



HAL
open science

Utilisation de l'effet superpropulsif pour l'optimisation de lancers balistiques

Guillaume Giombini

► **To cite this version:**

Guillaume Giombini. Utilisation de l'effet superpropulsif pour l'optimisation de lancers balistiques. Physique [physics]. Université Côte d'Azur, 2023. Français. NNT : 2023COAZ4024 . tel-04129156

HAL Id: tel-04129156

<https://theses.hal.science/tel-04129156v1>

Submitted on 15 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

THÈSE DE DOCTORAT

UTILISATION DE L'EFFET SUPERPROPULSIF POUR L'OPTIMISATION DE LANCERS BALISTIQUES

Guillaume Giombini

Institut de Physique de Nice, INPHYNI

Présentée en vue de l'obtention du
grade de docteur en Physique
d'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Christophe Raufaste
Franck Celestini

Soutenue le : 29 mars 2023

Devant le jury, composé de :

Franck Celestini, Maître de conférences,
Université Côte d'Azur

Caroline Cohen, Professeure assistante,
École polytechnique

Sébastien Neukirch, Directeur de recherche,
CNRS

Christophe Raufaste, Professeur des universités,
Université Côte d'Azur

Anthony Riesemann, Ingénieur civil de la défense,
Direction Générale de l'Armement

Benoît Roman, Directeur de recherche,
CNRS

Nicolas Vandenberghe, Professeur des universités,
Aix-Marseille Université



UTILISATION DE L'EFFET SUPERPROPULSIF POUR L'OPTIMISATION DE LANCERS BALISTIQUES

JURY :

Président du jury

Nicolas Vandenberghe, Professeur des universités,
Aix-Marseille Université

Rapporteurs

Sébastien Neukirch, Directeur de recherche,
CNRS

Benoît Roman, Directeur de recherche,
CNRS

Examinatrice

Caroline Cohen, Professeure assistante,
École polytechnique

Directeur de thèse

Christophe Raufaste, Professeur des universités,
Université Côte d'Azur

Co-directeur

Franck Celestini, Maître de conférences,
Université Côte d'Azur

Invité

Anthony Riesemann, Ingénieur civil de la défense,
Direction Générale de l'Armement

RÉSUMÉ

Les lancers balistiques précis et efficaces ont permis à l'espèce humaine de se développer, notamment par le biais de la chasse, soit à main nue, soit via l'utilisation d'un instrument. En pratique, plus un projectile est lourd, plus il est facile de lui conférer de l'énergie cinétique lors d'un lancer. Pour les projectiles légers, une quantité importante de l'énergie disponible reste en général piégée dans le corps humain ou dans l'instrument utilisé et le rendement énergétique est faible. Dans ce cas, il est possible d'utiliser l'élasticité d'un projectile déformable pour qu'il soit lancé avec une énergie cinétique plus importante que s'il était rigide : c'est le mécanisme de superpropulsion. Cette thèse présente la recherche de ce phénomène et des conditions de son émergence pour deux systèmes différents. Dans les deux cas, une déformation élastique est obtenue en réponse à la sollicitation longitudinale appliquée par un lanceur au mouvement harmonique imposé. L'efficacité d'un lancer est quantifiée au moyen du coefficient de transfert d'énergie qui compare l'énergie transmise au projectile à l'énergie cinétique qu'aurait obtenue un objet rigide.

Dans une première étude, nous proposons de lancer un projectile rigide au moyen d'un lanceur adjoint d'une couche de matériau mou d'épaisseur ajustable qui est en adhésion avec le lanceur mais pas avec le projectile. Cette étude mêle une approche expérimentale à des simulations numériques et un modèle analytique basés sur la résolution de l'équation d'onde à une dimension. Ces trois approches ont montré qu'un effet superpropulsif peut être obtenu pour une combinaison de deux ajustements : une synchronisation des temps caractéristiques de sollicitation par le lanceur et de déformation de la couche molle et un choix intelligent de la proportion de couche molle dans le système couche molle-projectile rigide permet d'observer un effet superpropulsif. Le coefficient de transfert d'énergie décrit un paysage complexe dans l'espace des paramètres de contrôle. Pour des paramètres bien choisis qui ont été déterminés, l'éjection en présence d'une couche molle peut être jusqu'à quatre fois plus efficace que le simple lancer d'un objet rigide. Ceci représente un record parmi toutes les études sur la superpropulsion.

Dans une deuxième étude, nous avons considéré l'éjection de projectiles élastiques qui ont la particularité de présenter des déformations transverses sous une sollicitation axiale. Nous avons choisi des projectiles homogènes et des projectiles lestés à la manière des flèches d'archerie. L'approche expérimentale a permis de mettre en évidence la superpropulsion des projectiles élastiques élastiques lestés. Des simulations numériques ont permis de mettre en évidence un comportement original du coefficient de transfert d'énergie en fonction des paramètres sans dimension du système. Un modèle analytique prédit une tendance unique en bon accord avec les résultats des deux premières approches en fonction d'un seul paramètre sans dimension fonction des paramètres précédents. L'éjection optimale est attendue lorsque la force inertielle imposée par le lanceur est de l'ordre de la force de flambement du projectile.

Mots-clés : SUPERPROPULSION – LANCER – VITESSE D'ÉJECTION – ÉNERGIE CINÉTIQUE – ÉLASTICITÉ – FLAMBEMENT DYNAMIQUE

ABSTRACT

Precise and efficient ballistic throws have allowed the human species to develop, notably through hunting, either with bare hands or through the use of an instrument. In practice, the heavier a projectile, the easier it is to give it kinetic energy during a throw. For light projectiles, a significant amount of the available energy generally remains trapped in the human body or in the instrument, and the energy efficiency is low. In this case, it is possible to use the elasticity of a deformable projectile to throw it with higher kinetic energy than if it were rigid : this is the superpropulsion mechanism. This thesis presents the research of this phenomenon and the conditions of its emergence for two different systems. In both cases, an elastic deformation is obtained in response to the longitudinal solicitation applied by a thrower with an imposed harmonic motion. The efficiency of a throw is quantified by means of the energy transfer factor which compares the energy transmitted to the projectile to the kinetic energy that a rigid object would have obtained.

In a first study, we propose to throw a rigid projectile by means of a thrower with a layer of soft material with adjustable thickness in adhesion with the launcher but not with the projectile. This study mixes an experimental approach with numerical simulations and an analytical model based on solving the one-dimensional wave equation. These three approaches have shown that a superpropulsive effect can be obtained with by combining two adjustments : a synchronization of the characteristic times of solicitation by the thrower and of deformation of the soft layer and a smart choice of the soft layer proportion in the soft layer-rigid projectile system allow the observation of a superpropulsive effect. The energy transfer factor describes a complex landscape in the control parameters space. For well-chosen parameters that have been determined, the ejection in presence of a soft layer can be up to four times more efficient than simply throwing a rigid object. This is a record amongst all the studies about superpropulsion.

In a second study, we consider the ejection of slender projectiles which have the particularity to present transverse deformations under axial stress. We have chosen homogeneous projectiles and projectiles weighted in the manner of arrows. The experimental approach has allowed demonstrating the superpropulsion of weighted slender elastic projectiles. Numerical simulations have allowed highlighting an original behavior of the energy transfer factor as a function of the dimensionless parameters of the system. An analytical model predicts a unique trend in good agreement with the results of the first two approaches as a function of a single dimensionless parameter depending on the previous ones. The optimal ejection is expected when the inertial force imposed by the thrower is of the order of the buckling force of the projectile.

Key-words : SUPERPROPULSION - THROW - EJECTION VELOCITY - KINETIC ENERGY - ELASTICITY - DYNAMIC BUCKLING

REMERCIEMENTS

Je commencerai la partie la plus difficile à rédiger de ce manuscrit en remerciant les membres du jury, les deux rapporteurs Benoît Roman et Sébastien Neukirch ainsi que les examinateurs Caroline Cohen et Nicolas Vandenberghe, président de ce jury. Merci aussi à Anthony Riesemann, mon tuteur à la DGA et à travers lui merci à l'Agence Innovation Défense qui a financé intégralement ce projet de thèse.

J'en profite pour remercier le laboratoire qui m'a accueilli, l'Institut de Physique de Nice, et son directeur Guillaume Huyet. Je remercie également le personnel administratif et particulièrement Madalena Neri et Magali Varlet-Dusaucy pour leur efficacité. Je remercie aussi le service mécanique, toujours de bonne volonté et surtout de grande qualité, en la personne de sa responsable Sandra Bosio.

Évidemment, je suis obligé de remercier mes encadrants, Franck et Christophe. Obligé, pas par coutume mais car « c'est le bon moment ». Outre l'apport scientifique important, vous m'avez apporté beaucoup humainement. Vous avez été un soutien sans faille tout du long, allant jusqu'à me tenir à bout de bras à plusieurs reprises. Sans vous, je n'aurais pas pu mener à bien cette thèse.

Merci aussi à Médéric Argentina et Joachim Mathiesen avec qui j'ai eu l'honneur de co-signer mon premier article.

Je poursuivrai en remerciant les différents protagonistes accomplissant leurs méfaits au sein de ce laboratoire. D'abord les différents membres de l'équipe *Fluides Complexes* avec qui j'ai partagé de nombreuses réunions hebdomadaires.

Et puis, comment ne pas penser à l'équipe de rhéologues, presque ma deuxième équipe, qui a animé le meilleur couloir du site Valrose. François, pour ta bonne humeur et ton rire qui perce les murs. Élisabeth, pour ton franc-parler que j'apprécie depuis ce fameux stage au « sujet [...] merdique ». Et puis Fred... Tu as inspiré le mécanicien qui sommeillait en moi notamment lors d'un projet de L3 qui devait résulter d'un alignement des planètes.

Merci également aux stagiaires que j'ai encadrés tout au long de mon parcours pour leur implication dans les différents projets.

Une pensée aussi aux stagiaires que je n'ai pas encadrés et qui ont gravité autour de notre groupe de thésards/post-doc.

Mention spéciale à Lisa. Bien que ta compagnie fut brève, je suis heureux de t'avoir

rencontrée. Merci pour ces moments hors du temps !

Parlons de ce groupe fantastique et fantasque que nous avons créé et consolidé quatre ans durant. Au départ, c'est deux potes qui se disent potes et qui rencontrent trois autres potes.

Le premier, peu physionomiste, possède un flegme à toute épreuve et un humour insondable. Chester et Psykokwak pourraient en témoigner.

Merci au deuxième pour ces moments cathartiques de déversement de fiel au labo et lors des barbecues.

Enfin, merci au troisième pour ces discussions enrichissantes empreintes de philosophie politique. Tu n'aurais pas assumé aussi bien le rôle de faire-valoir comique, l'humour au sein de ce groupe en eût été plus fade.

Une pensée émue à toi, petit P3M parti trop tôt. Mais du passé faisons table en marbre, n'est-ce pas Lorenzo ?

Au sortir de la crise sanitaire — que je ne remercie pas au passage — j'ai aussi pu rencontrer Thibaut, un maître du jeu, maître de nos jeux. Juste après est arrivée Amandine, ma Belge préférée ! J'ai adoré prétendre te haïr.

Antoine, malgré ton rythme vélo-boulot-bobo, tu as parfaitement intégré la dynamique de ce légendaire bureau bruyant et désinvolte tout comme Mathis avant toi.

Marjorie, un diamant brut au cœur de guimauve. Tu as fait irruption dans ma vie à un moment critique et je m'estime chanceux d'avoir vécu à tes côtés depuis.

Michel, *chi trova un amico trova un tesoro. Il tesoro si può perdere ma non perdo un amico a causa di un fottuto oceano!*

Jordy, tu as fait avec moi ce pourquoi tu es le meilleur : tu m'as protégé. Meu irmão, tu as ma gratitude éternelle.

Ma(g) sœur de cœur. Plus de la moitié de ma vie passée à tes côtés ! Qu'importent les épreuves, nous sommes faits pour éclairer chacun le chemin de l'autre.

Mon frère, ma sœur, que la route a été sinueuse avant que nous puissions former une fratrie mais p****n que je suis fier d'en faire partie !

Papa, Maman, je sais tous vos efforts pour rendre mes jours plus pastel malgré une vie pas toujours rose. Je vous serai à jamais reconnaissant de m'avoir transmis votre bien le plus précieux : vos valeurs. Je vivrai toujours en les portant fièrement comme le blason de notre famille, noble par ce qu'elle est et non par ce qu'elle a.

J'ai aussi une pensée émue pour ma grand-mère maternelle, qui a bercé de douceur mon enfance et que je vois comme un roc dans la tempête.

Enfin, à tous ceux qui ne sont plus mais sans qui je ne serais pas, merci de m'avoir permis d'écrire mon histoire.

TABLE DES MATIÈRES

I Introduction

I.0.1	Généralités	5
	I.0.1.1 Le lancer	5
	I.0.1.2 L'efficacité d'un lancer	7
I.0.2	Le phénomène de superpropulsion et ses applications	8
	I.0.2.1 La superpropulsion	8
	I.0.2.2 La propulsion de gouttes	9
	I.0.2.3 L'ajout d'une couche molle à un projectile rigide	11
I.0.3	La dynamique d'objets élançés	12
	I.0.3.1 Les oscillations latérales	14
	I.0.3.2 Le flambement statique	14
	I.0.3.3 Le flambement dynamique	16
I.0.4	Objectifs de la thèse	17

II L'ajout d'une couche molle en adhésion avec le lanceur

II.1	Préambule	25
II.2	Matériel et méthode	27
	II.2.1 Les expériences	27
	II.2.1.1 Le lanceur	27
	II.2.1.2 Les projectiles et la couche molle intermédiaire	30
	II.2.1.3 Les paramètres de contrôle	32
	II.2.1.4 L'acquisition d'images et leur analyse	32
	II.2.2 Les simulations	33
II.3	Les résultats des simulations et des expériences	35
	II.3.1 Comparaison entre les simulations et les expériences	36
	II.3.2 Le coefficient de transfert d'énergie α	37
	II.3.3 Le temps d'éjection t_{ef}	38
	II.3.4 Valeurs maximales	39

II.4	Approche analytique	41
II.4.1	Description du modèle	41
II.4.2	Les intervalles de temps successifs	43
II.4.2.1	Premier intervalle de temps : de $t = 0$ à t_s	43
II.4.2.2	Deuxième intervalle de temps : de $t = t_s$ à $3t_s$	43
II.4.2.3	Troisième intervalle de temps, de $t = 3t_s$ à $5t_s$	44
II.4.2.4	Intervalles de temps successifs	44
II.5	Conclusion de la partie	47
III	L'éjection de projectiles élastiques élancés	
III.1	Préambule	57
III.2	Matériel et Méthode	59
III.2.1	Les expériences d'éjections	59
III.2.1.1	Les projectiles	59
III.2.1.2	Le lanceur	61
III.2.1.3	L'acquisition et le traitement des données	62
III.2.2	Simulations numériques de poutres	64
III.2.2.1	Le schéma de simulation numérique	64
III.2.2.2	La validation du schéma de simulation	69
III.2.2.3	Les éjections de poutres	74
III.2.3	Résumé du chapitre III.2	79
III.3	Résultats	81
III.3.1	Les éjections en laboratoire	81
III.3.1.1	Le coefficient de transfert d'énergie α	81
III.3.1.2	Le flambement des projectiles lestés	83
III.3.2	Simulations numériques	86
III.3.2.1	Étude systématique	86
III.3.2.2	La dynamique de flambement	90
III.3.2.3	Influence des conditions initiales	96
III.3.3	Modèle analytique	98
III.3.3.1	Cas sans flambement	99
III.3.3.2	Cas avec flambement	99
III.3.4	Résumé du chapitre III.3	103
III.4	Comparaison et discussion	105
III.4.1	Les projectiles homogènes	106
III.4.2	Les projectiles lestés	107
IV	Conclusion générale	

INTRODUCTION

TABLE DES MATIÈRES

I.0.1	Généralités	5
	I.0.1.1 Le lancer	5
	I.0.1.2 L'efficacité d'un lancer	7
I.0.2	Le phénomène de superpropulsion et ses applications	8
	I.0.2.1 La superpropulsion	8
	I.0.2.2 La propulsion de gouttes	9
	I.0.2.3 L'ajout d'une couche molle à un projectile rigide	11
I.0.3	La dynamique d'objets élanés	12
	I.0.3.1 Les oscillations latérales	14
	I.0.3.2 Le flambement statique	14
	I.0.3.3 Le flambement dynamique	16
I.0.4	Objectifs de la thèse	17

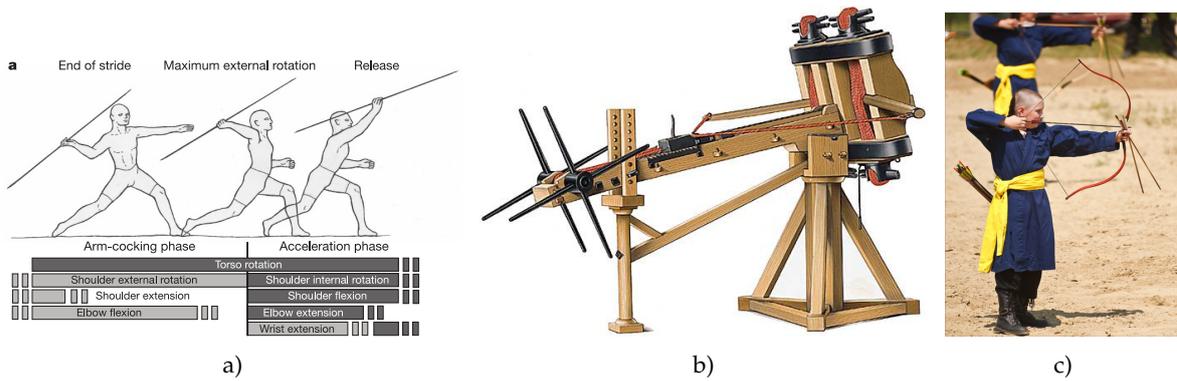


FIGURE I.O.1 : a) Schéma d'un lancer de javelot mobilisant le torse et les différentes articulations du bras du lanceur (ROACH et al., 2013) b) Dessin d'une baliste (TAËRON, 2022). L'énergie potentielle est emmagasinée dans les ressorts de torsion composée de cordes ou de tendons. c) Photographie d'un jeune archer qui arme son arc lors du 2010 International horseback archery gathering (OWEN, 2022)

I.O.1 GÉNÉRALITÉS

Plusieurs espèces de primates sont capables de projeter des objets mais seuls les représentants du genre *homo* ont été capables d'allier précision et vitesse importante (ROACH et LIEBERMAN, 2014). Cette capacité unique dans le règne animal a facilité l'apport de nourriture au moyen de la chasse et a ainsi contribué à pérenniser le genre et plus particulièrement l'espèce humaine (ROACH et al., 2013). Lancer des projectiles a été rapidement un avantage militaire dans l'histoire des civilisations, en témoigne cette célèbre citation : « À cause des flèches des barbares, il est impossible de voir le soleil. » attribuée par Plutarque au général spartiate Léonidas lors de la fameuse bataille des Thermopyles face à l'armée perse de Xerxès (PLUTARQUE, 1931).

I.O.1.1 LE LANCER

Les premières armes à distance à être apparues sont les armes de jet, des projectiles de conceptions diverses (javelot, boomerang, couteaux de lancer ou de simples pierres) qui sont accélérés par un mouvement coordonné des différentes parties du corps puis libérés par la main (figure I.O.1a). Les armes de jet sont conçues pour être lancées efficacement et leur masse a une grande influence. Nous pouvons aisément nous rendre compte que lancer à main nue une balle de tennis, un projectile léger, crée la frustration de ne pas avoir donné autant d'énergie qu'escompté. Pour les sports impliquant une balle plus massive que la main (basket-ball, pétanque, lancer du poids), la balle est systématiquement lancée à main nue, contrairement aux projectiles plus légers qui nécessitent l'emploi d'un instrument (COHEN et CLANET, 2016). Nous pouvons distinguer plusieurs types de propulsion via des instruments : les lancers (chistera, lacrosse), les frappes (tennis, base-ball) ou les tirs (tir-à-l'arc, arbalète)

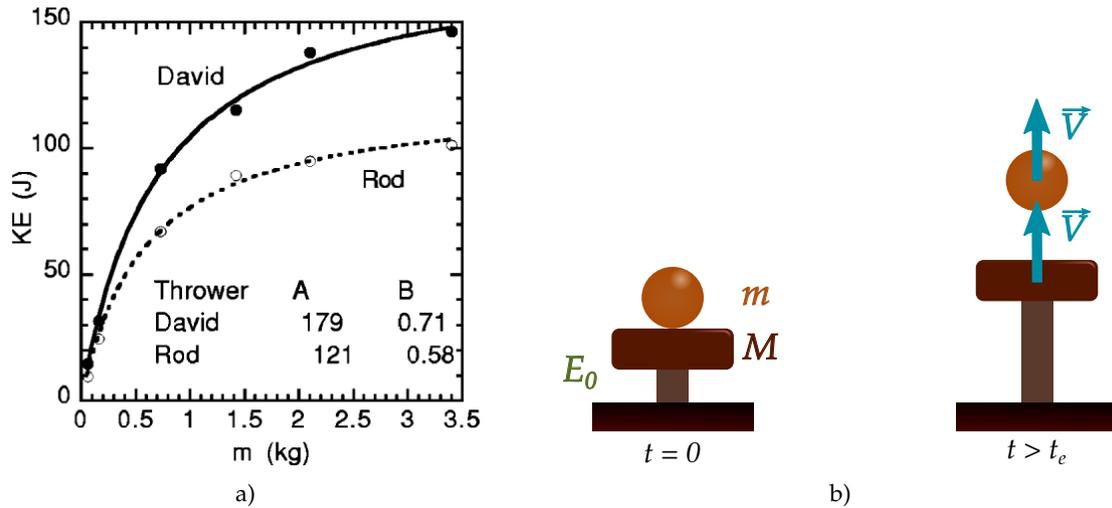


FIGURE I.0.2 : a) D'après CROSS (2004). Énergie cinétique KE (notée E_c dans le texte) d'un projectile lancé par deux individus en fonction de sa masse. Les mesures pour chaque lanceur sont ajustées au moyen de l'équation (I.0.1) avec ici $A \equiv E_0$ et $B \equiv M/3$. b) Schéma illustrant la notion de masse virtuelle. L'énergie initiale du système vaut E_0 . Le projectile de masse m est mis en mouvement au temps $t = 0$ et éjecté au temps $t = t_e$ avec une vitesse V égale à celle du lanceur de masse M . Le système étant pseudo-isolé, $E_0 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2$.

qui permettent d'accroître significativement l'énergie du projectile par rapport à un lancer à main nue. Pour donner un exemple concret, comparons les vitesses de lancers de deux projectiles de masses proches : une balle de cricket de 156 – 163 g lancée à main nue et une balle de pelote basque de 125 – 140 g lancée au moyen d'une chistera. Le record du monde de vitesse dans le premier cas est de 161.3 km/h (RECORDS, s. d.[a]). Le lancer le plus rapide à la *jai alai*, une variante de la pelote basque, culmine à près de 302 km/h soit une vitesse près de deux fois plus élevée que dans le premier cas (RECORDS, s. d.[b]). L'utilisation de la chistera permet ainsi à une balle d'accroître sa vitesse d'un facteur deux, et donc son énergie cinétique de près d'un facteur quatre.

Historiquement, de nombreux instruments ont été développés dans le but de propulser des projectiles. C'est le cas des armes de trait qui regroupent des dispositifs allant de la simple fronde aux engins de sièges (catapulte, trébuchet, baliste (figure I.0.1b)) en passant par les propulseurs de sagaies (atlatls), les arcs (figure I.0.1c) et les arbalètes. L'évolution historique de ces armes de trait rend compte de l'importance accordée à développer des engins capables d'emmagasiner toujours plus d'énergie potentielle pour en restituer un maximum et le plus rapidement possible (DENNY, 2007). Pour un lancer à main nue, il est plutôt question d'une énergie disponible dans le corps du lanceur. Nous allons voir dans la suite que, quelle que soit la méthode de lancer, l'efficacité du transfert d'énergie s'obtient par un accord entre projectile et lanceur.

I.O.1.2 L'EFFICACITÉ D'UN LANCER

D'après CROSS (2004), plus un projectile est lourd, moins il acquiert de vitesse lorsqu'il est lancé à main nue. Son énergie cinétique, en revanche, augmente avec sa masse et finit par saturer pour des masses bien supérieures à celle de l'ensemble avant-bras+main (environ 2 kg) (figure I.o.2a). L'auteur expose dans cette étude une modélisation simple du lancer. Le bras est considéré comme un seul segment de masse M ; le projectile possède une masse m . Lors de l'éjection du projectile, ils possèdent tous deux une vitesse V . La figure I.o.2b illustre une version simplifiée de ce modèle dans le cas d'un lancer unidirectionnel. Une quantité d'énergie E_0 disponible initialement est transformée en énergie cinétique du lanceur et du projectile, ce qui se traduit par $E_0 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2$. Le rendement du lancer compare l'énergie cinétique E_c reçue par le projectile et l'énergie disponible E_0 dans le lanceur et il a pour expression :

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{1}{1 + \frac{M}{m}}. \quad (\text{I.o.1})$$

Si $m \ll M$ alors le rendement est faible et de l'ordre de m/M . C'est le cas du lancer à main nue d'une balle de tennis qui, selon le modèle présenté ici avec un bras d'une masse $M \simeq 2$ kg, a un rendement de quelques pourcents. Dans la limite inverse $m \gg M$, toute l'énergie disponible est transférée au projectile. Il est cependant difficile de mettre en mouvement un projectile dont la masse est bien supérieure à 2 kg. Au lancer du poids, le projectile possède une masse maximale de 7.260 kg pour les lanceurs masculins soit moins de 4 fois la masse du bras. Le rendement théorique associé au lancer du poids est de près de 80 %. Le fort contraste de rendements entre ces deux cas rend bien compte du fait qu'un instrument est nécessaire pour accélérer des projectiles légers (COHEN et CLANET, 2016).

Cette condition sur la masse fait écho à une notion provenant de l'archerie : la masse virtuelle. Les arcs n'ont pas un rendement parfait mais sont malgré tout des instruments très efficaces avec un rendement (énergie communiquée à la flèche comparée à l'énergie disponible dans l'arc initialement) qui vaut au moins 75 % dans le cas des arcs modernes (ZANEVSKYY, 2001). Une flèche tirée par un arc reçoit donc une fraction de l'énergie disponible E_0 contenue initialement dans l'arc chargé. La quantité d'énergie qui n'est pas transmise à la flèche peut être assimilée à l'énergie cinétique d'une masse effective M possédant la même vitesse V que la flèche. La masse effective, appelée masse virtuelle d'après KLOPSTEG (1943), est constante pour un arc donné. Le rendement d'un tir suit alors la même expression que celle donnée par l'équation (I.o.1). Un bon rendement comme celui des arcs modernes implique que la masse m des flèches tirées vaille au minimum le triple de la masse virtuelle de l'arc M . La masse moyenne des flèches actuelles se situe autour de 20 g. Par conséquent les arcs possèdent des masses virtuelles inférieures à 7 g, ce qui représente uniquement une fraction de la masse de la corde.

I.O.2 LE PHÉNOMÈNE DE SUPERPROPULSION ET SES APPLICATIONS

I.O.2.1 LA SUPERPROPULSION

Si nous reprenons le modèle présenté en [figure I.o.2b](#) dans le cas $m \ll M$, le rendement donné par l'équation (I.o.1) tend vers 0. Toute l'énergie disponible est alors convertie en énergie cinétique du lanceur. La vitesse d'éjection du projectile est indépendante de sa masse et vaut la vitesse maximale du lanceur c'est-à-dire $V_p^* = \sqrt{2E_0/M}$. D'après RAUFASTE et al. (2017), cette vision n'est valable que pour des projectiles rigides et il est possible de tirer profit de la déformabilité d'un projectile pour l'éjecter avec une vitesse plus importante que celle du lanceur ([figure I.o.3a](#)). Les auteurs ont qualifié ce phénomène de *superpropulsion*. Dans cette étude, des objets élastiques (des balles d'hydrogel) et des gouttes ont été lancés au moyen d'un engin de type catapulte qui impose son mouvement périodique au projectile. Dans cette configuration, les projectiles déformables atteignent après éjection une hauteur maximale jusqu'à 2.5 fois plus importante qu'un projectile rigide et leur énergie cinétique est d'autant plus grande.

Un moyen simple d'appréhender cet effet superpropulsif est de considérer un objet élastique déformable modèle de type masse-ressort éjecté par un lanceur effectuant un mouvement simple. Ce modèle est présenté en détails dans CELESTINI et al. (2020) et est semblable à celui utilisé par PHOMSOUPHA et al. (2015) pour modéliser le mouvement d'une raquette de badminton. Le lanceur effectue un mouvement harmonique d'amplitude A et de fréquence f d'expression $z_p = A [1 - \cos(2\pi ft)]$ à partir de $t = 0$. Il atteint sa vitesse maximale $V_p^* = 2\pi Af$ au temps $t = 1/(4f)$. Le projectile modèle est constitué d'une masse m ponctuelle située au dessus d'un ressort parfait de raideur k . Il a pour fréquence propre $f_0 = 1/2\pi\sqrt{k/m}$. Le projectile est éjecté lorsque, après avoir été déformé, il regagne sa longueur initiale au temps $t_e = 1/(f + f_0)$. Pour quantifier l'éjection, les auteurs ont défini un coefficient de transfert d'énergie α qui compare l'énergie cinétique du projectile éjecté avec une vitesse V_e et celle qu'il aurait s'il était indéformable :

$$\alpha = \left(\frac{V_e}{V_p^*} \right)^2 = \frac{(f_0/f)^2}{(f_0/f - 1)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{f_0/f + 1} \right) \quad (\text{I.o.2})$$

Cette fonction atteint un maximum $\alpha \simeq 3.13$ pour $f_0/f \simeq 1.62$. Ce modèle simple permet de comprendre que la source d'un transfert efficace réside dans l'accord entre la fréquence caractéristique d'accélération du lanceur et la fréquence propre de déformation du projectile. Ainsi, l'efficacité de l'éjection ne dépend pas de la nature de la déformation du projectile mais du rapport entre ces deux fréquences. À l'image du phénomène de résonance qui apparaît lorsqu'une force est appliquée à un système avec une fréquence proche de sa fréquence naturelle, la superpropulsion apparaît comme une résonance sur "un seul coup" pour laquelle le rapport de fréquences f_0/f permet au projectile de recevoir un maximum

d'énergie de la part du lanceur pendant un temps inférieur à la période du lanceur.

Des résultats en très bon accord avec les expériences peuvent être obtenus en modélisant le projectile comme un milieu continu homogène linéaire répondant à la loi de Hooke (HOOKE, 1678) et dans lequel se propagent des ondes élastiques bien décrites par l'équation de d'Alembert à une dimension (D'ALEMBERT, 1747). Ce modèle prédit la même tendance que précédemment, avec un maximum du coefficient de transfert d'énergie au-delà de 1 qui répond à un rapport de fréquences particulier (RAUFASTE et al., 2017).

Les tendances communes à ces deux modèles indiquent que la superpropulsion est un phénomène issu de la compétition entre inertie et élasticité. Les valeurs des optima et des rapports de fréquences pour lesquels ils sont atteints dépendent quant à elles du système considéré.

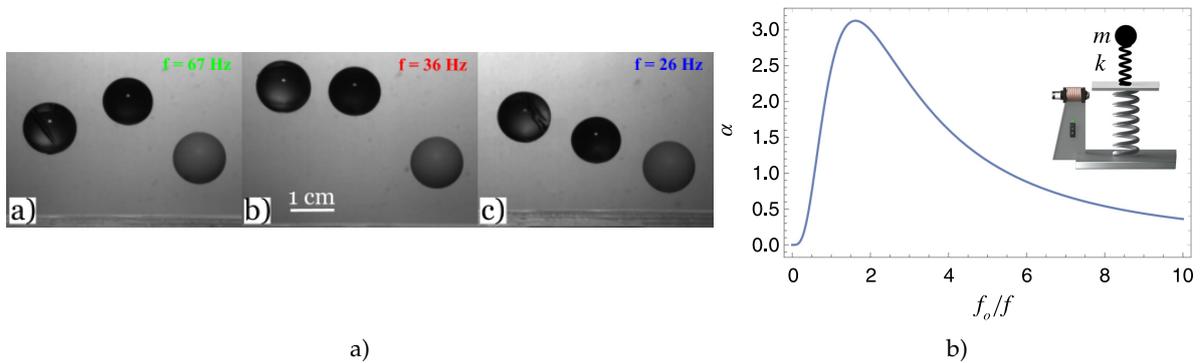


FIGURE I.0.3 : a) Photographies issues de RAUFASTE et al. (2017) représentant des hydrogels (2 balles de gauche) et une bille rigide lancés par l'engin réglé à trois fréquences f différentes. Les projectiles déformables atteignent une hauteur plus élevée que le projectile rigide : ils ont donc une énergie cinétique plus élevée. b) Les coefficients de transfert d'énergie α issus du modèle de projectile masse-ressort en fonction de f_0/f défini par l'équation (I.0.2) d'après CELESTINI et al. (2020).

I.0.2.2 LA PROPULSION DE GOUTTES



FIGURE I.0.4 : D'après CHANTELOT et al. (2018). Séquence d'images présentant les formes surprenantes adoptées par une petite flaque d'eau sur une surface superhydrophobe accélérée verticalement.

Lors de l'impact d'une goutte d'eau sur une surface superhydrophobe, l'énergie cinétique de la goutte est transitoirement emmagasinée sous forme d'énergie de surface puis restituée en énergie cinétique (RICHARD et QUÉRÉ, 2000). Sur de tels substrats, l'énergie de surface est comparable à une énergie élastique. La goutte d'eau ne s'étale pas mais elle rebondit.

En 2004, CLANET et al. ont étudié la déformation de gouttes lors d'un impact ainsi que lors d'une accélération verticale imposée par un engin de type masse-ressort. Dans les deux configurations, les gouttes d'eau se déforment et s'étalent puis se rétractent en présentant les mêmes dynamiques de déformation. En utilisant le même principe de propulsion, CHANTELOT et al. ont observé que les gouttes peuvent se déformer grandement pour atteindre des formes surprenantes semblables à des vases liquides (figure I.0.4).

Dans le domaine des petites déformations, une goutte d'eau de diamètre L peut être assimilée à un ressort dont la raideur est proportionnelle à la tension de surface σ et de masse proportionnelle à ρL^3 , avec ρ la masse volumique de l'eau. La goutte se comporte alors comme un objet élastique qui peut osciller avec une fréquence propre $f_0 \propto \sqrt{\sigma/(\rho L^3)}$. En ce sens, les gouttes d'eau peuvent être lancées comme des balles d'hydrogel et profiter d'un effet superpropulsif (RAUFASTE et al., 2017). La superpropulsion est ainsi un phénomène général qui s'applique à tout objet élastique déformable. La fréquence propre d'une goutte d'eau de diamètre millimétrique est de l'ordre d'une centaine de Hertz. En utilisant un lanceur dont la fréquence f est autour de 30 Hz seulement, il est donc possible d'obtenir une éjection de goutte plus efficace que celle d'une bille rigide de même masse (figure I.0.5).

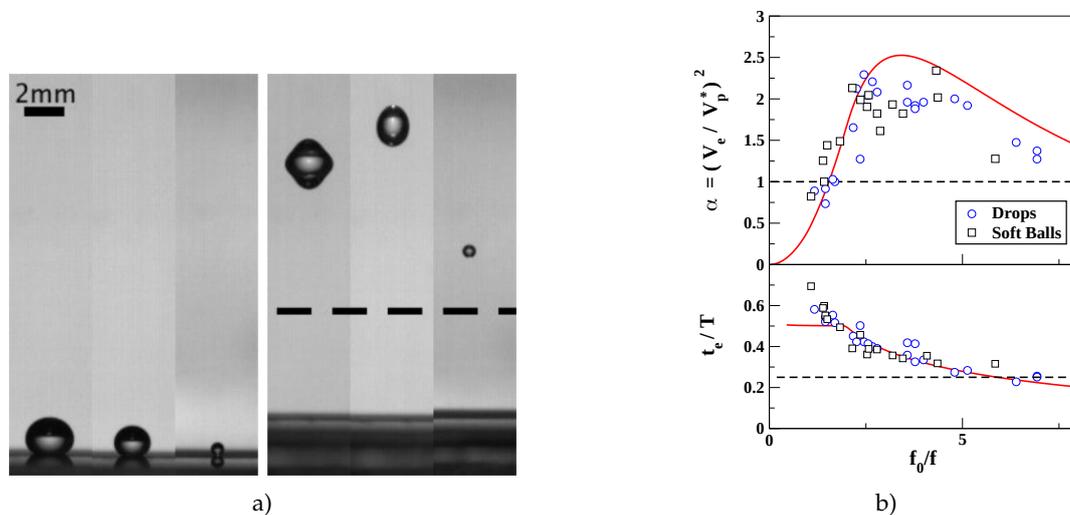


FIGURE I.0.5 : D'après RAUFASTE et al. (2017). a) Trois gouttes de différents diamètres propulsées par le même lanceur avec la même fréquence f . À gauche, juste avant l'accélération. À droite, les trois gouttes à leur altitude maximale après éjection. La ligne pointillée symbolise l'altitude atteinte par un objet rigide. b) Les coefficients de transfert d'énergie α et les temps d'éjection adimensionnés t_e/T avec $T = 1/f$ en fonction du rapport de fréquences f_0/f . La ligne rouge représente les résultats issus de la modélisation du projectile homogène comme un milieu continu.

En 2018, RAMOS CHAGAS *et al.* se sont basés sur la superpropulsion pour développer une méthode de caractérisation de l'adhésion de gouttes avec des substrats hydrophobes. Les auteurs ont réalisés des substrats avec des propriétés d'adhésion et d'hydrophobicité différentes qu'ils ont placés sur un lanceur de type catapulte. Ils ont fait varier son amplitude de manière systématique afin de modifier son accélération initiale. Ils ont étudié le comportement d'une goutte de même volume sur chaque substrat. Pour cela, ils l'ont placée sur le substrat puis ont actionné la catapulte afin de l'éjecter. Ils ont identifié plusieurs scénarios en fonction de l'accélération fournie. Pour de petites accélérations, la goutte adhère au substrat et n'est pas éjectée. Pour de grandes accélérations, la goutte se fragmente : une partie est éjectée et une autre reste en adhésion avec le substrat. Entre ces deux régimes, les gouttes sont totalement éjectées et les auteurs retrouvent les résultats attendus dans le cadre de la superpropulsion. Ils ont montré que cette technique de caractérisation est en bon accord avec les techniques classiques de mesure d'angle de mouillage. Cette technique a depuis été réemployée pour caractériser des substrats déformables constitués d'un réseau d'acier fonctionnalisé capables d'éjecter des gouttes de manière efficace (RAMOS CHAGAS *et al.*, 2019).

Enfin, CELESTINI *et BORMASHENKO* ont utilisé l'effet superpropulsif pour caractériser les propriétés capillaires et rhéologiques de gouttes enrobées (AUSSILLOUS *et QUÉRÉ*, 2001).

I.O.2.3 L'AJOUT D'UNE COUCHE MOLLE À UN PROJECTILE RIGIDE

En 2020, CELESTINI *et al.* ont montré qu'il est possible d'adapter un projectile rigide pour obtenir une déformation synchronisée avec la sollicitation du lanceur conduisant à une éjection plus efficace. Pour cela, ils ont rendu le projectile plus souple en lui adjoignant une couche de matériau mou. Les auteurs ont réalisé des projectiles de longueur constante L et ont varié l'épaisseur de la couche molle entre 0 et L (figure I.o.6). Les deux cas limites de projectile homogène, rigide ou mou, sont à présent bien connus. Le projectile rigide est éjecté avec la vitesse maximale du lanceur alors que l'efficacité de l'éjection d'un projectile mou dépend du rapport f_0/f . Les cas intermédiaires ont une dynamique complexe marquée par une déformation non uniforme du projectile induite par la propagation d'ondes élastiques à l'intérieur de celui-ci. Le comportement de l'efficacité de l'éjection nécessite ici deux paramètres sans dimension pour être décrite. L'un des deux compare l'épaisseur de la couche molle à la longueur du projectile et le second compare un temps caractéristique de déformation et le temps caractéristique de la sollicitation, $1/f$.

Dans le cas des projectiles constitués d'une couche molle très fine, celle-ci se déforme uniformément à la manière d'un ressort linéaire parfait. Dans ce cas particulier, le modèle décrit en section I.o.2.1 rend bien compte de la dynamique du système et prédit un optimum du coefficient de transfert d'énergie qui vaut $\alpha = 3.13$ lorsque le temps caractéristique de déformation du projectile est synchronisé avec celui du lanceur ($f_0/f \simeq 1.62$).



FIGURE I.0.6 : D'après CELESTINI et al. (2020). Images de projectiles de longueur $L = 15$ mm éjectés par le même engin de type catapulte de fréquence $f = 76$ Hz. Á gauche un projectile sans couche molle, à droite un projectile totalement mou et entre les deux différentes proportions de matériau mou. Après éjection à vitesse V_e , le centre de masse des projectiles n'est soumis qu'à la gravité. Chaque projectile atteint alors une hauteur maximale H reliée à la vitesse d'éjection par la relation $V_e = \sqrt{2gH}$. Les projectiles atteignent des hauteurs H différentes donc leur vitesse d'éjection V_e dépend de l'épaisseur de couche molle.

I.0.3 LA DYNAMIQUE D'OBJETS ÉLANCÉS

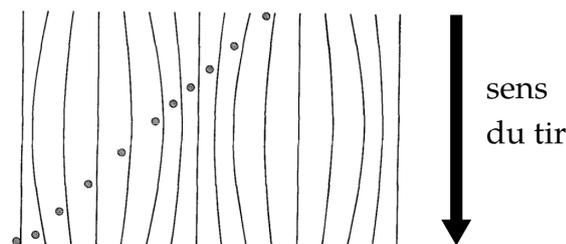


FIGURE I.0.7 : Illustration du paradoxe de l'archer par KLOPSTEG (1943). La poignée est représentée en coupe par un disque hachuré et la flèche par un trait, toutes deux sont vues de dessus. Le mouvement est représenté dans le référentiel de la flèche en mouvement dans le référentiel terrestre. Nous observons les différentes phases de déformations qui permettent à la flèche de suivre une trajectoire rectiligne jusqu'à la cible qui serait située en bas par rapport à la figure.

Nous évoquions précédemment l'efficacité dont les arcs font preuve. Or, ces derniers ont aussi toujours été réputés pour leur très grande précision. Cette précision est notamment due à la capacité qu'a la flèche à se déformer. Prenons l'exemple d'un arc traditionnel pour lequel la flèche se place initialement d'un côté de la poignée et repose sur une phalange de l'archer. Lorsque l'arc est armé, la flèche forme un léger angle avec l'axe reliant la corde à la poignée. Si la flèche est parfaitement rigide, cet angle augmente à mesure que la corde se rapproche de la poignée. La flèche est alors déviée fortement de la trajectoire escomptée. Une flèche est en réalité un objet élastique qui, durant son accélération par l'arc, subit une déformation orthogonale à son grand axe. Cette dynamique particulière lui permet de suivre la trajectoire voulue jusqu'à la cible : c'est le paradoxe de l'archer (figure I.0.7).

L'origine de la déformation est multiple (ZANEVSKYY, 2001). Premièrement, l'archer tient l'arc en tension en maintenant l'encoche de la flèche avec ses doigts. Lors de la décoche, le mouvement de ses doigts induit un déplacement latéral. À cause de l'inertie de la flèche, celle-ci subit une flexion. Deuxièmement, lors de l'accélération, une force de réaction agit

sur la partie de la flèche en contact avec la poignée et/ou la main de l'archer. Encore une fois, l'inertie de la flèche conduit à une flexion. Finalement, la grande accélération de la corde est à l'origine d'une force axiale qui s'applique sur l'encoche de la flèche et engendre le flambement — ou flambage — du projectile. Les arcs modernes possèdent une poignée creusée pour diminuer cette déformation. Celle-ci subsiste toutefois et représente un avantage dans la stabilité de la flèche en évitant une rotation de l'encoche par rapport à la pointe.

Les flèches sont constituées principalement d'un fût cylindrique, ou tube, qui peut être plein ou creux et qui se compose d'un matériau homogène ou composite. La pointe, dont la masse vaut environ un tiers de la masse totale de la flèche, est fixée à une extrémité et l'empennage (les plumes) à l'autre extrémité. À ce titre, une flèche peut être assimilée à une poutre cylindrique avec une distribution de masse non uniforme due principalement à la présence de la pointe massive (KOOI et SPARENBERG, 1997; PARK, 2011). Dans ce qui suit, nous considérons une poutre homogène de masse uniformément répartie pour simplifier le propos.

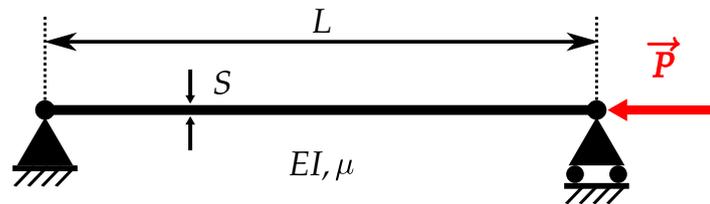


FIGURE I.0.8 : Schéma d'une poutre de longueur L , section S , de masse linéique μ et de rigidité en flexion EI soumise à l'application d'une force axiale \vec{P} . Les deux extrémités de la poutre sont libres de rotation. À gauche, le déplacement est fixé et à l'extrémité droite peut se mouvoir horizontalement sous l'effet de \vec{P} .

Nous considérons ici une poutre homogène de section circulaire uniforme S , constituée d'un matériau linéaire élastique de module de Young E , de moment quadratique I par rapport à la section transverse, de longueur L et de masse linéique μ constante. Sous l'action d'une force compressive P dans la direction axiale de coordonnée x , la dynamique d'une poutre répond à l'équation générale suivante (LINDBERG et FLORENCE (1987, page 15), GLADDEN et al. (2005)) :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P(x, t) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} = 0, \quad (\text{I.0.3})$$

avec ζ le déplacement transverse d'un élément de la poutre. Ici, nous nous plaçons dans les considérations de la théorie classique des poutres c'est-à-dire que nous ne prenons pas en compte le cisaillement ou l'inertie de rotation dont les effets sont décrits par la théorie de Timoshenko-Ehrenfest (TIMOSHENKO, 1921).

I.0.3.1 LES OSCILLATIONS LATÉRALES

Une flèche en plein vol peut être modélisée par une poutre en oscillation libre (PARK, 2011). Dans ce cas, il n'y a pas de force de compression et l'équation (I.0.3) devient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0. \quad (\text{I.0.4})$$

Nous retrouvons ici l'équation d'Euler-Bernoulli bien connue dans la théorie classique des poutres. La résolution de cette équation linéaire suivant les modes propres de déformation transverse, symbolisés par \perp , dépend des conditions aux limites. Les fréquences associées à chaque mode f_n^\perp ont pour expression générale :

$$f_n^\perp = \beta_n^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \frac{1}{L^2}, \quad (\text{I.0.5})$$

avec β_n un coefficient inhérent au mode n et qui dépend des conditions aux limites. Dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et laissée libre à l'autre, une poutre en porte-à-faux ou cantilever, pour le mode fondamental, $n = 0$ et $\beta_0 \simeq 0.59686$. Pour le premier harmonique, $n = 1$ et le coefficient β_1 vaut environ 1.49418.

Dans le cas d'une poutre dont les deux extrémités sont libres, les coefficients deviennent $\beta_0 \simeq 1.5056$ et $\beta_1 \simeq 2.4998$.

I.0.3.2 LE FLAMBEMENT STATIQUE

Pour les arcs modernes, la flexion est minimisée par l'utilisation d'une poignée creusée évitant l'inclinaison de la flèche et l'équipement d'un composant réduisant les oscillations de la flèche : le *Berger button*. Pour les arcs à poulie, la décoche ne s'effectue pas avec les doigts mais au moyen d'un dispositif, le décocheur, qui limite le mouvement latéral. La force de compression axiale reste cependant non négligeable.

I.0.3.2.1 LE FLAMBEMENT D'EULER

Plaçons nous dans un premier temps dans le cas d'une sollicitation axiale quasi-statique. Au-delà d'une force critique qui dépend des propriétés mécanique et géométrique de la poutre, une instabilité se développe soudainement et la poutre subit une déformation transverse. Cette force critique, ou force d'Euler d'après le célèbre mathématicien et physicien suisse qui l'établit en 1757 (EULER, 1759), a pour expression générale :

$$P_n = (n + 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (\text{I.0.6})$$

L'entier n indique le mode de déformation de la poutre. En théorie, tous les modes harmoniques sont accessibles mais si la compression est suffisamment lente, seul le mode fondamental ($n = 0$) se développe.

La force critique dépend aussi des conditions aux limites par le biais de la longueur effective de flambement ℓ . Le [tableau I.0.1](#) compile les longueurs effectives de flambement et les forces critiques pour deux configurations : une poutre encastree à chaque extrémité et une poutre articulée à chaque extrémité.

	Conditions aux limites			ℓ	P_c
	ζ	ζ'	ζ''		
encastree-encastree	0	0	—	$\frac{L}{2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$
rotule-rotule	0	—	0	L	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

TABLEAU I.0.1 : Conditions aux limites à chaque extrémité pour deux configurations de poutres et longueurs ℓ et forces P_c de flambement associées.

I.0.3.2.2 LE POST-FLAMBEMENT

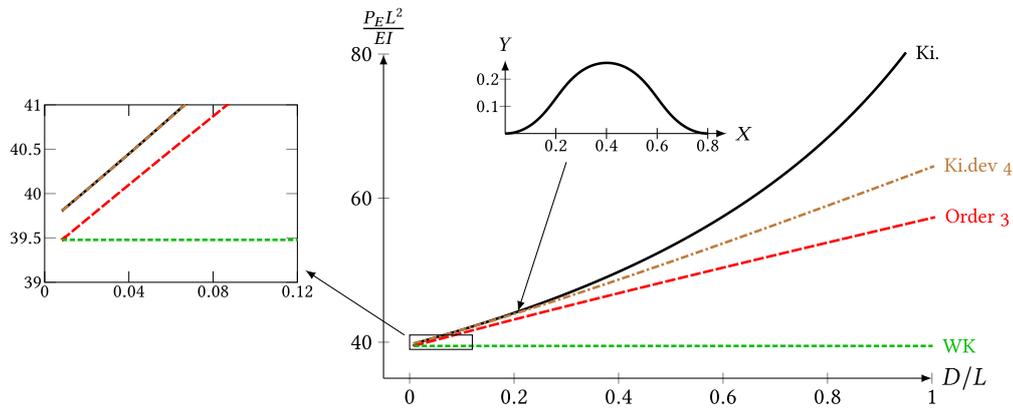


FIGURE I.0.9 : D'après NEUKIRCH et al. (2021). Force axiale externe P_E adimensionnée par EI/L^2 en fonction du déplacement axial D rapporté à la longueur L de la poutre encastree à chaque extrémité. La solution au modèle de Kirchhoff (Ki.) est représentée par la ligne noire continue et celle au modèle WK par une ligne verte pointillée. Les deux autres courbes représentent les solutions à deux autres modèles qui sont des approximations de Ki. d'ordres 3 et 4. À gauche, l'insert présente la valeur de la force critique pour chaque modèle. WK prédit la même valeur que la force d'Euler — ici $4\pi^2$ selon l'adimensionnement — alors que Ki. prédit une force seuil plus élevée.

Sous l'effet de l'accélération par l'arc, la flèche se met à flamber. La sollicitation est présente tout au long de la propulsion et le projectile continue de se déformer après le flambement. Le modèle précédent prédit la force critique P_c qu'il faut surpasser pour qu'une poutre se déforme mais il ne rend pas compte de son état de déformation ni de la force extérieure $P_E > P_c$ qu'elle subit après avoir flambé. Il faut alors prendre en compte l'extensibilité de la poutre pour étudier le post-flambement de la poutre. En 2021, NEUKIRCH et al. ont comparé le modèle de Woinowsky-Krieger (WK) au modèle géométriquement

parfait établi par Kirchhoff en 1876 (KIRCHHOFF, 1876), dont WK est une approximation, dans le cas d'une poutre encastrée à chaque extrémité et dont une des deux subit un déplacement axial D imposé. La force extérieure P_E qui répond au déplacement D est calculée pour chaque modèle et représentée en figure I.0.9. Alors que le premier modèle prédit que P_E est indépendante de la déformation longitudinale D/L et vaut la force d'Euler, le modèle de Kirchhoff prédit que P_E augmente avec D/L de manière non linéaire et peut valoir le double de la force critique pour de très grandes déformations, $D/L \rightarrow 1$.

I.0.3.3 LE FLAMBEMENT DYNAMIQUE

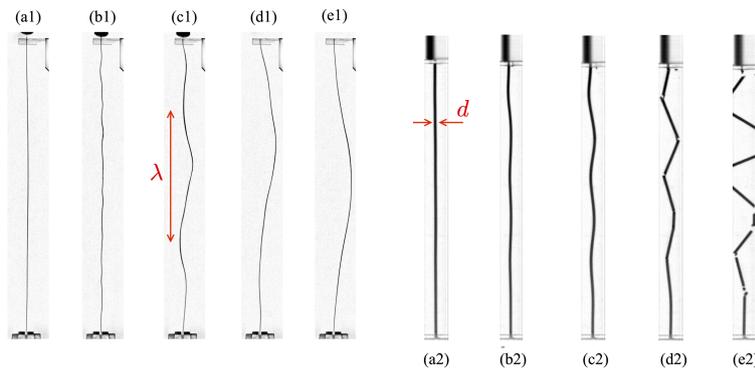


FIGURE I.0.10 : D'après VILLERMAUX et al. (2021). Séquence d'images montrant le grossissement des modes de déformations d'une tige de bois (à gauche) et d'un spaghetti (à droite) après impact par un projectile massif. Le spaghetti, qui est une tige fragile, subit une déformation trop importante et se fragmente de manière soudaine.

Lorsque le seuil de flambement est dépassé, les conditions de flambement ou de post-flambement quasi-statique peuvent ne plus être remplies. C'est le cas pour les flèches dont le temps de déformation est de l'ordre de la durée d'accélération de l'arc. Le flambement des flèches d'archerie n'est pas un cas de flambement statique et on parle alors volontiers de flambement dynamique. Ces deux types de phénomène n'émergent pas dans les mêmes conditions. ZANEVSKYY évoque en ce sens une force de flambement dynamique 2.5 fois inférieure à la force nécessaire à armer l'arc.

Les formes de flambement dynamique les plus répandues dans la littérature scientifique sont obtenues par l'impact d'une colonne, d'une plaque ou d'une coque causant des déformations plastiques (ABRAHAMSON et GOODIER, 1966; LINDBERG et FLORENCE, 1987). De récentes études se sont portées sur le flambement dynamique de tiges présentant des déformations élastiques. En 2005, GLADDEN et al. ont montré qu'après l'impact d'une tige par un projectile massif, le mode qui croît le plus rapidement dépend de deux grandeurs inhérentes à la tige : son diamètre et la vitesse des ondes élastiques dans le matériau dont elle est constituée. Plus récemment, VILLERMAUX et al. ont mis en évidence un nouveau mécanisme de flambage dynamique de type *mode coarsening*. Lors de l'impact de la tige, les modes de longueurs d'onde les plus petites commencent à croître. L'énergie de l'impact est alors transférée dans des modes de longueurs d'onde plus élevées ce qui conduit au flambage de la tige ou à sa fracture si l'énergie est trop élevée et que le matériau est fragile (figure I.0.10).

I.O.4 OBJECTIFS DE LA THÈSE

Cette thèse a été motivée par l'aspect énergétique des lancers de projectiles avec pour base l'utilisation de l'effet superpropulsif. Nous avons vu en [section I.o.2](#) que l'ajustement réciproque des propriétés du lanceur avec celle du projectile permet à ce dernier d'être éjecté avec plus d'énergie cinétique qu'un projectile rigide, que ce soit dans le cas d'un projectile homogène, élastique ou capillaire, ou d'un projectile rigide allié à une couche molle. À la manière d'un phénomène de résonance qui se réaliserait sur "un seul coup", l'optimum d'efficacité est obtenu lorsque le rapport entre la fréquence caractéristique de sollicitation du lanceur et celle de la réponse du projectile, f_0/f , est de l'ordre de 1.

L'objectif principal de cette thèse a été de chercher à obtenir des éjections efficaces de projectiles qui correspondent à des situations plus complexes que celles énoncées précédemment, et de voir comment le critère de synchronisation s'exprime dans ces cas précis.

Nous nous sommes dans un premier temps demandé comment lancer plus efficacement un projectile rigide qui, par essence, ne possède pas de temps caractéristique de déformation. Pour répondre à cette interrogation, nous nous sommes concentrés sur des éjections de projectiles rigides par un lanceur de type catapulte rendu flexible par l'adjonction d'une couche de matériau mou. Malgré la ressemblance avec le système étudié en [section I.o.2.3](#), il existe une différence majeure dans les conditions aux limites : la couche adhère avec le lanceur mais pas avec le projectile. Dans le souci de modéliser au mieux le système, pour savoir s'il permet une éjection optimale et mettre en évidence les paramètres nécessaires à son obtention, nous avons allié expériences, simulations numériques et modélisation analytique.

Dans un second temps, nous nous sommes demandé si des projectiles élançés, à l'image des flèches, peuvent profiter d'une superpropulsion obtenue dans le cas de déformations transverses. Comme nous l'avons vu en [section I.o.3](#), ces objets possèdent une dynamique différente de celle des projectiles homogènes présentant une déformation longitudinale. Nous nous attendons notamment à des effets non linéaires, la force axiale apparaissant comme un coefficient de l'équation des poutres ([équation \(I.o.3\)](#)). Du fait de la déformation transverse, la fréquence propre f_0 associée à une déformation longitudinale n'est plus un paramètre pertinent et par conséquent f_0/f non plus. Nous nous sommes demandé s'il était tout de même possible d'obtenir une synchronisation entre la sollicitation du lanceur et la déformation transverse du projectile conduisant à une éjection optimale. N'étant pas un effet connu dans le domaine de l'archerie, nous nous sommes interrogé sur la pertinence d'obtenir une superpropulsion dans le tir d'une flèche. Pour répondre à ces questions et identifier les paramètres pertinents pilotant l'efficacité des lancers, nous avons réalisé des expériences d'éjections de projectiles élançés ainsi que des simulations numériques, combinées à un modèle analytique simple.

Dans les deux études, nous avons imposé la cinématique du lanceur, ce qui correspond à la limite dans laquelle la masse du projectile est très faible devant la masse du lanceur ($m \ll M$ sur la [figure I.o.2b](#)), avec un mouvement harmonique. Ceci constitue une étape préliminaire à la compréhension de systèmes plus complexes comme l'ensemble arc-flèche. Pour ces systèmes, il existe une quantité finie d'énergie disponible initialement et l'optimisation des lancers consiste à transmettre un maximum de cette énergie au projectile tout en minimisant celle communiquée à la masse virtuelle du lanceur.

L'AJOUT D'UNE COUCHE MOLLE EN ADHÉSION AVEC LE LANCEUR

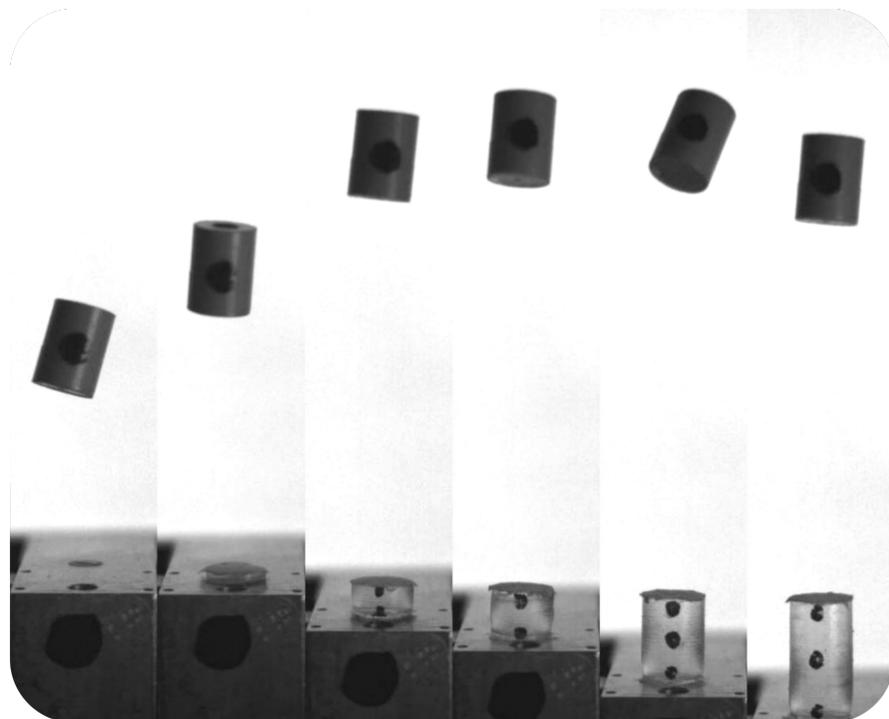


TABLE DES MATIÈRES

II.1	Préambule	25
II.2	Matériel et méthode	27
II.2.1	Les expériences	27
II.2.1.1	Le lanceur	27
II.2.1.2	Les projectiles et la couche molle intermédiaire	30
II.2.1.3	Les paramètres de contrôle	32
II.2.1.4	L'acquisition d'images et leur analyse	32
II.2.2	Les simulations	33
II.3	Les résultats des simulations et des expériences	35
II.3.1	Comparaison entre les simulations et les expériences	36
II.3.2	Le coefficient de transfert d'énergie α	37
II.3.3	Le temps d'éjection t_{ef}	38
II.3.4	Valeurs maximales	39
II.4	Approche analytique	41
II.4.1	Description du modèle	41
II.4.2	Les intervalles de temps successifs	43
II.4.2.1	Premier intervalle de temps : de $t = 0$ à t_s	43
II.4.2.2	Deuxième intervalle de temps : de $t = t_s$ à $3t_s$	43
II.4.2.3	Troisième intervalle de temps, de $t = 3t_s$ à $5t_s$	44
II.4.2.4	Intervalles de temps successifs	44
II.5	Conclusion de la partie	47

NOMENCLATURE

- α Coefficient de transfert d'énergie
 γ Facteur d'amortissement de l'oscillateur
 ε Déformation élastique de la couche molle
 ε_+ Composante de ε se propageant dans le sens des z croissants
 ε_- Composante de ε se propageant dans le sens des z décroissants
 ρ_r Masse volumique du projectile
 ρ_s Masse volumique de la couche molle
 $\omega = 2\pi f$ Pulsation du lanceur
 ω_p Pseudo-pulsation de l'oscillateur amorti
 A Amplitude du lanceur
 c_r Célérité des ondes dans le projectile rigide
 c_s Célérité des ondes dans la couche molle
 E_r Module de Young du projectile
 E_s Module de Young de la couche molle
 f Fréquence du lanceur
 $T = 1/f$ Période du lanceur
 f_0 Fréquence propre du système masse-ressort
 $T_0 = 1/f_0$ Période propre du système masse-ressort
 k Raideur du ressort
 L Longueur totale $L_r + L_s$
 L_r Longueur du projectile
 L_s Longueur de la couche molle
 m Masse du projectile rigide
 S Section du projectile
 t_0 Temps de mise en mouvement du lanceur
 t_e Temps d'éjection

- t_r Temps de parcours de l'onde élastique au travers du projectile
- t_s Temps de parcours de l'onde élastique au travers de la couche molle
- u Champ de déplacement
- u_r Champ de déplacement dans le projectile rigide
- u_s Champ de déplacement dans la couche molle
- v Vitesse de l'onde élastique dans la couche molle
- v_+ Composante de v dans le sens des z croissants
- v_- Composante de v dans le sens des z décroissants
- V_e Vitesse du projectile à l'éjection
- V_m Vitesse du projectile rigide
- V_p Vitesse du lanceur
- V_p^* Vitesse maximale du lanceur
- x Rapport entre la longueur de couche molle L_s et la longueur totale L
- y Coordonnée lagrangienne dans le référentiel non déformé du système lanceur - projectile au repos
- y_c Point de contact entre le projectile rigide et la couche molle
- z_m Position du projectile rigide
- z_p Position de la plaque du lanceur

PRÉAMBULE

Dans ce chapitre, nous cherchons à éjecter un projectile rigide plus efficacement. Contrairement à CELESTINI et al. (2020), nous ne modifions pas le projectile pour le rendre globalement plus mou. Nous choisissons ici de placer une couche molle en adhésion avec le lanceur et de prévenir quelque adhésion entre le projectile rigide et cette couche molle. Cette configuration se traduit par des conditions aux limites particulières qui modifient la dynamique de l'ensemble. Le fait que cette couche soit attachée au lanceur et non au projectile implique de trouver un nouvel ajustement entre le temps de sollicitation et le temps de déformation de la couche molle. Cela donne lieu à un comportement complexe de l'efficacité des éjections caractérisé par un coefficient de transfert d'énergie qui peut prendre des valeurs significativement plus élevées que dans les études discutées en introduction.

Bien que, dans une certaine limite, le système réponde assez bien au modèle masse-ressort introduit en [section I.0.2.3](#), nous verrons que la couche molle doit être modélisée par un milieu continu homogène isotrope dans le but de décrire au mieux l'efficacité des éjections. Un tel matériau ne se déforme pas uniformément comme le ferait un ressort idéal mais de manière locale et il faut alors prendre en compte la propagation des ondes élastiques initiées par le mouvement du lanceur. Des simulations ont été réalisées en ce sens en considérant à la fois la couche molle et le projectile rigide comme des milieux continus de masses volumiques respectives ρ_s et ρ_r proches et présentant un fort contraste de modules de Young E_s et E_r .

Les résultats expérimentaux et ceux des simulations, en bon accord, seront confrontés à un modèle analytique basé sur la déformation de la couche molle uniquement en considérant le projectile comme un objet parfaitement rigide.

Cette étude a donné lieu à la publication d'un article dans la revue *Physical Review E* (GIOMBINI et al., 2022).

II2

MATÉRIEL ET MÉTHODE

II.2.1 LES EXPÉRIENCES

II.2.1.1 LE LANCEUR

II.2.1.1.1 PRINCIPE DU LANCEUR

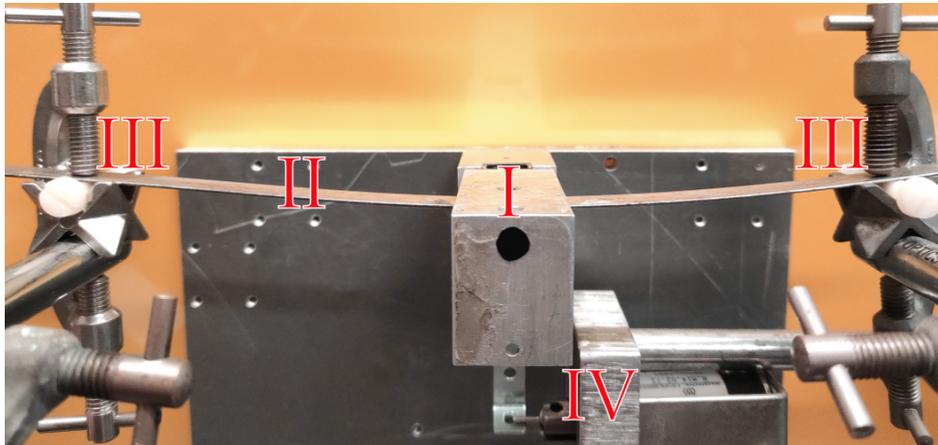


FIGURE II.2.1 : Photographie du lanceur sans couche molle. **I** La plateforme sur laquelle est fixée la couche molle. **II** Le clinquant d'acier. **III** Les deux points d'encastrement du clinquant. **IV** Un électro-aimant de verrouillage permettant de bloquer le lanceur dans sa position chargée puis de le libérer par activation. Le disque noir sur la face avant de la plateforme permet de la suivre au cours du temps.

Le lanceur est constitué de différents éléments : une plateforme massive **I** et un clinquant en acier **II** qui agissent comme un système masse ressort (figure II.2.1). Le clinquant est encasté en deux points **III** séparés d'une distance réglable entre 5 et 20 cm. La raideur du système est ajustable, soit en choisissant différentes épaisseurs de clinquants, soit en choisissant différentes longueurs. La plateforme est fixée au milieu du clinquant afin de

rendre le système symétrique et de bien guider le mouvement du lanceur. La plateforme est initialement écartée verticalement vers le bas d'une amplitude A d'approximativement 2 mm puis bloquée au moyen d'un électro-aimant de verrouillage **IV**. La flexion du clinquant permet d'emmagasiner une certaine quantité d'énergie potentielle élastique qui est restituée lors de la libération de la plateforme. Cette dernière possède une masse d'environ 50 g, bien supérieure à la masse des projectiles qui sont placés dessus qui vaut au maximum 6 g (section II.2.1.2). Ce dispositif se comporte ainsi comme un réservoir d'énergie qui permet d'imposer un mouvement périodique associé à des fréquences f comprises entre 20 et 80 Hz et d'atteindre ainsi des accélérations typiques de l'ordre de 10 g , avec $g \simeq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ la constante d'accélération normale de la pesanteur.

II.2.1.1.2 LE MOUVEMENT D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

Le mouvement du lanceur est périodique mais présente un amortissement dans le temps (figure II.2.2). Il peut être décrit par la dynamique d'un oscillateur harmonique amorti de fréquence propre f et d'amplitude A donnée par l'équation suivante :

$$\ddot{z}_p(t) + 2\gamma\omega\dot{z}_p(t) + \omega^2 z_p(t) = \omega^2 A, \quad (\text{II.2.1})$$

avec γ le facteur d'amortissement, $\omega = 2\pi f$ la pulsation propre de l'oscillateur. Après intégration avec deux conditions initiales $z_p(t_0) = 0$ et $\dot{z}_p(t_0) = 0$, le mouvement du lanceur s'écrit :

$$z_p(t) = A \left[1 - e^{-\gamma\omega(t-t_0)} \left(\cos(\omega_d(t-t_0)) + \frac{\gamma\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-t_0)) \right) \right], \quad (\text{II.2.2})$$

en introduisant la pseudo-pulsation du lanceur $\omega_d = \omega\sqrt{1-\gamma^2}$.

Les évolutions temporelles de la vitesse du lanceur et de son accélération sont données par :

$$\begin{cases} \dot{z}_p(t) = A e^{-\gamma\omega(t-t_0)} \left(\omega_d + \frac{\gamma^2\omega^2}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d(t-t_0)) \\ \ddot{z}_p(t) = A e^{-\gamma\omega(t-t_0)} \left(\omega_d + \frac{\gamma^2\omega^2}{\omega_d} \right) [\omega_d \cos(\omega_d(t-t_0)) - \gamma\omega \sin(\omega_d(t-t_0))] \end{cases} \quad (\text{II.2.3})$$

La vitesse maximale de la plaque est atteinte au temps t_v qui vérifie $\ddot{z}(t_v) = 0$ et qui vaut $t_v = t_0 + \frac{1}{\omega\sqrt{1-\gamma^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)$. Cette vitesse, notée V_p^* , s'écrit :

$$V_p^* = \dot{z}_p(t = t_v) = A\omega e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)}. \quad (\text{II.2.4})$$

V_p^* est inférieure à $A\omega$ qui est la vitesse maximale d'un oscillateur harmonique. Le facteur d'amortissement γ impose la cinétique d'amortissement de l'oscillateur. Par exemple, il faut $1/(9\gamma)$ périodes d'oscillations pour que l'amplitude de l'oscillateur soit divisée par deux. Le comportement harmonique s'obtient alors lorsque l'oscillateur s'amortit aux temps

longs, c'est-à-dire lorsque $\gamma \ll 1$. Dans ce cas, les équations (II.2.2) et (II.2.3) se réécrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} z_p(t) = A [1 - \cos(\omega(t - t_0))] \\ \dot{z}_p(t) = A\omega \sin(\omega(t - t_0)) \\ \ddot{z}_p(t) = A\omega^2 \cos(\omega(t - t_0)) \end{cases} \quad (\text{II.2.5})$$

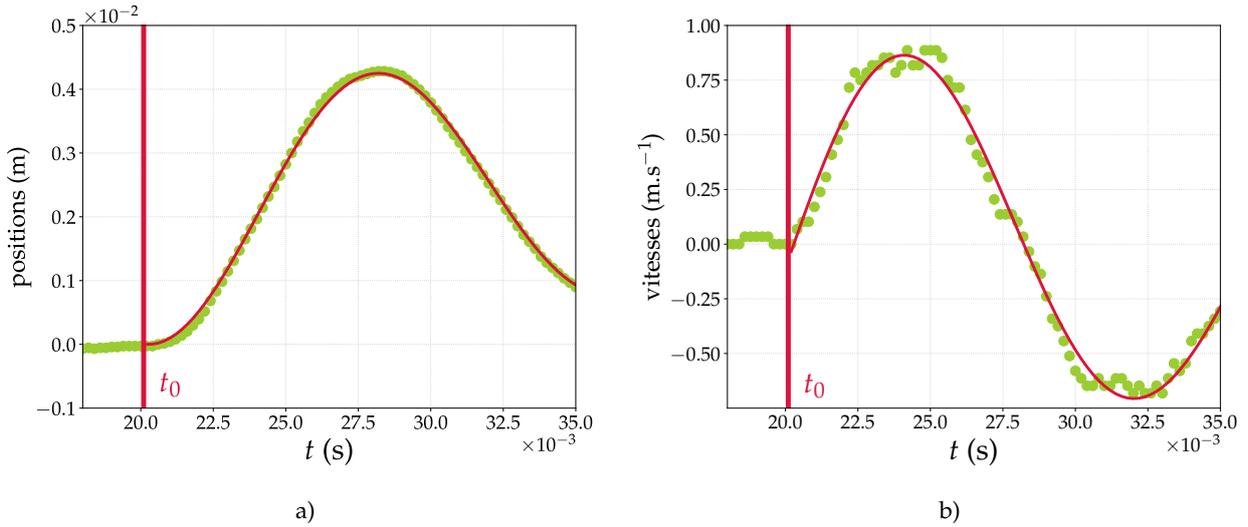


FIGURE II.2.2 : a) Position de la plateforme du lanceur en fonction du temps pour une configuration de clinquant, soit une raideur du système. b) Vitesse du lanceur correspondante obtenue par différences centrées de la position. Les points verts sont obtenus par suivi du marqueur circulaire noir sur le lanceur visible en figure II.2.3. Les courbes rouges sont obtenues par ajustement des données d'après les équations (II.2.2) et (II.2.3). Les paramètres d'ajustement sont $t_0 = 0.0204$ s, symbolisé par les lignes verticales, $f = 63.2$ Hz et $\gamma = 6.4 \times 10^{-2}$.

II.2.1.1.3 LES MESURES EXPÉRIMENTALES DES PARAMÈTRES f ET γ

Les paramètres f et γ sont directement obtenus en ajustant la position du lanceur avec l'équation (II.2.2) (figure II.2.2). Notons aussi que l'ajustement permet de définir précisément le temps de mise en mouvement du lanceur, noté t_0 . Ce temps peut être légèrement différent du vrai temps de mise en mouvement : les premiers instants du mouvement ne suivent pas exactement l'équation attendue dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti, du fait de l'imperfection du mécanisme de libération de la plaque. Cette légère différence dans la cinématique du lanceur est une source d'erreur potentielle dans la comparaison entre le modèle et les expériences. Dans le texte et dans les figures II.2.5a et II.2.5b, nous avons défini l'origine des temps par rapport à t_0 de manière à ce que $t = 0$ corresponde au moment de la mise en mouvement de la plaque comme attendu par l'ajustement.

Nous trouvons expérimentalement que γ est constant quelle que soit l'expérience et vaut $(6.4 \pm 0.3) 10^{-2}$. Nous verrons par la suite que le mouvement harmonique $z_p(t) = A [1 - \cos(2\pi ft)]$ reste cependant une bonne approximation pour décrire le mouvement de

la plaque de $t = 0$ à t_e , avec un écart inférieur à 1 % dans les régions d'intérêt.

Nous avons choisi deux configurations pour le lanceur, une pour laquelle nous avons $f = (31.2 \pm 0.1)$ Hz, l'autre avec $f = (63.2 \pm 0.1)$ Hz. La vitesse maximale du lanceur dont l'amplitude est fixée à $A \simeq 2$ mm s'écrit $V_p^* \simeq 2\pi f A$ et vaut environ 0.8 m s^{-1} . Son accélération maximale s'écrit quant à elle $4\pi^2 f^2 A$ et vaut environ 16g.

II.2.1.2 LES PROJECTILES ET LA COUCHE MOLLE INTERMÉDIAIRE

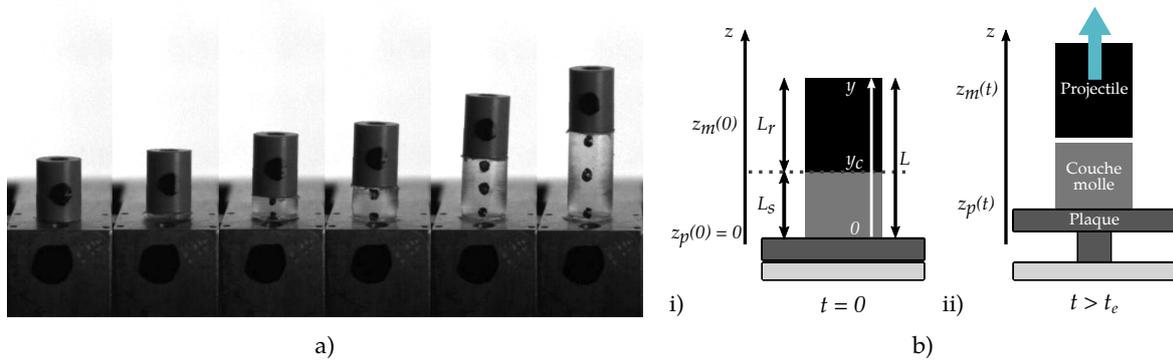


FIGURE II.2.3 : a) Image typique d'une configuration initiale avec le projectile rigide de longueur $L_r = 16.3$ mm déposé sur différentes épaisseurs L_s de couche molle (de gauche à droite : 0, 2.0, 5.6, 9.5, 16.8 et 23.4 mm) en adhésion avec le lanceur. Les points noirs permettent de suivre les positions du projectile et du lanceur au cours du temps. b) Schéma du lanceur i) la plaque accélère depuis sa position de repos à $t = 0$ et ii) le projectile a été éjecté au temps t_e .

LES PROJECTILES RIGIDES

Nous utilisons des projectiles cylindriques de diamètre 12 mm et de longueur $L_r = (8.2 \pm 0.1)$ mm ou (16.3 ± 0.1) mm usinés à l'atelier de mécanique de l'INPHYNI (figure II.2.3). Ils sont faits d'un matériau rigide, le polyétheréthércétone, avec un module de Young $E_r = 3.6$ GPa, une masse volumique $\rho_r = 1300 \text{ kg/m}^3$ et une célérité des ondes $c_r = \sqrt{E_r/\rho_r} = 1700 \text{ m.s}^{-1}$. La masse des projectiles se situe dans la gamme 1 – 3 g.

LA COUCHE MOLLE INTERMÉDIAIRE

Ces projectiles ne sont pas directement en contact avec le lanceur mais une couche molle élastique (de même diamètre 12 mm) est introduite entre le lanceur et le projectile (figure II.2.3). Cette couche est constituée d'un hydrogel fait de gélatine en poudre (*Sigma-Aldrich, gelatin from porcine skin, gel strength 300, type A*) dissoute dans l'eau pendant 30 min à 80°C sous agitation douce avec une concentration massique poudre/eau de 15 %. La solution aqueuse est ensuite versée dans des moules cylindriques et laissée reposer

pendant quelques heures, jusqu'à ce que les couches soient réticulées. La masse volumique des couches molles est $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$. Plusieurs longueurs L_s ont été utilisées parmi 2.0, 5.6, 9.5, 16.8, 23.4 et 29.1 mm avec une précision de 0.1 mm. La couche la plus épaisse possède une masse d'environ 3 g. La célérité des ondes est déduite en caractérisant la dynamique de déformation des différentes couches molles seules. Celles-ci sont placées tour à tour sur le lanceur, sans adhésion avec ce dernier, puis nous réalisons des éjections pour une fréquence f du lanceur de 63.2 Hz.

Sur les films obtenus, dont une séquence d'images typique est présentée en [figure II.2.4a](#), nous définissons une zone d'une largeur de 1 pixel qui traverse entièrement le lanceur et la couche molle. Nous concaténons ensuite cette portion d'image pour toutes les images afin d'obtenir un diagramme spatio-temporel de l'éjection de la couche molle. Nous sommes alors capables de mesurer le temps propre T_0 d'oscillations libres de chaque couche molle une fois éjectée.

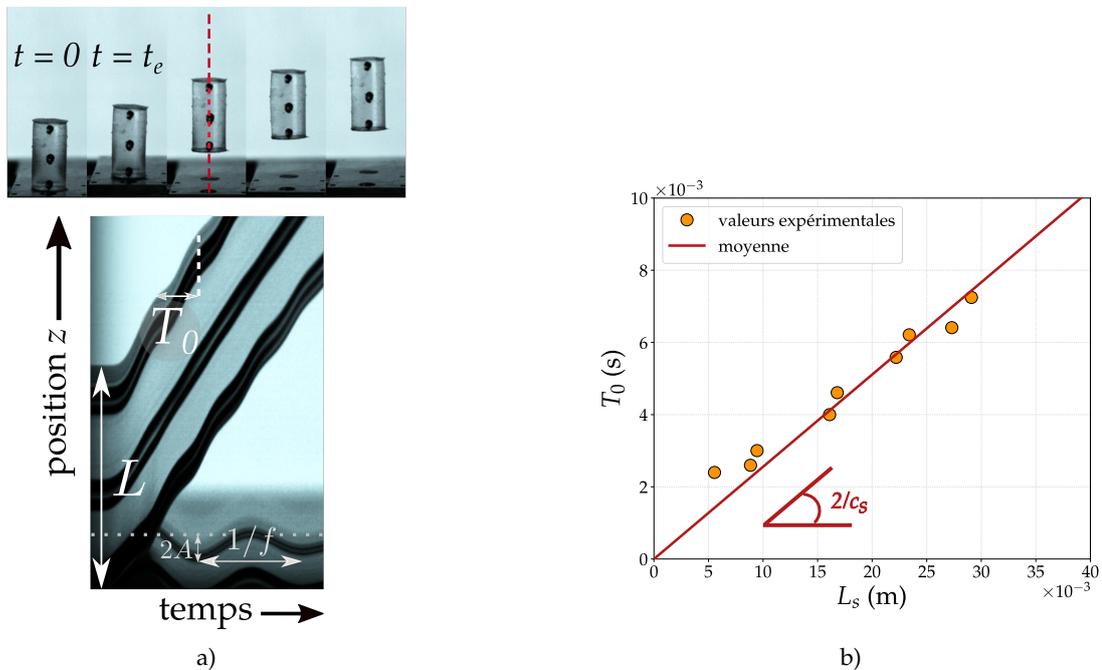


FIGURE II.2.4 : a) En haut : une séquence d'images typique de l'éjection d'un projectile constitué uniquement de la couche molle, sans adhésion avec la plaque. En bas : diagramme spatio-temporel de l'éjection, obtenu le long de la ligne pointillée passant par le centre de la couche molle, présentant les différentes grandeurs mesurables. b) Période propre T_0 de la couche molle en fonction de son épaisseur L_s . La ligne continue représente la meilleure relation de proportionnalité entre les deux grandeurs. La pente de cette droite vaut 0.256 s m^{-1} .

La durée totale de la série d'éjections de projectiles rigides est de l'ordre de deux heures. Durant ce laps de temps, les hydrogels libèrent une partie de l'eau qui les composent. S'asséchant, ils deviennent plus courts et plus rigides. Par conséquent, leurs temps propres de vibration diminuent. Les longueurs des couches molles varient de moins de 5 % tout au long des expériences tout comme le temps propre T_0 de chaque couche. La célérité des ondes c_s est donnée par $c_s = 2L_s/T_0$. La meilleure relation de proportionnalité entre les différentes

valeurs de T_0 et L_s donne un rapport de 0.256 s m^{-1} (figure II.2.4b). Nous en déduisons alors une valeur constante de la célérité des ondes $c_s = (7.8 \pm 0.3) \text{ m s}^{-1}$. Nous vérifions que les différentes caractéristiques des couches molles ne varient pas significativement entre le début et la fin des expériences. La valeur moyenne du module de Young des hydrogels est déduite de la formule $E_s = \rho_s c_s^2$ et vaut 61 kPa.

L'adhésion entre la plaque du lanceur et la couche molle est assurée par un mince film de graisse à vide. Un morceau de papier absorbant fin est introduit entre la couche molle et le projectile rigide : il adhère à l'hydrogel et laisse le projectile rigide libre de décoller sans adhésion. La déformation de la couche molle, inférieure à 10 %, a lieu dans le régime élastique linéaire (CZERNER et al., 2015).

II.2.1.3 LES PARAMÈTRES DE CONTRÔLE

Dans ce système, nous dénombrons sept paramètres indépendants : L_s , L_r , f , c_s , c_r , ρ_s et ρ_r . D'après le théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème Pi, le système peut être décrit par un minimum de quatre paramètres sans dimension. En prenant pour grandeurs dimensionnantes la longueur totale de l'ensemble couche molle-projectile rigide $L = L_s + L_r$, le temps $1/f$ et la masse $\rho_r L_r^3$, nous définissons les quatre paramètres suivants : $x = L_s/L$, c_s/Lf , c_r/c_s et ρ_r/ρ_s .

Trois jeux d'expériences sont réalisés en fixant pour chacun la fréquence du lanceur f et la longueur du projectile rigide L_r tout en variant systématiquement la longueur L_s de la couche molle. La variation de L_s entraîne un ajustement de deux grandeurs sans dimension : c_s/Lf et x et les valeurs de c_r/c_s et ρ_r/ρ_s sont fixées respectivement à 218 et 1.3. Les trois jeux d'expériences ont été réalisés en imposant respectivement [$f = 63.2 \text{ Hz}$ et $L_r = 16.3 \text{ mm}$], [$f = 63.2 \text{ Hz}$ et $L_r = 8.2 \text{ mm}$] et [$f = 31.1 \text{ Hz}$ et $L_r = 8.2 \text{ mm}$].

II.2.1.4 L'ACQUISITION D'IMAGES ET LEUR ANALYSE

Les dynamiques rapides des expériences nous contraignent à acquérir des images au moyen d'une caméra rapide, une *Photron FastCam SA8*, à une fréquence de 5000 images par seconde. Cette caméra possède également une bonne résolution spatiale permettant de mesurer les positions du lanceur et du projectile au cours du temps avec une bonne précision. Cette mesure est réalisée au moyen d'un algorithme de *tracking* écrit sous *Python*, basé sur la bibliothèque *OpenCV*, qui repose sur le principe de *Discriminative Correlation Filter with Channel and Spatial Reliability* (CSRT) (LUKEŽIČ et al., 2018). Une fois les positions obtenues au cours du temps (figure II.2.5a), nous leur appliquons une moyenne glissante puis une différence centrée pour obtenir les vitesses de chaque objet (figure II.2.5b). Une éjection typique se caractérise par l'accélération initiale du lanceur causant la déformation élastique de la couche molle, puis l'éjection du projectile rigide au temps t_e avec une vitesse

V_e . La vitesse maximale du lanceur est notée V_p^* et elle est atteinte à $t = T/4$ avec $T = 1/f$ la période du lanceur. C'est aussi la vitesse d'éjection d'un objet rigide, vitesse à laquelle nous comparons celle du projectile pour quantifier l'efficacité de l'éjection. Nous rappelons l'expression du coefficient de transfert d'énergie $\alpha = (V_e/V_p^*)^2$. Après l'éjection, le lanceur poursuit son mouvement pseudo-harmonique tandis que le projectile, qui n'est soumis qu'à la gravité, voit sa vitesse décroître linéairement dans le temps.

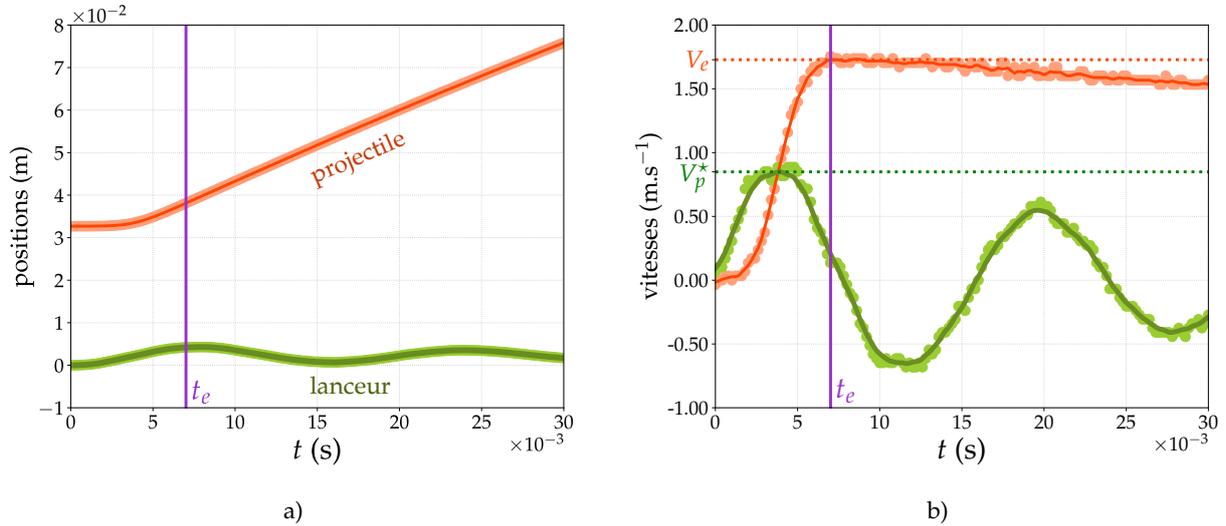


FIGURE II.2.5 : a) Positions du projectile et du lanceur en fonction du temps pour $L_r = 8.2$ mm, $L_s = 16.8$ mm et $f = 63.2$ Hz. Les points sont obtenus par suivi des points noirs sur le projectile rigide et sur le lanceur, visibles en [figure II.2.3](#). b) Vitesses obtenues par différences centrées des positions après application d'une moyenne glissante. Les lignes continues symbolisent la moyenne glissante sur les position et vitesse du projectile (fine ligne continue orange) et sur celles du lanceur (large ligne continue verte). La ligne verticale violette marque le temps d'éjection t_e . Ici $t_e \simeq 1/(2f)$, lorsque le lanceur fait demi-tour, alors qu'en absence de couche molle, un projectile rigide est normalement éjecté au temps $t_e = 1/(4f)$ lorsque la vitesse du lanceur est maximale.

II.2.2 LES SIMULATIONS

En plus des expériences, nous avons réalisé une étude numérique en étroite collaboration avec Joachim Mathiesen du Niels Bohr Institute de Copenhague qui a réalisé les simulations d'éjections de projectiles. Celles-ci utilisent un modèle d'élasticité linéaire.

Dans cette approche numérique, nous considérons le projectile comme un matériau à une dimension avec des ondes qui se propagent dans la partie rigide et la couche molle. Le lanceur a été modélisé ici par les équations d'un oscillateur harmonique de fréquence f . Des simulations ont aussi été réalisées en modélisant le lanceur par un oscillateur pseudo-harmonique. L'écart entre les résultats des deux approches obtenus pour les coefficients de transfert d'énergie α est inférieur à 1 % dans les régions d'intérêt. Dans ce qui suit, nous privilégions le modèle d'oscillateur harmonique pour sa simplicité. La dynamique du système dépend de trois temps caractéristiques : le temps de propagation de l'onde élastique dans le projectile rigide $t_r = L_r/c_r$, le temps de propagation de l'onde élastique

dans la couche molle $t_s = L_s/c_s$ et $1/f$. Nous aurions pu choisir de comparer la dynamique du lanceur et de la partie molle au moyen du rapport $1/ft_s$ ou de comparer les dynamiques de la partie molle et de la partie rigide grâce au rapport t_r/t_s . En pratique, il a été choisi de fixer la longueur totale L dans les simulations et de varier L_s entre 0 et L . Ainsi, deux paramètres de contrôle pertinents ressortent pour décrire la dynamique du système : x et c_s/Lf .

La dynamique de déformation de l'ensemble composé de la couche molle et du projectile rigide est décrite par l'équilibre de quantité de mouvement ou l'équation d'onde par le champ de déplacement $u(y, t)$ avant éjection.

$$\rho(y)\partial_t^2 u(y, t) - \partial_y[E(y)\partial_y u(y, t)] = 0. \quad (\text{II.2.6})$$

Ici, $y \in [0, L]$ est la coordonnée lagrangienne dans le référentiel non déformé du système composé de la plaque du lanceur et du projectile au repos, $E(y)$ est le module de Young et $\rho(y)$ est la masse volumique.

La déformation dans la couche molle et dans le projectile rigide est décrite par la même équation et nous notons respectivement u_s ($y \in [0, y_c]$) et u_r ($y \in [y_c, L]$) le déplacement dans la partie molle et dans la partie rigide, avec $y_c = L_s$ le point de contact entre le projectile et la couche molle. Les propriétés du matériau sont considérées comme constantes à travers la couche molle et dans le projectile. Dans la couche molle et dans le projectile, la déformation est décrite par l'équation d'onde avec deux vitesses longitudinales, $c_s = \sqrt{E_s/\rho_s}$ et $c_r = \sqrt{E_r/\rho_r}$. Pour les simulations numériques, nous utilisons une méthode d'Euler semi-implicite (symplectique) de différence finie. L'extrémité du bas de la couche molle suit la position de la plaque. La dynamique est ainsi sujette aux conditions limites suivantes en considérant que le mouvement du lanceur est harmonique (jusqu'au moment où le projectile est éjecté) :

$$\text{CL} \left\{ \begin{array}{l} u_s(0, t) = A[1 - \cos(2\pi ft)] \\ E_s \partial_y u_s(L_s, t) = E_r \partial_y u_r(L_s, t), \quad \text{pour } t < t_e \\ \partial_y u_s(y, t) = \partial_y u_r(y, t) = 0 \quad \text{à l'éjection} \\ \partial_t u_s(y, 0) = 0, \quad \text{for } y < L_s \\ \partial_t u_r(y, 0) = 0, \quad \text{for } y > L_s \\ \partial_y u_r(y, t) \xrightarrow{y \rightarrow L} 0 \quad \forall t \end{array} \right. \quad (\text{II.2.7})$$

Dans nos simulations, le projectile est libéré du lanceur dès que la déformation passe d'une valeur positive à une valeur négative en $y = y_c$. À ce moment, le déplacement n'est plus continu et le projectile est libéré. Cela signifie que la condition $E_s \partial_y u_s(y, t) = E_r \partial_y u_r(y, t)$ est remplacée par $0 = \partial_y u_s(y, t) = \partial_y u_r(y, t)$. Notons qu'il est possible qu'un projectile se reconnecte au lanceur après un premier décollage. Par conséquent, nous pouvons observer dans les simulations différentes phases d'éjections et de reconnections que nous nommons *multi-kicks*.

LES RÉSULTATS DES SIMULATIONS ET DES EXPÉRIENCES

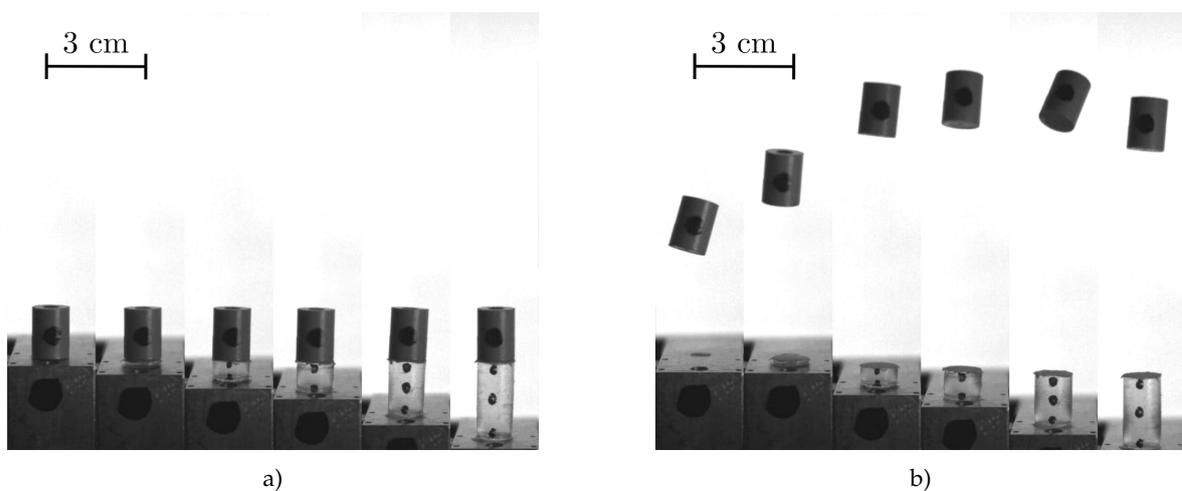


FIGURE II.3.1 : Séquence d'images de l'éjection d'un projectile rigide de longueur $L_r = 16.3$ mm déposé sur différentes épaisseurs L_s de couche molle (de gauche à droite : 0, 2.0, 5.6, 9.5, 16.8 et 23.4 mm) en adhésion avec le lanceur de fréquence $f = 63.2$ Hz. Les points noirs sont utilisés pour suivre les positions du projectile et du lanceur au cours du temps. La séquence d'images est décalée verticalement afin que l'éjection se produise à la même hauteur dans chacun des cas. Les images sont prises a) au moment de l'éjection t_e et b) 56.8 ms après éjection.

Nous représentons en [figure II.3.1](#) le lanceur et un projectile rigide de longueur $L_r = 16.3$ mm pour différentes épaisseurs de couche molle comprises entre 0 et 23.4 mm. Nous faisons alors deux observations : l'ajout d'une couche molle permet au projectile rigide d'être éjecté avec une vitesse plus importante et cette vitesse d'éjection dépend de la longueur de la couche molle, et ce de manière non monotone.

II.3.1 COMPARAISON ENTRE LES SIMULATIONS ET LES EXPÉRIENCES

En [figure II.3.2](#), nous comparons directement le coefficient de transfert d'énergie α et le temps d'éjection $t_e f$ obtenus par les expériences et les simulations. Trois jeux d'expériences ont été réalisés et chacun correspond à une valeur donnée de la longueur du projectile rigide L_r et à une valeur donnée de la fréquence du lanceur f , alors que la longueur de la couche molle L_s est variée. Par conséquent, la longueur L n'est pas fixée et un jeu de données expérimentales correspond à une valeur constante de $c_s/L_r f$. Les valeurs associées aux différents jeux d'expériences sont : 7.57 (losanges), 15.1 (cercles) et 34.5 (carrés). Nous observons que les expériences et les simulations suivent les mêmes tendances pour les trois jeux de données et les coefficients de transfert d'énergie peuvent prendre des valeurs autour de 4 dans les deux cas si les paramètres sont bien choisis. Des déviations sont observées entre les deux approches dans quelques cas, ce qui n'est pas surprenant étant donné que le système expérimental n'est ni parfait ni 1D. La géométrie mise à part, plusieurs autres effets omis dans le modèle peuvent jouer un rôle dans le système. Ceci inclut la cinématique exacte du mouvement de la plaque, une description plus avancée des contacts entre la plaque et la couche molle et entre la couche molle et le projectile rigide ou la nécessité de prendre en compte les propriétés rhéologiques de la couche de gélatine. Nous conservons le modèle aussi simple que possible et sans paramètre libre pour capturer la tendance générale et éviter une complexité additionnelle associée à notre système particulier.

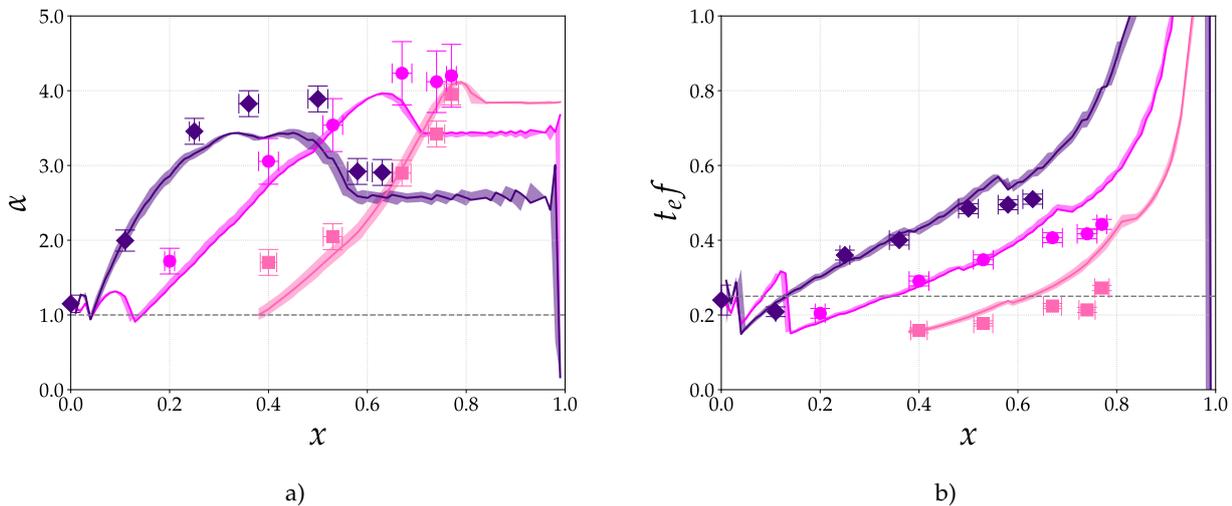


FIGURE II.3.2 : a) Coefficients de transfert d'énergie α et b) temps d'éjection adimensionnés par la fréquence du lanceur, obtenus pour trois jeux de données expérimentales correspondant à $c_s/L_r f = 7.57$ (losanges indigo), 15.1 (disques fuchsia) et 34.5 (carrés roses). Les mesures sont superposées aux résultats des simulations correspondant aux mêmes $c_s/L_r f$ (lignes continues) avec une tolérance de 5 % (bandes colorées). Les lignes horizontales pointillées représentent les prédictions théoriques pour un projectile rigide sans couche molle.

II.3.2 LE COEFFICIENT DE TRANSFERT D'ÉNERGIE α

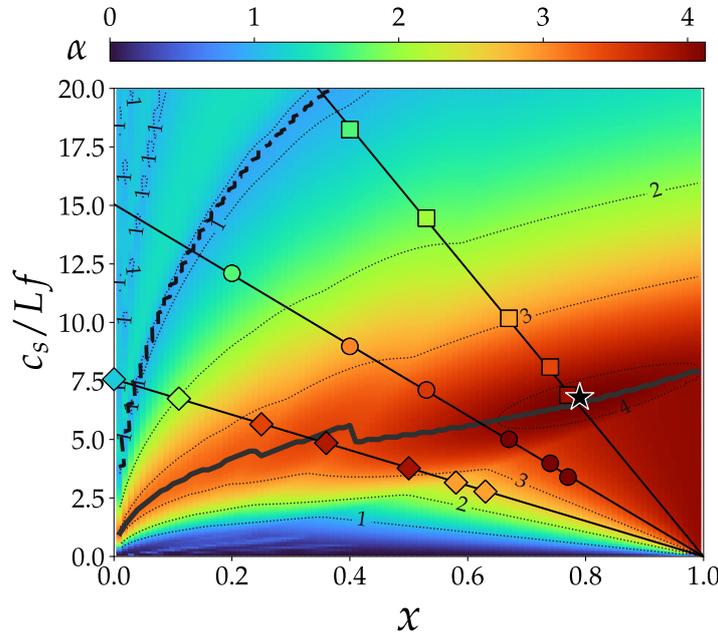


FIGURE II.3.3 : Les coefficients de transfert d'énergie α en fonction de x et c_s/Lf . Les résultats des simulations sont représentés en gradient de couleur en fonction de leur valeur. Les trois jeux de données expérimentales correspondant à $c_s/Lf = 7.57$ (losanges), 15.1 (disques) et 34.5 (carrés) s'alignent sur des droites pour lesquelles seul L_s varie. Des isolignes sont représentées en pointillés pour mieux guider la lecture des valeurs. L'optimum $\alpha = 4.12$ obtenu par les simulations est symbolisé par une étoile en $x = 0.8$ $c_s/Lf = 6.7$. Les valeurs maximales obtenues pour chaque proportion x décrivent la ligne continue. La ligne pointillée épaisse délimite la région des *multi-kicks*.

Nous représentons en [figure II.3.3](#) les coefficients de transfert d'énergie issus des simulations numériques et des expériences. Les résultats sont présentés en gradient de couleurs sur un graphique 2D dont les axes correspondent aux deux paramètres sans dimension x et c_s/Lf . Les simulations numériques nous permettent de voir que le coefficient de transfert d'énergie présente un comportement complexe dans cet espace 2D. Sur l'axe x , α vaut 0, sur l'axe c_s/Lf il vaut 1 et il se dessine deux régions avec des valeurs importantes. L'une d'elles est centrée autour de $x = 0.8$ et $c_s/Lf = 6.7$ avec une valeur maximale de 4.12. La seconde est un segment de droite vertical d'abscisse $x = 1$ pour lequel $\alpha = 4$ uniquement si c_s/Lf est compris entre 0 et 7.9. Nous fixons x et nous mesurons la valeur maximale du coefficient de transfert d'énergie α en variant c_s/Lf . Nous obtenons pour chaque valeur de x un unique maximum. Tous les maxima s'alignent le long d'une crête dans l'espace $(x, c_s/Lf)$. Pour des valeurs de c_s/Lf supérieures aux valeurs associées à ces maxima, α décroît systématiquement à x fixé. Cette tendance est vérifiée jusqu'à une certaine valeur de c_s/Lf . Les valeurs limites obtenues pour les différents x dessinent alors une courbe, l'épaisse isoligne pointillée $t_e f = 0.2$ visible en [figure II.3.4](#). La région délimitée d'un côté par cette isoligne et de l'autre par l'axe c_s/Lf se caractérise par une dynamique associée à des phases

successives d'éjections et de reconnections entre le projectile rigide et la couche molle, les *multikicks* évoqués en [section II.2.2](#). Ce comportement particulier permet des éjections pour lesquelles α ne tend pas vers 0 mais reste compris entre 0.9 et 1.3. Cette valeur maximale est notamment atteinte pour toute proportion x dans cette région, ce qui se traduit par une ligne de crête d'altitude constante et égale à 1.3.

Chacun des trois jeux d'expérience dont les résultats sont présentés en fonction de x en [figure II.3.2a](#) s'aligne dans l'espace 2D le long d'une droite d'équation $c_s/Lf = (1-x)c_s/Lrf$, avec c_s/Lrf constant pour un jeu d'expérience donné.

II.3.3 LE TEMPS D'ÉJECTION t_{ef}

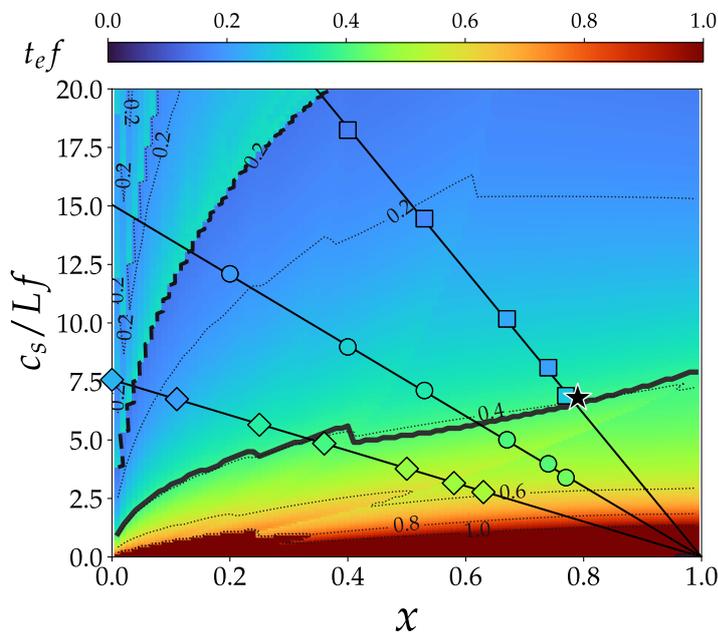


FIGURE II.3.4 : Les temps d'éjection t_{ef} en fonction de x et c_s/Lf . Les résultats des simulations sont représentés en gradient de couleur en fonction de leur valeur. Les trois jeux de données expérimentales correspondant à $c_s/Lrf = 7.57$ (losanges), 15.1 (disques) et 34.5 (carrés) s'alignent sur des droites pour lesquelles seul L_s varie. Des isolignes sont représentées en pointillés pour mieux guider la lecture des valeurs.

Nous trouvons que le temps d'éjection adimensionné t_{ef} se situe entre 0.25 sur l'axe c_s/Lf — la valeur attendue pour un objet rigide sans couche molle — et $+\infty$ sur l'axe x ([figure II.3.4](#)). La région avec $t_{ef} > 1$ est restreinte à une bande étroite proche de l'axe x . Cette région est caractérisée par plusieurs cycles du lanceur et par une inefficacité du transfert d'énergie comme nous l'avons vu juste avant. Nous n'identifions pas de comportement analogue à celui du coefficient de transfert d'énergie ; le temps d'éjection suit une tendance monotone en fonction de c_s/Lf à x donné. Pour les éjections dont les coefficients de transfert d'énergie décrivent la crête mentionnée précédemment, le temps d'éjection adimensionné t_{ef} est supérieur à 0.25 et varie peu en fonction de x . Entre $x = 0$ et $x = 0.4$, t_{ef} vaut

0.391 ± 0.001 et entre $x = 0.4$ et $x = 1.0$, t_{ef} vaut 0.406 ± 0.002 .

Ceci reste vrai en dehors de la région décrite précédemment qui est marquée par une crête autour de $\alpha = 1.3$. Dans cette région particulière située plutôt à gauche et en haut de la [figure II.3.4](#), les coefficients de transfert d'énergie les plus faibles sont mesurés pour $t_{ef} \simeq 0.18$ et les α maximaux sont atteints pour $t_{ef} = 0.25$. Nous voyons ici que des éjections plus efficaces que celle d'un objet rigide sont obtenues pour le même temps d'éjection. Ce comportement va de pair avec l'action de *multikicks* qui dominent dans cette région. Les projectiles éjectés à $t_{ef} < 0.25$ ont une vitesse d'éjection inférieure à V_p^* et sont rattrapés par le lanceur qui continue d'accélérer. Ceci se produit tant que le lanceur est capable de rattraper le projectile et les reconnexion successives avec la couche molle retardent l'éjection finale. Sans ces *multi-kicks*, les projectiles quitteraient le lanceur avec un coefficient de transfert d'énergie inférieur à 1. Ici, les éjections les plus efficaces ont lieu lorsque l'éjection est retardée au maximum, c'est-à-dire lorsque le lanceur atteint sa vitesse maximale V_p^* à $t_{ef} = 0.25$.

II.3.4 VALEURS MAXIMALES

Nous représentons les valeurs maximales de α mesurées à x fixé, la crête mentionnée précédemment, en [figure II.3.5a](#) et les valeurs de c_s/Lf associées en [figure II.3.5b](#). La courbe des α maximaux possède un comportement non monotone et présente plusieurs bosses avec pour chacune un maximum local. La courbe est toujours au-dessus de 3, valeur atteinte dans la limite $x \rightarrow 0$ et elle atteint un optimum de 4.12 pour $x = 0.8$. Dans la limite $x \rightarrow 1$, le coefficient de transfert d'énergie α maximal vaut 4.

La courbe décrite par les c_s/Lf associés aux α maximaux ([figure II.3.5b](#)) croît rapidement, avec l'allure d'une racine carrée, d'une valeur nulle en $x = 0$ pour atteindre 4 en $x = 0.2$. Elle présente ensuite des discontinuités pour les valeurs de x marquant les limites des bosses décrites pour α . Nous verrons dans le [chapitre II.4](#) que ces discontinuités sont associées à des changements de comportements qui dépendent du temps de voyage de l'onde élastique dans la couche molle défini comme $t_s = L_s/c_s$. Finalement, la valeur maximale de c_s/Lf atteint 8 dans la limite $x \rightarrow 1$.

Le comportement complexe du système dépend de deux paramètres sans dimension x et c_s/Lf . Dans la limite quasi-statique pour laquelle $t_e \gg t_s$, la déformation de la couche molle peut être considérée homogène. Cette condition se traduit par $t_e \gg L_s/c_s$ ou si nous communiquons en terme de paramètres sans dimension $t_{ef} \gg L_s f/c_s$. Puisque $x = L_s/L$, la limite quasi-statique est atteinte si $t_{ef} \gg x L f/c_s$, c'est-à-dire pour $x \rightarrow 0$. Dans cette limite, la couche molle peut être assimilée à un ressort de raideur $k = SE_s/L_s$ et le projectile rigide à une masse ponctuelle $m = \rho_r SL$. Le système masse-ressort obtenu possède une fréquence propre $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$. Comme explicité en [section I.0.2](#), ce système accéléré par un lanceur de type catapulte est éjecté au temps $t_e = 1/(f + f_0)$ avec un coefficient de transfert d'énergie valant $\alpha = \frac{(f_0/f)^2}{(f_0/f-1)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{f_0/f+1}\right)$. Le maximum de cette fonction vaut 3.13 en

$f_0/f = 1.62$ soit pour $c_s/Lf = 10.2\sqrt{x}$, toujours dans la limite $x \rightarrow 0$. Nous observons en [figure II.3.5b](#) que cette expression décrit plutôt bien le comportement de c_s/Lf pour $x \lesssim 0.2$.

Notre étude montre que l'ajout d'une couche molle permet d'augmenter significativement le transfert d'énergie entre un lanceur et un projectile rigide, si les paramètres sont bien ajustés. L'optimum $\alpha^* = 4.12$ est significativement plus élevé que dans le cas de la superpropulsion d'objets homogènes (RAUFASTE et al., 2017) ou de projectiles bi-composites (CELESTINI et al., 2020), pour lesquels les valeurs maximales sont respectivement de 2.5 et 3.13. Nous pouvons réexprimer les valeurs des paramètres de contrôle optimaux en fonction de la masse du projectile $m = \rho_r SL_r$, qui est un paramètre plus pertinent pour des applications. Le transfert optimal est atteint pour un rapport masse du projectile sur masse de la couche molle $m/\rho_s SL_s = 0.32$ et un temps caractéristique d'accélération du lanceur 4 fois plus long que le temps d'aller-retour de l'onde dans la couche molle donné par $2t_s f = 0.24$.

Dans la limite $x \rightarrow 1$, la masse du projectile tend vers 0 et seule la couche molle subsiste au-dessus du lanceur. Bien que ce cas ressemble à la propulsion de projectiles homogènes, la condition d'adhésion entre le lanceur et la couche molle empêche l'éjection de cette dernière. Il en résulte un comportement particulier qui permet à un projectile rigide de masse très inférieure à celle de la couche molle d'atteindre un coefficient de transfert d'énergie α proche de 4 quelle que soit c_s/Lf compris entre 0 et 7.9 ([figure II.3.3](#)). L'efficacité de l'éjection, bien que légèrement moins importante qu'à l'optimum, possède l'avantage d'être obtainable pour une large gamme de paramètres.

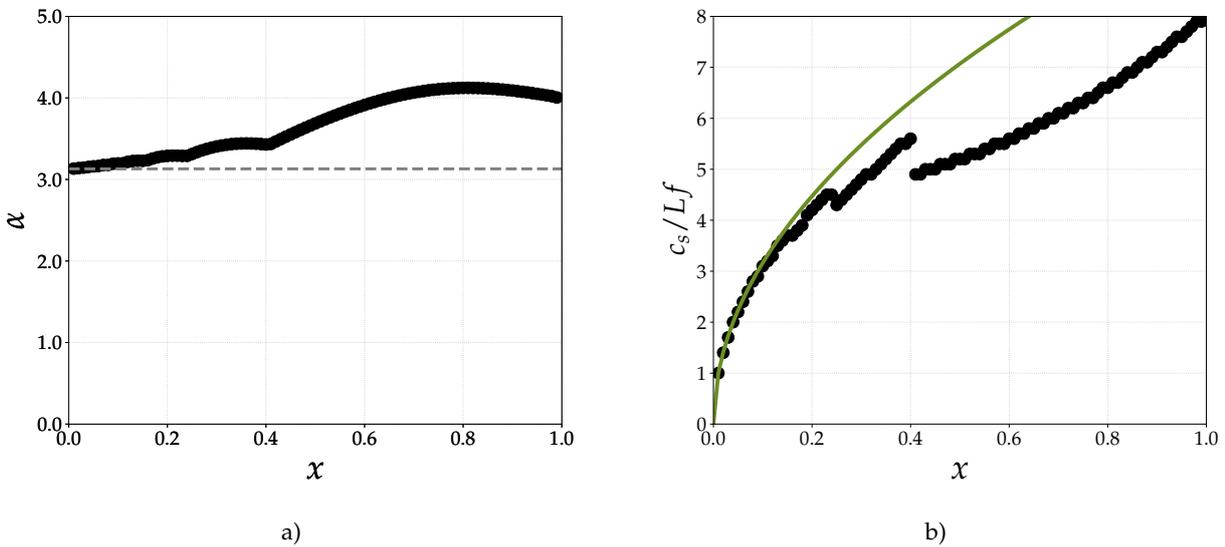


FIGURE II.3.5 : a) α maximaux obtenus pour chaque proportion x de matériau mou. La ligne pointillée marque l'optimum obtenu pour un simple modèle masse-ressort. b) c_s/Lf correspondants aux valeurs maximales de α . La ligne continue représente la fonction $c_s/Lf = 10.2\sqrt{x}$ déterminée dans CELESTINI et al. (2020).

APPROCHE ANALYTIQUE

II.4.1 DESCRIPTION DU MODÈLE

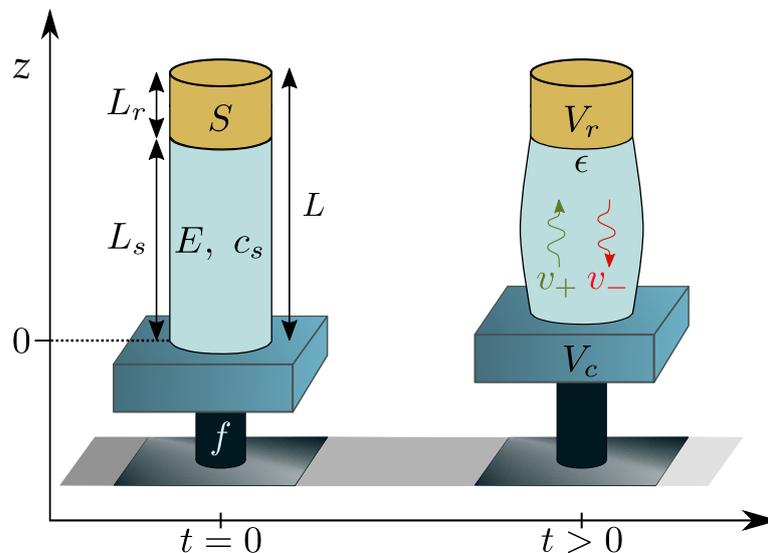


FIGURE II.4.1 : Schéma présentant les caractéristiques du système modèle.

Dans cette section nous montrons de manière analytique que le paysage complexe du coefficient de transfert d'énergie est associé directement aux propriétés de propagation des ondes dans la couche molle élastique.

Si le temps de propagation de l'onde élastique dans la couche molle $t_s = L_s/c_s$ est très supérieur au temps de propagation dans le projectile rigide $t_r = L_r/c_r$, soit $t_s \gg t_r$, le projectile peut être assimilé à un objet rigide. Ceci se traduit par $x \gg c_s/(c_r + c_s)$. Nous obtenons ici une relation directe entre la proportion de matériau mou et la vitesse des ondes dans chaque milieu. Les matériaux utilisés en expériences vérifient $c_r/c_s \simeq 218$ ce qui implique que $x \gg 5 \times 10^{-3}$. Pour une grande gamme de proportion x , le projectile utilisé dans les expériences peut être considéré comme rigide. Le seul paramètre pertinent pour le caractériser est alors sa masse $m = \rho_r S L_r$ et nous faisons varier L_r à la place de m sans perte

de généralité.

Pour modéliser le système, nous considérons donc le projectile comme totalement rigide et nous le modélisons par une masse ponctuelle localisée en $y = L_s$. À partir de $t = 0$, le lanceur commence à se mouvoir avec une vitesse $V_p(t) = A\omega \sin(\omega t)$ où $\omega = 2\pi f$. Ce mouvement initie la propagation d'ondes dans la couche molle. En réalité, la vitesse $v(y, t)$ et la déformation $\varepsilon(y, t)$ locales dans la couche élastique sont couplées au travers des équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_s^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.4.8})$$

L'onde peut être séparée en deux composantes, une se propageant dans la direction des y croissants et l'autre dans la direction des y décroissants. Nous notons respectivement $v_+(y, t) = v_+(\xi = t - y/c_s)$ et $v_-(y, t) = v_-(\zeta = t + y/c_s)$ les composantes de la vitesse $v = v_+ + v_-$ tandis que $\varepsilon_+(y, t) = \varepsilon_+(\xi = t - y/c_s)$ et $\varepsilon_-(y, t) = \varepsilon_-(\zeta = t + y/c_s)$ valent pour la déformation $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$. De l'équation (II.4.8), nous obtenons $\frac{dv_+}{d\xi} = -c_s \frac{d\varepsilon_+}{d\xi}$ et $\frac{dv_-}{d\zeta} = c_s \frac{d\varepsilon_-}{d\zeta}$. Ces expressions se simplifient en $v_+ = -c_s \varepsilon_+$ et $v_- = c_s \varepsilon_-$ puisque ces fonctions sont initialement nulles. Par continuité en $y = 0$ et $y = L_s$, nous écrivons deux conditions limites :

$$V_p(t) = v_+(0, t) + v_-(0, t) \quad (\text{II.4.9})$$

$$V_m(t) = v_+(L_s, t) + v_-(L_s, t), \quad (\text{II.4.10})$$

où $V_m(t)$ est la vitesse du projectile. Dans un premier temps, d'après ces conditions limites et les propriétés de propagation, nous écrivons :

$$v_+(L_s, t) = V_p(t - t_s) - V_m(t - 2t_s) + v_+(L_s, t - 2t_s) \quad (\text{II.4.11})$$

avec $t_s = L_s/c_s$, le temps nécessaire à la propagation au travers de la couche molle. L'expression met en évidence le fait que l'état de $v_+(L_s, t)$ au temps t dépend de la dynamique du lanceur et du projectile rigide aux instants précédents (respectivement $t - t_s$ et $t - 2t_s$) ainsi que de $v_+(L_s, t - 2t_s)$. En poursuivant ce processus récursif, nous pouvons exprimer $v_+(L_s, t)$ comme une fonction de V_p et V_m .

$$\begin{aligned} v_+(L_s, t) = & V_p(t - t_s) - V_m(t - 2t_s) + V_p(t - 3t_s) - V_m(t - 4t_s) \\ & + V_p(t - 5t_s) - V_m(t - 6t_s) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.4.12})$$

Dans un second temps, la dynamique du projectile rigide est obtenue avec un simple équilibre des quantités de mouvement :

$$m \frac{dV_m}{dt}(t) = -E_s S \varepsilon(L_s, t) = \frac{E_s S}{c_s} (v_+(L_s, t) - v_-(L_s, t)) \quad (\text{II.4.13})$$

qui se réécrit avec l'équation :

$$\tau \frac{dV_m}{dt}(t) + V_m(t) = 2v_+(L_s, t), \quad (\text{II.4.14})$$

avec $\tau = \frac{mc_s}{E_s \dot{S}} = (1 - \chi) \frac{\rho_r L}{\rho_s c_s}$ (notons que $f\tau = (1 - \chi) \frac{\rho_r Lf}{\rho_s c_s}$). $v_+(L_s, t)$ se révèle ainsi comme le terme pertinent qui régit la dynamique de la couche rigide. Ce terme est lui-même couplé à l'historique des mouvements du lanceur et de la couche molle au travers de l'équation (II.4.12). Dans ce qui suit, nous distinguons plusieurs intervalles de temps.

II.4.2 LES INTERVALLES DE TEMPS SUCCESSIFS

II.4.2.1 PREMIER INTERVALLE DE TEMPS : DE $t = 0$ À t_s

Dans le premier intervalle, entre $t = 0$ et t_s , $v_+(L_s, t) = 0$ car l'onde n'a pas le temps d'atteindre le point de contact en L_s . Par conséquent, aucune force ne s'applique sur la couche rigide, $V_m(t) = 0$ et le projectile ne décolle pas, quels que soient les paramètres.

II.4.2.2 DEUXIÈME INTERVALLE DE TEMPS : DE $t = t_s$ À $3t_s$

Seul le premier terme est non nul dans le terme de droite de l'équation (II.4.12) et $v_+(L_s, t) = V_p(t - t_s)$. Par conséquent, la dynamique de la couche rigide est donnée par :

$$\tau \frac{dV_m}{dt} + V_m = 2A\omega \sin(\omega(t - t_s)). \quad (\text{II.4.15})$$

Avec la condition $V_m(t = t_s) = 0$, cela conduit à :

$$V_m(t) = \frac{2A\omega}{1 + (\omega\tau)^2} \left\{ (\omega\tau) \left[e^{-(t-t_s)/\tau} - \cos(\omega(t - t_s)) \right] + \sin(\omega(t - t_s)) \right\} \quad (\text{II.4.16})$$

La condition d'éjection s'écrit alors $dV_m/dt(t_e) = 0$, ce qui conduit à une équation implicite pour t_e :

$$e^{-(t_e-t_s)/\tau} = (\omega\tau) \sin(\omega(t_e - t_s)) + \cos(\omega(t_e - t_s)), \quad (\text{II.4.17})$$

ou à une relation entre $\alpha = (V_e/A\omega)^2$, avec $V_e = V_m(t_e)$, et $\omega(t_e - t_s)$ à partir de l'équation (II.4.15) :

$$\alpha = 4 \sin(\omega(t_e - t_s))^2. \quad (\text{II.4.18})$$

En [figure II.4.2](#), nous représentons t_e et α en fonction de x et c_s/Lf de la même façon qu'en [figures II.3.3](#) et [II.3.4](#) pour l'approche numérique. Les deux approches sont en très bon accord pour t_e dans la gamme $t_s - 3t_s$ et nous pouvons à présent comprendre certaines caractéristiques. À partir de [équation \(II.4.18\)](#), il est évident que la valeur maximale de α vaut 4 et qu'elle est obtenue pour $\omega(t_e - t_s) = \pi/2$ [2π]. Ceci impose que $\tau = 0$ ou $x = 1$ et $\omega(t_e - t_s) = \pi/2$ dans l'[équation \(II.4.17\)](#). Puisque $t_s \leq t_e \leq 3t_s$, une solution $\alpha = 4$ existe dans cet intervalle pour $0 \leq c_s/Lf \leq 8$ en bon accord avec les simulations numériques pour lesquelles nous avons relevé un intervalle entre 0 et 7.9 ([chapitre II.3](#)).

II.4.2.3 TROISIÈME INTERVALLE DE TEMPS, DE $t = 3t_s$ À $5t_s$

Si le projectile ne décolle pas dans le second intervalle, nous avons besoin de considérer l'intervalle de temps suivant. Pour $t = 3t_s$ à $5t_s$, $v_+(L_s, t) = V_p(t - t_s) - V_m(t - 2t_s) + V_p(t - 3t_s)$ en [équation \(II.4.12\)](#). Au début de cet intervalle de temps, nous avons la condition initiale $V_m(t = 3t_s) = 2A\omega \frac{(\omega\tau)e^{-2t_s\tau} - (\omega\tau)\cos(2\omega t_s) + \sin(2\omega t_s)}{1 + (\omega\tau)^2}$. L'évolution du projectile est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau \frac{dV_m}{dt} + V_m = 2A\omega [\sin(\omega(t - t_s)) + \sin(\omega(t - 3t_s)) \\ - \frac{2}{1 + (\omega\tau)^2} ((\omega\tau)e^{-(t-3t_s)/\tau} - (\omega\tau)\cos(\omega(t - 3t_s)) \\ + \sin(\omega(t - 3t_s)))] \quad (\text{II.4.19}) \end{aligned}$$

Encore une fois, t_e et α sont obtenus dans cet intervalle de temps en résolvant l'[équation \(II.4.19\)](#), équation différentielle du premier ordre, avec la condition $V_m(t = 3t_s)$ en cherchant les valeurs de t_e et $V_m(t_e)$ lorsque $dV_m/dt(t_e) = 0$. Comme nous l'observons en [figure II.4.2](#), il y a un très bon accord et le maximum $\alpha = 4.12$ pour $x = 0.8$ et $c_s/Lf = 6.7$ est retrouvé dans cet intervalle. Une petite différence peut toutefois être observée dans la région où $c_s/Lf < 2.0$ et $\alpha < 1.0$. C'est ici que des phases successives d'éjection et de reconnexion apparaissent dans les simulations. Ce comportement n'est pas pris en compte dans le modèle analytique.

II.4.2.4 INTERVALLES DE TEMPS SUCCESSIFS

Le processus décrit au-dessus est récursif. Nous aurions aussi pu obtenir les résultats pour des intervalles de temps supérieurs ($t > 5t_s$) mais les expressions analytiques deviennent très longues et se complexifient. Néanmoins, nous observons en [figure II.4.2](#) que les valeurs impaires de t_e/t_s marquent la séparation entre des domaines qui semblent discontinus (ou au moins leurs dérivées partielles semblent l'être) visibles en [figures II.3.3](#) et [II.3.4](#) et [figure II.3.5](#). C'est particulièrement frappant dans la représentation de α pour $t_e/t_s = 3$. À la lumière des calculs précédents, ces discontinuités correspondent au change-

ment des expressions du temps d'éjection et de la vitesse d'éjection. Ce comportement est directement relié au nombre d'allers-retours de l'onde dans la couche molle. Cela montre que le maximum d'efficacité, $\alpha = 4.12$, se trouve quand le projectile est éjecté entre $3t_s$ et $5t_s$. Pour $t_s < t_e < 3t_s$, nous mesurons un maximum local, $\alpha = 4$, pour $x \rightarrow 1$. Pour $t_e > 5t_s$, l'efficacité décroît et nous nous basons sur les simulations numériques pour obtenir les valeurs.

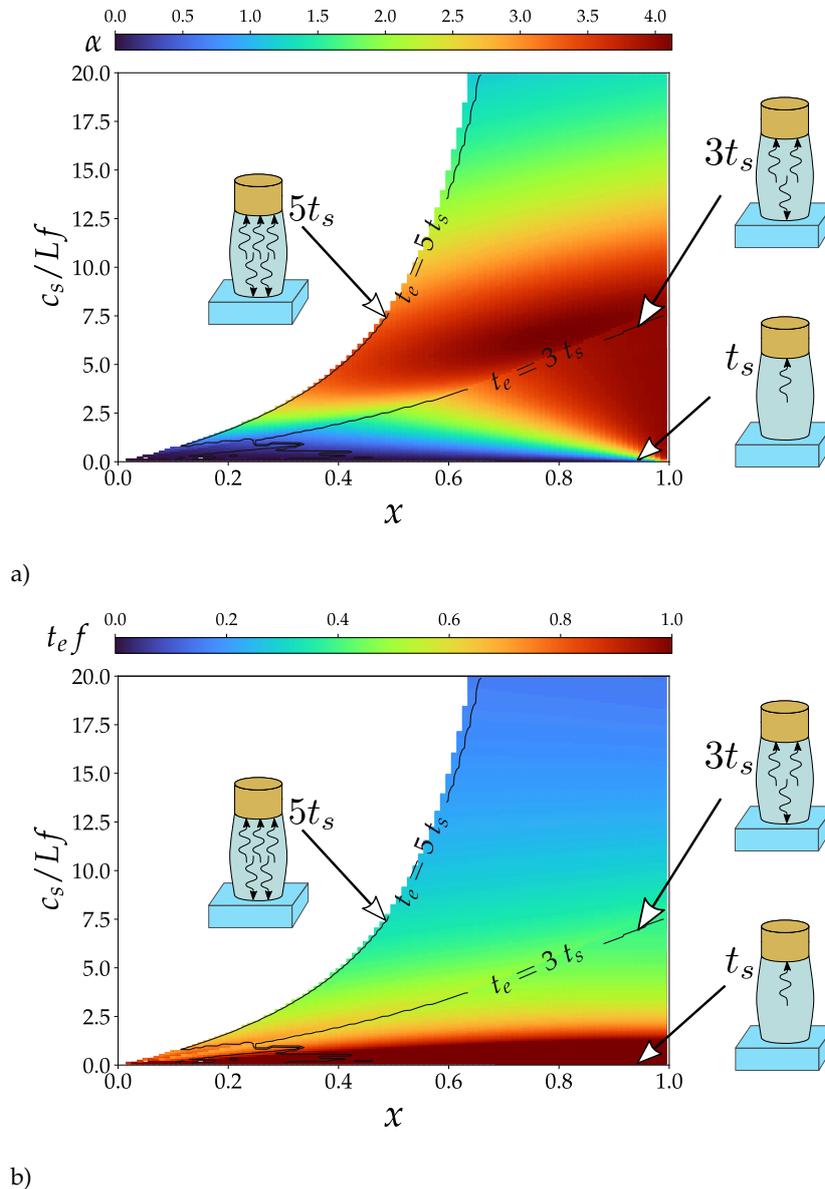


FIGURE II.4.2 : Résultats obtenus avec le modèle analytique pour $t_e < 5t_s$ sans prendre en compte les *multikicks* : a) α dans l'espace $(x, c_s/Lf)$ et b) $t_e f$ dans l'espace $(x, c_s/Lf)$. Les lignes continues noires montrent la démarcation des résultats obtenus pour les trois intervalles de temps considérés : $0 - t_s$, $t_s - 3t_s$ et $3t_s - 5t_s$. La ligne $t_e = t_s$ est confondue avec l'axe x .

CONCLUSION DE LA PARTIE

De précédentes études ont montré qu'un projectile déformable pouvait être éjecté avec plus d'énergie cinétique qu'un objet rigide de même masse. Ceci peut être fait en jouant sur sa nature, projectile homogène mou (RAUFASTE et al., 2017) ou projectile hétérogène (CELESTINI et al., 2020), et en ajustant ses propriétés mécaniques avec celles du lanceur.

La présente étude montre qu'un transfert d'énergie plus efficace peut être obtenu pour un projectile rigide si le lanceur est modifié. Ajouter une couche molle à l'extrémité supérieure de ce dernier permet d'augmenter significativement l'efficacité de l'éjection. Ce résultat est conforté par des approches expérimentale, numérique et théorique. L'efficacité de l'éjection demande à ce que la couche flexible ait une épaisseur et une rigidité qui soient accordées à la fois à la masse du projectile et à la fréquence du lanceur. Cela se traduit par un comportement complexe en fonction de deux paramètres de contrôle sans dimension : c_s/Lf et x . Plus précisément, l'efficacité est optimale, avec une valeur de 4.12, pour $x = 0.8$ et $c_s/Lf = 6.7$. Ceci revient à choisir une couche de matériau mou trois fois plus massive que le projectile rigide et un temps caractéristique du lanceur quatre fois supérieur au temps nécessaire à l'onde pour faire un aller-retour dans la couche molle. Autour de cet optimum, il existe une large (x dans la gamme 0.65 – 1.00) mais étroite région (c_s/Lf dans la gamme 5.5 – 8.3) pour laquelle $\alpha > 4$. Une efficacité importante nécessite donc un ajustement relativement précis de ces différents paramètres.

Nous insistons cependant sur le fait qu'une épaisse couche molle, $x \simeq 1$, donne une efficacité égale à 4 pour une large gamme de rigidités puisque le seul critère est alors $c_s/Lf \leq 8$. Ce cas est presque aussi bon que le cas optimal mais il a l'avantage d'être plus adaptable. Une couche très épaisse et molle peut potentiellement être utilisée avec de nombreux projectiles et lanceurs dans d'éventuelles applications. Cette étude montre que l'efficacité et la flexibilité peuvent être obtenues simultanément avec un choix judicieux de la couche flexible pour des applications nécessitant l'actionnement d'un objet.

Enfin, nous rappelons que deux paramètres sans dimension ont été fixés dans cette étude, c_s/c_r et ρ_s/ρ_r , qui sont respectivement le rapport de vitesses des ondes élastiques et le rapport des masses volumiques dans la couche molle et dans le projectile rigide. Il conviendrait ainsi de les faire varier afin de compléter l'étude et de déterminer s'il est possible d'obtenir des éjections plus efficaces.

L'ÉJECTION DE PROJECTILES ÉLASTIQUES ÉLANCÉS



TABLE DES MATIÈRES

III.1	Préambule	57
III.2	Matériel et Méthode	59
III.2.1	Les expériences d'éjections	59
III.2.1.1	Les projectiles	59
III.2.1.2	Le lanceur	61
III.2.1.3	L'acquisition et le traitement des données	62
III.2.2	Simulations numériques de poutres	64
III.2.2.1	Le schéma de simulation numérique	64
III.2.2.2	La validation du schéma de simulation	69
III.2.2.3	Les éjections de poutres	74
III.2.3	Résumé du chapitre III.2	79
III.3	Résultats	81
III.3.1	Les éjections en laboratoire	81
III.3.1.1	Le coefficient de transfert d'énergie α	81
III.3.1.2	Le flambement des projectiles lestés	83
III.3.2	Simulations numériques	86
III.3.2.1	Étude systématique	86
III.3.2.2	La dynamique de flambement	90
III.3.2.3	Influence des conditions initiales	96
III.3.3	Modèle analytique	98
III.3.3.1	Cas sans flambement	99
III.3.3.2	Cas avec flambement	99
III.3.4	Résumé du chapitre III.3	103
III.4	Comparaison et discussion	105
III.4.1	Les projectiles homogènes	106
III.4.2	Les projectiles lestés	107

NOMENCLATURE

- α Coefficient de transfert d'énergie
- β_0 Constante liée au mode fondamental d'oscillations libres d'une poutre
- ΔL Distance entre les deux extrémités de la poutre - du projectile
- ΔL^{max} Distance maximale entre les deux extrémités du projectile avant une éjection
- γ Coefficient de dissipation visqueuse
- μ Masse linéique du projectile
- $\omega = 2\pi f$ Pulsation du lanceur
- ϕ_0 Potentiel de flexion maximal pour $\theta_i = \pi/2$
- ϕ_{ij}^{\parallel} Potentiel élastique longitudinal entre deux masses consécutives i et j
- ϕ_i^{\perp} Potentiel de flexion associé à un angle θ_i
- ρ Masse volumique du projectile
- σ Taux de croissance du mode de flambement
- σ_m Valeur maximale du taux de croissance du mode de flambement
- θ_0 Inclinaison initiale du projectile
- θ_i Angle porté par la masse i de la chaîne
- \tilde{F} Rapport entre la force de flambement du projectile et la force inertielle induite par l'accélération du lanceur
- \tilde{P} Rapport entre la force de flambement et la force axiale
- \tilde{q} Rapport entre le nombre d'onde q associé au mode de croissance et le nombre d'onde q_L associé au mode fondamental
- \tilde{q}_m Valeur de \tilde{q} associée à σ_m
- A Amplitude du lanceur
- c^{\parallel} Vitesse de propagation d'une perturbation dans la chaîne
- D Diamètre du projectile
- d_i Distance entre deux masses consécutives de la chaîne
- E Module de Young du projectile

- E_{cin} Énergie cinétique de la chaîne
 E_ϕ Énergie de flexion de la chaîne
 EI Rigidité en flexion du projectile
 f Fréquence du lanceur
 $f_0 \equiv f_0^\perp$ Fréquence propre d'oscillations transverses libres du projectile sans lest
 F_c Force de flambement statique d'une poutre
 F_{el} Force élastique agissant sur le projectile
 $F_i = F_i^\parallel + F_i^\perp$ Force agissant sur la i -ème masse de la chaîne
 F_i^\parallel Force de compression longitudinale
 F_i^\perp Force de flexion
 F_{pb} Force de post-flambement quasi-statique d'une poutre
 I Moment quadratique du projectile par rapport à son axe
 K Masse effective du lanceur
 k Raideur effective du lanceur
 k_0 Raideur des ressorts entre deux masses de la chaîne
 L Longueur du projectile
 m Masse du projectile
 m_0 Unité de masse de la chaîne
 m_b Masse du lest du bas du projectile
 m_h Masse du lest du haut du projectile
 m_i i -ème masse de la chaîne
 m_{tige} Masse du projectile sans lest (tige)
 N Nombre de masses de la chaîne
 P Force axiale appliquée sur la poutre
 p Proportion de masse en haut du projectile modèle
 q Nombre d'onde
 R Force de réaction du lanceur sur la masse du bas du projectile
 r_i Position de la i -ème masse de la chaîne
 S Section transversale du projectile
 $T = 1/f$ Période du lanceur
 t_e Temps d'éjection du projectile
 $T_0 = 1/f_0$ Période propre d'oscillations libres du projectile sans lest
 t_f Temps de flambage du projectile
 t_m Temps de croissance du mode associé au taux σ_m
 t_L Temps de croissance du mode fondamental
 V_e Vitesse d'éjection du projectile
 V_p^* Vitesse maximale du lanceur / Vitesse d'éjection d'un projectile rigide

x Coordonnée dans la direction de l'axe de la poutre ou du projectile

y Coordonnée dans la direction transverse à l'axe de la poutre ou du projectile



PRÉAMBULE

Dans ce chapitre, nous explorons l'éjection de projectiles élastiques élançés par différentes approches, expérimentales, numériques et théoriques. L'objectif est de mettre en évidence un phénomène analogue à la super-propulsion lorsque le projectile subit des déformations dans la direction transverse à l'éjection suite à une sollicitation longitudinale. Tel est le cas d'une flèche lancée par un arc comme discuté en introduction.

Les approches expérimentale et numérique seront exposées dans une première partie dédiée à la méthode utilisée et principalement à la caractérisation des projectiles et des techniques utilisées pour mesurer les grandeurs pertinentes. Nous y présenterons dans un premier temps les éjections menées en laboratoire. Il sera alors question des projectiles que nous avons réalisés, de leur géométrie et de leurs propriétés mécaniques. Nous présenterons aussi le dispositif expérimental créé pour éjecter lesdits projectiles, sa conception et la caractérisation de son mouvement notamment. Nous aborderons la méthode utilisée pour mesurer les grandeurs qui nous intéressent, la principale étant le coefficient de transfert d'énergie α . Dans un second temps, nous décrirons la méthode numérique utilisée pour simuler la dynamique de projectiles élançés. Nous exposerons d'abord la validation sur plusieurs cas que nous relierons aux cas réels de mécanique des poutres. Nous présenterons ensuite la méthode employée pour simuler l'éjection de projectiles élançés.

Nous poursuivrons dans une deuxième partie sur les résultats obtenus, aussi bien en laboratoire qu'au terme des simulations numériques. Nous traiterons les deux approches indépendamment et nous nous cantonnerons ici aux résultats bruts. Ceux-ci révéleront le comportement original de ces objets élançés lorsqu'ils sont éjectés. Nous identifierons la qualité du transfert d'énergie entre le lanceur et le projectile en fonction de si ce dernier rencontre un flambage dynamique ou non et de la déformation qu'il subit. Nous terminerons cette partie par un modèle théorique développé dans le but de mettre en évidence les grandeurs intervenant dans le phénomène considéré.

Dans une dernière partie, nous comparerons les différents résultats obtenus pour les deux méthodes, numériques et expérimentales, à la lumière de ce que nous aura apporté le modèle théorique.

III2

MATÉRIEL ET MÉTHODE

III.2.1 LES EXPÉRIENCES D'ÉJECTIONS

III.2.1.1 LES PROJECTILES

Nous rappelons que l'objectif de cette étude est de conclure si oui ou non le flambement de projectiles élançés peut conduire à une éjection énergétiquement plus efficace qu'un objet rigide. Or, il existe un seuil de flambage pour chaque objet élançé et la gamme d'amplitudes disponible expérimentalement ne permet pas assurément de franchir ce seuil. C'est donc cette gamme d'amplitudes qui a orienté le choix des matériaux et de la géométrie des projectiles dont nous allons discuter dans la suite. Ceux-ci se distinguent en deux types qui sont présentés en [figure III.2.1](#) : des poutres homogènes et des tiges lestées.



FIGURE III.2.1 : Photographies des deux types de projectiles : en haut un projectile composé d'un jonc de carbone lesté par deux masselottes et en bas un projectile cylindrique homogène de PDMS.

III.2.1.1.1 LES PROJECTILES HOMOGÈNES

Les projectiles homogènes présentés ici sont réalisés à partir de polydiméthylsiloxane (PDMS) moulé en forme de cylindre de diamètre $D = 5$ mm et de différentes longueurs L comprises entre 7 et 15 cm. Le PDMS est réticulé et les projectiles obtenus possèdent un module de Young $E = 50$ MPa, une rigidité en flexion $EI = 1.6 \times 10^{-3}$ N.m². Les projectiles obtenus ont un rapport d'aspect D/L dans la gamme 0.03 – 0.07. Leur masse linéique étant $\mu = 2 \times 10^{-2}$ kg.m⁻¹, les projectiles ont une masse comprise entre 1.4 et 3.0 g.

III.2.1.1.2 LES PROJECTILES LESTÉS

Les projectiles lestés sont réalisés à partir de tiges de carbone lestées par des plombs de pêche de manière à ce que le centre de masse du projectile soit situé à environ 2/3 de sa longueur, une valeur proche du cas des flèches d'archerie (section I.o.3). Les projectiles sont tous réalisés à partir du même jonc de carbone de diamètre $D = 0.6$ mm. Leurs longueurs L sont comprises entre 7.7 et 19.0 cm. Le rapport d'aspect des projectiles D/L est compris dans la gamme 0.003 – 0.008. La masse linéique des joncs de carbone utilisés est $\mu = (0.52 \pm 0.01)$ g.m⁻¹. Nous lestons chaque tige de la même façon : nous fixons une masselotte de (0.76 ± 0.01) g à une extrémité et la moitié d'une même masselotte à l'autre extrémité. Les projectiles obtenus ont une masse totale m comprise entre 1.16 et 1.23 g. Ainsi, la masse de la tige représente entre 2.8 et 6.7 % de la masse totale du projectile.

La rigidité en flexion des joncs de carbone est $EI = 4.81 \times 10^{-4}$ N.m². Nous essayons du mieux possible d'obtenir une condition rotule au contact avec le lanceur et de forcer la déformation transverse dans le plan de la caméra. Pour cela, nous réalisons une entaille dans la masselotte en contact avec le lanceur, à l'image de l'encoche d'une flèche.

L (cm)	f_0 (Hz)	m_h (g)	m_{tige} (g)	m_b (g)	m_{tige}/m
7.70	572	0.761	0.033	0.365	0.029
10.2	326	0.771	0.57	0.369	0.048
12.3	224	0.771	0.069	0.390	0.056
14.0	173	0.771	0.078	0.369	0.064
19.0	94	0.750	0.080	0.360	0.067

TABLEAU III.2.1 : Tableau regroupant les masses du haut m_h , de la tige m_{tige} et du bas m_b pour les 5 projectiles lestés éjectés en laboratoire. La grandeur f_0 est la fréquence propre en oscillations libres de la tige seule déterminée à partir des propriétés mécano-géométriques.

III.2.1.2 LE LANCEUR

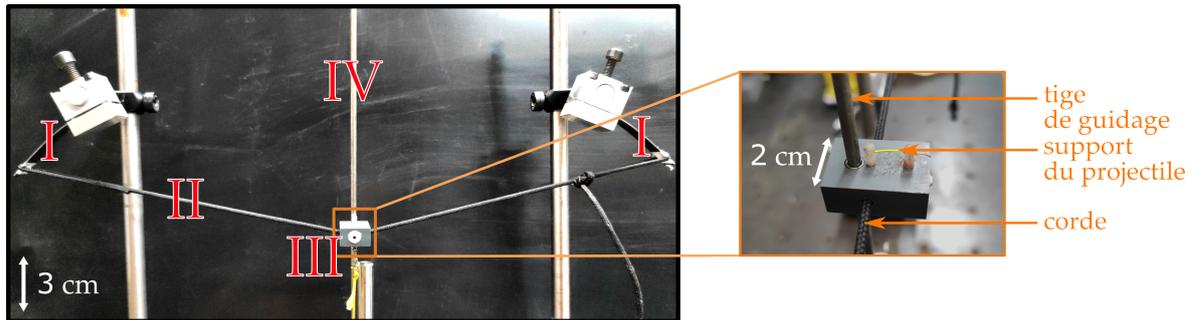


FIGURE III.2.2 : À gauche, une photographie du lanceur utilisé en laboratoire en configuration chargée composé de deux clinquants en acier (I), d'une corde (II) et d'une plateforme (III), dont le détail est présenté à droite, destinée à accueillir les projectiles et qui peut coulisser le long d'un guide vertical (IV). La plateforme possède sur le dessus un fil d'acier sur lequel sont placés les projectiles et qui permet d'approcher une condition rotule avec la combinaison de l'encoche présente dans la masse du bas.

La [figure III.2.2](#) illustre le lanceur utilisé pour éjecter les projectiles élançés. Il est constitué de deux clinquants en acier (I) agissant comme des ressorts de torsion reliés par une corde en nylon (II) à l'image d'un arc tirant verticalement vers le haut. La corde traverse une pièce en plastique rigide, la plateforme (III), qui coulisse le long d'un guide vertical (IV) pour contrôler la direction de l'accélération. La plateforme est munie d'un fil d'acier tendu horizontalement permettant d'accueillir l'encoche du projectile et de contrôler le flambage. Au repos, la corde est tendue horizontalement entre les ressorts. Le chargement du lanceur se fait en écartant la plateforme de la position de repos d'une amplitude A et en bloquant sa position au moyen d'un électro-aimant de verrouillage (non-visible sur la [figure III.2.2](#)). Une fois celui-ci activé, la plateforme est libérée avec une accélération pouvant atteindre 200 fois l'accélération de pesanteur $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

Le lanceur effectue un mouvement quasi-périodique : l'accélération est maximale initialement et diminue ensuite. Nous observons en [figure III.2.3](#) que la fréquence du lanceur varie à la fois avec l'amplitude A et la masse qui lui est adjointe, typiquement un projectile de masse m . Nous considérons en première approximation le lanceur comme un système constitué d'un ressort de raideur k lié à une masse ponctuelle M . La fréquence du système composé du lanceur et d'un projectile peut s'écrire $f(m) = 1/(2\pi)\sqrt{k/(m+M)}$. Nous fixons l'amplitude A du lanceur à 65 mm et faisons varier la masse m en ajoutant des masselottes solidaires du lanceur à l'emplacement destiné aux projectiles. Nous représentons sur la [figure III.2.3](#) la fréquence f en fonction de la masse m . Le meilleur ajustement des mesures donne une raideur $k = 216 \pm 9 \text{ N/m}$ pour une masse virtuelle $M = 11.3 \pm 0.6 \text{ g}$.

Les masses des projectiles lestés sont comprises entre 1.16 et 1.23 g avec une moyenne de $1.20 \pm 0.02 \text{ g}$. Pour une masse ajoutée m valant 1.2 g, nous mesurons la fréquence du lanceur en variant l'amplitude A entre 30 et 95 mm. La fréquence suit une loi affine de coefficient directeur valant $(167 \pm 3) \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et avec une ordonnée à l'origine de $10.0 \pm 0.2 \text{ Hz}$. Dans la gamme d'amplitude choisie, les fréquences varient significativement entre 15 et 26 Hz.

Pour la gamme restreinte de masses m des projectiles, la fréquence f varie peu pour une amplitude donnée mais, à m fixée, elle varie fortement avec l'amplitude A .

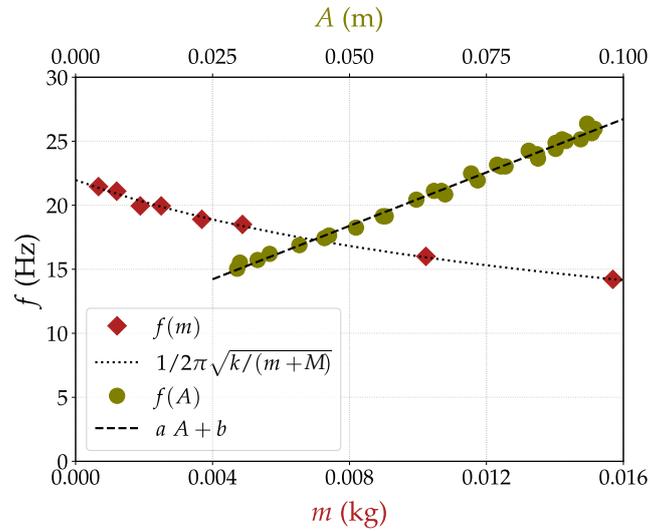


FIGURE III.2.3 : Fréquences du lanceur en fonction de la masse ajoutée m pour une même amplitude $A = 65$ mm et de l'amplitude A pour une masse $m = 1.2$ g.

III.2.1.3 L'ACQUISITION ET LE TRAITEMENT DES DONNÉES

Comme l'illustrent les figures III.2.4 et III.2.5, les projectiles homogènes et lestés flambent de par l'accélération par le lanceur et le temps caractéristique de la dynamique des projectiles est de l'ordre de quelques millisecondes. Afin de caractériser cette dynamique, nous mesurons les positions des différents éléments du système en suivant le procédé décrit dans le chapitre II.2. Nous utilisons la même caméra, une *Photron FastCam SA8* à des fréquences d'acquisition d'images de 5000 à 7500 images par seconde.

Pour un projectile homogène (figure III.2.4), nous suivons au cours du temps la position du lanceur et le projectile dont le centre de masse est défini comme étant son barycentre. Dans le cas des projectiles lestés, nous suivons dans ce cas le lanceur ainsi que les masses du bas et du haut au cours du temps. Dans les deux cas, après l'éjection, les projectiles continuent de se déformer du fait de leur inertie et ils oscillent à leur fréquence propre. Les vitesses sont obtenues par différences centrées de chaque position sauf pour le centre de masse du projectile lesté. Dans ce cas, les positions et vitesses sont déduites des mesures effectuées sur les deux masselottes (figure III.2.6).

Comme précédemment, le temps d'éjection est noté t_e , la vitesse du centre de masse du projectile à l'éjection V_e et la vitesse maximale du lanceur ou la vitesse d'éjection d'un objet rigide est notée V_p^* . La fréquence f du lanceur est déterminée pour chaque expérience par le meilleur ajustement de la vitesse du lanceur avec l'équation de la vitesse d'un oscillateur harmonique amorti donnée en section II.2.1.1.2.

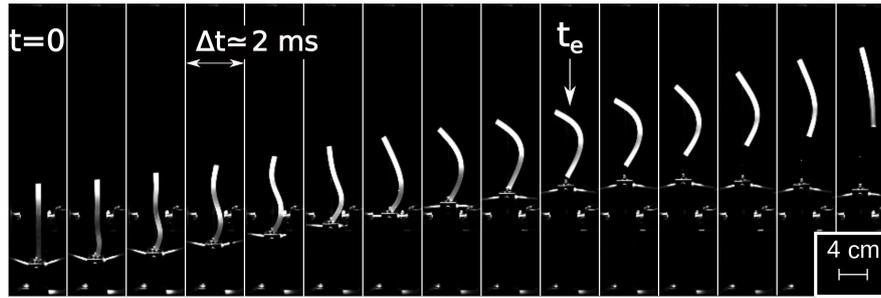


FIGURE III.2.4 : Séquence d’images d’un projectile homogène de longueur $L = 11.1$ cm durant l’accélération par le lanceur chargé à $A = 65$ mm et après éjection. Nous observons le mouvement sinusoïdal du lanceur. Le projectile flambe sous l’accélération du lanceur puis il est éjecté. Après éjection, il suit une trajectoire dans la direction de l’accélération tout en oscillant librement à sa période propre.

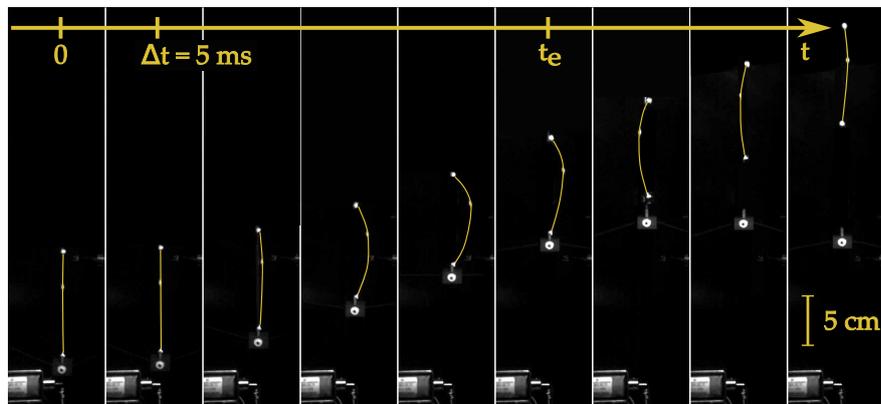


FIGURE III.2.5 : Séquence d’images d’un projectile lesté de longueur $L = 10.2$ cm durant l’accélération par le lanceur chargé à $A = 90$ mm et après éjection. Le projectile flambe durant l’accélération puis est éjecté. Comme les projectiles homogènes après éjection, la tige lestée suit une trajectoire dans la direction de l’accélération tout en oscillant librement. La tige du projectile se confond avec l’arrière-plan; elle a été surlignée pour une meilleure visualisation de la déformation. Le rond blanc marque la position du lanceur et il est suivi au cours du temps tout comme les masselottes du projectile.

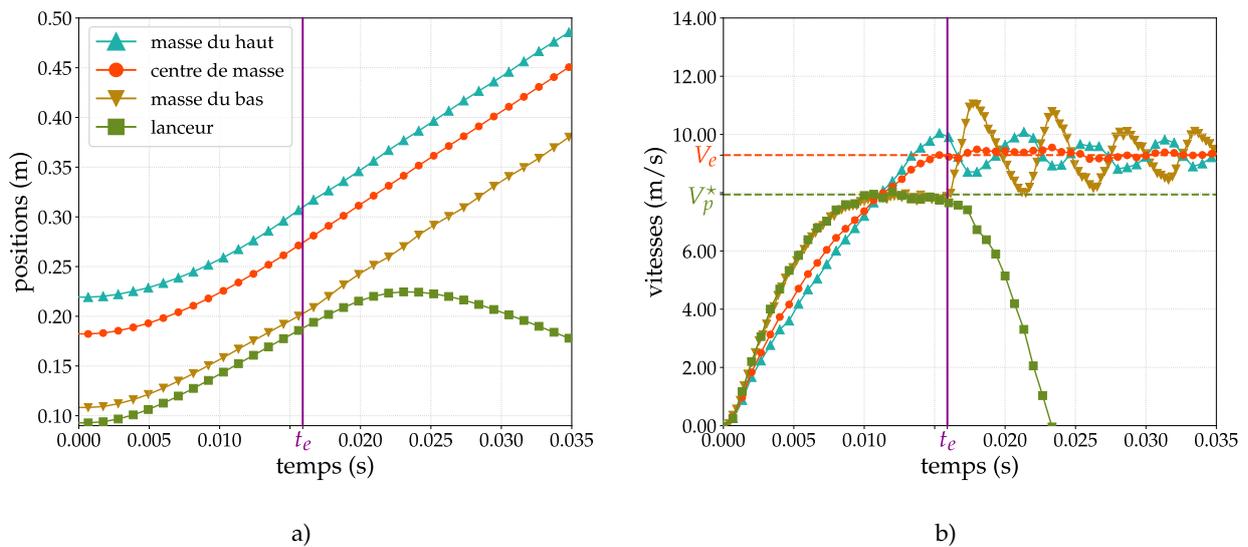


FIGURE III.2.6 : Positions a) et vitesses b) au cours du temps des différents composants du système pour un projectile lesté de longueur $L = 10.2$ cm et une amplitude $A = 75$ mm.

III.2.2 SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE POUTRES

III.2.2.1 LE SCHÉMA DE SIMULATION NUMÉRIQUE

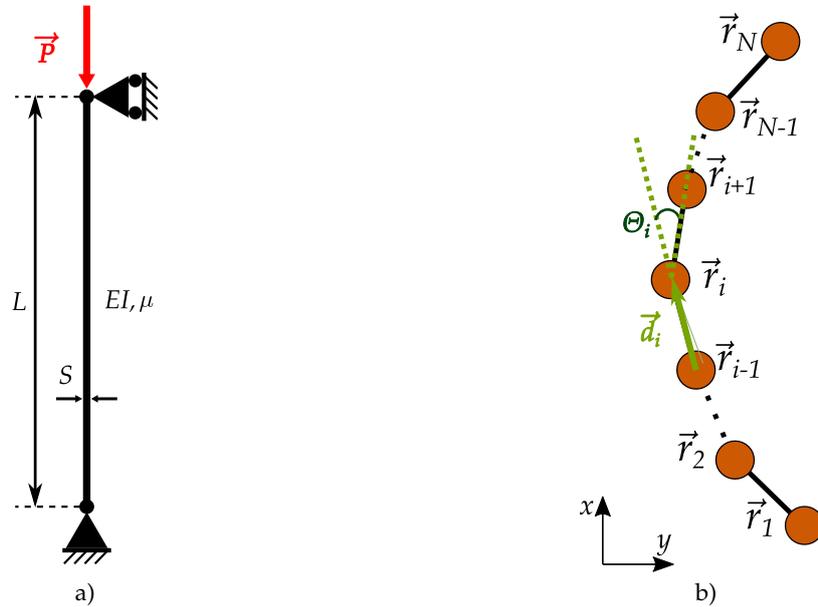


FIGURE III.2.7 : a) Schéma d'une poutre de longueur L , section S , de masse linéique μ et de rigidité en flexion EI soumise à l'application d'une force axiale \vec{P} . Les deux extrémités sont libres de rotation. L'extrémité du bas est fixée en déplacement et l'extrémité du haut peut se mouvoir selon l'axe x sous l'application de \vec{P} . b) Schéma d'une chaîne d'atomes formant la poutre en simulation.

Nous souhaitons modéliser une poutre telle que celle présentée en [figure III.2.7a](#) dans le cadre de la théorie classique des poutres. À ce titre, nous excluons la torsion de la poutre, l'inertie de rotation et le cisaillement. Nous considérons uniquement la compression longitudinale, selon la direction de la dimension la plus longue de la poutre notée x , et les flexions qui ont lieu dans le plan généré par x et une direction transverse notée y . Nous choisissons une méthode basée sur la dynamique moléculaire exposée dans ALLEN et TILDESLEY (2017, Appendix C). Les principaux avantages en comparaison d'une méthode classique d'éléments finis est une simplicité d'écriture du code et une économie du temps de calcul.

LA COMPRESSION LONGITUDINALE

Pour modéliser la compression longitudinale, nous considérons une chaîne de N masses m_i séparées deux à deux d'une distance d_i et de N ressorts de même raideur k_0 ([figure III.2.7b](#)). Un potentiel élastique longitudinal ϕ_{ij}^{\parallel} s'exerce entre chaque masse et ses premières voisines. Il a pour expression :

$$\phi_{ij}^{\parallel} = \frac{1}{2}k_0 \left(\left[(\vec{r}_j - \vec{r}_i) - (\vec{r}_j^0 - \vec{r}_i^0) \right] \cdot \vec{e}_{ij} \right)^2. \quad (\text{III.2.1})$$

La notation \vec{r}_i^0 marque ici la valeur des vecteurs positions à l'instant initial et le vecteur unité est donné par $\vec{e}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) / \|(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\|$. Ce potentiel est la source de la force de compression longitudinale suivante :

$$\vec{F}_i^{\parallel} = k_0 \left(\frac{d_{i+1} - d_{i+1}^0}{d_i + 1} \vec{d}_{i+1} - \frac{d_i - d_i^0}{d_i} \vec{d}_i \right). \quad (\text{III.2.2})$$

Considérons chaque masse identique et valant m_0 . La vitesse de propagation d'une perturbation dans la chaîne a pour expression $c^{\parallel} = \sqrt{k_0 d_0^2 / m_0}$. Le temps nécessaire au parcours de toute la longueur de la chaîne est alors donné par :

$$T_0^{\parallel} = (N - 1) \sqrt{\frac{m_0}{k_0}}. \quad (\text{III.2.3})$$

Dans un matériau élastique linéaire homogène de module de Young E et de masse volumique ρ , la vitesse de propagation des ondes a pour expression $c = \sqrt{E/\rho}$. Nous pouvons associer les grandeurs utilisées pour la modélisation numérique et les propriétés mécaniques d'un matériau élastique linéaire homogène : $k_0 / m_0 \hat{=} E / \rho$.

LA FLEXION

La flexion de la chaîne résulte de l'introduction d'un potentiel de flexion ϕ_i^{\perp} qui dépend de l'angle θ_i formé par trois atomes consécutifs ([figure III.2.7b](#)). Nous choisissons la forme suivante pour ce potentiel :

$$\phi_i^{\perp} = \phi_0 (1 - \cos \theta_i) \quad (\text{III.2.4})$$

avec $\cos \theta_i = \frac{\vec{d}_{i+1} \cdot \vec{d}_i}{d_{i+1} d_i}$ où $d_i = \|\vec{d}_i\|$.

Lorsque la poutre ne subit pas de flexion, $\theta_i = 0$ et par conséquent ϕ_i^{\perp} est aussi nul. Le potentiel atteint la valeur de ϕ_0 lorsque la force de flexion devient maximale, c'est-à-dire quand $\theta_i = \pi/2$. Trois angles dépendent de la position de l'atome i : θ_{i-1} , θ_i et θ_{i+1} . Chacun de ces angles contribue à la force de flexion \vec{F}_i^{\perp} qui agit sur cet atome et qui a pour expression :

$$\vec{F}_i^{\perp} = - \sum_{j=i-1}^{i+1} \vec{\nabla}_i \phi_j^{\perp} \quad (\text{III.2.5})$$

où $\vec{\nabla}_i$ désigne l'opérateur gradient évalué en \vec{r}_i .

Notons que $-\vec{\nabla}_i \phi_j^{\perp} \propto \vec{\nabla}_i \cos(\theta_j)$ ce qui implique que la contribution d'un angle θ_j ait pour expression générale :

$$\vec{\nabla}_i \cos(\theta_j) = \frac{1}{d_{j+1} d_j} \left[(\vec{d}_{j+1} \cdot \vec{\nabla}_i) \vec{d}_j + (\vec{d}_j \cdot \vec{\nabla}_i) \vec{d}_{j+1} \right] - \frac{\vec{d}_{j+1} \cdot \vec{d}_j}{d_{j+1} d_j} \left[\frac{1}{d_{j+1}} \vec{\nabla}_i d_{j+1} + \frac{1}{d_j} \vec{\nabla}_i d_j \right]. \quad (\text{III.2.6})$$

Cette expression est équivalente à la forme compacte présentée dans ALLEN et TILDESLEY (2017, Appendix C).

Dans le cas de liens rigides, la distance entre deux masses consécutives est constante de sorte que $d_i = d_0$. L'équation (III.2.5) se simplifie alors en :

$$\vec{F}_i^\perp = -\frac{\phi_0}{d_0^2} [\vec{r}_{i-2} - 4\vec{r}_{i-1} + 6\vec{r}_i - 4\vec{r}_{i+1} + \vec{r}_{i+2}] \quad (\text{III.2.7})$$

En ne considérant que l'équation sur la composante y de la force, nous pouvons identifier une différence centrée d'ordre 4 et de précision 2 qui est une approximation de l'expression suivante :

$$F_i^{\perp, y} = -\frac{\phi_0}{d_0^2} \left(d_0^4 \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} \right) \quad (\text{III.2.8})$$

Nous reconnaissons ici une équation de la même forme que l'équation de Euler-Bernoulli donnée par l'équation (I.0.4) qui décrit bien la dynamique d'une poutre. En comparant les équations (I.0.4) et (III.2.8), nous pouvons associer les grandeurs définies dans le modèle numérique aux propriétés mécano-géométriques d'une poutre. Pour ce faire, nous considérons le cas simple d'une poutre homogène de section circulaire uniforme de diamètre D et de longueur L . Par définition, un objet élané comme une poutre possède un faible rapport d'aspect ce qui se traduit dans le cas présent par $D/L \ll 1$. Le moment quadratique par rapport à l'axe vaut $I = \pi D^4/64$ et la section $S = \pi D^2/4$. Elle possède un module de Young E et une masse linéique $\mu = \rho S$. Par identification, nous trouvons la relation $\phi_0 d_0^2/m_0 \triangleq EI/\mu$ et le rapport d'aspect peut être fixé dans les simulations en identifiant $\frac{D}{L} \triangleq \frac{4}{N-1} \sqrt{\frac{\phi_0}{k_0}}$.

La fréquence des oscillations libres d'une poutre homogène selon un mode propre est donnée par l'équation (I.0.5). L'expression pour le mode fondamental s'écrit :

$$f_0^\perp = \beta_0^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \frac{1}{L^2}, \quad (\text{III.2.9})$$

avec $\beta_0 = 1.5056$, une constante liée à ce cas précis d'oscillations libres selon le mode fondamental. Nous pouvons alors définir une fréquence propre à partir des paramètres numériques donnée par l'expression suivante :

$$f_0^\perp = \beta_0^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\phi_0}{m_0 d_0^2}} \frac{1}{(N-1)^2} \quad (\text{III.2.10})$$

UNITÉS DES GRANDEURS EN JEU

Dans nos simulations de dynamique de poutre, nous fixons comme valeur unitaire la masse d'un atome m_0 , la distance interatomique au repos d_0 et la constante de raideur des ressorts k_0 . L'unité de force est fixée par la résultante d'un déplacement longitudinal de l'ordre de d_0 , soit $k_0 d_0 = 1$. Il en va de même pour l'énergie : $k_0 d_0^2 = 1$. Le temps le plus court est le temps de propagation de l'onde longitudinale entre deux atomes consécutifs,

soit $\sqrt{\frac{m_0}{k_0}} = 1$. Il sera de ce fait considéré comme l'unité de temps des simulations. Nous définissons le pas de temps de simulation comme $dt = 10^{-3}$ pour décrire au mieux la dynamique.

Dans le cas $N = 25$ et $\phi_0 = 0.001$, le rapport d'aspect D/L est de l'ordre de 5×10^{-3} ce qui confirme que nous sommes en présence d'un objet élané que nous pouvons qualifier de poutre. Cela se traduit en terme de rapport de temps caractéristiques de déformation, $\frac{f_0^\perp}{f_0^\parallel}$ qui est de l'ordre de 10^{-2} . Nous en concluons que les ondes transverses et longitudinales sont découplées. Dans la suite de l'étude numérique, nous nous concentrons sur la dynamique de déformation transverse et choisissons de fixer la valeur $\phi_0 = 0.001$. Pour plus de clarté, nous préférons dans ce qui suit utiliser la notation f_0 à f_0^\perp ainsi que la notation associée à la période propre T_0 plutôt que T_0^\perp .

CALCUL DE LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME

La force globale agissant sur l'atome i est la somme de la force de compression longitudinale et de la force de flexion :

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \vec{F}_i^\parallel + \vec{F}_i^\perp \\ &= k_0 \left(\frac{d_{i+1} - d_{i+1}^0}{d_{i+1}} \vec{d}_{i+1} - \frac{d_i - d_i^0}{d_i} \vec{d}_i \right) + \sum_{j=i-1}^{i+1} -\vec{\nabla}_i \phi_j^\perp. \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

La dynamique de chaque masse est donnée par le principe fondamental de la dynamique $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ où \vec{a}_i est l'accélération de la masse m_i . Les positions \vec{r}_i , les vitesses \vec{v}_i et les accélérations \vec{a}_i sont calculées à chaque pas de temps via l'algorithme de Beeman (BEEMAN, 1976; FRENKEL et SMIT, 2001) présenté en figure III.2.8.

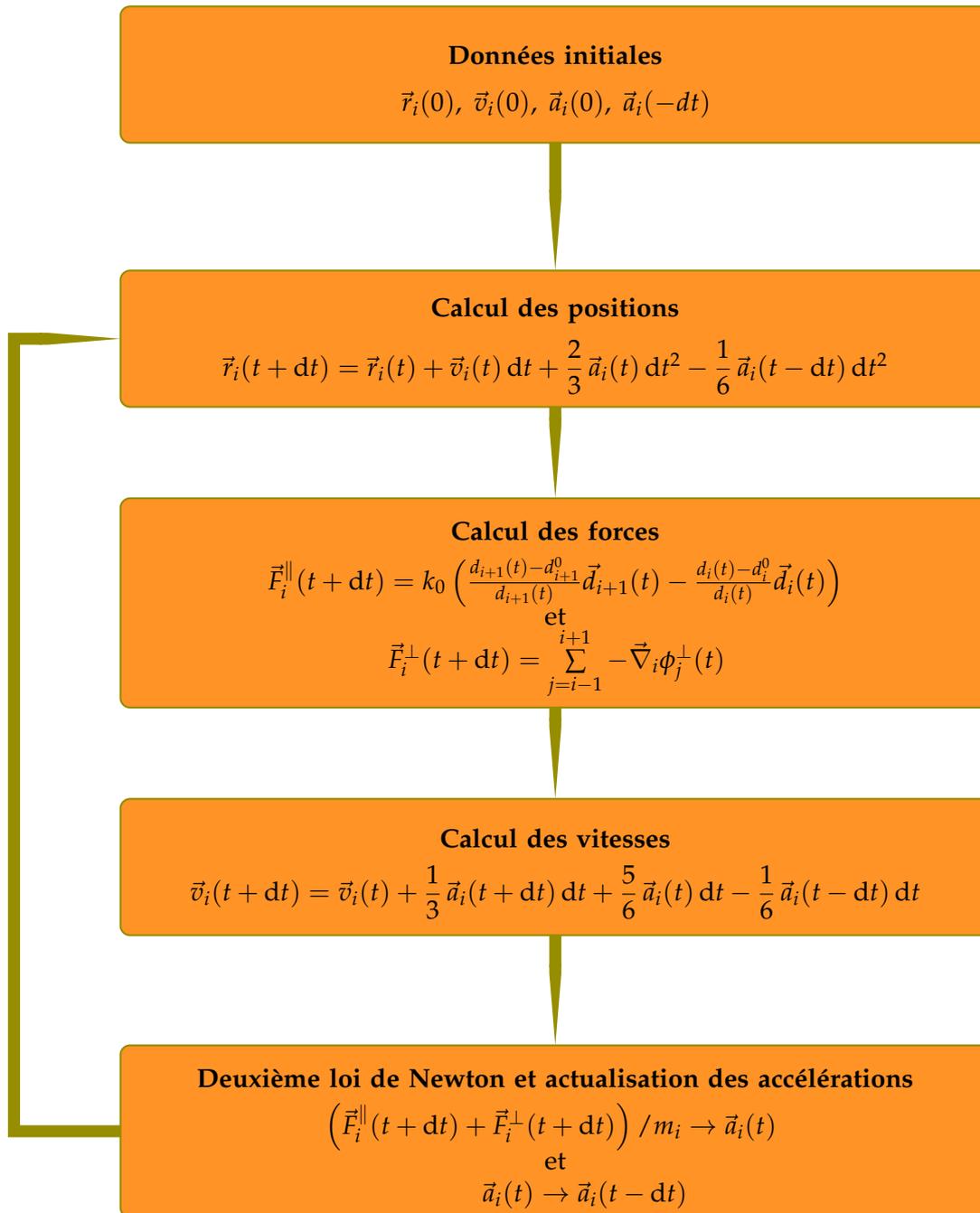


FIGURE III.2.8 : Schéma de l'algorithme de Beeman appliqué à la chaîne de masses-ressorts.

III.2.2.2 LA VALIDATION DU SCHEMA DE SIMULATION

Nous avons éprouvé le schéma de simulation avec plusieurs tests, cherchant à rapprocher grandeurs physiques théoriques et quantités mesurées après simulations. Nous présentons ici le cas des vibrations libres et le flambement d'Euler de poutres homogènes pour différentes conditions aux limites.

III.2.2.2.1 LES VIBRATIONS LIBRES

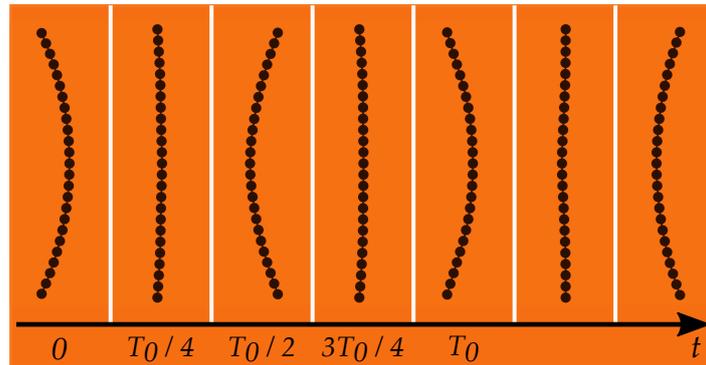


FIGURE III.2.9 : Séquence d'images de la vibration libre d'une poutre de 25 atomes, avec une courbure initiale uniforme définie par $\theta_i = 0.05^\circ$.

Nous souhaitons ici modéliser la vibration libre d'une poutre. La simulation consiste à laisser la poutre vibrer en l'absence de force extérieure à partir d'une configuration initiale hors équilibre associée à une énergie potentielle élastique E_ϕ^0 (figure III.2.9). Nous fixons pour cela un nombre d'atomes N entre 5 et 200 et appliquons sur chacun une rotation par rapport au précédent d'un angle θ_i constant. À chaque pas de temps nous pouvons associer à l'état de la poutre une énergie potentielle élastique $E_\phi(t)$ ainsi qu'une énergie cinétique $E_{cin}(t)$ — l'énergie potentielle élastique longitudinale est quant à elle deux ordres de grandeur inférieure. Le système étant conservatif, la somme de ces énergies est constante dans le temps (figure III.2.10a). D'après la théorie de Euler-Bernoulli, les oscillations s'effectuent à une fréquence propre f_0 qui décroît avec la longueur $N - 1$ de la poutre selon une loi de puissance $f_0 \propto (d_0 (N - 1))^{-2}$ (équation III.2.10). Nous mesurons la fréquence propre d'une poutre en réalisant la transformée de Fourier rapide (FFT) de l'énergie de flexion comme présenté en figure III.2.10b. Le pic le plus haut et le plus à gauche dans le spectre des fréquences obtenu correspond à la fréquence du mode fondamental et les pics plus faibles sont associés aux modes harmoniques impairs.

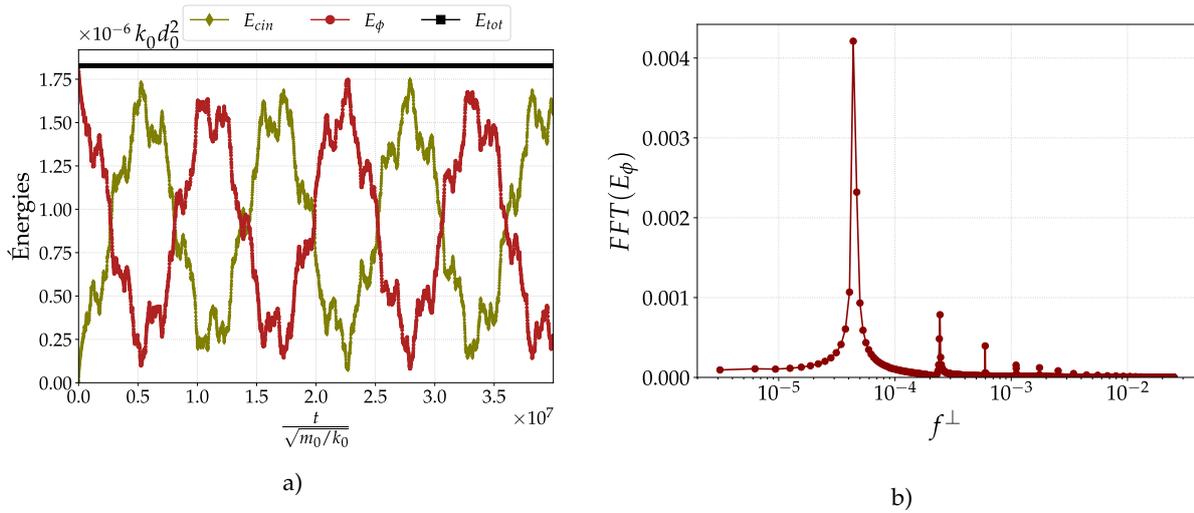


FIGURE III.2.10 : a) Énergies d’une poutre $N = 50$, $k_0 = 1$, $\phi_0 = 0.001$, $\theta_i = 0.5^\circ$ au cours du temps. L’énergie totale du système est conservée. b) Transformée de Fourier rapide de l’énergie potentielle de flexion E_ϕ de la même poutre. Le pic le plus élevé et le plus à gauche est associé au mode fondamental f_0 .

Les fréquences fondamentales obtenues pour chaque longueur de poutre sont représentées en figure III.2.11. Elles suivent la loi de puissance attendue. Pour $N < 20$, les données dévient légèrement de la tendance et nous choisissons dans la suite de simuler des chaînes constituées au minimum de $N = 25$ masses.

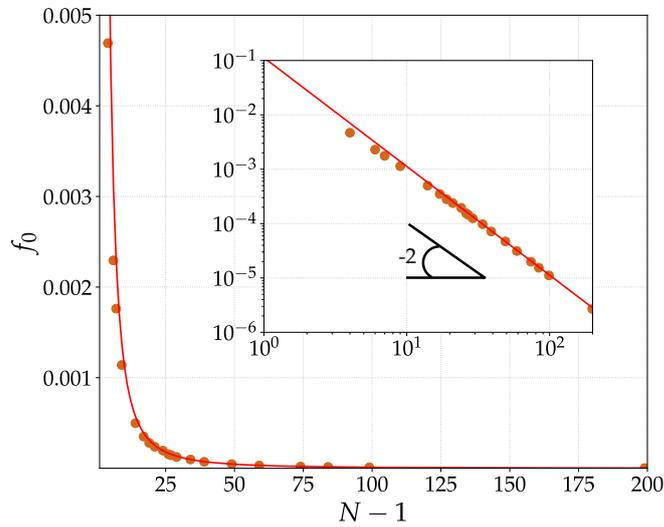


FIGURE III.2.11 : Fréquences propres f_0 d’une poutre en oscillations libres pour différentes longueurs $L = (N - 1) d_0$.

III.2.2.2.2 LE FLAMBAGE D’EULER

Nous voulons modéliser le flambage et le post-flambement quasi-statiques d’une poutre sous l’application d’une force constante et mesurer la force critique F_c associée au mode

fondamental. L'expression de cette force est donnée dans le [tableau I.o.1](#) pour différentes conditions limites. Nous traitons ici les cas de flambement d'une poutre encastree-encastree (\mathbb{E}) et d'une poutre rotule-rotule (\mathbb{R}). Nous pouvons exprimer cette force critique en fonction des paramètres de simulation dans les deux cas sous les formes $F_c^{\mathbb{E}} = 4\pi^2\phi_0/(N-2)^2$ et $F_c^{\mathbb{R}} = \pi^2\phi_0/(N-1)^2$. Les valeurs seuils associées, pour $N = 25$ et $\phi_0 = 0.001 k_0 d_0^2$, sont respectivement $7.4628 \times 10^{-5} k_0 d_0^2$ et $1.7135 \times 10^{-5} k_0 d_0^2$.

Nous réalisons ces simulations de flambage pour trois longueurs initiales de poutres $L = (N-1)d_0$ en considérant N parmi $\{25, 35, 50\}$ et toujours $d_0 = 1$. Quelle que soit la condition limite, la position d'une extrémité est libre de translation selon x uniquement et la position de l'autre est fixée dans les deux directions. La distance entre les masses des deux extrémités est $\Delta L(t) = L - (x_N(t) - x_1(t))$.

Pour initier le flambage, nous ne pouvons pas considérer une poutre rectiligne composée de N masses parfaitement alignées car nous n'aurions que de la compression. Nous introduisons donc une petite perturbation sur chaque lien entre deux masses sous la forme d'une rotation appliquée par rapport à la masse précédente. Cela se traduit par l'expression suivante : $\vec{d}_i = \vec{d}_{i-1} + \mathcal{R}^{\delta\theta_i}\vec{d}_{i-1} - \vec{d}_{i-2}$ avec $\mathcal{R}^{\delta\theta_i}$ une matrice de rotation d'un petit angle $\delta\theta_i$ choisi aléatoirement à chaque incrémentation dans l'intervalle $[-0.1^\circ; +0.1^\circ]$.

Les simulations de flambage se déroulent en deux phases :

1) la phase de déformation

1. Nous appliquons une force constante supérieure mais proche de la valeur seuil F_c attendue pour chaque jeu de conditions limites.
2. Nous mesurons la déformation longitudinale $\Delta L(t)$ de la poutre à chaque pas de temps.
3. Lorsque $\Delta L(t)$ atteint une valeur ΔL définie au préalable entre 10 % L et 70 % L , nous arrêtons la simulation et nous sauvegardons la configuration de la poutre au dernier pas de temps (positions $\vec{r}_i(t)$, vitesses $\vec{v}_i(t)$ et accélérations $\vec{a}_i(t)$).

2) la phase de relaxation

1. Nous reprenons la simulation à partir de la configuration finale de la 1^{ère} phase en fixant la position des extrémités, $\Delta L(t) \triangleq \Delta L$, et en supprimant la force constante.
2. Nous appliquons une force visqueuse de la forme $-\gamma \vec{v}_i$ à chaque masse à chaque pas de temps. Le coefficient de dissipation visqueuse γ est fixé à $0.01 k_0 dt$, une valeur qui permet à la poutre de relaxer vers un état d'énergie potentielle minimale sur une durée assez courte pour économiser du temps de calcul.
3. Lorsque la poutre atteint cet état d'équilibre, nous arrêtons la simulation et nous mesurons la force de post-flambement ($F_{pb}^{\mathbb{E}}$ ou $F_{pb}^{\mathbb{R}}$) correspondant au déplacement ΔL des extrémités.

Une simulation complète, soit les deux phases consécutives pour un couple $(N, \Delta L)$, dure quelques minutes.

La force de post-flambement est ensuite comparée aux résultats de la résolution numérique du modèle de Kirchhoff réalisée par [NEUKIRCH et al.](#) Pour ce faire, nous interpolons les données issues de cette résolution par un polynôme de degré 4. Nous réalisons ensuite

une régression des résultats de simulation par ce polynôme pour calculer l'erreur relative entre les forces mesurées au terme des simulations et la solution du modèle.

ENCASTRÉE - ENCASTRÉE

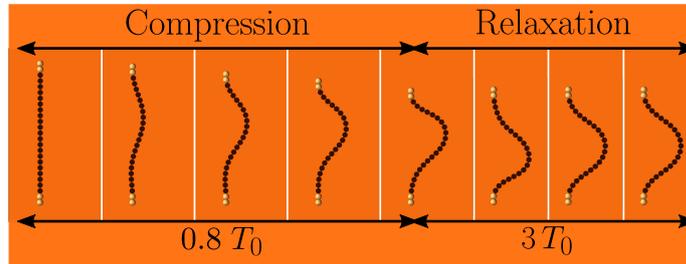


FIGURE III.2.12 : Séquence d'images du flambement d'une poutre de 25 masses en configuration encastrée-encastrée. La poutre subit tout d'abord une compression jusqu'à ce que sa déformation longitudinale atteigne la valeur choisie, ici 20 %. Elle subit ensuite une dissipation visqueuse jusqu'à atteindre un état stable. La phase de relaxation est près de quatre fois plus longue que la phase de compression, ici plusieurs périodes propres d'oscillations libres T_0 de la poutre.

Dans les simulations, une condition d'encastrement consiste à fixer un déplacement transverse nul des deux premiers atomes de la chaîne et des deux derniers. Les forces de post-flambement mesurées à déformation $\Delta L/L$ imposée pour $N \in \{25, 35, 50\}$ sont présentées en [figure III.2.13](#). Le cas $N = 50$ est le plus proche du cas continu et rend plus fidèlement compte de la solution du modèle de Kirchhoff. Le cas $N = 25$ est tout de même plutôt proche avec une différence de seulement 0.4 % en moyenne.

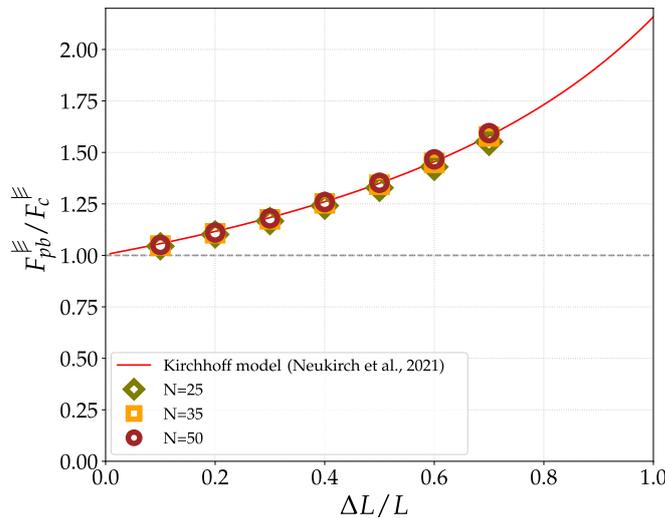


FIGURE III.2.13 : Force de post-flambement mesurées pour $N \in \{25, 35, 50\}$ en fonction du rétrécissement de la poutre. Cas d'une poutre encastrée-encastrée.

ROTULE - ROTULE

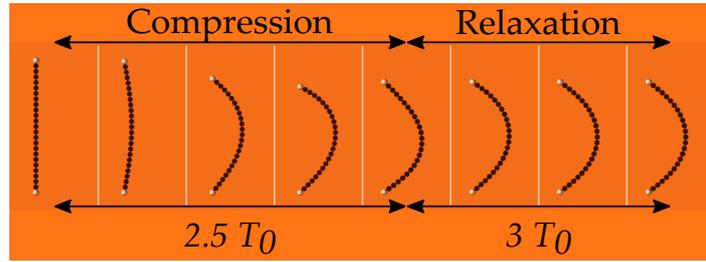


FIGURE III.2.14 : Séquence d’images du flambement d’une poutre de 25 masses en configuration rotule-rotule. La poutre subit tout d’abord une compression jusqu’à ce que sa déformation longitudinale atteigne la valeur choisie, ici 20 %. Elle subit ensuite une dissipation visqueuse jusqu’à atteindre un état stable. La phase de relaxation est près de quatre fois plus longue que la phase de compression, ici plusieurs périodes propres d’oscillations libres T_0 de la poutre.

La configuration rotule-rotule consiste à fixer uniquement le déplacement transverse de la première et de la dernière masse à 0. La force seuil attendue $F_c^{\Delta} = F_c^{\text{E}}/4$ d’après le [tableau I.o.1](#). Nous obtenons encore une fois un accord très satisfaisant entre les différentes simulations ainsi qu’avec le modèle de Kirchhoff. La différence entre la cas $N = 25$ et la solution du modèle de Kirchhoff est de seulement 0.5 % ([figure III.2.15](#)).

Finalement, nous déterminons la force critique dans le cas rotule-rotule d’une poutre constituée de $N = 25$ masses : $F_c^{\Delta} = 1.71621 \times 10^{-5} k_0 d_0^2$. Il y a seulement 0.16 % de différence entre la force mesurée ici et celle attendue par la théorie.

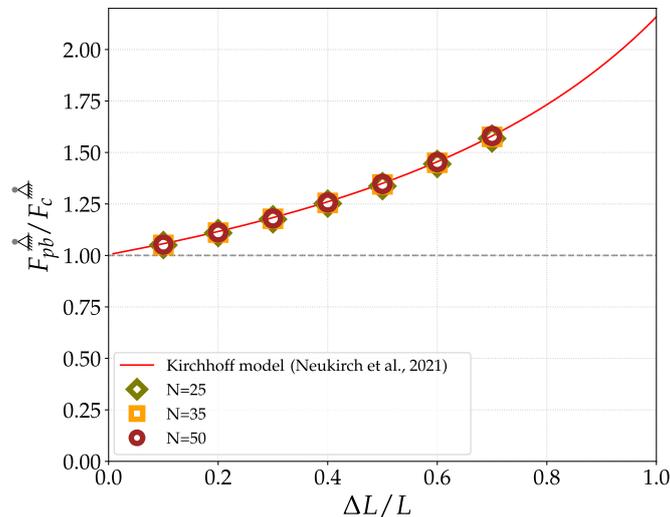


FIGURE III.2.15 : Force de post-flambement fonction du rétrécissement de la poutre. Cas d’une poutre avec une rotation libre aux extrémités (rotule-rotule).

Pour les deux configurations testées, la force de post-flambement rapportée au seuil de flambage est indépendante de la longueur de la chaîne, tout du moins pour N supérieur à 25. De plus nous savons à présent que la fréquence mesurée suit la tendance donnée par la théorie pour $N > 20$. Nous choisissons donc de simuler des éjections de poutres

constituées de 25 masses afin de minimiser le temps de simulation tout en conservant une bonne précision dans les mesures.

III.2.2.3 LES ÉJECTIONS DE POUTRES

À présent que le schéma de simulation a été validé dans un cas dynamique de vibration libre et dans un cas quasi-statique de flambage, nous simulons les éjections de poutres sujettes au flambage dynamique. Chaque éjection simulée nécessite un temps de calcul de l'ordre de la minute.

CINÉMATIQUE DE LA MASSE EN CONTACT AVEC LE LANCEUR

Contrairement au reste de la chaîne dont la cinématique est calculée, nous imposons la cinématique de la première masse de la chaîne, m_1 , qui est la masse au contact avec le lanceur. Son mouvement peut être décrit par la trajectoire d'un oscillateur harmonique à une dimension, d'amplitude A et de fréquence f (ou de pulsation $\omega = 2\pi f$) :

$$\begin{cases} x_1(t) = A [1 - \cos(\omega t)] \\ y_1(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2.12})$$

Dans ce qui suit, nous exprimons chaque vitesse en fonction de la vitesse maximale de cette masse qui vaut $A\omega$.

PROJECTILES HOMOGENES ET TIGES LESTÉES

Nous considérons deux types de projectiles : des projectiles homogènes et des projectiles lestés. Un projectile homogène est constitué de N masses identiques de valeur m_0 . Dans le cas d'un projectile lesté, les masses aux extrémités m_1 et m_N sont ajustables et respectent la condition $m_1 = m_N/2$. Nous nommons tige la portion du projectile constituée uniquement des masses m_0 . La tige d'un projectile lesté possède donc une masse $m_{\text{tige}} = (N - 2) m_0$. Un projectile homogène peut alors être considéré comme une simple tige de masse $m_{\text{tige}} = N m_0$.

Chaque projectile possède une masse m et peut alors être décrit par le rapport entre la masse de sa tige et sa masse totale m_{tige}/m . Nous fixons la valeur $N = 25$ et nous faisons varier m_N entre $5 m_0$ et $4000 m_0$ (tableau III.2.2). Le rapport m_{tige}/m varie ainsi entre 0.004 et 0.754 pour les projectiles lestés et vaut 1 dans le cas des projectiles homogènes. Les masses m_N qui décrivent le mieux le rapport m_{tige}/m des projectiles lestés en expériences donnés dans le tableau III.2.1 sont $m_N = 200 m_0$ et $m_N = 400 m_0$ qui donnent respectivement $m_{\text{tige}}/m = 0.071$ et $m_{\text{tige}}/m = 0.037$.

Du fait de la discrétisation du système, le centre de masse n'est pas forcément porté par une masse de la chaîne. Sa position et sa vitesse sont calculées à chaque pas de temps en fonction des positions et vitesses de chaque atome de la chaîne, pondérées par chaque

masse. La première masse m_1 ayant un mouvement — et une vitesse — imposé, son inertie ne joue aucun rôle dans la dynamique avant éjection, au contraire de m_N . En fixant m_N , nous simulons ainsi indifféremment l'éjection d'une poutre lestée à son extrémité libre ou à ses deux extrémités. La vitesse du centre de masse, par rapport à celle de la première masse, a pour expression générale :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i - \dot{x}_1)}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (\text{III.2.13})$$

m_N/m_0	m_1/m_0	$m_{t\grave{e}ge}/m$
1	1	1
5	2.5	0.754
25	12.5	0.380
100	50	0.133
200	100	0.071
400	200	0.037
1000	500	0.015
4000	2000	0.004

TABLEAU III.2.2 : Tableau regroupant les masses du haut m_N , du bas $m_1 = m_N/2$ et les rapports $m_{t\grave{e}ge}/m$ pour une tige de masse $m_{t\grave{e}ge} = 25 m_0$.

BRISURE DE LA SYMÉTRIE INITIALE

Nous avons à présent les ingrédients nécessaires à la simulation de l'éjection d'une poutre homogène ou lestée. Cependant, si la chaîne est composée de N atomes parfaitement alignés, chaque angle θ_i est nul et par conséquent le potentiel de flexion ϕ^\perp est nul aussi. Dans ce cas, nous ne simulons pas de flambage. Pour observer un flambage, nous devons encore imposer une configuration initiale qui brise la symétrie du système. Voici celles que nous avons choisies :

- une chaîne parfaitement rectiligne, $\theta_i = 0$, pivotée dans le plan (x, y) par rapport à x_1 d'un angle θ_0 dans la gamme $\{0.01, 0.1, 0.25, 1, 2\}^\circ$ (figure III.2.16a),
- une chaîne de courbure uniforme définie au moyen d'un angle θ_i constant dans la gamme $\{0.01, 0.05, 0.2, 1\}^\circ$ (figure III.2.16b).

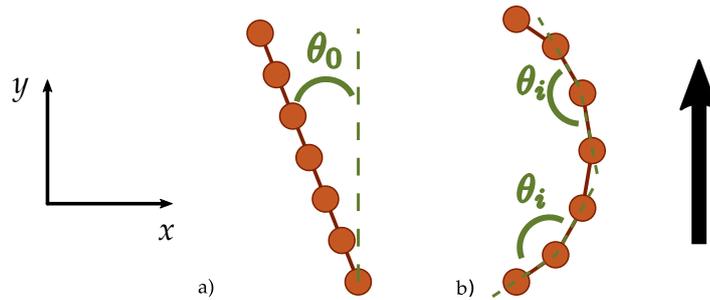


FIGURE III.2.16 : Différentes configurations initiales : a) une poutre rectiligne inclinée d'un angle θ_0 , b) une poutre à courbure constante en imposant θ_i constant. La flèche indique le sens de l'éjection.

PARAMÈTRES DE CONTRÔLE

Outre la configuration initiale, il faut trois paramètres pour caractériser l'efficacité des éjections :

- un rapport de fréquences : f_0/f avec f_0 la fréquence propre d'oscillations libres de la tige seule.
- un rapport de longueurs : A/L
- un rapport de masses : m_{tige}/m

L'ÉJECTION ET LES GRANDEURS PERTINENTES ASSOCIÉES

Le temps d'éjection t_e des projectiles déformables n'est pas connu a priori. Nous nous attendons à ce que ces derniers puissent être éjectés plus tardivement que des projectiles rigides, pour lesquels le temps d'éjection t_e vaut $T/4$ avec $T = 1/f$ la période du lanceur. Par conséquent, nous réalisons les simulations d'éjections sur une demi-période du lanceur $T/2$. Du fait de la déformation du projectile, la vitesse de la masse du bas peut être plus faible que celle du lanceur à l'éjection et ce dernier peut se trouver à nouveau en contact avec le projectile. Ces phases d'éjection-reconnexion pourraient se produire plusieurs fois avant que le projectile ne soit finalement éjecté pour de bon. C'est ce que nous avons appelé *multi-kicks* dans la [partie II](#). Cette condition était alors nécessaire pour que les propriétés des objets considérés tendent, dans le cas des faibles fréquences f , vers celles d'un objet rigide caractérisé par $\alpha = 1$. Nous verrons dans le [chapitre III.3](#) que pour de faibles accélérations et sans prendre en compte les *multi-kicks*, le comportement des projectiles tend vers celui d'un objet rigide ce qui nous permet de suggérer que l'effet des *multi-kicks* est ici négligeable. Nous mesurons la vitesse d'éjection V_e comme le maximum de la vitesse du centre de masse \dot{x} et nous en déduisons le temps d'éjection. Nous avons finalement accès au coefficient de transfert d'énergie $\alpha = \left(\frac{V_e}{A\omega}\right)^2$ pour chaque ensemble $(f_0/f, A/L, m_{tige}/m)$ et une configuration initiale.

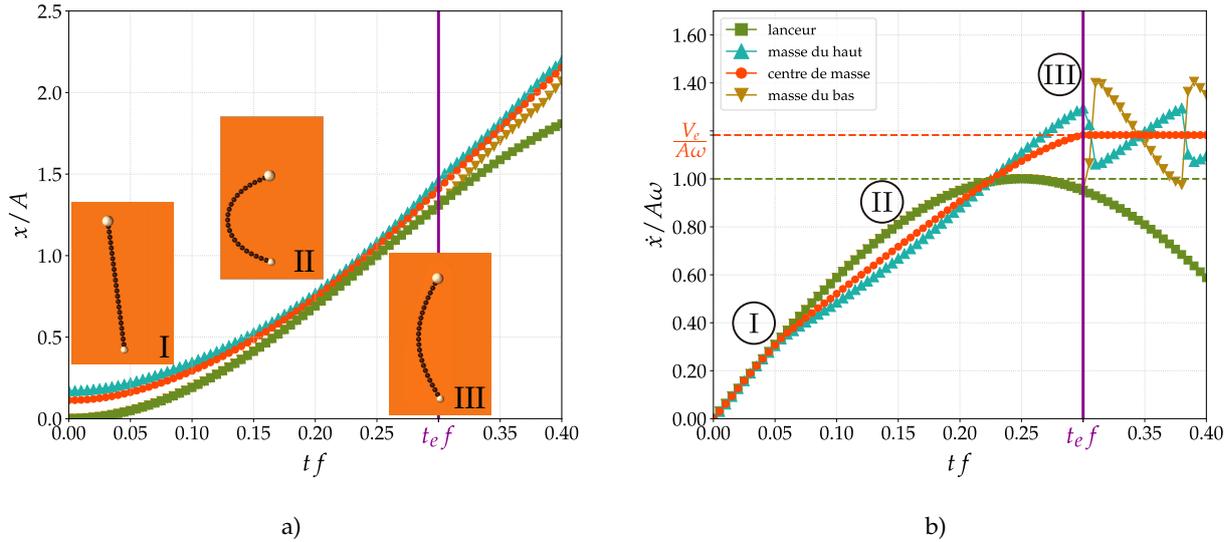


FIGURE III.2.17 : a) Positions du lanceur et des éléments du projectile au cours du temps. Les positions relatives témoignent de la déformation de la poutre dont des représentations apparaissent ici pour trois instants remarquables : I à $t = 0$, II à $0 < t < t_e$ et III à $t = t_e$. Après éjection, le centre de masse possède une trajectoire rectiligne uniforme dans la direction de l'accélération. b) Vitesses du lanceur et des éléments du projectile au cours du temps. Après éjection, le centre de masse possède une vitesse constante V_e et les masses du haut et du bas oscillent en opposition de phase.

Il existe des éjections pour lesquelles des solutions ne sont pas physiques et dans ces cas nous excluons les mesures de α . Ces solutions non physiques se distinguent en trois cas. Le premier cas, illustré en figure III.2.18a, regroupe les éjections pour lesquelles le lanceur dépasse la dernière masse de la chaîne du projectile qui fait alors une boucle. Le deuxième cas, illustré en figure III.2.18b, regroupe les éjections pour lesquelles le projectile subit une déformation locale trop grande. Le dernier cas, illustré en figure III.2.18c, regroupe les éjections pour lesquelles, sous l'effet d'une rotation importante, tout ou partie du projectile est dépassée par le lanceur ce qui n'est pas permis en expériences.

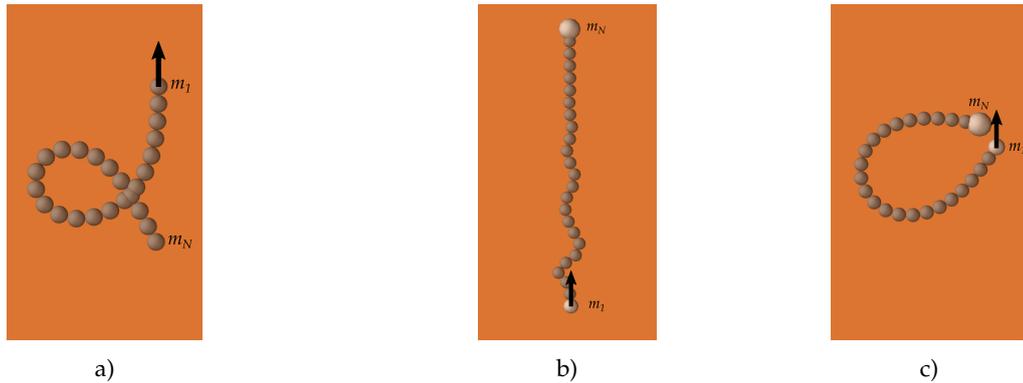


FIGURE III.2.18 : a) Cas d'une trop grande déformation du projectile conduisant au croisement des masses m_1 et m_N avec $m_{tige}/m = 1$, $A/L = 7.08$ et $f_0/f = 4.0$. b) Cas d'un projectile qui subit une déformation locale importante, par exemple sur la quatrième masse avec $m_{tige}/m = 0.037$, $A/L = 1.21$ et $f_0/f = 1.0$. c) Cas d'un projectile qui subit une rotation trop importante avec $m_{tige}/m = 0.037$, $A/L = 5.83$ et $f_0/f = 49.0$

MESURE DU TEMPS DE FLAMBAGE

Soumis à l'accélération du lanceur, le projectile est susceptible de flamber. Le flambage n'est pas instantané et la dynamique de flambement se caractérise par un temps de flambement, que nous notons t_f , qui dépend a priori de la dynamique du lanceur et des propriétés mécaniques du projectile. Nous confrontons deux méthodes de mesure afin de le déterminer à partir des résultats de simulation. La première méthode se base sur la comparaison de la vitesse de la masse du haut du projectile et de celle du lanceur. La deuxième méthode se base sur la définition d'une énergie de flexion critique E_ϕ^c .

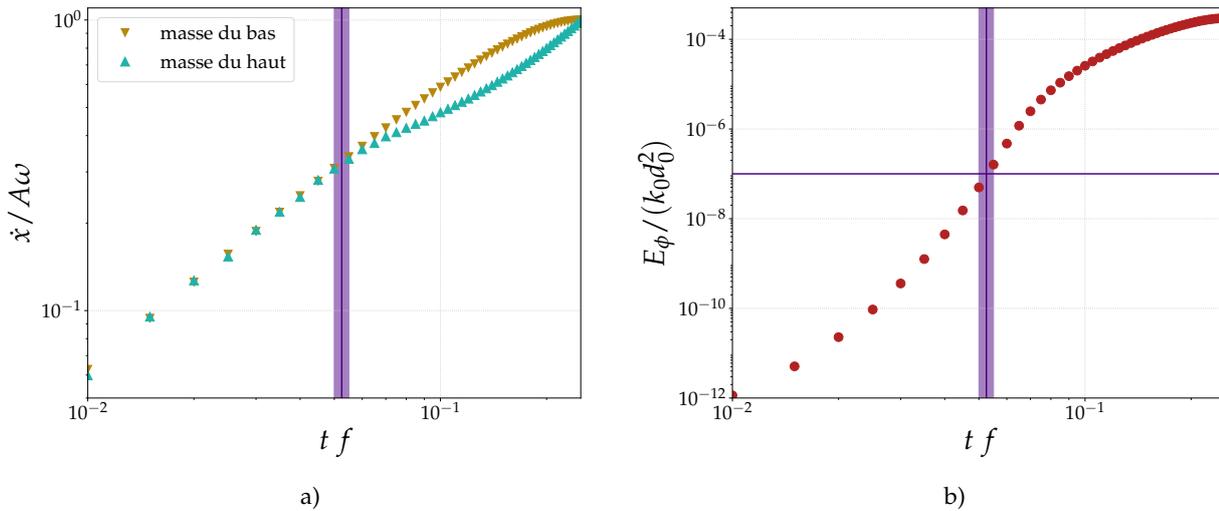


FIGURE III.2.19 : Exemple typique de la caractérisation du temps de flambement t_f pour un projectile lesté. Ici, $f_0/f = 40$, $A/L = 4.17$ et $m_{tige}/m = 0.037$. Les grandeurs sont mesurées au cours du temps adimensionné $t f$ et représentées dans un repère log-log. a) Vitesses des masses m_1 et m_N rapportées à la vitesse maximale du lanceur $A\omega$. La ligne verticale marque le temps auquel les deux vitesses diffèrent d'1 %. b) Énergie de flexion E_ϕ du projectile en unité de $k_0 d_0^2$. La ligne verticale marque le point d'inflexion de la courbe d'énergie. La ligne horizontale symbolise l'énergie seuil de $10^{-7} k_0 d_0^2$. Dans les deux cas, la bande verticale marque l'intervalle de mesure entre les deux points encadrant le temps de flambement.

COMPARAISON DES VITESSES Avant que le projectile ne flambe, il agit comme un objet rigide dont chaque point se déplace à la même vitesse, celle du lanceur. Dès qu'il se met à flamber, la vitesse \dot{x}_N de la masse m_N est plus faible que celle du lanceur c'est-à-dire \dot{x}_1 la vitesse de la masse m_1 . Nous considérons que le projectile flambe si l'écart entre ces deux vitesses excède 1 % comme c'est le cas en [figure III.2.19a](#). Afin de diminuer l'erreur due à la discrétisation des données, nous définissons le temps de flambage t_f comme la moyenne entre le temps auquel nous mesurons l'écart et le temps précédent.

ÉNERGIE DE FLEXION CRITIQUE La deuxième méthode consiste à définir une énergie seuil. Nous représentons en [figure III.2.19b](#) l'énergie de flexion du projectile E_ϕ au cours du temps dans un repère log-log. L'inflexion de la courbe d'énergie correspond à une énergie de flexion de l'ordre de $10^{-7} k_0 d_0^2$ pour toutes les éjections. Les temps associés à cette inflexion

sont en accord avec les temps mesurés en comparant les vitesses.

Nous choisissons de mesurer systématiquement les temps de flambage des projectiles pour chaque éjection au moyen de cette méthode en fixant l'énergie de flexion seuil à $10^{-7} k_0 d_0^2$.

III.2.3 RÉSUMÉ DU CHAPITRE III.2

Nous avons décrit ici les méthodes utilisées pour étudier des éjections de projectiles élançés sous l'accélération d'un lanceur dont la cinématique est imposée. Nous avons présenté deux approches, des expériences d'éjections simples et des simulations numériques pour deux types de projectiles, des projectiles homogènes et des projectiles lestés par une masse à chaque extrémité en respectant un ratio 2 pour 1.

En expériences, nous sondons les deux limites avec deux types de systèmes différents. Le cas homogène $m_{tige}/m = 1$ est traité au moyen de projectiles en PDMS et le cas fortement lesté $m_{tige}/m \ll 1$ avec des tiges en carbone dotées d'un poids à chaque extrémité. Dans chacun des deux cas, les projectiles flambent et présentent des déformations transverses, ce qui est une condition nécessaire pour déterminer si potentiellement un effet superpropulsif intervient dans l'éjection lorsque les paramètres sont variés de façon systématique.

Nous avons simulé les éjections de projectiles élançés au moyen d'un schéma de simulation qui est basé sur la dynamique moléculaire et que nous avons vérifié sur des cas connus de la théorie des poutres. Pour chaque éjection nous pourrions faire varier trois paramètres sans dimension pour différentes configurations initiales : f_0/f qui compare la fréquence propre de la tige sans lest et la fréquence du lanceur, A/L qui compare l'amplitude du lanceur et la longueur du projectile et m_{tige}/m qui compare la masse de la tige sans lest et la masse totale du projectile. L'étude permettra de faire varier ces trois paramètres afin d'arriver à une description fine de la dynamique et la confronter aux résultats expérimentaux.

Nous obtenons des éjections pour lesquelles les projectiles élançés ont pu flamber durant l'accélération par le lanceur et suivent une trajectoire donnée par la direction de l'accélération. Nous caractérisons l'efficacité de chaque éjection au moyen du coefficient de transfert d'énergie α .

III3

RÉSULTATS

III.3.1 LES ÉJECTIONS EN LABORATOIRE

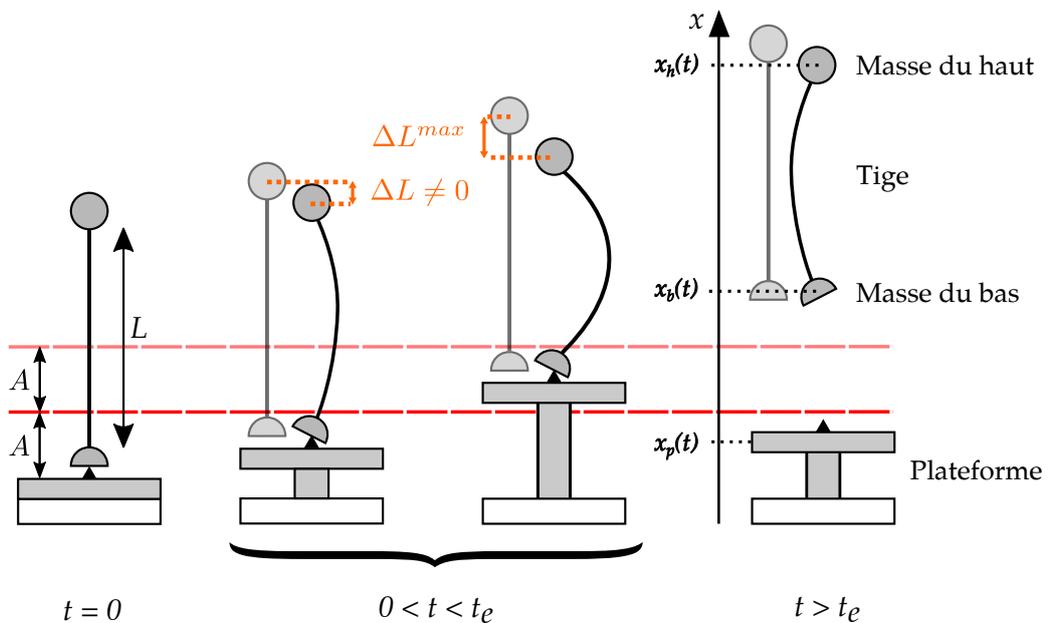


FIGURE III.3.1 : Schéma d'une éjection typique d'un projectile élastique en laboratoire.

III.3.1.1 LE COEFFICIENT DE TRANSFERT D'ÉNERGIE α

Le coefficient de transfert d'énergie est calculé systématiquement comme le carré du rapport entre la vitesse d'éjection V_e et la vitesse maximale V_p^* mesurées toutes deux d'après la méthode décrite en [section III.2.1.3](#). Les résultats obtenus pour les expériences d'éjections de projectiles lestés et de projectiles homogènes sont représentés en [figure III.3.2](#).

La [figure III.3.2a](#) présente les résultats obtenus pour trois projectiles lestés en fonction de A/L varié entre 0.1 et 1.2. Nous mesurons des coefficients de transfert d'énergie α supérieurs à 1, avec une valeur maximale de près de 1.4, indiquant que nous sommes en présence du phénomène de superpropulsion pour des projectiles élastiques élançés. Nous

mesurons aussi des coefficients de transfert d'énergie $\alpha < 1$ ce qui traduit une inefficacité de certaines éjections.

Concentrons nous sur le projectile de longueur $L = 12.3$ cm. Les coefficients de transfert d'énergie α , qui apparaissent en disques turquoise sur la [figure III.3.2a](#), suivent une tendance non monotone. À faibles A/L , soit le projectile ne flambe pas, soit il flambe mais se déforme très peu et dans les deux cas α est proche de 1. Le projectile se comporte alors comme un objet rigide dont le coefficient de transfert d'énergie vaudrait 1. L'écart entre les mesures et la valeur théorique est due au caractère imparfait du dispositif expérimental et des mesures. La libération du support de la plateforme peut s'accompagner de frottements qui entraînent une vitesse d'éjection plus faible qu'attendue. Pour la mesure des vitesses, nous ne considérons que la direction de l'accélération du lanceur. Pour des A/L intermédiaires, le projectile flambe et $\alpha > 1$. Dans ce cas, le coefficient de transfert d'énergie croît avec A/L jusqu'à atteindre un maximum d'environ 1.4 puis décroît. Pour les valeurs de A/L les plus importantes, le projectile subit de grandes déformations qui, lorsqu'elles sont trop importantes, deviennent irréversibles et peuvent conduire à la fracture du projectile. Dans ce régime, $\alpha < 1$ et décroît rapidement avec A/L .

La dépendance de α en l'amplitude A rend compte du caractère non linéaire de ce phénomène. La tendance décrite pour le projectile de longueur $L = 12.3$ cm est partagée par les autres projectiles mais elle est décalée selon l'axe A/L . Pour le projectile le plus long, $L = 19.0$ cm (disques jaunes en [figure III.3.2a](#)), nous ne mesurons que la partie décroissante de la courbe alors que pour le projectile le plus court, $L = 7.7$ cm (disques rouges), nous n'avons accès qu'au régime précédant le maximum.

Nous présentons en [figure III.3.2b](#) les coefficients de transfert d'énergie mesurés lors d'éjections de projectiles homogènes de différentes longueurs qui ont tous flambé durant l'accélération. Les résultats sont globalement compris entre 0.8 et 1 et ils ne suivent pas de tendance particulière contrairement au cas des projectiles lestés. Le flambement ne semble pas être ici un avantage pour une éjection efficace.

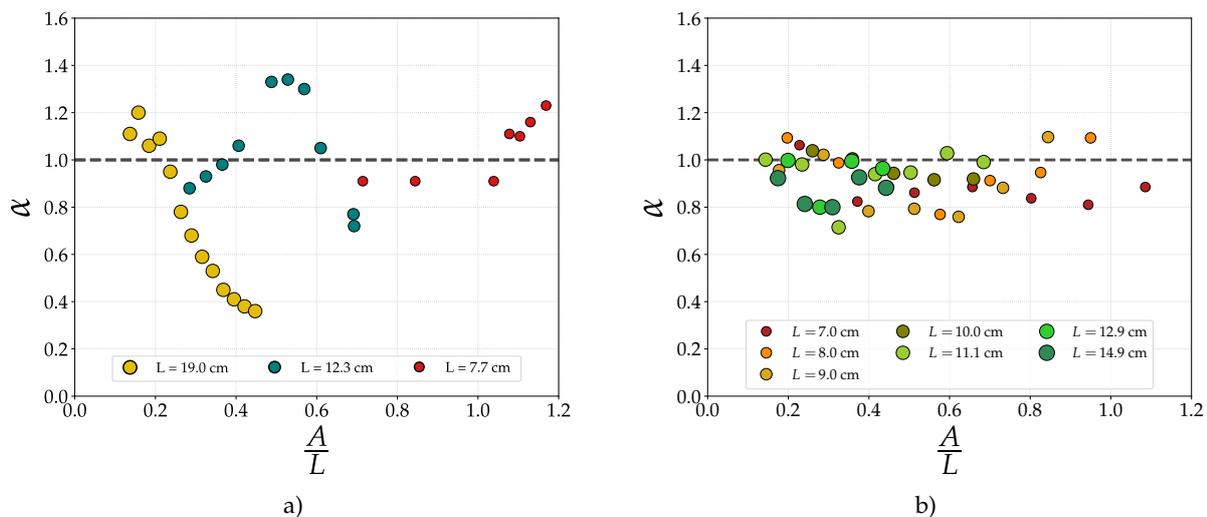


FIGURE III.3.2 : Les coefficients de transfert d'énergie α en fonction de A/L pour a) trois projectiles lestés de longueur 7.7, 12.3 et 19.0 cm et b) chaque projectile homogène de longueur comprise entre 7.0 cm et 14.9 cm.

III.3.1.2 LE FLAMBEMENT DES PROJECTILES LESTÉS

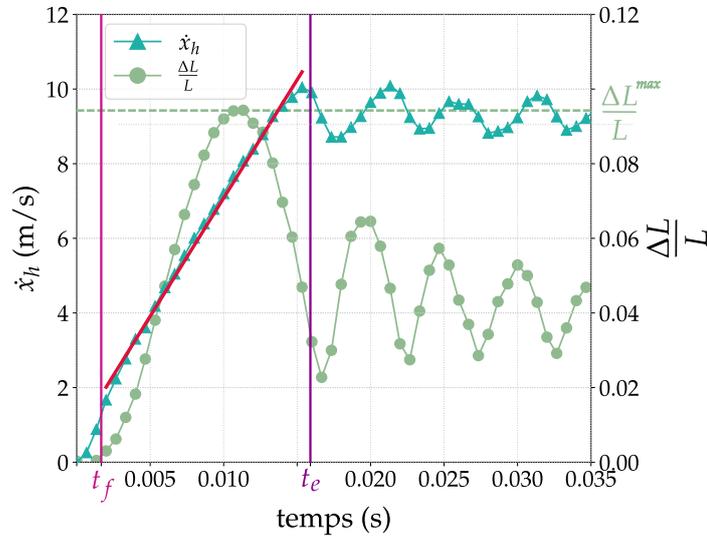


FIGURE III.3.3 : Mesures de la vitesse de la masse du haut \dot{x}_h (triangles bleus) et de la déformation longitudinale ΔL (ronds verts) d'un projectile de longueur $L = 10$ cm pour une amplitude de lanceur $A = 75$ mm. Pour cet exemple, nous mesurons une fréquence d'une valeur $f = 21.3$ Hz et un coefficient de transfert d'énergie $\alpha = 1.32$ qui caractérise une superpropulsion. L'intervalle de temps entre t_f et t_e est marqué par la déformation maximale du projectile $\Delta L^{max}/L$. Sur cet intervalle, la droite rouge représente un ajustement linéaire de \dot{x}_h dont le coefficient de proportionnalité, ici d'une valeur d'environ $650 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, donne accès à la force élastique F_{el} . Pour cette éjection, l'accélération maximale du lanceur vaut environ le double de ce coefficient.

Sachant que le flambement des projectiles lestés permet d'obtenir une superpropulsion, nous nous intéressons à présent à la caractérisation de ce flambement. Nous nous appuyons pour cela sur les positions et les vitesses au cours du temps du lanceur et des différents éléments du projectile : la masse du haut, la masse du bas et le centre de masse du projectile.

Lorsque le projectile flambe, la masse du haut se déplace vers celle du bas et la distance entre les deux masses est réduite d'une quantité ΔL . Cela implique que la masse du haut ait une vitesse plus faible que celle du lanceur. La [figure III.3.3](#) présente un exemple typique de la vitesse \dot{x}_h de la masse du haut et la déformation longitudinale $\Delta L/L$ au cours du temps. Nous pouvons identifier trois phases dans l'évolution de ces grandeurs. La masse du haut se déplace à la même vitesse que le lanceur dans les premiers instants du mouvement et la déformation est nulle. Au temps $t = t_f$, le projectile flambe et $\Delta L/L \neq 0$. Au temps $t > t_e > t_f$, le projectile a été éjecté et il entre en régime d'oscillations libres. Durant la phase intermédiaire, $t_f < t < t_e$, la déformation $\Delta L/L$ augmente au cours du temps, atteint un maximum $\Delta L^{max}/L$ puis diminue. En première approximation, $\dot{x}_h(t_f < t < t_e)$ croît linéairement avec le temps. Nous effectuons pour chaque éjection associée au flambement

du projectile un ajustement linéaire de la vitesse de la masse du haut afin de déterminer son taux de croissance. Ce coefficient nous donne alors l'accélération moyenne de la masse du haut entre le début du flambement et l'éjection. Cette accélération est constante en première approximation et la force qui s'applique sur la masse du haut doit aussi être constante d'après le principe fondamental de la dynamique. Pour chaque projectile, nous définissons une force élastique constante d'après le produit entre cette accélération et la masse m_h . Cette force élastique, que nous notons F_{el} , s'apparente à une force de post-flambement dynamique moyenne.

Nous observons dans les expériences que le mode de déformation des projectiles correspond au mode fondamental d'une poutre doublement articulée comme l'illustre la [figure III.2.5](#). D'après le [tableau I.o.1](#), la longueur de flambage vaut donc la longueur totale du projectile L et nous prenons donc pour référence de la force élastique F_{el} la force seuil d'expression $\pi^2 EI/L^2$ que nous notons F_c . Nous présentons respectivement en [figure III.3.4a](#) et en [figure III.3.4b](#) les déformations maximales $\Delta L^{max}/L$ et les forces adimensionnées F_{el}/F_c en fonction de la grandeur variée pour chaque éjection A/L . Nous observons comme pour les mesures des coefficients de transfert d'énergie que les résultats acquis pour ces deux grandeurs décrivent une tendance dans le cas d'un même projectile mais que l'ensemble des données ne converge pas vers une tendance unique. Finalement, nous représentons en [figure III.3.4c](#) le rapport de forces F_{el}/F_c en fonction de $\Delta L^{max}/L$. Les données expérimentales convergent vers une même tendance qui est en bon accord avec la solution du modèle quasi-statique de Kirchhoff d'après NEUKIRCH et al. (2021) pour les déformations au-delà de 0.10. L'hypothèse d'une force seuil quasi-statique semble raisonnable. Dans le cas des petites déformations et pour les deux projectiles les plus longs ($L = 14.0$ cm et $L = 19.0$ cm) la force axiale mesurée est inférieure à la force seuil de référence. Pour les projectiles plus courts, nous avons peu de données et nous ne pouvons pas en déduire a priori que cet effet soit seulement dû à la taille des projectiles. Pour toutes les éjections, nous mesurons $t_f/t_e < 0.18$ avec une valeur moyenne constante pour chaque projectile en fonction de $\Delta L^{max}/L$. Ceci est en accord avec un flambement quasi-statique des projectiles et justifie que les valeurs de F_{el}/F_c soient en accord avec le modèle de Kirchhoff. En ce qui concerne les valeurs inférieures à 1, l'écart avec le modèle quasi-statique pourrait s'expliquer par les imperfections inhérentes au système expérimental.

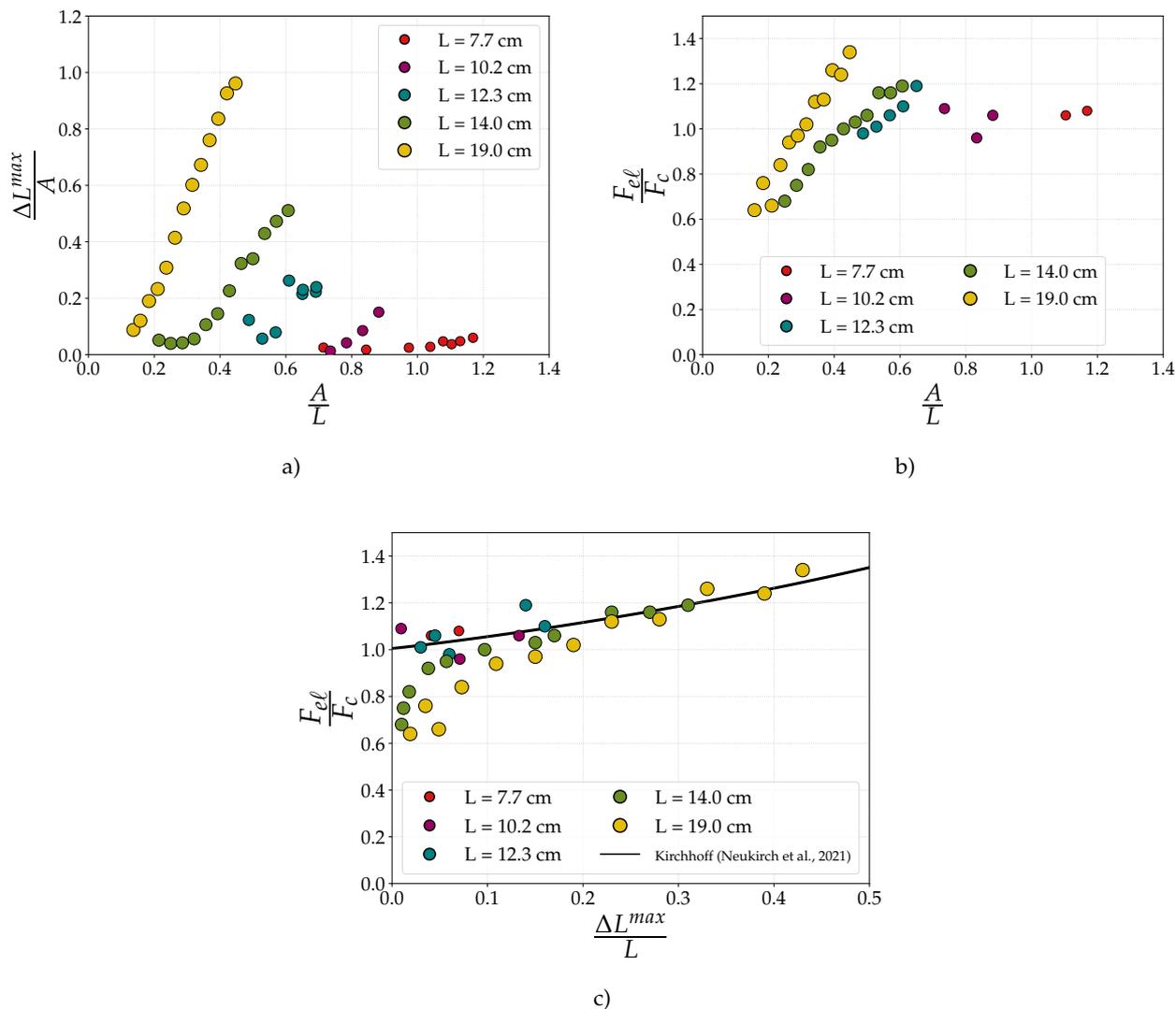


FIGURE III.3.4 : a) Déformations maximales $\Delta L^{max}/A$ et b) rapports des forces élastiques F_{el}/F_c en fonction de l'amplitude adimensionnée A/L pour les différents projectiles. c) Les forces élastiques F_{el}/F_c convergent vers une même tendance en fonction de la déformation maximale. Le modèle de Kirchhoff est en bon accord quantitatif avec les données pour les déformations au-delà de 10 %. En deçà, les forces élastiques sont inférieures à la force seuil.

III.3.2 SIMULATIONS NUMÉRIQUES

III.3.2.1 ÉTUDE SYSTÉMATIQUE

III.3.2.1.1 DEUX CAS LIMITES

Nous présentons ici les résultats obtenus par simulation numérique des éjections de projectiles élançés en variant systématiquement A/L et f_0/f . La configuration initiale est une chaîne de N masses alignées inclinée d'un angle $\theta_0 = 0.25^\circ$ par rapport à la direction d'accélération du lanceur. Nous choisissons de nous appuyer sur deux cas limites : un projectile homogène constitué de N masses identiques m_0 caractérisé par $m_{tige}/m = 1$ et un projectile lesté constitué de $N - 2$ masses identiques m_0 et d'une masse différente à chaque extrémité : $m_1 = 200 m_0$ et $m_N = 400 m_0$ pour lequel le rapport m_{tige}/m vaut 0.037.

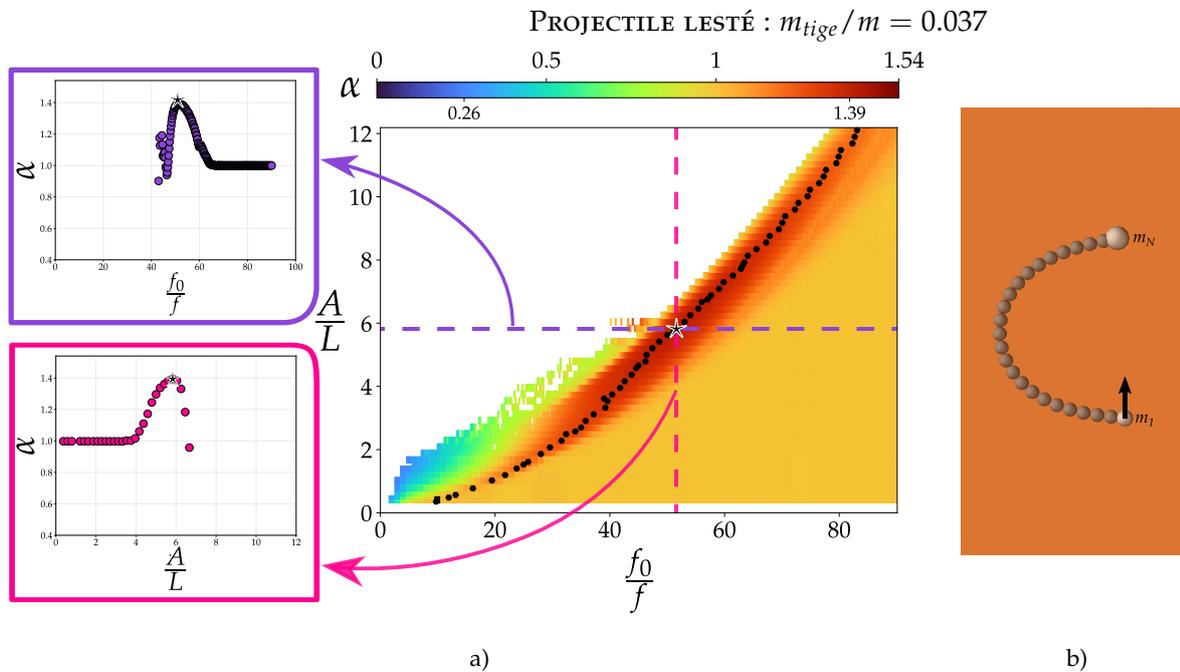


FIGURE III.3.5 : a) Le coefficient de transfert d'énergie α en fonction des deux paramètres sans dimension A/L et f_0/f en gradient de couleurs pour un projectile lesté avec $m_{tige}/m = 0.037$. Les deux figures de gauche présentent les mesures de α obtenues le long des lignes pointillées dans un cas à f_0/f fixé et dans l'autre à A/L fixé. b) Illustration du mode de déformation du projectile lorsque sa déformation est maximale durant l'éjection conduisant à l'optimum.

La figure III.3.5a présente les coefficients de transfert d'énergie α obtenus pour le projectile lesté. La figure de droite rassemble toutes les mesures obtenues dans l'espace $(f_0/f, A/L)$. Nous observons un comportement complexe en fonction de ces deux paramètres sans dimension avec différentes régions bien identifiables. Pour capturer l'essence de ce comportement, nous avons réalisé des coupes de cette figure le long des lignes pointillées passant toutes deux par l'optimum. Nous représentons les coefficients de transfert d'énergie en fonction A/L et f_0/f respectivement en figure du haut et en figure du bas.

Sur la figure du bas, nous observons qu'à faible A/L , α est constant et vaut 1. Le projectile ne flambe pas et adopte le comportement d'un objet rigide. Pour des A/L plus importants, $\alpha > 1$ et atteint un maximum qui vaut dans ce cas environ 1.4. Ce comportement du coefficient de transfert d'énergie s'accompagne du flambement du projectile. Pour des A/L encore plus grands, nous observons une redescente avant d'obtenir des solutions non physiques pour lesquels nous ne mesurons plus α . Ces solutions non physiques ont été discutées en [section III.2.2.3](#).

La figure du haut présente un comportement similaire en fonction de f_0/f . À fréquence du lanceur f constante, de grandes valeurs de f_0/f impliquent un projectile rigide. Nous mesurons dans ce cas des valeurs de α égales à 1. Plus f_0/f diminue, plus le projectile devient déformable et nous mesurons des coefficients de transfert d'énergie plus grands que 1. Finalement, pour de faibles valeurs de f_0/f nous retrouvons le même comportement qu'à forts A/L et nous ne mesurons pas α .

Ces différents comportements se retrouvent sur la figure en 2D. Nous observons une large région en bas à droite où $\alpha = 1$ caractérisée par un comportement de projectile rigide. Nous observons aussi une large région blanche en haut à gauche pour laquelle nous ne mesurons rien. Entre ces deux régions, nous mesurons des coefficients de transfert d'énergie supérieurs à 1. Pour chaque valeur de A/L , il existe une valeur maximale de α symbolisée par un point noir sur la [figure III.3.5a](#). Tous ces maxima s'alignent sur une crête dont l'optimum, symbolisé par une étoile, culmine à 1.394 ± 0.001 . Il est atteint pour $A/L = 5.83$ et $f_0/f = 51.6$.

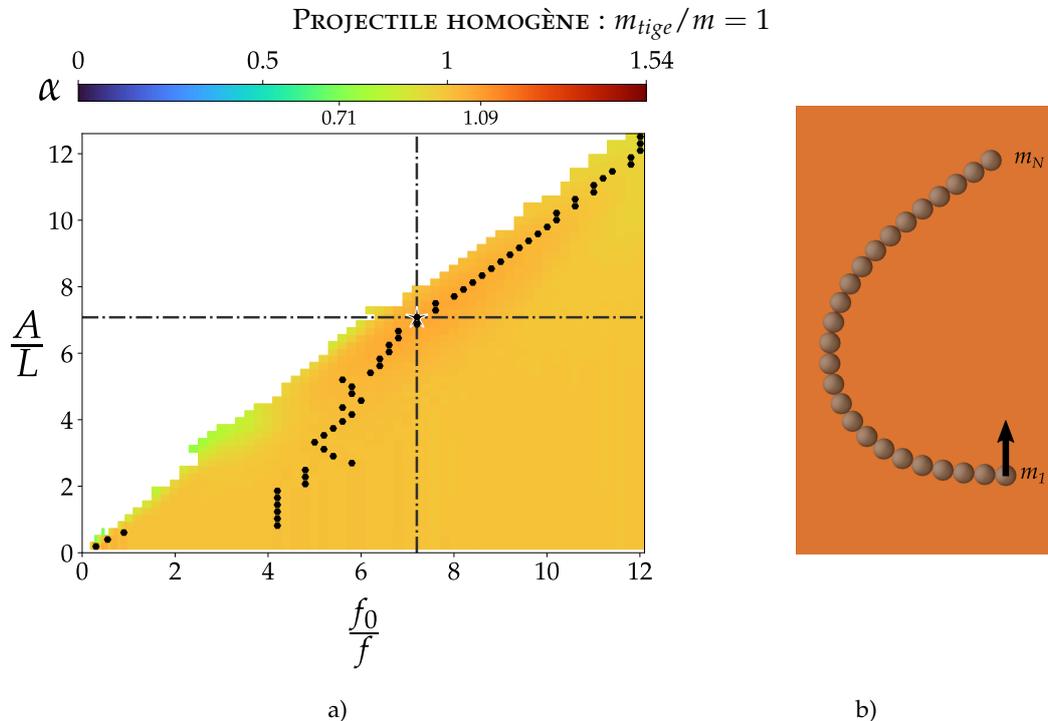


FIGURE III.3.6 : a) À gauche, α en fonction des deux paramètres sans dimension A/L et f_0/f en gradient de couleurs pour un projectile homogène ($m_{tige}/m = 1$). b) Illustration du mode de déformation du projectile lorsque sa déformation est maximale durant l'éjection conduisant à l'optimum.

La figure III.3.6a présente les coefficients de transfert d'énergie α obtenus pour le projectile homogène. Nous retrouvons les mêmes comportements que le projectile lesté mais la région intermédiaire avec des coefficients de transfert d'énergie supérieurs à 1 est peu marquée. L'optimum de 1.067 ± 0.001 est atteint pour $A/L = 7.08$ et $f_0/f = 7.2$. Du point de vue de l'efficacité des éjections, un projectile homogène se comporte globalement comme un projectile rigide et ce malgré des déformations qui peuvent être importantes. Pour ce type de projectile, il n'y a pas ou très peu d'effet superpropulsif.

III.3.2.1.2 EFFET DU PARAMÈTRE m_{tige}/m

Nous avons présenté les résultats obtenus pour deux cas limites et observé un comportement complexe en fonction de deux paramètres de contrôle A/L et f_0/f . Nous nous intéressons à présent à l'effet de m_{tige}/m qui est un paramètre compris entre 0 (projectile fortement lesté) et 1 (projectile homogène).

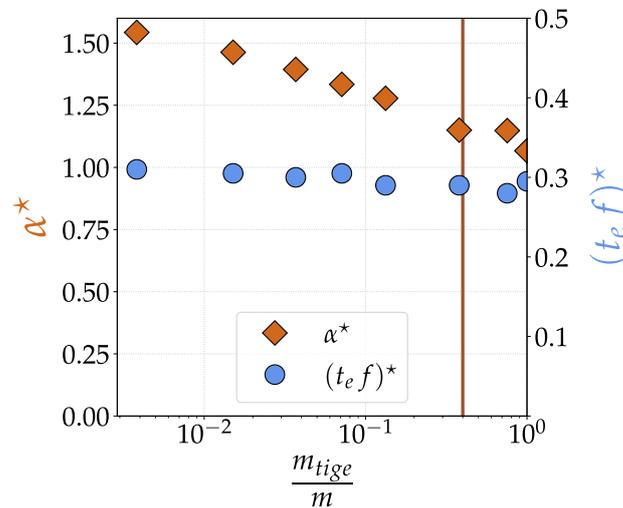


FIGURE III.3.7 : Les coefficients de transfert d'énergie optimaux α^* mesurés pour chaque valeur de m_{tige}/m utilisée et les temps d'éjections sans dimension associés $(t_e f)^*$. La ligne verticale marque la valeur de $m_{tige}/m = 0.4$ pour laquelle la masse de la tige vaut $2/3$ de la masse des lests. L'abscisse est en échelle logarithmique pour une meilleure visualisation des résultats à faibles m_{tige}/m .

Nous étudions les caractéristiques de l'éjection en fonction du rapport m_{tige}/m . Pour un projectile donné, nous avons vu que les maxima de α s'alignent sur une crête présentant un optimum. Nous utilisons dans ce qui suit la notation \star pour les différentes grandeurs associées à cet optimum. La figure III.3.7 présente les coefficients de transfert d'énergie optimaux α^* et les temps d'éjection adimensionnés associés $(t_e f)^*$. Un projectile homogène ($m_{tige}/m = 1$) possède un coefficient de transfert d'énergie optimal α^* valant 1.07. La valeur maximale mesurée pour la valeur la plus faible $m_{tige}/m = 0.004$ vaut 1.54. Entre ces deux valeurs, nous observons une tendance monotone décroissante de α^* en fonction du rapport m_{tige}/m . Lester un projectile élané permet donc d'obtenir des éjections plus efficaces et d'autant plus efficaces que le lest est important.

Le temps d'éjection optimal $(t_e f)^*$ semble quant à lui être indépendant de la valeur du lest et vaut en moyenne 0.301 ± 0.003 . Cette valeur est légèrement plus élevée que celle obtenue avec un projectile rigide, qui est de 0.25. Ceci indique que la dynamique de déformation qui conduit à un transfert d'énergie efficace s'accompagne d'un retard à l'éjection du projectile.

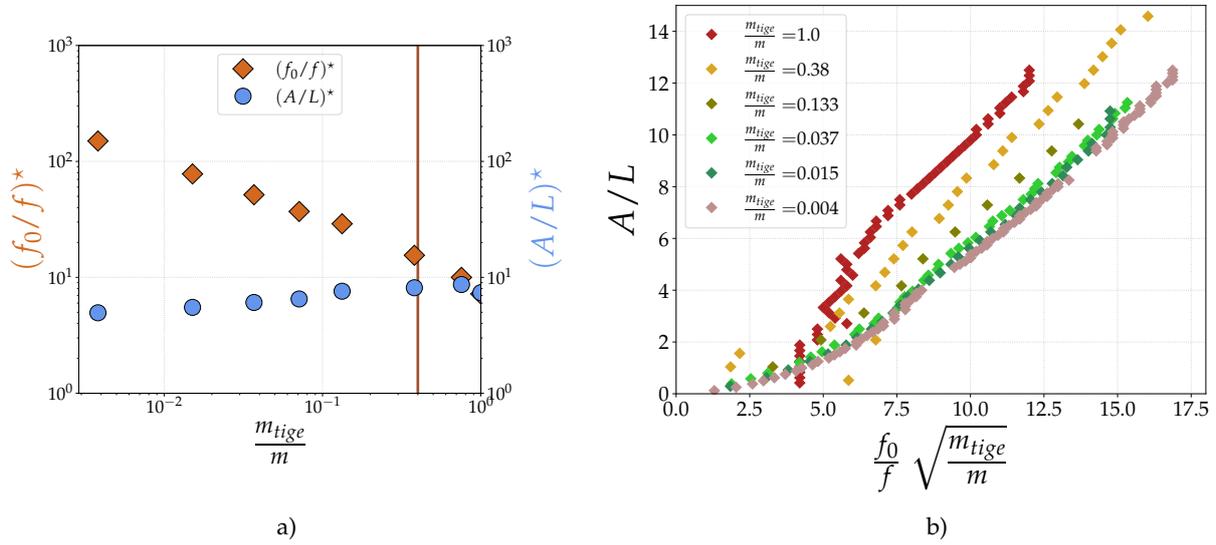


FIGURE III.3.8 : a) Dépendance de $(A/L)^*$ et $(f_0/f)^*$ en m_{tige}/m . b) Représentation des crêtes dans l'espace $(A/L, f_0/f \sqrt{m_{tige}/m})$.

Nous avons vu précédemment que l'optimum n'était pas atteint pour les mêmes valeurs de A/L et f_0/f pour les deux cas limites, projectile homogène ou lesté. Nous représentons en [figure III.3.8a](#) les valeurs de ces grandeurs associées à l'éjection optimale pour chaque rapport m_{tige}/m . Le rapport optimal $(A/L)^*$ dépend faiblement de m_{tige}/m . Quantitativement, $(A/L)^*$ croît en puissance 0.13 ± 0.01 tant que $m_{tige}/m < 0.4$. En revanche, le rapport $(f_0/f)^*$ dépend plus fortement de m_{tige}/m et décroît en puissance -0.48 ± 0.01 . En première approximation, nous pouvons considérer que α^* est atteint pour une valeur $(A/L)^*$ indépendante de m_{tige}/m et un rapport de fréquences $(f_0/f)^*$ suivant une décroissance en puissance $-1/2$.

Nous cherchons à caractériser le comportement général complexe du coefficient de transfert d'énergie qui dépend de trois paramètres de contrôle A/L , f_0/f et m_{tige}/m et pas seulement l'optimum. Nous choisissons dans un premier temps de nous intéresser aux crêtes obtenues pour chaque valeur de m_{tige}/m dans l'espace $(f_0/f, A/L)$. Nous représentons en [figure III.3.8b](#) chacune de ces crêtes en fonction de deux paramètres $f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}$ et A/L . Le redimensionnement de l'abscisse a pour effet de regrouper les crêtes en un faisceau de courbes. Celles obtenues pour les projectiles fortement lestés ($m_{tige}/m < 0.13$) semblent converger vers une tendance limite qui semble évoluer de manière quadratique. Dans cette limite, A/L semble proportionnel à $f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}$. Le paramètre $(A/L)^{-1} (f_0/f)^2 m_{tige}/m$ est alors constant lorsque $m_{tige}/m \rightarrow 0$ et prend une valeur d'environ 20 pour les éjections optimales avec $m_{tige}/m = 0.004$ (voir [chapitre III.4](#)).

III.3.2.2 LA DYNAMIQUE DE FLAMBEMENT

Nous avons vu précédemment que la déformation du projectile détermine l'efficacité d'une éjection. Dans cette section, nous nous intéressons plus en détail à la dynamique de flambage et notamment au temps d'apparition de ce phénomène. Nous nous intéressons pour cela aux deux cas limites présentés en [section III.3.2.1.1](#) : un projectile homogène et un projectile lesté pour $m_{tige}/m = 0.037$.

III.3.2.2.1 DEUX CAS LIMITES

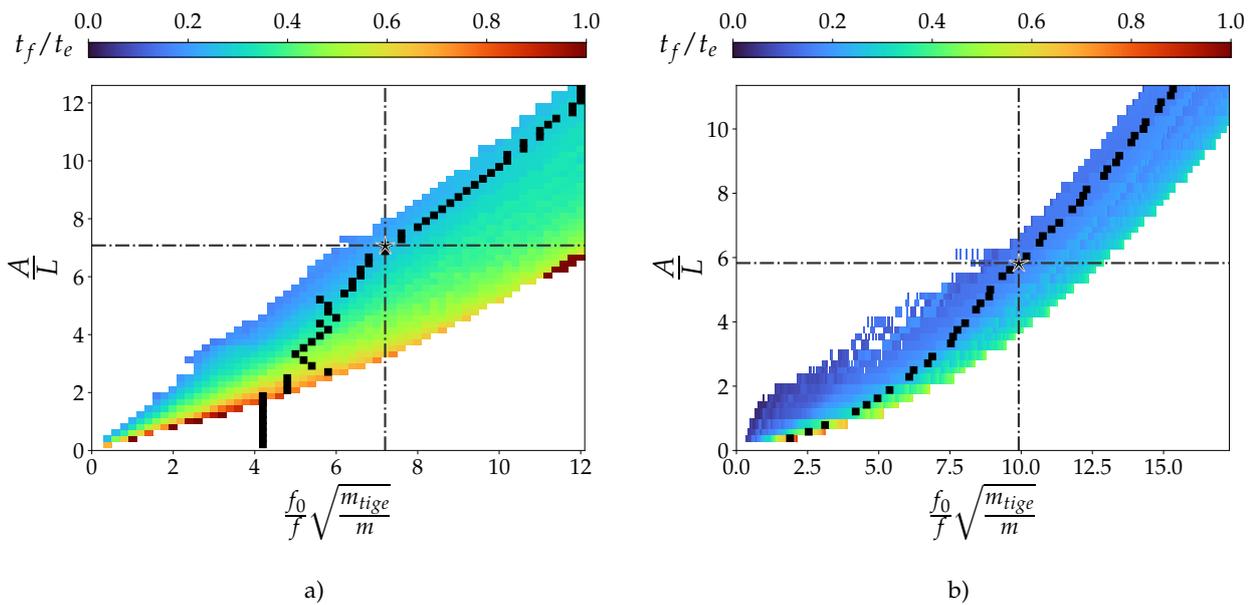


FIGURE III.3.9 : a) t_f/t_e pour un projectile homogène b) t_f/t_e pour un projectile lesté pour $m_{tige}/m = 0.037$. Les maxima à A/L donné sont représentés par des carrés noirs et l'optimum pour un lest donné est représenté par une étoile comme précédemment.

Nous comparons dans les deux cas limites deux temps caractéristiques : le temps de flambage t_f , que nous avons mesuré pour chaque éjection grâce à la méthode exposée en [section III.2.2.3](#), et le temps d'éjection t_e . Nous représentons le rapport t_f/t_e dans l'espace $(A/L, f_0/f \sqrt{m_{tige}/m})$ en [figure III.3.9](#).

En [figures III.3.9a](#) et [III.3.9b](#), nous pouvons voir que les mesures sont restreintes à une bande étroite dans cet espace 2D, encadrée par deux régions vides de mesures. L'une des deux, en haut à gauche de la figure, est comme précédemment caractérisée par l'absence de mesure de α car le projectile prend une dynamique non physique ([section III.2.2.3](#)). La deuxième, en bas à droite, correspond au cas des projectiles qui ne flambent pas et donc pour laquelle t_f n'est pas défini.

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas du projectile lesté. Les mesures de t_f/t_e sont majoritairement comprises entre 0.12 et 0.29. Nous avons observé en [figure III.3.5](#) que les éjections les plus efficaces, qui suivent les crêtes décrites par les points noirs, sont obtenues pour des projectiles qui flambent selon un mode semblable au mode fondamental d'une poutre doublement articulée. L'éjection optimale est obtenue pour $t_f/t_e = 0.158$, ce

qui signifie que le projectile flambe tôt et que la dynamique d'éjection peut effectivement être influencée par la dynamique des déformations transverses. Pour les faibles amplitudes, $A/L < 3.5$, les éjections les plus efficaces sont obtenues pour des rapports de temps $t_f/t_e > 0.2$. À gauche de la crête, nous mesurons des rapports t_f/t_e de valeur équivalente à celle obtenue à l'optimum. Dans cette région, les éjections sont moins efficaces avec des coefficients de transfert d'énergie pouvant être inférieurs à 1 et les projectiles se déforment selon des modes de longueurs d'onde inférieures. Pour de faibles $f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}$, le projectile se déforme rapidement après la mise en mouvement du lanceur et $t_f/t_e \ll 1$. Nous comprenons à présent pourquoi ces solutions ne sont pas physiques. Soit la déformation est très importante et le projectile subit une rotation ayant pour conséquence le dépassement de tout ou partie de celui-ci par le lanceur, soit le projectile est trop "mou" et la chaîne se déstabilise localement jusqu'à rompre. La limite droite, avec la région de non flambement, est marquée par une augmentation brutale de t_f/t_e . Le temps nécessaire à l'établissement d'un régime de flambement du projectile devient comparable au temps de sollicitation par le lanceur avant l'éjection. Le comportement du projectile tend alors vers celui d'un objet rigide éjecté avec un coefficient de transfert d'énergie $\alpha = 1$.

Pour un projectile homogène, nous retrouvons globalement le même comportement que dans le cas lesté. La principale différence réside dans la valeur du rapport t_f/t_e . Les mesures sont comprises dans la majorité des cas entre 0.15 et 0.70 et la plupart sont supérieures à 0.30. Les meilleures éjections, qui rappelons-le sont caractérisées par des coefficients de transfert d'énergie qui restent proches de 1, se produisent lorsque t_f/t_e est compris entre 0.25 et 0.30, toujours pour des projectiles qui flambent selon le mode fondamental d'une poutre doublement articulée. Pour ces éjections, une fraction non négligeable de la durée de l'accélération, près de deux fois supérieure à celle dans le cas lesté, est donc nécessaire au flambement du projectile.

Si t_f/t_e n'est pas négligeable, bien que le projectile ne soit pas rigide, le mode de flambement n'a pas le temps de s'installer et l'effet superpropulsif est assez faible. Ceci explique les grandes différences de α entre les projectiles homogènes et les projectiles lestés. Le flambement de ces derniers est facilité par la présence du lest et t_f/t_e est dans la plupart des cas bien inférieur à 1. Les projectiles homogènes prennent plus de temps pour flamber et $\alpha \simeq 1$ dans la majorité des cas. De plus, les projectiles flambent en moyenne assez tard pour des faibles rapports A/L ce qui explique que l'optimum ne se situe pas dans une région pour laquelle $A/L \rightarrow 0$.

III.3.2.2 ANALYSE LINÉAIRE DE STABILITÉ

La déformation du projectile et le temps de flambage t_f répondent à l'équation de dynamique des poutres donnée par l'équation (I.o.3). Considérons ici que l'accélération du lanceur soit constante pour faire les calculs dans la limite $t_f f \ll 1$. Le temps d'éjection t_e étant de l'ordre de $1/f$, cette hypothèse est raisonnable pour les projectiles lestés et elle est d'autant plus vraie que le lest est important. Elle est notamment très bonne le long de la crête des α maximaux. Pour les projectiles homogènes en revanche, elle est probablement plus

discutable. Cette hypothèse implique que la force longitudinale de sollicitation P dépende uniquement de la position x le long de la poutre et l'équation (I.o.3) se réécrit alors :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} = 0. \quad (\text{III.3.14})$$

Cette équation étant à coefficients constants, nous pouvons considérer que les variables temporelle et spatiale sont indépendantes. Nous cherchons des solutions instables à l'équation (III.3.14) de la forme $\xi = \xi_0 e^{(iqx + \sigma t)}$ avec ξ_0 l'amplitude d'une perturbation sur le déplacement latéral, q le nombre d'onde et σ le taux de croissance de l'instabilité. La force longitudinale due à l'accélération initiale du lanceur, $A\omega^2$, et qui s'applique en x , est donnée par $P(x) = m(x)A\omega^2$ avec $m(x)$ la masse de la tige entre x et L . Cette masse a pour expression

$$m(x) = (L - x)m_{\text{tige}}/L + m_N, \quad (\text{III.3.15})$$

et la force longitudinale s'écrit :

$$P(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) m_{\text{tige}} + m_N \right] A\omega^2. \quad (\text{III.3.16})$$

Si la force longitudinale dépend de x , alors des termes complexes subsistent dans l'équation différentielle issue de l'équation (III.3.14). Pour simplifier l'analyse et éviter les termes oscillants, nous choisissons une approche à l'ordre 0 qui consiste à faire la moyenne de cette force entre $x = 0$ et $x = L$. Nous obtenons alors une force constante donnée par $P_0 = (m_N + \frac{1}{2}m_{\text{tige}}) A\omega^2$. Dans le cas où $m_{\text{tige}}/m = 1$ (ou $m_N = 0$), cela revient à dire que nous faisons l'hypothèse qu'en moyenne seule la moitié de la tige du côté du lest est sollicitée. Dans le cas où $m_{\text{tige}}/m \rightarrow 0$, les termes en m_{tige} sont négligeables et l'expression reste exacte. L'équation (III.3.14) peut alors être simplifiée comme suit :

$$\mu\sigma^2 - q^2 P_0 + q^4 EI = 0. \quad (\text{III.3.17})$$

S'établit alors une relation entre σ et q :

$$\sigma^2 = \frac{P_0}{\mu} q^2 - \frac{EI}{\mu} q^4 \quad (\text{III.3.18})$$

qui, après avoir identifié la fréquence propre f_0 du mode fondamental d'une poutre homogène en oscillations libres (équation (I.o.5)), se réécrit :

$$\sigma^2 = \frac{4L^2 q^2}{\beta_0^4} \left[P_0 \frac{L^2}{\pi^2 EI} - \frac{L^2}{\pi^2} q^2 \right] f_0^2. \quad (\text{III.3.19})$$

Pour rappel, β_0 est une constante liée au mode fondamental et vaut 1.5056 dans le cas d'oscillations libres. Nous identifions ici la force d'Euler $F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ définie pour un flambement quasi-statique selon le mode fondamental d'une poutre dans la configuration doublement articulée.

Le mode fondamental de la tige est associé à un nombre d'onde $q_L = \pi/L$. Pour se dévelop-

per, tous les modes de déformation transverses supérieurs au fondamental doivent ainsi vérifier $q \geq q_L$. Nous adoptons deux nouvelles notations :

- le rapport de forces $\tilde{P} = \frac{F_c}{P_0}$
- le rapport de nombres d'onde $\tilde{q} = \frac{q}{q_L}$.

L'équation (III.3.19) se réécrit plus simplement comme suit :

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2}{\beta_0^4} \tilde{q}^2 \left[\frac{1}{\tilde{P}} - \tilde{q}^2 \right] f_0^2. \quad (\text{III.3.20})$$

Lors des éjections de projectiles élançés présentés ici, la dynamique de flambage guide l'efficacité du lancer. Ce que nous observons, c'est que le mode de déformation associé aux meilleures éjections ($\alpha > 1$) est le mode fondamental pour lequel $\tilde{q} = 1$. Or, ce mode n'est pas nécessairement celui qui va croître le plus rapidement.

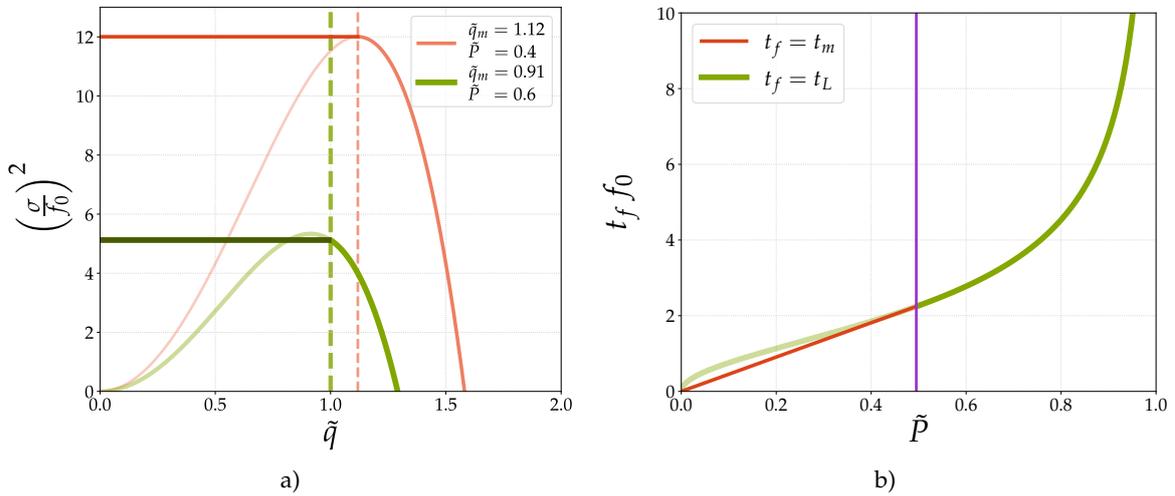


FIGURE III.3.10 : a) $(\sigma/f_0)^2$ en fonction de \tilde{q} dans le cas $\tilde{q}_m > 1$ (ou $\tilde{P} < 1/2$) (ligne orange fine) et dans le cas $\tilde{q}_m < 1$ (ou $\tilde{P} > 1/2$) (ligne verte épaisse). Dans chaque cas, la ligne pointillée marque la valeur de \tilde{q} qui donne la valeur de $(\sigma/f_0)^2$ du mode de croissance le plus rapide. Dans le cas $\tilde{q}_m > 1$, cette valeur est directement donnée par \tilde{q}_m alors que dans le deuxième cas \tilde{q} ne peut pas être inférieur à 1. b) $t_f f_0$ en fonction du rapport de forces \tilde{P} . Le cas linéaire (ligne orange fine) défini pour $\tilde{q}_m > 1$ est atteint en premier pour $\tilde{P} < 1/2$. La ligne continue représente le temps de croissance du mode fondamental $\tilde{q}_m > 1$ qui diverge lorsque $\tilde{P} \rightarrow 1$. La ligne verticale en $\tilde{P} = 1/2$ marque la limite entre les deux régimes et correspond à $\tilde{q}_m = 1$.

MODE DE CROISSANCE LE PLUS RAPIDE : CAS 1

L'objectif de cette analyse est d'identifier les conditions d'émergence d'un flambement et les modes de déformations associés. Nous cherchons à déterminer le mode de croissance le plus rapide. D'après l'équation (III.3.20), σ^2 est maximal pour $\tilde{q}_m = \sqrt{\frac{1}{2\tilde{P}}}$. Ainsi, $\forall \tilde{q}$, le mode

dont la croissance est la plus rapide est directement donné par $\tilde{q} = \tilde{q}_m$. L'équation (III.3.20) devient alors :

$$\sigma_m^2 = \frac{\pi^2}{\beta_0^4 \tilde{P}^2} f_0^2. \quad (\text{III.3.21})$$

Le temps de flambage associé $t_m = 2\pi/\sigma_m$ s'écrit :

$$t_m = 2\beta_0^2 \tilde{P} f_0^{-1}. \quad (\text{III.3.22})$$

La condition $\tilde{q} \geq 1$ devant être vérifiée pour toute valeur de \tilde{q} , il en va de même pour \tilde{q}_m . Cette condition implique que l'équation (III.3.21) soit valable uniquement pour $\tilde{P} < 1/2$. Sur cet intervalle, le temps de flambage est proportionnel au rapport \tilde{P} . Les courbes associées aux équations (III.3.21) et (III.3.22) sont présentées en figure III.3.10.

MODE DE CROISSANCE LE PLUS RAPIDE : CAS 2

Nous observons en figure III.3.10 que pour $\tilde{P} > 1/2$, le mode qui croît le plus rapidement est associé à une valeur $\tilde{q} = 1$ qui correspond au mode fondamental de la poutre. L'équation (III.3.20) se simplifie en :

$$\sigma_L^2 = \frac{4\pi^2}{\beta_0^4} \left[\frac{1}{\tilde{P}} - 1 \right] f_0^2. \quad (\text{III.3.23})$$

Le temps caractéristique t_L associé s'écrit comme suit :

$$t_L = \beta_0^2 \sqrt{\frac{\tilde{P}}{1 - \tilde{P}}} f_0^{-1}. \quad (\text{III.3.24})$$

D'après les équations (III.3.23) et (III.3.24), $t_L \rightarrow \infty$ lorsque $\tilde{P} \rightarrow 1$.

D'après la figure III.3.10b dans le cas $\tilde{P} < 1/2$, considérer le mode de croissance le plus rapide ou le mode fondamental ne fait pas varier significativement $t_f f_0$. Les meilleurs éjections, celles dont les coefficients de transfert d'énergie α se trouvent le long des crêtes en figure III.3.8, sont obtenues uniquement pour le mode fondamental.

COMPARAISON ENTRE SIMULATION ET ANALYSE

Notons que les équations (III.3.22) et (III.3.24) sont a priori valables pour toute valeur constante P_0 , notamment pour la valeur $P_0 = (m_N + \frac{1}{2}m_{tige}) A\omega^2$ donnée précédemment. L'expression du rapport \tilde{P} devient alors .

$$\tilde{P} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L^2}}{(m_N + \frac{1}{2}m_{tige}) A\omega^2} \quad (\text{III.3.25})$$

D'après les expressions de fréquences propres données par les équations (III.2.9) et (III.2.10), l'équation (III.3.25) se réécrit en fonction des paramètres de contrôle des simulations A/L , f_0/f et m_{tige}/m de la manière suivante :

$$\tilde{P} = \frac{1}{\pi^2 \beta_0^4} \left(\frac{A}{L} \right)^{-1} \left(\frac{f_0}{f} \right)^2 \frac{3}{2 \left(\frac{m_{tige}}{m} \right)^{-1} - \frac{1}{2}}. \quad (\text{III.3.26})$$

La figure III.3.11 présente les mesures des temps de flambage pour chaque simulation d'éjection pour différents lests m_N considérés ainsi que la solution issue de l'analyse de stabilité linéaire. Concernant les simulations, une couleur code pour une valeur de lest et chaque point correspond à une éjection, soit un triplet $(A/L, f_0/f, m_{tige}/m)$. Pour chaque valeur de m_N , les mesures de $t_f f_0$ sont remarquablement rassemblées sur une même tendance, ce qui confirme l'approche précédente et le dimensionnement de \tilde{P} en $(A/L)^{-1} (f_0/f)^2$. Pour des lests importants, $m_{tige}/m \leq 0.133$, nous distinguons deux régimes. À faibles \tilde{P} , les mesures s'alignent sur une droite et pour $\tilde{P} \rightarrow 1$, elles croissent rapidement. Ce comportement est en accord qualitatif et quantitatif avec la solution au modèle analytique. Pour de faibles lests, $m_{tige}/m \geq 0.133$, les projectiles flambent plus rapidement que ce qui est prévu par le modèle et le dimensionnement en m_{tige}/m . Lorsque m_{tige} n'est plus négligeable devant m_N , moyenner la masse $m(x)$ entre $x = 0$ et $x = L$ donne le bon ordre de grandeur. Cependant, nous voyons que le préfacteur n'est pas celui qui permet de ramener tous les résultats sur une même tendance. Nous touchons ici la limite de validité de cette simplification. De plus, nous n'observons pas de divergence comme pour les projectiles fortement lestés mais nous n'avons pas de mesures des temps de flambage dans cette limite.

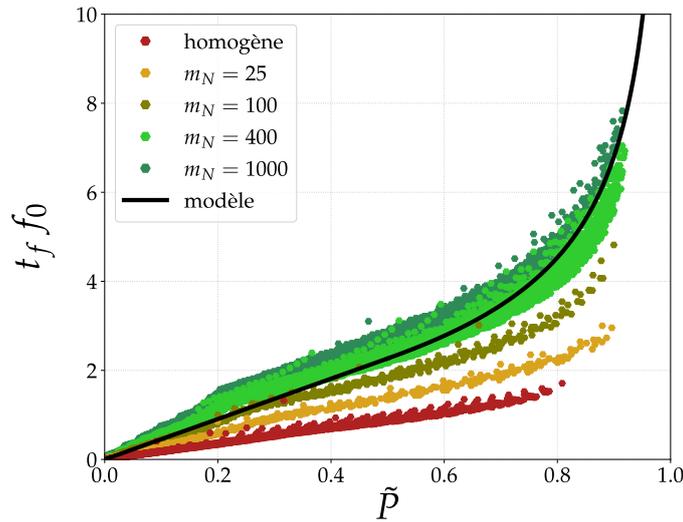


FIGURE III.3.11 : Temps de flambage t_f rapportés à la fréquence propre f_0 d'une tige homogène en oscillations libres en fonction du paramètre sans dimension \tilde{P} . Les points représentent les résultats des simulations numériques pour le projectile homogène, $m_{tige}/m = 1$ et différents projectiles lestés par une masse m_N dans la gamme $(25 - 1000) m_0$, m_{tige}/m dans la gamme $0.015 - 0.380$. La ligne continue noire symbolise la solution présentée en figure III.3.10b pour les temps de croissance les plus courts.

Rappelons que le modèle décrit le cas d'une poutre parfaitement rectiligne et alignée avec la verticale, la direction du mouvement du lanceur. Pour permettre l'émergence du flambement, les simulations ont été réalisées en considérant une tige parfaitement rectiligne mais inclinée d'un angle initial de 0.25° par rapport à la verticale. Le rapport m_{tige}/m n'est pas le seul paramètre qui influence le flambement en plus de A/L et f_0/f et la configuration initiale du projectile a vraisemblablement un effet.

III.3.2.3 INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES

Le lest joue un rôle important dans la dynamique de flambage et par conséquent dans l'efficacité de l'éjection. Cette conclusion est faite après l'étude systématique des éjections de projectiles plus ou moins lestés pour une unique configuration initiale : une tige parfaitement rectiligne inclinée d'un angle $\theta_0 = 0.25^\circ$. Nous fixons à présent le lest à une valeur $m_N = 400 m_0$, soit une valeur $m_{tige}/m = 0.037$, en accord avec la façon dont nous avons lesté les projectiles dans les expériences. Nous conservons dans un premier temps la configuration initiale en faisant varier l'angle d'inclinaison entre 0.01 et 2° . Nous étudions ensuite le cas d'une tige présentant initialement une courbure constante qui peut être décrite par un angle θ_i constant que nous faisons varier dans la même gamme.

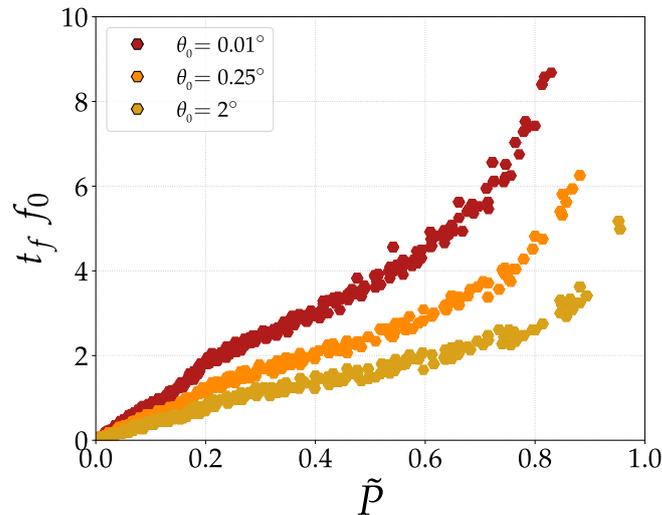


FIGURE III.3.12 : $t_f f_0$ issus des simulations numériques en fonction du paramètre \tilde{P} pour trois inclinaisons initiales différentes : $\theta_0 \in \{0.01^\circ, 0.25^\circ, 2^\circ\}$.

La figure III.3.12 présente le produit $t_f f_0$ pour un projectile suivant trois inclinaisons initiales différentes. Pour les trois angles θ_0 considérés, les tendances semblent être les mêmes à un préfacteur près qui dépend de θ_0 . Nous observons en effet qu'augmenter l'inclinaison permet d'abaisser le temps de flambage.

D'après la figure III.3.13a, α^* et t_{ef} sont indépendants de l'inclinaison initiale et valent respectivement 1.37 ± 0.01 et 0.287 ± 0.005 . Dans le cas d'une tige initialement courbée, le temps d'éjection est aussi constant et $t_{ef} = 0.30 \pm 0.01$. Nous en concluons que la configuration initiale n'a pas d'effet sur la durée optimale de l'accélération du projectile. Cependant, si la tige est initialement courbée nous observons une différence d'efficacité de

l'éjection. Bien que toujours constant, α^* est alors plus important et vaut 1.56 ± 0.02 , soit une augmentation de 14 % par rapport au cas d'une tige inclinée (figure III.3.13a). Une tige initialement déformée, indépendamment du mode de déformation, possède par essence une énergie de flexion non nulle ce qui peut expliquer qu'à l'éjection nous mesurons une énergie plus importante. Ce supplément d'énergie peut aussi s'expliquer par le fait que la courbure initiale du projectile permettrait d'abaisser le temps de flambement t_f . Cependant, nous avons vu en figure III.3.12 pour un projectile incliné qu'un rapport $t_f f_0$ plus faible n'a pas d'effet sur la valeur du coefficient de transfert d'énergie optimal α^* .

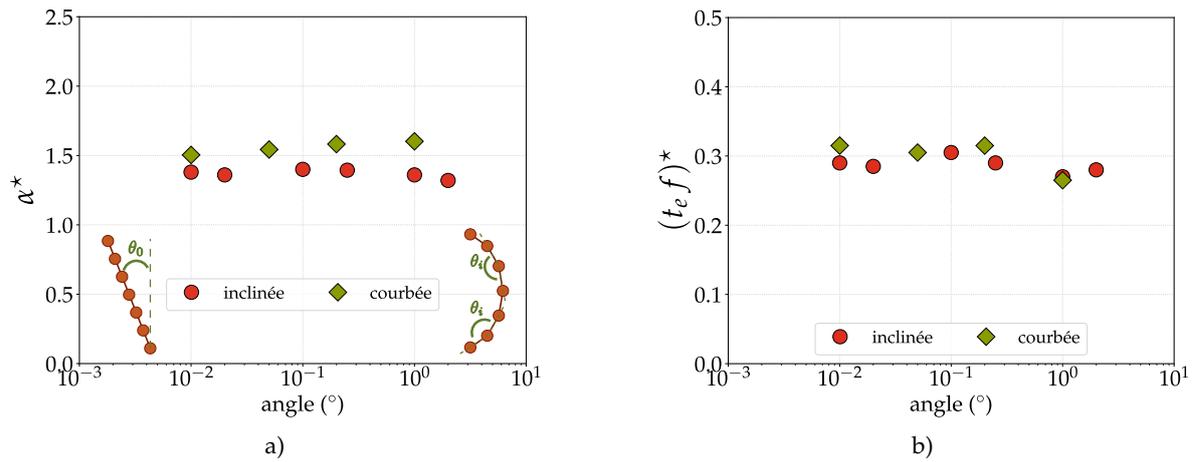


FIGURE III.3.13 : a) Les coefficients de transfert d'énergie optimaux α^* et b) les temps d'éjections associés $(t_e f)^*$ en fonction de l'angle imposé initialement pour les deux configurations inclinée et courbée présentées en a).

Les grandeurs $(A/L)^*$ et $(f_0/f)^*$ dépendent elles aussi de la configuration initiale. Un angle plus important a pour effet d'abaisser la valeur de $(A/L)^*$ et d'augmenter celle de $(f_0/f)^*$. Pour un lest donné, dans l'espace $(A/L, (f_0/f)^2 m_{tige}/m)$, cela a pour effet de décaler l'optimum vers l'origine tout en restant sur la même crête d'efficacité maximale. En d'autres termes, nous pouvons faciliter le flambement et le faire apparaître plus tôt en jouant sur la configuration initiale. Dans la limite des projectiles lestés, cela ne modifie pas la relation quadratique entre A/L et $f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}$ qui définit la crête d'efficacité maximale.

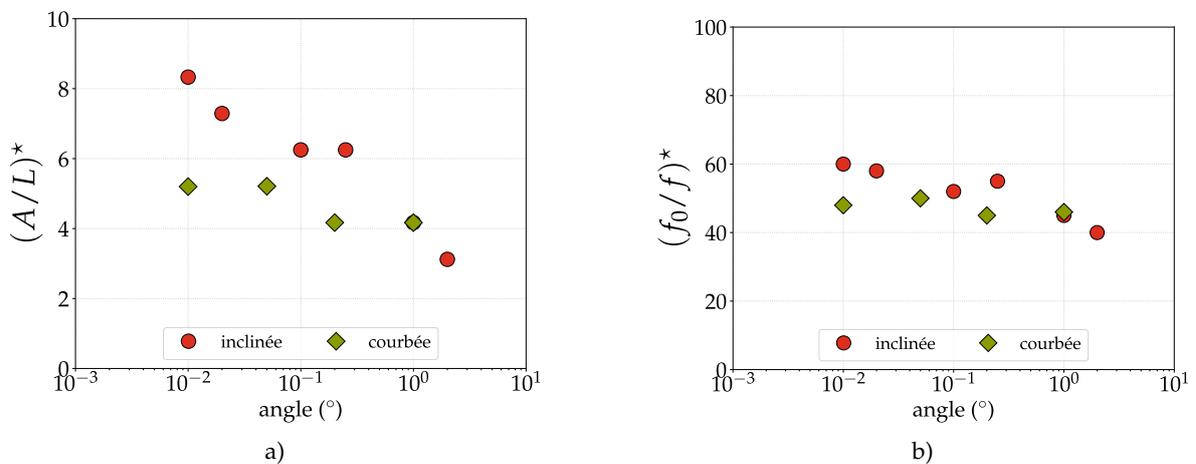


FIGURE III.3.14 : Les grandeurs a) $(A/L)^*$ et b) $(f_0/f)^*$ pour lesquelles les optima sont atteints en fonction de chaque configuration initiale.

III.3.3 MODÈLE ANALYTIQUE

Pour mettre en évidence les grandeurs physiques en jeu dans les éjections de projectiles élastiques élançés ainsi que leurs comportements, nous développons dans une première partie un modèle analytique simple. Celui-ci prend en compte le flambement instantané d'un projectile dans le cas lesté uniquement, cas qui a concentré la majeure partie de l'étude expérimentale. La masse de la tige est négligeable devant la masse des lests et elle est prise égale à 0. Les lests ont une trajectoire rectiligne selon la direction de l'accélération du lanceur et nous ne prenons pas en compte aucune inertie de rotation.

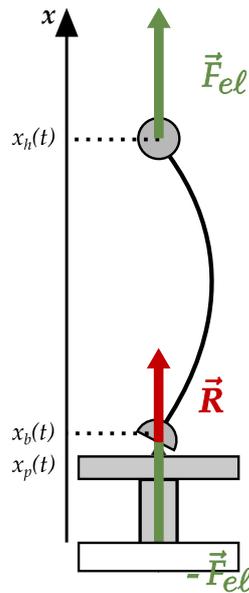


FIGURE III.3.15 : Schéma d'un projectile subissant un flambage dynamique avant éjection.

Le projectile est modélisé par une tige sans masse de longueur initiale L et lestée à chaque extrémité par une masse différente. La masse du haut vaut pm et la masse du bas $(1-p)m$. La masse totale du projectile vaut donc m et la proportion de masse en haut p peut être variée entre 0 et 1 mais pour toutes les applications nous prendrons $p = 2/3$ par analogie avec la distribution de masse des flèches d'archerie. Nous supposons que le mouvement des lests est rectiligne et dirigé selon l'accélération du lanceur. Les forces en présence sont donc purement verticales. Nous discutons ici du flambage dynamique d'un projectile dont nous notons la force critique F_c . Les grandeurs relatives à la masse du haut sont indicées par la lettre h , celles relatives à la masse du bas par la lettre b .

Le lanceur possède un mouvement harmonique imposé de pulsation $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, avec T sa période, et d'amplitude A . Il accélère la masse du bas initialement verticalement vers le haut. L'accélération du lanceur s'écrit $\ddot{x}_p = A\omega^2 \cos(\omega t)$. Elle est maximale au temps $t = 0$ et vaut alors $A\omega^2$. D'après l'expression de la force longitudinale P_0 définie en [section III.3.2.2](#) pour le flambement dynamique dans le cas où m_{tige} est négligeable, la force longitudinale a pour expression $pmA\omega^2$. Si $pmA\omega^2 \geq F_c$, le projectile flambe. La masse du haut subit dans ce cas une force élastique $F_{el}(t)$, dirigée vers le haut et dont nous

discuterons la forme dans la suite. La masse du bas subit une force de même intensité et dirigée dans le sens opposé ainsi que la réaction R du lanceur, dirigée vers le haut.

Dans le cas où $pmA\omega^2 < F_c$, l'accélération du lanceur ne pouvant être qu'inférieure ou égale à $A\omega^2$, le projectile n'a plus l'occasion de flamber et il se comporte comme un objet rigide. Nous discutons des deux cas dans la suite.

Néanmoins, que le projectile flambe ou non, nous pouvons définir le coefficient de transfert d'énergie $\alpha = (V_e/V_p^*)^2$ avec V_e la vitesse du centre de masse du projectile au moment t_e de l'éjection et V_p^* la vitesse maximale du lanceur.

III.3.3.1 CAS SANS FLAMBEMENT

Dans le cas où $pmA\omega^2 < F_c$, le projectile ne flambe pas. Son centre de masse possède la même accélération que le lanceur $\ddot{x}_p(t)$. Au temps $t = T/4$, $\ddot{x}_p(T/4) = 0$. La vitesse du centre de masse devient maximale et vaut $V_p^* = A\omega$. Le projectile n'étant plus accéléré, il est alors éjecté avec une vitesse $V_e = V_p^*$. Le temps d'éjection est ainsi $t_e = T/4$ et le coefficient de transfert d'énergie α vaut 1.

III.3.3.2 CAS AVEC FLAMBEMENT

Si $pmA\omega^2 \geq F_c$, alors le projectile flambe et ce, instantanément. Sa longueur L diminue d'une quantité $\Delta L(t) = L - (x_h(t) - x_b(t))$. Nous nommons "déformation" la déformation longitudinale $\Delta L(t)/L$, comme présentée dans la [section III.2.2.2.2](#).

Entre $t = 0$ et $t = t_e$, la dynamique générale du système peut être décrite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_b(t) = A\omega^2 \cos(\omega t) \\ pm\ddot{x}_h(t) = F_{el}(t) \\ (1-p)m\ddot{x}_b(t) = R(t) - F_{el}(t) \\ F_{el}(t) = \begin{cases} F_c \\ F_{pb}(\Delta L(t)/L) \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{III.3.27})$$

Nous choisissons ici de prendre en compte deux formes pour la force élastique. Nous pouvons faire l'hypothèse que, comme pour le flambage d'Euler, la force est indépendante de la déformation et reste constante et égale à la force critique F_c . Nous pouvons aussi considérer le cas plus réaliste du post-flambement décrit par le modèle de Kirchhoff dans la [section I.0.3.2.2](#). Dans ce cas, la force élastique vaut la force de post-flambement F_{pb} qui dépend de la déformation $\Delta L(t)/L$ du projectile au cours du temps. Nous discutons de ces deux formes dans la suite.

III.3.3.2.1 FLAMBAGE À FORCE CONSTANTE F_{el}

Nous pouvons dans un premier temps considérer que la force élastique est indépendante de la déformation du projectile comme pour le flambage d'Euler ou pour un post-flambement à faibles déformations. En considérant, $F_{el}(t) = F_c$ nous pouvons réécrire les [équation \(III.3.27\)](#) sous forme adimensionnée :

$$\begin{cases} \ddot{x}_b(\tilde{t}) &= \cos(\tilde{t}) \\ \ddot{x}_h(t) &= \tilde{F}/p \\ \ddot{x}_b(\tilde{t}) &= (\tilde{R}(\tilde{t}) - \tilde{F})/(1-p) \end{cases} \quad (\text{III.3.28})$$

avec $\tilde{t} = \omega t$, $\ddot{x}_{h,b} = \ddot{x}_{h,b}/A\omega^2$, $\tilde{R} = R/mA\omega^2$ et $\tilde{F} = F_c/mA\omega^2$.

Au temps $t = T/4$, l'accélération du lanceur \ddot{x}_p est nulle mais le centre de masse du projectile possède une accélération non nulle du fait de sa déformation. Le temps d'éjection n'est pas donné et nous devons alors définir des conditions d'éjection pour le déterminer. Plusieurs scénarios sont alors possibles en considérant dans chaque cas que l'annulation de la réaction R est la condition d'éjection sine qua non.

CONDITION D'ÉJECTION 1 :

Premièrement, le temps d'accélération du lanceur est plus court que le temps de déformation de la poutre. Dans ce cas, le projectile est encore en train de se déformer tandis que la réaction du lanceur $R \rightarrow 0$. Les deux extrémités subissent alors chacune une force d'intensité F_{el} de signes opposés. Le centre de masse du projectile s'en trouve pseudo-isolé et le projectile est éjecté. Cette condition d'éjection se traduit par la relation suivante :

$$\cos(\tilde{t}_e) = -\frac{\tilde{F}}{(1-p)} \quad (\text{III.3.29})$$

CONDITION D'ÉJECTION 2 :

Le deuxième scénario implique que le projectile retrouve sa forme initiale rectiligne. Dans ce cas, $\Delta L(t_e)/L = 0$ et la masse du haut possède une vitesse plus élevée que la masse du bas. La réaction R passe alors d'une valeur finie à une valeur nulle et le projectile est éjecté. Nous traduisons ce cas par la relation suivante :

$$2 \frac{1 - \cos(\tilde{t}_e)}{(\tilde{t}_e)^2} = \frac{\tilde{F}}{p}. \quad (\text{III.3.30})$$

\tilde{t}_e est obtenu en résolvant les [équations \(III.3.29\)](#) et [\(III.3.30\)](#). Nous résolvons ensuite le système pour $\tilde{t} = \tilde{t}_e$ d'[équation \(III.3.28\)](#) en faisant varier systématiquement \tilde{F} . Les solutions sont présentées en [figure III.3.16](#) pour trois grandeurs sans dimension : $t_e f$, α et $\Delta L^{max}/A$. $\Delta L^{max} = \max(L - (x_h(t < t_e) - x_b(t < t_e)))$ est le déplacement maximal de la masse du

haut par rapport à la masse du bas avant éjection. Cette grandeur, contrairement aux deux précédentes, n'est pas évaluée en $t = t_e$ et n'apporte pas d'information sur l'éjection. En revanche, elle nous permet d'avoir une information sur l'historique de déformation du projectile.

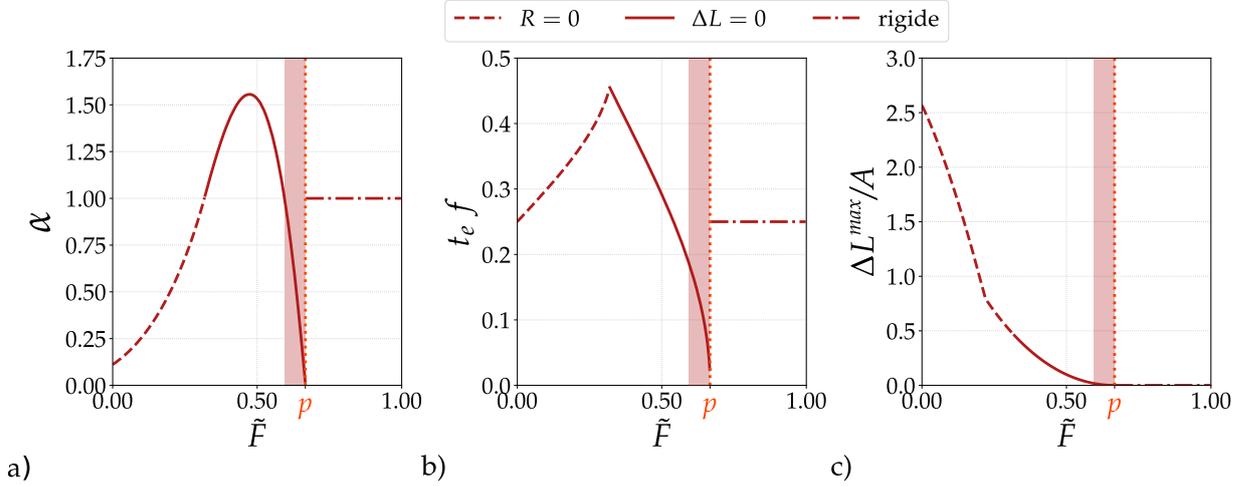


FIGURE III.3.16 : Solutions du modèle analytique à force constante F_c en fonction du paramètre sans dimension \tilde{F} : a) le gain d'énergie cinétique, b) le temps d'éjection adimensionné, c) le rétrécissement adimensionné de la poutre. La bande colorée marque la région où $t_e f < 0.25$ et $\alpha < 1$ pour laquelle le projectile peut potentiellement être rattrapé par le lanceur.

Nous considérons les solutions au jeu d'équation (III.3.28) qui vérifient une des deux conditions d'éjection pour un temps $t_e f$ le plus court. La région définie par $\tilde{F} > p$ correspond au cas d'un objet rigide avec $t_e f = 0.25$ et $\alpha = 1$ et la région définie par $\tilde{F} < p$ correspond aux cas où le projectile flambe. Pour $0 < \tilde{F} < 0.318$, la condition d'éjection 1 est vérifiée en premier et pour $0.318 < \tilde{F} < p$ seule la condition d'éjection 2 est vérifiée.

LA TRANSITION ENTRE UN OBJET DÉFORMÉ ET UN OBJET AU COMPORTEMENT RIGIDE

La transition entre les deux dernières régions est discontinue pour α et $t_e f$. Dans l'intervalle $0.594 < \tilde{F} < p$ illustré par les bandes verticales en figure III.3.16ab, nous mesurons $t_e f < 1/4$ et $\alpha < 1$. Pour de telles valeurs, le lanceur est susceptible de rattraper la masse du bas et d'accélérer à nouveau le projectile. Ce dernier peut alors subir une nouvelle éjection puis être rattrapé à nouveau et ainsi de suite jusqu'à sa réelle éjection. Ce comportement que nous avons nommé à plusieurs reprises *multi-kicks* n'est pas pris en compte par ce modèle. D'après RAUFASTE et al., les *multi-kicks* ont pour effet de retarder l'éjection et d'augmenter le coefficient de transfert d'énergie α . Dans le cas présent, sur ledit intervalle, $\alpha < 1$. Des reconnexions successives pourraient permettre de gommer cette discontinuité en augmentant la valeur de α . Comme nous le verrons dans le chapitre III.4 en figure III.4.2, nous n'observons pas la redescende sous $\alpha = 1$ ni en simulations ni en expériences. Le modèle analytique ne

permet donc pas de prendre en compte le comportement du système dans l'intervalle de \tilde{F} décrit par cette bande et nous excluons les résultats associés dans la comparaison entre les trois approches.

UN PHÉNOMÈNE NON LINÉAIRE

Pour la condition d'éjection 1, α croît avec \tilde{F} mais reste inférieur à 1. Pour la condition d'éjection 2, α augmente avec \tilde{F} jusqu'à dépasser 1 et atteindre un maximum de 1.56 pour $\tilde{F} = 0.472$. Une fois ce maximum atteint, α décroît et devient inférieur à 1 à partir de $\tilde{F} = 0.596$ puis tend vers 0. Au-delà de $\tilde{F} = p$, le projectile se comporte comme un objet rigide et $\alpha = 1$. Ce comportement non monotone met en évidence la non linéarité de ce phénomène dont l'efficacité dépend de l'amplitude au travers du paramètre \tilde{F} .

Le déplacement relatif maximal des deux masses rapporté à l'amplitude $\Delta L^{max}/A$ se réécrit $\Delta L^{max}/L \cdot L/A$. D'après la [figure III.3.16c](#), $\Delta L^{max}/A$ est bornée entre 0 et 2.57 pour des valeurs respectives de $\tilde{F} = p$ et $\tilde{F} = 0$. Or, A/L n'est pas bornée donc pour une valeur de \tilde{F} à laquelle correspond une seule valeur de $\Delta L^{max}/A$, il existe une valeur de A/L à partir de laquelle $\Delta L^{max}/L > 1$. Ceci implique que le modèle est valable seulement pour des A/L suffisamment petits. Autrement, cela signifierait que la masse du haut et la masse du bas se croisent ce qui n'est physiquement pas possible.

III.3.3.2 POST-FLAMBEMENT À FORCE F_{pb}

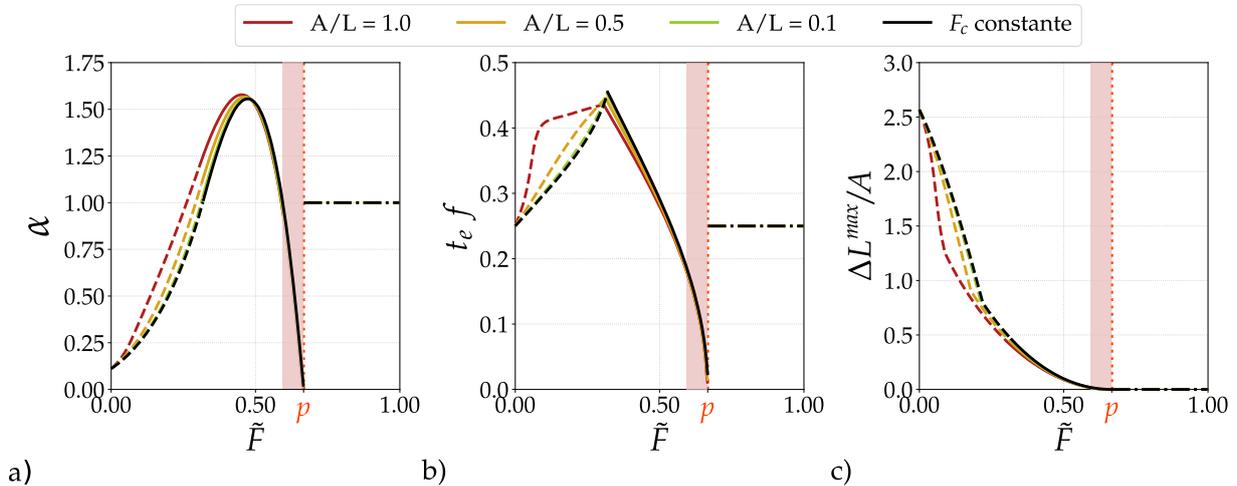


FIGURE III.3.17 : Solutions du modèle analytique avec post-flambement en fonction du paramètre sans dimension \tilde{F} : a) le gain d'énergie cinétique, b) le temps d'éjection adimensionné, c) le rétrécissement adimensionné de la poutre.

Si nous considérons que $\Delta L^{max}/L$ n'est plus négligeable, la force élastique est fonction de la déformation du projectile. Nous prenons alors en compte le post-flambement et nous définissons $F_{el}(t) = F_{pb}(\Delta L(t)/L)$. Nous utilisons la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre (RK4) pour résoudre le problème III.3.27 et nous présentons les résultats obtenus pour $A/L < 1$ en [figure III.3.17](#). Nous retrouvons globalement le même comportement que dans le cas précédent. Nous en déduisons que, tant que $A/L < 1$, le post-flambement a

un effet négligeable sur les différentes grandeurs en jeu et notamment le maximum de α qui reste inchangé.

III.3.4 RÉSUMÉ DU CHAPITRE III.3

D'après les simulations et les expériences, les projectiles homogènes présentent des éjections peu efficaces avec un α très proche de 1, comme pour un objet rigide.

Les projectiles lestés peuvent quant à eux être éjectés plus efficacement et nous mesurons des coefficients de transfert d'énergie $\alpha > 1$. En expériences, le maximum mesuré est d'environ 1.4, ce qui est comparable aux valeurs maximales comprises entre 1.33 et 1.39 obtenues en simulation pour la gamme de rapports m_{tige}/m correspondant aux expériences. Le phénomène que nous mettons ici en évidence est non linéaire, contrairement à la superpropulsion étudiée jusqu'alors sur d'autres systèmes déformables.

La dynamique de flambement et de post-flambement des projectiles en expériences est en accord satisfaisant avec le modèle quasi-statique de Kirchhoff. Nous mesurons des forces élastiques F_{el} qui semblent constantes, ce qui a influencé le modèle analytique dans lequel F_{el} est constante dans un premier temps. En simulations, la masse du haut semble aussi avoir une accélération constante, pour une certaine gamme de paramètres. Nous n'avons cependant pas réalisé d'étude systématique sur ce point pour les simulations mais ce serait une perspective intéressante.

D'après les données issues des simulations numériques, les meilleures éjections se produisent lorsque le temps de flambement t_f est bien inférieur au temps d'éjection t_e . Dans les deux approches, les coefficients de transfert d'énergie α les plus importants sont obtenus lorsque le mode de flambement des projectiles correspond au mode de flambement fondamental d'une poutre doublement articulée. Le seuil de flambement dépend fortement de la configuration initiale. Un projectile flambe plus rapidement s'il est plus incliné et l'amplitude à laquelle l'optimum est atteint diminue. Cependant, augmenter l'inclinaison n'a pas d'effet sur la valeur de l'optimum.

Les simulations numériques ont permis de mettre en évidence que les meilleures éjections décrivent des crêtes à m_{tige}/m fixé dans l'espace $(f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}, A/L)$. Ces crêtes tendent vers une courbe limite de forme quadratique lorsque $m_{tige}/m \rightarrow 0$. L'efficacité des éjections des projectiles lestés semble être obtenue pour une valeur particulière du paramètre sans dimension $(A/L)^{-1} (f_0/f)^2 \sqrt{m_{tige}/m}$.

Nous avons aussi développé un modèle analytique simple avec des hypothèses fortes qui permet de décrire les éjections de projectiles élançés lestés au moyen d'un seul paramètre sans dimension \tilde{F} . Ce paramètre rend compte de l'adaptation mutuelle de la sollicitation du lanceur et de la dynamique de déformation du projectile. Le modèle prédit un comportement unique du coefficient de transfert d'énergie α en fonction de \tilde{F} avec un maximum de 1.6 atteint pour $\tilde{F} \simeq 0.5$. Il reste à présent à comparer les différentes approches entre elles et notamment à voir s'il existe un lien entre \tilde{F} et le paramètre $(A/L)^{-1} (f_0/f)^2 \sqrt{m_{tige}/m}$.

III4

COMPARAISON ET DISCUSSION

Nous avons montré en [sections III.3.1 à III.3.3](#) par des expériences, des simulations numériques et un modèle analytique simple que la superpropulsion de projectiles élançés est un phénomène non linéaire qui s'observe uniquement quand le projectile est lesté. Outre la configuration initiale, l'efficacité des projectiles lestés dépend de trois paramètres sans dimension : A/L , f_0/f et m_{tige}/m .

En simulation, les points d'efficacité maximale se situent sur une courbe quadratique dans l'espace $(f_0/f \sqrt{m_{tige}/m}, A/L)$ ce qui tend à montrer que les éjections sont optimales lorsque le paramètre $(A/L)^{-1} (f_0/f)^2 m_{tige}/m$ est constant et de l'ordre de 20.

En [section III.3.3](#), dans le modèle analytique, Nous avons traité le cas d'une force élastique constante égale au seuil de flambage F_c ainsi que le cas d'un post-flambement quasi-statique à force F_{pb} . Ce dernier cas est similaire au premier tant que les amplitudes restent modérées et nous choisissons de ne traiter ici que le cas à force constante. Le modèle prédit alors un comportement général dépendant d'un seul paramètre sans dimension $\tilde{F} = \frac{F_c}{m A \omega^2}$ qui compare la force de flambement F_c à la force inertielle due au mouvement du lanceur. Le coefficient de transfert d'énergie α théorique maximal vaut 1.56 et est atteint pour $\tilde{F} = 0.47$. Le modèle analytique est indépendant de l'expression de la force de flambement F_c . Afin de comparer les différentes approches, analytique, numérique et expérimentale, nous devons faire un choix de l'expression de F_c pour les deux dernières.

En [section III.3.1.2](#), nous avons utilisé la force seuil $F_c^{\Delta} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ d'une poutre articulée à chaque extrémité comme référence des forces élastiques mesurées et nous avons trouvé une correspondance satisfaisante avec le modèle de Kirchhoff d'après NEUKIRCH et al. (2021) concernant le post-flambement des projectiles. Le paramètre \tilde{F} devient alors $\tilde{F} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 m A \omega^2}$. Cette expression peut se réécrire en fonction des paramètres sans dimension A/L , f_0/f et m_{tige}/m comme suit :

$$\tilde{F} = (\pi \beta_0^2)^{-2} \left(\frac{A}{L}\right)^{-1} \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \frac{m_{tige}}{m}, \quad (\text{III.4.31})$$

où m_{tige}/m , f_0 et L sont connus pour chaque projectile et référencés dans le [tableau III.2.1](#). La fréquence du lanceur f varie linéairement avec son amplitude A , le paramètre que nous varions systématiquement pour chaque éjection. La constante β_0 associée au mode fondamental vaut 1.5056.

Le paramètre sans dimension \tilde{F} semble être pertinent à la fois en simulations et dans le modèle analytique pour décrire l'efficacité des éjections. Il nous reste à déterminer si ce paramètre est aussi pertinent pour décrire les expériences et ainsi comparer les différentes approches entre elles, dans le cas des projectiles lestés mais aussi des projectiles homogènes.

III.4.1 LES PROJECTILES HOMOGÈNES

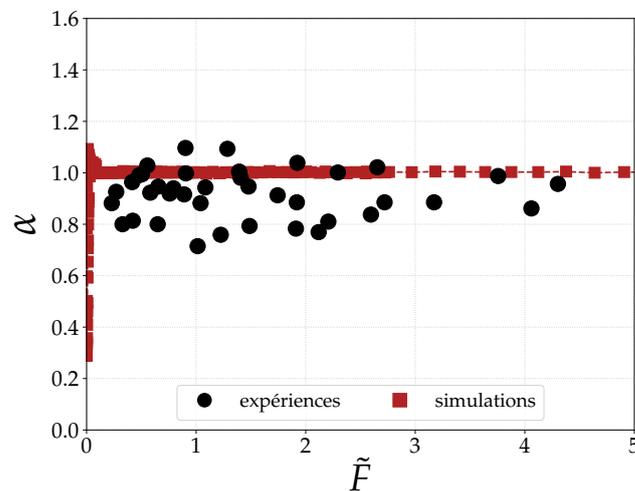


FIGURE III.4.1 : Coefficients de transfert d'énergie α obtenus pour les projectiles homogènes en expériences pour $0.14 < A/L < 1.09$ et en simulations pour $0.208 < A/L < 1.042$, en fonction du paramètre \tilde{F} . La configuration initiale dans les simulations est une tige rectiligne inclinée d'un angle $\theta_0 = 0.25^\circ$.

Nous représentons en [figure III.4.1](#) les coefficients de transfert d'énergie pour toutes les expériences d'éjection de projectiles homogènes ainsi que les simulations numériques effectuées dans le cas d'une tige rectiligne inclinée d'un angle initial $\theta_0 = 0.25^\circ$ avec $m_{tige}/m = 1$. Nous présentons les résultats en fonction de \tilde{F} calculé d'après l'équation (III.4.31) pour les expériences et les simulations. Le modèle analytique ne prend pas en compte les projectiles homogènes et nous ne pouvons pas le comparer aux deux premières approches.

Chaque mesure expérimentale correspond à un projectile qui flambe alors que sur la même gamme de \tilde{F} en simulation, les projectiles ne flambent pas. Nous ne considérons ici qu'une configuration initiale en simulations, une inclinaison de $\theta = 0.25^\circ$, ce qui ne suffit probablement pas pour prendre en compte les défauts qui favorisent le flambement dans les éjections expérimentales. L'accord quantitatif entre les deux approches reste cependant plutôt satisfaisant avec des coefficients de transfert d'énergie α qui se trouvent proches de 1.

Les simulations décrivent toutefois des coefficients de transfert d'énergie très proches de 1 même dans les cas où les projectiles flambent (section III.3.2.1.1).

III.4.2 LES PROJECTILES LESTÉS

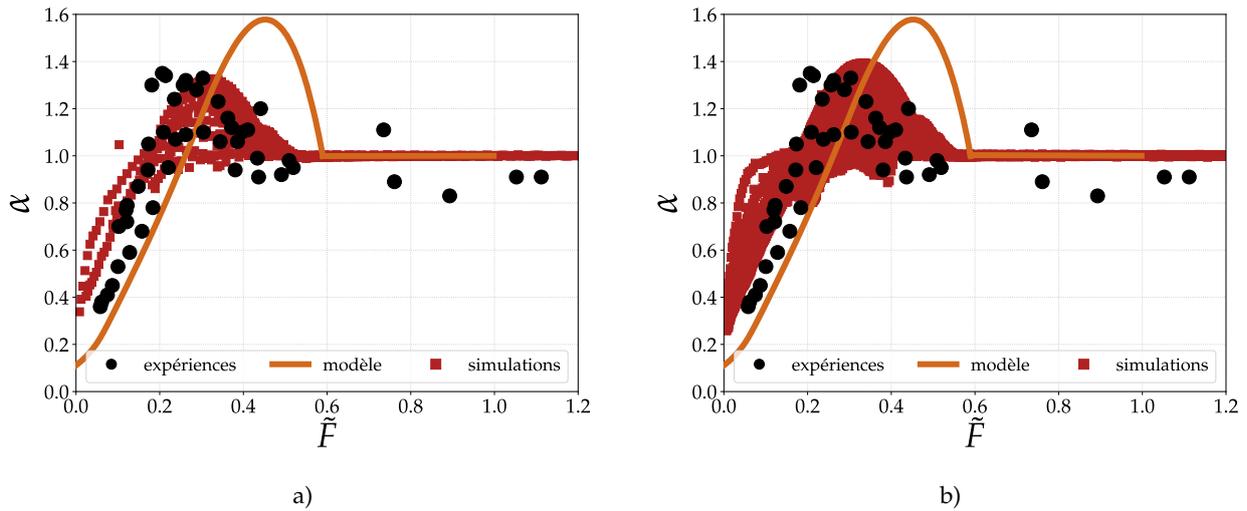


FIGURE III.4.2 : Coefficients de transfert d'énergie α en fonction du paramètre sans dimension \tilde{F} pour les trois approches. Nous représentons toutes les mesures expérimentales. Nous choisissons de les comparer aux résultats de simulations numériques effectuées pour a) $m_{tige}/m = 0.071$ et b) $m_{tige}/m = 0.037$, deux valeurs qui permettent d'encadrer les rapports m_{tige}/m des projectiles en expériences. La solution au modèle (figure III.3.16), qui est quant à lui indépendante de m_{tige}/m , est représentée par la ligne continue.

Si nous nous référons aux tableaux III.2.1 et III.2.2, les rapports de masses m_{tige}/m utilisés en simulations qui décrivent le mieux ceux des projectiles expérimentaux sont 0.071 pour les plus longs et 0.037 pour les plus courts. En figure III.4.2, nous représentons tous les coefficients de transfert d'énergie α issus des éjections expérimentales en fonction du paramètre sans dimension \tilde{F} ainsi que les données des simulations pour les deux rapports m_{tige}/m considérés. Nous observons dans les deux cas un très bon accord qualitatif mais aussi quantitatif entre les deux approches. Toutes les données convergent vers une même tendance, comparable à celle prédite par le modèle analytique. Nous notons toutefois des différences avec cette dernière. Le modèle prédit un maximum de 1.58 atteint pour une valeur $\tilde{F} = 0.454$. En ce qui concerne les expériences et les simulations, le maximum possède une valeur moindre, d'environ 1.4 qui est atteinte pour \tilde{F} dans l'intervalle 0.2 – 0.3. Rappelons que le modèle analytique prend en compte un projectile lesté avec une tige sans masse et sans inertie de rotation, qui flambe instantanément et sous une force constante et dont la trajectoire est rectiligne et dans la direction de l'accélération. Toutes ces hypothèses ne sont pas vérifiées en expériences ou en simulations. De plus, nous avons vu en section III.3.2.2 que la dynamique de flambage dépend fortement du rapport m_{tige}/m . L'efficacité dépend elle aussi a priori de ce paramètre et les coefficients de transfert d'énergie semblent tendre

vers la prédiction du modèle analytique lorsque $m_{tige}/m \rightarrow 0$.

Le paramètre varié systématiquement dans les éjections expérimentales est l'amplitude A ou plus exactement A/L . Ce rapport vaut en moyenne 0.54 avec une dispersion de 0.27. Nous choisissons de conserver des mesures expérimentales présentées en [figure III.4.2](#) seulement celles vérifiant $0.27 < A/L < 0.81$ et nous les représentons en [figure III.4.3](#). Nous y présentons aussi les données issues des simulations pour les mêmes valeurs de m_{tige}/m mais correspondant aux valeurs de A/L qui sont dans la gamme choisie ou qui l'encadrent. Le très bon accord que nous observons en [figure III.4.2](#) n'est plus vérifié. Pour cette gamme d'amplitudes, le coefficient de transfert d'énergie maximal atteint en simulation se situe autour de 1.1 pour les deux valeurs de m_{tige}/m . Pour cette configuration initiale et ces rapports m_{tige}/m en simulations, l'optimum est atteint pour des valeurs de A/L autour de 6 alors que les éjections les plus efficaces en expériences sont obtenues pour A/L inférieure à 1.

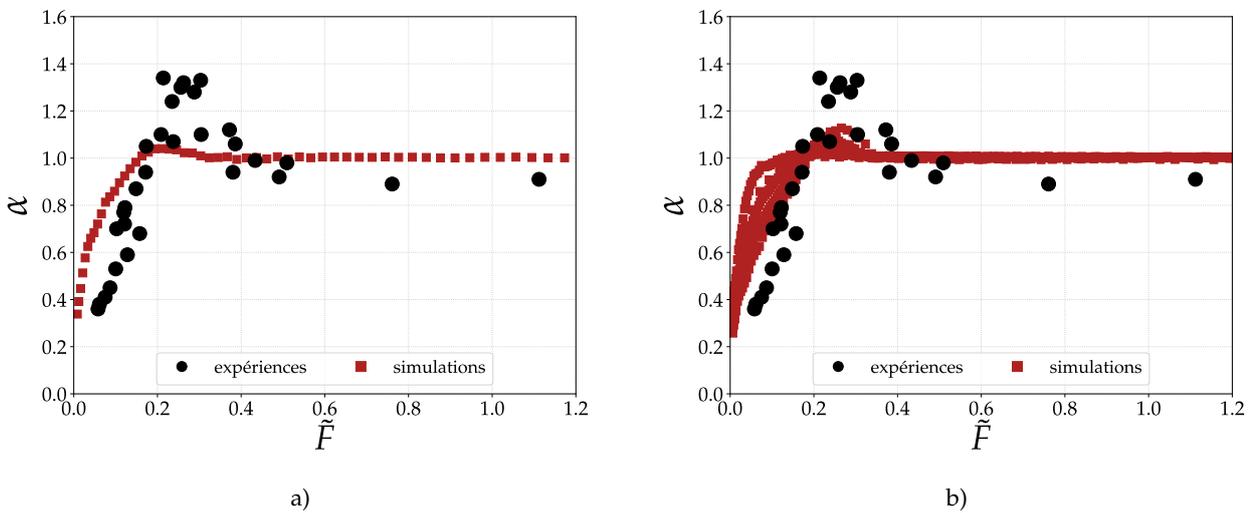


FIGURE III.4.3 : Nous reprenons les mêmes données qu'en [figure III.4.2](#) mais nous restreignons la gamme des mesures expérimentales en ne considérant que les éjections pour lesquelles $0.27 < A/L < 0.81$. Nous comparons ces données aux résultats obtenus en simulations pour les valeurs de A/L les plus proches de cette gamme. a) Pour $m_{tige}/m = 0.071$, $A/L = 1.04$ et pour b) $m_{tige}/m = 0.037$, $0.50 < A/L < 1.04$.

Nous avons déterminé précédemment que le rapport A/L optimal peut être abaissé soit en diminuant le rapport m_{tige}/m c'est-à-dire en lestant plus le projectile, soit en augmentant l'angle initial de courbure ou d'inclinaison. La [figure III.4.4](#) présente les coefficients de transfert d'énergie mesurés en expériences et ceux obtenus par simulations numériques pour trois conditions initiales différentes, toujours pour la gamme $0.27 < A/L < 0.81$.

Nous voyons en [figure III.4.4a](#) que, pour une configuration initiale choisie qui est ici un projectile incliné d'un angle $\theta_0 = 0.25^\circ$, il faudrait une masse des lests 10 à 20 fois supérieure à celle des expériences pour trouver un accord entre les deux approches.

Les deux autres figures présentent des résultats de simulations pour un rapport de masses $m_{tige}/m = 0.037$ pour deux configurations différentes. La première configuration est une tige rectiligne inclinée d'un angle $\theta_0 = 2^\circ$ huit fois plus élevé que la configuration précédente. Malgré la faible discrétisation en f_0/f des simulations nous observons une allure similaire à

celle décrite par les points expérimentaux (figure III.4.4b). Cependant, nous pouvons noter que le maximum semble être légèrement plus faible pour les simulations. La deuxième configuration est une tige de courbure uniforme caractérisée par un angle $\theta_i = 0.05^\circ$. Encore une fois, nous retrouvons une allure qui décrit très bien les expériences, avec un maximum de valeur proche 1.40 contre 1.34 pour les expériences (figure III.4.4c).

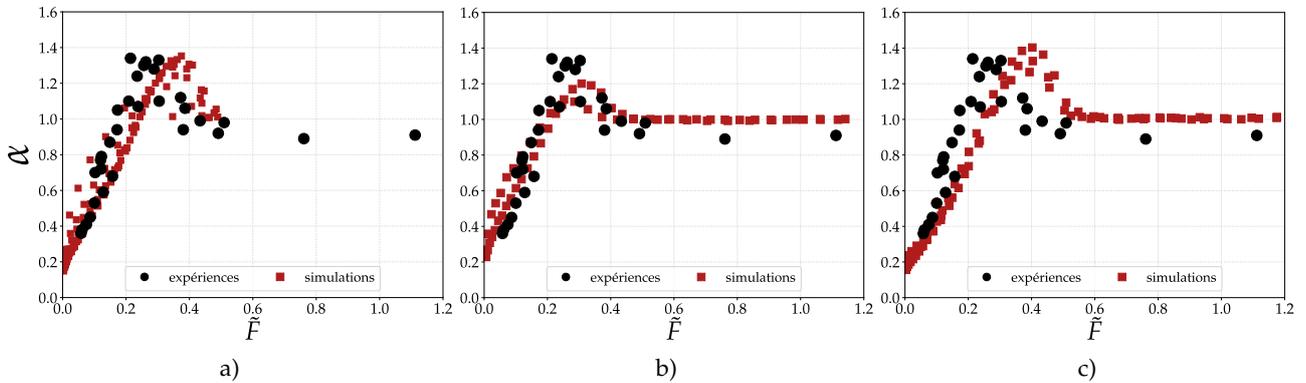


FIGURE III.4.4 : a) Influence du lest sur le comportement des coefficients de transfert d'énergie α . Le rapport de masses vaut ici $m_{t\grave{e}ge}/m = 0.004$ et l'amplitude donne $A/L = 0.5$. b) Projectile incliné initialement d'un angle $\theta_0 = 2.0^\circ$ pour deux amplitudes $A/L = 0.50$ et $A/L = 1.04$. c) Projectile initialement courbé avec un angle constant $\theta_i = 0.05^\circ$ pour $0.313 < A/L < 1.04$.

D'après la figure III.4.4, nous comprenons qu'il faut favoriser le flambement des projectiles pour des valeurs de A/L plus faibles dans le but d'expliquer les coefficients de transfert d'énergie mesurés en expériences. Ceci peut être réalisé en diminuant la valeur de $m_{t\grave{e}ge}/m$ mais cela ne correspond pas à ce que nous imposons en expériences. L'écart entre les approches expérimentale et numérique que nous observons pour des rapports $m_{t\grave{e}ge}/m$ équivalents peut ainsi s'expliquer par les différences de configurations initiales des systèmes considérés. Les projectiles éjectés en expériences présentent une combinaison de ces différentes imperfections. Ils ne sont pas rectilignes car constitués d'un même jonc de carbone légèrement courbé. De plus, les masselottes fixées à chaque extrémité ne sont pas parfaitement alignées avec la tige et le centre de masse du projectile se situe en dehors de ce dernier. Finalement, les projectiles ne sont pas placés exactement à la verticale sur le lanceur avant sa mise en mouvement. Le lanceur en lui-même n'est pas parfaitement symétrique et sa libération induit un mouvement dans le plan transverse à l'accélération.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif principal de cette thèse a été de comprendre comment augmenter l'efficacité de l'éjection d'un projectile par un lanceur dont la cinématique est imposée. Pour cela, nous nous sommes basés sur un phénomène en particulier, la superpropulsion, qui cherche à exploiter les propriétés élastiques d'un système. Jusqu'à présent, le phénomène de superpropulsion concernait des projectiles subissant des déformations longitudinales ; ces projectiles pouvaient être éjectés avec environ trois fois plus d'énergie cinétique que des projectiles rigides. Dans ce manuscrit, nous proposons deux nouvelles configurations. Dans un premier temps, c'est le lanceur qui comporte une couche élastique permettant de rendre l'éjection d'un projectile rigide efficace. Dans un second temps, nous considérons des projectiles élastiques élançés qui subissent des déformations transverses. Quelle que soit la configuration, l'énergie cinétique reçue par les projectiles lors de l'éjection a été comparée systématiquement à l'énergie cinétique d'un projectile rigide éjecté par le lanceur. L'accord entre les dynamiques de déformation et de sollicitation reste ce qui guide l'efficacité d'une éjection et nous avons cherché à comprendre dans ces deux études la richesse des comportements qui en découlent.

En [partie I](#), nous avons situé notre étude dans le contexte du lancer. Un lancer efficace s'obtient dans la limite où la masse du projectile est très grande devant la masse virtuelle du lanceur. Dans la limite inverse, il est possible de lancer un projectile déformable plus efficacement qu'un objet rigide en tirant profit de son élasticité : c'est la superpropulsion. Ce phénomène s'applique à différents types de projectiles qui subissent une déformation longitudinale comme des objets élastiques simples. Ce phénomène apparaît aussi dans l'éjection de gouttes d'eau dont la dynamique de déformation est plus complexe. Cela nous a conduit à considérer d'autres géométries de projectiles, comme celle d'objets élançés. Ceux-ci présentent des déformations transverses qui émergent lorsqu'une compression axiale excède la force de flambement. Ces différents éléments ont motivé les nouvelles configurations étudiées dans les parties suivantes.

En [partie II](#), nous avons cherché à donner plus d'énergie cinétique à un projectile rigide lors de son éjection en ajoutant une couche de matériau mou entre le lanceur et le projectile. Cette couche molle a la particularité d'adhérer au lanceur mais pas au projectile. Un comportement complexe de l'efficacité des éjections s'obtient en adaptant la sollicitation imposée par le lanceur et la dynamique de déformation de la couche molle. Ce comportement apparaît en expériences mais il se retrouve aussi par un modèle analytique et des simulations numériques basés tous deux sur la propagation d'une onde élastique à une dimension dans la couche molle notamment. L'efficacité de l'éjection a un comportement plus complexe que celle d'un système masse-ressort classique. Elle dépend de l'ajustement entre les propriétés mécano-géométriques du projectile et de la couche molle. Dans la limite où la masse du projectile est négligeable devant celle de la couche molle, l'efficacité de l'éjection dépend de l'ajustement entre le temps de propagation de cette onde et le temps caractéristique d'accélération du lanceur. Dans le cas contraire, l'efficacité sera le résultat de la compétition entre l'inertie du projectile et l'élasticité de la couche molle. Plus globalement, ce comportement complexe est caractérisé par deux grandeurs sans dimension : c_s/Lf qui compare un temps caractéristique de déformation et le temps caractéristique de sollicitation

et x la proportion de matériau mou dans l'ensemble couche molle-projectile rigide. Les trois approches sont en très bon accord, à la fois qualitatif et quantitatif, avec une éjection optimale plus de quatre fois plus efficace que celle d'un projectile rigide seul sans adjonction de couche molle. Ce facteur quatre est le record obtenu parmi toutes les études sur la superpropulsion. Finalement, il apparaît qu'une éjection légèrement moins efficace que l'éjection optimale – mais plus simple à configurer en pratique – peut être atteinte grâce à une couche molle dont l'épaisseur est bien plus importante que la taille du projectile.

En [partie III](#), nous avons étudié les éjections de projectiles élançés qui flambent sous la sollicitation du lanceur. Nous avons observé un effet superpropulsif qui permet d'atteindre un coefficient de transfert d'énergie autour de 1.5 en expériences, en simulations ou avec un modèle analytique simple, pour des projectiles possédant deux tiers de la masse des lests en haut et un tiers en bas. Bien que l'effet superpropulsif ne permette pas d'obtenir des éjections aussi efficaces que pour les configurations précédentes, nous avons pu montrer que la superpropulsion existe aussi dans le cas des projectiles élançés qui flambent. Les différentes approches menées conjointement ont permis de caractériser la dynamique de flambement des projectiles élançés qui est responsable de l'efficacité des éjections. Les meilleurs résultats en expériences et simulations sont obtenus lorsque la dynamique de la sollicitation par le lanceur est en accord avec la dynamique de déformation du projectile. Cet accord s'obtient lorsque le paramètre sans dimension \tilde{F} prend une valeur autour de 0.5, c'est-à-dire lorsque la force inertielle imposée par le lanceur est de l'ordre de la force d'Euler. Outre l'apparition du flambement du projectile, il faut aussi que le mode fondamental ait le temps de se développer avant l'éjection. Cette condition dépend fortement du temps de croissance de ce mode. D'après les simulations, celui-ci peut être abaissé en ajustant la configuration initiale du projectile qui peut être par exemple incliné ou présenter une courbure avant toute sollicitation. Les expériences d'éjections sont le siège de nombreuses imperfections qui entraînent l'abaissement du seuil de flambement et l'obtention d'éjections efficaces en imposant des amplitudes inférieures à la longueur des projectiles. L'accord en forces est une particularité des projectiles élançés, là où pour les configurations précédentes il était question d'un accord en temps. De plus, au travers du paramètre \tilde{F} , l'effet superpropulsif dépend fortement de l'amplitude du lanceur, ce qui rend compte du caractère non linéaire du phénomène.

Ces deux études ont permis de montrer que la superpropulsion est un phénomène général qui se retrouve dans des cas plus complexes que l'éjection de projectiles mous subissant une déformation longitudinale. Il conviendrait à présent d'élargir l'étude de ce phénomène à des systèmes pour lesquels il existe initialement une énergie disponible finie. Ce type de systèmes se rencontre couramment et regroupe par exemple les lancers à main nue ou les tirs par armes de trait comme le trébuchet ou l'arc qui ont été mentionnés en [partie I](#). L'étude de ces cas consisterait à se demander comment les propriétés élastiques du système affectent la masse virtuelle du lanceur. Le système arc-flèche et l'atlatl (BAUGH, 1998; VANDERHOEK, 1998) sont des exemples qui répondent à cette description. À la lumière de l'étude sur les projectiles élançés notamment, il serait intéressant d'observer et d'analyser de réels tirs effectués par des archers de haut-niveau ou des lancers de sagaies.

BIBLIOGRAPHIE

- ABRAHAMSON, G. R., & GOODIER, J. N. (1966). Dynamic Flexural Buckling of Rods Within an Axial Plastic Compression Wave. *Journal of Applied Mechanics*, 33(2), 241-247. <https://doi.org/10.1115/1.3625033> (cf. p. 16).
- ALLEN, M. P., & TILDESLEY, D. J. (2017). *Computer Simulation of Liquids* (T. 1). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198803195.001.0001> (cf. p. 64, 66).
- AUSSILLOUS, P., & QUÉRÉ, D. (2001). Liquid marbles. *Nature*, 411(6840), 924-927. <https://doi.org/10.1038/35082026> (cf. p. 11).
- BAUGH, R. A. (1998). Atlatl Dynamics. *Lithic Technology*, 23(1), 31-41. <https://doi.org/10.1080/01977261.1998.11720936> (cf. p. 114).
- BEEMAN, D. (1976). Some multistep methods for use in molecular dynamics calculations. *Journal of Computational Physics*, 20(2), 130-139. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(76\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90059-0) (cf. p. 67).
- CELESTINI, F., & BORMASHENKO, E. (2018). Propulsion of liquid marbles : A tool to measure their effective surface tension and viscosity. *Journal of Colloid and Interface Science*, 532, 32-36. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2018.07.091> (cf. p. 11).
- CELESTINI, F., MATHIESEN, J., ARGENTINA, M., & RAUFASTE, C. (2020). Contact Layer as a Propelling Advantage in Throwing. *Physical Review Applied*, 14(4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.044026> (cf. p. 8, 9, 11, 12, 25, 40, 47).
- CHANTELOT, P., COUX, M., DOMINO, L., PYPE, B., CLANET, C., EDDI, A., & QUÉRÉ, D. (2018). Kicked drops. *Physical Review Fluids*, 3(10), 100503. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.100503> (cf. p. 9, 10).
- CLANET, C., BÉGUIN, C., RICHARD, D., & QUÉRÉ, D. (2004). Maximal deformation of an impacting drop. *Journal of Fluid Mechanics*, 517, 199-208. <https://doi.org/10.1017/S0022112004000904> (cf. p. 10).
- COHEN, C., & CLANET, C. (2016). Physics of ball sports. *Europhysics News*, 47(3), 13-16. <https://doi.org/10.1051/epn/2016301> (cf. p. 5, 7).
- CROSS, R. (2004). Physics of overarm throwing. *American Journal of Physics*, 72(3), 305-312. <https://doi.org/10.1119/1.1634964> (cf. p. 6, 7).

- CZERNER, M., FELLAY, L. S., SUÁREZ, M. P., FRONTINI, P. M., & FASCE, L. A. (2015). Determination of Elastic Modulus of Gelatin Gels by Indentation Experiments. *Procedia Materials Science*, 8, 287-296. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2015.04.075> (cf. p. 32).
- D'ALEMBERT, J. (1747). Recherches Sur La Courbe Que Forme Une Corde Tendue Mise En Vibration. 2017, September 30 ORESME Reading Group Meeting (cf. p. 9).
- DENNY, M. (2007). *Ingenium : five machines that changed the world*. Johns Hopkins University Press. (Cf. p. 6).
- EULER, L. (1759). Sur La Force Des Colonnes. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 252-282 (cf. p. 14).
- FRENKEL, D., & SMIT, B. (2001). *Understanding Molecular Simulation : From Algorithms to Applications*. Elsevier. (Cf. p. 67).
- GIOMBINI, G., MATHIESEN, J., D'ANGELO, C., ARGENTINA, M., RAUFASTE, C., & CELESTINI, F. (2022). Use of Compliant Actuators for Throwing Rigid Projectiles. *Physical Review E*, 105(2), 025001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.025001> (cf. p. 25).
- GLADDEN, J. R., HANDZY, N. Z., BELMONTE, A., & VILLERMAUX, E. (2005). Dynamic Buckling and Fragmentation in Brittle Rods. *Physical Review Letters*, 94(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.035503> (cf. p. 13, 16).
- HOOKE, R. (1678). *Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies*. John Martyn. (Cf. p. 9).
- KIRCHHOFF, G. (1876). *Vorlesungen über mathematische Physik : Mechanik*. B. G. Teubner. (Cf. p. 16).
- KLOPSTEG, P. E. (1943). Physics of Bows and Arrows. *American Journal of Physics*, 11(4), 175-192. <https://doi.org/10.1119/1.1990474> (cf. p. 7, 12).
- KOOI, B., & SPARENBERG, J. (1997). On the mechanics of the arrow : Archer's Paradox. *Journal of Engineering Mathematics*, 31(2), 285-303. <https://doi.org/10.1023/A:1004262424363> (cf. p. 13).
- LINDBERG, H. E., & FLORENCE, A. L. (1987). *Dynamic Pulse Buckling : Theory and Experiment* (T. 12). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3657-7> (cf. p. 13, 16).
- LUKEŽIČ, A., VOJÍŘ, T., ČEHOVIN, L., MATAS, J., & KRISTAN, M. (2018). Discriminative Correlation Filter with Channel and Spatial Reliability. *International Journal of Computer Vision*, 126(7), 671-688. <https://doi.org/10.1007/s11263-017-1061-3> (cf. p. 32).
- NEUKIRCH, S., YAVARI, M., CHALLAMEL, N., & THOMAS, O. (2021). Comparison of the von Kármán and Kirchhoff models for the post-buckling and vibrations of elastic beams, 18 (cf. p. 15, 71, 84, 105).
- OWEN, K. (2022). 2010 International horseback archery gathering (Lovasíjász világtalálkozó Kaposmérő). <https://www.flickr.com/photos/neonzu1/albums/72157626449486518> (cf. p. 5).
- PARK, J. L. (2011). Arrow behaviour in free flight. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P : Journal of Sports Engineering and Technology*, 225(4), 241-252. <https://doi.org/10.1177/1754337111398542> (cf. p. 13, 14).
- PHOMSOPHA, M., LAFFAYE, G., COHEN, C., & CLANET, C. (2015). How to Use the Elasticity of a Badminton Racket to Increase Its Speed by 80%? *Computer Methods in Biomechanics*

- and Biomedical Engineering*, 18(sup1), 2028-2029. <https://doi.org/10.1080/10255842.2015.1069607> (cf. p. 8).
- PLUTARQUE. (1931). *Apophthegmata Laconica* (Loeb Classical Library edition). (Cf. p. 5).
- RAMOS CHAGAS, G., CELESTINI, F., RAUFASTE, C., GAUCHER, A., PRIM, D., AMIGONI, S., GUITTARD, F., & DARMANIN, T. (2018). Experimental Characterization of Droplet Adhesion : The Ejection Test Method (ETM) Applied to Surfaces with Various Hydrophobicity. *The Journal of Physical Chemistry A*, 122(43), 8693-8700. <https://doi.org/10.1021/acs.jpca.8bo8037> (cf. p. 11).
- RAMOS CHAGAS, G., FRADIN, C., CELESTINI, F., GUITTARD, F., & DARMANIN, T. (2019). Dynamic Wetting Properties of Mesh Substrates with Tunable Water Adhesion. *ChemPhysChem*, 20(15), 1918-1921. <https://doi.org/10.1002/cphc.201900443> (cf. p. 11).
- RAUFASTE, C., CHAGAS, G. R., DARMANIN, T., CLAUDET, C., GUITTARD, F., & CELESTINI, F. (2017). Superpropulsion of Droplets and Soft Elastic Solids. *Physical Review Letters*, 119(10). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.108001> (cf. p. 8-10, 40, 47, 101).
- RECORDS, W. G. (s. d.[a]). *Fastest Delivery of a Cricket Ball (Male)*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/fastest-bowl-of-a-cricket-ball> (cf. p. 6).
- RECORDS, W. G. (s. d.[b]). *Fastest Moving Ball Sport*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/fastest-moving-ball-sport> (cf. p. 6).
- RICHARD, D., & QUÉRÉ, D. (2000). Bouncing water drops. *Europhysics Letters (EPL)*, 50(6), 769-775. <https://doi.org/10.1209/epl/i2000-00547-6> (cf. p. 10).
- ROACH, N. T., & LIEBERMAN, D. E. (2014). Upper Body Contributions to Power Generation during Rapid, Overhand Throwing in Humans. *Journal of Experimental Biology*, 217(12), 2139-2149. <https://doi.org/10.1242/jeb.103275> (cf. p. 5).
- ROACH, N. T., VENKADESAN, M., RAINBOW, M. J., & LIEBERMAN, D. E. (2013). Elastic Energy Storage in the Shoulder and the Evolution of High-Speed Throwing in Homo. *Nature*, 498, 483-486 (cf. p. 5).
- TAËRON, P. (2022). *Baliste*. <https://www.larousse.fr/encyclopedie/images/Baliste/1001120> (cf. p. 5).
- TIMOSHENKO, P. S. (1921). LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264> (cf. p. 13).
- VANDERHOEK, R. (1998). *The Atlatl and Dart* [thèse de doct., University of Illinois at Urbana-Champaign]. Department of Anthropology. (Cf. p. 114).
- VILLERMAUX, E., KEREMIDIS, K., VANDENBERGHE, N., QOMI, M. J. A., & ULM, F.-J. (2021). Mode Coarsening or Fracture : Energy Transfer Mechanisms in Dynamic Buckling of Rods. *Physical Review Letters*, 126(4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.045501> (cf. p. 16).
- ZANEVSKYY, I. (2001). Lateral deflection of archery arrows. *Sports Engineering*, 20 (cf. p. 7, 12, 16).

RÉSUMÉ

Les lancers balistiques précis et efficaces ont permis à l'espèce humaine de se développer, notamment par le biais de la chasse, soit à main nue, soit via l'utilisation d'un instrument. En pratique, plus un projectile est lourd, plus il est facile de lui conférer de l'énergie cinétique lors d'un lancer. Pour les projectiles légers, une quantité importante de l'énergie disponible reste en général piégée dans le corps humain ou dans l'instrument utilisé et le rendement énergétique est faible. Dans ce cas, il est possible d'utiliser l'élasticité d'un projectile déformable pour qu'il soit lancé avec une énergie cinétique plus importante que s'il était rigide : c'est le mécanisme de superpropulsion. Cette thèse présente la recherche de ce phénomène et des conditions de son émergence pour deux systèmes différents. Dans les deux cas, une déformation élastique est obtenue en réponse à la sollicitation longitudinale appliquée par un lanceur au mouvement harmonique imposé. L'efficacité d'un lancer est quantifiée au moyen du coefficient de transfert d'énergie qui compare l'énergie transmise au projectile à l'énergie cinétique qu'aurait obtenue un objet rigide.

Dans une première étude, nous proposons de lancer un projectile rigide au moyen d'un lanceur adjoint d'une couche de matériau mou d'épaisseur ajustable qui est en adhésion avec le lanceur mais pas avec le projectile. Cette étude mêle une approche expérimentale à des simulations numériques et un modèle analytique basés sur la résolution de l'équation d'onde à une dimension. Ces trois approches ont montré qu'un effet superpropulsif peut être obtenu pour une combinaison de deux ajustements : une synchronisation des temps caractéristiques de sollicitation par le lanceur et de déformation de la couche molle et un choix intelligent de la proportion de couche molle dans le système couche molle-projectile rigide permet d'observer un effet superpropulsif. Le coefficient de transfert d'énergie décrit un paysage complexe dans l'espace des paramètres de contrôle. Pour des paramètres bien choisis qui ont été déterminés, l'éjection en présence d'une couche molle peut être jusqu'à quatre fois plus efficace que le simple lancer d'un objet rigide. Ceci représente un record parmi toutes les études sur la superpropulsion.

Dans une deuxième étude, nous avons considéré l'éjection de projectiles élastiques qui ont la particularité de présenter des déformations transverses sous une sollicitation axiale. Nous avons choisi des projectiles homogènes et des projectiles lestés à la manière des flèches d'archerie. L'approche expérimentale a permis de mettre en évidence la superpropulsion des projectiles élastiques élastiques lestés. Des simulations numériques ont permis de mettre en évidence un comportement original du coefficient de transfert d'énergie en fonction des paramètres sans dimension du système. Un modèle analytique prédit une tendance unique en bon accord avec les résultats des deux premières approches en fonction d'un seul paramètre sans dimension fonction des paramètres précédents. L'éjection optimale est attendue lorsque la force inertielle imposée par le lanceur est de l'ordre de la force de flambement du projectile.

Mots-clés : SUPERPROPULSION – LANCER – VITESSE D'ÉJECTION – ÉNERGIE CINÉTIQUE – ÉLASTICITÉ – FLAMBEMENT DYNAMIQUE