dans les deux triangles adjacents contenant cette face (Figure 86) :

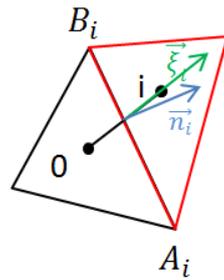


Figure 86. Représentation des pressions au milieu de deux cellules adjacentes ainsi que le vecteur de vitesse normale associé à l'arête

$$V_{ni} = \vec{V}_i \cdot \vec{n}_i \quad (253)$$

$$\tilde{P}_i = \begin{cases} P_0 & \text{si } \vec{V}_i \cdot \vec{n}_i > 0 \\ P_i & \text{si } \vec{V}_i \cdot \vec{n}_i < 0 \end{cases} \quad (254)$$

Qui peut de même se simplifier comme suit :

$$\tilde{P}_i = P_0 \delta_i + P_i (1 - \delta_i) \quad \delta_i = \frac{1 + \text{sign}(V_{ni})}{2} \quad (255)$$

L'expression de la vitesse normale est obtenue à partir du flux massique traversant cette arête :

$$V_{ni} = \frac{J_i}{\rho_i h_i} \quad (256)$$

Avec

$$J_i = \frac{-\rho_i h_i^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i + \rho_i \frac{h_i}{2} \vec{U}_x \cdot \vec{n}_i \quad (257)$$

Ce qui donne :

$$V_{ni} = \frac{-h_i^2}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i + \frac{U_x}{2} \cos \alpha_i \quad (258)$$

3.3.2 Conditions aux limites

3.3.2.1 Conditions à pression imposée

Considérons une pression P_{amont} appliquée sur le bord de l'arête d'indice $j \in \{1,2,3\}$ tel que le montre la Figure 87.

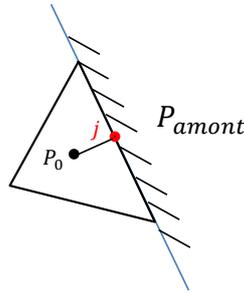


Figure 87. Pression atmosphérique appliquée sur un bord du domaine

L'équation (250) se réécrit :

$$a_j^* P_{amont} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 a_i P_i - a_0 P_0 = b_0 \quad (259)$$

Avec :

$$a_j^* = \frac{\tilde{P}_i h_j^3 \gamma_j}{12\mu l_{0j} \cos(\vec{n}_j, \vec{\xi}_j)} \quad (260)$$

Le terme $a_j^* P_{amont}$ ne comportant plus d'inconnue en pression sera placé du côté droit (RHS) de l'équation :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 a_i P_i - a_0 P_0 = b_0 - a_j^* P_{amont} \quad (261)$$

Avec :

$$a_0 = a_j^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 a_i \quad (262)$$

L'expression de a_i reste celle vu en (251).

Toutes les cellules dont l'une des arêtes est soumise à une condition de pression imposée verront leurs équations prendre la forme (261) dans le système d'équation à résoudre.

3.3.2.2 Conditions de périodicité

Dans le cas de présence de conditions de périodicité sur le bord d'un triangle, ce dernier se voit attribuer d'autres voisins supposés adjacents à l'arête portant la condition. La Figure 88 explicite les différents voisins d'un triangle dont l'une des arêtes est soumise à une condition de pression imposée, et du même triangle dans le cas de conditions de périodicité. Les termes a_i correspondants à ces nouveaux voisins se doivent alors d'apparaître dans leur emplacement spécifique dans la matrice du système ainsi que dans la matrice Jacobienne. La prise en compte de ces voisins additionnels est suffisante pour assurer la continuité de la pression et de sa dérivée.

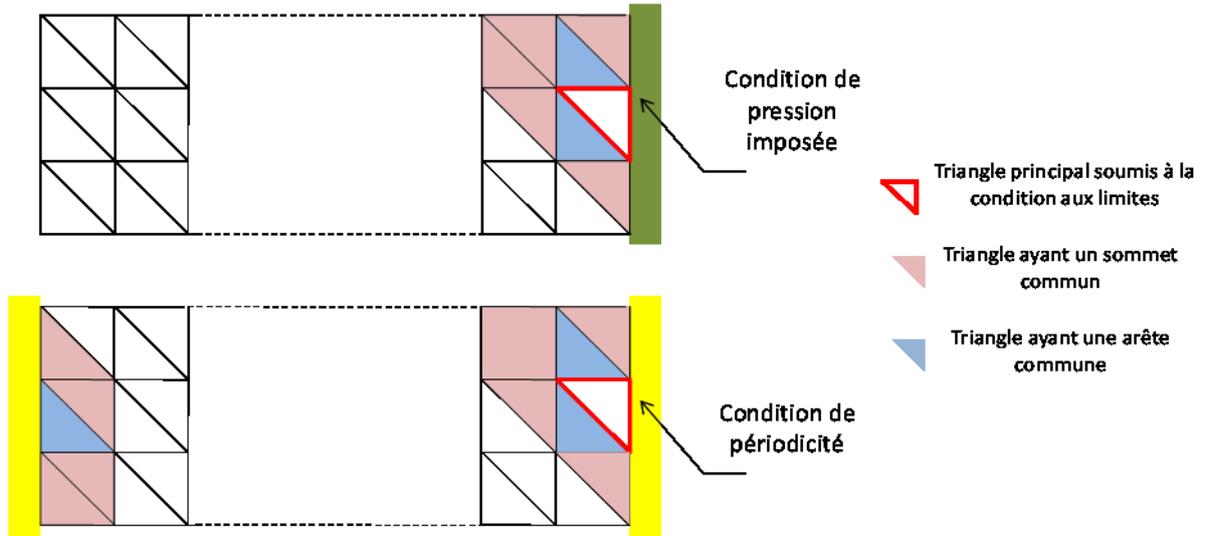


Figure 88. Conditions aux limites appliquées sur les bords d'un domaine

3.3.3 Résolution de l'équation de Reynolds compressible et sans discontinuités (matrice Jacobienne incomplète)

Comme pour le maillage rectangulaire du chapitre 2, la non-linéarité de l'équation impose l'utilisation d'une méthode de résolution non-linéaire, celle de Newton-Raphson est encore considérée. Les résidus et les éléments de la matrice Jacobienne sont :

$$R(P) = \sum_{i=1}^3 a_i P_i - a_0 P_0 - b_0 \quad (263)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_i} = a_i + \frac{\partial a_i}{\partial P_i} P_i - \frac{\partial a_i}{\partial P_i} P_0 - \frac{\partial b_0}{\partial P_i} \quad (264)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial P_0} P_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial P_0} P_0 - a_0 - \frac{\partial b_0}{\partial P_0} \quad (265)$$

En mettant :

$$a_i = \tilde{P}_i \beta_i \quad \text{avec} \quad \beta_i = \frac{h_i^3 \gamma_i}{12 \mu l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad (266)$$

Les expressions des dérivées deviennent :

$$\frac{\partial a_i}{\partial P_i} = (1 - \delta_i)\beta_i \qquad \frac{\partial a_i}{\partial P_0} = \delta_i\beta_i \qquad (267)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial P_i} = (1 - \delta_i) \frac{h_i}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - (1 - \delta_i) \frac{h_i^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \\ - \sum_{j=1}^3 \tilde{P}_j \frac{h_j^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P_{Bj}}{\partial P_i} - \frac{\partial P_{Aj}}{\partial P_i} \right) \tan(\vec{n}_j, \vec{\xi}_j) \end{aligned} \qquad (268)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial P_0} = \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_i}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_i^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \\ - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P_{Bi}}{\partial P_0} - \frac{\partial P_{Ai}}{\partial P_0} \right) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \end{aligned} \qquad (269)$$

Le nœud A_j étant l'un des sommets du triangle indicé en i , la dérivée $\frac{\partial P_{Aj}}{\partial P_i}$ a pour expression :

$$\frac{\partial P_{Aj}}{\partial P_i} = \frac{\mathcal{V}^i}{\sum_k \mathcal{V}^k} \qquad (270)$$

k étant l'indice parcourant tous les triangles dont A_j est l'un des sommets.

3.3.4 Prise en compte des discontinuités du film dans l'équation de Reynolds discrétisée

La présence des rainures nécessite la prise en compte de la discontinuité du film fluide. Similairement au cas du maillage rectangulaire du chapitre 2, l'équation tenant compte de la discontinuité sera construite à partir d'un cas simple modélisant la présence d'une discontinuité entre deux cellules triangulaires adjacentes du maillage (Figure 89).

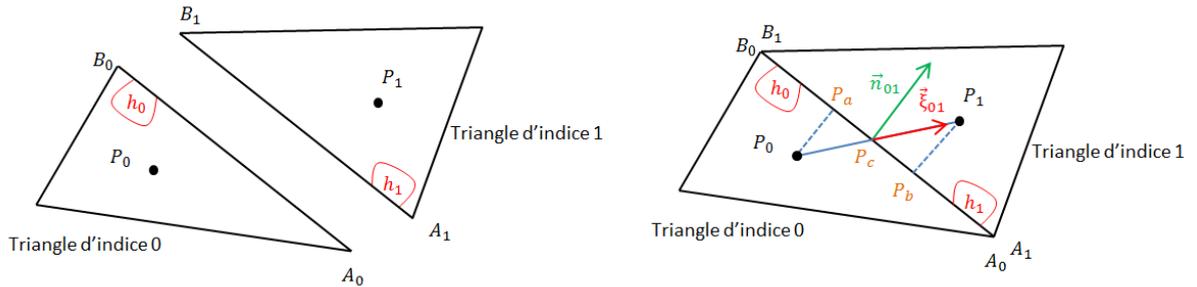


Figure 89. Représentation de deux éléments présentant une discontinuité

L'arête A_0B_0 appartient au triangle d'indice 0 et a pour hauteur h_0 .

L'arête A_1B_1 appartient au triangle d'indice 1 et a pour hauteur h_1 .

Dans ce qui suit on adoptera les notations suivantes pour les pressions et les divers longueurs affectant les sommets B_0, B_1 et A_0, A_1 respectivement :

$$P_{B_0} = P_{B_1} = P_B$$

$$P_{A_0} = P_{A_1} = P_A$$

et :

$$l_{A_0B_0} = l_{A_1B_1} = l_{AB}$$

Pour la prise en compte de la discontinuité du film il s'agit de trouver l'expression de la dérivée de la pression par rapport à la normale dans chaque triangle. Les pressions P_a et P_b peuvent être obtenues (par interpolation) en fonction de la pression P_c sur l'arête comme vu auparavant (3.3.1).

$$P_a = P_c + \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} l_{ca} \quad \text{tel que} \quad l_{ca} = l_{0c} \sin(\vec{n}_{01}, \vec{\xi}_{01}) \quad (271)$$

$$P_b = P_c - \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} l_{cb} \quad \text{et} \quad l_{cb} = l_{1c} \sin(\vec{n}_{01}, \vec{\xi}_{01}) \quad (272)$$

Le flux massique de la cellule d'indice 0 à la cellule d'indice 1 et réciproquement, celui traversant de la cellule 1 à la cellule 0, s'écrivent :

$$J_{01} = -\frac{\rho_{01} h_0^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01} + \frac{\rho_{01} h_0}{2} \vec{U}_x \cdot \vec{n}_{01} \quad (273)$$

$$J_{10} = -\frac{\rho_{10} h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10} + \frac{\rho_{10} h_1}{2} \vec{U}_x \cdot \vec{n}_{10} \quad (274)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{01} &= -\vec{n}_{10} = \vec{n} & \alpha &= (\widehat{\vec{U}_x, \vec{n}_{01}}) = (\widehat{\vec{U}_x, \vec{n}}) \\ \vec{\xi}_{01} &= -\vec{\xi}_{10} = \vec{\xi} \end{aligned}$$

Et :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01} = \frac{P_a - P_0}{l_{0a}} \quad l_{0a} = l_{0c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (275)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10} = \frac{P_b - P_1}{l_{1b}} \quad l_{1b} = l_{1c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (276)$$

En substituant les expressions de P_a et P_b obtenue plus haut (271), (272), dans ces deux dérivées de pression, on obtient :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01} = \frac{P_c - P_0}{l_{0c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi})} + \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} \tan(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (277)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10} = \frac{P_c - P_1}{l_{1c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi})} + \frac{P_A - P_B}{l_{AB}} \tan(\vec{n}, \vec{\xi}) \quad (278)$$

La conservation du flux traversant les deux cellules stipule :

$$J_{01} + J_{10} = 0 \quad (279)$$

Après substitution des valeurs de $\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{01}$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{10}$ dans les flux massiques, l'équation de conservation du flux nous permet d'obtenir la valeur de la pression P_c au milieu de l'arête :

$$P_c = \frac{h_1^3 - h_0^3}{12\mu(C_1 + C_0)} \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} \tan(\vec{n}, \vec{\xi}) + \frac{h_0 - h_1}{2(C_1 + C_0)} U_x \cos \alpha + \frac{C_0 P_0 + C_1 P_1}{C_1 + C_0} \quad (280)$$

Avec :

$$C_0 = \frac{h_0^3}{12\mu l_{0c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi})} \quad C_1 = \frac{h_1^3}{12\mu l_{1c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi})} \quad (281)$$

Cette expression sera considérée à l'intérieur de la formule donnant $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{01}$ de l'équation (277) ce qui permet d'obtenir la dérivée de pression avec prise en compte de la discontinuité :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{01} &= \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} \tan(\vec{n}, \vec{\xi}) \\ &+ \frac{1}{l_{0c} \cos(\vec{n}, \vec{\xi})} \left[\frac{h_1^3 - h_0^3}{12\mu(C_1 + C_0)} \frac{P_B - P_A}{l_{AB}} \tan(\vec{n}, \vec{\xi}) + \frac{h_0 - h_1}{2(C_1 + C_0)} U_x \cos \alpha \right. \\ &\left. + \frac{C_1}{C_1 + C_0} (P_1 - P_0) \right] \end{aligned} \quad (282)$$

La relation générique (282) doit être réécrite pour traiter la discontinuité dans l'équation de Reynolds. Une nouvelle notation des hauteurs d'arêtes est nécessaire pour éviter toute confusion : h_{ij} fait désormais référence à la hauteur de l'arête d'indice j appartenant au triangle d'indice i . En modifiant ainsi les indices dans la formule de la dérivée de la pression, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_i &= \frac{P_{Bi} - P_{Ai}}{\gamma_i} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \\ &+ \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \left[\frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \frac{P_{Bi} - P_{Ai}}{\gamma_i} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \right. \\ &\left. + \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} U_x \cos \alpha_i + \frac{C_{ii}}{C_{ii} + C_{0i}} (P_i - P_0) \right] \end{aligned} \quad (283)$$

Avec :

$$C_{ii} = \frac{h_{ii}^3}{12\mu l_{ic_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad C_{0i} = \frac{h_{0i}^3}{12\mu l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad (284)$$

En substituant ces éléments à l'intérieur de l'équation de Reynolds (238) elle prend la même forme que l'équation (250) :

$$\sum_{i=1}^3 a_i P_i - a_0 P_0 = b_0 \quad (285)$$

Avec :

$$a_i = \frac{\tilde{P}_i h_{0i}^3 \gamma_i}{12\mu l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{C_{ii}}{C_{ii} + C_{0i}} \quad a_0 = \sum_{i=1}^3 a_i \quad (286)$$

$$\begin{aligned}
b_0 = & \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i \\
& - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)}
\end{aligned} \quad (287)$$

Les résidus de la matrice Jacobienne sont recalculés de la même manière qu'auparavant:

$$R(P) = \sum_{i=1}^3 a_i P_i - a_0 P_0 - b_0 \quad (288)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_i} = a_i + \frac{\partial a_i}{\partial P_i} P_i - \frac{\partial a_i}{\partial P_i} P_0 - \frac{\partial b_0}{\partial P_i} \quad (289)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial P_0} P_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial P_0} P_0 - a_0 - \frac{\partial b_0}{\partial P_0} \quad (290)$$

En mettant :

$$a_i = \tilde{P}_i \beta_i \quad \text{avec} \quad \beta_i = \frac{h_{0i}^3 \gamma_i}{12\mu l_{0i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{C_{ii}}{C_{ii} + C_{0i}} \quad (291)$$

Les expressions des dérivées deviennent :

$$\frac{\partial a_i}{\partial P_i} = (1 - \delta_i) \beta_i \quad \frac{\partial a_i}{\partial P_0} = \delta_i \beta_i \quad (292)$$

Et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_0}{\partial P_i} = & (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i \\
& - (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \\
& - (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \\
& - \sum_{j=1}^3 \tilde{P}_j \frac{h_{0j}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P_{Bj}}{\partial P_i} - \frac{\partial P_{Aj}}{\partial P_i} \right) \tan(\vec{n}_j, \vec{\xi}_j) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_j} \cos(\vec{n}_j, \vec{\xi}_j)} \frac{h_{jj}^3 - h_{0j}^3}{12\mu(C_{jj} + C_{0j})} \right]
\end{aligned} \quad (293)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_0}{\partial P_0} = & \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i \\
& - \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} (P_{Bi} - P_{Ai}) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_i^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P_{Bi}}{\partial P_0} - \frac{\partial P_{Ai}}{\partial P_0} \right) \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)}
\end{aligned} \tag{294}$$

La dérivée $\frac{\partial P_{Aj}}{\partial P_i}$ garde la même expression (270) d'avant.

La résolution telle qu'elle vient d'être présentée a permis d'effectuer des calculs pour une seule rainure de profondeur $h_{rain} = 10 \mu m$ sur un patin dont l'épaisseur de film n'était pas inférieure à $h_{film} = 1 \mu m$.

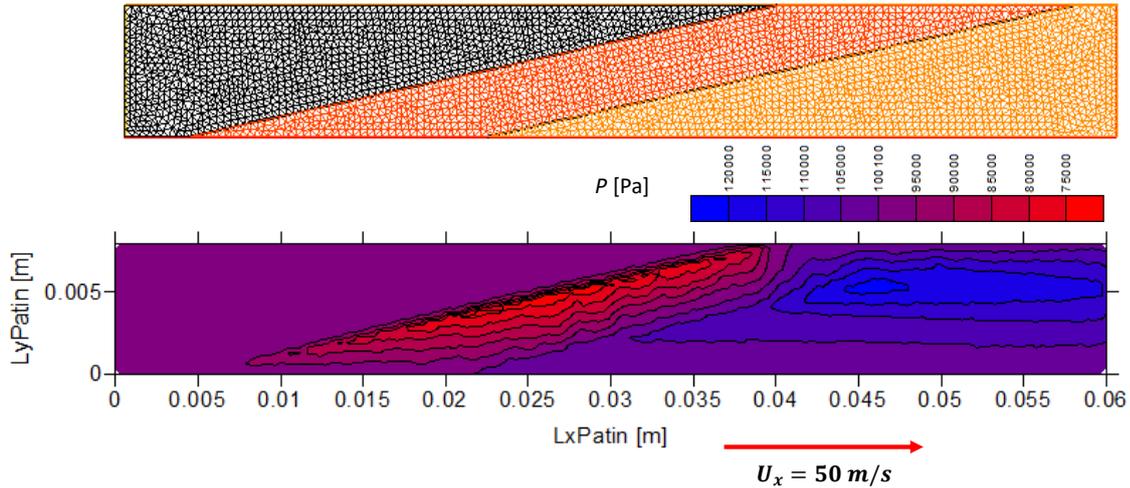


Figure 90. Maillage et pression dans un patin comportant une rainure statique inclinée ($h_{film} = 1 \mu m$, $h_{rain} = 10 \mu m$)

Le calcul rencontrait des difficultés dès lors que la profondeur h_{rain} dépassait les $10 \mu m$ ou que l'épaisseur de film était inférieure à $1 \mu m$. La Figure 90 présente le résultat d'un tel calcul limite. La présence de plusieurs rainures étroitement proches contribue aussi aux difficultés de calculs et à la non convergence de l'algorithme Newton-Raphson. La raison principale de cette difficulté numérique est le fait que le terme b_0 donné par l'équation (252) et (287) ne dépend pas seulement des valeurs dans triangles $P_{1,2,3}$ qui ont une arête commune avec la cellule « 0 » mais aussi des valeurs de tous les triangles avec qui « 0 » a un sommet commun. Les dérivées $\partial b_0 / \partial P_i$ et $\partial b_0 / \partial P_0$ données par les équations (268)-(269) ou par (293)-(294) ne sont qu'une approximation au premier ordre incomplète des termes de la matrice Jacobienne qui, exprimée de cette manière, n'est que partiellement implicite.

3.3.5 Résolution de l'équation de Reynolds avec matrice Jacobienne complète

Deux modifications ont été apportées pour pallier aux difficultés susmentionnées. La première a été de prendre en considération tous les triangles adjacents dans l'écriture de l'équation et du

Jacobéen. Ceci revient à considérer tous les triangles ayant un sommet commun avec la cellule « 0 » (Figure 91).

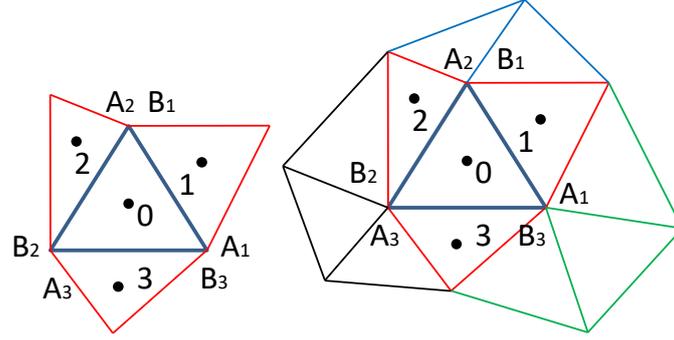


Figure 91. Triangle principale et ses adjacents dans deux différentes configurations

L'équation de Reynolds est réécrite et le terme comportant les pressions des sommets dans b_0 est déplacé au côté gauche de l'équation (LHS) pour que ces pressions soient traitées comme des inconnues. L'équation de chaque élément de maillage comportera donc plus que les quatre inconnues d'avant (P_0, P_1, P_2, P_3). Après quelques calculs, la nouvelle équation devient:

$$\sum_{i=1}^3 (a_i + \bar{a}_i) P_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j_{B_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{B_i}} \bar{a}_{j_{B_i}} P_{j_{B_i}} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j_{A_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{A_i}} \bar{a}_{j_{A_i}} P_{j_{A_i}} - (a_0 + \bar{a}_0) P_0 = b_0 \quad (295)$$

Avec :

$$\bar{a}_i = \varphi_i \mathcal{V}^i \left(\frac{1}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} - \frac{1}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \right) \quad (296)$$

$$\bar{a}_0 = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathcal{V}^0 \left(\frac{1}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} - \frac{1}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \right) \quad (297)$$

$$\bar{a}_{j_{B_i}} = \frac{\varphi_i \mathcal{V}^{j_{B_i}}}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} \quad \bar{a}_{j_{A_i}} = \frac{\varphi_i \mathcal{V}^{j_{A_i}}}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \quad (298)$$

$$b_0 = \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad (299)$$

et :

$$\varphi_i = \tilde{P}_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \quad (300)$$

n_{B_i} et n_{A_i} étant respectivement les nombres de triangles dont le point B_i et A_i sont l'un des sommets.

Le Jacobéen s'en trouve modifié aussi :

$$R(P) = \sum_{i=1}^3 (a_i + \bar{a}_i) P_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j_{B_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{B_i}} \bar{a}_{j_{B_i}} P_{j_{B_i}} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j_{A_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{A_i}} \bar{a}_{j_{A_i}} P_{j_{A_i}} - (a_0 + \bar{a}_0) P_0 - b_0 \quad (301)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(P)}{\partial P_i} &= (a_i + \bar{a}_i) + \left(\frac{\partial a_i}{\partial P_i} + \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial P_i} \right) P_i - \left(\frac{\partial a_0}{\partial P_i} + \frac{\partial \bar{a}_0}{\partial P_i} \right) P_0 - \frac{\partial b_0}{\partial P_i} + \sum_{j_{B_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{B_i}} \frac{\partial \bar{a}_{j_{B_i}}}{\partial P_i} P_{j_{B_i}} \\ &\quad - \sum_{j_{A_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{A_i}} \frac{\partial \bar{a}_{j_{A_i}}}{\partial P_i} P_{j_{A_i}} \end{aligned} \quad (302)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(P)}{\partial P_0} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial a_i}{\partial P_0} + \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial P_0} \right) P_i - \left(\frac{\partial a_0}{\partial P_i} + \frac{\partial \bar{a}_0}{\partial P_i} \right) P_0 - (a_0 + \bar{a}_0) - \frac{\partial b_0}{\partial P_0} + \sum_{j_{B_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{B_i}} \frac{\partial \bar{a}_{j_{B_i}}}{\partial P_0} P_{j_{B_i}} \\ &\quad - \sum_{j_{A_i}=1 \setminus \{i\}}^{n_{A_i}} \frac{\partial \bar{a}_{j_{A_i}}}{\partial P_0} P_{j_{A_i}} \end{aligned} \quad (303)$$

$$\frac{\partial R(P)}{\partial P_{j_{B_i}}} = \bar{a}_{j_{B_i}} \qquad \frac{\partial R(P)}{\partial P_{j_{A_i}}} = -\bar{a}_{j_{A_i}} \quad (304)$$

Avec :

$$\frac{\partial a_i}{\partial P_i} = \frac{\partial a_0}{\partial P_i} = (1 - \delta_i) \beta_i \qquad \frac{\partial a_i}{\partial P_0} = \delta_i \beta_i \quad (305)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial P_0} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial P_0} \quad (306)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial P_i} = \frac{\partial \bar{a}_0}{\partial P_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_i} \mathcal{V}^i \left(\frac{1}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} - \frac{1}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \right) \quad (307)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial P_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_0} \mathcal{V}^i \left(\frac{1}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} - \frac{1}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \right) \quad (308)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_0}{\partial P_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_0} \mathcal{V}^0 \left(\frac{1}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} - \frac{1}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \right) \quad (309)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_{j_{B_i}}}{\partial P_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_i} \frac{\mathcal{V}^{j_{B_i}}}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} \qquad \frac{\partial \bar{a}_{j_{A_i}}}{\partial P_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_i} \frac{\mathcal{V}^{j_{A_i}}}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \quad (310)$$

$$\frac{\partial \bar{a}_{j_{B_i}}}{\partial P_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_0} \frac{\mathcal{V}^{j_{B_i}}}{\sum_{k_{B_i}=0}^{n_{B_i}} \mathcal{V}^{k_{B_i}}} \qquad \frac{\partial \bar{a}_{j_{A_i}}}{\partial P_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial P_0} \frac{\mathcal{V}^{j_{A_i}}}{\sum_{k_{A_i}=0}^{n_{A_i}} \mathcal{V}^{k_{A_i}}} \quad (311)$$

où :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial P_i} = (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \quad (312)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial P_0} = \delta_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \tan(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i) \left[1 + \frac{1}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \frac{h_{ii}^3 - h_{0i}^3}{12\mu(C_{ii} + C_{0i})} \right] \quad (313)$$

et finalement :

$$\frac{\partial b_0}{\partial P_i} = (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - (1 - \delta_i) \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad (314)$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial P_0} = \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \gamma_i \frac{h_{0i} - h_{ii}}{2(C_{ii} + C_{0i})} \frac{U_x \cos \alpha_i}{l_{0c_i} \cos(\vec{n}_i, \vec{\xi}_i)} \quad (315)$$

Comparée aux relations (292)-(294) précédentes, la nouvelle formulation du Jacobéen est complètement implicite.

La deuxième modification permettant de dépasser les difficultés de convergence sera de considérer plusieurs résolutions intermédiaires en augmentant graduellement la profondeur de la rainure jusqu'à atteindre sa profondeur réelle. La résolution se fera donc selon l'algorithme présenté sur la Figure 92.

Résolution de l'équation de Reynolds

Erreur_NRO
Relax_NRO

Pression d'initialisation = Pression de référence
Profondeur_Rainure = Profondeur de départ de la rainure
Increment_Profondeur = Incrément de départ de la profondeur
Relax_NR = Relaxation de départ de l'algo NR

Do while (Profondeur_Rainure < Profondeur_Fin)
 Pression = Pression d'initialisation
 Erreur_NR = Erreur de départ de l'algorithme NR
 Profondeur_Rainure = Profondeur_Rainure + increment_Profondeur
 Calcul de l'épaisseur du film en fonction de la profondeur de la rainure
Do while (Erreur_NR > Precision_NR)
 Erreur_NRO = Erreur_NR
 Calcul de l'erreur sur l'équation de Reynolds : Erreur_NR
 If (iteration_NR > iteration_Max) then
 Increment_Profondeur = increment_Profondeur / 2
 Exit
 End if
 If (Erreur_NR > Erreur_NRO .and. Relax_NR > Relax_NRO) then
 Relax_NR = Relax_NR / 2
 End if
Resolution de l'équation de Reynolds par Newton Raphson
 Pression d'initialisation = Pression

End do
End Do

Figure 92. Algorithme de résolution de l'équation de Reynolds

3.3.6 Prise en compte du terme non-stationnaire de l'équation de Reynolds

Vu le fonctionnement du joints radiaux segmentés à portance, il est indispensable de considérer l'équation de Reynolds en non-stationnaire :

$$\int_r \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial n} d\gamma = \int_r \frac{\rho h}{2} \vec{U}_x \vec{n} d\gamma + \int_v \frac{\partial \rho h}{\partial t} \quad (316)$$

Après discrétisation l'équation non-stationnaire est :

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i \gamma_i = \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_i \frac{h_{0i}}{2} U_x \gamma_i \cos \alpha_i + \left[h_0 \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_0 + P_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_0 \right] \mathcal{V}^0 \quad (317)$$

Le terme $(\partial h/\partial t)_0$ représente la vitesse d'écrasement du film dans la cellule « 0 ». Les termes a_0 et b_0 de (295) reçoivent une contribution non stationnaire et deviennent a'_0 et b'_0

$$a'_0 = a_0 + \left[\frac{h_0^{(n)}}{\Delta t} + \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_0^{(n)} \right] \mathcal{V}^0 \quad b'_0 = b_0 - \frac{P_0^{(n-1)} h_0^{(n)}}{\Delta t} \mathcal{V}^0 \quad (318)$$

Tous les éléments de l'équation sont à l'instant (n) sauf les termes indexés en $(n-1)$, qui représentent l'instant de calcul antérieur.

3.4 Résultats

3.4.1 Approche simplifiée

Comme mentionné en 3.2.2, deux approches seront considérées pour traiter l'étude du JRSP. La 1^{ère} approche est de considérer un seul motif de rainures stationnaires et une surface lisse animée d'une vitesse de déplacement $-U_x$. Cette approche ne tient pas compte des rainures axiales du segment et est de ce fait stationnaire. Le domaine considéré sera donc de longueur $L_{xPatrin} = \frac{2\pi R}{n_{motif}}$. Des conditions de périodicité ont été considérées sur les deux bords circonférentiels (Figure 82b). L'imposition de ces conditions restreint l'étude à un seul degré de liberté qu'est le déplacement selon la direction X (Figure 93).

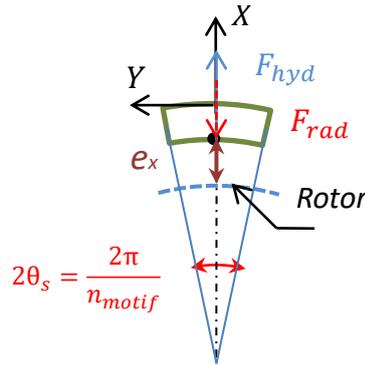


Figure 93. Bilan des efforts appliqués sur le patin (Approche simplifiée)

Les surfaces seront considérées parallèles et l'épaisseur du film aura l'expression suivante :

$$h_{filmP} = e_x + \delta_P h_{rain} \text{ avec } \delta_P = \begin{cases} 1, & \text{si } P \in \text{Rainure} \\ 0, & \text{si } P \notin \text{Rainure} \end{cases} \quad (319)$$

où P identifie le centre d'une cellule de discrétisation du domaine.

L'élément du segment ne sera soumis qu'à trois types de charge. D'abord les forces engendrées sous le patin et sous la lèvre. Elles sont composées des forces de portance hydrodynamiques et des forces de contact :

$$\vec{F} = \vec{F}_{Patin} + \vec{F}_{Lèvre} \quad (320)$$

avec :

$$\vec{F}_{Patin} = (F_{hyd_p} + F_{cont_p})\vec{n} + (F_{cisail_p} + fF_{cont_p})\vec{t} \quad (321)$$

et :

$$\vec{F}_{Lèvre} = (F_{hyd_L} + F_{cont_L})\vec{n} + (F_{cisail_L} + fF_{cont_L})\vec{t} \quad (322)$$

La projection des charges selon la direction \vec{n} fait intervenir seulement la contribution des forces hydrodynamiques et des forces normales de contact. Dans un premier temps, ces dernières ne seront pas prises en compte. La charge sera donc :

$$F_{hyd} = F_{hyd_P} + F_{hyd_L} \quad (323)$$

La force normale appliquée par le ressort circonférentiel est :

$$F_{rad} = 2 \sin \theta_s F_{Ressort_circ} \quad (324)$$

Avec $\theta_s = \frac{\pi}{n_{motif}}$

La force de frottement sur le nez F_f sera aussi prise en considération. Son calcul reste identique à celui vu précédemment dans le Chapitre 2 et seule sa projection selon la direction X sera considérée.

$$F_f = f F_z \quad (325)$$

Le calcul peut être effectué suivant deux situations, soit en position e_x imposée pour évaluer la charge portante générée, ou en charge radiale imposée (suivant la direction X) pour retrouver une position d'équilibre.

3.4.1.1 Etude à épaisseur de film imposée

Le calcul en position imposée est peu réaliste mais permet de déterminer un ordre de grandeur de la portance et du débit et de mettre en évidence l'effet de pompage. On considère donc les paramètres de calcul donnés dans le Tableau 6.

Tableau 6. Paramètres de calcul en position imposée

e_x [m]	U_x [m/s]	ΔP [bar]
$4,0 \cdot 10^{-6}$	-50	0,5

Tableau 7. Résultats de calcul en position imposée pour les données du Tableau 6

Paramètre	Valeur
F_{hyd_P} [N]	4,41
F_{cisail_P} [N]	$-6,16 \cdot 10^{-2}$
F_{hyd_L} [N]	-0,96
F_{cisail_L} [N]	$-8,32 \cdot 10^{-3}$
Débit Lèvre [g/s]	$1,24 \cdot 10^{-2}$

Les résultats de ce cas de calcul sont présentés dans le Tableau 7 et les pressions sur le patin et sur la lèvre sont représentées dans la Figure 94.

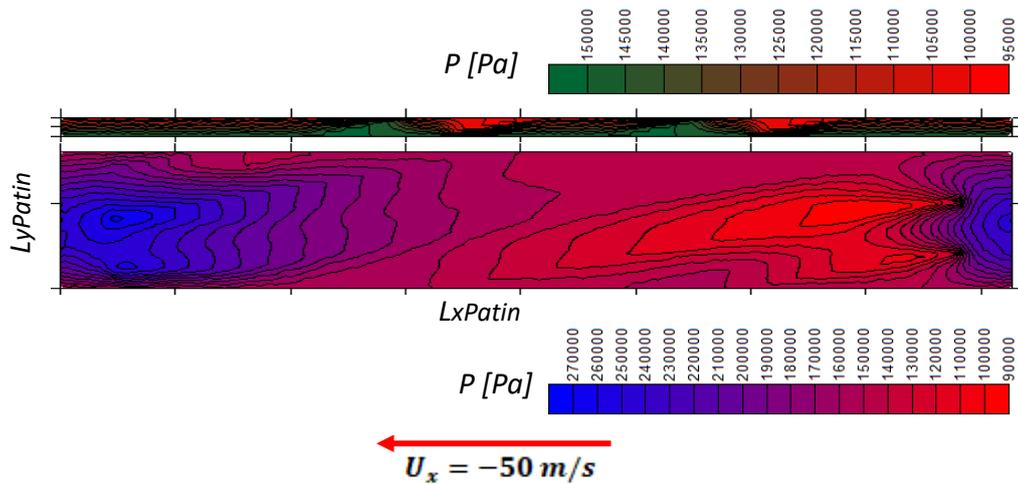


Figure 94. Pression sur le patin et sur la lèvre pour un calcul en position imposée

Une dépression apparaît dans chacune des pointes d'attaque des rainures qui se trouvent à l'intérieur du domaine du patin (à droite sur la Figure 94). Une surpression apparaît aux pointes de sortie, à gauche sur la Figure 94. Ce résultat confirme l'influence de la position axiale des rainures dans l'étude et l'importance du paramètre y_0 .

La dépression induite sous la lèvre est principalement due à la différence de pression imposée ΔP . Le débit de fuite figurant dans la Tableau 7 est positif le dans le sens "amont-aval" (Figure 79) et ne représente que le débit sous le tronçon du patin étudié (et non sous le joint complet).

Pour mettre en évidence l'effet du pompage et son influence sur le débit de fuite, un calcul a été effectué à différents ΔP et pour deux sens de rotation. Les positions e_x et y_0 restent inchangées.

Tableau 8. Débits pour différents ΔP et vitesses de rotation mettant en évidence l'effet de pompage (résultats obtenus avec les données du Tableau 6)

ΔP [bar]	$U_x = -50$ m/s	$U_x = 50$ m/s
	Débit [g/s]	Débit [g/s]
0	$-7,69 \cdot 10^{-4}$	$7,69 \cdot 10^{-4}$
0,5	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-2}$
1	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$3,37 \cdot 10^{-2}$
2	$8,59 \cdot 10^{-2}$	$8,92 \cdot 10^{-2}$

Pour $\Delta P = 0$ et $U_x = -50$ m/s, la valeur négative du débit montre un sens d'écoulement "aval-amont". Ceci est l'effet de pompage induit par l'orientation des rainures. Pour les autres valeurs du ΔP , le gradient de pression l'emporte sur l'effet du pompage et le sens du débit de fuite redevient "amont-aval". Toutefois, les valeurs des débits obtenus pour $U_x = -50$ m/s restent inférieurs à ceux obtenus pour un sens de déplacement inverse. L'effet de pompage diminue donc les débits de fuites. Ceci justifie d'avantage la conception du joint et le sens d'inclinaison des rainures.

3.4.1.2 Etude à charges imposées

La force extérieure est imposée par le ressort circonférentiel et sa projection normale est F_{rad} . Comme il a déjà été mentionné, l'approche simplifiée adoptée ne peut être appliquée qu'en régime stationnaire. La force de frottement sera donc constante car des effets de glissement saccadé ne peuvent pas être considérés. Selon le sens de déplacement du patin vers sa position d'équilibre, la

force de frottement peut soit contribuer à l'ouverture, soit à la fermeture du segment. La position d'équilibre vérifiera ainsi l'inégalité suivante :

$$|F_{hyd} - F_{rad}| < F_f \quad (326)$$

Deux positions d'équilibre statique e_{x1} et e_{x2} peuvent donc être déterminées à partir de cette inégalité (Figure 95) :

$$e_{x1} : F_{hyd} = F_{rad} + F_f \quad e_{x2} : F_{hyd} = F_{rad} - F_f \quad (327)$$

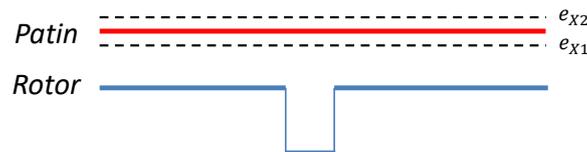


Figure 95. Modélisation de l'équilibre du patin entre deux positions e_{x1} et e_{x2}

Les résultats d'équilibre statique en charge imposée sont présentés sur la Figure 96, la Figure 97, la Figure 98 et la Figure 99 pour quatre positions axiales y_0 différentes et pour deux valeurs de vitesses de déplacement dans deux sens opposés. Les valeurs négatives de la vitesse correspondent à un effet de pompage aval-amont. Dans ces figures les résultats, *Bilan* e_{x1} et *Bilan* e_{x2} correspondent respectivement à :

$$\text{Bilan } e_{x1} = F_{hyd} - F_{rad} - F_f \quad \text{Bilan } e_{x2} = F_{hyd} - F_{rad} + F_f \quad (328)$$

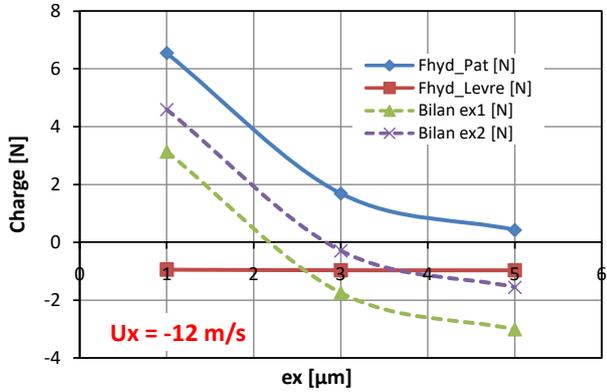
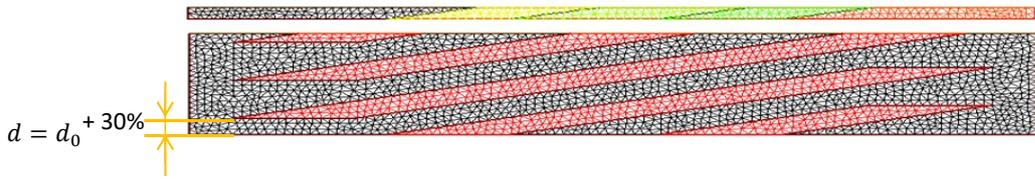
Les déplacements e_{x1} et e_{x2} sont les racines des équations (328).

Les paramètres de calcul considérés pour **un segment** sont :

$F_{Ressort_circ}$ [N]	$F_{Ressort_ax}$ [N]	$n_{ressort_ax/segment}$	ΔP [bar]
5	1,25	4	0,5

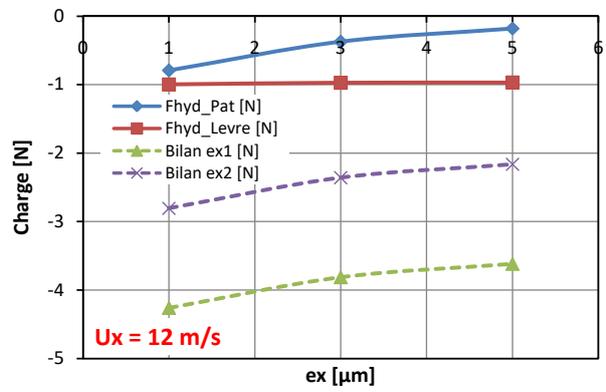
Dans les deux premiers cas (Figure 96 et Figure 97) seules deux pointes d'attaque de rainures sont présentes à l'intérieur du patin. Ceci se traduit par une portance plus importante et un débit de fuite plus conséquent. L'apparition de la troisième pointe d'attaque (Figure 98 et Figure 99), crée une dépression supplémentaire qui fait diminuer la portance et la position e_x pour la vitesse $U_x = -50 \text{ m/s}$, et qui élimine complètement le soulèvement du joint pour $U_x = -12 \text{ m/s}$.

En inversant le sens de la vitesse, les pointes d'attaque sont désormais en nombre de trois pour les quatre cas étudiés. La dépression fait encore qu'à faible vitesse (à $U_x = 12 \text{ m/s}$) aucun point de fonctionnement n'apparaît. Pour $U_x = 50 \text{ m/s}$, les différentes positions d'équilibre restent proches. Il est intéressant de noter que pour des valeurs très petites de y_0 une surpression apparaîtra et permettra de retrouver des valeurs d'équilibre pour $U_x = 12 \text{ m/s}$ parce que la pointe d'attaque de la rainure supérieure sera en dehors du patin.



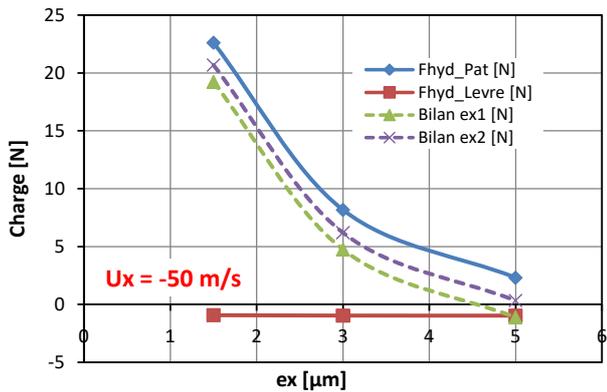
e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
$2,28 \cdot 10^{-6}$	$2,88 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$9,09 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$



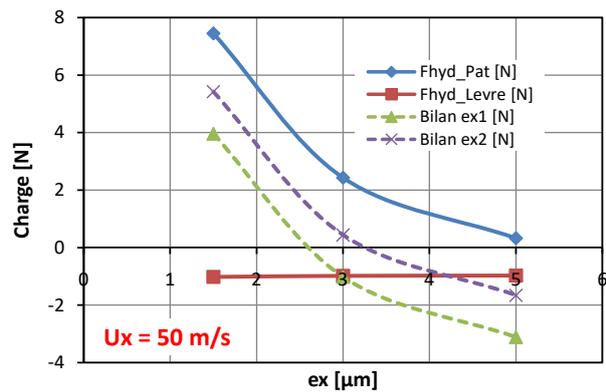
e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
---	---

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
---	---



e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
$4,61 \cdot 10^{-6}$	$5,1 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$1,41 \cdot 10^{-2}$	$1,53 \cdot 10^{-2}$



e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
$2,69 \cdot 10^{-6}$	$3,41 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$

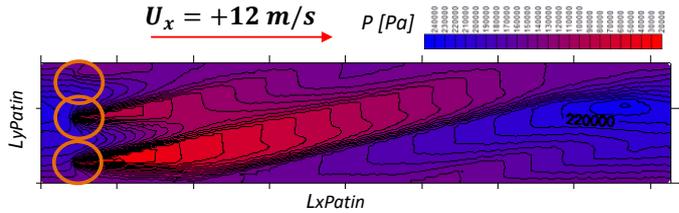
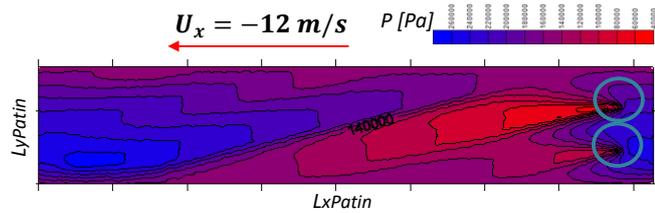
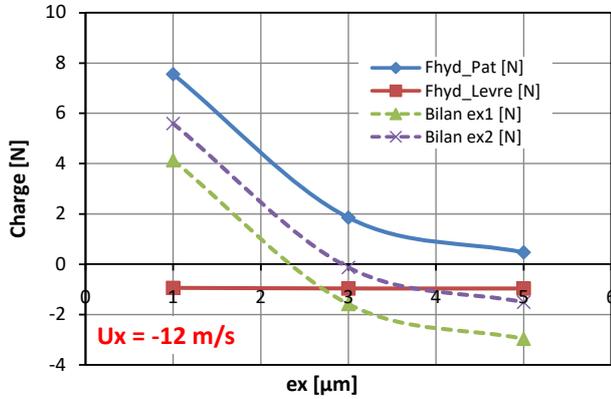
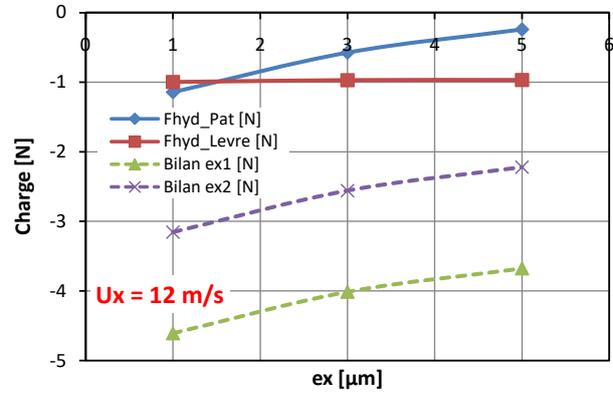


Figure 96. Cas 1 : Position axiale $y_0^{-15\%}$



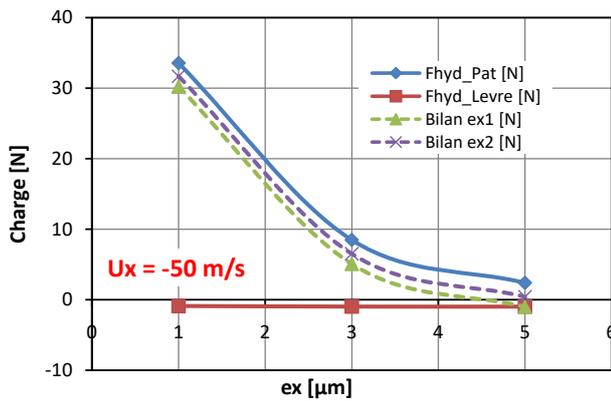
$e_{x1} [m]$	$e_{x2} [m]$
$2,44 \cdot 10^{-6}$	$2,95 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$9,72 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$



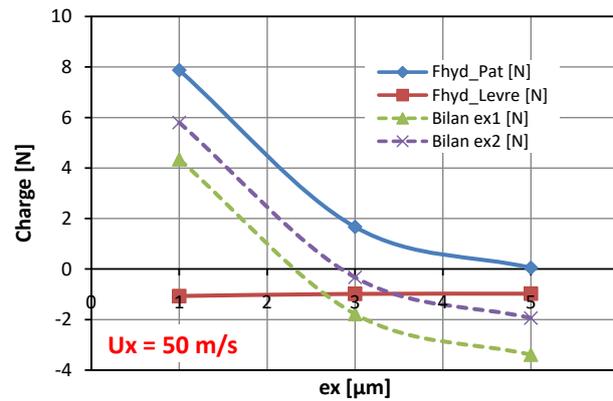
$e_{x1} [m]$	$e_{x2} [m]$
---	---

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
---	---



$e_{x1} [m]$	$e_{x2} [m]$
$4,66 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$1,47 \cdot 10^{-2}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$



$e_{x1} [m]$	$e_{x2} [m]$
$2,41 \cdot 10^{-6}$	$2,89 \cdot 10^{-6}$

Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^{-2}$

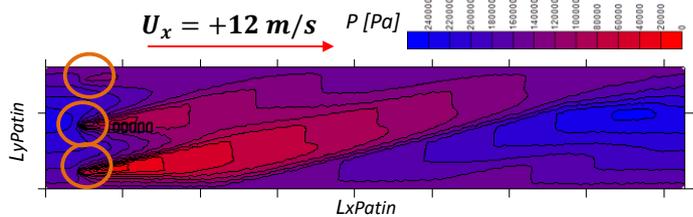
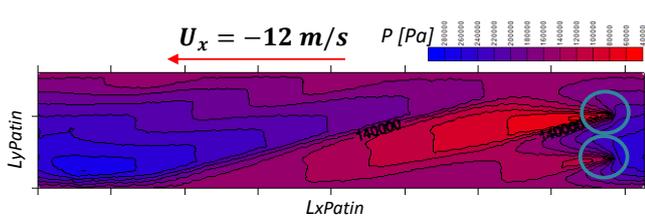
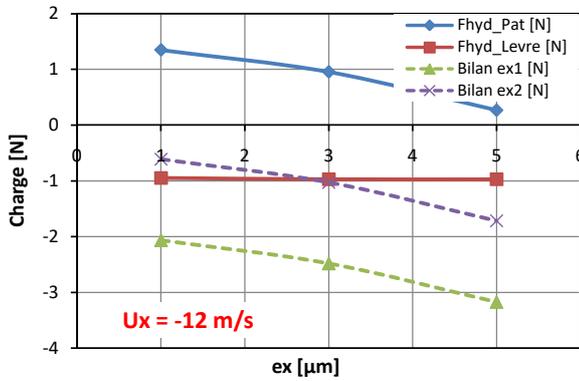
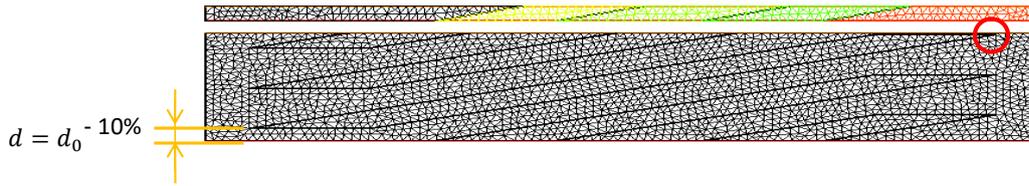
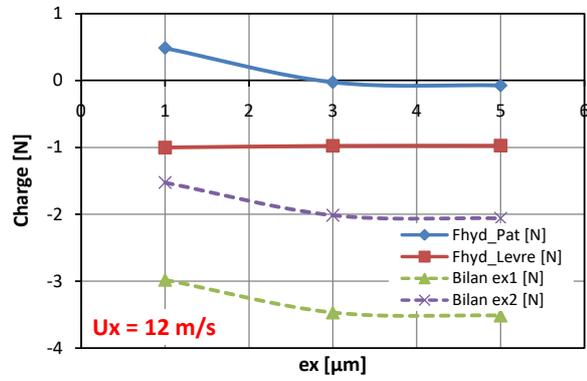


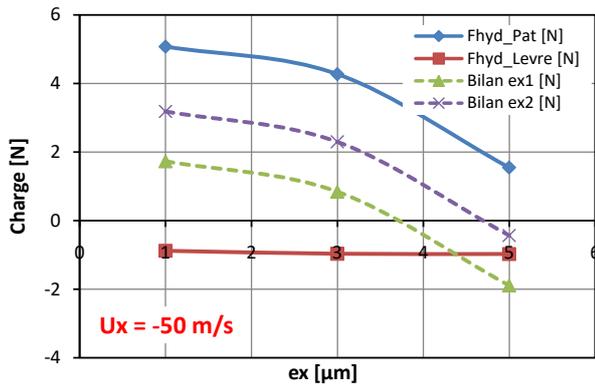
Figure 97. Cas 2 : Position axiale $y_0^{-5\%}$



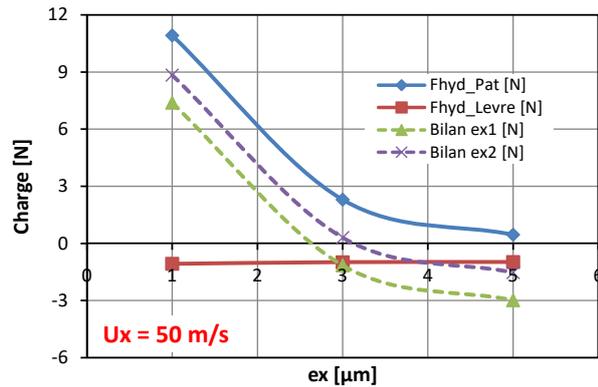
e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
---	---
Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
---	---



e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
---	---
Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
---	---



e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
$3,61 \cdot 10^{-6}$	$4,68 \cdot 10^{-6}$
Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,39 \cdot 10^{-2}$



e_{x1} [m]	e_{x2} [m]
$2,73 \cdot 10^{-6}$	$3,31 \cdot 10^{-6}$
Débit (e_{x1}) [g/s]	Débit (e_{x2}) [g/s]
$9,72 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$

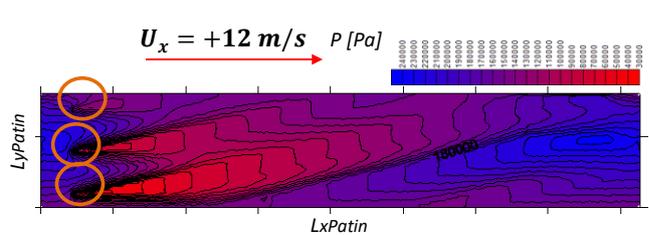
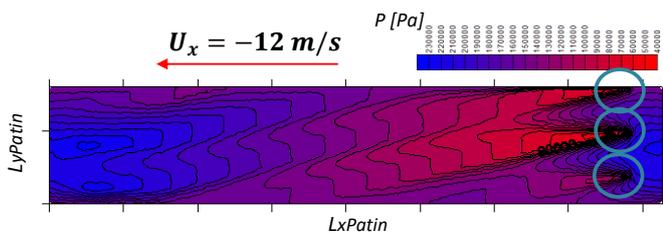


Figure 98. Cas 3 : Position axiale $y_0^{+5\%}$

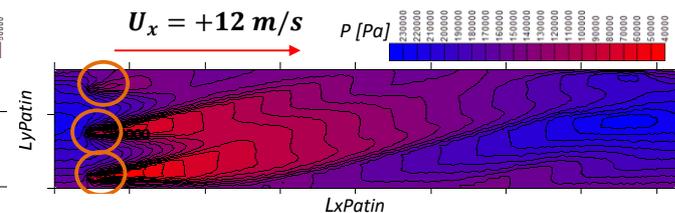
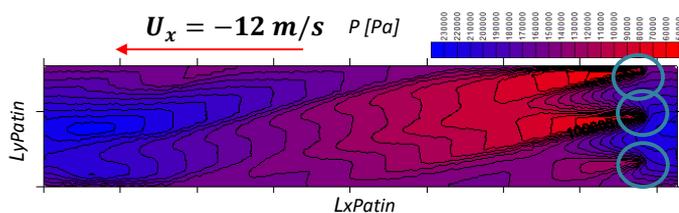
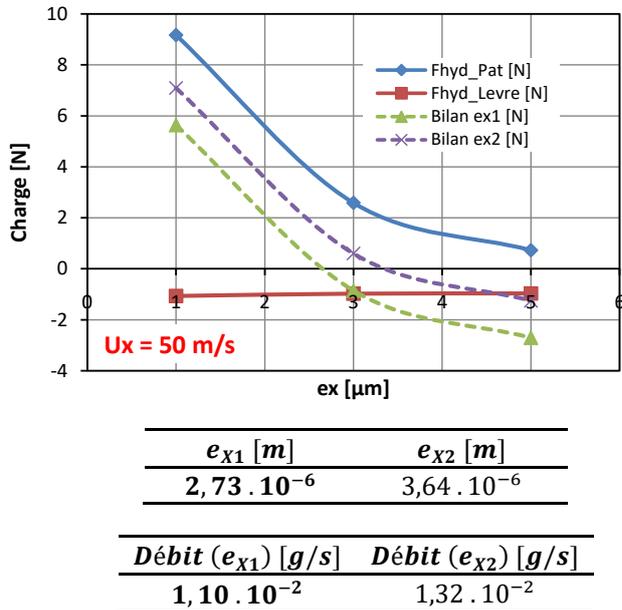
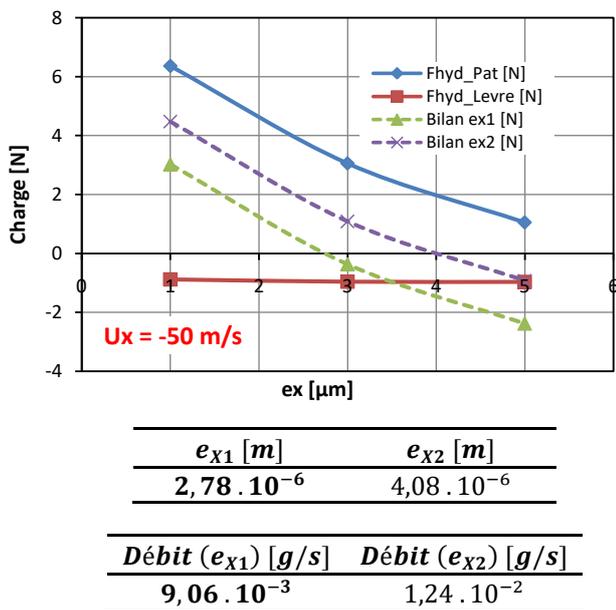
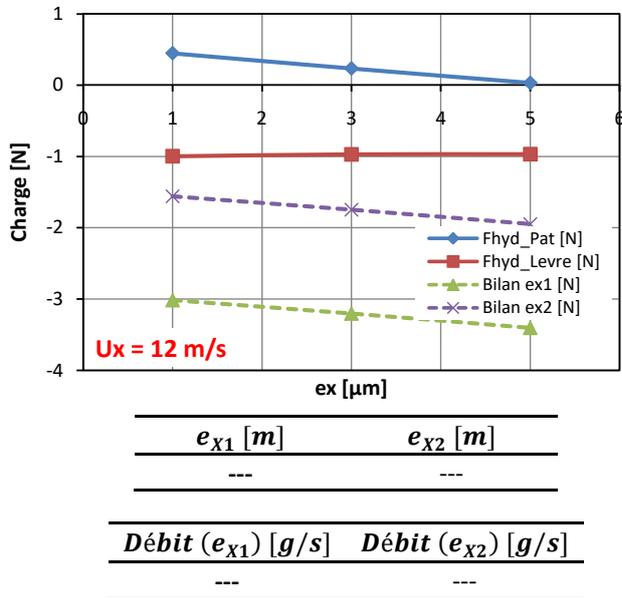
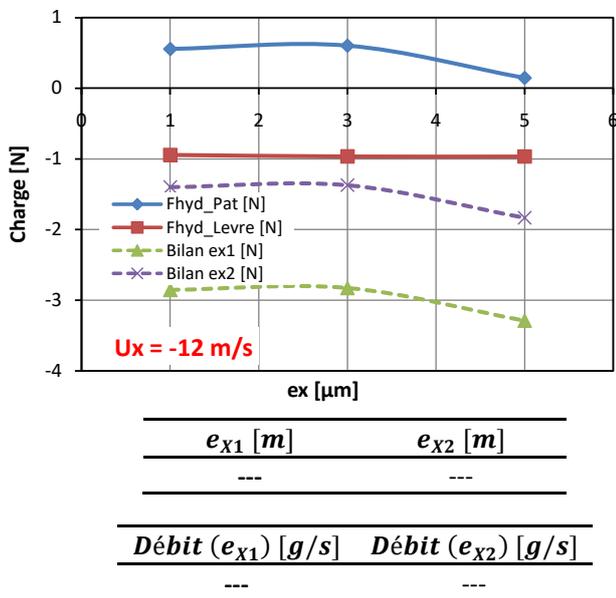
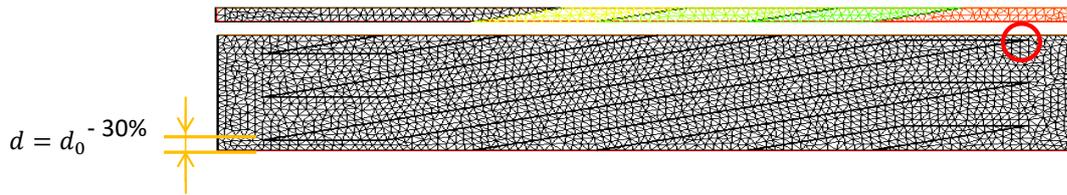


Figure 99. Cas 4 : Position axiale $y_0 +15\%$

La Figure 100 présente les déplacements radiaux $e_{x1,2}$ et les débits obtenus pour $U_x = \pm 50 \text{ m/s}$. Indépendamment des dépressions et des surpressions créées par le positionnement axial y_0 des pointes d'attaque des rainures, les positions d'équilibre e_{x1} , e_{x2} obtenues sont plus importantes quand l'effet de pompage est présent (pour des vitesses U_x négatives).

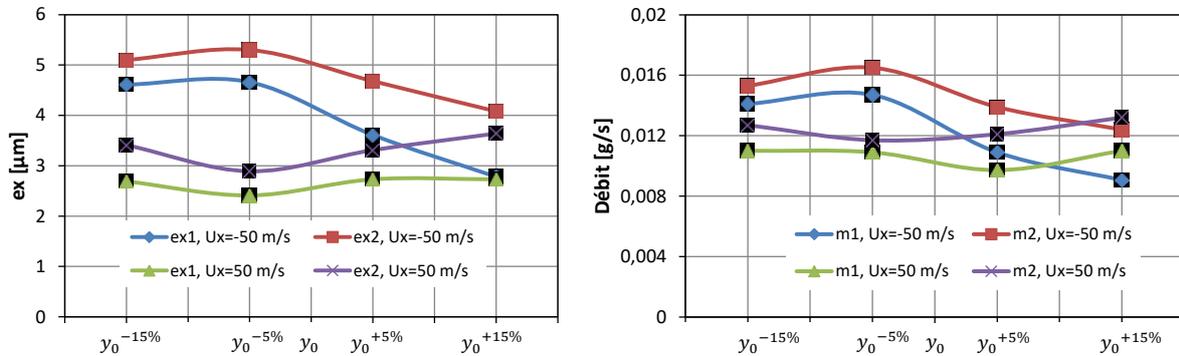


Figure 100. Déplacement radial et débit massique pour $U_x = \pm 50 \text{ m/s}$

3.4.2 Approche complète

L'approche complète consiste à prendre en compte la présence des rainures axiales délimitant chaque patin et leur déplacement dans le repère tournant. La Figure 101b modélise ce déplacement.

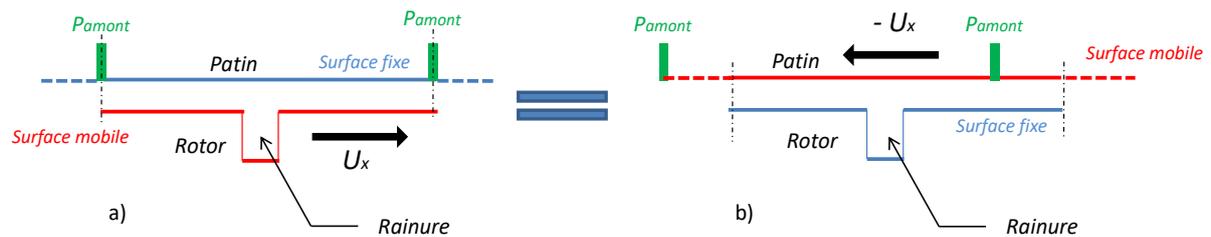


Figure 101. Représentation du mouvement du rotor texturé : a- système de coordonnées fixe, b- système de coordonnées tournant avec rainures axiales profondes en déplacement

A l'intérieur des rainures axiales profondes règne la pression P_{amont} . Chaque segment est muni d'un seul patin délimité par une rainure axiale. La longueur du patin sera donc égale à la longueur du segment, $L_{xPatin} = \frac{2\pi R}{n_{segm}}$. La modélisation du patin a été présentée sur la Figure 82c. Des conditions de périodicité seront considérées sur les bords « West » et « East », et des conditions de pression P_{amont} seront imposées sur les bords « North » et « South » et sur une section transversale qui correspond à une rainure axiale profonde qui se déplace avec la vitesse $-U_x$. Dans un premier temps et avant de débiter l'étude non-stationnaire, la Figure 102 représente la pression générée dans le patin sans présence d'isobare, et puis en présence d'une zone isobare statique.

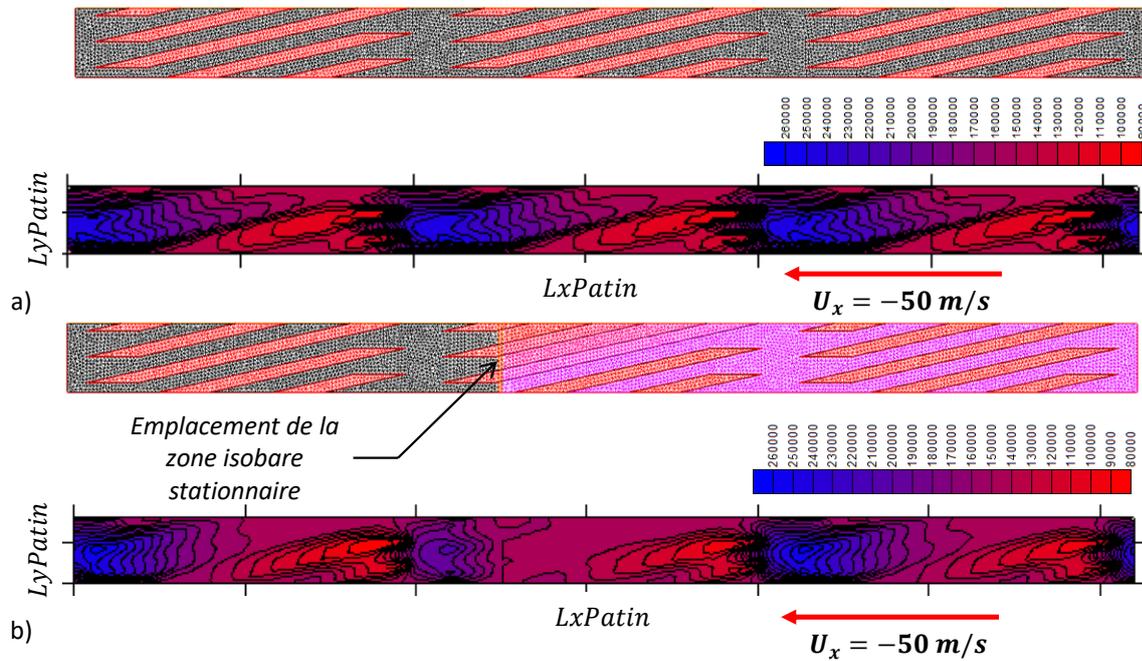


Figure 102. Champs de pression dans le patin pour une position imposée $e_x = 4 \mu m$ a) sans isobare b) avec présence d'une isobare stationnaire sur le 2ème motif

Ces résultats permettent de s'assurer de la bonne prise en compte numérique de la zone isobare. Dans la Figure 102a, la portance générée sans présence d'isobare est de $F_{hyd} = 13,57 N$ contre $F_{hyd} = 6,9 N$ pour le cas b. Le comportement global de la pression dans le patin reste similaire à celui vu avec l'approche simplifiée, avec notamment une dépression dans les pointes d'attaque des rainures inclinées et une surpression dans les pointes de sortie de chaque motif. Les résultats de la Figure 102 permettent d'anticiper le comportement de la charge hydrodynamique dans le cas du déplacement de la zone isobare tout le long du patin. Cette dernière entrainerait des augmentations puis des diminutions successives de la charge selon son emplacement.

3.4.2.1 Etude à épaisseur de film imposé

Le bilan des efforts représentés sur la Figure 103 reste identique à celui vu précédemment dans l'approche simplifiée. L'unique degré de liberté considéré sera le déplacement e_x et l'épaisseur du film est celle donnée par l'équation (319). Les surfaces du rotor et du patin seront donc parallèles pour vérifier les conditions de périodicité de la pression et du gradient de pression.

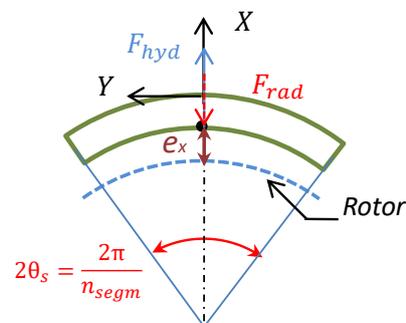


Figure 103. Bilan des efforts appliqués sur le patin (Approche complète)

Dans l'équation de Reynolds, la présence des rainures axiales sera modélisée par le déplacement avec la vitesse $-U_x$ d'une zone (coupe) isobare de très faible épaisseur. Ceci nécessitera la génération d'un maillage différent à chaque pas de temps. Pour permettre le calcul du terme $\partial(Ph)/\partial t$, une interpolation des pressions calculées à l'instant $n - 1$ sera effectuée sur le maillage de l'instant n et le terme non stationnaire aura donc pour expression:

$$\frac{\partial(Ph)}{\partial t} = h \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial h}{\partial t} = h_n \frac{P_n - P_{n-1}}{\Delta t} + P_n \dot{e}_x \quad (329)$$

Avec \dot{e}_x la vitesse de déplacement axial de la paroi qui correspond à un écrasement du film. A chaque pas de temps, la zone isobare avancera de la distance $d = -U_x \Delta t$.

Les résultats du calcul non stationnaire pour une épaisseur de film imposée sont présentés sur la Figure 104, pour $e_x = 4 \cdot 10^{-6} m$ et $e_x = 2 \cdot 10^{-6} m$, pour un pas de temps $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} s$, un nombre d'éléments de maillage d'approximative de 20000 *trg* et une vitesse $U_x = -50 m/s$. La position axiale du motif des rainures est fixée dorénavant à y_0 nominale et $\Delta P = 0,5 bar$ pour tous les calculs qui s'en suivront. La force normale oscille autour d'une valeur moyenne $F_{moy} \cong 9 N$ et $F_{moy} \cong 32 N$ pour les deux positions e_x étudiées. Une période d'oscillation correspond au balayage d'un motif par la coupe isobare.

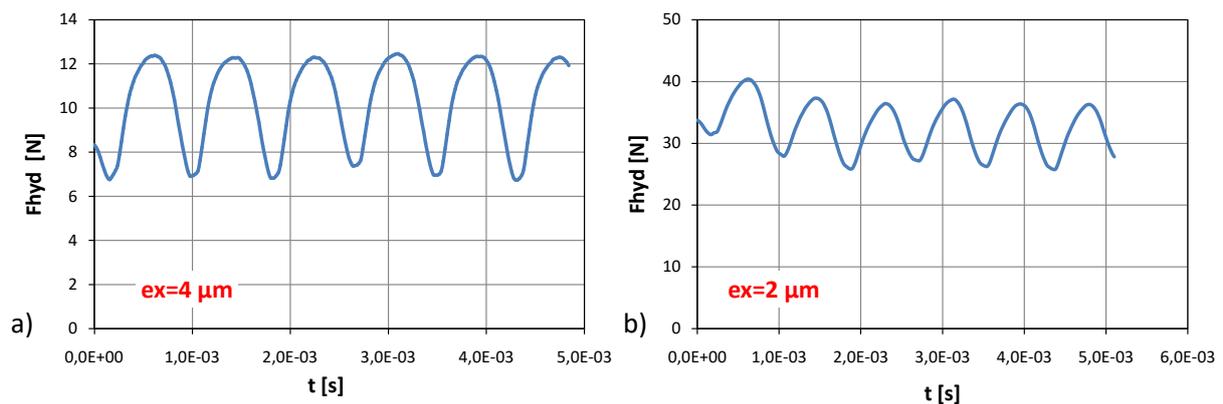


Figure 104. Variation de la charge dans le patin en fonction du temps ($dt=1.E-5 s$, maillage de 20000 trgs et $U_x=-50 m/s$) pour une épaisseur de film imposée de a) $e_x=4\mu m$ b) $e_x=2\mu m$

Pour vérifier la précision des résultats, plusieurs études ont été effectuées à différents pas de temps et à deux nombres d'éléments de maillage différents. Les résultats sont présentés en Figure 105 et montrent effectivement une bonne convergence avec le pas de temps et le maillage.

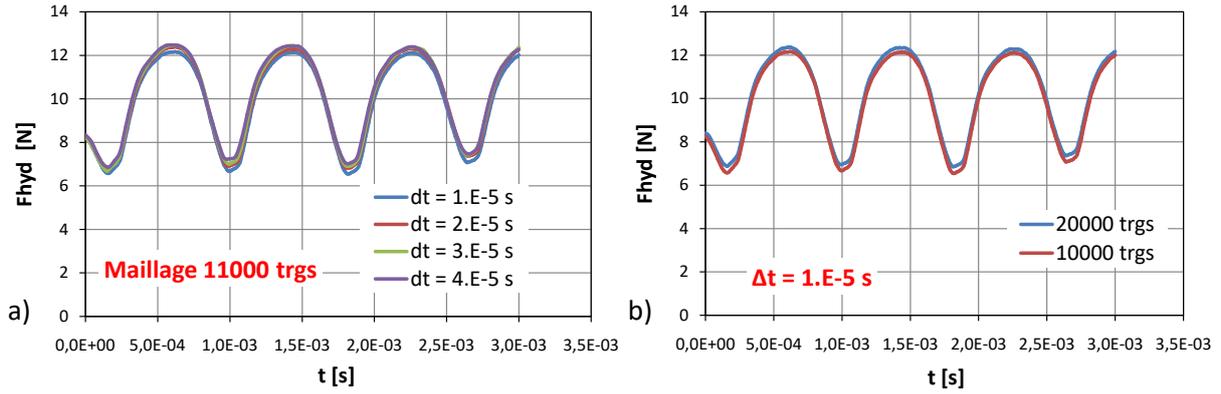


Figure 105. Etude de la convergence des résultats en pas de temps et nombre d'éléments de maillage

3.4.2.2 Etude à charge imposée. Application du principe fondamental de la dynamique avec 1 ddl

L'analyse du fonctionnement du patin à charge imposée, nécessite la résolution de l'équation du mouvement pour déterminer la position du segment en fonction du temps et en déduire le débit de fuite. L'application du PFD au segment à 1 ddl se traduit par l'équation suivante :

$$M\ddot{e}_X = F_{hyd}(e_X, \dot{e}_X) - F_{rad} - F_f(\dot{e}_X) \quad (330)$$

Cette équation sera intégrée à l'aide d'une méthode explicite directe (Méthode d'Euler à l'ordre 1) :

$$\begin{cases} \ddot{e}_X^{(n)} = \frac{1}{M} [F_{hyd}^{(n-1)}(e_X, \dot{e}_X) - F_{rad} - F_f^{(n-1)}(\dot{e}_X)] \\ \dot{e}_X^{(n)} = \dot{e}_X^{(n-1)} + \ddot{e}_X^{(n)} \Delta t \\ e_X^{(n)} = e_X^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} [\dot{e}_X^{(n)} + \dot{e}_X^{(n-1)}] \end{cases} \quad (331)$$

Le calcul de la force sur le nez a été abordé en chapitre 2, eq. (210) .Pour pouvoir intégrer cette force de frottement dans un modèle dynamique, elle sera reformulée autrement. L'équation (211) présentait la force normale de contact F_z appliquée sur le nez qui englobait la contribution de la force normale F_n , tel que :

$$F_z = F_n - F_{fluide_nez} \quad (332)$$

La force de frottement constante est alors réécrite avec un coefficient de frottement équivalent f_{eq} :

$$F_f = f_{eq} F_n \quad (333)$$

Le modèle permettant de simuler un mouvement de glissement-adhérence (« Stick-Slip ») qui sera considéré est basé sur la loi de Coulomb et sur la considération d'une déformation élastique des aspérités. La force de frottement peut alors être considérée comme une force élastique induite par cette déformation :

$$F_{frott} = K_t(e_X - e_0) \quad (334)$$

Ceci est équivalent à exprimer la loi de frottement par la méthode des pénalités avec le paramètre K_t [57] :

$$F_f^{(k)} = \begin{cases} K_t(e_X^{(k)} - e_X^{(k-1)}) & \text{si } |F_{frott}| < f_{eq}|F_n| \\ f_{eq}|F_n| \frac{2}{\pi} \arctan[C_t(e_X^{(k)} - e_X^{(k-1)})] & \text{sinon} \end{cases} \quad (335)$$

Ce modèle simple permet de prendre en considération l'historique du mouvement du joint pour réadapter la force de frottement à chaque instant et permet de régulariser la discontinuité présente dans le modèle de Coulomb. Plusieurs autres modèles ont été développés depuis et permettent notamment de considérer un mouvement bidirectionnel, ou encore une force normale variable. Parmi les plus récents on retrouve celui de Petrov [58] qui propose aussi la prise en considération de la variation des caractéristiques du contact. Ce modèle a montré son efficacité dans plusieurs études de paliers [59] et de joints d'étanchéités [7].

Les résultats ci-après seront présentés avec et sans force de frottement pour les paramètres de calcul suivants :

$F_{Ressort_ax}$ [N]	$n_{ressort_ax/segment}$	ΔP [bar]	M [g]
1,25	4	0,5	50

La Figure 106 présente les résultats obtenus pour une vitesse linéaire $U_x = -50 \text{ m/s}$ et une force du ressort circonférentiel de $F_{circ_ressort} = 5 \text{ N}$. Les amplitudes de déplacement sans considération de frottement sont plus importantes, puisque le frottement contribue à l'amortissement du mouvement. Les déplacements s'effectuent autour d'une position moyenne $e_x = 5,3 \mu\text{m}$ avec des amplitudes ne dépassant pas $0,6 \mu\text{m}$ sans frottement et $0,2 \mu\text{m}$ avec frottement. La force hydrodynamique oscille autour de la valeur de la force radiale du ressort et le débit de fuite moyen du joint est de $Q_m = 0,3 \text{ g/s}$. Comme il a été déjà mentionné au chapitre 2, les puissances dissipées sont un indicateur majeur de l'échauffement du joint. La puissance ici présente ne fait intervenir que le frottement par cisaillement, puisque les hauteurs de film dépassent largement la limite supérieure de contact 3σ . Les valeurs de cette puissance varient autour de $\mathcal{P}_r = 42 \text{ W}$; elles sont donc assez faibles et réconfortent l'hypothèse d'un fonctionnement isotherme. La force de frottement sur le nez F_f varie entre les deux limites $F_f = \pm f_{eq}F_n = \pm 1,3 \text{ N}$ avec la présence de zones de glissement lors du passage de l'isobare d'un motif à l'autre, mais le joint est en adhérence la majeure partie du temps. La périodicité du mouvement correspond au temps nécessaire à l'isobare pour parcourir un motif complet et qui est de $T = 8,27 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ (Figure 106 et Figure 107).

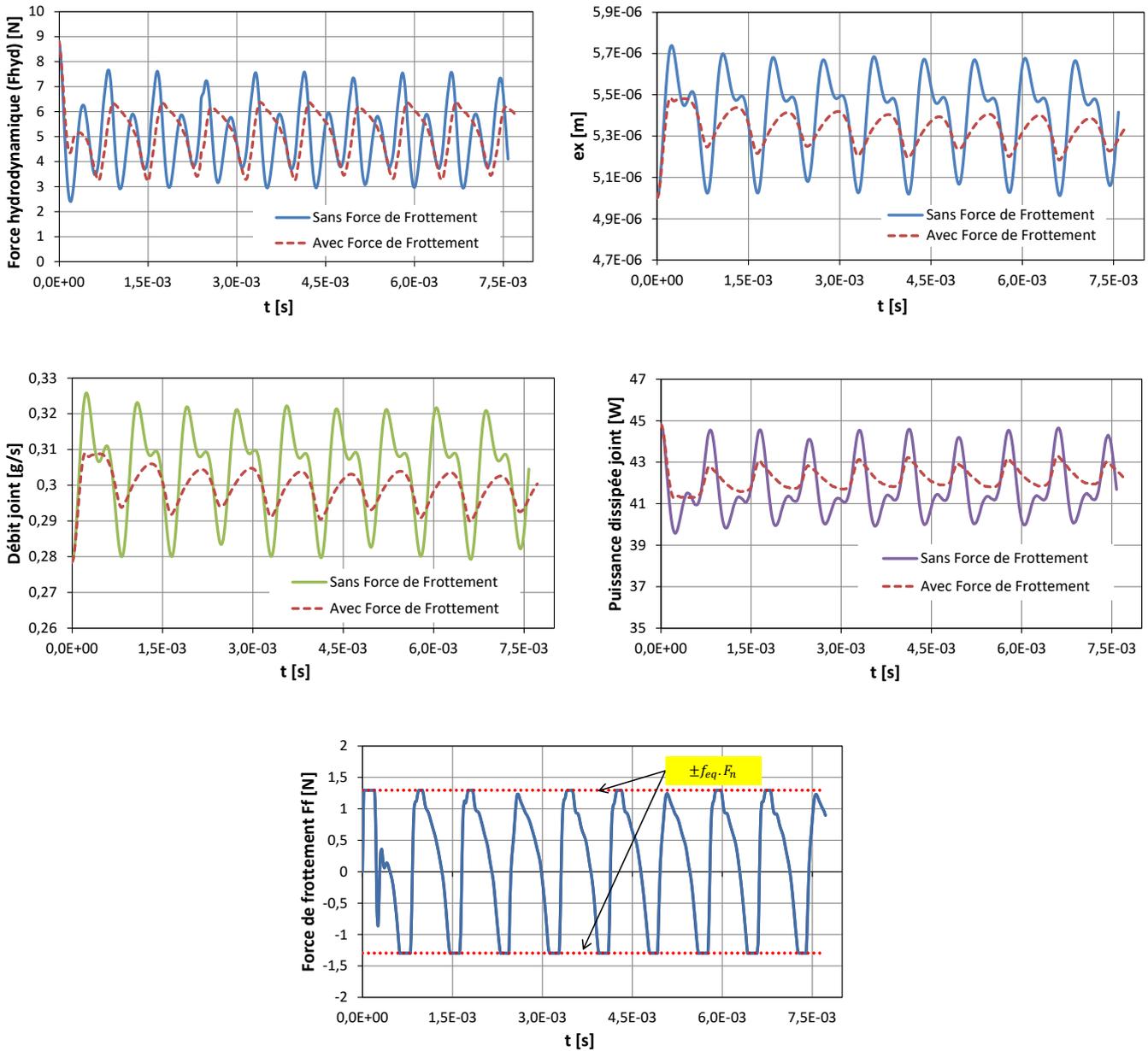


Figure 106. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50\text{ g}$, $F_{circ_ressort} = 5\text{ N}$, $U_x = -50\text{ m/s}$)

La Figure 107 retrace les résultats pour une vitesse linéaire $U_x = -50\text{ m/s}$ et une force du ressort circonférentielle plus élevée de $F_{circ_ressort} = 10\text{ N}$. Les déplacements sont plus faibles que pour le cas précédents avec une position moyenne de $e_x = 3,9\text{ }\mu\text{m}$. Les amplitudes des résultats avec et sans frottement sont beaucoup plus rapprochés et les amplitudes de déplacement vont de $0,3\text{ }\mu\text{m}$ à $0,5\text{ }\mu\text{m}$. Le débit et la puissance moyenne sont $Q_m = 0,22\text{ g/s}$ et $\mathcal{P}_r = 53\text{ W}$. On remarquera que les zones de glissement sont beaucoup plus marquées et s'étalent une durée plus grande que dans le cas précédent. Ils correspondent là encore à la plus grande et à la plus petite amplitude de mouvement.

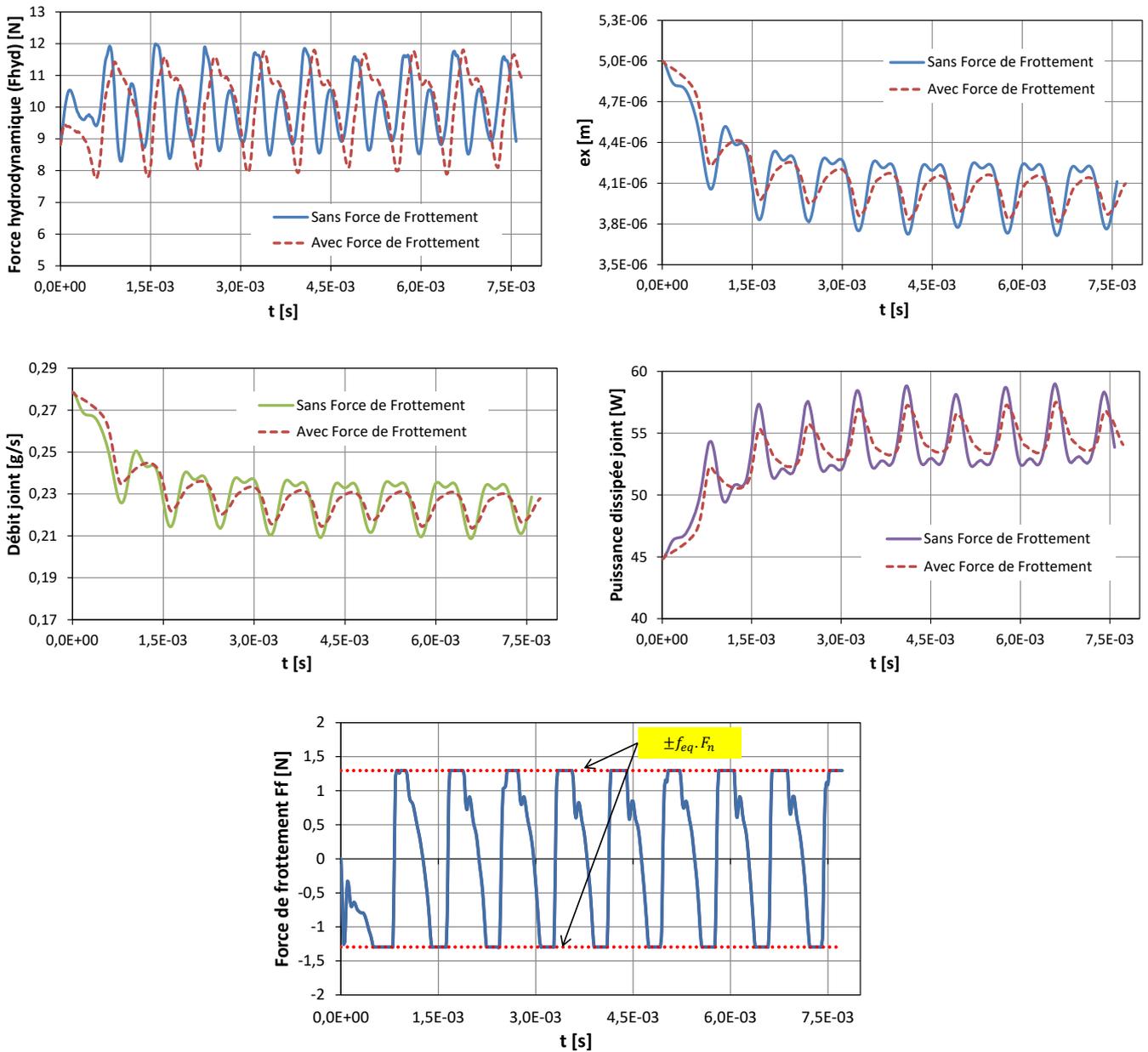


Figure 107. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 10N$, $U_x = -50 m/s$)

Les deux calculs ci-dessus ont été réalisés avec les paramètres de force de frottement $K_t = 1.2 \cdot 10^8 N/m$ et $C_t = 10^{14} m^{-1}$.

Pour étudier l'impact de la vitesse sur le comportement du joint, les résultats de la Figure 108 présentent un cas de fonctionnement obtenu pour une vitesse linéaire plus faible de $U_x = -12m/s$ et une force du ressort circonférentiel $F_{circ_ressort} = 5N$. Le déplacement du segment sans force de frottement est plus faible comparé aux résultats obtenus avec la vitesse $U_x = -50 m/s$, et la position moyenne est à $e_x = 2,83 \mu m$ pour une amplitude de $0,3 \mu m$. La force hydrodynamique varie très légèrement avec le temps autour de la force radiale du ressort. A faibles compressibilités, l'impact d'un léger mouvement du segment n'est donc pas très notable. Le débit et la puissance moyenne sont $Q_m = 0,182 g/s$ et $P_r = 4,5 W$. En prenant en considération la force de frottement dans le calcul, les amplitudes des déplacements sont légèrement plus faibles. L'équilibre dynamique fait que la force de frottement suit les variations de la force hydrodynamique. A faible vitesse de

déplacement, le mouvement du segment est continuellement en adhérence, ce qui explique le faible impact du frottement sur les autres résultats.

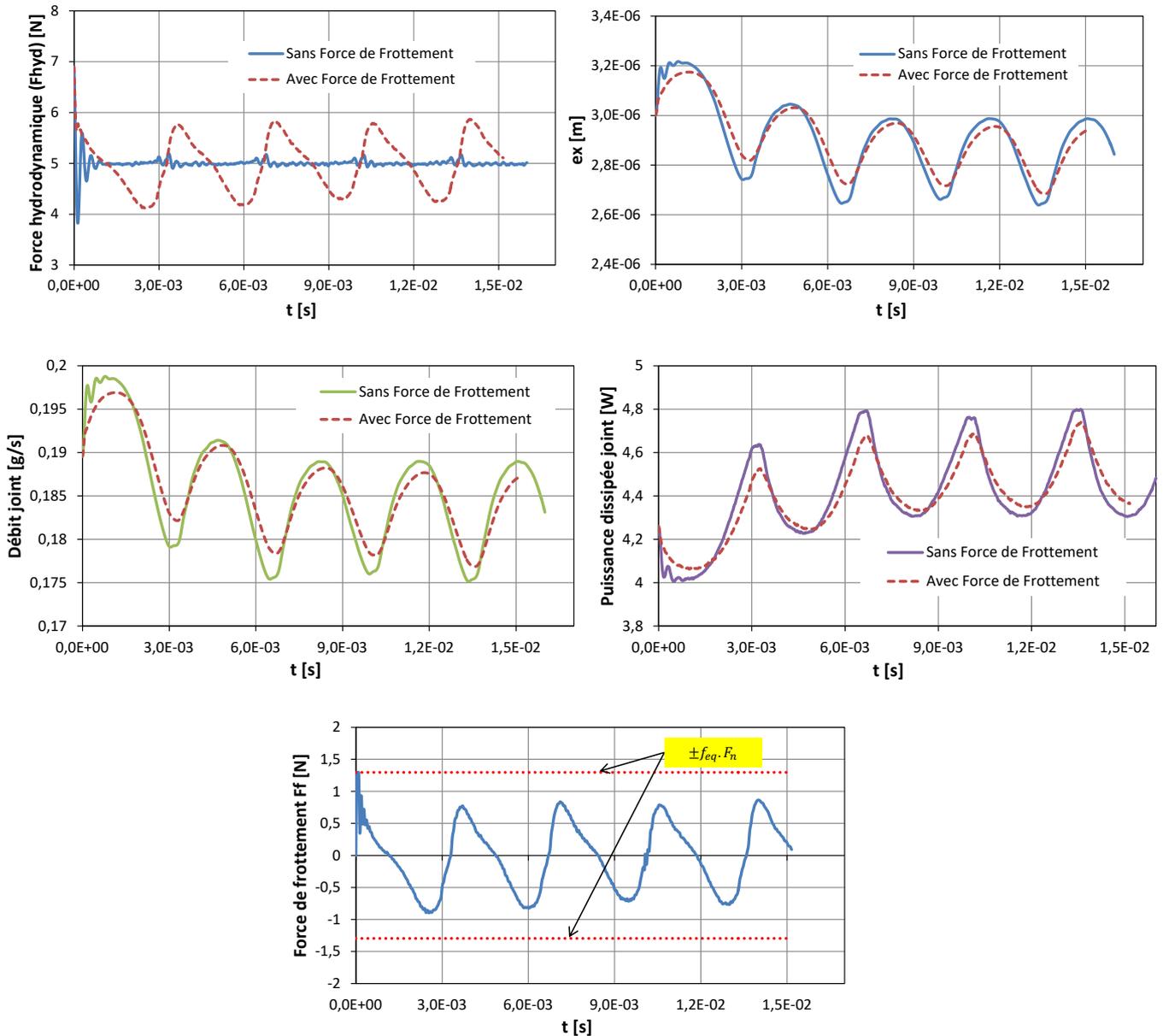


Figure 108. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50\text{ g}$, $F_{\text{circ_ressort}} = 5\text{ N}$, $U_x = -12\text{ m/s}$)

En augmentant la force du ressort circonférentiel à $F_{\text{circ_ressort}} = 10\text{ N}$, la force de frottement est encore plus faible. Le comportement du segment reste similaire à celui du cas précédent avec un déplacement moyen plus faible $e_x = 1,8\ \mu\text{m}$. Le débit et la puissance moyenne du joint sont $Q_m = 0,146\text{ g/s}$ et $P_r = 7\text{ W}$. La période du mouvement est plus grande pour ces deux derniers cas, et sa valeur est $T = 3,44 \cdot 10^{-3}\text{ s}$ (Figure 108 et Figure 109).

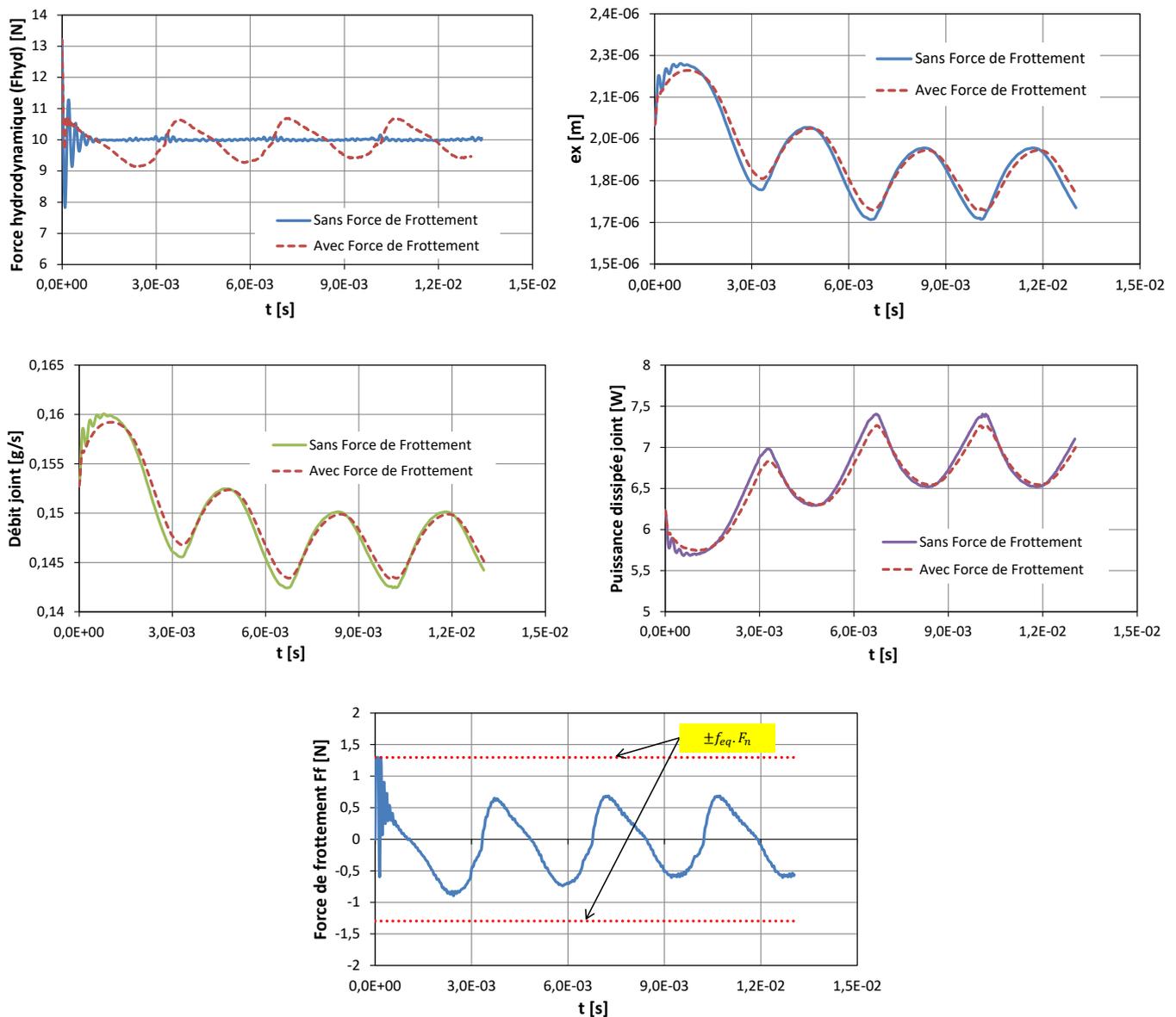


Figure 109. Résultats de l'étude dynamique ($M = 50g$, $F_{circ_ressort} = 10N$, $U_x = -12 m/s$)

Les deux derniers calculs ($U_x = -12 m/s$) ont été réalisés avec les paramètres $K_t = 1,5 \cdot 10^8 N/m$ et $C_t = 10^{14} m^{-1}$.

Avant de clôturer cette partie, une comparaison de ces derniers résultats avec les résultats obtenus par l'approche simplifiée précédente serait intéressante. Les calculs comparés ont été effectués pour $F_{circ_ressort} = 5 N$.

Pour une vitesse de $U_x = -12 m/s$, les résultats de la Figure 97 obtenus par approche simplifiée donnent les positions limites d'équilibre $e_{x1} = 2,44 \mu m$ et $e_{x2} = 2,95 \mu m$ tandis que les résultats obtenus par approche complète et présentés sur la Figure 108 indiquent un déplacement moyen de $e_x = 2,83 \mu m$. Cette valeur est donc dans la plage $[e_{x1}, e_{x2}]$.

Pour une vitesse $U_x = -50 m/s$, l'approche simplifiée (Figure 97) donne les positions d'équilibre $e_{x1} = 4,66 \mu m$ et $e_{x2} = 5,3 \mu m$ tandis que le déplacement moyen $e_x = 5,3 \mu m$ prédit par l'approche complète frôle la limite supérieure. Toutefois, les résultats restent là encore proches.

3.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté l'analyse du joint radial segmenté à portance. Il a débuté par la présentation du joint et de son fonctionnement ainsi que de la modélisation adaptée. Un repère tournant et un maillage triangulaire ont été considérés pour résoudre l'équation de Reynolds.

Deux approches différentes ont permis d'étudier le comportement du joint. La première (approche simplifiée) a mis en évidence l'effet de pompage présent pour ce joint. Une étude à différents ΔP , a permis de statuer sur le sens de l'écoulement sous la lèvre en fonction du sens de rotation du rotor. Le sens d'inclinaison des rainures (et éventuellement aussi leur angle d'inclinaison) peut favoriser la réduction du débit de fuite.

Cette approche simplifiée a aussi permis de prendre conscience de l'impact de la position axiale des rainures γ_0 sur la portance générée dans le patin. Il a ainsi été constaté qu'une dépression est toujours située aux pointes d'attaque des rainures. Le nombre de pointes des rainures présentent sous le patin joue donc un rôle majeur dans l'ouverture du joint et ce nombre ne peut être contrôlé que par le paramètre γ_0 .

La deuxième approche a été effectuée à ΔP et γ_0 fixes et a présenté une modélisation complète d'un segment prenant en considération les rainures axiales profondes qui délimitent les patins. Les résultats ont permis d'obtenir le débit de fuite et la puissance dissipée dans le joint. Ils ont aussi permis de conclure quant à l'influence du frottement sous le nez sur le comportement de joint.

En confrontant les résultats obtenus par les deux approches, on a observé que l'approche simplifiée permet de bien prédire la position du déplacement moyen du segment et les autres paramètres qui en découlent.

4 Conclusions et perspectives

Les étanchéités dynamiques font partie intégrante du fonctionnement d'un moteur aéronautique. Parmi ces étanchéités, le joint radial segmenté se démarque par une conception complexe et par une grande capacité à s'adapter aux conditions de fonctionnement dynamique des rotors. Ce mémoire s'intéresse à l'étude et à la modélisation de trois configurations ; le joint radial segmenté sans poches, le joint radial segmenté avec poches et finalement le joint radial segmenté à portance.

La 1^{ère} partie a dressé le contexte de l'étude et a introduit les principales étanchéités utilisées en aéronautique. Une étude bibliographique a permis de se rendre compte de la rareté des études menées jusqu'à présent et de justifier ainsi la nécessité d'investigations poussées pour comprendre le comportement de ce joint.

La 2^{ème} partie de cette thèse a constitué une suite des travaux de Mariot [8] et a eu comme objectif la prise en compte des effets thermiques dans l'étude du fonctionnement statique du JRS avec et sans poches. L'analyse thermique passa d'abord par une étude des différentes sources d'échauffement du joint. Un algorithme puis une résolution thermo-gaso-dynamique ont été mis en place. Ce calcul intègre le couplage entre le joint, le rotor et le film fluide les séparant. Il s'est basé sur :

- la résolution de l'équation de Reynolds pour déterminer les pressions fluides,
- un modèle de contact pour calculer les forces de contact et le flux d'échauffement dû au contact,
- la résolution d'une forme simplifiée de l'équation de l'énergie pour déterminer les températures dans le film fluide,
- la résolution couplée de l'équation de chaleur dans le joint et le rotor.

Le modèle développé a été appliqué à deux joints de diamètres différents. Les résultats du 1^{er} joint d'un diamètre modéré ont permis de montrer que l'échauffement dû au contact est prépondérant devant celui dû aux chaleurs de compression et de dissipation dans le fluide. Ces résultats ont aussi permis de confirmer que le couple et les puissances dissipées sont un indicateur du taux d'échauffement subit par le joint. Les résultats du 2^{ème} joint d'un grand diamètre ont pu être confrontés à des mesures expérimentales pour trois géométries différentes. En fonction de la géométrie et des conditions de fonctionnement, la concordance entre calculs et mesures a été favorable dans certains cas, et moins pour d'autres. Les écarts d'ondulations de surface se sont avérés être un paramètre influent qui permettait de calibrer les résultats numériques. Les ondulations peuvent donc avoir un effet majeur sur la portance créée et sur les zones de contact.

La confrontation numérique-expérimentale a montré que le modèle thermique développé devra en perspective être consolidé par un modèle d'usure tenant compte du frottement local important subit par le joint. La prise en compte des déformations thermiques et mécaniques se doit aussi d'apparaître dans de prochains développements.

La 3^{ème} et dernière partie a eu pour but l'étude du JRS à portance (JRSP). Ce joint repose sur un rotor à rainures inclinées. Le chapitre débuta par la présentation de la géométrie du joint et par une étude bibliographique des différentes approches permettant de traiter la présence de rainures inclinées

pour des paliers, butées et étanchéités dynamiques. La résolution de l'équation de Reynolds a ensuite été mise en place ainsi que deux approches différentes du problème. La 1^{ère} approche s'est basée sur un modèle stationnaire à 1ddl qui permet de simplifier l'analyse en considérant un joint à surface lisse en face d'un rotor muni d'un motif périodique. Ce modèle était nécessaire pour justifier la conception des rainures du rotor et étudier leur impact sur le débit de fuite. Un effet de pompage a ainsi pu être constaté et étudié. Le jeu axial présent pour ce type de joints a aussi été investigué. Ce dernier a permis de conclure sur l'importance de la position axiale des rainures par rapport au segment. Les résultats de cette première approche ont permis de déterminer une plage de fonctionnement du joint pour deux vitesses de rotation correspondant aux phases de décollage et de croisière du moteur. Un débit de fuite moyen en a été déduit.

L'approche complète a par la suite permis de prendre en compte les rainures axiales profondes qui séparent les patins et où règne la pression P_{amont} . L'étude a été donc conduite dans un système de coordonnées tournant, en régime non-stationnaire et en considérant un seul degré de liberté du segment. Les résultats ont permis d'obtenir un déplacement moyen et de calculer le débit de fuite correspondant. Une confrontation des résultats obtenus par les deux approches a montré une bonne concordance. Comparé aux résultats numériques du JRS, le JRSP présente une portance et des débits de fuites plus élevés, mais en contrepartie un contact quasi inexistant et de faibles puissances dissipées.

Cette étude a été conduite à un degré de liberté. En réalité et à l'instar du JRS, le JRSP possède 3 degrés de liberté. Une perspective de suite pour ce travail serait de reconsidérer un système de coordonnées fixe et de résoudre une équation de Reynolds modifiée capable de prendre en considération des rainures non stationnaires et un maillage mobile.

Pour conclure, cette thèse a contribué au développement et à la compréhension du fonctionnement du JRS et du JRSP. Elle fait partie d'une série d'études initiées par la thèse de Mariot [8] et qui perdurera tant que le comportement de cette étanchéité ne sera pas encore complètement connu.

Annexe A : Résultats thermiques du joint de grand diamètre

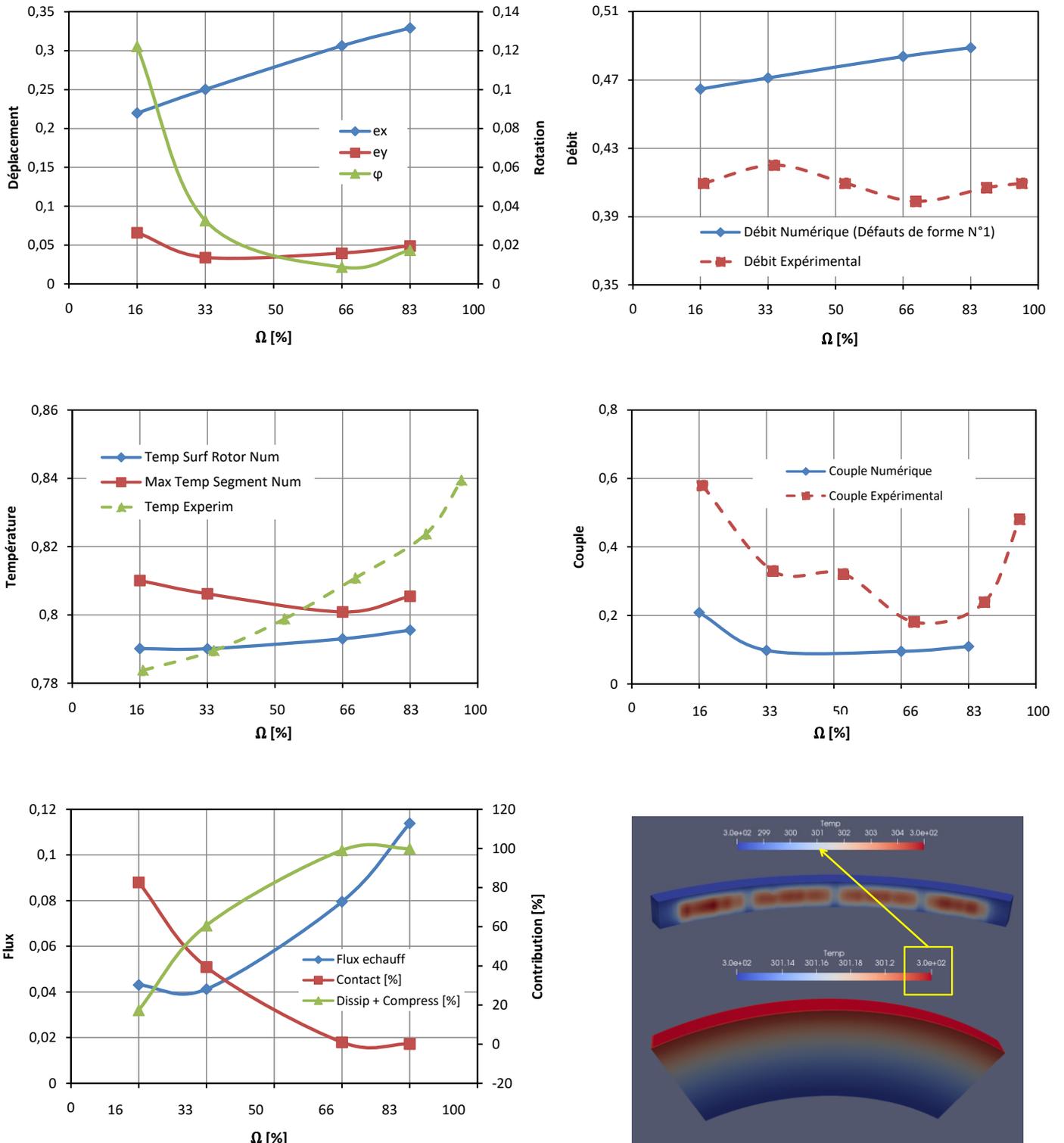


Figure A- 1. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar

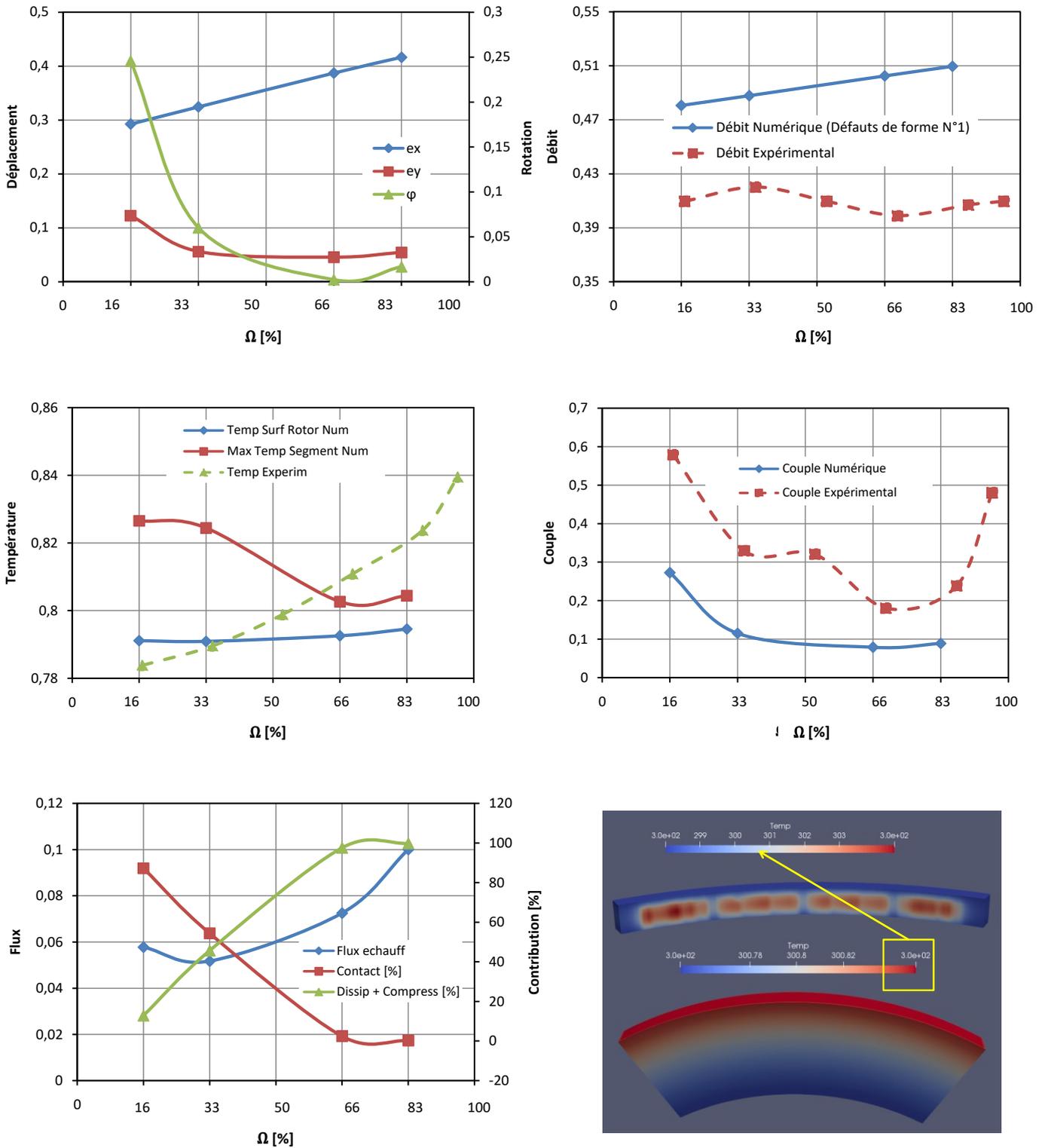


Figure A- 2. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essai N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar

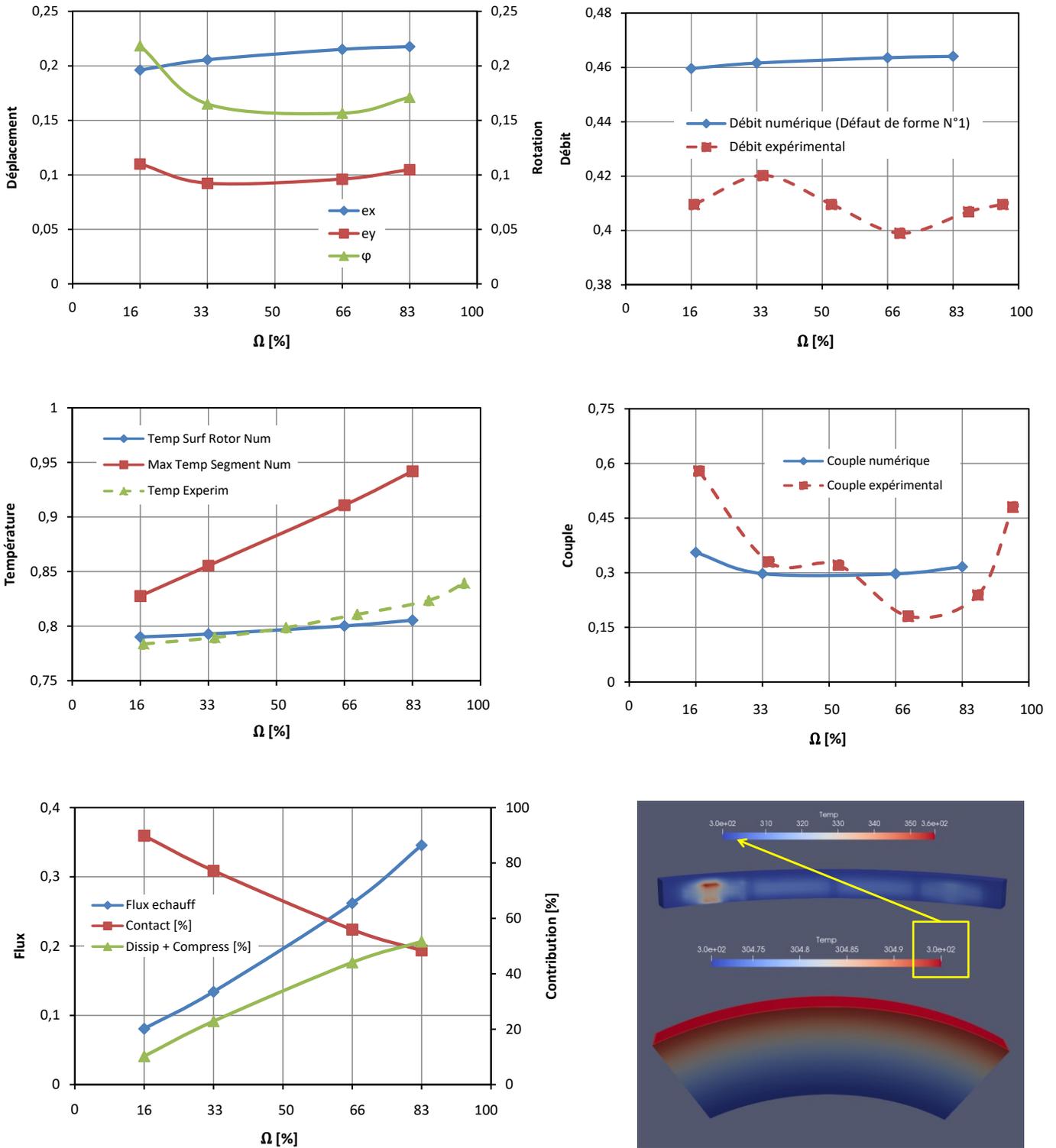


Figure A- 3. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar

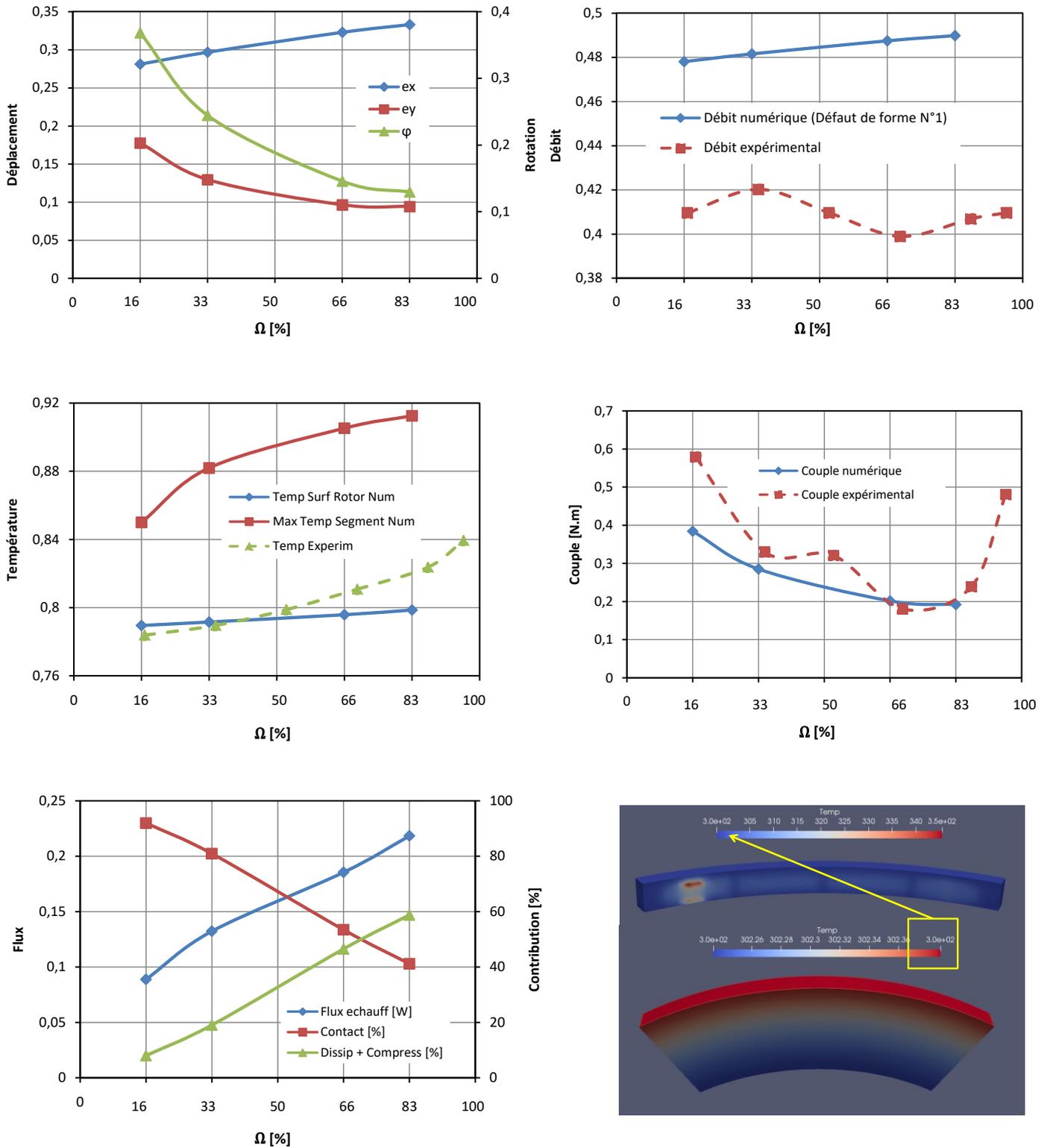


Figure A- 4. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x,y, $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 0,4$ bar

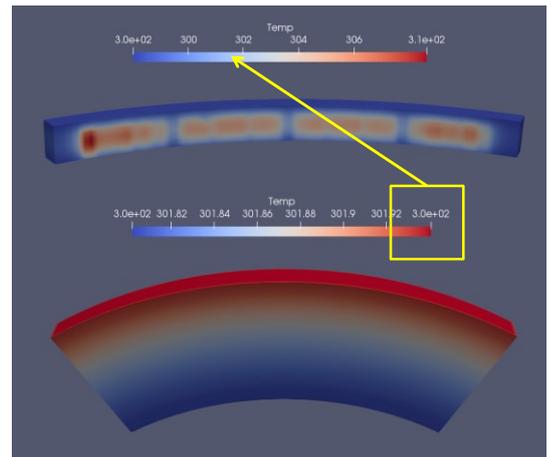
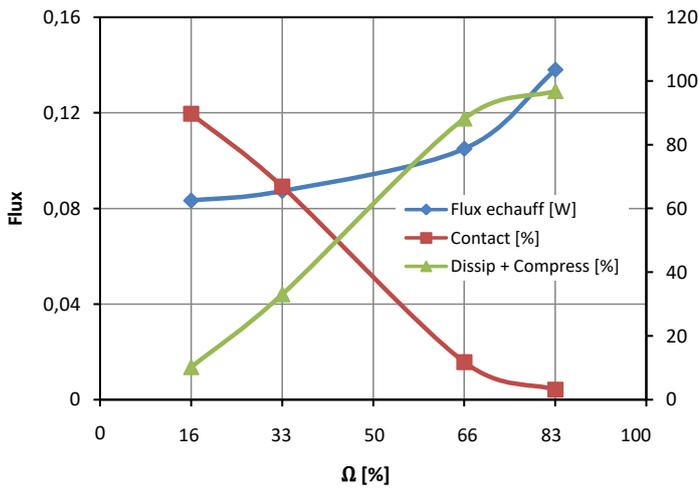
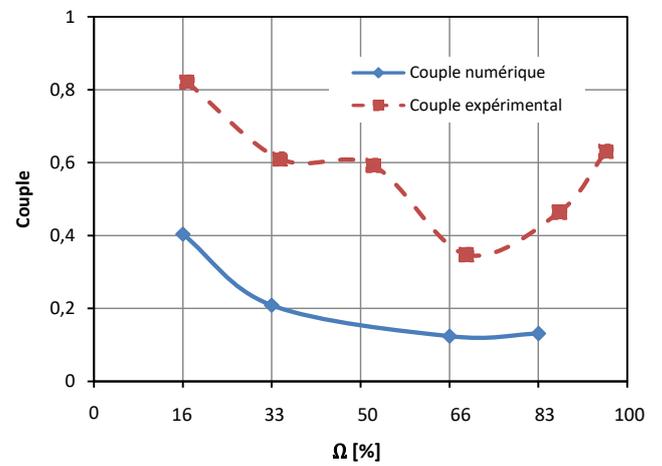
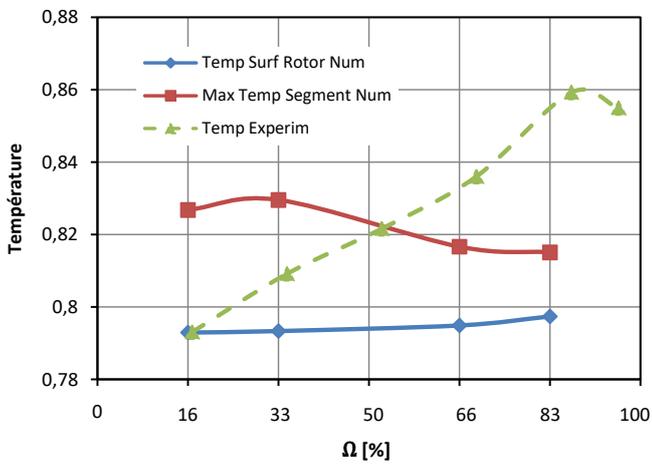
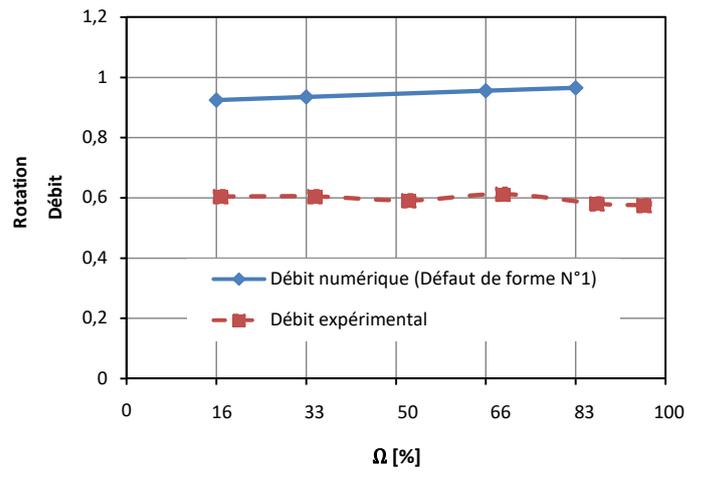
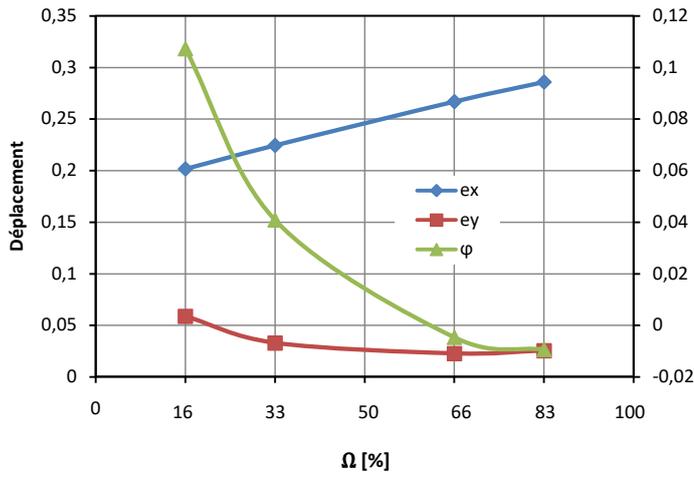


Figure A- 5. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1$ bar

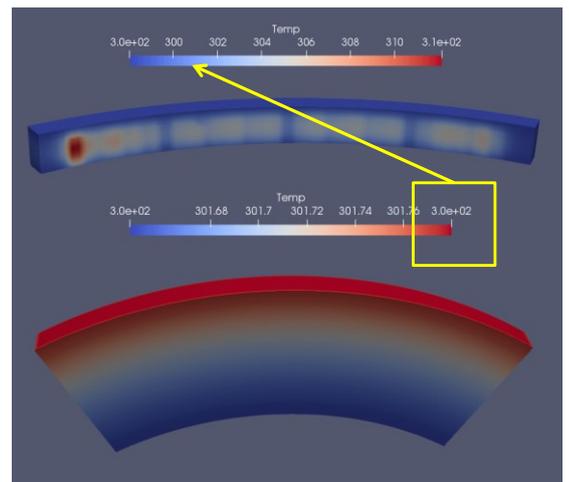
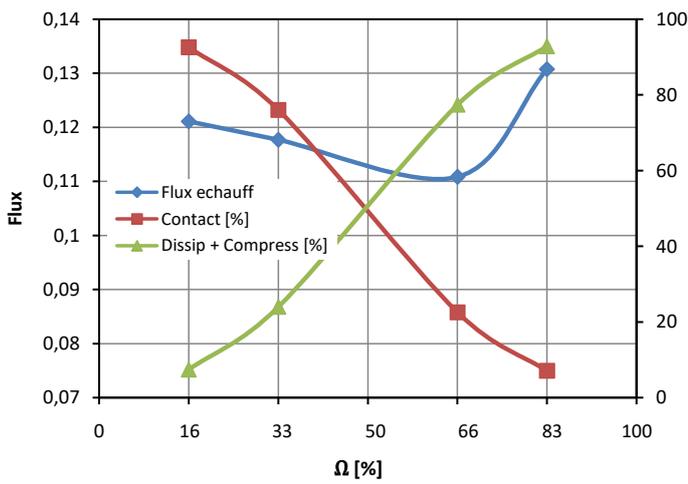
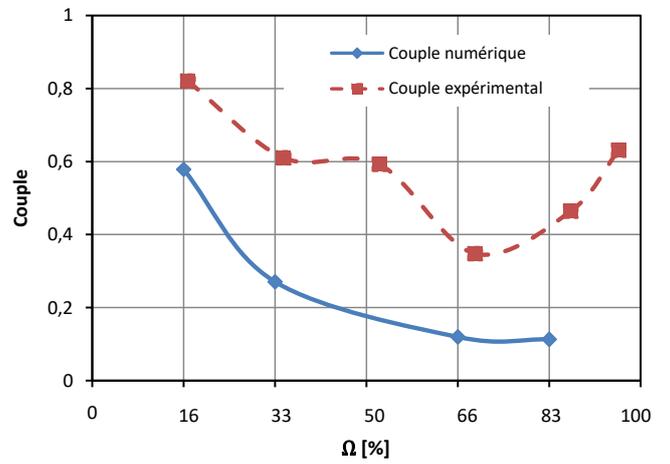
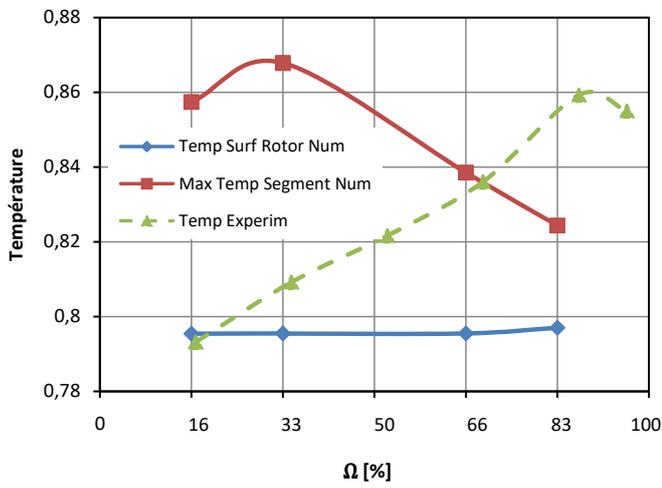
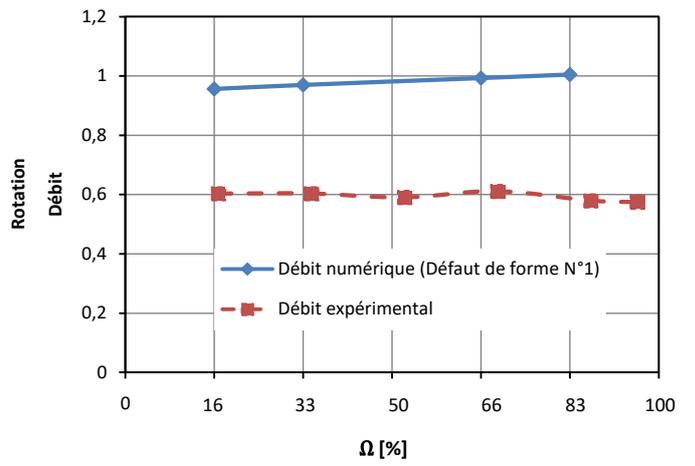
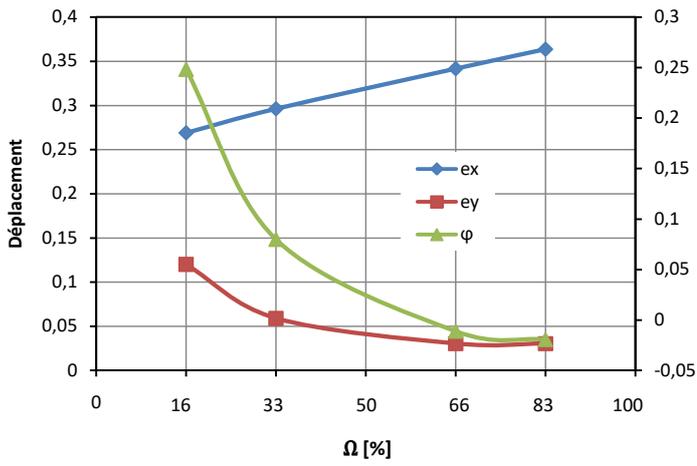


Figure A- 6. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1 \text{ bar}$

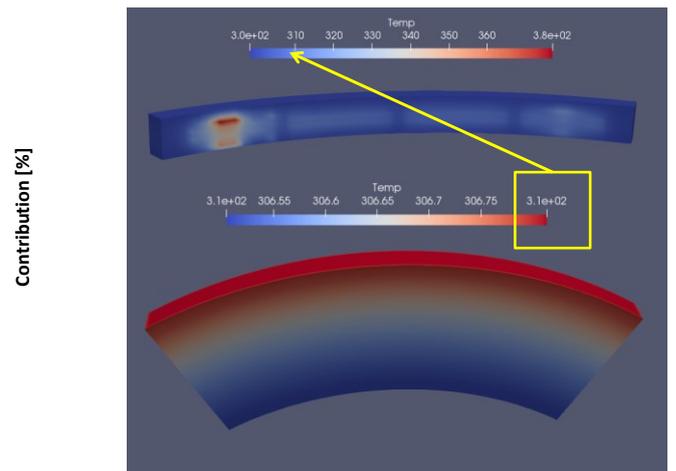
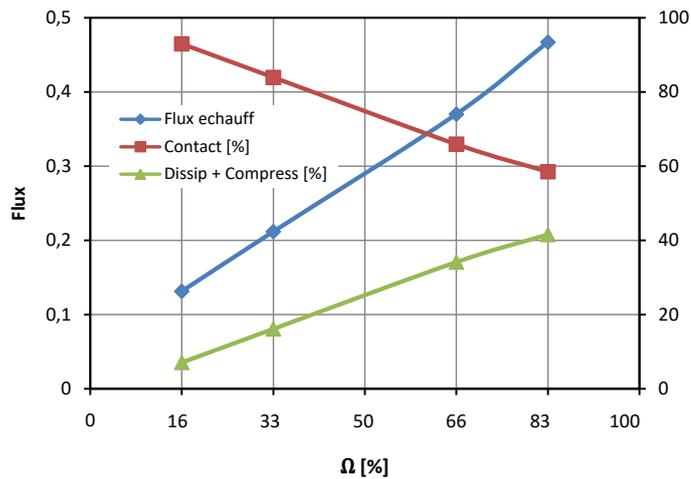
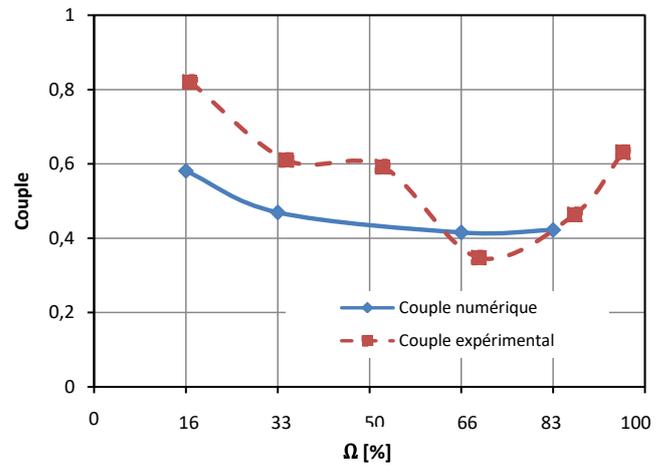
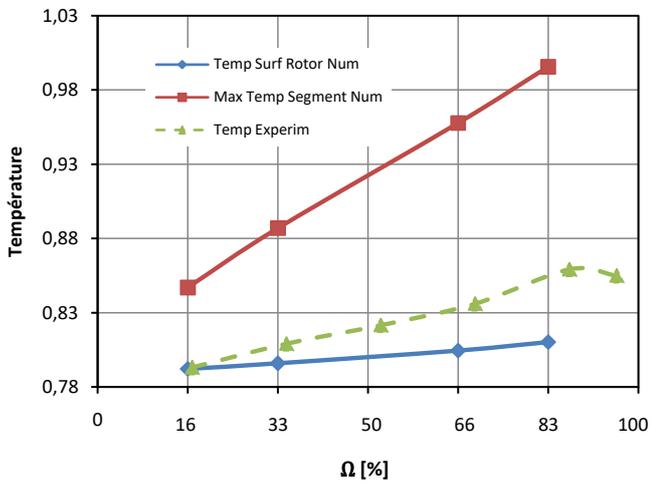
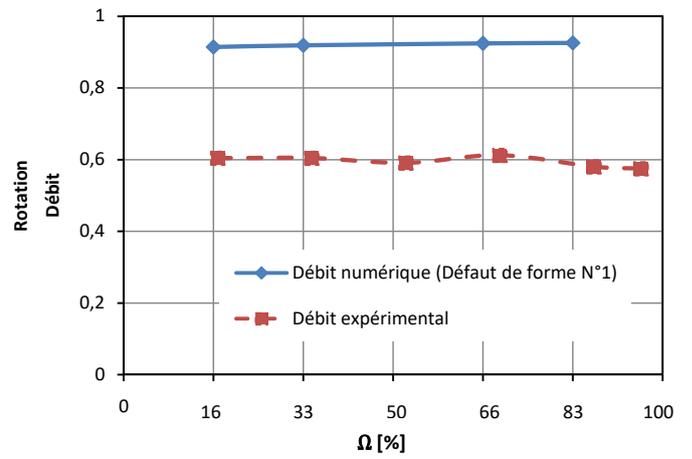
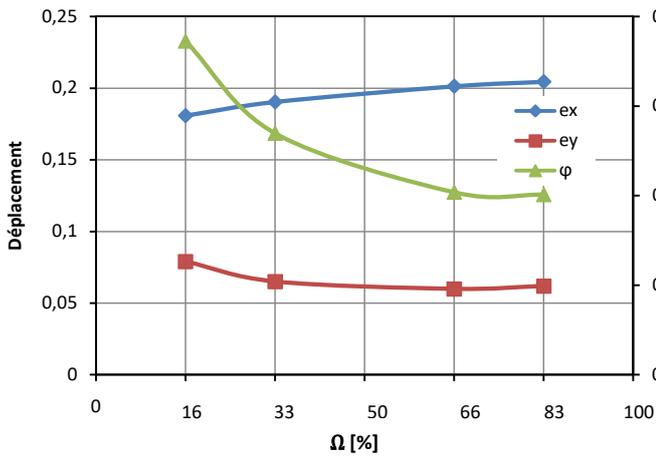


Figure A- 7. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1$ bar

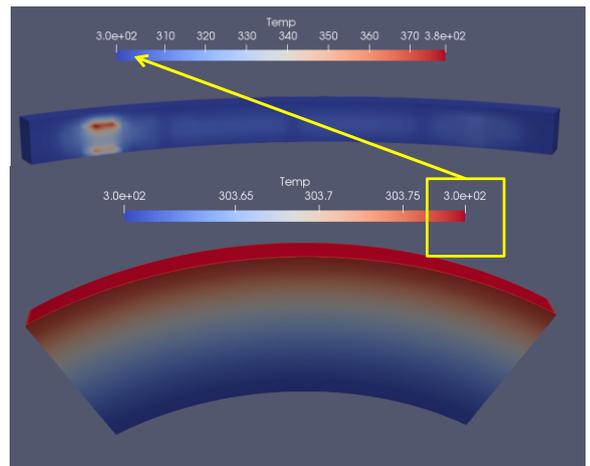
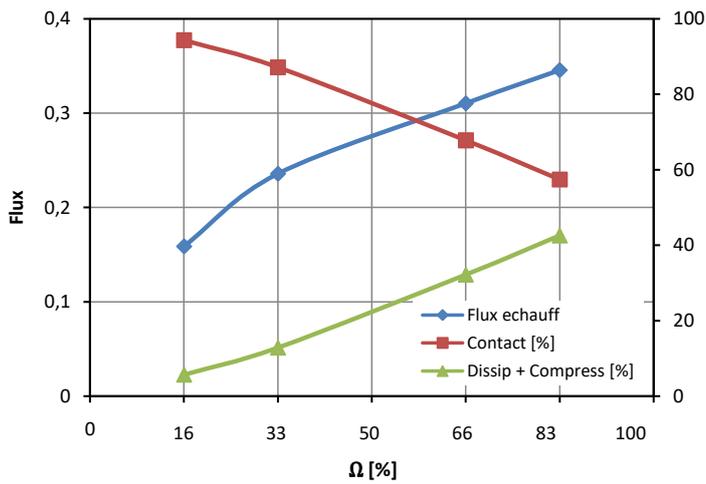
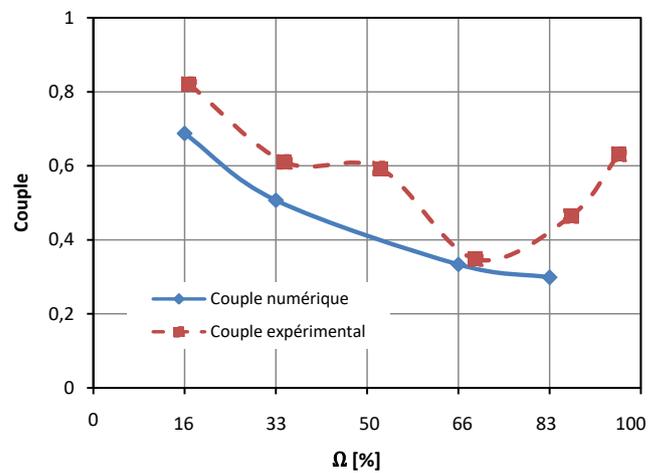
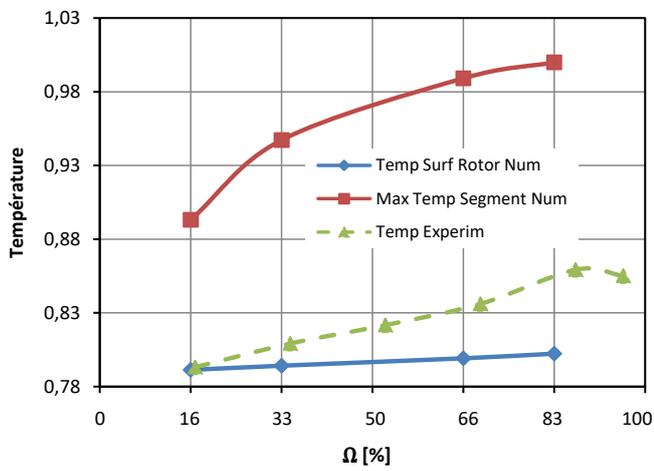
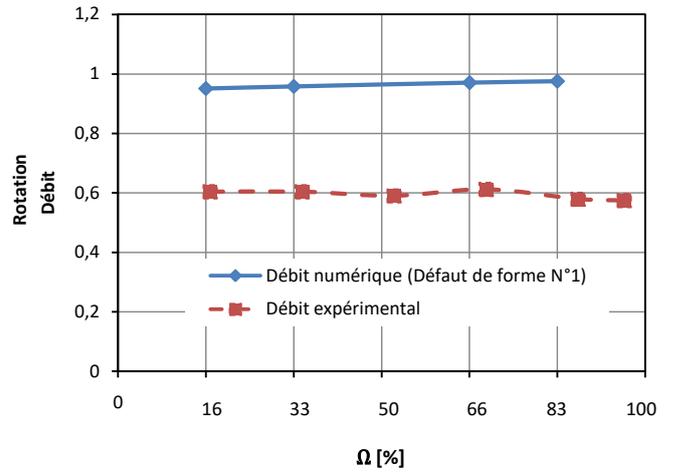
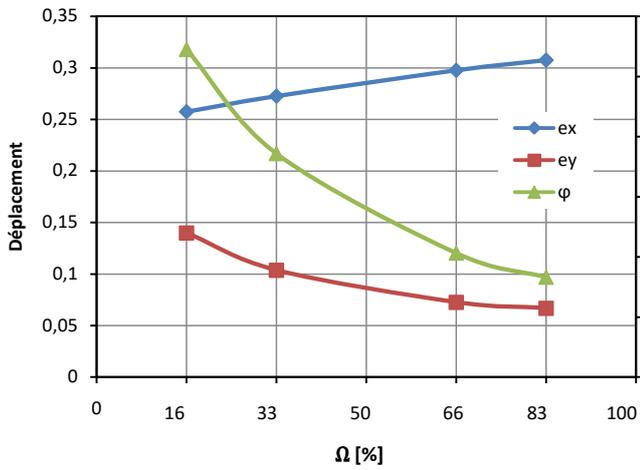


Figure A- 8. Résultats adimensionnés: joint N°1 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°1 - $\Delta P = 1 \text{ bar}$

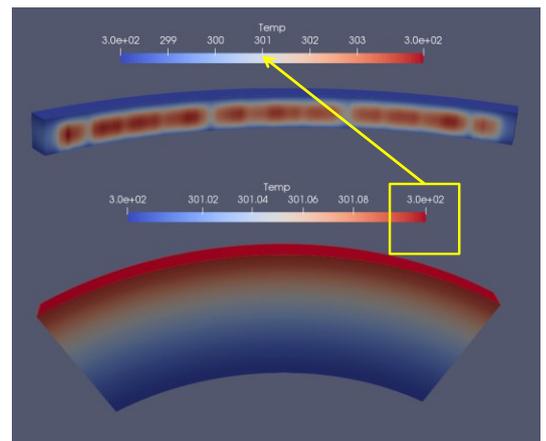
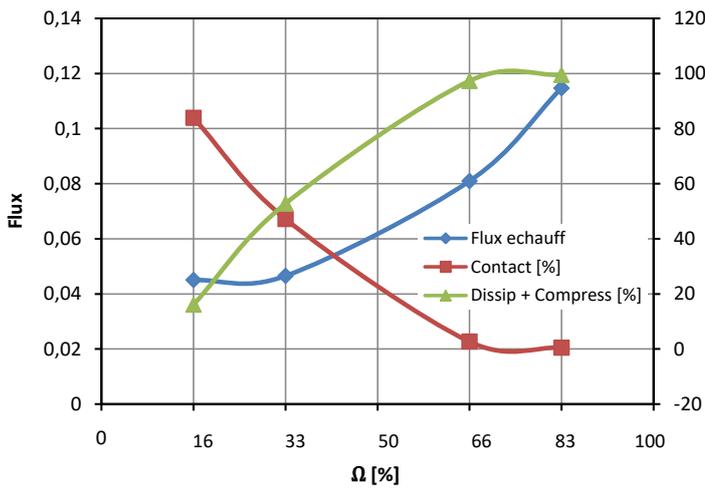
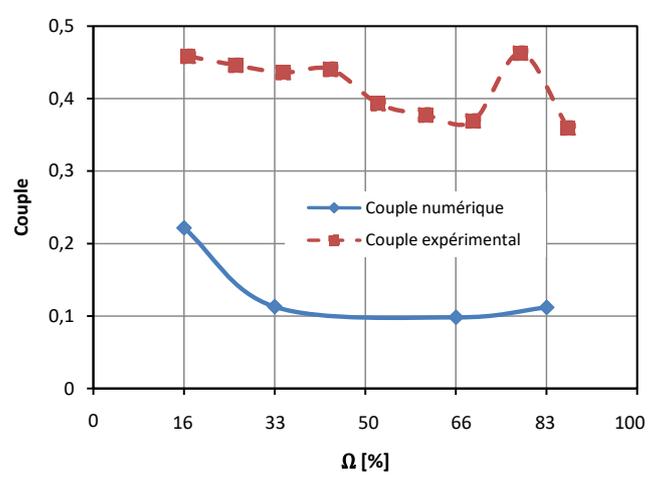
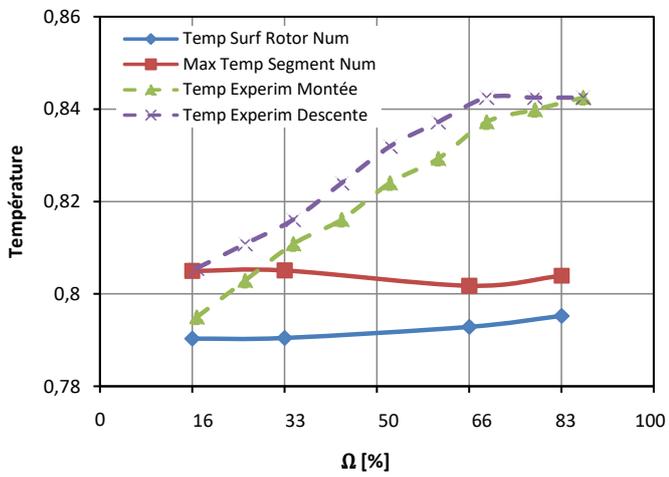
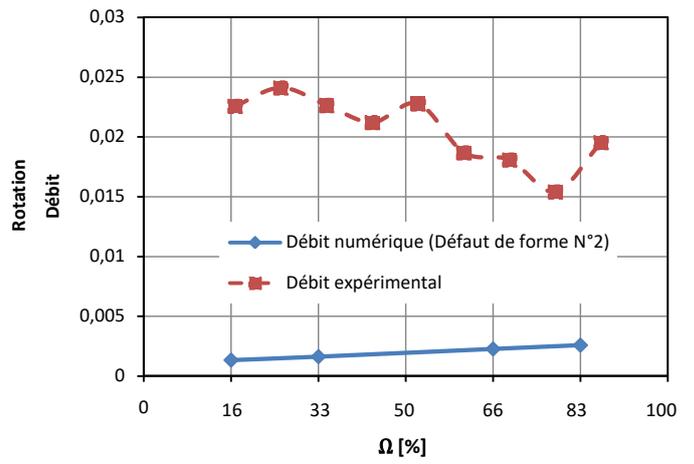
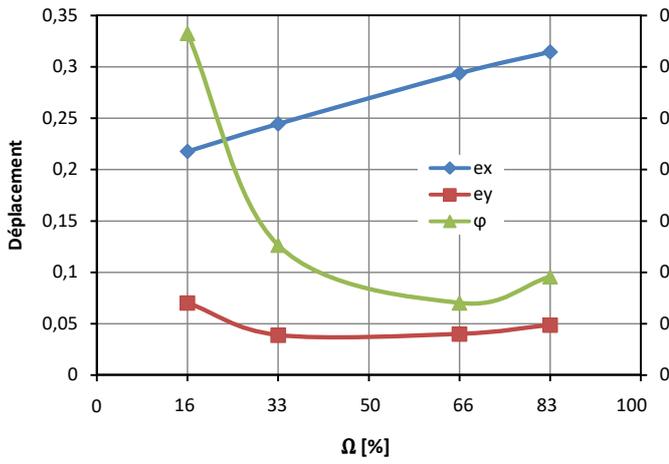


Figure A- 9. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar

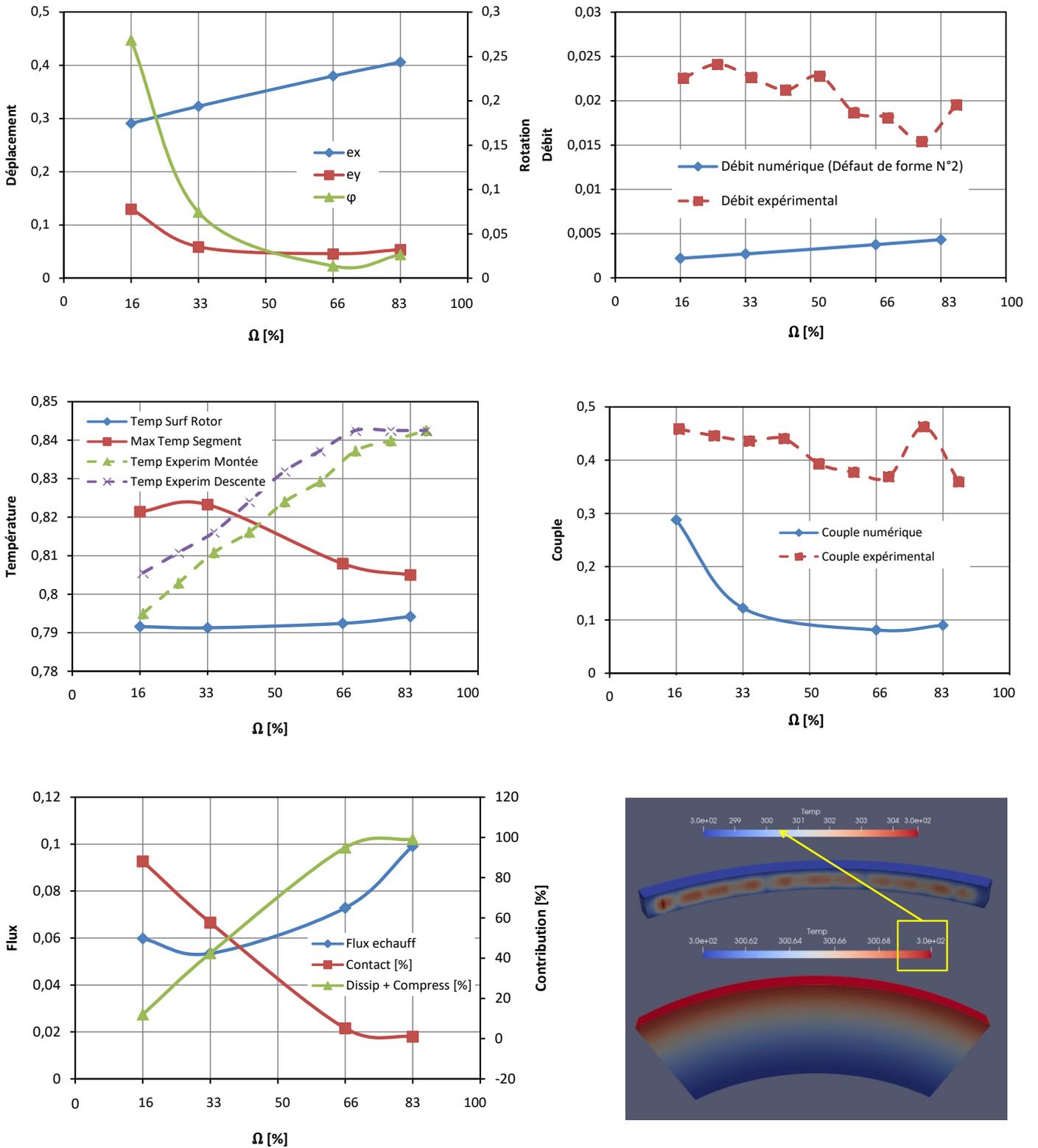


Figure A- 10. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar

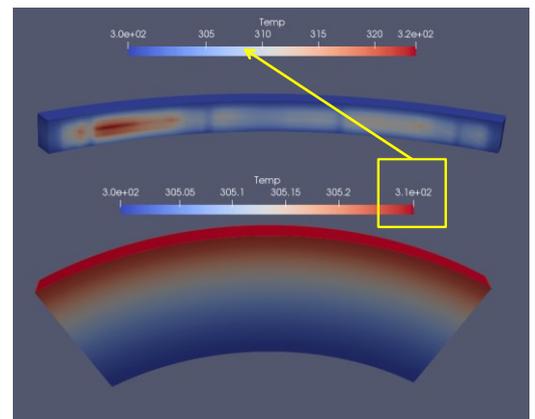
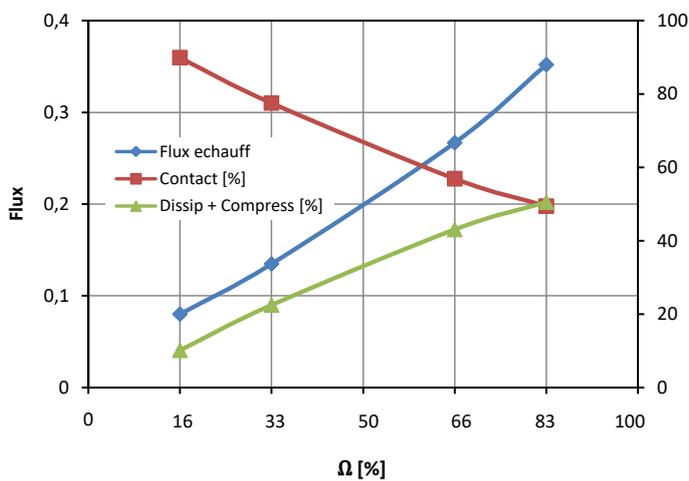
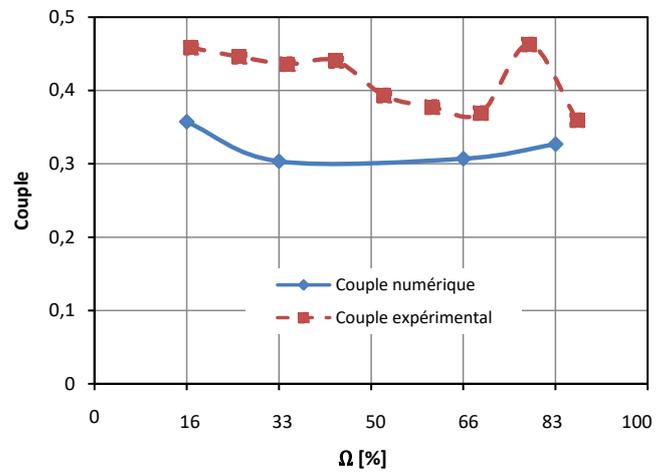
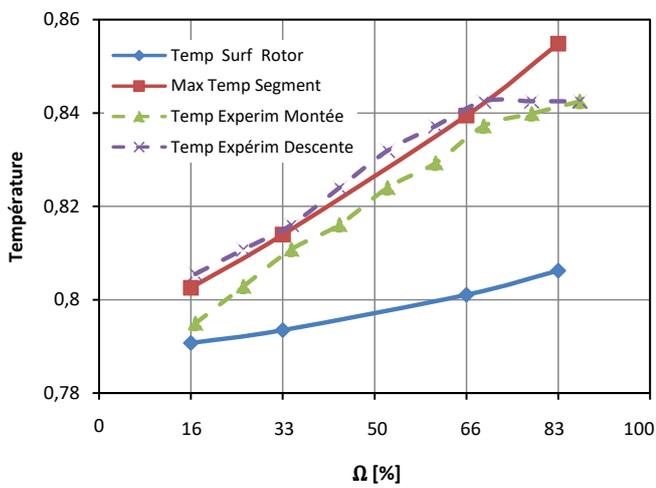
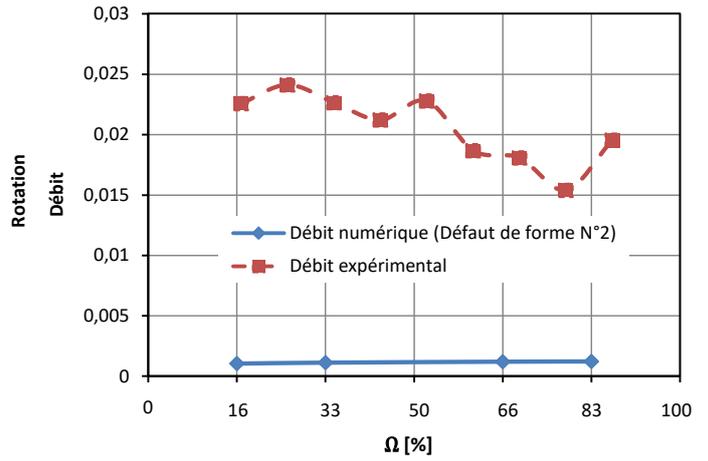
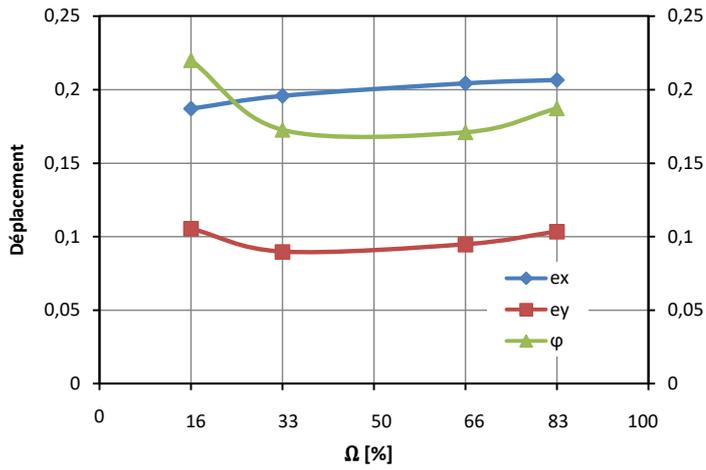


Figure A- 11. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar

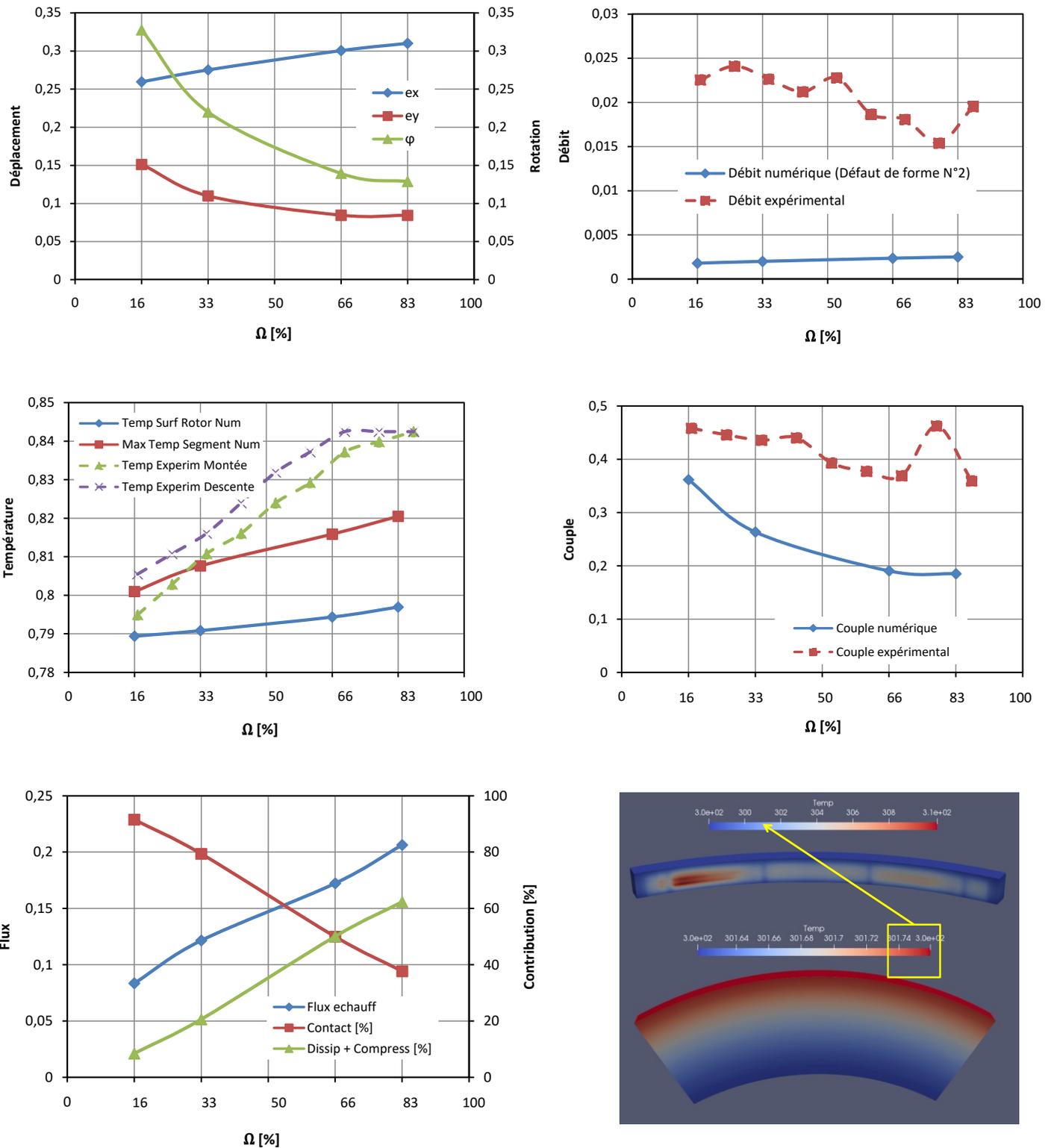


Figure A- 12. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 0,4$ bar

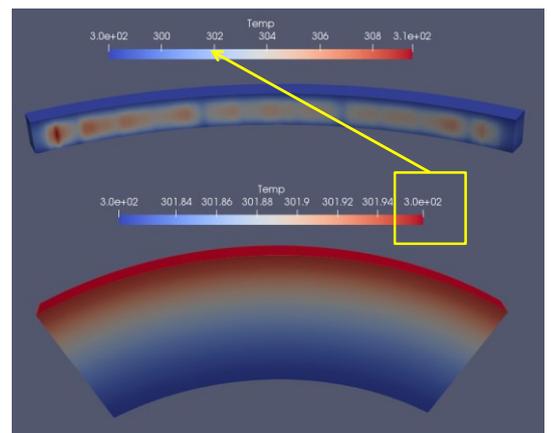
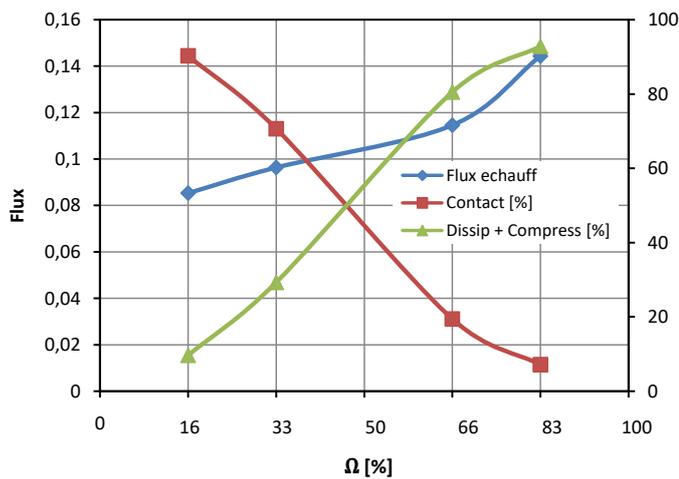
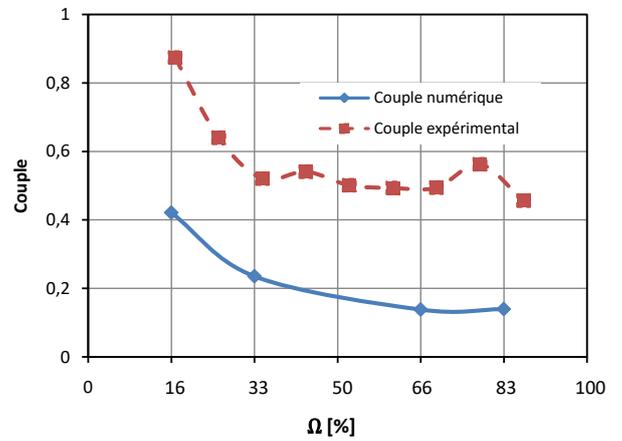
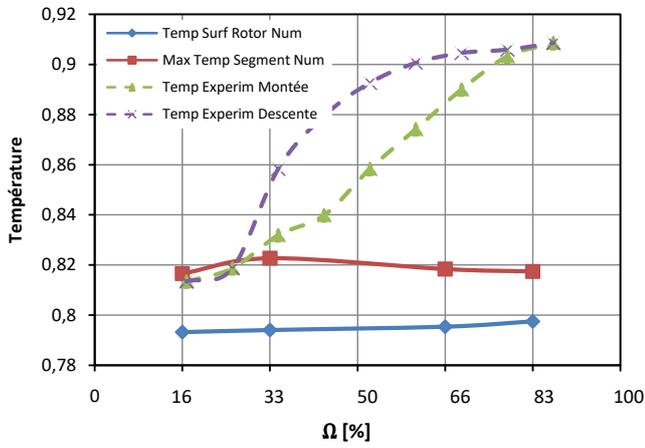
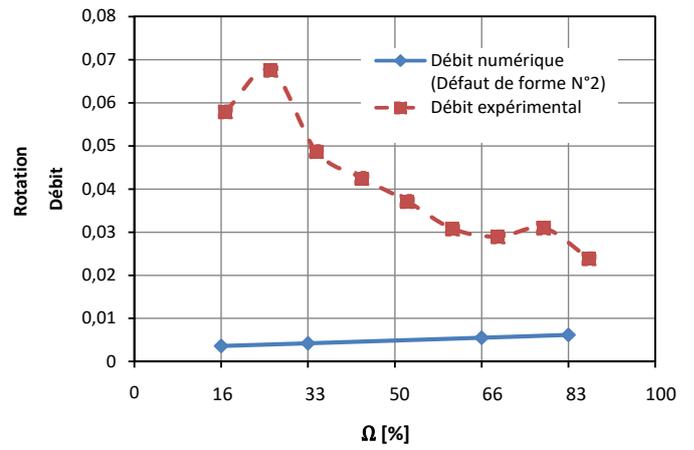
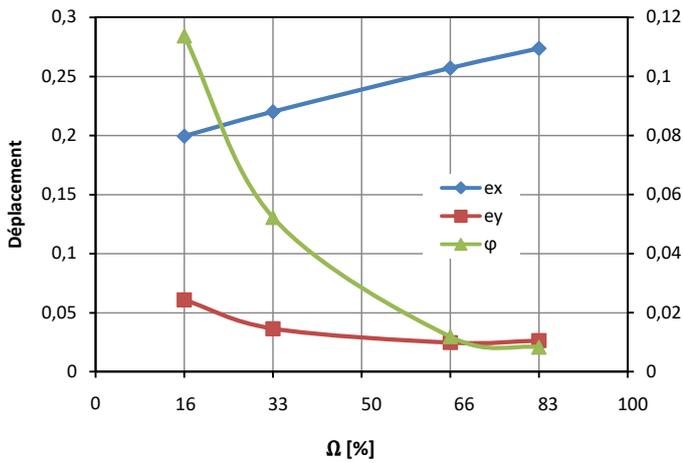


Figure A- 13. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$)
- Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1$ bar

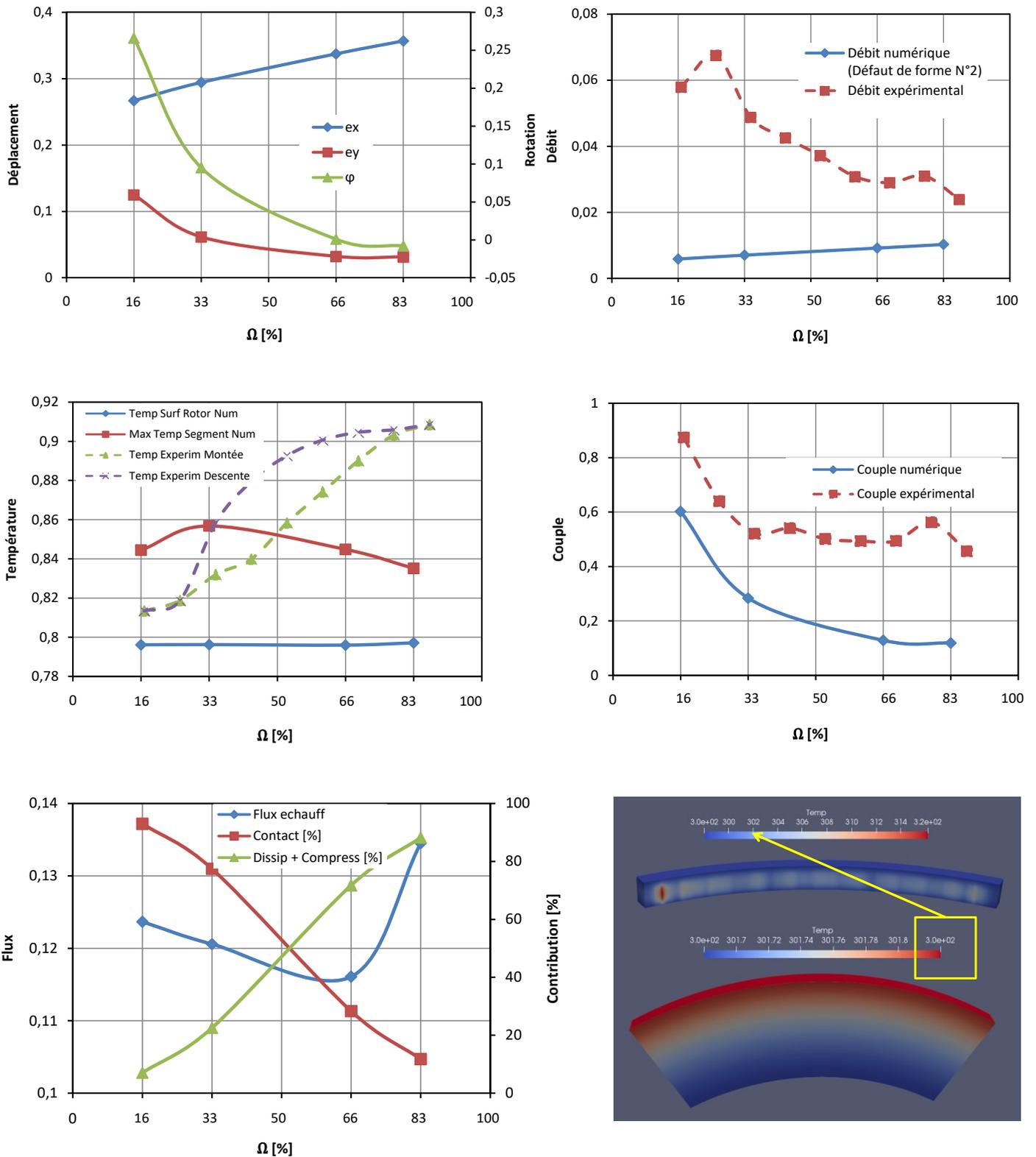


Figure A- 14. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x, $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 5mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1$ bar

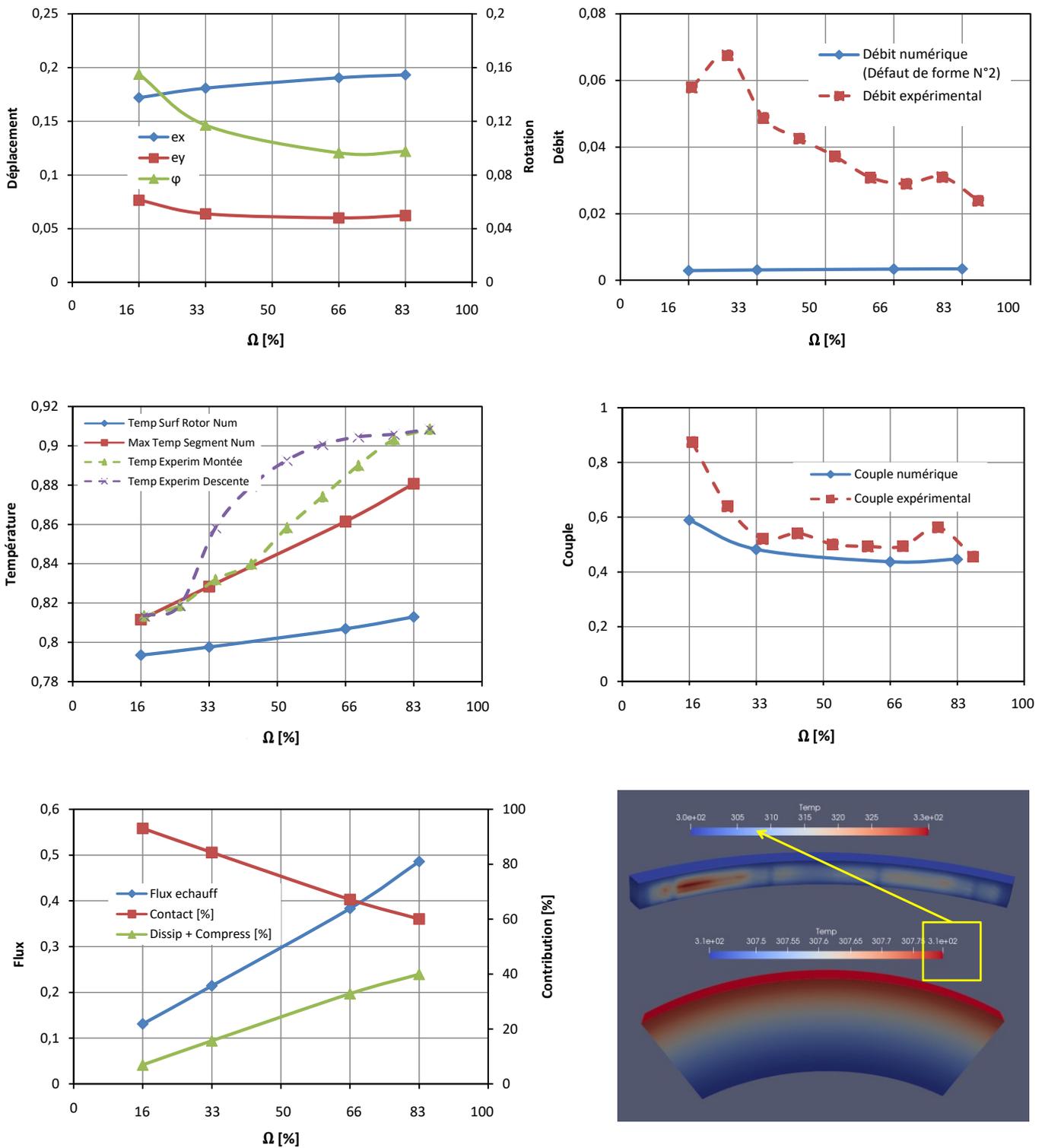


Figure A- 15. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 1,5 \mu m$, $\lambda_{max} = 2mm$, $\lambda_{min} = 2mm$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1 \text{ bar}$

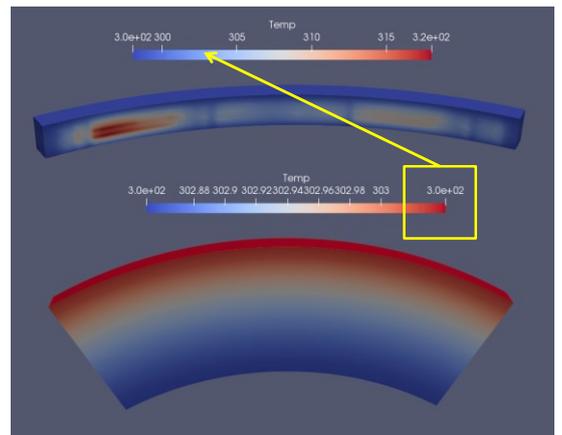
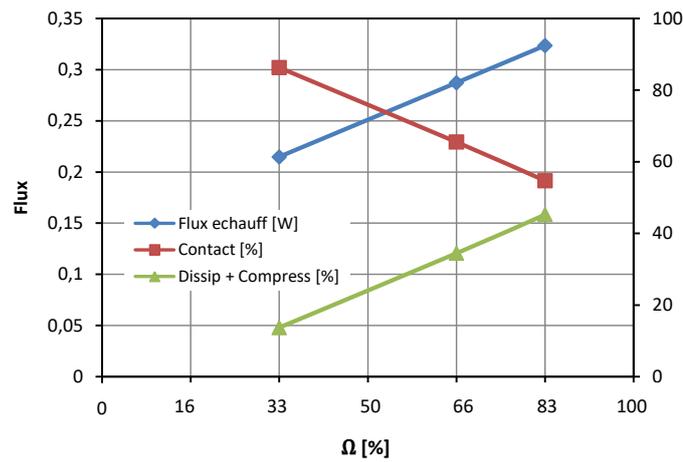
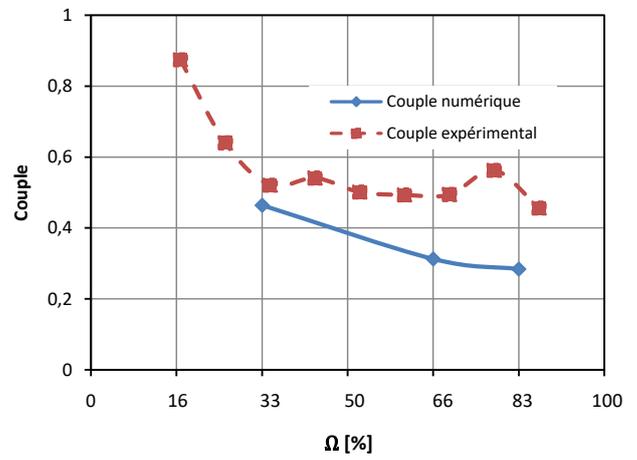
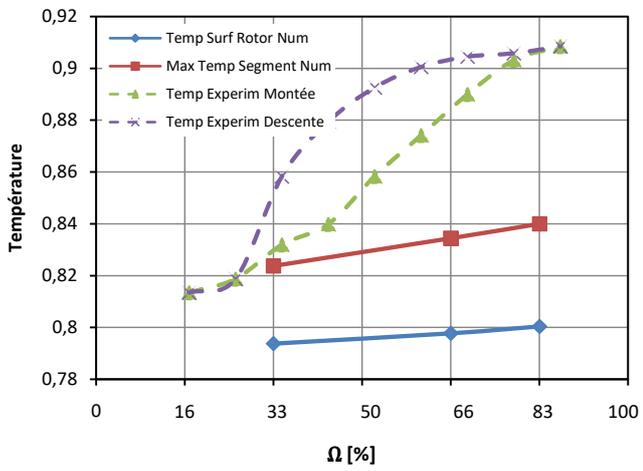
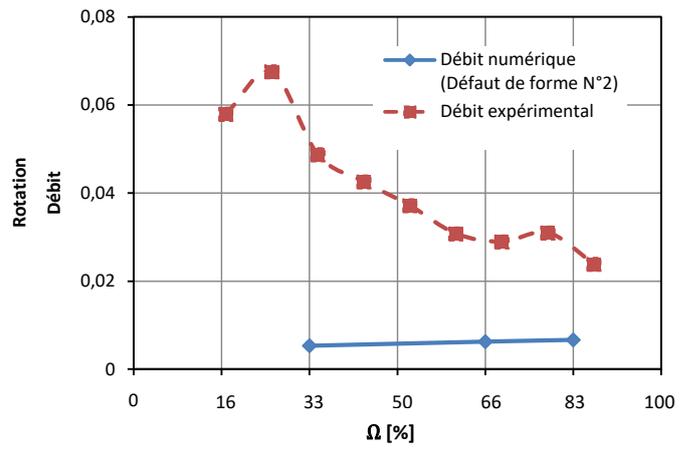
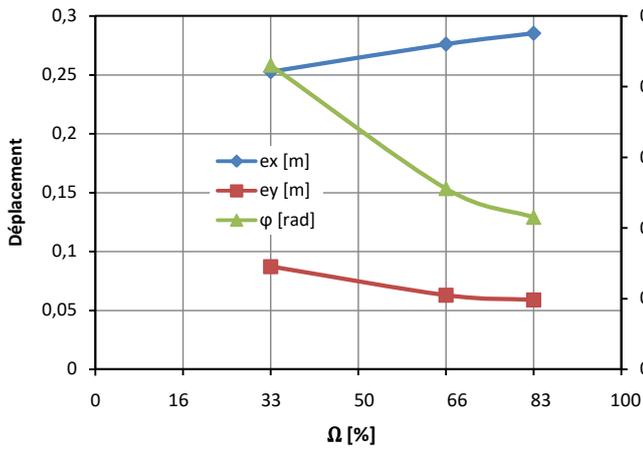


Figure A- 16. Résultats adimensionnés: joint N°2 (Ondulation selon dir x,y , $h_{ond} = 3 \mu m$, $\lambda_{max} = 2$, $\lambda_{min} = 2$) - Campagne d'essais N°2 - $\Delta P = 1$ bar

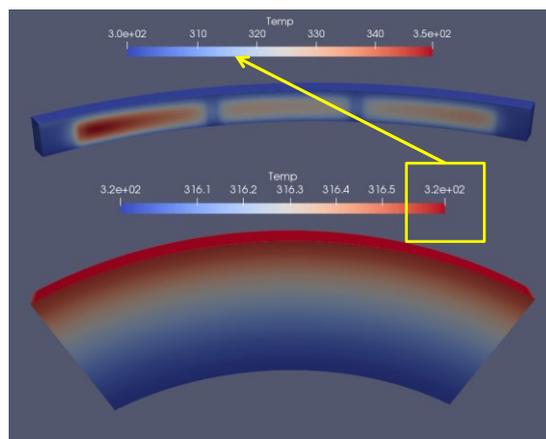
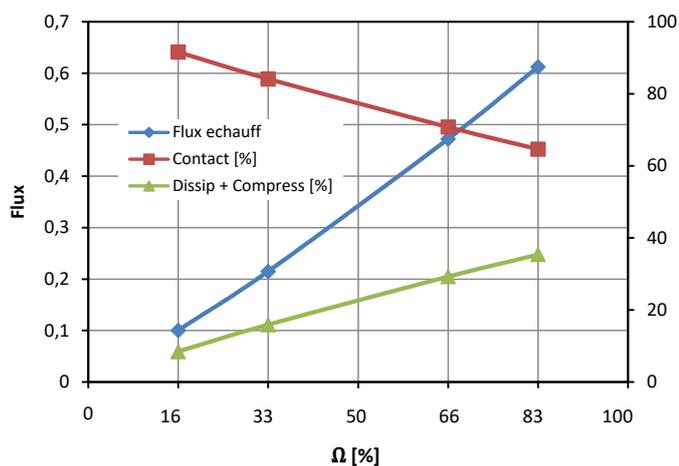
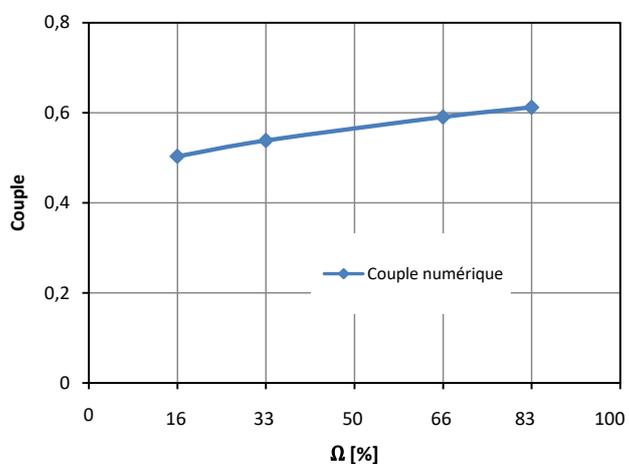
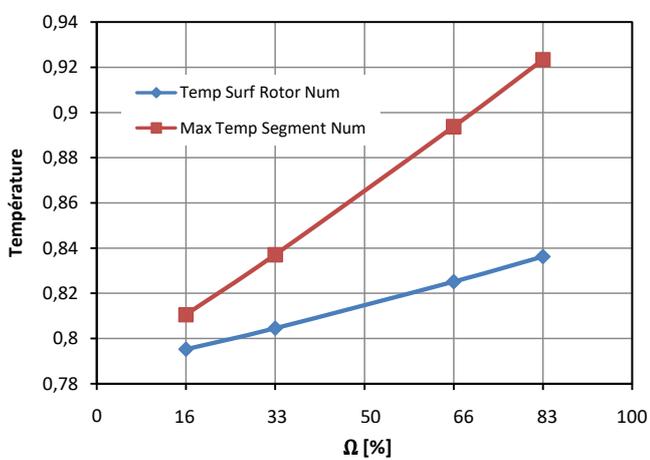
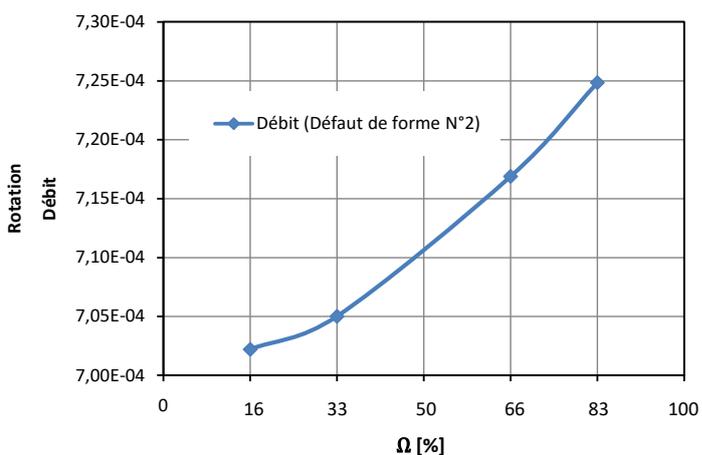
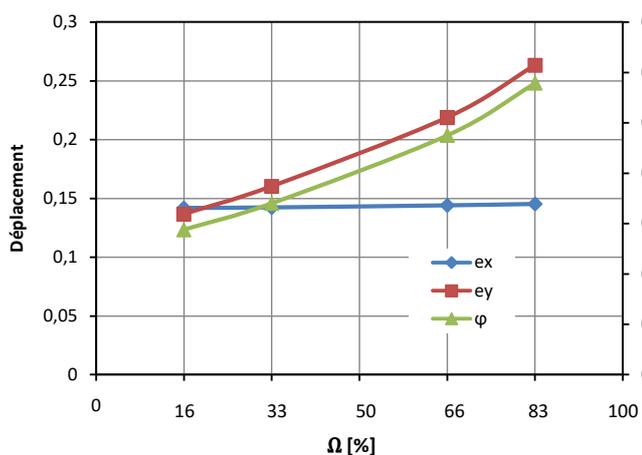


Figure A- 17. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0 \mu m$, $h_{poche} = 0 \mu m$)- $\Delta P = 0,4$ bar

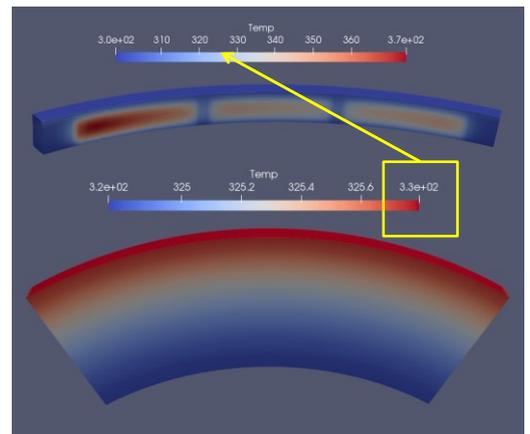
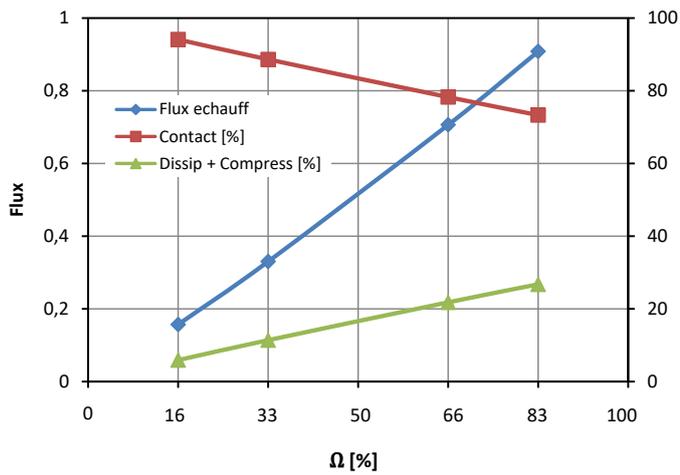
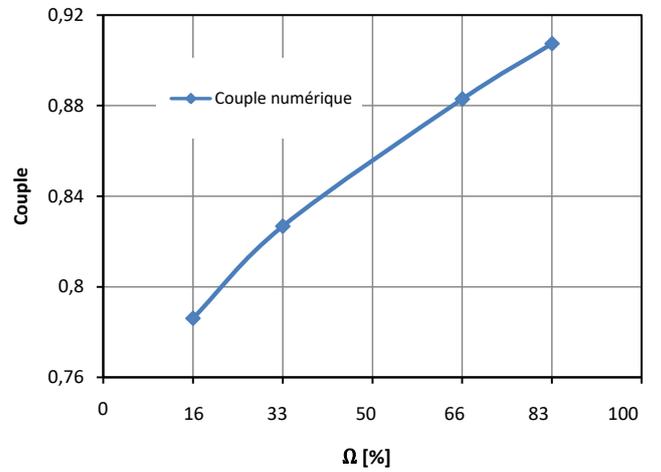
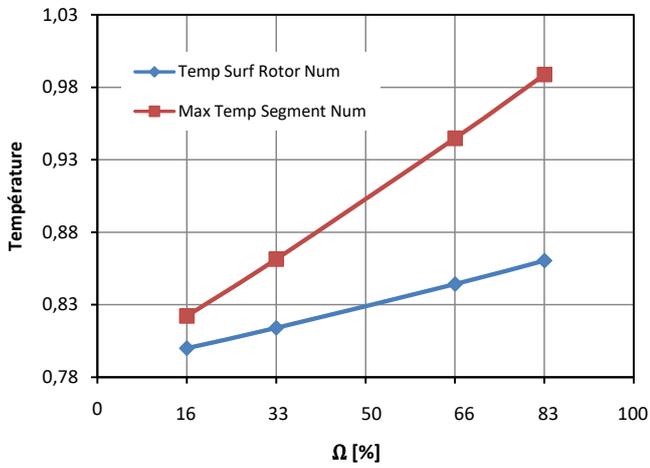
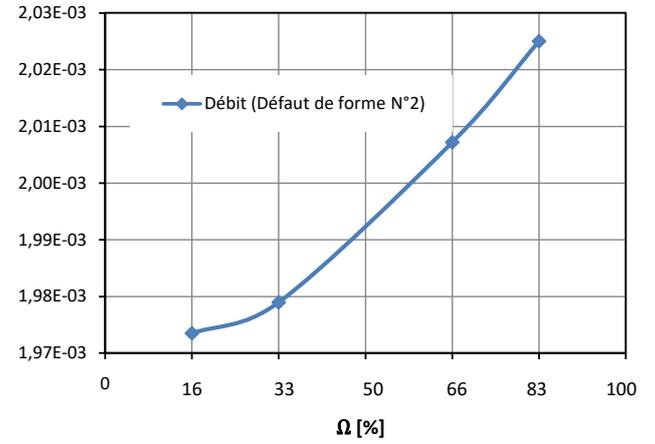
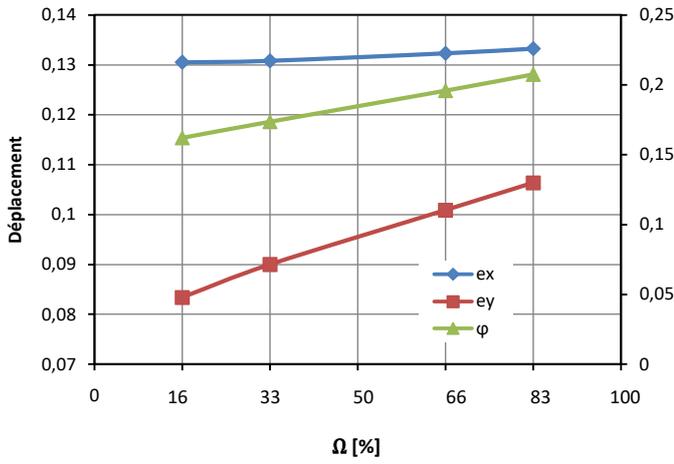


Figure A- 18. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0 \mu m$, $h_{poche} = 0 \mu m$)- $\Delta P = 1$ bar

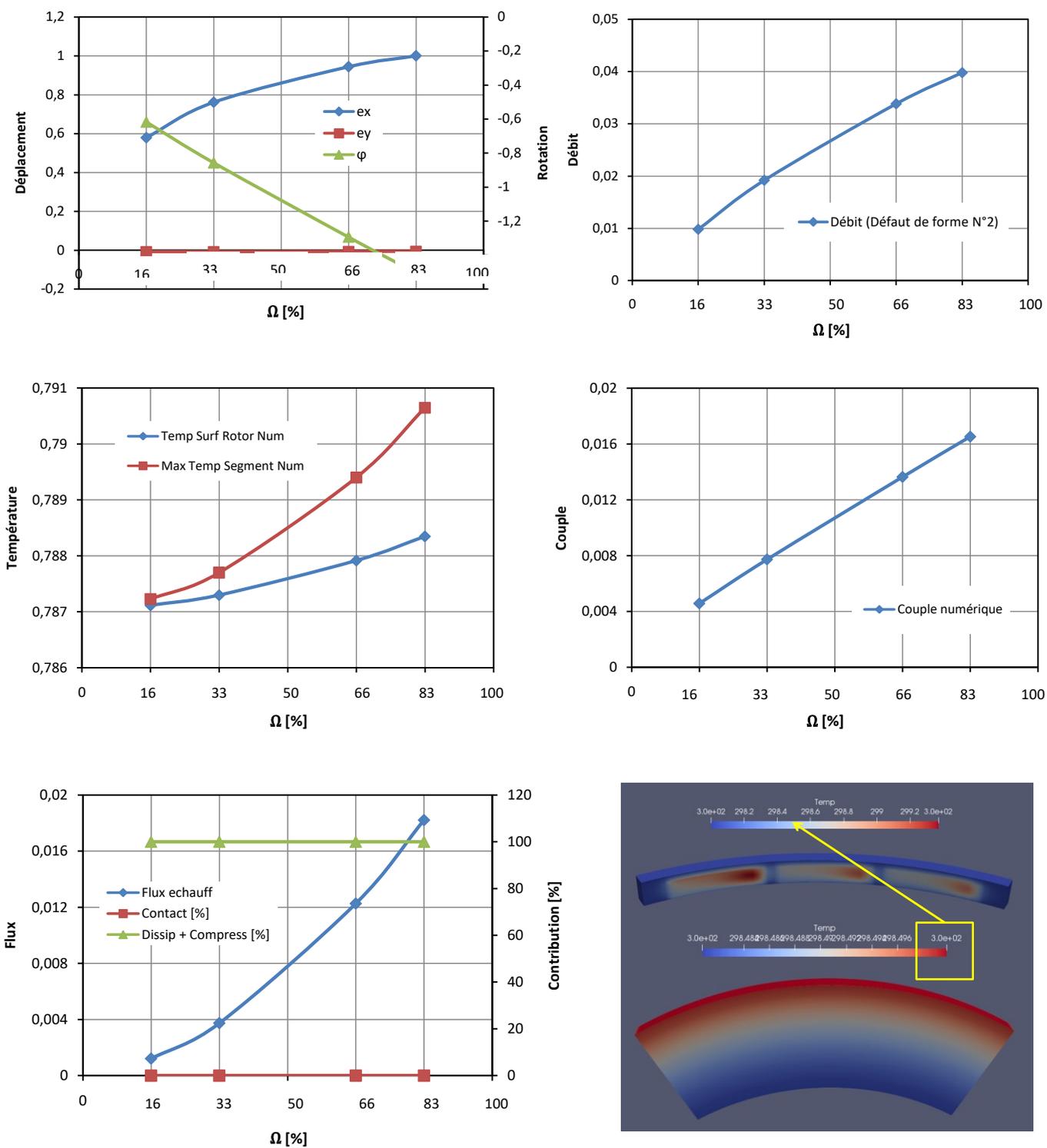


Figure A- 19. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0 \mu m$, $h_{poche} = 15 \mu m$) - $\Delta P = 0,4$ bar

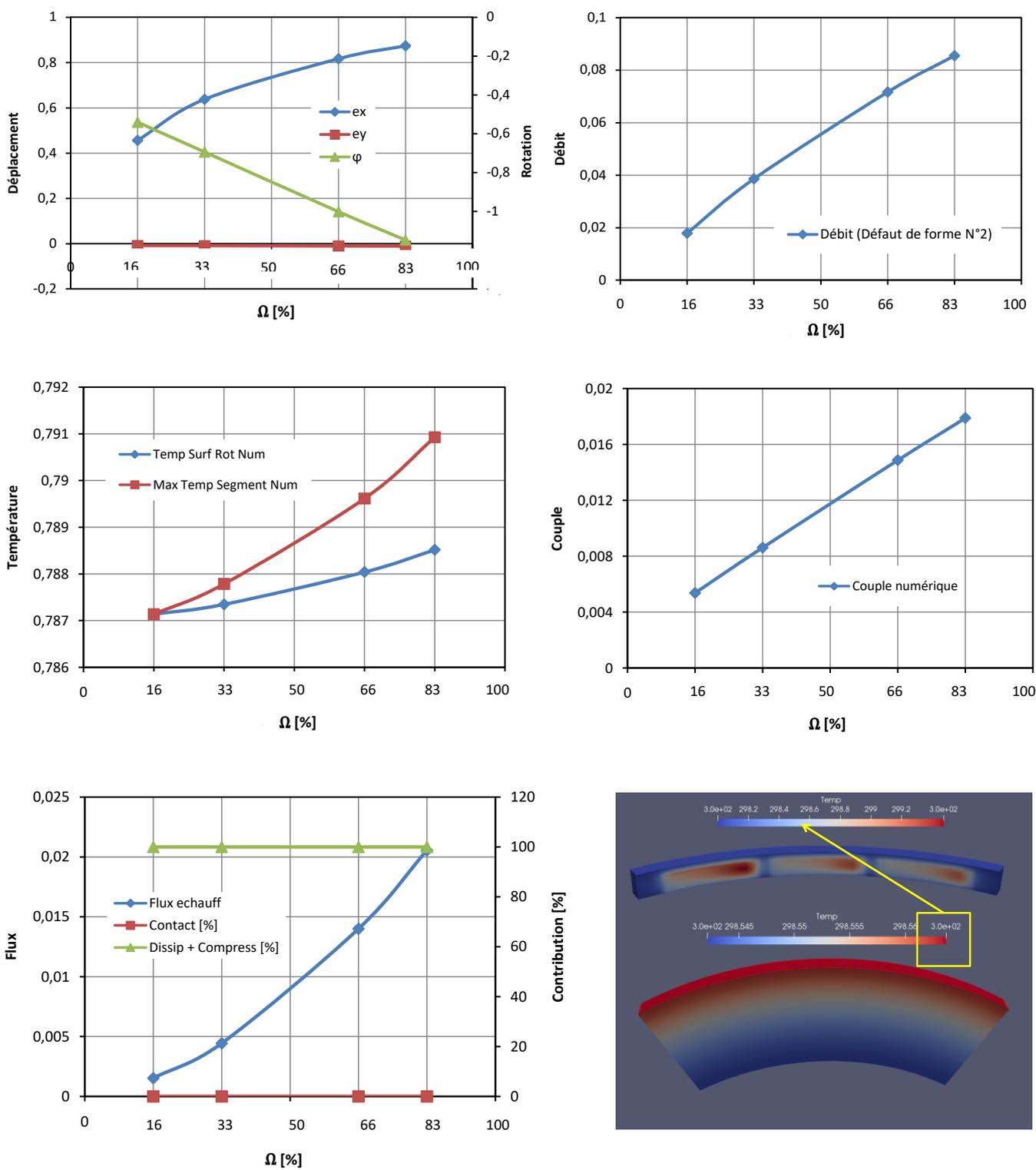


Figure A- 20. Résultats adimensionnés: joint N°3 ($h_{ond} = 0 \mu m$, $h_{poche} = 15 \mu m$)- $\Delta P = 1$ bar

Annexe B : Paramètres de calcul de la charge de contact

Les Indices 1 et 2 sont pour les surfaces en carbone, acier respectivement

Ecart type des hauteurs des rugosités [m]

$$\sigma_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_2 = 0,5 \cdot 10^{-6}$$

Densité de surface des aspérités [m^{-2}]

$$\eta_1 = 0,459 \cdot 10^{10} \quad \eta_2 = 0,4 \cdot 10^{10}$$

Rayon commun des aspérités [m]

$$R_0 = 0,52 \cdot 10^{-6}$$

Modules d'Young [Pa]

$$E_1 = 1,42 \cdot 10^{10} \quad E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$$

Coefficients de Poisson

$$\nu_1 = 0,22 \quad \nu_2 = 0,29$$

Dureté (équivalence en [MPa])

$$H_1 = 2039 \quad H_2 = 50000$$

Coefficient de frottement carbone

$$f = 0,2$$

Annexe C : Calcul de la force fluide sous le nez

La force fluide sous le nez est calculée à partir de la considération d'un écoulement radial unidimensionnel, laminaire, compressible, isentropique d'une zone de pression P_{amont} à une zone de pression P_{aval} .

L'équation de Reynolds en 1D étant :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (C-1)$$

x Représente la direction de l'écoulement (radiale)

La loi de Laplace permet la résolution de cette équation :

$$PV^\kappa = C^{te} \quad \equiv \quad \frac{P^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho} = C^{te} \quad (C-2)$$

Pour les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P(x=0) = P_{amont} \\ P(x=l_{nez}) = P_{aval} \end{cases} \quad (C-3)$$

l_{nez} étant la largeur du nez

L'intégration de l'équation de Reynolds donne la solution analytique suivante :

$$P(x) = \left[\left(P_{aval}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} - P_{amont}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right) \frac{x}{l_{nez}} + P_{amont}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \quad (C-4)$$

La Force fluide en est ensuite déduite :

$$F_{fluide_nez} = \iint_{Surf\ nez} P(x) dS = F_{fluide_nez} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 1} \frac{P_{aval}^{\frac{2\kappa+1}{\kappa}} - P_{amont}^{\frac{2\kappa+1}{\kappa}}}{P_{aval}^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - P_{amont}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}} S_{cont_nez} \quad (C-5)$$

Annexe D : Algorithmes de résolution de systèmes non linéaire

Vecteur inconnu $\{\mathbf{q}\} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ \varphi \end{pmatrix}$

Système de trois équations à résoudre $\{\mathbf{R}_{xyz}\} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_\varphi \end{pmatrix} = 0$

Matrice Jacobienne du système à résoudre $[\mathbf{J}_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_x}{\partial e_x} & \frac{\partial R_x}{\partial e_y} & \frac{\partial R_x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial R_y}{\partial e_x} & \frac{\partial R_y}{\partial e_y} & \frac{\partial R_y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial R_\varphi}{\partial e_x} & \frac{\partial R_\varphi}{\partial e_y} & \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix}_k$

Algorithme de Newton-Raphson

$$\{\mathbf{q}_0\} = \begin{pmatrix} e_{x_0} \\ e_{y_0} \\ \varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{R}_{xyz}^0\} = \{\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{q}_0)\}$$

$$\{\mathbf{q}_{k+1}\} = \{\mathbf{q}_k\} - [\mathbf{J}_k]^{-1} \{\mathbf{R}_{xyz}^k\}$$

Algorithme Quasi-Newton

$$\{\mathbf{q}_0\} = \begin{pmatrix} e_{x_0} \\ e_{y_0} \\ \varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\{\mathbf{R}_{xyz}^0\} = \{\mathbf{R}_{xyz}(\mathbf{q}_0)\}$$

$$\{\mathbf{q}_{k+1}\} = \{\mathbf{q}_k\} - [\mathbf{J}_0]^{-1} \{\mathbf{R}_{xyz}^k\}$$

Algorithme de Broyden

$$[\mathbf{B}_0] = [\mathbf{J}_0]$$

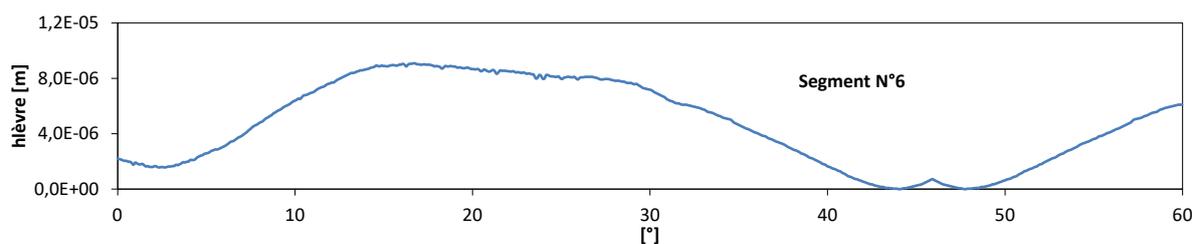
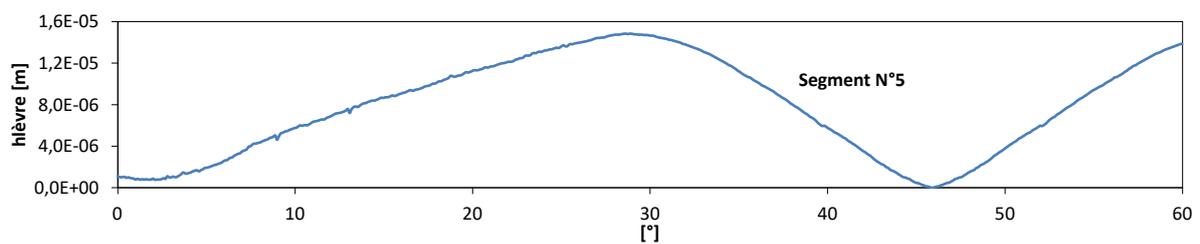
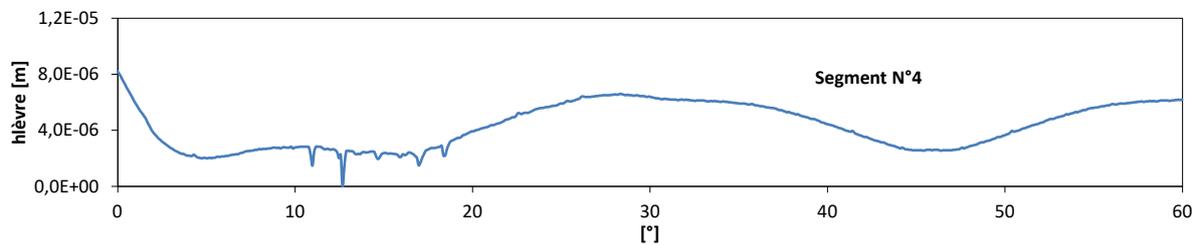
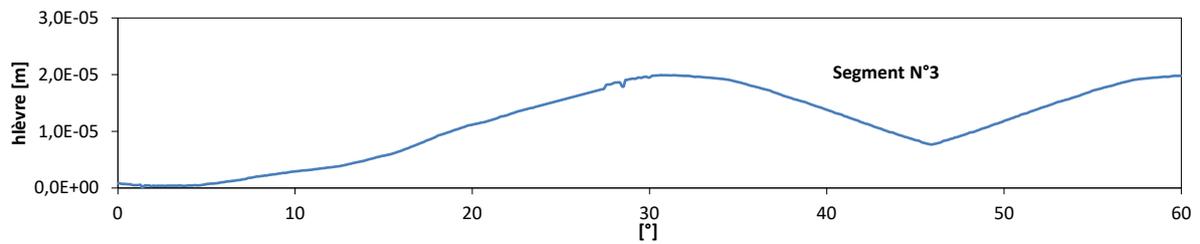
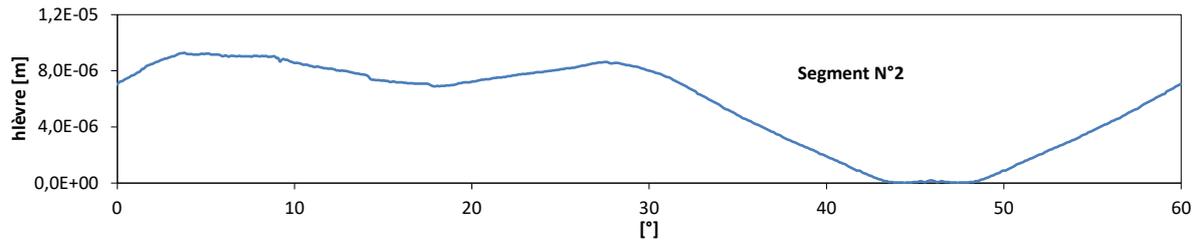
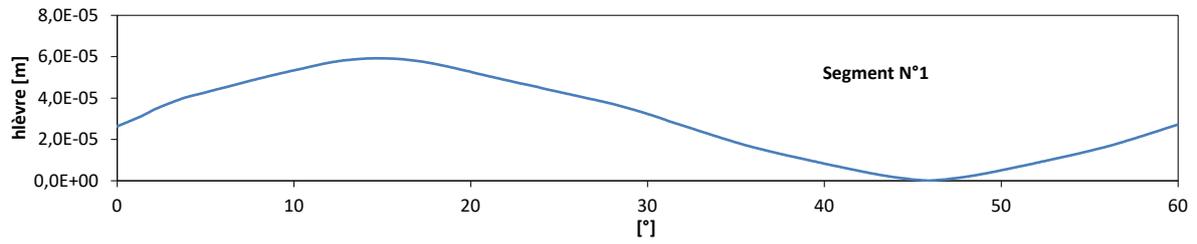
$$\{\mathbf{q}_{k+1}\} = \{\mathbf{q}_k\} + \{\mathbf{s}_k\}$$

$$[\mathbf{B}_{k+1}] = [\mathbf{B}_k] + \frac{\{\mathbf{R}_{xyz}^k\} \{\mathbf{s}_k\}^T}{\{\mathbf{s}_k\}^T \{\mathbf{s}_k\}}$$

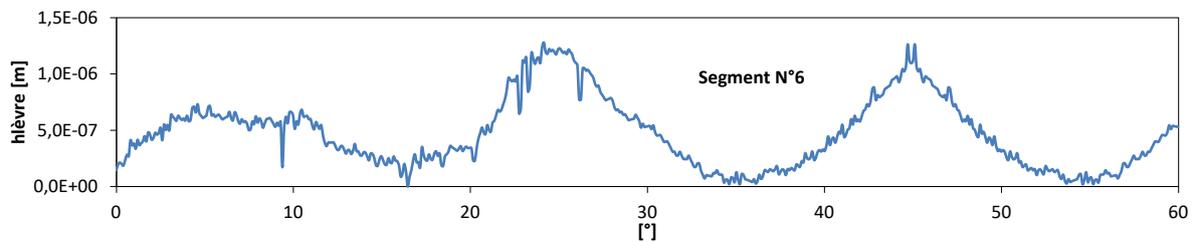
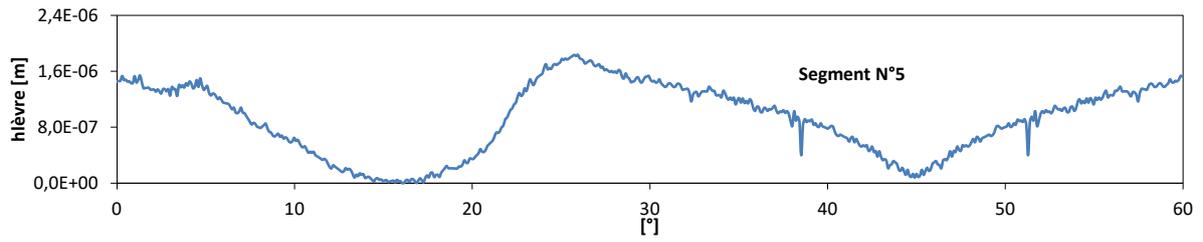
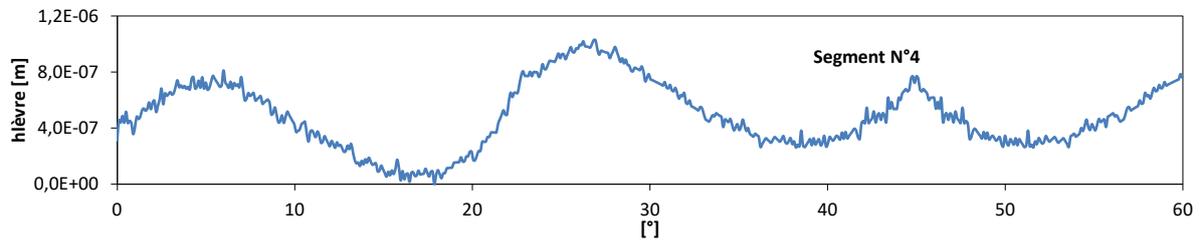
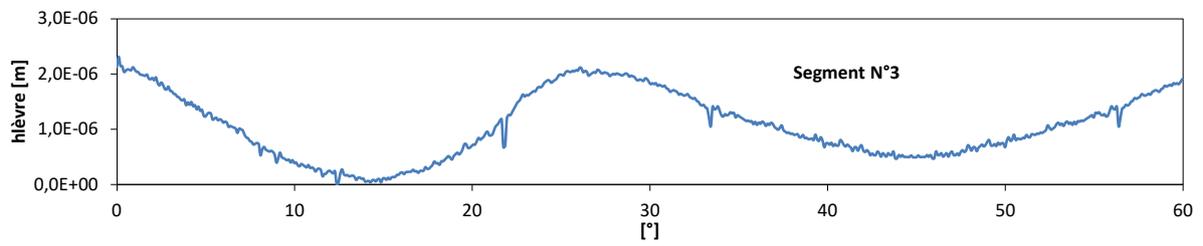
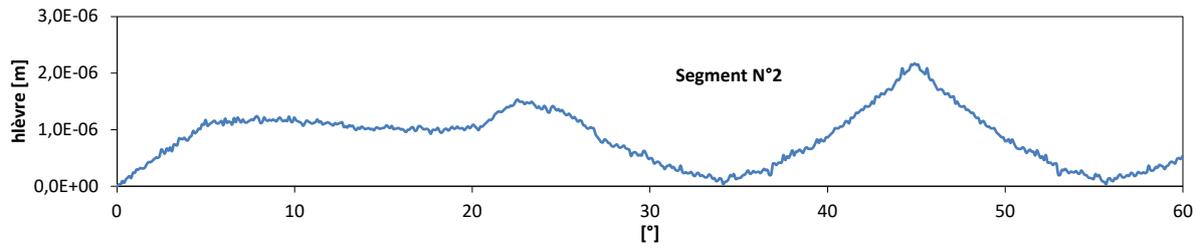
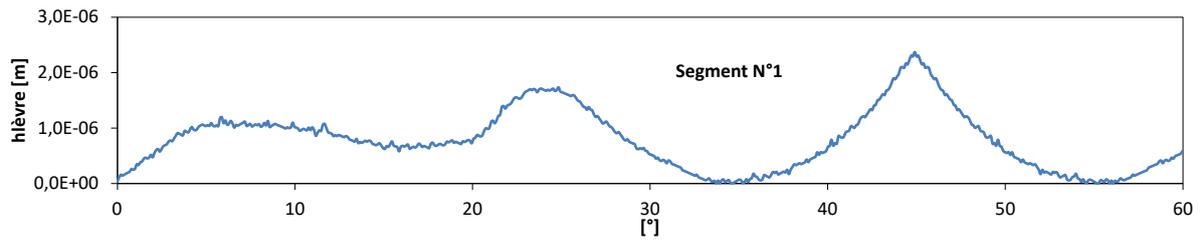
$$\{\mathbf{s}_k\} = -[\mathbf{B}_k]^{-1} \{\mathbf{R}_{xyz}^k\}$$

Annexe E : Défauts de forme de la lèvre

Défaut de forme N°1



Défaut de forme N°2



Annexe F : Formule d'ondulations de surfaces

La prise en compte des ondulations de surface se fait par rajout local d'ondulations à la hauteur de film de fonctionnement. La formule suivante a été considérée pour le calcul de h_{ond} [40], [41]:

$$h_{ond}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{nm} \gamma^{n+m-2} \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda_x} x + \varphi_{x_{nm}}\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda_y} y + \varphi_{y_{nm}}\right) \quad (F- 1)$$

Avec :

M et N les nombres maximaux d'ondulations dans les directions x et y .

$a_{nm} \in [0, A_{cac}]$, $\varphi_{x_{nm}} \in [0, 2\pi]$, $\varphi_{y_{nm}} \in [0, 2\pi]$, où A_{cac} est l'amplitude crête à crête d'ondulation,

a_{nm} , $\varphi_{x_{nm}}$, $\varphi_{y_{nm}}$ sont des variables aléatoires qui suivent une distribution uniforme,

λ_x , λ_y sont les longueurs d'onde d'ondulations des deux directions,

γ un paramètre de calcul fixé à $\gamma = 0,8$.

Exemple de surface

$L_{xPatin} = 33 \text{ mm}$, $L_{yPatin} = 7 \text{ mm}$

$\lambda_{max} = L_{xPatin}/2$, $\lambda_{min} = L_{yPatin}/2$, $M = N = 5$, $A_{cac} = 1 \mu\text{m}$

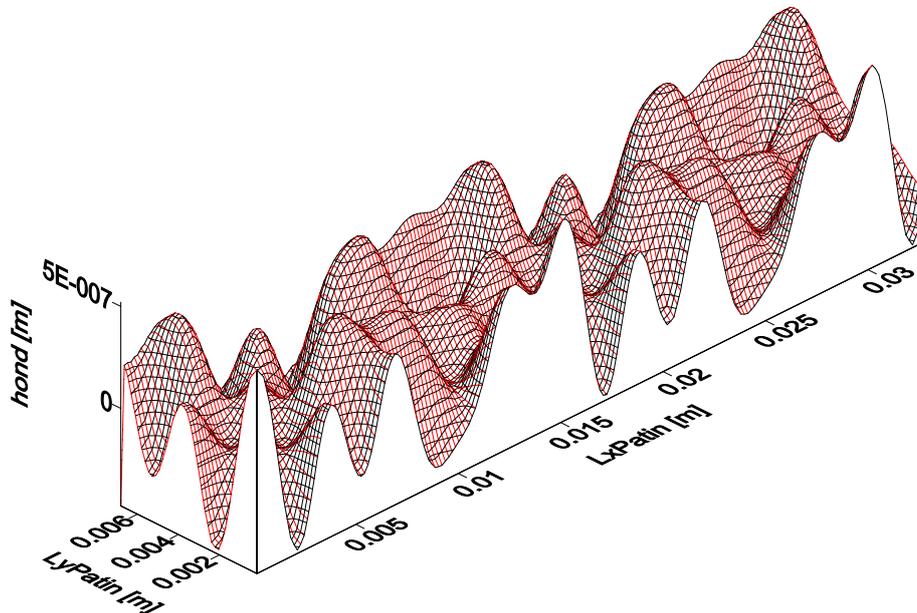


Figure F- 1 Surface avec ondulations

Annexe G : Influence de la profondeur de la poche sur la portance

La figure présente les champs de pression générés dans le 3^{ème} patin du joint N°3 pour un cas calculé en position imposée, $e_x = 1\mu m$, $e_y = \varphi = 0$. Les charges affichées concernent le segment en entier.

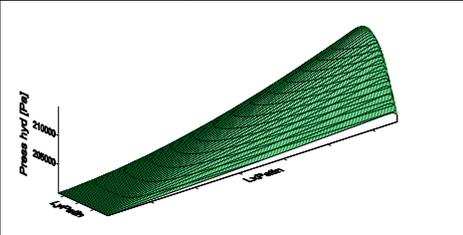
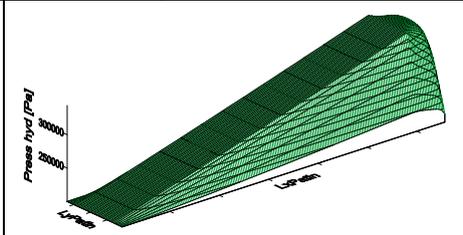
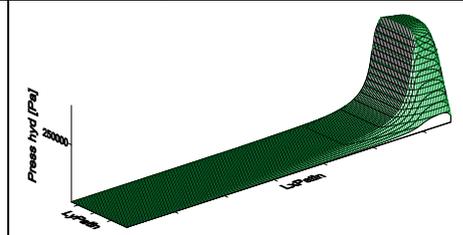
$h_{poche} = 0$	$h_{poche} = 15 \mu m$	$h_{poche} \gg 15 \mu m$
		
$\begin{cases} F_x = 1,56 N \\ F_y = 2,28 N \\ C_A = -9 \cdot 10^{-2} N \cdot m \end{cases}$	$\begin{cases} F_x = 41 N \\ F_y = 2,71 N \\ C_A = 0,24 N \cdot m \end{cases}$	$\begin{cases} F_x = 4,25 N \\ F_y = 1,37 N \\ C_A = -8,33 \cdot 10^{-2} N \cdot m \end{cases}$

Figure G- 1 Etude de l'impact de profondeur d'une poche sur la portance en position imposée $e_x = 1 \mu m$ et $\Omega = 16 \%$

Bibliographie

- [1] Chupp R., Hendricks R., Lattime S., Steinetz B., «Sealing in Turbomachinery» *Journal of Propulsion and Power*, vol. 22(2), 2006.
- [2] Kirk R. G., Gao R., «Analysis of rotordynamic forces for high inlet pre-swirl rate labyrinth seals» 10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 2012.
- [3] Flitney R., *Rotary Seals, Seals and Sealing Handbook*, p. 105-288, 2014.
- [4] Deville L., « Modélisation et caractérisation expérimentale des joints à brosse » Poitiers, Thèse de doctorat, 2016.
- [5] Brunetière N., «Les garnitures mécaniques: Etude théorique et expérimentale» Poitiers, Habilitation à diriger les recherches, 2010.
- [6] Lebeck A.O., «Principles and design of mechanical face seals» John Wiley & Sons Inc., 1991.
- [7] Nguyen M. H., « Analyse des étanchéités annulaires à bague flottante » Poitiers, Thèse de doctorat, 2011.
- [8] Mariot A., « Analyse théorique et expérimentale des joints d'étanchéité à bague flottante et des joints rainurés segmentés » Poitiers, Thèse de doctorat, 2015.
- [9] Burcham, R.E., «Liquid Rocket Engine Turbopump Rotating-Shaft Seal », NASA S-8121, 1978.
- [10] Burcham, R.E., « High-Speed Cryogenic Self-Acting Shaft Seals for Liquid Rocket Turbopumps » NASA CR-168194, 1983.
- [11] Frene J., Nicolas D., Degueurce B., Berthe D., Godet M., *Lubrification hydrodynamique. Paliers et Butées*, Editions Eyrolles, p.488, 1990.
- [12] Oike M., Nosaka M., Kamijo M., Watanabe Y., «Experimental study on high pressure gas seals for a liquid oxygen turbopump» *STLE Tribology Transactions*, vol. 31 (1), p. 91-97, 1987.
- [13] Oike M., Nosaka M., Kikuchi M., Watanabe Y., Kamijo K., « Study on a Carbon Segmented Circumferential Seal for a Liquid Oxygen Turbopump» *Proceedings of the Japan International Tribology Conference*, Nagoya, p. 283-288, 1990.
- [14] Nosaka, M., Oike, M., « Shaft Seals of Turbopumps for Rockets », *Japanese Journal of Tribology*, vol. 35(4), p. 411-421, 1990.
- [15] Oike M., Nosaka M., Kikuchi M., Watanabe Y., «Performance of a segmented circumferential seal for a liquid oxygen turbopump (part1) » *Journal of Japanese Society of Tribologists*, vol. 37 (4), p. 339-346, 1992.
- [16] Oike M., Nagao R., Nosaka M., Kamijo K., Jinnouchi T., « Characteristics of a Shaft Seal System for the LE-7 Liquid Oxygen Turbopump » *AIAA 95-3102*, 1995.
- [17] Arghir M., Mariot A., «Theoretical Analysis of Static Characteristics of Carbon Segmented Seal » *Journal of Tribology*, vol. 139 (6): 062202, 2017.
- [18] Dowson D., « A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication » *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 4(2), p. 159-170, 1962.
- [19] Mahner M., Lehn A., Schweizer B., «Thermogas- and thermohydrodynamic simulation of thrust and slider bearings: Convergence and efficiency of different reduction approaches » *Tribology International*, vol. 93, p. 539-554, 2016.
- [20] Halton, J.H., *Engineering*, 186, 59, 1958.
- [21] San Andrés, L., «Modern Lubrication Theory», Notes 10: Thermohydrodynamic Bulk-Flow Model in Thin Film Lubrication, 2012. <http://hdl.handle.net/1969.1/93250>

- [22] Lee, D., Kim, D., «Three-dimensional thermohydrodynamic analysis of Rayleigh step airfoil thrust bearings with radial arranged bump foils» Tribology Transactions, vol. 54(3), p. 432-448, 2011.
- [23] Patankar S. V., « Numerical Heat Transfer and Fluid Flow» Hemisphere Publishing corporation, 1980.
- [24] Ferziger J. H., Peric M., «Computational Methods for Fluid Dynamics»3rd Edition, Ed. Springer, p. 76, 2002.
- [25] Craveur J.-C., Jetteur P., « Introduction à la mécanique non-linéaire. Calcul des structures par éléments finis » Dunod, Paris, 2010.
- [26] Arghir M., Alsayed A., Nicolas D., «The finite volume solution of the Reynolds equation of lubrication with film discontinuities» International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44, p. 2119-2132, 2002.
- [27] Minet Ch., « Lubrification mixte dans les étanchéités dynamiques » Poitiers, Thèse de doctorat, 2009.
- [28] Dobrica M., « Prise en compte de la lubrification mixte lors de l'évaluation des performances des paliers très chargés » Poitiers, Thèse de doctorat, 2007.
- [29] Dragomir Fatu R., « Etude et modélisation de la lubrification mixte et des modes d'avaries associés dans les paliers moteur » Poitiers, Thèse de doctorat, 2009.
- [30] Bonneau D., Fatu A., Souchet D., « Paliers hydrodynamiques 1 » Ed. Hermès Science et Lavoisier, p. 201, 2011.
- [31] Greenwood J. A., Williamson J. B. P., « Contact of nominally flat surfaces » Proc. Roy. Soc. Lond. A 295, p. 300-319, 1966.
- [32] Zhang, S., Hassini, M. A., Arghir, M., «Accuracy and Grid Convergence of the Numerical Solution of the Energy Equation in Fluid Film Lubrication: Application to the 1D Slider» Lubricants, vol. 6(4), p.95, 2018.
- [33] Guyan, R.J., Reduction of stiffness and mass matrices, AIAA journal 3, p. 380, 1965.
- [34] Dowson D., Hudson J. D., Hunter B., et al. «An experimental investigation of the thermal equilibrium of steadily loaded journal bearings» Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 181(2), p. 70-80, 1966.
- [35] Feng K., Kaneko S., «A thermohydrodynamic Sparse Mesh Model of Bump-Type Foil Bearings», Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 135, n° 2, 022501-12, 2013.
- [36] Boncompain R., Fillon M., Frêne J. «Analysis of thermal effects in hydrodynamic bearings», ASME Journal of Tribology, vol. 108(2), p. 219-224, 1986.
- [37] Zavarise G., Wriggers P., Nackenhorst U., « A Guide for Engineers to Computational Contact Mechanics » The TCN Series on Simulation Based Engineering and Sciences, p. 49, 2006.
- [38] <http://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries/fortran-libraries>.
- [39] Fourt E., « Analyse expérimentale des étanchéités aéronautiques » Thèse en cours à l'Université de Poitiers.
- [40] Kalker J. J., Dekking F. M., Vollebregt E. A. H., «Simulation of Rough, Elastic Contacts » Journal of Applied Mechanics, vol. 64(2), p. 361-368, 1997.
- [41] Van Ostayen R. A. J., Van Beek A., Ros M., «A mathematical model of the hydro-support: an elasto-hydrostatic thrust bearing with mixed lubrication» Tribology International, vol. 37, p. 607-616, 2004.
- [42] Brunetière N., Francisco A., «Lubrication Mechanisms Between Parallel Rough Surfaces» Tribology Letters, vol. (67), p. 116, 2019.

- [43] Garrison G.M., Stein Seal Co. «Hydrodynamic circumferential seal system for large translations » Publication of US 8 091 89 8 B2, 2011.
- [44] Whipple, R. T. P., «Herringbone Pattern Thrust Bearing», Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Berkshire, England, T/M29, 1949.
- [45] Hsing F. C. , «Formulation of a Generalized Narrow Groove Theory for Spiral Grooved Viscous Pumps» Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, vol. 94(1), p. 81-85, 1972.
- [46] Smalley A. J., «The Narrow Groove Theory of Spiral Grooved Gas Bearings: Development and Application of a Generalized Formulation for Numerical Solution» Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, vol. 94(1), p. 86-92, 1972.
- [47] Castelli V., Vohr, J., «Performance Characteristics of Herring Bone-Grooved Journal Bearing Operating at High Eccentricity Ratios and with Misalignment» NASA MTI-67TR15, 1967.
- [48] Malanoski S. B., «Experiments on an Ultrastable Gas Journal Bearing» Journal of Lubrication Technology, vol. 89 (4), p. 443-438, 1967.
- [49] Constantinescu V. N., Castelli V., « On the local Compressibility Effect in Spiral-Groove Bearings» Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, vol. 91(1), p. 76-86, 1969.
- [50] Yu Y., Pu G., Jian K., «Modeling and analysis of the static characteristics and dynamic responses of Herringbone-grooved Thrust Bearings» IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 280, 2017.
- [51] Wildman M., «On the behavior of Grooved Plate Thrust Bearings with Compressible Lubricant» Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, vol. 90(1), p. 226-232, 1968.
- [52] Bonneau D., Huitric J., Tournerie B., «Finite Element Analysis of Grooved Gas Thrust Bearings and Grooved Gas Face Seals » Journal of Tribology, Trans. ASME, vol. 115(3), p. 348-354, 1993.
- [53] Bonneau D., Absi J., «Analysis of Aerodynamic Journal Bearings with Small Number of Herringbone Grooves by Finite Element Method» Journal of Tribology, Trans. ASME, vol. 116(4), p.698-704, 1994.
- [54] Zirkelback N., San Andrés L., «Finite Element Analysis of Herringbone Groove Journal Bearings: A parametric Study» Journal of Tribology, Trans. ASME, vol. 120(2), p.234-240, 1998.
- [55] Lehn A., Schweizer B., «Generalized Reynolds equation for fluid film problems with arbitrary boundary conditions: application to double-sided spiral groove thrust bearing» Archive of Applied mechanics, vol. (86), p. 743-760, 2016.
- [56] Hecht F., «New development in FreeFem++» Journal of Numerical Mathematics, vol. 20, p. 251-266, 2012.
- [57] Wriggers, P., Computational Contact Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [58] Petrov E. P., Ewins D. J., «Generic Friction Models for Time-Domain Vibration Analysis of Bladed Disks » Journal of Turbomachinery , Trans. ASME, vol. 126 (1), p. 184-192, 2004.
- [59] Le Lez S., « Caractéristiques Statiques et Dynamiques des paliers à feuille» Poitiers, Thèse de doctorat, 2007.