



HAL
open science

Courbes de Lavrentiev et intégrales singulières

Guy David

► **To cite this version:**

Guy David. Courbes de Lavrentiev et intégrales singulières. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1981. Français. NNT: . tel-04157022

HAL Id: tel-04157022

<https://theses.hal.science/tel-04157022v1>

Submitted on 10 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
n° d'ordre :



UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE :

PAR

M. Guy DAVID

SUJET : COURBES DE LAVRENTIEV ET INTEGRALES SINGULIERES.

soutenue le 27 mars 1981 devant la Commission d'examen

MM. J.-P. Kahane Président

Y. Meyer

N. Varopoulos

Je voudrais exprimer ici ma profonde reconnaissance à Yves Meyer, qui a été un directeur de recherche aussi efficace qu'amical et attentionné, et remercier Mme Dumas, qui a eu le courage de dactylographier le texte qui suit.

COURBES DE LAVRENTIEV ET INTEGRALES SINGULIERES

par Guy DAVID

La notion de quasi-cercle a été introduite en 1963 par L. Ahlfors [1]. Un quasi-cercle est une courbe de Jordan Γ telle que, si A et B sont deux points de Γ et si C est sur l'arc AB , on ait toujours $\|AC\| \leq C^{\text{te}} \|AB\|$. Ahlfors a montré que les quasi-cercles sont les images de la droite réelle par les bijections quasi-conformes de \mathbb{C} (d'où leur nom). La notion de quasi-cercle s'est révélée productive (voir par exemple [2]).

Nous allons étudier une classe un peu plus restreinte de courbes, introduite par Lavrentiev : les courbes de Lavrentiev, ou courbes corde-arc. Une courbe de Jordan rectifiable Γ satisfait à une condition corde-arc (ou plus simplement est corde-arc) s'il existe une constante C telle que, pour tout couple (A,B) de points de Γ , la longueur de l'arc AB (on prend le plus court si Γ est fermée) est inférieure à C fois la distance $\|AB\|$.

La constante corde-arc de Γ sera la plus petite des constantes C telles que l'on ait cette inégalité.

La première partie concerne la description géométrique des courbes corde-arc. Plus précisément, on attache à toute courbe corde-arc Γ orientée et sur laquelle on a choisi une origine, une fonction réelle dans $BMO(\mathbb{R})$ qui est un argument du vecteur unitaire de la tangente orientée, en fonction de la longueur d'arc. On étudie alors la correspondance entre Γ et \mathbb{b} (surjectivité sur une boule, etc.).

L'ensemble des courbes corde-arc est invariant par les automorphismes de la sphère de Riemann. De tels automorphismes affectent d'ailleurs assez peu la mesure harmonique sur les courbes corde-arc.

Notons pour terminer que les courbes corde-arc jouissent de propriétés remarquables vis à vis des représentations conformes. Citons par exemple le théorème suivant, dû à D. S. Jerison et C. E. Kenig ([7]), et qui fait suite à des travaux de Lavrent'ev [14] et Pommerenke [16] : si Γ est une courbe de Jordan, on considère une représentation conforme Φ du demi-plan supérieur de \mathbb{C} sur un des ouverts Ω^+ délimités par Γ . Alors Γ est corde-arc si Γ est un quasi-cercle si $|\Phi'(x)| \in A_\infty$ (classe de Muckenhoupt), et si Φ' est extérieure. Ce résultat a été démontré de manière indépendante par M. Zinsmeister ([18]).

Dans la seconde partie, nous attachons à toute courbe rectifiable, orientée et séparant le plan en deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2 les deux espaces de Hardy naturels $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$. La disposition de ces deux espaces à l'intérieur de $L^2(\Gamma)$ est un problème ouvert. Par exemple, on ne sait pas quelles sont les courbes Γ telles que $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$: ce problème est une reformulation de celui de la continuité de l'opérateur de Calderón. On sait cependant que, pour toute courbe Γ de constante corde-arc assez petite, $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1) + H^2(\Omega_2)$ et ces deux espaces sont presque orthogonaux (voir [6]).

Nous montrerons que, réciproquement, si $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ sont presque orthogonaux, la courbe Γ est corde-arc avec une petite constante.

Dans la troisième partie, nous montrerons que, si $z(x)$ est le paramétrage normal d'une courbe corde-arc de constante assez petite, le noyau $\frac{z'(x)^{1/2} z'(y)^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}}$ définit un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R})$, et même de $L^2(\mathbb{R}, w dx)$ quand w est un poids de la classe A^2 de Muckenhoupt (lorsque $\gamma = 0$, on retrouve un équivalent de l'opérateur de Calderón).

I. PROPRIETES GEOMETRIQUES DES COURBES CORDE-ARC.

Cette première partie est consacrée à la démonstration de quelques résultats simples sur la géométrie des courbes corde-arc. Nous nous intéresserons d'abord à la manière dont on peut définir une courbe corde-arc ouverte à partir de l'abscisse curviligne et d'une fonction argument dans $BMO(\mathbb{R})$. Nous utiliserons beaucoup l'espace $BMO(\mathbb{R})$ des fonctions à oscillation moyenne bornée. Rappelons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est dans $BMO(\mathbb{R})$ si $\exists C$, t. q. $\forall I \in \mathbb{R}$ un intervalle borné,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f| dx \leq C \quad (\text{où } m_I f \text{ est la moyenne de } f \text{ sur } I).$$

La plus petite constante C est notée $\|f\|_{BMO}$ et est une norme sur $BMO(\mathbb{R})$.

Exceptionnellement, nous utiliserons sur BMO la norme suivante :

$$\|b\|_{BMO,2} = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |b(t) - m_I b|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad \text{la borne supérieure étant prise sur tous}$$

les intervalles bornés de \mathbb{R} . L'équivalence des normes $\|b\|_{BMO}$ et $\|b\|_{BMO,2}$ est une conséquence classique de l'inégalité de John et Nirenberg [10].

PROPOSITION 1. Soit b une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit Γ la courbe paramétrée par $z(s) = \int_0^s e^{ib(t)} dt + z(0)$. Si $\|b\|_{BMO,2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, alors Γ admet une constante corde-arc inférieure à $\frac{1}{\cos \theta}$.

Avant de démontrer la proposition nous allons faire quelques remarques.

1. Les constantes de la proposition sont les meilleures possibles comme le montre clairement l'exemple où $b(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $b(x) = 2\theta$ pour $x > 0$.

2. Le résultat plus simple mais aussi utile : "si $\|b\|_{BMO}$ est assez petite, la constante corde-arc de Γ est aussi petite qu'on veut" est de démonstration très facile :

$$\begin{aligned} |z(x) - z(y)| &= \left| \int_x^y e^{ib(t)} dt \right| = |y-x| \left| \frac{1}{(y-x)} \int_x^y e^{i(m_{[x,y]} b - b(t))} dt \right| \\ &\geq |y-x| \{1 - \|b\|_{BMO}\} \quad \text{car} \quad \left| e^{i(m_{[x,y]} b - b(t))} - 1 \right| \leq |m_{[x,y]} b - b(t)|. \end{aligned}$$

3. Nous appellerons \mathcal{G} le groupe des homéomorphismes croissants de \mathbb{R}

qui préservent les ensembles de mesure nulle et induisent par composition un isomorphisme de $BMO(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire tels que l'application linéaire $V_h : f \rightarrow f \circ h$ soit un isomorphisme de $BMO(\mathbb{R})$). P. Jones a montré [12] que les éléments h de \mathcal{G} sont les homéomorphismes croissants qui sont des primitives de poids de l'ensemble A^∞ de Muckenhoupt. Cela signifie que $\forall \alpha \in]0,1[$, $\exists \beta \in]0,1[$, $\forall E$ mesurable $\subset I$ intervalle, $\frac{|E|}{|I|} < \alpha \Rightarrow \frac{|h(E)|}{|h(I)|} < \beta$. En particulier, $h \in \mathcal{G} \Rightarrow \text{Log } h' \in BMO(\mathbb{R})$ et si $\|\text{Log } h'\|_{BMO}$ est assez petite, alors h est dans \mathcal{G} .

Si b est une fonction complexe et $\|b\|_{BMO}$ est assez petite, $z(x) = z(0) + \int_0^x e^{ib(t)} dt$ est un paramétrage d'une courbe de constante corde-arc aussi petite qu'on veut : on fait le changement de variable défini par $\text{Log } h' = \text{Im } b$ pour se ramener à l'abscisse curviligne, et on utilise la continuité de l'opérateur de changement de variable associé pour se ramener au cas où b est réelle.

Démonstration de la proposition 1. Soit Γ la courbe paramétrée par $z(s) = z(0) + \int_0^s e^{ib(t)} dt$. Supposons que $\exists (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\exists \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $|z(s) - z(t)| = |s-t| \cos \theta$. Nous voulons montrer que $\|b\|_{BMO,2} \geq \theta$. On peut se ramener au cas où $z(0) = 0$ et $z(1) = \cos \theta \geq 0$ en faisant subir à la courbe une similitude directe (on change la fonction $t \rightarrow b(t)$ en $t \rightarrow b(at) + B$).

LEMME. $\forall (\alpha, \theta) \in \mathbb{R} \times]0, \pi[$, $\frac{2\theta}{\sin \theta} (\cos \alpha - \cos \theta) + \alpha^2 \geq \theta^2$.

Démonstration. Soit $g_\theta(\alpha) = \frac{2\theta}{\sin \theta} (\cos \alpha - \cos \theta) + \alpha^2$, $g'_\theta(\alpha) = \frac{-2\theta}{\sin \theta} \sin \alpha + 2\alpha$.

La fonction $x \rightarrow \frac{x}{\sin x}$ est injective sur $]0, \pi[$ (sa dérivée est du signe de $\sin x - x \cos x$, dont la dérivée est $x \sin x > 0$ sauf en 0); $g'_\theta(\alpha)$ ne s'annule donc qu'en $\alpha = 0$ et $\alpha = \theta$ sur $]0, \pi[$ et $g''_\theta(\theta) = \frac{-2\theta}{\text{tg } \theta} + 2 \geq 0$. Le minimum de g_θ sur $]0, \pi[$, donc aussi sur $]-\pi, \pi[$ par parité, et sur \mathbb{R} tout entier, est atteint en θ , d'où le lemme.

En intégrant un tel résultat entre 0 et 1, on obtient le

COROLLAIRE. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit $\theta \in [0, \pi[$.
Si $\int_0^1 \cos \alpha(t) dt = \cos \theta$, alors $\int_0^1 \alpha^2(t) dt \geq \theta^2$.

Si nous revenons à notre fonction b , nous constatons que $\int_0^1 \cos b(t) dt = \cos \theta$
 et $\int_0^1 \sin b(t) dt = 0$. On en déduit $\int_0^1 \cos [b(t) - m_{[0,1]} b] dt = \cos \theta \cos m_{[0,1]} b$,
 ce qui implique $\int_0^1 (b(t) - m_{[0,1]} b)^2 dt \geq [\text{Arc cos}(\cos \theta \cos m_{[0,1]} b)]^2 \geq \theta^2$ et
 $\|b\|_{\text{BMO}, 2} \geq \theta$. La proposition est démontrée.

Nous allons maintenant donner une sorte de réciproque de la proposition 1. Pour toute courbe corde-arc Γ , nous construirons un argument $\alpha(s)$ de l'angle de la tangente à Γ au point d'abscisse curviligne s . Nous montrerons que cet argument est dans $\text{BMO}(\mathbb{R})$. Nous pourrions bien sûr prendre pour $\alpha(s)$ l'argument principal (compris entre $-\pi$ et π) de l'angle de la tangente, nous obtiendrions sans nous fatiguer $\alpha(s) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Nous voulons cependant que $\alpha(s)$ rende compte le mieux possible de la géométrie de Γ . En particulier, nous voulons que, si Γ est de classe C^1 , $\alpha(s)$ soit continue.

Soit Γ une courbe ouverte rectifiable séparant le plan. Soit $z(s)$ un paramétrage de Γ par la longueur d'arc. Soient aussi Ω^+ et Ω^- les deux ouverts simplement connexes séparés par Γ . On définit sur $(\Omega^+ \times \Omega^-)$ (qui est simplement connexe) un argument $A(z, z')$ de l'angle de $z - z'$, où z est dans Ω^+ et z' dans Ω^- . Un tel argument est unique à partir du moment où l'on connaît sa valeur en un point. On aura bien sûr $\forall z \in \Omega^+, \forall z' \in \Omega^-, z - z' = |z - z'| e^{iA(z, z')}$.

On peut maintenant définir la fonction $F(s, t) : \mathbb{R}^2 - \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(s, t) = \lim_{\substack{\Omega^+ \ni z \rightarrow z(t) \\ \Omega^- \ni z' \rightarrow z(s)}} A(z, z') \text{ pour } s < t \text{ et } F(s, t) = F(t, s) \text{ sinon.}$$

La fonction $F(s, t)$ ainsi définie est continue.

$\alpha(t) = \lim_{\substack{u \rightarrow t^+ \\ v \rightarrow t^- \\ u \neq v}} F(u, v)$ existe presque partout. Ce sera notre argument.

PROPOSITION 2. Si Γ est une courbe corde-arc ouverte de constante C , la fonction α définie plus haut est dans $BMO(\mathbb{R})$, et $\|\alpha\|_{BMO} \leq K(C)$.

Démonstration. Pour un intervalle $[s, t]$, $F(s, t)$ est précisément le réel qui jouera le rôle de la "bonne constante". F étant la partie imaginaire d'une détermination de $\text{Log}(z(t)-z(s))$ vérifie $|\frac{\partial}{\partial t} F(s, t)| \leq \frac{1}{|z(s)-z(t)|} |\frac{dz(t)}{dt}| = \frac{1}{|z(s)-z(t)|}$. La condition corde-arc nous donne $|\frac{\partial}{\partial t} F(s, t)| \leq \frac{C}{|s-t|}$.

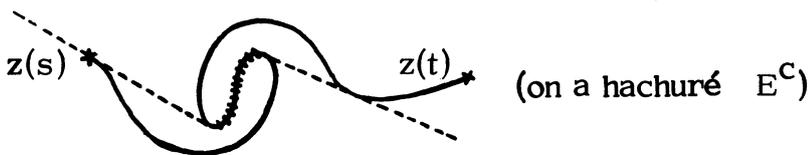
LEMME 1. Si $s \leq \frac{s+t}{2} \leq u \leq t$

$$|F(s, u) - F(s, t)| \leq C \text{Log } 2.$$

La démonstration est évidente :

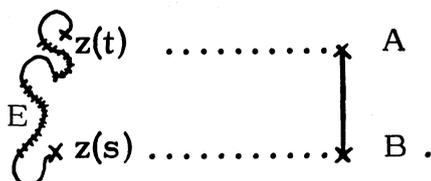
$$|F(s, t) - F(s, u)| \leq \int_{\frac{s+t}{2}}^t |\frac{\partial}{\partial v} F(s, v)| dv \leq \int_{\frac{s+t}{2}}^t \frac{C}{|s-v|} dv \leq C \text{Log } 2.$$

Fixons un intervalle compact $[s, t]$. Soit E le sous-ensemble des points de Γ compris entre $z(s)$ et $z(t)$ desquels on peut mener une demi-droite ne coupant pas l'arc $\widehat{z(s)z(t)}$.



LEMME 2. $|\bar{E}| \geq \frac{|s-t|}{C}$ (\bar{E} est la fermeture de E).

On choisit un segment $[AB]$ assez loin de l'arc $\widehat{z(s), z(t)}$ et tel que $z(s), z(t), A, B$ forment un rectangle dont les grands côtés sont $[z(t)A]$ et $[z(s)B]$. \bar{E} contient la "projection" de $[AB]$ suivant la direction $[z(t), A]$ et $|\bar{E}| \geq \|AB\| \geq \frac{s-t}{C}$.



LEMME 3. Soit u un réel tel que $z(u) \in \bar{E}$.

$$\forall (v, w) \in [s, t], \quad |F(u, v) - F(u, w)| \leq 2\pi.$$

Il suffit, vu la continuité de F , de supposer que $z(u) \in E$ et de considérer le plan privé d'une demi-droite issue de $z(u)$ et ne rencontrant pas l'arc $\widehat{z(s), z(t)}$ en un autre point. On y définit un argument continu de $z(t) - z(s)$ et qui doit coïncider avec $F(s, t)$; la conclusion suit.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition.

Soit \tilde{F} le complémentaire de \bar{E} , et soit F son image réciproque par $t \rightarrow z(t)$. Soit $F = \bigcup_n F_n$ une décomposition de F en intervalles ouverts disjoints. Soient s_n et t_n les extrémités de F_n . Comme F_n est distinct de $[s, t]$, l'une au moins de ces extrémités est dans \bar{E} (plus précisément dans son image réciproque par la fonction z). Supposons que ce soit s_n . D'après le lemme 1,

$$|F(s, s_n) - F(s, t)| \leq C \text{Log } 2 \quad (\text{si } s_n \geq \frac{s+t}{2})$$

$$\text{ou } |F(s_n, t) - F(s, t)| \leq C \text{Log } 2 \quad (\text{si } s_n \leq \frac{s+t}{2})$$

$$\text{et d'après le lemme 3, } |F(s, s_n) - F(s_n, t_n)| \leq 2\pi$$

$$\text{et } |F(s_n, t) - F(s_n, t_n)| \leq 2\pi.$$

$$\text{Donc } |F(s_n, t_n) - F(s, t)| \leq C \text{Log } 2 + 2\pi.$$

D'autre part, en combinant à nouveau les lemmes 1 et 3 avec u à la place de s_n , on a

$$z(u) \in \bar{E} \implies |\alpha(u) - F(s, t)| \leq C \text{Log } 2 + 2\pi \quad \text{p. p.}$$

En appliquant à chaque intervalle $[s_n, t_n]$ la construction qui vient d'être faite avec $[s, t]$, on obtient un nouvel ensemble \bar{E}_1 tel que $z(u) \in \bar{E}_1 \implies |\alpha(u) - F(s, t)| \leq 2(C \text{Log } 2 + 2\pi)$ et $|\bar{E}_1| \leq |E^c| \leq |s-t| (1 - \frac{1}{C})$. On définit ainsi une suite d'ensembles $E, E_1, \dots, E_n, \dots$ disjoints et tels que

$$\forall z(u) \in E_n, \quad |\alpha(u) - F(s, t)| \leq (n+1)(C \text{Log } 2 + 2\pi)$$

et
$$|(E \cup E_1 \cup \dots \cup E_n)^c| \leq (t-s) \left(1 - \frac{1}{C}\right)^{n+1}.$$

On en déduit l'inégalité souhaitée

$$\begin{aligned} \int_s^t |\alpha(u) - F(s,t)| dt &\leq (C \text{ Log } 2 + 2\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (t-s)(n+1) \left(1 - \frac{1}{C}\right)^n \\ &\leq C^2 (C \text{ Log } 2 + 2\pi) (t-s) \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

On peut donner de la proposition 2 une version légèrement différente. On considère l'ensemble \mathcal{C} des courbes corde-arc ouvertes pointées et orientées (c'est-à-dire l'ensemble des paramétrages normaux de courbes corde-arc), quotienté par le groupe des isométries directes de \mathbb{C} . Chaque élément de \mathcal{C} a un certain nombre de représentants paramétrés par $z(s)$ avec $z(0) = 0$ qui se déduisent les uns des autres par simple rotation autour de 0. Pour chacun, on peut définir la fonction $\alpha(S)$ comme précédemment. La fonction $\alpha(S)$ est alors connue (à partir d'un élément de \mathcal{C}) à une constante près. On a donc, d'après la proposition 2, une application injective Φ de \mathcal{C} dans $\text{BMO}(\mathbb{R})$.

En fait, l'image de \mathcal{C} est un ouvert.

Soit Γ un représentant de $e \in \mathcal{C}$, soit $\alpha \in \text{BMO}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ qui lui est associée.

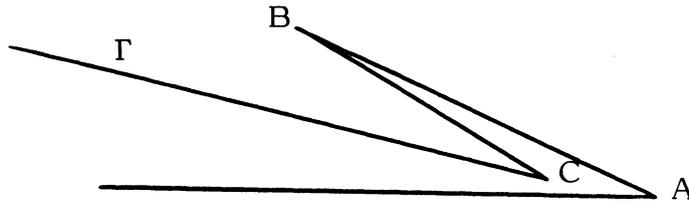
Si la constante corde-arc de Γ est C , on a, pour tout intervalle I de \mathbb{R} d'extrémités x et y , $|z(x) - z(y)| \geq C^{-1}(y-x)$; et si $\|b\|_{\text{BMO}} < \frac{1}{2} C^{-1}$ et

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_0^t e^{i\alpha(u)} e^{ib(u)} du, \quad |z_1(x) - z_1(y)| \geq C^{-1}(y-x) - \int_x^y |1 - e^{ib(u)}| du \\ &\geq \frac{1}{2} C^{-1}(y-x). \end{aligned}$$

Comme il est presque évident que z_1 est bien représenté par $\alpha(t) + b(t)$, la démonstration est terminée. (En fait $\Phi(\tilde{z}_1) = \alpha + b$ découle de ce que la fonction $F_1(s,t)$ définie à partir de z_1 comme $F(s,t)$ l'a été à partir de z diffère de $F(s,t) + m_{[s,t]} b(t)$ de moins de $\frac{\pi}{4}$, ce qui prouve que $\alpha_1(t)$ diffère de $\alpha(t) + b(t)$ de moins de $\frac{\pi}{4}$...).

On peut maintenant se demander à quoi ressemble l'image de \mathcal{C} dans $\text{BMO}(\mathbb{R})$.

Il est clair que cette image n'est pas convexe : on considère la courbe suivante :



On associe à Γ une fonction $\alpha(s)$:

$$\begin{cases} \alpha(s) = 0 & \text{pour } s \leq 0 \\ \alpha(s) = \pi - \frac{1}{1000} & \text{pour } 0 < s < 1 \\ \alpha(s) = 2\pi - \frac{2}{1000} & \text{pour } 1 \leq s \leq 2 - \frac{1}{100} \\ \alpha(s) = \pi - \frac{1}{1000} & \text{pour } s > 2 - \frac{1}{100} \end{cases}$$

et la courbe Γ_t définie par $t\alpha(s)$ ($0 < t < 1$) a un point double pour $t = \frac{3}{4}$, par exemple.

Le problème de savoir si \mathcal{C} est connexe est, semble-t-il, beaucoup plus difficile. On peut cependant donner une réponse partielle en utilisant une représentation conforme Φ de \mathbb{R}^{2+} sur le domaine Ω^+ .

Les valeurs au bord de Φ donnent une paramétrisation de Γ . Le théorème de J. et K. [7], qui dit que la mesure harmonique est équivalente à la longueur d'arc à A^∞ près, peut être interprété ainsi : la paramétrisation de Γ par Φ est obtenue à partir de la paramétrisation normale par un changement de variable dans \mathcal{G} .

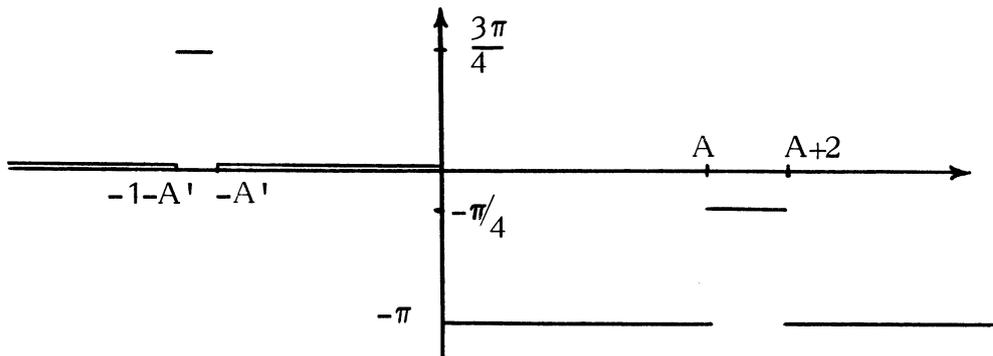
L'utilisation des représentations conformes permet de montrer que \mathcal{C} est connexe, si on le munit de la topologie faible induite sur $BMO(\mathbb{R})$ par la dualité avec H^1 . Dans le cas d'une courbe fermée, on utilise les images de cercles concentriques par une représentation conforme du disque unité sur la composante bornée de $\mathbb{C} - \Gamma$ pour faire un chemin continu reliant Γ à une courbe C^∞ . Le cas d'une courbe ouverte n'est pas fondamentalement différent comme on le verra plus tard (propositions 3 et 5).

Remarque. Si Γ est une courbe corde-arc, et Φ une représentation conforme de \mathbb{R}_+^2 sur Ω^+ , la fonction $\text{Log } \Phi'$ est définie à $2k\pi i$ près et $(\Phi')^t$ est définie à constante multiplicative près. Soit Φ_t l'application holomorphe de dérivée $(\Phi')^t$ nulle en 0. Φ_t n'est pas toujours une représentation conforme, car sa restriction à \mathbb{R} n'est pas toujours injective.

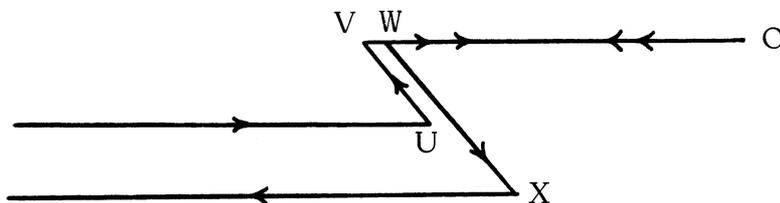
[La non-convexité de \mathcal{C} dont il était question plus haut n'est pas uniquement due au fait que le paramétrage par la longueur d'arc n'est pas le bon paramétrage. Il est cependant amusant de constater que le contre-exemple donné plus haut ne convient pas ici.]

Démonstration de la remarque.

On appelle A et A' des constantes appelées à tendre vers $+\infty$. On considère Φ l'application holomorphe de \mathbb{R}^{2+} dans \mathbb{C} telle que le graphe de $\text{Im Log } \Phi'_t$ soit le suivant



En choisissant convenablement A et A' , la courbe Γ aura l'allure suivante :



On voit que dans ce cas, pour $t < 1$ et t assez proche de 1, Γ_t sera corde-arc. Il suffit donc de trouver $t' < 1$ tel que $\Gamma_{t'}$ ait un point double (Γ_t est la courbe paramétrée par $\Phi_t|_{\mathbb{R}}$).

$$\begin{aligned} \text{Im Log } \Phi'_t(x) &= \frac{3\pi}{4} \text{sg}(x+A'+1) - \frac{3\pi}{4} \text{sg}(x+A') - \pi \text{sg } x \\ &\quad + \frac{3\pi}{4} \text{sg}(x-A) - \frac{3\pi}{4} \text{sg}(x-(A+2)) + C^{te}, \end{aligned}$$

$$|\Phi'_t(x)| = e^{\text{Re Log } \Phi'_t(x)} = e^{\mathcal{H}(\text{Im Log } \Phi'_t)(x)} = C_1 \left| \frac{x+A'}{x+A'+1} \right|^{3/4} |x| \left| \frac{x-(A+2)}{x-A} \right|^{3/4}.$$

Soit M (arbitrairement grand) et ε (petit) deux réels fixés. On suppose A et A' supérieurs à M et $t \in [1-\varepsilon, 1]$, moyennant quoi les majorations et

équivalences écrites plus bas seront uniformes.

Evaluons les longueurs $U_t V_t$, $V_t O_t$, $O_t W_t$ et $W_t X_t$

$$U_t V_t = C_t \int_{-A'-1}^{-A'} \left| \frac{x+A'}{x+A'+1} \right|^{\frac{3t}{4}} |x| t \left| \frac{x-(A+2)}{x-A} \right|^{\frac{3t}{4}} dt$$

$$U_t V_t \approx C_t A'^t I \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\frac{3}{4}} dx$$

$$V_t O_t \approx C_t \int_{-A'+\sqrt{A'}}^0 |x| t \approx C_t \frac{A'^{t+1}}{2}$$

$$O_t W_t \approx C_t \int_0^{A-\sqrt{A}} |x| t + \int_{A-\sqrt{A}}^A A^t \left| \frac{x-A-2}{x-A} \right|^{\frac{3t}{4}} dx.$$

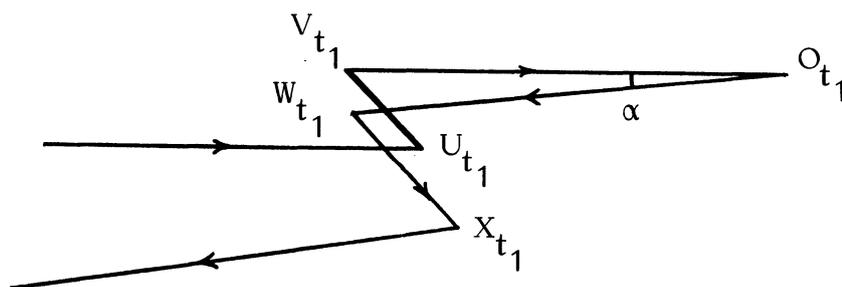
Lorsque $A \rightarrow +\infty$, le second terme est de l'ordre de $A^{t+1/2}$, donc

$$O_t W_t \approx C_t \frac{A^{t+1}}{2}.$$

$W_t X_t$ s'évalue comme $U_t V_t$, soit $W_t X_t \approx 2C_t A'^t I$. On peut fixer

$C_t = \frac{1}{A'^t I}$ (c'est-à-dire choisir la "taille" de la courbe Γ_t). Soit $\eta = \frac{1}{1000}$. Si

A' est fixé, OW est une fonction continue de A , ainsi que OV . Il existe donc $A(A')$ tel que $OW = OV - \eta$. De plus, $A(A') \approx A'$ à cause des équivalences déjà calculées. Soit $t_1 = 1 - \frac{1}{10A'}$; Γ_{t_1} aura un point double et sera du type suivant :



avec $U_{t_1} V_{t_1} \approx 1$

$$V_{t_1} O_{t_1} \approx O_{t_1} W_{t_1} \approx \frac{A'}{2I}$$

$$W_{t_1} X_{t_1} \approx 2$$

et $\alpha = \frac{\pi}{10A'}$.

Il suffit pour le montrer de vérifier que

$$|v_{t_1} o_{t_1} - o_{t_1} w_{t_1}| < \frac{1}{100},$$

soit encore que

$$|(VO - v_{t_1} o_{t_1}) - (WO - w_{t_1} o_{t_1})| < \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} = \frac{9}{1000}$$

$$VO - v_{t_1} o_{t_1} = \frac{1}{I} \int_{-A'}^0 [\Phi'(x) - (\Phi'(x))^{t_1}] dx.$$

Remarquons que $\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - e^{t_1 u}| < (1-t_1) \sup(1, e^u)$.

Soit $J = [-A' + A'^{2/3}, -A' e^{-10\sqrt{A'}}]$.

Si $x \in J$, $\Phi'(x) \simeq \frac{|x|}{A'^{1/3}}$ et $\text{Log } \Phi'(x) \simeq \text{Log } \frac{|x|}{A'^{1/3}}$;

$$\frac{1}{I} \int_J [\Phi'(x) - \Phi'(x)^{t_1}] dx \simeq \frac{1}{I} \int_J \frac{|x|}{A'^{1/3}} \text{Log } \frac{|x|}{A'^{1/3}} dx \simeq \frac{1}{10 I^2} \int_0^1 |x| \text{Log } \frac{|x|}{I} dx,$$

et

$$\frac{1}{I} \int_{[-A', 0]/J} |\Phi'(x) - \Phi'(x)^{t_1}| dx \leq \frac{1}{10 A'} \int_{[-A', 0]/J} |1 + \Phi'(x)| dx \leq \frac{1}{5 A'^{1/3}}.$$

On voit que $VO - v_{t_1} o_{t_1}$ tend vers $\frac{1}{10} \int_0^{1/I} |x| \text{Log } |x| dx$ lorsque $A' \rightarrow +\infty$.

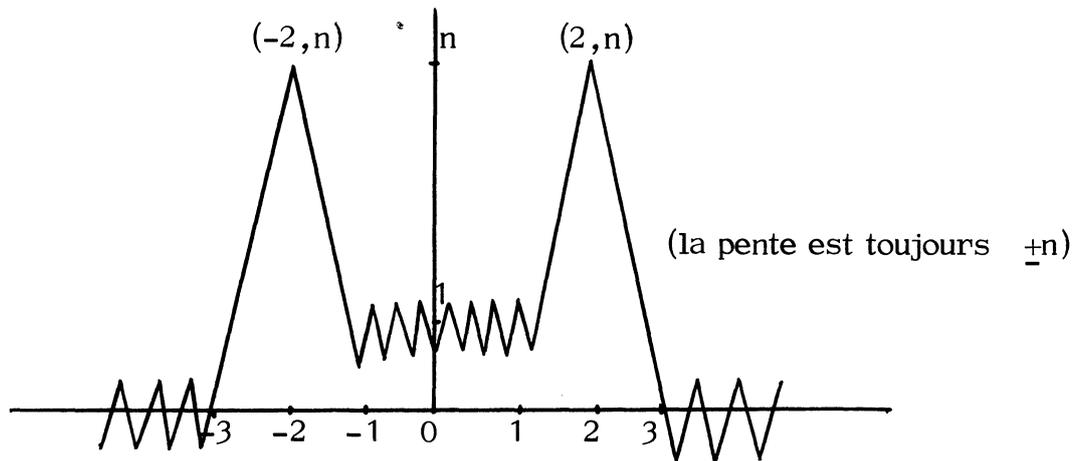
Il en va de même pour $WO - w_{t_1} o_{t_1}$. La différence tend vers 0, ce qui termine la démonstration.

La plupart des résultats que l'on montre à propos des courbes corde-arc ouvertes (ou fermées) sont aussi vrais dans le cas fermé (ou ouvert), et la même démonstration s'applique (voir par exemple [7]). Cette similitude des théories est bien sûr la conséquence de la similitude des notions de courbes corde-arc fermées et ouvertes. Dans certains cas, on peut aussi remarquer que le résultat démontré est invariant par une inversion polaire appliqué à la courbe. En effet, la condition corde-arc est invariante par une telle inversion.

PROPOSITION 3. Soit Γ une courbe, ouverte ou fermée, vérifiant la condition corde-arc avec une constante C . Son image par une inversion polaire vérifie alors la condition corde-arc avec la constante $64 C^3$ (dans la suite, on confondra allègrement

inversion et application du type $z \rightarrow \frac{1}{z-a} + a$.

Remarque. Une estimation du type $K.C^3$ est ce qu'on peut espérer de mieux. Nous allons donner un exemple de courbes de constante C dont les inverses ont une constante en C^3 . Ce sont les graphes de fonctions lipschitziennes de rapport n ($C = \sqrt{n^2+1}$):



Il est immédiat de voir que les images des points $(-2, n)$ et $(2, n)$ sont distantes d'environ $\frac{4}{n}$ et que les trajets pour aller de l'une à l'autre seront sensiblement égaux, de l'ordre de grandeur de n . Avant de passer à la démonstration de la proposition, démontrons deux lemmes.

LEMME 1. Soit Γ une courbe corde-arc de constante C . Son intersection avec un disque de rayon R est de longueur inférieure à $4CR$.

Dans le cas ouvert, il suffit de considérer le premier point où l'on rentre dans le disque et le dernier d'où on en sort. Ces deux points sont distants d'au plus $2R$: la portion de courbe qui est dans le disque est par définition moins longue que l'arc qui les joint, de longueur $\leq 2CR$.

Dans le cas fermé, si la courbe est incluse dans le disque, on considère deux points partageant la courbe en deux arcs de longueurs égales; $|\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2| \leq 2 \times 2CR = 4CR$. Sinon, soient A et B les extrémités d'un intervalle maximal compris hors du disque. Si le chemin le plus court entre ces deux points passe par le disque, on se ramène au cas ouvert; si c'est le chemin le plus long qui passe par le disque

on appelle C le point qui sépare ce chemin en deux arcs égaux.

Si C est dans le disque, $|\Gamma \cap D| \leq \widehat{AC} + \widehat{BC} \leq 4CR$.

Si C n'est pas dans le disque, soient E et F les derniers points du disque en allant de A vers C et de B vers C . Alors $|\Gamma \cap D| \leq \widehat{AE} + \widehat{BF} \leq 4CR$. Le lemme 1 est démontré.

LEMME 2. Soit Γ une courbe corde-arc de constante C . La longueur L de l'inverse d'une portion de la courbe située hors du disque de rayon R centré sur le pôle est inférieure à $\frac{8C}{R}$.

Soit $S(r)$ la longueur de la portion de courbe comprise entre R et r (r est $\geq R$). $S(r)$ est croissante et inférieure à $4Cr$ d'après le lemme 1. Soit r_n une suite croissante de réels positifs, vérifiant $r_0 = R$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$

$$L \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(r_n) - S(r_{n-1})}{(r_{n-1})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} S(r_n) \left(\frac{1}{r_{n-1}^2} - \frac{1}{r_n^2} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4C \frac{r_n (r_n^2 - r_{n-1}^2)}{r_n^2 r_{n-1}^2}$$

donc $L \leq 8C \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{8C}{R}$. Le lemme 2 est démontré.

Passons à la démonstration de la proposition 3.

Soit 0 le pôle de l'inversion et A un point de Γ qui minimise la distance à 0 . Soit $d(0,A) = R_A$ cette distance.

On note Γ' l'image de Γ par l'inversion, A' celle de A , etc... Appelons w le point de Γ tel que $\widehat{wA} = \frac{|\Gamma|}{2}$ si Γ est fermée, et le point à l'infini si Γ est ouverte.

LEMME 3. Soient B et D deux points de Γ tels que A ne soit pas sur \widehat{BD} . Alors $\widehat{BD} \cap D(0, \frac{R_B}{4C}) = \emptyset$ si $\widehat{BA} \leq \widehat{DA}$.

Démonstration. On peut supposer $R_D \geq 4C R_A$. Soit E un point de \widehat{BD} qui minimise $d(0,E) = R_E$,

$$R_E + R_A \geq |AE| \geq \frac{\widehat{AE}}{C} \geq \frac{AB}{C} \geq \frac{R_B - R_A}{C} \geq \frac{R_B}{2C},$$

$$\text{d'où } R_E \geq \frac{R_B}{4C}.$$

Le lemme 3, combiné avec le lemme 2, donne immédiatement

$$\text{LEMME 4. Soit } B \in \Gamma \text{ et } d(0, B) = R_B. \text{ Alors } w'B' \leq \frac{32 C^2}{R_B}.$$

LEMME 5. Soient B et D deux points de Γ . Si $R_B R_D \leq 64 C^2 R_A^2$,

$$\frac{\widehat{B'D'}}{|B'D'|} \leq 64 C^3.$$

$$\text{Démonstration. } \widehat{B'D'} \leq \frac{\widehat{BD}}{R_A^2} \text{ et } |B'D'| \geq \frac{|BD|}{R_B R_D} \geq \frac{|BD|}{64 C^2 R_A^2},$$

$$\text{d'où } \frac{\widehat{B'D'}}{|B'D'|} \leq 64 C^2 \frac{\widehat{BD}}{|BD|} \leq 64 C^3.$$

Nous pouvons maintenant vérifier la condition corde-arc pour Γ' .

On suppose que $R_E R_F \geq 64 C^2 R_A^2$. En particulier $R_E + R_F \geq 16 C R_A$.

$$\widehat{E'F'} \leq \widehat{E'w'} + \widehat{F'w'} \leq 32 C^2 \left(\frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_F} \right) \text{ (lemme 4) et } |E'F'| = \frac{|EF|}{R_E R_F},$$

$$\text{d'où } \frac{\widehat{E'F'}}{|E'F'|} \leq 32 C^2 \frac{R_E + R_F}{|EF|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } A \text{ est compris entre } E \text{ et } F, \quad |EF| &\geq \frac{\widehat{EF}}{C} \geq \frac{\widehat{EA} + \widehat{FA}}{C} \\ &\geq \frac{R_E + R_F - 2R_A}{C} \geq \frac{R_E + R_F}{2C}, \end{aligned}$$

$$\text{et alors } \frac{\widehat{E'F'}}{|E'F'|} \leq 64 C^3.$$

Si A n'est pas entre E et F, supposons que $\widehat{AE} \leq \widehat{AF}$ et appliquons

$$\text{le lemme 3 : } \widehat{E'F'} \leq \frac{16 C^2}{R_E^2} \widehat{EF}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\widehat{E'F'}}{|E'F'|} \leq \frac{16 C^2}{R_E^2} R_E R_F \frac{\widehat{EF}}{|EF|}.$$

$$\text{Si } R_F \leq 4R_E, \text{ on a bien } \frac{\widehat{E'F'}}{|E'F'|} \leq 63 C^3.$$

$$\text{Si } R_F \geq 4R_E, \quad |EF| \geq R_F - R_E \geq \frac{R_F}{2} + \frac{R_F - 2R_E}{2} \geq \frac{R_F}{2} + R_E \geq \frac{R_F + R_E}{2},$$

$$\text{d'où } \frac{\overbrace{|E'F'|}^{\text{arc}}}{|E'F'|} \leq 32 C^2 \frac{R_E + R_F}{\frac{R_E + R_F}{2}} \leq 64 C^2 \leq 64 C^3.$$

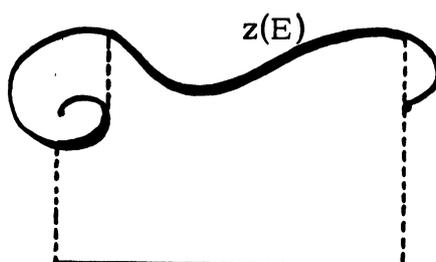
La proposition 3 est démontrée.

Nous utiliserons dans la proposition 5 un résultat semblable à celui de la proposition 2 (et concernant des courbes ouvertes).

PROPOSITION 4. Soit Γ une courbe corde-arc de constante C . Soit $z(s)$ un paramétrage de Γ par la longueur d'arc. Soit 0 un point de Γ^c et $b_0(s) = \text{Arg}(z(s) - 0)$, défini de manière à être continu sur \mathbb{R} . Alors $b_0 \in \text{BMO}(\mathbb{R})$ et $\|b_0\|_{\text{BMO}} \leq 16 \pi C^2$.

Démonstration. Soit $[s, t]$ un segment de \mathbb{R} . Soit $J = [A, B]$ un segment du plan complexe tel que $A, B, z(s), z(t)$ forment un rectangle, et que la droite contenant J ne coupe pas l'arc de Γ compris entre $z(s)$ et $z(t)$. Soit π la projection de cet arc $\Gamma_{s,t}$ sur la droite $D(A, B)$.

On appelle E l'ensemble des réels u de $[s, t]$ tels que $\pi(z(u))$ soit sur J et que le segment $[z(u), \pi(z(u))]$ ne coupe pas non tangentiellement $\Gamma_{s,t}$.



E est fermé dans $[s, t]$. ($E^c \cap [s, t]$ est ouvert dans $[s, t]$). On peut d'autre part supposer que 0 n'est dans aucun des segments $[z(u), \pi(z(u))]$ par $u \in E$. (Autrement, on choisirait un intervalle $A'B'$ de l'autre côté de la courbe). Alors on peut prolonger de manière continue $\text{Arg}(z(s) - 0)$ à tous les points z de ces intervalles. On a alors, pour u et v dans E ,

$$\begin{aligned} |b_0(u) - b_0(v)| &\leq |b_0(u) - \text{Arg}(\pi(z(u)) - 0)| + |b_0(v) - \text{Arg}(\pi(z(v)) - 0)| \\ &\quad + |\text{Arg}(\pi(z(u)) - 0) - \text{Arg}(\pi(z(v)) - 0)| \\ &\leq 4\pi. \end{aligned}$$

Il existe donc un fermé E de mesure $\geq \frac{|s-t|}{c}$ et une constante α telle que $u \in E \implies |b_0(u) - \alpha| \leq 2\pi$. On continue comme dans la proposition 2 : soit $F = \cup F_n$ une décomposition du complémentaire de E en intervalles ouverts. Sur chaque F_n , il existe un sous-ensemble fermé E_1^n dans F_n de mesure au moins $\frac{|F_n|}{c}$ tel que pour u et v dans E_1^n , $|b_0(u) - b_0(v)| \leq 4\pi$.

De plus, si $F_n = [a_n, b_n]$, l'une des extrémités de F_n (mettons a_n) est dans E , c'est-à-dire qu'on peut mener une demi-droite de $z(a_n)$ sans couper $\Gamma_{s,t}$ (ni Γ_{a_n, b_n} non plus).

Quand on prolonge la fonction $\text{Arg}(z - 0)$ aux segments $[z(u), \pi_1(z(u))]$ pour $u \in E_1$, on peut en profiter pour la prolonger aussi à la demi-droite en question.

Notons que si l'on fait le parcours suivant : départ en $z(a_n)$, parcours de la demi-droite, puis grande boucle loin de Γ_{a_n, b_n} et de 0 pour rejoindre $\pi_1(z(u))$, segment $[\pi_1(z(u)), z(u)]$, et arrivée en a_n en suivant Γ , on tourne au plus une fois autour de 0 . Par conséquent, $|b_0(u) - b_0(a_n)| \leq 6\pi$ pour tout u dans E_1 . Ainsi, sur E_1 , on a $|b_0(u) - \alpha| \leq 2\pi + 6\pi$.

On construit par récurrence et suivant le même procédé des ensembles E_n disjoints, tels que $|(E \cup E_1 \cup \dots \cup E_n)^c| \leq (t-s)(1 - \frac{1}{c})^{n+1}$ et tels que sur E_n , on ait $|b_0(u) - \alpha| \leq 2\pi + 6\pi n$. La conclusion suit en sommant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-s} \int_s^t |b_0(u) - \alpha| du &= \frac{1}{t-s} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |b_0(u) - \alpha| du \leq 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^n 6\pi n \\ &\leq 2\pi(1 + 3c^2) \leq 8\pi c^2. \end{aligned}$$

(La proposition est démontrée).

On considère le cercle de diamètre $[-i, 0]$ dans le plan complexe. Son image par l'inversion de pôle $-i$ est la droite réelle. On identifiera ce cercle au tore \mathbb{T} , et le tore à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. L'inversion est alors l'application $x \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ restreinte à $]-\pi, \pi]$.

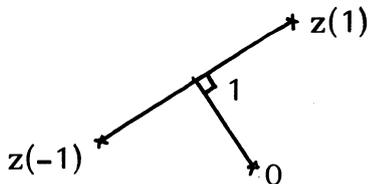
PROPOSITION 5. L'application $F : b(\cdot) \rightarrow b(\operatorname{tg} \frac{\cdot}{2})$ est un isomorphisme de $\text{BMO}(\mathbb{R})$ sur $\text{BMO}(\mathbb{T})$.

Nous donnerons de cette proposition la démonstration la plus géométrique possible, mais pas forcément la plus directe.

Montrons que F est continue. Soit $b \in \text{BMO}(\mathbb{R})$, $\|b\|_{\text{BMO}} \leq \epsilon$. On peut supposer b réelle. La courbe définie par $z(s) = \int_0^s e^{ib(t)} dt + c^{te}$ est corde-arc, ainsi que son inverse de pôle 0 (proposition 3). (On l'appellera Γ_1).

$$\left(\frac{1}{z(s)}\right)' = \frac{-e^{ib(s)}}{z^2(s)} = \frac{-e^{ib(s)-2b_0(s)}}{|z^2(s)|} \quad (b_0 \text{ est la fonction de la proposition 4}).$$

Supposons que C ait été choisie de sorte qu'on ait le cas de figure suivant :



Alors $|z^2(s)|$ est équivalent (avec des constantes universelles si ϵ est assez petit) à $(1 + s^2)$.

Soit $t = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} s$

$$\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{dt} = \left(\frac{1}{z(s)}\right)' \frac{1}{2}(1 + s^2).$$

t est donc un paramétrage de Γ_1 équivalent à la longueur d'arc (au sens que

$\frac{dt}{ds_1} \in L^\infty$ et $\frac{ds_1}{dt} \in L^\infty$ avec des normes bornées).

La proposition 2 nous donne $b(\text{tg } \frac{\dot{z}}{2}) - 2 b_0(\text{tg } \frac{\dot{z}}{2}) \in \text{BMO}$.

La proposition 4 nous donne $b_0(\text{tg } \frac{\dot{z}}{2}) \in \text{BMO}$ (avec des normes bornées). On en déduit bien que $b(\text{tg } \frac{\dot{z}}{2})$ est dans BMO (avec une norme bornée).

Il nous reste à montrer que la réciproque G de F envoie continuellement $\text{BMO}(\mathbb{T})$ dans $\text{BMO}(\mathbb{R})$.

On s'appuiera sur le lemme géométrique suivant :

LEMME. $\exists \varepsilon > 0, \exists c_0 \geq 1$ t. q.

$$\forall b \in \text{BMO}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \quad \|b\|_{\text{BMO}} < \varepsilon,$$

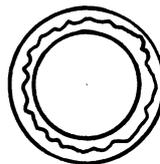
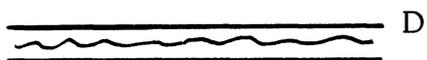
$$\exists \tilde{b} \in \text{BMO}(\mathbb{T}), \quad \|b - \tilde{b}\|_\infty < 4, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tilde{b}(s)} ds = 0,$$

et la courbe paramétrée par $z'(s) = e^{i\tilde{b}(s)}$ est corde-arc avec une constante inférieure à c_0 . (On fabrique une courbe corde-arc fermée à partir d'une courbe corde-arc périodique).

Démonstration (abrégée). La fonction b définit une courbe corde-arc périodique et de constante corde-arc inférieure à $(1 - \varepsilon)^{-1}$. On peut enfermer la courbe entre deux droites $y = 1 - \eta$ et $y = 1 + \eta$ (à condition de lui faire subir d'abord une rotation), où η ne dépend que de ε (et est aussi petit qu'on veut).

Si L est la période de la courbe ($L \simeq 2\pi$), on considère l'application de la bande D comprise entre les deux droites dans une couronne \mathcal{C} définie par :

$$x + iy \rightarrow y e^{i \frac{2\pi x}{L}}$$



On obtient une courbe périodique, paramétrée par $z'(s) = e^{i\tilde{b}(s)}$, qui reste corde-arc, et il est évident que $\|b - \tilde{b}\|_\infty$ est majoré. L'intérêt de ce lemme est qu'on peut se limiter aux fonctions réelles b telles que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ib(s)} ds = 0$, c'est-à-dire aux

paramétrisations de courbes corde-arc de constantes inférieures à C_1 . La partie réciproque de la proposition 5 se démontre maintenant comme la partie directe : à la fonction b , on associe la fonction \tilde{b} et la courbe associée, et on fait une inversion de pôle $0 \in \tilde{\Gamma}$. $\text{tg}(\frac{\cdot}{2})$ sera un paramétrage admissible de la courbe inversée et on pourra conclure.

COROLLAIRE. Soient Γ et Γ' deux courbes corde-arc, transformées l'une de l'autre par inversion plane. Cette inversion, restreinte à Γ et Γ' , induit par composition un isomorphisme entre $BMO(\Gamma)$ et $BMO(\Gamma')$.

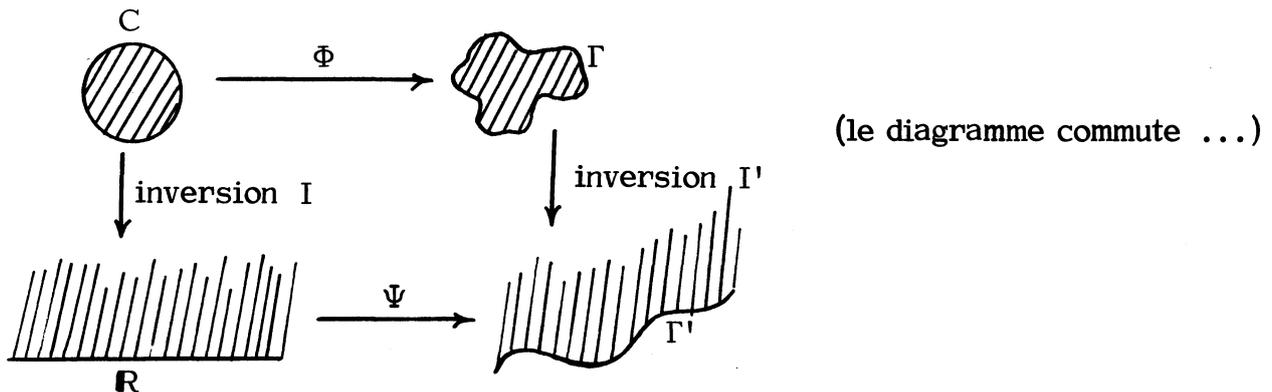
Le résultat est évident lorsque Γ et Γ' sont deux courbes fermées (l'inversion a alors des dérivées directes et réciproques bornées sur Γ et Γ' ...). Supposons que Γ est une courbe ouverte ne passant pas par 0 . Soit d la distance de 0 à Γ . On peut en fait supposer que $d = 1$: remplacer la courbe Γ par une homothétique Γ_1 par rapport à 0 revient à composer notre isomorphisme par l'isométrie : $b \in BMO \rightarrow b' \in BMO$, où $b'(x) = b(ax)$ pour un $a > 0$. On peut choisir l'origine d'un paramétrage normal de Γ en un point qui minimise la distance. (On se met dans un cas semblable à celui de la proposition 5, partie directe). Alors $|z(s)|$ est équivalent à $\sqrt{1+s^2}$ (les constantes de l'équivalence ne dépendent que de la constante corde-arc de Γ). Cela implique que le paramétrage de Γ' par $x \rightarrow \frac{1}{z(\text{tg} \frac{x}{2})}$ est équivalent (à L^∞ près) au paramétrage par la longueur d'arc. Le résultat découle alors de la proposition 5.

Si Γ est une courbe ouverte passant par 0 , alors $|z(s)|$ est équivalent à s si on prend $z(0) = 0$. Cela veut dire que le paramétrage de Γ' par $x \rightarrow \frac{1}{z(\frac{1}{x})}$ est L^∞ -équivalent au paramétrage de Γ' par la longueur d'arc. Il ne reste plus qu'à prouver que l'opérateur $V : b(x) \rightarrow b(\frac{1}{x})$ est un isomorphisme de $BMO(\mathbb{R})$. Or V n'est autre que le conjugué de l'isométrie $b(x) \rightarrow b(\pi-x)$ (de $BMO(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sur lui-même) par l'isomorphisme de la proposition 5.

(En effet, pour tout x réel, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 2 \operatorname{Arctg} x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} x\right) = \operatorname{cotg} \operatorname{Arctg} x = \frac{1}{x}$).

Le corollaire est donc démontré.

Remarque. On pourrait par exemple utiliser le corollaire pour déduire l'équivalence (à A^∞ près) de la mesure harmonique et du ds pour une courbe corde-arc fermée, connaissant le résultat pour une courbe ouverte :



II. PRESQUE ORTHOGONALITE DES ESPACES DE HARDY.

Dans ce qui va suivre, Γ sera une courbe de Jordan ouverte orientée de \mathbb{C} . On notera Ω^+ et Ω^- les deux composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. On notera aussi P^+ et P^- les demi-plans supérieur et inférieur limités par \mathbb{R} . Φ (resp. Ψ) sera une représentation conforme de P^+ (resp. P^-) sur Ω^+ (resp. Ω^-).

Soit $H^2(\Omega^+)$ (resp. $H^2(\Omega^-)$) l'espace de Hardy des fonctions analytiques dans Ω^+ (resp. Ω^-), et ayant des valeurs au bord de carré intégrable. Ce sont deux sous-espaces de $L^2(\Gamma)$. Pour une définition plus précise, voir [18].

Dans le cas où Γ est \mathbb{R} , nous avons le résultat suivant :

$H^2(P^+)$ et $H^2(P^-)$ sont deux sous-espaces fermés orthogonaux de $L^2(\mathbb{R})$, et $H^2(P^+) \oplus H^2(P^-) = L^2(\mathbb{R})$.

R. Coifman et Y. Meyer ont montré [6] que si Γ est une courbe corde-arc de constante $C \leq 1 + \delta(\epsilon)$ (δ assez petit, et tendant vers 0 avec ϵ), on avait encore $H^2(\Omega^+) \oplus H^2(\Omega^-) = L^2(\Gamma)$, avec une somme presque-orthogonale, c'est-à-dire que $\operatorname{Angle}(H^2(\Omega^+), H^2(\Omega^-)) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ [autrement dit, $\forall f_1 \in H^2(\Omega^+), \forall f_2 \in H^2(\Omega^-)$,

$(f_1 | f_2)_{L^2(\Gamma)} \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon).$ En fait, on peut assimiler $L^2(\Gamma)$ à $L^2(\mathbb{R})$ en utilisant la longueur d'arc sur Γ . $H^2(\Omega^+)$, $H^2(\Omega^-)$ sont alors, tout comme $H^2(P^+)$ et $H^2(P^-)$ des sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$.

La démonstration de Coifman-Meyer, qui est basée sur une majoration de la "vitesse de rotation" du sous-espace $H^2(\Omega_t^+)$ en fonction de $\text{Log } \Phi'_t = t \text{Log } \Phi'$, nous donne $\text{Angle sup}(H^2(\Omega^+), H^2(P^+)) \leq \frac{\epsilon}{2}$. (Cela signifie que $\forall f_1 \in H^2(\Omega^+)$, $\|f_1\| = 1$, $\exists f_2 \in H^2(P^+)$, $(f_1 | f_2) \geq \|f_2\| \cos \frac{\epsilon}{2}$). Bien entendu, la même inégalité est valable pour $\text{Angle sup}(H^2(\Omega^-), H^2(P^-))$.

Le but de cette partie est de montrer une réciproque de ce théorème : si les deux sous-espaces $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(\Omega^-)$ sont presque orthogonaux, ou si $\text{Angle sup}(H^2(\Omega^+), H^2(P^+))$ est assez petit, la courbe Γ est une courbe corde-arc, avec une petite constante.

On peut noter que ces théorèmes concernent seulement une "situation limite" : d'une part, on ne sait pas si le théorème de Calderon est vrai pour toute courbe corde-arc (même de grande constante) ; d'autre part, il est possible que la somme $H^2(\Omega^+) + H^2(\Omega^-)$ soit directe sans que la courbe Γ soit corde-arc (par exemple Γ peut être une parabole...)

Si Γ est une courbe ouverte simple, séparant le plan, (et que l'on supposera aussi de classe C^1), il est possible de calculer les projections de $L^2(\Gamma)$ sur $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(\Omega^-)$. Soit $U : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ défini par $U f(x) = f \circ \Phi(x) \Phi'(x)^{1/2}$ ($\Phi'^{1/2}$ est défini à constante près parce que Ω^+ est simplement connexe).

Alors U est un opérateur unitaire, et qui envoie les fonctions de $H^2(\Omega^+)$ sur celles de $H^2(P^+)$. La projection de $L^2(\Gamma)$ sur $H^2(\Omega^+)$ sera

$$U^{-1}(\frac{\text{Id}}{2} + \frac{i}{2} \mathcal{H})U = \frac{1}{2}(\text{Id} + iU^{-1} \mathcal{H} U), \text{ où } \mathcal{H} \text{ est la transformation de Hilbert.}$$

De même la projection sur $H^2(\Omega^-)$ est $\frac{1}{2}(\text{Id} - iV^{-1} \mathcal{H} V)$, où $V : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est donné par $V f(x) = f \circ \psi(x) \psi'(x)^{1/2}$. Dire que $\text{Angle sup}(H^2(\Omega^+), H^2(P^+)) \leq \frac{\epsilon}{2}$ veut aussi dire que les projections P_1 et P_2 sur $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(P^+)$

sont très proches, de sorte que, comme $2(P_1 - P_2) = U^{-1} \mathcal{H} U - \mathcal{H}$ est de la forme $M U_h \mathcal{H} U_h^{-1} N - \mathcal{H}$, où M et N sont des opérateurs de multiplication par un facteur unimodulaire et $U_h f(x) = f \circ h(x) h'(x)^{1/2}$ est l'opérateur de changement de variable associé à l'homéomorphisme h de \mathbb{R} défini par $\text{Log}(h^{-1})' = \text{Re Log } \Phi$, le théorème 1, qui sera démontré plus bas, implique que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \leq \delta(\epsilon)$, et aussi $\text{Im}(\text{Log } \Phi') = \mathcal{H} \cdot \text{Log } h'$, donc (modulo le théorème 1) : si $\text{Angle sup}(H^2(\Omega^+), H^2(P^+)) \leq \epsilon$ (ϵ assez petit) alors Γ est corde-arc de constante inférieure à $1 + C(\epsilon)$ (naturellement, $C(\epsilon)$ tendra vers 0 avec ϵ).

THEOREME 1. Soit h un homéomorphisme croissant de \mathbb{R} . Soit U_h l'opérateur défini par $U_h f(x) = f \circ h(x) h'(x)^{1/2}$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. Soient m et n deux fonctions : $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, et M et N les opérateurs de multiplication associés : $Mf(x) = m(x) f(x)$, $Nf(x) = n(x) f(x)$.

$\|M U_h \mathcal{H} U_h^{-1} N - \mathcal{H}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon$ (ϵ assez petit) ($\|\cdot\|$ désigne la norme d'un opérateur)
 $\Rightarrow \|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} < \delta(\epsilon)$, $\|m\|_{\text{BMO}} \leq \delta(\epsilon)$ et $\|n\|_{\text{BMO}} \leq \delta(\epsilon)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_{\text{BMO}} = 1$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} tel que $\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f| dx \geq \frac{3}{4}$. Soit $E = \{x \in I, f(x) > m_I f + \frac{1}{5}\}$ et $F = \{x \in I, f(x) < m_I f - \frac{1}{5}\}$. Alors $|E| \geq \epsilon_0 |I|$ et $|F| \geq \epsilon_0 |I|$ (ϵ_0 est une constante universelle).

Le lemme est une conséquence du résultat suivant : $\forall \epsilon > 0, \exists K > 0$,
 $\forall f \in \text{BMO}, \forall I$ intervalle,

$$\frac{1}{|I|} \int_{I \cap \{|f - m_I f| > K \|f\|_{\text{BMO}}\}} |f(x) - m_I f| dx \leq \epsilon \|f\|_{\text{BMO}},$$

qui est lui-même une conséquence de l'inégalité exponentielle de John-Nirenberg [10].

Commençons par calculer le noyau de l'opérateur $T = M U_h \mathcal{H} U_h^{-1} N$ (nous

laisserons cependant tomber le facteur $\frac{1}{\pi}$ qui apparaît dans la transformation de Hilbert). Si $f \in L^\infty$ et si $x \notin \text{supp } f$, $U_h f(x) = f \circ h(x) h'(x)^{1/2}$,

$$\mathcal{H}_{U_{h^{-1}}} f(x) = \int \frac{f \circ h^{-1}(y) [h^{-1}(y)']^{1/2}}{x - y} dy. \quad \text{On fait le changement de variables défini}$$

$$\text{par : } u = h^{-1}(y), \quad \frac{du}{dy} = h^{-1}(y)' = \frac{1}{h'(u)}, \quad \text{et}$$

$$\mathcal{H}_{U_{h^{-1}}} f(x) = \int \frac{f(u) h'(u)^{-1/2} h'(u) du}{x - h(u)},$$

$$\text{d'où } U_h \mathcal{H}_{U_{h^{-1}}} f(x) = \int \frac{f(y) h'(y)^{1/2} h'(x)^{1/2}}{h(x) - h(y)} dy,$$

$$\text{et } T f(x) = \int f(y) \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y)}{h(x) - h(y)} dy.$$

Nous allons commencer par prouver le résultat concernant $\|n\|_{\text{BMO}}$. Supposons que $\|n\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0$. L'une des deux coordonnées de n dans le plan complexe a une norme supérieure à $\frac{\delta_0}{2}$. Supposons que ce soit la seconde.

Choisissons un intervalle I tel que, si $m_I = m_I(\text{Im } n(t))$,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\text{Im } n(y) - m_I| dy = \delta \geq \frac{3}{4} \| \text{Im } n(t) \|_{\text{BMO}} \geq \frac{3}{8} \delta_0.$$

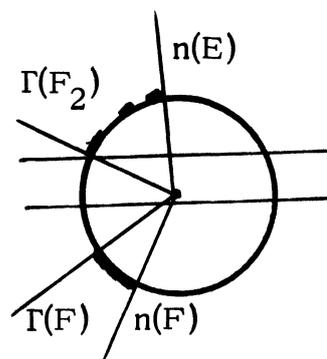
On considère $E = \{y \in I, \text{Im } n(y) - m_I \geq \frac{\delta}{5}\}$

$$\text{et } F = \{y \in I, \text{Im } n(y) - m_I \leq -\frac{\delta}{5}\}.$$

Les inégalités $|E| \geq \epsilon_0 |I|$ et $|F| \geq \epsilon_0 |I|$ (ϵ_0 constante universelle) découlent par exemple du lemme. (On aurait pu les montrer directement ici car elles sont évidentes du fait que $|\text{Im } n(y) - m_I| \leq 2$.)

Quitte à diviser ϵ_0 par deux et diminuer E et F , on peut supposer que chacun des deux ensembles $n(E)$ et $n(F)$ est inclus dans l'un des demi-cercles définis par $\text{Re}(z) > 0$ et $\text{Re}(z) \leq 0$.

Alors, si Γ_E et Γ_F sont les demi-cônes convexes fermés s'appuyant sur $n(E)$ et $n(F)$, tout point du



cercle unité est à une distance supérieure à $\frac{\delta}{10}$ de l'un au moins de ces cônes.

Posons $f_1 = \chi_E$ et $f_2 = \chi_F$, de sorte que $\|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 \leq |I|$.

Soit x un point de $J = I + 10|I|$. Soit $\mathcal{H}f_1(x) = \int_E \frac{1}{x-y} dy$. Alors

$$Tf_1(x) - \mathcal{H}f_1(x) = m(x) \mathcal{H}f_1(x) \left\{ \int_E \frac{1}{\mathcal{H}f_1(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy - \frac{1}{m(x)} \right\}.$$

$$\text{De même, } Tf_2(x) - \mathcal{H}f_2(x) = m(x) \mathcal{H}f_2(x) \left\{ \int_F \frac{1}{\mathcal{H}f_2(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy - \frac{1}{m(x)} \right\}.$$

Les deux crochets sont les différences entre le complexe $\frac{1}{m(x)}$ de module 1,

et deux éléments dont l'un est dans Γ_E et l'autre dans Γ_F . Il faut donc que

$$|Tf_1(x) - \mathcal{H}f_1(x)| \text{ ou } |Tf_2(x) - \mathcal{H}f_2(x)| \geq \frac{\varepsilon_0 \delta}{100}.$$

Nous avons démontré le résultat concernant n , à savoir que $\|n\|_{\text{BMO}} \geq \delta \implies \|T - \mathcal{H}\| \geq \varepsilon(\delta)$ (tendant vers 0 avec δ). On en déduit le résultat concernant $\|m\|_{\text{BMO}}$ par simple dualité.

Le résultat concernant $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}}$ est un peu plus compliqué à prouver, mais la démonstration se fait suivant le même principe.

Soit I un intervalle tel que si m_I représente $m_I \text{Log } h'$

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\text{Log } h'(x) - m_I| dx = \delta \geq \frac{3}{4} \|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \geq \frac{3\delta_0}{4}.$$

Soit encore $E = \left\{ y \in I, \text{Log } h'(y) - m_I > \frac{\delta}{5} \right\}$

$$\text{et } F = \left\{ y \in I, \text{Log } h'(y) - m_I < -\frac{\delta}{5} \right\}.$$

Nous sommes cette fois-ci obligés de nous servir du lemme démontré plus haut. Nous obtenons $|E| \geq 2\varepsilon_0 |I|$ et $|F| \geq 2\varepsilon_0 |I|$ pour une certaine constante universelle ε_0 .

Nous choisirons encore f_1 et f_2 à support dans I , et nous testerons le résultat de l'opérateur $|(T - \mathcal{H})f_i|$ sur les intervalles $J_1 = I - N|I|$, $J_2 = I + N|I|$.

(N est un entier assez grand qui sera choisi pour qu'en fait les variations relatives de $x - y$ pour $y \in I$ et $x \in J_i$ soient faibles). Comme

$$(T - \mathcal{H})f_i(x) = \int_I \frac{f_i(y)}{x-y} \left[\frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y)(x-y)}{h(x) - h(y)} - 1 \right] dy,$$

notre travail consistera à rendre le crochet significativement non nul pour tous les y

de E ou de F . Ce serait chose facile si $\frac{h'(x)^{1/2}(x-y)}{h(x)-h(y)}$ était très régulière en y . Le produit par $h'(y)^{1/2}$ serait alors fondamentalement différent sur E et sur F , et il nous suffirait de choisir $f_1 = \chi_E \frac{1}{n(y)}$ et $f_2 = \chi_F$ pour obtenir $\forall x \in J_1 \cup J_2$,

$$|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| + |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| \geq \frac{\varepsilon_0 |I|}{N |I|} \frac{\delta}{10}.$$

Le problème est donc que $\frac{1}{h(x)-h(y)}$ pourrait varier considérablement. Nous allons tourner la difficulté en utilisant les propriétés de monotonie des fonctions $y \rightarrow \frac{1}{h(x)-h(y)}$ pour $x \in J_1$ ou $x \in J_2$.

Posons $E = E_1 \cup E_2$, avec $E_1 = \{x \in E, x \leq c\}$ et $E_2 = \{x \in E, x > c\}$ pour une certaine constante c qui sera choisie de façon que $|E_1| = |E_2| = \frac{|E|}{2}$. On peut faire de même avec F . On obtient donc quatre ensembles E_1, E_2, F_1 et F_2 tels que $|E_i| \geq \varepsilon_0 |I|$ et $|F_i| \geq \varepsilon_0 |I|$ pour $i = 0, 1$, et $\forall x \in E_1, \forall x' \in E_2, x \leq x'$ (ce que nous noterons $E_1 \leq E_2$) et encore $F_1 \leq F_2$. Alors, l'une des deux propriétés suivantes est vraie :

1. $E_1 \leq F_2$
2. $F_1 \leq E_2$.

Dans le premier cas, on pose $f_1(y) = \chi_{E_1}(y) n(y)^{-1}$ et $f_2(y) = \chi_{F_2}(y)$.

Soit x un point de $J_1 = I - N|I|$. Alors, pour tout $y_1 \in E_1$ et tout $y_2 \in F_2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x-y_1)}{h(x)-h(y_1)} &\geq \frac{h'(x)^{1/2} (N-1) |I| e^{m_I/2} e^{\delta/10}}{|h(x)-h(y_1)|} \\ &\geq \frac{h'(x)^{1/2} e^{2\delta/10} h'(y_2)^{1/2}}{h(x)-h(y_1)} \frac{N-1}{N+1} (x-y_2) \\ &\geq \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2}}{h(x)-h(y_2)} \frac{N-1}{N+1} (x-y_2) e^{2\delta/10}. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $E_1 \subset E$, que $F_2 \subset F$ à la seconde ligne et $E_1 \leq F_2$ à la troisième).

Si N est assez grand pour que $\frac{N-1}{N+1} \geq e^{-\delta/10}$ (ce qui se produit pour $N \geq c^{te} \delta^{-1} \dots$), on a $\forall x \in J_1, \forall y_1 \in E_1, \forall y_2 \in E_2$,

$$\frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x-y_1)}{h(x) - h(y_1)} \geq e^{\delta/10} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x-y_2)}{h(x) - h(y_2)}.$$

Soit c_2 la borne supérieure du second terme et c_1 la borne inférieure du premier. (x étant fixé). On a, en plus de $c_1 \geq e^{\delta/10} c_2$, les inégalités :

$$\begin{aligned} (T - \mathcal{H}) f_1(x) &= \int_{E_1} - \frac{f_1(y)}{|x-y|} \left(\frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y) (x-y)}{h(y) - h(x)} - 1 \right) dy \\ &= \int_{E_1} - \frac{1}{y-x} m(x) \left(\frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} (x-y) - \frac{1}{m(x)} \right) dy, \end{aligned}$$

$$|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| \geq \int_{E_1} \frac{1}{(N+2) |I|} (c_1 - 1) dy \geq \frac{\varepsilon_0 (c_1 - 1)}{N+2} \quad \text{si } c_1 \geq 1$$

et

$$\begin{aligned} |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| &= \int_{F_2} \frac{1}{|x-y|} \left(1 - \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y) (x-y)}{h(x) - h(y)} \right) dy \\ &\geq \int_{F_2} \frac{1}{(N+2) |I|} (1 - c_2) dy \geq \frac{\varepsilon_0 (1 - c_2)}{N+2} \quad \text{si } c_2 \leq 1. \end{aligned}$$

On a en tous cas

$$|T - \mathcal{H} f_1(x)| + |T - \mathcal{H} f_2(x)| \geq \frac{\varepsilon_0}{N+2} (1 - e^{-\delta/10})$$

et ceci pour tout x de J_1 .

$$\text{On en déduit naturellement } ||| T - \mathcal{H} ||| \geq \frac{c^{te} \varepsilon_0 \delta}{N+2} \geq c^{te} \delta^2.$$

Dans le cas où $F_1 \leq E_2$, on choisit

$$f_1(y) = \chi_{F_1}(y) \quad \text{et} \quad f_2(y) = \chi_{E_2}(y) \frac{1}{n(y)},$$

et on observe que pour tout x de J_2 , on a

$$\forall y_1 \in F_1, \forall y_2 \in E_2, \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x-y_1)}{h(x) - h(y_1)} \geq \frac{N-1}{N+1} e^{\frac{2\delta}{100}} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x-y_2)}{h(x) - h(y_2)}$$

et on peut conclure comme dans le premier cas, ce qui finit de démontrer le théorème 1.

THEOREME 2. Soit Γ une courbe de Jordan que nous supposons aussi ouverte et de classe C^1 . Soient Ω^+ et Ω^- les deux composantes connexes de $C - \Gamma$. Soient enfin $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(\Omega^-)$ les espaces de Hardy associés. Si $L^2(\Gamma) = H^2(\Omega^+) + H^2(\Omega^-)$ avec $\text{Angle}(H^2(\Omega^+), H^2(\Omega^-)) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ (somme presque orthogonale), alors Γ est corde-arc de constante inférieure à $C(\epsilon)$ (ϵ est toujours $\leq \epsilon_0$).

La condition $\text{Angle}(H^2(\Omega^+), H^2(\Omega^-)) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ signifie :

$$\forall f_1 \in H^2(\Omega^+), \quad \forall f_2 \in H^2(\Omega^-), \quad |(f_1 | f_2)_{L^2}| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon).$$

Remarque. La condition "la somme de $H^2(\Omega^+)$ et de $H^2(\Omega^-)$ est $L^2(\Gamma)$ tout entier" est en fait superflue : elle découle de ce que la somme de ces deux sous-espaces est presque orthogonale (voir [6]).

La démonstration qui suit est largement inspirée de M. Zinsmeister [18].

LEMME . $\| \|VU^{-1} \mathcal{H} UV^{-1} \mathcal{H}\| \| \leq 5\epsilon^{1/2}.$

Rappelons que U est défini à partir de la représentation conforme $\Phi : P^+ \rightarrow \Omega^+$ et par $Uf(x) = f \circ \Phi(x) \Phi'(x)^{1/2}$, et V est défini pareillement à partir de $\psi : P^- \rightarrow \Omega^-$.

Comme U et V sont des opérateurs unitaires,

$$\| \|VU^{-1} \mathcal{H} UV^{-1} \mathcal{H}\| \| = \| \|U^{-1} \mathcal{H} U - V^{-1} \mathcal{H} V\| \|.$$

Si $P_1 = \frac{1}{2}(I + iU^{-1} \mathcal{H} U)$ et $P_2 = \frac{1}{2}(I - iV^{-1} \mathcal{H} V)$, il faut montrer que

$\| \|P_1 + P_2 - I\| \| \leq 5\epsilon^{1/2}$, ou encore que, pour tout x de $L^2(\Gamma)$, si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H^2(\Omega^+)$ et $x_2 \in H^2(\Omega^-)$, et si y est la projection orthogonale de x sur $H^2(\Omega^+)$, alors $\| \|x_1 - y\| \| \leq \frac{5}{2} \epsilon^{1/2} \| \|x\| \|.$

On peut se restreindre à l'espace de dimension 3 engendré par x , x_1 et y , avec x et y dans un plan "vertical". L'inégalité $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2(x_1 | x_2)$, $|(x_1 | x_2)| \leq \varepsilon \|x_1\| \|x_2\|$ suffit pour conclure.

COROLLAIRE. Si ε est assez petit, $\|\text{Log}(\Phi^{-1}\psi)'\|_{\text{BMO}} \leq \delta(\varepsilon) = \delta$ (avec $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

Il suffit d'appliquer le théorème 1.

Nous allons d'abord faire l'hypothèse "a priori" que Γ est une courbe corde-arc (sans toutefois préciser sa constante corde-arc !). En particulier, on sait que $\text{Log } \Phi' \in \text{BMO}_A(P^+)$ et $\text{Log } \psi' \in \text{BMO}_A(P^-)$ (voir par exemple [7]). Notons u la partie réelle de $\text{Log } \Phi'$, et v celle de $\text{Log } \psi'$. On a les relations $\text{Log } \Phi' = u + i\mathcal{H}u$ et $\text{Log } \psi' = v - i\mathcal{H}v$. Soit $h = \Phi^{-1} \circ \psi$. h est un homéomorphisme de \mathbb{R} , et nous savons que $h \in \mathcal{G}$. De $\Phi \circ h = \psi$, on déduit $\text{Log } \psi' = \text{Log } \Phi' \circ h + \text{Log } h'$, ce qui s'écrit $v - i\mathcal{H}v = u \circ h + i(\mathcal{H}u) \circ h + \text{Log } h'$.

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$v = u \circ h + \text{Log } h', \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(u \circ h + \text{Log } h') + (\mathcal{H}u) \circ h = 0.$$

En appelant V_h l'opérateur continu de $\text{BMO}(\mathbb{R})$ qui à f associe $f \circ h$, on a $(V_h \mathcal{H} + \mathcal{H}V_h)u = -\mathcal{H} \text{Log } h'$, ou encore

$$(\mathcal{H} + V_h^{-1} \mathcal{H} V_h)u = -V_h^{-1} \mathcal{H} \text{Log } h'.$$

$$\text{Or } \mathcal{H} + V_h^{-1} \mathcal{H} V_h = 2\mathcal{H} + (V_h^{-1} \mathcal{H} V_h - \mathcal{H}).$$

Si δ est assez petit, le fait que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} < \delta$ entraîne que

$$\|V_h^{-1} \mathcal{H} V_h - \mathcal{H}\|_{\text{BMO}(\mathbb{R})} < 1 \quad \text{car la fonction "Log } h' \rightarrow V_h^{-1} \mathcal{H} V_h \text{" est analytique}$$

en $\text{Log } h' \in \text{BMO}$ assez petit. On en déduit

$$u = -(\mathcal{H} + V_h^{-1} \mathcal{H} V_h)^{-1} V_h^{-1} \mathcal{H} \text{Log } h',$$

$$\text{et } \|u\|_{\text{BMO}} < C^{\text{te}} \|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \leq C^{\text{te}} \delta, \quad \text{et } \|\text{Log } \Phi'\|_{\text{BMO}} \leq C^{\text{te}} \delta;$$

Γ est donc bien corde-arc (ce que l'on a supposé) avec une constante aussi proche de 1

qu'on veut.

Il ne reste plus qu'à étudier le cas où Γ n'est pas corde-arc. Dans ce cas, on peut quand même poser $h = \Phi^{-1}\psi$, et $u = -(\mathcal{H} + V_h^{-1}\mathcal{H}V_h)^{-1}V_h^{-1}\mathcal{H}\text{Log } h'$. La fonction $u + i\mathcal{H}u \in \text{BMO}_A(\mathbb{R})$ peut être écrite $\text{Log } \tilde{\Phi}'$, où la fonction $\tilde{\Phi}$ est analytique, et même est une représentation conforme sur un domaine limité par une courbe corde-arc $\tilde{\Gamma}$, à condition que $\|u\|_{\text{BMO}}$ soit assez petite. De même, $v = u \circ h + \text{Log } h'$ s'écrit $v = \text{Re } \text{Log } \tilde{\psi}'$, avec $\text{Log } \tilde{\psi}' \in \text{BMO}_A(P^-)$; $\tilde{\psi}$ est aussi une représentation conforme de P^- sur un certain domaine, et si les constantes ont bien été choisies, $\tilde{\Phi}^{-1} \circ \tilde{\psi} = h$ (ce qui veut dire que ce domaine est lui aussi délimité par $\tilde{\Gamma}$). Ainsi la fonction h correspond à la fois à la courbe Γ et à la courbe $\tilde{\Gamma}$.

Un théorème d'Ahlfors [1] nous dit que dans ce cas Γ et Γ' sont semblables. Γ est donc corde-arc, et le théorème est démontré.

III. CONTINUITÉ D'UN OPÉRATEUR D'INTEGRALES SINGULIÈRES.

On peut donner du théorème de Calderón ($L^2(\Gamma)$ est la somme directe de $H^2(\Omega^+)$ et de $H^2(\Omega^-)$ quand Γ est corde-arc de constante assez petite) une version de théorie des opérateurs. On définit l'opérateur de Calderón par l'intégrale singulière
$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(z(y)) dz(y)}{z(x) - z(y)}$$
 pour $f \in C_0^\infty(\Gamma)$ et $x \in \mathbb{R}$ lorsque Γ est paramétrée par $z(t)$. Cet opérateur est continu sur L^2 lorsque $\|\text{Log } z'\|_{\text{BMO}}$ est

assez petite. On peut encore présenter ce résultat à l'aide du groupe \mathcal{G} des homéomorphismes croissants de \mathbb{R} à dérivée dans A^∞ et de la transformation de Hilbert.

On note, pour $h \in \mathcal{G}$, U_h l'opérateur défini par $U_h f(x) = f \circ h(x) h'(x)^{1/2}$.

Alors l'application $\text{Log } h' \in \text{BMO} \rightarrow U_h \mathcal{H} U_h^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ est analytique réelle au voisinage de $\text{Log } h' = \text{Log } h'_0$, avec $h_0 \in \mathcal{G}$ quelconque. Nous allons maintenant donner de ce résultat de commutation entre un opérateur pseudo-différentiel (\mathcal{H}) et un opérateur de changement de variable (U_h) une généralisation.

T_γ sera l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\text{sgn}(\xi) \xi^{i\gamma}$ (on se donne une fois pour toutes une représentation de $x \rightarrow x^{i\gamma}$ sur $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C} - i\mathbb{R}^+$).

L'opérateur $U_h T_\gamma U_h^{-1}$ a pour noyau $K_\gamma(x, y) = \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{(h(x)-h(y))^{1+i\gamma}}$. On peut démontrer (voir la thèse de 3ème cycle de Jean-Lin Journée) que $U_h T_\gamma U_h^{-1}$ est une fonction analytique réelle de $\text{Log } h' \in L^\infty(\mathbb{R})$ au voisinage de 0. Nous utiliserons ce résultat pour montrer le théorème qui suit, de sorte que comme ce résultat utilise le théorème de Calderón pour les domaines "Lipschitziens", les opérateurs complexes dont il sera question seront en quelque sorte "dominés" par l'opérateur de Calderón.

Constatons d'abord que $K_\gamma(x, y) = \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{(h(x)-h(y))^{1+i\gamma}}$ ne dépend pas que de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$: il n'est pas invariant par les transformations affines sur h . On ne peut donc pas espérer montrer que $U_h T_\gamma U_h^{-1}$ est une fonction analytique de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$. L'inconvénient n'est pas majeur : $K_\gamma(x, y) h'(x)^{i\gamma}$ est lui uniquement fonction de $\text{Log } h'$. (On a simplement rétabli l'homogénéité). Notons donc $M_\gamma(h')$ la multiplication par la fonction $h'(x)^{i\gamma}$.

Nous avons le théorème suivant :

THEOREME 3. L'opérateur $M_\gamma(h') U_h T_\gamma U_h^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ est une fonction analytique réelle de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$ t. q. $h \in \mathcal{G}$.

Nous montrerons le résultat suivant qui est un peu plus précis.

Si ω est un poids de la classe A^2 de Muckenhoupt, $M_\gamma(h') U_h T_\gamma U_h^{-1}$ se

prolonge analytiquement sur une boule $\| \text{Log } h' \|_{\text{BMO}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon(\omega)}{1+|\gamma|}$ en un opérateur continu sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \omega)$. Avant de chercher à définir ce prolongement, nous allons démontrer quelques lemmes géométriques et techniques qui permettront d'alléger un peu la démonstration.

Soit b une fonction réelle de BMO telle que $\|b\|_{\text{BMO}} < \eta$ ($\eta > 0$) et soit z telle que $z' = e^{ib}$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. On notera

$$m(x, \varepsilon) = m_{I(x, \varepsilon)} b = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} b(t) dt.$$

Pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} z(x) - z(y) &= \int_x^y e^{ib(t)} dt \\ &= (x-y) e^{im_{[x,y]} b} \left(1 + \frac{1}{x-y} \int_x^y [e^{ib(t)-im_{[x,y]} b} - 1] dt \right) \\ &= (x-y) e^{im_{[x,y]} b} (1 + \varepsilon(x, y)) \end{aligned}$$

(on notera toujours $[x, y]$ l'intervalle d'extrémités x et y , même si $x > y$).

L'inégalité $|e^{it} - 1| < |t|$ permet la conclusion $|\varepsilon(x, y)| < \|b\|_{\text{BMO}}$. Si $\eta < 1$, on définira $(z(x) - z(y))^{i\gamma}$ de la manière suivante :

$(z(x) - z(y))^{i\gamma} = (x-y)^{i\gamma} e^{-\gamma m_{[x,y]} b} (1 + \varepsilon(x, y))^{i\gamma}$; $1 + \varepsilon(x, y)$ étant astreint à rester dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, la définition de $(1 + \varepsilon(x, y))^{i\gamma}$ ne pose pas de problème : il suffit de prendre

$$(1 + \varepsilon(x, y))^{i\gamma} = \exp(i\gamma \text{Log}(1 + \varepsilon(x, y))) = \exp i\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \varepsilon(x, y)^n \right].$$

LEMME 1. Soit une courbe définie par une paramétrisation du type :

$$z(x) = \int_0^x e^{ib(t)} dt + z(0), \quad \text{où } \|b\|_{\text{BMO}} < \eta.$$

Cette courbe vérifie la condition corde-arc avec la constante $(1 - \eta)^{-1}$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |z(x) - z(y)| \geq (1 - \eta) |x - y|.$$

(En effet, avec les notations précédentes, $|z(x) - z(y)| = |x - y| \|e^{im_{x,y} b}\|_{1 + \varepsilon(x, y)}$).

Soit encore z comme dans le lemme 1. On définit une fonction b_1 de la manière suivante à partir d'un intervalle J ouvert.

Soit $U = \{x \in J, (b\chi_J - m_J b\chi_J)^*(x) > M\eta\}$.

(M est un réel positif qui sera déterminé bien plus tard, et $*$ désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood).

U est ouvert car la fonction maximale est s. c. i.

Soit $U = \bigcup_k J_k = \bigcup_k]a_k, b_k[$ sa décomposition en intervalles disjoints.

On prendra $\begin{cases} b_1 = b & \text{sur } J \setminus U \text{ et} \\ b_1 = c^{te} & \text{sur chaque }]a_k, b_k[\text{ de manière à ce que} \end{cases}$

$$e^{ib_1} = \frac{1}{b_k - a_k} \int_{a_k}^{b_k} e^{ib(t)} dt, \text{ avec } |\operatorname{Re} b_1 - m_J b| \leq \pi.$$

Notons que b_1 n'est pas toujours à valeurs réelles, mais que sa partie imaginaire est majorée par $|\operatorname{Log}(1-\eta)|$ si $\eta < 1$.

LEMME 2. On a alors les propriétés suivantes (concernant l'intervalle J)

1. $\exists A_0$, constante telle que $\|m_J b - b_1\|_\infty < A_0 M\eta$
2. $|U| < \frac{|J|}{M} C_1$

(si η est assez petit).

C_1 désigne la "norme" de $f \rightarrow f^*$ de L^1 dans L^1_{faible} .

Démonstration du lemme.

En un point de $J \cap U^c$, l'inégalité $(b\chi_J - \chi_J m_J b)^*(x) \leq M\eta$ entraîne par le théorème de différentiation de Lebesgue, que $|(b - m_J b)(x)| \leq M\eta$ p.p.

Si x est un point de U , soient a_k et b_k les deux extrémités de l'intervalle J_k qui le contient ; l'une au moins est distincte des extrémités de J comme le montrera la démonstration de la relation 2, (si $M > C_1$). Supposons que ce soit a_k . On a alors $(\chi_J b - \chi_J m_J b)^*(a_k) \leq M\eta$, et donc aussi

$$\frac{1}{b_k - a_k} \int_{a_k}^{b_k} |b(t) - m_J b| dt \leq M\eta.$$

La relation $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$ implique

$$\left| \frac{1}{b_k - a_k} \int_{a_k}^{b_k} (e^{i(b(t) - m_J b)} - 1) dt \right| \leq M\eta, \quad \text{qui s'écrit encore } \left| e^{i(b_1(x) - m_J(b))} - 1 \right| \leq M\eta.$$

Si l'on choisit $\eta < \frac{1}{10(M+1)}$, cette dernière inégalité implique $|m_J b - b_1(x)| < A_0 M\eta$

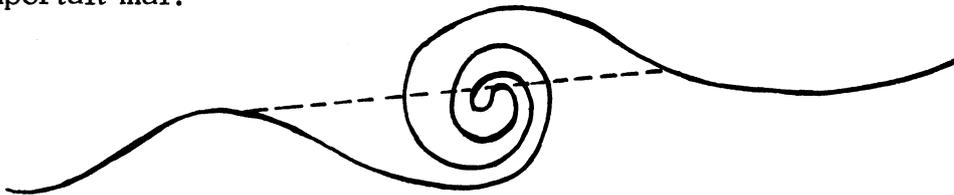
avec $A_0 = 2$.

La relation 2 provient de la continuité de $f \rightarrow f^*$ de L^1 dans L^1_{faible} : celle-ci nous donne en effet

$$\begin{aligned} \left| \left\{ (b\chi_J - m_J b\chi_J)^* > M\eta \right\} \right| &\leq \frac{\|b\chi_J - m_J b\chi_J\|_1}{M\eta} C_1 \leq \frac{|J| \|b\|_{\text{BMO}} C_1}{M\eta} \\ &\leq \frac{C_1 |J|}{M} \end{aligned}$$

(le lemme est démontré).

On peut exprimer la signification géométrique du lemme 2 de la manière suivante : étant donnée une courbe vérifiant une bonne relation corde-arc, on peut l'approcher par une courbe lipschitzienne plate en la lissant sur un ensemble d'intervalles J_n où elle se comportait mal.



Le lemme suivant donne une idée de l'approximation de la courbe par la courbe lissée.

A l'aide de la fonction b_1 , on construit la fonction z_1 (sur J) telle que $z_1' = e^{ib_1}$, et qui coïncide avec la fonction z sur $\bar{J} \setminus U$.

LEMME 3. Soit $y \in U$. Soit $]a_b, b_k[$ l'intervalle de U contenant y et soit $\ell_k = |b_k - a_k|$. On a $|z_1(y) - z(y)| < 2\ell_k$. (Toujours si $\eta < \frac{1}{10(M+1)}$).

En effet, $|z_1(y) - z(y)| \leq |z_1(y) - z_1(a_k)| + |z_1(a_k) - z(y)| \leq 2\ell_k$ car les applications z et z_1 sont 1-Lipschitziennes, la première parce que sa dérivée est de module 1, et la seconde parce que sa dérivée, moyenne de la précédente sur un intervalle, est de module ≤ 1 .

On peut définir $(z_1(x) - z_1(y))^{-1-i\gamma}$ comme on l'a fait pour la fonction z . On a alors le lemme suivant.

LEMME 4. Avec les notations et les hypothèses des lemmes précédents, si $x \in J \cap (\cup_k J_k)^c$ et $y \in]a_k, b_k[$,

$$\left| \frac{e^{-\gamma m_J b}}{(z_1(x) - z_1(y))^{1+i\gamma}} - \frac{e^{-\gamma m_J b}}{(z(x) - z(y))^{1+i\gamma}} \right| < \frac{c_2 \ell_k}{|x-y|^2}$$

(la constante c_2 ne dépend que de M, γ et η).

Démonstration. Le membre de gauche peut s'écrire

$$\left| \left(\frac{e^{im_J b}}{z_1(x) - z_1(y)} \right)^{1+i\gamma} - \left(\frac{e^{im_J b}}{z(x) - z(y)} \right)^{1+i\gamma} \right| = \frac{1}{|x-y|} \left| \left(\frac{e^{im_J b}}{z_1(x) - z_1(y)} \right)^{1+i\gamma} - \left(\frac{e^{im_J b}}{z_1(x) - z_1(y)} \right)^{1+i\gamma} \right|$$

Supposons un instant que nous avons montré que

$$\left| \left(\frac{e^{im_J b}}{z(x) - z(y)} \right)^{-1} - 1 \right| < \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \left| \left(\frac{e^{im_J b}}{z_1(x) - z_1(y)} \right)^{-1} - 1 \right| < \frac{15}{20}.$$

Comme la fonction $u \rightarrow u^{-1-i\gamma}$ est à dérivée bornée dans le disque de centre 1 et de rayon $\frac{16}{20}$, on aura, par simple application du théorème des accroissements finis, le majorant

$$\frac{1}{|x-y|} C^{te} \left| \frac{z(y) - z_1(y)}{e^{im_J b} (x-y)} \right| \leq \frac{c^{te}}{|x-y|^2} 2 \ell_k = \frac{C_2 \ell_k}{|x-y|^2} \quad (\text{voir le lemme 3}).$$

Il reste à montrer nos deux inégalités. La première se déduit de

$$\left| \frac{1}{x-y} \int_y^x (e^{ib(t) - im_J b} - 1) dt \right| \leq \frac{1}{x-y} \int_y^x |b(t) - m_J b| dt \leq (b \chi_J - m_J b \chi_J)^*(x)$$

et $|\dots\dots\dots| \leq M\eta < \frac{1}{10}.$

La deuxième s'en déduit parce que

$$\left| \frac{z_1(y) - z(y)}{z(x) - z(y)} \right| \leq \frac{2 \ell_n}{(1-\eta)4 \ell_n} \quad (\text{lemme 1}),$$

$$\left| \frac{z_1(y) - z(y)}{z(x) - z(y)} \right| \leq \frac{1}{2(1-\eta)}, \quad \text{et parce que, si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des complexes}$$

vérifiant $|\alpha - 1| < \frac{1}{10}$ et $|\beta - 1| < \frac{1}{2(1-\eta)} < \frac{1}{2 \cdot \frac{9}{10}}$, on a

$$|\alpha\beta - 1| < \frac{10}{18} + \frac{1}{10} + \frac{10}{180} < \frac{130}{180} < \frac{15}{20}.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 4.

Pour finir ces préliminaires géométriques, nous allons donner certains corollaires évidents de l'expression $z(x) - z(y) = (x-y) e^{im [x-y]^b} (1 + \epsilon(x,y))$ ($|\epsilon(x,y)| < \|b\|_{\text{BMO}}$) déjà utilisée pour le lemme 1.

$$\text{COROLLAIRE 1. } \frac{1}{2} \leq |(z(x) - z(y))^{-i\gamma} e^{-\gamma m [x,y]^b}| \leq 2$$

dès que $\|b\|_{\text{BMO}} (1 + |\gamma|) < \frac{1}{10}$.

COROLLAIRE 2. Soient c et C deux réels positifs. $\exists c', C''$ deux constantes > 0 , t. q. si $c|x-y| < \epsilon < C|x-y|$, on ait $\frac{c'}{|x-y|} \leq \left| \frac{e^{-\gamma m(x, \epsilon)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} \right| \leq \frac{C''}{|x-y|}$

Le corollaire 1 est évident et le corollaire 2 se déduit de la relation corde-arc (lemme 1), du corollaire 1, et de la propriété suivante des fonctions de BMO. Etant données c et C deux constantes, $\exists K$ telle que pour deux intervalles I et J vérifiant $c < \frac{|J|}{|I|} < C$ et $d(I, J) < C|J|$, on ait $|m_I(b) - m_J(b)| < K \|b\|_{\text{BMO}}$.

Nous allons maintenant définir un opérateur maximal associé à la valeur du prolongement de $M(h') U_k T_\gamma U_{h^{-1}}$ pour Log h' imaginaire pur. Soit donc, pour f bornée à support compact et $\epsilon > 0$,

$$T_\epsilon f(x) = \int_{I^c(x, \epsilon)} \frac{e^{-\gamma m(x, \epsilon)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} f(y) dy, \quad ,$$

puis posons $T_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|$.

Nous allons montrer dans un premier temps que, si ω est un poids de A^2 , on a

$$\|T_* f\|_{L^2(\mathbb{R}, \omega dx)} \leq C(\omega, \gamma) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \omega dx)}$$

dès que $\eta < \eta_0(\omega) \frac{1}{1+|\gamma|}$. Pour cela nous utiliserons le résultat classique suivant (inégalités aux bons λ).

Si u et v sont deux fonctions positives de carrés intégrables pour la mesure

ωdx , et si pour tout λ

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}, v(x) > 2\lambda \text{ et } u(x) < \lambda \right\} \right|_{\omega dx} < \frac{1}{5} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}, v(x) > \lambda \right\} \right|_{\omega dx}$$

alors $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \omega dx)} \leq c^{te} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, \omega dx)}$.

(voir par exemple [5]).

La fonction v sera bien sûr $T_* f(x)$, et la fonction u sera de la forme

$C^{te} f^*(x) = C^{te} \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt$ (on sait que, pour $\omega \in A^2$, $f \rightarrow f^*$ est bornée sur

$L^2(\mathbb{R}, \omega dx)$). Nous ferons pour commencer l'hypothèse qualitative que f est bornée

à support compact. $T_\varepsilon f(x)$ est alors une fonction continue de x , et

$O_{\lambda, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}, |T_\varepsilon f(x)| > \lambda\}$ est un ouvert. Donc $O_\lambda = \bigcup_{\varepsilon > 0} O_{\lambda, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}, T_* f(x) > \lambda\}$

est ouvert. Soit $O_\lambda = \bigcup_k I_{k, \lambda}$ sa décomposition en intervalles ouverts disjoints.

On va montrer l'inégalité aux bons λ intervalle par intervalle, soit :

$$\left| \left\{ x \in I_{k, \lambda}, T_* f(x) > 2\lambda \text{ et } f^*(x) < C\lambda \right\} \right|_{\omega dx} < \frac{1}{5} |I_{k, \lambda}|_{\omega dx}$$

Comme le poids ω est dans A^2 , il suffira de montrer que pour

$\eta \leq \eta_0(\omega) \frac{1}{1+|\gamma|}$, on a

$$\left| \left\{ x \in I_{k, \lambda}, |T_* f(x)| > 2\lambda \text{ et } f^*(x) < C\lambda \right\} \right| < \alpha(\omega) |I_{k, \lambda}|$$

(nous verrons un peu plus tard la valeur qu'il faut donner à C).

Il suffit bien sûr de considérer le cas où le membre de gauche n'est pas nul. Fixons λ et k .

Soit $I =]a, b[= I_{k, \lambda}$. Alors,

$$(1) \quad \exists t \in I, \quad f^*(t) \leq C\lambda$$

$$(2) \quad T_* f(a) \leq \lambda.$$

Nous allons maintenant couper la fonction f en deux morceaux. Soit $J =]a - \frac{\eta}{2}(b-a), b + \frac{\eta}{2}(b-a)[$. Nous poserons $f_1 = \chi_J f$ et $f_2 = f - f_1 = \chi_{J^c} f$. Nous allons commencer par majorer $T_\varepsilon f_1(x)$ là où c'est possible, en le comparant à $T'_\varepsilon f_1(x)$, où T'_ε est un peu plus régulier que T_ε . Nous utiliserons pour cela la fonction z_1 définie dans ces conditions pour le lemme 2. Soit donc

$$T'_\varepsilon g(x) = \int_{I(x, \varepsilon)^c \cap J} \frac{z_1^{i\gamma}(x)}{(z_1(x) - z_1(y))^{1+i\gamma}} g(y) dy \quad \text{On définit également}$$

$$T_* g(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T'_\varepsilon g(x)|. \quad \text{Nous allons maintenant utiliser le fait (démontré par exemple}$$

dans la thèse de Jean-Lin Journé) que le théorème que l'on veut démontrer est vrai dans le cas Lipschitz. Le noyau $\frac{e^{-m_J(b)\gamma}}{(z_1(x) - z_1(y))^{1+i\gamma}}$ est à facteur borné près celui d'un opérateur de Calderón-Zygmund (voir p. ex. [5]) dont la norme CZ est une fonction de η et de γ dès que $\|b\|_{BMO} < \eta \leq \eta_0$ (indépendant de γ).

Comme, pour η assez petit (ce que l'on supposera désormais),

$$\left| \frac{z_1^{i\gamma}(x)}{e^{-\gamma m_J(b)}} - 1 \right| < \frac{1}{10}, \quad \text{il existe une constante } C_3 \text{ telle que, si } g \in L^1,$$

$$\|T_* g\|_{L^1 \text{ faible}} \leq \frac{C_3}{200} \|g\|_{L^1}.$$

En particulier, si $g = f_1$, on obtient

$$\left| \left\{ x \in I, \quad |T_* f_1(x)| > \frac{\lambda}{20} \right\} \right| \leq \frac{20 C_3}{200 \lambda} \int_J |f_1(u)| du \leq \frac{C_3 |I| f^*(t)}{\lambda} \leq C C_3 |I|.$$

D'autre part, comme $\|b(x) - m_J b\|_{L^1(J)} \leq \eta |J|$ et $f \rightarrow f^*$ est bornée de L^1

dans L_{faible}^1 , on a, si $\eta \leq \eta_1(M) \frac{1}{1+|\gamma|}$

$$\left| \left\{ x \in I, (\chi_J(t) b(t) - m_J(b) \chi_J(t))^*(x) > \frac{1}{20(1+|\gamma|)} \right\} \right| \leq \frac{|I|}{M}.$$

Posons

$$E = \left(\bigcup_k 10 J_k \right) \cup \left\{ x \in I, (\chi_J b - m_J(b) \chi_J)^* > \frac{1}{20(1+|\gamma|)} \right\} \cup \left\{ x \in I, T_*^! f_1(x) > \frac{\lambda}{20} \right\}.$$

LEMME 5. Pour tout ω dans A^2 , il existe M et $\eta_1 = \eta_1(M)$ tels que, si $C < \frac{1}{3(1+C_3)} \alpha(\omega)$ et si $\eta < \eta_1(M)/1+|\gamma|$, $|E| < |I| \frac{1}{2} \alpha(\omega)$ est toujours vraie.

E est l'union de trois ensembles. La mesure du premier est inférieure à $10 \frac{C_1 |J|}{M}$ (voir la condition 2 du lemme 2), et donc inférieure à $\frac{\alpha(\omega)}{12} |I|$ dès que M est assez grand. Celle du second, inférieure à $\frac{|I|}{M}$, vérifie alors la même inégalité. Quand à celle du troisième, qui est inférieure à $C C_3 |I|$, elle est encore inférieure à $\frac{\alpha(\omega)}{3} |I|$ si $C C_3 < \frac{\alpha(\omega)}{3}$. Pour tout x hors de E , on a

$$(3) \quad T_*^! f_1(x) < \frac{\lambda}{20}.$$

On a aussi

$$(4) \quad (\chi_J b - m_J(b) \chi_J)^*(x) < \frac{1}{20(1+|\gamma|)},$$

de sorte que $|m(x, \varepsilon) - m_J(b)| < \frac{1}{10(1+|\gamma|)}$ quand $\varepsilon < 4 |I|$. D'autre part,

$$\begin{aligned} |b_1(x) - m_J(b)| &< A_0 M \eta \quad (\text{lemme 2}) \\ &< \frac{1}{10(1+|\gamma|)} \quad \text{lorsque } \eta \leq \eta_2(M) \frac{1}{1+|\gamma|}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\left| \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1^i(x)^{i\gamma}} \right| < 2$, et par conséquent

$$\left| T_\varepsilon^! f_1(x) \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1^i(x)^{i\gamma}} \right| < \frac{\lambda}{10}.$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs aux ε plus petits que $100 |I|$ car alors

$|m(x, \varepsilon) - m_J(b)| < \frac{1}{10(1+|\gamma|)}$ aussi. (C'est la propriété des fonctions de BMO qui a été utilisée pour le corollaire 2.)

Puisque x est hors de E , les conditions de validité du lemme 4 sont satisfaites, et, si $\varepsilon \leq 100|I|$,

$$\left[T'_\varepsilon f_1(x) \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1'(x)^{i\gamma}} - T'_\varepsilon f_1(x) \right] = \frac{e^{+\gamma m_J(b)}}{e^{+\gamma m(x, \varepsilon)}} \int_{y \in U \cap I^c(x, \varepsilon)} \left(\frac{e^{-\gamma m_J(b)}}{(z_1(x) - z_1(y))^{1+i\gamma}} - \frac{e^{-\gamma m_J(b)}}{(z(x) - z(y))^{1+i\gamma}} \right) f_1(y) dy$$

(ailleurs que dans U , $z(y) = z_1(y)$ et $z(x) = z_1(x)$).

$$\left| \left[\dots \right] \right| \leq 2 \int_{y \in U \cap I^c(x, \varepsilon)} \frac{C_2 \ell_k(y)}{|x-y|^2} |f_1(y)| dy$$

($\ell_k(y)$ désigne la longueur de l'intervalle J_k tel que $y \in J_k$).

$$\left| T'_\varepsilon f_1(x) \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1'(x)^{i\gamma}} - T'_\varepsilon f_1(x) \right| \leq 2 \sum_k \ell_k \int_{y \in J_k} C_2 \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} dy \quad \text{si } x \notin E.$$

On peut sommer le second membre par rapport à $x \in I/E$. On obtient C_2 fois

$$2 \sum_k \ell_k \int_{J_k} |f_1(y)| \int_{\substack{x \notin E \\ x \in I}} \frac{1}{|x-y|^2} dx dy \leq 2 \sum_k \ell_k \int_{J_k} |f_1(y)| \int_{\substack{x \in I \\ x \notin 10J_k}} \frac{1}{|x-y|^2} dx dy$$

$$\leq 2 \cdot \frac{1}{4} \sum_k \int_{J_k} |f(y)| dy \leq 20 |I| f^*(t) \leq 20 |I| \lambda C.$$

Posons maintenant $F = E \cup \left\{ x \in I, 2 \sum_k \ell_k \int_{y \in J_k} \frac{|f(y)| dy}{|x-y|^2} > \frac{\lambda}{10} \right\}$

(5) $|F| < |I| \alpha(\omega)$ dès que $\eta < \eta_2(M)/1+|\gamma|$ avec M comme dans le lemme 5

et $C < \frac{1}{3} \alpha(\omega) \inf\left(\frac{1}{1+C_3}, \frac{1}{200C_2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ hors de } F, \quad |T'_\varepsilon f_1(x)| &\leq \left| T'_\varepsilon f_1(x) \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1'(x)^{i\gamma}} \right| + \left| T'_\varepsilon f_1(x) \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{z_1'(x)^{i\gamma}} - T'_\varepsilon f_1(x) \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{10} + \frac{\lambda}{10} = \frac{2\lambda}{10} \end{aligned}$$

dès que $\varepsilon \leq 100 |I|$. Comme $T_\varepsilon f_1(x) = 0$ pour les autres ε , on a :

$$(6) \quad \forall x \in I \setminus F, \quad T_* f_1(x) \leq \frac{2\lambda}{10}.$$

Passons maintenant à l'étude de f_2 : il nous faudra majorer $T_* f_2(x)$ pour $x \in I \setminus F$.

Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 6. $\exists C_4$, si $x \notin F$, $x \in \bar{I}$, ou si $\varepsilon \leq 100 |I|$, et si $\chi(y)$ est bornée,

l'intégrale $\int_{y \in I^c \cap 10J} e^{-\gamma m(x, \varepsilon)} (z(x) - z(y))^{-1-i\gamma} f(y) \chi(y) dy$ est majorée par

$C_4 f^*(t)$. Le même résultat est valable pour l'intégrale

$\int_{y \in I(x, 100\varepsilon_1) \setminus I(x, \varepsilon_1)} e^{-\gamma m(x, \varepsilon_2)} (z(x) - z(y))^{-1-i\gamma} f(y) \chi(y) dy$ à condition que

$$\frac{\varepsilon_1}{100} < \varepsilon_2 < 1000 \varepsilon_1.$$

Dans le premier cas, la démonstration du lemme se fait en utilisant

$$\left| \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)}}{e^{-\gamma m[x, y]} b} \right| < 2 \quad \text{et le corollaire 2. Dans le second, on utilise le corollaire 2 seul,}$$

de sorte que sur toute la couronne d'intégration, l'intégrand peut être majoré par

$$\frac{c^{te}}{|x-y|} |f(y)|.$$

Montrons enfin le lemme technique suivant.

LEMME 7. Soit $D'_n = \int_{2^n J \setminus 2^{n-1} J} e^{-\gamma m(x, |I|)} ((z(x)-z(y))^{-1-i\gamma} - (z(a)-z(y))^{-1-i\gamma}) f(y) dy$;

alors, si $x \in I$, $|D'_n| \leq C_5 f^*(t) \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(Rappelons que a est une extrémité de l'intervalle $I = [a, b]$.)

$$\text{En effet, } D'_n = \int_{2^n J \setminus 2^{n-1} J} e^{-\gamma m(x, |I|) + \gamma m[a, y] b} \left[\frac{e^{-\gamma m[a, y] b}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} - \frac{e^{-\gamma m[a, y] b}}{(z(a)-z(y))^{1+i\gamma}} \right].$$

Le crochet s'écrit encore $\frac{e^{-\gamma m[a,y]^b}}{(z(a)-z(y))^{1+i\gamma}} \left\{ \left(\frac{z(a)-z(y)}{z(x)-z(y)} \right)^{1+i\gamma} - 1 \right\}$.

$$\text{Or } \left| \frac{z(a)-z(y)}{z(x)-z(y)} - 1 \right| = \left| \frac{z(a)-z(x)}{z(x)-z(y)} \right| \leq \frac{1}{1-\eta} \frac{|a-x|}{|x-y|} \quad (\text{lemme 1}).$$

$$\text{Donc } \left| \left\{ \left(\frac{z(a)-z(y)}{z(x)-z(y)} \right)^{1+i\gamma} - 1 \right\} \right| \leq \frac{2C_5' |I|}{|x-y|} \quad \text{pour une certaine constante } C_5'.$$

$$\text{Comme } \left| \frac{e^{-\gamma m[a,b]^b}}{(z(a)-z(y))^{1+i\gamma}} \right| \leq \frac{C_5''}{|a-y|} \quad (\text{corollaire 2})$$

$$\text{et } |m(x, 2^n |I|) - m(x, 2^{n-1} |I|)| \leq 2 \|b\|_{\text{BMO}} \leq \frac{2}{(1+|\gamma|) 10}, \quad \text{on a finalement}$$

$$|D_n'| \leq \int_{2^n J \setminus 2^{n-1} J} e^{+\frac{2|\gamma|}{10(1+|\gamma|)}(n+5)} \frac{C_5''}{|a-y|} \frac{2C_5' |I|}{|x-y|} |f(y)| dy,$$

$$\begin{aligned} |D_n'| &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n 100 C_5' C_5'' \frac{|I|}{2^{2n} |J|^2} \int_{2^n J \setminus 2^{n-1} J} |f(y)| dy \\ &\leq C_5 f^*(t) \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

(et le lemme 7 est démontré).

Le lemme 6 implique la relation

$$(7) \quad |T_{|I|} f(a) - T_{|I|} f_2(a)| \leq C_4 f^*(t).$$

$$\text{D'autre part } T_{|I|} f_2(a) - T_{|I|} f_2(x) = - \int_{J^c} \left(\frac{e^{-\gamma m(x,|I|)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} - \frac{e^{-\gamma m(a,|I|)}}{(z(a)-z(y))^{1+i\gamma}} \right) f(y) dy$$

est la somme de deux termes D_1 et D_2 avec

$$|D_1| = |T_{|I|} f_2(a)| \left| e^{-\gamma m(x,|I|) + \gamma m(a,|I|)} - 1 \right| \leq \frac{1}{100} |T_{|I|} f_2(a)|$$

(si η est assez petit);

$$D_2 = T_{|I|} f_2(a) - T_{|I|} f_2(x) - T_{|I|} f_2(a) + T_{|I|} f_2(a) e^{+\gamma m(a,|I|) - \gamma m(x,|I|)}$$

$$= \int_{J^c} \left(- \frac{e^{-\gamma m(x, |I|)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} + \frac{e^{-\gamma m(x, |I|)}}{(z(a)-z(y))^{1+i\gamma}} \right) f(y) dy$$

$D_2 = - \sum_1^{\infty} D'_n$ et en utilisant le lemme 7, on obtient

$$(8) \quad |T_{|I|} f_2(a) - T_{|I|} f_2(x)| \leq \frac{1}{100} |T_{|I|} f_2(a)| + C_6 f^*(t).$$

Si l'on tient compte de $|T_{|I|} f(a)| \leq T_* f(a) \leq \lambda$ (inégalité (2))

$$(7) \text{ implique } |T_{|I|} f_2(a)| \leq (CC_4 + 1) \lambda < 2\lambda \quad \text{si } C < \frac{1}{1+C_4}, \text{ et}$$

$$(8) \text{ implique } |T_{|I|} f_2(x)| \leq CC_4 \lambda + \lambda + \frac{2\lambda}{100} + CC_6 \lambda \leq \lambda \left(\frac{2}{100} + C(C_4 + C_6) \right) + \lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } T_{\varepsilon} f_2(x) - T_{|I|} f_2(x) &= \int_{J^c} \frac{e^{-\gamma m(x, \varepsilon)} - e^{-\gamma m(x, |I|)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} f(y) dy \\ &= T_{|I|} f_2(x) (e^{-\gamma m(x, \varepsilon) + \gamma m(x, |I|)} - 1), \end{aligned}$$

dès que $\varepsilon < 8|I|$, le terme entre parenthèses est de module $\leq \frac{1}{5}$ pour η assez petit. Alors, pour $x \notin F$, $|T_{\varepsilon} f_2(x)| \leq \lambda \left(1 + \frac{2}{100} + C(C_4 + C_6) \right) \left(\frac{6}{5} \right) \leq \frac{7\lambda}{5}$ si C est assez petit. Donc, pour tout $x \in I \setminus F$ et tout $\varepsilon < 8|I|$, $|T_{\varepsilon} f(x)| \leq \frac{9}{5} \lambda$.

Soit maintenant $x \in I \setminus F$, et $\varepsilon \geq 8|I|$.

Le lemme 6 implique l'inégalité suivante

$$\left| T_{\varepsilon} f(a) - \int_{J^c \cap I^c(x, \varepsilon)} e^{-\gamma m(a, \varepsilon)} [z(a) - z(y)]^{-1-i\gamma} f(y) dy \right| < C_4 f^*(t) \leq CC_4 \lambda.$$

On en déduit que

$$\left| \int_{I^c(x, \varepsilon)} e^{-\gamma m(a, \varepsilon)} (z(a)-z(y))^{-1-i\gamma} f_2(y) dy - \int_{I^c(x, \varepsilon)} e^{-\gamma m(x, \varepsilon)} (z(a)-z(y))^{-1-i\gamma} f_2(y) dy \right|$$

est inférieur à $\frac{1}{100} (|T_{\varepsilon} f(a)| + CC_4 \lambda) \leq \frac{2\lambda}{100}$.

Enfin, on la majoration

$$\left| \int_{I^c(x, \varepsilon)} e^{-\gamma m(x, \varepsilon)} \left((z(x)-z(y))^{-1-i\gamma} - (z(a)-z(y))^{-1-i\gamma} \right) f_2(y) dy \right| \leq C_7 f^*(t) \leq CC_7 \lambda ,$$

qui est obtenue comme le lemme 7, en remplaçant $|I|$ par ε et

$$2^n J \setminus 2^{n-1} J \text{ par } 2^n I(x, \varepsilon) \setminus 2^{n-1} I(x, \varepsilon).$$

On en déduit que, si CC_7 est assez petit, on a pour tout x de I et tout $\varepsilon > 8|I|$,

$$\left| T_{\varepsilon} f_2(x) \right| \leq CC_7 \lambda + \frac{2\lambda}{100} + CC_4 \lambda + \left| T_{\varepsilon} f(a) \right| \leq \frac{9}{5} \lambda .$$

D'où l'inégalité aux bons λ .

Nous avons jusqu'à présent démontré que si f est bornée à support compact,

et si $\|T_* f\|_{L^2(\mathbb{R}, \omega dx)} < +\infty$, alors

$$\|T_* f\|_2 \leq C(\omega, \gamma) \|f\|_2 \text{ dès que } \eta \leq \eta_3(\omega) \frac{1}{1+|\gamma|} .$$

Nous allons maintenant montrer que si f est bornée à support compact,

$\|T_* f\|_2 < +\infty$. En effet, pour une telle fonction, $f^* \leq c^{te}$ et si λ est assez grand,

nous avons en fait montré que $\left| \{x \in \mathbb{R}, T_* f(x) > 2\lambda\} \right| \leq \frac{1}{5} \left| \{x \in \mathbb{R}, T_* f(x) > \lambda\} \right|$ à

condition que ces deux mesures ne soient pas infinies (ce qu'on va montrer).

Soit K le support de f , δ son diamètre, et x un point de \mathbb{R} dont la distance à K est $d \geq \delta$. On a

$$\left| T_{\varepsilon} f(x) \right| \leq \int_{I^c(x, \varepsilon)} \left| e^{-\gamma m(x, \varepsilon) + \gamma m(x, d)} \left| \frac{e^{-\gamma m(x, d)}}{(z(x)-z(y))^{1+i\gamma}} \right| \right| |f(y)| dy .$$

Pour simplifier, on supposera que K contient 0 , et on ne s'intéressera qu'à

$$\left| x \right| > 2\delta . \text{ Alors } \left| T_{\varepsilon} f(x) \right| \leq 10 \frac{KM}{|x|} e^{\gamma |m(x, \varepsilon) - m(x, x)|} .$$

D'autre part, gardons à l'esprit que les seules valeurs de ε qui peuvent poser des

problèmes sont les petites valeurs : pour $\varepsilon > d + 2\delta$, $T_{\varepsilon} f(x) = 0$.

LEMME. $\exists C > 0, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left| \left\{ x \in [2^{n+1}\delta, 2^{n+2}\delta] \cup [-2^{n+2}\delta, -2^{n+1}\delta], \left| T_* f(x) \right| > \frac{10KM}{2\delta} \cdot 2^{-n} 2^p \right\} \right| \leq C 2^n 8^{-p} .$$

La justification est assez simple : il suffit de montrer que

$$|\{x \in \mathbb{R}, 2^{n+1}\delta \leq |x| \leq 2^{n+2}\delta, \sup_{\varepsilon < |x| + 2\delta} e^{\gamma |m(x, \varepsilon) - m(x, x)|} > 2^p\}| \leq C 2^n 8^{-p}.$$

Comme $|x| \geq 2^{n+1}\delta \geq \frac{1}{4} |[-2^{n+2}\delta, 2^{n+2}\delta]| = \frac{1}{4} |I_n|$ et $|x| \leq |I_n|$, on peut se contenter de montrer que

$$|\{x \in \mathbb{R}, 2^{n+1}\delta \leq |x| \leq 2^{n+2}\delta, \sup_{\varepsilon < |x|} e^{\gamma |m(x, \varepsilon) - m_{I_n}(b)|} > 2^p\}| \leq C 2^n 8^{-p}.$$

$$\text{De plus, } e^{\gamma |m(x, \varepsilon) - m_{I_n}(b)|} \leq m_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]} e^{\gamma |b(x) - m_{I_n}(b)|}.$$

Il suffit donc de prouver que $\| (e^{3\gamma |b(x) - m_{I_n}(b)|})^* \|_{L^1_{\text{faible}}(I_n)} \leq 2^n C$, ou encore que

$$\| e^{3\gamma |b(x) - m_{I_n}(b)|} \|_{L^1(I_n)} \leq 2^n C' \text{ car } f \rightarrow f^* \text{ est bornée de } L^1 \text{ dans } L^1 \text{ faible.}$$

Cette dernière inégalité est exactement le théorème de John-Nirenberg ([10]).

Ce lemme nous permet de majorer la norme de la restriction de $T_* f$ à $\{x \in \mathbb{R}, 2^{n+1}\delta \leq |x| \leq 2^{n+2}\delta\}$ par $C^{te} \{2^n \cdot (2^{-n})^2 + \sum_{p=1}^{\infty} 2^n 2^{-3p} 2^{-2n} 2^{2p}\} \leq C^{te} 2^{-n}$.

On en déduit que $T_* f(x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ (l'apport de l'intervalle $[-2\delta, 2\delta]$ étant contrôlé par l'inégalité aux bons λ , qui a maintenant un sens). On aurait pu montrer que $T_* f(x) \in L^2(\mathbb{R}, \omega dx)$ tout aussi facilement : il suffisait de contrôler le défaut de régularité de poids sur l'intervalle I_n en exigeant une plus grande régularité de la fonction b (en clair, en demandant que $\| e^{c(\omega) |b(x) - m_{I_n}(b)|} \|_{L^1(I_n)} \leq 2^n c'$).

Ainsi, $\|T_* f(x)\|_2 \leq C_0 \|f\|_2$ pour toute fonction bornée à support compact.

Le cas général en découle simplement en exprimant $f \in L^2$ comme une série normalement convergente de fonctions bornées à supports compacts, et en passant à la limite pour chaque $\varepsilon > 0$. En résumé, on a montré que : $\exists C > 0 \forall f \in L^2(\mathbb{R}), T_* f(x)$ existe p. p. et $\|T_* f\|_2 \leq C \|f\|_2$ (un tel résultat est également valable pour $L^2(\mathbb{R}, \omega dx)$).

Pour toute fonction z telle que $\|\text{Log } z'\|_{\text{BMO}} < \eta$, on définit

$$T_{\varepsilon}(z)f(x) = \int_{y \in I^c(x, \varepsilon)} e^{i\gamma m(x, \varepsilon)} (z(x) - z(y))^{-1-i\gamma} z'(x)^{1/2} z'(y)^{1/2} f(y) dy$$

où $m(x, \varepsilon) = m_{I(x, \varepsilon)} \text{Log } z'$.

On note aussi $T_*(z)f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon(z) f(x)|$.

Lorsque $\text{Log } z'$ est imaginaire pur l'inégalité $\|T_*(z)f\|_2 \leq C^{te} \|f\|_2$, valable pour tout $f \in L^2$, découle de $T_*(z) f = |z'|^{1/2} T_*(f z'^{1/2})$.

Si h est un changement de variable de \mathcal{G} tel que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \leq \eta$,

$$\begin{aligned} U_h T_\epsilon(z) U_h^{-1} f(x) &= \int_{h(y) \in I^C(h(x), \epsilon)} e^{i\gamma m(h(x), \epsilon)} (z \circ h(x) - z \circ h(y))^{-1-i\gamma} z'(h(x))^{1/2} z'(h(y))^{1/2} \\ &\quad h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} f(y) dy \\ &= \int_{|h(y)-h(x)| > \epsilon} e^{i\gamma m(h(x), \epsilon)} (z \circ h(x) - z \circ h(y))^{-1-i\gamma} z' \circ h'^{1/2}(x) z' \circ h'^{1/2}(y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Si nous comparons avec une intégrale du type $T_\delta(z \circ h)$:

$$\int_{|y-x| > \delta} e^{i\gamma m(x, \delta)} (z \circ h(x) - z \circ h(y))^{-1-i\gamma} z' \circ h'^{1/2}(x) z' \circ h'^{1/2}(y) f(y) dy$$

où $m(x, \delta)$ est $m_{I(x, \delta)} \text{Log}(z \circ h)' = m_{I(x, \delta)} \text{Log } h' + m_{I(x, \delta)} \text{Log } z' \circ h$

et où δ est choisi de la taille de l'intervalle d'intégration de la première intégrale, la différence due aux intervalles d'intégration sera inférieure à $C^{te} f^*(x)$ comme dans le lemme 6.

Il reste à comparer $i\gamma(m_{I(x, \delta)} \text{Log } h' + m_{I(x, \delta)} \text{Log } z' \circ h)$ avec $i\gamma m_{I(h(x), \epsilon)} \text{Log } z'$. Le premier terme $i\gamma m_{I(x, \delta)} \text{Log } h'$ est imaginaire pur et donnera donc une exponentielle de module 1. La différence

$m_{I(x, \delta)} \text{Log } z' \circ h - m_{I(h(x), \epsilon)} \text{Log } z'$ est aussi petite qu'on veut (pourvu que η soit assez petit). En effet, $V_h : f \rightarrow f \circ h$ est continue sur $\text{BMO}(\mathbb{R})$, ce qui

permet de majorer $|m_{I(x, \delta)} \text{Log } z' \circ h - m_{h(I(x, \delta))} \text{Log } z'|$. La majoration de

$|m_{h(I(x, \delta))} \text{Log } z' - m_{I(h(x), \epsilon)} \text{Log } z'|$ est évidente car la moyenne est prise sur deux intervalles de tailles comparables contenant $h(x)$.

Remarquons que si h est telle que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} < \eta$, h peut s'écrire $z \circ h_1$, avec $\text{Log } z'$ imaginaire pur et $\text{Log } h_1'$ réel, et aussi $\|\text{Log } z'\|_{\text{BMO}} \leq \eta'$, $\|\text{Log } h_1'\|_{\text{BMO}} \leq \eta'$.

Il suffit en fait de constater que $h'(x) = z'(h_1(x)) h_1'(x)$ implique

$\text{Log } h'(x) = \text{Log } z'(h_1(x)) + \text{Log } h_1'(x)$. On doit donc choisir $\text{Log } h_1'(x) = \text{Re}(\text{Log } h'(x))$

et $\text{Log } z'(u) = \text{Log } h'(h_1^{-1}(u)) - \text{Log } h_1'(h_1^{-1}(u))$. En résumé, on a montré que si

$$\|\text{Log } z'\|_{\text{BMO}} < \eta, \quad \text{et si } f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|T_*(z) f\|_2 \leq C \|f\|_2.$$

Il est facile de montrer (des raisonnements analogues sont faits plus en détails dans la thèse de Jean-Lin Journé) que pour tout ε et tout couple (f, g) de fonctions de C_0^∞ , $\langle T_\varepsilon(z) f, g \rangle$ est une fonction analytique de $\text{Log } z'$. Il en va de même pour

$$T'_\varepsilon(z) = \int_0^{2\pi} T_{\varepsilon e^{i\lambda/\gamma}}(z) \frac{d\lambda}{2\pi}. \quad \text{Les dérivées en } 0 \text{ de } T'_\varepsilon(z) \text{ seront notées } D_k^\varepsilon T.$$

Pour $\|\text{Log } z'\|_{\text{BMO}}$ assez petit, on a $T'_\varepsilon(z) = \sum_k \frac{1}{k!} D_k^\varepsilon T(\text{Log } z', \dots, \text{Log } z')$ avec

convergence normale.

On peut choisir une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que pour tout $\text{Log } z'$ dans un sous-espace vectoriel de dimension finie \vec{v} , on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^{\varepsilon_n} T(\text{Log } z', \dots, \text{Log } z') = D_k T(\text{Log } z', \dots, \text{Log } z') \text{ existe}$$

(la limite est bien sûr prise pour la topologie faible).

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_k T(\text{Log } z', \dots, \text{Log } z')$ converge normalement quand

$n \rightarrow \infty$ pour $\text{Log } z' \in \vec{v}$ de norme assez petite. La limite est une fonction analytique en $\text{Log } z'$, dont il s'agit de trouver la ressemblance avec $M(h') U_h T_\gamma U_h^{-1}$.

Calculons la différence entre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \lambda_1 \int_{|x-y| > \varepsilon_n e^{i\gamma m}} e^{i\gamma m} I(x, \varepsilon_n e^{\lambda_1/\gamma})^{\text{Log } h'} (h(x)-h(y))^{-1-i\gamma} h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} f(y) dy \frac{d\lambda}{2\pi}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \lambda_2 \int_{|h(x)-h(y)| > \varepsilon_n e^{i\gamma m}} e^{i\gamma \text{Log } h'(x)} (h(x)-h(y))^{-1-i\gamma} h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} f(y) dy \frac{d\lambda}{2\pi}.$$

On sait que cette différence est de la forme $A(x)f(x)$ car les deux opérateurs limites ont le même noyau. On peut donc considérer f telle que $f(y) \equiv 1$ sur un voisinage de x

et composer avec $U_{h^{-1}}$ à gauche et U_h à droite. La différence entre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda_1} \int_{|h^{-1}(y) - h^{-1}(x)| > \varepsilon_n} e^{\lambda_1/\gamma} e^{i\gamma m} I(h^{-1}(x), \varepsilon e^{\lambda_1/\gamma} \text{Log } h') (x-y)^{-1-i\gamma} f(y) dy \frac{d\lambda_1}{2\pi}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda_2} \int_{|x-y| > \varepsilon_n} e^{\lambda_2/\gamma} e^{i\gamma \text{Log } h'(h^{-1}(x))} (x-y)^{-1-i\gamma} f(y) dy \frac{d\lambda_2}{2\pi}$$

sera $A(h^{-1}(x))$.

$$\text{Comme } \int_{|x-y| > \varepsilon} (e^{i\gamma \text{Log } h'(h^{-1}(x))} - e^{i\gamma m} I(h^{-1}(x), \varepsilon) \text{Log } h') (x-y)^{-1-i\gamma} f_1(y) dy$$

tend vers 0, il reste

$$e^{i\gamma \text{Log } h'(h^{-1}(x))} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\lambda_1} \left[\int_{|x-y| > \varepsilon_n} e^{\lambda_1/\gamma} (x-y)^{-1-i\gamma} f(y) dy - \int_{|x-y| > \varepsilon_n} (h^{-1}(x))^{-1} e^{\lambda_2(\lambda_1)/\gamma} (x-y)^{-1-i\gamma} f_1(y) dy \right] \frac{d\lambda_1}{2\pi} \right\}.$$

La fonction $(x-y)^{-1-i\gamma}$ s'intègre en $(x-y)^{-i\gamma} \cdot c^{\text{te}}$, de sorte que l'astuce consiste à choisir $\lambda_2(\lambda_1)$ pour que $\left[(\varepsilon_n e^{\lambda_1/\gamma})^{-1} (\varepsilon_n e^{\lambda_2/\gamma} (h^{-1}(x))^{-1}) \right]^{i\gamma} = 1$.

Alors la fonction A est nulle.

Si $T_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\varepsilon_n}(\text{Id})$, nous savons que $M(h') U_h T_1 U_h^{-1}$ est une fonction analytique de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$.

Or, $T_\gamma - T_1$ est la multiplication par une constante (les opérateurs ont même noyau et sont invariants par translation).

Comme les deux opérateurs $M(h') U_h T_1 U_h^{-1}$ et $M(h') U_h T_\gamma U_h^{-1}$ ne dépendent l'un et l'autre que de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$, et que $M(h')$ est loin d'être invariant par transformations affines sur h , c'est que la constante est nulle.

Nous avons donc démontré l'analyticité de $\text{Log } h' \rightarrow M_h(\gamma) U_h T_\gamma U_h^{-1}$ dans un voisinage de l'origine. Il s'agit de passer au cas général. Soit

$\text{Log } g'_0$, $g'_0 \in \mathcal{G}$, et montrons que $M_h(\gamma) U_h T_\gamma U_h^{-1}$ est analytique en $\text{Log } h'$ voisin de $\text{Log } g'_0$. Si $h = g \circ g'_0$, $\text{Log } h' = \text{Log } g' + \text{Log } g'_0$ et

$M(\gamma) U_h T_\gamma U_h^{-1} = \mathcal{M} U_{g_0} M(g) U_g T_\gamma U_{g^{-1}} U_{g_0^{-1}}$, où \mathcal{M} est la multiplication par un facteur unimodulaire fixe. Or $M(g) U_g T_\gamma U_{g^{-1}}$ est une fonction analytique de $\text{Log } g' \in \text{BMO}$ pour $\| \text{Log } g' \|_{\text{BMO}}$ assez petit. Il ne reste plus pour pouvoir conclure qu'à constater que $\text{Log } g' = \text{Log } g_0^{-1} + \text{Log } h' \circ g_0^{-1}$ est analytique en fonction de $\text{Log } h'$. Ceci démontre le théorème.

Remarque. Les deux opérateurs suivants sont aussi des fonctions analytiques de $\text{Log } h' \in \text{BMO}$: $U_h T_\gamma U_h^{-1} M(h')$ et $M(h')^{1/2} U_h T_\gamma U_h^{-1} M(h')^{1/2}$ (le premier opérateur n'est que le transposé de celui du théorème ; le second est le produit des deux autres pour $\gamma' = \frac{1}{2} \gamma$).

Remarque. Les résultats d'analyticité comme le théorème que l'on vient de montrer sont surtout intéressants parce qu'ils engendrent toute une classe d'opérateurs continus et donnent des bornes assez précises pour les normes de ces opérateurs. (On peut par exemple développer l'opérateur du théorème en série de Taylor. Chaque terme est majoré. On peut encore recombinaison ces termes avec des coefficients différents, ce qui donne d'autres opérateurs, etc...).

Remarque. Nous avons montré que l'opérateur $T(h) = M_\gamma(h) U_h T_\gamma U_h^{-1} - T_\gamma$ tend vers 0 en norme quand $\text{Log } h' \in \text{BMO}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ tend vers 0. Il en est d'ailleurs de même pour son prolongement complexe aux z t. q. $\| \text{Log } z' \|_{\text{BMO}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})}$ est assez petit.

La démonstration de la seconde partie du théorème 1 peut être copiée (presque mot pour mot) pour montrer que, réciproquement, si $\| T(z) \| < \varepsilon$ avec ε assez petit, alors $\| \text{Log } z' \|_{\text{BMO}} < \delta(\varepsilon)$. Ici aussi, si l'on veut paramétrer $T(z)$ de manière continue à l'origine, il nous faudra utiliser une topologie plus fine que celle de $\text{Log } z' \in \text{BMO}$ sur l'espace de départ.

- [1] AHLFORS, L. Quasiconformal reflections. Acta Math. 109 (1963), 291-301.
- [2] AHLFORS, L. Lectures on quasiconformal mappings. Princeton (1966).
- [3] CALDERON, A. P. Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications. Proc. I. C. M. Helsinki 1968, 85-96.
- [4] CALDERON, A. P. Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. 74, 4 (1977), 1324-1327.
- [5] COIFMAN, R. R., MEYER, Y. Au delà des opérateurs pseudodifférentiels. Astérisque 57.
- [6] COIFMAN, R. R. et MEYER, Y. Le théorème de Calderon par les méthodes de variable réelle. C. R. Acad. Sc. Paris 289 (1979), 425-428.
- [7] JERISON, D. S. and KENIG, C. F. Hardy spaces, A_∞ , and singular integrals on chord-arc domains.
- [8] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.
- [9] FEFFERMAN, C. Recent progress in analysis. Proc. I. C. M. Vancouver (1974).
- [10] JOHN, F. and NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure and Appl. Math. 14 (1961), 415-426.
- [11] JOURNE, Jean-Lin Thèse.
- [12] JONES, P. W. Homeomorphisms of the line which conserve BMO. A paraître dans Comm. Math. Helv.
- [13] KENIG, C. E. Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains. Amer. J. Math. 102 (1980), 129-163.
- [14] LAVRENTIEV, M. Boundary problems in the theory of univalent functions. Math. S. D. (N. S.) 1 (43) (1936), 815-844. (en russe). Amer. Math. Soc. Transl., sér. 2, vol. 32, 1-35.
- [15] POMMERENKE, C. Univalent functions. J. London Math. Soc. (2) (1970), 689-695.
- [16] POMMERENKE, C. Schlichte Funktionen und analytische Funktionen Von beschränkter mittlerer Oszillation. Comm. Math. Helvetici 52 (1977), 591-602.
- [17] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton (1970).
- [18] ZINSMEISTER, M. Thèse.