HAL open science

Application des variables non commutatives à des calculs formels en statistique non linéaire

Françoise Lamnabhi-Lagarrigue

▶ To cite this version:

Françoise Lamnabhi-Lagarrigue. Application des variables non commutatives à des calculs formels en statistique non linéaire. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1980. Français. NNT : . tel-04155945

HAL Id: tel-04155945

https://theses.hal.science/tel-04155945

Submitted on 7 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
n° d'ordre : 2751

62
63

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE
SPECIALITE : TRAITEMENT DU SIGNAL ET AUTOMATIQUE

PAR

Mme LAMNABHI née LAGARRIGUE

α 36.162

SUJET : APPLICATION DES VARIABLES NON COMMUTATIVES A DES CALCULS FORMELS EN STATISTIQUE NON LINEAIRE

soutenue le 19 FEVRIER 1980 devant la Commission d'examen

MM. PICINBONO Président
CALMET
FLIESS
GREUSSAY
KOTT
VIENNOT

Je remercie Monsieur PICINBONO d'avoir bien voulu présider le jury de ma thèse.

Je remercie aussi Messieurs CALMET, GREUSSAY, KOTT et VIENNOT d'avoir accepté de participer au jury.

Je suis toute particulièrement reconnaissante à Monsieur FLIESS de m'avoir constamment guidée et conseillée tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier aussi Mademoiselle PERROT pour les nombreuses conversations.

Enfin, je remercie le personnel administratif ainsi que Madame MICHAILESCO pour le soin et la patience qu'elle a apportés à la frappe de ce travail.

A Mounir,

- *TABLE DES MATIERES* -

Introduction .....

I. Séries formelles en variables non commutatives et automatique non linéaire .....

1. *RAPPELS* .....

a. *Séries formelles et séries rationnelles* .....
b. *Fonctionnelles causales analytiques, séries génératrices* .....

2. *DEVELOPPEMENTS FONCTIONNELS EN INDETERMINEES NON COMMUTATIVES DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES FORCEES* .....

a. *Formule fondamentale* .....

b. *Cas particulier : asservissements bilinéaires ou réguliers* ..

3. *RESOLUTION EFFECTIVE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES FORCEES* .....

II. Propriétés statistiques de la sortie d'un système non linéaire...

1. *MOTIVATION* .....

2. *FORMULE DONNANT LES MOMENTS DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES NON LINEAIRES* .....

3. *APPLICATION : DEVELOPPEMENT A L'ORIGINE DES MOMENTS* .....

III. Développement perturbatif des moments de la solution de certaines équations non linéaires forcées .....

1. *CALCUL FORMEL DES TERMES DU DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DE LA SOLUTION* .....

2. *CALCUL DU MELANGE DE CERTAINES SERIES RATIONNELLES* .....

3. *EXEMPLES* .....

a. *En physique statistique : l'oscillateur anharmonique* .....

b. *En théorie des communications : boucle à verrouillage de phase* .....

4. *EXPRESSIONS DES TERMES DU DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DES MOMENTS DE LA SOLUTION* .....

a. *Cas non stationnaire* .....

b. *Cas stationnaire* .....

c. *Applications* .....

IV. Renormalisation .....

1. *INTRODUCTION* .....

2. *EXEMPLE DE MORTON ET CORRSIN* .....

a. *Transformée de Fourier de la solution* .....

b. Densité spectrale .....

c. Construction des équations resommées .....

d. Approximation des équations obtenues .....

3. SERIES FORMELLES ET RENORMALISATION .....

V. Organigramme et programme donnant le mélange de certaines séries rationelles .....

Bibliographie .....

- INTRODUCTION -

Les équations différentielles non linéaires en régime forcé se rencontrent souvent en automatique comme en théorie du signal, électronique et aussi, bien entendu, en physique ; elles conduisent à de nombreux problèmes mal dominés comme par exemple :

- le calcul effectif des noyaux de la série de Volterra associée à la solution (Cf. Barrett [B1], Brockett [B7], Gilbert [G1], etc ...)

- le calcul des moments de la sortie lorsque l'entrée est un processus stochastique comme le bruit blanc gaussien (Cf. Kuznetsov et al. [K2], Wilcox et al [W1], etc ...)

- l'étude des termes séculaires du développement perturbatif de la solution lorsque l'entrée est périodique (Cf. Uzes [U1]).

Nous avons abordé ces questions dans le cadre du calcul formel où cette expression est entendue au sens qu'elle a en informatique c'est-à-dire, par des manipulations algébriques que l'on peut opposer, dans une certaine mesure aux méthodes d'analyse numérique. On sait que cette problématique connaît un essor certain (Cf. [E2]) mais que, lorsqu'il s'agit du domaine non linéaire, tout reste quasiment à faire, en dépit de besoins certains (Cf. Fitch "A Survey of symbolic computation in physics" [F2]).

L'objet de cette thèse est de trouver, en utilisant les variables non commutatives, des algorithmes simples donnant certains développements fonctionnels des moments de la sortie d'un système différentiel non linéaire attaqué par un bruit blanc gaussien. Les calculs effectifs auxquels on aboutit, ressortent de la combinatoire du monoïde libre dont l'importance en informatique est connue depuis les travaux du Professeur M.P. Schützenberger et de son école.

Dans le chapitre I, nous présentons rapidement les séries génératrices non commutatives ainsi qu'un résultat important (Cf. Fliess [F5]) donnant un développement fonctionnel de la sortie du système différentiel non linéaire :

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, A_i(q) \\ y(t) = h(q) \qquad\qquad (q(0) \text{ donné}) \end{cases}$$

où A_0, A_1, ..., A_n sont des champs de vecteurs analytiques et h une fonction analytique :

$$y(t,u_1,\ldots,u_n) = h/_0 + \sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_0,\ldots,j_\nu=0}^{n} A_{j_0}\ldots A_{j_\nu}\, h/_0 \int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}.$$

Cette formule généralise d'une part les travaux de Gröbner (Cf. [G2]) sur les équations en régime libre, et d'autre part la formule de Peano-Baker pour les systèmes bilinéaires (ou réguliers).

Au chapitre II, nous donnons un algorithme permettant d'obtenir un développement à l'origine des moments, stationnaires ou non, de la solution du système (*), piloté par des bruits blancs gaussiens. Insistons encore sur le caractère avant tout algébrique des méthodes utilisées et sur leur lien profond avec les techniques combinatoires telles qu'elles sont employées par maints informaticiens.

Parmi les nombreuses méthodes proposées, en particulier en physique statistique ou quantique, figurent les développements fonctionnels perturbatifs, dont la détermination effective se révèle d'une extrême complexité, une difficulté essentielle étant dûe à la divergence de ces développements (Cf. Dyson [D2], Bender et al. [B2]). Dans le chapitre III, notre but est de trouver un algorithme donnant les premiers termes de ce développement avec pour seul outil, les variables non commutatives, dans le cas des systèmes différentiels non linéaires du type suivant :

$$L(y) + P(y) = \dot{b}(t),$$

où $b(t)$ est un brownien, L un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et P un polynôme.

Pour connaître la valeur des résultats que nous avons obtenus dans cette thèse, il fallait, bien entendu, les comparer avec d'autres approches existantes dans la littérature. Or, il faut se rendre à l'évidence que ce sont avant tout les physiciens qui, depuis plus de vingt ans, ont dû faire le plus d'efforts pour mettre au point des méthodes de calcul formel afin d'obtenir des développements fonctionnels des solutions d'équations différentielles qu'ils rencontraient. On connaît entre autre tous les travaux, d'ordre tant mathématique qu'informatique, qu'ont suscité les graphes de Feynman (Cf. [F1]). C'est pourquoi, nous avons choisi de confronter notre approche avec, notamment, un article de Morton et Corrsin (Cf. [M4]) sur l'équation de Duffing, c'est-à-dire l'oscillateur anharmonique, qui a exercé une influence certaine dans le milieu des physiciens. On sait par ailleurs que l'équation de Duffing est aussi très souvent rencontrée par les ingénieurs. Nous nous sommes intéressés ensuite à un exemple de circuit électronique non linéaire dont il s'agissait de connaître les propriétés statistiques, et qui a été étudié par Van Trees (Cf. [V1]) ; nos techniques nous permettent d'aller plus loin et plus vite dans le calcul des termes des développements.

La divergence des séries rencontrées impose des méthodes de renormalisation qui sont souvent traitées de manière combinatoire. Ici encore nous avons montré la pertinence des variables non commutatives et exposé des manipulations qui se comparent avantageusement à celles de Morton et Corrsin.

En appendice, nous exhibons certaines propriétés arithmétiques remarquables des coefficients numériques obtenus dans le calcul des termes des développements fonctionnels. Nous ne savons pas en expliquer les propriétés mathématiques mais il nous semble possible qu'une compréhension précise doit être recherchée en liaison avec des travaux combinatoires récents dus entre autre à Messieurs Flajolet, Foata, Viennot et Vuillemin dont on connaît déjà les importantes applications dans certaines branches d'informatique.

- Chapitre I -

SERIES FORMELLES EN VARIABLES NON COMMUTATIVES ET AUTOMATIQUE NON LINEAIRE.

1. RAPPELS

a. Séries formelles et séries rationnelles

Soit X^* *le monoïde libre engendré par* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, *d'élément neutre 1. K désignant le corps des réels ou des complexes, on note* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *la K-algèbre des séries en les variables associatives, non commutatives* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *à coefficients dans K, dont un élément G s'écrit :*

$$G = \Sigma\{ (G,w)w \ / \ w \in X^* \} \qquad \text{où } (G,w) \in K.$$

G est un polynôme si card $\{ (G, w) \neq 0 \ / \ w \in X^* \}$ *est fini.*

On définit sur $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *les opérations somme et produit de Cauchy par*

$$(G_1 + G_2, w) = (G_1, w) + (G_2, w)$$

$$(G_1 G_2, w) = \sum_{w_1 w_2 = w} (G_1, w_1)(G_2, w_2), \qquad \forall w \in X^*.$$

Une série G est inversible si et seulement si son terme constant (G,1) est non nul.

La K-algèbre, $K\langle(X)\rangle$, *des séries rationnelles est la plus petite famille de séries vérifiant :*

1) *tout polynôme appartient à* $K\langle(X)\rangle$,
2) *si* G_1 *et* G_2 *appartiennent à* $K\langle(X)\rangle$, *alors leur somme et leur produit*

de Cauchy appartiennent à $K\langle(X)\rangle$,

3) si G appartient à $K\langle(X)\rangle$ et est inversible, alors son inverse appartient à $K\langle(X)\rangle$.

Remarque : *Les séries rationnelles en une variable ne sont autres que les développements de Taylor à l'origine des fractions rationnelles usuelles, régulières à l'origine.*

On définit aussi sur $K\langle\langle X\rangle\rangle$, le mélange (ou produit de Hurwitz ; en anglais : shuffle product) de deux séries G_1 et G_2 par :

$$G_1 \sqcup\!\sqcup G_2 = \sum_{w_1, w_2 \in X^*} (G_1, w_1)\ (G_2, w_2)\ w_1 \sqcup\!\sqcup w_2,$$

où le polynôme $w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$ est défini par récurrence sur la longueur

$$1 \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup 1 = w, \qquad w \in X^*$$

$$x\, w_1 \sqcup\!\sqcup y\, w_2 = x(w_1 \sqcup\!\sqcup y\, w_2) + y\,(x\, w_1 \sqcup\!\sqcup w_2),\ w_1, w_2 \in X^*\ x, y \in X.$$

Exemples : $- x_0\, x_1\, x_0 \sqcup\!\sqcup x_1\, x_1 = x_0\, x_1\, x_0\, x_1\, x_1 + 2\, x_0\, x_1\, x_1\, x_0\, x_1$
$+ 3\, x_0\, x_1\, x_1\, x_1\, x_0 + x_1\, x_0\, x_1\, x_0\, x_1$
$+ 2\, x_1\, x_0\, x_1\, x_1\, x_0 + x_1\, x_1\, x_0\, x_1\, x_0.$

$- x_0^k \sqcup\!\sqcup x_0^{n-k} = \binom{k}{n}\, x^n.$

Proposition 1 : [F3] *Le mélange de deux séries rationnelles est une série rationnelle.*

b. Fonctionnelles causales analytiques, séries génératrices.

Une fonctionnelle causale $F(t, u_1, \ldots, u_n)$ où $u_1, \ldots, u_n$: $[0, \infty[\to K$ sont continues, est dite analytique si et seulement si elle est déterminée par une série $G \in K\langle\langle X\rangle\rangle$, de sorte que

$$F(t,u_1,\ldots,u_n)=(G,1)+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_0\ldots j_\nu=0}^{n}(G,x_{j_0}\ldots x_{j_\nu})\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0} \qquad (1)$$

L'intégrale itérée $\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}$ *est définie par récurrence sur la longueur :*

$$\xi_0(\tau)=\tau$$

$$\xi_i(\tau)=\int_0^t u_i(\sigma)d\sigma \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$\int_0^t d\xi_j=\xi_j(t) \qquad (j=0,1,\ldots,n)$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}=\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\ldots d\xi_{j_0} .$$

La série G est dite série génératrice. La fonctionnelle est dite rationnelle (resp. polynomiale) si sa série génératrice est rationnelle (resp. polynomiale).

Le résultat suivant est immédiat :

<u>Proposition 2</u> : *La somme de deux fonctionnelles analytiques* $F_1(t, u_1,\ldots,u_n)$ *et* $F_2(t, u_1,\ldots,u_n)$ *(resp. rationnelles) (resp. polynomiales), est une fonctionnelle de même nature, de série génératrice la somme des deux séries génératrices.*

La proposition suivante montre l'importance du mélange précédemment défini.

<u>Proposition 3</u> [F4] : *Le produit de deux fonctionnelles analytiques* $F_1(t, u_1,\ldots,u_n)$ *et* $F_2(t, u_1,\ldots,u_n)$ *(resp. rationnelles) (resp. poly-*

nomiales), est une fonctionnelle de même nature, de série génératrice le mélange des deux séries génératrices.

<u>Preuve</u> : *De (1) il vient :*

$$F_1(t,u_i)F_2(t,u_i)=(G_1,1)(G_2,1)+\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_\nu\cdot\cdot j_0=0}^{n}(G_2,x_{j_\nu}\cdot\cdot x_{j_0})\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdot\cdot d\xi_{j_0}\cdot(G_1,1)$$

$$+(G_2,1).\sum_{\nu\geq 0}\sum_{j_\nu\cdot\cdot j_0=0}^{n}(G_1,x_{j_\nu}\cdot\cdot x_{j_0})\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdot\cdot d\xi_{j_0}$$

$$+\sum_{\substack{\nu\geq 0\\ l\geq 0}}\sum_{\substack{j_\nu\cdot\cdot j_0=0\\ h_l\cdot\cdot h_0=0}}^{n}(G_1,x_{j_\nu}\cdot\cdot x_{j_0})(G_2,x_{h_l}\cdot\cdot x_{h_0})\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdot\cdot d\xi_{j_0}\int_0^t d\xi_{h_l}\cdot\cdot d\xi_{h_0}$$

de même,

$$G_1 ш G_2=(G_1,1)(G_2,1)+(G_1,1).\sum_{w\varepsilon XX^*}(G_2,w)w$$

$$+(G_2,1).\sum_{w\varepsilon XX^*}(G_1,w)w$$

$$+\sum_{w,w'\varepsilon XX^*}(G_1,w)(G_2,w')(w ш w')$$

Remarquons enfin qu'une intégration par partie nous permet d'écrire :

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdot\cdot d\xi_{j_0}.\int_0^t d\xi_{h_l}\cdot\cdot d\xi_{h_0}=$$

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau)(\int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}}\cdot\cdot d\xi_{j_0}.\int_0^\tau d\xi_{h_l}\cdot\cdot d\xi_{h_0})+\int_0^t d\xi_{h_l}(\tau)(\int_0^\tau d\xi_{j_\nu}\cdot\cdot d\xi_{j_0}.\int_0^\tau d\xi_{h_{l-1}}\cdot\cdot d\xi_{h_0}),$$

ce qui redonne la définition récurrente du mélange sur les mots :

$$1 \sqcup\!\sqcup 1 = 1, \quad 1 \sqcup\!\sqcup x_i = x_i \sqcup\!\sqcup 1 = x_i$$

$$x_{j_\nu} \cdots x_{j0} \sqcup\!\sqcup x_{h_l} \cdots x_{h0} =$$

$$x_{j\nu}(x_{j\nu-1} \cdots x_{j0} \sqcup\!\sqcup x_{h_l} \cdots x_{h0}) + x_{h_l}(x_{j_\nu} \cdots x_{j0} \sqcup\!\sqcup x_{h_l-1} \cdots x_{h0}).$$

Le résultat cherché est alors obtenu en comparant les expressions donnant $F_1(t,u_i)$ $F_2(t,u_i)$ *et* $G_1 \sqcup\!\sqcup G_2$.

2. <u>DEVELOPPEMENTS FONCTIONNELS EN INDETERMINEES NON COMMUTATIVES DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES FORCEES.</u>

a. Formule fondamentale.

Soit le système différentiel en régime forcé

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = A_0(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i(q) \\ y(t) = h(q) \end{cases}$$

L'état q appartient à une variété analytique, réelle ou complexe, Q de dimension finie (q(0) est donné). Les champs de vecteurs (Cf. Dieudonné [D1] p. 101) $A_0, A_1, \ldots A_n$ *et la fonction* $h : Q \to K$ *sont analytiques, définis dans un voisinage de q(0). Les entrées (ou commandes)* $u_1, \ldots, u_n : [0,\infty[\to K$ *sont continues.*

<u>Théorème 1</u> *(Fliess [F5]) : La sortie y du système (*) est une fonctionnelle causale analytique, de série génératrice*

$$G = h_{/0} + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_\nu \ldots j_0 = 0}^{n} A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h_{/0} \, x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$$

($/_0$ indique l'évaluation en q(0)).

y(t) est alors donnée par

$$y(t,u_1,\dots,u_n) = h_{/0} + \sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_\nu\cdots j_0=0}^{n} A_{j_0}\cdots A_{j_\nu}\, h_{/0} \int_0^t d\xi_{j_\nu}\cdots d\xi_{j_0}. \quad (2)$$

<u>Remarque</u> : *Il est possible de majorer les coefficients de (2) comme en [G2] chap. I. Passons aux coordonnées locales :*

$$A_j(q) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{j\alpha}(q_1,\dots,q_k)\, \frac{\partial}{\partial q_\alpha}$$

Soit $\rho>0$ *tel que pour* $|q_\alpha - q_\alpha(0)|<\rho$ $(\alpha=1,\dots,k)$, *les* a_{jk} *d'une part,* h *d'autre part soient majorés en module par* N *et* M. *Il vient*

$$|A_{j_0}\cdots A_{j_\nu}\, h_{/0}| \leq M(\nu+1)!\, \binom{-k/k+1}{\nu+1}\, (-(k+1)N/\rho)^{\nu+1}$$

Il y a convergence absolue de (2) avec

$$t < T = \frac{\rho}{(k+1)\,N}, \quad \max_{0\leq\tau\leq T} |u(\tau)| < 1.$$

<u>Exemple</u> : *Soit l'équation différentielle, dite de Duffing, donnée par :*

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + dy^3 = u(t), \quad (3)$$

où a, b, d *sont des constantes physiques.*

y est solution du système :

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) = (-aq_2(t) - bq_1(t) - dq_1^3(t)) + u(t) \\ y(t) = q_1(t) \end{cases}$$

avec

$$q_1(0) = y(0) = \alpha \quad \text{et } q_2(0) = \dot{y}(0) = \beta - a\alpha$$

La série génératrice est d'après le théorème 1, donnée par :

$$(G, x_{j_\nu} \cdots x_{j0}) = A_{j0} \cdots A_{j_\nu} \, y/_0 .$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}(G, x_0 \, x_0) = A_0 \, A_0 \, y/_0 &= -a\dot{y}(0) - by(0) - dy^3(0) \\ &= a\alpha^2 - a\beta - b\alpha - d\alpha^3 .\end{aligned}$$

b. Cas particulier : systèmes bilinéaires ou réguliers.

Un système régulier (ou bilinéaire) est défini par :

$$(\ast\ast\ast) \qquad \begin{cases} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \, A_i) \, q(t) \\ \\ y(t) = \lambda \, q(t) \end{cases}$$

L'état q appartient à un K-espace vectoriel Q, de dimension finie, ($q(0)$ est donné). $A_0, A_1, \ldots, A_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to K$ sont des applications K-linéaires. Les entrées (ou commandes) $u_1, \ldots, u_n : [0, \infty[\to K$ sont continues.

Le résultat du théorème 1 permet de retrouver dans ce cas particulier la formule de Peano-Baker :

$$y(t) = \lambda \Big(I_N + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_\nu, \ldots, j_0 = 0}^{n} A_{j_\nu} \cdots A_{j0} \int_0^t d\xi_{j_\nu} \cdots d\xi_{j0} \Big) q(0) \qquad (4)$$

La série G associée

$$G = \lambda(I_N + \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j_\nu, \ldots, j_0 = 0}^{n} A_{j_\nu} \ldots A_{j_0} x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}) q(0)$$

est rationnelle (application directe du théorème de Kleene- Schützenberger [E1]).(4) est alors partout définie (Cf. [F4]).

On a de plus le résultat suivant [F4]

Proposition 4 : *Il y a correspondance biunivoque entre $K\langle(X)\rangle$ et les systèmes réguliers définis à une indiscernabilité près* (1).

3. RESOLUTION EFFECTIVE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES FORCEES.

La série génératrice associée à l'asservissement (*) peut être obtenue algorithmiquement par une généralisation du calcul de Heaviside, facilement programmable sur ordinateur (2).

Proposition 5 [F4] : *La série génératrice (2) peut être calculée par itération. On obtient ainsi une suite d'approximations par des asservissements polynomiaux.*

Preuve : *Supposons Q de dimension N. Soient $G_1, G_2, \ldots, G_N$, G les séries inconnues de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ où $G_1, \ldots, G_N$ correspondent aux N coordonnées de q et G à la sortie y. Rappelons que la multiplication à gauche par x_0 correspond à intégrer, celle par x_i à multiplier par u_i, puis à intégrer Enfin, au produit des valeurs numériques, correspond le mélange des indéterminées non commutatives (voir proposition 3).*

(*) conduit alors à :

---

(1) *Deux systèmes sont dits indiscernables si et seulement si ils ont même comportement entrée-sortie.*

(2) *Cette méthode de calcul a été exposée par ailleurs (Bonhour et Foucherot [B5]).*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_N \end{bmatrix} = q(0) + x_0 A_0(G_1,\ldots,G_N) + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i(G_1,\ldots,G_N) \\ G = h(G_1,\ldots,G_N) \end{cases} \qquad (5)$$

La résolution par itération, selon une méthode qui remonte à Picard, de (5) est possible. La série génératrice cherchée est alors donnée par la (N+1)ième coordonnée de la solution de (5).

On obtient ainsi une suite d'approximations par des systèmes polynomiaux convergeant vers (*) dans une certaine topologie.

Exemple : *Considérons l'équation différentielle (3). Transformons là en une équation intégrale, soit :*

$$y(t) + a\int_0^t y(\tau)d\tau + b\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} y(\tau)d\tau + d\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} y^3(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} u(\tau)d\tau + \beta t + \alpha,$$

où $y(0)=\alpha$ *et* $\dot{y}(0)= \beta - a\alpha$.

G est alors donnée par :

$$G + ax_0G + bx_0^2G + dx_0^2G \sqcup G \sqcup G = x_0x_1 + \beta x_0 + \alpha .$$

D'après la proposition on peut approcher G par une suite de polynômes $R\langle x_0,x_1\rangle$ *définissant des asservissements polynomiaux.*

Par exemple, les trois premiers éléments de cette suite sont donnés par :

$$G^0 = \alpha$$
$$G^1 = \alpha + (\beta - a\alpha)x_0$$
$$G^2 = \alpha + (\beta - a\alpha)\, x_0 + x_0\, x_1 + (a^2\alpha - a\beta - b\alpha - d\alpha^3)\, x_0^2.$$

<u>Remarque</u> : *Soit l'équation différentielle linéaire :*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, \dot{y} + a_0\, y = u(t),$$

où u est l'entrée, y est la sortie et $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *des constantes scalaires et supposons les conditions initiales* $y(0)$, $\dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ *nulles.*

n intégrations successives nous conduisent à l'équation intégrale :

$$y(t) + a_{n-1}\int_0^t y(\tau)d\tau + \ldots + a_0\int_0^t d\tau_{n-1}\int_0^{\tau_{n-1}} \ldots \int_0^{\tau_1} y(\tau)d\tau =$$

$$\int_0^t d\tau_{n-1}\int_0^{\tau_{n-1}} \ldots \int_0^{\tau_1} u(\tau)d\tau \ .$$

La série génératrice G est alors donnée par :

$$G + a_{n-1}\, x_0\, G + \ldots + a_0\, x_0^n\, G = x_0^{n-1}\, x_1.$$

soit

$$G = (1 + a_{n-1}\, x_0 + \ldots + a_0\, x_0^n)^{-1}\, x_0^{n-1}\, x_1.$$

On retrouve ainsi, à un changement élémentaire de variables près, la fonction de transfert classique.

- Chapitre II -

PROPRIETES STATISTIQUES DE LA SORTIE D'UN SYSTEME NON LINEAIRE.

1. MOTIVATION

Il existe de nombreuses méthodes pour trouver les propriétés statistiques de la sortie d'un système différentiel non linéaire avec un bruit blanc gaussien en entrée. En général elles dépendent du domaine dans lequel un tel système est étudié : électronique et théorie du signal (Van Trees [V1], Kuznetsov [K2]) mécanique et physique statistiques (Morton et Corrsin [M4]), Bixon et Zwanzig [B4]. Le choix se fait suivant les résultats que l'on veut obtenir, qualitatif ou quantitatif et suivant l'exemple.

L'équation de Fokker-Planck (Liu [L3], Morton et Corrsin [M3]) permet de calculer la densité de probabilité conditionnelle $P(x|y,t)$ (si le système est à l'instant zéro en x, $P(x|y,t)$ est la probabilité que le système soit entre y et $y+dy$ à l'instant t):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(AP) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(BP)$$

où $A = \lim_{\Delta t \to 0} \{\frac{1}{\Delta t} a^{(1)}(y,\Delta t)\}$ *et* $B = \lim_{\Delta t \to 0} \{\frac{1}{\Delta t} a^{(2)}(y,\Delta t)\}$,

supposés finis, avec $a^{(m)}(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\ (z-y)^m\ P(y|z, t)$.

La résolution (exacte dans certains cas : solution stationnaire de l'équation de Duffing par exemple) de cette équation différentielle permet d'en déduire toutes les propriétés statistiques souhaitées.

Une deuxième approche consiste à s'intéresser à la fonction de corrélation ou à la densité spectrale de la solution stationnaire. On trouve les méthodes

- de "linéarisation statistique", utilisée en ingénierie (Budgor [B8]),
- d' "opérateur de projection" (Matsuo [M1]),
- de "développement perturbatif" (Abe [A1], Morton et Corrsin [M4]).

Ces deux dernières, en fait équivalentes (Cf. [B9]) font appel à des techniques de renormalisation permettant de mettre en évidence les effets de la non linéarité. Ainsi, Morton et Corrsin [M4], s'intéressent à l'oscillateur anharmonique vérifiant l'équation différentielle de Duffing

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + y + \beta y^3 = \dot{b}(t)$$

où $b(t)$ est un processus brownien. En prenant la transformée de Fourier[1] $u(\omega)$ de $y(t)$ dans (6), ils donnent le développement perturbatif (non convergent) de $u(\omega)$ en puissance de β où tous les coefficients sont fonctions de la transformée de Fourier de la sortie linéaire $u_0(\omega)$ ($\beta=0$). La densité spectrale de la réponse stationnaire est alors obtenue en calculant $U(\omega)=\langle u(\omega)\ u(-\omega)\rangle$[2] où les coefficients de ce nouveau développement sont exprimés en fonction de la densité spectrale $U_0(\omega)$ de la sortie linéaire. Comme Feynman (1948) et comme beaucoup d'autres chercheurs par la suite, ils représentent les termes de cette série par des diagrammes (Kraichnan (1961) employa ces techniques pour résoudre les équations différentielles stochastiques linéaires). Cette nouvelle représentation permet de mettre en évidence certains groupes de termes qui se répètent indéfiniment : ils sont alors "mis en facteur". On dit que l'on a resommée ou renormalisée la série. $U(\omega)$ resommée, s'exprime comme somme infinie de termes où n'apparaissent cette fois que trois groupes dont $U(\omega)$. Les deux autres nouvelles fonctions s'expriment de la même façon. Ils obtiennent ainsi un ensemble de trois équations non linéaires infinies qui sont ensuite tronquées de différentes manières. Nous examinerons plus loin cette méthode en détail en la comparant avec nos résultats.

Enfin d'autres auteurs préfèrent calculer directement les

---

(1) nous donnerons une justification de cette méthode plus loin.

(2) $\langle\ldots\rangle$ = espérance mathématique de ...

moments. Soit le modèle stochastique vectoriel :

$$dq = A_0\,(q,t)dt + \sum_{i=1}^{n} A_i(q,t)db_i(t)$$

où $b(t)=(b_1,\ldots,b_n)$ *est un brownien vectoriel à composantes deux à deux indépendantes.*

L'équation des moments centrés $\langle h(q)\rangle$, *qui s'obtient à partir de l'équation de Fokker Planck s'écrit* [B6]

$$\frac{d}{dt}\langle h(q)\rangle = \sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle\frac{\partial h}{\partial q_i}A_0^i\right\rangle - \left\langle\frac{\partial h}{\partial q_i}\right\rangle\langle A_0^i\rangle\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left\langle\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial q_j}(ADA^T)_{ij}\right\rangle$$

où D est la matrice diagonale du bruit (σ_i^2). *En général ce système est infini. Par exemple, dans l'équation de Duffing, pour obtenir le moment d'ordre k, on doit connaître ceux d'ordre (k+1) et (k+2). Il faut donc approcher ces moments. Il y a, ici aussi, différentes méthodes : citons celle de Bellman et Wilcox* [W1] *ou celle de Kuznetsov, Stratonovich et Tikhonov* [K2] *; cette dernière consiste à approcher la densité* $P(q,t)$ *par une série dont les termes tendent vers zéro assez rapidement.*

$$P(q,t)=\frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}q^TAq\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_n=k}\frac{b_{l_1,\ldots,l_n}(t)}{l_1!\,l_2!\ldots l_n!}H_{l_1\ldots l_n}(q)$$

où $A=(\langle qq^T\rangle)^{-1}$, $b_{l_1,\ldots,l_n}(t)$ *sont appelés quasi-moments ou cumulants,* $H_{l_1,\ldots,l_n}(q)$ *étant les polynômes d'Hermite multidimensionnels. Les quasi-moments sont alors exprimés en fonction des moments centrés d'ordre inférieur ou égal . En annulant à partir d'un certain rang, les coefficients de la série, il est alors possible d'approcher les moments centrés souhaités.*

Après cette revue non exhaustive des façons d'aborder le problème, il vient une question : peut-on trouver une méthode rigoureuse (par des manipulations algébriques facilement programmables) permettant de donner les premiers moments et passant par une compréhension des effets de la non linéarité, avec un bruit quelconque en entrée ?

Nous ne donnerons pas une réponse complète dans ce travail, mais les techniques utilisées semblent convenir à ce type de problème de part leur généralité et leur simplicité .

2. FORMULE DONNANT LES MOMENTS DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES NON LINEAIRES.

Soit le système différentiel stochastique

$$dq^k = A_0^k(t,q^1,\dots,q^l)dt + \sum_{i=1}^{n} A_i^k(t,q^1,\dots,q^l)db^i \quad (k=1,\dots,l) \qquad (7)$$

qui doit être entendu au sens de Stratonovich (1) [F8]. *Les fonctions* A_i^k $(i=0,1,\dots,n)$ *sont analytiques, les* b^i *sont des browniens standard indépendants. Pour simplifier, on suppose les conditions initiales* $q^k(0)=c^k$ *certaines. La fonction h étant analytique, il s'agit de calculer l'espérance* $\langle h(t,q^1,\dots,q^l)\rangle$.

---

(1) dans le cas où les bruits b_i *sont additifs les solutions du système différentiel (7) au sens d'Itô et de Stratonovich se confondent, d'après le résultat suivant (Cf. Arnold [A2] chap. 10) : le système (7) au sens d'Itô devient*

$$dq^k = A_0^k(t,q^1,\dots,q^l)dt + \sum_{i=1}^{n} A_i^k(t,q^1,\dots,q^l)db^i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i^k}{\partial q_j}(t,q^1,\dots,q^l)A_i^j(t,q^1,\dots,q^l)dt$$

Comme A_i^k *est indépendant de* q^j $(j=1,\dots,l)$ *par hypothèse, le dernier terme est nul.*

Propriété fondamentale [F6]

Soient les champs de vecteurs

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l} A_0^k \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$A_i = \sum_{k=1}^{l} A_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} \qquad (i=1,\dots,n).$$

On suppose que $< h(t,q^1,\dots,q^l)>$, $< A_{j_0}\dots A_{j_\nu}\ (t,q^1,\dots,q^l) >$ $(\nu\geq 0, j_0,\dots,j_\nu=0,1,\dots,n)$ *existent pour tout t. Alors* $h(t,q^1,\dots,q^l)$ *est une fonction indéfiniment dérivable de t, dont le développement à l'origine est donné par :*

$$< h(,q^1,\dots,q^l)> = h(0,c^1,\dots,c^l) + \sum_{\alpha\geq 1} \frac{t^\alpha}{\alpha!} (A_0 + \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{n} A_i^2)^\alpha h_{/0} \quad (8)$$

le symbole $/_0$ *indique l'évaluation au point* $(t=0,c^1,\dots,c^l)$.

En effet, d'après le théorème 1, on sait qu'étant donné le système différentiel en régime forcé

$$dq^k = A_0^k(t,q^1,\dots,q^l) + \sum_{i=1}^{n} A_i^k(t,q1,\dots,q^l)u_i(t)dt \quad (k=1,\dots,l), \qquad (9)$$

où les $u_i : \mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *sont continues,* $y=h(t,q^1,\dots,q^l)$ *est une fonctionnelle causale analytique donnée par :*

$$y(t)=h(0,c^1,\dots,c^l) + \sum_{\nu\geq 0} \sum_{j_0,\dots,j_\nu=0}^{n} A_{j_0}\dots A_{j_\nu}\ h_{/0} \int_0^t d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_0}. \qquad (10)$$

Dans le cas où les entrées $u_i (i=1,\dots,n)$ sont aléatoires, ce résultat reste formellement valable (1), *à condition de donner un sens aux intégrales itérées stochastiques $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_0}$. Nous les définissons au sens de Stratonovich, par récurrence sur la longueur :*

$$\int_0^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \dots d\xi_{j_0},$$

ceci pour les raisons suivantes :

1. Le calcul stochastique de Stratonovich obéit, à l'inverse de celui d'Itô, aux règles de calcul différentiel et intégral ordinaire.

2. Divers résultats ont montré, à la suite de Wong et Zakai [W3], que l'intégrale de Stratonovich était plus adaptée aux problèmes physiques concrets.

Pour obtenir (8) il suffit d'appliquer le lemme suivant après avoir pris l'espérance des deux membres de (10).

<u>Lemme</u> : *Posons $\xi_0(\tau)=\tau$, $\xi_i(\tau)=b_i(\tau)$ $(i=1,\dots,n)$. Il est aisé de calculer $\int_0^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_0}$ par récurrence sur la longueur :*

$$\begin{aligned}
\int_0^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_0} &= \int_0^t d\tau < \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \dots d\xi_{j_0} > && \text{si } j_\nu = 0 \\
&= \int_0^t \frac{d\tau}{2} < \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-2}} \dots d\xi_{j_0} > && \text{si } j_\nu = j_{\nu-1} \neq 0 \\
&= 0 && \text{si } j_\nu \neq j_{\nu-1} \\
& && \text{et } j_\nu \neq 0.
\end{aligned}$$

---

(1) Une démonstration rigoureuse semble dépasser les techniques mathématiques actuellement disponibles.

<u>Preuve</u> : *Par définition,* $B_{j_\nu \dots j_0} = \int_0^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_0}$ *vérifie l'équation différentielle stochastique*

$$dB_{j_\nu \dots j_0} = B_{j_{\nu-1}, \dots j_0} \circ dB_{j_\nu} \tag{11}$$

où le symbole $\circ$ *désigne la différentielle stochastique symétrique de Stratonovich. On a d'autre part les résultats suivants d'après Itô [I1], Y et X appartenant à un certain ensemble de processus aléatoires,* $B=(B_i)$ *un brownien standard à composantes deux à deux indépendantes*

$$Y \circ dX = Y.\ dX + \frac{1}{2}\, dX\,.\, dY \tag{12}$$

$$\begin{cases} dB_i\ .\ dB_j = \delta_{ij}\ dt \\ dB_i\ .\ dt = 0 \\ dt\ .\ dt = 0 \end{cases} \tag{13}$$

où le symbole . désigne la différentielle stochastique au sens d'Itô.

Supposons $j_\nu \neq 0$ *(sinon le résultat est trivial) ; d'après (11) et (12) on a :*

$$dB_{j_\nu, \dots, j_0} = B_{j_{\nu-1}, \dots, j_0}\ .\ dB_{j_\nu} + \frac{1}{2}\, dB_{j_{\nu-1}, \dots, j_0}\ .\ dB_{j_\nu},$$

soit encore :

$$dB_{j_\nu, \dots, j_0} = B_{j_{\nu-1}, \dots, j_0}.dB_{j_\nu} + \frac{1}{2}[dB_{j_{\nu-2}, \dots, j_0}.dB_{j_{\nu-1}} + \frac{1}{2} dB_{j_{\nu-2}, \dots, j_0}.dB_{j_{\nu-1}}].dB_{j_\nu}$$

En appliquant (13) et en remarquant que $< B_{j_{\nu-1}, \dots, j_0}.dB_{j_\nu} >$ *est nul, on a :*

$$< dB_{j_\nu,\ldots,j_0} > = \frac{dt}{2} < B_{j_{\nu-2},\ldots,j_0} > \quad si\ j_\nu = j_{\nu-1}$$

$$= 0 \quad si\ j_\nu \neq j_{\nu-1}$$

<u>Application</u> : <u>développement à l'origine des moments.</u>

Comme nous l'avons vu dans la partie I.3, il est possible de donner effectivement la série G associée à la solution de (9). On peut alors donner très facilement les coefficients du développement (8) en appliquant le lemme précédent. Il s'agit ici d'une approche locale. Ainsi, comme le montre l'exemple suivant (fig. 1), cette méthode donne une bonne approximation dans un voisinage de l'origine.

Considérons l'équation de Duffing :

$$\ddot{q} + \dot{q} + q + 0{,}2\, q^3 = \dot{b}(t), \quad q(0)=\alpha \quad \dot{q}(0)=\beta$$

b(t) est un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2=5$.

La série génératrice $G \in K\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ *est solution de l'équation :*

$$G + x_0\, G + x_0^2\, G + 0{,}2\, x_0^2\, G \sqcup\!\sqcup G \sqcup\!\sqcup G = x_0 x_1 + (P+V) x_0 + P$$

avec $q(o)=P$ *et* $\dot{q}(0)=V$.

Le calcul numérique donne les premiers termes suivants, le schéma :

$(\frac{\sigma^2}{2})^n$	MOT	COEF1	$P\alpha_1\ V\beta_1$
		COEF2	$P\alpha_2\ V\beta_2$
		⋮	

devant être lu :

$$(\frac{\sigma^2}{2})^n \ (COEF1\ .P^{\alpha_1}V^{\beta_1} + COEF2\ .P^{\alpha_2}V^{\beta_2} + \ldots\ )MOT$$

X représentant x_0 et Y, x_1 :

Mots de longueur 0		
1	1.000E+00	P1V0
Mots de longueur 1		
X	1.000E+00	P0V1
Mots de longueur 2		
XY	1.0002+00	P0V0
XX	-1.000E+00	P0V1
	-1.000E+00	P1V0
	-2.000E-01	P3V0
Mots de longueur 3		
XXX	1.000E+00	P1V0
	2.000E-01	P3V0
	-6.000E-01	P2V1
XXY	-1.000E+00	P0V0
Mots de longueur 4		
XXXX	1.200E+00	P2V1
	1.000E+00	P0V1
	6.000E-01	P3V0
	1.200E-01	P5V0
	-1.200E+00	P1V2
XXXY	-6.000E-01	P2V0
Mots de longueur 5		
XXXXX	3.000E+00	P2V1
	-1.000E+00	P0V1
	-1.400E+00	P3V0
	-2.400E-01	P5V0
	4.800E+00	P1V2
	-1.000E+00	P1V0
	1.080E+00	P4V1
	1.200E+00	P0V3

XXXXY	1.200E+00	P2V0
	1.000E+00	P0V0
	-2.400E+00	P1V1
XXXYX	-1.200E+00	P1V1

Mots de longueur 6

XXXXXX	-1.680E+01	P2V1
	-2.800E+00	P3V0
	-1.680E+00	P5V0
	1.000E+00	P1V0
	-4.200E+00	P4V1
	8.400E+00	P0V1
	-2.160E-01	P7V0
	5.040E+00	P3V2
XXXXXY	3.000E+00	P2V0
	-1.000E+00	P0V0
	9.600E+00	P1V1
	1.080E+00	P4V0
	-3.600E+00	P0V2
XXXXYX	4.800E+00	P1V1
	2.400E+00	P2V0
	4.800E-01	P4V0
	-2.400E+00	P0V2
XXXYXX	1.200E+00	P1V1
	1.200E+00	P2V0
	2.400E-01	P4V0
	-1.200E+00	P0V2
XXXYXY	-1.200E+00	P1V0
XXXXYY	-2.400E+00	P1V0

⋮

ce qui donne, en appliquant les règles de calcul du lemme ci-dessus pour le moment d'ordre 1 :

Mots de longueur 0

1	1.000E+00	P1V0

Mots de longueur 1

X	1.000E+00	P0V1

Mots de longueur 2

XX	-1.000E+00	P0V1
	-1.000E+00	P1V0
	-2.000E-01	P3V0

Mots de longueur 3

XXX	1.000E+00	P1V0
	2.000E-01	P3V0
	-6.000E-01	P2V1

Mots de longueur 4

XXXX	1.200E+00	P2V1
	1.000E+00	P0V1
	6.000E-01	P3V0
	1.200E-01	P5V0
	-1.200E+00	P1V2

Mots de longueur 5

XXXXX	3.000E+00	P2V1
	-1.000E+00	P0V1
	-1.400E+00	P3V0
	-2.400E-01	P5V0
	4.800E+00	P1V2
	-1.000E+00	P1V0
	1.080E+00	P4V1
	-1.200E+00	P0V3
($\sigma^2/2$) XXXXX	-2.400E+00	P1V0

⋮

Pour P=3, V=0 et $\sigma^2=5$ on obtient la fonction polynomiale suivante (fig. 1) :

$$\langle q^2(t)\rangle = 3-4.2t^2-1.4t^3+1.89t^4-0.98t^5-1.22t^6+0.26t^7+0.75t^8 -0.67t^9-0.42t^{10}+0.2t^{11}+0.21t^{12}+ \ldots$$

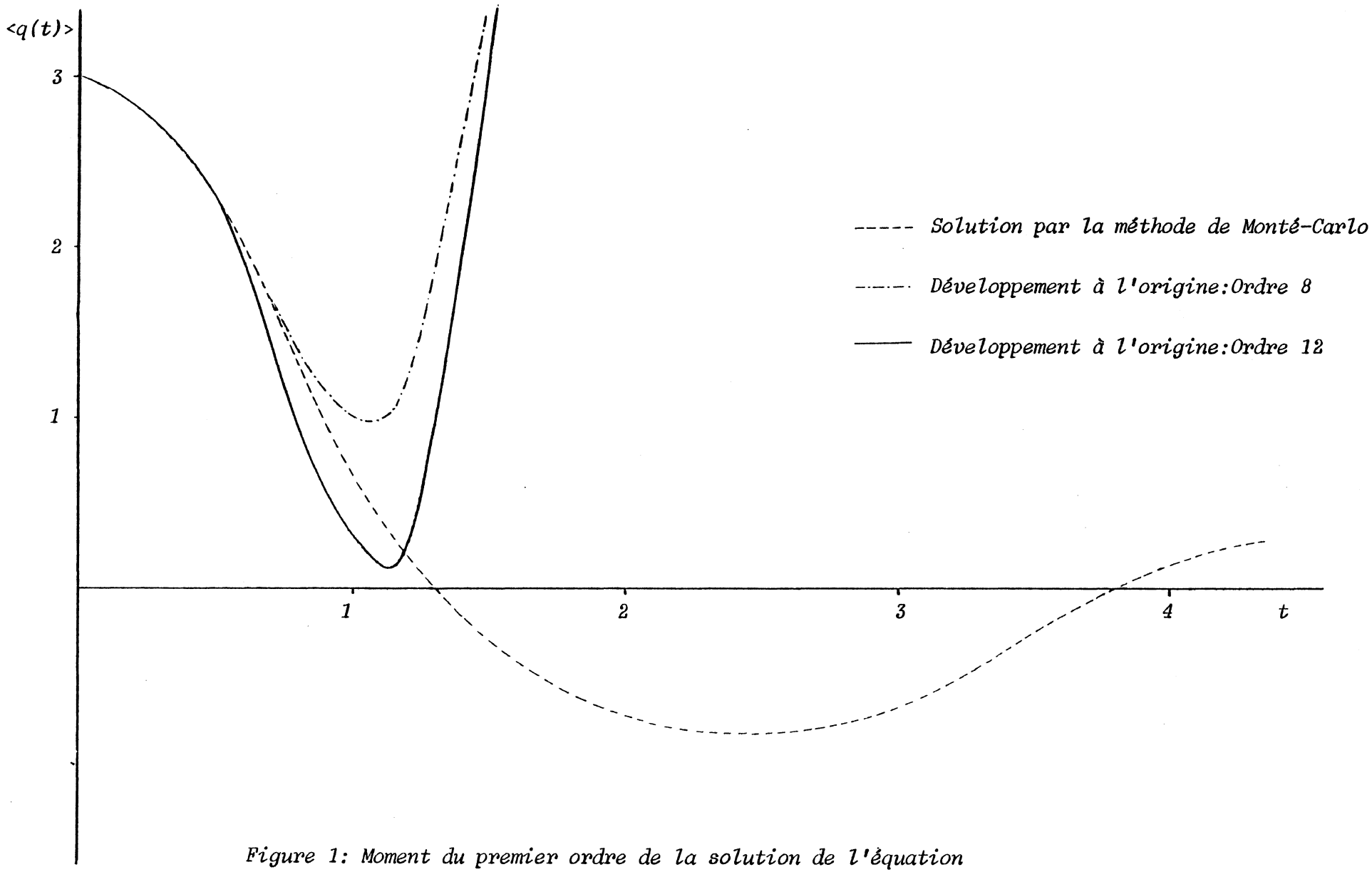


Figure 1: Moment du premier ordre de la solution de l'équation

$\ddot{q} + \dot{q} + q + 0.2q^3 = \dot{b}(t)$ *avec* $\sigma^2=5, q(0)=3, \dot{q}(0)=0.$

Remarque : *Pour obtenir le comportement au voisinage de l'origine des moments d'ordre supérieur* $\langle y^n(t)\rangle$, *il faut calculer* $G^{\sqcup n}$ (1) *et prendre l'espérance du développement obtenu.*

---

(1) $G^{\sqcup n}$ *signifie* $G \sqcup G \sqcup \ldots \sqcup G$ *n fois.*

- Chapitre III -

DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DES MOMENTS DE LA SOLUTION DE CERTAINES EQUATIONS NON LINEAIRES FORCEES.

Dans la suite, nous nous intéressons aux équations différentielles non linéaires particulières suivantes :

$$Lq(t) + \beta P(q(t)) = \dot{b}(t) \qquad (14)$$

où L est un opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{d}{dt^i} \quad (l_n=1),$$

et P un polynôme :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j x^j.$$

l_i $(i=0,\dots,n)$ *et* p_j $(j=1,\dots,m)$ *sont des constantes appartenant à* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$
Les conditions initiales $q(0)$, $\dot{q}(0),\dots,q^{(n)}(0)$ *sont données.*

Soit le développement perturbatif de la solution de (14) :

$$q(t) = q_0(t) + \beta q_1(t) + \beta^2 q_2(t) + \dots$$

$q_0(t)$ *est la solution de (14) pour* $\beta=0$, *c'est-à-dire la solution du système linéaire associé.*

On en déduit des développements de même nature pour les statistiques de la solution par exemple :

$$<q^n(t)> = <q_0^n(t)> + n\,\beta <q_0^{n-1}(t)\; q_1(t)> + \dots \qquad n>0$$

$$<q(t_1)q(t_2)> = <q_0(t_1)q_0(t_2)> + \beta(<q_0(t_1)q_1(t_2)> + <q_0(t_2)q_1(t_1)>) + \dots$$

Dans ce chapitre nous donnons les expressions des premiers termes de ces développements. Ce problème n'est pas souvent traité par les auteurs ,ceux-ci s'intéressent uniquement à la solution stationnaire.

1. CALCUL FORMEL DES TERMES DU DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DE LA SOLUTION.

La série génératrice associée à (14) est solution de l'équation :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} l_i\, x_0^{n-i}\right) G + x_0^n\, \beta \sum_{j=1}^{m} p_j\, G^{\sqcup j} = x_0^{n-1} x_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i\, x^i$$

où les $\delta_i (i=0,\dots,n-1)$ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales. Soit G_0 la solution du problème linéaire associé ($\beta=0$).

$$G_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} l_i\, x_0^{n-i}\right)^{-1} \left(x_0^{n-1} x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i\, x_0^i\right)$$

Les autres termes représentant formellement $q_k(t)$ sont donnés par :

$$G_k = -\left(\sum_{i=0}^{n} l_i x_0^{n-i}\right)^{-1} x_0^n \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_j \\ k_1+\dots+k_j=k}} p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_j}\; G_{k_1} \sqcup G_{k_2} \sqcup \dots \sqcup G_{k_j}$$

<u>Proposition 6</u> : *G_k est une série rationnelle appartenant à $K\langle x_0, x_1\rangle$. La preuve est immédiate : il suffit d'appliquer les propriétés du mélange (Cf. proposition 1).*

Posons $\sum_{i=0}^{n} l_i\, x_0^{n-i} = \prod_{i=1}^{p} (1-a_i\, x_0)^{\alpha_i}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$

et décomposons en éléments simples

$$\left(\sum_{i=0}^{n} l_i\, x_0^{n-i}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i\, x_0^{i}\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{q=1}^{\alpha_i} \frac{A_i^q}{(1-a_i\, x_0)^q}$$

Pour calculer G_k, $k=1,2,\ldots$ *il faut savoir calculer le mélange d'expressions de la forme :*

$$R_1(x_0)x_{i_1}\, R_2(x_0)x_{i_2}\ldots x_{i_p}\, R_p(x_0)$$

où $R_j(x_0)$ $(j=1,\ldots,p)$ *est une fraction rationnelle en* x_0 *et* $(i_1,\ldots,i_p)$ $\varepsilon\{0,1\}$

2. <u>*CALCUL DU MELANGE DE CERTAINES SERIES RATIONNELLES*</u> *(Cf. [L1])*

<u>Proposition 7</u> : *Etant données les deux séries en les variables non commutatives* $x_0,x_1,\ldots,x_n$

$$S_1^p=(1-b_0x_0)^{-1}x_{i_1}(1-b_1x_0)^{-1}x_{i_2}\ldots x_{i_p}(1-b_px_0)^{-1}=S_1^{p-1}x_{i_p}(1-b_px_0)^{-1}$$

et $S_2^q=(1-d_0x_0)^{-1}x_{j_1}(1-d_1x_0)^{-1}x_{j_2}\ldots x_{j_q}(1-d_qx_0)^{-1}=S_2^{q-1}x_{j_q}(1-d_qx_0)^{-1}$

où p *et* q *appartiennent à* $\mathbb{N}$, *les indices* $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q$ *à* $\{0,1,\ldots,n\}$ *et les* b_i, d_j *à* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *; le mélange est donné par récurrence sur la longueur par*

$$S_1^p \sqcup S_2^q=(S_1^p \sqcup S_2^{q-1})x_{j_q}(1-(b_p+d_q)x_0)^{-1}+(S_1^{p-1} \sqcup S_2^q)x_{i_p}(1-(b_p+d_q)x_0)^{-1}$$

avec $(1-dx_0)^{-1} \sqcup (1-bx_0)^{-1}=(1-(d+b)x_0)^{-1}$.

<u>Preuve</u> : *Soient les deux séries*

$$S_1^p = S_1^{p-1} x_{i_p} (1-b_p x_0)^{-1} \text{ et } S_2^q = S_2^{q-1} x_{j_q} (1-d_q x_0)^{-1}$$

leur mélange est donné, en notant que

$$(1-bx_0)^{-1} = 1 + b(1-bx_0)^{-1} x_0, \tag{15}$$

par,

$$S_1^{p-1} x_{i_p} [1+b_p(1-b_p x_0)^{-1} x_0] \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1} x_{j_q} [1+d_q(1-d_q x_0)^{-1} x_0]$$

soit, en développant et en appliquant la définition du mélange et (15), par,

$$\begin{aligned}
&[S_1^{p-1} x_{i_p} (1-b_p x_0)^{-1} \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1}] x_{j_q} + [S_1^{p-1} \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1} x_{j_q} (1-d_q x_0)^{-1}] x_{i_p} \\
&+ [S_1^{p-1} x_{i_p} (1-b_p x_0)^{-1} \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1} x_{j_q} (1-d_q x_0)^{-1}] b_p x_0 \\
&+ [S_1^{p-1} x_{i_p} (1-b_p x_0)^{-1} \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1} x_{j_q} (1-d_q x_0)^{-1}] d_q x_0,
\end{aligned}$$

d'où, en regroupant les termes semblables,

$$(S_1^p \sqcup\!\sqcup S_2^q)[1-(b_p+d_q)x_0] = (S_1^p \sqcup\!\sqcup S_2^{q-1}) x_{j_q} + (S_1^{p-1} \sqcup\!\sqcup S_2^q) x_{i_p}.$$

<u>Corollaire</u> : *Il est alors possible de calculer le mélange d'expressions de la forme*

$$R_1(x_0) x_{i_1} R_2(x_0) x_{i_2} \ldots x_{i_{p-1}} R_p(x_0)$$

où $R_j(x_0)$ est une fraction rationnelle en x_0 et les indices $i_1, \ldots, i_{p-1}$ appartiennent à $\{0,1,\ldots,n\}$.

<u>Preuve</u> : *Il suffit en effet de calculer le mélange d'expressions*

$$(1-a_1 x_0)^{-q_1} x_{i_1} (1-a_2 x_0)^{-q_2} x_{i_2} \ldots x_{i_{p-1}} (1-a_p x_0)^{-q_p}$$

après décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $R_j(x_0)$
On applique alors la proposition en notant que :

$$(1-ax_0)^{-q} = (1-ax_0)^{-(q-1)} + a(1-ax_0)^{-1}x_0(1-ax_0)^{-(q-1)}.$$

G_k *s'écrit alors en somme finie de termes de la forme :*

$$BC\,[1-(\sum_{i=1}^{p}\delta_0^i a_i)x_0]^{-1}x_{i_1}[1-(\sum_{i=1}^{p}\delta_1^i a_i)x_0]^{-1}x_{i_2}\ldots[1-(\sum_{i=1}^{p}\delta_k^i a_i)x_0]^{-1}$$

où B *appartient à* $\mathbb{C}$, $(i_1,\ldots,i_k)$ *à* $\{0,1\}$, $(\delta_l^i)_{l=0,\ldots k}^{i=1,\ldots p}$ *et* C *à* $\mathbb{N}$

Par récurrence sur la longueur, on voit facilement que dans le cas où tous les pôles a_i *sont simples, le coefficient* B *s'exprime en fonction des* A_i^1 *(noté* A_i*)*

$$B = A_1^{\delta_k^1} A_2^{\delta_k^2} \ldots A_p^{\delta_k^p}$$

Dans les applications nous représentons un terme de G_k *par le schéma :*

$$\begin{array}{cccc}
C & x_{i_1} & x_{i_2} \ldots\ldots\ldots & x_{i_k} \\
\delta_0^1 & \delta_1^1 & \ldots\ \delta_{k-1}^1 & \delta_k^1 \\
\delta_0^2 & \delta_1^2 & \ldots\ \delta_{k-1}^2 & \delta_k^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\delta_0^p & \delta_1^p & \ldots\ \delta_{k-1}^p & \delta_k^p
\end{array}$$

Le programme, dont les principaux modules sont explicités dans le chapitre 5 permet de construire G_k *pour n'importe quelle équation. Ces suites de schémas obtenues, on peut choisir les conditions initiales et les pôles (simples) pour l'équation traitée.*

Remarques : *1- La proposition 7 généralise à certaines séries formelles en variables non commutatives, le théorème de Hurwitz sur l'addition des singularités des séries en une seule variable* [B3].

2- A partir de ce calcul formel, on peut déterminer algébriquement les noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires [L1].

3- Dans le cas stationnaire, tous les mots des séries G_k *se terminent par* x_1 *; on a alors*

$$G_k = \sum_{j=1}^{N} c_j (1-a_0^j x_0)^{-p_0^j} x_1 (1-a_1^j x_0)^{-p_1^j} x_1 \ldots x_1 (1-a_{i-1}^j x_0)^{-p_{i-1}^j} x_1$$

Or il y a correspondance biunivoque [F7] *entre ces séries et les séries en variables commutatives définies par*

$$\sum_{j=1}^{N} c_j (1-a_0^j z_1)^{-p_0^j} (1-a_1^j z_2)^{p_1^j} \ldots (1-a_{i-1}^j z_i)^{-p_{i-1}^j}$$

et qui ne sont, à un changement de variable près, que les fonctions de transfert régulières définies par Mitzel, Clancy et Rugh [M2]. *Notons la reconnaissabilité* [F7] *de ces fonctions de transfert* [*elles sont de la forme*

$$\frac{P(z_1, \ldots z_i)}{Q_1(z_1) \ldots Q_{i-1}(z_{i-1}) Q_i(z_i)} \quad \text{où } P, Q_1, \ldots Q_i \text{ sont des polynômes}].$$

3. EXEMPLES

a. En physique statistique : l'oscillateur anharmonique.

Soit l'équation différentielle, dite de Duffing

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \gamma q + \beta q^3 = b(t) \qquad x(0)=a, \qquad \dot{x}(0)=b.$$

La série G associée est solution de l'équation :

$$(1+\alpha x_0 + \gamma x_0^2)G + \beta x_0^2\ G \sqcup G \sqcup G = x_0\ x_1 + (b-\alpha a)\ x_0 + a x_0$$

posons

$$(1 + \alpha x_0 + \gamma x_0^2) = (1-a_1\ x_0)\ (1-a_2\ x_0)$$

et

$$(1 + \alpha x_0 + \gamma x_0^2)^{-1}\ ((b-\alpha a)x_0 + a x_0) = A_1(1-a_1\ x_0)^{-1} + A_2(1-a_2\ x_0)^{-1}$$

G_0 *est donné par :*

$$(1-a_1\ x_0)^{-1}\ x_0(1-a_2\ x_0)^{-1}\ x_1 + A_1(1-a_1 x)^{-1} + A_2(1-a_2 x)^{-1}$$

soit schématiquement :

```
1    1
  1    0
  0    0
1    A
  0    0
  1    0
1    X    Y
  1    0    0
  0    1    0
```

D'après la proposition précédente, on peut calculer G_k.
Le calcul numérique a donné :

<u>*Pour* G_1</u> *:*

```
1    X    X
  1    0    3
  0    1    0
3    X    X
  1    0    2
  0    1    1
```

3	X	X	
1	0	1	
0	1	2	
1	X	X	
1	0	0	
0	1	3	

3	X	X	X	Y	
1	0	3	2	2	
0	1	0	1	0	
6	X	X	X	Y	
1	0	2	1	1	
0	1	1	2	1	
3	X	X	X	Y	
1	0	1	0	0	
0	1	2	3	2	

6	X	X	X	Y	X	Y
1	0	3	2	2	1	1
0	1	0	1	0	1	0
12	X	X	X	X	Y	Y
1	0	3	2	1	1	1
0	1	0	1	2	1	0
6	X	X	X	Y	X	Y
1	0	2	1	1	0	0
0	1	1	2	1	2	1
12	X	X	X	X	Y	Y
1	0	2	1	0	0	0
0	1	1	2	3	2	1

6	X	X	X	Y	X	Y	X	Y
1	0	3	2	2	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
12	X	X	X	X	Y	Y	X	Y
1	0	3	2	1	1	1	0	0
0	1	0	1	2	1	0	1	0
24	X	X	X	X	Y	X	Y	Y
1	0	3	2	1	1	0	0	0
0	1	0	1	2	1	2	1	0
12	X	X	X	Y	X	X	Y	Y
1	0	3	2	2	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	2	1	0
36	X	X	X	X	X	Y	Y	Y
1	0	3	2	1	0	0	0	0
0	1	0	1	2	3	2	1	0

Pour G_2 :

3	X	X	X	X
1	0	3	2	1
0	1	0	1	4
9	X	X	X	X
1	0	3	2	4
0	1	0	1	1
9	X	X	X	X
1	0	3	2	3
0	1	0	1	2
3	X	X	X	X
1	0	3	2	2
0	1	0	1	3

6	X	X	X	X		
1	0	2	1	4		
0	1	1	2	1		
18	X	X	X	X		
1	0	2	1	3		
0	1	1	2	2		
18	X	X	X	X		
1	0	2	1	2		
0	1	1	2	3		
6	X	X	X	X		
1	0	2	1	1		
0	1	1	2	4		
3	X	X	X	X		
1	0	1	0	3		
0	1	2	3	2		
9	X	X	X	X		
1	0	1	0	2		
0	1	2	3	3		
3	X	X	Y	X		
1	0	1	0	0		
0	1	2	3	5		
9	X	X	X	X		
1	0	1	0	1		
0	1	2	3	4		
12	X	X	X	X	Y	X
1	0	3	2	1	1	4
0	1	0	1	2	1	0
12	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	1	4	4
0	1	0	1	2	1	0
15	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	3	2	4
0	1	0	1	0	1	0
18	X	X	X	Y	X	X
1	0	3	2	2	1	3
0	1	0	1	0	1	1
36	X	X	X	X	Y	X
1	0	3	3	1	1	3
0	1	0	1	2	1	1
36	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	1	3	3
0	1	0	1	2	2	1
36	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	4	3	3
0	1	0	1	1	2	1
18	X	X	X	Y	X	X
1	0	3	2	2	1	2
0	1	0	1	0	1	2
36	X	X	X	X	Y	X
1	0	3	2	1	1	2
0	1	0	1	2	1	2
36	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	1	2	2
0	1	0	1	2	3	2
27	X	X	X	X	X	Y
1	0	3	2	3	2	2
0	1	0	1	2	3	2
6	X	X	X	Y	X	X
1	0	3	2	2	1	1
0	1	0	1	0	1	3
6	X	X	X	Y	X	X
1	0	3	2	2	1	4
0	1	0	1	0	1	0

12	X	X	X	X	Y	X	
	1	0	3	2	1	1	1
	0	1	0	1	2	1	3
12	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	1	1	1
	0	1	0	1	2	4	3
6	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	2	1	1
	0	1	0	1	3	4	3
24	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	4	3	3
	0	1	1	2	1	2	1
54	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	3	1	3	2	2
	0	1	1	2	2	3	2
36	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	2	1	1
	0	1	1	2	3	4	3
6	X	X	X	Y	X	X	
	1	0	2	1	1	0	3
	0	1	1	2	1	2	1
12	X	X	X	X	Y	X	
	1	0	2	1	0	0	3
	0	1	1	2	3	2	1
12	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	3	3
	0	1	1	2	3	2	1
18	X	X	X	Y	X	X	
	1	0	2	1	1	0	2
	0	1	1	2	1	2	2
36	X	X	X	X	Y	X	
	1	0	2	1	0	0	2
	0	1	1	2	3	2	2
36	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	2	2
	0	1	1	2	3	3	2
18	X	X	X	Y	X	X	
	1	0	2	1	1	0	1
	0	1	1	2	1	2	3
36	X	X	X	X	Y	X	
	1	0	2	1	0	0	1
	0	1	1	2	3	2	3
36	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	1	1
	0	1	1	2	3	4	3
6	X	X	X	Y	X	X	
	1	0	2	1	1	0	0
	0	1	1	2	1	2	4
12	X	X	X	X	Y	X	
	1	0	2	1	0	0	0
	0	1	1	2	3	2	4
12	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	0	0
	0	1	1	2	3	3	4
6	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	1	0	0
	0	1	1	2	4	3	4
9	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	1	0	3	2	2
	0	1	2	3	2	3	2
13	X	X	X	X	X	Y	
	1	0	1	0	2	1	1
	0	1	2	3	3	4	3

9	X	X	X	X	X	Y				
	1	0	1	0	1	0	0			
	0	1	2	3	4	5	4			
6	X	X	X	Y	X	Y	X	X		
	1	0	3	2	2	1	1	0	3	
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
12	X	X	X	X	Y	Y	X	X		
	1	0	3	2	1	1	1	0	3	
	0	1	0	1	2	1	0	1	0	
24	X	X	X	X	Y	X	Y	X		
	1	0	3	2	1	1	0	0	3	
	0	1	0	1	2	1	2	1	0	
24	X	X	X	X	Y	X	X	Y		
	1	0	3	2	1	1	0	3	3	
	0	1	0	1	2	1	2	1	0	
12	X	X	X	Y	X	X	Y	X		
	1	0	3	2	2	1	0	0	3	
	0	1	0	1	0	1	2	1	0	
12	X	X	X	Y	X	X	X	Y		
	1	0	3	2	2	1	0	3	3	
	0	1	0	1	0	1	2	1	0	
24	X	X	X	Y	X	X	X	Y		
	1	0	3	2	2	1	4	3	3	
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
36	X	X	X	X	X	Y	Y	X		
	1	0	3	2	1	0	0	0	3	
	0	1	0	1	2	3	2	1	0	
36	X	X	X	X	X	Y	X	Y		
	1	0	3	2	1	0	0	3	3	
	0	1	0	1	2	3	2	1	0	
48	X	X	X	X	Y	X	X	Y		
	1	0	3	2	1	1	4	3	3	
	0	1	0	1	2	1	0	1	0	
36	X	X	X	X	X	X	Y	Y		
	1	0	3	2	1	0	3	3	3	
	0	1	0	1	2	3	2	1	0	
96	X	X	X	X	X	X	Y	Y		
	1	0	3	2	1	4	3	3	3	
	0	1	0	1	2	1	2	1	0	
48	X	X	X	X	X	Y	X	Y		
	1	0	3	2	1	4	4	3	3	
	0	1	0	1	2	1	0	1	0	
60	X	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	2	3	4	4	3	3	
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
120	X	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	3	2	5	4	3	3	3	
	0	1	0	1	0	1	2	1	0	
18	X	X	X	Y	X	Y	X	X		
	1	0	3	2	2	1	1	0	2	
	0	1	0	1	0	1	0	1	1	
36	X	X	X	X	Y	Y	X	X		
	1	0	3	2	1	1	1	0	2	
	0	1	0	1	2	1	0	1	1	
72	X	X	X	X	Y	X	Y	X		
	1	0	3	2	1	1	0	0	2	
	0	1	0	1	2	1	2	1	1	
72	X	X	X	X	Y	X	X	Y		
	1	0	3	2	1	1	0	2	2	
	0	1	0	1	2	1	2	2	1	

36	X	X	X	Y	X	X	Y	X	
	1	0	3	2	2	1	0	0	2
	0	1	0	1	0	1	2	1	1
36	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	2	1	0	2	2
	0	1	0	1	0	1	2	2	1
54	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	2	1	3	2	2
	0	1	0	1	0	1	1	2	1
108	X	X	X	X	X	Y	Y	X	
	1	0	3	2	1	0	0	0	2
	0	1	0	1	2	3	2	1	1
108	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	2	1	0	0	2	3
	0	1	0	1	2	3	2	2	1
108	X	X	X	X	Y	X	X	Y	
	1	0	3	2	1	1	3	2	2
	0	1	0	1	2	1	1	2	1
108	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	3	2	1	0	2	2	2
	0	1	0	1	2	3	3	2	1
215	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	3	2	1	3	2	2	2
	0	1	0	1	2	2	3	2	1
108	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	2	1	3	3	2	2
	0	1	0	1	2	2	1	2	1
108	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	2	4	3	3	2	2
	0	1	0	1	1	2	1	2	1
215	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	3	2	4	3	2	2	2
	0	1	0	1	1	2	3	2	1
18	X	X	X	Y	X	Y	X	X	
	1	0	3	2	2	1	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	2
36	X	X	X	X	Y	Y	X	X	
	1	0	3	2	1	1	1	0	1
	0	1	0	1	2	1	0	1	2
72	X	X	X	X	Y	X	Y	X	
	1	0	3	2	1	1	0	0	1
	0	1	0	1	2	1	2	1	2
72	X	X	X	X	Y	X	X	Y	
	1	0	3	2	1	1	0	1	1
	0	1	0	1	2	1	2	3	2
36	X	X	X	Y	X	X	Y	X	
	1	0	3	2	2	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1	2	1	2
36	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	2	1	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	2	3	2
36	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	3	2	2	1	2	1	1
	0	1	0	1	0	1	2	3	2
108	X	X	X	X	X	Y	Y	X	
	1	0	3	2	1	0	0	0	1
	0	1	0	1	2	3	2	1	2
108	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	2	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	2	3	2	3	2

72	X	X	X	X	Y	X	X	Y
	1	0	3	2	1	1	2	1	1
	0	1	0	1	2	1	2	3	2
108	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	1	0	1	1	1
	0	1	0	1	2	3	4	3	2
144	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	1	2	1	1	1
	0	1	0	1	2	3	4	3	2
72	X	X	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	2	2	1	1
	0	1	0	1	2	3	2	3	2
54	X	X	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	3	2	2	1	1
	0	1	0	1	2	3	2	3	2
108	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	3	2	1	1	1
	0	1	0	1	2	3	4	3	2
6	X	X	X	Y	X	Y	X	X
	1	0	3	2	2	1	1	0	0
	0	1	0	1	0	1	0	1	3
12	X	X	X	X	Y	Y	X	X
	1	0	3	2	1	1	1	0	0
	0	1	0	1	2	1	0	1	3
24	X	X	X	X	Y	X	Y	X
	1	0	3	2	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	2	1	2	1	3
24	X	X	X	X	Y	X	X	Y
	1	0	3	2	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	2	1	2	4	3
18	X	X	X	X	Y	X	Y	X
	1	0	3	2	2	1	0	0	3
	0	1	0	0	0	1	2	1	3
12	X	X	X	Y	X	X	X	Y
	1	0	3	2	2	1	0	0	0
	0	1	0	1	0	1	2	4	3
6	X	X	X	Y	X	X	X	Y
	1	0	3	2	2	1	1	0	0
	0	1	0	1	0	1	3	4	3
36	X	X	X	X	X	Y	Y	X
	1	0	3	2	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	2	3	2	1	3
36	X	X	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	2	3	2	4	3
12	X	X	X	X	Y	X	X	Y
	1	0	3	2	1	1	1	0	0
	0	1	0	1	2	1	3	4	3
36	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	2	3	5	4	3
24	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	2	4	5	4	3
12	X	X	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	1	1	0	0
	0	1	0	1	2	4	3	4	3
6	X	X	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	3	1	1	0	0
	0	1	0	1	3	4	3	4	3
12	X	X	X	X	X	X	Y	Y
	1	0	3	2	2	1	0	0	0
	0	1	0	1	3	4	5	4	3

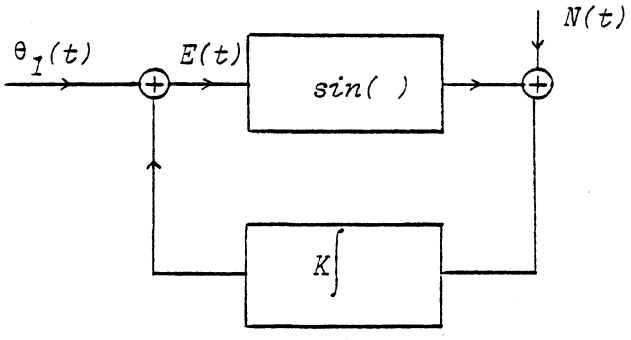
18	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	1	0	3	2	2
	0	1	1	2	1	2	1	2	1
36	X	X	X	X	Y	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	0	3	2	2
	0	1	1	2	3	2	1	2	1
36	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	2	1	0	3	3	2	2
	0	1	1	2	3	2	1	2	1
72	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	0	3	2	2	2
	0	1	1	2	3	2	3	2	1
72	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	2	1	4	3	3	2	2
	0	1	1	2	1	2	1	2	1
144	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	4	3	2	2	2
	0	1	1	2	1	2	3	2	1
36	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	1	0	2	1	1
	0	1	1	2	1	2	2	3	2
72	X	X	X	X	Y	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	0	2	1	1
	0	1	1	2	3	2	2	3	2
72	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	3	1	0	2	2	1	1
	0	1	1	2	3	3	2	3	2
144	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	0	2	1	1	1
	0	1	1	2	2	3	2	3	2
108	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	2	1	3	2	2	1	1
	0	1	1	2	2	3	2	3	2
216	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	3	2	1	1	1
	0	1	1	2	2	3	4	3	2
18	X	X	X	Y	X	X	X	Y	
	1	0	2	1	1	0	1	0	0
	0	1	1	2	1	2	3	4	3
36	X	X	X	X	Y	X	X	Y	
	1	0	2	1	0	0	1	0	0
	0	1	1	2	3	2	3	4	3
36	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	2	1	0	1	1	0	0
	0	1	1	2	3	4	3	4	3
72	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	0	1	0	0	0
	0	1	1	2	3	4	5	4	3
36	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	2	1	2	1	1	0	0
	0	1	1	2	5	4	3	4	3
72	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	2	1	2	1	0	0	0
	0	1	1	2	3	4	5	4	3
18	X	X	X	X	X	Y	X	Y	
	1	0	1	0	0	2	2	1	1
	0	1	2	3	2	3	2	3	2
36	X	X	X	X	X	X	Y	Y	
	1	0	1	0	3	2	1	1	1
	0	1	2	3	2	3	4	3	2

18	X	X	X	X	X	Y	X	Y		
	1	0	1	0	2	1	1	0	0	
	0	1	2	3	3	4	3	4	3	
36	X	X	X	X	X	X	Y	Y		
	1	0	1	0	2	1	0	0	0	
	0	1	2	3	0	4	5	4	3	
72	X	X	X	Y	X	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	2	1	4	3	3	2	2
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
144	X	X	X	X	Y	X	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	1	4	3	3	2	2
	0	1	0	1	2	1	0	1	0	1	0
144	X	X	X	X	X	Y	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	4	4	3	3	2	2
	0	1	0	1	2	1	0	1	0	1	0
288	X	X	X	X	X	X	Y	Y	X	Y
	1	0	3	2	1	4	3	3	3	2	2
	0	1	0	1	2	1	2	1	0	1	0
576	X	X	X	X	X	X	Y	X	Y	Y
	1	0	3	2	1	4	3	3	2	2	2
	0	1	0	1	2	1	2	1	2	1	0
180	X	X	X	X	X	Y	X	Y	X	Y
	1	0	3	2	5	4	4	3	3	2	2
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
360	X	X	X	X	X	X	Y	Y	X	Y
	1	0	3	2	5	4	3	3	3	2	2
	0	1	0	1	0	1	2	1	0	1	0
720	X	X	X	X	X	X	Y	X	Y	Y
	1	0	3	2	5	4	3	3	2	2	2
	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	0

.
.
.
.

b. En théorie des communications : boucles à verrouillage de phase (Van Trees [V1]).

Soit le modèle :



L'équation différentielle décrivant ce système s'écrit :

$$\frac{dE(t)}{dt} + K \sin E(t) = \dot{\theta}_1(t) - KN(t). \qquad (16)$$

Elle traduit le comportement du signal d'erreur. Dans la suite nous considérerons le cas le plus simple : $\dot{\theta}_1(t)=0$. $N(t)$ est un bruit blanc gaussien de variance $\frac{N_0}{2A^2}$. Une première approximation pour la résolution de (16) consiste à approcher :

$$\sin E(t) \simeq E(t) - \frac{E^3(t)}{3\,!}$$

La série génératrice associée est solution de :

$$G + K\,x_0\,G - \frac{K}{6}\,x_0\,G \sqcup G \sqcup G = x_1$$

On obtient :

$$G_0 = (1 + K\,x_0)^{-1}\,x_1$$

ou :

$$\begin{matrix} 1 & Y \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

<u>*Pour G_1*</u> :

$$\begin{matrix} 6 & X & Y & Y & Y \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

<u>*Pour G_2*</u> :

$$\begin{matrix} 360 & X & X & Y & Y & Y & Y & Y \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 144 & X & Y & X & Y & Y & Y & Y \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 36 & X & Y & Y & X & Y & Y & Y \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Pour G_3 :

3456	X	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	
	1	3	2	4	3	2	4	3	2	1	0
364	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	
	1	3	2	4	3	2	1	3	2	1	0
216	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	
	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	0
8640	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	
	1	3	5	4	3	2	4	3	2	1	0
2160	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	
	1	3	5	4	3	2	1	3	2	1	0
21600	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	5	4	3	5	4	3	2	1	0
3640	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	2	4	3	5	4	3	2	1	0
364	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	
	1	3	2	1	3	2	4	3	2	1	0
43200	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	5	4	6	5	4	3	2	1	0
17230	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	2	4	6	5	4	3	2	1	0
2160	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	2	1	3	5	4	3	2	1	0
75600	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	
	1	3	5	7	6	5	4	3	2	1	0

Pour G_4 :

516400	X	Y	X	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	5	4	3	5	4	3	2	1	0		
1295000	X	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	3	5	4	3	5	4	3	2	1	0		
2592000	X	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	6	5	4	3	5	4	3	2	1	0		
5184000	X	X	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	6	5	4	6	5	4	3	2	1	0		
207360	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	2	4	3	5	4	3	2	4	3	2	1	0		
518400	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	3	5	4	3	2	4	3	2	1	0		
1036800	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	6	5	4	3	2	4	3	2	1	0		
82944	X	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	2	1	0		
207360	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	3	2	4	3	2	4	3	2	1	0		
20736	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y			
	1	3	2	1	3	2	4	3	2	4	3	2	1	0		
51840	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y			
	1	3	2	4	3	5	4	3	2	1	3	2	1	0		
129600	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	3	5	4	3	2	1	3	2	1	0		
259200	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y			
	1	3	5	4	6	5	4	3	2	1	3	2	1	0		

20736	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	2	4	3	2	1	3	2	1	0	
51840	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	3	2	4	3	2	1	3	2	1	0	
5184	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	2	4	3	2	1	3	2	1	0	
5184	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	2	1	3	2	1	3	2	1	0	
12960	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	3	2	1	3	2	1	3	2	1	0	
1296	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	0	
1036800	X	Y	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	6	5	4	3	5	4	3	2	1	0	
4536000	X	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	4	3	5	4	3	2	1	0	
9072000	X	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	4	6	5	4	3	2	1	0	
414720	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	6	5	4	3	2	4	3	2	1	0	
1814400	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	4	3	2	4	3	2	1	0	
51840	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	5	4	3	2	4	3	2	1	0	
103680	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	6	5	4	3	2	1	3	2	1	0	
453600	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	4	3	2	1	3	2	1	0	
12960	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	5	4	3	2	1	3	2	1	0	
2073600	X	Y	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	6	5	4	6	5	4	3	2	1	0	
15876000	X	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	7	6	5	4	3	2	1	0	
129600	X	Y	Y	X	X	Y	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	2	3	5	4	3	5	4	3	2	1	0	
1036800	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	5	4	6	5	4	3	2	1	0	
2592000	X	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	3	5	4	6	5	4	3	2	1	0	
9072000	X	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	6	5	7	6	5	4	3	2	1	0	
207360	X	Y	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	2	4	3	5	4	3	2	1	0	
518400	X	X	Y	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	3	2	4	3	5	4	3	2	1	0	
51840	X	Y	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	2	4	3	3	4	3	2	1	0	
20736	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	3	2	1	3	2	4	3	2	1	0	
51840	X	X	Y	Y	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	4	3	2	1	3	2	4	3	2	1	0	
5184	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y	X	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	1	3	2	1	3	2	4	3	2	1	0	
3628800	X	Y	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	2	4	6	5	7	6	5	4	3	2	1	0	
25401600	X	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y		
	1	3	5	7	6	5	7	6	5	4	3	2	1	0	

259200	X	Y	Y	X	X	Y	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	1	3	5	4	6	5	4	3	2	1	0
1814400	X	Y	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	4	3	5	7	6	5	4	3	2	1	0
4536000	X	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	5	4	3	5	7	6	5	4	3	2	1	0
14515200	X	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	5	4	6	8	7	6	5	4	3	2	1	0
414720	X	Y	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	4	3	2	4	6	5	4	3	2	1	0
1036800	X	X	Y	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	5	4	3	2	4	6	5	4	3	2	1	0
103680	X	Y	Y	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	1	3	2	4	6	5	4	3	2	1	0
51840	X	Y	X	Y	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	4	3	2	1	3	5	4	3	2	1	0
129600	X	X	Y	Y	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	5	4	3	2	1	3	5	4	3	2	1	0
12960	X	Y	Y	X	Y	Y	X	X	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	1	3	2	1	3	5	4	3	2	1	0
5806080	X	Y	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	4	6	8	7	6	5	4	3	2	1	0
38102400	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	3	7	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
453600	X	Y	Y	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	1	3	2	1	3	5	7	6	5	4	3	2	1	0

5. EXPRESSION DES TERMES DU DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DES MOMENTS DE LA SOLUTION.

a. Cas non stationnaire.

En utilisant la proposition ci-dessus, on obtient une représentation formelle du terme d'ordre k de :

$$< q^n(t) > = < q_0^n(t) > + n < q_0^{n-1}(t)\ q_1(t) > + \ldots$$

par :

$$H_k = \sum_{\substack{i_{k-1} \leq \cdots \leq i_0 \leq n \\ i_{k-1}+i_{k-2}+\cdots+i_0=k}} \binom{i_0}{n}\binom{i_1}{i_0}\cdots\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} G_0^{\Psi(n-i_0)} \Psi G_1^{\Psi(i_0-i_1)} \cdot \Psi G_{k-1}^{\Psi(i_{k-2}-i_{k-1})} \Psi G_k^{\Psi i_{k-1}}$$

un terme s'écrit :

$$BC < (1-(\sum_{i=1}^{p} \delta_0^i a_i)x_0)^{-1} x_{i_1} (1-(\sum_{i=1}^{p} \delta_1^i a_i)x_0)^{-1} \ldots (1-(\sum_{i=1}^{p} \delta_{k-1}^i a_i)x_0)^{-1} x_{i_k} (1-(\sum_{i=1}^{p} \delta_k^i a_i)x_0)^{-1} >$$

(17)

où B, C, δ_l^i, x_{i_j} sont définis comme plus haut.

Appliquer le lemme du chapitre précédent revient ici :

1) à annuler les expressions pour lesquelles :

$$|x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}|_{x_1}^{(1)} \neq 0 \quad \text{et} \quad |x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}|_{x_1x_1} = 0$$

2) si $|x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}|_{x_1x_1} = \alpha$, $\alpha > 0$

- *à supprimer le pôle compris entre chaque paire* x_1x_1,
- *à remplacer* x_1x_1 *par* x_0,
- *et à multiplier le coefficient BC par* $(\frac{\sigma^2}{2})^{\alpha}$.

L'expression (17) est ainsi une fraction rationnelle en x_0 *:*

$$R(x_0) = BC\, x_0^{m-} \prod_{j=0}^{m} \left(1-\left(\sum_{k=1}^{p} \mu_j^k a_k\right)x_0\right)^{-1}$$

Nous la noterons :

$$\begin{array}{ccccc} C & X & X & \ldots\ldots\ldots & X \\ & \mu_0^1 & \mu_1^1 & \ldots\mu_{m-1}^1 & \mu_m^1 \\ & \mu_0^2 & \mu_1^2 & \ldots\mu_{m-1}^2 & \mu_m^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mu_0^p & \mu_1^p & \ldots\mu_{m-1}^p & \mu_m^p \end{array}$$

La proposition suivante permet de traduire l'expression (17) en polynôme exponentiel après l'avoir décomposée en éléments simples.

---

(1) w et w' $\varepsilon\{x_0, x_1\}^*$, *on note* $|w|_{w'}$, *le nombre d'occurrences de w' dans w.*

<u>Proposition 8</u> : *A la fraction rationnelle*

$$R_p^a(x_0) = (1-ax_0)^{-p}$$

est associé le polynôme exponentiel :

$$f_p^a(t) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\binom{j}{p-1} a_j t^j}{j!}\right) e^{at}$$

<u>Preuve</u> : *Montrons d'abord le résultat simple suivant :*

$$(1-ax_0)^{-p} = (1+ax_0)^{p-1} \sqcup (1-ax_0)^{-1}, \qquad p \geq 1.$$

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 3 pour conclure.

$$(1+ax_0)^{p-1} \sqcup (1-ax_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{k}{p-1} a^k x_0^k \sqcup (1-a\, x_0)^{-1}$$

mais d'après la proposition précédente,

$$x_0^k \sqcup (1-ax_0)^{-1} = x_0^k (1-a\, x_0)^{-(k+1)}$$

d'où $(1+ax_0)^{p-1} \sqcup (1-ax_0)^{-1} = (1-ax_0)^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{k}{p-1} a^k x_0^k (1-ax_0)^{-k}$

$$= (1-ax_0)^{-1} (1+ax_0(1-ax_0)^{-1})^{p-1}$$

$$= (1-ax_0)^{-p} \qquad \text{cqfd.}$$

b. Cas stationnaire.

D'après la proposition ci-dessus, la limite du polynôme

exponentiel associé à $R(x_0)$, quand t tend vers l'infini est :

$$\begin{cases} C \prod_{j=0}^{m-1} \left(-\sum_{k=1}^{p} \mu_j^k a_k\right)^{-1} \text{ si } \mu_m^1=\mu_m^2=\ldots=\mu_m^p=0 & (B=1,\ Cf.\ §2) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il sera représenté par

$$\begin{array}{cccc} C & \mu_0^1 & \mu_1^1 \cdots\cdots & \mu_{m-1}^1 \\ & \mu_0^2 & \mu_1^2 \cdots\cdots & \mu_{m-1}^2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mu_0^p & \mu_1^p \cdots\cdots & \mu_{m-1}^p \end{array} \qquad (18)$$

c. Applications

<u>Exemple 3a</u> :

Premiers termes du développement perturbatif de $\langle q(t)\rangle$.

$$\underline{\langle G_0\rangle} \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

où $\langle q_0(t)\rangle = A_1\, e^{a_1 t} + A_2\, e^{a_2 t}$

pour l'exemple du chapitre II,

$$\langle q_0(t)\rangle = 2\, e^{0,5t}\,(1,5\cos(0,866t) + 0,866\sin(0,866t))$$

$\underline{\langle G_1 \rangle}$

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & 1 & X & X & & & \\
 & & 1 & 0 & 3 & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & & \\
 & 3 & X & X & & & \\
 & & 1 & 0 & 2 & & \\
 & & 0 & 1 & 1 & & \\
 & 3 & X & X & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & & \\
 & 1 & X & X & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 1 & 3 & & \\
12\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) & & X & X & X & X & X \\
 & & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
12 & & X & X & X & X & X \\
 & & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle G_1 \rangle = {} & A_1^3(1-a_1x_0)^{-1}(1-a_2x_0)^{-1}(1-3a_1x_0)^{-1}x_0^2 + 3A_1^2(1-a_1x_0)^{-1}(1-a_2x_0)^{-1}(1-(2a_1+a_2)x_0)^{-1}x_0^2 \\
& + 3A_1A_2^2(1-a_1x_0)^{-1}(1-a_2x_0)^{-1}(1-(a_1+2a_2)x_0)^{-1}x_0^2 + A_2^3(1-a_1x_0)^{-1}(1-a_2x_0)^{-1}(1-3a_2x_0)^{-1}x_0^2 \\
& + 12A_1\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(1-a_1x_0)^{-2}(1-a_2x_0)^{-1}(1-3a_1x_0)^{-1}(1-(2a_1+a_2)x_0)^{-1}(1-(a_1+2a_2)x_0)^{-1}\, x_0^5 \\
& + 12A_2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(1-a_1x_0)^{-1}(1-a_2x_0)^{-2}(1-3a_2x_0)^{-1}(1-(2a_1+a_2)x_0)^{-1}(1-(a_1+2a_2)x_0)^{-1}x_0^5
\end{aligned}
$$

Pour l'exemple:

$$
\begin{aligned}
\langle q_1(t) \rangle = {} & -2e^{-1,5t}\,[\,0,06 \cos(2,598t) + 0,67 \sin(2,598t)\,] \\
& -2e^{-1,5t}\,[\,2,63 \cos(0,866t) + 0,65 \sin(0,866t)\,] \\
& +2e^{-0,5t}\,[\,2,68 \cos(0,866t) + 3,87 \sin(0,866t)\,] \\
& -2e^{-0,5t}\,[\,3,75t \cos(0,866t) - 6,5t \sin(0,866t)\,]
\end{aligned}
$$

La figure 2 représente les deux approximations :

$$\langle q(t) \rangle = \langle q_0(t) \rangle$$

$$\langle q(t) \rangle = \langle q_0(t) \rangle + 0,2 \langle q_1(t) \rangle$$

Dans le cas stationnaire,

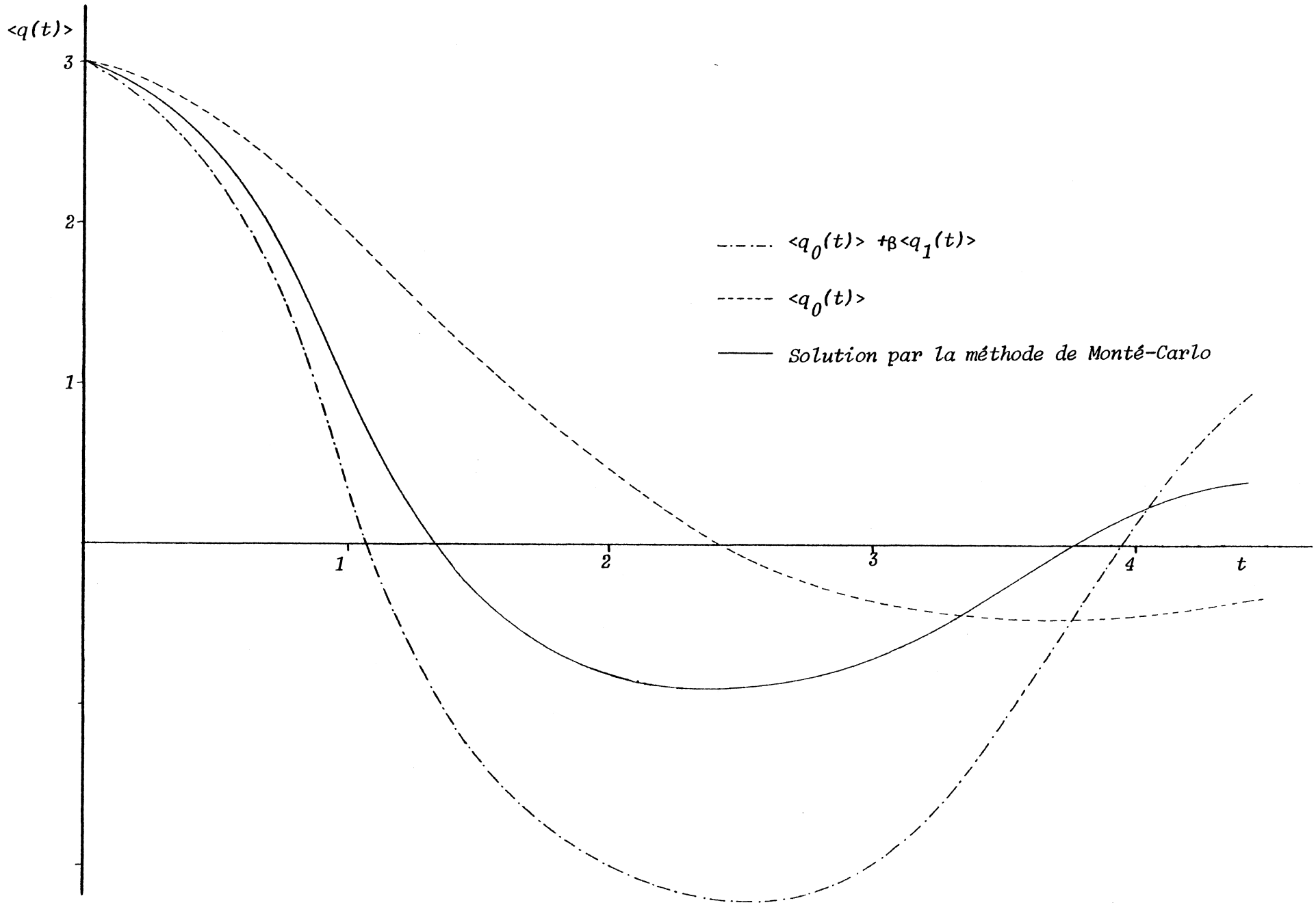


Figure 2: Développement perturbatif du moment du 1er ordre de la solution de l'équation $\ddot{q} + \dot{q} + q + 0.2q^3 = \dot{b}(t)$ *avec* $\sigma^2=5, q(0)=3, \dot{q}(0)=0.$

$$< q > = \lim_{t \to \infty} < q(t) > \; = 0$$

car tous les mots de G_k *se terminant par* x_1 *ont un nombre impair de* x_1.

. *Premiers termes du développement perturbatif de* $<q^2(t)>$.

$<G_0 \sqcup\!\sqcup G_0>$: (19)

$$4\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \underset{0}{X} \quad \underset{1}{X} \quad \underset{2}{X} \qquad 1$$

$2<G_0 \sqcup\!\sqcup G_1>$:

$$288\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad 2$$

$$576 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad 3$$

$$192 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad 4$$

$$96 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad 5$$

$$576 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad 6$$

$$1152 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix} \qquad 7$$

$2<G_0 \sqcup\!\sqcup G_2> + <G_1 \sqcup\!\sqcup G_1>$:

$$32944\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$165888 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

$$497664 \quad \begin{matrix} X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

248832 $(\frac{\sigma^2}{2})^3$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0
	2	0	3	1	1	2	2	0	3	3	1	1	0
82944	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0
	2	0	3	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2
248832	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0
	2	3	1	4	2	2	0	3	3	1	1	2	2
829440	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0
	1	2	0	3	1	4	2	2	0	3	1	1	2
414720	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0
	1	2	0	3	1	1	2	2	0	3	1	1	2
138240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	0
	1	2	0	3	1	1	2	2	0	0	1	1	2
124416	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0
	2	3	1	1	2	2	0	3	3	1	1	2	2
138240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0
	1	2	0	0	1	1	2	2	0	3	1	1	2
46080	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0
	1	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2
41472	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	2	3	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	2
414720	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	1	2	3	1	4	2	2	0	3	1	1	2	2
829440	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0
	0	1	2	0	3	1	4	2	0	3	1	1	2
414720	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1	1	0
	0	1	2	0	3	1	1	2	0	3	1	1	2
138240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0
	0	1	2	0	3	1	1	2	0	0	1	1	2
207360	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0
	1	2	3	1	1	2	2	0	3	1	1	2	2
138240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	4	3	3	2	2	1	1	1	0
	0	1	2	0	0	1	1	2	0	3	1	1	2
46080	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0
	0	1	2	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2
69120	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	3	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2
69120	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0
	1	2	0	1	1	2	2	0	3	1	1	2	2
23040	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2

20736	$(\frac{\sigma_2^3}{2})$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0
		1	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2	2	2
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	8
		4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0
		0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2	2
55296		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	9
		4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0
		0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2	2
55296		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10
		4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0
		0	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2
9216		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	11
		4	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0
		0	0	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2
13824		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	12
		3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
		1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2	2	2
9216		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	13
		4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0
		0	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2
92944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	14
		3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
		1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	2	2
148832		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	15
		4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
		0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	2
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	16
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0
		0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2
41472		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
		3	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	2
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0
		0	3	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0
		2	0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	2
27648		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0
		2	0	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2
41472		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0
		2	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	2	2
13824		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	2	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
		2	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	2
138240		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0
		3	1	4	2	0	5	3	3	1	1	4	2	0
176480		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0
		0	3	1	4	2	0	5	3	3	1	1	4	2
829440		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0
		2	0	3	1	4	2	0	5	3	3	1	1	2
165888		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0
		2	0	3	1	4	2	2	0	0	3	1	1	2
2073600		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		6	5	4	3	3	2	2	1	1	0	0	0	0
		0	1	2	3	1	4	0	3	1	6	4	2	2

414720 $(\frac{\sigma^2}{2})^3$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0
	2	3	1	4	2	0	5	3	3	1	1	2	2
1382400	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0
	1	2	0	3	1	4	2	0	5	3	1	1	2
276480	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	0
	1	2	0	3	1	4	2	2	0	0	1	1	2
82944	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	2	3	1	4	2	2	0	0	3	1	1	2	2
276480	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
	3	1	4	2	0	5	3	3	1	4	4	2	2
552960	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
	0	3	1	4	2	0	5	3	3	1	4	4	2
1658880	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0
	2	0	3	1	4	2	0	5	3	3	1	4	2
995328	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	2	0	3	1	4	2	2	0	3	3	1	4	2
829440	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
	2	3	1	4	2	0	5	3	3	1	4	2	2
2764800	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0
	1	2	0	3	1	4	2	0	5	3	1	4	2
1658880	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	0	3	1	4	2	2	0	3	1	4	2
497664	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	2	3	1	4	2	2	0	3	3	1	4	2	2
829440	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	0	3	1	1	2	2	0	3	1	4	2
691200	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0
	1	2	3	1	4	2	0	5	3	1	1	2	2
1382400	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0
	0	1	2	0	3	1	4	0	5	3	1	1	2
276480	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0
	0	1	2	0	3	1	4	2	0	0	1	1	2
139240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	3	1	4	2	2	0	0	1	1	2	2
1382400	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	1	2	3	1	4	2	0	5	3	1	4	2	2
2764800	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0
	0	1	2	0	3	1	4	0	5	3	1	4	2
1658880	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0
	0	1	2	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
691200	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	6	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0
	0	1	2	3	1	4	0	5	3	1	1	2	2

829440 $(\frac{\sigma_2^3}{2})$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	5	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0	0	0
	1	2	3	1	4	2	2	0	3	1	4	2	2
829440	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	6	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1	0	0
	0	1	2	0	3	1	1	2	0	3	1	4	2
414720	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	5	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0
	1	2	3	1	1	2	2	0	3	1	4	2	2
276480	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	6	5	4	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
	0	1	2	0	0	1	1	2	0	3	1	4	2
2304	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	17
	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
27648	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	18
	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2	2
32944	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	19
	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2
13824	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	3	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2
27648	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	0	3	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2
27648	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	3	1	4	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2
55296	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	0	3	1	4	2	2	0	0	3	1	1	4	2
165888	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
	3	1	4	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2
331776	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	0	3	1	4	2	2	0	3	3	1	4	4	2
497664	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0
	2	0	3	1	1	2	2	0	3	3	1	4	2
248832	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0
	2	3	1	1	2	2	0	3	3	1	4	2	2
276480	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	5	4	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0
	1	2	0	0	1	1	2	2	0	3	1	4	2
138240	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0
	1	2	0	1	1	2	2	0	3	1	4	2	2
55296	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	20
	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0
	0	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2
82944	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	21
	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2	2
165888	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	22
	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
	0	1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2
1332400	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	6	5	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0	0
	0	1	2	3	1	4	0	5	3	1	4	2	2

165888	$(\frac{\sigma^2}{2})^3$	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0
		0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	
		3	1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2	
165888		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	
		0	3	1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	
165888		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	
		2	0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	4	2	
82944		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	
		2	0	1	1	2	2	0	3	3	1	4	2	2	
414720		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	
		3	1	4	2	0	5	3	1	6	4	4	2	2	
829440		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	
		0	3	1	4	2	0	5	3	1	6	4	4	2	
2488320		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	
		2	0	3	1	4	2	0	5	3	1	6	4	2	
1244160		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	
		2	3	1	4	2	0	5	3	1	6	4	2	2	
4147200		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0	
		1	2	0	3	1	4	2	0	5	1	6	4	2	
2073600		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0	0	
		1	2	3	1	4	2	0	5	1	6	4	2	2	
4147200		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0	0	
		0	1	2	0	3	1	4	0	5	1	6	4	2	
69120		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0	
		0	1	2	0	1	1	2	0	3	1	1	2	2	
207360		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	3	2	2	1	1	1	0	0	
		0	1	2	3	1	1	2	0	3	1	1	2	2	
69120		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0	0	
		0	1	2	3	1	1	2	0	0	1	1	2	2	
23040		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	
		0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	1	2	2	
414720		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	3	2	2	1	1	0	0	0	
		0	1	2	3	1	1	2	0	3	1	4	2	2	
138240		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0	0	
		0	1	2	0	1	1	2	0	3	1	4	2	2	
829440		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	0	
		0	1	2	3	1	4	2	0	3	1	4	2	2	
414720		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	
		0	1	2	3	1	4	2	0	3	1	1	2	2	
138240		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
		6	5	4	3	3	2	2	2	2	1	1	0	0	
		0	1	2	3	1	4	2	0	0	1	1	2	2	

23

La figure 3 représente d'une part le moment d'ordre deux de la solution linéaire associée non stationnaire :

$$<q_0^2(t)> = 2,5 + [2(0,42 \cos(1,732t) - 0,72 \sin(1,732t)) - 3,33]e^{-t}$$

et d'autre part les deux premiers termes du développement perturbatif de la solution non stationnaire :

$$<q_0^2(t)> + 2\beta <q_0(t)q_1(t)> =$$

$$<q_0^2(t)> - 0,2\,[3 - (7,28 + 2,67t)e^{-t} + 3,16e^{-2t}$$
$$+ 2e^{-2t}(1,17\cos(1,732t) + 1,68\sin(1,732t))$$
$$+ 2e^{-2t}(0,026\cos(3,464t) + 0,091\sin(3,46t))$$
$$+ 2e^{-t}[(-0,5 + 1,33t)\cos(1,732t) + (-1,2 + 1,16t)\sin(1,732t)]].$$

Les trois premiers termes du développement perturbatif de la solution stationnaire sont donnés par

$$<q^2> = \frac{\sigma^2}{2} - 3\beta\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 24,17\,\beta^2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3$$

soit :

$$\frac{\beta <q^2>}{2} = 0,5\,\frac{\beta D}{2} - 1,5\,\frac{\beta^2 D^2}{4} + 12,08\,\frac{\beta^3 D^3}{8} \qquad \left(D = \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

La figure 4 représente les deux approximations :

$$0,5x - 1,5\,x^2$$

et $$0,5x - 1,5\,x^2 + 12,08\,x^3 \qquad \left(x = \frac{\beta D}{2}\right)$$

Elles sont comparées à la solution exacte de Fokker-Planck.

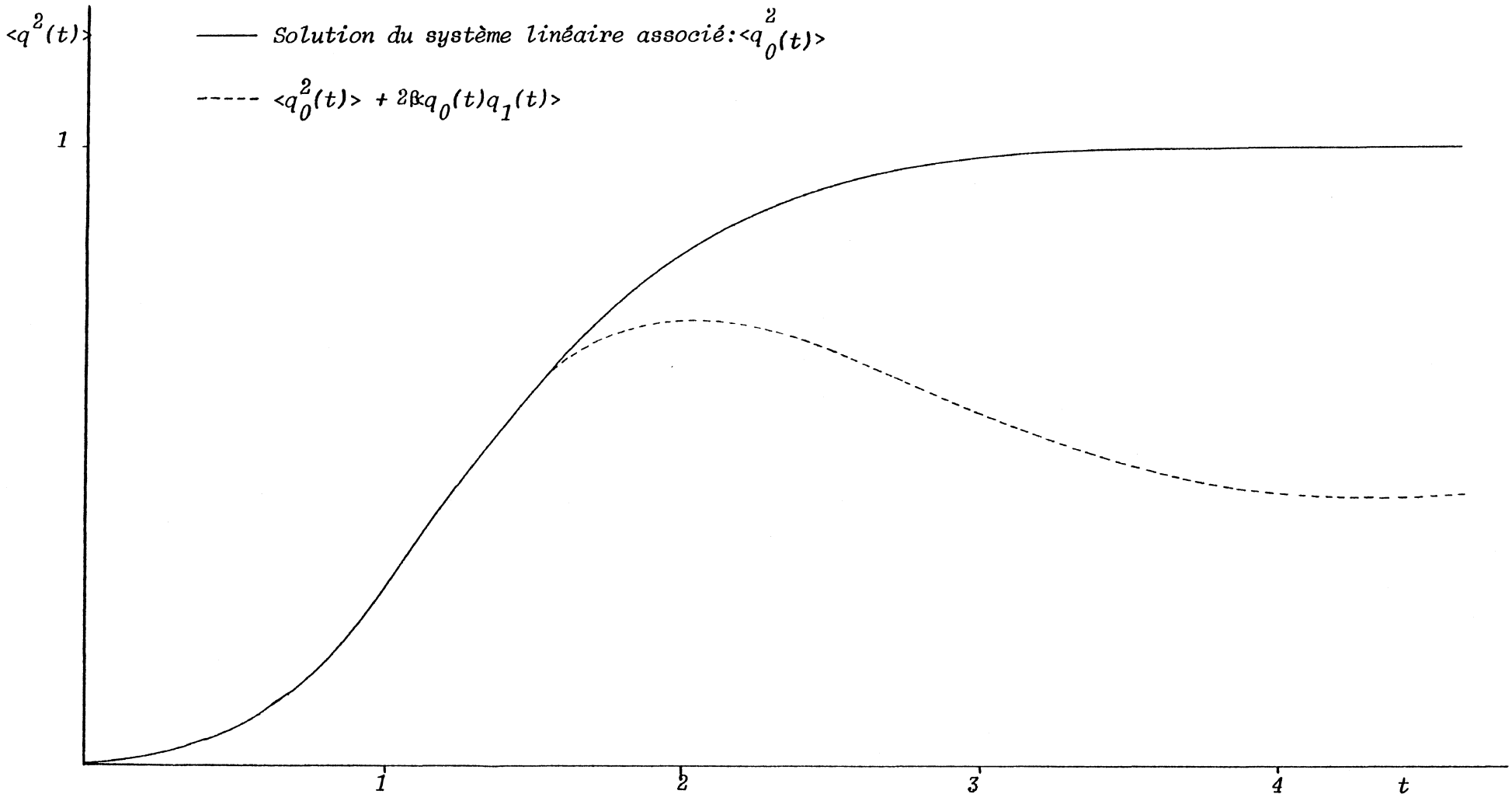


Figure 3: Développement perturbatif du moment du $2^{\text{éme}}$ ordre de la solution de l'équation $\ddot{q} + \dot{q} + q + 0.2q^3 = \dot{b}(t)$ avec $\sigma^2 = 2$.

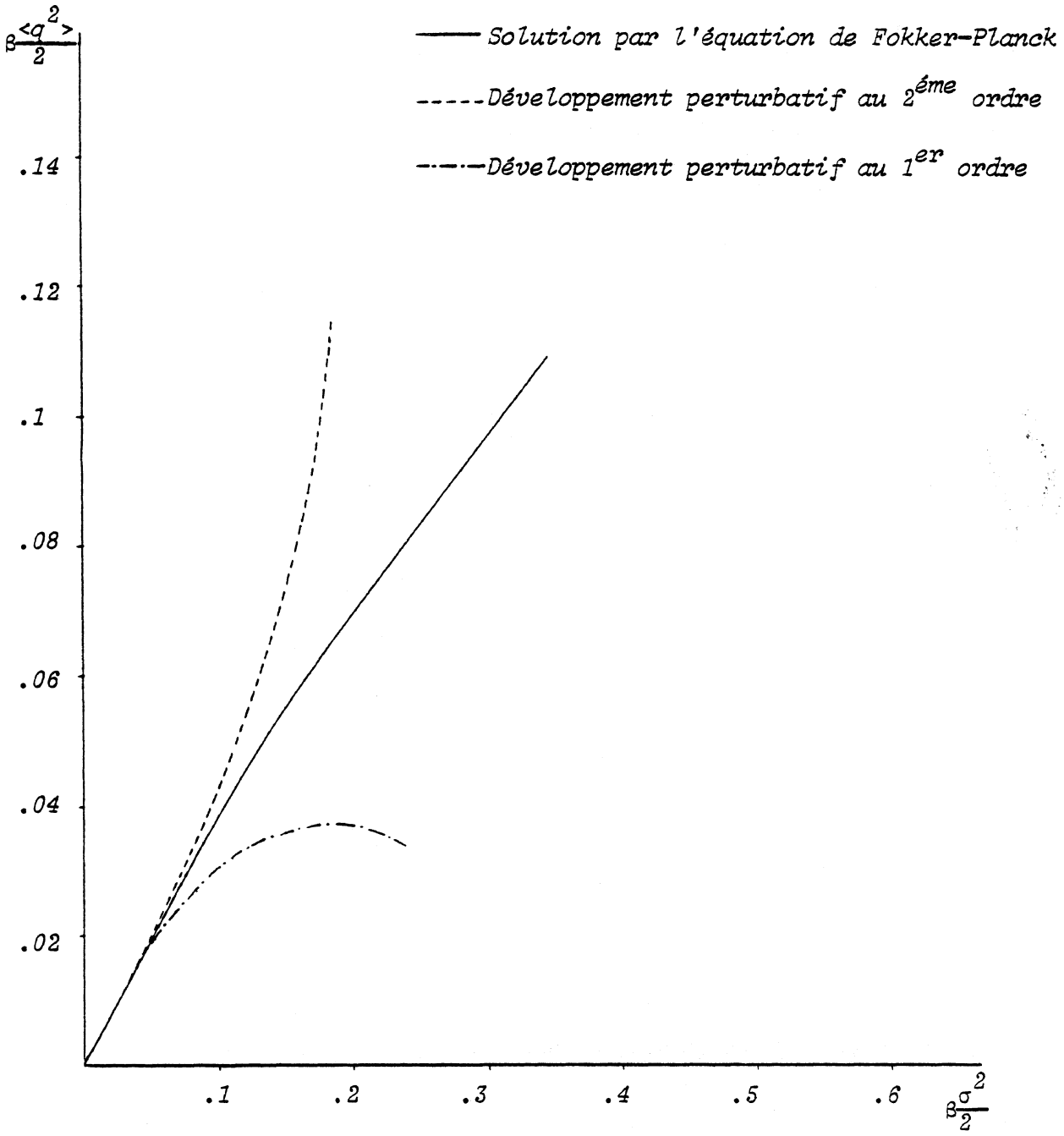


Figure 4: Moment stationnaire du 2éme ordre de la solution de l'équation $\ddot{q} + \dot{q} + q + \beta q^3 = \dot{b}(t)$, *variance*$=\sigma^2$.

Exemple 3b :

Le calcul a donné

$$\frac{\langle G_0 \sqcup G_0 \rangle}{2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} : \qquad X_2 \; X_0 \tag{20}$$

$$\frac{2\langle G_0 \sqcup G_1 \rangle}{48\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} : \qquad X_2 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$\frac{2\langle G_0 \sqcup G_2 \rangle + \langle G_1 \sqcup G_1 \rangle}{1152\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3} : \qquad X_2 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$5760\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 \qquad X_2 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$\frac{2(\langle G_0 \sqcup G_3 \rangle + \langle G_1 \sqcup G_2 \rangle)}{27648\left(\frac{\sigma}{2}\right)^4} : \qquad X_2 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$138240\left(\frac{\sigma}{2}\right)^4 \qquad X_2 \; X_4 \; X_6 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$691200\left(\frac{\sigma}{2}\right)^4 \qquad X_2 \; X_4 \; X_6 \; X_4 \; X_6 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$138240\left(\frac{\sigma}{2}\right)^4 \qquad X_2 \; X_4 \; X_2 \; X_4 \; X_6 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$1935360\left(\frac{\sigma}{2}\right)^4 \qquad X_2 \; X_4 \; X_6 \; X_8 \; X_6 \; X_4 \; X_2 \; X$$

$$\frac{\langle 2(G_0 \sqcup G_4 + G_1 \sqcup G_3) + G_2 \sqcup G_2\rangle}{663552\ (\frac{\sigma^2}{2})^5}$$

663552	$(\frac{\sigma^2}{2})^5$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	2	4	2	4	2	4	2
3317760	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	4	2	4	2	4	2
16588800	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	4	6	4	2	4	2
82944000	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	4	6	4	6	4	2
3317760	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	2	4	6	4	2	4	2
16588800	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	2	4	6	4	6	4	2
3317760	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	2	4	2	4	6	4	2
46448640	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	8	6	4	2	4	2
232243200	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	8	6	4	6	4	2
16588800	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	4	2	4	6	4	2
650280960	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	8	6	8	6	4	2
232243200	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	4	6	8	6	4	2
46448640	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	2	4	6	8	6	4	2
1393459200	"	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		2	4	6	8	10	8	6	4	2

Les deux premiers termes du développement perturbatif (fig. 5) du moment du second ordre sont donnés par

$$\langle q_0^2(t) + \frac{K}{3!} q_0(t) q_1(t)\rangle =$$

$$0,6(1-e^{-2,4t}) + 2(-0,3t\, e^{-2,4t} - \frac{1}{16} e^{-4,8t} + \frac{1}{16})$$

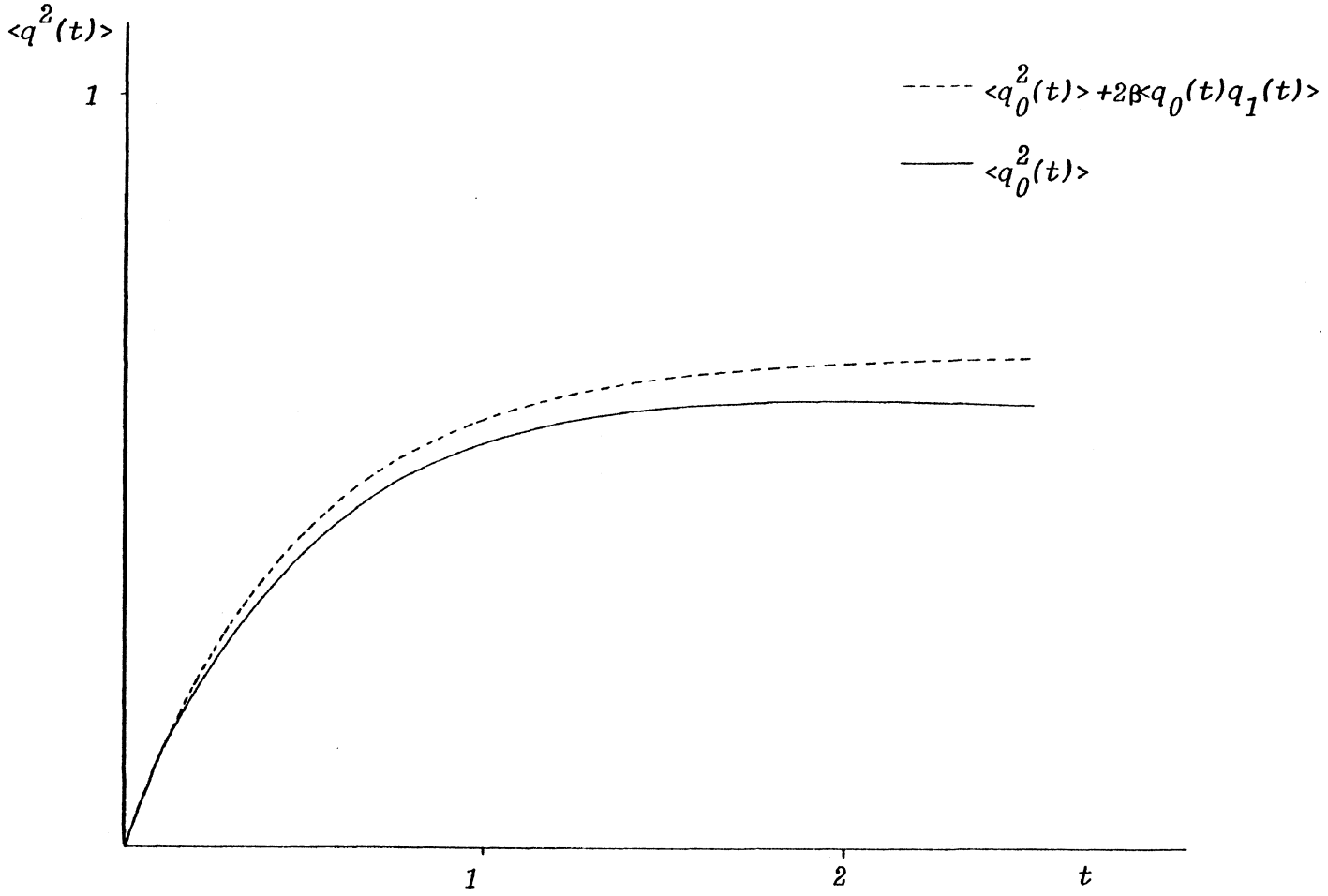


Figure 5: Développement perturbatif du moment du 2^{éme} ordre de la solution de l'équation $\dot{q} + K(q - \frac{q^3}{3!}) = \dot{b}(t)$, *variance*$=\frac{K^2 N_0}{2A^2}$.

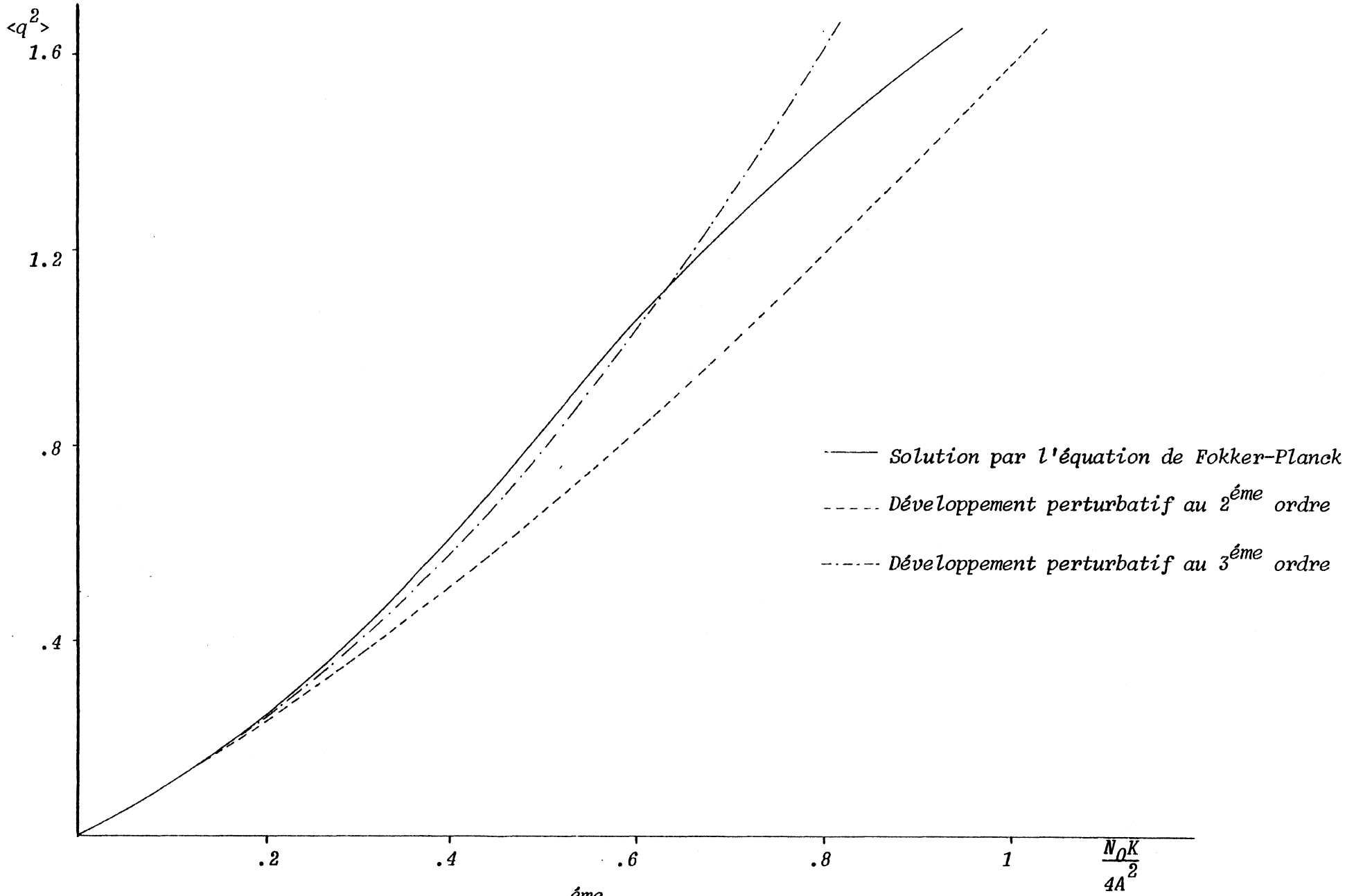


Figure 6: Moment stationnaire du 2éme ordre de la solution de l'équation $\dot{q} + K(q - \frac{q^3}{3!}) = \dot{b}(t)$, *variance* $= \frac{K^2 N_0}{2A^2}$.

Dans le cas stationnaire (fig. 6) on trouve à l'ordre trois

$$\langle q^2 \rangle = Z + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{2}{3}Z^3 \qquad \text{avec } Z = \frac{N_0 K}{4A^2}$$

Remarque : *Il est beaucoup plus facile de trouver les coefficients du développement par notre technique que par celle exposée dans l'article de Van Trees* [V1] . *Calculons par exemple le deuxième ordre.*

Reprenons l'équation 3b :

$$\dot{q}(t) + K \sin q(t) = u(t) \qquad \langle u(t)\, u(t-\tau)\rangle = (\sigma^2 = \frac{K^2 N_0}{2A^2})\,\delta(\tau)$$

l'auteur écrit : $q(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + \ldots$

où $n_i(t) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_i(t,\tau_1,\ldots,\tau_i)u(\tau_1)\ldots u(\tau_i)d\tau_1\ldots d\tau_i.$

en remplaçant dans :

$$\dot{q}(t) + K(q(t) - \frac{q^3(t)}{3!}) = u(t)$$

il obtient :

$$\dot{n}_1(t) + Kn_1(t) = u(t)$$
$$\dot{n}_2(t) + Kn_2(t) = 0$$
$$\dot{n}_3(t) + Kn_3(t) = \frac{K}{3!}n_1^3(t)$$
$$\vdots$$

soit :

$$n_1(t) = \int_0^\infty e^{-K\tau}u(t-\tau)d\tau$$
$$n_2(t) = 0$$
$$n_3(t) = \frac{K}{6}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-K(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3)} u(t-\tau-\tau_1)u(t-\tau-\tau_2)u(t-\tau-\tau_3)d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

d'où : $2\langle n_1(t) n_3(t)\rangle = 2\langle q_0(t) q_1(t)\rangle =$

$$K^5 \frac{N_0}{2A^2} \int_0^\infty e^{-2K\tau_2}\, d\tau_2 \int_0^\infty e^{-K\tau_4}\, d\tau_4 \int_0^\infty e^{-K(\tau_4-\tau)}\, e^{-K\tau} d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{KN_0}{4A^2}\right)^2 = \frac{1}{2} Z^2$$

Avec les séries formelles on a :

$$2\, G_0 \sqcup G_1 = 12\, {}_2Y_1\, {}_3X_2\, {}_2Y_1\, {}_1Y_0$$

$$+\ 48\, {}_2X_4\, {}_3Y_2\, {}_2Y_1\, {}_1Y_0$$

D'où $2\langle G_0 \sqcup G_1\rangle = 48\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 {}_2X_4\, {}_2X_2\, {}_2X = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \dfrac{X^3}{(1+2KX)^2(1+4KX)}$

quand t tend vers l'infini on obtient donc directement :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{K\, N_0}{4\, A^2}\right)^2 .$$

- Chapitre IV -

RENORMALISATION

1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le développement perturbatif de la solution de :

$$Lq(t) + \beta P(q(t)) = \dot{b}(t) \qquad (21)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, P un polynôme et $\dot{b}(t)$ un bruit blanc gaussien de variance D, ne donne pas des résultats convenables dès que les coefficients dépassent un certain rapport (dans l'exemple III.3a, $\frac{\beta D}{2}$ doit rester inférieur à 0,06 et dans l'exemple III.3b , $\beta\frac{N_0}{A^2}$ ne doit pas dépasser 0,1). Ce problème se rencontre aussi dans le cas déterministe. Considérons l'équation, comme Nayfeh[N1]p.24

$$\ddot{q} + q + \beta q^3 = 0 \qquad q(0) = a \text{ et } \dot{q}(0) = 0, \qquad \beta > 0 \qquad (22)$$

q est borné car (22) s'écrit en multipliant par q puis en intégrant :

$$\dot{q}^2 + q^2 + \frac{\beta q^4}{2} = (1 + \frac{\beta a^2}{2})\, a^2$$

Soit le développement

$$q(t) = \sum_{m \geq 0} \beta^m q_m(t),$$

en identifiant on obtient,

$$q(t) = a \cos t + \beta a^3 (-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t)) + 0(\beta^2)$$

Les deux premiers termes de ce développement ne peuvent pas approcher $q(t)$ car $t \sin t$ tend vers l'infini avec t. Un élément de la forme $t \sin t$ est connu sous le nom de terme séculaire. Dans ce cas simple, en tenant compte des ordres supérieurs, il est possible de resommer ce développement. Mais, dès que l'entrée est non nulle, des difficultés apparaissent ; le cas aléatoire ne fait que les amplifier, en les rendant moins évidentes et plus complexes.

Pour pallier à ce problème de nombreux auteurs (Morton et Corrsin [M4], Langouche Roehaerts et Tirapegui [L2]) emploient des diagrammes à la Feynman [F1], ceci pour les raisons suivantes :

1- Il est plus facile de manipuler les diagrammes correspondant aux termes de haut degré que les termes eux-mêmes.

2- Ces diagrammes permettent d'écrire des équations pour les propriétés statistiques.

3- On peut grouper les termes (de façon heuristique) pour former des séries resommées.

L'intérêt de cette méthode est exposée dans la suite à travers l'exemple de Morton et Corrsin.

2 EXEMPLE DE MORTON ET CORRSIN [M4]

Soit l'équation :

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + q + \beta q^3 = f(t) \tag{23}$$

où $f(t)$ est un processus gaussien. Les deux auteurs cités donnent différentes renormalisations du développement perturbatif de la densité spectrale de la solution.

a. Transformée de Fourier de la solution

$q(t)$ et $f(t)$ sont supposées périodiques, de période infinie T :

$$q(t) = \sum_{\omega} u(\omega)\, e^{i\omega t} \qquad \text{avec} \qquad u(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} q(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

et $$f(t) = \sum_{\omega} g(\omega)\, e^{i\omega t} \qquad \text{avec} \qquad g(\omega) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

En prenant la transformée de Fourier, ils obtiennent :

$$u(\omega)(1-\omega^2+i\alpha\omega) + \beta \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} u(\omega-\omega')u(\omega'-\omega'')u(\omega'')=g(\omega)$$

ou $$u(\omega)(1-\omega^2+i\alpha\omega) + \beta \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=\omega} u(\omega_1)u(\omega_2)u(\omega_3) = g(\omega). \qquad (24)$$

<u>Remarque</u> : *Ce passage appelle une justification, car on ne sait pas a priori calculer la transformée de Fourier d'un produit de façon simple. On peut en donner une par les séries formelles : en effet, la série génératrice associée à (23) est solution de l'équation (Cf. I.3)*

$$(1+\alpha x_0+x_0^2)G + \beta x_0^2 G \sqcup G \sqcup G = x_0 x_1, \qquad (25)$$

qui n'est autre que (24) à un changement de variable près $(i\omega=\frac{d}{dt}, x_0=\int_0^t)$

Soit le développement perturbatif :

$$u(\omega) = \sum_{k\geq 0} u_k(\omega) \quad \text{(l'indice } k \text{ donne l'ordre en } \beta). \qquad (26)$$

En portant (26) dans (24), on obtient :

$$u_0(\omega)=(1-\omega^2+i\alpha\omega)^{-1}g(\omega)=S(\omega)g(\omega)$$

$$u_1(\omega)=-\beta S(\omega) \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=\omega} u_0(\omega_1)u_0(\omega_2)u_0(\omega_3)$$

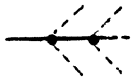
$$u_2(\omega)=-\beta\, S(\omega) \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=\omega} u_0(\omega_1)u_0(\omega_2)u_1(\omega_3)$$

$$\vdots$$

$u_k(\omega)$ *est une fonction de* β , u_0 *et* $S(\omega)$.

Avec les diagrammes symboliques suivants, il est possible d'exprimer u_k en fonction de u_0 :

- *Un segment (—) correspondra à $S(\omega)$,*
- *un point (•) à $-\beta$,*
- *une ligne pointillée (---) à u_0.*

Par exemple : $u_2 \leftrightarrow 3$ 

M.§C. établissent une correspondance biunivoque par des règles simples telles que :

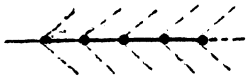
- *quatre éléments sont joints à chaque point, et au moins l'un d'eux est un segment,*

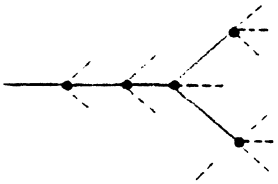
- *il y a un coefficient 3 associé à chaque sommet ayant une ou deux lignes pointillées,*

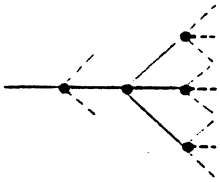
- *le conjugué d'un diagramme est son image par un miroir vertical.*

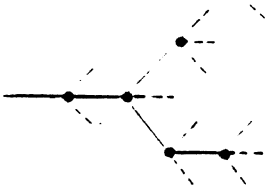
⋮

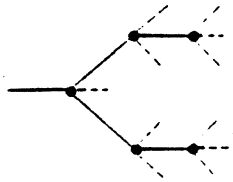
Pour dessiner u_k, $k \geq 0$, il faut prendre k segments (—) et k points (•) en les combinant de toutes les manières possibles suivant les règles précédentes, puis ajouter les (2k+1) fonctions u_0 nécessaires.

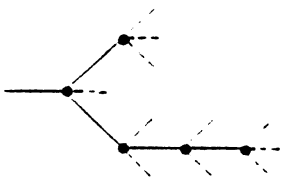
Par exemple : $u_5 \leftrightarrow 81$ 

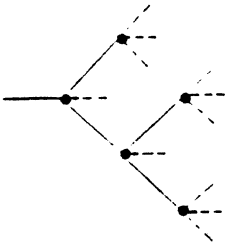
+ 27 

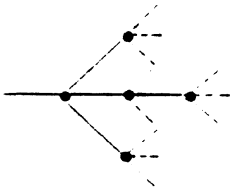
+ 3 

+ 54 

+ 27 

+ 54 

+ 18 

+ 3 

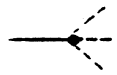
Remarque : *Grâce à l'isomorphisme explicité dans la remarque précédente, on peut appliquer des règles similaires pour exprimer* G_k, $k \geq 0$, *en fonction de* u_0, β *et* $S(x_0) = (1-a_1x_0)^{-1}x_0\ (1-a_2x_0)^{-1}x_0$ *où* a_1 *et* a_2 *sont les pôles de* $(1+\alpha x_0+x_0^2)$;

par exemple, d'après (25) :

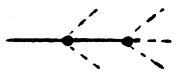
$$G_1 = -\ \beta\ S(x_0)\quad G_0 \sqcup G_0 \sqcup G_0$$

$$G_2 = -\ 3\beta\ S(x_0)\quad G_0 \sqcup G_0 \sqcup G_1$$

se représentent, comme u_1 *et* u_2, *respectivement par :*



et 3



où l'intersection de trois "branches" correspond au mélange de trois séries rationnelles.

b. Densité spectrale.

La fonction de corrélation

$$\langle q(t_1)\ q(t_2)\rangle$$

est, par stationnarité, une fonction de $t_2 - t_1$

Mais comme $q(t) = \sum_{\omega} u(\omega)\ e^{i\omega t}$, *on a aussi :*

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \sum_{\omega'}\ \sum_{\omega''}\ u(\omega')u(\omega'')\ e^{i(\omega' t_1+\omega'' t_2)}.$$

d'où

$$\langle u(\omega')u(\omega'')\rangle = U(\omega')\ \delta_{\omega',-\omega''}$$

où U est la densité spectrale.

D'autre part, l'entrée étant gaussienne, u_0 l'est aussi. Soit u_0 la densité spectrale de la sortie linéaire,

$$< u_0(\omega') \; u_0 \; (\omega'') > = U_0(\omega') \; \delta_{\omega', -\omega''} ,$$

tous les termes du développement

$$U(\omega) = <u(\omega) u^*(\omega)> = <u_0(\omega) u_0^*(\omega)> + <u_0(\omega) u_1^*(\omega)> + <u_1(\omega) \; u_0^*(\omega)>$$

$$+ <u_0(\omega) u_2^*(\omega)> + <u_1(\omega) u_1^*(\omega)> + \ldots$$

s'expriment en fonction de β, U_0 et $S(\omega)$.

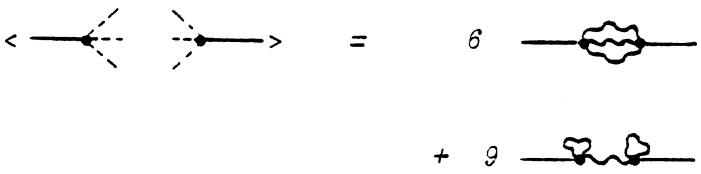
Par exemple :

$$<u_1(\omega) u_1^*(\omega)> = \beta S(\omega) < \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=\omega} u_0(\omega_1) u_0(\omega_2) u_0(\omega_3) \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=-\omega} u_0(\omega_1) u_0(\omega_2) u_0(\omega_3) > (-\beta) S(-\omega)$$

$$= 6 \; \beta S(\omega) \sum_{\omega_1+\omega_2+\omega_3=\omega} U_0(\omega_1) U_0(\omega_2) U_0(\omega_3) \beta \; S(-\omega)$$

$$+ 9 \; \beta S(\omega) \; [\sum_{\omega'} U_0(\omega')] \; U_0(\omega) \; [\sum_{\omega''} U_0(\omega'')] \beta S(-\omega)$$

A partir des diagrammes obtenus précédemment, ils obtiennent des diagrammes pour ce nouveau développement.

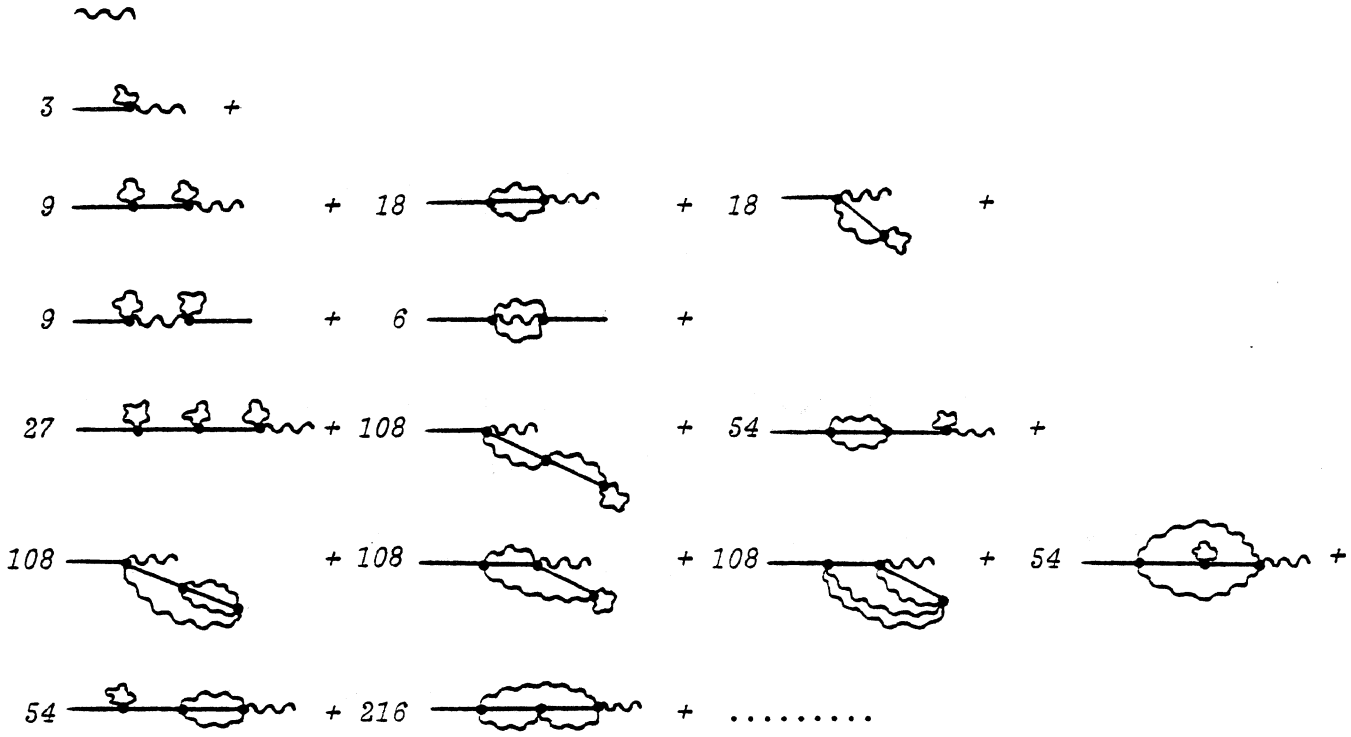
$<u_1(\omega) u_1^*(\omega)>$ $\leftrightarrow$ 

où le diagramme ~~~ représente $U_0(\omega)$.

Pour les obtenir, il suffit de combiner les u_0 d'un diagramme avec les u_0 de l'autre, de toutes les façons possibles.

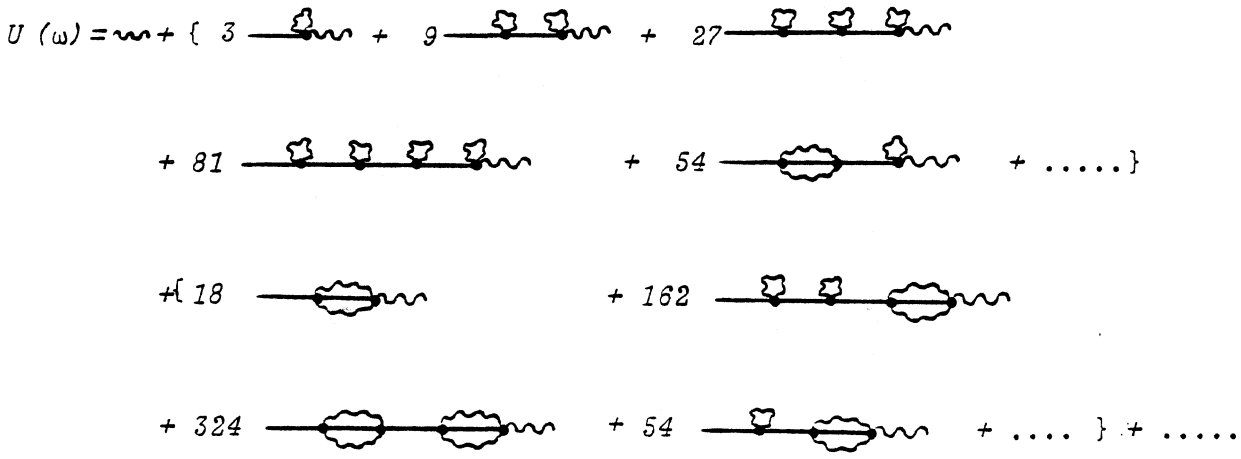
Par exemple, à l'ordre trois :

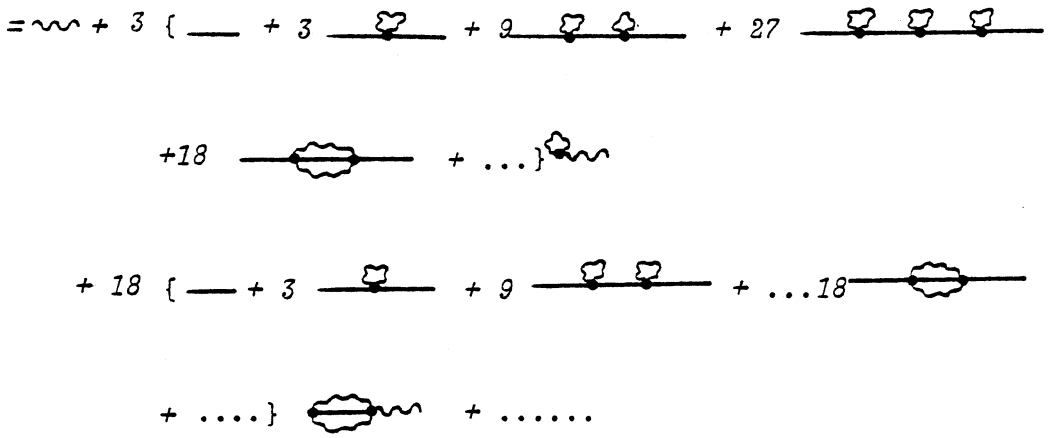
(27)



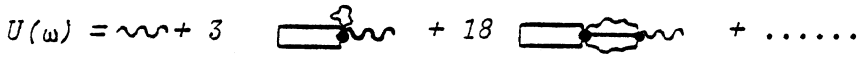
c. Construction des équations resommées.

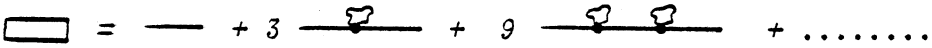
Groupons certains termes de (27) :





d'où



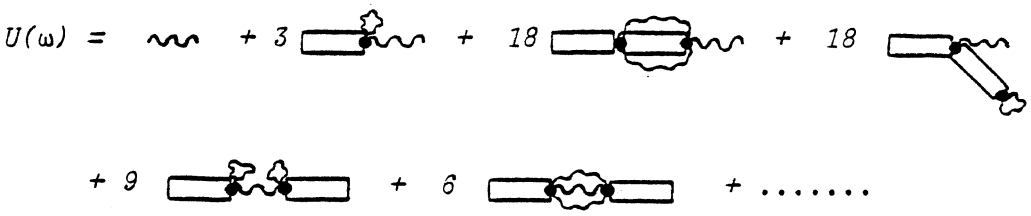
où 

Un élément appartient à si et seulement si

1- il commence et se termine par un segment,

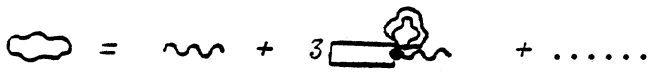
2- seulement des segments le traversent.

En regardant les ordres plus élevés, ils trouvent :



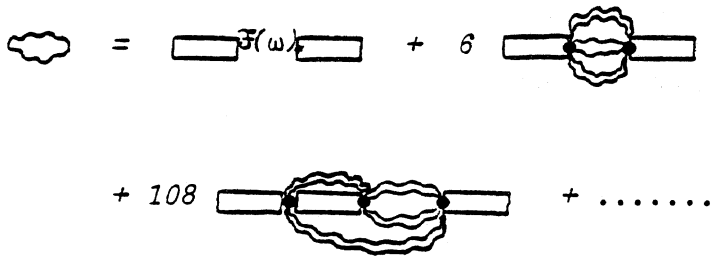
Continuons la resommation

si est le diagramme correspondant à U(ω), on peut écrire :



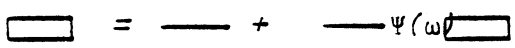
(signifie $\sum_{\omega'} U(\omega')$).

finalement ils obtiennent :

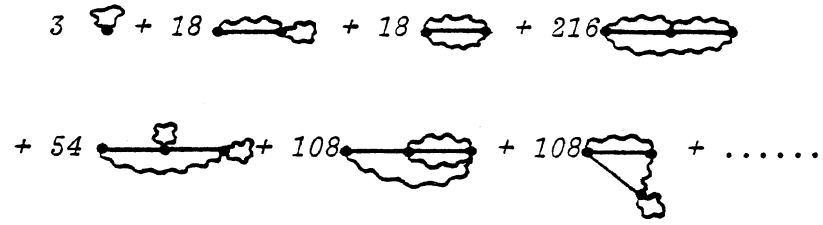


où $\mathcal{F}(\omega) = \langle g(\omega)\, g^{*}(\omega)\rangle$.

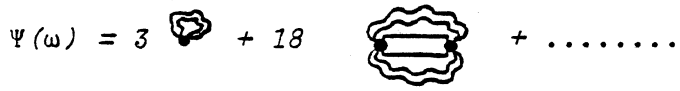
D'autre part,



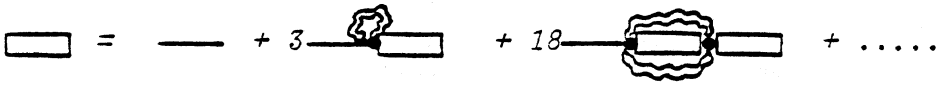
avec $\Psi(\omega) =$



de la même façon, $\Psi(\omega)$ *s'écrit :*



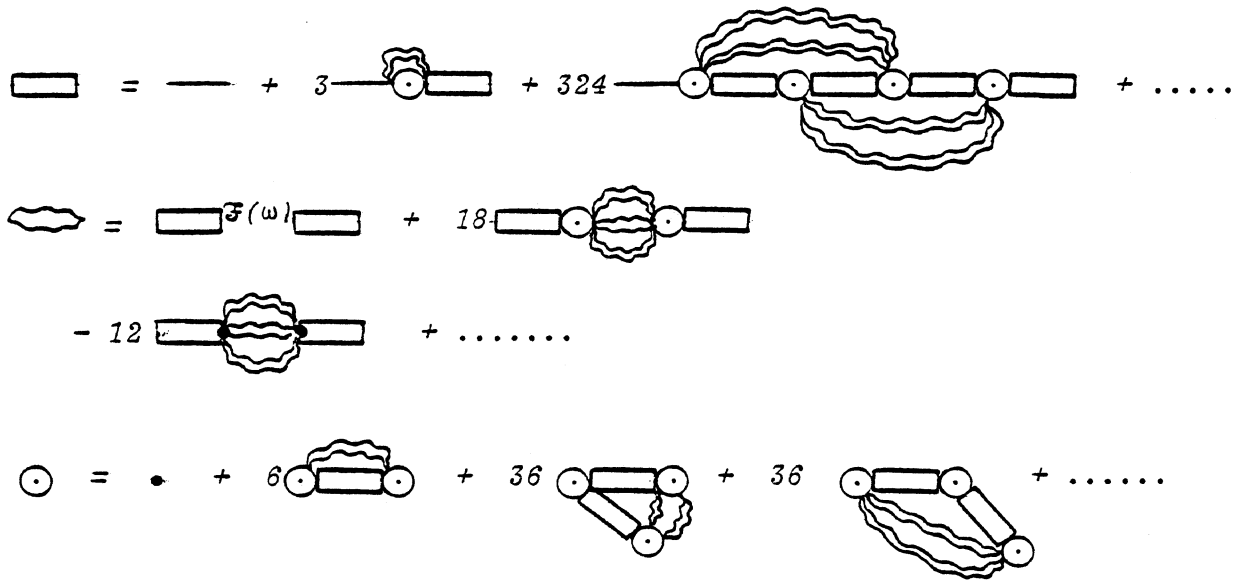
l'équation resommée de *s'écrit :*



<u>Remarque</u> : *1- La fonction* *est appelée fonction de Green généralisée. Elle vérifie l'équation de Dyson :*

$$S'(\omega) = S(\omega) + S(\omega)\,\Psi(\omega)\,S'(\omega).$$

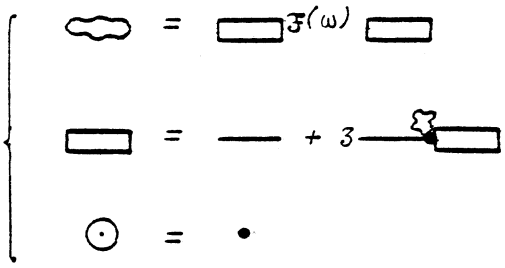
2- il existe d'autres façons de resommer. Par exemple Wyld [W2] *a trouvé, en introduisant un autre opérateur* $\odot$



d. Approximation des équations resommées.

La figure 7 représente le moment du second ordre stationnaire de (23) dans les cas suivants.

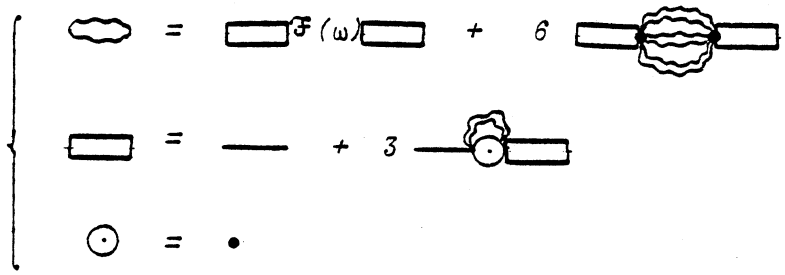
1- Première approximation de Kraichnan-Wyld (Cf.[W2] *).*



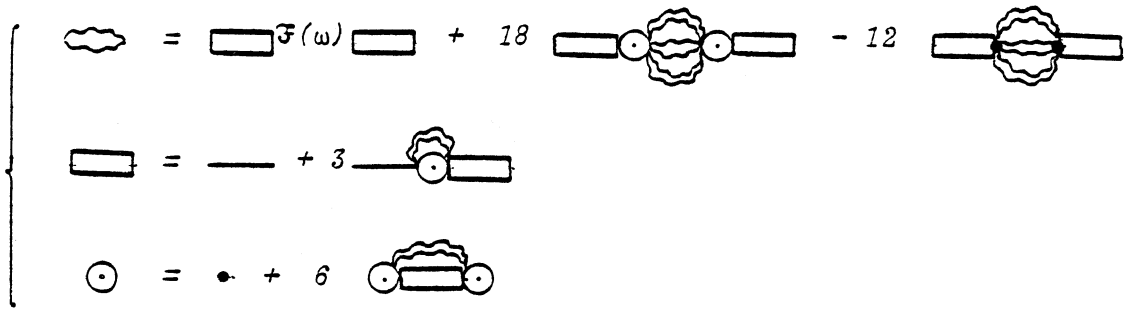
analytiquement :

$$U(\omega) = \frac{\mathcal{F}(\omega)}{(1+3\beta M-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2} \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega)\,d\omega.$$

2- Approximation par fonction de Green quasi-linéaire.



3- Deuxième approximation de Kraichnan-Wyld.



La figure 7 montre que la deuxième approximation de Kraichnan-Wyld donne de très bons résultats ; mais il n'est pas certain qu'en tenant compte d'autres termes, ou en ajoutant un autre opérateur, les résultats soient aussi convenables ou meilleurs. Cette méthode fait donc apparaître deux difficultés :

1- Elle suppose l'existence de formes aux ordres plus élevés : par exemple dans (27), le groupement :

18

suppose l'existence de

27

dans $U(\omega)$

2- On ne sait pas à quel ordre on doit approcher les équations

resommées pour obtenir les meilleurs résultats.

Dans le paragraphe suivant, on utilise la même technique, sur des exemples plus simples (bruit blanc gaussien en entrée, calcul du moment d'ordre deux), les diagrammes étant remplacés par les schémas de la forme (18).

Tout en étant aussi heuristique, l'application des séries formelles à ce type de développement permet une plus grande généralité. En effet, les programmes utilisés permettent de traiter n'importe quelle équation différentielle non linéaire du type (21) ; avec la méthode présentée plus haut, tous les diagrammes devraient être reconstruits.

3 SERIES FORMELLES ET RENORMALISATION

Considérons les développements du deuxième moment de la solution stationnaire obtenus au chapitre précédent ((19) et (20)). Dans la suite, nous cherchons μ, ν *et* δ *tels que :*

$$\langle q^2 \rangle = \mu + \nu \langle q^2 \rangle + \delta \langle q^2 \rangle^2 ,$$

pour les deux exemples traités (on utilise un seul opérateur : $\langle q^2 \rangle$*).*

a- Exemple III 3a : *Le développement (19) obéit en première approximation à l'équation algébrique :*

$$\langle q^2 \rangle = \mu - \nu \langle q^2 \rangle$$

avec (1) *:*

---

(1) $C \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_k \end{matrix}$ *signifie* $C\,(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2)^{-1} (\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2)^{-1} \ldots (\alpha_k a_1 + \beta_k a_2)^{-1}$

$$\mu = 4\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\begin{matrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{matrix} - 1152\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2\end{matrix}$$

$$\text{et } \nu = 72\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2\end{matrix} + 144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1\end{matrix}$$

$$+ 48\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\end{matrix} + 24\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2\end{matrix}$$

$$+ 144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2\end{matrix}$$

En effet, comme le prouve les termes suivants extraits de (19) le développement vérifie à l'ordre deux :

$$\langle q^2\rangle = \mu - \mu\nu + \mu\nu^2 + \ldots$$

$$4\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\begin{matrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{matrix} \qquad 1$$

$$288\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2\end{matrix} \qquad 2$$

$$576\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2\end{matrix} \qquad 3$$

$$192\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\end{matrix} \qquad 4$$

$$96\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2\end{matrix} \qquad 5$$

$$576\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2\end{matrix} \qquad 6$$

$$1152\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\begin{matrix}4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2\end{matrix} \qquad 7$$

$\mu\nu$ *est produit par* 2 3 4 5 6 15 23 20 19 22

et $\mu\nu^2$ *par* 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

82944	$(\frac{\sigma^2}{2})^4$	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	8
		0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2	2	
55296	"	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	9
		0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2	2	
55296	"	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	10
		0	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2	
9216	"	4	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	11
		0	0	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2	
13824	"	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	12
		1	1	2	2	0	0	3	1	1	1	2	2	2	
9216	"	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	13
		0	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	
82944	"	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	14
		1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	2	2	
248832	"	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	15
		0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	2	
82944	"	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	16
		0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2	
2304	"	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	17
		1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	
27648	"	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	18
		1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2	2	
82944	"	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	19
		0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	2	
55293	"	4	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	20
		0	0	1	1	2	2	0	0	3	1	1	4	2	
82944	"	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	21
		1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2	2	
165888	"	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	22
		0	1	1	2	2	0	3	3	1	4	4	2	2	
165888	"	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	23
		0	0	1	1	2	2	0	3	3	1	1	4	2	

<u>Remarque</u> : *Même quand un terme est pris plusieurs fois (par exemple* 15 *ou* 19 *), son coefficient convient :*

15 *apparaît dans* $\mu\nu$ *par*

$$72\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \text{et} \quad 1152\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

et dans $\mu\nu^2$ *par :*

$$4\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} \text{ et le double produit de } 144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{et } 144\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{matrix}$$

or $72 \times 1152 + 4 \times 2 \times 144^2$ *est bien égal à 248832.*

La figure 7 représente cette approximation pour l'équation :

$$\ddot{q} + \dot{q} + q + \beta q^3 = \dot{b}(t)$$

On obtient un bon résultat quand $\beta\frac{D}{2}$ *est inférieur à 0,1*

$$\langle q^2 \rangle = \frac{D}{2} - \beta\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{9}{7} - \beta\left(\frac{D}{2}\right) \frac{12}{7} \langle q^2 \rangle$$

$$Y = \frac{X}{2} \frac{\left(1 - \frac{9}{7} X\right)}{\left(1 + \frac{12}{7} X\right)} \qquad \text{avec } Y = \frac{\beta}{2} \langle q^2 \rangle \qquad \text{et } X = \frac{\beta D}{2}$$

<u>Remarque</u> : *Le calcul de* G_3 *n'a pas été possible car il demandait trop de temps machine et de place mémoire. Nous n'avons donc pas pu donner une valeur de* δ *. Dans l'annexe, nous montrons qu'il est possible d'obtenir tous les termes par une analyse systématique. L'exemple qui suit, de structure plus simple, permet d'obtenir cette deuxième approximation.*

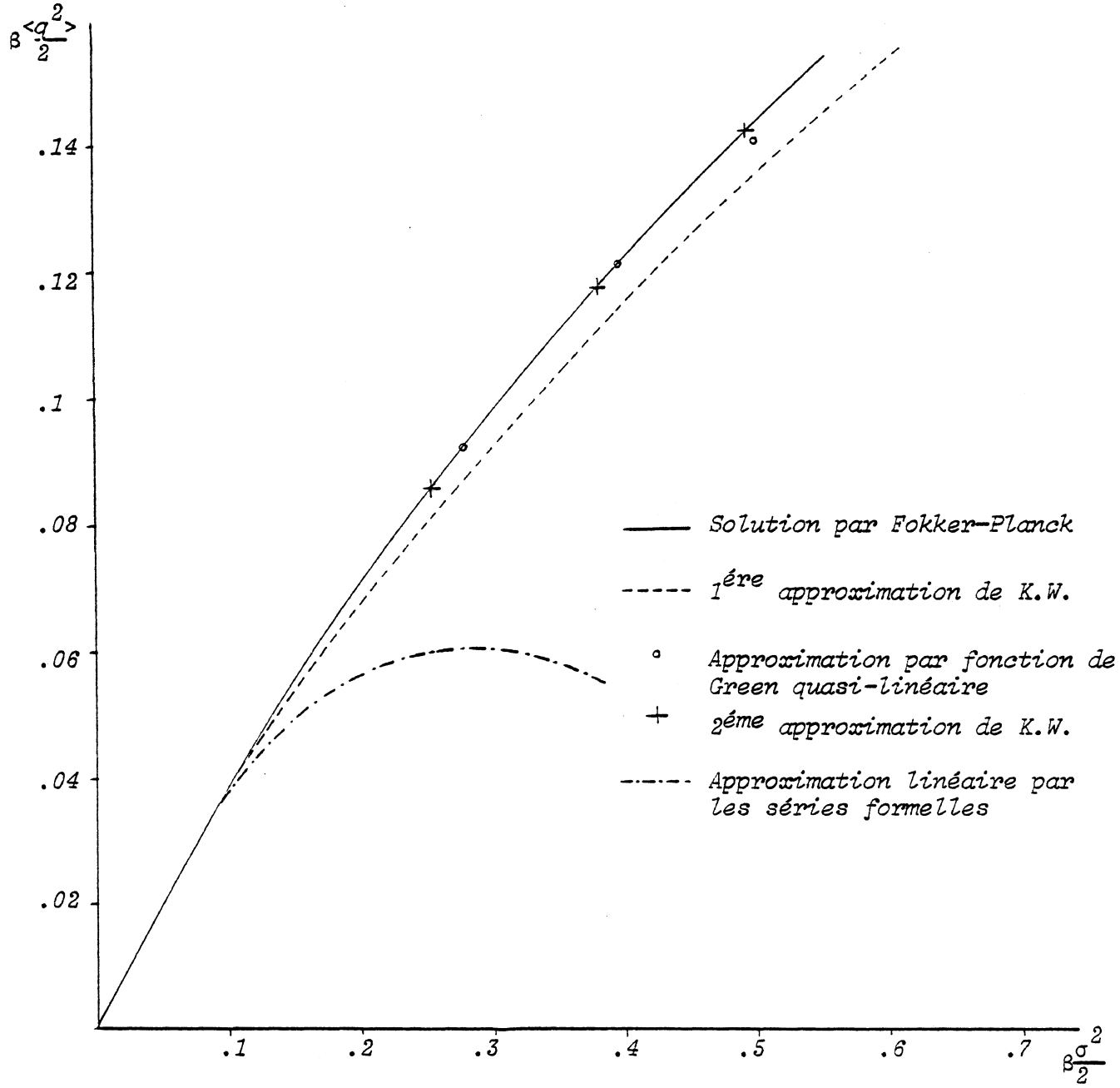


Figure 7: Moment stationnaire du 2éme ordre de la solution de l'équation $\ddot{q} + \dot{q} + q + \beta q^3 = \dot{b}(t)$, variance$=\sigma^2$.

b- Exemple III b. :

Considérons les termes suivants extraits du développement (20), dans le cas stationnaire :

Ordre 0 : $2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \quad 2$

Ordre 1 : $48\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

Ordre 2 : $1152\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$5760\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2$

Ordre 3 : $27648\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$276480\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^4 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$1935360\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^4 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 8 \quad 4 \quad 2$

Ordre 4 : $663552\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^5 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$9953280\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^5 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$33177600\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^5 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2$

$$\begin{aligned}\langle q^2\rangle = 2\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 2 + \{ & 48\left(\frac{K}{6}\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 2 \quad 4 \quad 2 + 1152\left(\frac{K^2}{6}\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^3 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ & + 27648\left(\frac{K}{6}\right)^3\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^4 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ & + 663552\left(\frac{K}{6}\right)^4\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^5 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 + \dots \}\end{aligned}$$

$$+ \{ \; 5760\left(\frac{K}{6}\right)^{2}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{3} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; 276480\left(\frac{K}{6}\right)^{3}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{4} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; 9953280\left(\frac{K}{6}\right)^{4}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{5} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ 33177600\left(\frac{K}{6}\right)^{4}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{5} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; \ldots \; \} + \ldots$$

$$\langle q^{2}\rangle = 2\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{2} + 24\left(\frac{K}{6}\right)\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{2}\,{}_{4}\{2\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{2} + 48\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{2} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; 1152\left(\frac{K}{6}\right)^{2}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{3} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; 5760\left(\frac{K}{6}\right)^{2}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{3} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ \; 27648\left(\frac{K}{6}\right)^{3}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{4} {}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2} + \ldots$$

$$+ 1440\left(\frac{K}{6}\right)^{2}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\{ 192\left(\frac{K}{6}\right)\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{2} {}_{2}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ 6912\left(\frac{K}{6}\right)^{3}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{3} {}_{2}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{2}$$

$$+ 23040\left(\frac{K}{6}\right)^{3}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right)^{3} {}_{2}\quad{}_{2}\quad{}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad{}_{2} + \ldots\} + \ldots$$

d'où

$$\langle q^{2}\rangle = 2\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{2} + 24\left(\frac{K}{6}\right)\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{2}\quad{}_{4}\quad \langle q^{2}\rangle + 1440\left(\frac{K}{6}\right)^{2}\left(\frac{\sigma^{2}}{2}\right) {}_{4}\quad{}_{6}\quad{}_{4}\quad \langle q^{2}\rangle^{2} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\sigma^{2}}{2}\{ 2(2K)^{-1} + 24\left(\frac{K}{6}\right)(2K)^{-1}(4K)^{-1}\langle q^{2}\rangle + 1440\left(\frac{K}{6}\right)^{2}(4K)^{-2}(6K)^{-1}\langle q^{2}\rangle^{2} + \ldots \}$$

en posant $\sigma^2 = \frac{K^2 N_0}{2\,A^2}$ *et* $Z = \frac{KN_0}{4A^2}$ *on obtient :*

$$< q^2> = Z + \frac{1}{2} Z <q^2> + \frac{5}{12} Z <q^2>^2 + \ldots$$

La figure 8 représente cette approximation : elle donne de bons résultats pour Z inférieur à 0,25 ($\frac{\beta N_0}{A^2} < 0,17$).

On obtient un meilleur résultat en écrivant que

$$Z + (\frac{Z}{2} - 1) <q^2> + \frac{5}{12} Z< q^2>^2 + \ldots$$

est le début du développement de

$$Z(1+ \nu<q^2>)^{\mu} = 0 \qquad \text{avec} \quad \nu = \frac{-7Z^2-12Z+12}{6Z(Z-2)}$$

d'où

$$<q^2> = \frac{6Z(Z-2)}{7Z^2+12Z-12} \qquad (fig.\ 8)$$

En analysant les courbes obtenues figures 7 et 8, on constate que :

1- Les resommations obtenues sont plus convaincantes (elles approchent mieux la solution exacte) que les approximations au premier ou deuxième ordre des développements perturbatifs correspondants (fig. 4 et 6).

2- Pour le deuxième exemple, il vaut mieux faire une resommation au premier ordre qu'au deuxième (c'est-à-dire considérer plutôt :

$<q^2> = Z + \frac{1}{2} Z <q^2>$ *comme solution que*

$<q^2> = Z + \frac{1}{2} Z <q^2> + \frac{5}{12} Z <q^2>^2$.

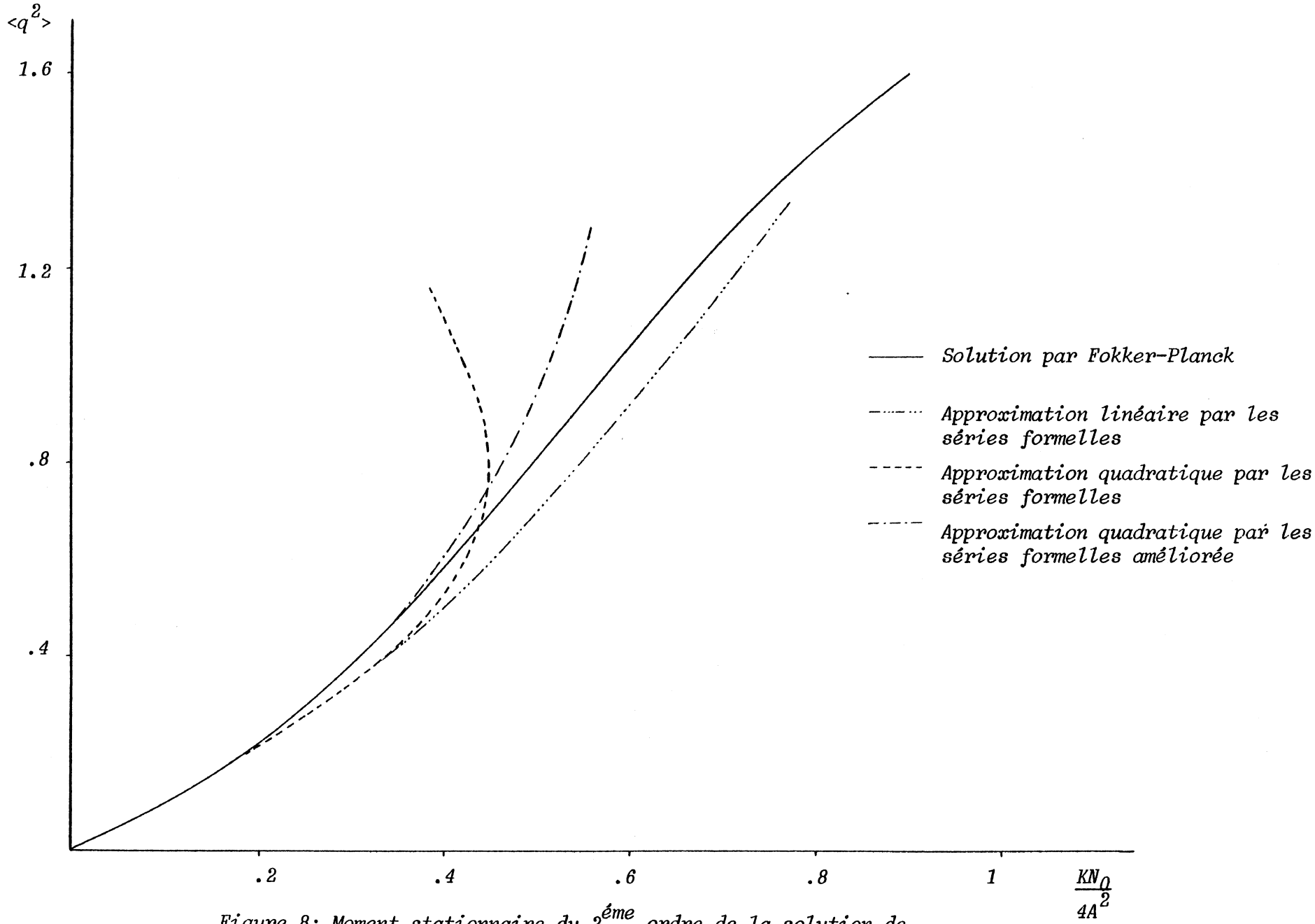


Figure 8: Moment stationnaire du 2^{éme} ordre de la solution de l'équation $\ddot{q} + K(q - \frac{q^3}{3!}) = \dot{b}(t)$, *variance* $= \frac{K^2 N_0}{2A^2}$.

On retrouve ici la difficulté rencontrée dans l'exemple de Morton et Corrsin à savoir : à quel ordre doit-on approcher les équations resommées ? C'est un problème ouvert.

- Chapitre V -

ORGANIGRAMME ET PROGRAMME DONNANT LE MELANGE DE CERTAINES SERIES RATIONNELLES

Soit la série

$$\sum_{j=1}^{N} c_j(1-a_0^j x_0)^{-p_0^j}\, x_{j_1}(1-a_1^j x_0)^{-p_1^j}\, x_{j_2} \ldots x_{j_{m_j}}(1-a_{m_j}^j x_0)^{-p_{m_j}^j}$$

où $c_j \in C$, $j_1, j_2, \ldots \in \{1,\ldots,p\}$ *et* a_k^j $(j=1,\ldots,N, k=0,\ldots,m_j)$ *est une combinaison linéaire d'éléments de* C : $p_1,\ldots,p_n$.

Cette série rationnelle peut s'écrire (Cf. III 1):

$$\sum_{i=1}^{M} d_i(1-b_0^i x_0)^{-1}\, x_{i_1}(1-b_1^i x_0)^{-1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_{j_i}}(1-b_{j_i}^i x_0)^{-1}$$

où $d_j \in C$, $i_1, i_2, \ldots \in \{0,1,\ldots,p\}$ *et* b_k^i $(i=1,\ldots,M, k=0,\ldots,j_i)$ *est une combinaison linéaire de* $p_1,\ldots,p_n$.

Le programme suivant donne le mélange de telles séries.

<u>Exemple</u>: *Soient les deux séries*

$$S_1=(1-a_1x_0)^{-1}x_0(1-a_2x_0)^{-1}x_1 + 2(1-a_1x_0)^{-1}x_1$$

et $$S_2=3(1-(a_1+a_2)x_0)^{-1}x_0 \quad ,$$

elles s'écrivent schématiquement:

$$1 \quad \begin{array}{ccc} & x_0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad + \quad 2 \quad \begin{array}{cc} & x_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

et

$$3 \quad \begin{array}{cc} & x_0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}$$

leur mélange est donné par (Cf. III 2):

$$3\,x_{0_{2_1}}\,x_{1_{1_2}}\,x_{0_{0_0}} + 3\,x_{0_{2_1}}\,x_{0_{0_1}}\,x_{1_{0_0}} + 3\,x_{0_{2_1}}\,x_{0_{1_0}}\,x_{1_{0_0}}$$

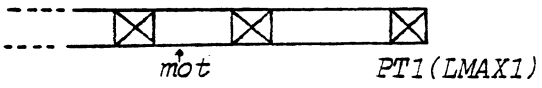
$$+\ 6\,x_{1_{2_1}}\,x_{0_{1_0}} + 6\,x_{0_{2_1}}\,x_{1_{0_0}}$$

Arguments du programme	Exemple

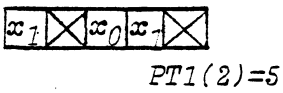
LMAX1=Longueur maximale des mots de la chaîne1

LMAX2=2

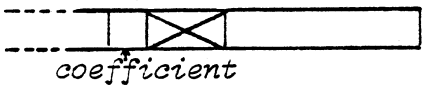
CMOT1



CMOT1

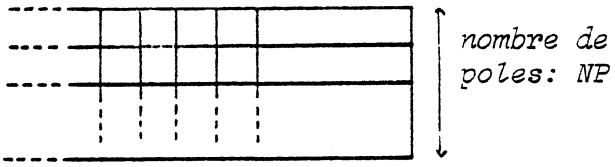


CCOEF1



CCOEF1

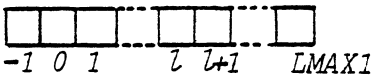
CPOLE1



CPOLE1

1	0	1	0	0
0	0	0	1	0

PT1=position du dernier mot de longueur l



PT1

0	0	2	5
-1	0	1	2

On définit de la même manière:LMAX2,CMOT2,CCOEF2,CPOLE2 et PT2 pour la deuxième chaîne.Le résultat sera mis dans des tableaux identiques: CMOT,CPOLE,CCOEF et PT.Pour l'exemple simple ci-dessus,on aurait obtenu:

CMOT

x_1	x_0	X	x_0	x_1	X	x_0	x_1	x_0	X	x_0	x_0	x_1	X	x_0	x_0	x_1	X

CCOEF

6	X	6	X	3	X	3	X	3	X

CPOLE

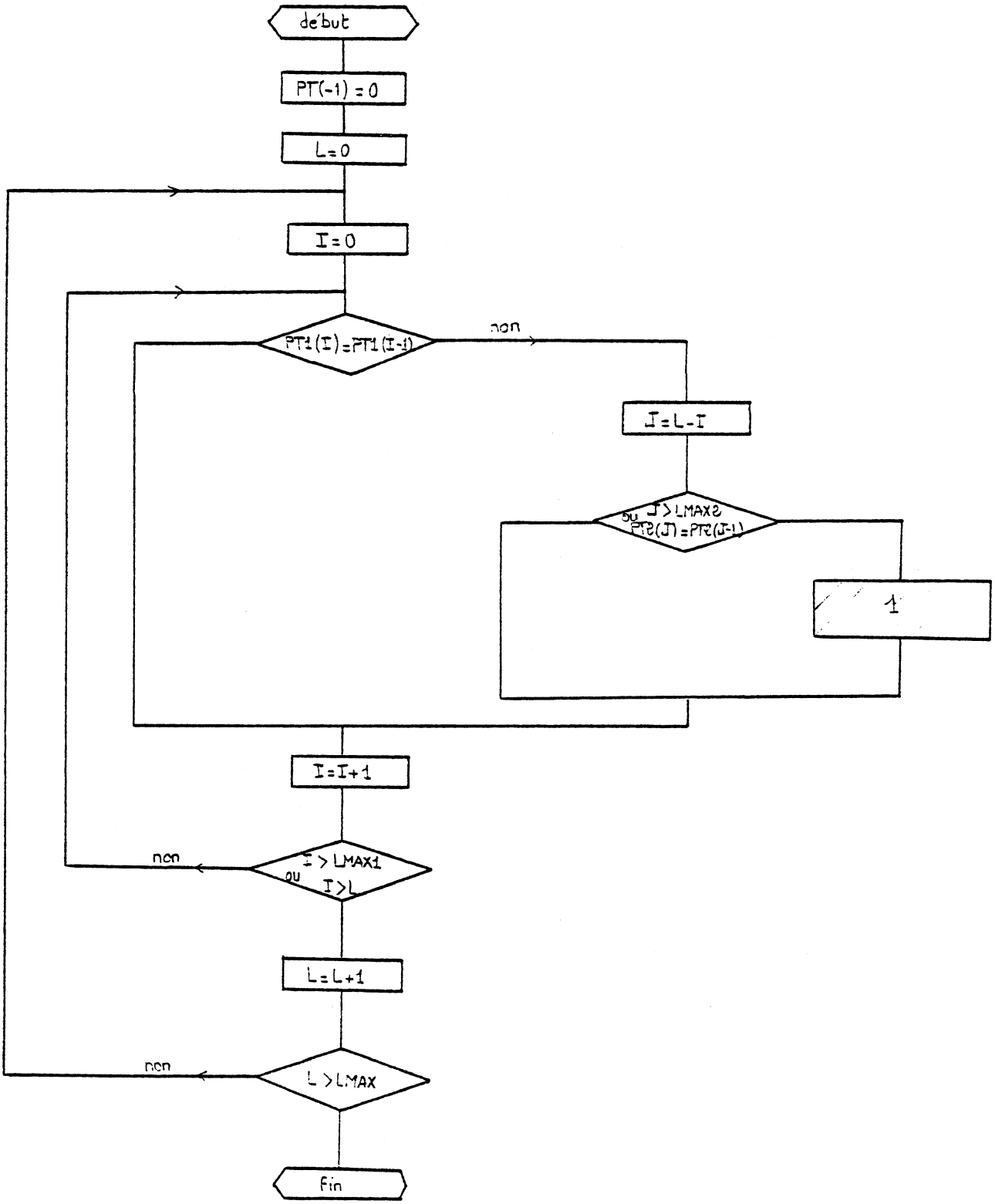
2	1	0	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	0	2	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	1	1	0

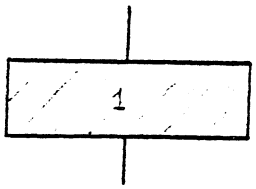
PT

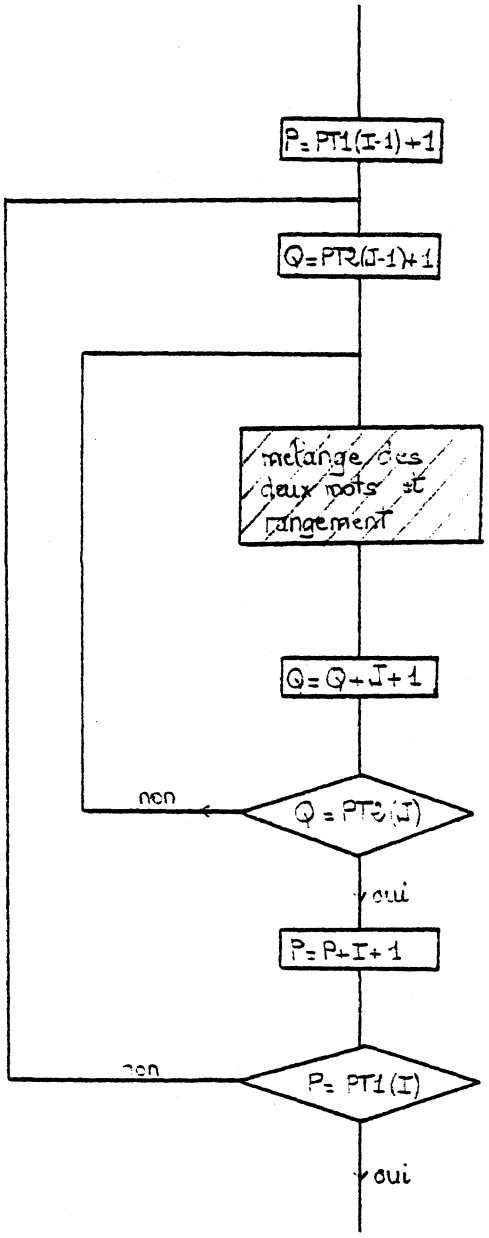
0	0	0	6	18
-1	0	1	2	3

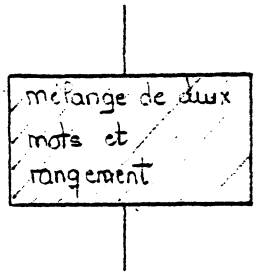
ORGANIGRAMME

Programme principal:

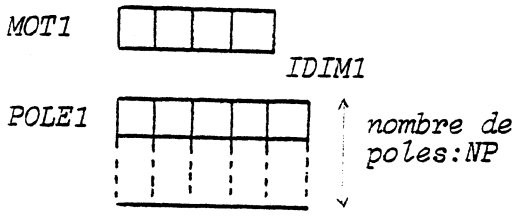



1


P= PT1(I-1)+1
Q=PT2(J-1)+1
mélange des deux mots et rangement
Q=Q+J+1
non
Q = PT3(J)
oui
P=P+I+1
non
P= PT1(I)
oui

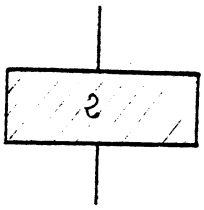


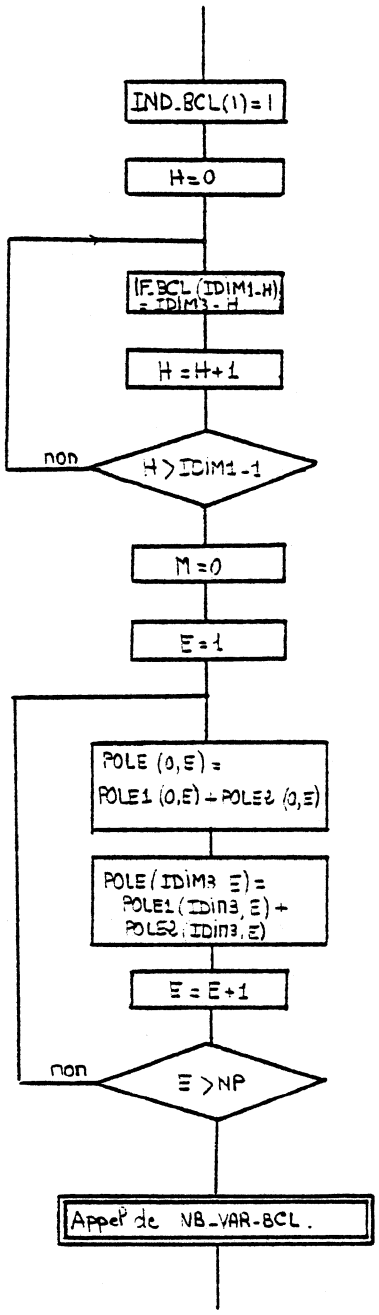
IDIM1=I si I=0
1 si I=0



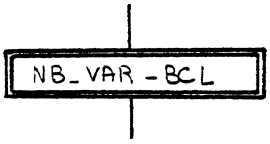
De la même manière, on définit pour le deuxième mot: IDIM2, MOT2, POLE2 et pour un mot résultat du mélange: IDIM, MOT, POLE.

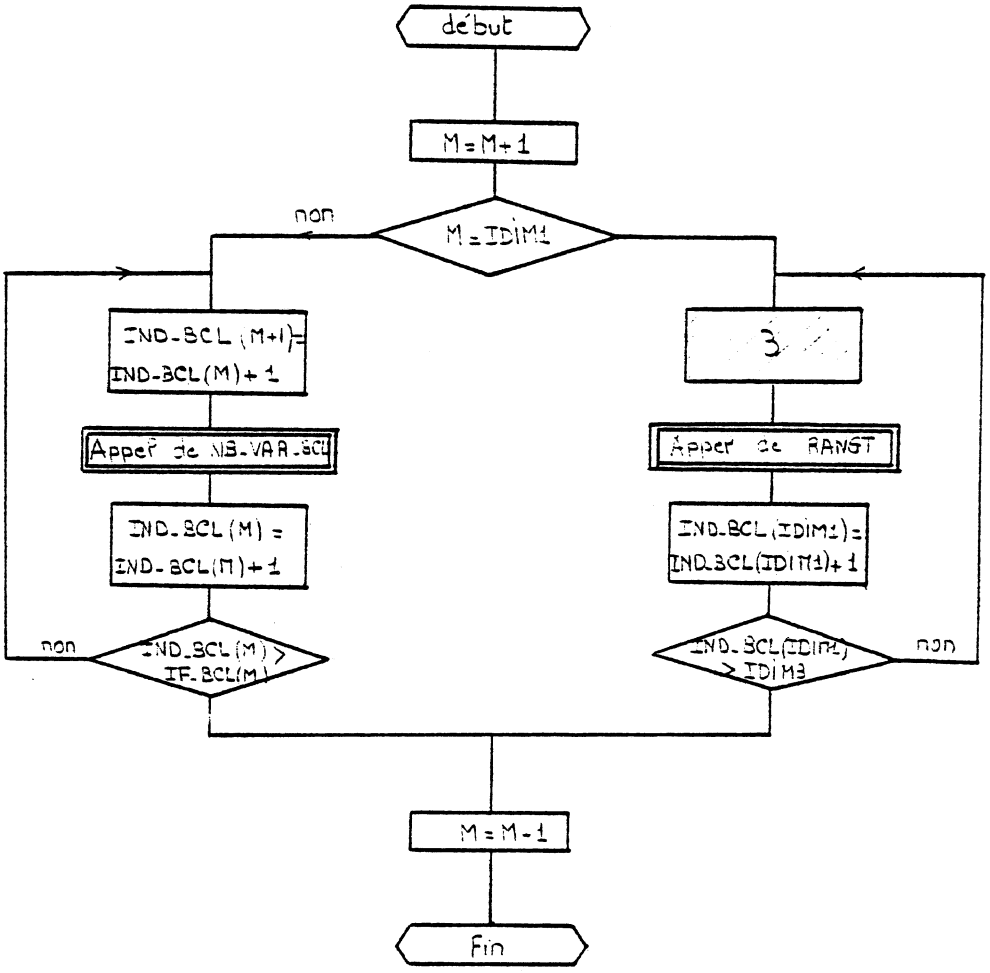
MOT1='V' ou MOT2='V' — oui
MOT1='V' et MOT2='V' — non
MOT='V'
E=1
POLE(0,E) = POLE1(0,E)+POLE2(0,E)
POLE(1,E)=0
E=E+1
E > NP
MOT1='V' — oui
MOT = MOT1
H=0
E=1
POLE(H,E) = POLE2(0,E)+POLE1(H,E)
E=E+1
E > NP — non
H=H+1
H > IDIM1
MOT = MOT2
H=0
E=1
POLE(H,E) = POLE1(0,E)+POLE2(H,E)
E=E+1
E > NP — non
H=H+1
H > IDIM1 — non
Appel de RANGT
2


2

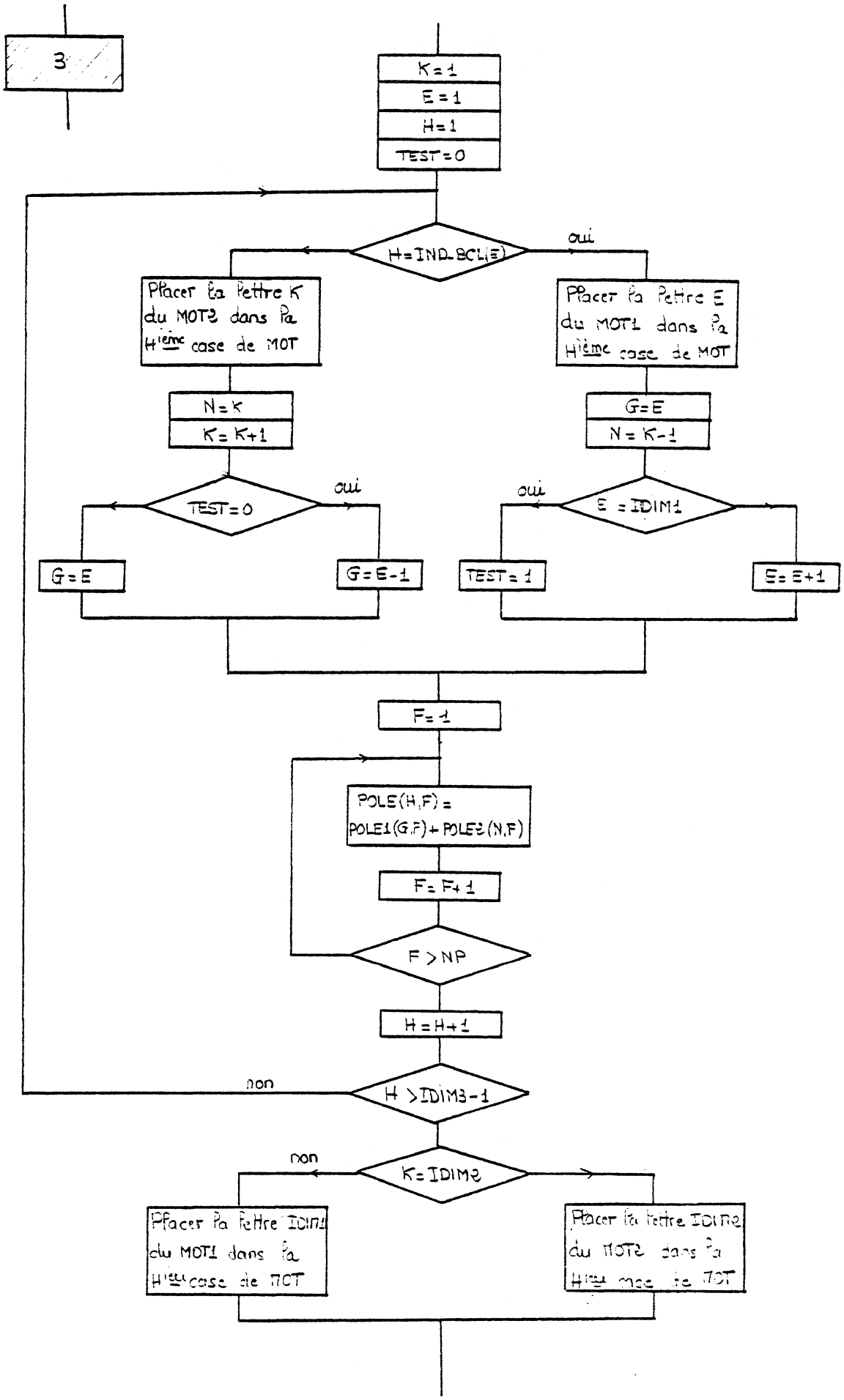

IND_BCL(1)=1
H=0
IF BCL (IDIM1-H) = IDIM3 - H
H = H+1
non
H > IDIM1 -1
M = 0
E = 1
POLE (0,E) = POLE1 (0,E) + POLE2 (0,E)
POLE (IDIM3 E) = POLE1 (IDIM3, E) + POLE2 (IDIM3, E)
E = E+1
non
E > NP
Appel de NB_VAR-BCL .

Sous-programme: "nombre variable de boucles"

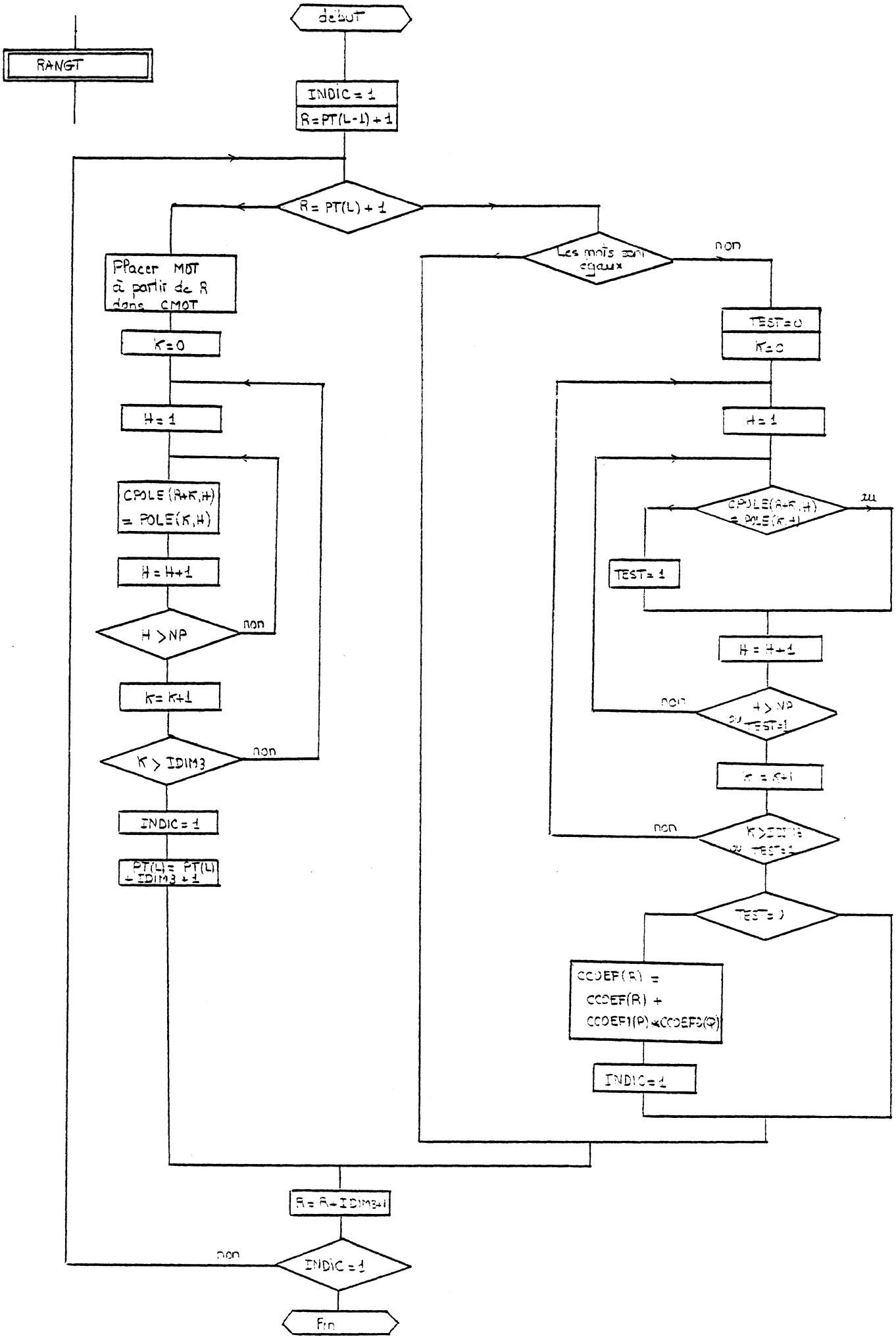




Il faut noter qu'une programmation simple du mélange de deux mots a été possible grâce à l'utilisation de procédures récursives(Cf. Knuth(K1) p.187)


3
K=1
E=1
H=1
TEST=0
H=IND.BCL(E)
oui
Placer la lettre K du MOT2 dans la H ième case de MOT
Placer la lettre E du MOT1 dans la H ième case de MOT
N=K
K=K+1
G=E
N=K-1
TEST=0
oui
E=IDIM1
oui
G=E
G=E-1
TEST=1
E=E+1
F=1
POLE(H,F)=
POLE1(G,F)+POLE2(N,F)
F=F+1
F>NP
H=H+1
non
H>IDIM3-1
non
K=IDIM2
Placer la lettre IDIM1 du MOT1 dans la H ième case de MOT
Placer la lettre IDIM2 du MOT2 dans la H ième case de MOT

Sous-programme: "rangement"



PROGRAMME

Nous avons choisi comme langage le PL1 pour les raisons suivantes:

1) Il permet de manipuler facilement des chaînes de caractères.

2) Il est plus explicite que d'autres langages comme l'APL.

3) Il permet d'utiliser la récursion comme dans le sous--programme que nous avons appelé "nombre variable de boucles".

```
 'LSS2919.LAMNABHI.MELANGE'
00010  MELANGE:PROC OPTIONS(MAIN);
00020   DCL (LMAX1,LMAX2,LMAX) BIN FIXED(7,0);
00030   GET LIST(LMAX1,IDIM1,LMAX2,IDIM2,LMAX,IDIM,NP);
00040  BEGIN;
00050   DCL (CMOT1(10) CHAR(IDIM1),CMOT2(10) CHAR(IDIM2),CMOT(10) CHAR(I
DIM),
00060       (PT1(-1:LMAX1),PT2(-1:LMAX2),PT(-1:LMAX)) BIN FIXED(23,0),
00070       (CCOEF1(10,IDIM1),CCOEF2(10,IDIM2),CCOEF(10,IDIM))BIN FIXED(
31,0),
00080       (CPOLE1(10,IDIM1,NP),CPOLE2(10,IDIM2,NP),CPOLE(10,IDIM,NP))
00090        BIN FIXED(7,0)) CTL,(RES1,RES2,REZ1,REZ2) FILE,SAVE FILE OU
TPUT,
00100       (E,F,G)BIN FIXED(15,0),(H,I,J,K,L,M,N,TEST,CODE,T)BIN FIXED(
7,0),
00110       (P,Q,R)BIN FIXED(23,0);
00115   T=0;
00120   GET LIST(L,I,P,Q);
00130   GET LIST(CODE);
00140   ALLOC CMOT1,PT1,CPOLE1,CCOEF1,
00150         CMOT2,PT2,CPOLE2,CCOEF2,
00160         CMOT,PT,CPOLE,CCOEF;
00170   CALL IN_PUT(RES1,CMOT1,PT1,CPOLE1,CCOEF1,LMAX1,IDIM1,LMAX1);
00180   CALL IN_PUT(RES2,CMOT2,PT2,CPOLE2,CCOEF2,LMAX2,IDIM2,LMAX2);
00190   IF((L=0)&(P=1)&(Q=1))
00200    THEN
00205     DO;
00206      PT(-1)=0;
00210      PT(0)=0;
00215     END;
00220    ELSE
00230     DO;
00240      IF(CODE=1)
00250       THEN
00260        CALL IN_PUT(REZ2,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
00270       ELSE
00280        CALL IN_PUT(REZ1,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
00290     END;
00305  /* ------------------ */
00310  /* DEBUT DU PROGRAMME */
00320  /* ------------------ */
00330   DO UNTIL(L>LMAX);
00350    DO UNTIL((I>LMAX1)|(I>L));
00360     IF(PT1(I)¬=PT1(I-1))
00370      THEN
00380       DO;
00390        J=L-I;
```

```
00400          IF(J<=LMAX2)
00410           THEN
00420            DO;
00430             IF(PT2(J)~=PT2(J-1))
00440              THEN
00450               DO;
00451                IF(T=1)
00452                 THEN
00453                  DO;
00454                   P=PT1(I-1)+1;
00455                   Q=PT2(J-1)+1;
00456                  END;
00457                 ELSE
00458                  T=1;
00470                IDIM1=I+(I=0);
00480                IDIM2=J+(J=0);
00490                IDIM3=L+(L=0);
00500  BEGIN;
00510   DCL MOT1 CHAR(IDIM1),MOT2 CHAR(IDIM2),MOT CHAR(IDIM3),
00520      (POLE1(0:IDIM1,NP),POLE2(0:IDIM2,NP),POLE(0:IDIM3,NP),
00530       IND_BCL(IDIM1),IF_BCL(IDIM1)) BIN FIXED(7,0);
00540  /* ------------------------------------ */
00550  /* PRELEVEMENT DES ARGUMENTS DU SHUFFLE */
00560  /* ------------------------------------ */
00570   DO P=P TO PT1(I)-IDIM1 BY IDIM1+1;
00580    DO Q=Q TO PT2(J)-IDIM2 BY IDIM2+1;
00590     MOT1=SUBSTR(CMOT1(1),P,IDIM1);
00600     MOT2=SUBSTR(CMOT2(1),Q,IDIM2);
00610     DO K=0 TO IDIM1;
00620      DO M=1 TO NP;
00630       POLE1(K,M)=CPOLE1(1,P+K,M);
00640      END;
00650     END;
00660     DO K=0 TO IDIM2;
00670      DO M=1 TO NP;
00680       POLE2(K,M)=CPOLE2(1,Q+K,M);
00690      END;
00700     END;
00710  /* ------------------ */
00720  /* SHUFFLE DES 2 MOTS */
00730  /* ------------------ */
00740     IF((MOT1='V')|(MOT2='V'))
00750      THEN
00760       DO;
00770        IF((MOT1='V')&(MOT2='V'))
00780         THEN
00790          DO;
00800           MOT='V';
00810           DO E=1 TO NP;
00820            POLE(0,E)=POLE1(0,E)+POLE2(0,E);
00830            POLE(1,E)=0;
00835           END;
00836           CALL RANGT;
00840          END;
00850         ELSE
```

```
00860          DO;
00870           IF(MOT1='V')
00880            THEN
00890             DO;
00900              MOT=MOT2;
00910              DO H=0 TO IDIM2;
00920               DO E=1 TO NP;
00930                POLE(H,E)=POLE1(0,E)+POLE2(H,E);
00940               END;
00950              END;
00955              CALL RANGT;
00960             END;
00970            ELSE
00980             DO;
00990              MOT=MOT1;
01000              DO H=0 TO IDIM1;
01010               DO E=1 TO NP;
01020                POLE(H,E)=POLE2(0,E)+POLE1(H,E);
01030               END;
01040              END;
01045              CALL RANGT;
01050             END;
01060          END;
01070       END;
01080      ELSE
01090       DO;
01100        IND_BCL(1)=1;
01110        DO H=0 TO IDIM1-1;
01120         IF_BCL(IDIM1-H)=IDIM3-H;
01130        END;
01140        M=0;
01150        DO E=1 TO NP;
01160         POLE(0,E)=POLE1(0,E)+POLE2(0,E);
01170         POLE(IDIM3,E)=POLE1(IDIM1,E)+POLE2(IDIM2,E);
01180        END;
01190        CALL NB_VAR_BCL;
01200       END;
01205     OPEN FILE(SAVE);
01210     PUT FILE(SAVE) EDIT(L,I,J,P,Q,CODE) (3(F(3)),2(F(7)),F(2));
01220     IF(CODE=1)
01230      THEN
01240       DO;
01250        CALL OUT_PUT(REZ1,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
01260        CODE=2;
01270       END;
01280      ELSE
01290       DO;
01300        CALL OUT_PUT(REZ2,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
01310        CODE=1;
01320       END;
01325     PUT FILE(SAVE) EDIT('.') (A(2));
01326     CLOSE FILE(SAVE);
01330    END;
01335    Q=PT2(J-1)+1;
01340   END;
```

```
01350  /* --------------- */
01360  /* SOUS PROGRAMMES */
01370  /* --------------- */
01380  /* -------------------------- */
01390  /* NOMBRE VARIABLE DE BOUCLES */
01400  /* -------------------------- */
01410  NB_VAR_BCL:PROC RECURSIVE;
01420   M=M+1;
01430   IF(M~=IDIM1)
01440    THEN
01450     DO;
01460      DO UNTIL(IND_BCL(M)>IF_BCL(M));
01470       IND_BCL(M+1)=IND_BCL(M)+1;
01480       CALL NB_VAR_BCL;
01490       IND_BCL(M)=IND_BCL(M)+1;
01500      END;
01510     END;
01520    ELSE
01530     DO;
01540      DO UNTIL(IND_BCL(IDIM1)>IDIM3);
01550       K=1;E=1;H=1;TEST=0;
01560       DO UNTIL(H>IDIM3-1);
01570        IF(H=IND_BCL(E))
01580         THEN
01590          DO;
01600           SUBSTR(MOT,H,1)=SUBSTR(MOT1,E,1);
01610           G=E;N=K-1;
01620           IF(E~=IDIM1)
01630            THEN
01640             E=E+1;
01650            ELSE
01660             TEST=1;
01670          END;
01680         ELSE
01690          DO;
01700           SUBSTR(MOT,H,1)=SUBSTR(MOT2,K,1);
01710           N=K;K=K+1;
01720           IF(TEST=0)
01730            THEN
01740             G=E-1;
01750            ELSE
01760             G=E;
01770          END;
01780        DO F=1 TO NP;
01790         POLE(H,F)=POLE1(G,F)+POLE2(N,F);
01800        END;
01810        H=H+1;
01820       END;
01830       IF(K=IDIM2)
01840        THEN
01850         SUBSTR(MOT,H,1)=SUBSTR(MOT2,IDIM2,1);
01860        ELSE
01868         SUBSTR(MOT,H,1)=SUBSTR(MOT1,IDIM1,1);
01870       CALL RANGT;
```

```
01871        IND_BCL(IDIM1)=IND_BCL(IDIM1)+1;
01872       END;
01873      END;
01874    M=M-1;
01875    RETURN;
01876   END NB_VAR_BCL;
01880   /* --------- */
01890   /* RANGEMENT */
01900   /* --------- */
01905   RANGT:PROC;
01910    INDIC=0;
01920    R=PT(L-1)+1;
01930    DO UNTIL(INDIC=1);
01940     IF(R=PT(L)+1)
01950      THEN
01960       DO;
01970        SUBSTR(CMOT(1),R,IDIM3)=MOT;
01980        DO K=0 TO IDIM3;
01990         DO H=1 TO NP;
02000          CPOLE(1,R+K,H)=POLE(K,H);
02010         END;
02020        END;
02030        CCOEF(1,R)=CCOEF1(1,P)*CCOEF2(1,Q);
02040        INDIC=1;
02050        PT(L)=PT(L)+IDIM3+1;
02060       END;
02070      ELSE
02080       DO;
02090        IF(SUBSTR(CMOT(1),R,IDIM3)=MOT)
02100         THEN
02110          DO;
02120           TEST=0;
02130           K=0;
02140           DO UNTIL((K>IDIM3)|(TEST=1));
02150            H=1;
02160            DO UNTIL((H>NP)|(TEST=1));
02170             IF(CPOLE(1,R+K,H)~=POLE(K,H))
02180              THEN
02190               TEST=1;
02200              ELSE;
02210             H=H+1;
02220            END;
02230            K=K+1;
02240           END;
02250           IF(TEST=0)
02260            THEN
02270             DO;
02280              CCOEF(1,R)=CCOEF(1,R)+CCOEF1(1,P)*CCOEF2(1,Q);
02290              INDIC=1;
02300             END;
02310            ELSE;
02320          END;
02330         ELSE;
02340       END;
```

```
02350     R=R+IDIM3+1;
02360    END;
02370    RETURN;
02380   END RANGT;
02390   END;
02440   /* ------------------- */
02450   /* ECRITURE ET LECTURE */
02460   /* ------------------- */
02470   IN_PUT:PROC(X,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
02480    DCL (CMOT(10) CHAR(IDIM),PT(-1:LMAX) BIN FIXED(23,0),
02490         CPOLE(10,IDIM,NP) BIN FIXED(7,0),CCOEF(10,IDIM)BIN FIXED(31
,0))
02500         CTL,X FILE,(L,LMAX) BIN FIXED(7,0);
02510    OPEN FILE(X) INPUT;
02520    PT(-1)=0;
02530    GET FILE(X) EDIT((PT(H) DO H=0 TO L)) (F(6));
02540    DO H=0 TO L;
02550     IF(PT(H)^=PT(H-1))
02560      THEN
02570       DO;
02580        K=H+(H=0);
02590        BEGIN;
02600         DCL CHAINE CHAR(K);
02610         DO R=PT(H-1)+1 TO PT(H)-K BY K+1;
02620          GET FILE(X) EDIT(CCOEF(1,R)) (F(10));
02630          GET FILE(X) EDIT(CHAINE) (A(K));
02640          SUBSTR(CMOT(1),R,K)=CHAINE;
02650          DO M=0 TO K;
02660           DO N=1 TO NP;
02670            GET FILE(X) EDIT(CPOLE(1,R+M,N)) (F(2));
02680           END;
02690          END;
02700         END;
02710        END;
02720       END;
02730      ELSE;
02740    END;
02750    CLOSE FILE(X);
02760    RETURN;
02770   END IN_PUT;
02780   OUT_PUT:PROC(X,CMOT,PT,CPOLE,CCOEF,LMAX,IDIM,L);
02790    DCL (CMOT(10) CHAR(IDIM),PT(-1:LMAX)BIN FIXED(23,0),
02800         CPOLE(10,IDIM,NP)BIN FIXED(7,0),
02810         CCOEF(10,IDIM) BIN FIXED(31,0)) CTL,X FILE,
02815         (L,LMAX) BIN FIXED(7,0);
02820    OPEN FILE(X) OUTPUT;
02830    PUT FILE(X) EDIT((PT(H) DO H=0 TO L)) (F(6));
02840    DO H=0 TO L;
02850     IF(PT(H)^=PT(H-1))
02860      THEN
02870       DO;
02880        K=H+(H=0);
02890        DO R=PT(H-1)+1 TO PT(H)-K BY K+1;
02900         PUT FILE(X) EDIT(CCOEF(1,R)) (F(10));
```

```
02910          PUT FILE(X) EDIT(SUBSTR(CMOT(1),R,K)) (A);
02920          DO M=0 TO K;
02930           DO N=1 TO NP;
02940            PUT FILE(X) EDIT(CPOLE(1,R+M,N)) (F(2));
02950           END;
02960          END;
02970        END;
02980       END;
02990      ELSE;
03000    END;
03010    CLOSE FILE(X);
03020    RETURN;
03030   END OUT_PUT;
03040   /* ------------------ */
03050   /* SUITE DU PROGRAMME */
03060   /* ------------------ */
03070              END;
03080             ELSE;
03090           END;
03100          ELSE;
03110        END;
03120       ELSE;
03130      I=I+1;
03140     END;
03150     L=L+1;
03160     I=0;
03170     PT(L)=PT(L-1);
03180    END;
03190   /* ---------- */
03200   /* IMPRESSION */
03210   /* ---------- */
03220    PUT EDIT('LONGUEUR=',PT(LMAX)) (SKIP(2),A,F(6));
03230    PUT SKIP(2);
03240    DO L=0 TO LMAX;
03250     IF(PT(L)^=PT(L-1))
03260      THEN
03270       DO;
03280        PUT EDIT('MOTS DE LONGUEUR',L) (SKIP(2),A,F(3));
03290        M=L+(L=0);
03300        DO R=PT(L-1)+1 TO PT(L)-M BY M+1;
03310         PUT EDIT(CCOEF(1,R),SUBSTR(CMOT(1),R,M)) (SKIP,F(10),X(1),A
);
03320         DO H=1 TO NP;
03330          PUT EDIT('            ') (SKIP,A);
03340          DO K=0 TO M;
03350           PUT EDIT(CPOLE(1,R+K,H)) (X(2),F(2));
03360          END;
03370         END;
03380        END;
03390       END;
03400      ELSE;
03410    END;
03420    FREE CMOT1,PT1,CPOLE1,CCOEF1,
03430         CMOT2,PT2,CPOLE2,CCOEF2,
03440         CMOT,PT,CPOLE,CCOEF;
03450   END;
03460   END;
```

- Appendice -

VERS UNE ANALYSE COMBINATOIRE DES DEVELOPPEMENTS PERTURBATIFS

Dans cette partie, nous exhibons des propriétés combinatoires des termes du développement fonctionnel d'équations différentielles non linéaires. Nous montrons qu'il est possible par une analyse systématique et grâce à des propriétés de dénombrement, d'engendrer ces termes. Les calculs effectués dans cette thèse ont montré qu'il était assez difficile d'obtenir les ordres élevés dès que la structure de l'équation devenait compliquée. Cette méthode permettrait alors

1-d'obtenir des programmes beaucoup moins lourds (moins de problèmes de mémoire et de temps machine),

2-une meilleure compréhension des propriétés mathématiques de ces développements.

Nous montrons cette technique sur l'équation de l'oscillateur anharmonique (équation de Duffing)

$$q + \alpha q + \gamma q + \beta q^3 = u(t)$$

L'équation sérielle associée (Cf. I2) s'écrit:

$$(1 + \alpha x_0 + \gamma x_0^2) G + \beta x_0^2 G \sqcup\!\sqcup G \sqcup\!\sqcup G = x_0 x_1$$

On en déduit le développement perturbatif de G (dans le cas stationnaire)

$$G = G_0 + \beta G_1 + \beta^2 G_2 + \ldots$$

avec, si $(1 + \alpha x_0 + \gamma x_0^2) = (1 - \gamma_1 x_0)(1 - \gamma_2 x_0)$

$$G_0 = \gamma_1 x_0 \ \gamma_2 x_1 \quad (1)$$

$$G_1 = -\gamma_1 x_0 \ \gamma_2 x_0 \ G_0 \sqcup\!\sqcup G_0 \sqcup\!\sqcup G_0$$

$$G_2 = +3 \ \gamma_1 x_0 \ \gamma_2 x_0 \ G_0 \sqcup\!\sqcup G_0 \sqcup\!\sqcup G_1$$

---

(1) $\mu_1 x_{i_1} \mu_2 x_{i_2} \ldots$ *signifie:* $(1 - \mu_1 x_0)^{-1} x_{i_1} (1 - \mu_2 x_0)^{-1} x_{i_2} \ldots\ldots$

$$G_3 = -3\ \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0 \sqcup\!\sqcup G_1 \sqcup\!\sqcup G_1 - 3\ \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0 \sqcup\!\sqcup G_0 \sqcup\!\sqcup G_2$$

En utilisant les propriétés du mélange, il est possible de mettre les G_i sous la forme suivante, où l'on a ordonné les concaténations:

$$G_0 = \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_1$$

$$G_1 = -\ \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ \ G_0^{\sqcup\!\sqcup 3}$$

$$G_2 = 3\ \underbrace{\gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0}_{2^{\text{éme}}\ \text{concaténation}}\ [G_0^{\sqcup\!\sqcup 2} \sqcup\!\sqcup (\underbrace{\gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0}_{1^{\text{ère}}\ \text{concaténation}}\ \ G_0^{\sqcup\!\sqcup 3})] \qquad (")$$

$$G_3 = -3\ \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0 \sqcup\!\sqcup [2\ (2\gamma_1)\ x_0\ (\gamma_1+\gamma_2)\ x_0\ (G_0^{\sqcup\!\sqcup 3} \sqcup\!\sqcup \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0^{\sqcup\!\sqcup 3}) +$$
$$4\ (2\gamma_1)\ x_0\ (\gamma_1+\gamma_2)\ x_0\ (2\gamma_2)\ x_0\ (G_0^{\sqcup\!\sqcup 3} \sqcup\!\sqcup \gamma_2\ x_0\ G_0^{\sqcup\!\sqcup 3})]$$
$$-9\ \gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0^{\sqcup\!\sqcup 2} \sqcup\!\sqcup [\gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0^{\sqcup\!\sqcup 2} \sqcup\!\sqcup (\gamma_1\ x_0\ \gamma_2\ x_0\ G_0^{\sqcup\!\sqcup 3})]$$

$$\vdots$$

Cette écriture permet de décrire tous les termes du développement fonctionnel. En effet, il est facile de voir, à partir de (") par exemple, que le mot:

$$x_0\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_1\ \ x_1\ \ x_0\ \ x_0\ \ x_1\ \ x_1\ \ x_1$$

est compatible avec la structure de G_2 (les notations sont celles de III.3a) On peut alors engendrer tous les "mots" issus de cette combinaison de lettres. Soit, pour la $1^{\text{ère}}$ combinaison:

12960	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_1	x_1	x_0	x_0	x_1	x_1	x_1
	1	0	3	2	5	4	3	2	2	2	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	0	1	2	3	2	1	2	3	2	1	0

La deuxième concaténation étant fixée obligatoirement au début du mot, si on choisit les deux x_0 suivants pour représenter la première, on peut donner la série rationnelle correspondante, en calculant des permutations et en observant la règle suivante, à savoir que tous les x_0 restants commutent entre eux ainsi que tous les x_1:

$$3\times 3\times \binom{3}{5}\times (3!)^2\times (2!)^2 = 12960$$

Les autres combinaisons sont:

$$3\times 2^3\times\binom{3}{4}\times 2\times(3!)^2 \quad + \quad 3\times 2^2\times 3\times\binom{2}{4}\times(2!)^2\times(2!)^2 \quad = 10368$$

10368	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_1	x_1	x_0	x_0	x_1	x_1	x_1
1	0	3	2	1	4	3	2	2	2	1	0	0	0	0
0	1	0	1	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	0

$$3\times 3\times(2!)^2\times(3!)^2 \quad + \quad 3\times 3\times 2\times 3\times(2!)^2\times\binom{2}{3}\times(2!)^2 \quad = 3888$$

3888	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_1	x_1	x_0	x_0	x_1	x_1	x_1
1	0	3	2	1	0	3	2	2	2	1	0	0	0	0
0	1	0	1	2	3	2	3	2	1	2	3	2	1	0

Les calculs ont montré que ces termes figuraient effectivement dans le développement.

- BIBLIOGRAPHIE -

[A1] *R. ABE - Statistical mechanics - University of Tokyo Press, 1975.*

[A2] *L. ARNOLD - Stochastic differential equations - Wiley Interscience, New-York, 1974, chapitre 10.*

[B1] *J. C. BARRETT - The use of functionals in the analysis of non linear physical models - J. Elect. Control, 15, 1963, p. 567-615.*

[B2] *C. M. BENDER et I.-T. WU - Anharmonic oscillator - Phys. Rev., 184, 1969, p. 1231.*

[B3] *L. BIEBERBACH -Analytische Fortsetzung - Berlin, Springer Verlag, 1975.*

[B4] *M. BIXON et R. ZWANZIG - Brownian motion of a non linear oscillator - J. Stat. Phys., 3, 1971, p. 245-260.*

[B5] *R. BONHOUR et N. FOUCHEROT - Mise en oeuvre informatique d'une nouvelle méthode de calcul en automatique non linéaire - Thèse 3ème cycle, Université Paris VII, Paris, 1977.*

[B6] *D.C.C. BOVER - Moment equation methods for non linear stochastic systems - J. Math. Anal. and Appl., 65, 1978, p. 306-320.*

[B7] *R.-W. BROCKETT - Volterra series and geometric control theory - Automatica, 12, 1976, p. 167-176.*

[B8] *A.B. BUDGOR - Studies in non linear stochastic processes. I. Approximate solutions of non linear stochastic differential equations by the method of statistical linearization - J. Stat. Phys., 15, 1976, p. 355-375.*

[B9] *A.B. BUDGOR et B.J. WEST - Connection between perturbation theory projection operator technics, and statistical linearization for non linear systems - Phys. Review A, 17, 1978, p. 370-376.*

[D1] *J. DIEUDONNE - Eléments d'analyse III, Gauthiers-Villars, Paris, 1974.*

[D2] *F.J. DYSON - Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamic - Phys. Rev., 85, 1952, p. 631.*

[E1] *S. EILENBERG - Automata, languages and machines - Vol. A, Academic Press, New York, 1974.*

[E2] *W.N. EDWARD - Symbolic and algebraic computation - Lecture Notes in computer science, Springer Verlag, n° 72, Eurosam 1979.*

[F1] *R.P. FEYNMAN et A.R. HIBBS - Quantum mechanics and path integrals - Mc Graw-Hill Book Company, 1965.*

[F2] *J. FITCH - A Survey of symbolic computation in physics - dans Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, n° 72, Berlin Eurosam 1979, p. 30-41.*

[F3] *M. FLIESS - Sur divers produits de séries formelles - Bull. Soc. Math., France, 102, 1974, p. 181-191.*

[F4] *M. FLIESS - Séries formelles non commutatives et automatique non linéaire - dans Séries formelles en variables non commutatives et applications, Ed. J. Berstel, Paris, L.I.T.P. et E.N.S.T.A., 1978, p. 69-118.*

[F5] *M. FLIESS - Développements fonctionnels en indéterminées non commutatives de solutions d'équations différentielles non linéaires forcées - C.R. Acad. Sc., 287, 1978, Série A p. 1133-1135.*

[F6] *M. FLIESS - Formule donnant les moments des solutions d'équations différentielles stochastiques non linéaires - Rapport interne n°19, 1978.*

[F7] *M. FLIESS - A Remark on the transfer functions and the realization of homogeneous continuous-time non linear systems IEEE Trans. Autom. Control, AC-24, 1979, p. 507-508.*

[F8] *M. FLIESS - Stabilité d'un type élémentaire d'équations différentielles stochastiques à bruits vectoriels - (à paraître).*

[G1] *E.G. GILBERT - Functional Expansions for the response of non linear differential systems - IEEE Trans. Automat. Control, AC-22, 1977, p. 909-921.*

[G 2] W. GRÖBNER - Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen - 2ème édition, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[I 1] K. ITO - Stochastic Differentials - Appl. Math. Optimization, 1, 1975, p. 374-381.

[K 1] D.E. KNUTH - The Art of computer programming - Vol. 1 : Fundamental Algorithms, Addison-Wesley Massachusetts, 1977.

[K 2] P.I. KUZNETSOV, R.L. STRATONOVICH et V.I. TIKHONOV - Non Linear transformations of stochastic processes, Pergamon Press, Oxford, 1975.

[L 1] F. LAMNABHI et M. LAMNABHI - Détermination algébrique des noyaux de Volterra associés à certains systèmes non linéaires - Recerche di Automatica, 10, 1979.

[L 2] F. LANGOUCHE, D. ROEKAERTS et E. TIRAPEGUI - Functional integral method for stochastic fields - Physica, 95A, 1979, p. 252-274.

[L 3] S.C. LIU - Solution of Fokker-Planck equation with applications in non linear random vibration - Bell. System Tech. J., 48, 1969, p. 2031-2051.

[M 1] K. MATSUO - Brownian motion of non linear oscillators : the projection operator method and its application to a double-well-potential oscillator - J. Stat. Phys., 18, 6, 1978, p. 535-555.

[M 2] G.E. MITZEL, S.J. CLANCY et W.J. RUGH - On Transfer function representations for homogeneous non linear systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC 24, 1979, p. 242-249.

[M 3] J.B. MORTON et CORRSIN - Experimental confirmation of the applicability of the Fokker-Planck equation to a non linear oscillator, J. Math. Phys., 10, 1969, p. 361-368.

[M 4] J.B. MORTON et S. CORRSIN - Consolidated expansions for estimating the response of a randomly driven non linear oscillator - J. Stat. Phys., 2, 1970, p. 153-194.

[N 1] A. NAYFEH - Perturbation methods - Wiley-Interscience, New York, 1973.

[U1] *C.A. UZES - Mechanical response and the initial value problem, J. Math. Phys., 19, 1978, p. 2232-2238.*

[V1] *H.L. VAN TREES - Functional technics for the analysis of the non linear behavior of phased-locked loops, Proc. IEEE, 52, 1964, p. 894-911.*

[W1] *R.M. WILCOX et R. BELLMAN - Truncation and preservation of moment properties for Fokker-Planck moment equations - J. Math. Anal. Appl., 32, 1970, p. 532-542.*

[W2] *H.W. WYLD - Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid - Ann. Phys., 14, 1961, p. 143.*

[W3] *E. WONG et M. ZAKAI - On the relation between ordinary and stochastic differential equations - Int. J. Engin. Sci., 3, 1965, p. 213-229.*