



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIÉRIE



ÉCOLE
CENTRALE LYON

Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter

Thibaut Vadcard

26 avril 2023

Membres du jury :

M.-A. Galland	École Centrale de Lyon	examinatrice
C. Béguin	Polytechnique Montréal	examinateur
G. Kerschen	Université de Liège	rapporteur
Z. Liu	École de Technologie Supérieure	rapporteur
F. Thouverez	École Centrale de Lyon	co-directeur de thèse
A. Batailly	Polytechnique Montréal	co-directeur de thèse



LABORATOIRE
D'ANALYSE
VIBRATOIRE ET
ACOUSTIQUE



Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes

Introduction

Contexte et enjeux
industriels

Interactions aube/carter

Problème à résoudre

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

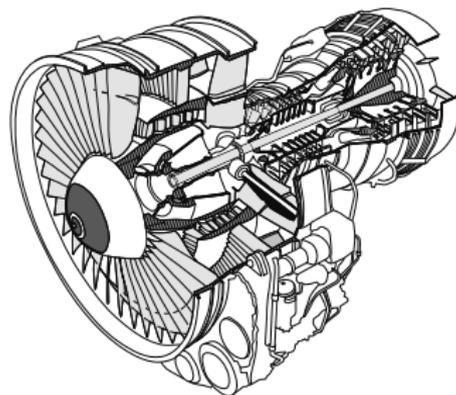
1 Introduction



Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NOx de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

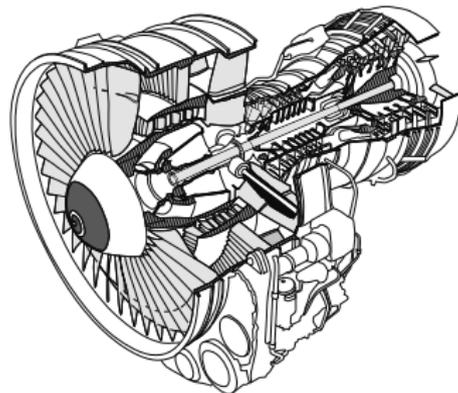
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NOx de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

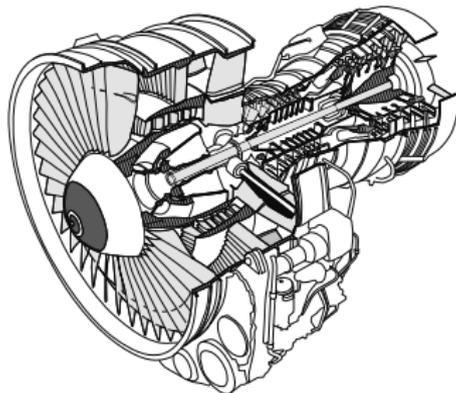
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NO_x de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

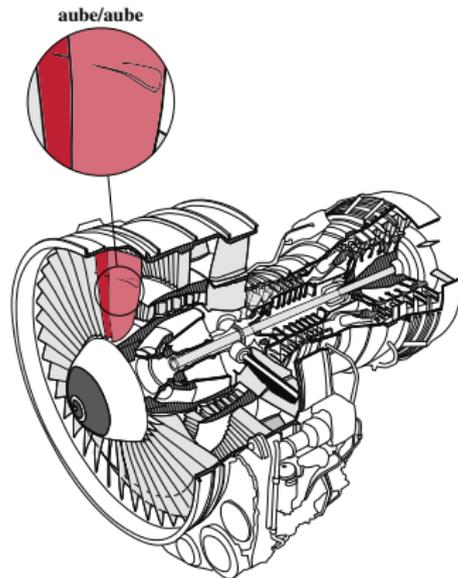
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NO_x de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

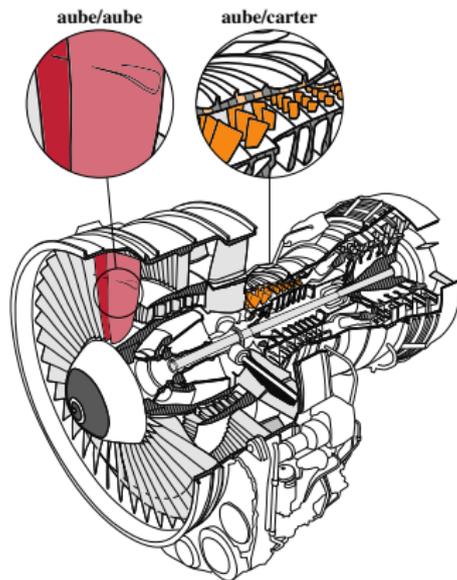
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NOx de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

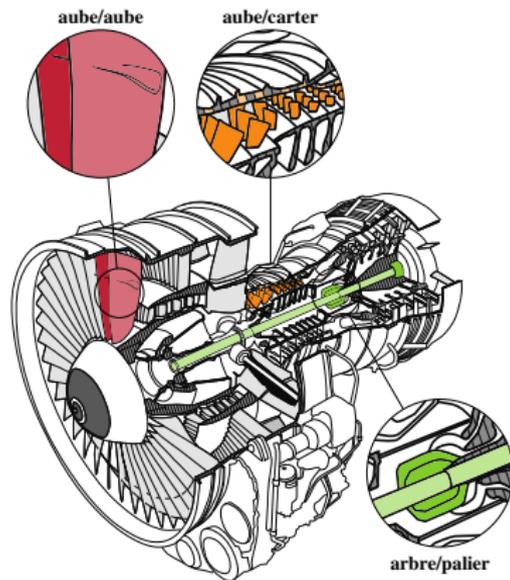
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NO_x de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

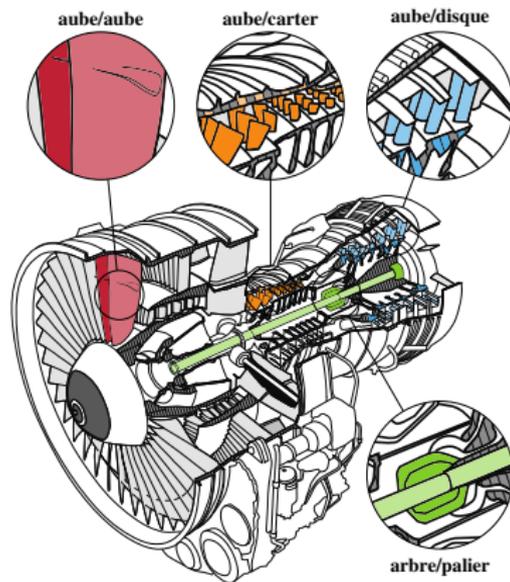
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NO_x de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

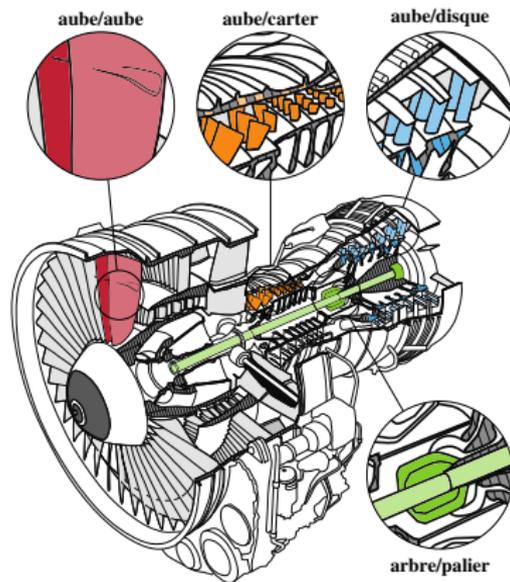
Impact environnemental

D'ici à 2050¹ :

- diminution du bruit de 65%
- réduction des rejets de NO_x de 90%
- limitation des émissions de CO₂ de 65%

Défis de conception

- augmentation du rendement des turbomachines
- réduction de la masse des pièces
- maîtrise des niveaux vibratoires
→ nécessité de modéliser les non-linéarités



turbomachine aéronautique²

Modélisation des interfaces de contact

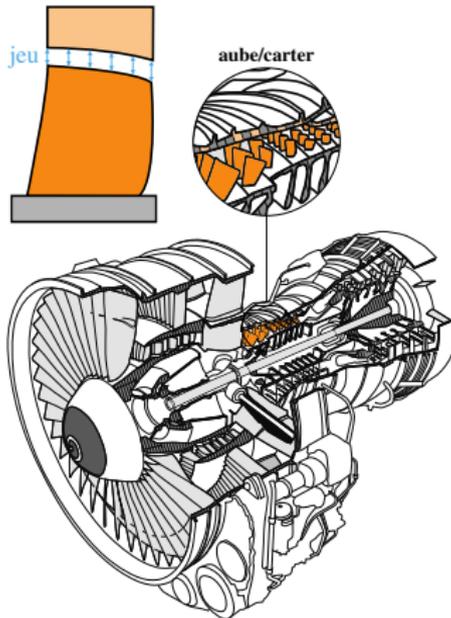
- défis théoriques : lois de contact non régulières, phénoménologie complexe
- défis numériques : modèles de grande taille, temps de calcul

¹ ACARE : Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe, url : www.acare4europe.org

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Jeux fonctionnels

- rendement du moteur positivement impacté par la réduction des jeux, mais ...

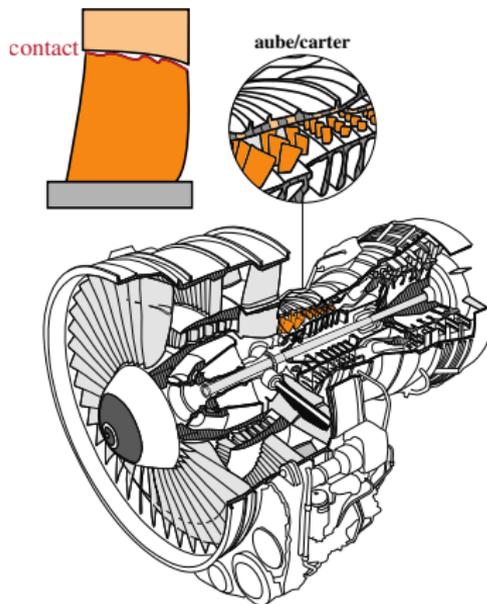


turbomachine aéronautique²

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Jeux fonctionnels

- rendement du moteur positivement impacté par la réduction des jeux, mais ...
- contacts structurels plus probables



turbomachine aéronautique²

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

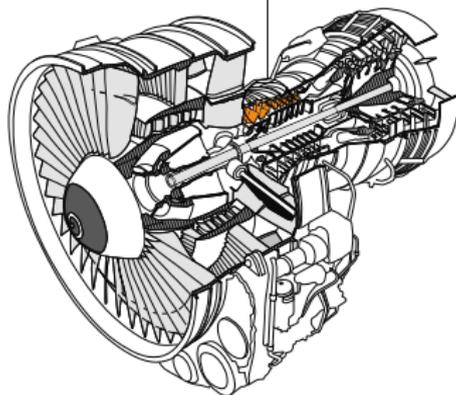
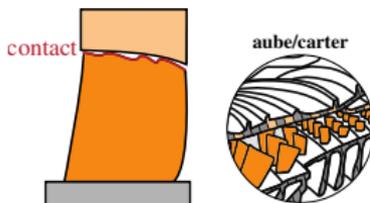
Interactions aube/carter

Jeux fonctionnels

- rendement du moteur positivement impacté par la réduction des jeux, mais ...
- contacts structurels plus probables

Interface aube/carter

- vitesses relatives élevées
- phénomènes multi-physiques
- décalage des fréquences de résonance



turbomachine aéronautique²

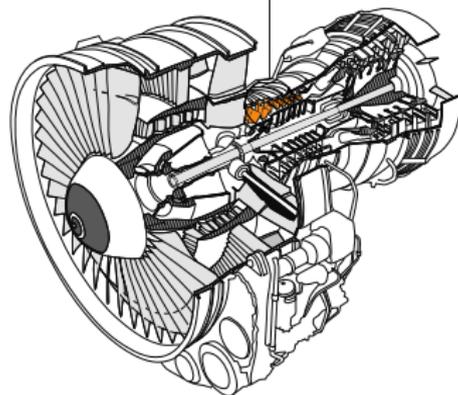
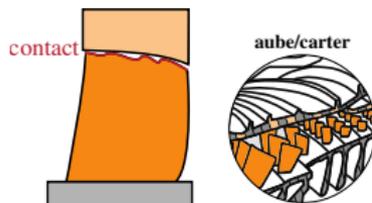
Interactions aube/carter

Jeux fonctionnels

- rendement du moteur positivement impacté par la réduction des jeux, mais ...
- contacts structurels plus probables

Interface aube/carter

- vitesses relatives élevées
- phénomènes multi-physiques
- décalage des fréquences de résonance



Besoin industriel

turbomachine aéronautique²

- modélisation du phénomène de contact aube/carter
- outil numérique prédictif
- meilleure compréhension des événements de contact → enjeux de certification

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Équation du mouvement non linéaire

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \alpha \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (1)$$

conditions de résolution :

- 1 déterminer les efforts de contact $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$
- 2 garantir le respect de l'équation du mouvement (1)



Problème à résoudre

Équation du mouvement non linéaire

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \alpha \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (1)$$

conditions de résolution :

- 1 déterminer les efforts de contact $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$
- 2 garantir le respect de l'équation du mouvement (1)

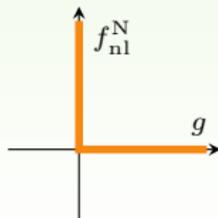
Conditions de contact unilatéral (Hertz-Signorini-Moreau)

$$0 \leq g(t) \perp f_{nl}^N(t) \geq 0 \quad (2)$$

avec

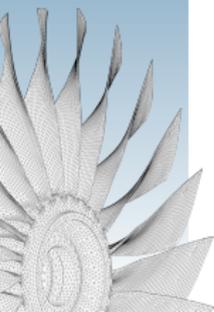
$g(t)$: jeu entre les structures

$f_{nl}^N(t)$: efforts de contact dans la direction normale





2 État de l'art et problématiques





Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

- ³ [CARPENTER et al.](#) « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).
- ⁴ [MOREAU.](#) « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).
- ⁵ [JEAN.](#) « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).
- ⁶ [PAOLI et al.](#) « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).

Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

Paradigme fréquentiel^{7,8}

-
- 3 CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).
 - 4 MOREAU. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).
 - 5 JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).
 - 6 PAOLI et al. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).
 - 7 VON GROLL et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* (2001).
 - 8 NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).

Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

Paradigme fréquentiel^{7,8}

Avantages

- simplicité d'implémentation
- extension multi-physique/multi-non linéaire aisée
- régimes transitoires et apériodiques accessibles

³ CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).

⁴ MOREAU. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).

⁵ JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).

⁶ PAOLI et al. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).

⁷ VON GROLL et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* (2001).

⁸ NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).

Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

Paradigme fréquentiel^{7,8}

Avantages

- simplicité d'implémentation
- extension multi-physique/multi-non linéaire aisée
- régimes transitoires et apériodiques accessibles

Défis

- multiplicité de solutions
- solutions périodiques

- 3 CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).
- 4 MOREAU. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).
- 5 JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).
- 6 PAOLI et al. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).
- 7 VON GROLL et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* (2001).
- 8 NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).

Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

Avantages

- simplicité d'implémentation
- extension multi-physique/multi-non linéaire aisée
- régimes transitoires et apériodiques accessibles

Défis

- multiplicité de solutions
- solutions périodiques

Paradigme fréquentiel^{7,8}

Avantages

- solutions périodiques
- multiplicité de solutions

- 3 CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).
- 4 MOREAU. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).
- 5 JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).
- 6 PAOLI et al. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).
- 7 VON GROLL et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* (2001).
- 8 NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).

Résolution du problème de contact

Paradigme temporel^{3,4,5,6}

Avantages

- simplicité d'implémentation
- extension multi-physique/multi-non linéaire aisée
- régimes transitoires et apériodiques accessibles

Défis

- multiplicité de solutions
- solutions périodiques

Paradigme fréquentiel^{7,8}

Avantages

- solutions périodiques
- multiplicité de solutions

Défis

- théorie complexe
- lois non linéaires exprimées dans le domaine temporel
- simulations multi-non linéaires

3 CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).

4 MOREAU. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications* (1988).

5 JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1999).

6 PAOLI et al. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* (2002).

7 VON GROLL et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* (2001).

8 NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).



Moyens expérimentaux

- Ohio State University^{10,11}
- TU Dresden¹²
- École Centrale de Lyon¹³

⁹ JACQUET-RICHARDET et al. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2013).

¹⁰ PADOVA et al. « Experimental Results From Controlled Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Speed ». *J. Turbomach.* (2006).

¹¹ REIFSNYDER et al. « Experimental Determination of Blade Tip Rub Forces in a Multiblade System ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2023).

¹² NITSCHKE et al. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* (2019).

¹³ ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». *Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon*, 2014.





Moyens expérimentaux

- Ohio State University^{10, 11}
- TU Dresden¹²
- École Centrale de Lyon¹³

Paradigme temporel

contact aube/carter + ...

- thermo-élasticité¹⁴
- usure¹⁶
- grandes déformations¹⁵
- désaccordage¹⁷

⁹ JACQUET-RICHARDET et al. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2013).

¹⁰ PADOVA et al. « Experimental Results From Controlled Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Speed ». *J. Turbomach.* (2006).

¹¹ REIFSNYDER et al. « Experimental Determination of Blade Tip Rub Forces in a Multiblade System ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2023).

¹² NITSCHKE et al. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* (2019).

¹³ ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2014.

¹⁴ GUÉRIN et al. « Thermomechanical Model Reduction for Efficient Simulations of Rotor-Stator Contact Interaction ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2018).

¹⁵ DELHEZ et al. « Assessment of Geometric Nonlinearities Influence On NASA Rotor 37 Response to Blade Tip/Casing Rubbing Events ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).

¹⁶ LEGRAND et al. « Numerical Investigation of Abradable Coating Wear Through Plastic Constitutive Law : Application to Aircraft Engines ». *ASME IDETC-CIE*. 2009.

¹⁷ NYSSSEN et al. « Investigation on the robustness of rotor/stator contact interactions with respect to small mistuning ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).



Moyens expérimentaux

- Ohio State University^{10,11}
- TU Dresden¹²
- École Centrale de Lyon¹³

Paradigme temporel

contact aube/carter + ...

- thermo-élasticité¹⁴
- usure¹⁶
- grandes déformations¹⁵
- désaccordage¹⁷

Paradigme fréquentiel

algorithmes de gestion du contact :

- loi de pénalité¹⁸
- loi de pénalité régularisée + filtrage¹⁹

⁹ JACQUET-RICHARDET et al. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2013).

¹⁰ PADOVA et al. « Experimental Results From Controlled Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Speed ». *J. Turbomach.* (2006).

¹¹ REIFSNYDER et al. « Experimental Determination of Blade Tip Rub Forces in a Multiblade System ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2023).

¹² NITSCHKE et al. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* (2019).

¹³ ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibrotoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2014.

¹⁴ GUÉRIIN et al. « Thermomechanical Model Reduction for Efficient Simulations of Rotor-Stator Contact Interaction ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2018).

¹⁵ DELHEZ et al. « Assessment of Geometric Nonlinearities Influence On NASA Rotor 37 Response to Blade Tip/Casing Rubbing Events ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).

¹⁶ LEGRAND et al. « Numerical Investigation of Abradable Coating Wear Through Plastic Constitutive Law : Application to Aircraft Engines ». *ASME IDETC-CIE*. 2009.

¹⁷ NYSSSEN et al. « Investigation on the robustness of rotor/stator contact interactions with respect to small mistuning ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).

¹⁸ PETROV. « Multiharmonic Analysis of Nonlinear Whole Engine Dynamics With Bladed Disc-Casing Rubbing Contacts ». *ASME Turbo Expo*. 2012.

¹⁹ COLATIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).



Moyens expérimentaux

- Ohio State University^{10, 11}
- TU Dresden¹²
- École Centrale de Lyon¹³

Paradigme temporel

contact aube/carter + ...

- thermo-élasticité¹⁴
- usure¹⁶
- grandes déformations¹⁵
- désaccordage¹⁷

Paradigme fréquentiel

algorithmes de gestion du contact :

- loi de pénalité¹⁸
- loi de pénalité régularisée + filtrage¹⁹
- **lagrangiens augmentés**

⁹ JACQUET-RICHARDET et al. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2013).

¹⁰ PADOVA et al. « Experimental Results From Controlled Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Speed ». *J. Turbomach.* (2006).

¹¹ REIFSNYDER et al. « Experimental Determination of Blade Tip Rub Forces in a Multiblade System ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2023).

¹² NITSCHKE et al. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* (2019).

¹³ ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibrotoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2014.

¹⁴ GUÉRIIN et al. « Thermomechanical Model Reduction for Efficient Simulations of Rotor-Stator Contact Interaction ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2018).

¹⁵ DELHEZ et al. « Assessment of Geometric Nonlinearities Influence On NASA Rotor 37 Response to Blade Tip/Casing Rubbing Events ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).

¹⁶ LEGRAND et al. « Numerical Investigation of Abradable Coating Wear Through Plastic Constitutive Law : Application to Aircraft Engines ». *ASME IDETC-CIE*. 2009.

¹⁷ NYSSSEN et al. « Investigation on the robustness of rotor/stator contact interactions with respect to small mistuning ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2021).

¹⁸ PETROV. « Multiharmonic Analysis of Nonlinear Whole Engine Dynamics With Bladed Disc-Casing Rubbing Contacts ». *ASME Turbo Expo*. 2012.

¹⁹ COLATIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).





Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires





Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires
- méthodes de pénalité sensibles au choix de la raideur de contact





Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires
- méthodes de pénalité sensibles au choix de la raideur de contact
- lagrangiens augmentés utilisés dans l'industrie pour les non-linéarités de frottement





Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires
- méthodes de pénalité sensibles au choix de la raideur de contact
- lagrangiens augmentés utilisés dans l'industrie pour les non-linéarités de frottement

Objectifs des travaux de thèse

- 1 utilisation de lagrangiens augmentés dans le domaine fréquentiel pour du contact aube/carter





Problématiques

Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires
- méthodes de pénalité sensibles au choix de la raideur de contact
- lagrangiens augmentés utilisés dans l'industrie pour les non-linéarités de frottement

Objectifs des travaux de thèse

- 1 utilisation de lagrangiens augmentés dans le domaine fréquentiel pour du contact aube/carter
- 2 comparaison des différentes méthodes de gestion du contact du domaine fréquentiel





Problématiques

Problématiques

- besoin d'informations sur les solutions périodiques non linéaires
- méthodes de pénalité sensibles au choix de la raideur de contact
- lagrangiens augmentés utilisés dans l'industrie pour les non-linéarités de frottement

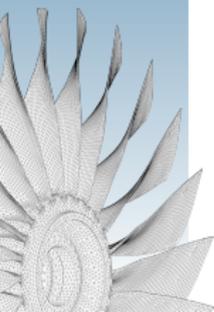
Objectifs des travaux de thèse

- 1 utilisation de lagrangiens augmentés dans le domaine fréquentiel pour du contact aube/carter
- 2 comparaison des différentes méthodes de gestion du contact du domaine fréquentiel
- 3 détection automatique de branches de solutions isolées sur des modèles industriels



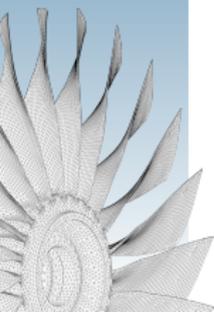


3 Dynamic Lagrangian Frequency-Time — Harmonic Balance Method (DLFT-HBM)



Formalisme

Postulat : excitation périodique \Rightarrow réponse synchrone



Formalisme

Postulat : excitation périodique \Rightarrow réponse synchrone

Forme de la solution : série de Fourier tronquée

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (3)$$



Formalisme

Postulat : excitation périodique \Rightarrow réponse synchrone

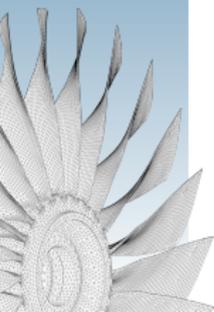
Forme de la solution : série de Fourier tronquée

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (3)$$

Problème fréquentiel

Projection de Fourier-Galerkine : problème différentiel \rightarrow problème algébrique

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} - \tilde{\mathbf{f}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (4)$$



Formalisme

Postulat : excitation périodique \Rightarrow réponse synchrone

Forme de la solution : série de Fourier tronquée

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (3)$$

Problème fréquentiel

Projection de Fourier-Galerkine : problème différentiel \rightarrow problème algébrique

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} - \tilde{\mathbf{f}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Résolu à l'aide de :

- méthode itérative de Newton-Raphson
- procédure de continuation par longueur d'arc
- condensation exacte des degrés de liberté linéaires



Formalisme

Postulat : excitation périodique \Rightarrow réponse synchrone

Forme de la solution : série de Fourier tronquée

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (3)$$

Problème fréquentiel

Projection de Fourier-Galerkine : problème différentiel \rightarrow problème algébrique

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{nl} - \tilde{\mathbf{f}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (4)$$

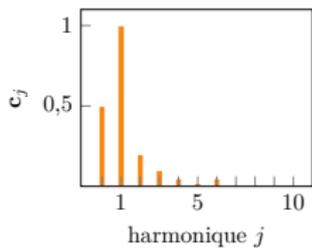
Résolu à l'aide de :

- méthode itérative de Newton-Raphson
- procédure de continuation par longueur d'arc
- condensation exacte des degrés de liberté linéaires

Évaluation des efforts non linéaires ?

domaine
fréquentiel

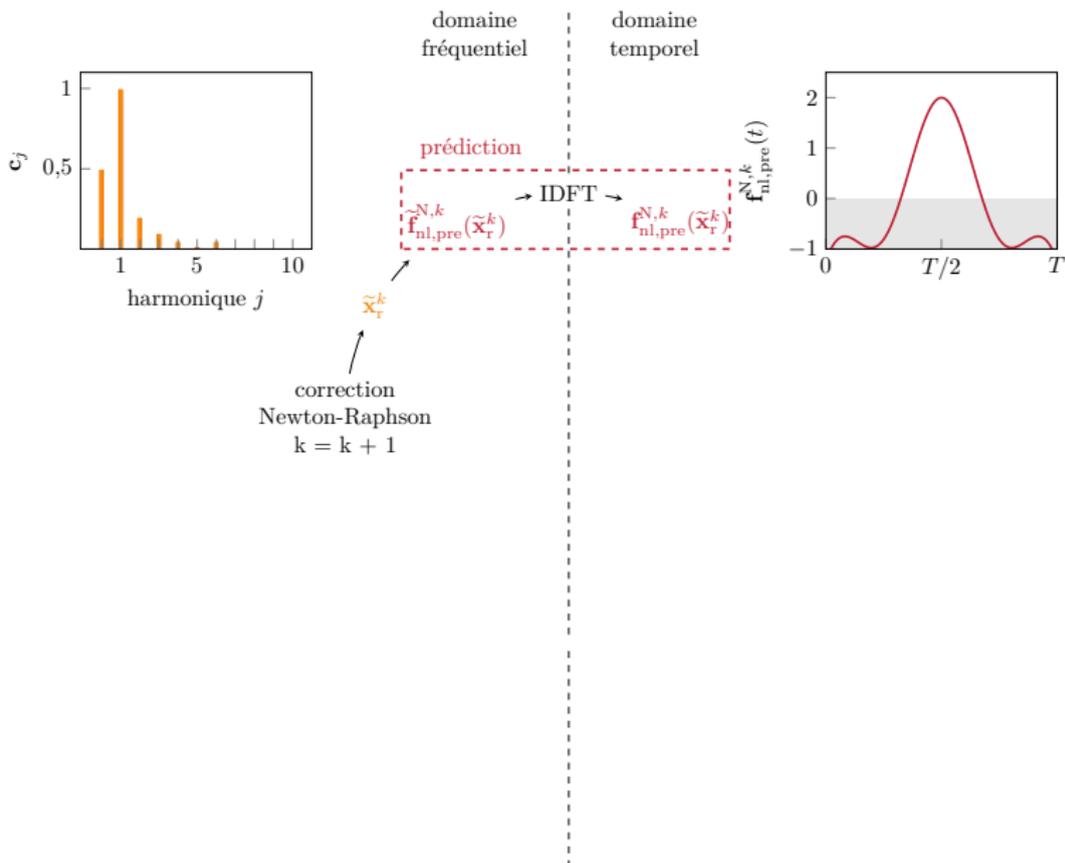
domaine
temporel



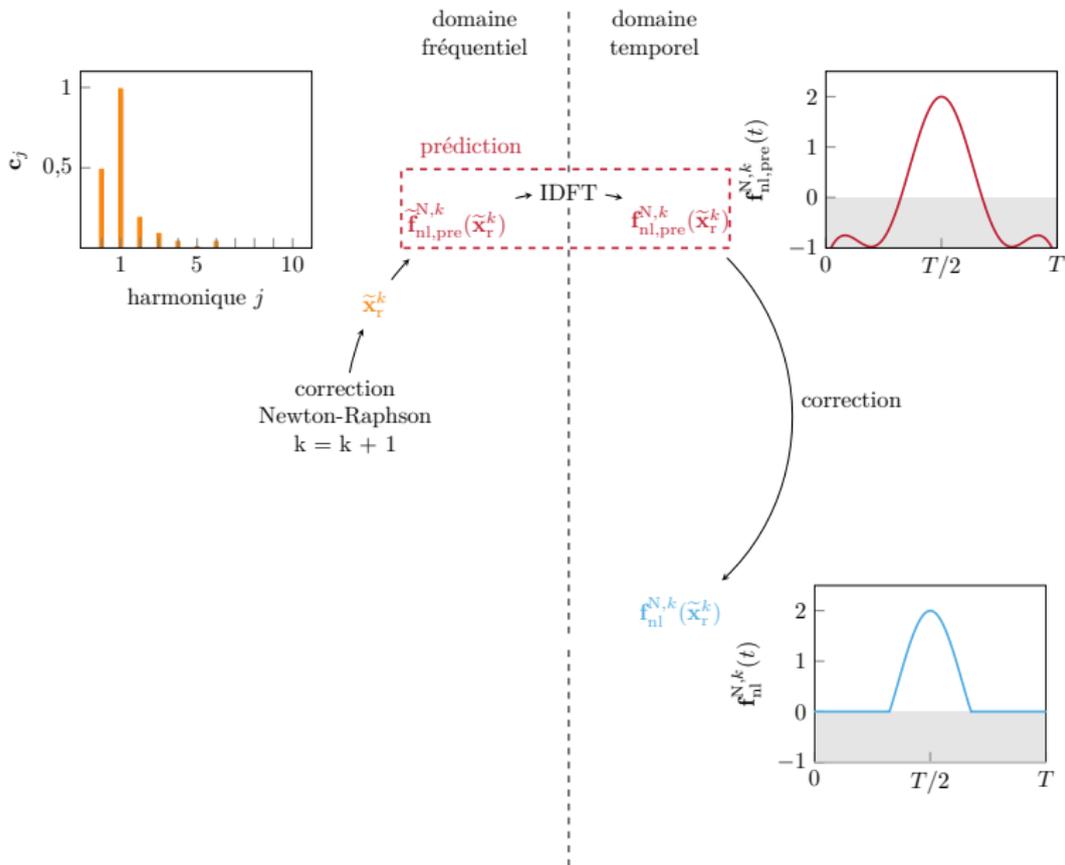
\tilde{x}_r^k

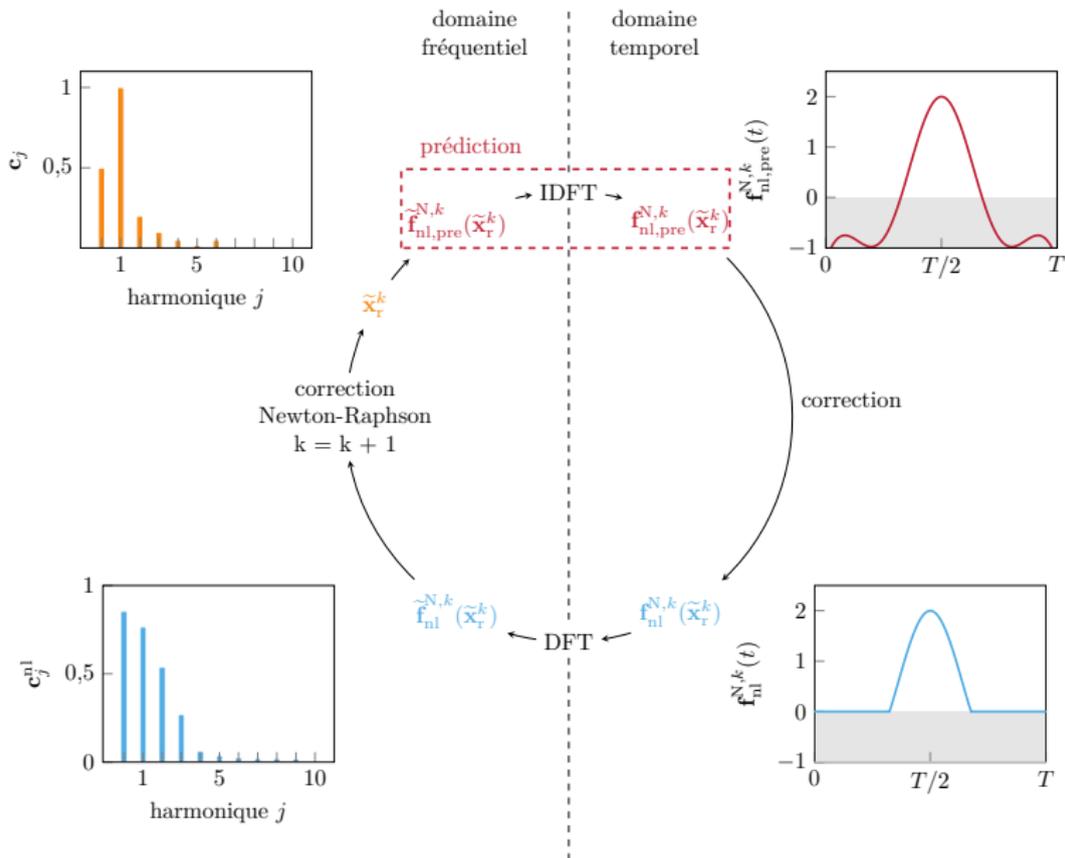
correction
Newton-Raphson
 $k = k + 1$

⁸ NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).



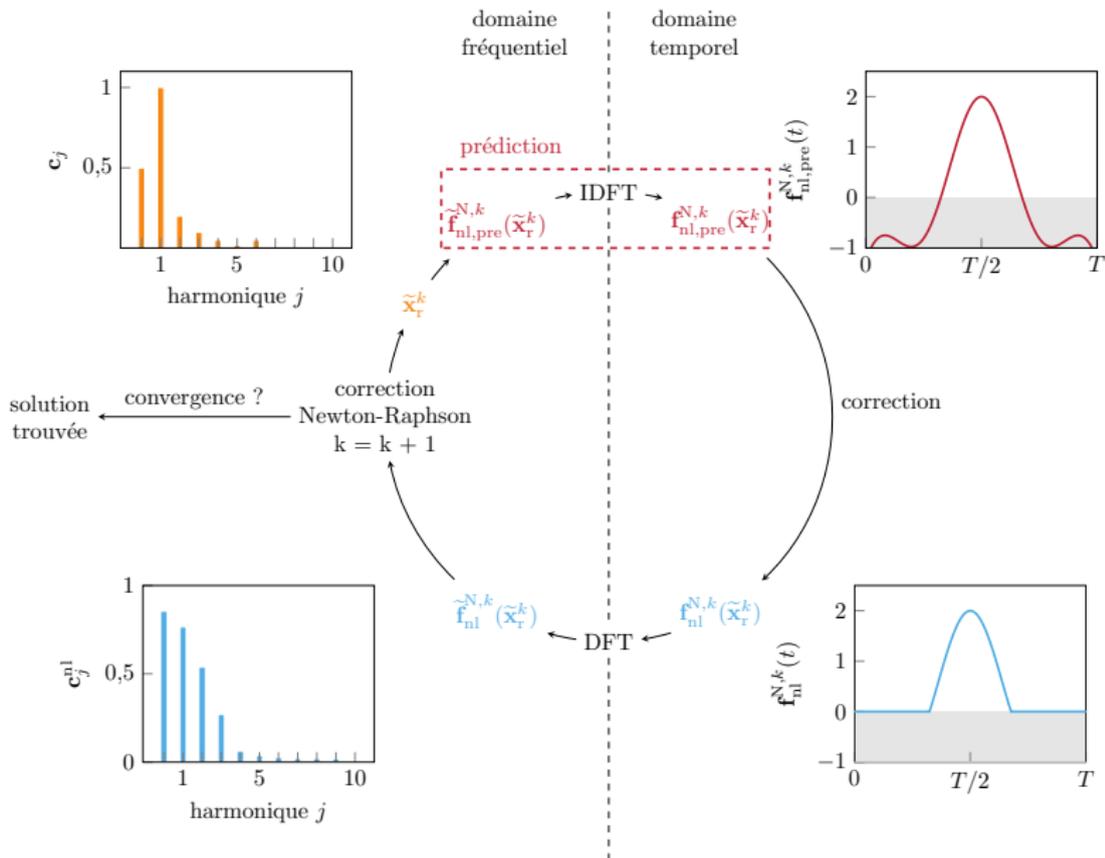
⁸ NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).





⁸ NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).

DLFT-HBM⁸



⁸ NACIVET et al. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* (2003).



Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

**Configuration
académique**

Barre éléments finis

LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

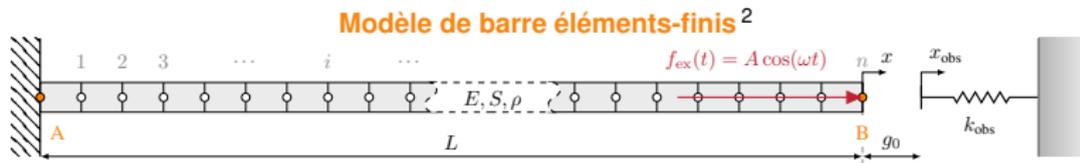
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

4 Configuration académique

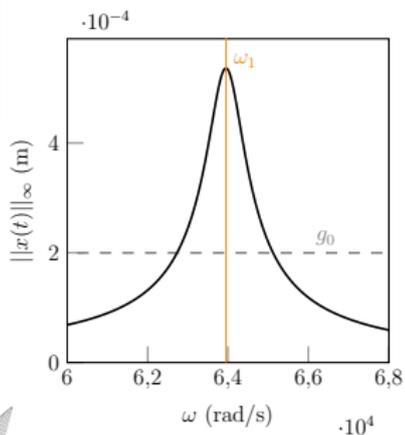
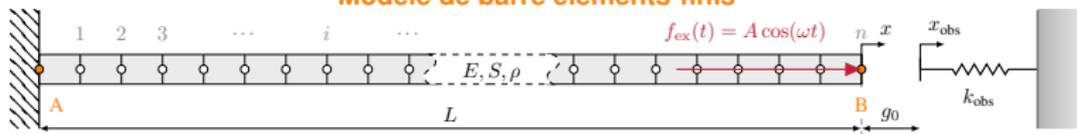


Barre éléments-finis²



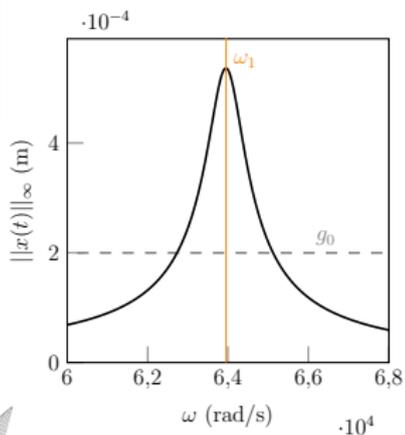
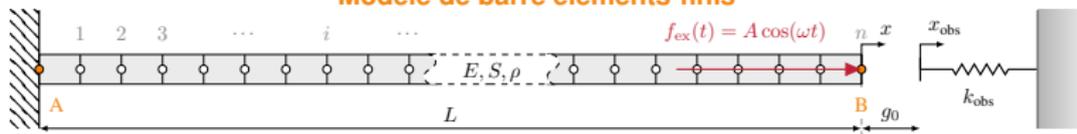
² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Modèle de barre éléments-finis²



² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Modèle de barre éléments-finis²

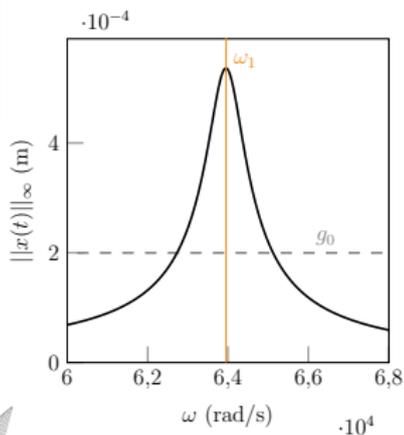
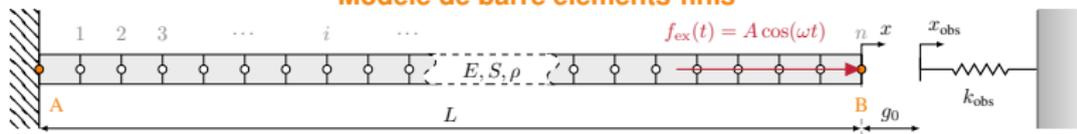


Objectifs de l'étude

- 1 valider la DLFT-HBM par rapport à une stratégie de référence

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Modèle de barre éléments-finis²

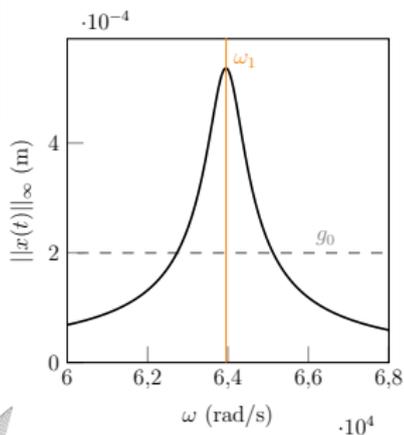
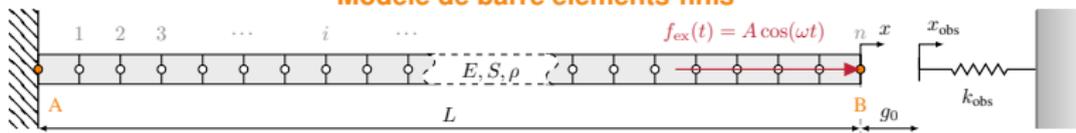


Objectifs de l'étude

- 1 valider la DLFT-HBM par rapport à une stratégie de référence
- 2 étudier le comportement de la HBM en vibro-impact

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Modèle de barre éléments-finis²



Objectifs de l'étude

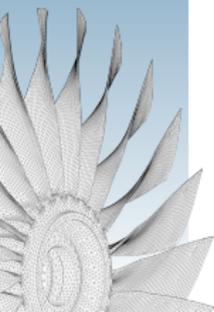
- 1 valider la DLFT-HBM par rapport à une stratégie de référence
- 2 étudier le comportement de la HBM en vibro-impact
- 3 comparer deux stratégies fréquentielles : DLFT-HBM et LCP-HBM

² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.

Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

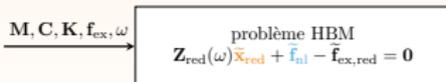
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$



Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

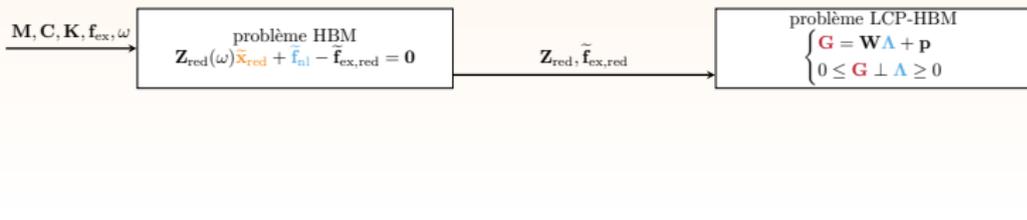
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$

LCP-HBM²⁰

Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

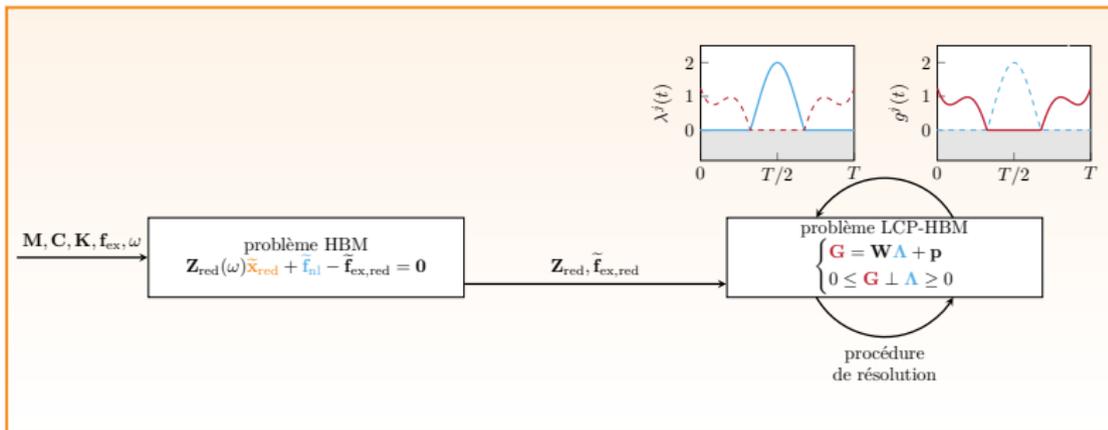
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$

LCP-HBM²⁰

Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

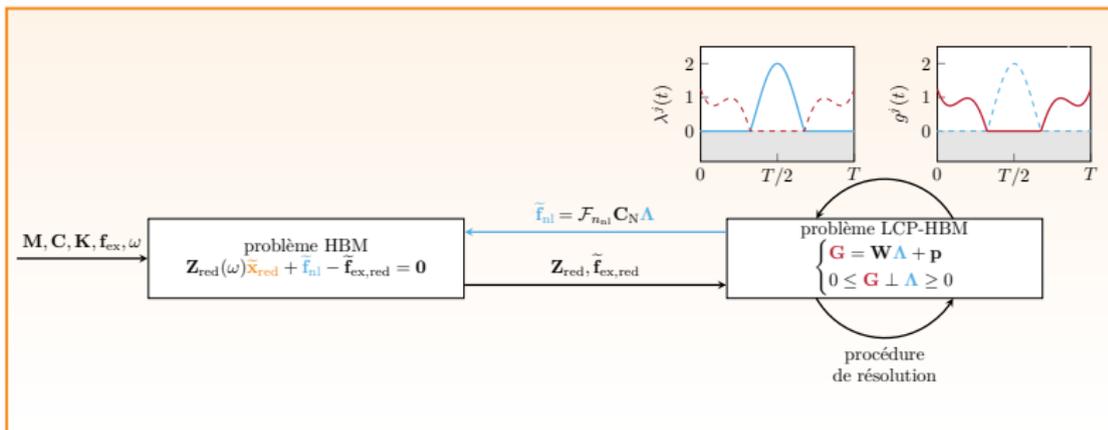
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$

LCP-HBM²⁰

Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

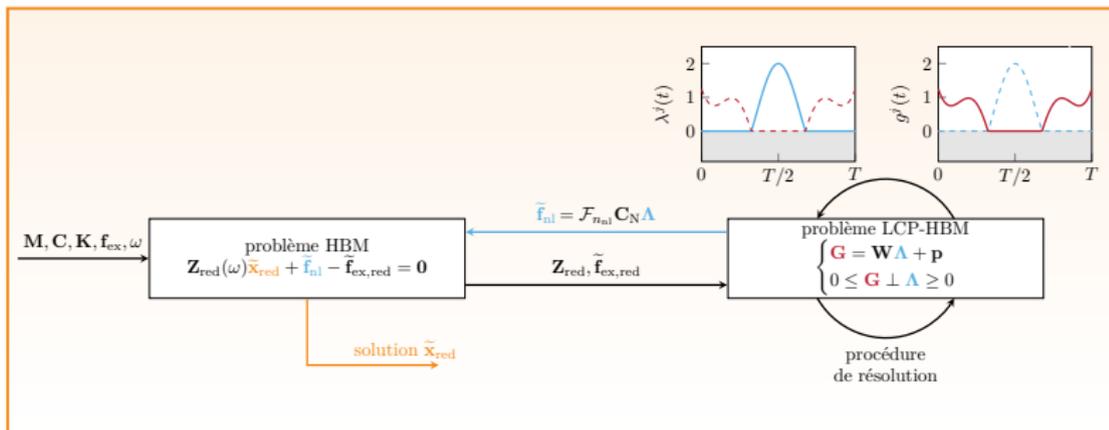
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$

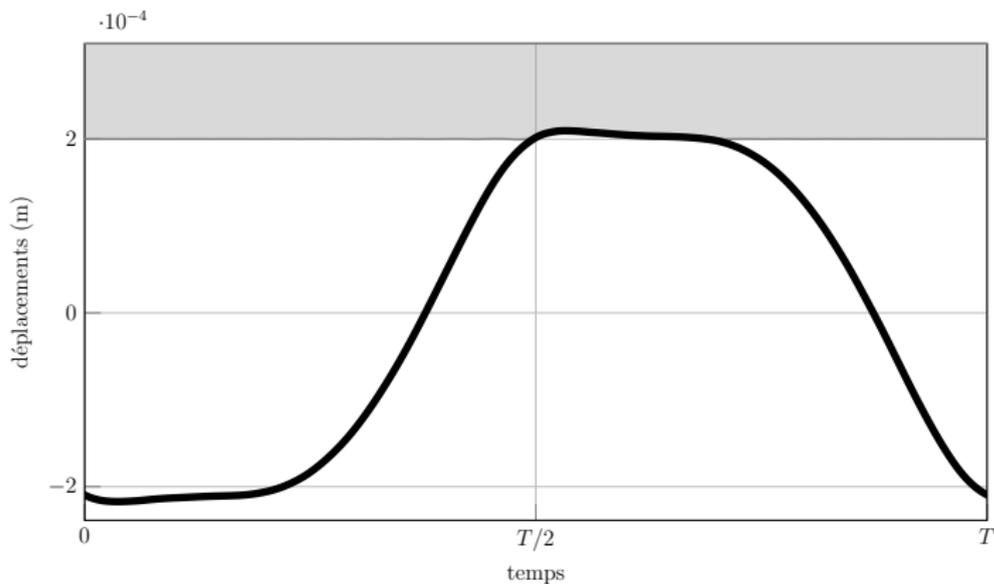
LCP-HBM²⁰

Problème de complémentarité linéaire (LCP)

- formulé dans le domaine temporel
- prise en compte directe des conditions de contact
- soluble par des méthodes dédiées

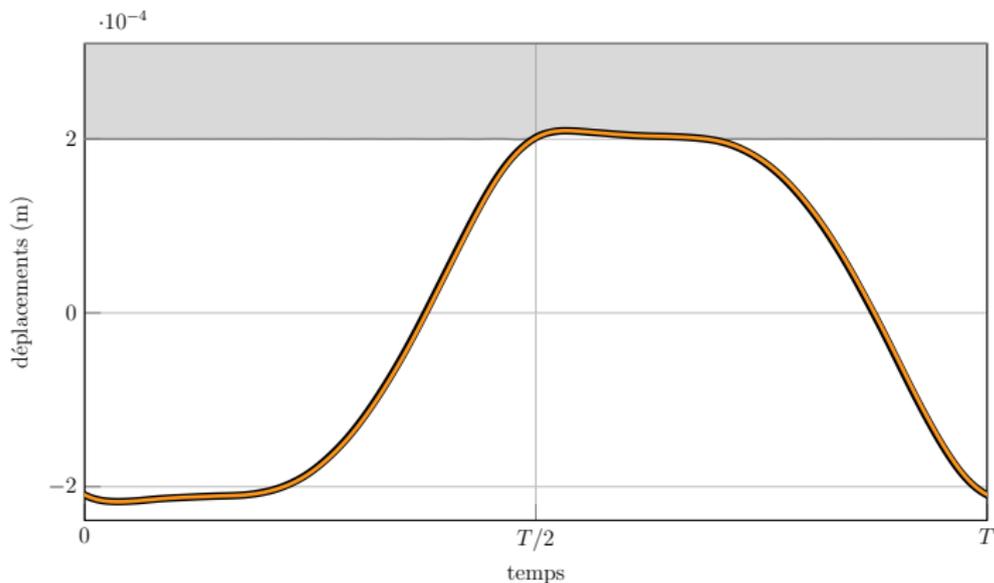
$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{p} & (5a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 & (5b) \end{cases}$$

LCP-HBM²⁰



IT (pénalité) (—), obstacle (■)





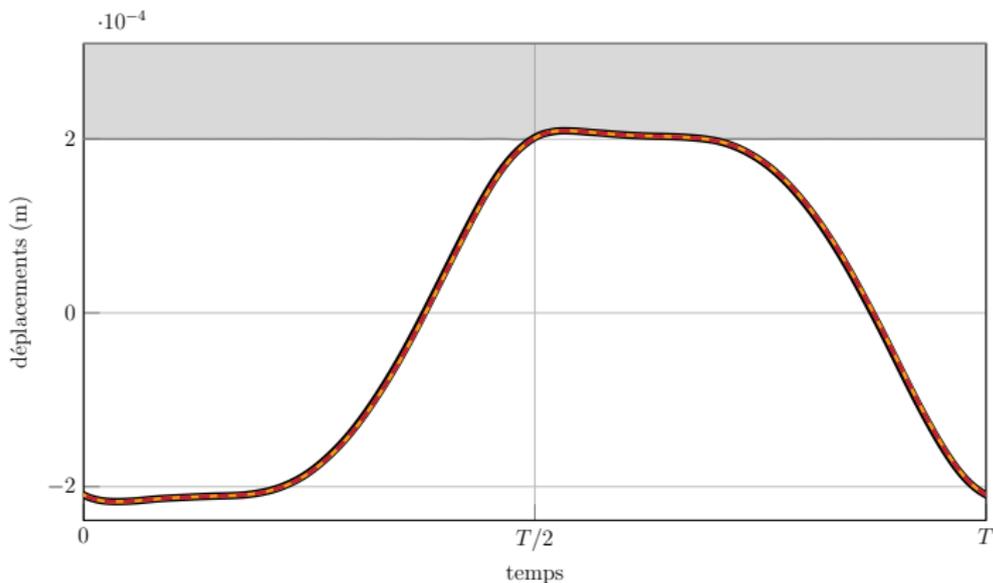
IT (pénalité) (—), obstacle (□), DLFT-HBM (—)

excellent accord entre :

- IT et DLFT-HBM



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : déplacements



IT (pénalité) (—), obstacle (□), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (- -)

excellent accord entre :

- IT et DLFT-HBM
- DLFT-HBM et LCP-HBM

Comment observer précisément les différences entre les méthodologies ?

Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : déplacements

Soutenance
de doctorat

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

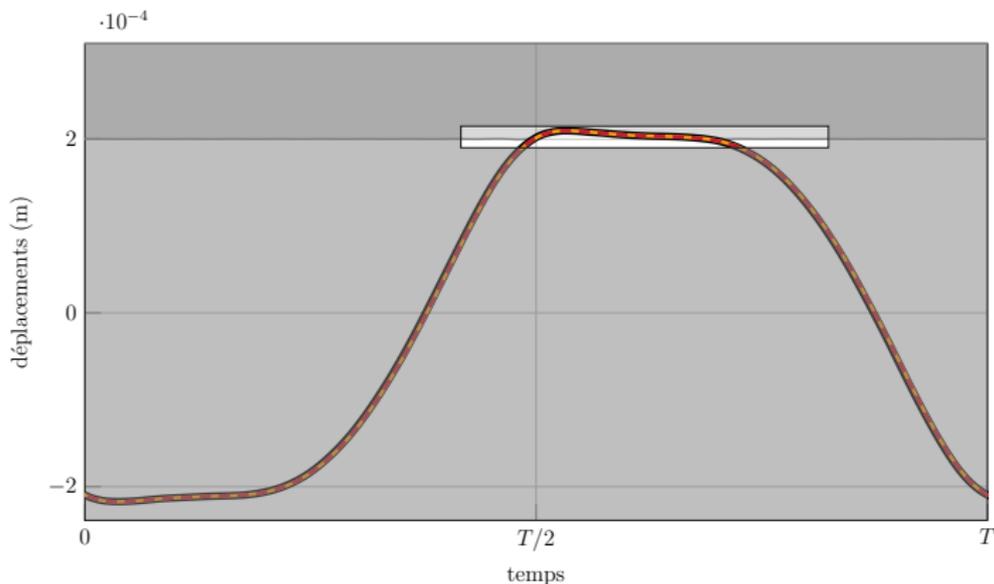
LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



IT (pénalité) (—), obstacle (□), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (- -)

excellent accord entre :

- IT et DLFT-HBM
- DLFT-HBM et LCP-HBM

Comment observer précisément les différences entre les méthodologies ?

Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : déplacements

Soutenance
de doctorat

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

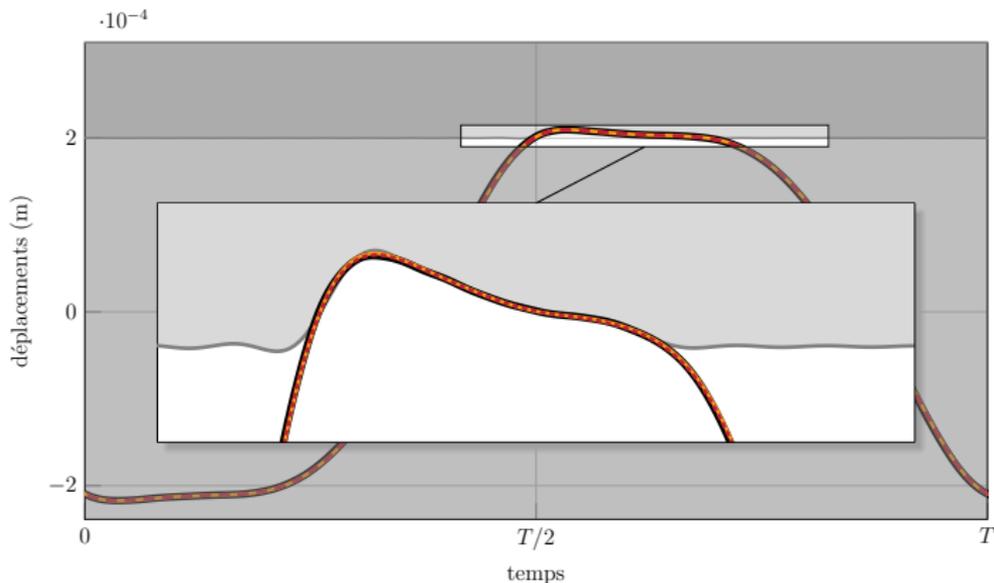
LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



IT (pénalité) (—), obstacle (□), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (- -)

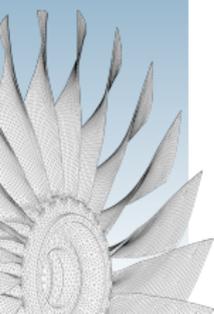
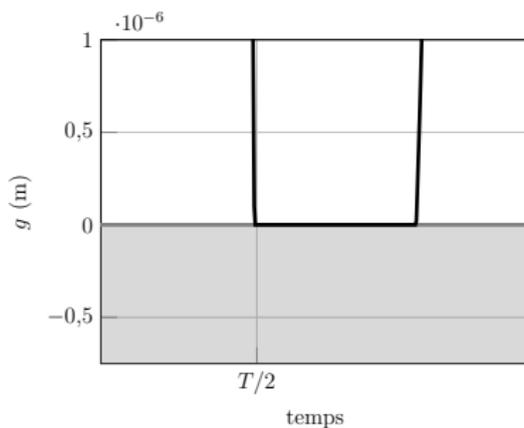
excellent accord entre :

- IT et DLFT-HBM
- DLFT-HBM et LCP-HBM

Comment observer précisément les différences entre les méthodologies ?

→ grandeurs locales au contact

DLFT-HBM



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : jeu & efforts

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

LCP-HBM

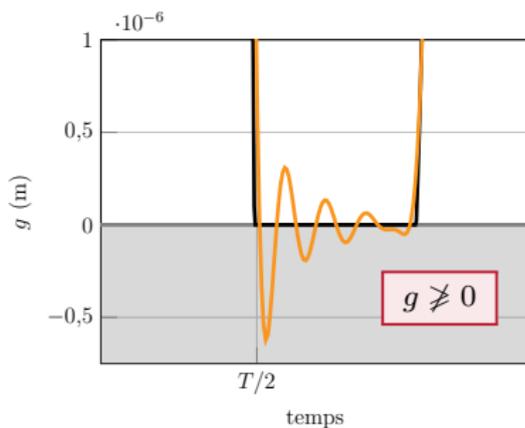
Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

DLFT-HBM



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : jeu & efforts

Soutenance
de doctorat

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

LCP-HBM

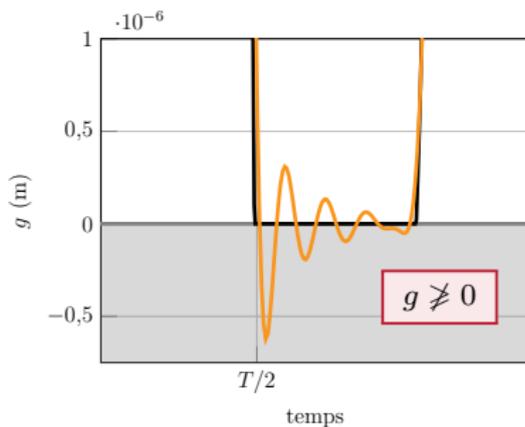
Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

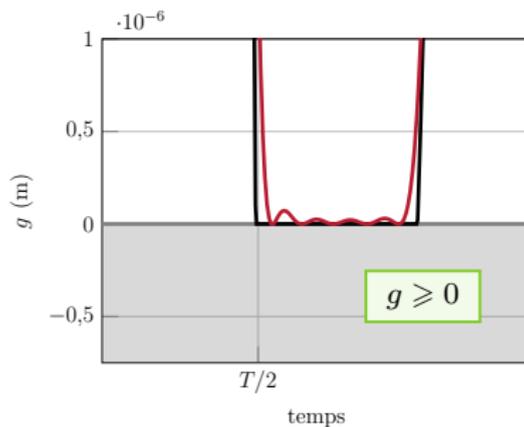
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

DLFT-HBM



LCP-HBM



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : jeu & efforts

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

LCP-HBM

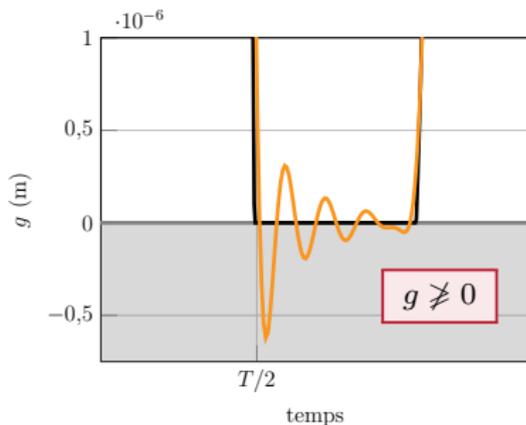
Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

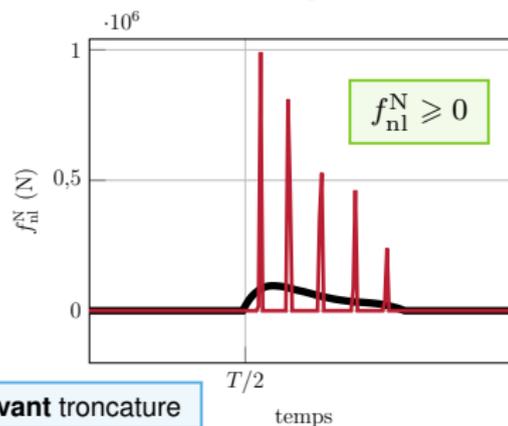
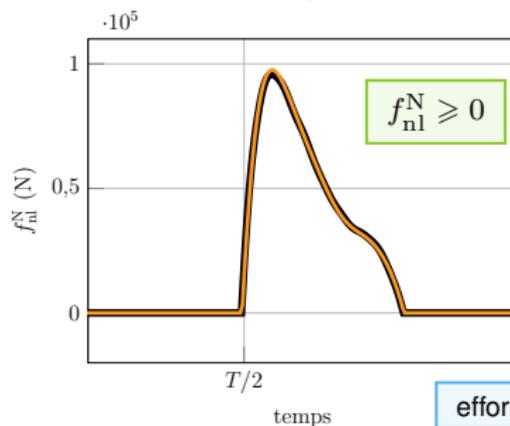
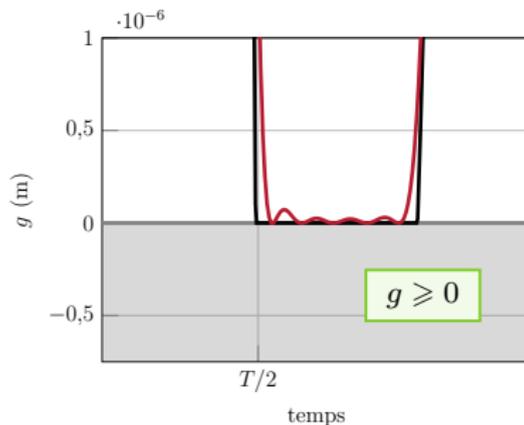
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

DLFT-HBM



LCP-HBM



efforts avant troncature

Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : jeu & efforts

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

LCP-HBM

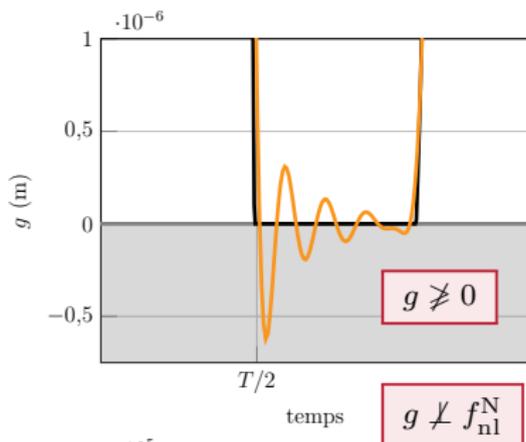
Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

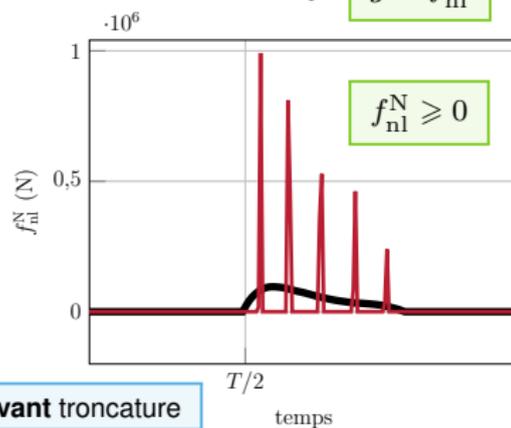
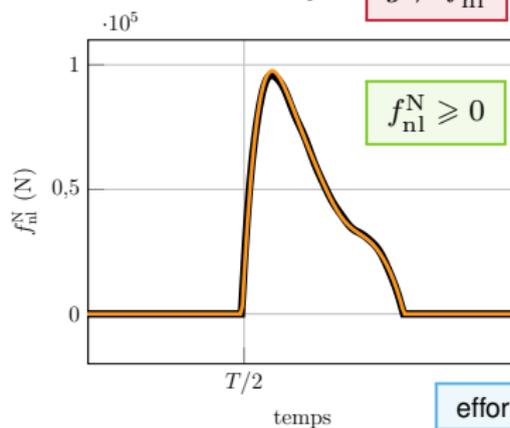
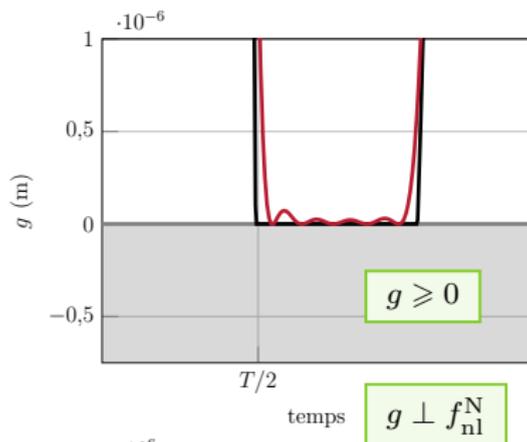
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

DLFT-HBM



LCP-HBM



efforts avant troncature

Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : jeu & efforts

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

LCP-HBM

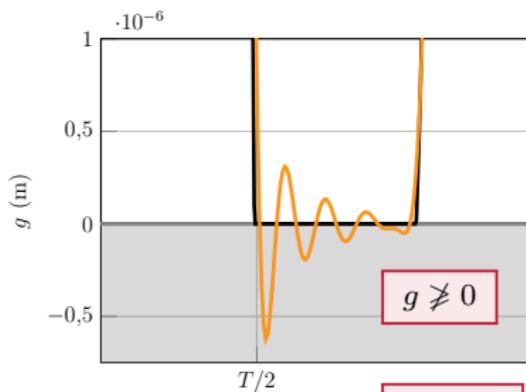
Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

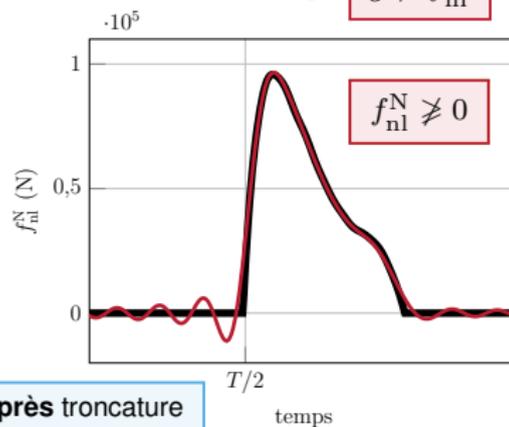
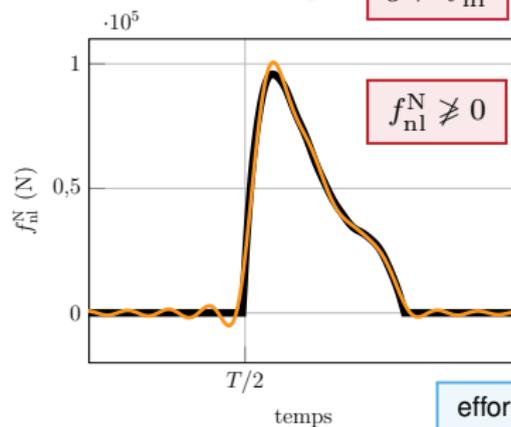
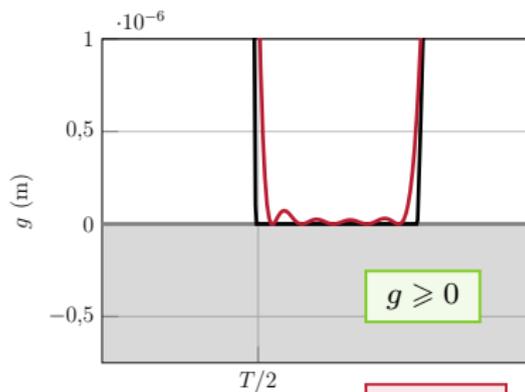
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

DLFT-HBM



LCP-HBM



efforts après troncature

Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : loi de contact

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

**Configuration
académique**

Barre éléments finis

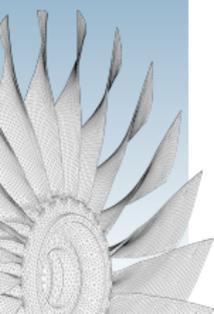
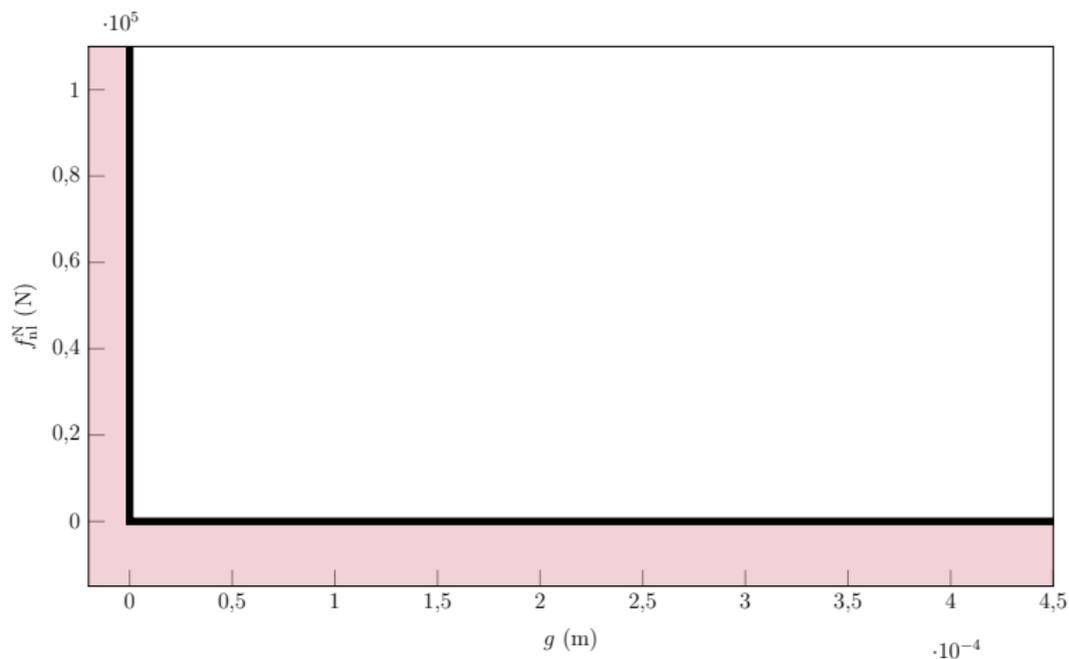
LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en reponse forcee

Conclusion



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : loi de contact

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

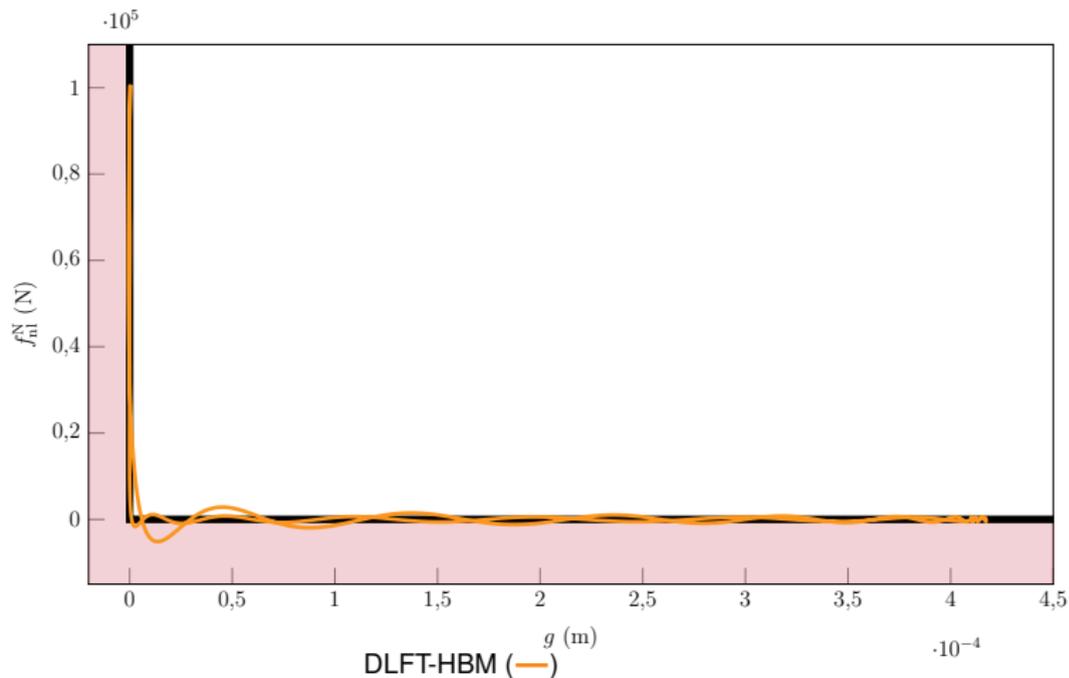
LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en reponse forcee

Conclusion



Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : loi de contact

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Barre éléments finis

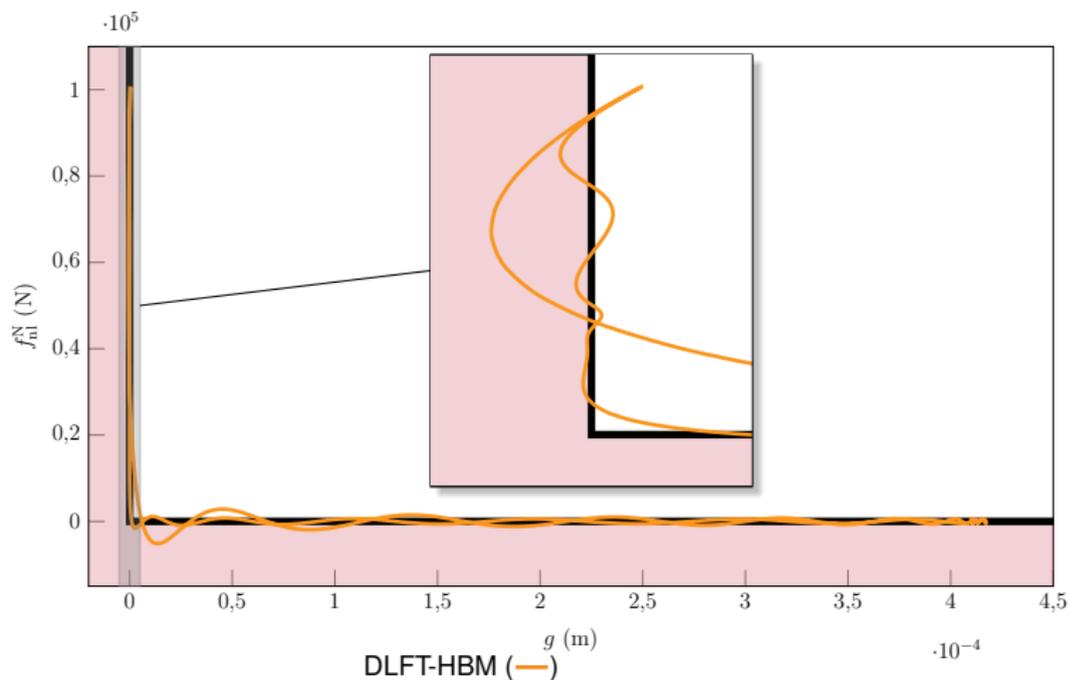
LCP-HBM

Comparaison DLFT-HBM —
LCP-HBM

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

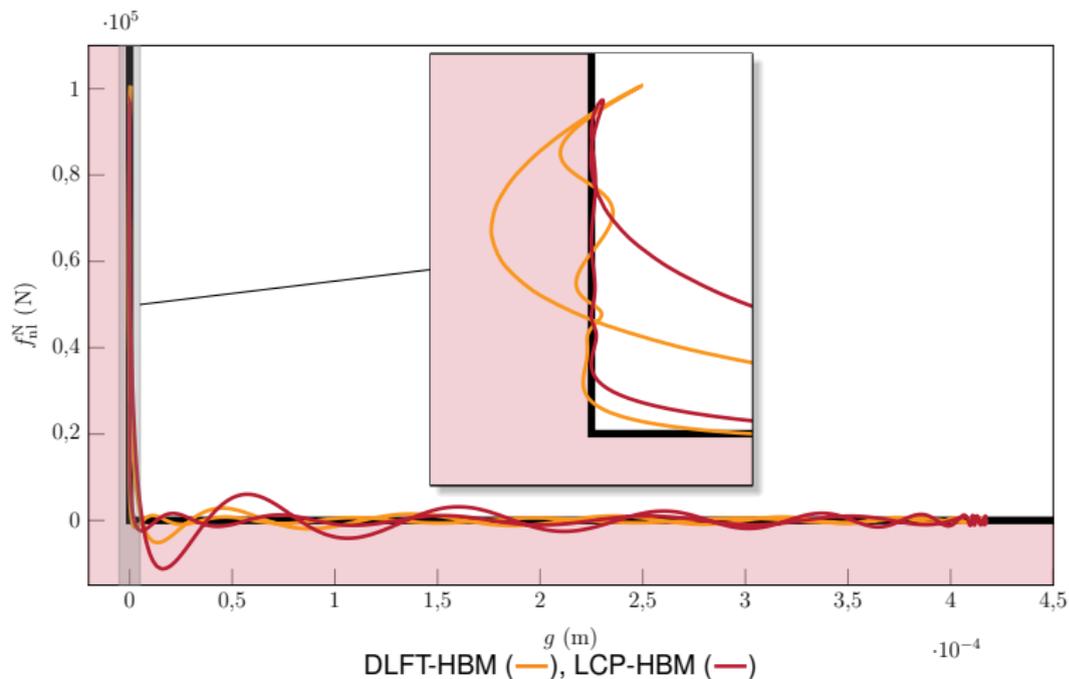
Conclusion



Récapitulatif (après troncature)

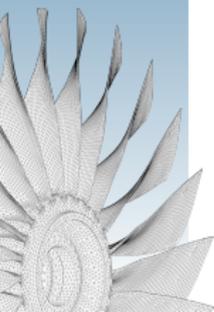
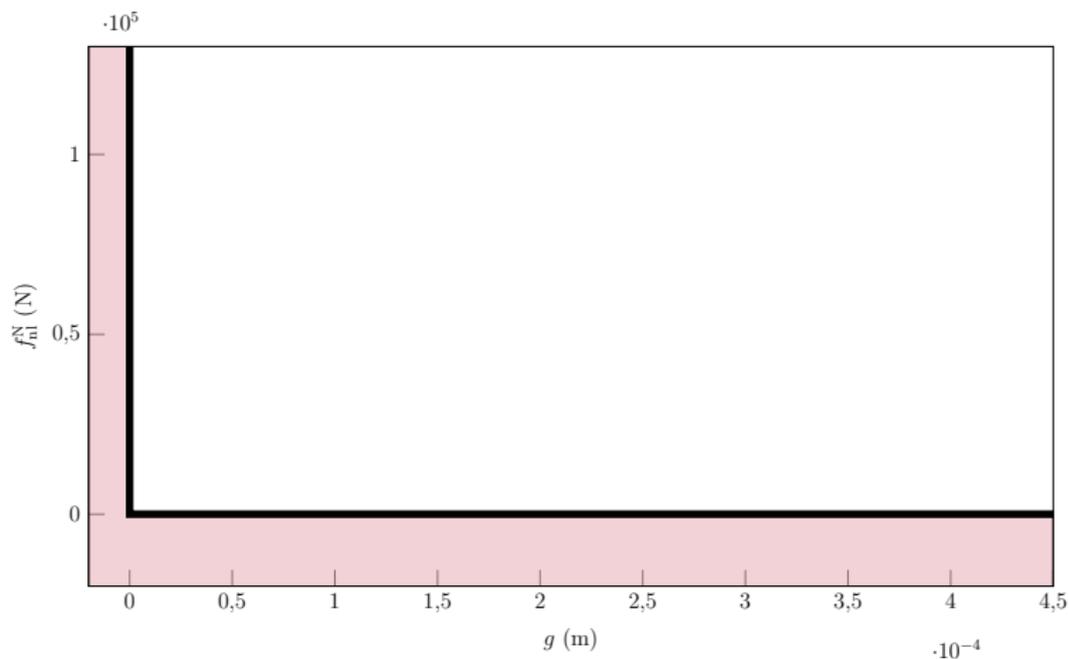
- DLFT-HBM : $0 \not\leq g \not\leq f_{nl}^N \not\leq 0$

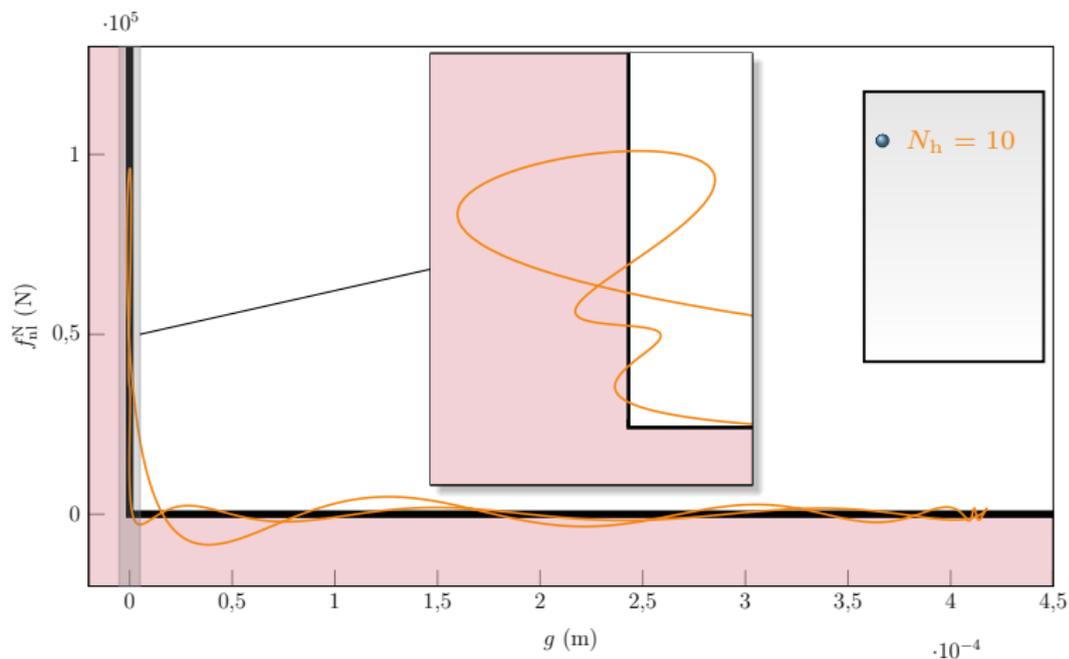
Comparaison DLFT-HBM — LCP-HBM : loi de contact

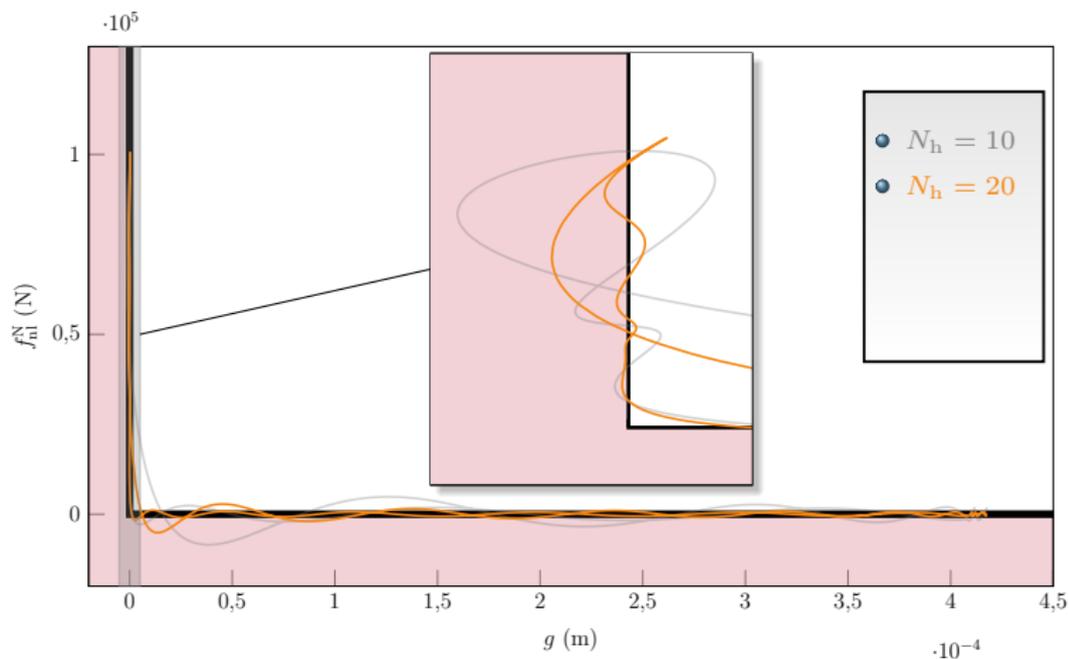


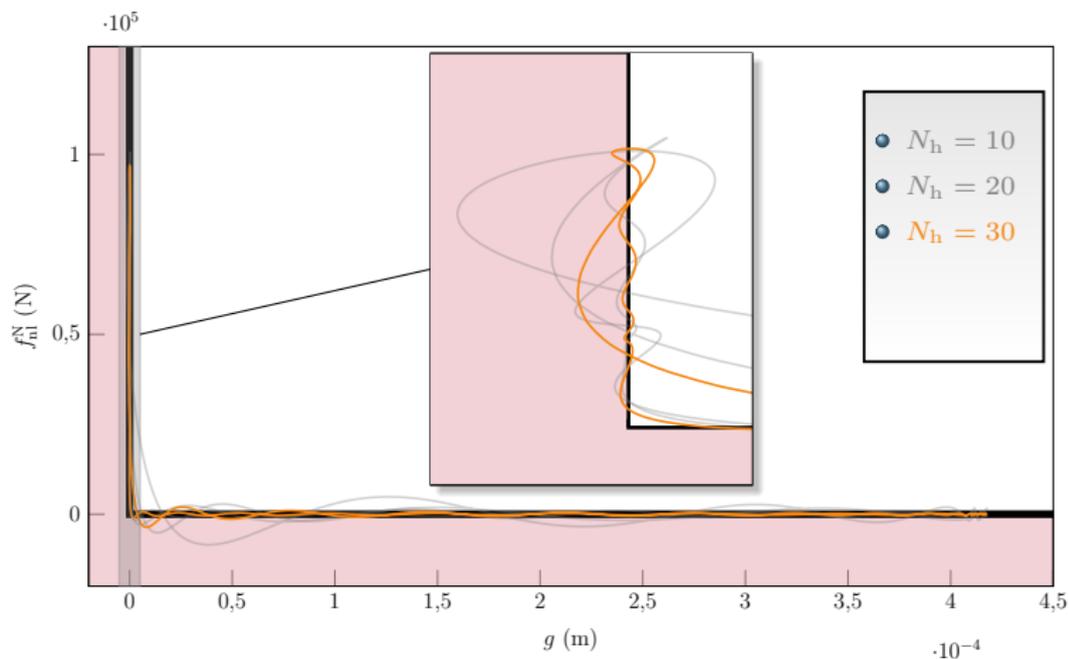
Récapitulatif (après troncature)

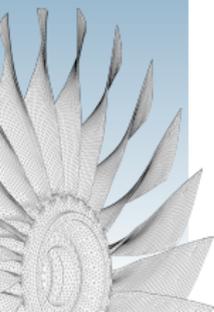
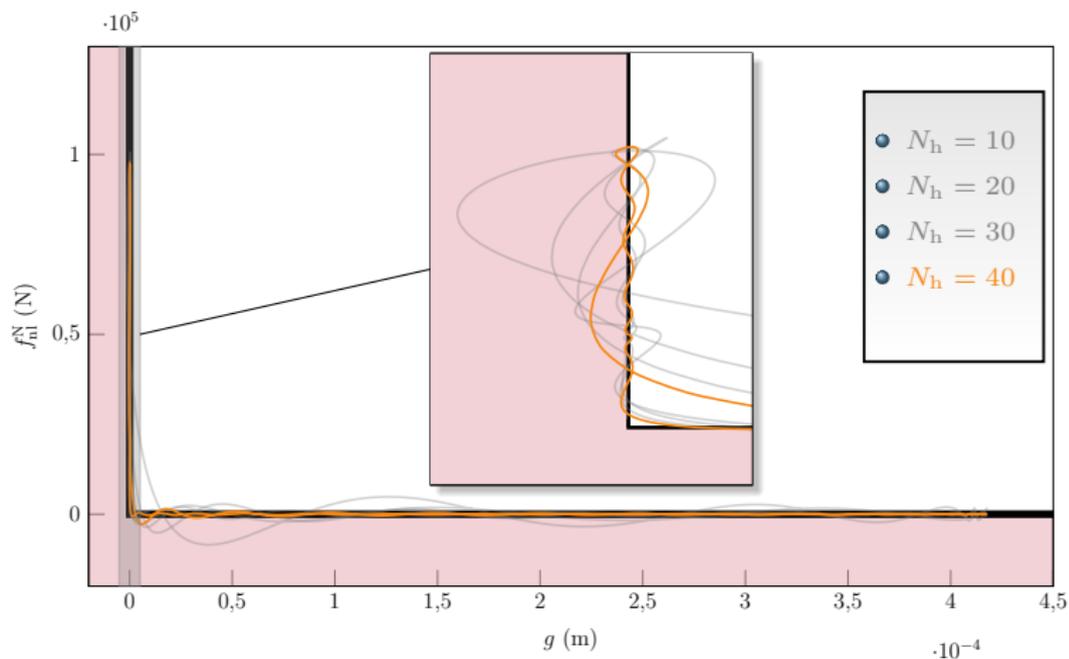
- **DLFT-HBM** : $0 \not\leq g \not\leq f_{nl}^N \not\leq 0$
- **LCP-HBM** : $0 \leq g \not\leq f_{nl}^N \not\leq 0$

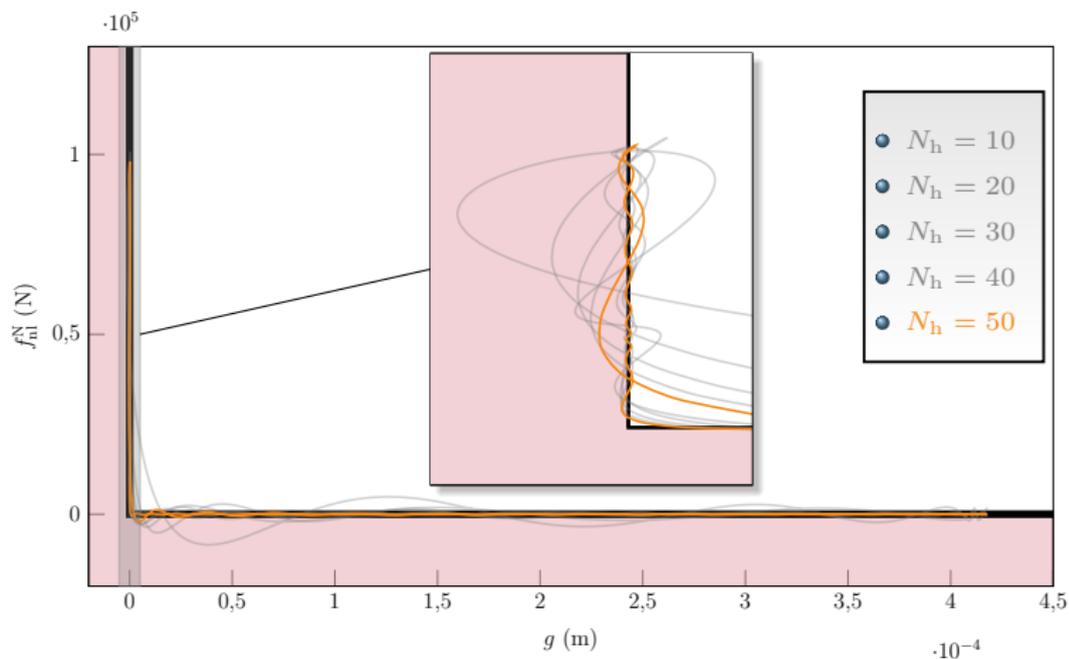


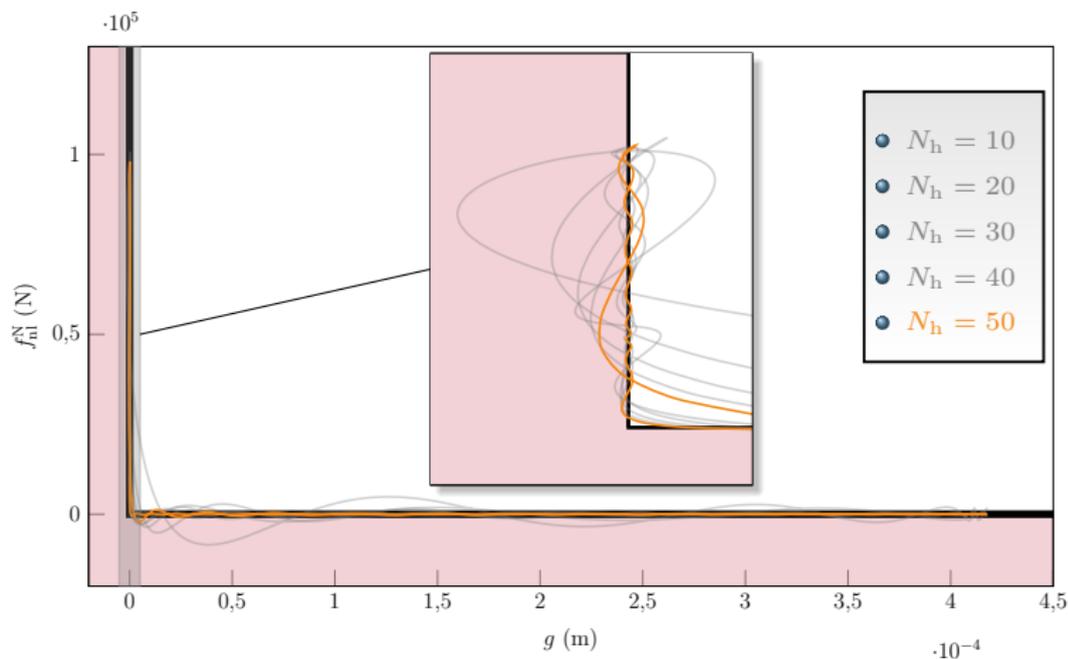












- toutes les conditions de contact positivement impactées par l'augmentation de N_h , mais ...
- coût de calcul augmente avec N_h

validation : la DLFT-HBM approche asymptotiquement la loi de contact unilatéral



Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

**Configuration
industrielle**

Aube NASA rotor 67

Scénario de contact

Stratégie de référence

Confrontation
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

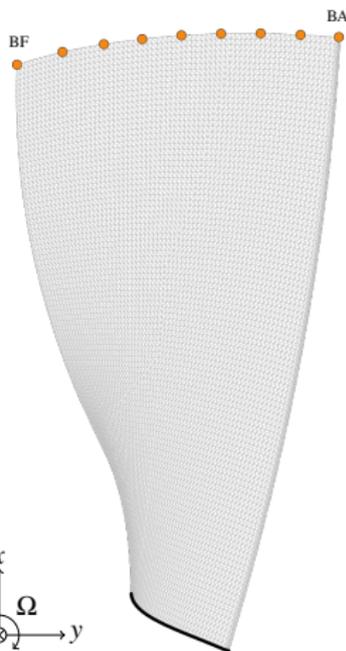
5 Configuration industrielle



Maillage complet

- noeuds : 201 287
- éléments : 129 181
- matériau : TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V)





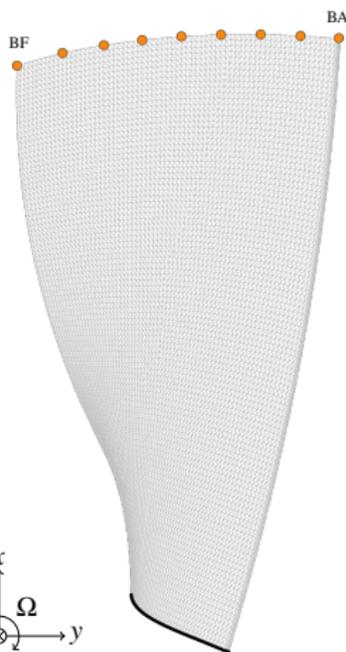
Maillage complet

- noeuds : 201 287
- éléments : 129 181
- matériau : TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V)

Modèle réduit (Craig-Bampton)

- 9 noeuds frontières (●) : $n_b = 9$
- $\eta = 12$ modes encastrés
- taille réduite : $n = \eta + 3n_b = 39$ ddl





Maillage complet

- noeuds : 201 287
- éléments : 129 181
- matériau : TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V)

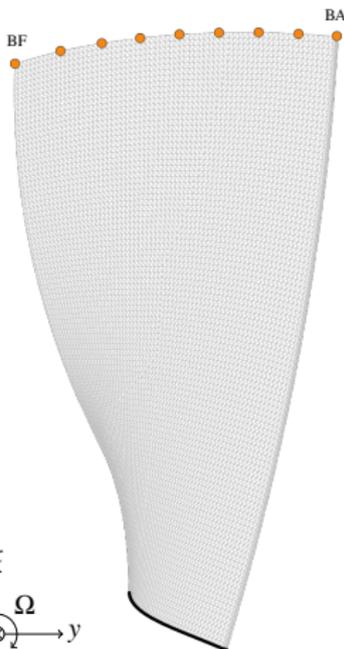
Modèle réduit (Craig-Bampton)

- 9 noeuds frontières (●) : $n_b = 9$
- $\eta = 12$ modes encastrés
- taille réduite : $n = \eta + 3n_b = 39$ ddl

Amortissement modal

- $\xi_{1-2} = 1 \cdot 10^{-3}$
- $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$





Maillage complet

- noeuds : 201 287
- éléments : 129 181
- matériau : TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V)

Modèle réduit (Craig-Bampton)

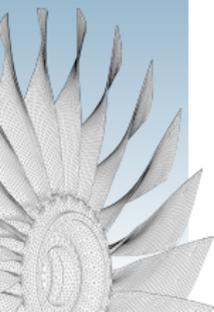
- 9 noeuds frontières (●) : $n_b = 9$
- $\eta = 12$ modes encastrés
- taille réduite : $n = \eta + 3n_b = 39$ ddl

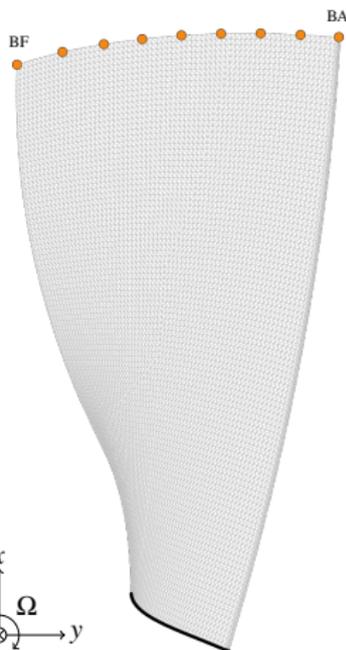
Amortissement modal

- $\xi_{1-2} = 1 \cdot 10^{-3}$
- $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$

Conditions aux limites

- pied encastré (—)





Maillage complet

- noeuds : 201 287
- éléments : 129 181
- matériau : TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V)

Modèle réduit (Craig-Bampton)

- 9 noeuds frontières (●) : $n_b = 9$
- $\eta = 12$ modes encastrés
- taille réduite : $n = \eta + 3n_b = 39$ ddl

Amortissement modal

- $\xi_{1-2} = 1 \cdot 10^{-3}$
- $\xi_{3+} = 5 \cdot 10^{-3}$

Premiers modes

mode	$\omega(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$
1F	2039,6
2F	6339,7
1T	10 735,1

Conditions aux limites

- pied encastré (—)



Cadre des simulations

- pas de chargement aérodynamique → aucun effort d'excitation $\mathbf{f}_{ex} = \mathbf{0}$
- frottement glissant permanent (vitesses relatives élevées)
- contact aube/carter seul → pas d'effet centrifuge/thermique/gyroscopique/d'usure
- une seule aube considérée

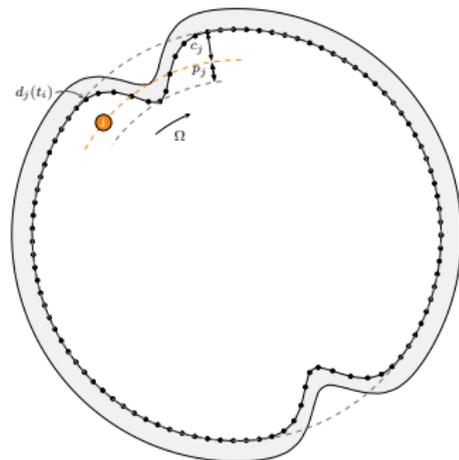


Cadre des simulations

- pas de chargement aérodynamique → aucun effort d'excitation $\mathbf{f}_{\text{ex}} = \mathbf{0}$
- frottement glissant permanent (vitesses relatives élevées)
- contact aube/carter seul → pas d'effet centrifuge/thermique/gyroscopique/d'usure
- une seule aube considérée

Forme du carter

- profil mathématique rigide
- ovalisation : 2 lobes privilégiés pour le contact → excitation synchrone sur l'harmonique 2Ω
- contact à toutes les vitesses de rotation Ω

carter ovalisé²

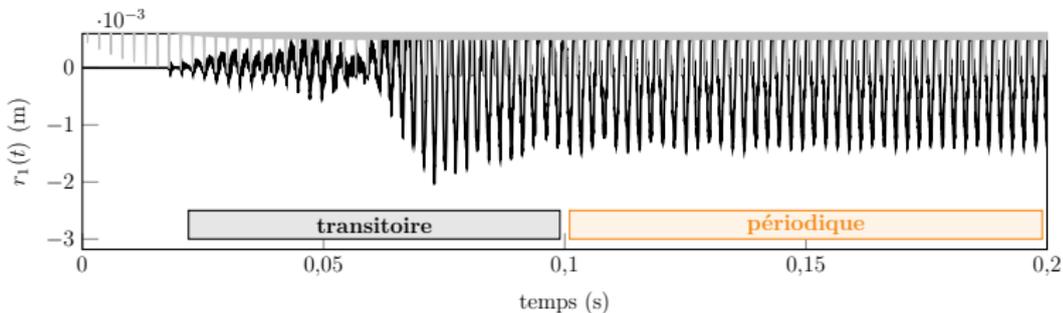
² COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Polytechnique Montréal, 2021.



Stratégie de référence

Principe

- procédure d'intégration temporelle directe²¹
 - ▶ multiplicateurs de Lagrange
 - ▶ schéma des différences finies centrées
- algorithme utilisé dans l'industrie pour les simulations d'interactions aube/carter²²



²¹ CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).

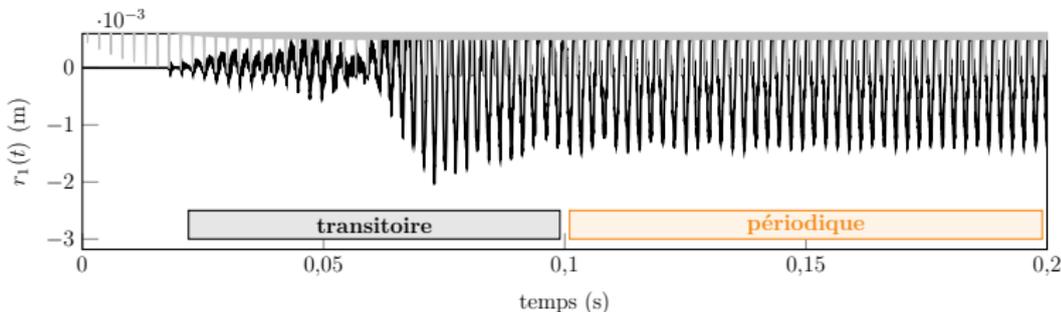
²² A. MILLECAMPS et al. « Snecma's Viewpoint on the Numerical and Experimental Simulation of Blade-Tip/Casing Unilateral Contacts ». *ASME Turbo Expo*. 2015.



Stratégie de référence

Principe

- procédure d'intégration temporelle directe²¹
 - ▶ multiplicateurs de Lagrange
 - ▶ schéma des différences finies centrées
- algorithme utilisé dans l'industrie pour les simulations d'interactions aube/carter²²



Application au rotor 67

- simulations à vitesse constante
- plage de vitesses $\Omega \in [400; 2000] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ par pas de $1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

²¹ CARPENTER et al. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1991).

²² A. MILLECAMPs et al. « Snecma's Viewpoint on the Numerical and Experimental Simulation of Blade-Tip/Casing Unilateral Contacts ». *ASME Turbo Expo*. 2015.

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

**Configuration
industrielle**

Aube NASA rotor 67

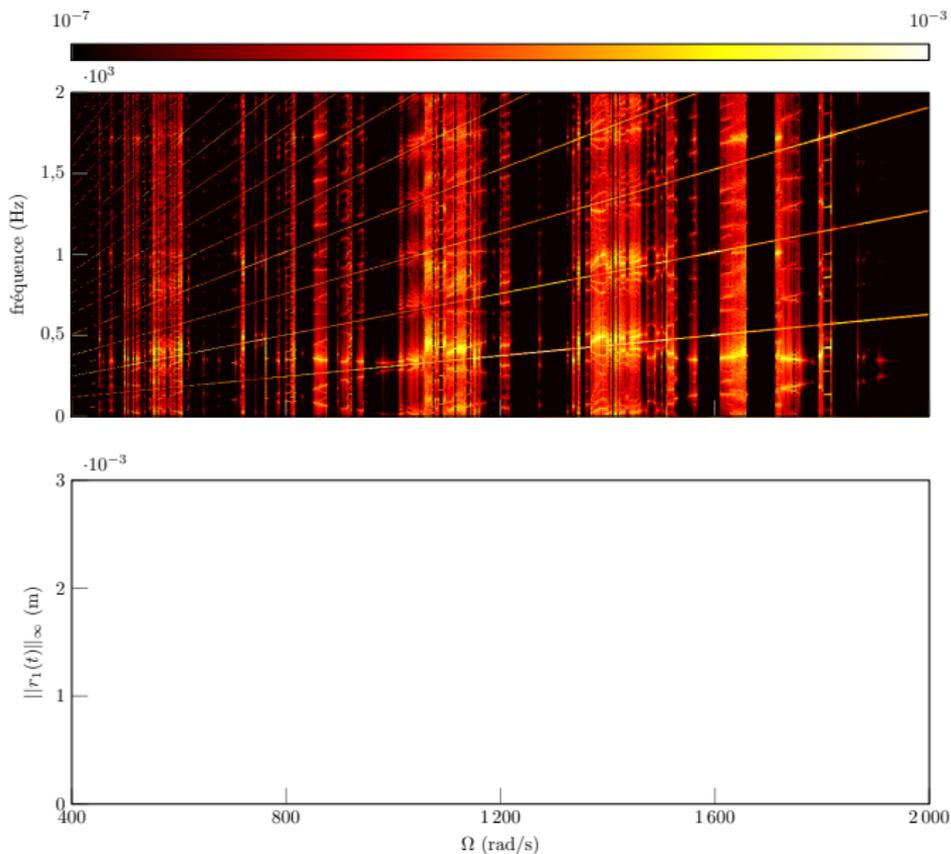
Scénario de contact

Stratégie de référence

Confrontation
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



Stratégie de référence : résultats

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Aube NASA rotor 67

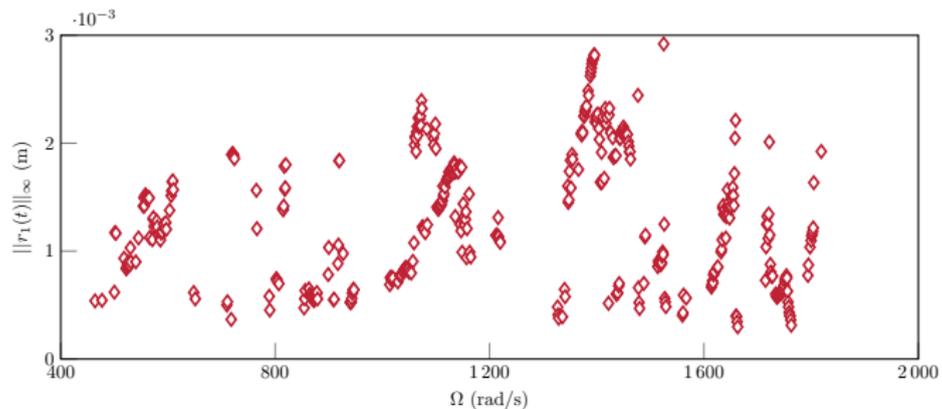
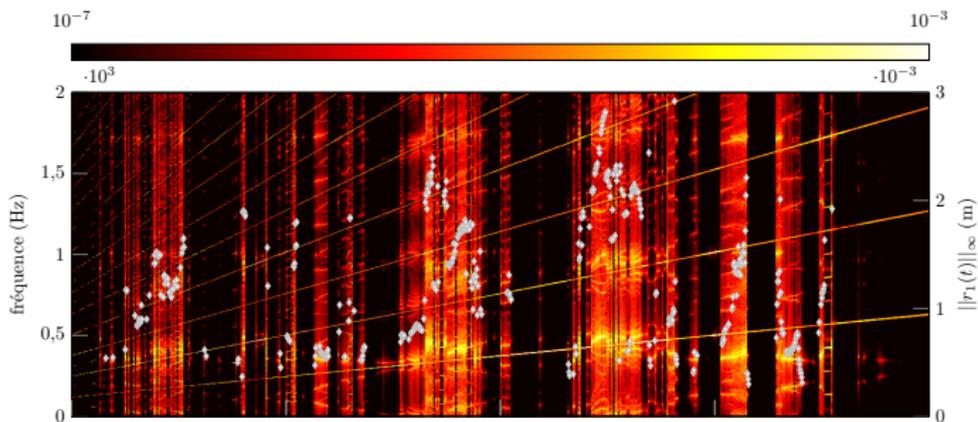
Scénario de contact

Stratégie de référence

Contraintes
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



non périodique (\diamond),

Stratégie de référence : résultats

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Aube NASA rotor 67

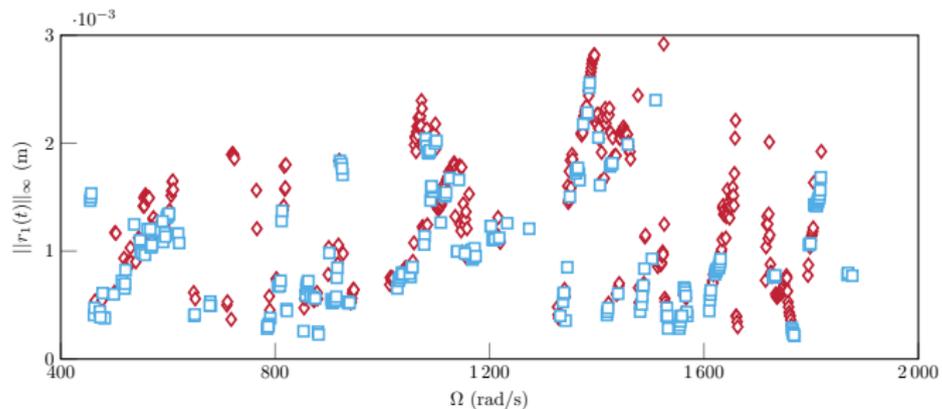
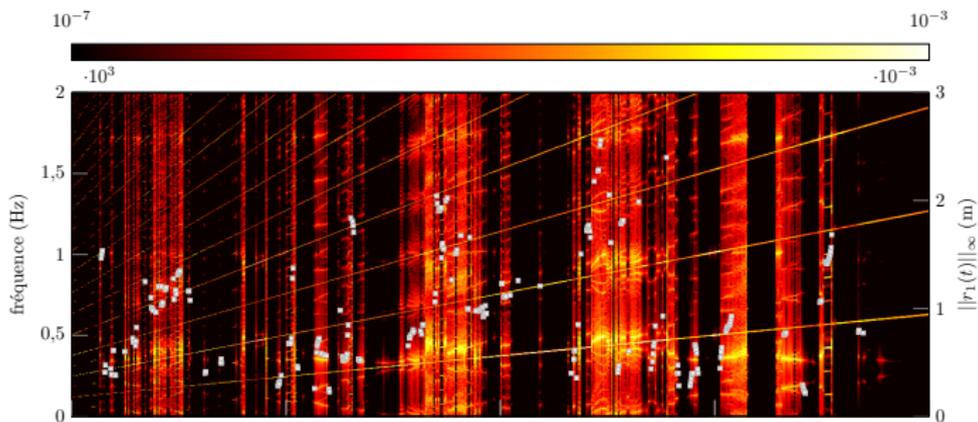
Scénario de contact

Stratégie de référence

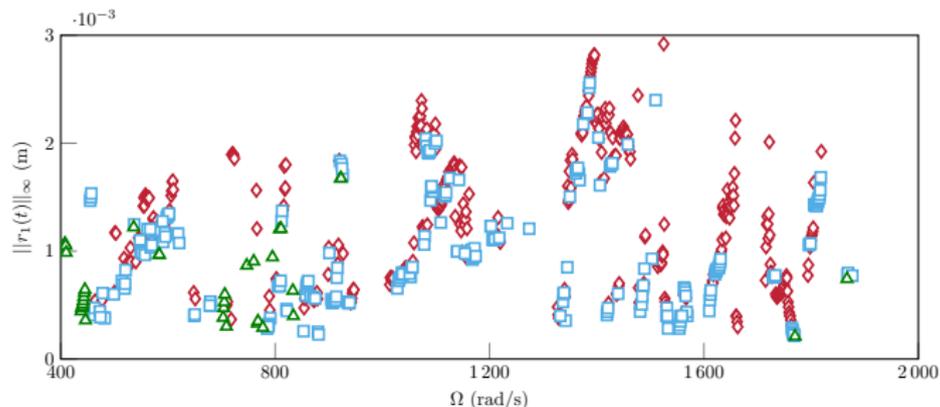
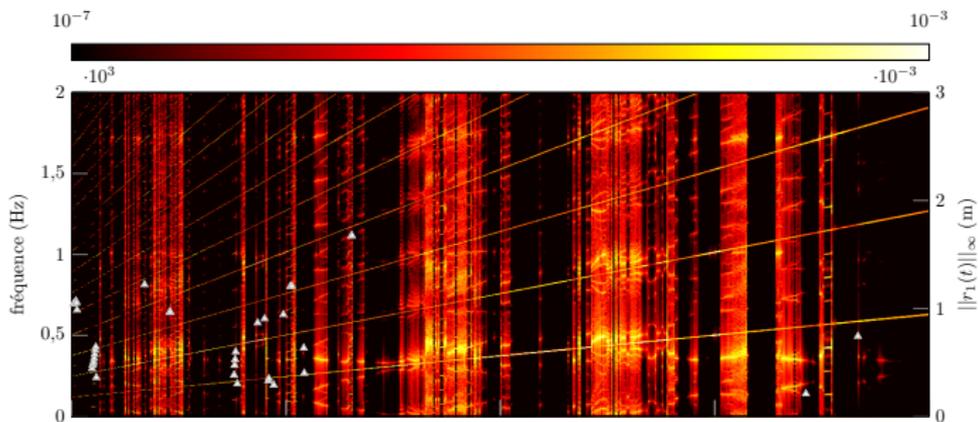
Contraintes
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



non périodique (\diamond), $\omega < \Omega$ (\square),



non périodique (◇), $\omega < \Omega$ (□), $\omega = \Omega$ (△),

Stratégie de référence : résultats

Soutenance
de doctorat

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Aube NASA rotor 67

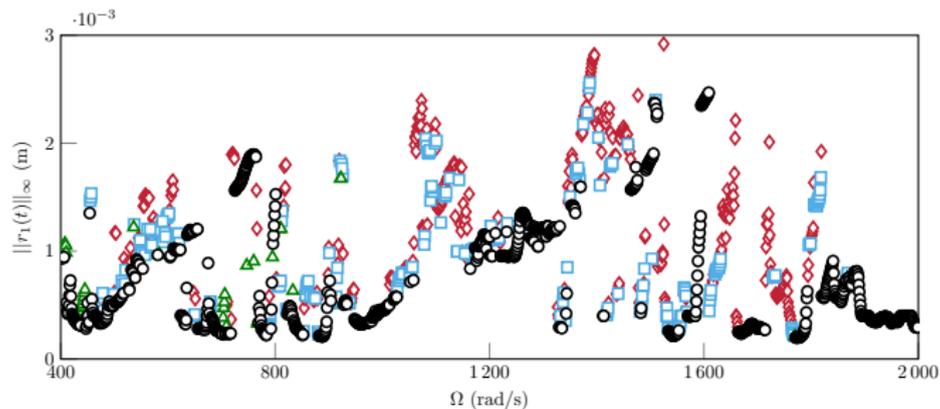
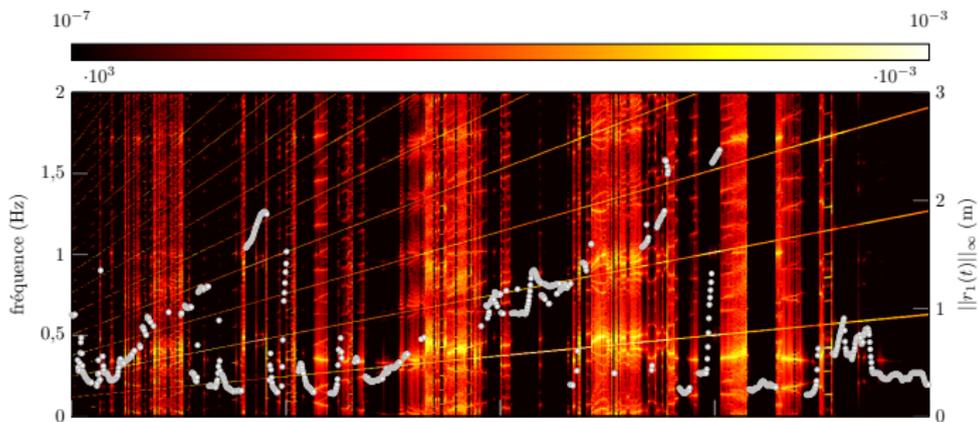
Scénario de contact

Stratégie de référence

Contraintes
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



non périodique (\diamond), $\omega < \Omega$ (\square), $\omega = \Omega$ (Δ), $\omega = 2\Omega$ (\circ)

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

**Configuration
industrielle**

Aube NASA rotor 67

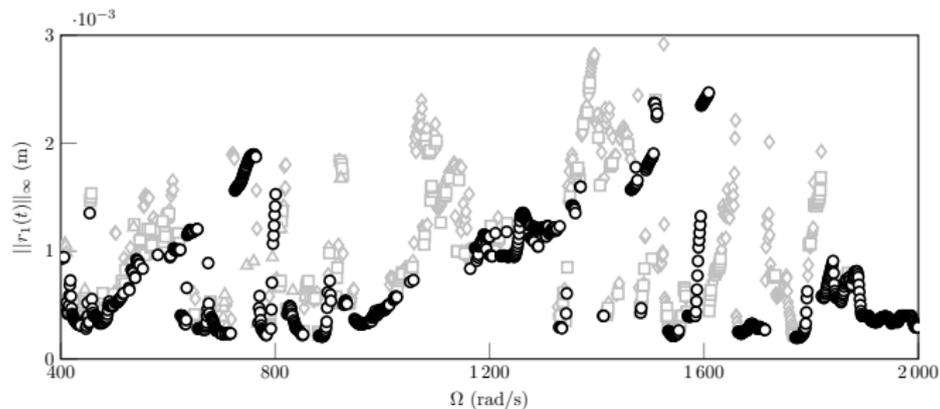
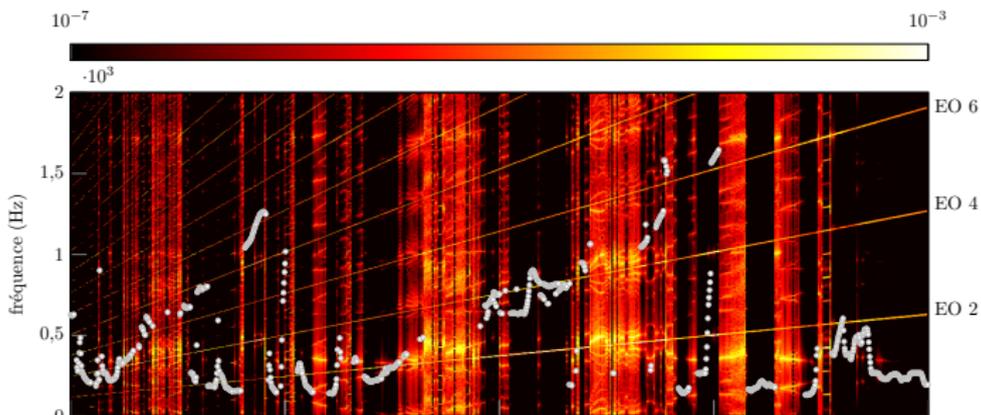
Scénario de contact

Stratégie de référence

Contraintes
temporel-fréquentiel

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



non périodique (\diamond), $\omega < \Omega$ (\square), $\omega = \Omega$ (\triangle), $\omega = 2\Omega$ (\circ)

Introduction

Etat de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

**Configuration
industrielle**

Aube NASA rotor 67

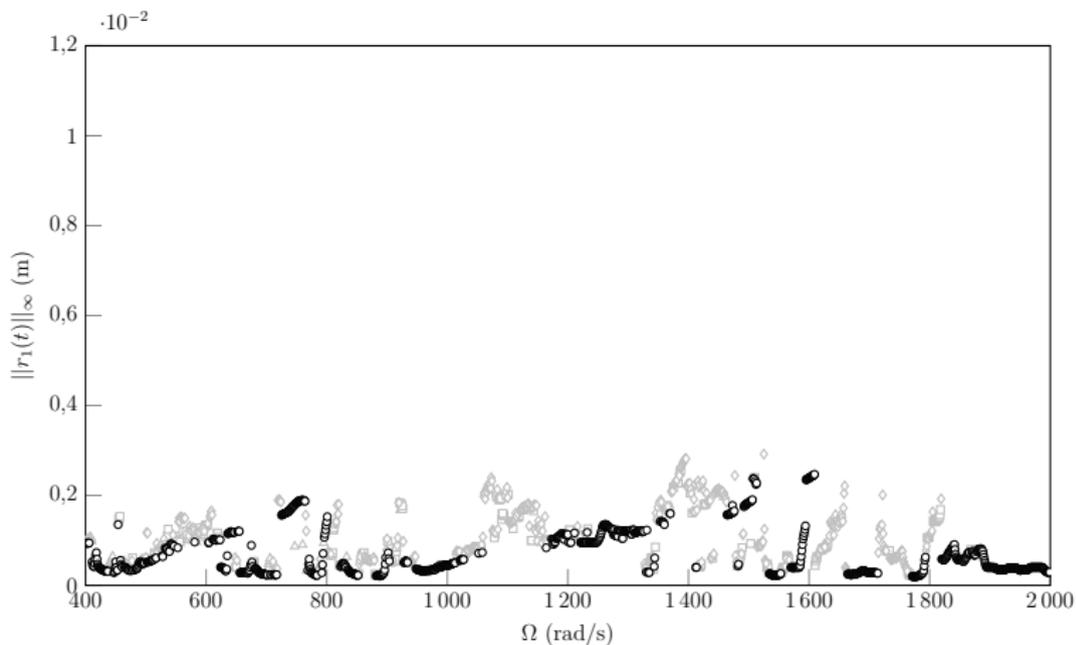
Scénario de contact

Stratégie de référence

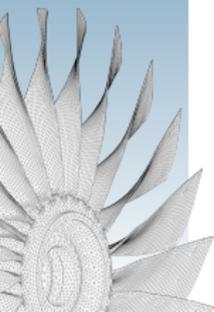
Confrontation
temporel-fréquentiel

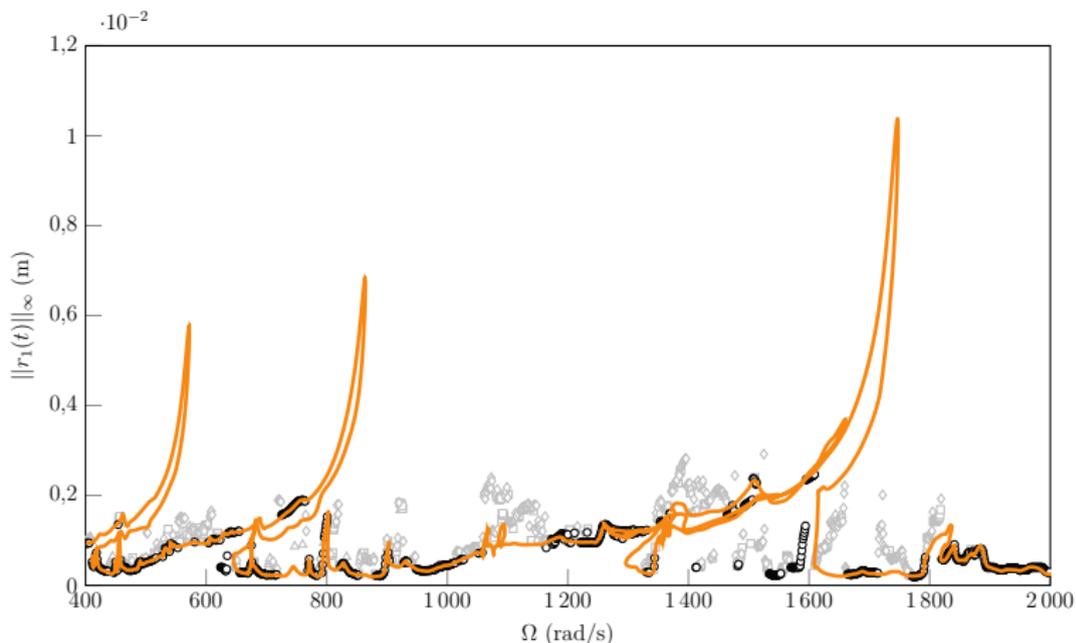
Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion



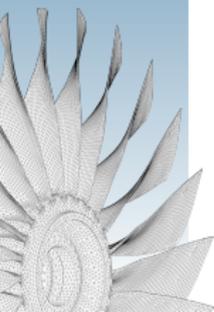
$$\text{IT } \omega = 2\Omega \text{ (o)}$$



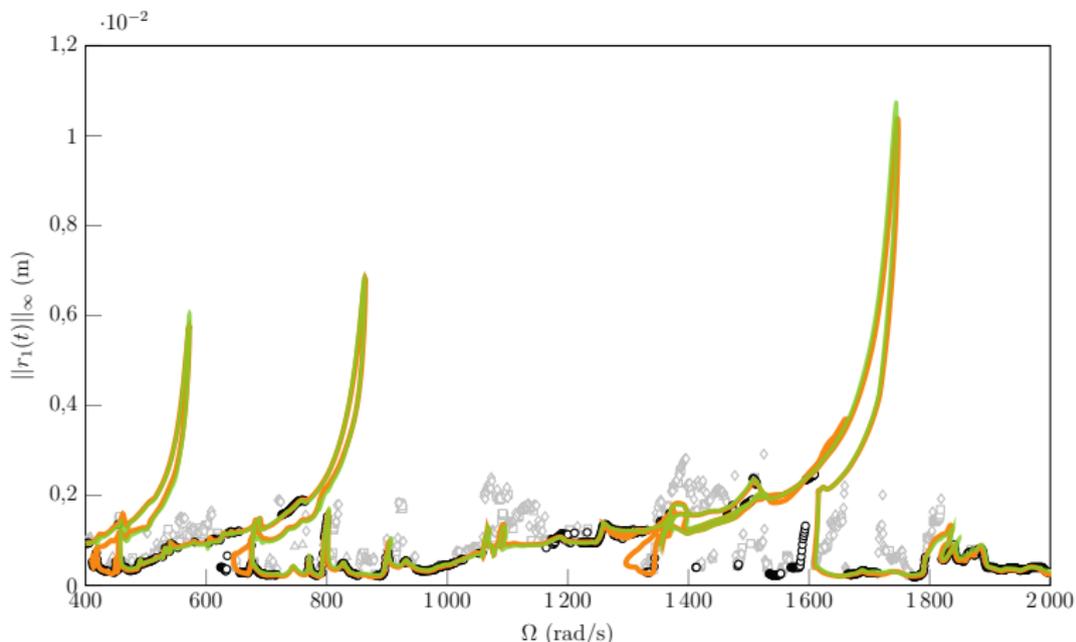


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)



Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales

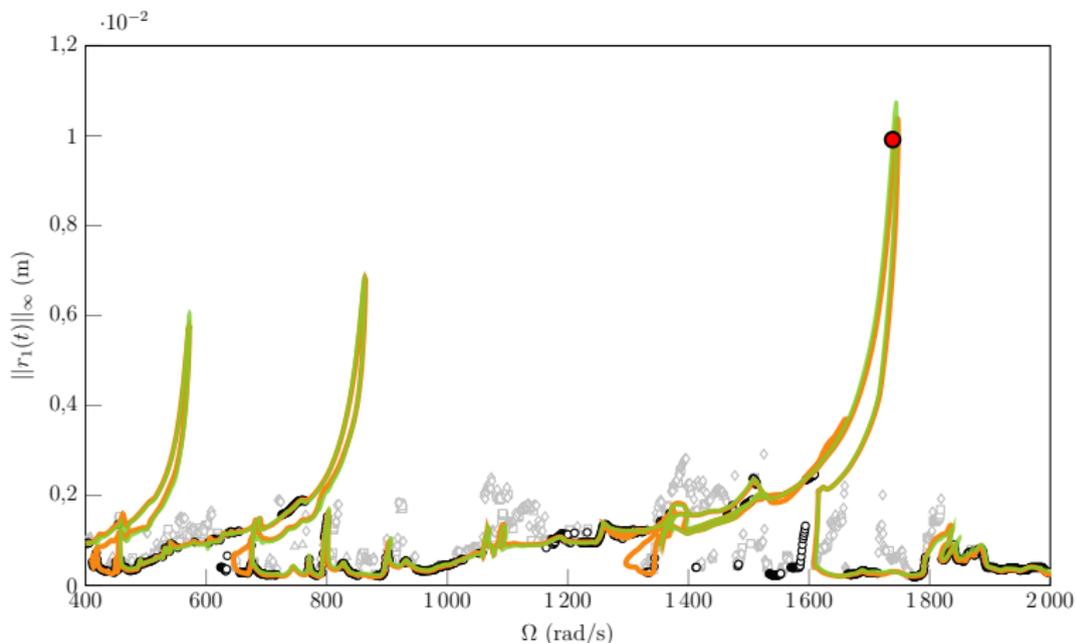


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM¹⁹ (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances

¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

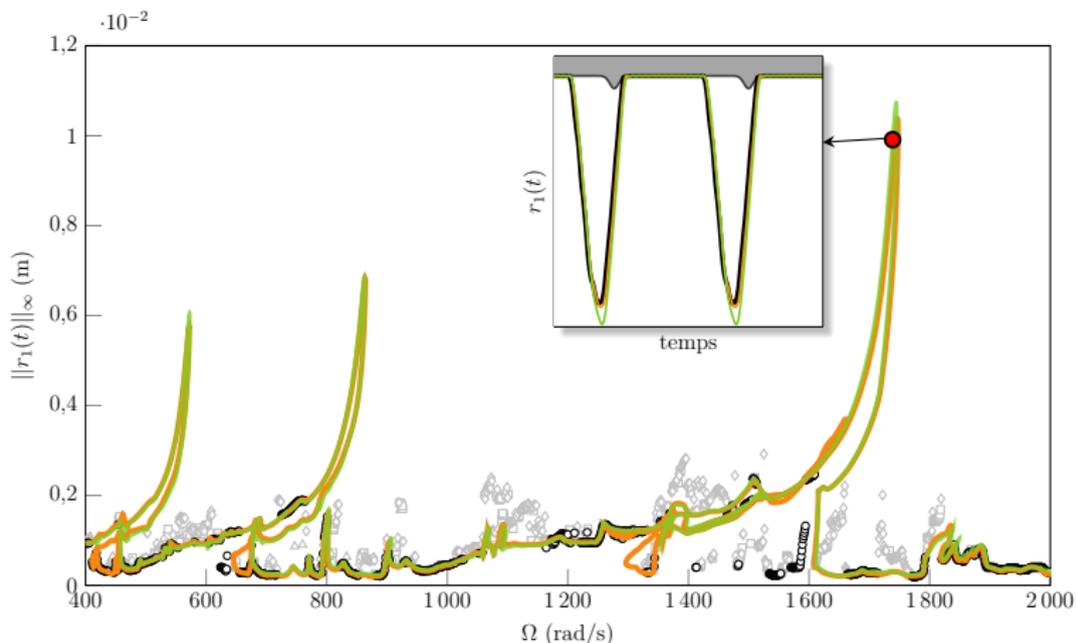
Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales



IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM¹⁹ (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances

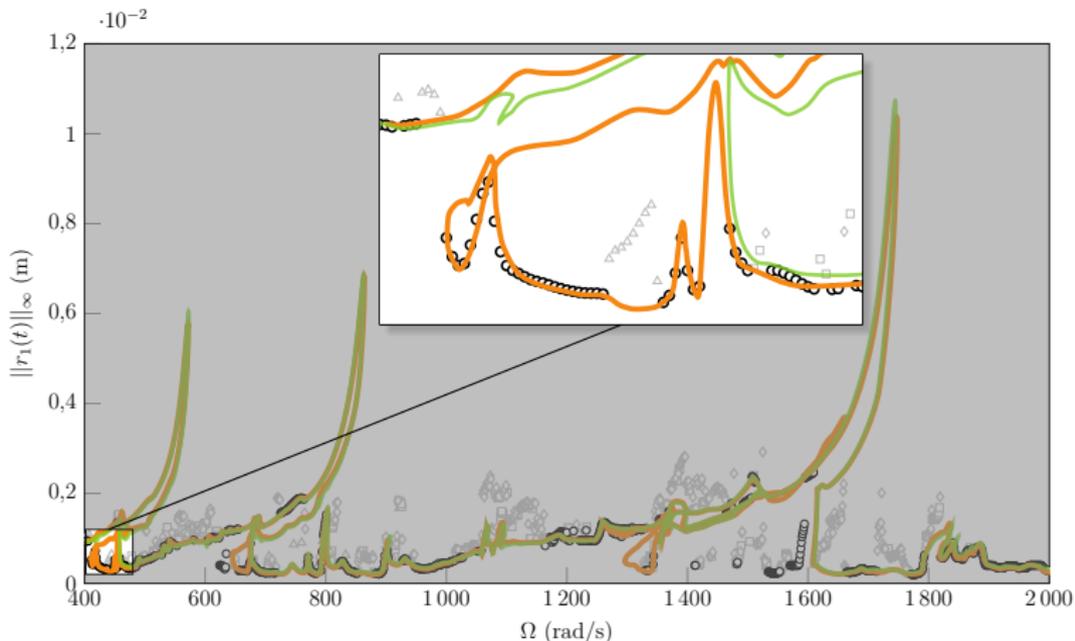
¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).



IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM¹⁹ (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances

Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales

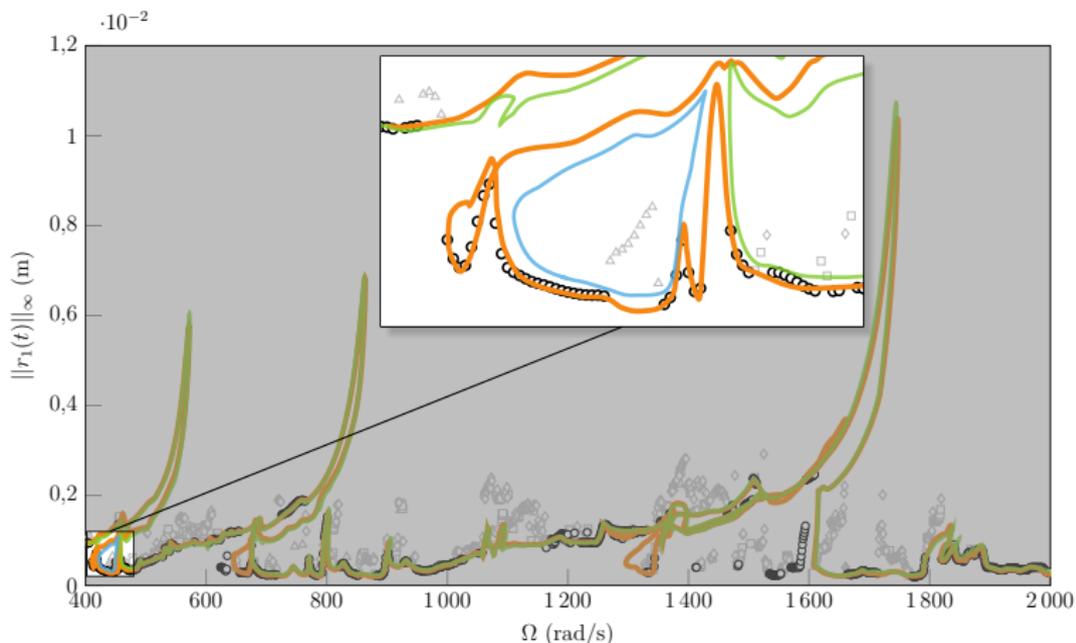


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM¹⁹ (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM

¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales

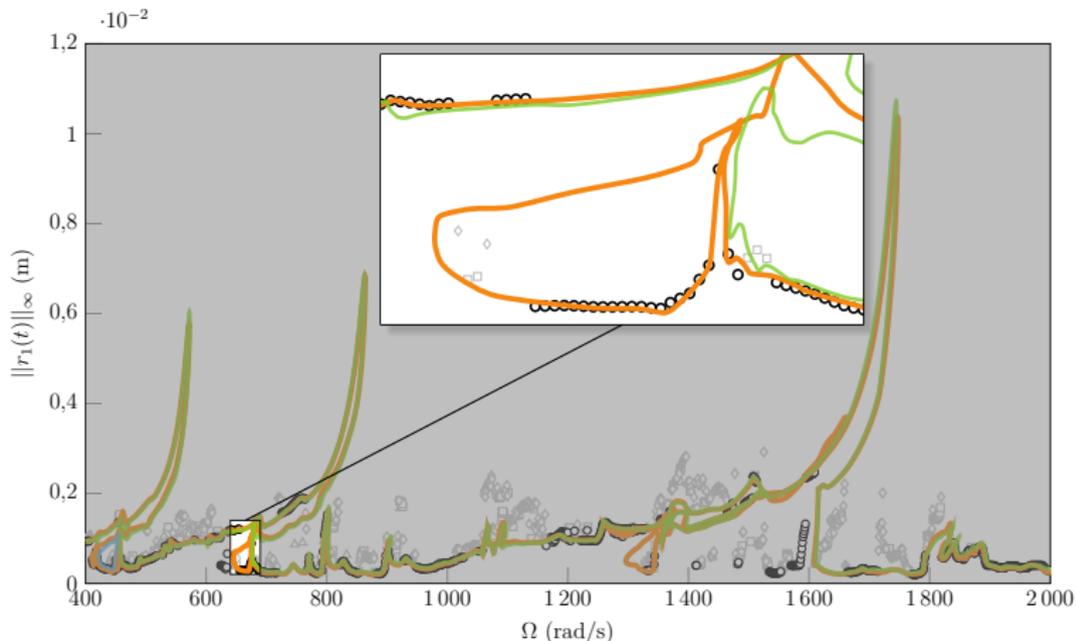


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM¹⁹ (—), isolats RL-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM → branches de solutions isolées

¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales

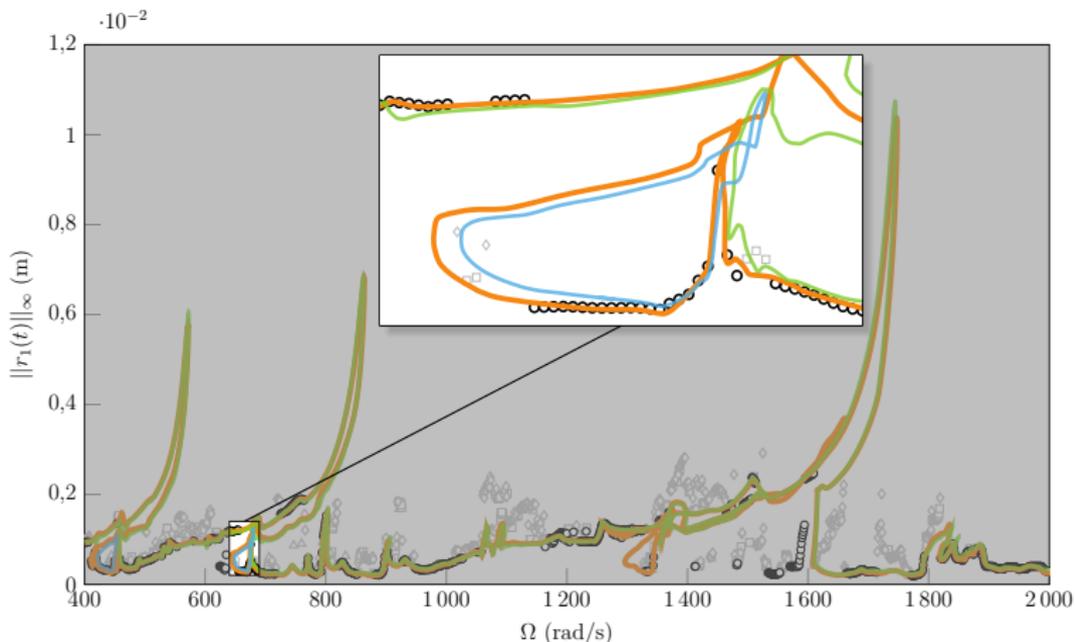


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM¹⁹ (—), isolats RL-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM → branches de solutions isolées

¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

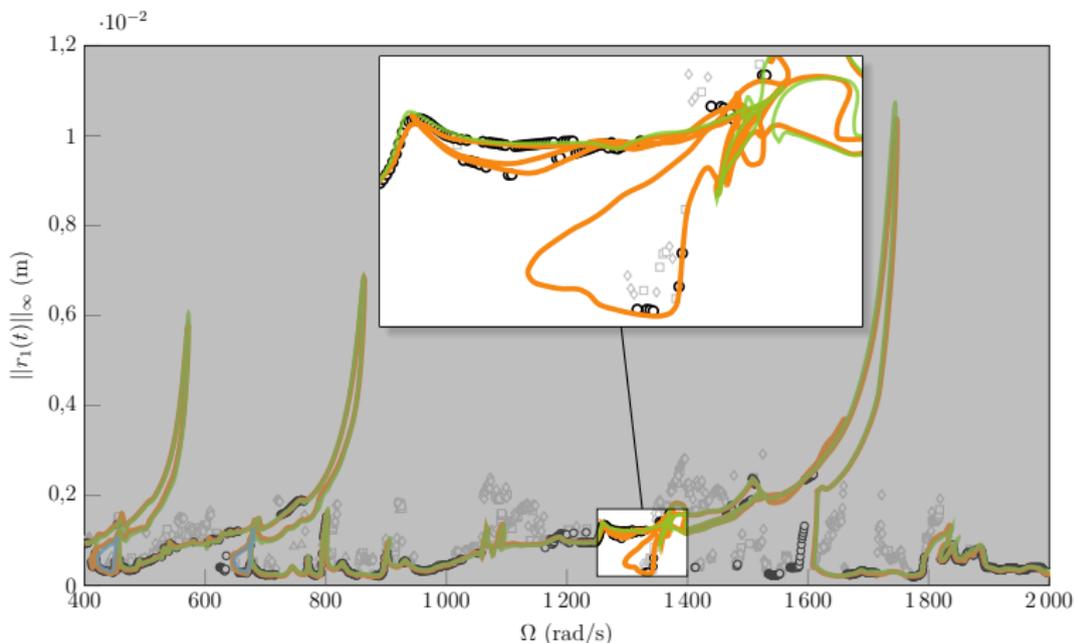
Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales



IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM¹⁹ (—), isolats RL-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM → branches de solutions isolées

¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

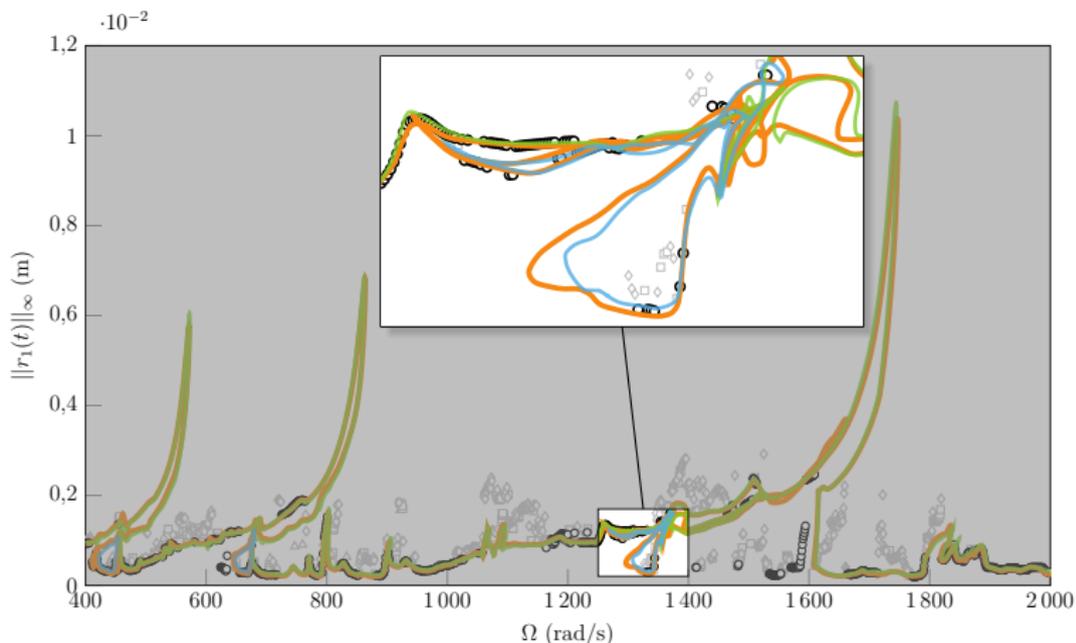


IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM¹⁹ (—), isolats RL-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM → branches de solutions isolées

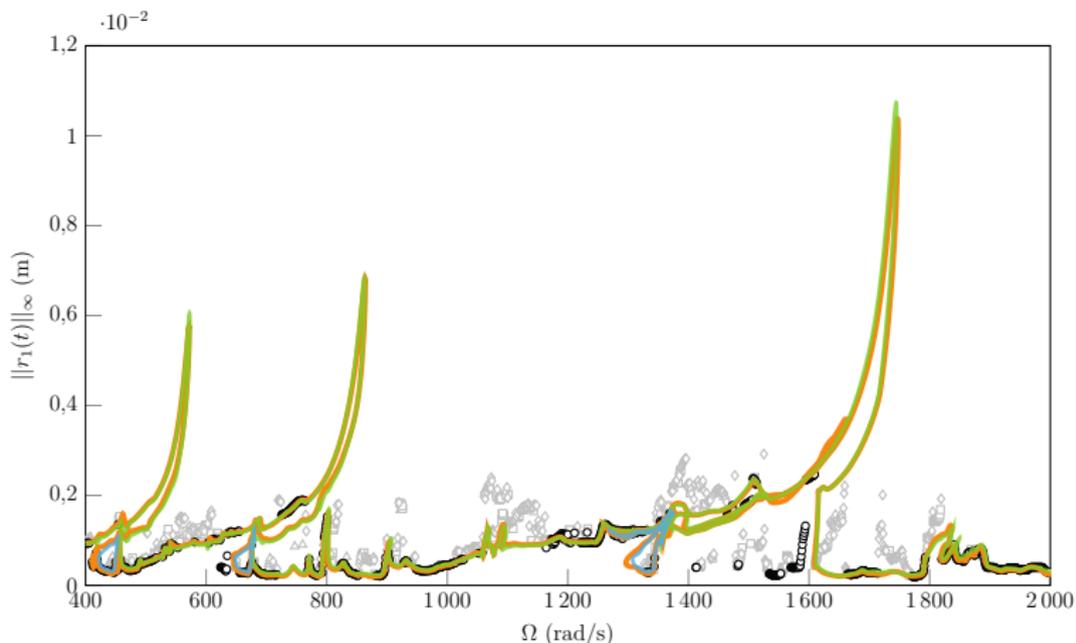
¹⁹ COLAÏTIS et al. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* (2021).

Confrontation temporel-fréquentiel : courbes principales



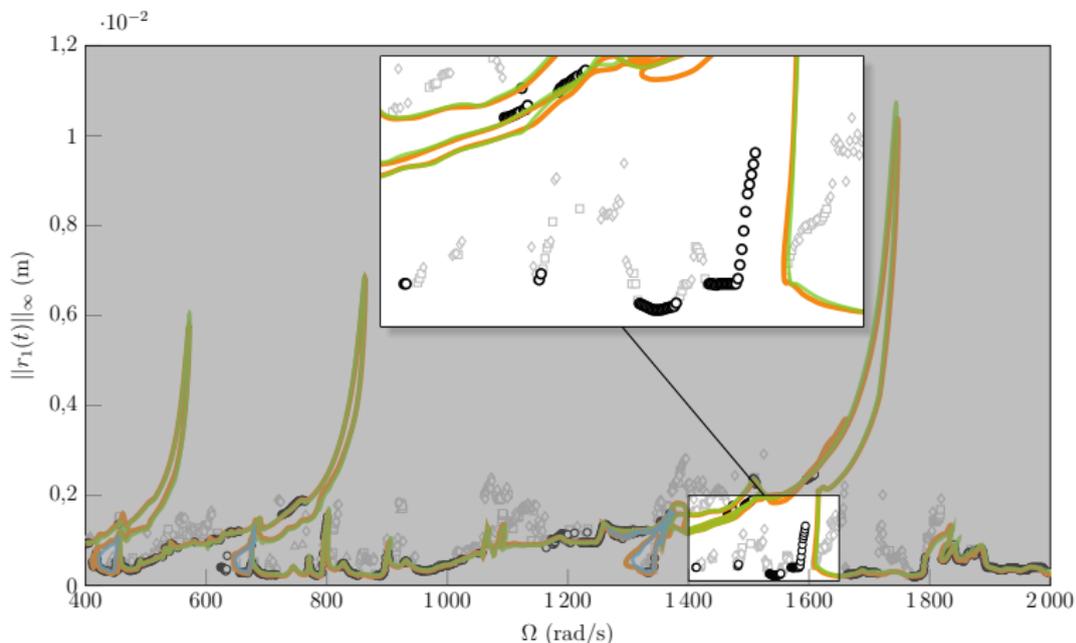
IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM¹⁹ (—), isolats RL-HBM (—)

- bonne concordance entre IT et DLFT-HBM sur les points $\omega = 2\Omega$ (o)
- excellent accord entre DLFT-HBM et RL-HBM aux résonances
- reprise de conditions initiales : montre la pertinence des résonances
- quelques différences entre DLFT-HBM et RL-HBM → branches de solutions isolées



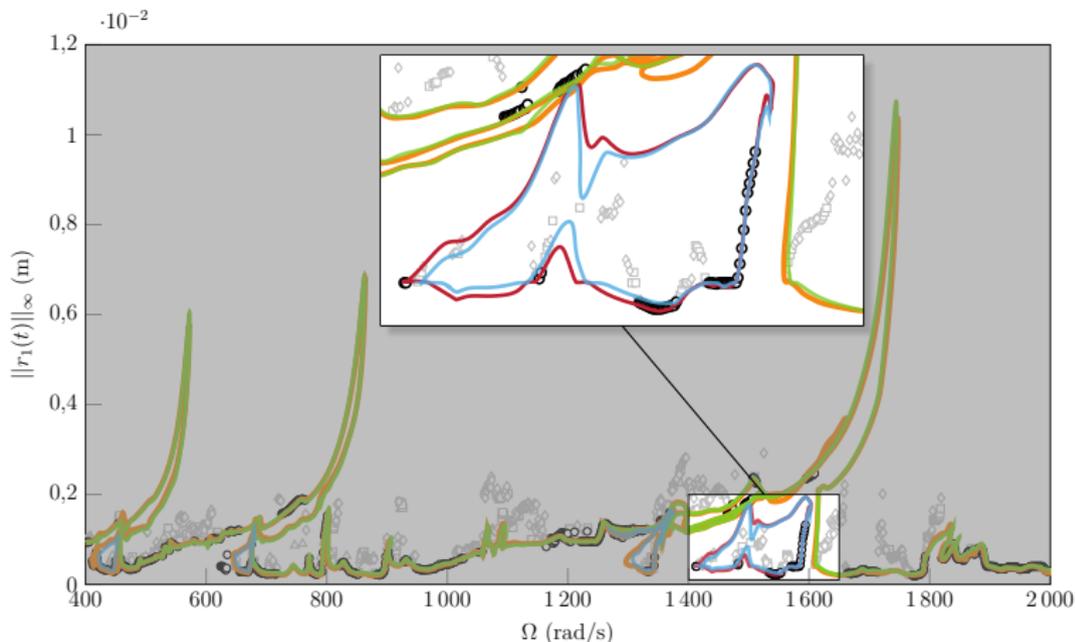
IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), isolats RL-HBM (—)





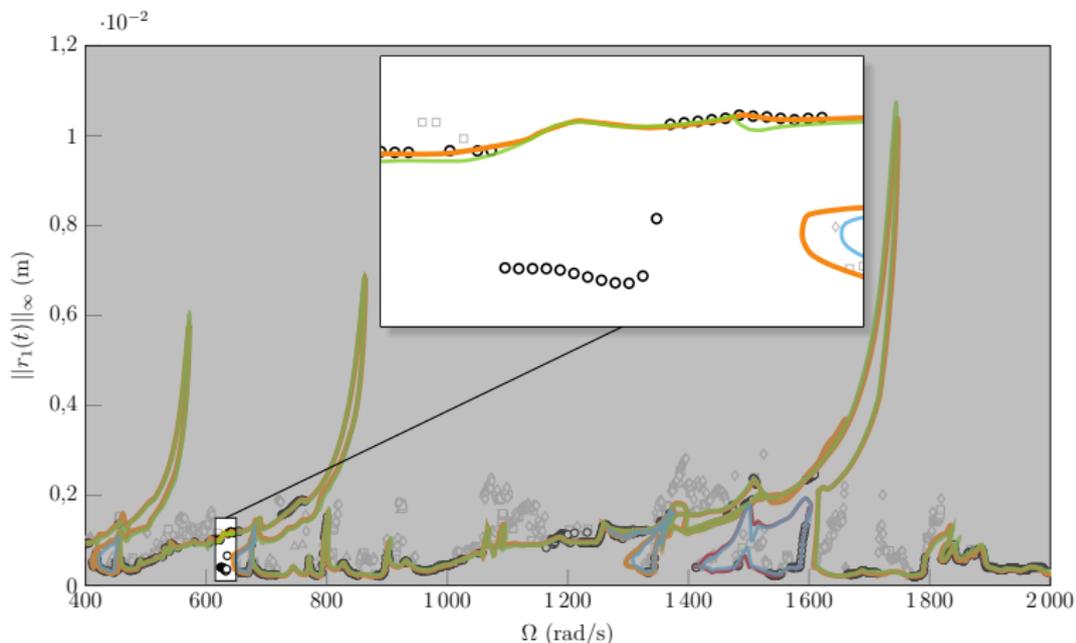
IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), isolats RL-HBM (—)

- amas de points d'intégration temporelle 2Ω -périodique



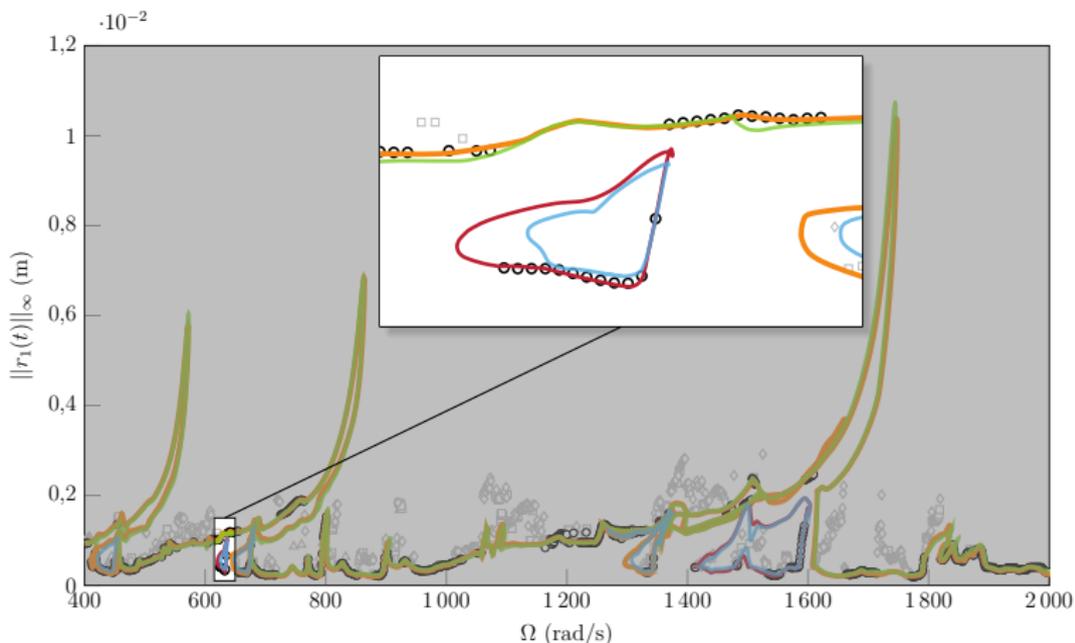
IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM (—v—), isolats RL-HBM (—b—), isolats DLFT-HBM (—r—)

- amas de points d'intégration temporelle 2Ω -périodique → branches de solutions isolées
- bon accord entre DLFT-HBM et RL-HBM sur les branches isolées



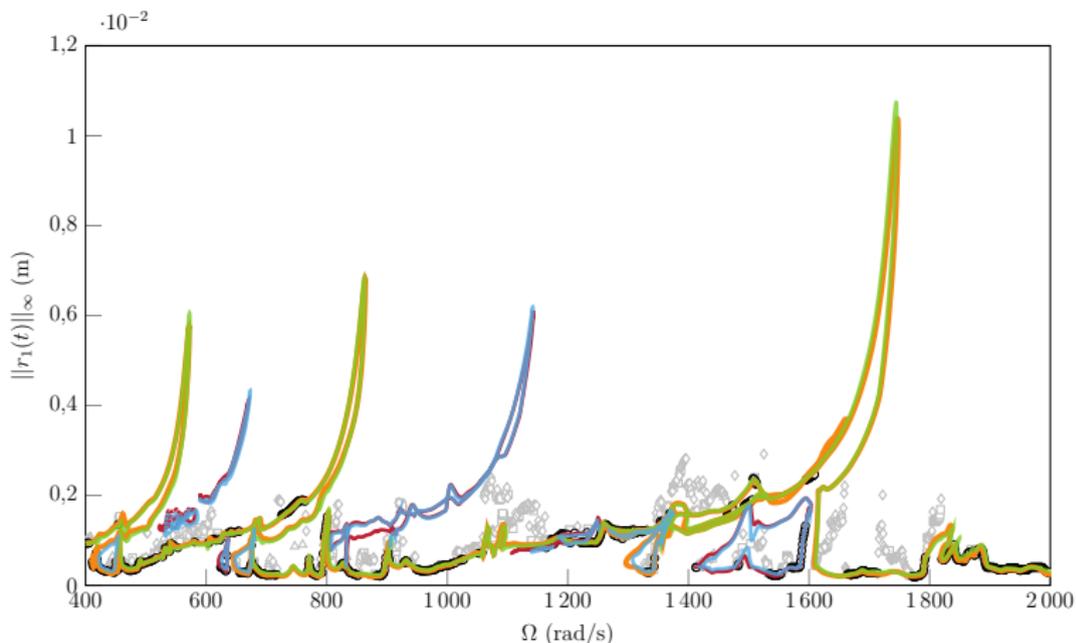
IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), isolats RL-HBM (—), isolats DLFT-HBM (—)

- amas de points d'intégration temporelle 2Ω -périodique \rightarrow branches de solutions isolées
- bon accord entre DLFT-HBM et RL-HBM sur les branches isolées



IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), isolats RL-HBM (—), isolats DLFT-HBM (—)

- amas de points d'intégration temporelle 2Ω -périodique \rightarrow branches de solutions isolées
- bon accord entre DLFT-HBM et RL-HBM sur les branches isolées



IT $\omega = 2\Omega$ (o), DLFT-HBM (—o—), RL-HBM (—g—), isolats RL-HBM (—b—), isolats DLFT-HBM (—r—)

- amas de points d'intégration temporelle 2Ω -périodique \rightarrow branches de solutions isolées
- bon accord entre DLFT-HBM et RL-HBM sur les branches isolées
- total de 8 branches isolées \rightarrow probablement non exhaustif

Comment détecter des isolats automatiquement ?



Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

**Recherche d'isolats
en réponse forcée**

État de l'art

Stratégie de recherche
d'isolats

Cas d'étude industriel

Application du principe
énergétique

Excitation surharmonique
modèle

Excitation subharmonique

Conclusion

6 Recherche d'isolats en réponse forcée



Isolats de haute amplitude

défectés ...

- numériquement^{23,24}
- expérimentalement²⁵

23 MANGUSSI et al. « Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks ». *PLoS one* (2016).

24 PETROV. « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2019).

25 DETROUX et al. « Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions ». *PLoS One* (2018).

Isolats de haute amplitude

déTECTÉS ...

- numériquement^{23,24}
- expérimentalement²⁵

Verrou

déTECTION systématique dans le cadre de :

- systèmes industriels
- non-linéarités non régulières

23 MANGUSSI et al. « Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks ». *PLoS one* (2016).

24 PETROV. « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2019).

25 DETROUX et al. « Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions ». *PLoS One* (2018).



État de l'art

Isolats de haute amplitude

détectés ...

- numériquement^{23,24}
- expérimentalement²⁵

Verrou

détection systématique dans le cadre de :

- systèmes industriels
- non-linéarités non régulières

Méthodes existantes

- suivi de bifurcations^{26,27}
- bases de Gröbner³⁰
- *global terrain method*²⁸
- principe énergétique de Melnikov³¹
- méthodes d'homotopie²⁹

23 MANGUSSI et al. « Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks ». *PLoS one* (2016).

24 PETROV. « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2019).

25 DETROUX et al. « Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions ». *PLoS One* (2018).

26 DETROUX et al. « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (2015).

27 XIE et al. « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2017).

28 HEINZE et al. « Global detection of detached periodic solution branches of friction-damped mechanical systems ». *Nonlinear Dyn.* (2020).

29 SARROUY et al. « Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry ». *Int. J. Non Linear Mech.* (2011).

30 GROLET et al. « Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2015).

31 CENEDESE et al. « How do conservative backbone curves perturb into forced responses ? A Melnikov function analysis ». *Proc. R. Soc. A.* 22/31 (2020).

Isolats de haute amplitude

détectés ...

- numériquement^{23,24}
- expérimentalement²⁵

Verrou

détection systématique dans le cadre de :

- systèmes industriels
- non-linéarités non régulières

Méthodes existantes

- suivi de bifurcations^{26,27}
- bases de Gröbner³⁰
- *global terrain method*²⁸
- **principe énergétique de Melnikov**³¹
- méthodes d'homotopie²⁹

²³ MANGUSSI et al. « Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks ». *PLoS one* (2016).

²⁴ PETROV. « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces ». *J. Eng. Gas Turbines Power* (2019).

²⁵ DETROUX et al. « Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions ». *PLoS One* (2018).

²⁶ DETROUX et al. « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (2015).

²⁷ XIE et al. « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2017).

²⁸ HEINZE et al. « Global detection of detached periodic solution branches of friction-damped mechanical systems ». *Nonlinear Dyn.* (2020).

²⁹ SARROUY et al. « Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry ». *Int. J. Non Linear Mech.* (2011).

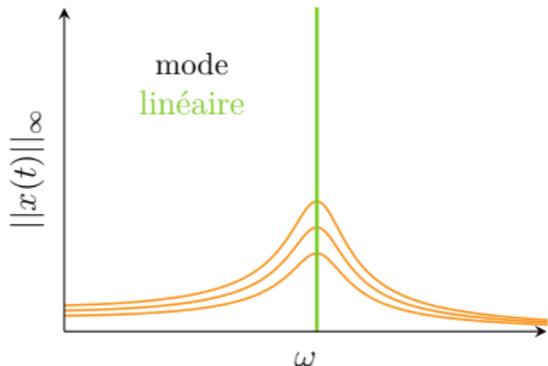
³⁰ GROLET et al. « Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases ». *Mech. Syst. Sig. Process.* (2015).

³¹ CENEDESE et al. « How do conservative backbone curves perturb into forced responses ? A Melnikov function analysis ». *Proc. R. Soc. A.* **22/31** (2020).

Modes dans le contexte linéaire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

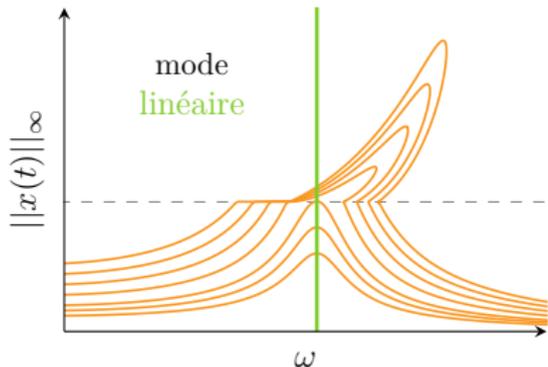
- 1 fréquences propres ω_i solutions de $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$
- 2 formes propres Φ_i calculées grâce aux ω_i



Modes dans le contexte linéaire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

- 1 fréquences propres ω_i solutions de $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$
- 2 formes propres Φ_i calculées grâce aux ω_i

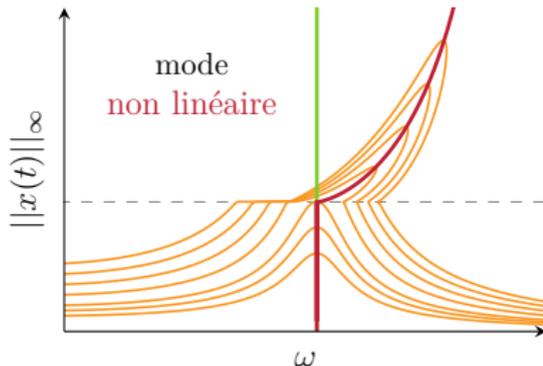


Modes non linéaires

Modes dans le contexte linéaire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6)$$

- 1 fréquences propres ω_i solutions de $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$
- 2 formes propres Φ_i calculées grâce aux ω_i



Modes complexes non linéaires³² (non conservatif)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

- recherche d'une solution libre décroissante par HBM

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} e^{-k\zeta t} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (8)$$

- dépendance des fréquences propres à l'amplitude de réponse

³² LAXALDE et al. « Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces ». *J. Sound Vib.* (2009).

Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

- $W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$
- $\mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$

Principe énergétique de Melnikov³¹Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

$$\bullet W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$$

$$\bullet \mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$$

$$\bullet |W^{1:k}| > |\mathcal{R}| : 2 \text{ solutions}$$

$$\bullet |W^{1:k}| = |\mathcal{R}| : 1 \text{ solution}$$

$$\bullet |W^{1:k}| < |\mathcal{R}| : 0 \text{ solution}$$

Principe énergétique de Melnikov³¹Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

$$\bullet \quad W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$$

$$\bullet \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$$

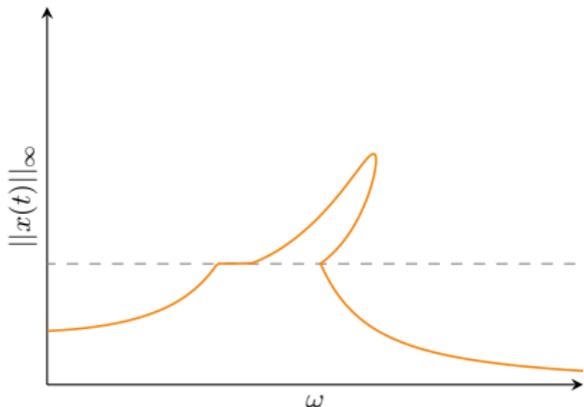
$$\bullet \quad |W^{1:k}| > |\mathcal{R}| : 2 \text{ solutions}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| = |\mathcal{R}| : 1 \text{ solution}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| < |\mathcal{R}| : 0 \text{ solution}$$

Détection d'isolats

1 courbe principale



Principe énergétique de Melnikov³¹Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

$$\bullet \quad W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$$

$$\bullet \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$$

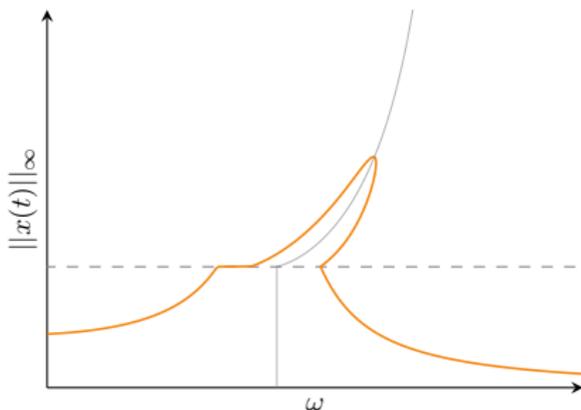
$$\bullet \quad |W^{1:k}| > |\mathcal{R}| : 2 \text{ solutions}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| = |\mathcal{R}| : 1 \text{ solution}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| < |\mathcal{R}| : 0 \text{ solution}$$

Détection d'isolats

- 1 courbe principale
- 2 mode non linéaire



Principe énergétique de Melnikov³¹Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

$$\bullet \quad W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$$

$$\bullet \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$$

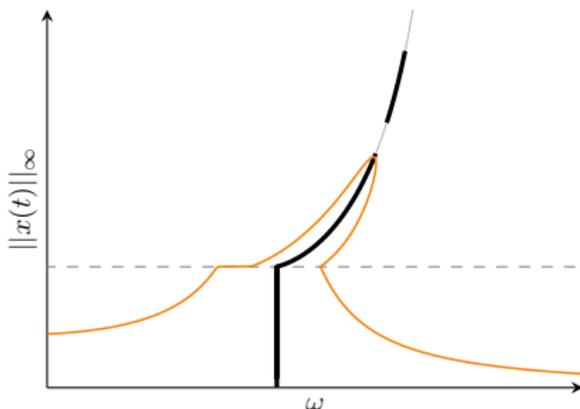
$$\bullet \quad |W^{1:k}| > |\mathcal{R}| : 2 \text{ solutions}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| = |\mathcal{R}| : 1 \text{ solution}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| < |\mathcal{R}| : 0 \text{ solution}$$

Détection d'isolats

- 1 courbe principale
- 2 mode non linéaire
- 3 principe énergétique



Stratégie de recherche d'isolats

Principe énergétique de Melnikov³¹Bilan énergétique d'une perturbation non conservative sur une solution libre x_c du mode NL

$$\text{signe de } \mathcal{M}^{1:k} = \overbrace{|W^{1:k}|}^{\text{travail}} - \overbrace{|\mathcal{R}|}^{\text{dissipation}} \quad ?$$

$$\bullet \quad W^{1:k}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}) = kA\pi \sqrt{\langle \mathbf{a}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^c, \mathbf{f}_{\text{ex}} \rangle^2}$$

$$\bullet \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{f}_{\text{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t) \rangle dt$$

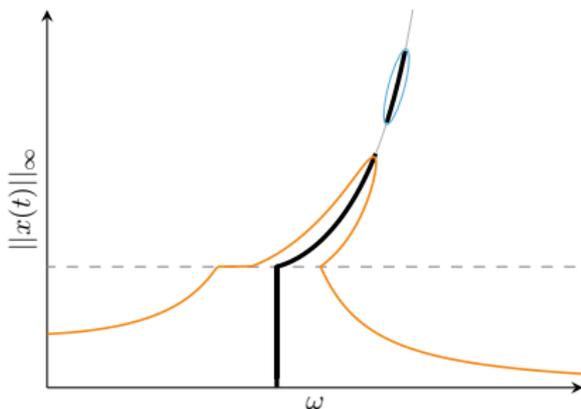
$$\bullet \quad |W^{1:k}| > |\mathcal{R}| : 2 \text{ solutions}$$

$$\bullet \quad |W^{1:k}| = |\mathcal{R}| : 1 \text{ solution}$$

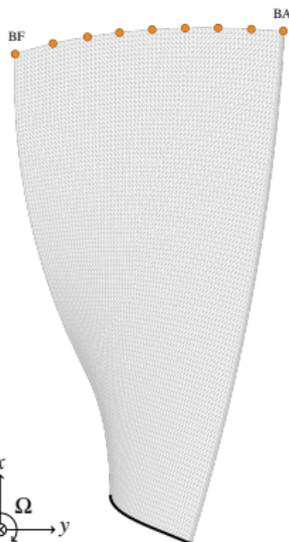
$$\bullet \quad |W^{1:k}| < |\mathcal{R}| : 0 \text{ solution}$$

Détection d'isolats

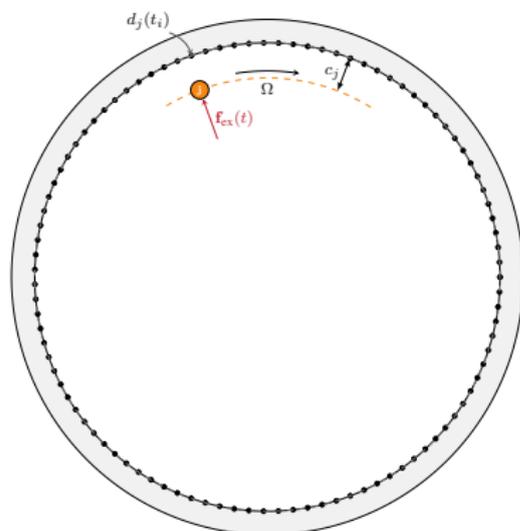
- 1 courbe principale
- 2 mode non linéaire
- 3 principe énergétique
- 4 isolat(s)



Aube NASA rotor 67



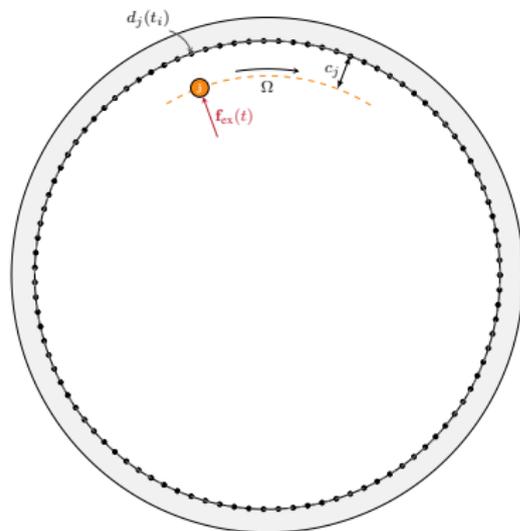
Carter circulaire + forçage



Aube NASA rotor 67



Carter circulaire + forçage



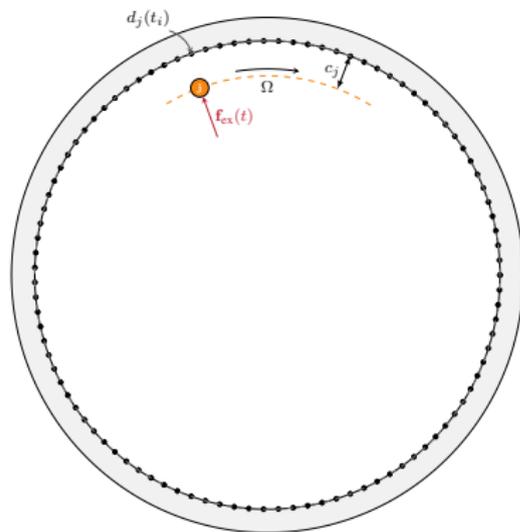
Objectifs de l'étude

- 1 fournir une preuve d'applicabilité de la stratégie de recherche d'isolats aux systèmes industriels hautement non linéaires

Aube NASA rotor 67



Carter circulaire + forçage



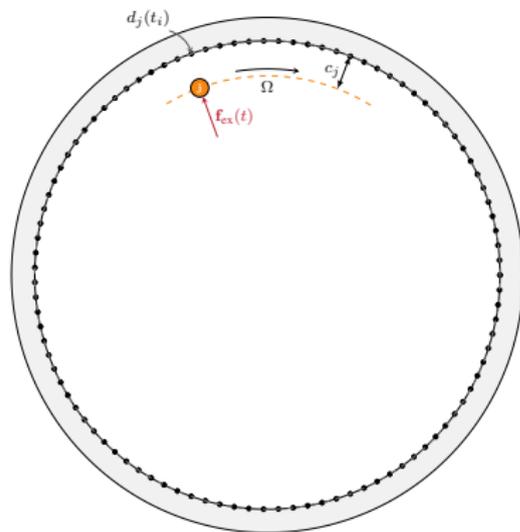
Objectifs de l'étude

- 1 fournir une preuve d'applicabilité de la stratégie de recherche d'isolats aux systèmes industriels hautement non linéaires
- 2 comprendre les mécanismes d'apparition des isolats en réponse forcée

Aube NASA rotor 67



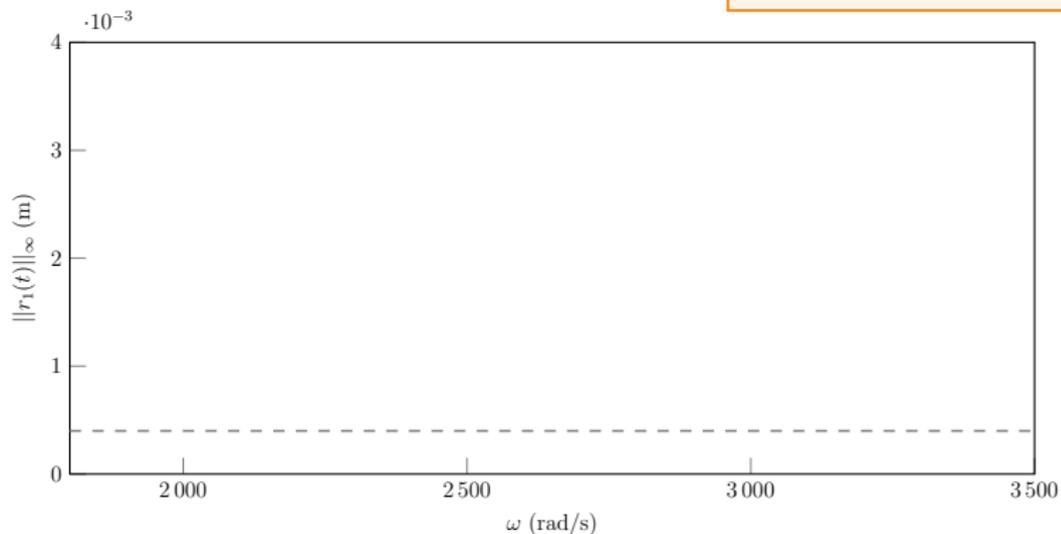
Carter circulaire + forçage



Objectifs de l'étude

- 1 fournir une preuve d'applicabilité de la stratégie de recherche d'isolats aux systèmes industriels hautement non linéaires
- 2 comprendre les mécanismes d'apparition des isolats en réponse forcée
- 3 mettre en évidence de nouveaux types de familles d'isolats à travers plusieurs formes d'excitation

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\mathbf{M}\Phi_{1F} \cos(\omega t)$$



jeu initial (- -)

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

**Recherche d'isolats
en réponse forcée**

État de l'art

Stratégie de recherche
d'isolats

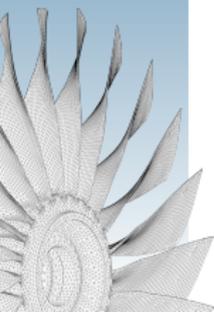
Cas d'étude industriel

Application du principe
énergétique

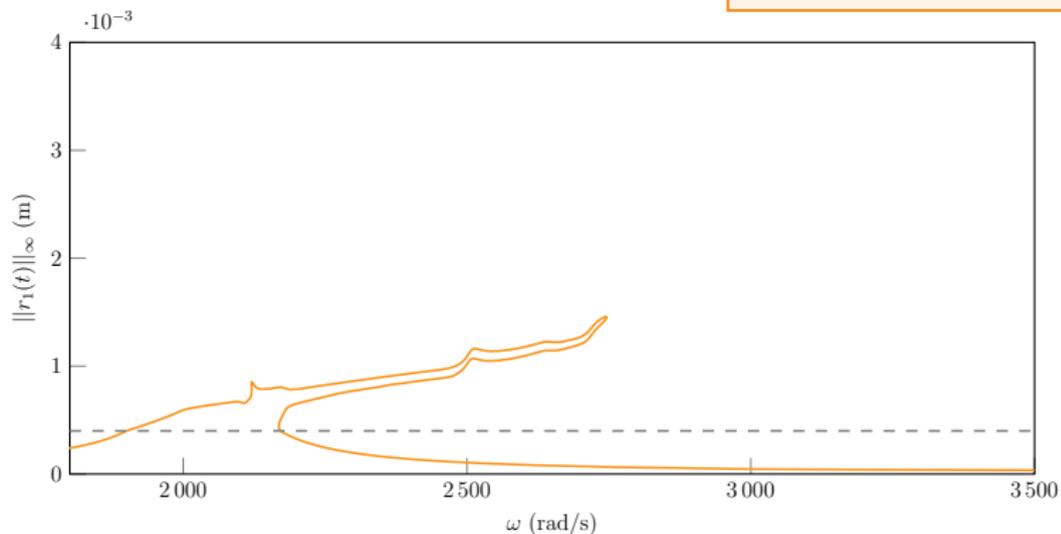
Excitation surharmonique
modale

Excitation séismologique

Conclusion



$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\mathbf{M}\Phi_{1F} \cos(\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—)

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

**Recherche d'isolats
en réponse forcée**

État de l'art

Stratégie de recherche
d'isolats

Cas d'étude industriel

Application du principe
énergétique

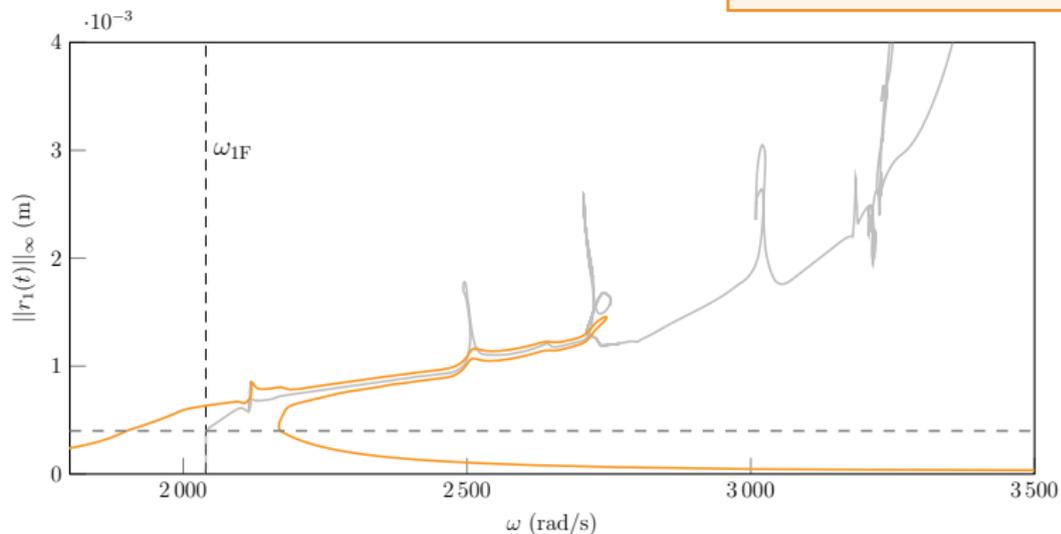
Excitation surharmonique
modale

Excitation sélective

Conclusion



$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\mathbf{M}\Phi_{1F} \cos(\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode non linéaire (—)

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

État de l'art

Stratégie de recherche
d'isolats

Cas d'étude industriel

Application du principe
énergétique

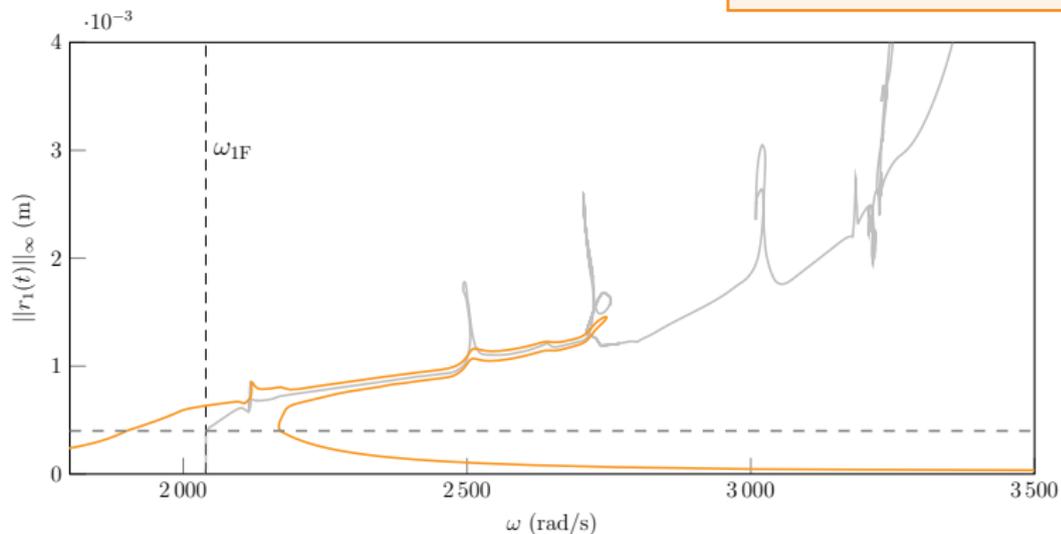
Excitation surharmonique
modale

Excitation sélective

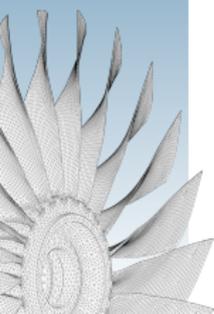
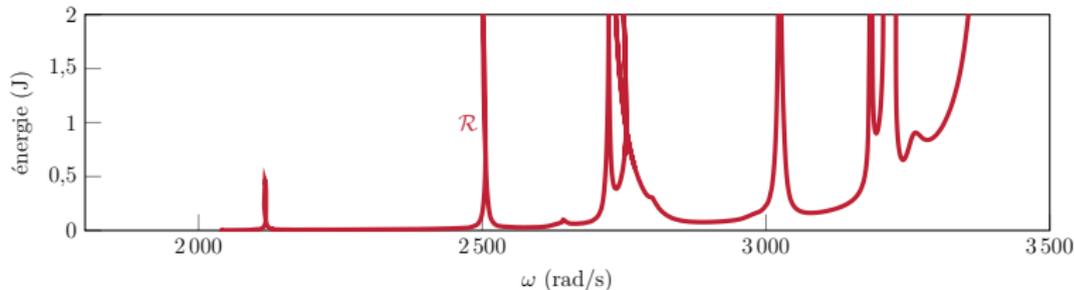
Conclusion



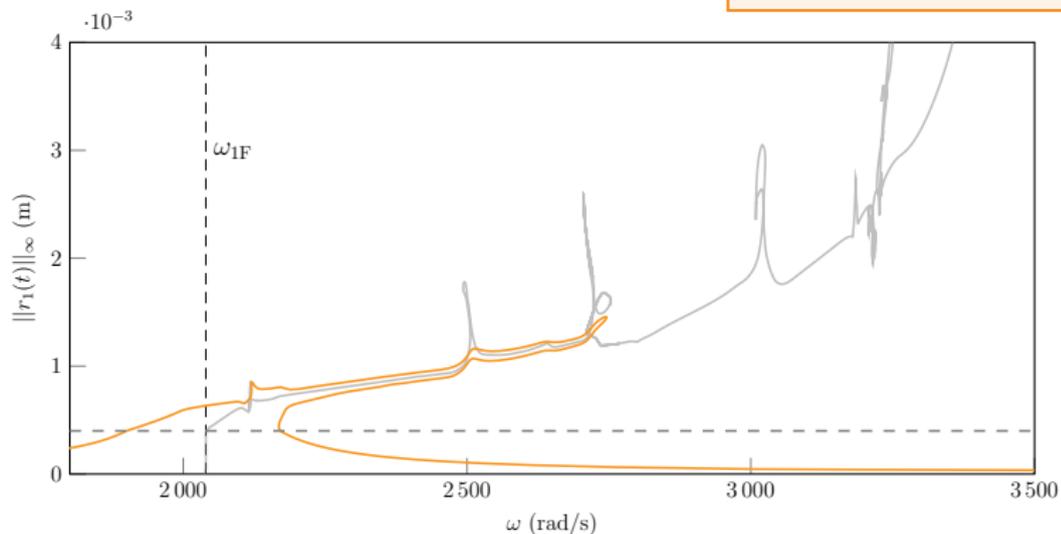
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\text{M}\Phi_{1F} \cos(\omega t)$$



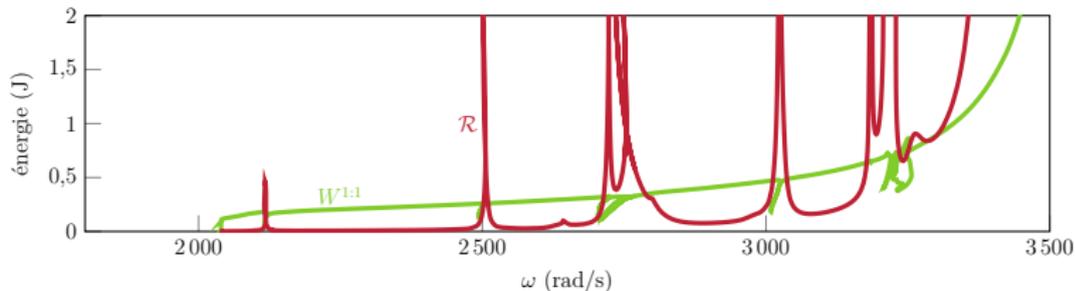
jeu initial (---), courbe principale (—), mode non linéaire (—)



$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\mathbf{M}\Phi_{1F} \cos(\omega t)$$



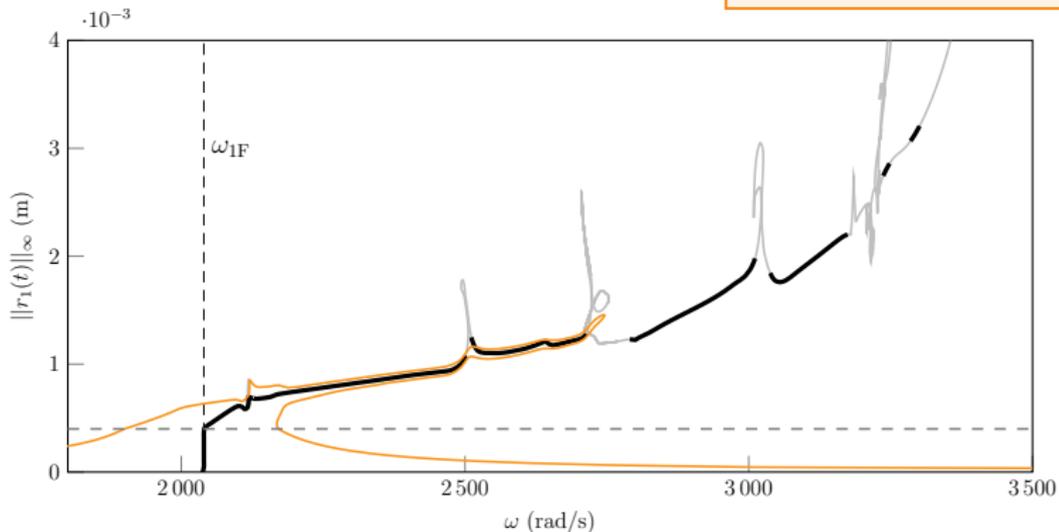
jeu initial (—), courbe principale (—), mode non linéaire (—)



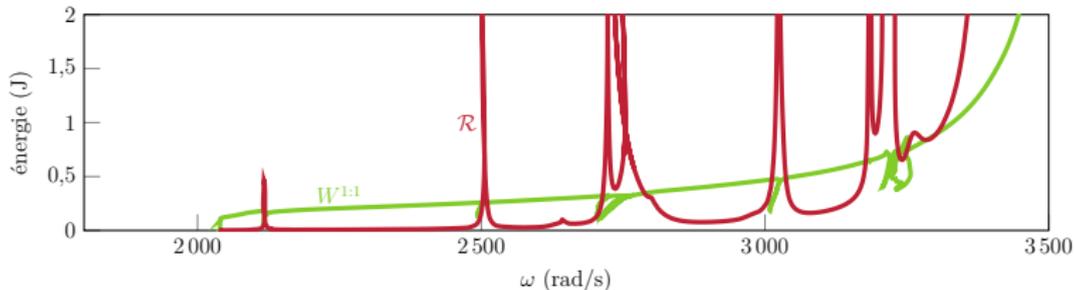
- Excitation surharmonique modale
- Excitation sélective
- Conclusion



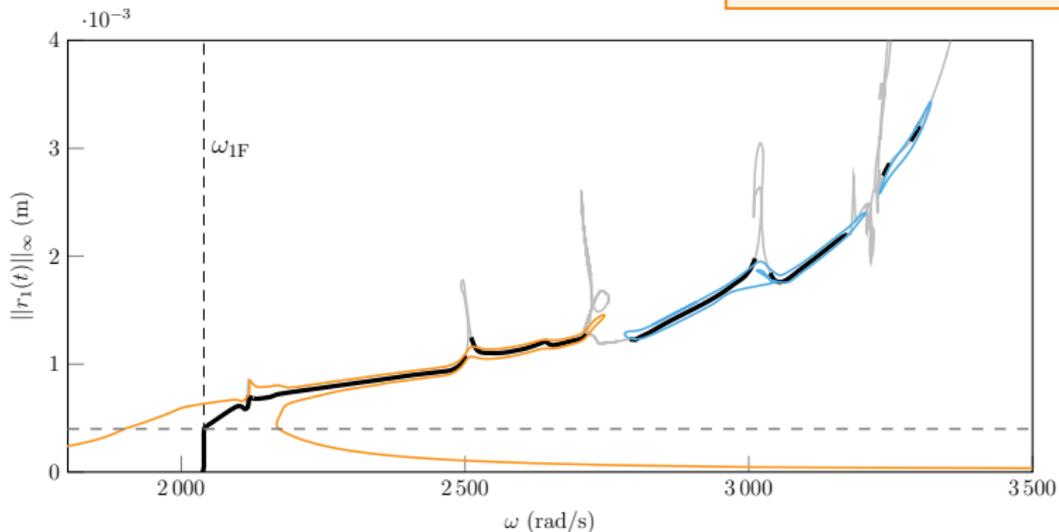
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\text{M}\Phi_{1\text{F}} \cos(\omega t)$$



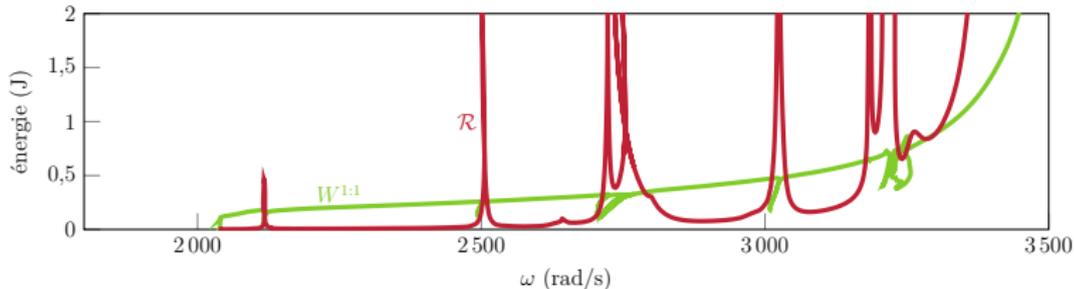
jeu initial (---), courbe principale (—), mode non linéaire (—), persistance (—)



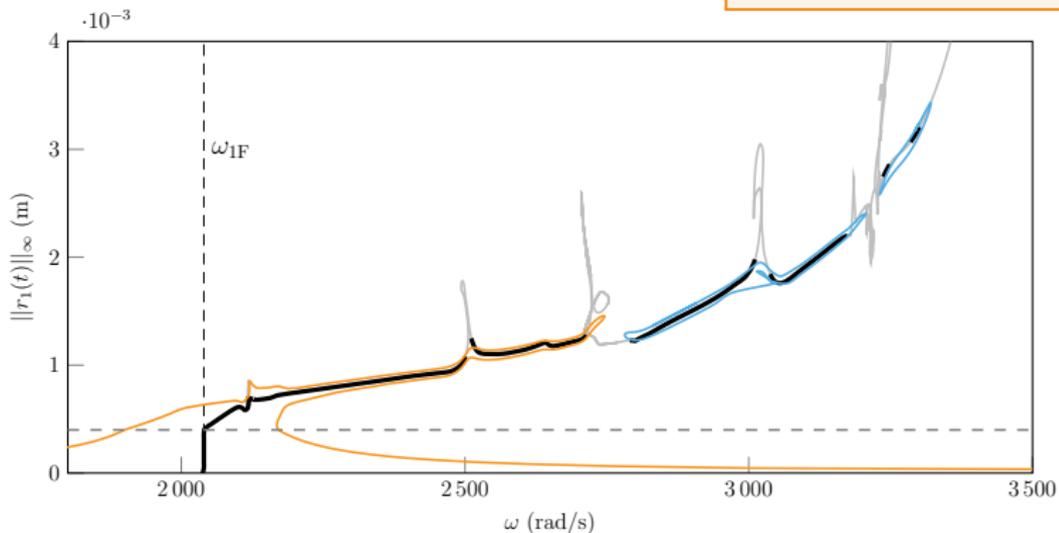
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\text{M}\Phi_{1\text{F}} \cos(\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode non linéaire (—), persistance (—), isolats (—)



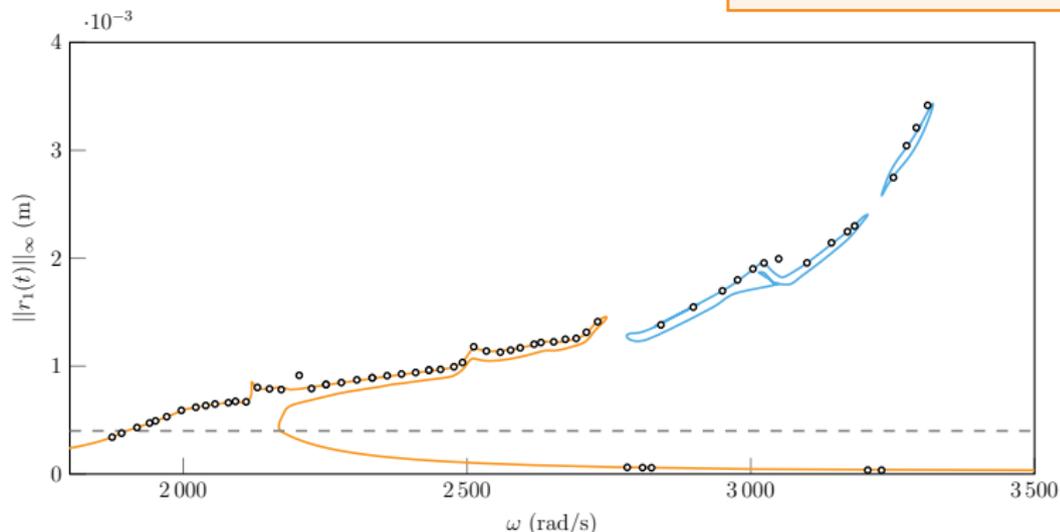
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 140\text{M}\Phi_{1\text{F}} \cos(\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode non linéaire (—), persistance (—), isolats (—)

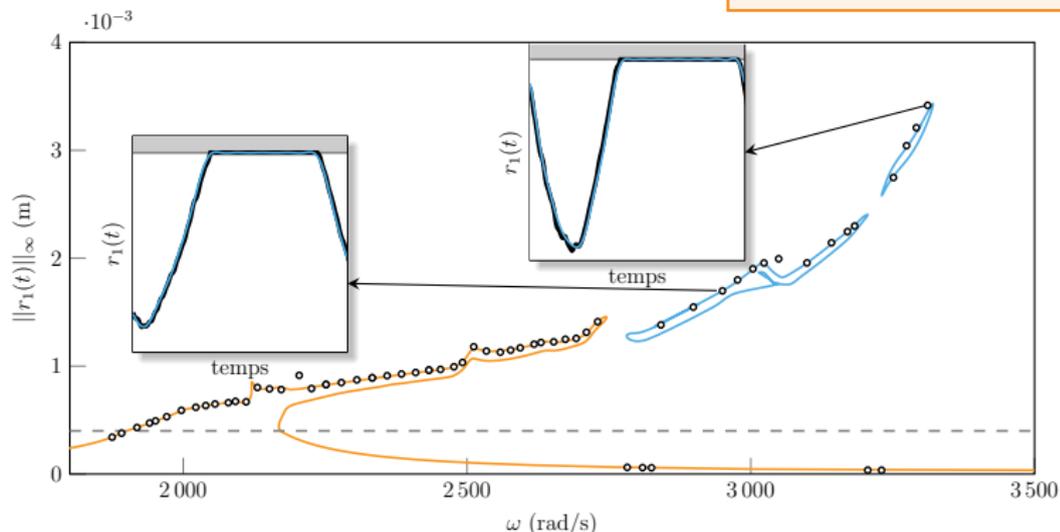
- excellent accord entre la prédiction du principe énergétique et les branches calculées
- pertinence ?





jeu initial (—), courbe principale (—), isolats (—), IT (o)

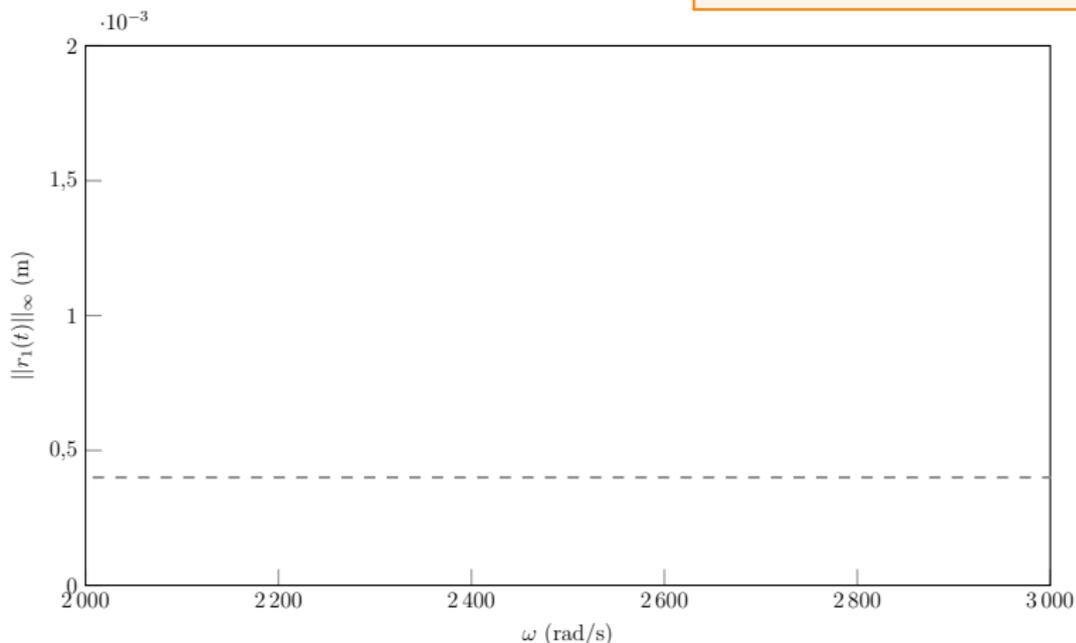
- excellent accord entre la prédiction du principe énergétique et les branches calculées
- pertinence ? → branches localement stables



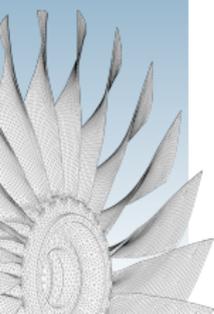
jeu initial (---), courbe principale (—), isolats (—), IT (o)

- excellent accord entre la prédiction du principe énergétique et les branches calculées
- pertinence ? → branches localement stables
- solutions DLFT-HBM superposées à l'IT en termes de déplacements

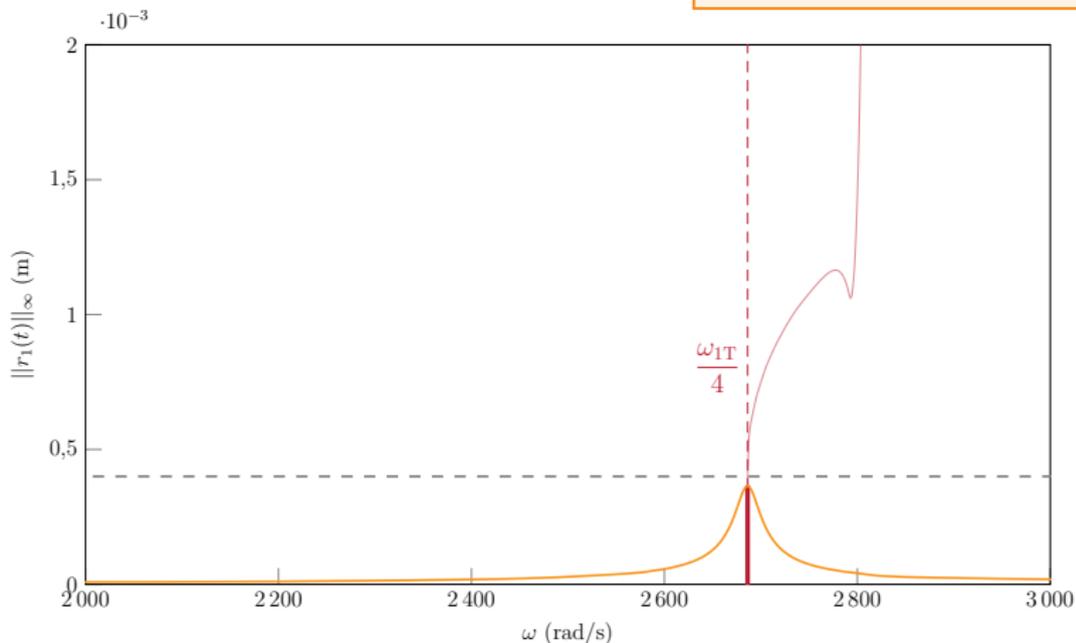
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300\mathbf{M}\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (- -)



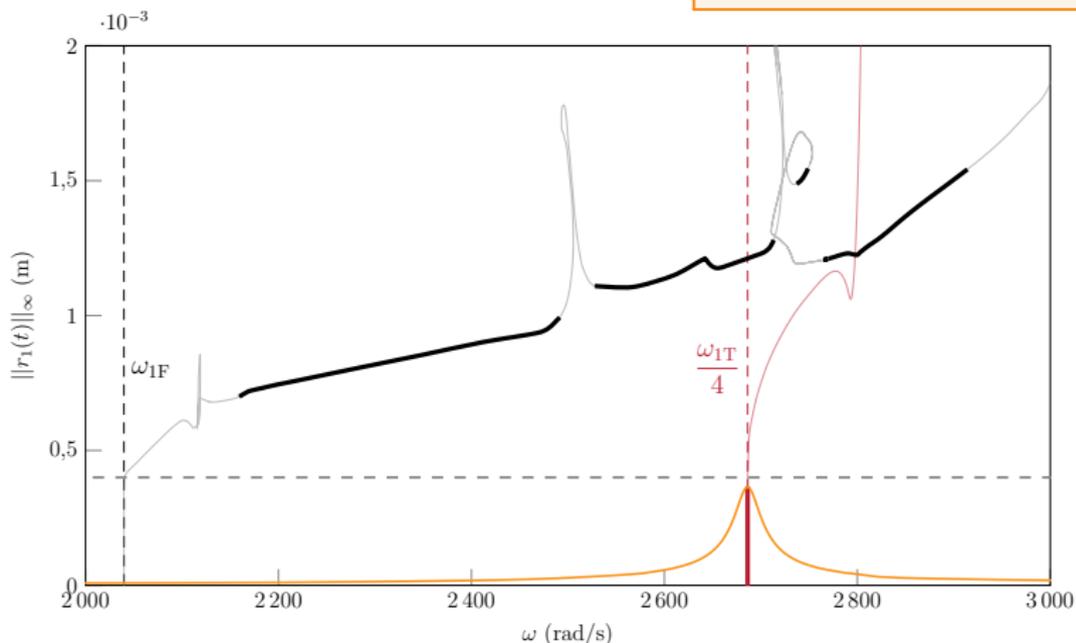
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300\mathbf{M}\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—)

- le système répond linéairement sur le mode excité

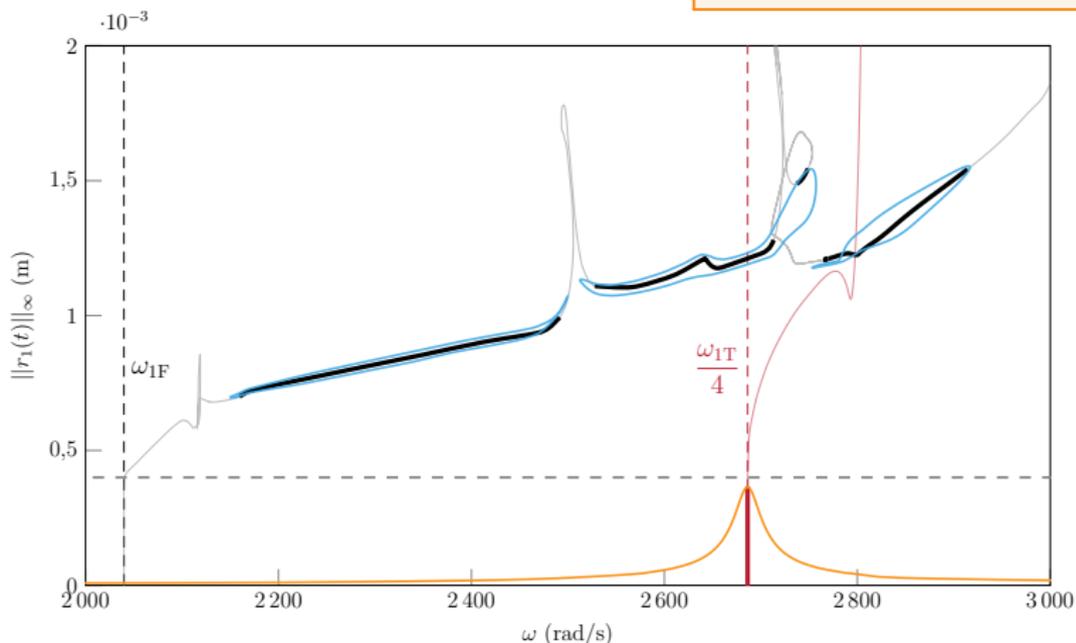
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300\mathbf{M}\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—), mode NL 1F (—)

- le système répond linéairement sur le mode excité

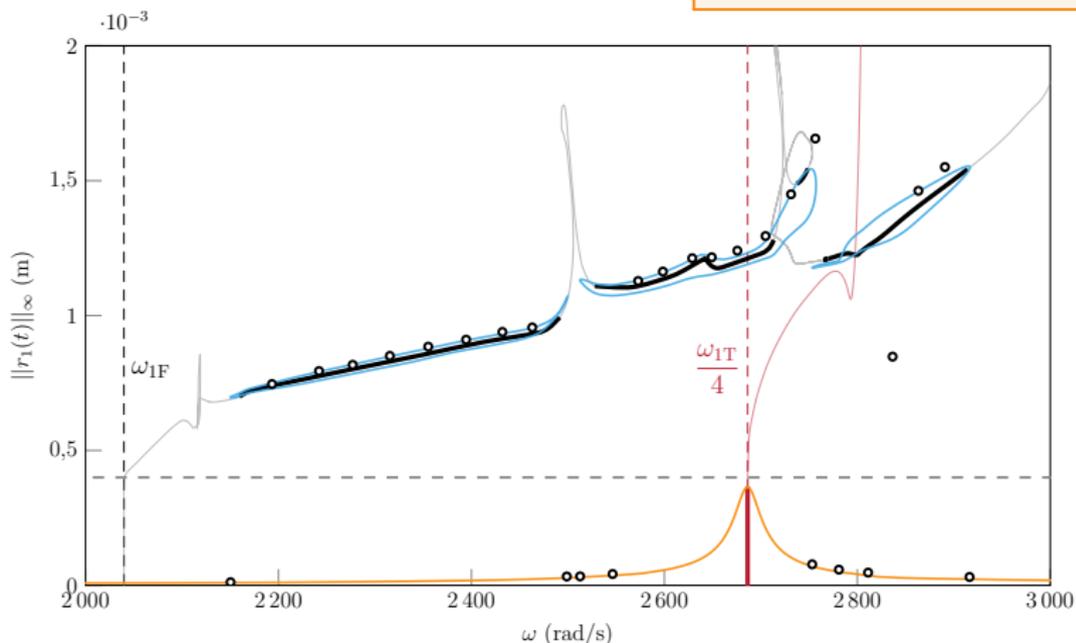
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300\mathbf{M}\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—), mode NL 1F (—), isolats (—)

- le système répond linéairement sur le mode excité
- 3 isolats sous-tendus par le mode non linéaire 1F

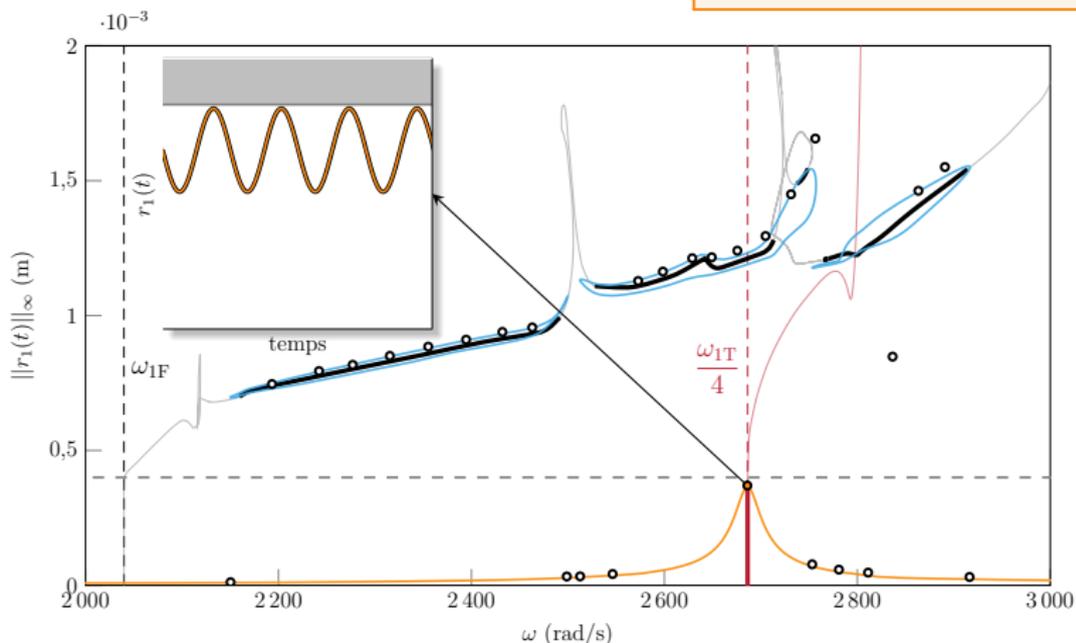
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300M\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—), mode NL 1F (—), isolats (—), IT (o)

- le système répond linéairement sur le mode excité
- 3 isolats sous-tendus par le mode non linéaire 1F
- solutions stables par IT

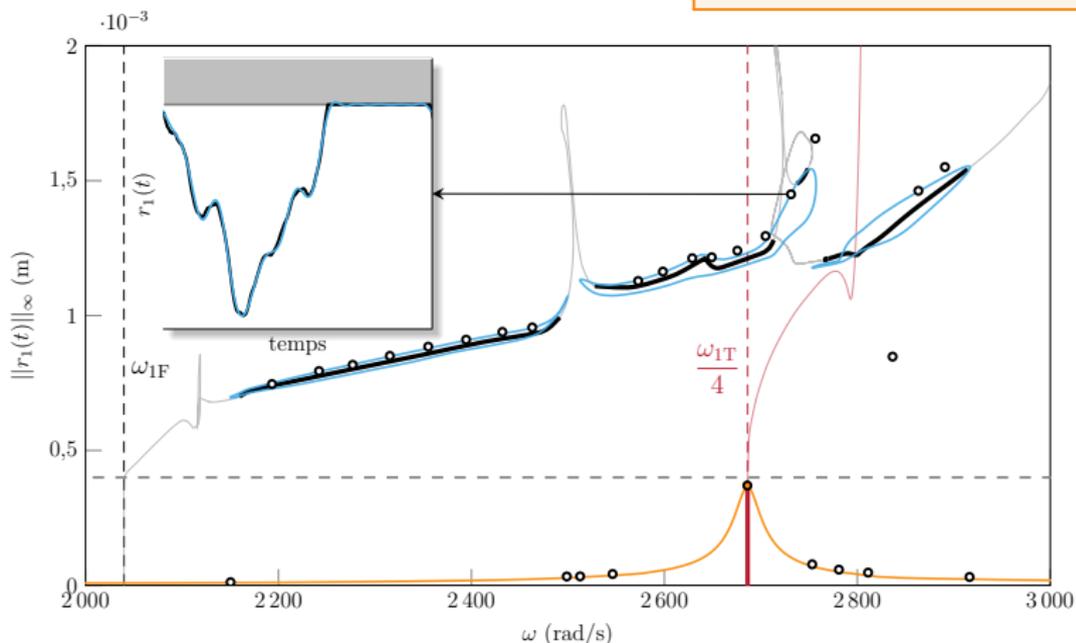
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 300\mathbf{M}\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—), mode NL 1F (—), isolats (—), IT (o)

- le système répond linéairement sur le mode excité
- 3 isolats sous-tendus par le mode non linéaire 1F
- solutions stables par IT

$$f_{\text{ex}}(t) = 300M\Phi_{1T} \cos(4\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL 1T/4 (—), mode NL 1F (—), isolats (—), IT (o)

- le système répond linéairement sur le mode excité
- 3 isolats sous-tendus par le mode non linéaire 1F
- solutions stables par IT
- périodicité fondamentale des solutions héritée du mode qui les sous-tend



Isolats sous harmoniques

- isolats sous harmoniques sous-tendus par le mode 1F
- cas simplifié : excitation sur une forme modale 1T pure

Ce phénomène persiste t-il pour une forme quelconque ?





Isolats sous harmoniques

- isolats sous harmoniques sous-tendus par le mode 1F
- cas simplifié : excitation sur une forme modale 1T pure

Ce phénomène persiste t-il pour une forme quelconque ?

Forme d'excitation aléatoire

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A \overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t) \text{ avec } \overline{\Phi}_{\text{al}} \text{ une forme aléatoire de norme unitaire}$$

Caractéristiques de l'excitation

mode ●	1F	2F	1T	4	5
contenu modal	0,15%	0,21%	0,17%	2,85%	1,60%
$\omega_{\bullet}/5 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$	408,0	1268,7	2149,1	2966,1	3736,2

excitation multimodale → plus complexe que le cas précédent



Isolats sous harmoniques

- isolats sous harmoniques sous-tendus par le mode 1F
- cas simplifié : excitation sur une forme modale 1T pure

Ce phénomène persiste t-il pour une forme quelconque ?

Forme d'excitation aléatoire

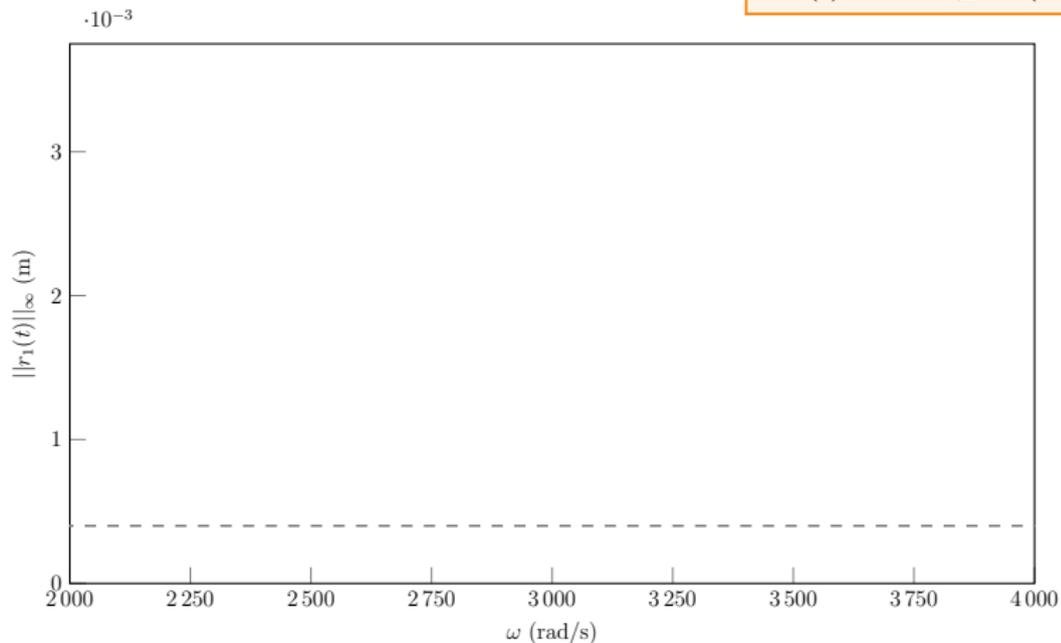
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A \overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t) \text{ avec } \overline{\Phi}_{\text{al}} \text{ une forme aléatoire de norme unitaire}$$

Caractéristiques de l'excitation

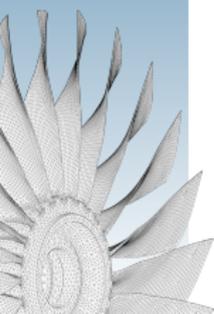
mode ●	1F	2F	1T	4	5
contenu modal	0,15%	0,21%	0,17%	2,85%	1,60%
$\omega_{\bullet}/5 \text{ (rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$	408,0	1268,7	2149,1	2966,1	3736,2

excitation multimodale → plus complexe que le cas précédent

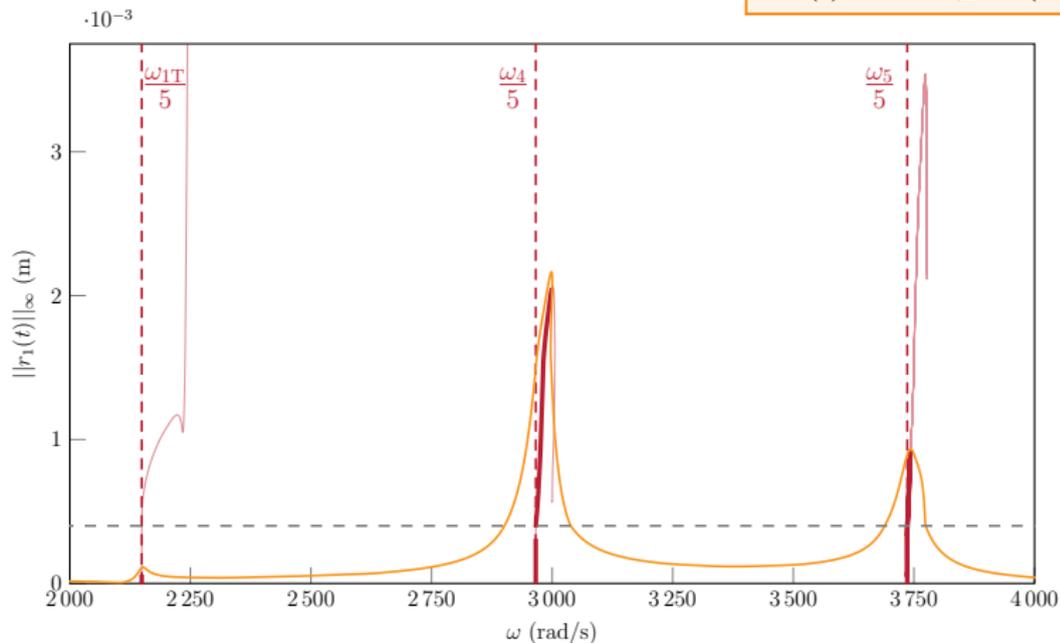
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 4,5\overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t)$$



jeu initial (- -)



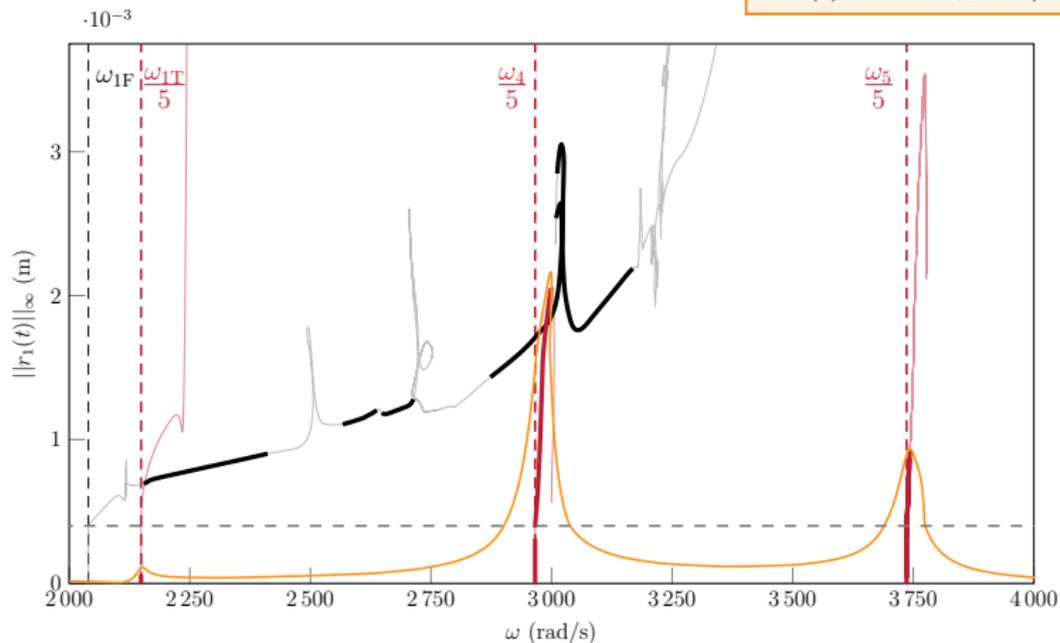
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 4,5\overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t)$$



jeu initial (- -), courbe principale (- -), mode NL surharm. (- -)

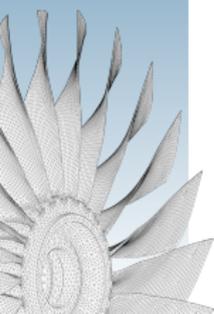
- amplitudes de réponse des modes 1T, 4 et 5 conformes aux attentes

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 4,5\overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t)$$

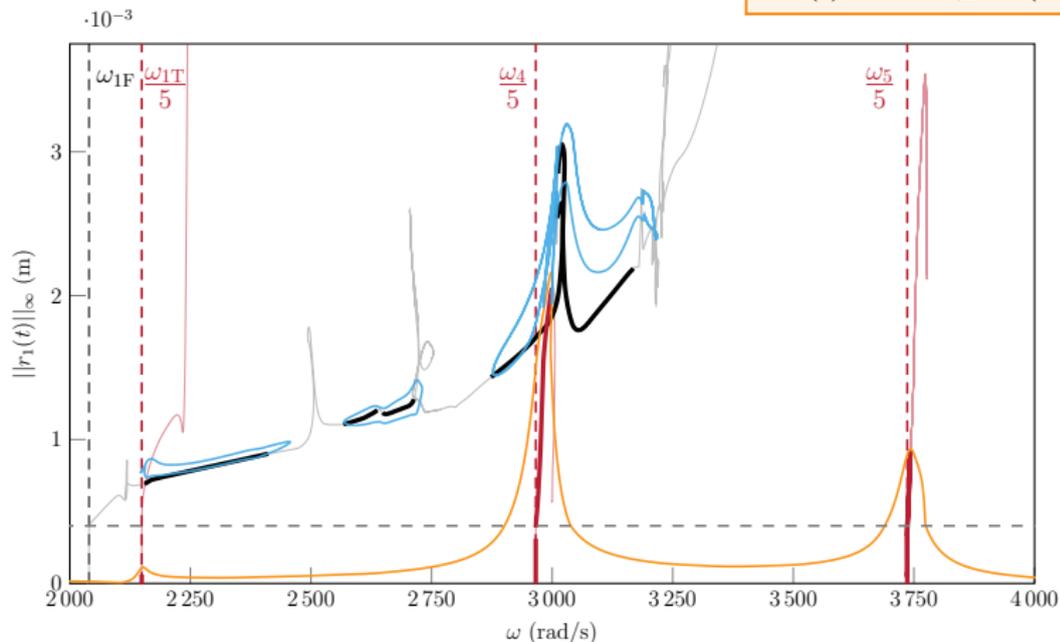


jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL surharm. (—), mode NL 1F (—)

- amplitudes de réponse des modes 1T, 4 et 5 conformes aux attentes



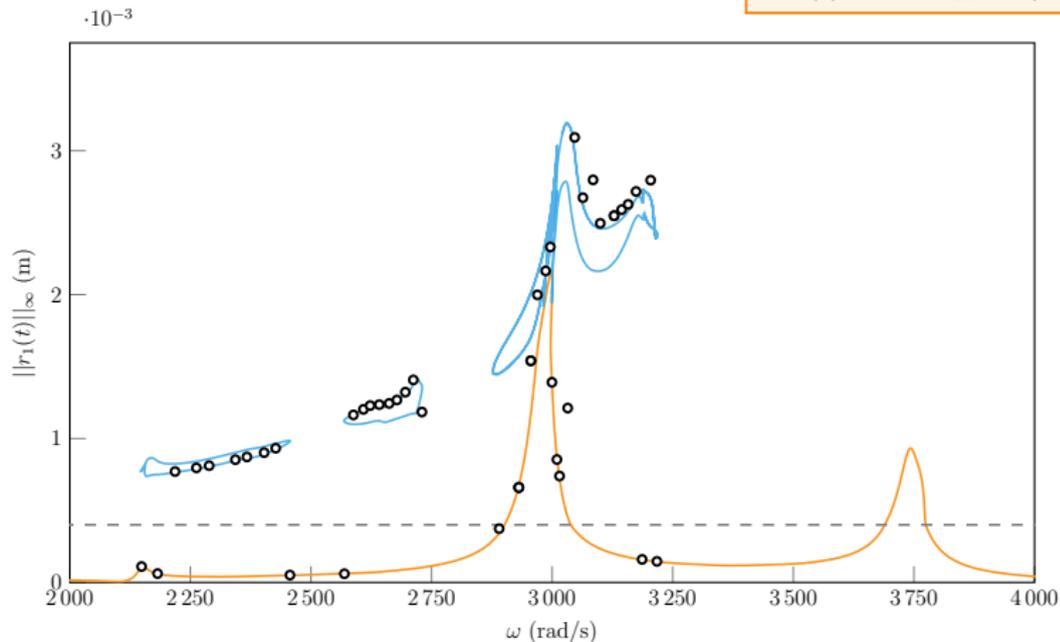
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = 4,5\overline{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL surharm. (—), mode NL 1F (—), isolats (—)

- amplitudes de réponse des modes 1T, 4 et 5 conformes aux attentes
- 4 isolats sous-tendus par le mode 1F même pour une excitation aléatoire

$$f_{\text{ex}}(t) = 4,5\bar{\Phi}_{\text{al}} \cos(5\omega t)$$



jeu initial (---), courbe principale (—), mode NL surharm. (—), mode NL 1F (—), isolats (—), IT (o)

- amplitudes de réponse des modes 1T, 4 et 5 conformes aux attentes
- 4 isolats sous-tendus par le mode 1F même pour une excitation aléatoire
- présence de solutions stables



Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

Sommaire

7 Conclusion





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes
- analyse détaillée de la DLFT-HBM : excellente corrélation avec
 - ▶ la LCP-HBM
 - ▶ l'intégration temporelle
 - ▶ la RL-HBM





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes
- analyse détaillée de la DLFT-HBM : excellente corrélation avec
 - ▶ la LCP-HBM
 - ▶ l'intégration temporelle
 - ▶ la RL-HBM
- implémentation haute performance capable de traiter des applications industrielles avec
 - ▶ un grand nombre d'inconnues non linéaires
 - ▶ une gestion tridimensionnelle du frottement





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes
- analyse détaillée de la DLFT-HBM : excellente corrélation avec
 - ▶ la LCP-HBM
 - ▶ l'intégration temporelle
 - ▶ la RL-HBM
- implémentation haute performance capable de traiter des applications industrielles avec
 - ▶ un grand nombre d'inconnues non linéaires
 - ▶ une gestion tridimensionnelle du frottement
- procédure de détection d'isolats systématique précise et robuste au type d'excitation





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes
- analyse détaillée de la DLFT-HBM : excellente corrélation avec
 - ▶ la LCP-HBM
 - ▶ l'intégration temporelle
 - ▶ la RL-HBM
- implémentation haute performance capable de traiter des applications industrielles avec
 - ▶ un grand nombre d'inconnues non linéaires
 - ▶ une gestion tridimensionnelle du frottement
- procédure de détection d'isolats systématique précise et robuste au type d'excitation
- caractérisation d'isolats sous harmoniques sous-tendus par des modes non linéaires





Conclusion

Synthèse

- implémentation d'un outil numérique unique pour l'ensemble des applications et méthodes
- analyse détaillée de la DLFT-HBM : excellente corrélation avec
 - ▶ la LCP-HBM
 - ▶ l'intégration temporelle
 - ▶ la RL-HBM
- implémentation haute performance capable de traiter des applications industrielles avec
 - ▶ un grand nombre d'inconnues non linéaires
 - ▶ une gestion tridimensionnelle du frottement
- procédure de détection d'isolats systématique précise et robuste au type d'excitation
- caractérisation d'isolats sous harmoniques sous-tendus par des modes non linéaires

Perspectives

- simulations avec une roue complète
- analyses de stabilité (Floquet, Hill) par DLFT-HBM en vibro-impact
- banc d'essais pour valider les résultats
- simulations avec plusieurs interfaces de contact : aube/carter + aube/disque
- recherche d'isolats avec des excitations aérodynamiques réelles → isolats sous harmoniques ?
- recherche d'isolats qui ne sont pas sous-tendus par des modes non linéaires

Introduction

État de l'art

DLFT-HBM

Configuration
académique

Configuration
industrielle

Recherche d'isolats
en réponse forcée

Conclusion

Merci de votre attention !

Annexes 

Algorithmes de gestion du contact

RL-HBM

DLFT-HBM

Spectres des efforts

DLFT-HBM

Relation asymptotique

DLFT-HBM—LCP-HBM

DLFT-HBM ou RL-HBM ?

Méthodes de recherche
d'isolats

Types de solutions

8 Annexes





Algorithmes de gestion du contact

Problème de contact

minimisation de l'énergie du système :

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad \min_{\mathbf{u} \in K} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})}_{\text{efforts internes}} - \underbrace{L(\mathbf{v} - \mathbf{u})}_{\text{efforts externes}} + \underbrace{\Pi_c}_{\text{contact}} \quad (9)$$

avec K l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles

Pénalité

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N \bar{g}_N^2 d\Gamma$$

avec $\bar{g}_N = \max(-g_N, 0)$;

efforts de contact : $\mathbf{f}_{nl}^N = \varepsilon_N \mathbf{c}_N(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{g}}_N$

avantage :

- problème (9) non contraint

défis :

- solutions dépendantes de ε_N
- difficultés numériques si ε_N est trop grand

Lagrangiens augmentés

$$\Pi_c = \begin{cases} \int_{\Gamma_c} \left(\lambda_N g_N + \frac{\varepsilon_N}{2} g_N^2 \right) d\Gamma & \text{si } \hat{\lambda} \leq 0, \\ \int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\varepsilon_N} |\lambda_N|^2 d\Gamma & \text{si } \hat{\lambda} > 0, \end{cases}$$

avec $\hat{\lambda}_N = \lambda_N + \varepsilon_N g_N$;

efforts de contact : $\mathbf{f}_{nl}^N = \mathbf{c}_N(\mathbf{x})(\lambda_N + \varepsilon_N g_N)$

avantages :

- fonctionnelle (9) localement convexe autour de la solution
- produit une estimation de la solution exacte

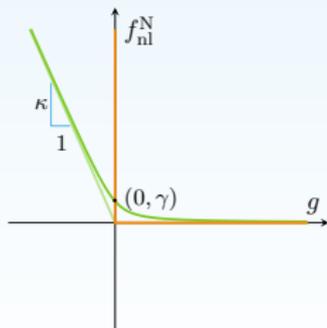
défi :

- vitesse de convergence dépendante de ε_N

RL-HBM (Regularized-Lanczos HBM)

Loi de pénalité régularisée

$$f_{nl}^N(t) = -\kappa \frac{g(t)}{2} + \sqrt{\left(\kappa \frac{g(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}$$



pénalité (—), pénalité régularisée (—), unilatéral (—)

Filtrage de Lanczos

$$\mathbf{f}_{nl}^N(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{a}_0^{nl} + \sum_{k=1}^{N_h} \sigma_k \left(\mathbf{a}_k^{nl} \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k^{nl} \sin(k\omega t) \right) \quad (10)$$

où :

$$\sigma_k = \text{sinc}(\chi_k) \quad \text{avec} \quad \chi_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 1 \\ \frac{k}{N_h + 1} & \text{pour } 1 \leq k \leq N_h \end{cases} \quad (11)$$

Fonctionnement de la DLFT-HBM

Équations de la DLFT-HBM

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N - \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r - \varepsilon (\tilde{\mathbf{g}}_x - \tilde{\mathbf{g}}_y) = \tilde{\mathbf{f}}_{nl,p}^N(\tilde{\mathbf{x}}_r) + \tilde{\mathbf{f}}_{nl,c}^N(\tilde{\mathbf{y}}_r) \quad (13)$$

prédiction-correction des lagrangiens augmentés :

① prédiction harmonique des efforts de contact : $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,p}^N = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r - \varepsilon \underbrace{(\tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{g}}_0)}_{\tilde{\mathbf{g}}_x}$

② transformée de Fourier inverse de la prédiction $\tilde{\mathbf{f}}_{nl,p}^N$:

$$\{f_{nl,p}^{N,i}\}_{i=1\dots N_t} = \overline{\mathcal{F}} \tilde{\mathbf{f}}_{nl,p}^N \quad (14)$$

③ correction des efforts :

▶ Si $f_{nl,p}^{N,i} \leq 0$: il y a séparation donc on corrige tel que $f_{nl}^{N,i} = 0$

▶ Si $f_{nl,p}^{N,i} > 0$: il y a contact donc on ne corrige pas et $f_{nl}^{N,i} = f_{nl,p}^{N,i}$

④ transformée de Fourier directe pour obtenir le vecteur multiharmonique $\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N$:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N = \mathcal{F} \{f_{nl}^{N,i}\}_{i=1\dots N_t} \quad (15)$$

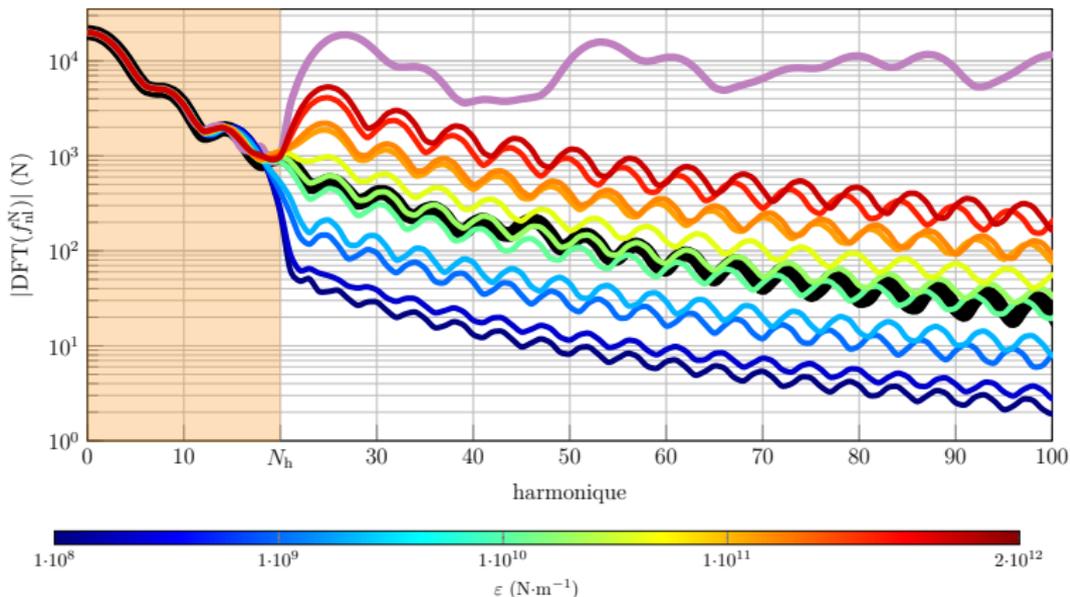
⑤ calcul du résidu harmonique : $\mathcal{H}_r(\tilde{\mathbf{x}}_r) = \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N - \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r}$

Spectres des efforts DLFT-HBM

Équations de la DLFT-HBM

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N - \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r - \varepsilon (\tilde{\mathbf{g}}_x - \tilde{\mathbf{g}}_y) \quad (17)$$



IT obstacle flexible (—), LCP-HBM (—), DLFT-HBM (—), bande passante HBM ()

Relation asymptotique DLFT-HBM—LCP-HBM

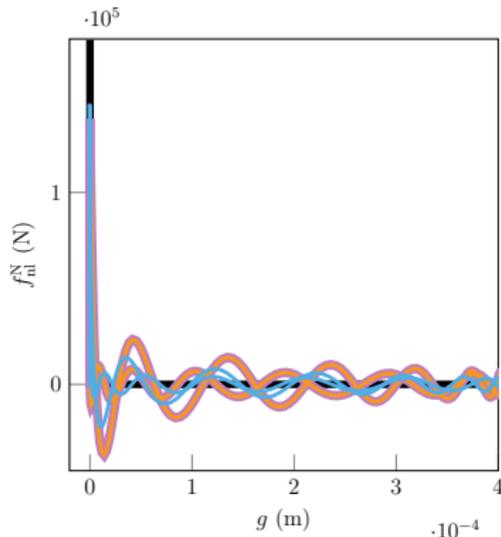
Équations de la DLFT-HBM

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N - \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N = \tilde{\mathbf{f}}_{ex,r} - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{x}}_r - \varepsilon(\tilde{\mathbf{g}}_x - \tilde{\mathbf{g}}_y) \quad (19)$$

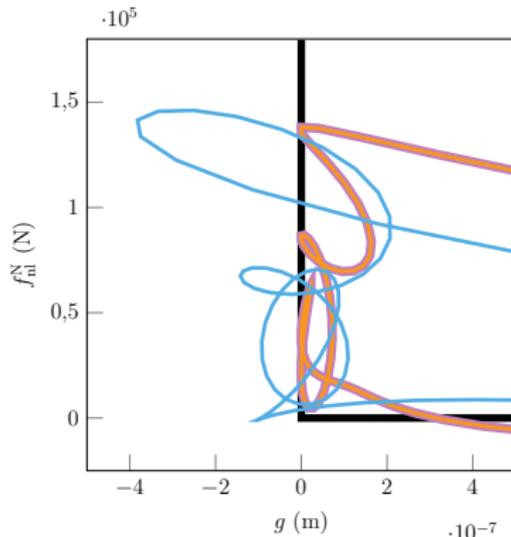
Équations de la LCP-HBM

$$\tilde{\mathbf{f}}_{nl}^N = \mathcal{F} \mathbf{C}_N \boldsymbol{\Lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W} \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{p} & (20a) \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \boldsymbol{\Lambda} \geq 0 & (20b) \end{cases}$$



période entière

DLFT-HBM $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (—), DLFT-HBM $\varepsilon = 2^{15} \varepsilon_0 \simeq 1 \cdot 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (—),
LCP-HBM (—), contact unilatéral (—)

autour de $g = 0$

La DLFT-HBM tend asymptotiquement vers la LCP-HBM lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Annexes 

Algorithmes de gestion du contact

RL-HBM

DLFT-HBM

Spectres des efforts

DLFT-HBM

Relation asymptotique

DLFT-HBM—LCP-HBM

DLFT-HBM ou RL-HBM ?

Méthodes de recherche
d'isolats

Types de solutions

DLFT-HBM

- **avantages :**
 - ▶ approxime les solutions exactes
 - ▶ détection des instants de transition
 - ▶ utilisé dans l'industrie pour le contact aube/disque et aube/aube
- **difficultés :**
 - ▶ effet de Gibbs
 - ▶ calcul des dérivées secondes
 - ▶ analyses de stabilité en vibro-impact (spectres haute freq. non physiques)

RL-HBM

- **avantages :**
 - ▶ calcul des dérivées analytiques aisé
 - ▶ analyses de stabilité en vibro-impact
 - ▶ peu d'effet de Gibbs
- **difficultés :**
 - ▶ dépendance des solutions à la raideur de contact
 - ▶ régularisation affecte la loi de contact
 - ▶ calibration des paramètres de la loi





DLFT-HBM ou RL-HBM ?

DLFT-HBM

- **avantages :**
 - ▶ approxime les solutions exactes
 - ▶ détection des instants de transition
 - ▶ utilisé dans l'industrie pour le contact aube/disque et aube/aube
- **difficultés :**
 - ▶ effet de Gibbs
 - ▶ calcul des dérivées secondes
 - ▶ analyses de stabilité en vibro-impact (spectres haute freq. non physiques)

RL-HBM

- **avantages :**
 - ▶ calcul des dérivées analytiques aisé
 - ▶ analyses de stabilité en vibro-impact
 - ▶ peu d'effet de Gibbs
- **difficultés :**
 - ▶ dépendance des solutions à la raideur de contact
 - ▶ régularisation affecte la loi de contact
 - ▶ calibration des paramètres de la loi

Bilan

temps de calcul équivalents, donc autres paramètres à prendre en compte ...

- application : académique ou industriel ? multi-non linéaire ? obstacle flexible ou rigide ?
- besoin : précision physique ? stabilité numérique du calcul ? phénomène simulé ?
- type de calcul : CRF ? stabilité ? suivi de bifurcations ?

Méthodes de recherche d'isolats

Suivi de bifurcations

- continuation des points limites (points de retournement) dans un espace paramétrique augmenté

- calcul de l'opérateur hessien des efforts de contact $\frac{\partial^2 \mathbf{f}_{n1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^2}$ nécessaire

Global terrain method

- parcours de la fonctionnelle par phases de descente/remontée du résidu

- directions obtenues par résolution d'un problème aux valeurs propres sur l'opérateur hessien $\frac{\partial^2 \mathbf{f}_{n1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^2}$

Méthode d'homotopie

- continuation des zéros de l'équation $\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \lambda) = \lambda \mathcal{Q}(\tilde{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda) \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{x}})$ en fonction de $\lambda \in [0; 1]$
- restreint aux systèmes polynomiaux + nombreux chemins divergents \rightarrow degré de \mathcal{Q} important

Bases de Gröbner

- forment un lien entre systèmes polynomiaux et algèbre linéaire (problèmes aux valeurs propres)
- restreint aux systèmes polynomiaux + temps de calcul croit fortement avec le nombre d'inconnues

Annexes ↑

Algorithmes de gestion du contact

RL-HBM

DLFT-HBM

Spectres des efforts

DLFT-HBM

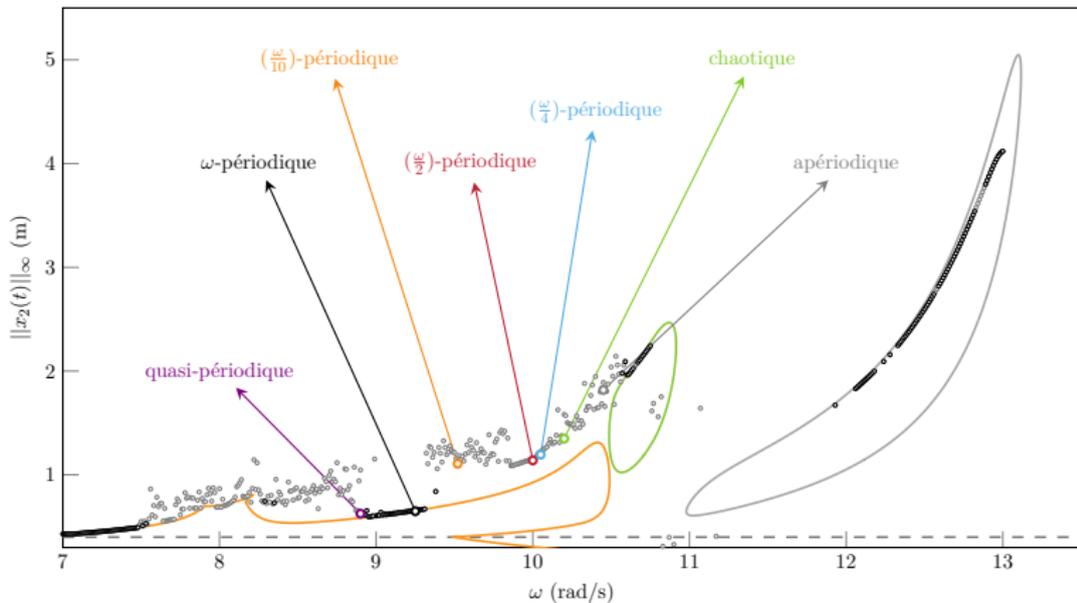
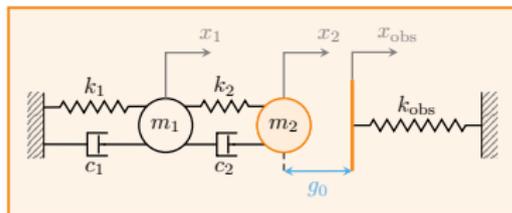
Relation asymptotique

DLFT-HBM—LCP-HBM

DLFT-HBM ou RL-HBM ?

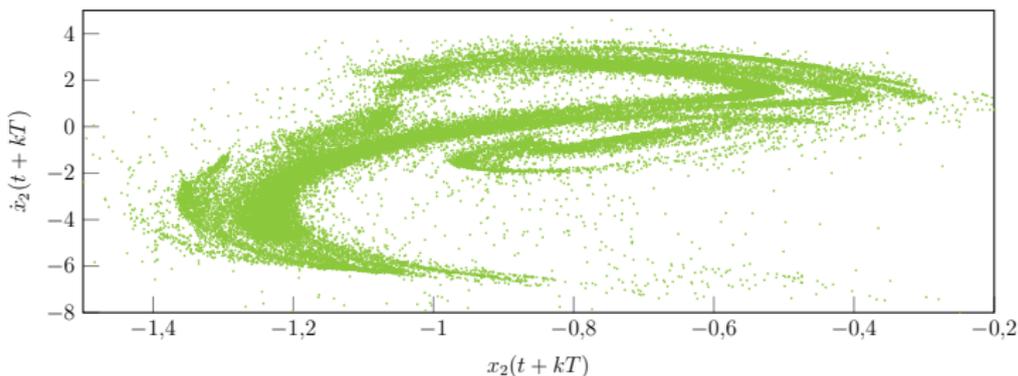
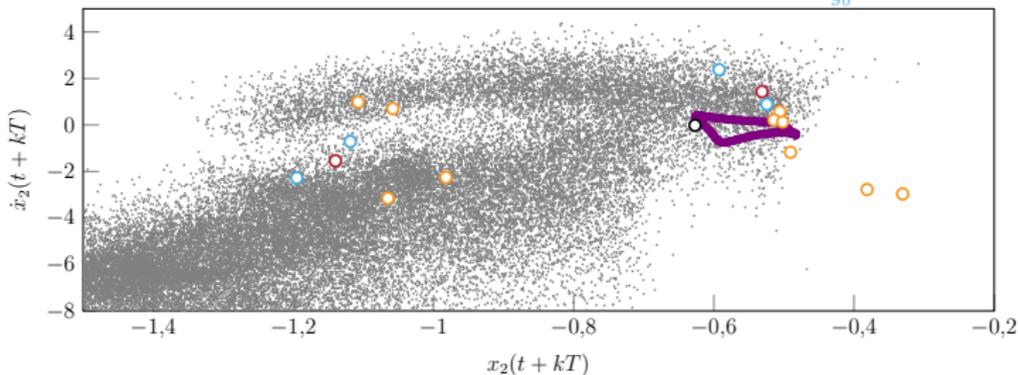
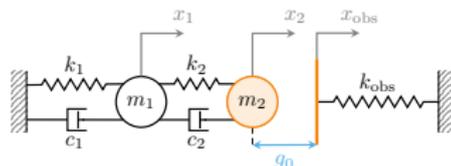
Méthodes de recherche d'isolats

Types de solutions



courbe principale (—), isolats (—) (—), IT ω -périodique (○), IT autre (○)

Types de solutions en vibro-impact



ω -périodique (o), $\frac{\omega}{2}$ -périodique (o), $\frac{\omega}{4}$ -périodique (o), $\frac{\omega}{10}$ -périodique (o), quasi-périodique (o), a périodique (·), chaotique (·)