



HAL
open science

Effets de la réticulation des fibrilles de cellulose sur le comportement hygro-mécanique effectif du bois à différentes échelles

Nhat-Tung Phan

► **To cite this version:**

Nhat-Tung Phan. Effets de la réticulation des fibrilles de cellulose sur le comportement hygro-mécanique effectif du bois à différentes échelles. Matériaux. Université Clermont Auvergne, 2022. Français. NNT : 2022UCFAC098 . tel-04141430

HAL Id: tel-04141430

<https://theses.hal.science/tel-04141430>

Submitted on 26 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EDSPIC :

UNIVERSITE CLERMONT AUVERGNE

ECOLE DOCTORALE
Sciences Pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

THÈSE

Présentée par

Nhat-Tung PHAN

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : INGÉNIERIE DES MATÉRIAUX

Titre de la thèse :

**Effets de la réticulation des fibrilles de cellulose sur le
comportement hygro-mécanique effectif du bois à différentes
échelles**

Soutenue prévue en 09 décembre 2022 devant le jury :

Mme. Delphine Jullien, MCF HdR, Université de Montpellier	Rapporteur
M. Frédéric Dubois, PR, Université de Limoges	Rapporteur
M. Michel Bornert, ICPEF, Ecole des Ponts Paristech	Examineur
M. Michel Grédiac, PR, Clermont Auvergne INP	Examineur
M. François Auslender, MCF HdR, Clermont Auvergne INP	Directeur de thèse
M. Joseph Gril, DR, Clermont Auvergne INP	Directeur de thèse
M. Rostand Moutou-Pitti, MCF HdR, Clermont Auvergne INP	Invité
M. Tancrede Alméras, CR, Université de Montpellier	Invité

Résumé

La détermination du comportement hygro-élastique du bois sous l'effet de chargements mécaniques ou de changements environnementaux présente un enjeu pratique important, du fait de son utilisation dans de nombreux domaines tels que la construction, l'industrie, l'ameublement, etc. Classiquement, le bois peut être considéré comme un matériau hiérarchique, c'est-à-dire un matériau possédant une structure multi-échelle. Pour de nombreux problèmes impliquant de tels matériaux, la structure hétérogène à une échelle particulière peut être remplacée par une structure homogène aux propriétés similaires déterminées par l'application de méthodes d'homogénéisation. Dans cette thèse, on vise à étudier l'influence de la morphologie réelle de la paroi cellulaire sur le comportement macroscopique du bois en prenant en compte des fibrilles cellulosiques ondulées et interconnectées entre elles, plutôt que de les considérer parallèles comme cela est supposé habituellement dans la littérature. Pour cela, un modèle multi-échelle, qui permet d'estimer le comportement macroscopique du bois, sera développé. Ce modèle multi-échelle intègre 3 échelles différentes de microstructure du bois : celle de la paroi cellulaire, celle du tissu et celle du cerne, à partir desquelles on s'appuiera sur des méthodes d'homogénéisation à la fois numériques et analytiques pour déterminer leur comportement effectif en définissant à chaque échelle considérée une cellule élémentaire périodique. A l'aide de ce modèle multi-échelle, on montre que l'influence des ondulations et interconnexions des fibrilles est significative pour certains modules macroscopiques, tels que les modules de cisaillement effectifs, alors qu'elle ne l'est pas pour d'autres modules au niveau macroscopique (échelle du cerne). De plus, bien que l'effet des réticulations des fibrilles soit assez fort pour certaines composantes du comportement élastique au niveau de la paroi cellulaire, il perd de son importance au niveau macroscopique, surtout pour le bois de faible densité. Cette tendance peut être expliquée par l'inclinaison antisymétrique des microfibrilles dans les parois des cellules adjacentes. En revanche, pour les bois les plus denses où l'interaction entre les parois cellulaires adjacentes est moins dominante, l'effet des ondulations des fibrilles reste important.

Mots clés : comportement hygro-élastique effectif, modèle multi-échelle, homogénéisation numérique, ondulations et interconnexions des fibrilles.

Abstract

The determination of the hygro-elastic behavior of wood under mechanical loading or environmental changes is of great practical interest, because of its use in many fields such as construction, industry, furniture, etc. Classically, wood can be considered as a hierarchical material, i.e. a material with a multi-scale structure. For many problems involving such materials, the heterogeneous structure at a particular scale can be replaced by a homogeneous structure with similar properties determined by applying homogenization methods. In this thesis, we aim to study the influence of the real cell wall morphology by considering wavy and interconnected cellulosic fibrils on the macroscopic behavior of wood, rather than considering them parallel as usually assumed in the literature. For this purpose, a multi-scale model, which allows to estimate the macroscopic behavior of wood, has been developed. This multi-scale model integrates 3 different scales of wood microstructure: cell wall, tissue and ring. From these scales, we will use both numerical and analytical homogenization methods to determine their effective behavior by defining a periodic elementary cell at each scale. Using this multi-scale model, we show that the influence of the undulations and interconnections of the fibrils is significant for some macroscopic moduli, such as the effective shear moduli, while it is not significant for other moduli at the macroscopic level (growth-ring scale). Furthermore, although the effect of fibril crosslinks is quite strong for some components of elastic behavior at the cell wall level, it loses its importance at the macroscopic level, especially for low-density wood. This tendency can be explained by the antisymmetric tilting of microfibrils in adjacent cell walls. On the other hand, for denser woods where the interaction between adjacent cell walls is less dominant, the effect of fibrils undulations remains important

Keywords: effective hygro-elastic behavior, multiscale model, numerical homogenization, fibrils undulations and interconnections.

Remerciements

Je tiens à remercier, tout d'abord, mes deux directeurs de thèse François AUSLENDER et Joseph GRIL pour tout ce qu'ils m'ont apporté du point de vue scientifique, professionnel et personnel et ses qualités pédagogiques. Leur encadrement quotidien soigneux, mais aussi la liberté qu'ils m'ont laissées dans le travail m'ont fait progresser continument sur la voie de l'apprentissage de la recherche scientifique. Je tiens à remercier également Monsieur Rostand Moutou-Pitti pour ses encouragements, sa sympathie, ainsi que sa rigueur et sa vision éclairée du travail de recherche.

Je remercie les membres du jury, Madame Delphine Jullien, Messieurs Frédéric Dubois, Michel Bornert, Michel Grédiac et Tancrede Alméras qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier également tous les membres à Polytech Clermont avec qui j'ai passé trois belles années au laboratoire. Merci en particulier aux doctorants, chercheurs de la salle B202 : Rime, Caroline, Hichem, Martian, Arthur, Khaled, Mohamed, Arnauld, Bilal. Merci pour tous ces bons moments passés ensemble.

Merci aussi à mon amour Hoa pour rester toujours à côté, à m'avoir encouragé quoi qu'il arrive, de partager ma vie et de la rendre plus belle.

Je remercie enfin ma famille, au sens large du terme, qui m'a donné la chance d'arriver jusqu'ici.

PHAN Nhat-Tung

Table des matières

TABLE DES MATIERES	0
PARTIE INTRODUCTIVE	1
1.1 INTRODUCTION GENERALE	1
1.2 ETAT DE L'ART	2
1.2.1 <i>Un matériau à structure multi-échelle</i>	2
1.2.2 <i>Composition chimique du bois</i>	8
1.2.3 <i>Comportement mécanique du bois</i>	10
1.2.4 <i>Homogénéisation</i>	16
1.2.5 <i>Démarche</i>	18
PARTIE I : COMPORTEMENT EFFECTIF DE LA PAROI CELLULAIRE DU BOIS	20
CHAPITRE 2 : MICROSTRUCTURE A ONDULATION DANS UNE DIRECTION	21
2.1 OBJECTIF DU CHAPITRE	21
2.2 COMPORTEMENT EFFECTIF DE LA PAROI CELLULAIRE.....	21
2.2.1 <i>Représentation de la microstructure de la paroi du bois</i>	23
2.2.2 <i>Problème local à résoudre et calcul du comportement effectif</i>	24
2.2.3 <i>Description du maillage</i>	25
2.2.4 <i>Propriétés mécaniques de la cellule élémentaire</i>	27
2.2.5 <i>Application de conditions aux limites périodiques</i>	28
2.2.6 <i>Solution exacte d'un laminé bicouche</i>	28
2.3 APPLICATION	29
2.3.1 <i>Analyse de la précision de la solution en fonction du nombre d'éléments finis</i>	29
2.3.2 <i>Validation de la solution numérique</i>	32
2.3.3 <i>Etude paramétrique</i>	33
2.4 ESTIMATION ANALYTIQUE DE L'INFLUENCE DES FIBRES SUR LE COMPORTEMENT EFFECTIF	43
2.4.1 <i>Contribution des fibrilles seules au comportement effectif de la paroi</i>	43
2.4.2 <i>Conclusion</i>	55
CHAPITRE 3 : MICROSTRUCTURE A 2 SENS D'ONDULATIONS	56
3.1 OBJECTIF DU CHAPITRE	56
3.2 MODELISATION GEOMETRIQUE DE LA MICROSTRUCTURE A 2 SENS D'ONDULATIONS	56
3.2.1 <i>Description géométrique de la cellule élémentaire (pour le modèle 2S)</i>	56
3.2.2 <i>Description du maillage</i>	60
3.3 CALCUL DES PROPRIETES ELASTIQUES EFFECTIVES PAR HOMOGENEISATION PERIODIQUE	64
3.3.1 <i>Convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments finis</i>	65
3.3.2 <i>Estimation corrélative du ratio r_λ</i>	65
3.3.3 <i>Etude de l'influence des ondulations</i>	66
CHAPITRE 4 : EXTENSION A L'HYGRO-MECANIQUE	73
4.1 OBJECTIF DU CHAPITRE	73
4.2 PROBLEME LOCAL A RESOUDRE ET CALCUL NUMERIQUE DU COMPORTEMENT EFFECTIF	73
4.3 VALIDATION DE LA SOLUTION NUMERIQUE	74
4.4 APPLICATION	77
4.4.1 <i>Effet du gonflement de la matrice</i>	77
4.4.2 <i>Effet du gonflement de la fibre</i>	80
4.4.3 <i>Conclusion</i>	83

PARTIE II : COMPORTEMENT MESOSCOPIQUE DU BOIS : ECHELLE DU TISSU	85
CHAPITRE 5 : EVALUATION PAR HOMOGENEISATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT HYGRO-ELASTIQUE DU TISSU	86
5.1 STRUCTURE DU TISSU.....	86
5.1.1 <i>Observation de la géométrie réelle</i>	<i>86</i>
5.1.2 <i>Description de la microstructure du tissu</i>	<i>87</i>
5.1.3 <i>Bois initial et bois final</i>	<i>88</i>
5.2 DE LA PAROI CELLULAIRE AU TISSU : ESTIMATION DU COMPORTEMENT PAR HOMOGENEISATION NUMERIQUE.....	91
5.2.1 <i>Maillage (bois initial, bois final)</i>	<i>91</i>
5.2.2 <i>Propriétés hygro-élastiques effectives du tissu</i>	<i>93</i>
5.2.3 <i>Convergence.....</i>	<i>94</i>
5.3 APPROCHE ANALYTIQUE.....	95
5.3.1 <i>Comportement homogénéisé du tissu.....</i>	<i>96</i>
5.3.2 <i>Propriétés effectives planes du tissu</i>	<i>104</i>
5.3.3 <i>Comparaison entre solutions numérique et analytique</i>	<i>111</i>
CHAPITRE 6 : INFLUENCE DES ONDULATIONS DES FIBRILLES SUR LE COMPORTEMENT HYGRO-ELASTIQUE DU TISSU	114
6.1 INFLUENCE DES ONDULATIONS DES FIBRILLES SUR LES PROPRIETES ELASTIQUES DES TISSUS	114
6.1.1 <i>Analyse pour différentes densités du tissu</i>	<i>114</i>
6.1.2 <i>Effet du ramollissement de la matrice.....</i>	<i>118</i>
6.2 INFLUENCE DES ONDULATIONS SUR LES PROPRIETES HYDRIQUES EFFECTIVES DES TISSUS	119
6.2.1 <i>Effet du gonflement de la matrice.....</i>	<i>120</i>
6.2.2 <i>Effet du gonflement de la fibrille.....</i>	<i>122</i>
6.3 CONCLUSION	125
PARTIE III : COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DU BOIS : ECHELLE DES CERNES	126
CHAPITRE 7 : EVALUATION PAR HOMOGENEISATION DES PROPRIETES HYGRO-ELASTIQUES EFFECTIVES DES CERNES.....	127
7.1 HETEROGENEITE AU NIVEAU DU CERNE DE CROISSANCE	127
7.2 PROPRIETES HYGRO-ELASTIQUES MACROSCOPIQUE DU CERNE.....	129
7.2.1 <i>Du tissu au cerne : estimation du comportement effectif par homogénéisation analytique</i>	<i>129</i>
7.2.2 <i>Evaluation numérique des propriétés élastiques macroscopiques.....</i>	<i>131</i>
CHAPITRE 8 : INFLUENCE DES ONDULATIONS DES FIBRILLES SUR LE COMPORTEMENT ELASTIQUE DES CERNES.....	133
8.1 SOLUTION DE REFERENCE	133
8.1.1 <i>Données expérimentales pour des bois résineux (D. Guitard).....</i>	<i>133</i>
8.1.2 <i>Construction de la solution numérique de référence.....</i>	<i>134</i>
8.1.3 <i>Comparaison de la solution de référence aux données expérimentales</i>	<i>135</i>
8.1.4 <i>Conclusion</i>	<i>137</i>
8.2 INFLUENCE DES ONDULATIONS SUR LES PROPRIETES ELASTIQUES MACROSCOPIQUES	137
8.2.1 <i>Analyse pour différentes densités du bois</i>	<i>137</i>
8.2.2 <i>Effet du ramollissement de la matrice.....</i>	<i>139</i>
8.3 INFLUENCE DES ONDULATIONS SUR LES PROPRIETES HYDRIQUES EFFECTIVES DES CERNES	140
8.4 CONCLUSION	141
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	143
CONCLUSION GENERALE	143
PERSPECTIVES	144

RÉFÉRENCES	146
A. ANNEXE A	I
B. ANNEXE B	I
C. ANNEXE C	I
D. ANNEXE D	I

Partie introductive

1.1 Introduction générale

Le bois est l'un des matériaux les plus anciens et les plus universels utilisés par l'homme. En réponse aux changements environnementaux, à la croissance démographique et à l'augmentation du standard de vie, la demande mondiale de matière à base de ligno-cellulose s'est accélérée (Hansen and Juslin, 2018). Favorisé par le contexte actuel de développement durable, le bois est un matériau naturel renouvelable aux propriétés mécaniques et thermiques très intéressantes. Ces dernières années, l'utilisation du matériau bois se fait de plus en plus intensive dans plusieurs secteurs : construction, ameublement, objet d'art/culturel et particulièrement l'industrie (fibres textiles naturelles, nanocellulose, etc.). Les avantages de ce matériau sont principalement ses excellentes performances mécaniques par rapport à la densité, expliquées par son organisation structurale (Salmén, 2018). Cependant, l'étude du matériau bois a révélé une grande variabilité des propriétés mécaniques et diverses échelles d'hétérogénéité. A cette fin, une meilleure compréhension des relations structure-propriétés est nécessaire pour améliorer notre capacité à concevoir des produits dérivés du bois. Etant donné que le bois est considéré comme un matériau composite naturel possédant une organisation multi-échelle complexe, son comportement découle des différents matériaux le constituant et de leur répartition spatiale, ceci aux différentes échelles du bois. L'anisotropie du bois résulte alors de la contribution de différentes échelles d'hétérogénéité: cernes de croissance concentriques avec alternance de bois initial et de bois final au niveau macroscopique, arrangement mésoscopique en nid d'abeille des cellules des tissus, stratification microscopique de la paroi cellulaire, alignement macromoléculaire des microfibrilles cellulosiques (Harrington, 2002; Rafsanjani, 2013; Terashima and Fukushima, 1988).

Dans le contexte actuel, l'utilisation de la simulation numérique devient de plus en plus intensive. Dans l'objectif de réduire le recours systématique à des tests expérimentaux coûteux, la nécessité des modèles numériques, associée au développement de lois de comportement dédiées à un matériau complexe comme le bois, conduit alors à un regain d'intérêt de la part de plusieurs équipes de recherche. La modélisation de relations structure-propriétés du bois présente toujours un défi pour les ingénieurs en mécanique. Malgré cette complexité, il existe un certain degré d'organisation et de régularité résultant du processus de formation du bois, qui a été à la base de plusieurs approches micro-macro pour prédire son comportement élastique, basé sur une combinaison de règles de mélange et de techniques d'homogénéisation (Cave, 1968; Harrington, 2002; Hofstetter and Gamstedt, 2009; Persson, 2000; Rafsanjani, 2013; Salmén and De Ruvo, 1985; Thuvander et al., 2002). En fait, la prédiction du comportement mécanique d'un matériau à l'échelle microscopique présente toujours des problèmes complexes, même pour les matériaux les plus simples. Les caractéristiques mécaniques du matériau dépendent de la prise en compte des contraintes existantes et des déformations locales à l'intérieur du matériau. Toutefois, ces dernières sont souvent absentes dans les résultats obtenus en appliquant les théories conventionnelles de la mécanique des milieux continus aux matériaux ligneux. Les théories de la mécanique des continus se limitent alors à l'étude des propriétés effectives. Par ailleurs, dans un matériau aussi intrinsèquement inhomogène que le bois, les valeurs locales des contraintes et des déformations peuvent différer sensiblement des valeurs moyennes pour une classe particulière de conditions de chargement. La méthode traditionnelle pour déterminer l'état des contraintes en un point donné consiste à définir certaines propriétés équivalentes du matériau qui caractérisent, de façon générale, le comportement mécanique et, de façon implicite, reflètent l'hétérogénéité et les détails de la microstructure. En utilisant ces propriétés mécaniques "moyennes" à proximité d'un point donné, c'est-à-dire en utilisant les relations constitutives macroscopiques, les déplacements, les déformations et les contraintes sont calculés dans un sens "moyen".

L'objectif principal de ce travail est d'appliquer la méthode d'homogénéisation périodique aux matériaux à base de bois, dont les résultats pourront être exploités ultérieurement dans le cadre de

l'optimisation structurelle. La démarche dans cette thèse consiste à appliquer cette méthode pour analyser le comportement mécanique linéaire du bois afin d'étudier sa réponse aux charges appliquées à la fois localement (c-à-d à l'échelle microscopique) et globalement (c-à-d à l'échelle macroscopique). Toutefois, cette démarche ne peut être considérée comme nouvelle en ce qui concerne l'idée de recherche des paramètres optimaux des matériaux et des structures, du fait qu'elle a été employée dans le domaine des matériaux composites synthétiques, mais elle est novatrice dans le domaine de la technologie du bois.

L'approche multi-échelle évoquée est employée dans cette thèse pour étudier la relation entre la microstructure du bois et ses propriétés hygro-élastiques. Plus particulièrement, ce travail de thèse vise à étudier l'influence des ondulations et connexions des fibrilles observées au sein de la paroi cellulaire sur les propriétés hygro-élastiques du bois. Il sera composé de 3 parties principales permettant d'analyser au travers d'études paramétriques l'influence de ces ondulations à trois niveaux d'échelles différents : les échelles de la paroi cellulaire, du tissu cellulaire et du cerne de croissance.

- **Partie I - Comportement effectif de la paroi cellulaire** : cette première partie introduira la description morphologique améliorée de la matière constitutive de la paroi dans un modèle d'homogénéisation périodique de la cellule. A cette fin, on présentera une cellule représentative constituées de microfibrilles ondulées et connectées au lieu de microfibrilles parfaitement parallèles classiquement utilisées dans la littérature. Ensuite, lorsque les ingrédients essentiels de la méthode d'homogénéisation périodique seront disponibles, l'application de cette méthode à la prédiction des propriétés hygro-élastiques de la paroi cellulaire sera effectuée pour différentes microstructures de la paroi cellulaire (fibrilles parallèles, ondulées dans une direction et ondulées dans deux directions).
- **Partie II - Comportement mésoscopique du bois** : cette partie vise à analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique effectif des tissus cellulaires de bois initial et de bois final en appliquant à nouveau la procédure d'homogénéisation numérique périodique présentée dans la partie I. La cellule de base à cette échelle sera décrite comme étant inspirée de la structure des nids d'abeilles composée de parois cellulaires multicouches, orthotropes. De plus, une approche analytique permettant d'estimer les propriétés élastiques effectives du tissu cellulaire sera également proposée.
- **Partie III - Comportement macroscopique du bois** : le bois à l'échelle macroscopique sera décrit comme un arrangement périodique de couches homogènes de bois initial et de bois final. Le comportement macroscopique du bois dans les directions (L, R, T) est calculé en utilisant une solution analytique pour un stratifié plan constitué de la répétition périodique de deux couches élastiques orthotropes, dont les comportements hygro-élastiques sont obtenus en appliquant les deux procédures d'homogénéisation EF décrites dans les parties I et II.

1.2 Etat de l'art

1.2.1 Un matériau à structure multi-échelle

Le bois est un matériau complexe avec une structure composite multi-échelle, dont les propriétés physiques et mécaniques proviennent de la microstructure et de la composition chimique, à la fois composite et fortement hiérarchisée. Ainsi, pour avoir une bonne compréhension du comportement mécanique du bois aux différentes échelles impliquées, il est nécessaire de fournir quelques données de base sur l'anatomie et les propriétés physico-chimiques, en se limitant volontairement aux notions élémentaires et en donnant à l'occasion une interprétation mécaniste de certaines propriétés (Guitard, 1987). Dans ce mémoire, on va décrire le bois du point de vue d'un mécanicien qui cherche à le modéliser. Cela conduit à aborder les propriétés du bois « parfait » où les inhomogénéités telles que les nœuds, ou les zones particulières telles que le bois de réaction ou le bois juvénile ne sont pas prises en

compte. Par ailleurs, une description de la structure du bois à différentes échelles de longueur étant nécessaire, on décrira trois niveaux principaux (Figure 1-1) l'échelle macroscopique ; celle des cernes, visible à l'œil nu ; l'échelle mésoscopique, des tissus ; l'échelle subpariétale, des parois cellulaires.

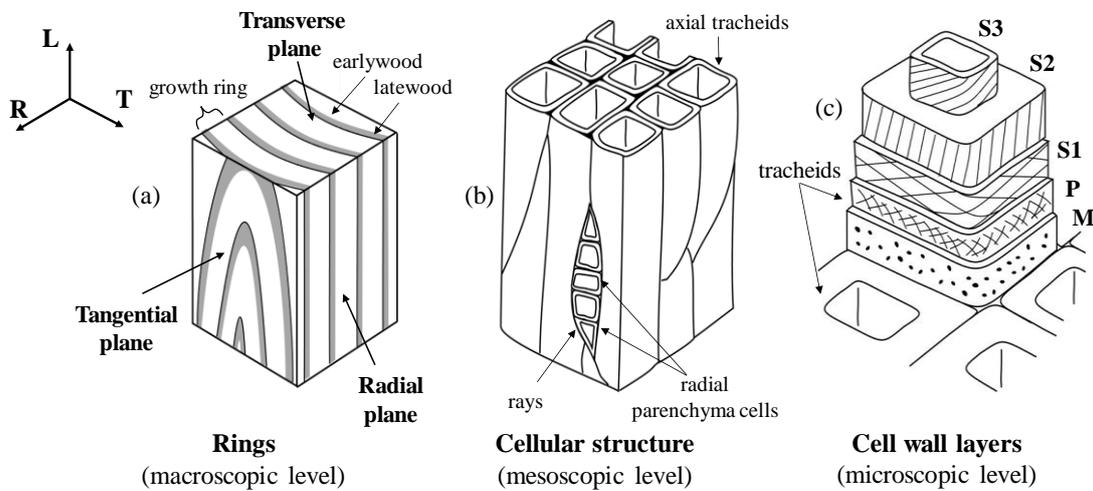


Figure 1-1 : Structure hiérarchique du bois (Norimoto and Gril, 1989) : (a) cernes de croissance, disposition et axes principaux ; (b) tissu cellulaire en forme de nid d'abeille ; (c) paroi cellulaire multicouche définie par l'orientation variable des microfibrilles cellulose.

Classiquement, les arbres sont divisés en deux grandes classes, les résineux (ou gymnospermes ou encore conifères) et les feuillus (ou angiospermes) (Phillips, 1941; Rowell, 2005), chacune ayant développé une « stratégie » particulière. Les résineux sont des plantes gymnospermes, qui germent à partir de graines non enfermées dans un ovule : ce sont typiquement des conifères avec des feuilles en forme d'aiguille (voir Figure 1-2a-droite). Les feuillus sont des plantes angiospermes, dont la graine est entourée d'un ovule, majoritairement des arbres à fleurs et à feuilles larges (voir Figure 1-2a-gauche). A part la différence de la graine dont ils sont issus, la distinction la plus importante entre les résineux et les feuillus se trouvent dans leur structure cellulaire (voir Figure 1-2b, c).

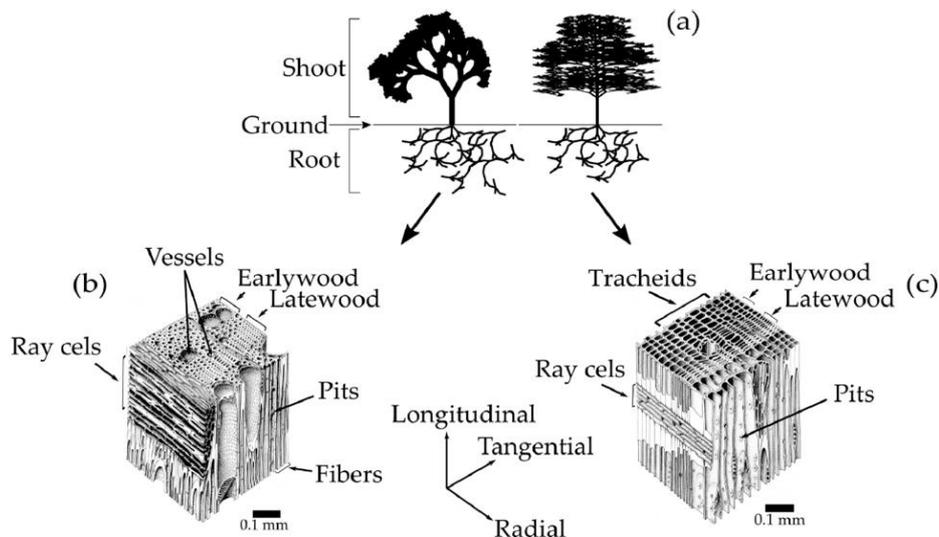


Figure 1-2 : (a) Représentation générale d'arbres feuillus et résineux ; (b) image de la structure cellulaire d'un feuillu ; (c) image de la structure cellulaire d'un résineux (Arzola-Villegas et al., 2019).

a) Echelle macroscopique – échelle des cernes

L'observation à l'œil nu de la section transversale d'un tronc (Figure 1-3) permet de distinguer différentes zones, en allant de la périphérie vers le centre: l'écorce, le cambium (l'écorce ou le bois en formation), l'aubier (le bois jeune), le duramen (le bois parfait) et la moelle. En plus de cette structuration, on peut observer également sur une telle coupe transversale des cernes de croissance, à l'intérieur desquels des anneaux concentriques de couleur claire correspondent au bois initial (printemps) se formant au début de la saison de croissance (printemps dans la zone tempérée) et les anneaux concentriques plus foncés et plus denses au bois final (été).

Cette structure, due au mode de division et de croissance des cellules dans l'arbre, conduit à trois directions principales d'anisotropie (voir Figure 1-3) : la direction longitudinale L suivant la direction de l'axe du tronc, la direction radiale R dirigée du cœur vers l'écorce, et la direction tangentielle T. Ces trois directions sont associées à trois plans caractéristiques : plan transverse RT (perpendiculaire à L), plan radial RL (perpendiculaire à T et passant par la moelle) et tangentiel TL (perpendiculaire à R). Ces plans de référence décrivent le « plan ligneux » d'une espèce du bois. Toutefois, Il faut rester conscient que le tronc d'un arbre dans la réalité s'écarte de mille manières de cette simplicité géométrique par des perturbations telles que la conicité du tronc, le décentrage du cœur, l'ondulation des cernes, les fibres torsées, etc. Toutefois, en négligeant ces perturbations, on est amené à considérer que tout plan normal à l'axe du tronc (transverse) ou le contenant (radial) est un plan symétrie matérielle. Donc, la macrostructure du bois (le tronc), assimilée à une forme parfaitement cylindrique, est considérée sous l'angle d'un milieu continu homogène, orthotrope cylindrique (Guitard, 1987).

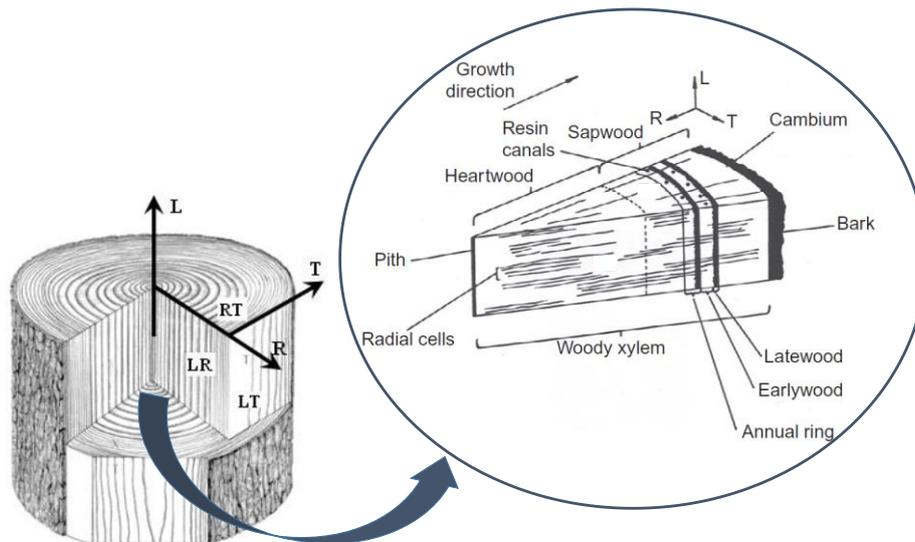


Figure 1-3 : coupe transversale d'un tronc sur laquelle on peut observer différentes zones (Ansell, 2015).

b) Echelle mésoscopique – échelle des tissus

La structure cellulaire des résineux est composée principalement de trachéides axiales (suivant l'axe du tronc) et de rayons ligneux distribués suivant la direction radiale R (Ross, 2010; Rowell, 2005). Sur la vue d'une coupe transversale du tronc (voir Figure 1-2c), plan (RT), les cellules de la trachéide chez les résineux apparaissent notamment sous une forme quasi rectangulaire avec des parois de 3 à 10 μm d'épaisseur qui sont plus épaisses pour le bois final et plus minces pour le bois initial. Les cellules des rayons ligneux, les parenchymes, ont la forme de prismes rectangulaires, généralement de 15 μm de haut sur 10 μm de large et de 120 à 250 μm de long dans le sens radial, de la moelle à l'écorce (Panshin and Zeeuw, 1970; Schulgasser and Witztum, 2015). Les trachéides sont des cellules tubulaires allongées (1 à 10 mm de long selon l'espèce de bois) alignées dans le sens longitudinal du tronc (Ross, 2010), et leur intérieur creux est appelé lumen. Les trachéides, qui composent environ 90 - 95% du volume du

bois, sont les cellules les plus importantes en termes de support mécanique et de transport d'eau dans les résineux (Rowell, 2005). Le système de transport de l'eau entre les trachéides consiste en des cavités dans les parois cellulaires appelées ponctuations. Les extrémités des trachéides se chevauchent et sont interconnectées par des paires de ponctuations qui permettent à l'eau de circuler de cellule en cellule. Les rayons ligneux sont alignés dans le sens radial et leur fonction principale est la synthèse, le stockage et la conduction latérale des produits biochimiques (Ross, 2010; Rowell, 2005).

Dans les feuillus, on peut observer trois types importants de cellules : les vaisseaux, les fibres et les parenchymes (voir Figure 1-2b). Les vaisseaux sont des tubes creux longs composés d'empilements de cellules spécialisées appelées éléments de vaisseau. La fonction principale des vaisseaux est la conduction de l'eau, qui s'écoule à travers des connexions bout à bout des vaisseaux appelées perforations. Les vaisseaux ont une longueur de 100 à 1200 μm et apparaissent comme de grandes ouvertures dans le plan transversal du bois dont le diamètre varie de 50 à 200 μm (Phillips, 1941; Ross, 2010). Les fibres sont 2 à 10 fois plus longues que les éléments des vaisseaux (Rowell, 2005). Les fibres des feuillus sont similaires aux trachéides des résineux, mais avec des dimensions plus petites (Rowell, 2005). Les cellules de parenchymes sont soit axiales, typiquement regroupées autour des vaisseaux, soit radiales pour constituer des rayons ligneux. La structure anatomique des feuillus est beaucoup plus diversifiée que celle des résineux, mais fonctionne de manière similaire vis-à-vis du comportement mécanique.

Les fibres des feuillus et les trachéides des résineux seront considérées comme des « cellules » de bois, du fait que la structure cellulaire correspondant à ces deux types d'essences est très similaire et que les cellules de bois sont l'élément de base dont les propriétés aux échelles supérieures dépendent. Par rapport à notre étude, nous allons viser à décrire, comprendre, modéliser les organisations géométriques, anatomiques et également des phénomènes physiques au sein des cellules du bois. Ceci nous conduit à donner un aperçu des recherches concernant les propriétés mécaniques du bois à l'échelle cellulaire, que l'on appellera désormais l'échelle du tissu dans ce mémoire.

A l'échelle du tissu, le bois présente une structure anatomique du type nid d'abeille, variable selon les essences, formées par des cellules allongées dans la direction du tronc et collées entre elles avec une certaine régularité. La disposition des cellules définit le plan ligneux (voir Figure 1-1b, c). On observe que la dimension des trachéides dans le bois initial (bois de printemps) est différente de celle dans le bois final (bois d'été), à savoir que les cellules du bois initial ont un diamètre (radial) plus grand et une épaisseur de paroi plus faible que celles du bois final, ce qui provoque un écart entre la densité et donc entre la rigidité du bois initial et du bois final. La structure en nid d'abeille contribue fortement à l'anisotropie entre la direction L et les autres. Mais la morphologie des cellules joue également un rôle significatif dans l'anisotropie transverse à l'échelle du tissu (Farruggia, 1998; Farruggia et al., 1996; Farruggia and Perré, 2000). On peut évaluer les propriétés élastiques à partir des propriétés pariétales et de la porosité (Gibson and Ashby, 1988) mais il faut aussi tenir compte de cette morphologie. Voici, à titre d'illustration, la diversité de formes et arrangements cellulaires dans le plan transverse que l'on rencontre à l'échelle du tissu chez les résineux :

- concernant la forme des cellules, selon les observations microscopiques, elle peut être approximativement rectangulaire (Guitard and Gachet, 2004; Navi et al., 1995), ou plus fréquemment proche de l'ovale (Hunter, 2001), ou aussi variable selon le type de tissu ligneux, hexagonale dans le bois initial et rectangulaire dans le bois final chez *Picea abies* (Bergander, 2001).
- concernant l'arrangement cellulaire dans le plan transverse, l'étude de Kahle and Woodhouse (1994) à partir de microphotographies le montre comme une organisation bidimensionnelle, avec des trachéides globalement alignées dans la direction R, tandis que la distribution est plus désordonnée dans la direction T.

c) Echelle microscopique - échelle des parois cellulaires

❖ Constitution de la paroi cellulaire

A l'échelle microscopique, une cellule de bois peut être considérée comme un tube creux dont la paroi est constituée de plusieurs couches apparaissant comme des lamelles concentriques (voir Figure 1-1 c). D'une manière générale, les parois végétales telles que celles du bois présentent des structures tubulaires composites avec des sections arrondies ou polygonales. Qu'il s'agisse de résineux ou de feuillu, la cavité cellulaire (le lumen) est remplie d'eau ou d'air, les cellules sont cimentées entre elles par la lamelle mitoyenne (couche M). La lamelle mitoyenne, qui assure l'adhésion entre les cellules adjacentes pour former les tissus, est composée majoritairement de lignine et de quelques hémicelluloses (Panshin and Zeeuw, 1970; Rowell, 2005). A ce titre, cette couche n'est pas considérée comme une couche de paroi cellulaire, mais plutôt comme une couche intercellulaire. La paroi cellulaire est alors composée de 2 couches principales, la paroi primaire (P), pour laquelle les fibrilles de cellulose sont distribuées aléatoirement dans son plan, et la paroi secondaire (S) qui se décompose elle-même en trois sous-couches S1, S2 et S3 (voir Figure 1-1 c) et où les fibrilles de cellulose ont une organisation hélicoïdale avec un angle de microfibrilles (AMF) différent pour chacune.

Selon la représentation de Salmén (2004), le matériau de la paroi cellulaire est lui-même un composite renforcé par des fibres pour lequel la matrice est un mélange de lignine et d'hémicelluloses de xyloxyanes, et les fibres correspondent aux macrofibrilles ; ces dernières consistant en un assemblage de microfibrilles, elles-mêmes constituées de cellulose cristalline, séparées par des hémicelluloses de glucomannane (voir Figure 1-4a) (Salmén, 2004). Plusieurs descriptions différentes de la taille et de la forme des microfibrilles sont disponibles dans la littérature, par exemple (Fengel, 1969; Kerr and Goring, 1975; Preston, 1934; Salmén, 2004).

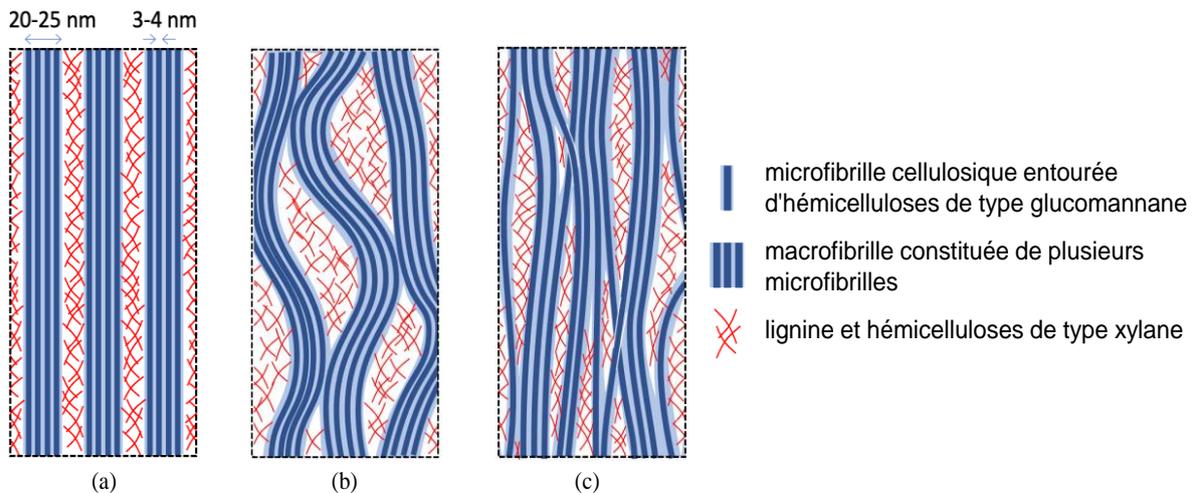


Figure 1-4 : Interprétation de l'interconnexion entre les macrofibrilles : (a) représentation classique avec des microfibrilles droites et parallèles regroupées en macrofibrilles séparées par une matrice de lignine ; (b) oscillations et contacts latéraux entre macrofibrilles par liaison hydrogène ; (c) connexions résultant du transfert aléatoire de microfibrilles oscillantes entre macrofibrilles voisines (Phan et al., 2022).

❖ La paroi secondaire

Contrairement à la couche P ayant une faible épaisseur (environ 0.1 μm) et contenant un taux faible de cellulose (environ 10%) (Rowell, 2005), et souvent indiscernable de la lamelle mitoyenne (pour constituer la lamelle moyenne composée), la paroi S est formée par dépôts successifs des couches vers l'intérieur de la cavité cellulaire au cours de la maturation (Dunning, 1968) ; elle est composée principalement de cellulose, sous forme de microfibrilles, mais contient aussi de la lignine et des hémicelluloses. Ces trois couches se singularisent non seulement par leur dimension géométrique et leur

composition chimique, mais également par l'inclinaison des microfibrilles par rapport à l'axe de la cellule (l'AMF). Pour ce qui concerne l'AMF, plusieurs méthodes existent pour le mesurer telles que : les mesures par diffraction des rayons X qui sont les plus pratiques, mais elles donnent un angle moyen sur plusieurs cellules (Cave, 1997), les mesures par micro-diffraction X sont aussi réalisables permettant de donner l'angle d'une cellule donnée (Lichtenberger et al., 1999).

La couche externe S1, qui se situe entre la paroi P les deux autres couches secondaires (S2, S3), représente environ 5 % à 10 % de l'épaisseur totale de la paroi (Fengel, 1969). Elle est la couche la plus mince de la paroi secondaire, avec une épaisseur de seulement 0,1 à 0,35 μm (Panshin and Zeeuw, 1970) et ses angles des microfibrilles cellulose sont de l'ordre de 60° à 80°. De plus, le renfort cellulosique de cette couche est en fait un croisillon de deux enroulements dans des sens inverses.

La couche centrale S2, dont l'épaisseur varie entre 1 et 10 μm , représente 90% du volume total de la paroi secondaire (Fengel, 1969). Cette couche est la plus épaisse de la paroi secondaire et joue un rôle dominant dans les propriétés mécaniques du bois. De plus, les microfibrilles de cette couche sont enroulées dans le sens direct à un faible angle (au minimum 5° pour les résineux) par rapport à l'axe de la cellule. En fait, l'AMF de la couche S2 varie de 5° à 40°, pour un bois dit « normal » (Barrett, 1973; Koponen et al., 1989; Mark, 1967; Navi et al., 1995). En tant qu'une composante essentielle de la paroi secondaire, la couche S2 est considérée comme responsable du comportement mécanique de la cellule du bois normal, ce point a été discuté par plusieurs études (Bodig and Jayne, 1982; Norimoto and Takabe, 1985).

La couche interne S3 est relativement mince, de 0,5 à 1,1 μm d'épaisseur, et constituée de microfibrilles de cellulose dont l'orientation avec l'axe de la cellule forme un angle de 60 à 90° d'après Kollman and Côté (1968).

❖ **Caractéristiques significatives de la disposition des microfibrilles au sein de la paroi secondaire**

De manière synthétique, la description anatomique de la paroi secondaire a été présentée dans la partie précédente. Toutefois, il reste encore beaucoup à dire et à questionner sur l'organisation structurale de la paroi secondaire. Dans la littérature, certains modèles d'organisation des composants, un réseau fibrillaire cellulosique et une matrice d'hémicellulose et de lignine (Boyd, 1982; Gril, 1988; Salmén, 2004) se sont inspirés du modèle de Scallan (1974) pour expliquer les propriétés du matériau bois (voir Figure 1-5).

Dans le modèle de Scallan (1974), la matrice d'hémicellulose et de lignine est disposée préférentiellement en couches tangentielles à la paroi cellulaire, mais de façon « aléatoire » et non sous la forme d'une lamelle, alors qu'elle occupe les zones lenticulaires (les clivages entre les microfibrilles) dans la direction radiale. L'interprétation des positions de la matrice amorphe et de la cellulose est illustrée par deux configurations alternatives des microfibrilles dans les faces radiale et tangentielle comme indiqué sur la Figure 1-5b, suggérant que les courbures des microfibrilles, autour des ouvertures lenticulaires, sont susceptibles d'impliquer localement des déplacements latéraux relatifs d'une grande partie des microfibrilles adjacentes (Boyd and Foster, 1974). Cette organisation des composants de la paroi cellulaire nous permet de considérer la structure en couches avec des zones lamellaires et lenticulaires, soit à l'échelle des microfibrilles ou soit à l'échelle des agrégats de microfibrilles (macrofibrilles).

A un 1^{er} niveau, en se plaçant à l'échelle des microfibrilles, le modèle mentionné par Boyd (1982) et Gril (1988) suppose que le réseau microfibrillaire est disposé en couches tangentielles à la paroi et recouvert d'hémicelluloses. Les incrustations entre les microfibrilles de forme lenticulaire sont remplies de matrice amorphe du fait que les microfibrilles ne sont pas rectilignes.

A un 2^{ème} niveau, en se plaçant à l'échelle des macrofibrilles, le modèle proposé par Salmén (2004) soutient que les microfibrilles sont liées dans une matrice d'hémicellulose mais agrégées en agrégats appelés macrofibrilles. Ces macrofibrilles sont enrobées essentiellement de lignine, mêlée d'hémicelluloses. Dans cette configuration, ce sont les macrofibrilles qui constituent un treillis formant des zones lenticulaires, remplies essentiellement de lignine, et les hémicelluloses enrobant les microfibrilles constituent des zones lamellaires. De plus, il a été observé que les macrofibrilles étaient disposées en couches tangentielle à la paroi. On reviendra plus en détail sur cette discussion dans le chapitre II.

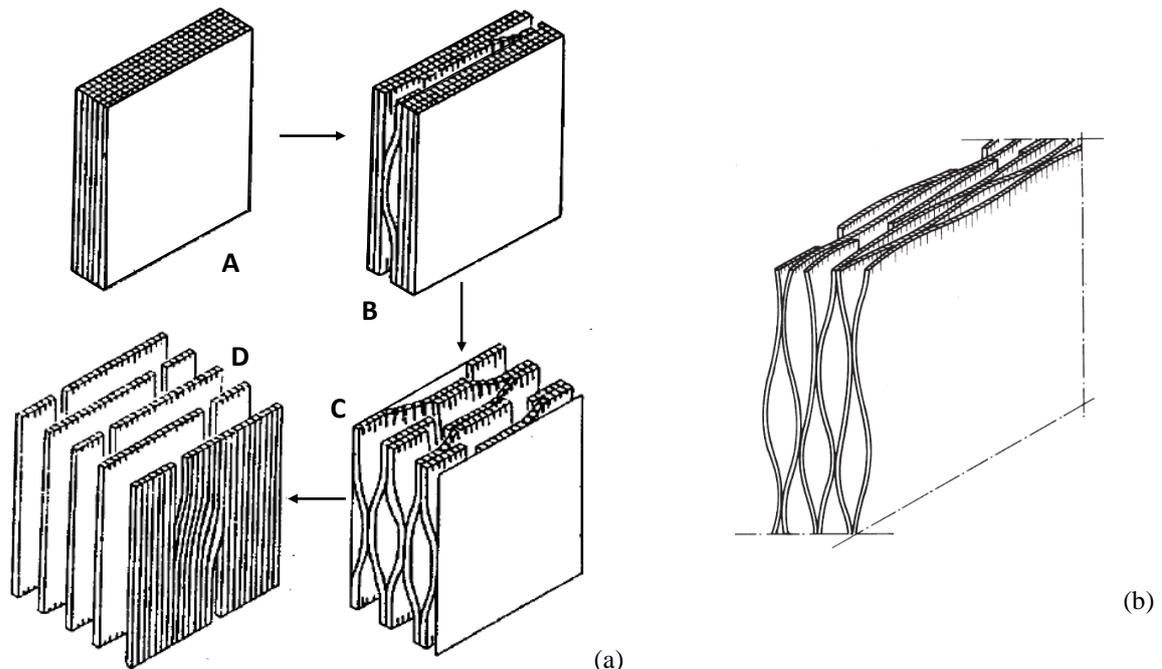


Figure 1-5 : (a) Evolution de la structure lamellaire d'une paroi cellulaire délignifiée d'après Scallan (1974) : un gonflement engendre la rupture radiale de liaisons (A - D) aboutissant à une structure quasi similaire à un « nid d'abeilles » (Gril, 1988) ; (b) Concept d'arrangement des microfibrilles dans S2, enfermant la lignine et autres matériaux de la matrice dans des plaquettes de forme lenticulaire ; la largeur des ouvertures est exagérée pour la clarté des présentations. Le côté gauche de la face tangentielle (longue) illustre le concept de Scallan (1974); le côté droit représente le concept de Boyd and Foster (1974) .

1.2.2 Composition chimique du bois

Le bois est constitué de composants chimiques élémentaires, lesquels s'associent pour former les macromolécules constituant les parois cellulaires des différents tissus retrouvés dans le bois. A ces éléments viennent s'ajouter l'eau et des minéraux. Il est nécessaire de faire une distinction entre les principales macromolécules et les composantes mineurs à faible poids moléculaires.

Les principales macromolécules constituant la paroi cellulaire, cellulose, hémicelluloses et lignine, sont considérées pour toutes les essences de bois comme induisant la résistance mécanique, la rigidité et l'hygroscopicité de la paroi cellulaire. La répartition de ces 3 composants varie d'une couche à l'autre (Panshin and Zeeuw, 1970) (voir Figure 1-6 et Figure 1-7). En dehors de ces principales macromolécules, les composants mineurs à faible poids moléculaire tels que les extractibles et les minéraux confèrent des propriétés plus spécifiques comme la couleur, l'odeur, la durabilité et l'abrasivité du bois (voir Figure 1-6).

La cellulose est le principal composant chimique du bois, sa concentration volumétrique dans les résineux atteignant environ 45 à 50 %. C'est un polymère cristallin avec de courtes régions amorphes, qui s'assemble par des liaisons hydrogènes en longs filaments partiellement cristallisés, appelés

« microfibrilles ». En fait, la cristallinité de la cellulose du bois varie de 67 à 90 % et les régions cristallines des chaînes de cellulose n'absorbent pas l'eau et peuvent donc être considérées comme indépendantes des changements d'humidité. Toutefois, certaines régions dans la direction axiale des microfibrilles sont amorphes car les chaînes de cellulose sont désordonnées. Les microfibrilles ont donc une structure semi-cristalline, cela signifie qu'une adsorption d'eau, susceptible de modifier les propriétés physiques, peut s'y produire comme dans les régions amorphes.

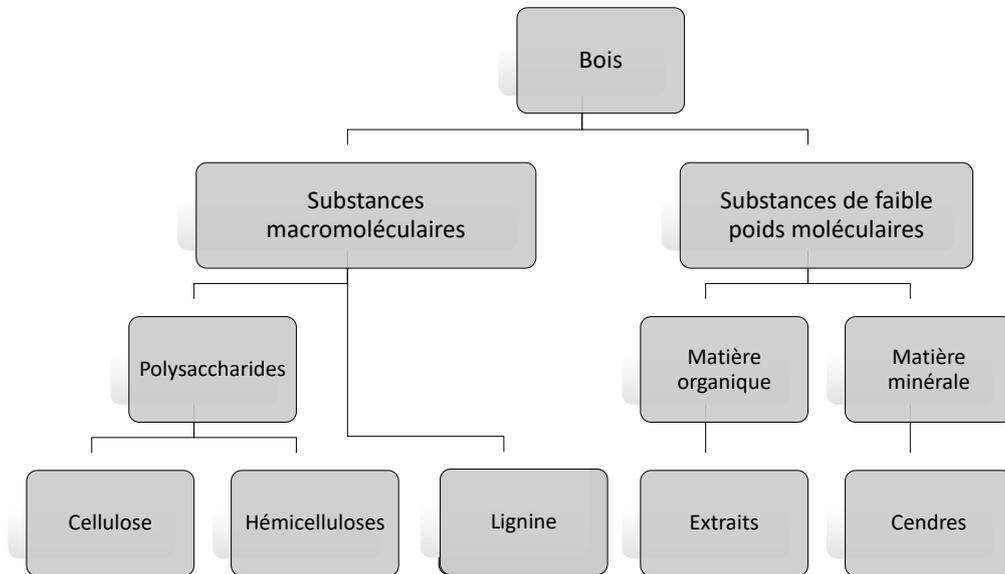


Figure 1-6 : Schématisation hiérarchique des composantes chimiques du bois (Fengel et al., 1989).

Les hémicelluloses sont des polysaccharides comme la cellulose et constituent une matrice amorphe autour des microfibrilles. Elles se différencient de la cellulose par des chaînes moléculaires beaucoup plus courtes, par des unités différentes doses et par des ramifications sur la chaîne principale.

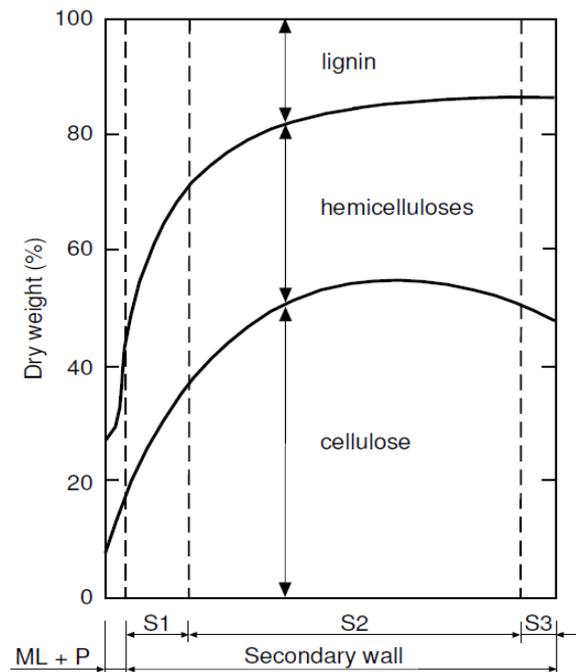


Figure 1-7 : Composition chimique des différentes couches de la paroi cellulaire (Panshin and Zeeuw, 1970).

La lignine, quant à elle, est un composé complexe ayant une structure moléculaire tridimensionnelle. Le détail de sa structure n'est pas parfaitement connu du fait de sa complexité et de sa variabilité, la lignine existant sous de multiples formes. Elle est amorphe et possède des propriétés qui dépendent de l'humidité et de la température. La teneur volumétrique de la lignine dans la paroi cellulaire du bois est d'environ 20 - 30 % (voir Figure 1-7).

1.2.3 Comportement mécanique du bois

a) Un matériau anisotrope à toutes les échelles

La description du bois à différentes échelles dans la section 1.2.1 met en évidence des directions privilégiées à chaque échelle. Nous utiliserons par la suite trois repères orthonormés avec à chaque fois la première direction correspondant à celle de plus grande résistance et rigidité. Ils sont représentés sur la Figure 1-8 : pour les trois échelles considérées, macroscopique (cerne de croissance), mésoscopique (tissu), et microscopique (paroi cellulaire), le repère qui sera utilisé sera respectivement: (a) celui associé aux cernes de croissance (L, R, T), (b) à une paroi cellulaire (1', 2', 3') et (c) aux fibrilles (1, 2, 3).

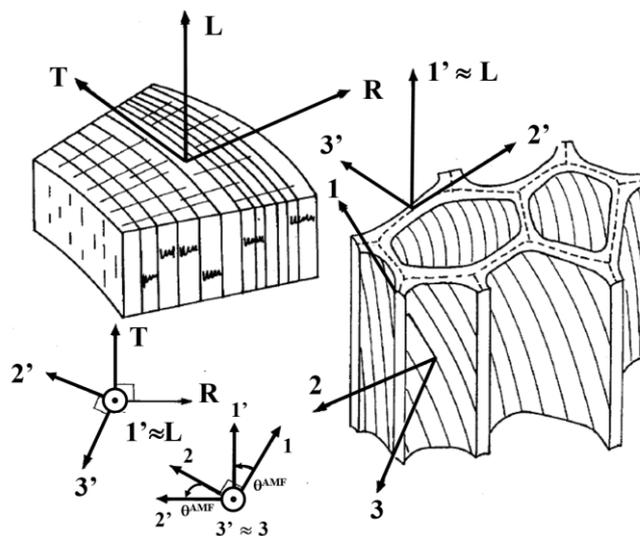


Figure 1-8 : orientations macroscopiques et microscopiques (Gril, 1988).

- (a) L'échelle des cernes : nous considérons le bois à cette échelle comme un matériau orthotrope dans le repère orthonormé (L, R, T), adoptant les hypothèses énoncées par Guitard (1987) :
- Dans le cas idéal, le tronc d'un arbre est sans défaut et sa croissance est uniforme, de sorte que l'on suppose une symétrie de rotation autour de l'axe du tronc. En négligeant en outre la conicité du tronc, le bois du tronc peut être considéré comme un matériau orthotrope cylindrique dont les plans de symétrie sont les plans LR et RT et dont les directions d'anisotropie sont les directions R, T et L ;
 - Le volume de bois considéré est supposé assez petit par rapport à sa distance à la moelle pour négliger la courbure des cernes. Le bois est alors considéré localement comme un matériau orthotrope (trois plans de symétrie orthogonaux) décrit dans (L, R, T) ;
 - Le volume du bois est suffisamment grand par rapport à la taille des cellules pour que la continuité du milieu soit admise.
- (b) La majorité des cellules du bois ont la forme d'un cylindre creux, plus ou moins tubulaire, dont l'axe suivant la direction du tronc détermine la direction 1', qui est approximativement confondue avec la direction L. Le repère orthogonal (1', 2', 3') est défini en se basant sur l'échelle envisagée. En faisant référence à la genèse de la paroi par le dépôt successif des couches. Cette fois-ci (1', 2') est le plan tangentiel défini par ces couches successives, 3' est

perpendiculaire à ce plan et orienté vers le lumen de la cellule ; 1' est choisie de telle sorte que le plan radial (1', 3') soit parallèle à l'axe de la cellule, voire le contienne en cas de cellule de forme tubulaire.

- (c) Le repère (1, 2, 3), lié à l'ultrastructure, se réfère au repère de la cellule (1', 2', 3') avec une rotation du plan tangent (1', 2') de l'angle $-\theta^{AMF}$ où θ^{AMF} est l'angle des microfibrilles des couches Si ($i = 1..3$) d'une paroi considérée, la direction 1 coïncidant pour chaque couche avec la direction locale moyenne des microfibrilles.

b) Propriétés élastiques linéaires du bois

Classiquement, le bois est considéré comme un matériau anisotrope, c.-à-d. sa réponse à une sollicitation mécanique dépend de la direction selon laquelle cette sollicitation est appliquée. Dans le cas général élastique anisotrope, le comportement d'un matériau quelconque est caractérisé par le tenseur matériel C de la rigidité élastique de quatrième ordre, dont les composantes sont notées C_{ijkl} , qui relie les composantes de la contrainte σ_{ij} à celles de la déformation ε_{kl} par la relation (convention des indices répétées) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.2. 1)$$

où C_{ijkl} est le tenseur de la rigidité élastique de 4ème ordre constitué de 81 composantes, qui caractérisent les propriétés du matériau, et ne sont pas linéairement indépendantes.

Comme rappelé par Guitard (1987), en prenant en compte la symétrie du tenseur des déformations $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, la symétrie du tenseur des contraintes $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$, et l'existence d'un potentiel élastique ϕ permettant de décrire une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des contraintes (ou du tenseur des déformations) d'où la relation $C_{ijkl} = C_{klij}$, le nombre des paramètres indépendants du tenseur C_{ijkl} se réduit à 21 composantes. Cette réduction des composantes permet d'exprimer la relation (1.2. 1) sous la forme matricielle dans tout repère géométrique arbitrairement choisi comme suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.2. 2)$$

$$\text{ou } (\sigma) = \begin{pmatrix} [C^I] & [C^{II}] \\ [C^{III}] & [C^{IV}] \end{pmatrix} (\varepsilon)$$

où les sous-matrices $[C^I] \dots [C^{IV}]$ sont des bloc 3x3. On peut remarquer que chaque terme C_{ij} est une combinaison linéaire des composantes C_{ijkl} du tenseur de rigidité. En outre la matrice de rigidité [C] est symétrique, grâce au fait d'avoir remplacé les termes $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$ par $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. On définit également la matrice de complaisance $[S] = [C]^{-1}$ qui possède des propriétés identiques à celles de la matrice de rigidité. Il est à noter que dans le cas général anisotrope, les composantes de ces deux matrices dépendent du repère choisi.

Lorsque le matériau est orthotrope (deux plans de symétrie orthogonaux), les blocs $[C^{II}]$ et $[C^{III}]$ sont nuls et le bloc $[C^{IV}]$ est diagonal. A titre d'illustration, comme le bois à l'échelle des cernes (macroscopique) est considéré comme un matériau orthotrope, la loi de comportement élastique macroscopique du bois est décrite dans la base orthonormée (L, R, T) à partir de la relation (1.2. 2) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{RT} \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{LR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\nu_{RL} & -\nu_{TL} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\nu_{TR} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT} & -\nu_{RT} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \sigma_{RT} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LR} \end{pmatrix} \quad (1.2. 3)$$

Il est noté que l'usage et les traditions font que les ingénieurs, probablement en référence à la résistance des matériaux classique (RDM), utilisent des grandeurs techniques liées aux complaisances élastiques mais différentes. Ils définissent le comportement élastique orthotrope à partir de trois modules d'élasticité, ou module d'Young (E_L, E_R, E_T), de six coefficients de Poisson ($\nu_{RT}, \nu_{TR}, \nu_{TL}, \nu_{LT}, \nu_{LR}, \nu_{RL}$) et de trois modules de cisaillement (G_{RT}, G_{LT}, G_{LR}) :

- le module élastique d'Young E_i ($i = L, R, T$), rapport de la contrainte uniaxiale σ_i imposée à l'élongation ε_i résultante, est l'inverse de la complaisance S_{ii} (pour $i = 1$ à 3) :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}; E_R = \frac{1}{S_{22}}; E_T = \frac{1}{S_{33}} \quad (1.2. 4)$$

où les S_{ij} sont déterminés en utilisant les relations de passage des rigidités C_{ij} aux complaisances S_{ij} dans le Tableau C-1 (Annexe C).

- le coefficient ν_{ij} avec $(i, j) \in (L, R, T)^2$ est l'opposé du rapport entre les élongations dans la direction j et i lors d'une traction uniaxiale dans la direction i :

$$\begin{aligned} \nu_{RT} &= -\frac{S_{32}}{S_{22}}; \nu_{TL} = -\frac{S_{13}}{S_{33}}; \nu_{LR} = -\frac{S_{21}}{S_{11}} \\ \nu_{TR} &= -\frac{S_{23}}{S_{33}}; \nu_{LT} = -\frac{S_{31}}{S_{11}}; \nu_{RL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \end{aligned} \quad (1.2. 5)$$

- le module de cisaillement G_{ij} est défini comme l'inverse de la complaisance S_{kk} avec $k = 9 - (i + j)$.

$$G_{RT} = \frac{1}{S_{44}}; G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}; G_{LR} = \frac{1}{S_{55}} \quad (1.2. 6)$$

Par ailleurs, on notera qu'un total de douze coefficients est utilisé, mais compte tenu de la symétrie de la matrice de complaisance on a :

$$\frac{V_{RT}}{E_R} = \frac{V_{TR}}{E_T}; \frac{V_{TL}}{E_T} = \frac{V_{LT}}{E_L}; \frac{V_{LR}}{E_L} = \frac{V_{RL}}{E_R} \quad (1.2. 7)$$

En raison de cette symétrie, il n'existe que 9 paramètres indépendants décrivant la rigidité du matériau orthotrope.

L'anisotropie multi-échelle de la microstructure du bois est à l'origine de l'anisotropie des propriétés élastiques du bois. La rigidité longitudinale du bois est beaucoup plus élevée que dans le plan transverse RT. De plus, il existe également des différences des modules d'élasticité entre les directions radiale et tangentielle (Guitard, 1987). Afin de montrer le degré d'anisotropie du matériau bois, nous présenterons les valeurs typiques pour l'épicéa de Norvège (un résineux), à une teneur en eau d'environ 12% sur le Tableau 1-1.

Tableau 1-1 Valeurs typiques des coefficients d'ingénieurs macroscopiques de l'épicéa à 12% d'humidité (Carrington, 1923; Hearmon, 1948)

Grandeurs techniques	E _L (GPa)	E _R (GPa)	E _T (GPa)	G _{RT} (GPa)	G _{LR} (GPa)	G _{LT} (GPa)	v _{TR}	v _{LR}	v _{LT}
Valeurs mesurées	13.50 - 16.70	0.70 - 0.90	0.40 - 0.650	0.03 - 0.04	0.62 - 0.72	0.50 - 0.90	0.24 - 0.33	0.37 - 0.45	0.45 - 0.48

Comme observé sur le Tableau 1-1, le module de cisaillement transverse G_{RT} chez les résineux est particulièrement faible par rapport aux deux autres modules de cisaillement G_{LT}, G_{LR}. Du fait de cette valeur très faible, la direction la moins rigide est proche de la diagonale des directions R et T.

c) Propriétés hygro-mécaniques du bois

❖ Hygro-expansion

Le bois sur pied contient une certaine quantité d'eau qui pour partie circule et est nécessaire à son fonctionnement physiologique. Le bois est donc un matériau hygroscopique (Guitard, 1987). Nous présentons tout d'abord la définition de la teneur en eau (w), qui permet d'exprimer la quantité d'eau présente dans le bois. Elle est définie comme le rapport entre la masse d'eau contenue dans le volume de bois m_{eau} et la masse de bois anhydre m_0 (l'équation (1.2. 8)). La masse d'eau peut s'exprimer par la différence entre la masse de l'éprouvette à l'état humide m_h et la masse de bois anhydre m_0 .

$$w(\%) = \frac{m_{eau}}{m_0} \times 100 = \frac{m_h - m_0}{m_0} \times 100 \quad (1.2. 8)$$

Il faut noter que la masse anhydre (m_0) est obtenue par séchage de l'éprouvette à 103°C jusqu'à ce que la masse soit constante (Guitard, 1987).

Dans le bois, l'eau existe sous trois états : l'eau libre, l'eau vapeur et l'eau liée. Elle se trouve sous forme liquide ou vapeur dans les cavités cellulaires. L'eau liée (ou hygroscopique) correspond à un état adsorbé de l'eau sur les polymères structuraux du bois ; elle est localisée dans la paroi cellulaire et est à l'origine des déformations hygro-mécaniques du bois (gonflement/retrait) lors d'effets de sorption (adsorption/désorption). On appelle le point de saturation des fibres (PSF) le taux d'humidité correspondant à la saturation en eau liée des parois cellulaires. Le PSF est généralement de l'ordre de 25-40% en fonction des essences (Guitard, 1987). Au-dessus du PSF, l'excédent d'eau se trouve sous forme libre (liquide ou gazeuse) dans les lumens.

Les propriétés physico-mécanique du bois sont très sensibles aux variations de la teneur en eau liée, en dessous du PSF. Il en est ainsi du gonflement du bois qui provient de l'adsorption d'eau par les zones amorphes. A partir de l'état anhydre, l'eau est tout d'abord adsorbée dans une couche mono-moléculaire

par des ponts hydrogènes sur les groupements hydroxyles des chaînes de cellulose. Elle est ensuite adsorbée par des ponts hydrogènes sur les couches d'eau déjà présentes.

La sorption (adsorption ou désorption) des molécules d'eau liée dans les parois cellulaires génère des pressions internes qui, par le biais de phénomènes physiques imbriqués et d'interactions multi-échelles, sont responsables du comportement macroscopique d'expansion et de contraction du bois. Dans ce manuscrit, ces phénomènes sont appelés « comportements hydriques », et les déformations associées sont appelées « déformations hydriques ».

Les déformations hydriques volumiques sont déterminées en calculant la variation relative du volume d'un échantillon entre un état d'humidité donnée (V_h) et un état de référence (V_0) :

$$\varepsilon_V^{hygro}(\%) = \frac{V_h - V_0}{V_0} \times 100 \quad (1.2. 9)$$

Le coefficient d'hygro-expansion (volumique), caractérisant les variations des déformations hydriques volumiques pour un incrément de teneur en eau dw entre celle à l'état humide donnée w_h et celle à l'état de référence (anhydre) w_0 , est défini par :

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dw} \times 100 = \frac{1}{V_0} \frac{V_h - V_0}{w_h - w_0} \times 100 \quad (1.2. 10)$$

Il est noté que cette définition du coefficient d'hygro-expansion volumique est basée sur l'idée d'une évolution du volume, fonction linéaire de la teneur en eau entre l'état considéré et celui de référence.

Par la suite, nous chercherons à déterminer les déformations hydriques ε_i^{hygro} et coefficients d'hygro-expansion α_i dans la direction i à partir des longueurs dans la direction correspondante à l'état donné ($d_{i,h}$) et à l'état de référence ($d_{i,0}$). Dans les directions principales, les déformations hydriques s'expriment par :

$$\varepsilon_i^{hygro} = \frac{d_{i,h} - d_{i,0}}{d_{i,0}} \times 100 \quad (1.2. 11)$$

et les coefficients d'hygro-expansion par :

$$\alpha_i(\%/%) = \frac{1}{d_{i,0}} \frac{d(d_i)}{dw} \times 100 = \frac{1}{d_{i,0}} \frac{d_{i,h} - d_{i,0}}{w_h - w_0} \times 100 \quad (1.2. 12)$$

Pour prendre en compte l'hygro-expansion dans la loi de comportement, la déformation hydrique ε^{hygro} est ajoutée à la déformation élastique par la relation suivante (Gay, 1991) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro} \quad (1.2. 13)$$

Où ε représente la déformation mécanique induite par une variation de chargement et ε^{hygro} la déformation hydrique induite par une variation de teneur en eau.

Comme l'hygro-expansion macroscopique du bois est orthotrope, on précise que les axes d'orthotropie sont alignés avec le repère (L, R, T). Alors, l'hygro-expansion orthotrope linéaire ε^{hygro} peut être exprimée en termes de changement d'humidité comme suit :

$$\underline{\varepsilon}^{hygro} = \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \\ \alpha_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta w \quad (1.2. 14)$$

où α_i sont les coefficients d'hygro-expansion dans les trois directions orthotropes principales (L, R, T) et Δw est la variation de teneur en eau. Cette relation est valable en dessous du point de saturation de la fibre (PSF).

L'expansion hydrique du bois est fortement anisotrope, ce qui s'exprime par la relation d'ordre suivante entre les trois coefficients d'hygro-expansion α_i définis par l'équation (1.2. 12) (Guitard, 1987) :

$$\alpha_T > \alpha_R \gg \alpha_L \quad (1.2. 15)$$

A titre d'information, nous présentons les coefficients d'hygro-expansion typiques pour l'épicéa sur le Tableau 1-2. Par ailleurs, il convient de noter que des coefficients d'hygro-expansion longitudinaux négatifs ont également été signalés (Kollman and Côté, 1968).

Tableau 1-2 : Valeurs typiques des coefficients d'hygro-expansion de l'épicéa (Kollman and Côté, 1968)

Paramètre	Mesures expérimentales
α_L	0.00 – 0.02
α_R	0.17 – 0.22
α_T	0.33 – 0.40

❖ Hygro-viscoélasticité

- *La viscoélasticité des constituants du bois*

La viscosité désigne la propriété, pour un corps, de se situer dans une position intermédiaire entre un solide et un liquide. Appliquée à un solide, la notion de viscosité signifie donc que celui-ci possède un aspect liquide dans son comportement. Inversement, on dit qu'un liquide est visqueux lorsqu'il son comportement se rapproche de celui d'un solide.

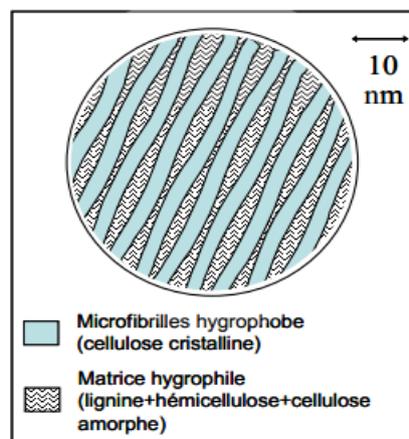


Figure 1-9 : Structure visqueuse.

Dans l'objectif d'améliorer par exemple les procédés d'industrialisation de la pâte à papier, l'analyse viscoélastique de chaque constituant polymérique du bois a été l'une des premières approches suivies par les scientifiques. L'étude du comportement viscoélastique du bois est complexe, du fait de sa nature composite et de son anisotropie. Le bois présente un comportement visqueux comme tout matériau polymère issu de macromolécules (voir Figure 1-9), à savoir : les lignines, les hémicelluloses et la cellulose amorphe, entrant dans sa constitution pour changer plus ou moins rapidement de configuration en réponse à des sollicitations mécaniques. En raison du réseau continu de microfibrilles cellulosiques, il est également en partie cristallin, ce qui l'inscrit dans un comportement élastique. Le couplage des propriétés d'élasticité et de viscosité fait que le comportement du matériau bois est viscoélastique.

Les conditions environnementales telles que la température et l'humidité influencent fortement le comportement viscoélastique des polymères, notamment du bois. Parmi les paramètres qui le décrivent, la température de transition vitreuse (T_g) est l'un des principaux : elle correspond à la transition de l'état vitreux à l'état caoutchouteux. Les composants amorphes de la paroi cellulaire (lignine, hémicelluloses et cellulose non-cristalline) sont caractérisés par une viscoélasticité hygro-thermo-activée, l'effet du ramollissement dû à l'eau (Thuvander et al., 2002) étant déclenché par la température.

D'après les données rassemblées par Back and Salmén (1982), entre l'état anhydre et humide, la T_g de la lignite chute de 200 à 100°C environ et celle des hémicelluloses de 200°C à 50°C environ. L'étude d'Irvine (1985) a montré que T_g des hémicelluloses est de 40°C dès que l'humidité dépasse 10% ; pour la cellulose, T_g augmente avec le taux de cristallinité ; enfin pour la lignine, son intervalle se situe entre 65°C et 90°C à l'état humide.

- *La viscoélasticité du bois*

Plusieurs études sur la viscoélasticité du bois, qu'elle soit statique ou dynamique, mettent en évidence un phénomène de ramollissement dans le bois en fonction de la température, associé à une ou plusieurs transitions :

- Une seule transition, non liée à un composant spécifique du bois (Chow and Pickles, 1971; Funakoshi et al., 1979; Irvine, 1985).
- Deux transitions, observées et attribuées alors aux hémicelluloses et à la lignine sur une large plage de température et humidité de -20°C à 192°C de l'état sec à l'état saturé (Hillis and Rozsa, 1978; Kelley et al., 1987).
- Une seule transition, attribuée à la lignine (Salmén, 1984).

Le fait que la transition vitreuse de la lignine tombe bien en dessous de 100°C au-dessus du point de saturation des fibres (Goring, 1963), est la base des techniques de formage du bois (Norimoto and Gril, 1989). Cependant, même si des niveaux très élevés de déformation peuvent être obtenus avec du bois humide et chaud, le matériau conserve une certaine élasticité : on n'observe presque pas de déformation irréversible à la suite d'une opération de mise en forme : au contraire, une récupération presque totale se produit par le ré-assouplissement après le déchargement (Inoue et al., 1992). Ces observations confirment l'existence d'un réseau cellulosique cristallin continu dans la paroi cellulaire, c-à-d des fibrilles connectées et ondulées, empêchant le glissement relatif des fibrilles séparées par une matrice plastifiée.

1.2.4 Homogénéisation

Plusieurs modèles multi-échelles ou hiérarchiques du bois, allant du niveau subpariétal au niveau macroscopique, ont été développés dans la littérature.

Harrington et al. (1998) ont proposé un schéma d'homogénéisation analytique en deux étapes pour déterminer les constantes élastiques orthotropes effectives de la paroi cellulaire équivalentes des couches cellulaires du bois. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que la paroi cellulaire des résineux peut être

considérée comme un continuum hétérogène au niveau des nanostructures. La théorie classique des stratifiés est alors utilisée pour déterminer les propriétés effectives de la paroi. Par ailleurs, Astley et al. (1998) ont utilisé les résultats du modèle de Harrington et al. (1998) comme données d'entrée pour un modèle cellulaire en éléments finis. Ils ont supposé que chaque cellule fermée du réseau cellulaire (le tissu cellulaire) contient sept couches stratifiées composites (voir la Figure 1-10), traitées globalement comme une coque stratifiée épaisse en utilisant la théorie classique des stratifiés. A l'aide d'un modèle par éléments finis, ils ont analysé la relation entre les propriétés élastiques macroscopiques du résineux et les caractéristiques locales des cellules telles que la taille des cellules, l'épaisseur des parois et l'angle des fibrilles (l'AMF)

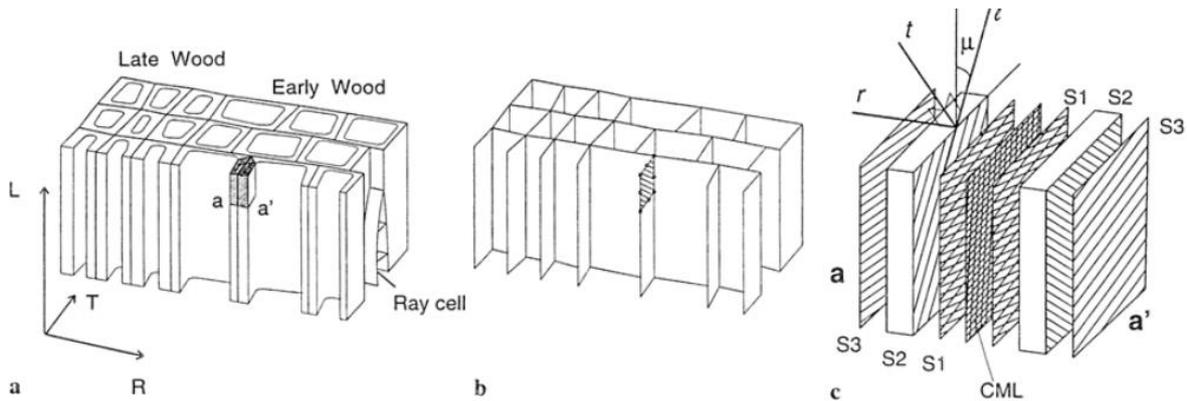


Figure 1-10: schéma d'homogénéisation selon l'étude de Astley et al. (1998) : a) microstructure cellulaire ; b) idéalisation des plaques ; c) Modèle des parois cellulaires.

Pour les résineux et les feuillus, Hofstetter et al. (2005) ont développé un modèle micromécanique multi-échelle d'homogénéisation en champ moyen, basé sur un schéma d'homogénéisation analytique en trois étapes allant d'une échelle de longueur de plusieurs dizaines de nanomètres (l'échelle subpariétale) à une échelle de longueur de plusieurs millimètres (l'échelle macroscopique) comme indiqué sur la Figure 1-11. Dans leur modèle, les constituants, l'hémicellulose, la lignine et l'eau sont intimement mélangées et la rigidité de la matrice polymère est estimée à l'aide d'un schéma d'homogénéisation auto-cohérent avec des inclusions de forme sphérique. Ensuite, le comportement élastique de la paroi cellulaire, composée de cellulose cristalline et de cellulose amorphe incorporés dans une matrice polymère, est estimé par un schéma de Mori-Tanaka, pour lequel les inclusions, qui représentent la cellulose cristalline et la cellulose amorphe, sont de forme cylindrique. Enfin, le bois résineux est modélisé à nouveau par un schéma de Mori-Tanaka, en considérant les lumens cellulaires comme des pores cylindriques noyés dans une matrice, constituée du matériau de la paroi cellulaire, dont le comportement a été préalablement déterminé dans l'étape d'homogénéisation précédente.

Neagu and Gamstedt (2007) ont développé un modèle analytique permettant de prédire la réponse hygro-élastique des cellules du bois. Dans cette étude, une cellule de bois a été idéalisée sous la forme d'un cylindre creux multicouche constitué d'une matrice orthotrope à orientation hélicoïdale. La réponse hygro-élastique de cet assemblage multicouche est obtenue en résolvant le problème d'élasticité pour un chargement axisymétrique et des changements de teneur en humidité. Cette analyse a été complétée par une méthode analytique d'homogénéisation ultra-structurale, permettant d'obtenir les propriétés hygro-mécaniques effectives de chaque couche en partant des propriétés hygro-élastiques des constituants du bois et de leur distribution spatiale au sein de chaque couche. Cette étude a montré que les fibres qui étaient restreintes pour ne pas se tordre ont montré une réponse plus rigide que les fibres autorisées à se tordre sous une charge uniaxiale ; en outre, l'ultrastructure, c'est-à-dire l'angle des microfibrilles, contrôle l'hygro-expansion de la même manière qu'elle affecte la complaisance de la paroi cellulaire.

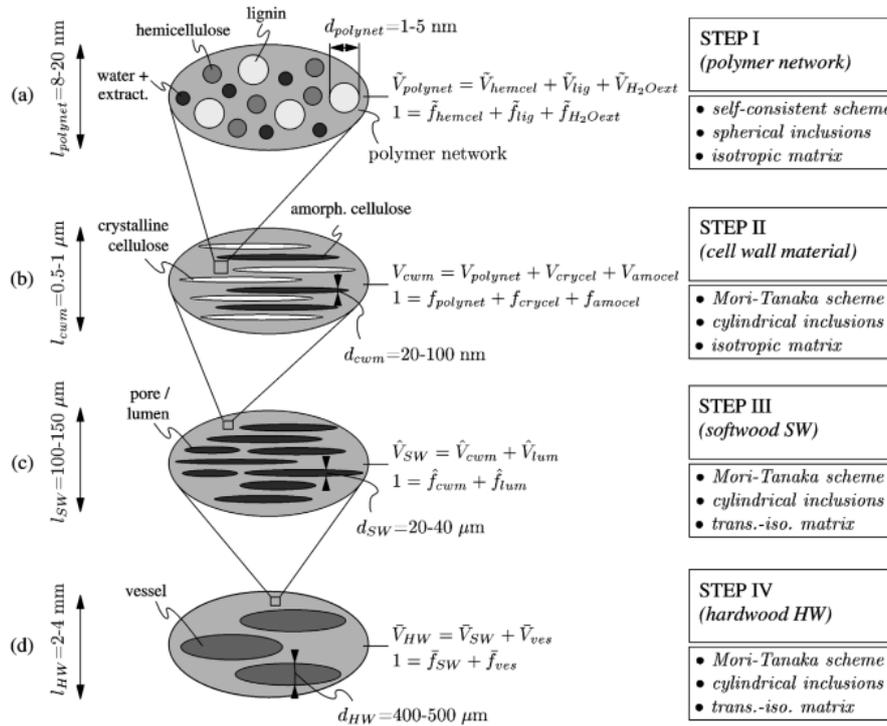


Figure 1-11: Schéma combiné d'homogénéisation aléatoire/périodique à plusieurs étapes pour l'élasticité du bois (Hofstetter et al., 2005).

Afin de déterminer les propriétés hygro-élastiques du bois, Persson (2000) a proposé plusieurs modèles par éléments finis reposant soit sur une structure cellulaire hexagonale irrégulière, soit sur la microstructure réelle du bois à partir de micrographies, pour lesquelles les parois cellulaires sont considérées comme une structure multicouche. Cette approche a permis d'estimer la rigidité et les propriétés hydriques des cerne de croissance des résineux. Les modèles proposés relient les propriétés mécaniques des constituants chimiques de la paroi cellulaire aux propriétés mécaniques effectives d'un cerne de croissance. Les paramètres d'entrée (géométriques et matériaux) sont principalement basés sur les résultats d'expériences réalisées. Les études paramétriques réalisées à l'aide du modèle à cellules hexagonales irrégulières ont montré que les paramètres régissant de manière très significative la rigidité et les propriétés d'hydro-dilatation du bois sont l'angle des microfibrilles de la couche S2, la densité et les propriétés des constituants élémentaires (cellulose, hémicellulose, lignine, etc).

1.2.5 Démarche

On notera, tout d'abord, que cette thèse qui étudie le comportement du bois ne s'intéresse qu'à ses propriétés hygro-élastiques linéaires, c'est-à-dire à ses modules élastiques linéaires et ses coefficients d'hydro-expansion ou leurs équivalents. Bien que le bois présente des réponses complexes qui dépendent du temps et de la nature de la charge mécanique et des changements de la teneur en humidité, le bois peut être traité utilement comme un matériau hygro-élastique linéaire dans le cas de courtes échelles de temps, de faibles charges et de petites perturbations environnementales. Dans d'autres régimes, bien que les résultats quantitatifs puissent être irréalistes, un tel traitement peut donner des résultats qualitatifs utiles. Au minimum, une analyse hygro-élastique linéaire fournit un point de départ.

De manière générale, l'objectif de cette thèse est d'explorer les conséquences d'une description plus réaliste de la morphologie des couches secondaires sur le comportement hygro-élastique effectif de la paroi cellulaire, puis du tissu cellulaire et enfin du cerne de croissance. A cette intention, on reprendra avec un regard neuf des approches anciennes basées notamment sur des fibrilles parallèles, mais

appliquées cette fois-ci à une morphologie qui intègre à la fois les oscillations et les connexions des fibrilles. Pour cela, on s'appuiera sur des méthodes d'homogénéisation périodique en considérant que la structure complexe du bois à chaque échelle considérée est équivalente à la répétition périodique d'une unité élémentaire contenant une distribution simplifiée des composants considérés comme des milieux continus. Le comportement effectif du bois à l'échelle supérieure est alors déterminé par les techniques classiques d'homogénéisation numérique (échelles de la paroi cellulaire et celle du tissu) et analytique (échelle du cerne de croissance) pour les milieux périodiques, voir par exemple Bornert et al. (2001). Par ailleurs, afin de se concentrer sur l'effet morphologique dans cette recherche, le comportement effectif des fibrilles sera considéré comme une entrée du modèle. De plus, en raison de la présence de certains glucomannanes, la possibilité de leur expansion induite par l'eau sera également considérée. La viscoélasticité de la matrice ne sera pas modélisée et seulement indirectement prise en compte en simulant un module considérablement réduit. De plus, bien que l'anisotropie de la matrice soit soutenue par un certain nombre d'arguments (Salmén, 2004), dans les modèles proposés au sein de cette thèse, elle sera considérée comme isotrope.

De manière plus détaillée, cette étude vise à analyser l'influence de la réticulation du réseau fibrillaire cellulosique sur les propriétés hygro-élastiques macroscopiques du bois. Pour cela, un modèle multi-échelle de bois sera développé, avec trois options pour la morphologie des fibrilles au niveau de la paroi cellulaire : une morphologie de référence sans oscillations (fibrilles parallèles) et deux morphologies prenant en compte respectivement des oscillations et interconnexions unidirectionnelles et bidirectionnelles. Comme les propriétés mécaniques macroscopiques du bois sont gouvernées par la morphologie du cerne de croissance, du tissu cellulaire et de la paroi des cellules, une connaissance approfondie de la structure du bois à plusieurs échelles est nécessaire. Le terme multi-échelle fait référence à un cadre dans lequel plusieurs échelles de longueur sont traitées séparément et où il y a un échange d'informations entre ces échelles de longueur. De plus, il est également intéressant de comparer les propriétés obtenues par le modèle multi-échelle avec les résultats expérimentaux. C'est pourquoi des données existantes dans la littérature seront prises en compte pour déterminer la géométrie des microstructures et les propriétés mécaniques du bois, ainsi que pour valider les prédictions obtenues.

Partie I : Comportement effectif de la paroi cellulaire du bois

Cette partie vise à analyser l'influence des ondulations et des interconnexions des fibrilles sur le comportement hygro-élastique effectif de la paroi cellulaire du bois. Pour cela, deux modèles différents de microstructure décrivant la paroi cellulaire sont introduits : le modèle 1S, pour lequel les fibrilles sont autorisées à osciller dans une direction comme une courbe sinusoïdale, et le modèle 2S, pour lequel les fibrilles oscillent dans deux directions comme une hélice. Le comportement hygro-élastique effectif de la paroi cellulaire associé à chacun des deux modèles est calculé par la procédure d'homogénéisation périodique numérique, qui sera décrite au chapitre 2.

Dans un 1^{er} temps, nous étudierons le comportement élastique pour chacune des microstructures (modèle 1S dans chapitre 2, modèle 2S dans chapitre 3). Afin d'analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement élastique effectif de la paroi cellulaire, nous ferons varier certains paramètres géométriques et matériaux tels que le rapport de forme de la cellule unitaire, la fraction volumique des fibrilles, ou le contraste élastique entre la matrice et les fibrilles.

Dans un 2^{ème} temps, l'extension du comportement effectif au cadre hygro-élastique (chapitre 4) sera étudiée en utilisant la procédure d'homogénéisation numérique étendue au cas d'un comportement hygro-élastique linéaire pour les deux microstructures (modèles 1S et 2S). Cette procédure permet de prendre en compte les déformations induites en l'absence de chargement mécanique par une expansion hydrique de la teneur en eau du bois. Ensuite, afin d'étudier l'influence des ondulations des fibrilles provenant des modèles 1S et 2S sur les propriétés hydriques du bois, nous allons considérer 3 cas différents du gonflement des constituants de la paroi élémentaire : gonflement de la matrice ($\alpha^M \neq 0$; $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$), gonflement dans la direction longitudinale des fibrilles ($\alpha_L^F \neq 0, \alpha_{TT}^F = 0$) et gonflement dans le plan transversal des fibrilles ($\alpha_L^F = 0, \alpha_{TT}^F \neq 0$).

Chapitre 2 : Microstructure à ondulation dans une direction

2.1 Objectif du chapitre

L'objectif de cette étude est d'analyser numériquement et analytiquement les propriétés élastiques linéaires de la paroi cellulaire du bois à travers des modèles de changement d'échelle. A cette intention, une approche numérique ainsi qu'une approche analytique simplifiée du comportement de la paroi cellulaire à l'échelle subpariétale seront effectuées. Ces deux approches sont basées sur la description de la structure subpariétale et la disposition géométrique des microfibrilles dans la paroi S2.

L'approche numérique consiste à homogénéiser par des simulations par éléments finis une cellule périodique unitaire décrivant la morphologie de la paroi cellulaire S2 et soumise à des conditions aux limites périodiques. L'apport de ce travail consiste à décrire de manière plus détaillée la morphologie réelle de la paroi cellulaire en prenant en compte des fibrilles incurvées et interconnectées entre elles plutôt que de les considérer parallèles comme cela est supposé habituellement (Harrington, 2002; Rafsanjani, 2013). Afin d'estimer l'influence de l'ondulation des fibres, on comparera le comportement effectif obtenu numériquement pour les fibres ondulées à celui obtenu pour des fibres parallèles.

Pour ce qui concerne l'approche analytique, le modèle du réseau fibrillaire proposé par Gril (1988) permet également de prendre en compte le fait que les fibrilles sont incurvées et connectées entre elles et non parallèles. Ce modèle sera validé en le comparant aux résultats obtenus par homogénéisation numérique.

2.2 Comportement effectif de la paroi cellulaire

A une échelle suffisamment fine, la plupart des matériaux sont hétérogènes. C'est en particulier le cas du bois, qui présente une grande variabilité des propriétés mécaniques et diverses échelles d'hétérogénéité allant du niveau moléculaire au niveau macroscopique (voir Figure 1-1). De ce fait, les propriétés mécaniques du bois sont étroitement liées à sa microstructure décrite par ses différentes échelles d'hétérogénéité.

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement de la paroi cellulaire du bois et plus particulièrement à sa couche S2 dont nous cherchons à calculer le comportement effectif. Pour cela, nous représentons la microstructure de la couche S2 par une cellule élémentaire périodique où les champs de contrainte et de déformation effectifs, que l'on associera à l'échelle dite « macroscopique » pour la paroi S2, correspondent aux moyennes sur la cellule élémentaire périodique qui constitue le Volume Élémentaire Représentatif (VER) des champs de contrainte et de déformation qui fluctuent en son sein à une échelle dite « microscopique ». Ce changement d'échelle permet donc de construire la loi de comportement macroscopique à partir de la détermination des champs mécaniques locaux se développant au sein de la cellule périodique. La cellule élémentaire périodique, sur laquelle s'appuie la méthode d'homogénéisation, est issue de la description de la paroi secondaire, qui contribue principalement aux propriétés mécaniques et physiques du tissu cellulaire.

Les parois du bois sont composées typiquement de 3% de paroi primaire, 13% de couche S1, 80% de couche S2, 4% de couche S3 (Fengel and Stoll, 1973), la couche S2 dominante étant constituée principalement de fibrilles de cellulose inclinées de 0° à environ 30°. Aussi, du fait de cette prédominance de la couche pariétale S2, le comportement effectif de la paroi cellulaire sera évalué au cours de cette étude par la détermination du comportement effectif de la couche S2. Pour décrire la microstructure de la paroi S2, nous allons utiliser la représentation observée par Salmén (2014) qui indique que : la couche S2 peut être considérée comme un composite renforcé dont la matrice est constituée par un mélange d'hémicellulose et de lignine et dont les renforts sont des fibrilles de cellulose. Ces dernières sont constituées d'un agglomérat de microfibrilles de cellulose cristalline jointes par de

l'hémicellulose de type glucomannane, la liaison entre fibrilles et matrice étant également assurée par des glucomannanes (voir Figure 2-1).

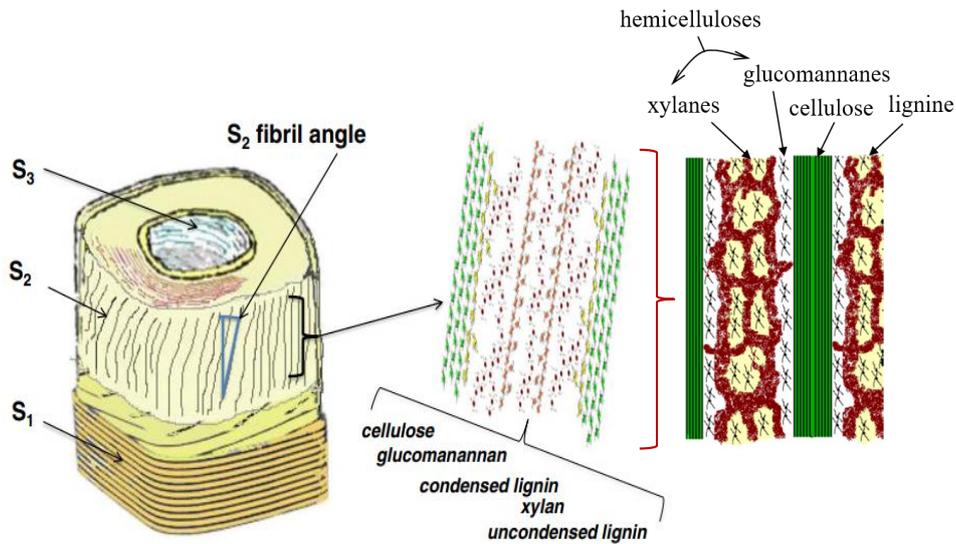


Figure 2-1 : Structure de la paroi cellulaire illustrant la distribution spatiale des différents polymères du bois dans la paroi secondaire S2 (Joseleau and Ruel, 2005; Salmén, 2004).

Dans la littérature, la plupart des travaux (Harrington, 2002; Persson, 2000; Rafsanjani, 2013) caractérisant le comportement effectif de la paroi S2 considèrent un réseau fibrillaire constituée par des fibres parallèles entre elles. Cette représentation de la microstructure par des fibres parallèles est cependant trop simplifiée. En effet, dans le bois réel, les fibrilles présentent des ondulations et sont connectées les unes aux autres (Bardage et al., 2004; Ruel et al., 1984).

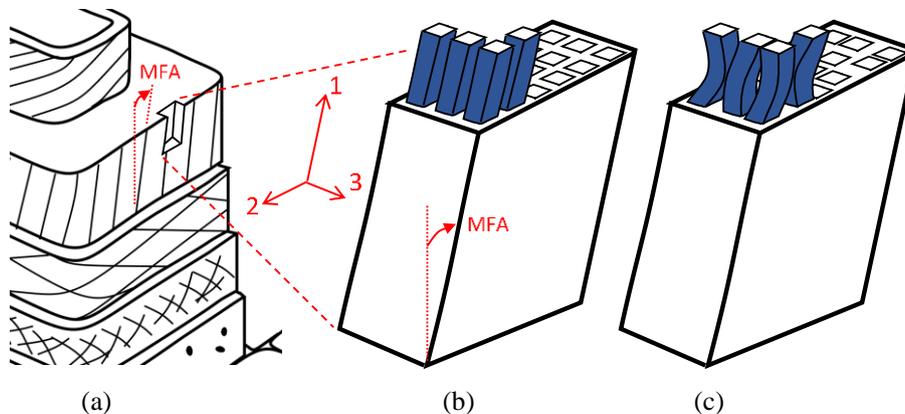


Figure 2-2 : Représentation du matériau constituant la paroi cellulaire secondaire : (a) position et orientation d'une partie de la paroi cellulaire, (b) représentation classique avec fibrilles droites et parallèles et (c) description améliorée avec fibrilles oscillantes et connectées.

Par la description schématique des parois secondaires proposée par Boyd (1982), les fibrilles oscillent autour d'une direction principale, que nous nommons direction 1, correspondant à celle définie par l'AMF (Figure 2-2a). Dans notre étude, en prenant comme référence le cas de fibrilles parfaitement alignées (Figure 2-2b), nous allons examiner l'effet des oscillations des fibrilles (Figure 2-2c). Ainsi, nous ne chercherons pas à déterminer le comportement effectif des fibrilles à partir de leur microstructure mais nous le considérons comme une donnée du problème.

2.2.1 Représentation de la microstructure de la paroi du bois

Nous allons décrire la paroi S2 à l'aide d'une représentation proposée par Gril (1988) illustrée sur la Figure 2-3. La paroi S2 est ainsi composée de 2 couches planes et d'épaisseurs constantes dans le plan (1, 2) empilées périodiquement suivant la direction 3 (qui est la direction radiale). La 1^{ère} couche plane, que l'on appellera désormais la couche lenticulaire, est constituée par des fibrilles qui ondulent légèrement autour de la direction longitudinale 1 et présentent des zones de contact à intervalle régulier. Ces fibrilles de section carrée sont entourées par de la matrice constituée d'un mélange d'hémicellulose et de lignine. La 2^{ème} couche plane est constituée uniquement de matrice et sépare ainsi périodiquement les couches lenticulaires.

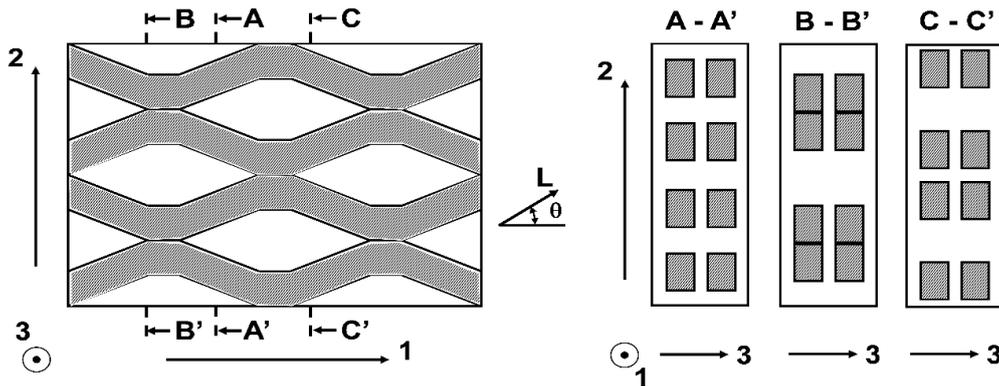


Figure 2-3 : Représentation du réseau macrofibrillaire par un empilement périodique de couches planes lamellaires et lenticulaires, ces dernières contenant des fibrilles ondulées (Gril, 1988).

Les recherches effectuées ces deux dernières décennies ont montrés que les fibrilles sont en fait constituées par un réseau de microfibrilles qui peut être décrit approximativement par la Figure 2-4a où les microfibrilles sont modélisées par des cylindres de section rectangulaire d'environ 3-4 nm de côté distribués parallèlement au sein d'une matrice de glucomannane, le tout formant une macrofibrille cylindrique de section approximativement carrée de 20 à 25 nm de côté. De plus, en ce qui concerne la direction axiale des fibrilles, bien qu'il n'existe pas de données directes dans la littérature, on peut néanmoins estimer à 0.3 μm l'ordre de grandeur de la distance entre les points de contact entre fibrilles, Cet ordre de valeur a été mis en évidence au vu de photographies au microscope électronique à balayage (MEB) de Ruel et al. (1984), réalisées sur le bois délignifié par des champignons.

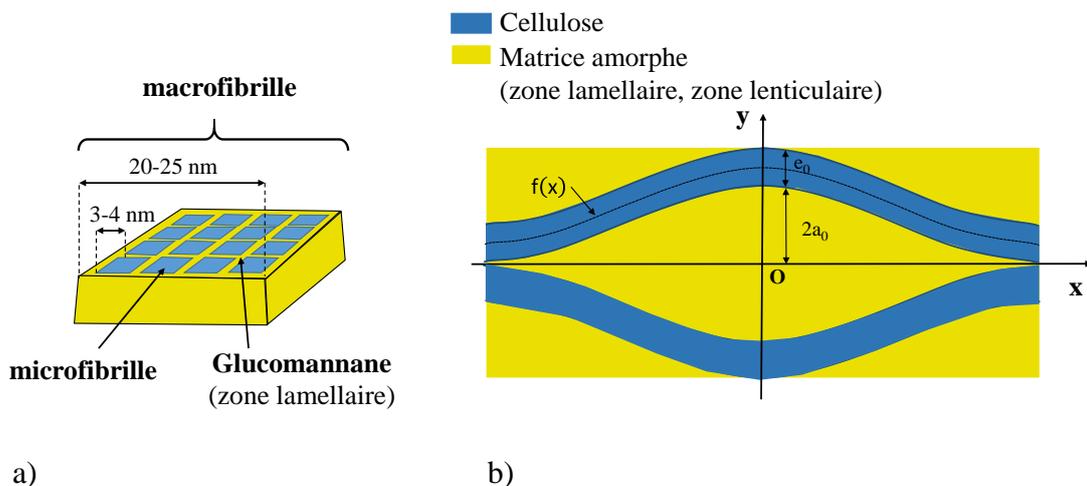


Figure 2-4 :Structure schématique des fibrilles connectées et incurvées (Bonnet, 2017; Salmén, 2004).

Au cours de cette étude, on considèrera le comportement des fibrilles comme connu et évalué en première approximation par les valeurs expérimentales de Sakurada et al. (1962) qui correspondent à de

la cellulose réelle (et non parfaite comme c'est de cristal de cellulose dont sont à priori constituées les microfibrilles). La microstructure de la paroi S2 étant ainsi supposée périodique, nous allons considérer une cellule unitaire périodique pour la représenter et calculer son comportement effectif.

La cellule périodique choisie est composée par une couche lenticulaire décrite par la Figure 2-4b, entourées par 2 couches lamellaires. La couche lenticulaire est un parallélépipède rectangulaire de côté L_1, L_2, f_3L_3 constituée de 2 fibrilles cylindriques de section souvent carrée ondulant autour de la direction 1 et en contact en $x = \pm L_1/2$. Le paramètre f_3 est défini de la sorte que f_3L_3 correspond à l'épaisseur des macrofibrilles dans la direction 3. Ces 2 fibrilles sont entourées de matrice, que l'on appellera par la suite matrice lenticulaire car cette matrice forme des lentilles entre les fibrilles. Les deux couches lamellaires qui entourent la couche lenticulaire sont constituées uniquement de matrice, que l'on appellera matrice lamellaire. Chaque couche lamellaire est un parallélépipède rectangulaire de cote L_1, L_2, m_3L_3 où $m_3 = 1 - f_3$ de sorte que l'épaisseur suivant la direction radiale de la cellule unitaire périodique soit L_3 (voir Figure 2-5). Il est à noter que la matrice lamellaire et la matrice lenticulaire correspondent à un même matériau.

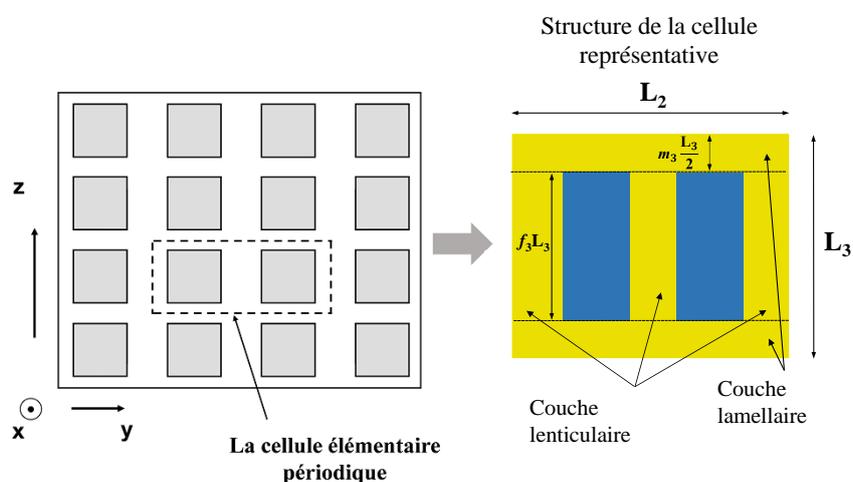


Figure 2-5 : Représentation des paramètres géométriques de la cellule élémentaire périodique.

Il est noté que x, y, z correspondent respectivement aux coordonnées dans les directions 1, 2, 3.

2.2.2 Problème local à résoudre et calcul du comportement effectif

Afin de déterminer les propriétés élastiques effectives de la cellule élémentaire périodique qu'on a définie dans la partie précédente, nous utilisons une approche en déformations imposées et appliquons ainsi à la cellule élémentaire des conditions aux limites (CL) périodiques, voir par exemple Bornert et al. (2001), du type $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\bar{\varepsilon}}\underline{x} + \underline{u}'(\underline{x})$ où $\underline{\bar{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations macroscopiques et $\underline{u}'(\underline{x})$ représente un champ de déplacement périodique. Le problème local que nous devons résoudre est le suivant.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}(\underline{x})) = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \end{array} \right\} \forall \underline{x} \in \Omega \\ \left. \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{u}(\underline{x})}{\partial(\underline{x})} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x})^T}{\partial(\underline{x})} \right) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \underline{\bar{\varepsilon}}\underline{x} + \underline{u}'(\underline{x}), \text{ avec la périodicité de } \underline{u}', \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (2.2.1)$$

où Ω représente le domaine de la cellule élémentaire et $\partial\Omega$ sa frontière

On notera que $\underline{\underline{C}}(\underline{x}) = \sum_{r=M,F} \underline{\underline{C}}^r \cdot \chi^r(x) = \underline{\underline{C}}^M \cdot \chi^M(x) + \underline{\underline{C}}^F \cdot \chi^F(x)$ où $\chi^r(x)$ représente la fonction caractéristique des phases, égale à 1 quand x appartient à la phase r et à 0 sinon. Les tenseurs $\underline{\underline{C}}^r$ correspondent aux tenseurs des modules élastiques de la phase r et les indices M, F représentent respectivement la matrice et les fibres.

En appliquant 6 chargements élémentaires différents et tout en résolvant par EF le problème local d'élasticité associé à la cellule élémentaire soumise à chacun de ces 6 chargements, on calcule la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\sigma}}$ associée à chacun de ces chargements à l'aide de la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{|\text{VER}|} \int_{\text{VER}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (2.2. 2)$$

Les propriétés élastiques effectives $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ de la paroi cellulaire S2 sont déterminées par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.2. 3)$$

En utilisant les notations de Voigt :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{23}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{12})^T \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = (\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{33}, 2\bar{\varepsilon}_{23}, 2\bar{\varepsilon}_{13}, 2\bar{\varepsilon}_{12})^T$$

Cette dernière (2.2. 3) s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{43} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{51} & \tilde{C}_{52} & \tilde{C}_{53} & \tilde{C}_{54} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{61} & \tilde{C}_{62} & \tilde{C}_{63} & \tilde{C}_{64} & \tilde{C}_{65} & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} \quad (2.2. 4)$$

où la notation de Voigt est utilisé avec

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_{ij} \text{ pour } i = 1 \text{ à } 3;$$

$$\text{et où } \bar{\sigma}_4 = \bar{\sigma}_{23}; \bar{\sigma}_5 = \bar{\sigma}_{13}; \bar{\sigma}_6 = \bar{\sigma}_{12}; \bar{\varepsilon}_4 = 2\bar{\varepsilon}_{23}; \bar{\varepsilon}_5 = 2\bar{\varepsilon}_{13}; \bar{\varepsilon}_6 = 2\bar{\varepsilon}_{12};$$

Par exemple, si l'on applique le chargement élémentaire $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$, on obtient par la relation (2.2. 4), la 1^{ère} colonne de la matrice $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ qui vaut :

$$\tilde{C}_{11} = \bar{\sigma}_1 = \langle \sigma_{11} \rangle; \tilde{C}_{21} = \bar{\sigma}_2 = \langle \sigma_{22} \rangle; \tilde{C}_{31} = \bar{\sigma}_3 = \langle \sigma_{33} \rangle; \tilde{C}_{41} = \bar{\sigma}_4 = \langle \sigma_{23} \rangle; \tilde{C}_{51} = \bar{\sigma}_5 = \langle \sigma_{13} \rangle; \tilde{C}_{61} = \bar{\sigma}_6 = \langle \sigma_{12} \rangle$$

Maintenant que nous avons défini le problème local, nous allons pouvoir le résoudre à l'aide de la méthode des EF. Pour cela, il nous faut construire le maillage de notre cellule élémentaire, caractériser le comportement de la matrice et des fibrilles, et appliquer des CL périodiques.

2.2.3 Description du maillage

La Figure 2-4b représente une vue 2D de la couche lenticulaire de la cellule unitaire périodique. Dans le but de définir mathématiquement cette configuration, on utilise le repère orthonormé (O, x, y) où la

direction x représente la direction longitudinale des fibrilles et où la direction y est la direction transversale. Afin de modéliser l'ondulation des fibrilles, il est nécessaire de définir l'axe neutre de la macrofibrille dans la partie supérieure ($y > 0$) que on décrira par une fonction $f(x)$ égale à une sinusoïde d'amplitude a_0 , et de période L_1 .

$$f(x) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{L_1} x\right) + a_0 + \frac{e_0}{2} \quad (2.2. 5)$$

Le paramètre e_0 donné dans l'équation (2.2. 5) représente l'épaisseur de la fibrille. Dans le but de simplifier les calculs, une hypothèse de translation constante est posée sur l'allure de la fibrille afin que la valeur du paramètre e_0 soit choisie constante. Cette translation est illustrée sur la Figure 2-6.

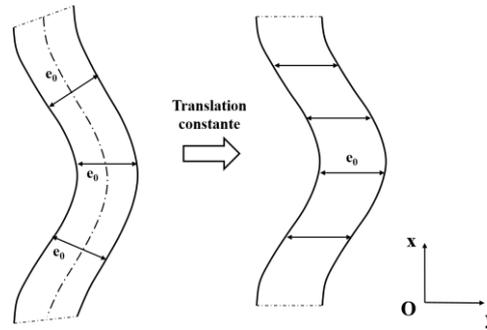


Figure 2-6: Etape de la translation constante de l'épaisseur des fibrilles pour notre étude

Pour mailler la cellule élémentaire, nous allons procéder de la façon suivante : les deux fibrilles cylindriques de section souvent carrée sont générées à partir de la courbe sinusoïdale (2.2. 5). La matrice est constituée de deux zones différentes (zones lamellaires et zones lenticulaires), ainsi que le décrit la Figure 2-7. En outre, les liaisons fibrille/matrice sont supposées parfaites.

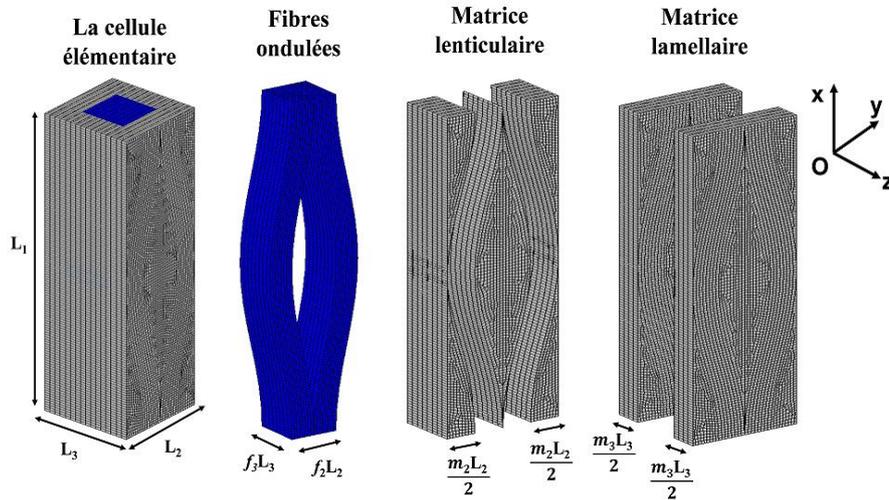


Figure 2-7: Maillage d'une cellule élémentaire périodique avec deux fibrilles ondulées.

On notera que $f_i + m_i = 1$, où f_i et m_i représentent respectivement la proportion linéique de fibrille et de matrice dans la direction i .

La concentration volumique des fibres c et les proportions linéiques de la fibre f_2 et f_3 dans les directions 2 et 3 sont reliées par :

$$c = f_2 f_3 \quad (2.2. 6)$$

On notera par ailleurs r_λ le ratio défini par le volume de la matrice lamellaire divisé par celui de la matrice lenticulaire. Ce dernier est donné par la formule suivante :

$$r_\lambda = \frac{V_{matrice\ lamellaire}}{V_{matrice\ lenticulaire}} = \frac{1 - f_3}{f_3(1 - f_2)} \quad (2.2. 7)$$

2.2.4 Propriétés mécaniques de la cellule élémentaire

Dans cette étude, s'appuyant sur les travaux de (Cave, 1968), nous supposons que les fibrilles, qui sont principalement constituées de cellulose cristalline, sont linéairement élastiques et transversalement isotropes. On appellera L la direction qui correspond à la direction des macrofibrilles et TT le plan transverse dans lequel le comportement est isotrope. La matrice du comportement isotrope transverse des fibres s'écrit alors :

$$\underline{\underline{S}}^F = (\underline{\underline{C}}^F)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L^F} & \frac{-\nu_{TL}^F}{E_T^F} & \frac{-\nu_{TL}^F}{E_T^F} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}^F}{E_T^F} & \frac{1}{E_T^F} & \frac{-\nu_{TT}^F}{E_T^F} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}^F}{E_T^F} & \frac{-\nu_{TT}^F}{E_T^F} & \frac{1}{E_T^F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TT}^F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}^F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}^F} \end{pmatrix} \quad (2.2. 8)$$

où E_L^F est le module d'élasticité dans le sens des fibrilles, E_{TT}^F est le module d'élasticité dans le plan transverse, ν_{LT}^F et ν_{TT}^F sont les coefficients de Poisson dans les plans LT et dans le plan transverse; G_{TT}^F et $G_{LT}^F = [E_T^F/2(1 + \nu_{TT}^F)]$ sont respectivement les modules de cisaillement dans les plans LT et le plan transverse.

La matrice, quant à elle, est constituée par l'ensemble des constituants macromoléculaires amorphes du bois, principalement la lignine et l'hémicellulose. On considérera son comportement comme élastique linéaire isotrope de module d'Young E^M , de coefficient de Poisson ν^M et de module de cisaillement $G^M = [E^M/2(1 + \nu^M)]$ de sorte que sa matrice des souplesses s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{S}}^M = (\underline{\underline{C}}^M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E^M} & \frac{-\nu^M}{E^M} & \frac{-\nu^M}{E^M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu^M}{E^M} & \frac{1}{E^M} & \frac{-\nu^M}{E^M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu^M}{E^M} & \frac{-\nu^M}{E^M} & \frac{1}{E^M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu^M)}{E^M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu^M)}{E^M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu^M)}{E^M} \end{pmatrix} \quad (2.2. 9)$$

Du fait de la forme géométrique de la cellule unitaire périodique, de l'isotropie du comportement de la matrice et de l'isotropie transverse du comportement des fibres, on notera que les plans (O, y, z) et (O, x, z) où O est le centre de la cellule périodique sont des plans de symétrie de la cellule élémentaire. Par conséquent, du fait de l'existence de 3 plans de symétrie, le comportement effectif de la couche S2 est nécessairement orthotrope.

2.2.5 Application de conditions aux limites périodiques

Comme on l'a vu dans la définition du problème local, nous utilisons une approche en déformation et appliquons ainsi des CL périodiques du type :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\bar{\varepsilon}}(\underline{x}) + \underline{u}'(\underline{x}), \text{ avec } \underline{u}' \text{ champ périodique} \quad (2.2. 10)$$

Pour cela, nous utilisons l'approche suivante. Soit \underline{x}_1 et $\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \underline{L}_1$, 2 points homologues de la frontière $\partial\Omega$ de la cellule unitaire dans la direction de périodicité $\underline{L}_1 = L_1 \cdot \underline{e}_x$. Du fait de la périodicité de \underline{u}' , nous imposons la relation $\underline{u}(\underline{x}_2) - \underline{u}(\underline{x}_1) = \underline{\bar{\varepsilon}} \cdot \underline{L}_1$. Cette relation doit également être imposée dans les autres directions de périodicité $\underline{L}_2 = L_2 \cdot \underline{e}_y$ et $\underline{L}_3 = L_3 \cdot \underline{e}_z$. L'application de cette relation dans le logiciel EF Cast3M est indiquée en Annexe A.

2.2.6 Solution exacte d'un laminé bicouche

Dans cette partie, nous présentons la solution exacte d'un laminé biphasé constitué d'un empilement périodique d'une couche de matrice et d'une couche de fibrille. Ce laminé correspond à la cellule unitaire périodique décrite dans la partie 2.2.1, quand on fait tendre le rapport r_λ défini par (2.2. 7), vers $+\infty$, ce qui signifie qu'il n'y a plus de matrice lenticulaire et donc que la couche lenticulaire est constituée uniquement par des fibrilles. Cette solution analytique nous servira à valider nos calculs éléments finis en faisant tendre numériquement le ratio r_λ vers $+\infty$.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, pour ce qui concerne la caractérisation des tenseurs de la rigidité locaux $\underline{\underline{C}}^F$ et $\underline{\underline{C}}^M$, on les considèrera dès maintenant isotrope pour la matrice et isotrope transverse pour les fibrilles comme c'est le cas de ce chapitre de sorte que :

$$\underline{\underline{C}}^M = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.2. 11)$$

$$\underline{\underline{C}}^F = \begin{pmatrix} C_{11}^F & C_{12}^F & C_{12}^F & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^F & C_{22}^F & C_{23}^F & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^F & C_{23}^F & C_{22}^F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23}^F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13}^F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12}^F \end{pmatrix} \quad (2.2. 12)$$

Donc, la solution obtenue en Annexe C se réduit aux expressions suivantes :

$$\tilde{C}_{11} = f \left[C_{11}^F + \frac{C_{12}^F}{C_{22}^F} (\tilde{C}_{31} - C_{12}^F) \right] + m \left[(\lambda + 2\mu) + \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} (\tilde{C}_{31} - \lambda) \right]; \quad (2.2. 13)$$

$$\tilde{C}_{22} = f \left[C_{22}^F + \frac{C_{23}^F}{C_{22}^F} (\tilde{C}_{32} - C_{23}^F) \right] + m \left[(\lambda + 2\mu) + \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} (\tilde{C}_{32} - \lambda) \right]; \quad (2.2. 14)$$

$$\tilde{C}_{33} = \frac{1}{\left(\frac{f}{C_{22}^F} + \frac{m}{(\lambda + 2\mu)} \right)}; \quad (2.2. 15)$$

$$\tilde{C}_{12} = \tilde{C}_{21} = f \left[C_{12}^F + \frac{C_{12}^F}{C_{22}^F} (\tilde{C}_{32} - C_{23}^F) \right] + m \left[\lambda + \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} (\tilde{C}_{32} - \lambda) \right]; \quad (2.2. 16)$$

$$\tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{31} = \left(f \frac{C_{12}^F}{C_{22}^F} + m \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \right) \tilde{C}_{33}; \tilde{C}_{23} = \tilde{C}_{32} = \left[f \frac{C_{23}^F}{C_{22}^F} + m \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \right] \tilde{C}_{33}; \quad (2.2. 17)$$

$$\tilde{C}_{44} = \tilde{G}_{23} = \frac{1}{\left(f \frac{1}{G_{23}^F} + m \frac{1}{\mu} \right)}; \tilde{C}_{55} = \tilde{G}_{13} = \frac{1}{\left(f \frac{1}{G_{13}^F} + m \frac{1}{\mu} \right)}; \tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12} = f G_{12}^F + m \mu; \quad (2.2. 18)$$

2.3 Application

Dans cette partie, nous calculons le comportement effectif de la paroi S2 en utilisant la méthodologie présentée dans la partie 2.2. Cette méthodologie nécessite la mise en œuvre de calculs éléments finis qui seront réalisés à l'aide du logiciel Cast3M.

Dans un 1^{er} temps, nous effectuons une étude de convergence pour déterminer les paramètres du maillage qui serviront aux calculs du comportement effectif.

Dans un 2^{ème} temps, nous cherchons à valider la solution numérique à l'aide de la solution analytique obtenue à la partie 2.2.6 qui correspond à un rapport $r_\lambda = +\infty$. Enfin nous effectuons une étude paramétrique permettant d'analyser l'influence de différents paramètres géométriques et matériaux sur le comportement effectif. Lors de cette étude paramétrique, nous analyserons plus particulièrement l'influence des oscillations des fibrilles en comparant le comportement effectif associé à ces ondulations à celui associé à un autre modèle de microstructure où les fibrilles sont considérées comme parallèles et non reliées.

2.3.1 Analyse de la précision de la solution en fonction du nombre d'éléments finis

a) Paramètres géométriques

Afin d'analyser le comportement effectif de la paroi cellulaire à l'échelle subpariétale, nous avons choisi le modèle de microstructure décrit dans la partie 2.2 et associé au maillage représenté par la Figure 2-7. Les paramètres géométriques utilisés dans cette étude de convergence sont issus de la thèse de Marie Bonnet (2017). L'ensemble des données d'entrée est présenté dans le Tableau 2-1.

Tableau 2-1 : Paramètres géométriques de la cellule élémentaire

Longueur suivant la direction longitudinale (Direction x)	L₁	0.30	(micron)
Longueur suivant la direction transversale (Direction y)	L₂	0.04	(micron)
Longueur suivant la direction radiale (Direction z)	L₃	0.02	(micron)

b) Détermination des comportements mécaniques des constituants

De nombreuses recherches ont été réalisées en vue d'estimer les propriétés élastiques des constituants de la paroi cellulaire S₂. Dans le Tableau 2-2, nous présentons des données issues de la littérature

associées à un comportement isotrope transverse pour les fibrilles et un comportement isotrope pour la matrice. Ces données matériaux sont celles que nous utilisons au cours des calculs EF. Certains des paramètres présentés correspondent à des valeurs mesurées expérimentalement (marqué E), tandis que d'autres ont été déterminés à partir de modèles de dynamique moléculaire (marqué M) ou estimés sur la base de modèles phénoménologiques (marqué P) (Qing and Mishnaevsky Jr, 2009).

Tableau 2-2: propriétés mécaniques à 12% de teneur en eau pour les polymères de la paroi cellulaire

Polymère	Coefficient	Valeur	Méthode	Référence	
Cellulose	Module d'Young longitudinal	E_L (GPa)	138	E	Nishino et al. (1995)
	Module d'Young transversal	E_{TT} (GPa)	27.2	M	Mark (1967)
	Coefficient de Poisson longitudinal	ν_{LT}	0.1	P	Cave (1978)
	Coefficient de Poisson transversal	ν_{TT}	0.33	P	Cave (1978)
	Module de cisaillement longitudinal	G_{LT} (GPa)	4.4	M	Mark (1967)
	Module de cisaillement transversal	G_{TT} (GPa)	$E_{TT} / 2(1+\nu_{TT})$	-	-
Matrice amorphe	Module d'Young	E_m (GPa)	2	E	Cousins (1978)
	Coefficient de Poisson	ν_m	0.33	E	Bodig and Jayne (1982)

Par ailleurs, les concentrations volumiques des constituants de la paroi S2 proviennent de la synthèse de Neagu (2006) reportée sur le Tableau 2-3. En 1^{ère} approximation, on considérera que les fibrilles sont uniquement constituées de cellulose, ce qui fixe leur concentration à $c = 50\%$.

Tableau 2-3: fraction volumique des constituants de la couche S2 (en %)

	Cellulose	Hémicellulose	Lignine
S₂	50	27	23

c) Raffinement du maillage et convergence

Afin d'optimiser le rapport entre la précision des résultats et le coût des simulations EF dans notre étude, il est nécessaire de choisir avec pertinence la taille des éléments. A cette intention, nous avons réalisé plusieurs maillages associés à différentes tailles d'éléments pour observer comment évolue le comportement effectif lorsqu'on raffine le maillage (voir Figure 2-8). Nous avons par ailleurs utilisé plusieurs types d'éléments sur Cast3M, les types éléments CUB8, PRI6 et TET4 qui correspondent respectivement à un élément cubique à 8 nœuds, un élément prismatique à 6 nœuds et un élément tétraédrique à 4 nœuds, à l'interpolation linéaire.

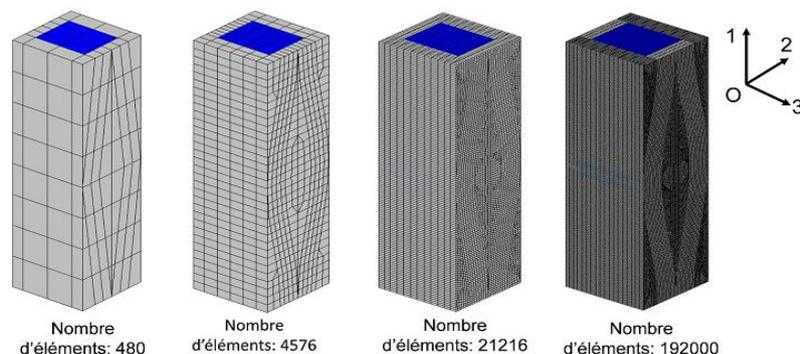


Figure 2-8 : La cellule unitaire périodique pour différents degrés de raffinement du maillage (éléments CUB8).

Pour analyser la convergence de la solution, nous utilisons l'indicateur de convergence suivant :

$$ecart_{moy}^i = \left[\frac{1}{N} \sum \left(\frac{\tilde{C}_{kl}^i - \tilde{C}_{kl}^{+\infty}}{\tilde{C}_{kl}^{+\infty}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3. 1)$$

où

- N : le nombre de coefficients \tilde{C}_{kl} non nuls, c-à-d 9 pour un comportement orthotrope ;
- \tilde{C}_{kl}^i : la valeur du comportement \tilde{C}_{kl} pour le maillage i ;
- $\tilde{C}_{kl}^{+\infty}$: la valeur du comportement $\tilde{C}_{kl}^{+\infty}$ pour le maillage le plus fin qui est considéré comme la solution « exacte » ;

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus pour les différents maillages utilisés

Tableau 2-4 : Ensemble des valeurs des 9 composantes de la rigidité effective \tilde{C}_{kl} et de l'écart moyen ($ecart_{moy}^i$) pour différentes finesse de maillage

Nombre d'éléments	Donnée i	Type d'éléments	\tilde{C}_{11}	\tilde{C}_{22}	\tilde{C}_{33}	\tilde{C}_{12}	\tilde{C}_{23}	\tilde{C}_{13}	\tilde{C}_{44}	\tilde{C}_{55}	\tilde{C}_{66}	$ecart_{moy}$ (%)
480	1	TET4	70502	6745.5	7511.5	2085.6	1845.5	2017.1	1493.9	1688.7	1926.9	2.16
6080	2		70401	6675.7	7418.4	2132.9	1840.9	2040.2	1482.6	1673.7	1920.7	1.24
29952	3		70391	6651	7331.4	2143.4	1835.1	2049.2	1474.8	1665.3	1933.3	0.66
95360	4		70399	6638.3	7277.7	2147.7	1831.6	2056.8	1470.7	1660.1	1939.9	0.31
247040	5		70406	6630.6	7247.4	2149.9	1829.8	2062.2	1468.3	1657.4	1943.5	0.11
542400	$+\infty$		70412	6626.1	7231.8	2151.1	1829	2065.8	1467.1	1656	1945.6	0.00
480	1	PRI6	70488	6737	7481.6	2085.3	1842.3	2016.9	1492.9	1686.4	1883.9	2.25
4576	2		70380	6672.6	7403.6	2132.2	1839.3	2039.7	1481.6	1672.7	1910.9	1.22
21216	3		70385	6648.9	7316.1	2143.1	1833.8	2049.4	1473.6	1663.5	1929.4	0.59
70848	4		70397	6636.8	7266.4	2147.6	1830.8	2057.7	1469.9	1659	1937.9	0.24
192000	5		70405	6629.8	7241.2	2149.9	1829.5	2063	1467.9	1656.8	1942.3	0.07
254784	$+\infty$		70411	6626.9	7237.3	2151.2	1829.3	2065.1	1467.4	1656.3	1945.1	0.00
480	1	CUB8	70488	6737	7481.6	2085.3	1842.3	2016.9	1492.9	1686.4	1883.9	2.25
4576	2		70380	6672.6	7403.6	2132.2	1839.3	2039.7	1481.6	1672.7	1910.9	1.22
21216	3		70385	6648.9	7316.1	2143.1	1833.8	2049.4	1473.6	1663.5	1929.4	0.59
70848	4		70397	6636.8	7266.4	2147.6	1830.8	2057.7	1469.9	1659	1937.9	0.24
192000	5		70405	6629.8	7241.2	2149.9	1829.5	2063	1467.9	1656.8	1942.3	0.07
254784	$+\infty$		70411	6626.9	7237.3	2151.2	1829.3	2065.1	1467.4	1656.3	1945.1	0.00

Pour chaque type d'éléments donné (CUB8, PRI6, TET4), on constate que l'écart moyen tend bien vers zéro lorsque le nombre d'éléments devient très grand. La Figure 2-9 présente les courbes de convergence des valeurs $ecart_{moy}^i$ obtenues pour 3 types d'éléments en fonction du nombre éléments.

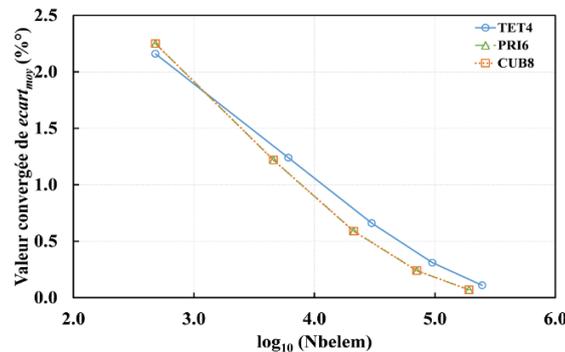


Figure 2-9 : Evolution d'écart moyen en fonction du nombre d'éléments selon leur type.

On s'aperçoit ainsi que le type d'élément choisi n'a que très peu d'influence sur la convergence, ce qui était prévisible car les éléments choisis sont tous à interpolation linéaire.

2.3.2 Validation de la solution numérique

Au regard des courbes de convergence ci-dessus, nous choisissons une précision inférieure à 1% associée aux éléments de type CUB8 ce qui correspond à un maillage de 21216 éléments. Le niveau de raffinement correspondant à ce maillage sera ainsi utilisé pour tous les calculs effectués dans ce chapitre. Afin de valider le modèle numérique, nous allons le comparer avec la solution exacte du laminé correspondant à la microstructure du modèle numérique pour la valeur $r_\lambda = +\infty$.

a) Rappel : définition du ratio r_λ

Précédemment, dans la partie 2.2.1, nous avons défini la localisation de la matrice amorphe dans 2 zones, une zone lamellaire et une zone lenticulaire. En utilisant le ratio r_λ défini par l'équation (2.2. 7), nous considérons 2 cas extrêmes de la valeur de ce ratio et analysons à quelle morphologie de la cellule élémentaire ils correspondent :

- Si $r_\lambda = 0$, les couches de matrice lamellaire n'existent pas. On aboutit ainsi à une morphologie décrite par la Figure 2-10. On pourrait comparer cette microstructure à une sorte de laminé bicouches empilées dans la direction 2, dont les couches ressemblent à une tôle ondulée (au moins pour les couches de fibrilles).

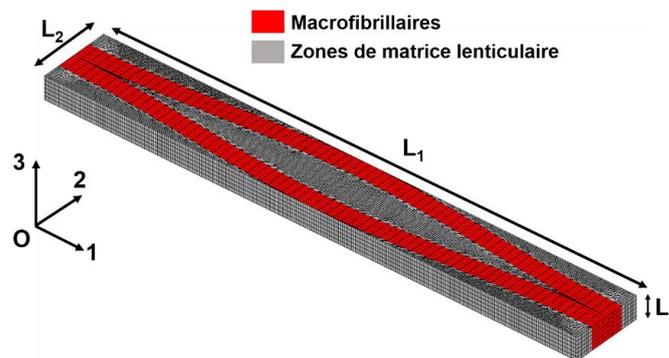


Figure 2-10 : Cellule unitaire périodique sans zone lamellaire.

- Si $r_\lambda = \infty$, les zones lenticulaires de la matrice n'existent pas. La couche lenticulaire est ainsi constituée uniquement par des macrofibrilles. La cellule unitaire périodique correspond alors au laminé bicouches empilées suivant la direction 3 et décrit par la Figure 2-11. Le comportement effectif lié à cette microstructure a été calculé analytiquement à la section 2.2.6. La comparaison entre le comportement effectif obtenu numériquement pour $r_\lambda = \infty$ et celui obtenu par la solution analytique exacte va nous permettre de valider nos calculs EF.

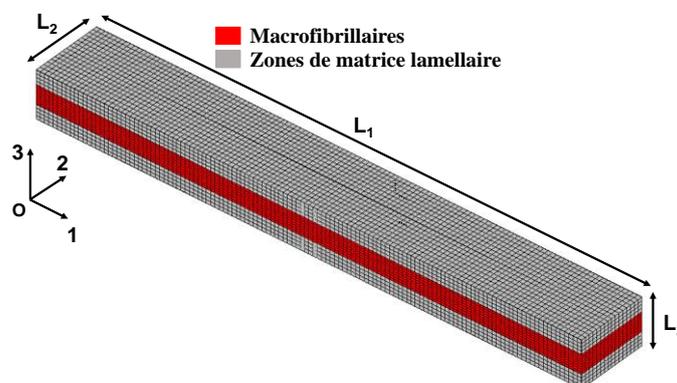


Figure 2-11 : Cellule unitaire périodique sans zone de matrice lenticulaire.

b) Calcul du comportement pour la solution exacte

En utilisant les paramètres donnés dans les Tableau 2-1 et Tableau 2-2, on détermine tous les termes du tenseur des rigidités effectives \tilde{C}_{ij} associées à la solution exacte. L'ensemble des résultats est présenté sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}^{exacte} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11}^{exacte} & \tilde{C}_{12}^{exacte} & \tilde{C}_{13}^{exacte} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{21}^{exacte} & \tilde{C}_{22}^{exacte} & \tilde{C}_{23}^{exacte} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{31}^{exacte} & \tilde{C}_{32}^{exacte} & \tilde{C}_{33}^{exacte} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44}^{exacte} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55}^{exacte} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66}^{exacte} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70787 & 2430.65 & 1690.60 & 0 & 0 & 0 \\ 2430.65 & 15668.95 & 2229.60 & 0 & 0 & 0 \\ 1690.60 & 2229.60 & 5404.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1401.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1284.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2575.94 \end{bmatrix}$$

c) Calcul numérique du comportement effectif par EF

En utilisant cette fois ci la démarche numérique proposée dans la partie 2.2, on détermine la matrice $\underline{\underline{\tilde{C}}}^{num}$ caractérisant le comportement élastique effectif associée à la paroi S2 pour un rapport $r_\lambda = +\infty$. En pratique, pour faire tendre r_λ vers $+\infty$, nous avons pris un paramètre $f_3 = 0.999$ correspondant à $r_\lambda = 500$. L'ensemble des résultats est présenté sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}^{num} = \begin{bmatrix} 70786 & 2412.3 & 1690.7 & -3.04E-13 & 1.62E-12 & 6.76E-11 \\ 2412.3 & 15425 & 2217.9 & -1.18E-12 & 4.64E-12 & 3.18E-10 \\ 1690.7 & 2217.9 & 5413.1 & -4.55E-12 & 1.44E-11 & 8.16E-11 \\ -6.32E-13 & -2.22E-11 & 2.74E-13 & 1401.1 & 3.27E-11 & 5.34E-11 \\ 8.20E-11 & -3.12E-14 & 1.27E-14 & 2.65E-14 & 1286.2 & -8.16E-13 \\ 1.13E-10 & 1.73E-14 & -6.99E-16 & -1.72E-16 & 4.97E-14 & 2556.2 \end{bmatrix}$$

On observe bien un comportement effectif élastique orthotrope, comme le prédisait la théorie.

d) Comparaison

Les 2 approches sont comparées entre elles et les résultats sont synthétisés dans le Tableau 2-5 où l'écart reporté correspond à l'écart relatif $\left(\frac{\tilde{C}_{ij}^{exacte} - \tilde{C}_{ij}^{num}}{\tilde{C}_{ij}^{exacte}}\right)$ pour chacune des 9 composantes non nulles.

Tableau 2-5 : Comparaison des valeurs des composantes effectives \tilde{C}_{ij} obtenues par les 2 approches

Composante (MPa)	\tilde{C}_{11}	\tilde{C}_{22}	\tilde{C}_{33}	\tilde{C}_{12}	\tilde{C}_{23}	\tilde{C}_{13}	\tilde{C}_{44}	\tilde{C}_{55}	\tilde{C}_{66}
Approche numérique	70787	15416	5413	2412.30	1690.70	2217.90	1401.1	1286.2	2555.3
Solution exacte	70787	15669	5404	2430.65	1690.60	2229.60	1401	1284.3	2576
Ecart (%)	0.0	1.60	0.16	0.75	0.0	0.52	7.13e-3	0.15	0.80

Les résultats des écarts calculés montrent que le modèle numérique fournit des résultats très proches de la solution exacte. En effet, l'écart maximum vaut 1.6% et est atteint pour le coefficient \tilde{C}_{22} . Il est environ de l'ordre de la précision du maillage adopté. On peut ainsi considérer que l'approche numérique a été validée.

2.3.3 Etude paramétrique

Le but du modèle numérique proposé est d'analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif de la paroi S2. A cette fin, nous allons comparer les rigidités effectives \tilde{C}_{ij} obtenues par ce modèle, que nous appellerons modèle 1S (pour 1 direction d'ondulation) à celles obtenus sur une autre cellule élémentaire périodique où les fibrilles sont réparties de façon parfaitement parallèle, comme cela est décrit par la Figure 2-12. Nous appellerons ce dernier modèle, le modèle 0S car il n'y a aucune ondulation des fibrilles.

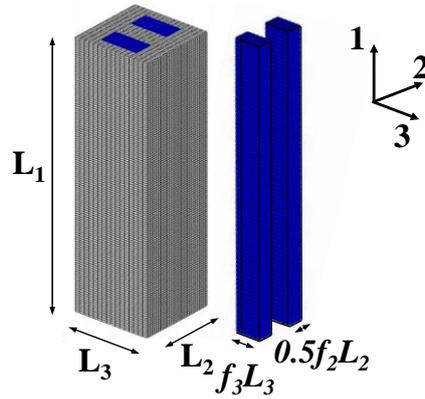


Figure 2-12 : Description géométrique de la cellule élémentaire à deux fibrilles parallèles (modèle 0S).

Afin d'étudier l'influence de la répartition spatiale des fibrilles sur le comportement effectif de la cellule élémentaire, une comparaison est réalisée entre les 2 modèles 1S et 0S en faisant varier, d'une part, certains des paramètres géométriques définissant la géométrie de la cellule, et d'autre part, les propriétés mécaniques des phases.

a) Variations des paramètres géométriques

Au cours de cette étude paramétrique, nous allons faire varier 3 paramètres de forme : le ratio r_λ défini par l'équation (2.2. 7), le rapport de forme r_ϕ défini par $r_\phi = L_1/L_2$ et la concentration volumique c des fibrilles. Nous allons également considérer deux types de comportement pour les fibrilles : un comportement linéaire élastique isotrope transverse et un comportement linéaire élastique isotrope. La matrice, quant à elle, sera toujours linéaire élastique isotrope.

❖ La solution de référence

Au cours des comparaisons numériques qui vont suivre, nous allons bien souvent étudier l'évolution des paramètres matériaux \tilde{C}_{ij} en fonction de 2 des 3 paramètres géométriques en considérant le 3^{ème} comme fixé. Afin de déterminer la valeur du 3^{ème} paramètre, nous allons utiliser une solution de référence qui correspond à des valeurs des paramètres de forme r_ϕ , r_λ et c réalistes pour le bois. Pour la couche S2, nous prenons comme rapport de forme (voir le Tableau 2-1) $r_\phi = 7.50$. La concentration est quant à elle approchée par $c = 0.5$ (voir Tableau 2-3) en faisant l'approximation que les fibrilles sont uniquement constituées de cellulose. Par ailleurs, pour fixer la valeur de référence r_λ , on considérera que $f_3 = 3/4$, ce qui correspond à une valeur $r_\lambda = 1.0$ (l'équation (2.2. 7)). De plus, afin d'avoir une vision plus claire de l'évolution de r_λ en fonction des paramètres f_2 et f_3 qui définissent la géométrie de la cellule périodique, nous avons tracé sur la Figure 2-13 sa variation en fonction de f_3 pour différentes valeurs de f_2 .

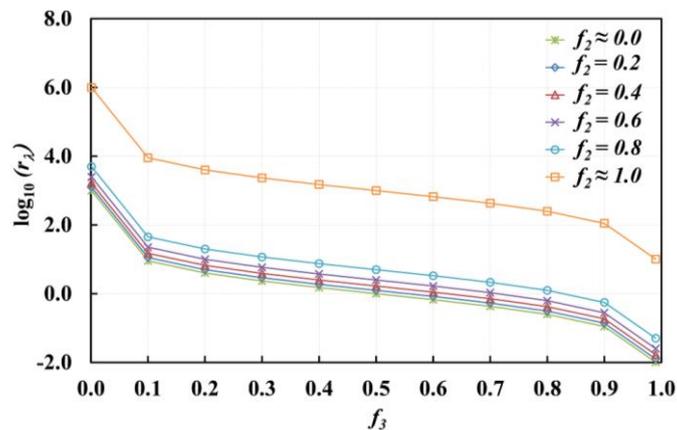


Figure 2-13 : Évaluation de r_λ en fonction de f_3 pour différentes valeurs de f_2 .

❖ Cas des fibrilles isotropes transverses :

• Variation du ratio r_λ

Pour les 2 microstructures considérées, à fibres ondulées (modèle 1S) ou à fibres parallèles (modèle 0S), nous avons reporté sur la Figure 2-14, l'évolution des 9 rigidités effectives \tilde{C}_{ij} caractérisant le comportement orthotrope en fonction du rapport r_λ que nous ferons varier entre 0 et $+\infty$. Nous avons de plus effectué ces comparaisons pour 4 valeurs différentes du facteur de forme $r_\phi = L_1/L_2$. La concentration des fibrilles est par ailleurs fixée à sa valeur de référence $c = 0.5$. Pour des raisons géométriques évidentes, la valeur des coefficients \tilde{C}_{ij} associés au modèle 0S ne dépend pas de la longueur L_1 (et donc du ratio r_ϕ). Par conséquent, une seule valeur sera reportée pour chaque \tilde{C}_{ij} associé au modèle 0S. Ces comparaisons permettent de montrer l'influence des ondulations des fibrilles sur les rigidités effectives de la paroi S2.

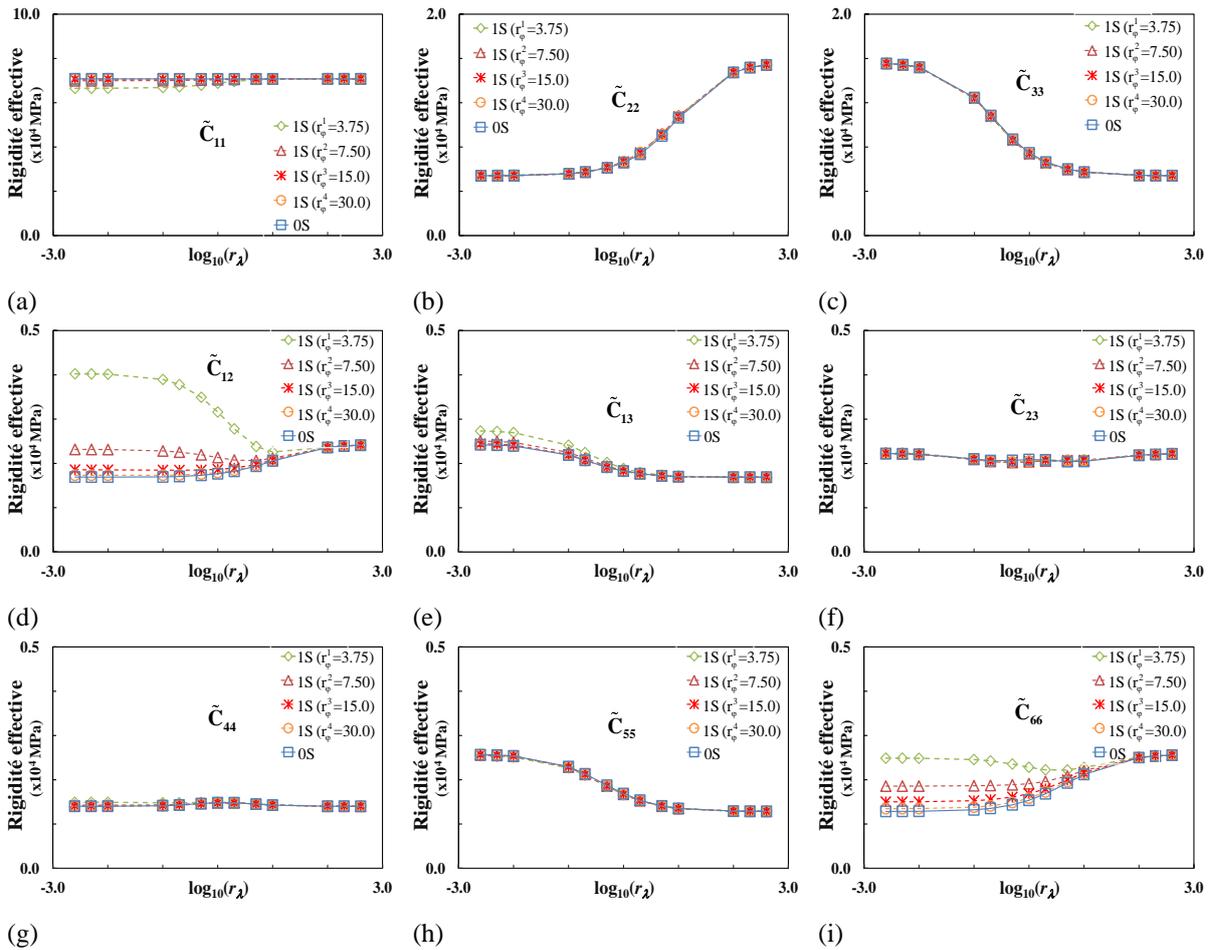


Figure 2-14 : Évolution des composantes \tilde{C}_{ij} en fonction de r_λ ($c = 0.5$).

On constate tout d'abord que chaque valeur \tilde{C}_{kl} associé au modèle $1S(r_\phi^i)$ converge vers une valeur unique indépendante de la valeur r_ϕ quand r_λ tend vers $+\infty$. Cela est tout à fait normal car la microstructure associée à chacune des microstructures converge (pour r_λ tendant vers $+\infty$) vers le laminé bicouche décrit par la Figure 2-11. De même $\tilde{C}_{kl}(0S)$ converge vers cette même valeur limite car la microstructure à fibres parallèles converge elle aussi pour $r_\lambda \rightarrow +\infty$ vers le laminé bicouche décrit par la Figure 2-11. L'ensemble de ces comparaisons montrent que l'influence des ondulations des fibrilles est quasiment inexistante pour certaines composantes telles que $\tilde{C}_{22}, \tilde{C}_{33}, \tilde{C}_{23}$ et \tilde{C}_{55} alors qu'elle est importante pour d'autres, notamment pour les composantes \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} comme on pouvait s'y attendre

intuitivement au moins pour la composante de cisaillement $\tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12}$. Enfin, l'influence de l'ondulation des fibrilles reste faible pour les composantes \tilde{C}_{11} , \tilde{C}_{13} et \tilde{C}_{44} .

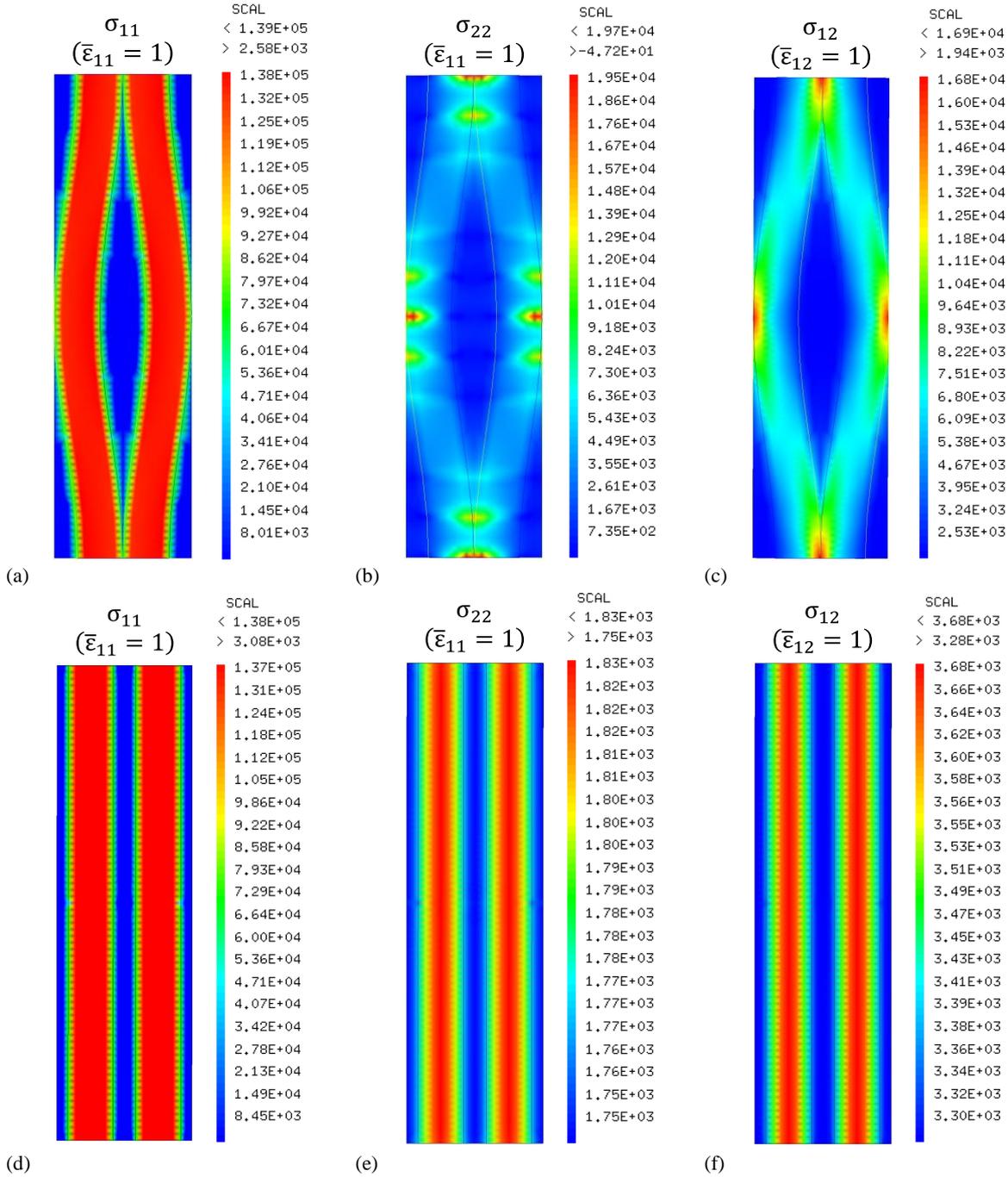


Figure 2-15 : Graphiques des composantes sélectionnées du champ de contrainte dans le plan (1, 2) obtenus par les calculs EF pour deux chargements macroscopiques pour les modèles 0S et 1S ($r_\phi = 3.75$; $r_\lambda = 1.0$). Graphique de σ_{11} pour $\bar{\epsilon}_{11} = 1$: (a) modèle 1S, (d) modèle 0S. Graphique de σ_{22} pour $\bar{\epsilon}_{11} = 1$: (b) modèle 1S, (e) modèle 0S. Graphique de σ_{12} pour $\bar{\epsilon}_{12} = 1$: (c) modèle 1S, (f) modèle 0S.

Pour expliquer le fait que seuls $\tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12}$ and \tilde{C}_{12} ont fortement influencés par les oscillations des fibrilles, nous reportons certaines composantes sélectionnées du champ de contrainte dans la Figure 2-15 pour les valeurs de référence $r_\lambda = 1.0$ and $r_\phi = 3.75$. Dans un premier temps, nous comparons pour les deux modèles 1S (dans la Figure 2-15c) et 0S (dans la Figure 2-15f) la composante σ_{12} du champ de contraintes dans le plan (1, 2) - à savoir $z = 0$ - obtenue par des calculs EF pour un chargement

macroscopique défini par $\bar{\varepsilon}_{12} = 1$ et $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$ pour les autres composantes. Il faut noter que la moyenne spatiale de ce champ fournit le coefficient effectif \tilde{C}_{66} . On observe que les deux champs de contraintes σ_{12} , associés aux modèles 1S et 0S respectivement, sont significativement différents, expliquant ainsi pourquoi le module effectif \tilde{C}_{66} est fortement influencé par les oscillations des fibrilles. De plus, les oscillations des fibrilles agissent comme un renforcement de ce module, comme observé sur les Figure 2-15c et Figure 2-15f, le champ de contraintes σ_{12} est nettement plus élevé, notamment à l'intérieur des fibrilles, pour le modèle 1S que pour 0S. La même explication vaut pour le module effectif \tilde{C}_{12} qui correspond à la moyenne spatiale du champ de contraintes σ_{22} obtenu par les calculs EF pour un chargement macroscopique défini par $\bar{\varepsilon}_{11} = 1$ et $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$ pour les autres composantes. En comparant ce champ dans le plan (1, 2) pour les deux modèles 1S (Figure 2-15b) et 0S (Figure 2-15e), on observe à nouveau que les deux champs sont significativement différents et conduisent donc à des valeurs différentes de \tilde{C}_{12} pour les deux modèles 1S et 0S.

Pour expliquer le fait que les oscillations des fibrilles n'ont pas (ou peu) d'effets sur les 7 autres modules effectifs \tilde{C}_{ij} , nous utilisons le même type de comparaison sur le champ de contrainte local approprié dont la moyenne spatiale fournit le module effectif considéré. A titre d'illustration, nous ne traitons ici que le cas de \tilde{C}_{11} mais l'argument reste valable pour les autres modules restants. En remarquant que \tilde{C}_{11} correspond à la moyenne spatiale de la composante σ_{11} du champ de contrainte obtenu par les calculs EF pour un chargement macroscopique défini par $\bar{\varepsilon}_{11} = 1$ et $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$ pour les autres composantes, nous comparons les valeurs de ce champ dans le plan (1, 2) pour les modèles 1S (voir Figure 2-15a) et 0S (voir Figure 2-15d). On observe que, contrairement aux cas que nous avons traités jusqu'à présent, les deux champs de contraintes σ_{11} associés aux modèles 1S et 0S respectivement, sont maintenant proches l'un de l'autre (mais non fusionnés), expliquant ainsi pourquoi un effet faible mais non nul des fibrilles oscillantes est observé pour le coefficient \tilde{C}_{11} .

De plus, un autre argument permet de mieux comprendre la raison pour laquelle les oscillations des fibrilles ont une faible influence sur le coefficient effectif \tilde{C}_{11} . Pour cela, nous utilisons la pente p des fibrilles par rapport à la direction 1 qui est définie (voir (2.2. 19)) par :

$$p = \frac{df(x)}{dx} = -a_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L_1}\right) \quad (2.2. 19)$$

Un calcul simple fournit sa valeur moyenne le long de la direction 1 comme suit :

$$\langle p \rangle = \frac{2}{r_\phi} \left(\frac{1 - c}{1 + cr_\lambda} \right) \quad (2.2. 20)$$

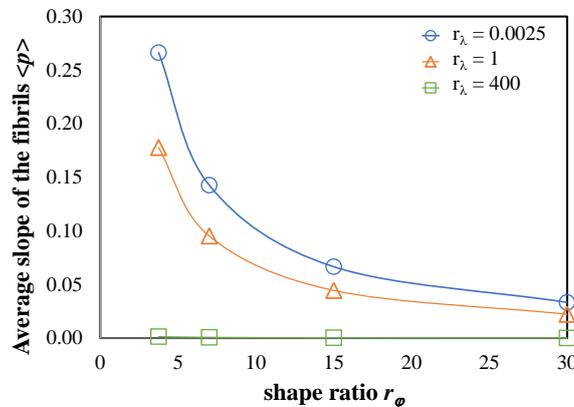


Figure 2-16: Variations de la pente moyenne des fibrilles en fonction du facteur de forme r_ϕ pour différentes valeurs de r_λ (modèle 1S)

La variation de la moyenne de la pente $\langle p \rangle$ en fonction du facteur de forme r_ϕ est représentée sur la Figure 2-16. On observe que ses valeurs sont relativement faibles - moins de 18 % pour toutes les valeurs de r_ϕ à la valeur de référence $r_\lambda = 1.0$. En conséquence, pour la direction longitudinale, la géométrie du modèle 1S est proche de celle du modèle 0S expliquant ainsi pourquoi les variations du module effectif \tilde{C}_{11} pour les deux modèles 1S et 0S sont proches les unes des autres.

Comme le facteur de forme approchant la physique réelle de la paroi S2 correspond à $r_\phi = 7.50$, nous avons voulu mettre en évidence pour cette valeur du facteur de forme, l'influence de l'ondulation des fibrilles sur les 9 coefficients ingénieurs ($\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{\nu}_{12}, \tilde{\nu}_{13}, \tilde{\nu}_{23}, \tilde{G}_{12}, \tilde{G}_{13}$ et \tilde{G}_{23}) du comportement orthotrope. A cette intention, nous avons utilisé le Tableau C-1 (Annexe C) qui nous permet de calculer ces 9 coefficients matériaux en fonction des rigidités macroscopiques élastiques \tilde{C}_{ij} obtenues par homogénéisation numérique. Nous avons ensuite reporté sur la Figure 2-17 l'évolution de ces paramètres en fonction de r_λ pour les 2 modèles de microstructure considérés (0S et 1S), ceci pour les valeurs de référence $r_\lambda = 7.50$ et $c = 0.5$.

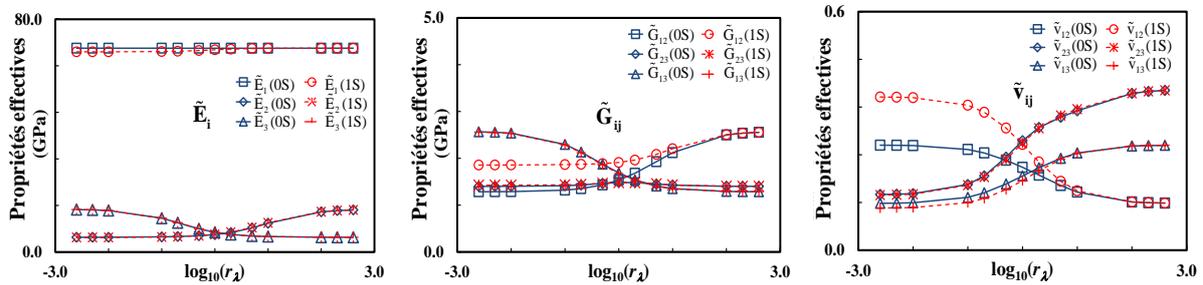


Figure 2-17 : Evolution des 9 constantes ingénieurs caractérisant le comportement macroscopique orthotrope pour les 2 modèles de microstructure 0S et 1S ($r_\phi = 7.50, c = 0.5$).

Les comparaisons ci-dessus montrent que l'effet d'ondulation des macrofibrilles est presque nul pour les coefficients $\tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{G}_{13}, \tilde{G}_{23}, \tilde{\nu}_{23}$ et agit légèrement sur les coefficients $\tilde{E}_1, \tilde{\nu}_{13}$. En revanche, il est important pour les 2 coefficients restants, à savoir $\tilde{G}_{12}, \tilde{\nu}_{12}$. Les 3 coefficients $\tilde{E}_1, \tilde{G}_{12}, \tilde{\nu}_{12}$ représentent la rigidité de la paroi cellulaire dans le plan longitudinal-transverse. Nous avons tracé pour ces 3 coefficients l'évolution de leurs écarts relatifs ($\frac{\tilde{x}^{0S} - \tilde{x}^{1S}}{\tilde{x}^{0S}}$) en fonction du rapport de forme r_ϕ sur la Figure 2-18, ceci pour $c = 0.5$ et différentes valeurs de r_λ .

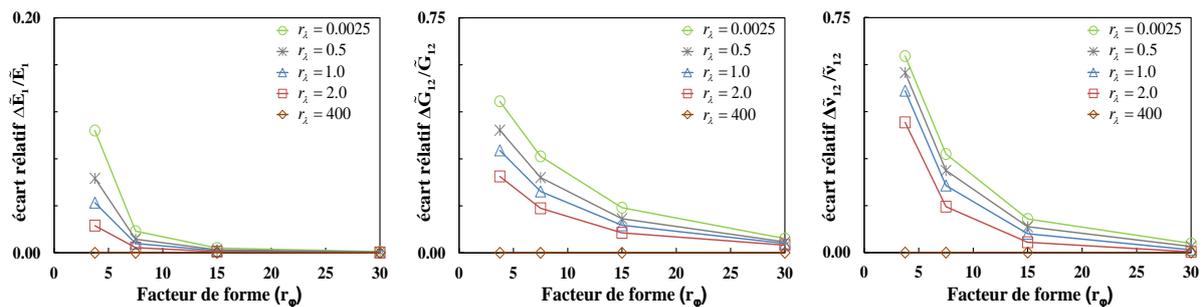


Figure 2-18 : Evolution des écarts relatifs des 3 coefficients $\tilde{E}_1, \tilde{G}_{12}, \tilde{\nu}_{12}$ entre les 2 modèles de microstructure en fonction du rapport de forme r_ϕ ($c = 0.5$).

Comme attendu, on constate sur la Figure 2-18 que les 3 écarts tendent vers 0 pour un rapport de forme $r_\phi = L_1/L_2$ tendant vers $+\infty$. Cette observation est logique car lorsque le facteur de forme tend vers l'infini, l'effet des contacts latéraux, dont l'influence sur les 2 modules effectifs \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ est importante, devient négligeable et la configuration 1S se comporte donc comme la configuration 0S.

Pour ce qui concerne l'écart relatif $\Delta\tilde{E}_1/\tilde{E}_1$, on constate que l'influence des ondulations est faible (inférieure à 2%) à la valeur de référence $r_\phi = 7.50$. Il faut une forte ondulation ($r_\phi = 3.75$) pour qu'elle

commence à devenir un peu significative (entre 2 et 6% pour $r_\lambda \in [0.5; 2]$). Ainsi, pour la morphologie réelle du bois ($r_\phi = 7.50$), on peut considérer que les ondulations des fibres n'ont que peu d'influence pour le module d'Young \tilde{E}_1 . En revanche, comme on peut le voir sur la Figure 2-18 b) et c), les ondulations des fibrilles ont une influence importante sur les 2 modules effectifs \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$. En effet, pour les valeurs géométriques associées à la solution de référence ($r_\phi = 7.50$ et $r_\lambda = 1.0$), on constate un écart relatif de 20% entre les 2 microstructures OS et 1S à la fois pour \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$.

• *Effet de la concentration volumique de la fibre c*

Dans cette partie, on étudie l'évolution du comportement effectif pour les 2 modèles de microstructure OS et 1S en fonction de la concentration c des fibrilles. A cette intention, nous avons tracé l'évolution des 9 composantes effectives \tilde{C}_{ij} non nulles représentant le comportement orthotrope effectif pour $c \in [0; 1]$. Ces comparaisons sont réalisées, d'une part, pour 4 valeurs différentes r_ϕ^i du facteur de forme, dans le cas du modèle 1S, et d'autre part, pour une seule valeur du facteur de forme r_ϕ dans le cas du modèle OS en raison de l'indépendance du modèle OS à la longueur L_1 . La Figure 2-19 illustre l'ensemble des résultats obtenus pour les 2 modèles de microstructure pour un rapport $r_\lambda = 1.0$.

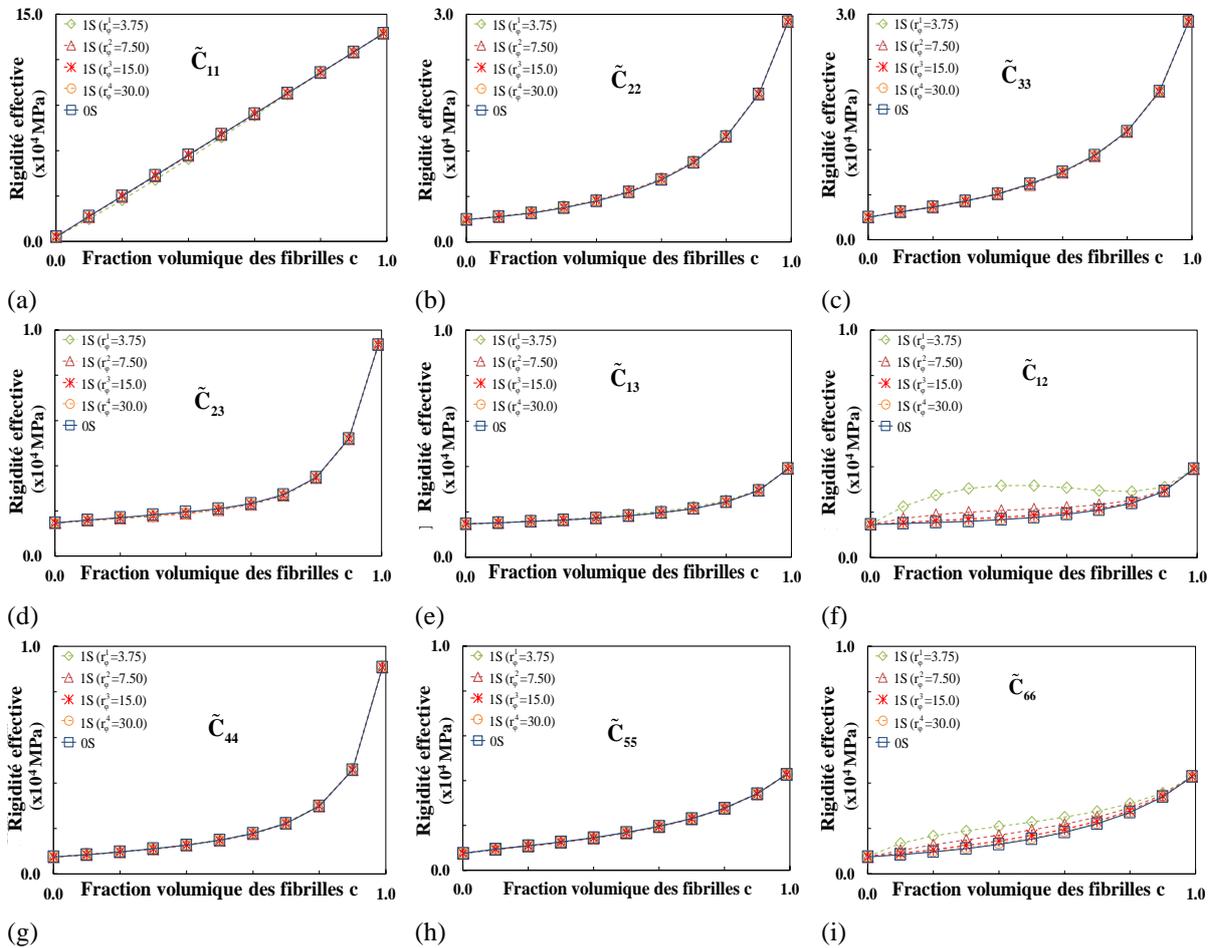


Figure 2-19 : Evolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la concentration volumique c pour les 2 modèles OS et 1S ($r_\lambda = 1.0$).

A nouveau, comme on l'avait déjà constaté sur la Figure 2-19 seuls les coefficients \tilde{C}_{12} et $\tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12}$ sont influencés par les ondulations des fibrilles, les autres coefficients n'y étant pas sensibles.

Nous avons également reporté l'évolution en fonction de la concentration des 9 paramètres matériaux ingénieurs caractérisant le comportement macroscopique de la couche S2 pour la valeur de référence $r_\phi = 7.50$ (voir Figure B-1 de l'Annexe B). Sur la Figure B-1, on s'aperçoit que seuls les coefficients \tilde{G}_{12}

et $\tilde{\nu}_{12}$ sont sensibles aux ondulations des fibrilles. Afin de mieux quantifier cette sensibilité, nous avons reporté leurs écarts relatifs $\left(\frac{\tilde{x}^{0S} - \tilde{x}^{1S}}{\tilde{x}^{0S}}\right)$ en fonction du rapport de forme r_ϕ pour différentes valeurs de la concentration c .

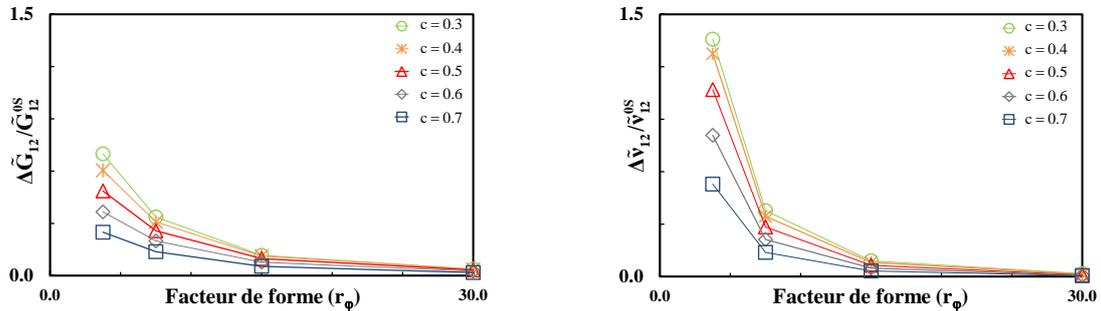


Figure 2-20 : Evolution des écarts relatifs de \tilde{G}_{12} , $\tilde{\nu}_{12}$ pour les modèles 1S et 0S en fonction de r_ϕ pour différentes valeurs de la concentration c ($r_\lambda = 1$).

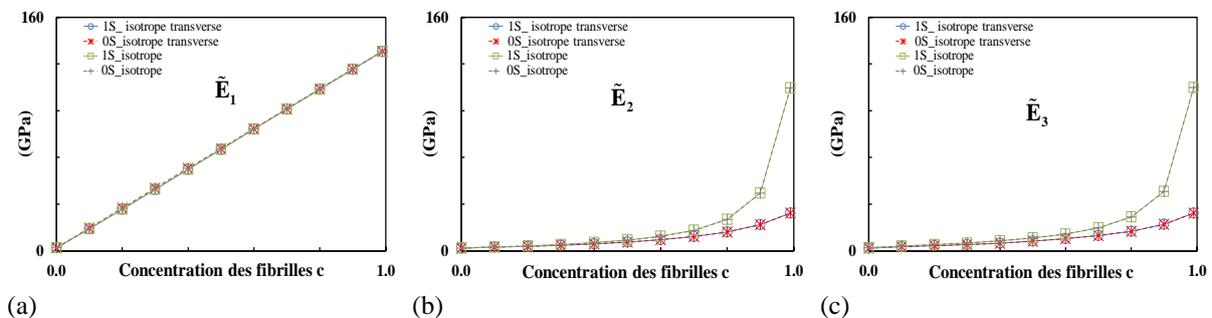
Les courbes de la Figure 2-20 nous montrent que, pour un rapport de forme $r_\phi \leq 15.0$, les écarts relatifs des paramètres \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ entre les 2 microstructures restent significatifs, quelle que soit la valeur de la concentration.

• Conclusion

Cette étude paramétrique nous a permis de voir que les paramètres matériaux sensibles de manière significative aux ondulations des fibrilles réelles représentées par le modèle 1S sont les rigidités $\tilde{G}_{12} = \tilde{C}_{66}$ et $\tilde{\nu}_{12}$ (ou le coefficient \tilde{G}_{12}). On constate de plus que les ondulations 1S des fibrilles ont également une influence non nulle mais très faible sur le module d'Young effectif \tilde{E}_1 (de l'ordre de 2%). Les autres paramètres matériaux ont quant à eux un comportement indépendant des ondulations des fibrilles telles que représentées par le modèle 1S.

❖ Influence de l'isotropie transverse des macrofibrilles

A titre de comparaison, nous avons également calculé pour les 2 types de microstructures 1S et 0S le comportement effectif de la paroi S2 dans le cas où les fibrilles sont désormais élastiques isotropes. Pour caractériser le comportement élastique isotrope des fibrilles, nous avons pris $E^F = E_L^F$ et $\nu^F = \nu_L^F$ où E_L^F et ν_L^F sont issus du comportement isotrope transverse. Afin d'évaluer l'influence de l'anisotropie transverse des fibres sur le comportement macroscopique de la paroi S2, nous avons reporté sur la Figure 2-21 pour les 2 types de microstructures (1S et 0S) et les 2 types de comportement des fibrilles (isotrope et isotrope transverse) l'évolution en fonction de la concentration des 9 constantes ingénieurs caractérisant le comportement effectif orthotrope. Pour cela, les 2 ratios r_ϕ et r_λ ont été fixés à leur valeur de référence, $r_\phi = 7.50$ et $r_\lambda = 1.0$.



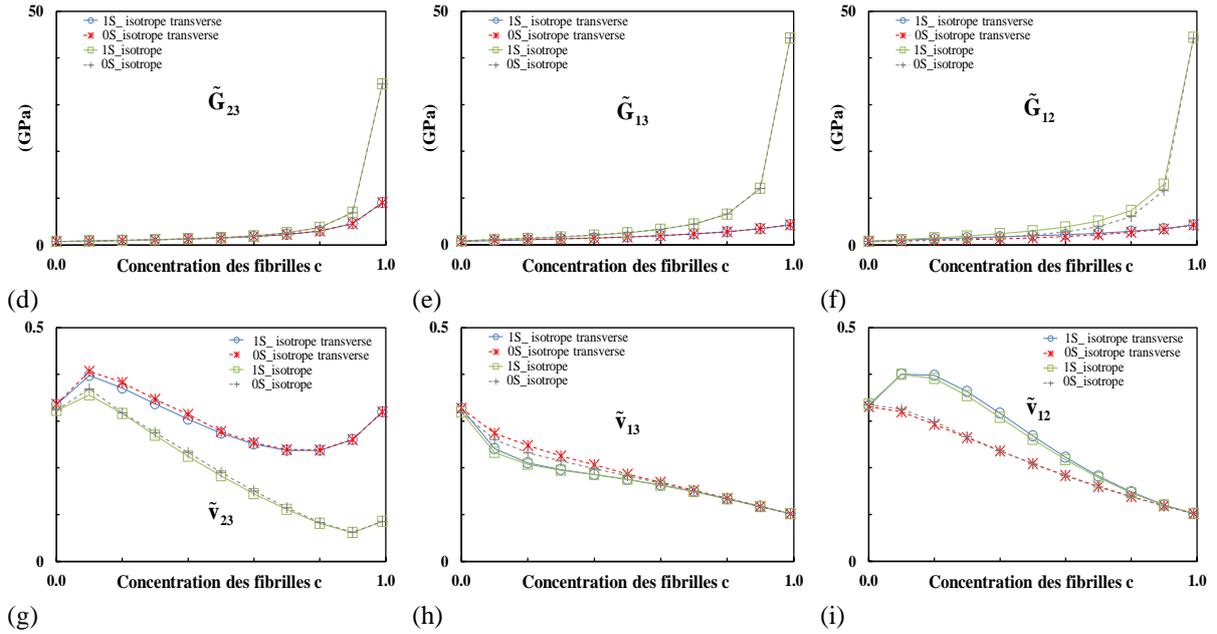


Figure 2-21 : l'évolution des 9 constantes élastiques orthotropes en fonction de la concentration volumique des fibrilles pour les microstructures 1S et 0S et pour le comportement isotrope et isotrope transverse des fibrilles ($r_\lambda = 1.0$ et $r_\phi = 7.50$).

Du fait que nous avons choisi pour des fibrilles isotropes un module d'Young E^F égal au module longitudinal E_L^F des macrofibrilles isotropes transverses, on observe que les valeurs \tilde{E}_1 sont les mêmes pour un comportement isotrope ou isotrope transverse. On observe la même chose pour \tilde{v}_{12} et \tilde{v}_{13} . En revanche, pour tous les autres paramètres, on observe une différence très marquée selon que le comportement des fibrilles est isotrope ou isotrope transverse.

Plus précisément, pour toutes les rigidités \tilde{E}_2 , \tilde{E}_3 , \tilde{G}_{12} , \tilde{G}_{23} et \tilde{G}_{13} , on observe que l'influence de l'isotropie transverse sur le comportement effectif est très faible pour des concentrations c inférieure à 0.5. Pour $c \geq 0.5$, elle commence à devenir significative et augmente fortement quand c tend vers 1. Comme on pouvait s'y attendre du fait que $E^F = E_L^F$, on observe que les valeurs des rigidités du cas isotrope sont supérieures à celles du cas isotrope transverse. Pour le coefficient de Poisson effectif \tilde{v}_{23} , l'influence de l'isotropie transverse est significative pour toutes les valeurs de la concentration c .

Par ailleurs, dans le choix des paramètres de référence, la valeur de E_{TT}^F choisie était une valeur théorique mesurée à partir de modèle de dynamique moléculaire (Mark, 1967) qui est en fait surestimée. En baissant cette valeur à $E_{TT}^F/5$, si l'on retrace les évolutions des constantes ingénieur associées à des fibrilles isotropes et isotropes transverses pour les modèle 1S et 0S en fonction de la concentration c pour les mêmes valeurs de référence ($r_\lambda=1.0$ et $r_\phi=7.50$). On observe que l'on obtient qualitativement les mêmes évolutions que celles observées sur la Figure 2-21 pour la valeur initiale de E_{TT}^F , montrant ainsi que la valeur exacte du coefficient E_{TT}^F a peu d'influence sur le comportement effectif du composite.

Enfin, l'influence de la microstructure 1S et 0S sur le comportement effectif a déjà été commentée sur la Figure 2-19 pour des fibres isotropes transverses. Dans le cas de macrofibrilles isotropes, on retrouve sensiblement les mêmes conclusions que pour les fibrilles isotropes transverses, à savoir que l'ondulation des fibrilles influe sur les paramètres \tilde{G}_{12} et \tilde{v}_{12} . On note de plus que le coefficient de Poisson \tilde{v}_{13} est également sensible à l'ondulation des macrofibrilles quand ces dernières ont un comportement isotrope.

b) Effet des paramètres matériaux (modules d'Young relatifs)

Dans cette partie, nous cherchons à étudier l'influence du contraste élastique entre les 2 phases (matrice et fibre) sur le comportement effectif de la paroi S2. A cette intention, nous allons évaluer l'évolution des constantes élastiques effectives en fonction du contraste décrit par le ratio E_L^F/E^M que l'on fera varier de 1 et 10^3 . Pour cela, on fera évoluer le module d'Young de la matrice de $E^M = 10^{-3}E_L^F$ ($\log_{10}(E_L^F/E^M) = 3.0$) à $E^M = E_L^F$ ($\log_{10}(E_L^F/E^M) = 0$). On gardera par ailleurs les valeurs de référence des paramètres matériaux des fibrilles. Comme nous l'avons déjà fait dans les parties précédentes, nous allons reporter uniquement les évolutions des constantes ingénieurs effectives qui sont influencées par l'effet de l'ondulation pour les 2 microstructures 0S et 1S à savoir \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ et dans une moindre mesure \tilde{E}_1 et $\tilde{\nu}_{13}$. Les évolutions de ces constants ingénieurs en fonction du contraste sont reportées sur la Figure 2-22 pour 4 valeurs différentes du rapport de forme r_ϕ pour le modèle 1S et pour une seule valeur de r_ϕ pour le modèle 0S. Pour ces comparaisons, la concentration des fibrilles est fixée à $c = 0.5$ et le ratio $r_\lambda = 1.0$. On notera que le ratio de référence E_L^F/E^M utilisé dans tous les calculs numériques menés jusqu'à présent est $\log_{10}(E_L^F/E^M) = 1.84$.

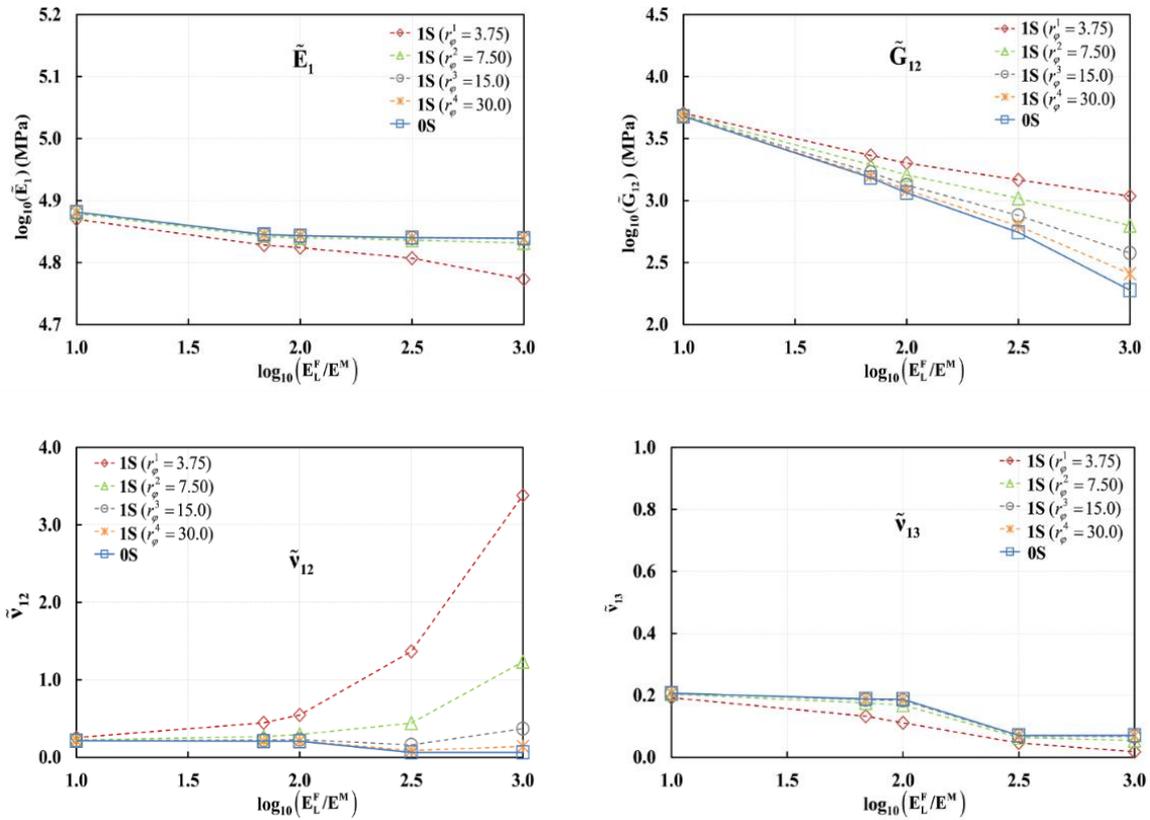


Figure 2-22 : Evolution des composantes ingénieurs effectives en fonction du contraste E_L^F/E^M pour les 2 modèles 1S et 0S ($r_\lambda = 1.0$ et $c = 0.5$).

Sur la Figure 2-22, pour un contraste de 1, $\log_{10}(E_L^F/E^M) = 0$, on observe que les modules \tilde{G}_{12} et \tilde{E}_1 qui sont alors dominés principalement par le comportement isotrope de la matrice, sont surévalués par rapport à d'autre valeur du contraste. Par ailleurs, l'évolution en fonction du contraste E_L^F/E^M montre une fois de plus que l'effet de l'ondulation des macrofibrilles influence significativement uniquement sur les 2 coefficients \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$.

Afin de mieux chiffrer l'effet de l'ondulation des microfibrilles sur les deux paramètres influencés significativement \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$, nous avons reporté leurs écarts relatifs en fonction du rapport de forme r_ϕ pour différentes valeurs du contraste.

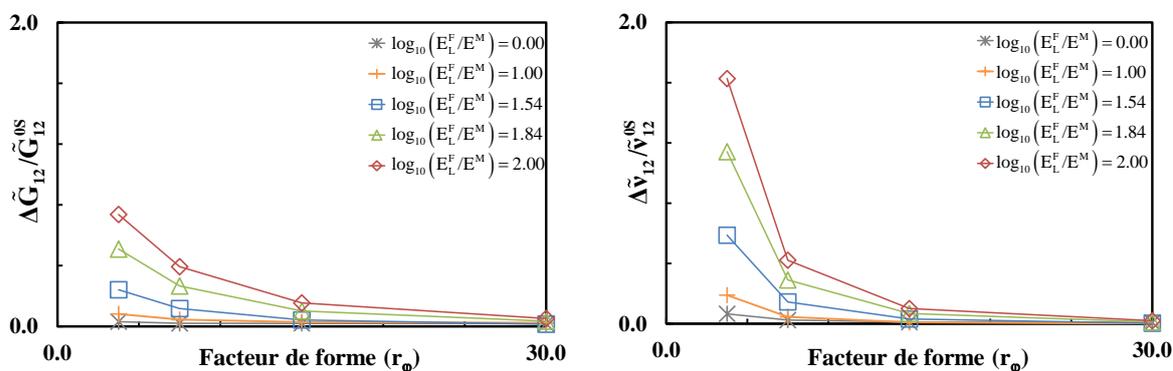


Figure 2-23 : Evolution des écarts relatifs pour 2 coefficients ingénieurs effectifs \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ pour les 2 modèles de microstructure (1S et 0S) en fonction du rapport de forme pour différentes valeurs de contraste E_L^F/E^M ($r_\lambda = 1.0$; $c = 0.5$).

Les courbes de la Figure 2-23 nous indiquent que les écarts relatifs associés aux paramètres \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ restent importants pour un facteur de forme $r_\phi \leq 15.0$, tout en diminuant avec l'augmentation du module d'Young de la matrice.

c) Conclusion

Au cours de ces études paramétriques, nous avons pu montrer que seuls les coefficients $\tilde{G}_{12} = \tilde{C}_{66}$ et \tilde{C}_{12} (ou $\tilde{\nu}_{12}$) sont influencés significativement par les ondulations des fibrilles, cela pour des paramètres géométriques r_ϕ , r_λ et c pas trop éloignés de leurs valeurs de référence issues de la littérature. Les autres coefficients ne sont quant à eux pas ou très un peu influencés par ces ondulations.

Il est donc nécessaire si l'on souhaite évaluer précisément les coefficients effectifs \tilde{G}_{12} et $\tilde{\nu}_{12}$ de la paroi S2 de prendre en compte un modèle de microstructure capable d'intégrer de telles ondulations. La description de ces ondulations par le modèle de microstructure 1S n'est pas la seule possible. Nous présenterons au chapitre 3 une description plus complexe introduisant des ondulations non seulement dans le plan (1, 2) mais également dans le plan (1, 3).

Par ailleurs, nous avons également montré que la prise en compte d'un comportement isotrope transverse pour les fibrilles (à la place d'un comportement anisotrope) n'avait aucune influence sur les coefficients \tilde{E}_1 , $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{13}$ à l'inverse des autres coefficients. Plus particulièrement on a observé que cette influence sur les rigidités effectives \tilde{E}_2 , \tilde{E}_3 , \tilde{G}_{12} , \tilde{G}_{13} , \tilde{G}_{23} et le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{13}$ était faible pour des concentrations inférieures à 0.5 mais qu'au-delà de cette valeur, l'influence de l'isotropie transverse devenait significative.

2.4 Estimation analytique de l'influence des fibres sur le comportement effectif

2.4.1 Contribution des fibrilles seules au comportement effectif de la paroi

Dans cette partie, nous présentons un modèle de comportement effectif du réseau fibrillaire. Cela correspond à la situation d'un bois chaud et humide, dans lequel la matrice est ramollie du fait que la température de transition vitreuse de la lignine est dépassée. En conséquence, la matrice contribue de manière très faible à la rigidité de la paroi. Un tel modèle décrit également le bois en formation, dans la phase qui suit le dépôt des microfibrilles de cellulose mais précède la polymérisation de la lignine.

a) *Approche analytique*

❖ **Schématisation d'un réseau fibrillaire par un réseau de poutres encastées**

Dans le but de présenter une procédure pour déterminer la rigidité du réseau fibrillaire en l'absence de matrice, Gril (1988) présente une approche analytique par la théorie de la RDM. Le réseau fibrillaire est schématisé par un assemblage périodique de poutres et poutrelles auquel la théorie des milieux curvilignes a été appliquée.

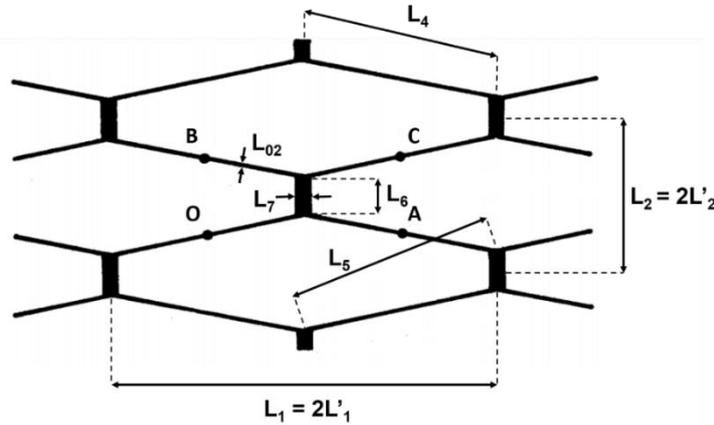


Figure 2-24 : Schématisation d'une lamelle du réseau macrofibrillaire à l'aide d'un assemblage périodique de poutres et de poutrelles (Gril, 1988).

Dans la Figure 2-24, les dimensions du réseau fibrillaire sont déterminées dans le plan de la lamelle. L'épaisseur de cette lamelle dans le sens radial est égale à $L_{03} = f_3 L_3$ où l'épaisseur de la cellule élémentaire périodique suivant la direction radiale est L_3 (voir la Figure 2-5). En l'absence de matrice, un tel milieu possède une rigidité nulle vis-à-vis de sollicitations dans la direction 3. Aussi la modélisation de sa rigidité n'est possible qu'en contraintes planes dans le plan (12). L'étude est donc réalisée dans ce cadre.

Selon les travaux de Gril, le réseau fibrillaire décrit ci-dessus est défini par un réseau de poutres élastiques de module E_0 de longueur L_4 , de largeur L_{02} et d'épaisseur L_{03} , connectées entre elles par des poutrelles latérales de module E_1 , de longueur L_6 et d'épaisseur L_7 . Les poutrelles représentent les zones de contact entre deux fibrilles voisines. Nous allons ensuite définir un élément de base associé à cet assemblage de poutres et de poutrelles, l'équivalent d'un VER, dont les dimensions sont $L_1 = 2L'_1$, $L_2 = 2L'_2$ et L_3 dans les 3 directions 1, 2, 3 respectivement (Figure 2-24).

Les autres paramètres de la géométrie à savoir le facteur de forme λ_i , la section S_i , le moment d'inertie I_i , où $i = 0$ pour des poutres et $i = 1$ pour des poutrelles, sont définis ou obtenus par les formules suivantes.

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{L_{02}}{L_4}; S_0 = L_{02} \cdot L_{03}; I_0 = \frac{1}{12} L_{03} \cdot (L_{02})^2 \\ \lambda_1 = \frac{L_7}{L_4}; S_1 = L_{03} \cdot L_7; I_1 = \frac{1}{12} L_{03} \cdot (L_7)^2 \end{cases} \quad (2.4. 1)$$

Sur la Figure 2-25, la zone de contact entre deux fibrilles adjacentes a été agrandie afin de montrer la dépendance entre certains paramètres décrivant la géométrie :

$$\begin{aligned} L'_1 &= L_5 \cos \beta = L_4 \cos \alpha & (a) \\ L'_2 &= L_5 \sin \beta = L_4 \sin \alpha + L_4 & (b) \\ L_{02} &= f_2 L'_2 \cos \alpha = L_6 \cos \alpha + L_7 \sin \alpha & (c) \end{aligned} \quad (2.4. 2)$$

où les angles α , β , γ sont définis graphiquement sur la Figure 2-25. Ils s'expriment simplement à partir des équations (2.4. 2):

$$\begin{cases} \cos\alpha = \left(\frac{L'_1}{L'_2 - L_6}\right) \sin\alpha \\ \cos\beta = \frac{L'_1}{L'_2} \sin\beta \end{cases}$$

Soit

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{L'_1}{\sqrt{(L'_1)^2 + (L'_2 - L_6)^2}}\right); \quad \beta = \arcsin\left(\frac{L'_1}{\sqrt{(L'_1)^2 + (L'_2)^2}}\right); \quad \gamma = \beta - \alpha;$$

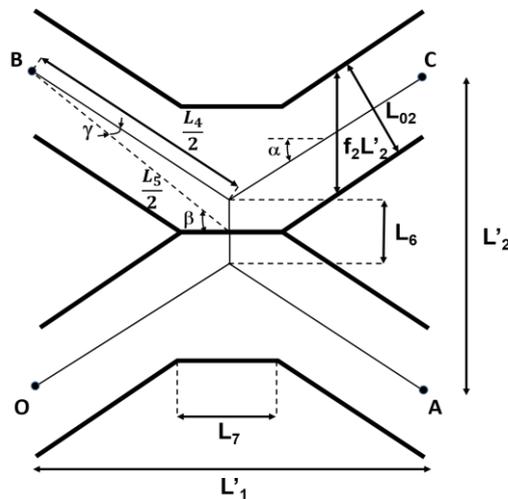
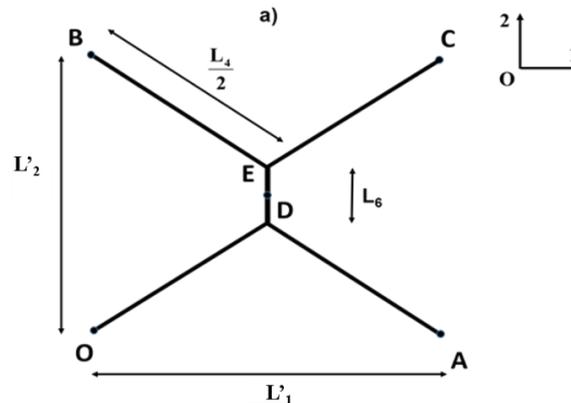


Figure 2-25: Agrandissement de la zone de contact entre deux microfibrilles voisines (Gril, 1988).

❖ La rigidité du réseau fibrillaire en contrainte plane

En prenant en compte la périodicité et la symétrie du réseau, un champ de contrainte (σ_1 , σ_2 , σ_6) appliqué sur la couche S2 se traduit par des forces et des moments appliqués aux sections des poutres. Au niveau d'une maille délimitée par les nœuds (O, A, B, C), les contraintes σ_1 , σ_2 , σ_6 se traduisent par les 3 efforts indiqués sur la Figure 2-26.

$$F_1 = \sigma_1 L_3 L'_2; \quad F_2 = \sigma_2 L_3 L'_1; \quad F_6 = \sigma_6 L_3 L_5 \quad (2.4. 3)$$



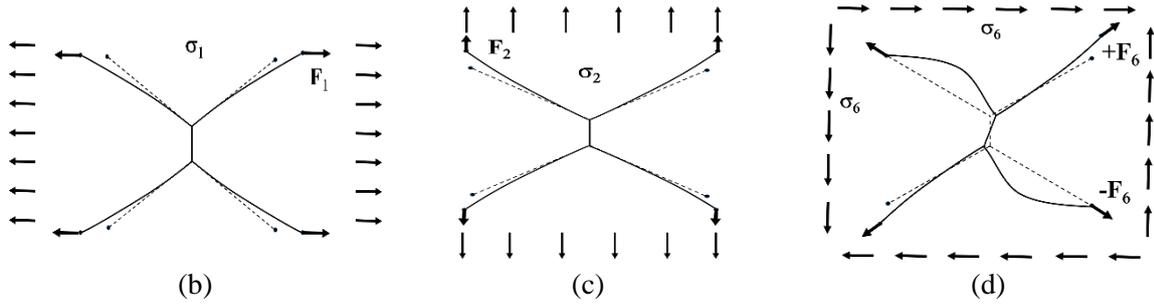


Figure 2-26 : Efforts appliqués aux nœuds du réseau sous l'effet d'un chargement extérieur a) élément de base b) et c) Contraintes normales d) Contrainte de cisaillement.

- **Calcul pour les efforts normaux**

Par symétrie, l'action des 2 contraintes normales (σ_1 et σ_2) est déterminée à travers un quart d'élément encastré en E où s représente l'abscisse curviligne comptée dans le segment EC à partir de E (voir la Figure 2-27).

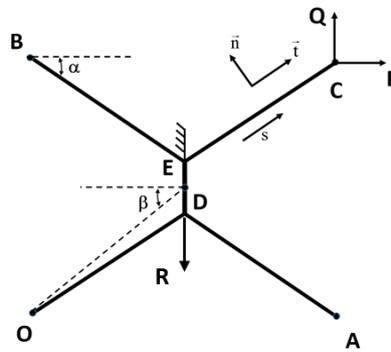


Figure 2-27 : Calcul des déplacements des nœuds en appliquant le théorème de Castigliano (efforts normaux).

Comme il s'agit d'un problème plan, le torseur des efforts appliqués à la section étudiée se réduit à 3 composantes : N (effort normal), T (effort tranchant) et M (moment de flexion dans la direction 3). A partir de ces composantes, l'énergie élastique dans la barre EC s'écrit :

$$W_{EC} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L_1}{2}} \left[\frac{N^2}{E_0 S_0} + \frac{M^2}{E_0 I_0} + \frac{T^2}{k S_0 G_0} \right] ds = \frac{1}{4 E_0 L_{03}} \left(\frac{N^2}{\lambda_0} + \frac{T^2}{\lambda_0^3} \right) + \frac{T^2}{4 k \lambda_0 G_0 L_{03}} \quad (2.4.4)$$

où G_0 est le module de cisaillement longitudinal des fibrilles et k est une constante. Dans Gril (1988), l'effet de l'effort tranchant n'était pas pris en compte. Sa contribution au moyen de la théorie de Timoshenko, en raisonnant sur une section effective $S' = kS$ a été ajoutée ici afin d'améliorer la précision du modèle. Le scalaire k dépend de la forme de la section et vaut 5/6 pour une section rectangulaire. Les composantes N , T , M sont reliées aux efforts P et Q de la Figure 2-27 par :

$$N = P \cos \alpha + Q \sin \alpha; \quad T = -P \sin \alpha + Q \cos \alpha; \quad M = T \left(\frac{L_A}{2} - s \right)$$

On peut alors déterminer les composantes (Δ_1 , Δ_2) du déplacement de C par rapport à E en dérivant W_{EC} par rapport à P et Q . On obtient alors :

$$\Delta_1(EC) = \frac{\partial W_{EC}}{\partial P} = \frac{1}{2\lambda_0^3 E_0 L_{03}} (\lambda_0^2 N \cos\alpha - T \sin\alpha) - \frac{1}{2k\lambda_0 G_0 L_{03}} T \sin\alpha \quad (a)$$

$$\Delta_2(EC) = \frac{\partial W_{EC}}{\partial Q} = \frac{1}{2\lambda_0^3 E_0 L_{03}} (\lambda_0^2 N \sin\alpha + T \cos\alpha) + \frac{1}{2k\lambda_0 G_0 L_{03}} T \cos\alpha \quad (b)$$

On calcule ensuite le déplacement de E par rapport à D en utilisant l'effort R défini à la Figure 2-27 :

$$\Delta_1(DE) = 0 \quad (a)$$

$$\Delta_2(DE) = \frac{R}{E_1 S_1} \frac{L_6}{2} \approx \frac{R}{2L_{03} E_1 \lambda_1} \quad (b)$$

En remplaçant $P = F_1$, $Q = F_2$ et $R = 2F_2$, on obtient les déplacements des points A et B par rapport à O à l'aide d'une double symétrie. Les déformations de l'élément s'écrivent :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1(OA)}{L_1'} = \frac{2\Delta_1(DE) + 2\Delta_1(EC)}{L_1'} \quad (a)$$

d'où

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_0^2 \cos\alpha (F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha) - \sin\alpha (-F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha)}{L_1' L_{03} \lambda_0^3 E_0} - \frac{\sin\alpha (-F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha)}{k G_0 L_1' L_{03} \lambda_0}$$

De même,

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta_2(OB)}{L_2'} = \frac{2\Delta_2(DE) + 2\Delta_2(EC)}{L_2'} \quad (b)$$

d'où

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_0^2 \sin\alpha (F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha) - \cos\alpha (-F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha)}{L_2' L_{03} \lambda_0^3 E_0} - \frac{\cos\alpha (-F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha)}{k G_0 L_2' L_{03} \lambda_0}$$

De plus,

$$\varepsilon_6 = \frac{\Delta_2(OA)}{L_1'} + \frac{\Delta_1(OB)}{L_2'} \quad (c)$$

Enfin, en utilisant (2.4. 3) où $L_{03} = f_3 L_3$, on obtient les relations ci-dessous:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{f_3 \lambda_0^3 E_0} [\tan\beta (\lambda_0^2 \cos^2\alpha + \cos^2\alpha) \cdot \sigma_1 - (1 - \lambda_0^2) \cos\alpha \sin\alpha \cdot \sigma_2] \quad (a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{f_3 \lambda_0^3 E_0} \left[-(1 - \lambda_0^2) \cos\alpha \sin\alpha \cdot \sigma_1 + \frac{\lambda_0^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\tan\beta} \sigma_2 \right] + \frac{\sigma_2}{f_3 \lambda_0^3 E_1 \tan\beta} \quad (b)$$

$$\varepsilon_6 = 0$$

- **Calcul pour les efforts de cisaillements**

On procède de la même façon pour les cisaillements en considérant le demi-élément constitué de DE, EB, EC, encastré en D (voir la Figure 2-28). On considère par ailleurs que l'origine de l'abscisse curviligne s est située en E. Par définition, l'effort P est imposé en C et compté positivement de D vers C, alors que l'effort Q est imposé en B et compté positivement de B vers D. On trouve alors les torseurs appliqués aux sections des poutres :

$$\begin{aligned} \text{EC : } N &= P \cos \gamma; \quad T = P \sin \gamma; \quad M = P \sin \gamma \times \left(\frac{L_4}{2} - s \right) \\ \text{EB : } N &= -Q \cos \gamma; \quad T = Q \sin \gamma; \quad M = Q \sin \gamma \times \left(\frac{L_4}{2} - s \right) \\ \text{DE : } N &= (P - Q) \sin \beta; \quad T = (P + Q) \cos \beta; \quad M = (P + Q) \sin \gamma \cos \beta \times \left(\frac{L_6}{2} - s \right) \end{aligned}$$

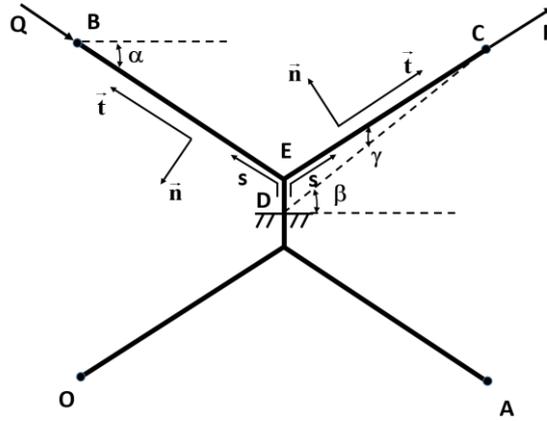


Figure 2-28 : Calcul des déplacements des nœuds à l'aide du théorème de Castigliano (Efforts de cisaillement).

On construit ensuite l'expression de l'énergie élastique totale du demi-élément :

$$W_{DEC} = \frac{1}{2} \int_{EC+EB} \left[\frac{N^2}{E_0 S_0} + \frac{M^2}{E_0 I_0} + \frac{T^2}{k G_0 S_0} \right] ds + \frac{1}{2} \int_{DE} \left[\frac{N^2}{E_1 S_1} + \frac{M^2}{E_1 I_1} + \frac{T^2}{k G_1 S_1} \right] ds \quad (2.4. 9)$$

qui, après quelques calculs élémentaires, aboutit à la formule suivante

$$\begin{aligned} W_{DEC} &= \frac{P^2 + Q^2}{4 L_{03} E_0 \lambda_0} \left[\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda_0^2} \right] + \frac{P^2 + Q^2}{4 L_{03} k G_0 \lambda_0} \left[\sin^2 \gamma \right] \\ &+ \frac{1}{4 L_{03} E_1 \lambda_1} \left[(P - Q)^2 \sin^2 \beta + (P + Q)^2 \frac{\cos^2 \beta}{\lambda_1^2} \right] + \frac{(P + Q)^2 \cos^2 \beta}{4 L_{03} k G_1 \lambda_1} \end{aligned}$$

où G_l est le module de cisaillement longitudinal des poutrelles, que l'on supposera égal à celui des fibrilles, soit $G_l = G_0$.

A nouveau, on applique le théorème de Castigliano au calcul des déplacements des nœuds. Les élongations des demi-diagonales de l'élément sont calculées en différentiant par rapport à P et Q , puis on les remplace par la relation $P = Q = L_3 L_5 \sigma_6$.

$$\Delta(\text{DC}) = -\Delta(\text{DB}) = \frac{\sigma_6 L_5 L_3}{2 L_{03} E_0 \lambda_0^3} (\lambda_0^2 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + 2 \frac{\sigma_6 L_5 L_3}{2 L_{03} E_1 \lambda_1^3} \cos^2 \beta$$

$$+ \frac{\sigma_6 L_5 L_3}{2L_{03} k G_0 \lambda_0} \sin^2 \gamma + 2 \frac{\sigma_6 L_5 L_3}{2L_{03} k G_1 \lambda_1} \cos^2 \beta$$

Par symétrie par rapport à D, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta OC = 2\Delta DC \\ \Delta AB = 2\Delta BD \end{cases}$$

On en déduit alors la déformation de cisaillement de l'élément complet

$$\varepsilon_6 = \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_{-\beta}}{2\cos\beta\sin\beta} = \frac{\Delta OC - \Delta AB}{2L_5\cos\beta\sin\beta} = \frac{2\Delta DC}{L_5 L_3 L_5 \cos\beta\sin\beta}$$

avec $\varepsilon_\beta = 2\varepsilon_1 \cos^2 \beta$ et $\varepsilon_{-\beta} = 2\varepsilon_2 \sin^2 \beta$

Soit

$$\varepsilon_6 = \left(\frac{\lambda_0^2 \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma}{f_3 E_0 \lambda_0^3 \cos\beta\sin\beta} + \frac{\sin^2 \gamma}{f_3 k G_0 \lambda_0 \cos\beta\sin\beta} + \frac{\cos^2 \beta}{f_3 E_1 \lambda_1^3 \cos\beta\sin\beta} + \frac{2\cos^2 \beta}{f_3 k G_1 \lambda_1 \cos\beta\sin\beta} \right) \sigma_6 \quad (2.4. 10)$$

Par ailleurs, du fait de la symétrie du tenseur des complaisances, les efforts normaux ne génèrent pas de déformations de cisaillement comme observé sur les relations (2.4. 8). On notera que $\varepsilon_\beta + \varepsilon_{-\beta} = 2\varepsilon_1 \cos^2 \beta + 2\varepsilon_2 \sin^2 \beta = 0$, qui permettrait de vérifier la relation $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

- **Complaisance du réseau fibrillaire**

Les 2 expressions (2.4. 8) et (2.4. 10) nous permettent de déduire la matrice \underline{J}_0 des complaisances du réseau, définie par $\underline{\varepsilon} = \underline{J}_0^0 \cdot \underline{\sigma}$. Elle s'écrit sous la forme :

$$\underline{J}_0^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 & 0 \\ J_{12}^0 & J_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{66}^0 \end{bmatrix} \quad (2.4. 11)$$

où

$$J_{11}^0 = \frac{1}{f_3 E_0} \tan\beta \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\lambda_0} + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda_0^3} \right) + \frac{1}{f_3 k G_0 \lambda_0} \tan\beta \sin^2 \alpha$$

$$J_{22}^0 = \frac{1}{f_3 E_0 \tan\beta} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\lambda_0} + \frac{\cos^2 \alpha}{\lambda_0^3} \right) + \frac{2}{f_3 E_1 \lambda_1 \tan\beta} + \frac{1}{f_3 k G_0 \lambda_0 \tan\beta} \cos^2 \alpha$$

$$J_{22}^0 = \frac{1}{f_3 E_0} \sin\alpha \cos\alpha \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0^3} \right) - \frac{1}{f_3 k G_0 \lambda_0} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$J_{66}^0 = \frac{1}{f_3 E_0 \sin\beta \cos\beta} \left(\frac{\cos^2 \gamma}{\lambda_0} + \frac{\sin^2 \gamma}{\lambda_0^3} \right) + \frac{\sin^2 \gamma}{f_3 k G_0 \lambda_0 \sin\beta \cos\beta} + \frac{2}{f_3 E_1 \lambda_1^3 \tan\beta} + \frac{2}{f_3 k G_1 \lambda_1 \tan\beta}$$

La matrice de rigidité \underline{P} du réseau fibrillaire (en contrainte plane) s'obtient en inversant la matrice de complaisance \underline{J}_0^0 . Elle prend la forme :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{66} \end{bmatrix}$$

où les relations de passage des complaisances $\underline{\underline{J}}^0$ aux rigidités $\underline{\underline{P}}$ sont synthétisées dans le Tableau 2-6.

Tableau 2-6: Matrice des rigidités effectives en fonction de la matrice des souplesses pour les solides orthotropes en contrainte plane

$\text{Det}(J) = J_{11}^0 J_{22}^0 - (J_{12}^0)^2$		
$P_{11} = \frac{1}{\text{Det}(J)} J_{22}^0;$	$P_{22} = \frac{1}{\text{Det}(J)} J_{11}^0;$	$P_{66} = \frac{1}{J_{66}^0};$
$P_{12} = P_{21} = -\frac{1}{\text{Det}(J)} J_{12}^0$		

On notera que le tenseur $\underline{\underline{P}}$ représente uniquement le comportement effectif des macrofibrilles seules, en absence de toute matrice.

b) Approche numérique

❖ Configuration adaptée de la cellule élémentaire périodique

Afin de simplifier la confrontation avec le modèle analytique, la configuration de la cellule élémentaire périodique définie précédemment sur la Figure 2-7 a été modifiée. On suppose pour cette partie que $f_3=1$, autrement-dit que la matrice lamellaire n'existe plus ($m_3 = 0$) (voir Figure 2-29).

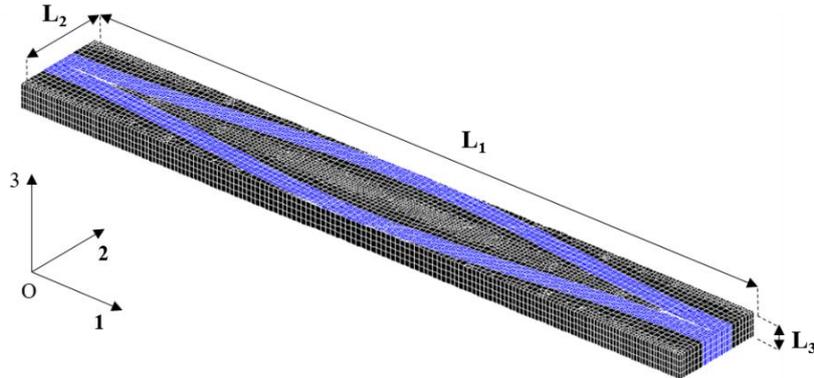


Figure 2-29 : Structure schématique de paroi cellulaire pour confronter avec le modèle analytique.

Afin d'effectuer des comparaisons avec le modèle analytique, nous allons déterminer par calcul EF 3D le comportement effectif 3D de la nouvelle géométrie du modèle 1S puis nous en extrairons le comportement en contraintes planes.

On applique ainsi la procédure d'homogénéisation numérique présentée dans la partie précédente pour calculer le comportement effectif 3D de la microstructure associée à la nouvelle configuration.

❖ Restriction aux contraintes planes

L'approche analytique réalisée en contraintes planes, vise à pouvoir modéliser le réseau fibrillaire seul. Afin de s'y ramener il faut représenter la matrice de rigidité effective associée à l'approche numérique 3D sous une forme réduite dans les 2 axes principaux par rapport à l'état de contraintes planes. Pour cela, considérons les composantes \tilde{C}_{ij} de rigidité effective de l'équation (C.6) de l'Annexe C et plaçons-nous dans un état de contraintes planes.

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} \quad (2.4. 12)$$

Ce système se réduit alors aux 4 équations suivantes

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \tilde{C}_{11}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{12}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{13}\bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\sigma}_2 = \tilde{C}_{12}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{22}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{23}\bar{\varepsilon}_3 \\ 0 = \tilde{C}_{31}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{32}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{33}\bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\sigma}_6 = \tilde{C}_{66}\bar{\varepsilon}_6 \end{cases} \quad (2.4. 13)$$

Ces relations montrent que les déformations $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_6$ ne sont pas indépendantes, nous en tirons :

$$\bar{\varepsilon}_3 = \frac{1}{\tilde{C}_{33}} (\tilde{C}_{13}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{23}\bar{\varepsilon}_2) \quad (2.4. 14)$$

En remplaçant l'expression (2.4. 14) de $\bar{\varepsilon}_3$ dans les relations (2.4. 13), on peut alors exprimer les contraintes $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ et $\bar{\sigma}_6$ en fonction des déformations $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$ et $\bar{\varepsilon}_6$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \left[\tilde{C}_{11} - \frac{(\tilde{C}_{13})^2}{\tilde{C}_{33}} \right] \bar{\varepsilon}_1 + \left[\tilde{C}_{12} - \frac{\tilde{C}_{13}\tilde{C}_{23}}{\tilde{C}_{33}} \right] \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\sigma}_2 &= \left[\tilde{C}_{12} - \frac{\tilde{C}_{13}\tilde{C}_{23}}{\tilde{C}_{33}} \right] \bar{\varepsilon}_1 + \left[\tilde{C}_{22} - \frac{(\tilde{C}_{23})^2}{\tilde{C}_{33}} \right] \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\sigma}_6 &= \tilde{C}_{66}\bar{\varepsilon}_6 \end{aligned}$$

On obtient alors la relation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} & 0 \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} \quad (2.4. 15)$$

où

$$\tilde{Q}_{11} = \tilde{C}_{11} - \frac{(\tilde{C}_{13})^2}{\tilde{C}_{33}}; \quad \tilde{Q}_{22} = \tilde{C}_{22} - \frac{(\tilde{C}_{23})^2}{\tilde{C}_{33}}; \quad \tilde{Q}_{12} = \tilde{Q}_{21} = \tilde{C}_{12} - \frac{\tilde{C}_{13}\tilde{C}_{23}}{\tilde{C}_{33}}; \quad \tilde{Q}_{66} = \tilde{C}_{66};$$

Ainsi que le tenseur $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$ représente numériquement le comportement effectif du réseau fibrillaire en contrainte plane, en absence de matrice. Pour la suite, on calculera ce tenseur pour une rigidité nulle de la matrice afin de le comparer à l'approche analytique qui ne prend en compte que le réseau fibrillaire.

c) Corrélations entre deux approches

❖ Zone de contact entre 2 macrofibrilles adjacentes

D'après Gril (1988), le contact entre des fibrilles est suffisamment fort pour que la contribution des poutrelles à la déformation de l'ensemble soit petite. Sur la Figure 2-25, on observe que la zone de contact entre 2 fibrilles adjacentes est définie par 2 paramètres géométriques L_6 et L_7 dont la valeur de L_6 sera variée entre 0 et $f_2 L_2$. Afin de déterminer la valeur de L_7 , on utilise les équations (2.4. 2) qui permettent d'obtenir la relation suivante :

$$L_7 = \frac{L'_1 (f_2 L'_2 - L_6)}{L'_2 - L_6} \quad (2.4. 16)$$

Par la suite, on va utiliser ces 2 paramètres de la zone de contact pour obtenir une bonne cohérence entre les 2 approches. Pour cela, on se focalise tout d'abord sur le comportement en cisaillement de la cellule élémentaire donné par $P_{66} = 1/J_{66}$, en faisant varier L_6 dans son intervalle défini pour différentes valeurs de la concentration volumique des fibres c (dans ce cas $c = f_2$) (voir Figure 2-30).

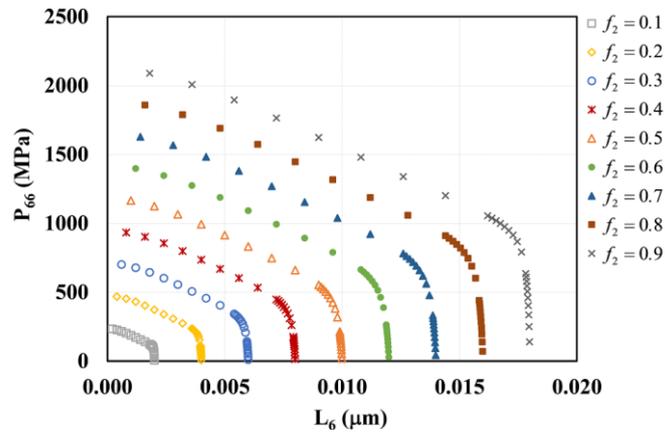


Figure 2-30 : Evolution de P_{66} en fonction de L_6 pour différentes valeurs de f_2 où f_2 représente la concentration volumique de la fibre c dans ce cas d'étude.

❖ Comportements élastiques du réseau fibrillaire

Afin d'effectuer la comparaison analytique et numérique du comportement effectif du réseau fibrillaire, nous allons bien sur prendre les mêmes propriétés élastiques par les constituants associés aux 2 modèles.

D'une part, les modules élastiques de l'approche analytique, E_0 et E_1 sont respectivement le module longitudinal et le module transverse des fibrilles d'où un rapport E_0/E_1 égal à 10 (Mark, 1972). Ces valeurs sont celles que nous utiliserons également pour les calculs numériques. Par ailleurs, nous conservons les autres paramètres matériaux et géométriques correspondant à leurs valeurs de référence définies dans la partie 2.2.4.

D'autre part, le module d'Young de la matrice est supposé infiniment souple ($E^M \approx 0$) dans les calculs EF, ce qui permet d'avoir une estimation approximative du comportement effectif du réseau fibrillaire en l'absence de matrice.

d) Comparaison numérique et analytique

❖ L'étude des paramètres géométriques de la zone de contact

En utilisant les expressions (2.4. 15) associées à l'approche numérique, nous avons reporté les résultats des 4 rigidités effectives \tilde{Q}_{ij} représentant le comportement effectif du réseau fibrillaire en contrainte plane en fonction de la concentration volumique des fibres $c = f_2$ dans le Tableau 2-7.

Tableau 2-7 : Valeurs numériques des composantes effectives en contraintes planes du réseau fibrillaire
($L_1 = 0.3\mu\text{m}$, $L_2 = 0.04\mu\text{m}$)

f_2	\tilde{Q}_{11} (MPa)	\tilde{Q}_{12} (MPa)	\tilde{Q}_{22} (MPa)	\tilde{Q}_{66} (MPa)
0.1	7868	150	3.10	122
0.2	21402	361	6.74	352
0.3	36543	539	9.47	477
0.4	51532	648	11.35	554
0.5	66274	690	13.06	618
0.6	80880	667	15.29	677
0.7	95402	584	18.66	733
0.8	109822	442	23.77	786
0.9	124060	247	31.41	837

Ensuite, l'ajustement du niveau d'interpénétration des fibres (paramètre L_6 de la Figure 2-25) permet de mettre en cohérence les 2 approches. En se basant sur les résultats ci-dessus (Tableau 2-7) et l'évolution de P_{66} en fonction de L_6 , les paramètres L_6 et L_7 de la zone de contact sont choisis de sorte que $\tilde{Q}_{66} \cong P_{66}$ (Figure 2-31).

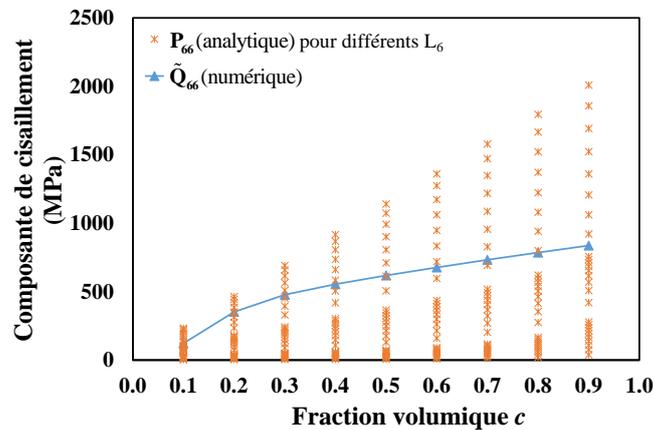


Figure 2-31 : L'ensemble des résultats du comportement en cisaillement obtenus par les deux méthodes. Les (*) du modèle analytique représentent les valeurs de P_{66} associées à chacune des valeurs de L_6 associée à une fraction volumique fixée.

En prenant en compte les 2 paramètres L_6 et L_7 ajustés, les résultats des composantes P_{ij} associés à l'approche analytique sont présentés dans le Tableau 2-8.

Tableau 2-8 : Les résultats analytiques en tenant compte des paramètres ajustés de la zones de contact
($L'_1 = 0.15$; $L'_2 = 0.02$)

f_2	L_6 ajusté (μm)	L_7 ajusté (μm)	P_{11} (MPa)	P_{22} (MPa)	P_{12} (MPa)	P_{66} (MPa)
0.1	0.002	0.001	13327	3.51	214.90	117.46
0.2	0.002	0.014	26822	6.89	419.19	340.02
0.3	0.004	0.019	40397	9.30	573.94	473.81
0.4	0.006	0.021	54119	10.95	667.74	562.06
0.5	0.008	0.022	67965	12.52	701.64	630.99
0.6	0.011	0.022	81918	14.64	676.08	686.90
0.7	0.013	0.023	95954	17.92	593.03	734.44
0.8	0.015	0.024	110034	22.84	453.49	777.30
0.9	0.018	0.026	124086	29.86	256.53	817.61

❖ Comparaison des résultats et commentaires

Les résultats obtenus analytiquement par l'approche de (Gril, 1988) sont confrontés à ceux issus de l'approche numérique dans le cas d'une matrice infiniment souple. On notera que l'approche numérique fournit la solution de référence du problème, c'est-à-dire la solution « exacte » aux approximations numériques près. Cette confrontation est faite sur la base des coefficients de la matrice de rigidité effective obtenus en faisant varier la fraction volumique de la fibre. La comparaison des deux approches (numérique et analytique) permet de constater que l'approche analytique de Gril représente de manière satisfaisante le comportement effectif du réseau fibrillaire évalué par les simulations éléments finis.

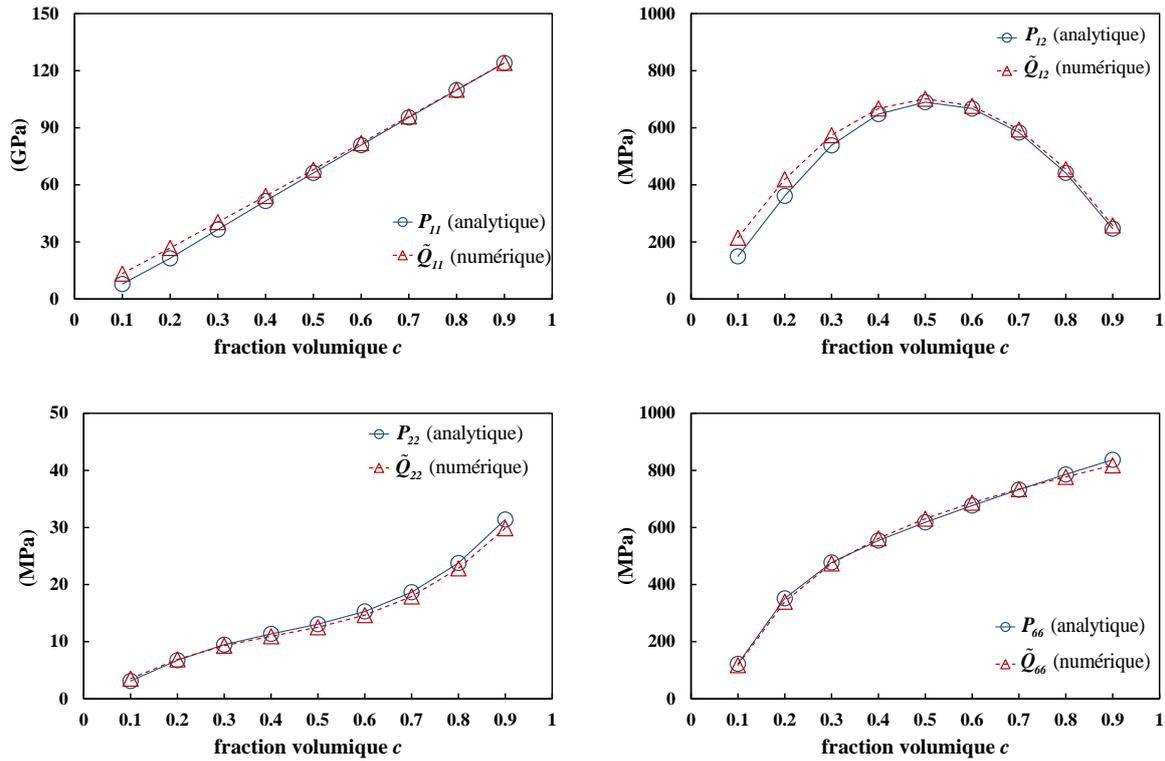


Figure 2-32 : Comparaisons des valeurs des composantes effectives du réseau macrofibrillaire entre les deux modèles utilisés (numérique et analytique).

Au vu des résultats obtenus sur la Figure 2-32, on évalue ensuite les écarts relatifs entre 2 approches utilisées en fonction de la concentration volumique des fibres c . On utilise pour cela l'indicateur suivant caractérisant l'écart moyen entre les 2 modèles :

$$ecart_{moy} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_{ij} - \tilde{Q}_{ij}}{P_{ij}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4. 17)$$

où N est le nombre des composantes non-nulles, P_{ij} les comportements de la rigidité du réseau fibrillaire associée à l'approche analytique et \tilde{Q}_{ij} celles associées à l'approche numérique

Les écarts relatifs pour différentes concentration de fibre sont synthétisés dans le Tableau 2-9.

Tableau 2-9: Ecarts relatifs entre les 2 modèles

$f_2 = c$	$\frac{P_{11} - \tilde{Q}_{11}}{P_{11}}$	$\frac{P_{22} - \tilde{Q}_{22}}{P_{22}}$	$\frac{P_{12} - \tilde{Q}_{12}}{P_{12}}$	$\frac{P_{66} - \tilde{Q}_{66}}{P_{66}}$	ecart_{moy} (%)
0.1	0.410	0.115	0.304	0.041	26.22

0.2	0.202	0.022	0.138	0.034	12.40
0.3	0.095	0.018	0.062	0.008	5.77
0.4	0.048	0.037	0.030	0.014	3.43
0.5	0.025	0.043	0.017	0.020	2.82
0.6	0.013	0.044	0.013	0.015	2.50
0.7	0.006	0.042	0.016	0.003	2.25
0.8	0.002	0.041	0.026	0.011	2.47
0.9	0.001	0.052	0.039	0.024	3.44

L'évaluation de l'écart moyen en fonction de la concentration c montre que lorsque la fraction volumique des fibres est suffisamment grande ($c > 0.3$) (voir Figure 2-33), les écarts relatifs entre les 2 modèles sont acceptables (moins de 5%).

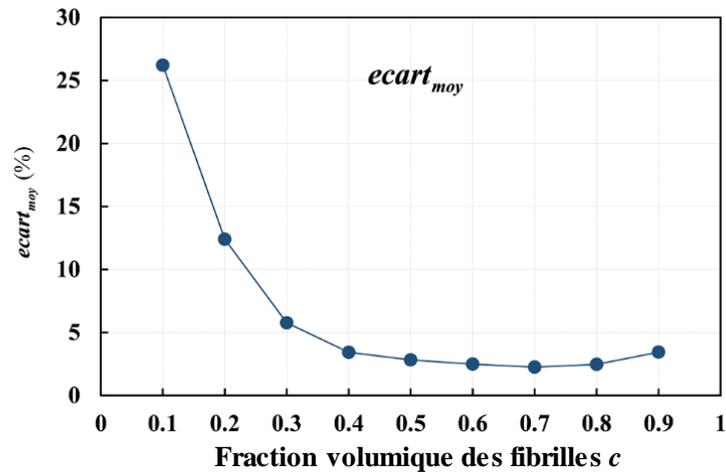


Figure 2-33 : l'écart moyen entre les deux méthodes en fonction de la concentration volumique

2.4.2 Conclusion

Dans cette étude, une comparaison entre le comportement effectif numérique et analytique du réseau fibrillaire en l'absence de matrice a été réalisée. Cette comparaison a permis de montrer que le modèle analytique décrit convenablement le comportement effectif du réseau de macrofibrilles qui est évalué par homogénéisation numérique sur la configuration du modèle 1S modifiée, c'est-à-dire pour $f_3 = 1$.

Comme cela est indiqué dans l'introduction de la partie 2.4.1, un tel modèle analytique bien que partiel car il ne prend en compte que le réseau fibrillaire est intéressant car il peut représenter le comportement de la paroi cellulaire dans 2 situations :

- celle du bois humide dont le comportement est essentiellement due au réseau fibrillaire
- celle du bois en formation

Chapitre 3 : Microstructure à 2 sens d'ondulations

3.1 Objectif du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle description morphologique 3D de la cellule élémentaire qui permet de prendre en compte l'ondulation des microfibrilles non plus dans une unique direction mais dans deux directions spatiales. Cette nouvelle microstructure nous permettra d'évaluer le comportement effectif de la couche pariétale S2 de la paroi cellulaire en tenant compte du mouvement des microfibrilles non seulement dans le plan (1, 2), mais aussi dans le plan (1, 3).

La procédure d'homogénéisation numérique pour calculer le comportement effectif d'une cellule élémentaire périodique a été présentée au chapitre précédent. Nous allons l'appliquer cette fois-ci à la microstructure ondulant dans 2 directions, que nous appellerons « **modèle 2S** ». Pour cela, nous allons commencer par décrire la nouvelle géométrie de la cellule élémentaire périodique.

3.2 Modélisation géométrique de la microstructure à 2 sens d'ondulations

Comme nous l'avons présenté au chapitre 2, l'organisation structurale de la couche S2 au niveau de la paroi cellulaire du bois peut être considérée comme un composite comprenant, d'une part, les microfibrilles de cellulose, pour partie dans un état cristallin, et d'autre part, l'hémicellulose et la lignine, constituant une matrice amorphe.

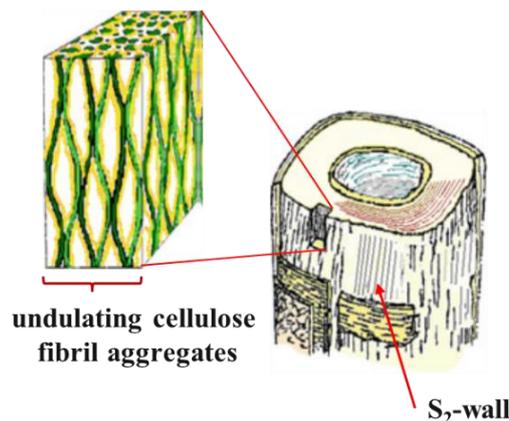


Figure 3-1 : Représentation schématique de l'organisation complexe des polymères de la paroi de la trachéide, où les microfibrilles de cellulose sont disposées en agrégats ondulés La structure à travers la paroi secondaire S2 (vue par microscopie à force atomique, AFM) (Fahlén and Salmén, 2005).

Boyd (1982) a proposé une représentation schématique de l'organisation complexe des polymères de la paroi de la trachéide (voir Figure 3-1), dans laquelle les fibrilles de la paroi secondaire du bois, agrégats de cellulose, ondulent autour d'une direction principale. Dans le modèle 1S du chapitre précédent les fibrilles sont ondulées et interconnectées dans une seule direction. Il en résulte un comportement effectif modifié dans le plan tangentiel de la paroi, tandis que dans la direction radiale les fibrilles restent parallèles les unes aux autres. Dans la nouvelle microstructure du modèle 2S qui va être introduite ici, et qui s'inspire de la Figure 3-1 les fibrilles sont ondulées et interconnectées dans 2 directions.

3.2.1 Description géométrique de la cellule élémentaire (pour le modèle 2S)

Les fibrilles sont quasi cylindriques de section carrée (elles pourraient être rectangulaires). Elles oscillent dans 2 directions, autrement-dit dans les plans (1, 2) et (1, 3), suivant des hélices (Figure 3-2), et sont entourées de matrice amorphe. La microstructure est ici aussi supposée périodique.

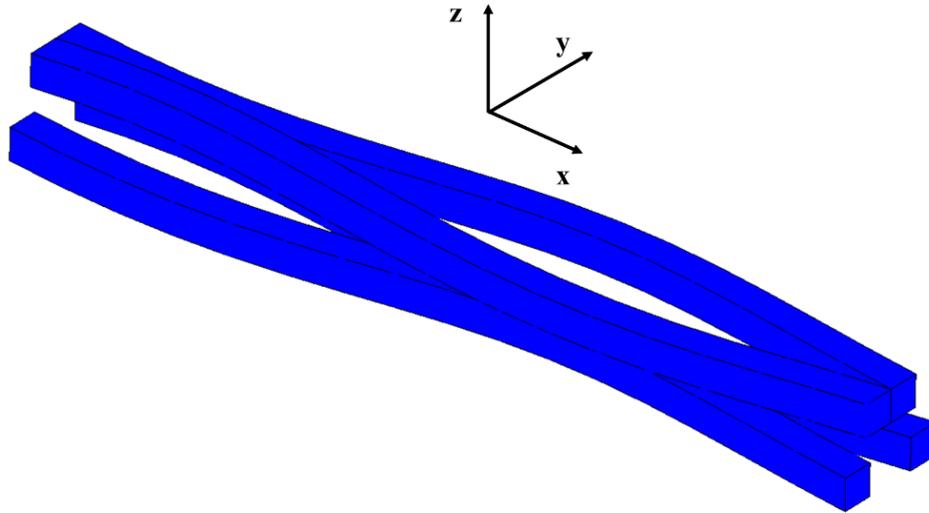


Figure 3-2 : Description géométrique des fibrilles ondulées et interconnectées dans les plans (12) et (13).

Nous utilisons le repère orthonormé (O, x, y, z) où la direction x et la direction y sont définies comme précédemment (voir la partie 2.2.3, chapitre II) et z est la direction radiale. Du fait que chaque fibrille "ondule" d'un tour pour chaque période L_1 dans la direction x , les fibrilles adjacentes sont en opposition de phase, de sorte qu'elles la rencontrent une fois par période L_1 dans la direction x . La cellule élémentaire périodique correspondant au modèle 2S est ainsi représentée par la microstructure de dimension $(L_1, 4\ell, 4\ell)$ de la Figure 3-3a. Elle est constituée de 4 sous-domaines de dimension $(L_1, 2\ell, 2\ell)$ contenant chacun une fibrille ondulante dans les plans (x, y) et (x, z) . Un décalage de phase de l'ondulation permet qu'une fibrille touche chacune de ses voisines immédiates 1 fois par période.

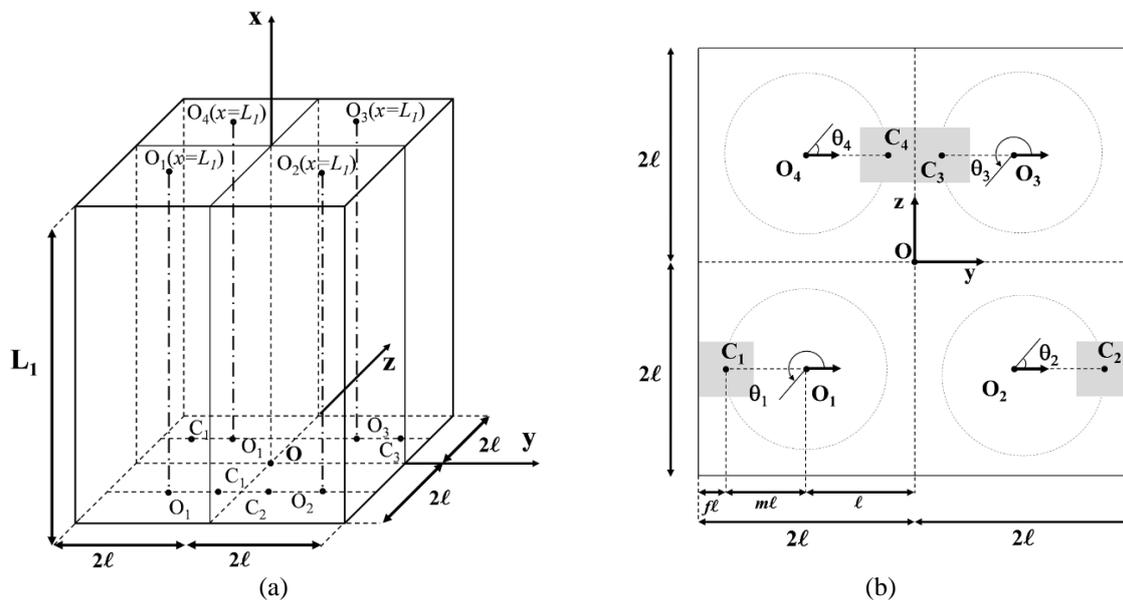


Figure 3-3 : a) Schématisation géométrique de la microstructure du modèle 2S ; b) Définition des points O_i et C_i au niveau $x = 0$ pour 4 macrofibrilles dans la cellule élémentaire.

La Figure 3-3b représente la configuration associée au niveau $x = 0$ de la cellule élémentaire périodique. On définit, pour chacun des quatre sous-domaines, le point O_i de coordonnées $(x_{O_i}, y_{O_i}, z_{O_i})$ parcourant son axe central et le point C_i de coordonnées $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$ situé au centre de la fibrille correspondante ($i = 1, \dots, 4$) qui s'enroule en hélice autour de l'axe (O_i, x) .

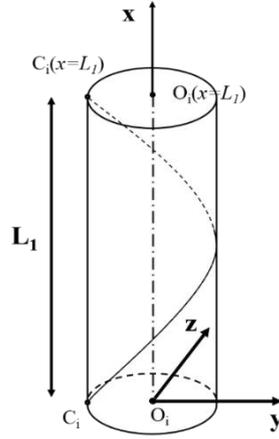


Figure 3-4 : Schématisation de la trajectoire du point C_i tournant en hélice

Les coordonnées des points O_i et C_i (voir Figure 3-4) situés au niveau x sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_{O_i} = \beta_i \ell \\ z_{O_i} = \gamma_i \ell \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_{C_i} = [\beta_i + m \cos \theta_i] \ell \\ z_{C_i} = [\gamma_i + m \sin \theta_i] \ell \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec (voir la Figure 3-3b):

$$\theta_i = (\vec{y}, \overrightarrow{O_i C_i}) = 2\pi \frac{x}{L_1} + \alpha_i \pi \quad (3.2.2)$$

Tableau 3-1 : Valeurs de α , β , γ pour chaque sous-domaine de la cellule élémentaire périodique

i	1	2	3	4
α_i	1	0	1	0
β_i	-1	+1	+1	-1
γ_i	-1	-1	+1	+1

On notera que $m\ell$ est le rayon du cylindre correspondant au chemin parcouru par le centre de chaque fibrille où $m = 1 - f$ et la proportion linéique de matrice, et où $f = \sqrt{c}$ est la concentration linéique de la fibrille.

On définit pour chaque sous-domaine i le repère cylindrique tournant $(\vec{x}, \vec{u}_i, \vec{v}_i)$ avec :

$$\begin{cases} \vec{u}_i = \cos \theta_i \cdot \vec{y} + \sin \theta_i \cdot \vec{z} \\ \vec{v}_i = -\sin \theta_i \cdot \vec{y} + \cos \theta_i \cdot \vec{z} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Le vecteur unitaire \vec{n}_i tangent à la trajectoire de C_i s'écrit alors :

$$\vec{n}_i(x) \propto \frac{d\vec{C}_i}{dx} = \frac{d\vec{O}_i}{dx} + \frac{d}{dx} \cdot \frac{\overrightarrow{O_i C_i}}{dx} = \vec{x} + \frac{2\pi}{L_1} \cdot \vec{v}_i \cdot m \cdot \ell$$

soit :

$$\vec{n}_i = \cos \lambda \cdot \vec{x} + \sin \lambda \cdot \vec{v}_i \quad \text{où} \quad \lambda = \text{atan} \left(\frac{2\pi}{L_1} \cdot m \cdot \ell \right) \quad (3.2.4)$$

Chaque fibrille est un milieu curviligne de section droite carrée de côté $2f\ell$ dont les côtés sont maintenus dans les plans (x, y) et (x, z) . Ce milieu va être construit en déterminant mathématiquement le chemin parcouru par les 4 points P_i, Q_i, R_i, S_i (Figure 3-5), sommets de la section droite carrée de la fibrille i au

niveau de $C_i(x)$. On va ensuite chercher leur position respective P_i' , Q_i' , R_i' , S_i' lorsqu'ils passent par le plan $x = x_{C_i}$.

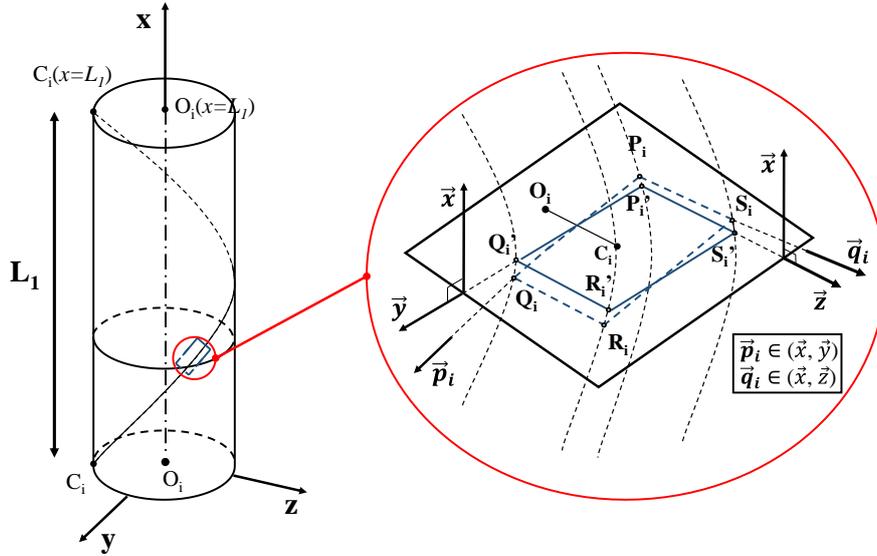


Figure 3-5 : Chemin parcouru par les 4 points P_i' , Q_i' , R_i' , S_i' de la section droite de la fibrille passant par C_i .

On définit à nouveau pour chaque niveau x (Figure 3-5) les vecteurs unitaires $\vec{p}_i \approx \vec{y}$ et $\vec{q}_i \approx \vec{z}$ respectant les conditions :

$$\vec{p}_i \in \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \\ \perp \vec{n}_i \end{array} \right. ; \vec{q}_i \in \left\{ \begin{array}{l} (x, z) \\ \perp \vec{n}_i \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

Ces vecteurs permettent de définir les coordonnées des 4 points P_i , Q_i , R_i , S_i comme suit :

$$\begin{aligned} P_i &= C_i - f\ell \cdot \vec{p}_i - f\ell \cdot \vec{q}_i & (a) \\ Q_i &= C_i + f\ell \cdot \vec{p}_i - f\ell \cdot \vec{q}_i & (b) \\ R_i &= C_i + f\ell \cdot \vec{p}_i + f\ell \cdot \vec{q}_i & (c) \\ S_i &= C_i - f\ell \cdot \vec{p}_i + f\ell \cdot \vec{q}_i & (d) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Il nous faut déterminer l'expression des 2 vecteurs \vec{p}_i et \vec{q}_i . Compte-tenu de (3.2.3) et (3.2.4), un vecteur (X, Y, Z) orthogonal à \vec{n}_i vérifie l'équation :

$$X \cos \lambda - Y \sin \lambda \sin \theta_i + Z \sin \lambda \cos \theta_i = 0 \quad (3.2.7)$$

En appliquant les conditions (3.2.5) et (3.2.7), on obtient :

$$\vec{p}_i = \sin \varphi_i \cdot \vec{x} + \cos \varphi_i \cdot \vec{y}; \quad \vec{q}_i = \sin \psi_i \cdot \vec{x} + \cos \psi_i \cdot \vec{z} \quad (3.2.8)$$

où

$$\varphi_i = \text{atan}(\tan \lambda \cdot \sin \theta_i) \approx \lambda \sin \theta_i \text{ (si } \lambda \ll 1); \quad \psi_i = \text{atan}(-\tan \lambda \cdot \cos \theta_i) \approx -\lambda \cos \theta_i \text{ (si } \lambda \ll 1)$$

Compte-tenu de (3.2.8), les équations (3.2.6) donnent les coordonnées des 4 points P_i , Q_i , R_i , S_i :

$$P_i = C_i - f\ell \cdot (\vec{p}_i + \vec{q}_i) = \begin{bmatrix} x - f\ell(\sin \varphi_i + \sin \psi_i) \\ \ell(\beta_i + m \cos \theta_i - f \cos \varphi_i) \\ \ell(\gamma_i + m \sin \theta_i - f \cos \psi_i) \end{bmatrix} \quad (a) \quad (3.2.9)$$

$$Q_i = C_i + f\ell \cdot (\vec{p}_i - \vec{q}_i) = \begin{bmatrix} x + f\ell(\sin\varphi_i - \sin\psi_i) \\ \ell(\beta_i + m\cos\theta_i + f\cos\varphi_i) \\ \ell(\gamma_i + m\sin\theta_i - f\cos\psi_i) \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$R_i = C_i + f\ell \cdot (\vec{p}_i + \vec{q}_i) = \begin{bmatrix} x + f\ell(\sin\varphi_i + \sin\psi_i) \\ \ell(\beta_i + m\cos\theta_i + f\cos\varphi_i) \\ \ell(\gamma_i + m\sin\theta_i + f\cos\psi_i) \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$S_i = C_i + f\ell \cdot (-\vec{p}_i + \vec{q}_i) = \begin{bmatrix} x + f\ell(-\sin\varphi_i + \sin\psi_i) \\ \ell(\beta_i + m\cos\theta_i - f\cos\varphi_i) \\ \ell(\gamma_i + m\sin\theta_i + f\cos\psi_i) \end{bmatrix} \quad (d)$$

Considérons un plan $x = x_0$ donné. On va chercher, à titre d'exemple, les coordonnées y et z du point P_i' situé dans ce plan. Pour cela il faut trouver la valeur de $x_{P_i'}$ telle que $x_{P_i'} = x_{C_i}$ correspondant au fait que P_i' soit situé dans la section droite de la fibrille contenant C_i . Ceci revient à résoudre l'équation implicite suivante :

$$x_{P_i'} - f\ell[\sin\varphi_i(x_{P_i'}) + \sin\psi_i(x_{P_i'})] = x_0 \quad (3.2. 10)$$

soit

$$x_0 = x_{P_i'} - f\ell \left\{ \underbrace{\sin \left[\underbrace{\text{atan} \left(\tan\lambda \sin \left(2\pi \frac{x_{P_i'}}{L_1} + \alpha_i \pi \right) \right)}_{\varphi_i} \right]}_{\theta_i} + \underbrace{\sin \left[\text{atan} \left(-\tan\lambda \cos \left(2\pi \frac{x_{P_i'}}{L_1} + \alpha_i \pi \right) \right)}_{\psi_i} \right]}_{\theta_i} \right\}$$

En outre, on notera que pour le cas $\lambda \ll 1$, l'équation (3.2. 10) devient :

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{P_i'} - f\ell[\sin\varphi_i(x_{P_i'}) + \sin\psi_i(x_{P_i'})] \approx x_{P_i'} + f\ell\lambda(-\sin\theta_i + \cos\theta_i) \\ &\approx x_{P_i'} + f\ell\lambda\sqrt{2}\sin\left(\theta_i - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$x_0 \approx x_{P_i'} - \frac{\sqrt{2}}{2} f\ell\lambda \sin\left(2\pi \frac{x_{P_i'}}{L_1} + \alpha_i \pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Pour x_0 donné, on peut obtenir la valeur de $x_{P_i'}$ par approximations successives en partant de $x_{P_i'} = x_0$, puis on détermine les coordonnées de P_i' en calculant les 2 valeurs de $y_{P_i'}$ et de $z_{P_i'}$ qui coïncident avec celles de y_{P_i} et de z_{P_i} données par l'équation (3.2. 9). Un raisonnement similaire permet d'obtenir celles de Q_i' , R_i' , S_i' . On obtient ainsi la trace de la fibrille dans le plan ($x = x_0$) ce qui va permettre de reconstituer la forme hélicoïdale des fibrilles dans la cellule élémentaire périodique.

3.2.2 Description du maillage

Le maillage du modèle 2S sera réalisé, pour les fibrilles comme pour la matrice, couche par couche en deux étapes : (i) génération de maillages surfaciques, (ii) génération de maillages volumiques. On utilisera des éléments cubiques à 8 nœuds nommés CUB8 dans Cast3M.

Dans un premier temps, on maille tout d'abord les fibrilles. Dans la continuité du modèle 1S précédent, on suppose que leur comportement est isotrope transverse. Il est donc nécessaire d'y définir en tout point un repère local permettant d'orienter les propriétés du matériau. On fait l'hypothèse que ce repère est

constant au niveau de chaque couche considérée, et donné par l'orientation du point central C_i . Considérons par exemple le cas d'une division en 8 couches. La Figure 3-6 indique par des hachures les quadrilatères (P_i' , Q_i' , R_i' , S_i') à chaque niveau séparant deux couches.

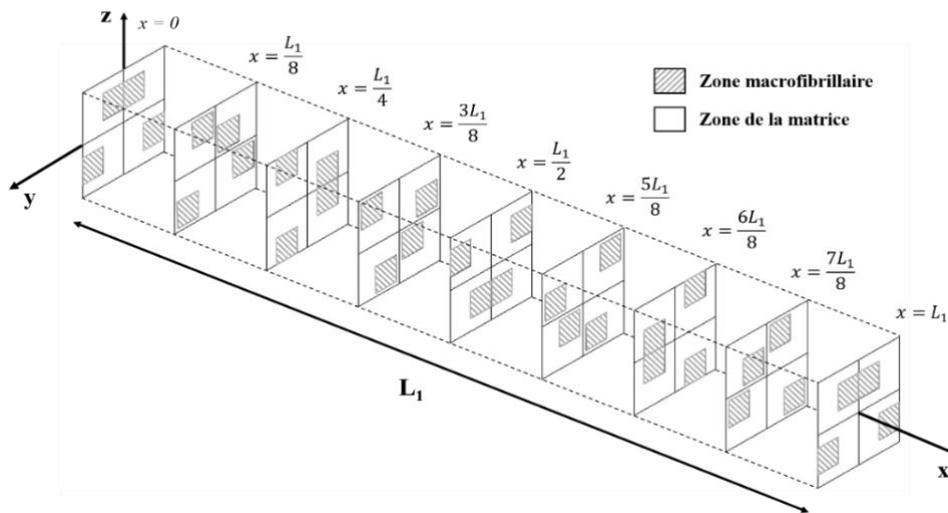


Figure 3-6 : Schématisation représentative de la géométrie du modèle 2S à 8 couches.

On va mailler chaque portion de fibrilles en reliant les quadrilatères correspondants par 4 segments de droite. On utilise pour cela l'opérateur VOLUME disponible dans la bibliothèque de Cast3M. Au préalable, les quadrilatères ont été maillés avec l'opérateur DALLE qui permet le dallage d'une surface convexe définie par 4 lignes. A chaque fois qu'une portion de fibrille a été maillée, un modèle mécanique isotrope transverse est généré au moyen de l'opérateur MODELE, avec comme direction principale la ligne joignant les centres C_i des deux sections de fibrilles. Dans la Figure 3-7, on a réalisé ce maillage au moyen de 64 couches.

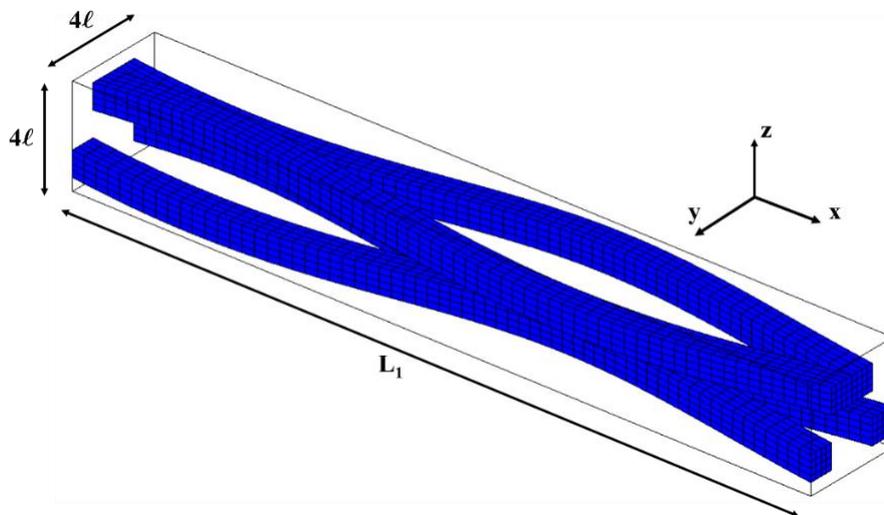


Figure 3-7 : Maillage volumique de l'agrégat des 4 macrofibrilles dans la cellule élémentaire périodique.

Dans un deuxième temps, on maillie la matrice, supposée isotrope. Là aussi on commence par la surface de chaque section, en divisant, pour chaque section, la partie non occupée par la fibrille en 8 zones comme indiqué sur la Figure 3-8. Dans ce schéma les quatre fibrilles sont placées provisoirement au centre de chaque sous-domaine (quart de VER). Les points situés sur les contours des sous-domaines seront fixes, tandis que les sommets des sections des fibrilles (les P_i' , Q_i' , R_i' , S_i') vont se déplacer selon les valeurs de x .

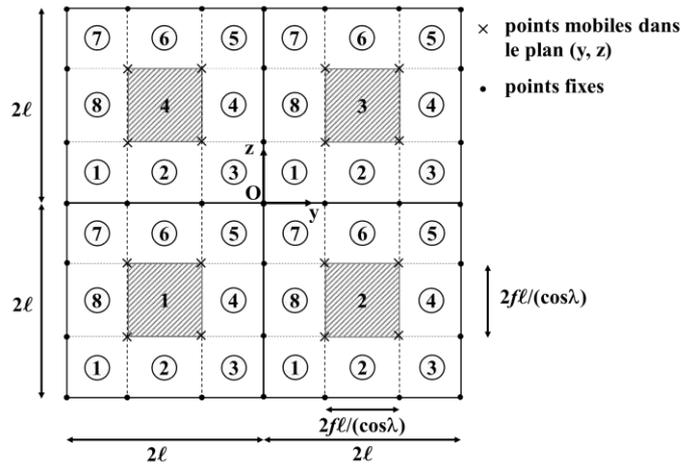
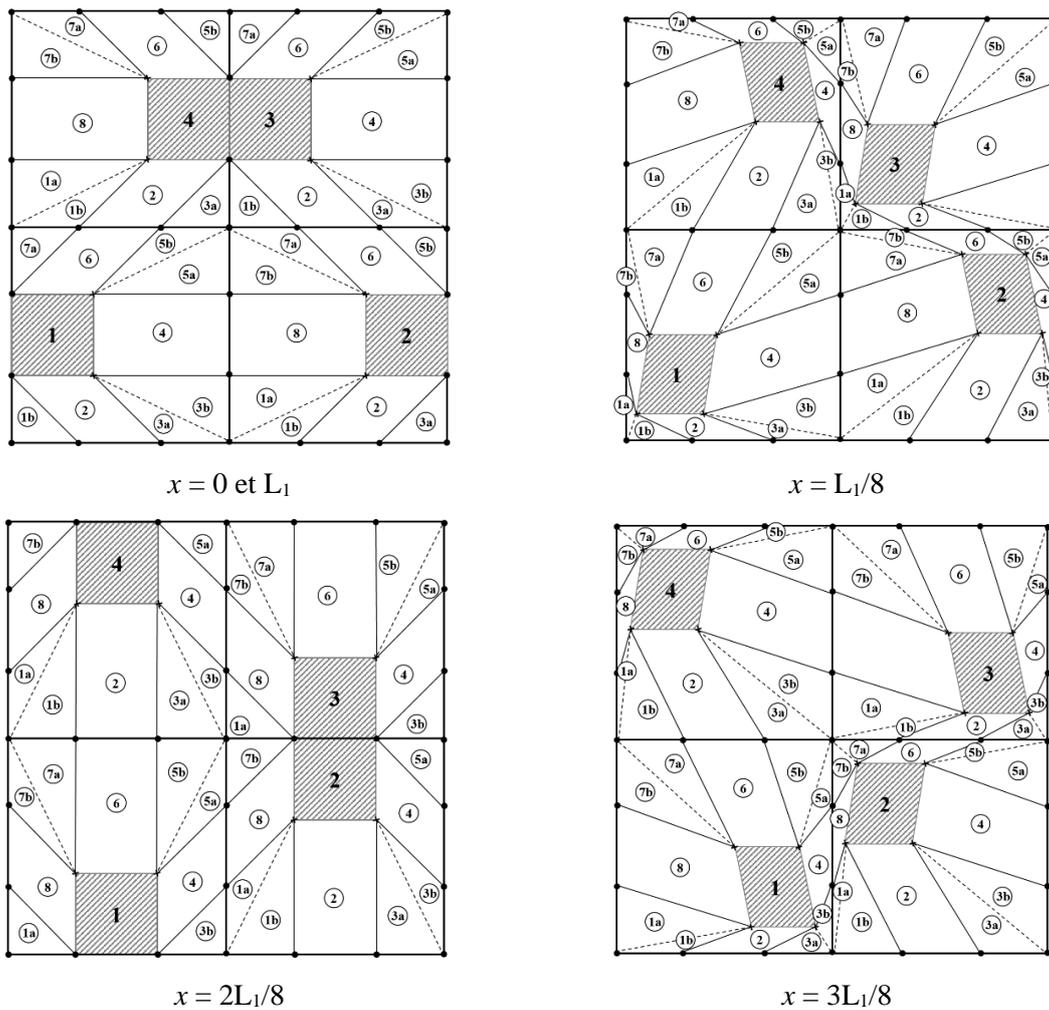


Figure 3-8 : Fibrilles placées aux centres des sous domaines pour calculer la position des points fixes.

La Figure 3-9 montre comment les points mobiles se déplacent avec la position de la section sur l'axe x . On remarque que les surfaces 2, 4, 6, 8 demeurent des quadrilatères convexes, qu'il est aisé de mailler avec l'opérateur DALL. Lorsque la fibrille touche un bord du sous-domaine, les deux points fixes du bord coïncident avec les deux points mobiles de la fibrille, de sorte que le maillage résultant se réduit au segment de la ligne de contact.



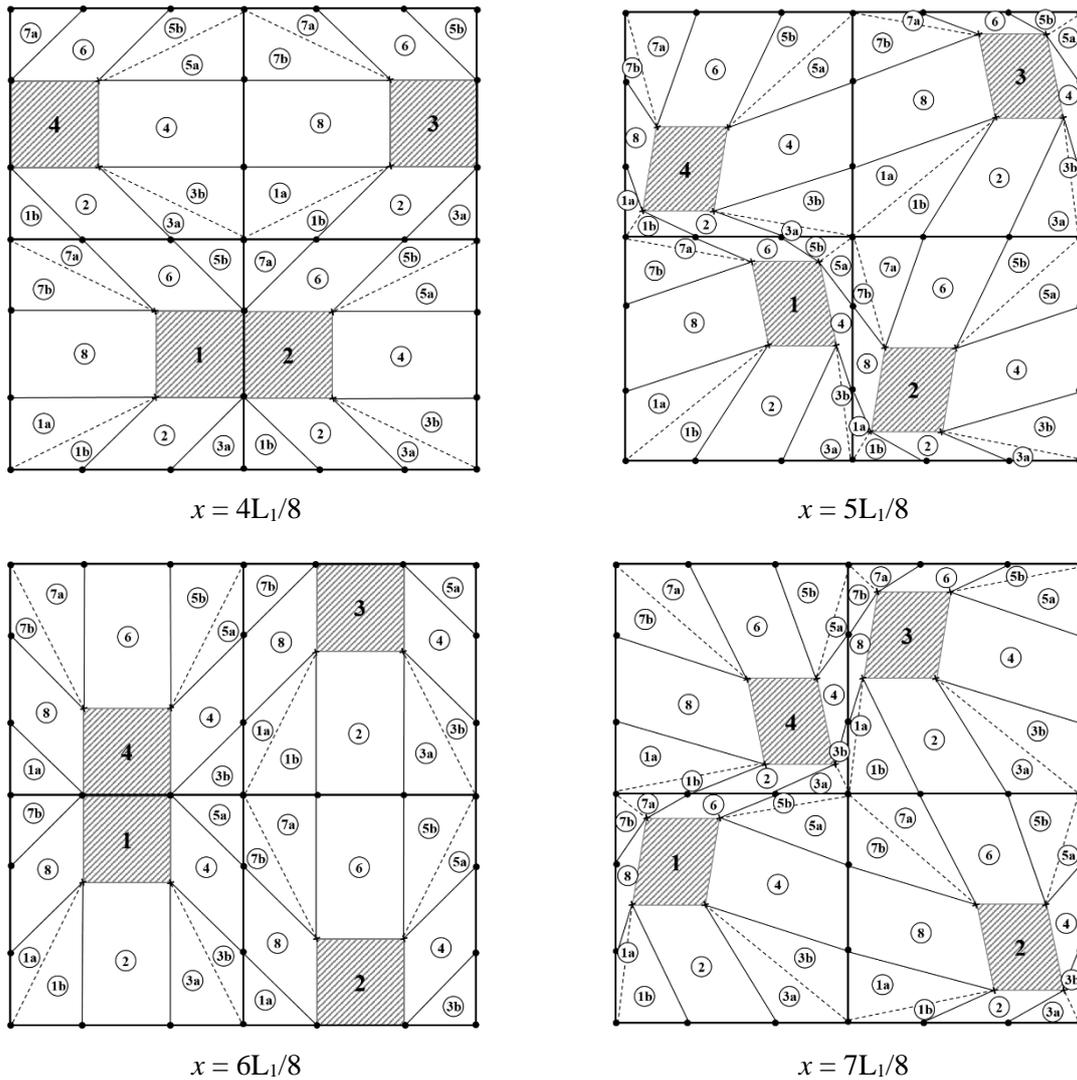


Figure 3-9 : schématisation géométrique des trajectoires parcourues par les 8 surfaces découpées pour une période L_1 de la matrice.

Concernant les surfaces 1, 3, 5, 7, dans certains cas elles deviennent non convexes. Pour rendre possible l'utilisation de l'opérateur DALL il a fallu les subdiviser chacune en deux surfaces triangulaires, notées 1a et 1b, etc. comme indiqué sur la Figure 3-9.

La Figure 3-10 explique comment est appliqué l'opérateur avec l'exemple de la surface 1a, du niveau $x = L_1/8$ et du sous domaine $i = 1$. Les étapes précédentes ayant permis de déterminer (à la translation selon x près) les coordonnées des points 'fixes' A et E et celles du point mobile S_1 (Figure 3-10a), on crée le point S_1' de mêmes coordonnées que S_1 et définit la surface triangulaire 1a comme le quadrilatère (A, S_1 , S_1' ,E) auquel l'opérateur DALL est appliqué. Cela conduisant à créer des éléments ayant des nœuds spatialement confondus, il faut fusionner ces derniers au moyen de l'opérateur ELIM (Figure 3-10b). Une fois cette opération de maillage surfacique accomplie pour tous les niveaux $x = x_n$, on construit le maillage volumique en liant successivement par des segments les maillages surfaciques de niveau x_n et x_{n+1} et en appliquant l'opérateur VOLU. La Figure 3-10c montre le résultat de ces opérations successives menées de $x_0 = 0$ à $x_N = L_1$. Là aussi, lorsque la surface est réduite à un segment, le mailleur remplace les éléments cubiques par des éléments hexaédriques compatibles. On procède de même pour 1b, 3a, 3b, 5a, 5b, 7a, 7b.

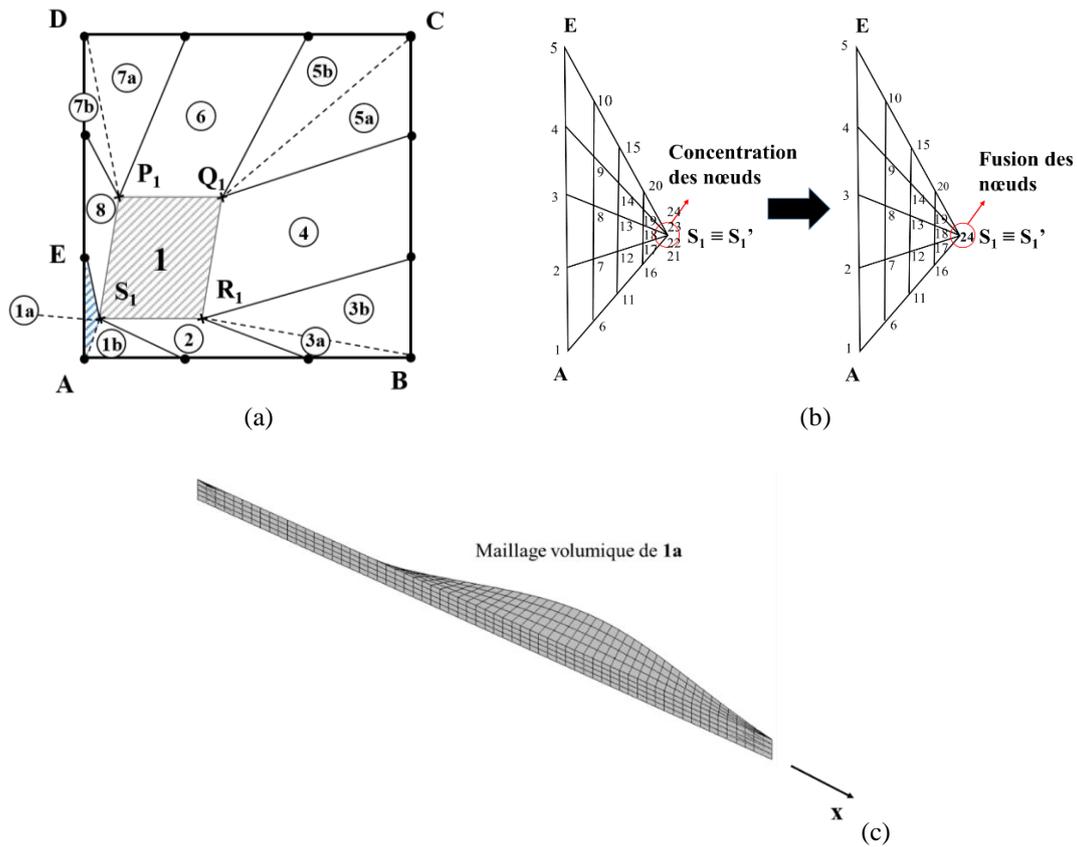


Figure 3-10 : a) Description surfacique d'une couche de la cellule élémentaire; b) Fusion des nœuds confondus du maillage surfacique 1a ; c) Maillage volumique de la partie 1a de la matrice.

Dans la pratique, le maillage des fibrilles et des portions de matrice est effectué en parallèle, en procédant couche par couche, de même que la construction du modèle mécanique. Une fois l'ensemble des sous-volumes maillés, ils sont assemblés en un volume unique représentant la cellule élémentaire périodique du modèle 2S (voir Figure 3-11). Par construction, les liaisons fibrille/matrice sont supposées parfaites. Le modèle mécanique associé, avec l'application d'un comportement isotrope pour la matrice et isotrope transverse pour les fibrilles est construit également couche par couche.

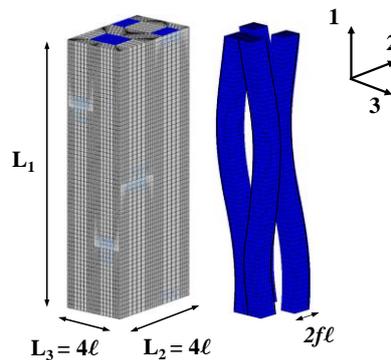


Figure 3-11 : Maillage du modèle 2S avec des fibrilles ondulées en 2 directions.

3.3 Calcul des propriétés élastiques effectives par homogénéisation périodique

Pour calculer le comportement effectif de la cellule élémentaire périodique représentée par le modèle 2S, nous allons appliquer la procédure d'homogénéisation numérique présentée au chapitre 2. Rappelons que nous avons supposé les fibrilles isotropes transverses et la matrice isotrope, et que nous nous plaçons

dans le repère $(1, 2, 3) = (x, y, z)$ où $\underline{1}$ est la direction moyenne des fibrilles, et les plans $(1, 2) = (x, y)$ et $(1, 3) = (x, z)$ les surfaces dans lesquelles s'établissent les contacts latéraux entre fibrilles.

L'existence d'au moins deux plans de symétrie matérielle orthogonaux est requise pour assurer un comportement élastique orthotrope. Dans le cas présent, cette existence ne va pas de soi. Il y a bien invariance de la microstructure par rotation de 90° (donc de 180°) autour de l'axe $\underline{1}$, en termes de géométrie comme de direction de comportement local, moyennant une translation dans la direction 1. Il y a également invariance par symétrie de plan $(2, 3)$, composée avec la symétrie centrale par rapport au centre O, moyennant une translation dans la direction 3. Or, une translation est sans conséquence sur le comportement d'un matériau périodique. De même, un tenseur pair, comme c'est le cas du tenseur d'élasticité, est invariant par une symétrie centrale. On doit donc bien s'attendre à de l'orthotropie pour notre matériau homogénéisé avec en outre équivalence des directions 2 et 3, autrement-dit il y a une symétrie quadratique (seulement 6 constantes \tilde{C}_{ij}) pour le modèle 2S.

Pour les paramètres géométriques et matériaux du modèle 2S, nous allons reprendre les valeurs de référence utilisées dans la partie 2.2.1 du chapitre 2. Toutefois, du fait de la trajectoire hélicoïdale des fibrilles du modèle 2S et de l'équivalence des directions 2 et 3, la notion de matrice lamellaire et lenticulaire ne s'applique plus. On ne peut donc pas déterminer ici de paramètre r_λ et ce point devra être discuté.

3.3.1 Convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments finis

Dans l'idée de vérifier la précision des calculs EF et la cohérence des résultats, on réalise des calculs avec plusieurs maillages associés à différentes tailles d'éléments pour observer l'évolution du comportement effectif lorsqu'on raffine le maillage. Cette évolution permet de choisir avec pertinence la taille des éléments. Pour les calculs EF qui concernent la convergence du modèle 2S, le type d'élément cubique (CUB8) a été utilisé pour différents degrés de raffinement du maillage. Nous réutilisons par ailleurs l'indicateur de convergence $ecart_{moy}$ défini par l'équation (2.3. 1) pour préciser la convergence. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 3-2: Ensemble des résultats obtenus par l'étude de l'évolution de la finesse du maillage (modèle 2S)

Nombre d'éléments	Donnée i	\tilde{C}_{11}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{22}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{33}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{12}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{13}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{23}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{44}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{55}^{2S} (MPa)	\tilde{C}_{66}^{2S} (MPa)	$ecart_{moy}$ (%)
1664	1	70410	7279.8	7279.8	2120.9	2120.9	2256.9	2012.4	2046.5	2046.5	6.602
6656	2	70394	7017.9	7017.9	2112.4	2112.4	2393.6	1893.7	1969.3	1969.3	2.766
14976	3	70390	6928.5	6928.5	2109.6	2109.6	2444.4	1855.4	1948.6	1948.6	1.511
59904	4	70386	6836.1	6836.1	2106.4	2106.4	2500.5	1822.5	1931.9	1931.9	0.288
106496	$+\infty$	70385	6813.5	6813.5	2105.5	2105.5	2514.4	1815.3	1928.6	1928.6	0.000

En nous basant sur les résultats du Tableau 3-2, nous choisissons une précision inférieure à 2% correspondant à un maillage de 14976 éléments (1.51%). Ce niveau de raffinement sera utilisé pour tous les calculs effectués dans ce chapitre.

3.3.2 Estimation corrélative du ratio r_λ

Afin de pouvoir confronter les résultats du comportement effectif de la cellule élémentaire associés aux 3 microstructures définies (0S, 1S et 2S), nous allons estimer une valeur r_λ correspondant aux modèles 0S et 1S qui les rapprochent le plus du modèle 2S. Pour cela, nous calculons le comportement effectif associé au modèle 1S pour plusieurs valeurs du ratio r_λ , puis l'écart relatif moyen entre rigidités effectives des modèles 1S et 2S, en utilisant l'indicateur suivant :

$$f(r_\lambda^i) = \left[\frac{1}{N} \sum \left(\frac{\tilde{C}_{kl}^{2S} - \tilde{C}_{kl}^{1S}(r_\lambda^i)}{\tilde{C}_{kl}^{2S}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.3. 1)$$

où N est le nombre de coefficients \tilde{C}_{kl} non nuls, c'est-à-dire 9 pour un comportement orthotrope, $\tilde{C}_{kl}^{1S}(r_\lambda^i)$ la valeur des coefficients effectifs associés au modèle 1S pour une valeur de r_λ^i , \tilde{C}_{kl}^{2S} la valeur des composantes associées au modèle 2S considéré comme la solution de référence. La Figure 3-12 présente les évolutions des écarts entre les 2 modèles (1S et 2S) en fonction du ratio r_λ pour différentes valeurs de concentration des fibrilles c . Le ratio r_ϕ est par ailleurs fixé à sa valeur de référence ($r_\phi = 7.50$).

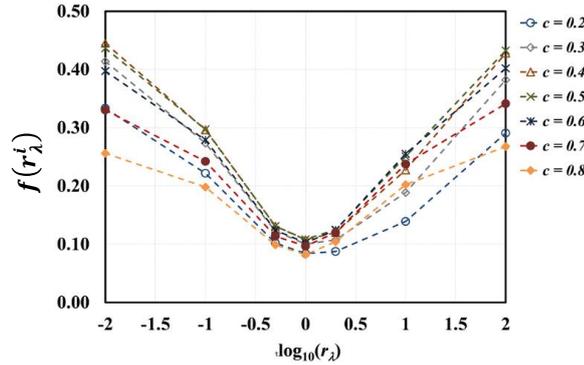


Figure 3-12 : Evaluation des écarts relatifs de toutes composantes effectives en fonction de r_λ pour différentes valeurs de c ($r_\phi = 7.5$).

Les courbes obtenues montrent que la valeur $r_\lambda = 1.0$ minimise l'écart entre les modèles 1S et 2S. On retrouve par coïncidence la valeur de référence de l'étude précédente, suggérant qu'elle correspond à une contribution équilibrée entre les couches lamellaires et lenticulaires de la matrice amorphe au sein de la paroi cellulaire associée à la morphologie 1S.

3.3.3 Etude de l'influence des ondulations

Dans le chapitre 2, on a comparé les coefficients effectifs associés respectivement aux modèles 0S et 1S à travers une étude paramétrique, consistant à faire varier différents paramètres géométriques (rapport de forme r_ϕ , concentration volumique des fibres c , proportion de matrice lamellaire sur lenticulaire r_λ) et matériaux (contraste entre les phases). On a montré que les coefficients les plus influencés par l'effet d'ondulation dans le plan (1, 2) étaient \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} . Dans le cas de la microstructure 2S, on s'attend à observer un effet de l'ondulation des fibrilles non seulement dans le plan (1, 2), mais également dans le plan (1, 3). Nous allons étudier les évolutions des coefficients effectifs du modèle 2S en fonction des paramètres géométriques r_ϕ et c et du contraste entre les phases, en les comparant aux résultats obtenus numériquement pour les deux modèles de microstructure 0S et 1S.

a) Variation des paramètres géométriques

On considère ici deux microstructures, à fibrilles ondulées dans 2 directions (modèle 2S) et à fibrilles parallèles (modèle 0S). La Figure 3-13 montre l'évolution des rigidités effectives en fonction de la fraction volumique des fibres c , celle-ci variant entre 0 et 1, et pour 4 valeurs du facteur de forme de la cellule élémentaire $r_\phi^i = \frac{L_1}{4\ell}$ dans le cas du modèle 2S - une seule valeur de r_ϕ étant requise pour le modèle 0S en raison de l'indépendance du comportement effectif vis-à-vis de la longueur L_1 . La valeur $r_\lambda = 1.0$ a été utilisée pour le modèle 0S. Les évolutions des coefficients \tilde{C}_{11} , \tilde{C}_{22} , \tilde{C}_{33} sont reportées sur la Figure B-3 de l'Annexe B.

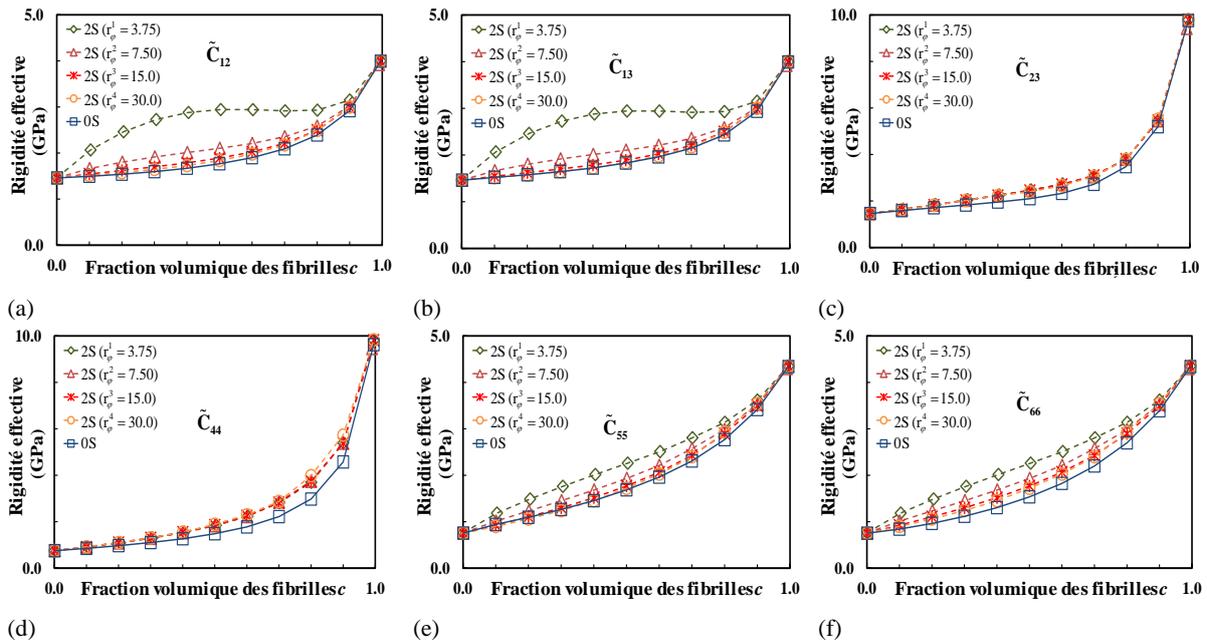


Figure 3-13 : Evolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la concentration pour les modèles OS et 2S ($r_\lambda = 1.0$, $r_\phi = 7.50$).

Sur la Figure 3-13, nous observons que l'effet des ondulations des fibrilles dans le cas de la morphologie 2S est très significatif non-seulement sur les composantes effectives \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} , comme c'était le cas pour la morphologie 1S, mais également sur les composantes \tilde{C}_{13} et \tilde{C}_{55} dont les valeurs sont les mêmes que \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} pour le modèle 2S. Un tel effet était prévisible puisque les fibrilles pour la morphologie 2S sont maintenant en contact, de manière équivalente, à la fois dans les plans (1, 2) et (1, 3).

Nous observons également que les composantes \tilde{C}_{23} , \tilde{C}_{44} sont légèrement plus élevées pour le modèle 2S que pour le modèle OS même pour des valeurs élevées du rapport r_ϕ . Ce dernier résultat n'était pas attendu. En effet, on pourrait intuitivement s'attendre à ce que les propriétés effectives associées aux modèles 2S et 1S tendent vers celles associées au modèle OS lorsque r_ϕ tend vers l'infini puisque, dans cette situation, les fibrilles tendent à être parallèles à la direction 1, comme le modèle OS. Ce n'est pas toujours le cas pour la raison suivante. En fait, il y a 3 effets induits par les ondulations des fibrilles (voir Figure 3-14) :

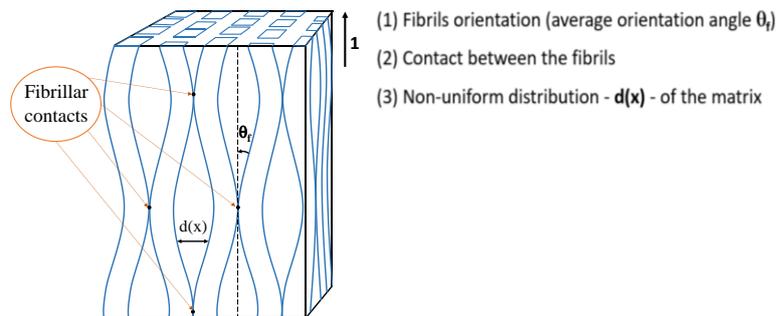


Figure 3-14 : Illustration des 3 effets induits par les ondulations des fibrilles.

- le premier est dû à l'orientation des fibrilles qui cesse d'être parallèle à la direction 1 ;
- le second provient du contact entre les fibrilles ;
- le troisième est induit par une distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles oscillantes.

Lorsque le rapport r_ϕ tend vers l'infini, les deux premiers effets disparaissent puisque, d'une part, les fibrilles tendent à avoir la même orientation que la direction 1, et d'autre part, le nombre de contact des fibrilles par unité de longueur tend vers zéro. Cependant, la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles ondulées, est toujours présente même pour des valeurs très élevées de r_ϕ , expliquant ainsi que les résultats dérivés des deux modèles 2S et 1S peuvent être différents pour certains modules de ceux associés au modèle 0S. Un tel effet est observé pour le modèle 2S sur les modules effectifs \tilde{C}_{23} , \tilde{C}_{44} et également pour \tilde{C}_{66} . A savoir, il est noté que cet effet était déjà légèrement perceptible pour le modèle 1S sur les modules effectifs \tilde{G}_{12} (voir Figure 2-20) puisque la différence relative $\Delta\tilde{G}_{12}/\tilde{G}_{12}^{0S}$ ne tend pas vers zéro même pour des valeurs élevées de r_ϕ , notons que les simulations effectuées pour $r_\phi = 120$ donnent les mêmes résultats que $r_\phi = 30$. Enfin, il faut noter que le modèle 2S est quadratique - les directions 2 et 3 sont équivalentes - contrairement au modèle 0S (et aussi 1S) qui est, comme on le remarque numériquement, légèrement orthotrope. En conséquence, les coefficients effectifs impliquant de manière équivalente les directions 2 et 3, tels que \tilde{C}_{55} et \tilde{C}_{66} , ne peuvent pas être exactement les mêmes pour les deux modèles 2S et 0S pour de grandes valeurs de r_ϕ .

Afin de mieux analyser ces observations, la Figure 3-15 fournit l'évolution en fonction de la fraction volumique des paramètres ingénieurs (modules de cisaillement et coefficients de Poisson) pour les trois modèles 0S, 1S et 2S. La valeur de référence $r_\phi = 7.50$ approchant la physique réelle de la paroi cellulaire est utilisée pour les trois modèles, et la valeur $r_\lambda = 1.0$ pour les modèles 0S et 1S.

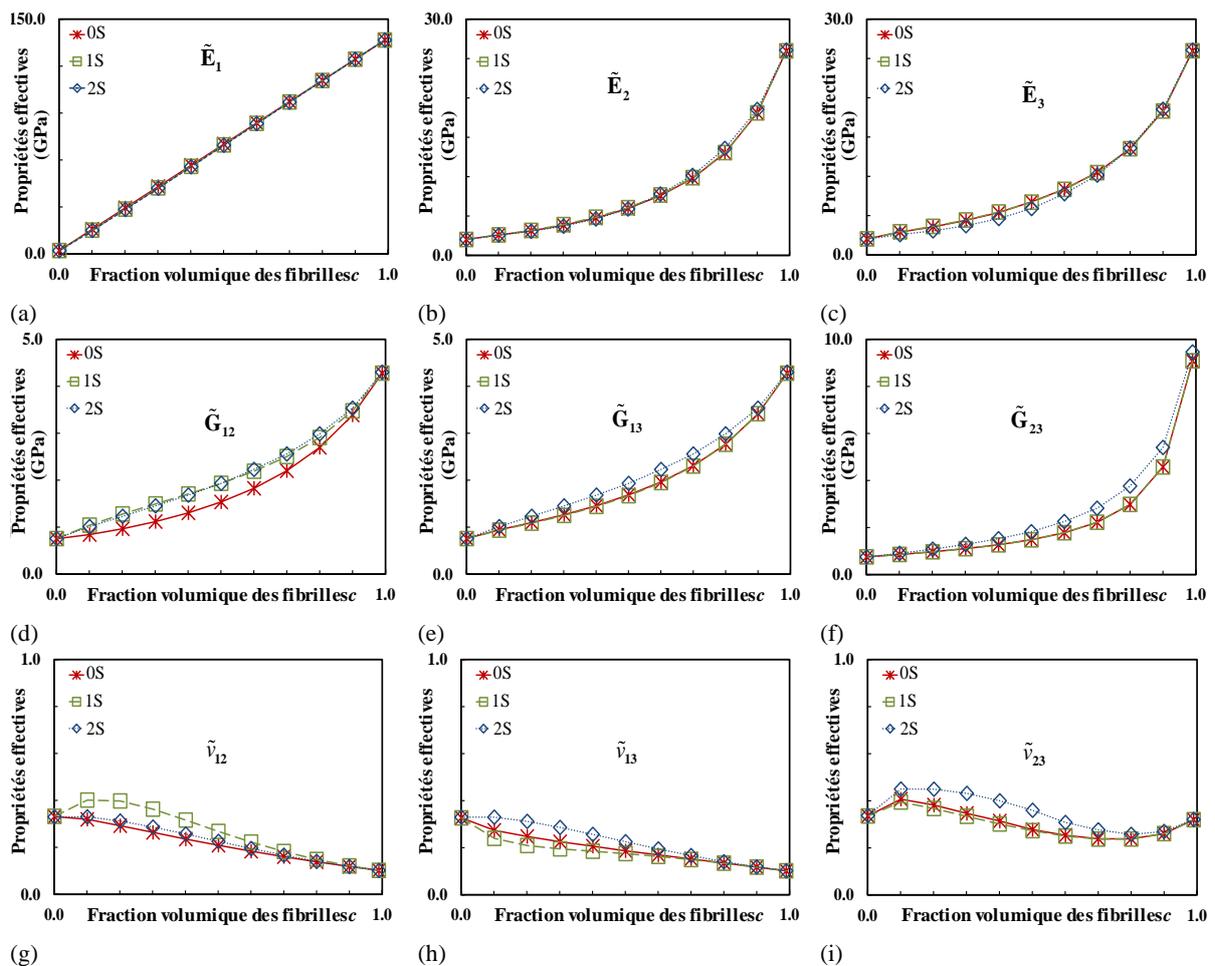


Figure 3-15 : Evolution des constantes ingénieurs caractérisant le comportement macroscopique orthotrope pour les 3 modèles de microstructure ($r_\phi = 7.50$, $r_\lambda = 1.0$).

On observe que les évolutions des modules effectifs d'Young \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 et \tilde{E}_3 ne sont pas influencées par les ondulations des fibrilles. Comme prévu, un effet significatif des ondulations de fibrilles pour $\tilde{G}_{12} = \tilde{C}_{66}$,

qui a été décrit de manière quasiment identique par les modèles 1S et 2S. En revanche, ce n'est pas le cas pour le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{12}$ pour lequel l'influence des oscillations des fibrilles est plutôt faible lorsqu'il est associé au modèle 2S. Comme attendu encore et contrairement au modèle 1S, les oscillations des fibrilles telles que décrites par le modèle 2S ont une influence significative sur l'évolution du module de cisaillement $\tilde{G}_{13} = \tilde{C}_{55}$ et du coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{13}$. Finalement, il est également observé pour le modèle 2S, mais pas pour le modèle 1S, un effet significatif des oscillations des fibres sur les coefficients effectifs $\tilde{G}_{23} = \tilde{C}_{44}$ et $\tilde{\nu}_{23}$.

Afin d'évaluer quantitativement ces observations, la Figure 3-16 fournit pour les 4 composantes effectives les plus influencées par l'ondulation des macrofibrilles, à savoir \tilde{C}_{12} , \tilde{C}_{13} , \tilde{C}_{55} et \tilde{C}_{66} , les évolutions des écarts relatifs $\acute{e}cart_1$ entre 0S et 1S et $\acute{e}cart_2$ entre 0S et 2S, définis par les expressions :

$$\acute{e}cart_1 = \left(\frac{\tilde{x}^{1S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}} \right); \quad \acute{e}cart_2 = \left(\frac{\tilde{x}^{2S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}} \right)$$

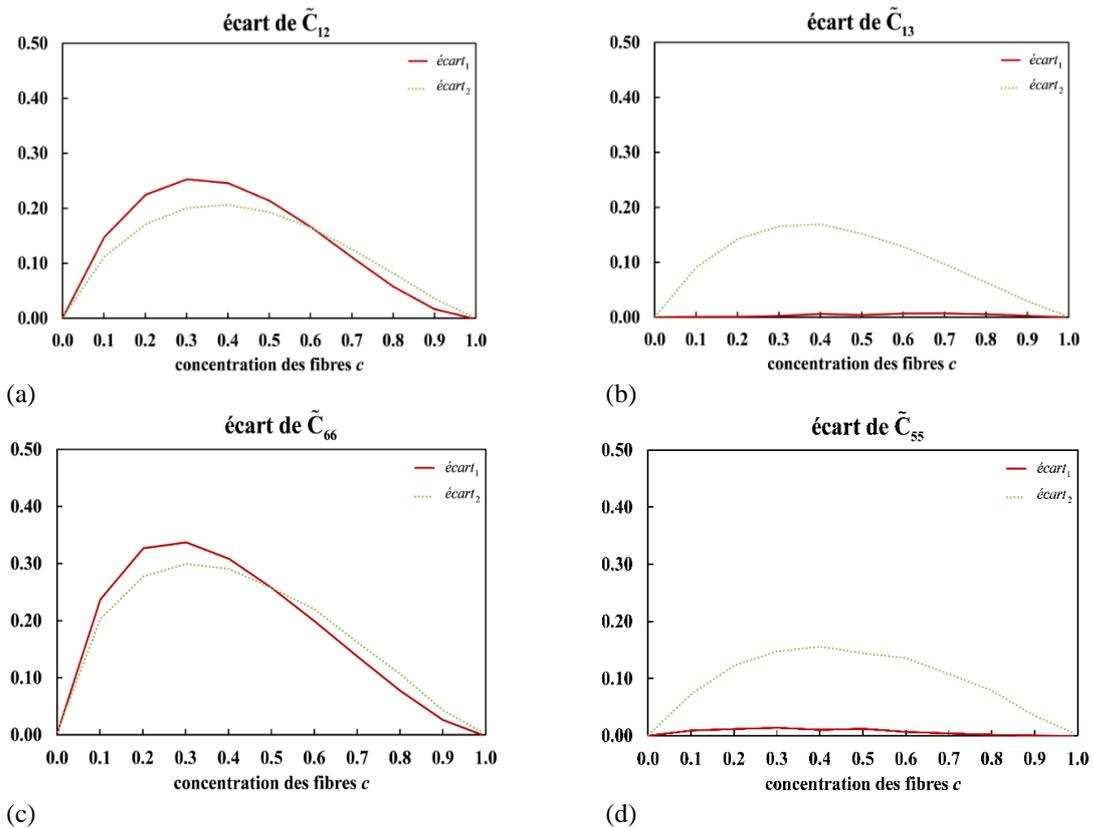


Figure 3-16 : Evaluation des écarts relatifs pour les 4 composantes effectives \tilde{C}_{12} , \tilde{C}_{13} , \tilde{C}_{55} et \tilde{C}_{66} en fonction de la concentration volumique de la fibre ($r_\lambda = 1.0$, $r_\phi = 7.50$).

On observe sur cette figure que la différence entre $\acute{e}cart_1$ et $\acute{e}cart_2$ appliqués aux composantes \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} (\tilde{G}_{12}) est faible avec un maximum de l'ordre de 4.5% pour la fraction volumique $c = 0.3$. Ceci montre que pour ces deux composantes le modèle 1S équivaut au modèle 2S.

b) Variations des paramètres matériaux (modules d'Young relatifs)

Cette partie se focalise sur l'effet de la variation du contraste élastique E_L^F/E^M entre les 2 phases de la cellule élémentaire sur le comportement effectif de la paroi S2. On notera que E_L^F correspond au module d'Young longitudinal des fibres et E^M au module d'Young de la matrice. Similairement à la partie 2.3.3 du chapitre 2, nous faisons varier le contraste E_L^F/E^M de 1 à 10^3 , tout en maintenant les autres paramètres matériaux (coefficients de Poisson notamment) à leurs valeurs de référence.

En nous basant sur les observations précédentes concernant l'influence des ondulations des fibrilles, nous reportons uniquement dans cette partie les évolutions des constantes ingénieurs effectives sensibles

aux ondulations des fibres des fibres pour les 2 microstructures 0S et 2S, autrement-dit les 6 coefficients effectifs \tilde{G}_{12} , \tilde{G}_{13} , \tilde{G}_{23} et $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{13}$, $\tilde{\nu}_{23}$ (les évolutions des 3 modules d'Young \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{E}_3 , insensibles aux ondulations des fibrilles, sont présentées dans Figure B-4 de l'Annexe B). La Figure 3-17 fournit les évolutions de ces coefficients en fonction du contraste pour 4 valeurs du facteur de forme r_ϕ dans le cas du modèle 2S et pour une seule valeur de r_ϕ dans le cas du modèle 0S. On notera que le ratio E_L^F/E^M correspondant aux valeurs de référence des phases définies au chapitre 2 satisfait $\log_{10}(E_L^F/E^M) = 1.84$. Les comparaisons sont effectuées pour la valeur de concentration des fibrilles $c = 0.5$ et pour $r_\lambda = 1.0$ (le modèle 0S).

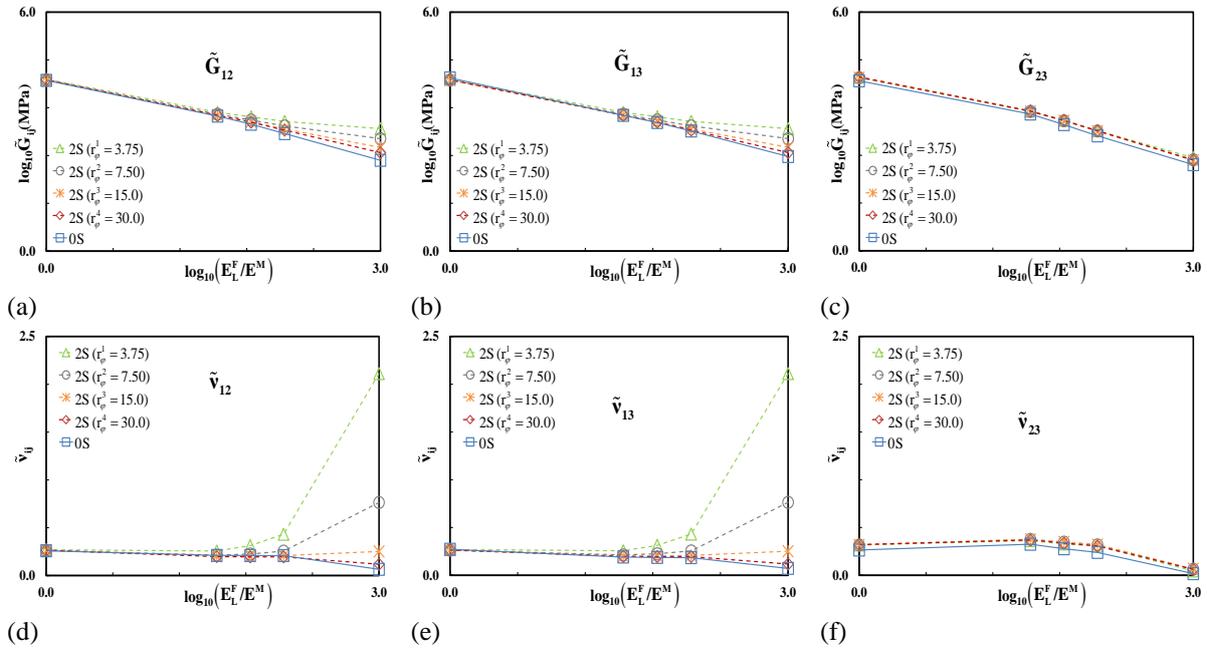
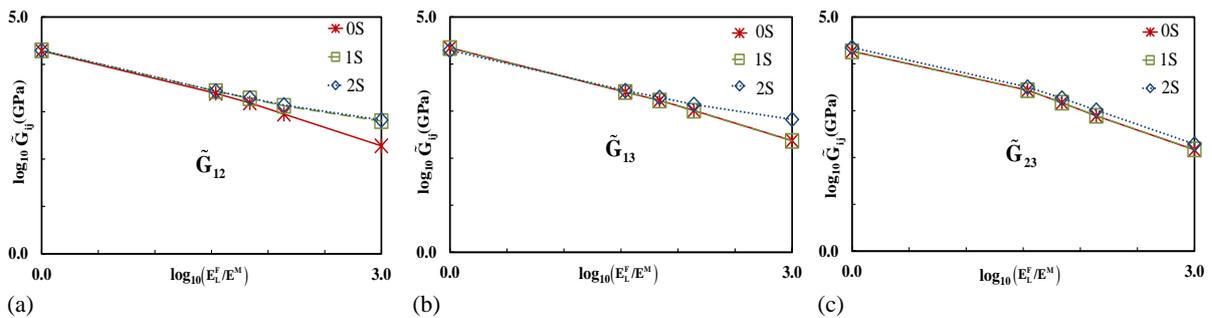


Figure 3-17 : Evolution des composantes ingénieries effectives en fonction du contraste E_L^F/E^M pour les 2 modèles 0S et 2S ($r_\lambda = 1.0$; $c = 0.5$).

Sur la Figure 3-17, pour un fort contraste de $E_L^F/E^M = 10^3$, autrement-dit lorsque la matrice est extrêmement souple ($E^M = 10^{-3}E_L^F$), on observe un effet exacerbé de la double ondulation des fibrilles, non seulement sur les 2 coefficients \tilde{G}_{12} , $\tilde{\nu}_{12}$ comme cela a déjà été observé dans l'étude paramétrique du modèle 1S, mais également sur les 2 autres coefficients \tilde{G}_{13} , $\tilde{\nu}_{13}$. Par ailleurs, on observe que les valeurs des 2 coefficients \tilde{G}_{23} , $\tilde{\nu}_{23}$ sont légèrement plus élevées pour 2S que pour 0S mais qu'elles sont indépendantes de r_ϕ . Le fait que \tilde{G}_{23} , $\tilde{\nu}_{23}$ ne dépendent pas de r_ϕ signifie que ces composantes ne dépendent pas de la longueur d'onde des ondulations pour le modèle 2S. En revanche, le fait que le modèle 2S fournit des résultats légèrement différents de 0S pour ces 2 coefficients indique que la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre des fibrilles a une petite influence sur ces 2 composantes.



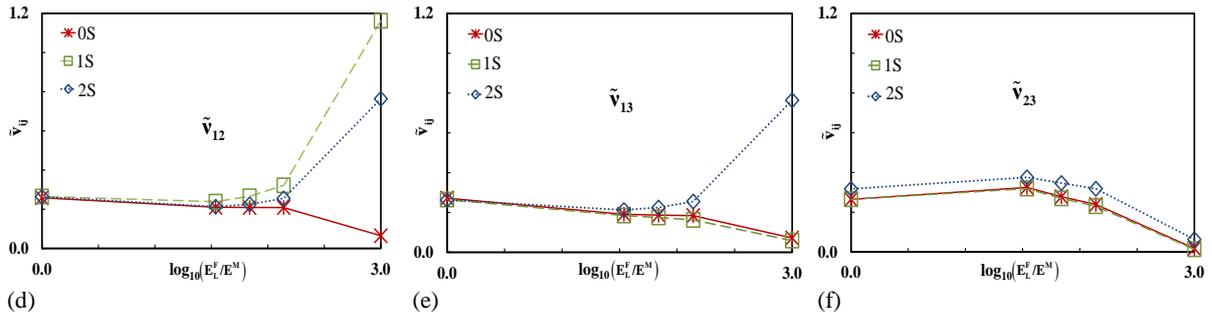


Figure 3-18 : Evolution des constantes ingénieurs en fonction du contraste pour les 3 modèles de microstructure ($r_\phi = 7.50$, $r_\lambda = 1.0$, $c = 0.5$).

La Figure 3-18 montre l'évolution des mêmes 6 coefficients effectifs ingénieurs en fonction du contraste pour les 3 modèles 0S, 1S et 2S, associés à leurs valeurs de référence $r_\phi = 7.50$, $c = 0.5$ et $r_\lambda = 1.0$ (pour 0S et 1S). Tout d'abord, on observe que pour un contraste limité, c'est-à-dire $\log_{10}(E_L^F/E^M) \leq 1.50$, les oscillations des fibrilles n'ont quasiment aucune influence sur le comportement effectif. Cependant, pour un contraste important, c'est-à-dire $\log_{10}(E_L^F/E^M) \geq 1.50$, les oscillations des fibrilles associées à la microstructure 2S ont un effet significatif sur les coefficients effectifs \tilde{G}_{12} , \tilde{G}_{13} et $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{13}$. Encore une fois, les évolutions du module de cisaillement \tilde{G}_{12} sont assez similaires pour les deux microstructures 2S et 1S alors que \tilde{G}_{13} et $\tilde{\nu}_{13}$, ne sont influencés par les oscillations des fibrilles que lorsqu'ils sont associés au modèle 2S. Enfin, comme observé sur la Figure 3-18d, l'influence des oscillations des fibrilles sur le coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu}_{12}$ sont plus fortes pour le modèle 1S que pour le modèle 2S. La Figure 3-19 montre les écarts relatifs écart_1 et écart_2 définis au paragraphe 3.3.3a) en fonction du contraste E_L^F/E^M pour les 4 composantes effectives les plus influencées par les ondulations des fibrilles.

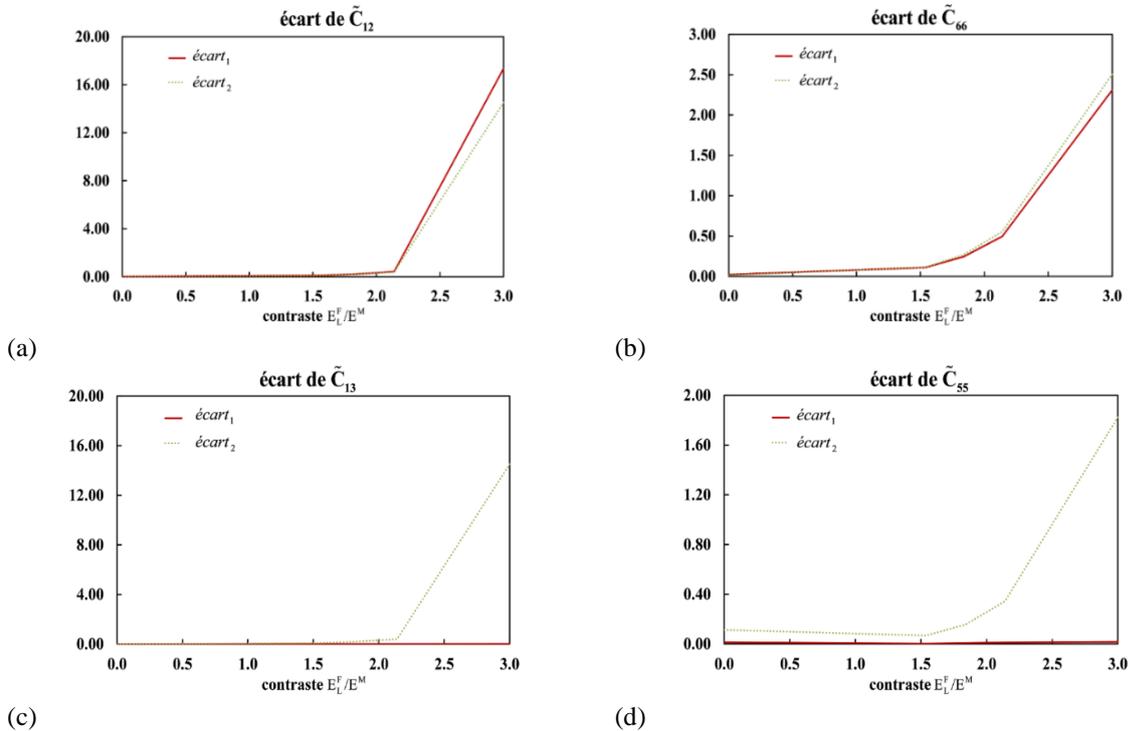


Figure 3-19 : Evaluation des écarts relatifs pour les 4 composantes effectives \tilde{C}_{12} , \tilde{C}_{13} , \tilde{C}_{55} et \tilde{C}_{66} en fonction du contraste E_L^F/E^M ($r_\lambda = 1.0$, $r_\phi = 7.5$, $c = 0.5$).

A nouveau, le modèle 2S fournit des résultats proches du modèle 1S pour \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} , tandis que seul le modèle 2S agit significativement sur \tilde{C}_{13} et \tilde{C}_{55} .

c) Conclusion

Au cours de ces études paramétriques, nous avons constaté que les modèles 1S et 2S décrivent de manière quasiment équivalente les coefficients les plus influencés, \tilde{C}_{12} et \tilde{C}_{66} par l'effet de l'ondulation dans le plan (1, 2). En revanche, seul le modèle 2S indique une influence significative des d'ondulations dans le plan (1, 3) sur les coefficients \tilde{C}_{13} et \tilde{C}_{55} .

Par ailleurs, le modèle 2S renforce légèrement les composantes effectives \tilde{C}_{23} et \tilde{C}_{44} par rapport aux 2 modèles 0S et 1S. Toutefois, ces 2 composantes ne sont pas influencées par la variation des paramètres géométriques et matériaux, indiquant ainsi que seule la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles est responsable de cet effet.

Enfin, l'influence de l'ondulation des fibrilles dans les plans (1, 2) et (1, 3) sur les rigidités effectives \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 et \tilde{E}_3 est très faible.

Chapitre 4 : Extension à l'hygro-mécanique

4.1 Objectif du chapitre

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement hygro-élastique effectif de la cellule élémentaire périodique en utilisant la même procédure d'homogénéisation numérique associée aux 2 microstructures précédemment définies (modèle 1S et 2S) mais étendue au cas d'un comportement hygro-élastique linéaire. Cette procédure se trouve dans la bibliothèque Cast3M sur des calculs EF associés au modèle de thermo-élasticité linéaire dans l'Annexe D. Dans ce cas, l'hygro-élasticité est un analogue de la thermo-élasticité où l'humidité ambiante joue le rôle de la température. Ce modèle permet de prendre en compte les déformations induites en l'absence de chargement mécanique par une augmentation (respectivement une diminution) de la teneur en eau qui entraîne un gonflement (respectivement un retrait) du bois.

Dans un premier temps, nous présentons la procédure d'homogénéisation numérique permettant d'obtenir le comportement hygro-mécanique de la paroi cellulaire S2. Pour la valider, nous la comparons à la solution analytique dans le cas limite où $r_\lambda \rightarrow +\infty$ d'un laminé à 2 phases hygro-mécaniques développée en Annexe C. Enfin, nous analysons l'influence des ondulations des macrofibrilles sur les propriétés hygro-élastiques effectives en réalisant une étude paramétrique pour laquelle on fera similairement aux chapitres 2 et 3 varier différents paramètres géométriques et matériaux.

4.2 Problème local à résoudre et calcul numérique du comportement effectif

En vue de déterminer les propriétés hygro-élastiques effectives des 3 microstructures précédemment définies, nous allons reprendre une approche en déformations imposées et appliquer à nouveau à la cellule élémentaire des conditions aux limites périodiques (CLP) (Bornert et al., 2001) du type $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\bar{\varepsilon}} \cdot \underline{x} + \underline{u}'(\underline{x})$ où $\underline{u}'(\underline{x})$ est périodique. Dans ce cas de la figure, le problème local (2.2.2) du chapitre 2 se réécrit pour un comportement hygro-élastique sous la forme.

$$\left. \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro}(\underline{x})) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{u}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x})^T}{\partial \underline{x}} \right) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \underline{\bar{\varepsilon}} \cdot \underline{x} + \underline{u}'(\underline{x}), \text{ avec la périodicité de } u', \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \right\} \forall \underline{x} \in \Omega \quad (4.2.1)$$

où Ω représente le domaine de la cellule élémentaire et $\partial\Omega$ sa frontière. Le tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{C}}(\underline{x})$ s'écrit $\underline{\underline{C}}(\underline{x}) = \sum_{r=M,F} \underline{\underline{C}}^r \chi^r(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}^M \chi^M(\underline{x}) + \underline{\underline{C}}^F \chi^F(\underline{x})$ où $\chi^r(\underline{x})$ représente la fonction caractéristique des phases et où les tenseurs $\underline{\underline{C}}^r$ correspondent aux tenseurs des modules élastiques de la phase r , les indices M, F représentant respectivement la matrice et les fibres. La déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro}$ correspond au tenseur des déformations hydriques induit par le retrait ou le gonflement des deux constituants de la paroi cellulaire.

La déformation totale dans cette étude peut être décomposée en parties élastique et hydrique comme suit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\underline{x}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro}(\underline{x}) \quad (4.2.2)$$

avec

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro}(x) = \underline{\underline{\alpha}}(x)\Delta w \quad (4.2. 3)$$

où $\underline{\underline{\alpha}}$ est le tenseur des coefficients d'hygro-expansions et Δw la variation de teneur en eau.

L'homogénéisation linéaire montre que la loi de comportement macroscopique s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{C}}}: \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^e = \underline{\underline{\tilde{C}}}: \left(\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{hygro} \right) = \underline{\underline{\tilde{C}}}: \left(\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\tilde{\alpha}}}\Delta w \right) = \underline{\underline{\tilde{C}}}: \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\tilde{\beta}}} \quad (4.2. 4)$$

où $\underline{\underline{\tilde{\beta}}} = -\underline{\underline{\tilde{C}}}: \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^{hygro}$ est le tenseur des contraintes initiales associé au champ de déformations $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^{hygro}$, pour lequel on applique un chargement pour bloquer le gonflement hydrique.

En ce qui concerne le comportement élastique effectif $\underline{\underline{\tilde{C}}}$, il a été déterminé numériquement par la méthodologie développée dans le chapitre 2. Maintenant que nous avons défini le problème local ci-dessus, nous allons chercher à le résoudre numériquement afin d'obtenir le tenseur des coefficients d'hygro-expansion effectifs $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}$. Pour cela, nous allons procéder à des calculs numériques en EF sous Cast3M dans le cadre de la **thermo-élasticité linéaire** (voir l'Annexe D).

Les coefficients d'hygro-expansion macroscopique peuvent être calculés en imposant un chargement auxiliaire $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} = 0$ et en appliquant un incrément du teneur en eau $\Delta w = 1$. Cela permet d'évaluer le tenseur des contraintes initiales macroscopiques $\underline{\underline{\tilde{\beta}}}$ à partir de l'équation (4.2. 4), ce dernier correspondant pour $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} = 0$ à la moyenne des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ obtenue par le calcul EF. Les coefficients d'hygro-expansion effectifs $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}$ sont alors facilement obtenus par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = -\underline{\underline{\tilde{C}}}^{-1}: \underline{\underline{\tilde{\beta}}} \quad (4.2. 5)$$

L'application des CL périodiques est en tout point similaire au calcul élastique réalisé au chapitre 2. Les calculs EF sont menés pour les 3 microstructures (0S, 1S et 2S) présentées et maillées au chapitre 2 et 3. Pour les propriétés mécaniques élastiques des phases, nous continuons à considérer que le comportement des fibrilles est linéaire élastique isotrope transverse décrit par l'équation (2.2. 8) et que le comportement de la matrice est linéaire élastique isotrope décrit par l'équation (2.2. 9).

Pour ce qui concerne les tenseurs d'hygro-expansion locaux $\underline{\underline{\alpha}}^M$ et $\underline{\underline{\alpha}}^F$, on les supposera respectivement isotrope pour la matrice et isotrope transverse pour les fibrilles de sorte que :

$$\underline{\underline{\alpha}}^M = \begin{pmatrix} \alpha^M & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^M & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^M \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\alpha}}^F = \begin{pmatrix} \alpha_L^F & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{TT}^F & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{TT}^F \end{pmatrix} \quad (4.2. 6)$$

4.3 Validation de la solution numérique

Comme on l'a déjà fait au chapitre 2 pour valider les calculs EF des rigidités élastiques macroscopique, nous allons comparer les résultats des coefficients d'hygro-expansion effectifs associés à la microstructure du modèle 1S pour une valeur de $r_\lambda = +\infty$ à ceux issus de la solution exacte d'un laminé thermoélastique orthotrope à 2 couches développée en Annexe C, ceci afin de valider la solution

numérique. La partie élastique linéaire ayant déjà été validée au chapitre 2, nous allons nous focaliser uniquement sur les coefficients d'hygro-expansion effectifs. Dans le cas où, d'une part, la matrice est hygro-élastique isotrope linéaire avec un tenseur d'hygro-expansion isotrope défini par l'équation (4.2. 6), et d'autre part, les fibrilles sont linéaires thermoélastiques isotropes transverses associés à un tenseur d'hygro-expansion isotrope transverse défini par l'équation (4.2. 6), la solution analytique du laminé bicouche orthotrope se particularise en les équations suivantes :

$$\tilde{\beta}_1 = f \left[\beta_1^F + \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) \right] + m \left[\beta_1^M + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right] \quad (a)$$

$$\tilde{\beta}_2 = f \left[\beta_2^F + \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) \right] + m \left[\beta_2^M + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right] \quad (b) \quad (4.2. 7)$$

$$\tilde{\beta}_3 = \left(f \frac{\beta_3^F}{C_{33}^F} + m \frac{\beta_3^M}{\lambda + 2\mu} \right) \tilde{C}_{33} \quad (c)$$

$$\tilde{\beta}_4 = \tilde{\beta}_5 = \tilde{\beta}_6 = 0 \quad (d)$$

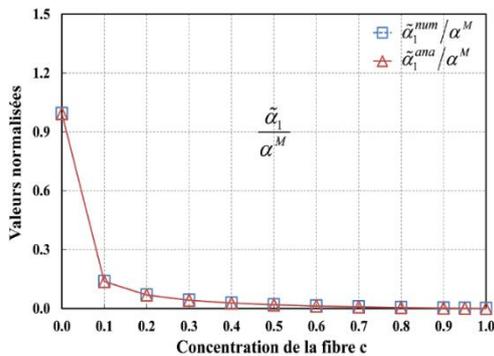
Afin de comparer les résultats analytiques à la solution numérique, nous allons reprendre le maillage de 21216 éléments du modèle 1S utilisé au chapitre 2 qui permet d'avoir une précision inférieure à 1% concernant les rigidités élastiques effectives \tilde{C}_{ij} .

Pour la partie hydrique du comportement, nous allons considérer 3 cas différents du gonflement des constituants de la paroi élémentaire :

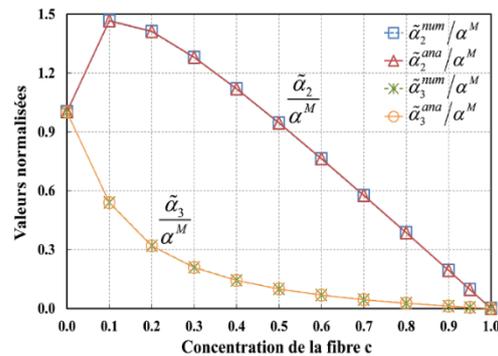
- Dans un premier temps, nous considérons que seule la matrice intervienne dans le processus d'absorption de l'eau au sein de la paroi cellulaire ($\alpha^M \neq 0$; $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$) et nous présentons l'effet du gonflement de la matrice sur les coefficients d'hygro-expansion effectifs ;
- Dans un deuxième temps, nous étudions uniquement l'effet de l'expansion de la fibre ($\alpha^M = 0$) sur les propriétés hydriques de la paroi cellulaire. Pour cela, nous considérons séparément les deux types de gonflement associés à la fibre : d'une part le gonflement dans la direction longitudinale ($\alpha_L^F \neq 0, \alpha_{TT}^F = 0$), et d'autre part le gonflement dans le plan transversal ($\alpha_L^F = 0, \alpha_{TT}^F \neq 0$). Dans cette situation, la fibrille de cellulose cristalline est supposée être faiblement dépendante vis-à-vis de l'humidité relative ambiante de sorte que nous considérerons des valeurs très faibles des coefficients d'hygro-expansion locaux α_L^F et α_{TT}^F .

Par ailleurs, pour ce qui concerne les paramètres matériaux utilisés, nous allons reprendre les valeurs de référence données dans le Tableau 2-2 du chapitre 2.

1^e cas: Gonflement de la matrice ($\alpha^M \neq 0$; $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$)

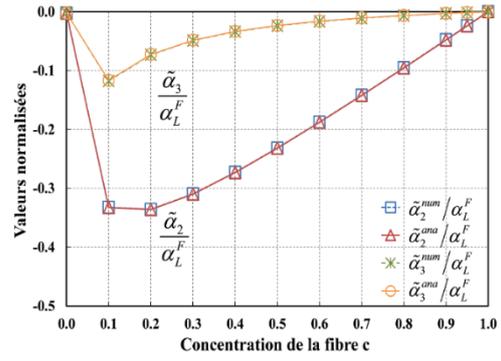
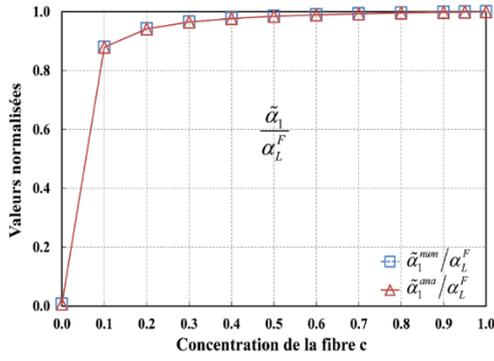


(a)



(b)

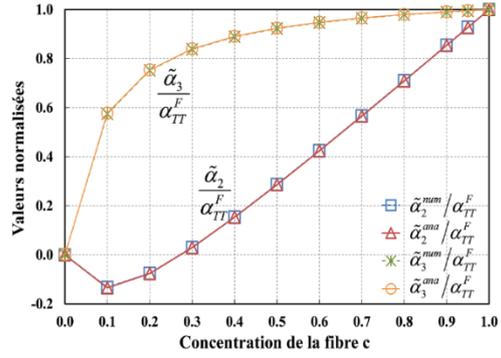
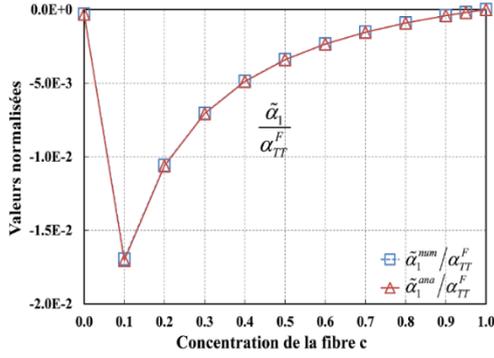
2^e cas : Gonflement de la fibre dans le sens longitudinal ($\alpha_L^F \neq 0$; $\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0$)



(c)

(d)

3^e cas : Gonflement de la fibre dans le plan transversal ($\alpha_{TT}^F \neq 0$; $\alpha^M = \alpha_L^F = 0$)



(e)

(f)

Figure 4-1: Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de la concentration.

Comparaison entre les solutions numériques et analytiques.

La Figure 4-1 illustre l'ensemble des résultats obtenus pour 2 approches numériques et analytiques et fournit l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de la concentration volumique de la fibre c pour le ratio $r_\lambda = +\infty$ associée au modèle numérique pour lequel la microstructure 1S tend vers le laminé bicouche. Pour plus de précision, nous avons également reporté l'écart relatif $\left(\frac{\tilde{\alpha}_i^{ana} - \tilde{\alpha}_i^{num}}{\tilde{\alpha}_i^{ana}}\right)$ associé à chaque coefficient d'hygro-expansion effectif dans le Tableau 4-1.

Tableau 4-1 : Evolution des écarts relatifs des 3 coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de c .

c	Cas 1 ($\alpha^M \neq 0$; $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$)			Cas 2 ($\alpha_L^F \neq 0$; $\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0$)			Cas 3 ($\alpha_{TT}^F \neq 0$; $\alpha^M = \alpha_L^F = 0$)		
	$\Delta\tilde{\alpha}_1/\tilde{\alpha}_1^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_2/\tilde{\alpha}_2^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_3/\tilde{\alpha}_3^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_1/\tilde{\alpha}_1^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_2/\tilde{\alpha}_2^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_3/\tilde{\alpha}_3^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_1/\tilde{\alpha}_1^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_2/\tilde{\alpha}_2^{ana}$ (%)	$\Delta\tilde{\alpha}_3/\tilde{\alpha}_3^{ana}$ (%)
1e-4	0.00	0.01	0.00	0.040	0.004	0.005	0.64	0.44	3.16
0.1	0.09	0.11	0.35	0.003	0.238	0.680	0.54	0.45	0.96
0.2	0.05	0.07	0.45	0.001	0.142	0.656	0.26	0.20	1.00
0.3	0.05	0.08	0.45	0.001	0.144	0.920	0.23	0.16	2.35
0.4	0.05	0.09	0.51	0.000	0.149	1.216	0.20	0.14	0.50
0.5	0.04	0.11	0.78	0.000	0.159	1.582	0.18	0.12	0.26
0.6	0.04	0.14	1.41	0.000	0.196	2.294	0.18	0.12	0.19
0.7	0.04	0.19	1.76	0.000	0.242	3.261	0.16	0.11	0.15
0.8	0.02	0.18	1.87	0.000	0.205	3.132	0.09	0.06	0.07
0.9	0.04	0.15	2.17	0.000	0.225	3.832	0.15	0.10	0.11
0.99	0.07	0.64	3.48	0.000	0.211	3.779	0.14	0.10	0.11

A partir de ce tableau, on observe que le modèle numérique fournit des résultats très proches de la solution exacte. On peut donc considérer que le modèle numérique d'homogénéisation hygro-mécanique est correctement validé sur ce cas d'étude.

4.4 Application

Afin d'étudier l'influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés hygro-élastiques de la paroi S2, nous allons comparer les coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_i$ ($i = 1$ à 3) obtenus par homogénéisation numérique appliquée aux microstructures 1S et 2S à ceux obtenus pour la microstructure 0S que l'on considèrera comme solution de référence. A cette intention, une étude paramétrique pour les 2 modèles de microstructure en faisant varier différents paramètres géométriques déterminant la géométrie de la cellule.

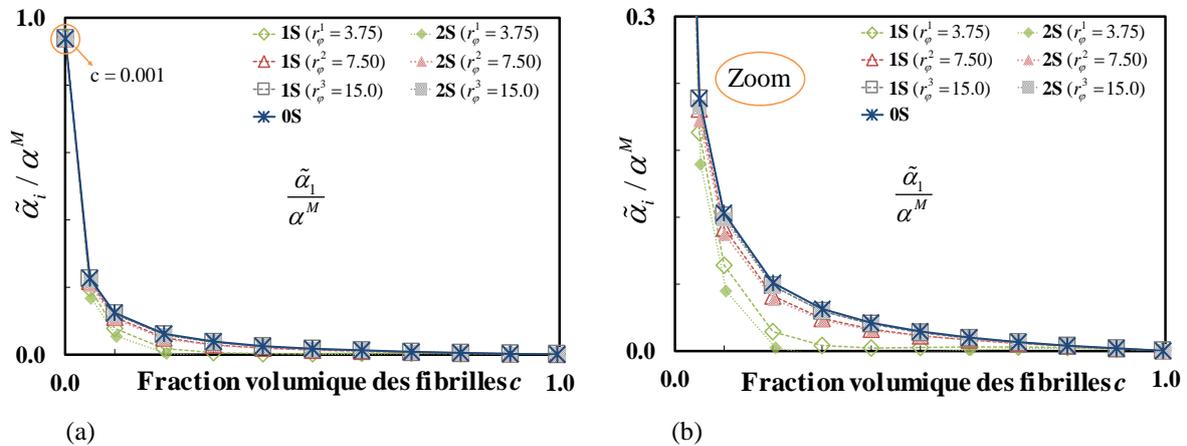
Dans l'idée de mieux comprendre l'influence des mécanismes de déformations hygro-mécanique de chaque constituant sur les propriétés hydriques de la paroi, profitant de la linéarité du problème d'homogénéisation vis-à-vis des coefficients d'hygro-expansion locaux, nous avons étudié les effets induits par les ondulations des fibres sur les propriétés hydriques effectives pour les 3 types d'expansion définis dans la partie précédente. Par ailleurs, le problème local (4.2. 1) étant linéaire, nous analysons successivement l'influence des oscillations des fibrilles induites par chaque α^M , α_L^F , α_{TT}^F , donnée une valeur arbitraire, sur les propriétés hydriques effectives de la paroi cellulaire.

Au cours de cette étude paramétrique, nous allons faire varier le rapport de forme r_ϕ de la paroi et la concentration volumique c des fibrilles. Pour ce qui concerne le ratio r_λ , la valeur $r_\lambda = 1.0$ a été utilisée pour les modèle 0S et 1S afin de permettre une comparaison pertinente avec le modèle 2S (chapitre 3). Par ailleurs, tous les calculs numériques de cette partie ont été effectués en utilisant la méthodologie présentée dans la section 2 de ce chapitre. A nouveau, les calculs éléments finis ont été réalisés à l'aide du logiciel Cast3M.

4.4.1 Effet du gonflement de la matrice

a) Variation en fonction de la concentration c pour différents r_ϕ ($r_\lambda = 1.0$)

Dans cette partie, nous ne considérons que les effets induits par le gonflement de la matrice ($\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$) pour une valeur fixée non-nulle de α^M . Pour les 3 microstructures étudiées, nous avons reportées sur la Figure 4-2, l'évolution des 3 coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisé $\tilde{\alpha}_i / \alpha^M$ en fonction de la concentration c des fibrilles. Cette comparaison est effectuée en prenant en compte, d'une part, 3 valeurs différentes du facteur de forme $r_\phi = L_1/L_2$ pour des calculs associés aux modèles 1S et 2S, et d'autre part, une seule valeur de r_ϕ , celle correspondant à la valeur de référence $r_\phi = 7.50$ pour ceux associés au modèle 0S.



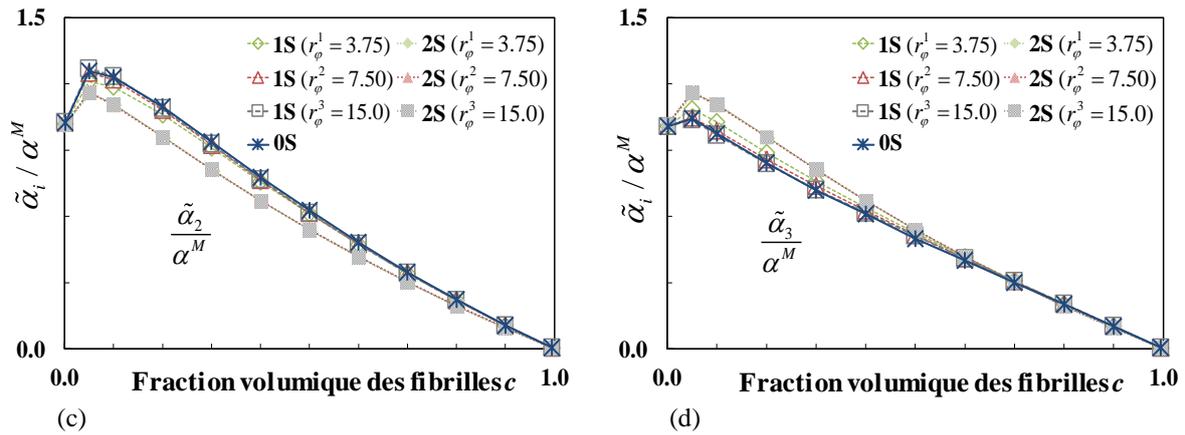


Figure 4-2 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de la concentration c pour les 3 microstructures ($\alpha^M \neq 0$, $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$)

En se référant aux résultats obtenus sur la Figure 4-2, on constate que le coefficient d'hygro-expansion suivant l'axe longitudinal $\tilde{\alpha}_1$ est plus faible que les coefficients d'expansion $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ du plan transverse. Ceci est dû à l'effet restrictif des fibrilles dans la direction longitudinale. On observe de plus que chaque valeur $\tilde{\alpha}_i/\alpha^M$ associé aux modèles 1S converge quand r_ϕ devient grand (ondulation de plus en plus faible) à celle du modèle 0S. Cette remarque n'est valable que pour le coefficient $\tilde{\alpha}_1$ quand on considère le modèle 2S. Ainsi, on constate que pour $r_\phi \geq 7.50$, les valeurs $\tilde{\alpha}_1/\alpha^M$ associées aux modèles 0S, 1S et 2S sont très proches les unes des autres, montrant ainsi qu'elles ne sont pas influencées par les ondulations des fibrilles. Cette conclusion est également valable pour les coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés au modèle 1S.

De plus, dans le cas du modèle 2S, on constate que les valeurs de $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ ne dépendent pas de r_ϕ . Il n'y a donc aucune influence des deux premiers effets induits par les ondulations des fibrilles, qui sont l'orientation des fibrilles et le contact entre des fibrilles. En revanche, les valeurs des coefficients d'expansion $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés au modèle 2S étant significativement différentes de celles associées au modèle 0S, il y a donc une influence de la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre des fibrilles sur les coefficients d'expansion transverses effectifs.

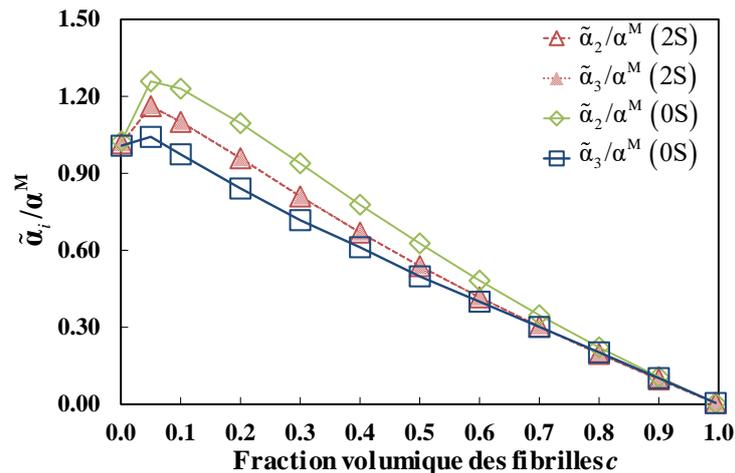


Figure 4-3 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ en fonction de la concentration c de la fibre pour les deux modèles 0S et 2S ($\alpha^M \neq 0$, $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$)

Afin de comparer précisément les coefficients d'expansion transverse $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés aux modèles 0S et 2S, nous les avons reportés sur la Figure 4-3. Comme le modèle 2S ne dépend quasiment pas de la valeur r_ϕ , nous l'avons reporté pour une seule valeur de r_ϕ prise égale à sa valeur de référence $r_\phi = 7.50$.

Pour le modèle 0S, on observe une orthotropie significative dans le plan transverse $\tilde{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_3$. En revanche, on constate une isotropie dans le plan transverse $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3$ pour le tenseur d'hygro-expansion $\underline{\tilde{\alpha}}$ associé au modèle 2S. En ce qui concerne l'orthotropie dans le plan transverse pour le modèle 0S, ceci est induite par 2 phénomènes différents

- d'une part, par la distribution spatiale des phases qui est différente selon les 2 directions transverses 2 et 3. En effet, la phase matrice se divise en deux zones, celle occupée par la matrice lamellaire et celle occupée par la matrice lenticulaire. La distribution spatiale des phases est décrite par les paramètres f_2, f_3 et $m_2 = 1 - f_2, m_3 = 1 - f_3$ qui représentent respectivement la proportion linéique de fibrille et de matrice dans les directions 2 et 3, comme cela a été définie dans le chapitre 2. Au vue de l'évolution de ces paramètres en fonction de la concentration c pour la valeur de référence $r_\lambda = 1.0$, on peut constater sur la Figure 4-4 que la proportion linéique de matrice dans la direction 2 associée à la microstructure 0S est plus importante que celle observée dans la direction 3 pour le modèle 0S dans ce cas d'étude. Cela implique que l'expansion dans la direction 2 de la matrice pour le modèle 0S est plus importante que son expansion dans la direction 3.

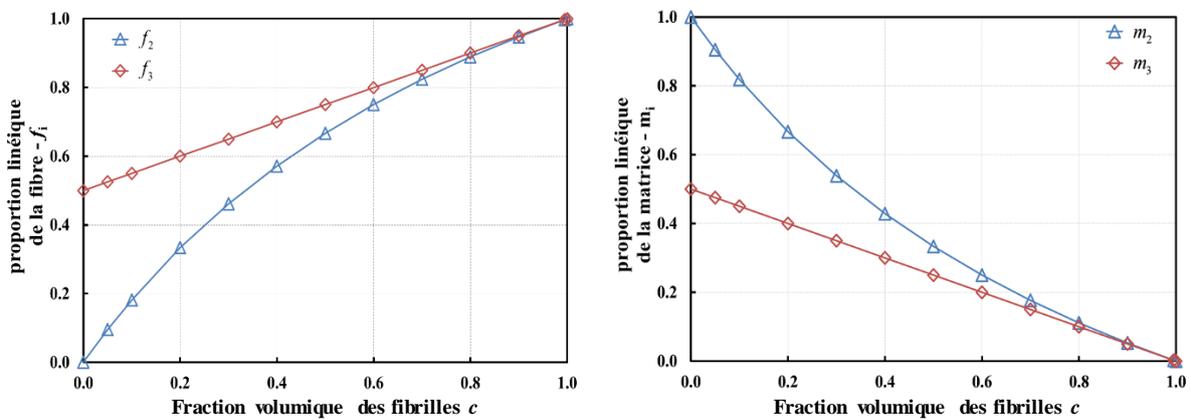


Figure 4-4 : Evolution de la proportion linéique f_i, m_i en fonction de la concentration volumique c pour $r_\lambda = 1.0$ associée au modèle 0S

- et d'autre part, par un effet de Poisson induit par le coefficient de Poisson de la matrice ν^M que nous présenterons dans la partie suivante.

En ce qui concerne l'isotropie transverse du tenseur d'hygro-expansion effectif ($\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3$) associé au modèle 2S, celle-ci est issue d'une distribution spatiale isotrope transverse des phases pour le modèle 2S (contrairement au modèle 0S) et également par le comportement effectif élastique linéaire orthotrope du modèle 2S qui est avec équivalence des directions 2 et 3.

b) Effet du coefficient de Poisson ν^M

Comme observé sur la Figure 4-3, les valeurs des coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ sont supérieures pour certaines concentrations à la valeur α^M correspondante à la phase matrice seule ($c = 0$). Ce dépassement de la valeur du coefficient d'hygro-expansion de la matrice α^M dans le cas où le tenseur d'hygro-expansion des fibrilles est nul. Nous allons voir que ce dernier est dû au coefficient de Poisson de la matrice ν^M . Pour cela, nous avons reporté sur la Figure 4-5 l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de la concentration c pour plusieurs valeurs de ν^M dans le cas du modèle 0S. Pour le calcul de ces coefficients, nous avons utilisé les valeurs de référence des paramètres géométriques et matériaux des deux constituants définis aux chapitres précédents. De plus, les valeurs supposées $\alpha^M \neq 0$ et $\alpha_{TT}^F = \alpha_{TT}^F = 0$ sont prises en compte pour tous les calculs de cette analyse.

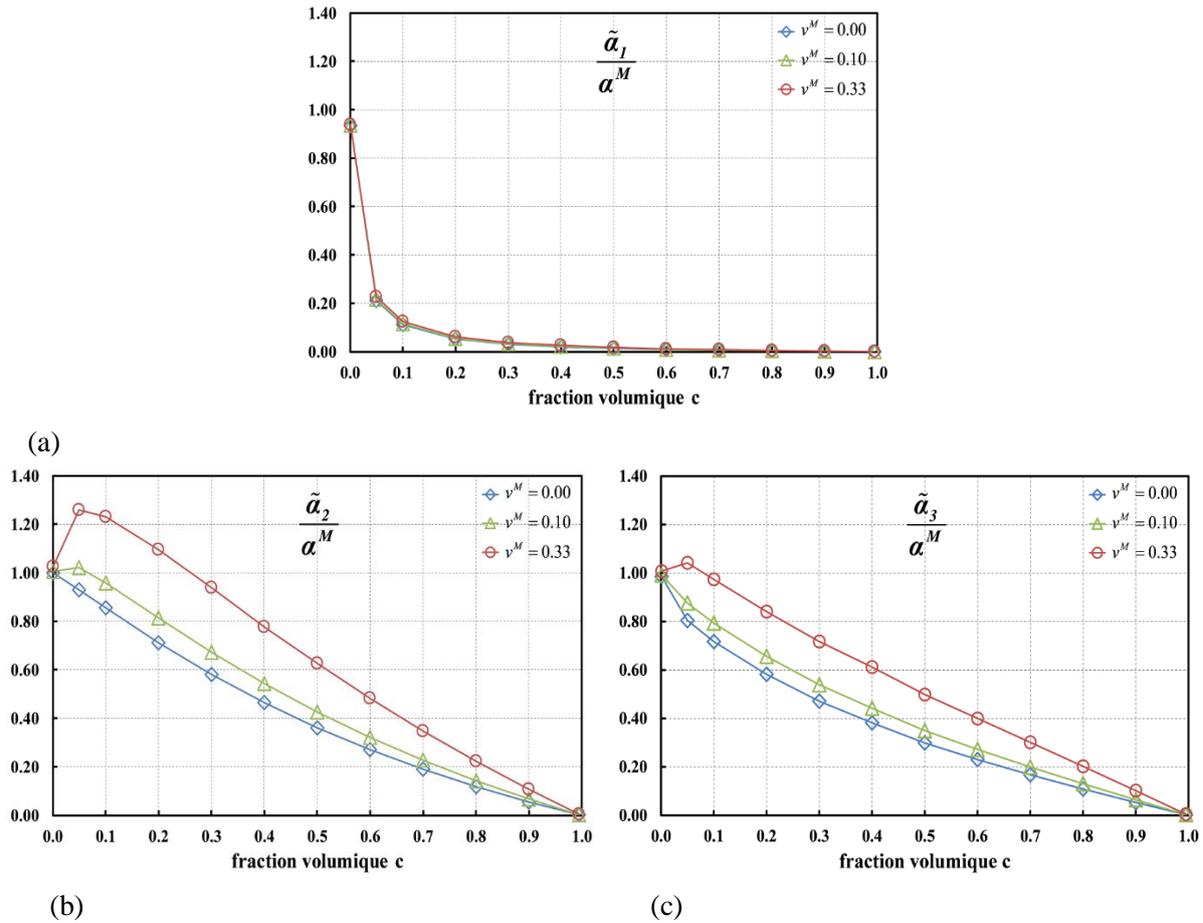


Figure 4-5 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs associés au modèle OS en fonction de la concentration c pour plusieurs valeurs de ν^M ($\alpha^M \neq 0$, $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$)

L'ensemble de ces comparaisons montre que la valeur du coefficient de Poisson ν^M influence significativement l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs transverses $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$. En revanche, cet effet est presque nul pour ce qui concerne le coefficient d'hygro-expansion effectif $\tilde{\alpha}_1$ des fibrilles. De plus, on constate à nouveau que le tenseur d'hygro-expansion effectif $\underline{\tilde{\alpha}}$ est anisotrope dans le plan transverse ($\tilde{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_3$) même dans les situations où le coefficient de Poisson de la matrice est très faible ($\nu^M = 0$). On observe en effet que l'expansion dans la direction 2 est plus importante que celle dans la direction 3. Ceci conforte les résultats obtenus précédemment, à savoir que la distribution géométrique de la matrice à l'échelle subpariétale est un facteur important dans l'évaluation des coefficients d'hygro-expansion de la paroi S2.

4.4.2 Effet du gonflement de la fibre

Dans cette partie, nous évaluons cette fois-ci l'influence du gonflement de la fibre sur les propriétés hygro-élastiques effectives de la paroi cellulaire en distinguant 2 cas. Dans le 1^{er} cas, seul le coefficient d'hygro-expansion longitudinale de la fibre pris en compte $\alpha_L^F \neq 0$ et $\alpha_{TT}^F = 0$. Dans le 2^e cas, on tient compte uniquement du coefficient d'hygro-expansion transverse de la fibre $\alpha_{TT}^F \neq 0$ et $\alpha_L^F = 0$.

Similairement à la partie précédente, nous comparons les coefficients d'hygro-expansion effectifs associés aux 3 microstructures OS, 1S et 2S. En ce qui concerne les résultats issus des modèles 1S et 2S, ces derniers sont obtenus pour 3 valeurs différentes de r_ϕ . Les autres paramètres géométriques et matériaux sont définis par les valeurs de référence reportées auparavant dans les chapitres 2 et 3.

a) $\alpha_L^F \neq 0$

Nous avons reporté sur la Figure 4-6 l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés $\tilde{\alpha}_i/\alpha_L^F$ en fonction de la concentration volumique de la fibre c pour une valeur du coefficient d'hygro-expansion longitudinal de la fibre est fixée à une valeur non-nulle ($\alpha_L^F \neq 0$). Pour rappel, les simulations numériques pour les modèles 0S et 1S ont été réalisées avec un ratio $r_\lambda = 1.0$.

On constate sur la Figure 4-6 que pour la valeur de référence $r_\phi \geq 7.5$, les valeurs $\tilde{\alpha}_1/\alpha_L^F$ associées aux modèles 0S, 1S et 2S sont très proches les unes des autres montrant ainsi que les ondulations des fibrilles n'ont quasiment aucune influence sur le coefficient d'hygro-expansion $\tilde{\alpha}_1$. Cette conclusion reste valable pour les coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés au modèle 1S. De plus, dans le cas du modèle 2S, on constate à nouveau que les coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ n'évoluent pas en fonction de r_ϕ , montrant ainsi que les longueurs d'onde des ondulations et les contacts entre des fibrilles n'influencent pas ces coefficients. Toutefois, les valeurs des coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés au modèle 2S sont différentes de celles associées au modèle 0S, justifiant que la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles ondulées reste significative sur les coefficients effectifs d'hygro-expansion transverse.

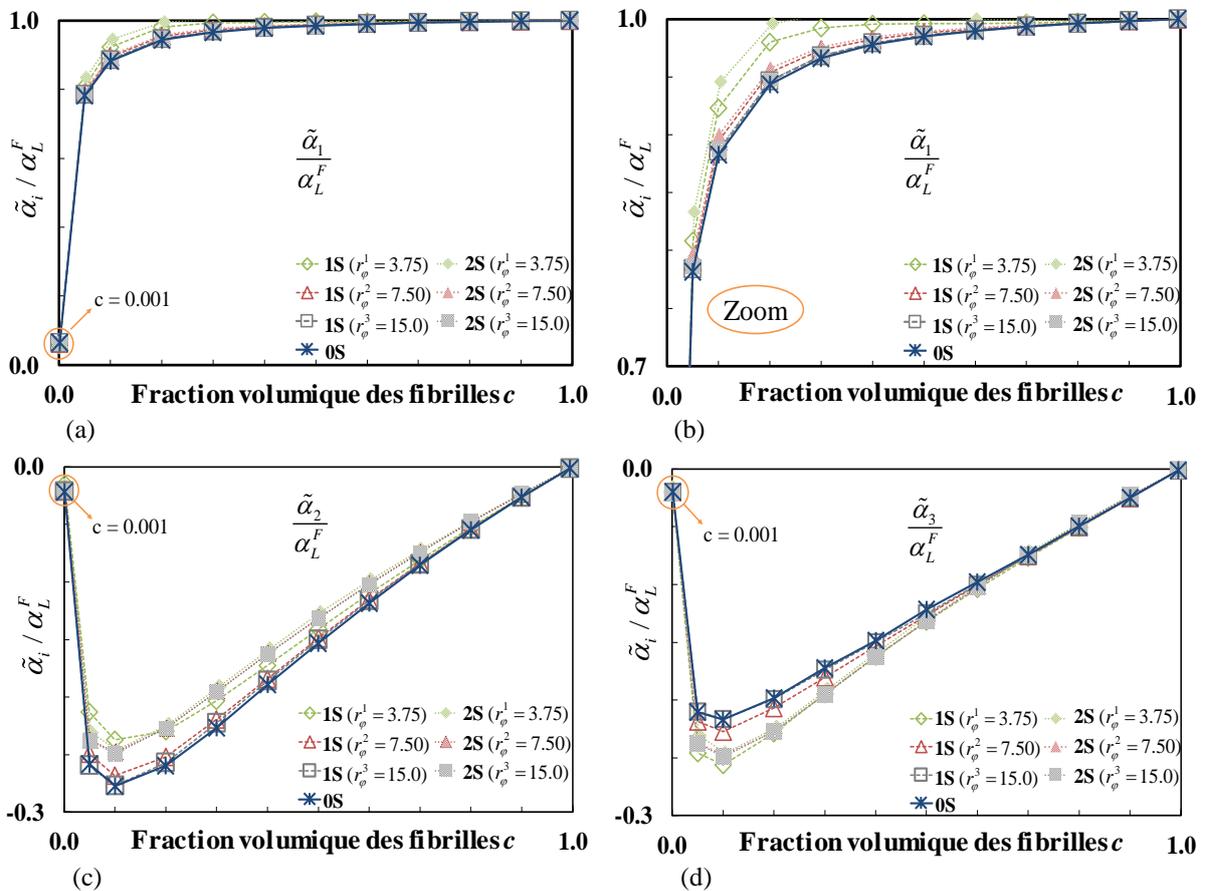


Figure 4-6 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs en fonction de la concentration c pour les 3 microstructures ($\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0$, $\alpha_L^F \neq 0$).

On constate par ailleurs que les valeurs des coefficients effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ sont négatives et convergent vers 0 quand il n'y a plus de matrice ($c = 1.0$). Cette tendance est tout à fait raisonnable, du fait que l'expansion de la fibre dans le sens longitudinal est bloquée par les conditions aux limites périodiques. En effet, les cellules individuelles n'ont pas tendance à se tordre lorsqu'elles gonflent du fait que les fibrilles des parois adjacentes ont le même angle des microfibrilles mais sont de sens opposé (les parois sont cimentées entre elles). Par conséquent, la matrice est tirée par les fibrilles qui s'allongent et eux-mêmes sont comprimés mécaniquement par la matrice qui les en empêche.

Par ailleurs, en se basant sur l'indépendance des valeurs de $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ au facteur de forme r_ϕ associé au cas d'expansion longitudinale des fibrilles, on constate à nouveau que seule la distribution spatiale de la matrice joue le rôle important sur la différence entre deux modèles OS et 2S pour ces 2 coefficients d'hydro-expansion transverses $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$. Nous avons ensuite reporté sur la Figure 4-7 l'évolution des coefficients effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ représentant l'expansion hydro-mécanique dans le plan transverse pour les deux modèles OS et 2S. Le modèle 2S est calculé pour la valeur de référence $r_\phi = 7.50$.

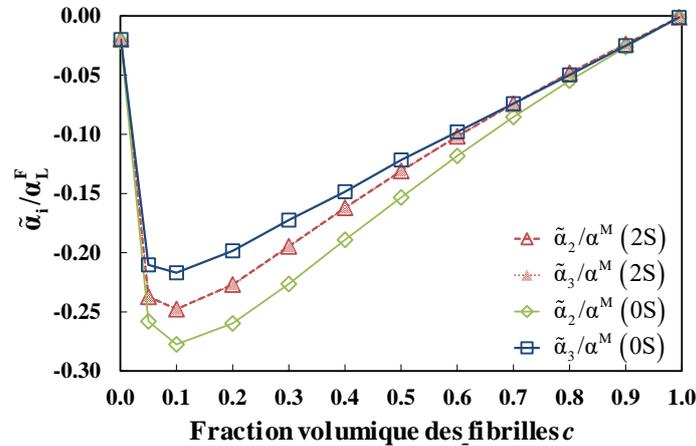


Figure 4-7 : Evolution des coefficients d'hydro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ en fonction de la concentration c des fibrilles pour les deux modèles OS et 2S ($\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0$, $\alpha_L^F \neq 0$)

Similairement à ce que l'on a observé dans le cas d'une matrice hydro-mécanique ($\alpha^M \neq 0$), on observe pour le modèle OS une anisotropie transverse $\tilde{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_3$ des coefficients d'hydro-expansion. Par contre, du fait d'une distribution similaire de contacts latéraux dans les directions 2 et 3 pour le modèle 2S, on observe une isotropie transverse $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3$ des coefficients d'hydro-expansion du modèle 2S.

b) $\alpha_{TT}^F \neq 0$

Nous considérons désormais le cas où l'expansion de la fibre est effectuée uniquement dans le plan transverse, autrement-dit seul le coefficient d'hydro-expansion dans le plan transverse de la fibre α_{TT}^F à une valeur fixée $\alpha_{TT}^F \neq 0$. A nouveau, nous avons reporté sur la Figure 4-8 l'évolution des coefficients d'hydro-expansion effectif normalisé $\tilde{\alpha}_i/\alpha_{TT}^F$ en fonction de la concentration c pour les 3 modèles de microstructure (OS, 1S et 2S) associés aux différentes valeurs de r_ϕ .

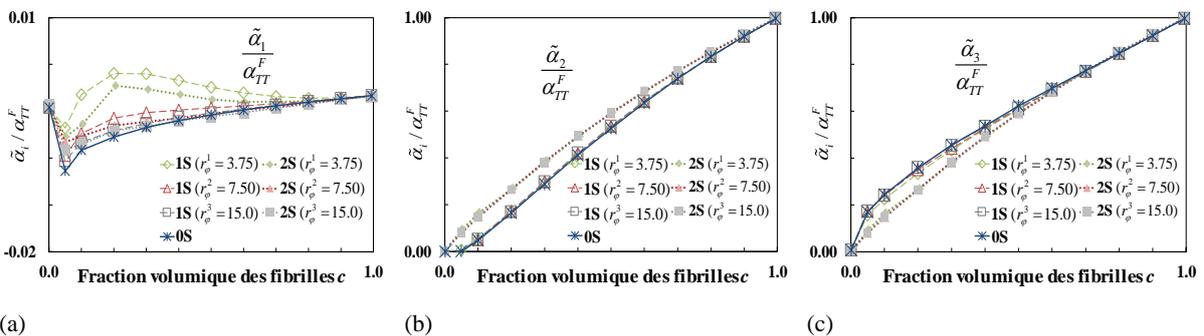


Figure 4-8 : Evolution des coefficients d'hydro-expansion effectifs en fonction de la concentration c pour les 3 microstructures ($\alpha^M = \alpha_L^F = 0$, $\alpha_{TT}^F \neq 0$).

On constate que quel que soit le modèle de la microstructure considérée, le coefficient d'hydro-expansion effectif dans la direction des fibrilles $\tilde{\alpha}_1$ est très faible par rapport au coefficient transverse

d'hygro-expansion des fibres α_{TT}^F car $|\tilde{\alpha}_1| < 0.01 \alpha_{TT}^F$. L'influence des ondulations des fibrilles sur $\tilde{\alpha}_1$ est donc négligeable en valeur absolue.

Pour ce qui concerne les coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$, on retrouve les mêmes conclusions obtenues pour les deux dernier cas $\alpha^M \neq 0$ et $\alpha_L^F \neq 0$, à savoir :

- dans le cas du modèle 1S, une indépendance des coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ vis-à-vis des ondulations des fibrilles, car on retrouve les mêmes résultats que pour le modèle 0S.
- dans le cas du modèle 2S, une indépendance des coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ vis-à-vis de r_ϕ , c-à-d les deux premiers effets induits de l'ondulation des fibrilles, tels que l'orientation et le contact des fibrilles, ont disparu ; mais il existe une réelle influence de la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre des fibrilles sur les coefficients $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ car leurs valeurs différentes, selon le modèle considéré (0S ou 2S).

De plus, en se référant aux résultats obtenus par les modèles 0S et 1S dans le cas où seule la matrice se gonfle, on observe la tendance inverse, à savoir que le coefficient d'expansion transverse effectif dans la direction 3 est supérieur à celui obtenu dans la direction 2. Cette observation s'explique à nouveau par la distribution géométrique des phases au sein de la paroi cellulaire illustrée par la Figure 4-4. En effet, lorsque seule la fibre gonfle dans le plan transverse, les deux coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ sont alors principalement induits par les deux paramètres des proportions linéiques f_2 et f_3 des fibrilles pour lesquels on observe $f_3 > f_2$ (voir la Figure 4-4). Cela implique que l'expansion des fibrilles dans la direction 3 est supérieure à celle dans la direction 2.

Afin de mieux comparer le modèle 2S au modèle 0S, nous avons à nouveau reporté l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ associés aux 2 modèles en fonction de la concentration c sur la Figure 4-9. Du fait de l'influence du modèle 2S vis-à-vis de r_ϕ , les courbes associées au modèle 2S ont été obtenues pour $r_\phi = 7.50$.

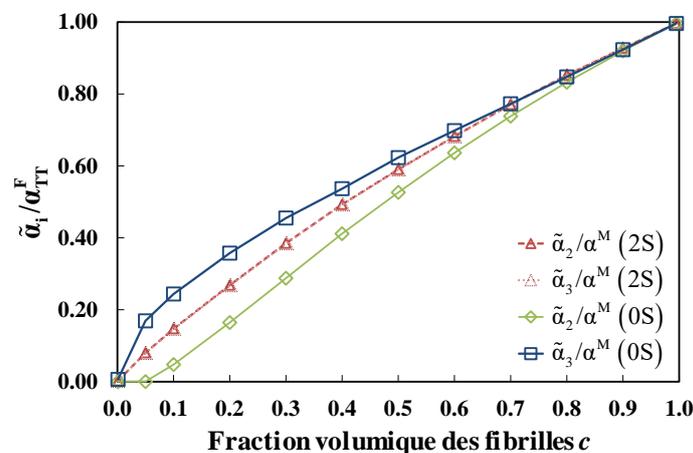


Figure 4-9 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$ en fonction de la concentration c de la fibre pour les deux modèles 0S et 2S ($\alpha^M = \alpha_L^F = 0$, $\alpha_{TT}^F \neq 0$)

On observe à nouveau que le modèle 0S conduit à des coefficients d'expansion significativement orthotropes dans le plan transverse ($\tilde{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_3$) alors que le modèle 2S induit une isotropie transverse ($\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3$).

4.4.3 Conclusion

Au cours de ces études paramétriques associées au comportement hygro-élastique de la paroi cellulaire, nous avons pu montrer que l'effet d'ondulation des fibrilles n'avait quasiment aucune influence sur le coefficient $\tilde{\alpha}_1$ quand $r_\phi \geq 7.50$. Nous avons également montré que la microstructure 1S n'induisait

aucune influence de l'ondulation des fibrilles sur les coefficients d'hygro-expansion transverse $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$. De plus, nous avons constaté pour le modèle 2S que les deux effets, qui sont l'orientation et le contact des fibrilles n'avaient aucune influence sur les coefficients effectifs d'expansion transverse $\tilde{\alpha}_2$ et $\tilde{\alpha}_3$. En revanche, nous avons montré dans le cas du modèle 2S que la distribution géométrique de la matrice entre des fibrilles influait significativement la valeur des coefficients d'hygro-expansion transverse.

Par ailleurs, nous avons également montré que: les coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$ qui représentent l'expansion de la paroi cellulaire dans le plan transverse sont anisotropes pour les modèles 0S et 1S. Par contre, cette observation n'est pas la seule possible.

En effet, dans le cas du modèle 2S, on observe une isotropie transverse pour les coefficients d'expansion transverse. Cette dernière observation pourrait apporter un nouvel éclairage sur le phénomène classique « d'expansion anisotrope » du bois.

Partie II : Comportement mésoscopique du bois : échelle du tissu

Suite à l'analyse effectuée dans la partie précédente concernant l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique de la paroi cellulaire, cette partie continue à étudier leurs effets sur le comportement hygro-élastique du bois à l'échelle du tissu. Pour cela, nous nous intéressons à décrire une microstructure périodique qui représente la structure du bois au niveau mésoscopique (Figure 1-1) pour déterminer son comportement effectif. On notera cependant que la microstructure proposée doit prendre en compte les morphologies différentes qui proviennent de deux types de tissus observables dans le cerne annuel : celle du bois initial (BI) et celle du bois final (BF). De plus, les deux microstructures sont construites en se basant sur une morphologie réaliste simplifiée de ces deux types de tissus. En fait, nous supposons que la couche du bois initial passe progressivement à celle du bois final (puis brutalement au bois initial du cerne suivant), ce choix d'un cerne constitué par deux couches permet d'obtenir un effet équivalent en termes de contribution à l'anisotropie transverse. Par ailleurs, les propriétés élastiques effectives orthotropes obtenues numériquement pour les deux microstructures OS et 2S à l'échelle de la paroi cellulaire dans la partie I sont considérées comme les données d'entrée de la microstructure tissulaire.

Dans un premier temps (chapitre 5), nous utiliserons à nouveau l'homogénéisation numérique par EF pour calculer le comportement hygro-élastique effectif des 2 microstructures tissulaires considérées, celle du BI et celle du BF. Nous proposons également un modèle d'homogénéisation analytique pour estimer le comportement élastique effectif plan de ces microstructures tissulaires en s'inspirant de l'approche présentée par Gibson et Ashby. En fait, le modèle analytique de Gibson & Ashby est utilisé pour déterminer le comportement d'une structure en nids d'abeilles constituée de parois cellulaires homogènes et isotropes. Toutefois, les parois de nombreux matériaux cellulaires naturels, comme le bois, présentent une organisation complexe à plusieurs couches qui peuvent enduire des propriétés anisotropes à l'échelle de la paroi. En appuyant sur une description réaliste du tissu du bois, notre étude étendra le modèle d'Ashby & Gibson en considérant que l'assemblage cellulaire du bois est constitué des parois multicouches dont le comportement est orthotrope, les propriétés de chaque couche étant déterminées par la méthode d'homogénéisation numérique présentée dans la partie I. Nous validerons ce modèle analytique à l'aide d'une solution de référence obtenue par la procédure d'homogénéisation numérique présentée au début de ce chapitre.

Dans un deuxième temps (chapitre 6), afin d'étudier l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement du tissu cellulaire, nous réalisons une étude paramétrique au cours de laquelle nous ferons varier certains paramètres géométriques (r_ϕ : le facteur de forme de la paroi cellulaire) et matériaux (E_L^F/E^M : le contraste) pour différentes valeurs de la densité du tissu. Nous analyserons tout d'abord cette influence sur le comportement élastique effectif, puis en prenant en compte le gonflement de chaque constituant de la paroi cellulaire (les fibrilles ou la matrice), nous analyserons l'influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés hydriques effectives des tissus du bois.

Chapitre 5 : Evaluation par homogénéisation numérique du comportement hygro-élastique du tissu

5.1 Structure du tissu

Le comportement mécanique du bois résulte de la contribution de diverses échelles d'hétérogénéité allant du niveau moléculaire au niveau macroscopique. Dans la partie précédente, nous avons discuté de l'influence des ondulations des fibrilles sur la structure subpariétale du bois. Dans ce chapitre, nous souhaitons prendre en compte les effets induits par des fibrilles ondulées sur la structure cellulaire du bois. Pour cela, nous introduisons une description générale du tissu du bois (Figure 5-2) en fonction de la valeur des paramètres θ_{cell} (l'angle de la forme de la cellule) et μ (densité relative du tissu, qui permet de décrire les deux principales morphologies de tissu observées dans un cerne, celle correspondant à du bois initial et celle correspondant à du bois final (Figure 5-5), qui sont prépondérantes dans la structure cellulaire à l'échelle mésoscopique (voir Figure 1-1). En effet, pour être le plus réaliste possible, nous utilisons des paramètres géométriques issus de la littérature pour décrire les deux microstructures tissulaires de bois initial et de bois final.

5.1.1 Observation de la géométrie réelle

Il existe principalement deux groupes d'arbres dans la nature, les résineux et les feuillus. La structure des résineux se différencie de celle des feuillus par la régularité de son arrangement, le mode de reproduction et également l'anatomie des cellules. Le bois résineux est un tissu plutôt simple dans sa composition et son organisation (Trouy, 2015). Au contraire, les bois feuillus dont l'organisation structurale est plus complexe sont constitués de différents types de cellules très variables en taille et en forme. En raison de la simplicité de sa structure, nous nous intéresserons ainsi essentiellement au cas du bois de résineux. Au cours de cette étude, notons que nous restreignons au cours du bois résineux plutôt standard, c'est-à-dire dont les défauts macroscopiques telles que les nœuds, ou les zones particulières telles que les bois de réaction ne sont pas pris en compte. Les résineux sont constitués de deux types de cellules : les trachéides et les parenchymes. Hormis ces deux types de cellules, d'autres éléments (les cellules sécrétrices longitudinales, les canaux sécréteurs longitudinaux et les canaux sécréteurs transversaux) sont présents chez certaines espèces en très petites quantités. Typiquement, les trachéides constituent environ 90 - 95% du volume du bois résineux, le volume restant étant principalement occupé par les rayons ligneux (Fengel and Wegener, 1984; Navi and Heger, 2005). Comme la grande majorité des cellules sont des trachéides qui s'étendent selon la direction longitudinale L de l'arbre, elles sont dénommées « les trachéides longitudinales ». Ces trachéides fournissent la résistance mécanique et gèrent le transport de l'eau avec les minéraux dissous dans la direction ascendante. De plus, elles sont en forme d'aiguille, avec un rapport de forme longueur / diamètre de l'ordre de 15. Elles sont également assemblées pour former un nid d'abeille irrégulier dans le plan RT (Kahle and Woodhouse, 1994).

A titre d'information, la microstructure cellulaire du Pin radiata est illustrée sur la Figure 5-1.

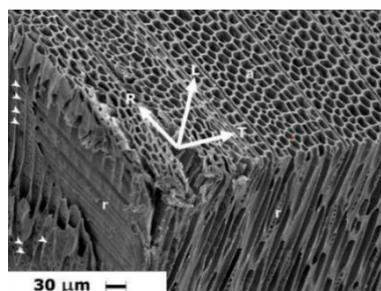


Figure 5-1 : Microstructure du Pin radiata; a - trachéides axiaux, r - rayons ligneux.

Comme indiqué ci-dessus, on remarquera que le grand axe des trachéides longitudinales est parallèle à la direction longitudinale (L), tandis que les cellules des rayons ligneux – indiqué par « r » sur la Figure 5-1 et qui constituent 5-10% du volume du tissu de bois ont leur grand axe parallèle à la direction radiale (R) et coupent à travers le nid d'abeille des trachéides longitudinales.

5.1.2 Description de la microstructure du tissu

A partir des descriptions anatomiques et morphologiques de la structure du bois à l'échelle du tissu, nous allons modéliser la microstructure tissulaire en considérant les tissus composés uniquement de trachéides longitudinales. On négligera ainsi les rayons ligneux qui ont un effet mineur sur les propriétés élastiques du bois. La microstructure étudiée étant par ailleurs supposée périodique, nous allons considérer une cellule unitaire périodique pour la représenter et calculer son comportement effectif. En outre, cette cellule élémentaire sera construite en intégrant des hypothèses supplémentaires, fréquemment utilisées dans la littérature (Astley et al., 1998; Koponen et al., 1991; Mishnaevsky Jr and Qing, 2008; Persson, 2000) :

- l'invariance de la structure du tissu dans le sens longitudinal L, c'est-à-dire les irrégularités longitudinales aux points où les trachéides se rejoignent de bout en bout sont ignorées ;
- l'invariance de la densité locale dans le sens longitudinal.

En considérant ces hypothèses, la cellule élémentaire choisie est alors représentée par une forme hexagonale.

Classiquement, la paroi de la trachéide est décrite par un matériau multicouche constitué d'une paroi primaire (P), d'une paroi secondaire (S) constituée elle-même de 3 couches S1, S2 et S3 et enfin d'une couche de lamelle mitoyenne LM fortement lignifiée (Mark, 1981, 1967). Par rapport à notre étude, la microstructure tissulaire sera donc décrite par un assemblage cellulaire sous la forme d'un nid d'abeille (voir Figure 5-2) en se basant sur différentes observations (microphotographies) et sur l'organisation simplifiée du plan ligneux correspondant aux résineux. Etant donné l'invariance de la densité locale et de la structure suivant la direction longitudinale, la géométrie de la microstructure est donc constante dans la direction longitudinale.

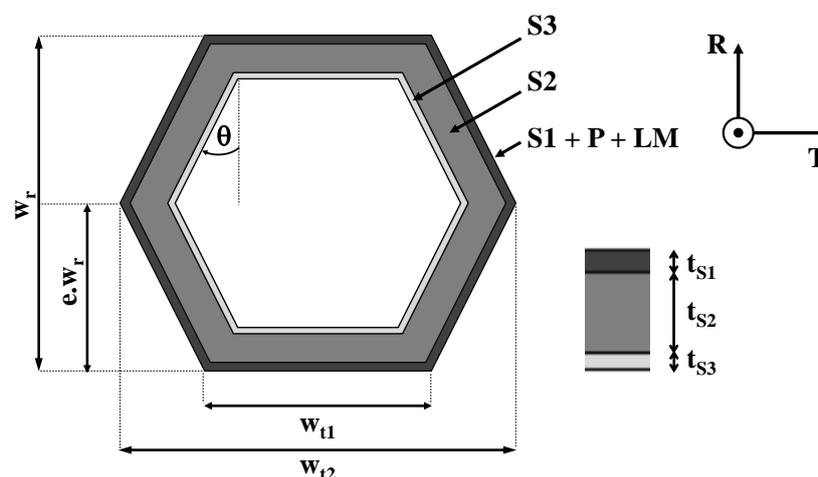


Figure 5-2: La cellule tissulaire est modélisée comme étant constituée de 3 couches principales (S1, S2 et S3)

Pour décrire les parois de la cellule tissulaire, nous ferons l'hypothèse que chaque paroi est composée par 3 couches principales :

- la couche S3 qui entoure le lumen et de faible épaisseur t_{s3} ;
- la couche S2 dominante, dont l'épaisseur t_{s2} est la plus forte des 3 couches;

- la lamelle mitoyenne (LM), la paroi primaire (P) et la couche S1 sont modélisées comme une seule couche externe commune en raison de leur similitude dans leur composition chimique et leur localisation. Nous supposons que cette couche de faible épaisseur t_{S1} sera paramétrée par les propriétés de la couche S1.

Du fait que l'angle des microbilles (AMF) des couches S1 et S3 est important, ces dernières peuvent contribuer de manière significative à la résistance en flexion de la paroi cellulaire, d'où l'importance que ces 2 couches soient incluses dans le modèle. Par ailleurs, nous avons considéré dans cette étude que les AMFs des couches S1 et S3 sont très proches.

Au vu de certaines études de la littérature (Fengel, 1969; Fengel and Stoll, 1973; Kollman and Côté, 1968), on constate que les épaisseurs de la lamelle moyenne (LM), de la paroi primaire (P) et les 2 couches S1 et S3 (t_{S1} et t_{S3}) de la paroi secondaire sont presque inchangées au sein des cerne de croissance. Par conséquent, dans cette étude on considèrera que seule l'épaisseur t_{S2} de la couche S2 sera variable, tandis que les épaisseurs de la couche S1 et de la couche S3 seront supposées constantes.

Pour ce qui concerne les paramètres géométriques du modèle de la cellule tissulaire, ces derniers sont illustrés sur la Figure 5-2. Ces paramètres qui nous permettent de décrire la forme et la densité de la cellule tissulaire pour les 2 types de tissus principaux d'un cerne (BI et BF) sont les suivants : w_r - le diamètre radial ; w_{t1}, w_{t2} - les diamètres tangentiels ; θ_{cell} - l'angle de forme ; $t_S = t_{S1} + t_{S2} + t_{S3}$ - l'épaisseur totale des 3 couches S1, S2 et S3 ; e - le paramètre d'excentricité. Toutefois, nous considérons uniquement la valeur du paramètre d'excentricité $e = 0.5$, du fait que cette valeur conduit, d'une part, à un modèle régulier ayant 2 plans de symétrie (LR) et (LT) et d'autre part, à une différence maximale entre la rigidité radiale et la rigidité tangentielle de la structure tissulaire (Persson, 2000). Par ailleurs, la densité relative, qu'on l'appellera μ , est définie comme le volume réel de matière (celui des parois) par rapport au volume total de la cellule (qui comprends le lumen).

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_S} = \frac{2t_S(w_t + w_r - 2t_S)}{w_t w_r} \quad (5.1. 1)$$

où ρ_S est la masse volumique des parois cellulaires et ρ la masse volumique moyenne de chaque type du tissu. A propos de la masse volumique moyenne ρ , elle varie selon la direction radiale d'un cerne de croissance, elle peut atteindre à $0,35 \text{ g/cm}^3$ pour des tissus du bois initial et à $0,75 \text{ g/cm}^3$ pour des tissus du bois final (Gachet, 2003). Par ailleurs, on notera que $w_t = (w_{t1} + w_{t2}) / 2$ est considéré comme le diamètre tangentiel de la cellule qui sera utilisé pour tous les calculs à venir. A partir de la densité relative, nous pouvons qualifier le type du bois, μ faible correspond à du bois initial et μ fort à du bois final sur un cerne de croissance.

5.1.3 Bois initial et bois final

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, le tissu cellulaire est défini comme un ensemble de cellules de trachéides accolées les unes aux autres afin de créer différentes formes du tissu. Par ailleurs, la variabilité naturelle associée aux processus de croissance cellulaire mène à des irrégularités géométriques des tissus cellulaires naturels. A l'échelle d'un cerne de croissance (Figure 5-3), nous pouvons bien distinguer la zone de bois initial et celle de bois final. En effet, les cellules de trachéide du bois initial et du bois final se différencient par leur diamètre radial (Figure 5-3b) sur les sections transversales du bois résineux. De ce fait, la masse volumique locale du bois varie considérablement sur un cerne de croissance (Figure 5-3c). A titre d'information, la densité apparente de la paroi cellulaire (ρ_S) est supposée être d'environ 1500 kg/m^3 pour les parois cellulaires des plantes sèches (Kollman and Côté, 1968).

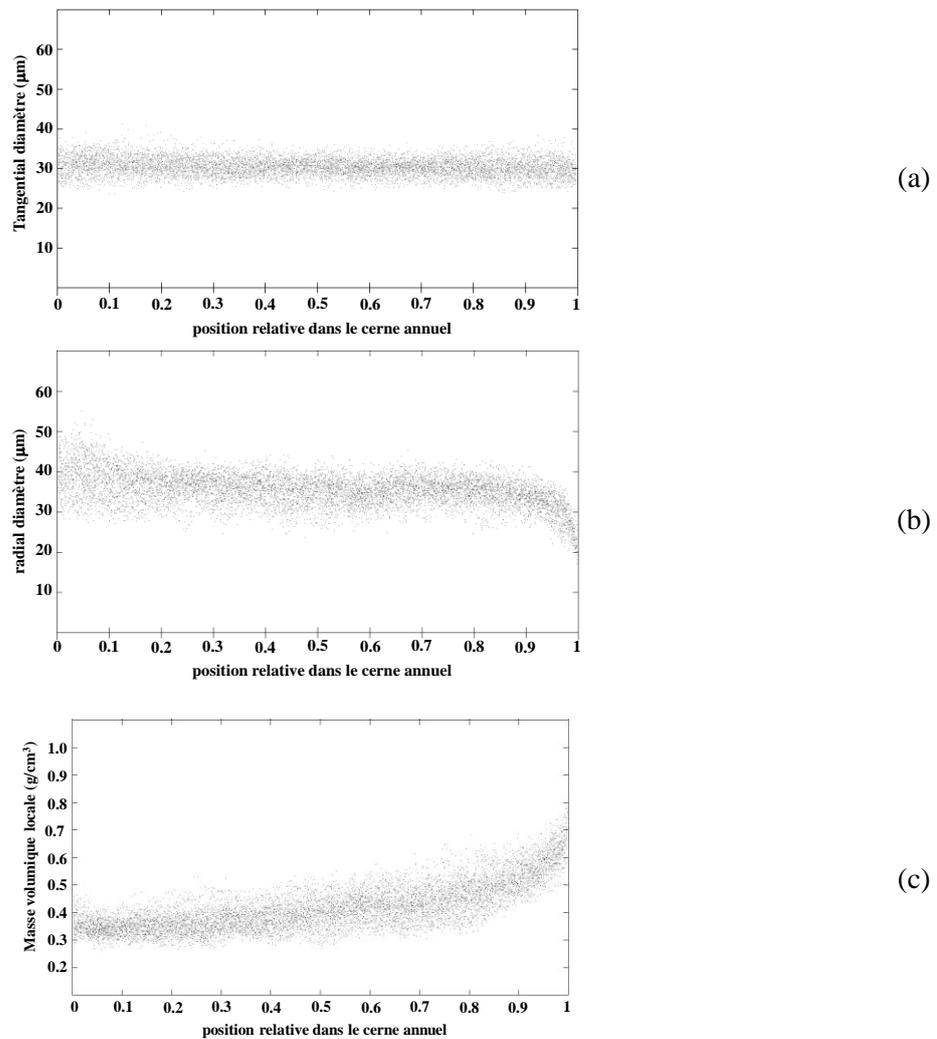


Figure 5-3 : Diamètres tangential et radial des trachéides et micro-densité locale en fonction de la position relative dans le cerne de croissance des échantillons de pin Radiata, mesurés à l'aide du SilviScan (Evans, 1994).

A titre d'illustration, la Figure 5-4 présente une coupe transversale suivant les directions radiale et tangentielle du tronc qui permet d'observer, à l'échelle mésoscopique, le cerne de croissance, dans lequel on distingue le bois initial (peu dense) et le bois final (plus dense). La différence de structure cellulaire entre le bois initial et le bois final est à nouveau illustrée grâce aux observations suivantes permises par la Figure 5-4. Les trachéides du bois initial ont des sections transversales de forme hexagonale, tandis que celles du bois final sont plutôt rectangulaires.

Au vu de ces observations, il est nécessaire de présenter les deux morphologies tissulaires typiques, celle correspondant à la microstructure du bois initial (modèle BI), et celle correspond au bois final (modèle BF), en se basant sur les données expérimentales existant dans la littérature. Pour cela, nous avons reporté dans les Tableau 5-1 et Tableau 5-2 un ensemble de données issues de la littérature associées aux paramètres géométriques du bois initial et du bois final. De plus, comme nous l'avons vu sur les Figure 5-3a et Figure 5-3b, le diamètre tangential est presque constant ($w_t = \text{cte}$) vis-à-vis de sa position relative dans le cerne annuel, contrairement au diamètre radial qui lui évolue.

Afin de simplifier l'évolution du paramètre radial selon le type du tissu (voir la Figure 5-3b) dans notre étude, on utilisera deux valeurs différentes de paramètre radial issues de la littérature pour chaque type du tissu, à savoir : $w_r^{\text{initial}}, w_r^{\text{final}} = \text{cte}$ ($w_r^{\text{initial}} > w_r^{\text{final}}$).

Dans notre modélisation, c'est en faisant évoluer la valeur de l'épaisseur de la couche S2, t_{S2} , que nous ferons évoluer la densité relative μ à partir de la formule (5.1. 1) dans laquelle on considérera les épaisseurs t_{S1} , t_{S3} et les paramètres w_t , w_r constant pour chaque type du tissu.

Par ailleurs, nous utilisons une microstructure périodique pour représenter la microstructure du bois initial et celle du bois final. On remarquera que cette représentation s'éloigne un peu de la réalité. En effet, (Kahle and Woodhouse, 1994) ont remarqué à partir de microphotographies que les cellules de trachéide dans la direction radiale sont globalement alignées alors que celles dans la direction tangentielle ont une distribution plus désordonnée. Ce point est très bien illustré par la Figure 5-4b montrant ainsi que l'hypothèse de périodicité de la distribution des cellules dans la direction T n'est pas exacte.

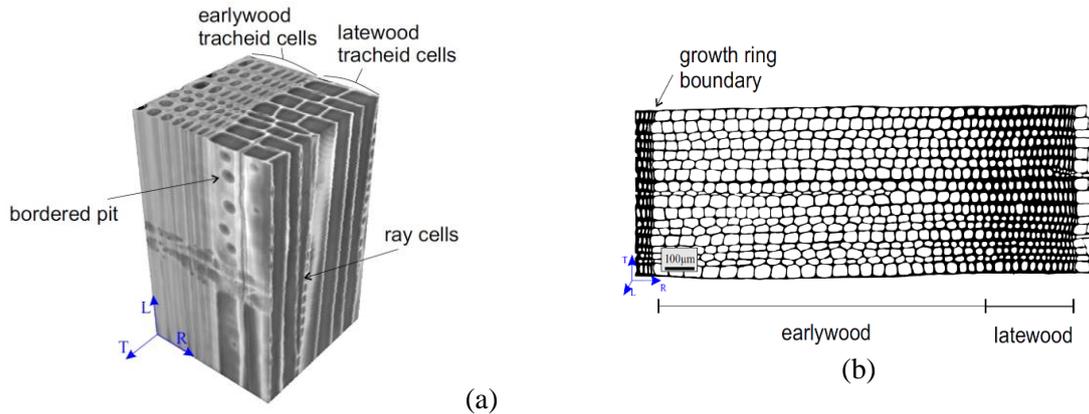


Figure 5-4 : (a) Image de tomographie à rayons X d'un bois résineux à la limite d'un cerne de croissance montrant les caractéristiques cellulaires et intracellulaires et (b) image binarisée au microscope électronique à balayage d'un anneau de croissance d'un résineux d'épicéa de Norvège (Rafsanjani, 2013).

Tableau 5-1 : épaisseur et fraction volumique des constituants de la paroi pour les différentes couches de la paroi cellulaire dans les trachéides du bois initial et du bois final.

Couche	Épaisseur (Fengel, 1969; Fengel and Stoll, 1973)				Fraction volumique (%) (Kollman and Côté, 1968)		
	Bois initial		Bois final		Cellulose	hémicellulose	lignine
	Épaisseur (µm)	Pourcentage de l'épaisseur totale (%)	Épaisseur (µm)	Pourcentage de l'épaisseur totale (%)			
S1	0.35	19.5	0.41	9.2	25	28	47
S2	1.42	78.9	3.99	89.9	50	27	23
S3	0.03	1.6	0.04	0.9	50	35	15
Total	1.80	100	4.44	100			

Tableau 5-2 : Dimensions de la surface transversale des trachéides du bois initial et du bois final pour diverses essences de bois

espèces	Bois initial		Bois final		Références
	Diamètre tangentiel (µm)	Diamètre radial (µm)	Diamètre tangentiel (µm)	Diamètre radial (µm)	
<i>Sequoia sempervirens</i>					
Bois juvénile	36.8	44.1	36.1	23.4	Smith and Miller (1964)
Bois mature	39.87	56.6	39.9	25.5	Smith and Miller (1964)
<i>Pseudotsuga menziesii</i>	37.2	48.1	33.1	24.8	Smith (1965)
<i>Pseudotsuga douglasii</i>	35.5	41.7	32.7	22.9	Smith (1965)
<i>Pinus echinata</i>	30.0	24.1	29.3	23.4	Johanson (1940)

<i>Pinus sylvestris</i>	25.3	30.2	23.5	20.8	Johanson (1940)
<i>Picea abies</i>	31.0	30.3	28.8	17.7	Johanson (1940)
<i>Picea abies</i>	32.7	39.3	32.1	13.1	Fengel (1969)

Pour ce qui concerne les valeurs de référence de l'angle θ_{cell} de la cellule, plusieurs recherches (Harrington, 2002; Watanabe et al., 1998; etc) ont indiqué que les trachéides du bois initial ont tendance à avoir des sections hexagonales, alors que celles du bois final ont tendance à être rectangulaires. A cet effet, dans le but d'approcher les morphologies réelles du bois initial et du bois final, nous nous appuyerons sur les observations expérimentales associées à l'étude de Watanabe (Watanabe et al., 1998) qui ont été obtenues par analyse du spectre de puissance (Power Spectrum analysis) dans le cas du pin *Radiata* (un type de résineux). Elles montrent des valeurs de l'ordre $\theta_{\text{cell}} \approx 15^\circ$ pour le bois initial et de $\theta_{\text{cell}} \approx 0^\circ$ pour le bois final.

En rassemblant les données présentées ci-dessus, la Figure 5-5 fournit, pour une coupe transversale dans le plan RT, la description géométrique des 2 microstructures tissulaires utilisées dans notre étude correspondant respectivement au bois initial et au bois final.

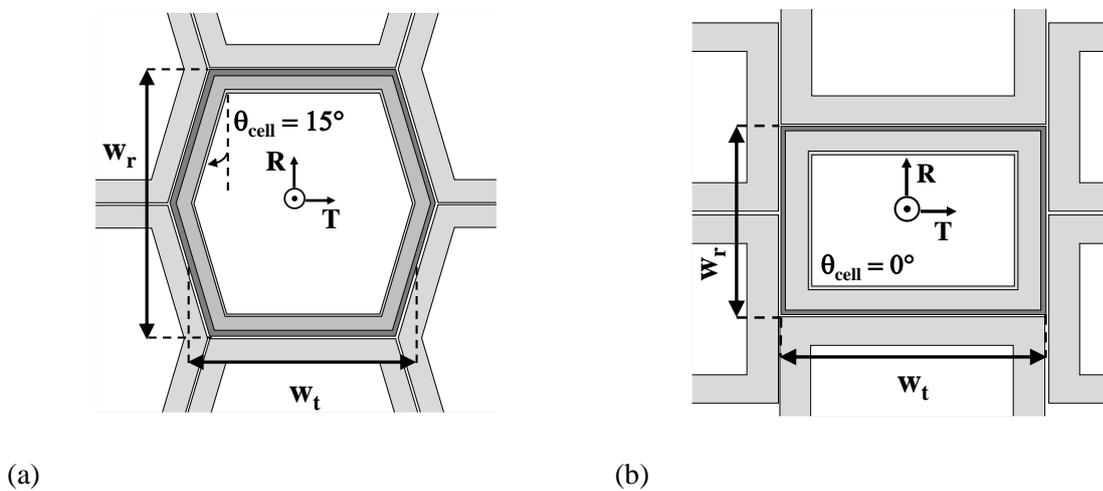


Figure 5-5 : Description géométrique des 2 microstructures de bois initial et de bois final dans le plan RT.

5.2 De la paroi cellulaire au tissu : estimation du comportement par homogénéisation numérique

5.2.1 Maillage (bois initial, bois final)

a) Description du maillage

Dans cette partie, nous allons générer les maillages des deux modèles BI et BF en se basant sur la description de la Figure 5-5. Nous allons à nouveau utiliser des éléments cubiques à 8 nœuds (CUB8) de Cast3M. Le maillage est construit de la façon suivante : on commence par mailler une section transversale bidimensionnelle (plan RT), qu'on utilise ensuite pour générer un volume entier du solide par le vecteur unité de périodicité suivant la direction longitudinale (L). Toutefois, bien que l'on ait supposé une indépendance du comportement de la microstructure tissulaire et de la densité dans la direction longitudinale (L), cela n'est pas le cas dans les directions radiale et tangentielle de la section transversale. Les maillages des deux microstructures dans le plan RT sont réalisés couche par couche, de la couche d'extérieure S1 à la couche intérieure S3. Chaque couche est caractérisée par son épaisseur présentée dans le Tableau 5-1. Par ailleurs, afin d'appliquer des CLs périodiques les maillages générés sont périodiques pour effectuer simplement les calculs d'homogénéisation numérique. Autrement-dit,

dans le cas des maillages des microstructures tissulaires considérées dans cette étude, nous imposons le même nombre de nœuds sur les arêtes en correspondance.

Une fois que la génération des maillages des parois unitaires est terminée, l'obtention du maillage de la cellule tissulaire complète se fait simplement par utilisation de la fonction ET de Cast3M. A titre d'illustration, la Figure 5-6 présente les 2 maillages différents de la cellule tissulaire (modèles BI et BF). Par construction, les liaisons entre les 3 couches sont supposées parfaites. On remarquera que le lumen n'a pas été maillé. De ce fait, les moyennes volumiques pour les calculs numériques effectuées par la suite doivent être multipliées par la fraction volumique de la phase solide.

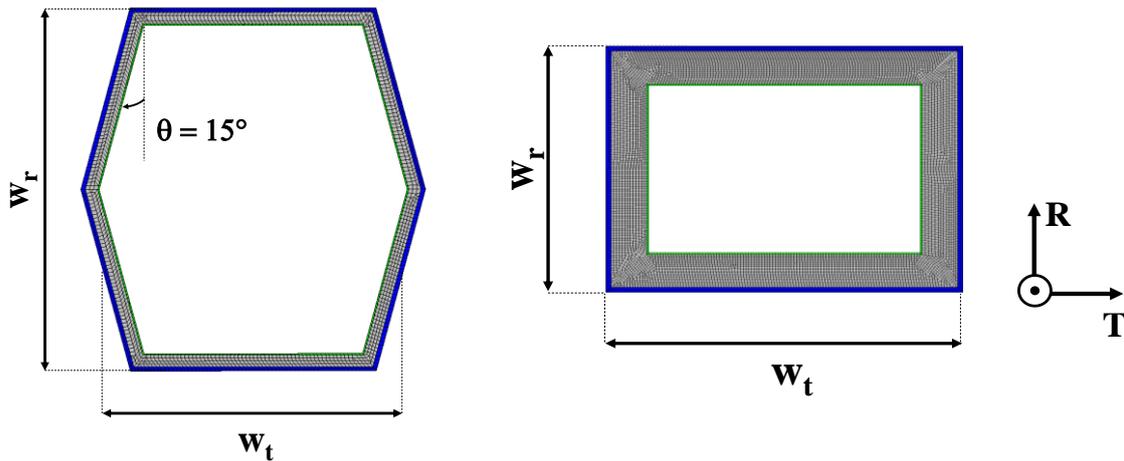


Figure 5-6 : Maillages des deux modèles BI et BF (Cast3M).

b) Orientation des couches au sein de la cellule tissulaire

Comme le comportement effectif de la paroi cellulaire est orthotrope dans le repère local lié aux fibrilles (1, 2, 3), il est alors nécessaire de définir en tout point du maillage des deux modèles BI et BF un nouveau repère local à l'échelle du tissu afin d'orienter ses propriétés matériaux. De ce fait, on utilisera le repère de la cellule (1', 2', 3') ou (x', y', z') (voir Figure 5-7a) qui est relié au repère (1, 2, 3) par une rotation d'angle θ^{AMF} selon la direction 3 = 3' pour chaque couche. Le paramètre θ^{AMF} caractérise l'inclinaison des fibrilles dans la paroi par rapport au grand axe L de la cellule tissulaire. Étant donné que notre cellule comprend 3 couches différentes, chaque couche est caractérisée par un AMF différent qui servira par la suite à orienter les propriétés locales du matériau.

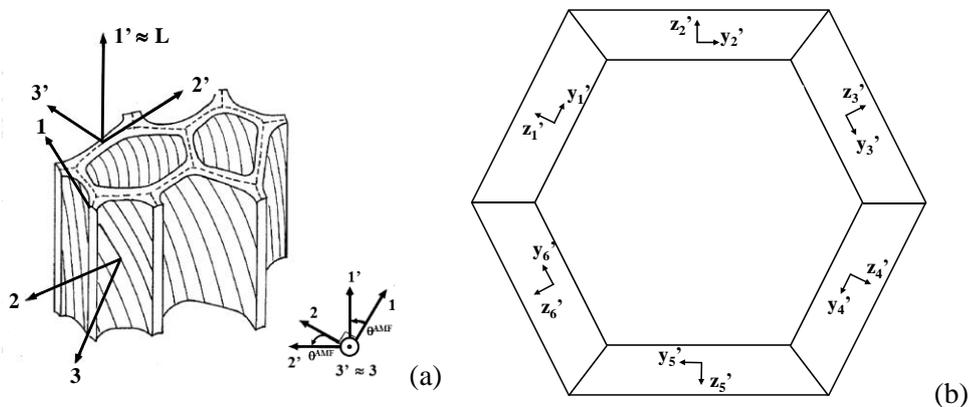


Figure 5-7 : (a) Orientation de la cellule (1', 2', 3') et de l'ultrastructure (1, 2, 3) et (b) Schématisation des repères locaux pour les 6 parois de la cellule tissulaire.

Rappelons que le repère utilisé précédemment à l'échelle de la paroi cellulaire est le repère $(1, 2, 3) = (x, y, z)$ où $\underline{1}$ est la direction moyenne des fibrilles, et $(23) = (yz)$ le plan transverse. A l'échelle du tissu, nous utilisons le repère orthonormé $(O, x', y', z') = (O, 1', 2', 3')$ où la direction $\underline{x'}$ ou $\underline{1'}$ coïncide avec la direction longitudinale macroscopique du bois \underline{L} et les directions $\underline{y'}$, $\underline{z'}$ ou $\underline{2'}$, $\underline{3'}$ sont celles du repère local de chaque paroi constituant la cellule tissulaire. On détermine donc les vecteurs directeurs $\vec{x}'_{Si}, \vec{y}'_{Si}$ des axes locaux (x', y', z') liés à la cellule tissulaire en fonction des vecteurs directeurs \vec{x}, \vec{y} des axes associés aux fibrilles (x, y, z) par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{x}'_{Si} = \cos(\theta_{Si}^{AMF}) \cdot \vec{x} + \sin(\theta_{Si}^{AMF}) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}'_{Si} = \sin(\theta_{Si}^{AMF}) \cdot \vec{x} + \cos(\theta_{Si}^{AMF}) \cdot \vec{y} \end{cases} \quad (5.2. 1)$$

où l'indice Si désigne la couche Si ($i = 1$ à 3). Ainsi, θ_{Si}^{AMF} est l'angle des microfibrilles de la couche Si dont la valeur sera issue de la littérature correspondante aux résineux. Pour ce qui concerne l'axe $\underline{z'}$, ce dernier coïncide avec \underline{z} .

En utilisant la définition du repère (x', y', z') , nous pouvons ainsi définir les différents repères locaux correspondants au cas de la cellule hexagone complète (voir la Figure 5-7b).

5.2.2 Propriétés hygro-élastiques effectives du tissu

A la suite de la génération des maillages des 2 zones principales d'un cerne de croissance du bois (modèles BI et BF), nous allons maintenant déterminer les propriétés effectives à l'échelle du tissu cellulaire en introduisant dans chaque couche S1, S2, S3 un comportement effectif issu de la procédure d'homogénéisation expliquée dans la partie I.

Comme chaque paroi est constituée principalement 3 couches (S1, S2 et S3), ses constantes élastiques effectives ont été calculés pour deux valeurs différentes de la fraction volumique c , 25% pour la couche S1 et 50% pour les couches S2 et S3 (Tableau 5-1). Rappelons que l'objectif général de cette partie consiste à analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif du bois à l'échelle du tissu. Pour cela, nous considérons uniquement les microstructures 0S (pour la solution de référence) et 2S (pour la solution ondulée), cette dernière étant capable de prendre en compte les oscillations des fibrilles dans 2 directions (contrairement à 1S). L'ensemble des résultats obtenus est synthétisé dans le Tableau 5-3.

Tableau 5-3 : Ensemble des propriétés élastiques effectives issues des deux microstructures 0S et 2S pour les couches S1, S2 et S3 ($r_\phi = 7.50$, $r_\lambda = 1.0$)

couche	Modèle	c	\tilde{E}_1^p (MPa)	\tilde{E}_2^p (MPa)	\tilde{E}_3^p (MPa)	\tilde{G}_{23}^p (MPa)	\tilde{G}_{13}^p (MPa)	\tilde{G}_{12}^p (MPa)	$\tilde{\nu}_{23}^p$	$\tilde{\nu}_{13}^p$	$\tilde{\nu}_{12}^p$
S1 (AMF = 70°)	0S	0.25	36033.0	3418.5	3887.2	1029.0	1172.3	1034.0	0.370	0.238	0.277
	2S		35153.0	3359.6	3359.6	1178.1	1341.5	1341.5	0.442	0.300	0.300
S2 (AMF = 15°) et S3 (AMF = 70°)	0S	0.50	70037.0	5916.9	6604.0	1473.3	1676.6	1531.3	0.285	0.189	0.209
	2S		69436.0	5895.9	5895.9	1822.5	1931.9	1931.9	0.360	0.226	0.226

Par ailleurs, chacune des couches secondaires de la cellule possède sa propre orientation caractérisant l'orientation de ses microfibrilles (AMF). Dans le modèle actuel, les angles des microfibrilles (l'AMFs) dans les couches S1 et S3 sont supposés être distribués autour d'une valeur moyenne de 70° (Cave, 1978). De plus, dans la couche S1, les hélices des microfibrilles sont supposées être inclinées dans une seule direction et non croisées comme c'est le cas habituellement décrit dans plusieurs études (Astley et al., 1998; Watanabe et al., 1999, etc). Dans le cas de notre modèle, en nous basant sur des observations reportées par certaines études, nous allons considérer des différences très petites entre l'AMF de la

couche S2 du bois initial et celui associé au bois final (Bergander et al., 2002; Paakkari and Serimaa, 1984; Sahlberg et al., 1997). On prendra comme entrée du modèle actuel une valeur de 15° pour les deux types du bois (bois initial et bois final).

Par la suite, de la même façon que l'on a calculé dans la partie I le comportement hydrique effectif de la paroi cellulaire, nous allons considérer à nouveau 3 cas différents de gonflement des constituants de la paroi élémentaire : (1) gonflement de la matrice ; (2) gonflement longitudinal de la fibrille ; (3) gonflement transversal de la fibrille. Comme la cellule tissulaire est composée de 3 couches S1, S2 et S3, une fois qu'on a déterminé les composantes hygro-élastiques effectives (de la rigidité \tilde{C}_{ij} et de l'expansion hydrique $\tilde{\alpha}_i$) pour chaque couche, par des calculs EF associés au modèle de thermo-élasticité linéaire de Cast3M précédemment défini dans le chapitre 4, on devra les utiliser comme des entrées pour le modèle, décrit ci-dessus, de la cellule périodique représentant le tissu. Par conséquent, à l'aide de cette étape d'homogénéisation, nous allons déterminer le comportement hygro-élastique effectif de cette cellule élémentaire en calculant $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ issu de l'équation (4.2. 4) du chapitre 4 , mais cette-fois ci pour la microstructure tissulaire, pour 6 chargements élémentaires en déformation différents et 3 chargement hydrique.

5.2.3 Convergence

Une fois que l'on a déterminé le comportement hygro-élastique effectif de la cellule tissulaire à l'aide de la procédure d'homogénéisation numérique décrite au chapitre 2 de la partie II et appliquée aux microstructures de la Figure 5-5, il est nécessaire de vérifier la précision des calculs EF en réalisant une étude de convergence. Pour cela, nous avons choisi une cellule hexagonale régulière ($\theta_{\text{cell}} = 30^\circ$) (voir Figure 5-8) pour évaluer l'influence du raffinement du maillage sur les propriétés effectives calculées, car le comportement de cette dernière est isotrope transverse du fait de la géométrie hexagonale parfaite. Pour cette vérification, les propriétés mécaniques des couches S1, S2 et S3 présentées dans le Tableau 5-1 ont été utilisées. De plus, nous avons affecté à cette cellule la densité standard des résineux de 450 kg/m^3 (Guitard, 1987). Cette valeur permet de déterminer l'épaisseur t_s de la cellule considérée en utilisant l'équation (5.1. 1). Nous continuerons par ailleurs à utiliser cette valeur de t_s pour déterminer les autres paramètres géométriques de la cellule tissulaire. Toutefois, vu que les épaisseurs des couches S1 et S3 sont considérées comme constantes, ceci revient à calculer uniquement l'épaisseur de la couche S2 pour le cas de cellule hexagonale parfaite.

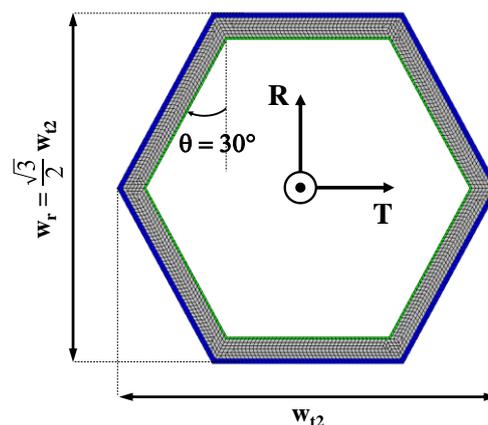


Figure 5-8 : Maillage de la cellule hexagonale parfaite possédant une densité standard des résineux.

Nous utilisons à nouveau l'indicateur de convergence $ecart_{\text{moy}}$ défini par l'équation (2.3. 1) du chapitre 2 afin de quantifier la convergence. Les composantes effectives calculées dans le tableau ci-dessous correspondent à différents maillages de la cellule hexagonale parfaite pour lesquels le nombre d'EF croit.

Tableau 5-4 : Composantes élastiques effectives pour un nombre d'EF croissant

Nombre d'éléments	Donnée i	\tilde{C}_{LL}^{OS} (MPa)	\tilde{C}_{RR}^{OS} (MPa)	\tilde{C}_{TT}^{OS} (MPa)	\tilde{C}_{LR}^{OS} (MPa)	\tilde{C}_{LT}^{OS} (MPa)	\tilde{C}_{RT}^{OS} (MPa)	\tilde{G}_{RT}^{OS} (MPa)	\tilde{G}_{LR}^{OS} (MPa)	\tilde{G}_{LT}^{OS} (MPa)	$ecart_{moy}$ (%)
2079	1	16819	811.96	811.96	878.4	878.4	657.83	77.062	923.41	923.41	3.1510
6261	2	16818	808.97	808.97	877.00	877.00	657.52	75.725	922.83	922.83	1.3615
14448	3	16817	807.47	807.47	876.54	876.54	656.80	75.334	922.18	922.18	0.8168
38138	4	16817	806.51	806.5	876.19	876.19	656.43	75.041	921.91	921.91	0.4163
91797	5	16817	805.92	805.92	875.98	875.98	656.20	74.857	921.78	921.78	0.1656
226074	$+\infty$	16816	805.51	805.51	875.83	875.83	656.04	74.736	921.67	921.67	0.0000

Comme le montré les résultats issus du Tableau 5-4, une précision inférieure à 1% est obtenue pour un maillage de 14448 éléments (0.8168%). Le nombre d'éléments correspondant à ce maillage sera utilisé pour tous les calculs numériques qui seront réalisés dans notre étude.

5.3 Approche analytique

Nous avons décrit en section 5.2 une estimation numérique précise du comportement hygro-élastique du tissu pour les 2 types de microstructures adoptées (modèles OS et 2S). Par la suite, nous allons proposer dans cette partie une estimation analytique du comportement du tissu à parois orthotropes permettant de rassurer la qualité de la solution numérique obtenue en 5.2 qui servira de solution de référence. Toutefois, on se limite cette à dernière surtout au cas du bois résineux. Différentes études (Astley et al., 1998, 1997; Rafsanjani, 2013) ont validé la solution analytique développée par Gibson & Ashby (Gibson and Ashby, 1988) dans le cas de nids d'abeilles constitués des parois cellulaires homogènes (et non hétérogène) et à comportement isotrope (et non orthotrope) en la comparant à une estimation numérique du comportement effectif. En ce qui concerne l'approche de Gibson & Ashby, cette dernière est basée sur la théorie des poutres en flexion dans un état de contraintes planes. Dans le cadre de notre étude, nous adopterons également les équations de l'étude de Gibson & Ashby qui prennent en compte les déformations axiales et de cisaillement de la paroi. Toutefois, nous considérerons des parois du tissu comme un stratifié antisymétrique (voir Figure 5-9) constitué de couches de deux cellules adjacentes pour lequel l'étude des plaques en flexion sera appliquée. Cela nous permettra de prendre en compte à la fois le comportement en membrane et en flexion de la paroi étudiée. De plus, l'approche développée dans notre étude sera présentée pour des parois multicouches caractérisées par un comportement orthotrope permettant d'être proche la structure réaliste du tissu du bois contrairement aux hypothèses de parois isotropes et homogènes utilisées dans l'étude de Gibson & Ashby.

Comme indiqué précédemment, le comportement effectif du tissu qui sera également déterminé en utilisant la procédure d'homogénéisation numérique développée en 5.2 et ce dernier sera considéré comme la solution de référence. Par ailleurs, comme nous allons nous inspirer de l'étude de Gibson & Ashby qui repose sur une hypothèse de contrainte plane, le modèle analytique proposé évaluera uniquement les constantes élastiques planes du tissu (E_R , E_T , G_{RT} , ν_{RT} et ν_{TR}). Pour cela, le modèle analytique estimera le comportement plan de la cellule tissulaire de la Figure 5-2 schématisée par un assemblage hexagonal constitué des parois multicouches et orthotropes. Pour ce qui concerne les propriétés associées aux trois couches différentes (S1, S2 et S3) de la cellule, celles-ci sont issues de l'étude du comportement effectif de la paroi cellulaire associé au modèle OS. Enfin, afin d'évaluer les résultats obtenus par le modèle analytique, nous les comparerons à la solution numérique de référence, pour des valeurs différentes des paramètres géométriques du tissu tels que : l'angle de forme θ_{cell} et la densité relative μ .

5.3.1 Comportement homogénéisé du tissu

a) Problème local d'un stratifié antisymétrique

Pour des raisons de symétrie (stratifié antisymétrique), au lieu de chercher le comportement effectif d'une paroi individuelle composée seulement de trois couches, on considérera une portion de paroi complète comprenant les parois de deux cellules adjacentes. Cette portion de paroi cellulaire a l'apparence d'un tube multicouche, dont chaque couche est constituée d'une spirale hélicoïdale de microfibrilles de cellulose. Le pas des hélices, ou, ce qui revient au même, l'angle des microfibrilles (AMF) avec la direction L (l'échelle du cerne) ou l' (l'échelle de la cellule), varie en fonction de la position dans l'épaisseur de la double paroi. Par ailleurs, la portion de paroi complète a l'allure d'un stratifié antisymétrique, du fait que le sens de la spirale hélicoïdale est le même dans les deux cellules situées de part et d'autre de la zone intermédiaire LM + P qui les sépare (Gril, 1988). La portion de cellule définie sera ainsi considérée comme un stratifié antisymétrique composé de 6 couches principales de $[S3^+; S2^+; S1^+; S1^-; S2^-; S3^-]$ (Figure 5-9a) pour lequel on cherche à calculer les propriétés effectives de la paroi. Par ailleurs, on considérera des interfaces parfaites entre les couches de la paroi.

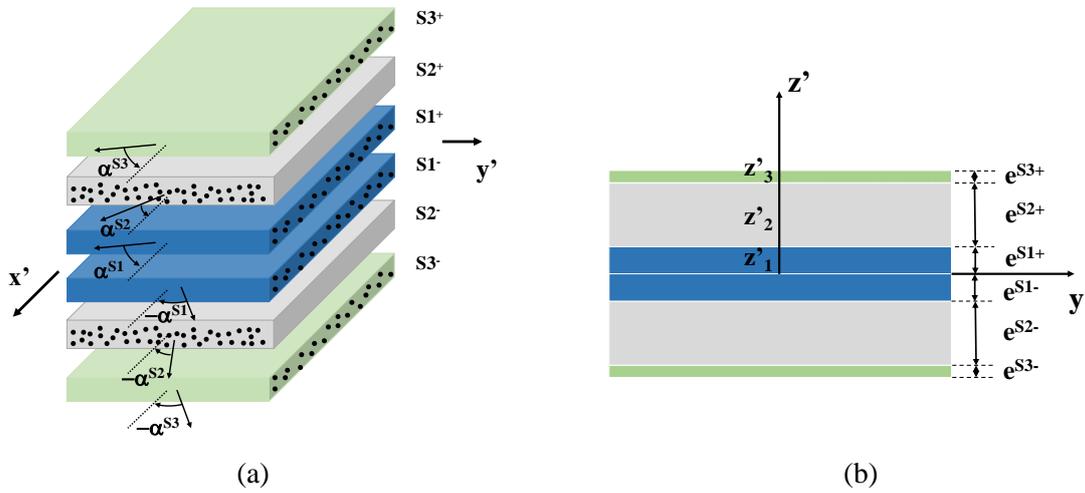


Figure 5-9 : Modèle de double paroi : a) stratifié antisymétrique défini par la portion de double paroi, b) élément de stratifié.

Il est noté que la valeur de α^{Si} se réfère à l'angle des fibrilles dans chaque couche du stratifié antisymétrique. Jusqu'à présent, dans la partie précédente nous avons déterminé le comportement orthotrope effectif \tilde{C}^{Si} de chaque couche S_i de la paroi secondaire dans les axes d'orthotropie liés au repère des fibrilles (x, y, z) . Il faut qu'on ramène les axes du repère des fibrilles aux axes locaux de la cellule (x', y', z') , ce qui revient à effectuer une rotation d'angle $-\alpha^{Si}$ (ou α^{Si}) suivant l'axe $\underline{z}' \equiv \underline{z}$ (illustrée sur la Figure 5-7a). De ce fait, la matrice de rigidité dans le nouveau repère (x', y', z') de chaque couche S_i $i = 1$ à 3 que l'on repèrera désormais dans un souci de simplification par l'indice k s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix}_k \xrightarrow[\text{suivant l'axe } \underline{z}' \equiv \underline{z}]{\text{rotation d'angle } (-\alpha^{Si})_k} \begin{pmatrix} \tilde{C}'_{11} & \tilde{C}'_{12} & \tilde{C}'_{13} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{16} \\ \tilde{C}'_{21} & \tilde{C}'_{22} & \tilde{C}'_{23} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{26} \\ \tilde{C}'_{31} & \tilde{C}'_{32} & \tilde{C}'_{33} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{44} & \tilde{C}'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{54} & \tilde{C}'_{55} & 0 \\ \tilde{C}'_{61} & \tilde{C}'_{62} & \tilde{C}'_{63} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{66} \end{pmatrix}_k \quad (5.3.1)$$

où les coefficients effectifs \tilde{C}'_{ij} , qui sont les composantes effectives associées au repère (x', y', z') de la cellule, sont déterminés en fonction des coefficients \tilde{C}_{ij} dans le repère (x, y, z) (Berthelot, 2010). On

notera par ailleurs que le plan moyen du stratifié est choisi comme étant le plan de référence ($Ox'y'$) et l'axe Oz' correspond à la direction suivant l'épaisseur (Figure 5-9b).

Vu que l'on souhaite que cette solution analytique nous serve à estimer les constantes élastiques planes du tissu constitué par les parois épaisses et multicouches, cela nous conduit à utiliser la théorie étendue de plaques stratifiées épaisses de Mindlin pour laquelle les cisaillements transverses sont pris en compte.

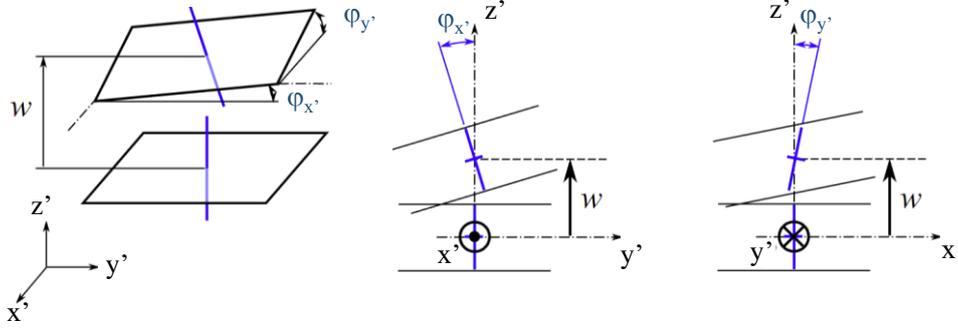


Figure 5-10 : Déplacement du feuillet moyen (gauche) et d'une fibre normale (droite).

Cette théorie suppose qu'un segment droit et perpendiculaire à la surface moyenne reste toujours rectiligne mais n'est plus perpendiculaire à la surface moyenne après déformation. De plus, cette hypothèse permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse. La théorie de Mindlin définit le champ de déplacement pour un stratifié de la façon suivante, (voir par exemple Berthelot, 2010) :

$$\begin{cases} u(x', y', z') = u_0(x', y', 0) + z\varphi_{x'}(x', y') \\ v(x', y', z') = v_0(x', y', 0) + z\varphi_{y'}(x', y') \\ w(x', y', z') = w_0(x', y', 0) \end{cases} \quad (5.3. 2)$$

où (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements d'un point quelconque M sur la surface moyenne ($x', y', z' = 0$), (u, v, w) sont les déplacements d'un point correspondant à M mais hors de la surface moyenne ($x', y', z' \neq 0$) et où $\varphi_{x'}, \varphi_{y'}$ sont les angles de rotation de la normale z' vers x' et y' , respectivement (voir Figure 5-10). On obtient alors le champ de déformation du stratifié suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u_0}{\partial x'} + z' \frac{\partial \varphi_{x'}}{\partial x'} \\ \varepsilon'_2 = \frac{\partial v}{\partial y'} = \frac{\partial v_0}{\partial y'} + z' \frac{\partial \varphi_{y'}}{\partial y'} \\ \varepsilon'_3 = \frac{\partial w}{\partial z'} = \frac{\partial w_0}{\partial z'} = 0 \\ \varepsilon'_4 = \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y'} = \varphi_{y'} + \frac{\partial w_0}{\partial y'} \\ \varepsilon'_5 = \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial x'} = \varphi_{x'} + \frac{\partial w_0}{\partial x'} \\ \varepsilon'_6 = \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y'} + \frac{\partial v_0}{\partial x'} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_{y'}}{\partial x'} \right) \end{cases} \quad (5.3. 3)$$

Ce champ de déformations est celui d'un schéma du premier degré avec prise en compte du cisaillement transverse. En utilisant les expressions (5.3. 1) et (5.3. 3), le champ local des contraintes dans la couche k du stratifié dans le repère (x', y', z') s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{C}'_{11} & \tilde{C}'_{12} & \tilde{C}'_{13} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{16} \\ \tilde{C}'_{21} & \tilde{C}'_{22} & \tilde{C}'_{23} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{26} \\ \tilde{C}'_{31} & \tilde{C}'_{32} & \tilde{C}'_{33} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{44} & \tilde{C}'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{54} & \tilde{C}'_{55} & 0 \\ \tilde{C}'_{61} & \tilde{C}'_{62} & \tilde{C}'_{63} & 0 & 0 & \tilde{C}'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} \quad (5.3.4)$$

Il est important de noter que la discontinuité de la matrice de rigidité $[\tilde{C}'_{ij}]_k$ d'une couche à l'autre du stratifié implique la discontinuité des contraintes $[\sigma'_i]_k$ au passage d'une couche à l'autre, contrairement au champ de déformations, la variation de ce dernier étant linéaire à travers l'épaisseur du stratifié. En effet, ce point a été vérifiée par l'hypothèse de Kirchhoff, dans laquelle la variation du champ de déformations à travers l'épaisseur du stratifié est linéaire, du fait que les déformations $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ et ε'_6 du stratifié ont la forme d'une ligne droite (Jones, 2018). Par conséquent, cette linéarité résulte de la continuité du champ de déformations $[\varepsilon'_i]$ d'une couche à l'autre du stratifié.

Afin de schématiser le comportement effectif du stratifié orthotrope dans cette partie, nous allons ramener le problème initial à 3 dimensions (x', y', z') à un problème à deux dimensions (x', y') de difficulté moindre. La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque. Cette intégration conduit à introduire des résultantes et des moments, qui s'exercent sur le stratifié, et qui seront discutés plus tard dans cette partie.

b) Simplification dans le cadre de la théorie des stratifiés

On applique la théorie élémentaire des plaques qui fait l'hypothèse que les contraintes normales σ'_3 sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6$. Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés de sorte que :

$$\sigma'_3 = 0 \quad (5.3.5)$$

En tenant compte de l'hypothèse précédente (5.3. 5), la relation contrainte – déformation par couche (5.3. 4), en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse, se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ \sigma'_6 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{C}'_{11} & \tilde{C}'_{12} & \tilde{C}'_{13} & \tilde{C}'_{16} & 0 & 0 \\ \tilde{C}'_{21} & \tilde{C}'_{22} & \tilde{C}'_{23} & \tilde{C}'_{26} & 0 & 0 \\ \tilde{C}'_{31} & \tilde{C}'_{32} & \tilde{C}'_{33} & \tilde{C}'_{36} & 0 & 0 \\ \tilde{C}'_{61} & \tilde{C}'_{62} & \tilde{C}'_{63} & \tilde{C}'_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{44} & \tilde{C}'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{54} & \tilde{C}'_{55} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_6 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

L'état des contraintes $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6)_k$ et des déformations $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_6)$ correspond à l'état de contraintes planes. En appliquant les résultats obtenus dans la partie 2.4.1 correspondant au cas de la restriction aux contraintes planes, les contraintes locales dans la couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité $(\tilde{Q}'_{ij})_k$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{Q}'_{11} & \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{16} & 0 & 0 \\ \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{22} & \tilde{Q}'_{26} & 0 & 0 \\ \tilde{Q}'_{16} & \tilde{Q}'_{26} & \tilde{Q}'_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{44} & \tilde{C}'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}'_{54} & \tilde{C}'_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{pmatrix} \quad (5.3. 7)$$

avec :

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{\tilde{C}'_{33}} (\tilde{C}'_{13}\varepsilon'_1 + \tilde{C}'_{23}\varepsilon'_2 + \tilde{C}'_{36}\varepsilon'_6)$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_{11} &= \tilde{C}'_{11} - \frac{(\tilde{C}'_{13})^2}{\tilde{C}'_{33}}; & \tilde{Q}'_{22} &= \tilde{C}'_{22} - \frac{(\tilde{C}'_{23})^2}{\tilde{C}'_{33}}; & \tilde{Q}'_{66} &= \tilde{C}'_{66}; \\ \tilde{Q}'_{12} = \tilde{Q}'_{21} &= \tilde{C}'_{12} - \frac{\tilde{C}'_{13}\tilde{C}'_{23}}{\tilde{C}'_{33}}; & \tilde{Q}'_{16} = \tilde{Q}'_{61} &= \tilde{C}'_{16} - \frac{\tilde{C}'_{13}\tilde{C}'_{63}}{\tilde{C}'_{33}}; & \tilde{Q}'_{26} = \tilde{Q}'_{62} &= \tilde{C}'_{26} - \frac{\tilde{C}'_{23}\tilde{C}'_{63}}{\tilde{C}'_{33}}; \end{aligned}$$

L'expression (5.3. 7) montre que le champ de contraintes dans la couche k peut être découpé en deux champs indépendants : le champ des contraintes planes ($\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6$) et celui des contraintes en cisaillement transverse (σ'_4, σ'_5).

c) Expression des résultantes et des moments pour le problème en contraintes planes

Dans cette partie, nous considérons la théorie classique des stratifiés et nous négligeons les contraintes en cisaillement transverse :

$$\sigma'_4 = \sigma'_5 = 0 \quad (5.3. 8)$$

De ce fait, la relation contrainte – déformation locale (5.3. 7) devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{Q}'_{11} & \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{16} \\ \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{22} & \tilde{Q}'_{26} \\ \tilde{Q}'_{16} & \tilde{Q}'_{26} & \tilde{Q}'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} \quad (5.3. 9)$$

Sous l'hypothèse (5.3. 8), le champ des déformations du stratifié (5.3. 3) pourra être caractérisée par des déformations en membrane ($\varepsilon'^0_1, \varepsilon'^0_2, \varepsilon'^0_6$) et des déformations en flexion (κ_1, κ_2) et torsion (κ_6). Ce dernier peut s'écrire sous la forme tensorielle suivant :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon'^0_1 \\ \varepsilon'^0_2 \\ \varepsilon'^0_6 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{pmatrix} \quad (5.3. 10)$$

$$\text{où } \varepsilon'^0_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x'}, \varepsilon'^0_2 = \frac{\partial v_0}{\partial y'}, \varepsilon'^0_6 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y'} + \frac{\partial v_0}{\partial x'} \right), \kappa_1 = \frac{\partial \varphi_{x'}}{\partial x'}, \kappa_2 = \frac{\partial \varphi_{y'}}{\partial y'}, \kappa_6 = \left(\frac{\partial \varphi_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_{y'}}{\partial x'} \right)$$

et où κ_i est appelée matrice des courbures du stratifié sollicité en flexion.

Cependant, afin d'approcher la structure réaliste du tissu, l'effet induit par des coins cellulaires doit être pris en compte. En fait, le coin cellulaire, comme observé sur la Figure 5-11, est une zone triangulaire de lamelle moyenne qui est considérée comme une jonction tri-cellulaire pour former des tissus. De

plus, il est intéressant de noter que Wimmer et Lucas (Wimmer and Lucas, 1997) ont étudié la relation entre le module d'indentation longitudinal et la dureté du coin cellulaire et de la couche S2 dans le bois d'épicéa, et ils ont trouvé que le coin cellulaire s'est révélé mécaniquement solide, avec des valeurs de dureté presque équivalentes à celles des parois secondaires. Par conséquent, il est possible qu'il n'y ait pas d'effet de position dans le coin cellulaire, c'est-à-dire les coins cellulaires restent rectilignes suivant la direction longitudinale.

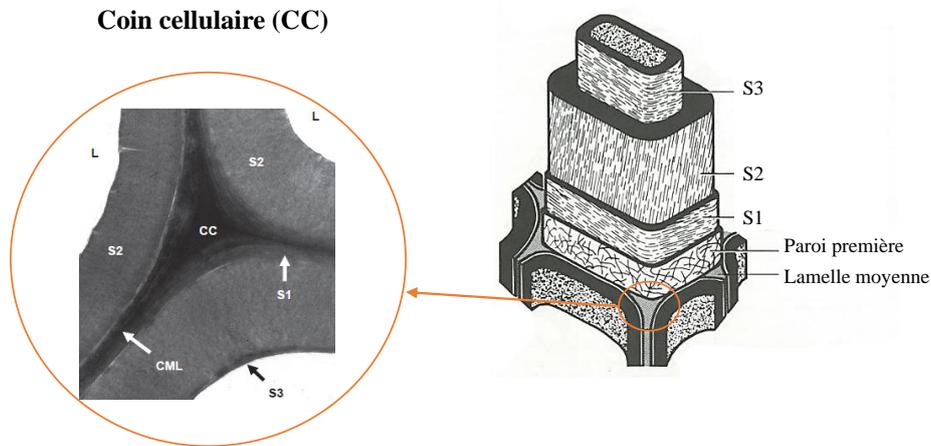


Figure 5-11 : Coupe transversale par microscopie électronique à transmission d'un matériau de référence de bois final d'épicéa de Norvège (*Picea abies*) dans la zone du coin cellulaire.

Afin que les coins cellulaires restent rectilignes dans la direction longitudinale, il est nécessaire d'annuler les composantes κ_1, κ_6 du problème local, qui correspondent respectivement à la déformation en flexion dans la direction longitudinale et à celle en torsion (voir Figure 5-12).

En tenant compte de la relation (5.3. 10) et des relations supplémentaires $\kappa_1 = \kappa_6 = 0$, la relation contrainte – déformation dans la couche k définie par les équations (5.3. 9) se réécrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{Q}'_{11} & \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{16} \\ \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{22} & \tilde{Q}'_{26} \\ \tilde{Q}'_{16} & \tilde{Q}'_{26} & \tilde{Q}'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon'^0_1 \\ \varepsilon'^0_2 \\ \varepsilon'^0_6 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} \tilde{Q}'_{11} & \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{16} \\ \tilde{Q}'_{12} & \tilde{Q}'_{22} & \tilde{Q}'_{26} \\ \tilde{Q}'_{16} & \tilde{Q}'_{26} & \tilde{Q}'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3. 11)$$

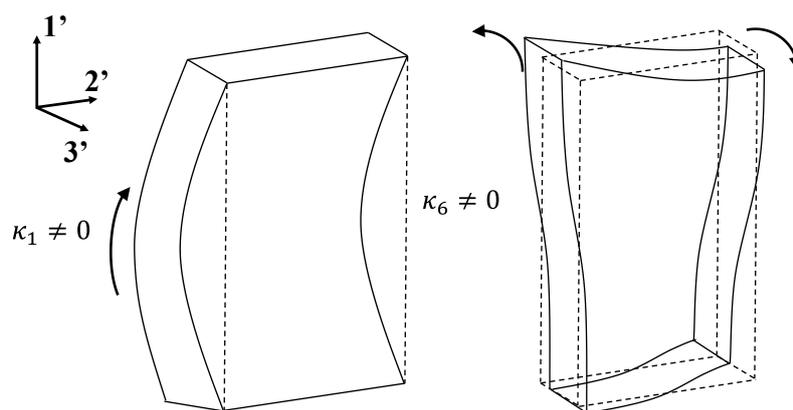


Figure 5-12 : schématisation des parois déformées sous les déformations correspondantes aux termes κ_1 et κ_6 .

❖ Détermination de l'équation constitutive de la paroi

Tout d'abord, on définit que les composantes $N_{1'}$, $N_{2'}$ et $N_{1'2'}$ sont les résultantes en membrane, par unité de longueur de stratifié, respectivement des contraintes normales suivant x' , suivant y' et des contraintes de cisaillement (Berthelot, 2010). Les composantes $M_{1'}$, $M_{2'}$ sont les moments de flexion

suivant les directions x' et y' , respectivement, et la composante $M_{1'2'}$ est le moment de torsion. Ensuite, la prise en compte de la discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre du stratifié nous permet de définir ces 6 composantes de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} N_{1'} \\ N_{2'} \\ N_{1'2'} \\ M_{1'} \\ M_{2'} \\ M_{1'2'} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^6 \int_{\text{couche } k} \begin{bmatrix} \sigma'_{1'} \\ \sigma'_{2'} \\ \sigma'_{6'} \end{bmatrix}_k dz' ; \quad \begin{bmatrix} M_{1'} \\ M_{2'} \\ M_{1'2'} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^6 \int_{\text{couche } k} z' \begin{bmatrix} \sigma'_{1'} \\ \sigma'_{2'} \\ \sigma'_{6'} \end{bmatrix}_k dz' \quad (5.3. 12)$$

Rappelons que notre stratifié de 6 couches est antisymétrique (Figure 5-9). En conséquence, l'équation constitutive qui exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations de membrane et des courbures pour ce stratifié antisymétrique devient (Berthelot, 2010):

$$\begin{pmatrix} N_{1'} \\ N_{2'} \\ N_{1'2'} \\ M_{1'} \\ M_{2'} \\ M_{1'2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 & 0 & 0 & \tilde{B}_{16} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & 0 & 0 & 0 & \tilde{B}_{26} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{66} & \tilde{B}_{16} & \tilde{B}_{26} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{16} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{26} & \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{22} & 0 \\ \tilde{B}_{16} & \tilde{B}_{26} & 0 & 0 & 0 & \tilde{D}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1'^0 \\ \varepsilon_2'^0 \\ \varepsilon_6'^0 \\ 0 \\ \kappa_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3. 13)$$

où les coefficients de rigidité effective \tilde{A}_{ij} , \tilde{B}_{ij} , \tilde{D}_{ij} de l'équation (5.3. 13), qui sont déterminés à partir des constantes de rigidité réduites des couches en introduisant l'épaisseur e_k et la cote z'_k du centre de la couche k , sont donnée par :

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=1}^6 (\tilde{Q}'_{ij})_k e_k ; \quad \tilde{B}_{ij} = \sum_{k=1}^6 (\tilde{Q}'_{ij})_k e_k z'_k ; \quad \tilde{D}_{ij} = \sum_{k=1}^6 (\tilde{Q}'_{ij})_k \left(e_k z_k'^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) ; \quad (5.3. 14)$$

On notera que : la matrice $[\tilde{A}_{ij}]$ est la matrice de rigidité en membrane, $[\tilde{D}_{ij}]$ est la matrice de rigidité en flexion et $[\tilde{B}_{ij}]$ la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Toutefois, comme les composantes des déformations κ_1 et κ_6 sont nulles, nous obtenons l'équation constitutive réduite suivante :

$$\begin{pmatrix} N_{1'} \\ N_{2'} \\ N_{1'2'} \\ M_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{66} & \tilde{B}_{26} \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{26} & \tilde{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1'^0 \\ \varepsilon_2'^0 \\ \varepsilon_6'^0 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (5.3. 15)$$

Par ailleurs, il est souvent utile d'exprimer le tenseur des complaisances élastiques effectives, qui est le tenseur inverse du tenseur des rigidités élastiques effectives. L'équation constitutive réduite inverse de l'équation (5.3. 15) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1'^0 \\ \varepsilon_2'^0 \\ \varepsilon_6'^0 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{m}_{12} & \tilde{m}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{n}_{66} & \tilde{n}_{26} \\ 0 & 0 & \tilde{n}_{26} & \tilde{n}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1'} \\ N_{2'} \\ N_{1'2'} \\ M_{2'} \end{pmatrix} \quad (5.3. 16)$$

où les complaisances \tilde{m}_{ij} sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{11} &= \frac{1}{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22} - (\tilde{A}_{12})^2} \tilde{A}_{22}; & \tilde{m}_{12} &= -\frac{1}{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22} - (\tilde{A}_{12})^2} \tilde{A}_{12}; & \tilde{m}_{22} &= \frac{1}{\tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22} - (\tilde{A}_{12})^2} \tilde{A}_{11}; \\ \tilde{n}_{22} &= \frac{1}{\tilde{A}_{66}\tilde{D}_{22} - (\tilde{B}_{26})^2} \tilde{D}_{22}; & \tilde{n}_{26} &= \frac{1}{\tilde{A}_{66}\tilde{D}_{22} - (\tilde{B}_{26})^2} \tilde{B}_{26}; & \tilde{n}_{66} &= \frac{1}{\tilde{A}_{66}\tilde{D}_{22} - (\tilde{B}_{26})^2} \tilde{D}_{22};\end{aligned}$$

❖ Modules d'Young du comportement en membrane et en flexion du stratifié

Nous allons dans cette section étudier le comportement de notre stratifié antisymétrique obtenu précédemment lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations. Dans un 1^{er} temps, le stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan qui ont été notées $N_{1'}$, $N_{2'}$ et $N_{1'2'}$ par unité d'envergure suivant la longueur du stratifié, il s'agit là d'effets dits de membrane. A partir de ces sollicitations, nous pouvons déterminer les modules élastiques apparents et les coefficients de couplage associés pour le comportement en membrane dans le plan x' , y' . Dans un 2^{ème} temps, nous examinerons le cas où les sollicitations entraînent une déformation du stratifié hors de son plan, pour lequel aux efforts de membrane $N_{1'}$, $N_{2'}$ et $N_{1'2'}$ viennent s'ajouter des moments $M_{1'}$, $M_{2'}$, $M_{1'2'}$ par unité d'envergure suivant la longueur du stratifié. Ce cas nous permet de déterminer les modules de flexion apparents et les coefficients de couplage associés pour le comportement en flexion dans le plan x' , y' .

Par rapport à notre cas d'étude, afin de déterminer les propriétés effectives planes du tissu, on considère uniquement les modules apparents correspondant aux sollicitations $N_{2'}$, $M_{2'}$. En effet, ces deux dernières correspondent à la direction du périmètre de la paroi (voir Figure 5-7b). Par conséquent, ces deux sollicitations $N_{2'}$, $M_{2'}$ vont nous permettre d'obtenir le module d'Young en membrane, que l'on appellera \bar{E}_a , et celui en flexion, que l'on dénommera, \bar{E}_b de la portion de paroi suivant la direction $\underline{2}'(y')$, respectivement (Watanabe et al., 1999).

Pour ce qui concerne le module d'Young en flexion \bar{E}_b , il a été calculé sur la base de la théorie symétrique des stratifiés en utilisant le modèle de paroi à double cellule (voir Figure 5-9). L'étude de flexion d'une plaque de Timoshenko (1968) a montré que : la rigidité est plus élevée pour la bande constituée d'éléments de plaque que pour la bande constituée d'éléments de poutre simple. En effet, l'expérience a montré que dans le cas de la flexion d'une plaque mince de très grande largeur, la distorsion de la section ne se produit qu'à proximité des bords et que la partie médiane de la bande fléchit suivant une forme cylindrique. Pour des faibles déformations de la barre considérée, constituée d'éléments de plaque, l'équation différentielle de la déformée s'écrit alors (Timoshenko, 1968) :

$$D \frac{d^2(x')}{d(y')^2} = -M \quad (5.3. 17)$$

où :

- $d^2(x')/d(y')^2$ est la valeur approchée de la courbure pour des faibles déformations de la plaque considérée ;
- D est la rigidité de flexion de la plaque ;
- M est le moment de flexion dans une section quelconque de la plaque.

Il est nécessaire de noter que l'étude de la flexion d'une plaque suivant une surface cylindrique comporte l'intégration de cette équation ci-dessus.

Considérons ainsi que les sollicitations $N_{1'}$, $N_{1'2'}$ indiquées dans l'équation (5.3. 16) sont nulles. Alors, l'équation constitutive inverse (5.3. 16) permet d'avoir ces relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_2' = \tilde{m}_{22} N_{2'} \\ \kappa_2 = \tilde{n}_{22} M_{2'} \end{cases}$$

A partir de là, on déduit les 2 modules d'Young en membrane \bar{E}_a et en flexion \bar{E}_b en prenant en compte les relations issues de l'équation (5.3. 12) par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_a = \frac{\sum_{k=1}^6 (\sigma'_{2'})_k}{\varepsilon'^0_2} = \frac{1}{\varepsilon'^0_2} \frac{N_{2'}}{\int_{-e_p/2}^{e_p/2} dz'} = \frac{N_{2'}}{\varepsilon'^0_2} \times \frac{1}{e_p} = \frac{1}{e_p \tilde{m}_{22}} \\ \bar{E}_b = \frac{\sum_{k=1}^6 (\sigma'_{2'})_k}{\kappa_2} \frac{1}{\int_{-e_p/2}^{e_p/2} z' dz'} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{M_{2'}}{\int_{-e_p/2}^{e_p/2} (z')^2 dz'} = \frac{M_{2'}}{\kappa_2} \times \frac{12}{e_p^3} = \frac{12}{e_p^3 \tilde{n}_{22}} \end{array} \right.$$

où e_p est l'épaisseur de la double paroi.

❖ Expression des résultantes pour le problème en cisaillement transverse

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse et nous considérons que seules les contraintes en cisaillement transverse (σ'_4, σ'_5) ne sont pas nulles. En accord avec la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on suppose que le champ des déformations est identique dans toutes les couches.

L'expression des contraintes locales issues de la relation (5.3. 7) se simplifie sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \tilde{C}'_{44} & \tilde{C}'_{45} \\ \tilde{C}'_{54} & \tilde{C}'_{55} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon'^0_4 \\ \varepsilon'^0_5 \end{pmatrix} \quad (5.3. 18)$$

L'équation constitutive du stratifié avec cisaillement transverse, qui fait intervenir les résultantes en cisaillement $\bar{Q}_{1'}$ et $\bar{Q}_{2'}$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} Q_{1'} \\ Q_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{44} & \tilde{F}_{45} \\ \tilde{F}_{45} & \tilde{F}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'^0_4 \\ \varepsilon'^0_5 \end{pmatrix} \quad (5.3. 19)$$

où

- les coefficients effectifs \tilde{F}_{ij} sont donnés par $\tilde{F}_{ij} = \sum_{k=1}^6 (\tilde{C}'_{ij})_k e_k$
- $Q_{1'}$ et $Q_{2'}$ sont respectivement les résultantes en cisaillement suivant les directions y' et x' , et sont définies, par unité de longueur du stratifié, selon la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} Q_{1'} \\ Q_{2'} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^6 \int_{\text{couche } k} \begin{bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{bmatrix}_k dz'$$

Ensuite, en déterminant le tenseur inverse du tenseur des rigidités élastiques effectives $[\tilde{F}_{ij}]$, l'équation constitutive inverse dans ce cadre d'étude s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'^0_4 \\ \varepsilon'^0_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{F}_{44}\tilde{F}_{55} - (\tilde{F}_{45})^2} \tilde{F}_{55} & -\frac{1}{\tilde{F}_{44}\tilde{F}_{55} - (\tilde{F}_{45})^2} \tilde{F}_{45} \\ -\frac{1}{\tilde{F}_{44}\tilde{F}_{55} - (\tilde{F}_{45})^2} \tilde{F}_{45} & \frac{1}{\tilde{F}_{44}\tilde{F}_{55} - (\tilde{F}_{45})^2} \tilde{F}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1'} \\ Q_{2'} \end{pmatrix} \quad (5.3. 20)$$

Par ailleurs, dans l'objectif de déterminer le comportement en cisaillement plan du tissu, et le module de cisaillement transversal \bar{G}_{TT} suivant la direction du périmètre de la paroi, on ne considère que la composante $Q_{1'}$ qui y correspond, la composante $Q_{2'}$, qui donne un cisaillement hors-plan, est supposée d'être nulle. Alors, l'équation constitutive inverse (5.3. 20) devient :

$$\varepsilon_4^{\prime 0} = \frac{1}{\tilde{F}_{44}\tilde{F}_{55} - (\tilde{F}_{45})^2} \tilde{F}_{55} Q_{2'} \quad (5.3. 21)$$

On tire le module de cisaillement transversal \bar{G}_{TT} du tissu de l'expression (5.3. 21) par la formule suivante :

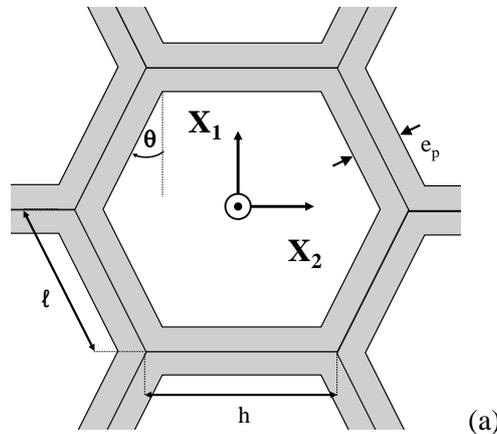
$$\bar{G}_{TT} = \frac{\sum_{k=1}^6 (\sigma'_4)_k}{\varepsilon_4^{\prime 0}} = \frac{1}{\varepsilon_4^{\prime 0}} \frac{Q_{2'}}{\int_{-e_p/2}^{e_p/2} dz'} = \frac{Q_{2'}}{\varepsilon_4^{\prime 0}} \times \frac{1}{e_p} = \frac{1}{e_p} \left(\tilde{F}_{44} - \frac{(\tilde{F}_{45})^2}{\tilde{F}_{55}} \right) \quad (5.3. 22)$$

5.3.2 Propriétés effectives planes du tissu

Dans cette partie, nous allons reprendre les calculs analytiques associés au modèle généralisé proposé par Gibson and Ashby (1988) qui incluent les déformations en cisaillement et l'extension axiale de la paroi. Toutefois, les raisonnements associés à son modèle, qui sont basés sur la théorie des poutres isotropes, seront étendus au cas des stratifiés orthotropes. Pour cela, les paramètres géométriques du modèle analytique que nous proposons seront ajustés à ceux issus du modèle de Gibson & Ashby (Figure 5-13a). Puis, nous analyserons la réponse du tissu sous chargements dans le plan (X_1 - X_2) en prenant en compte les propriétés effectives planes du stratifié. A cette fin, les quatre coefficients élastiques correspondant aux propriétés effectives planes du stratifié, les 2 modules d'Young effectifs en membrane \bar{E}_a et en flexion \bar{E}_b , le module de cisaillement transverse \bar{G}_{TT} et le coefficient effectif de Poisson $\bar{\nu}_{TT} = \left(\frac{\bar{E}_b}{2\bar{G}_{TT}} - 1 \right)$, seront utilisés au cours de la modélisation.

D'une part, pour ce qui concerne l'ajustement des paramètres géométriques du tissu de notre modèle, chaque paroi sera modélisée comme une barre représentant la double paroi d'épaisseur e_p , qui correspond à la valeur t du modèle de Gibson & Ashby. Par ailleurs, les 2 dimensions h , l indiquées sur la Figure 5-13a, qui sont respectivement la longueur des parois tangentielles, représentées par les barres parallèles à la direction X_2 , et celle des parois radiales, représentées par les barres inclinées, seront déterminées par l'angle de forme θ_{cell} et les diamètres tangentiel w_t et radial w_r issus de notre modèle tissulaire (voir Figure 5-2).

D'autre part, pour ce qui concerne la réponse linéaire élastique plane du tissu, nous allons déterminer sa déformation pour 3 chargements indépendants : l'un induit par une contrainte σ_1 parallèle à la direction X_1 , l'autre par une contrainte σ_2 parallèle à la direction X_2 et le dernier due à une contrainte de cisaillement τ , décrits respectivement sur les Figure 5-13b, c et d. Par ailleurs, il est noté que les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont positives en traction et négatives en compression.



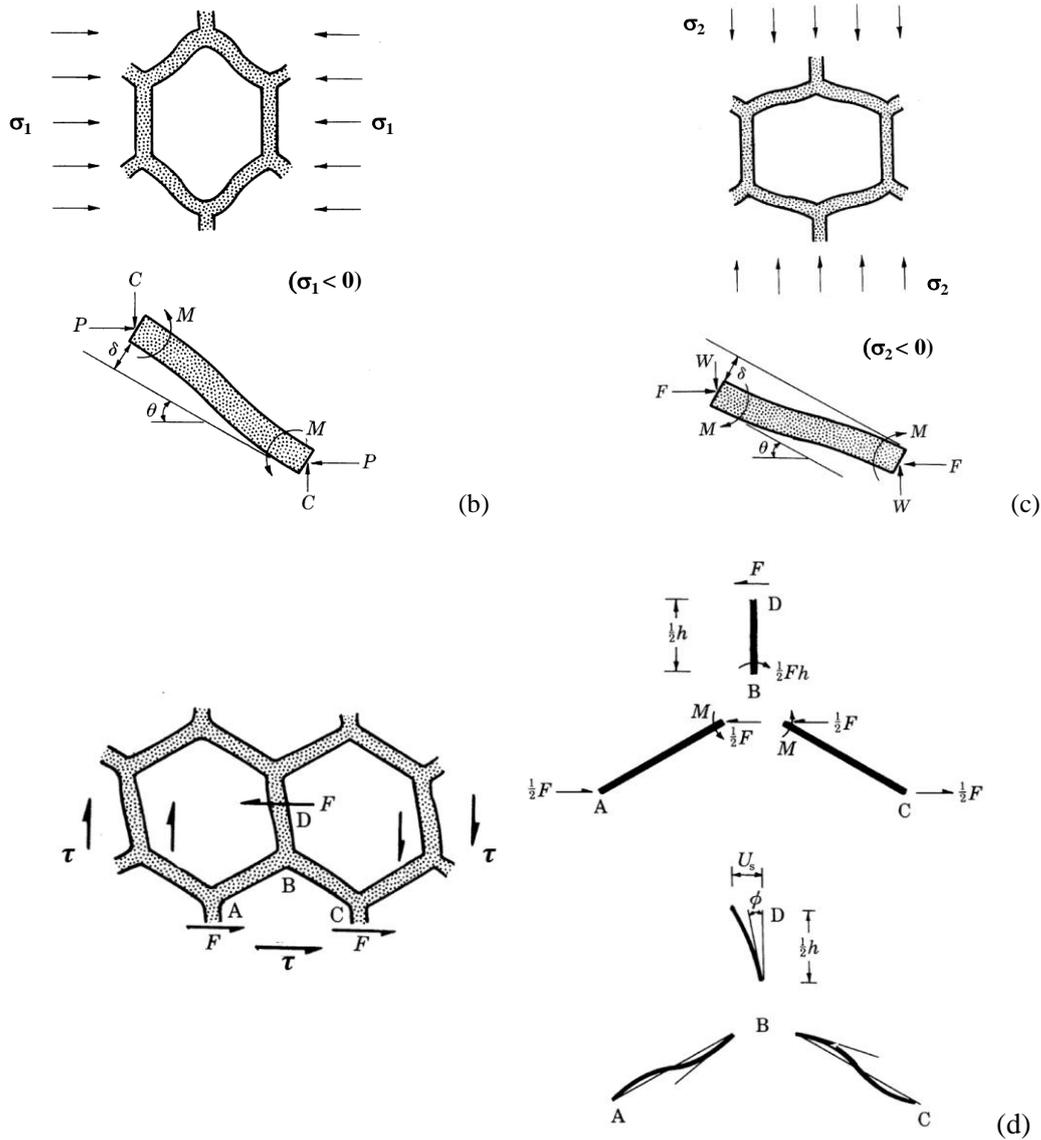


Figure 5-13 : Comportement élastique plan : (a) tissu non déformé ; (b) et (c) flexion provoquée par des charges de compression dans les directions X_1 et X_2 ; (d) déformation des cellules sous chargement de cisaillement.

a) Cas 1 : Chargement dans la direction X_1

Le premier cas du chargement correspondant à la contrainte σ_1 est illustré par la Figure 5-13b. L'équilibre de la barre de longueur l pour une largeur unité dans ce cas exige que :

$$C = 0; \quad P = \sigma_1(h + l\sin\theta); \quad M^{(1)} = \frac{1}{2}Pl\sin\theta; \quad (5.3. 23)$$

A partir de là, on peut déterminer σ_1 sous la formule suivante :

$$\sigma_1 = \frac{P}{(h + l\sin\theta)}; \quad (5.3. 24)$$

Lorsque le tissu est chargé dans la direction X_1 , les parois radiales se fléchissent à nouveau et toutes les parois se déforment également en raison des efforts normaux. Similairement au cas du chargement dans

la direction X_2 , la flèche induite par la déformation en cisaillement de parois radiales sera également prise en compte.

La flèche totale du tissu dans la direction X_1 s'écrit alors sous la forme :

$$\delta_1^{(1)} = \delta_b^{(1)} \sin\theta + \delta_{sh}^{(1)} \cos\theta + \delta_{aR}^{(1)} \cos\theta \quad (5.3. 25)$$

avec :

- $\delta_b^{(1)}$: la flèche due à la flexion des parois radiales

$$\delta_b^{(1)} = \frac{Pl^3 \sin\theta}{12\bar{E}_b I_p} \quad (5.3. 26)$$

- $\delta_{sh}^{(1)}$: la flèche provoquée par la déformation en cisaillement des parois inclinées (Timoshenko and Goodier, 1970).

$$\delta_{sh}^{(1)} = \frac{Pl^3 \sin\theta}{12\bar{E}_b I_p} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} \quad (5.3. 27)$$

- $\delta_{aR}^{(1)}$: la flèche induite par le chargement axial $P\cos\theta$ sur les parois radiales:

$$\delta_{aR}^{(1)} = \frac{Pl\cos\theta}{\bar{E}_a e_p} \quad (5.3. 28)$$

En remplaçant les expressions de $\delta_b^{(1)}$, $\delta_{sh}^{(1)}$ et $\delta_{aR}^{(1)}$ dans la formule (5.3. 25), on obtient la flèche totale dans la direction radiale selon :

$$\delta_1^{(1)} = \frac{Pl^3 \sin^2\theta}{12I_p} \left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \cot^2\theta \frac{e_p^2}{l^2} \right] \quad (5.3. 29)$$

Alors, la déformation totale du tissu dans la direction X_1 , définie par:

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{\delta_1^{(1)}}{l\cos\theta} \quad (5.3. 30)$$

permet d'obtenir le module d'Young effectif du tissu dans la direction X_1 , \bar{E}_R^{ana} selon la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}_R^{ana}} &= \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{(h + l\sin\theta)}{Pl\cos\theta} \delta_1^{(1)} \\ &= \frac{1}{\bar{E}_b} \left(\frac{l}{e_p} \right)^3 \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right) \sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\bar{E}_a} \left(\frac{l}{e_p} \right) \left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right) \cos\theta + \frac{1}{\bar{E}_b} \left(\frac{l}{e_p} \right) \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right) \sin^2\theta}{\cos\theta} [2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}] \end{aligned}$$

Afin de déterminer le coefficient de Poisson effectif $\bar{\nu}_{RT}^{ana}$, il est nécessaire de calculer la déformation du tissu dans la direction X_2 qui s'écrit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2^{(1)} &= -\frac{\delta_2^{(1)}}{h + l\sin\theta} = -\frac{(\delta_b^{(1)}\cos\theta + \delta_{sh}^{(1)}\cos\theta - \delta_{aR}^{(1)}\sin\theta)}{h + l\sin\theta} \\ &= \frac{-Pl^3\sin\theta\cos\theta}{12I_p(h + l\sin\theta)} \left(\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2} \right)\end{aligned}\quad (5.3. 31)$$

Le coefficient de Poisson effectif $\bar{\nu}_{RT}^{ana}$ s'obtient alors par la formule suivante :

$$\bar{\nu}_{RT}^{ana} = -\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}} = \frac{\cos^2\theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta\right)\sin\theta} \frac{\left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2}\right]}{\left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \tan^2\theta \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{2(h/l)}{\cos^2\theta} \frac{e_p^2}{l^2}\right]}$$

b) Cas 2 : Chargement dans la direction X_2

Déterminons les composantes de forces F , W et de moment M qui concernent le 1^{er} cas de cette étude (Figure 5-13c), la déformation linéaire-élastique du nid d'abeilles soumis à une contrainte σ_2 parallèle à la direction \underline{X}_2 . Par l'équilibre de la barre de longueur l pour une largeur unité, on l'obtient alors:

$$F^{(2)} = 0; \quad W = \sigma_2 l \cos\theta; \quad M^{(2)} = \frac{1}{2} W l \cos\theta; \quad (5.3. 32)$$

qui nous permet d'obtenir :

$$\sigma_2 = \frac{W}{l \cos\theta}; \quad (5.3. 33)$$

Lorsque le tissu est chargé dans la direction tangentielle, seules les parois radiales du tissu (voir Figure 5-13c) qui sont représentées par les barres inclinées se fléchissent, tandis que toutes les parois du tissu se déforment en raison des efforts normaux, $W\sin\theta$ pour les parois radiales et W pour les parois tangentielles. On notera de plus que nous prendrons en compte la flèche induite par la déformation en cisaillement des parois radiales. En se basant sur les analyses de Gibson & Ashby (1997) menées en théorie des poutres planes, la flèche totale du tissu dans la direction T est donnée par :

$$\delta_2^{(2)} = \delta_b^{(2)}\cos\theta + \delta_{sh}^{(2)}\cos\theta + \delta_{aR}^{(2)}\sin\theta + \delta_{aT}^{(2)} \quad (5.3. 34)$$

avec:

- $\delta_b^{(2)}$: la flèche due à la flexion des parois radiales.

$$\delta_b^{(2)} = \frac{Wl^3\cos\theta}{12\bar{E}_b I} \quad (5.3. 35)$$

- $\delta_{sh}^{(2)}$: la flèche due à la déformation en cisaillement induite par le fléchissement des parois radiales (Timoshenko and Goodier, 1970)

$$\delta_{sh}^{(2)} = \frac{Wl^3\cos\theta}{12\bar{E}_b I} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} \quad (5.3. 36)$$

- $\delta_{aR}^{(2)}$: la flèche due à l'effort normal pour les parois radiales

$$\delta_{aR}^{(2)} = \frac{Wl \sin \theta}{\bar{E}_a e_p} \quad (5.3. 37)$$

- $\delta_{aT}^{(2)}$: la flèche due à l'effort normal pour les parois tangentielles illustrées par les barres parallèles à la direction X_2 (voir Figure 5-13a)

$$\delta_{aT}^{(2)} = \frac{2Wh}{\bar{E}_a e_p} \quad (5.3. 38)$$

On notera que pour les flèches liées à la flexion, nous avons utilisé le module d'Young \bar{E}_b à la place du module d'Young E_s des formules de Gibson et Ashby (Gibson and Ashby, 1988) et de Timoshenko et Goodier (Timoshenko and Goodier, 1970) établies pour des poutres isotropes, pour tenir compte de l'orthotropie plane du comportement des parois. En utilisant les formules (5.3. 35), (5.3. 36), (5.3. 37) et (5.3. 38), la flèche totale associée à l'équation (5.3. 34) s'écrit :

$$\delta_2^{(2)} = \frac{Wl^3 \cos^2 \theta}{12I_p} \left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{v}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \tan^2 \theta \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{2(h/l)}{\cos^2 \theta} \frac{e_p^2}{l^2} \right] \quad (5.3. 39)$$

Par ailleurs, la déformation du tissu dans la direction X_2 est définie par :

$$\varepsilon_2^{(2)} = \frac{\delta_2^{(2)}}{h + l \sin \theta} \quad (5.3. 40)$$

ce qui nous permet d'obtenir le module d'Young effectif du tissu dans la direction tangentielle \tilde{E}_T^{ana} à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{E}_T^{ana}} &= \frac{\varepsilon_2^{(2)}}{\sigma_2} = \frac{l \cos \theta}{W(h + l \sin \theta)} \delta_2^{(2)} \\ &= \frac{1}{\bar{E}_b} \left(\frac{l}{e_p} \right)^3 \frac{\cos^3 \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)} + \frac{1}{\bar{E}_a} \left(\frac{l}{e_p} \right) \frac{\cos \theta \left(2 \frac{h}{l} + \sin^2 \theta \right)}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)} + \frac{1}{\bar{E}_b} \left(\frac{l}{t} \right) \frac{\cos^3 \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)} [2.4 + 1.5\bar{v}_{TT}] \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer le coefficient de Poisson effectif du tissu $\tilde{\nu}_{RT}^{ana}$ qui est défini par le ratio négatif des déformations normales et parallèles à la direction de la charge selon la formule suivante

$$\tilde{\nu}_{TR}^{ana} = - \frac{\varepsilon_1^{(2)}}{\varepsilon_2^{(2)}} \quad (5.3. 41)$$

où $\varepsilon_1^{(2)}$, qui est la déformation du tissu dans la direction X_1 , s'obtient selon la formule suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(2)} &= - \frac{\delta_1^{(2)}}{l \cos \theta} = - \frac{\left(\delta_b^{(2)} \sin \theta + \delta_{sh}^{(2)} \sin \theta - \delta_{aR}^{(2)} \cos \theta \right)}{l \cos \theta} \\ &= - \frac{Wl^2 \sin \theta}{12I_p} \left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{v}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2} \right] \end{aligned} \quad (5.3. 42)$$

En remplaçant les 2 déformations $\varepsilon_1^{(2)}$ et $\varepsilon_2^{(2)}$ dans l'équation (5.3. 41), on obtient :

$$\tilde{\nu}_{TR}^{ana} = \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta\right) \sin\theta}{\cos^2\theta} \frac{\left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2}\right]}{\left[\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \tan^2\theta \frac{e_p^2}{l^2} + \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{2(h/l) e_p^2}{\cos^2\theta l^2}\right]}$$

On valide par ailleurs les équations obtenues des 4 constantes élastiques planes \tilde{E}_R^{ana} , \tilde{E}_T^{ana} et $\tilde{\nu}_{RT}^{ana}$, $\tilde{\nu}_{TR}^{ana}$ en montrant la relation suivant :

$$\tilde{\nu}_{RT}^{ana} \frac{1}{\tilde{E}_R^{ana}} = \tilde{\nu}_{TR}^{ana} \frac{1}{\tilde{E}_T^{ana}} \quad (5.3. 43)$$

qui est un des trois conditions permettant d'exprimer un comportement élastique orthotrope du bois dans le repère (L, R, T). On a donc :

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_{RT}^{ana} \frac{1}{\tilde{E}_R^{ana}} = -\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\sigma_1} = \left[\frac{-l^3 \sin\theta \cos\theta}{12I_p} \left(\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2} \right) \right] \\ \tilde{\nu}_{TR}^{ana} \frac{1}{\tilde{E}_T^{ana}} = -\frac{\varepsilon_1^{(2)}}{\sigma_2} = \left[\frac{-l^3 \sin\theta \cos\theta}{12I_p} \left(\frac{1}{\bar{E}_b} + \frac{1}{\bar{E}_b} (2.4 + 1.5\bar{\nu}_{TT}) \frac{e_p^2}{l^2} - \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{e_p^2}{l^2} \right) \right] \end{cases}$$

Vu que l'équation (5.3. 43) est vérifiée, les équations développées sont validées.

c) Cas 3 : Chargement en cisaillement dans le plan transverse X_1X_2

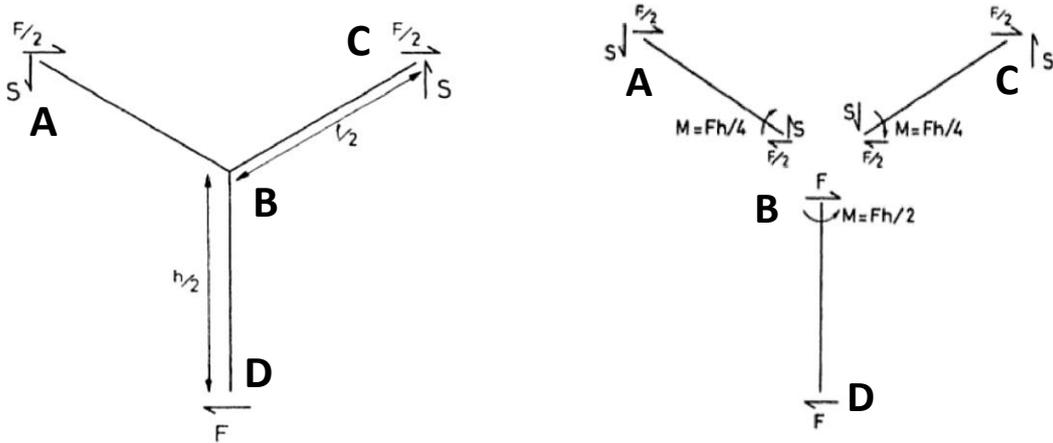


Figure 5-14 : (a) forces agissant sur la cellule unitaire en cisaillement ; (b) équilibre de la cellule unitaire en cisaillement.

Les paramètres permettant le calcul du module de cisaillement plan effectif du tissu \tilde{G}_{RT}^{ana} sont présentés sur la Figure 5-13d. Selon l'étude de Gibson & Ashby, en raison de la symétrie il n'y a pas de mouvement relatif des points A, B et C lorsque le nid d'abeille est cisailé, la flèche en cisaillement de la structure est entièrement due à la flexion de la poutre BD et à une rotation par l'angle ϕ autour du point B en supposant qu'il n'y ait pas de déplacement des points A, C par rapport au point B même si toutes les articulations tournent d'un angle ϕ (voir Figure 5-13d). Par l'équilibre de la cellule unitaire en cisaillement les forces F , S et le moment M indiquées sur la Figure 5-14a, b sont les suivantes :

$$F^{(3)} = \frac{\tau}{2l \cos\theta} ; \quad S = \frac{\tau}{(h + l \sin\theta)} ; \quad M^{(3)} = \frac{1}{4} F^{(3)} h \quad (5.3. 44)$$

où τ est le chargement en cisaillement, illustré sur la Figure 5-13d.

D'après Gibson & Ashby, le glissement total du tissu sous un chargement en cisaillement τ est donné par :

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_l \quad (5.3. 45)$$

avec :

- γ_h : le glissement des parois tangentielles qui est provoquée par la flèche horizontale u_s du point D par rapport au point B (Figure 5-13d) incluant ainsi la déformation en cisaillement causée par les parois radiales.

$$\gamma_h = \frac{u_s}{(h + l \sin \theta)} = \frac{F h^2}{24 \bar{E}_b I_p} \left[1 + 2 \frac{h}{l} + \frac{2}{h} (2.4 + 1.5 \bar{\nu}_{TT}) \left(\frac{e_p}{l} \right)^2 \right] \frac{1}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \quad (5.3. 46)$$

- γ_l : le glissement des parois radiales

$$\gamma_l = \frac{2(u_{SS}^{axial} + u_{SS}^{shear})}{l \cos \theta} \quad (5.3. 47)$$

où

$$u_{SS}^{axial} = \frac{F h^2}{48 \bar{E}_a I_p} \left(\frac{e_p}{h} \right)^2 [(h + l \sin \theta) \tan \theta + l \cos \theta] \sin \theta \quad (5.3. 48)$$

$$u_{SS}^{shear} = \frac{F h^2}{48 \bar{E}_b I_p} \frac{1}{\left(\frac{h}{l} \right)} (2.4 + 1.5 \bar{\nu}_{TT}) \left(\frac{e_p}{l} \right)^2 \cos \theta \quad (5.3. 49)$$

qui correspondent respectivement à la flèche axiale due à l'effort normal et à celle en cisaillement (Timoshenko and Goodier, 1970) induite par le fléchissement des parois inclinées.

En remplaçant les expressions (5.3. 48) et (5.3. 49) dans l'expression (5.3. 47) de γ_l , on obtient :

$$\gamma_l = \frac{F h^2}{24 I_p} \left(\frac{e_p}{h} \right)^2 \frac{1}{\frac{h}{l} + \sin \theta} \left\{ \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{1}{\left(\frac{h}{l} \right)^2} \left[\left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right) \tan^2 \theta + \sin \theta \right] \left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right) + \frac{1}{\bar{E}_b} \frac{1}{\left(\frac{h}{l} \right)} (2.4 + 1.5 \bar{\nu}_{TT}) \left(\frac{h}{l} + \sin \theta \right) \right\} \quad (5.3. 50)$$

Le module de cisaillement effectif du tissu dans le plan transverse \tilde{G}_{RT}^{ana} , qui est défini par le ratio du glissement sur la contrainte de cisaillement τ , i.e.

$$\frac{1}{\tilde{G}_{RT}^{ana}} = \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\gamma}{F/(2l \cos \theta)} = \frac{\gamma_h + \gamma_l}{F/(2l \cos \theta)}$$

est ainsi obtenu par la formule suivante:

$$\frac{1}{\tilde{G}_{RT}^{ana}} = \frac{1}{\bar{E}_b} \left(\frac{l}{e_p} \right)^3 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\cos\theta \left(1 + 2 \frac{h}{l} \right)}{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right)} + \frac{1}{\bar{E}_b} \frac{h}{l} \cos\theta \left(\frac{l}{e_p} \right) [2,4 + 1,5\bar{v}_{TT}] \left(2 + \frac{h}{l} \sin\theta \right) + \frac{1}{\bar{E}_a} \frac{\cos\theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right)} \left(\frac{l}{e_p} \right) \left[\left(\left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right) \tan\theta \right)^2 + \left(\frac{h}{l} + \sin\theta \right) \sin\theta \right]$$

5.3.3 Comparaison entre solutions numérique et analytique

Dans cette partie, nous comparerons les résultats des modules élastiques effectifs associés au modèle analytique développé à ceux issus de la procédure d'homogénéisation pour le modèle OS défini en 5.2, dans le but d'évaluer la précision de la solution analytique. Pour cela, nous allons tracer les évolutions des constantes élastiques effectives planes du tissu en fonction soit de l'angle de forme de la cellule θ_{cell} , soit de la densité relative μ . A cette fin, nous utiliserons dans toutes les comparaisons effectuées dans cette partie les paramètres matériaux associés à la microstructure OS pour les 3 couches S1, S2 et S3, définies dans le Tableau 5-3.

a) Variation des modules effectifs en fonction de l'angle de la cellule θ_{cell}

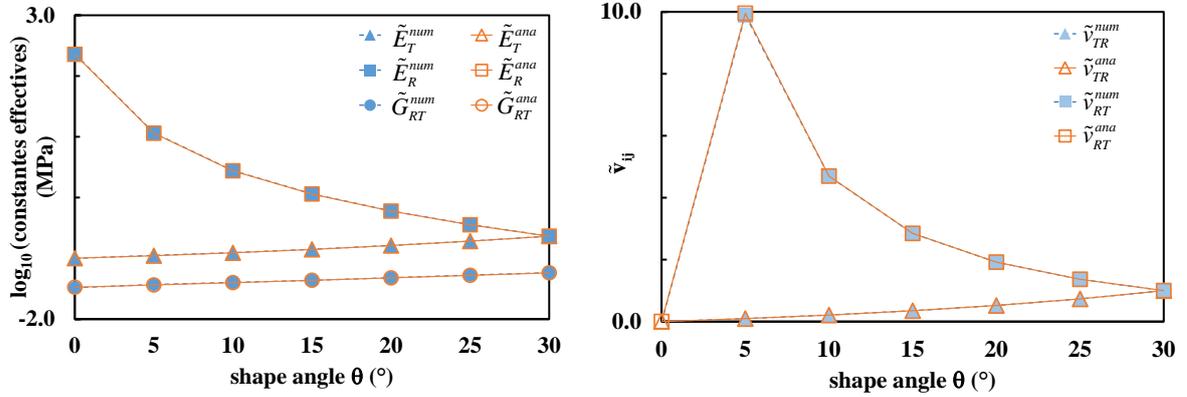


Figure 5-15 : Evolution des propriétés effectives planes en fonction de l'angle de cellule θ_{cell}

$$\left(h = l; \frac{e_p}{l} = \frac{1}{100} \right).$$

La Figure 5-15 illustre l'ensemble des résultats obtenus par les 2 approches numériques et analytiques et fournit l'évolution des cinq constantes élastiques effectives planes en fonctions de l'angle de la cellule. Pour cela, on affecte la même valeur aux longueurs h et l , on fixe l'éclatement e_p/l à la valeur de 1/100, ce qui correspond au cas d'une paroi mince. Pour plus de précision, nous avons également reporté l'écart relatif $\left(\frac{\tilde{x}_i^{num} - \tilde{x}_i^{ana}}{\tilde{x}_i^{num}} \right)$ associé à chaque constante élastique effective dans le Tableau 5-5.

Tableau 5-5 : ensemble des écarts relatifs des propriétés élastiques effectives planes en fonction de l'angle θ_{cell}

θ_{cell} (°)	écart relatif				
	$\Delta\tilde{E}_R/\tilde{E}_R^{num}$ (%)	$\Delta\tilde{E}_T/\tilde{E}_T^{num}$ (%)	$\Delta\tilde{G}_{RT}/\tilde{G}_{RT}^{num}$ (%)	$\Delta\tilde{\nu}_{RT}/\tilde{\nu}_{RT}^{num}$ (%)	$\Delta\tilde{\nu}_{TR}/\tilde{\nu}_{TR}^{num}$ (%)
0.00	3.136	-1.564	-1.708	0.000	0.000
5.00	4.430	-4.405	-3.884	0.013	0.113
10.00	3.597	-3.600	-3.523	0.011	0.024
15.00	3.345	-3.353	-3.383	0.007	0.008
20.00	3.840	-3.843	-3.899	0.005	0.003
25.00	3.785	-3.787	-3.743	0.005	0.003
30.00	3.363	-3.370	-3.504	0.004	0.004

En se basant sur le Tableau 5-5, on constate que les résultats analytiques sont très proches de la solution numérique dans le cas de la paroi mince ($e_p/l = 1/100$). Ce cas n'est pas néanmoins discriminant. En effet, pour des parois minces, les déformations proviennent principalement de la flexion de la paroi. En conséquence, la bonne correspondance (moins de 5%) pour ce cas ne permet pas de montrer l'efficacité de la solution analytique pour déterminer le comportement des nids d'abeilles composés de parois cellulaires orthotropes et multicouches. Ce point devra être discuté dans la partie suivante où l'on considérera le cas de parois plus épaisses.

b) Variation de la densité relative μ

Afin d'évaluer la solution analytique dans le cas de parois plus épaisses où la déformation en cisaillement est plus significative, nous présentons en Figure 5-16 l'évolution des propriétés effectives planes du tissu en fonction de la densité relative (définie par la formule (5.1. 1)) pour deux approches. Pour définir la géométrie du tissu, nous considérons à nouveau que les longueurs h et l sont égales et que la valeur de l'angle θ_{cell} correspond à 15° .

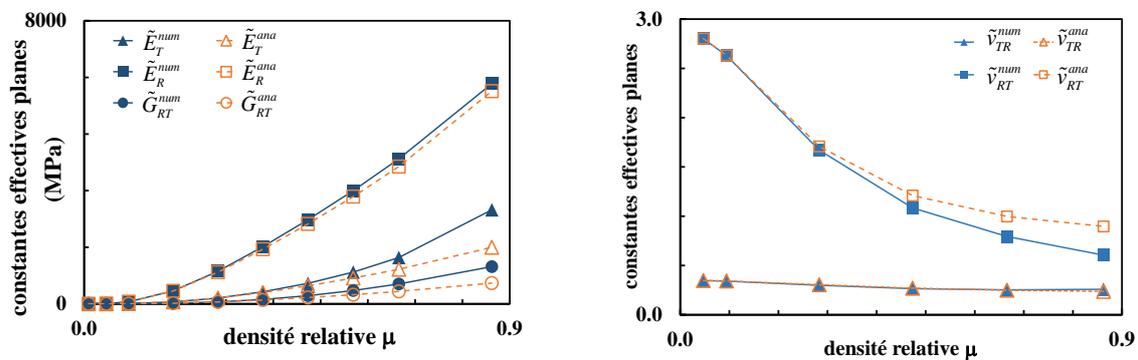


Figure 5-16 : Evolution des 5 constantes élastiques effectives planes pour les 2 approches analytique et numérique en fonction de la densité relative μ ($h = l$, $\theta_{\text{cell}} = 15^\circ$).

Rappelons tout d'abord que l'approche numérique fournit la solution de référence du problème. La Figure 5-16 montre que l'approche analytique pour des densités relatives inférieures à 0.5 fournit une estimation satisfaisante du comportement effectif plan du tissu.

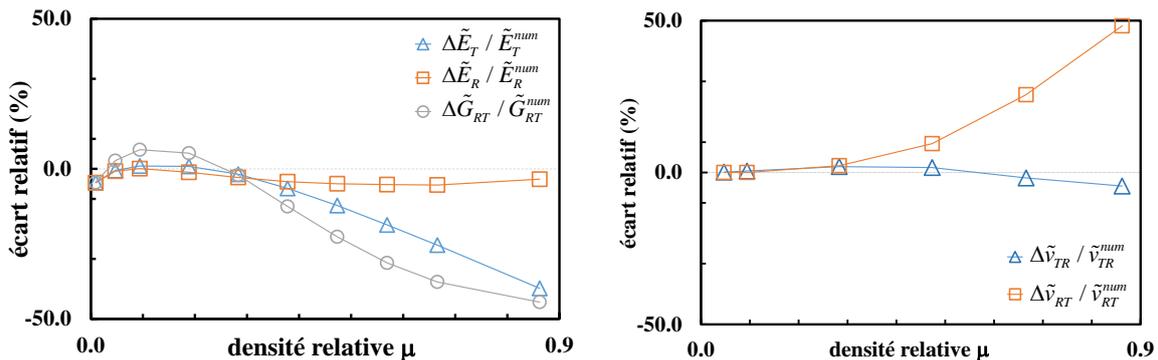


Figure 5-17 : écarts relatifs pour des constantes élastiques effectives planes entre les 2 approches en fonction de la densité relative.

Afin d'évaluer plus précisément l'approche analytique, nous avons tracé en la Figure 5-17 l'évolution des écarts relatifs $\left(\frac{\tilde{x}_i^{\text{ana}} - \tilde{x}_i^{\text{num}}}{\tilde{x}_i^{\text{num}}}\right)$ en fonction de la densité relative. Cette figure montre que

- les deux approches sont très proches l'une de l'autre (moins de 5% d'écart) pour le module \tilde{E}_R et le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{TR}$ pour toutes les valeurs de μ .

- les 2 modèles commencent à diverger significativement lorsque $\mu \geq 0.4$ pour ce qui concerne les 2 modules \tilde{E}_T et \tilde{G}_{RT} et le coefficient de Poisson $\tilde{\nu}_{RT}$, même si la solution analytique décrit qualitativement l'évolution de la solution de référence (Figure 5-16).

Ainsi, la solution analytique développée, qui permet d'évaluer les propriétés élastiques effectives planes du tissu constitué de parois orthotropes fournit une bonne approximation de la solution numérique « exacte » pour la microstructure OS évaluée par éléments finis pour les tissus du bois initial ($\mu \leq 0.4$) mais pas pour ceux du bois final ($\mu \geq 0.4$).

Chapitre 6 : Influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique du tissu

Ce chapitre se focalise sur l'analyse du comportement hygro-élastique effectif du tissu par application de la procédure d'homogénéisation numérique décrite précédemment aux deux microstructures tissulaires définies au chapitre 5, modèles de bois initial BI et de bois final BF. L'objectif général de cette section consiste à analyser les effets induits par les ondulations des fibrilles sur le comportement macroscopique du tissu. Pour cela, nous comparerons le comportement hygro-élastique du tissu obtenu pour la microstructure 2S à celui obtenu pour la microstructure 0S, que l'on considère comme solution de référence. A cette intention, nous réalisons des études paramétriques pour lesquelles la procédure d'homogénéisation numérique décrite au chapitre 5 sera utilisée pour déterminer les composantes élastiques effectives \tilde{C}_{ij} et les coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_{ij}$ en faisant varier le paramètre de forme $r_\phi = L_1/L_2$ caractérisant l'amplitude des oscillations des fibrilles à l'échelle de la paroi cellulaire. De plus, le comportement hygro-élastique effectif du tissu sera également obtenu pour différentes valeurs de la densité relative μ sur les deux types de tissus considérés dans notre étude (bois initial et bois final).

Pour ce qui concerne les paramètres caractérisant la géométrie de la paroi cellulaire comme nous l'avons précisé, nous ne ferons varier que le facteur de forme r_ϕ en gardant constant et égal à leur valeur de référence les autres paramètres tels que :

- la valeur du ratio r_λ associée au modèle 0S - le ratio entre le volume de la couche lamellaire sur le volume de la couche lenticulaire de la matrice - est fixée à 1.0 pour les comparaisons entre les modèle 0S et 2S ;
- les valeurs de la concentration volumique c des fibrilles utilisées pour chaque couche correspondent à celles données par le Tableau 5-1. On notera que les fractions volumiques c associées à chaque couche ne changent pas quand on fait varier la densité relative μ ;

Enfin, pour ce qui concerne la variation de la densité relative μ du tissu, celle-ci sera générée uniquement en faisant varier l'épaisseur de la couche S2, tout en gardant constantes les épaisseurs des couche S1 et S3. En effet, ces dernières qui sont représentées par deux valeurs t_{s1} et t_{s3} indiquées dans le Tableau 5-1 ont été supposées d'être constantes pour deux types du tissu.

6.1 Influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés élastiques des tissus

Dans cette partie, nous avons réalisé deux études paramétriques en vue d'analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur les composantes de la rigidité \tilde{C}_{ij} du tissu pour les deux modèles BI et BF : une pour laquelle l'analyse est réalisé pour du bois sec et une autre pour le cas du bois chaud et humide.

6.1.1 Analyse pour différentes densités du tissu

a) Bois initial

Dans un 1^{er} temps, nous avons reporté sur la Figure 6-1 l'évolution des 9 rigidités effectives caractérisant le comportement orthotrope en fonction de la densité relative. En réalité, les valeurs de la densité relative dans cette partie sont déterminées par l'équation (5.1. 1) en utilisant les paramètres géométriques associés au bois initial. Comme on fait varier uniquement l'épaisseur de la couche S2, celle-ci sera définie par la valeur $m.t_{s2}$ pour laquelle t_{s2} correspond à la valeur de référence de l'épaisseur de la couche S2 pour le bois initial indiquée dans le Tableau 5-1, et m un paramètre dont la valeur varie entre 0.25 et 2. Le Tableau 6-1 indique les densités relatives correspondant aux différentes valeurs de m considérées.

Tableau 6-1 : l'ensemble des valeurs de la densité relative du bois initial avec la variation de m

m	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
Densité relative (μ)	0.0784	0.1124	0.1457	0.1784	0.2105	0.2419	0.2728	0.3029

Sur la Figure 6-1, nous avons également présenté l'évolution des modules effectifs du tissu en fonction de la densité relative pour le modèle 0S et pour 4 valeurs différentes r_ϕ^i ($i = 1, \dots, 4$) du rapport de forme pour le modèle 2S. Par ailleurs, on notera que la valeur de référence de la densité relative du bois initial est égale à 0.1784.

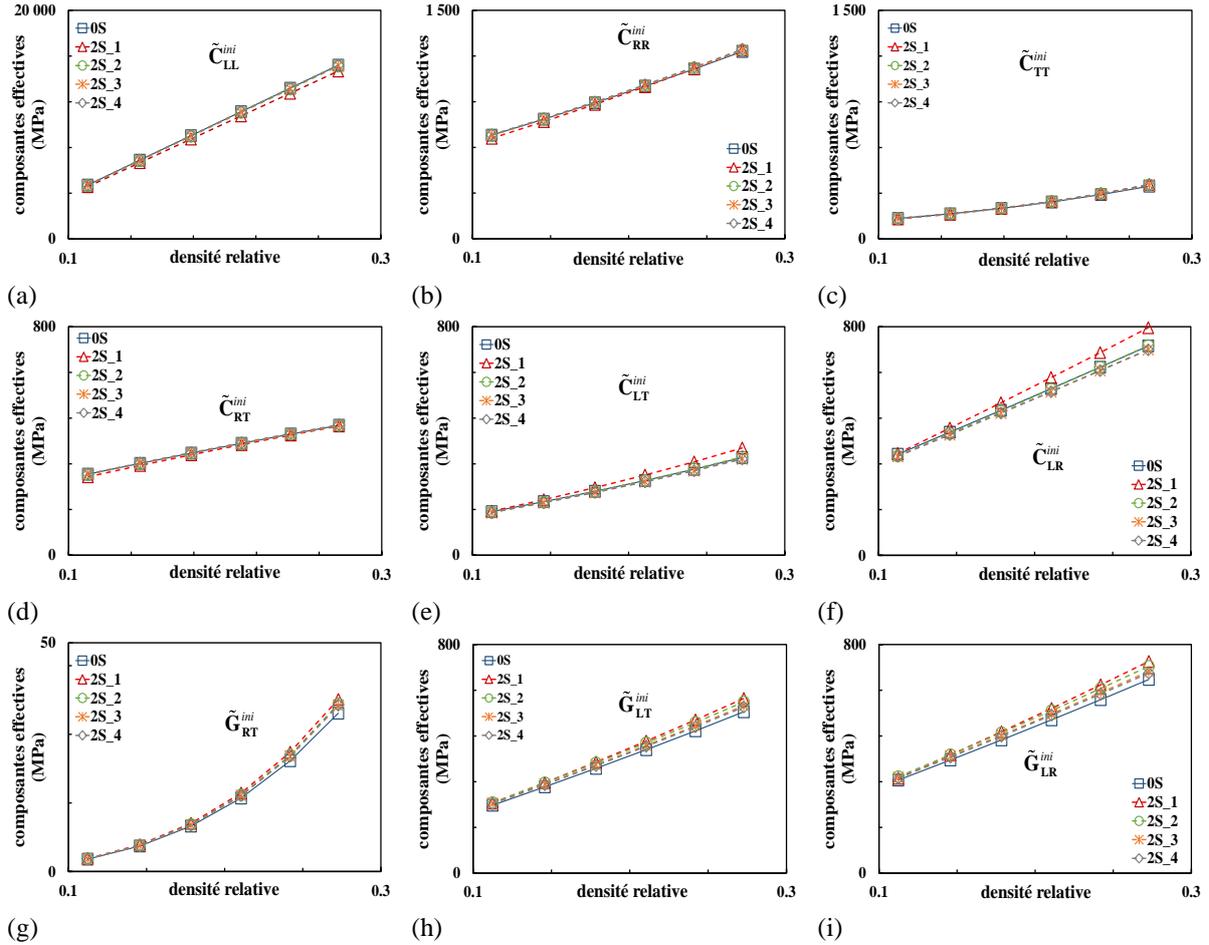


Figure 6-1: évolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} des modèles 0S et 2S en fonction de la densité relative associée au modèle BI pour 4 valeurs de r_ϕ .

$$(2S_1, r_\phi = 3.75 ; 2S_2, r_\phi = 7.50 ; 2S_3, r_\phi = 15.00 ; 2S_4, r_\phi = 30.00)$$

L'ensemble de ces comparaisons montre que toutes les composantes augmentent avec la croissance de la densité relative du bois, pour des AMFs maintenus à leurs valeurs de référence dans toutes les couches (rappel : S1, 70° ; S2, 15° ; S3, 70° voir partie 5.2.2). On observe que les ondulations des fibrilles n'ont quasiment aucune influence sur les composantes $\tilde{C}_{LL}, \tilde{C}_{RR}, \tilde{C}_{TT}$, très peu sur les composantes $\tilde{C}_{RT}, \tilde{C}_{LT}, \tilde{C}_{LR}$ pour r_ϕ supérieur ou égal à sa valeur de référence 7.50. Par contre, les 3 autres composantes $\tilde{G}_{RT}, \tilde{G}_{LT}$ et \tilde{G}_{LR} sont influencées de manière significative par les contacts et ondulations des microfibrilles. Contrairement à l'orthotropie quadratique observée à l'échelle de la paroi cellulaire pour le modèle 2S, cette dernière a disparu à l'échelle du tissu où l'on observe $\tilde{G}_{LR} < \tilde{G}_{LT}$.

Afin d'évaluer plus précisément ces influences, nous présentons en Figure 6-2 l'évolution des écarts relatifs entre modèles 0S et 2S, définis par $\text{écart}^{ini} = \left(\frac{\tilde{x}^{2S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}} \right)$ pour les 3 composantes les plus influencées, à savoir \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LT} , \tilde{G}_{LR} , en fonction de r_ϕ pour 3 valeurs différentes de la densité relative du bois initial : dens_2 = 0.1125 ; dens_4 = 0.1784 ; dens_6 = 0.2419 (voir sur le Tableau 6-1).

Sur la Figure 6-2, on observe que les écarts reportés pour chacune des 3 composantes sont tous relativement faibles (moins de 10%) pour la valeur de $r_\phi = 3.75$ correspondant aux oscillations les plus prononcées. Ces derniers résultats étaient prévisibles dans une certaine mesure. En effet, ils peuvent s'expliquer par l'interaction des couches de deux cellules voisines (schéma du stratifié antisymétrique Figure 5-9) qui compensent l'absence d'interaction entre les fibrilles dans le modèle 0S. Par ailleurs, on constate que les composantes \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} et \tilde{G}_{LT} associées au modèle 2S sont toujours légèrement plus élevées que celles du modèle 0S et qu'elles convergent pour r_ϕ croissant vers une limite différente des composantes du modèle 0S. Ces observations permettent de constater à nouveau que la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles ondulées continue à jouer un rôle sur le comportement effectif même pour r_ϕ élevé, contrairement aux effets induits par l'orientation des fibrilles et le contact inter-fibrillaire qui disparaissent quand r_ϕ devient grand.

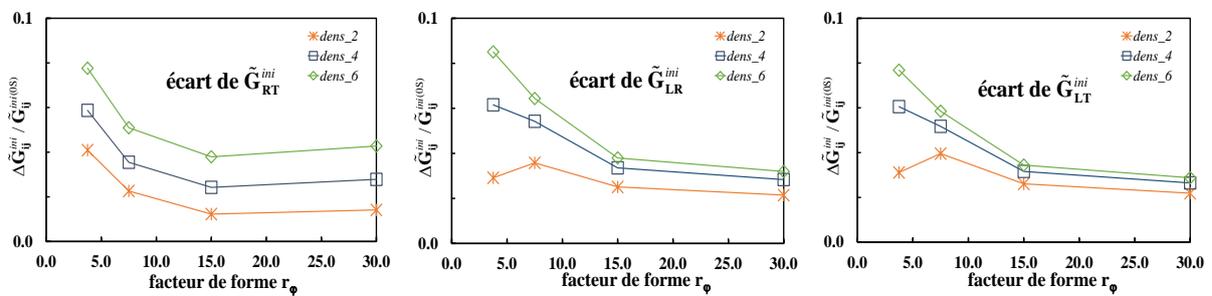


Figure 6-2 : Evolution des écarts relatifs de \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} et \tilde{G}_{LT} pour les modèles 0S et 2S en fonction de r_ϕ pour différentes valeurs de μ du bois initial.

b) Bois final

Nous avons constaté que l'effet des ondulations des fibrilles n'est pas encore très prononcé (moins de 10% pour tous les écarts) dans le cas du bois initial qui correspond à une faible densité. Afin de mettre en évidence un effet plus prononcé, nous allons étudier son influence dans le cas de tissus plus denses. Pour cela, nous allons à nouveau analyser sur la Figure 6-3 le comportement effectif du tissu en présentant l'évolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la densité relative pour le cas du bois final. Pour faire varier la densité relative du bois final, on utilise à nouveau l'épaisseur mt_{S2} de la couche S2 précédemment définie dans la formule (5.1. 1). On utilise également pour cela les données géométriques issues du Tableau 5-1 correspondant au bois final de sorte que l'on obtient le Tableau 6-2 fournissant les valeurs de la densité relative pour différentes valeurs du paramètre m . On notera que la valeur de référence de la densité relative pour le bois final vaut 0.5456.

Tableau 6-2 : évolution des valeurs de la densité relative du bois final en fonction de m

m	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
Densité relative μ	0.1971	0.3239	0.4400	0.5456	0.6406	0.7251	0.7989	0.8621

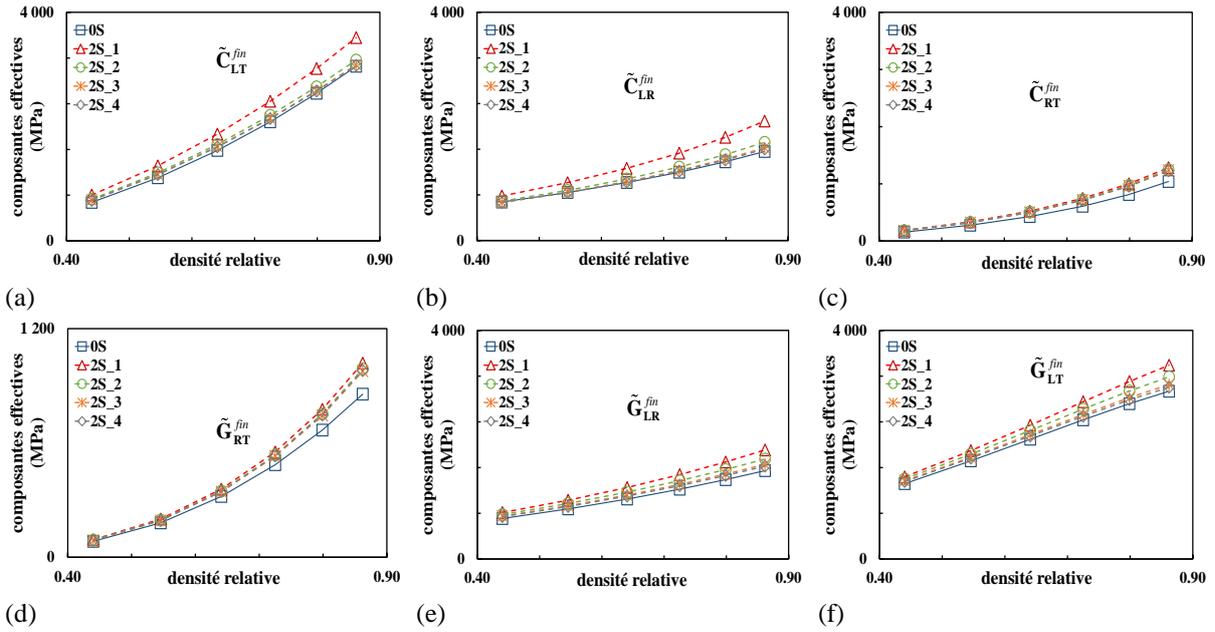


Figure 6-3 : Evolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la densité relative pour le modèle BF avec les données différentes associées aux modèles 0S et 2S.

A nouveau, les comparaisons sont effectuées pour les 4 valeurs de r_ϕ utilisées en Figure 6-1 dans le cas du modèle 2S. Seules les composantes effectives influencées par les ondulations des fibrilles ont été reportées. On observe que l'effet induit par des ondulations des fibrilles est très faible pour les composantes \tilde{C}_{LT} , \tilde{C}_{LR} pour $r_\phi \geq 7.50$. Pour \tilde{C}_{RT} , \tilde{G}_{RT} , on observe dans le cas du modèle 2S des rigidités de plus en plus élevées par rapport au modèle 0S, au fur et à mesure que la densité relative μ croît. Ainsi, l'influence des oscillations et du renforcement apporté par le contact latéral des fibrilles du modèle 2S devient de plus en plus significatif quand l'épaisseur de la paroi S2 croît. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà constaté pour le bois initial, des ondulations des fibrilles ont également le plus d'effet sur les composantes \tilde{G}_{LR} , \tilde{G}_{LT} dans le cas du bois final.

Afin d'évaluer de manière plus précise l'importance des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif du tissu, nous avons reporté sur la Figure 6-4 les écarts relatifs définis par $\text{écart}^{fin} = \left(\frac{\tilde{x}^{2S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}} \right)$ entre les modèles 0S et 2S pour les 3 composantes \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} , \tilde{G}_{LT} les plus influencées par ces ondulations. Les évolutions de ces écarts relatifs écart^{fin} sont présentées en fonction de r_ϕ pour différentes valeurs de la densité relative caractérisant le bois final (Tableau 6-2).

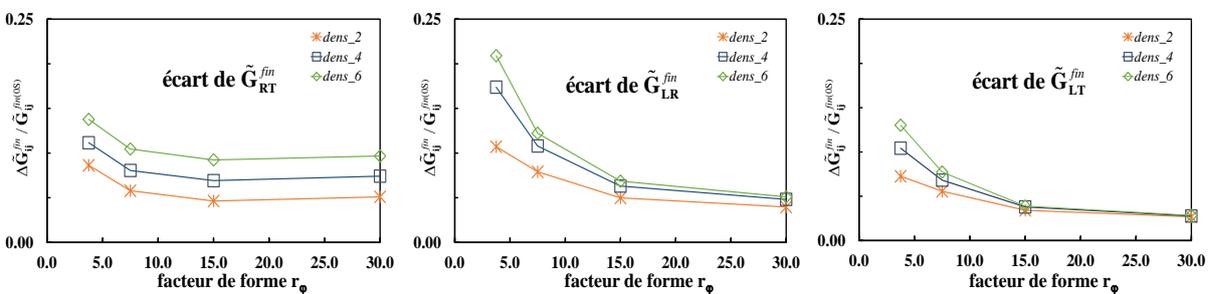


Figure 6-4 : Evaluation des écarts relatifs pour 3 composantes effectives \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} , \tilde{G}_{LT} en fonction de r_ϕ pour 3 densités relatives du bois final : $\text{dens}_2 = 0.3239$, $\text{dens}_4 = 0.5456$ et $\text{dens}_6 = 0.7251$.

On observe les mêmes évolutions que dans le cas du bois initial (Figure 6-2). Cependant des effets induits par les ondulations des fibrilles sont nettement plus importants dans le cas du bois final que celui

du bois initial avec un écart maximum de 21% pour le bois final par rapport à 8% pour le bois initial. Ainsi, nous avons montré que dans le cas de fortes densités (bois final), les effets des ondulations des fibrilles sont significatifs pour les coefficients \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} et \tilde{G}_{LT} .

6.1.2 Effet du ramollissement de la matrice

Au chapitre 2 de la partie I, nous avons étudié l'influence des oscillations des fibrilles sur le comportement effectif de la paroi pour un bois chaud et humide, pour lequel la matrice est fortement ramollie du fait que la température de transition vitreuse de la lignine est dépassée. Dans cette section, nous continuons à étudier l'effet du ramollissement de la matrice mais cette-fois ci à l'échelle du tissu. A cette intention, nous présentons pour une microstructure correspondant aux tissus du bois final sur la Figure 6-5 l'évolution des 9 composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la densité relative du tissu. Ces évolutions sont à nouveau effectuées pour 4 valeurs de r_ϕ (3.75; 7.50; 15.00 et 30.00) dans le cas du modèle 2S. Afin de simuler les propriétés d'un bois chaud et humide nous avons choisi un contraste $E_L^F/E^M = 10^3$, ce qui correspond à une valeur du module d'Young de la matrice fixée à $E^M = 0.138$ MPa.

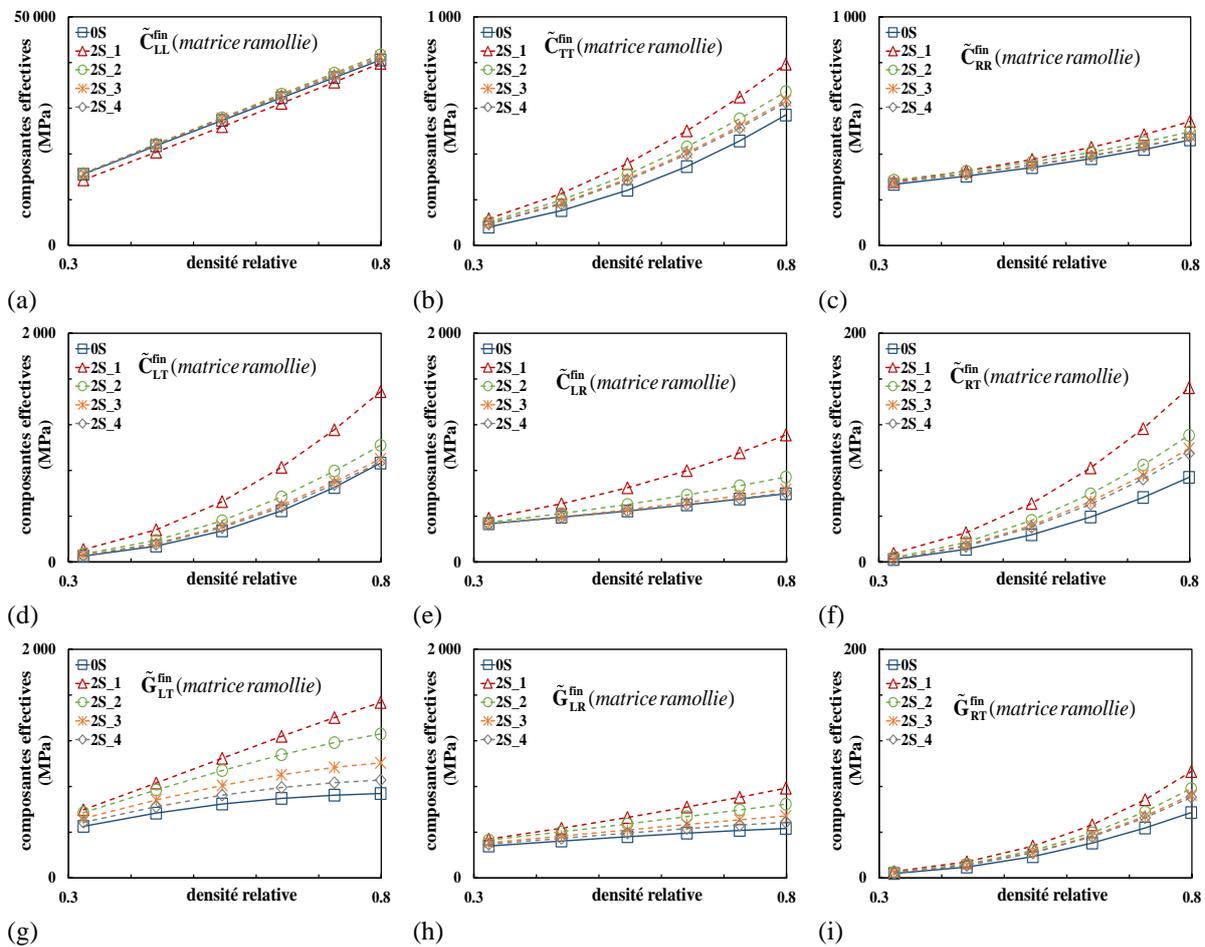


Figure 6-5 : Evolution des composantes effectives d'un tissu correspondant à la microstructure BF en fonction de la densité relative pour une matrice ramollie ($E^M = 0.138$ MPa).

On observe un effet significatif des ondulations des fibrilles pour toutes les composantes effectives à l'exception de la composante \tilde{C}_{LL} . Cet effet est par ailleurs nettement plus important que pour le bois sec. On pouvait s'attendre à une telle constatation. En effet, dans le cas d'une matrice ramollie, le comportement du tissu est principalement dû au réseau fibrillaire qui est gouverné essentiellement par la géométrie de ses fibrilles.

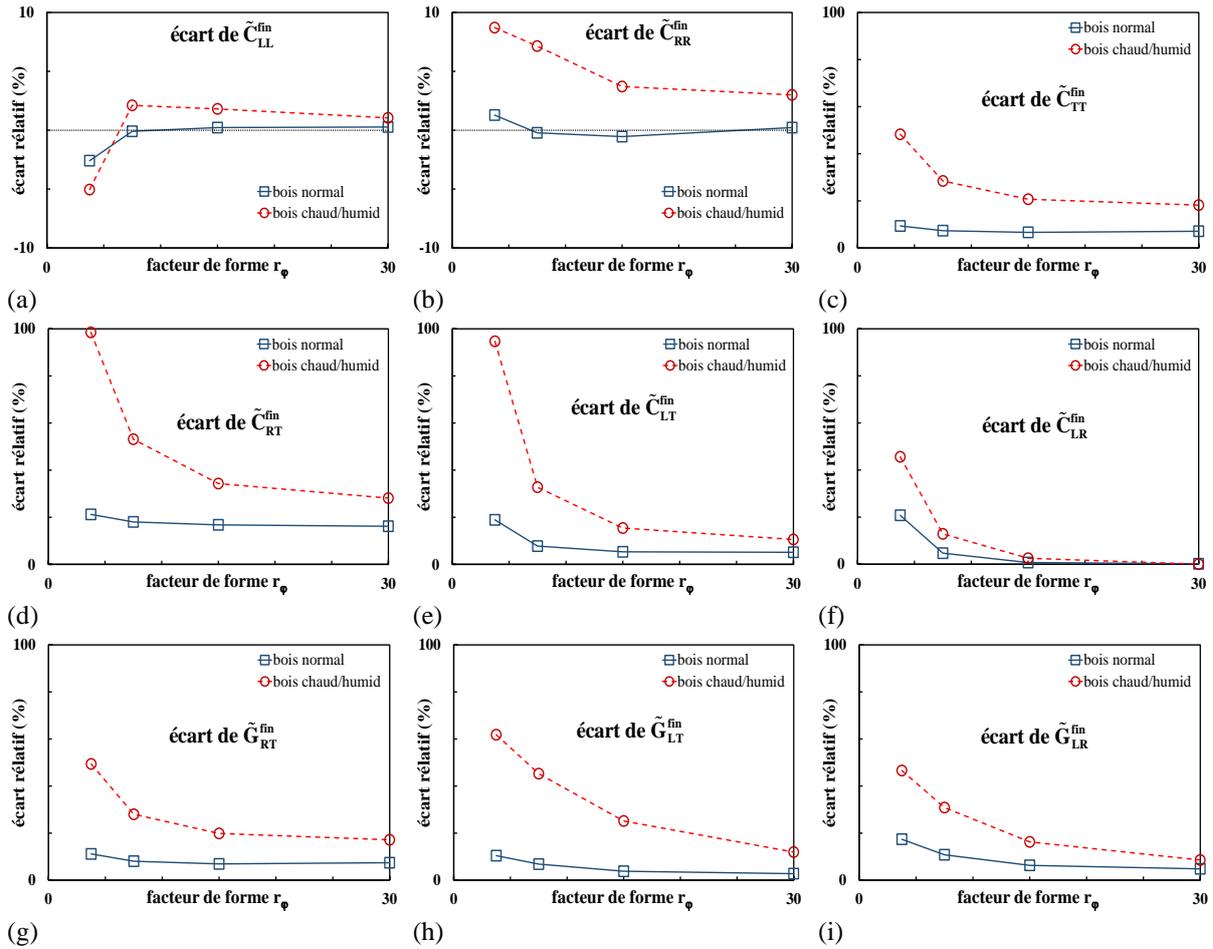


Figure 6-6 : Comparaison des écarts relatifs entre deux cas bois sec et bois chaud/humide en fonction de r_ϕ pour la valeur de référence de la densité relative du bois final.

Nous avons également reporté sur la Figure 6-6 les évolutions en fonction du facteur de forme r_ϕ des écarts relatifs entre les modèles 0S et 2S des composantes effectives du tissu pour une densité relative correspondant à la valeur de référence du bois final ($\mu = 0.5456$) afin de comparer les résultats obtenus pour du bois sec à ceux du bois chaud et humide.

Ces courbes confirment l'influence très significative des ondulations des fibrilles sur le bois chaud et humide. Ces dernières ne peuvent en aucun cas être négligées. La situation du bois sec est plus contrastée. En effet, quand le bois est sec, nous avons vu que l'influence des ondulations des fibrilles reste faible pour du bois initial mais commence à devenir significative pour du bois final de forte densité relative.

6.2 Influence des ondulations sur les propriétés hydriques effectives des tissus

Cette partie vise à analyser pour les 2 modèles de bois BI et BF l'influence des ondulations des fibrilles induite par chaque coefficient local expansion α^M , α_L^F , α_{TT}^F , sur les propriétés hydriques des tissus représentées par les trois coefficients d'hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_L$, $\tilde{\alpha}_R$, $\tilde{\alpha}_R$.

Afin de mieux pouvoir interpréter les courbes présentant l'évolution des trois coefficients d'hygro-expansion effectifs des tissus en fonction de la densité relative du bois, nous rappelons que les principales observations existent dans la littérature pour du bois sec (Schulgasser and Witzum, 2015), à savoir : (1) dans le bois normal, le gonflement (ou retrait) longitudinal est presque tout le temps négligeable ; (2) le gonflement (ou retrait) tangentiel est presque toujours plus important que le

gonflement (ou retrait) radial et ces deux expansions sont significatives ; (3) le bois plus dense se gonfle (ou se rétracte) généralement plus que le bois moins dense.

6.2.1 Effet du gonflement de la matrice

Dans cette partie, nous analysons uniquement les effets induits par le gonflement de la matrice pour une valeur de α^M fixée à $\alpha^M \neq 0$ ($\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$), cette dernière étant par ailleurs arbitraire. Nous présentons sur la Figure 6-7, les évolutions des propriétés hydriques effectives normalisées $\tilde{\alpha}_i/\alpha^M$ ($i = L, R, T$) du tissu en fonction de la densité relative pour les modèles 0S et 2S dans les cas du bois initial et du bois final. Pour le modèle 2S, ces comparaisons sont effectuées pour 4 valeurs de r_ϕ (3.75 ; 7.50 ; 15.00 ; 30.00) utilisées dans des comparaisons précédentes (la nomenclature 2S_1 correspondant à la valeur $r_\phi = 3.75$ pour le modèle 2S, etc.).

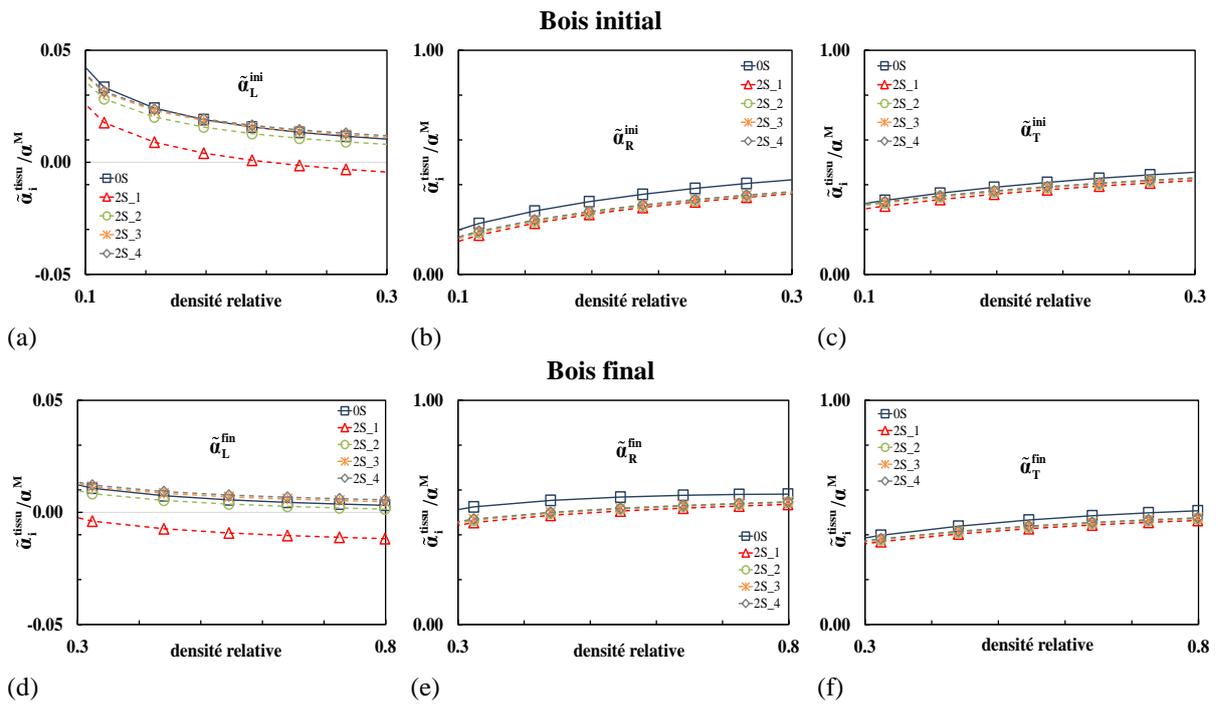


Figure 6-7 : Evolution des propriétés hydriques effectives normalisées $\tilde{\alpha}_i/\alpha^M$ en fonction de la densité relative pour les modèles 0S et 2S ($\alpha^M \neq 0, \alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$).

Sur la Figure 6-7, on observe que le comportement hydrique du tissu pour les 2 modèles de bois BI et BF satisfait les propriétés (1) et (3) mentionnées ci-dessus. En revanche, la 2^{ème} propriété n'est pas vérifiée, car $\tilde{\alpha}_R$ est presque tout le temps supérieur à $\tilde{\alpha}_T$. De plus, les coefficients d'hygro-expansion $\tilde{\alpha}_R$ et $\tilde{\alpha}_T$ sont proches les uns des autres de sorte que l'anisotropie dans le plan transverse (R, T) reste faible.

Afin de tenter d'expliquer la différence observée entre nos résultats et ceux décrits dans la littérature pour la propriété (2), nous pouvons avancer les 2 arguments suivants. Comme les faits proposés sont exprimés essentiellement pour le bois à l'échelle macroscopique, il est donc nécessaire de prendre en compte l'effet restrictif des rayons ligneux pour l'expansion radiale et celui de l'alternance de bois initial et de bois final dans le sens radial dans chaque cerne de croissance. La propriété (2) concerne le bois à l'échelle macroscopique et non uniquement le tissu cellulaire. Dans notre modèle, contrairement à la constitution du bois macroscopique, les rayons ligneux génèrent probablement une restriction vis-à-vis de l'expansion radiale, abaissant ainsi la valeur de $\tilde{\alpha}_R$. De plus, il est nécessaire d'étudier l'effet induit par une alternance de bois initial et final dans le sens radial de cerne. Concernant ce dernier, selon l'étude expérimentale de Pentoney (1953) sur l'influence de l'interaction entre le bois initial et le bois final pour

du sapin de Douglas, il a mesuré les retraits tangentiel et radial du bois initial et du bois final pris isolément puis les a comparés à ceux obtenus pour le bois sec ayant les deux types de tissus attachés (Pentoney, 1953). Les résultats obtenus montrent que le bois initial, lorsqu'il est attaché au bois final, est forcé de se contracter tangentiellement de la même manière que le bois final, i.e. $\tilde{\alpha}_T$ du cerne < $\tilde{\alpha}_T$ du tissu. De plus, il semble également que le retrait radial du bois initial soit réduit lorsqu'il est attaché au bois final, i.e. $\tilde{\alpha}_R$ du cerne < $\tilde{\alpha}_R$ du tissu. Enfin, Pentoney a observé également que le bois initial isolé se rétracte moins que le bois final isolé dans les deux directions, en conformité avec la Figure 6-7.

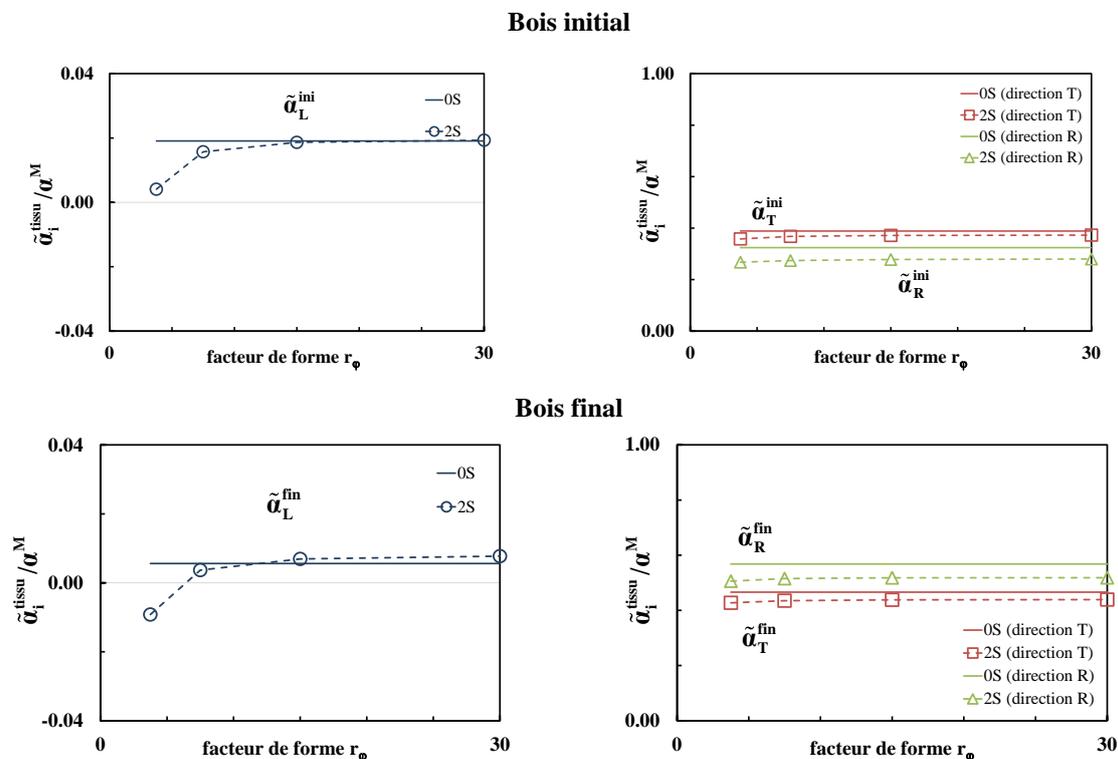


Figure 6-8 : Evolution des trois coefficients d'hygro-expansion effectifs du tissu en fonction de r_ϕ pour les deux modèles 0S et 2S pour 2 types différents du tissu ($\alpha^M \neq 0$, $\alpha_L^F = \alpha_{TT}^F = 0$).

Après avoir constaté que les résultats portant sur les coefficients d'hygro-expansion effectifs issus des deux modèles BI et BF permettent de décrire d'une manière cohérente l'expansion hydrique des tissus telle qu'elle est décrite par des résultats expérimentaux, nous allons maintenant analyser les effets induits par des ondulations des fibrilles sur le comportement hygroscopique du tissu. Pour cela, nous avons reporté sur la Figure 6-8 les évolutions des coefficients d'expansion normalisés du tissu $\tilde{\alpha}_i / \alpha^M$ ($i = L, R, T$) en fonction de r_ϕ pour les modèles 0S et 2S et pour les 2 morphologies différentes du tissu (BI et BF). De plus, ces comparaisons sont réalisées à partir des valeurs de référence de la densité relative de chaque tissu, $\mu = 0.1784$ pour le bois initial et $\mu = 0.5456$ pour le bois final.

En se référant aux résultats obtenus sur les courbes donnant $\tilde{\alpha}_L / \alpha^M$, on constate à nouveau que les valeurs associées aux modèles 0S et 2S sont très proches les unes des autres dans les deux cas du bois initial et du bois final pour $r_\phi \geq 7.50$, montrant ainsi qu'elles ne sont pas affectées par l'ondulation des fibrilles. Par ailleurs, pour ce qui concerne les observations concernant les coefficients d'hygro-expansion effectifs du plan transverse (RT), on observe que les valeurs de $\tilde{\alpha}_R, \tilde{\alpha}_T$ sont quasiment inchangées quand r_ϕ devient grand dans le cas du modèle 2S. Cela nous permet de constater que des longueurs d'onde des ondulations des fibrilles n'ont aucune influence sur ces deux derniers coefficients. Toutefois, on observe que l'effet induit par la distribution spatiale de la matrice à l'échelle microscopique, continue à jouer son rôle au niveau du tissu, du fait de l'écart observé pour les coefficients $\tilde{\alpha}_R, \tilde{\alpha}_T$ entre les modèles 0S et 2S. De plus, on observe que $\tilde{\alpha}_R \neq \tilde{\alpha}_T$ pour les 2 modèles 0S

et 2S, montant ainsi l'apparition d'une anisotropie dans le plan transverse. Cette anisotropie dans le cas du modèle 2S est liée à la morphologie du tissu et non au comportement des couches, pour lesquelles on avait observé une isotropie transverse à l'échelle de la paroi cellulaire.

6.2.2 Effet du gonflement de la fibrille

Nous évaluons dans cette partie l'influence du gonflement des fibrilles sur les propriétés hydriques effectives du tissu pour les deux microstructures tissulaires - BI et BF et considérons donc un coefficient d'expansion de la matrice $\alpha^M = 0$. Deux types de gonflement des fibrilles au niveau de la paroi cellulaire seront considérés : (a) un gonflement longitudinal de la fibre ($\alpha_L^F \neq 0$) et (b) un gonflement transversal de la fibre ($\alpha_{TT}^F \neq 0$). Similairement à l'étude précédente correspondant au gonflement de la matrice, nous comparons les coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés du tissu, obtenus pour 2 microstructures 0S et 2S, ceci pour les deux modèles de bois. A nouveau, les résultats pour le modèle 2S sont obtenus pour les 4 valeurs de r_ϕ considérées précédemment (3.75 ; 7.50 ; 15.00 ; 30.00).

a) Gonflement longitudinal de la fibre ($\alpha_L^F \neq 0$; $\alpha_{TT}^F = \alpha^M = 0$)

Nous considérons tout d'abord le cas d'un gonflement local α_L^F non nul. Nous présentons sur la Figure 6-9 l'évolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés $\tilde{\alpha}_i/\alpha_L^F$ ($i = L, R, T$) en fonction de la densité relative du tissu.

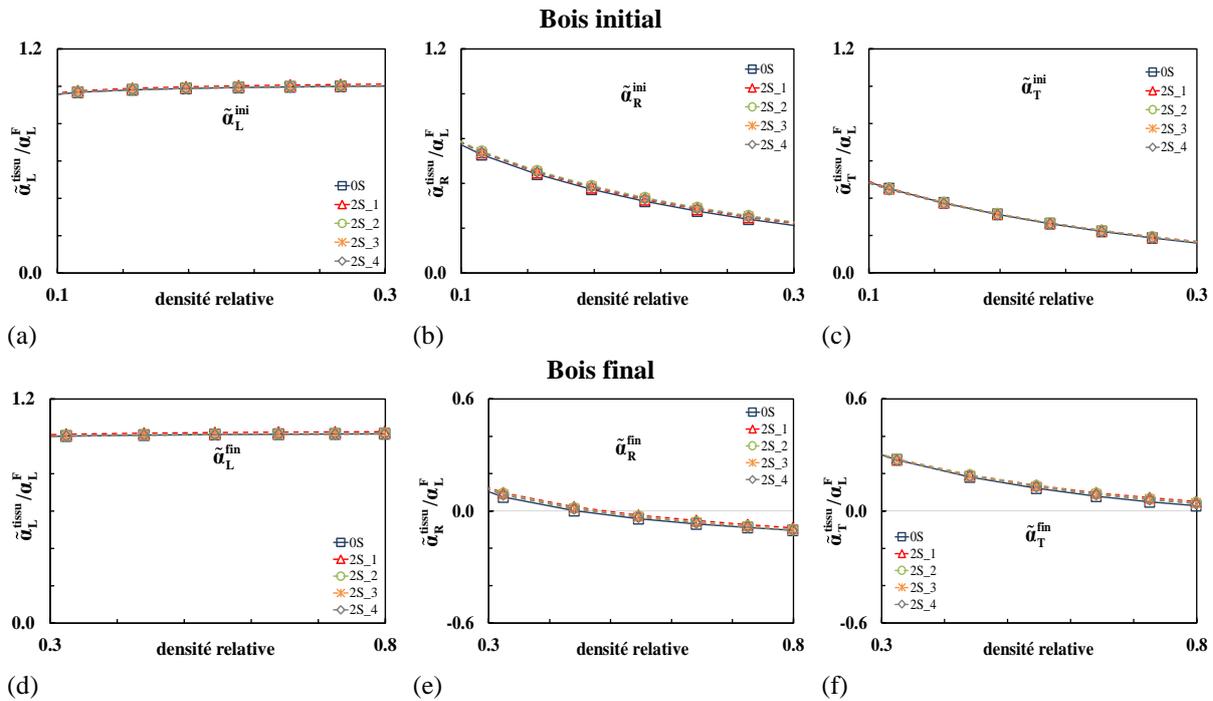


Figure 6-9 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés en fonction de la densité relative pour les modèles 0S et 2S ($\alpha_L^F \neq 0$, $\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0$) ;

Comme l'on a présenté les observations expérimentales associées aux principes d'expansion du bois dans la partie précédente, celles-ci ont été à nouveau constatées par les effets observés associés au gonflement longitudinal des fibrilles. En effet, pour ce type de gonflement, du fait que la matrice doit être comprimée afin de restreindre le mouvement de gonflement longitudinal des fibrilles, cet gonflement conduit à un retrait pour les coefficients $\tilde{\alpha}_R$ et $\tilde{\alpha}_T$ dans le plan transverse du tissu. Cette tendance est observée sur la Figure 6-9 pour les coefficients d'expansion effectifs normalisés transverses $\tilde{\alpha}_R/\alpha_L^F$ et $\tilde{\alpha}_T/\alpha_L^F$, on observe qu'ils diminuent significativement avec l'augmentation de la densité relative, ainsi que le coefficient $\tilde{\alpha}_R$ pour du bois final devient négatif pour les fortes densités. Ces deux observations ci-dessus nous permettent de vérifier la propriété (3). De plus, on observe ainsi que les

valeurs du coefficient effectif $\tilde{\alpha}_L$ tendent vers la valeur du coefficient d'expansion local α_L^F . Pour cela, on peut dire qu'il existe un état saturé de l'expansion longitudinale des fibrilles, du fait que l'expansion de la fibre dans le sens longitudinal est bloquée par les conditions aux limites périodiques. A partir de là, on peut constater que la propriété (1) est également vérifiée, car l'expansion du tissu croît plus faiblement pour le sens longitudinal que pour le plan transverse en fonction de la densité relative.

On constate par ailleurs que les ondulations des fibrilles n'ont quasiment aucune influence sur les coefficients d'hygro-expansion effectifs du tissu pour les 2 modèles de bois.

Afin d'analyser plus finement les tendances observées, on présente en Figure 6-10 les évolutions des coefficients d'expansion normalisés du tissu $\tilde{\alpha}_i/\alpha_L^F$ ($i = L, R, T$) en fonction de r_ϕ pour les modèles OS et 2S associées aux 2 modèles de tissu BI et BF. Similairement au cas de la matrice hygro-mécanique, la densité relative de chaque tissu a été fixée à sa valeur de référence, i.e. $\mu_{\text{initial}} = 0.1784$ et $\mu_{\text{final}} = 0.5456$.

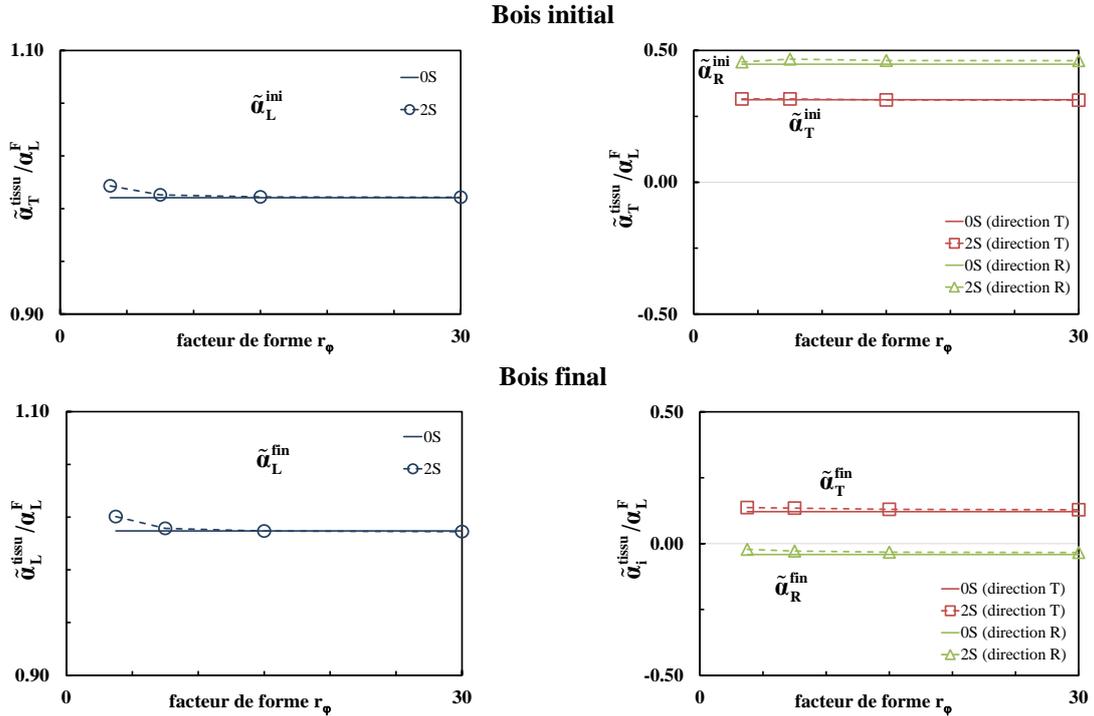


Figure 6-10 : Evolutions en fonction de r_ϕ des trois coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés associés aux deux modèles OS et 2S pour les 2 types de tissus ($\alpha^M = \alpha_{TT}^F = 0, \alpha_L^F \neq 0$)

Ces courbes confirment que les ondulations des fibrilles n'ont aucune influence sur les propriétés hydriques dans le cas d'une expansion longitudinale des fibrilles. On constate que la morphologie du tissu joue un rôle important sur l'orthotropie transverse des coefficients d'expansion. En effet, $\tilde{\alpha}_R > \tilde{\alpha}_T$ pour le bois initial alors que c'est l'inverse qui est observé pour le bois final $\tilde{\alpha}_R < \tilde{\alpha}_T$.

b) Gonflement transversal de la fibre ($\alpha_{TT}^F \neq 0, \alpha_L^F = \alpha^M = 0$)

Cette-fois ci, nous considérons le cas d'un gonflement transversal de la fibre non nul. Nous présentons sur la Figure 6-11 les variations des coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés $\tilde{\alpha}_i/\alpha_{TT}^F$ ($i = L, R, T$) en fonction de la densité relative pour les modèles de tissu BI et BF. Les évolutions des 3 coefficients d'hygro-expansion effectifs pour les deux modèles BI et BF sont très proches de celles que l'on a obtenues dans le cas d'une matrice hygro-mécanique ($\alpha^M \neq 0$). Les analyses effectuées en 6.2.1 pour $\alpha^M \neq 0$ restent donc valables pour $\alpha_{TT}^F \neq 0$. Ceci nous permet notamment de montrer que comme c'était le cas pour $\alpha^M \neq 0$ les résultats obtenus pour le cas $\alpha_{TT}^F \neq 0$ sont cohérents avec les résultats expérimentaux observés par Schulgasser and Witzum (Schulgasser and Witzum, 2015).

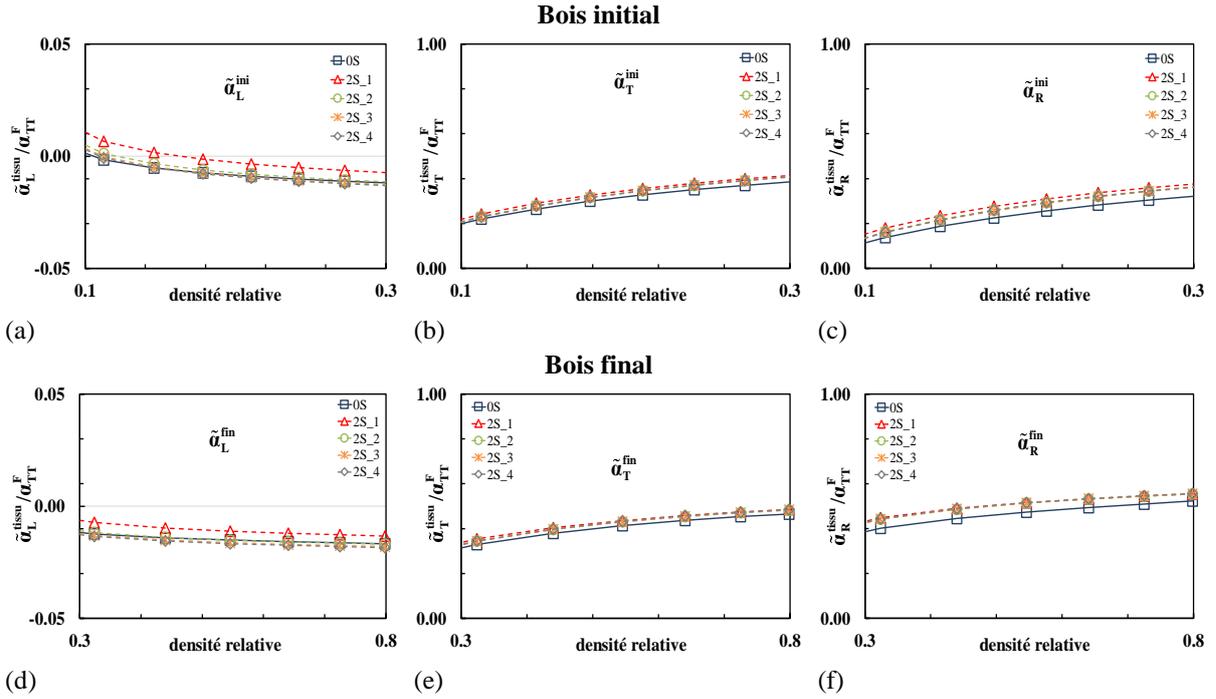


Figure 6-11 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs normalisés en fonction de la densité relative pour les modèles 0S et 2S ($\alpha_{TT}^F \neq 0$, $\alpha^M = \alpha_L^F = 0$) pour les 2 types de tissus.

Afin de quantifier plus finement les comparaisons entre le modèle 2S et le modèle 0S, nous avons à nouveau reporté sur la Figure 6-12 les évolutions en fonction de r_ϕ des 3 coefficients d'hygro-expansion effectifs du tissu associés aux 2 modèles 0S et 2S pour les valeurs de référence de la densité relative de chaque type de bois, c-à-d $\mu_{\text{initial}} = 0.1784$ et $\mu_{\text{final}} = 0.5456$.

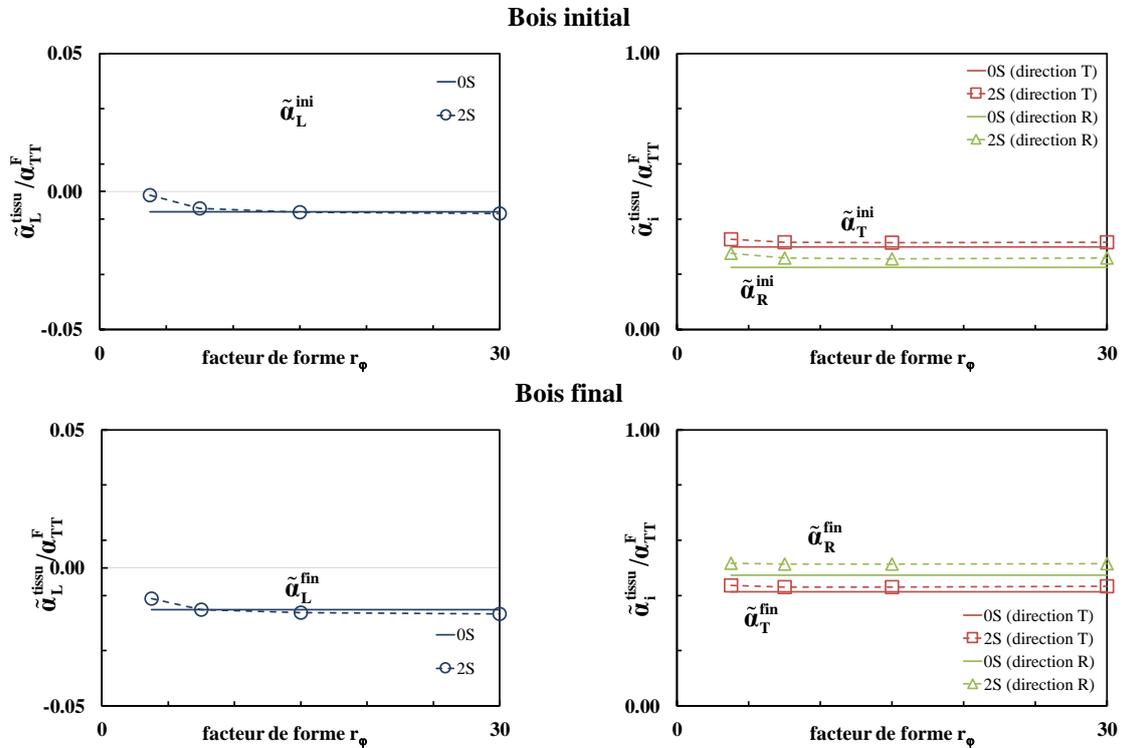


Figure 6-12 : Evolution des trois coefficients d'hygro-expansion effectifs du tissu en fonction de r_ϕ pour les deux modèles 0S et 2S pour 2 types différents du tissu ($\alpha^M = \alpha_L^F = 0$, $\alpha_T^F \neq 0$).

A nouveau, on observe quasiment les mêmes tendances que celles obtenues par le cas $\alpha^M \neq 0$. Les analyses de ce cas restent ainsi également valables pour $\alpha_T^F \neq 0$. La seule différence réside dans le fait que $\tilde{\alpha}_L$ est négatif (mais toujours faible) dans le cas $\alpha_T^F \neq 0$.

6.3 Conclusion

Deux microstructures tissulaires, BI et BF, ont été développées en appliquant la procédure d'homogénéisation numérique pour évaluer l'influence des ondulations des fibrilles dans deux plans (1, 2) et (1, 3) du modèle 2S sur le comportement hygro-élastique du tissu. Au cours des études paramétriques effectuées, nous avons montré que :

- Pour ce qui concerne les composantes élastiques effectives de la rigidité du tissu, l'influence des ondulations des fibrilles est significative pour les 3 composantes \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LR} et \tilde{G}_{LT} , très faible pour les composantes \tilde{C}_{RT} , \tilde{C}_{LR} et \tilde{C}_{LT} et quasiment inexistante pour les 3 autres \tilde{C}_{LL} , \tilde{C}_{RR} et \tilde{C}_{TT} . Cette influence devient plus importante avec la croissance de la densité relative du tissu. Toutefois, bien que l'effet observé soit assez fort pour certaines composantes du comportement élastique \tilde{G}_{23} , \tilde{G}_{13} et \tilde{G}_{12} à l'échelle de la paroi cellulaire, il perd son importance à l'échelle du tissu, surtout pour le bois de faible densité. Cette tendance peut être expliquée par l'interaction des couches de deux cellules voisines qui compensent l'absence d'interaction entre les fibrilles dans le modèle 0S. De plus, l'effet induit par des ondulations des fibrilles est plus prononcé pour toutes les 9 composantes dans le cas d'une matrice ramollie, dans lequel le comportement du tissu est gouverné principalement par la géométrie de ses fibrilles dans chaque couche constituée.
- Pour ce qui concerne les propriétés hydriques effectives, un seul effet parmi les 3 effets induit par des ondulations des fibrilles - la distribution spatiale de la matrice - qui a son influence sur les 2 coefficients d'hygro-expansion effectifs du tissu $\tilde{\alpha}_R$, $\tilde{\alpha}_T$ qui représentent l'expansion hydrique transverse des tissus dans les 3 types de gonflement des constituants. De plus, nous avons également montré que les 2 effets induits par l'orientation des fibrilles et le contact interfibrillaire dans le cas du tissu sont quasiment inexistant même pour des valeurs de r_ϕ faibles.

Par ailleurs, on peut constater que l'anisotropie transverse du comportement hydrique est due à la morphologie à l'échelle du tissu.

Partie III : Comportement macroscopique du bois : échelle des cernes

Comme indiqué sur la Figure 1-1, notre étude vise à construire un modèle multi-échelle capable d'évaluer le comportement mécanique macroscopique du bois en introduisant 3 niveaux d'échelle différents allant de la paroi cellulaire aux cernes annuels. À chaque niveau, les paramètres de l'échelle locale influencent les propriétés mécaniques de l'échelle globale. Suite aux analyses effectuées dans les parties précédentes concernant l'influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés hygro-élastiques effectives de la paroi cellulaire (partie I) et du tissu (partie II), cette partie vise, d'une part, à étudier la transition d'échelle allant du tissu au cerne, et d'autre part à analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés hygro-élastiques macroscopiques des cernes, cette dernière étape impliquant les 3 niveaux de changement d'échelle précédemment étudiés. Nous avons montré au chapitre 6 que sur les 3 effets induits par l'oscillation des fibrilles sur le comportement hydrique, seul celui induit par la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles ondulées était présent, contrairement aux deux autres effets, ceux induits par l'ondulation et par le contact des fibrilles, dont on ne trouve aucune trace à l'échelle du tissu. Du fait de ce résultat à l'échelle du tissu, on ne s'attend pas à une forte influence des oscillations des fibrilles sur le comportement hydrique à l'échelle du cerne.

Pour ce qui concerne la transition d'échelle allant du tissu au cerne, nous nous appuyerons sur la solution exacte d'un laminé biphasé orthotrope obtenue en Annexe C, et nous l'appliquerons à l'échelle des cernes pour calculer des propriétés élastiques effectives d'un modèle « idéal » comprenant deux couches réparties de manière périodique, l'une de bois initial et l'autre de bois final, représentant ainsi un cerne de croissance (Figure 7-3). De plus, pour calculer le comportement effectif du cerne, on s'appuie sur les valeurs de référence des paramètres géométriques des deux types de tissu (BI et BF) qui ont été décrits dans la partie précédente, à l'exception de la valeur de l'épaisseur de la couche S2, que l'on fera évoluer pour faire varier la densité du bois. Par ailleurs, nous considérerons deux morphologies différentes OS et 2S de la microstructure de la paroi cellulaire comme microstructure d'entrée du modèle multi-échelle afin d'étudier les effets induits par des ondulations des fibrilles sur le comportement macroscopique du bois.

Au chapitre 7, nous appliquerons la solution analytique présentée en Annexe C d'un laminé périodique plan à deux couches élastiques orthotropes au modèle « idéal » du cerne. Le comportement hygro-élastique de chaque couche du cerne, celui du bois initial et celui du bois final, est obtenu par application des procédures d'homogénéisation FE décrites dans les parties I et II.

Au chapitre 8, nous présenterons tout d'abord les mesures expérimentales obtenues dans la littérature concernant les propriétés élastiques macroscopiques des bois résineux afin de les comparer ensuite aux résultats issus de notre modèle multi-échelle en vue d'estimer ces capacités prédictives. Puis, nous effectuerons une étude paramétrique pour les propriétés hygro-élastiques des cernes au cours de laquelle on étudiera, similairement au chapitre 6 et dans les deux cas du bois sec et du bois chaud/humide (la matrice est ramollie), l'influence des oscillations des fibrilles en faisant varier le facteur de forme r_ϕ de la paroi cellulaire, pour différentes valeurs de la densité du bois.

Chapitre 7 : Evaluation par homogénéisation des propriétés hygro-élastiques effectives des cernes

Suivant les échelles de longueur caractéristique, les résineux peuvent être décrits à trois niveaux structurels différents tel qu'indiqué sur la Figure 1-1 (Norimoto and Gril, 1989). Dans ce chapitre, on construira un modèle analytique de changement d'échelle permettant d'obtenir le comportement macroscopique des cernes annuels. Grâce à ce dernier qui sera associé aux deux modèles de changement d'échelle de la paroi cellulaire et du tissu décrits dans les parties I et II, on pourra étudier les effets induits, d'une part, par la microstructure du bois notamment l'influence des ondulations des fibrilles, et d'autre part, ceux induits par les propriétés mécaniques de ses constituants sur ses propriétés macroscopiques.

7.1 Hétérogénéité au niveau du cerne de croissance

L'échelle d'observation macroscopique considérée fait intervenir des volumes élémentaires de matière suffisamment grands devant la microstructure du cerne, ceci afin de respecter l'hypothèse de séparation d'échelle nécessaire à l'obtention d'un comportement homogénéisé à l'échelle du cerne. Vu que les propriétés mécaniques ou physiques sont différentes d'un point à l'autre du cerne, et que la variabilité de croissance entre cernes contribue à une certaine hétérogénéité entre cernes, si l'échelle d'observation macroscopique intègre cette hétérogénéité de structure, on dira d'un bois qu'il est macroscopiquement homogène (Guitard, 1987).

On part d'observations sur le tronc d'un arbre, où les défauts sont les moins nombreux et où le diamètre de l'arbre est le plus grand. La grume, tronc de l'arbre une fois abattu, matériau idéalement de géométrie cylindrique, est perçue de prime abord comme la juxtaposition de couches concentriques autour d'un axe central, correspondant aux cycles saisonniers de la croissance (cernes). De plus, le tronc « idéal » est assimilé à un volume de matière ligno-cellulosique qui permet des symétries matérielles cylindriques (voir Figure 7-1a). Nous allons considérer que tout plan normal à l'axe du tronc est un plan de symétrie matérielle en négligeant la conicité induite par les enveloppes de croissance annuelle, de même que tout plan radial incluant l'axe en négligeant d'éventuelles asymétrie de croissance ou flexuosité des cernes. Ceci conduit à considérer le tronc « idéal » comme respectant une symétrie orthotrope cylindrique.

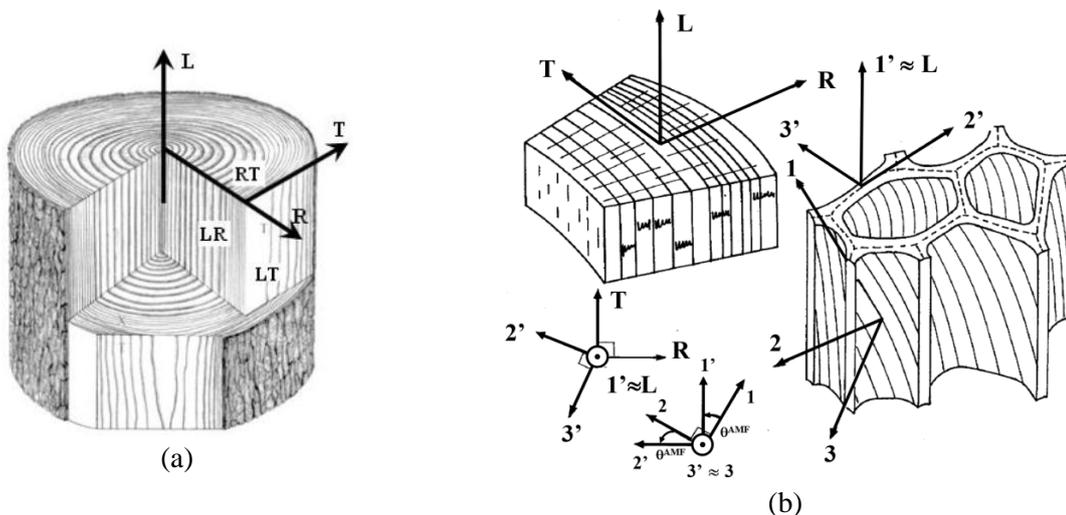


Figure 7-1 : (a) Directions d'anisotropie du bois radiale (R), tangentielle (T) et longitudinale (L) et plans associés à l'échelle macroscopique ; (b) orientations macroscopiques et microscopiques (Gril, 1988).

Il est nécessaire d'attribuer un repérage polaire de directions principales (L, R, T) à cette structure cylindrique macroscopique permettant de relier le repère de l'échelle macroscopique aux deux autres

repères de la paroi cellulaire (1', 2', 3') et de matière ligno-cellulosique (1', 2', 3'), ainsi que cela est décrit sur la Figure 7-1b. A partir de ces 3 directions principales, on définit classiquement trois plans principaux : le plan transverse (RT), le plan radial (LR) et le plan tangentiel (LT). L'observation de sections découpées dans les trois plans principaux (RT), (LR) et (LT) d'une portion de tronc permet de caractériser l'anatomie du bois.

Sur les résineux, une partie de l'anisotropie mécanique macroscopique est attribuée à la présence de deux types de tissu, bois initial et bois final (Farruggia, 1998; Ylinen and Jumpanen, 1967). De ce fait, on approchera la microstructure réelle du cerne par un matériau biphasé élaboré à partir des propriétés de ces deux tissus ligneux constitutifs biologiquement homogènes (Guitard, 1987; Koponen et al., 1991; Schniewind, 1972, 1959). Par ailleurs, plusieurs études de la littérature ont pris en compte dans leur modèle de changement d'échelle un troisième tissu constitué par les rayons ligneux qui renforcent radialement le cerne (Guitard and Gachet, 2004; Koponen et al., 1991). Toutefois, comme l'on a supposé dans la partie II consacrée à l'échelle des tissus, du fait que les rayons ligneux occupent moins de 5% du volume du bois résineux, ils seront négligés dans notre étude.

On introduit alors la texture du cerne f_{BF} comme la fraction volumique de bois final dans un cerne

$$f_{BF} = \frac{V_{BF}}{V_{BF} + V_{BI}} \quad (7.1.1)$$

où V_{BI} et V_{BF} sont respectivement les volumes de bois initial et de de bois final d'un cerne de croissance.

Nous allons chercher le moyen d'exprimer les propriétés homogénéisées de ce laminé constitué par une alternance de bois initial et de bois final.

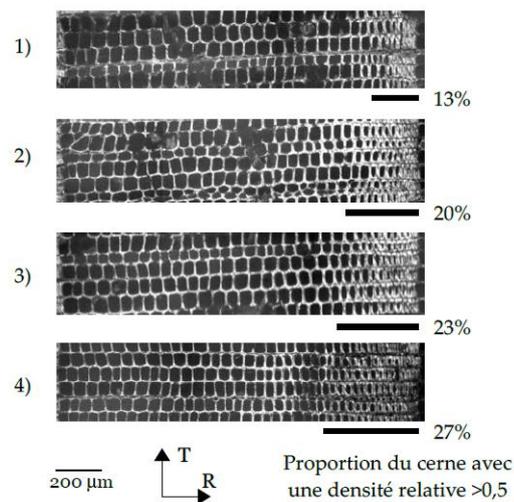


Figure 7-2 : Variations de morphologie de 4 cernes consécutifs d'épicéa ramenés à la même largeur de cerne (Simon, 2009).

En ce qui concerne la valeur de référence de la texture f_{BF} , nous présentons dans le Tableau 7-1 un ensemble de données de la littérature pour des essences résineuses.

Tableau 7-1 : Base de données bibliographiques : texture du cerne pour des résineux

Ref.	Lahbabi (Lahbabi, 1995)	Keller (Keller, 1999)	Benoit et Dirol (Benoit and Dirol, 2000)	Guitard et Gachet (Guitard, 1987; Guitard and Gachet, 2004)
Texture (%)	20	≤50	≤30	51.2

A titre d'exemple de variations de la valeur de la texture f_{BF} , la Figure 7-2 présente 4 cernes consécutifs ramenés à la même longueur, dans lesquels la transition entre bois initial et bois final se fait plus ou moins tôt dans le cerne.

7.2 Propriétés hygro-élastiques macroscopiques du cerne

7.2.1 Du tissu au cerne : estimation du comportement effectif par homogénéisation analytique

Le but de cette partie est de compléter le modèle multi-échelle permettant de déterminer le comportement effectif du bois à l'échelle des cernes, que l'on considèrera comme le comportement macroscopique du bois. Ce dernier prendra en compte 3 niveaux de microstructure du bois (cernes annuels, tissus cellulaires et parois cellulaires) et nous permettra d'analyser les effets induits par les ondulations des fibrilles sur les propriétés hygro-mécaniques macroscopiques du bois et plus particulier du bois résineux car la microstructure de notre modèle en est plus proche. Pour atteindre cet objectif, le modèle multi-échelle est constitué par un ensemble hiérarchique combiné de modèles de changement d'échelles de nature soit numérique soit analytique : les deux premiers changements d'échelle fournissent le comportement de la paroi cellulaire puis du tissu sont issus des procédures d'homogénéisation numériques développées dans les parties II et III, tandis que le dernier changement d'échelle passant d'un mélange de bois initial et de bois final au comportement du cerne sera obtenu par un modèle d'homogénéisation analytique. De plus, nous considérerons deux morphologies différentes à l'échelle de la paroi cellulaire, une microstructure sans ondulations (0S) et une autre avec des ondulations dans deux directions (2S), en vue d'analyser l'influence des ondulations sur le comportement macroscopique du bois.

Pour construire la 3^{ème} étape de changement d'échelle, nous approchons la microstructure réelle du cerne, où f_{BF} varie d'une année à l'autre, par une microstructure périodique, où f_{BF} est constante pour chaque cerne. Cela se fait simplement en supposant que les cernes de croissance sont disposés périodiquement dans le sens radial et dans les régions éloignées du centre du duramen de l'arbre. Comme on considère les cernes éloignés du centre, nous négligeons leur courbure de sorte que les cernes de croissance seront décrits comme un empilement périodique de couches planes homogènes de bois initial et de bois final selon la direction radiale, c.-à-d. un laminié à deux phases (BI et BF) (voir Figure 7-3).

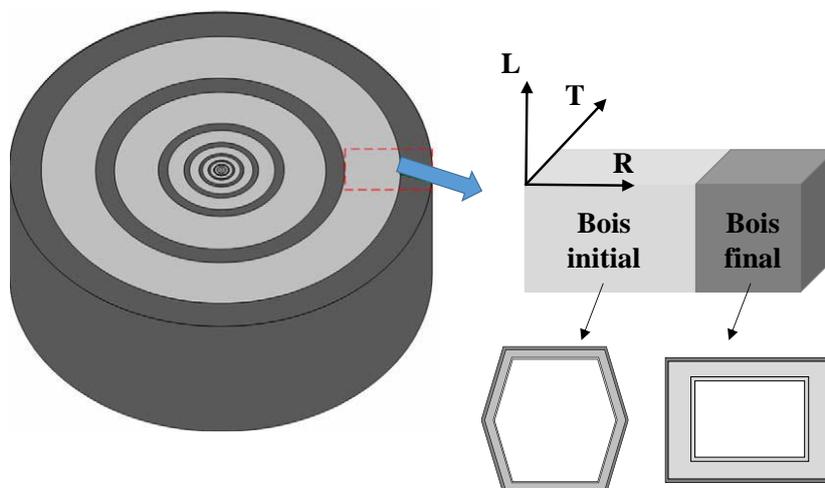


Figure 7-3 : Modèle schématiquement idéalisé pour l'anneau annuel.

Bien que la densité du bois varie considérablement dans les différentes régions du cerne (voir Figure 7-2), pour modéliser simplement cette variation, nous avons supposé dans le chapitre 5 qu'il est devisé

brutalement en deux régions principales, celle du bois initial et celle du bois final, permettant ainsi d'approcher la microstructure du cerne comme un laminé biphasé où l'on peut imposer une valeur de la densité moyenne du bois pour chaque couche. Pour déterminer la densité (moyenne) du bois par couche, on utilisera la formule (5.1. 1) en supposant que cette densité est la même pour chaque couche de BI (respectivement de BF) du fait de l'hypothèse de périodicité de notre microstructure.

La cellule élémentaire du cerne est donc constituée de deux couches planes de directions associées à l'échelle macroscopique du bois (L, T) qui s'empilent dans la direction R. Ces deux couches sont faites d'une couche du bois initial de fraction volumique $f_{BI} = 1 - f_{BF}$, et d'une couche du bois final de fraction volumique f_{BF} .

$$f_{BI} + f_{BF} = 1 \quad (7.2. 1)$$

La densité (moyenne) du cerne s'obtient par la formule suivante :

$$\rho_{\text{cerne}} = \rho_{\text{initial}} f_{BI} + \rho_{\text{final}} f_{BF} \quad (7.2. 2)$$

Où $\rho_{\text{initial}} (= \mu_{\text{initial}} \cdot \rho_s)$ et $\rho_{\text{final}} (= \mu_{\text{final}} \cdot \rho_s)$ sont respectivement les densités (moyenne) du bois initial et du bois final

Pour effectuer le 3^{ème} changement d'échelle, nous appliquons à nouveau la solution analytique d'un laminé plan à deux couches hygro-élastiques orthotropes qui a été utilisée dans la partie I à l'échelle de la paroi cellulaire, mais cette-fois en considérant que les 2 phases sont constituées respectivement par du bois initial et du bois final. Pour ce qui concerne le comportement hygro-élastique, les tenseurs des modules et des contraintes hydriques locaux seront notés respectivement $\underline{\underline{\tilde{C}}}^{ini}$, $\underline{\underline{\tilde{\beta}}}^{ini}$ et $\underline{\underline{\tilde{C}}}^{fin}$, $\underline{\underline{\tilde{\beta}}}^{fin}$ pour le bois initial et le bois final. Ces quatre derniers ont été déterminés pour un tissu composé d'un réseau de cellules dont les parois sont composées de trois couches différentes S1, S2 et S3. Ils sont orthotropes et s'expriment dans le même repère d'orthotropie (L, R, T) sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}^{ini} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{LL}^{ini} & \tilde{C}_{LR}^{ini} & \tilde{C}_{LT}^{ini} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{LR}^{ini} & \tilde{C}_{RR}^{ini} & \tilde{C}_{RT}^{ini} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{LT}^{ini} & \tilde{C}_{RT}^{ini} & \tilde{C}_{LL}^{ini} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{RT}^{ini} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{LR}^{ini} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{LT}^{ini} \end{pmatrix}; \underline{\underline{\tilde{\beta}}}^{ini} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_L^{ini} \\ \tilde{\beta}_R^{ini} \\ \tilde{\beta}_T^{ini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (7.2. 3)$$

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}^{fin} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{LL}^{fin} & \tilde{C}_{LR}^{fin} & \tilde{C}_{LT}^{fin} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{LR}^{fin} & \tilde{C}_{RR}^{fin} & \tilde{C}_{RT}^{fin} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{LT}^{fin} & \tilde{C}_{RT}^{fin} & \tilde{C}_{LL}^{fin} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{RT}^{fin} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{LR}^{fin} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{LT}^{fin} \end{pmatrix}; \underline{\underline{\tilde{\beta}}}^{fin} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_L^{fin} \\ \tilde{\beta}_R^{fin} \\ \tilde{\beta}_T^{fin} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (7.2. 4)$$

En appliquant la solution exacte d'un laminé bicouche orthotrope issue de l'Annexe C, d'une part, les 9 composantes de la rigidité macroscopique du bois s'écrivent :

$$\tilde{C}_{LL}^{cerne} = f_{BI} \left[\tilde{C}_{LL}^{ini} + \frac{\tilde{C}_{LR}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} (\tilde{C}_{LR}^{cerne} - \tilde{C}_{LR}^{ini}) \right] + f_{BF} \left[\tilde{C}_{LL}^{fin} + \frac{\tilde{C}_{LR}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} (\tilde{C}_{LR}^{cerne} - \tilde{C}_{LR}^{fin}) \right]; \quad (7.2. 5)$$

$$\tilde{C}_{LT}^{cerne} = f_{BI} \left[\tilde{C}_{LT}^{ini} + \frac{\tilde{C}_{LT}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} (\tilde{C}_{RT}^{cerne} - \tilde{C}_{RT}^{ini}) \right] + f_{BF} \left[\tilde{C}_{LT}^{fin} + \frac{\tilde{C}_{LT}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} (\tilde{C}_{RT}^{cerne} - \tilde{C}_{RT}^{fin}) \right]; \quad (7.2. 6)$$

$$\tilde{C}_{LR}^{cerne} = \frac{\left(f_{BI} \frac{\tilde{C}_{LR}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + f_{BF} \frac{\tilde{C}_{LR}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right)}{\left(\frac{f_{BI}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + \frac{f_{BF}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right)}; \quad \tilde{C}_{RT}^{cerne} = \frac{\left(f_{BI} \frac{\tilde{C}_{RT}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + f_{BF} \frac{\tilde{C}_{RT}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right)}{\left(\frac{f_{BI}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + \frac{f_{BF}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right)}; \quad \tilde{C}_{RR}^{cerne} = \frac{1}{\left(\frac{f_{BI}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + \frac{f_{BF}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right)}; \quad (7.2. 7)$$

$$\tilde{C}_{TT}^{cerne} = f_{BI} \left[\tilde{C}_{TT}^{ini} + \frac{\tilde{C}_{RT}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} (\tilde{C}_{RT}^{cerne} - \tilde{C}_{RT}^{ini}) \right] + f_{BF} \left[\tilde{C}_{TT}^{fin} + \frac{\tilde{C}_{RT}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} (\tilde{C}_{RT}^{cerne} - \tilde{C}_{RT}^{fin}) \right]; \quad (7.2. 8)$$

$$\tilde{G}_{RT}^{cerne} = \frac{1}{\left(f_{BI} \frac{1}{\tilde{G}_{RT}^{ini}} + f_{BF} \frac{1}{\tilde{G}_{RT}^{fin}} \right)}; \quad \tilde{G}_{LR}^{cerne} = \frac{1}{\left(f_{BI} \frac{1}{\tilde{G}_{LR}^{ini}} + f_{BF} \frac{1}{\tilde{G}_{LR}^{fin}} \right)}; \quad \tilde{G}_{LT}^{cerne} = f_{BI} \tilde{G}_{LT}^{ini} + f_{BF} \tilde{G}_{LT}^{fin}; \quad (7.2. 9)$$

A partir de ces formules, on peut déterminer les 9 coefficients ingénieurs (\tilde{E}_L^{cerne} , \tilde{E}_R^{cerne} , \tilde{E}_T^{cerne} et \tilde{G}_{RT}^{cerne} , \tilde{G}_{LT}^{cerne} , \tilde{G}_{LR}^{cerne} et $\tilde{\nu}_{RT}^{cerne}$, $\tilde{\nu}_{LT}^{cerne}$, $\tilde{\nu}_{LR}^{cerne}$). En effet, ceux-ci s'obtiennent à partir du tenseur des complaisances élastiques effectives \tilde{S}_{ij} du cerne, qui est le tenseur inverse du tenseur des rigidités élastiques macroscopiques \tilde{C}_{ij} . Pour obtenir \tilde{S}_{ij} , on calculera les relations indiquées dans le Tableau C-1 (Annexe C).

On obtient ensuite les 3 contraintes hydriques macroscopiques :

$$\tilde{\beta}_L^{cerne} = f_{BI} \left[\tilde{\beta}_L^{ini} + \frac{\tilde{C}_{LR}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} (\tilde{\beta}_R^{cerne} - \tilde{\beta}_R^{ini}) \right] + f_{BF} \left[\tilde{\beta}_L^{fin} + \frac{\tilde{C}_{LR}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} (\tilde{\beta}_R^{cerne} - \tilde{\beta}_R^{fin}) \right] \quad (7.2. 10)$$

$$\tilde{\beta}_T^{cerne} = f_{BI} \left[\tilde{\beta}_T^{ini} + \frac{\tilde{C}_{RT}^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} (\tilde{\beta}_R^{cerne} - \tilde{\beta}_R^{ini}) \right] + f_{BF} \left[\tilde{\beta}_T^{fin} + \frac{\tilde{C}_{RT}^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} (\tilde{\beta}_R^{cerne} - \tilde{\beta}_R^{fin}) \right] \quad (7.2. 11)$$

$$\tilde{\beta}_R^{cerne} = \left(f_{BI} \frac{\tilde{\beta}_R^{ini}}{\tilde{C}_{RR}^{ini}} + f_{BF} \frac{\tilde{\beta}_R^{fin}}{\tilde{C}_{RR}^{fin}} \right) \tilde{C}_{RR}^{cerne} \quad (7.2. 12)$$

En utilisant les formules obtenues de $\tilde{\beta}_L^{cerne}$, $\tilde{\beta}_R^{cerne}$ et $\tilde{\beta}_T^{cerne}$, les 3 coefficients d'hygro-expansion effectifs du cerne $\tilde{\alpha}_L^{cerne}$, $\tilde{\alpha}_R^{cerne}$ et $\tilde{\alpha}_T^{cerne}$ sont alors facilement déterminés par l'application de la relation (4.2. 4) du chapitre 4.

7.2.2 Evaluation numérique des propriétés élastiques macroscopiques

Nous allons maintenant fixer les paramètres géométriques et matériaux permettant d'alimenter notre modèle de changement d'échelle et définir les paramètres que nous ferons varier afin de montrer les effets issus de l'échelle subpariétale, notamment l'influence des ondulations des fibrilles, sur les propriétés élastiques macroscopiques du bois. On obtient le bilan suivant pour chaque échelle.

- Echelle microscopique : on fait varier uniquement le paramètre géométrique r_ϕ définissant le niveau d'ondulation des fibrilles pour deux cas d'étude correspondant à un bois sec ($E^M = 2$ GPa) et à un bois chaud / humide ($E^M = 0.138$ MPa). Pour les autres paramètres, la valeur de r_λ (le ratio entre volume de la matrice lamellaire sur celui de la matrice lenticulaire) associée au modèle 0S est toujours fixée à 1.0 pour la comparaison entre les deux modèles 0S et 2S, la valeur c (fraction volumique des fibrilles) pour chaque couche Si est indiquée dans le Tableau 5-1 de la partie II, et les valeurs des autres paramètres matériaux (sauf E^M) sont issues du Tableau 2-2 de la partie I pour les 3 couches différentes S1, S2 et S3.

- échelle mésoscopique : les paramètres géométriques w_r (diamètre radial), w_t (diamètre tangentiel), θ_{cell} (angle de forme) et t_{Si} (épaisseur de la couche Si) correspondent aux valeurs de référence (reportées dans la partie 5.1.3 du chapitre 5) des deux tissus de bois initial et de bois final. De plus, l'évolution de la densité relative pour ces deux tissus qui est fournie pour différentes valeurs m (paramètre faisant varier l'épaisseur de la couche S2) est fournie par le Tableau 6-1 et le Tableau 6-2 de la partie III.
- échelle macroscopique : la densité des cernes, c.-à-d. celle du bois, sera caractérisée par la valeur de la texture du cerne f_{BF} (voir l'équation (7.2. 2)) Pour cette étude, nous allons fixer la valeur de f_{BF} à 20% correspondant à sa valeur de référence dans l'étude de Lahbabi (1995) (voir le Tableau 7-1). Cette valeur de référence sera utilisée pour tous les calculs effectués au chapitre 8.

Chapitre 8 : Influence des ondulations des fibrilles sur le comportement élastique des cernes

Dans ce chapitre, nous commencerons par évaluer les capacités prédictives de notre modèle multi-échelle associé à la microstructure 2S. A cette intention, nous comparerons les résultats obtenus par notre modèle à la base de données expérimentales réunies par Guitard (Guitard, 1987). Nous effectuerons cette comparaison pour la valeur de référence $r_\phi = L_1/L_2 = 7.5$ associée à la microstructure 2S, que nous considérons plus proche de la réalité que la microstructure 0S. Dans un second temps, nous analyserons l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique macroscopique du bois en utilisant notre modèle multi-échelle associé à la microstructure 2S. Pour cela, nous analyserons l'évolution des coefficients hygro-élastiques macroscopiques en fonction de r_ϕ pour 2 sortes de bois : un bois sec et un bois chaud / humide.

8.1 Solution de référence

8.1.1 Données expérimentales pour des bois résineux (D. Guitard)

Afin de confronter notre modèle de changement d'échelles à la réalité expérimentale, nous présentons dans cette section les données expérimentales réunies dans l'étude de Guitard qui constitue une des bases de données les plus réalistes et les plus vastes de la littérature portant sur les résineux. Cette base de données, reportée dans le Tableau 8-1, fournit les valeurs des constantes élastiques macroscopiques de différentes essences de résineux, en fonction de leur densité pour un taux d'humidité h voisin de 12%. Ces données ont été extraites de différents ouvrages par des équipes françaises (Guitard, 1987). Une des limites de cette base de données mise en exergue par Guitard vient du fait que les données soient obtenues par des expériences variées donc des techniques différentes trop souvent mal précisées.

Tableau 8-1: Données expérimentales pour différentes essences résineuses (Guitard, 1987)

Nom Scientifique	h (%)	ρ (g/cm ³)	E_L (MPa)	E_R (MPa)	E_T (MPa)	G_{RT} (MPa)	G_{LT} (MPa)	G_{LR} (MPa)	ν_{TR}	ν_{LT}	ν_{LR}
<i>white cedar</i>	11.2	0.26	3540	649	287	53	663	746	0.273	0.340	0.337
<i>western red - cedar</i>	11.5	0.28	6680	543	365	35	577	584	0.365	0.296	0.377
<i>Abies - subalpine fir</i>	13.1	0.31	8020	816	304	48	461	558	0.249	0.331	0.341
<i>picea - spruce (1)</i>	12.2	0.31	6890	763	374	54	625	645	0.281	0.338	0.368
<i>picea - spruce (2)</i>	12	0.32	6322	780	361	71	788	854	0.208	0.595	0.508
<i>picea - spruce (3)</i>	12	0.33	6050	1300	350	76	873	962	0.217	0.605	0.508
<i>picea - spruce (4)</i>	12	0.32	5610	351	379	55	705	618	0.321	0.952	0.734
<i>picea - sitka spruce</i>	12.8	0.36	10700	649	348	41	438	533	0.300	0.398	0.335
<i>picea - sitka spruce (2)</i>	12	0.39	11800	920	510	40	730	760	0.245	0.466	0.372
<i>picea sp - spruce (1)</i>	9.8	0.44	16200	700	400	40	780	630	0.240	0.535	0.438
<i>picea sp - spruce (2)</i>	12	0.43	13800	910	490	30	710	730	0.301	0.539	0.454
<i>picea sp - spruce (3)</i>	12	0.5	17000	830	650	40	640	870	0.337	0.561	0.374
<i>picea sp - spruce (3)</i>	12	0.5	16600	850	690	37	840	630	0.340	0.537	0.355
<i>picea sp - spruce (4)</i>	12	0.39	10700	710	430	23	620	500	0.309	0.566	0.416
<i>picea sp - spruce (5)</i>	12	0.37	9900	730	410	22	610	500	0.306	0.436	0.430
<i>picea sp - spruce (6)</i>	12	0.43	15900	690	390	36	770	620	0.258	0.456	0.543
<i>picea sp - spruce (7)</i>	12	0.39	10900	640	420	26	590	580	0.328	0.491	0.441
<i>pinus - sugar pine</i>	11.9	0.36	6740	884	588	96	763	836	0.321	0.349	0.357
<i>pinus - western white - pine</i>	11.9	0.34	9270	728	352	94	443	478	0.267	0.343	0.329
<i>pinus - ponderosa pine</i>	12.9	0.41	7730	946	642	117	887	1070	0.324	0.401	0.338
<i>pinus contorta - lodgepole pine</i>	12.8	0.34	6560	666	447	32	301	322	0.347	0.347	0.315
<i>pinus resinosa - red pine</i>	11.9	0.4	9870	867	430	114	800	945	0.256	0.315	0.346
<i>pinus taeda - loblolly pine</i>	13.4	0.47	11100	1250	871	142	898	903	0.295	0.292	0.328
<i>pinus serotina - pond pine</i>	12.8	0.58	19000	1360	781	173	862	985	0.272	0.363	0.279
<i>pinus - longleaf pine</i>	12.5	0.52	14600	1490	805	172	886	1040	0.275	0.364	0.331

<i>pinus elliotti - slash pine</i>	12.5	0.5	16000	1190	725	157	843	883	0.330	0.444	0.392
<i>pinus sp - pine</i>	9.7	0.54	16600	1120	580	70	680	1780	0.314	0.449	0.465
<i>taxodium - bald cypress</i>	13.7	0.43	12300	1040	475	84	658	772	0.176	0.327	0.339
<i>pseudotsuga - douglas fir</i>	12	0.47	16700	947	932	114	800	747	0.361	0.418	0.528
<i>pseudotsuga sp - douglas</i>	9.5	0.48	15600	1370	890	64	735	1020	0.438	0.390	0.250
<i>pseudotsuga - douglas fir (1)</i>	9.5	0.59	16700	1320	920	80	930	1200	0.414	0.384	0.367
<i>pseudotsuga - douglas fir (2)</i>	12	0.48	16000	1010	800	90	900	900	0.342	0.447	0.304
<i>pseudotsuga - douglas fir (3)</i>	12	0.44	16800	846	840	109	854	711	0.525	0.789	0.641
<i>pseudotsuga - douglas fir (4)</i>	12	0.38	12314	889	807	114	874	743	0.584	0.808	0.295
<i>larix - western larch</i>	12.6	0.44	11700	923	759	80	812	737	0.336	0.275	0.355
<i>tsuga - hemlock (1)</i>	12.8	0.48	10600	1720	1090	160	790	940	0.189	0.436	0.549
<i>tsuga - hemlock (2)</i>	13.2	0.36	10300	598	323	36	331	396	0.311	0.531	0.484
<i>pinus - longleaf pine</i>	12.5	0.52	14600	1490	805	172	886	1040	0.273	0.340	0.337

8.1.2 Construction de la solution numérique de référence

Pour construire notre solution numérique de référence, nous allons affecter à la microstructure 2S et aux tissus de bois initial et final toutes les valeurs de références qui ont été affectées lors des chapitres 2 à 7 aux paramètres géométriques et matériaux décrivant la microstructure de la paroi et des tissus. Ces valeurs de référence des paramètres géométriques et matériaux du VE (volume élémentaire) constituant la paroi, les tissus de bois initial et de bois final, sont regroupées dans le Tableau 8-2.

Tableau 8-2 : Tableau récapitulatif des paramètres nécessaires à une modélisation multi échelles de l'anisotropie élastique

Echelle	Paramètres	Valeurs	Référence	
Paroi cellulaire (1 ^{ère} étape)	Fraction volumique des fibrilles	S_1	25%	
		S_2	50%	
		S_3	50%	
	angles des fibrilles des couches	θ^{AMF}	S_1	70°
			S_2	15°
			S_3	70°
	Géométriques	épaisseurs des couches t_{Si}	BI	0.35
			S_2	1.42
			S_3	0.03
			BF	0.41
			S_2	3.99
			S_3	0.04
		Facteur de forme	r_ϕ	7.50
		Ratio de $V_{lamellaire}/V_{lenticulaire}$	r_λ	-
	Matériaux	Fibrilles	Module d'Young longitudinal	E_L (GPa)
Module d'Young transversal			E_{TT} (GPa)	27.2
Coefficient de Poisson longitudinal			ν_{LT}	0.1
Coefficient de Poisson transversal			ν_{TT}	0.33
Module de cisaillement longitudinal			G_{LT} (GPa)	4.4
Module de cisaillement transversal			G_{TT} (GPa)	-
Matrice			Module d'Young	E_m (GPa)
	Coefficient de Poisson	ν_m	0.33	
Tissu (2 ^{ème} étape)	Géométriques	Diamètre tangentiel w_t	BI (μm)	32.7
			BF (μm)	39.3
		Diamètre radial w_r	BI (μm)	32.1
			BF (μm)	13.1
	Angle de la forme de la cellule	BI	15°	
		BF	0°	
Cerne (3 ^{ème} étape)	Géométriques	Texture de cerne	f_{BF}	20%

On remarquera notamment que la valeur de référence de r_ϕ correspond à 7.50. Par ailleurs, afin de comparer les résultats de notre modèle multi-échelle à base de données de Guitard, nous avons fait

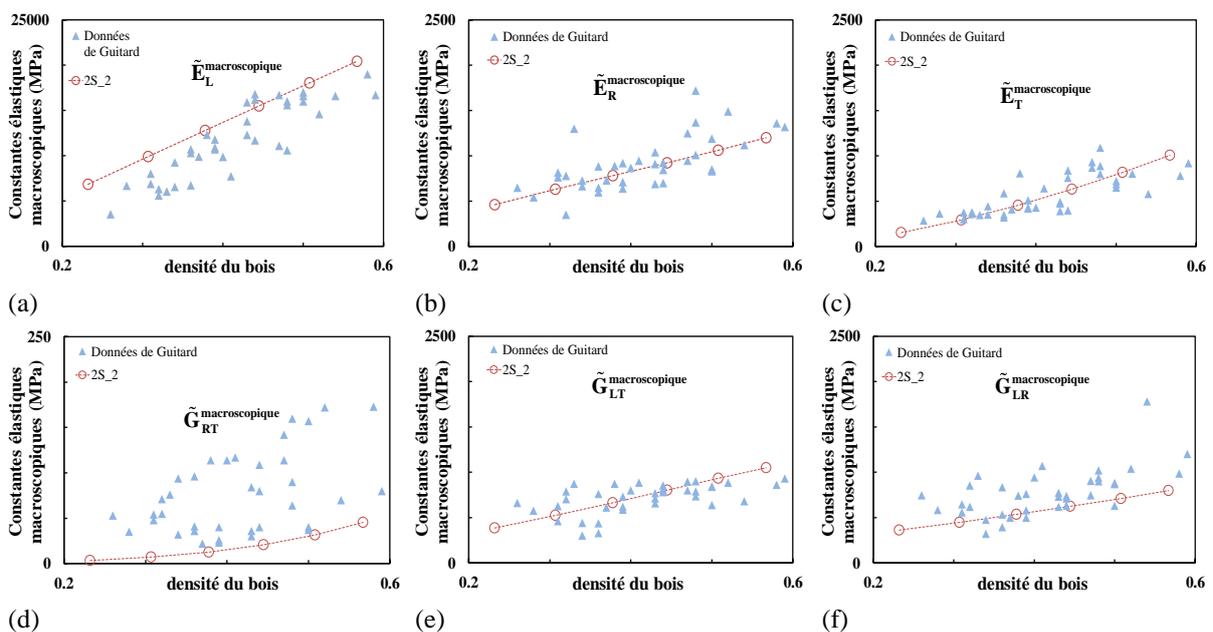
évoluer un seul paramètre, m , qui fournit l'épaisseur de la couche S2 par la valeur mt_{S2} . Comme nous l'avons vu dans la partie II (voir les Tableau 6-1 et Tableau 6-2), la variation de μ permet de faire évoluer la densité relative et donc la densité finale du bois par la formule (7.2. 2). Suite à ces affectations, nous avons reporté sur le Tableau 8-3 les propriétés élastiques effectives des 2 types de tissus de bois initial et de bois final, pour 3 valeurs de m (0.5, 1.0 et 1.5).

Tableau 8-3 : Ensemble des propriétés élastiques effectives issues des deux microstructures tissulaires BI, BF pour les données microscopiques associées au modèle 2S ($r_\phi = 7.50$) pour différentes valeurs de la densité relative

Constantes élastiques (MPa)	Valeurs faibles (m = 0.5)		Valeurs moyennes (m = 1.0)		Valeurs élevées (m = 1.5)	
	Bois initial	Bois final	Bois initial	Bois final	Bois initial	Bois final
	$\mu = 0.112$	$\mu = 0.324$	$\mu = 0.178$	$\mu = 0.546$	$\mu = 0.242$	$\mu = 0.725$
$\tilde{E}_L^{\text{tissu}}$ (MPa)	4511	16615	8693.3	29931	12705	40460
$\tilde{E}_R^{\text{tissu}}$ (MPa)	83.33	1069.30	260.14	1862.40	510.75	2694.8
$\tilde{E}_T^{\text{tissu}}$ (MPa)	16.53	692.48	58.93	2029.80	135.75	3508.20
$\tilde{G}_{RT}^{\text{tissu}}$ (MPa)	2.77	31.491	10.28	195.13	25.43	536.68
$\tilde{G}_{LT}^{\text{tissu}}$ (MPa)	246.84	972.56	385.50	1834.20	562.95	2623.30
$\tilde{G}_{LR}^{\text{tissu}}$ (MPa)	337.29	591.40	491.35	971.41	646.07	1370.70
$\tilde{\nu}_{RT}^{\text{tissu}}$	0.416	0.062	0.398	0.154	0.376	0.233
$\tilde{\nu}_{LT}^{\text{tissu}}$	0.310	0.430	0.360	0.504	0.389	0.520
$\tilde{\nu}_{LR}^{\text{tissu}}$	0.383	0.447	0.420	0.370	0.440	0.320

8.1.3 Comparaison de la solution de référence aux données expérimentales

A partir du Tableau 8-3, il ne reste plus qu'à effectuer l'étape de transition d'échelle conduisant des tissus de bois initial et final au cerne en prenant comme valeur de la texture du bois $f_{BF} = 20\%$, qui correspond à un cerne constitué de 20% de BF et de 80% de BI. Nous avons effectué ces calculs pour 6 valeurs de m (0.5 ; 0.75 ; 1 ; 1.25 ; 1.5 ; 1.75) et nous avons reporté sur la Figure 8-1 l'évolution des constantes macroscopiques 'ingénieur' obtenues par notre modèle de changement d'échelle associé à la microstructure 2S en fonction de la densité du bois. Nous rappelons que les valeurs de la densité du bois, sont obtenues par l'application des équations (7.2. 2) et (5.1. 1) avec $\rho_s = 1500$ (kg/m³).



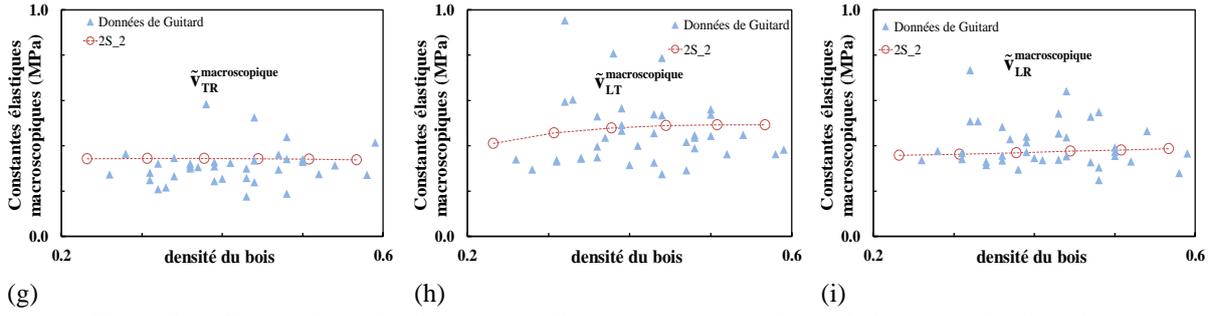


Figure 8-1: Comparaison des 9 constantes élastiques macroscopiques du bois entre les données expérimentales reportées par Guitard et celles obtenues pour la microstructure 2S par le modèle multi-échelle ($r_\phi = 7.50$ pour le modèle 2S).

On observe sur la Figure 8-1 un bon accord entre les données de notre modèle et celles expérimentales pour quasiment toutes les constantes élastiques à l'exception de \tilde{G}_{RT} .

Tout d'abord, on observe que les valeurs des modules d'Young macroscopiques \tilde{E}_R , \tilde{E}_T sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux de Guitard. En revanche \tilde{E}_L , bien que reproduisant la tendance des résultats expérimentaux est surévaluée. Ce résultat est probablement lié à la faible valeur de référence de l'AMF de la couche S2 (égale à 15°) pour le bois initial. En effet, différentes études (Cave, 1968; Salmén, 2018) ont montré que \tilde{E}_L augmente avec la croissance de la densité du bois quand les angles des microfibrilles de chaque couche S_i sont fixés (et égales à leurs valeurs de référence). C'est le cas des données de Guitard. En revanche, elles sont également montrés que \tilde{E}_L décroît avec l'augmentation de l'angle des microfibrilles de la paroi secondaire, principalement la couche S2, si la densité du bois est maintenue constante. En appliquant ce point à notre étude, comme nous avons utilisé une valeur de référence faible de l'AMF de la couche S2 pour le bois initial ($\theta_{ini}^{AMF} = 15^\circ$), ceci nous conduit à des valeurs surévaluées pour le module \tilde{E}_L .

Pour ce qui concerne les modules de cisaillement \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LT} et \tilde{G}_{LR} macroscopiques, on constate que \tilde{G}_{LT} et \tilde{G}_{LR} reproduisent convenablement les valeurs expérimentales de Guitard. En revanche, on observe que les valeurs de \tilde{G}_{RT} associées au modèle multi-échelle sous-estiment fortement les données expérimentales. Cet effet est probablement lié à une sous-estimation des valeurs de \tilde{G}_{RT} à l'échelle du tissu, voir la formule (7.2. 9) pour \tilde{G}_{RT} . Pour expliquer celle-ci, on peut avancer deux types d'interprétation.

- La première réside dans l'irrégularité d'une structure réelle, par rapport à la régularité idéalisée de notre modèle périodique. C'est d'ailleurs dans cette relative régularité que se trouve la source de la valeur très faible du \tilde{G}_{RT} des résineux par rapport aux feuillus, chez qui la présence des vaisseaux perturbe fortement les alignements de la structure cellulaire.
- La seconde, due à la thèse de Simon P. (Simon, 2009), est la prise en compte de l'aspect tridimensionnel des cellules, contrairement à l'hypothèse d'invariance dans le sens longitudinal de la géométrie et de la densité locale des tissus utilisés dans la construction de notre modèle multi-échelle. En effet, les liaisons entre les cellules dans le sens longitudinal sont bien plus raides en cisaillement transverse que le comportement de la partie centrale des cellules dont le comportement peut être approché par notre modèle multi-échelle. Ainsi, la variation de la géométrie des cellules dans le sens longitudinal est susceptible de créer des effets de voile de tension qui rigidifient le comportement transverse à l'échelle du tissu, et donc du cerne. Les effets de voile de tension seraient liés aux zones de contacts axiaux entre cellules, eux-mêmes assez rigides, et encore plus rigidifiés par la tension provenant des parois inclinées à proximité.

Pour ce qui concernent les 3 coefficients de Poisson macroscopiques $\tilde{\nu}_{TR}$, $\tilde{\nu}_{LT}$ et $\tilde{\nu}_{LR}$, on observe un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux de Guitard et on retrouve notamment le fait que

notre modèle respecte les relations d'ordre qui sont observées expérimentalement pour le bois à l'échelle macroscopique, à savoir :

$$\tilde{\nu}_{RT} > \tilde{\nu}_{LT} > \tilde{\nu}_{LR} \approx \tilde{\nu}_{TR} \gg \tilde{\nu}_{RL} > \tilde{\nu}_{TL} \quad (8.1.1)$$

8.1.4 Conclusion

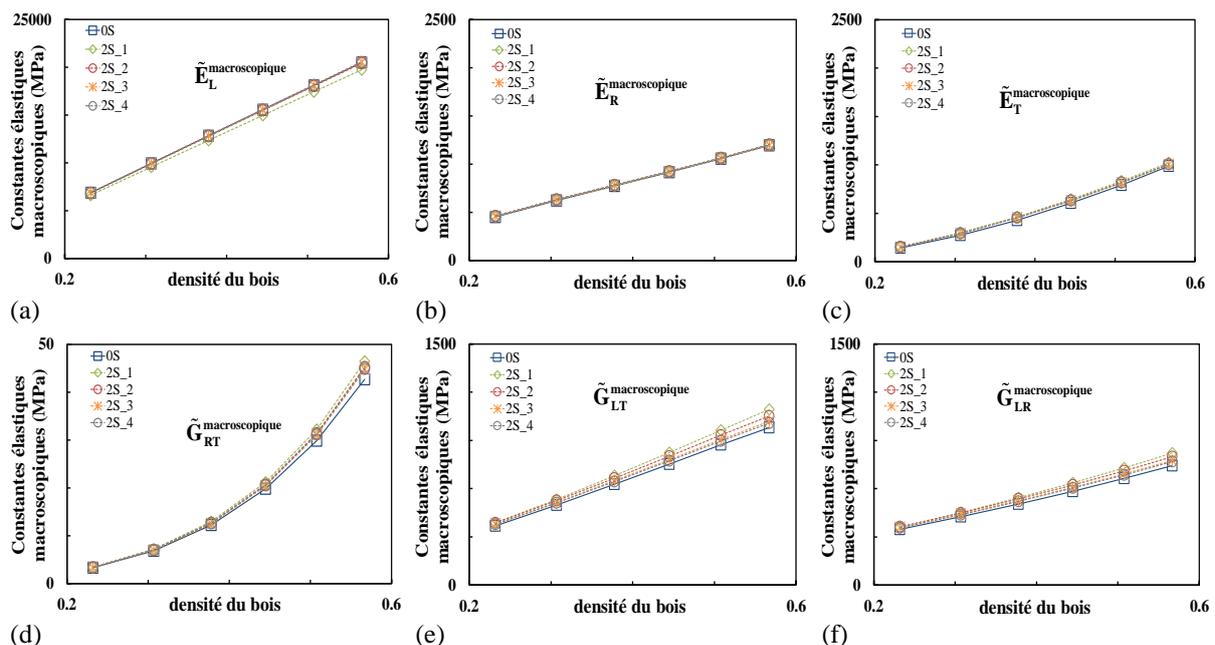
Le modèle multi-échelle présenté au cours de cette étude a notamment été construit pour estimer les constants élastiques caractérisant un comportement orthotrope à l'échelle macroscopique du bois, pour des microstructures correspondant à celles des résineux. Les résultats prédictifs issus de ce dernier ont été comparés aux résultats expérimentaux de la base de données de Guitard. A l'exception du module \tilde{G}_{RT} qui est fortement sous-estimé, on a obtenu un bon accord entre les valeurs prédites par notre modèle (sans paramètre d'ajustement) et les valeurs expérimentales. Suite à ce résultat important, nous allons pouvoir étudier l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique macroscopique en nous fondant sur un modèle multi-échelle incorporant ces dernières et capable de prédire de manière satisfaisante ce comportement comme l'ont montrés les résultats obtenus lors de la partie précédente.

8.2 Influence des ondulations sur les propriétés élastiques macroscopiques

Dans cette partie, nous étudions l'influence des ondulations des fibrilles sur les propriétés élastiques macroscopiques de deux types de bois, le bois sec et le bois chaud / humide. Au cours de cette étude, le comportement macroscopique du bois sera évalué en faisant varier uniquement la densité d'un cerne annuel, que l'on considère comme la densité du bois, pour 4 valeurs différentes du facteur de forme $r_\phi = L_1/L_2$ du modèle 2S, r_ϕ^i ($i = 1, \dots, 4$) = (3.75 ; 7.5 ; 15 ; 30) déterminant l'amplitude des oscillations des fibrilles à l'échelle de la paroi cellulaire.

8.2.1 Analyse pour différentes densités du bois

Sur la Figure 8-2, nous avons reporté l'évolution des 9 constants élastiques macroscopiques caractérisant l'orthotropie du bois en fonction de sa densité. On notera par ailleurs que dans notre étude la valeur de référence de la densité du bois de type résineux est égale à 0.378 g/cm^3 , cette dernière étant déterminée par l'équation (7.2. 2) en utilisant les densités des bois initial et bois final correspondant à une épaisseur t_{S2} de la couche S2 (c-à-d $m = 1$) pour une texture du bois $f_{BF} = 20\%$.



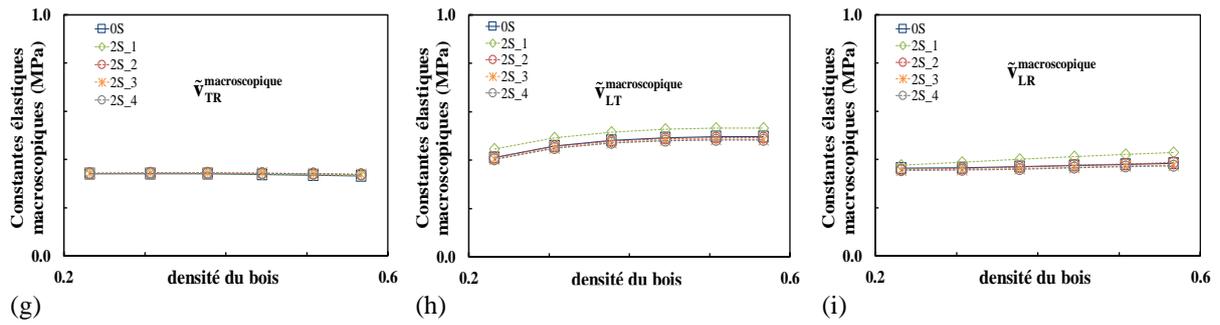


Figure 8-2 : Evolution des propriétés élastiques macroscopiques en fonction de la densité du bois pour les deux microstructures 0S et 2S (2S_1, $r_\phi = 3.75$; 2S_2, $r_\phi = 7.50$; 2S_3, $r_\phi = 15.00$; 2S_4, $r_\phi = 30.00$).

Comme prévu, on observe une forte anisotropie des propriétés élastiques du bois à l'échelle macroscopique pour la structure du tronc "idéale". Pour illustrer le degré d'anisotropie du matériau bois, nous présentons dans le Tableau 8-4 les ordres de grandeur relatifs des modules d'Young dans les trois directions anatomiques (L, R, T) qui correspondent à la valeur de référence de la densité du bois de notre modèle et à celle d'un résineux « standard » de l'étude de Guitard (Guitard, 1987).

Tableau 8-4 : Ordres de grandeur relatifs des modules d'Young dans 3 directions macroscopiques L, R, T

Modèle	Densité du bois (g/cm^3)	E_L/E_R	E_L/E_T	E_R/E_T
Multi-échelle	0.378	16.36	28.01	1.71
Guitard (1987)	0.45	13.00	21.00	1.60

On observe sur ce tableau ci-dessus des valeurs assez similaires en ordre de grandeur.

Pour ce qui concerne les effets induits par les ondulations des fibrilles, contrairement aux effets significatifs observés sur les trois modules de cisaillement macroscopiques \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LT} et \tilde{G}_{LR} , aucun effet n'est détecté sur les constantes \tilde{E}_T , \tilde{E}_R , $\tilde{\nu}_{TR}$ et très peu sur 3 autres constantes \tilde{E}_L , $\tilde{\nu}_{LT}$ et $\tilde{\nu}_{LR}$ pour une valeur de r_ϕ supérieure ou égale à sa valeur de référence 7.50. De plus, les effets induits par les oscillations des fibrilles sur ces modules de cisaillement macroscopiques deviennent significatifs uniquement pour les fortes densités, similairement à ce que l'on avait observé à l'échelle des tissus.

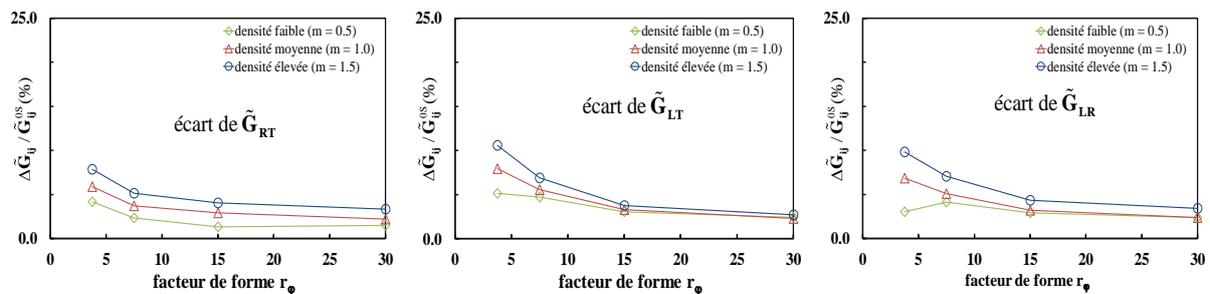


Figure 8-3: ensemble des écarts relatifs entre les résultats issus du modèle 0S et ceux issus du modèle 2S pour différentes valeurs de la densité du bois.

Afin d'observer plus en détail cet effet, nous avons reporté les évolutions des écarts relatifs $\left(\frac{\tilde{x}^{2S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}}\right)$ des 3 modules en cisaillement \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LT} et \tilde{G}_{LR} sur la Figure 8-3 en fonction de r_ϕ pour 3 valeurs différentes de la densité du bois, faible ($m = 0.5$; $\rho = 0.232$), moyenne (celle de référence) et élevée ($m = 1.5$; $\rho = 0.508$). Cette figure confirme de manière quantitative la remarque précédente avec des écarts pouvant montrer jusqu'à 10% pour les densités élevées ($m = 1.5$; $\rho = 0.508$). Enfin, on peut constater que l'effet induit par la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles reste significatif à l'échelle macroscopique du fait de la non-convergence vers zéro des écarts relatifs des 3 composantes de cisaillement même pour r_ϕ élevé, i.e. 2S ne converge pas vers 0S pour r_ϕ élevé, contrairement aux

effets induits par l'orientation des fibrilles et le contact inter-fibrillaire qui disparaissent tous les deux quand r_ϕ devient grand.

8.2.2 Effet du ramollissement de la matrice

Au travers l'analyse de l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif aux échelles de la paroi cellulaire et du tissu, nous avons montré que les effets induits par les fibrilles ondulées sont nettement plus importants pour un bois chaud / humide que pour un bois sec, on s'attend donc à ce même résultat à l'échelle du bois. Afin de vérifier ce résultat, nous avons reporté sur la Figure 8-4 les évolutions des 9 constantes ingénierues macroscopiques en fonction de la densité du bois dans le cas d'un bois chaud et humide dont le contraste matrice/fibrilles est fixé à $E_L^F/E^M = 10^3$, ce qui correspond à une valeur du module d'Young de la matrice ramollie fixée à $E^M = 0.138$ MPa.

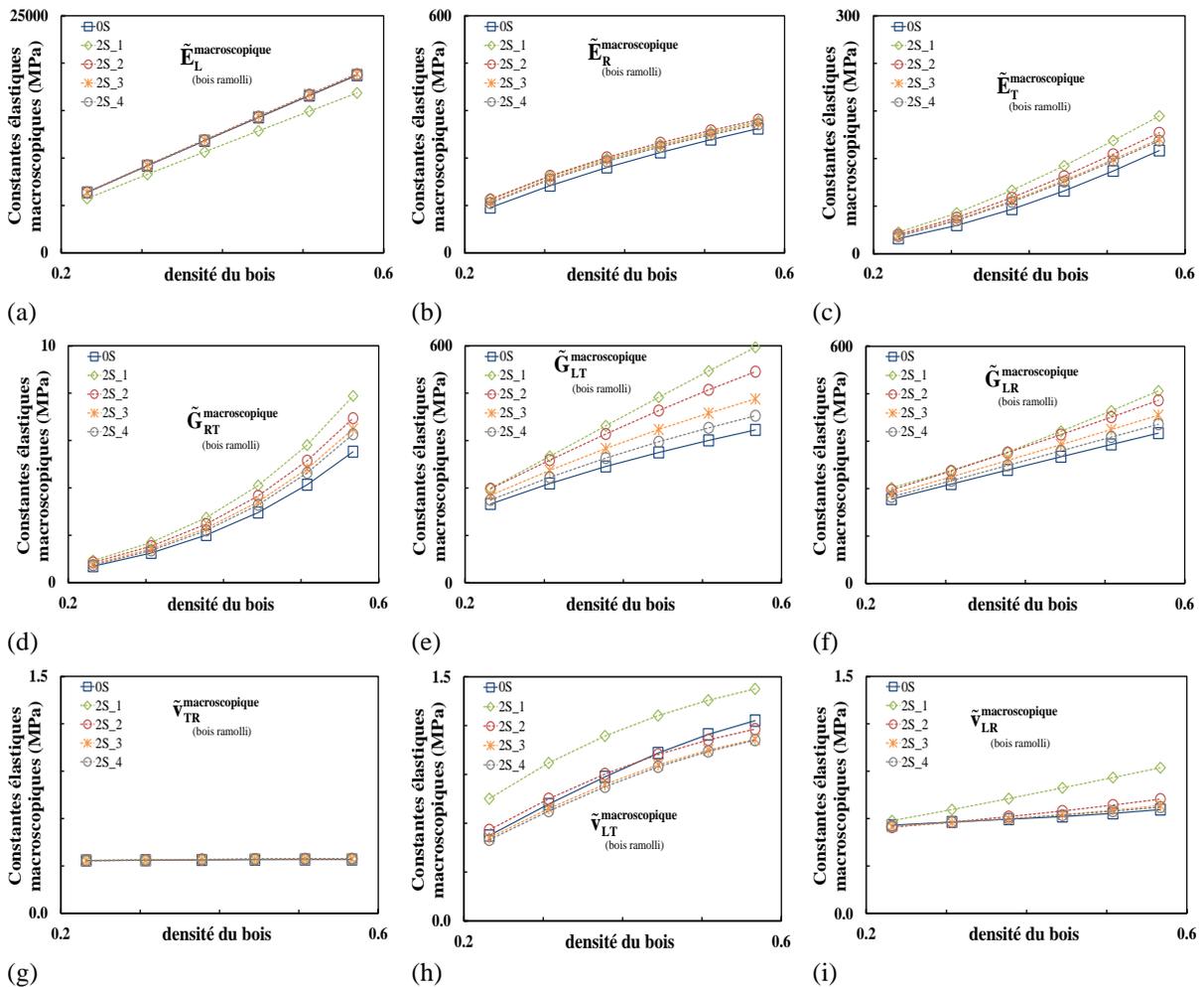


Figure 8-4 : Evolution des propriétés élastiques macroscopiques en fonction de la densité du bois pour deux microstructures 0S et 2S dans le cas du bois ramolli.

Comme attendu, les résultats obtenus sur la Figure 8-4 montrent que les effets des ondulations des fibrilles sont significativement plus importants que ceux issus du bois sec pour presque toutes les constantes matérielles macroscopiques, à l'exception de $\tilde{\nu}_{RT}$ et \tilde{E}_L . Cela illustre le fait que le comportement macroscopique du bois chaud et humide est principalement dû au réseau fibrillaire en absence de la matrice, sachant que ce dernier est essentiellement caractérisé par la géométrie de ses fibrilles et donc par leurs oscillation et contact. On constate également, comme dans le cas du bois sec, que l'influence des ondulations augmente avec la densité du bois.

Afin de comparer quantitativement le comportement du bois sec à celui du bois chaud et humide, nous avons tracé sur la Figure 8-5 les évolutions des écarts relatifs $\left(\frac{\tilde{x}^{2S} - \tilde{x}^{0S}}{\tilde{x}^{0S}}\right)$ entre les modèles 0S et 2S en fonction du rapport de forme r_ϕ pour la valeur de référence de la densité du bois résineux dans notre étude ($\rho_{\text{bois}} = 0.378$) pour les deux types de bois.

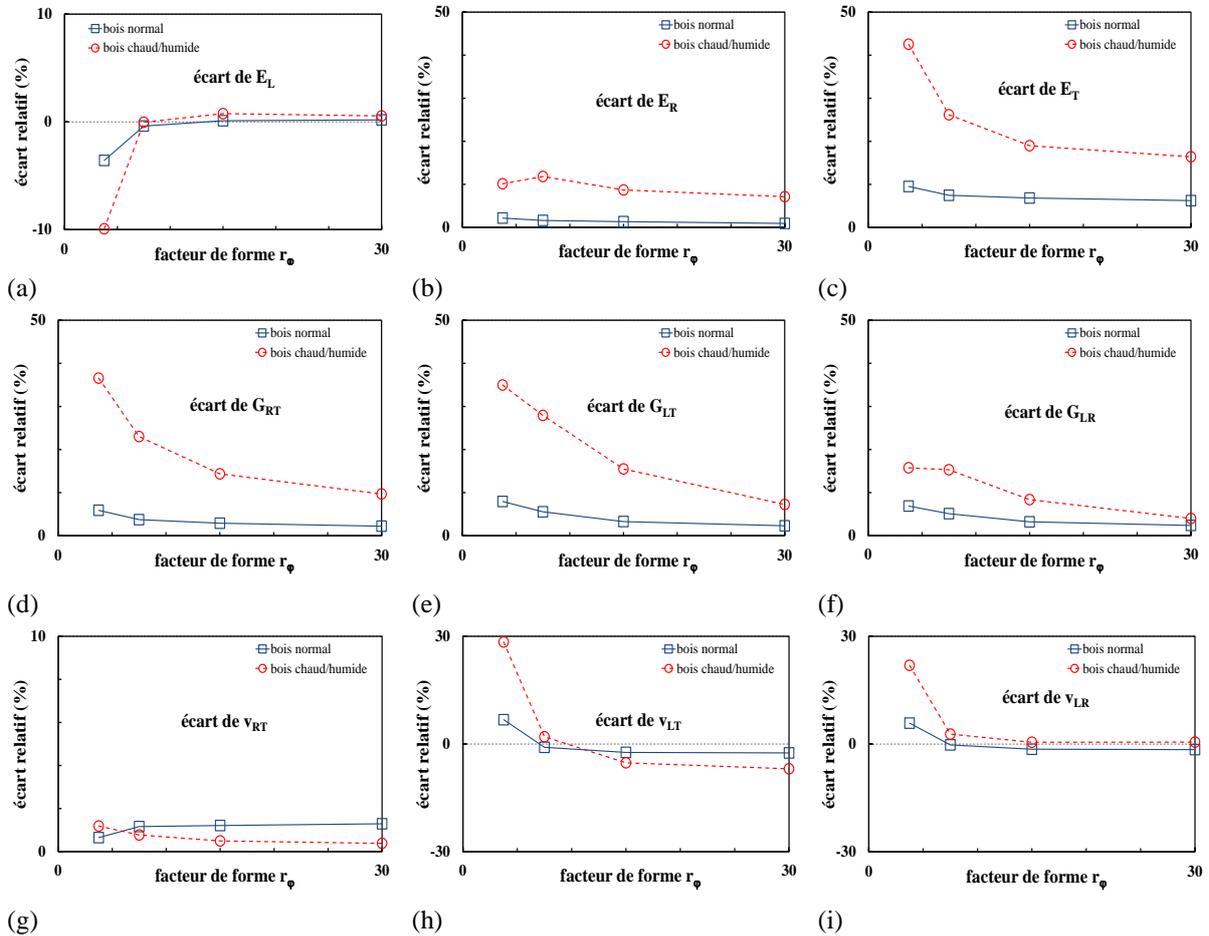


Figure 8-5: l'ensemble des écarts relatifs entre les résultats issus du modèle 0S et ceux issus du modèle 2S pour différentes valeurs de la densité du bois.

Les courbes de la Figure 8-5 montrent que les effets engendrés par des ondulations des fibrilles sont nettement plus importants quand la matrice est ramollie. Les composantes les plus influencées sont les modules de cisaillement \tilde{G}_{RT} , \tilde{G}_{LT} et \tilde{G}_{LR} , ainsi que les modules d'Young \tilde{E}_R , \tilde{E}_T dont l'écart peut atteindre les 40% pour certaines d'entre eux pour $r_\phi = 3.75$. Pour les autres constantes \tilde{E}_L , $\tilde{\nu}_{RT}$, $\tilde{\nu}_{LT}$ et $\tilde{\nu}_{LR}$, les écarts observés pour les valeurs de r_ϕ supérieures et égales à 7.50 (valeur de référence) sont inférieurs à 3% et peuvent donc être négligés.

8.3 Influence des ondulations sur les propriétés hydriques effectives des cernes

Dans la partie II on a mis en évidence à l'échelle des tissus les relations entre les déformations hydriques et la densité relative pour les deux morphologies 0S et 2S. On va maintenant étudier à l'échelle des cernes. Rappelons tout d'abord qu'au niveau des tissus, nous avons mis en évidence une influence négligeable du paramètre r_ϕ . Nous avons interprété cela en disant que des trois effets induits par les ondulations des fibrilles, seule la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles ondulées a de l'influence sur l'hygro-expansion. En outre seuls $\tilde{\alpha}_R$, $\tilde{\alpha}_T$ sont influencés, et très peu $\tilde{\alpha}_L$.

Aussi nous ne montrons dans la Figure 8-6 que les valeurs normalisées des deux coefficients d'hygro-expansion transverses $\tilde{\alpha}_R$, $\tilde{\alpha}_T$ en fonction de la densité du bois ($\rho_{\text{bois}} = 0.5 ; 0.75 ; 1 ; 1.25 ; 1.5 ; 1.75$), pour les modèles 0S et 2S avec pour ce dernier la seule valeur de référence de r_ϕ ($r_\phi = 7.50$). Les 3 cas d'étude du gonflement des constituants (la matrice ; la fibre dans les sens longitudinal ; la fibre dans le plan transversal) sont distingués. La valeur de la texture du bois est fixée à $f_{BF} = 20\%$.

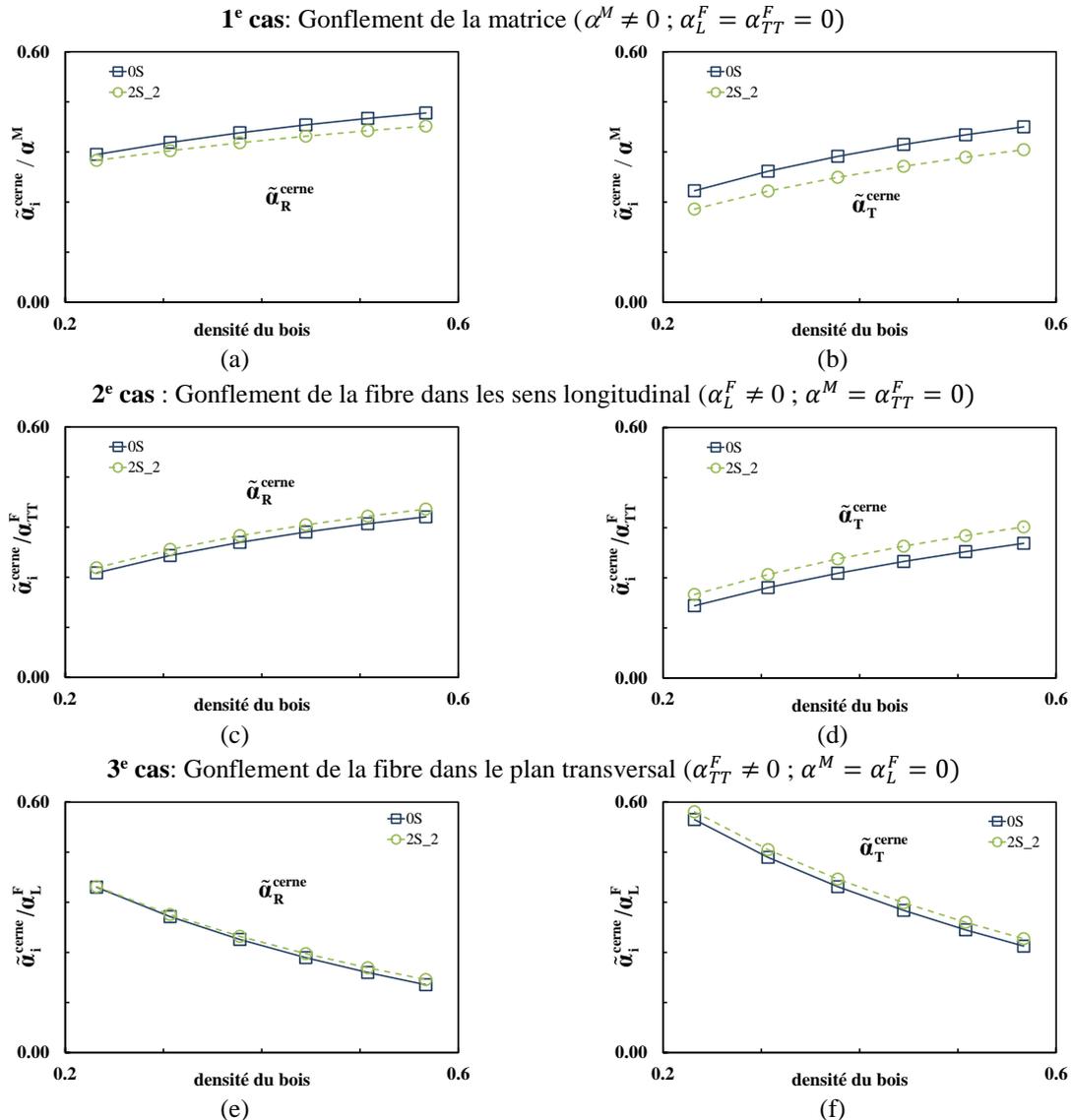


Figure 8-6 : Evolution des coefficients d'hygro-expansion effectifs des cernes en fonction de la densité du bois, comparaison entre les modèles 0S et 2S pour $r_\phi = 7.50$.

On peut constater que l'effet induit par la distribution spatiale hétérogène de la matrice, bien que faible, reste sensible à l'échelle des cernes pour les deux coefficients d'hygro-expansion transverses.

8.4 Conclusion

Dans la partie III, nous avons construit un modèle multi-échelle analytique-numérique qui prend en compte les microstructures du bois à 3 niveaux d'échelles, des parois cellulaires aux cernes annuels, en vue d'analyser l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique macroscopique du bois. Les résultats concernant les propriétés élastiques issues de ce dernier ont été comparés avec les résultats expérimentaux de Guitard dans le cas du bois résineux, et un bon agrément a été obtenu sur toutes les composantes à l'exception du module \tilde{G}_{RT} qui est sous-estimé par notre modèle. Cette sous-estimation peut être attribuée à l'excessive régularité du réseau cellulaire modélisé.

Elle pourrait aussi venir du fait que tous les effets 3D ne sont pas pris en compte par le modèle, ce dernier supposant une indépendance non conforme à la réalité de la géométrie des fibrilles dans la direction L.

Nous avons ensuite étudié l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement élastique des cernes et nous avons constaté que similairement à ce que l'on observe à l'échelle du tissu, ces effets deviennent importants uniquement pour les fortes densités, notamment pour les modules de cisaillement macroscopiques. De plus, ces effets observés sont plus importants dans le cas d'un bois chaud et humide pour presque toutes les constantes élastiques macroscopiques, à l'exception des deux constantes $\tilde{\nu}_{RT}$ et \tilde{E}_L .

Enfin, pour les effets induits par des ondulations des fibrilles sur les propriétés hydriques des cernes, nous avons montré que la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre des fibrilles est le seul effet qui continue à rester significatif au niveau des cernes, dans une mesure toutefois faible. Ces effets sont notamment pour les modules de cisaillement macroscopique

Conclusions et Perspectives

Conclusion générale

Au cours de ce travail, nous avons présenté un modèle multi-échelle, ou plus précisément un ensemble hiérarchique de modèles de changement d'échelles, qui nous permet d'estimer le comportement hygro-élastique macroscopique du bois en intégrant trois niveaux de microstructures différents, et pour lequel l'interaction des paramètres entre les différents niveaux est également prise en compte. Ce modèle est construit par application de méthodes d'homogénéisation numériques et analytiques avec l'hypothèse que le bois, qui est un matériau composite complexe, présente une microstructure périodique aux différentes échelles considérées telles que l'échelle de la paroi cellulaire (microscopique), l'échelle du tissu (mésoscopique) et l'échelle du cerne de croissance (macroscopique). En utilisant le modèle de changement d'échelle développé, cette thèse s'intéresse principalement aux effets de la prise en compte d'une morphologie plus réaliste de la paroi cellulaire du bois sur le comportement macroscopique du bois, pour laquelle on considère que les fibrilles cellulodiques sont à la fois incurvées et interconnectées contrairement à la morphologie classiquement utilisée dans la littérature, pour laquelle les fibrilles sont supposées droites et parallèles. Les modèles de changement d'échelles développés fournissent ainsi un outil prédictif pour l'analyse du comportement des bois naturels existants. En outre, ils constituent également un outil pour la conception de matériaux bio-inspirés, où les principes de conception des matériaux naturels sont étudiés afin de fournir une base conceptuelle pour le développement de nouveaux matériaux.

Les principaux résultats de ce travail sont présentés au sein de 3 grandes parties dans ce mémoire de thèse.

Tout d'abord, dans la partie I, suite à une recherche bibliographique, nous avons considéré plusieurs possibilités de description géométrique de la forme des fibrilles au sein de la paroi cellulaire et avons introduit 3 modèles de microstructure pour la paroi cellulaire : un modèle de référence sans oscillations des fibrilles (modèle 0S), 2 modèles pour lesquels les oscillations et interconnexions sont soit unidirectionnelles (modèle 1S), soit bidirectionnelles (modèle 2S). L'homogénéisation numérique des microstructures périodiques 1S et 2S a fait l'objet respectivement des chapitre 2 et 3 pour ce qui concerne l'obtention du comportement élastique effectif de la paroi cellulaire, et du chapitre 4 pour l'obtention du comportement hydrique effectif de la matière ligno-cellulosique constituant la paroi cellulaire. Les études paramétriques, réalisées dans la partie I en faisant varier différents paramètres géométriques et matériaux montrent qu'il existe 3 effets induits par les ondulations des fibrilles : l'orientation des fibrilles, le contact entre les fibrilles et la distribution spatiale hétérogène de la matrice entre les fibrilles oscillantes. Les résultats obtenus sont les suivants :

- Pour ce qui concerne le comportement élastique effectif : les deux modèles 1S et 2S ont un effet significatif et presque similaire sur les coefficients effectifs \tilde{C}_{12} , \tilde{C}_{66} qui sont les plus influencés par les ondulations des fibrilles dans le plan (1, 2); seul le modèle 2S est capable de prendre en compte l'influence des ondulations des fibrilles dans le plan (1, 3) et également dans le plan (2, 3) par les observations associées aux coefficients effectifs \tilde{C}_{13} , \tilde{C}_{55} et \tilde{C}_{23} , \tilde{C}_{44} , respectivement.
- Pour ce qui concerne le comportement hydrique effectif : l'étude de l'hygro-expansion des constituants de la paroi cellulaire du bois à l'échelle microscopique a montré que : d'une part, l'effet d'ondulation des fibrilles n'avait quasiment aucune influence sur le coefficient $\tilde{\alpha}_1$ quand $r_\phi \geq 7.50$ pour les deux modèles 1S et 2S ; d'autre part, le modèle 1S présente une hygro-expansion orthotrope $\tilde{\alpha}_2 \neq \tilde{\alpha}_3$ avec une anisotropie importante entre ces deux directions, tandis que le modèle 2S est transversalement isotrope pour le comportement hydrique $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3$, par exemple $\tilde{\alpha}_3^{0S} \leq \tilde{\alpha}_2^{2S} = \tilde{\alpha}_3^{2S} \leq \tilde{\alpha}_2^{0S}$ pour le gonflement induit par la matrice, etc.

Par ailleurs, un modèle analytique reposant sur la théorie de la RDM a été développé pour estimer le comportement élastique du réseau fibrillaire bidimensionnel. Ce dernier permet d'obtenir une estimation satisfaisante du comportement de la paroi cellulaire dans le cas du bois chaud et humide, ou du bois en formation.

Dans la partie II, nous avons cherché à déterminer le comportement effectif du tissu cellulaire du bois. Une étude bibliographique sur la diversité de formes des tissus cellulaires du bois initial et du bois final (cas du bois de résineux) nous a amené à considérer une microstructure périodique de tissu cellulaire (à l'échelle mésoscopique) s'approchant de la majorité des cas observés dans la littérature. Nous avons déterminé le comportement hygro-élastique effectif de la cellule unitaire de tissu considérée en recourant à nouveau aux méthodes d'homogénéisation numérique par EF. Nous avons ensuite réalisé une étude paramétrique, qui permet d'évaluer l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement hygro-élastique du tissu. Celle-ci a montré que l'influence des ondulations devient plus importante avec la croissance de la densité relative du tissu. Toutefois, bien que les effets induits par l'ondulation des fibrilles soient assez forts pour certaines composantes du comportement élastique à l'échelle de la paroi cellulaire, il perdrait de son importance au niveau du tissu, surtout pour le bois de faible densité. Cette tendance peut être expliquée par l'interaction des couches de deux cellules voisines qui compensent l'absence d'interaction entre les fibrilles quand celles-ci sont parallèles et non-oscillantes. De plus, nous avons également mis en évidence le rôle respectif de la forme des cellules sur l'anisotropie des propriétés hydriques du bois au niveau des tissus à l'aide des résultats obtenus des coefficients hygro-expansion effectifs $\tilde{\alpha}_L, \tilde{\alpha}_R, \tilde{\alpha}_T$ issus des deux modèles BI et BF, qui se sont avérés cohérents avec les principales observations existant dans la littérature pour le bois sec. Enfin, nous avons également développé une approche analytique permettant d'estimer le comportement effectif du tissu en étendant le modèle de Gibson et Ashby (1988) à des parois multicouches caractérisées par un comportement orthotrope permettant de se rapprocher de la structure réelle du tissu du bois. Ce modèle analytique fournit une bonne estimation des propriétés élastiques effectives planes du tissu, notamment pour les tissus du bois initial.

La troisième partie consiste à présenter le modèle multi-échelle hiérarchique à trois échelles, qui est mis en place en intégrant un dernier changement d'échelle, permettant de passer du tissu cellulaire au cerne. Ce modèle final permet d'estimer le comportement hygro-élastique macroscopique du bois résineux. Le dernier changement d'échelle qui consiste à déterminer le comportement macroscopique de cerne, constitué par un mélange de bois initial et de bois final, est réalisé à l'aide d'un modèle d'homogénéisation analytique fournissant le comportement effectif d'un laminé biphasé orthotrope périodique. Le modèle multi-échelle présenté fournit des propriétés hygro-élastiques macroscopiques et leurs évolutions en fonction de la densité du bois proches de celles observées expérimentalement pour les résineux, à l'exception du module \tilde{G}_{RT} qui est fortement sous-estimé. Enfin, l'étude de l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement macroscopique du bois via le modèle multi-échelle présenté montre que les résultats obtenus sont similaires à ceux observés à l'échelle du tissu, c-à-d les effets induits par les ondulations des fibrilles sont importants uniquement pour les fortes densités, notamment pour les modules de cisaillement macroscopiques. Ces effets sont par ailleurs amplifiés significativement dans le cas d'une matrice ramollie.

Perspectives

Le modèle multi-échelle du bois présenté dans ce travail de thèse peut être développé de manière plus élaborée. Sur la base des résultats obtenus au cours de cette thèse, un certain nombre de directions de recherches peuvent être formulées. Notamment :

- Les résultats des études paramétriques ont révélé que les propriétés hygro-élastiques effectives obtenues par homogénéisation périodique aux différentes échelles de microstructure considérées dépendent fortement d'une part des valeurs choisies des propriétés des constituants chimiques,

et d'autre part, du modèle de morphologie (0S, 1S, 2S) choisi pour la paroi cellulaire. Par conséquent, si l'on souhaite améliorer les résultats du modèle multi-échelle, il est essentiel d'avoir une meilleure connaissance, d'une part, des propriétés des constituants chimiques, et d'autre part de la description morphologique de la paroi cellulaire. Ainsi, plusieurs hypothèses formulées dans les trois parties concernant les modélisations des 3 modèles de changement d'échelles développés, à rappeler : la paroi cellulaire, le tissu et le cerne de croissance, peuvent influencer la qualité des résultats. Par exemple :

- Au niveau de la paroi cellulaire : une simplification de la morphologie des fibrilles en considérant qu'elles sont ondulées et interconnectées dans un repère orthonormé (modèles 1S et 2S), avec une translation constante de l'épaisseur des fibrilles, etc.
- Au niveau du tissu : une invariance de la structure du tissu et de la densité locale dans le sens longitudinal, etc.
- Au niveau du cerne : une simplification de la variation de densité du bois sur un cerne de croissance en considérant que le cerne de croissance est divisé brutalement en deux régions principales, etc.

Toutes ces hypothèses simplificatrices pourraient être remises en question pour mieux approcher la réalité de la structure du bois.

- Les propriétés hygro-élastiques du bois aux 3 échelles différentes ont été déterminées pour une valeur fixée du taux d'humidité. Il serait ainsi très intéressant d'étudier l'évolution de ces propriétés dans un intervalle de taux d'humidité allant de 0% à 30% (en dessous du PSF) ;
- Les recherches actuelles se sont concentrées uniquement sur l'influence des fibrilles ondulées sur les propriétés linéaires thermoélastiques du bois, à savoir les modules d'élasticité effectifs et les coefficients d'expansion effectifs. Or, le bois possède de nombreuses autres propriétés essentielles liées à la rupture, à la mécano-sorption, à la dépendance temporelle et à d'autres comportements non-linéaires. Une extension du modèle multi-échelle présenté à d'autres types de propriétés ou de comportements serait d'un grand intérêt ;
- Enfin, en ce qui concerne le modèle analytique à l'échelle du cerne, son état actuel permet d'étudier l'influence des fibrilles ondulées sur divers paramètres macroscopiques tels que les propriétés élastiques et les propriétés hydriques. Du fait des morphologies tissulaires considérées dans cette étude, ce dernier sert principalement à étudier le comportement hygro-élastique des résineux, pour lesquels l'influence des ondulations des fibrilles n'est pas très significative. Or, cette influence est plus importante pour les densités relatives de tissu élevées, comme c'est le cas des feuillus. Afin d'étudier le comportement hygro-élastique des feuillus, pour lequel on pourrait donc s'attendre à un effet important des oscillations des fibrilles, il faudrait cependant prendre en compte dans le modèle de changement d'échelle présenté des traits caractéristiques indispensables des feuillus, à savoir les vaisseaux et les cellules de parenchymes. Pour cela, on pourrait modéliser ces derniers par des vides dans les tissus de bois initial et de bois final.

Références

- Ansell, M.P., 2015. Wood microstructure—A cellular composite. *Wood Compos.* 3–26.
- Arzola-Villegas, X., Lakes, R., Plaza, N.Z., Jakes, J.E., 2019. Wood Moisture-Induced Swelling at the Cellular Scale - Ab Intra. *Forests* 996.
- Astley, R.J., Harrington, J.J., Stol, K.A., 1997. Mechanical Modelling of Wood Microstructure, An Engineering Approach. *Trans. Inst. Prof. Eng. N. Z. Electr. Eng. Sect.* 24, 21–29.
- Astley, R.J., Stol, K.A., Harrington, J.J., 1998. Modelling the elastic properties of softwood. Part II: The cellular microstructure. *Holz Als Roh- Werkst.* Vol. 56, 43–50.
- Back, E.L., Salmén, L., 1982. Glass transitions of wood components hold implications for molding and pulping processes [Wood and paper materials]. *TAPPI J. Tech. Assoc. Pulp Pap. Ind.*
- Bardage, S., Donaldson, L., Tokoh, C., Daniel, G., 2004. Ultrastructure of the cell wall of unbeaten Norwayspruce pulp fibre surfaces. *Nord. Pulp Pap. Res. J.* 19, 448–452.
- Barrett, J.D., 1973. Theoretical models of wood shrinkage and elasticity. University of California, Berkeley.
- Benoit, Y., Dirol, D., 2000. Le guide de reconnaissance des bois de France: 16 essences, les observer, les identifier, les utiliser.
- Bergander, A., 2001. Local variability in chemical and physical properties of spruce wood fibers. KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- Bergander, A., Brändström, J., Daniel, G., Salmén, L., 2002. Fibril angle variability in earlywood of Norway spruce using soft rot cavities and polarization confocal microscopy. *J. Wood Sci.* 48, 255–263.
- Berthelot, J.M., 2010. Mécanique des matériaux et structures composites'', Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés. Le Mans, France.
- Bodig, J., Jayne, B., 1982. Mechanics of wood and wood composites, Van Nostrand Reinhold. ed, Colección general Biblioteca.
- Bonnet, M., 2017. Analyse multi-échelle du comportement hygromécanique du bois : Mise en évidence par relaxométrie du proton et mesures de champs volumiques de l'influence de l'hétérogénéité au sein du cerne (Spécialité Structures et Matériaux). Université Paris-Est Ecole Doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement, Docteur.
- Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques, Mécanique et Ingénierie des Matériaux.
- Boyd, J.D., 1982. An anatomical explanation for visco-elastic and mechano-sorptive creep in wood, and effects of loading rate on strength. *New Perspect. Wood Anat.* 171–222.
- Boyd, J.D., Foster, R.C., 1974. Tracheid anatomy changes as responses to changing structural requirements of the tree. *Wood Sci. Technol.* 8, 91–105.
- Carrington, H., 1923. The elastic properties of spruce. *Philos. Mag.* 45, 1055–1057.
- Cave, I., 1997. Theory of X-ray measurement of microfibril angle in wood. *Wood Sci. Technol.* 225–234.
- Cave, I., 1978. Modelling moisture-related mechanical properties of softwood – Part I: properties of the wood constituents. *Wood Sci. Technol.* 12, 75–86.
- Cave, I., 1968. The anisotropic elasticity of the plant cell wall. *Wood Sci. Technol.* 2, 268–278.
- Chow, S.Z., Pickles, K.J., 1971. Thermal Softening and Degradation of Wood and Bark. *Wood Fiber Sci.* 166–178.

- Cousins, W.J., 1978. Young's modulus of hemicellulose as related to moisture content. *Wood Sci. Technol.* 12, 161–167.
- Dunning, C.E., 1968. Cell-wall morphology of longleaf pine latewood.
- Evans, R., 1994. Rapid Measurement of the Transverse Dimensions of Tracheids in Radial Wood Sections from *Pinus radiata*. *Holzforschung* 48, 168–172.
- Fahlén, J., Salmén, L., 2005. Pore and Matrix Distribution in the Fiber Wall Revealed by Atomic Force Microscopy and Image Analysis. *Biomacromolecules* 433–438.
- Farruggia, F., 1998. Détermination du comportement élastique d'un ensemble de fibres de bois à partir de son organisation cellulaire et d'essais mécaniques sous microscope (These de Doctorat-ENGREF). Nancy, France.
- Farruggia, F., Lahbabi, R., Perré, P., 1996. Détermination des propriétés mécaniques des résineux à l'échelle microscopique du plan ligneux. *Cah. Lorrains Bois ARBOLOR*.
- Farruggia, F., Perré, P., 2000. Microscopic tensile tests in the transverse plane of earlywood and latewood parts of spruce. *Wood Sci. Technol.* 34, 65–82.
- Fengel, D., 1969. The ultrastructure of cellulose from wood Part 1: Wood as the basic material for the isolation of cellulose. *Wood Sci. Technol.* 3, 203–217.
- Fengel, D., Stoll, M., 1973. Variation in cell cross-sectional area, cell-wall thickness and wall layers of spruce tracheids within an annual ring. *Holzforschung* 27, 1–7.
- Fengel, D., Wegener, G., 1984. *Wood: chemistry, ultrastructure, Reactions*. ed.
- Fengel, D., Wegener, G., Greune, A., 1989. Studies on the delignification of spruce wood by organosolv pulping using SEM-EDXA and TEM. *Wood Sci. Technol.* 23, 123–130.
- Funakoshi, H., Shiraishi, N., Norimoto, M., Aoki, T., Hayashi, H., Yokota, T., 1979. Studies on the Thermoplasticization of Wood. *Holzforschung* 33, 159–166.
- Gachet, C., 2003. Inventaire et hiérarchisation de paramètres structuraux et ultrastructuraux facteurs de variabilité intra spécifique de certaines propriétés mécano physiques de tissus ligneux (Sciences physiques et de l'ingénieur. Sciences du bois). Bordeaux 1.
- Gay, D., 1991. *Matériaux composites*. Hermes Paris.
- Gibson, L.J., Ashby, M.F., 1988. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Pergamon Press, England zbMATH.
- Goring, D.A., 1963. Thermal softening of lignin, hemicellulose and cellulose. *Pulp Pap* 517–527.
- Gril, J., 1988. Une modélisation du comportement hygro-rheologique du bois a partir de sa microstructure. Paris 6.
- Guitard, D., 1987. *Mécanique du matériau bois et composites*, Cépaduès. ed.
- Guitard, D., Gachet, C., 2004. Paramètres structuraux et/ou ultrastructuraux facteurs de la variabilité intra-arbre de l'anisotropie élastique du bois. *Ann. For. Sci.* 61, 129–139.
- Hansen, E., Juslin, H., 2018. *Strategic Marketing in the Global Forest Industries*, Oregon State University. ed.
- Harrington, J.J., 2002. Hierarchical modelling of softwood hygro-elastic properties. University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Harrington, J.J., Astley, R.J., Booker, R., 1998. Modelling the elastic properties of softwood. Part I: The cell-wall lamellae. *Holz Als Roh- Werkst.* 56, 37–41.
- Hearmon, R.F.S., 1948. Elasticity of Wood and Plywood. *For. Prod. Res.*
- Hillis, W.E., Rozsa, A.N., 1978. The Softening Temperatures of Wood. *Holzforschung* 32, 68–7.

- Hofstetter, K., Gamstedt, E.K., 2009. Hierarchical modelling of microstructural effects on mechanical properties of wood. *Rev. COST Action E35 2004–2008 Wood Mach. Fract.*
- Hofstetter, K., Hellmich, C., Eberhardsteiner, J., 2005. Development and experimental validation of a continuum micromechanics model for the elasticity of wood. *Eur. J. Mech. - ASolids* 24, 1030–1053.
- Hunter, A.J., 2001. The distribution of mechanical stresses in the cell wall of wood induced by capillary tension in the lumen water – an approximate analysis. *Wood Sci. Technol.* 35, 283–296.
- Inoue, M., Aoki, T., Egawa, G., 1992. Development of a new teaching material utilizing recovery of compressive set of wood. *Wood Res. Tech. Notes.*
- Irvine, G.M., 1985. The significance of the glass transition of lignin in thermomechanical pulping. *Wood Sci. Technol.* 19, 139–149. <https://doi.org/10.1007/BF00353074>
- Johanson, D., 1940. On early and late wood in Swedish spruce and pine and on their influence on the properties of sulfite and sulfate pulp. *Holz Als Roh- Werkst.* 3, 73–78.
- Jones, R.M., 2018. *Mechanics of composite materials*, 2nd ed, CRC press. Boca Raton.
- Joseleau, J.P., Ruel, K., 2005. Deposition of hemicelluloses and lignins during secondary wood cell wall assembly. *New Knowl. Wood Qual.* 103–113.
- Kahle, E., Woodhouse, J., 1994. The influence of cell geometry on the elasticity of softwood. *J. Mater. Sci.* 29, 1250–1259.
- Keller, R., 1999. *Cours de DEA Sciences du Bois: structure, composition, formation du bois.*
- Kelley, S.S., Rials, T.G., Glasser, W.G., 1987. Relaxation behaviour of the amorphous components of wood. *J. Mater. Sci.* 22, 617–624.
- Kerr, A.J., Goring, D.A., 1975. The Role of Hemicellulose in the Delignification of Wood. *Can. J. Chem.* 53, 952–959.
- Kollman, F.P., Côté, W.A., 1968. *Principles of Wood Sciences and Technology*, Springer - Verlag. New York, NY, USA.
- Koponen, S., Toratti, T., Kanerva, P., 1991. Modelling elastic and shrinkage properties of wood based on cell structure. *Wood Sci. Technol.* 25, 25–32.
- Koponen, S., Toratti, T., Kanerva, P., 1989. Modelling longitudinal elastic an shrinkage properties of wood. *Wood Sci. Technol.* 23, 55–63.
- Lahbabi, R., 1995. *Mesure par analyse d'image de parametres microscopiques requis pour une prediction deterministe des proprietes du bois (Doctoral dissertation)*. Paris, ENGREF.
- Lichtenegger, H., Müller, M., Paris, O., Riekkel, C., Fratzl, P., 1999. Imaging of the helical arrangement of cellulose fibrils in wood by synchrotron X-ray microdiffraction. *J. Appl. Crystallogr.* 1127–1133.
- Mark, R.E., 1981. Molecular and Cell Wall Structure of Wood, in: *Adhesion in Cellulosic and Wood-Based Composites*. Springer, Boston, MA, pp. 7–51.
- Mark, R.E., 1972. Molecular and Cell Wall Structure of Wood. *Adhes. Cellul. Wood-Based Compos.* pp 7-51.
- Mark, R.E., 1967. *Cell wall mechanics of tracheids*, Yale University Press. New Haven, USA.
- Mishnaevsky Jr, L., Qing, H., 2008. Micromechanical modelling of mechanical behaviour and strength of wood: State-of-the-art review. *Comput. Mater. Sci.* 44, 363 370.
- Navi, P., Heger, F., 2005. *Comportement thermo-hydrromécanique du bois: Applications technologiques et dans les structures*, PPUR presses polytechniques.

- Navi, P., Rastogi, P.K., Gresse, V., Tolou, A., 1995. Micromechanics of wood subjected to axial tension. *Wood Sci. Technol.* 29, 411–429.
- Neagu, R., Gamstedt, E., Bardage, S., Lindström, M., 2006. Ultrastructural features affecting mechanical properties of wood fibres. *Wood Mater. Sci. Eng.* 146–170.
- Neagu, R.C., Gamstedt, E.K., 2007. Modelling of effects of ultrastructural morphology on the hygroelastic properties of wood fibres. *J. Mater. Sci.* 42, 10254–10274.
- Nishino, T., Takano, K., Nakamae, K., 1995. Elastic modulus of the crystalline regions of cellulose polymorphs. *J. Polym. Sci.* 33, 1647–1651.
- Norimoto, M., Gril, J., 1989. Wood Bending Using Microwave Heating. *J. Microw. Power Electromagn. Energy* 24, 203–212.
- Norimoto, M., Takabe, K., 1985. On noncrystalline structure of wood. *Wood Res Tech. Notes* 21, 96–101.
- Paakkari, T., Serimaa, R., 1984. A study of the structure of wood cells by x-ray diffraction. *Wood Sci. Technol.* 18, 79–85.
- Panshin, A.J., Zeeuw, C., 1970. *Textbook of Wood Technology. Volume I. Structure, Identification, Uses, and Properties of the Commercial Woods of the United States and Canada.* McGraw-Hill Book Co, New York, NY, USA.
- Pentoney, R.E., 1953. Mechanisms affecting tangential vs. radial shrinkage. *J. For. Prod Res Soc* 3, 27–32.
- Persson, K., 2000. *Micromechanical modelling of wood and fibre properties (Structural Mechanics).* Lund University, Sweden.
- Phan, N.T., Auslender, F., Gril, J., Moutou Pitti, R., 2022. Influence of the cross-linking of the cellulosic fibrillar network on the effective hygro-mechanical behavior of the wood cell wall. *Acta Mech.*
- Phillips, E.W.J., 1941. The Identification of Coniferous Woods by their Microscopic Structure. *Bot. J. Linn. Soc.* 52, 259–320.
- Preston, R.D., 1934. The Organization of the Cell Wall of the Conifer Tracheid. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 224, 131–174.
- Qing, H., Mishnaevsky Jr, L., 2009. 3D hierarchical computational model of wood as a cellular material with fibril reinforced, heterogeneous multiple layers. *Mechanics of Materials.*
- Rafsanjani, A.A., 2013. *Multiscale poroelastic model - Bridging the gap from cellular to macroscopic scale (Doctor of Sciences).* ETH Zurich.
- Ross, R.J., 2010. *Wood handbook: wood as an engineering material.* USDA Forest Service, Forest Products Laboratory, General Technical Report FPL-GTR-190.
- Rowell, R.M., 2005. *Handbook of Wood Chemistry and Wood Composites, 1st Edition.* ed. Boca Raton, FL, USA.
- Ruel, K., Barnould, F., Eriksson, E., 1984. Ultrastructural Aspects of Wood Degradation by *Sporotrichum pulverulentum* - Observations on Spruce Wood Impregnated with Glucose. *Holzforschung* 38, 61–68.
- Sahlberg, U., Salmén, L., Oscarsson, A., 1997. The fibrillar orientation in the S2-layer of wood fibres as determined by X-ray diffraction analysis. *Wood Sci. Technol.* 31, 77–86.
- Sakurada, I., Nukushina, Y., Ito, T., 1962. Experimental determination of the elastic modulus of crystalline regions in oriented polymers. *Exp. Determ. Elastic Modul. Cryst. Reg. Oriented Polym.* 651–660.
- Salmén, L., 2018. *Wood Cell Wall Structure and Organisation in Relation to Mechanics.* Springer Int. Publ. AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-79099-2_1

- Salmén, L., 2014. Wood morphology and properties from molecular perspectives. INRA Springer-Verl. Fr. 2014.
- Salmén, L., 2004. Micromechanical understanding of the cell-wall structure. *C. R. Biol.* 327, 873–880.
- Salmén, L., 1984. Viscoelastic properties of in situ lignin under water-saturated conditions. *J. Mater. Sci.* 19, 3090–3096.
- Salmén, L., De Ruvo, A., 1985. A model for the prediction of fiber elasticity.
- Scallan, A.M., 1974. Structure of the cell wall of wood--a consequence of anisotropic inter-microfibrillar bonding. *Wood Sci Prod Res Soc Madison* 266–271.
- Schniewind, A., 1972. Elastic behavior of the wood fiber, Theory and design of wood fiber composite materials, BA Jayne. ed.
- Schniewind, A., 1959. Transverse anisotropy of wood: a function of gross anatomic structure. *For. Prod J* 9, 350–359.
- Schulgasser, K., Witztum, A., 2015. How the relationship between density and shrinkage of wood depends on its microstructure. *Wood Sci. Technol.* 49, 389–401.
- Simon, P., 2009. Approche multiéchelle du comportement mécanique du bois dans le plan transverse (Doctoral dissertation). Lyon, INSA.
- Smith, D.N., 1965. Rapid measurement of tracheid cross-sectional dimensions of conifers: its application to specific gravity determinations. *Prod J* 15, 325–334.
- Smith, D.N., Miller, R.B., 1964. Methods of measuring and estimating tracheid wall thickness of redwood. *Tappi* 47, 599–604.
- Terashima, N., Fukushima, K., 1988. Heterogeneity in formation of lignin - XI: An autoradiographic study of the heterogeneous formation and structure of pine lignin. *Wood Sci. Technol.* 22, 259–270.
- Thuvander, F., Kifetez, G., Berglund, L.A., 2002. Modeling of cell wall drying stresses in wood. *Wood Sci. Technol.* 36, 241–254.
- Timoshenko, S.P., 1968. Résistance des matériaux, Paris: Dunod. ed.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1970. Theory of Elasticity, New York. ed, McGraw-Hill International.
- Trouy, M.C., 2015. Anatomie du bois: Formation, fonctions et identification, Quae. ed.
- Watanabe, U., Norimoto, M., Fujita, M., Gril, J., 1998. Transverse shrinkage anisotropy of coniferous wood investigated by the power spectrum analysis. *J. Wood Sci.* 44, 9–14.
- Watanabe, U., Norimoto, M., Ohgama, T., Fujita, M., 1999. Tangential Young's Modulus of Coniferous Early Wood Investigated Using Cell Models. *Holzforschung* 53, 209–214.
- Wimmer, R., Lucas, B.N., 1997. Comparing Mechanical Properties of Secondary Wall and Cell Corner Middle Lamella in Spruce Wood. *IAWA J.* 18, 77–88.
- Ylinen, A., Jumppanen, P., 1967. Theory of the shrinkage of wood. *Wood Sci. Technol.* 1, 241–252.

A. Annexe A

Application des conditions aux limites périodiques avec Cast3M

L'utilisation de conditions aux limites périodiques (CLP) dans les calculs par éléments finis nécessite d'utiliser un maillage périodique afin d'appliquer les conditions de périodicité aux points d'homologie de deux faces opposées. Nous présentons en détail comment utiliser le code de calcul Cast3M pour appliquer des CLP sur un maillage périodique et sur un maillage non périodique.

A.1 Généralités et cas du maillage périodique

Dans le code de calcul Cast3M, des CL périodiques peuvent être appliquées à l'aide de l'opérateur 'RELA', qui sert à imposer des relations linéaires entre les degrés de libertés des nœuds de maillages. Pour illustrer cette opération, on prend par exemple de deux faces opposées S_1 et S_2 séparées par le vecteur de périodicité $\underline{L}_1 = L_1 \cdot \underline{e}_x$ (voir la Figure A-1).

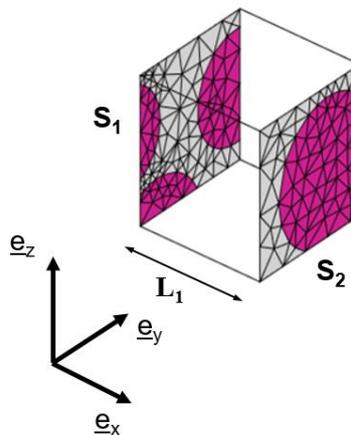


Figure A-1 : Maillage symétrique enduit par l'application des CL périodiques

Les lignes suivantes permettent de calculer les rigidités associées aux relations entre les déplacements des nœuds des faces opposées. :

```
RIG1 = 'RELA' 'UX' S1 - 'UX' S2;  
RIG2 = 'RELA' 'UY' S1 - 'UY' S2;  
RIG3 = 'RELA' 'UZ' S1 - 'UZ' S2;
```

L'amplitude de ce déplacement est définie à l'aide de l'opérateur 'DEPI', par exemple

```
DEP1 = 'DEPI' RIG1 (Val);  
DEP2 = 'DEPI' RIG2 0;  
DEP3 = 'DEPI' RIG3 0;
```

où Val est la valeur que l'on souhaite affecter en DEP1.

Il est nécessaire par ailleurs d'empêcher les mouvements de corps rigide de translation en choisissant de bloquer un sommet du cube.

A.2 Cas du maillage non périodique

A l'aide de l'opérateur "RELA", il n'est pas possible d'imposer une relation cinématique entre les nœuds des deux faces d'un maillage non-périodique. En revanche, les nœuds d'une face peuvent être copiés sur la face opposée, et une relation cinématique peut être imposée entre les nœuds de la face initiale et ceux de la face copiée, qui eux-mêmes "suivent" le déplacement de la surface opposée.

Revenons à l'exemple précédent, mais pour lequel désormais le maillage S_2 utilisé est différent de celui de S_1 (voir la Figure A-2). La duplication de S_1 se fait via l'opérateur 'PLUS'.

$S_{1op} = S_1$ 'PLUS' (L1 0. 0.) ;

On utilise ensuite l'option "ACCRO" de l'opérateur "RELA" pour asservir les déplacements des nœuds de la face S_{1op} à ceux de S_2

ELEM_S2 = MAIL_TOT 'ELEM' 'APPU' 'LARG' S2;
RIG0 = 'RELA' S1op 'ACCR' ELEM_S2;

où MAIL_TOT indique le nom du maillage.

Comme dans le cas où le maillage est périodique, il nous restes plus qu'à écrire les relation périodiques entre les déplacements de S_1 et S_{1op} comme les décrites dans le cas du maillage périodique.

RIG1 = 'RELA' 'UX' S1op - 'UX' S1;
RIG2 = 'RELA' 'UY' S1op - 'UY' S1;
RIG3 = 'RELA' 'UZ' S1op - 'UZ' S1;

puis:

DEP1 = 'DEPI' RIG1 (Val);
DEP2 = 'DEPI' RIG2 0;
DEP3 = 'DEPI' RIG3 0;

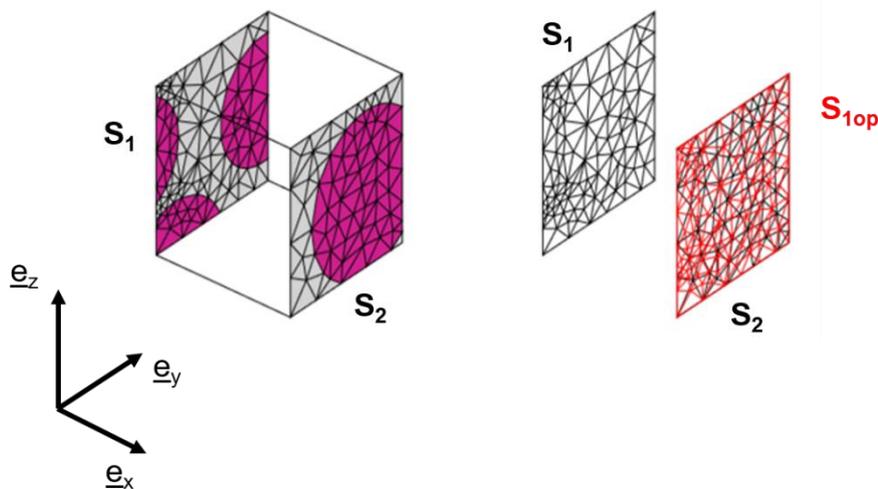


Figure A-2 : Maillage non périodisé, accrochage de S_{1op} dans S_2

La relation entre les déplacements des surfaces opposées est imposée sur S_1 et S_{1op} . Le maillage surfacique S_{1op} est entraîné par le déplacement de S_2 . Si les maillages S_1 et S_2 sont largement séparés l'un de l'autre, il faut accrocher la surface avec le maillage le plus dense à la surface avec le maillage le moins dense. Le mouvement de corps rigide de translation peut être supprimé en encastrant un sommet du cube.

B. Annexe B

B.1 Etude de l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif de la paroi cellulaire pour le modèle 1S

B.1.1 Effet de la fraction volumique des fibrilles c

La Figure B-1 fournit l'évolution des 9 paramètres matériaux ingénieurs caractérisant le comportement effectif de la couche S2 en fonction de la fraction volumique des fibrilles c pour les valeurs de référence $r_\phi = 7.5$, $r_\lambda = 1.0$.

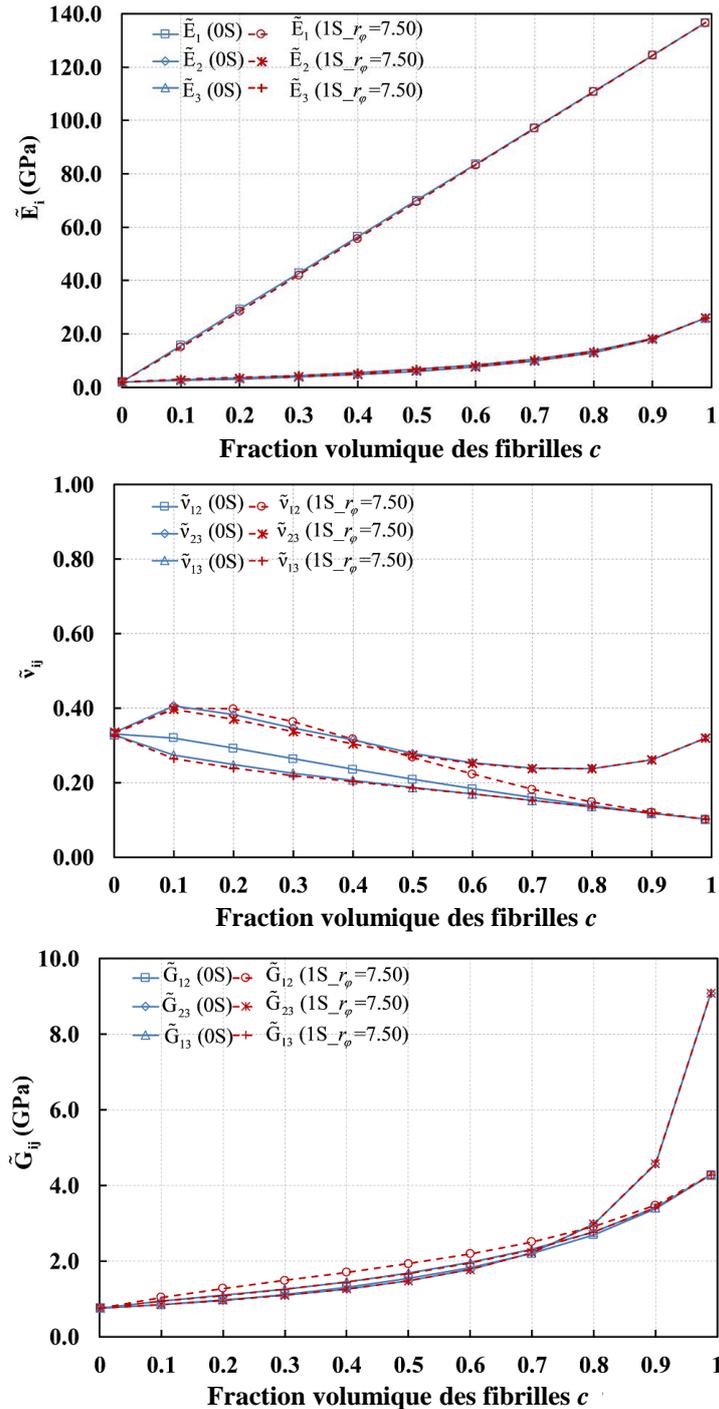


Figure B-1 : Evolution des coefficients d'ingénieurs effectifs en fonction de la fraction volumique des fibrilles ($r_\varphi = 7.50$, $r_\lambda = 1.0$)

B.1.2 Effet des paramètres matériaux

En complément de la Figure 2-22 du manuscrit principal, nous présentons sur la Figure B-2 l'évolution des coefficients d'ingénieurs effectifs en fonction du contraste E_L^F/E^M , qui ne sont pas ou très peu influencés par l'effet des ondulations des fibrilles en fonction du rapport.

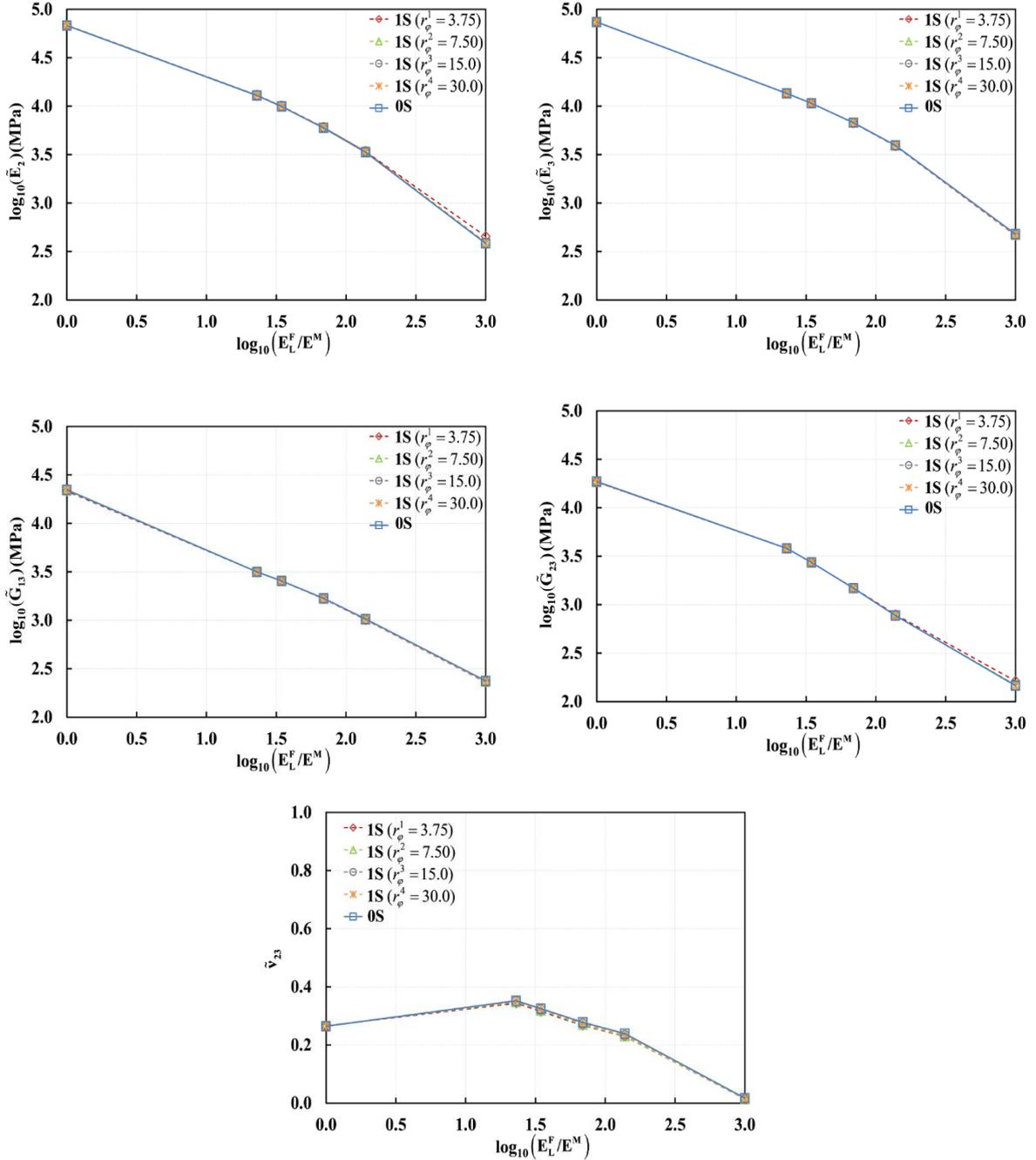


Figure B-2 : Evolution des coefficients d'ingénieurs effectifs en fonction du contraste E_L^F/E^M pour les modèles 1S et 0S ($r_\lambda = 1.0$; $c = 0.5$).

B.2 Etude de l'influence des ondulations des fibrilles sur le comportement effectif de la paroi cellulaire pour le modèle 2S

B.2.1 Variation des paramètres géométriques

En complément de la Figure 3-13 du manuscrit principal, nous présentons ci-dessous l'évolution en fonction de la fraction volumique des fibrilles c des autres composantes \tilde{C}_{ij} qui ne sont pas ou très peu influencées par l'effet des ondulations des fibrilles.

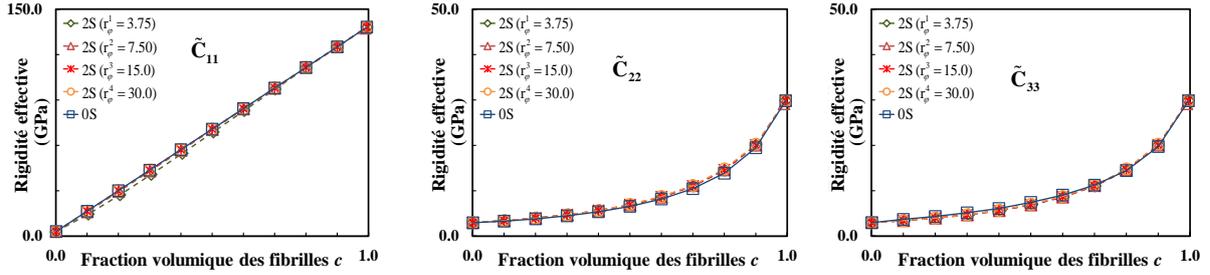


Figure B-3: Evolution des composantes effectives \tilde{C}_{ij} en fonction de la concentration pour les modèles 0S et 2S ($r_\lambda = 1.0$ pour le modèle 0S)

B.2.2 Variations des paramètres matériaux

En complément de la Figure 3-17 du manuscrit principal, nous présentons dans la Figure B-4 l'évolutions des coefficients d'ingénieurs effectifs qui ne sont pas ou très peu influencées par l'effet des ondulations des fibrilles en fonction du contraste E_L^F/E^M ($r_\lambda = 1.0$ pour le modèle 0S).

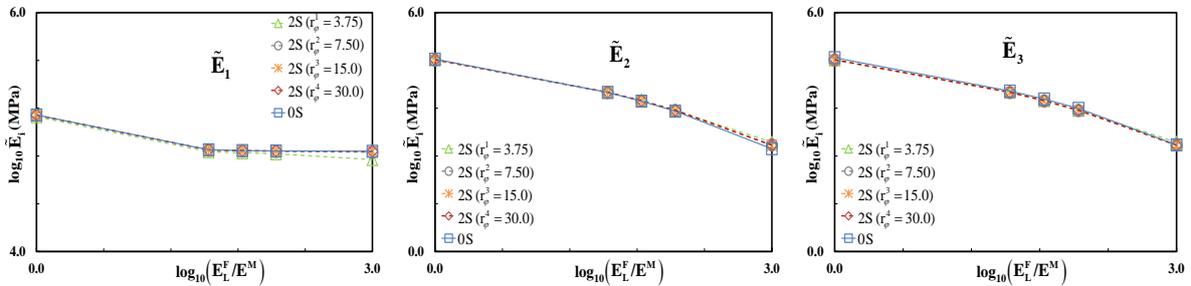


Figure B-4 : Evolution des coefficients d'ingénieur effectifs \tilde{E}_i en fonction du contraste E_L^F/E^M pour les 2 modèles 0S et 2S ($c = 0.5$).

C. Annexe C

Solution d'exacte d'un laminé bicouche orthotrope

Dans cette partie, nous présentons la solution exacte d'un laminé biphasé constitué d'un empilement périodique d'une couche de matrice et d'une couche de fibrille tel que décrit sur la Figure C-1. Ce laminé correspond à la cellule unitaire périodique décrite dans la partie 2.1, quand on fait tendre le rapport r_λ défini par (2.3.3) vers $+\infty$, ce qui signifie qu'il n'y a plus de matrice lenticulaire et donc que la couche lenticulaire est constituée uniquement par des fibrilles. Cette solution analytique nous servira à valider nos calculs éléments finis en faisant tendre numériquement le ratio r_λ vers $+\infty$.

C.1 Problème local à résoudre

On cherche à résoudre le problème local associé à un VER de type laminé constitué de 2 couches planes de directions (1,2) qui s'empilent dans la direction 3. Ces 2 couches sont faites respectivement, d'une matrice de concentration $m = (1 - f)$ occupant un domaine Ω^M , et de fibres de concentration f et occupant un domaine Ω^F . En outre, le comportement de chaque phase de ce laminé est supposé homogène, thermoélastique et orthotrope dans le repère (1, 2, 3).

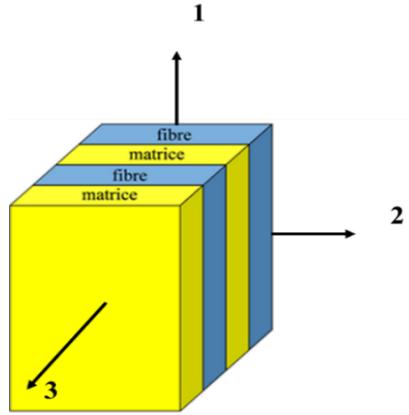


Figure C-1 : Schématisation d'un composite unidirectionnel à 2 couches

Le problème local que nous cherchons à résoudre est constitué par les relations suivantes:

a) équations d'équilibre

$$\text{div } \sigma = 0, \forall x \in \Omega = \Omega^F \cup \Omega^M \quad (\text{C.1})$$

b) lois de comportement locales

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^F = \underline{\underline{C}}^F (\underline{\underline{\varepsilon}}^F - \underline{\underline{\alpha}}^F) = \underline{\underline{C}}^F : \underline{\underline{\varepsilon}}^F + \underline{\underline{\beta}}^F, \forall x \in \Omega^F \\ \underline{\underline{\sigma}}^M = \underline{\underline{C}}^M (\underline{\underline{\varepsilon}}^M - \underline{\underline{\alpha}}^M) = \underline{\underline{C}}^M : \underline{\underline{\varepsilon}}^M + \underline{\underline{\beta}}^M, \forall x \in \Omega^M \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

dans lequel on considère que $\underline{\underline{C}}^M$, $\underline{\underline{C}}^F$ et $\underline{\underline{\alpha}}^M$, $\underline{\underline{\alpha}}^F$ sont orthotropes. Les tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}^M$, $\underline{\underline{\alpha}}^F$ sont respectivement les tenseurs des coefficients d'expansion thermique de la matrice et des fibres pour une variation de température $\Delta T = 1$. $\underline{\underline{\beta}}^F = -\underline{\underline{C}}^F : \underline{\underline{\alpha}}^F$ et $\underline{\underline{\beta}}^M = \underline{\underline{C}}^M : \underline{\underline{\alpha}}^M$ sont respectivement les tenseurs des contraintes thermiques de la fibre et de la matrice.

c) *équilibrés des efforts à l'interface*

$$[t_{(1,2)}] = 0$$

où $\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}$ est le vecteur contrainte, (1, 2) est le plan de normale \underline{e}_3 correspondant au plan d'interface entre une couche de matrice et une couche de fibre et où $[t]_{(1,2)} = \underline{t}^+ - \underline{t}^-$ correspond au saut de \underline{t} au passage du plan (1,2). On a donc : $\underline{\sigma}^F \cdot \underline{e}_3 = \underline{\sigma}^M \cdot \underline{e}_3$ sur (1, 2), soit :

$$\begin{cases} \sigma_{13}^M = \sigma_{13}^F \\ \sigma_{23}^M = \sigma_{23}^F \\ \sigma_{33}^M = \sigma_{33}^F \end{cases} \text{ dans le plan (1, 2)} \quad (\text{C.3})$$

d) *interface parfaite*

$$[\underline{u}]_{(1,2)} = 0 \text{ (interface parfaite)}$$

Cette relation implique :

$$\begin{cases} \varepsilon_{12}^M = \varepsilon_{12}^F \\ \varepsilon_{11}^M = \varepsilon_{11}^F \\ \varepsilon_{22}^M = \varepsilon_{22}^F \end{cases} \text{ dans le plan (1, 2)} \quad (\text{C.4})$$

e) *Conditions aux limites*

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\bar{\varepsilon}} \text{ et } \langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\bar{\sigma}} \text{ (C.L.)} \quad (\text{C.5})$$

Comme tout problème de laminé, nous cherchons une solution constante par couche. Si celle-ci existe, le problème local étant « bien posé », on sait qu'il possède une solution unique. La solution qu'on aura trouvé sera donc la solution, qui correspond donc à la solution constante par couche. Nous cherchons une solution constante par couche pour la quelle :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}^F(\underline{x}) = \underline{\sigma}^F; \underline{\varepsilon}^F(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^F; \forall \underline{x} \in \Omega^F \\ \underline{\sigma}^M(\underline{x}) = \underline{\sigma}^M; \underline{\varepsilon}^M(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^M; \forall \underline{x} \in \Omega^M \end{cases}$$

En vue de caractériser le comportement effectif, on effectuera les remarques préalables suivantes. Les plans (2, 3) et (1, 3) sont des plans de symétrie pour le VER. Le comportement macroscopique est donc orthotrope suivant les directions 1, 2, 3.

Dans les axes d'orthotropie (1, 2, 3), la loi de comportement macroscopique sous les effets de déformations et de variation de température s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_3 \\ \tilde{\beta}_4 \\ \tilde{\beta}_5 \\ \tilde{\beta}_6 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Par ailleurs, il est souvent utile d'exprimer le tenseur des complaisances élastiques effectives $\underline{\underline{\tilde{S}}}$, qui est le tenseur inverse du tenseur des rigidités élastiques effectives $\underline{\underline{\tilde{C}}}$. La loi de comportement inverse de (C.6) s'écrit ainsi.

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} & \tilde{S}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{31} & \tilde{S}_{32} & \tilde{S}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 - \tilde{\beta}_1 \\ \bar{\sigma}_2 - \tilde{\beta}_2 \\ \bar{\sigma}_3 - \tilde{\beta}_3 \\ \bar{\sigma}_4 - \tilde{\beta}_4 \\ \bar{\sigma}_5 - \tilde{\beta}_5 \\ \bar{\sigma}_6 - \tilde{\beta}_6 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Les relations de passage des rigidités effectives \tilde{C}_{ij} aux complaisances \tilde{S}_{ij} sont précisées dans le Tableau C-1.

Tableau C-1 : Matrice des souplesses effectives en fonction de la matrice des rigidités pour les matériaux orthotropes.

$\tilde{S}_{11} = \frac{1}{D} [\tilde{C}_{22}\tilde{C}_{33} - (\tilde{C}_{23})^2] = \frac{1}{\bar{E}_1};$	$\tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{21} = \frac{1}{D} (\tilde{C}_{23}\tilde{C}_{31} - \tilde{C}_{21}\tilde{C}_{33}) = -\frac{\tilde{\nu}_{12}}{\bar{E}_1};$
$\tilde{S}_{22} = \frac{1}{D} [\tilde{C}_{33}\tilde{C}_{11} - (\tilde{C}_{31})^2] = \frac{1}{\bar{E}_2};$	$\tilde{S}_{13} = \tilde{S}_{31} = \frac{1}{D} (\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{23} - \tilde{C}_{13}\tilde{C}_{22}) = -\frac{\tilde{\nu}_{13}}{\bar{E}_1};$
$\tilde{S}_{33} = \frac{1}{D} [\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22} - (\tilde{C}_{12})^2] = \frac{1}{\bar{E}_3};$	$\tilde{S}_{32} = \tilde{S}_{23} = \frac{1}{D} (\tilde{C}_{31}\tilde{C}_{12} - \tilde{C}_{32}\tilde{C}_{11}) = -\frac{\tilde{\nu}_{23}}{\bar{E}_2};$
$\tilde{S}_{44} = \frac{1}{\tilde{C}_{44}} = \frac{1}{\bar{G}_{23}};$	$\tilde{S}_{55} = \frac{1}{\tilde{C}_{55}} = \frac{1}{\bar{G}_{13}};$
$\tilde{S}_{66} = \frac{1}{\tilde{C}_{66}} = \frac{1}{\bar{G}_{12}};$	
$D = \tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}\tilde{C}_{33} + 2\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{23}\tilde{C}_{31} - \tilde{C}_{11}(\tilde{C}_{23})^2 - \tilde{C}_{22}(\tilde{C}_{31})^2 - \tilde{C}_{33}(\tilde{C}_{12})^2;$	

Dans les axes d'orthotropie (1, 2, 3), on constate que le comportement reliant les déformations $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)$ aux contraintes $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ et $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)$ est découplé du comportement reliant les composantes de cisaillement $(\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \bar{\varepsilon}_6)$ à $(\bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6)$ et $(\tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6)$.

On peut donc scinder le problème local en 2 problèmes indépendants, l'un portant sur les composantes $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)$ pour lequel le VER est sollicité en extension selon les trois axes (1, 2, 3), et l'autre portant sur les composantes $(\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \bar{\varepsilon}_6, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6)$ pour lequel le VER sera sollicité en cisaillement.

C.2 Sollicitation en extension

On impose $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}$ uniquement pour les composantes en extension $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$. Du fait du découplage du comportement entre sa partie en extension et sa partie en cisaillement, les composantes suivantes du problème local $\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \bar{\varepsilon}_6, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6$ et $\tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6$ sont toutes nulles. Il reste donc à déterminer les composantes $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ et $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$ au sein des phases matrice et fibres. Le problème local se caractérise désormais par les équations suivantes :

$$\sigma_3^M = \sigma_3^F = \bar{\sigma}_3 \quad (\Leftrightarrow [t]_{(1,2)} = 0) \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1^F = \varepsilon_1^M = \bar{\varepsilon}_1 \\ \varepsilon_2^F = \varepsilon_2^M = \bar{\varepsilon}_2 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow [u]_{(1,2)} = 0) \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1 = f\sigma_1^F + m\sigma_1^M \\ \bar{\sigma}_2 = f\sigma_2^F + m\sigma_2^M \end{cases} \quad (\Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\sigma} \rangle) \quad (\text{C.10})$$

$$\bar{\varepsilon}_3 = f\varepsilon_3^F + m\varepsilon_3^M \quad (\Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle) \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^F \\ \sigma_2^F \\ \sigma_3^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^F & C_{12}^F & C_{13}^F \\ C_{21}^F & C_{22}^F & C_{23}^F \\ C_{31}^F & C_{32}^F & C_{33}^F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3^F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1^F \\ \beta_2^F \\ \beta_3^F \end{pmatrix} \quad \left(\Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^F = \underline{\underline{C}}^F : \underline{\underline{\varepsilon}}^F + \underline{\underline{\beta}}^F \right) \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^M \\ \sigma_2^M \\ \sigma_3^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^M & C_{12}^M & C_{13}^M \\ C_{21}^M & C_{22}^M & C_{23}^M \\ C_{31}^M & C_{32}^M & C_{33}^M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3^M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1^M \\ \beta_2^M \\ \beta_3^M \end{pmatrix} \quad \left(\Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^M = \underline{\underline{C}}^M : \underline{\underline{\varepsilon}}^M + \underline{\underline{\beta}}^M \right) \quad (\text{C.13})$$

Le comportement macroscopique thermoélastique orthotrope associé à des sollicitations en extension s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Soit :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \tilde{C}_{11}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{12}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{13}\bar{\varepsilon}_3 + \tilde{\beta}_1 & (a) \\ \bar{\sigma}_2 = \tilde{C}_{21}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{22}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{23}\bar{\varepsilon}_3 + \tilde{\beta}_2 & (b) \\ \bar{\sigma}_3 = \tilde{C}_{31}\bar{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{32}\bar{\varepsilon}_2 + \tilde{C}_{33}\bar{\varepsilon}_3 + \tilde{\beta}_3 & (c) \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Il nous faut donc déterminer les 9 paramètres matériaux $\tilde{C}_{11}, \tilde{C}_{22}, \tilde{C}_{33}, \tilde{C}_{12}, \tilde{C}_{13}, \tilde{C}_{23}$ et $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$.

Dans un premier temps, en introduisant les équations (C.12) et (C.13) dans (C.8), on obtient :

$$\bar{\sigma}_3 = C_{31}^F\bar{\varepsilon}_1 + C_{32}^F\bar{\varepsilon}_2 + C_{33}^F\varepsilon_3^F + \beta_3^F = C_{31}^M\bar{\varepsilon}_1 + C_{32}^M\bar{\varepsilon}_2 + C_{33}^M\varepsilon_3^M + \beta_3^M$$

d'où

$$\varepsilon_3^F = \frac{\bar{\sigma}_3 - C_{31}^F\bar{\varepsilon}_1 - C_{32}^F\bar{\varepsilon}_2 - \beta_3^F}{C_{33}^F} \quad \text{et} \quad \varepsilon_3^M = \frac{\bar{\sigma}_3 - C_{31}^M\bar{\varepsilon}_1 - C_{32}^M\bar{\varepsilon}_2 - \beta_3^M}{C_{33}^M}$$

En utilisant ces 2 expressions dans l'équation (C.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_3 &= f \left(\frac{\bar{\sigma}_3 - C_{31}^F\bar{\varepsilon}_1 - C_{32}^F\bar{\varepsilon}_2 - \beta_3^F}{C_{33}^F} \right) + m \left(\frac{\bar{\sigma}_3 - C_{31}^M\bar{\varepsilon}_1 - C_{32}^M\bar{\varepsilon}_2 - \beta_3^M}{C_{33}^M} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M} \right) \bar{\sigma}_3 &= \left(f \frac{C_{31}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{31}^M}{C_{33}^M} \right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(f \frac{C_{32}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{32}^M}{C_{33}^M} \right) \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 + \left(f \frac{\beta_3^F}{C_{33}^F} + m \frac{\beta_3^M}{C_{33}^M} \right) \\ \Leftrightarrow \bar{\sigma}_3 &= \frac{\left(f \frac{C_{31}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{31}^M}{C_{33}^M} \right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M} \right)} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\left(f \frac{C_{32}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{32}^M}{C_{33}^M} \right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M} \right)} \bar{\varepsilon}_2 + \frac{1}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M} \right)} \bar{\varepsilon}_3 + \frac{\left(f \frac{\beta_3^F}{C_{33}^F} + m \frac{\beta_3^M}{C_{33}^M} \right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M} \right)} \end{aligned}$$

En comparant cette expression à l'équation (C.15)c, on obtient

$$\tilde{C}_{31} = \frac{\left(f \frac{C_{31}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{31}^M}{C_{33}^M}\right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M}\right)}; \tilde{C}_{32} = \frac{\left(f \frac{C_{32}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{32}^M}{C_{33}^M}\right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M}\right)}; \tilde{C}_{33} = \frac{1}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M}\right)}; \tilde{\beta}_3 = \frac{\left(f \frac{\beta_3^F}{C_{33}^F} + m \frac{\beta_3^M}{C_{33}^M}\right)}{\left(\frac{f}{C_{33}^F} + \frac{m}{C_{33}^M}\right)}$$

Par la suite, en réinjectant l'équation (C.15)c dans les expressions fournissant ε_3^F et ε_3^M , on obtient:

$$\begin{cases} \varepsilon_3^F = \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{31}^F}{C_{33}^F}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^F}{C_{33}^F}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\frac{\tilde{C}_{33}}{C_{33}^F}\right) \bar{\varepsilon}_3 + \left(\frac{\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F}{C_{33}^F}\right) \\ \varepsilon_3^M = \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{31}^M}{C_{33}^M}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^M}{C_{33}^M}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\frac{\tilde{C}_{33}}{C_{33}^M}\right) \bar{\varepsilon}_3 + \left(\frac{\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M}{C_{33}^M}\right) \end{cases} \quad (C.16)$$

Dans un deuxième temps, afin d'obtenir les expressions de \tilde{C}_{11} , \tilde{C}_{12} , \tilde{C}_{13} et $\tilde{\beta}_1$, nous reportons les relations de comportement (C.12) et (C.13) dans l'équation (C.9)a, on obtient ainsi :

$$\bar{\sigma}_1 = f(C_{11}^F \bar{\varepsilon}_1 + C_{12}^F \bar{\varepsilon}_2 + C_{13}^F \varepsilon_3^F + \beta_1^F) + m(C_{11}^M \bar{\varepsilon}_1 + C_{12}^M \bar{\varepsilon}_2 + C_{13}^M \varepsilon_3^M + \beta_1^M)$$

En reportant les expressions (C.16) de ε_3^F et ε_3^M dans cette dernière équation, on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = & \left[f C_{11}^F + m C_{11}^M + f C_{13}^F \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{13}^F}{C_{33}^F} \right) + m C_{13}^M \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{13}^M}{C_{33}^M} \right) \right] \bar{\varepsilon}_1 \\ & + \left[f C_{12}^F + m C_{12}^M + f C_{12}^F \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^F}{C_{33}^F} \right) + m C_{12}^M \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^M}{C_{33}^M} \right) \right] \bar{\varepsilon}_2 \\ & + \left[f \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{13}^M}{C_{33}^M} \right] \tilde{C}_{33} \bar{\varepsilon}_3 + \left[f \beta_1^F + m \beta_1^M + f \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) + m \frac{C_{13}^M}{C_{33}^M} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right] \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut être comparée à l'équation (C.15)a. On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{11} &= f \left[C_{11}^F + \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} (\tilde{C}_{31} - C_{13}^F) \right] + m \left[C_{11}^M + \frac{C_{13}^M}{C_{33}^M} (\tilde{C}_{31} - C_{13}^M) \right]; \\ \tilde{C}_{12} &= f \left[C_{12}^F + \frac{C_{12}^F}{C_{33}^F} (\tilde{C}_{32} - C_{32}^F) \right] + m \left[C_{12}^M + \frac{C_{12}^M}{C_{33}^M} (\tilde{C}_{32} - C_{32}^M) \right]; \\ \tilde{C}_{13} &= \left[f \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{13}^M}{C_{33}^M} \right] \tilde{C}_{33} \\ \tilde{\beta}_1 &= f \left[\beta_1^F + \frac{C_{13}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) \right] + m \left[\beta_1^M + \frac{C_{13}^M}{C_{33}^M} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right] \end{aligned}$$

Enfin, il reste à déterminer \tilde{C}_{21} , \tilde{C}_{22} , \tilde{C}_{23} et $\tilde{\beta}_2$. Pour cela, on calculera $\bar{\sigma}_2$ en fonction de $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ et $\tilde{\beta}_3$. On procède de la façon suivante : on utilise les lois de comportement (C.12) et (C.13) dans l'équation (C.10)b de sorte que

$$\bar{\sigma}_2 = f(C_{21}^F \bar{\varepsilon}_1 + C_{22}^F \bar{\varepsilon}_2 + C_{23}^F \varepsilon_3^F + \beta_2^F) + m(C_{21}^M \bar{\varepsilon}_1 + C_{22}^M \bar{\varepsilon}_2 + C_{23}^M \varepsilon_3^M + \beta_2^M)$$

On remplace les 2 expressions (C.16) de ε_3^F et ε_3^M dans cette dernière équation, qui se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_2 = & \left[f C_{21}^F + m C_{21}^M + f C_{23}^F \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{31}^F}{C_{33}^F} \right) + m C_{23}^M \left(\frac{\tilde{C}_{31} - C_{13}^M}{C_{33}^M} \right) \right] \bar{\varepsilon}_1 \\ & + \left[f C_{22}^F + m C_{22}^M + f C_{23}^F \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^F}{C_{33}^F} \right) + m C_{23}^M \left(\frac{\tilde{C}_{32} - C_{32}^M}{C_{33}^M} \right) \right] \bar{\varepsilon}_2 \\ & + \left[f \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} \right] \tilde{C}_{33} \bar{\varepsilon}_3 + \left[f \beta_2^F + m \beta_2^M + f \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) + m \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right]\end{aligned}$$

que l'on peut alors comparer à l'équation (C.15)b, ce qui nous permet d'obtenir les expressions suivantes

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{21} = & f \left[C_{21}^F + \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} (\tilde{C}_{31} - C_{13}^F) \right] + m \left[C_{21}^M + \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} (\tilde{C}_{31} - C_{13}^M) \right]; \\ \tilde{C}_{22} = & f \left[C_{22}^F + \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} (\tilde{C}_{32} - C_{32}^F) \right] + m \left[C_{22}^M + \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} (\tilde{C}_{32} - C_{32}^M) \right]; \\ \tilde{C}_{23} = & \left[f \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} + m \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} \right] \tilde{C}_{33} \\ \tilde{\beta}_2 = & f \left[\beta_2^F + \frac{C_{23}^F}{C_{33}^F} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^F) \right] + m \left[\beta_2^M + \frac{C_{23}^M}{C_{33}^M} (\tilde{\beta}_3 - \beta_3^M) \right]\end{aligned}$$

C.3 Sollicitation en cisaillement

On impose cette fois ci un tenseur effectif des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ faisant intervenir uniquement pour des composantes en cisaillement $\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \bar{\varepsilon}_6$. A nouveau, en raison du découplage du comportement entra la partie en extension et la partie en cisaillement, seules subsistent les composantes $(\bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5, \bar{\varepsilon}_6, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6)$ les autres composantes étant nulles.

Dans ce cas, le problème local s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_4^M = \sigma_4^F = \bar{\sigma}_4 \\ \sigma_5^M = \sigma_5^F = \bar{\sigma}_5 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow [t]_{(1,2)} = 0) \quad (C.17)$$

$$\varepsilon_6^M = \varepsilon_6^F = \bar{\varepsilon}_6 \quad (\Leftrightarrow [u]_{(1,2)} = 0) \quad (C.18)$$

$$\bar{\sigma}_6 = f \sigma_6^F + (1-f) \sigma_6^M \quad (\Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle) \quad (C.19)$$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_4 = f \varepsilon_4^F + (1-f) \varepsilon_4^M \\ \bar{\varepsilon}_5 = f \varepsilon_5^F + (1-f) \varepsilon_5^M \end{cases} \quad (\Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle) \quad (C.20)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \sigma_6^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44}^F & 0 & 0 \\ 0 & C_{55}^F & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_4^F \\ \varepsilon_5^F \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_4^F \\ \beta_5^F \\ \beta_6^F \end{pmatrix} \quad (C.21)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \sigma_6^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44}^M & 0 & 0 \\ 0 & C_{55}^M & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_4^M \\ \varepsilon_5^M \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_4^M \\ \beta_5^M \\ \beta_6^M \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

Or $\underline{\beta}^F$ et $\underline{\beta}^M$ sont orthotropes d'où $\beta_4^F = \beta_5^F = \beta_6^F = 0$ et $\beta_4^M = \beta_5^M = \beta_6^M = 0$. Les équations (C.21) et (C.22) se réécrivent donc sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_4 = C_{44}^F \varepsilon_4^F \\ \bar{\sigma}_5 = C_{55}^F \varepsilon_5^F \\ \sigma_6^F = C_{66}^F \bar{\varepsilon}_6 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_4 = C_{44}^M \varepsilon_4^M \\ \bar{\sigma}_5 = C_{55}^M \varepsilon_5^M \\ \sigma_6^F = C_{66}^M \bar{\varepsilon}_6 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Le comportement effectif dans les axes d'orthotropie (voir (C.6)) se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{pmatrix}$$

Il nous reste donc à déterminer les 3 coefficients effectifs \tilde{C}_{44} , \tilde{C}_{55} , \tilde{C}_{66} .

En partant des équations (C.23)a et (C.24)a :

$$\bar{\sigma}_4 = C_{44}^F \varepsilon_4^F = C_{44}^M \varepsilon_4^M$$

On obtient la relation suivante :

$$\varepsilon_4^F = \frac{C_{44}^M}{C_{44}^F} \varepsilon_4^M$$

En remplaçant cette expression de ε_4^F dans l'équation (C.20)b, on obtient

$$\bar{\varepsilon}_4 = \left[f \frac{C_{44}^M}{C_{44}^F} \varepsilon_4^M + m \varepsilon_4^M \right], \text{ soit } \varepsilon_4^M = \frac{1}{\left(f \frac{C_{44}^M}{C_{44}^F} + m \right)} \bar{\varepsilon}_4$$

d'où

$$\bar{\sigma}_4 = C_{44}^M \varepsilon_4^M = C_{44}^M \frac{1}{\left(f \frac{C_{44}^M}{C_{44}^F} + m \right)} \bar{\varepsilon}_4 = \frac{1}{\left(f \frac{1}{C_{44}^F} + m \frac{1}{C_{44}^M} \right)} \bar{\varepsilon}_4 = \tilde{C}_{44} \bar{\varepsilon}_4$$

avec

$$\tilde{C}_{44} = \tilde{G}_{23} = \frac{1}{\left(f \frac{1}{C_{44}^F} + m \frac{1}{C_{44}^M}\right)}$$

qui est la loi des mélanges inverse.

En reproduisant exactement la même démarche pour $\bar{\sigma}_5$ et $\bar{\varepsilon}_5$, on obtient :

$$\tilde{C}_{55} = \tilde{G}_{13} = \frac{1}{\left(f \frac{1}{C_{55}^F} + m \frac{1}{C_{55}^M}\right)}$$

qui est la loi de mélange inverse.

On a ainsi $\bar{\sigma}_6 = \tilde{C}_{66}\bar{\varepsilon}_6 = \tilde{G}_{12}\bar{\varepsilon}_6$, cette relation nous permet de déterminer le coefficient effectif \tilde{C}_{66} . Si l'on part du comportement local des phases, on obtient : $\sigma_6^F = C_{66}^F\bar{\varepsilon}_6$ et $\sigma_6^M = C_{66}^M\bar{\varepsilon}_6$.

Enfin, si l'on remplace les équations (C.23)c et (C.24)c dans (C.18), on obtient

$$\bar{\sigma}_6 = f\sigma_6^F + m\sigma_6^M = (fC_{66}^F + mC_{66}^M)\bar{\varepsilon}_6 = \tilde{C}_{66}\bar{\varepsilon}_6$$

avec

$$\tilde{C}_{66} = \tilde{G}_{12} = fC_{66}^F + mC_{66}^M$$

qui est la loi des mélanges directe.

D. Annexe D

Cette annexe décrit la procédure de calculs EF sous Cast3M utilisée pour déterminer les tenseurs effectifs des coefficients d'expansion thermiques $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}$ et des contraintes initiales $\underline{\underline{\tilde{\beta}}}$. En effet, dans certains problèmes, les champs de températures induisent des contraintes thermiques qui ne sont pas négligeables.

A titre d'illustration, la démarche d'un calcul thermomécanique est constituée par les étapes suivantes :

1^{ère} étape : Définition du CHPOINT de température, s'il n'est pas calculé par ailleurs. Il y a deux possibilités, selon que les éléments de 'MAIL1' sont des éléments « massifs » (un degré de liberté température par nœuds) ou des « coques » (trois degrés de liberté température par nœuds). On utilisera la 1^{ère} possibilité. Par exemple :

TT = MANU CHPO MAIL1 1 T valeur ;

2^{ème} étape : Définir le MCHAMP du matériau (cas d'un comportement isotrope).

MA1 = MATE MO1 YOUN E1 NU nu1 ALPH alpha1 (cara) ;

3^{ème} étape : Calculer le MCHAML de contraintes thermiques.

ST1 = THET TT MA1 MO1;

Commentaires : l'opérateur THET(A) permet de calculer les contraintes associées à un champ de températures. On associe alors au modèle mécanique (défini par 'MO1' et 'MA1') le CHPOINT de température TT.

4^{ème} étape : Calculer le CHPOINT des forces nodales.

FT1 = BSIG ST1 MO1 (MA1);

Commentaires : l'opérateur BSIG calcule le champ de forces nodales résultant de l'intégration d'un champ de contraintes. L'objet 'ST1' représente le champ de contraintes thermiques et l'objet 'FT1' représente donc le champ de forces thermiques.

5^{ème} étape : Calculer le champ de déplacement DEP1 par l'opérateur RESO à partir des raideurs 'KTOT' et des chargements thermiques appliqués 'FT1' de la solide (éléments massifs).

DEP1 = RESO KTOT FT1 ;

6^{ème} étape : Calcul du champ MCHAML de contraintes initiales 'SV1'.

SE1 = SIGM DEP1 MA1 MO1 ;

SV1 = SE1 - ST1 ;

Commentaires : l'opérateur SIGM(A) calcule le champ de contraintes totales à partir du champ de déplacement 'DEP1'. L'objet 'SE1' représente alors le champ de contraintes totales. Afin d'obtenir uniquement les contraintes initiales 'SV1' (ou $\underline{\underline{\tilde{\beta}}}$), on soustrait les contraintes d'origine thermiques 'ST1' aux contraintes totales.

7^{ème} étape : Calcul du tenseurs des coefficients d'expansion thermiques $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}$ en appliquant les relations issues de l'équation (4.2. 5).