Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter

Thibaut Vadcard

▶ **To cite this version:**

Thibaut Vadcard. Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter. Autre. Ecole Centrale de Lyon; Polytechnique Montréal (Québec, Canada), 2023. Français. NNT : 2023ECDL0016 . tel-04132688v2

HAL Id: tel-04132688

https://theses.hal.science/tel-04132688v2

Submitted on 19 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2023ECDL0016

École Centrale de Lyon

ET

Polytechnique Montréal

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

Unité de recherche **LTDS**

Thèse présentée par **Thibaut Vadcard**

Soutenue le **26 avril 2023**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon et de Polytechnique Montréal

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Dynamique des structures**

Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter

Thèse dirigée par Fabrice Thouverez
Alain Batailly

Composition du jury

Rapporteurs	Gaëtan Kerschen	Professeur, Université de Liège, S3L
	Zhaoheng Liu	Professeur, École de technologie supérieure
Examinateur	Cédric Béguin	Professeur adjoint, Polytechnique Montréal
Présidente	Marie-Annick Galland	Professeure, École Centrale de Lyon, LMFA
Directeurs de thèse	Fabrice Thouverez	Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS
	Alain Batailly	Professeur agrégé, Polytechnique Montréal

École Centrale de Lyon

AND

Polytechnique Montréal

Doctoral School **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

University Department **LTDS**

Thesis defended by **Thibaut Vadcard**

Defended on **April 26, 2023**

In order to become Doctor from École Centrale de Lyon and from Polytechnique Montréal

Academic Field **Mechanical engineering**

Speciality **Structural Dynamics**

Nonlinear dynamics of mechanical systems featuring contact interfaces : application to blade/casing interactions

Thesis supervised by Fabrice Thouverez
Alain Batailly

Committee members

Referees	Gaëtan Kerschen	Professor, Université de Liège, S3L
	Zhaoheng Liu	Professor, École de technologie supérieure
Examiner	Cédric Béguin	Assistant professor, Polytechnique Montréal
President	Marie-Annick Galland	Professor, École Centrale de Lyon, LMFA
Supervisors	Fabrice Thouverez	Professor, École Centrale de Lyon, LTDS
	Alain Batailly	Associate professor, Polytechnique Montréal

Cette thèse a été préparée chez les partenaires suivants

LTDS

Laboratoire de Tribologie et Dynamique
des Systèmes,
UMR 5513,
École Centrale de Lyon,
36 avenue Guy de Collongue,
69134 Ecully, France

✉ fabrice.thouverez@ec-lyon.fr
Site http://ltds.ec-lyon.fr

LAVA

Laboratoire d'Analyse Vibratoire et Acoustique,
Département de génie mécanique,
Polytechnique Montréal,
2500 Chemin de Polytechnique,
Montréal, QC H3T 1J4, Canada

✉ alain.batailly@polymtl.ca
Site https://lava.polymtl.ca/

Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter

Résumé

Avec l'émergence de nombreuses normes environnementales, l'industrie aéronautique doit se conformer à un ensemble de réglementations concernant le rejet de gaz à effets de serre et d'oxydes d'azote. Les équipementiers aéronautiques doivent donc mettre au point des moteurs plus performants, ce qui passe par l'exploration de nouvelles pistes de conception. Les jeux fonctionnels entre les parties fixes et les parties tournantes du moteur sont responsables d'une grande partie des pertes aérodynamiques à chacun des étages de la turbomachine. Par conséquent, la réduction de ces jeux permet une augmentation significative du rendement des turboréacteurs. En revanche, elle s'accompagne également d'un accroissement de la probabilité d'occurrence des contacts structurels entre les têtes d'aubes et le carter. Dans l'optique de garantir la sûreté des avions, il devient alors nécessaire de se doter d'outils numériques permettant de modéliser de tels contacts avec l'objectif d'intégrer les outils non linéaires dans les cycles de conception industriels. Cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux visant à accroître le niveau de modélisation et de compréhension des phénomènes non linéaires dans les turbomachines, et particulièrement les contacts aube/carter. L'objectif principal de cette thèse consiste à fournir une preuve d'applicabilité des méthodes fréquentielles basées sur un algorithme de gestion du contact par lagrangiens augmentés à la configuration hautement non linéaire de contact aube/carter. Par ailleurs, on cherche à mettre en évidence les propriétés inhérentes aux méthodes fréquentielles concernant le respect des différentes conditions de contact unilatéral. Enfin, comme lors de l'étude des systèmes de taille industrielle on détecte de nombreuses branches de solutions isolées, le dernier objectif consiste à mettre au point une procédure de détection de solutions isolées adaptée aux problèmes de contact aube/carter. Pour ces travaux de thèse, une méthode de gestion du contact dans le domaine fréquentiel par lagrangiens augmentés est implémentée et comparée aux stratégies constituant l'état de l'art en ce qui concerne le contact aube/carter. Une très bonne corrélation est obtenue sur les systèmes de taille industrielle, où les stratégies fréquentielles surpassent même les stratégies temporelles de référence en termes d'informations qualitatives obtenues sur la dynamique du système. Les propriétés de gestion du contact intrinsèques des méthodologies utilisées sont mises en évidence sur des systèmes simples, permettant par la même occasion de mettre en lumière une relation asymptotique entre les stratégies fréquentielles se basant sur les méthodes gestion du contact par lagrangiens augmentés d'une part et par multiplicateurs de Lagrange d'autre part. Enfin, une stratégie de recherche de branches de solutions isolées basée sur le principe énergétique de Melnikov est appliquée au contact aube/carter. Cette dernière permet la mise en évidence de nombreuses familles de solutions isolées de manière systématique. De plus, l'application de cette stratégie a mené à une meilleure compréhension des mécanismes responsables de la naissance de branches de solutions isolées. Par ailleurs, un nouveau phénomène responsable de la naissance de branches isolées, pouvant être critique du point de vue de l'intégrité structurelle, est détecté lorsque l'aube subit une excitation surharmonique.

Mots clés : contact unilatéral, méthodes numériques, algorithmes de contact, méthode de l'équilibrage harmonique, interactions rotor/stator, contacts aube/carter, branches de solutions isolées, principe énergétique de Melnikov

LTDS
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR 5513, École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France

Nonlinear dynamics of mechanical systems featuring contact interfaces : application to blade/casing interactions

Abstract

With the emergence of numerous environmental standards, the aviation industry must comply with a series of regulations regarding greenhouse gases and nitrogen oxides emissions. Aeronautical equipment manufacturers must therefore develop more performant engines, which means exploring new designs. The operational clearances between the fixed and rotating parts of the engine are responsible for a large part of the aerodynamic losses at each stage of the turbomachine. Naturally, reducing these clearances allows for a significant increase in the efficiency of the engine. However, it also comes with a rise in the likelihood of the occurrence of structural contacts between blade-tips and the casing. In order to ensure the safety of the aircraft, it becomes necessary to acquire numerical tools allowing to model such contacts with the objective of integrating nonlinear tools in industrial design cycles. This thesis aims to increase the level of modeling and understanding of nonlinear phenomena in turbomachinery, and particularly blade/casing contacts. The main objective of this thesis is to provide a proof of applicability of frequency methods based on an augmented lagrangian contact management algorithm to the highly nonlinear configuration of blade/casing contact. In addition, one seeks to highlight the properties inherent to the frequency methods regarding their respect of the different unilateral contact conditions. Finally, as many branches of isolated solutions are detected in the analysis of industrial systems, the last objective consists in developing a procedure for the detection of isolated branches of solutions adapted to to blade-tip/casing contact problems. During this thesis, a method of contact management in the frequency domain by augmented lagrangians is implemented and compared to industrial state-of-the-art strategies when it comes to rotor/stator interactions. A very good correlation is obtained on industrial sized systems, where the frequency-based strategies even outperform the reference time domain strategies in terms of qualitative information obtained on the dynamics response. The intrinsic contact management properties of the methodologies are identified on simple systems, allowing in the process to highlight an asymptotic relation between frequency domain methods relying on contact managements by augmented Lagrangians on the one hand and by Lagrange multipliers on the other hand. Finally, a detection strategy for isolated branches of solutions based on Melnikov's energy principle is applied to blade-tip/casing contact problems. The latter allows for the identification of many isolated branches of solutions families systematically. Moreover, the application of this strategy has led to a better understanding of the mechanisms responsible for the birth of branches of isolated solutions. In addition, a new phenomenon responsible for the birth of isolated branches, which may be critical from a structural integrity standpoint, is detected when the blade undergoes an overharmonic excitation.

Keywords: unilateral contact, numerical methods, contact algorithms, harmonic balance method, rotor/stator interactions, blade-tip/casing contacts, branches of isolated solutions, Melnikov's energy principle

Remerciements

Écrire un manuscrit de thèse n'est pas une mince affaire, mais je suis conscient de la responsabilité qui incombe aux évaluateurs de celui-ci. Par conséquent, je tiens à remercier messieurs Gaëtan Kerschen, Zhaoheng Liu et Cédric Béguin d'avoir accepté de relire et d'examiner mon travail à la lumière de leur expertise. J'adresse également mes remerciements à Marie-Annick Galland pour avoir accepté d'assumer la présidence de mon jury de thèse de doctorat.

Je tiens ensuite à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Fabrice Thouverez, sans qui toute cette aventure n'aurait sans doute pas vu le jour. C'est lui qui m'a permis de rencontrer mon autre directeur de thèse Alain Batailly, chez qui j'ai fait mes armes dans le monde de la recherche en tant que stagiaire. Nous connaissons maintenant la suite de l'histoire : ils m'ont tous deux fait confiance pour mener à bien le projet de recherche dont ce manuscrit est la conclusion. Je les remercie tous les deux pour leur patience, leur écoute, leur disponibilité à toute épreuve et pour les nombreux conseils qu'ils m'ont prodigués pendant ce voyage, malgré les années de pandémie que nous avons eu à traverser.

Je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont épaulé sur le plan administratif, me permettant ainsi de mener à bien ces travaux avec l'esprit tranquille. En particulier, je remercie Isabelle pour son aide sur les aspects administratifs concernant les voyages et la soutenance ainsi qu'Alain qui a toujours répondu présent lorsqu'il s'agissait de me sortir des (nombreuses) mésaventures administratives que j'ai rencontrées pendant ces trois ans.

Également, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers l'ensemble des personnes avec qui j'ai pu travailler de près ou de loin. Du coté de Montréal, je remercie particulièrement Yann pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir au sujet des arcanes de l'équilibrage harmonique, j'espère avoir pu te rendre toute l'aide que tu m'as apportée. À Lyon, j'adresse mes remerciements à l'équipe des doctorants pour tous les moments que nous avons partagés que ce soit au travail ou en dehors. Je suis persuadé que votre bonne humeur et votre bienveillance font de ces moments passés ensemble des souvenirs dont je serai très vite nostalgique. En particulier, je souhaite remercier Adrien, Anthony, Coline, Corentin, Giorgia, Hugo, Nicolas D.P., Nicolas G., Nicolas O. et Samuel. Je tiens à souligner que chacun d'entre vous m'a été d'un soutien précieux tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Je remercie mes amis pour leur soutien indéfectible au jour le jour, dans les bons moments comme dans les moins bons. Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Enoal qui m'a logé pendant presque un an et qui a été mon psychologue à temps plein pendant ces années. J'exprime toute ma gratitude à mes amis lyonnais avec qui j'ai tant partagé : Thomas D., Anthony, Aymeric, Danie, Édouard, Alexis, Ninon, Théophile, Erwan, Mathilde, Julie, Théophane, Matthieu, Sébastien, Thomas A., Pierre et Adrien. Je remercie mes amis parisiens avec qui j'ai passé de nombreux moments inoubliables lors de mes escapades franciliennes :

Maël, Marguerite, Samy, Antonio, Thomas, Guilhain, Paul, Lola, Julia, Brice, Arthur, Pierre, Jordan, Antonin et Charles. Je souhaite également remercier mes amis les plus éloignés géographiquement : Mickael, Christophe, Anthony, Sabrina, Quentin, Julien et Ali avec qui j'ai pu partager de nombreuses discussions et soirées vidéoludiques, loin des préoccupations de la thèse. Je suis conscient que cette liste n'est pas exhaustive mais je tiens également à remercier les personnes que j'ai omises, qui se reconnaîtront sûrement en lisant ces quelques lignes.

Pour finir je souhaite exprimer ma gratitude envers mes proches, je n'aurais sans doute pas pu aller au bout de cette aventure sans leur présence et leur appui. Je remercie particulièrement Angélique, Vincent et Pascal pour les bons moments que nous avons eu l'occasion de partager lorsque j'étais de retour dans ma Normandie natale. Je remercie du fond du cœur mes parents et ma petite sœur Anaïs pour leur curiosité et leur amour. En particulier, je suis extrêmement touché par le soutien inconditionnel qu'ils m'apportent bien que mon travail reste toujours aussi énigmatique pour eux. Je tiens également à manifester ici mon admiration envers mes parents qui ont toujours fait preuve d'abnégation pour me permettre d'arriver jusqu'ici. Enfin, j'adresse un hommage à mes deux grand-mères Josiane et Jacqueline qui n'auront malheureusement pas l'occasion de lire ces remerciements.

Acronymes

1F premier mode de flexion.
1T premier mode de torsion.
2D deux dimensions.
2F deuxième mode de flexion.
3D trois dimensions.

AFT *Alternating Frequency/Time.*

BA Bord d'Attaque.
BF Bord de Fuite.
BP Basse Pression.

DFT *Discrete Fourier Transform.*
DLFT-HBM *Dynamic Lagrangian Frequency/Time Harmonic Balance Method.*

EDO Équation Différentielle Ordinaire.

FFT *Fast Fourier Transform.*

HBM *Harmonic Balance Method.*
HDHB *High Dimension Harmonic Balance Method.*
HP Haute Pression.

IDFT *Inverse Discrete Fourier Transform.*
IT Intégration Temporelle.

LCP *Linear Complementarity Problem.*
LCP-HBM *Linear Complementarity Problem Harmonic Balance Method.*

NASA *National Aeronautics and Space Administration.*
NNM *Nonlinear Normal Mode.*

RL-HBM *Regularized-Lanczos Harmonic Balance Method.*

TSM *Time Spectral Method.*

Table des matières

Résumé vii

Remerciements ix

Acronymes xi

Table des matières xiii

Introduction générale 1
Contexte industriel . . . 1
Contexte scientifique . . . 2
Objectifs . . . 3
Organisation du mémoire . . . 3

I Contexte technologique et théorique 5
1 Description d'une turbomachine . . . 5
1.1 Principe de fonctionnement et composants d'un turboréacteur . . . 6
1.2 Réglementations environnementales . . . 8
1.3 Sources de vibrations . . . 8
2 Conception mécanique des roues aubagées . . . 10
2.1 Statique . . . 10
2.2 Dynamique . . . 11
3 Sources de non-linéarité . . . 12
3.1 Géométrique . . . 13
3.2 Matériau . . . 13
3.3 Interfaces de contact . . . 13
4 Mécanique du contact . . . 15
4.1 Configuration de deux corps élastiques en contact . . . 15
4.2 Contact unilatéral . . . 16
4.3 Loi de frottement . . . 17
4.4 Mise en équation du problème de contact . . . 18
4.5 Gestion du contact . . . 23
4.6 Cadre des développements . . . 25

II Résolution de systèmes différentiels non linéaires 29
1 Domaine temporel . . . 30
1.1 Méthodes de perturbation . . . 30
1.2 Intégration temporelle directe . . . 31
1.3 Méthode de tir . . . 34
2 Domaine fréquentiel . . . 35

2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . 35
2.2 Collocation trigonométrique . . . 48
2.3 Équilibrage harmonique haute dimension . . . 48
2.4 Bilan des méthodes fréquentielles . . . 49
3 Résolution de systèmes algébriques non linéaires . . . 50
3.1 Méthode de Newton-Raphson . . . 50
3.2 Méthodes de quasi-Newton . . . 52
3.3 Algorithme de la descente du gradient . . . 52
3.4 Méthode *hybrid* Powell . . . 53
3.5 Extension aux fonctions à valeurs scalaires . . . 56
4 Méthodes de continuation . . . 57
4.1 Prédicteurs . . . 57
4.2 Paramétrisation . . . 59
5 Phénoménologie des systèmes dynamiques non linéaires . . . 62
5.1 Stabilité . . . 63
5.2 Bifurcations . . . 69
5.3 Résonances non linéaires . . . 71
5.4 Isolats . . . 73

III Algorithmes de gestion du contact **75**
1 Gestion du contact par pénalité . . . 76
1.1 Contact normal . . . 76
1.2 Lois de frottement . . . 77
1.3 RL-HBM . . . 78
2 Gestion des contraintes en déplacements . . . 80
2.1 Algorithme de Carpenter . . . 82
2.2 DLFT-HBM . . . 83
2.3 LCP-HBM . . . 91
3 Gestion des contraintes en vitesses . . . 95
3.1 Loi d'impact . . . 95
3.2 Algorithme de Schatzman-Paoli . . . 97
3.3 Algorithme de Moreau-Jean . . . 98

IV Analyse de systèmes mécaniques en configuration de vibro-impact **103**
1 Application à un système phénoménologique . . . 104
1.1 Présentation des modèles . . . 104
1.2 Obstacle élastique . . . 105
1.3 Obstacle inertiel . . . 110
2 Application à une barre éléments-finis . . . 118
2.1 Présentation du modèle . . . 118
2.2 Coefficient de restitution . . . 120
2.3 Cadre de l'étude . . . 122
2.4 Analyse des signaux temporels . . . 125
2.5 Courbes de réponse en fréquence . . . 131
2.6 Analyses paramétriques des méthodes de résolution . . . 131
3 Configuration industrielle . . . 141
3.1 Présentation de l'application . . . 142
3.2 Développements spécifiques aux interactions aube/carter . . . 145
3.3 Étude préliminaire par intégration temporelle . . . 148
3.4 Résultats numériques des méthodologies fréquentielles . . . 150

V Procédure de détection d'isolats en réponse forcée **165**
1 Stratégies de détection de solutions isolées 166
1.1 Suivi de points limites 166
1.2 Analyse de Melnikov 173
2 Modèles académiques 179
2.1 Impacteur à deux degrés de liberté 179
2.2 Barre éléments-finis 201
3 Modèle industriels 203
3.1 Aube NASA rotor 37 sans frottement 203
3.2 Aube NASA rotor 67 avec frottement 214

Conclusion **231**
Synthèse des travaux de thèse 231
Perspectives de développements 233

Table des figures **235**

Liste des tableaux **239**

Références **241**

A Énergies **257**

Liste des publications personnelles **259**

Introduction générale

Contexte industriel

Dans une société où les enjeux environnementaux se hissent au centre des sphères politiques et économiques, l'industrie aéronautique concentre une part importante des enjeux écologiques. Pour répondre à ces problématiques, les donneurs d'ordres et équipementiers aéronautiques doivent se conformer à une série de réglementations à court, moyen et long termes imposées par des programmes internationaux. Ces réglementations concernent notamment la réduction du bruit des aéronefs, la diminution des rejets d'oxydes d'azote (NOx) et de dioxyde de carbone (CO_2). Par conséquent, des programmes de recherche ont vu le jour pour amorcer le développement de nouvelles solutions technologiques afin de répondre aux exigences réglementaires, comme le programme européen *Clean sky*.

Pour rendre les turboréacteurs plus performants, et donc réduire leurs émissions de gaz à effets de serre, un des axes de recherche envisagé par les motoristes aéronautiques réside dans la réduction des jeux fonctionnels entre les pièces tournantes (rotors) et les pièces fixes (stators). Ceci permet l'atténuation des écoulements dits de fuite qui sont responsables d'une grande partie des pertes aérodynamiques à chacun des étages d'un turboréacteur. Néanmoins, la diminution de ces jeux mène à l'augmentation de la probabilité d'occurrence des contacts structurels entre les rotors et les stators. Ces derniers pouvant avoir des conséquences désastreuses sur l'intégrité du moteur, et donc de l'avion, il est nécessaire de s'assurer que les éventuelles interactions de contact ne soient pas critiques pour la sûreté de l'aéronef.

En pratique, le dimensionnement des aubes de turbomachine est sujet à un compromis contraignant entre intégrité structurelle et performance aérodynamique, souvent considérées antagonistes. En effet, les bureaux d'études aérodynamiques et mécaniques communiquent itérativement à propos de la géométrie des aubes jusqu'à ce que les critères des différentes disciplines soient respectés sur plusieurs points de fonctionnement du moteur. Le caractère multi-physique du fonctionnement des turbomachines est au cœur de nombreuses difficultés car on ne dispose pas à ce jour d'outils numériques suffisamment performants pour prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu dans une seule simulation.

De plus, comme les outils de modélisation et de simulation se basent sur des considérations linéaires, généralement compartimentés par rapport à la physique traitée, de nombreux phénomènes multi-physiques et non linéaires ne sont mis en évidence que très tard dans le cycle de conception d'un turboréacteur, potentiellement seulement à l'issu de la fabrication du premier prototype. À ce stade, l'apparition d'un phénomène n'ayant pas été prédit lors de la phase de conception peut fortement retarder la mise en service du moteur, voire mener à la reconception d'un grand nombre de pièces selon la criticité du problème rencontré.

Afin de répondre à cette problématique, les industriels se concentrent sur le développement d'outils numériques permettant de modéliser les phénomènes non linéaires dans les turbomachines dès les phases amont du projet. La mise au point de tels outils permet d'entrevoir des cycles de conception plus robustes car les phénomènes non linéaires et multi-physiques critiques

peuvent être anticipés en phase de conception et non plus subis lors des essais de validation.

Comme il n'existe pas de cadre théorique unifié pour l'étude des systèmes mécaniques non linéaires et que les codes de calcul commerciaux n'intègrent que peu d'éléments de modélisation non linéaire, les industriels s'adressent aux acteurs académiques de la dynamique non linéaire afin de de mettre au point des outils *ad hoc*. Ceci est notamment le cas pour les simulations de contact aube/carter du fait de la complexité des interactions. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans cette lignée et un nouvel outil de caractérisation des systèmes mécaniques en contact est mis au point afin de répondre aux problématiques liées à la modélisation et à la compréhension de la phénoménologie induite par le contact sur des configuration industrielles de contact aube/carter.

Contexte scientifique

Du fait de la volonté d'accroître le niveau de compréhension des phénomènes mécaniques non linéaires prenant place au sein des turboréacteurs, de nombreux travaux ont été réalisés dans le monde académique. On observe généralement une compartimentation des travaux selon le type de non-linéarité modélisé. Parmi les travaux dans le domaine de la dynamique non linéaire des turbomachines, il est possible de citer les thèses portant sur les non-linéarités géométriques — liées aux grands déplacements et grandes déformations des structures — [207, 209, 211, 220], les non-linéarités de frottement en pied d'aube [202, 205, 214, 215, 221, 222, 224], l'usure [217, 225], les non-linéarités de frottement dans le cas de couplages multi-rotors [210, 213] ou encore le contact aube/carter [203, 204, 206, 216, 218, 223].

Parmi les travaux liés aux interactions aube/carter, les contributions s'appuient communément sur des simulations numériques car l'obtention de résultats expérimentaux est très coûteuse et complexe à mettre en œuvre. On trouve néanmoins quelques bancs d'essai dédiés à l'observation des interactions rotor/stator en configuration simplifiée [203, 24, 98, 10]. Concernant les simulations numériques, la quasi-totalité des simulations réalisées sur ces configurations reposent sur le paradigme temporel [203, 204, 207, 216, 218], *i.e.* sur une résolution du problème par intégration directe des équations du mouvement. Récemment, les stratégies fréquentielles [206, 223, 135] ont connu un regain d'intérêt grâce aux bénéfices qu'elles procurent tant en termes temps de calcul qu'en termes d'informations qualitatives sur les solutions : stabilité, bifurcations [44] et connectivité des branches de solutions [148]. Néanmoins, ces stratégies se limitent aux solutions périodiques de l'équation du mouvement et ne peuvent pas accéder aux mouvements quasi-périodiques, apériodiques et chaotiques.

Au sein de la diversité des méthodes de résolution numérique du problème de contact aube/carter, on distingue également les stratégies en fonction des méthodes de gestion du contact sur lesquelles elles se basent. Chaque algorithme de gestion du contact résulte d'un compromis entre complexité de modélisation — intrinsèquement liée aux temps de calculs — et fidélité des solutions. On peut notamment nommer, dans un ordre de fidélité croissante, la gestion du contact par pénalité [206, 135], par lagrangiens augmentés [221] et par multiplicateurs de Lagrange [204, 216, 113].

Dans le contexte de la dynamique des structures non linéaire, on observe une grande variété de phénomènes complexes induits par la présence d'efforts non linéaires. Parmi ces derniers, les branches de solutions isolées sont particulièrement critiques car elles restent non détectées si on ne les recherche pas explicitement. Leur existence est constatée sur un grand nombre de systèmes simples [20, 28, 38, 55, 71, 73, 89, 94, 97, 110, 136, 148, 169] et sur quelques systèmes industriels [206, 67, 78, 166]. Néanmoins, les méthodologies capables de prédire systématiquement qu'elles existent et de les localiser dans le cas échéant sont à ce jour réservées à des cas d'application particuliers : des systèmes de petite taille avec des non-

linéarités régulières, *i.e.* dérivables. Par conséquent, les méthodologies permettant de détecter des branches isolées sur ces systèmes [38, 55, 73, 78, 97, 150] sont inadaptées au traitement des systèmes non linéaires de taille industrielle avec des non-linéarités non régulières telles que le contact.

Objectifs

Les travaux présentés dans cette thèse ont eu lieu dans le cadre d'un partenariat, sous la forme d'une cotutelle, entre le Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon et le Laboratoire d'Analyse Vibratoire et Acoustique (LAVA) de Polytechnique Montréal. Ces deux laboratoires possèdent chacun une expertise dans le domaine de la simulation numérique non linéaire des interactions de contact. Tous deux sont des partenaires historiques du motoriste français Safran Aircraft Engines et du groupe Safran dans son entièreté. Dans le cadre de ce partenariat industriel, le LTDS développe un outil de caractérisation des liaisons frottantes en pied d'aube basé sur une gestion du contact par lagrangiens augmentés dans le domaine fréquentiel. D'autre part, le LAVA fournit au groupe Safran un outil de prédiction des interactions de contact aube/carter basé sur une procédure d'intégration temporelle utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

Compte tenu du contexte dans lequel s'inscrivent ces travaux de thèse, l'expertise des deux laboratoires est mise à contribution pour mettre au point un outil de simulation numérique de contact aube/carter dans le domaine fréquentiel. En développant cet outil, la contribution de ces travaux de thèse se trouve dans la poursuite de trois axes de recherche principaux.

Premièrement, on cherche à fournir une preuve d'applicabilité des méthodes fréquentielles basées sur des lagrangiens augmentés aux interactions de contact hautement non linéaires ayant lieu entre les aubes et le carter d'une turbomachine. En effet, à ce jour, les stratégies fréquentielles appliquées au contact aube/carter sont restreintes aux traitement du contact par méthode de pénalité [206, 223, 135].

Le traitement de configurations de contact unilatéral hautement non linéaires par une méthode basée sur des lagrangiens augmentés permet de mettre en lumière les propriétés qualitatives concernant le respect des contraintes de contact par les méthodologies fréquentielles. Ainsi, un des objectif de cette thèse est de mettre en évidence les comportements au contact inhérents aux stratégies fréquentielles, notamment en termes de lois de contact simulées et de gestion de la physique d'impact.

Enfin, on observe de nombreuses branches de solutions périodiques isolées à de hautes amplitudes — néfastes pour l'intégrité structurelle du moteur et la sûreté de l'aéronef — lors de la caractérisation des configurations de contact industrielles. Ainsi, le troisième objectif de ces travaux consiste à mettre au point une procédure de détection des branches de solutions isolées dans une configuration de réponse forcée pour pouvoir identifier de façon systématique le lieu des résonances non linéaires même si ces dernières sont isolées.

Organisation du mémoire

Pour apporter des éléments de réponse aux problématiques évoquées, ce manuscrit est divisé en cinq chapitres.

Le chapitre I présente le contexte technologique et théorique dans lequel s'inscrivent ces travaux de thèse. Dans un premier temps, on présente le fonctionnement général d'une turbomachine avec une emphase sur les turboréacteurs, généralement retrouvés dans le domaine de la propulsion aéronautique. Dans un deuxième temps, on cite les principaux défis associés à la conception de telles machines et à la modélisation des phénomènes complexes qui prennent

place en son sein. Finalement, on propose une mise en équation du problème de contact entre deux solides continus déformables pour servir de base à la résolution numérique du problème.

Dans le chapitre II, on décrit les techniques de résolution des systèmes non linéaires différentiels du second ordre, conformément à la typologie du problème résolu dans ce manuscrit. On distingue notamment les stratégies s'appuyant sur une résolution du problème dans le domaine temporel des stratégies dites fréquentielles qui recherchent une solution périodique représentée sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Par ailleurs, des méthodologies de résolution des systèmes non linéaires algébriques sont explicitées car elles sont nécessaires à la mise en œuvre de certaines stratégies de résolution du problème différentiel. On présente également les stratégies de continuation permettant de parcourir les courbes de réponse en fréquence non linéaires. Enfin, on évoque des éléments liés à la phénoménologie des systèmes dynamiques non linéaires.

Le chapitre III présente les stratégies numériques dédiées à la résolution du problème de dynamique des structures dans le cas particulier d'une non-linéarité de contact. Ces stratégies sont des extensions des méthodologies détaillées dans le chapitre II. Les différentes stratégies numériques de résolution du problème de contact sont classées selon trois catégories, liées à leur façon de prendre en compte les contraintes de contact.

Le chapitre IV constitue l'application des différentes stratégies de caractérisation des systèmes mécaniques en présence de contraintes de contact. L'ensemble de ces travaux se concentre sur l'utilisation d'un algorithme de gestion du contact basé sur des lagrangiens augmentés au sein d'une stratégie fréquentielle. Tout d'abord, on traite un modèle d'impacteur permettant de mettre en lumière la phénoménologie complexe inhérente aux interactions de contact. On caractérise ensuite un modèle de barre éléments-finis pour observer le comportement des stratégies numériques lorsque la dynamique du système est enrichie. Enfin, on s'intéresse à la dynamique hautement non linéaire d'une aube de soufflante en contact avec un carter rigide afin de comparer les différentes méthodologies fréquentielles avec la stratégie du domaine temporel constituant l'état de l'art industriel.

Finalement, on s'intéresse particulièrement à la détection de branches de solutions périodiques isolées dans le chapitre V. L'apparition de ces branches isolées est initialement constatée dans le chapitre IV. On se concentre sur l'application d'un principe énergétique pour détecter les branches de solutions isolées en réponse forcée. De nombreuses branches de solutions isolées sont mises en évidence à la fois sur des systèmes phénoménologiques et des configurations industrielles. On met notamment en lumière l'existence de branches isolées à de hautes amplitudes lorsque le système subit des excitations surharmoniques.

Chapitre I

Contexte technologique et théorique

Ce chapitre décrit le contexte dans lequel s'inscrivent les développements de ce manuscrit, à la fois d'un point de vue théorique et technologique. Dans un premier temps, le principe de fonctionnement d'une turbomachine aéronautique ainsi que les défis inhérents à la conception de telles machines sont présentés. Par la suite, l'emphase est mise sur le contexte non linéaire dans lequel s'inscrit le fonctionnement des turbomachines aéronautiques de nouvelle génération. Enfin, la mise en équation d'un problème de contact de deux solides continus est réalisée afin d'expliciter le contexte mathématique dans lequel s'inscrivent les développements de ce manuscrit.

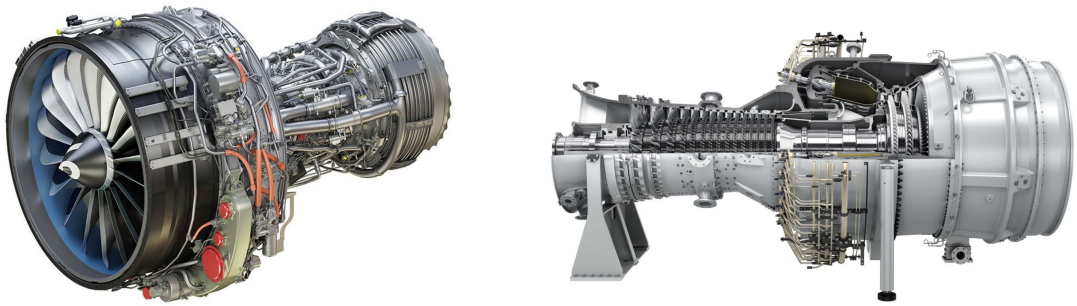
Sommaire du chapitre

1 Description d'une turbomachine **5**
1.1 Principe de fonctionnement et composants d'un turboréacteur 6
1.2 Réglementations environnementales 8
1.3 Sources de vibrations 8
2 Conception mécanique des roues aubagées **10**
2.1 Statique 10
2.2 Dynamique 11
3 Sources de non-linéarité **12**
3.1 Géométrique 13
3.2 Matériau 13
3.3 Interfaces de contact 13
4 Mécanique du contact **15**
4.1 Configuration de deux corps élastiques en contact 15
4.2 Contact unilatéral 16
4.3 Loi de frottement 17
4.4 Mise en équation du problème de contact 18
4.5 Gestion du contact 23
4.6 Cadre des développements 25

1 Description d'une turbomachine

Une turbomachine est un système mécanique qui permet de réaliser un échange d'énergie entre un écoulement fluide et une ou plusieurs pièces mécaniques en rotation. Parmi les différentes catégories de turbomachines, les turbomoteurs ont pour fonction de fournir une

puissance mécanique à partir de la combustion d'un hydrocarbure. Il est possible de récupérer cette énergie mécanique de rotation de plusieurs manières. On distingue généralement turbines à gaz, turbopropulseurs et turboréacteurs. Les turbines à gaz ont pour objectif d'entraîner en rotation des pièces mécaniques telles que des pales d'hélicoptère ou des générateurs électriques. Les turbopropulseurs sont des machines fonctionnant de façon analogue aux turbines à gaz, si ce n'est que l'énergie mécanique de rotation générée est transmise à une hélice rotative qui assure la propulsion d'un aéronef. Finalement, les turboréacteurs sont des machines généralement employées pour la propulsion des aéronefs, dans lesquels le fluide est significativement accéléré pour créer une force de poussée lorsque le fluide s'échappe de la machine. Un turboréacteur et une turbine à gaz sont représentés sur la figure I.1.



(a) CFM LEAP-1A (turboréacteur) [1]

(b) Siemens SGT-800 (turbine à gaz) [2]

FIGURE I.1 – Exemples de turbomachines.

On choisit de décrire le fonctionnement d'un turboréacteur dans la section I.1.1 car il s'agit de l'application la plus rencontrée dans la famille des turbomoteurs à ce jour. Les développements de ce manuscrit sont néanmoins applicables à tous les types de turbomoteurs.

1.1 Principe de fonctionnement et composants d'un turboréacteur

Le fonctionnement d'un turboréacteur repose sur le principe d'action-réaction de Newton. La poussée de tels engins est atteinte en accélérant un flux d'air entre l'entrée et la sortie de la machine. Au sein du turboréacteur, le fluide subit trois principales étapes de transformation : la compression, la combustion et la détente, respectivement réalisées dans le compresseur, la chambre de combustion et la turbine. Un turboréacteur à double corps et double flux est représenté sur la figure I.2. Sur ce schéma, le fluide parcourt la machine de la gauche vers la droite. On qualifie ce turbomoteur de double flux car le flux d'air en entrée est divisé en deux parties : le flux primaire, qui passe par l'intérieur de la machine, et le flux secondaire, qui passe uniquement à travers la soufflante. On distingue également ici deux corps : le corps haute pression (HP) (—) et le corps basse pression (BP) (—), identifiés sur la figure I.2. Chacun des corps est matérialisé par un arbre dont le rôle est de relier mécaniquement des éléments du compresseur et de la turbine. Dans le cadre d'un turbomoteur à double corps, les arbres sont concentriques et tournent à des vitesses différentes. Le différentiel de vitesses associé permet à chacun des corps de fonctionner à un régime optimal. De façon générale, le corps HP tourne à des vitesses beaucoup plus importantes que le corps BP. Un moteur équipé d'un étage de soufflante comme représenté sur la figure I.2 est appelé *turbofan*.

Le flux primaire, subissant la combustion, traverse plusieurs organes de la turbomachine. Dans un premier temps, il passe à travers la soufflante et le compresseur BP, qui communiquent

1. https://www.safran-group.com
2. https://www.siemens-energy.com

chacun de l'énergie au fluide en augmentant sa pression. Le fluide subit alors une nouvelle étape de compression par le compresseur HP avant d'être mélangé à du kérosène dans la chambre de combustion. Le mélange air-carburant est alors enflammé ce qui permet l'augmentation de la température au fluide, et donc de son énergie totale. Le fluide s'échappe ensuite vers la turbine HP dont le rôle est de récupérer, par détente du fluide, l'énergie nécessaire à la mise en rotation du corps HP. Cette énergie s'équilibre avec le travail fourni au fluide par le compresseur HP. De manière analogue, le fluide entraîne la turbine BP dont le rôle est de convertir l'énergie du fluide en énergie mécanique de rotation. Cette énergie est utilisée pour entraîner l'entièreté du corps BP, et particulièrement le compresseur BP ainsi que la soufflante. Le fluide chaud est ensuite éjecté à l'arrière du moteur, générant ainsi une poussée par effet de réaction.

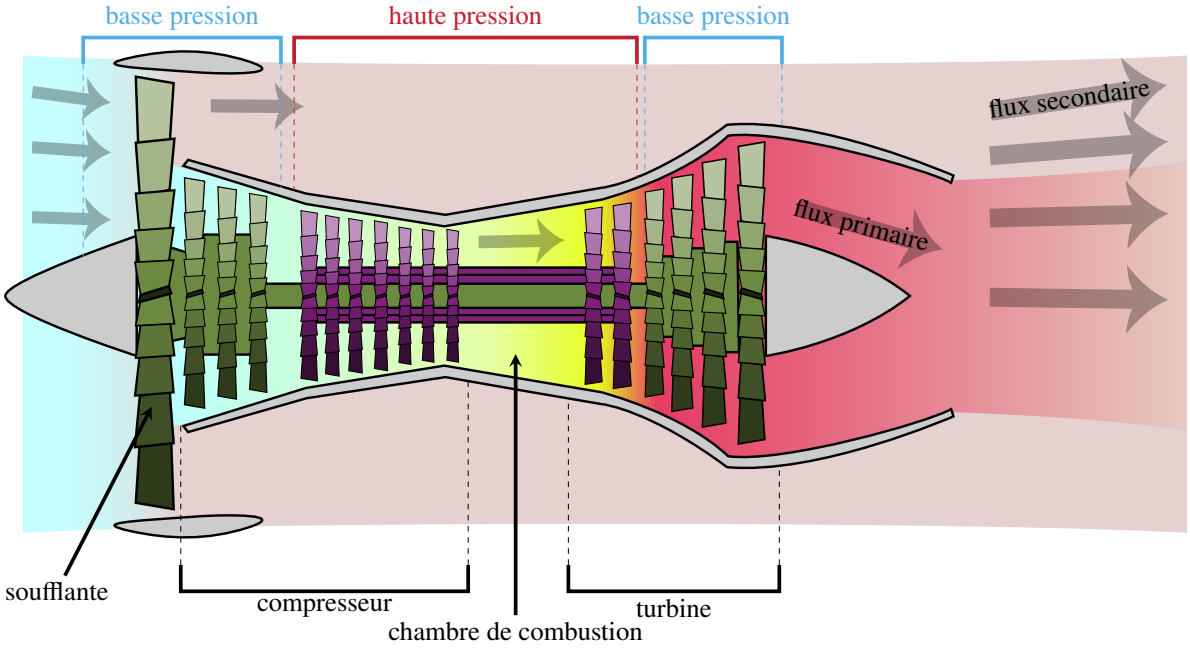


FIGURE I.2 – Vue schématique d'une turbomachine aéronautique double corps et double flux [3].

L'entraînement en rotation de la soufflante du turboréacteur par la turbine BP donne naissance au flux secondaire. La poussée générée par ce flux d'air constitue environ 80% de la poussée sur les moteurs utilisés en aviation civile. Le rendement des architectures de turboréacteurs à double flux est très largement dépendant du taux de dilution du moteur (ou *bypass ratio* en anglais) qui correspond au rapport du débit massique du flux secondaire sur le débit massique du flux primaire. En effet, plus la masse d'air déplacée par la soufflante est importante par rapport à la masse d'air du flux primaire, plus le moteur est performant.

Les étapes de compression du fluide sont réalisées en amont de la combustion afin de profiter d'un rendement maximal de cette dernière. Effectivement, l'énergie emmagasinée par le fluide est d'autant plus importante que le fluide est sous pression lors de la phase de combustion. Dans un turboréacteur à double flux, l'énergie consacrée à la compression du fluide est intégralement compensée par l'énergie récupérée lors de la phase de détente du fluide dans la turbine. Le reste de l'énergie amenée par la combustion du carburant permet alors de compenser les pertes et d'actionner la soufflante en rotation afin d'accélérer le flux secondaire.

Afin de répondre à la fois à des problématiques thermodynamiques et technologiques, les phases de compression et de détente sont réalisées en plusieurs étages. Chacun des étages est constitué d'une roue mobile et d'un redresseur. Ces composants portent le nom de roues aubagées

3. adaptée de https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Turbofan_operation.svg

et sont composés de multiples aubes (ou pales), caractérisées par leur profil aérodynamique. Le rôle de la partie mobile est de fournir (compresseur) ou de soutirer (turbine) de l'énergie au fluide. De son côté, le redresseur sert à réorienter l'écoulement pour permettre une incidence optimale sur l'étage suivant. Il permet également de convertir une partie de la pression totale du fluide en vitesse.

1.2 Réglementations environnementales

Au début des années 2000, de nombreux programmes internationaux ont vu le jour dans l'optique de rendre l'industrie aéronautique plus respectueuse de l'environnement. Parmi ces programmes, on peut par exemple citer l'organisme européen ACARE [4] (*Advisory Council for Aviation Research and innovation in Europe*) qui définit des objectifs environnementaux à atteindre à court, moyen et long termes. Parmi les objectifs à long terme, c'est-à-dire à atteindre avant 2050, on trouve notamment :

— la réduction du bruit généré par les aéronefs de 65% ;

— la diminution des rejets de NOx de 90% ;

— la limitation des émissions de CO_2 de 65%.

Plus récemment, le projet d'initiative technologique *Clean sky* [5] et la feuille de route pour le secteur énergétique *Net Zero by 2050* [6] ont fourni des directives respectivement pour le développement d'un système aérien plus propre et pour atteindre la neutralité carbone du secteur énergétique d'ici 2050.

L'industrie aéronautique met en œuvre des moyens importants afin de se conformer à ces feuilles de route et directives. On peut par exemple citer le projet RISE (*Revolutionary Innovation for Sustainable Engines*), porté par CFM, dont sont issues les nouvelles architectures de moteurs à soufflantes non carénées. Les gains en performances annoncés sont de l'ordre de 20%, ce qui constitue un grand pas vers le respect des nouvelles limitations en termes de consommation de carburant et d'emission de gaz à effet de serre. En revanche, ces nouvelles architectures sont des technologies de rupture qui sont vouées à remplacer complètement l'architecture actuelle en changeant l'intégration des moteurs sur les avions.

Bien que l'utilisation de nouvelles architectures permette un gain substantiel en termes de performances, l'augmentation du rendement des turbomoteurs passe également par l'optimisation de chacun des ses organes et composants. En effet, de nombreux mécanismes complexes, dont certains méconnus, sont responsables de pertes de performance au sein du moteur. De plus, faute de moyens de modélisation suffisamment précis, de nombreuses marges de conception sont appliquées par des soucis de sécurité. L'émergence de méthodologies capables de précisément évaluer les phénomènes complexes mis en jeu au sein des turbomachines permet cependant de lever certaines indéterminations sur leur fonctionnement, ainsi que les marges de conception associées.

1.3 Sources de vibrations

Les vibrations de certains composants peuvent mener à des pertes de rendement ainsi qu'à l'endommagement des pièces du turboréacteur. Ainsi, le contrôle des niveaux vibratoires des composants des turbomachines est particulièrement important pour des soucis de performance ainsi que de sécurité. Afin d'évaluer et de maîtriser les phénomènes vibratoires qui se produisent lors du fonctionnement du moteur, il convient d'identifier leurs sources. On distingue les sources

4. https://www.acare4europe.org
5. https://www.cleansky.eu
6. https://www.iea.org/reports/net-zero-by-2050

vibratoires en deux grandes catégories, d'un côté les excitations d'origines mécaniques et de l'autre celles d'origines aérodynamiques.

1.3.1 Mécaniques

La source la plus courante de vibrations d'origine mécanique dans une turbomachine est la présence de balourds. Un balourd se caractérise par le fait que le centre de masse d'un corps en rotation n'est pas situé exactement sur son axe de rotation [200]. Ce défaut d'équilibrage engendre des excitations à des fréquences multiples de la vitesse de rotation du rotor. Un balourd peut être causé par différents défauts. Par exemple, un balourd peut naître lorsqu'un mauvais équilibrage est fait lors du montage des assemblages tournants des turbomachines. Il est également possible que des défauts de fabrication fassent émerger un balourd. Une dispersion dans les propriétés matériau ou dans la géométrie des pièces peut également causer un déséquilibrage du rotor. L'ensemble de ces causes peuvent toutefois être corrigées par ajout ou enlèvement de matière après un contrôle de l'équilibrage du rotor avant la mise en service d'un moteur.

Le balourd peut également apparaître lors d'événements prenant place pendant la phase de fonctionnement du moteur. Ces événements sont généralement associés à des configurations accidentelles que les ingénieurs doivent prendre en considération en phase de conception. Par exemple, lors de la rupture d'une ou plusieurs aubes, le centre de masse du rotor est déplacé ce qui génère un balourd. La perte d'une aube est déjà un phénomène critique, mais le balourd qui est généré dans le même temps peut avoir des conséquences désastreuses sur l'intégrité du moteur.

Pour augmenter l'efficacité des turbomoteurs, les constructeurs ont tendance à réduire les jeux entre les pièces fixes et les roues mobiles afin de diminuer les pertes aérodynamiques. En pratique, la réduction des jeux favorise l'occurrence de contacts structurels entre les aubes et le carter pendant le fonctionnement du moteur. Ces contacts peuvent être initiés par différents mécanismes : allongement par effet centrifuge, une déformation thermique du carter ou encore un effet de balourd. Les vitesses relatives importantes entre les pièces mènent à des interactions qui peuvent s'avérer critiques pour l'intégrité structurelle de la machine. De plus, ces contacts répétés mènent à une excitation mécanique périodique avec des hauts niveaux d'efforts. Afin d'atténuer la criticité de ces interactions, un matériau abradable est déposé sur les pièces fixes afin d'absorber une partie de l'énergie mise en jeu [25].

1.3.2 Aérodynamiques

Étant donné que les pièces mécaniques des turbomachines ont pour vocation d'opérer des transferts d'énergie avec le fluide, les interactions fluide-structure sont des sources importantes de vibrations. Généralement, on classe les phénomènes d'interactions fluide-structure selon deux catégories. Les excitations aérodynamiques dites synchrones sont des sources de vibrations à des fréquences dépendantes des fréquences de rotation des différents corps. Au contraire, les excitations aérodynamiques asynchrones se produisent à des fréquences indépendantes de la vitesse de rotation des pièces tournantes.

Parmi les excitations synchrones, on retrouve l'interaction des roues aubagées avec des perturbations périodiques dans l'écoulement. En effet, le passage du fluide dans chaque étage fait naître un nombre de sillages égal au nombre d'aubes de la roue. Ces sillages vont ensuite impacter les roues adjacentes à une fréquence étant précisément le produit de la vitesse de rotation et du nombre d'aubes de la roue émettant les sillages. Ce phénomène peut être dangereux si la fréquence d'excitation résultante est proche d'une des fréquences propres de la structure excitée, pouvant la faire entrer de ce fait en résonance.

Les phénomènes aéroélastiques sont en revanche des mécanismes pouvant générer des excitations asynchrones sur les aubes. On peut par exemple citer le flottement [4] : lorsque les aubes vibrent, elles perturbent l'écoulement du fluide, ce qui entraîne une modification des efforts aérodynamiques subies par la structure. Ce mécanisme est une boucle rétroactive qui excite l'aube autour d'une de ses fréquences propres. Dans certaines configurations, ces oscillations auto-entretenues peuvent même mener à des divergences mécaniques causant la rupture des pièces. Parmi les exemples les plus connus de flottement hors du monde des turbomachines, il est possible de citer la rupture du pont de Tacoma ou le flottement des drapeaux.

2 Conception mécanique des roues aubagées

Afin de dimensionner les pièces soumises à des sollicitations mécaniques dans les turbomachines, différents critères sont utilisés. À ce jour, la majorité des critères de conception se basent sur des modélisations linéaires des systèmes. Les phénoménologies non linéaires sont largement étudiées dans le domaine académique, cependant l'application des techniques de modélisation non linéaires dans un contexte industriel représente toujours un grand défi. En effet, comme les cycles de conception sont courts, les acteurs de l'industrie doivent se doter d'outils numériques efficaces et robustes pour la prédiction de phénomènes non linéaires. Les outils développés en milieu académique ont souvent un domaine d'application très restreint et requièrent souvent une expertise poussée dans le champ de la dynamique non linéaire pour leur utilisation. De ce fait, peu de constructeurs aéronautiques utilisent des outils modélisant des effets non linéaires dans les cycles de conception des pièces mécaniques. Cette section présente les dangers liés à la non prise en compte d'effets non linéaires. On distinguera ici les critères de conception traitant des contraintes statiques de ceux liés aux contraintes alternées, c'est-à-dire, les critères dynamiques.

2.1 Statique

Afin de dimensionner une pièce mécanique, il est tout d'abord nécessaire de s'assurer que la pièce résiste au chargement statique qu'elle subit. En effet, afin d'éviter une quelconque déformation plastique, *i.e.* permanente, des pièces, il convient de s'assurer que les contraintes maximales qu'elles subissent se trouvent en deçà de la limite d'élasticité R_e du matériau qui les compose. La loi de comportement d'un système soumis à un chargement uniaxial de traction-compression est représentée sur la figure I.3 à des fins de représentations mais les mêmes mécanismes opèrent sur des systèmes tridimensionnels. On observe sur la figure I.3 trois domaines distincts. Premièrement, le domaine élastique représente la zone dans laquelle toute déformation est réversible. Cette zone se caractérise par une relation linéaire entre la contrainte dans le matériau σ et la déformation ε. Ces deux grandeurs sont reliées par le module de Young (ou module d'élasticité) E tel que $\sigma = E\varepsilon$. L'objectif est de concevoir les pièces mécaniques telles que les sollicitations mécaniques auxquelles elles sont soumises se trouvent en tout temps dans le domaine élastique linéaire.

Une fois que la pièce est soumise à une contrainte supérieure à la limite d'élasticité R_e, elle entre dans le domaine plastique où elle subit alors des déformations permanentes. Une fois la contrainte maximale admissible R_m atteinte, la pièce entre dans une phase de striction qui mène directement à la rupture. R_m est généralement appelée contrainte de rupture car la ruine de la pièce s'amorce dès le dépassement de ce point.

La généralisation tridimensionnelle du critère de plasticité uniaxial peut se réaliser par le calcul du critère de plasticité de von Mises. Ce dernier se base sur le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$,

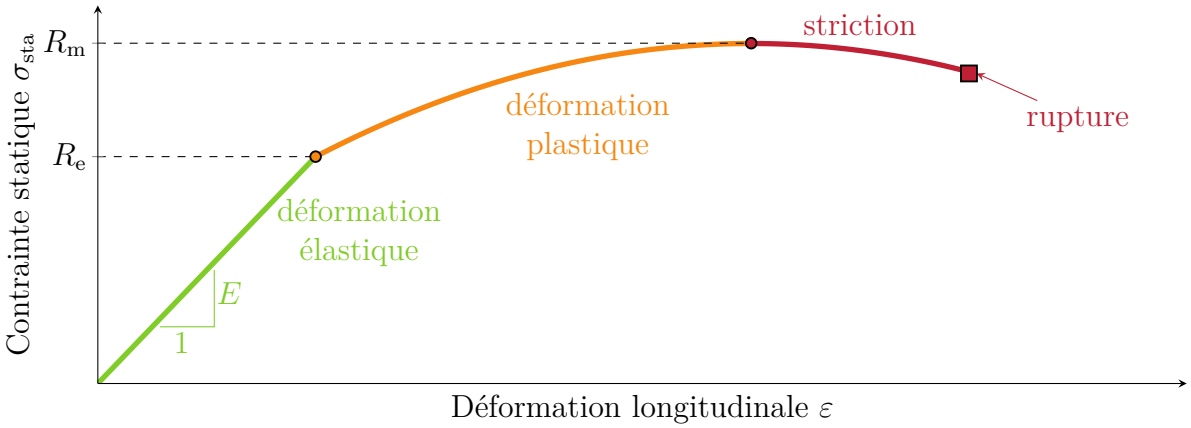


FIGURE I.3 – Loi de comportement en traction-compression.

défini en un point du solide par

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{I.1}$$

À partir de ce tenseur, il est possible de calculer la contrainte de von Mises dont le rôle est d'agréger l'ensemble des composantes de traction et de cisaillement en une seule valeur de contrainte σ_{VM}, dont l'expression est

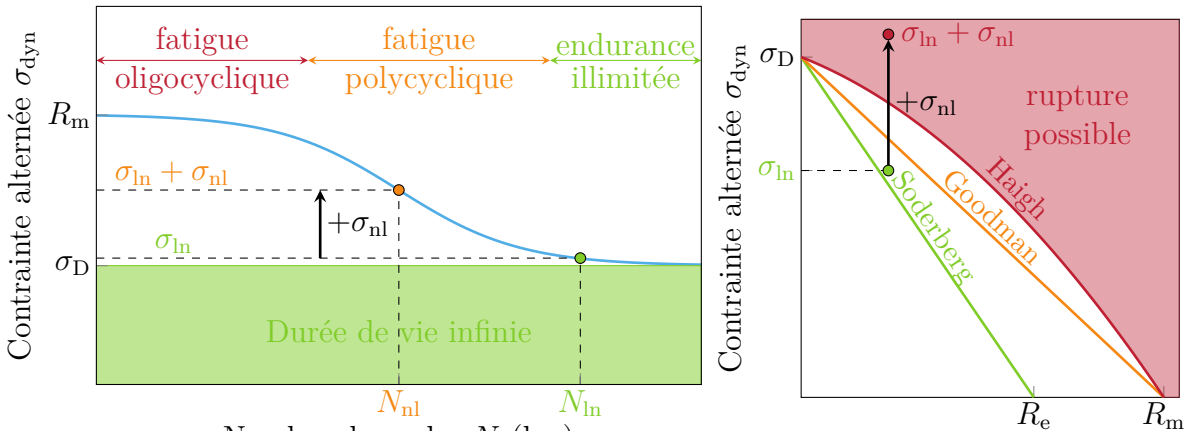
$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)}. \tag{I.2}$$

On considère que si $\sigma_{VM} < R_e$ en tout point du solide alors la matériau restera dans son domaine élastique. Dans les turbomachines, les principales sources de chargements statiques sont les efforts centrifuges, les efforts aérodynamiques ainsi que les pressions de contact de certains assemblages (talons de turbine basse pression par exemple).

2.2 Dynamique

Comme mentionné dans la section I.1.3, les aubes de turbomachines sont soumises à de nombreux chargements dynamiques. Il convient donc de les dimensionner à la fatigue vibratoire. Pour ce faire, on utilise généralement plusieurs outils. Premièrement, pour dimensionner des pièces en fatigue vibratoire, il est possible de calculer le nombre de cycles vibratoires que peut subir la pièce avant rupture grâce au diagramme de Wöhler ou diagramme S-N (pour *Stress-Number of cycles*), dont un exemple est représenté sur la figure I.4a. Connaissant l'amplitude de la contrainte alternée que subit le système, on peut lire sur la figure I.4a le nombre maximal de cycles vibratoires N que peut subir la pièce avant rupture. En général, on différencie trois zones : la zone de fatigue oligocyclique, la zone de fatigue polycyclique (ou endurance limitée) et la zone d'endurance illimitée. Ces zones font référence à des plages de valeurs de N qui s'étendent chacune sur plusieurs ordres de grandeur. L'objectif est de concevoir l'ensemble des pièces mécaniques dans le domaine d'endurance illimitée afin d'assurer qu'aucune rupture par fatigue ne soit possible. Cependant, ces considérations sont souvent faites sur des contraintes obtenues par des calculs linéaires, par exemple σ_{ln}. L'ajout d'une contrainte dynamique non linéaire σ_{nl} est susceptible de faire passer la pièce dans un régime de fatigue polycyclique par exemple, comme illustré sur la figure I.4a.

Le dimensionnement à la fatigue grâce au diagramme de Wöhler fait cependant l'hypothèse qu'aucun chargement statique n'est appliqué sur la pièce. Le nombre de cycles admissible est également une fonction de la contrainte statique. La courbe de Haigh (—), représentée sur la figure I.4b, permet de définir la zone d'endurance illimitée de la pièce en fonction des contraintes statiques σ_{sta} et dynamiques σ_{dyn}. Pour dimensionner une pièce il faut alors s'assurer que son point de fonctionnement est en dessous de la courbe de Haigh. Cette courbe n'est pas forcément précisément connue pour le matériau car elle peut varier en fonction de la température ou du mode de fabrication de la pièce par exemple (fonderie, usinage...). Ainsi, on utilise généralement la courbe de Goodman ou de Soderberg car elles constituent des approximations linéaires et plus conservatives que la courbe de Haigh. De la même manière que pour le diagramme de Wöhler (figure I.4a), en ajoutant une contrainte dynamique alternée associée à des effets non linéaires σ_{nl}, il est possible de sortir du domaine d'endurance illimitée. Ce comportement peut être très préjudiciable pour l'intégrité des pièces, justifiant ainsi le besoin de modélisation des effets non linéaires. En effet, en calculant précisément les contraintes alternées non linéaires, il est possible de placer les points de fonctionnement sur les différents graphes de dimensionnement, et ainsi assurer qu'aucune rupture ne puisse survenir.



(a) Diagramme de Wöhler

(b) Diagramme de Haigh

FIGURE I.4 – Outils de dimensionnement en fatigue vibratoire.

Il existe également d'autres outils de dimensionnement dynamique plus complexes, tels que le critère de Dang Van ou la loi de Miner, mais ils ne sont pas présentés ici par souci de concision.

3 Sources de non-linéarité

On qualifie un problème de dynamique des structures de non linéaire lorsque des efforts non linéaires s'appliquent sur la structure. Un effort est dit non linéaire s'il dépend non trivialement du champ de déplacements $\mathbf{x}(t)$ et/ou du champ de vitesses $\dot{\mathbf{x}}(t)$. L'équation du mouvement d'une structure discrétisée en espace en présence du vecteur d'efforts non linéaires $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ s'écrit ainsi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t) \tag{I.3}$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sont les champs de déplacements, de vitesses et d'accélérations. Le vecteur $\mathbf{f}_{\text{ex}}(t)$ représente les efforts d'excitation. La présence des efforts non linéaires fait apparaître un comportement

non linéaire propre à chacun des phénomènes pouvant être modélisés. En mécanique du solide on distingue trois types de non-linéarités : géométrique, matériau et le contact.

3.1 Géométrique

Lorsqu'on s'intéresse aux vibrations des structures déformables, les modèles sont généralement linéarisés grâce aux hypothèses des petites perturbations, qui englobent à la fois l'hypothèse des petits déplacements et l'hypothèse des petites déformations. En adoptant ces hypothèses, il est possible de linéariser le tenseur des déformations de Green-Lagrange ce qui permet de simplifier les équations du mouvement obtenues. Ces hypothèses ne sont plus valides lorsque la structure considérée subit de grands déplacements, il n'est donc plus possible d'adopter ce formalisme et on doit considérer dans les équations les termes classiquement négligés. Ceci est équivalent à introduire des efforts non linéaires polynomiaux. La formulation d'un problème dynamique prenant en compte le tenseur de Green-Lagrange complet est disponible dans la littérature [26].

Les non-linéarités géométriques sont largement étudiées dans de nombreux domaines, on peut par exemple citer les études sur les instruments de musique tels que les gongs [228] ou les cloches et *steelpans* [162]. Des études ont également été menées sur les pales d'éolienne dont la forme élancée favorise l'apparition de non-linéarités géométriques [99]. Les pales de rotor d'hélicoptère [50] et les aubes de soufflante de moteur d'avion sont également sujettes à de fortes non-linéarités géométriques [209, 211, 220].

3.2 Matériau

Les non-linéarités matériau se caractérisent par la réponse non linéaire d'un matériau par rapport à une contrainte mécanique imposée. Ceci se rapporte à la non-linéarité de la loi de comportement qui lie les déformations $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ aux contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$. Sous hypothèse d'élasticité pure d'un matériau isotrope, la loi de comportement choisie est généralement la loi de Hooke. Elle relie linéairement $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ par l'expression

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{I.4}$$

où $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ sont les coefficients de Lamé définis à partir du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν. Ici, $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ sont en notation de Voigt. Dans le cadre de non-linéarités matériau, la relation (I.4) n'est plus vraie. En utilisant une loi de comportement non linéaire, il devient possible de modéliser des phénoménologies très variées : l'élasto-plasticité (écrouissage) [12], l'hyper-élasticité (élastomères) [115], la visco-élasticité [35] ou encore la visco-plasticité [27] des matériaux pour prendre en compte la dépendance au temps et à la température de la loi de comportement, par exemple pour modéliser le fluage.

3.3 Interfaces de contact

Le dernier type de non-linéarité, sujet du présent manuscrit, se caractérise par le contact entre plusieurs structures. Ces non-linéarités de contact peuvent prendre la forme de frottement sec entre deux interfaces ou encore d'impacts entre des structures en mouvement. La difficulté

liée à la résolution des problèmes de contact se trouve surtout dans la formulation mathématique des contraintes de contact. Celles-ci portent à la fois sur les efforts et les déplacements et sont explicitées en détails dans la section I.4.

Dans les turbomachines, on distingue quatre interfaces de contact principales identifiées sur la figure I.5. Les défis de conception et de modélisation associés à chacune de ces interfaces sont énumérés dans la présente section.

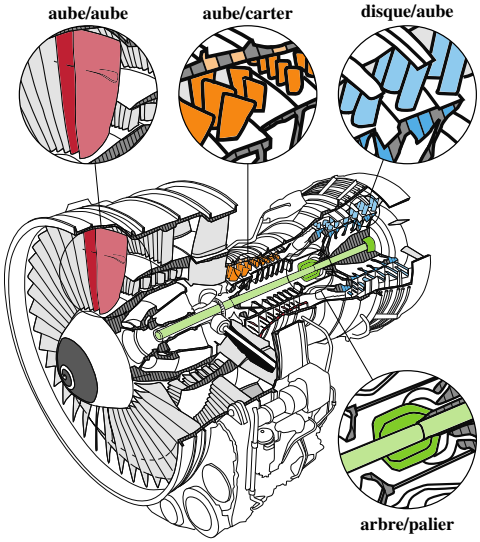


FIGURE I.5 – Interfaces de contact privilégiées dans une turbomachine aéronautique [206].

3.3.1 Arbre/palier

L'interface arbre/palier est historiquement la première interface de contact étudiée en dynamique des rotors. La fonction des paliers est d'assurer la liaison entre l'arbre en rotation et les pièces fixes du moteur. Dans l'étude de la liaison par paliers à roulements, l'arbre et le palier sont considérés comme étant des structures rigides. On cherche généralement à caractériser le mouvement de l'arbre au sein du palier, et plus particulièrement comment se comporte l'arbre autour de son axe de rotation. On observe typiquement des mouvements de précession, *i.e.* d'orbite de l'arbre autour de l'axe de rotation, aussi appelés *whirl*, qui peuvent être dans la même direction que la rotation de l'arbre (mode direct ou *forward whirl*) ou dans le sens opposé (mode rétrograde ou *backward whirl*). Afin d'étudier cette interface, plusieurs modèles phénoménologiques ont été mis au point. On peut par exemple citer le rotor de Jeffcott (ou de Laval) [84, 88, 13, 173], le rotor de Childs [42] ou de Black [30].

3.3.2 Aube/aube

On retrouve des contacts aube/aube principalement au sein de la soufflante et de la turbine. Ces contacts prennent place le long d'éléments prévus à cet effet, à savoir les nageoires [202] (placées à trois quarts de la longueur d'aube) pour les aubes de soufflante et les talons (placés en sommet d'aube) pour les aubes de turbine basse pression. Dans les deux cas, la mise en rotation de la roue fait entrer en contact ces éléments en dévrillant les aubes par effet centrifuge. Les aubes sont alors dites groupées, c'est-à-dire qu'elles profitent d'une rigidité plus importante du fait que chaque aube soit maintenue par les aubes adjacentes. Ces technologies apportent également un amortissement supplémentaire au système par l'introduction de frottement sec entre les éléments en contact [116, 161, 178].

3.3.3 Aube/disque

L'interface aube/disque est le sujet de nombreuses études car elle est un lieu privilégié pour la dissipation de l'énergie vibratoire des aubes. L'assemblage des aubes dans le disque se fait par différentes géométries complexes (pied de sapin, queue d'aronde ou marteau) et les travaux de recherche se focalisent sur la modélisation des contacts frottants dans ces liaisons. L'amortissement supplémentaire apporté au système est d'un grand intérêt pour les concepteurs car il permet d'atténuer les phénomènes vibratoires subis par les aubes. Par ailleurs, le risque d'amorce de fissure associé à ces liaisons les rend particulièrement critique du point de vue du dimensionnement vibratoire. Les techniques d'étude de cette interface sont déjà très matures car les méthodes numériques sont capables de quantifier l'amortissement induit par le frottement sur des modèles de taille industrielle [205, 61, 78, 92, 141, 147, 181]. Les méthodologies développées pour la caractérisation du frottement en pied d'aube sont également utilisées pour étudier l'amortissement induit par le frottement des joncs de friction [215, 102] et des amortisseurs sous plateforme [60, 61, 81, 93, 134, 141, 182] dont la seule fonction est d'atténuer les niveaux vibratoires des aubes. Ces systèmes dissipatifs n'appartiennent pas à l'interface aube/disque à proprement parler, mais leurs nombreux points communs avec cette interface permettent l'utilisation de méthodes de quasiment identiques.

3.3.4 Aube/carter

Les interactions de contact entre les aubes et le carter se distinguent des autres types d'interactions de contact sur plusieurs points. Premièrement, ces contacts peuvent survenir à tous les étages de la turbomachine et à différents niveaux de criticité. En effet, on observe expérimentalement que des contacts aube/carter répétés peuvent avoir lieu sans endommager significativement le moteur [24]. Au contraire, certains incidents sur des moteurs en opération ont été attribués à ce type de contacts [231]. Du point de vue de la modélisation, ces contacts peuvent faire intervenir de grandes amplitudes de vibrations, justifiant ainsi le besoin d'introduire les notions de non-linéarités géométriques pour correctement modéliser les aubes subissant de grandes déformations [53]. Les géométries mises en jeu peuvent également être très complexes, comme en témoignent les travaux sur les contacts impliquant des rouets centrifuges [203, 74], principalement rencontrés sur des applications de turbomoteurs d'hélicoptère. Finalement, les contacts aube/carter sont des interactions intrinsèquement multi-physiques ce qui rend leur modélisation numérique complexe. Par exemple, les vitesses relatives importantes dans les interactions de frottement engendrent une montée en température significative du carter [24] nécessitant l'introduction de la phénoménologie thermomécanique [203, 10, 11, 163]. Des phénomènes d'usure sont également observés expérimentalement [25, 9, 126] et doivent être introduits dans les simulations numériques [21, 7] pour plus de fidélité. Concernant les mécanismes d'usure, des transferts de matière entre les aubes et le matériau abradable déposé sur le carter ont même été observés expérimentalement [3, 64, 175], témoignant de la sévérité des interactions.

4 Mécanique du contact

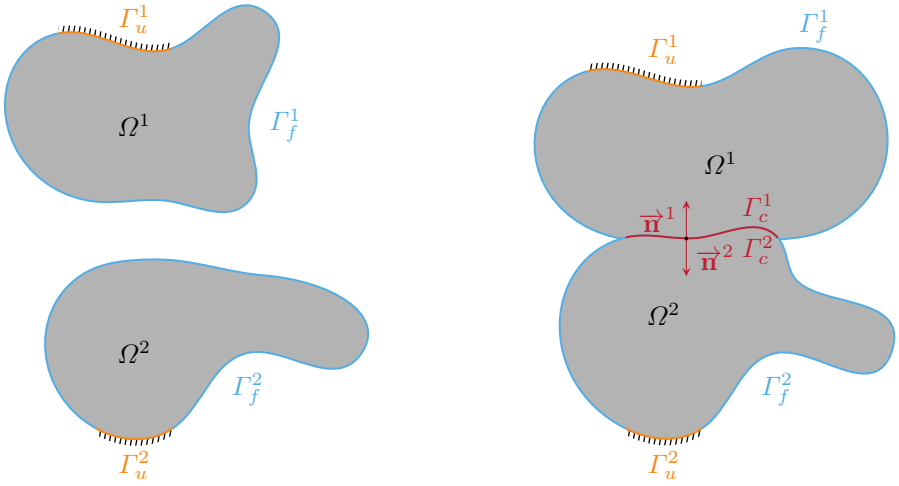
Dans cette section, on définit le problème d'élastodynamique de deux solides continus en contact. L'ensemble de ces développements condense le contenu de travaux de thèses [205, 216, 218], d'ouvrages de référence [197, 201] et de notes de cours [236].

4.1 Configuration de deux corps élastiques en contact

On se place ici dans le cadre de la mécanique des solides déformables continus. On définit deux corps déformables Ω^s avec $s \in \{1, 2\}$, comme deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^3$. Ces ensembles sont considérés comme potentiellement en contact. Leur frontière peut alors être partitionnée en trois sous-frontières Γ_u^s, Γ_l^s et Γ_c^s. La sous-frontière Γ_u^s est la frontière où un champ de déplacements $\mathbf{u}_d^s$ est imposé (encastrement par exemple), Γ_f^s est la sous-frontière soumise à une densité d'efforts surfaciques $\mathbf{t}_d^s$ et Γ_c^s est la surface soumise aux interactions de contact éventuelles. On note que l'union de l'ouvert Ω^s et de sa frontière $\partial\Omega^s$ est notée $\overline{\Omega}^s = \Omega^s \cup \partial\Omega^s$ et constitue un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$. Les différentes partitions de la frontière $\partial\Omega^s$ vérifient les relations

$$\begin{cases} \partial\Omega^s = \Gamma_u^s \cup \Gamma_f^s \cup \Gamma_c^s & \text{(I.5a)} \\ \Gamma_u^s \cup \Gamma_f^s = \Gamma_u^s \cup \Gamma_c^s = \Gamma_f^s \cup \Gamma_c^s = \emptyset. & \text{(I.5b)} \end{cases}$$

Cette configuration est illustrée sur la figure I.6 pour un cas où $\Gamma_s = \emptyset$ (sans contact) et un cas où $\Gamma_s \neq \emptyset$ (avec contact). Les corps Ω^s sont également respectivement soumis à une



configuration initiale
sans contact ($\Gamma_c^{1,2} = \emptyset$)

configuration déformée
avec contact ($\Gamma_c^{1,2} \neq \emptyset$)

FIGURE I.6 – Deux corps élastiques en contact.

densité d'efforts volumiques $\mathbf{f}^s$. On cherche ici à déterminer les déplacements $\mathbf{u}^s$ de chacune des structures.

4.2 Contact unilatéral

Avant de procéder à la mise en équation du problème présenté dans la section I.4.1, on décrit ici la nature d'une interaction de contact unilatéral. Pour définir les contraintes de contact, il est d'usage de définir un solide principal, noté $s = 1$, et un solide secondaire, noté $s = 2$. La troisième loi de Newton (action-réaction) assure l'interchangeabilité de cette notation. On définit alors la normale principale $\mathbf{n} = \mathbf{n}^1 = -\mathbf{n}^2$, qui correspond à la normale sortante à l'interface de contact du corps principal Γ_c^1. L'effort de contact exercé par le corps secondaire $\overline{\Omega}^2$ sur le corps principal $\overline{\Omega}^1$ est noté $\mathbf{f}_c$ en un point de l'interface quelconque. Les déplacements $\mathbf{u}_c^1$ et $\mathbf{u}_c^2$ correspondent aux déplacements de chacune des structures en ce même point.

En utilisant ces notations, les conditions de Hertz-Signorini-Moreau ou conditions de contact unilatéral s'expriment en tout point de l'interface Γ_c^1 et en tout temps telles que

$$\begin{cases} g(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = (\mathbf{u}_c^2 - \mathbf{u}_c^1) \cdot \mathbf{n} \geq 0 & \text{(I.6a)} \\ -\mathbf{f}_c \cdot \mathbf{n} = f_{\mathrm{N},c} \geq 0 & \text{(I.6b)} \\ f_{\mathrm{N},c} \cdot g(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = 0. & \text{(I.6c)} \end{cases}$$

Ces conditions assurent alors que :

1. les structures ne peuvent pas s'interpénétrer, inéquation (I.6a) ;
2. les efforts de contact sont répulsifs, inéquation (I.6b) ;
3. les efforts de contact ne sont positifs que quand le jeu est nul (contact) et il n'y a pas d'effort de contact lorsque le jeu n'est pas nul (pas de contact), relation de complémentarité (I.6c).

Les conditions de contact unilatéral sont résumées sur la figure I.7. Ces dernières sont équivalentes aux conditions de complémentarité de Karush-Kuhn-Tucker dans le domaine de l'optimisation sous contraintes [201].

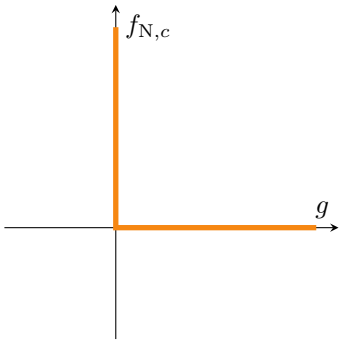


FIGURE I.7 – Loi de contact unilatéral.

4.3 Loi de frottement

Lors d'une interaction de contact entre deux corps tridimensionnels, on observe également une composante de frottement. Empiriquement, l'intensité des efforts de frottement dépend de la composante normale $f_{\mathrm{N},c}$. La mise en équation de cette dépendance a été réalisée par Coulomb [201], d'où le nom de loi de frottement de Coulomb. Cette loi permet de distinguer deux comportements de frottement différents. On parle alors de frottement adhérent et de frottement glissant. Pour distinguer ces deux états, on définit le coefficient de frottement μ propre aux matériaux et à la nature des interfaces mises en jeu (rugosité, lubrification...). On note $\mathbf{f}_{\mathrm{T},c}$ l'effort de frottement dans le plan orthogonal à la normale de contact $\mathbf{n}$, tel que $\mathbf{f}_{\mathrm{T},c} \cdot \mathbf{n} = 0$. On différencie les deux configurations de frottement par le comportement des structures :

Adhérence L'adhérence correspond à un état de collement entre les structures, c'est-à-dire qu'on observe qu'elles ne se déplacent pas tangentiellement l'une par rapport à l'autre localement au contact. Cette phase se caractérise mathématiquement par la relation $\|\mathbf{f}_{\mathrm{T},c}\| < \mu\,|f_{\mathrm{N},c}|$.

Glissement Le glissement est au contraire à une phase où les structures se déplacent l'une par rapport à l'autre dans la direction tangentielle localement au contact. L'effort de frottement est alors proportionnel à l'effort normal tel que $\|\mathbf{f}_{\mathrm{T},c}\| = \mu\,|f_{\mathrm{N},c}|$. Cet effort de

frottement glissant est dirigé dans la direction opposée à la vitesse relative entre les deux structures.

Cette loi est représentée sur la figure I.8 (projetée dans la direction de frottement T à des fins de représentation) et les conditions de Karush-Kuhn-Tucker associées sont

$$\begin{cases} \|\mathbf{g}_{\mathrm{T}}\| = \left\|\mathbf{u}^1_{\mathrm{T},c} - \mathbf{u}^2_{\mathrm{T},c}\right\| \geq 0 & \text{(I.7a)} \\ f_{\mathrm{T}}(f_{\mathrm{N},c}, \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}) = \|\mathbf{f}_{\mathrm{T},c}\| - \mu\,|f_{\mathrm{N},c}| \leq 0 & \text{(I.7b)} \\ \|\mathbf{g}_{\mathrm{T}}\| \cdot f_{\mathrm{T}}(f_{\mathrm{N},c}, \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}) = 0 & \text{(I.7c)} \end{cases}$$

où $\mathbf{u}^s_{\mathrm{T},c}$ sont les déplacements tangentiels du solide s à l'interface de contact Γ^s_c.

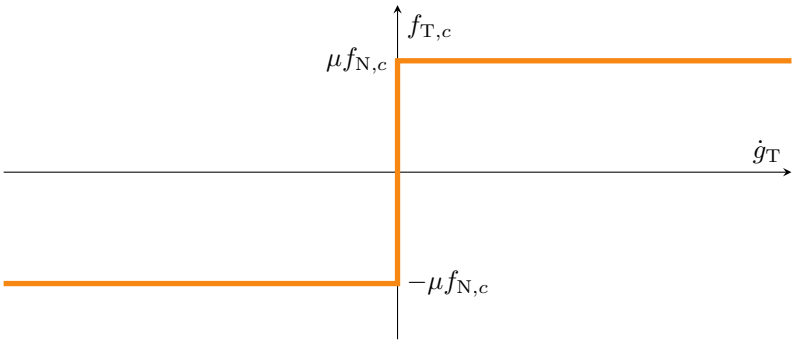


FIGURE I.8 – Loi de frottement de Coulomb.

4.4 Mise en équation du problème de contact

On présente dans cette section comment s'inscrivent les lois de contact présentées dans les sections I.4.2 et I.4.3 dans les équations du comportement dynamique d'un corps continu élastique. On expose dans un premier temps la formulation forte dans la section I.4.4.1, puis une version dite affaiblie, ou formulation faible, de ces équations dans la section I.4.4.2.

4.4.1 Formulation forte

La formulation forte du problème élastodynamique en présence d'interactions de contact décrit dans la section I.4.1 est constituée des lois classiques de la mécanique des milieux continus [218, 201] :

— les équations d'équilibre dynamique du solide

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \sigma^s_{ij}}{\partial u^s_j}\right) + f^s_i = \rho^s \frac{\partial^2 u^s_i}{\partial t^2} \quad \forall i \in \{1,2,3\} \iff \mathrm{div}\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s + \mathbf{f}^s = \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \text{ sur } \Omega^s \qquad \text{(I.8)}$$

où u^s_j fait référence à la j-ième composante de $\mathbf{u}^s$, $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s$ est le tenseur des contraintes de Cauchy du solide Ω^s et ρ^s la masse volumique du solide ;

— les conditions aux limites en déplacements (ou conditions de Dirichlet)

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{u}^s_d \text{ sur } \Gamma^s_u; \qquad \text{(I.9)}$$

— les conditions aux limites en efforts (ou conditions de Neumann)

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \mathbf{n}^s = \mathbf{t}^s_d \text{ sur } \Gamma^s_f \qquad \text{(I.10)}$$

où $\mathbf{n}^s$ est la normale sortante à Γ_f^s ;

— les conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}^s(0) = \mathbf{u}_0^s \text{ sur } \overline{\Omega^s}; & \text{(I.11a)} \\ \dot{\mathbf{u}}^s(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^s & \text{(I.11b)} \end{cases}$$

— la loi de comportement du matériau : le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}^s)$ sous l'hypothèse des petites déformations s'écrit

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^s}{\partial u_j^s} + \frac{\partial u_j^s}{\partial u_i^s}\right) \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \iff \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}^s) = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}^s \tag{I.12}$$

avec

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad} + \mathrm{grad}^\top\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial u_3} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_3} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial u_1} \end{bmatrix}. \tag{I.13}$$

On suppose que la loi de comportement du matériau, liant contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s$ et déformations $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^s$, est la loi de Hooke généralisée

$$\sigma_{ij}^s = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ijkh}^s \varepsilon_{kh}^s \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \iff \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s = \mathbb{A}^s : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}^s) \tag{I.14}$$

où $\mathbb{A}^s$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 du matériau du solide s ;

— les contraintes de contact, pour lesquelles on doit on décomposer le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}^s$ sur la sous-frontière Γ_c^s selon la direction normale et les directions tangentielles de sorte que

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \sigma_{\mathrm{N}}^s \mathbf{n}^s + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^s \tag{I.15}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^s \cdot \mathbf{n}^s = 0$. Avec cette notation et les éléments présentés dans les sections I.4.2 et I.4.3, les contraintes associées au contact sont :

- le contact unilatéral

$$\begin{cases} g(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) \geq 0 & \text{(I.16a)} \\ \sigma_{\mathrm{N}} = \sigma_{\mathrm{N}}^1 = \sigma_{\mathrm{N}}^2 \leq 0 & \text{(I.16b)} \\ \sigma_{\mathrm{N}} \cdot g(\mathbf{u}_c^1, \mathbf{u}_c^2) = 0, & \text{(I.16c)} \end{cases}$$

- la loi de frottement de Coulomb, si $g(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = 0$ et en notant $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^1 = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^2$, s'écrit

$$\begin{cases} \left\|\mathbf{u}_{\mathrm{T},c}^1 - \mathbf{u}_{\mathrm{T},c}^2\right\| \geq 0 & \text{(I.17a)} \\ \left\|\mathbf{u}_{\mathrm{T},c}^1 - \mathbf{u}_{\mathrm{T},c}^2\right\| \left(\|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}\| - \mu\,|\sigma_{\mathrm{N}}|\right) = 0 & \text{(I.17b)} \\ \|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}\| < \mu\,|\sigma_{\mathrm{N}}| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{T},c}^1 - \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{T},c}^2 = \mathbf{0} & \text{(I.17c)} \\ \|\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}\| = \mu\,|\sigma_{\mathrm{N}}| \Rightarrow \exists \lambda \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{T},c}^1 - \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{T},c}^2 = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}. & \text{(I.17d)} \end{cases}$$

La formulation forte du problème élastodynamique avec interactions de contact ne peut être résolue que pour certaines configurations simples. Afin de résoudre ce problème en pratique, il est nécessaire d'affaiblir cette formulation en une formulation dite faible.

4.4.2 Formulation faible

L'obtention de la formulation faible d'un problème de mécanique des milieux continus est une première étape en vue d'une discrétisation du problème (méthode des éléments-finis, méthode de Rayleigh-Ritz...). Afin de l'obtenir, il est nécessaire d'utiliser le principe des puissances virtuelles décrit ci-après.

On considère l'espace V^s des champs de déplacements cinématiquement admissibles au problème pour chacun des solides Ω^s défini par

$$V^s = \{\mathbf{v}^s, \quad \mathbf{v}^s = \mathbf{u}_d^s \text{ sur } \Gamma_u^s\} \tag{I.18}$$

et K l'espace des solutions admissibles respectant la condition de non-interpénétration des deux solides tel que

$$K = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V^1 \times V^2, \quad g(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}. \tag{I.19}$$

Soit $\mathbf{v} \in K$, $\dot{\mathbf{v}}^s$ est un champ de vitesses virtuelles admissible pour chacun des solides. On effectue le bilan des puissances virtuelles à partir de l'équation d'équilibre dynamique (I.8) pour les deux corps, ce qui donne

$$\sum_{s=1}^{2} \left(\int_{\Omega^s} \operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s + \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s - \int_{\Omega^s} \rho \ddot{\mathbf{u}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s \right) = 0. \tag{I.20}$$

On fournit les identités de calcul tensoriel utiles pour la suite des développements [236]

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A}^\top + \operatorname{tr}(\mathbf{A} \operatorname{grad} \mathbf{x}) \tag{I.21}$$

et

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = \mathbf{A} : \mathbf{B} \tag{I.22}$$

avec $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ des tenseurs et $\mathbf{x}$ un champ vectoriel. Le terme $\operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s$ peut alors se réexprimer grâce aux identités de calcul tensoriel (I.21) et (I.22) et à la symétrie du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^{s\top}$ sous la forme

$$\operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s = \operatorname{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}}^s. \tag{I.23}$$

En utilisant le théorème de divergence, le premier terme de l'équation (I.20) se réécrit

$$\int_{\Omega^s} \operatorname{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s = \int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s - \int_{\Omega^s} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s, \tag{I.24}$$

puis en passant en notation indicielle, comme $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}^s \frac{\partial \dot{v}_i^s}{\partial u_j^s} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{v}_i^s}{\partial u_j^s} + \frac{\partial \dot{v}_j^s}{\partial u_i^s} \right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}^s \epsilon_{ij}(\dot{\mathbf{v}}^s). \tag{I.25}$$

Ceci se traduit en notation tensorielle par la relation

$$\int_{\Omega^s} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s = \int_{\Omega^s} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\mathbf{v}}^s) = \int_{\Omega^s} \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}^s) : \mathbb{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\mathbf{v}}^s) \mathrm{d}\Omega^s. \tag{I.26}$$

Par ailleurs, on utilise la sous-partition de Γ^s pour décomposer le terme $\displaystyle\int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s$ tel que

$$\int_{\Gamma^s} \mathbf{t}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s = \int_{\Gamma_f^s} \mathbf{t}_d^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s + \int_{\Gamma_u^s} \mathbf{t}_u^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s + \int_{\Gamma_c^s} \sigma_{\mathrm{N}}^s \dot{v}_{\mathrm{N}}^s \mathrm{d}\Gamma^s + \int_{\Gamma_c^s} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}^s \mathrm{d}\Gamma^s \tag{I.27}$$

où $\mathbf{t}_u^s = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \mathbf{n}^s$ est la densité d'efforts surfaciques associée aux conditions aux limites en déplacements imposés.

Finalement, le principe des puissances virtuelles appliqué au système présenté peut s'écrire sous la forme

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = L(\dot{\mathbf{v}}) + \langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle f_{\mathrm{N},c}, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}, \dot{\mathbf{v}} \rangle \tag{I.28}$$

où chacun des termes représente :

— la puissance virtuelle des efforts d'inertie

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^{2} \int_{\Omega^s} \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \cdot \mathbf{v}^s \mathrm{d}\Omega^s; \tag{I.29}$$

— la puissance virtuelle des efforts internes

$$a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^{2} \int_{\Omega^s} \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}^s) : \mathbb{A} : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\mathbf{v}}^s) \mathrm{d}\Omega^s; \tag{I.30}$$

— la puissance virtuelle des efforts externes

$$L(\dot{\mathbf{v}}) = \sum_{s=1}^{2} \left(\int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Omega^s + \int_{\Gamma_f^s} \mathbf{t}_d^s \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s \right); \tag{I.31}$$

— la puissance virtuelle nécessaire à fixer les champs de déplacements sur les sous-frontières Γ_u^s

$$\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{s=1}^{2} \int_{\Gamma_u^s} (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^s \cdot \mathbf{n}^s) \cdot \dot{\mathbf{v}}^s \mathrm{d}\Gamma^s; \tag{I.32}$$

— la puissance virtuelle des efforts de contact normaux

$$\langle f_{\mathrm{N},c}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{s=1}^{2} \int_{\Gamma_c^s} \sigma_{\mathrm{N}}^s \dot{v}_{\mathrm{N}}^s \mathrm{d}\Gamma^s = - \int_{\Gamma_c} \sigma_{\mathrm{N}} \dot{g}(\mathbf{v}) \mathrm{d}\Gamma; \tag{I.33}$$

— la puissance virtuelle des efforts de contact tangentiels

$$\langle \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{s=1}^{2} \int_{\Gamma_c^s} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}^s \cdot \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}^s \mathrm{d}\Gamma^s. \tag{I.34}$$

On note que la puissance réelle des efforts de contact normaux, obtenue en prenant $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, est

nulle en accord avec la définition des conditions de contact unilatéral : $\langle f_{\mathrm{N},c}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$.

4.4.3 Égalité variationnelle

L'obtention de l'équation (I.28) permet de reformuler le problème décrit sous la forme d'une égalité dite variationnelle

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) = L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle f_{\mathrm{N},c}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle. \end{array} \right. \tag{I.35}$$

On remarque que le terme lié à la prise en compte des conditions aux limites en déplacements est absent de la relation (I.35). En effet, comme $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}}_d$ sur la frontière Γ_u^s, alors $\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$.

4.4.4 Inégalité variationnelle

Duvaut et Lions [186] ont montré qu'une formulation alternative et équivalente à la formulation forte de la section I.4.4.1 existait sous la forme d'une inégalité. Cette formulation est appelée inégalité variationnelle et s'exprime sous la forme du problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle f_{\mathrm{N},c}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{array} \right. \tag{I.36}$$

avec

$$j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Gamma_c} \mu \left| \sigma_{\mathrm{N}}(\mathbf{u}) \right| \left\| \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}^1 - \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{T}}^2 \right\| \mathrm{d}\Gamma. \tag{I.37}$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on peut faire une analogie entre déplacements et vitesses afin de simplifier la formulation (I.36). Dans ce cadre, il y a équivalence entre le principe des travaux virtuels et le principe des puissances virtuelles. En utilisant la même démarche que dans la section I.4.4.2 mais en remplaçant les vitesses virtuelles par des déplacements virtuels, on obtient le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \langle f_{\mathrm{N},c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle. \end{array} \right. \tag{I.38}$$

De la même manière que pour le principe des puissances virtuelles, le terme associé aux efforts de contact normaux dans le principe des travaux virtuels est nul :

$$\langle f_{\mathrm{N},c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = - \int_{\Gamma_c^s} \sigma_{\mathrm{N}}(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{I.39}$$

D'autre part, il est possible de montrer

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{v}_{\mathrm{T}}^1 - \mathbf{v}_{\mathrm{T}}^2) \geq - \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}} \right\| \left\| \mathbf{v}_{\mathrm{T}}^1 - \mathbf{v}_{\mathrm{T}}^2 \right\| & \text{(I.40a)} \\ \left\| \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}} \right\| \leq \mu \left| \sigma_{\mathrm{N}} \right| & \text{(I.40b)} \end{cases}$$

et ainsi

$$\langle \mathbf{f}_{\mathrm{T},c}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{I.41}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité (I.41) dans le problème (I.38), on obtient la nouvelle

formulation d'inégalité variationnelle

$$\left|\begin{array}{l}\text{trouver } \mathbf{u} \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq L(\mathbf{v}-\mathbf{u}).\end{array}\right. \tag{I.42}$$

Ce problème est fortement non linéaire et délicat à résoudre du fait de l'inégalité ainsi que de la non-différentiabilité des termes liés au frottement $j(\bullet, \bullet)$. En effet, les transitions soudaines entre les états d'adhérence et de glissement constituent des difficultés mathématiques majeures.

Il est montré que le problème écrit sous la forme d'une inégalité variationnelle est équivalent à un problème de minimisation de l'énergie potentielle du système composé des deux corps en respectant les contraintes induites par le contact. On distingue cependant les cas avec et sans frottement. Dans le cas sans frottement, la formulation variationnelle devient un problème de minimisation sous contraintes conventionnel. En revanche, la présence des termes non réguliers $j(\bullet, \bullet)$ nécessite de recourir à une régularisation de la loi de frottement, ou même de la norme utilisée afin de se placer dans le cadre d'un problème de minimisation sous contraintes standard [201].

4.5 Gestion du contact

Comme explicité dans la section I.4.4.4, la résolution d'un problème élastodynamique entre deux corps en contact est, sous certaines hypothèses, un problème de minimisation d'une énergie sous les contraintes liées au contact. Afin de pouvoir faire un parallèle avec l'optimisation sous contraintes, il est toutefois nécessaire de procéder à une régularisation des lois non linéaires de contact. Cette régularisation consiste à exprimer les lois de contact en fonction des déplacements pour permettre l'utilisation de techniques classiques. Dans un souci de concision et de simplicité, on détaille uniquement le cas statique dans cette section ce qui permet de négliger le terme inertiel $(\rho\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}-\mathbf{u})$. Ceci n'est pas un élément bloquant pour la généralisation à un problème dynamique, car celui-ci peut être vu comme une succession de problèmes quasi-statiques après discrétisation temporelle. La formulation proposée dans cette partie n'est valide que pour des problèmes qui n'incluent pas de frottement glissant. En effet, comme ce type de frottement est dissipatif, la solution du problème devient dépendante du chemin emprunté et le problème ne peut plus s'écrire comme la minimisation d'une énergie sous contraintes. La contribution du frottement dissipatif pourra cependant être incluse par la suite des développements.

On présente dans cette section quelques méthodes classiques pour prendre en compte le contact dans l'énergie à minimiser Π dans le problème à résoudre

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad \min_{\mathbf{u} \in K} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \Pi_c \tag{I.43}$$

où Π_c est la contribution énergétique du contact. Afin de trouver une solution à ce problème, on peut exprimer la stationnarité de l'énergie du système Π par rapport au champ de déplacements $\mathbf{u}$, on obtient alors l'égalité

$$\delta\Pi = \delta a(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}) - \delta L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + \delta\Pi_c = 0 \tag{I.44}$$

avec $\delta\Pi_c$ la variation de Π_c par rapport à $\mathbf{u}$. La définition de ces termes est au centre de chacune des méthodologies, en effet l'expression de Π_c confère des propriétés aux différentes méthodes de gestion du contact.

4.5.1 Multiplicateurs de Lagrange

Dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la contribution des interactions de contact se formule

$$\Pi_c^{\mathrm{LM}} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_{\mathrm{N}} g + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{T}}) \mathrm{d}\Gamma \tag{I.45}$$

avec λ_{N} et $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}}$ les multiplicateurs de Lagrange respectivement dans la direction normale et dans la direction tangentielle. Ces grandeurs sont de nouvelles inconnues du problème. Il est possible de calculer la variation de Π_c^{LM} par rapport à $\mathbf{u}$, pour la résolution du problème (I.44), on obtient alors

$$\delta\Pi_c^{\mathrm{LM}} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_{\mathrm{N}} \delta g + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}} \delta \mathbf{g}_{\mathrm{T}}) \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\delta\lambda_{\mathrm{N}} g + \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{T}}) \mathrm{d}\Gamma. \tag{I.46}$$

Les deux termes obtenus ont alors une signification différente. Le premier terme correspond au travail virtuel des multiplicateurs Lagrange associé à une variation du jeu à la fois dans la direction normale et dans la direction tangentielle. Le second terme est associé au respect des conditions de contact le long de l'interface. Le multiplicateur de Lagrange dans la direction normale λ_{N} est analogue à un effort surfacique appliqué à l'interface Γ_c.

Dans le cadre d'un frottement adhérent ($\mathbf{g}_{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$), il vient une équation de contrainte qui permet de déterminer $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}}$ dans le même temps. Au contraire, lorsque le frottement est glissant, le multiplicateur de Lagrange représente la contrainte de contact tel que $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}$ et finalement, la variation $\delta\Pi_c^{\mathrm{LM,gliss}}$ s'écrit

$$\delta\Pi_c^{\mathrm{LM,gliss}} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_{\mathrm{N}} \delta g + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}} \delta g_{\mathrm{T}}) \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_c} \delta\lambda_{\mathrm{N}} g \mathrm{d}\Gamma. \tag{I.47}$$

4.5.2 Méthode de pénalité

La méthode de pénalité permet de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un ou plusieurs problèmes d'optimisation sans contraintes. On recherche alors la solution $\mathbf{u}$ dans un domaine non contraint, ce qui a l'avantage de ne pas ajouter d'inconnues au problème contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cependant, on échange la complexité de la résolution contre une dépendance à un paramètre de pénalité. Pour expliciter le terme Π_c^{pen}, il est nécessaire de définir la fonction de pénétration des structures. Elle se note $\overline{g}_{\mathrm{N}}$ et est définie par la relation

$$\overline{g}_{\mathrm{N}} = \begin{cases} (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} \text{ si } (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n} < 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{I.48}$$

Avec cette notation, on définit Π_c^{pen} tel que

$$\Pi_c^{\mathrm{pen}} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left(\varepsilon_{\mathrm{N}} \overline{g}_{\mathrm{N}}^2 + \varepsilon_{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \right) \mathrm{d}\Gamma \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\mathrm{N}}, \varepsilon_{\mathrm{T}} > 0 \tag{I.49}$$

où ε_{N} et ε_{T} sont appelés coefficients de pénalité. Enfin, la variation de Π_c^{pen} en fonction de $\mathbf{u}$ s'écrit

$$\delta\Pi_c^{\mathrm{pen}} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left(\varepsilon_{\mathrm{N}} \overline{g}_{\mathrm{N}} \delta\overline{g}_{\mathrm{N}} + \varepsilon_{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{T}} \cdot \delta\mathbf{g}_{\mathrm{T}} \right) \mathrm{d}\Gamma \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\mathrm{N}}, \varepsilon_{\mathrm{T}} > 0. \tag{I.50}$$

La méthode de pénalité devient équivalente à la méthode des multiplicateurs de Lagrange lorsque $\varepsilon_{\mathrm{N}} \to \infty$ et $\varepsilon_{\mathrm{T}} \to \infty$. En revanche, il n'est en général pas possible de prendre des coefficients de pénalité trop grands lors de la résolution numérique du problème de contact.

En effet, des valeurs trop importantes pour les paramètres de pénalité mènent à un mauvais conditionnement numérique du problème.

À cause de la nature non régulière de la loi de frottement de Coulomb, on doit distinguer le cas adhérent (I.50) du cas glissant (I.51) pour le calcul de $\delta\Pi_c^{\text{pen}}$. Dans le cas glissant, on a

$$\delta\Pi_c^{\text{pen,gliss}} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_c} (\varepsilon_{\text{N}}\overline{g}_{\text{N}}\delta\overline{g}_{\text{N}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{T}}\cdot\delta\mathbf{g}_{\text{T}})\,\mathrm{d}\Gamma \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\text{N}},\varepsilon_{\text{T}} > 0. \tag{I.51}$$

4.5.3 Lagrangiens augmentés

La méthode des lagrangiens augmentés consiste à augmenter les multiplicateurs de Lagrange d'un terme de pénalité. Cette stratégie présente l'avantage de régulariser la fonction objectif de façon à ce qu'elle soit localement convexe autour de la solution, ce qui facilite la résolution du problème. Par souci de simplicité, les formulations de Π_c^{AL} et $\delta\Pi_c^{\text{AL}}$ ne seront fournies que dans un cas sans frottement. La généralisation aux interactions de frottement est cependant disponible dans la littérature [201]. Dans le cadre présenté, la contribution des interactions de contact s'écrit

$$\Pi_c^{\text{AL}} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_c} \left(\lambda_{\text{N}} g + \frac{\varepsilon_{\text{N}}}{2} g^2\right)\mathrm{d}\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_{\text{N}} \leq 0, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_c} -\frac{1}{2\varepsilon_{\text{N}}}\left|\lambda_{\text{N}}\right|^2\mathrm{d}\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_{\text{N}} > 0, \end{cases} \tag{I.52}$$

avec $\hat{\lambda}_{\text{N}} = \lambda_{\text{N}} + \varepsilon_{\text{N}} g$. La variation de l'égalité (I.52) peut alors s'écrire

$$\delta\Pi_c^{\text{AL}} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_c} \left(\hat{\lambda}_{\text{N}}\delta g + \delta\lambda_{\text{N}} g\right)\mathrm{d}\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_{\text{N}} \leq 0, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_c} -\frac{1}{\varepsilon_{\text{N}}}\delta\lambda_{\text{N}}\lambda_{\text{N}}\mathrm{d}\Gamma & \text{pour } \hat{\lambda}_{\text{N}} > 0. \end{cases} \tag{I.53}$$

Afin de simplifier la résolution du problème associé à la variation (I.53), il est possible de recourir à l'algorithme d'Uzawa [155]. Ce dernier consiste à chercher le multiplicateur de Lagrange itérativement, en le considérant constant à chaque itération puis en l'actualisant à la fin de l'itération. Ceci permet de découpler la recherche de λ_{N} de celle de $\mathbf{u}$, la variation de la contribution du contact en est modifiée telle que

$$\delta\Pi_c^{\text{UZ}} = \int_{\Gamma_c} (\overline{\lambda}_{\text{N}} + \varepsilon_{\text{N}} g)\delta g\mathrm{d}\Gamma \tag{I.54}$$

où $\overline{\lambda}_{\text{N}}$ est construit itérativement tel qu'à la $(k+1)$-ième itération

$$\overline{\lambda}_{\text{N}}^{k+1} = \overline{\lambda}_{\text{N}}^{k} + \varepsilon_{\text{N}} g^{k+1}. \tag{I.55}$$

Cette stratégie est très pratique d'un point de vue théorique, en revanche sa vitesse de convergence est fortement sensible au choix du paramètre de pénalité ε_{N}. Cependant, cette méthode produit une estimation de la solution exacte au problème de contact sans générer de singularité numérique, et ce même si le coefficient de pénalité reste faible.

4.6 Cadre des développements

Dans les travaux présentés, on s'intéresse à des structures discrétisées en espace. Les formulations continues de la mécanique du contact présentées dans la section I.4 sont transposées à

un formalisme discret obtenu par la méthode des éléments-finis [188] ou de Rayleigh-Ritz [188]. Pour les modèles phénoménologiques, on recourt également à la mécanique des points matériels pour construire les modèles spatialement discrets [188]. Contrairement au champ de déplacements inconnu $\mathbf{u}$ de la section I.4, on recherche dans la configuration discrète un champ de déplacements $\mathbf{x}$ discret et sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \big[x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)\big] \tag{I.56}$$

où n est le nombre de degrés de liberté de la discrétisation et x_i est le déplacement du i-ième degré de liberté de la structure. La formulation classique de l'équation de la dynamique des structures discrète s'écrit alors

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t) \tag{I.57}$$

où la matrice de masse $\mathbf{M}$ est la version discrète du terme inertiel, la matrice de raideur $\mathbf{K}$ est la version discrète de l'opérateur d'élasticité, le vecteur d'efforts extérieurs $\mathbf{f}_{\text{ex}}$ représente les conditions aux limites en effort et le vecteur d'effort non linéaires $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ est la contribution du contact. La matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ est rajoutée *a posteriori* afin de modéliser les phénomènes dissipatifs dans les systèmes mécaniques. Il est possible de l'évaluer par différentes méthodes mais elle est souvent calculée en imposant des taux d'amortissement modaux à chacun des modes ou en utilisant un modèle d'amortissement de Rayleigh (combinaison linéaire de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$). Pour un système discrétisé par la méthode des éléments finis, on représente le système sous la forme d'un maillage, comme illustré sur la figure I.9.

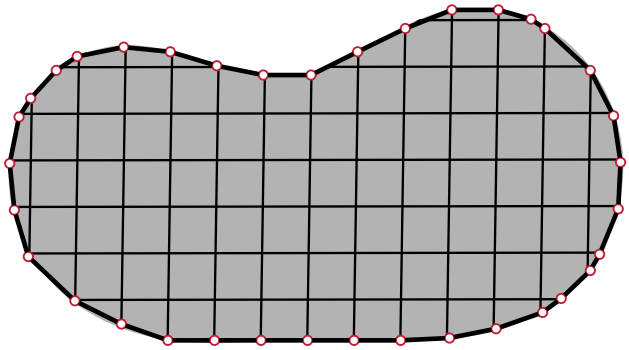


FIGURE I.9 – Solide discrétisé.

La gestion du contact sur des systèmes mécaniques discrets varie également par rapport à la formulation continue. Le lien entre le vecteur d'efforts non linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ et les différentes quantités liées à la gestion du contact dans la section I.4.5 peut notamment être réalisé par l'utilisation de la matrice de contact $\mathbf{c}_{\text{N}}$. Cette matrice lie les jeux $\mathbf{g}$ et les déplacements des structures $\mathbf{x}$ de façon linéaire par la relation

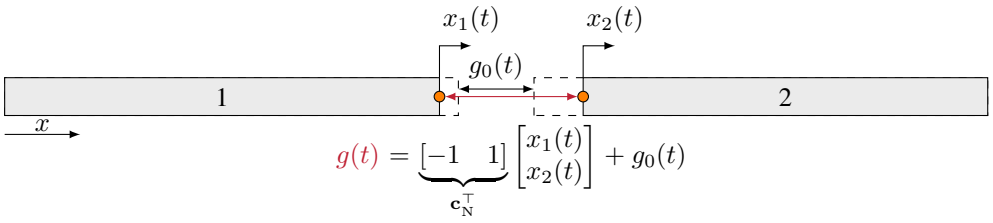
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{c}_{\text{N}}^{\top}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{I.58}$$

avec $\mathbf{g} = \big[g_1(t), \dots, g_j(t), \dots, g_m(t)\big]$ le vecteur de contraintes de jeu de taille m. De façon analogue, $\mathbf{g}_0$ est un vecteur de taille m contenant la distance entre les structures non déformées. La matrice de contact est donc rectangulaire de taille (n, m).

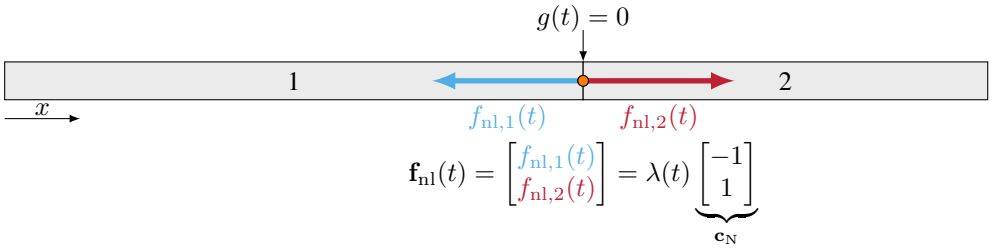
Lors de la résolution du problème de contact, si une pénétration est détectée pour une des contraintes de contact, *i.e.* $\exists j \in [\![1; m]\!]\ g_j < 0$, alors on calcule les efforts non linéaires associés au contact de façon différente selon la méthode utilisée parmi les méthodes présentées dans la section I.4.5 :

— multiplicateurs de Lagrange : $\mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{c}_{\text{N}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}$;
— méthode de pénalité : $\mathbf{f}_{\text{nl}} = \varepsilon_{\text{N}}\mathbf{c}_{\text{N}}(\mathbf{x})\mathbf{g}$;
— lagrangiens augmentés : $\mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{c}_{\text{N}}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\lambda} + \varepsilon\mathbf{g})$.

On représente sur la figure I.10 une interprétation géométrique de la matrice de contact $\mathbf{c}_{\text{N}}$ pour un système unidimensionnel à une contrainte de contact associée à un multiplicateur de Lagrange λ et un jeu g.



(a) Relation entre g et $\mathbf{x}$.



(b) Relation entre λ et $\mathbf{f}_{\text{nl}}$.

FIGURE I.10 – Interprétation géométrique de la matrice de contact $\mathbf{c}_{\text{N}}$.

On distingue généralement deux configurations lors du calcul de la dynamique de contact de deux structures, qu'on détaille dans un ordre de fidélité croissante. Premièrement, le contact d'une structure avec un obstacle rigide, illustré sur la figure I.11, revient à ne considérer qu'une seule structure déformable. En effet, la formulation proposée dans la section I.4 se limite alors à $s = 1$. Bien que mal conditionnés du point de vue numérique, ces problèmes permettent généralement de réduire les temps de calcul. L'hypothèse de rigidité de la deuxième structure peut cependant être simplificatrice pour la physique mise en jeu. Ainsi, il est nécessaire d'appuyer ce choix sur des arguments physiques, voire expérimentaux, pour ne pas trop dégrader le réalisme physique des simulations.

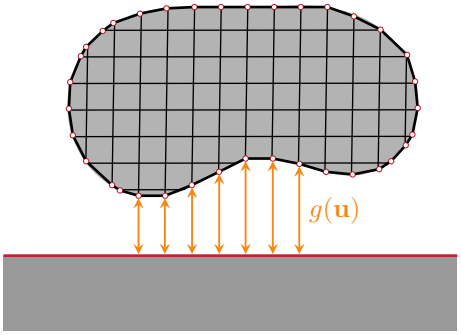
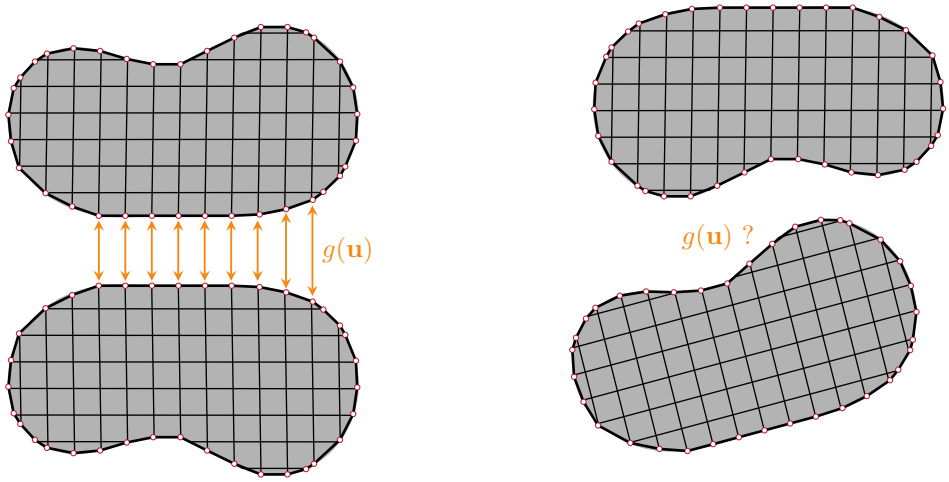


FIGURE I.11 – Solide en contact avec un obstacle rigide.

Au contraire, la formulation la plus générale du problème de contact consiste à considérer plusieurs solides flexibles. On peut facilement généraliser la formulation théorique du problème

du contact de la section I.4 à N solides, cependant on se limite ici à $N = 2$ solides pour des raisons de simplicité. Le fait de considérer deux solides plutôt qu'un mène inévitablement à un temps de calcul augmenté. En effet, le nombre d'inconnues est multiplié par deux si on considère des solides de tailles identiques. Un des problèmes lié à une configuration à deux solides flexibles réside dans la coïncidence des maillages. En effet, la fonction de jeu discrète $\mathbf{g}$ (écrite sous la forme de l'équation (I.58)) se base sur l'hypothèse que les nœuds de la discrétisation spatiale des structures sont associés deux-à-deux. Les maillages sont alors dits coïncidents. Cette configuration est représentée sur la figure I.12a et le jeu est facilement identifiable comme la distance entre deux nœuds vis-à-vis. Au contraire, lorsque ce n'est pas le cas, il est difficile de définir une fonction jeu car il n'y a pas nécessairement un nombre égal de nœuds de contact sur chacune des structures, voir figure I.12b. Pour contourner cette difficulté, on peut par exemple utiliser des splines pour définir l'interface de contact [204] ou encore utiliser la méthode de mortier [201] consistant à utiliser une grille intermédiaire servant à déterminer les grandeurs locales au contact (jeux et efforts).



(a) maillage coïncident (b) maillage non coïncident

FIGURE I.12 – Définition du jeu entre deux structures flexibles.

Chapitre II

Résolution de systèmes différentiels non linéaires

Ce chapitre aborde les techniques de résolution des systèmes différentiels non linéaires. La résolution de tels problèmes peut être abordée par de multiples approches. On oppose en général les méthodes se basant sur le domaine temporel à celles qui s'appuient sur le domaine fréquentiel. Étant donné la nature vibratoire des phénomènes d'intérêt, on s'intéresse ici majoritairement à la recherche de mouvements périodiques, favorisant l'emploi des méthodologies du domaine fréquentiel. Les méthodologies de résolution de systèmes algébriques non linéaires sont également présentées car elles sont utilisées dans certaines des stratégies de résolution de problèmes différentiels présentées. La phénoménologie complexe amenée par la présence d'efforts non linéaires requiert également l'utilisation de méthodes de continuation. Finalement, des éléments de la phénomènologie des systèmes non linéaires sont abordés, notamment concernant les aspects de stabilité, de bifurcations et de résonances non linéaires.

Sommaire du chapitre

1 Domaine temporel **30**
- 1.1 Méthodes de perturbation . . . 30
- 1.2 Intégration temporelle directe . . . 31
- 1.3 Méthode de tir . . . 34

2 Domaine fréquentiel **35**
- 2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . 35
- 2.2 Collocation trigonométrique . . . 48
- 2.3 Équilibrage harmonique haute dimension . . . 48
- 2.4 Bilan des méthodes fréquentielles . . . 49

3 Résolution de systèmes algébriques non linéaires **50**
- 3.1 Méthode de Newton-Raphson . . . 50
- 3.2 Méthodes de quasi-Newton . . . 52
- 3.3 Algorithme de la descente du gradient . . . 52
- 3.4 Méthode *hybrid* Powell . . . 53
- 3.5 Extension aux fonctions à valeurs scalaires . . . 56

4 Méthodes de continuation **57**
- 4.1 Prédicteurs . . . 57
- 4.2 Paramétrisation . . . 59

5 Phénoménologie des systèmes dynamiques non linéaires **62**

5.1 Stabilité 63
5.2 Bifurcations 69
5.3 Résonances non linéaires 71
5.4 Isolats 73

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution par diverses stratégies de l'équation du mouvement discrétisée en espace en présence d'efforts non linéaires se mettant sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t). \tag{II.1}$$

Dans la suite, on note n la taille de ce problème. Dans un premier temps, les stratégies du domaine temporel et domaine fréquentiel sont présentées respectivement dans les sections II.1 et II.2. Ces techniques nécessitent pour certaines l'appel à des stratégies de résolution de systèmes algébriques non linéaires, détaillées dans la section II.3. Pour accéder à un certain nombre d'aspects qualitatifs des réponses dynamiques non linéaires, des méthodes de continuation sont employées. Elles sont détaillées dans la section II.4. Finalement, on fournit des éléments de contexte relatifs à la phénoménologie rencontrée lors du traitement de systèmes dynamiques non linéaires dans la section II.5.

1 Domaine temporel

1.1 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation [192, 194] sont des stratégies basées sur la résolution analytique du problème (II.1). Ces méthodes s'appuient sur l'introduction d'un paramètre ε sans dimension, de l'ordre de grandeur de la non-linéarité modélisée. La solution du problème est alors recherchée sous la forme

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_{\text{o}}} \varepsilon^j \mathbf{x}_j(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_{\text{o}}+1}). \tag{II.2}$$

On définit n_{o} l'ordre de la décomposition (II.2) correspondant à la puissance maximale de ε. Après avoir injecté la relation (II.2) dans l'équation du mouvement (II.1) et regroupé l'ensemble des termes associés aux différentes puissances de ε, un système de $n_{\text{o}}+1$ équations est obtenu. La résolution de ce système permet alors d'identifier chacune des contributions $\mathbf{x}_j(t)$ présentes dans l'équation (II.2). La résolution directe de ce système mène cependant à l'apparition de termes présentant des divergences d'amplitude avec le temps, ces termes sont dits séculaires. Pour remédier à ce problème, plusieurs approches peuvent être utilisées, notamment la méthode de Lindstedt-Poincaré et la méthode des échelles multiples. Ces méthodes reposent sur l'expansion en ordres de ε de variables supplémentaires.

Méthode de Lindstedt-Poincaré

La méthode de Lindstedt-Poincaré repose sur l'introduction d'une nouvelle variable de temps adimensionnel $\tau = \omega t$, où ω est défini par l'expansion

$$\omega(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_{\text{o}}} \varepsilon^j \omega_j(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_{\text{o}}+1}). \tag{II.3}$$

L'expansion de la solution $\mathbf{x}$ en est alors modifiée telle que

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_\mathrm{o}} \varepsilon^j \mathbf{x}_j(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_\mathrm{o}+1}). \tag{II.4}$$

Finalement, l'application de la procédure présentée précédemment mène à l'obtention des contributions $\mathbf{x}_j$ dans lesquelles les termes séculaires ont disparu. En utilisant une expansion pour ω, on accède également à la relation de dépendance entre fréquence et amplitude de réponse d'un système non linéaire, particulièrement important dans l'étude de ceux-ci.

Méthode des échelles multiples

Dans la méthode des échelles multiples, on choisit plutôt de supposer que les contributions $\mathbf{x}_j$ sont des fonctions de différentes échelles de temps correspondant à des termes en puissance de ε, de sorte que

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n_\mathrm{o}} \varepsilon^j \mathbf{x}_j(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \ldots) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n_\mathrm{o}+1}). \tag{II.5}$$

L'introduction de plusieurs échelles de temps permet la représentation de phénomènes ayant lieu à différents niveaux de variation du système. La même procédure que précédemment est applicable après réécriture des opérateurs de dérivation, prenant en compte les différentes échelles de temps. Contrairement à la méthode de Lindstedt-Poincaré, la méthode des échelles multiples permet le traitement de systèmes non linéaires amortis.

Cadre d'application

Les méthodes de perturbation souffrent cependant d'un cadre d'application assez restreint. En effet, comme ces méthodes sont analytiques, elles sont associées à des développements mathématiques très lourds, notamment dès que l'ordre des expansions excède $n_\mathrm{o} = 2$ ou $n_\mathrm{o} = 3$. De la même manière, ces méthodologies sont réservées au traitement de systèmes non linéaires de petite dimension à cause de la quantité conséquente de développements analytiques à réaliser.

L'introduction du terme ε supposé petit restreint également l'application des méthodes de perturbation aux systèmes faiblement non linéaires, comme les non-linéarités géométriques de faible amplitude [209]. Leur application à des non-linéarités plus fortes, telles que le contact, est complexe mais certains développements ont été réalisés dans ce sens [128, 142].

1.2 Intégration temporelle directe

Une stratégie commune pour la résolution de l'équation différentielle du mouvement (II.1) consiste à utiliser des schémas d'intégration temporelle pour discrétiser les opérateurs différentiels. De nombreux schémas [188] ont été développés pour différentes applications, la plupart d'entre eux sont des schémas d'intégration pour équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre (section II.1.2.1) et certains sont plus spécifiquement adaptés à des EDO du second ordre comme l'équation du mouvement (section II.1.2.2).

1.2.1 Intégrateur temporel direct du premier ordre

On considère dans cette section une EDO du premier ordre sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{z}, t). \tag{II.6}$$

Il est possible de définir de façon générale l'ensemble des schémas d'intégration du premier ordre à pas multiples [188] tels que

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}(t = t_{k+1}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_k \mathbf{z}_{k+1-i} - h \sum_{k=0}^{m} \beta_k \dot{\mathbf{z}}_{k+1-i} \tag{II.7}$$

où h est le pas de temps et m le nombre de pas de temps précédents à considérer pour calculer $\mathbf{z}_{k+1}$. En suivant cette définition, on dit que le schéma d'intégration est implicite si $\beta_0 \neq 0$ car $\mathbf{z}_{k+1}$ dépend directement de $\dot{\mathbf{z}}_{k+1}$, il est donc nécessaire de faire une résolution simultanée des équations à tous les pas de temps de la discrétisation. On recourt alors à la résolution d'un système d'équations algébriques éventuellement non linéaires, ce qui mène à des temps de calcul généralement supérieurs aux schémas dits explicites pour un même nombre de pas de temps. Au contraire, un schéma est explicite si $\beta_0 = 0$, dans ce cas il est possible de balayer l'intervalle temporel d'intérêt en avançant simplement dans le temps car on dispose à chaque pas de temps de toutes les grandeurs nécessaires pour calculer le suivant.

Il est d'usage de définir quelques notions importantes sur les intégrateurs temporels afin de qualifier leur comportement : la consistance, la stabilité et la convergence.

Consistance Un schéma d'intégration est consistant si la discrétisation de l'opérateur continu introduit une erreur qui tend vers 0 lorsque le pas de temps h tend vers 0.

Stabilité Un schéma d'intégration est stable si la solution issue de la discrétisation reste bornée.

Convergence Un schéma d'intégration est convergent si la solution numérique issue de la procédure d'intégration tend vers la solution exacte de l'équation différentielle continue lorsque le pas de temps h tend vers 0. D'après le théorème de Lax-Richtmyer [100], si un schéma est à la fois consistant et stable alors il est nécessairement convergent, dans un contexte linéaire.

Les notions définies sur les intégrateurs du premier ordre ne sont pas directement applicables à l'équation du mouvement car il s'agit d'une EDO du second ordre. Afin de pouvoir utiliser ces notions, il est nécessaire d'avoir recours à une formulation du problème en représentation d'état où la nouvelle inconnue s'écrit sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}. \tag{II.8}$$

Pour réécrire l'équation (II.1) sous forme d'une EDO du premier ordre, on utilise la notation d'état (II.8) qui double la taille du système [223] à résoudre

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{L}\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\mathbf{z}}(t) \tag{II.9}$$

où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) \end{bmatrix}. \tag{II.10}$$

La formulation du problème sous cette forme permet l'utilisation de l'ensemble des techniques de résolution de système du premier ordre pour la résolution l'équation du mouvement. Cependant, il est également possible d'utiliser les techniques spécialement développées pour les EDO du second d'ordre, comme par exemple les schémas de Newmark.

1.2.2 Schémas de Newmark

Les schémas les plus répandus pour la résolution des systèmes différentiels du second ordre font partie de la famille des schémas de Newmark [124]. Ces schémas sont largement présents dans la littérature à la fois dans un cadre linéaire [188] et non linéaire [37]. Les schémas de Newmark sont caractérisés par l'expression des champs de déplacements et de vitesses au $(k+1)$-ième pas de temps par le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \dot{\mathbf{x}}_k + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{x}}_k + \gamma h\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} & \text{(II.11a)} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\dot{\mathbf{x}}_k + h^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{x}}_k + \beta h^2\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} & \text{(II.11b)} \end{cases}$$

où h est le pas de temps de l'intégrateur. On note que ces relations font apparaître les deux paramètres β et γ. Ces paramètres sont liés à la quadrature réalisée pour approximer l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}$.

Comme l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}$ est *a priori* inconnue, on doit effectuer une prédiction des champs de déplacements $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ et de vitesses $\hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1}$ à l'instant $(k+1)$ en omettant les termes dépendant de $\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}$. Ces approximations s'écrivent alors

$$\begin{cases} \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} = \dot{\mathbf{x}}_k + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{x}}_k & \text{(II.12a)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\dot{\mathbf{x}}_k + h^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\mathbf{x}}_k. & \text{(II.12b)} \end{cases}$$

Grâce à elles, l'accélération du système $\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}$ est calculée à chaque pas de temps par une résolution du système linéaire

$$(\mathbf{M} + \gamma h\mathbf{C} + \beta h^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_{k+1}) - \mathbf{C}\hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}. \quad \text{(II.13)}$$

Les approximations $\hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1}$ et $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ sont ensuite corrigées pour tenir compte de la valeur de l'accélération déterminée suivant les relations

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} + \gamma h\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} & \text{(II.14a)} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \beta h^2\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}. & \text{(II.14b)} \end{cases}$$

Parmi les schémas définis par le système (II.11), on peut notamment citer le schéma de différences finies centrées qui est un cas particulier de schéma de Newmark avec $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. L'étude de la stabilité des schémas de Newmark [188] permet de dégager la carte de stabilité en fonction des paramètres β et γ, elle est représentée sur la figure II.1. En vertu de cette carte, il convient de choisir les paramètres β et γ avec attention pour s'assurer de la stabilité de l'intégrateur. Les schémas de Newmark englobent à la fois des schémas d'intégration explicites ($\beta = 0$) et implicites ($\beta > 0$).

Les schémas de Newmark présentés dans cette section sont cependant réservés aux problèmes linéaires. Il est nécessaire d'apporter des modifications à la méthodologie afin de pouvoir l'utiliser dans un contexte non linéaire. Le calcul de l'accélération du système (II.13) doit être modifié pour prendre en compte l'influence des efforts non linéaires. Le système linéaire (II.13) est alors transformé en un système algébrique non linéaire par l'introduction des efforts non linéaires, tel que

$$(\mathbf{M} + \gamma h\mathbf{C} + \beta h^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_{k+1}) - \mathbf{C}\hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \beta h^2\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}, \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} + \gamma h\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}). \quad \text{(II.15)}$$

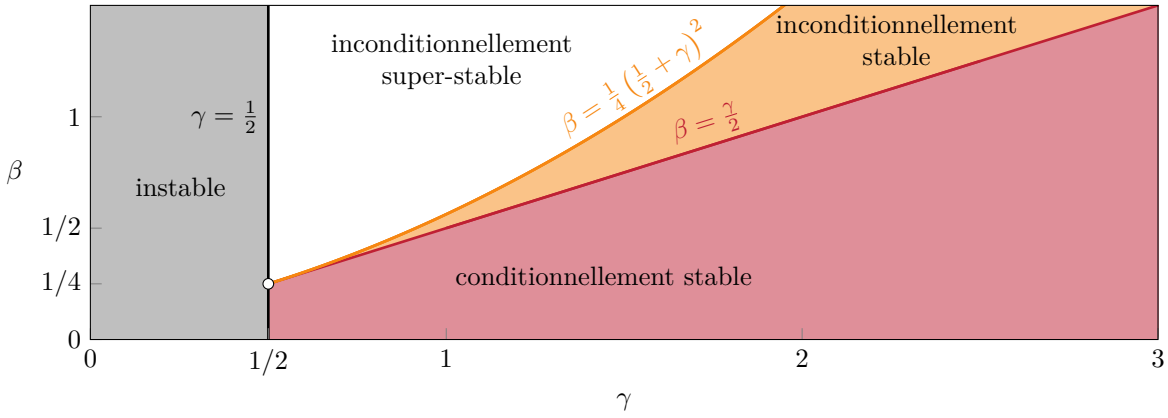


FIGURE II.1 – Stabilité des schémas de Newmark dans le plan (γ, β).

Ce système doit être résolu à chaque pas de temps par des techniques de résolution des systèmes algébriques non linéaires (présentées dans la section II.3) où l'inconnue est l'accélération au $(k+1)$-ième pas de temps $\ddot{\mathbf{x}}_{k+1}$. Le résidu de la fonction non linéaire associée est noté $\mathcal{R}_{k+1}(\ddot{\mathbf{x}}^j_{k+1})$ à la j-ième itération pour le $(k+1)$-ième pas de temps et s'écrit

$$\mathcal{R}_{k+1}(\ddot{\mathbf{x}}^j_{k+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^j_{k+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^j_{k+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}^j_{n+1} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}^j_{k+1}, \dot{\mathbf{x}}^j_{n+1}) - \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_{n+1}) \tag{II.16}$$

où $\mathbf{x}^j_{k+1}$ et $\dot{\mathbf{x}}^j_{k+1}$ sont exprimables en fonction de $\ddot{\mathbf{x}}^k_{k+1}$ grâce aux relations (II.11). Les notations en déplacements et vitesses sont cependant conservées par souci de lisibilité. La matrice jacobienne $\dfrac{\partial \mathcal{R}_{k+1}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{k+1}}(\ddot{\mathbf{x}}^j_{k+1})$ du résidu (II.16) s'écrit alors [188]

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{k+1}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{k+1}}(\ddot{\mathbf{x}}^j_{k+1}) = \mathbf{M} + \gamma h \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^j_{k+1}, \dot{\mathbf{x}}^j_{k+1}) \right) + \beta h^2 \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^j_{k+1}, \dot{\mathbf{x}}^j_{k+1}) \right). \tag{II.17}$$

Le principal défi associé à l'évaluation de la matrice jacobienne réside dans le calcul des termes liés aux efforts non linéaires. En effet, ces calculs peuvent être coûteux numériquement et leur précision numérique conditionne fortement la convergence du solveur itératif. De plus, comme la résolution est itérative, il est nécessaire de fournir au solveur non linéaire un itéré initial généralement défini tel que

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}^0_{k+1} = \hat{\ddot{\mathbf{x}}}_{k+1} = \mathbf{0} & \text{(II.18a)} \\ \dot{\mathbf{x}}^0_{k+1} = \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k+1} & \text{(II.18b)} \\ \mathbf{x}^0_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}. & \text{(II.18c)} \end{cases}$$

1.3 Méthode de tir

La méthode de tir ou *shooting method* en anglais [68, 160] transforme un problème différentiel en un problème aux conditions initiales. Cette méthode consiste à rechercher des solutions périodiques grâce à l'utilisation d'un intégrateur temporel. En se basant sur le calcul itératif de conditions initiales sur une orbite périodique, l'intégrateur s'affranchit du calcul de tout régime transitoire. On utilise alors une fonction $\mathbf{R}$ reliant la distance entre les conditions initiales et l'état du système après un temps T, elle permet de réaliser les corrections nécessaires sur les conditions initiales. Cette fonction est appelée fonction de tir ou encore *shooting function* en

anglais et s'exprime

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}_0, T) = \mathbf{z}(T) - \mathbf{z}_0. \tag{II.19}$$

L'équation du système à résoudre, associée à la condition de périodicité formulée en termes de conditions initiales grâce à $\mathbf{R}$, se met alors sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{h}(z, t) & \text{(II.20a)} \\ \mathbf{R}(\mathbf{z}_0, T) = \mathbf{z}(T) - \mathbf{z}_0 = 0. & \text{(II.20b)} \end{cases}$$

Le rôle de l'intégrateur temporel est de garantir le respect la partie différentielle (II.20a) de l'équation (II.20). Il est nécessaire de coupler l'intégrateur à un algorithme de résolution de systèmes non linéaires de type Newton-Raphson pour corriger la valeur des itérés $\mathbf{z}_0^{(i)}$ afin d'annuler la fonction de tir (II.20b). Différents algorithmes de résolution des systèmes non linéaires sont présentés dans la section II.3. Une fois la fonction de tir annulée, le problème aux conditions initiales est résolu et une solution périodique est trouvée. Pour faire fonctionner la méthode, il faut donc réaliser une intégration temporelle du système sur une période T pour évaluer la fonction de tir, mais également $2n$ intégration pour évaluer la matrice jacobienne de la fonction de tir (II.19) dont l'expression à la i-ième itération est

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0^i, T) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0^i, T) - \mathbf{I}_{2n}. \tag{II.21}$$

Si la période de la solution n'est pas connue à l'avance, il est possible d'augmenter le système (II.20) d'une équation dite de phase permettant de considérer T comme une inconnue et de l'intégrer dans la procédure de Newton-Raphson [68]. Dans le champ d'application du contact, une approche mixte entre la méthode de tir et la méthode de l'équilibrage harmonique — présentée dans la section II.2.1 — a été mise au point pour traiter des non-linéarités de contact, incluant vibro-impact et frottement [151].

2 Domaine fréquentiel

2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique ou *Harmonic Balance Method* (HBM) en anglais est une application directe de la méthode de Galerkine pour résoudre des systèmes différentiels non linéaires en régime périodique. Elle est a été introduite dans le domaine de l'électronique non linéaire [69, 121], en dynamique des fluides [77, 8, 125, 16] et plus récemment dans la dynamique des structures non linéaires pour des traiter des non-linéarités géométriques [209, 211, 220], du frottement [214, 120, 149], de l'usure [147] et du contact aube/carter [206]. La HBM consiste à rechercher une solution à l'équation (II.1) dans l'espace engendré par la famille libre $\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}$ des fonctions trigonométriques de pulsation fondamentale $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ allant jusqu'au N_h-ième harmonique. Ainsi, la solution $\mathbf{x}(t)$ du système différentiel (II.1) s'écrit sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre N_h, exprimée par la relation

$$\mathbf{x}(t) \simeq \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_\mathrm{h}} \left(\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \right). \tag{II.22}$$

La base $\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}$ de Fourier utilisée pour la projection est

$$\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}} = [t \mapsto \frac{1}{2},\ t \mapsto \cos(\omega t),\ t \mapsto \sin(\omega t),\ \ldots,\ t \mapsto \cos(N_\mathrm{h}\omega t),\ t \mapsto \sin(N_\mathrm{h}\omega t)]^\top. \tag{II.23}$$

La méthode de Galerkine repose sur une orthogonalisation du résidu $\mathbf{r}(t)$ de l'équation du mouvement par rapport au sous-espace de projection. On assure cette orthogonalité grâce à la substitution de l'expression (II.22) dans l'équation (II.1). L'expression de ce résidu est

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) = {} & \mathbf{M}\sum_{k=1}^{N_\mathrm{h}} \left(-(k\omega)^2\mathbf{a}_k\cos(k\omega t) - (k\omega)^2\mathbf{b}_k\sin(k\omega t)\right) \\ & + \mathbf{C}\sum_{k=1}^{N_\mathrm{h}} \left(-(k\omega)\mathbf{a}_k\sin(k\omega t) + (k\omega)\mathbf{b}_k\cos(k\omega t)\right) \\ & + \mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_\mathrm{h}} \left(\mathbf{a}_k\cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k\sin(k\omega t)\right)\right) \\ & + \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t) - \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t).\end{aligned} \tag{II.24}$$

On se dote alors du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([0,T])^2 \qquad \langle f, g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{II.25}$$

afin de garantir les conditions d'orthogonalité du résidu $\mathbf{r}(t)$ par rapport à la base $\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}$. On vérifie aisément que la famille des fonctions du sous-espace $\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}$ définie par l'équation (II.23) est une famille libre vis-à-vis du produit scalaire choisi. En prenant en compte l'orthogonalité des fonctions de la base $\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}$, les $(2N_\mathrm{h}+1)n_\mathrm{ddl}$ conditions d'orthogonalité s'expriment alors sous la forme des relations

$$\langle \mathbf{r}(t), \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), 1\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), 1\rangle = \mathbf{0} \tag{II.26a}$$

$$\langle \mathbf{r}(t), \cos(k\omega t)\rangle = \left(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a}_k + k\omega\mathbf{C}\mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), \cos(k\omega t)\rangle - \langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), \cos(k\omega t)\rangle = \mathbf{0} \qquad \forall k \in [\![1; N_\mathrm{h}]\!] \tag{II.26b}$$

$$\langle \mathbf{r}(t), \sin(k\omega t)\rangle = \left(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}\right)\mathbf{b}_k - k\omega\mathbf{C}\mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), \sin(k\omega t)\rangle - \langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), \sin(k\omega t)\rangle = \mathbf{0} \qquad \forall k \in [\![1; N_\mathrm{h}]\!] \tag{II.26c}$$

Les notations adoptées pour les coefficients harmoniques des efforts extérieurs $\mathbf{f}_\mathrm{ex}$ et efforts non linéaires $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ sont

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0^\mathrm{ex} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), 1\rangle \\ \mathbf{a}_k^\mathrm{ex} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), \cos(k\omega t)\rangle \\ \mathbf{b}_k^\mathrm{ex} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{ex}(t), \sin(k\omega t)\rangle \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{a}_0^\mathrm{nl} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), 1\rangle \\ \mathbf{a}_k^\mathrm{nl} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), \cos(k\omega t)\rangle \\ \mathbf{b}_k^\mathrm{nl} = \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}(t), \sin(k\omega t)\rangle \end{cases} \quad \forall k \in [\![1; N_\mathrm{h}]\!]. \tag{II.27}$$

Usuellement, on regroupe les coefficients liés aux projections de $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}_\mathrm{nl}(t)$ et $\mathbf{f}_\mathrm{ex}(t)$ respec-

tivement dans les vecteurs multiharmoniques $\widetilde{\mathbf{x}}$, $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ et $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex}}$ définis tels que

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}} = [\frac{1}{2}\mathbf{a}_0^\top \ \mathbf{a}_1^\top \ \mathbf{b}_1^\top \ \dots \ \mathbf{a}_{N_\text{h}}^\top \ \mathbf{b}_{N_\text{h}}^\top]^\top & \text{(II.28a)} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = [\frac{1}{2}(\mathbf{a}_0^{\text{nl}})^\top \ (\mathbf{a}_1^{\text{nl}})^\top \ (\mathbf{b}_1^{\text{nl}})^\top \ \dots \ (\mathbf{a}_{N_\text{h}}^{\text{nl}})^\top \ (\mathbf{b}_{N_\text{h}}^{\text{nl}})^\top]^\top & \text{(II.28b)} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = [\frac{1}{2}(\mathbf{a}_0^{\text{ex}})^\top \ (\mathbf{a}_1^{\text{ex}})^\top \ (\mathbf{b}_1^{\text{ex}})^\top \ \dots \ (\mathbf{a}_{N_\text{h}}^{\text{ex}})^\top \ (\mathbf{b}_{N_\text{h}}^{\text{ex}})^\top]^\top. & \text{(II.28c)} \end{cases}$$

Dans la suite de ce manuscrit, la notation $\widetilde{\bullet}$ fait systématiquement référence au vecteur multiharmonique de la grandeur $\bullet(t)$. Les termes des vecteurs multiharmoniques sont les coefficients réels des développements en séries de Fourier de chacune des grandeurs $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}_{\text{nl}}(t)$ et $\mathbf{f}_{\text{ex}}(t)$. La concaténation des coefficients de Fourier dans des vecteurs multiharmoniques et les conditions d'orthogonalité (II.26) permettent finalement d'écrire l'équation du mouvement projetée sur la base de Fourier $\mathbf{B}_{N_\text{h}}$ sous la forme du système algébrique

$$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\widetilde{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega) - \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{0}. \tag{II.29}$$

La matrice $\mathbf{Z}$ est la matrice dite de rigidité dynamique. Elle est diagonale par blocs et son expression est

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{Z}_k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{Z}_{N_\text{h}} \end{bmatrix} \tag{II.30}$$

où chacun des blocs $\mathbf{Z}_k$ s'écrit

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [\![1; N_\text{h}]\!]. \tag{II.31}$$

Le système (II.29) est non linéaire à cause de la présence du vecteur multiharmonique $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$ qui dépend du champ de déplacements $\widetilde{\mathbf{x}}$. Il est alors nécessaire d'utiliser des procédures de résolution des systèmes algébriques non linéaires pour le résoudre. Ces stratégies sont détaillées dans la section II.3.

Dans le cadre de la HBM, il est d'usage de présenter l'opérateur de dérivation dans le domaine fréquentiel $\boldsymbol{\nabla}$ s'écrivant tel que

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \boldsymbol{\nabla}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boldsymbol{\nabla}_k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{\nabla}_{N_\text{h}} \end{bmatrix} \tag{II.32}$$

où les blocs $\boldsymbol{\nabla}_k$ ont pour expression

$$\boldsymbol{\nabla}_k = \begin{bmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad \forall k \in [\![1; N_\text{h}]\!] \tag{II.33}$$

avec $\otimes$ le produit de Kronecker. La définition de l'opérateur (II.32) repose sur les règles de dérivation des fonctions trigonométriques. Les vecteurs multiharmoniques des déplacements $\widetilde{\mathbf{x}}$, vitesses $\widetilde{\mathbf{v}}$ et accélérations $\widetilde{\mathbf{a}}$ sont alors liées par les relations

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\nabla}\widetilde{\mathbf{x}} & \text{(II.34a)} \\ \widetilde{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\nabla}^2\widetilde{\mathbf{x}}. & \text{(II.34b)} \end{cases}$$

Dans le champ des méthodologies basées sur des projections de Galerkine, il est possible de noter l'existence des méthodes d'équilibrage sur des familles d'ondelettes [86, 132] aussi appelées *Wavelet Balance Method* (WBM) en anglais. Ces méthodes peuvent fournir de meilleures représentations des solutions lors du traitement de systèmes non réguliers et discontinus si les familles d'ondelettes sont adéquatement choisies. Des approches mixtes HBM-WBM ont également vu le jour en procédant à une augmentation de la base de Fourier de quelques fonctions non régulières ou polynomiales [87].

La résolution du problème de l'équilibrage harmonique présente cependant de nombreux défis, tant concernant le conditionnement numérique que la taille du système à résoudre. De plus, l'évaluation des efforts non linéaires et de la matrice jacobienne du système non linéaire sont des étapes critiques puisque des méthodes itératives sont utilisées pour la résolution du problème. On propose dans cette section de présenter les stratégies utilisées pour surmonter ces défis.

2.1.1 Normalisation du problème

Dans un problème vibratoire, les échelles de temps et d'espace peuvent être séparées de plusieurs ordres de grandeur. Ceci est particulièrement vrai sur un système non linéaire car la réponse périodique du système contient alors des harmoniques élevés, correspondant à des temps caractéristiques plus petits que dans le cas linéaire. Ceci se traduit numériquement sur le conditionnement des différentes matrices mises en jeu dans la résolution du problème : la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{Z}$ ainsi que la matrice jacobienne du système $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$. Afin d'atténuer à ce problème, on choisit de normaliser le problème différentiel en amont de la projection sur la base de Fourier. Cette technique de normalisation n'est pas dédiée à la HBM, cependant elle permet un gain substantiel à la fois en temps de calcul et en robustesse dans le cadre du domaine fréquentiel.

Afin de réaliser la normalisation du problème, on introduit les facteurs de normalisation α pour l'espace et β pour le temps. La normalisation se réalise à travers un changement de variables dans l'équation du mouvement avec les variables normalisées $\boldsymbol{\chi}$ et τ se formulant tel que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi} = \dfrac{\mathbf{x}}{\alpha} \\ \tau = \dfrac{t}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{\chi} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\alpha} \\ \mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}t}{\beta}. \end{cases} \tag{II.35}$$

Avec ces notations, il est possible de réexprimer les opérateurs différentiels $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$ tels que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau} \\ \ddot{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{1}{\beta^2}\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau^2}. \end{cases} \tag{II.36}$$

On introduit ensuite les variables normalisées dans l'équation du mouvement (II.1) et on obtient sa version normalisée

$$\frac{\alpha}{\beta^2}\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau} + \alpha\mathbf{K}\boldsymbol{\chi}(\tau) + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}(t). \tag{II.37}$$

Comme les efforts extérieurs $\mathbf{f}_{\mathrm{ex}}(t)$ dépendent explicitement et uniquement de la variable temporelle t, leur normalisation est généralement triviale. On détaille cependant le cas des excitations harmoniques pour lesquelles les termes cosinus et sinus sont transformés tels que

$$\begin{cases} \cos(k\omega t) = \cos(k(\beta\omega)\tau) = \cos(k\omega^{\mathrm{n}}\tau) & \text{(II.38a)} \\ \sin(k\omega t) = \sin(k(\beta\omega)\tau) = \sin(k\omega^{\mathrm{n}}\tau). & \text{(II.38b)} \end{cases}$$

Ainsi, la normalisation en temps se traduit simplement en une modification de la pulsation d'excitation en sa version normalisée $\omega^{\mathrm{n}} = \beta\omega$. De ce fait, la structure des vecteurs multiharmoniques est inchangée, mais, pour la HBM, la pulsation fondamentale de résolution devient la pulsation normalisée ω^{n} dans l'ensemble des calculs.

Il est ensuite aisé de transposer cette normalisation dans le domaine fréquentiel, les blocs de la matrice de raideur dynamique normalisée $\mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}$ s'écrivent

$$\mathbf{Z}_0^{\mathrm{n}} = \alpha\mathbf{K}, \quad \mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}(\omega^{\mathrm{n}}) = \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \left(\dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\right)^2 \mathbf{M} & \dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C} \\ -\dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C} & \mathbf{K} - \left(\dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\right)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [\![1; N_{\mathrm{h}}]\!]. \tag{II.39}$$

On définit également l'opérateur de dérivation normalisé $\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{n}}$, dont les blocs sont modifiés tels que

$$\boldsymbol{\nabla}_k^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta} \\ -\dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad \forall k \in [\![1; N_{\mathrm{h}}]\!]. \tag{II.40}$$

On note dans l'équation (II.37) que les efforts non linéaires sont toujours dépendants des champs de déplacements et de vitesses physiques $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$. En effet, afin de pouvoir calculer les efforts non linéaires à partir des grandeurs normalisées $\boldsymbol{\chi}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau}$, il est nécessaire de reconstruire les champs physiques. Cette procédure est souvent aisée car les grandeurs physiques et normalisées sont liées par les relations

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha\boldsymbol{\chi} & \text{(II.41a)} \\ \dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}\tau}. & \text{(II.41b)} \end{cases}$$

Afin que la procédure de normalisation soit efficace, il convient de choisir α et β tels que $\|\boldsymbol{\chi}\| = \|\mathbf{x}/\alpha\| \simeq 1$ et $\omega^{\mathrm{n}} = \beta\omega \simeq 1$. Par exemple, en considérant que l'on cherche à caractériser la réponse non linéaire autour d'un mode de la structure, il est possible de choisir $\alpha = \max(\|\mathbf{x}_{\mathrm{ln}}\|)$ et $\beta = \frac{1}{\omega_0}$ où $\max(\|\mathbf{x}_{\mathrm{ln}}\|)$ est l'amplitude maximale du mode linéaire et ω_0 la fréquence propre de ce mode. Ce choix garantit un problème bien conditionné en temps et en espace. Bien entendu, il est également possible d'adopter d'autres démarches pour choisir les coefficients α et β. On note que l'utilisation d'un temps normalisé n'affecte pas la matrice $\mathbf{Z}$ directement car le fait qu'on considère une réponse en harmoniques entiers constitue déjà une normalisation par rapport à la fréquence fondamentale. En revanche, le fait que la pulsation normalisée soit autour de l'unité apporte une robustesse aux procédures de continuation notamment en

affectant les dérivées de $\mathbf{Z}$ par rapport à ω^{n}. Finalement, le problème HBM normalisé devient

$$\mathcal{H}^{\mathrm{n}}(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}, \omega^{\mathrm{n}}) = \mathbf{Z}^{\mathrm{n}}(\omega^{\mathrm{n}})\widetilde{\boldsymbol{\chi}} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega^{\mathrm{n}}) - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex}} = \mathbf{0}. \tag{II.42}$$

Dans la suite de ce manuscrit, on résoudra exclusivement des problèmes normalisés. Afin d'alléger les notations et comme la structure du problème normalisé est strictement équivalente à celle du problème classique, on procède à partir de cette section à un changement de notation : $\mathbf{x}$ devient le champ de déplacements normalisé (noté $\boldsymbol{\chi}$ dans cette section) et la pulsation fondamentale ω devient la pulsation fondamentale normalisée (notée ω^{n} dans cette section). Aussi, l'ensemble des matrices et opérateurs sont utilisés dans leurs versions normalisées, notamment la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{Z}$ et l'opérateur de dérivation $\boldsymbol{\nabla}$. Ceci permet de conserver les notations classiquement utilisées en HBM. La définition de l'ensemble des variables est cependant modifiée comme présenté dans la section courante. La notation $\bullet^{\mathrm{n}}$ sera donc omise par souci de lisibilité. Pour accompagner ce changement de notation, on utilise l'écriture ω^{phys} pour faire référence à la pulsation physique, tel que $\omega = \beta\omega^{\mathrm{phys}}$. La normalisation du problème nécessite également la modification de certaines grandeurs, notamment les grandeurs homogènes à des distances et des raideurs pour α et les grandeurs faisant intervenir un temps pour β, par exemple les vitesses angulaires.

2.1.2 Calcul des efforts non linéaires

Dans les stratégies du domaine fréquentiel telles que la HBM, le calcul des efforts non linéaires est une tâche délicate. Le niveau de complexité varie d'une non-linéarité à l'autre. Par exemple, les efforts non linéaires associés à une non-linéarité géométrique sont définis par une expression polynomiale, là où les efforts de contact sont soumis à des conditions de type Karush-Kuhn-Tucker. Dans les deux cas, les expressions et conditions sont exprimées dans le domaine temporel, rendant complexe l'évaluation du vecteur multiharmonique des efforts non linéaires $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}$ dans le domaine fréquentiel. On présente ici deux techniques d'évaluation des efforts non linéaires. On rappelle que l'évaluation des efforts non linéaires est réalisée à chaque itération du solveur Newton-Raphson, justifiant ainsi que le déplacement $\widetilde{\mathbf{x}}$ soit considéré comme connu. Cette estimation est l'itéré du solveur à une itération donnée.

Calcul analytique Le calcul analytique des efforts non linéaires dans le domaine fréquentiel est possible lorsque la non-linéarité est exprimable sous la forme d'une fonction analytique régulière de $\mathbf{x}(t)$ dans le domaine temporel. On réalise le calcul en transposant l'expression analytique du domaine temporel dans le domaine fréquentiel à l'aide d'identités trigonométriques ou du théorème de convolution (lien entre les produits dans le domaine temporel et les produits de convolution des transformées de Fourier, et *vice versa*). Ces calculs sont cependant lourds à mener, même en utilisant des outils de calcul formel (librairie Sympy, Wolfram (Mathematica), Maple...). Ces approches sont donc restreintes à des non-linéarités régulières [190, 105]. De plus, l'augmentation du nombre d'harmoniques N_{h} mène à une augmentation substantielle des calculs requis pour évaluer le vecteur multiharmonique des efforts non linéaires.

Une extension de la méthodologie de calcul analytique aux efforts non linéaires polynomiaux par morceaux (linéaire par morceaux par exemple) est possible en appliquant un algorithme *event-driven* pour la détection des instants de transition [190, 91, 137]. Ces stratégies sont adaptées aux systèmes avec des états distincts, comme c'est le cas pour les interactions de contact. Malgré leur précision, les méthodologies *event-driven* souffrent de temps de calcul importants si il y a un grand nombre de transitions au sein d'une période. Les défauts associés à l'expression analytique des efforts non linéaires persistent également. C'est pourquoi, l'application de telles méthodologies à des systèmes industriels fortement non linéaires est à ce jour impossible.

Alternance fréquence/temps La méthodologie d'alternance fréquence/temps [34] (AFT), de l'anglais *alternating frequency/time*, permet d'évaluer les efforts non linéaires en HBM. Cette méthode est plus polyvalente que les stratégies analytiques car elle permet de traiter n'importe quelle non-linéarité pouvant être exprimée comme une fonction analytique de $\mathbf{x}(t)$, incluant un certain nombre de fonctions non régulières.

L'alternance fréquence/temps consiste à faire des allers-retours entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel grâce à des transformées de Fourier discrètes. À chaque itération de la procédure de Newton-Raphson, les champs de déplacements et de vitesses exprimés sous la forme de vecteurs multiharmoniques sont transposés dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse (IDFT, pour *Inverse Discrete Fourier Transform*). Ceci permet alors de calculer les efforts non linéaires et ses dérivées grâce à l'expression analytique des efforts dans le domaine temporel. Une fois ces calculs réalisés, on projette ces signaux discrets en temps dans le domaine fréquentiel par une transformée de Fourier discrète (DFT, pour *Discrete Fourier Transform*). On illustre cette procédure par un schéma sur la figure II.2 pour une non-linéarité polynomiale.

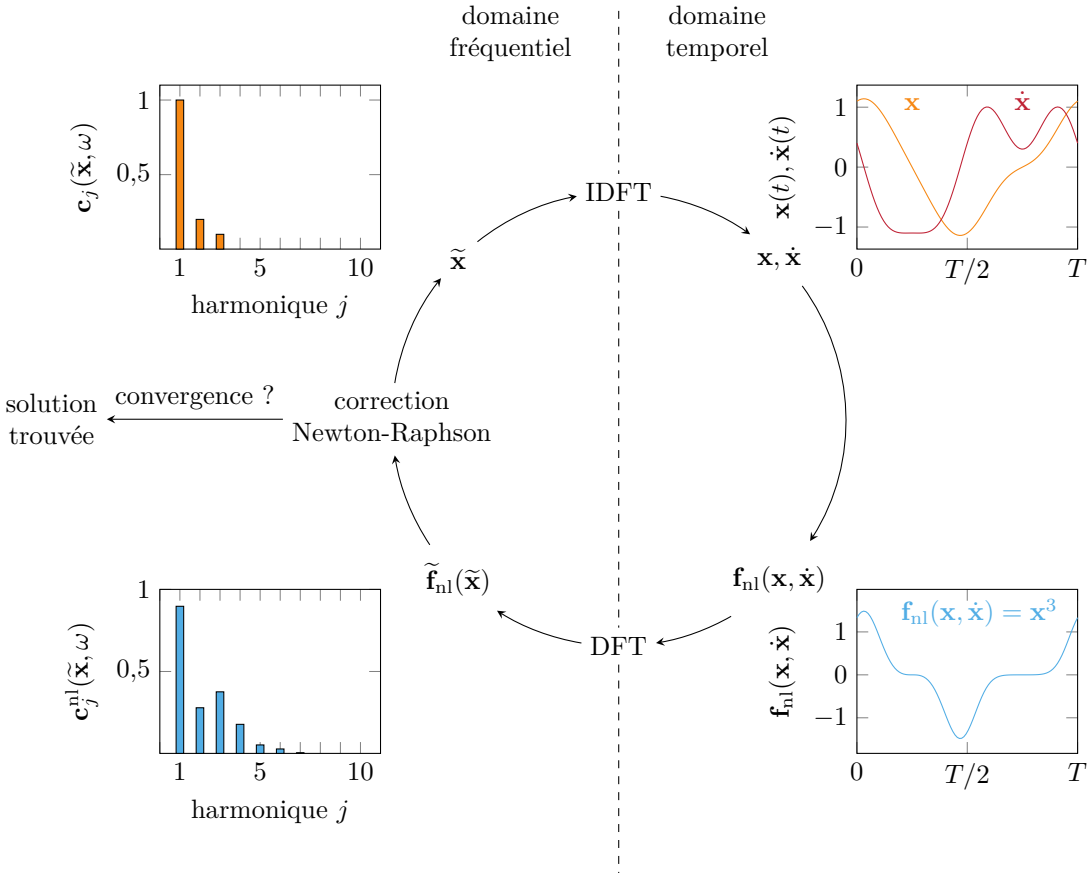


FIGURE II.2 – Procédure d'alternance fréquence/temps, adaptée de [206, 190], $c_j^\bullet = \sqrt{(a_j^\bullet)^2 + (b_j^\bullet)^2}$.

Le calcul des transformées de Fourier discrètes inverses et directes peut être réalisé à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide [47], ou FFT pour *Fast Fourier Transform*. Cependant, la manière la plus répandue est d'utiliser des matrices de transformées de Fourier discrètes. Il est d'usage de définir la matrice $\overline{\mathcal{F}_1}$ associée à l'IDFT d'une variable scalaire telle

que

$$\overline{\mathcal{F}}_1 = \left[\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}(t_1)|\dots|\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}(t_i)|\dots|\mathbf{B}_{N_\mathrm{h}}(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top. \tag{II.43}$$

Il s'agit ici simplement d'une notation matricielle pour réaliser la reconstruction d'une grandeur scalaire sur une période uniformément discrétisée en N_t instants. Cette matrice fait donc appel à la base de Fourier qui est utilisée pour définir la décomposition des variables de l'équation (II.22). Suivant la définition de la matrice $\overline{\mathcal{F}}_1$ pour réaliser une IDFT sur une grandeur scalaire, on peut écrire cette transformation reliant le signal discret contenant représentant un scalaire quelconque $z(t)$ à son vecteur multiharmonique $\widetilde{\mathbf{z}}$ sous la forme

$$\mathbf{z} = \left[z(t_1), z(t_2), \dots, z(t_{N_\mathrm{t}-1}), z(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top = \overline{\mathcal{F}}_1\widetilde{\mathbf{z}}. \tag{II.44}$$

Dans l'autre sens, la matrice DFT $\mathcal{F}_1$ peut être définie comme la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de $\overline{\mathcal{F}}_1$, telle que $\overline{\mathcal{F}}_1\mathcal{F}_1 = \mathbf{I}_{N_\mathrm{t}}$. La définition de $\mathcal{F}_1$ est alors

$$\mathcal{F}_1 = \overline{\mathcal{F}}_1^\top \left(\overline{\mathcal{F}}_1\overline{\mathcal{F}}_1^\top\right)^{-1} \tag{II.45}$$

et les grandeurs temporelles et fréquentielles sont liées par la relation

$$\widetilde{\mathbf{z}} = \mathcal{F}_1\mathbf{z}. \tag{II.46}$$

On note qu'il est également possible de définir une base associée à la transformée directe $\mathbf{A}_{N_\mathrm{h}}$ et de construire $\mathcal{F}_1$ sans recourir à une pseudo-inverse mais plutôt avec l'expression

$$\mathcal{F}_1 = \frac{2}{N_\mathrm{t}}\left[\mathbf{A}_{N_\mathrm{h}}(t_1)|\dots|\mathbf{A}_{N_\mathrm{h}}(t_i)|\dots|\mathbf{A}_{N_\mathrm{h}}(t_{N_\mathrm{t}})\right] \tag{II.47}$$

où

$$\mathbf{A}_{N_\mathrm{h}}(t) = \left[1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(N_\mathrm{h}\omega t), \sin(N_\mathrm{h}\omega t)\right]^\top. \tag{II.48}$$

Dans ce travail, on utilise cette dernière formulation qui introduit moins d'erreurs numériques que la formule (II.45). Les matrices de DFT et d'IDFT peuvent être étendues à la transformation de variables vectorielles de taille n par des produits de Kronecker telles que

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}_n = \overline{\mathcal{F}}_1 \otimes \mathbf{I}_n. \tag{II.49}$$

Pour aller avec cette notation, il est nécessaire de stocker les vecteurs discrétisés en temps sous la forme

$$\mathbf{x} = \left[(\mathbf{x}(t_1))^\top, \dots, (\mathbf{x}(t_i))^\top, \dots, (\mathbf{x}(t_{N_\mathrm{t}}))^\top\right]^\top \tag{II.50a}$$

$$\mathbf{f}_\mathrm{nl} = \left[(\mathbf{f}_\mathrm{nl}(t_1))^\top, \dots, (\mathbf{f}_\mathrm{nl}(t_i))^\top, \dots, (\mathbf{f}_\mathrm{nl}(t_{N_\mathrm{t}}))^\top\right]^\top. \tag{II.50b}$$

Grâce aux matrices d'IDFT, il est possible de calculer les déplacements, vitesses et accélérations dans le domaine temporel à partir du vecteur multiharmonique $\widetilde{\mathbf{x}}$ grâce aux relations

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \overline{\mathcal{F}}_n\widetilde{\mathbf{x}} & \text{(II.51a)} \\ \dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathcal{F}}_n\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\mathbf{x}} & \text{(II.51b)} \\ \ddot{\mathbf{x}} = \overline{\mathcal{F}}_n\boldsymbol{\nabla}^2\widetilde{\mathbf{x}}. & \text{(II.51c)} \end{cases}$$

2.1.3 Calcul de la matrice jacobienne du système non linéaire

Les stratégies de recherche de solutions du système non linéaire HBM (II.29) (détaillées dans la section II.3) se basent toutes sur l'évaluation de la matrice jacobienne du système. La matrice jacobienne $\mathcal{J}$ du système d'équation HBM $\mathcal{H}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{a}_0} \middle| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{a}_1} \middle| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}_1} \middle| \dots \middle| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{a}_{N_\mathrm{h}}} \middle| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}_{N_\mathrm{h}}} \right] \tag{II.52}$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{a}_k} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_0^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{a}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{a}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{b}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{a}_k} \middle| \dots \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_{N_\mathrm{h}}^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{a}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{b}_{N_\mathrm{h}}^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{a}_k} \right]^\top \quad \forall k \in [\![0; N_\mathrm{h}]\!] \tag{II.53}$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}_k} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_0^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{b}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_k} \middle| \dots \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_{N_\mathrm{h}}^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_k} \middle| \frac{\partial \mathbf{b}_{N_\mathrm{h}}^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_k} \right]^\top \quad \forall k \in [\![1; N_\mathrm{h}]\!] \tag{II.54}$$

où l'exposant $\bullet^{\mathcal{H}}$ fait référence aux coefficients harmoniques du vecteur multiharmonique du résidu $\mathcal{H}$. Chaque terme présent dans les équations (II.53) et (II.54) est une matrice de taille (n,n). À titre d'illustration, la structure du terme $\dfrac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_2}$ est

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{b}_2} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial b_2^1} \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial b_2^2} \middle| \dots \middle| \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathcal{H}}}{\partial b_2^n} \right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},1}}{\partial b_2^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},1}}{\partial b_2^2} & \dots & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},1}}{\partial b_2^n} \\ \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},2}}{\partial b_2^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},2}}{\partial b_2^2} & \dots & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},2}}{\partial b_2^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},n}}{\partial b_2^1} & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},n}}{\partial b_2^2} & \dots & \dfrac{\partial a_1^{\mathcal{H},n}}{\partial b_2^n} \end{bmatrix} \tag{II.55}$$

où les exposants $\bullet^i$ et $\bullet^{\mathcal{H},i}$ font référence au i-ième degré de liberté du système temporel (II.1). Compte tenu de l'expression du système HBM (II.29), la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ s'écrit

$$\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} \left(\mathbf{Z}(\omega)\widetilde{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega) - \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{ex} \right) = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}. \tag{II.56}$$

Le terme $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ est le seul terme dont le calcul est ardu. Il peut se faire par différentes stratégies, énumérées ci-dessous.

Calcul analytique Le calcul analytique est possible pour les systèmes de petite taille présentant des non-linéarités polynomiales par morceaux. En établissant les expressions des dérivées des efforts non linéaires par rapport à chacun des coefficients de Fourier sous forme d'expressions analytiques dépendantes du temps, il est possible de calculer analytiquement la matrice jacobienne. Comme la matrice jacobienne contient les décompositions en série de Fourier de signaux dérivés de l'expression des efforts non linéaires, les stratégies analytiques énoncées pour les efforts non linéaires (section II.2.1.2) sont également valides, sous réserve de calculer des expressions analytiques pour les différentes dérivées d'intérêt. À cause de la quantité de développements analytiques à réaliser, l'applicabilité de telles méthodologies est restreinte à des systèmes faiblement non linéaires, donc avec un faible nombre d'harmoniques.

Différences finies Il est possible de calculer la matrice jacobienne par différences finies, c'est-à-dire en utilisant la formule du taux d'accroissement d'une fonction. Cette technique est cependant à la fois extrêmement coûteuse en temps de calcul et très imprécise. Par exemple pour une fonction scalaire $x \mapsto f(x)$, on peut évaluer sa dérivée par rapport à x en un point y par différentes approximations. Supposons $f \in \mathcal{C}^2$, alors les approximations de la première dérivée de f par différences finies au premier ordre dites avant et arrière, respectivement exprimées par les équations (II.57a) et (II.57b), s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(y) = \dfrac{f(y+h)-f(y)}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{(II.57a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(y) = \dfrac{f(y)-f(y-h)}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{(II.57b)} \end{cases}$$

où h est le pas de discrétisation. Si $f \in \mathcal{C}^3$, on définit la formule du second ordre des différences finies centrées

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(y) = \frac{f(y+h)-f(y-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{II.58}$$

Le degré de différentiabilité minimum est différent pour les deux ordres car la convergence en $\mathcal{O}(h^2)$ de l'approximation du second ordre n'est pas valable à des degrés de régularité inférieurs.

Suivant les formules d'approximation par différences finies, il est possible de calculer le terme matriciel $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ colonne par colonne. Ce dernier est composé de $n(2N_{\mathrm{h}}+1)$ colonnes, ce qui nécessite un total de $2n(2N_{\mathrm{h}}+1)$ évaluations des efforts non linéaires afin le calculer par différences finies centrées. Par exemple, le terme $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_k^i}$ calculé par différences finies centrées s'écrit

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}}{\partial a_k^i}(\widetilde{\mathbf{x}}) = \frac{\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}(\widetilde{\mathbf{x}} + h\delta\widetilde{\mathbf{x}}_k^i) - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}(\widetilde{\mathbf{x}} - h\delta\widetilde{\mathbf{x}}_k^i)}{2h} \tag{II.59}$$

où $\delta\widetilde{\mathbf{x}}_k^i$ est un vecteur rempli de zéros sauf sur la composante associée au coefficient a_k^i qui est égale à l'unité. Les évaluations du vecteur d'efforts non linéaires peuvent se faire indifféremment par l'ensemble des méthodes présentées dans la section II.2.1.2.

De manière générale, la construction de la matrice jacobienne par différences finies est associée à des coûts de calcul élevés du fait du grand nombre d'évaluations des efforts non linéaires requis. De plus, le choix du pas h conditionne très fortement la précision des approximations. On note que l'utilisation du schéma de différentiation du premier ordre à pas complexe [112]

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(y) = \frac{\mathcal{I}\left(f(y+ih)\right)}{h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{II.60}$$

permet d'obtenir une convergence quadratique en s'affranchissant des erreurs d'arrondis pour des pas h très faibles. L'utilisation d'un pas complexe implique cependant l'utilisation de variables numériques complexes, augmentant à la fois l'allocation mémoire nécessaire ainsi que les temps de calcul associés à celles-ci.

Différentiation automatique (ou *autograd*) La différentiation automatique [123] est une méthode qui se base sur la chaîne d'opérations élémentaires effectuées par un programme informatique pour calculer les dérivées des variables numériques en appliquant successivement les règles de dérivation en chaîne. Ceci est réalisé en ajoutant un nombre restreint d'opérations au programme de base, tout en atteignant un grand niveau de précision. L'usage de cette méthode n'est cependant pas très répandu en dynamique non linéaire, on la retrouve surtout

dans le code MANLAB [40] basé sur la HBM. Dans le champ de l'informatique, la communauté scientifique associée à l'apprentissage profond (*deep learning* en anglais) utilise abondamment cette méthode pour calculer les gradients de fonctions non linéaires, en s'appuyant notamment sur les librairies `pytorch`[1] et `tensorflow`[2] en Python.

Calcul semi-analytique par AFT Le calcul des jacobiennes numériques peut également être réalisé par des méthodes de type AFT, où chacune des dérivées est calculée grâce à une expression dans le domaine temporel et re-projetée dans le domaine fréquentiel par une DFT. En utilisant les règles de dérivation en chaîne ainsi que les propriétés de linéarité des transformées de Fourier discrètes, il est possible d'exprimer la matrice jacobienne des efforts non linéaires telle que

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \mathcal{F}_n \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}} \overline{\mathcal{F}}_n + \mathcal{F}_n \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \overline{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{\nabla} \tag{II.61}$$

où il est nécessaire de calculer les matrices $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ associées à une dérivation dans le domaine temporel. Ces matrices sont de taille $(nN_{\text{t}},\, nN_{\text{t}})$ et s'expriment

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},1}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},1}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_{N_{\text{t}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},n}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},n}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_{N_{\text{t}}}} \end{bmatrix} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},1}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right|_{t=t_1} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},1}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right|_{t=t_{N_{\text{t}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},n}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right|_{t=t_1} & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_{\text{nl},n}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right|_{t=t_{N_{\text{t}}}} \end{bmatrix} \tag{II.62}$$

où

$$\left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_i} = \left[\left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial x_1}\right|_{t=t_i}, \ldots, \left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial x_n}\right|_{t=t_i}\right] \text{ et } \left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right|_{t=t_i} = \left[\left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial \dot{x}_1}\right|_{t=t_i}, \ldots, \left.\frac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial \dot{x}_n}\right|_{t=t_i}\right]. \tag{II.63}$$

En pratique, il suffit de calculer analytiquement les expressions $\dfrac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial x_i}(t)$ et $\dfrac{\partial f_{\text{nl},j}}{\partial \dot{x}_i}(t)$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ puis de les évaluer à chaque instant de la discrétisation temporelle. L'assemblage des matrices $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ se fait par le biais des équations (II.62) et (II.63) et la matrice jacobienne du système fréquentiel $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ est finalement obtenue par la relation (II.61).

Il est également possible de procéder en utilisant des FFT à la place des matrices de DFT. Ce type d'approche est très efficace lorsque les calculs sont effectués pour des paramètres numériques $(N_{\text{t}},\, N_{\text{h}})$ proches du critère de Nyquist-Shannon, *i.e.* $N_{\text{t}} \simeq 2N_{\text{h}} + 1$. En effet, l'algorithme FFT calcule l'ensemble des coefficients de Fourier associés à un signal temporel, pour un total de $N_{\text{t}} + 1$ coefficients complexes (donc $2N_{\text{t}} + 1$ coefficients réels). Or, en analyse non linéaire des systèmes dynamiques, on tend à suréchantilloner fortement les signaux pour avoir une bonne représentation des effets non linéaires dans le domaine temporel tout en gardant un nombre relativement faible d'harmoniques pour la résolution HBM. Ainsi, on a $N_{\text{t}} \gg 2N_{\text{h}} + 1$ et l'algorithme FFT calcule l'ensemble des coefficients de Fourier réels associés au signal temporel alors que seuls les $2N_{\text{h}} + 1$ premiers sont d'intérêt pour la résolution. Bien que la complexité asymptotique de l'algorithme FFT soit de l'ordre de $\mathcal{O}(N_{\text{t}} \log N_{\text{t}})$ dans le cas

1. https://pytorch.org/tutorials/beginner/basics/autogradqs_tutorial.html
2. https://www.tensorflow.org/guide/autodiff?hl=fr

optimal (si N_t est une puissance de 2), dans bien des cas l'approche par DFT — basée sur un produit entre une matrice et un vecteur dont la complexité se situe autour de $\mathcal{O}(N_\mathrm{t}(2N_\mathrm{h}+1))$ — est au moins aussi performante. En effet, comme l'approche par DFT calcule exactement le nombre de coefficients nécessaires à la résolution, aucune opération n'est inutile. De plus, l'approche par FFT vient avec des défis d'implémentation importants liés à la nature complexe des coefficients de Fourier qu'elle renvoie [206, 122]. Pour les raisons évoquées, on observe que beaucoup de travaux de la littérature se basent sur une approche utilisant des matrices de DFT.

2.1.4 Gradient par rapport à la fréquence de réponse

Pour mettre en œuvre les procédures de continuation présentées dans la section II.4, il est nécessaire de calculer le gradient de la fonction non linéaire $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$ par rapport à ω qui s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}(\omega)\widetilde{\mathbf{x}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega). \tag{II.64}$$

Ce gradient fait intervenir la matrice diagonale par blocs $\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}$ dont l'expression est

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \dfrac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial \omega} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \dfrac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \omega} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \dfrac{\partial \mathbf{Z}_{N_\mathrm{h}}}{\partial \omega} \end{bmatrix} \tag{II.65}$$

où chacun des blocs $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \omega}(\omega)$ sont

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \omega}(\omega) = \alpha \begin{bmatrix} -2\left(\dfrac{k}{\beta}\right)^2 \omega \mathbf{M} & \dfrac{k}{\beta}\mathbf{C} \\ -\dfrac{k}{\beta}\mathbf{C} & -2\left(\dfrac{k}{\beta}\right)^2 \omega \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [\![1; N_\mathrm{h}]\!] \tag{II.66}$$

et où, pour rappel, $\omega = \beta\omega^\mathrm{phys}$ est la pulsation normalisée, conformément à la convention de notation adoptée dans la section II.2.1.1. De façon analogue à la matrice jacobienne $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$, le terme le plus ardu à calculer est le terme relatif aux efforts non linéaires $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$. Selon la non-linéarité considérée, ce terme peut être calculé par différences finies, par AFT ou même de façon analytique dans certains cas. Les techniques appliquées pour le calcul des dérivées par rapport aux coefficients de Fourier $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ dans la section II.2.1.3 sont directement adaptables au calcul des dérivées par rapport à ω.

2.1.5 Condensation des degrés de liberté linéaires

La nature algébrique du problème HBM permet l'emploi de techniques de condensation du système d'équations afin de diminuer la taille du problème. On aborde ici une technique de condensation permettant de condenser le système lorsque seule une partie de la structure

est soumise à des efforts non linéaires. Au sein de la structure, il est alors possible d'opposer les degrés de liberté non linéaires, c'est-à-dire ceux qui subissent des efforts non linéaires, aux autres degrés de liberté, qu'on qualifie de linéaires. Ces deux catégories sont respectivement identifiées par les indices $\bullet_{\mathrm{nl}}$ et $\bullet_{\mathrm{ln}}$. Du fait de l'absence d'efforts non linéaires sur les degrés de liberté linéaires, il est possible de partitionner le vecteur d'inconnues $\widetilde{\mathbf{x}} = \left[\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ln}}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}\right]^\top$ puis de réorganiser le système HBM (II.29) tel que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,ln}} & \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} & \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,nl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ln}} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,nl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,ln}} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,nl}} \end{bmatrix}. \tag{II.67}$$

Sous cette forme, il est possible d'exprimer le vecteur d'inconnues linéaires $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ln}}$ en fonction des inconnues non linéaires $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}$ par la relation

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ln}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,ln}}^{-1} \left(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,ln}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}} \right). \tag{II.68}$$

La substitution de $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ln}}$ dans la partie non linéaire de l'équation (II.67) mène à l'expression

$$\mathcal{H}_{\mathrm{red}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}, \omega) = \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}(\omega) \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}} = \mathbf{0} \tag{II.69}$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\mathrm{red}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,nl}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,ln}}^{-1} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} & \text{(II.70a)} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,nl}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,ln}}^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,ln}} & \text{(II.70b)} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,nl}}. & \text{(II.70c)} \end{cases}$$

Les degrés de liberté linéaires sont alors condensés et le système harmonique est maintenant réduit à $n_{\mathrm{nl}}(2N_{\mathrm{h}} + 1)$ inconnues où n_{nl} est le nombre de degrés de liberté non linéaires. La matrice $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}$ correspond au complément de Schur au bloc $\mathbf{Z}_{\mathrm{ln,ln}}$ de la matrice $\mathbf{Z}$.

Pour mener à bien une procédure de continuation, il est nécessaire de calculer $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega}$. Il est possible de construire cette matrice en appliquant la formule de dérivation d'un produit de matrices sur l'équation (II.70a), et on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{nl}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}}}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1}}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}}}{\partial \omega}. \tag{II.71}$$

En utilisant la formule de dérivation de l'inverse d'une matrice, le terme $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1}}{\partial \omega}$ se réécrit

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1}}{\partial \omega} = -\mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \tag{II.72}$$

et ainsi

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{nl}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}}}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\mathrm{ln}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{ln,nl}}}{\partial \omega}. \tag{II.73}$$

Finalement, en réécrivant l'équation (II.73) en fonction de la matrice analytique $\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}$, obtenue

par la formule (II.65), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Z}_{\text{red}}}{\partial \omega} = &\left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{nl}} - \left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\mathbf{Z}_{\text{ln,nl}} \\ &+ \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}}\mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\mathbf{Z}_{\text{ln,nl}} - \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}}\mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{ln,nl}}.\end{aligned} \tag{II.74}$$

Comme l'expression $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}}$ fait intervenir des blocs de la matrice $\mathbf{Z}$, il est également nécessaire de calculer sa dérivée par rapport à ω par la relation

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}}}{\partial \omega} = \left(\left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{nl,ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1} - \mathbf{Z}_{\text{nl,ln}}\mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\right]_{\text{ln}} \mathbf{Z}_{\text{ln}}^{-1}\right)\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,ln}}. \tag{II.75}$$

On note que ce terme est non nul seulement lorsqu'il y a des excitations sur des nœuds linéaires.

2.2 Collocation trigonométrique

La méthode de collocation trigonométrique [208, 13] est une méthode de Fourier où une solution à l'équation du mouvement (II.1) est cherchée sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre N_{h}. Cependant, le système non linéaire associé $\mathcal{H}^{\text{col}}(\widetilde{\mathbf{x}})$ est un système algébrique non linéaire dans le domaine temporel sur un ensemble de N_{t} points t_i dits de collocation, de sorte que

$$\mathcal{H}^{\text{col}}(\widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_1) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t_1) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_1) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_1) - \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_1) = \mathbf{0} & \text{(II.76a)} \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\vdots & \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_i) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t_i) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_i) - \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_i) = \mathbf{0} & \text{(II.76b)} \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\vdots & \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_{N_{\text{t}}}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t_{N_{\text{t}}}) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_{N_{\text{t}}}) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_{N_{\text{t}}}) - \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_{N_{\text{t}}}) = \mathbf{0} & \text{(II.76c)} \end{cases}$$

où les inconnues du problème sont les coefficients réels de la décomposition en série de Fourier de $\mathbf{x}(t)$. Contrairement à la méthodologie HBM classique associée à une AFT, le choix de N_{t} a ici une influence sur la méthode de résolution. En effet, si $N_{\text{t}} = 2N_{\text{h}} + 1$ alors le système est carré de dimension $(nN_{\text{t}}, nN_{\text{t}})$ et si $N_{\text{t}} > 2N_{\text{h}} + 1$ alors le système est rectangulaire de taille $(nN_{\text{t}},\, n(2N_{\text{h}} + 1))$. Dans le cas d'un système carré, on utilise une stratégie classique de résolution de systèmes non linéaires de type Newton-Raphson. Au contraire, lorsque le système est rectangulaire, le système est dit sur-déterminé car il y a plus d'équations que d'inconnues. C'est pourquoi on choisit généralement une méthode des moindres carrés (algorithme de Gauss-Newton) pour le résoudre.

Par analogie avec le formalisme HBM, on peut réécrire l'équation (II.76) sous la forme

$$\mathcal{H}^{\text{col}}(\widetilde{\mathbf{x}}) = \overline{\mathcal{F}}_n \mathbf{Z}(\omega)\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{col}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{col}}(\omega, t) \tag{II.77}$$

où $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{col}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ sont les efforts non linéaires exacts, *i.e.* non restreints au contenu fréquentiel de la base de Fourier contrairement à la HBM. $\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{col}}(\omega, t)$ est le vecteur d'efforts d'excitation. L'exposant $\bullet^{\text{col}}$ fait référence à une discrétisation temporelle sur les instants de collocation t_i.

Pour résoudre ce système non-linéaire, il est nécessaire d'évaluer la matrice jacobienne du système. Cette dernière peut être carrée ou rectangulaire, conformément aux tailles respectives du vecteur d'inconnues $\widetilde{\mathbf{x}}$ et du système d'équations (II.77). Ceci est réalisé de façon analogue

à la HBM par une approche semi-analytique en utilisant l'expression

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{col}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{col}}}{\partial \mathbf{x}} \overline{\mathcal{F}}_n + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{col}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \overline{\mathcal{F}}_n \boldsymbol{\nabla}. \tag{II.78}$$

2.3 Équilibrage harmonique haute dimension

La méthode de l'équilibrage harmonique haute dimension [96, 109, 13] ou *High Dimension Harmonic Balance* (HDHB), initialement mise au point pour des applications en dynamique des fluides où elle est appelée *Time Spectral Method* [76, 227] (TSM), est une méthode fréquentielle qui permet de résoudre le problème (II.1). Contrairement à la HBM et à la collocation trigonométrique, la HDHB s'affranchit de l'utilisation de coefficients de Fourier comme inconnues. En effet, les inconnues du problème sont les $\mathbf{x}(t_i)$ évalués à N_{t} instants t_i équirépartis sur la période. L'utilisation de matrices de DFT dans la construction du problème assure cependant que le champ de déplacements solution soit périodique avec une décomposition de Fourier sur N_{h} harmoniques. Cette décomposition n'est jamais utilisée dans le calcul, il s'agit simplement d'une étape de calcul dans l'obtention des équations. On obtient assez directement l'équation de la HDHB en substituant $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_n \mathbf{x}$ dans l'équation (II.77), tel que

$$\mathcal{H}^{\text{hd}}(\mathbf{x}) = \underbrace{\overline{\mathcal{F}}_n \mathbf{Z}(\omega) \mathcal{F}_n}_{\mathbf{H}(\omega)} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{hd}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{hd}}(\omega, t) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{hd}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{hd}}(\omega, t). \tag{II.79}$$

Contrairement à $\mathbf{Z}(\omega)$, la matrice $\mathbf{H}(\omega)$ est une matrice pleine. Cette dernière assure la cohérence temporelle du champ de déplacements solution. Le principal problème avec la HDHB réside dans le fait que le nombre de pas de temps N_{t} est restreint au critère de Nyquist-Shannon, *i.e.* $N_{\text{t}} = 2N_{\text{h}} + 1$, ce qui la rend particulièrement sensible aux problèmes d'*aliasing* [190, 96]. Ce problème peut se manifester sous plusieurs formes, incluant notamment des difficultés de convergence ou encore l'admissibilité de solutions non-physiques à l'équation (II.79).

La formulation du problème HDHB (ou TSM) intégralement dans le domaine temporel a été introduite par les dynamiciens des fluides afin de pouvoir réaliser la résolution du problème périodique à l'aide de leurs outils classiques d'intégration en pseudo-temps [82, 8]. En effet, les outils d'intégration temporelle pour la dynamique des fluides peuvent directement être utilisés pour résoudre le problème TSM, notamment avec le solveur temporel elsA [2].

2.4 Bilan des méthodes fréquentielles

Pour conclure cette partie consacrée aux méthodes fréquentielles, une comparaison des différentes stratégies est proposée. Similaires sur de nombreux aspects, les stratégies fréquentielles se différencient principalement selon (1) le domaine dans lequel sont formulés les équations du résidu et (2) le domaine dans lequel sont exprimées les inconnues. On retrouve sur la figure II.3 le positionnement des différentes méthodes entre elles. Des contraintes supplémentaires s'appliquent dans certains cas sur le choix des paramètres de discrétisation temporelle et le nombre d'harmoniques. On note que dans le cas $N_{\text{t}} = 2N_{\text{h}} + 1$, l'ensemble de ces méthodologies sont équivalentes [190].

Dans ces travaux, on choisit d'adopter la méthodologie HBM pour la recherche de solutions périodiques car il s'agit de la stratégie la plus plébiscitée dans le domaine de la dynamique des structures non linéaire, notamment pour des raisons de temps de calcul. De ce fait, une quantité importante de stratégies numériques — ainsi que de résultats — s'appuyant sur ce formalisme sont disponibles dans la littérature, ce qui facilite grandement le travail d'implémentation et d'analyse des résultats.

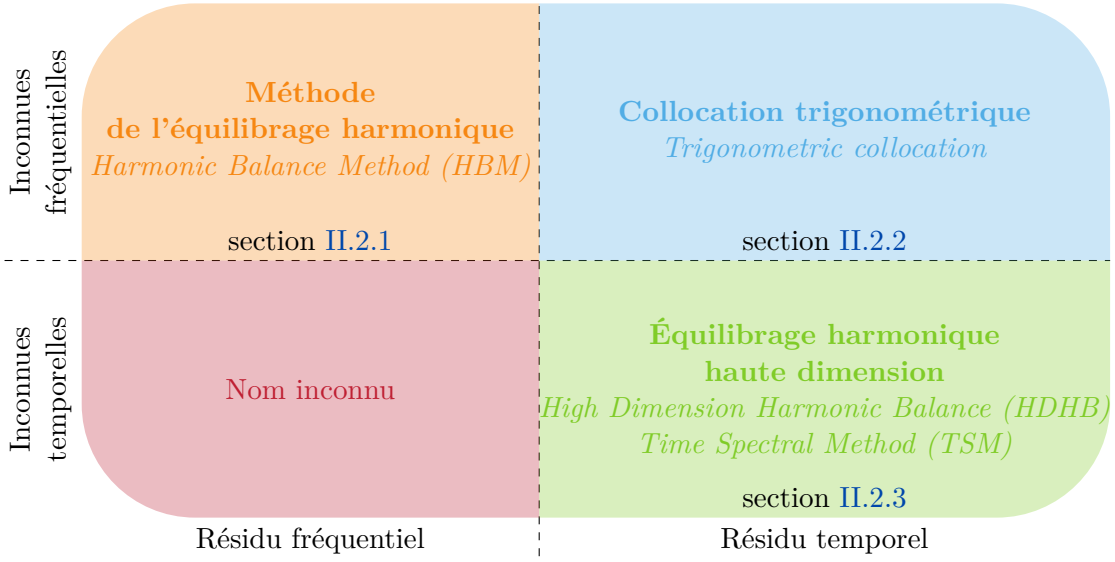


FIGURE II.3 – Positionnement des différentes méthodes fréquentielles, adaptée de [206, 190].

3 Résolution de systèmes algébriques non linéaires

Il est souvent impossible d'obtenir analytiquement les zéros (ou racines) d'un système d'équations non linéaires. On recourt donc généralement à des méthodes numériques itératives [232, 196, 140] afin d'estimer les solutions d'un tel problème. Avant d'expliciter les stratégies classiques, on note l'existence des bases de Gröbner permettant la résolution de systèmes polynomiaux de petite taille [211]. On propose dans cette section une énumération non exhaustive des méthodes usuellement utilisées pour la recherche de zéros de systèmes algébriques non linéaires de grande taille.

On met l'emphase sur la recherche de zéros d'une fonction non linéaire $\mathcal{H}$ de dimension n s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{H} \ : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \mapsto \mathcal{H}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{II.80}$$

Néanmoins, une extension aux fonctions prenant des valeurs scalaires (dans $\mathbb{R}$) est proposée dans la section II.3.5.

3.1 Méthode de Newton-Raphson

La méthode itérative de Newton-Raphson est la méthode la plus répandue car elle atteint une convergence dite quadratique sous une hypothèse de régularité suffisante de la fonction objectif, c'est-à-dire que le résidu à la $(k+1)$-ième itération est le carré du résidu de la k-ième. De plus, son implémentation est généralement aisée car elle ne met en jeu que peu d'opérations. La méthode peut cependant devenir coûteuse en temps de calcul lorsque la taille du problème n devient grande.

Cette méthode se base sur la linéarisation de $\mathcal{H}$ autour d'une estimation de la solution $\mathbf{x}^k$ à l'itération k grâce au développement limité

$$\mathcal{H}^{\ln}(\mathbf{x}^k + \mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^k) + \mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{p} \tag{II.81}$$

où $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}$ est la matrice jacobienne de $\mathcal{H}$. La méthode itérative de Newton-Raphson recherche

un k-ième pas de correction $\mathbf{p}^k$ qui annule la fonction linéarisée (II.81), tel que $\mathbf{p}^k$ soit solution du problème linéaire

$$\mathcal{H}^{\ln}(\mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k) = \mathbf{0} \iff \mathcal{H}(\mathbf{x}^k) = -\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{p}^k. \tag{II.82}$$

Le système (II.82) est résolu à chaque itération par une méthode de résolution de système linéaire optimisée basée sur une élimination de Gauss [199]. Une fois le pas $\mathbf{p}^k$ trouvé, on met à jour l'estimation de la solution telle que $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k$. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt de la méthode soit atteint. Pour la méthode de Newton-Raphson, on distingue au total quatre critères d'arrêt principaux : deux critères sur la convergence de la solution et deux critères sur l'erreur d'approximation de la solution. Pour chaque critère, on associe une grandeur $\delta_{\bullet,\bullet}$ correspondant à une tolérance numérique.

Convergence de la solution : ces critères évaluent la norme de la correction $\mathbf{p}^k$. Si cette norme est suffisamment petite, on considère que le résidu ne peut plus être amélioré en utilisant la matrice jacobienne. On considère alors qu'une solution est trouvée. Ces critères de convergence peuvent être sujets à des problèmes lorsque le point solution annoncé n'est pas un zéro de la fonction non linéaire, mais seulement un minimum local. On distingue la version absolue de la version relative, elles s'écrivent respectivement

$$\left\|\mathbf{p}^k\right\| < \delta_{\text{cv,abs}} \quad \text{et} \quad \frac{\left\|\mathbf{p}^k\right\|}{\left\|\mathbf{x}^k\right\|} < \delta_{\text{cv,rel}}. \tag{II.83}$$

Erreur d'approximation de la racine : afin de remédier au problème de convergence des critères se basant sur le pas de correction susmentionné, on fait porter le critère d'arrêt sur le résidu de la fonction non linéaire. Ceci permet de s'affranchir du problème de faux positif associé à un minimum local. En revanche, en présence d'un minimum local qui n'est pas une solution, la méthode n'annoncera pas de solution trouvée mais elle n'arrivera généralement pas à converger non plus. De la même manière, on distingue la version absolue de la version relative, respectivement exprimées

$$\left\|\mathcal{H}(\mathbf{x}^k)\right\| < \delta_{\text{ap,abs}} \quad \text{et} \quad \frac{\left\|\mathcal{H}(\mathbf{x}^k)\right\|}{\left\|\mathbf{x}^k\right\|} < \delta_{\text{ap,rel}} \tag{II.84}$$

La nature itérative de la méthode de Newton-Raphson requiert la définition d'un premier itéré $\mathbf{x}^0$. Son choix s'avère critique : il doit être suffisamment proche de la solution cherchée pour que l'algorithme converge. Meilleure est l'estimation de la solution $\mathbf{x}^0$ fournie, moins l'algorithme aura besoin d'itérations pour converger. On appelle bassin d'attraction d'une solution $\mathbf{x}^\star$ l'ensemble des itérés initiaux $\mathbf{x}^0$ pour lesquels l'algorithme de Newton-Raphson trouve $\mathbf{x}^\star$ comme solution. Pour un problème admettant des solutions multiples, on peut observer plusieurs bassins d'attraction associés à différentes solutions. Ceci peut notamment rendre délicate la recherche d'une solution en particulier.

On propose une interprétation géométrique de la méthodologie pour une fonction scalaire sur la figure II.4.

3.2 Méthodes de quasi-Newton

Certaines méthodes de résolution se basent sur l'algorithme de Newton-Raphson mais en utilisant une approximation de la matrice jacobienne afin de ne pas la calculer à chaque itération.

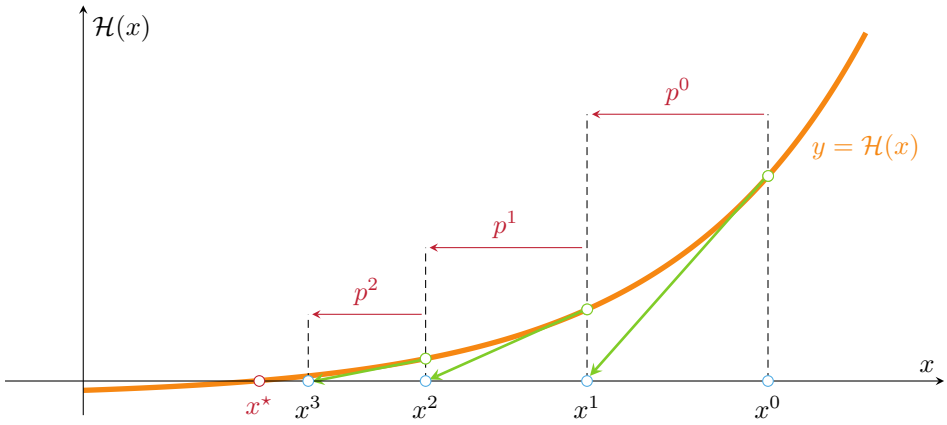


FIGURE II.4 – Méthode de Newton-Raphson sur une fonction scalaire, adaptée de wikipedia.

En effet, comme son calcul est généralement coûteux, approximer la matrice jacobienne permet un gain d'efficacité numérique important si l'approximation est bonne.

On note l'approximation de la matrice jacobienne du système à la k-ième itération $\mathcal{B}^k(\mathbf{x}^k)$. La fonction linéarisée $\mathcal{H}^{\text{ln}}$ utilisée pour calculer le pas de quasi-Newton $\mathbf{p}^k$ est alors

$$\mathcal{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^k) + \mathcal{B}^k(\mathbf{x}^k)\mathbf{p}. \tag{II.85}$$

La méthode la plus répandue pour l'évaluation de $\mathcal{B}^{k+1}(\mathbf{x}^{k+1})$ est la méthode de Broyden [32, 196], généralisation de la méthode de la sécante, reposant sur la formule

$$\mathcal{B}^{k+1}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathcal{B}^k(\mathbf{x}^k) + \frac{\left(\Delta\mathcal{H}^{k+1} - \mathcal{B}^k(\mathbf{x}^k)\mathbf{p}^k\right)\mathbf{p}^{k\top}}{\mathbf{p}^{k\top}\mathbf{p}^k} \tag{II.86}$$

où $\Delta\mathcal{H}^{k+1} = \mathcal{H}(\mathbf{x}^{k+1}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}^k)$. Afin de procéder comme suit, il est tout de même nécessaire de calculer une première matrice jacobienne exacte telle que $\mathcal{B}^0(\mathbf{x}^0) = \mathcal{J}(\mathbf{x}^0)$. La matrice jacobienne est donc approximée à chaque itération et une seule matrice jacobienne complète est alors calculée pour la procédure entière. La convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson est alors sacrifiée pour un gain substantiel de temps de calcul. Il est tout de même possible de montrer que la méthode de Broyden a une vitesse de convergence dite superlinéaire [33]. En pratique, il est possible de recalculer la matrice jacobienne exacte si le résidu ne s'améliore pas après un certain nombre d'itérations avec les approximations $\mathcal{B}^k$. Ceci permet de garantir que l'approximation de la matrice jacobienne ne s'éloigne pas trop de sa valeur réelle.

Il est également possible de produire une approximation de l'inverse de la matrice jacobienne à l'aide de la formule de Sherman-Morrison [32] pour éviter d'avoir à résoudre le système linéaire (II.82) à chaque itération. On actualise l'approximation de la matrice jacobienne à la $(k+1)$-ième itération grâce à la relation

$$\overline{\mathcal{B}}^{k+1}(\mathbf{x}^{k+1}) = \overline{\mathcal{B}}^k(\mathbf{x}^k) + \frac{\mathbf{p}^k - \overline{\mathcal{B}}^k(\mathbf{x}^k)\Delta\mathcal{H}^{k+1}}{\mathbf{p}^{k\top}\overline{\mathcal{B}}^k(\mathbf{x}^k)\Delta\mathcal{H}^{k+1}}\mathbf{p}^{k\top}\overline{\mathcal{B}}^k(\mathbf{x}^k). \tag{II.87}$$

Ces algorithmes ne sont cependant pas adaptés à des problèmes non réguliers pour lesquels la matrice jacobienne peut varier très fortement d'une itération à l'autre, voire être discontinue vis-à-vis de certaines inconnues du problème. Dans ces cas extrêmes, les méthodes de quasi-Newton

peuvent même faire sortir les itérés du bassin d'attraction, rendant impossible la convergence de la procédure. Dans ces circonstances, il est d'usage d'évaluer la matrice jacobienne à chaque itération de la procédure de recherche de zéros par précaution.

3.3 Algorithme de la descente du gradient

L'algorithme de la descente du gradient [196], appelé *gradient descent algorithm* ou *steepest descent algorithm* en anglais, est un algorithme d'optimisation permettant la recherche de racines d'un système d'équations non linéaires. Cette méthode s'appuie sur le fait que, localement et sous des hypothèses de régularité de la fonction objectif $\mathcal{H}$, le résidu décroît le plus fortement dans la direction opposée à celle du gradient dans l'espace des solutions. La méthode tire son nom de l'utilisation du gradient ∇f pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cependant l'extension aux fonctions $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est triviale en utilisant la matrice jacobienne $\mathcal{J}$.

En reprenant les notations de la section II.3.1, on cherche ici à déterminer un itéré $\mathbf{x}^{k+1}$ à partir de l'évaluation de $\mathcal{H}(\mathbf{x}^k)$ et $\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)$. Pour ce faire, l'algorithme de descente du gradient calcule $\mathbf{x}^{k+1}$ tel que

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k \text{ et } \mathbf{p}^k = \gamma^k \mathbf{d}^k \tag{II.88}$$

où $\mathbf{d}^k = -\dfrac{\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)^\top \mathcal{H}(\mathbf{x}^k)}{\|\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)^\top \mathcal{H}\|}$ est la direction du gradient et γ^k est la taille du pas de descente. De la même manière que dans la section II.3.1, on doit choisir un critère d'arrêt adapté à la nature du problème.

Généralement, la méthode de descente du gradient converge difficilement sur des problèmes pour lesquels la courbure (associée à la dérivée seconde du résidu ou opérateur hessien) de la fonction objectif varie beaucoup entre les différentes directions. De plus, le choix du pas γ^k affecte grandement la convergence de l'algorithme et on distingue généralement deux stratégies pour son choix.

Recherche du pas optimal : il est possible de rechercher le pas optimal γ^k qui permet de réduire le plus possible le résidu dans la direction du gradient. Ceci est un problème d'optimisation de recherche linéaire qui s'écrit sous la forme

$$\gamma^k = \arg\min_{\gamma > 0} \left\| \mathcal{H}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k) \right\|. \tag{II.89}$$

Cette stratégie est très efficace car elle permet de trouver la plus grande diminution du résidu, permettant à l'algorithme du gradient de converger en un nombre faible d'itérations. Cependant, il est nécessaire de résoudre le problème d'optimisation (II.89) à chaque itération, ce qui peut être particulièrement coûteux.

Choix du pas fixe : Au contraire, il est possible de choisir un pas γ^k fixe pour s'affranchir de la résolution du problème (II.89). Cette stratégie peut mener à l'obtention d'assez mauvais résultats car la fonction objectif ne décroît généralement pas uniformément.

3.4 Méthode *hybrid* Powell

La méthode *hybrid* Powell [139, 140], aussi appelée méthode *trust-region dogleg*, est une méthode d'optimisation qui utilise conjointement des éléments de la méthode de descente du gradient (section II.3.3) et de la méthode de Newton-Raphson (section II.3.1). La version originale de la méthode *hybrid* Powell utilise des éléments de la méthode de Gauss-Newton permettant de trouver des solutions à problèmes de type moindres carrés. Cette dernière peut

être vue comme une extension de la méthode de Newton-Raphson aux systèmes non carrés. Comme on s'intéresse ici à la résolution d'un problème non linéaire carré, on utilise plutôt les notations et les éléments relatifs à la méthode de Newton-Raphson mais le principe de la méthodologie est similaire.

L'algorithme présenté ici est itératif et on cherche à nouveau à construire un pas $\mathbf{p}^k$, tel que la suite $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k$ converge vers une solution du problème. La méthode *hybrid* Powell est basée sur la notion de région de confiance (*trust-region* en anglais), c'est-à-dire qu'à chaque itération, la norme du pas $\left\|\mathbf{p}^k\right\|$ ne peut excéder le rayon de la région de confiance Δ^k, tel que $\left\|\mathbf{p}^k\right\| \leq \Delta^k$. La région de confiance représente une hypersphère de rayon Δ^k autour de $\mathbf{x}^k$ dans laquelle on considère que les linéarisations basées sur la matrice jacobienne $\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)$ sont valides. Le rayon Δ^k est connu en amont de chaque itération et on explicite plus loin son choix.

Dans la méthodologie *hybrid* Powell, on distingue trois cas de figures pour la construction de $\mathbf{p}^k$, on les détaille ci-dessous, où NR fait référence à Newton-Raphson et SD à *Steepest Descent*.

Pas de NR acceptable : comme la méthode de Newton-Raphson est la plus performante en termes de convergence, le pas de Newton-Raphson $\mathbf{p}^k_{\text{NR}}$ est calculé en premier lieu par l'équation (II.82). Si ce pas est acceptable du point de vue de la région de confiance, *i.e.* $\left\|\mathbf{p}^k_{\text{NR}}\right\| < \Delta^k$, alors le pas de la k-ième itération $\mathbf{p}^k$ est choisi tel que

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{p}^k_{\text{NR}}. \tag{II.90}$$

Il s'agit du cas de figure représenté sur la figure II.5a.

Pas de NR non acceptable et pas de SD acceptable : Si le pas de la méthode de Newton-Raphson n'est pas acceptable, alors il est nécessaire de calculer le pas de la méthode de descente du gradient $\mathbf{p}^k_{\text{SD}}$. Ce dernier est recherché dans la direction de descente du gradient $\mathbf{d}^k_{\text{SD}}$ avec le pas optimal γ^k. Afin de faciliter la recherche du pas optimal, la fonction objectif est linéarisée dans la direction de descente autour de $\mathbf{x}^k$ de sorte que

$$\mathcal{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^k) + \gamma \mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{d}^k_{\text{SD}}. \tag{II.91}$$

Afin de trouver le pas optimal, appelé point de Cauchy, on cherche γ^k comme une solution du problème

$$\gamma^k = \underset{\gamma>0}{\arg\min}\, \mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}}) \tag{II.92}$$

où $\mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\left\|\mathcal{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x})\right\|^2$. En utilisant la linéarisation (II.91), le terme $\mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}})$ se réexprime suivant la relation

$$\mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}}) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{H}(\mathbf{x}^k) + \gamma \mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{d}^k_{\text{SD}}\right\|^2, \tag{II.93}$$

puis en développant la norme on obtient

$$\mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}}) = \mathbf{H}^{\text{ln}}(\mathbf{x}^k) + \gamma \mathbf{d}^k_{\text{SD}} \mathcal{J}(\mathbf{x}^k)^\top \mathcal{H}(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}\gamma^2 \left\|\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{d}^k_{\text{SD}}\right\|^2. \tag{II.94}$$

Il est alors aisé de trouver le pas optimal γ^k car la relation (II.94) est une fonction quadratique de γ : on calcule γ^k tel que $\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\mathbf{H}^{\ln}(\mathbf{x}^k+\gamma\mathbf{d}^k_{\mathrm{SD}})\right)(\gamma^k)=0$ par l'expression

$$\gamma^k=-\frac{\left(\mathbf{d}^k_{\mathrm{SD}}\right)^\top\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)^\top\mathcal{H}(\mathbf{x}^k)}{\left\|\mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{d}^k_{\mathrm{SD}}\right\|^2}. \tag{II.95}$$

Une fois le pas $\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}=\gamma^k\mathbf{d}^k_{\mathrm{SD}}$ calculé, sa norme est examinée et comparée à la taille de la région de confiance. Si $\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}<\Delta^k$, alors on choisit un pas $\mathbf{p}^k$ placé sur la frontière de la région de confiance, tel que

$$\mathbf{p}^k=\mathbf{p}^k_{\mathrm{DL}}=\theta\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}+(1-\theta)\mathbf{p}^k_{\mathrm{NR}} \tag{II.96}$$

où θ est choisi comme la plus petite valeur dans $[0;1]$ tel que $\left\|\mathbf{p}^k\right\|=\Delta^k$. Ce pas est appelé pas *dogleg* (DL) et donne son nom à l'algorithme. Une illustration géométrique est proposée sur la figure II.5b.

Pas de SD non acceptable : Dans le cas où $\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}>\Delta^k$, il n'est pas toujours possible de trouver $\theta\in[0;1]$ tel que $\left\|\mathbf{p}^k\right\|=\Delta^k$. On choisit donc de conserver le pas de la descente du gradient normé tel que le nouvel itéré soit sur la frontière de la région de confiance. Le pas $\mathbf{p}^k$ s'écrit alors

$$\mathbf{p}^k=\Delta^k\frac{\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}}{\left\|\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}\right\|}. \tag{II.97}$$

Cette dernière situation est illustrée sur la figure II.5c. Cette procédure est répétée à chaque itération et un des critères d'arrêt de la section II.3.1 est utilisé pour déclarer la convergence de la méthodologie.

À chaque itération, le rayon de la région de confiance doit être ajusté pour assurer une bonne convergence de la méthodologie. L'ajustement de Δ^k se fait généralement sur des critères d'amélioration du résidu. Dans les implémentations les plus utilisées de la méthode *trust-region dogleg* (`scipy.optimize.fsolve` en python et `fsolve` pour MATLAB), des paramètres numériques qui assurent une bonne convergence empirique sont utilisés. Cependant, pour des problèmes mal conditionnés ou non réguliers, ces paramètres peuvent souvent mener à des problèmes de convergence.

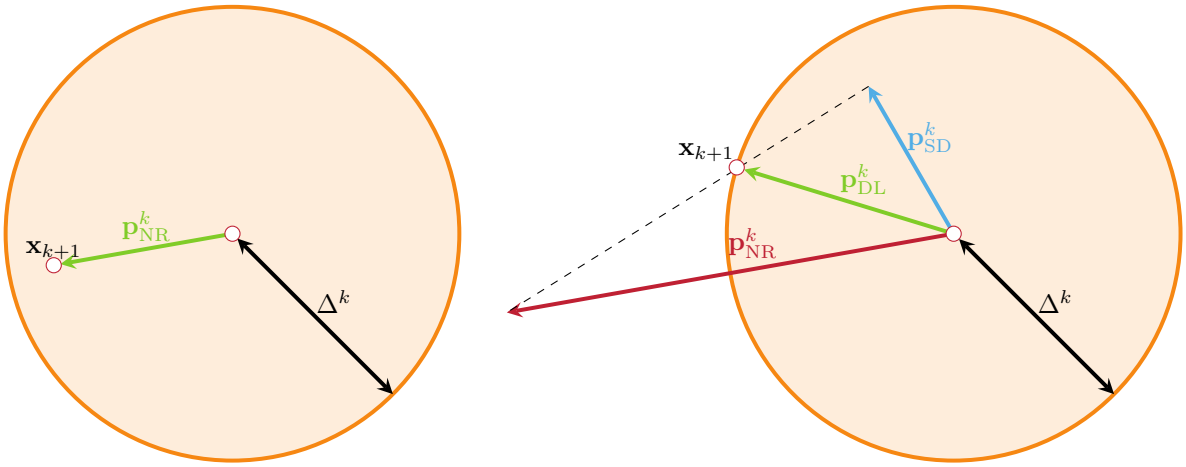
3.5 Extension aux fonctions à valeurs scalaires

Le formalisme présenté dans cette section utilise des fonctions $\mathcal{H}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. De nombreuses implémentations des méthodes de recherche de zéros sont des algorithmes d'optimisation qui optimisent le résidu scalaire de la fonction $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ dont la définition est

$$\mathbf{H}:\begin{cases}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\\ \mathbf{x}\mapsto\dfrac{1}{2}\left\|\mathcal{H}(\mathbf{x})\right\|_2^2.\end{cases} \tag{II.98}$$

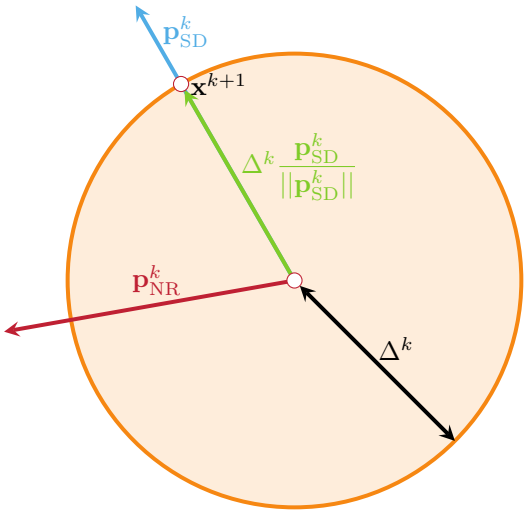
Pour l'utilisation de ces implémentations, il peut être nécessaire de calculer $\mathbf{H}$ et $\nabla\mathbf{H}(\mathbf{x})$ le gradient associé. Si le calcul de $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est aisé par l'équation (II.98), le calcul du gradient n'est pas direct. On explicite ici le lien entre la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ du résidu vectoriel $\mathcal{H}$ et le gradient $\nabla\mathbf{H}(\mathbf{x})$. On note les composantes de $\mathbf{x}$ et $\nabla\mathbf{H}(\mathbf{x})$ telles que

$$\mathbf{x}=\left[x_1,\dots,x_i,\dots,x_n\right]^\top\text{ et }\nabla\mathbf{H}(\mathbf{x})=\left[\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_n}\right]^\top. \tag{II.99}$$



(a) pas NR $\mathbf{p}^k_{\mathrm{NR}}$

(b) pas DL $\mathbf{p}^k_{\mathrm{DL}}$



(c) pas SD $\mathbf{p}^k_{\mathrm{SD}}$ normé

FIGURE II.5 – Illustration géométrique des trois cas de figure pour le choix du pas dans la méthode *hybrid* Powell, pas sélectionné (→), région de confiance (—).

L'objectif est ici de calculer chacun des termes $\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$. Ils sont évalués grâce à l'expression

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\left\|\mathcal{H}(\mathbf{x})\right\|_2^2\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\mathcal{H}^\top(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{x})\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right)^\top \mathcal{H}(\mathbf{x}) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]. \tag{II.100}$$

Le vecteur $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ correspond à la i-ième colonne de la matrice jacobienne $\mathcal{J}(\mathbf{x})$. Ainsi, le gradient $\nabla \mathbf{H}(\mathbf{x})$ de la fonction scalaire $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est complètement déterminé connaissant la fonction vectorielle $\mathcal{H}$ et sa matrice jacobienne $\mathcal{J}$.

Méthodes des fonctions de référence

Pour de nombreuses applications, il est d'usage d'utiliser les implémentations des méthodes de recherche de zéros présentes dans les librairies de chacun des langages de programmation. Ces fonctions sont généralement prêtes à l'emploi et on propose ici de détailler ce que font en pratique les fonctions de référence du langage Python et MATLAB. On note cependant que ces implémentations très génériques sont plutôt réservées à des problèmes continûment dérivables. Par exemple, il n'est pas rigoureux de les utiliser sur des problèmes non réguliers.

Python On distingue deux fonctions de recherche de zéros dans le langage Python. Ces deux fonctions appartiennent à la librairie `scipy.optimize`, il s'agit de `scipy.optimize.fsolve` et `scipy.optimize.root`.

fsolve La fonction de recherche de zéros `scipy.optimize.fsolve` de python repose sur un algorithme *hybrid* Powell modifié. L'implémentation repose sur l'utilisation de fonctions de la bibliothèque `MINPACK` [a] écrite en FORTRAN. Dans le cas où l'utilisateur fournit une matrice jacobienne analytique, la fonction utilisée est `hybrj.f`. Si ce n'est pas le cas, alors la fonction utilisée est `hybrd.f` où la matrice jacobienne est calculée par différences finies avant.

root la fonction `scipy.optimize.root` intègre plusieurs stratégies de résolution. Parmi les méthodes principales, on trouve notamment la méthode de *hybrid* Powell modifiée, la méthode de Levenberg-Marquardt [107, 111] et les méthodes de Broyden [31, 32].

MATLAB Dans le langage MATLAB, on trouve la fonction `fsolve` avec laquelle il est possible de faire une résolution similaire à Python à l'aide de la méthode *hybrid* Powell. Cette fonction intègre également la résolution de système par la méthode de Levenberg-Marquardt [107, 111].

Dans ces travaux, on choisit d'implémenter un solveur Newton-Raphson et de ne pas utiliser les fonctions natives sus-mentionnées. Ceci permet de s'affranchir des implémentations des différents langages de programmation qui incluent généralement des paramètres numériques adaptés aux problèmes réguliers, ce qui ne correspond pas au cas d'application de ce manuscrit. Ceci participe également à la construction d'un outil numérique transparent et robuste.

a. https://netlib.org/minpack/

4 Méthodes de continuation

La prise en compte d'efforts non linéaires dans un problème de dynamique des structures fait souvent apparaître une phénoménologie à la fois riche et complexe. Les non-linéarités de contact font apparaître des points de retournement à la fréquence de résonance non linéaire [43, 170]. Ceci implique une multiplicité de solutions à une valeur de ω donnée. Les courbes de réponse en fréquence doivent alors être caractérisées à travers un parcours de la courbe selon une paramétrisation (par exemple par l'abscisse curviligne) et en imposant de balayer une plage fréquentielle $[\omega_1;\omega_2]$. Ceci s'oppose au cas linéaire où l'unicité de la réponse est assurée à chaque ω. Comme les procédures de continuation sont exclusivement mises en œuvre pour la méthode de l'équilibrage harmonique dans ce manuscrit, on adopte la notation $\widetilde{\mathbf{x}}$ pour l'inconnue principale de la fonction non linéaire $\mathcal{H}$. Dans le cadre d'une continuation, le système d'équations algébriques non linéaires à résoudre est augmenté du paramètre de contrôle [198] (ou paramètre de bifurcation) ω et on recherche une solution au problème

$$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)=\mathbf{0}. \tag{II.101}$$

En pratique, la variable ω est une nouvelle inconnue et on doit résoudre $n(2N_\mathrm{h}+1)$ équations à $n(2N_\mathrm{h}+1)+1$ inconnues. Il est alors nécessaire d'ajouter une équation de paramétrisation pour que le système soit soluble par des méthodes itératives de type Newton-Raphson. Pour rendre le parcours de la courbe le plus efficace possible, on met généralement en œuvre une procédure de prédiction des solutions pour que l'itéré initial fourni au solveur d'optimisation

soit le plus proche possible de la solution. Une fois l'itéré initial calculé, le solveur d'optimisation corrige cette prédiction pour la ramener sur la courbe de réponse en fréquence grâce à l'équation de paramétrisation de la courbe. En ce sens, on qualifie que les procédure de continuation sont des stratégies de prédiction-correction où la correction est faite par le solveur Newton-Raphson. Dans cette section, plusieurs types de prédictions et de paramétrisations sont proposées. Pour alléger les notations, on note $\mathbf{y} = \left[\widetilde{\mathbf{x}}^\top, \omega\right]^\top$.

4.1 Prédicteurs

4.1.1 Prédiction sécante

La prédiction sécante fournit une prédiction $\mathbf{y}_{i+1}^0$ en utilisant les deux solutions précédentes, telle que

$$\mathbf{y}_i^0 = \mathbf{y}_{i-1} + \Delta s_i \frac{\Delta \mathbf{y}_{i-1}}{\|\Delta \mathbf{y}_{i-1}\|} \tag{II.102}$$

où $\Delta \mathbf{y}_{i-1} = \mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_{i-2}$ et Δs_i représente la distance de la prédiction avec la solution précédente $\mathbf{y}_{i-1}$ dans l'espace des solutions. Ce dernier paramètre doit être choisi en accord avec la paramétrisation de la courbe, définie dans la section II.4.2. La prédiction sécante revient à tracer un segment entre les deux dernières solutions trouvées et de le prolonger de Δs_i. Une représentation géométrique est fournie sur la figure II.6a

4.1.2 Prédiction polynomiale

La prédiction polynomiale est une généralisation de la prédiction sécante interpolant un nombre p de points précédents la dernière solution $\mathbf{y}_{i-1}$. Elle consiste en une interpolation de ces points par des polynômes, par exemple les polynômes de Lagrange [212]. La prédiction peut alors s'écrire

$$\mathbf{y}_i^0 = \sum_{k=1}^{p+1} L_k \mathbf{y}_{i-p+k} \tag{II.103}$$

où les polynômes de Lagrange L_k évalués à l'abscisse curviligne $s_i = s_{i-1} + \Delta s_i$ s'écrivent tels que

$$L_k = \prod_{j=1, j\neq k}^{p+1} \frac{s_i - s_{i-p+k}}{s_{i-p+k} - s_{i-p+j}}. \tag{II.104}$$

Cependant, plus le nombre de points utilisés est important, plus le degré du polynôme est important et plus grandes sont les chances que des oscillations parasites apparaissent, dégradant ainsi la qualité de la prédiction. Pour atténuer ce problème, on se cantonne généralement à des prédictions linéaires ($p = 1$), quadratiques ($p = 2$) ou cubiques ($p = 3$) [41]. Le cas particulier $p = 1$ correspond à la prédiction sécante qui n'utilise que deux points. On trouve une interprétation géométrique sur la figure II.6b pour $p = 2$.

4.1.3 Prédiction tangente

Cette dernière technique de prédiction consiste à faire une prédiction selon la tangente à la courbe en utilisant les matrices jacobiennes $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}$. En notant $\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i$ et $\Delta\omega_i$ les incréments tels que $\widetilde{\mathbf{x}}_i^0 = \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1} + \Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i$ et $\omega_i^0 = \omega_{i-1} + \Delta\omega_i$, il est possible de différencier l'équation (II.101) afin d'obtenir l'équation de la tangente

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1}, \omega_{i-1})\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1}, \omega_{i-1})\Delta\omega_i = \mathbf{0}. \tag{II.105}$$

Grâce à l'équation (II.105), on exprime l'incrément $\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i$ en fonction de $\Delta\omega_i$ par la relation

$$\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i = -\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1},\omega_{i-1})\right)^{-1}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1},\omega_{i-1})\Delta\omega_i = \mathbf{T}\Delta\omega_i. \tag{II.106}$$

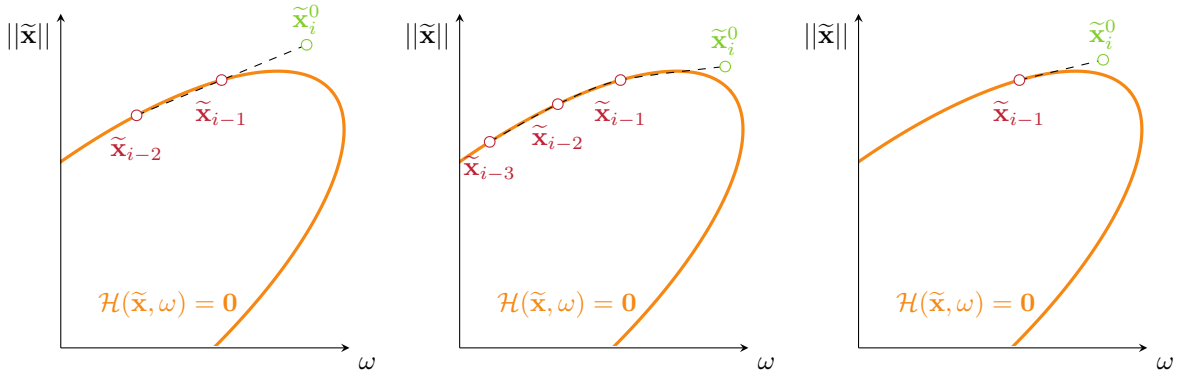
Puis, en fixant la norme de la tangente grâce à l'équation $(\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i)^\top\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i + (\Delta\omega_i)^2 = (\Delta l_i)^2$, on exprime la valeur de l'incrément du paramètre de contrôle par l'expression

$$\Delta\omega_i = \Delta l_i\frac{\pm 1}{\sqrt{\mathbf{T}^\top\mathbf{T}+1}}. \tag{II.107}$$

Le signe de cet incrément est déterminé par le sens de parcours de la courbe, il doit être choisi en assurant que la tangente $\mathbf{t}_i = (\Delta\widetilde{\mathbf{x}}_i, \Delta\omega_i)^\top$ suive bien le sens de parcours de la courbe et ne revienne pas en arrière, ceci est fait en garantissant l'inégalité

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1},\omega_{i-1}) & \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1},\omega_{i-1})\\ \mathbf{T}^\top & 1\end{bmatrix}\Delta\omega_i > 0. \tag{II.108}$$

Cette méthodologie, bien que particulièrement efficace pour des non-linéarités régulières (polynomiales par exemple), est assez coûteuse en temps de calcul à cause de l'inversion de $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1},\omega_{i-1})$ à chaque prédiction. De plus, les jacobiennes peuvent être entachées d'erreurs numériques selon la façon dont on les évalue, ce qui détériore le calcul de la direction tangente. On trouve une interprétation géométrique de la prédiction tangente sur la figure II.6c.



(a) prédicteur sécant (b) prédicteur polynomial (ordre 2) (c) prédicteur tangent

FIGURE II.6 – Exemples de prédicteurs, sous-espace de solutions (—), solutions (○), prédiction (○).

4.2 Paramétrisation

Afin de parcourir l'ensemble de l'espace des solutions, il est nécessaire de choisir un type de paramétrisation pour la courbe. On en distingue généralement trois différentes : paramétrisation naturelle, paramétrisation par longueur d'arc (ou *arc-length*) et paramétrisation orthogonale (ou *pseudo arc-length*). Elles sont principalement différenciées par la direction dans laquelle est recherchée la solution au problème.

4.2.1 Naturelle

La paramétrisation naturelle, aussi appelée continuation séquentielle, consiste simplement à fixer le paramètre ω. En éliminant cette inconnue du problème, le problème se transforme alors en un système de $n(2N_\mathrm{h}+1)$ équations à $n(2N_\mathrm{h}+1)$ inconnues. Ainsi, il devient possible de résoudre le problème par des méthodes itératives classiques. Une interprétation géométrique est fournie sur la figure II.7a. Cette méthodologie est une des plus simples à implémenter, mais ne fonctionne pas lorsque l'espace des solutions contient des points de retournement. En effet, il n'est pas possible d'obtenir une multiplicité de solutions à ω donné.

4.2.2 Longueur d'arc

Pour remédier au problème de la multiplicité des solutions par rapport à ω, on procède souvent à une paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne. On associe chaque point solution $\mathbf{y}_i$ à son abscisse curviligne s_i. Il devient alors possible d'augmenter le système (II.101) d'une équation de fermeture $\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega, s)$ [170], dont l'expression est

$$\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \omega_i^k, s_i) = \left\| \widetilde{\mathbf{x}}_i^k - \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1} \right\|^2 + (\omega_i^k - \omega_{i-1})^2 - \Delta s_i^2 = 0 \tag{II.109}$$

où $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ représente la différence d'abscisse curviligne entre deux solutions consécutives. L'équation (II.109) est une équation d'hypersphère de rayon Δs_i centré autour du point précédent $\mathbf{y}_{i-1} = [\widetilde{\mathbf{x}}_{i-1}^\top, \omega_{i-1}]^\top$. Cette équation vient s'ajouter au problème initial et fermer le système d'équations initialement sous-déterminé. L'interprétation géométrique de la paramétrisation par longueur d'arc est fournie sur la figure II.7b. L'incrément d'abscisse curviligne Δs_i est ici une donnée à fournir pour contrôler la distance entre deux points consécutifs. Une telle paramétrisation permet de franchir les points de retournement du fait de la recherche locale d'une nouvelle solution autour de la solution précédente. Cependant, l'intersection entre l'hypersphère et l'espace des solutions contient généralement au moins deux solutions (dans chacun des sens possibles de parcours de la courbe) et il est nécessaire de fournir au solveur non linéaire un point de départ proche de la solution souhaitée pour éviter qu'il converge vers la solution allant dans le mauvais sens de parcours. Avec l'ajout de l'équation (II.109) au système non linéaire, il devient nécessaire de calculer les grandeurs $\dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \omega}$ données par les expressions

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \omega_i^k) = 2(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k - \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1})^\top \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \omega_i^k) = 2(\omega_i^k - \omega_{i-1}). \tag{II.110}$$

4.2.3 Orthogonale (pseudo longueur d'arc)

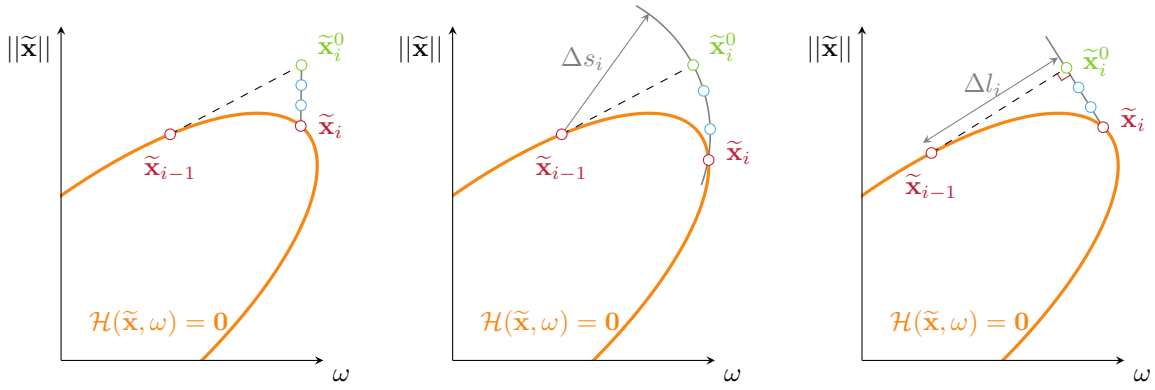
La paramétrisation orthogonale, souvent appelée *pseudo arc-length*, peut également être utilisée pour fermer le système d'équations. Le principe général de la méthode consiste à rechercher la solution suivante dans l'hyperplan passant par le prédicteur tangent $\mathbf{y}_i^0$ (situé à Δl_i du point précédent $\mathbf{y}_{i-1}$ le long de la tangente) et perpendiculaire à la tangente de la courbe au point précédent $\mathbf{y}_{i-1}$. Une interprétation géométrique est fournie sur la figure II.7c. L'équation de fermeture associée $\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$ se formule

$$\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \omega_i^k) = \mathbf{t}_i^\top (\mathbf{y}_i^k - \mathbf{y}_i^0) = 0 \tag{II.111}$$

où $\mathbf{t}_i$ est la tangente, dont la méthode de calcul est fournie dans la section II.4.1.3. Cette méthodologie présente l'avantage de privilégier un sens de parcours plutôt qu'un autre, contrairement à la paramétrisation par longueur d'arc. Cependant, de la même manière que pour le prédicteur

tangent, la méthode repose sur une évaluation de la matrice jacobienne, ce qui peut causer des instabilités numériques si elle est de mauvaise qualité. Les dérivées de cette équation de fermeture sont

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \omega_i^k) = (\widetilde{\mathbf{x}}_i^k)^\top \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \omega}(\widetilde{\mathbf{x}}^k, \omega_i^k) = \omega_i^k. \tag{II.112}$$



(a) paramétrisation naturelle (b) paramétrisation par longueur d'arc (c) paramétrisation orthogonale

FIGURE II.7 – Différents types de paramétrisation, (—) sous-espace de solutions, (—) direction de recherche, solutions (○), prédiction (○), itérations du solveur (○).

4.2.4 Contrôle du pas

Lors de la mise en place pratique d'une procédure de continuation, il est crucial d'instaurer une technique de contrôle du pas. En effet, les quantités Δs_i pour la paramétrisation par longueur d'arc et Δl_i pour la paramétrisation orthogonale sont des grandeurs qui pilotent l'espacement entre deux points consécutifs sur la courbe.

D'un côté, si le pas est trop petit, la continuation avance lentement car la discrétisation est importante le long de la courbe. Les prédictions sont alors de bonne qualité car les solutions évoluent faiblement d'un point à l'autre. Au contraire, si le pas est trop grand, les points sont susceptibles d'être trop espacés, ce qui a pour conséquence de produire des prédictions de mauvaise qualité et empêcher le solveur itératif de converger. En contrepartie, si le solveur arrive tout de même à converger, alors des économies en temps de calcul sont faites grâce à la faible discrétisation de la courbe. Le choix du pas doit donc résulter d'un compromis entre précision des prédictions — permettant de converger à chaque point en moins d'itérations en moyenne — et discrétisation de la courbe.

Comme un choix de pas constant sur l'ensemble d'une courbe ne permet pas de répondre à cette problématique, on procède généralement à l'implémentation d'une technique de contrôle du pas. Les méthodes de contrôle du pas utilisent souvent des indicateurs statistiques pour déterminer si le pas de continuation est adapté. En effet, le pas est ajusté en fonction de la vitesse de convergence du ou des points précédents. De manière générale, on obtient un pas adapté Δs_i au point suivant en multipliant le pas précédent Δs_{i-1} par un scalaire ξ, tel que

$$\Delta s_i = \xi \Delta s_{i-1}. \tag{II.113}$$

L'indicateur favorisé pour la détermination du facteur multiplicatif est très souvent le nombre d'itérations réalisé par le solveur itératif. Afin de mettre en œuvre un contrôle du pas basé sur cet indicateur, on définit en amont du calcul un nombre d'itérations optimal n_{opti}. Le

pas est considéré adapté lorsque le nombre d'itérations réalisé par le solveur n_{iter} est égal au nombre d'itérations optimal. Si $n_{\text{iter}} > n_{\text{opti}}$, alors il est nécessaire de réduire le pas pour que la prédiction soit plus précise et que le solveur converge en moins d'itérations. Au contraire, si $n_{\text{iter}} < n_{\text{opti}}$, alors on augmente le pas pour tendre vers le nombre d'itérations optimal. Ce dernier cas permet de réduire la discrétisation de la courbe sans risquer de déstabiliser trop fortement le solveur. Le nombre d'itérations optimal dépend du problème traité mais on observe empiriquement pour une méthode de Newton-Raphson que la valeur $n_{\text{opti}} = 5$ constitue un bon compromis. Différentes formules sont utilisables pour le calcul de ξ, parmi les plus utilisées dans la littérature [36, 206, 208, 223] on trouve notamment

$$\xi = 2^{\left(\frac{n_{\text{opti}} - n_{\text{iter}}}{n_{\text{opti}}}\right)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{n_{\text{opti}}}{n_{\text{iter}}}} \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{n_{\text{opti}}}{n_{\text{iter}}}. \tag{II.114}$$

Afin d'assurer que le pas de continuation ne varie pas trop d'un point à l'autre, il est d'usage de borner la valeur de ξ tel que $1/2 \leq \xi \leq 2$. En effet, même si certains points nécessitent un très petit ou très grand nombre d'itérations, il n'est pas prudent de faire varier trop fortement le pas de continuation d'un point à l'autre.

De façon analogue, on définit une plage acceptable pour le pas de continuation $\Delta s_{\min} \leq \Delta s \leq \Delta s_{\max}$. Le pas ne doit jamais dépasser $\Delta s_{\max}$ pour garantir une discrétisation minimale de la courbe et ne pas parcourir la courbe trop vite, au risque de manquer des comportements spécifiques aux systèmes non linéaires tels que les points de bifurcation. Au contraire, si le pas minimal $\Delta s_{\min}$ est atteint, la procédure de continuation est arrêtée car on considère que le solveur éprouve trop de difficultés à converger. Ceci peut notamment être dû à des mauvaises approximations de la matrice jacobienne ou à la présence de points singuliers sur la courbe de réponse.

Dans la littérature [184], on trouve également des mentions de critères d'adaptation du pas de nature géométrique, par exemple basés sur la courbure de la courbe. En mesurant l'angle entre deux prédicteurs successifs, il est possible d'évaluer la courbure de la courbe afin d'adapter en conséquence le pas de continuation pour discrétiser correctement les zones de forte courbure. Cette information peut être directement extraite du tenseur hessien si on dispose de sa valeur, pouvant notamment intervenir dans certains algorithmes de recherche de zéros non présentés ici.

4.2.5 Calcul des gradients pour la HBM

Comme le paramètre de contrôle ω est désormais incorporé dans le vecteur d'inconnues $\mathbf{y}$, il est nécessaire de calculer la matrice jacobienne du système augmenté de l'équation de paramétrisation

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbf{y}) \\ \mathcal{P}_\omega(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{II.115}$$

La matrice jacobienne du système augmenté s'écrit alors

$$\mathcal{J}_\omega(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) & \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}(\mathbf{y}) \\ \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) & \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \omega}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}. \tag{II.116}$$

Chacun des termes $\dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y})$ et $\dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega}{\partial \omega}(\mathbf{y})$ ont déjà été explicités dans les sections II.4.2.2 et II.4.2.3. En revanche, il est désormais nécessaire de construire le terme $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}(\mathbf{y})$, conformément à la

section II.2.1.4.

5 Phénoménologie des systèmes dynamiques non linéaires

La prise en compte d'efforts non linéaires dans l'équation du mouvement (II.1) génère des phénomènes complexes propres aux systèmes dynamiques non linéaires. On propose de décrire dans cette section les principaux phénomènes observés sur les réponses dynamiques non linéaires. Premièrement, on détaille la notion de stabilité des systèmes dynamiques ainsi que le phénomène de bifurcation. Ensuite, on décrit les éléments phénoménologiques propres aux systèmes mécaniques dont font partie les résonances non linéaires et branches de solutions isolées.

5.1 Stabilité

La notion de stabilité des solutions périodiques est cruciale lorsqu'on traite des systèmes dynamiques non linéaires. En effet, bien que plusieurs solutions à l'équation du mouvement (II.1) peuvent coexister pour un jeu de paramètre donné, elles ne sont pas nécessairement toutes stables. En pratique, les solutions dites instables ne sont pas physiquement observables. Pour les observer, il faudrait précisément placer le système sur l'orbite instable ce qui est impossible en pratique. En effet, par définition, toute perturbation appliquée à un système sur une orbite instable l'écarterait de celle-ci. Le système se stabiliserait alors sur une autre solution stable (périodique ou non) voire sur une solution divergente s'il n'existe pas de solution stable bornée.

Caractériser la stabilité des solutions périodiques obtenues par des méthodes numériques est donc capital pour bien interpréter le comportement dynamique du système. En général, on observe la stabilité des solutions par rapport à un paramètre de contrôle (aussi appelé paramètre de bifurcation), par exemple en faisant varier la pulsation d'excitation du système ω ou l'amplitude de l'effort extérieur. En pratique, on observe numériquement et expérimentalement [56] des sauts d'amplitude de vibration sur des systèmes mécaniques en faisant varier ω, ce qui peut compromettre l'intégrité mécanique du système. Ces comportements discontinus traduisent un changement de stabilité le long d'une branche de solutions. Le point constituant la frontière de stabilité est appelé point de bifurcation et peut être de différentes natures, approfondies dans la section II.5.2.

Afin de présenter la démarche globale adoptée pour l'étude de stabilité d'un système mécanique non linéaire, on présente en premier lieu les différentes définitions associées à la stabilité. On présente ensuite les stratégies numériques couramment utilisées dans la littérature pour statuer sur la stabilité locale des solutions périodiques.

5.1.1 Définitions

La stabilité de l'état d'équilibre d'un système caractérise la capacité du système à revenir à ce même état d'équilibre après avoir subi une perturbation. Différentes définitions plus ou moins contraignantes coexistent pour la stabilité d'un système. On s'intéresse ici à un système d'EDO non linéaire sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{G}(\mathbf{z}, t, \lambda) \tag{II.117}$$

où $\mathbf{z}$ est l'inconnue, t la variable temporelle et λ un paramètre de bifurcation.

La définition la plus générique de la stabilité d'un état d'équilibre $\mathbf{z}^\star(t)$ solution du système

différentiel (II.117) est la stabilité au sens de Liapounov [108] qui s'énonce telle que

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{z}^\star(t) \text{ est stable au sens de Liapounov si et seulement si,}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0 \text{ tel que } \forall\mathbf{y}\ \|\mathbf{z}^\star(t_0)-\mathbf{y}(t_0)\|\leq\alpha\Rightarrow\|\mathbf{z}^\star(t)-\mathbf{y}(t)\|\leq\varepsilon\ \ \forall t>t_0, t_0\in\mathbb{R}.\end{array}\right. \tag{II.118}$$

Cette définition de la stabilité traduit le fait que pour une solution stable $\mathbf{z}^\star$, les solutions $\mathbf{y}$ suffisamment proches de $\mathbf{z}^\star$ à $t=t_0$ restent contenues dans une boule de rayon ε centrée autour de la solution stable. Cette définition apparaît cependant ne pas être assez forte pour garantir que l'ensemble des solutions $\mathbf{y}$ sont attirées par l'état d'équilibre stable $\mathbf{z}^\star$. Il est alors d'usage d'utiliser la stabilité asymptotique au sens de Liapounov [108] qui se caractérise telle que

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{z}^\star(t) \text{ est asymptotiquement stable au sens de Liapounov si et seulement si,}\\ \mathbf{z}^\star(t) \text{ est stable au sens de Liapounov et } \lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{z}^\star(t)-\mathbf{y}(t)\|=0.\end{array}\right. \tag{II.119}$$

On s'assure ainsi que $\mathbf{y}$ tende vers $\mathbf{z}^\star$ lorsque $t\to\infty$, ce qui traduit le fait que $\mathbf{y}$ soit dans le bassin d'attraction de $\mathbf{z}^\star$.

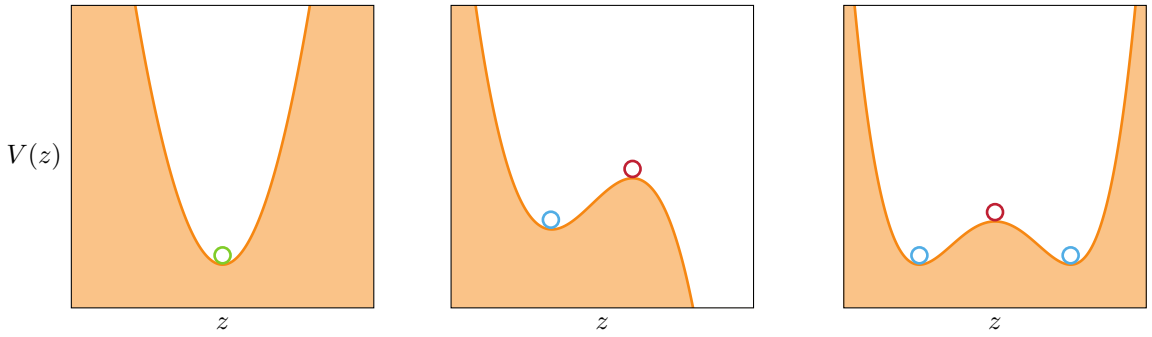
En revanche, ces définitions de la stabilité ne sont pas adaptées pour l'étude de solutions périodiques. En effet, si deux solutions identiques déphasées existent, alors elles seront identifiées comme instables. Ce cas de figure arrive en pratique lors de l'étude de systèmes mécaniques libres non amortis. La définition de la stabilité au sens de Poincaré (ou stabilité orbitale) permet de s'affranchir de ce problème, elle se formule telle que [193]

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{z}^\star(t) \text{ est stable au sens de Poincaré si et seulement si,}\\ \exists\tau\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0 \text{ tel que } \forall\mathbf{y}\ \|\mathbf{z}^\star(0)-\mathbf{y}(\tau)\|\leq\alpha\\ \qquad\qquad\Rightarrow\exists(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|\mathbf{z}^\star(t_1)-\mathbf{y}(t_2)\|\leq\varepsilon.\end{array}\right. \tag{II.120}$$

Cette définition de la stabilité permet de comparer les orbites associées à $\mathbf{z}^\star$ et $\mathbf{y}$ plutôt que leurs valeurs pour tout t. Ainsi, la notion de stabilité peut être applicable à une classe plus générale de systèmes $\mathcal{G}$. Il est possible de définir une stabilité orbitale asymptotique en imposant que l'orbite associée à $\mathbf{y}$ tende vers celle associée à $\mathbf{z}^\star$, de façon analogue à la définition (II.119).

Ces définitions caractérisent la stabilité globale d'un état d'équilibre d'un système mais il est difficile de les appliquer en pratique. On recourt plutôt à la notion de stabilité locale (ou stabilité linéarisée) permettant de statuer sur la stabilité des solutions en présence d'une petite perturbation. Afin d'illustrer la nature globale ou locale de la stabilité d'une solution, on propose sur la figure II.8 une illustration géométrique pour différentes expressions de l'énergie potentielle $V(z)$ pour un système à un degré de liberté z.

Le cas 1 (figure II.8a) correspond à l'énergie potentielle d'un système linéaire s'exprimant $V(z)=\frac{1}{2}z^2$. On observe que le profil d'énergie potentielle admet un seul équilibre qui est globalement stable. En effet, peu importe l'amplitude de la perturbation on retombe nécessairement sur le point d'équilibre stable. Le cas 2 (figure II.8b) correspond à un potentiel qui admet à la fois un équilibre stable et un équilibre instable. Contrairement au cas linéaire, l'amplitude de la perturbation de l'état d'équilibre a une influence sur le comportement du système. En effet, si la perturbation est petite alors le système reste sur l'état d'équilibre stable. Au contraire, si la perturbation est importante, la barrière de potentiel est franchie et le système est divergent tel que $z\to\infty$. On qualifie donc la solution bleue (○) de localement stable car sa stabilité dépend du niveau de perturbation. Finalement, le troisième cas (figure II.8c) correspond au potentiel d'un oscillateur de Duffing dont l'énergie potentielle est $V(z)=-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{2}z^2$. Ce dernier cas est



(a) cas 1 (linéaire) (b) cas 2 (c) cas 3 (Duffing)

FIGURE II.8 – Illustration géométrique de la notion de stabilité locale et globale, solution globalement stable (○), solution localement stable (○), solution instable (○), adaptée de [206, 208, 198].

similaire au cas 2 sur la figure II.8b à la différence qu'il n'y a pas de possibilité de divergence : le système peut simplement passer d'un état localement stable à un autre.

On explicite dans cette section plusieurs stratégies permettant de statuer sur la stabilité locale des solutions périodiques obtenues numériquement. On distingue les méthodes basées sur la théorie de Floquet et le paradigme temporel de la méthode de Hill qui est une adaptation de la théorie de Floquet au paradigme fréquentiel.

5.1.2 Théorie de Floquet

La théorie de Floquet [63] permet de statuer sur la stabilité locale des solutions périodiques d'un système différentiel linéaire à coefficients périodiques. Cette théorie est bâtie sur un formalisme du paradigme temporel. Afin de déterminer les solutions d'un problème de dynamique des structures non linéaire dans le domaine temporel, on résout le système d'état

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{z}, t, \lambda) = \mathbf{L}\mathbf{z}(t) - \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\mathbf{z}}(t) & \text{(II.121a)} \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(T) = \mathbf{z}_0 & \text{(II.121b)} \end{cases}$$

où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}(\mathbf{z}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}(t)) \end{bmatrix} \ \text{et} \ \mathbf{f}_{\text{ex}}^{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) \end{bmatrix}. \quad \text{(II.122)}$$

On recherche alors un couple $(\mathbf{z}_0, T)$ qui soit solution de l'équation (II.121) de façon analogue à la méthode de tir (section II.1.3).

On note $\mathbf{z}^\star(t)$ la solution T-périodique associée à la condition initiale $\mathbf{z}_0$ pour un paramètre de contrôle donné $\lambda = \lambda_0$. On note ω la pulsation fondamentale associée à la période T telle que $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Statuer sur la stabilité locale de $\mathbf{z}^\star(t)$ revient à étudier comment évolue le système lorsqu'on lui impose une petite perturbation quelconque $\mathbf{y}(t)$. La solution perturbée s'écrit alors

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^\star(t) + \mathbf{y}(t). \quad \text{(II.123)}$$

Si $\mathbf{z}^\star(t)$ est localement stable, alors la perturbation $\mathbf{y}(t)$ s'atténuera avec le temps jusqu'à disparaître. Au contraire, si $\mathbf{z}^\star(t)$ est instable, alors la perturbation $\mathbf{y}(t)$ s'amplifiera avec le temps. Comme on utilise la théorie de Floquet qui s'applique sur les systèmes linéaires, il est nécessaire de linéariser le système d'état (II.121). Dans un premier temps, on substitue

l'expression de la solution perturbée dans l'équation (II.121) et on obtient

$$\dot{\mathbf{z}}^\star(t) + \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{z}^\star + \mathbf{y}, t, \lambda_0). \tag{II.124}$$

On réalise ensuite un développement limité de l'équation (II.124) autour de la solution $\mathbf{z}^\star(t)$ et comme $\dot{\mathbf{z}}^\star(t) - \mathcal{G}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) = 0$, on a

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{J}(t)\mathbf{y}(t) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}(t)\|^2). \tag{II.125}$$

Enfin, en linéarisant la relation (II.125), *i.e.* on néglige les termes d'ordre supérieur à 1, on obtient l'EDO linéaire

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{J}(t)\mathbf{y}(t) \tag{II.126}$$

avec la matrice jacobienne $\mathcal{J}(t)$ s'écrivant

$$\mathcal{J}(t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) = \mathbf{L} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) \tag{II.127}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) & \mathbf{M}^{-1}\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}^\star, t, \lambda_0) \end{bmatrix}. \tag{II.128}$$

La matrice jacobienne $\mathcal{J}(t)$ hérite de la périodicité de $\mathbf{z}^\star(t)$ [193], *i.e.* $\mathcal{J}(t+T) = \mathcal{J}(t)$. Ainsi, il est possible d'appliquer le théorème de Floquet qui stipule que le système (II.126) admet $2n$ solutions fondamentales linéairement indépendantes $\mathbf{y}_i(t)$. L'ensemble des solutions du problème (II.126) s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{y}_i(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{p}_i(t) \mathrm{e}^{\alpha_i t} \tag{II.129}$$

où les c_i sont des scalaires dépendants de la solution $\mathbf{z}^\star(t)$, les $\mathbf{p}_i(t) \in \mathbb{C}^{2n}$ sont les vecteurs de Floquet T-périodiques et les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont les exposants de Floquet. L'ensemble des solutions fondamentales $\mathbf{y}_i(t)$ sont usuellement regroupées dans une matrice $\mathbf{Y}$ telle que

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_i, \ldots, \mathbf{y}_{2n}\right]. \tag{II.130}$$

En utilisant cette notation, on observe que $\mathbf{Y}$ est solution du système différentiel

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathcal{J}(t)\mathbf{Y}(t). \tag{II.131}$$

De plus, en recourant au changement de variable $\tau = t + T$ et en utilisant la périodicité de la matrice jacobienne $\mathcal{J}(\mathbf{z}^\star, t) = \mathcal{J}(\mathbf{z}^\star, \tau)$, on prouve que $\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{Y}(t+T)$ s'exprime comme une combinaison linéaire des $\mathbf{y}_i$ [193], donc

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathcal{M}\mathbf{Y}(t) \tag{II.132}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice de monodromie. Cette matrice est centrale dans la théorie de Floquet car elle permet d'évaluer la variation de la perturbation au cours d'une période en connaissant l'état initial $\mathbf{Y}(t)$. On note que la matrice $\mathcal{M}$ n'est pas unique et dépend du choix de la matrice fondamentale $\mathbf{Y}(t)$. Il est possible de simplifier la définition (II.132) en choisissant $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}_{2n}$ comme condition initiale, on obtient alors

$$\mathbf{Y}(T) = \mathcal{M}\mathbf{Y}(0) = \mathcal{M}. \tag{II.133}$$

En supposant que la matrice de monodromie $\mathcal{M}$ est diagonalisable, on peut écrire

$$\mathcal{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \tag{II.134}$$

où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$ sont respectivement la matrice de valeurs propres et la matrice de vecteurs propres de $\mathcal{M}$. La matrice de valeurs propres $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale et peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_{2n} \end{bmatrix} \tag{II.135}$$

où les ρ_i sont appelés les multiplicateurs de Floquet. En utilisant la relation (II.134), on peut écrire l'état du système après k périodes tel que

$$\mathbf{Y}(t + kT) = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}(t). \tag{II.136}$$

En faisant le changement de variable $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} = \left[\mathbf{v}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_i(t), \ldots, \mathbf{v}_{2n}(t)\right]^\top$, cela mène à la relation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t+kT) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i(t+kT) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{2n}(t+kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^k\mathbf{v}_1(t) \\ \vdots \\ \rho_i^k\mathbf{v}_i(t) \\ \vdots \\ \rho_{2n}^k\mathbf{v}_{2n}(t) \end{bmatrix}. \tag{II.137}$$

On observe alors que l'évolution de chacune des composantes $\mathbf{v}_i$ dépend des différents multiplicateurs de Floquet ρ_i et on peut différencier trois cas :

— $\max\limits_{i\in[\![1;2n]\!]} |\rho_i| < 1$: l'amplitude de toutes les composantes de la perturbation décroît jusqu'à disparaître, la solution $\mathbf{z}^\star(t)$ est asymptotiquement stable ;

— $\max\limits_{i\in[\![1;2n]\!]} |\rho_i| > 1$: il existe au moins une composante de la perturbation qui s'amplifie avec le temps, la solution $\mathbf{z}^\star(t)$ est instable ;

— $\max\limits_{i\in[\![1;2n]\!]} |\rho_i| = 1$: la perturbation est périodique au premier ordre, il est nécessaire de faire une analyse de stabilité locale à un ordre supérieur pour statuer sur la stabilité de $\mathbf{z}^\star(t)$.

Par ailleurs, on note que les exposants de Floquet α_i et les multiplicateurs de Floquet ρ_i sont liés par la relation

$$\rho_i = \mathrm{e}^{\alpha_i T} \iff \alpha_i = \frac{1}{T}\ln(|\rho_i|) + \mathrm{i}\frac{\arg(\rho_i) + 2k\pi}{T} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{II.138}$$

Le principal défi numérique de l'analyse de stabilité est l'évaluation de la matrice de monodromie $\mathcal{M}$. En effet, une fois la matrice $\mathcal{M}$ obtenue il suffit alors de calculer ses valeurs propres ρ_i et de les examiner en vertu de leur module. Il existe plusieurs stratégies pour l'évaluation de $\mathcal{M}$, par exemple par intégration temporelle en $2n$-passes [36, 44, 46, 57, 223], par exponentielles de matrices [36, 65], par intégration temporelle simple-passe [36, 65], par l'utilisation des polynômes de Tchebychev [156] ou par une procédure d'ondelette-Galerkine [133]. On détaille dans ce manuscrit l'approche par intégration temporelle $2n$-passes dont l'utilisation est très répandue dans la littérature.

La méthode par intégration en $2n$-passes consiste à intégrer l'équation du mouvement linéarisée autour de la solution $\mathbf{z}^\star$ sur une période T pour $2n$ vecteurs de conditions initiales.

L'équation du mouvement linéarisée issue de la relation (II.126) s'exprime

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\left[\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t)\right]}_{\mathbf{C}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\left[\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(t)\right]}_{\mathbf{K}(t)} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \tag{II.139}$$

Afin de simplifier le remplissage de $\mathcal{M}$, on choisit les colonnes de la matrice identité $\mathbf{I}_{2n}$. La matrice de monodromie est alors remplie telle que

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(i)} \dots \mathbf{x}^{(2n)} \\ \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \dots \dot{\mathbf{x}}^{(i)} \dots \dot{\mathbf{x}}^{(2n)} \end{bmatrix} \tag{II.140}$$

où $\left[(\mathbf{x}^{(i)})^\top, (\dot{\mathbf{x}}^{(i)})^\top\right]^\top = \mathbf{z}^{(i)}(T)$ est le résultat de l'intégration de la i-ième colonne de la matrice de conditions initiales $\mathbf{I}_{2n}$ sur une période T. Cette approche est très précise mais requiert un grand nombre d'intégrations temporelles du système. Ceci peut s'avérer très coûteux lors de l'analyse de stabilité d'un système de grande taille. Pour intégrer cette équation du second ordre, on utilise généralement un schéma de Newmark de l'accélération moyenne — inconditionnellement stable pour des systèmes linéaires — modifié pour prendre en compte la variabilité des matrices $\mathbf{C}(t)$ et $\mathbf{K}(t)$. Pour une résolution basée sur la HBM, on note que les contributions liées aux efforts non linéaires $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(t)$ et $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t)$ sont calculées en amont de la procédure lors de l'évaluation par AFT de la matrice jacobienne HBM (voir (II.61)).

5.1.3 Méthode de Hill

Contrairement à la théorie de Floquet, la méthode de Hill fait le calcul des exposants de Floquet directement dans le domaine fréquentiel. Le formalisme adopté est analogue à celui de la méthode de l'équilibrage harmonique (section II.2.1). On considère alors une solution périodique $\mathbf{z}^\star(t)$ de l'équation (II.1) à laquelle on ajoute une perturbation $\mathbf{p}(t)$. Cette dernière est prise sous la forme d'une perturbation périodique $\mathbf{y}(t)$ modulée par une exponentielle $\mathrm{e}^{\alpha t}$ [170]. La solution perturbée s'exprime donc

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^\star(t) + \mathbf{p}(t) = \mathbf{z}^\star(t) + \mathbf{y}(t)\mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{II.141}$$

On note que l'amplitude de la perturbation est directement pilotée par la valeur de α. La méthode de Hill consiste alors à évaluer les valeurs possibles pour α afin de statuer sur la stabilité de $\mathbf{z}^\star(t)$. En injectant la perturbation (II.141) dans l'équation (II.1), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}^\star(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}^\star(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}^\star(t) + \left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y}\right]\mathrm{e}^{\alpha t} + \left[2\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y}\right]\alpha\mathrm{e}^{\alpha t} \\ + \mathbf{M}\mathbf{y}\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}^\star + \mathbf{p}, \dot{\mathbf{z}}^\star + \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{f}_{\text{ex}}(t). \end{aligned} \tag{II.142}$$

En supposant que la perturbation $\mathbf{p}(t)$ est faible, il est possible de linéariser au premier ordre le terme $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}^\star + \mathbf{p}, \dot{\mathbf{z}}^\star + \dot{\mathbf{p}})$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}^\star + \mathbf{p}, \dot{\mathbf{z}}^\star + \dot{\mathbf{p}}) &= \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}^\star, \dot{\mathbf{z}}^\star) + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\dot{\mathbf{p}} \\ &= \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{z}^\star, \dot{\mathbf{z}}^\star) + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{y}\mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\dot{\mathbf{y}}\mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\alpha\mathbf{y}\mathrm{e}^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{II.143}$$

En utilisant cette linéarisation et le fait que $\mathbf{z}^\star$ soit solution de l'équation (II.1), l'équation (II.142) devient

$$\left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\right)\dot{\mathbf{y}} + \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{z}}\right)\mathbf{y}\right] + \left[2\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} + \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\right)\mathbf{y}\right]\alpha + \mathbf{M}\mathbf{y}\alpha^2 = \mathbf{0}. \quad \text{(II.144)}$$

Comme $\mathbf{y}$ est de même périodicité que $\mathbf{z}^\star$, il est possible de l'écrire sous la forme d'une série de Fourier tronquée de façon analogue à la HBM. Ainsi, on obtient le problème quadratique aux valeurs propres

$$\left[\mathbf{\Lambda}_0 + \alpha\mathbf{\Lambda}_1 + \alpha^2\mathbf{\Lambda}_2\right]\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{(II.145)}$$

où

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{Z} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}, \quad \text{(II.146)}$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & \\ & \mathbf{\Lambda}_{1,k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{\Lambda}_{1,N_{\text{h}}} \end{bmatrix} + \mathcal{F}_n \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \overline{\mathcal{F}}_n \text{ avec } \mathbf{\Lambda}_{1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2k\omega\mathbf{M} \\ -2k\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \forall k \in [\![1; N_{\text{h}}]\!] \quad \text{(II.147)}$$

et

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad \text{(II.148)}$$

Le problème (II.145) est souvent reformulé comme un problème aux valeurs propres linéaire de taille double [55] pour faciliter sa résolution. Ce dernier admet alors $2n(2N_{\text{h}}+1)$ valeurs propres dont seulement $2n$ ont un réel sens physique. Ces $2n$ solutions α_i sont les exposants de Floquet. On retient généralement les $2n$ valeurs propres avec les plus faibles parties imaginaires en valeur absolue [117] mais il existe également un critère basé sur les vecteurs propres [103]. De façon analogue aux multiplicateurs de Floquet, une fois les exposants de Floquet connus, on différencie trois cas de figure pour la stabilité au sens de Hill de $\mathbf{z}^\star(t)$:

— $\max_{i \in [\![1;2n]\!]} \Re(\alpha_i) < 0$: l'amplitude de toutes les composantes de la perturbation décroît jusqu'à disparaître, la solution $\mathbf{z}^\star(t)$ est asymptotiquement stable ;

— $\max_{i \in [\![1;2n]\!]} \Re(\alpha_i) > 0$: il existe au moins une composante de la perturbation qui s'amplifie avec le temps, la solution $\mathbf{z}^\star(t)$ est instable ;

— $\max_{i \in [\![1;2n]\!]} \Re(\alpha_i) = 0$: la perturbation est périodique au premier ordre, il est nécessaire de faire une analyse de stabilité locale à un ordre supérieur pour statuer sur la stabilité de $\mathbf{z}^\star(t)$.

La méthode de Hill permet l'évaluation de la stabilité locale de solutions exprimées dans le domaine fréquentiel ce qui la rend particulièrement adaptée pour une utilisation couplée à la HBM. Cependant, sa précision est dépendante du problème traité et de la procédure de tri des valeurs propres adoptée [206, 213, 131]. Même si le calcul de la matrice de monodromie est généralement préféré à l'utilisation de la méthode de Hill dans la littérature, il a été montré que la méthode de Hill converge plus rapidement sur certaines applications hautement non linéaires [44].

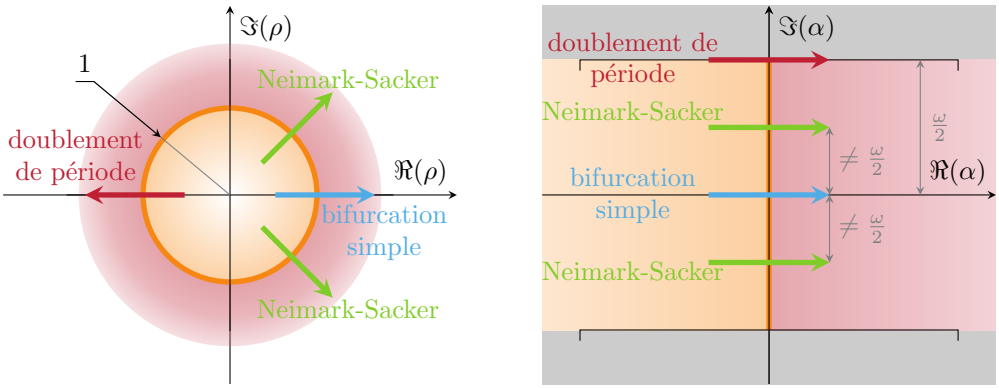
5.2 Bifurcations

La notion de bifurcation fait référence à un changement qualitatif (périodicité, nombre de solutions, stabilité...) dans le comportement d'un système dynamique sous la variation d'un ou plusieurs paramètres. Une bifurcation apparaissant sous la variation de m paramètres est appelée bifurcation de co-dimension m. Dans ce travail, on observera seulement des bifurcations de co-dimension 1 où le paramètre de bifurcation est la pulsation fondamentale de la réponse ω.

La détection des points de bifurcation est étroitement liée à l'étude de stabilité du système. En effet, chaque type de bifurcation se caractérise par un comportement particulier de ses multiplicateurs de Floquet (ou de ses exposants de Floquet). L'étude des bifurcations n'étant pas au centre des travaux de ce manuscrit, on présente dans cette section uniquement les résultats liés aux types de bifurcations usuellement rencontrées en dynamique des structures non linéaires. Pour plus de détails, on pourra se référer aux ouvrages de référence sur le sujet [191, 193, 198].

5.2.1 Bifurcations locales de solutions périodiques

On détaille dans cette section, les types de bifurcations des solutions périodiques souvent rencontrées dans le cadre de la dynamique des structures non linéaire. Les points de bifurcation sont généralement associés à une perte de stabilité du système lorsqu'on fait varier le paramètre de bifurcation, ici ω. Afin de déterminer le type d'une bifurcation, on examine comment cette perte de stabilité se produit en analysant ses multiplicateurs (ou exposants) de Floquet. Dans le plan des multiplicateurs de Floquet, la stabilité est perdue lorsqu'un multiplicateur traverse le cercle unité. Selon l'endroit sur le cercle où le multiplicateur traverse le cercle, on est confronté à un type différent de bifurcation, comme représenté sur la figure II.9a. De façon analogue, dans le plan des exposants de Floquet, la stabilité est perdue lorsqu'un exposant traverse l'axe imaginaire et on peut déduire le type de bifurcation grâce à la localisation de la traversée de l'axe par l'exposant, voir figure II.9b.



(a) multiplicateurs de Floquet (b) exposants de Floquet

FIGURE II.9 – Bifurcations des solutions périodiques, limite de stabilité (—), zone stable (▭), zone instable (▭), les crochets délimitent la cellule primitive $]-\frac{\omega}{2};\frac{\omega}{2}]$, adaptée de [206, 229].

On propose de détailler les propriétés de chacun des types de bifurcation représentés sur la figure II.9.

Bifurcation simple La bifurcation simple est caractérisée par le fait qu'un multiplicateur de Floquet sorte du cercle unité sur l'axe réel en $(1\,;\,0)$. Ceci se traduit également par une sortie du domaine stable sur l'axe réel en $(0\,;\,0)$ pour les exposants de Floquet. On note la

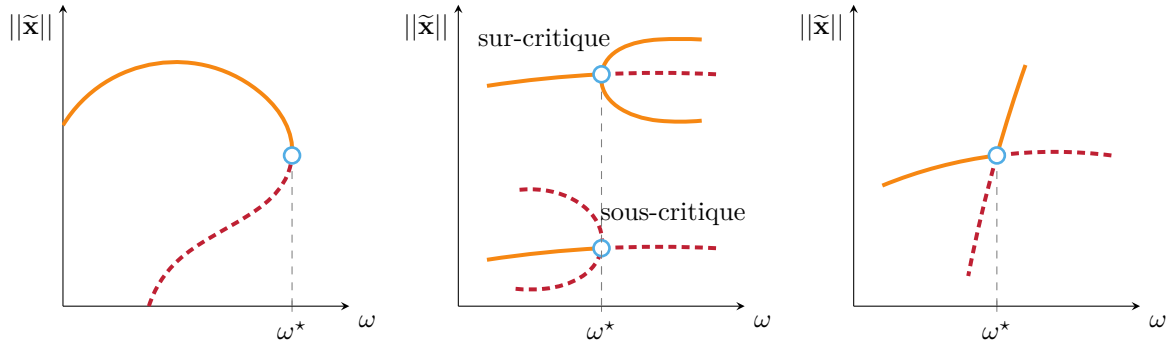
valeur critique — valeur à laquelle la bifurcation a lieu — du paramètre de bifurcation $\omega^\star$. Par ailleurs, la bifurcation simple englobe plusieurs sous-types de bifurcations et notamment les typologies suivantes :

— point limite (*cyclic fold* en anglais), voir figure II.10a : Ce point correspond à l'apparition d'un tangente verticale sur la courbe de réponse, d'où le fait qu'il soit usuellement appelé point de retournement ;

— fourche (*branch point* ou *pitchfork* en anglais), voir figure II.10b : ce type de bifurcation est associé à la perte de stabilité d'une branche, pour (1) donner naissance à une branche stable dans le cas sur-critique ou (2) donner naissance à une branche instable dans le cas sous-critique ;

— transcritique, voir figure II.10c : deux branches de solutions échangent leur stabilité en se croisant.

Ces bifurcations sont qualifiées de statiques ou stationnaires car le régime dynamique des solutions n'est pas affecté.



(a) limite (b) fourche (c) transcritique

FIGURE II.10 – Bifurcations simples, point de bifurcation simple (○), stable (—), instable (- -), adaptée de [206, 57].

Bifurcation de Neimark-Sacker Les bifurcations de Neimark-Sacker surviennent lorsqu'un couple de multiplicateurs de Floquet complexes conjugués traverse le cercle unité autre part qu'en $(\pm 1\,;\,0)$. Une bifurcation de type Neimark-Sacker est aussi appelée bifurcation de Hopf secondaire. La périodicité de la branche émanant d'une bifurcation Neimark-Sacker dépend de la pulsation ω_i de la branche courante et ω_j la pulsation associée à la bifurcation. Si ω_i et ω_j sont commensurables (*i.e.* $\frac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{Q}$), alors une branche périodique naît et sa période minimale est la plus petite période commune aux deux contributions harmoniques associées aux pulsations ω_i et ω_j. Sinon, une branche de solutions quasi-périodiques naît où on observe des contributions de ω_i et ω_j à la fois.

Bifurcation de doublement de période Une bifurcation de type doublement de période (*flip* ou *period doubling* en anglais) est associée à une sortie d'un couple de multiplicateurs de Floquet complexe conjugués du cercle unité par le point $(-1\,;\,0)$. Cette bifurcation donne naissance à une branche de période doublée, donc de fréquence fondamentale $\frac{\omega}{2}$. Il est possible de trouver ces bifurcations en cascade menant à un régime chaotique par doublement successif de la période fondamentale.

De façon analogue aux bifurcations d'embranchement, on doit distinguer le cas sur-critique du cas sous-critique pour les bifurcations de Neimark-Sacker et de doublement de période. De

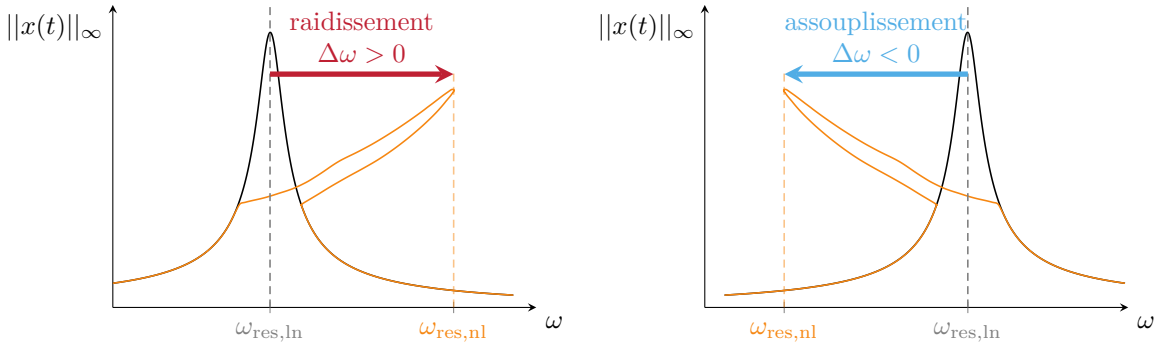
plus, ces dernières sont qualifiées de bifurcations dynamiques car elles s'accompagnent d'une modification du contenu dynamique de la réponse.

5.3 Résonances non linéaires

Pour un système linéaire, la résonance se caractérise par le fait que l'amplitude vibratoire soit maximale. Ce phénomène est causé par la forme de la fonction de transfert fréquentielle du système. En analysant cette fonction, on peut déduire la fréquence dite de résonance d'un système mécanique. Dans un formalisme non linéaire, cette caractéristique des courbes de réponse en fréquence est largement impactée par la présence de non-linéarités. On propose d'énumérer les propriétés des différentes résonances non linéaires dans cette section.

5.3.1 Résonance principale

De manière générale, les réponses non linéaires se différencient des réponses linéaires par l'apparition d'une relation de dépendance entre l'amplitude de la résonance et la fréquence de résonance associée. De la même manière que pour les systèmes linéaires, la résonance non linéaire correspond à la configuration pour laquelle l'amplitude vibratoire est maximale. On distingue généralement deux cas lorsqu'on observe ces résonances non linéaires. Premièrement, on dit que la résonance est raidie dans le cas où la fréquence de résonance non linéaire est plus importante que la fréquence de résonance linéaire associée, *i.e.* $\Delta\omega = \omega_{\text{res,nl}} - \omega_{\text{res,ln}} > 0$, voir figure II.11a. Au contraire, la résonance est dite assouplie lorsque la fréquence de résonance non linéaire est plus faible que la fréquence de résonance linéaire, *i.e.* $\Delta\omega = \omega_{\text{res,nl}} - \omega_{\text{res,ln}} < 0$, voir figure II.11b. Cette terminologie provient du fait qu'une augmentation (resp. diminution) de la raideur de la structure mène à une augmentation (resp. diminution) de ses fréquences propres. Les résonances représentées sur la figure II.11 sont dites principales car elles sont associées à une résonance linéaire autour de la pulsation $\omega_{\text{res,ln}}$.



(a) résonance raidie (b) résonance assouplie

FIGURE II.11 – Résonances non linéaires principales.

5.3.2 Résonances secondaires

Lorsqu'on s'intéresse à des systèmes non linéaires, les réponses dynamiques font intervenir des fréquences ayant une relation de multiplicité avec la fréquence fondamentale de réponse ω. Une résonance secondaire peut apparaître lorsque les composantes fréquentielles de la réponse dynamique coïncident avec certaines fréquences propres du système. Comme on se place dans un cadre non linéaire, les fréquences propres du système ω_i varient avec l'amplitude de sa réponse. Ainsi, des relations de (quasi-)commensurabilité entre des composantes fréquentielles

de la réponse et certaines fréquences propres peuvent apparaître ou disparaître en fonction du niveau vibratoire. On distingue alors le cas des résonances sous-harmoniques des résonances sur-harmoniques selon la relation de quasi-commensurabilité mise en jeu.

Résonances sous-harmoniques On parle de résonance sous-harmonique lorsqu'une fréquence propre du système et la pulsation fondamentale de la réponse respectent la relation

$$\exists i \in [\![1;n]\!],\ \exists p \in \mathbb{N} \quad \omega \simeq p\omega_i. \tag{II.149}$$

Ces résonances sous-harmoniques sont observables numériquement par des méthodes fréquentielles, comme la méthode de l'équilibrage harmonique, en considérant une fréquence fondamentale de résolution de la forme $\frac{\omega}{p}$.

Résonances sur-harmoniques Au contraire, les résonances sur-harmoniques correspondent à la relation

$$\exists i \in [\![1;n]\!],\ \exists p \in \mathbb{N} \quad \omega \simeq \frac{\omega_i}{p}. \tag{II.150}$$

La méthode de l'équilibrage harmonique n'a aucun problème à détecter ces résonances si le p-ième harmonique est dans la décomposition de Fourier. Ces résonances traduisent ici une relation de quasi-commensurabilité entre un harmonique de la réponse et un mode de la structure, ce qui excite naturellement le mode concerné et génère donc une résonance secondaire.

Une fois ces résonances obtenues, le mode et l'harmonique responsables de leur apparition sont aisément identifiés en examinant le contenu harmonique et modal de la réponse. Ces résonances ne font cependant intervenir qu'une seule fréquence propre de la structure. En pratique, il existe des cas de figure où plusieurs fréquences sont impliquées.

5.3.3 Résonances internes

Les résonances internes, résonances auto-paramétriques ou encore interactions modales non linéaires, sont des résonances particulières qui interviennent lorsque les fréquences propres d'un système vérifient une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} m_i\omega_i = 0 \quad m_i \in \mathbb{Z} \tag{II.151}$$

où r est le nombre de modes impliqués dans la résonance interne. Les mécanismes qui engendrent ces résonances sont intrinsèquement non linéaires et ont été explicités mathématiquement dans la littérature [195]. Néanmoins, la caractérisation de ces résonances est délicate car il est complexe de prédire comment évoluent de façon conjuguée l'ensemble des ω_i en fonction de l'amplitude vibratoire. Des études numériques ont cependant été menées pour calculer les résonances internes en présence de non-linéarités géométriques sur des poutres élancées [143], plaques [144] et aubes élancées [57].

5.4 Isolats

La caractérisation de systèmes non linéaires permet la mise en évidence de branches de solutions isolées, aussi appelées isolats, sur des modèles phénoménologiques [20, 28, 38, 55, 56, 71, 211, 148] ainsi que des configurations industrielles [206, 67, 78, 135, 166]. Ces branches sont d'une importance capitale car il a été montré qu'elles peuvent contenir des solutions d'amplitudes plus importantes que la résonance non linéaire principale à la fois numériquement [110, 136, 166] et expérimentalement [56]. On parle alors de résonances non linéaires isolées. Les branches

isolées ne sont pas nécessairement de la même périodicité que la courbe de réponse principale et peuvent être sur-harmoniques ou sous-harmoniques. Il est courant d'observer des branches de solutions de période doublée (voire quadruplée, octuplée...) pouvant être issues de bifurcations de doublement de période de co-dimension m avec $m > 1$.

De manière générale, les caractéristiques ainsi que la localisation dans l'espace de résolution des solutions isolées n'est pas connue par avance. Ceci complique fortement leur recherche et il est nécessaire de recourir à des techniques de calcul numérique avancées comme l'homotopie [150], les bases de Gröbner [211], le suivi de bifurcations [55, 173], la méthode de terrain globale [78] ou encore le critère énergétique de Melnikov [38]. Le chapitre V de ce manuscrit est consacré à l'évaluation de certaines de ces méthodologies et contient plus de détails sur la mise en œuvre de ces stratégies.

Chapitre III

Algorithmes de gestion du contact

Ce chapitre présente les adaptations à mettre en œuvre sur les stratégies de résolution des systèmes différentiels non linéaires décrites dans le chapitre II pour leur application au contact. En effet, de nombreux défis apparaissent lorsqu'on traite des non-linéarités non régulières. On fournit tout d'abord quelques éléments concernant les lois de pénalité, qui lèvent les contraintes inégalitaires du problème de contact, ce qui permet d'utiliser directement les stratégies du chapitre précédent. On souligne ensuite les aspects pratiques de l'implémentation des méthodologies de résolution numérique des problèmes de contact. Dans un premier temps pour les méthodologies dont la gestion du contact est basée sur une formulation en déplacements, puis pour les méthodologies prenant directement en compte la physique d'impact grâce à des formulations en vitesses.

Sommaire du chapitre

1 Gestion du contact par pénalité **76**
1.1 Contact normal . . . 76
1.2 Lois de frottement . . . 77
1.3 RL-HBM . . . 78
2 Gestion des contraintes en déplacements **80**
2.1 Algorithme de Carpenter . . . 82
2.2 DLFT-HBM . . . 83
2.3 LCP-HBM . . . 91
3 Gestion des contraintes en vitesses **95**
3.1 Loi d'impact . . . 95
3.2 Algorithme de Schatzman-Paoli . . . 97
3.3 Algorithme de Moreau-Jean . . . 98

Les stratégies de résolution des systèmes différentiels non linéaires présentées dans le chapitre II sont génériques et il convient de les adapter pour le traitement des non-linéarités de contact. En effet, étant donné la nature non régulière des solutions des problèmes de contact, *i.e.* non continûment dérivable, certaines difficultés apparaissent lors du traitement numérique des problèmes de contact. La difficulté principale réside dans le fait que le comportement des systèmes en contact est composé de phases distinctes : contact ou séparation dans la direction normale et adhérence ou glissement dans le plan tangent. Premièrement, la détection des instants de transition peut poser problème. Deuxièmement, le changement brutal de comportement aux instants de transition est responsable de la discontinuité des vitesses et accélérations, ce qui implique la non-dérivabilité de ces grandeurs à ces instants. Ce chapitre

a pour objectif d'expliciter comment cette phénoménologie doit être prise en compte dans la résolution numérique du problème différentiel associé. Dans un premier temps, les lois de pénalité utilisées pour remédier à ces problèmes sont présentées dans la section III.1. Les aspects pratiques liés aux algorithmes de gestion du contact usuellement utilisés sont explicités, d'abord pour les formulations en déplacements dans la section III.2 puis pour les formulations en vitesses dans la section III.3. On se concentre ici simplement sur la direction normale de contact qui permet de modéliser le contact unilatéral. Les directions tangentielles, modélisant le frottement, ne sont évoquées que dans la section III.1 où la loi de frottement de Coulomb est régularisée.

1 Gestion du contact par pénalité

Comme mentionné dans la section I.4, plusieurs algorithmes de gestion du contact existent pour prendre en compte le contact unilatéral et le frottement de Coulomb. Numériquement, la gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange et par lagrangiens augmentés requièrent l'utilisation de stratégies dédiées. En revanche, comme la gestion du contact par pénalité lève les contraintes liées au contact en donnant une expression analytique aux efforts de contact, il est possible d'utiliser directement les techniques de résolution du chapitre II. Dans cette partie, on explicite différentes versions de la gestion du contact par pénalité.

1.1 Contact normal

La loi de pénalité avec l'expression la plus simple est la loi bilinéaire. Elle permet de représenter la transition entre l'état séparé et l'état de contact par la non-dérivabilité en $g = 0$ tout en assurant que l'effort de contact puisse être calculé directement en fonction du champ de déplacements. Ce faisant, l'effort de contact n'est plus une inconnue mais une fonction non régulière du champ de déplacements $\mathbf{x}(t)$. La loi de contact obtenue est tracée sur la figure III.1a. Cette loi autorise une certaine pénétration (*i.e.* $g < 0$) qui tend vers zéro lorsque le coefficient de pénalité κ tend vers l'infini, ce qui modélise asymptotiquement une loi de contact unilatéral. Elle s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) = 0 & \text{si } g(t) > 0, \\ f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) = -\kappa g(t) & \text{si } g(t) \leq 0. \end{cases} \tag{III.1}$$

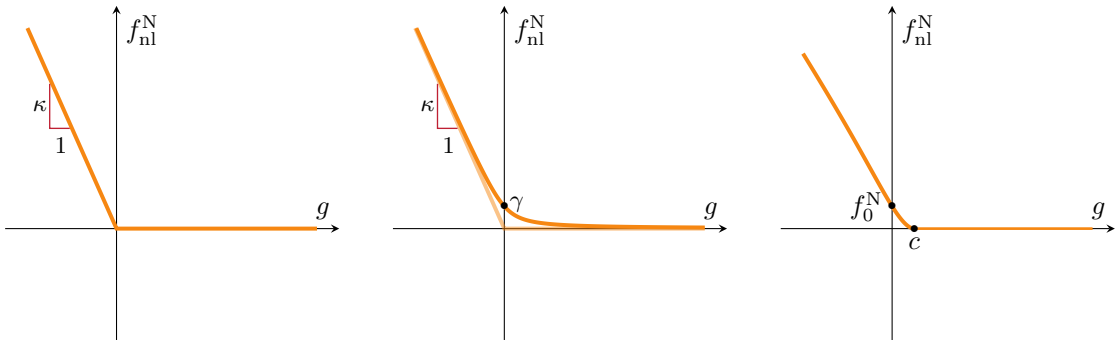
Cependant, comme cette loi présente toujours une non-dérivabilité en $g = 0$, elle peut demeurer trop contraignante dans certaines applications [43, 172]. Pour s'affranchir de cette difficulté, il est possible d'adoucir la portion non dérivable de la courbe en utilisant un coefficient de régularisation γ [43, 172]. L'expression (III.2) fournit une version adoucie de la loi de pénalité bilinéaire, cependant la régularité de la loi a inévitablement un impact sur les solutions numériques du problème. En effet, il est important de conserver γ relativement faible pour ne pas dénaturer complètement la phénoménologie de contact simulée. Sur la figure III.1b, on observe qu'on retrouve la loi de pénalité bilinéaire (III.1) pour le cas particulier $\gamma = 0$. En augmentant γ on régularise la non-dérivabilité mais cela conduit à détériorer le respect des conditions de contact car $f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \neq 0$ alors que $g > 0$. La loi régularisée se caractérise par la relation

$$f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) = -\kappa \frac{g(t)}{2} + \sqrt{\left(\kappa \frac{g(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}. \tag{III.2}$$

Par ailleurs, il existe d'autres lois régularisées telles que la loi exponentielle (III.3). Il s'agit d'une loi utilisée dans les éléments de contact dits adoucis du logiciel ABAQUS, sur lequel

reposent certains travaux de recherche [146]. Elle est définie par deux paramètres numériques qui permettent de piloter l'emplacement des points $(0;c)$ et $(f_{\mathrm{N}}^0;0)$ par lesquels passe la loi, cette dernière est illustrée sur la figure III.1c et son expression est

$$\begin{cases} f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) = 0 & \text{si } g(t) > c, \\ f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) = \dfrac{f_{\mathrm{N}}^0}{\exp(1)-1}\left[\left(1-\dfrac{g(t)}{c}\right)\left(\exp\left(1-\dfrac{g(t)}{c}\right)-1\right)\right] & \text{si } g(t) \leq c. \end{cases} \tag{III.3}$$



(a) Loi de pénalité (b) Loi de pénalité régularisée, $\gamma = 0$ (—), $\gamma = 0{,}1$ (—) (c) Loi exponentielle

FIGURE III.1 – Lois de contact numériques.

1.2 Lois de frottement

Dans le cadre d'un contact entre des structures tridimensionnelles, il faut généralement tenir compte des efforts de frottement. Le frottement a lieu dans le plan tangent à l'interface, correspondant aux directions T1 et T2. Les grandeurs vectorielles tangentes s'écrivent alors $\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T1}} \\ v_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T2}} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T1}} \\ f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T2}} \end{bmatrix}$. On peut récapituler les différents états de frottement associés à la loi de Coulomb par les conditions

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} & \text{si } \left\|\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}}\right\| < \mu \left|f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}\right| \text{ (adhérence)}, \\ \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}} = \mu f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \cdot \dfrac{\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\|} & \text{si } \left\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right\| \neq 0 \quad \text{(glissement)}, \\ \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} & \text{si } g \neq 0 \quad \text{(séparation)}. \end{cases} \tag{III.4}$$

Cette loi est non régulière et peut être délicate à modéliser numériquement du fait de l'indétermination de l'effort de frottement tangent $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}}$ lorsque les structures sont en adhérence ($\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$). Ainsi, il est possible de recourir à une expression régularisée de la loi en vitesses afin d'approcher la loi de frottement idéale. La fonction tangente hyperbolique se prête bien à l'approximation de la fonction signe et est donc naturellement souvent utilisée pour simplifier le calcul des efforts de frottement par l'expression

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \mu f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \tanh\left(\dfrac{\left\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right\|}{\varepsilon}\right) \cdot \dfrac{\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\|} & \text{si } \left\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right\| \neq 0, \\ \mathbf{0} & \text{si } \left\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right\| = 0, \end{cases} \tag{III.5}$$

où ε est le paramètre de régularisation de la loi, dont la valeur pilote l'adoucissement de la courbe tangente hyperbolique. En pratique, cette loi n'autorise pas d'adhérence parfaite car le seul point de vitesse relative nulle $\left\|\mathbf{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right\| = 0$ correspond à un effort de frottement nul $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$. On note que lorsque le paramètre de régularisation ε tend vers zéro, la loi régularisée tend vers la loi de Coulomb. La loi régularisée ainsi que la loi de Coulomb sont représentées sur la figure III.2 en considérant, à des fins de représentation, que le frottement est unidirectionnel dans la direction T1 (*i.e.* $v_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T2}} = 0$). D'autres approximations de la loi de frottement de Coulomb existent, comme le modèle utilisant une raideur de pénalité [137] levant également l'indetermination de l'effort dans l'état adhérent. Par ailleurs, lorsque les corps en contact sont sujets à des vitesses relatives importantes, il est courant de faire l'hypothèse de frottement glissant permanent [206, 166] afin de lever l'indétermination de l'effort de contact par une hypothèse physique.

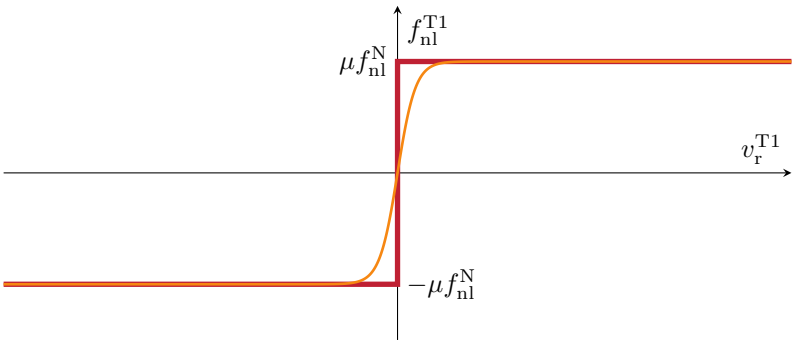


FIGURE III.2 – Lois de frottement, tangente hyperbolique (—), frottement de Coulomb (—).

Le frottement est un phénomène très largement étudié en dynamique des structures, par exemple sur des applications comme le frottement entre une roue et un rail [22], les vibrations induites par le frottement d'un frein [66, 157] ou encore le frottement en pied de pale dans un disque de turbomachine [211, 215, 120].

1.3 RL-HBM

La stratégie RL-HBM [206] (pour *Regularized-Lanczos Harmonic Balance Method*) est une méthode de résolution du problème de contact par HBM s'appuyant sur une loi de pénalité régularisée ainsi qu'une phase de filtrage des efforts de contact. En préambule de l'utilisation de cette stratégie, on applique la procédure de condensation des degrés de liberté linéaires présentée dans la section II.2.1.5.

1.3.1 Calcul des efforts de contact

La loi de pénalité utilisée est la loi de régularisation polynomiale (III.2) représentée sur la figure III.1b. Deux paramètres numériques sont associés à cette loi : κ la raideur de pénalité et γ le coefficient de régularisation. Son expression est liée aux grandeurs de la j-ième contrainte de contact et s'écrit

$$f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}(t) = -\kappa\frac{g^j(t)}{2} + \sqrt{\left(\kappa\frac{g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}. \tag{III.6}$$

Comme mentionné dans la section III.1, comme l'expression des efforts est une fonction analytique de la fonction du jeu — donc des déplacements — , cette non-linéarité peut être traitée directement par AFT.

Les efforts de contact sont particulièrement sujets au phénomène de Gibbs. Ce phénomène se matérialise par le fait que l'erreur associée à l'approximation d'un signal non régulier par

une série de Fourier ne tend pas vers zéro lorsque l'ordre de la série tend vers l'infini. Pour atténuer cet effet, la stratégie RL-HBM procède à un filtrage des efforts de contact par un filtre de Lanczos. Filtrer les efforts de contact revient à pondérer la représentation en série de Fourier de $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ par des coefficients σ_k tel que

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \simeq \frac{1}{2}\mathbf{a}_0^{\mathrm{nl}} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{h}}} \sigma_k \left(\mathbf{a}_k^{\mathrm{nl}} \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k^{\mathrm{nl}} \sin(k\omega t) \right) \tag{III.7}$$

où les σ_k correspondent aux coefficients d'un filtre de Lanczos, définis par

$$\sigma_k = \mathrm{sinc}(\chi_k) = \frac{\sin(\chi_k)}{\chi_k} \quad \text{avec} \quad \chi_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 0, \\ \dfrac{k}{N_{\mathrm{h}} + 1} & \text{pour } 1 \leq k \leq N_{\mathrm{h}}. \end{cases} \tag{III.8}$$

On note que le choix du filtrage n'est pas restreint au filtre de Lanczos, cependant c'est le filtre qui a montré le meilleur compromis entre atténuation du phénomène de Gibbs et fidélité des efforts de contact [206]. En pratique, le filtrage peut être intégré dans une matrice de transformée de Fourier directe filtrée $\mathcal{F}_1^{\mathrm{f}}$ en introduisant les coefficients σ_k dans la base utilisée pour la construire. On définit la base filtrée $\mathbf{A}_{N_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{f}}$ associée à la transformée directe telle que

$$\mathbf{A}_{N_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{f}}(t) = \left[1, \sigma_1 \cos(\omega t), \sigma_1 \sin(\omega t), \ldots, \sigma_k \cos(k\omega t), \sigma_k \sin(k\omega t), \ldots, \sigma_{N_{\mathrm{h}}} \cos(N_{\mathrm{h}}\omega t), \sigma_{N_{\mathrm{h}}} \sin(N_{\mathrm{h}}\omega t)\right]. \tag{III.9}$$

En utilisant cette base, on peut construire la matrice de DFT filtrée $\mathcal{F}_1^{\mathrm{f}}$ de sorte que

$$\mathcal{F}_1^{\mathrm{f}} = \frac{2}{N_{\mathrm{t}}} \left[\mathbf{A}_{N_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{f}}(t_1) | \ldots | \mathbf{A}_{N_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{f}}(t_i) | \ldots | \mathbf{A}_{N_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{f}}(t_{N_{\mathrm{t}}}) \right]. \tag{III.10}$$

En calculant la matrice de Fourier filtrée $\mathcal{F}_1^{\mathrm{f}}$ en amont du calcul itératif, aucun calcul supplémentaire n'est requis lors de la résolution du problème.

1.3.2 Calcul de la matrice jacobienne

Pour pouvoir procéder à la résolution du problème RL-HBM, il est nécessaire de calculer la matrice jacobienne du système $\mathcal{J}^{\mathrm{RL}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{red}} + \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}}$ à chaque itération. Il convient donc de calculer le terme $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}}$ associé aux efforts non linéaires calculés par la loi régularisée (III.6). Pour rappel, la matrice jacobienne des efforts non linéaires peut se calculer par AFT telle que

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}} = \mathcal{F}_{n_{\mathrm{nl}}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{red}}} \overline{\mathcal{F}}_{n_{\mathrm{nl}}}. \tag{III.11}$$

Ainsi, il suffit de calculer analytiquement le terme $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{red}}}$. On détaille ici son lorsque la fonction de jeu utilisée $g^j(t)$ correspond au contact d'une structure avec un obstacle rigide. Dans cette configuration, la fonction de jeu est définie par

$$g^j(t) = g_0^j(t) - x_{\mathrm{red}}^j(t) \tag{III.12}$$

où $x_{\mathrm{red}}^j(t)$ est le déplacement du j-ième nœud non linéaire et $g_0^j(t)$ le jeu initial associé à la j-ième contrainte de contact. En utilisant l'équation (III.12), on peut aisément calculer le terme

de la matrice jacobienne associé à la j-ième contrainte de contact $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}}(t)$ par la relation

$$\frac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}}(t) = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2 g^j(t)}{4\sqrt{\left(\kappa\dfrac{g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}}. \tag{III.13}$$

Comme l'effort de contact à un instant ne dépend que du champ de déplacements à ce même instant, le terme $\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}}$ est diagonal et

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}} = \mathrm{diag}\left[\frac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}}(t_1), \ldots, \frac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}}(t_{N_\mathrm{t}})\right]. \tag{III.14}$$

De plus, le j-ième effort de contact $\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}$ ne dépend que du j-ième déplacement x_{red}^{j}. Pour complètement définir la matrice $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}}$, il suffit donc de calculer les blocs

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}^{j}} = \mathcal{F}_1^{\mathrm{f}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x_{\mathrm{red}}^{j}} \overline{\mathcal{F}}_1 \quad \forall j \in [\![1; m]\!]. \tag{III.15}$$

Finalement, on insère chacun des blocs $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}^{j}}$ dans la matrice globale $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}}$. Par ailleurs, comme les efforts de contact ne dépendent pas directement de ω, le calcul du gradient du système RL-HBM par rapport à ω est direct :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\mathrm{red}}^{\mathrm{RL}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} - \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{ex,red}}}{\partial \omega}. \tag{III.16}$$

On rappelle l'ensemble des étapes algorithmiques nécessaires à la mise en œuvre de la stratégie dans l'algorithme III.1, incluant le calcul de la matrice jacobienne (sans continuation).

2 Gestion des contraintes en déplacements

Dans cette section, on présente les stratégies qui reposent sur une gestion des contraintes de contact au niveau des déplacements, c'est-à-dire en garantissant le respect des contraintes de Hertz-Signorini-Moreau se formulant telles que

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g} \perp \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \geq \mathbf{0}. \tag{III.17}$$

Tout d'abord, l'algorithme d'intégration temporelle de Carpenter [37], s'appuyant sur des multiplicateurs de Lagrange, est détaillé dans la section III.2.1. La DLFT-HBM [120] est explicitée par la suite, cette stratégie est une extension de la stratégie HBM couplée à une AFT qui utilise un formalisme de lagrangiens augmentés pour gérer les contraintes de contact. Finalement, on explicite dans la section III.2.3 la stratégie LCP-HBM [113] qui tire parti de l'expression des contraintes de contact unilatéral (III.17) en basant la recherche d'une solution sur la résolution d'un problème de complémentarité linéaire, dont le formalisme mathématique est présenté dans la section III.2.3.1.

Algorithme III.1 : Algorithme RL-HBM

données : $\mathbf{Z}_{\text{red}}$, $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}}$, $\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{r}}^{0}$, κ, $\mathbf{g}_0$, m, $\mathcal{F}_1^{\text{f}}$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, δ, `ajout_effort`$(\bullet,\bullet,\bullet)$, `ajout_jacobienne`$(\bullet,\bullet,\bullet)$

▷ **initialisation**

$\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{r}}^{k} \leftarrow \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{r}}^{0} \quad \mathcal{H}_{\text{red}}^{\text{RL},k} \leftarrow \mathbf{Z}_{\text{red}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{k} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}} \quad k \leftarrow 0$

tant que $\left\|\mathcal{H}_{\text{red}}^{\text{RL},k}\right\| > \delta$ **faire** ▷ **boucle de Newton-Raphson**

▷ **initialisation des efforts et de la matrice jacobienne**

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k} \leftarrow \mathbf{0} \qquad \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}} \leftarrow \mathbf{0}$

▷ **calcul des efforts et des matrices jacobiennes des efforts de contact**

pour $j \leftarrow 1$ **à** m **faire** ▷ **boucle sur les nœuds de contact**

▷ **calcul du déplacement dans le domaine temporel**

$\mathbf{x}_{\text{red}}^{j,k} \leftarrow \overline{\mathcal{F}}_1 \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{j,k}$

▷ **calcul du jeu**

$\mathbf{g}^{j,k} \leftarrow \mathbf{g}_0^{j} - \mathbf{x}_{\text{red}}^{j,k}$ ▷ $\mathbf{g}^{j,k} = [g^{j,k}(t_1), \ldots, g^{j,k}(t_{N_\mathbf{t}})] \in \mathbb{R}^{N_\mathbf{t}}$

▷ **calcul de l'effort**

$$\mathbf{f}_{\text{nl},j}^{\text{N},k} \leftarrow -\kappa\frac{\mathbf{g}^{j,k}}{2} + \sqrt{\left(\kappa\frac{\mathbf{g}^{j,k}}{2}\right)^2 + \gamma^2}$$

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},j}^{\text{N},k} \leftarrow \mathcal{F}_1^{\text{f}} \mathbf{f}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}$

▷ **calcul de la matrice jacobienne des efforts de contact**

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}}{\partial x_{\text{red}}^{j}} \leftarrow \text{diag}\left[\frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2 \mathbf{g}^{j,k}}{4\sqrt{\left(\kappa\frac{\mathbf{g}^{j,k}}{2}\right)^2 + \gamma^2}}\right]$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{j}} \leftarrow \mathcal{F}_1^{\text{f}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}}{\partial x_{\text{red}}^{j}} \overline{\mathcal{F}}_1$$

▷ **ajout de l'effort du j-ième nœud de contact au vecteur complet**

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k} \leftarrow$ `ajout_effort` $\left(\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k}, \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}, j\right)$

▷ **ajout de la matrice jacobienne de l'effort du j-ième nœud de contact à la matrice jacobienne globale**

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}} \leftarrow \texttt{ajout_jacobienne}\left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}}, \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl},j}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{j}}, j\right)$$

$j \leftarrow j + 1$

▷ **calcul du résidu et de la matrice jacobienne**

$$\mathcal{H}_{\text{red}}^{\text{RL},k} \leftarrow \mathbf{Z}_{\text{red}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{k} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}} \qquad \mathcal{J}^{\text{RL},k} \leftarrow \mathbf{Z}_{\text{red}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}}$$

▷ **correction de Newton-Raphson**

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{k+1} = \widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}^{k} - \left(\mathcal{J}^{\text{RL},k}\right)^{-1} \mathcal{H}_{\text{red}}^{\text{RL},k} \qquad k \leftarrow k + 1$$

2.1 Algorithme de Carpenter

L'algorithme de Carpenter [37] est un algorithme d'intégration temporelle explicite reposant sur une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange, respectant ainsi strictement les conditions de contact unilatéral. Cet algorithme utilise un schéma d'intégration de différences finies centrées. IL fait partie de la famille des schémas de Newmark présentés dans la section II.1.2.2, ses paramètres sont $(\beta;\gamma) = \left(0;\frac{1}{2}\right)$ et il se simplifie tel que

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}+\frac{\mathbf{C}}{2h}\right]\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_{\text{ex},k} + \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2}-\mathbf{K}\right]\mathbf{x}_k - \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}-\frac{\mathbf{C}}{2h}\right]\mathbf{x}_{k-1}. \tag{III.18}$$

Pour faire respecter les contraintes de contact, l'algorithme met en œuvre une procédure de prédiction-correction. Le déplacement prédit au $(k+1)$-ième instant $\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1}$ est calculé grâce à l'équation

$$\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}+\frac{\mathbf{C}}{2h}\right]^{-1}\left(\mathbf{f}_{\text{ex},k} + \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2}-\mathbf{K}\right]\mathbf{x}_k - \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}-\frac{\mathbf{C}}{2h}\right]\mathbf{x}_{k-1}\right) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_k \tag{III.19}$$

où on identifie

$$\hat{\mathbf{M}} = \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}+\frac{\mathbf{C}}{2h}\right] \text{ et } \tilde{\mathbf{f}}_k = \mathbf{f}_{\text{ex},k} + \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2}-\mathbf{K}\right]\mathbf{x}_k - \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2}-\frac{\mathbf{C}}{2h}\right]\mathbf{x}_{k-1}. \tag{III.20}$$

Pour statuer sur l'état de contact du système, on utilise la fonction jeu $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{c}_{\text{N}}^\top\mathbf{x}_k + \mathbf{g}_{0,k}$, où $\mathbf{g}_{0,k}$ est le jeu entre les structures non déformées au k-ième pas de temps. On peut alors associer un jeu prédit $\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1}$ à la prédiction en déplacements $\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1}$ tel que $\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1} = \mathbf{c}_{\text{N}}^\top\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} + \mathbf{g}_{0,k+1}$. Si le jeu prédit est négatif, il convient d'appliquer un correction au système pour corriger la pénétration prédite et assurer que la contrainte de non-interpénétration soit respectée, soit $\mathbf{g}_{k+1} = 0$. Celle-ci se traduit par un effort de correction $\mathbf{f}^{\text{c}}_{k+1}$ qui induit un déplacement de correction $\mathbf{x}^{\text{c}}_{k+1}$. Ces corrections sont calculées en imposant $g^j_{k+1} = 0$ sur chacun des nœuds de contact j où une pénétration est prédite, comme illustré par la relation

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} + \mathbf{x}^{\text{c}}_{k+1} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}_k + \mathbf{f}^{\text{c}}_{k+1}) & \text{(III.21a)} \\ \overline{\mathbf{g}}_{k+1} = \overline{\mathbf{g}}^{\text{p}}_{k+1} + \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^\top\mathbf{x}^{\text{c}}_{k+1} = \mathbf{0}. & \text{(III.21b)} \end{cases}$$

La notation $\overline{\bullet}$ fait référence à la restriction des grandeurs aux degrés de liberté où les contraintes de contact sont actives, *i.e.* ou le jeu prédit est négatif. On construit la matrice $\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}$, composée des colonnes j de $\mathbf{c}_{\text{N}}^\top$ correspondant aux contraintes de contact où une pénétration est détectée, dont la définition est

$$\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}} = \left[|\dots|\mathbf{c}^j_{\text{N}}|\dots|\right] \quad \forall j \in [\![1;m]\!] \text{ tel que } g^{\text{p},j}_{k+1} \leq 0. \tag{III.22}$$

En posant $\mathbf{f}^{\text{c}}_{k+1} = \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1}$ et en utilisant la relation (III.21a), l'équation (III.21b) se réécrit sous la forme

$$\overline{\mathbf{g}}^{\text{p}}_{k+1} + \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^\top\mathbf{x}^{\text{c}}_{k+1} = \overline{\mathbf{g}}^{\text{p}}_{k+1} + \underbrace{(\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^\top\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}})}_{\hat{\mathbf{W}}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1} = 0. \tag{III.23}$$

Il est alors possible de déduire les multiplicateurs de Lagrange correctifs $\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1}$ à appliquer pour garantir le respect des contraintes unilatérales dans l'équation

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1} = \hat{\mathbf{W}}^{-1}\overline{\mathbf{g}}^{\text{p}}_{k+1}. \tag{III.24}$$

Les multiplicateur de Lagrange correctifs peuvent finalement être introduits dans la relation (III.21a) en utilisant l'expression de la correction en déplacements

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{c}} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}_{\mathrm{N}}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1}. \tag{III.25}$$

Ce schéma d'intégration est très utilisé dans le domaine du contact rotor/stator, notamment sur des cas de calcul industriels [204, 24, 216, 127] où il constitue l'état de l'art.

2.2 DLFT-HBM

En préambule de la présentation de la DLFT-HBM, on mentionne qu'on utilise la technique de condensation présentée dans la section II.2.1.5 comme une étape de pré-conditionnement du système. De plus, une méthode de condensation s'appuyant sur la réciprocité des efforts de contact dans le cas de maillages coïncidents est employée. Cette stratégie est présentée dans la section III.2.2.1.

2.2.1 Condensation des degrés de liberté non linéaires

Dans le cadre de non-linéarités de contact impliquant deux structures flexibles, une reformulation du système en considérant des degrés de liberté non linéaires relatifs peut être employée afin de diviser la taille du système (II.69) par deux si les degrés de liberté non linéaires des deux structures en contact sont considérés coïncidents en tout temps. En appairant les degrés de liberté de chacune des structures, on définit les degrés de liberté relatifs $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}$ grâce à la relation

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} = \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1} - \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2}. \tag{III.26}$$

Les exposants $\bullet^1$ et $\bullet^2$ font respectivement référence à la première et à la seconde structure. On propose une représentation schématique d'un degré de liberté relatif pour deux structures unidimensionnelles sur la figure III.3.

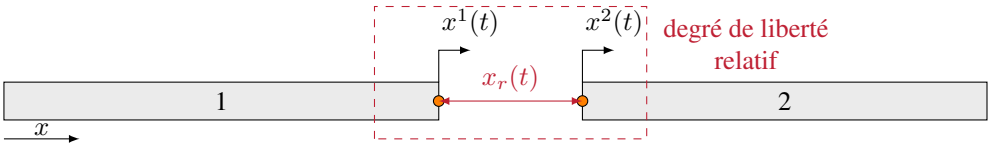


FIGURE III.3 – Illustration d'un degré de liberté relatif.

Cette condensation est possible car, dans le cadre du contact, les efforts non linéaires s'expriment en fonction des déplacements relatifs et des vitesses relatives. On peut réécrire le système (II.69) en partitionnant le système entre la première structure et la seconde, sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{1}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}}^{1}\left(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2}\right) = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}^{1} & \text{(III.27a)} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{2}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}}^{2}\left(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2}\right) = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}^{2}. & \text{(III.27b)} \end{cases}$$

La troisième loi de Newton implique

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}}^{1}\left(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2}\right) = -\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}}^{2}\left(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{1}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{nl}}^{2}\right) = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,r}}. \tag{III.28}$$

En multipliant l'équation (III.27a) par $\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{1}\right)^{-1}$ et l'équation (III.27b) par $\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{2}\right)^{-1}$, en utilisant la relation (III.28) traduisant la réciprocité des efforts de contact et en soustrayant une équation

à l'autre, on obtient

$$\widetilde{\mathbf{x}}^1_{\mathrm{nl}} - \widetilde{\mathbf{x}}^2_{\mathrm{nl}} + \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \right) \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,r}} = \left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} - \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}}. \tag{III.29}$$

Il est alors possible de multiplier l'équation (III.29) par $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}} = \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \right)^{-1}$ et il vient

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \left(\widetilde{\mathbf{x}}^1_{\mathrm{nl}} - \widetilde{\mathbf{x}}^2_{\mathrm{nl}} \right) + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,r}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} - \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} \right). \tag{III.30}$$

Le terme des efforts extérieurs peut être identifié par

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} - \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} \right). \tag{III.31}$$

Le système final réduit sur les degrés de liberté non linéaires relatifs s'écrit

$$\mathcal{H}_{\mathrm{r}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}, \omega) = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\omega)\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,r}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} = \mathbf{0}. \tag{III.32}$$

La taille de ce système harmonique réduit est ainsi $\frac{n_{\mathrm{nl}}}{2}(2N_{\mathrm{h}}+1)$. Il est possible de noter que les deux étapes de réduction présentées dans cette section ne mènent à aucune approximation sur la dynamique du système. Cependant, la qualité numérique de la matrice $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}$ et du vecteur $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}$ peut être affectée car leurs expressions font intervenir des inversions de matrices qui introduisent des erreurs numériques.

De la même manière que dans la section II.2.1.5, il est nécessaire de calculer les dérivées de $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}$ et $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}$ par rapport à ω. D'une part, pour la matrice de rigidité dynamique, il vient

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega} = -\mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \frac{\partial \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \right)}{\partial \omega} \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}, \tag{III.33}$$

puis en développant les dérivées des inverses de matrices on a

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega} = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} \right]^1 \left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} \right]^2 \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \right) \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}. \tag{III.34}$$

Les différents termes ne dépendent que de $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}$ et de $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega}$ dont les expressions sont connues grâce à la section II.2.1.5. D'autre part, la dérivée du vecteur multiharmonique des efforts extérieurs $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \mathbf{f}^1_{\mathrm{ex,red}} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} \right) \\ + \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} \right) \end{aligned} \tag{III.35}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega} \left(\left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} \right) \\ + \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} \left(- \left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} \right]^1 \left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^1_{\mathrm{ex,red}} + \left(\mathbf{Z}^1_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}}{\partial \omega} \right]^1 \right. \\ \left. - \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}}{\partial \omega} \right]^2 \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}^2_{\mathrm{ex,red}} + \left(\mathbf{Z}^2_{\mathrm{red}}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}}{\partial \omega} \right]^2 \right). \end{aligned} \tag{III.36}$$

La dérivée obtenue n'est nulle que lorsqu'il n'y a aucun effort d'excitation, contrairement à la condensation de la section II.2.1.5.

2.2.2 Présentation de la stratégie

La DLFT-HBM (pour *Dynamic Lagrangian Frequency/Time Harmonic Balance Method*) est une méthodologie d'évaluation des efforts non linéaires de contact utilisée dans un formalisme de type HBM. Depuis sa mise au point par Nacivet *et al.* [120], elle a été largement utilisée dans le cadre de la caractérisation des liaisons frottantes aube/disque [39, 78, 217, 219, 120, 222, 224, 13] et dans les talons de turbines [5, 67]. Seules quelques simulations ont été réalisées sur des systèmes de type vibro-impact en DLFT-HBM, et seulement sur des modèles phénoménologiques [221, 165].

En dehors des lois de pénalité, les non-linéarités de contact ne peuvent pas être traitées par une procédure AFT classique car les efforts ne s'écrivent pas comme une expression analytique en fonction des déplacements. Pour contourner ce problème, la DLFT-HBM s'appuie sur une gestion du contact par lagrangiens augmentés. L'effort de contact normal $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ dans le domaine harmonique s'écrit

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} - \varepsilon(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}) \tag{III.37}$$

où $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} + \widetilde{\mathbf{g}}_0$ est la fonction jeu associée au champ de déplacements relatifs inconnu du problème $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}$ et $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{r}} + \widetilde{\mathbf{g}}_0$ la fonction jeu associée à un champ de déplacements relatifs idéal inconnu $\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{r}}$. On note que les champs de déplacements relatifs sont, par définition, analogues à des jeux. $\widetilde{\mathbf{g}}_0$ est le jeu entre les structures non déformées et ε est un paramètre scalaire positif dit de pénalité qui, bien qu'homogène à une raideur, ne doit pas être interprété comme une raideur de pénalité au sens des lois de pénalité. La méthodologie DLFT-HBM repose sur le fait que le champ $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}$ respecte par construction à la fois la condition de non-interpénétration et la condition d'orthogonalité avec l'effort de contact $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ dans le domaine temporel, de sorte que

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}_{\mathbf{y}} \perp \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \geq \mathbf{0}. \tag{III.38}$$

La condition de positivité des effort de contact $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$, comprise dans les conditions (III.38), est également garantie par la façon dont sont calculés ces efforts, présentée par la suite dans la section III.2.2.3.

L'équation (III.37) est l'équation du mouvement harmonique (III.32) à laquelle on a ajouté l'équation

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \tag{III.39}$$

pondérée par ε. Si l'équation (III.37) est vérifiée, on note que le respect de l'équation (III.39) implique directement le respect de l'équation du mouvement (III.32) et inversement, donc

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} - \varepsilon(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}) \Rightarrow \left(\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}} \iff \mathcal{H}_{\mathrm{r}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}) = \mathbf{0}\right). \tag{III.40}$$

C'est-à-dire que si $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ est construite en suivant la relation (III.37) et qu'il est possible de trouver une solution $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}$ au problème (III.32), alors on aura

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}_{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_{\mathbf{x}} \perp \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \geq \mathbf{0}. \tag{III.41}$$

Ce qui traduit directement que $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}$ est admissible en termes de conditions de contact unilatéral. L'avantage de procéder ainsi est que le nombre d'inconnues reste le même, là où une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange doublerait le nombre d'inconnues. En pratique, cette

démarche doit s'inscrire dans un solveur non linéaire cherchant les zéros de la fonction objectif

$$\mathcal{H}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{DLFT}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}) = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}. \tag{III.42}$$

Dans la suite, on explicite la stratégie employée pour calculer $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$, puis comment l'algorithme confère en pratique les propriétés (III.38) au couple $(\mathbf{g}_{\mathbf{y}}, \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}})$ et comment la matrice jacobienne de la fonction (III.42) est calculée.

2.2.3 Évaluation des efforts de contact

Pour détailler la stratégie, on se place à la k-ième itération d'un solveur itératif Newton-Raphson, à laquelle on dispose d'une estimation du champ de déplacements inconnu $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}^{k}$ pouvant être utilisée pour évaluer $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k}$. Étant donné que le champ de déplacements $\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{r}}^{k}$ est lui aussi inconnu, il est nécessaire de procéder par une phase de prédiction suivie par une phase de correction pour déterminer $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k}$. En séparant les termes dépendants de $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}^{k}$ des termes dépendants de $\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{r}}^{k}$, l'effort de contact peut se décomposer suivant l'équation

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N},k}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}) + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{r}}). \tag{III.43}$$

Le calcul de la prédiction repose sur l'estimation $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}^{k}$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N},k} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}^{k} - \varepsilon\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}^{k}. \tag{III.44}$$

Le terme $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k}$ doit être estimé lors de la phase de correction et son expression est

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k} = \varepsilon\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}. \tag{III.45}$$

Comme les conditions de contact unilatéral ne peuvent s'exprimer que dans le domaine temporel, il est nécessaire de calculer les signaux temporels associés au vecteur multiharmonique contenant les m contraintes de contact par transformée de Fourier discrète inverse. Pour la j-ième contrainte, on a

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k} = \left\{ f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \right\}_{i=1\ldots N_{\mathrm{t}}} = \overline{\mathcal{F}}_1 \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}. \tag{III.46}$$

Une fois les efforts de contact prédits transposés dans le domaine temporel, il est nécessaire de calculer la correction $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}$ de sorte que les conditions (III.38) soient vérifiées, ce qui impose directement la valeur de $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y},j}^{k}$ par l'équation (III.45). Ainsi, au i-ième instant et sur la j-ième contrainte de contact, la correction $f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$ est calculée selon le signe de la prédiction comme suit :

- **contact** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \geq 0\right)$: le jeu $g_{\mathbf{y},j}^{k}(t_i)$ doit être nul donc $f_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) = \varepsilon g_{\mathbf{y},j}^{k}(t_i) = 0$;
- **séparation** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) < 0\right)$: le jeu $g_{\mathbf{y},j}^{k}(t_i)$ doit être positif donc l'effort de contact doit être nul, soit $f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}(t_i) = 0$. Ainsi, la correction doit être $f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) = -f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$.

Une fois la correction calculée à chaque instant, on calcule les efforts corrigés dans le domaine temporel avec l'expression

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k} = \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}. \tag{III.47}$$

À ce stade on constate que le couple $(\mathbf{g}_{\mathbf{y},j}^{k}, \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k})$ respecte les conditions de Hertz-Signorini-Moreau formulées dans la relation (III.38) :

— $\mathbf{g}^k_{\mathbf{y},j} \perp \mathbf{f}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j}$: l'effort de contact corrigé $f^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j}(t_i)$ est non nul seulement lorsque $g^k_{\mathbf{y},j}(t_i)$ est nul ;

— $\mathbf{f}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j} \geq \mathbf{0}$: l'effort de contact corrigé $f^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j}(t_i)$ est positif lorsque le système est en contact et nul sinon ;

— $\mathbf{g}^k_{\mathbf{y},j} \geq \mathbf{0}$: la correction $f^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}(t_i)$ est positive lorsque le système est en séparation et nulle sinon, cette propriété se traduit directement sur le champ $\mathbf{g}^k_{\mathbf{y},j}$ comme $f^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}(t_i) = \varepsilon g^k_{\mathbf{y},j}(t_i)$ avec $\varepsilon > 0$.

Finalement, on calcule chacun des termes $\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j}$ $\forall j \in [\![1; m]\!]$ par une transformée de Fourier discrète $\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j} = \mathcal{F}_1 \mathbf{f}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl},j}$. On peut ensuite construire le vecteur $\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl}}$ en agrégeant les efforts de chacun des m nœuds de contact. Le résidu de l'équation du mouvement harmonique $\mathcal{H}_{\mathrm{r}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}})$ est finalement calculé numériquement selon l'expression (III.42) en utilisant la valeur de $\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl}}$.

2.2.4 Propriétés des solutions

La formule du résidu (III.42) peut être utilisée pour fournir une valeur au solveur itératif, cependant son interprétation peut être partielle sous la forme utilisée. En effet, par construction de $\widetilde{\mathbf{f}}^{k,\mathrm{N}}_{\mathrm{nl}}$ dans l'équation (III.37), il est possible de réécrire le résidu sous la forme

$$\mathcal{H}^{\mathrm{DLFT}}_{\mathrm{r}}(\widetilde{\mathbf{x}}^k_{\mathrm{r}}) = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}^k_{\mathrm{r}} + \underbrace{\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}^k_{\mathrm{r}} - \varepsilon(\widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{y}})}_{\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl}}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} = -\varepsilon(\widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{y}}). \tag{III.48}$$

Le critère de convergence de la DLFT-HBM est contrôlé par la différence entre $\widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{x}}$ et $\widetilde{\mathbf{g}}^k_{\mathbf{y}}$ pondérée par ε, ce qui est cohérent avec la relation (III.40). Une fois une solution du problème (III.42) trouvée en utilisant la procédure DLFT-HBM, on montre en vertu de l'équation (III.40) que cette solution est une solution à l'équation du mouvement admissible en termes de conditions de contact. Finalement, l'expression alternative du résidu (III.48) exhibe le rôle du terme ε qui joue ici une fonction analogue à la tolérance du solveur non linéaire car il contrôle à quel point $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}$ et $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ doivent être proches afin de considérer que la solution est convergée. En pratique, ce terme pilote également la vitesse de convergence comme il intervient dans la prédiction (III.44).

2.2.5 Calcul de la matrice jacobienne

Comme les racines de la fonction (III.42) sont recherchées par une méthode itérative de résolution de système non linéaire, il est nécessaire de fournir au solveur la matrice jacobienne de la fonction objectif $\mathcal{J}^{\mathrm{DLFT}} = \dfrac{\partial \mathcal{H}^{\mathrm{DLFT}}_{\mathrm{r}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$. Cette matrice s'exprime

$$\mathcal{J}^{\mathrm{DLFT}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}. \tag{III.49}$$

À la k-ième itération, il est alors nécessaire de calculer la matrice jacobienne des efforts non linéaires $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$ pour évaluer $\mathcal{J}^{\mathrm{DLFT},k}$. Ceci doit être réalisé par une stratégie de prédiction-correction dans le domaine temporel, conformément à la procédure DLFT-HBM présentée dans la section III.2.2.3. De même que pour les efforts de contact, la matrice jacobienne des efforts non linéaires peut être décomposée en deux termes respectivement liés à la prédiction et à la correction par la relation

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl,p}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{N},k}_{\mathrm{nl,c}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}. \tag{III.50}$$

Il est aisé de calculer le terme associé à la prédiction car il se formule selon l'expression analytique

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} = -\mathbf{Z}_{\mathrm{r}} - \varepsilon \mathbf{I}_{m(2N_{\mathrm{h}}+1)}. \tag{III.51}$$

En revanche, le terme correctif doit être calculé en distinguant les situations de contact et de séparation. En utilisant les mêmes notations que dans la section III.2.2.3 pour identifier le i-ième instant et la j-ième contrainte de contact, il vient :

— **contact** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \geq 0\right)$: comme $f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}(t_i) = f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$, alors $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}(t_i) = \dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}(t_i)$ et donc $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}(t_i) = \mathbf{0}$;

— **séparation** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) < 0\right)$: $f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) = -f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$ donc $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}(t_i) = -\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}(t_i)$.

On y calcule les valeurs des dérivées des efforts prédits dans le domaine temporel par l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} = \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}. \tag{III.52}$$

En bouclant à la fois sur les m contraintes de contact et les N_{t} instants on calcule les termes associés à chacun des nœuds de contact $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$, tel que

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} = \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}} \right) \quad \forall j \in [\![1; m]\!]. \tag{III.53}$$

On construit ensuite la matrice jacobienne des efforts de contact $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$ en agençant les termes $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$ pour $j \in [\![1; m]\!]$. Une fois la matrice complète $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}}$ évaluée, il est possible de calculer la matrice jacobienne du système $\mathcal{J}^{\mathrm{DLFT},k}$ en suivant l'équation (III.49).

On retrouve sur la figure III.4 un schéma explicitant la méthodologie DLFT-HBM au sein d'un solveur itératif Newton-Raphson. De plus, on fournit l'algorithme III.2 qui récapitule l'ensemble des étapes nécessaires à la mise en œuvre de la DLFT-HBM, incluant le calcul de la matrice jacobienne analytique.

2.2.6 Gradient par rapport à la fréquence de réponse

Si une des procédures de continuation de la section II.4 est mise en œuvre, il est nécessaire de calculer la dérivée du système par rapport à ω, définie par la relation

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{DLFT}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega} \widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}}{\partial \omega}. \tag{III.54}$$

De la même manière que pour le calcul des efforts de contact $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ ainsi que la matrice jacobienne $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$, le gradient par rapport à ω des effort de contact $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega}$ doit être calculé par prédiction-correction au sein de la procédure d'AFT. On le décompose en un terme prédictif et

Algorithme III.2 : Algorithme DLFT-HBM.

données : $\mathbf{Z}_\mathrm{r}$, $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}$, $\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^0$, ε, $\widetilde{\mathbf{g}}_0$, N_t, m, $\mathcal{F}_1$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, δ, `ajout_effort`$(\bullet,\bullet,\bullet)$, `ajout_jacobienne`$(\bullet,\bullet,\bullet)$

▷ **initialisation**

$\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k \leftarrow \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^0 \quad \mathcal{H}_\mathrm{r}^{\mathrm{DLFT},k} \leftarrow \mathbf{Z}_\mathrm{r}\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} \quad k \leftarrow 0$

tant que $\left\|\mathcal{H}_\mathrm{r}^{\mathrm{DLFT},k}\right\| > \delta$ **faire** ▷ **boucle de Newton-Raphson**

▷ **initialisation des efforts et de la matrice jacobienne**

$\widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \mathbf{0} \qquad \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow \mathbf{0}$

▷ **initialisation des corrections**

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \mathbf{0} \qquad \dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow \mathbf{0}$

▷ **prédiction**

$\widetilde{\mathbf{g}}_\mathbf{x}^k \leftarrow \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k + \widetilde{\mathbf{g}}_0$

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_\mathrm{r}\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k - \varepsilon\widetilde{\mathbf{g}}_\mathbf{x}^k \qquad \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow -\mathbf{Z}_\mathrm{r} - \varepsilon\mathbf{I}_{m(2N_\mathrm{h}+1)}$

▷ **correction**

pour $j \leftarrow 1$ **à** m **faire** ▷ **boucle sur les nœuds de contact**

$\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \overline{\mathcal{F}}_1\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k} \qquad \dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow \overline{\mathcal{F}}_1\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}$

pour $i \leftarrow 1$ **à** N_t **faire** ▷ **boucle sur les instants**

si $f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \geq 0$ **alors** ▷ **contact**

$f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \leftarrow 0 \qquad \dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}(t_i) \leftarrow \mathbf{0}$

sinon ▷ **séparation**

$f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \leftarrow -f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \qquad \dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}(t_i) \leftarrow -\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}(t_i)$

$i \leftarrow i + 1$

$\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k} \qquad \dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow \dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} + \dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}$

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k} \leftarrow \mathcal{F}_1\mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k} \qquad \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow \mathcal{F}_1\dfrac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}$

▷ **ajout de l'effort du j-ième nœud de contact au vecteur complet**

$\widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k} \leftarrow$ `ajout_effort` $\left(\widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k}, \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}, j\right)$

▷ **ajout de la matrice jacobienne de l'effort du j-ième nœud de contact à la matrice jacobienne globale**

$\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}} \leftarrow$ `ajout_jacobienne` $\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}, \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}, j\right)$

$j \leftarrow j + 1$

▷ **calcul du résidu et de la matrice jacobienne**

$\mathcal{H}_\mathrm{r}^{\mathrm{DLFT},k} \leftarrow \mathbf{Z}_\mathrm{r}\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k + \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} \qquad \mathcal{J}^{\mathrm{DLFT},k} \leftarrow \mathbf{Z}_\mathrm{r} + \dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl}^{\mathrm{N},k}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}}$

▷ **correction de Newton-Raphson**

$\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^{k+1} = \widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{r}^k - \left(\mathcal{J}^{\mathrm{DLFT},k}\right)^{-1}\mathcal{H}_\mathrm{r}^{\mathrm{DLFT},k} \qquad k \leftarrow k + 1$

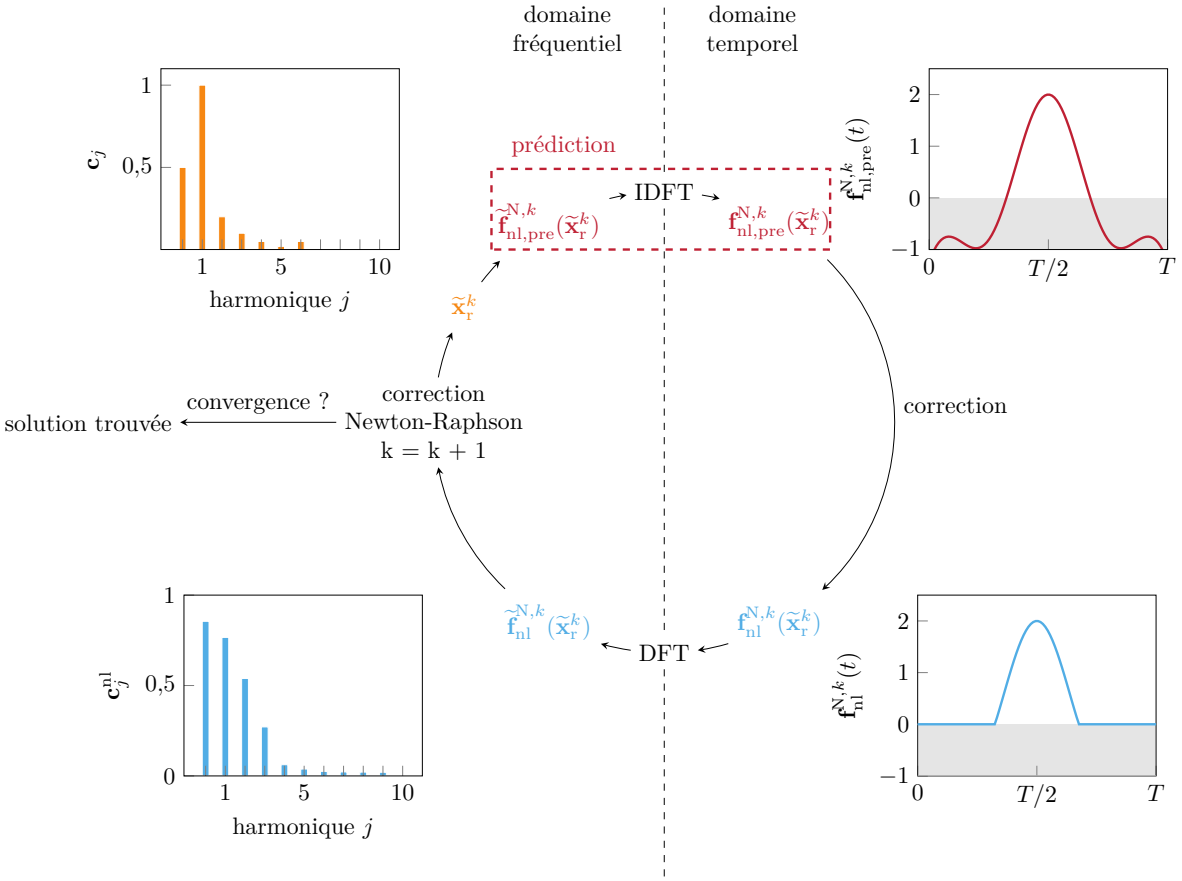


FIGURE III.4 – Procédure DLFT-HBM, $c_j^\bullet = \sqrt{(a_j^\bullet)^2 + (b_j^\bullet)^2}$.

un terme correctif suivant l'équation

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,c}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega} \tag{III.55}$$

où le terme prédictif est calculé analytiquement par l'expression

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,p}}^{\mathrm{N}}}{\partial \omega} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}}{\partial \omega}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}. \tag{III.56}$$

Pour calculer le terme correctif à la k-ième itération du solveur, il est nécessaire de boucler sur les m contraintes de contact et les N_{t} instants et distinguer le cas séparé du cas en contact :

— **contact** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) \geq 0\right)$: comme $f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}(t_i) = f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$, alors $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}(t_i) = \dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}(t_i)$ et donc $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}(t_i) = 0$;

— **séparation** $\left(f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i) < 0\right)$: $f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}(t_i) = -f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}(t_i)$ donc $\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}(t_i) = -\dfrac{\partial f_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}(t_i)$.

On y calcule les valeurs de la dérivée des efforts prédits dans le domaine temporel suivant la

relation

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega} = \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}. \tag{III.57}$$

Une fois l'ensemble des corrections calculées dans le domaine temporel, il est possible de calculer les gradients associés à l'ensemble des contraintes de contact grâce à l'équation

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega} = \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{p}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl},j,\mathrm{c}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega} \right) \quad \forall j \in [\![1; m]\!], \tag{III.58}$$

puis de les assembler dans le gradient total $\dfrac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},k}}{\partial \omega}$.

2.3 LCP-HBM

La stratégie LCP-HBM permet de trouver une solution au problème de contact formulé en HBM par la résolution d'un problème de complémentarité linéaire. Dans cette section, on présente cette stratégie initialement proposée par Meingast *et al.* [113].

2.3.1 Problème de complémentarité linéaire

Dans le domaine de l'optimisation, un problème de complémentarité linéaire (*Linear Complementarity Problem* ou LCP en anglais) est un problème d'optimisation sous contraintes s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{p} & \text{(III.59a)} \\ 0 \leq \mathbf{z} \perp \mathbf{x} \geq 0. & \text{(III.59b)} \end{cases}$$

Ainsi, on recherche un couple de variables $(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ liées par la relation linéaire (III.59a) et respectant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (III.59b). Les inégalités sur les vecteurs des conditions (III.59b) s'appliquent indépendamment sur chacune des coordonnées.

Les problèmes de complémentarité linéaire ont été présentés comme une alternative aux problèmes de programmation quadratique [48, 106] (*quadratic programming* ou QP en anglais). Ils ont permis de répondre à des problématiques dans le domaine de la théorie des jeux [106] et ont récemment gagné en popularité dans le domaine de la dynamique non régulière des circuits électroniques [6, 14, 15], des systèmes mécaniques en contact au sein de stratégies temporelles [183, 83, 119, 179] ou encore très récemment dans des stratégies fréquentielles [113] basées sur la HBM.

Application au contact Trouver une solution à un problème de contact nécessite la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes. Par exemple, les grandeurs locales au contact que sont le jeu g et l'effort de contact normal $f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ sont sujettes à des conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Pour une unique contrainte de contact, il est alors possible d'exprimer les conditions de contact unilatéral sous la forme

$$0 \leq f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}(t) \perp g(t) \geq 0. \tag{III.60}$$

Dans un contexte de résolution numérique du problème de contact, il est possible d'étendre cette relation à des variables vectorielles en :

— incluant m contraintes de contact sous la forme

$$0 \leq \left[f_{\mathrm{nl},1}^{\mathrm{N}}(t), \ldots, f_{\mathrm{nl},m}^{\mathrm{N}}(t)\right]^\top \perp \left[g^1(t), \ldots, g^m(t)\right]^\top \geq 0; \tag{III.61}$$

— discrétisant l'intervalle temporel de résolution en N_t instants et ainsi

$$0 \leq \left[f_\mathrm{nl}^\mathrm{N}(t_1), \ldots, f_\mathrm{nl}^\mathrm{N}(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top \perp \left[g(t_1), \ldots, g(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top \geq 0. \tag{III.62}$$

Les stratégies reposant sur des LCP formulés dans le domaine fréquentiel [113, 165] utilisent conjointement la discrétisation en temps et la prise en compte de plusieurs contraintes de contact afin d'assurer le respect des conditions de contact sur tous les nœuds de contact à chacun des instants de la discrétisation par un problème unique. Les stratégies utilisant des LCP dans un paradigme d'intégration temporelle explicite [18, 83, 119] reposent plutôt sur des conditions de Karush-Kuhn-Tucker exprimées en termes d'efforts d'impact (impulsionnels) Λ et de vitesses relatives v_r qui traduisent les lois d'impact présentées dans la section III.3.1. De la même manière que pour les conditions sur le jeu et l'effort de contact normal, il est possible d'étendre cette notation pour prendre en compte plusieurs contraintes de contact dans le même problème. Dans les deux cas, le formalisme mathématique lié au contact se prête bien à l'utilisation d'un LCP car les conditions de contact unilatéral et les conditions d'impact s'expriment directement sous la forme de l'équation (III.59b). La difficulté théorique liée à l'obtention d'un problème de contact sous la forme de l'équation (III.59) réside dans le fait de formuler la relation linéaire (III.59a) liant les grandeurs impliquées dans les conditions de complémentarité. Cet aspect étant propre à chacune des méthodologies, il est abordé respectivement dans la section III.3.3 pour le paradigme temporel et dans la section III.2.3.2 pour le paradigme fréquentiel.

On a uniquement fait mention du contact normal dans cette partie par souci de simplicité, cependant il est également possible d'exprimer des conditions de complémentarité pour la résolution de problèmes incluant du frottement [18, 70].

Résolution d'un LCP Étant donné la forme particulière d'un LCP, il est nécessaire d'employer des stratégies dédiées pour leur résolution. Les solveurs LCP sont généralement classés en deux grandes familles :

les méthodes itératives s'inscrivent dans la famille des méthodes de recherche de zéros semblables à celles présentées dans la section II.3. Leur particularité réside dans l'inclusion des conditions (III.59b) directement dans la résolution. La gestion de ces conditions au cours de la résolution est propre à chacune des stratégies et n'est pas détaillée ici. De la même manière que les stratégies de recherche de zéros sans contraintes, les méthodes de résolution de LCP itératives nécessitent un itéré initial $(\mathbf{z}^0, \mathbf{x}^0)$ qui peut être choisi proche de la solution $(\mathbf{z}^\star, \mathbf{x}^\star)$ si possible. L'algorithme s'arrête lorsqu'un critère de convergence est atteint incluant à la fois l'annulation du résidu associé à l'équation (III.59a) et un respect des conditions de complémentarité (III.59b). Parmi les stratégies itératives, on peut notamment citer les méthodes de Gauss-Seidel [52, 118] ou des adaptations de la méthode de Newton-Raphson [62] ;

les méthodes de pivot sont basées sur des tris et échanges des colonnes et lignes de la matrice $\mathbf{W}$ et du vecteur $\mathbf{p}$. Ces stratégies tirent parti du fait que l'équation (III.59a) soit une équation algébrique linéaire. Ces algorithmes sont généralement assurés de trouver une solution au problème si la matrice $\mathbf{W}$ appartient à une certaine classe de matrices [183, 106], contrairement aux méthodes itératives qui sont très dépendantes de l'itéré initial. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de Lemke [106]. Comme les méthodes de pivot n'utilisent pas d'itéré initial $(\mathbf{z}^0, \mathbf{x}^0)$, il est particulièrement difficile de trouver plusieurs solutions à un LCP admettant des solutions multiples. Néanmoins, étant donné un LCP et une solution à ce problème, certaines méthodes permettent de construire un nouveau LCP excluant la solution trouvée tout en admettant toujours les

autres solutions du problème initial [164]. En procédant ainsi, il est alors possible de trouver successivement l'ensemble des solutions du problème initial. Cette stratégie n'est néanmoins pas applicable lorsque le LCP admet une solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2.3.2 Mise en équation du problème LCP-HBM

La méthodologie LCP-HBM repose sur la formulation du problème de contact en HBM sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{p} & \text{(III.63a)} \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \boldsymbol{\Lambda} \geq 0 & \text{(III.63b)} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{G}$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange et les jeux associés aux m contraintes de contact du problème. Par analogie avec une procédure AFT, ces vecteurs contiennent l'ensemble des m contraintes de contact évalués à N_t instants équirépartis sur une période vibratoire, tels que

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{g}^\top(t_1), \dots, \mathbf{g}^\top(t_i), \dots, \mathbf{g}^\top(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top \text{ avec } \mathbf{g}(t_i) = \left[g^1(t_i), \dots, g^j(t_i), \dots, g^m(t_i)\right]^\top \quad \text{(III.64)}$$

et

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left[\boldsymbol{\lambda}^\top(t_1), \dots, \boldsymbol{\lambda}^\top(t_i), \dots, \boldsymbol{\lambda}^\top(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top \text{ avec } \boldsymbol{\lambda}(t_i) = \left[\lambda^1(t_i), \dots, \lambda^j(t_i), \dots, \lambda^m(t_i)\right]^\top. \quad \text{(III.65)}$$

Étant donné que la relation (III.63b) représente directement les contraintes associées aux conditions de Hertz-Signorini-Moreau que doivent respecter $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{G}$, la mise en équation du LCP (III.63) se réduit à la formulation de l'équation linéaire (III.63a).

La mise en équation de la relation linéaire (III.63a) se réalise en partant de l'équation HBM condensée sur les degrés de liberté non linéaires (II.69), *i.e.* seulement la condensation présentée dans la section II.2.1.5. Cette équation fait intervenir les grandeurs du repère global dans le domaine fréquentiel $\widetilde{\mathbf{x}}_\mathrm{red}$ et $\widetilde{\mathbf{f}}_\mathrm{nl,red}$. Il convient alors de faire apparaître leurs contreparties temporelles dans le repère local au contact $\mathbf{G}$ et $\boldsymbol{\Lambda}$. Pour ce faire, il est dans un premier temps nécessaire d'exprimer les relations liants $\mathbf{G}$ et le vecteur des déplacements discrétisés en temps $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}^\top(t_1), \dots, \mathbf{x}^\top(t_i), \dots, \mathbf{x}^\top(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top$. On relie aisément les déplacements à chaque temps t_i avec les contraintes de jeux au même temps en utilisant la matrice de contraintes $\mathbf{c}_\mathrm{N}^\top$

$$\mathbf{g}(t_i) = \mathbf{c}_\mathrm{N}^\top(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{g}_0(t_i) \quad \forall i \in [\![1; N_\mathrm{t}]\!] \quad \text{(III.66)}$$

où $\mathbf{g}_0(t_i)$ est le jeu entre les structures non déformées au temps t_i. Comme ces N_t relations sont indépendantes, il est possible de les agréger dans un système d'équations englobant l'ensemble des N_t instants

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}_\mathrm{N}^\top\mathbf{X} + \mathbf{G}_0 \quad \text{(III.67)}$$

où $\mathbf{G}_0 = \left[\mathbf{g}_0^\top(t_1), \dots, \mathbf{g}_0^\top(t_i), \dots, \mathbf{g}_0^\top(t_{N_\mathrm{t}})\right]^\top$ et $\mathbf{C}_\mathrm{N}^\top$ est diagonale par blocs telle que

$$\mathbf{C}_\mathrm{N}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_\mathrm{N}^\top(t_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{c}_\mathrm{N}^\top(t_i) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{c}_\mathrm{N}^\top(t_{N_\mathrm{t}}) \end{bmatrix}. \quad \text{(III.68)}$$

Comme $\mathbf{f}_\mathrm{nl}(t) = \mathbf{c}_\mathrm{N}(t)\boldsymbol{\lambda}(t)$, le même raisonnement peut être utilisé pour relier $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{F}_\mathrm{nl} =$

$\left[\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\top}(t_1),\ldots,\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\top}(t_i),\ldots,\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\top}(t_{N_\mathrm{t}})\right]^{\top}$ et on a

$$\mathbf{F}_{\mathrm{nl}} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda}. \tag{III.69}$$

Or, $\mathbf{X} = \overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}$ et $\mathbf{F}_{\mathrm{nl}} = \overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}}$, donc on obtient les relations

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} + \mathbf{G}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0, \tag{III.70}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl,red}} = \mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda}. \tag{III.71}$$

La relation (III.71) peut directement être substituée dans l'équation (II.69) et on obtient

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} + \mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}. \tag{III.72}$$

En revanche, il est nécessaire de faire apparaître le terme $\mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}}$ pour qu'il soit possible de substituer la relation (III.70). Pour ce faire, on multiplie l'équation (III.72) par $\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}$ dans un premier temps, ce qui donne

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}. \tag{III.73}$$

On passe ensuite la relation (III.73) dans le domaine temporel en appliquant une IDFT ($\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}$), puis on multiplie l'équation par $\mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}$, ainsi on a

$$\mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} + \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}. \tag{III.74}$$

À ce stade, on peut utiliser l'égalité (III.70) ce qui mène au système

$$\mathbf{G} - \mathbf{G}_0 + \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}}. \tag{III.75}$$

Finalement, l'équation (III.75) est une relation linéaire entre $\boldsymbol{\Lambda}$ et $\mathbf{G}$ qui permet d'identifier les termes tel que

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{p} \tag{III.76}$$

avec

$$\mathbf{W} = -\mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}} \tag{III.77}$$

et

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}_{\mathrm{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex}} + \mathbf{G}_0. \tag{III.78}$$

Il est intéressant de noter lorsqu'on choisit des matrices de Fourier $\mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}$ et $\overline{\mathcal{F}}_{n_\mathrm{nl}}$ rectangulaires (*i.e.* $N_\mathrm{t} > 2N_\mathrm{h} + 1$), on constate que $\mathbf{W}$ est singulière. Ceci peut être attribué à la perte d'information dûe au suréchantillonnage de l'intervalle temporel dans les transformées de Fourier discrètes. Cette singularité n'affecte pas la performance des solveurs de LCP s'appuyant sur une méthode de pivot, même si Meingast *et al.* [113] choisissent de conserver les matrices de Fourier carrées (*i.e.* inversibles) en utilisant l'algorithme de Lemke [106]. Le couple ($\mathbf{W}$, $\mathbf{p}$) définit complètement le LCP (III.63) et on peut alors résoudre le problème grâce à un des solveurs mentionnés dans la section III.2.3.1.

Une fois le LCP résolu dans le domaine temporel, on dispose d'une évaluation des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}$ permettant de respecter strictement les conditions de contact unilatéral. Il est alors possible de calculer linéairement la réponse du système harmonique en injectant $\boldsymbol{\Lambda}$ dans le système

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{red}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{red}} = \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,red}} - \mathcal{F}_{n_\mathrm{nl}}\mathbf{C}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda}. \tag{III.79}$$

Cette méthode peut être qualifiée de pseudo-AFT comme elle requiert la résolution d'un

LCP dans le domaine temporel pour trouver les multiplicateurs de Lagrange qui permettent de résoudre le système fréquentiel. La démarche associée à la stratégie LCP-HBM est schématisée sur la figure III.5. De plus, on fournit une vue algorithmique de cette même démarche dans l'algorithme III.3 où le LCP est résolu par une méthode de pivot pour laquelle aucun itéré initial n'est nécessaire. Cet algorithme débute une fois le problème HBM réduit associé à l'équation (II.69) obtenu.

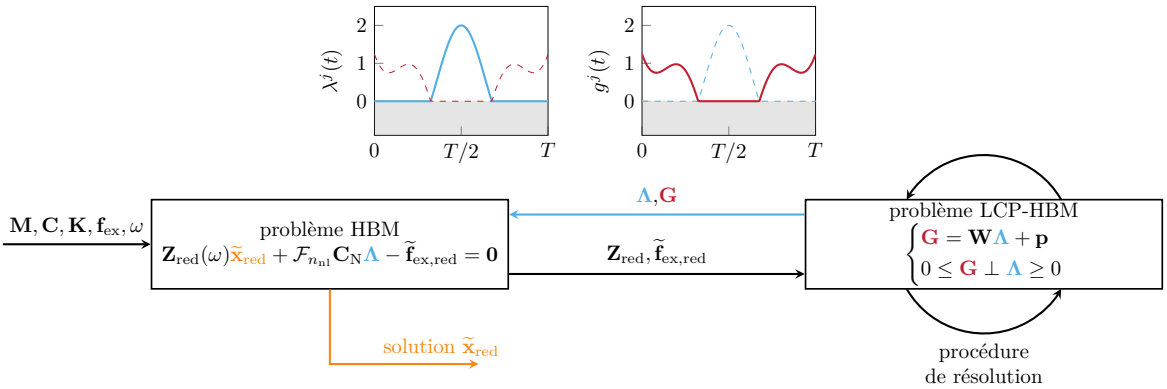


FIGURE III.5 – Procédure LCP-HBM.

Algorithme III.3 : Algorithme LCP-HBM.

données : $\mathbf{Z}_{\text{red}}$, $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}}$, $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{C}_{\text{N}}$, $\overline{\mathcal{F}}_{n_{\text{nl}}}$, $\mathcal{F}_{n_{\text{nl}}}$

▷ **initialisation**

$\mathbf{W} \leftarrow -\mathbf{C}_{\text{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_{\text{nl}}}\mathbf{Z}_{\text{red}}^{-1}\mathcal{F}_{n_{\text{nl}}}\mathbf{C}_{\text{N}}$

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{C}_{\text{N}}^{\top}\overline{\mathcal{F}}_{n_{\text{nl}}}\mathbf{Z}_{\text{red}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}} + \mathbf{G}_0$

▷ **résolution du LCP**

Résoudre le LCP pour $\mathbf{\Lambda}$

$$\begin{cases} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}\mathbf{G} + \mathbf{p} \\ 0 \leq \mathbf{G} \perp \mathbf{\Lambda} \geq 0 \end{cases}$$

▷ **résolution linéaire du système**

$\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{red}} \leftarrow \mathbf{Z}_{\text{red}}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex,red}} - \mathcal{F}_{n_{\text{nl}}}\mathbf{C}_{\text{N}}\mathbf{\Lambda}\right)$

3 Gestion des contraintes en vitesses

Dans cette partie, on s'intéresse à la phénoménologie d'impact à travers la définition du problème de contact non régulier. Tout d'abord, on fournit dans la section III.3.1 quelques éléments théoriques propres à la dynamique non régulière. On détaille ensuite deux stratégies d'intégration temporelle prenant en compte la physique d'impact en intégrant le coefficient de restitution dans leur définition : l'algorithme de Schatzman-Paoli dans la section III.3.2 et l'algorithme de Moreau-Jean dans la section III.3.3.

3.1 Loi d'impact

Une solution dite forte de l'équation du mouvement (II.1) est deux fois différentiable en temps tel que $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}^2$. Dans un problème de contact, le système subit des discontinuités de vitesses. Le champ de déplacements ne peut donc jamais excéder le niveau de régularité $\mathcal{C}^0$. On dit alors que ce problème est non régulier, c'est-à-dire que la vitesse est continue presque partout et donc l'accélération est également définie presque partout au sens des fonctions. On note l'instant d'impact t_{imp}, où la vitesse subit un saut et où l'accélération est donc impulsionnelle. On définit les vitesses pré et post-impact telles que

$$\begin{cases} \mathbf{v}^- = \mathbf{v}(t_{\text{imp}}^-) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathbf{v}(t_{\text{imp}} - \delta) & \text{(III.80)} \\ \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}(t_{\text{imp}}^+) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathbf{v}(t_{\text{imp}} + \delta) & \text{(III.81)} \end{cases} \quad \text{pour } \delta > 0.$$

L'équation du mouvement (I.57) n'étant pas valable à l'instant singulier t_{imp}, on doit y relier $\mathbf{v}^-$, $\mathbf{v}^+$, la valeur de la sollicitation impulsionnelle Λ traduisant la discontinuité dans la direction normale et les données du système. Dans le cadre d'une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange, ce lien est fait par l'équation

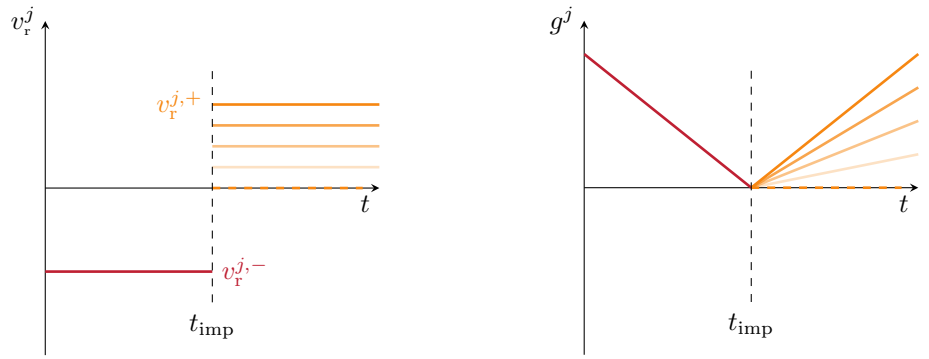
$$\mathbf{M}\left(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-\right) = \mathbf{c}_{\text{N}} \int_{t_{\text{imp}}^-}^{t_{\text{imp}}^+} \lambda \mathrm{d}t = \mathbf{c}_{\text{N}} \Lambda. \tag{III.82}$$

Il s'agit de la version intégrale des équations du mouvement qu'il est possible d'obtenir par le principe d'Hamilton [188] ou en intégrant l'équation du mouvement entre t_{imp}^- et t_{imp}^+ [158]. Dans un formalisme continu en espace et dans un problème 1D, l'existence et l'unicité de la solution non régulière sont assurées [187, 104]. Pour un problème de plus grande dimension, aucune preuve d'unicité n'existe. En ce qui concerne les problèmes discrétisés en espace, l'ajout d'une loi d'impact est indispensable pour assurer l'unicité de la solution [23, 59]. En effet, l'équation du mouvement (II.1) et sa version intégrale aux instants singuliers (III.82) ne permettent pas de déterminer la vitesse post-impact $\mathbf{v}^+$ en connaissant simplement la vitesse pre-impact $\mathbf{v}^-$. On appelle loi d'impact une fonction qui permet de relier explicitement les grandeurs pré-impact aux grandeurs post-impact. Le choix de cette fonction est discutable [171], cependant il est d'usage de choisir la loi d'impact de Newton [18, 83, 119, 129, 130] reliant simplement les vitesses relatives $\mathbf{v}_{\text{r}}(t) = \dot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{c}_{\text{N}}^\top(\mathbf{x})\mathbf{v}(t)$. En faisant l'hypothèse que l'impact implique uniquement la j-ième contrainte de contact, la loi d'impact de Newton se formule

$$v_{\text{r}}^{j,+} = -e v_{\text{r}}^{j,-} \tag{III.83}$$

où l'exposant $\bullet^j$ fait référence à la coordonnée de $\mathbf{v}_{\text{r}}$ associée à l'impact et $e \in [0;1]$ est appelé coefficient de restitution, pouvant notamment être estimé par diverses méthodes analytiques [230] ou expérimentales. Ce coefficient permet d'assurer l'unicité mathématique de la vitesse post-impact connaissant la vitesse pré-impact. En effet, on observe sur la figure III.6 l'évolution de la vitesse relative et du jeu au voisinage de l'instant d'impact. Cette figure permet d'illustrer l'ensemble des trajectoires admissibles en fonction du coefficient de restitution.

On note qu'il est possible de formuler des conditions de complémentarité grâce à la loi d'impact de Newton (III.83). En pratique, l'expression de conditions de Karush-Kuhn-Tucker en vitesses résulte du concept d'analyse convexe d'inclusion différentielle de mesure. Cette



(a) vitesse relative (b) jeu

FIGURE III.6 – Comportement local à l'impact pour la j-ième contrainte de contact, trajectoire pré-impact (—), $e = 1$ (—), $e = 0{,}75$ (—), $e = 0{,}5$ (—), $e = 0{,}25$ (—), $e = 0$ (- -).

notion permet de formuler les conditions d'impact de manière rigoureuse par l'inclusion

$$\Lambda^j \in -\partial\psi_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}^+}(g^j)\left(\frac{v_{\mathrm{r}}^{j,+} + e v_{\mathrm{r}}^{j,-}}{1+e}\right) \tag{III.84}$$

où $-\partial\psi_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}^+}(g^j)$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ du cône tangent à $\mathbb{R}^+$ évaluée en g^j. Ces éléments mathématiques sont définis précisément dans l'ouvrage d'Acary et Brogliato [183] mais les détails vont au-delà du cadre de cette thèse. En utilisant cette notation, il est alors possible de formuler les conditions de complémentarité [183]

$$0 \leq v_{\mathrm{r}}^{j,+} + e v_{\mathrm{r}}^{j,-} \perp \Lambda^j \geq 0 \tag{III.85}$$

qui traduisent le fait qu'il n'y a une impulsion sur la j-ième coordonnée que si l'équation d'impact $v_{\mathrm{r}}^{j,+} + e v_{\mathrm{r}}^{j,-} = 0$ est vérifiée et un effort de contact $\Lambda^j \geq 0$ est appliqué. La contrainte inégalitaire sur les vitesses $0 \leq v_{\mathrm{r}}^{j,+} + e v_{\mathrm{r}}^{j,-}$ est héritée de l'inclusion (III.84).

Il existe des algorithmes d'intégration temporelle dits non réguliers (ou *nonsmooth* en anglais) qui utilisent des formulations en vitesses afin de résoudre le problème dynamique sous contraintes unilatérales avec loi d'impact. Parmi ces approches, on trouve par exemple le *sweeping-process* de Moreau [119], l'algorithme Moreau-Jean [18, 83] ou encore le schéma d'intégration de Paoli-Schatzman [129, 130].

En ce qui concerne le bilan énergétique, une différence majeure apparaît avec l'ajout de la loi d'impact de Newton : le travail des efforts d'impact (partie impulsionnelle des efforts de contact) est non nul et dépend directement du coefficient de restitution. Le travail associé est décrit dans la littérature [19, 185] et s'écrit

$$W_{\mathrm{imp}}^j = \frac{1}{2}((1-e)v_{\mathrm{r}}^{j,-})\Lambda^j \leq 0. \tag{III.86}$$

Ce travail est négatif car l'impulsion est positive et la vitesse relative pré-impact est forcément négative juste avant l'impact. La formule (III.86) montre que la dissipation est maximale pour $e = 0$ et nulle pour $e = 1$. De ce fait, on parle d'impact plastique (dissipatif) pour $e = 0$, d'impact élastique (conservatif) pour $e = 1$, et d'impact élastoplastique lorsque $e \in]0;1[$.

3.2 Algorithme de Schatzman-Paoli

Le schéma de Schatzman-Paoli [129, 130] se base sur un schéma de différences finies centrées comme l'algorithme de Carpenter [37] présenté dans la section III.2.1. Ces deux algorithmes diffèrent uniquement dans le respect des conditions de contact unilatéral. En effet, les conditions de Hertz-Signorini-Moreau respectées par le schéma de Schatzman-Paoli s'écrivent

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1}+e\mathbf{x}_{k-1}}{1+e}\right) \perp \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1}+e\mathbf{x}_{k-1}}{1+e}\right)\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \geq \mathbf{0}. \tag{III.87}$$

Le jeu prédit associé au respect de ces conditions diffère de l'algorithme de Carpenter et devient

$$\mathbf{g}_{k+1}^{\mathrm{p}} = \mathbf{g}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{p}}+e\mathbf{x}_{k-1}}{1+e}\right). \tag{III.88}$$

En pratique, seul le calcul du jeu et de la matrice de contact sont modifiés pour prendre en compte la loi d'impact de Newton associée au coefficient de restitution e dans le schéma. Cet algorithme est hybride entre formulation en déplacements et vitesses car il prend en compte une loi d'impact tout en garantissant les conditions (III.87), analogues aux conditions de Hertz-Signorini-Moreau. Afin de garantir le respect de la loi d'impact, il est cependant nécessaire que le nœud de contact reste en contact pendant trois pas de temps successifs [58]. Le schéma de Carpenter est le cas particulier du schéma Schatzman-Paoli avec $e = 0$. Le schéma d'intégration de Schatzman-Paoli est décrit dans l'algorithme III.4.

3.3 Algorithme de Moreau-Jean

L'algorithme de Moreau-Jean [83, 119] est un schéma d'intégration temporelle se basant sur la résolution d'un LCP traduisant une loi d'impact de Newton à chaque instant où un contact est détecté. Dans un premier temps, il est nécessaire d'écrire le problème dynamique en vitesses, sous la forme de l'inclusion de Moreau [119]

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{v}(t))\mathrm{d}t + \mathbf{c}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}\Lambda & \text{(III.89a)} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}^{+}(t) & \text{(III.89b)} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{r}}(t) = \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\mathbf{v}(t) & \text{(III.89c)} \\ \left|\begin{array}{l} 0 \leq v_{\mathrm{r}}^{j,+} + e v_{\mathrm{r}}^{j,-} \perp \Lambda^{j} \geq 0 \text{ si } g^{j} \leq 0, \\ \Lambda^{j} = 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \quad \forall j \in [\![1;m]\!] & \text{(III.89d)} \end{cases}$$

avec $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{v}(t)) = -\mathbf{C}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}(t)$ dans le cas présenté. $\mathrm{d}t$ est une mesure de Lebesgue, $\mathrm{d}\mathbf{v}$ une mesure différentielle associée à $\mathbf{v}$ et $\mathrm{d}\Lambda$ une mesure impulsionnelle. Il est alors possible de procéder à la discrétisation de l'équation (III.89) sur un intervalle temporel $]t_k, t_{k+1}]$ de longueur h. On introduit le paramètre numérique d'interpolation $\theta \in [0;1]$ donnant son nom à la θ-méthode et les grandeurs interpolées s'écrivent $\bullet_{k+\theta} = (1-\theta)\bullet_k + \theta\bullet_{k+1}$. On note que le schéma de la θ-méthode est inconditionnellement stable pour $\theta \in [0{,}5;1]$. L'inclusion discrétisée se formule alors

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{k+1}-\mathbf{v}_k) - h\mathbf{f}(t_{k+\theta},\mathbf{x}_{k+\theta},\mathbf{v}_{k+\theta}) = \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{c}_{\mathrm{N}}\Lambda_{k+1} & \text{(III.90a)} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\mathbf{v}_{k+\theta} & \text{(III.90b)} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{r},k+1} = \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\mathbf{v}_{k+1} & \text{(III.90c)} \\ \begin{vmatrix} 0 \leq v_{\mathrm{r},k+1}^{j} + ev_{\mathrm{r},k}^{j} \perp \Lambda_{k+1}^{j} \geq 0 \text{ si } g_{k+1}^{\mathrm{p},j} \leq 0, \\ \Lambda_{k+1}^{j} = 0 \text{ sinon} \end{vmatrix}_{\forall j \in [\![1;m]\!]} & \text{(III.90d)} \end{cases}$$

où $\mathbf{g}_{k+1}^{\mathrm{p}} = \left[g_{k+1}^{\mathrm{p},1},\ldots,g_{k+1}^{\mathrm{p},j},\ldots,g_{k+1}^{\mathrm{p},m}\right] = \mathbf{g}_k + \gamma h\mathbf{v}_{\mathrm{r},k}$ $(\gamma \geq 0)$ est une prédiction du jeu à l'instant t_{k+1} permettant d'estimer l'instant d'activation de la loi d'impact (III.90d). On trouve également d'autres formules pour le calcul de $\mathbf{g}_{k+1}^{\mathrm{p}}$ dans la littérature et elles sont évaluées dans les travaux d'Acary [18].

L'expression (III.90a) peut être reformulée en utilisant l'expression du schéma de la θ-méthode

$$(\mathbf{M}+h\theta\mathbf{C}+h^2\theta^2\mathbf{K})(\mathbf{v}_{k+1}-\mathbf{v}_k) = -h\mathbf{C}\mathbf{v}_k - h\mathbf{K}\mathbf{x}_k - h^2\theta\mathbf{K}\mathbf{v}_k + h(\theta\mathbf{f}_{\mathrm{ex},k+1}+(1-\theta\mathbf{f}_{\mathrm{ex},k})) + \mathbf{p}_{k+1}. \tag{III.91}$$

Par analogie avec la méthode de Carpenter, il est possible de produire une approximation des vitesses au $(k+1)$-ième pas de temps, tel que

$$\mathbf{v}_{k+1}^{\mathrm{p}} = \mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{M}}^{-1}[-h\mathbf{C}\mathbf{v}_k - h\mathbf{K}\mathbf{x}_k - h^2\theta\mathbf{K}\mathbf{v}_k + h(\theta\mathbf{f}_{\mathrm{ex},k+1} + (1-\theta\mathbf{f}_{\mathrm{ex},k}))] \tag{III.92}$$

où $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + h\theta\mathbf{C} + h^2\theta^2\mathbf{K}$ est la matrice d'itération. L'effort de contact $\mathbf{p}_{k+1}$ agit comme une correction et les vitesses réelles du système sont corrigées de sorte que

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1}^{\mathrm{p}} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{p}_{k+1}. \tag{III.93}$$

Afin de déterminer $\mathbf{p}_{k+1}$, il est nécessaire de formuler le problème (III.90) sous la forme d'un LCP. Pour y arriver, on projette (III.93) dans les repères locaux au contact de chacune des contraintes actives par une multiplication par la matrice $\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}$ (définie dans la section III.2.1) et il vient

$$\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}\mathbf{v}_{k+1} = \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}\mathbf{v}_{k+1}^{\mathrm{p}} + \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}\overline{\Lambda}_{k+1}. \tag{III.94}$$

On note que $\mathbf{p}_{k+1} = \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}\overline{\Lambda}_{k+1} = \mathbf{c}_{\mathrm{N}}\Lambda_{k+1}$ car $\Lambda_{k+1}^{j} = 0$ sur les contraintes de contact non incluses dans $\overline{\Lambda}_{k+1}$. En utilisant la notation $\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}$, il est possible de réécrire les conditions associées à la loi d'impact (III.90d) de manière vectorielle sur l'ensemble des contraintes actives sous la forme

$$\mathbf{0} \leq \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) \perp \overline{\Lambda}_{k+1} \geq \mathbf{0}. \tag{III.95}$$

Et finalement, en additionnant le terme $\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}e\mathbf{v}_k$ de part et d'autre de l'équation (III.94), on obtient le LCP

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) = \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathrm{p}} + e\mathbf{v}_k) + \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}\overline{\Lambda}_{k+1} \\ 0 \leq \overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) \perp \overline{\Lambda}_{k+1} \geq 0. \end{cases} \tag{III.96}$$

À chaque pas de temps où un contact est détecté, le problème (III.96) doit être construit et résolu par une des méthodes de résolution de LCP présentées dans la section III.2.3.1. Comme le LCP fait intervenir la matrice de projection $\overline{\mathbf{c}}_{\mathrm{N}}^{\top}$, sa taille peut varier d'un pas de temps à l'autre selon le nombre de contraintes activées à l'instant considéré. La démarche associée au schéma d'intégration de Moreau-Jean est explicitée dans l'algorithme III.5.

Algorithme III.4 : Algorithme de Schatzman-Paoli (Carpenter pour $e = 0$).

données : $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{f}_{\text{ex}}(t)$, h, $k_{\max}$, e, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_0$, `jeu`$(\bullet)$, `restriction_contact`$(\bullet, \bullet)$

▷ **initialisation**

$\mathbf{x}_{k-1} \leftarrow \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_1$

$$\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{C}}{2h}\right] \quad \hat{\mathbf{C}} \leftarrow \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} - \mathbf{K}\right] \quad \hat{\mathbf{K}} \leftarrow \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} - \frac{\mathbf{C}}{2h}\right]$$

pour $k \leftarrow 1$ **à** $k_{\max}$ **faire** ▷ boucle sur les instants

$\mathbf{f}_{\text{ex},k} \leftarrow \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_k)$

$\widetilde{\mathbf{f}}_k \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}_k + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{f}_{\text{ex},k}$

▷ **calcul du jeu prédit**

$\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_k$

$$[\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1}, \mathbf{c}_{\text{N}}] \leftarrow \texttt{jeu}\left(\frac{\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} + e\mathbf{x}_{n-1}}{1+e}\right)$$

▷ **correction**

si $\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1} \leq 0$ **alors** ▷ contact

▷ **calcul de** $\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}$

$\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}} \leftarrow$ `restriction_contact`$(\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1}, \mathbf{c}_{\text{N}})$

$\hat{\mathbf{W}} \leftarrow \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^{\top}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}$

$\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{W}}^{-1}\overline{\mathbf{g}}^{\text{p}}_{k+1}$

$\mathbf{f}^{\text{c}}_{k+1} \leftarrow \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}_{k+1}$

$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{f}^{\text{c}}_{k+1}$

sinon ▷ séparation

$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1}$

$\mathbf{x}_{k-1} \leftarrow \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_{k+1} \quad k \leftarrow k+1$

Algorithme III.5 : Algorithme de Moreau-Jean.

données : $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{f}_{\text{ex}}(t)$, h, $k_{\max}$, e, θ, γ, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{x}_1$, `jeu`$(\bullet)$, `restriction_contact`$(\bullet,\bullet)$

▷ **initialisation**

$\mathbf{v}_k \leftarrow \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{f}_{\text{ex},k} \leftarrow \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_1)$

$\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \left[\mathbf{M} + h\theta\mathbf{C} + h^2\theta^2\mathbf{K}\right] \quad \hat{\mathbf{C}} \leftarrow \left[-h\mathbf{C} - h^2\theta\mathbf{K}\right] \quad \hat{\mathbf{K}} \leftarrow -h\mathbf{K}$

pour $k \leftarrow 1$ **à** $k_{\max}$ **faire** ▷ boucle sur les instants

$\mathbf{f}_{\text{ex},k+1} \leftarrow \mathbf{f}_{\text{ex}}(t_{k+1})$

$\mathbf{f}_{\text{ex},k+\theta} \leftarrow h(\theta\mathbf{f}_{\text{ex},k+1} + (1-\theta\mathbf{f}_{\text{ex},k}))$

$\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex},k+\theta} \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_{\text{ex},k+\theta}$

▷ **calcul du jeu prédit**

$\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \gamma h\mathbf{v}_k$

$[\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1}, \mathbf{c}_{\text{N}}] \leftarrow \texttt{jeu}\left(\mathbf{x}^{\text{p}}_{k+1}\right)$

▷ **calcul de la vitesse prédite**

$\mathbf{v}^{\text{p}}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}_k$

▷ **correction**

si $\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1} \leq 0$ **alors** ▷ contact

▷ **calcul de $\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}$**

$\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}} \leftarrow \texttt{restriction_contact}(\mathbf{g}^{\text{p}}_{k+1}, \mathbf{c}_{\text{N}})$

Résoudre le LCP pour $\overline{\Lambda}_{k+1}$

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) = \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^{\top}(\mathbf{v}^{\text{p}}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) + \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^{\top}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}\overline{\Lambda}_{k+1} \\ 0 \leq \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}^{\top}(\mathbf{v}_{k+1} + e\mathbf{v}_k) \perp \overline{\Lambda}_{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow \overline{\mathbf{c}}_{\text{N}}\overline{\Lambda}_{k+1} \quad \mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}^{\text{p}}_{k+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{p}_{k+1}$

sinon ▷ séparation

$\Lambda_{k+1} \leftarrow \mathbf{0} \quad \mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}^{\text{p}}_{k+1}$

▷ **calcul des vitesses et déplacements corrigés**

$\mathbf{v}_{k+\theta} \leftarrow (1-\theta)\mathbf{v}_k + \theta\mathbf{v}_{k+1} \quad \mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + h\mathbf{v}_{k+\theta}$

$\mathbf{v}_k \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} \quad \mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_{k+1} \quad k \leftarrow k+1$

Chapitre IV

Analyse de systèmes mécaniques en configuration de vibro-impact

Ce chapitre présente un ensemble d'études visant à évaluer la fidélité des stratégies fréquentielles dans des configurations de contact hautement non linéaires. Plusieurs applications sont caractérisées de façon à augmenter graduellement la taille du système, allant d'un impacteur à un degré de liberté jusqu'à un modèle d'aube de soufflante de moteur d'avion. Chacune de ces étapes permet la mise en évidence de comportements complexes et de propriétés numériques inhérentes à la méthodologie DLFT-HBM.

Sommaire du chapitre

1 Application à un système phénoménologique **104**
1.1 Présentation des modèles . . . 104
1.2 Obstacle élastique . . . 105
1.3 Obstacle inertiel . . . 110
2 Application à une barre éléments-finis **118**
2.1 Présentation du modèle . . . 118
2.2 Coefficient de restitution . . . 120
2.3 Cadre de l'étude . . . 122
2.4 Analyse des signaux temporels . . . 125
2.5 Courbes de réponse en fréquence . . . 131
2.6 Analyses paramétriques des méthodes de résolution . . . 131
3 Configuration industrielle **141**
3.1 Présentation de l'application . . . 142
3.2 Développements spécifiques aux interactions aube/carter . . . 145
3.3 Étude préliminaire par intégration temporelle . . . 148
3.4 Résultats numériques des méthodologies fréquentielles . . . 150

Dans un premier temps, la stratégie DLFT-HBM, au centre de ce manuscrit, et la méthodologie LCP-HBM sont appliquées à un modèle phénoménologique d'impacteur en configuration de vibro-impact afin de montrer certaines propriétés inhérentes à la gestion du contact par HBM dans la section IV.1. Dans un second temps, un modèle unidimensionnel de barre éléments-finis est utilisé pour examiner finement le comportement des stratégies DLFT-HBM et LCP-HBM sur un système académique de taille moyenne dans la section IV.2. Cette étude vise à montrer la relation entre les algorithmes de gestion du contact basés sur des lagrangiens augmentés (DLFT-HBM) et ceux basés sur des multiplicateurs de Lagrange (LCP-HBM). De plus, on

démontre l'applicabilité des stratégies DLFT-HBM et LCP-HBM au cas du vibro-impact pour un système académique. Dans un dernier temps, une comparaison fine entre la DLFT-HBM et la RL-HBM est réalisée dans la section IV.3 sur un système industriel hautement non linéaire : l'aube de soufflante NASA rotor 67. La stratégie RL-HBM ayant déjà été étudiée en détails dans les travaux de Colaïtis [43, 206, 45], elle ne sera mobilisée que sur l'application industrielle afin de la comparer avec la DLFT-HBM.

Défis pratiques liés à l'implémentation de la DLFT-HBM

On note que les travaux de cette thèse constituent la première application de la stratégie DLFT-HBM aux systèmes en vibro-impact. Dans ce cadre, la stratégie a été intégralement implémentée dans un code de calcul dédié à la caractérisation de tels systèmes. Plusieurs défis pratiques ont dû être relevés afin de garantir la robustesse de l'outil numérique développé :

Architecture du code Avec l'objectif de mettre au point un outil numérique unique, il a été nécessaire de structurer le code afin de pouvoir traiter l'ensemble des configurations de cette thèse. Ce point constitue un défi de programmation majeur étant donné la variété des applications traitées, concernant tant le modèle en lui même que la forme et le type de l'obstacle.

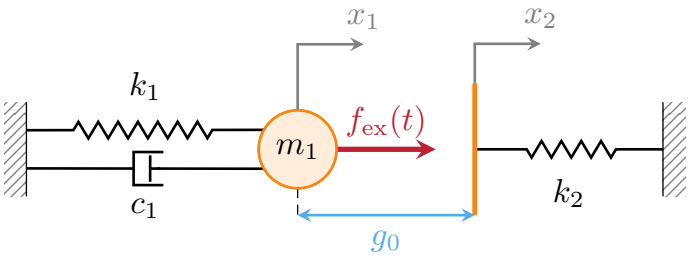
Algorithme de recherche de zéros Un solveur Newton-Raphson a été développé pour permettre de s'affranchir des difficultés inhérentes à l'application du solveur natif du langage python `scipy.optimize.fsolve` dans un cadre non régulier. Les performances atteintes par ce solveur sont supérieures et permettent un contrôle plus fin de la procédure de recherche de zéros, notamment concernant le nombre d'itérations et les critères de convergence.

Optimisation de l'utilisation des ressources de calcul Les simulations réalisées avec la DLFT-HBM sur des applications de vibro-impact nécessitent l'utilisation d'un nombre important d'harmoniques. Par conséquent, une attention particulière a été portée à l'optimisation de l'utilisation du processeur ainsi qu'à la gestion de la mémoire vive. Ainsi, l'ensemble des calculs ont pu être réalisés sur un ordinateur portable équipé d'un processeur i7 fonctionnant à 2,3 GHz ainsi que 8Go de mémoire vive. À titre indicatif, on fournit les ordres de grandeur concernant les temps de calcul sur la machine utilisée : de quelques secondes à plusieurs minutes pour les modèles de petite taille — traités dans les sections IV.1 et IV.2 — et de l'ordre de dix minutes pour les calculs en réponse forcée sur des modèles industriels à plusieurs dizaines de minutes pour les calculs plus conséquents présentés dans la section IV.3.

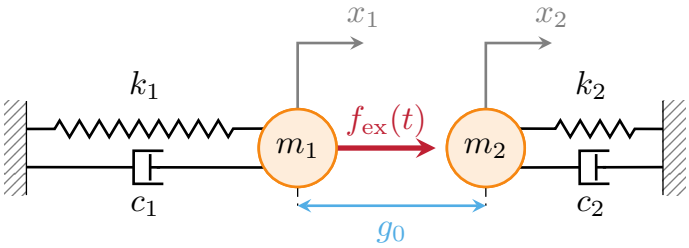
1 Application à un système phénoménologique

1.1 Présentation des modèles

Afin de débuter l'étude de la stratégie DLFT-HBM, un impacteur à un degré de liberté impactant un obstacle flexible [85] est caractérisé. Bien que simple à définir, cette configuration n'en reste pas moins complexe à traiter dans un cadre non régulier. En effet, l'ensemble de la dynamique du système est concentrée sur les deux seuls degrés de liberté du système (impacteur et obstacle). Ce système est traité de manière incrémentale : on considère tout d'abord dans la section IV.1.2 un obstacle purement élastique, comme représenté sur la figure IV.1a. Comme l'obstacle n'a pas d'inertie, *i.e.* le degré de liberté de l'obstacle est associé à une masse nulle, cette configuration permet d'atténuer le problème lié aux discontinuités de vitesses à l'instant d'impact. Dans un second temps, on considère dans la section IV.1.3 que l'obstacle devient une paroi avec une inertie non nulle en y ajoutant une masse ponctuelle, comme illustré sur la figure IV.1b. L'impact de deux structures inertielles est d'autant plus brutal que les quantités de mouvement — directement proportionnelles aux masses — mises en jeu sont importantes. Cet ajout complexifie considérablement la physique de l'impact à cause de l'apparition de discontinuités de vitesses. On analyse cette configuration au regard de la notion de loi d'impact définie dans la section III.3.1.



(a) obstacle élastique



(b) obstacle inertiel

FIGURE IV.1 – Impacteur à un degré de liberté en configuration de vibro-impact.

Les matrices **M**, **C**, **K** respectivement matrice de masse, d'amortissement visqueux et de raideur du système sont

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}. \tag{IV.1}$$

La matrice d'amortissement visqueux est calculée à partir d'un taux d'amortissement modal ξ, tel que $c_i = 2\xi\sqrt{m_i k_i}$ pour $i \in \{1;2\}$. Le degré de liberté de l'impacteur x_1 est soumis à une excitation harmonique telle que l'amplitude de réponse linéaire du système soit unitaire, soit $f_{\text{ex}}(t) = \frac{c_1}{\omega_0}\cos(\omega t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ la pulsation propre du système. Un jeu initial g_0 est imposé entre l'impacteur et l'obstacle, associé au degré de liberté x_2. Pour le modèle représenté sur la figure IV.1a, les données numériques sont fournies dans le tableau IV.1. Pour le second système représenté sur la figure IV.1b, le seul paramètre modifié est m_2 qui représente la masse du degré de liberté de l'obstacle. La valeur de ce dernier sera précisée pour chaque cas d'application par la suite.

m_1	m_2	k_1	k_2	ξ	g_0
1 kg	0 kg	1 N·m^{-1}	100 N·m^{-1}	0,1	0,4 m

TABLEAU IV.1 – Données du modèle d'impacteur avec obstacle élastique de la figure IV.1a.

1.2 Obstacle élastique

En appliquant une procédure de continuation par longueur d'arc associée à la méthodologie de DLFT-HBM pour différentes valeurs du nombre d'harmoniques N_{h}, on obtient les courbes de réponse en fréquence non linéaires représentées sur la figure IV.2. Ces calculs sont effectués pour $N_{\text{t}} = 2000$ et $\varepsilon = 1\,\text{N·m}^{-1}$. De plus, on effectue des simulations d'intégration temporelle (IT) par l'algorithme de Carpenter et des simulations LCP-HBM pour $N_{\text{h}} = 40$ qu'on superpose aux courbes de réponse de la figure IV.2.

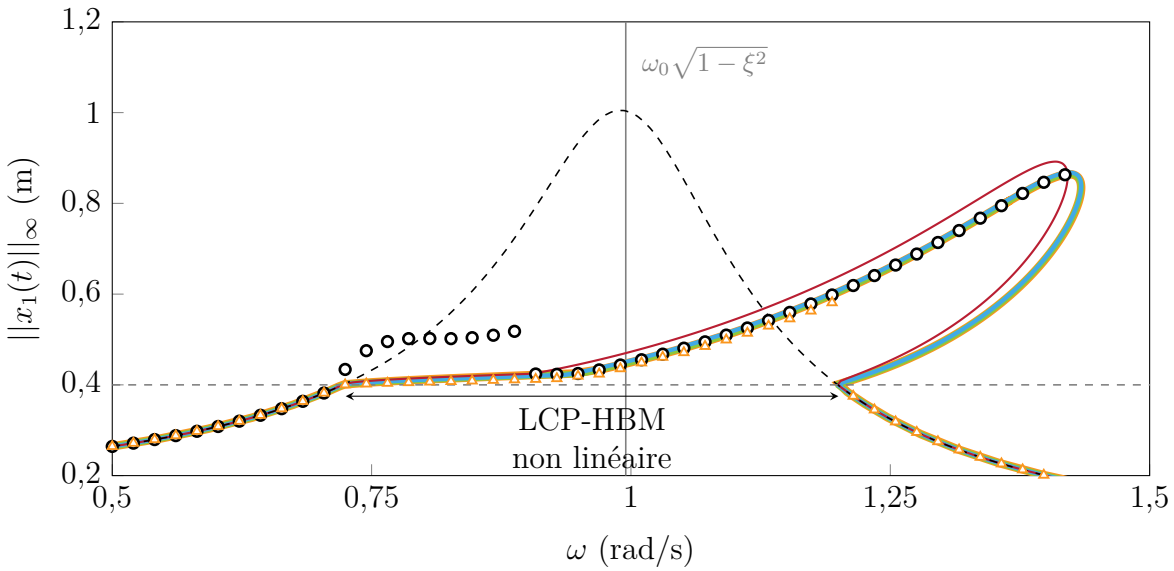


FIGURE IV.2 – Convergence de la réponse en fonction du nombre d'harmoniques autour de la fréquence de résonance (—), réponse linéaire (- -), g_0 (- -), LCP-HBM $N_\mathrm{h} = 40$ (▵), IT (○), DLFT-HBM : $N_\mathrm{h} = 10$ (—), $N_\mathrm{h} = 20$ (—), $N_\mathrm{h} = 30$ (—), $N_\mathrm{h} = 40$ (—).

Les résultats de la figure IV.2 confirment que la méthodologie DLFT-HBM permet de restituer la physique du contact pour un tel système, comme montré par Nacivet [221]. Le système entre dans le domaine non linéaire lorsque l'amplitude de réponse $\|x_1(t)\|_\infty$ dépasse le seuil de jeu initial g_0 imposé entre les structures. Premièrement, on observe que l'amplitude de la résonance non linéaire est plus faible que l'amplitude de la résonance linéaire à cause de l'introduction de l'obstacle. De plus, la fréquence de résonance est décalée vers les hautes fréquences, ce qui correspond à un raidissement au contact.

À partir de $N_\mathrm{h} = 20$, les courbes de réponse sont quasiment superposées entre elles. De plus, un excellent accord en termes d'amplitude de réponse est observé entre les courbes de réponse DLFT-HBM (—), les points d'intégration temporelle (○) — calculés en utilisant des conditions initiales associées aux solutions DLFT-HBM — ainsi que les solutions LCP-HBM (▵). Étant donné que les courbes de réponse étudiées présentent des points de retournement, le LCP-HBM admet plusieurs solutions dans certaines plages de fréquences. Le solveur ne trouvera alors des solutions non linéaires (*i.e.* $\|x_1(t)\|_\infty \geq g_0$) que lorsqu'aucune solution linéaire n'existe à la même fréquence. Ceci empêche notamment l'utilisation de la stratégie LCP-HBM pour trouver la résonance non linéaire. Néanmoins, la stratégie LCP-HBM est utile pour montrer la bonne concordance des stratégies sur la plage fréquentielle où il est possible de calculer les solutions par les trois méthodes.

Sur la figure IV.2, on observe cependant des écarts assez importants avec les calculs par IT aux alentours de $\omega = 0{,}75\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Ces écarts correspondent à une branche bifurquée de type doublement de période. Le système répond alors à une fréquence étant la moitié de la fréquence d'excitation, comme on peut l'observer sur la figure IV.3.

Dans le cas de l'utilisation de la stratégie HBM, on fait l'hypothèse que le système répond à la même fréquence que l'excitation, par conséquent il est impossible de détecter une telle solution en utilisant la pulsation d'excitation ω comme pulsation fondamentale de résolution. En effet, la réponse fréquentielle de cette solution se fait sur les harmoniques demi-entiers, *i.e.* proportionnels à $\omega/2$, il faudrait donc utiliser la pulsation $\omega/2$ comme pulsation fondamentale

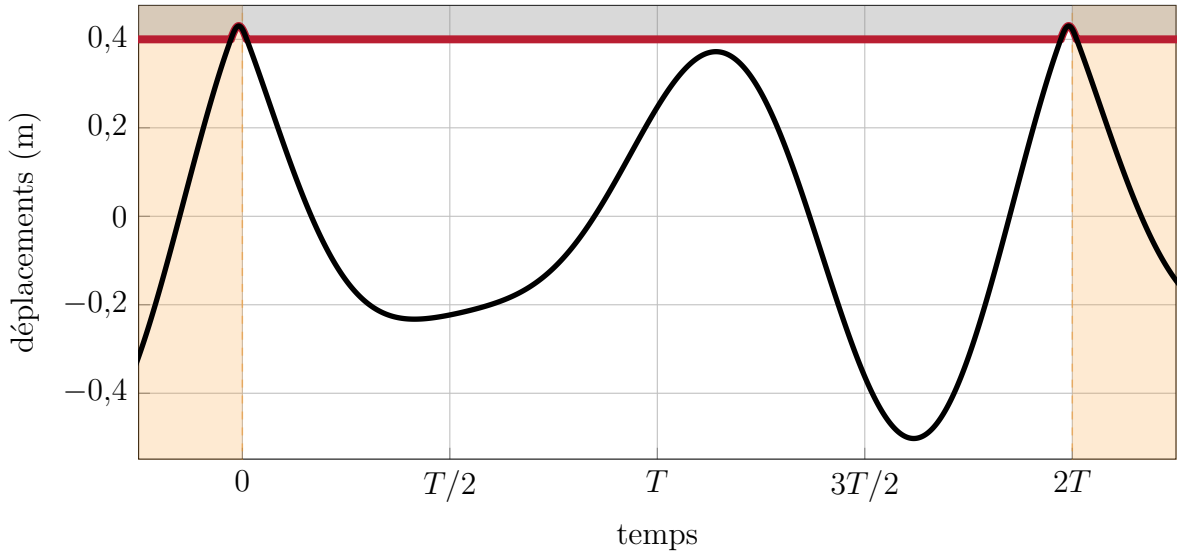
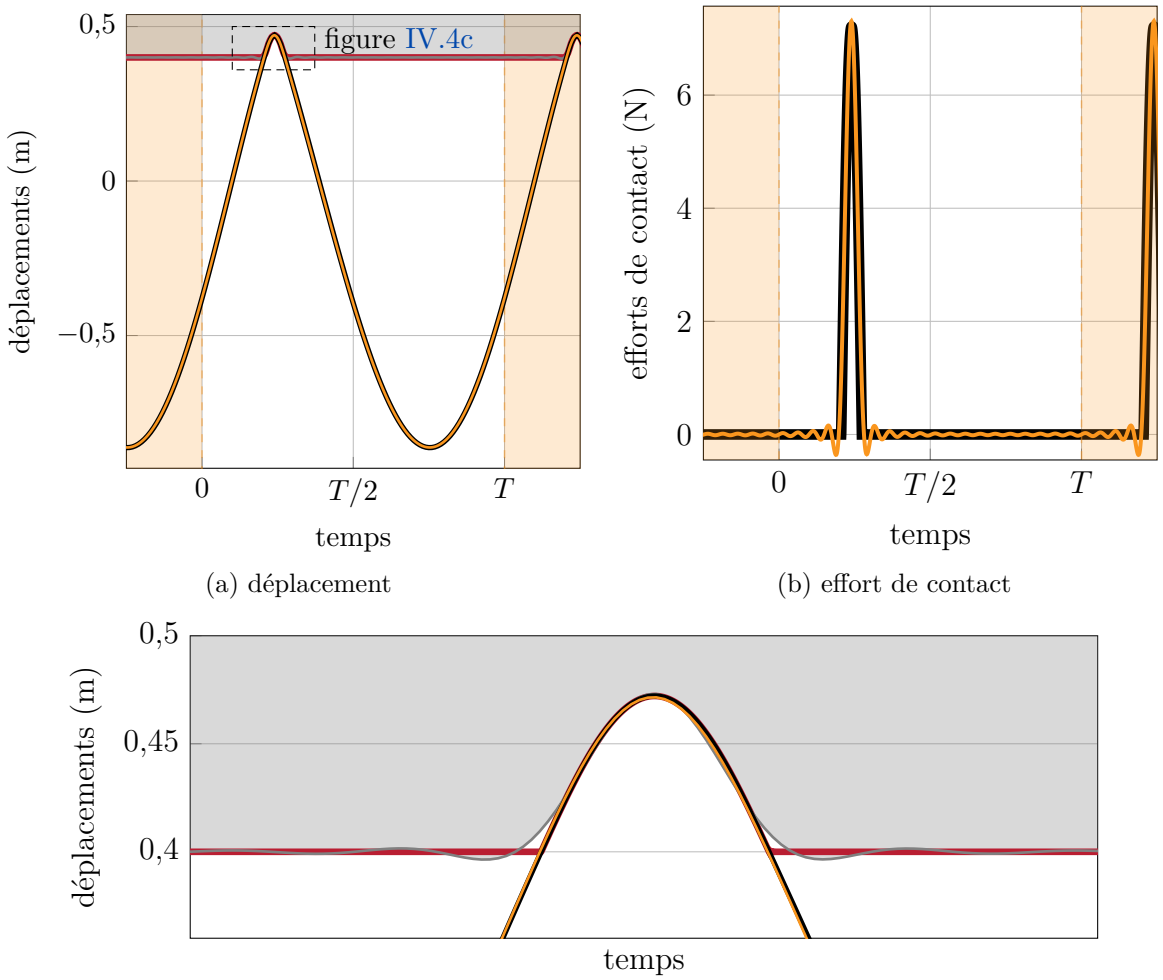


FIGURE IV.3 – Déplacements obtenus par IT sur la branche de période double, x_1 (impacteur) (—), x_2 (obstacle) (▭).

pour pouvoir trouver cette solution. Cette branche bifurquée de période double a déjà été identifiée dans la littérature [85] où il est confirmé qu'il s'agit d'une branche stable. De plus, les auteurs montrent que la branche de période simple, correspondant à la branche obtenue par la DLFT-HBM dans ce travail, est partiellement instable. En pratique, il serait coûteux de résoudre le problème complet en harmoniques demi-entiers car il n'est pas possible de connaître la forme qualitative de la solution à l'avance. Il est cependant possible d'envisager d'effectuer une étude de stabilité pour trouver les points de bifurcation et effectuer des suivis de branches pour obtenir l'ensemble des solutions au problème sur la plage fréquentielle de l'étude. Toutefois, ces développements sortent du cadre de ces travaux de recherche.

Afin d'approfondir l'analyse de la convergence des résultats, on observe les signaux temporels associés à la courbe de réponse DLFT-HBM pour $N_\mathrm{h} = 20$. On choisit d'afficher les signaux temporels associés à la résonance non linéaire car il s'agit du point où les niveaux d'efforts sont les plus importants. Ainsi, si une bonne concordance des signaux avec l'IT est atteinte sur ce point, on peut considérer que l'ensemble de la réponse est convergée. On représente sur la figure IV.4 les signaux de déplacements et d'efforts à la résonance pour la DLFT-HBM et l'IT. Il n'est pas possible d'obtenir une solution LCP-HBM car la résonance se trouve dans une plage fréquentielle où la méthode de Lemke renvoie une solution linéaire.

La solution DLFT-HBM est convergée en déplacements, cependant on observe sur la figure IV.4b des effets de troncature sur les efforts de contact. Au début de la phase de contact, on voit que l'effort oscille autour de zéro. Ceci indique dans un premier temps le non-respect de la condition de positivité des efforts de contact $\mathbf{f}_\mathrm{nl}^\mathrm{N} \geq \mathbf{0}$. En examinant plus en détail la phase de contact sur les signaux en déplacements sur la figure IV.4c, on observe que ces oscillations causent également des oscillations parasites en déplacements. En particulier, le degré de liberté x_2 associé à l'obstacle est en mouvement avant même que les structures n'entrent effectivement en contact. Ce phénomène est directement lié aux oscillations présentes sur les efforts de contact sur la figure IV.4b qui mettent la structure en mouvement à des instants où elle devrait être immobile. À cause du phénomène de Gibbs, on ne s'attend pas à ce que l'amplitude de ces oscillations diminue lorsque le nombre d'harmoniques augmente. Afin de valider le bon comportement de la méthodologie DLFT-HBM sur ce cas de calcul, on propose d'observer



(a) déplacement

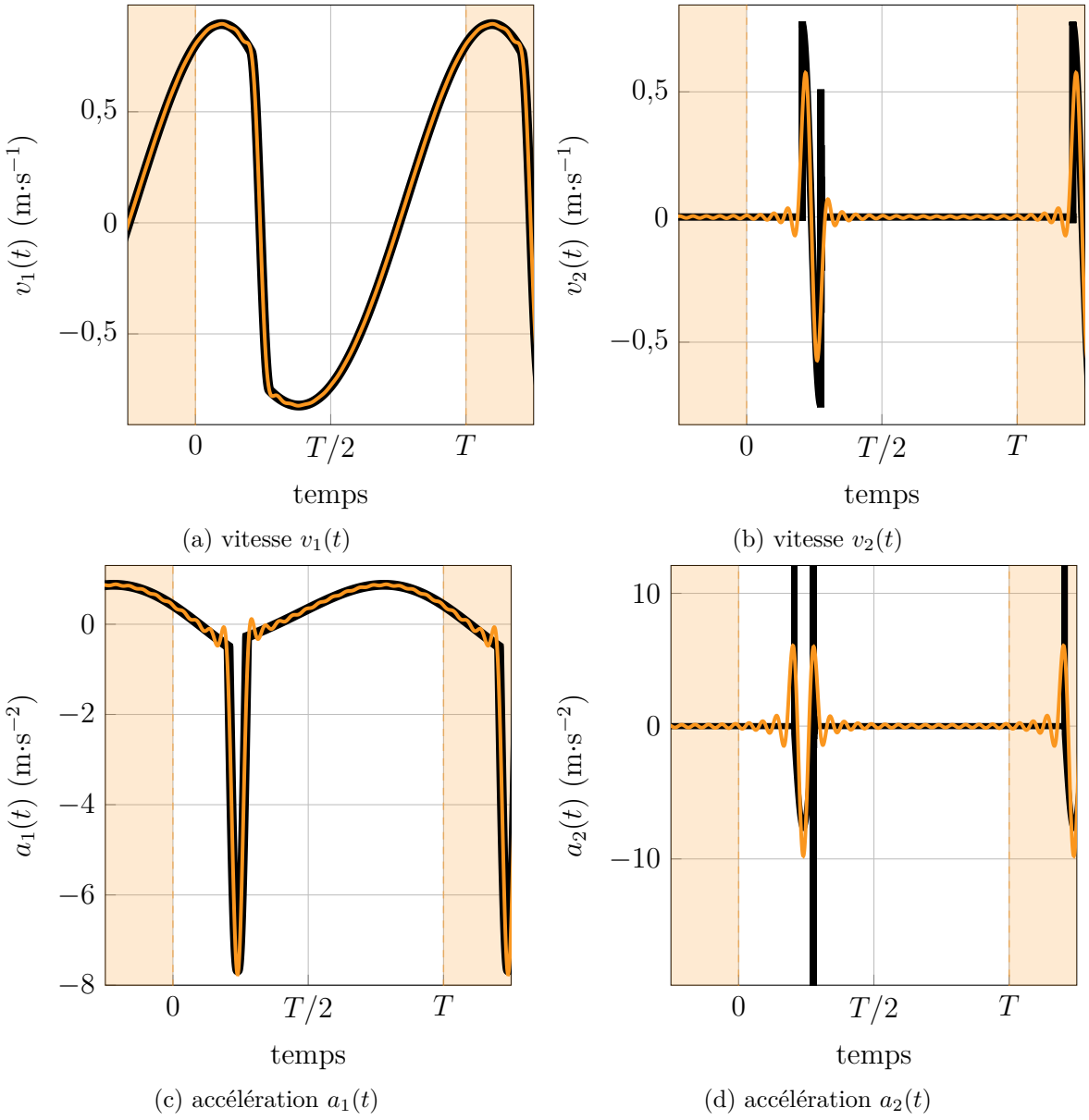
(b) effort de contact

(c) déplacements : phase de contact

FIGURE IV.4 – Déplacements et efforts obtenus par la DLFT-HBM et IT à la résonance, x_1 DLFT-HBM (—), x_1 IT (—), x_2 DLFT-HBM (▭), x_2 IT (—).

l'évolution temporelle des vitesses et accélérations sur la figure IV.5. Les grandeurs liées au degré de liberté x_1 semblent être bien restituées par la méthodologie HBM. En effet les vitesses et accélérations représentées respectivement sur les figures IV.5a et IV.5c concordent bien avec l'IT. Cependant, les signaux liés à x_2 présentent bien plus d'écarts par rapport à la référence. Ceci s'explique par le fait que, dans la configuration traitée, le degré de liberté obstacle x_2 a une vitesse quasiment nulle au moment de l'impact. L'entrée en contact induit alors une discontinuité de vitesses qui se traduit par une accélération infinie à l'instant de l'impact, assimilable à une impulsion de Dirac. Naturellement, cette discontinuité ne peut pas être rigoureusement restituée par une méthode harmonique reposant sur une projection de Galerkine dans un espace de fonctions régulières. Ceci constitue une des principales limites de la HBM dans un formalisme non régulier. Dans le cas présent, l'obstacle étant purement élastique, les discontinuités de vitesses sont tout de même restituées de façon approchée ce qui mène à une bonne concordance avec l'IT, particulièrement sur le degré de liberté de l'impacteur x_1.

Afin de confirmer la cohérence des résultats entre la HBM et l'IT, on s'intéresse au bilan énergétique du système sur une période. Ce bilan est effectué sur la figure IV.6 pour la même solution que celle utilisée sur les figures IV.4 et IV.5. Les énergies sont calculées grâce aux



(a) vitesse $v_1(t)$

(b) vitesse $v_2(t)$

(c) accélération $a_1(t)$

(d) accélération $a_2(t)$

FIGURE IV.5 – Vitesses et accélérations obtenus par la DLFT-HBM et IT à la résonance, DLFT-HBM (—), IT (—).

formules fournies en annexe A. On place le zéro des grandeurs intégrales (énergie dissipée, travail des efforts d'excitation et de contact) à l'instant $t = 0$.

Ce bilan montre sous un autre angle que la solution DLFT-HBM est bien convergée sur toutes les énergies. Par ailleurs, ce bilan révèle que les contraintes de contact ne sont pas respectées. Le travail des efforts de contact est localement non nul pendant la phase de contact, ce qui implique que la contrainte $\mathbf{g}^\top \mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{N}} = 0$ n'est pas respectée. Néanmoins, le travail des efforts de contact s'annule sur une période complète. Les différences observées au niveau des énergies sont minimes et principalement liées à des effets de troncature.

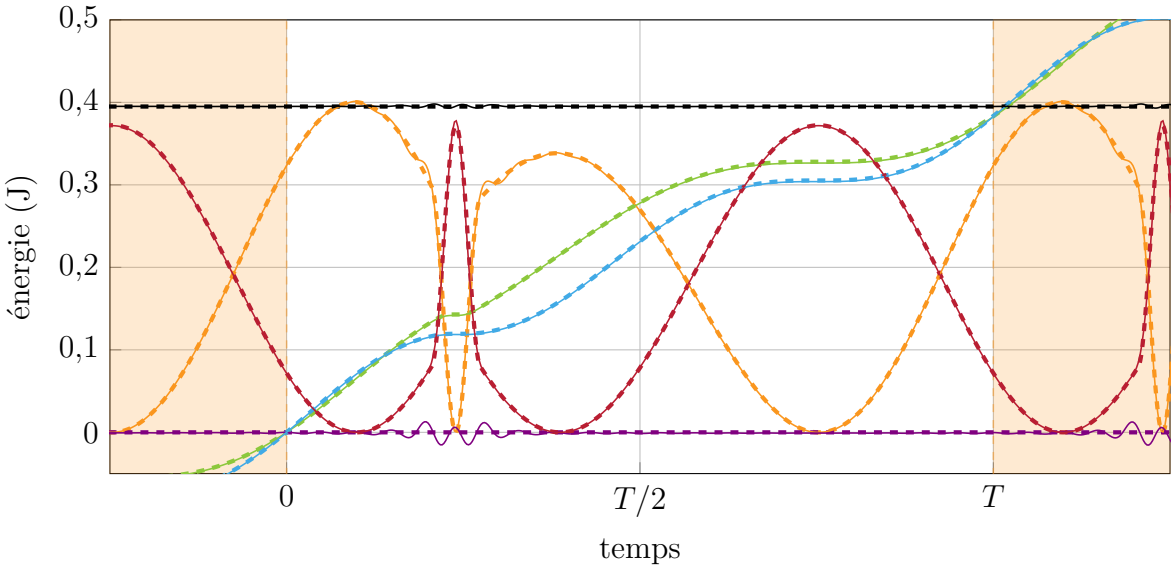


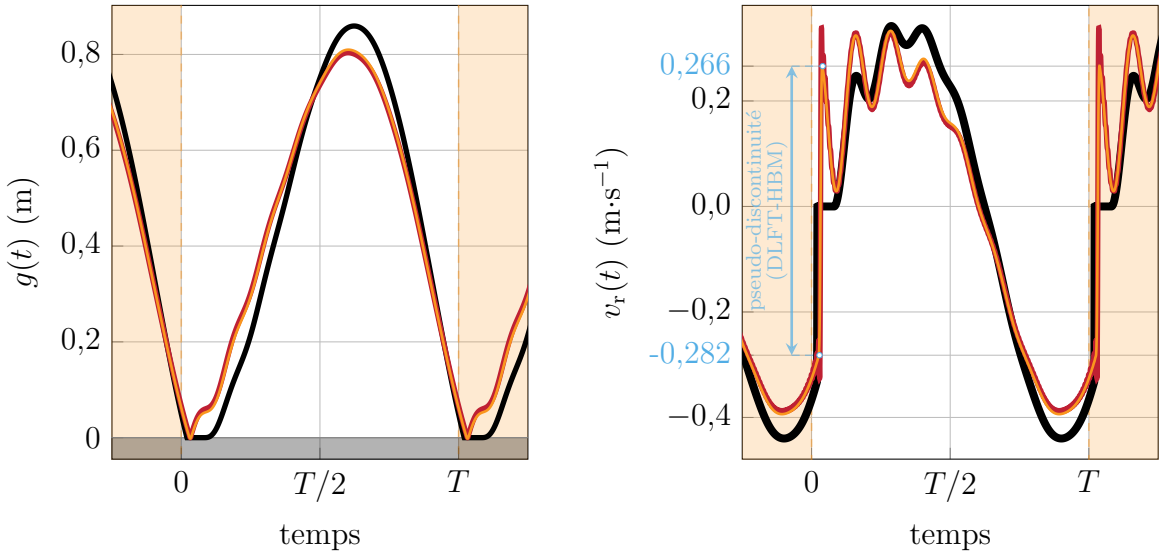
FIGURE IV.6 – Bilan énergétique sur une période pour $m_2 = 0\,\text{kg}$, IT (▪▪), DLFT-HBM (—), énergie totale (■), énergie cinétique (■), énergie potentielle (■), énergie dissipée (intégrale) (■), travail des efforts d'excitation (intégrale) (■), travail des efforts de contact (intégrale) (■).

1.3 Obstacle inertiel

1.3.1 Étude sur le coefficient de restitution

Comme la méthode de l'équilibrage harmonique s'appuie sur une projection de Galerkine sur une famille de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, les équations liées à une éventuelle discontinuité des vitesses n'ont pas de sens dans ce cadre. En effet, il ne peut pas y avoir de réelle discontinuité au sens mathématique. C'est-à-dire qu'il n'y a pas d'instant singulier et l'équation d'impact ne peut pas être utilisée. En revanche, il est possible d'observer des pseudo-discontinuités, où l'on observe une très forte variation de la vitesse relative sur un court laps de temps au sein d'une période. On représente sur la figure IV.7 le jeu et la vitesse relative entre les structures pour $m_2 = 2\,\text{kg}$ pour les méthodes harmoniques (DLFT-HBM et LCP-HBM) et un schéma d'intégration de Carpenter. Afin d'obtenir une dynamique convergée, on retient un très grand nombre d'harmoniques $N_\text{h} = 150$. En pratique, ce nombre d'harmoniques représente un temps de calcul beaucoup trop long pour être utilisé au sein d'une procédure de continuation. Cependant, cela permet d'examiner les solutions asymptotiques des méthodes harmoniques, point particulièrement important lorsqu'on caractérise une phénoménologie intrinsèquement non régulière. En effet, les spectres fréquentiels associés à des discontinuités sont théoriquement d'une largeur infinie.

On observe sur la figure IV.7 que les stratégies DLFT-HBM et LCP-HBM suivent deux trajectoires proches, là où la trajectoire associée à l'IT est différente. Grâce au grand nombre d'harmoniques choisi, une pseudo-discontinuité se dessine sur les solutions harmoniques. Néanmoins, la solution LCP-HBM présente des oscillations parasites qui empêchent de réaliser un relevé précis des valeurs de vitesses relatives aux abords de la pseudo-discontinuité. Au contraire, la solution DLFT-HBM est beaucoup moins oscillante ce qui permet d'effectuer un relevé de part et d'autre de la pseudo-discontinuité : $v_\text{r}^- \simeq -0{,}282\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_\text{r}^+ \simeq 0{,}266\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ces valeurs sont ensuite utilisées pour estimer le coefficient de restitution e_DLFT simulé par la



(a) Jeu (b) Vitesse relative

FIGURE IV.7 – Jeux et vitesses relatives obtenus par la DLFT-HBM ($N_t = 4000$), LCP-HBM ($N_t = 8000$) et IT au point $\omega = 0{,}9\,\text{rad·s}^{-1}$, DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—), IT ($e = 0$) (—), jeu négatif (▭).

DLFT-HBM grâce à la formule

$$e_{\text{DLFT}} = -\frac{v_r^+}{v_r^-} \simeq 0{,}943. \tag{IV.2}$$

Le coefficient de restitution estimé pour la DLFT-HBM est ici assez proche de 1, ce qui traduit un impact quasi-élastique. Par ailleurs, on observe bien sur la figure IV.7a que le jeu de la solution DLFT-HBM effectue un rebond presque instantané sur l'axe $g = 0$ qui traduit une collision élastique du système à l'impact. Au contraire, on retrouve facilement que la simulation par intégration temporelle a un coefficient de restitution nul car la vitesse relative devient nulle juste après l'impact ce qui traduit que $v_r^+ = 0$. On peut confirmer le comportement élastique de la collision DLFT-HBM sur le bilan énergétique réalisé sur la figure IV.8.

En effet, les efforts de contact DLFT-HBM ne dissipent pas d'énergie sur une période ce qui correspond à un impact purement élastique [19], contrairement aux simulations par IT où chaque impact dissipe une quantité d'énergie en lien avec l'équation (III.86). Cette observation suggère à nouveau que la DLFT-HBM correspond à une loi d'impact élastique ($e = 1$), bien qu'aucune loi d'impact ne soit explicitement spécifiée dans les équations. Afin de vérifier avec précision que la dynamique simulée est bien celle d'un coefficient de restitution de 1, il est nécessaire de comparer les résultats des méthodes harmoniques à un schéma d'IT avec loi d'impact. Les schémas de Schatzman-Paoli et de Moreau-Jean permettent d'effectuer de telles simulations. Afin de visualiser le comportement de l'ensemble des méthodes sur la configuration de la figure IV.7, on représente le portrait de phase du degré de liberté relatif sur la figure IV.9 pour la DLFT-HBM, la LCP-HBM, les schémas d'intégration de Carpenter, de Schatzman-Paoli avec $e = 1$ et de Moreau-Jean avec $e = 1$.

On observe sur la figure IV.9 que la simulation réalisée avec le schéma de Schatzman-Paoli (—) n'atteint pas un régime périodique comme les solutions des schémas de Carpenter (—) et de Moreau-Jean (—). Un bon accord est atteint entre les solutions DLFT-HBM (—), LCP-

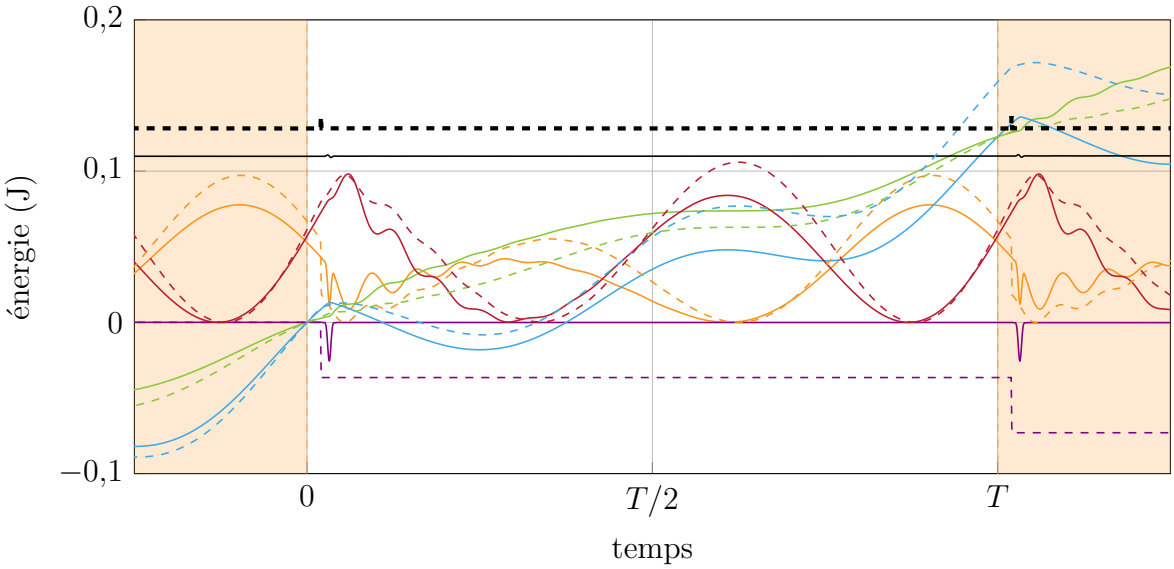


FIGURE IV.8 – Bilan énergétique sur une période pour $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ ($N_\mathrm{t} = 4000$), IT (▪▪), DLFT-HBM (—), énergie totale (■), énergie cinétique (■), énergie potentielle (■), énergie dissipée (intégrale) (■), travail des efforts d'excitation (intégrale) (■), travail des efforts de contact (intégrale) (■).

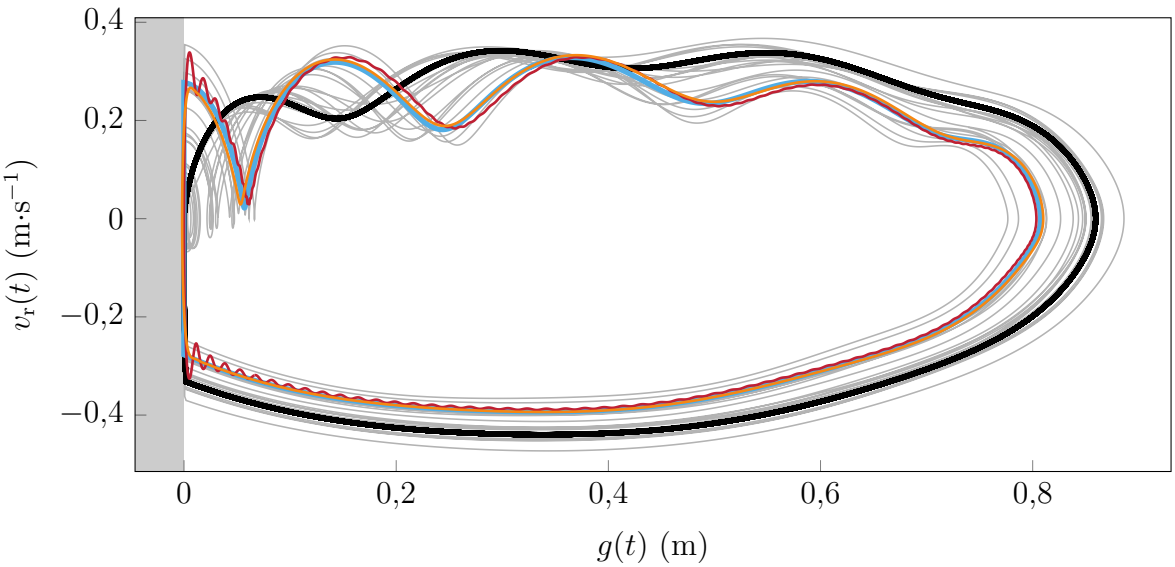


FIGURE IV.9 – Portrait de phase du degré de liberté relatif, DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—), IT Carpenter ($e = 0$) (—), IT Schatzman-Paoli (20 périodes, $e = 1$) (—), IT Moreau-Jean ($e = 1$) (—), jeu négatif (■).

HBM (—) et le schéma d'intégration de Moreau-Jean avec $e = 1$ (—) ce qui confirme que les stratégies basées sur la HBM retranscrivent une loi d'impact élastique ($e = 1$). De plus, on retrouve sur la figure IV.9 le caractère oscillant des vitesses relatives LCP-HBM initialement identifié sur la figure IV.7b.

Bien que le schéma de Schatzman-Paoli ne se stabilise pas vers un régime périodique, on

observe que le nuage de trajectoires associé contient les trajectoires des méthodes harmoniques ainsi que la trajectoire périodique de Moreau-Jean. Le schéma d'intégration de Schatzman-Paoli est poussé dans ses retranchements car ce dernier ne garantit que la loi d'impact soit correctement respectée que si le système reste en contact pendant trois instants consécutifs [58]. Or, lors de la simulation présentée sur la figure IV.9, l'impact ne dure qu'un seul instant à chaque fois donc les discontinuités de vitesses ne retranscrivent pas précisément le coefficient de restitution $e = 1$, ce qui génère le caractère non périodique de la réponse.

On rappelle que le coefficient de restitution e_{DLFT} mesuré sur la figure IV.7b n'est pas exactement égal à 1. Néanmoins, cette différence est attribuée aux effets de troncature. En effet, il faudrait théoriquement un nombre infini d'harmoniques pour modéliser une vraie discontinuité et mesurer le coefficient de restitution asymptotique de la méthode. On montre cependant à la fois grâce à l'étude du bilan énergétique sur la figure IV.8 et du portrait de phase sur la figure IV.9 que le coefficient de restitution asymptotique est $e^{\infty}_{\mathrm{DLFT}} = 1$.

1.3.2 Déphasage de la contrainte

Afin d'aller plus loin dans l'analyse de la stratégie DLFT-HBM, on étudie les caractéristiques de la stratégie DLFT-HBM concernant la gestion de la physique d'impact à la lumière de la stratégie associée au schéma d'intégration temporelle de Schatzman-Paoli. La procédure de prédiction-correction de ce dernier se base sur une prédiction de la contrainte de jeu utilisant à la fois le déplacement prédit à l'instant suivant x^{p}_{k+1} et le déplacement calculé à l'instant précédent x_{k-1}, conformément à l'équation (III.88). Ceci revient à modifier les conditions de contact respectées par le schéma. Dans le cas de l'impacteur représenté sur la figure IV.1, elles s'expriment

$$0 \leq \frac{g_{k+1} + e g_{k-1}}{1+e} \perp \lambda_{k+1} \geq 0 \qquad \forall k \geq 2. \tag{IV.3}$$

Ceci revient à déphaser la contrainte de jeu grâce à une interpolation linéaire entre le $(k+1)$-ième et le $(k-1)$-ième instant, tel que $\frac{g_{k+1}+e g_{k-1}}{1+e} \simeq g_{k+1-e} = g(t_{k+1} - e\mathrm{d}t)$ et donc

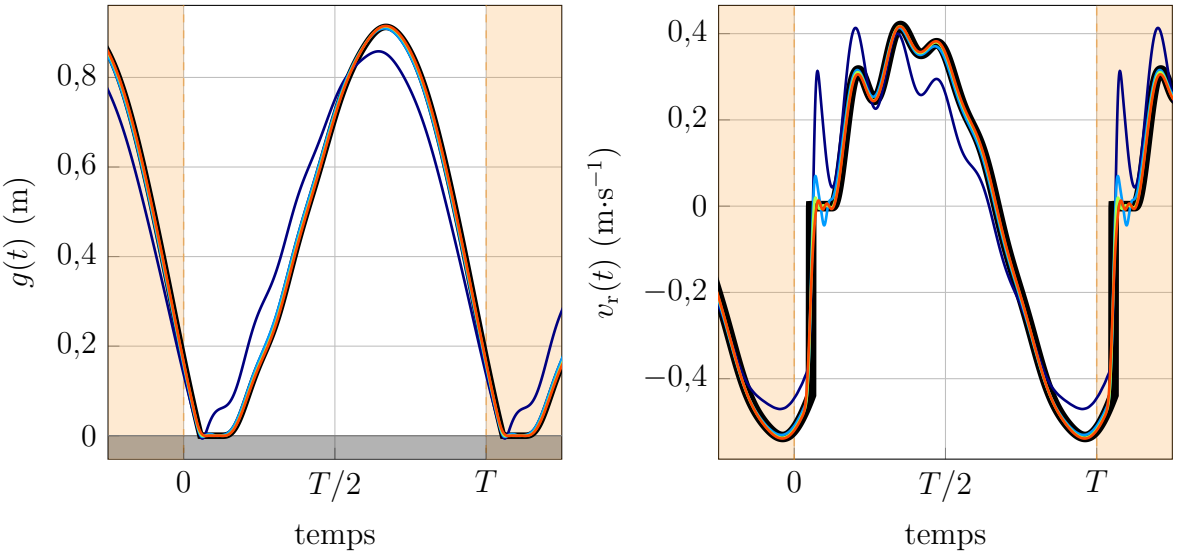
$$0 \leq g(t_{k+1} - e\mathrm{d}t) \perp \lambda(t_{k+1}) \geq 0 \qquad \forall k \geq 2. \tag{IV.4}$$

La contrainte en jeu g utilisée pour détecter le contact et calculer λ_{k+1} peut être déphasée du multiplicateur de Lagrange jusqu'à un instant entier pour $e = 1$. Dans cette section, on propose une variante de la DLFT-HBM inspirée du schéma de Schatzman-Paoli afin de prendre en compte une modification du coefficient de restitution par déphasage de la contrainte de jeu. La grandeur analogue à la contrainte de jeu en DLFT-HBM est le terme de pénalisation $\varepsilon\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ présent dans l'équation (III.44). On déphase alors ce terme dans le domaine temporel, *i.e.* au sein de l'AFT, pour observer si cela induit une modification de la dynamique de la solution. Pour ce faire, on modifie uniquement la prédiction des efforts de contact effectuée en DLFT-HBM. Pour un unique degré de liberté non linéaire, cette prédiction s'écrit

$$\mathbf{f}^{\mathrm{pre}}_{\mathrm{nl}} = \overline{\mathcal{F}}_1(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}) + \varepsilon\mathbf{R}^{n_{\mathrm{dep}}}\overline{\mathcal{F}}_1\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} \tag{IV.5}$$

où $\mathbf{R}^{n_{\mathrm{dep}}}$ est une matrice de permutation circulaire de n_{dep} instants. Ceci revient à pénaliser les efforts de contact $f^{\mathrm{pre}}_{\mathrm{nl}}(t)$ par la contrainte en jeu $g(t - n_{\mathrm{dep}}\mathrm{d}t)$. La mise en place de cette méthodologie mène aux résultats représentés sur la figure IV.10 pour le système étudié dans la section IV.1.3.1. On choisit ici $N_{\mathrm{h}} = 50$ harmoniques, $N_{\mathrm{t}} = 2000$ instants et on se place à $\omega = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ pour $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$.

Le déphasage de la contrainte induit une amélioration significative de la concordance avec l'IT simulant $e = 0$. En effet, on observe sur la figure IV.10a que le degré de liberté relatif



(a) Jeu (b) Vitesse relative

FIGURE IV.10 – Influence du déphasage n_dep sur le jeu et la vitesse relative obtenus par la DLFT-HBM, $n_\mathrm{dep} = 0$ (DLFT-HBM classique) (—), $n_\mathrm{dep} = 20$ (—), $n_\mathrm{dep} = 40$ (—), $n_\mathrm{dep} = 60$ (—), IT Carpenter ($e = 0$) (—), jeu négatif (▬).

$g(t)$ tend vers la solution à $e = 0$ à mesure qu'on augmente le déphasage. Par ailleurs, les vitesses relatives tracées sur la figure IV.10b confirment bien que ce déphasage a une influence sur le coefficient de restitution car la vitesse v_r^+, après la pseudo-discontinuité, tend vers 0. Le déphasage maximal appliqué à la contrainte est ici de $n_\mathrm{dep} = 60$ ce qui correspond à un décalage de 3% de la période. Ce déphasage est relativement faible, mais il est prévisible que la cohérence des solutions soit perdue lorsque le déphasage n_dep devient trop important.

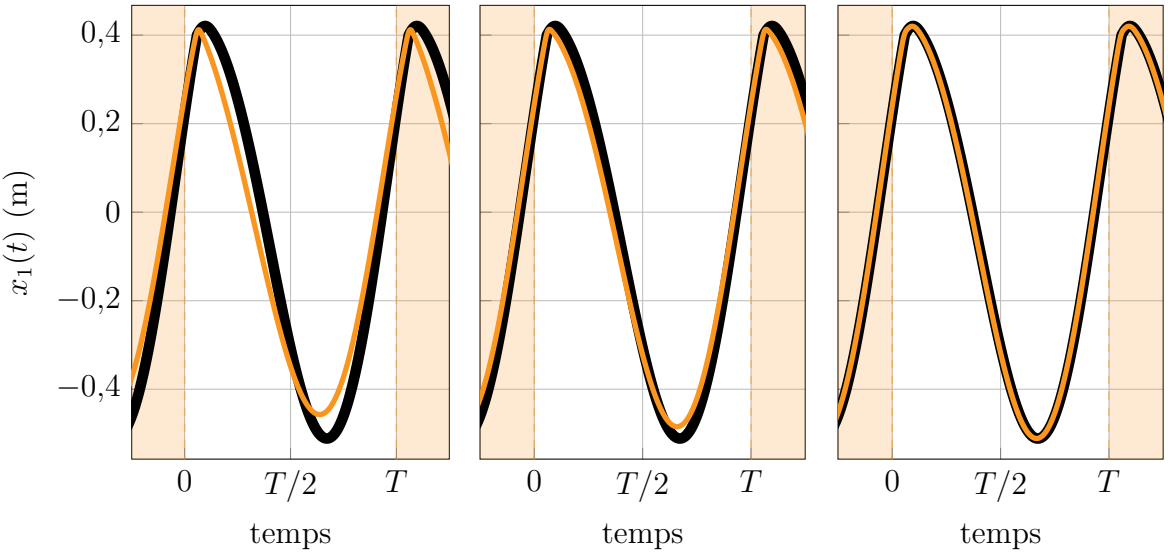
Afin de déterminer quantitativement l'influence du déphasage sur le comportement des solutions, on propose ici une série d'études paramétriques permettant de mieux appréhender le paramètre n_dep. Pour évaluer la distance entre une solution DLFT-HBM $x_1(t)$ et la solution de référence $x_1^\mathrm{ref}(t)$ calculée avec $e = 0$, on se dote d'une métrique $\mathcal{N}_2$ et son expression est

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{t}} \left(x_1(t_i) - x_1^\mathrm{ref}(t_i)\right)^2} = \left\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^\mathrm{ref}\right\|_2 . \tag{IV.6}$$

Afin de pouvoir utiliser $\mathcal{N}_2$, il est nécessaire que les deux solutions soient calculées explicitement sur les mêmes instants. Pour cette étude, on choisit d'utiliser le même pas de temps pour chacune des deux méthodes. Afin d'illustrer la métrique $\mathcal{N}_2$, on représente sur la figure IV.11 plusieurs solutions associées à leur valeur de $\mathcal{N}_2$.

Dans un premier temps, il convient de vérifier l'influence du nombre d'instants N_t dans le calcul DLFT-HBM en fonction de n_dep. On représente sur la figure IV.12 l'évolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de N_t et n_dep. On trace sur ce graphe la courbe (〓) passant par le déphasage optimal $n_\mathrm{dep}^\mathrm{opt}(N_\mathrm{t})$, correspondant aux lieux où $\mathcal{N}_2$ est minimal. On observe que cette courbe est linéaire en fonction du nombre d'instants, tel que $n_\mathrm{dep}^\mathrm{opt}(Nt) \simeq 0{,}0195 N_\mathrm{t}$. Ceci traduit que le déphasage optimal ne doit pas être interprété en tant qu'un nombre d'instants, *i.e.* comme une paramètre numérique, mais plutôt comme un temps caractéristique physique. Le décalage temporel optimal correspond à environ 2% de la période dans la configuration présentée.

Dans un second temps, on réalise une étude paramétrique sur le nombre d'harmoniques afin d'observer comment évolue le déphasage optimal $n_\mathrm{dep}^\mathrm{opt}$ en fonction de N_h. On représente sur



(a) $\mathcal{N}_2 = 3$ (b) $\mathcal{N}_2 = 1$ (c) $\mathcal{N}_2 = 0{,}01$

FIGURE IV.11 – Illustrations de différentes valeurs de $\mathcal{N}_2$ pour $N_\mathrm{t} = 2000$, $x_1(t)$ (—), $x_1^{\mathrm{ref}}(t)$ (—).

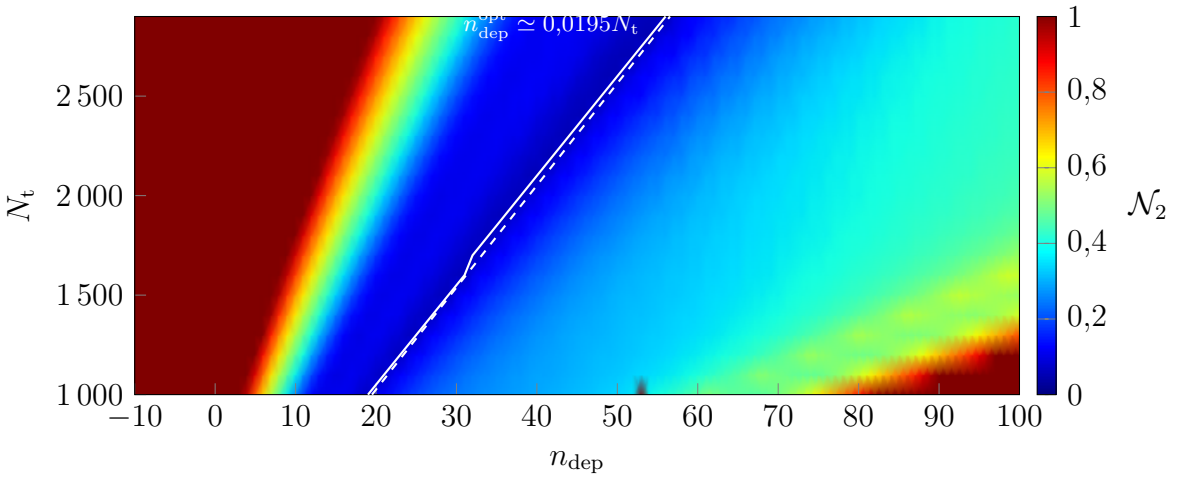
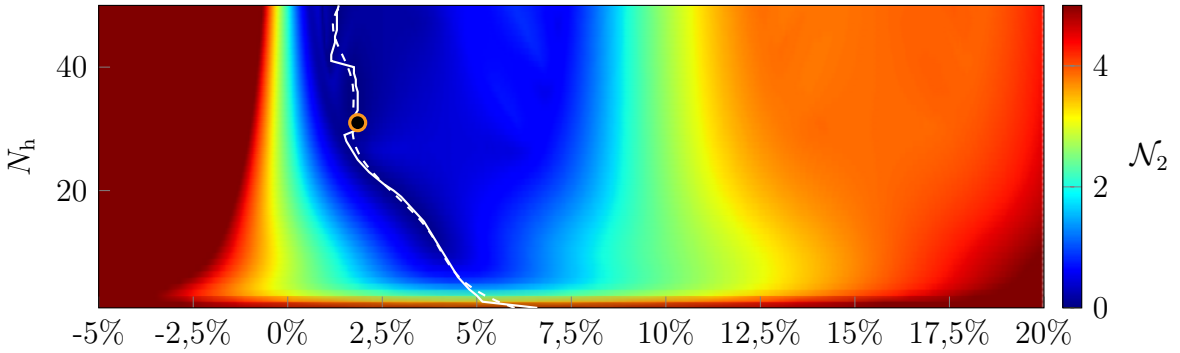


FIGURE IV.12 – Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et N_t, $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ calculé (—) , $0{,}0195 N_\mathrm{t}$ (- - -) .

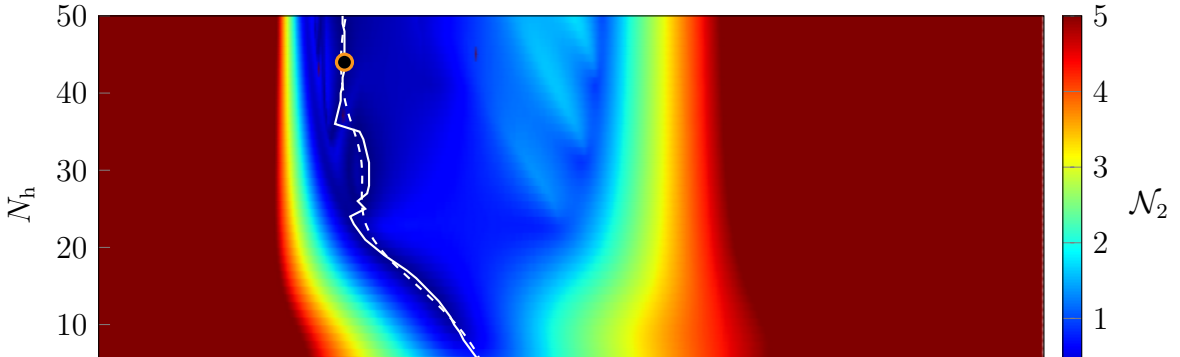
la figure IV.13 les cartes représentant l'évolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de n_{dep} et N_h pour deux valeurs de ω.

On observe une forte sensibilité du déphasage optimal au nombre d'harmoniques choisi pour la résolution. En effet, $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ varie fortement entre $N_\mathrm{h} = 1$ et $N_\mathrm{h} = 40$ puis se stabilise aux alentours de 2% pour les valeurs de N_h supérieures. Par ailleurs, on note que les minima de $\mathcal{N}_2$ (●) sur les figures IV.13a et IV.13b ne se situent pas au nombre d'harmoniques le plus élevé. Ceci suggère que l'évolution de $\mathcal{N}_2$ n'est pas monotone lorsqu'on augmente N_h. Afin de confirmer cette observation, on représente sur la figure IV.14 l'évolution de $\mathcal{N}_2$ avec N_h pour différentes valeurs de n_{dep}. Les tracés de la figure IV.14 correspondent à des lignes verticales sur la figure IV.13a.

On confirme grâce à la figure IV.14 le caractère non monotone de $\mathcal{N}_2$ en fonction de N_h.



(a) $\omega = 0{,}9\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$



(b) $\omega = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$

FIGURE IV.13 – Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et N_{h}, $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ calculé (═) , $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ lissé (spline) (╍) , $\mathcal{N}_2$ minimal (●).

Par ailleurs, on observe que pour chacune des valeurs de déphasage affichées, $\mathcal{N}_2$ est systématiquement inférieur au cas classique $n_{\mathrm{dep}} = 0\,\%$. Ces différences atteignent plus d'un ordre de grandeur pour certains couples $(N_{\mathrm{h}}, n_{\mathrm{dep}})$. De plus, on observe que le nombre d'harmoniques permettant de minimiser $\mathcal{N}_2$ à n_{dep} constant ne correspond pas à la valeur la plus grande de N_{h}. C'est-à-dire que rajouter des harmoniques à la réponse augmente la distance avec la solution de référence, ce qui s'explique probablement par l'effet de Gibbs.

Le dernier paramètre d'intérêt vis-à-vis de cette étude paramétrique sur n_{dep} est la masse de l'obstacle m_2. En effet, lorsque m_2 est nulle, la DLFT-HBM classique ($n_{\mathrm{dep}} = 0$) fournit des résultats concordants avec les simulations IT à coefficient de restitution nul. On propose donc sur la figure IV.15 une carte d'évolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de n_{dep} et m_2 à deux valeurs de ω.

On observe sur la figure IV.15 que la masse de l'obstacle constitue un paramètre sensible pour $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$. Sur les figures IV.15a et IV.15b, les amas de couleur rouge aux alentours de $m_2 = 0$ représentent des points non convergés. Conformément à ce qui est observé dans la section IV.1.2, aucun déphasage n'est nécessaire pour le cas $m_2 = 0$. Pour des valeurs de m_2 non nulles, le déphasage optimal $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ augmente à mesure que m_2 augmente, jusqu'à une valeur qui apparaît singulière aux alentours de $m_2 \simeq 4{,}2\,\mathrm{kg}$. Par la suite, $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ se stabilise aux alentours de $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}} \simeq 2{,}5\,\%$. On attribue cette stabilisation au fait que le ratio de masse $\frac{m_2}{m_1}$ devient grand

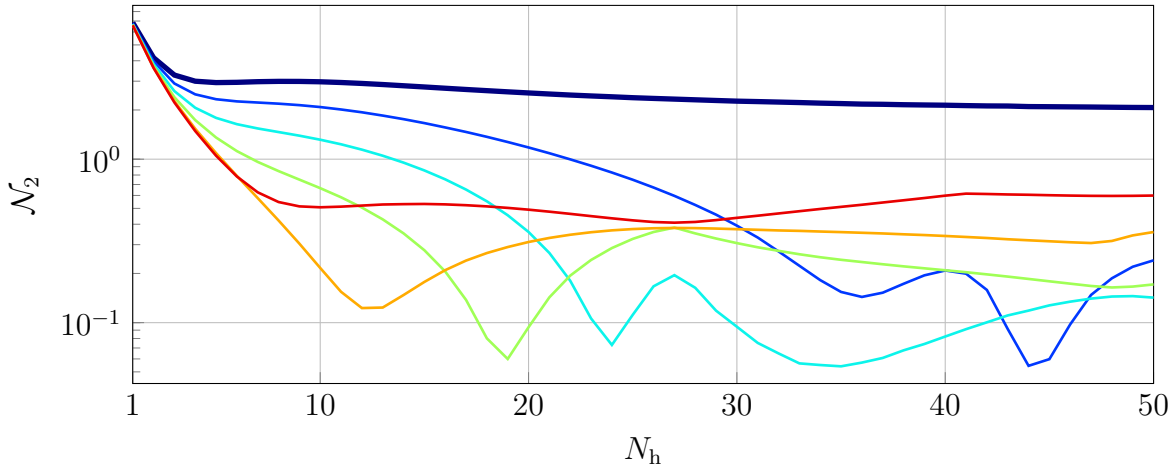


FIGURE IV.14 – Evolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de N_h ($N_\mathrm{t} = 2000$ et $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $\omega = 0{,}9\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$), $n_\mathrm{dep} = 0\,\%$ (DLFT-HBM classique) (—), $n_\mathrm{dep} = 1\,\%$ (—), $n_\mathrm{dep} = 2\,\%$ (—), $n_\mathrm{dep} = 3\,\%$ (—), $n_\mathrm{dep} = 4\,\%$ (—), $n_\mathrm{dep} = 5\,\%$ (—).

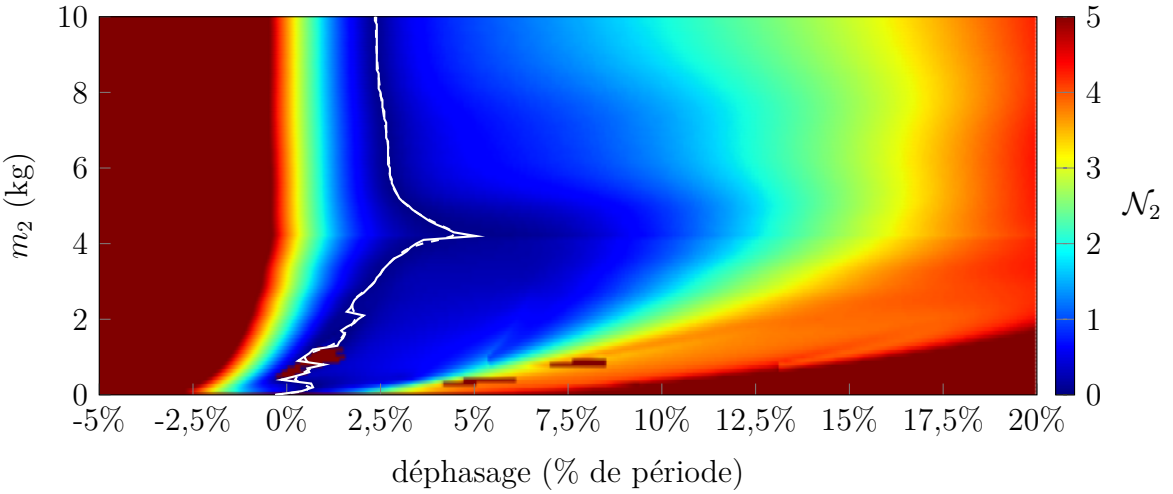
et on tend vers un comportement asymptotique. On note que le déphasage optimal obtenu est propre au jeu de paramètres choisi pour cette application. On s'attend donc à ce que cette valeur soit différente pour d'autres configurations.

Les observations faites en rapport avec le déphasage de la contrainte de jeu dans la stratégie DLFT-HBM permettent de tirer des conclusions quant au comportement de la méthodologie. En effet, dans le cas d'un obstacle avec une masse $m_2 \neq 0$, il existe toujours une valeur du déphasage $n_\mathrm{dep} \neq 0$ permettant de faire passer le coefficient de restitution de $e_\mathrm{DLFT} = 1$ à $e_\mathrm{DLFT} = 0$. Bien qu'il ne soit pas possible d'évaluer le coefficient de restitution précisément à une valeur de n_dep donnée, on constate que le paramètre de déphasage de la contrainte a un sens physique en lien étroit avec la loi d'impact. La notion de déphasage de la contrainte ne sera pas retenue pour la suite des développements car ces observations sont purement empiriques et mériteraient un approfondissement théorique — qui va au-delà du cadre de ces travaux de thèse — pour justifier l'utilisation systématique d'un déphasage.

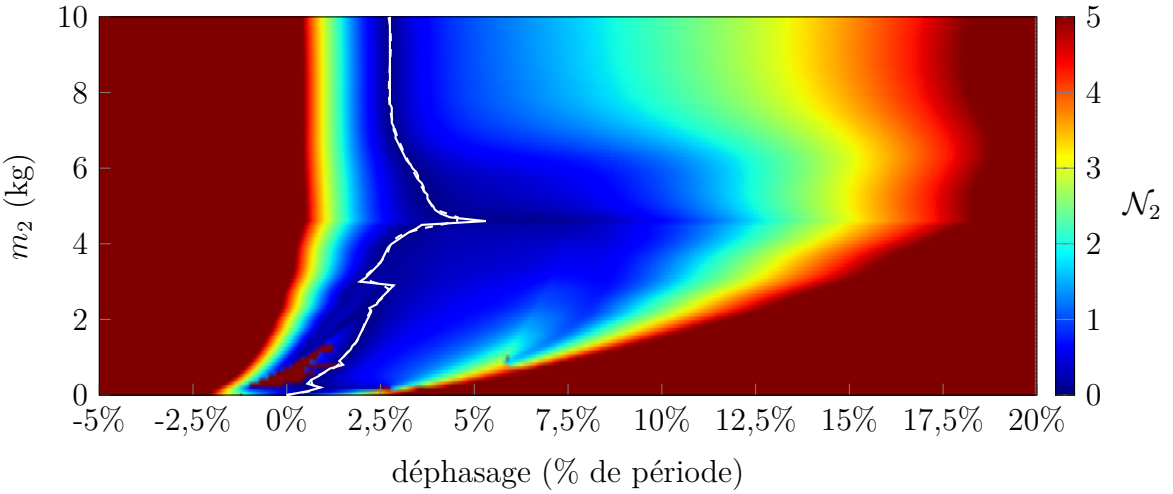
Impacteur à un degré de liberté - bilan

Coefficient de restitution Dans cette section, une étude portant sur un modèle phénoménologique d'impacteur a démontré que les stratégies fréquentielles restituaient correctement la dynamique du contact lorsque l'obstacle est purement flexible. En revanche, dès que l'obstacle a une inertie, *i.e.* une masse, non nulle, des différences significatives sont observées par rapport aux simulations de l'algorithme de Carpenter. On montre que ces différences sont liées à des différences de modélisation de la phénoménologie d'impact. Le coefficient de restitution des stratégies fréquentielles est alors mis en lumière : il s'agit d'un coefficient unitaire traduisant un impact élastique ($e = 1$), *i.e.* conservatif.

Déphasage de la contrainte On explore également l'influence de l'introduction d'un déphasage sur le terme de pénalisation de la DLFT-HBM. Il est observé que le paramètre de déphasage induit une modification de la prise en compte de la physique d'impact.



(a) $\omega = 0{,}9\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$



(b) $\omega = 1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$

FIGURE IV.15 – Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et m_2 ($N_{\mathrm{h}} = 30$), $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ calculé (═) , $n_{\mathrm{dep}}^{\mathrm{opt}}$ lissé (spline) (╍) .

2 Application à une barre éléments-finis

2.1 Présentation du modèle

Afin de passer à l'étape suivante de l'évaluation de la DLFT-HBM sur des systèmes en configuration de vibro-impact, il est nécessaire de traiter un modèle avec un contenu dynamique plus riche qu'un impacteur tout en conservant une physique simplifiée. Pour ce faire, on traite un modèle de barre éléments-finis à une dimension, de section S et de longueur L. Il s'agit d'un modèle relativement raide étant donné qu'il est monodimensionnel. Néanmoins, il y a plus de degrés de liberté que l'impacteur, ce qui apporte en souplesse au système en diluant l'influence de la non-linéarité dans l'ensemble du système (contrairement à l'application de la section IV.1 où la non-linéarité est concentrée sur un unique degré de liberté). L'objectif de cette section est de caractériser la barre impactant un obstacle rigide à la fois par la DLFT-HBM et par la LCP-HBM. La configuration retenue est illustrée sur la figure IV.16.

De la même manière que l'exemple de l'impacteur, le nœud de contact est excité par un

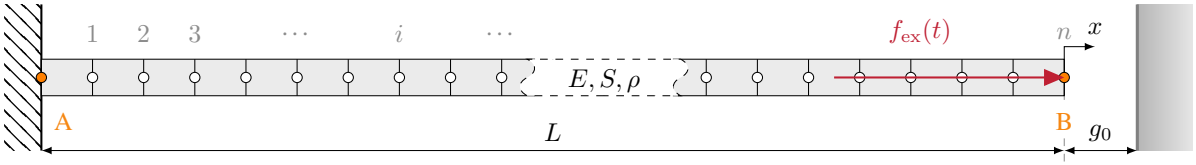


FIGURE IV.16 – Barre éléments-finis impactant un obstacle rigide, adaptée de [206].

effort harmonique $f_{ex}(t) = A\cos(\omega t)$ permettant d'initier le contact, où A est l'amplitude d'excitation. Les paramètres numériques du modèle sont fournis dans le tableau IV.2.

S	E	ρ	L	g_0
15,6 cm^2	210 GPa	7500 kg·m^{-3}	13 cm	0,2 mm

TABLEAU IV.2 – Dimensions et propriétés de la barre.

Les matrices élémentaires de masse et de raideur associées à la construction d'un modèle de barre éléments-finis en traction-compression sont

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho S L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_e = \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{IV.7}$$

On applique un amortissement modal pour calculer la matrice $\mathbf{C}$ et le taux d'amortissement modal $\xi = 7{,}5{\cdot}10^{-3}$ est choisi pour l'ensemble des modes. La fonction de jeu associée au modèle représenté sur la figure IV.16 est

$$g(t) = g_0 - x(t). \tag{IV.8}$$

Comme le traitement numérique de la configuration avec un obstacle rigide est délicat, le modèle est traité par étapes en modélisant l'obstacle par une raideur dans un premier temps. Cette configuration assouplie est représentée sur la figure IV.17.

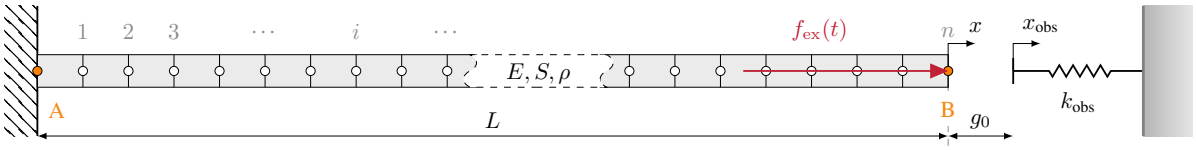


FIGURE IV.17 – Barre éléments-finis impactant un obstacle flexible, adaptée de [206].

Comme l'obstacle est flexible dans la configuration de la figure IV.17, un degré de liberté k_{obs} y est associé. La fonction de jeu est donc modifiée et s'écrit

$$g(t) = g_0 - (x(t) - x_{obs}(t)). \tag{IV.9}$$

Afin de pouvoir commenter sur la raideur de l'obstacle, k_{obs} doit être mise en perspective avec la rigidité de la barre. On normalise donc la raideur l'obstacle par rapport à la raideur équivalente de la barre k_{bar} dans la suite de l'étude. Afin de calculer cette raideur équivalente, on impose un effort statique unitaire à l'extrémité de la barre et on relève le déplacement associé au même nœud. En calculant le ratio effort sur déplacement, on obtient $k_{bar} = 2{,}5{\cdot}10^9$ N·m^{-1}. Dans l'étude présentée, la valeur de la raideur de l'obstacle k_{obs} est variable et va de $0{,}4k_{bar}$ à $400k_{bar}$, *i.e.* de $1{\cdot}10^9$ N·m^{-1} à $1{\cdot}10^{12}$ N·m^{-1}. L'obstacle ne se déplace quasiment pas pour la valeur $k_{obs} = 400k_{bar}$, ce qui approche la dynamique d'impact sur un obstacle rigide. Dans la suite, on parle d'obstacle rigide dans la configuration de la figure IV.16 et d'obstacle flexible

dans la configuration de la figure IV.17 sans se soucier de la valeur de k_{obs}. La configuration rigide constitue une avancée dans l'utilisation de la DLFT-HBM qui, jusqu'à ce jour, n'avait été utilisée que dans le cadre de deux structures flexibles.

On choisit une amplitude d'excitation $A = 25{\cdot}10^3\,\text{N}$, ce qui correspond à une amplitude vibratoire de $\|x(t)\|_\infty = 5{,}36{\cdot}10^{-4}\,\text{m}$ à la fréquence de résonance du premier mode $\omega_1 = 63\,953\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$. On représente la courbe de réponse linéaire du système autour du premier mode de la structure sur la figure IV.18. La fréquence du dernier mode du modèle de barre éléments-finis se situe aux alentours de $\omega_{\max} = 2{,}8{\cdot}10^6\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1} \simeq 44\omega_1$, à la fois pour les configurations encastrée-libre (sans contact) et encastrée-encastrée (en contact). Les trois premières fréquences propres de la barre dans ces deux configurations sont fournies à titre indicatif dans le tableau IV.3.

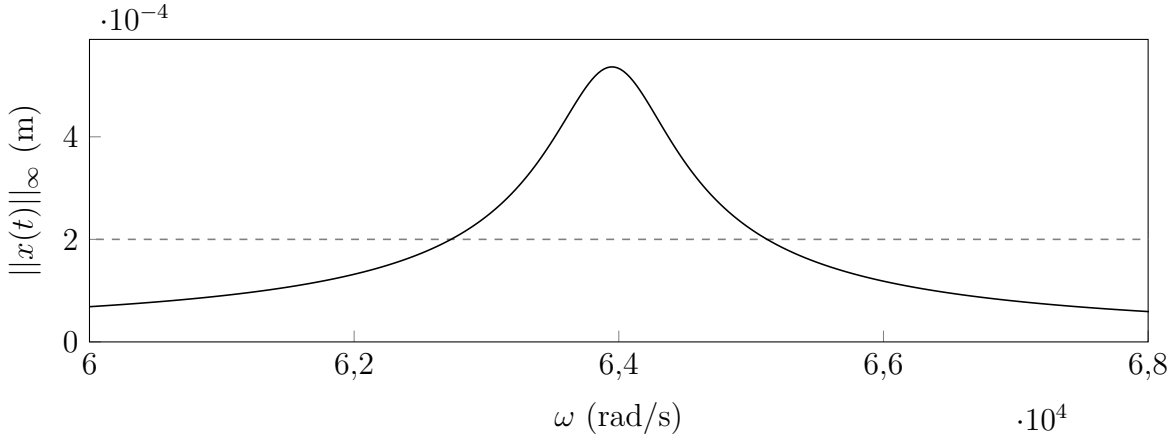


FIGURE IV.18 – Courbe de réponse en fréquence linéaire, amplitude vibratoire du nœud de contact (—), jeu initial g_0 (désactivé) (- -).

	ω_1	ω_2	ω_3
encastrée-libre	$63\,953{,}9\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$	$192\,256{,}5\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$	$321\,745{,}3\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$
encastrée-encastrée	$128\,006{,}5\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$	$256\,802{,}9\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$	$387\,183{,}6\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$

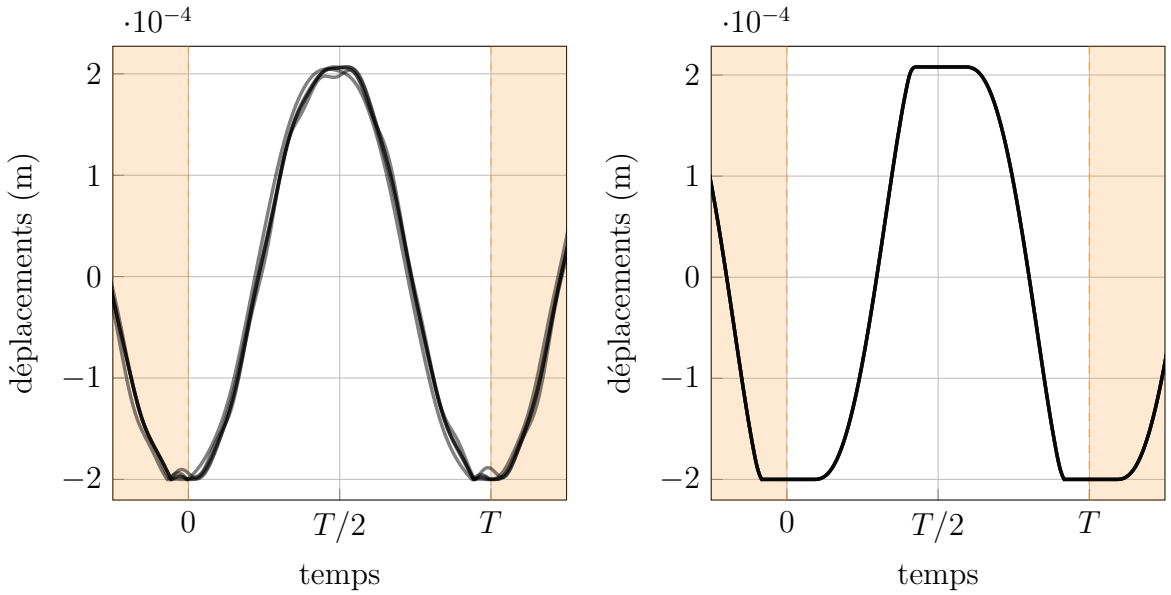
TABLEAU IV.3 – Premières pulsations propres de la barre éléments-finis de la figure IV.16.

2.2 Coefficient de restitution

En préambule de l'évaluation des méthodologies fréquentielles sur l'application de barre éléments-finis, on réalise une étude d'influence sur le coefficient de restitution e en fonction du nombre d'éléments n. Cette étude vise à démontrer que le coefficient de restitution n'a plus d'influence lorsqu'on caractérise les interactions de contact d'une structure finement discrétisée en espace.

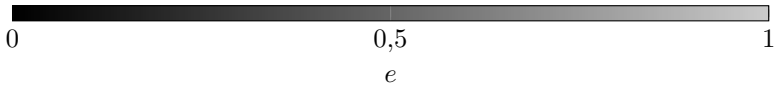
Dans un premier temps, on représente sur la figure IV.19 différentes solutions en fonction du coefficient de restitution e pour $n = 5$ et $n = 100$ dans la configuration rigide à la pulsation $\omega = \omega_1$. L'ensemble des solutions sont calculées par intégration temporelle avec l'algorithme de Moreau-Jean.

On observe qualitativement qu'avec un faible nombre d'éléments (figure IV.19a) la variabilité des solutions est bien plus importante que lorsque la barre est très discrétisée (figure IV.19b).



(a) $n = 5$ (b) $n = 100$

FIGURE IV.19 – Déplacements calculés par le schéma de Moreau-Jean en fonction du coefficient de restitution pour plusieurs discrétisations de la barre face à un obstacle rigide.



Les solutions sont complètement superposées à partir de $n = 100$. Les observations faites sur la figure IV.19 soutiennent le fait que l'influence du coefficient de restitution disparaît lorsqu'on traite des structures éléments-finis densément maillées. Dans la configuration où l'on on utilise un nombre important d'éléments ($n = 100$ par exemple), comme les solutions à $e = 1$ et $e = 0$ sont identiques et que la solution à $e = 1$ est conservative [19], on conclut que l'énergie dissipée par les efforts d'impact pour les solutions à $e = 0$ devient négligeable.

Afin de baser l'analyse sur des arguments quantitatifs, on réalise une étude en évaluant la métrique $\mathcal{N}_2$ sur les solutions obtenues par IT à plusieurs nombres d'éléments n en balayant l'intervalle $e \in [0; 1]$ pour le coefficient de restitution. On choisit la solution à $e = 0$ pour chacun des nombres d'éléments n considéré comme la référence dans $\mathcal{N}_2$. Dans ce cadre, la valeur de $\mathcal{N}_2$ quantifie donc la variabilité des solutions par rapport à la solution $e = 0$ au même nombre d'éléments. On note que le choix du coefficient de restitution de la solution de référence n'a pas d'importance étant donné le comportement asymptotique observé sur la figure IV.19. On représente l'évolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de n et de e sur la figure IV.20.

On constate que la distance $\mathcal{N}_2$ tend vers zéro pour toutes les valeurs du coefficient de restitution lorsque n est suffisamment grand. Ceci confirme les observations qualitatives faites sur la figure IV.19. Ainsi, lors du traitement de maillages éléments-finis, il est possible de comparer les résultats issus de la DLFT-HBM, modélisant $e_{\text{DLFT}} = 1$, avec des résultats obtenus par des stratégies modélisant $e = 0$. Dans ce cadre, on choisit l'algorithme d'intégration temporelle de Carpenter ($e = 0$) — standard industriel pour la caractérisation d'interactions de contact — afin de produire les simulations de référence. Les différences constatées dans la section IV.1.3.1 entre l'algorithme de Carpenter et les stratégies harmoniques peuvent être attribuées au fait que le modèle d'impacteur traité est constitué de peu de degrés de liberté. Particulièrement, le maillage de la barre éléments-finis permet de retranscrire plus précisément les échelles de temps associées à la propagation des ondes mécaniques induites par le contact.

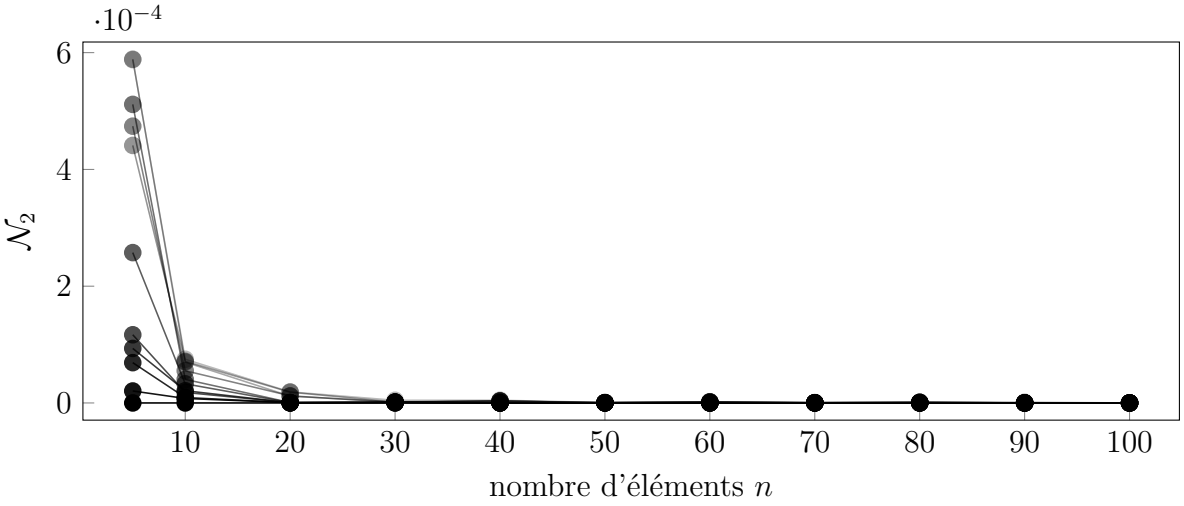
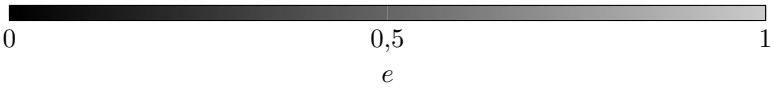


FIGURE IV.20 – Evolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction du nombre d'éléments n de la barre à plusieurs coefficients de restitution e.



2.3 Cadre de l'étude

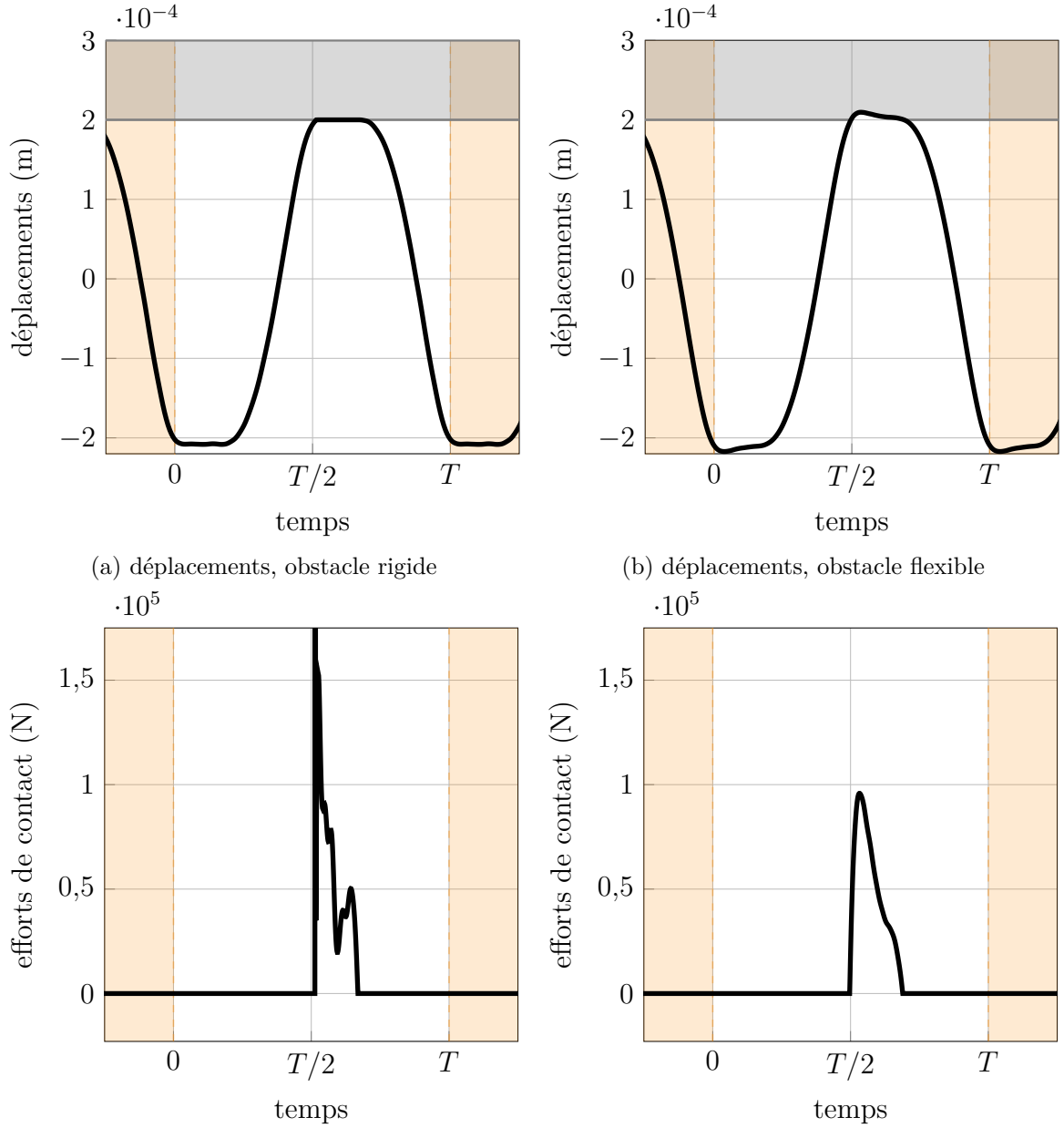
2.3.1 Démarche générale

Dans cette section, on caractérise le comportement des méthodologies DLFT-HBM et LCP-HBM sur le modèle académique présenté dans la section IV.2.1, d'abord avec un obstacle flexible puis avec un obstacle rigide. D'une part, chacune de ces stratégies est évaluée par rapport à celle de référence pour assurer que les solutions trouvées par les méthodes harmoniques sont valides. D'autre part, les approches DLFT-HBM et LCP-HBM sont comparées entre elles, permettant ainsi de les mettre en perspective. Des études paramétriques sont réalisées sur les différents paramètres numériques des méthodologies, à savoir N_h, N_t et ε. Une attention particulière est portée au paramètre ε qui constitue une grandeur numérique propre à la méthode DLFT-HBM qu'on cherche à qualifier finement. Avant de présenter les résultats obtenus par les méthodes fréquentielles, on fournit dans la section IV.2.3.2 un ensemble de résultats associé à la stratégie d'intégration temporelle de référence.

2.3.2 Solutions de référence

Les simulations par intégration temporelle sont réalisées grâce à l'algorithme de Carpenter pour lequel on choisit un pas de temps de l'ordre de $h = 1{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{s}$ pour garantir la stabilité numérique du schéma. On observe la réponse temporelle de la barre pour la fréquence d'excitation $\omega = \omega_1$ sur la figure IV.21, à la fois en termes de déplacements et d'efforts de contact pour chacun des types d'obstacle.

Pour la configuration rigide, *i.e.* les figures IV.21a et IV.21c, on note le parfait respect des conditions de contact unilatéral. Néanmoins, le signal d'efforts apparaît avoir un spectre étendu et contient même un effort impulsionnel lié à la discontinuité de vitesses associée à l'impact. Au contraire, dans la configuration avec l'obstacle flexible, les efforts de contact représentés sur la figure IV.21d apparaissent filtrés de certaines de leurs composantes hautes fréquences par rapport au cas rigide. Cependant, les non-régularités associées aux transitions entre les



(a) déplacements, obstacle rigide

(b) déplacements, obstacle flexible

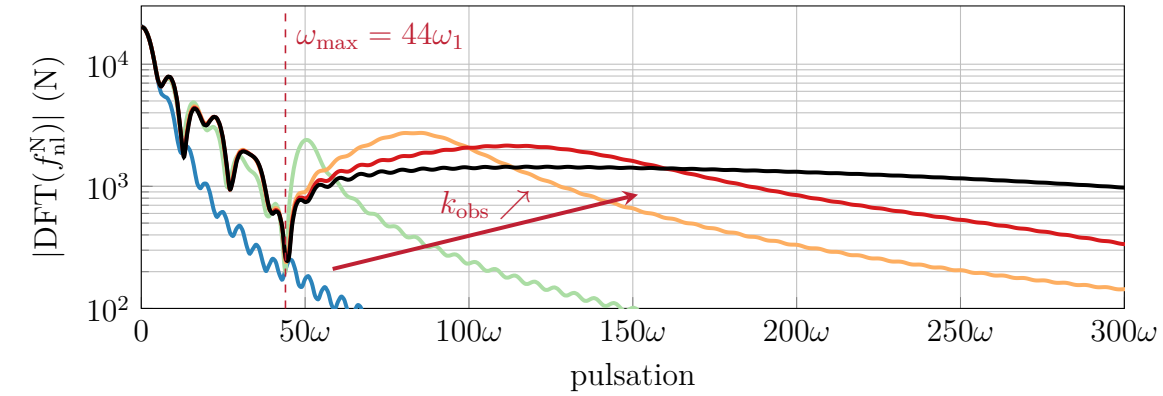
(c) efforts de contact, obstacle rigide

(d) efforts de contact, obstacle flexible

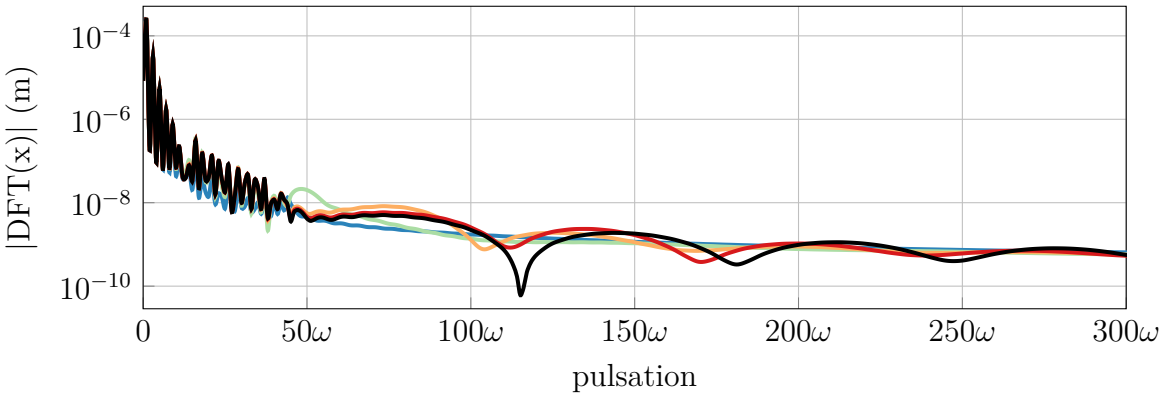
FIGURE IV.21 – Solutions de référence pour les deux configurations d'obstacle à $\omega = \omega_1$, $k_{\text{obs}} = 4k_{\text{bar}}$ pour le cas flexible, obstacle ( ).

états de séparation et de contact subsistent. Comme l'obstacle est flexible, un déplacement du degré de liberté $x_{\text{obs}}(t)$ est observé sur la figure IV.21b. Néanmoins, ce déplacement est assez faible pour cette valeur de k_{obs} et la dynamique de la barre avec obstacle rigide est approchée. Dans le cas présent, on n'observe pas d'interpénétration entre l'obstacle et la barre, ce qui montre que la modélisation du cas avec l'obstacle flexible par multiplicateurs de Lagrange est strictement équivalente à modéliser un obstacle rigide avec un traitement du contact par une loi de pénalité bilinéaire. Dans un souci de lisibilité des figures et comme il ne peut pas y avoir de pénétration résiduelle entre l'obstacle et la barre dans les simulation par IT, on omet par la suite la représentation de l'obstacle des simulations par IT sur les graphes. Ainsi, seul l'obstacle associé aux solutions HBM ( ) sera représenté sur les figures.

Afin de mieux cerner l'influence du paramètre k_{obs} sur les spectres des efforts de contact et déplacements, on réalise une étude de convergence sur k_{obs}. On représente alors, pour plusieurs valeurs de k_{obs}, le spectre des efforts de contact $f_{\text{nl}}^{\text{N}}(t)$ sur la figure IV.22a et le spectre de $x(t)$ sur la figure IV.22b. Pour le calcul des spectres, on utilise les signaux associés à la dernière période de calculs par intégration temporelle.



(a) efforts de contact



(b) déplacements

FIGURE IV.22 – Spectres des déplacements et efforts de contact pour différentes valeurs de k_{obs} à $\omega = \omega_1$, rigide (—), $k_{\text{obs}} = 4k_{\text{bar}}$ (—), $k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$ (—), $k_{\text{obs}} = 200k_{\text{bar}}$ (—), $k_{\text{obs}} = 400k_{\text{bar}}$ (—).

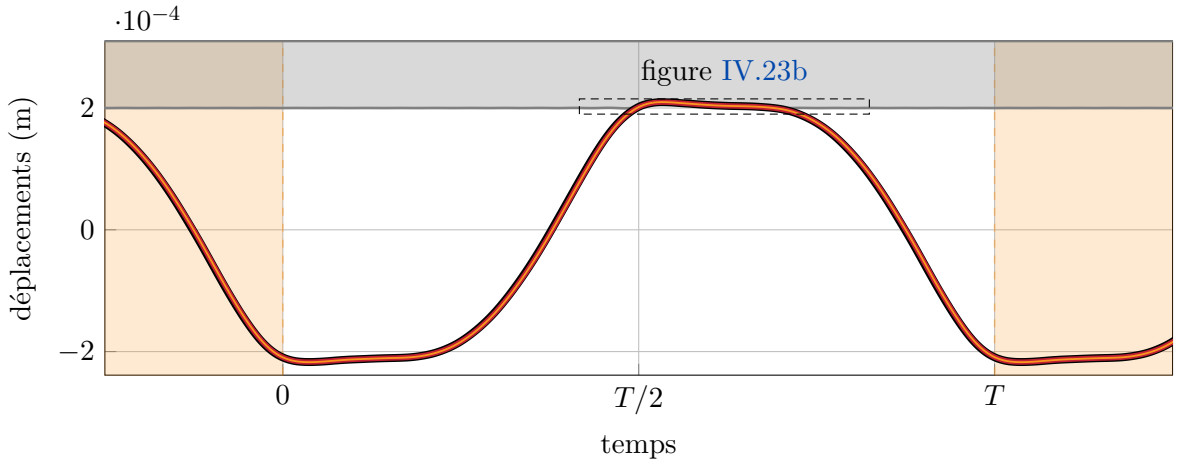
Les résultats représentés sur la figure IV.22 montrent bien l'intérêt de rendre l'obstacle flexible, ce qui revient à utiliser une gestion du contact par pénalité. Pour des obstacles très flexibles, le spectre des efforts de contact dans les basses fréquences est bien approché. Toutefois, l'amplitude des harmoniques supérieurs se met à décroître à partir d'une certaine valeur, *a priori* dépendante de la valeur de k_{obs}. En particulier, à partir de $k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$, le spectre des efforts de contact approxime correctement le spectre associé à l'obstacle rigide jusqu'à la dernière fréquence propre de la barre $\omega_{\text{max}} \simeq 44\omega_1$ (- -). La raideur de l'obstacle agit comme un filtre passe-bas pour les efforts de contact. Dans le cas présent, il apparaît impossible de décrire la partie du spectre associée aux fréquences supérieures à ω_{max} (très hautes fréquences). La partie très hautes fréquences des spectres pour l'obstacle flexible converge en effet assez lentement vers le spectre associé à l'obstacle rigide. On attribue ceci à la nature non régulière de la phénoménologie de vibro-impact, intrinsèquement associée à des spectres étendus à cause des discontinuités de vitesses. Les contributions très hautes fréquences sont cependant atténuées en termes de déplacements. En effet, le spectre des déplacements chute rapidement vers des

valeurs négligeables comme on peut l'observer sur la figure IV.22b : les hautes fréquences sont fortement filtrées par la structure elle-même. Ainsi, la variabilité observée sur les efforts de contact est atténuée au niveau des déplacements.

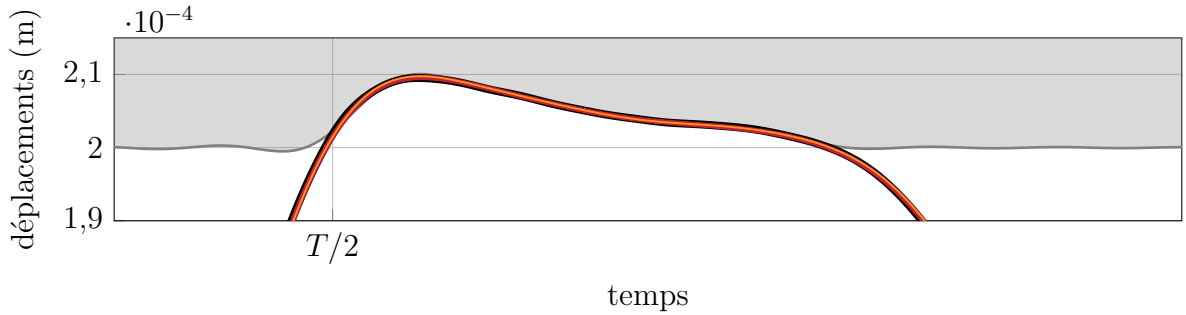
2.4 Analyse des signaux temporels

2.4.1 Obstacle flexible

Dans cette section, on compare les solutions LCP-HBM et DLFT-HBM calculées à la pulsation $\omega = \omega_1$ pour $k_{\text{obs}} = 4k_{\text{bar}}$. On représente les signaux de déplacements obtenus par les différentes méthodologies sur la figure IV.23. Les comportements des solutions dans la phase de contact sont représentés sur une vue agrandie sur la figure IV.23b.



(a) période entière

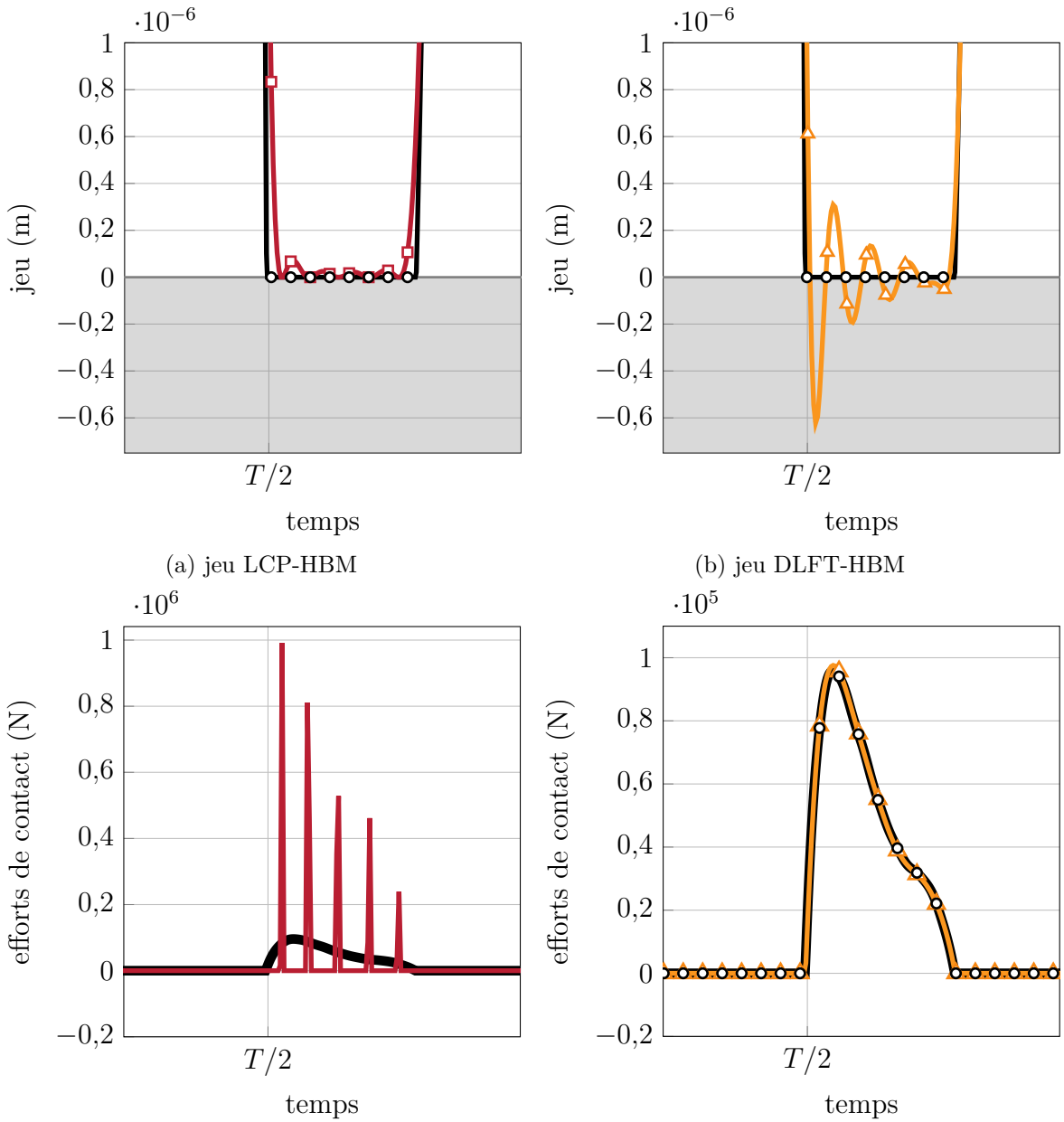


(b) phase de contact

FIGURE IV.23 – Déplacement du nœud de contact pour $N_{\text{h}} = 20$ et $N_{\text{t}} = 400$, IT (obstacle flexible) (—), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—), obstacle ( ).

On observe sur la figure IV.23a un excellent accord en termes de déplacements entre les trois stratégies alors que les algorithmes de gestion du contact sont radicalement différents. Cet accord persiste même durant la phase de contact sur la figure IV.23b. Afin de mettre en lumière les différences entre les méthodologies, on choisit de représenter sur la figure IV.24 le jeu et les efforts de contact dans la même configuration que sur la figure IV.23. Le jeu est calculé à partir des champs de déplacements solutions, cependant les efforts de contact sont représentés avant la troncature harmonique. Cela correspond aux efforts de contact avant l'application de la transformée de Fourier discrète sur les signaux temporels. Le signal d'efforts associé à la DLFT-HBM correspond à l'effort corrigé à la dernière itération du solveur itératif, avant le retour dans le domaine fréquentiel. Le signal d'efforts associé à la LCP-HBM est le vecteur de

multiplicateurs de Lagrange discret en temps solution du LCP (III.63). Comme ces signaux n'ont pas encore subi de transformée de Fourier discrète, ils ne sont pas restreints à la bande passante de la HBM. Ainsi, leurs spectres contiennent des composantes fréquentielles associées aux très hautes fréquences. Néanmoins, il est important de garder à l'esprit que les composantes associées à des pulsations supérieures à $N_{\mathrm{h}}\omega$ sont intégralement filtrées lors de l'injection dans l'équation HBM (II.29).



(a) jeu LCP-HBM

(b) jeu DLFT-HBM

(c) efforts de contact avant filtrage LCP-HBM

(d) efforts de contact avant filtrage DLFT-HBM

FIGURE IV.24 – Jeu et efforts de contact avant troncature pour $N_{\mathrm{h}} = 20$ et $N_{\mathrm{t}} = 400$, IT (obstacle flexible) (-o-), DLFT-HBM (-△-), LCP-HBM (-□-), obstacle (▭).

On note sur la figure IV.24 que quelques marqueurs sont ajoutés à des fins de comparaison entre les méthodes mais les signaux contiennent davantage de points que le nombre de marqueurs affichés. Les signaux de jeu des figures IV.24a et IV.24b montrent deux façons de traiter le contact. En effet, le jeu de la solution DLFT-HBM oscille autour de $g = 0$ et prend des

valeurs négatives alors que le jeu associé à la LCP-HBM respecte strictement la condition de non-interpénétration $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$. D'autre part, les efforts de contact avant filtrage sont de nature différente. En effet, le signal d'efforts de contact de la solution DLFT-HBM sur la figure IV.24d est superposé à la solution de référence dans le domaine temporel. Au contraire, les efforts de contact de la solution LCP-HBM sur la figure IV.24c sont de nature impulsionnelle et semblent être non physiques. Ceci est dû au fait que ce signal d'effort est solution d'un LCP, qui inclue un respect strict de la condition de complémentarité $\mathbf{g}^\top \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} = 0$. On observe effectivement pour la LCP-HBM que l'effort de contact est non-nul seulement aux instants où le jeu s'annule, c'est-à-dire cinq instants sur une période. Étant donné que ces signaux s'inscrivent dans un cadre HBM, ces résultats doivent être tronqués à la bande passante HBM afin d'être analysés physiquement. On représente sur la figure IV.25 les signaux tronqués pour les deux stratégies. En pratique, on les calcule en effectuant un aller-retour dans le domaine fréquentiel (par une DFT suivie d'une IDFT) sur les efforts de contact de la figure IV.24.

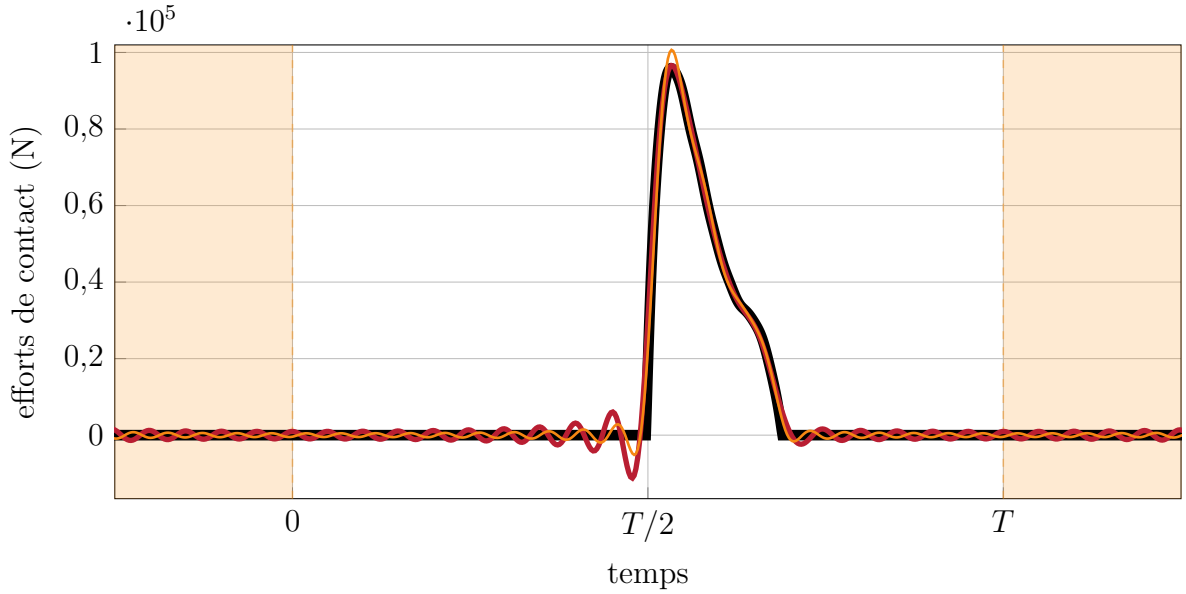
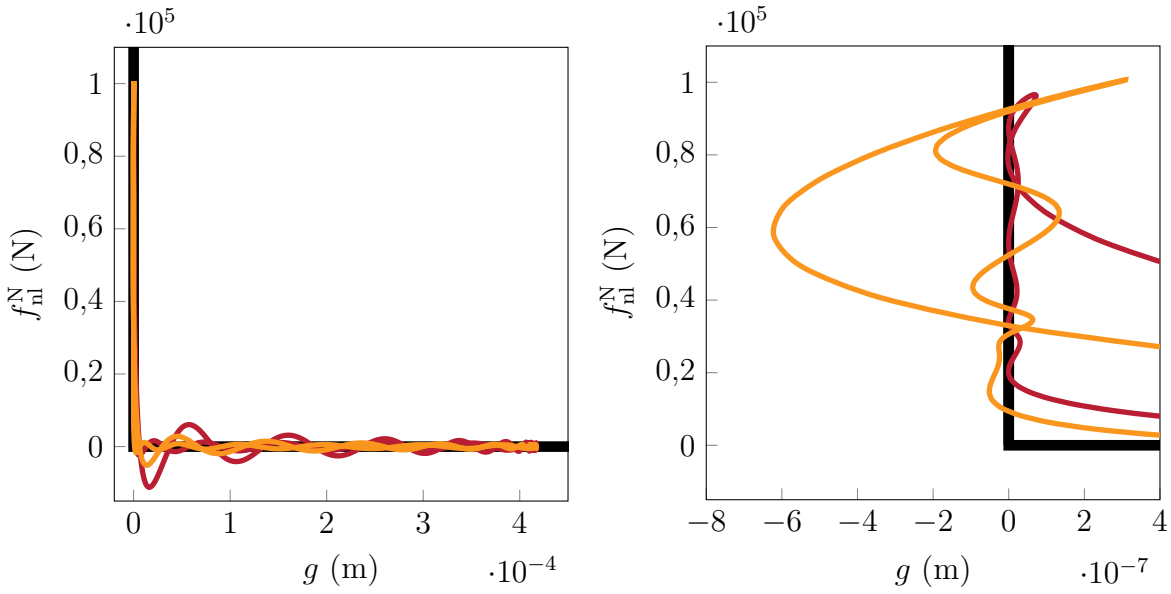


FIGURE IV.25 – Efforts de contact tronqués pour un obstacle flexible avec $N_{\mathrm{h}} = 20$ et $N_{\mathrm{t}} = 400$, IT (—), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—).

Une fois la troncature effectuée, ce qui revient à s'intéresser seulement à la partie du spectre utile à la résolution, on observe que le signal impulsionnel de la LCP-HBM approxime correctement le signal d'efforts de référence calculé par IT. Il s'avère que, bien que la nature impulsionnelle du signal était *a priori* associée à un comportement non physique, la partie utile du spectre des efforts coïncide avec le signal de référence. On observe néanmoins, à la fois pour la DLFT-HBM et la LCP-HBM, que la troncature mène à l'apparition d'oscillations parasites à proximité des instants de transition. Ceci correspond à l'effet de Gibbs et la LCP-HBM y est plus sujette que la DLFT-HBM sur l'exemple de la figure IV.25. Dans les deux cas, on constate que les deux méthodes ne respectent pas la condition de positivité des efforts de contact $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \geq \mathbf{0}$. Par la même occasion, la condition d'orthogonalité de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}$ n'est pas respectée à cause des oscillations de troncature : $\mathbf{g}^\top \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}} \neq 0$.

Afin de représenter de visuellement le respect des conditions de contact par chacune des méthodologies, on utilise les diagrammes de loi de contact dans ce manuscrit. Il s'agit de représenter les solutions dans le plan $(g,\ f_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}})$ afin de mettre en lumière le non-respect des conditions de contact unilatéral. Un exemple de ce diagramme est fourni sur la figure IV.26

pour les solutions précédemment étudiées dans cette section.



(a) période entière

(b) zoom autour de $g = 0$

FIGURE IV.26 – Diagramme loi de contact pour $N_h = 20$ et $N_t = 400$, DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—), contact unilatéral (━).

La courbe associée au contact unilatéral représente l'ensemble des points où toutes les conditions de Hertz-Signorini-Moreau sont respectées. On observe sur la figure IV.26 que les méthodologies de gestion du contact par HBM retranscrivent cette loi de façon approchée. Cette représentation permet de regrouper l'ensemble des observations faites précédemment quant au non-respect des conditions de contact de ces stratégies. La figure IV.26b met particulièrement en lumière le fait que la LCP-HBM n'autorise aucune pénétration résiduelle, là où la DLFT-HBM autorise une faible pénétration résiduelle d'environ $6{\cdot}10^{-7}$ m, correspondant à 0,3% de l'amplitude vibratoire. L'effet de Gibbs des efforts de contact est également aisément identifié sur la figure IV.26a où l'on voit de fortes oscillations autour de l'axe $f_{nl}^N = 0$.

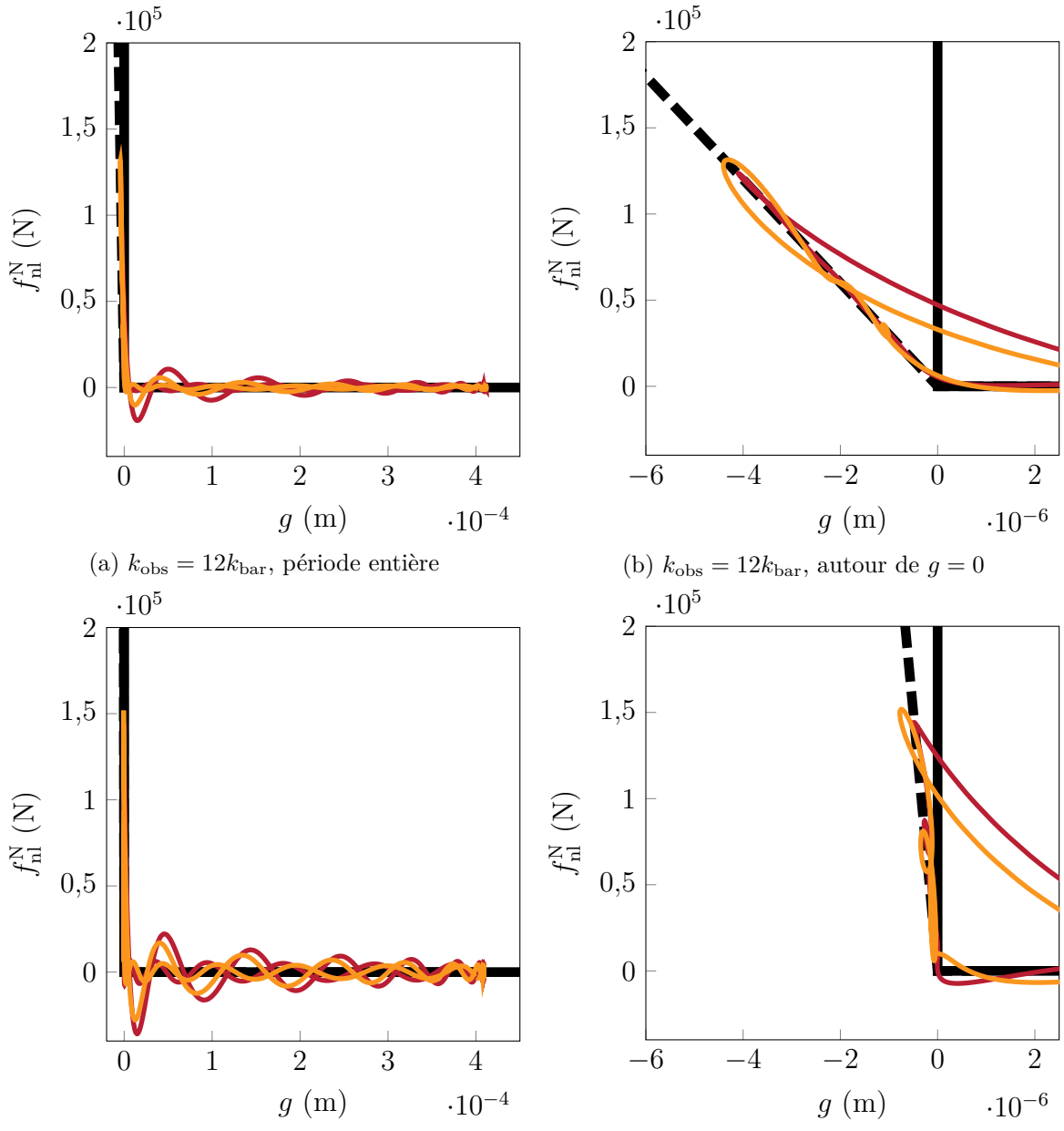
2.4.2 Obstacle rigide avec pénalité bilinéaire

Les résultats présentés dans la section IV.2.4.1 ont illustré un certain nombre de propriétés des méthodes HBM lorsque l'obstacle peut être modélisé par une raideur simple, ce qui n'est pas le cas général. Dans cette partie, on adopte une perspective différente afin d'analyser davantage les méthodologies. Désormais, on considère que le déplacement de l'obstacle est une pénétration résiduelle — *i.e.* un défaut de modélisation — contrairement à la définition du jeu par l'équation (IV.9) utilisée dans la section IV.2.4.1. Ceci revient à considérer qu'on traite la configuration de la barre avec l'obstacle rigide de la figure IV.16 en ajoutant un traitement du contact par pénalité. Ces deux configurations sont équivalentes du point de vue de la résolution numérique et l'unique différence réside dans l'interprétation des résultats. En effet, dans le cas rigide avec pénalité, l'expression du jeu devient

$$g(t) = g_0 - x(t). \tag{IV.10}$$

Seul le diagramme de loi de contact est modifié en raison de la nouvelle expression de la fonction de jeu $g(t)$. On représente sur la figure IV.27 les lois de contact simulées par HBM pour deux

valeurs de k_{obs}.



(a) $k_{\text{obs}} = 12k_{\text{bar}}$, période entière

(b) $k_{\text{obs}} = 12k_{\text{bar}}$, autour de $g = 0$

(c) $k_{\text{obs}} = 120k_{\text{bar}}$, période entière

(d) $k_{\text{obs}} = 120k_{\text{bar}}$, autour de $g = 0$

FIGURE IV.27 – Lois de contact simulées pour un obstacle rigide avec pénalité bilinéaire à différentes valeurs de k_{obs} pour $N_{\text{h}} = 20$ et $N_{\text{t}} = 400$ à $\omega = \omega_1$, DLFT-HBM (—), LCP-HBM (—), loi de pénalité $f_{\text{nl}}^{\text{N}} = \max(-k_{\text{obs}}g, 0)$ (▪▪▪), contact unilatéral (▬).

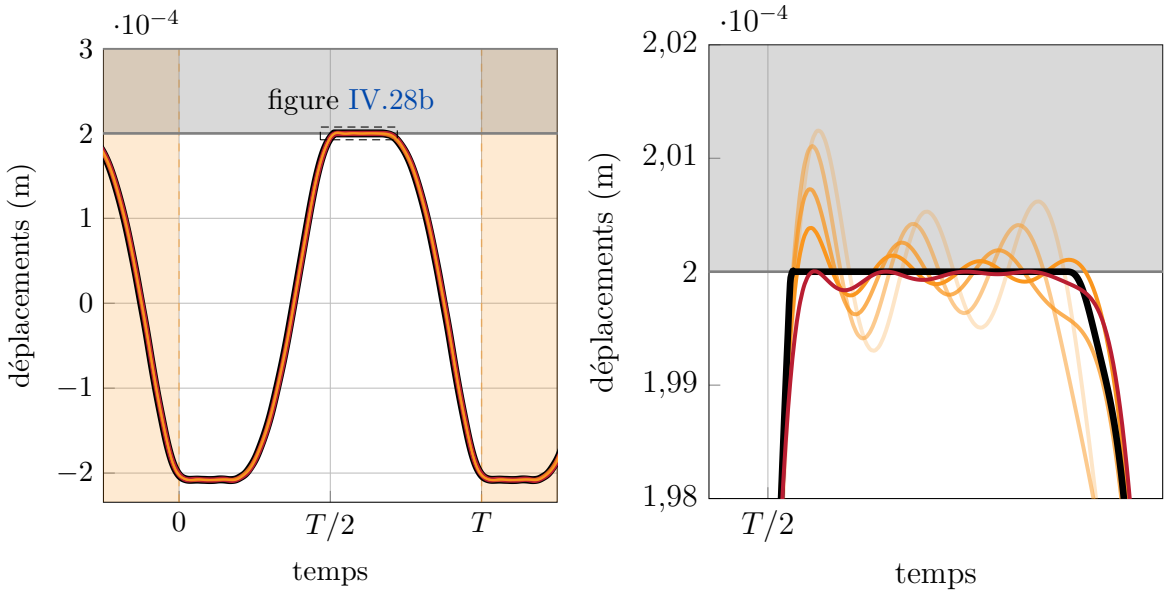
La raideur de l'obstacle k_{obs} influence la pénétration résiduelle puisqu'elle est directement liée à la loi de contact asymptotique $f_{\text{nl}}^{\text{N}} = \max(-k_{\text{obs}}g, 0)$. Sur la figure IV.27, on observe que les méthodes HBM approximent effectivement la loi de pénalité bilinéaire associée à k_{obs}. Comme prévu par l'équivalence avec les simulations réalisées dans la section IV.2.4.1, la DLFT-HBM et la LCP-HBM se comportent de façon analogue à la configuration avec obstacle flexible. Premièrement, les solutions LCP-HBM ne pénètrent pas au sens de la pénalité et respectent systématiquement l'inégalité $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{N}} \geq \max(-k_{\text{obs}}\mathbf{g}, \mathbf{0})$. De son côté, la solution DLFT-HBM oscille autour de la loi asymptotique ce qui autorise un certain niveau de pénétration résiduelle associé

à la méthodologie qui s'ajoute à la pénétration résiduelle autorisée par la loi de pénalité.

Ce changement de perspective permet de visualiser l'influence de la raideur de la pénalité sur la pénétration résiduelle, ce qui n'était pas possible lorsque le déplacement de l'obstacle n'était pas considéré comme un défaut de la méthodologie. L'augmentation de la raideur de pénalité de $k_{\text{obs}} = 12k_{\text{bar}}$ (figures IV.27a et IV.27b) à $k_{\text{obs}} = 120k_{\text{bar}}$ (figures IV.27c et IV.27d) vient avec une diminution de la pénétration résiduelle mais également avec une augmentation de l'amplitude des oscillations des efforts de contact autour de $f_{\text{nl}}^{\text{N}} = 0$. Ceci traduit directement les propriétés de filtre passe-bas de la raideur de pénalité, mises en lumière dans la section IV.2.3.2.

2.4.3 Obstacle rigide

Enfin, on considère l'obstacle comme complètement rigide sans utiliser de raideur de pénalité. Il s'agit du modèle représenté sur la figure IV.16. Une solution LCP-HBM et plusieurs solutions DLFT-HBM avec différentes valeurs de ε sont représentées sur la figure IV.28 et comparées avec une solution de référence.



(a) période entière

(b) phase de contact

FIGURE IV.28 – Déplacement du nœud de contact en fonction de ε pour $N_{\text{h}} = 20$ et $N_{\text{t}} = 400$, IT (Lagrange) (—), DLFT-HBM $\varepsilon = 1{\cdot}10^{8}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), DLFT-HBM $\varepsilon = 1{\cdot}10^{9}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), DLFT-HBM $\varepsilon = 1{\cdot}10^{10}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), DLFT-HBM $\varepsilon = 1{\cdot}10^{11}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), LCP-HBM (—), obstacle rigide ( ).

Tout d'abord, les solutions obtenues par la DLFT-HBM pour cette configuration sont convergées en amplitude pour toute valeur de ε qui permet au solveur de trouver une solution. Ceci souligne que la pertinence des solutions trouvées par la DLFT-HBM ne dépend pas de ε, ce qui confirme que le terme ε n'est pas analogue à une raideur de pénalité. En termes de comportement qualitatif, il n'y a pas de différences significatives avec les résultats présentés dans les sections IV.2.4.1 et IV.2.4.2, ce qui témoigne d'une certaine robustesse des stratégies vis-à-vis du type d'obstacle.

2.5 Courbes de réponse en fréquence

2.5.1 Obstacle flexible

En mettant en œuvre une procédure de continuation par longueur d'arc, on obtient les courbes de réponse en fréquence associées à la DLFT-HBM qu'on représente sur la figure IV.29. Dans un premier temps, ces calculs sont effectués sur le cas de l'obstacle flexible et la raideur de l'obstacle varie de $k_{\text{obs}} = 0{,}4k_{\text{bar}}$ à $k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$. Les réponses en fréquence de référence sont obtenues par des simulations IT avec une excitation par balayage linéaire sur la gamme de fréquences d'intérêt, à la fois pour l'obstacle rigide (▬) et pour l'obstacle flexible (▬). La simulation réalisée par IT avec l'obstacle rigide constitue la réponse qu'on souhaite approcher à mesure que la raideur de l'obstacle k_{obs} augmente. Les efforts d'excitation associés au balayage linéaire sont calculés par la formule

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} \cos\left(\left(\omega_1^{\text{ex}} + (\omega_2^{\text{ex}} - \omega_1^{\text{ex}})\frac{t}{2T}\right) t\right) = \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} \cos\left(\phi_{\text{ex}}(t)\right) \tag{IV.11}$$

où $\overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}$ est un vecteur contenant la forme de l'excitation et T la durée totale du signal. La pulsation instantanée de l'excitation est définie par

$$\Omega_{\text{ex}} = \frac{\mathrm{d}\phi_{\text{ex}}}{\mathrm{d}t} = \omega_1^{\text{ex}} + (\omega_2^{\text{ex}} - \omega_1^{\text{ex}})\frac{t}{T}, \tag{IV.12}$$

ainsi ω_1^{ex} est la pulsation instantanée de l'excitation à $t = 0$ et ω_2^{ex} la pulsation instantanée de l'excitation à $t = T$.

Les résultats présentés sur la figure IV.29 montrent que la LCP-HBM et la DLFT-HBM sont en bon accord avec les simulations IT de référence pour l'obstacle flexible. De plus, les courbes de réponse en fréquence montrent une bonne convergence vers la simulation réalisée par multiplicateurs de Lagrange en IT (▬) à partir de $k_{\text{obs}} = 20k_{\text{bar}}$, ce qui confirme que les méthodes de pénalité approchent la dynamique de la configuration rigide si la raideur k_{obs} est suffisamment grande.

2.5.2 Obstacle rigide

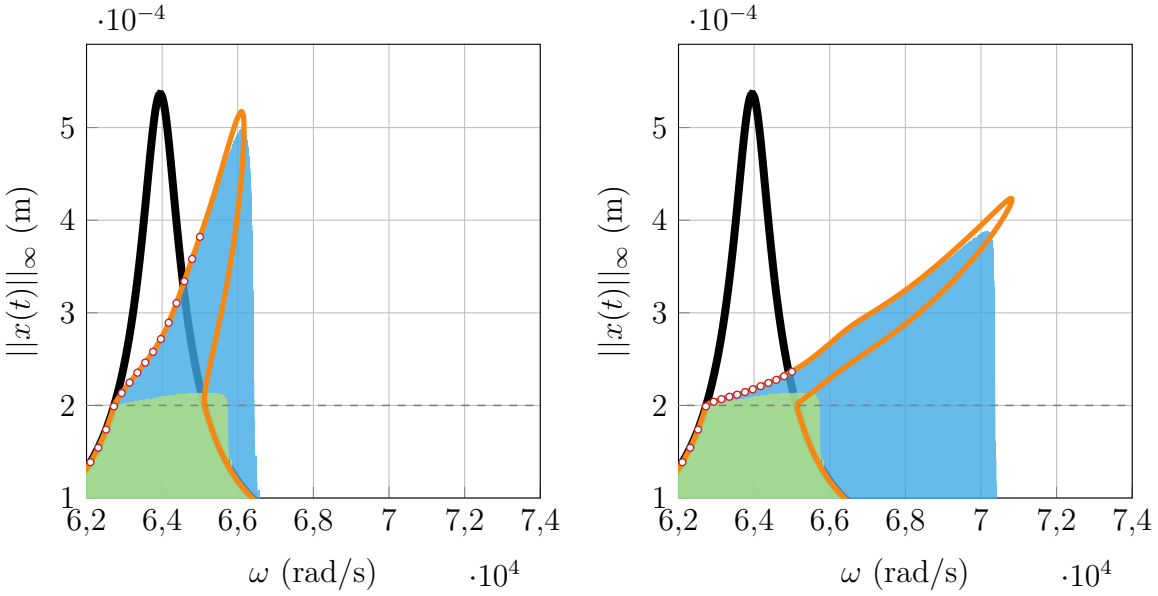
Finalement, on représente sur la figure IV.30 les courbes de réponse en fréquence obtenues sur la configuration rigide (—). Ces réponses sont comparées aux courbes obtenues sur la configuration avec obstacle flexible pour $k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$ (—). La solution de référence est la solution d'IT pour une excitation par balayage linéaire avec un obstacle rigide (▬).

Un bon accord est atteint entre les courbes de réponse en fréquence de l'obstacle rigide et la référence, surtout pour le nombre d'harmoniques $N_{\text{h}} = 40$. En revanche, dans la configuration avec obstacle flexible, équivalente à une méthode de pénalité, l'amplitude de la résonance non linéaire est surestimée. On note que les simulations avec obstacle rigide nécessitent des temps de calcul similaires aux calculs avec obstacle flexible. Ainsi, il est plus fiable de résoudre directement la configuration rigide puisqu'elle ne nécessite pas une calibration de k_{obs} préalable au calcul de la courbe de réponse en fréquence.

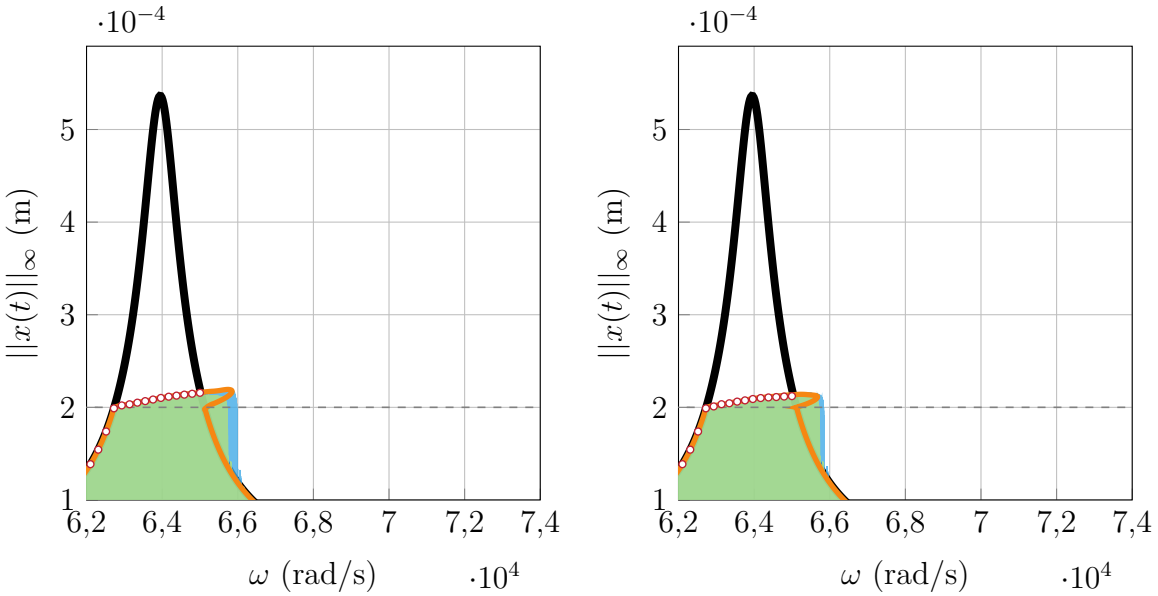
2.6 Analyses paramétriques des méthodes de résolution

2.6.1 Influence du paramètre ε

Le paramètre ε est au centre de la méthodologie DLFT-HBM car il s'agit d'un paramètre numérique qui mesure la proximité nécessaire entre $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ et $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}$ pour que la solution soit considérée comme convergée, conformément à l'équation (III.48). D'une certaine manière, ce paramètre est



(a) $k_{\text{obs}} = 0{,}4k_{\text{bar}}$ (b) $k_{\text{obs}} = 4k_{\text{bar}}$



(c) $k_{\text{obs}} = 20k_{\text{bar}}$ (d) $k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$

FIGURE IV.29 – Courbes de réponse en fréquence pour différentes valeurs de k_{obs} pour $N_{\text{h}} = 20$ et $N_{\text{t}} = 400$, linéaire (—), DLFT-HBM (—), LCP-HBM (○), IT balayage linéaire (pénalité) (▭), IT balayage linéaire (Lagrange) (▭), g_0 (- -).

analogue à la tolérance du solveur, qui définit à quel point le résidu de la fonction à annuler doit être proche de zéro pour considérer qu'une solution est trouvée. Le paramètre ε a également une influence sur l'étape de prédiction de la DLFT-HBM à chaque itération par l'utilisation de la formule (III.44). Il est donc intéressant d'évaluer son influence sur les solutions, et en particulier sur les efforts de contact puisque ε apparaît directement dans leur expression. Dans cette section, on réalise une étude paramétrique sur ε. Cette étude s'articule autour d'observations sur les signaux d'efforts de contact, le spectre de ces signaux et enfin sur les lois de contact associées.

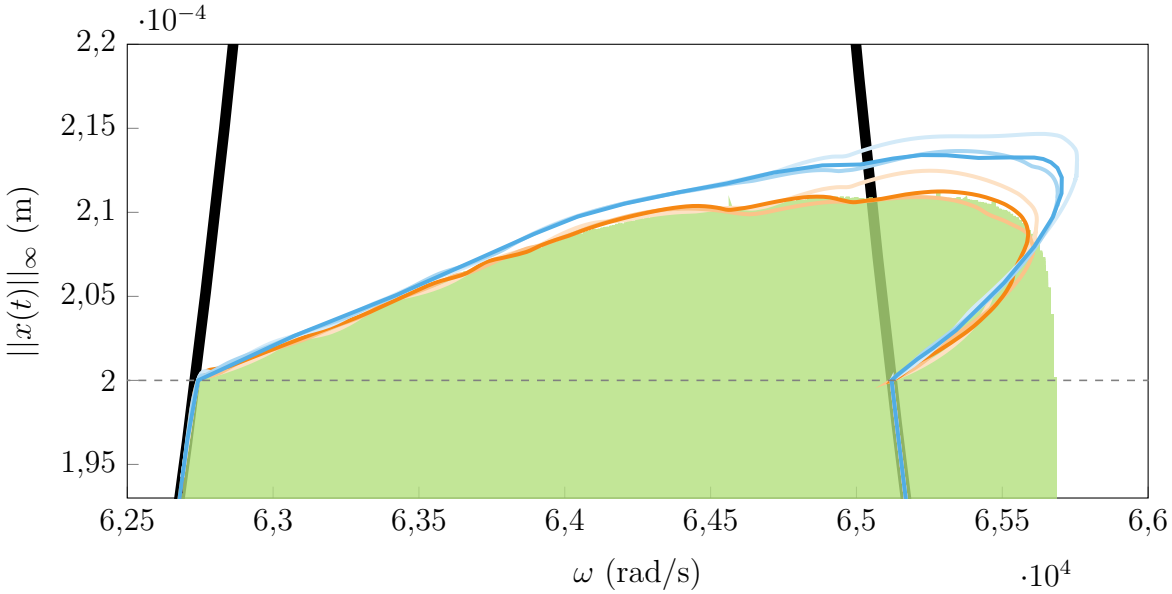
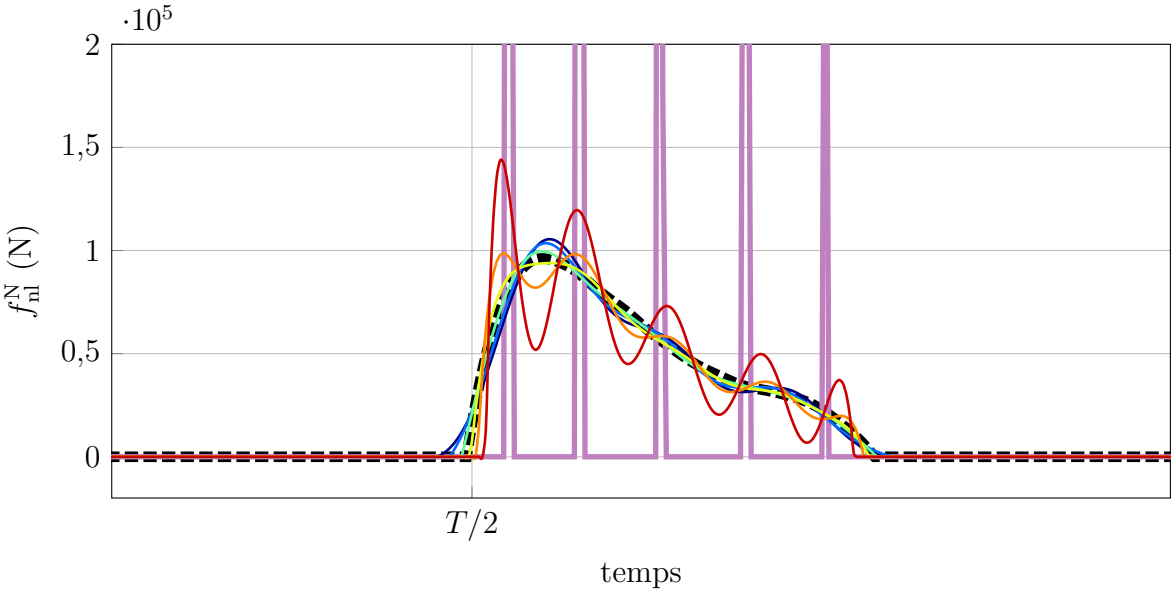


FIGURE IV.30 – Courbes de réponse en fréquence pour les configurations rigide et flexible ($k_{\text{obs}} = 40k_{\text{bar}}$) $N_{\text{t}} = 400$ et N_{h} variable, linéaire (—), g_0 (- -), IT balayage linéaire (obstacle rigide) (▭), DLFT-HBM obstacle flexible : $N_{\text{h}} = 20$ (—), $N_{\text{h}} = 30$ (—), $N_{\text{h}} = 40$ (—), DLFT-HBM obstacle rigide : $N_{\text{h}} = 20$ (—), $N_{\text{h}} = 30$ (—), $N_{\text{h}} = 40$ (—).

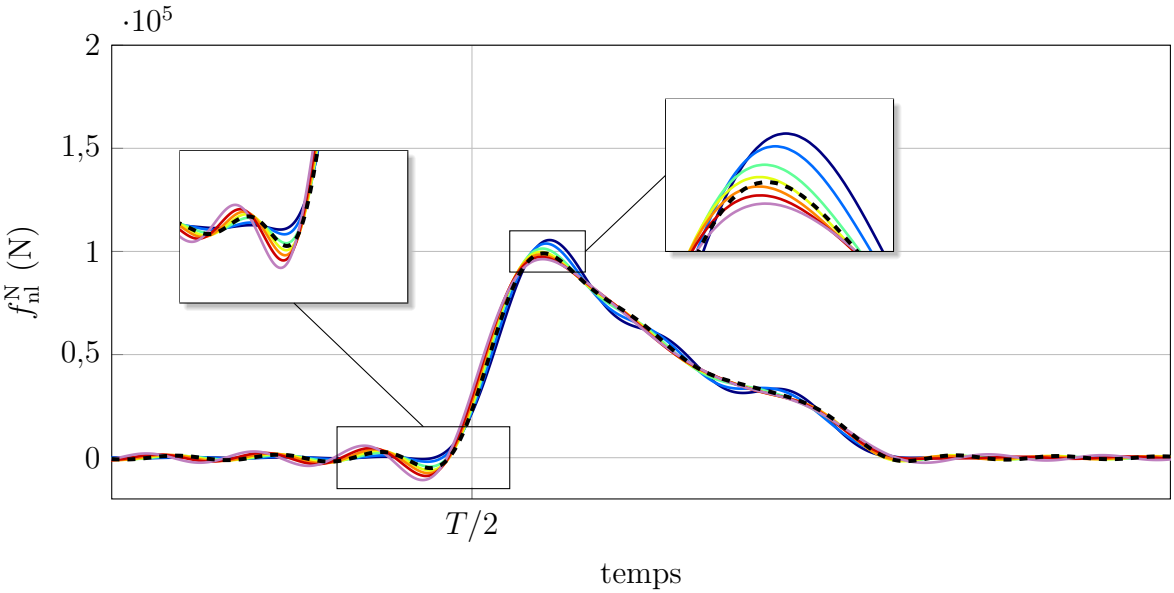
Efforts de contact Les signaux d'efforts de contact sont représentés sur la figure IV.31 avant et après troncature du contenu fréquentiel au-delà de $N_{\text{h}}\omega$ pour plusieurs valeurs de ε. Les simulations sont présentées pour un obstacle flexible, mais les propriétés observées restent valables pour un obstacle rigide également. À titre de comparaison, on superpose les efforts de contact obtenus par LCP-HBM.

Sur la figure IV.31a, les efforts de contact obtenus par la DLFT-HBM (—) avant troncature semblent converger vers un signal impulsionnel lorsque ε augmente. On observe que les maxima locaux des efforts de contact pour les valeurs élevées de ε (—) semblent coïncider avec les impulsions des efforts de contact obtenus par la LCP-HBM (—). Cette observation suggère qu'il existe une relation asymptotique entre les deux méthodologies. Ceci est contre-intuitif puisque les efforts de contact avant troncature à hautes valeurs de ε semblent converger vers un signal impulsionnel non physique et non pas vers le signal IT (- -). Néanmoins, la troncature associée à la HBM filtre toutes les contributions hautes fréquences générées par les phénomènes non réguliers dans la procédure AFT suréchantillonnée. Les signaux tronqués représentés sur la figure IV.31b semblent être plus cohérents avec l'IT pendant la phase de contact. Mais, une fois encore, la DLFT-HBM semble tendre vers la LCP-HBM et non vers l'IT. Ceci est particulièrement mis en évidence sur les oscillations de Gibbs et au maximum des efforts de contact. Sur la figure IV.31b, on observe que l'amplitude des oscillations de Gibbs pour la DLFT-HBM croît à mesure que ε augmente. De plus, les oscillations de la solution LCP-HBM apparaissent comme une limite haute de l'amplitude des oscillations de Gibbs sur ce cas de figure.

Analyse spectrale Les éléments présentés dans le paragraphe précédent demeurent qualitatifs, on propose alors d'analyser les spectres des efforts de contact pour mieux appréhender le phénomène observé. On représente sur la figure IV.32a les spectres des efforts de contact avant troncature et sur la figure IV.32b après troncature. La bande passante HBM, associée à

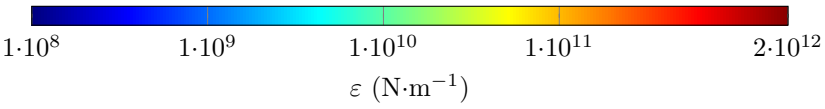


(a) efforts de contact avant troncature



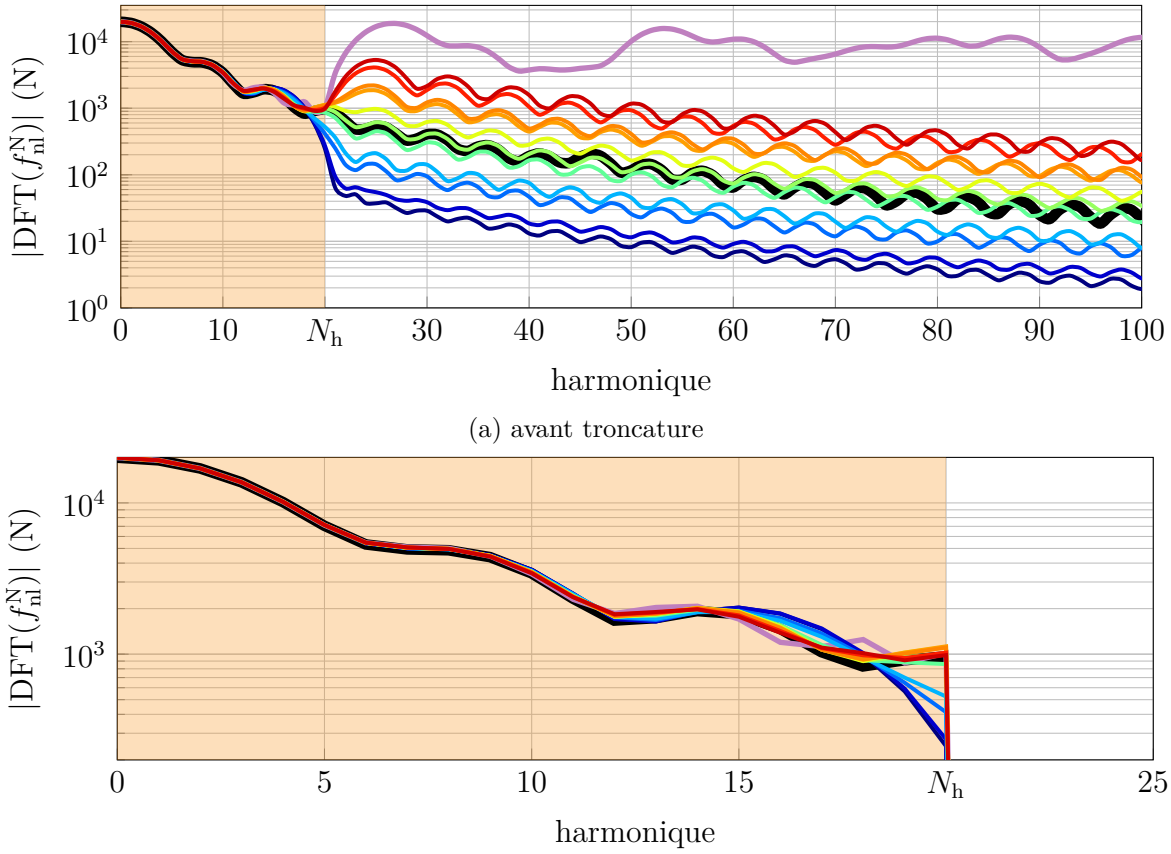
(b) efforts de contact après troncature

FIGURE IV.31 – Étude paramétrique sur les signaux d'efforts de contact en fonction de ε pour $N_{\mathrm{h}} = 20$, $N_{\mathrm{t}} = 600$: $k_{\mathrm{obs}} = 4k_{\mathrm{bar}}$ à $\omega = \omega_1$, IT obstacle flexible (- -), LCP-HBM (—), DLFT-HBM (—).



la troncature, est identifiée sur les spectres (▭). Sur ces figures, la troncature se matérialise simplement par la mise à zéro des composantes en dehors de la bande passante HBM.

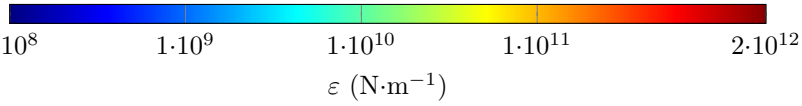
On note que le calcul des spectres au-delà de la bande passante HBM est possible grâce au fait que les méthodologies harmoniques suréchantillonnent le domaine temporel (par rapport



(a) avant troncature

(b) après troncature

FIGURE IV.32 – Étude paramétrique sur les spectres des efforts de contact ε pour $N_{\mathrm{h}} = 20$, $N_{\mathrm{t}} = 600$ et $k_{\mathrm{obs}} = 4k_{\mathrm{bar}}$ à $\omega = \omega_1$, IT obstacle flexible (—), LCP-HBM (—), DLFT-HBM (—), bande passante HBM ( ).

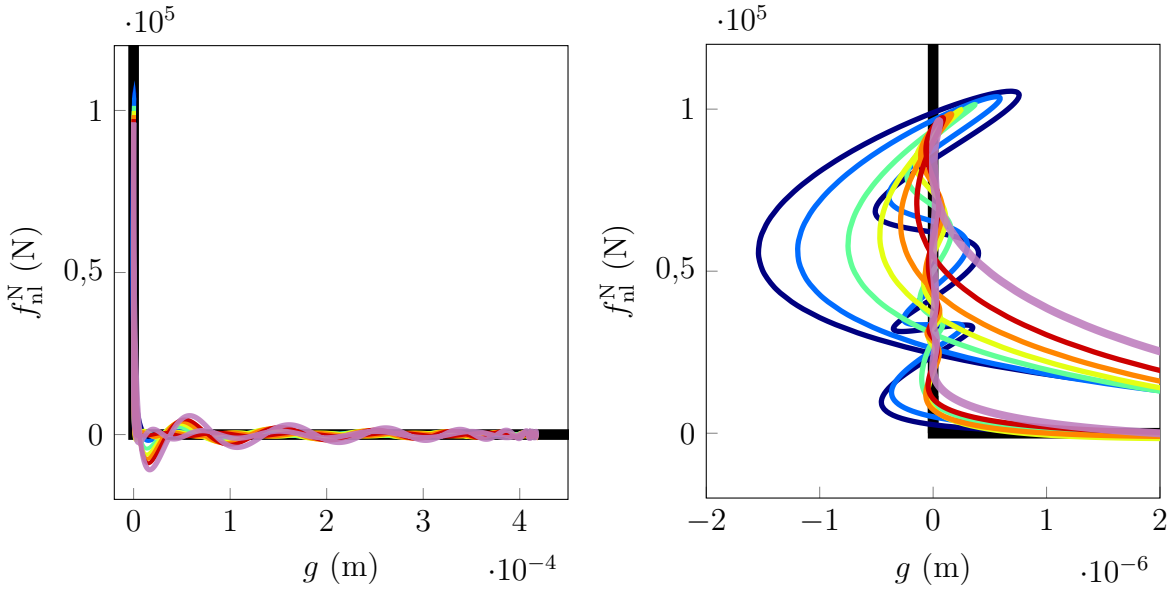


au critère de Nyquist-Shannon, *i.e.* $N_{\mathrm{t}} > 2N_{\mathrm{h}} + 1$) pour décrire précisément la phase de contact. Le spectre LCP-HBM ainsi que les spectres de la DLFT-HBM affichés sur la figure IV.32a montrent une bonne concordance avec l'IT à l'intérieur de la bande passante HBM mais les signaux perdent toute cohérence au-delà de la fréquence de coupure $N_{\mathrm{h}}\omega$. De plus, pour les efforts de la DLFT-HBM, les spectres présentent un niveau élevé de variation selon la valeur de ε. On voit sur la figure IV.32b que la valeur de ε a un impact sur les spectres à l'intérieur de la bande passante HBM, mais son influence est très limitée au voisinage de la solution de l'IT.

Conformément aux observations faites quant à la relation entre la DLFT-HBM et la LCP-HBM sur la figure IV.31b, les spectres de la DLFT-HBM pour les plus hautes valeurs de ε semblent tendre vers le spectre de la LCP-HBM sur la figure IV.32a. Outre ce constat, on observe que le spectre des efforts de la DLFT-HBM ne converge pas vers le spectre de l'IT lorsque ε augmente. Ceci consolide le caractère non physique du spectre des efforts de contact de la DLFT-HBM au-delà de la fréquence de coupure. Ainsi, pour la DLFT-HBM et la LCP-HBM, il est nécessaire de tronquer les efforts de contact issus des méthodes fréquentielles avant toute interprétation physique dans le domaine temporel.

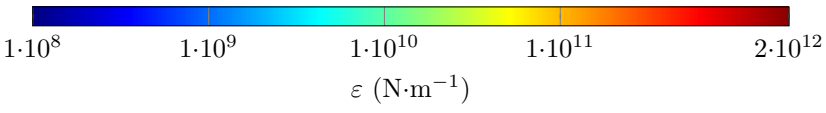
Au contraire, cette propriété ne s'applique pas aux stratégies qui s'appuient sur une gestion du contact par pénalité, telle que la RL-HBM. En effet, les spectres des efforts de contact calculés par pénalité restent cohérents aux hautes fréquences grâce à l'utilisation d'une formule physique liant directement déplacements et efforts dans le domaine temporel. Cette différence est causée par la différence de prise en compte des contraintes de Hertz-Signorini-Moreau. Ces dernières sont garanties à un niveau différent dans les stratégies se basant sur des multiplicateurs de Lagrange et lagrangiens augmentés. Cette différence est minime lorsqu'on s'intéresse simplement aux solutions en déplacements, *i.e.* quand on cherche l'amplitude de réponse. Néanmoins, les méthodes de pénalité peuvent tirer parti de la propriété de cohérence du spectre de leurs efforts de contact, par exemple dans des études de stabilité locale des solutions périodiques. C'est le cas notamment pour l'estimation des termes $\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \mathbf{x}}(t)$ et $\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t)$ (nécessaires à l'application de la théorie de Floquet) par une stratégie de pénalité, pour lesquels il est possible de conserver les contributions fréquentielles au-delà de la fréquence de coupure. Ceci améliore grandement la précision de la matrice de monodromie obtenue par intégration $2n$-passes [44]. Au contraire, la stratégie DLFT-HBM ne peut pas bénéficier de cette propriété car les grandeurs issues du domaine temporel doivent être restreintes aux contributions fréquentielles de la bande passante HBM. En effet, le caractère non physique du spectre des efforts de contact constaté sur la figure IV.32 peut aisément être étendu aux spectres associés aux dérivées de ces efforts.

Lois de contact Finalement, on représente les lois de contact des solutions présentées dans les paragraphes précédents sur la figure IV.33. De la même manière, on représente une loi de contact par valeur de ε ainsi que la loi de contact LCP-HBM.



(a) période entière (b) autour de $g = 0$

FIGURE IV.33 – Étude paramétrique sur les lois de contact en fonction de ε pour $N_{\mathrm{h}} = 20$, $N_{\mathrm{t}} = 600$ et $k_{\mathrm{obs}} = 4k_{\mathrm{bar}}$ à $\omega = \omega_1$, LCP-HBM (—), DLFT-HBM (—), contact unilatéral (—).

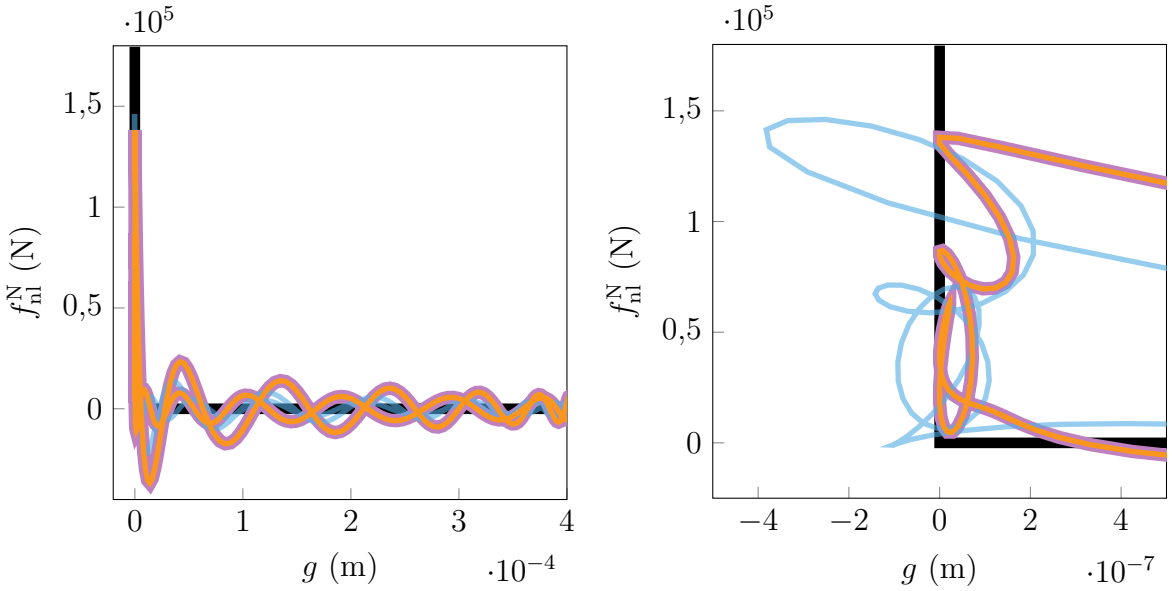


Les observations faites sur les figures IV.31 et IV.32 semblent être confirmées sur la figure IV.33. Ce diagramme révèle également un aspect plus profond de la convergence en ε : le respect des conditions $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{N}} \geq \mathbf{0}$ évoluent dans des directions opposées. Lorsque ε augmente, la pénétration résiduelle des solutions DLFT-HBM diminue mais les oscillations de troncature ont une plus grande amplitude. Étant donné l'influence de ε sur la solution, cette observation interroge quant au choix de sa valeur. Deux démarches peuvent être adoptées :

1. choisir ε le plus grand possible conduit à un respect quasi-strict de la condition $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, ce qui s'accompagne néanmoins de fortes oscillations des efforts de contact, et donc d'un mauvais respect de $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{N}} \geq \mathbf{0}$;
2. choisir ε comme un compromis entre le respect des conditions $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{N}} \geq \mathbf{0}$.

On rappelle néanmoins que, comme montré dans la section IV.2.4.3, le choix de ε a peu d'incidence sur la dynamique globale de la barre et que l'influence de ε se limite au comportement local au contact.

Afin de vérifier quantitativement l'hypothèse selon laquelle la DLFT-HBM tend asymptotiquement vers la LCP-HBM, on utilise une stratégie de raffinement de la valeur de ε. Cette méthodologie consiste à réaliser des résolutions par DLFT-HBM successivement avec une valeur croissante de ε. Ici, on choisit de l'augmenter tel que $\varepsilon_i = 2\varepsilon_{i-1}$ à la i-ième itération. L'étape essentielle pour que cette stratégie fonctionne est de fournir la solution de la $(i-1)$-ième itération comme point de départ de la i-ième itération. La solution de l'itération précédente étant relativement proche de la solution de l'itération courante, c'est un itéré initial qui permet au solveur de converger sur de très grandes valeurs de ε, où une résolution directe échouerait. Ces simulations sont effectuées sur le cas de l'obstacle rigide afin de garantir que les propriétés de l'approche mises en évidences soient vraies sur le modèle le plus complexe. Les résultats sont affichés sur la figure IV.34.



(a) période entière (b) autour de $g = 0$

FIGURE IV.34 – Procédure de raffinement de ε pour $N_{\text{h}} = 20$ et $N_{\text{t}} = 600$ à $\omega = \omega_1$, point de départ DLFT-HBM $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1{\cdot}10^{11}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), DLFT-HBM après raffinement $\varepsilon = 2^{15}\varepsilon_0 \simeq 1{\cdot}10^{16}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ (—), LCP-HBM (—), contact unilatéral (—).

En raffinant ε de $\varepsilon_0 = 1{\cdot}10^{11}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ à $\varepsilon_{15} = 2^{15}\varepsilon_0 \simeq 1{\cdot}10^{16}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$, la loi de contact simulée par la DLFT-HBM est strictement identique à celle simulée par la LCP-HBM. Numériquement,

avoir ε aussi grand signifie que $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ et $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{y}}$ sont devenus si proches que le couple $(\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N}}, \mathbf{g}_{\mathbf{x}})$ respecte strictement les conditions de contact unilatéral dans le domaine temporel avant troncature. Il s'agit là d'une propriété qui est intrinsèquement respectée par les solutions de la LCP-HBM comme les conditions de contact unilatéral sont directement prises en compte dans la résolution. Cela signifie que les deux méthodes présentent le même défaut : la troncature des efforts de contact s'accompagne d'une difficulté à représenter la loi de contact unilatéral. La loi de contact de la LCP-HBM correspond à la loi de contact asymptotique de la DLFT-HBM. L'observation faite sur la figure IV.34 montre également que la DLFT-HBM et la LCP-HBM ne traitent pas la condition de non-interpénétration et de positivité des efforts de contact au même rang : seule l'une des deux est respectée après troncature. En effet, les efforts de contact subissent toujours des oscillations parasites qui enfreignent les conditions de contact.

Dans un problème de contact, à la fois le champ de déplacements et les efforts de contact sont inconnus. Ceci signifie qu'il est possible d'interchanger l'inconnue principale du problème et l'inconnue estimée par lagrangien augmenté dans le formalisme de la DLFT-HBM. La fonction non linéaire à annuler $\mathcal{H}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{DLFT,dual}}(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}})$ est alors une fonction de $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}$ et non plus de $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}$ comme dans le cas classique. En faisant cela, il devient nécessaire d'estimer itérativement la fonction jeu $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ à partir de l'inconnue principale $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{g}}_0 + \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}) - \varepsilon(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{y}}). \tag{IV.13}$$

De façon analogue à la DLFT-HBM classique présentée dans la section III.2.2, on évalue la valeur de $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ par prédiction-correction en imposant les conditions de contact unilatéral dans le domaine temporel pour le couple $(\mathbf{g}_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{y}})$, où $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{y}}$ est un champ d'efforts idéal. Dans cette formulation, comme le rôle de $\widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}}$ et $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}$ est inversé, la condition de positivité des efforts de contact est mise au premier plan par rapport à la condition de non-interpénétration. En effet, le résidu de l'équation du mouvement de la DLFT-HBM duale s'écrit alors

$$\mathcal{H}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{DLFT,dual}}(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}) = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\underbrace{\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}^{-1}(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}}) - \varepsilon(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{y}})}_{\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}} = \widetilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{g}}_0}) + \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{ex,r}} = -\varepsilon\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{nl}}^{\mathrm{N},\mathbf{y}}). \tag{IV.14}$$

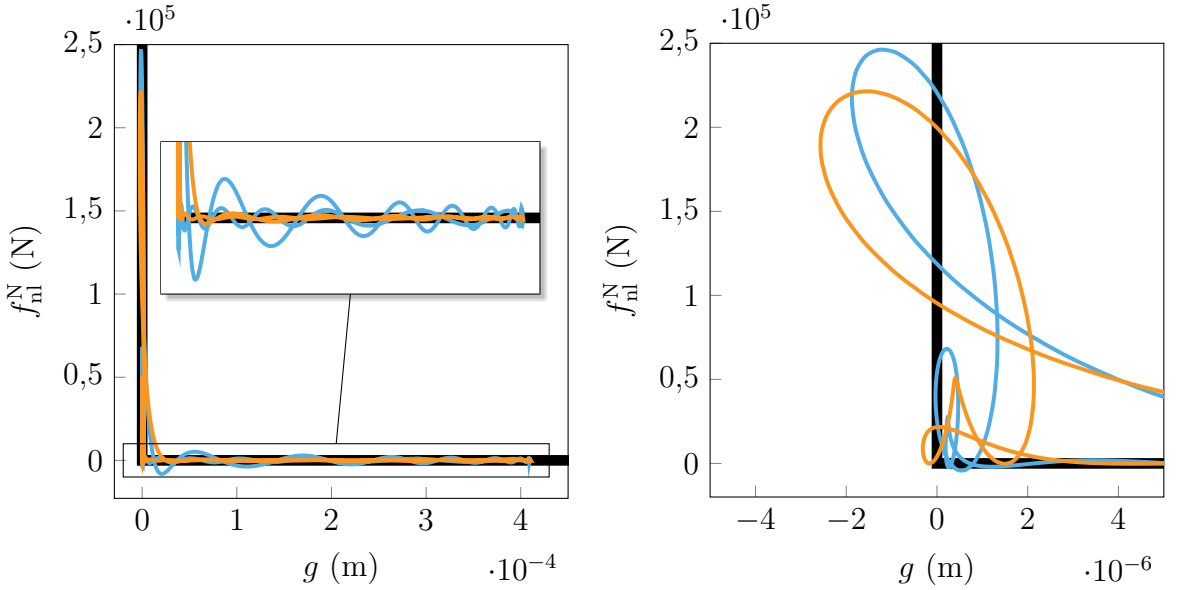
Une augmentation de ε ($\mathrm{m{\cdot}N^{-1}}$) mène donc à un meilleur respect de la condition de positivité des efforts et à une détérioration de la condition de non-interpénétration, comme illustré sur la figure IV.35.

Ceci illustre bien que dans un formalisme utilisant des lagrangiens augmentés, une des deux conditions de positivité est favorisée vis-à-vis de la seconde. On note que la formulation duale de la DLFT-HBM n'est pas utilisée en pratique car elle implique l'inversion de $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}$ à chaque itération ce qui est trop coûteux pour être mis en place sur des systèmes de grande taille. Cependant, sa définition théorique permet de mettre en perspective les résultats obtenus par la DLFT-HBM classique.

2.6.2 Influence du nombre d'harmoniques

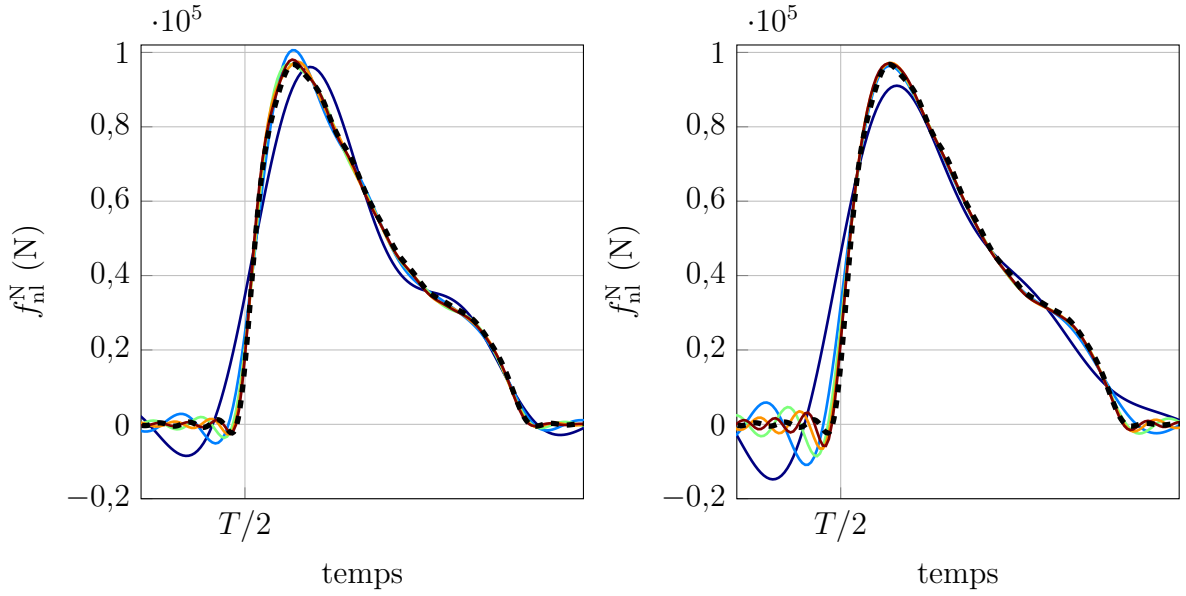
Dans cette partie, on observe l'influence du nombre d'harmoniques N_{h} sur les efforts de contact tronqués à la fois pour la DLFT-HBM sur la figure IV.36a et pour la LCP-HBM sur la figure IV.36b.

Sur la figure IV.36, on observe que l'augmentation du nombre d'harmoniques permet de faire converger les signaux de référence obtenus par IT, eux aussi tronqués pour comparer seulement la partie comparable du signal. En effet, par exemple pour $N_{\mathrm{h}} = 50$, la DLFT-HBM fournit des efforts très proches de l'IT, au point où les oscillations de troncature sont équivalentes. À ce même nombre d'harmoniques, la LCP-HBM n'est pas aussi bien convergée vers la référence,



(a) période entière (b) autour de $g = 0$

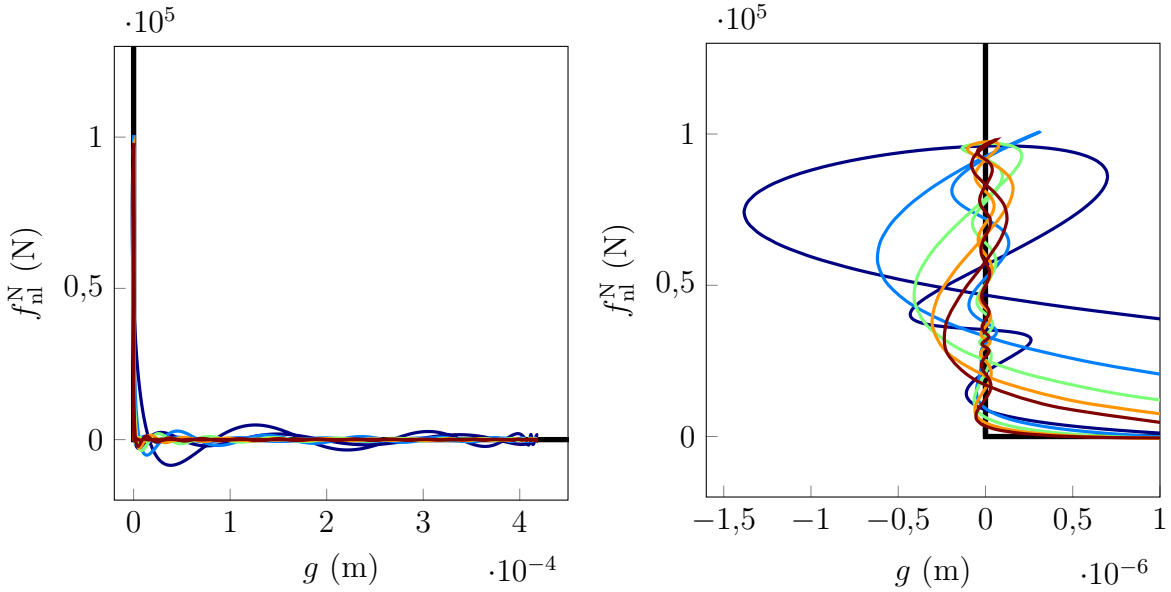
FIGURE IV.35 – Lois de contact en fonction de ε pour la DLFT-HBM duale sur la barre éléments-finis face à l'obstacle rigide, $\varepsilon = 1{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{m{\cdot}N^{-1}}$ (—), $\varepsilon = 1{\cdot}10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}N^{-1}}$ (—), contact unilatéral (—).



(a) DLFT-HBM (b) LCP-HBM

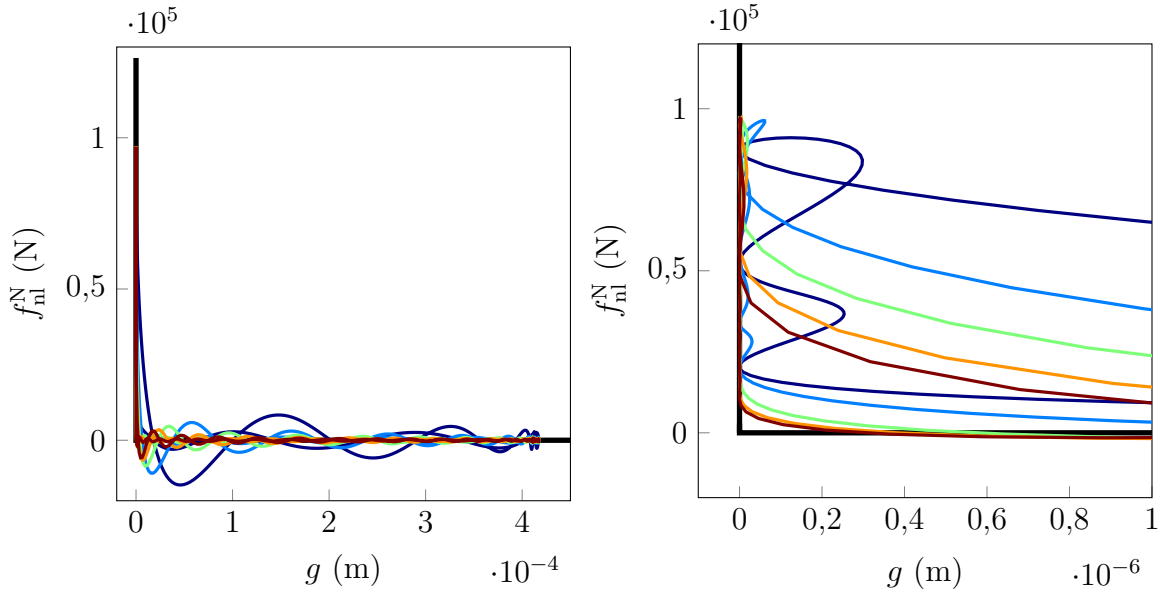
FIGURE IV.36 – Efforts de contact tronqués en fonction de N_h pour $N_t = 400$ à $\omega = \omega_1$, $N_h = 10$ (—), $N_h = 20$ (—), $N_h = 30$ (—), $N_h = 40$ (—), $N_h = 50$ (—).

mais on observe toutefois la même tendance. On représente respectivement sur les figures IV.37 et IV.38 les lois de contact simulées par la DLFT-HBM et LCP-HBM en fonction du nombre d'harmoniques. Ainsi, on peut réaliser une synthèse de l'évolution du respect des conditions de contact unilatéral en fonction de N_h.



(a) période entière (b) autour de $g = 0$

FIGURE IV.37 – Lois de contact simulées par la DLFT-HBM en fonction de N_h pour $N_t = 400$ à $\omega = \omega_1$, $N_h = 10$ (—), $N_h = 20$ (—), $N_h = 30$ (—), $N_h = 40$ (—), $N_h = 50$ (—), contact unilatéral (—).



(a) période entière (b) autour de $g = 0$

FIGURE IV.38 – Lois de contact simulées par la LCP-HBM en fonction de N_h pour $N_t = 400$ à $\omega = \omega_1$, $N_h = 10$ (—), $N_h = 20$ (—), $N_h = 30$ (—), $N_h = 40$ (—), $N_h = 50$ (—), contact unilatéral (—).

Pour la DLFT-HBM, l'augmentation de la valeur de N_h conduit à une diminution de l'amplitude des oscillations de troncature et de l'amplitude des oscillations autour de l'obstacle

($g = 0$). Cela signifie que les trois conditions de contact sont positivement impactées par une augmentation de N_h. On observe sensiblement le même comportement pour la LCP-HBM, à la différence près que la condition $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$ est toujours respectée, comme observé dans la section IV.2.4. Ainsi, seule l'amplitude des rebonds sur l'axe $g = 0$ est impactée. Évidemment, l'amélioration du respect des conditions de contact a un coût en termes de temps de calcul. Un haut niveau de précision sur la loi de contact n'est pas une condition nécessaire pour faire converger la réponse dynamique du système. Un compromis doit donc être trouvé entre temps de calcul et fidélité de la loi de contact. Par exemple, un nombre d'harmoniques autour de vingt assure déjà une bonne convergence de la courbe de réponse en fréquence pour l'application de barre présentée, comme montré dans la section IV.2.5.

Barre éléments-finis - bilan

Coefficient de restitution Lors du traitement du modèle de barre éléments-finis, il est observé que le coefficient de restitution n'a plus d'influence car le système est relativement bien discrétisé. De ce fait, on observe une excellente corrélation entre les résultats de l'algorithme de Carpenter, modélisant $e = 0$, avec les stratégies HBM qui modélisent $e = 1$.

Précision des stratégies fréquentielles On démontre dans cette section l'applicabilité des stratégies DLFT-HBM et LCP-HBM aux problèmes de vibro-impact. En effet, un excellent accord est atteint entre les stratégies fréquentielles ainsi qu'avec la stratégie d'intégration temporelle de référence tant en termes de courbes de réponse en fréquence que de signaux temporels, quel que soit le type d'obstacle considéré.

Relation asymptotique entre les stratégies fréquentielles Les caractéristiques intrinsèques des stratégies DLFT-HBM et LCP-HBM concernant le respect des conditions de Hertz-Signorini-Moreau sont mises en évidence grâce aux diagrammes de loi de contact. De plus, une relation asymptotique est mise en lumière : la DLFT-HBM tend vers la LCP-HBM lorsque ε est suffisamment grand.

Interprétation des signaux d'alternance fréquence-temps On montre également que, pour les deux stratégies, les contributions fréquentielles du spectre des efforts de contact au-delà de la fréquence de coupure de la HBM ne sont pas physiques. Il convient alors de réaliser des interprétations physiques seulement sur des signaux d'efforts tronqués à la bande passante HBM lorsqu'on utilise une gestion du contact par lagrangiens augmentés ou par multiplicateurs de Lagrange au sein d'une AFT.

3 Configuration industrielle

La dernière étape de l'analyse des méthodologies fréquentielles est réalisée sur une configuration industrielle de contact aube/carter. Afin de permettre la reproduction des résultats, l'étude s'appuie sur une géométrie ouverte. Il s'agit de l'aube NASA rotor 67 [234], déjà étudiée à la fois dans le domaine de la dynamique des fluides [4] ainsi que dans le cadre de la dynamique des structures [206]. Avant de procéder à l'étude du système, on présente les développements spécifiques nécessaires au traitement d'une telle configuration, notamment l'intégration du frottement dans les simulations et un critère d'arrêt lié au calcul de branches de solutions isolées. Les travaux présentés dans cette section s'inscrivent dans la continuité des travaux de Colaïtis [206], dont les résultats de la RL-HBM sont issus. Ces derniers sont principalement utilisés pour fournir un point de comparaison pour l'analyse de la stratégie DLFT-HBM. Dans ce manuscrit, une série d'analyses est conduite avec pour objectif principal la comparaison des stratégies DLFT-HBM, RL-HBM ainsi que l'algorithme de Carpenter. Une attention particulière est portée à la détection de branches de solutions isolées.

Défis numériques liés au traitement d'applications industrielles

Dans le cadre de cette thèse, on réalise la première application de la stratégie DLFT-HBM à l'analyse de la dynamique des interactions de contact aube/carter. Pour permettre l'utilisation de la DLFT-HBM sur ces configurations industrielles, plusieurs défis numériques ont dû être relevés, notamment les trois suivants :

Richesse modale des modèles d'aube La richesse dynamique des modèles éléments-finis traités dans ce manuscrit apporte des difficultés supplémentaires. Étant donné que les interactions de contact engendrent des contributions fréquentielles hautes fréquences, tous les modes d'une structure répondent simultanément lorsqu'elle est soumise à des efforts de contact. Par conséquent, la dynamique des aubes en configuration de contact aube/carter est sophistiquée ce qui favorise l'apparition de phénomènes non linéaires complexes affectant la convergence des calculs.

Mise à l'épreuve des procédures de continuation À cause de la dynamique hautement non linéaire des aubes en contact, les procédures de continuation sont mises à l'épreuve en raison de la présence de points de bifurcation le long de la courbe de réponse en fréquence, incluant notamment de nombreux points de retournement. Ces derniers constituent généralement des points sensibles et il convient d'implémenter une procédure d'adaptation du pas de continuation robuste pour les franchir sans ralentir les calculs plus que nécessaire.

Jacobienne des efforts de frottement Afin de garantir une convergence optimale des calculs, la matrice jacobienne des efforts de frottement dans les directions tangentielles doit être évaluée analytiquement. Une attention particulière y est portée car les efforts de frottement sont à la fois dépendants des déplacements et des vitesses. Pour s'assurer que les expressions des dérivées implémentées sont correctes, une vérification a été soigneusement réalisée grâce à la librairie python `numdifftools` permettant d'évaluer les matrices jacobiennes par différences finies.

3.1 Présentation de l'application

3.1.1 Scénario de contact

Des interactions aube/carter ayant déjà été observées expérimentalement sous vide, on ne considère pas d'efforts d'excitation (assimilables à des efforts aérodynamiques) dans cette étude. L'initiation du contact est généralement attribuée à la fois au chargement centrifuge auquel sont soumises les aubes (ce qui réduit le jeu radial) et à des effets thermiques causant une déformation du carter. De plus, les observations expérimentales ont souligné que les amplitudes vibratoires du carter peuvent être considérées comme négligeables, justifiant que le carter puisse être modélisé comme un profil rigide. Compte tenu des arguments cités, le carter est représenté par un profil mathématique parfaitement rigide correspondant à une déformation imposée. En accord avec les études publiées sur les interactions aube/carter [206, 138], le carter est ovalisé. Ainsi, deux zones (ou lobes) de contact symétriques sont privilégiées le long de la circonférence du carter. En raison de la déformation du carter, les interactions de contact se produisent à n'importe quelle vitesse de rotation Ω. De plus, l'absence de forçage extérieur permet de mettre en évidence des réponses multiharmoniques, multimodales et hautement non linéaires induites par le contact. Au contraire, un forçage harmonique favorise généralement les réponses sur la pulsation de l'excitation autour d'un mode spécifique de la structure, simplifiant ainsi le type de réponse dynamique. La gamme de vitesses de rotation Ω étudiée est $\Omega \in [400; 2000]$ rad·s^{-1}. Pour résoudre cette configuration dans le domaine fréquentiel, la pulsation angulaire de résolution HBM ω est la pulsation angulaire associée à la vitesse de rotation de l'aube, telle que $\omega = \Omega$. On considère ici exclusivement des vitesses de rotation positives $\Omega > 0$.

3.1.2 Forme du carter

Afin de prendre en compte la déformation du carter dans les simulations, on représente la distance entre le carter et la tête de l'aube au repos par une fonction T-périodique. Cette fonction de distance est différente pour chaque nœud frontière $j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!]$ et s'exprime

$$d_j(\tau) = c_j - (c_j + p_j) \exp\left[- \left(\frac{(\tau + \theta_j)(2\pi \bmod n_\mathrm{l}) - \dfrac{\pi}{n_\mathrm{l}}}{w_\mathrm{l}} \right)^2 \right] \quad \forall j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!] \qquad \text{(IV.15)}$$

où τ est le temps normalisé lié à la position angulaire de l'aube dans le carter, θ_j est le décalage angulaire du nœud frontière associé au vrillage de l'aube. c_j est le jeu nominal, p_j est une distance mesurant la pénétration des lobes dans la trajectoire circulaire de l'aube dans son comportement linéaire, w_l représente la largeur angulaire des lobes et n_l est le nombre de lobes. Pour cette étude, on choisit $n_\mathrm{l} = 2$ lobes (correspondant à une ovalisation), $w_\mathrm{l} = 0,15$ et, pour tous les nœuds frontières, $c_j = 4{\cdot}10^{-4}$ m et $p_j = 1{,}25{\cdot}10^{-4}$ m. Avec ces paramètres, la forme du carter est similaire pour tous les nœuds de contact. Elle est virtuellement décalée angulairement selon les valeurs θ_j pour compenser le vrillage de l'aube, puisque chaque lobe est aligné avec la direction axiale. La forme d'un lobe est illustrée sur la figure IV.39 où les paramètres géométriques de l'équation (IV.15) sont indiqués.

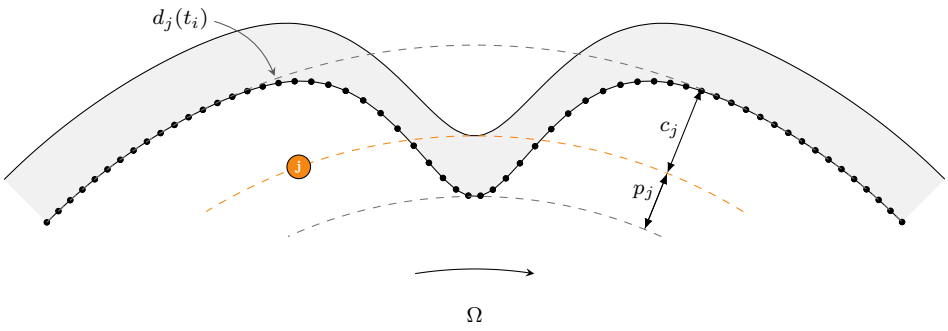


FIGURE IV.39 – Déformation à un lobe du carter (▭) en face du j-ième nœud frontière (●).

3.1.3 Présentation du modèle

Le modèle industriel utilisé dans cette section est le NASA rotor 67 [234]. Il a été initialement conçu au NASA *Lewis research center* (Cleveland, Ohio, États-Unis) pour servir de géométrie de référence dans le domaine de la recherche en dynamique des fluides [4]. Cette géométrie a récemment été utilisée dans une étude de dynamique des structures [206] où une réponse dynamique complexe est mise en lumière. Les propriétés matériau de cette aube ne sont pas explicitement fournies dans le rapport technique initial de la NASA. Néanmoins, plusieurs articles font l'hypothèse que ce rotor est constitué d'un alliage classique composant les pales de soufflante : alliage de titane TA6V de grade 5 (Ti 6Al 4V). Les propriétés matériau retenues pour cette étude sont récapitulées dans le tableau IV.4.

Le maillage éléments-finis complet de l'aube est composé de 129181 éléments tétraèdres quadratiques ce qui correspond à un total de 201287 nœuds [1], voir sur la figure IV.40b. Les nœuds appartenant au pied de l'aube (—) sont encastrés. Un modèle réduit est produit grâce

1. maillage disponible sur https:/lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/rotor_67/

module d'élasticité E	masse volumique ρ	coefficient de Poisson ν
108 GPa	4400 kg·m^{-3}	0,34

TABLEAU IV.4 – Propriétés du matériau TA6V.

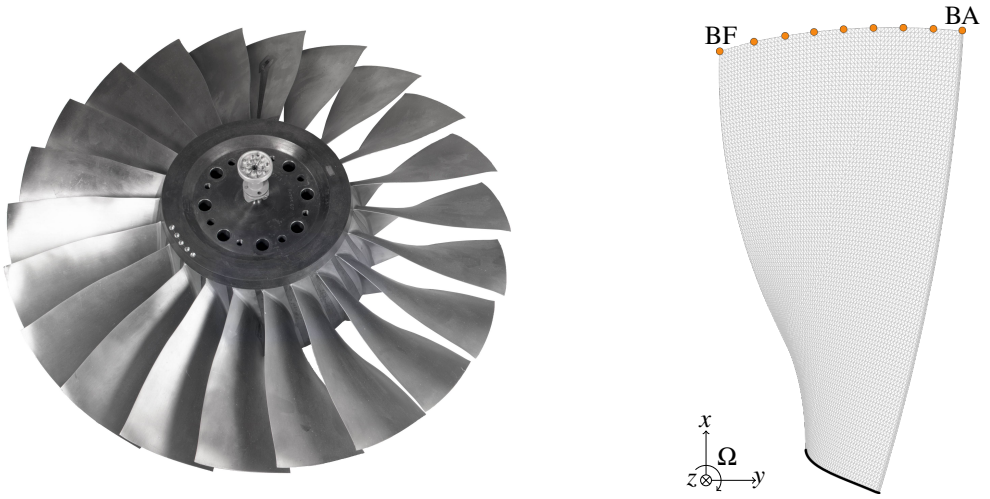
à la méthode Craig-Bampton [49]. Il est constitué de $n_\mathrm{b} = 9$ nœuds frontières (●), retenus à des fins de gestion du contact, et de $\eta = 12$ modes encastrés (degrés de liberté internes). Sa taille totale est alors de $n = 3n_\mathrm{b} + \eta = 39$ degrés de liberté dont 27 degrés de liberté non linéaires. Les taux d'amortissement modaux de la structure sont choisis tels que $\xi_{1-3} = 1{\cdot}10^{-3}$ pour les trois premiers modes (premier mode de flexion (1F), deuxième mode de flexion (2F) et premier mode de torsion (1T)) et $\xi_{4+} = 5{\cdot}10^{-3}$ pour tous les autres modes. Les fréquences propres des premiers modes sont indiquées dans le tableau IV.5. La roue aubagée complète est représentée sur la figure IV.40a. Pour cette étude, une seule aube est considérée. On fournit les grandeurs θ_j et ρ_j pour chacun des nœuds frontières dans le tableau IV.6.

mode •	1F	2F	1T	4	5
$\omega_\bullet$ (rad·s^{-1})	2039,8	6343,7	10 745,3	14 830,3	18 680,9
f (Hz)	324,6	1009,6	1710,2	2360,3	2973,2

TABLEAU IV.5 – Premières fréquences propres de l'aube NASA rotor 67.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ_j (rad)	0,18	0,13	0,09	0,05	0,01	−0,03	−0,07	−0,12	−0,15
ρ_j (m)	0,2553	0,2544	0,2536	0,2528	0,2519	0,2511	0,2500	0,2487	0,2474

TABLEAU IV.6 – Valeurs de déphasage angulaire θ_j et de distance à l'axe de rotation ρ_j des $n_\mathrm{b} = 9$ nœuds frontières du NASA rotor 67.



(a) roue aubagée complète (b) maillage éléments-finis

FIGURE IV.40 – NASA rotor 67 [237], nœud frontière (●), encastrement (—).

3.2 Développements spécifiques aux interactions aube/carter

Afin de pouvoir réaliser les simulations de contact aube/carter en lien avec le modèle présenté, il est nécessaire de définir l'expression des efforts de frottement. De plus, comme des branches de solutions isolées sont détectées sur cette application, on présente un critère d'arrêt permettant d'arrêter la continuation lorsqu'une telle branche est obtenue.

3.2.1 Frottement

Calcul des efforts de frottement Le contact normal est supposé être uniquement le long de la direction radiale, la détection du contact est donc réalisée grâce aux déplacements radiaux des nœuds frontières $r_j(t)$ avec $j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!]$. De plus, pour chacune des méthodes, chaque fois qu'un contact est détecté, par exemple au i-ième instant t_i, il est nécessaire de calculer les efforts de frottement dans les directions tangentielles (θ, z). Le modèle est ici traité dans le repère cylindrique $(r,\, \theta,\, z)$ ce qui facilite la définition du plan tangent au contact. Étant donné les vitesses relatives importantes mises en jeu entre le sommet d'aube et le carter, on suppose un frottement glissant permanent. Cette hypothèse simplifie alors le calcul des efforts de frottement car leur module est directement proportionnel à l'effort normal. Les efforts circonférentiels $f^\theta_\mathrm{nl}(t_i)$ et axiaux $f^z_\mathrm{nl}(t_i)$ peuvent être exprimés selon la loi de Coulomb dans le cas glissant pour le j-ième nœud frontière par les équations

$$f^\theta_{\mathrm{nl},j}(t_i) = \mu \frac{v^\theta_j(t_i) + \rho_j \Omega}{\sqrt{(v^\theta_j(t_i) + \rho_j\Omega)^2 + v^z_j(t_i)^2}} f^\mathrm{N}_{\mathrm{nl},j}(t_i) = \mu^\theta_j(t_i) f^\mathrm{N}_{\mathrm{nl},j}(t_i) \quad \forall j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!] \tag{IV.16}$$

et

$$f^z_{\mathrm{nl},j}(t_i) = \mu \frac{v^z_j(t_i)}{\sqrt{(v^\theta_j(t_i) + \rho_j\Omega)^2 + v^z_j(t_i)^2}} f^\mathrm{N}_{\mathrm{nl},j}(t_i) = \mu^z_j(t_i) f^\mathrm{N}_{\mathrm{nl},j}(t_i) \quad \forall j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!] \tag{IV.17}$$

où $\mu = 0{,}15$ est le coefficient de frottement, v^θ_j la vitesse vibratoire circonférentielle, v^z_j la vitesse vibratoire axiale et ρ_j la position radiale du j-ième nœud frontière par rapport à l'axe de rotation. Les valeurs de ρ_j pour l'aube traitée sont fournies dans le tableau IV.6. On note que $\sqrt{\left(\mu^\theta_j(t)\right)^2 + \left(\mu^z_j(t)\right)^2} = \mu$, ainsi μ^θ_j et μ^z_j retranscrivent seulement la direction de frottement et la valeur du coefficient de frottement.

Calcul des jacobiennes des efforts de frottement Pour l'utilisation de ces efforts de frottement en HBM, il est nécessaire de calculer leurs dérivées $\dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}}(t)$, $\dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}}(t)$, $\dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t)$ et $\dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t)$. Comme les efforts non linéaires au j-ième nœud contact ne dépendent que des déplacements et vitesses à ce même nœud, il est possible de calculer les matrices jacobiennes comme une série de n_b blocs indépendants. Les termes $\dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}_j}(t)$ et $\dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}_j}(t)$ associés au j-ième

nœud s'expriment à l'instant t_i tels que

$$\frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}_j}(t_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial z_j}(t_i) \end{bmatrix} = \mu^z_j(t_i) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial \theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial z_j}(t_i) \end{bmatrix} \tag{IV.18}$$

et

$$\frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \mathbf{x}_j}(t_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial z_j}(t_i) \end{bmatrix} = \mu^\theta_j(t_i) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial \theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial z_j}(t_i) \end{bmatrix}. \tag{IV.19}$$

On note que les dérivées des grandeurs $\mu^\theta_j(t)$ et $\mu^z_j(t)$ par rapport à $\mathbf{x}_j$ sont nulles car ces coefficients ne dépendent que des vitesses $\dot{\mathbf{x}}_j$. Dans le cas d'une gestion du contact par pénalité, les termes $\dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial \theta_j}(t_i)$ et $\dfrac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial z_j}(t_i)$ sont nuls. En revanche, ce n'est pas le cas pour la DLFT-HBM et cette propriété résulte du couplage structurel linéaire entre les degrés de liberté associés aux différents nœuds de contact. Cette dépendance est introduite par l'utilisation de la matrice de raideur dynamique $\mathbf{Z}$ — faisant intervenir les matrices structurelles du système — dans le calcul des efforts de contact normaux. Les termes $\dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j}(t)$ et $\dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j}(t)$ sont définis par

$$\frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j}(t_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^\theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^z_j}(t_i) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j}(t_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^r_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^\theta_j}(t_i) \\ \dfrac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^z_j}(t_i) \end{bmatrix}. \tag{IV.20}$$

Comme seules les vitesses tangentielles interviennent dans les relations (IV.16) et (IV.17), on déduit que les dérivées par rapport à v^r_j sont nulles, donc

$$\frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^r_j}(t_i) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^r_j}(t_i) = 0. \tag{IV.21}$$

Les dérivées restantes par rapport aux vitesses tangentielles s'expriment suivant les relations

$$\frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^\theta_j}(t_i) = \mu \frac{\left(v^z_j\right)^2}{\left[\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2 + \left(v^z_j\right)^2\right]^{3/2}} f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i), \tag{IV.22}$$

$$\frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^z_j}(t_i) = \mu \frac{\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2}{\left[\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2 + \left(v^z_j\right)^2\right]^{3/2}} f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i) \tag{IV.23}$$

et

$$\frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^z_j}(t_i) = \frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial v^\theta_j}(t_i) = -\mu \frac{v^z_j \left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)}{\left[\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2 + \left(v^z_j\right)^2\right]^{3/2}} f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i). \tag{IV.24}$$

De plus, on fournit les expressions des dérivées de $f^\theta_{\mathrm{nl},j}$ et $f^z_{\mathrm{nl},j}$ par rapport à ω dans l'objectif de mettre en œuvre une procédure de continuation. Ces dernières s'écrivent

$$\frac{\partial f^\theta_{\mathrm{nl},j}}{\partial \omega}(t_i) = \mu \rho_j \frac{\left(v^z_j\right)^2}{\left[\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2 + \left(v^z_j\right)^2\right]^{3/2}} f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i) + \mu^\theta_j(t_i) \frac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial \omega}(t_i) \tag{IV.25}$$

et

$$\frac{\partial f^z_{\mathrm{nl},j}}{\partial \omega}(t_i) = -\mu \rho_j \frac{v^\theta_j \left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)}{\left[\left(v^\theta_j + \rho_j \Omega\right)^2 + \left(v^z_j\right)^2\right]^{3/2}} f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i) + \mu^z_j(t_i) \frac{\partial f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}}{\partial \omega}(t_i). \tag{IV.26}$$

Une fois calculés $\forall i \in [\![1; N_{\mathrm{t}}]\!]$ et $\forall j \in [\![1; n_{\mathrm{b}}]\!]$, les termes dérivés présentés ci-dessus peuvent être assemblés pour construire les matrices jacobiennes complètes $\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$ conformément aux définitions (II.63) et (II.62). Ces matrices peuvent ensuite être utilisées pour calculer la matrice jacobienne grâce à la formule (II.61). Cette procédure est identique pour la RL-HBM et pour la DLFT-HBM, seules les valeurs de $f^{\mathrm{N}}_{\mathrm{nl},j}(t_i)$ et de ses dérivées sont différentes selon la stratégie utilisée.

3.2.2 Détection de boucle fermée

Lorsqu'on modélise des phénomènes hautement non linéaires, des branches de solutions isolées peuvent apparaître. Afin de s'assurer que la procédure de continuation ne boucle pas sur une branche isolée, *i.e.* fermée sur elle-même, il est nécessaire d'implémenter un critère de détection de boucle fermée lors du calcul des courbes de réponse en fréquence. Dans ce travail, une condition géométrique est utilisée.

Au début de la procédure de continuation, le point $\mathbf{y}_0 = (\widetilde{\mathbf{x}}_0, \omega_0)$ est choisi comme point de référence. Plus tard dans la procédure de continuation, si deux solutions successives sont trouvées telles qu'elles encadrent la solution $\mathbf{y}_0$ en fréquence, *i.e.* $\omega_i < \omega_0 < \omega_{i+1}$ ou $\omega_{i+1} < \omega_0 < \omega_i$, un test de boucle fermée est effectué. Afin de réaliser ce test, on interpole d'abord un point $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{int}}$ entre $\widetilde{\mathbf{x}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{x}}_{i+1}$ à la pulsation ω_0 en utilisant la formule

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{int}} = \widetilde{\mathbf{x}}_i + \frac{\omega_0 - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} (\widetilde{\mathbf{x}}_{i+1} - \widetilde{\mathbf{x}}_i). \tag{IV.27}$$

La distance relative d_{int} entre le point interpolé $\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{int}}$ et le point de référence $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ est ensuite calculée suivant l'expression

$$d_{\mathrm{int}} = \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{int}} - \widetilde{\mathbf{x}}_0\|_2}{\|\widetilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{int}}\|_2}. \tag{IV.28}$$

Si cette distance est inférieure à la valeur $d_{\min}$ fournie par l'utilisateur, alors la continuation s'arrête car la courbe de réponse en fréquence est repassée par le premier point $\mathbf{y}_0$, formant ainsi une boucle fermée. La procédure de détection de boucles fermées est illustrée sur la figure IV.41. Une autre méthode de détection consiste à corriger le point interpolé $\widetilde{\mathbf{x}}_{\text{int}}$ sur la courbe des solutions grâce à un algorithme de Newton-Raphson à $\omega = \omega_0$ fixé. Néanmoins, elle induit un coût de calcul supplémentaire et le succès de la méthode dépend du bassin d'attraction de la fonction non linéaire. Une telle approche permet toutefois de fortement réduire la distance $d_{\min}$, rendant la détection plus précise. Cependant, on observe empiriquement que le critère géométrique est suffisant pour l'application traitée.

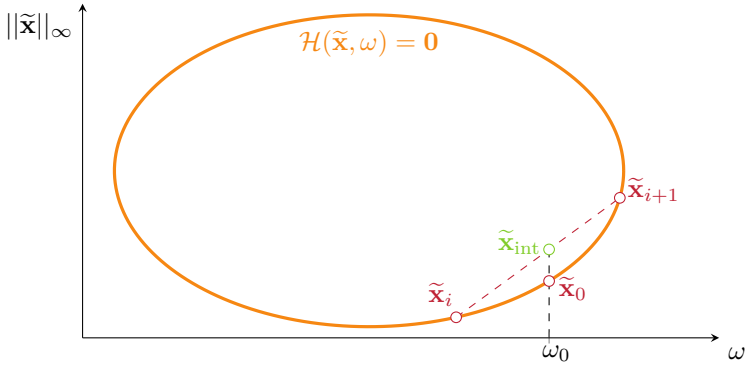


FIGURE IV.41 – Stratégie de détection des isolats, sous-espace de solutions (—), solutions (○), interpolation (○).

3.3 Étude préliminaire par intégration temporelle

Avant de procéder à la caractérisation des interactions aube/carter par les méthodes fréquentielles, on réalise une étude préalable par un outil d'intégration temporelle se basant sur l'algorithme de Carpenter. On balaye l'intervalle fréquentiel d'intérêt $\Omega \in [400; 2000]$ rad·s^{-1} par pas de 1 rad·s^{-1}. Chaque simulation est réalisée à vitesse de rotation constante pendant 200 tours avec un pas d'intégration $h = 1{\cdot}10^{-7}$ s en partant de conditions initiales nulles. L'ordre de grandeur de temps de calcul associé à chaque point est d'environ deux minutes sur un processeur i7 à huit cœurs. Ces résultats sont d'abord analysés du point de vue de leur contenu spectral sur une carte d'interaction dans la section IV.3.3.1 puis en termes d'amplitude de réponse dans la section IV.3.3.2.

3.3.1 Carte d'interaction

On représente le contenu fréquentiel de la réponse de l'aube issu des simulations par IT sous la forme d'une carte d'interaction sur la figure IV.42. Les zones de couleurs claires correspondent à des fréquences sur lesquelles l'aube répond fortement, au contraire les zones de couleurs sombres correspondent aux fréquences sur lesquelles l'aube ne répond pas.

On distingue plusieurs comportements caractéristiques sur la figure IV.42. En analysant le diagramme verticalement, *i.e.* en analysant le contenu dynamique d'une solution à la fois, on dégage notamment trois types de solutions :

— les solutions non périodiques correspondent aux zones où l'aube vibre selon des fréquences formant un continuum, aisément identifiées par les bandes de couleurs très claires ;

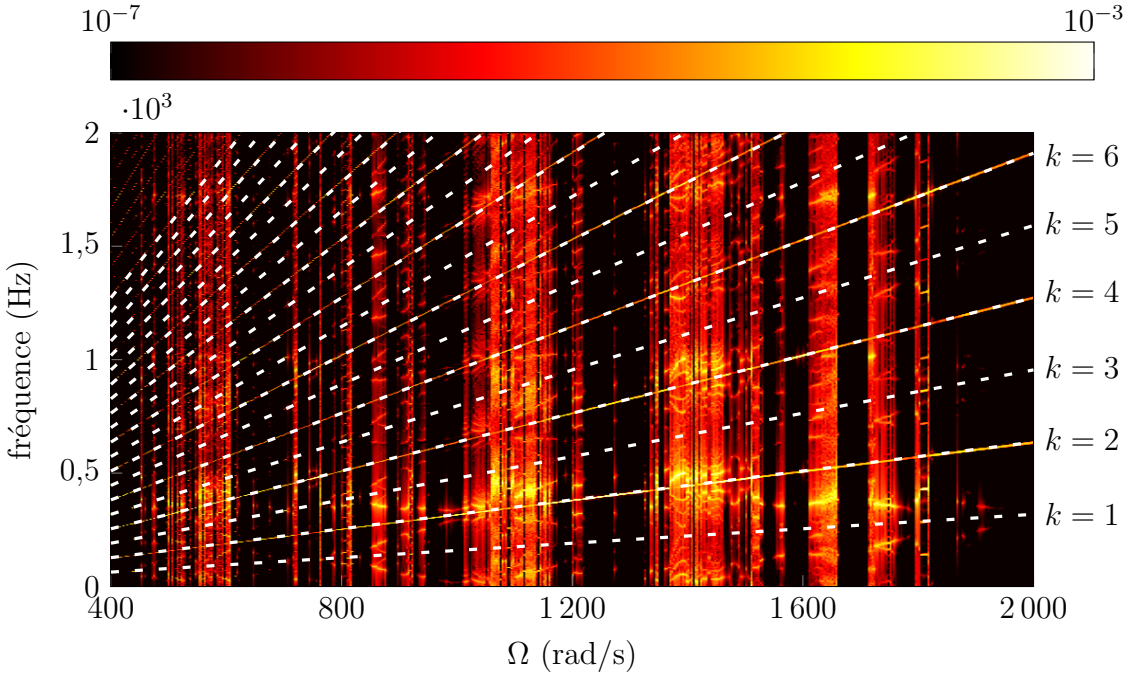


FIGURE IV.42 – Carte d'interaction obtenue par IT pour le déplacement radial du bord d'attaque, ordre moteur $f = k\Omega$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (▬) .

— les solutions périodiques de pulsation fondamentale $\omega = 2\Omega$ pour lesquelles seuls les ordres moteurs pairs répondent, *i.e.* $f = 2k\frac{\Omega}{2\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, ces solutions sont périodiques avec la même périodicité que le carter ;

— les solutions périodiques de pulsation fondamentale ω plus faible que la périodicité du carter $\omega < 2\Omega$, pour lesquelles on observe également un ensemble discret de raies fréquentielles mais correspondant à une pulsation fondamentale plus faible que 2Ω.

3.3.2 Courbe de réponse en fréquence

La section IV.3.3.1 fournit une vue d'ensemble qualitative de la réponse du système, notamment concernant la périodicité des solutions. Afin de mieux identifier les caractéristiques mises en lumière sur la figure IV.42, on représente les mêmes solutions sous la forme d'une courbe de réponse en fréquence, où l'on distingue plusieurs types de solutions. La catégorisation des solutions en différentes familles réalisée dans la section précédente est réutilisée mais en divisant la troisième catégorie ($\omega < 2\Omega$) en deux : les solutions de pulsation fondamentale $\omega = \Omega$ et les solutions dont la pulsation fondamentale est inférieure à la vitesse de rotation $\omega < \Omega$. Cette distinction est faite car les solutions périodiques de pulsation fondamentale $\omega = \Omega$ ont des propriétés particulières. On rappelle que le scénario de contact utilisé (carter déformé avec deux lobes) correspond à une excitation sur le deuxième ordre moteur à une pulsation 2Ω. Les solutions de pulsation fondamentale $\omega = \Omega$ appartiennent donc à des branches issues de bifurcations de doublement de période pour le scénario considéré. On représente sur la figure IV.43 la courbe de réponse en fréquence obtenue par IT au bord d'attaque sur laquelle on distingue les quatre catégories de solutions.

La réponse dynamique du système obtenue par IT est complexe et aucune tendance ne peut être aisément identifiée en termes d'amplitude ainsi qu'en termes de périodicité. Le fait que la

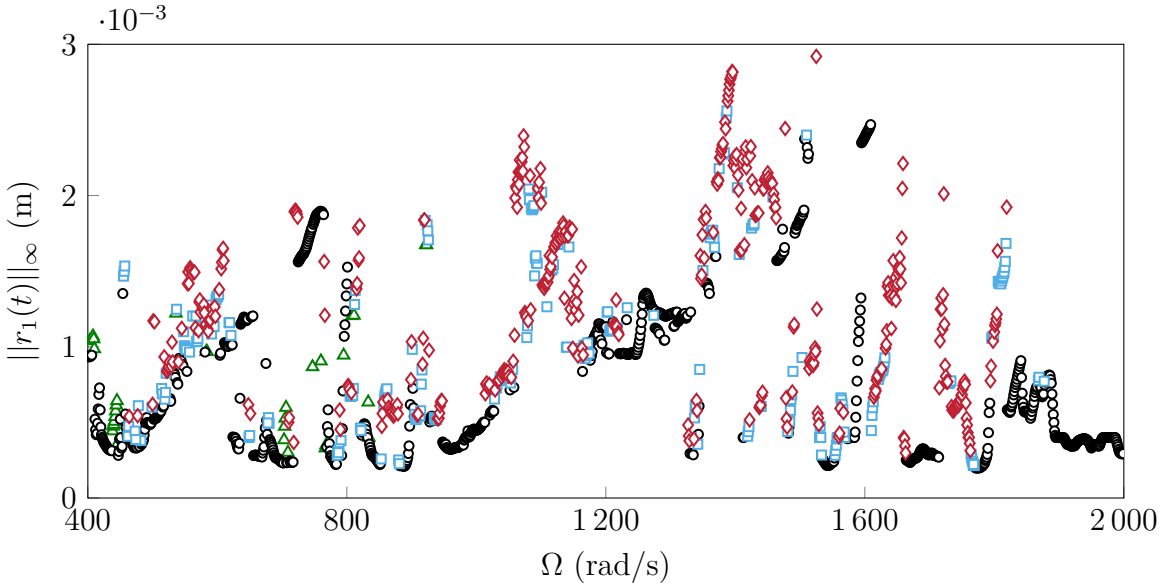


FIGURE IV.43 – Courbe de réponse en fréquence obtenue par IT au bord d'attaque, pulsation fondamentale ω : $\omega = 2\Omega$ (○), $\omega = \Omega$ (△), sous-harmonique ($\omega < \Omega$) (□), pas de périodicité ou $\omega < \Omega/10$ (◇).

réponse de l'aube présente une périodicité variable est un contexte défavorable à l'utilisation de méthodologies fréquentielles. Dans ce travail, comme la fréquence fondamentale de résolution pour les stratégies fréquentielles choisie est $\omega = \Omega$, les solutions sous-harmoniques (□) et sans périodicité (◇) sont en dehors de l'ensemble des solutions admissibles par HBM. En pratique, les solutions ne présentant aucune périodicité (◇) (incluant des réponses quasi-périodiques, apériodiques ou même chaotiques) ne peuvent pas être obtenues par les méthodes fréquentielles. Toutefois, si les réponses sous-harmoniques (□) présentent un intérêt, il est possible d'abaisser la fréquence de résolution de telle sorte que $\omega = \Omega/\nu$ avec $\nu > 1$ afin de les estimer. Dans la suite de cette étude, puisqu'on se concentre sur les solutions de pulsation fondamentale $\omega = 2\Omega$ (○), les trois autres catégories sont colorées en gris (△) (□) (◇) pour les distinguer des solutions d'intérêt et alléger les figures.

3.4 Résultats numériques des méthodologies fréquentielles

On présente dans cette section l'ensemble des résultats obtenus par les méthodes fréquentielles DLFT-HBM et RL-HBM sur la configuration de contact aube/carter présentée. On se concentre ici sur la comparaison des deux méthodologies afin de mettre en lumière les spécificités de chacune d'elles.

3.4.1 Courbes de réponse en fréquence

Tout d'abord, les deux stratégies HBM sont utilisées pour obtenir la courbe de réponse en fréquence du système. Les deux méthodologies utilisent le même nombre d'harmoniques $N_\mathrm{h} = 40$ et le même nombre d'instants $N_\mathrm{t} = 1024$. Les résultats sont présentés sous la forme de courbes d'amplitude au bord d'attaque dans la direction radiale $\|r_1(t)\|_\infty$ sur la figure IV.44. La courbe de réponse en fréquence obtenue par IT dans la section IV.3.3.2 est également superposée afin de fournir une base de comparaison. L'ordre de grandeur associé aux calculs des courbes de réponse par HBM est entre 30 et 60 minutes sur un CPU i7 à huit cœurs. Les

temps de calcul sont similaires pour les deux méthodes. On choisit $\varepsilon = 1{\cdot}10^{7}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ pour la DLFT-HBM ainsi que $\kappa = 1{\cdot}10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et $\gamma = 600\,\mathrm{N}$ pour la RL-HBM.

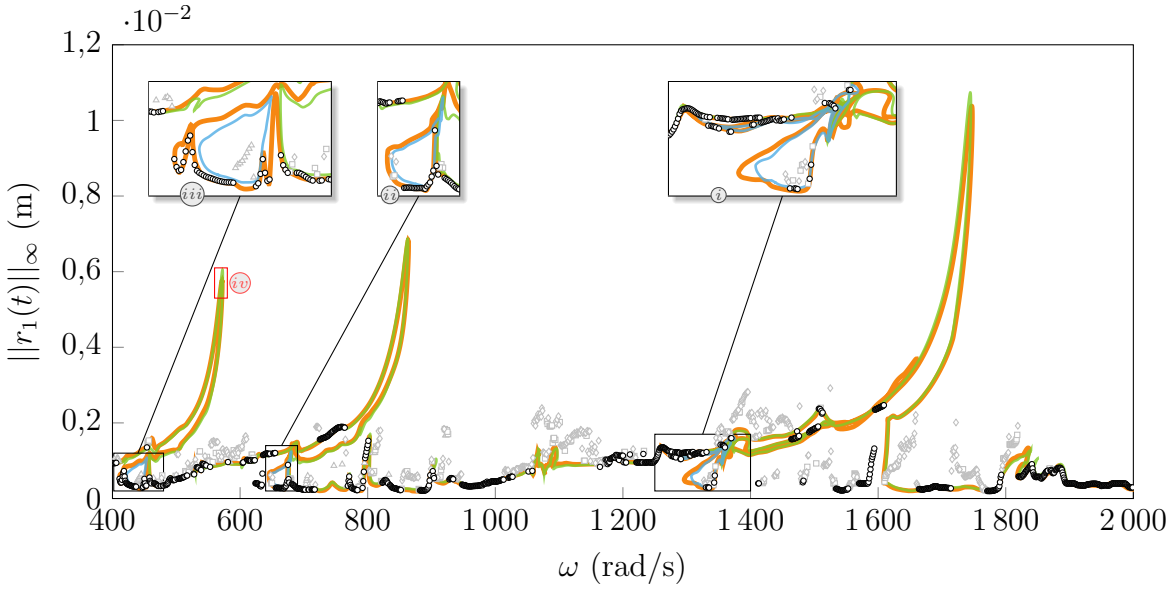


FIGURE IV.44 – Courbes de réponse en fréquence obtenues par les méthodes fréquentielles, DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), branches de solutions isolées RL-HBM (—), IT de pulsation fondamentale ω : $\omega = 2\Omega$ (○), $\omega = \Omega$ (△), sous-harmonique ($\omega < \Omega$) (□), pas de périodicité ou $\omega < \Omega/10$ (♢).

La DLFT-HBM (—) et la RL-HBM (—) montrent un très bon accord l'une avec l'autre sur l'ensemble de la plage fréquentielle. Trois zones de différences sont identifiées, elles sont indiquées dans les cadres ⓘ , ⓘⓘ et ⓘⓘⓘ . Dans ces zones, on observe que la DLFT-HBM trouve des solutions connectées à la courbe de réponse en fréquence que la RL-HBM semble ne pas trouver. Afin de s'assurer que les solutions DLFT-HBM sont valides, la RL-HBM a été initialisée avec les solutions DLFT-HBM sur ces plages de fréquences spécifiques. Les courbes obtenues (—) sont représentées sur la figure IV.44. Ainsi, on conclut que les zones d'écart identifiées correspondent à des courbes de réponse en fréquence isolées pour la RL-HBM. Ce phénomène est plus clairement observé dans le cadre ⓘⓘⓘ où l'on peut voir distinctement que la courbe de réponse en fréquence (—) forme une boucle fermée. Il s'agit d'une des différences principales entre les methodologies de calcul. Néanmoins, comme les écarts se situent exclusivement à de faibles amplitudes vibratoires, ceci n'affecte pas la précision des approches pour la caractérisation des zones d'intérêt, *i.e.* des résonances non linéaires. En effet, les deux méthodologies fournissent des résultats identiques sur le reste de la plage de fréquences bien que la gestion du contact soit radicalement différente. De plus, comme on identifie que les écarts entre les courbes de réponse en fréquence principales correspondent à des branches de solutions isolées, on conclut que les différences méthodologiques affectent uniquement la connectivité des branches de solutions. Toutefois, ces déconnexions ne sont pas facilement attribuables à un aspect en particulier des stratégies et une étude dédiée sur les paramètres de gestion du contact (ε, κ et γ) et le filtrage de Lanczos est nécessaire pour conclure. Par ailleurs, on note que pour l'obtention des réponses représentées sur la figure IV.44, aucune étude paramétrique n'a été menée au préalable sur les paramètres numériques de gestion du contact ce qui témoigne d'un certain niveau de robustesse concernant le choix de ceux-ci. Plus précisément, la projection des courbes de réponse en fréquence des deux méthodologies dans un seul plan (ω, $\|r_1\|_\infty$) occulte

l'effet des paramètres de gestion du contact. Ceci signifie que leur influence est rendue invisible par la représentation sous la forme de la figure IV.44. Il est donc nécessaire de garder ceci à l'esprit lorsqu'on fait des comparaisons entres les stratégies : il n'est pas aisé d'attribuer les écarts entre les approches à des aspects méthodologiques plutôt qu'au choix des paramètres numériques de résolution. On rappelle que malgré ces différences, les deux méthodologies basées sur la HBM sont en excellent avec la stratégie de référence.

Bien que les déconnexions de branches de solutions isolées semblent causer des écarts d'une méthode à l'autre, il est important de rappeler que l'information liée à la connectivité des branches est uniquement accessible par les stratégies fréquentielles. En effet, il s'agit d'un aspect qualitatif sur lesquels les stratégies du paradigme temporel ne peuvent pas aider à conclure. Ceci s'explique par le fait que les algorithmes d'intégration temporelle sont généralement limités à des simulations à vitesse constante, sans influence des points précédents car aucune procédure de continuation n'est employée.

En ce qui concerne la confrontation entre les deux paradigmes, il est clair que les stratégies fréquentielles et temporelles ne reflètent pas la même dynamique de haute amplitude autour des résonances non linéaires. En effet, autour des pics de résonance, les amplitudes diffèrent d'un facteur cinq. Ceci souligne les difficultés rencontrées par la stratégie d'intégration temporelle pour détecter des solutions de haute amplitude à partir de conditions initiales nulles. Empiriquement, on observe que les conditions initiales nulles utilisées par IT favorisent généralement la convergence vers des solutions d'amplitudes relativement faibles. Néanmoins, sur les points où une solution périodique de pulsation fondamentale $\omega = 2\Omega$ ($\circ$) est trouvée par IT, les amplitudes de réponse sont en accord avec les branches calculées par la DLFT-HBM et RL-HBM.

Afin d'évaluer les performances des méthodologies fréquentielles à proximité des résonances non linéaires, une version agrandie et redimensionnée du contenu du cadre (iv) est représentée sur la figure IV.45.

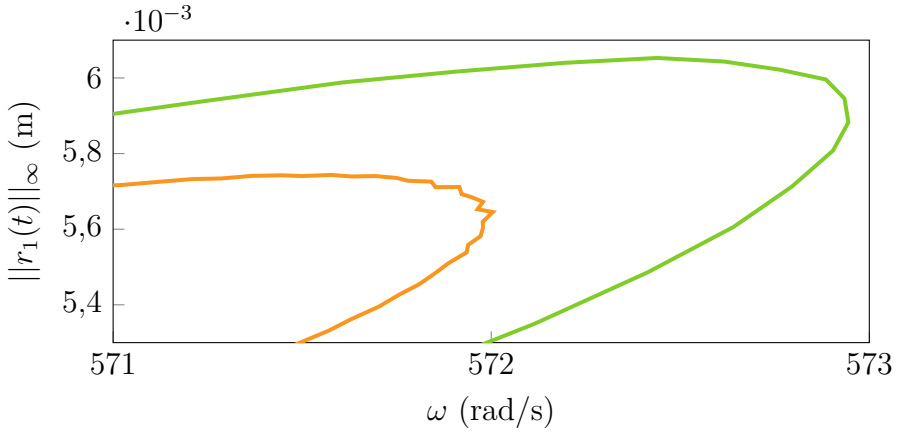


FIGURE IV.45 – Illustration du phénomène d'*aliasing*, vue redimensionnée du cadre (iv) , DLFT-HBM (—), RL-HBM (—).

Cette vue souligne la présence d'oscillations parasites autour du pic (attribuées au phénomène d'*aliasing* [190]) pour la DLFT-HBM. Au contraire, ce phénomène semble ne pas affecter la RL-HBM. Ceci peut être attribué au filtrage des efforts de contact, dont l'objectif principal est de réduire l'influence de l'effet de Gibbs. L'ajout du filtrage permet également d'atténuer l'amplitude de ces oscillations parasites, correspondant à un défaut numérique de la procédure AFT. Ce phénomène est généralement responsable d'un ralentissement de la procédure de

continuation autour des résonances non linéaires et peut être atténué en augmentant la discrétisation temporelle, ce qui augmente le coût de calcul global. Un compromis doit alors être trouvé entre coût de calcul des transformées de Fourier discrètes et influence du phénomène d'*aliasing*.

3.4.2 Branches de solutions isolées

Sur la figure IV.44, on identifie deux plages de vitesses angulaires où des écarts d'amplitude significatifs sont observés entre l'IT et les courbes de réponse HBM : $\Omega \in [1400; 1600]$ rad·s^{-1} et $\Omega \in [620; 635]$ rad·s^{-1}. Afin d'étudier ces différences, les solutions périodiques de pulsation fondamentale $\omega = 2\Omega$ obtenues par IT dans ces zones sont utilisées comme initialisation pour les deux stratégies HBM. Cette procédure mène à la découverte de deux branches de solutions isolées numérotées ① et ④ sur la figure IV.46. Ces isolats ont précédemment été mis en évidence par Colaïtis [206] pour la même configuration de contact. L'existence de telles branches de solutions est facilement identifiée visuellement pour ① et ④ car de multiples solutions périodiques sont obtenues par IT dans un voisinage proche. Cependant, il est également possible de vérifier l'existence de solutions HBM sur chaque solution d'IT périodique disponible, cette procédure conduit à la découverte des branches numérotées ② , ③ et ⑧ . Il est constaté que les solutions le long des branches isolées correspondent à des réponses dynamiques concentrées sur des formes modales d'ordre élevé (2F, 1T ou plus) sur un harmonique de la vitesse angulaire — ou ordre moteur — spécifique. Cette caractéristique est explorée en détail dans la section IV.3.4.4. Compte tenu de cette propriété des branches isolées, une étude spécifique est menée sur les solveurs HBM : plusieurs balayages fréquentiels sont réalisés avec des conditions d'initialisation de différentes amplitudes A tels que le champ de déplacements initial s'exprime

$$\mathbf{x}^0(t) = A\Phi_j \cos(k\Omega t) \tag{IV.29}$$

où A est une amplitude sans dimension située dans l'intervalle $A \in [10^{-3}; 10^{-2}]$, correspondant aux amplitudes observées sur la courbe de réponse en fréquence principale. Φ_j est la j-ième forme modale, k l'harmonique ciblé et Ω la vitesse angulaire. Ce type d'initialisation permet alors d'obtenir plus facilement les solutions à l'intersection du k-ième ordre du moteur avec le j-ième mode de la structure. L'utilisation de tels balayages fréquentiels permet de trouver des solutions sur les isolats déjà découverts mais sans l'utilisation de l'IT ainsi que la découverte de trois autres d'isolats, numérotés ⑤ , ⑥ et ⑦ .

L'ensemble des branches de solutions isolées est représenté sur la figure IV.46, ce graphe propose une vue plus complète de la dynamique de l'aube comparativement à la courbe de réponse initialement présentée sur la figure IV.44. Il convient de noter que cette représentation ne contient très probablement pas toutes les branches de solutions car aucune recherche exhaustive des branches isolées et bifurquées n'est menée dans cette étude. L'application d'une telle recherche à des systèmes industriels non réguliers constitue un verrou majeur qui devra être levé dans de futurs travaux. Plusieurs développements existent déjà sur le sujet [38, 73, 148, 226, 169] mais les applications sont limitées à des systèmes faiblement non linéaires avec peu de degrés de liberté.

L'ensemble des nouvelles courbes de réponse obtenues sur la figure IV.46 sont des branches isolées, à l'exception de la branche bifurquée ③ qui semble être une résonance sous-harmonique de haute amplitude. Pour cette branche, des écarts notables sont constatés entre les deux stratégies fréquentielles. En effet, l'un des deux points de bifurcation la reliant à la courbe principale n'est pas situé à la même fréquence pour les deux méthodologies. Cependant, cette différence n'est pas explorée dans ce document car la dynamique de la branche à la résonance n'est pas affectée.

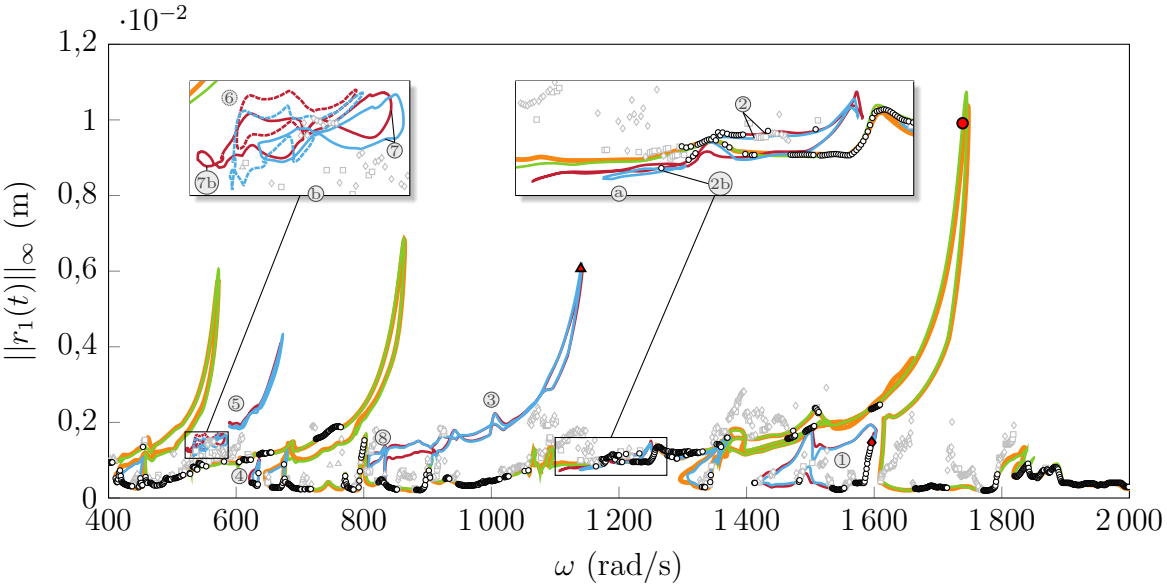


FIGURE IV.46 – Vue complète de la réponse dynamique du système obtenue par les méthodes harmoniques en incluant les branches isolées, DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), branches de solutions isolées DLFT-HBM (—), branches de solutions isolées RL-HBM (—), IT de pulsation fondamentale ω : $\omega = 2\Omega$ (○), $\omega = \Omega$ (△), sous-harmonique ($\omega < \Omega$) (□), pas de périodicité ou $\omega < \Omega/10$ (♢).

Pour presque tous les isolats, les deux méthodologies sont en parfait accord en termes d'amplitude. Deux isolats présentent cependant un comportement particulier : ② dans ⓐ et ⑦ dans ⓑ . En effet, l'isolat ② forme une seule branche pour la DLFT-HBM, alors qu'il est divisé en deux isolats ② et 2ⓑ pour la RL-HBM. Le comportement opposé est observé pour l'isolat ⑦ où il forme une seule branche pour la RL-HBM et deux isolats ⑦ et 7ⓑ pour la DLFT-HBM. Ce comportement souligne une nouvelle fois la sensibilité des résultats à la méthodologie de résolution. En plus d'influencer la connectivité de la courbe de réponse principale, l'algorithme de gestion du contact et le filtrage influencent également la connectivité des branches qui sont déjà isolées.

Trois points d'intérêt sont identifiés sur la figure IV.46 : (●), (♦), (▲). Ces points sont utilisés pour effectuer une analyse comparative approfondie des signaux temporels dans la section IV.3.4.3.

On observe sur la figure IV.46 une zone dans lesquelles plusieurs solutions d'IT de période fondamentale $\omega = \Omega$ sont dans un voisinage proche. Une procédure de continuation est initiée sur ces points par DLFT-HBM ce qui mène à la découverte de trois branches de solutions de période double (—). Dans un souci de clarté, on représente uniquement les courbes associées à la DLFT-HBM. De plus, on met en évidence les points d'IT de période double (△) sur la figure IV.47 à des fins de comparaison.

La figure IV.47 met à nouveau en lumière la complexité de la réponse de l'aube dans la configuration de contact présentée. En effet, on observe trois branches bifurquées supplémentaires (—) (- -) en plus des sept isolats numérotés sur la figure IV.46. On note que ces trois nouvelles branches de période double passent bien par la quasi-totalité des points d'IT périodiques de pulsation fondamentale $\omega = \Omega$ dans la plage fréquentielle $\Omega \in [600; 900]$ rad·s^{-1}. Ceci suggère que chacune des solutions périodiques de la plage $\Omega \in [400; 2000]$ rad·s^{-1} appartient à une branche bifurquée ou à une branche isolée. Ces dernières ne sont cependant pas recherchées par souci de concision. On note que les branches ③ et ⑧ sont de période double, ce qui est

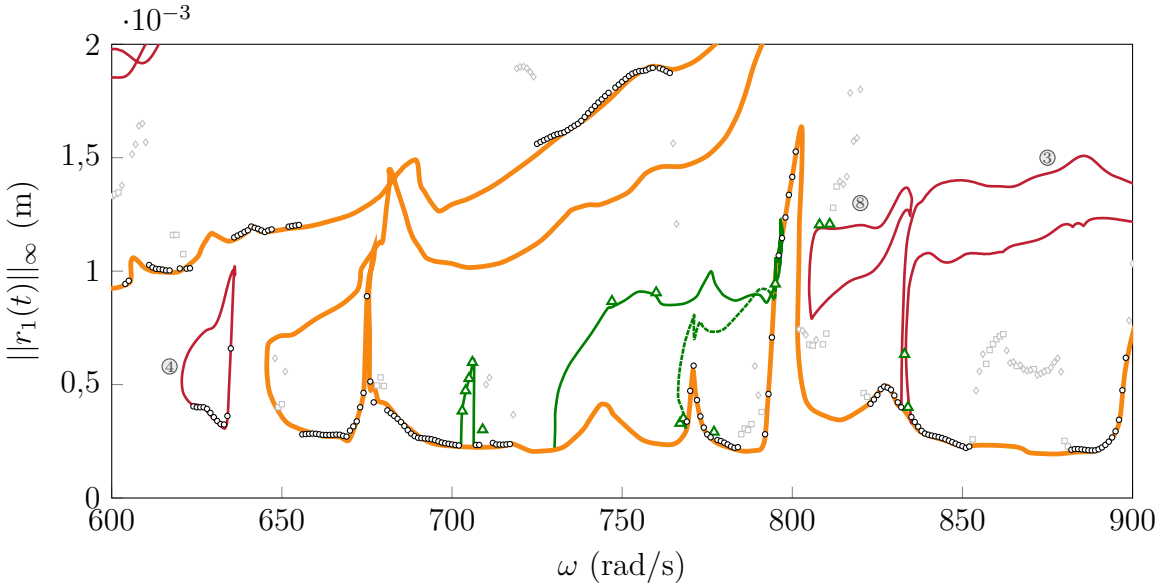


FIGURE IV.47 – Branches de période double captées par la DLFT-HBM, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—), branches de période double (—), (- -), IT de pulsation fondamentale ω : $\omega = 2\Omega$ (○), $\omega = \Omega$ (△), sous-harmonique ($\omega < \Omega$) (□), pas de périodicité ou $\omega < \Omega/10$ (♢).

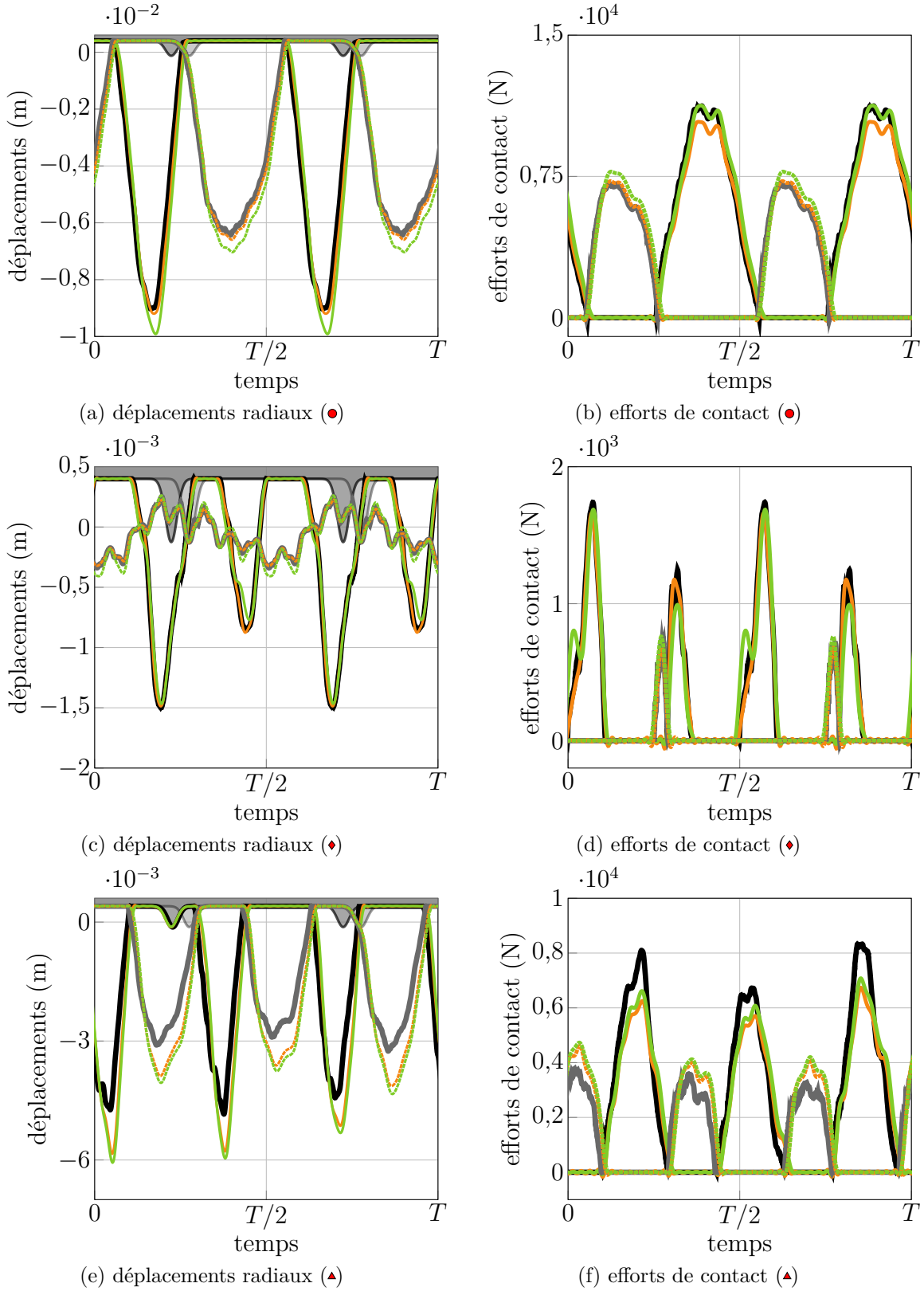
confirmé par le fait que quelques solutions d'IT de période double (△) soient situées sur ces branches.

3.4.3 Validation des solutions

Trois solutions sont mises en évidence sur la figure IV.46 pour permettre de valider les méthodologies sur les signaux temporels, elles sont situées :

1. proche de la résonance non linéaire principale (●) ;
2. sur l'isolat ① (♦) ;
3. sur la branche bifurquée ③ (▲).

Les signaux temporels correspondant aux déplacements radiaux et aux efforts de contact sont représentés sur la figure IV.48, à la fois au bord d'attaque (BA) et au bord de fuite (BF). On obtient les résultats de référence par IT en utilisant les solutions issues de la RL-HBM pour générer les conditions initiales de l'intégrateur temporel. Ce choix est arbitraire puisque les solutions issues de la DLFT-HBM pourraient également être utilisées. Ces conditions initiales sont ensuite intégrées pendant cent périodes pour garantir qu'un régime périodique est atteint. Les résultats représentés sur la figure IV.48 soulignent l'excellent accord des trois méthodologies sur les points choisis à la fois en termes de déplacements et d'efforts de contact. À la résonance non linéaire et sur l'isolat ① , la DLFT-HBM semble atteindre une précision légèrement supérieure sur l'amplitude vibratoire tandis que la RL-HBM est plus précise sur les efforts de contact. Cependant, il est important de rappeler qu'aucune étude paramétrique approfondie n'a été menée sur les paramètres de gestion du contact dans l'une ou l'autre des méthodes. Cette observation concernant la précision doit alors être mise en perspective et elle pourrait ne pas être vraie si les paramètres numériques de gestion du contact étaient différents. Il est possible de noter que les solutions sur la branche ③ (figures IV.48e et IV.48f) sont de pulsation fondamentale $\omega = \Omega$, conformément à ce qui est présenté dans la section IV.3.4.2. Au contraire, les deux autres points sont de pulsation fondamentale $\omega = 2\Omega$.



(a) déplacements radiaux (●)

(b) efforts de contact (●)

(c) déplacements radiaux (♦)

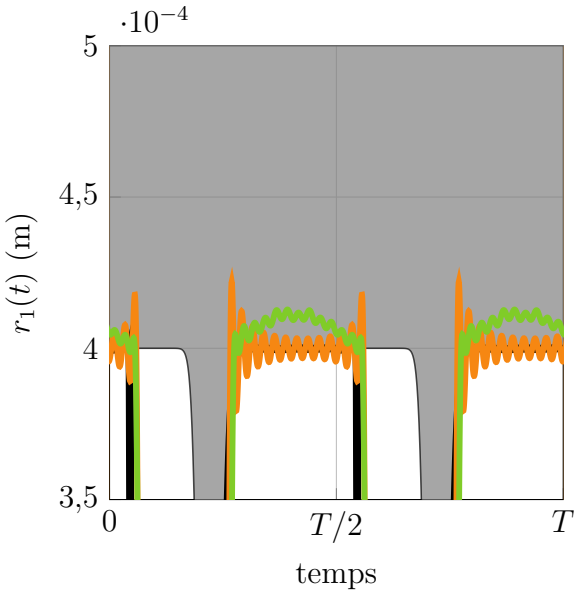
(d) efforts de contact (♦)

(e) déplacements radiaux (▲)

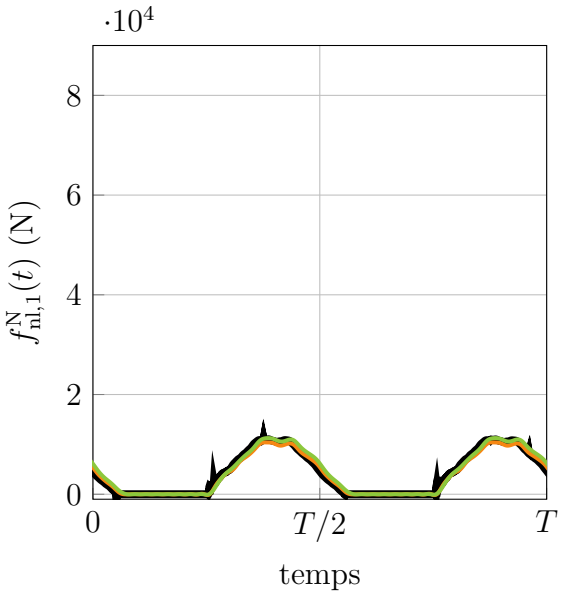
(f) efforts de contact (▲)

FIGURE IV.48 – Signaux temporels de déplacements radiaux et d'efforts de contact à la résonance principale (●), sur l'isolat ① (♦) et la branche ③ (▲), DLFT-HBM : BA (—) BF (·····), RL-HBM : BA (—) BF (·····), IT : BA (—) BF (—).

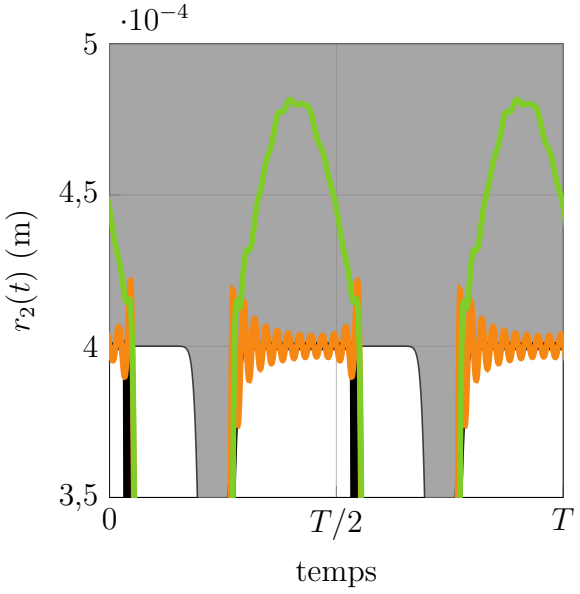
Afin d'évaluer plus précisément les différences de gestion du contact, on étudie le comportement des stratégies autour de l'interface de contact. Pour le point d'intégration temporelle proche de la résonance principale (●), une vue agrandie autour du carter est fournie pour le premier nœud frontière (BA) sur la figure IV.49a et le second nœud frontière sur la figure IV.49c.



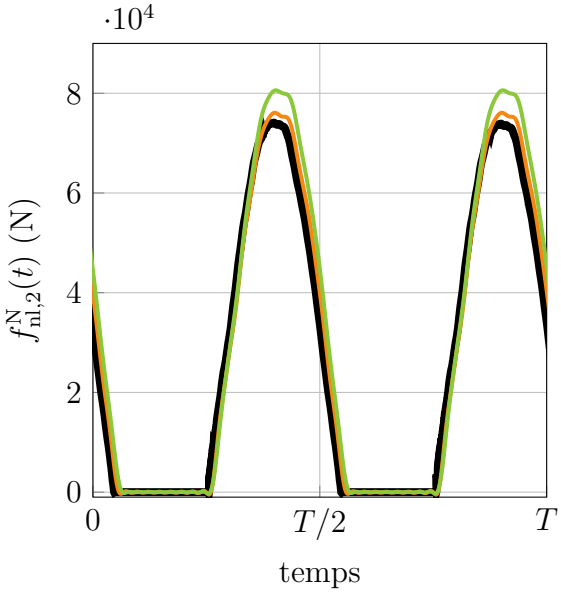
(a) déplacements au bord d'attaque



(b) efforts de contact au bord d'attaque



(c) déplacements au second nœud de contact



(d) efforts de contact au second nœud de contact

FIGURE IV.49 – Signaux temporels à la résonance principale (●) autour de l'interface de contact, DLFT-HBM (—), RL-HBM (—), IT (—), carter (▭).

Les résultats représentés sur la figure IV.49 mettent en évidence le comportement des méthodologies HBM pendant une phase de contact. D'une part, la pénétration résiduelle est du même ordre de grandeur pour les deux algorithmes sur la figure IV.49a. L'influence du filtrage sur la solution issue de la RL-HBM peut y être facilement identifiée en comparaison avec la solution de la DLFT-HBM. En effet, cette dernière subit des oscillations parasites qui ont

une amplitude supérieure à la pénétration générée par la loi de pénalité de la RL-HBM. Cela souligne que, même si la DLFT-HBM s'appuie sur des lagrangiens augmentés, les structures peuvent subir des pénétrations résiduelles plus importantes qu'avec une gestion du contact par pénalité. D'autre part, sur la figure IV.49c, les solutions de la DLFT-HBM subissent toujours des oscillations avec une amplitude similaire, mais la pénétration résiduelle des solutions de la RL-HBM est considérablement augmentée. Ce phénomène est lié au fait que les nœuds ne sont pas soumis à des efforts de la même intensité, comme le montrent les résultats représentés sur les figures IV.49b et IV.49d. On constate que les efforts varient d'un facteur huit entre les deux nœuds de contact. Empiriquement, on conclut que les deux méthodologies ont des comportements spécifiques pendant la phase de contact : (1) les solutions issues de la DLFT-HBM subissent des oscillations de relativement grande amplitude dues au phénomène de Gibbs mais l'amplitude des oscillations reste constante avec le niveau d'efforts et (2) la stratégie RL-HBM atténue les oscillations parasites par filtrage mais la pénétration résiduelle est fonction du niveau d'efforts de contact subi par le nœud.

3.4.4 Contenu dynamique des isolats

Les isolats et les branches bifurquées sont généralement associées à un contenu dynamique spécifique. Ce contenu est exploré dans cette section à la fois sur l'isolat ① et sur l'isolat ④ . En pratique, on cherche à conclure quant aux modes et harmoniques qui contribuent le plus le long d'une branche de solutions. Pour ce faire, on définit dans un premier temps des quantités d'intérêt qui permettent d'analyser le contenu dynamique des branches de solutions : les coefficients de contributions modales et les coefficients harmoniques.

Quantités d'intérêt Le contenu dynamique des différentes solutions des branches isolées est étudié grâce aux coefficients modaux. Ces coefficients γ_j sont calculés sur chaque solution pour le j-ième mode au temps t_i par la relation

$$\gamma_j(t_i) = \Phi_j^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t_i) \quad \forall (i,j) \in [\![1; N_\mathrm{t}]\!] \times \in [\![1; n]\!] \tag{IV.30}$$

où Φ_j est la j-ième forme modale linéaire $\mathbf{M}$-orthonormalisée et $\mathbf{M}$ la matrice de masse. Cette décomposition en coefficients modaux correspond à une projection du champ de déplacements $\mathbf{x}$ sur les formes modales linéaires du système. Pour des besoins de représentation, on définit les contributions modales relatives

$$||\gamma_j(t)||_{\infty,\mathrm{rel}} = \frac{\max\limits_{i\in[\![1;N_\mathrm{t}]\!]} |\gamma_j(t_i)|}{\sum\limits_{k=1}^{n} \max\limits_{i\in[\![1;N_\mathrm{t}]\!]} |\gamma_k(t_i)|} \quad \forall j \in [\![1; n]\!]. \tag{IV.31}$$

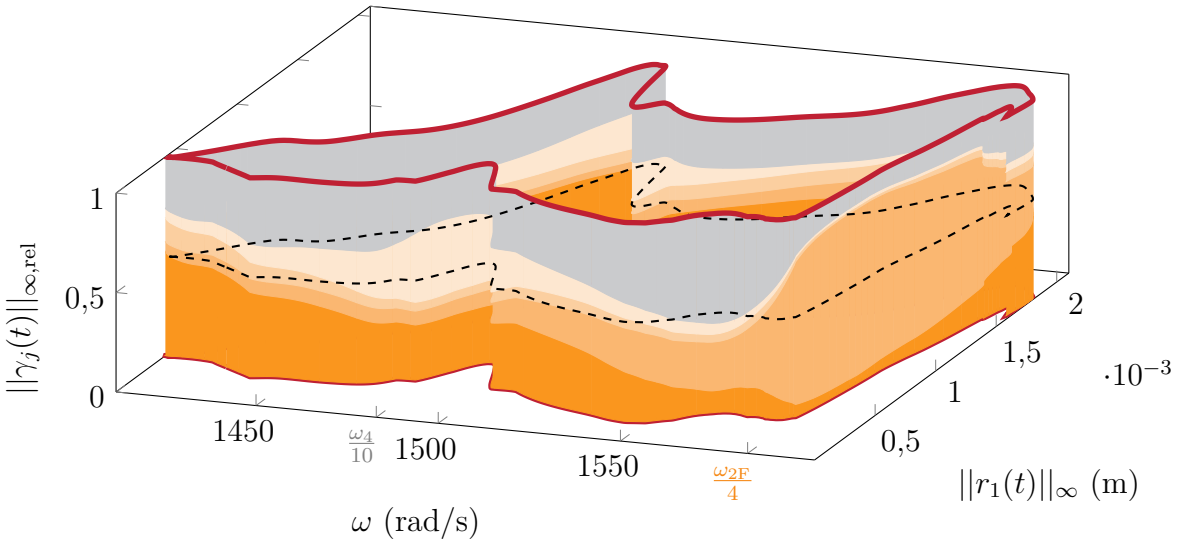
Ainsi, on dispose de n contributions modales relatives par solution, ce qui permet d'identifier les modes prépondérants pour chaque solution.

Pour évaluer le contenu harmonique de la réponse, on définit également les coefficients harmoniques du j-ième degré de liberté $c_{k,j}$ tels que

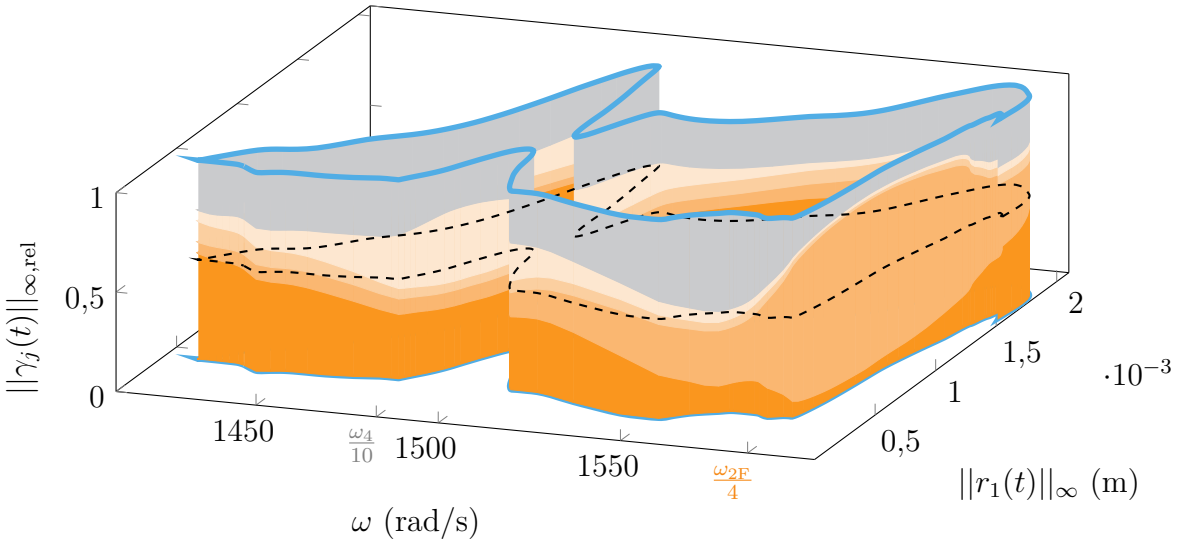
$$c_{0,j} = |a_{0,j}|, \quad c_{k,j} = \sqrt{a_{k,j}^2 + b_{k,j}^2} \quad \forall (j,k) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N_\mathrm{h}]\!]. \tag{IV.32}$$

Ceci permet simplement d'agréger les termes en $\cos(k\omega t)$ et $\sin(k\omega t)$ en une seule valeur par solution.

Isolat ① On représente les contributions modales relatives pour l'isolat ① sur la figure IV.50. Sur cette dernière, la courbe de réponse en fréquence est extrudée selon l'axe z du graphe où chaque couleur correspond à un mode. Il est alors possible de visualiser le long de la branche comment évoluent les $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}}$.



(a) DLFT-HBM



(b) RL-HBM

FIGURE IV.50 – Contributions modales relatives sur l'isolat ① , courbes de réponse en fréquence (—) (—), 1F (▭), 2F (▭), 1T (▭), quatrième mode (▭), tous les modes restants (▭), $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}} = 0.5$ (- -).

Sur la figure IV.50, une contribution significative du mode 2F (▭) est détectée autour de la pulsation $\omega \simeq \omega_{2F}/4 = 1585\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On détecte également une forte participation du quatrième mode (▭) autour de la pulsation $\omega \simeq \omega_4/10 = 1483\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Afin de vérifier si ces participations élevées sont réellement liées aux intersections des différents ordres moteurs avec les modes linéaires de la structure, les dix premières contributions harmoniques du déplacement radial au bord d'attaque $|c_{k,0}|$ $\forall k \in [\![0;10]\!]$ sont représentées sur la figure IV.51. Les solutions de la branche étant d'une pulsation fondamentale de $\omega = 2\Omega$, on y observe seulement des

contributions non nulles des harmoniques pairs, *i.e.* $k \in \{2; 4; 6; 8; 10\}$.

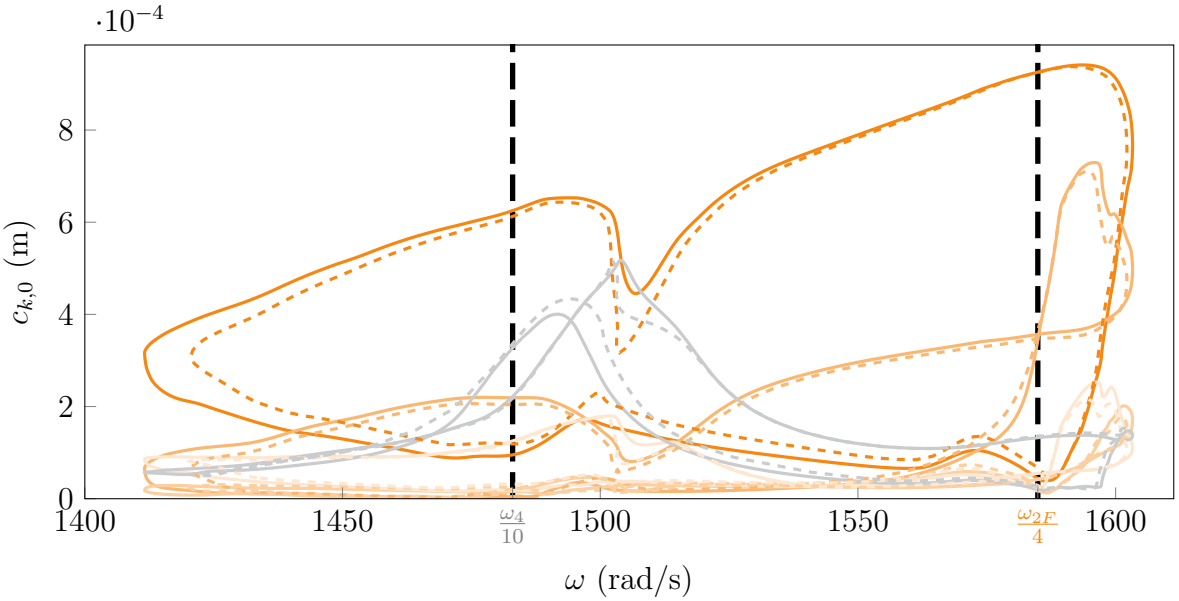


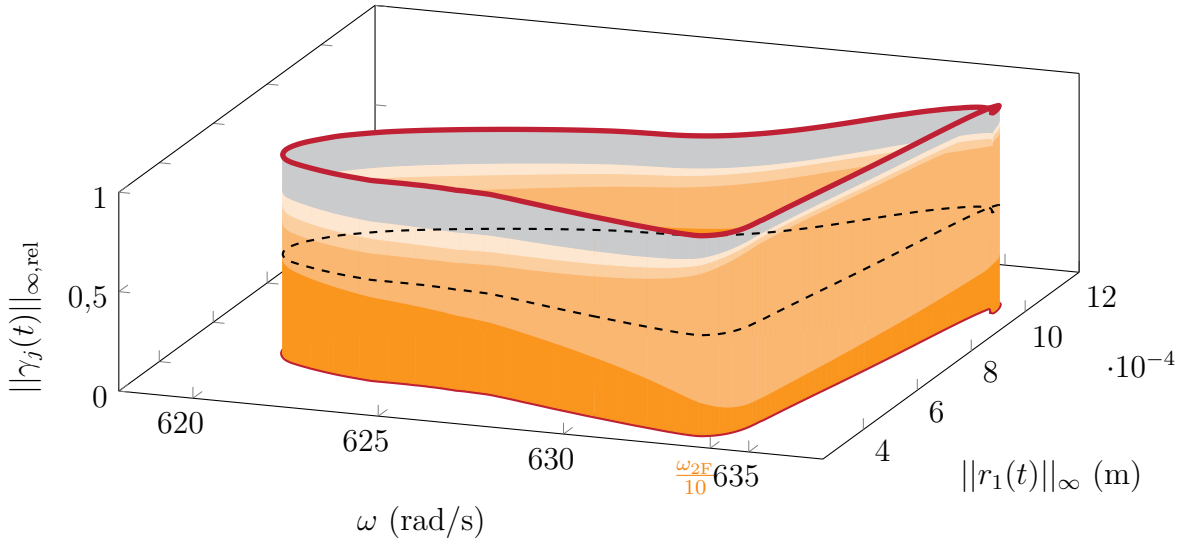
FIGURE IV.51 – Contributions harmoniques sur l'isolat ① , DLFT-HBM (—), RL-HBM (- -), $k = 2$ (▭), $k = 4$ (▭), $k = 6$ (▭), $k = 8$ (▭), $k = 10$ (▭), pulsations caractéristiques (– –).

On observe sur la figure IV.51 que les contributions harmoniques associées au quatrième (—) et dixième (—) harmoniques subissent une augmentation respectivement au voisinage des intersections mode/ordre moteur $\omega_{2F}/4$ et $\omega_4/10$. Ceci souligne que les isolats sont généralement associés à des comportements dynamiques spécifiques liés à des coïncidences de modes et d'harmoniques de la vitesse de rotation. Là où, sur la courbe de réponse principale, l'aube répond principalement suivant sa forme modale 1F sur le deuxième harmonique. Cet harmonique correspond à la fréquence d'excitation par le contact. Par ailleurs, on constate que les deux stratégies RL-HBM et DLFT-HBM fournissent des résultats équivalents, ce qui témoigne une nouvelle fois de la robustesse des deux méthodologies. On propose de valider ces observations sur un deuxième isolat dans le paragraphe suivant.

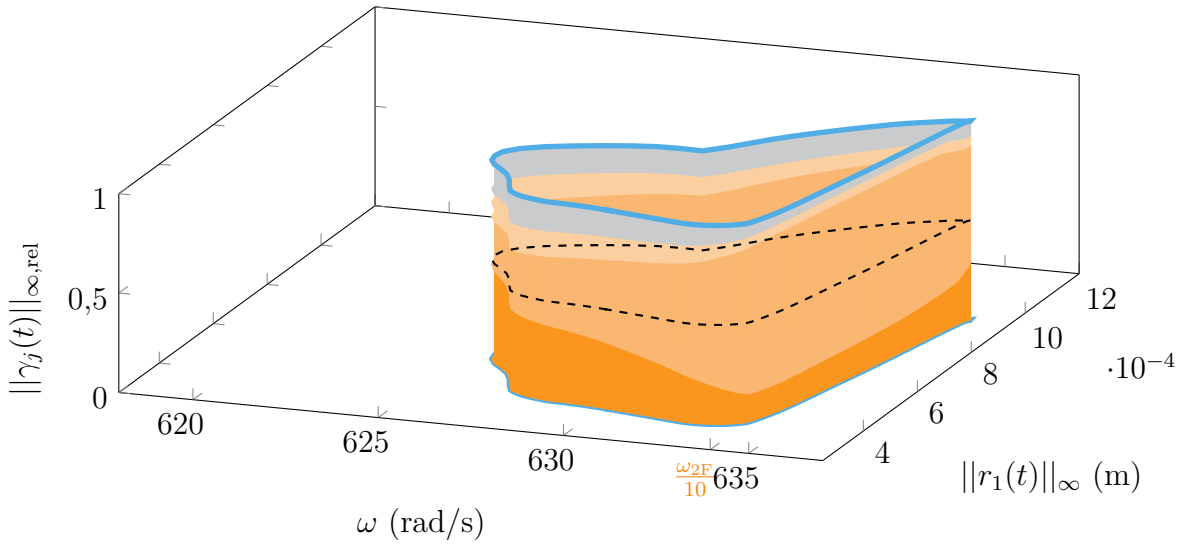
Isolat ④ On procède ici à la même démarche que pour l'isolat ① et on représente les contributions modales relatives de l'isolat ④ sur la figure IV.52.

Tout d'abord, on observe que les méthodologies DLFT-HBM et RL-HBM fournissent des résultat différents : la forme de l'isolat est différente d'une stratégie à l'autre. Ceci peut être attribué au fait que l'isolat trouvé par la DLFT-HBM soit divisé en deux parties pour la RL-HBM et qu'une des deux parties n'ait pas été trouvée. On privilégie cette hypothèse car on observe l'amorce d'un phénomène analogue sur la figure IV.50b : on constate un resserrement de l'isolat RL-HBM autour de $\omega = \frac{\omega_4}{10}$ pouvant se suivre d'une scission en deux isolats pour d'autres valeurs des paramètres de contrôle numériques (loi de contact et filtrage). Malgré les différences observées entre la DLFT-HBM et la RL-HBM sur la figure IV.52, on identifie une tendance similaire à celle identifiée pour l'isolat ① : le mode 2F (▭) est prépondérant sur une grande partie de l'isolat, notamment autour de l'intersection du mode 2F avec le dixième ordre moteur $\omega_{2F}/10$. De façon analogue, on représente sur la figure IV.53 les contributions harmoniques pour valider l'influence de l'ordre moteur d'intérêt.

On observe que la pulsation correspondant à l'intersection du mode 2F avec le dixième ordre moteur est liée à l'augmentation de la contribution du dixième harmonique (▭). La contribution de ce dernier excède même la contribution de l'harmonique fondamental aux



(a) DLFT-HBM



(b) RL-HBM

FIGURE IV.52 – Contributions modales relatives sur l'isolat ① , courbes de réponse en fréquence (—) (—), 1F (▭), 2F (▭), 1T (▭), quatrième mode (▭), tous les modes restants (▭), $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}} = 0.5$ (- -).

alentours de 635 rad·s^{-1}. Ceci va dans la même direction que ce qui a été observé sur l'isolat ① au paragraphe précédent.

3.4.5 Influence du coefficient de frottement

Afin d'apporter de nouveaux éléments permettant d'identifier les mécanismes physiques liés à l'apparition de branches de solutions isolées, on propose une étude d'influence sur le coefficient de frottement μ. Plusieurs calculs de courbes de réponse en fréquence sont réalisés à différentes valeurs de $\mu \in \{0{,}15; 0{,}17; 0{,}19\}$. Ces résultats sont représentés sur la figure IV.54. Par ailleurs, on affiche l'isolat ① pour $\mu = 0{,}15$. À des fins de comparaison, on représente virtuellement la courbe de réponse de cet isolat sur les plans associés aux valeurs $\mu = 0{,}17$ et $\mu = 0{,}19$. Cet isolat n'existe cependant plus à ces valeurs de μ.

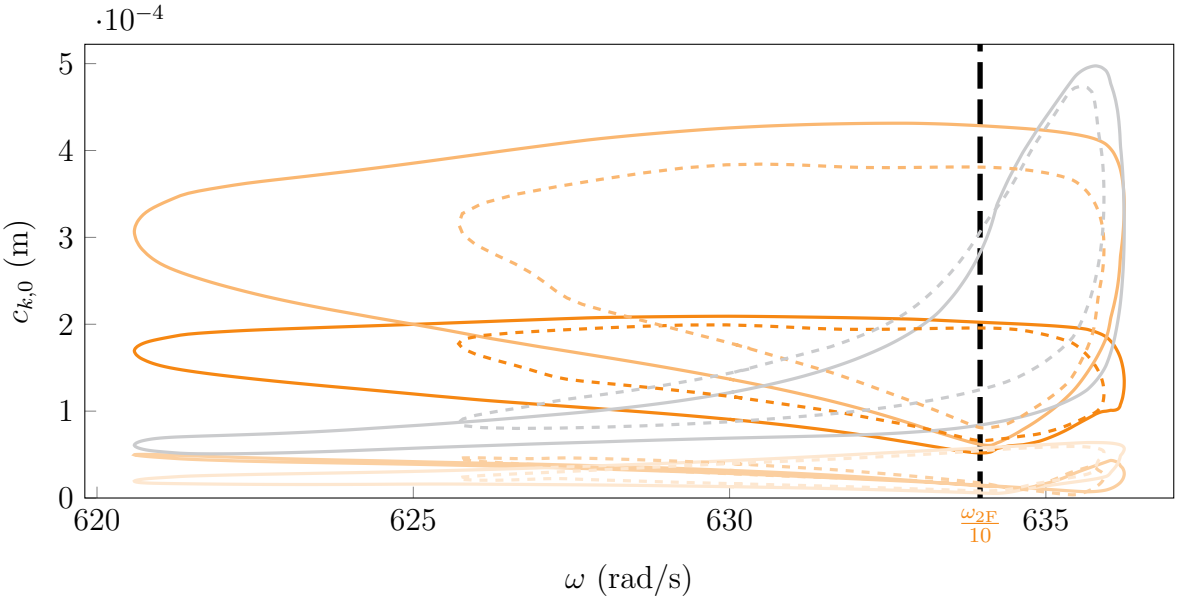


FIGURE IV.53 – Contributions harmoniques sur l'isolat ④ , DLFT-HBM (—), RL-HBM (- -), $k = 2$ (▬), $k = 4$ (▬), $k = 6$ (▬), $k = 8$ (▬), $k = 10$ (▬), pulsations caractéristiques (– –).

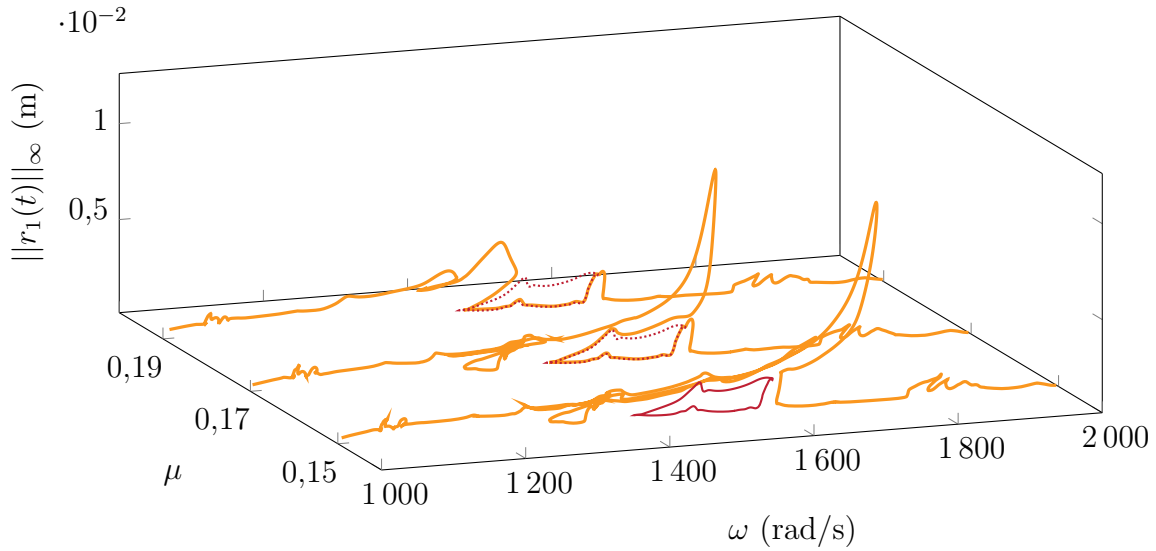


FIGURE IV.54 – Etude d'influence sur le coefficient de frottement μ, courbe de réponse principale (—), isolat ① ($\mu = 0{,}15$) ① (—), isolat ① projeté sur les plans $\mu = 0{,}17$ et $\mu = 0{,}19$ (·····).

On observe qu'en augmentant le coefficient de frottement, la branche isolée présente pour $\mu = 0{,}15$ semble fusionner avec la courbe de réponse principale. En effet, sur les courbes associées à $\mu = 0{,}17$ et $\mu = 0{,}19$, on observe une superposition de certaines portions de la courbe de réponse principale avec l'isolat ① de $\mu = 0{,}15$. Ceci suggère que les branches de solutions isolées ne sont pas intrinsèquement isolées. On caractérise le système pour un jeu de paramètres physiques et numériques pour lesquels la branche est isolée mais la figure IV.54 illustre que ce n'est pas nécessairement toujours le cas. On conclut alors que certains paramètres

— ici μ — affectent la connectivité des différentes solutions entre elles. Pour aller plus loin dans ces analyses d'influence des paramètres jusqu'ici supposés constants, il est nécessaire de mettre en œuvre une méthodologie de suivi de bifurcations telle que celle présentée dans la section V.1.1.

Application industrielle - bilan

L'application de la stratégie DLFT-HBM, implémentée dans le cadre cette thèse, et du code de calcul RL-HBM, issu des travaux de Colaïtis [206], sur l'aube rotor 67 a permis de mettre en évidence certaines propriétés de chacun des solveurs numériques ainsi que de la dynamique des interactions de contact aube/carter :

Excellent accord des stratégies fréquentielles... Une étude sur une configuration de contact aube/carter est réalisée afin de comparer les stratégies RL-HBM et DLFT-HBM sur une situation proche d'un cas industriel. La réponse obtenue est extrêmement complexe, cependant les méthodologies fréquentielles sont en très bon accord malgré la sévérité des interactions. Sur les points de calculs d'intégration temporelle dont la périodicité permet la comparaison avec les stratégies HBM, un excellent accord est également atteint. Plusieurs plages fréquentielles où des différences notables entre les résultats des deux paradigmes apparaissent ont permis la détection de branches de solutions isolées et de branches bifurquées à la fois par la RL-HBM et par la DLFT-HBM.

... avec quelques petites différences Toutefois, l'observation de quelques différences entre les deux stratégies fréquentielles mène à la découverte de plusieurs branches de solutions isolées pour la stratégie RL-HBM. Ces écarts sont attribués aux différences méthodologiques concernant la gestion du contact d'une part et le filtrage d'autre part. Concernant la pénétration résiduelle engendrée par chacune des méthodes, deux comportements différents sont identifiés : malgré l'utilisation de lagrangiens augmentés, la DLFT-HBM ne garantit pas systématiquement des pénétrations résiduelles moins importantes que les stratégies de gestion du contact par pénalité telles que la RL-HBM.

Propriétés des branches de solutions isolées La dernière grande étape de cette étude se concentre sur l'analyse des isolats. D'une part, une forte influence des intersections entre les ordres moteur et les modes de la structure est observée pour les solutions appartenant à ces branches. D'autre part, on identifie que certains paramètres physiques affectent la connectivité des branches de solutions entre elles, notamment le coefficient de frottement sec μ.

Nouveau besoin d'une procédure de détection d'isolats Comme montré dans ce chapitre, lors de la caractérisation de systèmes hautement non linéaires, des phénomènes très complexes apparaissent. Dans le cas présenté, ceci se manifeste surtout par l'apparition de branches de solutions isolées. À ce jour, peu de stratégies s'attachent à détecter ces branches car elles n'ont que rarement été mises en évidence sur des systèmes de taille industrielle. Ces branches peuvent notamment correspondre à des résonances de haute amplitude [56, 110, 136], ce qui rend leur recherche particulièrement cruciale dans un contexte industriel. Pour fournir des éléments de réponse à cette problématique, on se concentre sur la recherche systématique de branches de solutions isolées pour des systèmes mécaniques sujets à des interactions de contact dans le chapitre V.

Chapitre V

Procédure de détection d'isolats en réponse forcée

Ce chapitre présente une série d'applications de techniques de recherche de branches de solutions périodiques isolées dans un problème de contact en réponse forcée. Parmi les stratégies de la littérature, le suivi de points limites et l'analyse de Melnikov sont retenus. Dans un premier temps, on présente ces méthodologies en détails. On étudie ensuite un impacteur à deux degrés de liberté pour mettre en lumière la phénoménologie complexe liée à l'apparition de branches de solutions isolées grâce au principe énergétique de Melnikov. Une application succinte du suivi de points limite est réalisée sur une barre éléments-finis pour montrer son applicabilité à de fortes non-linéarités. Finalement, la stratégie de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov est retenue pour l'application aux systèmes industriels. On considère d'abord l'aube de compresseur NASA rotor 37 en négligeant le frottement, puis l'aube de soufflante NASA rotor 67 en prenant en compte le frottement. Dans les deux cas, la méthodologie de détection d'isolats s'avère très performante et permet de mettre en évidence certains mécanismes physiques responsables de l'apparition de branches de solutions isolées. Les interactions modales non linéaires semblent jouer un rôle central concernant la naissance de branches isolées, et ce à tous les niveaux de modélisation : du modèle d'impacteur phénoménologique à l'aube NASA rotor 67. Pour tous les modèles traités, on montre également l'existence de nombreuses branches de solutions isolées sous-tendues par plusieurs modes normaux non linéaires distincts lorsque les systèmes subissent des excitations surharmoniques.

Sommaire du chapitre

1 Stratégies de détection de solutions isolées **166**
1.1 Suivi de points limites 166
1.2 Analyse de Melnikov 173
2 Modèles académiques **179**
2.1 Impacteur à deux degrés de liberté 179
2.2 Barre éléments-finis 201
3 Modèle industriels **203**
3.1 Aube NASA rotor 37 sans frottement 203
3.2 Aube NASA rotor 67 avec frottement 214

Des branches de solutions périodiques isolées ont été identifiées sur de nombreux systèmes non linéaires phénoménologiques [20, 28, 38, 55, 71, 73, 89, 94, 97, 110, 136, 148, 169] et industriels [206, 67, 78, 166], mais aucune stratégie ne permet leur détection systématique

sur des systèmes de grande taille fortement non linéaires. En effet, les branches isolées sont généralement observées sans avoir été recherchées volontairement. Par conséquent, seules quelques contributions expliquent leur apparition par des analyses physiques. À ce jour, certains mécanismes physiques responsables de l'apparition d'isolats ont été identifiés, par exemple Detroux *et al.* [56] et Mangussi *et al.* [110] ont montré que les interactions modales non linéaires sont susceptibles d'isoler une résonance non linéaire de la courbe de réponse principale, Cenedese et Haller [38] ont mis au point un principe énergétique capable de localiser les branches isolées. Quelques éléments d'explications ont également été fournis par Alcorta *et al.* [20] pour les isolats sous-harmoniques. Récemment, des méthodologies ont été développées afin de calculer des solutions isolées, par exemple en faisant un suivi de bifurcations sur les points limites [55, 94, 174], en utilisant des méthodes d'homotopie [150], en utilisant des stratégies reposant sur des bases de Gröbner [73, 97] ou avec la *global terrain method* [78]. Afin de se placer dans un cadre favorable pour le développement de ces stratégies, des systèmes de petite dimension présentant des non-linéarités régulières ont généralement servi de cas-test. Par conséquent, les stratégies permettant de détecter des solutions isolées sont souvent associées à des hypothèses de différentiabilité sur la fonction objectif et ses solutions. Par ailleurs, le fait que ces stratégies numériques soient également très coûteuses en termes de temps de calcul les rend souvent inadaptées au traitement de systèmes industriels de grande dimension.

De plus, les solutions appartenant aux branches isolées ont été identifiées comme étant potentiellement de plus grande amplitude et avec un décalage fréquentiel plus important que les résonances non linéaires classiques [56, 110, 136]. Ces solutions se matérialisent sous la forme de résonances non linéaires isolées qui s'avèrent particulièrement critiques du point de vue de la conception. En effet, pour dimensionner les pièces mécaniques en fatigue vibratoire, il est d'usage d'évaluer la contrainte maximale qu'elles subissent, correspondant à la résonance. Dans ce cadre, l'omission d'une résonance non linéaire isolée compromet l'intégrité structurelle du système puisque les critères de conception appliqués dans l'industrie se cantonnent généralement à l'utilisation des contraintes associées à la résonance linéaire en réponse forcée. On démontre dans le chapitre IV le besoin d'intégrer les outils non linéaires dans les cycles de conception pour pouvoir évaluer précisément les niveaux de contraintes atteints lors d'interactions de contact. Toutefois, les méthodes de calcul non linéaires présentées jusqu'ici dans ce manuscrit ne peuvent pas rendre compte d'une résonance non linéaire isolée. Ainsi, il est capital de pouvoir statuer sur l'existence d'une telle résonance sur des configurations industrielles afin de garantir la résistance des pièces mécaniques du système.

On propose alors dans ce chapitre d'explorer certaines des stratégies de détection de branches de solutions isolées sur des systèmes soumis à des non-linéarités de contact. Tout d'abord, on présente les développements mathématiques liés aux méthodes de détection d'isolats dans la section V.1 : le suivi de points limites dans la section V.1.1 et l'analyse de Melnikov dans la section V.1.2. Ces méthodologies sont ensuite appliquées à des systèmes phénoménologiques dans la section V.2 et à des systèmes industriels dans la section V.3. On note que les développements de ce chapitre concernent majoritairement la DLFT-HBM, à l'exception du suivi de points limites où la RL-HBM est employée pour ses propriétés de régularité.

1 Stratégies de détection de solutions isolées

1.1 Suivi de points limites

Le suivi de points limites (ou points de retournement) permet la découverte de certaines familles de branches de solutions isolées. En effet, on observe dans la littérature [38, 55, 110] que certaines branches de solutions *a priori* isolées fusionnent avec la courbe de réponse principale

lorsqu'on fait varier certains paramètres, tels que l'amplitude d'excitation dans le cadre d'un calcul en réponse forcée. Dans le chapitre IV, on observe également ce phénomène lorsqu'on fait varier le coefficient de frottement μ. En pratique, si le paramètre que l'on fait varier, noté η, est bien choisi, il est possible de relier l'ensemble des points limites sous la forme d'une courbe unique dans l'espace paramétrique augmenté du paramètre η, indépendamment du fait que les points limites appartiennent à des branches isolées ou non. Par conséquent, l'ajout du paramètre η dans la procédure de continuation permet de calculer une courbe dans un espace paramétrique augmenté qui connecte les courbes de réponse principales et les branches isolées. Une fois cette courbe connue, le calcul des branches de solutions isolées est trivial car on dispose de solutions situées directement sur celles-ci. On détaille la stratégie de suivi de points limites permettant de calculer cette courbe dans la suite de cette section pour une non-linéarité de contact régularisée.

1.1.1 Suivi de bifurcations

L'information liée à l'emplacement d'un point de bifurcation est une information cruciale pour déterminer la stabilité des différentes branches de solutions d'un système dynamique non linéaire. Dans le cadre d'un calcul en réponse forcée, on recherche ce point dans un espace paramétrique restreint à l'espace des solutions constitué du champ de déplacements harmonique et de la pulsation fondamentale de réponse $(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)$. Afin de le trouver dans cet espace, on considère que l'ensemble des autres paramètres sont fixés. Néanmoins, la position de ce point peut varier de façon complexe dans l'espace paramétrique global, *i.e.* en considérant variables certains des paramètres *a priori* fixés. Parmi ces paramètres physiques on peut par exemple citer le coefficient de frottement μ, l'amplitude et la forme des efforts d'excitation, l'amortissement structurel ξ ou encore le jeu initial g_0. Pour rendre compte de ces comportements non linéaires, certaines stratégies [20, 55, 72, 173, 174] consistent à réaliser un suivi des points de bifurcation dans un espace paramétrique augmenté d'un ou plusieurs paramètres de contrôle supplémentaires. Dans ce manuscrit, on considère un seul paramètre supplémentaire η, mais l'extension à un nombre plus important de paramètres ne pose pas de défi théorique.

Chaque type de point de bifurcation $\bullet$ peut être détecté par l'annulation d'une fonction test $\varphi_\bullet$ qui lui est propre. En se plaçant dans un formalisme HBM, on peut lister les fonctions de test associées aux :

— bifurcations de type point limite (LP) [191, 173]

$$\varphi_{\mathrm{LP},1} = \det \mathcal{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n(2N_\mathrm{h}+1)} \quad \varphi_{\mathrm{LP},2} = \mathcal{J}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \tag{V.1}$$

avec $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ la matrice jacobienne du système ;

— bifurcations d'embranchement (BP) [191, 173]

$$\exists \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n(2N_\mathrm{h}+1)} \quad \varphi_{\mathrm{BP}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}\boldsymbol{\Phi} \\ (\nabla_\omega \mathcal{H})^\top \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{V.2}$$

avec $\nabla_\omega \mathcal{H} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}$ le gradient par rapport à la fréquence de réponse ω ;

— bifurcations de doublement de période (PD) [20, 191]

$$\varphi_{\mathrm{PD}} = \mathrm{sgn}(\Re(\overline{\boldsymbol{\rho}}))\, |\overline{\boldsymbol{\rho}}| + 1 = 0 \tag{V.3}$$

avec $\overline{\boldsymbol{\rho}} = \max\limits_{i \in [\![1;2n]\!]} |\rho_i|$ le multiplicateur de Floquet au module le plus grand et $\mathrm{sgn}(\bullet)$ la fonction signe ;

— bifurcations de Neimark-Sacker (NS) [191, 173]

$$\varphi_{\mathrm{NS},1} = \prod_{1\leq i<j\leq 2n} (\alpha_i + \alpha_j) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{\mathrm{NS},2} = \det\left(2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_{2n}\right) = 0 \tag{V.4}$$

avec $\mathbf{A} = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{2n}]$ la matrice diagonale des exposants de Floquet et $\odot$ l'opération de produit bialterné.

En pratique, le suivi de bifurcations est donc réalisé en annulant à la fois la fonction non linéaire $\mathcal{H}$ et la fonction test du type de bifurcation cherché $\varphi_\bullet$. Les bifurcations BP et LP nécessitent également l'utilisation d'une équation de normalisation pour fixer la norme de $\mathbf{\Phi}$.

1.1.2 Définition du problème pour les points limites

Dans ce travail, on se consacre uniquement au suivi de points limites. Cette technique a permis la découverte de branches de solutions isolées sur des applications phénoménologiques soumises à des non-linéarités régulières [20, 55, 173]. Une première application aux non-linéarités de contact est proposée dans ce manuscrit pour une loi de contact RL-HBM.

Pour les points limites, les fonctions test $\varphi_{\mathrm{LP},1}$ et $\varphi_{\mathrm{LP},2}$ caractérisent un déficit de rang 1 de la matrice jacobienne du système $\mathcal{J}$, *i.e.* elle possède une unique valeur propre nulle. Dans le cadre d'un calcul HBM, la fonction test $\varphi_{\mathrm{LP},1}$, correspondant au déterminant numérique de la matrice jacobienne $\mathcal{J}$, peut être instable si la matrice est de dimension importante. Ceci est généralement le cas lorsqu'on considère un nombre important d'harmoniques et/ou un système de grande dimension. Afin de contourner cette difficulté, on utilise plutôt la fonction test $\varphi_{\mathrm{LP},2}$ de dimension $n(2N_\mathrm{h}+1)$. Ainsi, le système à résoudre pour trouver un point limite s'écrit

$$\mathcal{G}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega) \\ \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}}, \omega)\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi} - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{V.5}$$

où le vecteur d'inconnues de ce système augmenté est $\mathbf{y} = \left[\widetilde{\mathbf{x}}^\top, \mathbf{\Phi}^\top, \omega\right]^\top$. Le vecteur $\mathbf{\Phi}$ recherché correspond au vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ au point limite. Cette formulation double alors la taille du système mais permet d'obtenir une meilleure stabilité numérique. Dans la littérature, on trouve également la technique de bordurage [55] qui permet de résoudre le système augmenté d'une seule équation ($\varphi_{\mathrm{LP},1}$), ce qui limite ainsi le temps de calcul. Ce type de résolution demeure cependant très sensible du point de vue le stabilité numérique.

1.1.3 Jacobien du système augmenté

Pour effectuer un suivi de points limites, on résout le système augmenté (V.5). Pour y parvenir, il est nécessaire d'utiliser un solveur itératif non linéaire de type Newton-Raphson. Ce dernier requiert l'évaluation la matrice jacobienne du système augmenté. La convergence de la méthodologie est dépendante de la précision numérique de cette matrice. Pour garantir la convergence de la stratégie, on détaillera donc une stratégie permettant de la calculer analytiquement pour la loi de contact régularisée de la RL-HBM. Afin d'alléger les notations, on se place après une condensation des degrés de liberté linéaires mais on omet l'indice $\bullet_\mathrm{red}$ sur les quantités concernées. La taille du système à résoudre pour la recherche de points limites

devient alors $2n_{\text{nl}}(2N_{\text{h}}+1)+1$. La matrice jacobienne du système s'exprime

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathcal{J}_{\mathcal{G}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} & \dfrac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \mathbf{\Phi}} & \dfrac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} & \dfrac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \mathbf{\Phi}} & \dfrac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial (\mathbf{\Phi}^{\top}\mathbf{\Phi}-1)}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} & \dfrac{\partial (\mathbf{\Phi}^{\top}\mathbf{\Phi}-1)}{\partial \mathbf{\Phi}} & \dfrac{\partial (\mathbf{\Phi}^{\top}\mathbf{\Phi}-1)}{\partial \omega} \end{bmatrix}. \tag{V.6}$$

La première ligne de cette matrice est simple à calculer car elle est constituée de dérivées déjà calculées dans le cadre d'un calcul HBM classique par continuation :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega), \quad \frac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \mathbf{\Phi}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}\widetilde{\mathbf{x}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex}}}{\partial \omega} = \nabla_{\omega}\mathcal{H}. \tag{V.7}$$

En revanche, les dérivées du terme $\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi}$ sont plus délicates à calculer car un de ces termes fait apparaître l'opérateur hessien (tenseur d'ordre 3) de la fonction $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)=\mathbf{0}$, tel que $\dddot{\mathbf{H}} = \dfrac{\partial \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}^2}$. Les dérivées apparaissant dans la deuxième ligne de la matrice (V.6) s'expriment alors

$$\frac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = \dddot{\mathbf{H}}\mathbf{\Phi}, \frac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \mathbf{\Phi}} = \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega) \text{ et } \frac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\mathbf{\Phi})}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial \omega}\mathbf{\Phi} = (\nabla_{\omega}\mathcal{J})\mathbf{\Phi} \tag{V.8}$$

où le vecteur $\mathbf{\Phi}$ peut être sorti des dérivées $\frac{\partial}{\partial \omega}$ et $\frac{\partial}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ car il s'agit d'une inconnue indépendante. Étant donné ses dimension, le calcul de $\dddot{\mathbf{H}}$ se révèle coûteux dans le cadre d'une non-linéarité ayant une expression analytique régulière, comme la RL-HBM. Pour une loi de contact non régulière, telle que la DLFT-HBM, son calcul numérique s'avère impossible pour des raisons théoriques. Dans les faits, il est possible de recourir à une approximation de cet opérateur par différences finies. Comme cet opérateur est de taille $(n_{\text{nl}}(2N_{\text{h}}+1))^3$, cette estimation correspond généralement à des temps de calcul conséquents, et particulièrement lorsque le nombre d'inconnues devient important. Les différentes dérivées constituant l'opérateur hessien peuvent être calculées grâce aux formules de différences finies (ici avant) telles que

$$\frac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega))}{\partial a_k^j} = \frac{1}{\left|\delta a_k^j\right|}\left(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}}+\delta a_k^j,\omega) - \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\right) \qquad \forall (j,k) \in [\![1;n_{\text{nl}}]\!] \times [\![0;N_{\text{h}}]\!] \tag{V.9}$$

et

$$\frac{\partial (\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega))}{\partial b_k^j} = \frac{1}{\left|\delta b_k^j\right|}\left(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}}+\delta b_k^j,\omega) - \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\right) \qquad \forall (j,k) \in [\![1;n_{\text{nl}}]\!] \times [\![1;N_{\text{h}}]\!]. \tag{V.10}$$

Le choix de la valeur des pas de différences finies δa_k^jet δb_k^j conditionne la précision de l'opérateur hessien et donc directement la convergence de la méthode. Par ailleurs, l'évaluation du terme lié à la dérivation de la matrice jacobienne par rapport à ω peut aussi se faire par différences finies avec un pas $\delta\omega$ tel que

$$\nabla_{\omega}\mathcal{J} = \frac{1}{|\delta\omega|}\left(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega+\delta\omega) - \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)\right). \tag{V.11}$$

Afin d'améliorer la convergence des calculs et d'accélérer la résolution, on recourt à une évaluation analytique de $\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}$ et $\nabla_\omega \mathcal{J}$. Leur calcul pour la loi RL-HBM est explicité dans la section V.1.1.4.

La dernière ligne de la matrice jacobienne (V.6) est relativement simple à calculer comme il s'agit d'une équation de normalisation du vecteur propre inconnu $\mathbf{\Phi}$. Les différentes dérivées s'écrivent

$$\frac{\partial(\mathbf{\Phi}^\top\mathbf{\Phi}-1)}{\partial\widetilde{\mathbf{x}}}=\mathbf{0},\qquad \frac{\partial(\mathbf{\Phi}^\top\mathbf{\Phi}-1)}{\partial\mathbf{\Phi}}=2\mathbf{\Phi}^\top\qquad\text{et}\qquad \frac{\partial(\mathbf{\Phi}^\top\mathbf{\Phi}-1)}{\partial\omega}=\mathbf{0}. \tag{V.12}$$

Finalement, la matrice jacobienne (V.6) du système se simplifie telle que

$$\frac{\partial\mathcal{G}(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}}=\mathcal{J}_\mathcal{G}(\mathbf{y})=\begin{bmatrix}\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega) & \mathbf{0} & \nabla_\omega\mathcal{H}\\ \overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}\mathbf{\Phi} & \mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega) & (\nabla_\omega\mathcal{J})\mathbf{\Phi}\\ \mathbf{0} & 2\mathbf{\Phi}^\top & \mathbf{0}\end{bmatrix}. \tag{V.13}$$

1.1.4 Calcul analytique du hessien en RL-HBM

Le calcul numérique d'un opérateur hessien analytique est impossible dans le cas d'une non-linéarité non régulière, en revanche la loi de contact RL-HBM s'affranchit de ce problème car elle est régularisée. En effet, la régularisation permet de réaliser un calcul direct du tenseur hessien ce qui accroît la rapidité, la robustesse et la précision numérique de la stratégie. L'opérateur hessien est un tenseur d'ordre 3 qui correspond à la dérivée seconde de la fonction algébrique $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)$. Par conséquent, chacune de ses composantes s'écrit

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}_{a,b,c}=\frac{\partial^2\mathcal{H}_a(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)}{\partial x_b\partial x_c}\quad\forall(a,b,c)\in[\![1;n_{\mathrm{nl}}(2N_{\mathrm{h}}+1)]\!]^3. \tag{V.14}$$

Ainsi, la composante (a, b, c) du tenseur hessien correspond à la dérivation de la a-ième composante de $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbf{x}},\omega)$ par rapport aux b-ième et c-ième composantes du vecteur d'inconnues $\widetilde{\mathbf{x}}$ notées x_b et x_c. Les variables x_b et x_c sont les coefficients de Fourier a_k^j et b_k^j $\forall(j,k)\in[\![1;n_{\mathrm{nl}}]\!]\times[\![1;N_{\mathrm{h}}]\!]$. Dans le cadre de la HBM, chacun de ces coefficients est relié à une fonction d'interpolation $c_0 : t\mapsto 1/2$ pour les a_0^j, $c_k : t\mapsto\cos(k\omega t)$ pour les a_k^j et $s_k : t\mapsto\sin(k\omega t)$ pour les b_k^j. Pour s'affranchir du type de coefficient traité, on note respectivement $y_b(t)$ et $y_c(t)$ les fonctions d'interpolation associées aux composantes x_b et x_c. Au sein de $\mathcal{H}$, le seul terme dont la dérivée seconde est non nulle est le terme d'efforts non linéaires. Avant de procéder au calcul des composantes du tenseur hessien, il convient de rappeler l'expression des efforts non linéaires associés à la RL-HBM au j-ième nœud non linéaire avec $j\in[\![1;n_{\mathrm{b}}]\!]$:

$$f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)=-\frac{\kappa g^j(t)}{2}+\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2+\gamma^2}. \tag{V.15}$$

Avant de parvenir à l'expression de $\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}_{a,b,c}$, il est nécessaire de dériver un première fois les efforts non linéaires par un coefficient quelconque x_b. Afin de faire apparaître les coefficients de Fourier, on rappelle qu'avec les nouvelles notations, le champ de déplacements du j-ième nœud non linéaire s'écrit

$$x^j(t)=\sum_{i=1}^{2N_{\mathrm{h}}+1}y_i(t)x_i^j. \tag{V.16}$$

Dans ces travaux, on considère l'obstacle comme rigide donc la j-ième fonction de jeu s'écrit $g^j(t) = g_0^j(t) - x^j(t)$. Ainsi, sa dérivée par rapport à la composante x_b^j s'exprime

$$\frac{\partial g^j(t)}{\partial x_b^j} = -\frac{\partial x^j(t)}{\partial x_b^j} = -y_b(t). \tag{V.17}$$

Comme la dérivée (V.17) ne fait intervenir que les coefficients de Fourier x_b^j associés au degré de liberté physique $x^j(t)$, il est possible calculer l'opérateur hessien par blocs. Chacun des blocs est alors associé à un nœud non linéaire et les coefficients restants du tenseur sont nuls. En dérivant les efforts non linéaires (V.15) une fois par rapport à x_b^j, on obtient

$$\frac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{\partial x_b^j} = \frac{\kappa y_b(t)}{2} - \frac{2\frac{\kappa^2}{4} y_b(t) g^j(t)}{2\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}} = y_b(t) \underbrace{\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^2 g^j(t)}{4\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \right)}_{\frac{\partial f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}}{\partial x^j}}. \tag{V.18}$$

Afin d'obtenir les termes du hessien, il est nécessaire de dériver une seconde fois par rapport à une autre variable quelconque x_c^j, pas nécessairement différente de x_b^j, et il vient

$$\frac{\partial^2 f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{\partial x_b^j \partial x_c^j} = \frac{-\kappa^2 y_b(t)}{16\left(\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2\right)} \left(4 y_c(t) \sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2} - 4 g^j(t) \frac{2\frac{\kappa^2}{4} y_c(t) g^j(t)}{2\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \right), \tag{V.19}$$

on factorise l'expression (V.19) sous la forme

$$\frac{\partial^2 f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{\partial x_b^j \partial x_c^j} = \frac{-4\kappa^2 y_b(t) y_c(t)}{16\left(\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2\right)} \left(\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2} - \frac{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \right) \tag{V.20}$$

et on obtient finalement

$$\frac{\partial^2 f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{\partial x_b^j \partial x_c^j} = \frac{-\kappa^2 \gamma^2 y_b(t) y_c(t)}{4\left(\left(\frac{\kappa g^j(t)}{2}\right)^2 + \gamma^2\right)^{\frac{3}{2}}} = y_b(t) y_c(t) \frac{\partial^2 f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{(\partial x^j)^2}. \tag{V.21}$$

Afin de pouvoir calculer les termes du hessien à partir de l'équation (V.21), on réalise une transformation de Fourier discrète pour remplir directement une ligne du hessien du j-ième nœud non linéaire, de sorte que

$$\overline{\overline{\mathbf{H}}}^j_{:,b,c} = \mathcal{F}_1 \frac{\partial^2 f_{\mathrm{nl},j}^{\mathrm{N}}(t)}{\partial x_b^j \partial x_c^j} \quad \forall (b,c) \in [\![1; n_{\mathrm{nl}}(2N_{\mathrm{h}}+1)]\!]^2. \tag{V.22}$$

Finalement, grâce aux équations (V.21) et (V.22) il est possible de construire l'intégralité de l'opérateur hessien par blocs. Ce dernier peut ensuite être directement utilisé dans la matrice jacobienne du problème augmenté définie par l'équation (V.6). On note que le tenseur hessien est symétrique, car $\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}_{a,b,c} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}_{a,c,b}$ grâce aux propriétés de permutation des dérivées partielles, ce qui permet de diviser par deux le temps de calcul du tenseur $\overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}$. Concernant la dérivée par rapport à ω, le terme $\nabla_\omega \mathcal{J}$ s'écrit

$$\nabla_\omega \mathcal{J} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \omega \partial \widetilde{\mathbf{x}}} \tag{V.23}$$

où le calcul du terme associé aux efforts non linéaires dépend de l'expression de ces derniers. Dans le cas de la RL-HBM, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \omega \partial \widetilde{\mathbf{x}}}$ est nul.

1.1.5 Continuation par longueur d'arc selon deux paramètres

La connaissance de l'emplacement d'un point de bifurcation à un état donné d'un système permet de fournir des informations qualitatives sur ce système. Cependant, dans certaines configurations, il est particulièrement intéressant de connaître l'évolution de la position de ce point dans un espace paramétrique faisant intervenir à la fois la pulsation ω et un autre paramètre de contrôle noté η. Le vecteur d'inconnues doit alors être augmenté de la variable η, tel que la nouvelle inconnue soit $\mathbf{z} = \left[\widetilde{\mathbf{x}}^\top, \mathbf{\Phi}^\top, \omega, \eta\right]$. Il devient nécessaire d'augmenter le système d'une équation de fermeture, comme l'équation de la paramétrisation par longueur d'arc $\mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})$. À la k-ième itération du solveur non linéaire pour le i-ième point de la continuation, cette dernière s'écrit sous la forme

$$\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\mathbf{x}}_i^k, \mathbf{\Phi}_i^k, \omega_i^k, \eta_i^k) = \left\|\widetilde{\mathbf{x}}_i^k - \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1}\right\|^2 + \left\|\mathbf{\Phi}_i^k - \mathbf{\Phi}_{i-1}\right\|^2 + (\omega_i^k - \omega_{i-1})^2 + (\eta_i^k - \eta_{i-1})^2 - \Delta s_i^2 = 0. \tag{V.24}$$

Le système augmenté à résoudre pendant la continuation est alors

$$\mathcal{I}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{z}) \\ \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{V.25}$$

La matrice jacobienne du système (V.25), notée $\mathcal{J}_\mathcal{I}(\mathbf{z})$, doit être calculée afin de résoudre le problème (V.25). Cette matrice est bordurée par les termes liés à l'introduction de η et elle s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial \mathcal{I}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \mathcal{J}_\mathcal{I}(\mathbf{z}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{J}(\mathbf{z}) & \mathbf{0} & \nabla_\omega \mathcal{H}(\mathbf{z}) & \nabla_\eta \mathcal{H}(\mathbf{z}) \\ \overline{\overline{\overline{\mathbf{H}}}}(\mathbf{z})\mathbf{\Phi} & \mathcal{J}(\mathbf{z}) & (\nabla_\omega \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi} & (\nabla_\eta \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{\Phi}^\top & \mathbf{0} & \dfrac{\partial(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi} - 1)}{\partial \eta} \\ \hline \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} & \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{\Phi}} & \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \omega} & \dfrac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \eta} \end{array}\right] \tag{V.26}$$

avec $\nabla_\eta \mathcal{J}(\mathbf{z}) = \dfrac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{z})}{\partial \eta}$ et $\nabla_\eta \mathcal{H}(\mathbf{z}) = \dfrac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{z})}{\partial \eta}$. On note que l'ensemble des quantités dépendent désormais de $\mathbf{z}$ car le paramètre η a nécessairement une influence sur le résidu $\mathcal{H}$ et ses dérivées.

Les dérivées de l'équation de fermeture $\mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})$ sont aisément évaluées par les relations

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \widetilde{\mathbf{x}}} = 2(\widetilde{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1})^\top, \frac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{\Phi}} = 2(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_{i-1})^\top, \frac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \omega} = 2(\omega - \omega_{i-1}) \text{ et } \frac{\partial \mathcal{P}_\omega(\mathbf{z})}{\partial \eta} = 2(\eta - \eta_{i-1}). \tag{V.27}$$

En ce qui concerne les trois dernières dérivées par rapport au terme η, on peut tout d'abord noter que $\dfrac{\partial(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi} - 1)}{\partial \eta} = 0$. En revanche, les termes $\nabla_\eta \mathcal{H}(\mathbf{z})$ et $(\nabla_\eta \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi}$ sont non nuls et leur évaluation peut varier drastiquement selon le paramètre η considéré. Ce dernier point est laissé à la discretion de l'utilisateur de la méthode. Dans ce manuscrit, on fournit les expressions de ces termes lors de l'utilisation pratique du suivi de bifurcations. Dans tous les cas, il est possible de les évaluer par différences finies si aucune formule analytique ne peut être utilisée pour calculer ces deux dérivées. Finalement, on exprime la matrice jacobienne du suivi de bifurcations pour la continuation par longueur d'arc sous forme sa simplifiée :

$$\frac{\partial \mathcal{I}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \mathcal{J}_\mathcal{I}(\mathbf{z}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{J}(\mathbf{z}) & \mathbf{0} & \nabla_\omega \mathcal{H}(\mathbf{z}) & \nabla_\eta \mathcal{H}(\mathbf{z}) \\ \overline{\overline{\mathbf{H}}}(\mathbf{z})\mathbf{\Phi} & \mathcal{J}(\mathbf{z}) & (\nabla_\omega \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi} & (\nabla_\eta \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{\Phi}^\top & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 2(\widetilde{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}_{i-1}) & 2(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_{i-1}) & 2(\omega - \omega_{i-1}) & 2(\eta - \eta_{i-1}) \end{array}\right]. \tag{V.28}$$

La seule restriction sur le choix du paramètre η porte sur sa continuité. En effet, la continuation d'un paramètre requiert qu'il puisse prendre des valeurs continues sur une certaine plage. Ainsi, il est même possible de considérer des paramètres intervenant en amont de la construction des matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ tels que le module d'élasticité, ou encore des paramètres géométriques. Bien que ces calculs nécessitent la construction du modèle à chaque itération du solveur non linéaire, ils sont théoriquement faisables. Néanmoins, il est d'usage de réaliser des suivis de bifurcations sur des paramètres plus avals, notamment liés à la modélisation ou au chargement extérieur tels que l'amortissement, les efforts d'excitation ou encore les paramètres associés à la non-linéarité comme le jeu et le coefficient de frottement dans le cas du contact.

1.2 Analyse de Melnikov

Très récemment, Cenedese et Haller [38] ont proposé un critère analytique permettant de prédire l'existence de solutions en réponse forcée en effectuant une analyse énergétique sur les solutions conservatives des modes normaux non linéaires (ou *nonlinear normal modes* (NNM)) d'un système. Ce concept est basé sur l'analyse de la fonction dite de Melnikov [189, 114, 177]. L'étude des zéros de cette fonction permet de statuer sur la persistance des orbites périodiques d'une famille conservative lorsqu'elles sont soumises à une faible perturbation. Cette méthode a été utilisée à la fois pour l'étude de systèmes non linéaires réguliers [167, 168, 176] et non réguliers [95, 152, 153]. Dans tous les cas, ces études ont été menées sur des systèmes de petite taille. Le principe énergétique formellement énoncé par Cenedese et Haller [38] était déjà utilisé sous la forme d'une heuristique dans la littérature [79, 80, 159, 180].

Parmi les travaux les plus récents, l'analyse de la fonction de Melnikov a été appliquée sur un système de faible dimension présentant une non-linéarité polynomiale [38] et sur un impacteur paramétrique soumis à du frottement sec [28]. Dans les deux cas, la méthodologie a permis de localiser des branches de solutions isolées sur des modèles phénoménologiques. L'analyse de Melnikov s'intègre facilement dans la chaîne d'analyse des systèmes non linéaires utilisée dans ce manuscrit car elle repose sur le concept de NNM, particulièrement adapté au

formalisme HBM. De plus, le coût numérique engendré par le calcul du principe énergétique de Melnikov en lui même est quasiment nul.

L'analyse de Melnikov apparaît comme un outil méthodologique prometteur car elle est applicable à tous les types de systèmes et de non-linéarités. Ce type d'analyse fournit également de nouveaux éléments quantitatifs permettant de mettre en évidence certains des mécanismes physiques responsables de l'existence de solutions isolées. Naturellement, comme l'analyse de Melnikov repose sur l'étude de NNM, seules les branches de solutions sous-tendues par un mode non linéaire peuvent être étudiées.

Dans cette section, on présente les éléments mathématiques associés à l'application de la procédure de détection de branches de solutions isolées reposant sur le principe énergétique de Melnikov. Tout d'abord, on détaille dans la section V.1.2.1 la notion de mode complexe non linéaire, utilisée pour calculer les familles de solutions autonomes. On explicite ensuite le principe énergétique de Melnikov dans la section V.1.2.2. Enfin, un récapitulatif des étapes de la stratégie de détection de branches isolées est proposé dans la section V.1.2.3.

1.2.1 Modes complexes non linéaires

Dans un cadre non linéaire, les propriétés modales (fréquences propres et formes modales) d'un système mécanique dépendent du niveau énergétique de la réponse. Pour cette raison, le domaine de validité de l'analyse modale linéaire dans un contexte non linéaire est restreint aux applications faiblement non linéaires. Dans la littérature, plusieurs formalismes mathématiques ont été introduits [90, 101, 145, 154] pour dépasser cette limitation, ce qui a conduit à diverses définitions des modes normaux non linéaires. Une des propriétés intéressantes des modes non linéaires réside dans le fait qu'ils sous-tendent les maxima d'amplitude des courbes de réponse forcée, sous la forme d'une épine dorsale (ou *backbone curve* en anglais). Dans ce manuscrit, on emploie la notion de mode complexe non linéaire [101]. Ce formalisme est bien adapté au formalisme HBM et se base sur la résolution de l'équation du mouvement autonome non conservative, s'écrivant sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}. \tag{V.29}$$

En pratique, on résout le problème normalisé en temps et en espace. Dans cette section, on adopte exceptionnellement les notations utilisées dans la section II.2.1.1 pour distinguer les grandeurs normalisées $\bullet^{\mathrm{n}}$ des grandeurs physiques $\bullet$, notamment pour clarifier la construction de la matrice $\mathbf{Z}$.

Afin de tenir compte de la nature non conservative de l'équation (V.29), la solution normalisée en espace et en temps $\boldsymbol{\chi}(\tau)$ est cherchée sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre N_{h} exponentiellement décroissante en temps normalisé τ. La solution s'écrit alors sous la forme

$$\boldsymbol{\chi}(\tau) \simeq \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{h}}} e^{-k\zeta^{\mathrm{n}}\tau} \left(\mathbf{a}_k \cos(k\omega^{\mathrm{n}}\tau) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega^{\mathrm{n}}\tau)\right) \tag{V.30}$$

où $\zeta^{\mathrm{n}} = \beta\zeta$ est l'amortissement non linéaire normalisé et $\omega^{\mathrm{n}} = \beta\omega$ la pulsation normalisée. La grandeur ζ est le taux d'amortissement physique associé au mode étudié. L'ajout du terme exponentiel complique l'orthogonalisation du résidu par rapport aux fonctions $\tau \mapsto e^{-k\zeta^{\mathrm{n}}\tau}\cos(k\omega^{\mathrm{n}}\tau)$ et $\tau \mapsto e^{-k\zeta^{\mathrm{n}}\tau}\sin(k\omega^{\mathrm{n}}\tau)$. En effet, ces fonctions ne sont pas orthogonales entre elles par le produit scalaire (II.25), utilisé pour la projection de Fourier-Galerkine de l'équation différentielle du mouvement. Ainsi, il n'est pas possible de définir de base associée à ces fonctions. Pour remédier à ce problème, on choisit de faire l'hypothèse que la décroissance

est faible sur une période, revenant à considérer $\zeta^{\mathrm{n}} \ll \omega^{\mathrm{n}}$, ce qui est vérifié sur les applications ciblées. Grâce à cette hypothèse, il est possible de projeter le résidu sur les fonctions $\tau \mapsto \cos(k\omega^{\mathrm{n}}\tau)$ et $\tau \mapsto \sin(k\omega^{\mathrm{n}}\tau)$ en omettant le terme exponentiel. La modification de la forme de la solution se traduit alors sur les blocs de la matrice de rigidité dynamique normalisée $\mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}(\omega^{\mathrm{n}}, \zeta^{\mathrm{n}})\ \forall k \in [\![1; N_{\mathrm{h}}]\!]$, dont l'expression est

$$\mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}(\omega^{\mathrm{n}}, \zeta^{\mathrm{n}}) = \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \dfrac{k\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C} - \dfrac{k^2\left(\omega^{\mathrm{n}}\right)^2 - k^2\left(\zeta^{\mathrm{n}}\right)^2}{\beta^2}\mathbf{M} & -\left(\dfrac{2k^2\omega^{\mathrm{n}}\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} - \dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C}\right) \\ \dfrac{2k^2\omega^{\mathrm{n}}\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} - \dfrac{k\omega^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C} & \mathbf{K} - \dfrac{k\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta}\mathbf{C} - \dfrac{k^2\left(\omega^{\mathrm{n}}\right)^2 - k^2\left(\zeta^{\mathrm{n}}\right)^2}{\beta^2}\mathbf{M} \end{bmatrix}. \tag{V.31}$$

Naturellement, les dérivées de $\mathbf{Z}^{\mathrm{n}}$ sont également modifiées. Les dérivées des blocs de $\mathbf{Z}$ par rapport à ω et ζ s'écrivent

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_0^{\mathrm{n}}}{\partial \omega^{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}}{\partial \omega^{\mathrm{n}}} = \alpha \begin{bmatrix} -2k^2\dfrac{\omega^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} & -(2k^2\dfrac{\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} - \dfrac{k}{\beta}\mathbf{C}) \\ (2k^2\dfrac{\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} - \dfrac{k}{\beta}\mathbf{C}) & -2k^2\dfrac{\omega^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [\![1; N_{\mathrm{h}}]\!] \tag{V.32}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_0^{\mathrm{n}}}{\partial \zeta^{\mathrm{n}}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_k^{\mathrm{n}}}{\partial \zeta^{\mathrm{n}}} = \alpha \begin{bmatrix} -\dfrac{k}{\beta}\mathbf{C} + 2k^2\dfrac{\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} & -2k^2\dfrac{\omega^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} \\ 2k^2\dfrac{\omega^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} & -\dfrac{k}{\beta}\mathbf{C} + 2k^2\dfrac{\zeta^{\mathrm{n}}}{\beta^2}\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [\![1; N_{\mathrm{h}}]\!]. \tag{V.33}$$

Dans cette formulation, une nouvelle inconnue ζ^{n} est introduite. Il est donc nécessaire d'augmenter le système d'une équation supplémentaire pour que le système soit correctement défini pour sa résolution par une méthode itérative. Dans le cadre du calcul d'un mode non linéaire non conservatif, l'équation supplémentaire concerne généralement la phase de la solution, qui peut être quelconque en l'absence d'excitation extérieure. Par conséquent, on doit choisir un degré de liberté de contrôle χ_{ctl} et lui imposer une certaine phase. Parmi les conditions usuellement utilisées, on retrouve surtout trois conditions différentes où chacune est associée à une expression de l'équation de fermeture $\mathcal{P}_\zeta(\widetilde{\boldsymbol{\chi}})$:

— vitesse du degré de liberté de contrôle imposée à zéro au début de la période avec

$$\mathcal{P}_\zeta(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}) = \langle \mathbf{b}_{\mathrm{ctl}}, \left(\mathbf{B}_{N_{\mathrm{h}}}(t_1)\right)^\top \boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{\chi}} \rangle = \dot{\chi}_{\mathrm{ctl}}(t_1) = 0; \tag{V.34}$$

— déplacement du degré de liberté de contrôle imposé à zéro au début de la période avec

$$\mathcal{P}_\zeta(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}) = \langle \mathbf{b}_{\mathrm{ctl}}, \left(\mathbf{B}_{N_{\mathrm{h}}}(t_1)\right)^\top \widetilde{\boldsymbol{\chi}} \rangle = \chi_{\mathrm{ctl}}(t_1) = 0; \tag{V.35}$$

— un coefficient a_k^{ctl} ou b_k^{ctl} du k-ième harmonique du degré de liberté de contrôle est imposé à zéro avec

$$\mathcal{P}_\zeta(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}) = \langle \widetilde{\mathbf{b}}_{\mathrm{ctl}}, \widetilde{\boldsymbol{\chi}} \rangle = 0. \tag{V.36}$$

Le vecteur $\mathbf{b}_{\mathrm{ctl}} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur booléen composé de zéros sauf sur le degré de liberté de contrôle où il contient une composante unitaire, ce qui restreint la contrainte de phase sur ce degré de liberté. $\widetilde{\mathbf{b}}_{\mathrm{ctl}} \in \mathbb{R}^{n(2N_{\mathrm{h}}+1)}$ est également rempli de zéros sauf pour le coefficient qu'on souhaite annuler. Les deux premières conditions énoncées ci-dessus sont cependant sujettes à des instabilités numériques en présence d'effet de Gibbs. En effet, lorsque le degré de liberté de contrôle présente de fortes oscillations en vitesses ou en déplacements autour de zéro, plusieurs

phases proches sont admissibles pour la vérification des conditions (V.34) et (V.35) ce qui perturbe le suivi du mode non linéaire. Une condition portant sur l'ensemble du vecteur de déplacements existe également dans la littérature [193] afin de s'affranchir des problèmes liés à la localité de la condition de phase. Cette dernière n'a cependant pas été explorée dans ce travail.

L'équation de fermeture de la continuation par longueur d'arc $\mathcal{P}_\omega$ doit également être modifiée pour prendre en compte le nouveau paramètre de contrôle ζ^{n} et on utilise l'expression

$$\mathcal{P}_\omega(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^k, \omega_i^{\mathrm{n},k}, \zeta_i^{\mathrm{n},k}, \Delta s_i) = \left\| \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^k - \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_{i-1} \right\|^2 + (\omega_i^{\mathrm{n},k} - \omega_{i-1}^{\mathrm{n}})^2 + (\zeta_i^{\mathrm{n},k} - \zeta_{i-1}^{\mathrm{n}})^2 - \Delta s_i^2 = 0. \quad \text{(V.37)}$$

Pour initialiser la continuation d'un NNM, on utilise une propriété qui relie le mode non linéaire au mode linéaire aux faibles amplitudes vibratoires. En effet, le mode non linéaire est tangent au mode linéaire associé lorsque la non-linéarité est faiblement activée. Ainsi, on peut initialiser les deux premiers points du mode non linéaire tel que :

$$\boldsymbol{\chi}_0(\tau) = \alpha\epsilon_0\Phi_1\cos(\omega_0^{\mathrm{n}}\tau), \qquad \boldsymbol{\chi}_1(\tau) = \alpha\epsilon_1\Phi_1\cos(\omega_1^{\mathrm{n}}\tau), \quad \text{(V.38)}$$

$$\omega_0^{\mathrm{n}} = \omega_1^{\mathrm{n}} = \beta\omega_{\Phi_1}\sqrt{1-\xi_{\Phi_1}^2} \quad \text{et} \quad \zeta_0^{\mathrm{n}} = \zeta_1^{\mathrm{n}} = \beta\xi_{\Phi_1}\omega_{\Phi_1}. \quad \text{(V.39)}$$

Les scalaires $\epsilon_0 < \epsilon_1$ sont des valeurs faibles permettant de garantir une réponse linéaire de la structure (dans le cas d'un contact avec un jeu initial $g_0(t)$ constant). Φ_1 est la forme modale du mode linéaire dont on calcule le NNM, ω_{Φ_1} la fréquence propre physique associée au mode Φ_1 et ξ_{Φ_1} le taux d'amortissement modal linéaire.

Dans le cas conservatif, *i.e.* lorsque la non-linéarité ne dissipe pas d'énergie et que $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, il est possible d'imposer $\zeta^{\mathrm{n}} = 0$ et de s'affranchir de l'équation de phase $\mathcal{P}_\zeta = 0$ car le système à résoudre a une inconnue de moins. Le problème est alors soluble en augmentant seulement le système de l'équation de continuation $\mathcal{P}_\omega$. La phase n'est donc plus fixée mais ceci ne pose pas de problème lorsqu'on utilise une procédure de continuation par longueur d'arc.

À ce stade, comme toutes les grandeurs faisant intervenir la normalisation sont définies, on repasse dans la convention de notations simplifiée adoptée à la fin de la section II.2.1.1. C'est-à-dire que ω devient la pulsation normalisée, ζ le taux d'amortissement normalisé et $\mathbf{x}(t)$ le champ de déplacements normalisé.

1.2.2 Principe énergétique de Melnikov

Dans cette section, on explicite d'abord la stratégie de détection de branches de solutions isolées basée sur le principe énergétique de Melnikov proposée par Cenedese et Haller [38]. Par la suite, on présente l'enrichissement de la stratégie initiale réalisée dans ces travaux pour permettre la détection des branches isolées sur une plus grande variété de systèmes mécaniques, notamment des configurations non linéaires industrielles.

L'analyse des solutions autonomes conservatives par le principe énergétique de Melnikov s'est récemment avérée efficace pour prédire l'existence de branches de solutions isolées sur des systèmes mécaniques non linéaires. À partir de la connaissance d'une famille de solutions autonomes conservatives, le principe énergétique de Melnikov permet d'affirmer si ces solutions persistent lorsqu'on ajoute une perturbation non conservative $\mathcal{Q}$ à l'équation conservative du mouvement — *i.e.* en présence d'une non-linéarité conservative et avec $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ — de la forme

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \tau) = A\mathbf{f}_{\mathrm{ex}}\cos(\omega\tau) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \omega) \quad \text{(V.40)}$$

où $\mathbf{f}_{\mathrm{ex}}$ est une forme d'excitation de norme unitaire et A une amplitude sans dimension. Le principe énergétique de Melnikov repose sur l'analyse du travail estimé de la perturbation $\mathcal{Q}$

sur une orbite conservative $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t)$ appartenant à un NNM. Afin d'obtenir les expressions utiles à la prédiction de l'existence de solutions en regime forcé, on examine le bilan énergétique d'une solution T-périodique quelconque $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(t)$. Comme $\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(t)$ est périodique, le bilan énergétique de la solution est équilibré sur une période. Puisque cette propriété est intrinsèquement vérifiée pour la partie conservative de l'équation du mouvement, il suffit de vérifier que le travail $\mathcal{W}$ de la perturbation non conservative $\mathcal{Q}$ est nul sur une période de sorte que

$$\mathcal{W} = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{p}}(\tau), \mathcal{Q}(\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(\tau), \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{p}}(\tau), \tau)\rangle \mathrm{d}\tau = 0. \tag{V.41}$$

On peut montrer que si $\mathcal{Q}$ est une petite perturbation par rapport à la partie conservative de l'équation du mouvement, alors le terme du premier ordre du développement limité de l'équation (V.41) centré autour de la partie conservative de la solution $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t)$ est la fonction de Melnikov $\mathcal{M}(t)$ s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{M}(t) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}(t+\tau), \mathcal{Q}(\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t+\tau), \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}(t+\tau), t+\tau)\rangle \mathrm{d}\tau. \tag{V.42}$$

L'équation (V.42) correspond au travail de la perturbation $\mathcal{Q}$ sur une période de la solution conservative $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}$. Pour simplifier l'expression de la fonction de Melnikov (V.42), on substitue l'expression de la perturbation $\mathcal{Q}$ (V.40) et il vient

$$\mathcal{M}^{1:1}(t) = w^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}, t) - \mathcal{R}_{\mathrm{ln}}(\mathbf{C}) - \mathcal{R}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}) \tag{V.43}$$

avec

$$\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}(\mathbf{C}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}(t+\tau), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}(t+\tau)\rangle \mathrm{d}\tau, \tag{V.44}$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}(t+\tau), \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(t+\tau)\rangle \mathrm{d}\tau \tag{V.45}$$

et

$$w^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}, t) = W^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}) \cos(\omega t - \alpha_{1,\mathrm{ex}}) \tag{V.46}$$

où $W^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}) = A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_1^{\mathrm{c}}, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_1^{\mathrm{c}}, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}\rangle^2}$ et $\alpha_{1,\mathrm{ex}} = \arctan\left(\dfrac{\langle \mathbf{a}_1^{\mathrm{c}}, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}\rangle}{\langle \mathbf{b}_1^{\mathrm{c}}, \mathbf{f}_{\mathrm{ex}}\rangle}\right)$. Les coefficients $\mathbf{a}_1^{\mathrm{c}}$ et $\mathbf{b}_1^{\mathrm{c}}$ sont les coefficients de Fourier associés au premier harmonique de la solution du NNM $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t)$ qui est analysée. L'exposant $\bullet^{1:1}$ fait référence au fait que les solutions conservatives sont de même périodicité que l'excitation au sein de la perturbation. Ceci est le cas général d'utilisation dans ce manuscrit. On traite néanmoins des cas où la périodicité diffère dans certains exemples mais les grandeurs liées au principe énergétique y sont alors rappelées.

Enfin, le principe énergétique de Melnikov stipule que, pour une solution donnée $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t)$, si l'amplitude du travail fourni par les forces d'excitation $W^{1:1}$ est plus grande que la dissipation des effets non conservatifs linéaires $\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}$ et non linéaires $\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}$, alors la solution $\mathbf{x}_{\mathrm{c}}(t)$ engendre deux solutions périodiques dans le système perturbé. Trois cas de figure sont identifiés :

— $\left|W^{1:1}\right| > |\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}| + |\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}|$, deux solutions périodiques persistent ;
— $\left|W^{1:1}\right| = |\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}| + |\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}|$, une seule solution périodique persiste ;
— $\left|W^{1:1}\right| < |\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}| + |\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}|$, aucune solution périodique ne persiste.

Par conséquent, l'analyse du signe de la fonction $\overline{\mathcal{M}}^{1:1} = \left|W^{1:1}\right| - |\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}| - |\mathcal{R}_{\mathrm{nl}}|$ est suffisante pour affirmer l'existence de solutions périodiques au voisinage de solutions autonomes conservatives. Les familles de solutions autonomes conservatives utilisées dans ces travaux sont les NNM

conservatifs : ils remplissent l'ensemble des hypothèses nécessaires à la mise en œuvre de la stratégie.

Enrichissement de la stratégie initiale

Dans ce travail, on propose une extension de la méthodologie mise au point par Cenedese et Haller [38]. On distingue notamment deux contributions majeures :

Modes complexes non linéaires (non conservatifs) Le cadre d'étude est étendu à l'analyse de solutions autonomes non conservatives, *i.e.* appartenant à des modes complexes non linéaires, pour estimer la fonction de Melnikov. Pour les modèles industriels, les effets de l'amortissement structurel ne peuvent pas être négligés dans le calcul des NNM et il est nécessaire d'utiliser des NNM non conservatifs. L'hypothèse de lente décroissance exponentielle faite pour le calcul des modes complexes non linéaires ($\zeta \ll \omega$) réduit néanmoins l'influence de ce choix sur la précision de la méthode. En effet, la dissipation associée au taux d'amortissement non linéaire ζ est faible sur une période. Ainsi, les solutions appartenant à ces modes sont tout de même quasi-conservatives.

Détection systématique d'isolats dans une configuration de contact aube/carter L'analyse de Melnikov n'a été appliquée qu'à des configurations avec peu de degrés de liberté à ce jour. Le présent manuscrit fournit une preuve applicabilité de la méthodologie à des systèmes hautement non linéaires de taille industrielle dans la section V.3. Par ces travaux, le cadre d'application de la procédure de recherche d'isolats par le principe énergétique de Melnikov est ainsi étendu à une plus grande variété de systèmes mécaniques non linéaires.

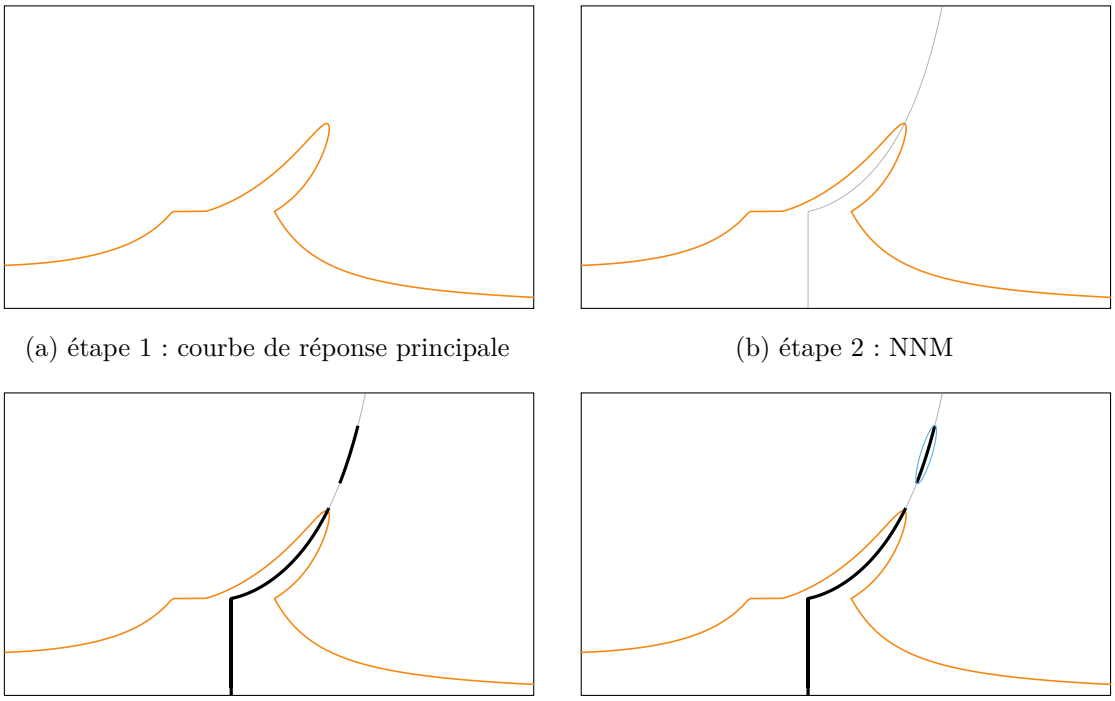
Par ailleurs, on note que le formalisme de mode complexe non linéaire ainsi que le principe énergétique de Melnikov sont directement implémentés dans le code de calcul DLFT-HBM issu de ces travaux de thèse. Ainsi, on réalise les analyses non linéaires dites classiques, *i.e.* sans recherche d'isolats, ainsi que les recherches de solutions isolées à l'aide d'un outil numérique unique dédié aux interactions aube/carter.

1.2.3 Procédure de détection de branches de solutions isolées

Pour permettre la détection systématique des branches de solutions isolées en réponse forcée grâce au principe énergétique de Melnikov, on propose une procédure spécifique résultant des travaux menés dans cette thèse. Elle se caractérise par l'utilisation successive de plusieurs blocs méthodologiques présentés tout au long de ce manuscrit. Cette stratégie s'articule en quatre étapes majeures, schématisées sur la figure V.1 et énumérées ci-dessous :

1. calcul d'une courbe de réponse en fréquence non linéaire dans une configuration de réponse forcée par le biais d'une continuation, voir la figure V.1a ;
2. mise en œuvre d'une analyse modale non linéaire, révélant les différents NNM impliqués dans la réponse du système, voir la figure V.1b ;
3. les NNM mis en évidence sont analysés dans le cadre d'une analyse de Melnikov, permettant de statuer si les solutions autonomes persistent ou non dans la configuration perturbée de l'étape 1, voir la figure V.1c ;
4. de nouvelles continuations sont initiées sur les portions où le principe énergétique de Melnikov a prédit l'existence de branches isolées. Les continuations sont initialisées avec les solutions autonomes appartenant au NNM dans ces portions comme conditions initiales du solveur itératif, voir la figure V.1d.

Il convient de noter que l'analyse de Melnikov prédit la persistence des solutions autonomes, quelle que soit la connectivité des différentes branches entre elles. Par conséquent, la position de la résonance non linéaire de la courbe de réponse principale est également prédite avec précision. Cette propriété permet techniquement d'ignorer la première étape — consistant à calculer la courbe de réponse principale — si le seul but de l'étude est de détecter les branches de solutions isolées. Cependant, cette étape est conservée dans ces travaux à des fins de vérifications des résultats.



(a) étape 1 : courbe de réponse principale

(b) étape 2 : NNM

(c) étape 3 : analyse de Melnikov

(d) étape 4 : continuation de l'isolat

FIGURE V.1 – Stratégie de détection de branches de solutions isolées, courbe de réponse principale (—), NNM (—), solutions autonome où le principe énergétique de Melnikov prédit la persistance (—), branche de solutions isolées (—).

2 Modèles académiques

Dans la section V.2.1, on met en œuvre la stratégie de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov sur un impacteur à deux degrés de liberté. Une application de la stratégie de suivi de bifurcations est ensuite proposée dans la section V.2.2.

2.1 Impacteur à deux degrés de liberté

Afin de mettre clairement en évidence les mécanismes physiques responsables de l'apparition de branches de solutions isolées grâce à la procédure de détection d'isolats proposée, on étudie dans un premier temps un modèle phénoménologique d'impacteur à deux degrés de liberté. Ses matrices constitutives sont construites de manière à ce qu'il existe une relation de quasi-commensurabilité entre sa première pulsation propre ω_1 et une fraction entière de sa seconde pulsation propre $\frac{\omega_2}{4}$. Ce choix est fait en accord avec les observations de la littérature [56, 110] qui identifient les interactions modales non linéaires comme une des causes de la séparation de branches de solutions de la courbe de réponse principale. Dans cette section, on cherche à valider ces constatations et à fournir de nouveaux éléments quantitatifs expliquant ce phénomène à travers le prisme du principe énergétique de Melnikov. Le système choisi étant de taille réduite, on identifie plus aisément les causes d'apparition des comportements complexes à l'étude.

2.1.1 Présentation du modèle et de la configuration de contact

Le système utilisé dans cette étude est une chaîne de deux masses soumises à une contrainte de contact. Ce système est représenté sur la figure V.2 et ses matrices constitutives s'écrivent

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}. \tag{V.47}$$

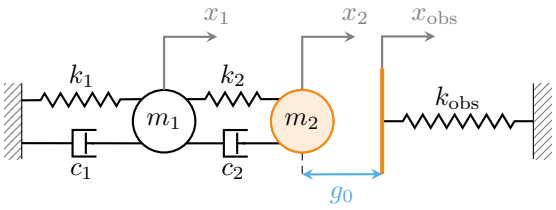


FIGURE V.2 – Modèle d'impacteur à deux degrés de liberté.

Un amortissement modal est appliqué pour calculer la matrice d'amortissement $\mathbf{C}$. Cette dernière est calculée grâce aux matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ et aux taux d'amortissement modaux ξ_i avec $i \in \{1; 2\}$. Les paramètres numériques du modèle sont fournis dans le tableau V.1. La structure

i	m_i	ξ_i	k_i
1	0,5 kg	0,01	$100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
2	1 kg	0,01	$300\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

TABLEAU V.1 – Paramètres de l'impacteur à deux degrés de liberté.

subit un forçage sur sa première forme modale Φ_1 sur le premier harmonique tel que

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_1 \cos(\omega t). \tag{V.48}$$

Les deux modes de la structure $\boldsymbol{\Phi}_1$ et $\boldsymbol{\Phi}_2$ sont $\mathbf{M}$-orthonormalisés et leurs valeurs numériques sont

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}702 \\ -0{,}868 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -1{,}228 \\ 0{,}496 \end{bmatrix}. \tag{V.49}$$

Les fréquences propres associées sont respectivement $\omega_1 = 7{,}58\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_2 = 32{,}28\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour toute l'étude, l'obstacle est considéré comme une raideur dont la valeur est $k_{\text{obs}} = 1{\cdot}10^4\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Le jeu initial entre la masse m_2 et l'obstacle est constant et sa valeur est $g_0 = 0{,}4\,\text{m}$.

Tout au long de l'étude, les calculs sont réalisés par la DLFT-HBM avec $N_{\text{h}} = 40$ harmoniques, $N_{\text{t}} = 4000$ instants et $\varepsilon = 1{\cdot}10^2\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Lorsque des simulations par IT sont réalisées, on utilise une gestion du contact par pénalité avec k_{obs} comme raideur de contact. Le pas de temps de résolution est $h = 1{\cdot}10^{-4}\,\text{s}$.

2.1.2 Etude paramétrique par rapport à l'amplitude d'excitation

Dans cette section, on analyse l'impact du paramètre A (correspondant à l'amplitude du forçage) sur les courbes de réponse en fréquence à travers une étude d'influence. Ceci mène à la découverte de discontinuités du point de résonance non linéaire par rapport à A sur trois plages de valeurs. Ces discontinuités sont représentées sur les figures V.3, V.4 et V.5. Pour chaque figure, les niveaux de forçage sont inscrits à la résonance non linéaire de chacune des courbes. Sur les figures V.4 et V.5, les réponses associées aux discontinuités précédentes sont affichées (—) à des fins de comparaison.

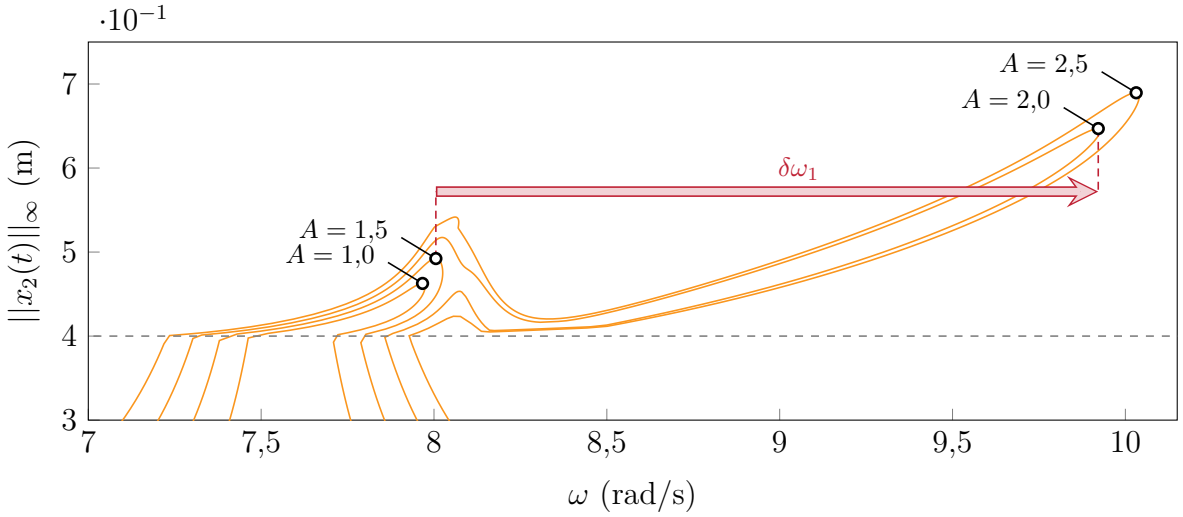


FIGURE V.3 – Première discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A, courbe de réponse avec $A \in \{1{,}0; 1{,}5; 2{,}0; 2{,}5\}$ (—), g_0 (- -), résonances non linéaires (o) (o).

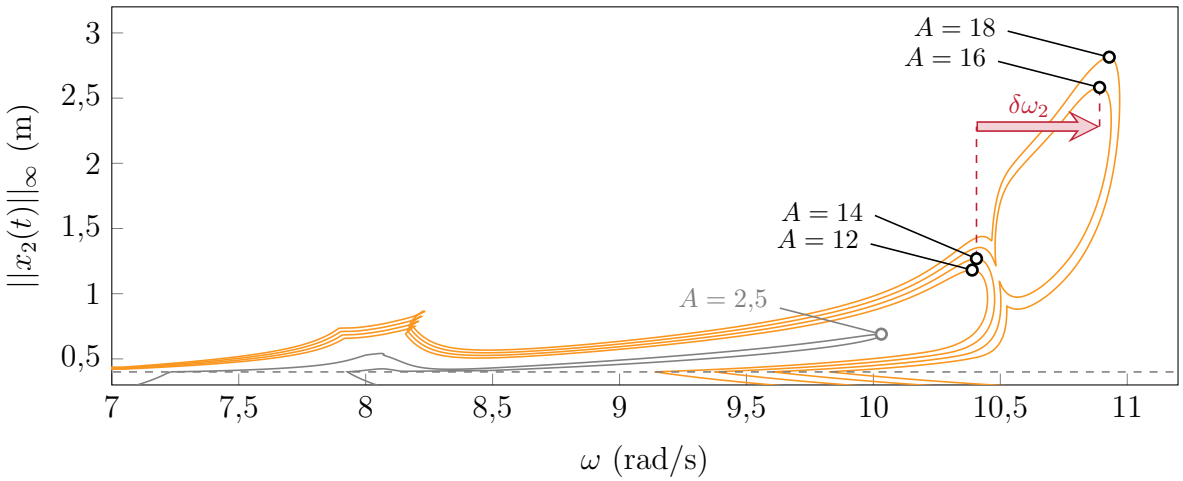


FIGURE V.4 – Deuxième discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A, courbe de réponse avec $A \in \{12; 14; 16; 18\}$ (—), courbe de réponse avec $A \in \{2{,}5\}$ (—), g_0 (- -), résonances non linéaires (o) (o).

La discontinuité de résonance non linéaire représentée sur la figure V.3 se produit entre $A = 1{,}8$ et $A = 2$, la deuxième, sur la figure V.4, entre $A = 14$ et $A = 16$ et la troisième, sur la figure V.5, entre $A = 26$ et $A = 28$. Ce comportement semble être analogue dans les trois cas : une branche de solutions apparaît soudainement au-delà d'une valeur seuil de A. Ce phénomène avait déjà été observé par Detroux *et al.* [56] et Mangussi *et al.* [110] pour des non-linéarités régulières. Les auteurs ont montré que des branches de solutions isolées étaient responsables de ces discontinuités. En effet, les valeurs seuils de A sont des valeurs pour lesquelles les branches de solutions isolées se connectent à la courbe de réponse principale. Pour vérifier cette hypothèse, on met en œuvre la procédure de détection d'isolats explicitée dans la section V.1.2.

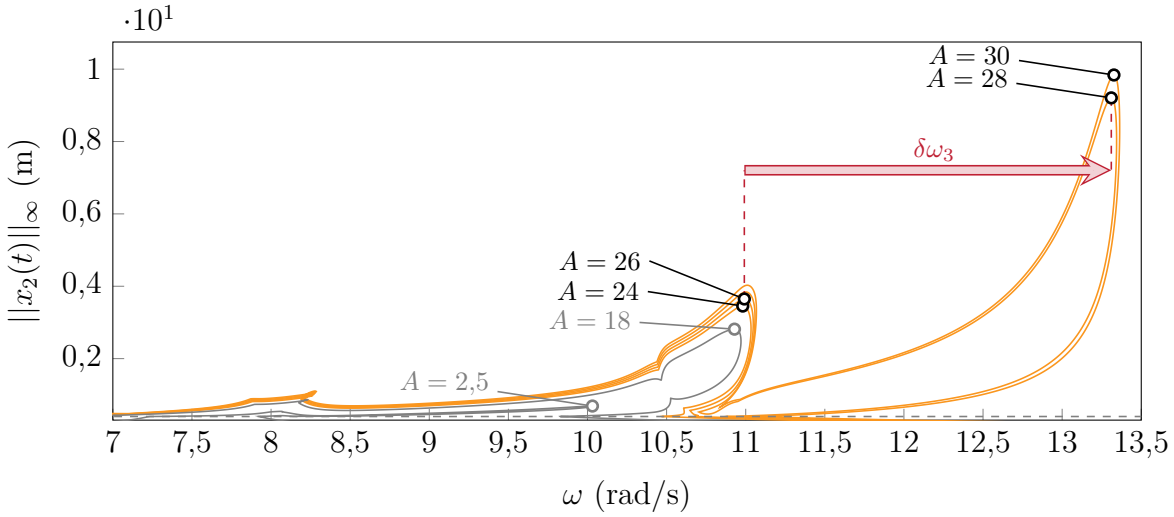


FIGURE V.5 – Troisième discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A, courbe de réponse avec $A \in \{24; 26; 28; 30\}$ (—), courbe de réponse avec $A \in \{2{,}5; 18\}$ (—), g_0 (- -), résonances non linéaires (o) (o).

2.1.3 Analyse modale non linéaire

Avant la mise en œuvre de l'analyse de Melnikov, on réalise une analyse modale non linéaire du système grâce à la notion de mode complexe non linéaire. On se place ici dans un cadre purement conservatif car la non-linéarité de contact ne dissipe pas d'énergie. On impose donc que la matrice d'amortissement soit nulle dans le calcul des modes non linéaires, *i.e.* $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Dans ce cadre, l'ensemble des conditions pour l'application de l'analyse de Melnikov sont réunies.

Calcul des modes normaux non linéaires Les modes normaux non linéaires permettent de prédire la dépendance en fréquence des résonances non linéaires. Dans le cas considéré, les NNM fournissent également des informations capitales dans les zones proches des discontinuités des résonances non linéaires. L'analyse modale non linéaire du système est représentée sur la figure V.6 pour un total de sept NNM distincts obtenus par des initialisations différentes. Le NNM 1 (—) est calculé en initialisant la continuation sur la première forme modale et sur le premier harmonique, correspondant à l'excitation utilisée pour l'obtention des résultats présentés dans la section V.2.1.2. Des problèmes numériques surviennent lorsque la continuation atteint le premier point dit singulier (◘), provoquant l'arrêt du calcul. Ce point est à l'intersection du jeu initial g_0 (- -) et de la fréquence caractéristique $\omega = \frac{\omega_2}{4}$ (- -). Afin d'aller au-delà de ce point, on mène plusieurs calculs avec différents paramètres de contrôle du pas dans la procédure de continuation. Ceci conduit à la découverte des NNM 2 (—), 3 (—) et 4 (—), émergeant tous du premier point singulier (◘). Cependant, les NNM 2, 3 et 4 ne semblent pas servir d'épine dorsale aux résultats obtenus en réponse forcée.

Afin d'étudier si il existe un autre mode qui définit l'épine dorsale des courbes de réponse forcée, un NNM est calculé en initialisant la continuation à partir du point de résonance non linéaire d'une courbe de réponse qui a déjà subi la première discontinuité, *i.e.* $A > 2$. Le NNM 5 (—) est alors découvert par cette procédure et il décrit précisément l'épine dorsale des réponses forcées entre le premier point singulier (◘) et le second point singulier (△). Le deuxième point singulier (△) coïncide avec une autre fréquence particulière du système : $\omega = \frac{\omega_2}{3}$. De façon analogue au premier point singulier, des problèmes de continuation apparaissent à ce point,

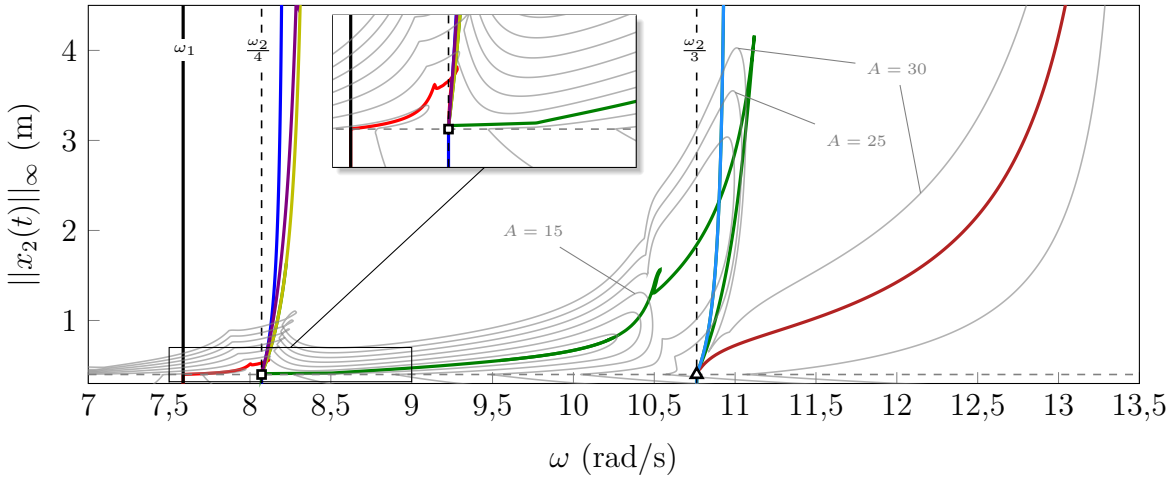


FIGURE V.6 – Analyse modale non linéaire de l'impacteur à deux degrés de liberté, courbes de réponse en fréquence A (—), NNM 1 (—), NNM 2 (—), NNM 3 (—), NNM 4 (—), NNM 5 (—), NNM 6 (—), NNM 7 (—), ω_1 (—), fractions de ω_2 (- -), g_0 (- -), premier point singulier (◘), second point singulier (△).

empêchant de suivre le NNM au-delà de ce point. Afin de contourner cette difficulté, comme pour le NNM 5 (—), une initialisation sur la résonance non linéaire au-delà de la troisième discontinuité, *i.e.* $A > 28$, est utilisée pour le calcul du NNM 6 (—). Ce dernier correspond bien à l'épine dorsale du système au-delà du second point singulier (△).

Enfin, le NNM 7 (—) est détecté en initialisant la continuation sur le troisième harmonique avec une forme modale $\mathbf{\Phi}_2$. Il s'agit du mode non linéaire associé à (ω_2, $\mathbf{\Phi}_2$) mais translaté à la pulsation $\omega = \frac{\omega_2}{3}$. En effectuant des recherches plus poussées, il s'avère que le NNM 2 (—) est lui aussi composé d'une réponse dominée par la seconde forme modale $\mathbf{\Phi}_2$ avec le quatrième harmonique comme pulsation fondamentale, de sorte que $4\omega \simeq \omega_2$. On conclut donc que ce mode correspond au second mode (ω_2, $\mathbf{\Phi}_2$) mais translaté autour de la pulsation $\omega = \frac{\omega_2}{4}$.

Étude des points singuliers L'analyse modale non linéaire présentée ci-dessus souligne la dynamique très complexe et hautement non linéaire induite par la contrainte de contact. Elle a permis de mettre en lumière deux points dits singuliers (◘) (△) pour les NNM. En effet, tous les NNM représentés sur la figure V.6 passent par au moins un de ces deux points. Le NNM 5 est même relié aux deux points à chacune de ses extrémités. L'intersection de tous les modes à ces points suggère que les différents NNM émergent des points singuliers. Puisque ces points sont situés sur la frontière entre les domaines linéaire et non linéaire — délimitée par la droite $\|x_2(t)\|_\infty = g_0$ — il est impossible d'effectuer une analyse de bifurcation telle que le *branch switching* [191]. En raison du caractère non régulier de cette frontière, certaines dérivées nécessaires à la mise en œuvre de ces stratégies ne sont pas définies.

Afin de vérifier l'hypothèse selon laquelle tous les modes se croisent en ces points dans l'espace de résolution, les solutions de chacune des branches sont étudiées au voisinage du premier point singulier. Afin d'examiner les réponses dans leur globalité et pas seulement l'amplitude du degré de liberté x_2 comme sur la figure V.6, les solutions sont décomposées en termes de contributions modales sur chaque harmonique. Pour une solution, les déplacements sont projetés sur les formes modales linéaires à chaque instant, de sorte que

$$\gamma_j(t_i) = \mathbf{\Phi}_j^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t_i) \qquad \forall (i,j) \in [\![1; N_\mathrm{t}]\!] \times [\![1; n]\!]. \tag{V.50}$$

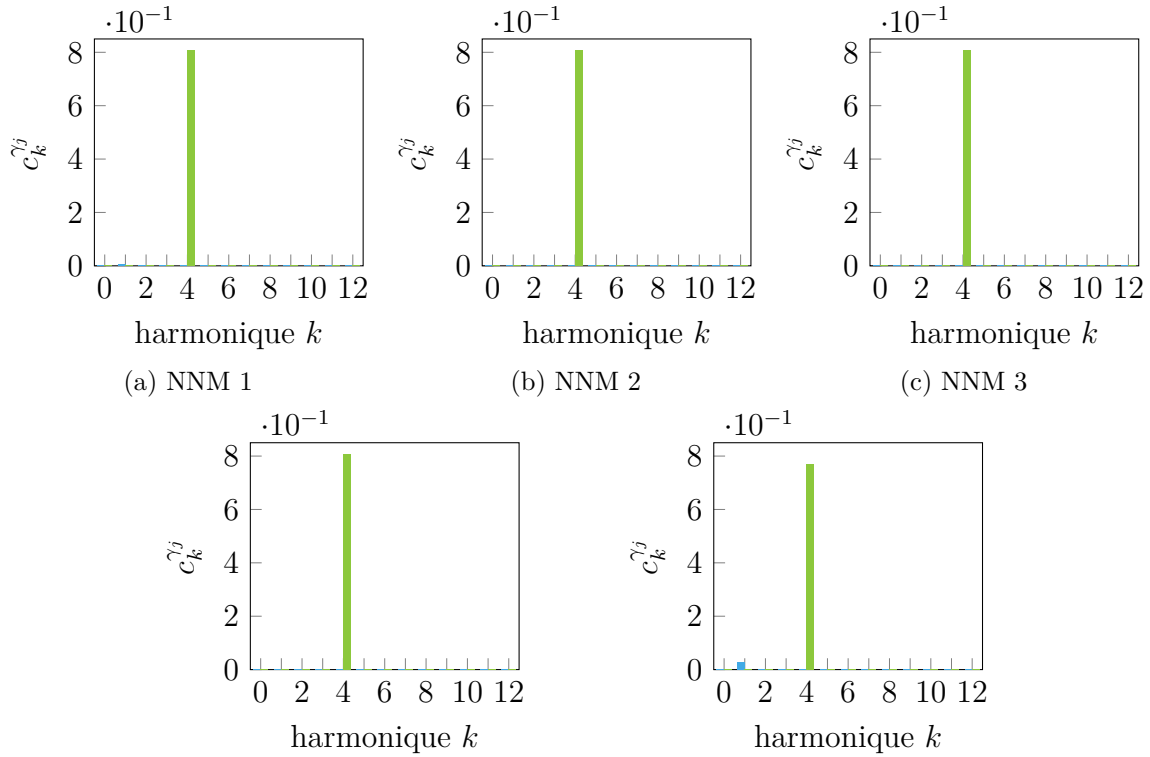
Les contributions modales périodiques $\gamma_j(t)$ sont ensuite mises sous la forme de séries de Fourier tronquées telles que

$$\gamma_j(t) = \frac{a_0^{\gamma_j}}{2} + \sum_{k=1}^{N_\mathrm{h}} a_k^{\gamma_j} \cos(k\omega t) + b_k^{\gamma_j} \sin(k\omega t) \qquad \forall j \in [\![1; n]\!]. \tag{V.51}$$

Finalement, les coefficients de Fourier $a_k^{\gamma_j}$ et $b_k^{\gamma_j}$ sont utilisés pour isoler les différentes contributions harmoniques

$$c_0^{\gamma_j} = a_k^{\gamma_j} \quad \text{et} \quad c_k^{\gamma_j} = \sqrt{\left(a_k^{\gamma_j}\right)^2 + \left(b_k^{\gamma_j}\right)^2} \qquad \forall (j,k) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; N_\mathrm{h}]\!]. \tag{V.52}$$

Une fois l'ensemble des quantités $c_k^{\gamma_j}$ calculées, on les représente sur la figure V.7 pour chaque NNM à proximité du premier point singulier (◘).



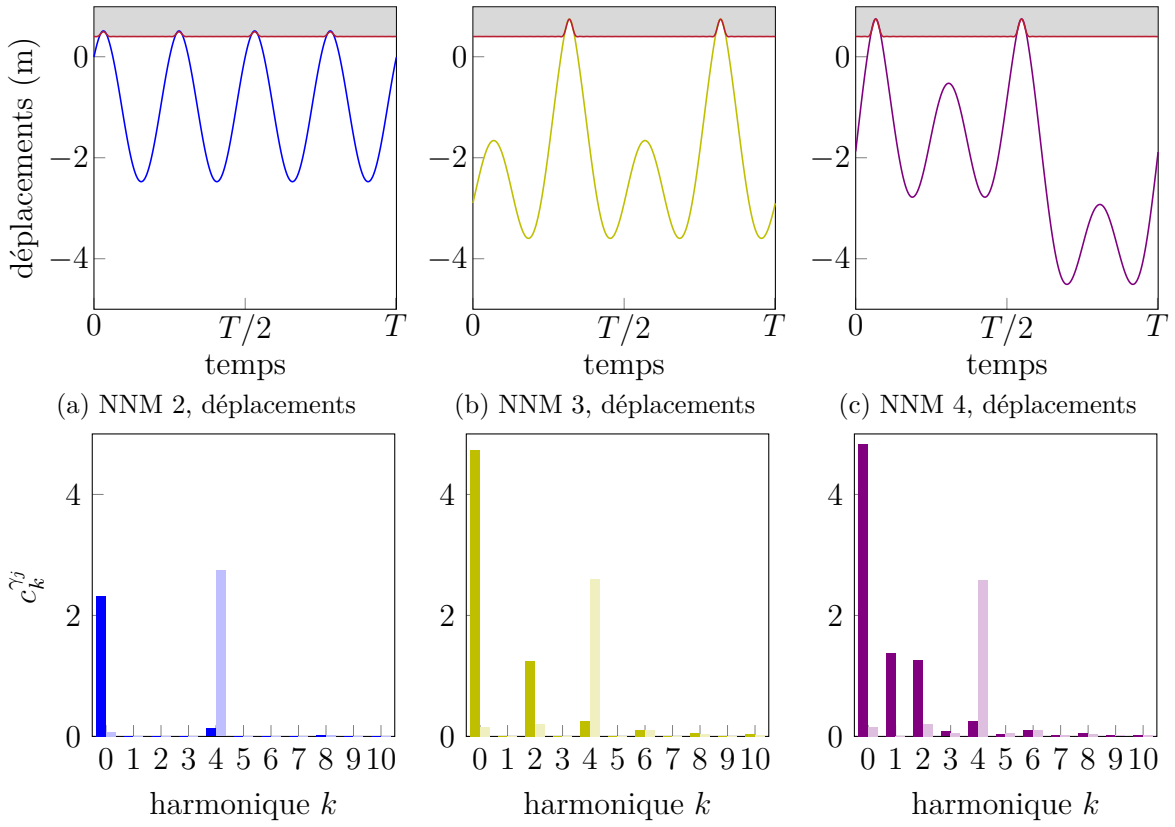
(a) NNM 1 (b) NNM 2 (c) NNM 3

(d) NNM 4 (e) NNM 5

FIGURE V.7 – Contributions modales multiharmoniques à proximité du premier point singulier (◘) pour chaque NNM, première forme modale ($j = 1$) (▬), seconde forme modale ($j = 2$) (▬).

La figure V.7 montre que les cinq NNM qui passent par le premier point singulier (◘) en termes d'amplitude sur la figure V.6 ont exactement la même réponse dynamique. Il s'agit d'une forme modale $\mathbf{\Phi}_2$ pure centrée sur le quatrième harmonique. Une légère modulation de la réponse par le premier harmonique sur le NNM 5 est détectée, mais elle est faible par rapport à la contribution du quatrième harmonique. Cette observation confirme que tous les NNM coïncident dans l'espace de résolution. Par ailleurs, cette conclusion soutient fortement l'hypothèse selon laquelle tous les NNM émergent du point singulier, ce qui rend difficile le suivi d'une branche en particulier sans développements spécifiques.

Modes normaux non linéaires surharmoniques Les NNM 2 (—), 3 (—) et 4 (—) ne semblent sous-tendre aucune courbe de réponse du système pour le forçage harmonique donné. Comme dernière étape d'analyse autour de ces NNM, ils sont comparés en termes de dynamique en utilisant les mêmes indicateurs que dans le paragraphe précédent. Pour effectuer cette comparaison, une solution de chaque NNM est extraite à une énergie totale $E_{\text{tot}} = 1\,\text{J}$. Les signaux temporels et les contributions modales multiharmoniques sont représentées sur la figure V.8.



(a) NNM 2, déplacements (b) NNM 3, déplacements (c) NNM 4, déplacements

(d) NNM 2, contributions modales multiharmoniques (e) NNM 3, contributions modales multiharmoniques (f) NNM 4, contributions modales multiharmoniques

FIGURE V.8 – Comparaison des solutions à une énergie totale $E_{\text{tot}} = 1\,\text{J}$ pour les NNM 2, 3 et 4, $x_2(t)$ (—) (—) (—), obstacle (▭), première forme modale ($j = 1$) (■) (■) (■), seconde forme modale ($j = 2$) (■) (■) (■).

La dynamique mise en évidence sur la figure V.8 montre que les trois NNM ont des périodicités différentes. En effet, la pulsation fondamentale du NNM 2 (—) correspond au quatrième harmonique 4ω, celle du NNM 3 (—) correspond au deuxième harmonique 2ω et le NNM 4 (—) est synchrone avec ω. Tous ces modes partagent également une forte contribution du second mode sur le quatrième harmonique. Cela suggère que ces modes sont tous trois associés au second mode du système (ω_2, $\mathbf{\Phi}_2$). Ceci justifie également le fait que ces modes n'interviennent pas dans les réponses forcées puisque le forçage considéré dans cette étude n'excite que la première forme modale linéaire $\mathbf{\Phi}_1$ sur le premier harmonique.

2.1.4 Application du principe énergétique de Melnikov

Dans la section V.2.1.3, une analyse modale non linéaire exhaustive a montré l'existence de nombreuses branches de solutions autonomes sur la plage fréquentielle d'intérêt. L'objectif

de cette section est de fournir des informations supplémentaires sur l'existence de solutions isolées en réponse forcée en utilisant les modes complexes non linéaires couplés au principe énergétique de Melnikov.

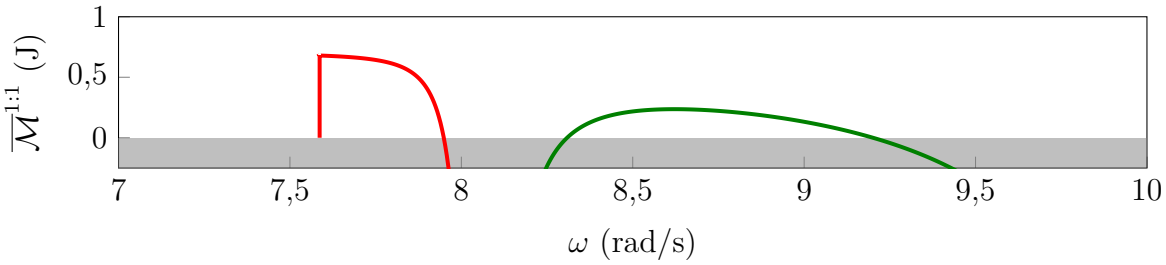
L'étude est centrée sur l'étude du signe de la fonction $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ faisant directement référence au principe énergétique énoncé dans la section V.1.2.2. Pour cette étude, seuls les NNM 1 (—), 5 (—) et 6 (—) sont considérés car ce sont les seuls NNM qui répondent majoritairement sur le premier harmonique. En effet, puisque $\left|W^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}, \mathbf{x}_{\text{c}})\right|$ dépend directement de $\mathbf{a}_{\text{c}}^1$ et $\mathbf{b}_{\text{c}}^1$, si ces quantités sont nulles ou petites par rapport aux autres harmoniques, alors le principe énergétique de Melnikov stipule qu'aucune solution ne peut persister pour un forçage sur le premier harmonique. Ainsi, le terme de travail $\left|W^{1:1}(A, \mathbf{f}_{\text{ex}}, \mathbf{x}_{\text{c}})\right|$ serait nul ou petit comparé à la résistance $|\mathcal{R}(\mathbf{C}, \mathbf{x}_{\text{c}})|$. Ceci est cohérent avec les observations réalisées dans la section V.2.1.3 où on constate que les NNM 2, 3, 4 et 7 ne contribuent pas à la réponse dynamique du système sous la forme d'une épine dorsale. Ceci peut être attribué, grâce à la formulation du principe énergétique de Melnikov, au fait que leur contenu harmonique est principalement composé des troisième et quatrième harmoniques. Ainsi, pour qu'ils interviennent il faudrait que le forçage soit sur l'harmonique fondamental du mode considéré. Une telle étude est conduite dans la section V.2.1.8. Dans la suite de cette section, on s'intéresse successivement aux trois discontinuités de résonance dans leur plage d'amplitude de forçage A respectives.

Première discontinuité de résonance Pour une amplitude de forçage donnée $A = 1$, la fonction $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ est représentée sur la figure V.9a pour les trois NNM d'intérêt. Par souci de lisibilité, elle est représentée en fonction de ω de façon analogue aux courbes de réponse en fréquence. Le signe de $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ est également superposé sur les NNM sur la figure V.9b.

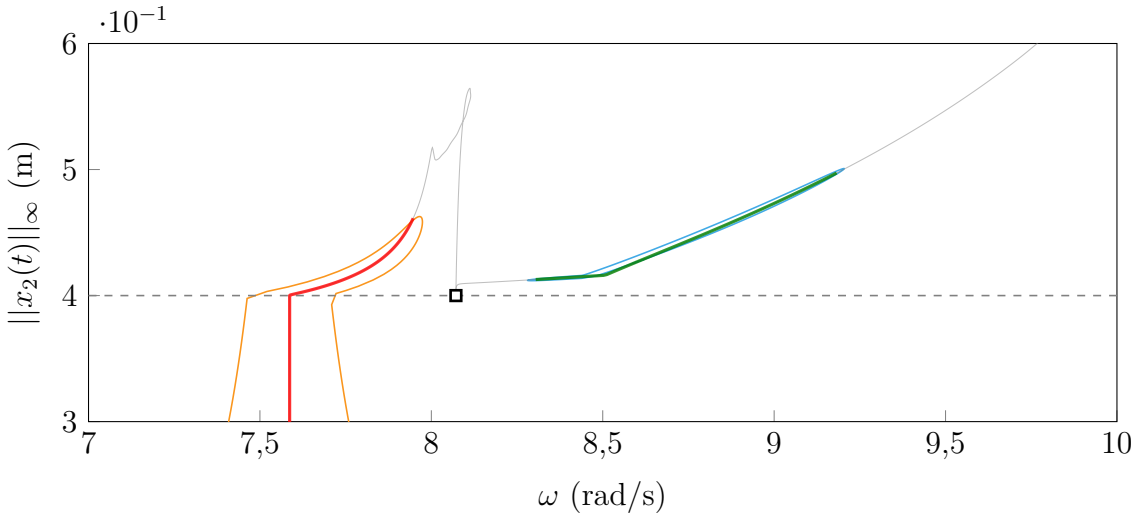
On observe sur la figure V.9a que $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ devient positif pour deux NNM sur deux plages de fréquences non contiguës. Pour le NNM 1 (—), cette plage de fréquence est aisément attribuée à la courbe de réponse principale. Un bon niveau de précision est obtenu concernant l'existence de solutions périodiques sur le NNM 1. En effet, la résonance non linéaire correspond à la zone où $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ devient négative (*i.e.* le NNM passe de la ligne colorée épaisse à la ligne grise fine). Cependant, la deuxième zone où $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ est positive appartient au NNM 5 (—) et semble être isolée de la courbe de réponse principale. Une procédure de continuation est alors lancée en utilisant une solution autonome du NNM 5 comme itéré initial pour vérifier si la zone de persistance prédite par le principe énergétique de Melnikov correspond bel et bien à une branche de solutions. Ce calcul permet de détecter la branche de solutions isolées (—) qui coïncide parfaitement avec la gamme de fréquences prédite par l'analyse de Melnikov.

En effectuant d'autres analyses de Melnikov avec différentes valeurs de A, on observe que la première zone de discontinuité correspond effectivement à une fusion entre une famille de branches isolées et la courbe de réponse principale pour la valeur seuil de $A = 1{,}8$. Les branches isolées sont obtenues en identifiant les zones où $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ est positif et en lançant une stratégie de continuation dans ces zones pour une multitude de valeurs de A. La vue complète de la réponse dynamique du système pour $A \in [1; 2{,}4]$ est représentée sur la figure V.10.

La fusion de la branche isolée avec la courbe de réponse principale se produit lorsque les deux branches commencent à se chevaucher en termes de fréquence. Comme la branche isolée et la courbe de réponse principale émergent de différents NNM, le point singulier qui les relie (◘) joue un rôle central dans cette discontinuité. Une fois que des solutions périodiques existent suffisamment près de part et d'autre du point singulier, la branche isolée fusionne soudainement avec la branche principale. Cela se produit pour une valeur relativement élevée de l'amplitude A car les solutions sur les différents NNM proches du point singulier sont concentrées purement sur le quatrième harmonique. Cette forte contribution du quatrième harmonique est



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$



(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.9 – Analyse de Melnikov pour $A = 1$, NNM 1 (—), NNM 5 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□).

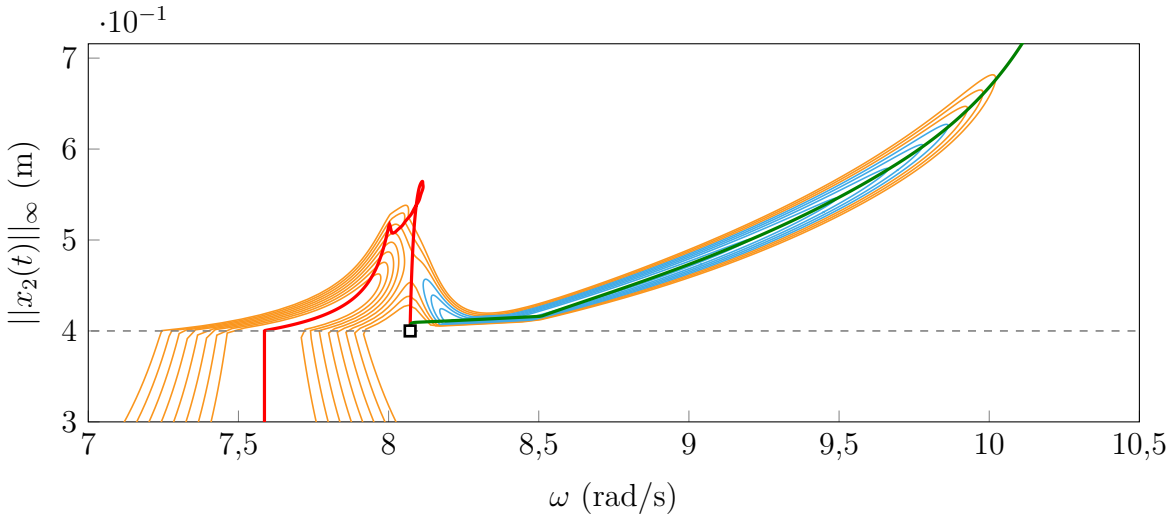
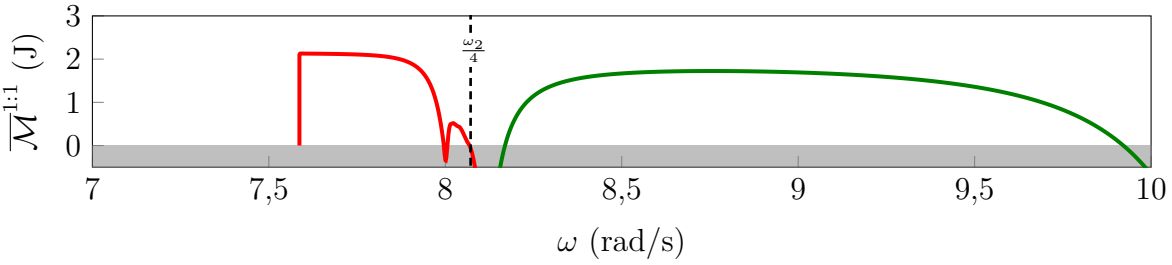
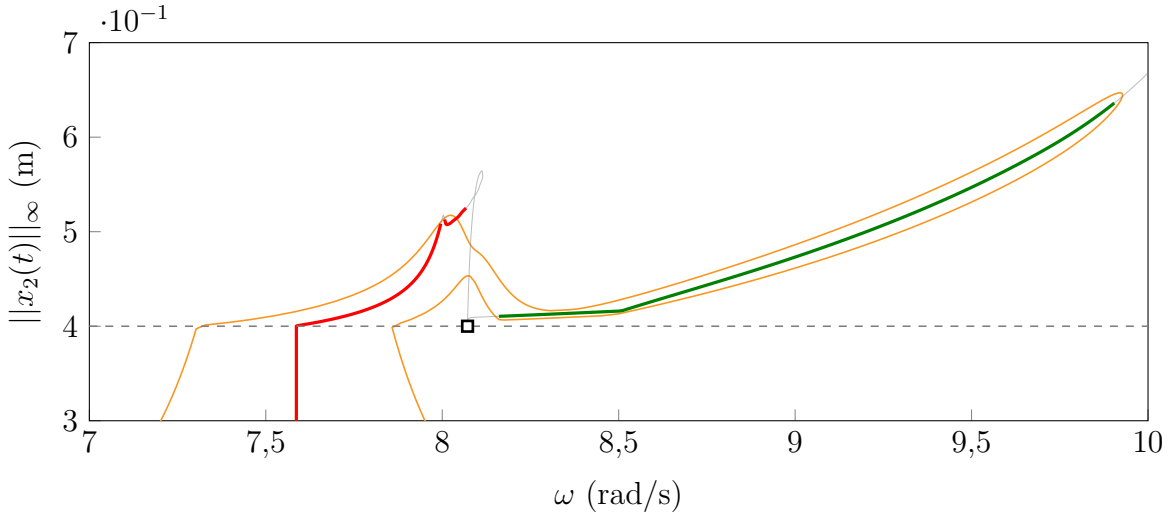


FIGURE V.10 – Première famille d'isolats, courbes de réponse principales de $A = 1$ à $A = 2{,}4$ par pas de 0,2 (—), isolats $A = 1$ à $A = 1{,}8$ par pas de 0,2 (—), NNM 1 (—), NNM 5 (—), g_0 (- -), premier point singulier (□).

responsable d'une chute de la valeur de $W^{1:1}$, ce qui conduit à ce que $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ devienne localement négatif près du point singulier. À titre d'illustration, l'analyse de Melnikov pour $A = 2$ — juste après la fusion — est représentée sur la figure V.11.



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$



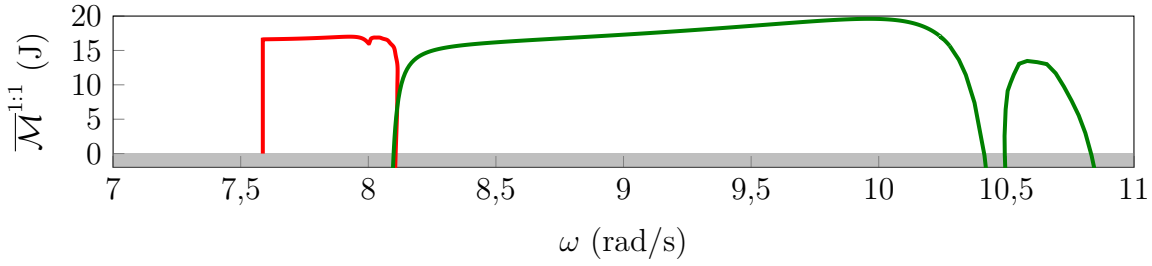
(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.11 – Analyse de Melnikov pour $A = 2$, NNM 1 (—), NNM 5 (—), courbe de réponse principale (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (◘).

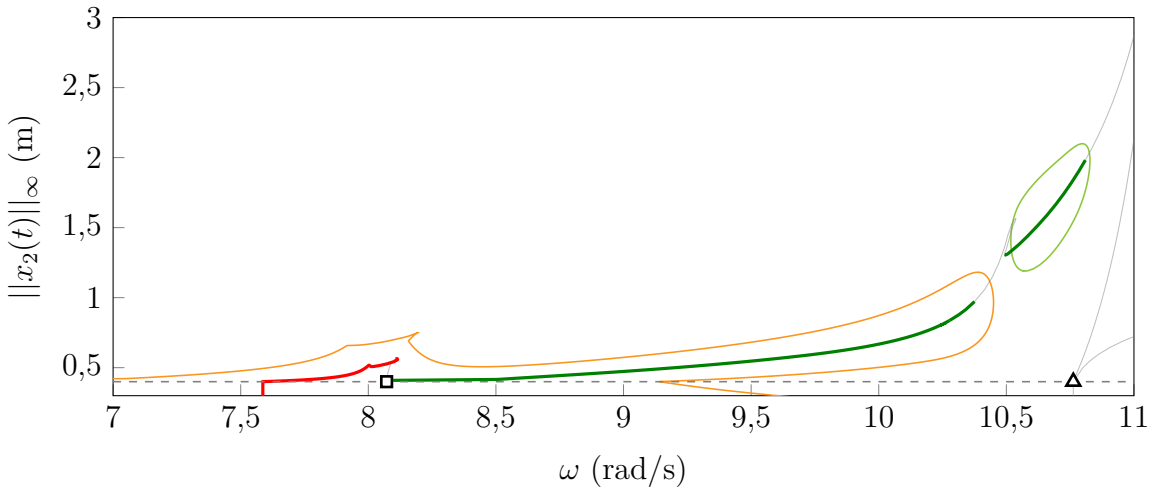
L'analyse de Melnikov représentée sur la figure V.11 prédit le lieu de la résonance non linéaire avec un grand niveau précision le long du NNM 5 (—). Néanmoins, à proximité du premier point singulier (◘) la méthodologie peine à prédire la fusion des branches de solutions. Il ne s'agit pas là d'un défaut du principe énergétique de Melnikov, mais plutôt d'une problématique physique liée à l'existence du point singulier qui scinde les NNM en deux. Nécessairement, comme la dynamique des solutions autonomes autour du point singulier correspond à une réponse purement sur le quatrième harmonique — comme montré dans la section V.2.1.3 —, le terme de travail $\left|W^{1:1}\right|$ est nul. Ainsi, le principe énergétique de Melnikov ne peut pas continûment prédire la persistence de solutions dans cette zone, quel que soit le niveau de forçage.

Deuxième discontinuité de résonance Dans cette section, la deuxième discontinuité de résonance est étudiée. Contrairement à la première discontinuité, la deuxième discontinuité se produit le long d'un seul NNM, autour d'un pic local d'amplitude du NNM 5 (—). Grâce au calcul du terme de résistance $\mathcal{R}_{\ln}$, il est possible d'identifier une élévation en termes d'énergie dissipée sur ce pic situé autour de $\omega = 10{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Ceci a pour conséquence d'empêcher

les solutions périodiques d'exister sur le pic alors que des solutions peuvent plus facilement persister de part et d'autre de celui-ci. L'analyse de Melnikov est représentée sur la figure V.12 pour une amplitude de forçage $A = 12$.



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$



(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.12 – Analyse de Melnikov pour $A = 12$, NNM 1 (—), NNM 5 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△).

Sur cette figure, l'analyse de Melnikov prédit la persistence de solutions périodiques sur une plage de fréquences où la courbe de réponse principale ne contient aucune solution. Cette zone correspond à une branche de solutions isolées (—) le long du NNM 5. Dans ce cas de figure, le principe énergétique de Melnikov prédit avec un grand niveau de précision les plages fréquentielles d'existence des solutions en réponse forcée. L'utilisation de la procédure de recherche d'isolats à plusieurs niveaux d'amplitude permet l'obtention d'une deuxième famille d'isolats, représentée sur la figure V.13. Grâce à la découverte de ces branches isolées, la deuxième discontinuité de résonance non linéaire est alors parfaitement expliquée par la fusion de cette famille d'isolats avec la courbe de réponse principale.

Troisième discontinuité de résonance Enfin, la troisième zone de discontinuité est étudiée selon la même procédure que les deux premières. La troisième discontinuité étant analogue à la première, elle n'est pas présentée avec le même niveau de détails.

Tout d'abord, l'analyse de Melnikov représentée sur la figure V.14 prédit l'apparition d'une branche isolée pour $A = 5$. On montre ainsi l'apparition d'une troisième famille d'isolats. Par ailleurs, on constate que la naissance de la branche est très précoce par rapport à sa fusion

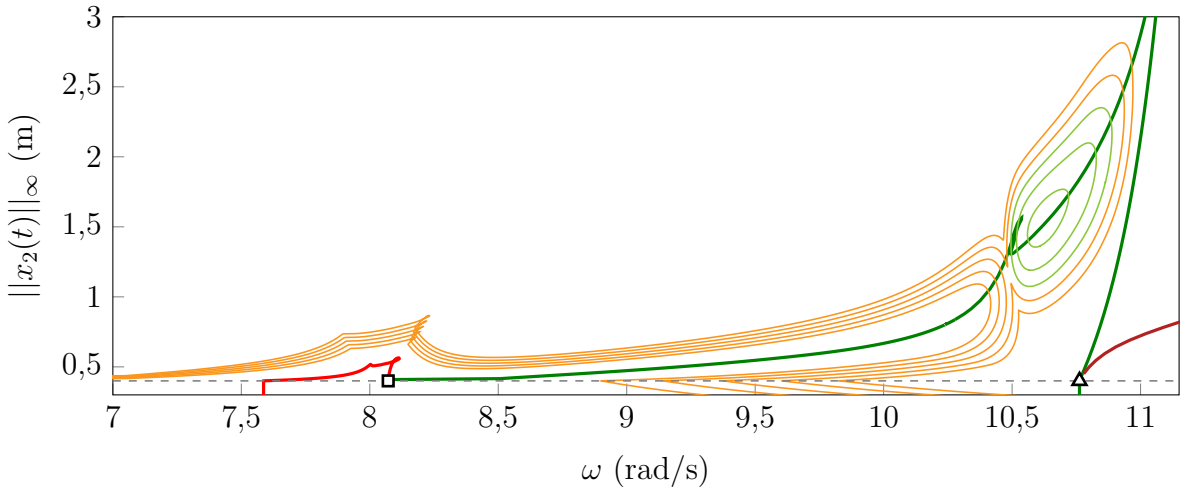


FIGURE V.13 – Deuxième famille d'isolats, courbes de réponse principales de $A = 10$ à $A = 18$ par pas de 2 (—), branches de solutions isolées de $A = 10$ à $A = 14$ par pas de 2 (—), NNM 1 (—), NNM 5 (—), NNM 6 (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△).

avec la branche principale, qui se produit entre $A = 26$ et $A = 28$. L'apparition de la troisième famille d'isolats (—) précède notamment l'apparition de la deuxième famille (—).

En appliquant des analyses de Melnikov sur une plage d'amplitudes de forçage allant de $A = 5$ à $A = 30$ par pas de 5, on obtient les branches de solutions représentées sur la figure V.15.

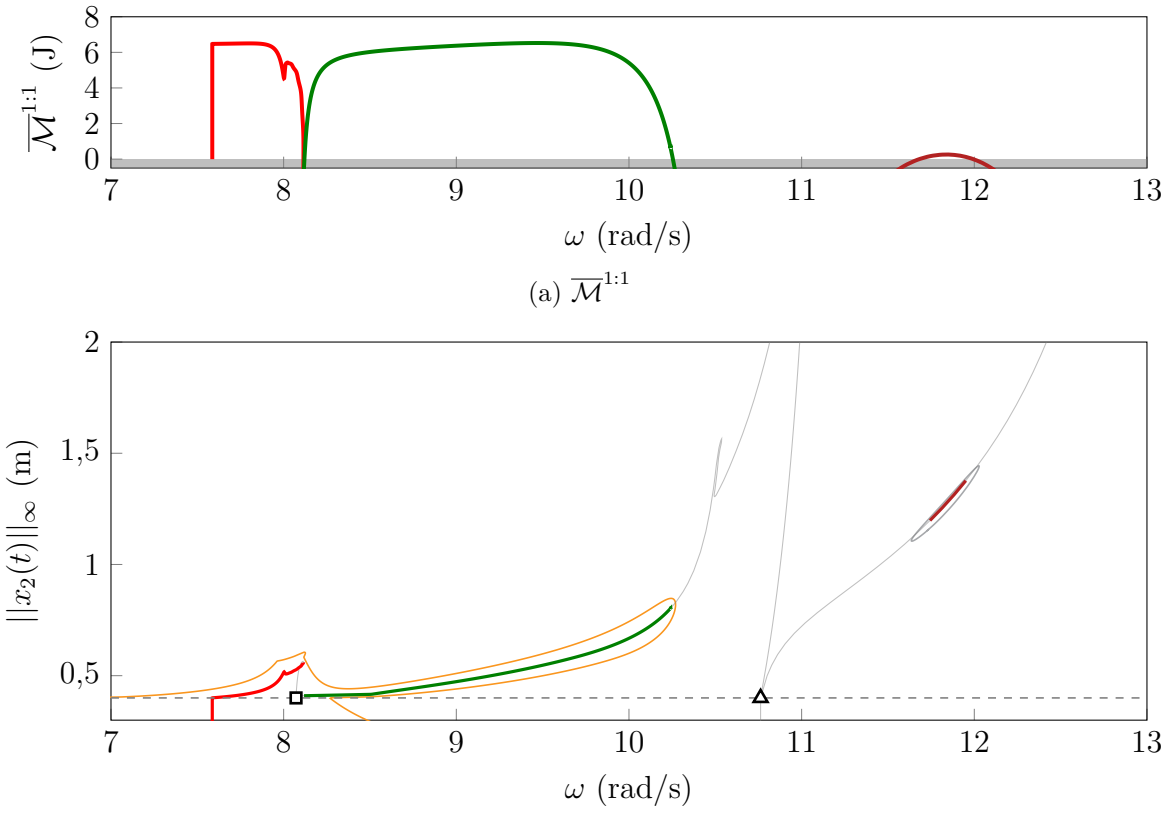
La fusion de la troisième famille d'isolats (—) se produit au voisinage du second point singulier (△). Ceci est analogue au fait que le premier point singulier (□) est proche de la zone de fusion de la première famille d'isolats. Le second point singulier joue visiblement le même rôle central mais pour la fusion de la troisième famille d'isolats.

Enfin, on constate un très bon accord entre les résonances non linéaires prédites par le principe énergétique de Melnikov et les résonances non linéaires réellement calculées. Cette observation reste vraie lorsque la résonance non linéaire appartient à une branche de solutions isolées.

2.1.5 Évolution de la résonance non linéaire en fonction de A

Afin de visualiser l'évolution de la résonance non linéaire par rapport à A sur toute la gamme d'amplitudes allant de $A = 1$ à $A = 30$, l'évolution du phénomène de raidissement au contact et l'évolution de l'amplitude de la résonance non linéaire sont représentées respectivement sur les figures V.16a et V.16b. Tout d'abord, on relève le lieu des résonances non linéaires obtenues par une stratégie de continuation classique (—•—), *i.e.* sans recherche d'isolats. L'utilisation du principe énergétique de Melnikov permet d'obtenir une autre prédiction de la résonance non linéaire, éventuellement isolée (—•—). Enfin, toutes les branches isolées sont calculées et les résonances non linéaires associées à chacune des familles d'isolats sont obtenues (1 (—•—), 2 (—•—) et 3 (—•—)). Le raidissement au contact $\Delta\omega(A)$ est obtenu en calculant le décalage fréquentiel par rapport à la pulsation de résonance linéaire $\Delta\omega(A) = \omega_{\text{res}}(A) - \omega_1$ où $\omega_{\text{res}}(A)$ est la pulsation où l'amplitude de la réponse est maximale pour une amplitude de forçage donnée A.

Les trois discontinuités de résonance non linéaire mises en évidence dans la section V.2.1.2 sont identifiées sur la figure V.16 par des sauts d'amplitude maximale et de raidissement au contact (→) sur le tracé correspondant aux courbes de réponse principales (—). Ces sauts sont critiques car ils provoquent des augmentations soudaines de l'amplitude maximale de réponse



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$

(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.14 – Analyse de Melnikov pour $A = 5$, NNM 1 (—), NNM 5 (—), NNM 6 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△).

avec une faible augmentation de l'amplitude de forçage A.

La figure V.16 permet de constater que les techniques de continuation classiques (—●—), *i.e.* sans recherche explicite de branches isolées, sous estiment grandement l'amplitude maximale de réponse ainsi que le décalage fréquentiel de la résonance non linéaire. En effet, l'utilisation de l'analyse de Melnikov montre l'apparition de résonances non linéaires isolées pour une grande plage d'amplitudes de forçage A. Par ailleurs, le calcul de toutes les branches de solutions isolées montre que les prédictions faites par les analyses de Melnikov sont très précises : la résonance non linéaire est localisée avec précision qu'elle appartienne à la courbe de réponse principale (—●—) ou aux branches isolées (—●—) (—●—). Sur cet exemple, le niveau de précision atteint est tel qu'il n'est pas nécessaire de calculer les branches isolées si l'information recherchée est seulement le lieu de la résonance non linéaire à une amplitude de forçage donnée A.

La réponse dynamique du système est représentée pour plusieurs niveaux de forçage A sur la figure V.17. Cette dernière rappelle le fait que la troisième famille d'isolats (—) apparaît avant la deuxième (—). De plus, on visualise clairement que les résonances isolées de la troisième famille d'isolats (—) sont très éloignées des résonances principales tant en termes de fréquences que d'amplitudes.

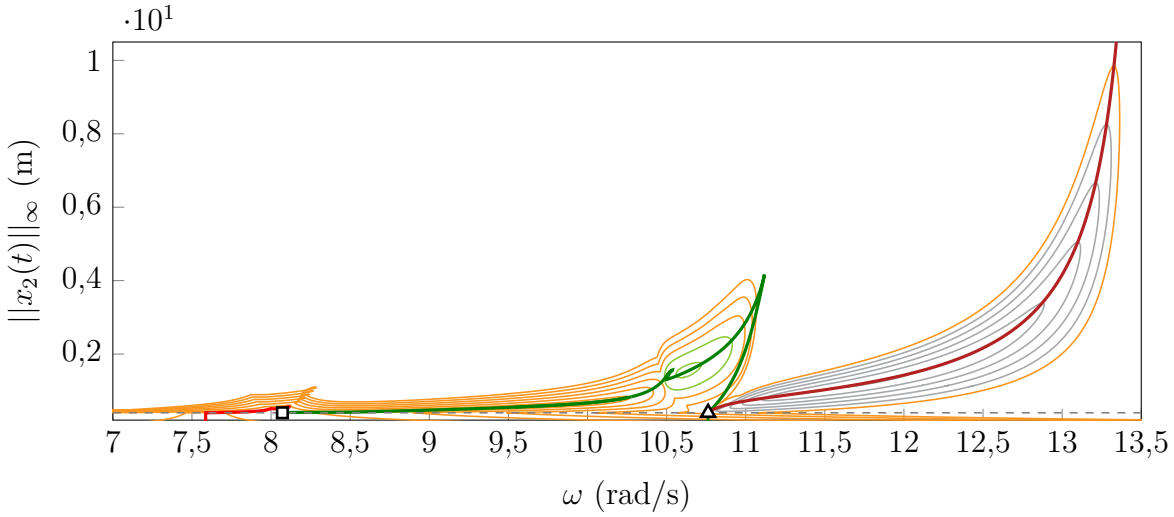
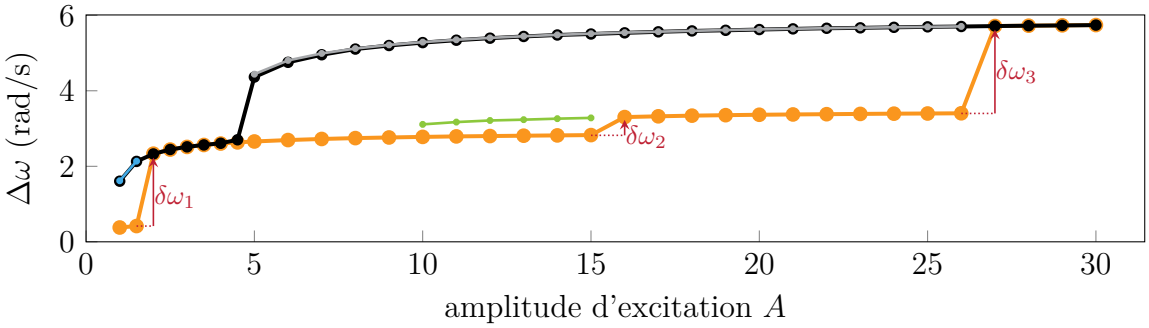
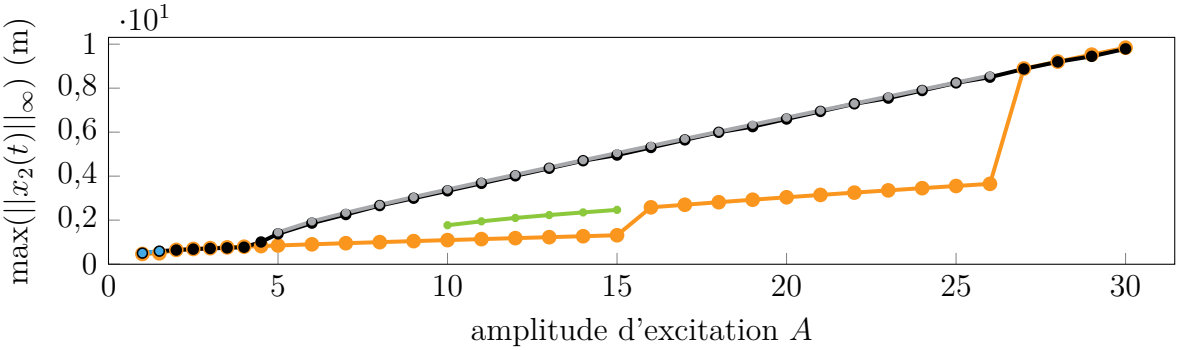


FIGURE V.15 – Troisième famille d'isolats, courbes de réponse principales de $A = 5$ à $A = 30$ par pas de 5 (—), branches isolées (famille 2) pour $A = 10$ et $A = 15$ (—), branches isolées (famille 3) de $A = 5$ à $A = 25$ par pas de 5 (—), NNM 1 (—), NNM 5 (—), NNM 6 (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△).



(a) raidissement au contact



(b) amplitude de réponse maximale

FIGURE V.16 – Évolution de la résonance non linéaire en fonction de A, courbe de réponse principale (—●—), prédiction du principe énergétique de Melnikov (—●—), première famille d'isolats (—●—), deuxième famille d'isolats (—●—), troisième famille d'isolats (—●—).

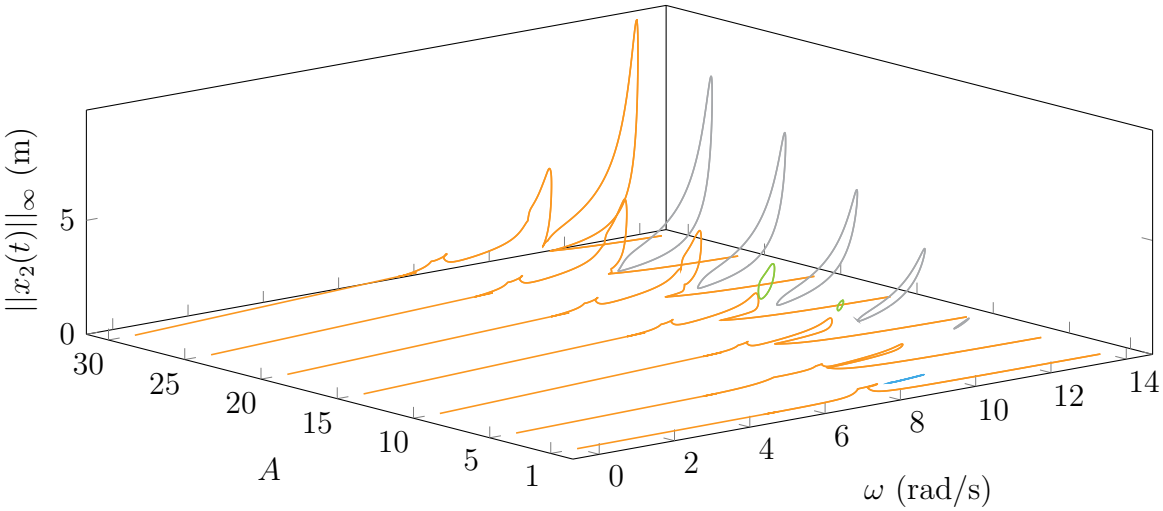


FIGURE V.17 – Vue complète de la réponse dynamique du système en fonction de A, courbes de réponse principales (—), branches de solutions isolées (—) (—) (—).

2.1.6 Validation des solutions de la DLFT-HBM par intégration temporelle

Comme étape de validation des résultats présentés dans la section V.2.1.4, des simulations par IT sont réalisées afin de vérifier que les solutions isolées trouvées par la DLFT-HBM sont également des solutions pour les stratégies du paradigme temporel. La plage fréquentielle entière est discrétisée par pas de $\mathrm{d}\omega = 0{,}005\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et une simulation à vitesse constante est réalisée sur chaque point en utilisant la solution DLFT-HBM la plus proche en guise de condition initiale. On intègre ensuite ces conditions initiales sur quatre cent période et on relève le niveau d'amplitude vibratoire atteint à la fin de la simulation. On choisit l'amplitude d'excitation $A = 15$ pour cette comparaison car deux familles de branches isolées coexistent pour cette valeur. Les résultats sont également superposés à une analyse Melnikov sur la figure V.18.

La superposition des solutions issues de l'IT sur la figure V.18 révèle un comportement complexe du système. Étant donné qu'aucune condition de périodicité n'est imposée pour les solutions de l'IT, une grande partie des solutions périodiques trouvées par la DLFT-HBM ne demeurent pas sur la même orbite après les cent périodes d'intégration. Afin d'observer la dynamique des solutions qui ne sont pas ω-périodiques, on construit les sections de Poincaré [198] — outil d'analyse couramment utilisé en dynamique non linéaire — de certaines solutions issues de l'IT, identifiés par les points fléchés sur la figure V.18. Pour une orbite donnée, une section de Poincaré se caractérise par un ensemble de points correspondant à des relevés de l'état du système à des temps séparés par un intervalle régulier T, associé à la période de l'excitation, de façon analogue à un stroboscope. Dans la configuration donnée, on relève les couples $(x_2(t+kT),\, \dot{x}_2(t+kT))\ \forall k \in [\![20\,000; 60\,000]\!]$, ce qui correspond aux quarante mille dernières périodes d'intégration sur un temps total de soixante mille périodes. Le temps d'intégration est uniquement étendu à soixante mille périodes sur les quelques points d'IT pour lesquels on construit la section de Poincaré. Sur ces dernières, une solution périodique de période fondamentale mT est identifiée lorsque la section contient exactement m points distincts. Les solutions quasi-périodiques se caractérisent par une courbe fermée continue. La section de Poincaré d'une solution chaotique se caractérise par des amas de points désordonnées avec une allure fractale constituant ce qu'on appelle un attracteur étrange. Enfin, aucune tendance n'est observée dans le cas d'une solution apériodique. Les sections de Poincaré des points choisis sont représentées sur la figure V.19 et on y distingue trois catégories de solutions :

— la solution est périodique avec la même périodicité que l'excitation (o) : il est possible de

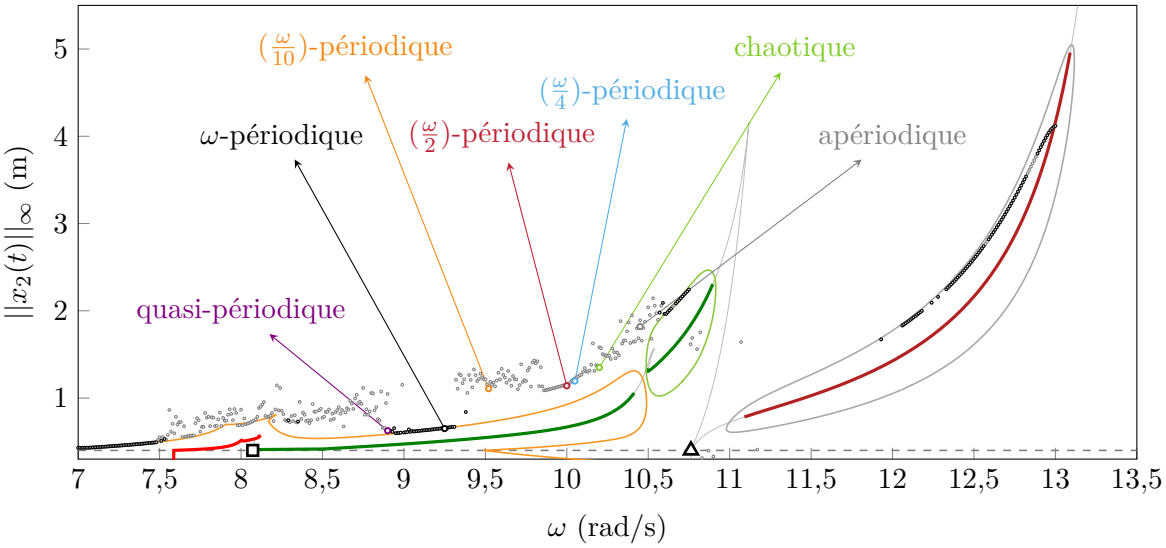


FIGURE V.18 – Validation des solutions de la DLFT-HBM pour $A = 15$, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—) (—), NNM 1 (—), NNM 5 (—), NNM 6 (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△), simulations IT ω-périodiques (○), simulations IT pas ω-périodiques (○).

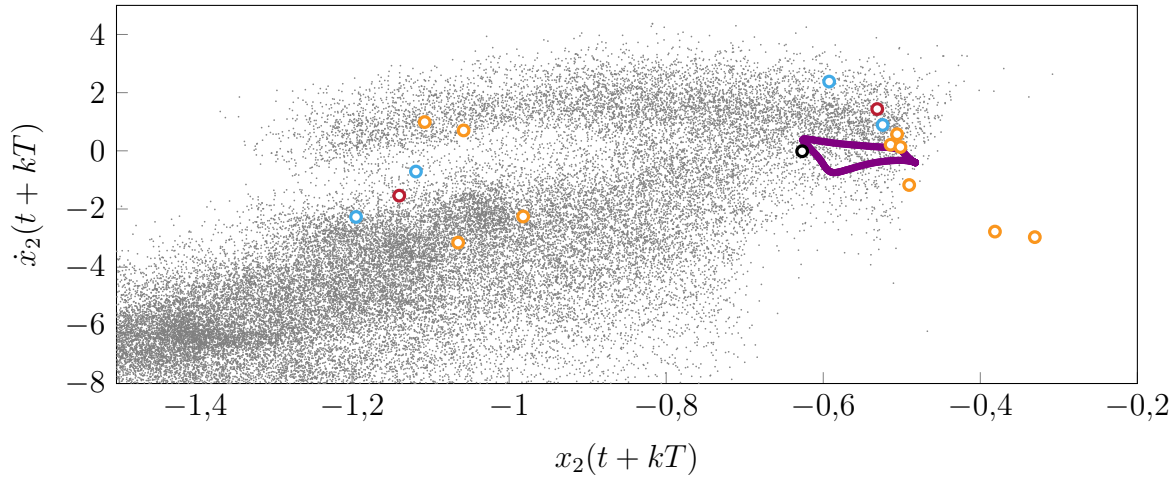
la comparer avec les solutions obtenues par la DLFT-HBM ;

— la solution est périodique mais avec une périodicité différente de celle de l'excitation : elle appartient à une branche de période doublée (○), quadruplée (○) ou même de période plus importante (○) ;

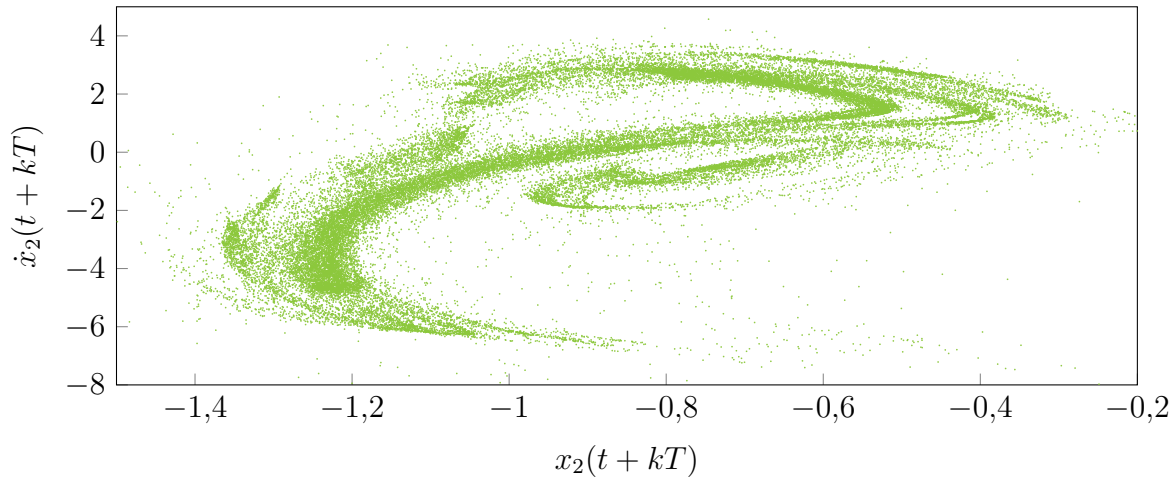
— la solution atteint un régime quasi-périodique (●), chaotique (●) ou apériodique (●), ces zones se présentent sous la forme de nuages de points diffus sur la figure V.18 représentant les amplitudes vibratoires.

Seule la première de ces trois catégories présente un intérêt pour la comparaison des deux stratégies. Par conséquent, la première catégorie est représentée par des points noirs (○) sur la figure V.18. Parmi les solutions de période fondamentale ω, toutes ne sont pas d'intérêt : certaines solutions retournent dans le domaine linéaire ($\|x_2(t)\|_\infty < g_0$) et ne sont donc pas d'intérêt pour l'étude du système non linéaire. Sur les points non linéaires où une périodicité de pulsation fondamentale ω est détectée, un assez bon accord est observé en termes d'amplitude vibratoire. Autour de la résonance non linéaire de la troisième famille d'isolats (—), un léger écart d'amplitude est constaté. Les simulations d'IT rendent néanmoins compte de la dynamique de haute amplitude de la résonance non linéaire isolée.

La figure V.18 révèle que des solutions périodiques obtenues par IT persistent sur plusieurs portions de la courbe de réponse principale, mais aussi sur chacune des branches isolées. Les algorithmes de gestion du contact étant radicalement différents, cela consolide l'idée que les branches isolées sont composées à la fois de solutions stables et instables. En effet, la différence de gestion du contact entre la DLFT-HBM et l'IT peut être considérée comme une perturbation sur le système. Ainsi, si la simulation d'IT reste sur la même orbite périodique que la DLFT-HBM alors la perturbation liée au transfert de conditions initiales a disparu, la solution peut être considérée localement stable. Afin de détecter finement les points de bifurcation et de conclure sur la stabilité des branches de solutions, une analyse de stabilité serait nécessaire. Ces développements dépassent cependant le cadre de ce manuscrit. Très récemment, Colaïtis et Batailly [44] ont proposé une approche permettant de réaliser des analyses de stabilité dans le



(a) solutions périodiques, quasi-périodiques et apériodiques



(b) solution chaotique

FIGURE V.19 – Sections de Poincaré des différentes catégories de solutions, solution ω-périodique (●), solution $(\frac{\omega}{2})$-périodique (●), solution $(\frac{\omega}{4})$-périodique (●), solution $(\frac{\omega}{10})$-périodique (●), solution quasi-périodique (●), solution chaotique (●), solution apériodique (●).

cadre d'interactions de contact en RL-HBM à la fois sur des modèles phénoménologiques et industriels.

2.1.7 Branches de solutions sous-harmoniques

La section V.2.1.6 met en évidence le comportement complexe du système grâce à l'utilisation de l'IT. Des solutions de périodicités différentes sont obtenues, telles que des solutions de période double ou même de période quadruple. Bien qu'elles soient sous-harmoniques, il est possible d'obtenir ces solutions par la DLFT-HBM avec une pulsation fondamentale de résolution de la forme ω/ν, pour permettre la contribution de demi-harmoniques ($\nu = 2$) ou de quarts d'harmoniques ($\nu = 4$). Afin que l'excitation soit toujours synchrone avec la pulsation ω, elle doit alors être appliquée sur le ν-ième harmonique. Ces résolutions sous-harmoniques sont néanmoins coûteuses car il est nécessaire de considérer $N_{\mathrm{h},\nu} = \nu N_{\mathrm{h}}$ harmoniques pour que la bande passante des différentes simulations soit la même indépendamment de la valeur de ν. En

testant l'ensemble des solutions de période double et quadruple obtenues par IT, on obtient de nouvelles branches de solutions bifurquées et isolées. Ces branches sont représentées sur la figure V.20 pour le niveau d'excitation $A = 20$.

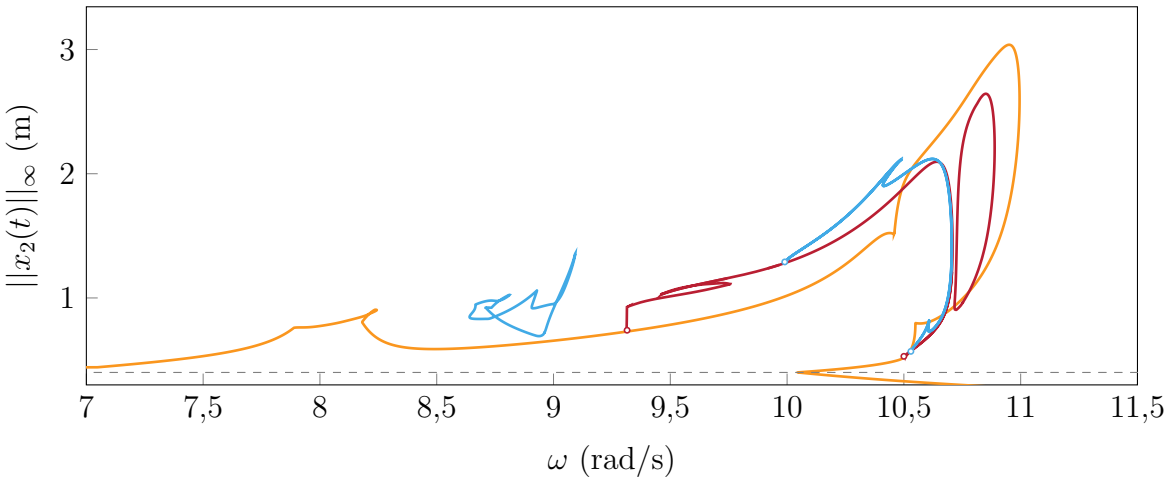


FIGURE V.20 – Branches de période double et quadruple pour $A = 20$, courbe de réponse principale (—), branches de période double (—), branches de période quadruple (—), g_0 (- -), points de bifurcation (o) (o).

Ceci témoigne à nouveau de la complexité de la réponse, justifiant le niveau de variabilité important des solutions d'IT observé sur la figure V.18. De plus, la figure V.20 met en évidence plusieurs nouvelles familles d'isolats. On étudie ici uniquement les familles d'isolats de période double pour un souci de coût de calcul. On en détecte deux et elles sont représentées sur les figures V.21 et V.22.

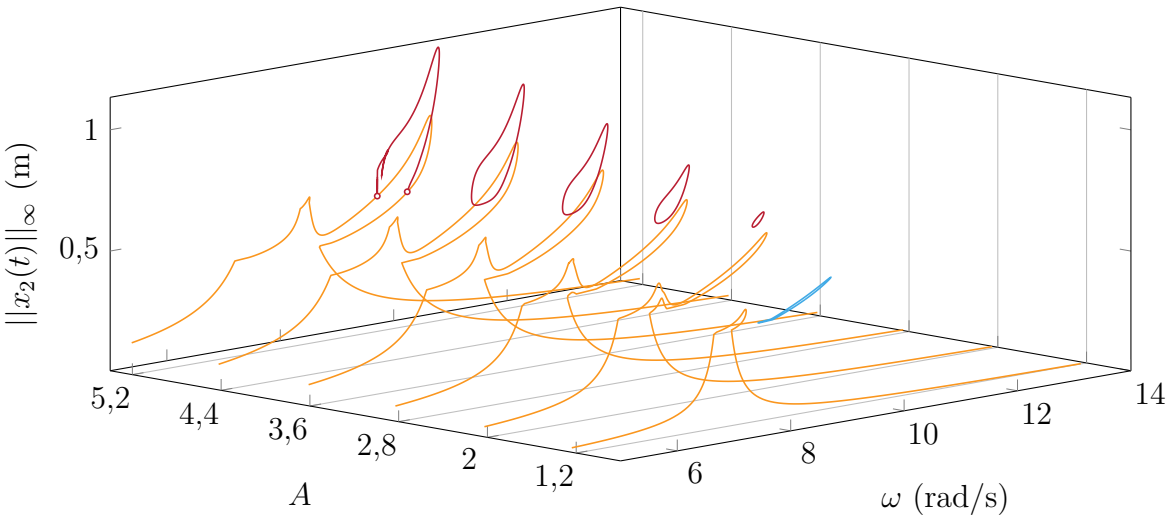


FIGURE V.21 – Première famille d'isolats de période double, courbes de réponse principales (—), branche de solutions isolées de période simple (—), branches de solutions isolées de période double (—), points de bifurcation (o).

Pour la première famille d'isolats de période double, représentée sur la figure V.21, on observe que les amplitudes vibratoires excèdent systématiquement les amplitudes des résonances non linéaires de période simple. Ceci montre que les résonances non linéaires ne sont pas nécessairement de la même périodicité que la branche principale. Par conséquent, on observe ici

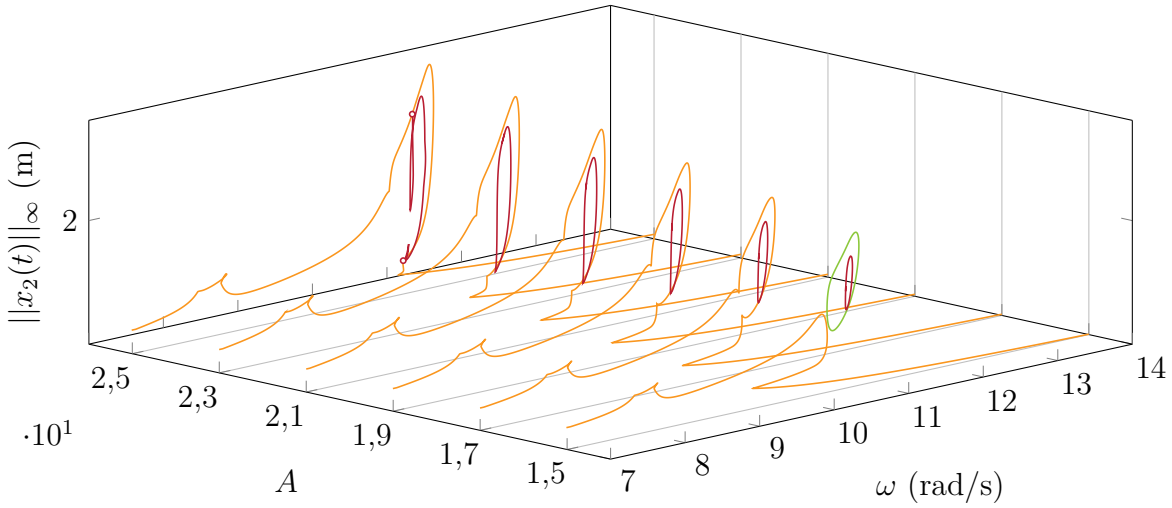


FIGURE V.22 – Seconde famille d'isolats de période double, courbes de réponse principales (—), branche de solutions isolées de période simple (—), branches de solutions isolées de période double (—), points de bifurcation (○).

un défaut de la stratégie qui, en imposant une périodicité minimale, occulte un grand nombre de solutions. De plus, aucun NNM de période double n'est détecté dans cette zone ce qui s'oppose à l'utilisation du principe énergétique de Melnikov pour détecter la résonance isolée de période double de la figure V.21. À partir d'une amplitude seuil, la branche isolée se raccroche à la branche principale et devient simplement une branche bifurquée de période double. Pour la seconde famille d'isolats de période double représentée sur la figure V.22, on observe le même comportement mais les amplitudes de ces isolats ne surpassent pas l'amplitude de la résonance non linéaire principale.

2.1.8 Excitation surharmonique de la seconde forme modale

Dans cette section, on s'intéresse à la réponse du système sous une excitation surharmonique de la seconde forme modale. On étudie tout d'abord une excitation sur le quatrième harmonique puis sur le troisième.

Quatrième harmonique Dans un premier temps, l'effort d'excitation considéré est

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_2 \cos(4\omega t). \tag{V.53}$$

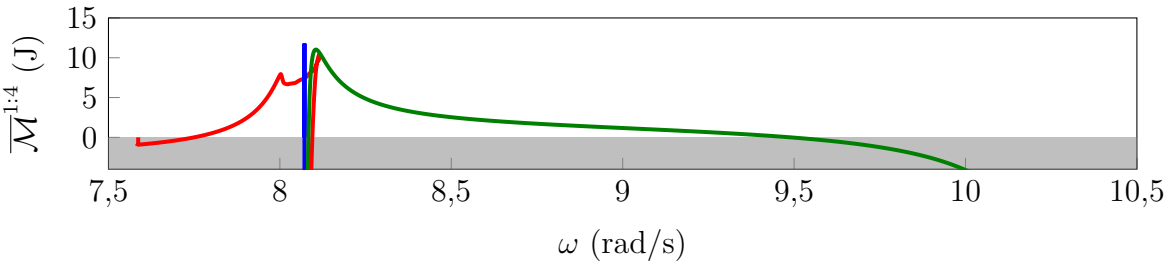
En excitant le système autour de la pulsation $\omega = \omega_2/4$, on s'attend alors à ce que le NNM 2 (—) réponde majoritairement. Afin de pouvoir réaliser une analyse de Melnikov avec cette excitation, il est nécessaire de considérer le terme de travail $W^{1:4}$ dont l'expression est

$$W^{1:4}(A, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 4A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_4^{\text{c}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_4^{\text{c}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \tag{V.54}$$

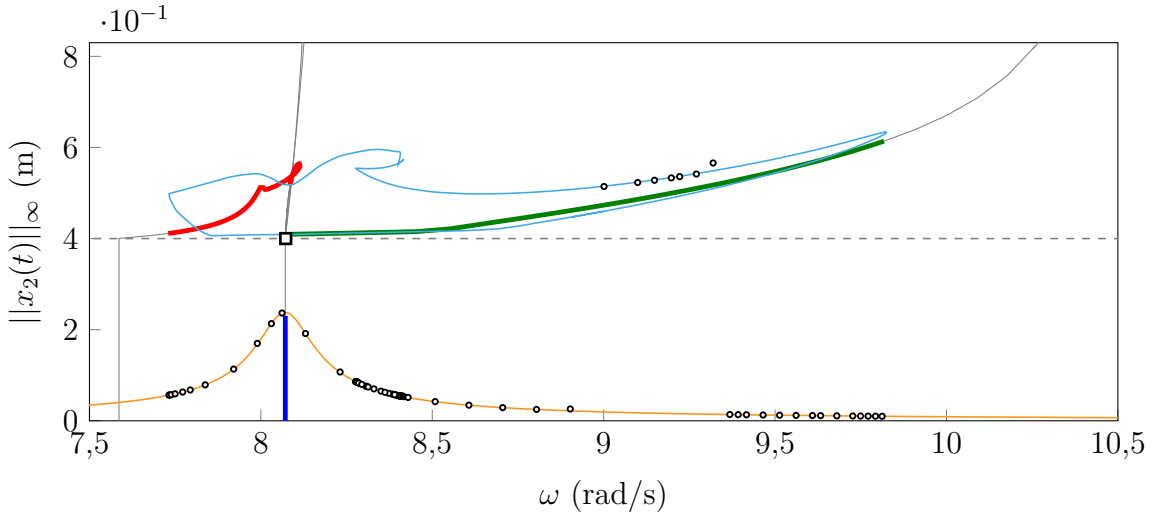
avec $\bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_2$ la forme de l'excitation. La procédure de détection d'isolats est similaire, néanmoins le principe énergétique de Melnikov se base maintenant sur le signe de la fonction

$$\overline{\mathcal{M}}^{1:4} = \left|W^{1:4}\right| - |\mathcal{R}_{\text{ln}}| \tag{V.55}$$

dans le cas d'une non-linéarité conservative. On représente sur la figure V.23 les résultats de l'analyse de Melnikov basée sur la fonction (V.55) et l'excitation (V.53) pour $A = 10$. Dans cette section, on base les études de Melnikov sur des modes amortis, c'est-à-dire que la matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ est prise en compte dans les calculs. Cette dernière permet un gain significatif en précision du principe énergétique de Melnikov sur ce cas de figure. Les modes amortis sont sensiblement équivalents et présentent les mêmes caractéristiques que les modes conservatifs présentés dans la section V.2.1.3. Le nombre de NNM amortis est le même et ils sont numérotés de la même manière que leurs équivalents conservatifs.



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:4}$



(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.23 – Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le quatrième harmonique avec $A = 10$, NNM 1 (—), NNM 2 (—), NNM 5 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:4} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:4} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), simulations IT (○).

La figure V.23 révèle que le niveau d'excitation sur la seconde forme modale correspond à une réponse purement linéaire sur le NNM 2 (—). En revanche, l'application du principe énergétique de Melnikov sur les NNM 1 (—) et 5 (—) met en lumière la persistance de solutions périodiques non linéaires. Cette observation est contre-intuitive car un isolat existe alors que le mode excité reste linéaire à ce niveau de forçage. Cette branche de solutions isolées est de période quadruple par rapport à la période de l'excitation. Néanmoins, elle est partiellement stable car une reprise de conditions initiales réalisée par un intégrateur temporel met en évidence des orbites périodiques stables sur l'isolat.

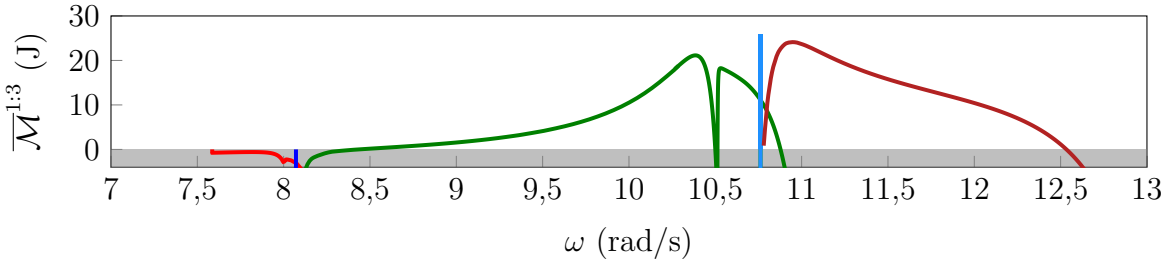
Troisième harmonique De façon analogue, on observe une réponse complexe lors de l'excitation du troisième harmonique sur une forme modale $\mathbf{\Phi}_2$, tel que les efforts soient sous la forme

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_2 \cos(3\omega t). \tag{V.56}$$

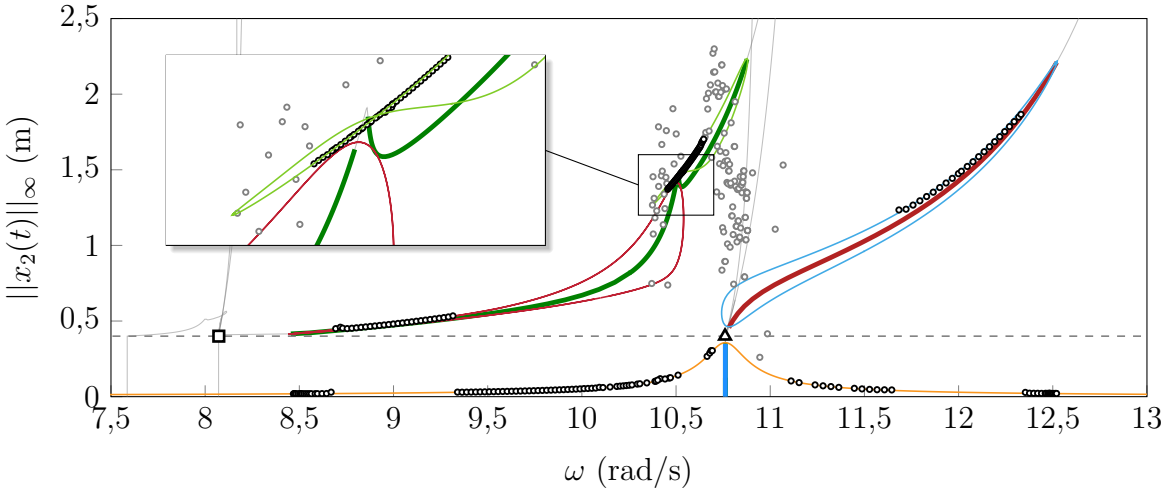
Par conséquent, les grandeurs du principe énergétique de Melnikov deviennent

$$W^{1:3}(A, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 3A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_3^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_3^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}^{1:3} = \left|W^{1:3}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right|. \tag{V.57}$$

Avec ces nouvelles grandeurs, les résultats de l'analyse de Melnikov pour $A = 15$ sont représentés sur la figure V.24.



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:3}$

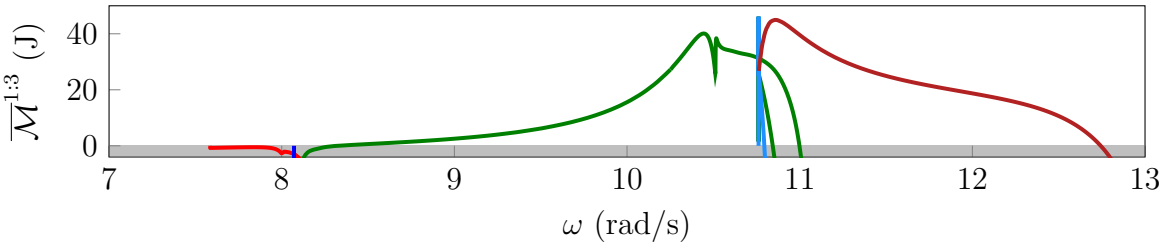


(b) courbe de réponse en fréquence

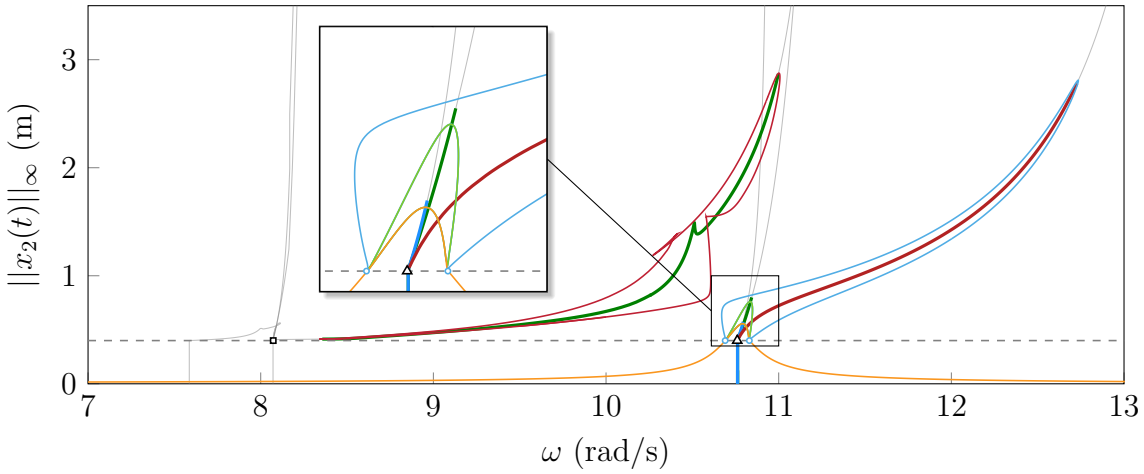
FIGURE V.24 – Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le troisième harmonique avec $A = 15$, NNM 5 (—), NNM 6 (—), NNM 7 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées (—) (—) (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△), simulations IT ω-périodique (○), simulations IT sous-harmonique et apériodiques (○).

De la même manière que sur la figure V.23, la réponse dynamique du système sous une excitation surharmonique fait intervenir des branches de solutions isolées. Pour le niveau d'excitation $A = 15$, la réponse selon le mode excité reste linéaire mais d'autres modes non linéaires répondent sous la forme de branches de solutions isolées. Ces isolats sont associés à des amplitudes vibratoires jusqu'à cinq fois plus importantes que la réponse linéaire du mode excité. Ce comportement, déjà mis en évidence sur la figure V.23, est particulièrement critique

car il est contre-intuitif d'observer de telles branches de solutions alors que la réponse principale demeure linéaire. Sans la mise en œuvre d'une procédure de recherche d'isolats explicite, ces comportements ne peuvent pas être détectés. On attribue notamment l'apparition de ces comportements à la densité de NNM qui se chevauchent dans la plage fréquentielle d'intérêt. En effectuant une reprise de conditions initiales sur les solutions isolées de la DLFT-HBM par IT, on valide l'existence et la stabilité de certaines solutions sur les branches isolées sur la figure V.24. Afin d'observer le comportement du système lorsque le mode excité passe le seuil de contact, on réalise une nouvelle analyse de Melnikov pour $A = 20$ sur la figure V.25.



(a) $\overline{\mathcal{M}}^{1:3}$



(b) courbe de réponse en fréquence

FIGURE V.25 – Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le troisième harmonique avec $A = 20$, NNM 5 (—), NNM 6 (—), NNM 7 (—), courbe de réponse principale (—), branche de solutions isolées et bifurquées (—) (—) (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} < 0$) (—), g_0 (- -), premier point singulier (□), second point singulier (△), points de bifurcation (○).

L'augmentation du niveau d'excitation mène à l'observation d'un nouveau comportement non linéaire du système. La branche précédemment isolée sur la figure V.24 (—) est désormais fusionnée avec la courbe de réponse principale du système (—) sous la forme d'une résonance bifurquée. De plus, une deuxième branche de solutions est connectée à la branche principale (—). La courbe principale ainsi que les deux branches bifurquées s'additionnent pour un total de trois résonances non linéaires distinctes. Chacune d'entre elles est sous-tendue par un NNM différent. Le principe énergétique de Melnikov identifie précisément ce comportement sur chacun des NNM impliqués dans ces résonances non linéaires. Ceci souligne à nouveau que la complexité de la réponse est causée par la forte densité de NNM dans la plage fréquentielle d'étude. De plus, le second point singulier (△) joue un rôle central car il correspond au point où tous les NNM impliqués se croisent.

Impacteur à deux degrés de liberté - bilan

L'étude du modèle d'impacteur à deux degrés de liberté permet la mise en évidence de l'existence de nombreuses branches de solutions isolées. Le système est caractérisé par la procédure de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov proposée dans ce manuscrit. Ceci mène à la compréhension fine de certains mécanismes responsables de l'apparition de solutions isolées. On énumère ci-dessous les résultats principaux dans cette section.

Existence de points singuliers pour les NNM La présence de points singuliers dans l'analyse modale non linéaire du système est responsable de l'existence de branches de solutions isolées. En effet, ces points sont associés à des singularités physiques aux extrémités des NNM ce qui empêche l'existence de solutions en réponse forcée dans leur voisinage.

Précision du principe énergétique On souligne également le fait que la prédiction du lieu des résonances non linéaires par des techniques de continuation classiques sous-estiment fortement l'amplitude vibratoire et le décalage fréquentiel de la résonance lorsqu'elle est isolée. Au contraire, le principe énergétique de Melnikov permet d'obtenir une vue complète de la réponse du système, sans omettre les branches isolées.

Stabilité locale des isolats Une étude par un algorithme d'intégration temporelle démontre que certaines portions des branches de solutions isolées sont localement stables ce qui justifie la nécessité de les rechercher systématiquement.

Isolats et excitation surharmonique Un phénomène complexe, causé par la présence d'une multitude de modes non linéaires dans la plage fréquentielle d'étude, est mis en lumière lorsqu'on considère une excitation surharmonique sur le second mode de la structure. Le principe énergétique de Melnikov prédit avec précision la position de plusieurs branches de solutions isolées non linéaires alors que la réponse principale du système sur le mode linéairement excité ne franchit pas le seuil de contact.

2.2 Barre éléments-finis

L'analyse modale non linéaire de la barre éléments-finis de la section IV.2 n'est pas possible car de nombreux points singuliers viennent perturber la continuation des modes complexes non linéaires. Ces points singuliers sont plus abondants que pour le modèle d'impacteur à deux degrés de liberté à cause de la richesse modale du modèle de barre, composé de vingt modes. Par conséquent les pulsations $\omega_j/k \ \forall (j,k) \in [\![1;n]\!] \times \mathbb{N}^*$ correspondent toutes à des points singuliers. Ceci rend inutilisable l'utilisation de la procédure de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov. Pour remédier à cette difficulté, on met en œuvre la stratégie de suivi de points limites explicitée dans la section V.1.1. Ce suivi est réalisé en fonction du paramètre $\eta = A$ pour une gestion du contact par la stratégie RL-HBM. Par conséquent, on exprime les dérivées par rapport à η telles que

$$\nabla_\eta \mathcal{H}(\mathbf{z}) = -\widetilde{\widetilde{\mathbf{f}}}_{\text{ex}} \quad \text{et} \quad (\nabla_\eta \mathcal{J}(\mathbf{z}))\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \tag{V.58}$$

où $\widetilde{\widetilde{\mathbf{f}}}_{\text{ex}}$ est le vecteur multiharmonique de norme unitaire associé à l'excitation. Ainsi, le vecteur multiharmonique des efforts d'excitation est $\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = A\widetilde{\widetilde{\mathbf{f}}}_{\text{ex}}$. Conformément à la section V.2.1, on réalise un forçage sur le premier mode de la structure en imposant

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\frac{\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_1}{\|\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_1\|}\cos(\omega t). \tag{V.59}$$

On balaie la plage d'amplitudes d'excitation $A \in [1;9]$ et les résultats du suivi de bifurcations sont présentés sur la figure V.26 en deux dimensions et sur la figure V.27 en trois dimensions dans le cas d'un obstacle rigide pour $N_{\text{h}} = 20$. Les paramètres de gestion du contact sont $\kappa = 1{\cdot}10^{12}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ et $\gamma = 5{\cdot}10^{4}\,\text{N}$.

Premièrement, la figure V.26 met en évidence la présence de branches de solutions isolées

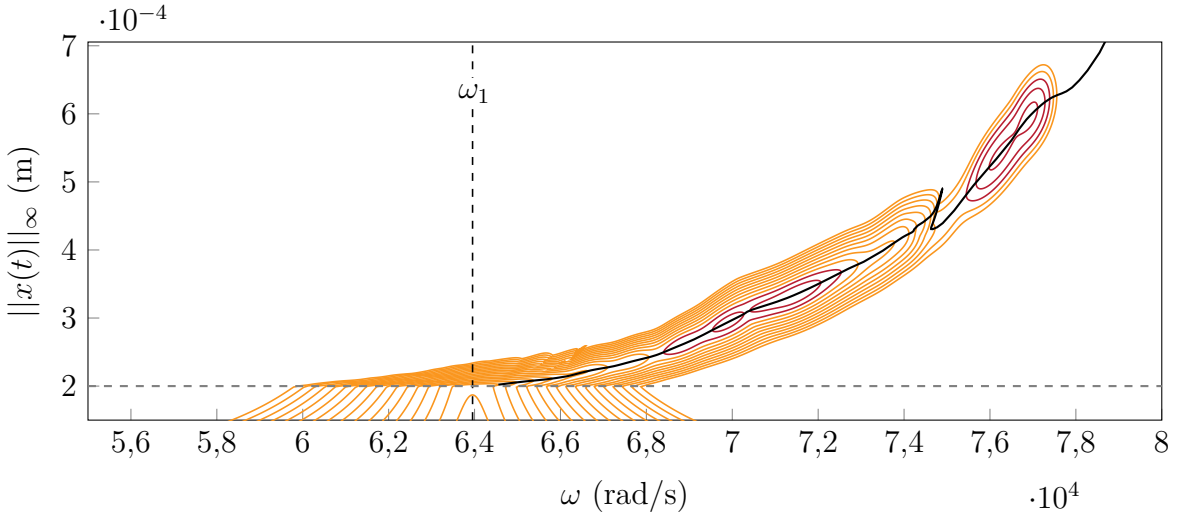


FIGURE V.26 – Suivi de points limites pour la barre éléments-finis, vue 2D, courbes de réponse principales (—), branches de solutions isolées (—), points limites (—), g_0 (- -).

pour le cas de la barre éléments-finis, ce qui n'avait pas été le cas dans les études menées sur ce modèle [206, 165]. On observe que le suivi de points limites permet de suivre précisément les points de retournement à la fois des courbes de réponse principales (—) et les isolats (—). Ceci est particulièrement mis en lumière sur la vue 3D de la figure V.27, où la troisième direction est l'amplitude d'excitation A.

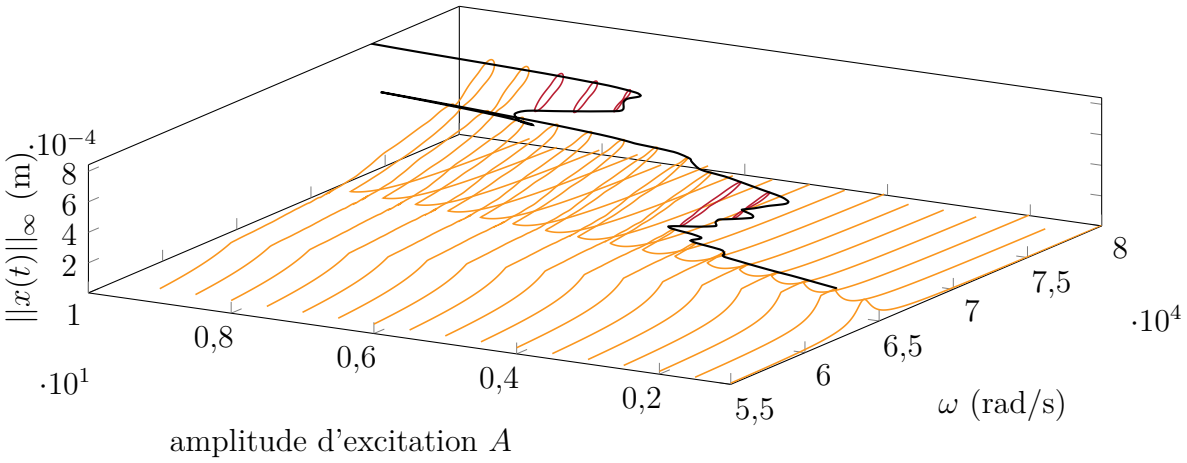


FIGURE V.27 – Suivi de points limites pour la barre éléments-finis, vue 3D, courbes de réponse principales (—), branches de solutions isolées (—), points limites (—), g_0 (- -).

La figure V.27 présente plus clairement la complexité du comportement du système. En effet, chaque oscillation dans la direction de l'amplitude A correspond à l'apparition ou à la disparition d'une branche de solutions isolées. Comme attendu, le suivi de bifurcations permet de localiser précisément les solutions du problème, y compris les solutions isolées. Cependant, ce dernier est associé à un coût de calcul plus important que la stratégie basée sur le principe énergétique de Melnikov car il nécessite l'évaluation de l'opérateur hessien à chaque itération du calcul. De plus, cette stratégie n'est pas adaptée aux stratégies non régulières, pour lesquelles l'opérateur hessien n'est pas nécessairement défini. Pour la suite des travaux, on conserve donc uniquement la procédure de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov

qui s'avère la plus adaptée pour une utilisation de concert avec la DLFT-HBM. En effet, sur des modèles industriels, il est possible de lever les difficultés liées aux points singuliers le long des NNM grâce à l'utilisation de modes non linéaires amortis.

3 Modèle industriels

Cette section est une contribution au développement de méthodes d'analyse des système mécaniques non linéaires où on propose une extension de la stratégie de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov pour des configurations de contact aube/carter industrielles. La méthodologie proposée dans ce manuscrit permet de mettre en évidence de nouveaux phénomènes complexes dans le cas d'une excitation surharmonique de l'aube. Le niveau de modélisation est augmenté graduellement afin de distinguer les conséquences de la prise en compte de plusieurs nœuds non linéaires de celles des phénomènes non conservatifs liés au frottement. Par conséquent, on applique en premier lieu la stratégie de détection d'isolats sur l'aube de compresseur axial NASA rotor 37 en négligeant les efforts de frottement. Ensuite, l'aube de soufflante NASA rotor 67 est caractérisée par la même méthodologie en prenant cette fois en compte les efforts de frottement.

3.1 Aube NASA rotor 37 sans frottement

3.1.1 Présentation de la configuration de contact

Le modèle d'aube NASA rotor 37 est utilisé pour mettre en place la stratégie de recherche d'isolats sur une application industrielle. Sa géométrie ouverte [1] permet de garantir la reproductibilité des résultats. Le rotor 37 est un étage de compresseur axial transsonique à 36 aubes conçu au NASA *Lewis research center* à la fin des années 1970 [233]. Il a précédemment été étudié dans le domaine de la dynamique des fluides [1, 29, 51, 54] et plus récemment en dynamique des structures pour l'analyse des interactions de contact aube/carter [43, 44, 138].

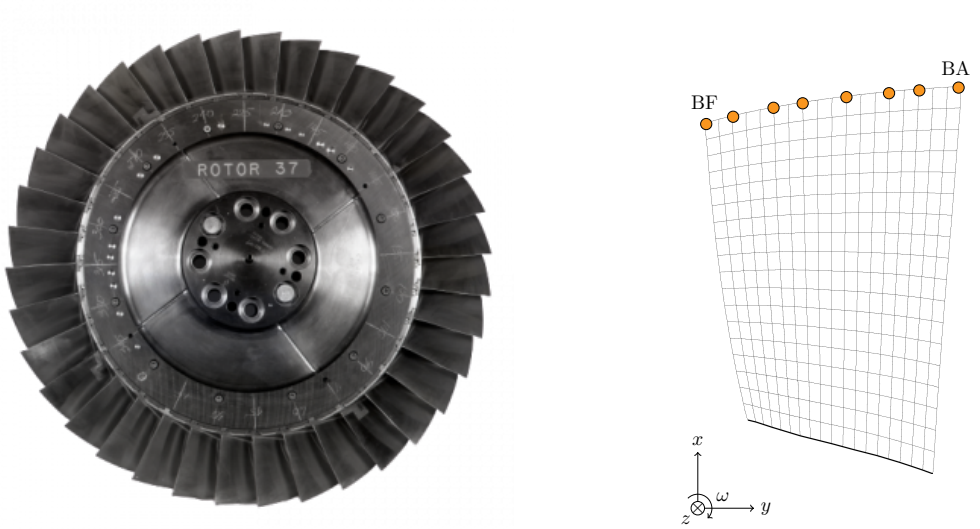
Le maillage utilisé est composé de 5745 nœuds pour un total de 1800 éléments de type pentaèdre quadratique. Le pied de l'aube est encastré ce qui conduit à une taille totale du maillage de 16524 degrés de liberté. Le rotor 37 étant constitué d'un alliage d'acier maraging de grade 200, les propriétés mécaniques d'un alliage maraging 18-Ni 200 [206, 138] sont retenues pour les simulations. Les caractéristiques du matériau sont fournies dans le tableau V.2. Le rotor et le maillage d'une aube sont représentés sur la figure V.28.

module d'élasticité E	masse volumique ρ	coefficient de Poisson ν
180 GPa	8000 kg·m^{-3}	0,3

Tableau V.2 – Propriétés matériau de l'alliage d'acier 18-Ni 200-maraging.

Un modèle réduit est calculé en utilisant la méthode de réduction modale de Craig-Bampton [49]. On retient $\eta = 10$ modes internes et $n_b = 8$ nœuds frontières uniformément répartis le long de la tête d'aube. Ces paramètres sont tirés d'études publiées précédemment [43, 44, 138] et les convergences du maillage ainsi que du modèle réduit ont été vérifiées au préalable. L'amortissement structurel de l'aube est modélisé par un amortissement modal utilisant les taux $\xi_{1-2} = 1{\cdot}10^{-3}$ pour le premier mode de flexion (1F) et le premier mode de torsion (1T). Tous les autres modes sont amortis avec un taux plus élevé de $\xi_{3+} = 5{\cdot}10^{-3}$. On étudie principalement le premier mode de flexion de l'aube dans ces travaux, il correspond à la

1. disponible sur https://lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/rotor_37/accueil



(a) roue aubagée complète (b) maillage éléments-finis

FIGURE V.28 – NASA rotor 37 [235], nœud frontière (●), encastrement (—)

pulsation $\omega_{1F} = 5272{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour cette étude, une seule aube est utilisée pour conserver la même configuration que dans la littérature [43, 44, 138]. Par ailleurs, cela permet également de conserver des temps de calcul raisonnables : environ 10 minutes pour un calcul de réponse forcée sur un ordinateur équipé d'un processeur i7 à huit cœurs. On fournit dans le tableau V.3 les premières fréquences propres de l'aube. Les formes modales $\boldsymbol{\Phi}_\bullet$ utilisées dans cette section sont toutes $\mathbf{M}$-orthonormalisées.

mode $\bullet$	1F	1T	2F	4	5
$\omega_\bullet$ (rad·s^{-1})	5272,9	15 770,6	19 098,6	29 586,4	36 141,3
f (Hz)	839,2	2510,0	3039,6	4708,8	5752,1

TABLEAU V.3 – Premières fréquences propres de l'aube rotor 37.

Afin de transposer la méthodologie appliquée dans la section V.2.1 à l'aube rotor 37, le même type d'initiation de contact est utilisé. Un forçage monoharmonique est appliqué sur la forme modale 1F $\boldsymbol{\Phi}_{1F}$ avec une amplitude variable A, de sorte que

$$\mathbf{f}_{ex}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{1F}\cos(\omega t). \tag{V.60}$$

L'obstacle est un carter rigide purement circulaire, représenté sur la figure V.29. Le jeu initial

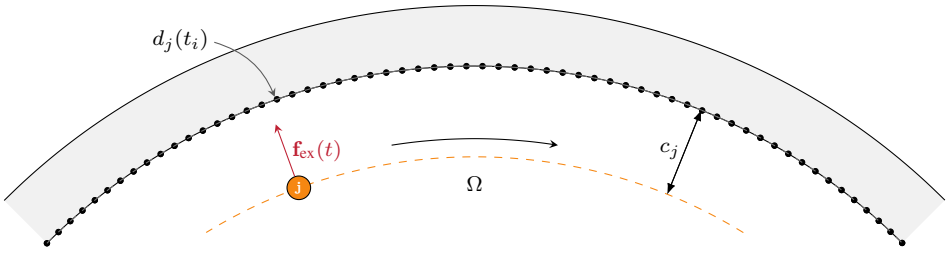


FIGURE V.29 – Carter rigide circulaire.

entre chaque nœud frontière et le carter est le même pour tous les nœuds de contact et vaut $c_j = 4{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{m}\ \forall j \in [\![1; n_\mathrm{b}]\!]$. Dans un premier temps, afin de ne pas introduire d'effets non linéaires non conservatifs dans l'analyse de Melnikov, le frottement est négligé. En effet, pour cette application, on se concentre uniquement sur l'extension de la procédure de détection de branches de solutions isolées aux modèles industriels comportant de multiples nœuds non linéaires. L'ensemble des calculs HBM sont réalisés avec la méthodologie DLFT-HBM avec $N_\mathrm{h} = 10$ harmoniques, $N_\mathrm{t} = 512$ instants et $\varepsilon = 1{\cdot}10^{7}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

3.1.2 Branches de solutions isolées

Afin de mettre en œuvre la procédure de détection d'isolats basée sur le principe énergétique de Melnikov, il est nécessaire de réaliser une analyse modale non linéaire conservative. Cependant, dans le cas des systèmes industriels, la prise en compte de l'amortissement structurel est requise afin d'obtenir un NNM représentatif de la dynamique du système amorti. Par conséquent, les analyses de Melnikov sur le rotor 37 sont effectuées avec un NNM non conservatif même si cela sort du cadre théorique initial proposé par Cenedese et Haller [38]. On observe sur les modèles 3D de taille industrielle que la prise en compte de l'amortissement structurel dans les calculs du NNM permettent de filtrer les nombreux points singuliers qui seraient présents sinon. Sans cette considération, on se heurterait au même problème que sur la barre éléments-finis où les points singuliers empêchent la continuation d'un unique NNM [2].

Dans la configuration présentée, un seul mode non linéaire associé au mode 1F est détecté. En effectuant une analyse de Melnikov pour $A = 550$ sur ce dernier, trois branches de solutions isolées sont identifiées. La réponse dynamique non linéaire de l'aube pour ce niveau de forçage est représentée sur la figure V.30 avec l'unique mode non linéaire associé au mode 1F.

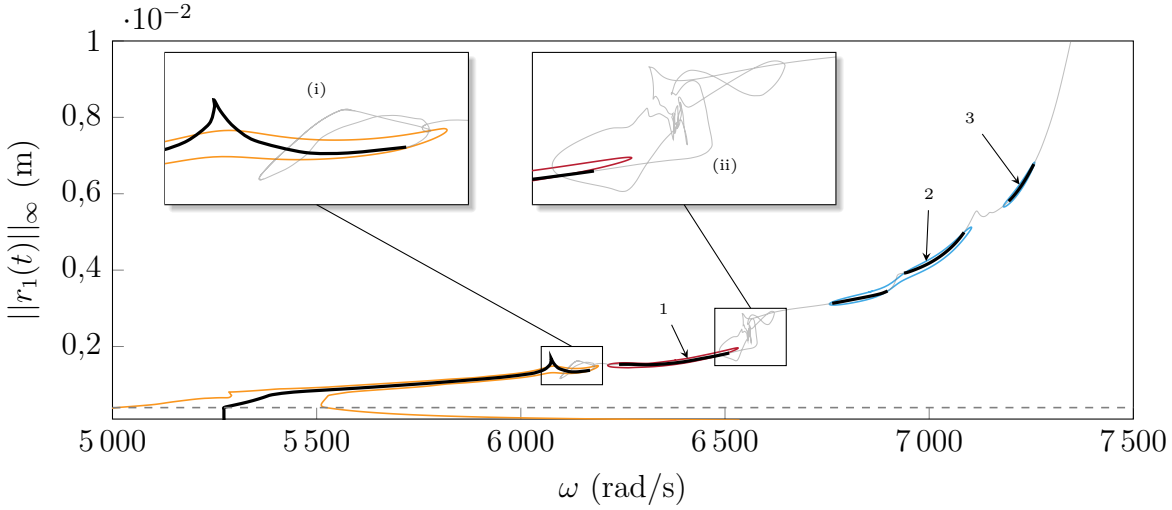


FIGURE V.30 – Analyse de Melnikov sur le rotor 37 pour $A = 550$, NNM (—), courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—) (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), c_1 (- -).

Les différentes branches isolées sont colorées différemment de manière à pouvoir les associer à la valeur seuil de A pour laquelle l'isolat fusionne avec la courbe principale. L'isolat 1 est

2. On note que l'utilisation de NNM amortis sur le modèle d'impacteur à deux degrés de liberté et le modèle de barre éléments-finis ne permet pas de s'affranchir des points singuliers. Ceci est attribué à la nature phénoménologique de ces modèles, qui se caractérise par la concentration de la dynamique de réponse sur quelques degrés de liberté.

identifié en rouge (—) car il fusionne avec la courbe principale autour de $A = 625$. Les isolats 2 et 3 sont colorés en bleu (—) et fusionnent simultanément avec la courbe principale autour de $A = 2650$. Sur la figure V.30, on identifie deux zones d'intérêt particulier le long du NNM dans les cadres (i) et (ii). Ces zones sont étudiées en détails dans la section V.3.1.3.

Les trois branches de solutions isolées identifiées sur la figure V.30 sont critiques du point de vue de la conception : toutes trois ont des amplitudes plus élevées que la résonance non linéaire de la courbe de réponse principale. Par exemple, l'amplitude maximale de réponse sur l'isolat 3 est quatre fois plus élevée que la résonance non linéaire appartenant à la courbe principale pour $A = 550$. Toutes les branches isolées sont également fortement décalées en fréquence par rapport à la résonance non linéaire principale, ce qui rend leur recherche délicate sans outils méthodologiques appropriés. Ces observations soulignent le fait que les branches isolées doivent être explicitement recherchées par des stratégies dédiées sur des modèles industriels, telles que l'analyse de Melnikov, afin de s'assurer que les critères de conception sont satisfaits sur une réponse dynamique non linéaire contenant toutes les branches isolées éventuelles.

3.1.3 Analyse énergétique du mode non linéaire

Sur la figure V.30, deux zones critiques sont identifiées sur le mode non linéaire. La première (i) se situe autour de $\omega = 6200\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ et la seconde (ii) autour de $\omega = 6550\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Dans ces zones, l'amplitude de réponse du NNM augmente subitement et ne semble plus suivre les résonances non linéaires. En dehors de ces zones, il suit à nouveau les résonances non linéaires. Ces pics d'amplitudes s'avèrent jouer un rôle dans la séparation des branches isolées car ils délimitent les plages fréquentielles associées aux différentes branches de solutions. Dans les problématiques d'existence de solutions isolées, les effets d'amortissement sont centraux puisque le terme de résistance $\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}$ — qui quantifie l'énergie linéairement dissipée sur une période — est en partie responsable de la persistance ou non de solutions d'un NNM, conformément au principe énergétique de Melnikov. En effet, lorsque la résistance augmente localement, elle crée une barrière d'énergie empêchant l'existence de solutions connectées au reste de la courbe de réponse principale. Au contraire, lorsque la résistance diminue localement, elle permet l'existence de solutions isolées en formant un puits d'énergie. Pour illustrer cette propriété, on représente sur la figure V.31 le terme de résistance et le travail du terme de forçage pour $A = 550$. La résistance est invariante avec le niveau de forçage car elle dépend uniquement de l'énergie dissipée par l'amortissement structurel sur les solutions autonomes du NNM. On retrouve notamment les deux zones critiques (i) et (ii) sur ce graphe sous la forme de pics d'énergie dissipée.

Le principe énergétique de Melnikov stipule que les solutions autonomes appartenant au NNM persistent en réponse forcée lorsque le terme de travail du forçage $\left|W^{1:1}\right|$ (—) est supérieur à la résistance $|\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}|$ (—), *i.e.* $\overline{\mathcal{M}}^{1:1} = \left|W^{1:1}\right| - |\mathcal{R}_{\mathrm{ln}}| > 0$. Plusieurs puits d'énergie sont facilement identifiables sur la figure V.31, ils sont délimités par des pics locaux de résistance empêchant les solutions d'être connectées ensemble, et notamment avec la courbe de réponse principale aux basses fréquences. Les minima locaux de ces puits d'énergie sont les lieux privilégiés d'apparition des branches isolées. Quatre minima locaux sont identifiés comme étant responsables de l'apparition de quatre isolats : 1, 2a, 2b et 3. Les minima 2a et 2b sont associés au même numéro puisqu'une seule branche isolée couvre la plage de fréquence des deux puits, comme observé sur la figure V.30. L'isolat 2 est le résultat d'une fusion entre deux branches isolées différentes 2a et 2b, distinctes à des valeurs de A plus faibles. L'examen du NNM en termes d'énergie présenté sur la figure V.31 fournit des informations cruciales sur l'existence de régions privilégiées pour la naissance de branches de solutions isolées.

Les mécanismes physiques responsables de l'apparition des pics de résistance sont étudiés

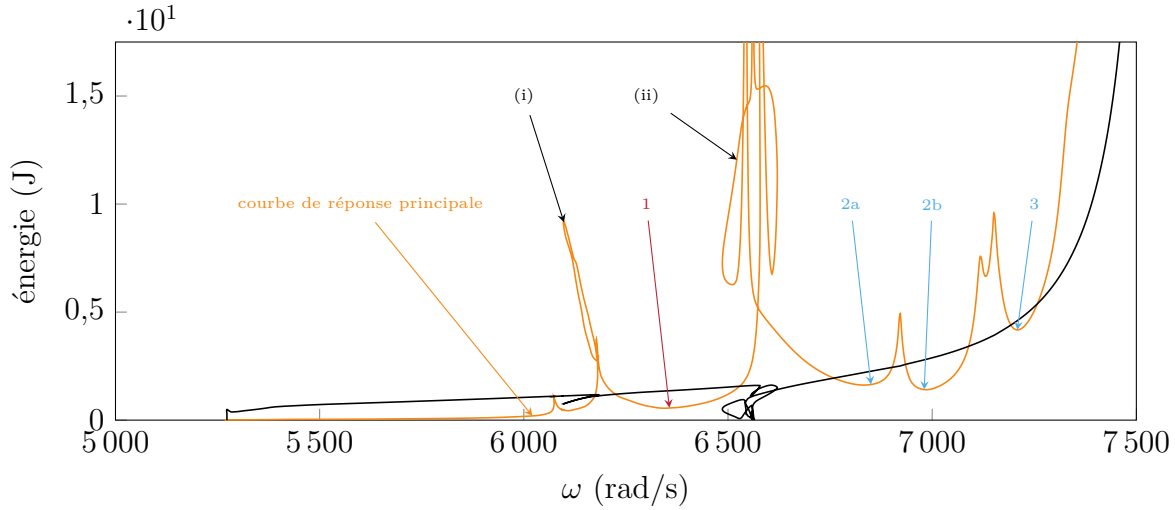


FIGURE V.31 – Contributions énergétiques le long du mode non linéaire associé au mode 1F du rotor 37, terme de travail $\left|W^{1:1}\right|$ pour $A = 550$ (—), terme de résistance $|\mathcal{R}_{\text{ln}}|$ (—).

en examinant les contributions modales relatives $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}}$ le long du NNM. L'ensemble des $n = 34$ contributions modales relatives $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}}$ sont représentées sur la figure V.32.

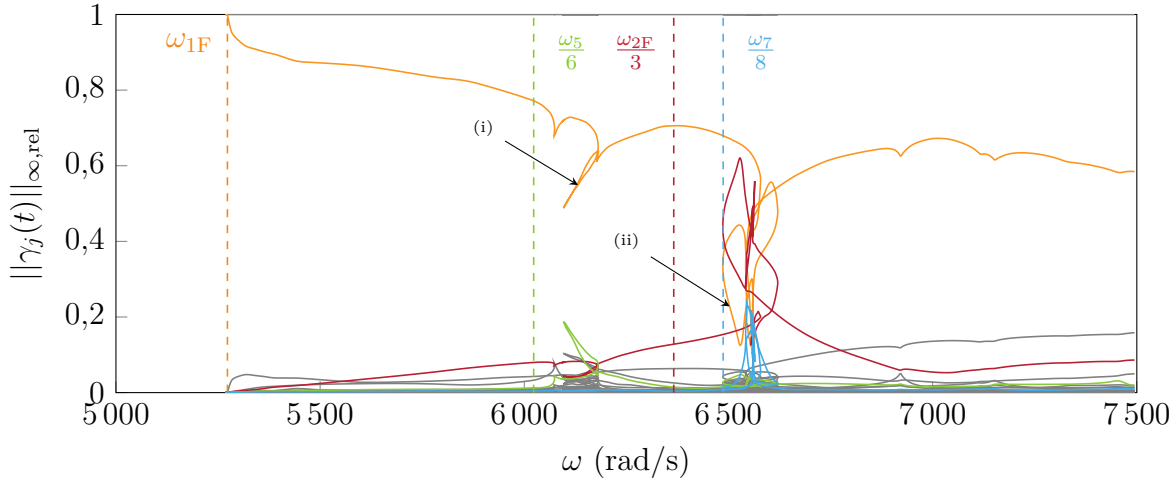


FIGURE V.32 – Contributions modales relatives le long du mode non linéaire associé au mode 1F du rotor 37, mode 1F (—), mode 2F (—), cinquième mode (—), septième mode (—), autres modes (—).

La forte contribution du mode 1F sur l'ensemble du NNM, particulièrement aux basses fréquences, confirme le fait que le NNM étudié est bien associé au premier mode de flexion. Cette contribution diminue au fur et à mesure que la pulsation ω et l'amplitude de la réponse augmentent en raison de la nature non linéaire du mode. Les deux barrières d'énergie (i) et (ii) sont identifiées sur la figure V.32. Elles sont associées à des zones de diminution soudaine de la contribution modale relative du mode 1F. Pour la première zone (i), on observe une faible diminution de la contribution modale relative du mode 1F et une augmentation simultanée de la contribution modale relative du cinquième mode. Pour la seconde zone (ii), le comportement est beaucoup plus complexe, mais des observations analogues peuvent être faites. Une forte diminution de la contribution du mode 1F est détectée en parallèle d'une augmentation significative des contributions du mode 2F et du septième mode (associé à

$\omega_7 = 51\,926{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$). Les deux zones (i) et (ii) sont également proches des fractions des fréquences propres linéaires des modes dont la contribution modale augmente soudainement ($\frac{\omega_5}{6}$ pour (i), $\frac{\omega_{2\mathrm{F}}}{3}$ et $\frac{\omega_7}{8}$ pour (ii)). Ces fractions sous-estiment les fréquences réelles auxquelles les diminutions de la contribution modale 1F se produisent parce que les fréquences propres linéaires sont utilisées pour calculer ces fréquences caractéristiques. En effet, les fréquences propres réelles sont très probablement décalées vers des fréquences plus élevées en raison d'effets non linéaires de raidissement. Ces pulsations caractéristiques jouent un rôle analogue aux points singuliers observés sur le modèle d'impacteur dans la section V.2.1.

Les observations faites sur (i) et (ii) soutiennent l'idée que les barrières d'énergie sur le terme de résistance sont associées à des interactions modales non linéaires. Le fait que les résonances non linéaires puissent être isolées de la courbe de réponse principale à cause d'interactions modales non linéaires a déjà été suggéré par Detroux *et al.* [56] et Mangussi *et al.* [110] pour des non-linéarités régulières.

Dans cette thèse, on fournit de nouveaux résultats quantitatifs en accord avec cette affirmation mais sur une non-linéarité non régulière. L'analyse du mode non linéaire responsable de la dynamique de l'aube en contact grâce au principe énergétique de Melnikov permet d'envisager le problème sous un prisme différent. Ainsi, il est possible de dégager de nouvelles propriétés du système non linéaire étudié.

3.1.4 Validation des solutions de la DLFT-HBM par intégration temporelle

Afin d'évaluer la pertinence des différentes branches de solutions périodiques isolées obtenues par la DLFT-HBM, des simulations par IT sont effectuées. On utilise l'algorithme de Carpenter pour réaliser les simulations par IT. Des conditions initiales provenant des branches issues de la DLFT-HBM sont fournies à l'intégrateur temporel, elles sont ensuite intégrées sur quatre cent périodes avec un pas de temps de $h = 2{,}5{\cdot}10^{-7}$ s et les amplitudes de réponse correspondantes (o) sont affichées sur la figure V.33.

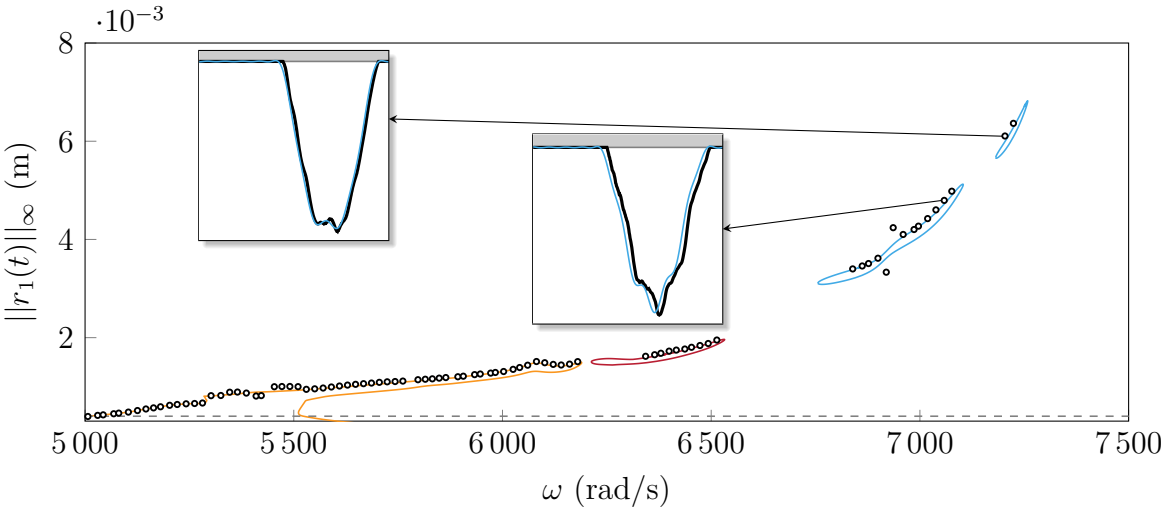


FIGURE V.33 – Validation des solutions de la DLFT-HBM pour $A = 550$ sur le rotor 37, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—) (—), solutions IT (o), c_1 (- -).

Un excellent accord est observé entre les branches de solutions périodiques calculées par la DLFT-HBM et les solutions d'IT issues de la reprise de conditions initiales. Sur la figure V.33, seules quelques solutions obtenues par IT ne restent pas sur les orbites périodiques associées à la DLFT-HBM. En fournissant des conditions initiales de la DLFT-HBM à l'intégrateur temporel,

une perturbation est appliquée aux orbites périodiques. Cette perturbation réside principalement dans la différence en termes de traitement du contact et en termes de représentation des solutions. Comme cette perturbation a disparu pour une grande proportion de solutions, on conclut que les solutions de la DLFT-HBM sont des orbites localement stables. Puisque les solutions sur les branches isolées sont obtenues par l'IT sur la figure V.33, la recherche des branches isolées dans les études non linéaires apparaît cruciale car les techniques de continuation classiques manqueraient de telles solutions.

Une analyse de stabilité dédiée [44] pourrait être effectuée afin de compléter ce travail, mais elle dépasse le cadre de cette thèse. La nature non-régulière de la loi de contact modélisée par la DLFT-HBM entraîne notamment de nombreuses difficultés dans l'utilisation des méthodologies classiques d'analyse de stabilité locale des solutions périodiques sur des modèles industriels.

3.1.5 Évolution des résonances non linéaires

De la même manière que dans la section V.2.1.5, on représente l'évolution de la résonance non linéaire tant en termes de raidissement au contact que d'amplitude maximale de réponse sur la figure V.34. La prédiction des résonances non linéaires par les analyses de Melnikov (●) est comparée aux résonances non linéaires réelles mesurées sur les courbes de réponse principales (●) pour différentes amplitudes A. Les analyses de Melnikov ont également permis de calculer les branches isolées et les résonances non linéaires associées (●) (●). Le raidissement au contact est calculé par rapport à la fréquence de résonance linéaire du mode 1F.

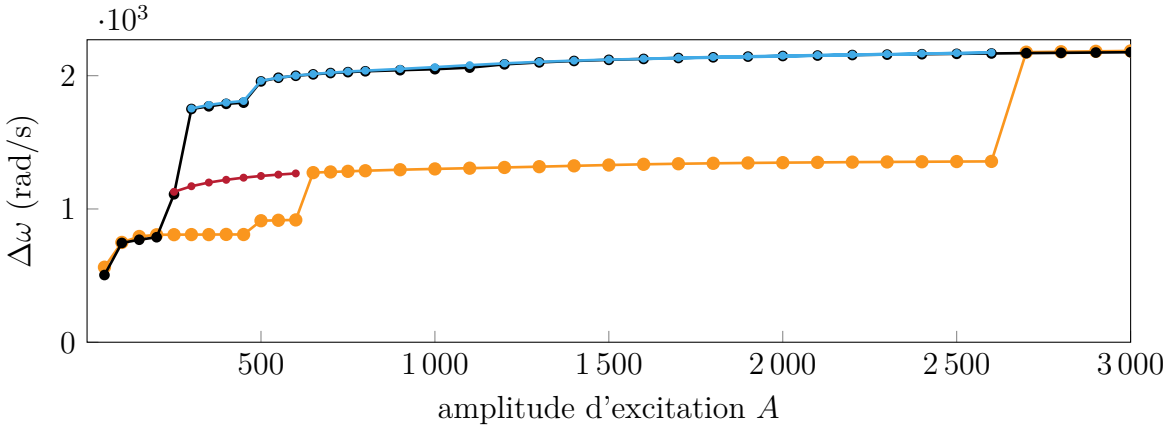
Le principe énergétique de Melnikov et les relevés des courbes de réponse principales sont en accord pour des amplitudes de forçage très faibles et très élevées, car aucune branche isolée n'existe pour ces valeurs d'amplitude. Cependant, entre ces zones, l'amplitude maximale de réponse et le raidissement au contact sont fortement sous-estimées par les techniques de continuation classiques. Cela souligne une nouvelle fois que les calculs classiques des courbes de réponse en fréquence ne donnent qu'une vue partielle de la réponse dynamique réelle du système.

Les prédictions du principe énergétique de Melnikov (●) présentent toujours des comportements discontinus. Ces discontinuités sont associées à la naissance des familles de branches isolées (●) (●). Elles apparaissent à proximité des puits d'énergie identifiés sur le NNM dans la section V.3.1.3.

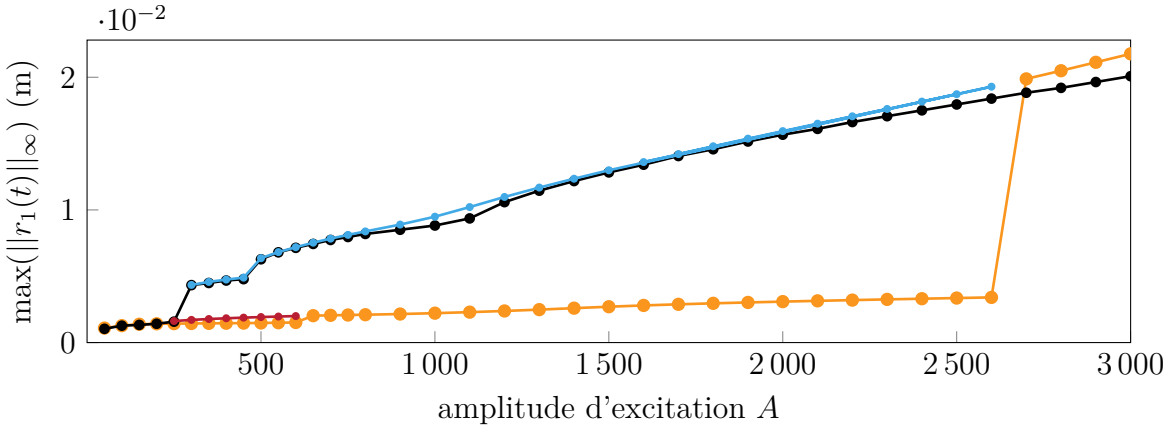
Comme dans la section V.2.1.5, les prédictions des analyses de Melnikov sont en excellent accord avec l'amplitude maximale mesurée sur les branches isolées calculées. Par conséquent, dans la configuration traitée, le calcul des branches isolées par continuation n'est pas nécessaire si les seules informations recherchées sont l'amplitude maximale et le raidissement de contact associés à la résonance non linéaire. En effet, ces informations sont directement accessibles grâce au principe énergétique de Melnikov le long du NNM.

3.1.6 Excitations surharmoniques

Dans cette section, on s'intéresse à la réponse du système sous une excitation surharmonique, c'est-à-dire lorsqu'on excite le k-ième harmonique avec $k > 1$. Ceci se rapporte à l'analyse menée sur l'impacteur à deux degrés de liberté dans la section V.2.1.8. Sur le modèle d'aube rotor 37, on excite successivement le mode 1T sur le troisième harmonique, le mode 2F sur le troisième harmonique et le quatrième mode sur le cinquième harmonique. Ces correspondances sont choisies en analysant les fractions $\omega_j/k \ \forall (j,k) \in [\![1;n]\!] \times \mathbb{N}^*$. On retient alors les fractions qui se situent dans la plage de fréquence sur laquelle s'étend le NNM 1F. De nombreuses pulsations caractéristiques ω_j/k y sont situées, néanmoins on ce concentre sur les premiers modes de la structure dans ces travaux. Dans la suite de ce manuscrit, la notation $\bullet/k$ fait



(a) raidissement au contact



(b) amplitude maximale de réponse

FIGURE V.34 – Évolution de la position de la résonance non linéaire en fonction de A pour l'aube rotor 37, courbe de réponse principale (—●—), prédiction du principe énergétique de Melnikov (—●—), première famille d'isolats (—●—), seconde famille d'isolats (—●—).

référence au NNM du mode • de pulsation fondamentale $k\omega$. Pour le j-ième mode, la pulsation linéaire associée est la fraction ω_j/k.

On rappelle que le mode 2F et le quatrième mode sont sur-amortis par rapport aux modes 1F et 1T. Pour chacune des formes modales étudiées, on représente toujours en noir (—) le NNM associé au mode 1F et en rouge (—) le NNM associé à l'excitation surharmonique.

Forme modale 1T Pour l'excitation surharmonique du mode 1T, on utilise la forme d'excitation

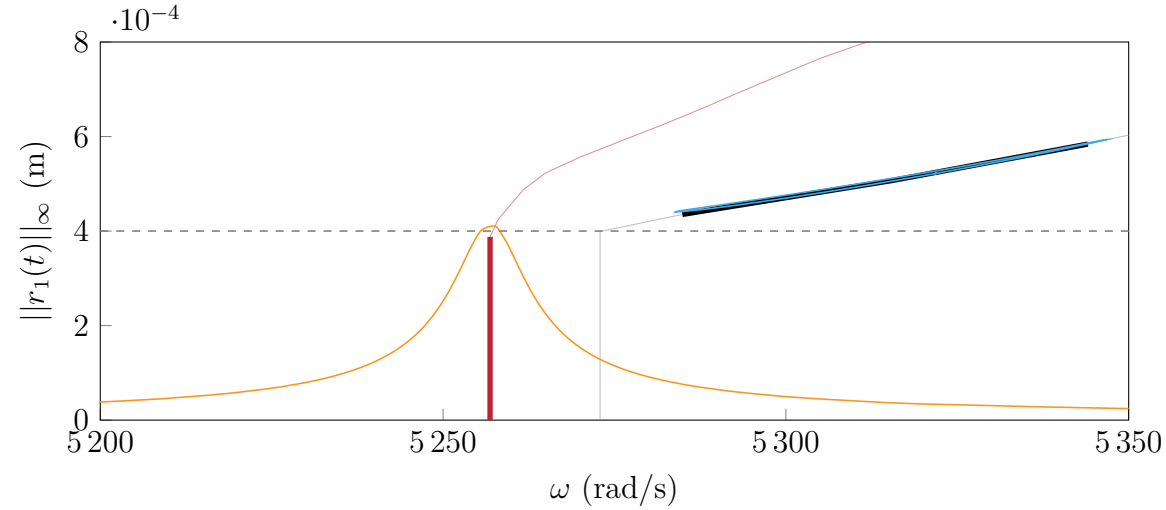
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{1\text{T}}\cos(3\omega t). \tag{V.61}$$

Par conséquent, les grandeurs utilisées pour l'analyse de Melnikov sont

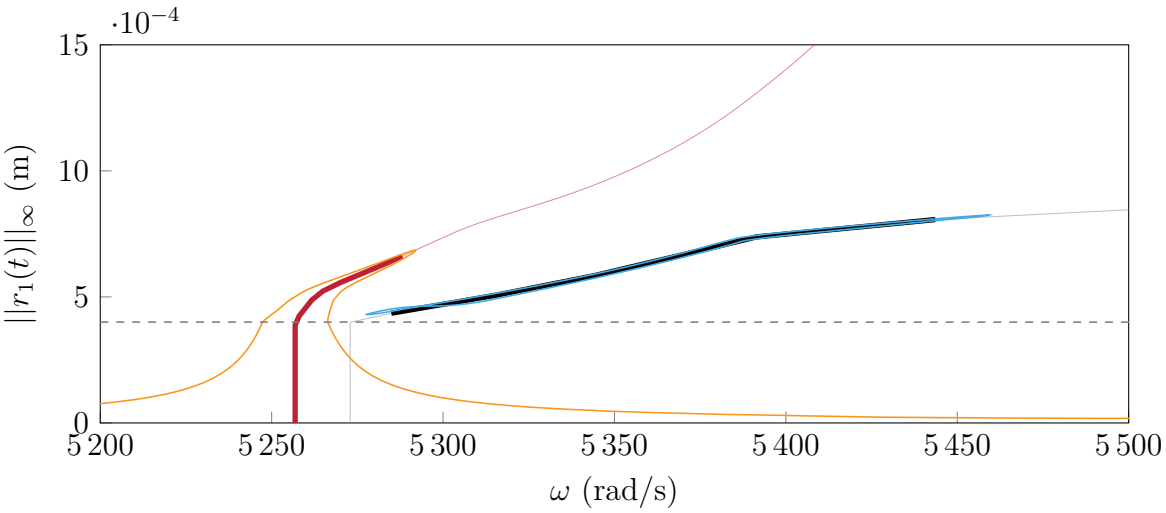
$$\overline{\mathcal{M}}^{1:3} = \left|W^{1:3}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right|, \quad W^{1:3}(A, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 3A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_3^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_3^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \text{ et } \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{1\text{T}}. \tag{V.62}$$

On représente sur la figure V.35 les résultats de deux analyses de Melnikov pour $A = 125$ et $A = 250$.

On observe sur la figure V.35a un comportement analogue à ce qui est observé sur le modèle d'impacteur dans la section V.2.1.8. Alors que la réponse du mode excité dépasse très



(a) $A = 125$



(b) $A = 250$

FIGURE V.35 – Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 1T sur le troisième harmonique sur le rotor 37, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM 1T/3 (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} < 0$) (—), c_1 (- -).

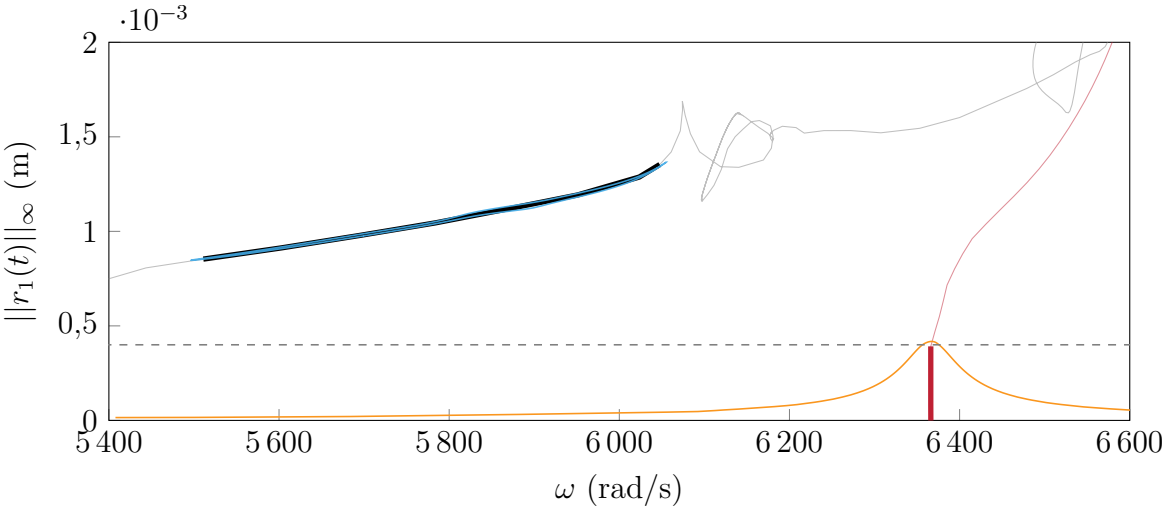
légèrement le seuil de contact c_1, un isolat est engendré par un mode non linéaire qui n'est pas directement excité. Le caractère multiharmonique de ce dernier permet au travail entre l'excitation surharmonique et le champ de déplacements de dépasser la résistance dans la zone où l'isolat existe. Ce phénomène se confirme sur la figure V.35b avec un forçage plus élevé : l'isolat engendré par le NNM 1F est encore plus étendu en termes de fréquences.

Forme modale 2F La même étude est menée sur le mode 2F avec la forme d'excitation

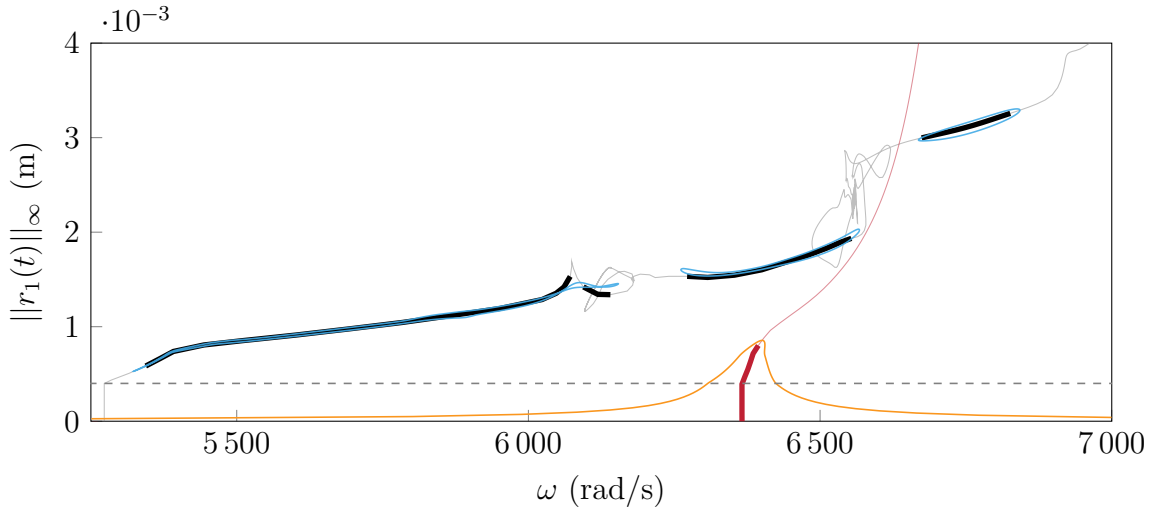
$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_{\text{2F}} \cos(3\omega t). \tag{V.63}$$

Comme on excite sur le troisième harmonique comme au paragraphe précédent, on utilise les mêmes grandeurs pour l'analyse de Melnikov. Seule la forme d'excitation est différente : $\overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_{\text{2F}}$. Compte tenu du sur-amortissement appliqué au mode 2F, il est nécessaire de

considérer une amplitude de forçage A plus importante que pour le mode 1T. On représente la réponse dynamique du système pour $A = 600$ et $A = 1200$ sur la figure V.36.



(a) $A = 600$



(b) $A = 1200$

FIGURE V.36 – Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 2F sur le troisième harmonique sur le rotor 37, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM 2F/3 (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} < 0$) (—), c_1 (- -).

Bien que le mode excité soit sur-amorti, on observe sur la figure V.36a un comportement analogue à l'excitation du mode 1T : un isolat sous-tendu par le NNM 1F existe alors que la réponse sur le mode 2F est faiblement non linéaire. Ce dernier s'étend sur une plage fréquentielle de $550\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ ce qui le rend particulièrement critique. La détection de cet isolat nécessite cependant une procédure alambiquée : on doit réaliser une analyse de Melnikov avec une excitation surharmonique sur un NNM qui n'est pas directement excité. Les études non linéaires classiques ne sont donc pas capables de mettre en lumière ce genre de phénomènes aisément. En doublant l'amplitude du forçage A, on observe sur la figure V.36b que le NNM 1F engendre trois isolats de bien plus hautes amplitudes que le mode excité.

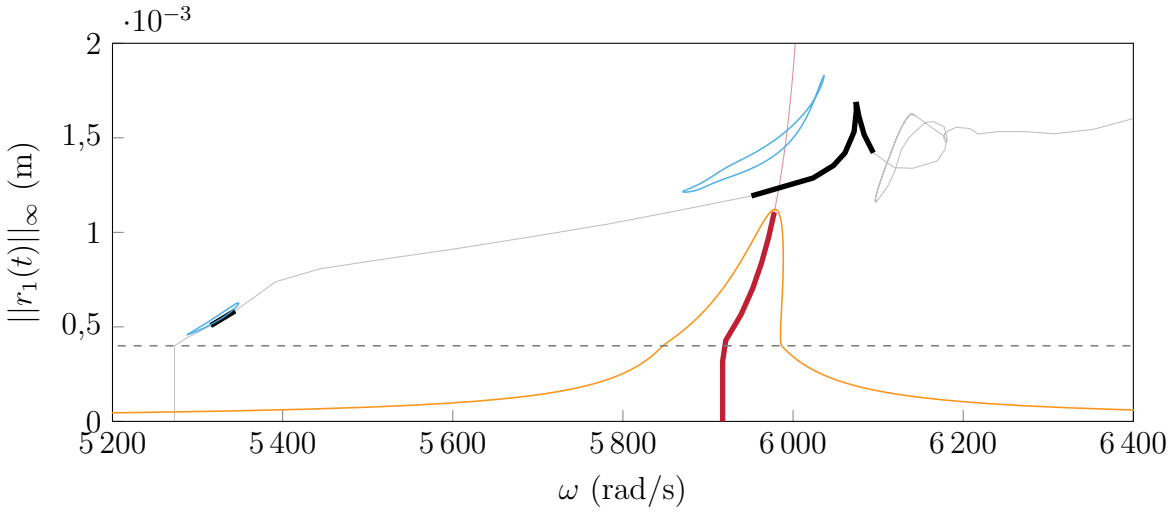
Quatrième forme modale Finalement, on étudie la réponse du système sous une excitation du quatrième mode sur le cinquième harmonique de la forme

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_4 \cos(5\omega t). \tag{V.64}$$

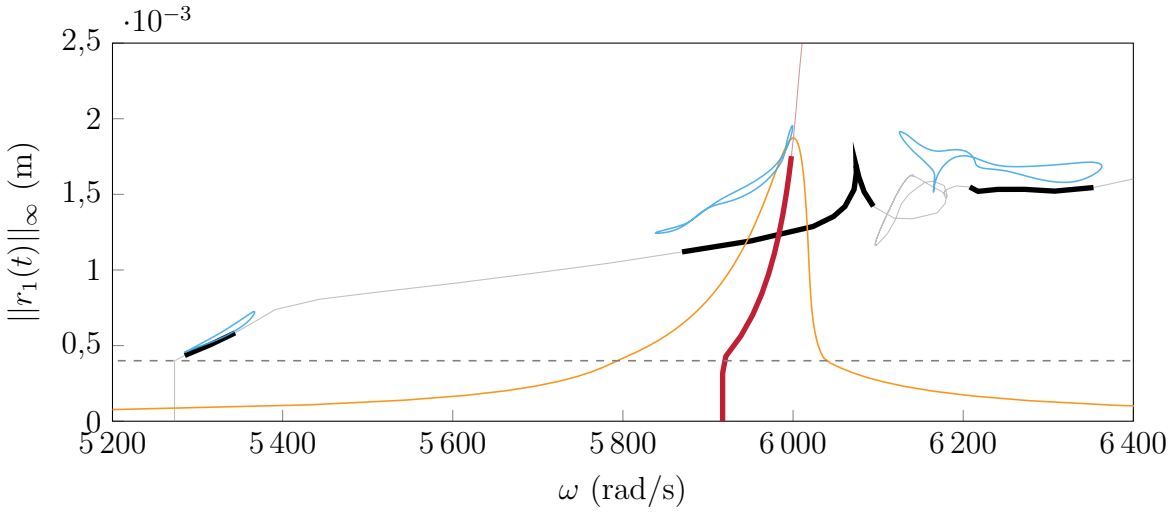
Les grandeurs liées au principe énergétique de Melnikov sont ainsi modifiées telles que

$$\overline{\mathcal{M}}^{1:5} = \left|W^{1:5}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right|, \quad W^{1:5}(A, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 5A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_5^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_5^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \text{ et } \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_4. \tag{V.65}$$

De la même manière que le mode 2F, ce mode est sur-amorti donc on doit observer la réponse dynamique du système à des niveaux d'amplitude de forçage relativement importants. Les réponses dynamiques aux niveaux $A = 1500$ et $A = 2500$ sont observés sur la figure V.37.



(a) $A = 1500$



(b) $A = 2500$

FIGURE V.37 – Analyse de Melnikov pour une excitation du quatrième mode sur le cinquième harmonique sur le rotor 37, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM 4/5 (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} < 0$) (—), c_1 (- -).

Une nouvelle fois, le NNM 1F engendre deux isolats pour $A = 1500$ sur la figure V.37a

et trois isolats pour $A = 2500$ sur la figure V.37b. Contrairement aux deux autres types d'excitation, ces isolats ne suivent pas directement la dynamique du NNM 1F. Néanmoins, ceci n'empêche pas leur détection par le principe énergétique de Melnikov.

Excitations surharmoniques (rotor 37) - bilan

Présence d'isolats en réponse forcée surharmonique Pour les trois types d'excitation, on observe un bon accord entre les analyses de Melnikov et les branches isolées obtenues par continuation. Ceci souligne la robustesse de la stratégie au type d'excitation dans un cadre hautement non linéaire avec plusieurs nœuds de contact. Les études menées dans cette section mettent toutes trois en évidence la présence de branches de solutions isolées sous-tendues par le NNM 1F qui n'est pas directement excité. Ce comportement est difficile à détecter sans étude spécifique car les branches isolées ne fusionnent pas avec la branche principale lorsque le niveau de forçage A augmente. On attribue ceci aux différences de périodicité entre la branche principale (—), de pulsation fondamentale $k\omega$ pour une excitation sur le k-ième harmonique, et les branches isolées (—) de pulsation fondamentale ω, héritée du NNM 1F.

Excitations réelles dans les turbomachines Dans un contexte industriel, les excitations que subissent les aubes sont bien plus complexes que dans le cas d'étude présenté. En effet, les excitations aérodynamiques ne coïncident généralement pas avec une forme modale particulière et sont multi-harmoniques en relation avec les nombres d'aubes des roues adjacentes et les vitesses des différents corps de la machine. Ainsi, on s'attend à ce qu'un grand nombre de NNM, surharmoniques ou non, soient excités simultanément, ce qui favorise l'apparition de phénomènes complexes en présence de contact aube/carter.

3.2 Aube NASA rotor 67 avec frottement

Dans cette section, on caractérise l'aube de soufflante du NASA rotor 67, déjà présentée dans la section IV.3, en réponse forcée. La configuration de contact est similaire au cas traité dans la section V.3.1 dédiée au rotor 37 sans frottement : on initie le contact par un forçage selon le mode 1F sur le premier harmonique avec une amplitude A variable tel que

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{\text{1F}}\cos(\omega t). \tag{V.66}$$

Pour cette étude, sauf mention contraire, on emploie l'expression de la fonction de Melnikov $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$. Le carter est considéré comme un profil circulaire rigide et le jeu initial entre les nœuds frontières ($n_{\text{b}} = 9$) et le carter est $c_j = 4{\cdot}10^{-4}\,\text{m}\ \forall j \in [\![1; n_{\text{b}}]\!]$. Contrairement à l'étude sur le rotor 37, on prend en compte le efforts de frottement dans les simulations. Le coefficient de frottement choisi est $\mu = 0{,}15$, le taux d'amortissement modal des modes 1F et 2F est $\xi_{1-2} = 1{\cdot}10^{-3}$ et le taux d'amortissement des modes suivants est $\xi_{3+} = 5{\cdot}10^{-3}$. Comme pour les autres applications de ce chapitre, on note que les formes modales $\boldsymbol{\Phi}_\bullet$ sont toutes $\mathbf{M}$-orthonormalisées.

3.2.1 Application du principe énergétique de Melnikov

Une analyse dynamique du système est effectuée pour une amplitude de forçage de $A = 140$. Le NNM du système associé au mode 1F est calculé par la méthode de mode complexe non linéaire pour réaliser l'analyse de Melnikov. Pour les simulations HBM, on emploie la DLFT-HBM avec $N_{\text{h}} = 10$ harmoniques, $N_{\text{t}} = 512$ instants et le paramètre ε est fixé à $\varepsilon = 1{\cdot}10^{7}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$. On représente sur la figure V.38 les termes de la fonction de Melnikov $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$. On retrouve les caractéristiques mises en évidences sur le rotor 37 sans frottement dans la section V.3.1 : plusieurs puits d'énergie sont délimités par des pics de résistance. Comme pour les applications précédentes, on agrège l'information liée au principe énergétique de Melnikov sur les NNM. La réponse dynamique de l'aube associée à l'amplitude $A = 140$ est représentée sur la figure V.39.

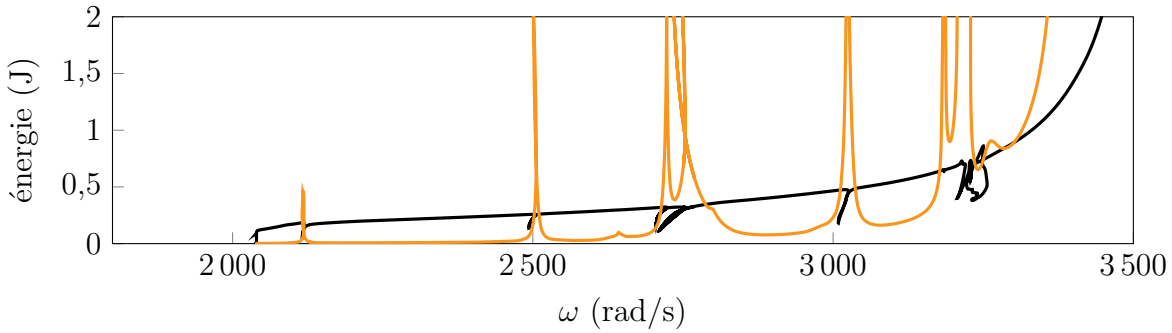


FIGURE V.38 – Principe énergétique de Melnikov pour $A = 140$ sur le rotor 67, résistance $|\mathcal{R}_{\text{ln}}| + |\mathcal{R}_{\text{nl}}|$ (—), terme de travail $\left|W^{1:1}\right|$ (—).

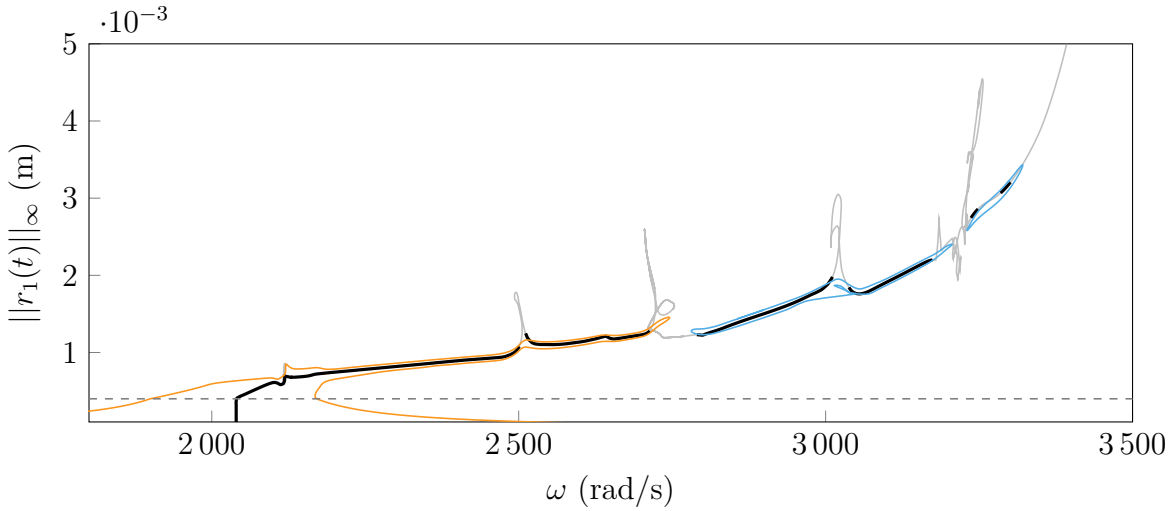


FIGURE V.39 – Réponse en fréquence du rotor 67 pour $A = 140$, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—), NNM 1F (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), c_1 (- -).

Au total, on identifie six portions non contiguës du NNM pour lesquelles le principe énergétique prédit une persistance de solutions périodiques. On remarque sur la figure V.39 que les deux premières portions correspondent à la courbe de réponse principale obtenue par la DLFT-HBM (—). Les quatres portions restantes correspondent à des pulsations ($\omega \geq 2750\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et des amplitudes ($\|r_1(t)\|_\infty \geq 1{,}5\,\text{mm}$) beaucoup plus importantes. Deux branches de solutions isolées (—) sont obtenues dans ces zones. La branche isolée associée aux plus fortes amplitudes correspond à deux petites zones de persistance et n'est pas identifiée avec le même niveau de précision que l'autre branche de solutions isolées. Ce léger écart est attribué au fait que le terme de résistance représenté sur la figure V.38 présente de petites oscillations à proximité de $\omega = 3250\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ qui font osciller $\overline{\mathcal{M}}^{1:1}$ autour de zéro.

En examinant de plus près les résultats, on observe de petites différences entre le principe énergétique de Melnikov et les branches calculées par la DLFT-HBM. En particulier, alors que le principe énergétique de Melnikov prédit six portions distinctes de persistance le long du NNM — ce qui suggère que cinq branches de solutions isolées existent en plus de la courbe de réponse principale —, on trouve seulement deux isolats. Ces écarts n'empêchent pas la détection

des branches isolées et l'accord entre la prédiction du principe énergétique de Melnikov et les branches calculées par continuation demeure excellent. Il est intéressant de noter que les parties du NNM sur lesquelles on s'attend à trouver des solutions sont toutes séparées par des pics locaux d'amplitudes le long du NNM, de la même manière que dans la section V.3.1. Les pics le long du NNM — qui se traduisent par des pics de résistance sur la figure V.38 — sont responsables du fait que le principe énergétique de Melnikov prédise une interruption de la persistance de solutions.

3.2.2 Validation des solutions de la DLFT-HBM par intégration temporelle

Afin d'évaluer la pertinence physique des solutions appartenant aux branches isolées de la figure V.39, on réalise des simulations par IT sur toute la plage de pulsations considérée. On intègre les conditions initiales issues des solutions de la DLFT-HBM sur cent périodes par l'algorithme de Carpenter.

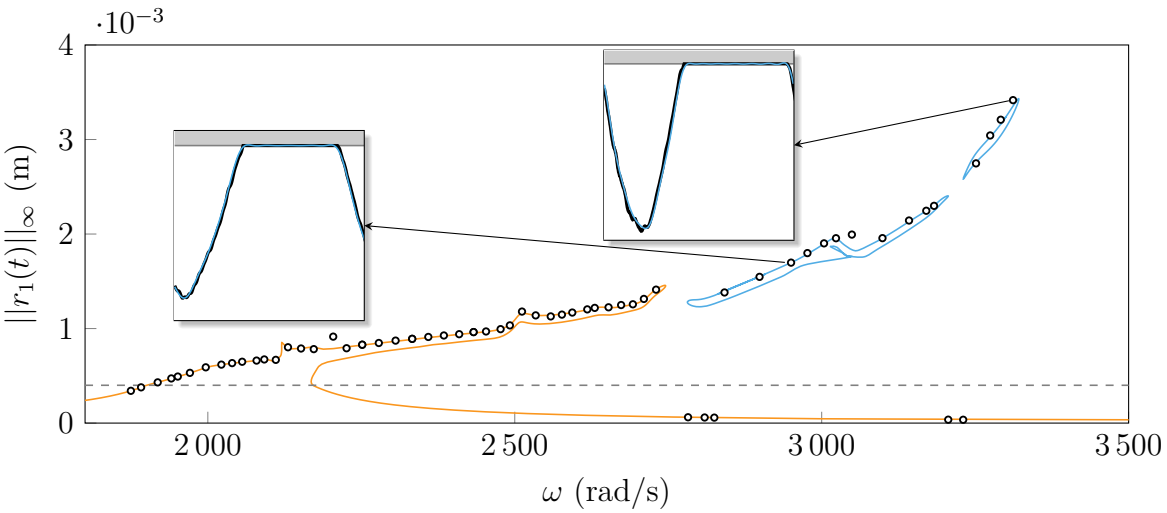


FIGURE V.40 – Validation des solutions de la DLFT-HBM par IT pour $A = 140$, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—), IT (○), c_1 (- -). Graphes de déplacements : DLFT-HBM (—), IT (—), carter (▭).

Presque toutes les simulations obtenues par IT représentées sur la figure V.40 restent sur les mêmes orbites périodiques que les solutions de la DLFT-HBM. Pour les raisons déjà mentionnées dans ce manuscrit concernant la reprise de conditions initiales par IT, il est supposé que, si les solutions intégrées sur un nombre important de périodes restent sur la même orbite périodique que celle des conditions initiales, alors ces solutions sont considérées localement stables. Étant donné que la plupart des solutions représentées sur la figure V.40 sont prédites stables, elles sont d'une importance critique du point de vue du dimensionnement des aubes.

De plus, il est également observé dans les cadres de la figure V.40 qu'un excellent accord est atteint entre les solutions IT et DLFT-HBM dans le domaine temporel. Ceci fournit une confirmation *a posteriori* que les paramètres numériques de la DLFT-HBM ont été correctement choisis pour la caractérisation de cette configuration non linéaire.

3.2.3 Discontinuité de résonance

Afin d'analyser plus en détails la dynamique de l'aube, de multiples calculs en réponse forcée sont conduits pour des valeurs de $A = 20$ à $A = 120$ par pas de 20. L'ensemble des

courbes de réponse principales sont représentées sur la figure V.41.

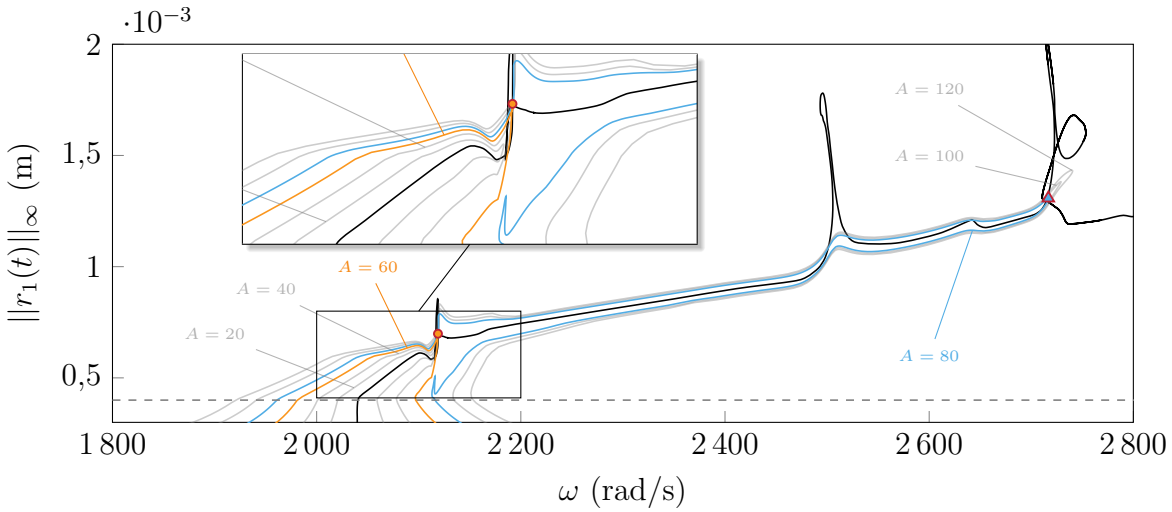


FIGURE V.41 – Courbes de réponse principales de $A = 20$ à $A = 120$ pour le rotor 67, $A = 60$ (—), $A = 80$ (—), $A \in \{20; 40; 100; 120\}$ (—), NNM (—), résonance pour $A = 60$ (●), résonance pour $A = 80$ (▲), c_1 (- -).

Tout d'abord, on voit que le NNM du système décrit précisément l'épine dorsale des courbes de réponse. Ceci n'est pas vrai dans certaines plages où des pics d'amplitude sont observés, comme discuté dans la section V.3.2.1.

En examinant la courbe de réponse principale obtenue pour chaque valeur de A, on constate une augmentation soudaine de la fréquence de résonance non linéaire entre $A = 60$ (—) et $A = 80$ (—). En effet, la courbe de réponse principale calculée pour $A = 80$ contient des solutions de grandes amplitudes pour des pulsations allant jusqu'à $2700\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (▲), tandis que le maximum d'amplitude pour $A = 60$ est atteint autour de $\omega = 2100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (●). Ces résultats préliminaires indiquent que la valeur de la fréquence de résonance non linéaire prédite par la DLFT-HBM présente une discontinuité par rapport à A, comme pour les modèles traités précédemment dans ce manuscrit.

3.2.4 Branches de solutions isolées

Dans cette section, on s'intéresse à la discontinuité observée dans la section V.3.2.3 en appliquant le principe énergétique de Melnikov pour $A = 60$. Les résultats sont représentés sur la figure V.42.

En plus d'une partie du NNM correspondant à la courbe de réponse principale (—), le principe énergétique de Melnikov met en évidence quatre zones de persistance supplémentaires — marquées 2, 3, 4 et 5 sur la figure V.42 — où des solutions sont attendues. On trouve trois branches de solutions isolées (—) associées à ces zones. La première branche de solutions isolées inclut les portions numérotées 2 et 3, tandis que les deux autres branches isolées correspondent respectivement aux portions 4 et 5.

Ainsi, la figure V.42 permet une meilleure compréhension de la discontinuité de la fréquence de résonance non linéaire observée dans la section V.3.2.3. En effet, il semble que lorsque A augmente, la branche de solutions isolées associées aux portions 2 et 3 à $A = 60$ se connecte à la courbe de réponse principale. Du point de vue de la DLFT-HBM, étant donné qu'un algorithme de continuation standard est utilisé — et qu'aucune branche de solutions isolées n'est calculée —, cela implique une augmentation soudaine de la fréquence de résonance non

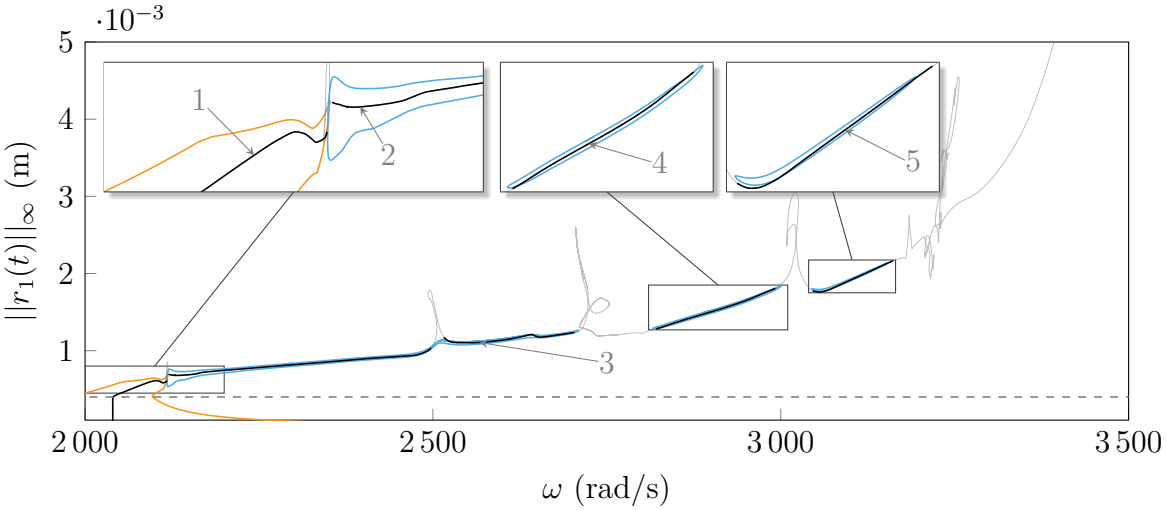


FIGURE V.42 – Application du principe énergétique de Melnikov pour $A = 60$, courbe de réponse principale (—), branches de solutions isolées (—), NNM 1F (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:1} < 0$) (—), c_1 (- -).

linéaire. Ce phénomène a déjà été observé sur les modèles phénoménologiques et industriels respectivement dans les sections V.2 et V.3.1.

L'utilisation d'un NNM amorti, au lieu d'un NNM conservatif, comme proposé par Cenedese et Haller [38], permet à nouveau d'identifier avec précision les zones où des solutions persistent en réponse forcée. Cette observation permet de considérer une plus grande variété de stratégies numériques pour le calcul des familles de solutions autonomes [90, 101] nécessaires à l'application du principe énergétique de Melnikov.

3.2.5 Évolution de la résonance non linéaire avec l'amplitude d'excitation

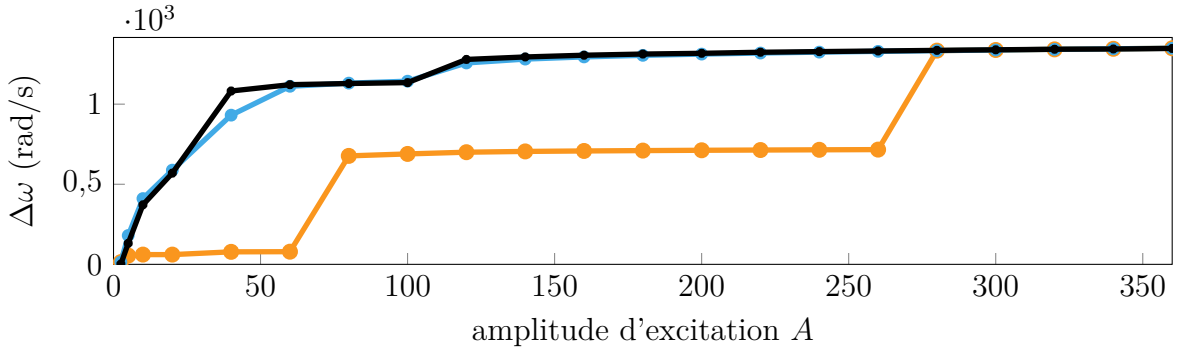
Afin de faire le bilan des performances de la stratégie de détection d'isolats sur cette application, on représente sur la figure V.43 l'évolution du phénomène de raidissement au contact (par rapport au mode 1F) et l'amplitude maximale de réponse mesurée pour différentes valeurs de A.

Comme on peut le voir sur la figure V.43, cette comparaison souligne que l'utilisation classique de la DLFT-HBM avec un algorithme de continuation par longueur d'arc ne parvient pas à prédire avec précision la fréquence de résonance non linéaire réelle et l'amplitude de réponse maximale lorsque la résonance non linéaire est isolée.

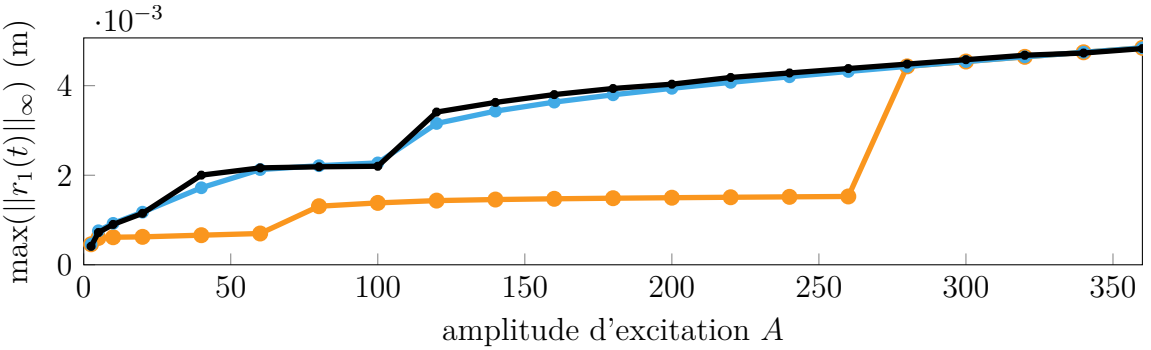
L'application seule du principe énergétique de Melnikov permet de faire une estimation peu coûteuse, mais précise, des fréquences de résonance non linéaire pour l'application traitée. Une estimation plus fine peut être obtenue en calculant les branches de solutions isolées associées (-●-). Néanmoins, l'obtention de ces branches est associée à un coût de calcul non négligeable.

3.2.6 Influence de l'amortissement

Le terme de résistance $\mathcal{R}_{\ln}(\mathbf{x}_c) = \int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}}_c(t+\tau), \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_c(t+\tau)\rangle \mathrm{d}\tau$ est directement lié à la matrice d'amortissement $\mathbf{C}$. Cette dernière est calculée grâce aux valeurs des taux d'amortissement



(a) raidissement au contact



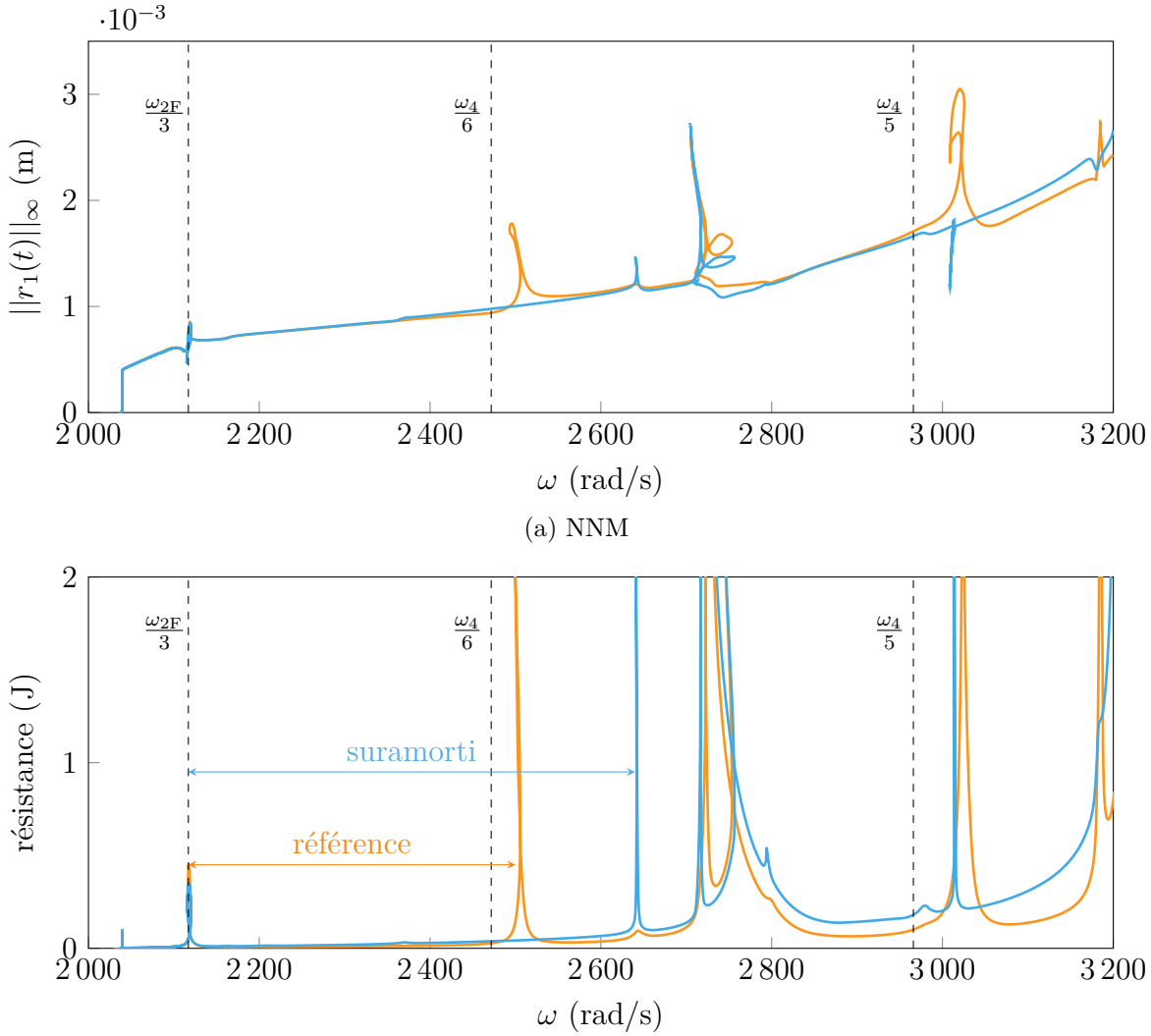
(b) amplitude maximale de réponse

FIGURE V.43 – Évolution de la résonance non linéaire par rapport à A pour le rotor 67, courbe de réponse principale (-●-), principe énergétique seul (-●-), résonance non linéaire avec isolats (-●-).

modaux définis pour chaque mode. Il est alors possible de les ajuster numériquement afin d'observer comment la courbe de résistance en dépend en lien avec les propriétés du NNM. On peut noter que, puisque des NNM amortis sont utilisés dans ces travaux, le calcul d'un nouveau NNM est nécessaire à chaque fois que les taux d'amortissement sont modifiés.

À titre d'illustration, l'influence du taux d'amortissement modal du quatrième mode, dont la fréquence propre est $\omega_4 = 14\,830\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, est évaluée. Le résultat de cette étude est représenté sur la figure V.44.

En augmentant le taux d'amortissement modal du quatrième mode à $\xi_4 = 0{,}5$, le mode est complètement filtré. Ceci a pour conséquence d'atténuer deux pics d'amplitude le long du NNM au voisinage de $\omega = \frac{\omega_4}{5}$ et $\omega = \frac{\omega_4}{6}$, comme illustré sur la figure V.44a. L'hypothèse selon laquelle les pics le long du NNM sont causés par des interactions modales non linéaires est confirmée, comme montré dans la section V.3.1 et comme suggéré dans la littérature [56, 110]. En outre, l'évolution du terme de résistance est représentée sur la figure V.44b où l'on voit que les pics de résistance proches de $\frac{\omega_4}{5}$ et $\frac{\omega_4}{6}$ sont également fortement atténués de sorte que les barrières d'énergie ont presque disparu. On observe sur la figure V.44b que, même si de nouveaux pics — plus petits et plus étroits — sont apparus plus loin sur la courbe, le puits d'énergie associé à la barrière autour de $\omega = \frac{\omega_4}{6}$ s'est significativement élargi. Son agrandissement est mesuré par rapport à la pulsation $\omega = \frac{\omega_{2\text{F}}}{3}$ correspondant à l'interaction modale non linéaire à $2114{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ qui cause un pic de résistance. Sans la procédure de détection de branches isolées proposée, cette observation pourrait être considérée comme néfaste car le phénomène de raidissement de la résonance est accru par le filtrage du quatrième mode. Cependant, en analysant la courbe de résistance de la figure V.44b, on voit que l'augmentation de ξ_4 affecte



(a) NNM

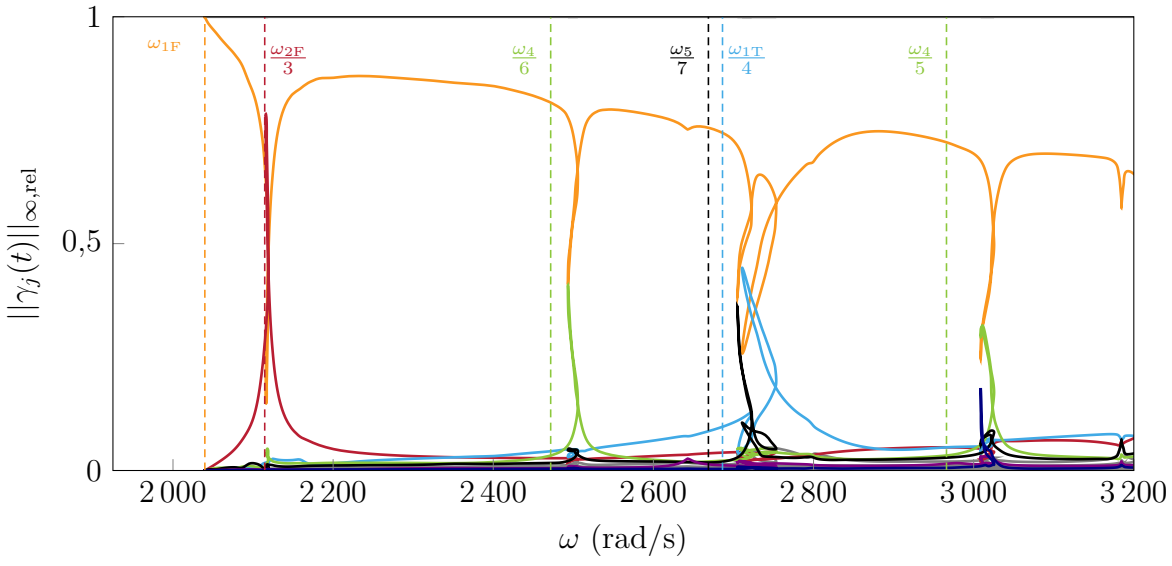
(b) résistance

FIGURE V.44 – Influence du taux d'amortissement du quatrième mode, $\xi_4 = 5{\cdot}10^{-3}$ (—), $\xi_4 = 0{,}5$ (—).

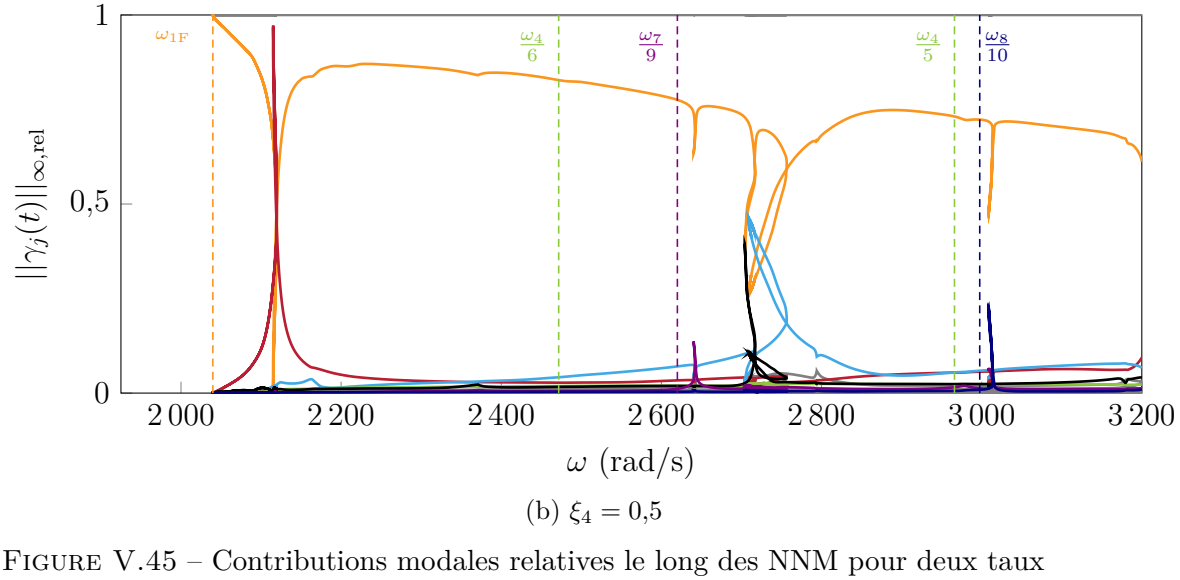
seulement la connectivité des branches de solutions. Les solutions associées à l'augmentation du raidissement au contact existent déjà et sont isolées pour $\xi_4 = 5{\cdot}10^{-3}$. Par conséquent, il n'y a aucun impact sur le raidissement au contact lui-même mais seulement sur la façon dont sont connectées les différentes branches de solutions entre elles.

Des investigations supplémentaires sont menées afin d'expliquer pourquoi les deux pics de résistance, *a priori* attribués au quatrième mode, subsistent même si l'influence de ce mode est atténuée par l'augmentation de son taux d'amortissement. Les $n = 39$ contributions modales relatives $||\gamma_j(t)||_{\infty,\text{rel}}$ sont représentées sur la figure V.45 le long des NNM pour chacun des taux d'amortissement modaux ξ_4 considéré.

L'analyse de la figure V.45 révèle que tous les pics de la courbe de résistance observés sur la figure V.44b et de la courbe d'amplitude du NNM sur la figure V.44a peuvent être attribués à une diminution soudaine de la contribution du mode 1F sur la figure V.45. Chaque baisse est également associée à une augmentation de la contribution d'un autre mode. Ce phénomène est le même que celui qui est observé pour le rotor 37 dans la section V.3.1. Ces changements de dynamique se produisent à proximité des fréquences associées aux fractions de la fréquence



(a) $\xi_4 = 5{\cdot}10^{-3}$



(b) $\xi_4 = 0{,}5$

FIGURE V.45 – Contributions modales relatives le long des NNM pour deux taux d'amortissement ξ_4, 1F mode (—), mode 2F (—), mode 1T (—), quatrième mode (—), cinquième mode (—), septième mode (—), huitième mode (—), autres modes (—).

propre linéaire des modes qui présentent un pic de contribution. Les fréquences propres linéaires sous-estiment cependant les fréquences des interactions modales non linéaires car tous les modes sont raidis en raison des interactions de contact. En utilisant un taux d'amortissement plus élevé pour le quatrième mode $\xi_4 = 0{,}5$, les chutes de la contribution du mode 1F autour des fractions de ω_4 présentes sur la figure V.45a sont annihilées sur la figure V.45b, où le quatrième mode est largement sur-amorti. Cependant, les septième (—) et huitième (—) modes — respectivement associés à $\omega_7 = 23\,579{,}1\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$ et $\omega_8 = 29\,975{,}8\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$ — présentent maintenant des pics de contributions. Ceci explique pourquoi deux pics de résistance existent toujours sur la figure V.44b après que le quatrième mode ait été amorti. D'autres modes ont pris le pas dans la réponse dynamique du système et les pics de résistance sont associés à d'autres modes de la structure.

Ces observations appuient donc une nouvelle fois l'hypothèse selon laquelle les interactions modales non linéaires sont responsables de la séparation de branches de solutions de la courbe de réponse principale sur cette application hautement non linéaire.

3.2.7 Excitations surharmoniques

Dans cette section, on s'intéresse à la réponse de l'aube rotor 67 en contact avec frottement lorsqu'elle est excitée par un effort surharmonique, de la même manière que dans les sections V.2.1.8 et V.3.1.6. Trois formes d'excitations sont étudiées : la forme modale 2F sur le troisième harmonique, la forme modale 1T sur le quatrième harmonique ainsi qu'une forme aléatoire sur le cinquième harmonique. On redéfinit les grandeurs liées au principe énergétique de Melnikov pour chaque type d'excitation dans leur paragraphe respectif. Les formes d'excitation sont choisies en examinant les contributions modales du NNM 1F représentées sur la figure V.45a. En effet, lorsque les solutions du NNM 1F ont une forte contribution du j-ième mode autour d'un ratio ω_j/k, l'excitation de la j-ième forme modale sur le k-ième harmonique aura tendance à faire répondre le NNM 1F dans ces zones. Ceci se rapporte notamment au calcul du terme de travail dans le principe énergétique de Melnikov qui fait intervenir la composante liée à la fréquence d'excitation de la structure, *i.e.* les coefficients de Fourier du k-ième harmonique. Afin d'illustrer cette propriété du NNM 1F, on représente sur la figure V.46 les contributions harmoniques relatives $||c_{k,1}||_{\text{rel}}\ \forall k \in [\![1; N_\text{h}]\!]$ du degré de liberté $r_1(t)$ correspondant au déplacement radial du bord d'attaque. Pour ce degré de liberté, numéroté par l'indice 1, les contributions harmoniques relatives sont calculées grâce à l'expression

$$||c_{k,1}||_{\text{rel}} = \frac{c_{k,1}}{\sum_{i=1}^{N_\text{h}} c_{i,1}} \text{ avec } c_{k,1} = \sqrt{a_{k,1}^2 + b_{k,1}^2} \quad \forall k \in [\![1; N_\text{h}]\!]. \tag{V.67}$$

Pour faciliter la lecture de la figure V.46, on utilise un code couleur basé sur les contributions modales représentées sur la figure V.45a. Comme chacun des modes impliqués dans une interaction modale non linéaire n'interagit qu'avec un seul harmonique, on associe la couleur du mode à l'harmonique sur lequel il répond principalement. Seul le quatrième mode déroge à cette observation : deux harmoniques interagissent avec lui sur la plage de fréquences. Pour remédier à cela on utilise deux nuances de vert (—) (—) pour identifier les harmoniques sur lesquels il répond.

Sur la figure V.46, on observe que chaque augmentation de contribution modale pour un mode autour d'une fraction de sa fréquence propre ω_j/k observée sur la figure V.45a est associée à un amplification soudaine de la contribution harmonique relative du k-ième harmonique. Naturellement, ceci s'accompagne d'un accroissement du terme de travail de la fonction de Melnikov de l'harmonique en question $W^{1:k}$. Pour une excitation monoharmonique sur le k-ième harmonique, ce terme se met sous la forme

$$W^{1:k}(A, \bar{\mathbf{f}}_\text{ex}) = kA\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_k^\text{c}, \bar{\mathbf{f}}_\text{ex}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_k^\text{c}, \bar{\mathbf{f}}_\text{ex}\rangle^2} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_\text{ex}(t) = A\bar{\mathbf{f}}_\text{ex}\cos(k\omega t). \tag{V.68}$$

Forme modale 2F sur le troisième harmonique La forme de l'excitation utilisée pour l'étude de l'excitation surharmonique de la deuxième forme modale de flexion $\mathbf{\Phi}_\text{2F}$ est

$$\mathbf{f}_\text{ex}(t) = A\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_\text{2F}\cos(3\omega t). \tag{V.69}$$

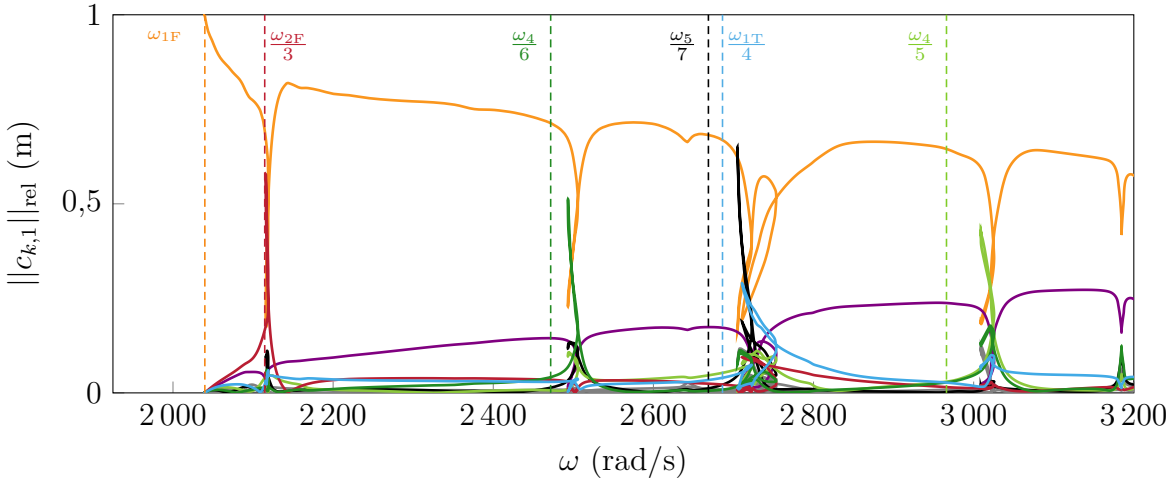


FIGURE V.46 – Contributions harmoniques relatives du NNM 1F au bord d'attaque sur le rotor 67, harmonique : 1 (—), 2 (—), 3 (—), 4 (—), 5 (—), 6 (—), 7 (—), 8, 9, 10 (—).

Les grandeurs liées au principe énergétique de Melnikov s'écrivent alors

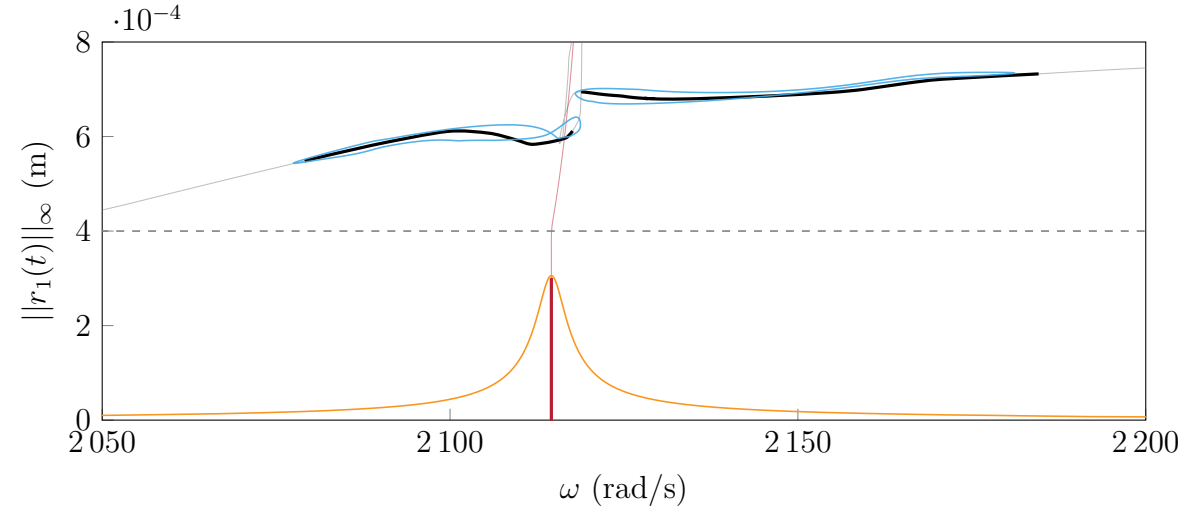
$$\overline{\mathcal{M}}^{1:3} = \left|W^{1:3}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{nl}}\right|, \quad W^{1:3}(A, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 3A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_3^{\text{c}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_3^{\text{c}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \text{ et } \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{2\text{F}}. \tag{V.70}$$

Les résultats de deux analyses de Melnikov pour $A = 30$ et $A = 100$ sont représentés sur la figure V.47.

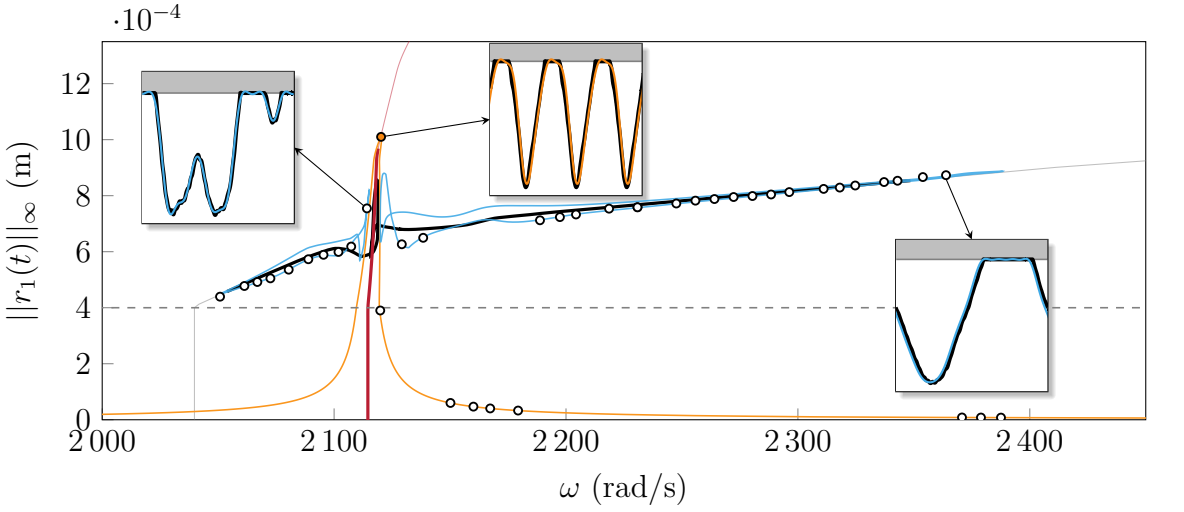
Premièrement, on observe sur la figure V.47a l'existence de branches de solutions isolées sous-tendues par le NNM 1F alors que le mode excité est linéaire. Ce comportement a déjà été observé dans ce manuscrit sur le modèle d'impacteur et l'aube rotor 37 en l'absence de frottement. Néanmoins, la configuration de contact traitée ici prend en compte le frottement et constitue l'application la plus complète de ces travaux. Ainsi, on voit que ce comportement est mis en évidence à tous les niveaux de complexité de modélisation étudiés. Comme discuté pour le modèle d'aube rotor 37, ce phénomène est causé par le fait que les solutions du NNM soient multimodales et multiharmoniques. Sur la figure V.47b, l'amplitude de forçage A est augmentée et on observe que les isolats mis en évidence sur la figure V.47a occupent maintenant une plage fréquentielle de $350\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ alors que la résonance principale du mode excité présente une réponse non linéaire seulement sur une plage de $10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Bien que la différence de périodicité entre la réponse principale (synchrone avec le quatrième harmonique) et les branches isolées (synchrones avec le premier harmonique) puisse être un frein au saut d'une branche à l'autre, il convient de vérifier la stabilité des solutions appartenant aux branches isolées. Une reprise de conditions initiales par IT pendant mille périodes permet de mettre en lumière le fait que de nombreuses solutions appartenant aux branches isolées sont stables. Afin de témoigner de la différence de périodicité entre les branches isolées et la courbe de réponse principale, un point d'IT supplémentaire est calculé proche de la résonance non linéaire principale. L'ensemble des observations faites sur cette application témoigne une nouvelle fois de la criticité du phénomène de réponse sous-harmonique mis en évidence dans ces travaux.

Forme modale 1T sur le quatrième harmonique Dans un second temps, on observe la réponse du système à une excitation de sa forme modale 1T sur le quatrième harmonique :

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{1\text{T}}\cos(4\omega t). \tag{V.71}$$



(a) $A = 30$



(b) $A = 100$

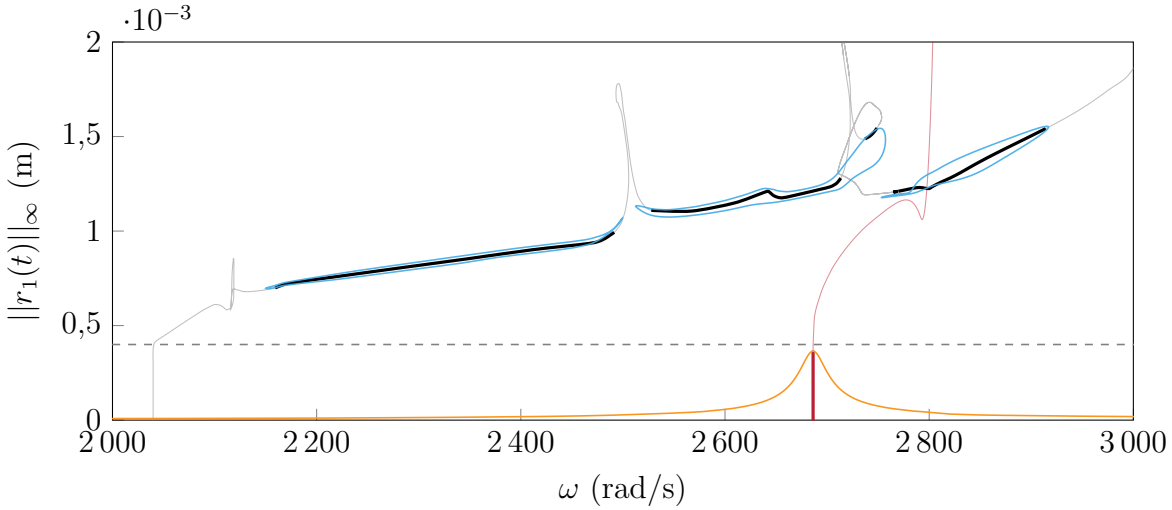
FIGURE V.47 – Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 2F sur le troisième harmonique, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM 2F/3 (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:3} < 0$) (—), c_1 (- -), simulations IT (o). Graphes de déplacements : DLFT-HBM (—) (—), IT (—), carter (▭).

Par conséquent, les grandeurs associées au principe énergétique de Melnikov deviennent

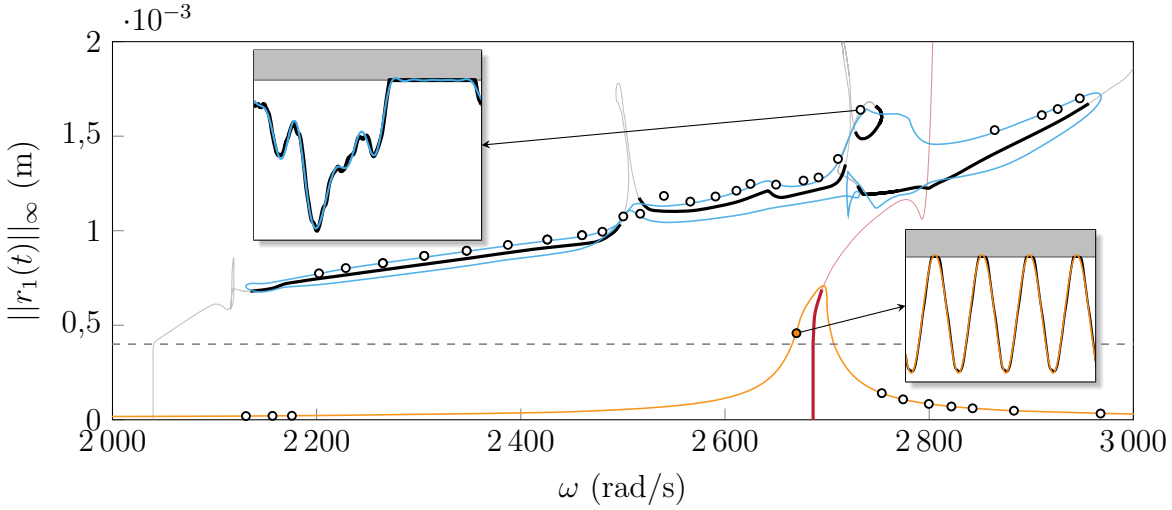
$$\overline{\mathcal{M}}^{1:4} = \left|W^{1:4}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{nl}}\right|, \quad W^{1:4}(A, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}) = 4A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}_4^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}_4^{\text{c}}, \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}}\rangle^2} \text{ et } \overline{\mathbf{f}}_{\text{ex}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{1\text{T}}. \tag{V.72}$$

Avec ces nouvelles grandeurs, on représente les analyses de Melnikov pour $A = 300$ et $A = 600$ sur la figure V.48.

On retrouve sur la figure V.48a le comportement observé sur la figure V.47a. Pour cette configuration, on observe néanmoins que les trois branches isolées s'étendent sur 900 rad·s^{-1} au total alors que le mode excité reste linéaire. En augmentant le niveau d'excitation à $A = 600$



(a) $A = 300$



(b) $A = 600$

FIGURE V.48 – Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 1T sur le quatrième harmonique, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM 1T/4 (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:4} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:4} < 0$) (—), c_1 (- -), simulations IT (o). Graphes de déplacements : DLFT-HBM (—) (—), IT (—), carter (▭).

sur la figure V.48b, l'ensemble des isolats de la figure V.48a fusionnent en une seule branche isolée. Comme pour le paragraphe précédent, ce phénomène s'avère critique étant donné que de multiples solutions stables sont mises en évidence le long de la branche isolée grâce aux simulations réalisées par IT. On affiche sur la figure V.48 des solutions sur chacune des branches pour témoigner de la différence de périodicité. On note que la solution choisie sur la courbe principale est relativement éloignée de la résonance car les solutions obtenues par IT correspondent à des solutions non périodiques au-delà du point affiché (o).

Excitations surharmoniques de formes modales pures (rotor 67) - bilan

Dans cette section, la dynamique complexe induite par une interface de contact sur une aube de soufflante sous une excitation surharmonique a été mise en évidence. Les interactions modales non linéaires mises en lumière dans la section V.3.2.6 ont tout d'abord permis d'identifier des couples de modes non linéaires pouvant interagir ensemble. Une étude basée sur le principe énergétique de Melnikov sur les couples de modes (1F, 2F/4) et (1F, 1T/3) permettent d'observer la présence d'isolats stables sous-tendus par un mode non linéaire d'une périodicité différente qui n'est pas directement excité, ici le NNM associé au mode 1F. Ce phénomène est intrinsèquement lié à la nature multimodale et multiharmonique des solutions du problème dynamique non linéaire. On souligne ce phénomène car il est relativement contre-intuitif. En effet, on ne met généralement pas en œuvre une recherche de solutions isolées non linéaires lorsque le mode excité répond linéairement. Les travaux de ce manuscrit montrent qu'un mode non linéaire dont la partie linéaire n'est pas excitée peut répondre indépendamment du niveau vibratoire du mode linéaire excité. Une condition nécessaire à l'apparition de ce phénomène réside cependant dans la coexistence de plusieurs modes non linéaires dans une même plage fréquentielle. On observe notamment ceci sur le NASA rotor 67 car sa réponse dynamique est hautement non linéaire ce qui s'accompagne de modes non linéaires fortement décalés en fréquences.

Par souci de simplicité, les excitations utilisées jusqu'ici sont purement monoharmoniques et concentrées sur une forme modale en particulier. En pratique, comme les excitations rencontrées par les aubes pendant leur fonctionnement nominal sont généralement multiharmoniques et multimodales, on s'attend à ce que les réponses dynamiques soient encore plus complexes lorsqu'elles subissent des interactions de contact. La prochaine étape de ces travaux consiste alors à examiner la dynamique de l'aube sous une excitation qui s'assimile à des efforts aérodynamiques réels. Ce cas est approché à travers l'application d'un chargement monoharmonique de forme aléatoire dans le paragraphe suivant.

Forme d'excitation aléatoire sur le cinquième harmonique La dernière étape de l'analyse de l'aube rotor 67 sous une excitation surharmonique est le cas d'une forme d'excitation aléatoire. On excite ainsi tous les modes de la structure simultanément pour observer sa réponse dynamique sous une excitation sur le cinquième harmonique. Les efforts d'excitation s'expriment

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}(t) = A\bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}^{\text{al}} \cos(5\omega t) \tag{V.73}$$

où $\bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}^{\text{al}}$ est une forme d'excitation aléatoire de norme unitaire. Elle est obtenue grâce à la fonction `numpy.random.rand(•)` (de la librairie `numpy`) en python telle que

$$\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{al}} = \texttt{numpy.random.rand}(n) \text{ et } \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}^{\text{al}} = \frac{\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{al}}}{\|\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{al}}\|} \tag{V.74}$$

où n est la taille du vecteur $\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{al}}$. Afin de garantir la reproductibilité des résultats, on fixe la graine du générateur de nombres pseudo-aléatoires à zéro grâce à la commande `numpy.random.seed(0)`. Si on souhaite obtenir le même vecteur dans le langage MATLAB, il est nécessaire de configurer le générateur de nombres pseudo-aléatoires avec la commande `rand('twister',0)` et de générer le vecteur $\mathbf{f}_{\text{ex}}^{\text{al}} = \texttt{rand}(n, 1)$. Pour se placer aux mêmes ordres de grandeur d'excitation que les cas présentés précédemment, on choisit $A = 50\,\|\mathbf{M}\Phi_{1\text{T}}\|$. Le choix du mode $\Phi_{1\text{T}}$ est arbitraire et n'influence pas la nature des résultats car les normes des vecteurs $\|\mathbf{M}\Phi_j\|$ sont toutes du même ordre de grandeur. Pour pouvoir analyser la dynamique du système, on fournit dans le tableau V.4 les taux d'excitation des cinq premiers modes de l'aube en pourcentages grâce à la formule

$$\|\sigma_j\|_{\text{rel}} = \frac{|\sigma_j|}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i} \cdot 100 \quad \text{avec} \quad \sigma_j = \langle \bar{\mathbf{f}}_{\text{ex}}^{\text{al}}, \mathbf{\Phi}_j \rangle. \tag{V.75}$$

Par ailleurs, on fournit à titre indicatif les valeurs des fréquences propres divisées par cinq pour conclure quant aux modes qui vont répondre principalement dans la plage fréquentielle d'étude.

mode $\bullet$	1F	2F	1T	4	5
taux d'excitation $\|\sigma_\bullet\|_{\text{rel}}$	0,15%	0,21%	0,17%	2,85%	1,60%
$\omega_\bullet/5$ (rad·s^{-1})	408,0	1268,7	2149,1	2966,1	3736,2

TABLEAU V.4 – Taux d'excitation des cinq premiers modes par la forme aléatoire.

On observe dans le tableau V.4 que le mode 1T, le quatrième mode et le cinquième mode sont susceptibles de répondre dans la plage $\omega \in [2000; 4000]$ rad·s^{-1} sur le cinquième harmonique. Conformément à leur taux d'excitation respectif, on s'attend à ce que le quatrième mode réponde majoritairement, suivi du cinquième mode et enfin du mode 1T. Avec la définition des efforts d'excitation utilisée, les grandeurs du principe énergétique de Melnikov s'écrivent

$$\overline{\mathcal{M}}^{1:5} = \left|W^{1:5}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{ln}}\right| - \left|\mathcal{R}_{\text{nl}}\right| \quad \text{et} \quad W^{1:5}(A, \overline{\mathbf{f}}^{\text{al}}_{\text{ex}}) = 5A\pi\sqrt{\langle \mathbf{a}^{\text{c}}_5, \overline{\mathbf{f}}^{\text{al}}_{\text{ex}}\rangle^2 + \langle \mathbf{b}^{\text{c}}_5, \overline{\mathbf{f}}^{\text{al}}_{\text{ex}}\rangle^2}. \quad \text{(V.76)}$$

Afin d'appliquer le principe énergétique de Melnikov, on calcule l'ensemble des modes non linéaires $\bullet/5$ dans la plage fréquentielle d'étude, à savoir les NNM 1T/5, 4/5 et 5/5, identifiés en rouge (—). Lors du calcul de ces derniers, on observe que les NNM 4/5 et 5/5 se raccrochent à des NNM de pulsation fondamentale 10ω, respectivement les NNM 8/10 et 11/10, identifiés en vert (—). Ces derniers sont représentés pour illustrer ce phénomène, mais n'interviennent pas directement dans la réponse dynamique étudiée. Les pulsations propres des modes linéaires associés sont $\omega_8 = 29\,975{,}8$ rad·s^{-1} et $\omega_{11} = 37\,459{,}7$ rad·s^{-1}. On représente sur la figure V.49 une analyse de Melnikov pour la configuration considérée.

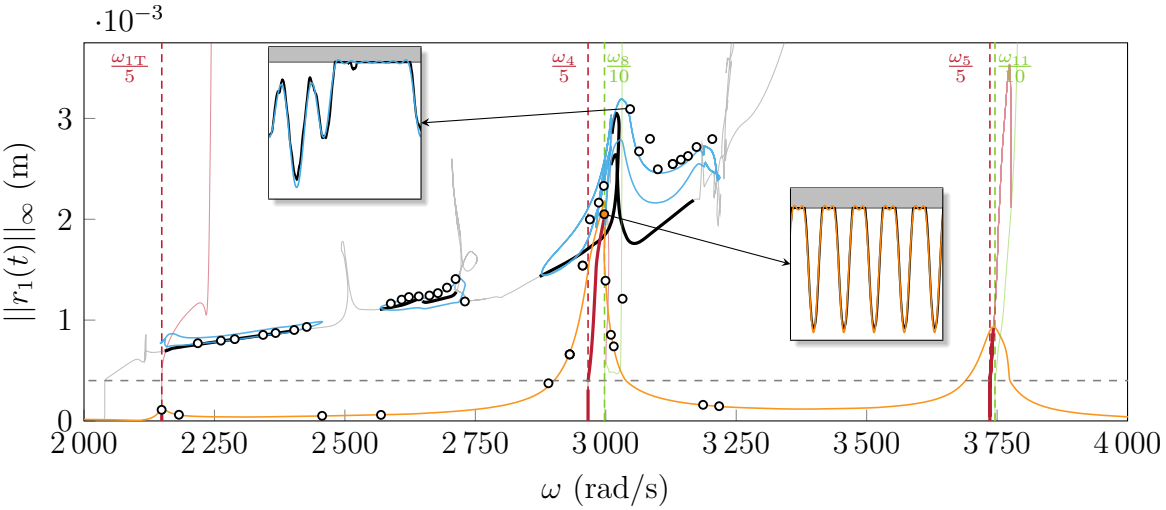


FIGURE V.49 – Analyse de Melnikov pour une forme d'excitation aléatoire sur le cinquième harmonique avec $A = 50\,\|\mathbf{M}\Phi_{1\text{T}}\|$, courbe de réponse principale (—), NNM 1F (—), NNM surharmoniques de pulsation fondamentale 5ω (—) et 10ω (—), branches de solutions isolées (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} < 0$) (—), c_1 (- -), simulations IT (o).

Tout d'abord, on observe que les niveaux de réponse de la courbe principale (—) sont conformes à ce qui était attendu avec les taux de participation fournis dans le tableau V.4. L'analyse de Melnikov révèle une nouvelle fois que le NNM 1F sous-tend plusieurs branches de solutions isolées de pulsation fondamentale ω alors que l'excitation est sur le cinquième harmonique. De façon analogue à l'ensemble des cas d'excitation surharmonique présentés dans ce manuscrit, les branches isolées se situent à de hautes amplitudes vibratoires. De plus, les points d'IT, issus d'une reprise de conditions initiales des solutions de la DLFT-HBM intégrées sur mille périodes, témoignent d'un certain niveau de stabilité locale des orbites. En effet, les différences liées à l'effet de la troncature harmonique ainsi que les différences en termes de gestion du contact ont disparues et les solutions de l'IT se stabilisent vers un régime périodique de haute amplitude, comme la DLFT-HBM. À nouveau, on représente les signaux temporels d'une solution sur la courbe de réponse principale ainsi que sur une branche isolée afin de démontrer la différence de périodicité et la bonne concordance des solutions en termes de déplacements. Sur la figure V.49, l'utilisation d'une forme d'excitation aléatoire témoigne du fait que l'existence de branches de solutions isolées dans le cas d'une excitation surharmonique est dûe au caractère multiharmonique des NNM. En effet, ce phénomène est d'autant plus critique qu'il se produit même lorsque la forme de l'excitation ne coïncide pas avec un mode de la structure, ce qui correspond au cas le plus réaliste. Afin d'aller plus loin, une étude utilisant un chargement aérodynamique réel serait nécessaire pour statuer sur l'existence de telles solutions stables avec un chargement de l'aube plus représentatif de la réalité. Cette étude va néanmoins au-delà du cadre de ce manuscrit de thèse et constitue une des perspectives à explorer dans de futurs travaux de recherche.

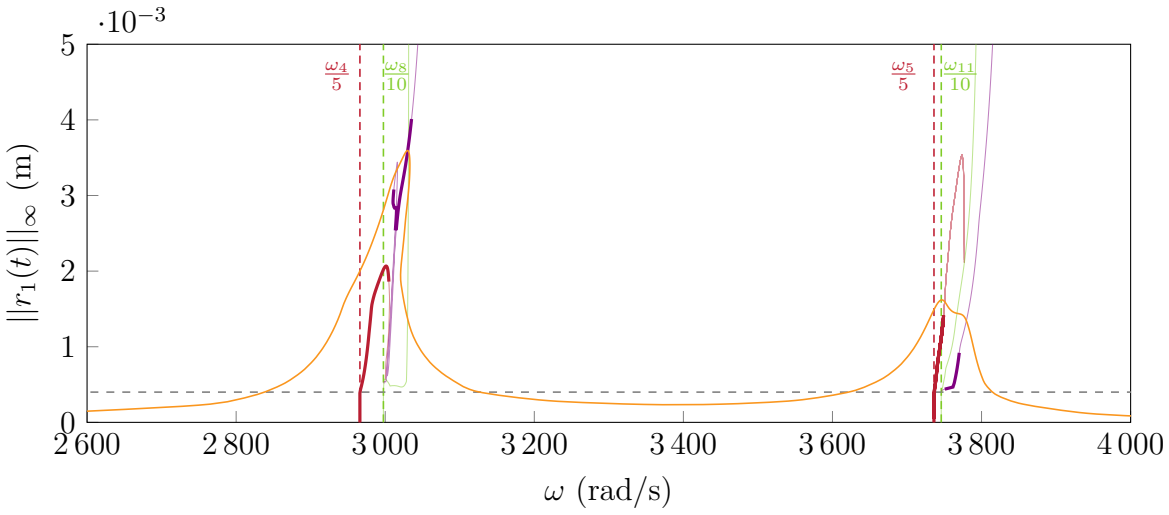


FIGURE V.50 – Analyse de Melnikov pour une forme d'excitation aléatoire sur le cinquième harmonique avec $A = 100\,\|\mathbf{M}\Phi_{1\mathrm{T}}\|$ sans le NNM 1F, courbe de réponse principale (—), NNM surharmoniques de pulsation fondamentale 5ω (—) et 10ω (—), NNM surharmoniques bifurqués de pulsation fondamentale 5ω (—), deux orbites périodiques persistent ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} > 0$) (—), aucune orbite périodique ne persiste ($\overline{\mathcal{M}}^{1:5} < 0$) (—), c_1 (- -).

En analysant l'allure des NNM 4/5 et 5/5 de l'aube, on s'aperçoit qu'ils ne peuvent pas refléter la dynamique haute amplitude de l'aube selon le cinquième harmonique car ils sont restreints à de faibles amplitudes ($\|r_1(t)\|_\infty < 3{,}5{\cdot}10^{-3}$ m) et se raccrochent ensuite à des modes de pulsation fondamentale sur le dixième harmonique. Par conséquent, on approfondit la recherche de NNM pour mettre en évidence les NNM qui sous-tendent les résonances à

hautes amplitudes. On trouve deux NNM, identifiés en violet (—), qui semblent bifurquer des modes NNM 8/10 et NNM 11/10. Pour démontrer que ces modes participent effectivement à la réponse dynamique de l'aube, on augmente le niveau d'excitation à $A = 100 \|\mathbf{M}\Phi_{1T}\|$ et on représente une analyse de Melnikov avec ces nouveaux modes sur la figure V.50 en omettant le NNM 1F et les isolats associés dans un souci de clarté de la figure. On note cependant que plusieurs isolats sous-tendus par le NNM 1F reflétant une dynamique de haute amplitude existent aussi pour cette valeur de A, tout comme sur la figure V.49.

On observe sur la figure V.50 que les NNM bifurqués (—) sous-tendent les résonances de hautes amplitudes du système. Autour de $\omega = \omega_4/5$, le principe énergétique de Melnikov met en lumière le fait que le NNM bifurqué prend le relai sur le NNM 4/5 à partir d'un certain niveau d'amplitude vibratoire. Au contraire, pour la résonance autour de $\omega = \omega_5/5$, les deux NNM participent en même temps et forment un amas de deux pics de résonance. On détecte également un léger défaut de prédiction de l'amplitude maximale de résonance par le principe énergétique de Melnikov sur le pic associé au NNM 4/5. Il est possible d'attribuer ce défaut au fait que la perturbation appliquée au système est ici assez importante tant en termes d'efforts d'excitation que d'amortissement structurel : on sort du cadre théorique qui repose sur l'hypothèse stipulant que la perturbation doit rester faible.

Isolats en réponse forcée sur le rotor 67 - bilan

Précision de la stratégie de recherche d'isolats proposée L'application de la procédure de détection de branches de solutions isolées à la configuration de contact rotor/stator avec l'aube de soufflante rotor 67 permet de démontrer l'applicabilité de la stratégie à des systèmes non conservatifs hautement non linéaires avec plusieurs nœuds de contact. Même sur cette application sévère, un haut niveau de précision est atteint pour la détection des différentes familles d'isolats, permettant ainsi d'expliquer un phénomène de discontinuité de la résonance non linéaire du système. À nouveau, la stabilité locale des branches isolées est démontrée grâce au fait que la plupart des solutions de la DLFT-HBM sont également des orbites périodiques du point de vue de l'algorithme de Carpenter. Aussi, comme déjà suggéré par certains travaux de recherche [56, 110], on confirme l'importance des interactions modales non linéaires dans la séparation des branches de solutions isolées.

Présence d'isolats en réponse forcée surharmonique L'excitation surharmonique de l'aube permet de retrouver l'existence de branches de solutions isolées non linéaires alors que la réponse principale du mode excité demeure linéaire, comme initialement observé sur le modèle d'impacteur dans la section V.2.1.8. Ce phénomène est causé par le caractère multiharmonique des solutions des différents modes non linéaires du système sur la plage fréquentielle d'étude. On montre que ces isolats conservent la périodicité du mode non linéaire qui les sous-tend, les rendant particulièrement difficiles à trouver si l'on n'a pas connaissance de l'existence d'un mode non linéaire de périodicité plus faible que l'excitation. Une étude par intégration temporelle montre que ces branches sont localement stables ce qui contribue à les rendre particulièrement critiques du point de vue de la conception des aubes. De plus, ce phénomène persiste lorsque la forme de l'excitation est aléatoire, ce qui se rapproche du cas général où le forçage aérodynamique ne correspond pas à une forme modale en particulier.

Conclusion

Synthèse des travaux de thèse

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse se concentrent sur l'application et l'évaluation d'une stratégie numérique fréquentielle, initialement développée pour la caractérisation des liaisons frottantes, sur des configurations de vibro-impact industrielles. On montre que l'approche utilisée, reposant sur une gestion du contact par lagrangiens augmentés et désignée par l'acronyme DLFT-HBM pour *Dynamic Lagrangian Frequency Time Harmonic Balance Method*, permet de simuler précisément la dynamique vibratoire d'une structure en contact unilatéral. Ceci est démontré à travers la caractérisation de plusieurs systèmes en contact de complexité graduelle : un impacteur à un degré de liberté, une barre éléments-finis unidimensionnelle et enfin une configuration de contact industrielle impliquant une aube de soufflante et un carter rigide.

Défis d'implémentation Afin de parvenir à la réalisation de ces simulations, de nombreux défis d'implémentation ont dû être surmontés. Parmi ces derniers, on peut par exemple citer l'implémentation d'un solveur itératif Newton-Raphson, la structuration du code de calcul pour permettre le traitement de l'ensemble des exemples par un outil unique ou encore l'optimisation des ressources de calcul pour permettre la réalisation de tous les calculs sur un ordinateur portable. Enfin, pour permettre la caractérisation de configurations industrielles de contact aube/carter, plusieurs défis d'ordre numérique ont été relevés, notamment concernant le calcul analytique de la matrice jacobienne ou encore la procédure de continuation par longueur d'arc.

Preuve d'applicabilité de la DLFT-HBM en vibro-impact Dans un premier temps, la stratégie est finement évaluée à travers l'étude d'un impacteur exacerbant la phénoménologie de contact. Les paramètres inhérents à la gestion de la physique d'impact sont mis en lumière grâce à la mise en perspective de plusieurs stratégies numériques sur cet exemple. Par la suite, l'analyse d'une barre éléments-finis permet de mettre en évidence une relation asymptotique entre la DLFT-HBM et une stratégie fréquentielle basée sur la résolution d'un problème de complémentarité linéaire (LCP-HBM). On révèle ainsi des éléments liés à la prise en compte des conditions de contact, permettant ainsi de gagner en compréhension sur la physique simulée par les méthodes fréquentielles sur les applications de contact en général. Par ailleurs, on souligne une limitation intrinsèque des méthodes fréquentielles basées sur des lagrangiens augmentés et des multiplicateurs de Lagrange à travers l'analyse du spectre des efforts de contact. En effet, on observe dans ces spectres que les composantes fréquentielles se situant au-delà de la fréquence de coupure de résolution ne sont pas physiques, ce qui restreint nécessairement l'analyse et l'utilisation des signaux d'efforts à leurs composantes physiques, *i.e.* au sein de la bande passante de résolution. Cette difficulté, à laquelle ne sont pas sujettes les méthodes de pénalité, peut notamment être responsable d'une convergence lente des analyses de stabilité locale. Enfin, la comparaison de la DLFT-HBM à la fois avec une stratégie d'intégration

temporelle constituant l'état de l'art industriel et avec la *Regularized-Lanczos Harmonic Balance Method* (RL-HBM) sur une configuration de contact aube/carter industrielle témoigne de la robustesse de chacune des trois méthodologies. Sur cet exemple, la stratégie d'intégration temporelle permet la mise en évidence de plusieurs branches de solutions périodiques isolées, dont l'existence est validée par les méthodes fréquentielles. L'apport qualitatif des deux stratégies fréquentielles est souligné par l'obtention d'informations spécifiques aux systèmes non linéaires telles que la connectivité des branches de solutions entre elles. On note que cet aspect est totalement occulté par les simulations d'intégration temporelle et constitue un apport majeur des stratégies fréquentielles. Néanmoins, les méthodes fréquentielles ne se limitent pas simplement à des apports qualitatifs : elles permettent également la prédiction quantitative de la dynamique du système, notamment concernant l'emplacement des résonances non linéaires qui se révèlent être d'un intérêt stratégique pour la conception d'aubes robustes aux interactions de contact.

Procédure de détection d'isolats en réponse forcée Le traitement d'une application de contact rotor/stator industrielle a révélé la présence de nombreuses branches de solutions périodiques isolées. Dans la littérature, la détection de ces dernières de façon systématique sur un système hautement non linéaire de grande dimension constitue un obstacle majeur. Par conséquent, le dernier volet de ces travaux contribue à la mise au point d'une procédure d'analyse des systèmes non linéaires en contact capable de prédire l'existence des solutions isolées ainsi que de les localiser dans le cas où elles existent. L'utilisation des modes complexes non linéaires de concert avec le principe énergétique de Melnikov permet de localiser précisément, et à moindre coût de calcul, les branches de solutions isolées dans une configuration de contact en réponse forcée sur des systèmes phénoménologiques et industriels. Le principe énergétique de Melnikov repose sur un bilan énergétique au premier ordre d'une petite perturbation non conservative sur les solutions libres d'un mode normal non linéaire. Cette stratégie révèle que, lorsque des branches de solutions isolées existent, les stratégies de continuation classiques sous-estiment fortement à la fois l'amplitude vibratoire du système à la résonance non linéaire ainsi que le décalage fréquentiel de celle-ci. Par ailleurs, la criticité de ces résonances isolées est soulignée par le fait que les branches de solutions isolées apparaissent partiellement stables. En effet, l'existence de ces solutions est validée par la stratégie d'intégration temporelle de référence ce qui témoigne d'un certain niveau de stabilité locale des orbites périodiques des branches isolées. L'analyse fine des différents termes du principe énergétique de Melnikov révèle des aspects plus profonds liés à la naissance des branches de solutions isolées. En effet, grâce au principe énergétique de Melnikov, on identifie des zones privilégiées pour l'apparition de ces dernières. On montre que ces zones sont des puits d'énergie délimités par des pics de dissipation, associés à des interactions modales non linéaires.

Excitations surharmoniques Enfin, avec la mise en évidence de certains mécanismes physiques responsables de l'apparition de branches de solutions isolées, on met en lumière un nouveau phénomène non linéaire complexe lorsqu'un système mécanique avec une interface de contact est soumis à une excitation surharmonique pour des systèmes phénoménologiques ainsi que des configurations industrielles. Grâce au principe énergétique de Melnikov, on montre que, lorsqu'un mode non linéaire surharmonique est excité, des branches de solutions isolées sous-tendues par d'autres modes non linéaires de périodicité plus faibles peuvent exister si les différents modes admettent des solutions dans une plage fréquentielle proche. Une propriété notable et contre-intuitive liée à ce phénomène réside dans le fait que des branches de solutions isolées peuvent exister alors que la résonance principale du système reste linéaire, cas dans lequel on met rarement en œuvre une étude non linéaire de détection de solutions isolées. De plus, on démontre que ces solutions

sont localement stables par l'utilisation d'un algorithme d'intégration temporelle, ce qui témoigne d'autant plus de leur criticité du point de vue de la conception. Par ailleurs, comme ce phénomène persiste lorsque la forme de l'excitation est aléatoire, on l'attribue au caractère multiharmonique des solutions des modes non linéaires. Il s'avère que le spectre fréquentiel inévitablement étendu des efforts de contact est particulièrement susceptible de faire apparaître une telle phénoménologie.

Perspectives de développements

Intégration dans un environnement industriel Dans le cadre de ces travaux, un outil numérique de caractérisation des systèmes mécaniques en contact se basant sur la DLFT-HBM a été développé. Étant donné le niveau de précision atteint lors des comparaisons avec l'algorithme de Carpenter, constituant l'état de l'art industriel concernant le contact aube/carter, une des perspectives de ces travaux réside dans l'application du code de calcul dans un contexte industriel réel. On précise que l'ensemble des développements réalisés dans le cadre de cette thèse ont été basés sur un environnement Python — langage ouvert et gratuit — ce qui permet d'assurer la portabilité des codes de calcul à un environnement industriel. En mettant à contribution à la fois l'expertise académique proposée dans ces travaux et l'expertise technologique des bureaux d'étude industriels, il est possible d'entrevoir la mise au point d'un outil renforçant la robustesse des cycles de conception grâce à la prise en compte de la phénoménologie non linéaire dans des phases amont de la conception des aubes de turbomachine. On note que les travaux de cette thèse se restreignent à des calculs avec une seule aube en rotation, mais l'extension de ces développements à une roue aubagée complète ne présente aucune difficulté théorique, comme démontré par Colaïtis [206] pour la RL-HBM.

Simulations multi-physiques et avec de multiples non-linéarités Les interactions de contact rotor/stator au sein des turbomachines sont des phénomènes intrinsèquement multi-physiques comme en témoignent les nombreux travaux traitant de la prise en compte de la thermoélasticité des pièces mécaniques [75, 11, 163] ou encore l'usure des matériaux abradables à l'interface de contact [21, 25, 7, 126, 17, 175]. La prise en compte d'effets multi-physiques dans les simulations apparaît donc être une incrémentation naturelle des travaux de cette thèse pour aller vers des simulations plus fidèles. De façon analogue, la prise en compte de plusieurs types de non-linéarités permettrait d'accroître le niveau de modélisation. Ainsi, on peut par exemple envisager des calculs dans le domaine fréquentiel en prenant en compte les non-linéarités géométriques [209, 220], les non-linéarités de frottement dans les assemblages aube/disque [120, 224, 147] ou encore la modélisation du comportement des amortisseurs sous-plateforme [134, 224] et des joncs de friction [215]. On note que Delhez [207, 53] fournit déjà des résultats sur des configurations de contact aube/carter en présence de non-linéarités géométriques par intégration temporelle. La prise en compte de plusieurs non-linéarités dans les stratégies fréquentielles peut constituer un obstacle majeur à la fois en termes de temps de calcul et d'implémentation, mais aucune difficulté théorique n'y est associée. Par exemple, comme les non-linéarités de frottement dissipent une partie de l'énergie vibratoire, on s'attend même à ce que les interactions de contact aube/carter soient moins sévères que celles traitées dans ce manuscrit.

Analyse de stabilité locale en DLFT-HBM On met en évidence dans ce manuscrit certaines limitations des méthodologies fréquentielles se basant sur une gestion du contact par lagrangiens augmentés ou multiplicateurs de Lagrange concernant l'évaluation de la stabilité locale des solutions périodiques. En effet, afin de valider l'existence des solutions

périodiques trouvées par HBM, on a eu nécessairement recourt à des simulations d'intégration temporelle. Une des perspectives de ces travaux consiste donc à contribuer au dépassement des difficultés inhérentes à l'application de la théorie de Floquet dans le formalisme de la DLFT-HBM. Récemment, les travaux de Colaïtis [44, 206, 46] ont montré l'applicabilité des études de stabilité locale aux applications de contact aube/carter en fournissant un exemple d'application de la théorie de Floquet ainsi que de la méthode de Hill sur une configuration industrielle pour la loi de contact régularisée de la RL-HBM. Ces travaux constituent donc un point de départ pour l'extension éventuelle de ces stratégies à la famille des algorithmes modélisant des lois de contact non régulières, dont fait partie la DLFT-HBM.

Recherche d'isolats pour d'autres non-linéarités Dans ce mémoire, une attention particulière a été portée à la détection de branches de solutions périodiques isolées sur l'application de contact aube/carter. La procédure de détection des branches isolées utilisée dans ces travaux n'est pas restreinte à l'application traitée et peut constituer un outil puissant de détection de branches isolées sur d'autres applications, notamment sur les systèmes industriels présentant des non-linéarités de frottement et des non-linéarités géométriques où de telles branches sont régulièrement identifiées [67, 73, 78, 150].

Excitation aérodynamique réelle Par ailleurs, la phénoménologie complexe mise en évidence lors de l'excitation surharmonique des différents modèles d'aube interroge sur la présence de ces solutions dans une configuration réelle. En effet, les deux types d'excitations utilisées dans ce mémoire, à savoir une excitation monoharmonique d'une forme modale pure et d'une forme aléatoire, ne correspondent pas au cas de chargement réel auquel sont soumis les aubes. Afin de conclure cette étude, il serait nécessaire de simuler la dynamique des aubes sous une excitation aérodynamique réelle issue d'un calcul de dynamique des fluides. Comme ce phénomène apparaît être particulièrement critique, il est crucial de valider ou d'infirmer l'hypothèse selon laquelle de telles branches isolées peuvent exister sur des configurations industrielles réelles.

Suivi de bifurcations Enfin, dans l'optique de détecter des branches isolées ou de mener des études multi-paramétriques sur les configurations de contact aube/carter, l'extension de la méthodologie de suivi de points limites présentée à des modèles industriels serait bénéficiable pour la compréhension qualitative des interactions de contact. En DLFT-HBM, le calcul de l'opérateur hessien du système non linéaire constitue un verrou majeur à l'utilisation de cette stratégie. Une des pistes envisageables pour lever cette difficulté consiste à calculer ce dernier par un algorithme de différentiation automatique, technique très répandue pour le calcul de dérivées numériques exactes dans le domaine de l'apprentissage profond. L'extension de la stratégie de suivi de bifurcations à un grand nombre de nœuds non linéaires constitue également un défi en soi compte tenu de la taille de l'opérateur hessien qui doit être actualisé à chaque itération du calcul.

Table des figures

I.1 Exemples de turbomachines. . . . 6
I.2 Vue schématique d'une turbomachine aéronautique double corps et double flux. . 7
I.3 Loi de comportement en traction-compression. . . . 11
I.4 Outils de dimensionnement en fatigue vibratoire. . . . 12
I.5 Interfaces de contact privilégiées dans une turbomachine aéronautique. . . . 14
I.6 Deux corps élastiques en contact. . . . 16
I.7 Loi de contact unilatéral. . . . 17
I.8 Loi de frottement de Coulomb. . . . 18
I.9 Solide discrétisé. . . . 26
I.10 Interprétation géométrique de la matrice de contact. . . . 27
I.11 Solide en contact avec un obstacle rigide. . . . 27
I.12 Définition du jeu entre deux structures flexibles. . . . 28

II.1 Stabilité des schémas de Newmark. . . . 34
II.2 Procédure d'alternance fréquence/temps. . . . 41
II.3 Positionnement des différentes méthodes fréquentielles. . . . 49
II.4 Méthode de Newton-Raphson sur une fonction scalaire. . . . 51
II.5 Illustration géométrique des trois cas de figure pour le choix du pas dans la méthode *hybrid* Powell. . . . 55
II.6 Exemples de prédicteurs. . . . 59
II.7 Différents types de paramétrisation. . . . 61
II.8 Illustration de la notion de stabilité locale et globale. . . . 64
II.9 Bifurcations des solutions périodiques. . . . 70
II.10 Bifurcations simples. . . . 71
II.11 Résonances non linéaires principales. . . . 72

III.1 Lois de contact numériques. . . . 77
III.2 Lois de frottement. . . . 78
III.3 Illustration d'un degré de liberté relatif. . . . 83
III.4 Procédure DLFT-HBM. . . . 90
III.5 Procédure LCP-HBM. . . . 95
III.6 Comportement local à l'impact pour la j-ième contrainte de contact. . . . 97

IV.1 Impacteur à un degré de liberté en configuration de vibro-impact. . . . 105
IV.2 Convergence de la réponse en fonction du nombre d'harmoniques autour de la fréquence de résonance. . . . 106
IV.3 Déplacements obtenus par IT sur la branche de période double. . . . 107
IV.4 Déplacements et efforts obtenus par la DLFT-HBM et IT à la résonance . . . 108
IV.5 Vitesses et accélérations obtenus par la DLFT-HBM et IT à la résonance. . . . 109
IV.6 Bilan énergétique sur une période pour $m_2 = 0\,\mathrm{kg}$. . . . 110

IV.7 Jeux et vitesses relatives obtenus par la DLFT-HBM, LCP-HBM et IT au point $\omega = 0{,}9\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. 111
IV.8 Bilan énergétique sur une période pour $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. 112
IV.9 Portrait de phase du degré de liberté relatif. 112
IV.10 Influence du déphasage n_{dep} sur le jeu et la vitesse relative obtenus par la DLFT-HBM. 114
IV.11 Illustrations de différentes valeurs de $\mathcal{N}_2$. 115
IV.12 Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et N_{t}. 115
IV.13 Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et N_{h}. 116
IV.14 Evolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction de N_{h}. 117
IV.15 Carte d'évolution de $\mathcal{N}_2(\mathbf{x}_1)$ en fonction de n_{dep} et m_2. 118
IV.16 Barre éléments-finis impactant un obstacle rigide. 119
IV.17 Barre éléments-finis impactant un obstacle flexible. 119
IV.18 Courbe de réponse en fréquence linéaire. 120
IV.19 Déplacements calculés par le schéma de Moreau-Jean en fonction du coefficient de restitution pour plusieurs discrétisations de la barre face à un obstacle rigide. . . 121
IV.20 Evolution de $\mathcal{N}_2$ en fonction du nombre d'éléments n de la barre à plusieurs coefficients de restitution e. 122
IV.21 Solutions de référence pour les deux configurations d'obstacle 123
IV.22 Spectres des déplacements et efforts de contact pour différentes valeurs de k_{obs} . 124
IV.23 Déplacement du nœud de contact. 125
IV.24 Jeu et efforts de contact avant troncature. 126
IV.25 Efforts de contact tronqués pour un obstacle flexible. 127
IV.26 Diagramme loi de contact. 128
IV.27 Lois de contact simulées pour un obstacle rigide avec pénalité bilinéaire à différentes valeurs de k_{obs}. 129
IV.28 Déplacement du nœud de contact en fonction de ε. 130
IV.29 Courbes de réponse en fréquence pour différentes valeurs de k_{obs}. 132
IV.30 Courbes de réponse en fréquence pour les configurations rigide et flexible. 133
IV.31 Étude paramétrique sur les signaux d'efforts de contact en fonction de ε. 134
IV.32 Étude paramétrique sur les spectres des efforts de contact ε 135
IV.33 Étude paramétrique sur les lois de contact en fonction de ε. 136
IV.34 Procédure de raffinement de ε. 137
IV.35 Lois de contact en fonction de ε pour la DLFT-HBM duale. 139
IV.36 Efforts de contact tronqués en fonction de N_{h}. 139
IV.37 Lois de contact simulées par la DLFT-HBM en fonction de N_{h}. 140
IV.38 Lois de contact simulées par la LCP-HBM en fonction de N_{h}. 140
IV.39 Déformation à un lobe du carter. 143
IV.40 NASA rotor 67 144
IV.41 Stratégie de détection des isolats. 148
IV.42 Carte d'interaction obtenue par IT pour le déplacement radial du bord d'attaque. 149
IV.43 Courbe de réponse en fréquence obtenue par IT au bord d'attaque. 150
IV.44 Courbes de réponse en fréquence obtenues par les méthodes fréquentielles. 151
IV.45 Illustration du phénomène d'*aliasing*. 152
IV.46 Vue complète de la réponse dynamique du système obtenue par les méthodes harmoniques en incluant les branches isolées. 154
IV.47 Branches de période double captées par la DLFT-HBM. 155
IV.48 Signaux temporels de déplacements radiaux et d'efforts de contact à la résonance principale, sur l'isolat ① et la branche ③ 156

IV.49 Signaux temporels à la résonance principale autour de l'interface de contact. . . . 157
IV.50 Contributions modales relatives sur l'isolat ① 159
IV.51 Contributions harmoniques sur l'isolat ① 160
IV.52 Contributions modales relatives sur l'isolat ① 161
IV.53 Contributions harmoniques sur l'isolat ④ 162
IV.54 Etude d'influence sur le coefficient de frottement μ. 162

V.1 Stratégie de détection de branches de solutions isolées. 179
V.2 Modèle d'impacteur à deux degrés de liberté. 180
V.3 Première discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A. 181
V.4 Deuxième discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A. 181
V.5 Troisième discontinuité de la résonance non linéaire par rapport à A. 182
V.6 Analyse modale non linéaire de l'impacteur à deux degrés de liberté. 182
V.7 Contributions modales multiharmoniques à proximité du premier point singulier pour chaque NNM. 184
V.8 Comparaison des solutions à une énergie totale $E_{\text{tot}} = 1\,\text{J}$ pour les NNM 2, 3 et 4. 185
V.9 Analyse de Melnikov pour $A = 1$. 187
V.10 Première famille d'isolats. 187
V.11 Analyse de Melnikov pour $A = 2$. 188
V.12 Analyse de Melnikov pour $A = 12$. 189
V.13 Deuxième famille d'isolats. 190
V.14 Analyse de Melnikov pour $A = 5$. 191
V.15 Troisième famille d'isolats. 192
V.16 Évolution de la résonance non linéaire en fonction de A. 192
V.17 Vue complète de la réponse dynamique du système en fonction de A. 193
V.18 Validation des solutions de la DLFT-HBM pour $A = 15$. 194
V.19 Sections de Poincaré des différentes catégories de solutions. 195
V.20 Branches de période double et quadruple pour $A = 20$. 196
V.21 Première famille d'isolats de période double. 196
V.22 Seconde famille d'isolats de période double. 197
V.23 Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le quatrième harmonique avec $A = 10$. 198
V.24 Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le troisième harmonique avec $A = 15$. 199
V.25 Analyse de Melnikov pour une excitation du deuxième mode sur le troisième harmonique avec $A = 20$. 200
V.26 Suivi de points limites pour la barre éléments-finis, vue 2D. 202
V.27 Suivi de points limites pour la barre éléments-finis, vue 3D. 202
V.28 NASA rotor 37 204
V.29 Carter rigide circulaire. 204
V.30 Analyse de Melnikov sur le rotor 37 pour $A = 550$. 205
V.31 Contributions énergétiques le long du mode non linéaire associé au mode 1F du rotor 37. 207
V.32 Contributions modales relatives le long du mode non linéaire associé au mode 1F du rotor 37. 207
V.33 Validation des solutions de la DLFT-HBM pour $A = 550$ sur le rotor 37. 208
V.34 Évolution de la position de la résonance non linéaire en fonction de A pour l'aube rotor 37. 210
V.35 Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 1T sur le troisième harmonique sur le rotor 37. 211

V.36 Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 2F sur le troisième harmonique sur le rotor 37. 212
V.37 Analyse de Melnikov pour une excitation du quatrième mode sur le cinquième harmonique sur le rotor 37. 213
V.38 Principe énergétique de Melnikov pour $A = 140$ sur le rotor 67. 215
V.39 Réponse en fréquence du rotor 67 pour $A = 140$. 215
V.40 Validation des solutions de la DLFT-HBM par IT pour $A = 140$. 216
V.41 Courbes de réponse principales de $A = 20$ à $A = 120$ pour le rotor 67. 217
V.42 Application du principe énergétique de Melnikov pour $A = 60$. 218
V.43 Évolution de la résonance non linéaire par rapport à A pour le rotor 67. 219
V.44 Influence du taux d'amortissement du quatrième mode. 220
V.45 Contributions modales relatives le long des NNM pour deux taux d'amortissement ξ_4. 221
V.46 Contributions harmoniques relatives du NNM 1F au bord d'attaque sur le rotor 67. 223
V.47 Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 2F sur le troisième harmonique. 224
V.48 Analyse de Melnikov pour une excitation du mode 1T sur le quatrième harmonique. 225
V.49 Analyse de Melnikov pour une forme d'excitation aléatoire sur le cinquième harmonique avec $A = 50 \, \|\mathbf{M}\Phi_{1\mathrm{T}}\|$. 227
V.50 Analyse de Melnikov pour une forme d'excitation aléatoire sur le cinquième harmonique avec $A = 100 \, \|\mathbf{M}\Phi_{1\mathrm{T}}\|$ sans le NNM 1F 228

Liste des tableaux

IV.1 Données du modèle d'impacteur avec obstacle élastique. 105
IV.2 Dimensions et propriétés de la barre. 119
IV.3 Premières pulsations propres de la barre éléments-finis. 120
IV.4 Propriétés du matériau TA6V. 144
IV.5 Premières fréquences propres de l'aube NASA rotor 67. 144
IV.6 Valeurs de déphasage angulaire θ_j et de distance à l'axe de rotation ρ_j des $n_\mathrm{b} = 9$ nœuds frontières du NASA rotor 67. 144

V.1 Paramètres de l'impacteur à deux degrés de liberté. 180
V.2 Propriétés matériau de l'alliage d'acier 18-Ni 200-maraging. 203
V.3 Premières fréquences propres de l'aube rotor 37. 204
V.4 Taux d'excitation des cinq premiers modes par la forme aléatoire. 227

Références

Actes de conférences

[1] A. Ameri. « NASA rotor 37 CFD code validation ». *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. 2009. doi : 10.2514/6.2009-1060 (cf. p. 203).

[2] C. Blondeau et C. Liauzun. « A modular implementation of the time spectral method for aeroelastic analysis and optimization on structured meshes ». *IFASD 2019*. 2019, p. 26. oai : hal-02183133 (cf. p. 49).

[3] A. Dadouche, M. J. Conlon, W. Dmochowski, B. Liko et J.-P. Bedard. « Experimental Evaluation of Abradable Seal Performance at High Temperature ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2008*. 2008, p. 143-150. doi : 10.1115/GT2008-51228. oai : hal-01430519 (cf. p. 15).

[4] H. Doi et J. J. Alonso. « Fluid/Structure Coupled Aeroelastic Computations for Transonic Flows in Turbomachinery ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2002*. 2002, p. 787-794. doi : 10.1115/GT2002-30313. oai : hal-01337402 (cf. p. 10, 141, 143).

[5] H. de Filippis, F. Thouverez, L. Blanc, P. Girard et F. Chevillot. « Non-Linear Numerical Simulation of Pre-Loaded Turbine Blades With Frictional Shroud Contact Under Dynamic Conditions ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2022*. 2022. doi : 10.1115/GT2022-79918 (cf. p. 85).

[6] L. Iannelli et F. Vasca. « Computation of limit cycles and forced oscillations in discrete-time piecewise linear feedback systems through a complementarity approach ». *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. 2008, p. 1169-1174. doi : 10.1109/CDC.2008.4739076 (cf. p. 91).

[7] M. Legrand et C. Pierre. « Numerical Investigation of Abradable Coating Wear Through Plastic Constitutive Law : Application to Aircraft Engines ». *Proceedings of the ASME IDETC-CIE 2009*. 2009, p. 907-916. doi : 10.1115/DETC2009-87669. oai : hal-00413728 (cf. p. 15, 233).

[8] M. McMullen, A. Jameson et J. Alonso. « Acceleration of convergence to a periodic steady state in turbomachinery flows ». *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 2001. doi : 10.2514/6.2001-152 (cf. p. 35, 49).

[9] A. Millecamps, A. Batailly, M. Legrand et F. Garcin. « Snecma's Viewpoint on the Numerical and Experimental Simulation of Blade-Tip/Casing Unilateral Contacts ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2015*. 2015. doi : 10.1115/GT2015-42682. oai : hal-01223582 (cf. p. 15).

[10] A. Millecamps, J.-F. Brunel, P. Dufrénoy, F. Garcin et M. Nucci. « Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments ». *Proceedings of the ASME IDETC-CIE 2009*. 2009, p. 855-862. doi : 10.1115/DETC2009-86842. oai : hal-01223060 (cf. p. 2, 15).

[11] F. Nyssen, T. Vadcard, E. Piollet et A. Batailly. « Strongly Coupled Thermo-Mechanical Casing/Abradable Model for Rotor/Stator Interactions ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2019*. 2019. doi : 10.1115/GT2019-91447. oai : hal-02327651 (cf. p. 15, 233).

[12] S. Patnaik et F. Semperlotti. « Modeling Nonlinear Oscillators via Variable-Order Fractional Operators ». *ASME IDETC-CIE 2019*. 2019. doi : 10.1115/DETC2019-97944 (cf. p. 13).

[13] L. Salles, A. M. Gouskov, L. Blanc, F. Thouverez et P. Jean. « Dynamic Analysis of Fretting-Wear in Joint Interface by a Multiscale Harmonic Balance Method Coupled With Explicit or Implicit Integration Schemes ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010*. 2010, p. 1003-1013. doi : 10.1115/GT2010-23264. oai : hal-02529258 (cf. p. 14, 48, 85).

[14] V. Sessa, L. Iannelli et F. Vasca. « Mixed linear complementarity problems for the analysis of limit cycles in piecewise linear systems ». *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2012, p. 1023-1028. doi : 10.1109/CDC.2012.6426544 (cf. p. 91).

[15] F. Vasca, G. Angelone et L. Iannelli. « Linear complementarity models for steady-state analysis of pulse-width modulated switched electronic systems ». *2011 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)*. IEEE. 2011, p. 400-405. doi : 10.1109/MED.2011.5982981 (cf. p. 91).

[16] S. Vilmin, E. Lorrain, C. Hirsch et M. Swoboda. « Unsteady Flow Modeling Across the Rotor/Stator Interface Using the Nonlinear Harmonic Method ». *Volume 6 : Turbomachinery, Parts A and B*. 2006, p. 1227-1237. isbn : 978-0-7918-4241-6 978-0-7918-3774-0. doi : 10.1115/GT2006-90210 (cf. p. 35).

[17] R. J. Williams. « Simulation of Blade Casing Interaction Phenomena in Gas Turbines Resulting From Heavy Tip Rubs Using an Implicit Time Marching Method ». *Proceedings of the ASME 2011 Turbo Expo*. 2011, p. 1007-1016. doi : 10.1115/GT2011-45495. oai : hal-01555287 (cf. p. 233).

Articles

[18] V. Acary. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 256 (2013), p. 224-250. doi : 10.1016/j.cma.2012.12.012. oai : hal-00758613 (cf. p. 92, 96 sqq.).

[19] V. Acary. « Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for nonsmooth elastodynamics with contact ». *Z. Angew. Math. Mech.* Vol. 96, n° 5 (2016), p. 585-603. doi : 10.1002/zamm.201400231. oai : hal-01235240 (cf. p. 97, 111, 121).

[20] R. Alcorta, S. Baguet, B. Prabel, P. Piteau et G. Jacquet-Richardet. « Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 98, n° 4 (2019), p. 2939-2960. doi : 10.1007/s11071-019-05245-6. oai : hal-02295420 (cf. p. 2, 73, 165 sqq.).

[21] P. Almeida, C. Gibert, F. Thouverez, X. Leblanc et J.-P. Ousty. « Numerical Analysis of Bladed Disk–Casing Contact With Friction and Wear ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 138, n° 12 (2016), p. 122802. doi : 10.1115/1.4033065 (cf. p. 15, 233).

[22] S. Andersson. « Friction and wear simulation of the wheel–rail interface ». *Wheel–Rail Interface Handbook*. Elsevier, 2009, p. 93-124. isbn : 978-1-84569-412-8. doi : 10.1533/9781845696788.1.94 (cf. p. 78).

[23] P. Ballard. « The Dynamics of Discrete Mechanical Systems with Perfect Unilateral Constraints ». *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol. 154, n° 3 (2000), p. 199-274. doi : 10.1007/s002050000105. oai : hal-00111308 (cf. p. 96).

[24] A. Batailly, Q. Agrapart, A. Millecamps et J.-F. Brunel. « Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor ». *J. Sound Vib.* Vol. 375 (2016), p. 308-331. doi : 10.1016/j.jsv.2016.03.016. oai : hal-01342401 (cf. p. 2, 15, 83).

[25] A. Batailly, M. Legrand, A. Millecamps et F. Garcin. « Numerical-Experimental Comparison in the Simulation of Rotor/Stator Interaction Through Blade-Tip/Abradable Coating Contact ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 134, n° 8 (2012), p. 082504. doi : 10.1115/1.4006446. oai : hal-00746632 (cf. p. 9, 15, 233).

[26] K.-J. Bathe, E. Ramm et E. L. Wilson. « Finite element formulations for large deformation dynamic analysis ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 9, n° 2 (1975), p. 353-386. doi : 10.1002/nme.1620090207 (cf. p. 13).

[27] A. Benaarbia, Y. Rae et W. Sun. « Unified viscoplasticity modelling and its application to fatigue-creep behaviour of gas turbine rotor ». *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 136 (2018), p. 36-49. doi : 10.1016/j.ijmecsci.2017.12.008 (cf. p. 13).

[28] S. Benacchio, C. Giraud-Audine et O. Thomas. « Effect of dry friction on a parametric nonlinear oscillator ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 108, n° 2 (2022), p. 1005-1026. doi : 10.1007/s11071-022-07233-9. oai : hal-03754080 (cf. p. 2, 73, 165, 173).

[29] E. Benini et R. Biollo. « Aerodynamics of swept and leaned transonic compressor-rotors ». *Appl. Energ.* Vol. 84, n° 10 (2007), p. 1012-1027. doi : doi:10.1016/j.apenergy.2007.03.003 (cf. p. 203).

[30] H. F. Black. « Interaction of a Whirling Rotor with a Vibrating Stator across a Clearance Annulus ». *J. Mech. Eng. Sci.* Vol. 10, n° 1 (1968), p. 1-12. doi : 10.1243/JMES_JOUR_1968_010_003_02 (cf. p. 14).

[31] C. G. Broyden. « A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations ». *Math. Comput.* Vol. 19, n° 92 (1965), p. 577-593. doi : 10.2307/2003941 (cf. p. 56).

[32] C. G. Broyden. « On the discovery of the “good Broyden” method ». *Math. Program.* Vol. 87, n° 2 (2000), p. 209-213. doi : 10.1007/s101070050111 (cf. p. 52, 56).

[33] C. G. Broyden, J. E. Dennis Jr et J. J. Moré. « On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods ». *IMA J. Appl. Math.* Vol. 12, n° 3 (1973), p. 223-245. doi : 10.1093/imamat/12.3.223 (cf. p. 52).

[34] T. M. Cameron et J. H. Griffin. « An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems ». *J. Appl. Mech.* Vol. 56, n° 1 (1989), p. 149-154. doi : 10.1115/1.3176036. oai : hal-01333697 (cf. p. 40).

[35] R. Campbell et E. Paterson. « Fluid–structure interaction analysis of flexible turbomachinery ». *J. Fluid Struct.* Vol. 27, n° 8 (2011), p. 1376-1391. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2011.08.010 (cf. p. 13).

[36] A. Cardona, A. Lerusse et M. Géradin. « Fast Fourier nonlinear vibration analysis ». *Comput. Mech.* Vol. 22, n° 2 (1998), p. 128-142. doi : 10.1007/s004660050347 (cf. p. 61, 67).

[37] N. J. Carpenter, R. L. Taylor et M. G. Katona. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 32, n° 1 (1991), p. 103-128. doi : 10.1002/nme.1620320107. oai : hal-01389918 (cf. p. 33, 80, 82, 97).

[38] M. Cenedese et G. Haller. « How do conservative backbone curves perturb into forced responses ? A Melnikov function analysis ». *Proc. R. Soc. A.* Vol. 476, n° 2234 (2020), p. 20190494. doi : 10.1098/rspa.2019.0494 (cf. p. 2, 73, 153, 165 sq., 173, 176, 178, 205, 218).

[39] D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez et J. Dupeux. « Numerical and Experimental Study of Friction Damping Blade Attachments of Rotating Bladed Disks ». *Int. J. Rotating Mach.* Vol. 2006 (2006), p. 1-13. doi : 10.1155/IJRM/2006/71302 (cf. p. 85).

[40] I. Charpentier et M. Potier-Ferry. « Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche Diamant ». *C. R. Mécanique* Vol. 336, n° 3 (2008), p. 336-340. doi : 10.1016/j.crme.2007.11.022 (cf. p. 44).

[41] Y. Cheung, S. Chen et S. Lau. « Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 140, n° 2 (1990), p. 273-286. doi : 10.1016/0022-460X(90)90528-8 (cf. p. 58).

[42] D. W. Childs. « A Modal Transient Rotordynamic Model for Dual-Rotor Jet Engine Systems ». *J. Eng. Ind.* Vol. 98, n° 3 (1976), p. 876-882. doi : 10.1115/1.3439046 (cf. p. 14).

[43] Y. Colaïtis et A. Batailly. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* Vol. 502 (2021), p. 116070. doi : 10.1016/j.jsv.2021.116070. oai : hal-03163560 (cf. p. 57, 76, 104, 203 sq.).

[44] Y. Colaïtis et A. Batailly. « Stability analysis of periodic solutions computed for blade-tip/casing contact problems ». *J. Sound Vib.* Vol. 538 (2022), p. 117219. doi : 10.1016/j.jsv.2022.117219. oai : hal-03764770 (cf. p. 2, 67, 69, 136, 194, 203 sq., 209, 234).

[45] Y. Colaïtis et A. Batailly. « Development of a Harmonic Balance Method-Based Numerical Strategy for Blade-Tip/Casing Interactions : Application to NASA Rotor 37 ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 143, n° 11 (2021). doi : 10.1115/1.4051967. oai : hal-03286205 (cf. p. 104).

[46] Y. Colaïtis et A. Batailly. « Stability Analysis of an Industrial Blade Accounting for a Blade-Tip/Casing Nonlinear Interface ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 145, n° 4 (2022), p. 041003. doi : https://doi.org/10.1115/1.4055492. oai : hal-03778471 (cf. p. 67, 234).

[47] J. W. Cooley et J. W. Tukey. « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series ». *Math. Comput.* Vol. 19, n° 90 (1965), p. 297-301. doi : 10.2307/2003354 (cf. p. 41).

[48] R. W. Cottle et G. B. Dantzig. « Complementary pivot theory of mathematical programming ». *Linear Algebra Appl.* Vol. 1, n° 1 (1968), p. 103-125. doi : https://doi.org/10.1016/0024-3795(68)90052-9 (cf. p. 91).

[49] R. R. Craig et M. C. C. Bampton. « Coupling of substructures for dynamic analyses. » *AIAA J.* Vol. 6, n° 7 (1968), p. 1313-1319. doi : 10.2514/3.4741. oai : hal-01537654 (cf. p. 144, 203).

[50] M. Crespo Da Silva. « A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade ». *Int. J. Solids Struct.* Vol. 35, n° 7-8 (1998), p. 619-635. doi : 10.1016/S0020-7683(97)00065-6 (cf. p. 13).

[51] W. Cui, X. Xiang, Q. Zhao et J. Xu. « The effect of sweep on flowfields of a highly loaded transonic rotor ». *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 58 (2016), p. 71-81. doi : 10.1016/j.ast.2016.08.002 (cf. p. 203).

[52] O. De Donato et G. Maier. « Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 4, n° 3 (1972), p. 307-329. doi : 10.1002/nme.1620040302 (cf. p. 92).

[53] E. Delhez, F. Nyssen, J.-C. Golinval et A. Batailly. « Assessment of Geometric Nonlinearities Influence On NASA Rotor 37 Response to Blade Tip/Casing Rubbing Events ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 143, n° 11 (2021). doi : 10.1115/1.4051968. oai : hal-03343052 (cf. p. 15, 233).

[54] J. D. Denton. « Lessons from rotor 37 ». *J. Therm. Sci.* Vol. 6, n° 1 (1997), p. 1-13. doi : 10.1007/s11630-997-0010-9 (cf. p. 203).

[55] T. Detroux, L. Renson, L. Masset et G. Kerschen. « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 296 (2015), p. 18-38. doi : 10.1016/j.cma.2015.07.017. oai : hal-03446374 (cf. p. 2, 69, 73, 165 sqq.).

[56] T. Detroux, J.-P. Noël, L. N. Virgin et G. Kerschen. « Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions ». *PLoS One* Vol. 13, n° 3 (2018), p. 25. doi : 10.1371/journal.pone.0194452 (cf. p. 63, 73, 163, 166, 179, 181, 208, 219, 229).

[57] N. Di Palma, B. Chouvion et F. Thouverez. « Parametric study on internal resonances for a simplified nonlinear blade model ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 141 (2022), p. 103941. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103941. oai : hal-03353678 (cf. p. 67, 71, 73).

[58] J. Di Stasio, D. Dureisseix, A. Gravouil, G. Georges et T. Homolle. « Benchmark cases for robust explicit time integrators in non-smooth transient dynamics ». *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.* Vol. 6, n° 1 (2019), p. 2. doi : 10.1186/s40323-019-0126-y. oai : hal-02063069 (cf. p. 98, 113).

[59] D. Doyen, A. Ern et S. Piperno. « Time-Integration Schemes for the Finite Element Dynamic Signorini Problem ». *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 33, n° 1 (2011), p. 223-249. doi : 10.1137/100791440. oai : hal-00440128 (cf. p. 96).

[60] C. M. Firrone, S. Zucca et M. M. Gola. « The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 46, n° 2 (2011), p. 363-375. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.10.001 (cf. p. 15).

[61] C. M. Firrone et S. Zucca. « Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks ». *Numerical Analysis - Theory and Application.* Sous la dir. de J. Awrejcewicz. IntechOpen, 2011. Chap. 14. isbn : 978-953-51-5600-0. doi : 10.5772/25128 (cf. p. 15).

[62] A. Fischer. « A Newton-type method for positive-semidefinite linear complementarity problems ». *J. Optim. Theory Appl.* Vol. 86, n° 3 (1995), p. 585-608. doi : 10.1007/BF02192160 (cf. p. 92).

[63] G. Floquet. « Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. T. 12. 1883, p. 47-88 (cf. p. 65).

[64] N. Fois, J. Stringer et M. Marshall. « Adhesive transfer in aero-engine abradable linings contact ». *Wear* Vol. 304, n° 1-2 (2013), p. 202-210. doi : 10.1016/j.wear.2013.04.033 (cf. p. 15).

[65] P. Friedmann, C. Hammond et T.-H. Woo. « Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 11, n° 7 (1977), p. 1117-1136. doi : 10.1002/nme.1620110708 (cf. p. 67).

[66] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal et L. Jézéquel. « Effects of damping on brake squeal coalescence patterns – application on a finite element model ». *Mech. Res. Commun.* Vol. 34, n° 2 (2007), p. 181-190. doi : 10.1016/j.mechrescom.2006.09.012. oai : hal-00207796 (cf. p. 78).

[67] A. Förster et M. Krack. « An efficient method for approximating resonance curves of weakly-damped nonlinear mechanical systems ». *Comput. Struct.* Vol. 169 (2016), p. 81-90. doi : 10.1016/j.compstruc.2016.03.003 (cf. p. 2, 73, 85, 165, 234).

[68] F. Georgiades, M. Peeters, G. Kerschen, J. C. Golinval et M. Ruzzene. « Modal Analysis of a Nonlinear Periodic Structure with Cyclic Symmetry ». *AIAA J.* Vol. 47, n° 4 (2009), p. 1014-1025. doi : 10.2514/1.40461. oai : hal-01385735 (cf. p. 34 sq.).

[69] R. J. Gilmore et M. B. Steer. « Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance—A review of the art. Part I. Introductory concepts ». *Int. J. Microw. Mill.-Wave Comput.-Aided Eng.* Vol. 1, n° 1 (1991), p. 22-37. doi : 10.1002/mmce.4570010104 (cf. p. 35).

[70] C. Glocker et C. Studer. « Formulation and preparation for numerical evaluation of linear complementarity systems in dynamics ». *Multibody Syst. Dyn.* Vol. 13, n° 4 (2005), p. 447-463. doi : 10.1007/s11044-005-2519-6 (cf. p. 92).

[71] G. Gobat, L. Guillot, A. Frangi, B. Cochelin et C. Touzé. « Backbone curves, Neimark-Sacker boundaries and appearance of quasi-periodicity in nonlinear oscillators : application to 1 :2 internal resonance and frequency combs in MEMS ». *Meccanica* Vol. 56, n° 8 (2021), p. 1937-1969. doi : 10.1007/s11012-021-01351-1. oai : hal-03242876 (cf. p. 2, 73, 165).

[72] C. Grenat, S. Baguet, C.-H. Lamarque et R. Dufour. « A multi-parametric recursive continuation method for nonlinear dynamical systems ». *Mech. Syst. Sig. Process.* Vol. 127 (2019), p. 276-289. doi : 10.1016/j.ymssp.2019.03.011. oai : hal-02067415 (cf. p. 167).

[73] A. Grolet et F. Thouverez. « Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases ». *Mech. Syst. Sig. Process.* Vol. 52-53 (2015), p. 529-547. doi : 10.1016/j.ymssp.2014.07.015. oai : hal-02121532 (cf. p. 2, 153, 165 sq., 234).

[74] N. Guérin, C. Gibert, F. Thouverez et P. Almeida. « Experimental Analysis of Blade-Casing Contacts in a Centrifugal Compressor : Vibration and Thermal Aspects ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 143, n° 8 (2021). doi : 10.1115/1.4049500 (cf. p. 15).

[75] N. Guérin, A. Thorin, F. Thouverez, M. Legrand et P. Almeida. « Thermomechanical Model Reduction for Efficient Simulations of Rotor-Stator Contact Interaction ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 141, n° 2 (2018). doi : 10.1115/1.4040858. oai : hal-01713849 (cf. p. 233).

[76] K. C. Hall, J. P. Thomas et W. S. Clark. « Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique ». *AIAA J.* Vol. 40, n° 5 (2002), p. 879-886. doi : 10.2514/2.1754 (cf. p. 48).

[77] L. He et W. Ning. « Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines ». *AIAA J.* Vol. 36, n° 11 (1998), p. 2005-2012. doi : 10.2514/2.328 (cf. p. 35).

[78] T. Heinze, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek. « Global detection of detached periodic solution branches of friction-damped mechanical systems ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 99, n° 3 (2020), p. 1841-1870. doi : 10.1007/s11071-019-05425-4 (cf. p. 2, 15, 73, 85, 165 sq., 234).

[79] T. L. Hill, A. Cammarano, S. A. Neild et D. J. Wagg. « Interpreting the forced responses of a two-degree-of-freedom nonlinear oscillator using backbone curves ». *J. Sound Vib.* Vol. 349 (2015), p. 276-288. doi : 10.1016/j.jsv.2015.03.030 (cf. p. 173).

[80] T. L. Hill, S. A. Neild et A. Cammarano. « An analytical approach for detecting isolated periodic solution branches in weakly nonlinear structures ». *J. Sound Vib.* Vol. 379 (2016), p. 150-165. doi : 10.1016/j.jsv.2016.05.030 (cf. p. 173).

[81] T. Hoffmann, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek. « Measured and simulated forced response of a rotating turbine disk with asymmetric and cylindrical underplatform dampers ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 142, n° 5 (2020), p. 051002. doi : 10.1115/1.4045337 (cf. p. 15).

[82] H. Huang et K. Ekici. « An efficient harmonic balance method for unsteady flows in cascades ». *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 29, n° 1 (2013), p. 144-154. doi : 10.1016/j.ast.2013.02.004 (cf. p. 49).

[83] M. Jean. « The non-smooth contact dynamics method ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 177, n° 3-4 (1999), p. 235-257. doi : 10.1016/S0045-7825(98)00383-1. oai : hal-01390459 (cf. p. 91 sq., 96 sqq.).

[84] H. Jeffcott. « XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed. The effect of want of balance ». *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag.* Vol. 37, n° 219 (1919), p. 304-314. doi : 10.1080/14786440308635889 (cf. p. 14).

[85] H. Jiang, A. S. Chong, Y. Ueda et M. Wiercigroch. « Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints ». *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 127 (2017), p. 204-214. doi : 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.001 (cf. p. 104, 107).

[86] S. Jones et M. Legrand. « Forced vibrations of a turbine blade undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 101, n° 5 (2015), p. 351-374. doi : 10.1002/nme.4807. oai : hal-00806545 (cf. p. 38).

[87] W.-J. Kim et N. Perkins. « Harmonic balance/Galerkin method for non-smooth dynamic systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 261, n° 2 (2003), p. 213-224. doi : 10.1016/S0022-460X(02)00949-5. oai : hal-01693093 (cf. p. 38).

[88] Y. B. Kim et S. T. Noah. « Bifurcation analysis for a modified Jeffcott rotor with bearing clearances ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 1, n° 3 (1990), p. 221-241. doi : 10.1007/BF01858295 (cf. p. 14).

[89] W. Koenigsberg et J. Dunn. « Jump resonant frequency islands in nonlinear feedback control systems ». *IEEE T. Automat. Contr.* Vol. 20, n° 2 (1975), p. 208-217. doi : 10.1109/TAC.1975.1100914 (cf. p. 2, 165).

[90] M. Krack. « Nonlinear modal analysis of nonconservative systems : Extension of the periodic motion concept ». *Comput. Struct.* Vol. 154 (2015), p. 59-71. doi : 10.1016/j.compstruc.2015.03.008 (cf. p. 174, 218).

[91] M. Krack, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek. « A high-order harmonic balance method for systems with distinct states ». *J. Sound Vib.* Vol. 332, n° 21 (2013), p. 5476-5488. doi : 10.1016/j.jsv.2013.04.048 (cf. p. 40).

[92] M. Krack, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek. « On the Interaction of Multiple Traveling Wave Modes in the Flutter Vibrations of Friction-Damped Tuned Bladed Disks ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 139, n° 4 (2017), p. 042501. doi : 10.1115/1.4034650 (cf. p. 15).

[93] M. Krack, L. Salles et F. Thouverez. « Vibration Prediction of Bladed Disks Coupled by Friction Joints ». *Arch. Comput. Methods Eng.* Vol. 24, n° 3 (2016), p. 589-636. doi : 10.1007/s11831-016-9183-2. oai : hal-01825517 (cf. p. 15).

[94] R. Kuether, L. Renson, T. Detroux, C. Grappasonni, G. Kerschen et M. Allen. « Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves ». *J. Sound Vib.* Vol. 351 (2015), p. 299-310. doi : 10.1016/j.jsv.2015.04.035 (cf. p. 2, 165 sq.).

[95] M. Kunze et T. Küpper. « Non-smooth dynamical systems : an overview ». *Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems*. Sous la dir. de B. Fiedler. Springer, 2001, p. 431-452. doi : 10.1007/978-3-642-56589-2_19 (cf. p. 173).

[96] A. LaBryer et P. Attar. « A harmonic balance approach for large-scale problems in nonlinear structural dynamics ». *Comput. Struct.* Vol. 88, n° 17-18 (2010), p. 1002-1014. doi : 10.1016/j.compstruc.2010.06.003 (cf. p. 48 sq.).

[97] C.-H. Lamarque et A. T. Savadkoohi. « Algebraic techniques and perturbation methods to approach frequency response curves ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 144 (2022), p. 104096. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104096. oai : hal-03749838 (cf. p. 2, 165 sq.).

[98] N. Langenbrunner, M. Weaver, M. G. Dunn, C. Padova et J. Barton. « Dynamic response of a metal and a CMC turbine blade during a controlled rub event using a segmented shroud ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 137, n° 6 (2015). doi : 10.1115/1.4028685 (cf. p. 2).

[99] J. W. Larsen et S. R. Nielsen. « Non-linear dynamics of wind turbine wings ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 41, n° 5 (2006), p. 629-643. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.01.003 (cf. p. 13).

[100] P. D. Lax et R. D. Richtmyer. « Survey of the stability of linear finite difference equations ». *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 9, n° 2 (1956), p. 267-293. doi : 10.1002/cpa.3160090206 (cf. p. 32).

[101] D. Laxalde et F. Thouverez. « Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces ». *J. Sound Vib.* Vol. 322, n° 4-5 (2009), p. 1009-1025. doi : 10.1016/j.jsv.2008.11.044. oai : hal-00343494v3 (cf. p. 174, 218).

[102] D. Laxalde, F. Thouverez et J.-P. Lombard. « Forced response analysis of integrally bladed disks with friction ring dampers ». *J. Vib. Acoust.* Vol. 132, n° 1 (2010). doi : 10.1115/1.4000763. oai : hal-00453467 (cf. p. 15).

[103] A. Lazarus et O. Thomas. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». *C. R. Mécanique* Vol. 338, n° 9 (2010), p. 510-517. doi : 10.1016/j.crme.2010.07.020. oai : hal-01452004 (cf. p. 69).

[104] G. Lebeau et M. Schatzman. « A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary ». *J. Differ. Equations* Vol. 53, n° 3 (1984), p. 309-361. doi : 10.1016/0022-0396(84)90030-5. oai : hal-01294216 (cf. p. 96).

[105] B. Lee, L. Liu et K. Chung. « Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces ». *J. Sound Vib.* Vol. 281, n° 3-5 (2005), p. 699-717. doi : 10.1016/j.jsv.2004.01.034 (cf. p. 40).

[106] C. E. Lemke. « Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming ». *Manage. Sci.* Vol. 11, n° 7 (1965), p. 681-689. doi : 10.1287/mnsc.11.7.681. oai : hal-01885823 (cf. p. 91 sq., 94).

[107] K. Levenberg. « A method for the solution of certain non-linear problems in least squares ». *Q. Appl. Math.* Vol. 2, n° 2 (1944), p. 164-168. doi : 10.1090/qam/10666 (cf. p. 56 sq.).

[108] A. Liapounoff. « Problème général de la stabilité du mouvement ». *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques.* T. 9. 1907, p. 203-474 (cf. p. 63).

[109] L. Liu, E. Dowell et J. Thomas. « A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces ». *J. Fluids Struct.* Vol. 23, n° 3 (2007), p. 351-363. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2006.09.005 (cf. p. 48).

[110] F. Mangussi et D. H. Zanette. « Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks ». *PloS one* Vol. 11, n° 9 (2016), p. e0162365. doi : 10.1371/journal.pone.0162365. oai : hal-01463863 (cf. p. 2, 73, 163, 165 sq., 179, 181, 208, 219, 229).

[111] D. W. Marquardt. « An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters ». *J. Soc. Indust. Appl. Math.* Vol. 11, n° 2 (1963), p. 431-441. doi : 10.1137/0111030 (cf. p. 56 sq.).

[112] J. R. Martins, P. Sturdza et J. J. Alonso. « The complex-step derivative approximation ». *ACM T. Math. Software* Vol. 29, n° 3 (2003), p. 245-262. doi : 10.1145/838250.838251. oai : hal-01483287 (cf. p. 44).

[113] M. B. Meingast, M. Legrand et C. Pierre. « A linear complementarity problem formulation for periodic solutions to unilateral contact problems ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 66 (2014), p. 18-27. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.007. oai : hal-00955647 (cf. p. 2, 80, 91 sq., 94).

[114] V. K. Melnikov. « On the stability of a center for time-periodic perturbations ». *Tr. Mosk. Mat. Obs.* Vol. 12 (1963), p. 3-52 (cf. p. 173).

[115] A. Menzel et P. Steinmann. « A view on anisotropic finite hyper-elasticity ». *Eur. J. Mech. A. Solids* Vol. 22, n° 1 (2003), p. 71-87. doi : 10.1016/S0997-7538(02)01253-6 (cf. p. 13).

[116] M. Mitra, S. Zucca et B. I. Epureanu. « Adaptive Microslip Projection for Reduction of Frictional and Contact Nonlinearities in Shrouded Blisks ». *J. Comput. Nonlinear Dyn.* Vol. 11, n° 4 (2016). 041016. doi : 10.1115/1.4033003 (cf. p. 14).

[117] G. Moore. « Floquet theory as a computational tool ». *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 42, n° 6 (2005), p. 2522-2568. doi : 10.1137/S0036142903434175 (cf. p. 69).

[118] J. J. Moré. « Classes of functions and feasibility conditions in nonlinear complementarity problems ». *Math. Program.* Vol. 6, n° 1 (1974), p. 327-338. doi : 10.1007/BF01580248 (cf. p. 92).

[119] J. J. Moreau. « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Springer Vienna, 1988, p. 1-82. ISBN : 978-3-211-82066-7 978-3-7091-2624-0. DOI : 10.1007/978-3-7091-2624-0_1. oai : hal-01713847 (cf. p. 91 sq., 96 sqq.).

[120] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez et L. Jezequel. « A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 265, n° 1 (2003), p. 201-219. DOI : 10.1016/S0022-460X(02)01447-5. oai : hal-01635272 (cf. p. 35, 78, 80, 85, 233).

[121] M. Nakhla et J. Vlach. « A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems ». *IEEE Trans. Circuits Syst.* Vol. 23, n° 2 (1976), p. 85-91. DOI : 10.1109/TCS.1976.1084181 (cf. p. 35).

[122] S. Narayanan et P. Sekar. « A frequency domain based numeric–analytical method for non-linear dynamical systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 211, n° 3 (1998), p. 409-424. DOI : 10.1006/jsvi.1997.1319 (cf. p. 45).

[123] R. D. Neidinger. « Introduction to automatic differentiation and MATLAB object-oriented programming ». *SIAM Rev.* Vol. 52, n° 3 (2010), p. 545-563. DOI : 10.1137/080743627 (cf. p. 44).

[124] N. M. Newmark. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». *J. Eng. Mech. Div.* Vol. 85, n° 3 (1959), p. 67-94. DOI : 10.1061/JMCEA3.0000098 (cf. p. 33).

[125] W. Ning et L. He. « Computation of Unsteady Flows Around Oscillating Blades Using Linear and Nonlinear Harmonic Euler Methods ». *J. Turbomach.* Vol. 120, n° 3 (1998), p. 508-514. DOI : 10.1115/1.2841747 (cf. p. 35).

[126] S. Nitschke, T. Wollmann, C. Ebert, T. Behnisch, A. Langkamp, T. Lang, E. Johann et M. Gude. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* Vol. 422-423 (2019), p. 161-166. DOI : 10.1016/j.wear.2018.12.072 (cf. p. 15, 233).

[127] F. Nyssen, N. Tableau, D. Lavazec et A. Batailly. « Experimental and numerical characterization of a ceramic matrix composite shroud segment under impact loading ». *J. Sound Vib.* Vol. 467 (2020), p. 115040. DOI : 10.1016/j.jsv.2019.115040. oai : hal-02378746 (cf. p. 83).

[128] M. Pakdemirli, M. M. F. Karahan et H. Boyaci. « A New Perturbation Algorithm With Better Convergence Properties : Multiple Scales Lindstedt Poincare Method ». *Math. Comput. Appl.* Vol. 14, n° 1 (2009), p. 31-44. DOI : 10.3390/mca14010031 (cf. p. 31).

[129] L. Paoli et M. Schatzman. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 40, n° 2 (2002), p. 702-733. DOI : 10.1137/S0036142900378728. oai : hal-01885729 (cf. p. 96 sq.).

[130] L. Paoli et M. Schatzman. « A Numerical Scheme for Impact Problems II : The Multidimensional Case ». *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 40, n° 2 (2002), p. 734-768. DOI : 10.1137/S003614290037873X (cf. p. 96 sq.).

[131] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani et G. Jacquet-Richardet. « A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 72, n° 3 (2013), p. 671-682. DOI : 10.1007/s11071-012-0744-0. oai : hal-00813265 (cf. p. 69).

[132] S. Pernot. « A Wavelet-Balance Method to Investigate the Vibrations of Nonlinear Dynamical Systems ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 32 (2003), p. 32-70. doi : https://doi.org/10.1023/A:1024263917587. oai : hal-00814573 (cf. p. 38).

[133] S. Pernot et C.-H. Lamarque. « A wavelet-Galerkin procedure to investigate time-periodic systems : transient vibration and stability analysis ». *J. Sound Vib.* Vol. 245, n° 5 (2001), p. 845-875. doi : 10.1006/jsvi.2001.3610 (cf. p. 67).

[134] L. Pesaresi, J. Armand, C. Schwingshackl, L. Salles et C. Wong. « An advanced underplatform damper modelling approach based on a microslip contact model ». *J. Sound Vib.* Vol. 436 (2018), p. 327-340. doi : 10.1016/j.jsv.2018.08.014. oai : hal-02369256 (cf. p. 15, 233).

[135] E. P. Petrov. « Analysis of Bifurcations in Multiharmonic Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of Gas Turbine Engine Structures With Friction and Gaps ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 138, n° 10 (2016), p. 12. doi : 10.1115/1.4032906 (cf. p. 2 sq., 73).

[136] E. P. Petrov. « A Method for Parametric Analysis of Stability Boundaries for Nonlinear Periodic Vibrations of Structures With Contact Interfaces ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 141, n° 3 (2019), p. 031023. doi : 10.1115/1.4040850 (cf. p. 2, 73, 163, 165 sq.).

[137] E. P. Petrov et D. J. Ewins. « Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks ». *J. Turbomach.* Vol. 125, n° 2 (2003), p. 364-371. doi : 10.1115/1.1539868 (cf. p. 40, 78).

[138] E. Piollet, F. Nyssen et A. Batailly. « Blade/casing rubbing interactions in aircraft engines : Numerical benchmark and design guidelines based on NASA rotor 37 ». *J. Sound Vib.* Vol. 460 (2019), p. 114878. doi : 10.1016/j.jsv.2019.114878. oai : hal-02281666 (cf. p. 142, 203 sq.).

[139] M. J. D. Powell. « A Hybrid Method for Nonlinear Equations ». *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Sous la dir. de P. Rabinowitz. Gordon et Breach, 1970 (cf. p. 53).

[140] M. Powell. « A New Algorithm for Unconstrained Optimization ». *Nonlinear Programming*. Sous la dir. de J. Rosen, O. Mangasarian et K. Ritter. Academic Press, 1970, p. 31-65. isbn : 978-0-12-597050-1. doi : https://doi.org/10.1016/B978-0-12-597050-1.50006-3 (cf. p. 50, 53).

[141] S. Quaegebeur, B. Chouvion et F. Thouverez. « Nonlinear dynamic analysis of three-dimensional bladed-disks with frictional contact interfaces based on cyclic reduction strategies ». *Int. J. Solids Struct.* Vol. 236-237 (2022), p. 111277. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2021.111277 (cf. p. 15).

[142] M. Razzak, M. Alam et M. Sharif. « Modified multiple time scale method for solving strongly nonlinear damped forced vibration systems ». *Results Phys.* Vol. 8 (2018), p. 231-238. doi : 10.1016/j.rinp.2017.12.015 (cf. p. 31).

[143] P. Ribeiro et M. Petyt. « Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method ». *J. Sound Vib.* Vol. 224, n° 4 (1999), p. 591-624. doi : 10.1006/jsvi.1999.2193 (cf. p. 73).

[144] P. Ribeiro et M. Petyt. « Non-linear free vibration of isotropic plates with internal resonance ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 35, n° 2 (2000), p. 263-278. doi : 10.1016/S0020-7462(99)00013-X (cf. p. 73).

[145] R. M. Rosenberg. « Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems ». *J. Appl. Mech.* Vol. 27, n° 2 (1960), p. 263-268. doi : 10.1115/1.3643948 (cf. p. 174).

[146] I. Rosu, H. L. Elias-Birembaux et F. Lebon. « Finite element modeling of an aircraft tire rolling on a steel drum : experimental investigations and numerical simulations ». *Appl. Sci.* Vol. 8, n° 4 (2018), p. 593. doi : 10.3390/app8040593. oai : hal-02021033 (cf. p. 77).

[147] L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, A. M. Gouskov et P. Jean. « Dual Time Stepping Algorithms With the High Order Harmonic Balance Method for Contact Interfaces With Fretting-Wear ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 134, n° 3 (2012), p. 032503. doi : 10.1115/1.4004236. oai : hal-00975699 (cf. p. 15, 35, 233).

[148] L. Salles, B. Staples, N. Hoffmann et C. Schwingshackl. « Continuation techniques for analysis of whole aeroengine dynamics with imperfect bifurcations and isolated solutions ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 86, n° 3 (2016), p. 1897-1911. doi : 10.1007/s11071-016-3003-y (cf. p. 2, 73, 153, 165).

[149] K. Sanliturk et D. Ewins. « Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method ». *J. Sound Vib.* Vol. 193, n° 2 (1996), p. 511-523. doi : 10.1006/jsvi.1996.0299 (cf. p. 35).

[150] E. Sarrouy, A. Grolet et F. Thouverez. « Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 46, n° 5 (2011), p. 727-737. doi : 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.005. oai : hal-00623630 (cf. p. 2, 73, 166, 234).

[151] F. Schreyer et R. I. Leine. « A Mixed Shooting – Harmonic Balance Method for Unilaterally Constrained Mechanical Systems ». *Arch. Mech. Eng.* Vol. 63, n° 2 (2016), p. 297-314. doi : 10.1515/meceng-2016-0017. oai : hal-01356796 (cf. p. 35).

[152] J. Shaw et S. W. Shaw. « The onset of chaos in a two-degree-of-freedom impacting system ». *J. Appl. Mech.* Vol. 56, n° 1 (1989), p. 168-174. doi : 10.1115/1.3176040 (cf. p. 173).

[153] S. W. Shaw et R. H. Rand. « The transition to chaos in a simple mechanical system ». *Int. J. Non Linear Mech.* Vol. 24, n° 1 (1989), p. 41-56. doi : 10.1016/0020-7462(89)90010-3 (cf. p. 173).

[154] S. Shaw et C. Pierre. « Non-linear normal modes and invariant manifolds ». *J. Sound Vib.* Vol. 150, n° 1 (1991), p. 170-173. doi : 10.1016/0022-460X(91)90412-D. oai : hal-01310674 (cf. p. 174).

[155] J. C. Simo et T. Laursen. « An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction ». *Comput. Struct.* Vol. 42, n° 1 (1992), p. 97-116. doi : 10.1016/0045-7949(92)90540-G (cf. p. 25).

[156] S. C. Sinha et D.-H. Wu. « An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 151, n° 1 (1991), p. 91-117. doi : 10.1016/0022-460X(91)90654-3 (cf. p. 67).

[157] J.-J. Sinou et L. Jézéquel. « Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping ». *Eur. J. Mech. A. Solids* Vol. 26, n° 1 (2007), p. 106-122. doi : 10.1016/j.euromechsol.2006.03.002. oai : hal-00207759 (cf. p. 78).

[158] C. Studer, R. I. Leine et C. Glocker. « Step size adjustment and extrapolation for time-stepping schemes in non-smooth dynamics ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 76, n° 11 (2008), p. 1747-1781. doi : 10.1002/nme.2383. oai : hal-01352897 (cf. p. 96).

[159] Y. Sun, A. Vizzaccaro, J. Yuan et L. Salles. « An extended energy balance method for resonance prediction in forced response of systems with non-conservative nonlinearities using damped nonlinear normal mode ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 103 (2021), p. 3315-3333 (cf. p. 173).

[160] P. Sundararajan et S. T. Noah. « Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method—Application to Rotor Systems ». *J. Vib. Acoust.* Vol. 119, n° 1 (1997), p. 9-20. doi : 10.1115/1.2889694 (cf. p. 34).

[161] J. Szwedowicz, R. Visser, W. Sextro et P. A. Masserey. « On Nonlinear Forced Vibration of Shrouded Turbine Blades ». *J. Turbomach.* Vol. 130, n° 1 (2008), p. 011002. doi : 10.1115/1.2218889 (cf. p. 14).

[162] O. Thomas, M. Monteil et C. Touzé. « Idiophones à plaque et à coque. Partie I. Instruments linéaires et faiblement non linéaires : entre cloches et steelpans ». *Musique & Technique* Vol. 6 (2016), p. 34-50. oai : hal-01338550 (cf. p. 13).

[163] A. Thorin, N. Guérin, M. Legrand, F. Thouverez et P. Almeida. « Nonsmooth Thermoelastic Simulations of Blade–Casing Contact Interactions ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 141, n° 2 (2019), p. 022502. doi : 10.1115/1.4040857. oai : hal-01989188v1 (cf. p. 15, 233).

[164] F. Tin-Loi et P. Tseng. « Efficient computation of multiple solutions in quasibrittle fracture analysis ». *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 192, n° 11-12 (2003), p. 1377-1388. doi : 10.1016/S0045-7825(02)00645-X (cf. p. 92).

[165] T. Vadcard, A. Batailly et F. Thouverez. « On Harmonic Balance Method-based Lagrangian contact formulations for vibro-impact problems ». *J. Sound Vib.* Vol. 531 (2022), p. 116950. doi : 10.1016/j.jsv.2022.116950. oai : hal-03665624 (cf. p. 85, 92, 202).

[166] T. Vadcard, Y. Colaïtis, A. Batailly et F. Thouverez. « Assessment of Two Harmonic Balance Method-Based Numerical Strategies for Blade-Tip/Casing Interactions : Application to Nasa Rotor67 ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 144, n° 12 (2022). doi : 10.1115/1.4055416. oai : hal-03775621 (cf. p. 2, 73, 78, 165).

[167] P. Veerman et P. Holmes. « The existence of arbitrarily many distinct periodic orbits in a two degree of freedom Hamiltonian system ». *Physica D* Vol. 14, n° 2 (1985), p. 177-192. doi : 10.1016/0167-2789(85)90177-0 (cf. p. 173).

[168] P. Veerman et P. Holmes. « Resonance bands in a two degree of freedom Hamiltonian system ». *Physica D* Vol. 20, n° 2-3 (1986), p. 413-422. doi : 10.1016/0167-2789(86)90043-6 (cf. p. 173).

[169] M. Volvert et G. Kerschen. « Phase resonance nonlinear modes of mechanical systems ». *J. Sound Vib.* Vol. 511 (2021), p. 116355. doi : 10.1016/j.jsv.2021.116355 (cf. p. 2, 153, 165).

[170] G. von Groll et D. Ewins. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». *J. Sound Vib.* Vol. 241, n° 2 (2001), p. 223-233. doi : 10.1006/jsvi.2000.3298. oai : hal-01333704 (cf. p. 57, 60, 68).

[171] Y. Wang et M. T. Mason. « Two-Dimensional Rigid-Body Collisions With Friction ». *J. Appl. Mech.* Vol. 59, n° 3 (1992), p. 635-642. doi : 10.1115/1.2893771 (cf. p. 96).

[172] L. Woiwode, N. N. Balaji, J. Kappauf, F. Tubita, L. Guillot, C. Vergez, B. Cochelin, A. Grolet et M. Krack. « Comparison of two algorithms for Harmonic Balance and path continuation ». *Mech. Syst. Sig. Process.* Vol. 136 (2020), p. 106503. doi : 10.1016/j.ymssp.2019.106503. oai : hal-02424746 (cf. p. 76).

[173] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel et R. Dufour. « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems ». *Mech. Syst. Sig. Process.* Vol. 88 (2017), p. 445-461. doi : 10.1016/j.ymssp.2016.09.037. oai : hal-01402109 (cf. p. 14, 73, 167 sq.).

[174] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel et R. Dufour. « Numerical Tracking of Limit Points for Direct Parametric Analysis in Nonlinear Rotordynamics ». *J. Vib. Acoust.* Vol. 138, n° 2 (2016), p. 021007. doi : 10.1115/1.4032182. oai : hal-01265919 (cf. p. 166 sq.).

[175] W. Xue, S. Gao, D. Duan, J. Zhang, Y. Liu et S. Li. « Effects of blade material characteristics on the high-speed rubbing behavior between Al-hBN abradable seal coatings and blades ». *Wear* Vol. 410-411 (2018), p. 25-33. doi : 10.1016/j.wear.2018.06.003 (cf. p. 15, 233).

[176] K. Yagasaki. « Periodic and homoclinic motions in forced, coupled oscillators ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 20, n° 4 (1999), p. 319-359. doi : 10.1023/A:1008336402517 (cf. p. 173).

[177] K. Yagasaki. « The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations ». *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 56, n° 6 (1996), p. 1720-1765. doi : 10.1137/S0036139995281317 (cf. p. 173).

[178] B.-D. Yang et C.-H. Menq. « Modeling of Friction Contact and Its Application to the Design of Shroud Contact ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 119, n° 4 (1997), p. 958-963. doi : 10.1115/1.2817082 (cf. p. 14).

[179] S. D. Yu. « An efficient computational method for vibration analysis of unsymmetric piecewise-linear dynamical systems with multiple degrees of freedom ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 71, n° 3 (2013), p. 493-504. doi : 10.1007/s11071-012-0676-8 (cf. p. 91).

[180] J. Yuan, Y. Sun, C. Schwingshackl et L. Salles. « Computation of damped nonlinear normal modes for large scale nonlinear systems in a self-adaptive modal subspace ». *Mech. Syst. Sig. Process.* Vol. 162 (2022), p. 108082. doi : https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108082 (cf. p. 173).

[181] S. Zucca, C. M. Firrone et M. M. Gola. « Numerical assessment of friction damping at turbine blade root joints by simultaneous calculation of the static and dynamic contact loads ». *Nonlinear Dyn.* Vol. 67, n° 3 (2012), p. 1943-1955. doi : 10.1007/s11071-011-0119-y (cf. p. 15).

[182] S. Zucca, C. M. Firrone et M. M. Gola. « Modeling underplatform dampers for turbine blades : a refined approach in the frequency domain ». *J. Vib. Control* Vol. 19, n° 7 (2013), p. 1087-1102. doi : 10.1177/1077546312440809 (cf. p. 15).

Livres

[183] V. Acary et B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics*. L. N. App. C. M. 35. Springer, 2008. isbn : 978-3-540-75392-6. doi : 10.1007/978-3-540-75392-6 (cf. p. 91 sq., 96 sq.).

[184] E. L. Allgower et K. Georg. *Introduction to numerical continuation methods*. SIAM, 2003. isbn : 978-0-89871-544-6. doi : 10.1137/1.9780898719154 (cf. p. 62).

[185] B. Brogliato. *Dissipative systems analysis and control : theory and applications*. Springer, 2007. isbn : 978-1-84628-517-2. doi : 10.1007/978-1-84628-517-2 (cf. p. 97).

[186] G. Duvaut et J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972 (cf. p. 22).

[187] C. Eck, J. Jarusek et M. Krbec. *Unilateral Contact Problems : Variational Methods and Existence Theorems*. CRC Press, 2005. isbn : 9781574446296. doi : 10.1201/9781574446296 (cf. p. 96).

[188] M. Géradin et D. J. Rixen. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2014. isbn : 978-1-118-90020-8 (cf. p. 26, 31 sqq., 96).

[189] J. Guckenheimer et P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer Science & Business Media, 2013. isbn : 978-1-4612-1140-2 (cf. p. 173).

[190] M. Krack et J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer International Publishing, 2019. isbn : 978-3-030-14023-6. doi : 10.1007/978-3-030-14023-6 (cf. p. 40 sq., 49, 152).

[191] Y. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer, 1998. isbn : 978-1-4757-3978-7. doi : 10.1007/978-1-4757-3978-7 (cf. p. 69, 167 sq., 183).

[192] A. H. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011. isbn : 978-3-527-61845-3 (cf. p. 30).

[193] A. H. Nayfeh et B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008. isbn : 9783527617548. doi : 10.1002/9783527617548 (cf. p. 64, 66, 69, 176).

[194] A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, 2000. isbn : 9783527617609. doi : 10.1002/9783527617609 (cf. p. 30).

[195] A. H. Nayfeh et D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1995. isbn : 978-0-471-12142-8. doi : 10.1002/9783527617586 (cf. p. 73).

[196] J. Nocedal et S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 2006. isbn : 978-0-387-30303-1. doi : 10.1007/978-0-387-40065-5 (cf. p. 50, 52).

[197] P. Royis. *Mécanique des milieux continus*. Presses Universitaires Lyon, 2005. isbn : 9782729707705 (cf. p. 15).

[198] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer New York, 2010. isbn : 978-1-4419-1740-9. doi : 10.1007/978-1-4419-1740-9 (cf. p. 57, 64, 69, 193).

[199] L. N. Trefethen et D. Bau III. *Numerical linear algebra*. SIAM, 1997. isbn : 978-0898713619 (cf. p. 50).

[200] J. M. Vance, F. Y. Zeidan et B. G. Murphy. *Machinery vibration and rotordynamics*. John Wiley & Sons, 2010. isbn : 978-0-471-46213-2 (cf. p. 9).

[201] P. Wriggers et T. A. Laursen. *Computational contact mechanics*. Springer, 2006. isbn : 978-3-540-32609-0. doi : 10.1007/978-3-540-32609-0 (cf. p. 15, 17 sq., 23, 25, 28).

Thèses

[202] B. Al Sayed. « Comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines : Maîtrise des effets des dispositifs de liaisonnement amortisseurs ». Thèse de doctorat. INSA Lyon, 2011. oai : tel-00782341v1 (cf. p. 2, 14).

[203] P. Almeida. « Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2014. oai : tel-01289766v1 (cf. p. 2, 15).

[204] A. Batailly. « Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle ». Thèse de doctorat. École Centrale de Nantes, 2008. oai : tel-00364945v1 (cf. p. 2, 28, 83).

[205] D. Charleux. « Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2006. oai : tel-01130569v1 (cf. p. 2, 15).

[206] Y. Colaïtis. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. École Polytechnique Montréal, 2021. oai : tel-03318777 (cf. p. 2 sq., 14, 35, 41, 45, 49, 61, 64, 69 sqq., 73, 78 sq., 104, 119, 141 sqq., 153, 163, 165, 202 sq., 233 sq.).

[207] E. Delhez. « Reduced-order modeling of mistuned bladed disks with geometric and contact nonlinearities ». Thèse de doctorat. École Polytechnique Montréal ; Université de Liège, 2022. oai : tel-03792201v1 (cf. p. 2, 233).

[208] D. Demailly. « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel—Application à la dynamique rotor ». Thèse de doctorat. École centrale de Lyon, 2003. oai : tel-00587168v1 (cf. p. 48, 61, 64).

[209] N. Di Palma. « Dynamique non linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2022. oai : tel-03677198v1 (cf. p. 2, 13, 31, 35, 233).

[210] C. Dumartineix. « Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2019. oai : tel-03052668v1 (cf. p. 2).

[211] A. Grolet. « Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2013. oai : tel-01727750v1 (cf. p. 2, 13, 35, 50, 73, 78).

[212] M. Gruin. « Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine BassePression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2012. oai : tel-00750011v1 (cf. p. 58).

[213] M. Guskov. « Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors : Etudes numérique et expérimentale ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2007. oai : tel-00438353v1 (cf. p. 2, 69).

[214] C. Joannin. « Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2017. oai : tel-01800400v1 (cf. p. 2, 35).

[215] D. Laxalde. « Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2007. oai : tel-00344168v1 (cf. p. 2, 15, 78, 233).

[216] M. Legrand. « Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion ». Thèse de doctorat. École Centrale de Nantes, 2006. oai : tel-00011631v2 (cf. p. 2, 15, 83).

[217] E. Lemoine. « Approche couplée pour l'étude du contact sous chargement dynamique vibratoire : application à l'usure par fretting du contact aube-disque ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2021 (cf. p. 2, 85).

[218] N. Lesaffre. « Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2007. oai : tel-01375079v1 (cf. p. 2, 15, 18).

[219] A. Mabilia. « Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2020. oai : tel-03152435v1 (cf. p. 85).

[220] A. Martin. « Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2019. oai : tel-02476146 (cf. p. 2, 13, 35, 233).

[221] S. Nacivet. « Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2002. oai : tel-01119596v1 (cf. p. 2, 85, 106).

[222] N. Ombret. « Prédiction du flottement de soufflante avec prise en compte des non-linéarités en pied d'aube ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2022. oai : tel-03983272v1 (cf. p. 2, 85).

[223] L. Peletan. « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator. » Thèse de doctorat. INSA Lyon, 2012. oai : tel-00808515v1 (cf. p. 2 sq., 32, 61, 67).

[224] S. Quaegebeur. « Prévision de la réponse forcée de roues aubagées désaccordées en présence de non-linéarités de frottement ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2021. oai : tel-03577720 (cf. p. 2, 85, 233).

[225] L. Salles. « Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : Application aux pieds d'aubes de turbomachines ». Thèse de doctorat. École centrale de Lyon, 2010. oai : tel-00600613v1 (cf. p. 2).

[226] E. Sarrouy. « Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires - Application à la dynamique des rotors ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2008. oai : tel-00366857v1 (cf. p. 153).

[227] F. Sicot. « Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines ». Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2009 (cf. p. 48).

[228] O. Thomas. « Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion ». Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI ; Telecom ParisTech, 2001. oai : tel-00005656v2 (cf. p. 13).

[229] O. Thomas. « Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration ». Habilitation à Diriger des Recherches. ENS Cachan, 2011. oai : tel-00718727v1 (cf. p. 70).

Rapports techniques

[230] V. Acary et B. Brogliato. « Coefficients de restitution et efforts aux impacts : Revue et comparaison des estimations analytiques ». rapport de recherche RR-5401. INRIA, 2004, p. 162. inria-00070602 (cf. p. 96).

[231] « In-flight engine failure, Sydney, 03 February 2007, Boeing Company 747-438, VH-OJM ». rapport technique. https://www.atsb.gov.au/publications/investigation_reports/2007/aair/aair200700356. Australian Transport Safety Bureau, 2007 (cf. p. 15).

[232] J. J. Moré et D. C. Sorensen. « Newton's method ». rapport technique. Argonne National Lab., IL (USA), 1982. doi : 10.2172/5326201 (cf. p. 50).

[233] L. Reid et R. D. Moore. « Design and overall performance of four highly loaded, high speed inlet stages for an advanced high-pressure-ratio core compressor ». rapport technique. https://ntrs.nasa.gov/citations/19780025165. NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, USA, 1978 (cf. p. 203).

[234] D. C. Urasek et W. T. Gorrell. « Performance of two-stage fan having low-aspect-ratio first-stage rotor blading ». rapport technique. https://ntrs.nasa.gov/citations/19790018972. NASA Lewis Research Center Cleveland, OH, United States, 1979, p. 132 (cf. p. 141, 143).

Autres

[235] D. Huebler. *Rotor 37 and stator 37 assembly. Records of the National Aeronautics and Space Administration, 1903 - 2006. Photographs relating to agency activities, facilities and personnel, 1973 - 2013*. https://catalog.archives.gov/id/17468389. 1977 (cf. p. 204).

[236] P. Kelly. *Mechanics Lecture Notes : An introduction to Solid Mechanics*. http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/index.html (cf. p. 15, 20).

[237] D. Laity. *Stage 67 rotor and stage 67 casing half stators mounted. Records of the National Aeronautics and Space Administration, 1903 - 2006. Photographs relating to agency activities, facilities and personnel, 1973 - 2013*. https://catalog.archives.gov/id/17500553. 1980 (cf. p. 144).

Annexe A

Énergies

Cette annexe répertorie les formules permettant de calculer les différentes énergies mises en jeu dans un système mécanique :

— **énergie cinétique**

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{v}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{v}(t); \tag{A.1}$$

— **énergie de déformation**

$$E_{\text{def}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{K}\mathbf{x}(t); \tag{A.2}$$

— **énergie dissipée**

$$E_{\text{dis}}(T) = \int_0^T \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{C}\mathbf{v}(t)\mathrm{d}t; \tag{A.3}$$

— **travail des efforts d'excitation**

$$W_{\text{ex}}(T) = \int_0^T \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{f}_{\text{ex}}(t)\mathrm{d}t; \tag{A.4}$$

— **travail des efforts de contact**

$$W_{\text{nl}}(T) = \int_0^T \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{f}_{\text{nl}}(t)\mathrm{d}t. \tag{A.5}$$

Liste des publications personnelles

Revues internationales avec comité de lecture

— Thibaut Vadcard, Yann Colaïtis, Alain Batailly, Fabrice Thouverez. « Assessment of Two Harmonic Balance Method-Based Numerical Strategies for Blade-Tip/Casing Interactions : Application to Nasa Rotor67 ». *J. Eng. Gas Turbines Power* Vol. 144, n°12 (2022), p121004. DOI : 10.1115/1.4055416. oai : hal-03775621

— Thibaut Vadcard, Alain Batailly, Fabrice Thouverez. « On Harmonic Balance Method-based Lagrangian contact formulations for vibro-impact problems ». *J. Sound Vib.* Vol. 531 (2022), p. 116950. DOI : (10.1016/j.jsv.2022.116950). oai : hal-03665624

Colloques internationaux avec actes publiés

— Thibaut Vadcard, Yann Colaïtis, Alain Batailly, Fabrice Thouverez. « Assessment of two Harmonic Balance Method-based numerical strategies for blade-tip/casing interactions : application to NASA rotor67 ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2022*. DOI : 10.1115/1.4055416. oai : hal-03775624

Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques avec interfaces de contact : application aux interactions aube/carter

Résumé

Avec l'émergence de nombreuses normes environnementales, l'industrie aéronautique doit se conformer à un ensemble de réglementations concernant le rejet de gaz à effets de serre et d'oxydes d'azote. Les équipementiers aéronautiques doivent donc mettre au point des moteurs plus performants, ce qui passe par l'exploration de nouvelles pistes de conception. Les jeux fonctionnels entre les parties fixes et les parties tournantes du moteur sont responsables d'une grande partie des pertes aérodynamiques à chacun des étages de la turbomachine. Par conséquent, la réduction de ces jeux permet une augmentation significative du rendement des turboréacteurs. En revanche, elle s'accompagne également d'un accroissement de la probabilité d'occurrence des contacts structurels entre les têtes d'aubes et le carter. Dans l'optique de garantir la sûreté des avions, il devient alors nécessaire de se doter d'outils numériques permettant de modéliser de tels contacts avec l'objectif d'intégrer les outils non linéaires dans les cycles de conception industriels. Cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux visant à accroître le niveau de modélisation et de compréhension des phénomènes non linéaires dans les turbomachines, et particulièrement les contacts aube/carter. L'objectif principal de cette thèse consiste à fournir une preuve d'applicabilité des méthodes fréquentielles basées sur un algorithme de gestion du contact par lagrangiens augmentés à la configuration hautement non linéaire de contact aube/carter. Par ailleurs, on cherche à mettre en évidence les propriétés inhérentes aux méthodes fréquentielles concernant le respect des différentes conditions de contact unilatéral. Enfin, comme lors de l'étude des systèmes de taille industrielle on détecte de nombreuses branches de solutions isolées, le dernier objectif consiste à mettre au point une procédure de détection de solutions isolées adaptée aux problèmes de contact aube/carter. Pour ces travaux de thèse, une méthode de gestion du contact dans le domaine fréquentiel par lagrangiens augmentés est implémentée et comparée aux stratégies constituant l'état de l'art en ce qui concerne le contact aube/carter. Une très bonne corrélation est obtenue sur les systèmes de taille industrielle, où les stratégies fréquentielles surpassent même les stratégies temporelles de référence en termes d'informations qualitatives obtenues sur la dynamique du système. Les propriétés de gestion du contact intrinsèques des méthodologies utilisées sont mises en évidence sur des systèmes simples, permettant par la même occasion de mettre en lumière une relation asymptotique entre les stratégies fréquentielles se basant sur les méthodes gestion du contact par lagrangiens augmentés d'une part et par multiplicateurs de Lagrange d'autre part. Enfin, une stratégie de recherche de branches de solutions isolées basée sur le principe énergétique de Melnikov est appliquée au contact aube/carter. Cette dernière permet la mise en évidence de nombreuses familles de solutions isolées de manière systématique. De plus, l'application de cette stratégie a mené à une meilleure compréhension des mécanismes responsables de la naissance de branches de solutions isolées. Par ailleurs, un nouveau phénomène responsable de la naissance de branches isolées, pouvant être critique du point de vue de l'intégrité structurelle, est détecté lorsque l'aube subit une excitation surharmonique.

Mots clés : contact unilatéral, méthodes numériques, algorithmes de contact, méthode de l'équilibrage harmonique, interactions rotor/stator, contacts aube/carter, branches de solutions isolées, principe énergétique de Melnikov

---

LTDS

Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR 5513, École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France

Nonlinear dynamics of mechanical systems featuring contact interfaces : application to blade/casing interactions

Abstract

With the emergence of numerous environmental standards, the aviation industry must comply with a series of regulations regarding greenhouse gases and nitrogen oxides emissions. Aeronautical equipment manufacturers must therefore develop more performant engines, which means exploring new designs. The operational clearances between the fixed and rotating parts of the engine are responsible for a large part of the aerodynamic losses at each stage of the turbomachine. Naturally, reducing these clearances allows for a significant increase in the efficiency of the engine. However, it also comes with a rise in the likelihood of the occurrence of structural contacts between blade-tips and the casing. In order to ensure the safety of the aircraft, it becomes necessary to acquire numerical tools allowing to model such contacts with the objective of integrating nonlinear tools in industrial design cycles. This thesis aims to increase the level of modeling and understanding of nonlinear phenomena in turbomachinery, and particularly blade/casing contacts. The main objective of this thesis is to provide a proof of applicability of frequency methods based on an augmented lagrangian contact management algorithm to the highly nonlinear configuration of blade/casing contact. In addition, one seeks to highlight the properties inherent to the frequency methods regarding their respect of the different unilateral contact conditions. Finally, as many branches of isolated solutions are detected in the analysis of industrial systems, the last objective consists in developing a procedure for the detection of isolated branches of solutions adapted to to blade-tip/casing contact problems. During this thesis, a method of contact management in the frequency domain by augmented lagrangians is implemented and compared to industrial state-of-the-art strategies when it comes to rotor/stator interactions. A very good correlation is obtained on industrial sized systems, where the frequency-based strategies even outperform the reference time domain strategies in terms of qualitative information obtained on the dynamics response. The intrinsic contact management properties of the methodologies are identified on simple systems, allowing in the process to highlight an asymptotic relation between frequency domain methods relying on contact managements by augmented Lagrangians on the one hand and by Lagrange multipliers on the other hand. Finally, a detection strategy for isolated branches of solutions based on Melnikov's energy principle is applied to blade-tip/casing contact problems. The latter allows for the identification of many isolated branches of solutions families systematically. Moreover, the application of this strategy has led to a better understanding of the mechanisms responsible for the birth of branches of isolated solutions. In addition, a new phenomenon responsible for the birth of isolated branches, which may be critical from a structural integrity standpoint, is detected when the blade undergoes an overharmonic excitation.

Keywords: unilateral contact, numerical methods, contact algorithms, harmonic balance method, rotor/stator interactions, blade-tip/casing contacts, branches of isolated solutions, Melnikov's energy principle