



**HAL**  
open science

# Actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique, flot géodésique

Marc Bourdon

► **To cite this version:**

Marc Bourdon. Actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique, flot géodésique. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud (1970-2019), 1993. Français. NNT: . tel-04140700

**HAL Id: tel-04140700**

**<https://theses.hal.science/tel-04140700v1>**

Submitted on 26 Jun 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ de PARIS-SUD**

**Centre d'ORSAY**

**THÈSE**

présentée  
pour obtenir

le titre de Docteur en Sciences

Spécialité : Mathématiques

par

**Marc BOURDON**

**Sujet :**

**Actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique,  
flot géodésique**

soutenue le 9 février 1993 devant la Commission d'examen

MM. (Président)    Laurent C. Siebenmann  
                          Mikhaël Gromov  
                          Yves Guivarc'h  
                          André Haefliger  
                          Pierre Pansu  
                          Athanasé Papadopoulos



# Actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique, flot géodésique

MARC BOURDON

**Résumé.** On étudie les actions isométriques quasi-convexes d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  au sens de M. Gromov sur les  $CAT(-1)$ -espaces  $X$ . A une telle action, sont associés :

– Un flot géodésique (qui généralise le flot géodésique habituel du fibré unitaire tangent à une variété riemannienne compacte).

– L'ensemble limite de  $\Gamma$  dans le bord de  $X$ , muni d'une structure conforme canonique, sur lequel  $\Gamma$  agit par transformations conformes.

On étudie les liens entre ces deux systèmes. En utilisant le groupe on construit une représentation symbolique du flot. Celle-ci permet de traiter simplement des problèmes ergodiques comme le mélange du flot, et des problèmes variationnels comme la continuité ou l'analyticité de l'entropie lorsque l'action varie.

**Abstract.** We study the isometric quasi-convex actions of a hyperbolic group  $\Gamma$  according to M. Gromov on the  $CAT(-1)$ -spaces  $X$ . With such an action are associated :

– A geodesic flow (which is a generalization of the usual geodesic flow on the unitary tangent bundle of a riemannian compact manifold).

– The limit set of  $\Gamma$  in the boundary of  $X$ , equipped with a canonical conformal structure, on which  $\Gamma$  acts by conformal transformations.

We study the links between these two systems. By using the group we construct a symbolic representation of the flow. This allows us to study in a simple way ergodic problems like the mixing of the flow, or such variational problems as the continuity and the analyticity of the entropy when the action varies.

**Mots clés.** Groupes et espaces hyperboliques,  $CAT(-1)$ -espaces, ensemble limite, flot géodésique, dimension de Hausdorff, entropie topologique, application de Markov, flot spécial, formalisme thermodynamique.

1991 *Mathematics subject classification* : 51 B 99, 28 D 15



## Remerciements

Tout d'abord je remercie vivement Pierre Pansu qui a dirigé ce travail avec beaucoup de gentillesse. Sa très grande connaissance des mathématiques et ses remarques toujours très justes m'ont beaucoup apporté.

Une grande partie de cette thèse m'a été inspirée par Yves Guivarc'h. Je lui en suis très reconnaissant, ainsi que pour ses nombreux encouragements.

Athanase Papadopoulos m'a également beaucoup aidé par ses remarques et conseils lors de la lecture de la première version de ce texte. Je l'en remercie chaleureusement.

Je remercie Mikhaël Gromov, André Haefliger et Laurent Siebenmann qui ont accepté de faire partie du jury et dont j'admire les grandes compétences mathématiques.

Je remercie également Martine Babillot et François Ledrappier pour les discussions fructueuses, et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Martine Justin s'est occupée de la frappe du manuscrit avec patience et gentillesse. Je l'en remercie sincèrement.

Enfin, je remercie Caroline pour son indulgence, et le réconfort que j'ai trouvé auprès d'elle.



# Sommaire

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Préliminaires</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1. Généralités sur les espaces métriques . . . . .	6
1.2. Espaces hyperboliques géodésiques . . . . .	7
1.3. $CAT(-b^2)$ -espaces . . . . .	8
1.4. Bord d'un espace hyperbolique . . . . .	9
1.5. Métriques visuelles sur $\partial X$ . . . . .	10
1.6. Action au bord des quasi-isométries . . . . .	11
1.7. Groupes hyperboliques . . . . .	13
1.8. Groupes quasi-convexes . . . . .	14
<b>2. Structure conforme sur le bord d'un <math>CAT(1)</math>-espace.</b> <b>Ensemble limite et flot géodésique associés à une</b> <b>action quasi-convexe</b> . . . . .	<b>17</b>
2.0. Introduction . . . . .	17
2.1. Fonctions de Busemann . . . . .	18
2.2. Distances horosphériques . . . . .	18
2.3. Horosphères . . . . .	19
2.4. Produits de Gromov de deux élément de $\partial X$ . . . . .	19
2.5. Une famille de métriques visuelles sur $\partial X$ . . . . .	20
2.6. Structure conforme sur $\partial X$ . . . . .	24
2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe . . . . .	27
2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe . . . . .	28
2.9. Le paramétrage de Hopf de $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ . . . . .	30
2.10. Mesure d'entropie maximale . . . . .	31
2.11. Preuve du théorème 2.0.1 . . . . .	32
<b>3. Un codage "à la Bowen-Series" d'un groupe hyperbolique</b> <b>et de son bord</b> . . . . .	<b>36</b>
3.0. Introduction . . . . .	36
3.1. Applications de Markov sur un groupe de type fini . . . . .	37
3.2. Existence d'applications de Markov . . . . .	46
3.3. Problème du prolongement au bord d'une application de Markov. Exemples de construction d'applications de Markov . . . . .	49
<b>4. Flots géodésiques et flots spéciaux</b> . . . . .	<b>56</b>
4.0. Introduction . . . . .	56
4.1. Construction d'une conjugaison du flot géodésique par un flot spécial . . . . .	57

4.2. Un exemple pour lequel la conjugaison est génériquement bijective . . . . .	61
<b>5. Applications</b> . . . . .	<b>66</b>
5.0. Introduction . . . . .	66
5.1. Lemme de réduction . . . . .	66
5.2. Formalisme thermodynamique . . . . .	68
5.3. Mélange d'un flot spécial . . . . .	71
5.4. Mélange du flot géodésique . . . . .	72
5.5. Topologie de Gromov sur les actions isométriques d'un groupe	77
5.6. Analyticité de l'entropie topologique sur l'ensemble des repré- sentations quasi-convexes de $\Gamma$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ ou $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$	82
<b>Références</b> . . . . .	<b>85</b>

## Introduction

On étudie ici les actions isométriques quasi-convexes d'un groupe hyperbolique au sens de M. Gromov, sur les  $\text{CAT}(-1)$ -espaces. Ces espaces, qui remontent à Aleksandrov, connaissent depuis quelque temps déjà un regain d'intérêt sous l'impulsion de M. Gromov. Ils forment une vaste généralisation des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure inférieure à  $-1$ , les exemples les plus fameux étant les polyèdres hyperboliques de M. Gromov. Nous nous intéressons plus particulièrement au flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un tel espace, et à l'action du groupe sur son ensemble limite. Le plan de la thèse est le suivant :

### *Structure conforme sur le bord d'un $\text{CAT}(-1)$ -espace :*

Comme tout espace hyperbolique, un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$  admet un bord, lui-même muni d'une structure quasi-conforme canonique (un invariant de quasi-isométrie de  $X$ ). La propriété  $\text{CAT}(-1)$  permet d'affiner cette structure : nous construisons sur  $\partial X$  une structure conforme canonique compatible avec sa structure quasi-conforme et invariante par les isométries de  $X$ . Elle est décrite par une famille de métriques visuelles deux à deux conformes que nous construisons à partir des fonctions de Busemann.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$ . On sait que l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$  et le flot géodésique sont intimement liés au groupe. En effet si  $\Gamma$  agit comme précédemment sur deux  $\text{CAT}(-1)$ -espaces, alors les ensembles limites associés (qui sont canoniquement homéomorphes à  $\partial\Gamma$ ) se correspondent par un homéomorphisme  $\Omega$ , canonique,  $\Gamma$ -équivariant et quasi-conforme. De même, d'après une construction de M. Gromov, les espaces du flot géodésique se correspondent par une équivalence d'orbites (un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons que l'homéomorphisme quasi-conforme  $\Omega$  est conforme si et seulement si l'équivalence d'orbites de M. Gromov est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbites qui préserve le paramétrage). Ainsi la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement.

### *Codage du bord d'un groupe hyperbolique et conjugaison du flot géodésique par un flot spécial :*

Afin de simplifier l'étude du flot géodésique, nous en donnons une représentation symbolique. L'idée (qui remonte à Morse, Nielsen, ...) est d'utiliser le groupe. La méthode est inspirée des travaux de Bowen-Series sur les groupes fuchsien.

On définit d'abord la notion d'application de Markov sur un groupe de type fini  $\Gamma$ . Lorsque  $\Gamma$  est hyperbolique l'existence de telles applications est garantie par un théorème de J.W. Cannon. À une application de Markov sur  $\Gamma$  est associée un sous-shift de type fini unilatéral  $\Sigma^+$  qui permet de coder  $\partial\Gamma$  par une application :

$$q : \Sigma^+ \rightarrow \partial\Gamma$$

Hölder continue surjective à fibres finies de cardinal uniformément borné.

Notons que sur une large classe d'exemples (qui contient les groupes fuchsien et certains groupes de Coxeter dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ ) l'application de Markov sur  $\Gamma$  s'étend en une application de Markov sur  $\partial\Gamma$  (le cas des groupes fuchsien a été traité par R. Bowen et C. Series). L'application  $q$  est alors génériquement bijective.

Lorsque  $\Gamma$  agit par isométries de manière quasi-convexe sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$ , on obtient par suite une conjugaison du flot géodésique par un flot spécial. Ce dernier est défini par suspension d'une fonction Hölder continue  $\varphi$  (le "facteur conforme de l'application de Markov sur l'ensemble limite"), au-dessus du sous-shift bilatéral  $\Sigma$  naturellement associé à  $\Sigma^+$ . Cette conjugaison n'est pas en général bijective (sauf si  $\Gamma$  est un groupe fuchsien, c'est alors une conséquence immédiate des travaux de Bowen-Series), elle est seulement continue surjective à fibres finies de cardinal uniformément borné. Elle est donc moins précise que celles déjà construites par Sinai, Bowen, ... , qui utilisent des sections de Poincaré et le caractère Anosov du flot lorsque  $\Gamma$  est cocompact et  $X$  est une variété riemannienne. D'un autre côté elle est plus naturelle : le sous-shift ne dépend que du groupe, la fonction  $\varphi$  reflète la structure conforme de l'ensemble limite. Elle est aussi plus simple et sans doute plus générale.

#### *Mélange du flot géodésique :*

Puisque le flot géodésique est décrit par un flot spécial, il a les propriétés des flots hyperboliques généraux. En particulier les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La mesure d'entropie maximale est mélangeante.
- (ii) La mesure d'entropie maximale est faiblement mélangeante.
- (iii) Le flot est topologiquement mélangeant.
- (iv) Le spectre des longueurs des orbites périodiques n'est inclus dans aucun sous-groupe discret de  $\mathbb{R}$ .

En adaptant une preuve de D.J. Rudolph, nous montrons le mélange du flot sous l'hypothèse que le bord du groupe n'est pas totalement discontinu. Notons que si le bord de  $\Gamma$  est totalement discontinu alors  $\Gamma$  est commensurable à un groupe libre (d'après un théorème de Stallings). Dans ce cas le mélange n'est pas automatique et une étude visant à caractériser les actions de  $\Gamma$  donnant un flot mélangeant, serait nécessaire.

#### *Continuité et analyticité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite et de l'entropie du flot géodésique :*

On considère l'ensemble des actions isométriques d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  sur les espaces  $\delta$ -hyperboliques de M. Gromov ( $\delta$  est fixé). On munit cet ensemble de la topologie de Gromov. On montre alors de manière géométrique que les actions quasi-convexes forment un ouvert de cette topologie et que la dimension de Hausdorff de leur ensemble limite (relativement à une métrique visuelle de paramètre fixé) varie continuellement sur cet ouvert.

Dans le cas des actions quasi-convexes de  $\Gamma$  sur les  $\text{CAT}(-1)$ -espaces, la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est égale à l'entropie topologique du flot géodésique (un phénomène mis en évidence par Manning,

Sullivan, ... ). Ainsi on obtient également la continuité de l'entropie du flot géodésique.

Enfin, en utilisant la description symbolique du flot, on montre la réelle analyticité de l'entropie associée à une représentation quasi-convexe de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  ou  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ . La méthode consiste à relier l'entropie à une valeur propre d'un opérateur (opérateur de transfert de D. Ruelle) qui dépend analytiquement de la représentation.



# 1. Préliminaires

On rappelle dans ce chapitre les notions d'espaces et de groupes hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, on pourra se référer à [G], [G-H], [C-D-P], [C].

## 1.1. Généralités sur les espaces métriques

Sont rassemblées ici les définitions qui seront d'un usage constant.

Soient  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Afin d'alléger les notations, la distance  $d(x, x')$  sera souvent notée  $|x - x'|$ .

*Quasi-isométrie* : Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une  $(\lambda, k)$ -quasi-isométrie, si quels que soient les éléments  $x, x'$  de  $X$  :

$$\lambda^{-1} |x - x'|_X - k \leq |f(x) - f(x')|_Y \leq \lambda |x - x'|_X + k.$$

On dit qu'elle est une quasi-isométrie, si l'on ne tient pas à préciser les constantes  $\lambda$  et  $k$ .

Remarquons qu'une quasi-isométrie n'est pas en général continue.

*Espaces quasi-isométriques* : Les espaces métriques  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, s'ils satisfont l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) Il existe des quasi-isométries  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  et un réel  $\varepsilon \geq 0$ , tels que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient  $\varepsilon$ -proches de l'identité.

(ii) Il existe une quasi-isométrie  $f : X \rightarrow Y$  et un réel  $\varepsilon \geq 0$ , tels que  $f(X)$  soit  $\varepsilon$ -dense dans  $Y$ .

Rappelons qu'un sous-ensemble  $Z$  de  $Y$  est  $\varepsilon$ -dense, si le  $\varepsilon$ -voisinage de  $Z$  dans  $Y$  est  $Y$ .

*Géodésiques* : Un segment géodésique (resp. un rayon géodésique), (resp. une géodésique) de  $X$ , est une isométrie :

$$\gamma : I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp.  $\mathbb{R}$ ).

Etant donné deux éléments  $x, x'$  de  $X$ , on notera  $[xx']$  tout segment géodésique :

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X ; \text{ avec } \gamma(a) = x, \gamma(b) = x'.$$

D'autre part, on se permettra souvent de confondre un segment géodésique, ou un rayon, ou une géodésique, avec son image.

*Espaces géodésiques* : L'espace  $X$  est géodésique, si deux éléments quelconques de  $X$  peuvent être reliés par un segment géodésique.

*Quasi-géodésiques* : Un  $(\lambda, k)$ -quasi-segment géodésique, (resp. rayon géodésique), (resp. géodésique) de  $X$ , est une  $(\lambda, k)$ -quasi-isométrie :

$$\gamma : I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp.  $\mathbb{R}$ ). Si l'on ne tient pas à préciser les constantes  $\lambda$  et  $k$ , on dira seulement quasi-segment géodésique (resp. rayon), (resp. géodésique).

*Quasi-convexe* : Supposons  $X$  géodésique. Un sous ensemble  $Z$  de  $X$  est  $C$ -quasi-convexe, si deux points quelconques de  $Z$  peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le  $C$ -voisinage de  $Z$  dans  $X$ .

Il est quasi-convexe, s'il est  $C$ -quasi-convexe pour un certain réel  $C$ .

## 1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Désormais  $(X, d_X)$  est un espace métrique géodésique.

### 1.2.1. DÉFINITION.

a) Le triangle  $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$  de  $X$  est  $\delta$ -fin si pour tout  $u$  appartenant à  $[xy]$ , on a :

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leq \delta.$$

b)  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique si tout triangle de  $X$  est  $\delta$ -fin. Il est hyperbolique, s'il est  $\delta$ -hyperbolique pour un certain réel  $\delta$ .

Observons qu'un espace  $\delta$ -hyperbolique a la propriété suivante : deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à  $\delta$ . Autrement dit, chacun est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de l'autre.

### 1.2.2. EXEMPLES.

- a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.
- b) L'espace hyperbolique réel  $n$ -dimensionnel  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est  $\log 3$ -hyperbolique.
- c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , est  $\frac{\log 3}{b}$ -hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est :

**1.2.3. Théorème.** (propriété des quasi-segments géodésiques). *Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\lambda, k, \delta$ , avec la propriété suivante : tout  $(\lambda, k)$ -quasi-segment géodésique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$ , de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.*

Dont on déduit immédiatement :

**1.2.4. Corollaire** (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie). *Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces géodésiques.*

a) *Si  $Y$  est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ , alors  $X$  est hyperbolique.*

b) *Si  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, alors  $X$  est hyperbolique si et seulement si  $Y$  l'est.*

**1.2.5. Corollaire** (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces géodésiques et  $f$  une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ . Si  $Y$  est hyperbolique, l'image par  $f$  de tout quasi-convexe de  $X$  est un quasi-convexe de  $Y$ .*

### 1.3. $\text{CAT}(-b^2)$ -espaces

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique géodésique, et soit  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2(-b^2)$  l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante  $-b^2$ .

A tout triangle  $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$  de  $X$  associons un triangle  $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2(-b^2)$  dont les côtés ont même longueur que ceux de  $\Delta$ . Le triangle  $\bar{\Delta}$  est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à  $\Delta$ .

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \bar{\Delta} \\ s &\mapsto \bar{s} \end{aligned}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  est une isométrie.

#### 1.3.1. DÉFINITION.

a) On dit que  $\Delta$  satisfait  $\text{CAT}(-b^2)$  (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient  $s, t$  appartenant à  $\Delta$  :

$$d_X(s, t) \leq d_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}).$$

b)  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace si tout triangle de  $X$  satisfait  $\text{CAT}(-b^2)$ .

Les  $\text{CAT}(-b^2)$ -espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure  $\leq -b^2$ . En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition :

a) Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique

b)  $X$  est  $\frac{\log 3}{b}$  hyperbolique

c)  $X$  est contractible

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

**1.3.2. Définition-théorème .** L'espace  $X$  est dit à courbure inférieure ou égale à  $-b^2$ , si tout point de  $X$  admet un voisinage satisfaisant  $\text{CAT}(-b^2)$ .

Si  $X$  est simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , alors  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace.

#### 1.4. Bord d'un espace hyperbolique

Soit  $(X, d_X)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante : Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de  $X$ , on le note  $\partial X$ .

On définit une topologie sur  $X \cup \partial X$ , de la manière suivante :

Soit  $x$  une origine dans  $X$ , et soit  $\mathcal{R}(x)$  l'ensemble des rayons et des segments géodésiques :

$$\gamma : I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle du type  $[0, +\infty[$  ou  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ , et  $\gamma$  vérifie  $\gamma(0) = x$ . Si  $I = [0, a]$ , convenons de prolonger  $\gamma$  à  $[0, +\infty[$ , en posant  $\gamma(t) = \gamma(a)$  pour  $t$  supérieur à  $a$ . Munissons  $\mathcal{R}(x)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli,  $\mathcal{R}(x)$  est compact et l'application naturelle de  $\mathcal{R}(x)$  dans  $X \cup \partial X$  est surjective. Equipé de la topologie quotient,  $X \cup \partial X$  est un compact, dans lequel l'espace métrique  $X$  est ouvert et dense. Ainsi le compact  $\partial X$  permet de compactifier  $X$ . On montre que la topologie est indépendante de l'origine  $x$ .

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent :

##### 1.4.1. Proposition.

a) Soit  $x \in X$ , et  $\xi \in \partial X$ . Il existe un rayon géodésique d'extrémités  $x$  et  $\xi$ . On le notera  $[x\xi)$ . Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $2\delta$ .

b) Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ . Il existe une géodésique d'extrémités  $\xi$  et  $\xi'$ . On la notera  $(\xi\xi')$ .

Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $4\delta$ .

c) (Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, k$ , avec la propriété suivante : tout  $(\lambda, k)$ -quasi rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de  $X$ , est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$  d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de  $X$ .

**1.4.2. REMARQUE.** Lorsque  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, deux points de  $X \cup \partial X$  détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2(-b^2)$ .

**1.4.3. EXEMPLES.**

- a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.
- b) Soit  $X$  une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à  $-b^2$ . Etant donnée une origine  $x$  dans  $X$ , l'application exponentielle de l'espace tangent en  $x$ , induit un homéomorphisme de la sphère unité sur  $\partial X$ .
- c) Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, et  $x$  une origine dans  $X$ . Notons  $S(x, R)$  la sphère de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique, donc pour  $R \geq R'$ , il existe une application naturelle de  $S(x, R)$  dans  $S(x, R')$ . On montre que  $\partial X$  est homéomorphe à la limite projective des  $S(x, R)$ , lorsque  $R$  tend vers l'infini.

Notons que le bord d'un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpinski.

**1.5. Métriques visuelles sur  $\partial X$**

De même qu'un changement conforme de métrique sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière "conforme" la métrique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$ , afin que  $X \cup \partial X$  soit le complété de  $X$  pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C.D.P], [C], pour plus de détails).

Ainsi  $\partial X$  hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire :

**1.5.1. DÉFINITION.** Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Une métrique  $d_{\partial X}$  sur  $\partial X$  a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de  $X$  de la façon suivante :

Il existe une constante  $C \geq 1$  et un réel  $t > 1$ , tels que pour tous éléments  $\xi, \xi'$  de  $\partial X$  :

$$C^{-1}t^{-d} \leq d_{\partial X}(\xi, \xi') \leq Ct^{-d},$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi\xi')).$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .

L'énoncé précis est le suivant :

**1.5.2. Théorème (Gromov).** *Il existe un réel  $t_0 > 1$ , ne dépendant que de  $\delta$ , tel que pour tout  $t$  appartenant à  $]1, t_0[$ , le bord de  $X$  admette une métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .*

### 1.5.3. REMARQUES.

a) Pour les  $\text{CAT}(-b^2)$ -espaces, le résultat est plus fin : leur bord admet une métrique visuelle de paramètre  $t$ , quel que soit  $t$  appartenant à  $]1, e^b]$ . Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W.J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que  $e^b$  est optimal car il l'est sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n(-b^2)$ .

b) Deux métriques visuelles  $d$  et  $d'$  de paramètres respectifs  $(x, t)$  et  $(x', t')$ , sont facilement comparables :

Si  $t = t'$ , alors elles sont Lipschitz-équivalentes : il existe une constante  $D \geq 1$ , telle que :

$$D^{-1}d \leq d' \leq Dd.$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes : il existe une constante  $D \geq 1$  et un réel  $\alpha > 0$ , tels que :

$$D^{-1}d^\alpha \leq d' \leq Dd^\alpha.$$

Ici  $\alpha$  est égal à  $\frac{\log t'}{\log t}$ .

c) D'après b), toute isométrie de  $X$  est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de  $X$  muni d'une métrique visuelle.

### 1.6. Action au bord des quasi-isométries

Commençons par rappeler la définition d'application quasi-conforme.

Un  $k$ -anneau,  $k \geq 1$ , d'un espace métrique  $(E, d)$ , est un couple  $(B_1, B_2)$  de deux boules concentriques, dont les rayons  $r_1$  et  $r_2$  vérifient la relation :

$$r_2 = kr_1.$$

Une application :

$$f : (E, d) \rightarrow (E', d')$$

est quasi-conforme (au sens des anneaux), s'il existe une fonction  $\psi$  de  $[1, +\infty[$  dans lui-même, telle que l'image par  $f$  de tout  $k$ -anneau est contenue dans un  $\psi(k)$ -anneau de  $(E', d')$ . Autrement dit, si  $(B_1, B_2)$  est un  $k$ -anneau de  $(E, d)$ , alors il existe un  $\psi(k)$ -anneau  $(B'_1, B'_2)$  de  $(E', d')$ , tel que :

$$B'_1 \subset f(B_1) \subset f(B_2) \subset B'_2.$$

Notons en particulier que l'image d'une boule de  $(E, d)$  est contenue dans un  $\psi(1)$ -anneau de  $(E', d')$ .

Un homéomorphisme  $f$  est quasi-conforme si  $f$  et  $f^{-1}$  sont quasi-conformes. De même, un plongement est quasi-conforme, s'il est un homéomorphisme quasi-conforme sur son image.

Afin de décrire les boules, et par suite les anneaux d'une métrique visuelle sur le bord d'un espace  $\delta$ -hyperbolique, rappelons la notion classique d'ombre :

**1.6.1. DÉFINITION (Margulis).** Soit  $x$  une origine dans  $X$ . L'ombre portée à partir de  $x$ , de la boule  $B(y, R)$  de  $X$ , est le sous-ensemble de  $\partial X$  noté  $O(y, R)$ , des extrémités des rayons géodésiques issus de  $x$  passant par  $B(y, R)$ . On dit que  $O(y, R)$  est centrée en  $\xi$ , si  $y$  appartient à un rayon géodésique  $[x\xi]$ . (Voir figure 1).

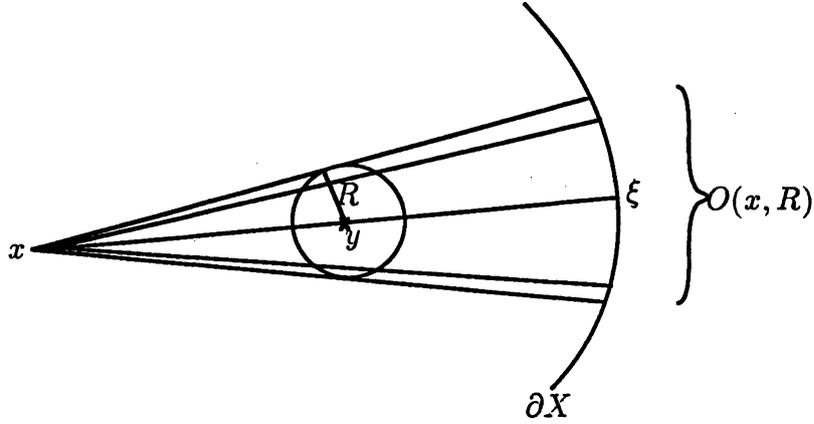


Figure 1

Etant donnée une métrique visuelle  $d$  de paramètres  $(x, t)$  sur  $\partial X$ , à l'ombre  $O(y, R)$  attachons le rayon :

$$r(y) = t^{-|x-y|}.$$

La propriété de visibilité donne alors :

**1.6.2. Lemme.** Pour  $R$  suffisamment grand, ( $R \geq 3\delta$  convient), il existe une constante  $D = D(R) \geq 1$ , telle que pour toute boule  $B(\xi, r)$  de  $(\partial X, d)$ , on puisse trouver des ombres  $O(y_1, R)$  et  $O(y_2, R)$  centrées en  $\xi$ , vérifiant :

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R)$$

et

$$D^{-1}r(y_2) \leq r \leq Dr(y_1).$$

Ainsi, les boules de  $(\partial X, d)$  ressemblent aux ombres.

D'après la propriété des quasi-rayons géodésiques dans un espace hyperbolique, l'image d'une ombre par une quasi-isométrie se compare aisément à une ombre. De cette manière et par la propriété des quasi-rayons et des quasi-géodésiques, on obtient :

**1.6.3. Théorème.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces  $\delta$ -hyperboliques, supposons leurs bords équipés de métriques visuelles

a) toute quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$  s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de  $\partial X$  dans  $\partial Y$ .

b) Si  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme, bi-Hölder.

**1.6.4. REMARQUE.** Deux métriques  $d_1$  et  $d_2$  sur un même espace  $E$  sont dites quasi-conforme si l'identité de  $(E, d_1)$  sur  $(E, d_2)$  est un homéomorphisme quasi-conforme. Clairement la composée de deux applications quasi-conformes est quasi-conforme. Aussi, la relation : “ $d_1$  et  $d_2$  sont quasi-conformes”, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de  $E$ . La classe d'équivalence d'une métrique  $d$  de  $E$  est appelée structure quasi-conforme de  $(E, d)$ , (voir [Pan] pour une définition plus générale).

Le théorème 1.6.3.b) indique que la structure quasi-conforme d'une métrique visuelle sur  $\partial X$ , est un invariant de quasi-isométrie de  $X$ .

## 1.7. Groupe hyperbolique

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . Supposons  $S$  symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} ; a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S.$$

La métrique des mots relative à  $S$ , est définie de la manière suivante :

$$|g - g'|_S = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \dots a_{i_n}, a_{i_k} \in S\}.$$

La distance  $|e - g|_S$  sera généralement notée  $|g|_S$ .

Observons que  $\Gamma$  agit à gauche par isométries sur  $(\Gamma, | \cdot |_S)$ . L'involution de  $\Gamma$ , qui associe à un élément son inverse, est également une isométrie car  $S$  est symétrique.

Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel  $(\Gamma, | \cdot |_S)$  est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de  $\Gamma$ , deux sommets  $g, g'$  sont reliés par une arête si  $g^{-1}g' \in S$ , c'est-à-dire si  $|g - g'|_S = 1$ . Il est muni de la métrique simpliciale.

**1.7.1. DÉFINITION.** Le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs  $S$ . En effet, si  $S'$  en est un autre,  $(\Gamma, | \cdot |_S)$  et  $(\Gamma, | \cdot |_{S'})$ , et par suite  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  et  $\mathcal{G}(\Gamma, S')$  sont quasi-isométriques.

**1.7.2. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS .** Sont hyperboliques :

- a) Les groupes finis
- b) Les groupes libres de type fini
- c) Les groupes à petite simplification  $C'(1/6)$ .

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes :

- a) Il est de présentation finie, et “presque tout” groupe de présentation finie est hyperbolique.

- b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion.
- c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.
- d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de  $\mathbb{Z}$ , ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire il est à croissance exponentielle.
- e) Il est automatique (voir [C.D.P], [C.E.H.P.T]).

## 1.8. Groupes quasi-convexes

**1.8.1. DÉFINITION.** Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre, et  $x$  un élément de  $X$ . Un sous-groupe d'isométries de  $X$  est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de  $x$  est un quasi-convexe de  $X$ .

On vérifie que la définition est indépendante du point  $x$  choisi. Notons qu'un sous groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe.

La propriété de  $X$  permet de montrer :

**1.8.2. Proposition.** *Un groupe quasi-convexe  $\Gamma$  d'isométries de  $X$ , est de type fini. De plus, si  $S$  est un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ , l'application :*

$$\begin{aligned} (\Gamma, | \cdot |_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

*est une quasi-isométrie.*

Pour montrer cette proposition il suffit d'exhiber un système de générateurs  $S$  adéquat. Si l'orbite de  $x$  est  $C$ -quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble :

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leq 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant  $X$  hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie :

**1.8.3. Corollaire.** *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes :

**1.8.4. Corollaire.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\Gamma$  est quasi-convexe
- b)  $\Gamma$  est de type fini, et quels que soient le système symétrique de générateurs  $S$  de  $\Gamma$ , et l'élément  $x$  de  $X$ , l'application

$$\begin{aligned} (\Gamma, | \cdot |_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Rappelons que l'ensemble limite  $\Lambda$  d'un sous-groupe d'isométries  $\Gamma$  de  $X$  est défini de la manière suivante :

Soit  $x \in X$ , considérons  $\overline{\Gamma\{x}}$  l'adhérence de l'orbite de  $x$  dans le compact  $X \cup \partial X$ . Alors :

$$\Lambda = \overline{\Gamma\{x}} \cap \partial X.$$

Il est compact et indépendant du point  $x$  choisi.

Si maintenant  $\Gamma$  est quasi-convexe, alors d'après le théorème 1.6.3, la quasi-isométrie :

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de  $\partial\Gamma$  dans  $\partial X$ . Clairement il est indépendant du point  $x$  choisi, et son image est  $\Lambda$ . Dès lors :

**1.8.5. Corollaire.** Le bord d'un groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, et son ensemble limite, se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme, bi-Hölder, canonique.

Nous donnons une dernière caractérisation des groupes quasi-convexes d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Celle-ci permet de faire le lien avec les groupes convexes cocompacts de Thurston.

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\partial X$ . Son enveloppe de Gromov, notée  $Q(E)$ , est l'ensemble des (images des) géodésiques dont les deux extrémités appartiennent à  $E$ . C'est un quasi-convexe de  $X$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe d'isométries de  $X$ , l'enveloppe de Gromov de son ensemble limite est  $\Gamma$ -invariante; et on a (voir [C]) :

**1.8.6. Proposition.**  $\Gamma$  est quasi-convexe si et seulement si il est proprement discontinu et si  $Q(\Lambda)/\Gamma$  est compact.

**1.8.7. EXEMPLES.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Rappelons que  $\Gamma$  est convexe cocompact, s'il est proprement discontinu, et s'il agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe  $H(\Lambda)$  de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet,  $Q(\Lambda)$  et  $H(\Lambda)$  sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]) :

$H(\Lambda)$  est la réunion des  $n$ -simplexes idéaux de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , dont les arêtes sont des géodésiques de  $Q(\Lambda)$ . Or tout point d'un  $n$ -simplexe de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  est à distance majorée par une constante universelle  $C(n)$ , de ses arêtes.

Signalons aussi que  $\Gamma$  est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fine et épaisse).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini, (voir [Bea] chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.



## 2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace.

### Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

#### 2.0. Introduction

Soit  $X$  un CAT(-1)-espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur  $\partial X$  une famille de métriques visuelles  $\{d_x, x \in X\}$ , deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de  $X$  soient des applications conformes de  $(\partial X, d_x)$ .

Rappelons qu'une application  $f : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$  est conforme, si quel que soit  $a_0 \in A$ , la limite lorsque  $a$  tend vers  $a_0$  de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de  $f$  en  $a_0$ . Rappelons également que deux métriques  $d_1, d_2$  sur  $A$ , sont conformes, si l'identité  $(A, d_1) \rightarrow (A, d_2)$  est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  sur un CAT(-1)-espace  $X$ . A cette action sont associés :

— L'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$ , muni de la structure conforme induite, sur lequel agit  $\Gamma$  par transformations conformes.

— Un flot géodésique qui généralise le flot géodésique habituel du fibré unitaire tangent à une variété riemannienne compacte (voir [G] et 2.8).

Nous montrons que la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement.

Précisons ceci :

Supposons que  $\Gamma$  agisse par isométries de manière quasi-convexe, sur deux CAT(-1)-espaces  $X_1$  et  $X_2$ . Notons respectivement  $\Lambda_1, \Lambda_2, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ , les ensembles limites et les espaces du flot géodésique associés aux deux actions de  $\Gamma$ . D'après 1.8.5,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  se correspondent par un homéomorphisme canonique,  $\Gamma$ -équivariant et quasi-conforme :

$$\Omega : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 .$$

D'autre part, l'ensemble :

$$\Lambda_i \times \Lambda_i - \{\text{diagonale}\} / \Gamma, \quad i = 1, 2,$$

s'identifie à  $\mathcal{O}_i$ , l'ensemble des orbites (orientées) du flot de  $\mathcal{E}_i$ . Donc l'homéomorphisme  $\Gamma$ -équivariant :

$$\Omega \times \Omega : \Lambda_1 \times \Lambda_1 - \{\text{diagonale}\} \rightarrow \Lambda_2 \times \Lambda_2 - \{\text{diagonale}\}$$

donne par passage au quotient une bijection :

$$F : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 .$$

M. Gromov montre l'existence d'une équivalence d'orbite de  $\mathcal{E}_1$  sur  $\mathcal{E}_2$  qui induit l'application  $F$  entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . (Une équivalence d'orbite est un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons :

**2.0.1. Théorème.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'homéomorphisme quasi-conforme  $\Omega$  est conforme.*
- (ii) *L'équivalence d'orbite précédente est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbite préservant le paramétrage).*

Sans doute ce théorème est-il déjà connu des spécialistes. (U. Hamenstädt fait des choses assez semblables dans [H]). Il ne semble pourtant pas avoir été écrit sous cette forme, ni dans cette généralité.

Aux paragraphes 2.1, 2.2, 2.3, nous rappelons brièvement les définitions des fonctions de Busemann, de distances horosphériques et d'horosphères. Les paragraphes 2.4, 2.5, 2.6 sont consacrés à la construction de la structure conforme de  $\partial X$ . Les paragraphes 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 traitent de l'ensemble limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur  $X$ . On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

## 2.1. Fonctions de Busemann

Soit  $r : [0, +\infty[ \rightarrow X$  un rayon géodésique, et  $x \in X$ . D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par  $-|x - r(0)|$ . Appelons  $b_r(x)$  sa limite en  $+\infty$ . L'application  $b_r$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon  $r$ .

## 2.2. Distances horosphériques

Soit  $x, y \in X$ ,  $\xi \in \partial X$ , et  $r : [0, +\infty[ \rightarrow X$  un rayon géodésique d'extrémité  $\xi$ . La quantité

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à  $b_r(x) - b_r(y)$ . Elle est indépendante du rayon  $r$  d'extrémité  $\xi$ . En effet si  $r'$  est un autre rayon d'extrémité  $\xi$ , par comparaison avec  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on a :

$$(2.2.0) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(r'(t), r) = 0 .$$

La limite  $B_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$  est appelée distance horosphérique de  $x$  à  $y$  relativement à  $\xi$ . Elle vérifie :

$$(2.2.1) \quad B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x)$$

$$(2.2.2) \quad B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z)$$

$$(2.2.3) \quad B_\xi(x, y) \leq |x - y|$$

avec égalité si et seulement si  $y \in [x\xi]$ .

### 2.3. Horosphères

Considérons les ensembles de niveau de la fonction :

$$f_x : z \mapsto B_\xi(x, z).$$

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de  $x$ . Plus précisément, l'ensemble de niveau  $t$  de  $f_x$  est égal à l'ensemble de niveau  $t - d_\xi(x, y)$  de  $f_y$ . Ce sont les horosphères en  $\xi$ .

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante : Soient  $H_{x,\xi}$  et  $H_{y,\xi}$  les horosphères en  $\xi$ , passant par  $x$  et  $y$ . On a d'après 2.2.3 :

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y,\xi}) = d(H_{x,\xi}, H_{y,\xi}).$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique : Soit  $\xi \in \partial X$ . Pour  $x \in X$ , notons  $r_x : [0, +\infty[ \rightarrow X$  le rayon géodésique issu de  $x$  et d'extrémité  $\xi$ . Alors :

$$(2.3.1) \quad H_{x,\xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\}.$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

### 2.4. Produit de Gromov de deux éléments de $\partial X$

Soit  $x, y, z$  trois points de  $X$ . Rappelons que le produit de Gromov de  $y, z$  relativement à  $x$ , est défini par (voir figure 0) :

$$(y \mid z)_x = \frac{1}{2} (|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

Soit maintenant  $\xi, \xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ ,  $x$  un point de  $X$ , et  $p$  appartenant à  $(\xi\xi')$ . Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression :

$$\frac{1}{2} (B_\xi(x, p) + B_{\xi'}(x, p)).$$

Elle est indépendante du point  $p$  choisi sur  $(\xi\xi')$ . On l'appellera produit de Gromov de  $\xi$  et  $\xi'$  relativement à  $x$ , et on la notera  $(\xi \mid \xi')_x$ . (voir figure 1)

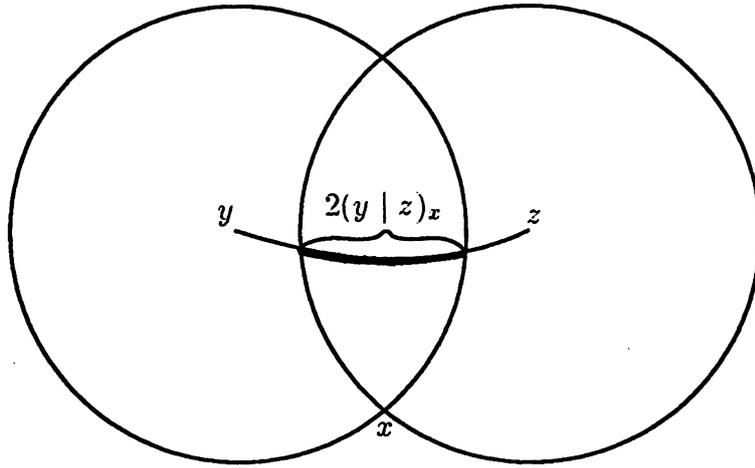


Figure 0

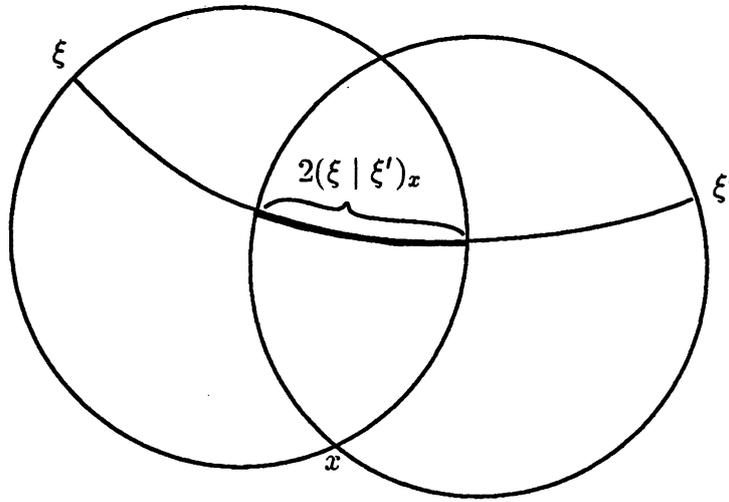


Figure 1

Notons que

$$(2.4.1) \quad (\xi | \xi')_x = (\xi' | \xi)_x$$

$$(2.4.2) \quad (\xi | \xi')_y = (\xi | \xi')_x - \frac{1}{2} (B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y)) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante :

**2.4.3. Proposition.** *Soit  $y \in [x\xi)$  et  $y' \in [x\xi')$ . Le produit de Gromov  $(y | y')_x$  converge vers  $(\xi | \xi')_x$ , lorsque  $y$  et  $y'$  tendent respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ .*

## 2.5. Une famille de métriques visuelles sur $\partial X$

Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Pour  $\xi, \xi' \in \partial X$ , définissons :

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x} \text{ si } \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \text{ sinon .}$$

**2.5.1. Théorème.**  $d_x$  est une métrique sur  $\partial X$ .

**2.5.2. REMARQUE.**  $d_x$  est une métrique visuelle de paramètres  $(x, e)$  (voir 1.5.1). En effet, l'expression

$$|(\xi | \xi')_x - d(x, (\xi \xi'))|$$

est majorée par une constante universelle.

Afin de montrer le théorème, nous introduisons un angle de comparaison, ou plutôt son sinus : Soit  $y, y'$  deux éléments de  $X - \{x\}$ . Soit  $(\bar{x}\bar{y}\bar{y}')$  un triangle de comparaison de  $(xyy')$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Posons :

$$(2.5.3) \quad \alpha_x(y, y') = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{y}'}}{2} .$$

On peut également exprimer  $\alpha_x(y, y')$  sans recourir à un triangle de comparaison. En effet, d'après les formules de trigonométrie dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , on a :

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'| - \text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} \right)^{1/2} .$$

Le théorème découlera des deux lemmes suivants :

**2.5.4. Lemme.** Soit  $S(x, r)$  la sphère de  $X$ , de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Sur  $S(x, r)$ ,  $r > 0$ ,  $\alpha_x$  est une métrique.

**2.5.5. PREUVE DE 2.5.4. :** Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Soient donc  $y, z, t$  appartenant à  $S(x, r)$ .

D'après la relation 2.5.3, les valeurs de  $\alpha$  appartiennent à  $[0, 1]$ . Aussi, pour montrer l'inégalité triangulaire :

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) ,$$

supposons :

$$(1) \quad \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) < 1 .$$

Soit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ , tels que :

a)  $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  et  $(\bar{x}\bar{z}\bar{t})$  soient des triangles de comparaison de  $(xyz)$  et de  $(xzt)$ .

b)  $(\bar{x}\bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$ . (voir figure 2)

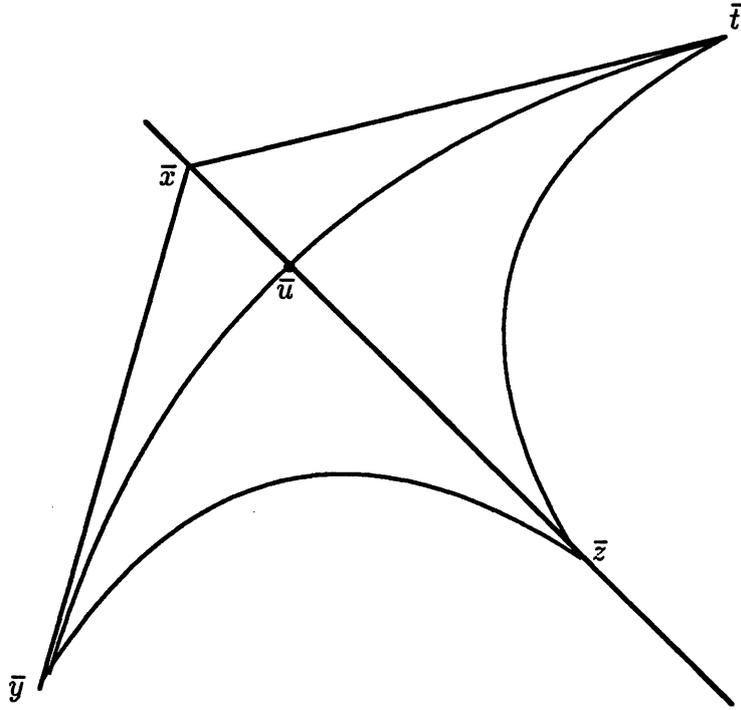


Figure 2

D'après 2.5.3, on a :

$$(2) \quad \alpha_x(y, z) = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}}}{2}, \quad \alpha_x(z, t) = \sin \frac{\widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}}}{2}.$$

L'hypothèse (1) implique :

$$\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}} + \widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}} < \pi,$$

de plus :

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{t}|,$$

et  $(\bar{x}\bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$ .

Donc le segment  $[\bar{y}\bar{t}]$  coupe  $[\bar{x}\bar{z}]$  en un unique point  $\bar{u}$ . Soit  $u \in [xz]$ , le point correspondant à  $\bar{u}$ . L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent alors :

$$\begin{aligned} |y - t| &\leq |y - u| + |u - t| \\ &\leq |\bar{y} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{t}| \\ &= |\bar{y} - \bar{t}|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha_x(y, t) &= \left( \frac{\text{ch } |y - t| - \text{ch}(|x - y| - |x - t|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh}(|x - t|)} \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \frac{\text{ch } |\bar{y} - \bar{t}| - \text{ch}(|\bar{x} - \bar{y}| - |\bar{x} - \bar{t}|)}{2 \text{sh } |\bar{x} - \bar{y}| \text{sh}(|\bar{x} - \bar{t}|)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore :

$$(3) \quad \alpha(y, t) \leq \sin \frac{\widehat{yxt}}{2}.$$

Or  $\widehat{yxt} = \widehat{yxz} + \widehat{yzt}$ , et  $\sin(a + b) \leq \sin a + \sin b$ , pour  $a, b$  appartenant à  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Donc (2) et (3) donnent :

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t).$$

□

**2.5.6. Lemme.** Soient  $y \in [x\xi)$ ,  $y' \in [x\xi')$ , alors :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} \alpha_x(y, y') = d_x(\xi, \xi').$$

**2.5.7. PREUVE DE 2.5.6 :** On a :

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} - \frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} \right)^{1/2}.$$

Un calcul montre que :

$$\frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} = \frac{1}{2} (\coth |x - y| \coth |x - y'| - 1).$$

Cette expression tend vers 0 lorsque  $y \rightarrow \xi$ ,  $y' \rightarrow \xi'$ . Par ailleurs :

$$\frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} \sim e^{|y - y'| - |x - y| - |x - y'|} = e^{-2(y | y')_x},$$

or d'après la proposition 2.4.3, on a :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} (y | y')_x = (\xi | \xi')_x.$$

D'où le lemme. □

**2.5.8. PREUVE DU THÉORÈME 2.5.1 :** Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle résulte des lemmes 2.5.4 et 2.5.6. □

**2.5.9. EXEMPLES.**

a) Prenons  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Soit  $x$  le centre du modèle en boule. Alors :

$$d_x(\xi, \xi') = \sin \frac{\widehat{\xi x \xi'}}{2}$$

est la moitié de la longueur du segment euclidien reliant  $\xi$  à  $\xi'$ , (voir figure 3).

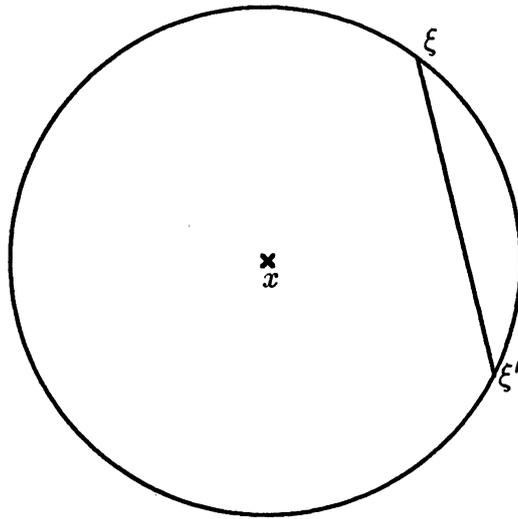


Figure 3

Ce n'est pas la métrique naturelle sur  $\partial X$ , qui est la métrique angulaire. Néanmoins elle lui est conforme, de facteur conforme constant égal à  $\frac{1}{2}$ .

b) Si  $X$  est un arbre réel :

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x},$$

où  $(\xi | \xi')_x$  est la longueur du trajet que font ensemble les deux rayons géodésiques issus de  $x$  et allant vers  $\xi$  et  $\xi'$ . (voir figure 4).

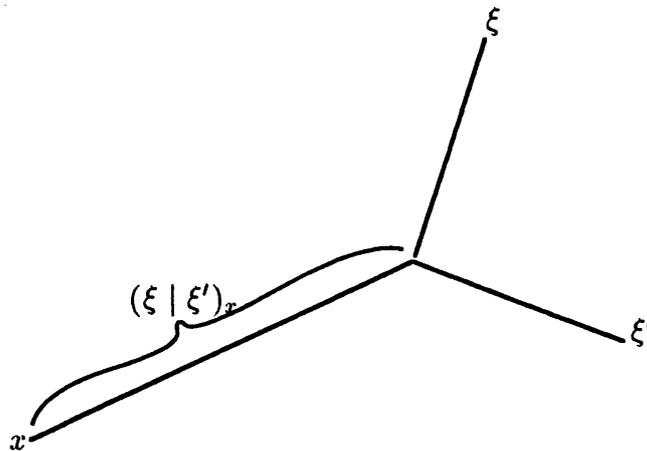


Figure 4

## 2.6. Structure conforme sur $\partial X$

Nous montrons maintenant que la famille de métriques  $\{d_x, x \in X\}$ , définit une structure conforme sur  $\partial X$ . On a :

**2.6.1. Proposition.** Soit  $x$  une origine dans  $X$  et  $y, z$  deux éléments de  $X$ . La fonction sur  $(\partial X, d_x)$ , définie par :

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

**2.6.2. PREUVE :** D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a :

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z).$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction :

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur  $(\partial X, d_x)$ . D'après la définition des métriques  $d_x$  et d'après la relation 2.4.2, on a :

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y))}$$

ou encore

$$(1) \quad B_\xi(x, y) = 2 \log d_y(\xi, \xi') - 2 \log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y).$$

Supposons que  $\partial X$  ne soit pas réduit à un point. Soit alors  $V$  un petit voisinage compact de  $\xi$  et  $\xi'$  un élément fixé en dehors de  $V$ . La fonction :

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur  $(V, d_x)$ . Les métriques  $d_x$  et  $d_y$  étant des métriques visuelles de paramètres respectifs  $(x, e)$  et  $(y, e)$ , elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b)). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur  $(V, d_x)$ . Dès lors, par la relation (1), la fonction :

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur  $(V, d_x)$ . Maintenant la compacité de  $(\partial X, d_x)$  montre qu'elle est lipschitzienne sur  $\partial X$ .  $\square$

**2.6.3. Corollaire.**

a) Quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , les métriques  $d_x$  et  $d_y$  sont conformes.

b) Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Alors  $g$  est une application conforme de  $(\partial X, d_x)$ , dont le facteur conforme en  $\xi$  est :

$$|g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)}.$$

#### 2.6.4. PREUVE :

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques  $d_x$ , on a :

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))}.$$

Donc la proposition 2.6.1 donne :

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \xrightarrow{\xi' \rightarrow \xi} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que  $d_x$  et  $d_y$  sont conformes.

b) Puisque  $g$  est une isométrie de  $X$ , on a :

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x}.$$

Donc :

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au a). □

#### 2.6.5. EXEMPLES.

a) Prenons  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  et  $x$  le centre du modèle en boule. Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  agit par transformations conformes sur la sphère  $S^n$  munie de la métrique euclidienne. Notons  $\|g'(\xi)\|$  le facteur conforme en  $\xi$  d'un élément  $g$  de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ . D'après l'exemple 2.5.9 a) on a :

$$\|g'(\xi)\| = |g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)}.$$

b) Prenons  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit  $x$  le centre du modèle en boule.

Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$  laisse invariant le champ d'hyperplans  $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ , défini par :

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1} ; h(\xi, u) = 0\}$$

où  $h$  est la forme hermitienne de  $\mathbb{C}^n$  :

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{u}_i.$$

Il agit par transformations conformes sur  $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$  muni de la métrique euclidienne. Notons  $\|g'(\xi)\|$  le facteur conforme sur  $P_\xi$  d'un élément  $g$  de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ . Nous allons voir qu'à nouveau :

$$\|g'(\xi)\| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = |g'(\xi)|_x.$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 423). Observons tout d'abord que  $\|g'(\xi)\|$  ne dépend que de  $g^{-1}x$ . En effet, si  $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$  vérifie  $h^{-1}x = g^{-1}x$ , alors la

composée  $g \circ h^{-1}$  fixe  $x$  le centre du modèle en boule, donc  $g \circ h^{-1}$  appartient à  $U(n)$  et :

$$\|g'(\xi)\| = \|h'(\xi)\| .$$

Choisissons donc judicieusement  $h$ . Notons  $y$  l'intersection de l'horosphère  $H_\xi$ , basée en  $\xi$ , contenant  $g^{-1}x$ , avec la géodésique  $(x\xi)$ . Le stabilisateur de  $H_\xi$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_\mathbb{C}^n)$  agit transitivement sur  $H_\xi$ , de plus le facteur conforme de ses éléments en  $P_\xi$  est 1. Soit  $p$  un élément de  $\text{Stab}(H_\xi)$ , vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de  $\mathbb{H}_\mathbb{R}^n$  contenant la géodésique  $(x\xi)$ . L'espace tangent à son bord en  $\xi$  est contenu dans  $P_\xi$ . Soit  $t$  un élément de  $\text{Isom}(\mathbb{H}_\mathbb{C}^n)$  qui fixe cette copie et envoie  $y$  sur  $x$ .

D'après l'exemple a), on a :

$$\|t'(\xi)\| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée  $h = t \circ p$  vérifie  $h^{-1}x = g^{-1}x$ , d'où :

$$\|g'(\xi)\| = \|t'(\xi)\| \|p'(\xi)\| = \|t'(\xi)\| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

## 2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit  $\Gamma$  un groupe quasi-convexe d'isométries de  $X$  (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite  $\Lambda$  hérite de la structure conforme de  $\partial X$ . Notons  $p(x, y, \xi)$  le facteur conforme en  $\xi \in \Lambda$ , de l'application identité de  $(\Lambda, d_x)$  sur  $(\Lambda, d_y)$ . D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a :

$$(2.7.1) \quad p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} .$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3,  $\Gamma$  agit par transformations conformes sur  $(\Lambda, d_x)$ . Le facteur conforme de  $g \in \Gamma$  en  $\xi$ , est :

$$(2.7.2) \quad |g'(\xi)|_x = p(x, g^{-1}x, \xi) .$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de  $\mathbb{H}_\mathbb{R}^n$ , on définit la notion de mesure  $\alpha$ -conforme sur  $\Lambda$  (voir [P], [Su], [N], [C], [K]) :

La collection de mesures  $\{\mu_x, x \in X\}$  est une mesure  $\alpha$ -conforme, si pour tout  $x \in X$ ,  $\mu_x$  est finie non nulle, de support inclus dans  $\Lambda$ , et si pour tout  $x, y \in X$  et  $g \in \Gamma$  :

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, \cdot)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = |g'|_x^\alpha \mu_x \end{aligned}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de  $\mathbb{H}_\mathbb{R}^n$ . La seule différence est

qu'une boule de  $\Lambda$  n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Aussi contentons-nous d'énoncer les résultats :

Soit  $\tau$  la dimension de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ . Soit  $\nu_x$  la  $\tau$ -mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ .

**2.7.4. Théorème.** *La collection  $\{\nu_x, x \in X\}$  est une  $\tau$ -mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une  $\tau$ -mesure conforme, égale à une constante près à  $\{\nu_x, x \in X\}$ .*

De plus :

**2.7.5. Théorème.**

a) *La dimension  $\tau$  est égale au taux de croissance de  $\Gamma$  dans  $X$ . C'est-à-dire :*

$$\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}.$$

b) *La  $\nu_x$ -mesure d'une boule de  $(\Lambda, d_x)$ , est proportionnelle à son rayon à la puissance  $\tau$ . Autrement dit : il existe une constante  $C_x \geq 1$ , telle que pour toute boule  $B(\xi, r)$  centrée sur  $\Lambda$ , on ait :*

$$C_x^{-1} r^\tau \leq \nu_x(B(\xi, r)) \leq C_x r^\tau.$$

## 2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe

Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-1)$ -espace, sur lequel agit  $\Gamma$  par isométrie de manière quasi-convexe. Notons  $\Lambda$  l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$ . Définissons  $G\Lambda$  l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de  $X$ , dont les extrémités appartiennent à  $\Lambda$  :

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\}.$$

Et équipons-le de la métrique suivante :

$$|\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts. En effet, on a :

**2.8.1. Proposition.** *Quel que soit  $T \geq 0$ , alors :*

$$e^{-T} \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \leq |\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} \leq \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T}.$$

**2.8.2. PREUVE :** L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3) :

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X .$$

□

Clairement, le groupe  $\Gamma$  agit par isométries sur  $(G\Lambda, | \cdot |_{G\Lambda})$  de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient :

$$\mathcal{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire  $(X, \Gamma)$ .

Notons que  $\mathcal{E}$  est compact. En effet,  $\Gamma$  est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de  $\Lambda$  par  $\Gamma$  est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de  $G\Lambda$  est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme  $\{\Phi_T, T \in \mathbb{R}\}$ , provenant de l'action naturelle de  $\mathbb{R}$  sur  $G\Lambda$ . Il est défini par :

$$(2.8.3) \quad \Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \text{ avec } \gamma_T(t) = \gamma(t + T).$$

Remarquons que pour tout  $T \in \mathbb{R}$ ,  $g \in \Gamma$ , et  $\gamma \in G\Lambda$  :

$$(2.8.4) \quad \Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma).$$

Le flot géodésique de  $\mathcal{E}$  est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur  $\mathcal{E}$  par la relation 2.8.4. On le notera encore  $\{\Phi_T, T \in \mathbb{R}\}$ .

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ . En  $\bar{\gamma} \in \mathcal{E}$ , ils sont respectivement définis par :

$$W^{ss}(\bar{\gamma}) = \left\{ \bar{\eta} \in \mathcal{E} \mid |\Phi_T(\bar{\eta}) - \Phi_T(\bar{\gamma})|_{\mathcal{E}} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

$$W^{uu}(\bar{\gamma}) = \left\{ \bar{\eta} \in \mathcal{E} \mid |\Phi_{-T}(\bar{\eta}) - \Phi_{-T}(\bar{\gamma})|_{\mathcal{E}} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\} .$$

Ils forment un feuilletage  $\Phi_T$ -invariant de  $\mathcal{E}$ . De même, sont définis les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de  $(G\Lambda, \Phi_T)$ . D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante :

$$(2.8.5) \quad W^{ss}(\gamma) = \{ \eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty) \}$$

$$W^{uu}(\gamma) = \{ \eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty) \} .$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à  $\Lambda$  privé d'un point.

**2.8.6. Proposition.** Soit  $\pi$  la projection de  $G\Lambda$  sur  $\mathcal{E}$ , alors :

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$

$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma)).$$

**2.8.7. PREUVE :** Elle découle du simple fait suivant :

Il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout intervalle  $I$  et tout élément  $\bar{\gamma}, \bar{\eta} \in \mathcal{E}$ , vérifiant :

$$\forall T \in I, |\Phi_T(\bar{\gamma}) - \Phi_T(\bar{\eta})|_{\mathcal{E}} < \varepsilon.$$

on puisse trouver  $\gamma, \eta \in G\Lambda$ , relevés de  $\bar{\gamma}, \bar{\eta}$ , tels que :

$$\forall T \in I, |\Phi_T(\gamma) - \Phi_T(\eta)|_{G\Lambda} = |\Phi_T(\bar{\gamma}) - \Phi_T(\bar{\eta})|_{\mathcal{E}}.$$

Autrement dit, deux orbites de  $\Phi_T$  sont proches dans  $\mathcal{E}$ , si et seulement si elles admettent des relevés proches dans  $G\Lambda$ .  $\square$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de  $G\Lambda$  en  $\gamma$ , est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de  $\gamma$  sous  $\Phi_T$ . En d'autres termes :

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbb{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$

$$W^u(\gamma) = \bigcup_{T \in \mathbb{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de  $\mathcal{E}$ . D'après la proposition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de  $G\Lambda$ , via la projection de  $G\Lambda$  sur  $\mathcal{E}$ .

## 2.9. Le paramétrage de Hopf de $(\mathcal{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine  $x$  dans  $X$ . Soit  $\Delta$  la diagonale de  $\Lambda \times \Lambda$ . On définit une application de  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R}$  dans  $G\Lambda$ , de la manière suivante : à l'élément  $(\xi_-, \xi_+, t)$  de  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R}$ , associons l'unique élément  $\gamma$  de  $G\Lambda$  vérifiant (voir figure 5) :

$$(2.9.1) \quad \gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t.$$

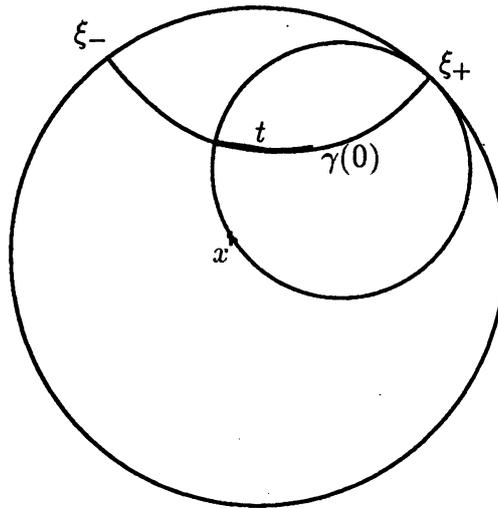


Figure 5

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées  $\Phi_T$  s'écrit :

$$(2.9.2) \quad \Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T).$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5) :

$$(2.9.3) \quad \{(\xi_-, \xi_+, t), \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\}.$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de  $\Gamma$  s'écrit :

$$(2.9.4) \quad g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)).$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme :

$$(2.9.5) \quad (\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R} / \sim \rightarrow \mathcal{E}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R}$  :

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe  $g \in \Gamma$  tel que :

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x).$$

## 2.10. Mesure d'entropie maximale

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan [Su], [Su2] dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit  $x$  un élément de  $X$ , et soit respectivement  $\tau$  et  $\nu_x$  la dimension et la mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$  (voir 2.7). La mesure :

$$(2.10.1) \quad \mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}}$$

est une mesure de Radon sur  $\Lambda \times \Lambda - \Delta$ . Elle est indépendante de  $x$  et  $\Gamma$ -invariante. En effet  $\{\nu_x, \nu \in X\}$  est une mesure  $\tau$ -conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1 :

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') [p(x, y, \xi)p(x, y, \xi')]^{1/2}.$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier  $G\Lambda$  à  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R}$ . Soit alors  $\tilde{m}$  la mesure sur  $G\Lambda$  définie par :

$$\tilde{m} = \mu \times dt.$$

C'est une mesure de Radon,  $\Gamma$ -invariante et  $\Phi_T$ -invariante. La mesure  $m$ , restriction de  $\tilde{m}$  au compact  $\mathcal{E}$ , (considéré comme un domaine fondamental de  $\Gamma$  dans  $G\Lambda$ ), est finie et  $\Phi_T$ -invariante. On a :

**2.10.2. Théorème.**  $\Phi_T$  est ergodique sur  $(\mathcal{E}, m)$ .

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que  $\mu$  s'écrit comme un produit de deux mesures sur  $\Lambda$ .

Clairement, l'ergodicité de  $\Phi_T$  sur  $(\mathcal{E}, m)$  est équivalente à celle de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ . Puisque  $\mu$  et  $\nu_x \times \nu_x$  sont absolument continues, l'ergodicité de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$  entraîne l'ergodicité de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda, \nu_x)$ . D'où,

**2.10.3. Corollaire.** L'action de  $\Gamma$  est ergodique sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$  et sur  $(\Lambda, \nu_x)$ .

Notons respectivement  $h$  et  $h_m$ , l'entropie topologique de  $\Phi_T$  et l'entropie mesurable de  $(\Phi_T, m)$ . Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], [K]). On obtient :

**2.10.4. Théorème.**  $h = h_m = \tau$ . Ainsi  $m$  maximise l'entropie mesurable.

## 2.11. Preuve du théorème 2.0.1

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes :

Soient  $x_1, x_2$  des origines respectivement de  $X_1$  et  $X_2$ . Notons  $d_1$  et  $d_2$  les métriques  $d_{x_1}$  et  $d_{x_2}$  sur  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ .

**2.11.1. Lemme.** Supposons que l'application  $\Omega : (\Lambda_1, d_1) \rightarrow (\Lambda_2, d_2)$  soit conforme. Alors, son facteur conforme  $\omega$  est continu sur  $\Lambda_1$ .

**2.11.2. PREUVE DE 2.11.1 :** Puisque  $\Omega$  est conforme, les ensembles limites  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  ont même dimension de Hausdorff  $\tau$ . De plus, en notant  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les  $\tau$ -mesures de Hausdorff de  $(\Lambda_1, d_1)$  et  $(\Lambda_2, d_2)$ , on a :

$$(1) \quad \Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 .$$

Soit  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les mesures sur  $\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta$  et  $\Lambda_2 \times \Lambda_2 - \Delta$ , définies par la relation 2.10.1. D'après l'égalité (1), la mesure :

$$(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$$

est absolument continue par rapport à  $\mu_1$ . De plus,  $\mu_2$  est  $\Gamma$ -invariante et  $\Omega$  est  $\Gamma$ -équivalent, donc  $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$  est  $\Gamma$ -invariante. Alors, puisque l'action de  $\Gamma$  est ergodique sur  $(\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta, \mu_1)$  (corollaire 2.10.3), les mesures  $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$  et  $\mu_1$  sont égales à une constante près. Donc, à une constante près leurs densités par rapport à  $\nu_1 \times \nu_1$  sont presque sûrement égales. D'où  $\nu_1 \times \nu_1$  - presque sûrement :

$$\frac{\omega^\tau(\xi)\omega^\tau(\xi')}{[d_1(\xi, \xi')]^{2\tau}} = \frac{\text{Cste}}{[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^{2\tau}} ,$$

soit encore

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = (\text{Cste})^{1/\tau} \omega(\xi) \omega(\xi') [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

L'application  $\Omega : (\Lambda_1, d_1) \rightarrow (\Lambda_2, d_2)$  étant continue,  $\omega$  l'est également. Notons qu'en faisant tendre  $\xi'$  vers  $\xi$ , on trouve  $\text{Cste} = 1$ .  $\square$

Soit maintenant  $s_i$  l'involution de  $G\Lambda_i$  définie par :

$$s_i(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t).$$

Par passage au quotient on obtient une involution de  $\mathcal{E}_i$  que l'on notera encore  $s_i$ .

**2.11.3. Lemme.** *Supposons que l'homéomorphisme  $G : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  conjugue les flots géodésiques. Quitte à remplacer  $G$  par  $G' = \Phi_{T_0} \circ G$  pour un certain réel  $T_0$ , on peut supposer :*

$$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

**2.11.4. PREUVE DE 2.11.3 :** Soit  $T$  la fonction sur  $\mathcal{E}_1$  dans  $\mathbb{R}$ , définie de la manière suivante : Etant donné  $\gamma \in \mathcal{E}_1$ ,  $T(\gamma)$  est l'unique réel vérifiant :

$$(1) \quad \Phi_{T(\gamma)}(G \circ s_1(\gamma)) = s_2 \circ \Phi_{T(\gamma)}(G(\gamma)) .$$

La fonction  $T$  est continue et invariante par le flot de  $\mathcal{E}_1$ . Aussi elle est constante (par l'ergodicité du flot sur  $(\mathcal{E}_1, m_1)$  (théorème 2.10.2)). Notons  $T_0$  la valeur constante de  $T$ , et  $G'$  l'application  $\Phi_{T_0} \circ G$ . D'après (1), on a :

$$G' \circ s_1 = s_2 \circ G' .$$

$\square$

**2.11.5. PREUVE DE 2.0.1 :** Montrons (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Soit  $g \in \Gamma$ . Notons respectivement  $|g'|_1$  et  $|g'|_2$ , le facteur conforme de  $g$  sur  $(\Lambda_1, d_1)$  et  $(\Lambda_2, d_2)$ . En écrivant :

$$\Omega \circ g = g \circ \Omega ,$$

et en calculant le facteur conforme des deux membres, on obtient :

$$(1) \quad (\omega \circ g) |g'|_1 = (|g'|_2 \circ \Omega) \omega .$$

Construisons maintenant notre conjugaison :

Paramétrons  $G\Lambda_1$  et  $G\Lambda_2$  comme au paragraphe 2.9, en choisissant pour origines les points  $x_1$  et  $x_2$ . Définissons une application  $\tilde{G}$  de  $G\Lambda_1$  dans  $G\Lambda_2$ , par :

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+)) .$$

D'après le lemme 2.11.1,  $\omega$  est continue, donc  $\tilde{G}$  est un homéomorphisme. D'après la relation 2.9.2, il conjugue les flots de  $G\Lambda_1$  et  $G\Lambda_2$ . De plus, quel que soit  $g \in \Gamma$ , il vérifie :

$$(2) \quad \tilde{G} \circ g = g \circ \tilde{G} .$$

En effet, d'après 2.9.4 on a :

$$(\tilde{G} \circ g)(\xi_-, \xi_+, t) = \left( \Omega \circ g(\xi_-), \Omega \circ g(\xi_+), \right. \\ \left. t - B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) - \log \omega \circ g(\xi_+) \right)$$

et

$$(g \circ \tilde{G})(\xi_-, \xi_+, t) = \left( g \circ \Omega(\xi_-), g \circ \Omega(\xi_+), \right. \\ \left. t - \log \omega(\xi_+) - B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) \right).$$

Or d'après le corollaire 2.6.3,

$$B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) = \log |g'(\xi_+)|_1$$

et

$$B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) = \log (|g'|_2 \circ \Omega(\xi_+)).$$

Ainsi l'égalité (2) provient de (1) et de la  $\Gamma$ -équivariance de  $\Omega$ . Grâce à (2), on obtient une conjugaison des flots de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Par construction, elle induit l'application  $F$  entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ .

Montrons (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Soit  $G : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  une conjugaison des flots, qui induit l'application  $F$  entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ .

D'après le lemme 2.11.3, on peut supposer :

$$(3) \quad G \circ s_1 = s_2 \circ G.$$

Relevons la conjugaison  $G$  à  $G\Lambda_1$  et  $G\Lambda_2$  de la manière suivante : Soit  $\pi_i$  la projection de  $G\Lambda_i$  sur  $\mathcal{E}_i$ . Pour  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X_1$  appartenant à  $G\Lambda_1$ , soit  $\gamma' : \mathbb{R} \rightarrow X_2$ , un élément de  $G\Lambda_2$  vérifiant :

$$\gamma'(-\infty) = \Omega(\gamma(-\infty)), \quad \gamma'(+\infty) = \Omega(\gamma(+\infty))$$

et

$$\pi_2(\gamma') = G(\pi_1(\gamma)).$$

Notons que  $\gamma'$  existe puisque  $G$  induit  $F$  entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . De plus, si  $\pi_1(\gamma)$  n'appartient à aucune orbite périodique de  $\mathcal{E}_1$ ,  $\gamma'$  est unique. On obtient ainsi une application

$$\tilde{G} : G\Lambda_1 \rightarrow G\Lambda_2 \\ \gamma \mapsto \gamma'$$

définie sauf sur les relevés des orbites périodiques, qui conjugue les flots, vérifie :

$$G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{G},$$

ainsi que, d'après (3) :

$$(4) \quad \tilde{G} \circ s_1 = s_2 \circ \tilde{G}.$$

Paramétrons  $G\Lambda_1$  et  $G\Lambda_2$  comme au paragraphe 2.9, en choisissant les points  $x_1$  et  $x_2$  comme origines. Puisque  $G$  est une conjugaison continue entre les compacts  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ , elle est uniformément continue. Aussi elle envoie sous-ensembles fortement stables sur sous-ensembles fortement stables. D'après sa définition et la proposition 2.8.6,  $\tilde{G}$  a la même propriété. Aussi, d'après 2.9.3,  $\tilde{G}$  s'écrit en coordonnées :

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+)) ,$$

pour une certaine fonction  $\omega$  de  $\Lambda_1$  dans  $]0, +\infty[$ .

Notons que ceci permet de définir  $\tilde{G}$  sur  $G\Lambda_1$  tout entier.

Comparons maintenant les métriques  $d_1 = d_{x_1}$  et  $d_2 = d_{x_2}$  sur  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  : Soit  $\xi$  et  $\xi'$  deux points distincts de  $\Lambda_1$ , et  $p$  appartenant à  $(\xi\xi')$ . Soit  $\gamma$  l'élément de  $G\Lambda_1$ , vérifiant :

$$\gamma(-\infty) = \xi , \gamma(+\infty) = \xi' \text{ et } \gamma(0) = p .$$

Les points  $\tilde{G}(\gamma)(0)$  et  $\tilde{G}(s_1(\gamma))(0)$  appartiennent à la géodésique  $(\Omega(\xi)\Omega(\xi'))$  de  $X_2$ . D'après (4) ils sont égaux. Notons-les  $q$ . En coordonnées on a :

$$\gamma = (\xi, \xi', B_{\xi'}(x_1, p))$$

et

$$s_1(\gamma) = (\xi', \xi, B_{\xi}(x_1, p)) .$$

D'où :

$$\tilde{G}(\gamma) = (\Omega(\xi), \Omega(\xi'), B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi'))$$

et

$$\tilde{G}(s_1(\gamma)) = (\Omega(\xi'), \Omega(\xi), B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi))$$

donc

$$(5) \quad B_{\Omega(\xi')}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi')}(x_2, \tilde{G}(\gamma)(0)) = B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi')$$

et

$$(6) \quad B_{\Omega(\xi)}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi)}(x_2, \tilde{G}(s_1(\gamma))(0)) = B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi) .$$

Ainsi (5) et (6) donnent :

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = \omega(\xi)\omega(\xi') [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

Puisque l'application  $\Omega$  de  $(\Lambda_1, d_1)$  sur  $(\Lambda_2, d_2)$  est continue,  $\omega$  l'est également. Alors, en faisant tendre  $\xi'$  vers  $\xi$ ,  $\Omega$  est conforme de facteur conforme  $\omega$ .  $\square$



### 3. Un codage “à la Bowen-Series” d’un groupe hyperbolique et de son bord

#### 3.0. Introduction

De nombreux auteurs ont obtenu une représentation symbolique d’un groupe hyperbolique et de son bord. Citons notamment : J.W. Cannon [Ca], M. Gromov [G], E. Ghys et P. de la Harpe [G.H], M. Coornaert et A. Papadopoulos [C.P], V. Kaimanovich (communication orale). Notre approche s’inspire des travaux de R. Bowen et C. Series sur les groupes fuchsien ([B2], [B.S], [S1], [S2]). Elle a le mérite d’être naturelle et d’être constructive sur quelques exemples. De plus, elle permet d’obtenir simultanément un codage de  $\Gamma$  et de son bord.

Le résultat de R. Bowen et C. Series dont nous nous sommes inspirés, est le suivant (voir [S2]) :

Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien de type fini, sans parabolique. Soit  $\Lambda$  son ensemble limite. Il existe un système de générateurs  $S$  de  $\Gamma$ , une application  $f$  de  $\Lambda$  dans lui-même, et une partition finie de  $\Lambda$  :

$$\mathcal{P} = \{E_j, j = 1, \dots, t\},$$

tels que :

(i) Sur chaque  $E_j$ ,  $f$  soit la multiplication à gauche par un élément de  $S$  :

$$f|_{E_j}(\xi) = a_j^{-1}\xi$$

où  $a_j \in S$ .

(ii) La paire  $(f, \mathcal{P})$  ait la propriété de Markov :

$$\forall j \in \{1, \dots, t\}; f(E_j) = \bigcup_{k=1}^{m_j} E_{j_k}.$$

A une application Markov correspond un sous-shift de type fini, qui est défini de la manière suivante :

Soit  $B = (b_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, t\}$ , la matrice carrée définie par :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 1 && \text{si } f(E_i) \supset E_j \\ b_{ij} &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Et soit  $\Sigma_B^+$ , le sous-shift de type fini :

$$\Sigma_B^+ = \{j = (j_k)_{k=0}^\infty \mid j_k \in \{1, \dots, t\} \text{ et } B_{j_k j_{k+1}} = 1\}.$$

Dans [S2], C. Series démontre les résultats suivants :

(iii) Quel que soit  $\mathbf{j} \in \Sigma_B^+$ , l'ensemble

$$\{e, a_{j_0}, a_{j_0}a_{j_1}, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_n}, \dots\}$$

est un rayon géodésique du graphe de Cayley de  $(\Gamma, S)$ .

(iv) Soit  $x$  une origine dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ . L'application  $g$  de  $\Sigma_B^+$  dans  $\Lambda$  définie par :

$$g(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_n} x$$

est bijective, sauf peut-être au-dessus d'un nombre dénombrable de points, où elle est deux sur un.

Au paragraphe 3.1, nous définissons la notion d'application de Markov d'un groupe de type fini. Lorsqu'elles existent, de telles applications généralisent l'application de Bowen-Series. Elles permettent de coder un groupe hyperbolique et son bord par un sous-shift de type fini.

Au paragraphe 3.2, nous utilisons un théorème de J.W. Cannon, afin de montrer que tout groupe hyperbolique admet une application de Markov.

Le paragraphe 3.3 est consacré à la construction d'applications de Markov sur quelques exemples. Sur une classe d'exemples, nous montrons que l'application de Markov sur le groupe s'étend en une application de Markov sur son bord. Comme cas particulier, nous retrouvons l'application de Bowen-Series.

### 3.1. Applications de Markov sur un groupe de type fini

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini, et soit

$$S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$$

un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ .

Notons  $|\cdot|$  la métrique des mots de  $(\Gamma, S)$ . Suivant J.W. Cannon, définissons le type cône d'un élément  $g$  de  $\Gamma$  :

$$\mathcal{C}(g) = \{h \in \Gamma \mid |gh| = |g| + |h|\}.$$

Pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ , soit  $U_i$  le sous-ensemble de  $\Gamma$  :

$$U_i = a_i \mathcal{C}(a_i).$$

Remarquons que  $U_i$  est l'ensemble des éléments de  $\Gamma$ , dont une écriture minimale commence par  $a_i$ . Aussi, en posant  $U_0 = \{e\}$ , l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{U_i, i = 0, \dots, s\}$$

est un recouvrement de  $\Gamma$ .

**3.1.1. DÉFINITION.** Une application de Markov de  $(\Gamma, S)$  est un couple  $(f, \mathcal{P})$ , où :

(i)  $\mathcal{P} = \{V_j, j = 0, \dots, t\}$  est une partition finie de  $\Gamma$ , dont les éléments sont inclus dans les éléments de  $\mathcal{R}$ . Plus précisément, on demande que  $V_0$  soit égal à  $U_0$ , et que  $V_j, j \geq 1$ , soit inclus dans un  $U_i, i \geq 1$ .

(ii)  $f$  est une application de  $\Gamma$  dans lui-même, vérifiant :

$$f(e) = e,$$

et pour  $j = 1, \dots, t$  :

$$f|_{V_j}(g) = a_j^{-1}g$$

où  $a_j$  est un élément  $a_i$  de  $S$ , tel que  $V_j$  soit inclus dans  $a_i\mathcal{C}(a_i) = U_i$ .

(iii) Le couple  $(f, \mathcal{P})$  a la propriété de Markov, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \{0, \dots, t\}; f(V_j) = \bigcup_{k=1}^{m_j} V_{j_k}.$$

**3.1.2. Exemples.** Pour chacun des groupes suivants :  $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , construisons une application de Markov.

a)  $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  :

Notons  $a_1$  et  $a_2$  les générateurs des deux composantes du produit. Et posons :

$$a_3 = a_1^{-1}, a_4 = a_2^{-1}$$

et

$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

La figure 1 représente le graphe de Cayley de  $(\Gamma, S)$ . Les ensembles  $U_i$  sont délimités par des pointillés.

Puisque  $\mathcal{R}$  est déjà une partition, prenons

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}.$$

Il n'y a alors qu'une manière de définir  $f$  :

$$f(e) = e$$

et pour  $i \geq 1$  :

$$f|_{U_i}(g) = a_i^{-1}g.$$

Clairement,  $f$  vérifie pour  $i \geq 1$  :

$$f(U_i) = U_0 \cup \bigcup_{a_k \neq a_i^{-1}} U_k.$$

Donc  $(f, \mathcal{P})$  a la propriété de Markov.

b)  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Prenons le même système de générateurs  $S$ . La figure 2 représente le graphe de Cayley de  $(\Gamma, S)$  privé de ses arêtes. Les ensembles  $U_i$  sont les demi-plans délimités par les pointillés

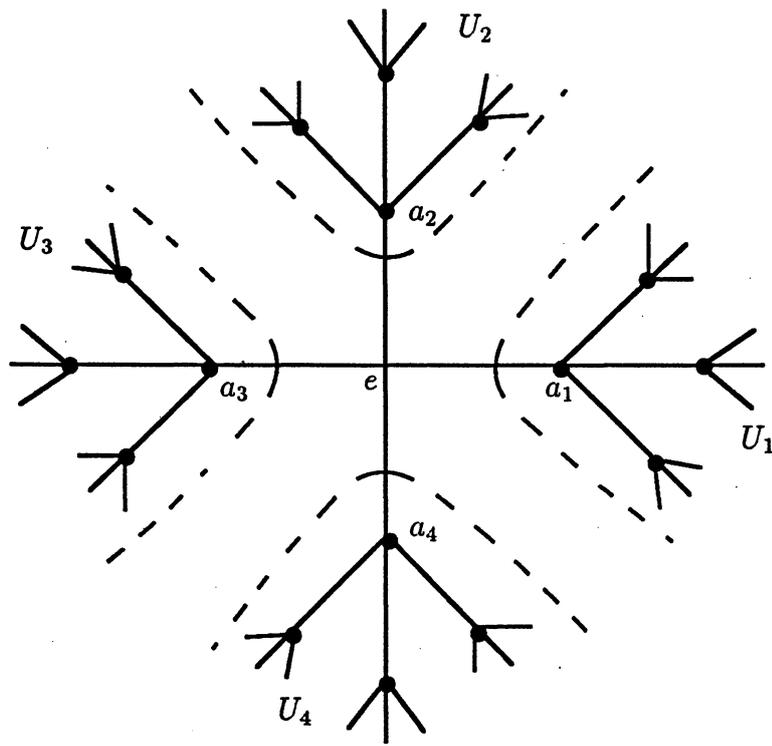


Figure 1

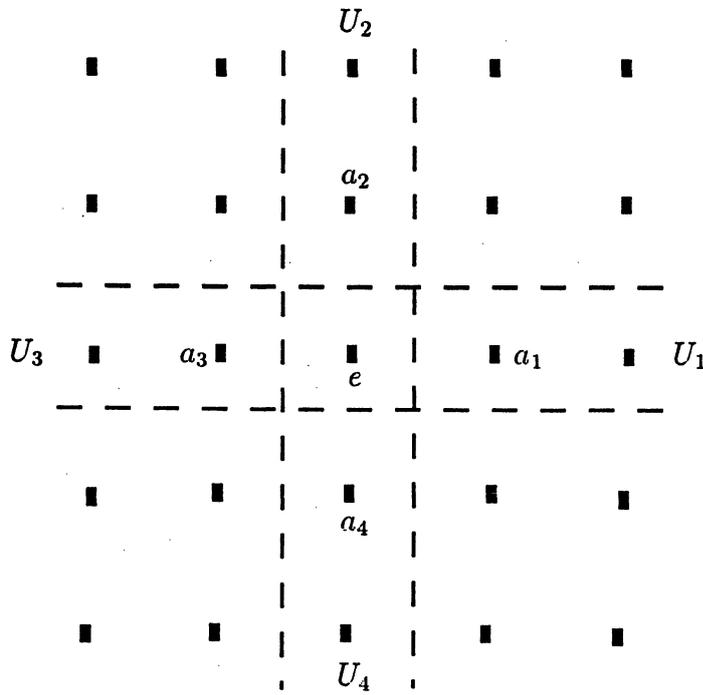


Figure 2

La figure 3 représente une possible partition  $\mathcal{P}$  de  $\Gamma$ .  
 Chacun des ensembles  $V_1, V_2, V_3, V_4$  est inclus dans un unique  $U_i$ .

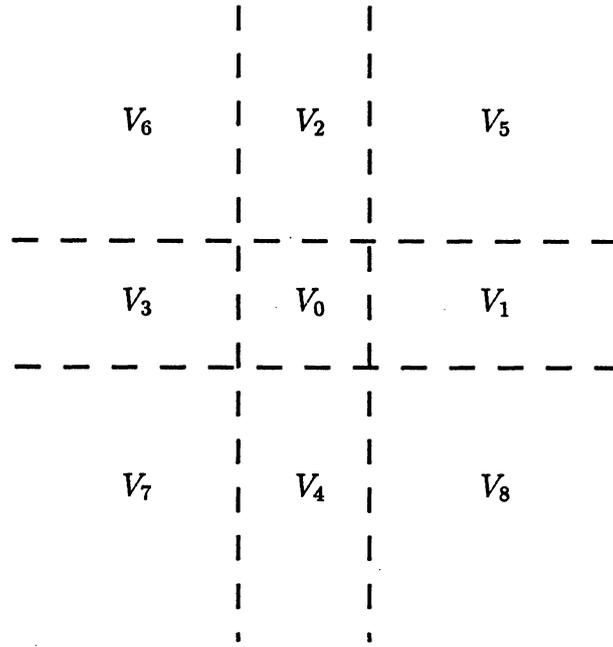


Figure 3

Aussi, pour définir  $f$  sur  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , on est obligé de poser :

$$f|_{V_i}(g) = g - a_i.$$

Par contre, sur chacun des ensembles  $V_5, V_6, V_7, V_8$ , il y a deux choix possibles. Néanmoins, quelque choix que l'on fasse, on vérifie que le couple  $(f, \mathcal{P})$  a toujours la propriété de Markov.

Au paragraphe 3.2, nous montrerons que tout groupe hyperbolique admet une application de Markov. Auparavant, nous énonçons un théorème qui généralise le résultat de Bowen-Series.

Supposons que  $(\Gamma, S)$  admette une application de Markov  $(f, \mathcal{P})$ . Associons-lui un sous-shift de type fini, de la manière suivante :

Soit  $A = (A_{ij}), i, j \in \{0, \dots, t\}$ , la matrice carrée définie par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 1 \quad \text{si } f(V_i) \supset V_j \\ A_{ij} &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Le sous-shift de type fini associé à  $(f, \mathcal{P})$  est :

$$\Sigma_A^+ = \{ \mathbf{j} = (j_k)_{k=0}^{+\infty} \mid j_k \in \{0, \dots, t\} \text{ et } A_{j_k j_{k+1}} = 1 \}.$$

Puisque  $f(e) = e$ , on a la décomposition suivante :

$$\Sigma_A^+ = \Sigma \amalg \Sigma_B^+,$$

où :

$$\Sigma = \{ \mathbf{j} \in \Sigma_A^+ \mid j_k = 0 \text{ à partir d'un certain rang} \}$$

et où  $\Sigma_B^+$  est le sous-shift de type fini

$$\Sigma_B^+ = \{ \mathbf{j} \in \Sigma_A^+ \mid \forall k \in \mathbb{N}, j_k \neq 0 \}.$$

La matrice  $B$  s'obtient en privant  $A$  de sa première ligne et de sa première colonne.

On a alors, en posant  $a_0 = e$  :

### 3.1.3. Théorème.

a) Pour toute suite finie  $(j_k)_{k=0}^n$ , vérifiant :

$$j_k \in \{1, \dots, t\}$$

et

$$A_{j_k j_{k+1}} = 1,$$

l'écriture  $a_{j_0} \dots a_{j_n}$  est de longueur minimale.

b) Remarquons que pour  $\mathbf{j} \in \Sigma$ , la suite d'éléments de  $\Gamma$  :

$$(a_{j_0} \dots a_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

est stationnaire. L'application  $p$  de  $\Sigma$  dans  $\Gamma$  :

$$p(\mathbf{j}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_k}$$

ainsi définie, est bijective.

c) Supposons  $\Gamma$  hyperbolique, et équipons son bord d'une métrique visuelle. L'application  $q$  de  $\Sigma_B^+$  dans  $\partial\Gamma$ , définie par :

$$q(\mathbf{j}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_k}$$

est surjective, Hölder continue, à fibres finies de cardinal uniformément borné.

**3.1.4. REMARQUE.** On ne peut rien dire de général sur le cardinal de la fibre de l'application  $q$  du 3.1.3.c). Par exemple, considérons le produit libre  $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , le système de générateurs  $S$ , et l'application de Markov  $f$ , de l'exemple 3.1.2.a). Il est facile de voir que l'application  $q$  associée à  $f$ , est une bijection. Maintenant, au lieu du système de générateurs  $S$ , prenons :

$$S' = \{g \in \Gamma - \{e\} \mid |g|_S \leq 2\}.$$

Le lecteur pourra construire une application de Markov de  $(\Gamma, S')$ , telle que l'application  $q$  associée, soit partout deux sur un.

Il y a toutefois un cas où  $q$  est (génériquement) bijective : Supposons que l'application de Markov s'étende au bord de  $\Gamma$ . Autrement dit, supposons que les traces des ensembles  $V_j$  sur  $\partial\Gamma$ , soient d'intérieur deux à deux disjoints. Alors  $q$  est bijective au-dessus d'un  $G_\delta$ -dense de  $\partial\Gamma$ . Dans ce cas, on obtient une bonne généralisation de la propriété (iv) de l'application de Bowen-Series. Au paragraphe 3.3, nous donnerons des exemples de groupes et de systèmes de générateurs, admettant des applications de Markov qui ont cette propriété.

Pour montrer le théorème, nous avons besoin des deux lemmes suivants qui caractérisent les écritures minimales :

**3.1.5. Lemme.** Soit  $g$  et  $g'$  deux éléments de  $\Gamma$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $|gg'| = |g| + |g'|$
- (ii)  $\mathcal{C}(g') \cap g'^{-1}\mathcal{C}(g) \neq \phi$ .

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors :

$$\mathcal{C}(gg') = \mathcal{C}(g') \cap g'^{-1}\mathcal{C}(g).$$

**3.1.6. PREUVE :** Élémentaire. □

**3.1.7. Lemme.** Soit  $a_{i_k}, k = 0, \dots, n$  des éléments de  $S$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'écriture  $a_{i_0} \dots a_{i_n}$  est de longueur minimale.
- (ii)  $\mathcal{C}(a_{i_n}) \cap a_{i_n}^{-1}\mathcal{C}(a_{i_{n-1}}) \cap \dots \cap a_{i_n}^{-1} \dots a_{i_1}^{-1}\mathcal{C}(a_{i_0}) \neq \phi$ . De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors :

$$\mathcal{C}(a_{i_0} \dots a_{i_n}) = \mathcal{C}(a_{i_n}) \cap a_{i_n}^{-1}\mathcal{C}(a_{i_{n-1}}) \cap \dots \cap a_{i_n}^{-1} \dots a_{i_1}^{-1}\mathcal{C}(a_{i_0}).$$

**3.1.8. PREUVE :** Par récurrence, en utilisant le lemme 3.1.5. □

**3.1.9. PREUVE DU THÉORÈME 3.1.3 :**

a) Rappelons que pour  $j \in \{1, \dots, t\}$ , nous avons noté  $a_j$  l'élément de  $S$ , vérifiant  $f|_{V_j}(g) = a_j^{-1}g$ . Nous noterons de même  $U_j$  l'ensemble  $a_j\mathcal{C}(a_j)$ . D'après la définition 3.1.3, on a :

$$(1) \quad V_j \subset U_j.$$

Soit maintenant une suite finie  $(j_k)_{k=0}^n$  vérifiant :

$$\begin{aligned} j_k &\in \{1, \dots, t\} \\ A_{j_k j_{k+1}} &= 1. \end{aligned}$$

D'après la définition de la matrice  $A$ , ces deux conditions sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} j_k &\in \{1, \dots, t\} \\ \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(V_{j_k}) &\neq \phi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} j_k &\in \{1, \dots, t\} \\ V_{j_0} \cap a_{j_0} V_{j_1} \cap \dots \cap a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} V_{j_n} &\neq \phi. \end{aligned}$$

En appliquant l'inclusion (1), on obtient

$$\begin{aligned} j_k &\in \{1, \dots, t\} \\ U_{j_0} \cap a_{j_0} U_{j_1} \cap \dots \cap a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} U_{j_n} &\neq \phi \end{aligned}$$

soit encore :

$$a_{j_0} \mathcal{C}(a_{j_0}) \cap a_{j_0} a_{j_1} \mathcal{C}(a_{j_1}) \cap \dots \cap a_{j_0} \dots a_{j_n} \mathcal{C}(a_{j_n}) \neq \phi.$$

Alors, en multipliant à gauche par  $(a_{j_0} \dots a_{j_n})^{-1}$  :

$$\mathcal{C}(a_{j_n}) \cap a_{j_n}^{-1} \mathcal{C}(a_{j_{n-1}}) \cap \dots \cap a_{j_n}^{-1} \dots a_{j_1}^{-1} \mathcal{C}(a_{j_0}) \neq \phi.$$

Donc, d'après le lemme 3.1.7, l'écriture  $a_{j_0} \dots a_{j_n}$  est de longueur minimale.

b) Tout d'abord, notons que  $f$  a la propriété suivante :

$$\text{Si } g \neq e, |f(g)| = |g| - 1.$$

En effet, c'est immédiat d'après la définition d'une application de Markov de  $(\Gamma, S)$ . On en déduit, de proche en proche :

$$(2) \quad f^{|g|}(g) = e.$$

Montrons maintenant la surjectivité de  $p$  : Soit  $g \in \Gamma$ , considérons la suite  $\mathbf{j} = (j_k)_{k=0}^{+\infty}$ , définie par :

$$f^k(g) \in V_{j_k}.$$

Clairement  $\mathbf{j}$  appartient à  $\Sigma_A^+$ . D'après (2) elle appartient à  $\Sigma$ . Montrons que  $\mathbf{j}$  est un antécédent de  $g$ . Par définition de  $\mathbf{j}$ , on a :

$$(3) \quad g \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(V_{j_k}).$$

Or, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\bigcap_{k=0}^n f^{-k}(V_{j_k}) = a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} V_{j_n}$$

donc, puisque  $\mathbf{j} \in \Sigma$  :

$$(4) \quad \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V_{j_k}) = \{p(\mathbf{j})\}$$

d'où, en utilisant (3) :

$$g = p(\mathbf{j}).$$

Montrons l'injectivité :

Soit  $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in \Sigma$ , vérifiant  $p(\mathbf{j}) = p(\mathbf{j}')$ . D'après (4), on a :

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V_{j_k}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V_{j'_k}) \neq \phi,$$

donc  $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$ .

c)  $q$  est surjective : Soit  $\xi \in \partial\Gamma$  et soit  $r : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma$  un rayon géodésique d'extrémités  $e$  et  $\xi$ . Soit  $\mathbf{j}^n$  l'élément de  $\Sigma$ , vérifiant :

$$p(\mathbf{j}^n) = r(n).$$

Extrayons de la suite  $(\mathbf{j}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une sous-suite convergente et appelons  $\mathbf{j}$  sa limite. Par compacité  $\mathbf{j}$  appartient à  $\Sigma_B^+$ . Donc, d'après a),

$$\{e, a_{j_0}, a_{j_0} a_{j_1}, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_n}, \dots\}$$

est un rayon géodésique de  $\Gamma$ . Par construction, il est à distance de Hausdorff bornée du rayon  $r$ . Donc :

$$q(\mathbf{j}) = r(+\infty) = \xi.$$

$q$  est Hölder continue : Equipons  $\partial\Gamma$  d'une métrique visuelle  $d_{\partial\Gamma}$  de paramètres  $(e, t)$ , associée à la métrique des mots de  $(\Gamma, S)$ . Rappelons qu'il existe une constante  $C = C(\Gamma, S, t)$ , telle que pour tous  $\xi, \xi' \in \partial\Gamma$ , et pour tous rayons géodésiques  $r, r'$  d'extrémités :

$$r(0) = r'(0) = e$$

$$r(+\infty) = \xi, r'(+\infty) = \xi',$$

on ait :

$$C^{-1}t^{-d} \leq d_{\partial\Gamma}(\xi, \xi') \leq Ct^{-d}$$

(5) avec

$$d = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (r(k) | r'(k))_e.$$

Soit maintenant  $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in \Sigma_B^+$ , vérifiant  $d(\mathbf{j}, \mathbf{j}') = 2^{-n}$ . On a donc

$$(6) \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}; j_k = j'_k.$$

Soit  $r = \{e, a_{j_0}, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_k}, \dots\}$  et  $r' = \{e, a_{j'_0}, \dots, a_{j'_0} \dots a_{j'_k}, \dots\}$  les rayons géodésiques associés à  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{j}'$ . Ils ont pour extrémités :

$$r(0) = r'(0) = e$$

$$r(+\infty) = q(\mathbf{j}), r(-\infty) = q(\mathbf{j}').$$

De plus, d'après (6) :

$$r(n) = r'(n).$$

Donc (5) donne :

$$d_{\partial\Gamma}(q(\mathbf{j}), q(\mathbf{j}')) \leq Ct^{-n}$$

soit encore :

$$d_{\partial\Gamma}(q(\mathbf{j}), q(\mathbf{j}')) \leq C \left[ d(\mathbf{j}, \mathbf{j}') \right]^{\frac{\log t}{\log 2}}.$$

Donc  $q$  est Hölder continue.

$q$  est à fibres de cardinal uniformément borné :

Tout d'abord remarquons le fait suivant : Pour chaque  $j \in \{1, \dots, t\}$ , soit  $N_j = \inf\{|g|, g \in V_j\}$  et soit  $N = \max_j N_j$ . Alors clairement, toute suite finie  $(j_k)_{k=0}^n$  vérifiant  $A_{j_k j_{k+1}} = 1$ , se prolonge en une suite  $\mathbf{i}$  de  $\Sigma$ , telle que :

$$(7) \quad \begin{aligned} \forall k \in \{0, \dots, n\}; i_k &= j_k \\ \forall k \geq n + N; i_k &= 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\mathbf{j}^1, \dots, \mathbf{j}^m$ ,  $m$  éléments de  $\Sigma_B^+$ , deux à deux distincts, vérifiant :

$$q(\mathbf{j}^1) = \dots = q(\mathbf{j}^m).$$

Montrons que  $m$  est borné : Les rayons géodésiques associés aux suites  $\mathbf{j}^\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , ont mêmes extrémités. Donc ils sont à distance uniforme inférieure à  $K$  les uns des autres,  $K$  ne dépendant que de  $(\Gamma, S)$ . D'autre part, puisque les  $\mathbf{j}^\ell$  sont deux à deux distinctes, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que les suites finies  $(j_k^\ell)_{k=0}^n$ ,  $\ell = 1, \dots, m$  soient deux à deux distinctes. Complétons-les en des suites  $\mathbf{i}^\ell$  de  $\Sigma$ , comme en (7). Les suites  $\mathbf{i}^\ell$  sont bien sûr deux à deux distinctes. L'application  $p$  du b) étant injective, les éléments  $p(\mathbf{i}^\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , de  $\Gamma$ , sont deux à deux distincts. Or ils appartiennent tous à une boule de rayon  $K + N$ . D'où :

$$m \leq \#B(e, K + N). \square$$

Nous terminons ce paragraphe par une remarque concernant la série de Poincaré de  $(\Gamma, S)$  :

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \#\{g \in \Gamma \mid |g|_S = n\} z^n$$

et le taux de croissance de  $(\Gamma, S)$  :

$$\tau_S = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma \mid |g|_S = n\}.$$

**3.1.10. Corollaire.** Supposons que  $(\Gamma, S)$  admette une application de Markov  $f$ . Soit  $A$  la matrice associée à  $f$ . Alors :

$$a) \quad \mathcal{S}(z) = (1 - z)(10 \dots 0)(I - zA)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)  $\tau_S$  est égal au logarithme de la plus grande valeur propre de  $A$ .

**3.1.11. PREUVE :** En utilisant 3.1.3 a) et b), on montre facilement l'égalité :

$$(1) \quad \#\{g \in \Gamma \mid |g|_S \leq n\} = (10 \dots 0)A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, un calcul élémentaire donne l'expression cherchée de  $S$ .

$\tau_S$  est égal à l'entropie topologique du shift sur  $\Sigma_A^+$ . Donc, d'après un phénomène bien connu,  $\tau_S$  est égal au logarithme de la plus grande valeur propre de  $A$ .  $\square$

### 3.2. Existence d'applications de Markov

Rappelons le théorème suivant, dont on trouvera une preuve détaillée dans [G-H] chapitre 9, et dans [C-D-P] chapitre "groupes automatiques".

**Théorème (J.W. Cannon).** *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique, et  $S$  un système symétrique de générateurs. Les ensembles  $C(g)$ ,  $g \in \Gamma$ , sont en nombre fini.*

Comme corollaire nous obtenons :

**3.2.1. Théorème.** *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique,  $S$  un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ . Alors  $(\Gamma, S)$  admet une application de Markov.*

**3.2.2. PREUVE DE 3.2.1 :** Elle se fera en plusieurs étapes. Tout d'abord définissons une application  $f$  de  $\Gamma$  dans lui-même. Pour  $i \in \{0, \dots, s\}$ , soit  $W_i$  les sous-ensembles de  $\Gamma$  :

$$W_0 = U_0$$

et pour  $i \in \{1, \dots, s\}$  :

$$W_i = U_i - \bigcup_{k=0}^{i-1} W_k.$$

Ils forment une partition de  $\Gamma$ . Soit  $f$  l'application de  $\Gamma$  dans lui-même, définie par :

$$f(e) = e$$

et pour  $i \geq 1$  :

$$f|_{W_i}(g) = a_i^{-1}g.$$

Construisons une partition de Markov  $\mathcal{P}$  de  $f$ . Pour ce faire supposons :

$$(1) \quad i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$$

et introduisons l'ordre suivant sur  $S$  :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_s.$$

On obtient ainsi un ordre lexicographique sur les écritures minimales de  $(\Gamma, S)$ . On appellera écriture réduite d'un élément  $g$  de  $\Gamma - \{e\}$ , sa plus petite écriture minimale pour l'ordre lexicographique. Pour  $g \in \Gamma - \{e\}$ , définissons :

$$\mathcal{D}(g) = \{h \in \Gamma, \text{ tels que l'écriture réduite de } gh \text{ commence par } g\}.$$

Remarquons que :

$$g\mathcal{D}(g) = \{m \in \Gamma, \text{ dont l'écriture réduite commence par } g\}.$$

Remarquons également que pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ , on a d'après (1) :

$$(2) \quad W_i = a_i\mathcal{D}(a_i).$$

Le lemme suivant, qui sera montré un peu plus tard, est un corollaire du théorème de J.W. Cannon :

**3.2.3. Lemme.** *Les ensembles  $\mathcal{D}(g), g \in \Gamma$ , sont en nombre fini.*

Soit maintenant  $\mathcal{P}_0$  l'ensemble constitué de  $\{e\}$  et des sous-ensembles  $a_i\mathcal{D}(g)$ , où  $a_i$  appartient à  $S$ , et où  $g$  est un élément de  $\Gamma - \{e\}$  dont l'écriture réduite finit par  $a_i$ . C'est un recouvrement de  $\Gamma$  car d'après (2) :

$$\{W_i, i = 0, \dots, s\} \subset \mathcal{P}_0.$$

De plus, d'après le lemme 3.2.3, c'est un recouvrement fini.

**3.2.4. Lemme.** *L'image par  $f$  d'un élément de  $\mathcal{P}_0$  est une réunion d'éléments de  $\mathcal{P}_0$ .*

Nous montrerons ce lemme ultérieurement. Achéons la construction de  $\mathcal{P}$ . Pour  $g \in \Gamma$ , soit :

$$V(g) = \bigcap_{\substack{E_i \in \mathcal{P}_0 \\ g \in E_i}} E_i \cap \bigcap_{\substack{E_j \in \mathcal{P}_0 \\ g \notin E_j}} \complement E_j,$$

et soit

$$\mathcal{P} = \{V(g), g \in \Gamma\}.$$

Puisque  $\mathcal{P}_0$  est un recouvrement fini de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{P}$  est une partition finie de  $\Gamma$ . L'application  $f$  restreinte à chacun des  $W_i$ , est une bijection sur son image. De plus, chaque élément de  $\mathcal{P}_0$  est inclus dans un unique  $W_i$ . Alors le lemme 3.2.4 montre que  $(f, \mathcal{P})$  est une application de Markov de  $(\Gamma, S)$ .  $\square$

**3.2.5. PREUVE DU LEMME 3.2.3 :** Les ensembles  $\mathcal{C}(g)$  et  $\mathcal{D}(g)$  vérifient :

$$(3) \quad g\mathcal{D}(g) = g\mathcal{C}(g) - \bigcup_{\substack{|g'|=|g| \\ g' < g}} g'\mathcal{C}(g').$$

La relation  $g\mathcal{C}(g) \cap g'\mathcal{C}(g') \neq \emptyset$ , entraîne que  $g$  et  $g'$  appartiennent à deux segments géodésiques de mêmes extrémités.

Puisque  $\Gamma$  est hyperbolique, deux tels segments sont à distance uniforme majorée par une constante  $K$ , qui ne dépend que de  $(\Gamma, S)$ .

Aussi, pour que :

$$g\mathcal{C}(g) \cap g'\mathcal{C}(g') \neq \emptyset$$

et

$$|g| = |g'|$$

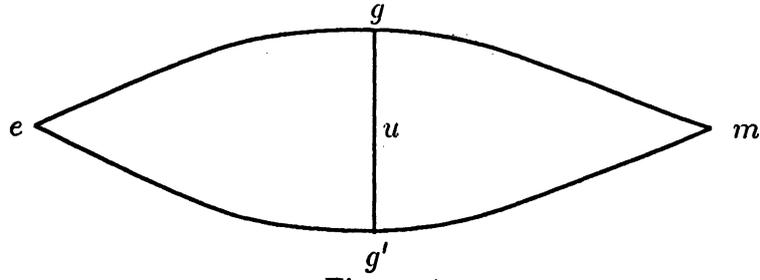


Figure 4

il faut qu'il existe  $u \in B(e, K)$  tel que (voir figure 4) :

$$g' = gu.$$

Donc en notant :

$$B(g) = \{u \in B(e, K) \mid |gu| = |g| \text{ et } gu < g\},$$

l'égalité (3) s'écrit :

$$g\mathcal{D}(g) = g\mathcal{C}(g) - \bigcup_{u \in B(g)} gu\mathcal{C}(gu).$$

Alors, en multipliant par  $g^{-1}$  à gauche :

$$(4) \quad \mathcal{D}(g) = \mathcal{C}(g) - \bigcup_{u \in B(g)} u\mathcal{C}(gu).$$

D'après le théorème de J.W. Cannon, les ensembles  $\mathcal{C}(g)$ ,  $g \in \Gamma$ , sont en nombre fini. Les ensembles  $B(g)$  sont bien sûr en nombre fini. Donc (4) montre que les  $\mathcal{D}(g)$  sont en nombre fini.  $\square$

**3.2.6. PREUVE DU LEMME 3.2.4 :** Soit  $a_i\mathcal{D}(g) \in \mathcal{P}_0$ . Puisque l'écriture réduite de  $g$  finit par  $a_i$ , on a :

$$a_i\mathcal{D}(g) \subset a_i\mathcal{D}(a_i) = W_i$$

donc d'après la définition de  $f$  :

$$f(a_i\mathcal{D}(g)) = \mathcal{D}(g).$$

Or clairement :

$$\mathcal{D}(g) = \bigcup_{a_j \in S \cap \mathcal{D}(g)} a_j\mathcal{D}(ga_j) \cup \{e\}$$

avec  $a_j\mathcal{D}(ga_j) \in \mathcal{P}_0$ , car  $a_j \in S \cap \mathcal{D}(g)$ .

D'où le lemme.  $\square$

**3.2.7. REMARQUE.** Le théorème 3.2.1 reste sans doute vrai dans le cadre plus général des groupes automatiques (voir [C-D-P] [C-E-H-P-T]).

### 3.3. Problème du prolongement au bord d'une application de Markov. Exemples de construction d'applications de Markov

Dans ce paragraphe nous considérons des groupes admettant une réalisation géométrique très simple (définition 3.3.1). Celle-ci nous permettra de caractériser géométriquement les écritures minimales (proposition 3.3.3), de prolonger des applications de Markov au bord (corollaire 3.3.7), et en construire sur quelques exemples. Dans le cas des groupes fuchsien de type fini sans parabolique, nous retrouverons l'application de Bowen-Series.

Les idées que nous développons ici, sont essentiellement celles de S. Birman et C. Series (voir [Bi-S]).

Afin de simplifier notre exposé, nous nous limitons à des sous-groupes d'isométries de l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^N$ . La définition 3.3.1, la proposition 3.3.3, et le corollaire 3.3.5, s'appliquent cependant à d'autres groupes notamment aux groupes euclidiens.

**3.3.1. DÉFINITION.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^N$ . Nous dirons que  $\Gamma$  a la propriété (\*), s'il admet un domaine fondamental  $R$  avec la propriété suivante :

(i)  $R$  est un polyèdre, (de volume fini ou non), ayant un nombre fini de faces.

(ii) L'ensemble  $\Gamma\partial R = \bigcup_{g \in \Gamma} g\partial R$  est une réunion d'hyperplans.

#### 3.3.2. EXEMPLES.

a) Le groupe fuchsien isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre  $g \geq 2$ , dont un domaine fondamental est le  $4g$ -gone régulier d'angle  $\frac{\pi}{2g}$ , a la propriété (\*).

b) C. Series a montré que tout groupe fuchsien de type fini sans parabolique, est isomorphe à un groupe fuchsien ayant la propriété (\*) (voir [B-S]).

c) Soit  $R$  un polyèdre de  $\mathbb{H}^N$  ayant un nombre fini de faces et des angles diédraux intérieurs de la forme  $\frac{\pi}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Le groupe engendré par inversions par rapport aux faces de  $R$  a la propriété (\*).

Soit  $\Gamma$  et  $R$  comme dans la définition 3.3.1. Soit  $S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  le système symétrique de générateurs, défini de la manière suivante : Notons  $1, \dots, s$ , les faces de  $R$ . Pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $a_i$  est l'unique élément de  $\Gamma$ , vérifiant :

$$a_i R \cap R \text{ est la face } i.$$

A une écriture quelconque  $a_{i_0} \dots a_{i_n}$  dans  $(\Gamma, S)$ , associons la famille d'hyperplans  $\{P_k, k = 0, \dots, n\}$  suivante :

$$P_0 \text{ contient } R \cap a_{i_0} R$$

et pour  $k = 1, \dots, n$  :

$$P_k \text{ contient } a_{i_0} \dots a_{i_{k-1}} R \cap a_{i_0} \dots a_{i_k} R.$$

Notons que, puisque  $(\Gamma, R)$  a la propriété (\*):

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}; P_k \subset \Gamma \partial R.$$

**3.3.3. Proposition.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) *L'écriture  $a_{i_0} \dots a_{i_n}$  est de longueur minimale dans  $(\Gamma, S)$ .*
- b) *Les hyperplans  $P_k$  sont deux à deux distincts, c'est-à-dire :*

$$k \neq k' \Rightarrow P_k \neq P_{k'}.$$

c) *Quel que soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ , et quel que soit  $\ell$  vérifiant  $k \leq \ell \leq n$ , l'hyperplan  $P_k$  sépare  $R$  de  $a_{i_0} \dots a_{i_\ell} R$ .*

**3.3.4. PREUVE :**

b)  $\Leftrightarrow$  c) est facile et laissée au lecteur.

c)  $\Rightarrow$  a): Soit  $g = a_{i_0} \dots a_{i_n}$ , et soit  $a_{j_0} \dots a_{j_m}$  une autre écriture de  $g$ . Montrons que  $m \geq n$ : Soit  $\{P'_k, k = 0, \dots, m\}$  la famille d'hyperplans associée à l'écriture  $a_{j_0} \dots a_{j_m}$ . D'après l'hypothèse c) appliquée à  $\ell = n$ , on a:

$$(1) \quad \{P_k, k = 0, \dots, n\} \subset \{P'_k, k = 0, \dots, m\}.$$

D'autre part, puisque c) implique b), les hyperplans  $P_k$  sont deux à deux distincts d'où:

$$(2) \quad \#\{P_k, k = 0, \dots, n\} = n + 1.$$

Alors (1) et (2) montrent que:

$$m \geq n.$$

a)  $\Rightarrow$  b): Tout d'abord construisons une écriture  $a_{j_0} \dots a_{j_m}$  de  $g$ , telle que les hyperplans associés à cette écriture, soient deux à deux distincts. Pour ce faire, soit  $c$  un segment géodésique de  $\mathbb{H}^N$ , reliant  $R$  à  $gR$ , transverse aux  $(N - 1)$ -faces de  $\Gamma \partial R$ , et ne passant par les  $(N - 2)$ -faces de  $\Gamma \partial R$ . Notons  $a_{j_0}, \dots, a_{j_m}$  les éléments de  $S$ , tels que  $c$  passe successivement par les domaines:

$$R, a_{j_0} R, a_{j_0} a_{j_1} R, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_m} R = gR.$$

Le segment  $c$  rencontre successivement et transversalement les hyperplans  $P'_k$  associés à l'écriture  $a_{j_0} \dots a_{j_m}$ . Ils sont donc deux à deux distincts.

Les  $P'_k$  satisfont l'hypothèse b), donc l'hypothèse c). Alors, d'après la démonstration de c)  $\Rightarrow$  a):

$$\{P'_k, k = 0, \dots, m\} \subset \{P_k, k = 0, \dots, n\}.$$

Puisque les  $P'_k$  sont deux à deux distincts, on obtient:

$$\#\{P_k, k = 0, \dots, n\} \geq m + 1.$$

Or  $m \geq n$ , donc :

$$\#\{P_k, k = 0, \dots, n\} \geq n + 1$$

et donc les  $P_k$  sont deux à deux distincts.  $\square$

Nous donnons deux corollaires à cette proposition. Le premier décrit géométriquement les ensembles  $U_i = a_i\mathcal{C}(a_i)$  associés au système de générateurs  $S$ . Le second concerne le problème du prolongement au bord d'une application de Markov de  $(\Gamma, S)$ .

**3.3.5. Corollaire.** Notons  $H_i, i \in \{1, \dots, s\}$ , l'hyperplan contenant la face  $i$  de  $R$ . Alors l'ensemble

$$U_i R = \bigcup_{g \in U_i} gR$$

est le demi-espace de frontière  $H_i$ , ne contenant pas  $R$ .

**3.3.6. PREUVE :** Soit  $E_i$  le demi-espace de frontière  $H_i$ , ne contenant pas  $R$ .

$E_i \supset U_i R$  : Soit  $g \in U_i$ , il admet une écriture minimale commençant par  $a_i$ . L'hyperplan  $P_0$  associé à cette écriture est  $H_i$ . D'après la proposition 3.3.3. c),  $H_i$  sépare  $R$  et  $gR$  donc  $gR \subset E_i$ .

$E_i \subset U_i R$  : Soit  $gR \subset E_i$  et  $c$  un segment géodésique reliant  $R$  à  $gR$ , transverse au  $(N-1)$ -faces de  $\Gamma\partial R$ , ne passant pas par les  $(N-2)$ -faces de  $\Gamma\partial R$  et tel que le deuxième domaine que  $c$  rencontre soit  $a_i R$ . Comme dans la preuve de 3.3.3, on associe à  $c$  une écriture minimale de  $g$ . Celle-ci commence par  $a_i$ , donc  $g \in U_i$ , et  $gR \subset U_i R$ .  $\square$

Supposons en plus des hypothèses précédentes, que  $\Gamma$  soit convexe compact. Alors  $\Gamma$  est hyperbolique (voir 1.8.3 et 1.8.7), et on a :

**3.3.7. Corollaire.**  $(\Gamma, S)$  admet une application de Markov qui se prolonge à  $\partial\Gamma$ . En particulier l'application  $q$  du théorème 3.1.3.c) est bijective au-dessus d'un  $G_\delta$ -dense de  $\partial\Gamma$ .

**3.3.8. PREUVE :** Puisque  $\Gamma$  est convexe cocompact, son bord est homéomorphe à  $\Lambda$ , l'ensemble limite de  $\Gamma$ . D'après le théorème 3.2.1,  $(\Gamma, S)$  admet une application de Markov. Considérons l'application  $f$  construite dans la preuve du théorème 3.2.1 et montrons qu'elle convient.

Il suffit de voir que les  $\bar{V}_j$  traces des  $V_j$  sur  $\partial\Gamma$  sont d'intérieur deux à deux disjoints, ou encore puisque  $\partial\Gamma \simeq \Lambda$  que les  $\bar{V}_j R$ , traces des  $V_j R$  sur  $\Lambda$ , sont d'intérieur deux à deux disjoints.

D'après le corollaire 3.3.5, le lemme 3.1.7 et la preuve du lemme 3.2.3, les  $V_j R$  s'obtiennent par réunions et intersections finies de demi-espaces. Donc pour  $i \neq j$ ,  $\bar{V}_j R \cap \bar{V}_i R$  est inclus dans une réunion finie de  $(N-2)$ -sphères de  $S^{N-1} = \partial\mathbb{H}^N$ .

a) Supposons que  $\Lambda$  ne soit contenu dans aucune  $k$ -sphère de  $S^{N-1}$ ,  $0 \leq k \leq N-2$ , et raisonnons par l'absurde :

Soit  $i$  et  $j$ ,  $i \neq j$ , tels que  $\overset{\circ}{V}_j R \cap \overset{\circ}{V}_i R \neq \emptyset$ . Puisque

$$\overset{\circ}{V}_j R \cap \overset{\circ}{V}_i R = \overbrace{\overset{\circ}{V}_j R \cap \overset{\circ}{V}_i R}^{\circ},$$

il existe un ouvert  $U$  de  $\Lambda$  inclus dans une  $(N-2)$ -sphère de  $S^{N-1}$ . Alors  $\Lambda$  étant auto-similaire, un argument simple montre que  $\Lambda$  est inclus dans une  $(N-2)$ -sphère de  $S^{N-1}$ , ce qui contredit l'hypothèse.

b) Supposons que  $\Lambda$  soit contenu dans une  $k$ -sphère  $S^k$  de  $S^{N-1}$  (avec  $k \in \{0, \dots, N-2\}$ ) mais dans aucune  $(k-1)$ -sphère :

Alors  $\Gamma$  fixe le  $(k+1)$ -plan  $P$  de  $\mathbb{H}^N$  de bord  $S^k$ . Quitte à réindexer les faces de  $R$ , on peut supposer que pour  $i = 1, \dots, p$ , les hyperplans  $H_i$  soient transverses à  $P$  et que pour  $i = p+1, \dots, s$ ,  $H_i$  contienne  $P$ . Pour cette indexation des faces de  $R$ , c'est un exercice de voir que l'application  $f$  construite dans la preuve du théorème 2.1 convient.  $\square$

**3.3.9. EXEMPLE.** Soit  $\Gamma$  le groupe fuchsien isomorphe au  $\pi_1$  d'une surface fermée de genre 2, dont un domaine fondamental  $R$  est l'octogone régulier d'angle  $\frac{\pi}{4}$  (figure 5).  $(\Gamma, R)$  a la propriété (\*). Soit  $S$  le système symétrique de générateurs indiqué sur la figure 5. Construisons une application de Markov de  $(\Gamma, S)$  :

Pour  $i = 1, \dots, 8$ , soit  $T_i$  le domaine s'appuyant sur la face  $i$  de  $R$  comme sur la figure 5. D'après le corollaire 3.3.5,  $T_i \subset U_i R$ . Posons

$$f|_{T_i}(x) = a_i^{-1} x$$

et

$$f|_R = \text{id}.$$

Considérons les géodésiques contenues dans  $\Gamma \partial R$  qui rencontrent  $R$  (figure 6). Il est facile de voir que les composantes connexes de  $\mathbb{H}^2$  privé de ces géodésiques forment une partition de Markov de  $f$ .

$f$  ou plutôt son extension au bord, n'est autre que l'application de Bowen-Series. Et ce procédé de construction est général pour les groupes fuchsien (voir [B-S, Lemme 2.2], [S-2]).

**3.3.10. EXEMPLE.** Cet exemple est dû à M. Gromov (voir aussi [Be]). Soit  $R$  le tétraèdre régulier de  $\mathbb{H}^3$ , de volume infini et d'angles diédraux  $\frac{\pi}{4}$ . Soit  $\Gamma$  le groupe engendré par les inversions par rapport aux faces de  $R$ . Le couple  $(\Gamma, R)$  a la propriété (\*). Soit  $S$  le système symétrique de générateurs dont les éléments sont les inversions par rapport aux faces de  $R$ .

Les faces de  $R$  rencontrent  $S^2$  en 4 triangles. En tronquant les faces issues d'un même triangle, on obtient un tétraèdre tronqué  $R'$ , compact, et d'angles diédraux  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

L'ensemble  $\Gamma R'$  est une sous-variété à bord de  $\mathbb{H}^3$ , totalement géodésique. C'est l'enveloppe convexe de l'ensemble limite  $\Lambda$  de  $\Gamma$ . Puisque  $R'$  est compact,  $\Gamma$  est convexe cocompact. Notons que N. Benakli [Be] a montré que  $\Lambda$  est une courbe de Sierpinski.

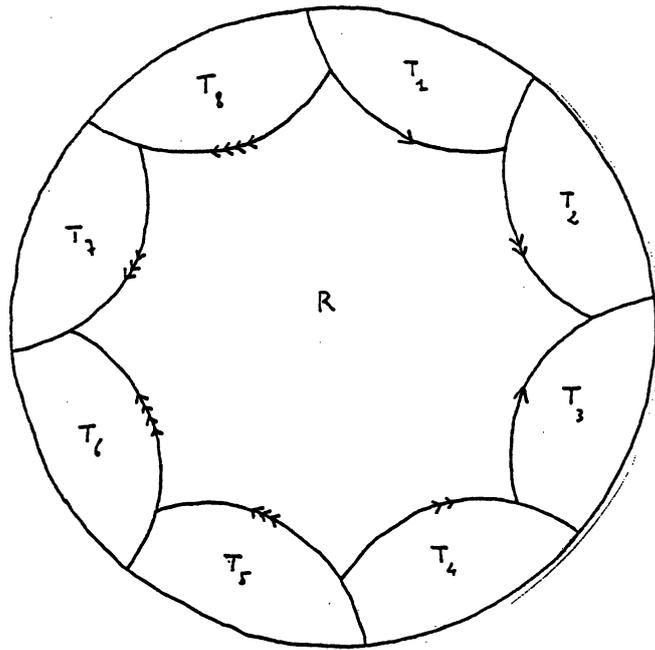


Figure 5

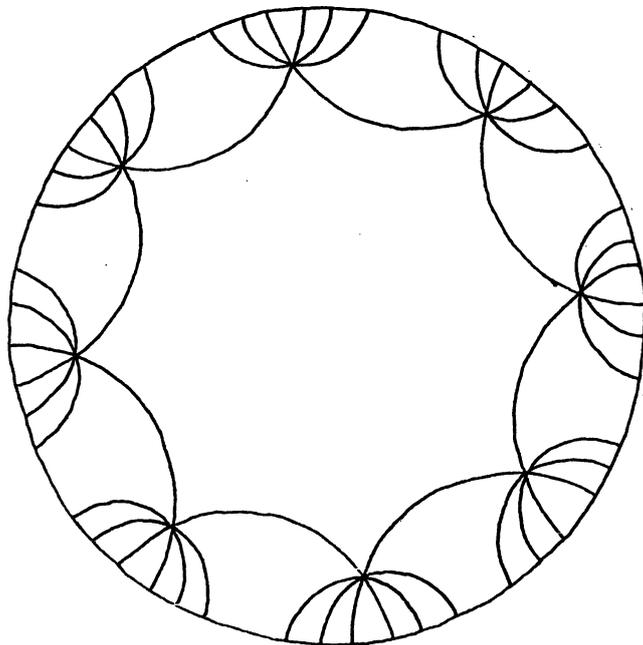


Figure 6

Plutôt que de construire une application de Markov de  $(\Gamma, S)$ , construisons son extension à  $\Lambda$ . Observons que  $\Lambda$  est inclus dans le do-

maine  $D$  de  $S^2$  obtenu en privant  $S^2$  des traces des 4 demi-espaces qui s'appuient sur les faces extérieures tronquées de  $R'$ . La figure 7 représente  $S^2$  privée de ces 4 disques (qui est comme un disque à 3 trous, les trous sont en foncé). Elle représente également les axes d'inversion des éléments de  $S$ , qui sont aussi les frontières des  $\overline{U_i R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , d'après le corollaire 3.3.5.

La figure 8 représente une partition de  $D$  à partir des  $\overline{U_i R}$ . Pour  $i = 1, \dots, 4$ ,  $T_i$  est inclus dans  $\overline{U_i R}$  et on pose :

$$f|_{T_i}(\xi) = a_i^{-1}\xi.$$

On considère alors la trace sur  $S^2$  des plans contenus dans  $\Gamma\partial R$ , qui rencontrent  $R$  (figure 9). On vérifie que les composantes connexes du disque à 7 trous privé de ces arcs de cercle, forment une partition de Markov de  $f$ . Ainsi, l'application  $f$  restreinte à  $\Lambda$ , est une application de Markov.

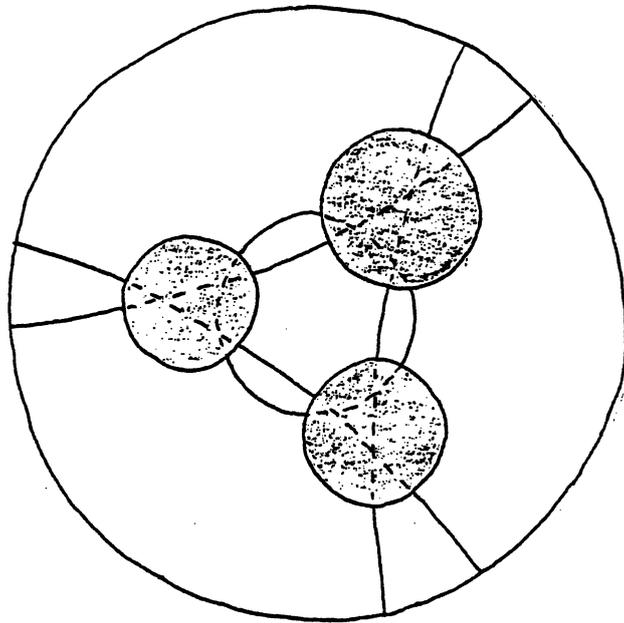


Figure 7

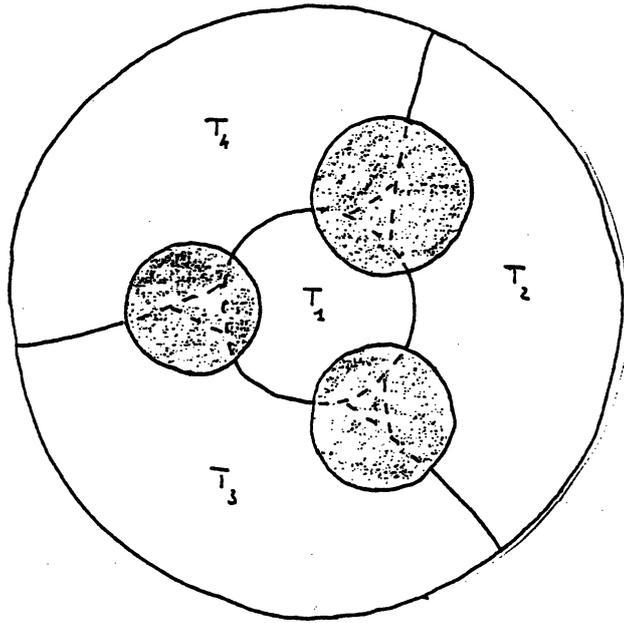


Figure 8

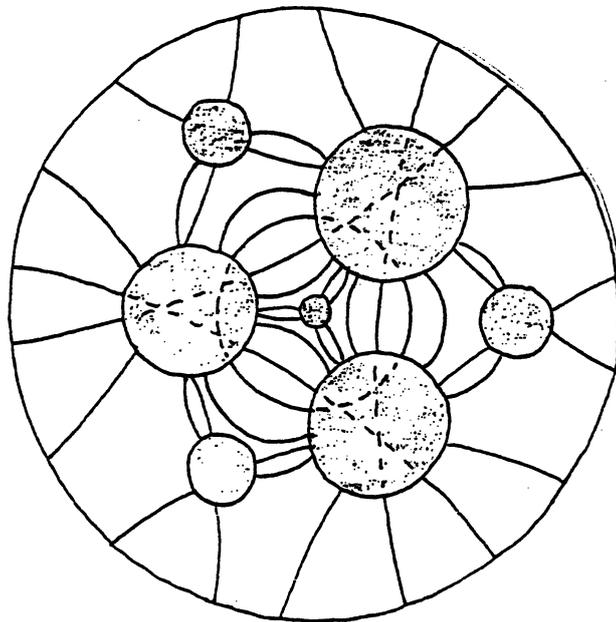


Figure 9

## 4. Flots géodésiques et flots spéciaux

### 4.0. Introduction

Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique agissant sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$ , par isométries, de manière quasi-convexe. Soit  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ , le flot géodésique associé. Nous expliquons dans ce chapitre une construction très simple, qui permet à partir d'un codage de  $\partial\Gamma$ , de conjuguer  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  par un flot spécial.

L'existence de telles conjugaisons est déjà connue, (au moins lorsque  $X$  est une variété et  $\Gamma$  est cocompact. Elle résulte alors du caractère Anosov du flot géodésique, voir [B-3]). La méthode par contre, semble nouvelle.

Les flots spéciaux que nous considérons sont définis par suspension d'une fonction höldérienne sur un sous-shift de type fini bilatéral. Rappelons leur construction :

Soit  $B = (B_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, t\}$ , une matrice composée de 0 et de 1, et  $\Sigma_B$  le sous-shift bilatéral :

$$\Sigma_B = \{ \mathbf{j} = (j_k)_{k=-\infty}^{+\infty} \mid j_k \in \{1, \dots, t\}, B_{j_k j_{k+1}} = 1 \}.$$

Notons  $\sigma$  le shift sur  $\Sigma_B$ , c'est-à-dire l'homéomorphisme de  $\Sigma_B$  dans lui-même, défini par :

$$\sigma(\mathbf{j}) = \mathbf{j}' \text{ avec } j'_k = j_{k+1}.$$

Soit  $\varphi : \Sigma_B \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne vérifiant la propriété suivante : il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ , tel que la fonction :

$$S_n \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \sigma^k$$

soit strictement positive. Le flot spécial associé à la paire  $(\Sigma_B, \varphi)$  est défini de la manière suivante : Considérons l'homéomorphisme de  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$  :

$$F(\mathbf{j}, t) = (\sigma(\mathbf{j}), t - \varphi(\mathbf{j})).$$

Puisque  $S_n \varphi > 0$ , le groupe  $\{F^n, n \in \mathbb{Z}\}$  agit de manière proprement discontinu et cocompacte sur  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$ . L'espace du flot est le quotient de  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$  par cette action. On le notera  $\mathcal{F}_\varphi$ .

Le flot est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes de  $\mathcal{F}_\varphi$ , défini par :

$$\Phi_T \overline{(\mathbf{j}, t)} = \overline{(\mathbf{j}, t + T)}.$$

Notons que lorsque  $\varphi$  est strictement positive,  $\mathcal{F}_\varphi$  s'écrit :

$$\mathcal{F}_\varphi = \{ (\mathbf{j}, t), \mathbf{j} \in \Sigma_B, 0 \leq t \leq \varphi(\mathbf{j}) \} / (\mathbf{j}, \varphi(\mathbf{j})) \sim (\sigma(\mathbf{j}), 0).$$

Et on représente alors  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  comme sur la figure 1.

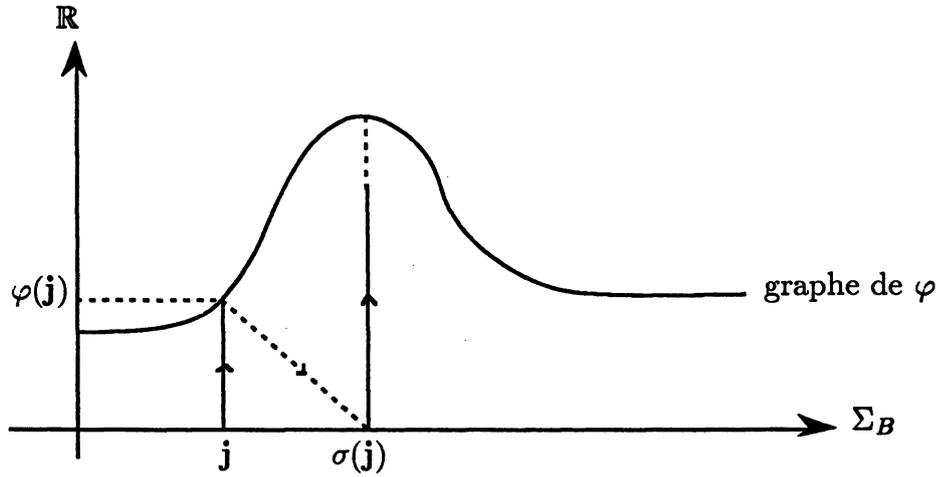


Figure 1

Le paragraphe 4.1 est consacré à la construction de notre conjugaison.

Au paragraphe 4.2, nous montrons que lorsque  $\Gamma$  est isomorphe à un groupe de surface de genre supérieur ou égal à deux, la conjugaison est bijective sauf au-dessus d'un ensemble de très petite taille.

#### 4.1. Construction d'une conjugaison du flot géodésique par un flot spécial

Soit  $S$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . On se propose de construire, à partir d'une application de Markov  $f$  de  $(\Gamma, S)$ , une conjugaison de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  par un flot spécial.

Rappelons que nous avons associé à  $f$  une matrice  $B = (B_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, t\}$ , telle que le sous-shift unilatéral  $\Sigma_B^+$  code  $\partial\Gamma$  (voir théorème 3.1.3.c)). Considérons maintenant le sous-shift bilatéral :

$$\Sigma_B = \{ \mathbf{j} = (j_k)_{k=-\infty}^{+\infty} \mid j_k \in \{1, \dots, t\}, B_{j_k j_{k+1}} = 1 \} .$$

D'après le théorème 3.1.3.a), quel que soit  $j \in \Sigma_B$ , l'ensemble

$$\{ \dots, a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_{-n}}^{-1}, \dots, a_{j_{-1}}^{-1}, e, a_{j_0}, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_n}, \dots \}$$

est une géodésique de  $(\Gamma, S)$ . Choisissons une origine  $x$  dans  $X$ . L'ensemble

$$\{ \dots, a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_{-n}}^{-1} x, \dots, a_{j_{-1}}^{-1} x, x, a_{j_0} x, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_n} x, \dots \}$$

est alors une quasi-géodésique de  $X$ . Ses extrémités

$$q_-(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_{-n}}^{-1} x$$

et

$$q_+(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_n} x$$

appartiennent à  $\Lambda$ , et sont indépendantes de l'origine  $x$  choisie. Notons que :

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} q_-(\sigma(\mathbf{j})) &= a_{j_0}^{-1} q_-(\mathbf{j}) \\ \text{et} \\ q_+(\sigma(\mathbf{j})) &= a_{j_0}^{-1} q_+(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Définissons une application  $\tilde{Q}$  de  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$  dans  $G\Lambda$ , de la manière suivante : paramétrons  $G\Lambda$  comme au paragraphe 2.9, en prenant pour origine le point  $x$  ; et posons :

$$\tilde{Q}(\mathbf{j}, t) = (q_-(\mathbf{j}), q_+(\mathbf{j}), t).$$

Remarquons que, d'après 2.9.2 :

$$(4.1.2) \quad \tilde{Q} \circ \Phi_T = \Phi_T \circ \tilde{Q}.$$

Soit maintenant  $\varphi$  la fonction sur  $\Sigma_B$  définie par :

$$\varphi(\mathbf{j}) = B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_{j_0} x).$$

Alors  $\tilde{Q}$  induit une application  $Q$  de  $\mathcal{F}_\varphi$  dans  $\mathcal{E}$ . En effet, d'après 4.1.1 et 2.9.4, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\sigma(\mathbf{j}), t - \varphi(\mathbf{j})) &= (q_-(\sigma(\mathbf{j})), q_+(\sigma(\mathbf{j})), t - \varphi(\mathbf{j})) \\ &= (a_{j_0}^{-1} q_-(\mathbf{j}), a_{j_0}^{-1} q_+(\mathbf{j}), t - B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_{j_0} x)) \\ &= a_{j_0}^{-1} \tilde{Q}(\mathbf{j}, t). \end{aligned}$$

De plus, l'égalité 4.1.2 montre que  $Q$  conjugue les flots de  $\mathcal{F}_\varphi$  et de  $\mathcal{E}$ .

#### 4.1.3. Théorème.

a) *La fonction :*

$$\varphi : \Sigma_B \rightarrow \mathbb{R}$$

*est Hölder continue, et il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n \varphi$  soit strictement positive.*

b) *La conjugaison*

$$Q : \mathcal{F}_\varphi \rightarrow \mathcal{E}$$

*est surjective, continue, à fibres finies de cardinal uniformément borné.*

#### 4.1.4. REMARQUES.

a) L'Hölder continuité de  $\varphi$ , plutôt que sa simple continuité, peut sembler de peu d'intérêt. Il n'en est rien, car contrairement aux flots spéciaux définis par une fonction höldérienne, on ignore presque tout des autres.

b) Observons que le cardinal d'une fibre de  $Q$  est une fonction  $\Phi_T$ -invariante de  $\mathcal{E}$ . Puisque la mesure d'entropie maximale  $m$  de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  est ergodique (théorème 2.10.2), le cardinal des fibres de  $Q$  est  $m$ -presque sûrement constant.

c) Il n'est pas étonnant que la fonction  $\varphi$  permette de conjuguer les flots. En effet, d'après le corollaire 2.6.3,  $\exp \varphi(\mathbf{j})$  est le facteur conforme

en  $q_+(\mathbf{j})$  de  $a_{j_0}^{-1}$  pour la métrique  $d_x$  sur  $\Lambda$ . En d'autres termes  $\exp \varphi$  est le facteur conforme de l'application de Markov  $f$  "étendue" à  $\Lambda$ . Or, on a vu au chapitre 2, que la structure conforme de  $\Lambda$  détermine le flot à conjugaison près.

Signalons à ce propos, que la même fonction  $\varphi$  permet d'exprimer la mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$  comme une mesure de Gibbs sur  $\Sigma_B^+$ . (Voir [Bo] et la remarque 5.2.2 pour plus de détails à ce sujet).

#### 4.1.5. PREUVE DE 4.1.3 :

a)  $\varphi$  est Hölder continue : Il suffit de le montrer sur chacun des ensembles :

$$C(k) = \{\mathbf{j} \in \Sigma_B \mid j_0 = k\}$$

où  $k$  appartient à  $\{1, \dots, t\}$ . Sur  $C(k)$ ,  $\varphi$  s'écrit :

$$\varphi(\mathbf{j}) = B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_k x).$$

D'après le théorème 3.1.3. c), l'application  $q$  de  $\Sigma_B$  dans  $\partial\Gamma$ , définie par :

$$q(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_n}$$

est Hölder continue. L'homéomorphisme canonique de  $\partial\Gamma$  sur  $\Lambda$ , est également Hölder continu (voir 1.8.5). D'après la proposition 2.6.1, l'application de  $\Lambda$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\xi \mapsto B_\xi(x, a_k x)$$

est lipschitzienne.

Donc par composition  $\varphi$  est Hölder continue.

Il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n \varphi$  soit strictement positive : Un calcul élémentaire montre que :

$$S_n \varphi(\mathbf{j}) = B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} x).$$

L'ensemble

$$\{x, a_{j_0} x, \dots, a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} x, \dots\}$$

est un quasi-rayon géodésique de  $X$ , d'extrémité  $q_+(\mathbf{j})$ . Donc, il existe une constante  $A \in \mathbb{R}^+$ , ne dépendant que de  $(X, \Gamma, S)$ , telle que :

$$-A \leq S_n \varphi(\mathbf{j}) - |x - a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}} x| \leq A.$$

Donc, pour  $n$  assez grand,  $S_n \varphi$  est strictement positive.

b)  $Q$  est continue : Comme précédemment, les applications  $q_-$  et  $q_+$ , de  $\Sigma_B$  dans  $\Lambda$ , sont continues. Alors  $\tilde{Q}$  est continue, donc  $Q$  aussi.

$Q$  est surjective : L'ensemble des orbites de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  s'identifie à  $\Sigma_B / \{\sigma^n, n \in \mathbb{Z}\}$ . L'ensemble des orbites de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  s'identifie à  $\Lambda \times \Lambda - \Delta / \Gamma$ , ou encore à  $\partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta / \Gamma$ . Puisque  $Q$  conjugue les flots, elle induit une application :

$$H : \Sigma_B / \{\sigma^n, n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta / \Gamma.$$

Clairement la surjectivité de  $Q$  est équivalente à celle de  $H$ .

Soit donc  $(\xi_-, \xi_+) \in \partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta$ . Montrons qu'il existe  $\mathbf{j} \in \Sigma_B$  et  $g \in \Gamma$ , tels que :

$$q_- \times q_+(\mathbf{j}) = (g\xi_-, g\xi_+).$$

Soit  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow (\Gamma, S)$ , une géodésique d'extrémités  $\gamma(-\infty) = \xi_-$  et  $\gamma(+\infty) = \xi_+$ . Pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , soit  $i^\ell \in \Sigma_B^+$ , tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell} \dots a_{i_n^\ell} = \xi_+.$$

L'ensemble

$$\{\gamma(-\ell), \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell}, \dots, \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell} \dots a_{i_n^\ell}, \dots\}$$

est un rayon géodésique de  $(\Gamma, S)$  d'extrémité  $\gamma(-\ell)$  et  $\xi_+$ . Il est donc à distance uniforme bornée, par une constante  $K$  qui ne dépend que de  $(\Gamma, S)$ , du rayon géodésique :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \Gamma \\ n &\mapsto \gamma(n - \ell). \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\left| \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell} \dots a_{i_{\ell-1}^\ell} - \gamma(0) \right| \leq K.$$

Aussi la suite  $\{\gamma(-\ell)a_{i_0^\ell} \dots a_{i_{\ell-1}^\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  est bornée. Quitte à extraire une sous-suite convergente, supposons-la constante, et appelons  $h$  sa valeur. Pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , définissons  $\mathbf{j}^\ell = (j_k^\ell)_{k=-\ell}^{+\infty}$  par :

$$j_k^\ell = i_{k+\ell}^\ell.$$

D'après la définition de  $h$ , l'ensemble :

$$\{ha_{j_{-1}^\ell}^{-1} \dots a_{j_{-\ell}^\ell}^{-1}, \dots, ha_{j_{-1}^\ell}^{-1}, h, ha_{j_0^\ell}, \dots, ha_{j_0^\ell} \dots a_{j_n^\ell}, \dots\}$$

est confondu avec le rayon géodésique :

$$\{\gamma(-\ell), \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell}, \dots, \gamma(-\ell)a_{i_0^\ell} \dots a_{i_n^\ell}, \dots\}.$$

Il appartient donc à un  $K$ -voisinage de la géodésique  $\gamma$ . Extrayons de la suite  $\{\mathbf{j}^\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , une sous-suite convergente et appelons  $\mathbf{j}$  sa limite. Par compacité,  $\mathbf{j}$  appartient à  $\Sigma_B$ . Par construction, la géodésique

$$\{\dots, ha_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_{-n}}^{-1}, \dots, ha_{j_{-1}}^{-1}, h, ha_{j_0}, \dots, ha_{j_0} \dots a_{j_n}, \dots\}$$

est dans un  $K$ -voisinage de  $\gamma$ . Alors, on obtient :

$$q_- \times q_+(\mathbf{j}) = (h^{-1}\xi_-, h^{-1}\xi_+).$$

$Q$  est à fibres finies de cardinal uniformément borné :

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_B \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{Q}} & G\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_\varphi & \xrightarrow{Q} & \mathcal{E} \end{array}$$

Puisque les actions de  $\{F^n, n \in \mathbb{Z}\}$  sur  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$ , et de  $\Gamma$  sur  $G\Lambda$ , sont proprement discontinues et cocompactes, l'application  $Q$  est à fibres finies de cardinal uniformément borné, si et seulement si  $\tilde{Q}$  est à fibres finies de cardinal uniformément borné. Aussi, en identifiant  $G\Lambda$  à  $(\partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta) \times \mathbb{R}$ , nous voyons qu'il suffit de montrer que l'application :

$$q_- \times q_+ : \Sigma_B \rightarrow \partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta$$

est à fibres finies de cardinal uniformément borné.

Pour ce faire, rappelons que l'application

$$q : \Sigma_B^+ \rightarrow \partial\Gamma$$

est à fibres finies de cardinal uniformément borné, (voir théorème 3.1.3. c)). Soit  $M$  un majorant du cardinal de ses fibres. Soit  $(\xi_-, \xi_+) \in \partial\Gamma \times \partial\Gamma - \Delta$ , et soient  $\mathbf{j}^\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , des éléments deux à deux distincts de  $\Sigma_B$ , vérifiant  $q_- \times q_+(\mathbf{j}^\ell) = (\xi_-, \xi_+)$ . Majorons  $m$  :

Choisissons  $N \geq 0$  assez grand, de manière que les suites  $(j_k^\ell)_{k=-N}^{+\infty}$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , soient deux à deux distinctes. Puisque les géodésiques associées aux suites  $\mathbf{j}^\ell$  ont mêmes extrémités, elles sont à distance uniforme inférieure à  $K$  les unes des autres,  $K$  ne dépendant que de  $(\Gamma, S)$ . En particulier les éléments :

$$g_\ell^{-1} = a_{j_{-1}^\ell}^{-1} \dots a_{j_{-N}^\ell}^{-1}$$

appartiennent à une même boule de rayon  $K$ . On a donc :

$$(1) \quad \begin{aligned} q_+(\sigma^{-N}(\mathbf{j}^\ell)) &= g_\ell \xi_+ \\ \text{avec} \\ \#\{g_\ell, \ell = 1, \dots, m\} &\leq \#B(e, K). \end{aligned}$$

D'après la définition de  $N$ , les projections sur  $\Sigma_B^+$  des suites  $\sigma^{-N}(\mathbf{j}^\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , sont deux à deux distinctes. Le cardinal des fibres de  $q$  étant majoré par  $M$ , la relation (1) donne :

$$m \leq \#B(e, K)M.$$

□

## 4.2. Un exemple pour lequel la conjugaison est génériquement bijective

Supposons que  $\Gamma$  soit isomorphe au  $\pi_1$  d'une surface fermée de genre supérieur ou égal à 2. Et prenons comme application de Markov  $f$  de  $\Gamma$ , l'application de Bowen-Series, (voir l'exemple 3.3.8, lorsque  $g = 2$ ). Soit

$(\mathcal{E}, \Phi_T)$  le flot géodésique associé à une action quasi-convexe de  $\Gamma$  sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$ . Soit  $\mathcal{F}_\varphi$  le flot spécial associé, construit à partir de l'application  $f$ . En utilisant la forme très particulière de  $f$ , et les idées de R. Bowen et C. Series, nous montrons :

**4.2.1. Théorème.** *Sauf au-dessus d'un nombre fini d'ensembles faiblement stables et instables de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ , la conjugaison  $Q : \mathcal{F}_\varphi \rightarrow \mathcal{E}$  est un homéomorphisme.*

Nous montrerons ce résultat pour  $g = 2$ . Le lecteur vérifiera sans peine, que la preuve se généralise à  $g \geq 2$ . La démonstration repose sur l'idée de C. Series [S-1], de géodésiques extrêmes à droite ou à gauche dans  $(\Gamma, S)$ . Avant d'en donner la définition, reprenons et complétons les notations de l'exemple 3.3.8 :

Les traces des ensembles  $V_j R$ ,  $j = 1, \dots, 48$  sur  $S^1 \simeq \partial\Gamma$ , (voir figure 6, chap. 3), sont des intervalles fermés, que nous noterons  $I_j$ . Appelons  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, 48$ , leurs extrémités. Remarquons que le sous-ensemble de  $S^1$  :

$$E = \Gamma\{\xi_i, i = 1, \dots, 48\}$$

est l'ensemble des extrémités des géodésiques contenues dans  $\Gamma\partial R$ . Appelons  $F$  son complémentaire dans  $S^1$ . Puisque  $f$  s'étend à  $S^1$ , l'application  $q : \Sigma_B \rightarrow S^1$  s'écrit encore :

$$q(j) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(I_{j_k}).$$

Aussi  $q$  est injective au-dessus de  $F$ , et deux sur un au-dessus de  $E$ .

Soit maintenant  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$ , une géodésique de  $(\Gamma, S)$ . Associons-lui le polygone  $\gamma R$  de  $\mathbb{H}^2$ , défini par :

$$\gamma R = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(n)R.$$

Identifions  $S^1$  et  $\partial\Gamma$ . Nous noterons de la même manière les éléments de  $S^1$  et ceux de  $\partial\Gamma$ . Soit  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  les extrémités de  $\gamma$ .

Le bord de  $\gamma R$  est constitué de deux courbes disjointes, contenues dans  $\Gamma\partial R$ , reliant  $\gamma_-$  à  $\gamma_+$ . Lorsqu'on parcourt  $\gamma R$  de  $\gamma_-$  à  $\gamma_+$ , une de ces courbes se trouve à droite, l'autre à gauche. Notons-les respectivement  $c_d(\gamma)$ ,  $c_g(\gamma)$ .

#### 4.2.2. DÉFINITION.

a) Nous dirons que la géodésique  $\gamma$  de  $(\Gamma, S)$ , est convexe à droite (resp. à gauche), si la courbe  $c_d(\gamma)$  (resp.  $c_g(\gamma)$ ) est convexe. Autrement dit, si les angles d'intérieurs au polygone  $\gamma R$ , le long de  $c_d(\gamma)$  (resp.  $c_g(\gamma)$ ), sont inférieurs ou égaux à  $\pi$ .

b) Nous dirons que la géodésique  $\gamma$  de  $(\Gamma, S)$ , est extrême à droite (resp. à gauche), si la courbe  $c_d(\gamma)$  (resp.  $c_g(\gamma)$ ) est strictement convexe. Autrement dit, si  $c_d(\gamma)$  (resp.  $c_g(\gamma)$ ) est convexe et ne contient aucun rayon géodésique.

Le théorème découlera des deux lemmes suivants :

**4.2.3. Lemme.** Soit  $j \in \Sigma_B$ , et soit  $\gamma$  la géodésique de  $(\Gamma, S)$  associée à  $j$ . Alors :

- a)  $\gamma$  est convexe à droite.
- b) Si ses extrémités appartiennent à  $F$ ,  $\gamma$  est extrême à droite.

**4.2.4. PREUVE :** Le a) résulte de la définition de  $f$ , (voir figure 5, chap. 3). Le b) se déduit du a). En effet,  $F$  est le complémentaire des extrémités des rayons géodésiques contenus dans  $\Gamma\partial R$ .  $\square$

**4.2.5. Lemme.** Soit  $\gamma, \gamma'$  deux géodésiques de  $(\Gamma, S)$ , de mêmes extrémités.

- a) Si  $\gamma$  est extrême à droite, alors le polygone  $\gamma'R$  se trouve à gauche de la courbe  $c_d(\gamma)$ .
- b) Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont extrêmes à droite, alors elles sont confondues.

**4.2.6. PREUVE :** Le b) est une conséquence immédiate du a). Montrons a):

Il suffit de montrer que pour toute géodésique  $D$  contenue dans  $\Gamma\partial R$  et tangente à  $c_d(\gamma)$ , le polygone  $\gamma'R$  est contenu dans le demi-plan  $P$ , délimité par  $D$  et contenant  $\gamma R$  (voir figure 2).

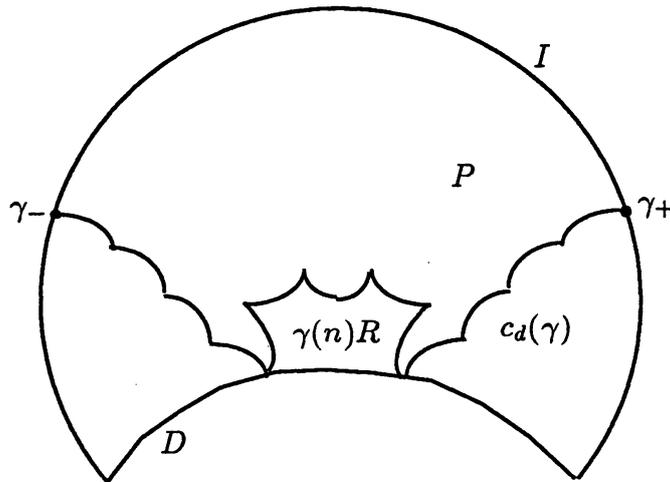


Figure 2

La trace du demi-plan  $P$  sur  $S^1$  est un intervalle fermé  $I$ . Puisque  $\gamma$  est extrême à droite, ses extrémités  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  appartiennent à  $\overset{\circ}{I}$ . Les extrémités de  $\gamma'$  sont également  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$ . Alors, si le polygone  $\gamma'R$  n'était pas contenu dans  $P$ , il traverserait  $D$  à deux reprises. C'est en contradiction avec la minimalité de  $\gamma'$ , d'après la caractérisation des écritures minimales de la proposition 3.2.3.b).  $\square$

**4.2.7. PREUVE DU THÉORÈME 4.2.1 :** Identifions  $\Lambda$  à  $S^1 = \partial\Gamma$ , et  $G\Lambda$  à  $(S^1 \times S^1 - \Delta) \times \mathbb{R}$ . Considérons les sous-ensembles faiblement stables de  $G\Lambda$  :

$$(S^1 - \{\xi_i\}) \times \{\xi_i\} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, 48,$$

et les sous-ensembles faiblement instables de  $G\Lambda$  :

$$\{\xi_i\} \times (S^1 - \{\xi_i\}) \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, 48.$$

Leurs images dans  $\mathcal{E}$  sont des sous-ensembles faiblement stables et instables de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ . Notons  $G$  leur complémentaire, et montrons que  $Q$  est bijective au-dessus de  $G$ . D'après le théorème 4.1.3. b), il suffit de montrer l'injectivité.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_B \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{Q}} & G\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_\varphi & \xrightarrow{Q} & \mathcal{E} \end{array}$$

Le relevé à  $G\Lambda$  du sous-ensemble  $G$  de  $\mathcal{E}$ , s'identifie à  $(F \times F - \Delta) \times \mathbb{R}$ . Aussi, il nous faut montrer que si  $(\mathbf{j}, t), (\mathbf{j}', t') \in \Sigma_B \times \mathbb{R}$ , et  $g \in \Gamma$ , vérifient :

$$(1) \quad q_- \times q_+(\mathbf{j}') = g(q_- \times q_+(\mathbf{j}))$$

$$(2) \quad q_- \times q_+(\mathbf{j}) \in F \times F$$

$$(3) \quad q_- \times q_+(\mathbf{j}') \in F \times F$$

$$(4) \quad t' = t - B_{q_+(\mathbf{j})}(x, g^{-1}x),$$

il existe  $n \in \mathbb{Z}$ , tel que  $(\mathbf{j}', t') = F^n(\mathbf{j}, t)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sigma^n(\mathbf{j}) \\ t' &= t - S_n\varphi(\mathbf{j}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sigma^n(\mathbf{j}) \\ t' &= t, \quad \text{si } n = 0 \\ t' &= t - B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}}x), \quad \text{si } n > 0 \\ t' &= t - B_{q_+(\mathbf{j})}(x, a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_n}^{-1}x), \quad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

Donc d'après (4), il suffit de montrer l'existence d'un entier  $n$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \sigma^n(\mathbf{j}) \\ g^{-1} &= e, \quad \text{si } n = 0 \\ g^{-1} &= a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}}, \quad \text{si } n > 0 \\ g^{-1} &= a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_n}^{-1}, \quad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

Soit  $\gamma$  et  $\gamma'$ , les géodésiques de  $(\Gamma, S)$ , associées à  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{j}'$ . D'après les relations (2) et (3), et le lemme 4.2.3. b), elles sont extrêmes à droite. Puisque l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^2$  conserve l'orientation, il en est de même des géodésiques  $\gamma'$  et  $g\gamma$ . D'après l'égalité (1), elles ont mêmes extrémités. Aussi, par le lemme 4.2.5,  $\gamma'$  et  $g\gamma$  sont confondues. En particulier  $g\gamma$  contient  $e$ , donc  $\gamma$  contient  $g^{-1}$ . Posons  $n = |g^{-1}|$  ou  $-|g^{-1}|$ , selon qu'on aille de  $e$  à  $g^{-1}$  dans le sens positif ou négatif. On a alors :

$$\begin{aligned} g^{-1} &= e, \quad \text{si } n = 0 \\ g^{-1} &= a_{j_0} \dots a_{j_{n-1}}, \quad \text{si } n > 0 \\ g^{-1} &= a_{j_{-1}}^{-1} \dots a_{j_n}^{-1}, \quad \text{si } n < 0. \end{aligned}$$

De plus,  $g\gamma$  est la géodésique associée à  $\sigma^n(\mathbf{j})$ . Ainsi, les géodésiques associées à  $\mathbf{j}'$  et à  $\sigma^n(\mathbf{j})$ , sont confondues. Alors, en utilisant l'injectivité de l'application :

$$q : \Sigma_B^+ \rightarrow S^1,$$

au-dessus de  $F$ , et en considérant les projections sur  $\Sigma_B^+$  des éléments  $\sigma^{-m}(\mathbf{j}')$ ,  $\sigma^{n-m}(\mathbf{j})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , on obtient :

$$\mathbf{j}' = \sigma^n(\mathbf{j}).$$

□

## 5. Applications

### 5.0. Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux trois problèmes suivants :

- a) Le mélange du flot géodésique pour la mesure d'entropie maximale.
- b) La continuité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'une action isométrique quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique, sur un espace  $\delta$ -hyperbolique, lorsque l'action varie dans la topologie de Gromov.
- c) La réelle analyticité de l'entropie topologique du flot géodésique, ou ce qui revient au même, de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite, d'une représentation quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  ou  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ .

La représentation symbolique du flot géodésique du chapitre 4, nous est utile pour l'étude du premier et du troisième problème. Elle permet d'aborder simplement le mélange du flot, et elle sans doute en l'état actuel un passage obligé pour montrer l'analyticité de l'entropie.

Le second problème se traite de manière très élémentaire par des méthodes du type espaces hyperboliques. Bien que n'utilisant pas les chapitres 2, 3, 4, il est intéressant d'avoir un résultat très général, dont un cas particulier est le troisième problème.

Les paragraphes 5.1, 5.2, 5.3 sont consacrés à des préliminaires et rappels sur le formalisme thermodynamique. Au paragraphe 5.4, nous montrons que, sauf pour certains groupes très spéciaux (du type groupes libres), le flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace, est toujours mélangeant. Les paragraphes 5.5 et 5.6, traitent tour à tour des deux derniers problèmes. En 5.5 on définit la topologie de Gromov sur les actions isométriques d'un groupe. Puis on établit l'ouverture des actions quasi-convexes, ainsi que la continuité de la dimension de Hausdorff de leur ensemble limite. En 5.6, on relie l'entropie à une valeur propre d'un opérateur qui dépend analytiquement de la représentation ; l'analyticité de l'entropie en résulte.

### 5.1. Lemme de réduction

Reprenons la conjugaison :

$$Q : (\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T) \rightarrow (\mathcal{E}, \Phi_T)$$

du paragraphe 4.1. Afin d'appliquer à  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  le formalisme thermodynamique, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur la matrice  $B$  associée à  $\mathcal{F}_\varphi$  : irréductibilité et l'apériodicité. L'objet de ce paragraphe est de montrer que, quitte à modifier  $B$  et  $\varphi$ , on peut toujours supposer ces hypothèses vérifiées.

Commençons par rappeler les définitions de matrice irréductible et apériodique. Nous ferons désormais l'hypothèse suivante :

(i) Chaque élément de  $\{1, \dots, t\}$ , ( $t$  est l'ordre de  $B$ ), apparaît dans au moins une suite  $\mathbf{j}$  de  $\Sigma_B$ . (Sinon on peut trouver une matrice  $C$ , d'ordre strictement inférieur à  $t$ , telle que  $\Sigma_C = \Sigma_B$ ).

A la matrice  $B$  est associé le 1-complexe simplicial, orienté,  $\mathcal{C}$ , suivant :

Ses sommets sont les symboles  $1, \dots, t$ . Deux sommets  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête orientée  $i \rightarrow j$ , si  $B_{ij} = 1$ . Les éléments de  $\Sigma_B$  sont ainsi en bijection avec les chemins orientés, biinfinis de  $\mathcal{C}$ .

La matrice  $B$  est irréductible, si deux sommets quelconques  $i$  et  $j$  de  $\mathcal{C}$ , sont reliés par un chemin orienté allant de  $i$  à  $j$ . Compte tenu de (i), on vérifie sans peine, que l'irréductibilité équivaut à la transitivité topologique de  $\sigma$  sur  $\Sigma_B$ .

La matrice  $B$  est irréductible et apériodique, s'il existe un entier  $n$ , tel qu'entre deux sommets quelconques  $i$  et  $j$  de  $\mathcal{C}$ , il y ait toujours un chemin orienté de longueur  $n$  de  $i$  à  $j$ . Notons que cette définition est clairement équivalente à  $B^n > 0$ . En effet, le coefficient  $ij$  de  $B^n$  est le nombre de chemins orientés, de longueur  $n$ , de  $i$  à  $j$ . On montre également facilement, compte tenu de (i), qu'elle équivaut au mélange topologique de  $\sigma$  sur  $\Sigma_B$ .

Lorsque  $B$  est irréductible,  $\Sigma_B$  admet la décomposition suivante :

$$(5.1.1) \quad \Sigma_B = F_1 \amalg \dots \amalg F_m$$

où les  $F_i$  sont des compacts, vérifiant :

- a) pour  $i = 1, \dots, m-1$ ,  $\sigma(F_i) = F_{i+1}$ , et  $\sigma(F_m) = F_1$ .
- b)  $\sigma^m |_{F_i}$  est topologiquement mélangeant.
- c)  $(F_i, \sigma^m |_{F_i})$  est homéomorphe à un sous-shift de type fini  $\Sigma_C$ , avec  $C$  irréductible et apériodique.

Ainsi le cas apériodique correspond à  $m = 1$ .

Soit maintenant  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  un flot spécial, dont la matrice associée est  $B$ . Alors  $B$  est irréductible si et seulement si  $\Phi_T$  est topologiquement transitif sur  $\mathcal{F}_\varphi$ . En effet, l'orbite de  $(\overline{\mathbf{j}}, t)$  sous  $\Phi_T$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ , est dense dans  $\mathcal{F}_\varphi$  si et seulement si l'orbite de  $\mathbf{j}$  sous  $\sigma^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dense dans  $\Sigma_B$ .

D'autre part, pour ce même flot, la distinction entre matrice irréductible et matrice irréductible apériodique, est sans réel objet. En effet si  $B$  est seulement irréductible, considérons la matrice  $C$  irréductible apériodique, donnée par la décomposition 5.1.1. Le sous-shift  $\Sigma_C$  s'identifie à un compact  $\sigma^m$ -invariant de  $\Sigma_B$ . Soit alors  $\psi$  la fonction suivante sur  $\Sigma_C$  :

$$\psi(\mathbf{j}) = S_m \varphi(\mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi \circ \sigma^k(\mathbf{j}).$$

Clairement, l'inclusion de  $\Sigma_C$  dans  $\Sigma_B$ , induit un homéomorphisme conjuguant  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  au flot associé à  $(\Sigma_C, \psi)$ .

**5.1.2. Lemme.** *Dans la conjugaison du paragraphe 4.1, on peut modifier la matrice  $B$  et la fonction  $\varphi$ , de manière à ce que  $B$  soit irréductible apériodique, tout en conservant les conclusions du théorème 4.1.3.*

### 5.1.3. PREUVE DU LEMME 5.1.2 :

D'après le procédé de réduction décrit plus haut, il suffit de montrer qu'il est possible de remplacer  $B$  par une matrice irréductible. Puisque la mesure d'entropie maximale est ergodique sur  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ , et puisque son support est  $\mathcal{E}$ ,  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  admet une orbite dense : il existe  $u \in \mathcal{E}$ , tel que l'ensemble

$$\{\Phi_T(u), T \in \mathbb{R}^+\}$$

soit dense dans  $\mathcal{E}$ . Notons que l'orbite sous  $\Phi_T$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , de tout élément  $v$  du sous-ensemble faiblement stable en  $u$ , est également dense. En effet, pour un certain  $T_0 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} |\Phi_{T+T_0}(v) - \Phi_T(u)|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Soit  $(j, t) \in \Sigma_B \times \mathbb{R}$ , un antécédent de  $u$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ , assez grand, de manière à ce que chaque symbole  $j \in \{1, \dots, t\}$  apparaissant dans la suite  $(j_k)_{k=N}^{+\infty}$ , y apparaisse une infinité de fois. Soit  $C$  la matrice obtenue en privant  $B$  des lignes et des colonnes indexées par les symboles qui n'apparaissent pas dans la suite  $(j_k)_{k=N}^{+\infty}$ .

Par construction, la matrice  $C$  est irréductible. Le sous-shift  $\Sigma_C$  s'identifie à un compact  $\sigma$ -invariant de  $\Sigma_B$ . La restriction de  $\varphi$  à  $\Sigma_C$  définit un flot spécial  $\mathcal{G}_\varphi$ , qui s'identifie à un compact  $\Phi_T$ -invariant de  $\mathcal{F}_\varphi$ . Aussi, son image par  $Q$  est un compact  $\Phi_T$ -invariant de  $\mathcal{E}$ . Montrons qu'elle est égale à  $\mathcal{E}$  :

Complétons la suite  $(j_k)_{k=N}^{+\infty}$  en une suite  $i$  de  $\Sigma_C$ , vérifiant :

$$i_k = j_k, \text{ pour } k \geq N.$$

Notons  $v$  l'image dans  $\mathcal{E}$  de l'élément  $(i, t)$  de  $\Sigma_C \times \mathbb{R}$ . Elle appartient au sous-ensemble faiblement stable de  $u$ . Donc son orbite sous  $\Phi_T$  est dense dans  $\mathcal{E}$ . Dès lors, l'image de  $\mathcal{G}_\varphi$  par  $Q$  est égale à  $\mathcal{E}$ .  $\square$

## 5.2. Formalisme thermodynamique

Les propriétés des flots spéciaux sont en partie explicitées par la théorie spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius-Ruelle, que nous rappelons ci-dessous. Pour plus de détails on pourra consulter [P-P].

Soit  $B$  une matrice irréductible apériodique,  $\varphi$  une fonction Hölder continue sur  $\Sigma_B$ , d'exposant  $\alpha$ . Supposons que  $\varphi$  ne dépende pas du passé. (Cette hypothèse n'est pas restrictive car le cas général s'y ramène. D'autre part les fonctions  $\varphi$  du paragraphe 4.1, ont cette propriété). Ainsi,  $\varphi$  s'identifie à une fonction  $\alpha$ -höldérienne sur  $\Sigma_B^+$ .

Définissons l'espace de Banach  $C_\alpha(\Sigma_B^+)$ , des fonction  $\alpha$ -höldériennes sur  $\Sigma_B^+$ , muni de la norme :

$$\|\omega\|_\alpha = |\omega|_\alpha + \|\omega\|_\infty$$

où

$$|\omega|_\alpha = \sup_{j, j'} d(\omega(j), \omega(j')) / [d(j, j')]^\alpha.$$

L'opérateur de Perron-Frobenius-Ruelle est défini sur  $C_\alpha(\Sigma_B^+)$  par :

$$(\mathcal{L}_\varphi\omega)(\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i} \in \sigma^{-1}(\mathbf{j})} e^{\varphi(\mathbf{i})} \omega(\mathbf{i}).$$

Il a les propriétés suivantes :

**5.2.1. Théorème ([B-1], [P-P], [Gu-Ha]).**

- a)  $\mathcal{L}_\varphi$  admet une unique valeur propre réelle positive  $\lambda_\varphi$ , qui est simple, isolée et dominante, de vecteur propre  $h_\varphi$  strictement positif.
- b) Il existe une unique mesure  $\nu_\varphi$ , vecteur propre de l'adjoint de  $\mathcal{L}_\varphi$  avec valeur propre  $\lambda_\varphi$ , vérifiant  $\nu_\varphi(h) = 1$ ,
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_\varphi^{-n} \mathcal{L}_\varphi^n \omega = \nu_\varphi(\omega) h_\varphi$ , pour tout  $\omega$  appartenant à  $C_\alpha(\Sigma_B^+)$ .
- d) La mesure de probabilité  $\mu_\varphi = h_\varphi \nu_\varphi$  est invariante par le shift  $\sigma$  sur  $\Sigma_B^+$ . Elle est appelée mesure de Gibbs associée à  $(\Sigma_B^+, \varphi)$ .

Le logarithme de  $\lambda_\varphi$  s'appelle la pression de  $\varphi$  et se note  $P(\varphi)$ .

Observons que la famille d'opérateurs  $\mathcal{L}_{-s\varphi}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est analytique réelle en  $s$ . Donc, puisque  $\lambda_{-s\varphi}$  est simple et isolée, par perturbation analytique, la fonction :

$$s \mapsto P(-s\varphi)$$

est analytique réelle en  $s$ , de dérivée :

$$\frac{d}{ds} P(-s\varphi) = - \int_{\Sigma_B^+} \varphi d\mu_{-s\varphi}.$$

ou encore, d'après la  $\sigma$ -invariance de  $\mu_{-s\varphi}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{d}{ds} P(-s\varphi) = -\frac{1}{n} \int_{\Sigma_B^+} S_n \varphi d\mu_{-s\varphi}.$$

Aussi, lorsque  $S_n \varphi > 0$  pour un certain entier  $n$ ,  $P(-s\varphi)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est majorée par un réel strictement négatif. L'unique solution à l'équation :

$$P(-s\varphi) = 0$$

est l'entropie topologique du flot spécial associé à  $(\Sigma_B, \varphi)$ .

**5.2.2. REMARQUE.** Lorsque  $B$  et  $\varphi$  sont définies comme au paragraphe 4.1, l'entropie topologique de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  est égale à celle de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ , car les flots sont conjugués par une application continue surjective, à fibres finies de cardinal uniformément borné. D'après le théorème 2.10.4, elle est aussi égale à  $\tau$ , la dimension de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ .

La mesure  $\nu_{-\tau\varphi}$  du théorème 5.2.1 b) est également explicite, au moins lorsque l'application de Markov s'étend presque partout (relativement à la mesure de Hausdorff) en une application de Markov sur  $\Lambda$ . En effet, si tel est le cas, l'application  $q$  de  $\Sigma_B^+$  dans  $\Lambda$ , définie par :

$$q(\mathbf{j}) = q_+(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{j_0} \dots a_{j_n} x$$

est bijective, sauf peut-être au-dessus d'un ensemble de mesure de Hausdorff nulle de  $\Lambda$ . (Le paragraphe 3.3 fournit des exemples de telles situations). Notons alors  $\nu_x$  la mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ , et vérifions qu'à une constante près :

$$\nu_{-\tau\varphi} = q^* \nu_x .$$

Il suffit de voir que l'égalité :

$$(5.2.3) \quad \mathcal{L}_{-\tau\varphi}^*(q^* \nu_x) = q^* \nu_x$$

est satisfaite sur chacun des ensembles :

$$\mathcal{C}(k_0 \dots k_n) = \{ \mathbf{i} \in \Sigma_B^+, \text{ avec } i_\ell = k_\ell, \forall \ell \in \{0, \dots, n\} \} .$$

On a :

$$\mathcal{L}_{-\tau\varphi} \mathbf{1}_{\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)}(\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i} \in \sigma^{-1}(\mathbf{j})} e^{-\tau\varphi(\mathbf{i})} \mathbf{1}_{\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)}(\mathbf{i})$$

soit encore, puisque  $\sigma(\mathbf{i}) = \mathbf{j}$  :

$$\mathcal{L}_{-\tau\varphi} \mathbf{1}_{\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)}(\mathbf{j}) = e^{-\tau\varphi(k_0 \mathbf{j})} \mathbf{1}_{\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)}(k_0 \mathbf{j}) .$$

La fonction  $e^{\varphi(\mathbf{i})}$  est le facteur conforme de  $a_{i_0}^{-1}$  en  $q(\mathbf{i})$  pour la métrique  $d_x$  (voir remarque 4.1.4 c)), donc :

$$\begin{aligned} q^* \nu_x (\mathcal{L}_{-\tau\varphi} \mathbf{1}_{\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)}) &= \nu_x \left( |(a_{k_0}^{-1})'(a_{k_0} \xi)|_x^{-\tau} \mathbf{1}_{q(\mathcal{C}(k_0 \dots k_n))}(a_{k_0} \xi) \right) \\ &= (a_{k_0})_* \nu_x \left( |(a_{k_0}^{-1})'|_x^{-\tau} \mathbf{1}_{q(\mathcal{C}(k_0 \dots k_n))} \right) . \end{aligned}$$

Puisque  $\nu_x$  est une  $\tau$ -mesure conforme (voir 2.7), la dernière ligne est égale à la  $\nu_x$ -mesure de  $q(\mathcal{C}(k_0 \dots k_n))$ , ou encore à la  $q^* \nu_x$ -mesure de  $\mathcal{C}(k_0 \dots k_n)$ . D'où l'égalité 5.2.3.

Indiquons pour terminer une construction de la mesure d'entropie maximale d'un flot spécial  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . Les idées sont les mêmes que lors de la construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique (voir 2.10) :

Soit  $\tau$  l'entropie topologique de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . La fonction  $h_{-\tau\varphi}$  permet de rendre la mesure  $\nu_{-\tau\varphi}$   $\sigma$ -invariante. La mesure  $\mu_{-\tau\varphi}$  ainsi obtenue, se prolonge en une mesure  $\tilde{\mu}_{-\tau\varphi}$  sur  $\Sigma_B$ , grâce à la  $\sigma$ -invariance. En effet, si  $\omega \circ \sigma^k$  est une fonction sur  $\Sigma_B^+$ , il suffit de poser :

$$\tilde{\mu}_{-\tau\varphi}(\omega) = \mu_{-\tau\varphi}(\omega \circ \sigma^k) .$$

La mesure :

$$\tilde{m}_{-\tau\varphi} = \tilde{\mu}_{-\tau\varphi} \times dt$$

sur  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$ , est  $\Phi_T$ -invariante, elle est également  $F$ -invariante car  $\tilde{\mu}_{-\tau\varphi}$  est  $\sigma$ -invariante. Sa restriction à  $\mathcal{F}_\varphi$  (considéré comme un domaine fondamental de l'action de  $\{F^n, n \in \mathbb{Z}\}$  sur  $\Sigma_B \times \mathbb{R}$ ), est finie et  $\Phi_T$ -invariante, c'est la mesure d'entropie maximale de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . Nous la noterons simplement  $m_\varphi$ .

**5.2.4. REMARQUE.** La construction précédente permet d'associer à toute mesure  $\sigma$ -invariante finie sur  $\Sigma_B$ , une mesure  $\Phi_T$ -invariante finie sur  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . Notons que cette correspondance respecte l'ergodicité. Notons également que les mesures de Gibbs  $\mu$  du théorème 5.2.1.d), et leur prolongement à  $\Sigma_B$ , sont ergodiques et même mélangeantes (une conséquence de la propriété c) du théorème 5.2.1, voir [B-1], p. 23).

### 5.3. Mélange d'un flot spécial

Nous rappelons ici les propriétés de mélange de la mesure d'entropie maximale  $m_\varphi$  d'un flot spécial  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . Nous verrons au paragraphe suivant qu'elles subsistent sur le flot géodésique.

Tout d'abord quelques définitions :

Soit  $(\mathcal{G}, \Phi_T)$  un flot général muni d'une mesure borélienne invariante  $m$ .

La mesure  $m$  est mélangeante, si quels que soient les boréliens  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{G}$  :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} m(A \cap \Phi_T(B)) = m(A)m(B).$$

Elle est faiblement mélangeante, si quels que soient les boréliens  $A$  et  $B$ ,  $m(A \cap \Phi_T(B))$  converge en moyenne vers  $m(A)m(B)$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(A \cap \Phi_T(B)) dT = m(A)m(B).$$

On montre que le mélange faible équivaut à l'absence de fonctions propres non triviales : Si une fonction borélienne  $h$  non nulle à valeurs complexes, et un réel  $\lambda$ , vérifient  $m$ -presque sûrement :

$$\forall T \in \mathbb{R}; h \circ \Phi_T = e^{i\lambda T} h$$

alors  $h$  est  $m$ -presque sûrement constante et  $\lambda$  est nul.

Le flot  $\Phi_T$  est topologiquement mélangeant sur  $\mathcal{G}$ , si pour tout ouvert  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{G}$ , il existe un réel  $T_0$  tel que :

$$\forall T \geq T_0; U \cap \Phi_T(V) \neq \emptyset.$$

Enfin, le spectre des longueurs des orbites périodiques de  $(\mathcal{G}, \Phi_T)$  est l'ensemble des longueurs des orbites périodiques.

Pour un flot spécial,  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ , construit à partir d'une matrice irréductible apériodique et d'une fonction höldérienne  $\varphi$ , on a (voir [Gu-Ha]) :

**5.3.1. Théorème.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $m_\varphi$  est mélangeante.
- b)  $m_\varphi$  est faiblement mélangeante.
- c)  $\Phi_T$  est topologiquement mélangeant.
- d) Le spectre des longueurs des orbites périodiques de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ , n'est inclus dans aucun sous-groupe discret de  $\mathbb{R}$ .

**5.3.2. REMARQUES.** La partie difficile du théorème est l'implication  $b) \Rightarrow a)$ . On en trouvera une preuve dans [Gu-Ha], chapitre IV. L'implication  $a) \Rightarrow b)$  est classique et générale, de même que l'implication  $a) \Rightarrow c)$  lorsque le support de la mesure est l'espace tout entier. Pour les flots spéciaux les implications  $c) \Rightarrow d)$  et  $d) \Rightarrow b)$  semblent également bien connues, néanmoins il est difficile d'en donner une référence précise. Aussi, voici quelques indications sur leurs preuves :

Les deux conditions suivantes suffisent clairement à ce que le flot général  $(\mathcal{G}, \Phi_T)$  ait la propriété d) :

- (1)  $\Phi_T$  est topologiquement mélangeant et
- (2)  $\Phi_T$  vérifie le lemme de fermeture, c'est-à-dire : Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $T \geq T_\varepsilon$  et tout  $u \in \mathcal{G}$  vérifiant :

$$d(u, \Phi_T(u)) \leq \varepsilon$$

il existe  $T' \in \mathbb{R}$  et  $u' \in \mathcal{G}$ , tels que :

$$\Phi_{T'}(u') = u'$$

$$|T - T'| \leq \varepsilon$$

$$\forall t \in [0, T]; d(\Phi_t(u'), \Phi_t(u)) \leq \varepsilon.$$

Un flot spécial, construit à partir d'une fonction Hölder continue, vérifie trivialement le lemme de fermeture. Ainsi on obtient  $c) \Rightarrow d)$ .

Pour montrer l'implication  $d) \Rightarrow b)$ , on raisonne par l'absurde. Supposons que  $\Phi_T$  ne soit pas faiblement mélangeant. Alors  $\Phi_T$  admet une fonction propre non triviale : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et une fonction borélienne  $h$  sur  $\mathcal{F}_\varphi$ , à valeurs complexes, tels que,  $m_\varphi$ - presque sûrement :

$$(3) \quad \forall T \in \mathbb{R}, h \circ \Phi_T = e^{i\lambda T} h.$$

On peut supposer  $\lambda \neq 0$  et  $h$  de norme un, car  $m_\varphi$  est ergodique (voir 5.2.4). Y. Guivarc'h et J. Hardy ont montré que les fonctions propres des flots spéciaux sont presque sûrement égales à une fonction continue ([Gu, Ha], chapitre III). Donc l'égalité (3) est vérifiée sur  $\mathcal{F}_\varphi$  tout entier. En l'appliquant aux éléments périodiques et leurs périodes, on obtient une contradiction avec d).

## 5.4. Mélange du flot géodésique

Nous établissons d'abord un théorème analogue au théorème 5.3.1. Ensuite, nous montrons que presque tous les flots géodésiques construits précédemment sont mélangeants.

**5.4.1. Théorème.** Soit  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  le flot géodésique associé à une action quasi-convexe d'un groupe hyperbolique sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace. Soit  $m$  la mesure d'entropie maximale de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ . Sont équivalents :

- a)  $m$  est mélangeante.
- b)  $m$  est faiblement mélangeante.
- c)  $\Phi_T$  est topologiquement mélangeant.
- d) Le spectre des longueurs des orbites périodiques de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ , n'est inclus dans aucun sous-groupe discret de  $\mathbb{R}$ .

**5.4.2. PREUVE :** Les implications a)  $\Rightarrow$  b) et a)  $\Rightarrow$  c) sont classiques et générales.

Afin de montrer les autres, soit :

$$Q : (\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T) \rightarrow (\mathcal{E}, \Phi_T)$$

une conjugaison du flot géodésique par un flot spécial comme au paragraphe 4.1. D'après le lemme 5.1.2, on peut supposer la matrice  $B$  associée à  $\mathcal{F}_\varphi$ , irréductible et apériodique. Notons  $m_\varphi$  la mesure d'entropie maximale de  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$ . En normalisant  $m$  et  $m_\varphi$ , on a :

$$(1) \quad Q_* m_\varphi = m.$$

Puisque  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  vérifie le lemme de fermeture (voir 5.3.2),  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  aussi (un exercice simple). Aussi, comme dans la remarque 5.3.2, on obtient c)  $\Rightarrow$  d).

Montrons que d) implique a). Au-dessus de chaque orbite périodique  $Q$  est un revêtement fini d'ordre uniformément borné. Aussi, puisque  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  a la propriété d),  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T)$  l'a également. Dès lors, d'après le théorème 5.3.1,  $m_\varphi$  est mélangeante. Donc, par l'égalité (1),  $m$  l'est aussi.

Il reste à montrer que b) implique a). Pour ce faire montrons que le mélange faible de  $m$  entraîne celui de  $m_\varphi$ . Raisonnons par l'absurde, supposons que  $(\mathcal{F}_\varphi, \Phi_T, m_\varphi)$  ait une fonction propre non-triviale  $h$ . Il existe alors  $\lambda \in \mathbb{R}$ , telle que  $m_\varphi$ -presque sûrement :

$$(2) \quad \forall T \in \mathbb{R} : h \circ \Phi_T = e^{i\lambda T} h.$$

Puisque  $m_\varphi$  est ergodique (voir 5.2.4), on peut supposer  $\lambda$  non nul et  $h$  de norme un.

Soit alors  $\bar{h}$  la fonction sur  $\mathcal{E}$  définie par :

$$\bar{h}(u) = \prod_{v \in Q^{-1}(u)} h(v).$$

D'après la remarque 4.1.4, le cardinal des fibres de  $Q$  est  $m$ -presque sûrement constant. Notons  $N$  sa valeur  $m$ -presque sûrement constante. D'après (1) et (2), on a  $m$ -presque sûrement :

$$\forall T \in \mathbb{R} : \bar{h} \circ \Phi_T = e^{iN\lambda T} \bar{h}$$

avec  $\bar{h}$  de norme 1 et  $N\lambda$  différent de 0. Ce qui contredit le mélange faible de  $m$ .  $\square$

### 5.4.3. EXEMPLES.

a) Soit  $\bar{X}$  le bouquet de deux cercles  $c_1$  et  $c_2$ , dont les périmètres respectifs sont  $\ell_1$  et  $\ell_2$  (voir figure 1)

Le revêtement universel  $X$  de  $\bar{X}$ , est un arbre réel sur lequel agit de manière isométrique et cocompacte, le groupe  $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\bar{X})$ . D'après la caractérisation d) du théorème 5.4.1, le flot géodésique associé à  $(X, \Gamma)$  est mélangeant, si et seulement si  $\frac{\ell_1}{\ell_2}$  est irrationnel.

b) D.J. Rudolph [R] a montré que le flot géodésique associé à toute action convexe-cocompacte d'un groupe kleinien, est toujours mélangeant (et même bernouilli). La première étape de sa preuve, (la partie facile),

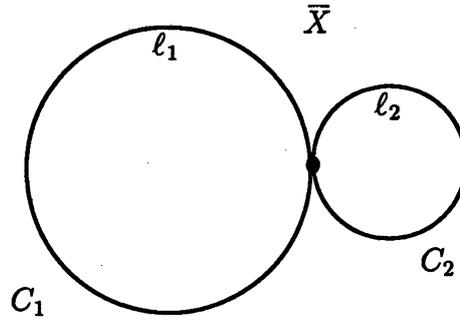


Figure 1

établit le mélange faible de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ . En adaptant les arguments qui y sont donnés, nous obtenons :

**5.4.4. Théorème.** Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique dont le bord n'est pas totalement discontinu. Le flot géodésique associé à toute action isométrique, quasi-convexe de  $\Gamma$  sur  $\text{CAT}(-1)$ -espace, est mélangeant pour la mesure d'entropie maximale.

**5.4.5. REMARQUE.** D'après un théorème de Stallings (voir [G-H] chapitre 7), si son bord est totalement discontinu,  $\Gamma$  est commensurable à un groupe libre. L'exemple 5.4.3 a) montre que le flot associé à une action quasi-convexe d'un groupe libre sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace, n'est pas toujours mélangeant.

**5.4.6. PREUVE DE 5.4.4 :** D'après le théorème 5.4.1, il suffit de montrer le mélange faible. La preuve suit celle de D.J. Rudolph [R]. Soit  $h$  une fonction continue sur  $\mathcal{E}$  à valeurs réelles, et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Soit :

$$\bar{h}(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ \Phi_{k\alpha}(u).$$

Nous montrons que  $\bar{h}$  est  $m$ -presque sûrement constante. Ainsi  $\Phi_\alpha$  est ergodique sur  $(\mathcal{E}, m)$  pour tout  $\alpha$ , et donc  $\Phi_T$ ,  $T \in \mathbb{R}$  est faiblement mélangeant.

La preuve est assez semblable à la preuve de Hopf de l'ergodicité du flot. Au lieu d'une fonction constante sur les orbites du flot, nous aurons ici une fonction  $\alpha$ -périodique.

Tout d'abord quelques propriétés de  $\bar{h}$  : Puisque  $\mathcal{E}$  est compact,  $h$  est uniformément continue. Aussi :

(a) Quel que soit  $u \in \mathcal{E}$ , la fonction :

$$T \mapsto \bar{h} \circ \Phi_T(u)$$

est continue et  $\alpha$ -périodique.

(b)  $\bar{h}$  est constante sur chaque sous-ensemble fortement stable de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$ .

D'après le théorème ergodique de Birkhoff,  $m$ -presque sûrement, on a :

$$\bar{h}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ \Phi_{k\alpha}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ \Phi_{-k\alpha}(u).$$

Aussi, en notant  $s$  l'involution de  $\mathcal{E}$ , définie par :

$$s(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t),$$

on obtient,  $m$ -presque sûrement :

$$(1) \quad \bar{h}(u) = \overline{h \circ s}(s(u)).$$

Soit  $\bar{H}, s, \tilde{m}$ , les relevés à  $G\Lambda$  de  $\bar{h}, s$  et  $m$ . D'après l'égalité (1), on a  $\tilde{m}$ -presque sûrement :

$$(2) \quad \bar{H}(u) = \overline{\bar{H} \circ s}(s(u)).$$

Choisissons une origine  $x$  dans  $X$ . Soit  $\nu$  la mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$ , (voir 2.7). L'espace  $G\Lambda$  s'identifie à  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbb{R}$ . Les mesures  $\tilde{m}$  et  $\nu \times \nu \times dt$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre (voir 2.10). Donc par Fubini, pour  $\nu \times \nu$ -presque tout  $(\xi_-, \xi_+) \in \Lambda \times \Lambda - \Delta$ , l'égalité (2) est vérifiée,  $dt$ -presque sûrement le long de l'orbite d'extrémités  $\xi_-$  et  $\xi_+$ . D'après (a), le long d'une orbite, les deux membres de l'égalité (2) sont continus. Aussi, en appliquant à nouveau Fubini :

(c) Pour  $\nu$ -presque tout  $\xi_+ \in \Lambda$ , l'égalité (2) est vérifiée le long de l'orbite d'extrémités  $\xi_-$  et  $\xi_+$ , pour  $\nu$ -presque tout  $\xi_-$ .

Notons  $F$  l'ensemble des  $\xi_+$  qui ont cette propriété. Son complémentaire est négligeable. On montre maintenant que  $\bar{H}$  est constante sur l'union des sous-ensembles faiblement stables basés sur  $F$ . Par Fubini,  $\bar{H}$  sera  $\tilde{m}$ -presque sûrement constante.

Pour ce faire, fixons un élément  $\xi^0$  de  $F$ . Notons  $W_{\xi^0}$  le sous-ensemble fortement stable basé en  $\xi^0$ , qui se projette dans  $X$  sur l'hosphère en  $\xi^0$  contenant l'origine  $x$ . D'après (b),  $\bar{H}$  est constante sur  $W_{\xi^0}$ . Soit  $\lambda$  sa valeur constante sur  $W_{\xi^0}$ . Etant donné un élément  $\xi$  de  $F - \{\xi^0\}$ , montrons que  $\bar{H}$  est constante égale à  $\lambda$  sur le sous-espace faiblement stable basé en  $\xi$ . A cet effet, associons à tout élément  $\eta$  de  $\Lambda - \{\xi^0, \xi\}$ , les éléments  $u(\eta)$  et  $v(\eta)$  de  $G\Lambda$ , définis de la manière suivante (voir figure 2) :

Soit  $V_\eta$  le sous-ensemble fortement instable basé en  $\eta$  et tangent à  $W_{\xi^0}$ . Soit  $W_\xi(\eta)$  le sous-ensemble fortement stable basé en  $\xi$  et tangent à  $V_\eta$ . Alors :

$$\begin{aligned} u(\eta) &\text{ est l'intersection de } W_{\xi^0} \text{ et de } V_\eta \\ v(\eta) &\text{ est l'intersection de } V_\eta \text{ et de } W_\xi(\eta). \end{aligned}$$

Par construction,  $\bar{H}(u(\eta))$  est égal à  $\lambda$ . D'après (c), pour  $\nu$ -presque tout  $\eta \in \Lambda - \{\xi^0, \xi\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{H}(u(\eta)) &= \overline{\bar{H} \circ s}(s(u(\eta))) \\ \bar{H}(v(\eta)) &= \overline{\bar{H} \circ s}(s(v(\eta))). \end{aligned}$$

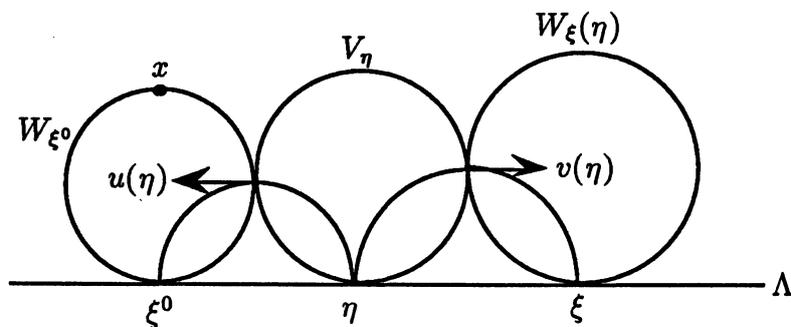


Figure 2

Les éléments  $s(u(\eta))$  et  $s(v(\eta))$  appartiennent au même sous-ensemble fortement stable. D'après (b), l'application  $\overline{H} \circ s$  est constante sur chaque sous-ensemble fortement stable. Donc pour  $\nu$ -presque tout  $\eta \in \Lambda - \{\xi^0, \xi\}$ , on a :

$$\overline{H}(v(\eta)) = \overline{H}(u(\eta)) = \lambda,$$

donc, d'après (b), pour  $\nu$ -presque tout  $\eta \in \Lambda - \{\xi^0, \xi\}$  :

$$(3) \quad \overline{H} \mid w_\xi(\eta) = \lambda.$$

Soit  $G$  l'ensemble des  $\eta \in \Lambda - \{\xi^0, \xi\}$ , qui satisfont cette égalité. Son complémentaire est négligeable. Afin de décrire les ensembles  $W_\xi(\eta)$  lorsque  $\eta$  parcourt  $G$ , paramétrons par  $\mathbb{R}$  les sous-ensembles fortement stables basés en  $\xi$ , en prenant pour origine celui qui se projette dans  $X$  sur l'horosphère en  $\xi$  contenant  $x$ . Dans ces coordonnées l'application :

$$p : \eta \rightarrow W_\xi(\eta),$$

s'écrit :

$$p(\eta) = B_\xi(x, \pi(v(\eta)))$$

où  $\pi(v(\eta))$  désigne la projection de  $v(\eta)$  dans  $X$ . D'après la définition de  $d_x$  (voir 2.5), on a :

$$B_\xi(x, \pi(v(\eta))) = -2 \log d_x(\xi, \eta) - B_\eta(x, \pi(v(\eta)))$$

et

$$B_\eta(x, \pi(v(\eta))) = B_\eta(x, \pi(u(\eta))) = -2 \log d_x(\xi^0, \eta)$$

d'où :

$$(4) \quad p(\eta) = 2 \log \frac{d_x(\xi^0, \eta)}{d_x(\xi, \eta)}.$$

D'après (a) et (b), la restriction de  $\overline{H}$  au sous-ensemble faiblement stable en  $\xi$ , induit une fonction continue  $\alpha$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Notons-la  $\overline{H}_\xi$ . D'après (3), elle est constante égale à  $\lambda$  sur  $p(G)$ . Puisque  $G$  est dense dans  $\Lambda$ , et puisque les applications  $p$  et  $\overline{H}_\xi$  sont continues,  $\overline{H}_\xi$  est constante égale à  $\lambda$  sur  $p(\Lambda - \{\xi^0, \xi\})$ .

Soit maintenant  $\mathcal{C}$  une composante connexe de  $\Lambda \simeq \partial\Gamma$ , non réduite à un point. L'image de  $\mathcal{C} - \{\xi^0, \xi\}$  par  $p$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , (en effet  $p$  s'étend en une application continue de  $\Lambda$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ).

Si  $F \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ , prenons  $\xi^0$  dans cet ensemble. Alors l'expression (4) montre que l'image de  $\mathcal{C} - \{\xi^0, \xi\}$  par  $p$ , est un intervalle de longueur infinie. Puisque  $\overline{H}_\xi$  est périodique, elle est dès lors constante égale à  $\lambda$ .

Si  $F \cap C = \emptyset$ , choisissons  $\xi^0$  proche de  $C$  (c'est possible car  $F$  est dense dans  $\Lambda$ ). L'expression (4) montre que pour  $\xi$  en dehors d'une boule centrée en  $\xi^0$ , dont le rayon décroît vers 0 avec la distance de  $\xi^0$  à  $C$ , l'image de  $C - \{\xi\}$  par  $p$ , est un intervalle de longueur supérieure à  $\alpha$ , la périodicité de  $\bar{H}_\xi$ . Dès lors,  $\bar{H}_\xi$  est constante égale à  $\lambda$ .  $\square$

## 5.5. Topologie de Gromov sur les actions isométriques d'un groupe

Soit  $\delta$  un nombre positif fixé et  $\Gamma$  un groupe hyperbolique. Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des actions isométriques de  $\Gamma$  sur les espaces  $\delta$ -hyperboliques. Un élément de  $\mathcal{A}$  est donc un couple  $(X, \rho)$ , où  $X$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique et

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

une action isométrique de  $\Gamma$  sur  $X$ .

La topologie de Gromov sur  $\mathcal{A}$  est définie de la manière suivante :

Soit  $S$  un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ . Notons  $|\cdot|_S$  la métrique des mots de  $(\Gamma, S)$ . Un système fondamental de voisinage de  $a = (X, \rho) \in \mathcal{A}$  est formé des ensembles :

$$U_a(x, R, \varepsilon), \quad x \in X, \quad R \geq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Un élément  $b = (Y, \rho')$  de  $\mathcal{A}$  appartient à  $U_a(x, R, \varepsilon)$ , s'il admet une orbite sous  $\{g \in \Gamma, |g|_S \leq R\}$ ,  $\varepsilon$ -proche de l'orbite de  $x$  sous  $\{g \in \Gamma, |g|_S \leq R\}$  dans  $a$ . Plus précisément, l'élément  $b = (Y, \rho')$  appartient à  $U_a(x, R, \varepsilon)$ , s'il existe un élément  $y$  de  $Y$  tel que pour tout élément  $g$  de  $\Gamma$  vérifiant :

$$|g|_S \leq R$$

on ait :

$$|x - gx|_X - \varepsilon \leq |y - gy|_Y \leq |x - gx|_X + \varepsilon.$$

Puisque les actions de  $\Gamma$  sur  $(\Gamma, |\cdot|_S)$ ,  $(X, |\cdot|_X)$  et  $(Y, |\cdot|_Y)$  sont isométriques, cette condition équivaut à : pour tout élément  $g, g'$  de  $\Gamma$  vérifiant :

$$|g - g'|_S \leq R$$

alors :

$$|gx - g'x|_X - \varepsilon \leq |gy - g'y|_Y \leq |gx - g'x|_X + \varepsilon.$$

La topologie ainsi définie est indépendante du système de générateurs  $S$  choisi. En effet si  $S'$  en est un autre, les espaces métriques  $(\Gamma, |\cdot|_S)$  et  $(\Gamma, |\cdot|_{S'})$  sont quasi-isométriques, donc leurs boules sont comparables. D'autre part, elle ne distingue pas deux actions isométriques l'une de l'autre.

**5.5.1. EXEMPLE.** L'ensemble des représentations de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  est une variété algébrique réelle, sur laquelle agit  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  par conjugaison. Le quotient par cette action, est l'ensemble des actions isométriques de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ , à isométries près. Aussi, il possède a priori deux topologies : l'une

provenant de la structure algébrique, l'autre de la topologie de Gromov. F. Paulin [Pau] a montré leur équivalence.

Soit maintenant  $a = (X, \rho)$  une action isométrique quasi-convexe de  $\Gamma$ , et  $x$  un élément de  $X$ . Nous nous proposons de montrer que les éléments d'un petit voisinage  $U_a(x, R, \varepsilon)$  de  $a$ , admettent une orbite sous  $\Gamma$ , quasi-isométrique à l'orbite de  $x$  dans  $a$ , et d'en estimer les constantes de quasi-isométrie. Nous en déduirons l'ouverture des actions quasi-convexes, ainsi que la continuité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'une action quasi-convexe.

Pour ce faire, nous commençons par définir une base de voisinage de  $a$  plus maniable que la précédente et nous construisons le candidat quasi-isométrie.

L'action isométrique  $a = (X, \rho)$  étant quasi-convexe, l'application :

$$\begin{aligned} (\Gamma, | \cdot |_S) &\rightarrow (X, | \cdot |_X) \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie. Donc une base de voisinage de  $a$  est formée des ensembles :

$$V_a(x, R, \varepsilon), \quad x \in X, \quad R \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

définis de la manière suivante : un élément  $b = (Y, \rho')$  appartient à  $V_a(x, R, \varepsilon)$ , s'il existe  $y \in Y$  tel que pour tout  $g, g' \in \Gamma$ , vérifiant :

$$|gx - g'x|_X \leq R$$

on ait :

$$|gx - g'x|_X - \varepsilon \leq |gy - g'y|_Y \leq |gx - g'x|_X + \varepsilon.$$

Aussi, lorsque l'application de  $\Gamma$  dans  $X$  qui à  $g$  associe  $gx$ , est injective, on obtient une application :

$$\begin{aligned} i : (\Gamma\{x\}, | \cdot |_X) &\rightarrow (\Gamma\{y\}, | \cdot |_Y) \\ gx &\mapsto gy \end{aligned}$$

qui a la propriété suivante (quasi-isométrie locale) : Quels que soient  $z, z'$  appartenant à  $\Gamma\{x\}$ , vérifiant :

$$|z - z'|_X \leq R,$$

alors

$$(5.5.2) \quad |z - z'|_X - \varepsilon \leq |i(z) - i(z')|_Y \leq |z - z'|_X + \varepsilon.$$

Si l'application de  $\Gamma$  dans  $X$  qui à  $g$  associe  $gx$ , n'est pas injective, on peut construire  $i$  de manière à ce que :

$$(5.5.3) \quad |i(gx) - gy|_Y \leq \varepsilon.$$

Elle vérifie encore les inégalités 5.5.2.

Observons que si  $i$  est une quasi-isométrie, alors d'après la relation 5.5.3, les orbites  $(\Gamma\{x\}, | \cdot |_X)$  et  $(\Gamma\{y\}, | \cdot |_Y)$  sont quasi-isométriques.

**5.5.4. Lemme.** Soit  $a = (X, \rho)$  une action isométrique quasi-convexe de  $\Gamma$ , et  $x$  un élément de  $X$ . Pour  $R$  suffisamment grand,  $\varepsilon$  suffisamment petit, et  $b = (Y, \rho')$  appartenant à  $V_a(x, R, \varepsilon)$ , l'application :

$$i : (\Gamma\{x\}, | \cdot |_X) \rightarrow (\Gamma\{y\}, | \cdot |_Y)$$

définie précédemment, est une quasi-isométrie. Plus précisément, il existe des fonctions  $o(R)$  et  $C(R)$ , des réels  $R_0$  et  $\varepsilon_0$ , tels que pour  $R > R_0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et  $b = (Y, \rho')$  appartenant à  $V_a(x, R, \varepsilon)$ , on ait quels que soient  $z, z' \in \Gamma\{x\}$  :

$$(1 - o(R))|z - z'|_X - C(R) \leq |i(z) - i(z')|_Y \leq (1 + o(R))|z - z'|_X + C(R)$$

avec :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} o(R) = 0.$$

Pour montrer le lemme 5.5.4, nous utiliserons le critère suivant ([G-H], chapitre 5, théorème 16) :

*Critère de quasi-géodésie* : Soit  $Y$  un espace  $\delta$ -hyperbolique, et  $K$  une constante strictement positive. Si une suite  $(y_k)_{k=0}^n$  de points de  $Y$  vérifie pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$|y_{k-1} - y_{k+1}|_Y \geq \max\{|y_{k-1} - y_k|_Y, |y_k - y_{k+1}|_Y\} + 18\delta + K,$$

alors

$$|y_0 - y_n| \geq Kn.$$

**5.5.5. PREUVE DU LEMME 5.5.4** : Soit  $C$  une constante telle que  $\Gamma\{x\}$  soit  $C$ -quasi-convexe. Prenons

$$\varepsilon_0 = 2C$$

$$R_0 = 18C + 36\delta.$$

Soit alors  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et  $R > R_0$ ,  $b = (Y, \rho')$  appartenant à  $V_a(x, R, \varepsilon)$  et  $z, z'$  deux éléments de  $\Gamma\{x\}$ . Estimons  $|i(z) - i(z')|_Y$  en fonction de  $|z - z'|_X$ .

Notons  $d$  la distance  $|z - z'|_X$ . Soit :

$$\gamma : [0, d] \rightarrow X, \gamma(0) = z, \gamma(d) = z'$$

un paramétrage par longueur d'arc du segment  $[zz']$ . Soit  $R'$  le nombre réel vérifiant :

$$2R' + 2C = R.$$

On a donc :

$$R' > 8C + 18\delta.$$

Considérons la subdivision suivante de  $[0, d]$  :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$$

avec

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}; t_k = kR'$$

et

$$d - R' \leq t_{n-1} < d.$$

Puisque  $\Gamma\{x\}$  est  $C$ -quasi-convexe, choisissons des éléments  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  de  $\Gamma\{x\}$ , vérifiant (voir figure 3) :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}; |z_k - \gamma(t_k)|_X \leq C.$$

Soit aussi  $z_0 = z$  et  $z_n = z'$ .

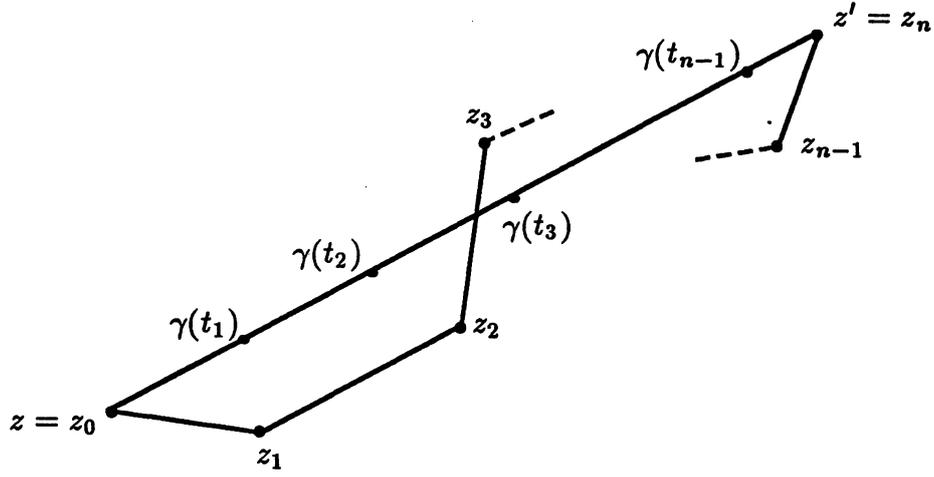


Figure 3

Pour  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n-1\}$  on a :

$$|z_k - z_{k+1}|_X \leq R' + 2C \leq R,$$

et pour  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n-2\}$  :

$$2R' - 2C \leq |z_{k-1} - z_{k+1}|_X \leq 2R' + 2C = R.$$

Alors, d'après la propriété de quasi-isométrie locale de  $i$  : Pour  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, n-1\}$  :

$$(1) \quad |i(z_k) - i(z_{k+1})|_Y \leq R' + 2C + \varepsilon,$$

et pour  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n-2\}$  :

$$(2) \quad 2R' - 2C - \varepsilon \leq |i(z_{k-1}) - i(z_{k+1})|_Y \leq R + \varepsilon.$$

Majorons  $|i(z) - i(z')|_Y$ . Par l'inégalité triangulaire et la relation (1) :

$$|i(z) - i(z')|_Y \leq n(R' + 2C + \varepsilon)$$

soit encore :

$$|i(z) - i(z')|_Y \leq nR' \left(1 + \frac{2C + \varepsilon}{R'}\right)$$

d'où, puisque  $nR'$  est inférieur à  $|z - z'|_X + R'$ , et  $\varepsilon$  à  $\varepsilon_0$  :

$$(3) \quad |i(z) - i(z')|_Y \leq \left(1 + \frac{2C + \varepsilon_0}{R'}\right) |z - z'|_X + R' + 2C + \varepsilon_0.$$

Pour minorer  $|i(z) - i(z')|_Y$ , nous appliquons le critère de quasi-géodésie à la suite  $(i(z_k))_{k=0}^{n-1}$ . D'après les relations (1) et (2), pour trouver une constante  $K$  adéquate, il suffit de comparer les quantités :

$$2R' - 2C - \varepsilon$$

et

$$(R' + 2C + \varepsilon) + 18\delta.$$

On a :

$$2R' - 2C - \varepsilon = (R' + 2C + \varepsilon) + 18\delta + (R' - 4C - 2\varepsilon - 18\delta).$$

Posons donc :

$$K = R' - 4C - 2\varepsilon - 18\delta.$$

Observons que  $K$  est strictement positive, à cause des choix de  $R_0$  et de  $\varepsilon_0$ . Donc d'après le critère :

$$|i(z) - i(z_{n-1})|_Y \geq K(n-1)$$

et puisque  $n$  est supérieur à  $\frac{1}{R'} |z - z'|_X$  :

$$|i(z) - i(z_{n-1})|_Y \geq \frac{K}{R'} |z - z'|_X - K.$$

La distance  $|i(z_{n-1}) - i(z')|_Y$  étant majorée par  $R' + \varepsilon$  :

$$|i(z) - i(z')|_Y \geq \frac{K}{R'} |z - z'|_X - K - R' - \varepsilon.$$

Et finalement :

$$(4) \quad |i(z) - i(z')|_Y \geq \left(1 - \frac{4C + 2\varepsilon_0 + 18\delta}{R'}\right) |z - z'|_X - 2R'.$$

Aussi, d'après les relations (3) et (4) les fonctions

$$\begin{aligned} o(R) &= \frac{4C + 2\varepsilon_0 + 18\delta}{R'} \\ C(R) &= 2R' \end{aligned}$$

conviennent. □

Le lemme donne immédiatement :

**5.5.6. Proposition.** *Les actions isométriques quasi-convexes de  $\Gamma$  forment un ouvert de  $\mathcal{A}$  dans la topologie de Gromov.*

**5.5.7. REMARQUE.** En particulier, les représentations convexes cocompactes de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  forment un ouvert. On retrouve ainsi un théorème de Thurston [T].

Notons  $\Lambda_a$  l'ensemble limite d'un élément  $a = (X, \rho)$  de  $\mathcal{A}$ . Rappelons qu'il existe un réel  $t_0$ , strictement supérieur à 1, ne dépendant que de  $\delta$ , tel que pour tout  $t \in ]1, t_0[$ , le bord de  $X$  admette une métrique visuelle de paramètre  $t$ . Deux telles métriques sont Lipschitz équivalentes, aussi la dimension de Hausdorff de  $\Lambda_a$  est indépendante de la métrique visuelle de paramètre  $t$  sur  $\partial X$ . Fixons un réel  $t$  dans  $]1, t_0[$ . Notons  $d_a$  une métrique visuelle quelconque de paramètre  $t$  sur  $\partial X$ , et  $\tau(a)$  la dimension de Hausdorff de  $(\Lambda_a, d_a)$ .

Soit maintenant  $a$  quasi-convexe. Alors d'après le lemme 5.3.4, pour  $R$  suffisamment grand et  $\varepsilon$  petit, les éléments  $b = (Y, \rho')$  de  $V_a(x, R, \varepsilon)$ , sont également quasi-convexes. La quasi isométrie :

$$i : (\Gamma\{x\}, | \cdot |_X) \rightarrow (\Gamma\{y\}, | \cdot |_Y)$$

s'étend en un homéomorphisme quasi-conforme entre  $(\Lambda_a, d_a)$  et  $(\Lambda_b, d_b)$ . Notons-le encore  $i$ . Les majorations du lemme 5.3.4 montrent que pour tout  $\xi$  et  $\xi'$  appartenant à  $\Lambda_a$  :

$$D^{-1} [d_a(\xi, \xi')]^{1+o(R)} \leq d_b(i(\xi), i(\xi')) \leq D [d_a(\xi, \xi')]^{1-o(R)}$$

où  $D$  est une constante dépendant de  $a, b, d_a$  et  $d_b$ , et :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} o(R) = 0.$$

L'homéomorphisme  $i$  étant quasi-conforme, on obtient :

$$(1 - o(R))\tau(a) \leq \tau(b) \leq (1 + o(R))\tau(a)$$

avec :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} o(R) = 0.$$

D'où :

**5.5.8. Théorème.** *Quel que soit  $t$  appartenant à  $]1, t_0[$ , la dimension de Hausdorff pour une métrique visuelle de paramètre  $t$ , de l'ensemble limite d'une action isométrique quasi-convexe de  $\Gamma$ , est continue dans la topologie de Gromov.*

Compte tenu du théorème 2.10.4, on obtient aussi :

**5.5.9. Corollaire.** *L'entropie topologique du flot géodésique associé à une action isométrique quasi-convexe de  $\Gamma$  sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace, est continue dans la topologie de Gromov.*

## 5.6. Analyticité de l'entropie topologique sur l'ensemble des représentations quasi-convexes de $\Gamma$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ ou $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$

L'espace  $\mathcal{R}$  des représentations de  $\Gamma$  dans  $PO(n, 1) \simeq \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  ou dans  $PU(n, 1) \simeq \text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ , est défini de la manière suivante. Soit

$$\langle a_1, \dots, a_s \mid r_1 = \dots = r_p = 1 \rangle$$

une présentation finie de  $\Gamma$ . L'espace  $\mathcal{R}$  est la sous-variété algébrique réelle de  $(PO(n, 1))^s$  ou  $(PU(n, 1))^s$ , définie par les équations matricielles :

$$r_1 = \dots = r_p = \text{Id}.$$

Elle est indépendante de la présentation choisie, à transformation analytique près. D'après la proposition 5.5.6, les représentations quasi-convexes de  $\Gamma$  forment un ouvert  $U$  de  $\mathcal{R}$ .

Nous expliquons brièvement comment relier l'entropie topologique du flot géodésique, à une valeur propre isolée d'un opérateur qui dépend analytiquement de la représentation. Par perturbation analytique, la réelle analyticité de l'entropie topologique, en découlera. Le cas de l'hyperbolique complexe se traite de la même façon que le cas réel, (comparer les exemples 2.6.5 a) et b)). Aussi, contentons-nous du cas réel.

Soit donc  $u$  un élément de  $U$ . Supposons le système de générateurs  $S = \{a_1, \dots, a_s\}$  symétrique. Soit alors  $B = (B_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, t\}$ , la matrice associée à une application de Markov de  $(\Gamma, S)$ . Notons  $a_{u,j}$ ,  $j = 1, \dots, t$  l'image dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$  de l'élément  $a_j$  de  $S$ , par la représentation  $u$ . Soit  $\varphi_u$  la fonction sur  $\Sigma_B$  :

$$\varphi_u(j) = B_{q_u(j)}(x, a_{u,j_0}x)$$

où  $x$  est le centre du modèle en boule de  $\mathbb{H}^n$ , et où  $q_u(\mathbf{j})$  est défini par :

$$q_u(\mathbf{j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{u,j_0} \dots a_{u,j_n} x .$$

D'après le théorème 4.1.3, le flot géodésique  $(\mathcal{E}_u, \Phi_T)$  associé à la représentation  $u$ , est conjugué au flot spécial  $(\mathcal{F}\varphi_u, \Phi_T)$  associé à la paire  $(\Sigma_B, \varphi_u)$ .

Donc d'après 5.2, l'entropie topologique de  $(\mathcal{E}_u, \Phi_T)$  est l'unique solution de l'équation de la variable réelle  $s$  :

$$P(-s\varphi_u) = 0$$

ou encore, avec les notations du théorème 5.2.1 :

$$\lambda_{-s\varphi_u} = 1 .$$

Notons qu'il n'est pas clair que  $q_u$ , et par suite  $\mathcal{L}_{-s\varphi_u}$ , soient analytiques en  $u$ . On peut contourner ce problème en introduisant un second opérateur. A cet effet, et pour simplifier, faisons les hypothèses suivantes :

- (a) La matrice  $B$  est irréductible et apériodique
- (b) La fonction  $\varphi_u$  est strictement positive sur  $\Sigma_B$ .

Sinon, on modifie  $B$  et  $\varphi_u$ , afin de s'y ramener.

D'après l'exemple 2.6.5.a), la quantité :

$$\exp(\varphi_u(\mathbf{j}))$$

est le facteur conforme de  $a_{u,j_0}^{-1}$  en  $q_u(\mathbf{j})$ , pour la métrique euclidienne sur  $S^{n-1} = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Autrement dit :

$$(1) \quad \exp(\varphi_u(\mathbf{j})) = \|(a_{u,j_0}^{-1})'(q_u(\mathbf{j}))\| .$$

Aussi, pour  $i = 1, \dots, t$ , considérons les ensembles :

$$\mathcal{C}(i) = \{\mathbf{j} \in \Sigma_B \text{ avec } j_0 = i\} ,$$

et les sous-ensembles de  $S^{n-1}$  :

$$q_u(\mathcal{C}(i)) .$$

D'après l'hypothèse (b) et la relation (1),  $a_{u,i}^{-1}$  est dilatante sur  $q_u(\mathcal{C}(i))$ . De plus, d'après la propriété de Markov, on a :

$$a_{u,i}^{-1}q_u(\mathcal{C}(i)) = \bigcup_{B_{ij}=1} q_u(\mathcal{C}(j)) .$$

Donc, lorsque  $B_{ij} = 1$ ,  $a_{u,i}$  vérifie :

$$(2) \quad a_{u,i}q_u(\mathcal{C}(j)) \subset q_u(\mathcal{C}(i)) ,$$

et elle est contractante sur  $q_u(\mathcal{C}(j))$ . Soit alors pour  $j = 1, \dots, t$ ,  $F_j$  un  $\varepsilon$ -voisinage fermé dans  $\mathbb{C}^{n-1}$ , de l'ensemble  $q_u(\mathcal{C}(j))$  considéré comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ . Choisissons  $\varepsilon$  suffisamment petit de manière à ce que :

- (3) Si  $B_{ij} = 1$ ,  $a_{u,i}$  soit contractante sur  $F_j$ , de coefficient de contraction majoré par une constante strictement inférieure à 1.

En particulier on a, compte tenu de (2) :

$$(4) \quad \text{Si } B_{ij} = 1, \text{ alors } a_{v,i}F_j \subset \mathring{F}_i.$$

Observons que les conditions (3) et (4) sont ouvertes dans  $\mathcal{R}$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $u$  dans  $\mathcal{R}$ , tel que pour  $v$  appartenant à  $V$ , les éléments  $a_{i,v}$  satisfassent encore les conditions (3) et (4).

Soit alors pour  $j = 1, \dots, t$ ,  $E_j$  l'espace de Banach des applications holomorphes sur  $\mathring{F}_j$  et continues sur  $F_j$ , et soit  $E$  l'espace de Banach :

$$E = \bigotimes_{j=1}^t E_j.$$

Pour  $(v, s) \in V \times \mathbb{R}$ , soit  $L_{v,s}$  l'opérateur de  $E$  dans lui-même, défini de la manière suivante : Soit  $h = (h_1, \dots, h_t)$  un élément de  $E$ , alors  $L_{v,s}h = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_t)$ , avec :

$$\bar{h}_j(z) = \sum_{i=1}^t B_{ij} \|a'_{v,i}(z)\|^s h_i \circ a_{v,i}(z)$$

$\|a'_{v,i}(z)\|$  désigne par abus de notation la fonction holomorphe sur  $F_j$ , dont la restriction à  $\mathbb{R}^{n-1}$  est l'application analytique réelle  $\|a'_{v,i}(x)\|$ . Par définition de  $V$ ,  $L_{v,s}$  est bien défini.

Ce type d'opérateur a été introduit par D. Ruelle [Rue], étudié et utilisé par de nombreux auteurs, dont M. Pollicott [Po], D. Mayer [M]. Lorsque la matrice  $B$  est irréductible apériodique et lorsque les applications  $a_{v,i}$  satisfont la condition (3), ils sont compacts, ont une unique valeur propre réelle  $\beta_{v,s}$  qui est simple isolée et dominante.

Un vecteur propre de  $L_{v,s}$  donne par restriction, un vecteur propre de  $\mathcal{L}_{-s\varphi_v}$  de même valeur propre. Donc :

$$\beta_{v,s} = \lambda_{-s\varphi_v}.$$

De plus,  $L_{v,s}$  dépend analytiquement des paramètres. Dès lors, par perturbation analytique et par le théorème des fonctions implicites analytiques, on obtient la réelle analyticité de l'entropie topologique.

Enfin, compte tenu du théorème 2.10.4, on obtient également la réelle analyticité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite.



## Références

- [B.1] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms, Springer Lectures Notes in Mathematics, 470 (1975).
- [B.2] R. Bowen, Hausdorff dimension of quasi circles, I.H.E.S., Publ. Math., 50 (1979), 11–26.
- [B.3] R. Bowen, Symbolic dynamics for hyperbolic flows, Amer. J. Math., 95 (1973), 429–460.
- [B-S] R. Bowen and C. Series, Markov maps associated to Fuchsian groups, I.H.E.S., Publ. Math., 50 (1979), 153–170.
- [Be] N. Benakli, Polyèdres hyperboliques, passage du local au global, Thèse, Université de Paris-Sud, (1992).
- [Bea] A.F. Beardon, The geometry of discrete groups, G.T.M 91 (1983).
- [Bi-S] S.J. Birman and C. Series, Dehn’s algorithm revisited, with applications to simple curves on surfaces, Combinatorial group theory and topology, Ann. Math. Studies III, Princeton U.P. (1987), 451–478.
- [Bo] M. Bourdon, Applications de Markov sur un groupe hyperbolique et son bord, et formalisme thermodynamique, Prépublication Université de Paris-Sud, (1992).
- [C] M. Coornaert, Sur les groupes proprement discontinus d’isométries des espaces hyperboliques au sens de M. Gromov, Thèse, publication de l’IRMA, Strasbourg (1990).
- [Ca] J. Cannon, The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups, Geom. Dedicata 16 (1984), 123–148.
- [C-D-P] M. Coornaert, T. Delzaut et A. Papadoulos, Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture notes in Math. 1441 Springer (1990).
- [C-E-H-P-T] J.W. Cannon, D.B.A. Epstein, D.F. Holt, M.S. Paterson et W.P. Thurston, Word processing and group theory, Bartlett and Jones, Boston (1992).
- [C-P] M. Coornaert et A. Papadopoulos, Dynamique symbolique et groupes hyperboliques, Prépublication IRMA Strasbourg (1992), à paraître au Lecture notes de Springer Verlag sous le titre : Symbolic dynamics and hyperbolic groups.
- [F] W.J. Floyd, Group completions and limits sets of kleinian groups, Invent. Math. 57 (1980), 205–218.
- [G] M. Gromov, Hyperbolic groups, in “Essays in group theory”, (S.M. Gersten ed.), Springer, (1987), 75–263.
- [G-H] E. Ghys et P. de la Harpe (eds.), Sur les groupes hyperboliques d’après M. Gromov, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser, (1990).
- [Gu-Ha] Y. Guivarc’h et J. Hardy, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d’Anosov. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 24, n. 1, (1988), 73–98.
- [H] U. Hamenstädt, Time-preserving conjugacies of geodesic flows, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 12 (1992), 67–74.

- [Ha] F. Haglund, Les polyèdres de Gromov, Thèse, Université Lyon I (1992).
- [Ho] E. Hopf, Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature, *Bull. AMS*, **77** (1971), 863–877.
- [K] V.A. Kaimanovich, Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, **53** (1990), 361–393.
- [M] D.H. Mayer, Continued fractions and related transformations, in “Ergodic theory, Symbolic dynamics and Hyperbolic spaces”, T. Bedford, M. Keane, C. Series (Eds), Oxford University Press, (1991), 175–222.
- [N] P.J. Nicholls, The ergodic theory of discrete groups, Cambridge University Press, (1989).
- [P] S.J. Patterson, Lectures on measures on limit sets of kleinian groups, in “Analytical and geometric aspects of hyperbolic space”, Cambridge University Press (1987), 291–323.
- [Pan] P. Pansu, Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica* **14** (1989), 177–212.
- [Pau] F. Paulin, Topologies de Gromov équiariantes, structures hyperboliques et arbres réels, *Invent. Math.* **94** (1988), 53–80.
- [Po] M. Pollicott, Closed geodesics and zeta functions, in “Ergodic theory, Symbolic dynamics and Hyperbolic spaces”. T. Bedford, M. Keane, C. Series (Eds), Oxford University Press, (1991), 153–173.
- [P-P] W. Parry, M. Pollicott, Zeta functions and the periodic structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque* 187–188, (1990).
- [R] D. Rudolph, Ergodic behaviour of Sullivan's geometric measure on a geometrically finite hyperbolic manifold, *Erg. Th. Dynamical Systems*, **2** (1982), 491–512.
- [Rue] D. Ruelle, Zeta functions for expanding maps and Anosov flows, *Invent. Math.* **34** (1976), 231–242.
- [S.1] C. Series, The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups, *Erg. th. Dynamical Systems*, **1** (1981), 337–360.
- [S.2] C. Series, Geometrical methods of symbolic coding, in “Symbolic dynamics and Hyperbolic spaces”, T. Bedford, M. Keane, C. Series (Eds), Oxford University Press, (1991), 125–151.
- [Su] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publ. math. I.H.E.S.*, **50** (1979), 171–202.
- [Su2] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures old and new and limit sets of geometrically finite kleinian groups, *Acta Math.*, **153** (1984), 259–277.
- [T] W.P. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Notes de cours, Princeton, 1978–1979.