



**HAL**  
open science

## Familles de variétés abéliennes

Laurent Moret-Bailly

► **To cite this version:**

Laurent Moret-Bailly. Familles de variétés abéliennes. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1984. Français. NNT: . tel-04158538

**HAL Id: tel-04158538**

**<https://theses.hal.science/tel-04158538>**

Submitted on 11 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

**UNIVERSITE PARIS-SUD**

**Centre D'Orsay**

# THESE

**De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques**

*présentée pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR ES-SCIENCES**

Par

Laurent MORET-BAILLY

Sujet de la Thèse : Familles de variétés abéliennes

39588

Soutenu le 28 juin 1984 devant le Jury composé de :

MM. M. RAYNAUD           Président

L. BREEN

P. DELIGNE

L. ILLUSIE

F. LAUDENBACH

L. SZPIRO



## ABSTRACT

This thesis deals with "semistably degenerating abelian varieties" over a scheme. In particular we investigate the properties of certain relatively ample invertible sheaves on such group schemes, and of their direct images ; we obtain a formula generalizing the fact that (over  $\mathbb{C}$ ) theta constants are modular forms.

We give applications of these results to abelian varieties over function fields, including as a special case Zarhin's finiteness theorem when the ground field is finite.



Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à L. Szpiro qui a dirigé cette thèse et de qui j'ai beaucoup appris, notamment dans le cadre du séminaire qu'il dirige et dont je voudrais remercier tous les participants.

Ce travail a aussi bénéficié de l'intérêt et des suggestions de M. Raynaud, L. Breen, et D. Mumford qui a accepté la tâche de délégué.

Je remercie P. Deligne et L. Illusie qui ont bien voulu participer au jury, F. Laudenbach qui a dirigé ma seconde thèse, ainsi que tous les membres du centre scientifique d'Orsay, et tout particulièrement Madame Bonnardel qui a assuré, avec sa compétence bien connue, la frappe du manuscrit.



Table des matières

	pages
INTRODUCTION	4
CHAPITRE I. <u>Torseurs cubistes.</u>	10
0. Introduction.	10
1. Applications pointées de degré $n$ .	11
2. Cas des toseurs : structures cubistes.	13
3. Lien avec les extensions centrales.	21
4. Cas des schémas abéliens : le groupe $Q(L)$ .	24
5. Réduction à l'objet trivial ; application à certains isomorphismes canoniques.	26
6. Une nouvelle définition des structures cubistes.	31
7. Descente de toseurs cubistes ; application aux extensions de schémas en groupes lisses par des tores.	35
CHAPITRE II. <u>Faisceaux inversibles cubistes sur les schémas en groupes : problèmes de prolongement.</u>	38
0. Introduction.	38
1. Prolongement de $G_m$ -torseurs cubistes sur les groupes lisses : cas où la base est un trait.	39
2. Analogie archimédien du théorème de prolongement.	47
3. Prolongement de $G_m$ -torseurs cubistes en dimension supérieure ; cas des groupes semi-stables sur une base normale.	49
CHAPITRE III. <u>Application aux hauteurs canoniques sur les variétés abéliennes.</u>	59
0. Introduction.	59
1. Hauteurs locales : cas non archimédien.	59
2. Hauteurs locales : cas archimédien.	68
3. Hauteurs globales sur les corps de fonctions.	69
4. Hauteurs globales sur les corps de nombres.	73
CHAPITRE IV. <u>Le groupe <math>K(L)</math>.</u>	78
0. Introduction.	78
1. Sous-groupes quasi-finis d'un groupe semi-stable sur une base hensélienne.	79
2. Rappels et compléments sur l'extension de Raynaud ; énoncé du théorème.	81
3. Le cas où $S$ est un trait : généralités.	87
4. Le cas où $S$ est un trait : démonstration de 2.4.	91



5. Démonstration de 2.4 : cas où $A$ est à fibres connexes.	95
6. Démonstration de 2.4 : cas général.	98
7. Application à la variété duale.	99
8. Gonflement des modèles semi-stables.	101
CHAPITRE V. <u>Représentations des groupes thêta.</u>	104
0. Introduction.	104
1. Rappels et notations.	104
2. Représentations de poids 1 des groupes thêta non dégénérés.	107
3. Représentations de poids 1 et sous-groupes de niveau.	115
CHAPITRE VI. <u>L'image directe.</u>	121
0. Introduction.	121
1. $\mathcal{G}(L)$ et la descente.	122
2. Faisceaux amples : cas où la base est un trait.	129
3. Généralisation à une base normale quelconque.	135
4. Application : un théorème de négativité de l'image directe.	149
5. Caractéristique 2 : la variante de Mori.	150
CHAPITRE VII. <u>Structures de niveau, plongements grassmanniens.</u>	158
0. Introduction.	158
1. Structures de niveau et rigidifications : définition, existence.	159
2. Cas des schémas abéliens : le théorème de plongement.	161
3. Application aux schémas de modules $\mathcal{H}_{g,d,n}$ .	171
4. Le $\mathbb{Z}$ -schéma $\mathcal{H}_{g,d}$ .	175
5. Le cas séparable : compléments au théorème de plongement.	177
6. Retour au cas semi-stable : une propriété de prolongement.	179
CHAPITRE VIII. <u>Image directe et différentielles.</u>	182
0. Introduction.	182
1. Position du problème.	182
2. Cas d'une base de caractéristique $p > 0$ .	188
3. Cas des schémas abéliens.	191
4. Cas d'une base de caractéristique nulle.	195
CHAPITRE IX. <u>Positivité de <math>\bar{\omega}</math>.</u>	199
0. Introduction.	199
1. Un lemme de Zarhin.	199
2. Positivité de $\bar{\omega}$ .	202
3. Cas des schémas abéliens : amplitude de $\bar{\omega}$ .	204

CHAPITRE X. <u>Hauteurs projectives et familles limitées.</u>	205
0. Introduction.	205
1. Familles limitées d'applications rationnelles.	205
2. Familles limitées et graphes.	208
3. Hauteurs.	211
4. Le théorème de la hauteur bornée.	213
CHAPITRE XI. <u>Applications aux variétés abéliennes sur les corps de fonctions.</u>	217
0. Introduction et notations.	217
1. Hauteurs modulaires.	219
2. Hauteur différentielle et hauteur stable.	221
3. Comparaison des différentes hauteurs.	225
4. Applications : critère d'isotrivialité, familles limitées.	228
5. Application aux variétés ordinaires.	231
CHAPITRE XII. <u>Variétés abéliennes à lieu de mauvaise réduction fixé ; le théorème de Zarhin.</u>	232
0. Introduction et notations.	232
1. Compléments sur le groupe fondamental modéré.	232
2. Variétés abéliennes à réduction modérée ; le théorème de Zarhin.	235
BIBLIOGRAPHIE	239
INDEX TERMINOLOGIQUE	241
INDEX DES NOTATIONS	242



## Introduction

1. Soient  $g$  et  $d$  deux entiers  $\gg 1$ ,  $n$  un entier  $\gg 3$ . Considérons le schéma de modules fin.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{g,d,n}$  paramétrant les schémas abéliens  $A$  de dimension  $g$ , munis d'une polarisation de degré  $d^2$  (vue comme une isogénie de degré  $d^2$  de  $A$  sur son dual  $A^t$ ) et d'une structure de niveau  $n$  : c'est un schéma de type fini sur  $\mathbb{Z}[1/n]$ . Notons  $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{A}$  le schéma abélien universel, et  $\bar{\omega}$  le faisceau inversible  $f_* \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{A}}^g$  sur  $\mathcal{A}$ .

1.1. Théorème. Le faisceau  $\bar{\omega}$  est ample sur  $\mathcal{A}$ .

En caractéristique nulle ce résultat est bien connu, les sections globales de  $\bar{\omega}^{\otimes m}$  étant les formes modulaires de poids  $m$  et de niveau  $n$ . Il joue un rôle essentiel dans la démonstration par Faltings [F2] de la "conjecture de Shafarevich" pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres ; de même l'énoncé analogue pour les schémas de modules de courbes intervient dans les travaux de Parshin, Arakelov et Szpiro sur les pinceaux de courbes (cf. par exemple [Sz]).

2. Désignons par  $\Xi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^t$  la polarisation naturelle sur  $\mathcal{X}$ . On peut associer à  $\Xi$  l'unique faisceau inversible totalement symétrique  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X}$  tel que la polarisation  $\varphi_{\mathcal{L}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^t$  associée à  $\mathcal{L}$  soit égale à  $4\Xi$ , de sorte que  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $f$  et de degré  $4^{2g}d^2$  (par convention, tous les faisceaux inversibles sur un schéma en groupes sont supposés rigidifiés, c'est-à-dire munis d'une trivialisations le long de la section unité). Le théorème 1.1 résulte alors des faits suivants :

(2.1)  $\det(f_* \mathcal{L})^{\vee}$  est ample sur  $\mathcal{A}$ .

(2.2) Les faisceaux inversibles  $(\det f_* \mathcal{L})^{\otimes -2}$  et  $\bar{\omega}^{\otimes 4g}$  ont la même classe dans  $\text{Pic}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

L'assertion (2.1) est démontrée au chapitre VII ; là seule idée qui semble nouvelle est d'exploiter le fait que pour tout entier  $N \gg 1$ , la restriction de  $\mathcal{L}^{\otimes N^2}$  au noyau  ${}_N \mathcal{X}$  de la multiplication par  $N$  dans  $\mathcal{X}$  est canoniquement triviale, ce qui implique qu'après un changement de base fini étale,  $(f_* \mathcal{L})^{\vee}$  a "beaucoup de sections". On redémontre d'ailleurs par cette méthode la représentabilité de  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  sans

théorie des invariants "difficile", tous les groupes structuraux étant finis.

3. La "formule clé" (2.2) est plus mystérieuse. Il est plus commode de la reformuler comme suit :

(3.1) Soient  $S$  un schéma,  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$ ,  $L$  un faisceau inversible symétrique (rigidifié) sur  $A$ , ample relativement à  $S$ ,  $d$  le rang de  $f_*L$ , et  $\bar{\omega}_{A/S}$  le  $\mathcal{O}_S$ -module inversible  $f_*\Omega_{A/S}^g$ . Alors le faisceau inversible

$$\delta(A,L) = (\wedge^d f_*L)^{\otimes 2} \otimes \bar{\omega}_{A/S}^{\otimes d}$$

est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(S)$ .

Lorsque  $d$  est inversible sur  $S$ , on peut démontrer (3.1) à partir du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck et du fait que, dans ce cas,  $f_*L$  a une structure très simple, résultant de la théorie des "structures-thêta" de Mumford [M3]. Cette démonstration, due à L. Szpiro et à l'auteur, sera publiée ailleurs. Pour  $d$  quelconque, on démontre encore (3.1) sous l'hypothèse que  $S$  est normal excellent, en se ramenant par isogénie au cas principalement polarisé (chapitre VIII).

4. La faiblesse de 1.1 réside dans le fait que  $\mathcal{A}$  n'est pas propre sur  $\mathbb{Z}[1/n]$  : on aimerait donc trouver une compactification de  $\mathcal{A}$ , munie d'une bonne interprétation comme schéma de modules, et un faisceau naturel sur icelle prolongeant  $\bar{\omega}$  (cf. [D], remarques suivant 1.12). On n'en est pas là mais il est naturel d'essayer de généraliser, par exemple, (3.1) au cas où  $A$  est seulement un  $S$ -schéma en groupes semi-stable, c'est-à-dire un  $S$ -schéma en groupes lisse commutatif dont les composantes neutres des fibres sont extensions de variétés abéliennes par des tores. Nous supposons de plus ici que la base est normale irréductible, et nous fixons, pour le reste de cette introduction, les notations suivantes :

(4.1)  $S$  est un schéma normal noethérien excellent irréductible de point générique  $\eta$ , et  $A \xrightarrow{f} S$  est un  $S$ -schéma en groupes semi-stable dont la fibre générique  $A_\eta$  est une variété abélienne de dimension  $g$  munie d'un faisceau inversible ample symétrique  $L_\eta$ .

Il s'agit d'abord de donner un sens à (3.1). La définition de  $\bar{\omega}_{A/S}$  est la même que dans le cas abélien (on peut aussi le définir par  $\bar{\omega}_{A/S} = e_A^* \Omega_{A/S}^g$ , où  $e_A : S \rightarrow A$  est la section unité). Il faut ensuite se donner un prolongement (rigidifié)  $L$  de  $L_\eta$  et voir quelles conditions on doit imposer à  $L$ , ainsi d'ailleurs qu'au groupe  $A$  considéré comme prolongement de  $A_\eta$ .

5. Supposons d'abord que  $S$  soit un trait. Lorsque la fibre fermée  $A_0$  de  $A$  n'est pas connexe,  $L_\eta$  admet plusieurs prolongements non isomorphes sur  $A$ . L'idée fondamentale, et naturelle depuis les travaux de Breen [B], est d'imposer au prolongement  $L$  de vérifier le théorème du cube sur  $A$ , ou, en termes plus précis, d'admettre (lorsqu'on le considère comme un  $\mathbb{G}_m$ -torseur) une "structure du cube" au sens de loc. cit., prolongeant celle dont  $L_\eta$  est gratifié par la Nature. On constate alors avec plaisir qu'un tel "prolongement cubiste" est unique, et existe après un changement de base suffisamment ramifié (II, §1 ; voir aussi [B], §3).

Ce théorème de prolongement est utilisé au chapitre III pour donner une définition géométrique des hauteurs de Néron-Tate. Ces résultats n'utilisent d'ailleurs pas la semi-stabilité de  $A$ , ni la symétrie ou l'amplitude de  $L_\eta$ .

Lorsque  $\dim S \gg 2$ , on a encore (trivialement, cette fois) l'unicité du prolongement cubiste, mais son existence après changement de base fini surjectif nécessite la semi-stabilité et la symétrie (II, §3).

On fixe donc désormais, en plus des données (4.1) :

(5.1) un faisceau inversible  $L$  sur  $A$ , prolongeant  $L_\eta$  et cubiste (i.e. muni d'une structure du cube).

Dans ces conditions, d'ailleurs,  $L$  est automatiquement symétrique et ample relativement à  $S$ .

6. Le faisceau inversible  $L_\eta$  sur  $A_\eta$  détermine une isogénie  $\varphi_{L_\eta} : A_\eta \rightarrow A_\eta^t$  dont le noyau est noté  $K(L_\eta)$ . On sait alors construire de façon naturelle une extension centrale  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  de  $K(L_\eta)$  par  $\mathbb{G}_{m,\eta}$ , qui "opère sur  $L_\eta$ " et qui est un "groupe thêta non dégénéré", en ce sens que l'accouplement alterné sur  $K(L_\eta)$  associé à cette extension est une dualité parfaite. De l'action de  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  sur  $L_\eta$  on déduit une représentation de poids 1 de  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  sur  $H^0(A_\eta, L_\eta)$ , et il résulte de théorèmes généraux que c'est l'unique représentation irréductible de

poids 1 de  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  ([M2], [M3]).

L'étape suivante consiste donc à prolonger ces données au-dessus de  $S$ . On montre en effet, au chapitre IV, qu'il existe un unique sous-schéma en groupes fermé  $K(L)$  de  $A$  prolongeant  $K(L_\eta)$ , plat et quasi-fini sur  $S$  (de sorte que  $K(L)$  est l'adhérence schématique de  $K(L_\eta)$  dans  $A$ ) et une extension centrale  $\mathcal{Q}(L)$  de  $K(L)$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$  prolongeant  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  et opérant sur  $L$ . De plus cette extension centrale est non dégénérée dès que  $K(L)$  est fini sur  $S$ . Notons que cette dernière hypothèse impose en général aux fibres dégénérées de  $A$  de n'être pas connexes.

Nous supposerons donc vérifiée l'hypothèse

(6.1)  $K(L)$  est fini sur  $S$ .

7. Considérons maintenant l'image directe  $f_*L$ , qui est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent (VI, 1.4.2). Si l'on espère formuler (3.1), il faut d'abord examiner les questions suivantes :

- (7.1) (i)  $f_*L$  est-il localement libre ? (Si oui, c'est automatiquement un  $\mathcal{Q}(L)$ -module irréductible (chapitre V)).
- (ii) (Comportement par gonflement). Soit  $A_1 \xrightarrow{f_1} S$  un modèle de  $A_\eta$  sur  $S$  contenant  $A$  comme sous-groupe ouvert, et soit  $L_1$  un prolongement cubiste de  $L$  sur  $A_1$ . Le morphisme naturel  $f_{1*}L_1 \longrightarrow f_*L$  est-il un isomorphisme ?
- (iii) (Comportement par changement de base). Soit  $\pi : S' \longrightarrow S$  un "changement de base admissible", i.e. tel que  $S'$  soit (disons) normal intègre et que  $A \times_S S'$  soit, génériquement sur  $S'$ , un schéma abélien. La formation de  $f_*L$  commute-t-elle au changement de base  $\pi$  ?

L'auteur n'a pas été peu surpris de constater que la réponse à ces trois questions est affirmative sous l'hypothèse suivante, un peu plus forte que (6.1) :

(7.2)  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$ .

En fait, on montre au chapitre VI (en s'inspirant en partie de notes non publiées de D. Mumford) que, sous l'hypothèse 7.2, le morphisme naturel

(7.3)  $f_*L \longrightarrow f_*(L|_{K(L^{\otimes 2})})$

est injectif et localement scindé. Notons d'ailleurs que le point délicat de la démonstration est le cas où  $\dim S \gg 2$ , alors que, pour nombre de résultats ultérieurs, on pourrait se contenter du cas où  $\dim S = 1$ .

8. Supposant désormais vérifiée la condition (7.2), nous pouvons énoncer l'analogie de (3.1) :

(8.1) Posant  $d = \text{rg}(f_*L)$ , le faisceau inversible

$$\delta(A, L) = (\wedge^d f_*L)^{\otimes 2} \otimes \bar{\omega}_{A/S}^{\otimes d}$$

est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(S)$ .

Ce résultat est démontré au chapitre VIII lorsque  $S$  est un schéma d'égalités caractéristiques. On en déduit au chapitre IX le théorème de positivité suivant :

8.2. Théorème. Sous les hypothèses (4.1), supposons que  $S$  soit un schéma d'égalités caractéristiques. Alors il existe  $n \gg 1$  tel que  $\bar{\omega}_{A/S}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales.

9. Les chapitres XI et XII s'attachent plus particulièrement à l'étude des variétés abéliennes sur un corps de fonctions sur un "corps de base"  $k$  fixé ; le lecteur est invité à se reporter aux introductions des chapitres en question. Signalons que l'on obtient comme corollaire, lorsque  $k$  est fini, le théorème de finitude de Zarhin-Mori, et que l'une des motivations initiales de ce travail était d'arriver à une compréhension "géométrique" de ce résultat. Le lecteur mesurera le succès de l'entreprise en comparant les quelque 250 pages présentes aux 7 pages totalisées par [Z1] et [Z3]. Il pourra aussi consulter la note [MB].

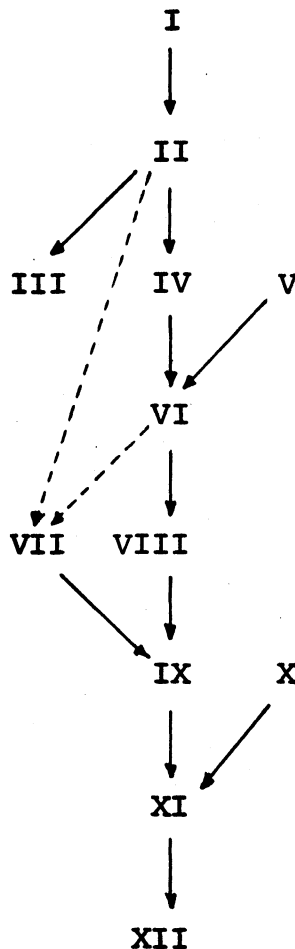
10. Le présent travail a bénéficié de l'influence de nombreux mathématiciens, et d'abord de L. Szpiro, de qui j'ai appris (parmi beaucoup d'autres choses) les techniques de "frobénusage" et de "réduction modulo  $p$  assez grand" utilisées au chapitre VIII, §2 et 4. Le théorème VIII, 3.1 est, comme je l'ai dit plus haut, le fruit d'une collaboration avec lui ; d'une façon générale l'ensemble de ce travail s'inscrit dans un programme général d'étude des "pincesaux de variétés" dont il est l'initiateur.



Les idées de L. Breen jouent évidemment un rôle essentiel ici ; j'ai également bénéficié de conversations fructueuses avec D. Mumford, sans parler des manuscrits qu'il a bien voulu me communiquer. Le §5 du chapitre VI trouve son origine dans des notes de S. Mori, et je dois à W. Fulton le lemme 4.1.4 du chapitre X. Le lecteur reconnaîtra aussi, en particulier dans les chapitre IV et VI, l'influence des travaux de M. Raynaud ; ses conseils, et l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail, m'ont été précieux.

Enfin une partie de ce travail a été réalisée en 1981-82 lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Study de Princeton, grâce à une subvention de la National Science Foundation.

### Leitfaden



Les flèches pointillées indiquent une dépendance partielle : voir l'introduction du chapitre VII.

## CHAPITRE I

Torseurs cubistesSommaire.

0. Introduction.
1. Applications pointées de degré  $n$ .
2. Cas des toseurs : structures cubistes.
3. Lien avec les extensions centrales
4. Cas des schémas abéliens : le groupe  $\mathcal{Q}(L)$ .
5. Réduction à l'objet trivial ; application à certains isomorphismes canoniques.
6. Une nouvelle définition des structures cubistes.
7. Descente de toseurs cubistes ; application aux extensions de schémas en groupes lisses par des tores.

0. Introduction.

Ce chapitre est consacré aux propriétés générales des toseurs munis d'une structure du cube (rebaptisés ici "torseurs cubistes"), notion introduite par L. Breen [B]. L'intérêt de cette notion pour la suite de ce travail apparaît au n° 2.6 : on y montre l'existence d'une unique structure cubiste pour tout  $\mathbb{G}_m$ -torseur (trivialisé le long de la section unité) sur un schéma en groupes vérifiant certaines conditions, satisfaites en particulier par les "variétés abéliennes dégénérantes" à fibres connexes sur un schéma de base normal (cf. [B], 2.4). La notion de structure cubiste permet aussi de retrouver (§4) le classique groupe  $\mathcal{Q}(L)$  de [M2], associé à un faisceau inversible  $L$  sur un schéma abélien.

Au §5 est introduite la technique de "réduction au toseur cubiste trivial", fort commode pour construire certains isomorphismes canoniques (comme celui, classique, de la proposition 5.5), et surtout pour démontrer sans larmes que ces isomorphismes respectent les structures cubistes naturelles des deux membres. Ce principe est exploité plus avant au §6 où il sert de fondement à une nouvelle définition des toseurs cubistes, qui semble plus naturelle que celle de [B] mais qui, par exemple, même dans le cas des  $\mathbb{G}_m$ -torseurs sur un schéma en groupes, oblige à tra-

vailler dans le cadre général des faisceaux. Il convient aussi de remarquer que la définition de Breen, en termes de trivialisations de toseurs sur  $A \times A \times A$ , joue un rôle crucial (notamment) dans les questions de prolongement du chapitre II.

Remarquons enfin que nous notons ici  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  les opérations notées respectivement  $\wedge$  et  $\otimes$  dans [B].

## 1. Applications pointées de degré $n$ .

1.1. Définition. Soient  $A$  et  $G$  deux groupes commutatifs, notés respectivement additivement et multiplicativement, et soit  $n$  un entier  $\gg 0$ . Si  $f: A \rightarrow G$  est une application, on définit

$$\mathcal{D}_n(f) : A^n \rightarrow G$$

par la formule

$$\mathcal{D}_n(f)(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} f(x_I)^{(-1)^{n + \text{Card } I}}$$

où l'on a posé  $x_I = \sum_{i \in I} x_i$ .

On dit que  $f$  est pointée de degré  $n$  si  $\mathcal{D}_{n+1}(f) = 1$ .

Ainsi :  $\mathcal{D}_0(f) = 1 : \{0\} \rightarrow G$

$$\mathcal{D}_1(f) = f$$

$$\mathcal{D}_2(f)(x, y) = f(x+y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$$

$$\mathcal{D}_3(f)(x, y, z) = f(x+y+z)f(x+y)^{-1}f(x+z)^{-1}f(y+z)^{-1}f(x)f(y)f(z)$$

$f$  est pointée de degré  $0 \iff f = 1$

$f$  est pointée de degré  $1 \iff f$  est un morphisme de groupes

$f$  est pointée de degré  $n \gg 0 \implies f(0) = 1$

(en effet  $\mathcal{D}_{n+1}(f)(0, \dots, 0) = f(0)^{(-1)^{n+1}}$ ).

## 1.2. Propriétés des opérations $\mathcal{D}_n$ .

1.2.1. Additivité :  $\mathcal{D}_n(fg) = \mathcal{D}_n(f) \cdot \mathcal{D}_n(g)$

pour  $f, g: A \rightarrow G$  et  $n \gg 0$ .

1.2.2. Fonctorialité en  $A$  et  $G$  : si  $\varphi: A' \rightarrow A$  et  $\psi: G \rightarrow G'$  sont des morphismes de groupes abéliens, on a pour toute  $f: A \rightarrow G$  :

$$\mathfrak{D}_n(f \circ \varphi) = \mathfrak{D}_n(f) \circ \varphi^{(n)}$$

$$\mathfrak{D}_n(\psi \circ f) = \psi \circ \mathfrak{D}_n(f)$$

où  $\varphi^{(n)} : A^n \longrightarrow A^n$  est défini par

$$\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) .$$

1.2.3. Symétrie :  $\mathfrak{D}_n(f)$  est invariante sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur  $A^n$  .

1.2.4. On vérifie, pour tout  $n \gg 1$  , la relation :

$$(1.2.4.1) \quad \mathfrak{D}_{n+1}(f)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \mathfrak{D}_n(f)(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) \cdot \mathfrak{D}_n(f)(x_1, \dots, x_n)^{-1} \cdot \mathfrak{D}_n(f)(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})^{-1}$$

ainsi que toutes les relations qui s'en déduisent par permutation. En particulier :

- pour  $n \gg 1$  ,  $\mathfrak{D}_n(f)(x_1, \dots, x_n) = f(0)^{(-1)^{n+1}}$  dès que l'un des  $x_i$  est nul.
- $f$  est pointée de degré  $n \gg 1$  si et seulement si  $\mathfrak{D}_n(f)$  est  $n$ -linéaire.

La relation (1.2.4.1) montre également que pour  $n \gg 2$  ,  $\mathfrak{D}_n(f)$  est un 2-cobord par rapport à chaque paire de variables ; a fortiori, elle vérifie la condition de cocycle (où l'on a posé  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-2})$ ) :

$$(1.2.4.2) \quad \mathfrak{D}_n(f)(\underline{x}, a+b, c) \cdot \mathfrak{D}_n(f)(\underline{x}, a, b) = \mathfrak{D}_n(f)(\underline{x}, a, b+c) \cdot \mathfrak{D}_n(f)(\underline{x}, b, c) \quad (n \gg 2).$$

1.3. Les considérations qui précèdent s'étendent d'elles-mêmes au cas où  $A$  et  $G$  sont deux Groupes commutatifs d'un topos  $E$  : si  $f \in \text{Hom}_E(A, G)$  est un morphisme entre les objets de  $E$  sous-jacents à  $A$  et  $G$  , on définit donc  $\mathfrak{D}_n(f) : A^n \longrightarrow G$  comme dans 1.1. On notera

$$\text{Hom}_E^{(n)}(A, G) \subset \text{Hom}_E(A, G)$$

le groupe des "morphisms pointés de degré  $n$ " de  $A$  dans  $G$  , i.e. l'ensemble des  $f$  vérifiant  $\mathfrak{D}_{n+1}(f) = 1$  ; en particulier :

$$\text{Hom}_E^{(0)}(A, G) = \{1\}$$

$$\text{Hom}_E^{(1)}(A, G) = \text{Hom}_{\text{Ab}_E}(A, G) .$$

## 2. Cas des torsseurs : structures cubistes.

Dans ce n° on fixe un topos  $E$ .

2.1. Soient  $A$  et  $G$  deux Groupes commutatifs de  $E$ , et soit  $L$  un G-torseur sur  $A$ . En complète analogie avec 1.1, nous pouvons définir un  $G$ -torseur  $\mathcal{D}_n(L)$  sur  $A^n$ , par la formule

$$(2.1.1) \quad \mathcal{D}_n(L) = \bigotimes_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (m_I^* L)^{\otimes (-1)^{n + \text{Card } I}}$$

où  $m_I : A^n \rightarrow A$  est le morphisme  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$ , et où  $\otimes$  désigne la somme des  $G$ -torsseurs.

Il est souvent commode (et suggestif) de décrire  $\mathcal{D}_n(L)$  en terme de "points" : si  $x$  est un point de  $A$  à valeurs dans un objet  $T$  de  $E$  (i.e. un morphisme  $x : T \rightarrow A$ ), convenons de noter  $L_x$  le  $G$ -torseur  $x^*L$  sur  $T$ . Alors la définition (2.1.1) devient

$$(2.1.2) \quad \mathcal{D}_n(L)(x_1, \dots, x_n) = \bigotimes_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} L_{x_I}^{\otimes (-1)^{n + \text{Card } I}}$$

où l'on a posé  $x_I = \sum_{i \in I} x_i$ .

### 2.2. Propriétés de $\mathcal{D}_n$ .

2.2.1. Additivité : si  $L$  et  $M$  sont deux  $G$ -torsseurs sur  $A$ , on a pour tout  $n \geq 0$  un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_n(L \otimes M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_n(L) \otimes \mathcal{D}_n(M)$$

de  $G$ -torsseurs sur  $A^n$ .

2.2.2. Fonctorialité en  $A$  : si  $\varphi : A' \rightarrow A$  est un morphisme de Groupes commutatifs de  $E$ , on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_n(\varphi^*L) \xrightarrow{\sim} (\varphi^{(n)})^* \mathcal{D}_n(L)$$

de  $G$ -torsseurs sur  $A'^n$ , où  $\varphi^{(n)} : A'^n \rightarrow A^n$  est définie comme en 1.2.2.

2.2.3. Fonctorialité en  $G$  : si  $\psi : G \rightarrow G'$  est un morphisme de Groupes commutatifs de  $E$ , notons  $L^\psi$  le  $G'$ -torseur sur  $A$  déduit

du  $G$ -torseur  $L$  par le changement de groupe structural  $\psi$ . Alors on a un isomorphisme canonique de  $G'$ -torseurs sur  $A^n$  :

$$\mathcal{D}_n(L^\psi) \simeq \mathcal{D}_n(L)^\psi .$$

2.2.4. Fonctorialité en  $L$  : si  $u: L \rightarrow M$  est un morphisme (i.e. un isomorphisme) de  $G$ -torseurs sur  $A$ , on en déduit un isomorphisme

$$\mathcal{D}_n(u) : \mathcal{D}_n(L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_n(M)$$

de  $G$ -torseurs sur  $A^n$ .

2.2.5. Torseur trivial : si l'on note  $G_A$  le  $G$ -torseur trivial  $G \times A$  sur  $A$ , on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_n(G_A) \simeq G_{A^n}$$

2.2.6. Sections : une section  $\sigma$  du  $G$ -torseur  $L$  sur  $A$  s'interprète comme un morphisme (c'est-à-dire un isomorphisme) de  $G$ -torseurs de  $G_A$  dans  $L$ ; on en déduit donc grâce à 2.2.4 et 2.2.5, une section

$$\mathcal{D}_n(\sigma)$$

du toseur  $\mathcal{D}_n(L)$  sur  $A^n$ . Si  $f: A \rightarrow G$  est un morphisme dans  $E$ , on a de plus la formule

$$(2.2.6.1) \quad \mathcal{D}_n(f\sigma) = \mathcal{D}_n(f)\mathcal{D}_n(\sigma) .$$

2.2.7. Il existe bien entendu de nombreuses compatibilités entre les isomorphismes ci-dessus (et ceux qui vont suivre). Par exemple l'isomorphisme d'additivité 2.2.1 est caractérisé par les propriétés d'être fonctoriel en  $L$  et  $M$  et compatible au changement du Groupe structural  $G$ , et de respecter les trivialisations naturelles des deux membres lorsque l'on prend  $L = M =$  le toseur trivial  $G_A$ . Le fait que ces propriétés caractérisent 2.2.1 se voit en plongeant  $G$  dans un Groupe injectif  $G'$  de  $E$  et en remarquant que tout  $G'$ -torseur est trivial. Ce principe de "réduction au toseur trivial" rend tautologiques les démonstrations de commutativité de nombreux diagrammes; en fait, "tout diagramme de toseurs suffisamment naturel est commutatif", contrairement à ce qui se passe pour les groupes: au royaume des toseurs il n'y a pas de questions de signes.

2.2.8. Symétrie : il est immédiat que  $\mathcal{D}_n(L)$  est muni d'une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , compatible à l'action d'icelui sur  $A^n$ ; autrement dit, pour tout  $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ , si l'on note encore  $\gamma: A^n \rightarrow A^n$  la per-

mutation correspondante des facteurs, on a un isomorphisme canonique de  $G$ -torseurs

$$\chi_\gamma : \mathcal{D}_n(L) \xrightarrow{\sim} \gamma^* \mathcal{D}_n(L)$$

avec les relations attendues entre  $\chi_\gamma$ ,  $\chi_{\gamma'}$  et  $\chi_{\gamma\gamma'}$ .

2.2.9. Sections nulles. Notons  $0_E$  l'objet final de  $E$  et  $e_A : 0_E \rightarrow A$  la section nulle. Pour  $1 \ll i \ll n$ , soit  $\eta_i : A^{n-1} \rightarrow A^n$  le morphisme défini par la section nulle du  $i$ -ème facteur de  $A^n$ . On a alors des isomorphismes canoniques

$$\eta_i^* \mathcal{D}_n(L) \simeq p^* e_A^*(L)^{\otimes (-1)^{n+1}}$$

où  $p : A^{n-1} \rightarrow 0_E$  est le morphisme canonique (et unique). Ces isomorphismes sont compatibles entre eux, en ce sens que  $\eta_i$  et  $\eta_j$  coïncident sur l'intersection  $\eta_i(A^{n-1}) \cap \eta_j(A^{n-1})$ .

Pour ne pas alourdir à l'excès ce chapitre, nous allons nous limiter désormais aux cas  $n=2$  et  $n=3$ , les seuls intéressants pour nous dans la suite.

### 2.3. Etude de $\mathcal{D}_2$ ; structures d'extensions.

On a par définition  $\mathcal{D}_2(L)_{x,y} = L_{x+y} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1}$ .

L'action du groupe  $\mathfrak{S}_2$  (2.2.8) se réduit à un isomorphisme de symétrie

$$(2.3.1) \quad \xi_{x,y} : \mathcal{D}_2(L)_{x,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_2(L)_{y,x}$$

vérifiant  $\xi_{x,x} = \text{Id}$  et  $\xi_{x,y} \circ \xi_{y,x} = \text{Id}_{\mathcal{D}_1(L)_{y,x}}$ .

La définition de  $\mathcal{D}_2(L)$  donne, par un calcul immédiat, un isomorphisme de cocycle

$$(2.3.2) \quad \varphi_{x,y,z} : \mathcal{D}_2(L)_{x+y,z} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{x,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_2(L)_{x,y+z} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{y,z}$$

qui est fonctoriel en  $L$  et compatible au changement de Groupe structural, et qui respecte les trivialisations naturelles des deux membres lorsque  $L$  est le toseur trivial ; de plus  $\varphi$  est caractérisé par ces propriétés (cf. 2.2.7).

On a d'autre part (2.2.9) des isomorphismes "de rigidification"

$$(2.3.3) \quad \mathcal{D}_2(L)_{0,y} \simeq L_0^{-1} \simeq \mathcal{D}_2(L)_{x,0}$$

où  $L_0$  est la fibre de  $L$  à l'origine ; ces isomorphismes sont compatibles à la symétrie  $\xi$ , et compatibles avec (2.3.2) en ce sens que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{D}_2(L)_{y,z} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{0,y} & \xrightarrow{\varphi_{0,y,z}} & \mathfrak{D}_2(L)_{0,y+z} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{y,z} \\
 \downarrow (2.3.3) & & \downarrow (2.3.3) \\
 L_0^{-1} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{y,z} & & 
 \end{array}$$

(2.3.3.1)

Supposons maintenant donnée une section  $\sigma$  de  $\mathfrak{D}_2(L)$  au-dessus de  $A \times A$ . Pour  $(x,y) \in A^L$  on a donc une trivialisatoin  $\sigma(x,y)$  de  $L_{x+y} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1}$ , c'est-à-dire un isomorphisme  $L_x \otimes L_y \longrightarrow L_{x+y}$ , donc une loi de composition sur  $L$ , que nous noterons  $(a,b) \longmapsto a*b$ , compatible avec la loi de groupe de  $A$  via la projection  $L \longrightarrow A$ , et compatible à l'action de  $G$  sur  $L$  au sens suivant : pour  $a \in L$ ,  $b \in L$ ,  $g \in G$ , on a

$$(2.3.4) \quad (ga)*b = a*(gb) = g(a*b) .$$

Il est immédiat que la donnée d'une section  $\sigma$  de  $\mathfrak{D}_2(L)$  équivaute à celle d'une loi de composition  $*$  sur  $L$  possédant ces propriétés, le passage de l'une à l'autre se faisant par la formule

$$(2.3.5) \quad \sigma(\pi(a), \pi(b)) = (a*b) \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}$$

où  $a$  et  $b \in L$  et où  $\pi : L \longrightarrow A$  est le morphisme structural.

Une telle section  $\sigma$  donne encore naissance, via les rigidifications (2.3.3), à deux sections de  $p^*e_A^*L$  (où  $p$  est ici le morphisme  $A \longrightarrow O_E$ ), autrement dit à deux morphismes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : A \longrightarrow L_0 = e_A^*L$  d'objets de  $E$ . En termes de la loi  $*$  correspondante, ils vérifient

$$\begin{aligned}
 (2.3.6) \quad \varepsilon_1(x) * \tilde{x} &= \tilde{x} \\
 \tilde{x} * \varepsilon_2(x) &= \tilde{x}
 \end{aligned}$$

pour tout  $x \in A$  et tout  $\tilde{x} \in L$  au-dessus de  $x$ .

De plus la compatibilité en  $(0,0)$  des isomorphismes (2.3.3) implique que  $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0)$ , d'où une section  $\varepsilon$  du torseur  $L_0$  sur  $O_E$ , vérifiant  $\varepsilon * \varepsilon = \varepsilon$ . La relation (2.3.4) donne alors

$$(2.3.7) \quad (g\varepsilon) * (g'\varepsilon) = (gg')\varepsilon$$



pour  $g$  et  $g' \in G$  ; autrement dit la trivialisatation de  $L_0$  donnée par  $\varepsilon$  identifie la loi  $*$  à la loi de groupe de  $G$  .

Il est immédiat que la loi  $*$  est commutative si et seulement si la section  $\sigma$  est invariante par la symétrie  $\xi$  de (2.3.1), i.e :

$$(2.3.8) \quad \sigma(y,x) = \xi_{x,y}(\sigma(x,y)) .$$

Il est un peu plus fastidieux de vérifier que  $*$  est associative si et seulement si  $\sigma$  est compatible avec l'isomorphisme de cocycle (2.3.2), c'est-à-dire :

$$(2.3.9) \quad \varphi_{x,y,z}(\sigma(x+y,z) \otimes \sigma(x,y)) = \sigma(x,y+z) \otimes (y,z) .$$

Cette condition implique d'ailleurs, comme on le voit en contemplant le diagramme (2.3.3.1) ou les formules (2.3.6), que les morphismes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2 : A \rightarrow L_0$  sont constants, i.e.  $\varepsilon_*(x) = \varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(0) = \varepsilon$ , et que la section  $\varepsilon$  de  $L_0$  est élément neutre de  $*$ . En résumé : (cf. aussi SGA 7, VII, 1.1.6 et 1.2) :

2.3.10. Proposition. La donnée, sur le torseur  $L$ , d'une structure d'extension commutative de  $A$  par  $G$  (compatible avec sa structure de torseur), équivaut à la donnée d'une section  $\sigma$  de  $\mathcal{D}_2(L)$  sur  $A \times A$ , symétrique au sens de (2.3.8), et qui est un 2-cocycle au sens de (2.3.9).

#### 2.4. Etude de $\mathcal{D}_3$ ; structures cubistes.

On a par définition

$$(2.4.1) \quad \mathcal{D}_3(L)_{x,y,z} = L_{x+y+z} \otimes L_{x+y}^{-1} \otimes L_{x+z}^{-1} \otimes L_{y+z}^{-1} \otimes L_x \otimes L_y \otimes L_z$$

$\mathcal{D}_3(L)$  est muni d'une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ , c'est-à-dire, pour tout  $\gamma \in \mathfrak{S}_3$  et pour  $(x_1, x_2, x_3) \in A^3$ , d'un isomorphisme

$$(2.4.2) \quad (\chi_\gamma)_{x_1, x_2, x_3} : \mathcal{D}_3(L)_{x_1, x_2, x_3} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_3(L)_{x_{\gamma(1)}, x_{\gamma(2)}, x_{\gamma(3)}} .$$

De façon analogue à (1.2.4.1),  $\mathcal{D}_3(L)$  se reconstruit à partir de  $\mathcal{D}_2(L)$  ; on a ainsi deux isomorphismes canoniques

$$(2.4.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2(L)_{x+y,z} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{x,z}^{-1} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{y,z}^{-1} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}_3(L)_{x,y,z} \\ & \searrow^{(\alpha_1)_{x,y,z}} & \\ \mathcal{D}_2(L)_{x,y+z} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{x,y}^{-1} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{x,z}^{-1} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}_3(L)_{x,y,z} \\ & \nearrow_{(\alpha_2)_{x,y,z}} & \end{array}$$

(le lecteur vérifiera que  $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$  permet de retrouver l'isomorphisme de cocycle (2.3.2)).

On en déduit encore pour  $\mathcal{D}_3(L)$  des isomorphismes de cocycle dont nous n'explicitons qu'un seul :

$$(2.4.4) \quad \psi_{x,y,z,t} : \mathcal{D}_3(L)_{x+y,z,t} \otimes \mathcal{D}_3(L)_{x,y,t} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_3(L)_{x,y+z,t} \otimes \mathcal{D}_3(L)_{y,z,t},$$

les autres s'en déduisant (par exemple) par permutation ; bien entendu chacun de ces isomorphismes est caractérisé par sa functorialité, sa compatibilité au changement de Groupe structural, et son effet sur le torseur trivial.

2.4.5. Définition. Une structure cubiste (ou "structure du cube" [B]) sur le G-torseur L au-dessus du Groupe A est une section  $\tau$  du torseur  $\mathcal{D}_3(L)$  sur  $A^3$ , possédant les propriétés suivantes :

(i)  $\tau$  est invariante par  $\mathfrak{S}_3$ , i.e. pour tout  $\gamma \in \mathfrak{S}_3$ ,

$$\chi_\gamma(\tau) = \gamma^*(\tau) \quad (\text{comme sections de } \gamma^*\mathcal{D}_3(L))$$

(notations de 2.4.2))

(ii)  $\tau$  est un 2-cocycle en les deux premières variables (ou, ce qui revient au même compte tenu de (i), en chaque paire de variables), i.e. :

$$\psi_{x,y,z,t}(\tau(x+y,z,t) \otimes \tau(x,y,t)) = \tau(x,y+z,t) \otimes \tau(y,z,t)$$

(notation de (2.4.4)).

Un torseur cubiste est un torseur muni d'une structure cubiste.

Un morphisme de toseurs cubistes  $(L, \tau) \longrightarrow (L', \tau')$  est un morphisme  $f : L \longrightarrow L'$  de G-torseurs tel que  $\mathcal{D}_3(f) : \mathcal{D}_3(L) \longrightarrow \mathcal{D}_3(L')$  vérifie  $\mathcal{D}_3(f)(\tau) = \tau'$ .

On note  $\text{CUB}(A, G)$  la catégorie des G-torseurs cubistes sur A.

2.4.6. On laisse au lecteur le soin d'expliciter les notions d'image réciproque d'un torseur cubiste par un morphisme  $A' \longrightarrow A$ , d'image par un changement de Groupe structural  $G \longrightarrow G'$ , de torseur cubiste trivial, de produit tensoriel (ou somme, s'il préfère) de G-torseurs cubistes, de torseur cubiste inverse, etc. Munie de l'opération du produit tensoriel,  $\text{CUB}(A, G)$  est une "catégorie de Picard strictement commutative" au sens de SGA 4, XVIII.1.4.2.

Bien entendu, une trivialisation d'un objet  $(L, \tau)$  de  $\text{CUB}(A, G)$  est un isomorphisme de l'objet trivial avec  $(L, \tau)$ , c'est-à-dire une section  $\sigma$  de  $L$  sur  $A$ , vérifiant la relation

$$(2.4.5.1) \quad \mathfrak{D}_3(\sigma) = \tau$$

et il est immédiat, en vertu de la relation (2.2.6.1), que l'ensemble des trivialisations de  $(L, \tau)$  est, s'il n'est pas vide, un espace homogène principal sous le groupe

$$\text{Hom}_E^{(2)}(A, G)$$

introduit en 1.3, des applications pointées de degré 2 de  $A$  dans  $G$ .

## 2.5. Lien avec les biextensions.

Pour voir que la notion définie ci-dessus est la même que dans [B], 2.2, nous allons faire brièvement le lien avec la notion de biextension, introduite dans [M1] et développée dans SGA 7, VII et VIII.

Soit donc  $(L, \tau)$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ . Via l'isomorphisme  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) de (2.4.3), la section  $\tau$  de  $\mathfrak{D}_3(L)$  donne naissance à une section  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) de  $\mathfrak{D}_2(L)_{x+y, z} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{x, z}^{-1} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{y, z}^{-1}$  (resp.  $\mathfrak{D}_2(L)_{x, y+z} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{x, y}^{-1} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{x, z}^{-1}$ ), et par suite à deux lois de composition partielles

$$(2.5.1) \quad \begin{aligned} *_1 &: \mathfrak{D}_2(L)_{x, z} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{y, z} \longrightarrow \mathfrak{D}_2(L)_{x+y, z} \\ *_2 &: \mathfrak{D}_2(L)_{x, y} \otimes \mathfrak{D}_2(L)_{x, z} \longrightarrow \mathfrak{D}_2(L)_{x, y+z} \end{aligned}$$

suivant le même procédé que dans 2.3. De plus les deux sections  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont liées par la relation

$$(2.5.2) \quad \alpha_1(\sigma_1) = \alpha_2(\sigma_2) (= \tau).$$

On vérifie alors que les conditions (i) et (ii) de 2.4.5 impliquent que les deux lois  $*_1$  et  $*_2$  constituent une structure de biextension symétrique de  $(A, A)$  par  $G$ , au sens de [B], sur le toseur  $\mathfrak{D}_2(L)$  muni de l'isomorphisme de symétrie  $\xi$  de (2.3.1) (et réciproquement...).

Par exemple, la commutativité de  $*_1$  équivaut à la compatibilité de  $\tau$  avec l'action de la transposition (1.2) de  $\mathfrak{S}_3$ , et l'associativité de  $*_1$  à la condition de cocycle explicitée en 2.4.5 (ii). Ceci résulte d'ailleurs, si l'on veut, de 2.3.10 : en effet, grâce à  $\alpha_1$ ,  $\mathfrak{D}_3(L)$  peut être considéré comme le  $\mathfrak{D}_2$  du toseur  $\mathfrak{D}_2(L)$  sur  $A \times A$

lorsque l'on regarde ce dernier comme un Groupe du topos  $E/A$  grâce à la seconde projection. Il est d'ailleurs établi dans [B], 2.5, que la donnée de deux lois  $*_1$  et  $*_2$ , vérifiant (2.5.2) ci-dessus, toutes deux commutatives et dont l'une soit associative, suffit à définir sur  $L$  une structure du cube au sens de loc. cit.

2.5.3. Remarquons enfin qu'une structure cubiste  $\tau$  définit, grâce à la section  $\tau(0,0,0)$  de  $\mathcal{D}_3(L)_{0,0,0} \simeq L_0$ , une trivialisatıon à l'origine du toseur  $L$ , d'où grâce à 2.2.9 une trivialisatıon de la restriction de  $\mathcal{D}_3(L)$  à chacun des produits  $\{0\} \times A \times A$ ,  $A \times \{0\} \times A$ ,  $A \times A \times \{0\}$ . Ces trivialisatıons (essentiellement grâce aux conditions de cocycle) coïncident en fait avec les restrictions de  $\tau$  à ces produits. En d'autres termes et par abus d'écriture :

$$\tau(0,y,z) = \tau(0,0,0)$$

le signe d'égalité faisant référence à l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_2(L)_{0,y,z} \simeq \mathcal{D}_2(L)_{0,0,0} .$$

De ces considérations le lecteur retiendra la

2.5.4. Proposition. La donnée, sur le toseur  $L$ , d'une structure du cube, équivaut à celle, sur le toseur  $\mathcal{D}_2(L)$ , d'une structure de biextension de  $(A,A)$  par  $G$ , les deux lois de composition partielles définissant cette structure étant assujetties à la relation (2.5.2) (on identifie les lois de composition  $*_1$  et  $*_2$  aux sections  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qu'elles définissent).

## 2.6. Exemple fondamental.

Soit  $S$  un schéma : nous prendrons pour  $E$  le topos associé au "gros site fppf" de tous les  $S$ -schémas avec la topologie fppf, et pour  $G$  le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_{m,S}$ . Nous identifierons toujours en cas de besoin un  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L$  sur un schéma  $X$  au faisceau inversible  $\mathcal{L}$  tel que  $L = \underline{\text{Isom}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L})$ .

Proposition. Soit  $A$  un  $S$ -schéma en groupes lisse, commutatif, à fibres connexes. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :

(i)  $A$  est un  $S$ -schéma abélien

(ii) (cf. [B], 2.4)  $S$  est normal et les fibres maximales de  $A$  sont extensions multiples de variétés abéliennes, de tores (non nécessairement déployés) et de groupes  $\mathbb{G}_a$ .

Alors le foncteur d'oubli

$$\text{CUB}(A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \text{TORSRIG}(A, \mathbb{G}_m)$$

(où  $\text{TORSRIG}(A, \mathbb{G}_m)$  est la catégorie des  $\mathbb{G}_m$ -torseurs sur  $A$  trivialisés à l'origine de  $A$ ) est une équivalence de catégories.

Démonstration : soit  $L$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur rigidifié sur  $A$ .

Cas (i). D'après le théorème du cube (cf. par exemple [R1], IV.2.1) le faisceau  $\mathcal{D}_3(L)$  sur  $A^3$  provient d'un faisceau inversible sur  $S$ . Comme de plus  $L$  est rigidifié à l'origine,  $\mathcal{D}_3(L)$  l'est également : il est donc trivial. Mieux, si  $p: A^3 \rightarrow S$  désigne le morphisme structural, on a  $p_* \mathcal{O}_{A^3} \simeq \mathcal{O}_S$  donc il existe une unique trivialisation  $\tau$  de  $\mathcal{D}_3(L)$  compatible avec sa rigidification. Etant unique,  $\tau$  est automatiquement symétrique (condition (i) de 2.4.5) et de même il suffit de vérifier la condition (ii) de 2.4.5 lorsque  $x=y=z=t=0$  : elle résulte alors de la compatibilité à la rigidification. Nous avons donc montré que  $L$  possède une unique structure cubiste compatible à la rigidification, cqfd.

Cas (ii). D'après SGA 7, VIII.7.5, nous savons que  $\mathcal{D}_2(L)$  admet une unique structure de biextension compatible aux rigidifications sur  $\{0\} \times A$  et  $A \times \{0\}$  déduites de la rigidification de  $L$ . Il reste à vérifier que les lois  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de cette biextension vérifient la condition (2.5.2). Or les deux sections  $\alpha_1(\sigma_1)$  et  $\alpha_2(\sigma_2)$  de  $\mathcal{D}_3(L)$  coïncident, sur les produits  $\{0\} \times A \times A$ ,  $A \times \{0\} \times A$ ,  $A \times A \times \{0\}$ , avec la rigidification naturelle de  $\mathcal{D}_3(L)$  sur ces sous-groupes. Leur quotient est donc une fonction  $A \times A \times A \rightarrow \mathbb{G}_m$ , égale à 1 sur ces sous-groupes, donc identiquement égale à 1 ("lemme de Rosenlicht") puisque  $S$  est réduit. ■

2.6.1. Remarque. Soit  $k$  un corps séparablement clos, et posons  $S = \text{Spec}(k[[x,y]]/(x^2-y^3))$ ,  $A = \mathbb{G}_{m,S}$ . Il existe (exercice) un  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L$  non trivial sur  $A$ . Or nous verrons plus bas (7.2.1) qu'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A$  est en fait une extension commutative de  $A$  par  $\mathbb{G}_m$ , donc est trivial puisque  $S$  est strictement hensélien. Par suite le toseur  $L$  (qui admet évidemment des rigidifications) ne possède aucune structure cubiste.

### 3. Lien avec les extensions centrales (cf. [B], 2.11).

3.1. Donnons-nous à nouveau un topos  $E$ , deux Groupes commutatifs  $A$  et  $G$  de  $E$ , et de plus un sous-Groupes  $K \hookrightarrow A$  de  $A$  (on pourrait

considérer plus généralement un morphisme  $K \rightarrow A$  de Groupes commutatifs). Soit  $(L, \tau)$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ , et supposons donnée une trivialisation  $\sigma$  de la biextension  $(j \times \text{Id}_A)^* \mathcal{D}_2(L)$  de  $(K, A)$  par  $G$ .

On a donc, pour  $x \in K$  et  $y \in A$ , une section  $\sigma(x, y)$  de  $L_{x+y} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1}$  donc un isomorphisme  $L_x \otimes L_y \xrightarrow{\sim} L_{x+y}$ , i.e. une loi externe

$$* : L|_K \times L \rightarrow L$$

compatible avec l'addition  $K \times A \rightarrow A$ , et avec l'action de  $G$  sur  $L$ . Nous allons, une fois n'est pas coutume, expliciter un peu les choses : si l'on a  $x \in K$ ,  $y \in A$ ,  $u \in L_x$ ,  $v \in L_y$ , on en déduit un élément  $u*v$  de  $L_{x+y}$ , par la condition (cf. (2.3.5)) :

$$(3.1.1) \quad \sigma(x, y) = (u*v) \otimes u^{-1} \otimes v^{-1} \in \mathcal{D}_2(L)_{x, y}.$$

D'autre part  $\sigma$  est supposée compatible avec la structure de biextension de  $\mathcal{D}_2(L)$ . La première loi de  $\mathcal{D}_2(L)$  est

$$\mathcal{D}_2(L)_{x, z} \otimes \mathcal{D}_2(L)_{y, z} \xrightarrow{\otimes \tau(x, y, z)} \mathcal{D}_2(L)_{x+y, z}$$

(à des contractions près, du type  $L_{x+z} \otimes L_{x+z}^{-1} \xrightarrow{\sim} G_A$ ).

La compatibilité de  $\sigma$  avec cette loi signifie que  $\sigma(x, z) \otimes \sigma(y, z)$  s'envoie sur  $\sigma(x+y, z)$ , d'où en appliquant (3.1.1) :

si  $u \in L_x$ ,  $v \in L_y$ ,  $w \in L_z$  avec  $x \in K$ ,  $y \in K$ ,  $z \in A$ , on a :

$$(u*w) \otimes u^{-1} \otimes w^{-1} \otimes (v*w) \otimes v^{-1} \otimes w^{-1} \otimes \tau(x, y, z) = ((u*v)*w) \otimes (u*v)^{-1} \otimes w^{-1}$$

d'où

$$(3.1.2) \quad \tau(x, y, z) = ((u*v)*w) \otimes (u*v)^{-1} \otimes (u*w)^{-1} \otimes (v*w)^{-1} \otimes u \otimes v \otimes w.$$

En exprimant de même la compatibilité avec la seconde loi, on obtient

$$(3.1.3) \quad \tau(x, y, z) = (u*(v*w)) \otimes (u*v)^{-1} \otimes (u*w)^{-1} \otimes (v*w)^{-1} \otimes u \otimes v \otimes w$$

d'où enfin par comparaison

$$(3.1.4) \quad (u*v)*w = u*(v*w) \quad (u \text{ et } v \in L|_K, w \in L).$$

En particulier la loi  $*$  sur  $L_K \times L_K$  est associative. Il est de plus immédiat que la section de  $L$  à l'origine déduite de sa structure

cubiste est élément neutre de  $*$ , et que la composée  $G \otimes L_Y \xrightarrow{\sim} L_O \otimes L_Y \xrightarrow{*} L_Y$  est l'action naturelle de  $G$  sur  $L_Y$ . En bref, le torseur  $L_K = j^*L$  sur  $K$  est muni, grâce à  $\sigma$ , d'une structure de Groupe, extension centrale (non commutative en général) de  $K$  par  $G$ , et la loi externe  $L_K \times L \xrightarrow{*} L$  est une action à gauche de  $L_K$  sur  $L$ , prolongeant l'action de  $L_K$  sur lui-même par translations et compatible (via la projection  $L \rightarrow A$ ) avec l'action par translations de  $K$  sur  $A$ .

Enfin la formule (3.1.2) (ou (3.1.3)) permet de reconstruire la restriction de  $\tau$  à  $K$ , à partir de la restriction de  $\sigma$  à  $K \times K$ , et l'on en déduit :

3.2. Proposition ([B], 2.1.1). La catégorie des extensions centrales de  $K$  par  $G$  est équivalente à la catégorie des couples  $(L, \sigma)$  où  $L \in \text{ob CUB}(K, G)$  et où  $\sigma$  est une trivialisation de la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$  de  $(K, K)$  par  $G$ .

3.3. Dans la situation de 3.1, supposons de plus

$$K = A$$

et étudions de plus près l'extension centrale

$$(3.3.1) \quad 1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0 .$$

Comme toute extension centrale de groupes commutatifs, elle définit un accouplement alterné, que nous noterons

$$(3.3.2) \quad e^{L, \sigma} : K \times K \longrightarrow G$$

obtenu par passage au quotient à partir de la fonction commutateur  $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$  de  $L \times L$  dans  $G$  (nous notons désormais  $uv = u*v$ ).

Nous disposons en outre, pour la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$  sur  $K \times K$ , de la trivialisation  $\sigma$ , donnée par la formule

$$(3.3.3) \quad \sigma(x, y) = (uv) \otimes u^{-1} \otimes v^{-1} \quad (u \in L_x, v \in L_y)$$

et de l'isomorphisme de symétrie

$$(3.3.4) \quad \xi : \mathcal{D}_2(L) \xrightarrow{\sim} s^* \mathcal{D}_2(L) \quad (\text{où } s(x, y) = (y, x))$$

qui, à  $w \otimes u^{-1} \otimes v^{-1} \in \mathcal{D}_2(L)_{x, y}$  (avec  $u \in L_x, v \in L_y, w \in L_{x+y}$ ) associe  $w \otimes v^{-1} \otimes u^{-1} \in \mathcal{D}_2(L)_{y, x} = (s^* \mathcal{D}_2(L))_{x, y}$ . On obtient en particulier une

seconde trivialisation ("symétrique" de  $\sigma$ ) :

$$(3.3.5) \quad \bar{\sigma} = \xi^{-1} s^* \sigma$$

de  $\mathcal{D}_2(L)$ , qui est donnée (avec  $u \in L_x, v \in L_y$ ) par

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x,y) &= \xi^{-1}(\sigma(y,x)) = \xi^{-1}(vu \otimes v^{-1} \otimes u^{-1}) \\ &= vu \otimes u^{-1} \otimes v^{-1} \\ &= [v,u] \sigma(x,y) \end{aligned}$$

(on utilise ici la coïncidence des deux actions de  $[v,u] \in G$ , données respectivement par la structure d'extension (3.3.1) et par la structure de torseur de  $L$ ).

En conclusion :

3.3.6. Proposition. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\sigma = e^{L,\sigma} \bar{\sigma} .$$

En particulier l'accouplement  $e^{L,\sigma}$  ne dépend que de la biextension symétrique  $(\mathcal{D}_2(L), \xi)$  et de la trivialisation  $\sigma$  de la biextension sous-jacente ; enfin l'extension centrale associée à  $\sigma$  par 3.2 est commutative si et seulement si  $\sigma$  trivialise  $(\mathcal{D}_2(L), \xi)$  comme biextension symétrique au sens de [B], i.e. si

$$\sigma = \bar{\sigma} .$$

4. Cas des schémas abéliens : le groupe  $\mathcal{Q}(L)$ .

Soient  $S$  un schéma,  $A$  un  $S$ -schéma abélien,  $L$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $A$ , rigidifié à l'origine (donc cubiste, cf. 2.6). Si  $A^t$  désigne le  $S$ -schéma abélien dual de  $A$  (ou, si le lecteur préfère, le faisceau  $\text{Pic}_{A/S}^\tau$ ), on sait que  $L$  définit canoniquement un morphisme

$$(4.1) \quad \varphi_L : A \longrightarrow A^t$$

tel que, si  $x \in A$ ,  $\varphi_L(x)$  est la classe du  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $T_x^* L \otimes L^{-1}$  sur  $A$ , où  $T_x$  désigne la translation par  $x$  dans  $A$ .

Plus précisément soit  $P$  le  $\mathbb{G}_m$ -torseur de Poincaré sur  $A^t \times A$ , rigidifié sur  $A^t \times \{0\}$  et  $\{0\} \times A$  : alors  $\varphi_L$  est l'unique morphisme de  $A$  dans  $A^t$  tel que le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $(\varphi_L \times \text{Id}_A)^*(P)$  soit isomorphe à



$\mathcal{D}_2(L)$ , et il existe alors un unique isomorphisme entre ces deux toiseurs qui soit compatible aux rigidifications. Comme de plus  $P$  et  $\mathcal{D}_2(L)$  sont munis chacun d'une unique structure de biextension compatible aux rigidifications, cet isomorphisme est même un isomorphisme de biextensions. Posons alors

$$(4.2) \quad K(L) = \text{Ker } \varphi_L :$$

c'est un sous-schéma en groupes fermé de  $A$ . La restriction de l'isomorphisme précédent à  $K(L) \times A$  donne un isomorphisme de biextensions

$$\mathcal{D}_2(L)_{K(L) \times A} \xrightarrow{\sim} [(\varphi_L \times \text{Id}_A)^*(P)]_{K(L) \times A} \xrightarrow{\sim} (\varphi_L \times \text{Id}_A)^*(P_{\{0\} \times A})$$

et comme  $P_{\{0\} \times A}$  est la biextension triviale, on en tire une trivialisation canonique de  $\mathcal{D}_2(L)_{K(L) \times A}$ , d'où d'après le §3 une structure d'extension centrale sur  $L_{K(L)}$ , ainsi qu'une action à gauche de cette extension sur le toiseur  $L$ .

4.3. D'autre part on connaît déjà ([M2], § 23, ou [Sz], exposé 7) le  $S$ -schéma en groupes  $\mathcal{C}(L)$  : rappelons que si  $S'$  est un  $S$ -schéma,  $\mathcal{C}(L)(S')$  est l'ensemble des couples  $(x, \alpha)$  où  $x \in K(L)(S')$  et où  $\alpha$  est un  $S'$ -automorphisme du schéma  $L_{S'}$ , compatible à l'action de  $\mathbb{G}_m$  et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_{S'} & \xrightarrow{\alpha} & L_{S'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{S'} & \xrightarrow{T_x} & A_{S'} \end{array} .$$

4.4. Proposition. Avec les notations et hypothèses ci-dessus, le  $S$ -morphisme

$$\lambda : L_{K(L)} \longrightarrow \mathcal{C}(L)$$

qui au point  $u \in L_{K(L)}$  au-dessus de  $x \in K(L)$ , associe le couple  $(x, \alpha_u)$  où  $\alpha_u(v) = u * v$  pour tout  $v \in L$  (le symbole  $*$  désignant l'action à gauche de  $L_{K(L)}$  sur  $L$  définie ci-dessus) est un isomorphisme d'extensions centrales ; l'isomorphisme inverse est donné par la formule

$$\lambda^{-1}(x, \alpha) = \alpha(\varepsilon_L)$$

où  $\varepsilon_L \in L_0(S)$  est la rigidification à l'origine, i.e. la section unité de l'extension  $L_{K(L)}$ .

Comme  $\lambda$  est manifestement un morphisme de  $G_m$ -torseurs sur  $K(L)$  (donc un isomorphisme) il suffit de voir que c'est un morphisme de groupes, ce qui n'est autre que le fait que  $*$  est une action de groupe. La dernière assertion est également triviale. ■

### 5. Réduction à l'objet trivial ; application à certains isomorphismes canoniques.

Dans ce §,  $E$  désigne un topos ; si  $F$  est un objet de  $E$ , on notera  $\mathbb{Z}[F]$  le  $\mathbb{Z}$ -Module libre engendré par  $F$  (notation conforme à SGA 7, VII.1.4 ; pour l'existence cf. SGA 4, II.6.5).

5.1. Théorème. Soient  $F$  un objet de  $E$ ,  $G$  un  $\mathbb{Z}$ -Module injectif de  $E$ . Alors tout  $G$ -torseur cubiste sur  $\mathbb{Z}[F]$  est trivial. Plus généralement tout  $G$ -torseur cubiste sur un  $\mathbb{Z}$ -Module sans torsion (i.e. plat) de  $E$  est trivial.

Démonstration : soient  $A$  un  $\mathbb{Z}$ -Module plat et  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ .

5.1.1. Considérons d'abord la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$  de  $(A,A)$  par  $G$  associée à  $L$ . D'après SGA 7, VII.3.6.5, le groupe des classes de biextensions de  $(A,A)$  par  $G$  est isomorphe à

$$\text{Ext}^1(A \overset{\cup}{\otimes} A, G) .$$

Comme  $G$  est injectif ce groupe se réduit à

$$\text{Hom}(\underline{H}_1(A \overset{\cup}{\otimes} A), G) ,$$

c'est-à-dire à  $\text{Hom}(\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A), G) = 0$  puisque  $A$  est un  $\mathbb{Z}$ -Module plat. Par suite la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$  est triviale.

5.1.2. Fixons donc une trivialisatoin  $\sigma$  de la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$ . Comme en 3.3 notons  $\xi : \mathcal{D}_2(L) \xrightarrow{\sim} s^* \mathcal{D}_2(L)$  la symétrie, et  $\bar{\sigma}$  la trivialisatoin de  $\mathcal{D}_2(L)$  "symétrique" de  $\sigma$  via  $\xi$ .

Le défaut de compatibilité de  $\sigma$  avec  $\xi$  est la forme alternée

$$e^{L, \sigma} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} : A \times A \longrightarrow G \quad (3.3.6) ;$$

les trivialisatoin de  $\mathcal{D}_2(L)$  sont de la forme  $\sigma' = \varphi \sigma$  où  $\varphi : A \times A \longrightarrow G$  est bilinéaire. On en conclut que pour qu'il existe une trivialisatoin de  $\mathcal{D}_2(L)$  compatible avec la symétrie  $\xi$ , il faut et il suffit que  $e^{L, \sigma}$  soit de la forme

$$e^{L, \sigma}(x, y) = \varphi(x, y) / \varphi(y, x)$$

où  $\varphi : A \times A \longrightarrow G$  est bilinéaire.

Comme  $A$  est plat, la multiplication par 2 dans  $\Lambda^2 A$  est un monomorphisme ; puisque  $G$  est injectif il existe donc un morphisme  $\eta : \Lambda^2 A \longrightarrow G$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 A & \xrightarrow{e^{L, \sigma}} & G \\ \downarrow \times 2 & \nearrow \eta & \\ \Lambda^2 A & & \end{array}$$

Si l'on pose alors  $\varphi(x, y) = \eta(x \wedge y)$ , on a :

$$\varphi(x, y) / \varphi(y, x) = \eta(x \wedge y - y \wedge x) = \eta(2x \wedge y) = e^{L, \sigma}(x, y) .$$

En conclusion, la biextension symétrique  $(\mathcal{D}_2(L), \xi)$  est triviale.

5.1.3. D'après 3.2 et 3.3.6, nous voyons que la structure cubiste de  $L$  provient d'une structure d'extension commutative de  $A$  par  $G$ , automatiquement triviale puisque  $G$  est injectif. ■

5.1.4. Remarque. Le lecteur familier de  $[B]$  et des dérivés non abéliens pourra démontrer 5.1 en remarquant que le groupe des classes de  $G$ -torseurs cubistes sur  $A$  s'identifie ( $[B]$ , 8.9) à

$$\text{Ext}^1(\text{LP}_2^+(A), G)$$

(notations de loc. cit.), et que  $\underline{H}_1(\text{LP}_2^+(A)) = 0$  si  $A$  est plat.

5.2. Proposition. Soient  $\varphi : A' \longrightarrow A$  un épimorphisme et  $\psi : G \longrightarrow G'$  un monomorphisme dans  $\text{Ab}_E$ , et soient  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ ,  $L' = \varphi^*(L^\psi)$  le  $G'$ -torseur cubiste sur  $A'$  déduit de  $L$  par le changement de base  $\varphi$  et le changement de Groupe structural  $\psi$ . Soit  $\sigma$  une section du torseur sous-jacent à  $L$  sur  $A$ . Pour que  $\sigma$  soit une trivialisat[i]on cubiste de  $L$ , il faut et il suffit que la section  $\sigma'$  de  $L'$  déduite de  $\sigma$  soit une trivialisat[i]on cubiste de  $L'$ .

En effet soit  $\tau$  la section de  $\mathcal{D}_3(L)$  définissant la structure cubiste de  $L$ ,  $\tau'$  la section de  $\mathcal{D}_3(L')$  déduite de  $\tau$  (qui définit la structure cubiste de  $L'$ ). Pour que  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ) soit une trivialisat[i]on cubiste il faut et il suffit que  $\mathcal{D}_3(\sigma) = \tau$  (resp.  $\mathcal{D}_3(\sigma') = \tau'$ ) : ces deux conditions sont bien équivalentes puisque, vu nos hypothèses

sur  $\varphi$  et  $\psi$ , l'application naturelle

$$\text{Hom}_{A^3}(\mathcal{D}_3(L)) \longrightarrow \text{Hom}_{A^3}(A'^3, \mathcal{D}_3(L'))$$

est injective. ■

La glorieuse proposition ci-dessus, jointe au théorème 5.1, permet de réduire de nombreuses questions au cas du toreur cubiste trivial, où elles deviennent tautologiques ; il suffit en effet de prendre  $A'$  libre (par exemple  $A' = \mathbb{Z}[A]$ ) et  $G'$  injectif. Par exemple, on obtient par cette méthode :

5.3. Proposition. Soit  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ . Le  $G$ -torseur  $\mathcal{D}_3(L)$  sur  $A^3$  est un produit tensoriel de toreurs du type  $(f_i^*L)^{\pm 1}$  où les  $f_i: A^3 \rightarrow A$  sont des morphismes de Groupes. Il est donc muni canoniquement d'une structure cubiste déduite de celle de  $L$ .

Alors la trivialisation  $\tau$  de  $\mathcal{D}_3(L)$  définissant la structure cubiste de  $L$  est une trivialisation cubiste. ■

(On suggère perfidement au lecteur de démontrer 5.3 directement à partir des définitions...)

5.4. Notation. Pour tout Groupe commutatif  $A$  de  $E$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $[n]_A: A \rightarrow A$ , ou simplement  $[n]$  si aucune confusion n'est à craindre, le morphisme de multiplication par  $n$ .

5.5. Proposition. Soit  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a un isomorphisme canonique de  $G$ -torseurs cubistes :

$$[n]_A^*(L) \simeq L^{\otimes n(n+1)/2} \otimes [-1]_A^*(L)^{\otimes n(n-1)/2}$$

(cf. [M2], §6, Cor. 3).

5.5.1. Lemme. Soit  $L$  un  $G$ -torseur (sans structure cubiste) sur  $A$ . Notons  $p: A \rightarrow O_E$  le morphisme canonique. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , notons

$$\lambda_n: A \rightarrow A^3$$

le morphisme défini par  $\lambda_n(x) = (x, -x, nx)$ . Alors on a pour tout  $n$  un isomorphisme canonique

(5.5.1.1)

$$[n+1]_A^*(L) \simeq \lambda_n^* \mathcal{D}_3(L)^{-1} \otimes [n]_A^*(L)^{\otimes 2} \otimes [n-1]_A^*(L)^{-1} \otimes p^* e_A^*(L)^{-1} \otimes L \otimes [-1]_A^*(L)$$

Cet isomorphisme est fonctoriel et additif en  $L$ , compatible au changement de base  $A' \rightarrow A$  et au changement de groupe structural  $G \rightarrow G'$ , et respecte les trivialisations naturelles des deux membres lorsque  $L$  est le torseur trivial.

Démonstration du lemme : pour tout  $x \in A$  on a canoniquement, par définition de  $\mathcal{D}_3(L)$  :

$$(\lambda_n^* \mathcal{D}_3(L))_x = \mathcal{D}_3(L)_{(x, -x, nx)} = L_{nx} \otimes L_0^{-1} \otimes L_{(n+1)x}^{-1} \otimes L_{(n-1)x}^{-1} \otimes L_x \otimes L_{-x} \otimes L_{nx} .$$

Le lemme en résulte. ■

5.5.2. Démonstration de 5.5 : remarquons d'abord que dans le lemme 5.5.1, lorsque  $L$  est muni d'une structure cubiste, l'isomorphisme (5.5.1.1) est un isomorphisme de toseurs cubistes : cela résulte, par réduction à l'objet trivial, des propriétés de (5.5.1.1) énoncées à la fin du lemme. Or si  $L$  est cubiste, les toseurs cubistes  $\mathcal{D}_3(L)$  (grâce à 5.3) et  $p_A^* e_A^*(L)$  (évident) sont canoniquement triviaux, et (5.5.1.1) se réduit à un isomorphisme cubiste

$$(5.5.2.1) \quad [n+1]_A^*(L) \simeq [n]_A^*(L)^{\otimes 2} \otimes [n-1]_A^*(L)^{-1} \otimes L \otimes [-1]_A^*(L) .$$

Par ailleurs il suffit de démontrer 5.5 pour  $n \geq 0$  (remplacer  $L$  par  $[-1]_A^*(L)$ ), et le résultat est clair pour  $n=0$  et  $n=1$  ; le cas général en résulte par récurrence, grâce à (5.5.2.1) et à un calcul immédiat. ■

5.5.3. Remarque. La proposition 5.5 est l'analogie de la propriété suivante : si  $f: A \rightarrow G$  est pointée de degré  $\leq 2$ , alors

$$f(nx) = f(x)^{n(n+1)/2} f(-x)^{n(n-1)/2}$$

(démonstration par récurrence, grâce au même calcul qui a été escamoté dans 5.5.2).

De même nous allons établir l'analogie cubiste (très important pour la suite) du lemme suivant :

5.6. Lemme. Soient  $A$  et  $G$  deux groupes commutatifs (notés ici additivement, pour plus de clarté) ;  $f: A \rightarrow G$  une application pointée de degré 2, et  $n$  un entier tel que  $nA = 0$ . Alors  $2nf = 0$ , et  $nf = 0$  si  $n$  est impair.

Démonstration : on remarque que

$$2f(x) = (f(x) - f(-x)) + (f(x) + f(-x)) ;$$

posant  $b(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ , on a

$$f(x) + f(-x) = b(x,x) \quad (5.5.3, \text{ avec } n=2)$$

donc  $n(f(x) + f(-x)) = 0$  puisque  $b$  est bilinéaire ; d'autre part il est immédiat que l'application  $x \mapsto f(x) - f(-x)$  est additive (considérer sa forme bilinéaire associée) donc  $n(f(x) - f(-x)) = 0$ , d'où enfin  $2nf = 0$ .

Si  $n$  est impair on écrit :

$$\begin{aligned} nf(2x) &= 3nf(x) - nf(-x) \\ &= n(f(x) - f(-x)) \quad \text{puisque } 2nf = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où la conclusion puisque  $x \mapsto 2x$  est un automorphisme de  $A$ . ■

L'analogue annoncé plus haut est :

5.7. Proposition. Soit  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$  et soit  $n$  un entier (resp. un entier impair) annulant  $A$ . Alors le toseur cubiste  $L^{\otimes 2n}$  (resp.  $L^{\otimes n}$ ) admet une trivialisaton naturelle.

5.7.1. Lemme (L. Breen). Soit  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ . Alors le  $G$ -torseur cubiste  $\Lambda = L \otimes [-1]_A^* L^{-1}$  admet une structure naturelle d'extension commutative de  $A$  par  $G$ .

En effet les biextensions associées à  $L$  et  $[-1]_A^* L$  sont respectivement  $\mathcal{D}_2(L)$  et  $[-1]_{A \times A}^* \mathcal{D}_2(L)$ , qui sont canoniquement isomorphes vu la structure bilinéaire de  $\mathcal{D}_2(L)$ . On a donc une trivialisaton naturelle de  $\mathcal{D}_2(\Lambda)$  d'où une structure d'extension centrale sur  $\Lambda$  (3.2). Le fait qu'elle soit commutative se voit soit par un calcul direct, soit par réduction à l'objet trivial. ■

La démonstration de 5.7 est alors parallèle à celle de 5.6 : on écrit  $L^{\otimes 2}$  sous la forme

$$L^{\otimes 2} = \Lambda \otimes (L \otimes [-1]_A^* L) ;$$

comme  $\Lambda$  est une extension commutative,  $\Lambda^{\otimes n}$  est trivial, et par ailleurs

$$L \otimes [-1]_A^* L \simeq \Delta^* \mathcal{D}_2(L)$$

où  $\Delta : A \longrightarrow A \times A$  est le morphisme diagonal (5.5, avec  $n=2$ ) donc  $(L \otimes [-1]_A^* L)^{\otimes n}$  est aussi trivial.

Lorsque  $n$  est impair, on démontre comme dans 5.6 que  $[2]_A^*(L^{\otimes n})$  est trivial. ■

## 6. Une nouvelle définition des structures cubistes.

Ce n° ne sera pas utilisé dans la suite ; les détails des démonstrations sont laissés au lecteur.

6.1. Soient  $S$  un objet du topos  $E$ , et  $G$  un Groupe commutatif de  $E$ . Considérons la catégorie  $(E/S)^{\circ} \times_{G \setminus (Ab_E)}$  des couples  $(\varphi, \psi)$  où  $\varphi : S' \longrightarrow S$  (resp.  $\psi : G \longrightarrow G'$ ) est un morphisme dans  $E$  (resp. dans  $Ab_E$ ).

Pour tout  $G$ -torseur  $L$  sur  $S$  et tout  $(\varphi, \psi)$  comme ci-dessus, notons

$$(6.1.1) \quad \Gamma_L(\varphi, \psi) = \text{Hom}_S(S', L^\psi) \quad (\text{notation de 2.2.3})$$

(ou, par abus d'écriture,  $\Gamma_L(S', G')$ ) l'ensemble des sections sur  $S'$  du  $G'$ -torseur  $\varphi^* L^\psi$ . On obtient ainsi, pour  $L$  fixé, un foncteur

$$\Gamma_L : (E/S)^{\circ} \times_{G \setminus (Ab_E)} \longrightarrow (\text{Ens})$$

et pour tout  $(S', G')$  l'ensemble  $\Gamma_L(S', G')$  est soit vide, soit un espace homogène principal sous le groupe  $\text{Hom}_E(S', G')$  des morphismes de  $S'$  dans l'objet de  $E$  sous-jacent à  $G'$ .

6.1.2. Si l'on a un diagramme commutatif dans  $E$  :

$$\begin{array}{ccc} S'_2 & \xrightarrow{u} & S'_1 \\ \searrow \varphi_2 & & \swarrow \varphi_1 \\ & S & \end{array}$$

où  $u$  est un épimorphisme dans  $E$ , alors la suite naturelle d'ensembles

$$\Gamma_L(S'_1, G') \longrightarrow \Gamma_L(S'_2, G') \rightrightarrows \Gamma_L(S'_2 \times_{S'_1} S'_1, G')$$

est exacte pour tout  $\psi : G \longrightarrow G'$  ; ceci résulte du fait que  $\Gamma_L(S', G') = \text{Hom}_S(S', L^\psi)$  est représenté (comme foncteur en  $S'$ ) par  $L^\psi$ , et de ce que tout épimorphisme de  $E$  est effectif.

6.1.3. De même considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G'_1 & \xrightarrow{v} & G'_2 \\ \psi_1 \swarrow & & \nearrow \psi_2 \\ & G & \end{array}$$

où  $v$  est un monomorphisme ; alors pour tout  $\varphi : S' \longrightarrow S$ , la suite naturelle d'ensembles

$$\Gamma_L(S', G'_1) \longrightarrow \Gamma_L(S', G'_2) \rightrightarrows \Gamma_L(S', G'_2 \oplus_{G'_1} G'_1)$$

est exacte, le symbole  $\oplus_{G'_1}$  désignant la somme amalgamée sur  $G'_1$ . Pour le voir on peut, grâce à 6.1.2 ci-dessus, remplacer  $S'$  par  $S''$  où  $S'' \longrightarrow S'$  est un épimorphisme ; en prenant par exemple  $S'' = \varphi^* L^\psi$ , on est ainsi ramené au cas où  $L$  est le toreur trivial ; notre assertion est alors évidente.

6.2. Soient  $A$  et  $G$  deux Groupes commutatifs de  $E$ . Posons

$$(6.2.1) \quad \mathcal{C}(A, G) = ((\text{Ab}_E)_A)^{\circ} \times (G \backslash (\text{Ab}_E)) ,$$

catégorie des couples  $(\varphi, \psi)$  où  $\varphi : A' \longrightarrow A$  et  $\psi : G \longrightarrow G'$  sont des morphismes de Groupes commutatifs. Pour tout  $G$ -torseur  $L$  sur  $A$ , nous noterons encore, par abus d'écriture

$$(6.2.2) \quad \Gamma_L : \mathcal{C}(A, G) \longrightarrow (\text{Ens})$$

la restriction à  $\mathcal{C}(A, G)$  du foncteur  $\Gamma_L$  de (6.1.1). Les propriétés 6.1.2 et 6.1.3 restent valables : c'est clair pour 6.1.3 et cela résulte pour 6.1.2 du fait que l'oubli  $\text{Ab}_E \longrightarrow E$  de la structure de groupe commute aux produits fibrés.

Supposons maintenant le toreur  $L$  muni d'une structure cubiste. Nous noterons alors, pour tout  $(\varphi : A' \longrightarrow A, \psi : G \longrightarrow G')$  dans  $\mathcal{C}(A, G)$ ,

$$(6.2.3) \quad \Gamma_L^{(2)}(\varphi, \psi) \subset \Gamma_L(\varphi, \psi)$$

ou par abus d'écriture  $\Gamma_L^{(2)}(A', G')$ , l'ensemble des trivialisations cubistes de  $\varphi^* L^\psi$ . Le sous-foncteur  $\Gamma_L^{(2)} : \mathcal{C}(A, G) \longrightarrow (\text{Ens})$  de  $\Gamma_L$  jouit des propriétés suivantes :

(6.2.4)  $\Gamma_L^{(2)}(A', G')$  est soit vide, soit un espace homogène principal sous le groupe  $\text{Hom}_E^{(2)}(A', G')$  des morphismes pointés de degré 2 de  $A'$  dans  $G'$ , via l'action naturelle de ce dernier sur  $\Gamma_L(A', G')$ .



(6.2.5) Si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'_2 & \xrightarrow{u} & A'_1 \\ \varphi_2 \searrow & & \swarrow \varphi_1 \\ & A & \end{array}$$

où  $u$  est un épimorphisme dans  $\text{Ab}_E$ , le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_L^{(2)}(A'_1, G') & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma_L^{(2)}(A'_2, G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_L(A'_1, G') & \xrightarrow{\beta} & \Gamma_L(A'_2, G') \end{array}$$

est cartésien ; notons que l'application  $\beta$  est injective et qu'il en est donc de même de  $\alpha$  ; notre assertion signifie donc que  $\Gamma_L^{(2)}(A'_1, G')$  s'identifie à  $\Gamma_L^{(2)}(A'_2, G') \cap \Gamma_L(A'_1, G')$ , ce qui n'est autre que 5.2.

(6.2.6) Si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G'_1 & \xrightarrow{v} & G'_2 \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ & G & \end{array}$$

où  $v$  est un monomorphisme dans  $\text{Ab}_E$ , le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_L^{(2)}(A', G'_1) & \longrightarrow & \Gamma_L^{(2)}(A', G'_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_L(A', G'_1) & \longrightarrow & \Gamma_L(A', G'_2) \end{array}$$

est cartésien ; ceci résulte également de 5.2.

(6.2.7) Il existe un épimorphisme  $\varphi : A' \longrightarrow A$  et un monomorphisme  $\psi : G \longrightarrow G'$  dans  $\text{Ab}_E$ , tels que

$$\Gamma_L^{(2)}(\varphi, \psi) \neq \emptyset .$$

C'est une reformulation du théorème 5.1.

6.2.8. Remarque. On voit facilement que les conditions (6.2.5) et (6.2.6) peuvent se reformuler en disant que  $\Gamma_L^{(2)}$  vérifie les propriétés "faisceautiques" analogues à celles énoncées pour  $\Gamma_L$  dans 6.1.2 et 6.1.3.

6.3. Définition (bis). Soient  $A$  et  $G$  deux Groupes commutatifs du topos  $E$ , et soit  $L$  un  $G$ -torseur sur  $A$ . Une structure cubiste sur  $L$  est la donnée d'un sous-foncteur  $\Gamma_L^{(2)} : C(A, G) \rightarrow (\text{Ens})$  du foncteur  $\Gamma_L$  de (6.2.2) vérifiant les propriétés (6.2.4) à (6.2.7).

6.3.1. Indiquons simplement comment le foncteur  $\Gamma_L^{(2)}$  permet de reconstituer la trivialisation  $\tau$  de  $\mathcal{D}_3(L)$  de la définition 2.4.5. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  comme en (6.2.7) et soit  $\sigma \in \Gamma_L^{(2)}(\varphi, \psi)$  : alors  $\mathcal{D}_3(\sigma) = \tau'$  est une trivialisation de  $\mathcal{D}_3(L)$ , qui d'après la condition (6.2.4) est indépendante du choix de  $\sigma$ . Il faut montrer que  $\tau'$  provient d'un élément  $\tau$  de  $\Gamma_{\mathcal{D}_3(L)}(A, G)$ . Pour cela on pose  $G'' = G' \oplus_G G'$  et on remarque que  $\tau$  a même image par les deux flèches naturelles

$$\Gamma_{\mathcal{D}_3(L)}(A', G') \rightrightarrows \Gamma_{\mathcal{D}_3(L)}(A', G'')$$

puisque les deux images de  $\tau$  sont de la forme  $\mathcal{D}_3(\sigma_1'')$  et  $\mathcal{D}_3(\sigma_2'')$  où  $\sigma_1''$  et  $\sigma_2'' \in \Gamma_L^{(2)}(A', G'')$ . Il résulte alors de 6.1.3 que  $\tau \in \Gamma_{\mathcal{D}_3(L)}(A', G)$ . Le même argument, utilisant 6.1.2, permet de redescendre de  $A'$  à  $A$ .

Comme la trivialisation  $\tau'$  de  $\varphi^* L^\psi$  est de la forme  $\mathcal{D}_3(\sigma')$ , elle vérifie automatiquement les conditions de compatibilité exigées par 2.4.5. Par suite il en est de même de  $\tau$ .

6.3.2. Notant  $\text{CUB}^*(A, G)$  la catégorie des  $G$ -torseurs cubistes sur  $A$  au sens de 6.3, nous avons ainsi deux foncteurs

$$\text{CUB}(A, G) \begin{array}{c} \xrightarrow{U} \\ \xleftarrow{V} \end{array} \text{CUB}^*(A, G)$$

le foncteur  $U$  étant donné par la construction 6.2, et  $V$  par la construction ci-dessus. Il n'y a désormais aucune difficulté à vérifier que  $U$  et  $V$  sont quasi-inverses l'un de l'autre ; les conditions (6.2.5) et (6.2.6) dans  $\text{CUB}^*$  servent à montrer que  $U \circ V \simeq \text{Id}_{\text{CUB}^*(A, G)}$ .

#### 6.4. Généralisations et variantes.

6.4.1. Il suffit, dans la condition (6.2.4), de remplacer  $\text{Hom}_E^{(2)}(A', G')$  par  $\text{Hom}_E^{(n)}(A', G')$ , où  $n$  est un entier  $\gg 0$  quelconque (1.3) pour arriver à la notion de "structure de degré  $n$ " sur un  $G$ -torseur  $L$  sur  $A$ . Bien entendu une structure de degré 0 (resp. 1, resp. 2) sur  $L$  est une trivialisation de  $L$  (resp. une structure d'extension commutative, resp. une structure cubiste). Toutefois il y a lieu de noter que je ne connais aucun exemple "naturel" de structure de degré  $n \gg 3$ , ne provenant pas d'une structure cubiste.

6.4.2. Etant donnés  $k$  entiers naturels  $n_1, \dots, n_k$ ,  $(k+1)$  Groupes  $A_1, \dots, A_k, G$  et un  $G$ -torseur  $L$  sur  $A_1 \times \dots \times A_k$ , on laisse au lecteur le soin d'imaginer ce qu'est une structure de multidegré  $(n_1, \dots, n_k)$  sur  $L$ , généralisant la notion de biextension (obtenue pour  $k=2$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ).

6.4.3. Plus intéressante peut-être est la variante "non pointée" des structures de degré  $n$ , obtenue en remplaçant les applications pointées de degré  $n$  par les applications de degré  $n$ , i.e. les  $f: A \rightarrow G$  vérifiant

$$\prod_{I \subset \{1, \dots, n+1\}} f(x_I)^{(-1)^{\text{Card } I}} = 1$$

(notations de 1.1), ou encore, de façon équivalente :

$$\delta_{n+1}(f) = f(0)^{(-1)^n}.$$

Lorsque  $n=2$  on tombe sur la notion de "structure du cube non rigidifiée" mentionnée dans [B], 2.8.

6.4.4. Enfin il est probable qu'en remplaçant, dans 6.2.4,  $\text{Hom}^{(2)}(A', G')$  par le groupe des morphismes quadratiques de  $A'$  dans  $G'$ , on obtient la notion de  $\Sigma$ -structure de [B].

6.5. Exercice. Redémontrer la proposition 5.5 (resp. 5.7) en utilisant la définition 6.3 et l'égalité 5.5.3 (resp. le lemme 5.6).

## 7. Descente de toseurs cubistes ; application aux extensions de schémas en groupes lisses par des tores.

7.1. Si  $A, B, G$  sont trois Groupes commutatifs du topos  $E$ , nous noterons  $\text{EXT}(A, G)$  (resp.  $\text{BIEXT}(A, B; G)$ ) conformément à SGA 7, la catégorie des extensions commutatives de  $A$  par  $G$  (resp. des biextensions de  $(A, B)$  par  $G$ ).

Rappelons d'abord le théorème de descente ([B], 3.10) :

Théorème. Soit

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de Groupes commutatifs du topos  $E$ . Alors, pour tout Groupe commutatif  $G$  de  $E$ , la catégorie  $\text{CUB}(A'', G)$  est équivalente à la catégorie des triples  $(L, s, t)$  où  $L \in \text{ob } \text{CUB}(A, G)$  et où  $s$  (resp.  $t$ )

est une trivialisation de  $i^*L$  dans  $CUB(A',G)$  (resp. de  $(\text{Id} \times i)^* \mathcal{D}_2(L)$  dans  $BIEXT(A,A';G)$ ), telles que les trivialisations  $\mathcal{D}_2(s)$  et  $(i \times \text{Id})^*(t)$  de  $\mathcal{D}_2(i^*L)$  soient égales.

7.2. Nous allons appliquer ce théorème au cas où  $E$  est le topos fppf sur un schéma  $S$ , et où l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

de  $S$ -schémas en groupes lisses à fibres connexes sur  $S$ ,  $T$  étant un tore sur  $S$ . De plus on prend  $G = \mathbb{G}_{m,S}$ .

Commençons par étudier  $CUB(T, \mathbb{G}_m)$  :

7.2.1. Proposition. Pour tout tore  $T$  sur  $S$ , la catégorie  $CUB(T, \mathbb{G}_m)$  est équivalente à la catégorie  $EXT(T, \mathbb{G}_m)$  des extensions commutatives de  $T$  par  $\mathbb{G}_m$ .

Démonstration : si  $L$  est un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $T$ , la biextension  $\mathcal{D}_2(L)$  de  $(T, T)$  par  $\mathbb{G}_m$  admet d'après SGA 7, VIII.3.4 une unique trivialisation. Le toseur  $L$  admet donc (3.2) une unique structure d'extension centrale compatible (au sens de loc. cit.) avec sa structure cubiste. Cette extension est automatiquement commutative puisque la forme commutateur associée est un accouplement  $T \times T \longrightarrow \mathbb{G}_m$  donc est triviale. ■

7.2.2. Proposition. Dans la situation de 7.2, la catégorie  $CUB(B, \mathbb{G}_m)$  est équivalente à la catégorie des couples  $(L, s)$  où  $L \in \text{ob } CUB(A, \mathbb{G}_m)$  et où  $s$  est une trivialisation de  $i^*L$  dans  $CUB(T, \mathbb{G}_m)$  (i.e., compte tenu de 7.2.1, dans  $EXT(T, \mathbb{G}_m)$ ).

En effet, en vertu de SGA 7, loc. cit., les catégories  $BIEXT(A, T; \mathbb{G}_m)$  et  $BIEXT(T, T; \mathbb{G}_m)$  sont équivalentes à la catégorie ponctuelle ; donc étant donné  $L$  dans  $CUB(A, \mathbb{G}_m)$  il existe une unique trivialisation  $t$  de  $(\text{Id} \times i)^* \mathcal{D}_2(L)$  dans  $BIEXT(A, T; \mathbb{G}_m)$ , et de plus pour toute trivialisation  $s$  de  $i^*L$  dans  $CUB(T, \mathbb{G}_m)$ , la condition de compatibilité  $\mathcal{D}_2(s) = (i \times \text{Id})^* t$  exigée par 7.1 est automatiquement vérifiée. ■

7.2.3. Corollaire. Dans la situation de 7.2, soit  $L$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A$ . Alors :

(i)  $L \otimes [-1]_A^*(L)$  provient canoniquement d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $B$ .

(ii) Il existe  $S' \longrightarrow S$  étale surjectif tel que  $L_{S'} = L \times_S S'$  provienne d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $B_{S'} = B \times_S S'$ .

(iii) Si tout tore sur  $S$  est isotrivial (SGA 3, IX.1.1) on peut dans (ii) supposer  $S'$  fini sur  $S$ .

Remarque. Le cas (iii) s'applique en particulier lorsque  $S$  est localement noethérien et normal (SGA 3, X.5.16), ou bien est le spectre d'un anneau local noethérien complet (SGA 3, X.3.3).

Montrons (i) : avec les notations de 7.2,  $i^*L$  est d'après 7.2.1 une extension de  $T$  par  $G_m$ , et le morphisme  $x \mapsto x^{-1}$  donné par la structure de groupe sous-jacente donne un isomorphisme d'extensions

$$i^* L^{-1} \xrightarrow{\sim} i^*[-1]_A^*(L)$$

d'où une trivialisatation canonique de  $i^*(L \otimes [-1]_A^*(L))$  et l'on conclut grâce à 7.2.2.

Montrons (ii) (resp. (iii)) : d'après SGA 3, X.4.5 (resp. la définition d'un tore isotrivial) appliqué au tore sous-jacent à l'extension  $i^*L$ , celle-ci est trivialisée par un changement de base étale surjectif (resp. fini étale surjectif) et l'on applique encore 7.2.2. ■

## CHAPITRE II

Faisceaux inversibles cubistes sur les schémas en groupes :  
problèmes de prolongement

Sommaire.

## 0. Introduction.

1. Prolongement de  $\mathbb{G}_m$ -torseurs cubistes sur les groupes lisses : cas où la base est un trait.
2. Analogie archimédien du théorème de prolongement.
3. Prolongement de  $\mathbb{G}_m$ -torseurs cubistes en dimension supérieure ; cas des groupes semi-stables sur une base normale.

0. Introduction.

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des  $\mathbb{G}_m$ -torseurs cubistes sur certains schémas en groupes (commutatifs, comme toujours). Signalons tout de suite que nous considérerons toujours comme synonymes les expressions " $\mathbb{G}_m$ -torseur" et "faisceau inversible", un faisceau inversible  $L$  sur un schéma  $X$  étant identifié au tosseur  $\underline{\text{Isom}}_X(\mathcal{O}_X, L)$ . D'autre part les schémas en groupes sur un schéma  $S$  seront toujours considérés comme des faisceaux sur le site fppf de  $S$ .

Le type de problème envisagé ici est le suivant : étant donné un schéma en groupes commutatif  $A$  sur un schéma  $S$ , et un ouvert  $U$  de  $S$  ( $U$  désignera parfois aussi le point générique de  $S$ , si  $S$  est irréductible) étudier le foncteur de restriction

$$\text{CUB}(A, \mathbb{G}_{m,S}) \longrightarrow \text{CUB}(A_U, \mathbb{G}_{m,U})$$

de la catégorie des  $\mathbb{G}_m$ -torseurs cubistes sur  $A$  vers la catégorie analogue sur  $U$ .

Lorsque  $S$  est un trait, que  $U$  est son point générique et que  $A$  est lisse de type fini sur  $S$ , le théorème 1.1 donne une "réponse complète" (très analogue au théorème SGA 7, VIII.7.1 sur les biextensions). Ce théorème, obtenu par d'autres méthodes dans [B], §3, est l'un des deux résultats principaux de ce chapitre, l'autre étant le théorème 3.3 qui traite le cas où  $A$  est un groupe semi-stable à fibres connexes sur une base normale, et où l'on part d'un tosseur cubiste sur  $A_U$  qui est

symétrique ou d'ordre fini. Le lemme 3.4.1 (qui doit beaucoup à M. Raynaud) et ses corollaires permettent ensuite d'éliminer dans certains cas les hypothèses de connexité ; le lecteur se fera une idée du type de résultats obtenus en se reportant à l'énoncé du théorème 3.5.

1. Prolongement de  $G_m$ -torseurs cubistes sur les groupes lisses : cas où la base est un trait.

1.0. Dans tout ce §, on se donne un anneau de valuation discrète  $\Lambda$ , de corps des fractions  $F$  et de corps résiduel  $k$ . On note  $S = \text{Spec } \Lambda$ ,  $\eta = \text{Spec } F$ ,  $s = \text{Spec } k$ , et on désigne par  $\Gamma$  le groupe  $F^\times / \Lambda^\times$  de la valuation de  $\Lambda$ , notée  $v_\Lambda$ .

On se donne de plus un  $S$ -schéma en groupes lisse commutatif et de type fini  $A \xrightarrow{f} S$ , de section unité  $e_A : S \rightarrow A$  (il est inutile de supposer  $A$  séparé). On note  $A^\circ$  sa composante neutre,  $A_\circ = A \times_S s$  sa fibre fermée, et  $\Phi = A_\circ / A_\circ^\circ$  le groupe des composantes de  $A_\circ$ , qui est un  $k$ -schéma en groupes fini étale.

On s'intéresse au foncteur "restriction à la fibre générique" :

$$(1.0.1) \quad R : \text{CUB}(A, G_m, S) \longrightarrow \text{CUB}(A_\eta, G_m, \eta) .$$

1.1. Théorème de prolongement (cf. [B], §3).

(i) (unicité du prolongement cubiste). Le foncteur  $R$  ci-dessus est pleinement fidèle.

(ii) (obstruction au prolongement cubiste). On peut associer de façon naturelle à tout  $G_m$ -torseur cubiste  $L_\eta$  sur  $A_\eta$  un morphisme pointé de degré 2

$$(1.1.1) \quad d^{L_\eta} = d^{A, L_\eta} : \Phi \longrightarrow (\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} / \Gamma)_k$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que  $L_\eta$  soit dans l'image essentielle de  $R$  (en particulier, si  $A_\circ$  est connexe,  $R$  est une équivalence de catégories).

Le morphisme  $d^{L_\eta}$  possède les propriétés suivantes :

a) fonctorialité : si  $\lambda : B \rightarrow A$  est un morphisme de  $S$ -schémas en groupes (avec  $B$  lisse commutatif de type fini sur  $S$ ) et si  $\bar{\lambda} : \Psi \rightarrow \Phi$  est le morphisme induit sur les groupes de composantes des fibres fermées, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \Phi \\
 \searrow d^{\lambda * L_{\eta}} & & \swarrow d^{L_{\eta}} \\
 & & (\Gamma \otimes \mathbb{Q} / \Gamma)_k
 \end{array}$$

b) changement de base : soient  $g : S' \rightarrow S$  un morphisme de traits,  $\eta', \Gamma', \text{etc.}$ , les données sur  $S'$  correspondant à  $\eta, \Gamma, \text{etc.}$ , et  $A', L', \Phi'$  les données déduites de  $A, L, \Phi$  par le changement de base  $g$ . Alors l'obstruction  $d^{A', L'_{\eta'}}$  est égale à l'application composée

$$\Phi' \xrightarrow{d^{L_{\eta}} \times_k k'} (\Gamma \otimes \mathbb{Q} / \Gamma)_{k'} \longrightarrow (\Gamma' \otimes \mathbb{Q} / \Gamma')_{k'}$$

où la seconde flèche est déduite de l'inclusion naturelle  $\Gamma \hookrightarrow \Gamma'$

c) additivité : si  $L_{\eta}$  et  $M_{\eta}$  sont deux  $\mathbb{G}_m$ -torseurs cubistes sur  $A_{\eta}$ , alors

$$d^{L_{\eta} \otimes M_{\eta}} = d^{L_{\eta}} + d^{M_{\eta}} .$$

On trouvera dans [B], §3 une définition homologique de  $d^{L_{\eta}}$  (ou, en tout cas, d'une obstruction qui lui ressemble fort). Nous en donnerons ici une construction plus terre à terre.

1.1.2. Démontrons (i). Il suffit de voir que si  $L$  est un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A$ , l'application naturelle

$$\text{Hom}_{\text{CUB}}(\mathbb{G}_{m,A}, L) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{CUB}}(\mathbb{G}_{m,A_{\eta}}, L_{\eta})$$

est bijective, le toseur  $\mathbb{G}_{m,A}$  étant muni de sa structure du cube triviale.

L'injectivité résulte du fait que,  $A$  étant lisse sur  $S$ ,  $A_{\eta}$  est schématiquement dense dans  $A$ .

Soit  $\tau \in \Gamma(A^3, \mathcal{D}_3(L))$  la section définissant la structure du cube de  $L$ . Un élément de  $\text{Hom}_{\text{CUB}}(\mathbb{G}_{m,A_{\eta}}, L_{\eta})$  est une section  $\sigma_{\eta}$  de  $L_{\eta}$ , que l'on peut voir (en identifiant  $L$  au faisceau inversible associé) comme une section méromorphe  $\sigma$  de  $L$  sur  $A$ , sans zéros ni pôles sur  $A_{\eta}$ , et vérifiant

$$(1.1.2.1) \quad \mathcal{D}_3(\sigma) = \tau .$$

Il faut alors montrer que  $\text{div}(\sigma) = 0$ ; cette condition est de plus suffisante, car alors  $\sigma$  définit bien une trivialisatation du toseur  $L$ , qui est cubiste à cause de (1.1.2.1).



Il est clair que  $\text{div}(\sigma)$  est à support dans  $A_0$ , puisque  $\sigma_\eta$  est une trivialisatation de  $L$ . Soit donc  $C$  une composante de  $A_0$ , et soit  $\xi$  son point générique : l'anneau local  $\mathcal{O}_{A, \xi}$  est un anneau de valuation discrète dont la valuation, que nous noterons  $v_C$ , est à valeurs dans  $\Gamma$  (car  $A$  est lisse sur  $S$ ). On obtient un morphisme de  $S$ -schémas :

$$\begin{aligned} v : \Phi &\longrightarrow \Gamma \\ v(C) &= v_C(\sigma) \end{aligned}$$

et en prenant les valuations dans (1.1.2.1) on constate que c'est une application pointée de degré 2, donc nulle car  $\Phi$  est fini et  $\Gamma$  sans torsion (cf. I, 5.6). On a donc  $v_C(\sigma) = 0$  pour toute composante  $C$  de  $A_0$ , cqfd.

1.1.3. Montrons (ii). Soit donc  $L_\eta \in \text{ob CUB}(A_\eta, \mathbb{G}_{m, \eta})$  et soit  $\tau_\eta$  la section de  $\mathfrak{D}_3(L_\eta)$  définissant sa structure du cube. Supposons trouvé un  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L$  sur  $A$ , prolongeant  $L_\eta$ , et tel que  $\tau_\eta$  se prolonge en une trivialisatation  $\tau$  de  $\mathfrak{D}_3(L)$  : alors cette trivialisatation est automatiquement une structure du cube, les conditions (i) et (ii) de I, 2.4.5 se prolongeant par densité.

Soit  $L_1$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur quelconque sur  $A$  prolongeant  $L_\eta$ . Il en existe car  $A$  est régulier donc localement factoriel ; d'autre part les prolongements de  $L_\eta$  à  $A$  sont tous de la forme  $L_1(D) = L_1 \otimes \mathcal{O}_A(D)$  où  $D$  est un diviseur à support dans  $A_0$ . Un tel diviseur s'identifie à une fonction  $\varphi_D : \Phi \longrightarrow \Gamma_k$ .

Pour chaque  $D$ , nous pouvons considérer la section  $\tau_\eta$  de  $\mathfrak{D}_3(L_\eta)$  comme une section méromorphe  $\tau_D$  de  $\mathfrak{D}_3(L_1(D))$  ; à  $\tau_D$  on associe sa valuation le long de chaque composante de  $A_0^3$ , d'où une fonction

$$\psi_D : \Phi^3 \longrightarrow \Gamma_k$$

et il est immédiat que

$$\psi_D = \psi_0 + \mathfrak{D}_3(\varphi_D),$$

où  $\psi_0$  correspond au diviseur nul.

Pour que  $L_\eta$  soit dans l'image essentielle de  $R$  il faut et il suffit que l'on puisse trouver  $D$  tel que  $\psi_D = 0$ , i.e. qu'il existe  $\varphi : \Phi \longrightarrow \Gamma_k$  vérifiant

$$(1.1.3.1) \quad \mathfrak{D}_3(\varphi) = -\psi_0.$$

Comme la section  $\tau_\eta$  vérifie par hypothèse les conditions (i) et (ii) de I, 2.4.5, il en est de même de la section méromorphe  $\tau_0$  de

$\mathfrak{D}_3(L_1)$ . Passant aux valuations, on conclut que :

$$(1.1.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_0: \Phi^3 \longrightarrow \Gamma_k \simeq \mathbb{Z}_k \text{ est invariante par } \mathfrak{S}_3 \\ \psi_0(x+y, z, t) + \psi_0(x, y, t) = \psi_0(x, y+z, t) + \psi_0(y, z, t) . \end{array} \right.$$

Le lemme suivant va alors nous fournir une solution  $\varphi$  de (1.1.3.1) à valeurs dans  $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$  :

1.1.4. Lemme. Soient  $G$  un groupe compact commutatif, et  $\psi: G^n \longrightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 2$ ) une application continue qui est un 2-cocycle par rapport à chaque paire de variables. Il existe alors une unique application continue  $\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\psi = \mathfrak{D}_n(\varphi)$ , et  $\varphi$  est donnée par la formule

$$(1.1.4.1) \quad \varphi(x) = (-1)^{n-1} \int_{G^{n-1}} \psi(x, u_2, \dots, u_n) du_2 \dots du_n ,$$

la mesure du sur  $G$  étant la mesure de Haar de masse totale 1.

En particulier si  $G$  est fini et  $\psi$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ ,  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ ; si  $G$  est un groupe de Lie et si  $\psi$  est  $C^\infty$ , alors  $\varphi$  est  $C^\infty$ .

Démonstration : deux solutions diffèrent par une application  $\rho: G \longrightarrow \mathbb{R}$  qui est pointée de degré  $n-1$ , donc nulle : en effet  $\mathfrak{D}_{n-1}(\rho): G^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  est  $(n-1)$ -linéaire donc nulle puisque  $G$  est compact; par suite  $\rho$  est pointée de degré  $n-2$ , d'où notre assertion par récurrence. Ceci établit l'unicité de  $\varphi$ .

Pour l'existence, définissons  $\varphi$  par la relation (1.1.4.1) et montrons par récurrence sur  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) que

$$(1.1.4.2)_k \quad \mathfrak{D}_k \varphi(x_1, \dots, x_k) = (-1)^{n-k} \int_{G^{n-k}} \psi(x_1, \dots, x_k, u_{k+1}, \dots, u_n) du .$$

Pour  $k=1$  c'est la définition de  $\varphi$ , et pour  $k=n$  on trouvera  $\mathfrak{D}_n \varphi = \psi$ . Supposons donc vérifiée (1.1.4.2)<sub>k</sub> avec  $1 \leq k < n$  et calculons  $\mathfrak{D}_{k+1} \varphi$  : posant pour abrégier  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k-1})$ , on a d'après I, 1.2.4.1 :

$$\mathfrak{D}_{k+1} \varphi(\underline{x}, y_k, y_{k+1}) = \mathfrak{D}_k \varphi(\underline{x}, y_k + y_{k+1}) - \mathfrak{D}_k \varphi(\underline{x}, y_k) - \mathfrak{D}_k \varphi(\underline{x}, y_{k+1})$$

ce qui, joint à l'hypothèse de récurrence (1.1.4.2)<sub>k</sub>, donne

$$(1.1.4.3) \quad \mathfrak{D}_{k+1} \varphi(\underline{x}, y_k, y_{k+1}) = (-1)^{n-k} \int_{G^{n-k}} [\psi(\underline{x}, y_k + y_{k+1}, u_{k+1}, \underline{v}) - \psi(\underline{x}, y_k, u_{k+1}, \underline{v}) - \psi(\underline{x}, y_{k+1}, u_{k+1}, \underline{v})] du_{k+1} d\underline{v}$$

où l'on a posé  $\underline{v} = (v_{k+2}, \dots, v_n)$ . On utilise alors la propriété de cocycle de  $\psi$  :

$$\begin{aligned} & \psi(\underline{x}, y_k + y_{k+1}, u_{k+1}, \underline{v}) - \psi(\underline{x}, y_{k+1}, u_{k+1}, \underline{v}) \\ & = \psi(\underline{x}, y_k, y_{k+1} + u_{k+1}, \underline{v}) - \psi(\underline{x}, y_k, y_{k+1}, \underline{v}) \end{aligned}$$

qui donne, en reportant dans (1.1.4.3) :

$$(1.1.4.4) \quad \mathfrak{D}_{k+1} \varphi(\underline{x}, y_k, y_{k+1}) = (-1)^{n-k} \int_{G^{n-k}} \psi(\underline{x}, y_k, y_{k+1} + u_{k+1}, \underline{v}) du_{k+1} d\underline{v} \\ - (-1)^{n-k} \int_{G^{n-k}} \psi(\underline{x}, y_k, u_{k+1}, \underline{v}) du_{k+1} d\underline{v} - (-1)^{n-k} \int_{G^{n-k}} \psi(\underline{x}, y_k, y_{k+1}, \underline{v}) du_{k+1} d\underline{v}.$$

Le changement de variable  $u_{k+1} \mapsto -y_{k+1} + u_{k+1}$  dans la première intégrale permet d'anéantir les deux premières ; on remarque enfin que la fonction sous la troisième intégrale ne dépend pas de  $u_{k+1}$ , d'où la récurrence. ■

1.1.5. Fin de la démonstration de 1.1(ii). On applique le lemme à l'équation (1.1.3.1) : notons que bien que  $\Phi$  ne soit pas un groupe fini ordinaire mais un  $k$ -schéma en groupes étale, il suffit d'appliquer le lemme au groupe fini  $\Phi(k_s)$  ( $k_s =$  clôture séparable de  $k$ ) et de remarquer que la fonction  $\varphi$  obtenue est invariante sous  $\text{Gal}(k_s/k)$ , grâce à l'unicité de la solution.

On se trouve ainsi gratifié d'une unique solution  $\varphi_o$  de (1.1.3.1) à valeurs dans  $(\Gamma \otimes \mathbb{Q})_k$ . Pour que  $L_\eta$  soit dans l'image essentielle de  $R$  il faut et il suffit que  $\varphi_o$  soit à valeurs dans  $\Gamma_k$ , i.e. que

$$(1.1.5.1) \quad d^{L_\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_o \bmod \Gamma_k : \Phi \longrightarrow (\Gamma \otimes \mathbb{Q} / \Gamma)_k$$

soit identiquement nulle. Si l'on change le prolongement  $L_1$  de  $L_\eta$  en  $L_1(D)$  pour un certain diviseur  $D$ , l'équation (1.1.3.1) est remplacée par

$$\mathfrak{D}_3(\varphi) = -\psi_D = -\psi_o - \mathfrak{D}_3(\varphi_D)$$

dont la solution est  $\varphi_o - \varphi_D \equiv \varphi_o \pmod{\Gamma_k}$ , ce qui montre que  $d^{L_\eta}$  est bien définie. Enfin :

$$\mathfrak{D}_3(d^{L_\eta}) = \mathfrak{D}_3(\varphi_o) \bmod \Gamma_k = -(\psi_o \bmod \Gamma_k) = 0$$

donc  $d^{L_\eta}$  est bien pointée de degré 2.

On abandonne au lecteur la démonstration, essentiellement triviale, des propriétés de functorialité, de changement de base et d'additivité. ■

1.1.6. Remarque : lien avec SGA 7, VIII.7.1.

Avec les notations de 1.0 et 1.1, soit  $E_\eta$  une biextension de

$(A_\eta, B_\eta)$  par  $\mathbb{G}_{m,\eta}$ . On définit dans SGA 7, loc. cit. un accouplement

$$(1.1.6.1) \quad d(E_\eta) : \Phi \times \Psi \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k ,$$

obstruction à prolonger  $E_\eta$  en une biextension de  $(A, B)$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$ .

Or on peut définir une telle obstruction en utilisant 1.1 de la manière suivante : on observe d'abord que pour toute biextension  $E$  de  $(P, Q)$  par  $G$  (où  $P, Q, G$  sont trois Groupes commutatifs d'un topos quelconque) le torseur sous-jacent à  $E$  sur le Groupe produit  $P \times Q$  admet une structure cubiste canonique (le plus simple ici est d'utiliser les techniques de I, §6). Dans le cas qui nous occupe on peut donc définir

$$(1.1.6.2) \quad d^{E_\eta} : \Phi \times \Psi \longrightarrow (\Gamma \otimes \mathbb{Q}/\Gamma)_k \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k ,$$

obstruction à prolonger  $E_\eta$  comme torseur cubiste. Cela étant, il est facile de voir que tout prolongement cubiste de  $E_\eta$  est en fait un prolongement comme biextension (les lois de la biextension se prolongeant grâce à la pleine fidélité 1.1 (i) appliquée aux torseurs convenables sur  $A \times A \times B$ ,  $A \times B \times B$ , etc.). De plus la structure de biextension de  $E_\eta$  implique que  $d^{E_\eta}$  est bilinéaire. Elle constitue donc une obstruction entièrement analogue à (1.1.6.1) ; il est vraisemblable que ces deux obstructions coïncident au moins au signe près.

On peut naturellement répéter les considérations ci-dessus en remplaçant  $d^{E_\eta}$  par l'obstruction de  $[B]$ , §3 ; le lien avec SGA 7 serait alors plus facile à établir, vu l'analogie des deux constructions.

## 1.2. Critères d'annulation de l'obstruction.

Gardons les hypothèses et notations de 1.0, et donnons-nous de plus  $\lambda : B \longrightarrow A$  et  $g : S' \longrightarrow S$  comme dans l'énoncé de 1.1, et un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $L_\eta$  sur  $A_\eta$ . Nous dirons pour abrégé que  $L_\eta$  est prolongeable sur  $A$  s'il existe un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A$  prolongeant  $L_\eta$ , c'est-à-dire si  $d^{L_\eta} = 0$ .

1.2.1. Proposition. Soit  $n$  un entier tel que  $n\Phi = 0$ . Alors  $L_\eta^{\otimes 2n}$  est prolongeable sur  $A$ , et  $L_\eta^{\otimes n}$  l'est aussi si  $n$  est impair.

Démonstration :  $d^{L_\eta^{\otimes 2n}} = 2nd^{L_\eta} = 0$  (lemme I, 5.6)

et si  $n$  est impair  $d^{L_\eta^{\otimes n}} = nd^{L_\eta} = 0$  (idem) ■

1.2.2. Proposition. Soit  $e = (\Gamma' : \Gamma)$  l'indice de ramification de  $g : S' \longrightarrow S$ , et soit  $n$  tel que  $n\Phi = 0$ . Alors  $L_\eta' = L_\eta \times_S S'$  est

prolongeable sur  $A' = A \times_S S'$  si  $2n$  divise  $e$ , ou si  $n$  est impair et divise  $e$ .

En effet, le noyau du morphisme naturel

$$\Gamma \otimes \mathbb{Q}/\Gamma \longrightarrow \Gamma' \otimes \mathbb{Q}/\Gamma'$$

est  $(\frac{1}{e}\Gamma)/\Gamma$ , donc  $L'_\eta$  est prolongeable si et seulement si  $ed^{L_\eta} = 0$ ; on conclut encore grâce au lemme I,5.6. ■

1.2.3. Proposition. On suppose que le morphisme  $\bar{\lambda} : \Psi \longrightarrow \Phi$  induit sur les groupes de composantes des fibres spéciales par  $\lambda : B \longrightarrow A$  est surjectif.

(i) Pour que  $L_\eta$  soit prolongeable sur  $A$  il faut et il suffit que  $\lambda^* L_\eta$  soit prolongeable sur  $B$ .

(ii) Soit  $L$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur rigidifié sur  $A$  prolongeant le torseur rigidifié  $L_\eta$ . Pour que  $L$  admette une structure cubiste prolongeant celle de  $L_\eta$ , il faut et il suffit que  $\lambda^* L$  admette une structure cubiste prolongeant celle de  $\lambda^* L_\eta$ .

Démonstration : l'assertion (i) est immédiate vu la functorialité de  $d^{L_\eta}$ . Pour (ii), soit  $\tau$  la section méromorphe de  $\mathcal{D}_3(L)$  définie par la structure cubiste de  $L_\eta$  : le diviseur de  $\tau$  s'identifie à une fonction  $\psi : \Phi^3 \longrightarrow \Gamma$ , qui est nulle si et seulement si la composée  $\psi \circ (\bar{\lambda})^3 : \Psi^3 \longrightarrow \Gamma$  est nulle, i.e. si le support du diviseur de  $\lambda^* \tau$  est vide. ■

1.2.4. Définition. Soient  $C$  et  $G$  deux Groupes commutatifs d'un topos  $E$ , et  $P$  un  $G$ -torseur cubiste sur  $C$ . On dit que  $P$  est symétrique s'il existe un isomorphisme

$$P \xrightarrow{\sim} [-1]_C^*(P)$$

de  $G$ -torseurs cubistes sur  $C$ .

(On n'impose pas à l'isomorphisme en question de définir une  $\Sigma$ -structure au sens de [B]).

1.2.5. Lemme. On suppose que le  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $L_\eta$  sur  $A_\eta$  est symétrique ; alors le morphisme pointé de degré 2

$$d^{L_\eta} : \Phi \longrightarrow (\Gamma \otimes \mathbb{Q}/\Gamma)_k.$$

est même quadratique ; i.e. on a pour tout  $x \in \Phi$  :

$$d^{L\eta}(-x) = d^{L\eta}(x)$$

ou, de façon équivalente, on a pour tout  $x \in \Phi$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$d^{L\eta}(nx) = n^2 d^{L\eta}(x) .$$

Démonstration : la première égalité est une conséquence triviale de la fonctorialité de  $d^{L\eta}$ . La seconde en résulte compte tenu de I,5.5.3. ■

1.2.6. Proposition. Avec les notations de 1.2.3 ( $\bar{\lambda}$  n'étant plus supposé surjectif) soit  $n$  un entier tel que  $n\psi = 0$ . On suppose que  $L_\eta$  est symétrique et que  $\bar{\lambda}(\psi) \subset 2n\Phi$ . Alors  $\lambda^* L_\eta$  est prolongeable sur  $B$ .

Démonstration : il s'agit de montrer (compte tenu de la fonctorialité de l'obstruction  $d^{L\eta}$ ) que  $d^{L\eta}$  est nulle sur le sous-groupe  $\bar{\lambda}(\psi)$  de  $\Phi$ . On peut remplacer  $\Phi$  par le sous-groupe  $\Phi'$  des  $x$  tels que  $2nx \in \bar{\lambda}(\psi)$ , lequel vérifie  $2n^2\Phi' = 0$ . La proposition résulte alors du

1.2.6.1. Lemme. Soient  $G$  et  $H$  deux groupes abéliens,  $n$  un entier tel que  $2n^2G = 0$ , et  $d : G \rightarrow H$  une application quadratique. Alors  $d(2nx) = 0$  pour tout  $x \in G$ .

Démonstration : comme  $d$  est quadratique, on a  $d(2nx) = 4n^2 d(x)$  et on applique I,5.6. Ceci démontre 1.2.6.1 et 1.2.6. ■

1.2.6.2. Remarque. Si  $L_\eta$  est symétrique et prolongeable, il résulte de l'assertion de pleine fidélité 1.1 (i) que le torseur cubiste  $L$  prolongeant  $L_\eta$  est encore symétrique.

1.2.7. Définition. Soit  $X$  un schéma. Un  $X$ -schéma en groupes  $G$  est semi-stable s'il est commutatif, lisse, séparé et de type fini sur  $X$ , et si les composantes neutres de ses fibres ont un radical unipotent nul (i.e. sont extensions de variétés abéliennes par des tores).

1.2.8. Proposition. On suppose que  $A_\eta$  est une variété abélienne, que  $A$  est semi-stable sur  $S$ , et que  $L_\eta$  est symétrique. Soit  $n$  tel que  $n\Phi = 0$ . Si tous les points d'ordre  $2n^2$  de  $A_\eta$  (sur une clôture algébrique de  $F$ ) sont rationnels sur  $F$ , alors  $L_\eta$  est prolongeable sur  $A$  (par un torseur cubiste symétrique, cf. 1.2.6.2).

Il suffit d'appliquer 1.2.6 au morphisme de  $A$  dans le modèle de Néron  $\pi$  de  $A_\eta$  : si  $C$  est une composante de  $A_0$  elle rencontre une section d'ordre  $n$  de  $A$  sur  $S$ , donc elle est divisible par  $2n$  dans le groupe  $\pi_0/\pi_0^0$ .

1.2.8.1. Remarques : .si  $n$  est premier à la caractéristique résiduelle, l'hypothèse sur les points d'ordre  $2n^2$  entraîne que  $A_\eta$  a réduction semi-stable ([Sz], I, §5) sauf dans le cas  $n=1$ , où le corollaire est trivial.

Si  $n$  est impair l'hypothèse  $\bar{\lambda}(\Psi) \subset 2n\Phi$  de 1.2.6 équivaut à  $\bar{\lambda}(\Psi) \subset n\Phi$ ; en conséquence on peut remplacer, dans 1.2.8, les points d'ordre  $2n^2$  par les points d'ordre  $n^2$ .

.Si  $A$  n'est plus supposé semi-stable, la proposition 1.2.8 reste vraie lorsque  $n$  est premier à la caractéristique résiduelle de  $S$ .

## 2. Analogie archimédien du théorème de prolongement.

### 2.1. Proposition (version archimédienne de 1.1).

Soient  $A$  une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ ,  $L$  un fibré en droites cubiste sur  $A$ . Il existe alors une unique norme hermitienne  $C^\infty$  sur  $L$ , notée  $\nu$ , telle que la norme  $\mathcal{D}_3(\nu)$  sur  $\mathcal{D}_3(L)$  déduite de  $\nu$  coïncide avec la norme évidente déduite de la trivialisatation de  $\mathcal{D}_3(L)$  donnée par la structure cubiste.

De plus,  $\nu$  est l'unique norme hermitienne  $C^\infty$  sur  $L$ , compatible à la rigidification à l'origine, et telle que la forme de courbure associée soit invariante par translations (cf. [M3], §12, Cor. du lemme 1).

Démonstration : pour changer un peu, nous donnerons un argument plus proche des méthodes de [B] et SGA 7, VIII.

Faisons d'abord subir au fibré  $L$  la série d'outrages qui suit. On part de la variété  $C^\infty$  sous-jacente au fibré  $L$  privé de sa section nulle : c'est un fibré principal homogène, de groupe  $\mathbb{C}^\times$ , au-dessus de la variété  $C^\infty A^{\text{dif}}$  sous-jacente à  $A$ . Grâce au changement de groupe structural  $z \mapsto \log|z|$ , on obtient un fibré principal homogène de groupe  $\mathbb{R}$  sur  $A^{\text{dif}}$ , que nous noterons  $\log|L|$ .

Il est clair qu'une norme hermitienne sur  $L$  équivaut à une trivialisatation de  $\log|L|$  (ceci peut être pris comme définition), et que cette norme est compatible avec la structure cubiste de  $L$  (au sens de l'énoncé) si et seulement si la trivialisatation en question est cubiste, au sens de la structure cubiste de  $\log|L|$  déduite de celle de  $L$ .

Fixons une norme hermitienne  $C^\infty$  sur  $L$ , i.e. une trivialisatation de  $\log|L|$ . La structure cubiste sur  $\log|L|$  équivaut dès lors à la donnée d'une fonction  $C^\infty$

$$\psi : (A^{\text{dif}})^3 \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

invariante par  $\mathfrak{S}_3$  et qui est un 2-cocycle en chaque paire de variables. Une trivialisaton de cette structure équivaut à une fonction

$$\varphi : A^{\text{dif}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant  $\psi = \mathfrak{D}_3(\varphi)$ . La première partie de 2.1 résulte donc du lemme 1.1.4.

Pour la seconde il suffit de vérifier que la forme de courbure de  $\nu$  est invariante : si  $\nu_1$  est une autre norme avec la même propriété, on aura  $\nu_1 = f\nu$  où  $f \gg 0$ ,  $f(e_A) = 1$  et  $f$  est harmonique, donc  $f = 1$  et  $\nu_1 = \nu$ .

Grâce à la trivialisaton canonique du fibré tangent de  $A$ , nous pouvons considérer la forme de courbure de  $\nu$  comme une application

$$\alpha : A \longrightarrow V$$

où  $V = \Omega_A^{1,1}(e_A)$  est l'espace vectoriel des (1,1)-formes à l'origine.

La forme de courbure de la norme  $\mathfrak{D}_3(\nu)$  sur  $\mathfrak{D}_3(L)$  est

$$\beta = p_{123}^* \alpha - p_{12}^* \alpha - p_{13}^* \alpha - p_{23}^* \alpha + p_1^* \alpha + p_2^* \alpha + p_3^* \alpha ;$$

en tant qu'application de  $A^3$  dans  $\Omega_{A^3}^{1,1}(e_{A^3}) \simeq V \oplus V \oplus V$ , elle s'écrit donc :

$$\beta(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha(x+y+z) \\ \alpha(x+y+z) \\ \alpha(x+y+z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha(x+y) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(x+z) \\ 0 \\ \alpha(x+z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(y+z) \\ \alpha(y+z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha(z) \end{pmatrix}$$

Comme  $\mathfrak{D}_3(\nu)$  est par hypothèse la norme canonique sur  $\mathfrak{D}_3(L) \simeq A^3 \times \mathbb{C}$ , on a  $\beta = 0$  d'où

$$\alpha(x+y+z) = \alpha(x+y) + \alpha(x+z) - \alpha(x) .$$

En faisant  $x=0$ , on obtient :

$$\alpha(y+z) = \alpha(y) + \alpha(z) - \alpha(0)$$

i.e. l'application  $\alpha - \alpha(0) : A \longrightarrow V$  est additive, donc nulle.

(Démonstration dans l'autre sens : partir de la norme  $\nu_1$  définie dans la seconde assertion : la norme  $\mathfrak{D}_3(\nu_1)$  est encore à courbure constante, et par suite constante). ■



3. Prolongement de  $G_m$ -torseurs cubistes en dimension supérieure ; cas des groupes semi-stables sur une base normale.

3.0. Dans tout ce § on se donne un schéma localement noethérien  $S$ , et un  $S$ -schéma en groupes  $A \xrightarrow{f} S$ , commutatif, plat et localement de type fini sur  $S$ .

Pour tout  $S$ -schéma  $S'$ , on note

$$(3.0.1) \quad R_{S,S'} : \text{CUB}(A, G_{m,S}) \longrightarrow \text{CUB}(A_{S'}, G_{m,S'})$$

le foncteur image réciproque. Nous désignerons par  $U$  un  $S$ -schéma de l'un des deux types suivants :

(3.0.2) (a)  $U$  est un sous-schéma ouvert de  $S$ .

(b)  $U$  est le spectre de l'anneau local d'un point  $s$  de  $S$ .

Dans les deux cas nous supposerons que  $U$  est schématiquement dense dans  $S$  : dans le cas b) cela signifie que tout point de  $\text{Ass}(\mathcal{O}_S)$  est une généralisation de  $s$ .

3.1. Définition. Un gros ouvert d'un schéma localement noethérien  $X$  est un ouvert  $V$  de  $X$  tel que pour tout  $x \in X-V$ , on ait

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \gg 2.$$

3.2. Commençons par quelques énoncés, de nature élémentaire, concernant le foncteur  $R_{S,U}$  :

3.2.1. Proposition. On suppose que  $U$  est un gros ouvert de  $S$  (3.1). Alors :

(i) Le foncteur  $R_{S,U}$  de (3.0.1) est pleinement fidèle.

(ii) Pour qu'un objet  $L_U$  de  $\text{CUB}(A_U, G_m)$  soit dans l'image essentielle de  $R_{S,U}$ , il faut et il suffit que le faisceau inversible sur  $A_U$  associé à  $L_U$  se prolonge en un faisceau inversible sur  $A$ .

Remarque. Il est immédiat que si  $U$  est seulement supposé schématiquement dense dans  $S$ , le foncteur  $R_{S,U}$  est fidèle.

Démonstration :

(i) Soit  $L \in \text{ob } \text{CUB}(A, G_m)$  et soit  $\sigma_U$  une trivialisation de  $L_U$  sur  $A_U$ . Comme  $U$  est un gros ouvert de  $S$  et que  $A$  est plat sur  $S$ ,  $A_U$  est un gros ouvert de  $A$  donc (EGA IV, 5.10.5)  $\sigma_U$  se prolonge en une section  $\sigma$  du toseur  $L$  sur  $A$  ; comme  $\sigma_U$  est une trivialisation

cubiste,  $\sigma$  l'est également,  $U$  étant schématiquement dense.

(ii) Soit  $L_U \in \text{ob CUB}(A_U, \mathbb{G}_m)$  et soit  $L$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $A$  prolongeant (le toseur sous-jacent à)  $L_U$ . La structure cubiste de  $L_U$  est donnée par une section  $\tau_U$  de  $\mathcal{D}_3(L_U)$  sur  $A_U^3$ . Or  $A_U^3$  est un gros ouvert de  $A^3$  (et  $A^3$  est localement noethérien puisque  $A$  est localement de type fini sur  $S$ ), par suite  $\tau_U$  se prolonge (EGA IV, loc. cit.) en une section  $\tau$  de  $\mathcal{D}_3(L)$  sur  $A$ , qui est automatiquement une structure cubiste puisque  $A_U^n$  est schématiquement dense dans  $A^n$  pour tout  $n \gg 0$ . ■

3.2.2. Proposition. On suppose que  $A$  est lisse de type fini sur  $S$  et que  $S$  est normal aux points de  $S-U$ . Alors :

(i) Le foncteur  $R_{S,U}$  est pleinement fidèle.

(ii) Si de plus  $U$  est un gros ouvert de  $S$  et si  $S$  est régulier aux points de  $S-U$ , alors  $R_{S,U}$  est une équivalence de catégories.

Démonstration :

(i) si  $L \in \text{ob CUB}(A, \mathbb{G}_m)$  et si  $\sigma_U$  trivialise  $L_U$  sur  $A_U$ , alors d'après 1.1 (i),  $\sigma_U$  se prolonge au-dessus d'un ouvert  $V$  contenant  $U$  et les points de codimension 1 de  $S$ ;  $V$  est alors un gros ouvert et l'on applique 3.2.1 (i).

(ii) résulte de 3.2.1 (ii) puisque, sous les hypothèses envisagées, on a  $\text{Pic}(A_U) = \text{Pic}(A)$  (EGA IV, 21.13.9 (ii) et 21.13.10). ■

3.2.3. Proposition. On suppose  $A$  lisse de type fini sur  $S$ , à fibres connexes aux points de  $S-U$ , et  $S$  normal aux points de  $S-U$ . Alors :

(i) Si  $L_U \in \text{ob CUB}(A_U, \mathbb{G}_m)$ , il existe un gros ouvert  $V$  de  $S$  contenant  $U$  tel que  $L_U$  soit dans l'image essentielle de  $R_{V,U}$ .

(ii) Si  $S$  est régulier aux points de  $S-U$ , alors  $R_{S,U}$  est une équivalence.

Démonstration : (i) résulte de 1.1, toutes les obstructions aux points de codimension 1 étant nulles, et (ii) s'ensuit compte tenu de 3.2.2 (ii). ■

3.3. Théorème. On suppose que  $A$  est semi-stable (1.2.7), que ses fibres aux points de  $S-U$  sont connexes, et que  $S$  est normal aux points de  $S-U$ . Soit  $L_U$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A_U$ , vérifiant l'une des propriétés suivantes :

(i) le torseur sous-jacent à  $L_U$  est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(A_U)$

(ii) le torseur sous-jacent à  $L_U$  est symétrique, i.e. il existe un isomorphisme  $L_U \xrightarrow{\sim} [-1]_{A_U}^*(L_U)$  de  $\mathbb{G}_m$ -torseurs sur  $A_U$ .

Alors  $L_U$  est dans l'image essentielle de  $R_{S,U}$ .

Démonstration :

3.3.1. Dans le cas 3.0.2 (b), on peut commencer par prolonger  $L_U$  au-dessus d'un ouvert de  $S$ , de telle sorte que (i) ou (ii) soit encore vérifiée. Nous supposons donc que  $U$  est un ouvert de  $S$ . Pour montrer que  $L_U$  se prolonge en un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A$ , on peut remplacer  $S$  par le spectre de l'anneau local d'un point maximal de  $S-U$ , ce qui permet de supposer que  $S$  est local normal et que  $U$  est le complémentaire du point fermé; on peut même supposer que  $\dim S \gg 2$  (car si  $S$  est un trait on applique 1.1 et la connexité de la fibre fermée de  $A$ ). Remarquant en outre que  $A$  est réunion des deux ouverts  $A_U$  et  $A^\circ$  (vu l'hypothèse sur la fibre fermée) on voit qu'il suffit de prolonger  $L_U|_{A_U^\circ}$  à  $A^\circ$ : on peut par suite supposer que  $A$  est à fibres connexes. Enfin,  $S$  étant normal, l'hypothèse (i) (resp. (ii)) équivaut, grâce à I,2.6, à (i)' (resp. (ii)') ci-dessous :

(i)' il existe  $n \gg 1$  tel que le torseur cubiste  $L_U^{\otimes n}$  soit trivial

(ii)' le torseur cubiste  $L_U$  est symétrique (1.2.4).

3.3.2. Cas (i)' : puisque le torseur cubiste  $L_U^{\otimes n}$  est trivial, la biextension associée  $\mathcal{D}_2(L_U^{\otimes n}) \simeq \mathcal{D}_2(L_U)^{\otimes n}$  l'est également, ainsi que la biextension  $\mathcal{D}_2(L_\eta)^{\otimes n}$ , où  $\eta$  désigne le point générique de  $S$  (on rappelle que  $S$  est local normal, donc intègre). Or, si  $B$  désigne le plus grand quotient de  $A_\eta$  qui soit une variété abélienne, on sait (SGA 7, VIII.3.5) que le groupe de classes de biextensions  $\text{Biext}^1(A_\eta, A_\eta; \mathbb{G}_m)$  s'identifie à  $\text{Biext}^1(B, B; \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(B, B^t)$  (SGA 7, VII.2.9.5) donc est sans torsion ( $B^t$  désignant la variété duale de  $B$ ). D'autre part le foncteur naturel de restriction

$$\text{BIEXT}(A_U, A_U; \mathbb{G}_m) \longrightarrow \text{BIEXT}(A_\eta, A_\eta; \mathbb{G}_m)$$

est pleinement fidèle; la démonstration est la même que celle de 3.2.2

(i) utilisant SGA 7, VIII.7.1. Il en résulte que le groupe  $\text{Biext}^1(A_U, A_U; \mathbb{G}_m)$  est encore sans torsion, et par suite la biextension  $\mathcal{D}_2(L_U)$  est triviale, et ce de manière unique puisque tout morphisme bilinéaire  $A_U \times A_U \rightarrow \mathbb{G}_m$  est trivial. Donc (I,3.2)  $L_U$  est muni canoniquement d'une structure d'extension commutative de  $A_U$  par  $\mathbb{G}_m$ , et

comme  $L_U^{\otimes n}$  est trivial, nous voyons que  $L_U$  provient en fait d'une extension de  $A_U$  par  $\mu_{n,U}$  (non unique en général : elle dépend du choix d'une trivialisation de  $L_U^{\otimes n}$ ).

Quoi qu'il en soit, le cas (i)' résulte de l'énoncé plus précis suivant :

3.3.2.1. Lemme. Revenant aux hypothèses de 3.0, on suppose que  $A$  est semi-stable à fibres connexes et que  $U$  est un gros ouvert de  $S$ . Alors pour tout  $n \gg 1$ , le foncteur naturel

$$\text{EXT}(A, \mu_{n,S}) \longrightarrow \text{EXT}(A_U, \mu_{n,U})$$

est une équivalence.

Démonstration : il suffit de voir que  $\text{Hom}(A, \mu_{n,S}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(A_U, \mu_{n,U})$  (évident car les deux groupes sont nuls) et  $\text{Ext}^1(A, \mu_{n,S}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(A_U, \mu_{n,U})$ .

Vu les hypothèses sur  $A$  le morphisme  $[n]_A$  de multiplication par  $n$  dans  $A$  est surjectif, plat et quasi-fini ; notons  $H$  son noyau. Les suites des  $\text{Ext}^i(-, \mu_n)$  associées à la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow A \xrightarrow{[n]_A} A \longrightarrow 0$$

et à la suite analogue sur  $U$ , donnent  $\text{Hom}(H, \mu_{n,S}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(A, \mu_{n,S})$  et  $\text{Hom}(H_U, \mu_{n,U}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(A_U, \mu_{n,U})$  puisque les  $\text{Ext}^1(-, \mu_n)$  sont annulés par  $n$ . Il s'agit donc de voir que

$$\text{Hom}(H, \mu_{n,S}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_U, \mu_{n,U})$$

ce qui résulte du fait que,  $H$  étant plat sur  $S$ ,  $H_U$  est un gros ouvert de  $H$ . ■

3.3.3. Traitons maintenant le cas (ii)' de 3.3.1 (je dois le principe de la démonstration à des notes de D. Mumford).

D'après [R1], XI.1.13, il existe un entier  $n > 0$  tel que  $L_U^{\otimes n}$  se prolonge en un faisceau inversible  $M$  sur  $A$  (il suffit en effet d'établir la même propriété pour  $L_\eta^{\otimes n}$ , et on applique loc. cit. en remarquant que  $L_\eta$  est la différence de deux faisceaux amples sur  $A_\eta$ ) ; de plus le faisceau  $M$  est automatiquement cubiste (3.2.1 (ii)).

Comme  $L_U$  est symétrique, on a un isomorphisme naturel de  $G_m$ -torseurs cubistes (I, 5.5) :

$$[n]_{A_U}^*(L_U) \xrightarrow{\sim} L_U^{\otimes n^2}$$

qui montre que le toreur  $N = M^{\otimes n}$  est un prolongement cubiste de  $[n]_A^*(L_U)$ .

On a donc une "donnée de descente cubiste" sur  $N_U$  relativement au morphisme  $[n]_{A_U}$ , c'est-à-dire (I,7.1) une trivialisatoin  $s_U$  de  $N_U$  sur  $H_U$  (en posant comme plus haut  $H = \text{Ker}[n]_A$ ), plus une trivialisatoin  $t_U$  de  $\mathcal{D}_2(N_U)$  sur  $A_U \times_S H_U$ , avec une condition de compatibilité. Mais comme  $H_U$  (resp.  $A_U \times_S H_U$ ) est un gros ouvert de  $A$  (resp.  $A \times H$ ), la section  $s_U$  (resp.  $t_U$ ) se prolonge en une section de  $N$  (resp.  $\mathcal{D}_2(N)$ ) sur  $H$  (resp.  $A \times H$ ), la condition de compatibilité se prolongeant par densité (ainsi que la compatibilité avec la structure cubiste de  $N$ , resp. la structure de biextension de  $\mathcal{D}_2(N)$ ). On a donc une donnée de descente cubiste sur  $N$  prolongeant celle de  $N_U$ , d'où d'après le théorème de descente un toreur cubiste sur  $A$  prolongeant  $L_U$ . ■

3.4. Supposons maintenant (toujours sous les hypothèses de 3.0) que  $A$  soit semi-stable (à fibres non nécessairement connexes) et que  $U$  soit un gros ouvert de  $S$ .

Soit  $L_U$  un faisceau inversible cubiste sur  $A_U$ ; on suppose que la restriction  $L_U^{\circ}$  de  $L_U$  à la composante neutre  $A_U^{\circ}$  se prolonge en un (unique) faisceau inversible cubiste  $L^{\circ}$  sur  $A^{\circ}$  (c'est le cas par exemple, d'après 3.3, si  $L_U^{\circ}$  est symétrique ou d'ordre fini et  $S$  normal aux points de  $S-U$ ).

On va donner des conditions suffisantes pour que  $L_U$  se prolonge à  $A_U$ , le point de départ étant le lemme suivant :

3.4.1. Lemme. Sous les hypothèses de 3.4, considérons un diagramme commutatif de  $S$ -schémas

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow a & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i)  $\pi$  est plat et  $S'$  est localement noethérien

(ii)  $a : S' \rightarrow A$  est d'ordre fini dans le groupe  $A(S')$

(iii) l'image  $a(S')$  rencontre toutes les composantes connexes des fibres de  $A$  aux points de  $S-U$ .

Alors pour que  $L_U$  soit prolongeable sur  $A$ , il faut et il suffit que  $a^*L_U$  se prolonge en un faisceau inversible sur  $S'$ .

Démonstration : la condition est évidemment nécessaire. Pour établir la suffisance nous aurons besoin d'un lemme élémentaire de descente :

3.4.1.1. Lemme. Soit  $\varphi : X' \rightarrow X$  un morphisme fidèlement plat de schémas localement noethériens, et soient  $V$  un gros ouvert de  $X$  et  $L_V$  un faisceau inversible sur  $V$ . Pour que  $L_V$  se prolonge en un faisceau inversible sur  $X$ , il faut et il suffit que  $\varphi^*(L_V)$  se prolonge en un faisceau inversible sur  $X'$ .

En effet, soit  $j : V \hookrightarrow X$  l'inclusion naturelle : pour que  $L_V$  soit prolongeable sur  $X$  il faut et il suffit (puisque  $V$  est un gros ouvert de  $X$ ) que  $j_*L_V$  soit un faisceau inversible. On conclut par descente fidèlement plate, en remarquant que  $\varphi^{-1}(V)$  est encore un gros ouvert de  $X'$ . ■

3.4.1.2. Revenant à 3.4.1, notons  $a' : S' \rightarrow A_S$ , la section du  $S'$ -schéma en groupes  $A_{S'} = A \times_S S'$  déduite de  $a$ , et considérons l'ouvert

$$W = a' A_{S'}^{\circ}$$

de  $A_{S'}$ , translaté par  $a'$  de la composante neutre  $A_{S'}^{\circ}$ . A cause de la condition (i), le morphisme naturel

$$\varphi : W \rightarrow A$$

est plat, et la condition (iii) signifie que son image contient le fermé  $A-A_U$  de  $A$  : en conséquence le morphisme naturel

$$W \amalg A_U \rightarrow A$$

est fidèlement plat. Appliquant 3.4.1.1, on en déduit l'équivalence :

$$\begin{array}{c} L_U \text{ est prolongeable sur } A \\ \Updownarrow \\ \varphi^*(L_U) \text{ est prolongeable sur } W \end{array}$$

Notant  $U' = \pi^{-1}(U)$ , il est clair d'après la définition de  $W$  qu'il s'agit de montrer que  $T_{a'}^*(L_{U'})$  se prolonge à  $A_{S'}^{\circ}$  (où bien entendu  $T_{a'}$  désigne la translation par  $a'$  dans  $A_{S'}$ ), sachant que  $a^*L_U$  se prolonge à  $S'$ . Or on a, par définition de l'opération  $\mathcal{D}_2$ , et en notant  $f' : A_{S'} \rightarrow S'$  le morphisme structural :

$$T_{a'}^*(L_{U'}) \otimes L_{U'}^{-1} \otimes f'^* a'^* L_{U'}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{A_{U'}} \\ a' \end{pmatrix}^* (\mathcal{D}_2(L_{U'}))$$

et grâce à la structure de biextension de  $\mathcal{D}_2(L_U)$ , le second membre est muni d'une structure d'extension, qui est même d'ordre fini car  $a' \in A_{S'}(S')$  est d'ordre fini d'après (ii). On peut donc le munir d'une structure d'extension de  $A_U$  par  $\mu_n$ , ce qui implique (3.3.2.1) qu'il est prolongeable sur  $A'^{\circ}$ . Au premier membre, les facteurs  $L_U^{-1}$  et  $f'^* a'^* L_U^{-1} = f'^* a'^* L_U^{-1}$  se prolongent à  $A'^{\circ}$  par hypothèse, et par suite il en est de même de  $T_a^*(L_U)$ , ce qui achève la démonstration. ■

3.4.2. Corollaire. Sous les hypothèses de 3.4, soit  $n$  un entier  $\gg 1$  tel que pour tout  $x \in S-U$ , le groupe des composantes connexes de la fibre  $A \otimes \kappa(x)$  soit annulé par  $n$ . Notons  ${}_n A$  le noyau de la multiplication par  $n$  dans  $A$ . Alors :

(i) Pour que  $L_U$  soit prolongeable sur  $A$ , il faut et il suffit que sa restriction à  ${}_n A_U$  se prolonge en un faisceau inversible sur  ${}_n A$ .

(ii)  $L_U^{\otimes 2n}$  est prolongeable sur  $A$ , et  $L_U^{\otimes n}$  l'est aussi si  $n$  est impair.

Démonstration : l'assertion (i) est un cas particulier de 3.4.1, obtenu en prenant  $S' = {}_n A$  : les conditions (i) et (iii) de loc. cit. résultent en effet de la semi-stabilité de  $A$  et de l'hypothèse faite sur  $n$ . L'assertion (ii) est conséquence de (i) et de I,5.7 : la restriction de  $L_U^{\otimes 2n}$  (resp.  $L_U^{\otimes n}$ ,  $n$  impair) à  ${}_n A_U$  est triviale, donc se prolonge à  ${}_n A$ . ■

3.4.3. Corollaire. Sous les hypothèses de 3.4, soit  $n$  comme dans 3.4.2. On suppose que  $S$  est intègre normal de point générique  $\eta$ , et pour tout entier  $k \gg 1$  on considère la condition :

( $R_k$ ) les points géométriques d'ordre  $kn$  de  $A_\eta$  se prolongent en des sections de  $A_U$  au-dessus de  $U$ .

Soit  $L_U$  un faisceau inversible cubiste sur  $A_U$ . Alors :

(i) Si  $L_U^{\otimes k}$  est trivial, ( $R_k$ ) implique que  $L_U$  est prolongeable sur  $A$ .

(ii) Si  $L_U$  est symétrique,  $R_{2n}$  (resp.  $R_n$ , si  $n$  est impair) implique que  $L_U$  est prolongeable sur  $A$ .

Démonstration : on peut supposer  $S$  local de point fermé  $s$ . Posons  $A_o = A \otimes \kappa(s)$ .

3.4.3.1. Lemme. Supposons vérifiée ( $R_1$ ). Alors pour toute composante connexe  $C$  de  $A_o$ , il existe une section de  ${}_n A$  au-dessus de  $S$  qui rencontre  $C$ .

Démonstration du lemme : puisque  $A$  est semi-stable et que  $A_0/A_0^0$  est annulé par  $n$ , la composante  $C$  rencontre  ${}_n A$ ; vu l'hypothèse  $(R_1)$  il existe donc une section d'ordre  $n$  de  $A_U$  au-dessus de  $U$ , dont l'adhérence  $X$  dans  $A$  rencontre  $C$ . Or  $X$  est quasi-fini sur  $S$  car il est contenu dans  ${}_n A$ ; comme  $S$  est normal il résulte aisément du "main theorem" de Zariski que  $X$  est l'image d'une section de  ${}_n A$  sur  $S$ , cqfd.

Pour démontrer 3.4.3, fixons  $k \gg 1$  et supposons  $(R_k)$  vérifiée. Désignons par  $H$  le groupe  ${}_n A(S)$  des sections d'ordre  $n$  de  $A$  sur  $S$ , et par  $H_S$  le  $S$ -schéma en groupes constant de valeur  $H$ . On a donc un  $S$ -morphisme naturel

$$a_1 : H_S \longrightarrow {}_n A \hookrightarrow A$$

dont l'image, d'après 3.4.3.1, rencontre toutes les composantes de  $A_0$ .

L'hypothèse  $(R_k)$  implique que le morphisme de multiplication par  $k$ :

$${}_{kn} A(U) \xrightarrow{\times k} {}_n A(U)$$

est surjectif. Posons

$$H_1 = \{x \in {}_{kn} A(U) \mid kx \in H\}.$$

La multiplication par  $k$  induit un morphisme surjectif

$$H_{1,S} \xrightarrow{\times k} H_S.$$

Notons  $a : H_{1,S} \longrightarrow A$  le  $S$ -morphisme composé

$$H_{1,S} \xrightarrow{\times k} H_S \xrightarrow{a_1} A :$$

on peut alors appliquer 3.4.1 avec  $S' = H_{1,S}$ , et il suffit donc, pour que  $L_U$  soit prolongeable sur  $A$ , que le faisceau inversible  $a^* L_U$  sur  $H_{1,U}$  se prolonge à  $H_{1,S}$ . Comme  $H_{1,S}$  est somme de  $S$ -schémas isomorphes à  $S$  ceci revient à dire que pour tout  $x \in H_1 \subset A(U)$ , le faisceau inversible  $(kx)^*(L_U)$  sur  $U$  est trivial.

Dans le cas (i) de (3.4.3),  $L_U$  admet une structure d'extension de  $A_U$  par  $G_{m,U}$  (même démonstration que dans 3.3.2), donc

$$(kx)^* L_U \simeq (x^* L_U)^{\otimes k}$$

est trivial par hypothèse.

Dans le cas (ii) prenons  $k = 2n$  (resp.  $n$ ,  $n$  impair); comme  $L_U$  est symétrique l'application



$$\Lambda(U) \longrightarrow \text{Pic}(U)$$

$$x \longmapsto x^* L_U$$

est quadratique, et il suffit d'appliquer le lemme 1.2.6.1. ■

Dans le cas où  $A_\eta$  est une variété abélienne, on peut combiner les résultats ci-dessus avec ceux du §1 :

**3.5. Théorème.** Soient  $S$  un schéma normal intègre de point générique  $\eta$ ,  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable tel que  $A_\eta$  soit une variété abélienne,  $n$  un entier  $\gg 1$  annihilant les groupes de composantes connexes des fibres de  $A$  (en d'autres termes,  $[n]_A : A \rightarrow A$  se factorise par  $A^\circ$ ).

On suppose que les points géométriques d'ordre  $8n^4$  (ou seulement  $n^4$  si  $n$  est impair) de  $A_\eta$  sont rationnels sur  $\kappa(\eta)$ . Alors tout faisceau inversible (cubiste) symétrique sur  $A_\eta$  se prolonge en un (unique) faisceau inversible cubiste (symétrique) sur  $A$ .

**3.5.1. Lemme.** Sous les hypothèses de 3.5, il existe un  $S$ -schéma en groupes semi-stable  $\mathcal{A}$ , de fibre générique  $A_\eta$ , contenant  $A$  comme sous-groupe ouvert, et néronien en codimension 1, c'est-à-dire que pour tout point  $\xi \in S$  de codimension 1,  $\mathcal{A} \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S, \xi}$  s'identifie au modèle de Néron de  $A_\eta$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{S, \xi}$ .

En effet il existe un gros ouvert  $U$  de  $S$  et un  $U$ -schéma en groupes  $\mathcal{A}_U$ , néronien en codimension 1 et prolongeant  $A_\eta$ . On déduit de la propriété universelle du modèle de Néron qu'il existe un gros ouvert  $V \subset U$  et un morphisme  $A_V \xrightarrow{j} \mathcal{A}_V$  prolongeant l'identification  $A_\eta \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}_V)_\eta$ , et qui est une immersion ouverte car  $A$  est semi-stable. On obtient le groupe  $\mathcal{A}$  du lemme en recollant  $A$  et  $\mathcal{A}_V$  grâce à  $j$ . ■

**3.5.2.** Démontrons maintenant 3.5. Soit  $A_1$  le sous-groupe ouvert du schéma en groupes  $\mathcal{A}$  de 3.5.1, image réciproque de  $\mathcal{A}^\circ$  par la multiplication par  $2n^2$  (resp.  $n^2$ ,  $n$  impair) : on a donc  $A \subset A_1 \subset \mathcal{A}$ . Il existe d'autre part, puisque  $\mathcal{A}$  est néronien, un gros ouvert  $U \subset S$  tel que :

(a) les points rationnels d'ordre  $8n^4$  (resp.  $n^4$ ) de  $A_\eta$  se prolongent à  $\mathcal{A}(U)$

(b) les points rationnels d'ordre  $2n^2$  (resp.  $n^2$ ) de  $A_\eta$  se prolongent à  $A_1(U)$ .

Cela étant, soit  $L_\eta$  un faisceau inversible cubiste symétrique sur  $A_\eta$ . D'après 1.2.8 (resp. la remarque 1.2.8.1)  $L_\eta$  se prolonge à

$A_1 \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S, \xi}$  pour tout  $\xi \in S$  de codimension 1 (remplacer l'entier  $n$  de loc. cit. par  $N=2n^2$ , resp.  $n^2$ ). Nous pouvons donc supposer, quitte à restreindre  $U$ , que  $L_\eta$  se prolonge en  $L_U$  sur  $A_{1,U}$ , et il ne reste qu'à appliquer 3.4.3 ci-dessus. ■

Pour terminer ce chapitre, montrons sur un cas particulier comment nos énoncés de prolongement peuvent s'étendre aux biextensions :

**3.6. Théorème.** Soit  $S$  un schéma intègre normal de point générique  $\eta$ , et soient  $A$  et  $B$  deux  $S$ -schémas en groupes semi-stables. Alors le foncteur naturel

$$\text{BIEXT}(A, B; \mathbb{G}_{m, S}) \longrightarrow \text{BIEXT}(A_\eta, B_\eta; \mathbb{G}_{m, \eta})$$

est pleinement fidèle. Si de plus  $A$  ou  $B$  est à fibres connexes, c'est même une équivalence de catégories.

Démonstration : la pleine fidélité se démontre comme 3.2.2 (i). Supposons  $B$  à fibres connexes, et soit  $L_\eta$  une biextension de  $(A_\eta, B_\eta)$  par  $\mathbb{G}_{m, \eta}$ . D'après SGA 7, VIII.7.1, il existe un gros ouvert  $U$  de  $S$  tel que  $L_\eta$  se prolonge en une biextension  $L_U$  de  $(A_U, B_U)$  par  $\mathbb{G}_{m, U}$ .

Comme  $U$  est un gros ouvert il suffit, par les arguments habituels de profondeur, de prolonger  $L_U$  en un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $A \times B$ . Or  $L_U$  est un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste symétrique sur le groupe  $A_U \times B_U$  puisque

$$L_U(-x, -y) \simeq L_U(-x, y)^{-1} \simeq L_U(x, y)$$

grâce à la structure de biextension. Il existe donc d'après 3.3 (ii) un toseur (i.e. une biextension)  $L^\circ$  sur  $A^\circ \times B$  prolongeant la restriction de  $L_U$ .

La question étant locale sur  $S$ , nous pouvons supposer qu'il existe un entier  $n \gg 1$  tel que  $[n]_A : A \rightarrow A$  se factorise par  $A^\circ$ ; il s'agit alors, en vertu de 3.4.2 (i), de montrer que la restriction de  $L_U$  à  $({}_n A \times {}_n B)_U$  se prolonge à  ${}_n A \times {}_n B$ . Or posons  $S' = {}_n A$ : nous pouvons considérer la restriction de  $L_U$  à  $({}_n A \times B)_U$  comme une extension du  $S'_U$ -schéma en groupes  $B_{S'_U}$  par  $\mu_n$  (grâce au fait que  ${}_n A$  est annulé par  $n$ ); il suffit dès lors d'appliquer le lemme 3.3.2.1. ■

## CHAPITRE III

Application aux hauteurs canoniques  
sur les variétés abéliennes

Sommaire.

- 0. Introduction.
- 1. Hauteurs locales : cas non archimédien.
- 2. Hauteurs locales : cas archimédien.
- 3. Hauteurs globales sur les corps de fonctions.
- 4. Hauteurs globales sur les corps de nombres.

0. Introduction.

On montre dans ce chapitre comment le théorème de prolongement cubiste II,1.1, et son analogue archimédien II,2.1, permettent de donner une définition agréable (du moins pour un géomètre) de la hauteur de Néron-Tate associée à un faisceau inversible  $L$  sur une variété abélienne  $A$  sur un corps local ou global. En particulier les propriétés quadratiques de la hauteur deviennent triviales, ainsi que le fait que les hauteurs locales ultramétriques sont des nombres rationnels (dont les dénominateurs sont limités grâce au critère d'annulation de l'obstruction II,1.2.1).

Il semble désormais établi qu'une hauteur globale "naturelle" doit prendre ses valeurs dans le groupe de Picard de la base ou son groupe de classes de diviseurs de Weil (tensorisé par  $\mathbb{Q}$ , ou par  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$  pour  $n$  convenable), et même parfois dans un "groupe de Picard généralisé". Dans le cas essentiel où  $L$  est le faisceau de Poincaré sur le produit d'une variété abélienne par sa duale, Mazur et Tate [M-T] sont d'ailleurs allés beaucoup plus loin dans cette voie. Enfin, dans le cas des corps de nombres, le groupe  $\text{Pic}(S)$  de 4.1 apparaît, semble-t-il, pour la première fois dans [A].

1. Hauteurs locales : cas non archimédien.

1.0. Soient  $\Lambda, S, F, \eta, k, \Gamma$  comme dans II, §1, et notons  $v: F^\times \rightarrow \Gamma$  la valuation. Soient  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ ,  $A$  son modèle de Néron sur  $S$ ,  $f: A \rightarrow S$  le morphisme structural,  $e_A: S \rightarrow A$  la section unité. Soit  $(L, \varepsilon)$  un faisceau inversible rigi-

difié sur  $A_F$  (de sorte que  $\varepsilon$  est une section de  $e_A^*L$ ), muni de la structure cubiste associée (I, 2.6). Notons que contrairement à l'usage des chapitres précédents, et pour ne pas alourdir les notations (cf. (1.0.1) ci-dessous) nous renonçons à noter  $L_\eta$  ou  $L_F$  un faisceau inversible sur  $A_F$ .

On pose  $\Phi = A_\circ/A_\circ^\circ$  (groupe des composantes connexes de la fibre spéciale  $A_\circ$  de  $A$ ) et on fixe un entier  $n \gg 1$  tel que

$$n\Phi = 0.$$

D'après II, 1.2.1, nous savons que  $M = L^{\otimes 2n}$  admet un prolongement cubiste  $\tilde{M}$  sur  $A$ ; nous noterons  $u: L^{\otimes 2n} \rightarrow \tilde{M}_F$  l'isomorphisme de prolongement.

Soit  $x \in A_F(F)$ : d'après la propriété universelle de  $A$ ,  $x$  se prolonge en une section  $\tilde{x} \in A(S)$ . On dispose alors:

- du  $F$ -espace vectoriel  $L(x)$ , de dimension 1
- du  $\Lambda$ -module inversible  $\tilde{M}(\tilde{x})$
- d'un isomorphisme  $u_x: L(x)^{\otimes 2n} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(\tilde{x}) \otimes_\Lambda F$ .

Nous noterons simplement  $v: \tilde{M}(\tilde{x}) \otimes F \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$  la valuation (obtenue à partir de n'importe quel isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(\tilde{x})$  de  $\Lambda$ -modules) et nous poserons, pour tout  $\alpha \in L(x)$ :

$$(1.0.1) \quad \rho_{v, \varepsilon, x}^L(\alpha) = \frac{1}{2n} v(u_x(\alpha^{\otimes 2n})) \in \frac{1}{2n} \Gamma \subset \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

On omettra souvent certains des indices  $L, v, \varepsilon, x$  si aucune confusion n'en résulte. Il est clair que  $\rho_{v, \varepsilon, x}^L$  ne dépend pas du choix de l'entier  $n$ .

### 1.1. Propriétés de $\rho^L$ .

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \rho(a\alpha) &= v(a) + \rho(\alpha) & (a \in F, \alpha \in L(x)) \\ \rho(\alpha + \beta) &\gg \inf(\rho(\alpha), \rho(\beta)) & (\alpha, \beta \in L(x)). \end{aligned}$$

. Additivité :

$$(1.1.2) \quad \rho_{\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2}^{L_1 \otimes L_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \rho_{\varepsilon_1}^{L_1}(\alpha_1) + \rho_{\varepsilon_2}^{L_2}(\alpha_2).$$

. Fibré trivial :

$$(1.1.3) \quad \rho_{\varepsilon_0}^{\mathcal{O}_{A_F}}(a) = v(a)$$

pour  $a \in \mathcal{O}_{A_F}(x) \simeq F$ , et  $\varepsilon_0 =$  la rigidification canonique.

. Changement de rigidification :

$$(1.1.4) \quad \rho_{a\varepsilon, x}^L(\alpha) = \rho_{\varepsilon, x}^L(\alpha) - v(a) \quad (a \in F^\times).$$

Les trois premières propriétés sont immédiates ; pour la quatrième on remarque que le prolongement cubiste de  $(M, (a\varepsilon)^{2n})$  est  $\tilde{M} \otimes \mathcal{O}_A(-\text{div}(a^{2n}))$  muni de la rigidification  $(a\varepsilon)^{2n} \otimes 1$  (où 1 est la section méromorphe canonique de l'idéal fractionnaire  $\mathcal{O}_A(-\text{div}(a^{2n}))$ ).

. Normalisation : pour l'élément  $\varepsilon$  de  $L(e_A)$ , on a :

$$(1.1.5) \quad \rho_{\varepsilon, e_A}^L(\varepsilon) = 0.$$

. Fonctorialité : soit  $\lambda : B_F \rightarrow A_F$  un morphisme de variétés abéliennes sur  $F$ , alors :

$$(1.1.6) \quad \rho_{\lambda^* \varepsilon, y}^{\lambda^* L}(\alpha) = \rho_{\varepsilon, \lambda(y)}^L(\psi(\alpha)) \quad \text{pour } y \in B_F(F) \text{ et} \\ \alpha \in (\lambda^* L)(y) \xrightarrow{\psi} L(\lambda(y))$$

. Cubisme : soit  $\tau$  la section de  $\mathcal{D}_3(L)$  définissant la structure cubiste ; d'autre part posons

$$(\mathcal{D}_3 \rho^L)_{(x, y, z)} = \rho_{x+y+z}^L \otimes (-\rho^L)_{x+y} \otimes (-\rho^L)_{x+z} \otimes (-\rho^L)_{y+z} \otimes \rho_x^L \otimes \rho_y^L \otimes \rho_z^L,$$

où le produit tensoriel est défini par la formule  $(\rho_1 \otimes \rho_2)(v \otimes w) = \rho_1(v) + \rho_2(w)$ . Alors  $(\mathcal{D}_3 \rho^L)_{(x, y, z)} : (\mathcal{D}_3 L)_{(x, y, z)} \rightarrow \frac{1}{2n} \Gamma$  n'est autre que  $\rho_{\mathcal{D}_3 \varepsilon, (x, y, z)}^{\mathcal{D}_3 L}$ , d'après (1.1.2) et (1.1.6). Comme  $(\mathcal{D}_3 L, \mathcal{D}_3 \varepsilon)$  est trivial via la section  $\tau$ , on conclut par (1.1.3) que  $\mathcal{D}_3 \rho^L$  est à valeurs dans  $\Gamma$ , et qu'en particulier

$$(1.1.7) \quad (\mathcal{D}_3 \rho^L)_{(x, y, z)}(\tau(x, y, z)) = 0 \quad \text{pour } x, y, z \in A_F(F).$$

. Changement de base : soient  $S' = \text{Spec } \Lambda' \xrightarrow{\pi} S$  un morphisme de traits (ceci signifie en particulier ici que  $\pi$  est surjectif),  $F'$  le corps des fractions de  $\Lambda'$ ,  $v' : F'^\times \rightarrow \Gamma'$  sa valuation, qui prolonge  $v$  via l'injection naturelle de  $\Gamma$  dans  $\Gamma'$ . On note  $A_{F'} = A_F \times_S S'$ ,  $(L', \varepsilon')$  le faisceau rigidifié sur  $A_{F'}$  déduit de  $(L, \varepsilon)$  sur  $A_F$  ; alors pour  $x \in A_F(F)$  et  $x' = \pi^*(x) \in A_{F'}(F') = A_F(F')$ , on a :

$$(1.1.8) \quad \rho_{v', \varepsilon', x'}^{L'}(\alpha \otimes 1) = \rho_{v, \varepsilon, x}^L(\alpha)$$

où  $\alpha \in L(x)$  et  $\alpha \otimes 1 \in L'(x') \simeq L(x) \otimes_{\mathbb{F}} F'$ .

Pour prouver (1.1.8), considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi'} & A \times_S S' & \xrightarrow{g} & A' \\ f \downarrow & & f_{S'} \downarrow & \nearrow f' & \\ S & \xleftarrow{\pi} & S' & & \end{array}$$

où  $A'$  est le modèle de Néron de  $A_{\mathbb{F}}$  sur  $S'$ , et où  $g$  est déduit de la propriété universelle d'icelui. Pour simplifier nous pouvons supposer (en remplaçant  $L$  par une puissance convenable) que  $(L, \varepsilon)$  (resp.  $(L', \varepsilon')$ ) admet un prolongement cubiste  $(\tilde{L}, \tilde{\varepsilon})$  (resp.  $(\tilde{L}', \tilde{\varepsilon}')$ ) sur  $A$  (resp.  $A'$ ). L'unicité du prolongement cubiste sur  $A \times_S S'$  nous donne un isomorphisme

$$(1.1.8.1) \quad \pi'^*(\tilde{L}) \xrightarrow{\sim} g^*(\tilde{L}')$$

prolongeant l'identité de  $L'$ .

Soit  $\tilde{x} \in A(S)$  prolongeant  $x$ , et  $\tilde{x}_{S'} = \pi^*(\tilde{x}) \in (A \times_S S')(S')$ . Le point de  $A'(S')$  prolongeant  $x'$  n'est autre que  $\tilde{x}' = g(\tilde{x}_{S'})$ , et l'isomorphisme (1.1.8.1) se spécialise en

$$\tilde{L}(\tilde{x}) \otimes_{\Lambda} \Lambda' = \pi'^*(\tilde{L})(\tilde{x}_{S'}) \xrightarrow{\sim} g^*(\tilde{L}')(\tilde{x}_{S'}) = \tilde{L}'(g(\tilde{x}_{S'})) = \tilde{L}'(\tilde{x}')$$

prolongeant l'isomorphisme  $L(x) \otimes_{\mathbb{F}} F' \simeq L'(x')$ . La formule (1.1.8) résulte alors de la définition de  $\rho$  comme valuation.

. Translations : soit  $y \in A_{\mathbb{F}}(F)$ , prolongé en  $\tilde{y} \in A(S)$ . Fixons une rigidification  $\zeta$  de  $T_y^*L$  (c'est-à-dire un élément de  $L(y)$ ). Je dis qu'il existe  $c(L, \varepsilon, y, \zeta) \in \frac{1}{2n}\Gamma$ , indépendant de  $x$ , tel que

$$(1.1.9) \quad \rho_{v, \zeta, x}^{T_y^*L} = \rho_{v, \varepsilon, x+y}^L + c(L, \varepsilon, y, \zeta)$$

(où l'on identifie  $(T_y^*L)(x)$  à  $L(x+y)$ ).

En effet, supposons pour simplifier que  $(L, \varepsilon)$  admet un prolongement cubiste  $(\tilde{L}, \tilde{\varepsilon})$ . D'après la formule (1.1.4) (changement de rigidification), il suffit de prouver (1.1.9) pour n'importe quel choix particulier de  $\zeta$ ; nous pouvons donc supposer que  $\zeta$  se prolonge en une trivialisatation  $\tilde{\zeta}$  de  $(T_y^*\tilde{L})(e_A) = \tilde{L}(\tilde{y})$ . Or :

1.1.9.1. Lemme. Pour tout  $x \in A(S)$ , le faisceau  $\mathcal{O}_3(T_y^*\tilde{L})$  est trivial sur  $A \times_S A \times_S A$ ; plus précisément on a un isomorphisme canonique (ne dépendant que de la structure cubiste de  $\tilde{L}$ ) :

$$\mathfrak{D}_3(T_t^* \tilde{L}) \simeq f^*(\tilde{L}_t) \quad (\text{où } f: A \longrightarrow S \text{ est le morphisme structural})$$

Démonstration : posons  $M = \mathfrak{D}_3(T_t^* \tilde{L})$  ; on a, pour  $(x, y, z) \in A^3$  :

$$M_{(x, y, z)} = \tilde{L}_{x+y+z+t} \otimes \tilde{L}_{x+y+t}^{-1} \otimes \tilde{L}_{x+z+t}^{-1} \otimes \tilde{L}_{y+z+t}^{-1} \otimes \tilde{L}_{x+t} \otimes \tilde{L}_{y+t} \otimes \tilde{L}_{z+t} .$$

Grâce à la structure cubiste de  $\tilde{L}$  on a un isomorphisme canonique

$$\tilde{L}_{x+y+(z+t)} \simeq \tilde{L}_{x+y} \otimes \tilde{L}_{x+z+t} \otimes \tilde{L}_{y+z+t} \otimes \tilde{L}_x^{-1} \otimes \tilde{L}_y^{-1} \otimes \tilde{L}_{z+t}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } M_{(x, y, z)} &\simeq \tilde{L}_{x+y+t}^{-1} \otimes \tilde{L}_{x+y} \otimes \tilde{L}_{x+t} \otimes \tilde{L}_{y+t} \otimes \tilde{L}_x^{-1} \otimes \tilde{L}_y^{-1} \\ &\simeq (\mathfrak{D}_3 \tilde{L})_{(x, y, t)}^{-1} \otimes \tilde{L}_t \simeq \tilde{L}_t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous voyons donc, revenant à (1.1.9), que  $(T_y^* \tilde{L}, \tilde{\zeta})$  est le prolongement cubiste de  $(T_y^* L, \zeta)$ , d'où l'on tire (1.1.9) avec  $c(L, \varepsilon, y, \zeta) = 0$ .

1.2. Soit maintenant  $\sigma$  une section méromorphe non identiquement nulle de  $L$ , et soit  $x \in A(F) - \text{div}(\sigma)$ . Nous poserons alors

$$(1.2.1) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \rho_{v, \varepsilon, x}^L(\sigma(x)) \in \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

(c'est bien un élément de  $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$  puisque  $\sigma(x) \in L(x) - \{0\}$ ).

Les propriétés de  $\rho^L$  énoncées dans 1.1 impliquent immédiatement (entre autres) les énoncés suivants :

. Fibré trivial : si  $\varphi$  est une fonction méromorphe non nulle sur  $A_F$ , et si  $x \notin \text{div}(f)$ , alors

$$(1.2.2) \quad \langle \varphi, x \rangle_{v, \varepsilon_0} = v(\varphi(x))$$

où  $\varepsilon_0$  désigne la trivialisatation naturelle du fibré trivial  $\mathcal{O}_{A_F}$ .

. Additivité : si  $\sigma_1, \sigma_2$  sont respectivement des sections de  $L_1$  et  $L_2$ , et si  $x \notin \text{div}(\sigma_1) \cup \text{div}(\sigma_2)$ , alors

$$(1.2.3) \quad \langle \sigma_1 \otimes \sigma_2, x \rangle_{v, \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2} = \langle \sigma_1, x \rangle_{v, \varepsilon_1} + \langle \sigma_2, x \rangle_{v, \varepsilon_2} .$$

. Les formules (1.2.2) et (1.2.3) entraînent immédiatement :

$$(1.2.4) \quad \langle \varphi \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} + v(\varphi(x))$$

dès que la formule a un sens.

. Changement de rigidification :

$$(1.2.5) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, a\varepsilon} = \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} - v(a) \quad (a \in F^\times).$$

. Fonctorialité : dans la situation de (1.1.6) (morphisme  $\lambda : B_F \longrightarrow A_F$ ), on a :

$$(1.2.6) \quad \langle \lambda^* \sigma, y \rangle_{v, \lambda^* \varepsilon} = \langle \sigma, \lambda(y) \rangle_{v, \varepsilon}$$

dès que  $\lambda^* \sigma$  est définie et non nulle, et que  $y \notin \text{div}(\lambda^* \sigma)$ .

. Changement de base : dans la situation de (1.1.8), on a :

$$(1.2.7) \quad \langle \sigma', x' \rangle_{v', \varepsilon'} = \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$$

où  $\sigma'$  désigne la section de  $L'$  déduite de  $\sigma$ .

. Translations (situation de (1.1.9)) : si  $x+y \notin \text{div}(\sigma)$ , alors :

$$(1.2.8) \quad \langle T_Y^* \sigma, x \rangle_{v, \zeta} = \langle \sigma, x+y \rangle_{v, \varepsilon} + c(L, \varepsilon, Y, \zeta)$$

où  $c(L, \varepsilon, Y, \zeta) \in \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  est indépendant de  $x$ .

1.2.9. Proposition. Fixons  $L, \varepsilon$  et  $\sigma$ , et soit  $U = X_\eta - \text{div}(\sigma)$  ; alors l'application

$$x \longmapsto \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$$

de  $U(F)$  dans  $\mathbb{R}$  est localement v-bornée.

1.2.9.1. Rappelons d'abord ce que cela signifie. Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement fini de  $U$  par des ouverts affines munis de coordonnées, soit

$$U_\alpha = \text{Spec } F[t_{i_\alpha}]_{i \in I_\alpha}.$$

Une partie  $B$  de  $U_\alpha(F)$  est dite v-bornée s'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $x \in B$ , on ait  $v(t_{i_\alpha}(x)) \gg_m$  pour  $i \in I_\alpha$ .

Une partie  $B$  de  $U(F)$  est dite v-bornée si elle est réunion (finie) de parties bornées  $B_\alpha \subset U_\alpha(F)$ . Cette condition ne dépend pas du choix des  $U_\alpha$  et des coordonnées.

Cela étant, une application de  $U(F)$  dans  $\mathbb{R}$  est dite localement v-bornée si elle est bornée sur toute partie v-bornée de  $U(F)$ .

1.2.9.2. Démontrons la proposition. Soit  $B \subset U(F)$  une partie v-bornée ; nous pouvons supposer qu'elle est contenue dans un ouvert affine



$U_1 = \text{Spec } F[t_1, \dots, t_r] \subset U$ . Par ailleurs nous pouvons supposer que le faisceau inversible  $L$  admet un prolongement cubiste  $\tilde{L}$  sur  $A$ . Recouvrons  $A$  par un nombre fini d'ouverts affines  $V_\alpha = \text{Spec } \Lambda[u_{\alpha i}]$  tels que  $\tilde{L}|_{V_\alpha}$  soit trivial.

Soit  $B_\alpha$  l'ensemble des  $x \in B$  qui se prolongent en une section de  $V_\alpha(\Lambda)$ . Comme les  $V_\alpha$  recouvrent  $A$  qui est le modèle de Néron de  $A_F$ , on a  $B = \bigcup_\alpha B_\alpha$ . D'autre part pour  $x \in B_\alpha$  on a (par définition)  $v(u_{\alpha i}(x)) \gg 0$  donc  $B_\alpha$  est une partie bornée de  $V_\alpha(F)$ , et donc de  $(U_1 \cap V_\alpha)(F)$ ; l'ouvert  $U_1 \cap V_\alpha$  est affine (sur  $F$ ) de coordonnées  $t_1, \dots, t_r, (u_{\alpha i})$ .

Choisissons une trivialisation  $\tau_\alpha$  de  $\tilde{L}|_{V_\alpha}$ : la section  $\sigma$  s'écrit  $\sigma = \varphi_\alpha \tau_\alpha$ , où  $\varphi_\alpha$  est une fonction méromorphe sur  $V_\alpha$ , et si  $x \in B_\alpha$ , on a

$$(*) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = v(\varphi_\alpha(x))$$

puisque  $\tau_\alpha$  donne une trivialisation de  $\tilde{x}^* \tilde{L}$  (où  $\tilde{x} \in V_\alpha(\Lambda)$  prolonge  $x$ ). Comme d'autre part  $B \cap \text{div}(\sigma) = \emptyset$ , la fonction  $\varphi_\alpha$  est holomorphe inversible sur  $U_1 \cap V_\alpha$ , donc  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\alpha^{-1}$  sont des polynômes en  $t_1, \dots, t_r, (u_{\alpha i})$ , d'où la conclusion d'après (\*) puisque les  $v(t_j(x))$  et  $v(u_{\alpha i}(x))$  sont bornés lorsque  $x$  parcourt  $B_\alpha$ . ■

1.3. Soit  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$ , munie d'une valuation prolongeant  $v$ , et que nous noterons encore  $v$ . D'après la propriété (1.2.7), nous pouvons encore définir  $\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$  lorsque  $x$  est un point de  $A(\bar{F}) - \text{div}(\sigma)$ ; le symbole  $\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$  est alors à valeurs dans  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  (mais non plus dans  $\frac{1}{2n}\Gamma$ ). Par ailleurs soit  $\alpha = \sum_{i=1}^r m_i [x_i]$  un 0-cycle sur  $A_{\bar{F}}$  étranger à  $\text{div}(\sigma)$ , i.e. tel que les points  $x_i$  soient dans  $(A_{\bar{F}} - \text{div}(\sigma))(\bar{F})$ . Nous pouvons alors poser

$$\langle \sigma, \alpha \rangle_{v, \varepsilon} = \sum_{i=1}^r m_i \langle \sigma, x_i \rangle_{v, \varepsilon}.$$

Lorsque  $\alpha$  est de degré 0, il est alors immédiat que  $\langle \sigma, \alpha \rangle_{v, \varepsilon}$  ne dépend pas de la rigidification  $\varepsilon$  (cf. (1.2.5)) et ne change pas lorsqu'on remplace  $\sigma$  par  $a\sigma$  avec  $a \in F^\times$  (1.2.4). Autrement dit  $\langle \sigma, \alpha \rangle_{v, \varepsilon}$  ne dépend que du diviseur  $D = \text{div}(\sigma)$  sur  $A_{\bar{F}}$  et du 0-cycle  $\alpha$  de degré 0, et nous poserons  $\langle D, \alpha \rangle_v = \langle \sigma, \alpha \rangle_{v, \varepsilon}$ . Le symbole  $\langle D, \alpha \rangle_v$  est donc défini pour tout diviseur  $D$  sur  $A_{\bar{F}}$  et tout 0-cycle  $\alpha$  de degré 0 sur  $A_{\bar{K}}$ , étrangers l'un à l'autre.

Nous pouvons maintenant faire le lien avec  $[N]$ :

1.3.1. Proposition. On a  $\langle D, a \rangle_v = -(D, a)_{-v}$  où  $(D, a)_{-v}$  est le symbole défini dans [N], chap. III, §9, th. 3, p. 287 (ici l'on identifie  $\Gamma$  à  $\mathbb{Z}$  de la manière habituelle).

(La bizarrerie de signe vient du fait que la "valeur absolue" utilisée par Néron est l'opposé d'une valuation).

La proposition résulte immédiatement de l'assertion d'unicité de loc. cit. ■

1.4. Bien entendu, nous pouvons interpréter  $\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$  en termes de multiplicités d'intersection, de la façon suivante ( $\Gamma$  étant ici identifié à  $\mathbb{Z}$ ) :  $\sigma^{\otimes 2n}$  définit une section méromorphe  $(\sigma^{\otimes 2n})^\sim$  du prolongement cubiste  $\tilde{M}$  de  $L^{\otimes 2n}$ . Posons alors

$$(1.4.1) \quad \tilde{\text{div}}(\sigma) = \frac{1}{2n} \text{div}(\sigma^{\otimes 2n})^\sim :$$

c'est un "diviseur à coefficients rationnels" sur  $A$ , tel que  $(\tilde{\text{div}} \sigma)_F = \text{div} \sigma$ , et tel que le diviseur  $\mathfrak{D}_3(\tilde{\text{div}} \sigma)$  sur  $A^3$  soit principal ; de plus il est caractérisé par ces propriétés, à un multiple entier près de la fibre spéciale  $A_0$ . Il est alors immédiat que, pour  $x \in A(F) - \text{div}(\sigma)$ , prolongé en  $\tilde{x} \in A(S)$ , on a :

$$(1.4.2) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \tilde{x} \cdot \tilde{\text{div}} \sigma$$

où le membre de droite désigne la multiplicité d'intersection du 1-cycle  $\tilde{x}$  avec le diviseur  $\tilde{\text{div}} \sigma$ . Notons aussi que, si l'on écrit

$$\tilde{\text{div}} \sigma = \bar{D} + \sum_{\gamma \in \Phi} m_\gamma \cdot [\gamma] \quad (m_\gamma \in \frac{1}{2n}\mathbb{Z}; \Phi = A_0/A_0^0)$$

où  $\bar{D}$  est l'adhérence, dans  $A$ , de  $D = \text{div} \sigma$ , on a

$$(1.4.3) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \tilde{x} \cdot \bar{D} + \sum_{\gamma} m_\gamma (\tilde{x} \cdot \gamma)$$

Désignant par  $\gamma(x)$  l'unique composante de  $A_0$  qui rencontre  $\tilde{x}$ , nous en tirons :

$$(1.4.4) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \tilde{x} \cdot \bar{D} + m_\gamma(x)$$

(en effet  $(\tilde{x} \cdot \gamma(x)) = 1$  puisque  $A$  est lisse sur  $S$ ). En particulier la classe mod  $\mathbb{Z}$  de  $\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$  ne dépend que de  $\gamma(x)$  (et non de  $x$ ) ; il est clair d'autre part qu'elle ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et ne change pas si on multiplie  $\sigma$  par une fonction méromorphe sur  $A_\eta$ . Le lecteur attentif de la démonstration de II,1.1 constatera alors avec plaisir que cet élément de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  n'est autre que l'obstruction  $d^L$  de loc. cit.,

évaluée sur l'élément  $\gamma(x) \in \Phi$  :

$$(1.4.5) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} \pmod{\mathbb{Z}} = d^L(\gamma(x))$$

avec un léger abus d'écriture dû à l'identification  $\mathbb{Z} \simeq \Gamma$ .

Enfin, il semble à l'auteur que la décomposition (1.4.3) ressemble fort à [N], III, §4, th.1 p. 319.

### 1.5. Exemple des courbes elliptiques.

Soit  $E_F$  une courbe elliptique sur  $F$ , de modèle de Néron  $E$ , supposé semi-stable, sur  $\Lambda$ . On sait que  $E$  admet une compactification naturelle, le modèle régulier minimal  $\bar{E}$  de la courbe  $E_F$ ; la fibre fermée  $\bar{E}_0$  de  $\bar{E}$  est alors un polygone à  $n$  côtés isomorphes à  $\mathbb{P}_k^1$  (nous supposons  $k$  algébriquement clos), et  $E$  est l'ouvert de  $\bar{E}$  formé des points lisses sur  $S$ . Le polygone  $\bar{E}_0$  permet d'ordonner de façon naturelle (au sens de parcours près) les composantes de  $E_0$ , (resp.  $\bar{E}_0$ ), que nous noterons donc  $C_i$  (resp.  $\bar{C}_i$ ) ( $0 \leq i \leq n-1$ ), la composante  $C_0$  étant celle qui rencontre la section unité  $e: S \rightarrow E$ . Notons que le  $k$ -groupe  $E_0$  est isomorphe à  $G_{m,k} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Soit  $D = [e_F]$  le diviseur sur  $E_F$  réduit à l'origine. D'après 1.4, il existe un diviseur  $\tilde{D}$  sur  $E$ , de la forme

$$\tilde{D} = [e] + \sum_{i=0}^{n-1} m_i [C_i] \quad (m_i \in \mathbb{Q})$$

vérifiant le théorème du cube sur  $E$ ;  $\tilde{D}$  est unique à l'addition près d'un multiple entier de  $E_0$ , et nous pouvons donc supposer que  $m_0 = 0$ , car  $m_0$  est entier d'après (1.4.5).

Comme  $D$  est symétrique,  $\tilde{D}$  l'est aussi, d'où

$$(1.5.1) \quad [n]_E^*(\tilde{D}) \sim n^2 \tilde{D}$$

où  $\sim$  désigne l'équivalence linéaire, et  $[n]_E$  la multiplication par  $n$ . Comme  $[n]_E(C_i) = C_0$  pour tout  $i$ , et que  $m_0 = 0$ , on a

$$(1.5.2) \quad [n]_E^*(\tilde{D}) = {}_n E = \text{Ker}[n_E] \quad (\text{considéré comme diviseur sur } E)$$

et (1.5.1) donne alors

$$(1.5.3) \quad {}_n E \sim n^2 [e] + \sum_{i=1}^{n-1} n^2 m_i [C_i].$$

Mais ceci implique, sur la compactification  $\bar{E}$  :

$$(1.5.4) \quad {}_n E \sim n^2 [e] + \sum_{i=1}^{n-1} n^2 m_i [\bar{C}_i]$$

(en effet le schéma  $\bar{E}$  est régulier, et  $E$  est un gros ouvert de  $\bar{E}$ ). Intersectant les deux membres avec  $\bar{C}_i$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ , on trouve :

$$(1.5.5) \quad \begin{aligned} n &= n^2(1+m_{n-1}+m_1) & (i=0) \\ n &= n^2(m_{i-1}-2m_i+m_{i+1}) & (i=1, \dots, n-1, \text{ en convenant que } m_n = m_0 = 0) \end{aligned}$$

système linéaire dont la solution est

$$(1.5.6) \quad \boxed{m_i = \frac{i(i-n)}{2n}}$$

Ce calcul est essentiellement fait dans [N], p. 318. Il montre que le dénominateur  $2n$  est le meilleur possible ; on vérifie d'autre part que l'obstruction  $d(C_i) = m_i \pmod{\mathbb{Z}}$  est bien quadratique, et que sa forme bilinéaire associée est

$$m_{i+j} - m_i - m_j = \frac{ij}{n} ;$$

c'est une dualité parfaite sur  $E_{\mathbb{O}}/E_{\mathbb{O}}^{\mathbb{O}}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , ce qui est un cas particulier d'un résultat de SGA 7, exposé IX.

## 2. Hauteurs locales : cas archimédien.

2.0. On se place sur  $F = \mathbb{C}$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $v(z) = -\log |z|$ .

Soient  $A$  une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ ,  $L$  un fibré en droites cubiste sur  $A$ ,  $\varepsilon : \mathbb{C} \simeq L(e_A)$  la rigidification associée. Notons

$$v_{\varepsilon}^L : L \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

la norme hermitienne sur  $L$  compatible à sa structure du cube, définie en II,2.1, et posons, pour tout  $x \in A(\mathbb{C})$  et tout  $\alpha \in L(x)$  :

$$(2.0.1) \quad \rho_{v, \varepsilon, x}^L(\alpha) = -\log v_{\varepsilon}^L(\alpha) .$$

Le lecteur établira sans peine une liste de propriétés entièrement analogue à celle de 1.1, à quelques nuances près dues au contexte archimédien.

2.1. De même, si l'on se donne de plus une section méromorphe  $\sigma$  de  $L$ , on peut définir, pour tout  $x \notin \text{div}(\sigma)$  :

$$(2.1.1) \quad \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} = \rho_{v, \varepsilon, x}^L(\sigma(x)) = -\log v_{\varepsilon}^L(\sigma(x))$$

avec des propriétés analogues à celles de 1.2. Enfin, on en déduit, comme dans 1.3, un symbole

$$(2.1.2) \quad \langle D, a \rangle_V$$

à valeurs réelles, défini pour tout diviseur  $D$  sur  $A$  et tout 0-cycle  $a$  de degré 0 contenu dans  $A\text{-Supp}(D)$ , et on démontre encore que

$$(2.1.3) \quad \langle D, a \rangle_V = -(D, a)_{-V}$$

où  $(D, a)_{-V}$  est le symbole défini dans [N]. Ceci n'est autre, d'ailleurs, que le théorème 5 de [N], III, §7 : soit en effet  $\pi : V \rightarrow A$  le revêtement universel de  $A$  ;  $V$  est donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $g = \dim A$ . Soit  $\lambda \in H^0(V, \pi^*L)$  une trivialisatation (analytique) de  $\pi^*L$  compatible à sa structure cubiste ; la fonction méromorphe  $\theta(z)$  sur  $V$  définie par

$$(2.1.4) \quad \theta(z)\lambda(z) = (\pi^*\sigma)(z)$$

est la fonction thêta associée à  $\sigma$  et  $\lambda$ . D'autre part on a sur  $\pi^*L$  une norme héritée de  $v_\varepsilon^L$ , encore notée  $v_\varepsilon^L$ , et déterminée de façon unique par la fonction

$$(2.1.5) \quad v_\varepsilon^L(\lambda) : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

Le fait que  $\lambda$  et  $v_\varepsilon^L$  soient compatibles à la structure cubiste de  $L$  implique que la fonction  $v_\varepsilon^L(\lambda)$  est pointée de degré  $\leq 2$ . Enfin on a

$$(2.1.6) \quad |\theta(z)| v_\varepsilon^L(\lambda(z)) = v_\varepsilon^L(\pi^*\sigma)(z)$$

ce qui montre que le membre de gauche est invariant par le réseau  $H_1(A, \mathbb{Z}) \subset V$ . Comme la fonction  $v_\varepsilon^L(\lambda)$  est manifestement déterminée par ces conditions, on en conclut que

$$\log |\theta(z)| + \log v_\varepsilon^L(\lambda(z))$$

n'est autre que la fonction  $\theta^*$  de loc. cit.

### 3. Hauteurs globales sur les corps de fonctions.

3.0. Soient  $k$  un corps,  $S$  une  $k$ -variété irréductible normale (le cas le plus intéressant étant celui où  $S$  est projective),  $F$  son corps des fonctions,  $\eta = \text{Spec}(F)$  le point générique de  $S$ . On posera  $r = \dim S$ .

Notons  $M_S$  l'ensemble des points de codimension 1 de  $S$  ; un tel point sera identifié à la valuation  $v$  correspondante, dont le groupe sera noté  $\Gamma_v$ . Le groupe des diviseurs de Weil de  $S$  s'identifie alors à  $\bigoplus_{v \in M_S} \Gamma_v$ , et l'on a la suite exacte habituelle

$$F^{\times} \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{v \in M_S} \Gamma_v \xrightarrow{\text{cl}} \text{CH}_{r-1}(S) \longrightarrow 0$$

où  $\text{CH}_i(S)$  désigne le groupe des classes d'équivalence rationnelle de cycles de dimension  $i$  sur  $S$ . Notons que si  $U \subset S$  est un gros ouvert (II,3.1), alors on a  $\text{CH}_{r-1}(S) \simeq \text{CH}_{r-1}(U)$ , et même  $\text{CH}_{r-1}(S) \simeq \text{Pic}(U)$  si  $U$  est régulier.

3.1. Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ . Il résulte de l'existence du modèle de Néron  $N_v(A_F)$  en chaque  $v \in M_S$ , qu'il existe un gros ouvert  $U \subset S$  (que nous supposons régulier, quitte à le restreindre) et un  $U$ -schéma en groupes lisse  $A_U \xrightleftharpoons[e_A]{f} U$ , tel que  $A_U \times_U \text{Spec } F \simeq A_F$ , et que  $A_U \times_U \text{Spec } \mathcal{O}_v \simeq N_v(A_F)$  pour tout  $v \in M_S$ .

Soit  $(L, \varepsilon)$  un faisceau inversible rigidifié sur  $A_F$ , muni de sa structure cubiste canonique. Comme l'ensemble des  $v \in M_S$  tels que  $A_F$  ait mauvaise réduction en  $v$  est fini, il existe un entier  $n$  qui, pour tout  $v$ , annule le groupe  $\Phi_v$  des composantes connexes de  $A_U \otimes_{\kappa(v)}$ ; par suite,  $M = L^{\otimes 2n}$  admet un prolongement cubiste  $\tilde{M}$  au-dessus d'un gros ouvert de  $U$ , et donc aussi (II,3.2.2) sur  $A_U$  puisque  $U$  est régulier. Notons qu'en fait le faisceau  $\tilde{M}$  est indépendant de la rigidification  $\varepsilon$ : multiplier  $\varepsilon$  par  $\varphi \in F^{\times}$  ne fait que modifier  $\tilde{M}$  par le faisceau inversible trivial  $f^*(\text{div } \varphi^{2n})$ . Posons alors

$$(3.1.1) \quad \tilde{L} = (\tilde{M})^{\otimes \frac{1}{2n}} \in \text{Pic}(A_U)_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Pic}(A_U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} :$$

c'est l'unique élément de  $\text{Pic}(A_U)_{\mathbb{Q}}$ , prolongeant  $L$  et vérifiant le théorème du cube sur  $A_U$ .

Si  $U' \subset U$  est un gros ouvert, alors  $A_{U'}$  est un gros ouvert de  $A_U$  qui est un schéma régulier, donc  $\text{Pic}(A_U) \simeq \text{Pic}(A_{U'})$ ; le choix de  $U$  est donc sans importance.

Enfin soit  $x \in A(F)$ . D'après la propriété néronienne de  $A_U$ , il existe un gros ouvert  $V \subset U$  tel que  $x$  se prolonge en une section  $\tilde{x} : V \rightarrow A_V$ .

3.2. Définition. Avec les notations de 3.1, la hauteur géométrique canonique du point  $x \in A_F(F)$ , relativement au faisceau inversible  $L$  sur  $A_F$

(et au modèle  $S$  de  $F$ ) est l'élément  $hg_{S,L}(x)$  de  $CH_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  défini par

$$hg_{S,L}(x) = \tilde{x}^*(\tilde{L}) \in \text{Pic}(V)_{\mathbb{Q}} \simeq CH_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} .$$

### 3.3. Propriétés de la hauteur géométrique.

. Additivité en  $L$  :

$$(3.3.1) \quad hg_{S, L_1 \otimes L_2}(x) = hg_{S, L_1}(x) + hg_{S, L_2}(x) .$$

. Fonctorialité : si  $\lambda : B_F \longrightarrow A_F$  est un morphisme de variétés abéliennes sur  $F$ , on a

$$(3.3.2) \quad hg_{S,L}(\lambda(y)) = hg_{S,\lambda^*L}(y) \quad (y \in B_F(F), L \in \text{Pic}(A_F)) .$$

. "Quadraticité" en  $x$  : on déduit de (3.3.1) et (3.3.2) et du théorème du cube (ou du carré) pour  $L$ , que l'application

$$(3.3.3) \quad x \longmapsto hg_{S,L}(x) : A_F(F) \longrightarrow CH_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$$

est pointée de degré 2 ; elle est même quadratique si  $L$  est symétrique, et additive si  $L$  est dans  $\text{Pic}^0(A_F)$ .

3.3.4. Proposition (changement de base). Soit  $\pi : S' \longrightarrow S$  un morphisme dominant et génériquement fini de  $k$ -variétés normales irréductibles, et soit  $F'$  le corps des fonctions de  $S'$ . On note  $A_{F'} = A \otimes_F F'$ ,  $\pi' : A_{F'} \longrightarrow A_F$  le morphisme canonique,  $L' = \pi'^*L$ . Soit  $x \in A_F(F)$ , et posons  $x' = \pi^*(x) \in A_{F'}(F')$ .

(i) Si  $\pi$  est propre on a

$$hg_{S,L}(x) = \frac{1}{\deg \pi} \pi_*(hg_{S',L'}(x')) \in CH_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$$

(ii) Si  $\pi$  est quasi-fini (par exemple si  $S'$  est le normalisé de  $S$  dans  $F'$ ), on a

$$hg_{S',L'}(x') = \pi^*(hg_{S,L}(x)) \in CH_{r-1}(S')_{\mathbb{Q}} .$$

La démonstration de (ii) est entièrement analogue à celle de (1.1.8), si l'on se place sur un gros ouvert  $U$  convenable de  $S$  : remarquer qu'alors, puisque  $\pi$  est quasi-fini,  $\pi^{-1}(U)$  est encore un gros ouvert de  $S'$  (c'est d'ailleurs ce qui permet de définir  $\pi^* : CH_{r-1}(S) \longrightarrow CH_{r-1}(S')$  dans ce cas).

Dans le cas où  $\pi$  est fini, on en déduit (i) puisque  $\pi_*\pi^*$  est la multiplication par  $\deg \pi$  dans  $\text{CH}_{r-1}(S)$ .

Pour montrer (i) dans le cas général, notons alors que  $\pi$  est fini au-dessus d'un gros ouvert  $U$  de  $S$  :

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\pi} & S \\ j' \uparrow & & \uparrow j \\ U' & \xrightarrow[\text{fini}]{\pi_U} & U \end{array}$$

Soit  $\Delta \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  la différence des deux membres de (i). Comme (i) est vrai pour le morphisme fini  $\pi_U$ , on a  $j^*\Delta = 0$ , donc  $\Delta = 0$  puisque  $U$  est un gros ouvert. ■

Soit maintenant  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$ , et soit  $x \in A_F(\bar{F})$ . Soit  $F_1$  une extension finie de  $F$  telle que  $x \in A_F(F_1)$ , et soit  $S_1 \xrightarrow{\alpha} S$  le normalisé de  $S$  dans  $F_1$ . Nous pouvons alors poser (avec des notations évidentes)

$$(3.3.5) \quad \text{hg}_{S,L}(x) = \left[ \frac{1}{[F_1:F]} \right] \alpha_* (\text{hg}_{S_1,L_1}(x)) = (\alpha^*)^{-1} (\text{hg}_{S_1,L_1}(x)) \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$$

et l'assertion (ii) de 3.3.4 montre que  $\text{hg}_{S,L}(x)$  ne dépend pas de l'extension  $F_1$  choisie. Cette fonction  $\text{hg}_{S,L}(x)$  pour  $x \in A_F(\bar{F})$  vérifie bien entendu les propriétés (3.3.1) à (3.3.3). Elle vérifie également celles de 3.3.4 : en effet, avec les notations de 3.3.4 et 3.3.5, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & S' \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ S_1 & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

où  $S'_1$  est normal,  $\alpha'$  est fini, et  $\pi_1$  propre (resp. quasi-fini) si  $\pi$  l'est (prendre pour  $S'_1$  le normalisé d'une composante convenable de  $S_1 \times_S S'$ ). L'assertion résulte alors de 3.3.4 appliqué au point  $x \in A_F(F_1)$ , et du fait que  $\alpha$  et  $\alpha'$  induisent des isomorphismes entre les groupes  $\text{CH}_{r-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

Translations : soient  $x \in A_F(\bar{F})$ ,  $y \in A_F(F)$ , et cherchons à calculer  $\text{hg}_{S, T^*_y L}(x)$ . Nous pouvons supposer que  $x \in A_F(F)$ , que  $(A_F, L)$  se prolonge en  $(A_U, \tilde{L})$  sur un gros ouvert  $U \subset S$ , et que  $x$  et  $y$  se prolongent en  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y} \in A_U(U)$ . On a montré dans 1.1.9.1 que  $\mathcal{D}_3(T^*_y \tilde{L}) = f^*(\tilde{y}^* \tilde{L})$ , ce qui montre que  $T^*_y \tilde{L} \otimes f^* \tilde{y}^* \tilde{L}^{-1}$  est (isomorphe à) un prolongement cubiste



de  $T_Y^*L$ , donc  $hg_{S, T_Y^*L}(x) = \tilde{x}^*(T_Y^*\tilde{L} \otimes f^*\tilde{Y}^*\tilde{L}^{-1}) = (\tilde{x}+\tilde{y})^*\tilde{L} \otimes \tilde{Y}^*\tilde{L}^{-1}$  d'où :

$$(3.3.6) \quad hg_{S, T_Y^*L}(x) = hg_{S, L}(x+y) - hg_{S, L}(y) .$$

Décomposition en termes locaux : soit  $\sigma$  une section méromorphe de  $L$ , régulière et non nulle au point  $x$  ; alors :

$$(3.3.7) \quad hg_{S, L}(x) = cl_{\mathbb{Q}} \left( \sum_{v \in M_S} \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} \right)$$

où  $\varepsilon$  désigne une rigidification quelconque de  $L$ , et où  $cl_{\mathbb{Q}} : \bigoplus_{v \in M_S} (\Gamma_v \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow CH_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  est la surjection canonique.

La formule (3.3.7) est immédiate : si  $\tilde{L}$  est un prolongement cubiste de  $L$  et  $\tilde{\sigma}$  la section méromorphe de  $\tilde{L}$  prolongeant  $\sigma$ , alors  $hg_{S, L}(x)$  est bien la classe de  $div(\tilde{x}^*\tilde{\sigma}) = \sum_{v \in M_S} \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$ .

3.4. Supposons maintenant  $S$  projective et fixons un faisceau inversible ample  $H$  sur  $S$ . On a alors une fonction "degré" :

$$deg_H : CH_{r-1}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui, à un cycle  $Z \subset S$ , associe la multiplicité d'intersection  $(Z \cdot \overbrace{H \dots H}^{r-1})$ .

3.4.1. Définition. La hauteur numérique canonique (ou de Néron-Tate) de  $x \in A_F(\bar{F})$  (relativement au faisceau inversible  $L$  et au faisceau ample  $H$  sur  $S$ ) est le rationnel

$$h_{H, L}(x) = deg_H hg_{S, L}(x) \in \mathbb{Q} .$$

On laisse au lecteur le plaisir de déduire de 3.3 les propriétés de fonctorialité, d'additivité, etc. de  $h_{H, L}(x)$ . Notons que la décomposition en termes locaux de (3.3.7) montre qu'il s'agit bien de la hauteur globale de Néron-Tate au sens habituel.

#### 4. Hauteurs globales sur les corps de nombres.

4.0. Soient  $F$  un corps de nombres,  $\Lambda = \Lambda_F$  son anneau d'entiers. On pose  $S_{F, f} = S_f = \text{Spec } \Lambda$ , et on note  $S_{F, \infty} = S_{\infty}$  l'ensemble des places archimédiennes de  $F$ . On pose "formellement"  $S_F = S = S_f \sqcup S_{\infty}$ , et  $S_f^{\circ} = \{\text{points fermés de } S_f\}$ ,  $S^{\circ} = S_f^{\circ} \cup S_{\infty}$ . L'ensemble  $S^{\circ}$  sera identifié

à l'ensemble des places de  $F$ . Plus précisément, pour  $v \in S^0$  on note  $\Gamma_v = F_v/U_v$ , et  $v: F_v^X \rightarrow \Gamma_v$  la projection naturelle,  $U_v$  désignant le groupe des éléments de valeur absolue 1.

Pour  $v$  finie, on note  $\text{ord}_v: F_v^X \rightarrow \mathbb{Z}$  la valuation équivalente à  $v$  normalisée par  $\text{ord}_v(\pi_v) = 1$ ,  $\pi_v$  désignant une uniformisante en  $v$ .

Pour  $v \in S_\infty$ , on définit  $\text{ord}_v$  comme le composé

$$F_v^X \simeq \mathbb{R}^X \xrightarrow{-\log ||} \mathbb{R} \quad (v \text{ réelle})$$

$$F_v^X \simeq \mathbb{C}^X \xrightarrow{-\log ||} \mathbb{R} \quad (v \text{ complexe})$$

où  $||$  désigne la valeur absolue ordinaire.

Enfin on pose pour tout  $v$  et pour tout  $x \in F_v$ :

$$|x|_v = e^{-d_v \text{ord}_v(x)}$$

où  $d_v = \log Nv$  ( $v \in S_f^0$ ,  $Nv = \text{Card } \kappa(v)$ )

$d_v = 1$  ( $v$  réelle)

$d_v = 2$  ( $v$  complexe).

Pour  $v$  complexe,  $||_v$  correspond donc au carré de la valeur absolue ordinaire sur  $\mathbb{C}$ .

**4.1. Définition.** Un faisceau inversible sur  $S$  est la donnée d'un  $\Lambda$ -module inversible  $L$ , et pour chaque  $v \in S_\infty$ , d'une norme (non nulle !)

$$||_v^L : L_v = L \otimes_\Lambda F_v \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

vérifiant  $|a\alpha|_v^L = |a|_v |\alpha|_v^L$  pour  $a \in F_v$  et  $\alpha \in L_v$ .

On note  $\text{Pic}(S)$  le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur  $S$ .

Bien entendu, si  $\alpha \in L_v - \{0\}$ , on pourra alors poser

$$\text{ord}_v^L(\alpha) = -\frac{1}{d_v} \log |\alpha|_v^L \quad (v \in S_\infty).$$

Notons que pour  $v$  ultramétrique on peut encore définir

$$\text{ord}_v : L_v - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

et

$$||_v^L : L_v \rightarrow \mathbb{R}$$

grâce à une trivialisatation quelconque de  $L_v$ .

On a un homomorphisme surjectif naturel

$$\text{Pic}(S) \longrightarrow \text{Pic}(S_f)$$

dont le noyau est isomorphe à  $\mathbb{R}^{S_\infty}/\log|\Lambda^X|$  où  $\log|\Lambda^X|$  désigne le plongement logarithmique du groupe des unités  $\Lambda^X$ .

4.2. Définition. Un diviseur sur  $S$  est un élément du groupe

$$\text{Div}(S) = \bigoplus_{v \in S^0} \Gamma_v.$$

Si l'on note  $[v] \in \Gamma_v$  la classe d'un  $x_v \in F_v^X$  tel que  $\text{ord}_v(x_v) = 1$ , un élément de  $\text{Div}(S)$  s'écrit donc

$$D = \sum_{v \in S^0} a_v [v] \quad (\text{somme finie})$$

avec  $a_v \in \mathbb{Z}$  si  $v \in S_f^0$ ,  $a_v \in \mathbb{R}$  si  $v \in S_\infty$ .

Si  $a \in F^X$ , on pose

$$\text{div}(a) = \sum_{v \in S^0} \text{ord}_v(a) [v].$$

Un tel diviseur est dit principal. On note  $\text{Div}^a(S) \subset \text{Div}(S)$  le groupe des diviseurs principaux.

Si  $L$  est un faisceau inversible sur  $S$ , et si  $\sigma \in L \otimes F - \{0\}$ , on pose encore

$$\text{div}(\sigma) = \sum_{v \in S^0} \text{ord}_v(\sigma) [v].$$

Si  $\sigma'$  est un autre élément de  $L \otimes F - \{0\}$ , la différence  $\text{div}(\sigma') - \text{div}(\sigma)$  est dans  $\text{Div}^a(S)$ . On obtient ainsi un isomorphisme

$$(4.2.1) \quad \text{Pic}(S) \xrightarrow{\sim} \text{Div}(S)/\text{Div}^a(S).$$

4.3. Soit  $D = \sum_v a_v [v]$  un diviseur. On définit son degré comme le réel

$$(4.3.1) \quad \text{deg}_F(D) = \sum_v d_v a_v \in \mathbb{R}$$

où  $d_v$  est défini en 4.0. La formule du produit dit alors que pour tout  $a \in F^X$ ,  $\text{deg}(\text{div}(a)) = 0$ . On obtient donc grâce à (4.2.1) un homomorphisme

$$(4.3.2) \quad \text{deg}_F : \text{Pic}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dont le noyau est extension de  $\text{Pic}(S_f)$  par un groupe isomorphe à  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\text{Card } S_\infty - 1}$ .

Si  $F'$  est une extension finie de  $F$ , on posera

$$(4.3.3) \quad \deg_F = \frac{1}{[F':F]} \deg_{K'} : \text{Pic}(S_{F'}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

de sorte que si  $\pi : S_{F'} \longrightarrow S_F$  désigne le "morphisme" naturel et si  $L \in \text{Pic}(S_F)$ , on a

$$(4.3.4) \quad \deg_F(\pi^*L) = \deg_F L .$$

Un mot sur  $\pi^*L$  aux places archimédiennes : si  $v' \in S_{F', \infty}$  et  $v = \pi(v')$ , et si  $x \in L_v - \{0\}$ , on a toujours  $\text{ord}_v(\pi^*(x)) = \text{ord}_v(x)$  ; par contre, dans le cas où  $v$  est réelle et  $v'$  complexe on a  $|\pi^*(x)|_{v'}^{*L} = (|x|_v^L)^2$ .

4.4. Donnons-nous maintenant une variété abélienne  $A_F$  sur  $F$ , et notons  $A \longrightarrow S_F$  son modèle de Néron sur  $S_F$ . Soit  $L$  un faisceau inversible sur  $A_F$ , sur lequel on choisit une structure cubiste. Il existe alors, comme au §3, un entier  $N$  tel que  $M = L^{\otimes N}$  ait un prolongement cubiste  $\tilde{M}$  sur  $A$ . Pour toute place  $v \in S_\infty$ ,  $\tilde{M}_v = M_v$  est muni (de même que  $L_v$ , d'ailleurs) d'une unique norme compatible à  $v$  et à la structure cubiste (II, 2.1). Soit alors  $x \in A(F)$ , prolongé en  $\tilde{x} \in A(S_F)$ . Le  $\Lambda$ -module inversible  $\tilde{x}^*(\tilde{M})$  est alors muni de normes aux places à l'infini, donc définit un élément  $\text{Pic}(S)$  encore noté  $\tilde{x}^*(\tilde{M})$ .

4.4.1. Définition. La hauteur géométrique canonique de  $x \in A(F)$ , relativement au faisceau inversible  $L$  sur  $A_F$ , est l'élément de  $\text{Pic}(S)_\mathbb{Q} = \text{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  défini par

$$hg_{F,L}(x) = \tilde{x}^*(\tilde{M})^{\otimes \frac{1}{N}} \in \text{Pic}(S)_\mathbb{Q}$$

où  $N$  et  $M$  sont définis comme ci-dessus.

La hauteur numérique canonique (ou de Néron-Tate) de  $x$  relativement à  $L$  est le réel

$$h_{F,L}(x) = \deg_F hg_{F,L}(x) \in \mathbb{R} .$$

On vérifie comme au §3 que la hauteur ne dépend pas de la structure cubiste choisie sur  $L$ . On laisse au lecteur le soin de se convaincre que les analogues des propriétés (3.3.1) à (3.3.7) sont encore valables ici. Précisons toutefois que la décomposition en termes locaux s'écrit comme en 3.3.7 :

$$hg_{F,L}(x) = \text{cl}_\mathbb{Q} \left( \sum_{v \in S_0} \langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon} \right)$$

où  $x$  désigne un point de  $A(F)$ ,  $\varepsilon$  une rigidification de  $L$  et  $\sigma$  une section méromorphe de  $L$ , et où  $cl_{\mathbb{Q}} : \text{Div}(S) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \text{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$  est la surjection canonique. De plus dans le membre de droite, le symbole  $\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$  est celui défini au §1 pour  $v \in S_f$ , et pour  $v \in S_{\infty}$  c'est celui du §2, compte-tenu de l'identification  $\Gamma_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  via  $\text{ord}_v$  (i.e. via la fonction  $-\log$  (valeur absolue ordinaire)).

## CHAPITRE IV

Le groupe  $K(L)$ Sommaire.

0. Introduction.
1. Sous-groupes quasi-finis d'un groupe semi-stable sur une base hensélienne.
2. Rappels et compléments sur l'extension de Raynaud ; énoncé du théorème.
3. Le cas où  $S$  est un trait : généralités.
4. Le cas où  $S$  est un trait : démonstration de 2.4.
5. Démonstration de 2.4 : cas où  $A$  est à fibres connexes.
6. Démonstration de 2.4 : cas général.
7. Application à la variété duale.
8. Gonflement des modèles semi-stables.

0. Introduction.

L'objet de ce chapitre, assez technique, est d'énoncer et de démontrer le théorème 2.4., qui étend au cas des schémas en groupes semi-stables (à fibre générique propre, sur une base normale) les outils fondamentaux que sont les groupes  $K(L)$  et  $\mathcal{Q}(L)$  attachés classiquement à un faisceau inversible  $L$  sur un schéma abélien  $A$  ; on démontre en particulier que lorsque  $K(L)$  est fini, la forme commutateur associée à l'extension centrale  $\mathcal{Q}(L)$  est non dégénérée, ce qui permettra, au chapitre VI, d'appliquer lorsque  $L$  est relativement ample la magie des représentations des groupes thêta, exposée au chapitre V.

Lorsque la base est un trait, l'existence de  $K(L)$  ne pose pas de difficultés (§3), grâce à l'existence des modèles de Néron. Le point délicat est le "théorème d'orthogonalité" 2.4 (iv), établi au §4 par une méthode à certains égards peu satisfaisante (cf. 4.2.5).

Au contraire, dans le cas d'une base de dimension  $\gg 2$ , le point non trivial est l'existence (ou plus exactement la platitude) de  $K(L)$ , les énoncés de non-dégénérescence se déduisant sans difficulté du cas d'un trait. C'est ici que l'"extension de Raynaud" (dont la construction est

rappelée au §2) joue un rôle crucial, puisqu'elle permet, grâce à force dévissages, de se ramener au cas des schémas abéliens.

On donne enfin au §7 une application de la platitude de  $K(L)$  : si une variété abélienne  $A$  sur un corps  $F$  admet un modèle semi-stable au-dessus d'un modèle normal  $S$  de  $F$ , il en est de même de sa duale.

### 1. Sous-groupes quasi-finis d'un groupe semi-stable sur une base hensélienne.

1.0. Soit  $S$  le spectre d'un anneau local noethérien hensélien  $R$ , et soient  $s$  son point fermé,  $k$  son corps résiduel. On se donne un  $S$ -schéma en groupes semi-stable  $A \xrightarrow[e_A]{f} S$ . Si  $X$  est un  $S$ -schéma quasi-fini et séparé sur  $S$ , nous noterons  $X^f$  ("partie finie" de  $X$ ) son plus grand sous-schéma fini sur  $S$ ; on a donc (cf. SGA 7, IX.2.2.3) :

$$(1.0.1) \quad X = X^f \amalg X'$$

où  $X^f$  est fini sur  $S$  et où la fibre fermée  $X'_0$  de  $X'$  est vide.

1.1. En particulier prenons pour  $X$  un sous-schéma en groupes fermé  $H$  de  $A$ , quasi-fini sur  $S$ . Alors  $H^f$  est un sous-groupe ouvert et fermé de  $H$ ; nous poserons de plus, dans ce cas :

$$(1.1.1) \quad H^{fn} = (H \cap A^0)^f = H^f \cap A^0$$

("partie finie neutre" de  $H$ ) ; c'est un sous-groupe ouvert et fermé de  $H^f$ . Si  $H_1$  est un sous-groupe fermé de  $H$ , on vérifie immédiatement que

$$(1.1.2) \quad H_1^f = H_1 \cap H^f$$

$$(1.1.3) \quad H_1^{fn} = H_1 \cap H^{fn}.$$

1.2. Supposons de plus  $H$  plat sur  $S$  : alors  $H^f$  et  $H^{fn}$  le sont également puisqu'ils sont ouverts dans  $H$ . Soit  $T_0 \subset A_0^0$  le tore maximal de la fibre fermée  $A_0$ . Le groupe  $H \cap T_0$  est de type multiplicatif donc, d'après SGA 7, IX.6.1, se prolonge en un unique sous-groupe fini, plat et de type multiplicatif de  $H$ , noté

$$(1.2.1) \quad H^\mu \subset H \quad (\text{"partie torique" de } H).$$

On a évidemment  $H^\mu \subset H^{fn}$ , et si  $H_1 \subset H$  est fermé et plat sur  $S$

on a

$$(1.2.2) \quad H_1^\mu = H_1 \cap H^\mu .$$

Notons enfin que si  $S' \rightarrow S$  est un morphisme local de schémas locaux henséliens la formation de  $H^\mu$ ,  $H^{\text{fn}}$  et  $H^f$  commute au changement de base  $S' \rightarrow S$ . Nous poserons enfin

$$(1.2.3) \quad H^{\text{ab}} = H^{\text{fn}}/H^\mu ;$$

c'est un  $S$ -schéma en groupes fini et plat, dont la fibre fermée  $H_0^{\text{ab}}$  s'identifie à un sous-groupe de la "partie abélienne"  $A_0^{\circ}/T_0$  de  $A_0$ .

1.3. Soit maintenant  $U$  un  $S$ -schéma noethérien, et soit  $H_U$  un sous-schéma en groupes fermé de  $A_U = A \times_S U$ , quasi-fini et plat sur  $U$  (dans nos applications,  $U$  sera souvent un sous-schéma ouvert de  $S$ ). Il existe alors  $m \gg 1$  tel que  $H_U \subset {}_m A_U$ . Comme  $A$  est semi-stable,  ${}_m A$  est un sous-groupe fermé de  $A$ , plat et quasi-fini sur  $S$  (SGA 7, IX.2.2.1), et nous pouvons donc poser :

$$\left. \begin{aligned} (1.3.0) \quad H_{U/S}^f &= H_U \cap ({}_m A^f)_U \\ (1.3.1) \quad H_{U/S}^{\text{fn}} &= H_U \cap ({}_m A^{\text{fn}})_U \\ (1.3.2) \quad H_{U/S}^\mu &= H_U \cap ({}_m A^\mu)_U \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(on note ici} \\ {}_m A^f = ({}_m A)^f, \text{ etc.)} \end{array}$$

Il est immédiat que ces définitions ne dépendent pas du choix de  $m$  (à cause de (1.1.2), (1.1.3) et (1.2.2) appliqués aux inclusions  ${}_{m_1} A \subset {}_{m_2} A$  lorsque  $m_1 | m_2$ ). De plus les trois sous-groupes de  $H_U$  ainsi définis sont finis sur  $U$  car fermés dans  $({}_m A^f)_U$ ; il est de plus immédiat que  $H_{U/S}^f$  et  $H_{U/S}^{\text{fn}}$  sont ouverts dans  $H_U$ , donc en fait finis et plats sur  $U$ . De même :

1.3.3. Lemme. Le groupe  $H_{U/S}^\mu$  de (1.3.2) est plat sur  $U$ .

En effet on peut encore définir  $H_{U/S}^\mu$  comme le noyau du morphisme composé

$$({}_m A^\mu)_U \hookrightarrow ({}_m A^{\text{fn}})_U \longrightarrow ({}_m A^{\text{fn}})_U / H_{U/S}^{\text{fn}}$$

de  $U$ -groupes finis et plats; il suffit donc de voir que ce morphisme est de rang localement constant sur  $U$ , ou encore qu'il en est de même du morphisme déduit par dualité de Cartier. Or ce dernier envoie un groupe fini et plat vers un groupe fini étale; son noyau est donc ouvert et fermé, d'où le lemme. ■



Grâce à 1.3.3, nous pouvons alors définir la "partie abélienne"

$$(1.3.4) \quad H_{U/S}^{ab} = H_{U/S}^{fn} / H_{U/S}^{\mu}$$

de  $H_U$  ; c'est un  $U$ -schéma en groupes fini et plat.

1.3.5. Lorsque  $U=S$  il est clair que les groupes  $H_{U/S}^f$ ,  $H_{U/S}^{fn}$ ,  $H_{U/S}^{\mu}$ ,  $H_{U/S}^{ab}$  coïncident avec les groupes  $H_U^f$ ,  $H_U^{fn}$ ,  $H_U^{\mu}$  et  $H_U^{ab}$  de (1.0), (1.1.1), (1.2.1), (1.2.3).

De plus, le schéma  $S$  étant fixé, leur formation commute à tout changement de base  $U' \rightarrow U$  entre  $S$ -schémas. De façon plus générale, si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

où  $S'$  est local hensélien et le morphisme  $S' \rightarrow S$  local, on a, en posant  $H_{U'} = H_U \times_U U'$  :

$$(1.3.5.1) \quad H_{U'/S'}^{fn} = H_{U'/S}^{fn} = (H_{U/S}^{fn}) \times_U U'$$

et de même pour les parties finies, toriques et abéliennes, la première égalité résultant du fait déjà remarqué que  $({}_m A_{S'})^{fn} = {}_m A^{fn} \times_S S'$ .

## 2. Rappels et compléments sur l'extension de Raynaud ; énoncé du théorème.

2.0. Gardant les hypothèses de 1.0, nous supposons de plus que  $R$  est complet et (pour simplifier) que  $A$  est à fibres connexes. Nous poserons  $R_n = R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$ ,  $S_n = \text{Spec}(R_n)$ ,  $A_n = A \times_S S_n$ , et nous désignerons par

$$(2.0.1) \quad A_{\text{for}} = (A_n)_{n \geq 0}$$

le schéma formel complété de  $A$  le long de sa fibre fermée  $A_0$ . Cette dernière est, par hypothèse, extension d'une variété abélienne  $B_0$  par un tore  $T_0$ , et on en déduit (SGA 7, IX.7) une suite exacte de  $S$ -schémas formels en groupes

$$(2.0.2) \quad 0 \longrightarrow T_{\text{for}} \longrightarrow A_{\text{for}} \xrightarrow{\pi_{\text{for}}} B_{\text{for}} \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire un système compatible (pour  $n \geq 0$ ) de suites exactes de  $S_n$ -schémas en groupes

$$(2.0.3) \quad 0 \longrightarrow T_n \longrightarrow A_n \xrightarrow{\pi_n} B_n \longrightarrow 0$$

où  $B_n$  est un  $S_n$ -schéma abélien et  $T_n$  un tore sur  $S_n$ .

2.1. Proposition. Soit  $L_{\text{for}}$  un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $A_{\text{for}}$  (c'est-à-dire un système  $(L_n)_{n \geq 0}$  de  $G_m$ -torseurs cubistes sur  $A_n$  munis d'isomorphismes de transition). Alors  $L_{\text{for}} \otimes [-1]^*(L_{\text{for}})$  provient canoniquement d'un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $B_{\text{for}}$ . De plus il existe  $S' \rightarrow S$  fini étale tel que  $(L_{\text{for}})_{S'}$  provienne d'un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $(B_{\text{for}})_{S'}$ .

Notons que si le corps résiduel  $k$  de  $R$  est séparablement clos, la seconde assertion montre que le foncteur naturel  $\text{CUB}(B_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) \rightarrow \text{CUB}(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}})$  est essentiellement surjectif.

La première assertion résulte de I,7.2.3 appliqué aux schémas de base  $S_n$ . La seconde est également une variante "formelle" de loc. cit : en vertu de I,7.2.2 il suffit de trivialisier la restriction de  $L_{\text{for}}$  à  $T_{\text{for}}$  (comme extension, cf. I,7.2.1). Mais pour cela, compte tenu de SGA 3, X.3.3, il suffit de trivialisier  $L_0$  sur  $T_0$ , ce qui se fait après extension finie séparable du corps de base. ■

2.2. Proposition. On suppose qu'il existe sur  $A$  un faisceau inversible cubiste ample relativement à  $S$ . Alors l'extension (2.0.2) est algébrisable, c'est-à-dire qu'il existe une (unique) extension

$$(2.2.1) \quad 0 \longrightarrow T \longrightarrow A^h \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

d'un  $S$ -schéma abélien  $B$  par un  $S$ -tore  $T$ , dont l'extension formelle associée soit (2.0.2).

De plus le foncteur naturel

$$(2.2.2) \quad \text{CUB}(A^h, G_{m, S}) \longrightarrow \text{CUB}(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}})$$

déduit de l'isomorphisme  $(A^h)_{\text{for}} \simeq A_{\text{for}}$  est une équivalence de catégories

Remarques :

- L'extension (2.2.1) est appelée (SGA 7, IX) l'extension de Raynaud attachée à  $A$  (cf. [R2]).

- L'hypothèse d'existence d'un faisceau cubiste ample est satisfaite dès que  $S$  est normal : en effet  $A$  est alors quasi-projectif sur  $S$  [R1] et l'on applique I,2.6.

Démontrons que (2.0.2) est algébrisable (cf. SGA 7, IX.7). Soit  $L$  un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $A$ , ample sur  $S$ . Alors  $(L \otimes [-1]_A^* L)_{\text{for}}$  provient d'après 2.1 d'un  $G_m$ -torseur  $M_{\text{for}}$  sur  $B_{\text{for}}$ , qui est ample ([R1], XI.1.11) et par suite (EGA III, 5.1.4)  $B_{\text{for}}$  est algébrisable. D'autre part le tore  $T_{\text{for}}$  provient d'un unique tore  $T$  sur  $S$  (SGA 3, X.3.3) et l'extension (2.0.2) correspond à un morphisme

$$(2.2.3) \quad \underline{X}_{\text{for}} \longrightarrow B_{\text{for}}^t$$

de  $S$ -schémas formels en groupes, où  $\underline{X}$  désigne le dual de  $T$ , et  $B^t$  le  $S$ -schéma abélien dual de  $B$ . Comme  $T$  est isotrivial (SGA 3, loc. cit.),  $\underline{X}$  est somme de  $S$ -schémas finis étales sur  $S$ ; en conséquence, (2.2.3) provient d'un unique  $S$ -morphisme  $\underline{X} \longrightarrow B^t$  qui correspond à l'extension (2.2.1) annoncée.

Montrons que le foncteur (2.2.2) est pleinement fidèle. Soit  $L \in \text{CUB}(A^{\text{h}}, G_m)$  et soit  $\sigma_{\text{for}}$  une trivialisatoin de  $L_{\text{for}}$  sur  $A_{\text{for}}$ . Celle-ci induit une trivialisatoin  $\delta_{\text{for}} = \mathcal{D}_2(\sigma_{\text{for}})$  de la biextension  $\mathcal{D}_2(L_{\text{for}})$  sur  $A_{\text{for}} \times A_{\text{for}}$ . Mais considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{BIEXT}(A^{\text{h}}, A^{\text{h}}; G_m) & \longrightarrow & \text{BIEXT}(A_{\text{for}}, A_{\text{for}}; G_m) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{BIEXT}(B, B; G_m) & \longrightarrow & \text{BIEXT}(B_{\text{for}}, B_{\text{for}}; G_m) \end{array}$$

On sait (SGA 7, VIII) que les flèches verticales sont des équivalences, et il en est de même de la flèche inférieure par le théorème d'algébrisation (EGA III, loc. cit.) donc aussi de la flèche supérieure : ainsi,  $\delta_{\text{for}}$  provient d'une unique trivialisatoin  $\delta$  de  $\mathcal{D}_2(L)$  sur  $A^{\text{h}} \times A^{\text{h}}$ , c'est-à-dire (I, 3) que  $L$  est muni d'une structure d'extension centrale de  $A^{\text{h}}$  par  $G_m$ , commutative puisque  $A^{\text{h}}$  est semi-stable à fibres connexes. Comme on a  $\delta_{\text{for}} = \mathcal{D}_2(\sigma_{\text{for}})$  cette extension est de plus munie d'une trivialisatoin  $\sigma_{\text{for}}$  sur  $A_{\text{for}}$ . Or le foncteur naturel

$$\text{EXT}(A^{\text{h}}, G_m) \longrightarrow \text{EXT}(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}})$$

est une équivalence : on a en effet le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A^{\text{h}}, G_m) & \longrightarrow & \text{Hom}(T, G_m) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(B, G_m) \longrightarrow \\ & & \downarrow (a) & & \downarrow (b) & & \downarrow (c) \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) & \longrightarrow & \text{Hom}(T_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(B_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) \longrightarrow \\ & & \downarrow (d) & & \downarrow (e) & & \\ \longrightarrow & \text{Ext}^1(A^{\text{h}}, G_m) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(T, G_m) & & & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \text{Ext}^1(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(T_{\text{for}}, G_{m, \text{for}}) & & & \end{array}$$

Comme la catégorie des tores sur  $S$  est équivalente à celle des "tores formels" (et d'ailleurs à celle des tores sur  $S_0 = \text{Spec } k$ , cf. SGA 3, X.3.3), (b) et (e) sont des isomorphismes, de même que (c) par le théorème d'algébrisation, donc (a) et (d) sont des isomorphismes, d'où notre assertion. En particulier la trivialisaton  $\sigma_{\text{for}}$  de l'extension  $L_{\text{for}}$  provient d'une trivialisaton  $\sigma$  de  $L$ , cqfd.

Montrons que (2.2.2) est essentiellement surjectif. Soit  $L_{\text{for}} \in \text{CUB}(A_{\text{for}}, G_{m, \text{for}})$ . D'après 2.1 il existe  $S' \rightarrow S$  fini étale tel que  $L'_{\text{for}} = (L_{\text{for}})_{S'}$  provienne d'un  $M'_{\text{for}}$  sur  $B'_{\text{for}}$ , lui-même algébri-sable en  $M'$  sur  $B'$ , donc  $L'_{\text{for}}$  s'algébrise en  $L' = \pi^*(M')$  sur  $(A^{\natural})'$ . Il s'agit dès lors de redescendre  $L'$  à  $S$ . Considérons les diagrammes

$$S'' = S' \times_S S' \begin{array}{c} \xrightarrow{p^{(1)}} \\ \xrightarrow{p^{(2)}} \end{array} S' \xrightarrow{p} S$$

$$S''_n = S'_n \times_S S'_n \begin{array}{c} \xrightarrow{p_n^{(1)}} \\ \xrightarrow{p_n^{(2)}} \end{array} S'_n \xrightarrow{p_n} S_n \quad (n \gg 0)$$

où l'on a posé  $S''_n = S' \times_S S'_n$ . Comme  $L'_{\text{for}}$  provient de  $L_{\text{for}}$  sur  $S$ , on a pour tout  $n$  une donnée de descente  $p_n^{(1)*} L'_n \xrightarrow{\sim} p_n^{(2)*} L'_n$ , c'est-à-dire une trivialisaton sur  $A^{\natural}_{S''_n}$  de  $p_n^{(1)*} L'_n \otimes p_n^{(2)*} L'^{-1}_n$ , ou encore une trivialisaton, au-dessus de  $S''_n$ , de  $p^{(1)*} L' \otimes p^{(2)*} L'^{-1}$ , ces trivialisations étant compatibles pour  $n$  variable. Or, comme  $S''$  est lui-même somme de spectres d'anneaux locaux complets, on peut appliquer le résultat de pleine fidélité précédent, d'où une trivialisaton sur  $A^{\natural}_{S''}$  de  $p^{(1)*} L' \otimes p^{(2)*} L'^{-1}$  qui est bien entendu une donnée de descente. ■

2.3. Gardons les hypothèses de 2.0, et soit  $m$  un entier  $\gg 1$ . Procédant comme expliqué en SGA 7, IX.7.3 pour les modules de Tate, on trouve des isomorphismes canoniques

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} ({}_m A)^{\mu} &\simeq {}_m T \\ ({}_m A)^f &= ({}_m A)^{fn} \simeq {}_m (A^{\natural}) \\ ({}_m A)^{ab} &\simeq {}_m B \end{aligned}$$

de  $S$ -schémas en groupes, caractérisés par la condition d'induire, sur les complétés formels, les isomorphismes naturels

$$({}_m A)_{\text{for}}^{fn} \simeq {}_m (A_{\text{for}}) \simeq {}_m (A^{\natural}_{\text{for}}) \simeq ({}_m A^{\natural})_{\text{for}}$$

(resp. les isomorphismes analogues  $({}_m A)_{\text{for}}^{\mu} \simeq ({}_m T)_{\text{for}}$  et  $({}_m A)_{\text{for}}^{\text{ab}} \simeq ({}_m B)_{\text{for}}$ ).

Soit maintenant  $U$  un  $S$ -schéma, et soit  $H_U$ , comme dans 1.3, un sous-schéma en groupes fermé de  $A_U$ , plat et quasi-fini sur  $U$ . On dispose alors des  $U$ -groupes finis et plats  $H_{U/S}^{\mu}$ ,  $H_{U/S}^{\text{fn}}$ ,  $H_{U/S}^{\text{ab}}$ , contenus respectivement dans  $({}_m A^{\mu})_U$ ,  $({}_m A^{\text{fn}})_U$  et  $({}_m A^{\text{ab}})_U$  dès que  $H_U \subset {}_m A_U$ . Grâce aux isomorphismes (2.3.1) on en déduit des  $U$ -groupes finis et plats, notés  $H_{U/S}^b$ ,  $H_{U/S}^{\natural}$ ,  $H_{U/S}^{\#}$  pour faire joli, et définis par le diagramme commutatif

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{U/S}^{\mu} & \longrightarrow & H_{U/S}^{\text{fn}} & \longrightarrow & H_{U/S}^{\text{ab}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & H_{U/S}^b & \longrightarrow & H_{U/S}^{\natural} & \longrightarrow & H_{U/S}^{\#} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & ({}_m T)_U & \longrightarrow & ({}_m A^{\natural})_U & \longrightarrow & ({}_m B)_U \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & A^{\natural} & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où les isomorphismes entre les deux premières lignes sont induits par (2.3.1). Il est clair d'autre part que les sous-groupes  $H_{U/S}^b$ , etc. de  $T$ ,  $A^{\natural}$  et  $B$  sont indépendants du choix de  $m$ .

(Bien que  $H_{U/S}^{\text{fn}}$  et  $H_{U/S}^{\natural}$  soient canoniquement isomorphes il est préférable, au moins dans l'immédiat, de maintenir la différence de notation).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre.

**2.4. Théorème.** Soient  $S$  un schéma intègre localement noethérien normal,  $\eta$  son point générique. Soit  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable (II, 1.2.7) tel que sa fibre générique  $A_{\eta}$  soit une variété abélienne, et soit  $L_{\eta}$  un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $A_{\eta}$ . On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\eta} \text{ est non dégénéré, i.e. le groupe } K(L_{\eta}) \text{ est fini (I, 4.2) (ce} \\ \text{dernier sera noté } K_{\eta}) \\ L_{\eta} \text{ admet un prolongement cubiste } L_S^{\circ} \text{ sur la composante neutre} \\ A^{\circ} \text{ de } A \end{array} \right.$$

(la première hypothèse est vérifiée par exemple si  $L_{\eta}$  est ample, et la seconde si  $S$  est régulier ou si  $L_{\eta}$  est symétrique (II, 3.2.2 et 3.3)).

Alors :

(i)  $K_\eta$  se prolonge en un unique sous-groupe fermé  $K_S$  de  $A$  qui est plat et quasi-fini sur  $S$  (et qui est donc nécessairement l'adhérence schématique de  $K_\eta$  dans  $A$ ).

(ii) Il existe un unique accouplement alterné

$$e_S^{L_\eta} : K_S \times K_S \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}$$

prolongeant l'accouplement  $e^{L_\eta}$  de [M2], § 23. De plus si  $K_S$  est fini sur  $S$ ,  $e_S^{L_\eta}$  est une dualité parfaite.

(iii) On suppose que  $L_\eta$  admet un prolongement cubiste  $L_S$  sur  $A$ . Alors la restriction à  $K_S \times A$  de la biextension  $\mathcal{D}_2(L_S)$  est munie d'une trivialisatıon prolongeant celle de  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  définie en I, §4, de sorte que d'après loc. cit. le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_S|_{K_S}$  est muni d'une structure naturelle d'extension centrale, notée

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow \mathcal{G}(L_S) \longrightarrow K_S \longrightarrow 0$$

et d'une action de cette extension sur  $L_S$ . De plus la forme  $e_S^{L_\eta}$  coıncide alors avec la forme commutateur de l'extension  $\mathcal{G}(L_S)$ .

(iv) (Théorème d'orthogonalité). On suppose que  $S$  est le spectre d'un anneau local hensélien  $R$ , de sorte que (§1)  $K_S$  est muni d'une filtration  $K_S^\mu \subset K_S^{\text{fn}} \subset K_S$ . Alors  $K_S^{\text{fn}}$  est l'orthogonal de  $K_S^\mu$  pour la forme  $e_S^{L_\eta}$ , et la forme induite sur le quotient  $K_S^{\text{ab}}$  est une dualité parfaite. Si de plus  $K_S$  est fini sur  $S$ ,  $e_S^{L_\eta}$  induit une dualité parfaite entre  $K_S^\mu$  et  $K_S/K_S^{\text{fn}}$ .

(v) On suppose que  $S = \text{Spec } R$  où  $R$  est local complet, et que  $A$  est à fibres connexes, de sorte que l'extension de Raynaud

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow A^{\text{h}} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

de  $A$  est définie (2.2). D'après loc. cit., il existe un unique  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $L^{\text{h}}$  sur  $A^{\text{h}}$  dont le complété formel soit  $(L_S^{\text{O}})_{\text{for}}$ . Supposons alors que  $L^{\text{h}}$  provienne d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur (cubiste)  $\bar{L}$  sur  $B$  (ce qui est vérifié en tout cas après changement de base fini étale d'après I, 7.2.3). Alors le sous-groupe  $K_S^{\#}$  de (2.3.2) coıncide avec  $K(\bar{L})$ , et la forme induite par  $e_S^{L_\eta}$  sur  $K_S^{\#} \simeq K_S^{\text{ab}}$  grâce à (iv) coıncide avec  $e_{\bar{L}}$ .

2.4.1. Lemme. Supposons 2.4 (i), (ii), (iii) établis chaque fois que  $S$  est un trait, et 2.4 (i) établi pour  $A, S, L_\eta$  donnés. Alors 2.4 (ii) et (iii) sont vrais pour  $A, S, L_\eta$ .

En effet, appliquant (ii) et (iii) aux points de codimension 1 de  $S$ , on voit qu'il existe un gros ouvert (II,3.1)  $U \subset S$  et une forme alternée

$$e_U^{L_\eta} : K_U \times K_U \longrightarrow G_{m,U} \quad (\text{avec } K_U = K_S|_U)$$

prolongeant  $e_U^{L_\eta}$ . Mais comme  $K_S$  est plat sur  $S$ ,  $K_U \times K_U$  contient tous les points de profondeur  $\leq 1$  de  $K_S \times K_S$ , donc  $e_U^{L_\eta}$  se prolonge en  $e_S^{L_\eta}$ , évidemment bilinéaire alternée par densité. De plus si  $K_S$  est fini sur  $S$ ,  $e_S^{L_\eta}$  définit un morphisme de  $K_S$  dans son dual de Cartier, qui est un isomorphisme en codimension 1, donc est un isomorphisme.

La démonstration de (iii) est tout à fait analogue : une trivialisat-ion de  $\mathcal{D}_2(L_U)$  sur  $K_U \times A_U$  (avec les notations ci-dessus) s'étend en une trivialisat-ion de  $\mathcal{D}_2(L_S)$  sur  $K_S \times A$  par le même argument de profondeur. ■

Nous allons donc commencer (§3 et 4) par démontrer 2.4 lorsque  $S$  est un trait ; dans ce cas le théorème reposera de façon essentielle sur l'existence du modèle de Néron de la variété duale  $A_\eta^t$ .

### 3. Le cas où $S$ est un trait : généralités.

3.0. Dans ce § on fixe  $S = \text{Spec } \Lambda$ , où  $\Lambda$  est un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $F$  et de corps résiduel  $k$ . On note  $\eta = \text{Spec } F$ ,  $s = \text{Spec } k$ , et  $\Gamma = F^\times / \Lambda^\times$ .

On se donne de plus un  $S$ -schéma en groupes lisse de type fini  $A \xrightarrow{f} S$ , tel que la fibre générique  $A_\eta$  soit une variété abélienne sur  $F$  (mais on ne suppose pas  $A$  semi-stable). On note  $A_\eta^t$  la duale de  $A_\eta$ , et  $A^t$  le modèle de Néron de  $A_\eta^t$  sur  $S$ . Enfin on note  $P_\eta$  la biextension de Poincaré de  $(A_\eta^t, A_\eta)$  par  $G_{m,\eta}$ .

Soit  $L_\eta$  un  $G_m$ -torseur rigidifié sur  $A_\eta$ , que l'on munit de son unique structure cubiste compatible à la rigidification. On a alors un homomorphisme

$$\varphi_{L_\eta} : A_\eta \longrightarrow A_\eta^t$$

(cf. I,4.1) défini par la condition

$$(3.0.1) \quad (\varphi_{L_\eta} \times \text{Id}_{A_\eta})^*(P_\eta) \simeq \mathcal{D}_2(L_\eta) ;$$

l'isomorphisme (3.0.1) est alors unique si on lui impose de respecter les rigidifications, ou, ce qui revient au même, les structures de biexten-

sions. Rappelons aussi le groupe

$$K(L_\eta) = \text{Ker}(\varphi_{L_\eta}) \quad (\text{I}, 4.2)$$

et le  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $K(L_\eta)$

$$\mathcal{G}(L_\eta) = L_\eta|_{K(L_\eta)} \quad (\text{I}, 4.4)$$

qui est muni canoniquement (I, §4) d'une structure d'extension centrale et d'une action du groupe sous-jacent sur le toseur  $L_\eta$ . Enfin on note

$$e^{L_\eta} : K(L_\eta) \times K(L_\eta) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\eta}$$

la forme commutateur associée à cette extension, qui est un accouplement alterné.

3.1. Appliquons maintenant au morphisme  $\varphi_{L_\eta}$  la propriété universelle du modèle de Néron  $A^t$  : on obtient un unique  $S$ -morphisme

$$(3.1.1) \quad \varphi_{L_\eta, S} : A \longrightarrow A^t$$

prolongeant  $\varphi_{L_\eta}$ , et l'on pose

$$(3.1.2) \quad K_S(L_\eta) = \text{Ker}(\varphi_{L_\eta, S}) ;$$

c'est un sous- $S$ -schéma en groupes fermé de  $A$  (non nécessairement plat sur  $S$ ) prolongeant  $K(L_\eta)$ .

3.2. Lemme. Soit  $A^{[1]}$  le plus petit sous- $S$ -groupe ouvert de  $A$  contenant  $K_S(L_\eta)$  : il existe alors une unique biextension  $E$  de  $(A^{[1]}, A)$  par  $\mathbb{G}_m$  prolongeant  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  ; cette biextension est munie canoniquement d'une trivialisat[i]on  $\sigma$  au-dessus de  $K_S(L_\eta) \times A$ , et d'un isomorphisme de symétrie

$$\xi : E_{A^{[1]} \times A} \xrightarrow{\sim} s^* E_{A^{[1]} \times A}$$

(où  $s : A^{[1]} \times A \longrightarrow A^{[1]} \times A$  est l'échange des facteurs), prolongeant les données naturelles analogues sur  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  (en particulier  $\xi$  est l'identité sur la diagonale).

Démonstration : posons pour abrégier  $K_\eta = K(L_\eta)$ ,  $K_S = K_S(L_\eta)$ ,  $\varphi_\eta = \varphi_{L_\eta}$ ,  $\varphi_S = \varphi_{L_\eta, S}$ . Soit  $A^{t,0}$  la composante neutre de  $A^t$  ; alors on a évidemment  $A^{[1]} \subset \varphi_S^{-1}(A^{t,0})$ . Comme  $A^{t,0}$  est à fibres connexes, il existe (SGA 7, VIII.7.1) une unique biextension  $P_S$  de  $(A^{t,0}, A)$  par  $\mathbb{G}_m$  prolongeant  $P_\eta$ . Il suffit alors de poser



$$E = (\varphi_S \times \text{Id}_A)^*(P_S)$$

qui prolonge  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  par (3.0.1). L'unicité de  $E$ , ainsi que l'isomorphisme de symétrie  $\xi$ , résultent de SGA 7, loc. cit. La trivialisation de  $E$  sur  $K_S \times A$  provient de la définition de  $E$  et de  $K_S$ . ■

La trivialisation  $\sigma$  et l'isomorphisme de symétrie  $\xi$  donnent naissance, comme en I, 3.3.5, à une seconde trivialisation  $\bar{\sigma}$  de  $E$  sur  $K_S \times K_S$ , d'où un accouplement alterné, "différence" de  $\sigma$  et  $\bar{\sigma}$  :

$$(3.2.1) \quad e_S^{L_\eta} : K_S(L_\eta) \times K_S(L_\eta) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \quad (\sigma = e_S^{L_\eta} \bar{\sigma}),$$

qui prolonge l'accouplement  $e^{L_\eta}$ , ceci grâce à I, 3.3.6.

3.3. Donnons-nous de plus un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $L_S$  sur  $A$ , prolongeant  $L_\eta$ . On posera alors, pour simplifier l'écriture :

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} \varphi_{L_S} &= \varphi_{L_\eta, S} : A \longrightarrow A^t \\ K(L_S) &= K_S(L_\eta) \\ e^{L_S} &= e_S^{L_\eta} : K(L_S) \times K(L_S) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que si  $A$  est un schéma abélien, ces notations sont compatibles avec les notions habituelles (I, §4 et [M2], §23) : par exemple  $K(L_S)$  est bien le "groupe des translations qui respectent  $L_S$ ".

D'autre part notons  $A'^t \subset A^t$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A^t$  contenant l'image de  $\varphi_{L_S}$ , et soient  $\Phi$  et  $\Phi'^t$  les groupes de composantes connexes respectifs des fibres fermées  $A_0$  et  $A_0'^t$ . Considérons le morphisme

$$\varphi_{L_S} \times \text{Id}_A : A \times A \longrightarrow A'^t \times A.$$

3.3.2. Lemme. Il existe une (unique) biextension  $P'_S$  de  $(A'^t, A)$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$  prolongeant  $P_\eta$ , et l'on a un (unique) isomorphisme de biextensions :

$$(3.3.2.1) \quad (\varphi_{L_S} \times \text{Id}_A)^*(P'_S) \simeq \mathcal{D}_2(L_S)$$

prolongeant (3.0.1). De plus la restriction de  $\mathcal{D}_2(L_S)$  à  $A^{[1]} \times A^{[1]}$  est canoniquement isomorphe à la biextension  $E$  de 3.2 ( $A^{[1]}$  étant comme dans loc. cit.).

Démonstration : d'après SGA 7, VIII.7.1, l'obstruction à l'existence de  $P'_S$  s'interprète comme un accouplement

$$d(P_\eta) : \Phi'^t \times \Phi \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k .$$

Comme sur la fibre générique on a  $\mathcal{D}_2(L_\eta) \simeq (\varphi_\eta \times \text{Id})^*(P_\eta)$ , l'obstruction à prolonger la biextension  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  sur  $A \times A$  est l'application composée :

$$\Phi \times \Phi \xrightarrow{\bar{\varphi}_S \times \text{Id}} \Phi'^t \times \Phi \xrightarrow{d(P_\eta)} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k$$

où  $\bar{\varphi}_S$  est induit par  $\varphi_S$  donc est surjectif par définition de  $A'^t$ . Comme  $\mathcal{D}_2(L)$  est prolongée sur  $A \times A$  (par  $\mathcal{D}_2(L_S)$ ), cette application composée est nulle donc  $d(P_\eta) = 0$  puisque  $\bar{\varphi}_S \times \text{Id}$  est surjectif. Ceci prouve l'existence de  $P'_S$  et les autres assertions résultent de l'unicité du prolongement (SGA 7, loc. cit.). ■

3.3.3. L'isomorphisme (3.3.2.1) fournit une trivialisation naturelle de la restriction à  $K_S \times A$  de la biextension  $\mathcal{D}_2(L_S)$ , prolongeant la trivialisation habituelle de  $\mathcal{D}_2(L_\eta)$  sur  $K_\eta \times A_\eta$ . D'après I, §3 on en tire un S-schéma en groupes, extension centrale de  $K_S = K(L_S)$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$  et noté  $\mathcal{Q}(L_S)$ ; le  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $K(L_S)$  sous-jacent à  $\mathcal{Q}(L_S)$  s'identifie de plus à la restriction de  $L_S$  à  $K(L_S)$ , et l'on a une action à gauche de  $\mathcal{Q}(L_S)$  sur  $L_S$ ; ces données prolongent le groupe  $\mathcal{Q}(L_\eta)$  et son action sur  $L_\eta$ . Enfin il résulte de I, 3.3.6 et de la compatibilité de  $E$  et  $\mathcal{D}_2(L_S)$ , que la forme commutateur sur  $K(L_S)$  déduite de  $\mathcal{Q}(L_S)$  coïncide avec la forme  $e^{L_S} = e_S^{L_\eta}$  de (3.3.1).

3.4. Proposition. Sous les hypothèses de 3.0, supposons de plus que

(a)  $A$  est semi-stable

(b)  $L_\eta$  est non dégénéré, i.e.  $K(L_\eta)$  est fini.

Alors :

(i) le morphisme  $\varphi_{L_\eta, S}^o$  induit par  $\varphi_{L, S}$  sur les composantes neutres  $A^o$  et  $A^{t, o}$  est surjectif, plat et quasi-fini.

(ii)  $\varphi_{L_\eta, S}$  est plat et quasi-fini.

En particulier le groupe  $K_S(L_\eta)$  de (3.1.2) est plat et quasi-fini sur  $S$ .

Remarque. L'hypothèse de semi-stabilité est essentielle : prendre pour  $A$  une courbe elliptique à réduction additive, et pour  $L_\eta$  la puissance  $p$ -ième (avec  $p = \text{car}(k) > 0$ ) de la polarisation canonique. Par contre si

$A$  est semi-stable mais  $L_\eta$  quelconque, j'ignore si  $K_S(L_\eta)$  est toujours plat sur  $S$ .

Démontrons 3.4. Comme  $A^\circ$  est un sous-groupe ouvert de  $A$ , (ii) résulte de (i). Montrons donc (i). Comme  $\varphi_{L_\eta} = \varphi_\eta$  est fini, il existe  $m > 0$  et  $\psi_\eta : A_\eta^t \rightarrow A_\eta$  tels que  $\psi_\eta \circ \varphi_\eta$  soit la multiplication par  $m$  dans  $A_\eta$ . Comme  $A$  est semi-stable c'est un sous-groupe ouvert du modèle de Néron  $\mathcal{A}$  de  $A_\eta$  (SGA 7, IX.3.2) donc  $\psi_\eta$  est induit par un morphisme  $\psi_S^\circ : A^{t,\circ} \rightarrow A^\circ = \mathcal{A}^\circ$ , qui vérifie  $\psi_S^\circ \circ \varphi_S^\circ = [m]_{A^\circ}$ . Or  $[m]_{A^\circ}$  est quasi-fini puisque  $A$  est semi-stable ; il en est donc de même de  $\varphi_S^\circ$  qui est par suite surjectif pour des raisons de dimension, et donc plat grâce au critère de platitude par fibres (EGA IV, 11.3.10). ■

#### 4. Le cas où $S$ est un trait : démonstration de 2.4.

4.0. On se place maintenant sous les hypothèses de 2.4, avec de plus  $S = \text{Spec } \Lambda$  comme au §3. Grâce aux constructions du §3, les parties (i), (ii) et (iii) de 2.4 sont démontrées sur  $S$ , sauf l'assertion de non-dégénérescence de (ii). Cependant :

##### 4.1. Lemme. L'assertion de non-dégénérescence de 2.4 (ii) résulte de 2.4 (iv).

Démonstration : on peut évidemment remplacer  $\Lambda$  par son hensélisé.

Supposons  $K_S$  fini sur  $S$  et soit  $N$  le noyau de  $e_S = e_S^{L_\eta}$ , c'est-à-dire le noyau du morphisme de  $K_S$  dans son dual de Cartier  $\hat{K}_S$  défini par  $e_S$ .

On a d'abord  $N \subset (K_S^\mu)^\perp = K_S^{\text{fn}}$  d'après 2.4 (iv) ; d'autre part la dernière assertion de 2.4 (iv) montre que  $N \cap K_S^\mu = \{0\}$ , donc  $N$  s'identifie à un sous-groupe de  $K_S^{\text{fn}}/K_S^\mu = K_S^{\text{ab}}$ , d'où  $N=0$  puisque la forme induite sur  $K_S^{\text{ab}}$  est une dualité parfaite. ■

4.2. Prouvons maintenant 2.4 (v), ainsi que l'inclusion  $K_S^\mu \subset (K_S^{\text{fn}})^\perp$  de 2.4 (iv) et le fait, affirmé dans 2.4 (iv), que  $e_S^{L_\eta}$  induit une dualité parfaite sur  $K_S^{\text{ab}}$ . Pour ces deux dernières assertions nous pouvons supposer  $A$  à fibres connexes, remplacer l'anneau  $R$  par son complété, puis effectuer un changement de base fini étale de manière à nous placer sous les hypothèses de 2.4 (v). Posons alors  $L = L_S^\circ$ . On dispose alors de l'extension de Raynaud

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow A^{\text{h}} \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

et du  $G_m$ -torseur cubiste  $L^H$  sur  $A^H$  qui "algébrise"  $L_{\text{for}}$ , ainsi, par hypothèse, que d'un  $G_m$ -torseur cubiste  $\bar{L}$  sur  $B$  tel que  $L^H \simeq \pi^*(\bar{L})$ . L'existence de  $\bar{L}$  équivaut d'ailleurs à celle de  $\bar{L}_{\text{for}}$  descendant  $L_{\text{for}}$  sur le schéma formel  $B_{\text{for}}$ ; de plus, notant pour simplifier  $K = K_S$ , je dis qu'il suffit d'établir :

(4.2.1) le schéma formel  $(K^{ab})_{\text{for}} = (K^{\text{fn}})_{\text{for}} / (K^\mu)_{\text{for}} \subset B_{\text{for}}$  s'identifie à  $K(\bar{L}_{\text{for}})$ ; de plus la restriction de  $e^L$  (3.3.1) à

$(K^{\text{fn}})_{\text{for}} \times (K^{\text{fn}})_{\text{for}}$  est l'application composée :

$$K_{\text{for}} \times K_{\text{for}} \longrightarrow K_{\text{for}}^{\text{ab}} \times K_{\text{for}}^{\text{ab}} = K(\bar{L}_{\text{for}}) \times K(\bar{L}_{\text{for}}) \xrightarrow{e^{\bar{L}_{\text{for}}}} G_{m, \text{for}}$$

(notons que  $K_{\text{for}} = K_{\text{for}}^{\text{fn}}$  puisque  $A$  est à fibres connexes).

En effet ceci établira bien 2.4 (v) et l'inclusion  $K_S^\mu \subset (K_S^{\text{fn}})^\perp$ , mais aussi l'assertion de dualité parfaite sur  $K^{\text{ab}}$  puisque, comme  $K_{\text{for}}^{\text{ab}} = K(\bar{L}_{\text{for}})$  est fini, le faisceau  $\bar{L}_{\text{for}}$  est non dégénéré sur  $B_{\text{for}}$ , et l'on sait ([M2], § 23) que ceci implique que  $e^{\bar{L}}$  est non dégénérée.

Considérons maintenant la composante neutre  $A^{t,0}$  du modèle de Néron  $A^t$  de  $A_\eta^t$ . Comme elle est semi-stable, on a encore une extension de  $S$ -schémas formels en groupes

$$0 \longrightarrow T'_{\text{for}} \longrightarrow A_{\text{for}}^{t,0} \xrightarrow{\pi'_f} B'_{\text{for}} \longrightarrow 0$$

(ainsi que l'extension de Raynaud correspondante, que nous n'utiliserons pas ici). On sait d'autre part qu'il existe une unique biextension  $P$  de  $(A^{t,0}, A)$  par  $G_{m,S}$ , prolongeant la biextension de Poincaré (§3) et un unique isomorphisme de biextensions sur  $A \times A$  :

$$(4.2.2) \quad \mathcal{D}_2(L) \xrightarrow{\sim} (\varphi_L \times \text{Id}_A)^*(P)$$

d'où une trivialisaton de  $\mathcal{D}_2(L)$  sur  $K \times K$  qui sert à définir  $e^L$ .

Or le morphisme  $\varphi_L$  donne naissance à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{\text{for}} & \longrightarrow & A_{\text{for}} & \longrightarrow & B_{\text{for}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi_{L, \text{for}} & & \downarrow \bar{\varphi}_{L, \text{for}} \\ 0 & \longrightarrow & T'_{\text{for}} & \longrightarrow & A_{\text{for}}^{t,0} & \longrightarrow & B'_{\text{for}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

et d'autre part d'après SGA 7, VIII.3.5 la biextension  $P_{\text{for}}$  sur  $A_{\text{for}}^{t,0} \times A_{\text{for}}$  se redescend en une unique biextension  $\bar{P}_{\text{for}}$  de  $(B'_{\text{for}}, B_{\text{for}})$  par  $G_{m, \text{for}}$ . Comme  $\mathcal{D}_2(L_{\text{for}})$  se redescend en  $\mathcal{D}_2(\bar{L}_{\text{for}})$  sur  $B_{\text{for}} \times B_{\text{for}}$ ,

on en déduit grâce à loc. cit. un unique isomorphisme de biextensions

$$(4.2.3) \quad \mathfrak{D}_2(\bar{L}_{\text{for}}) \xrightarrow{\sim} (\bar{\varphi}_{L, \text{for}} \times \text{Id}_{A_{\text{for}}})^*(\bar{P}_{\text{for}})$$

qui descend (4.2.2).

Or on sait (SGA 7, IX.7.4) que l'on peut identifier  $B'_{\text{for}}$  au schéma abélien formel  $B_{\text{for}}^t$  dual de  $B_{\text{for}}$ , de sorte que  $P_{\text{for}}$  corresponde à biextension de Poincaré sur  $B_{\text{for}}^t \times B_{\text{for}}$ . L'isomorphisme (4.2.3) montre alors que, modulo cette identification, on a

$$(4.2.4) \quad \bar{\varphi}_{L, \text{for}} = \varphi_{\bar{L}_{\text{for}}} : B_{\text{for}} \longrightarrow B_{\text{for}}^t.$$

Comme il est immédiat que  $\text{Ker}(\varphi_{L, \text{for}}) = K_{\text{for}}^{\text{fn}} = K_{\text{for}}$ , et donc que  $\text{Ker} \bar{\varphi}_{L, \text{for}} = K_{\text{for}}^{\text{ab}}$ , (4.2.4) montre bien que  $K_{\text{for}}^{\text{ab}} = K(\bar{L}_{\text{for}}) = \text{Ker}(\varphi_{\bar{L}_{\text{for}}})$ . Enfin la compatibilité de (4.2.2) et (4.2.3) nous dit que la trivialisat-ion de  $\mathfrak{D}_2(L_{\text{for}})$  sur  $K_{\text{for}} \times K_{\text{for}}$  qui définit  $e_{\text{for}}^L$  est image réciproque, via

$$K_{\text{for}} \times K_{\text{for}} \longrightarrow K_{\text{for}}^{\text{ab}} \times K_{\text{for}}^{\text{ab}} = K(\bar{L}_{\text{for}}) \times K(\bar{L}_{\text{for}}),$$

de la trivialisat-ion de  $\mathfrak{D}_2(\bar{L}_{\text{for}})$  qui définit  $e_{\text{for}}^{\bar{L}}$ . Ceci achève de prouver (4.2.1).

4.2.5. Remarque. L'auteur regrette d'avoir eu à utiliser la dualité des parties abéliennes  $B_{\text{for}}$  et  $B'_{\text{for}}$  (SGA 7, IX.7.4), laquelle repose dans loc. cit. sur un théorème d'orthogonalité (pour les modules de Tate) tout à fait analogue au nôtre, et qui devrait l'impliquer de manière beaucoup plus "formelle".

4.3. Il reste à établir l'égalité  $K^{\text{fn}} = (K^\mu)^\perp$ , ainsi que la dualité entre  $K^\mu$  et  $K/K^{\text{fn}}$  dans le cas fini. Nous allons le faire sous les hypothèses générales de 2.4 (iv), i.e. sans supposer que  $\dim S = 1$ , et en utilisant seulement l'inclusion  $K^{\text{fn}} \subset (K^\mu)^\perp$ .

D'abord l'égalité  $K^{\text{fn}} = (K^\mu)^\perp$  entraîne l'assertion de dualité : en effet la forme  $e_S$  induit un morphisme

$$(4.3.1) \quad K/K^{\text{fn}} \longrightarrow (K^\mu)^\wedge$$

qui est un isomorphisme sur les fibres génériques, parce que  $e^{L_\eta}$  est une dualité parfaite ( $L_\eta$  étant non dégénéré) et que par hypothèse  $K^{\text{fn}}$  est l'orthogonal de  $K^\mu$ . Comme les deux groupes concernés sont étales sur  $S$ , et finis par hypothèse, (4.3.1) est bien un isomorphisme, cqfd.

Il suffit d'établir l'égalité  $K^{\text{fn}} = (K^\mu)^\perp$  sur les fibres génériques : en effet  $(K^\mu)^\perp$ , qui est par définition le noyau d'un morphisme de  $K$  dans le groupe étale  $(K^\mu)^\wedge$ , est ouvert (et fermé) dans  $K$  donc plat sur  $S$ , et le quotient de  $(K^\mu)^\perp$  par son sous-groupe fini et plat  $K^{\text{fn}}$  est donc plat et quasi-fini donc nul dès que sa fibre générique est nulle.

Pour tout  $m \gg 1$ , introduisons les groupes

$$(4.3.2) \quad K_m = K_S(L_\eta^{\otimes m}) \quad , \quad K_{m,\eta} = K(L_\eta^{\otimes m})$$

dont chacun est muni d'une forme alternée

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} e_m &= e_S^{L_\eta^{\otimes m}} : K_m \times K_m \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \\ e_{m,\eta} &= e^{L_\eta^{\otimes m}} : K_{m,\eta} \times K_{m,\eta} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\eta} \end{aligned}$$

la forme  $e_{m,\eta}$  étant une dualité parfaite.

Comme  $\varphi_{L_\eta^{\otimes m}} = m\varphi_{L_\eta}$ , on a

$$(4.3.4) \quad K_{m,\eta} = [m]_{A_\eta}^{-1}(K_\eta)$$

et on rappelle ([M2], § 23) que pour  $x \in K_\eta$  et  $y \in K_{m,\eta}$ , on a

$$(4.3.5) \quad e_{m,\eta}(x,y) = e_\eta(x,my) .$$

Par densité, (4.3.4) et (4.3.5) entraînent respectivement

$$(4.3.6) \quad K_m = [m]_A^{-1}(K)$$

$$(4.3.7) \quad e_m(x,y) = e_S(x,my) \quad (x \in K, y \in K_m) .$$

La démonstration va consister à compter les dimensions. Posons

$$(4.3.8) \quad \begin{aligned} d &= \text{rg } K_\eta \quad , \quad d_\mu = \text{rg } K^\mu \quad , \quad d_f = \text{rg } K^{\text{fn}} \\ g &= \dim A_\eta \quad , \quad g_\mu = \dim T_O \quad , \quad g_a = \dim B_O = g - g_\mu \end{aligned}$$

(on rappelle que  $T_O$  est le tore maximal de  $A_O$ , et  $B_O = A_O^0/T_O$ ).

4.3.9. Lemme. Pour tout  $m \gg 1$ , on a :

$$\text{rg } K_{m,\eta} = d m^{2g} \quad , \quad \text{rg } K_m^\mu = d_\mu m^{g_\mu} \quad , \quad \text{rg } K_m^{\text{fn}} = d_f m^{2g-g_\mu} .$$

De plus on a  $(K^\mu)^\perp \subset (K_m^\mu)^\perp$  (où  $\perp_m$  désigne l'orthogonal pour  $e_m$ ) et cette inclusion induit un isomorphisme

$$(4.3.9.1) \quad (K_\eta^\mu)^\perp / K_\eta^{\text{fn}} \xrightarrow{\sim} (K_{m,\eta}^\mu)^\perp{}^m / K_{m,\eta}^{\text{fn}} .$$

Les assertions sur les rangs sont immédiates, la première en remarquant d'après (4.3.4) que  $K_{m,\eta}$  est extension de  $K_\eta$  par  ${}_m A_\eta$ , les deux autres résultant de façon analogue de (4.3.6) et du calcul du rang sur la fibre fermée. L'inclusion  $(K^\mu)^\perp \subset (K_m^\mu)^\perp{}^m$  résulte de (4.3.7) : si  $x \in (K^\mu)^\perp$  et  $y \in K_m^\mu$ , on a  $e_m(x,y) = e(x,my) = 0$  car  $my \in K \cap K_m^\mu = K^\mu$  (1.2.2). Enfin, d'après (1.1.3) on a  $K_m^{\text{fn}} \cap K = K^{\text{fn}}$  donc le morphisme (4.3.9.1) est un monomorphisme ; mais d'autre part comme  $e_{m,\eta}$  est non dégénérée on a

$$\text{rg}(K_{m,\eta}^\mu)^\perp{}^m = \text{rg } K_{m,\eta} / \text{rg } K_{m,\eta}^\mu = \frac{d}{d_\mu} m^{2g-g_\mu} ;$$

par suite le rang du second membre de (4.3.9.1) est  $\frac{d}{d_\mu d_f}$ , donc est indépendant de  $m$  donc égal (en faisant  $m=1$ ) à celui du premier membre. ■

4.3.10. Lemme. Pour tout  $m \gg 1$ , le morphisme de multiplication par  $m$  :

$$(K_{m,\eta}^\mu)^\perp{}^m \xrightarrow{\times m} (K_\eta^\mu)^\perp$$

est un épimorphisme.

En effet soit  $\psi_m : K_{m,\eta} \longrightarrow \hat{K}_{m,\eta}$  le morphisme induit par la forme  $e_{m,\eta}$  (d'un côté ou de l'autre, au choix du lecteur) et  $\psi = \psi_1 : K_\eta \longrightarrow \hat{K}_\eta$ .

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} K_{m,\eta} & \xrightarrow{\psi_m} & \hat{K}_{m,\eta} & \xrightarrow{\text{can}} & (K_{m,\eta}^\mu)^\wedge \\ \downarrow \times m & & \downarrow \text{can}^1 & & \downarrow \text{can}^2 \\ K_\eta & \xrightarrow{\psi} & \hat{K}_\eta & \xrightarrow{\text{can}} & (K_\eta^\mu)^\wedge \end{array}$$

où les flèches  $\text{can}$ ,  $\text{can}^1$ ,  $\text{can}^2$  sont déduites par dualité de Cartier des inclusions naturelles. La commutativité du carré de gauche résulte de (4.3.5). Par définition,  $(K_{m,\eta}^\mu)^\perp{}^m$  (resp.  $(K_\eta^\mu)^\perp$ ) est le noyau de la flèche composée sur la première (resp. deuxième) ligne. Par le lemme du serpent, il suffit de voir que la flèche

$$\text{Ker}(\text{can}^1) \longrightarrow \text{Ker}(\text{can}^2)$$

est surjective, ce qui équivaut par dualité à l'injectivité de

$$K_{m,\eta}^\mu / K_\eta^\mu \longrightarrow K_{m,\eta} / K_\eta$$

autrement dit à l'égalité  $K_\eta^\mu = K_\eta \cap K_{m,\eta}^\mu$  qui résulte de (1.2.2). ■

4.3.11. Les lemmes 4.3.9 et 4.3.10 montrent que, pour tout  $m \gg 1$ , la multiplication par  $m$  dans le groupe  $(K_\eta^\mu)^\perp / K_\eta^{\text{fn}}$  est surjective. Comme ce groupe est fini il est alors nécessairement nul, ce qui achève la démonstration.

### 5. Démonstration de 2.4 (i) : cas où $A$ est à fibres connexes.

5.0. Plaçons-nous maintenant sous les hypothèses générales du théorème 2.4. L'assertion 2.4 (i) étant de nature locale, nous pouvons supposer que  $S$  est affine, et même, grâce à EGA IV, 8.8.2, que  $S$  est le spectre d'une  $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini et normale. D'autre part comme 2.4 est démontré en dimension 1, il existe un gros ouvert  $U \subset S$  (II, 3.1) et un sous-groupe fermé  $K_U \subset A_U$ , plat et quasi-fini sur  $U$ , prolongeant  $K_\eta$ , et muni de plus d'une forme alternée  $e_U$  prolongeant  $e^{L_\eta}$ . Se plaçant aux points maximaux de  $S-U$ , on voit donc que l'on peut supposer que  $S$  est local normal de dimension  $\gg 2$ , et essentiellement de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , donc excellent, et que  $U$  est le complémentaire du point fermé. Enfin, compte tenu du comportement de l'adhérence schématique de  $K_U$  par changement de base fidèlement plat (EGA IV, 11.10.5) nous sommes ramenés par complétion à la situation suivante :

(5.0.1)  $S = \text{Spec } R$ , où  $R$  est local noethérien complet normal de dimension  $\gg 2$ , et si  $s = \text{Spec } k$  désigne le point fermé de  $S$  et  $U = S - \{s\}$ , il existe  $K_U$  fermé dans  $A_U$ , plat et quasi-fini sur  $U$  et prolongeant  $K_\eta$ , et une forme alternée  $e_U$  sur  $K_U$  prolongeant  $e^{L_\eta}$ .

Dans ce § nous supposons de plus que

(5.0.2)  $A$  est à fibres connexes.

Sous ces hypothèses l'adhérence de  $K_U$  dans  $A$  est réunion de  $K_U$  et de l'adhérence de  $K_{U/S}^{\text{fn}}$  (1.3.1) donc il s'agit de voir que  $K_{U/S}^{\text{fn}}$  admet dans  $A$  un prolongement fini et plat sur  $S$ .

Comme  $R$  est local complet nous pouvons considérer, comme dans 2.4 (v), l'extension de Raynaud  $A^{\text{h}}$  de  $A$ , et même (quitte à effectuer un changement de base fini étale) supposer comme dans loc. cit. que  $L^{\text{oh}}$  provient d'un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $\bar{L}$  sur  $B$ . Notons d'autre part que, la correspondance entre sous-groupes de  $A$  et de  $A^{\text{h}}$  exposée en 2.3,



il suffit de voir que le sous-groupe (fini et plat sur  $U$ )  $K_{U/S}^h$  de  $A_U^h$  admet un prolongement  $K^h \subset A^h$ , fini et plat sur  $S$ . Commençons par son "quotient abélien"  $K_{U/S}^{\#} \subset B_U$  (2.3.2) :

5.1. Proposition.  $K_{U/S}^{\#} = K(\bar{L}_U)$  ; de plus  $K(\bar{L})$  est fini et plat sur  $S$ .

La seconde assertion résulte de la première : en effet  $\varphi_{\bar{L}_U} : B_U \rightarrow B_U^t$  est alors une isogénie, donc  $\varphi_{\bar{L}} : B \rightarrow B^t$  est une isogénie.

Montrons la première assertion. L'ensemble des points  $x \in U$  tels que  $K_{U/S}^{\#}(x) \neq K(\bar{L}_U)(x)$  est un ouvert ; s'il n'est pas vide, il existe donc un sous-schéma fermé  $Y \subset S$ , intègre et de dimension 1, de point générique  $\xi$ , tel que :

$$\cdot K_{U/S}^{\#}(\xi) \neq K(\bar{L}_U)(\xi)$$

$$\cdot A_{\xi} \text{ est un schéma abélien sur } \text{Spec } \mathcal{O}_{S, \xi} \text{ (donc } (K_U)_{\xi} = K(L_{\xi})) \text{.}$$

Soit  $S'$  le normalisé de  $Y$  (qui est un trait, car  $Y$  est le spectre d'un anneau local complet). La formation de  $A^h$ ,  $K_{U/S}^h$ ,  $K_{U/S}^{\#}$ , etc., commute au changement de base (local)  $S' \rightarrow S$ , donc nous sommes ramenés au cas où  $S$  est un trait, et la proposition est alors un cas particulier de 2.4 (v). ■

Le groupe  $K(\bar{L})$  fournit donc un prolongement fini et plat de  $K_{U/S}^{\#}$  dans  $B$ , que nous noterons  $K^{\#}$ .

5.2. Soit  $m$  un entier  $\gg 1$  tel que  $mK_U = 0$ . On a alors des diagrammes

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_m T & \longrightarrow & {}_m A^h & \xrightarrow{m\pi} & {}_m B & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & K^{\#} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$(5.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_m T_U & \longrightarrow & {}_m A_U & \longrightarrow & {}_m B_U & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{U/S}^b & \longrightarrow & K_{U/S}^h & \longrightarrow & K_{U/S}^{\#} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \parallel & & \\ & & & & & & (K^{\#})_U & & \end{array}$$

et le problème consiste à compléter la ligne inférieure de (5.2.1) de façon compatible avec celle de (5.2.2). Posons d'abord

$$H = ({}_m \pi)^{-1}(K^{\#}) \subset {}_m A^h ;$$

c'est un sous-groupe fini et plat de  ${}_m A^h$ , extension de  $K^\#$  par  ${}_m T$ . D'autre part on voit immédiatement, comme  ${}_m T$  est de type multiplicatif, que  $K_{U/S}^b$  se prolonge en  $K^b \subset {}_m T$ , fini et plat sur  $S$  (on peut par exemple supposer  $T$  déployé, et utiliser la dualité de Cartier et le fait que  $U$  est connexe puisque  $S$  est normal). Nous sommes donc conduits à un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & K^b & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & K^\# \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & {}_m T & \longrightarrow & H & \longrightarrow & K^\# \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & \swarrow \text{C} & & & \\
 & & C = {}_m T/K & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

et l'existence de l'extension cherchée (de  $K^\#$  par  $K^b$ ) équivaut à celle de la flèche pointillée (rendant le diagramme commutatif), sachant que celle-ci existe déjà sur  $U$ . Or comme  $S$  est normal de dimension  $\geq 2$ , un morphisme  $H_U \rightarrow C_U$  se prolonge en  $H \rightarrow C$  puisque les groupes en question sont finis et plats. Ceci achève de démontrer l'existence de  $K^h$ , donc de  $K$  lorsque  $A$  est à fibres connexes.

6. Démonstration de 2.4 : cas général.

6.1. Commençons par démontrer 2.4 (i). Le raisonnement de 5.0 permet de se placer dans la situation de (5.0.1). De plus l'adhérence de  $K_U$  dans  $A$  est réunion de  $K_U$  et de l'adhérence de  $K_{U/S}^f$  (1.3.0) donc nous devons montrer que  $K_{U/S}^f$  admet un prolongement fini et plat sur  $S$ . Comme dans 5.2, soit  $m \geq 1$  tel que  $m K_U = 0$ . Nous avons des diagrammes

(6.1.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & {}_m A^{fn} & \longrightarrow & {}_m A^f & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & K^{fn} & \longrightarrow & ? & \longrightarrow & ? \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(6.1.2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & {}_m A_U^{fn} & \longrightarrow & {}_m A_U^f & \longrightarrow & {}_m E_U \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & K_{U/S}^{fn} & \longrightarrow & K_{U/S}^f & \longrightarrow & \bar{K}_{U/S} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & & & \\
 & & (K^{fn})_U & & & & 
 \end{array}$$

où il s'agit de compléter la ligne inférieure de (6.1.1) de façon compatible avec celle de (6.1.2). Ici le groupe  $K^{\text{fn}}$  existe grâce à 5.2, et comme  $E$  est étale et fini sur  $S$  nous sommes dans une situation duale de celle de 5.2 (plus exactement les diagrammes faisant intervenir les conoyaux des inclusions verticales sont du type dual de (5.2.1) et (5.2.2)). On peut donc conclure de la même façon à l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^{\text{fn}} \longrightarrow K^{\text{f}} \longrightarrow \bar{K} \longrightarrow 0$$

complétant (6.1.1), ce qui démontre 2.4 (i).

6.2. Les parties (ii) et (iii) de 2.4 sont alors démontrées grâce au lemme 2.4.1. Il reste à montrer (iv) et (v), et nous pouvons pour cela (sauf pour la dernière assertion de (iv)) nous placer dans la situation de (v). L'égalité  $K^{\#} = K(\bar{L})$  résulte alors de la construction de  $K^{\#}$  (5.1). Considérons maintenant la forme alternée composée :

$$K^{\text{fn}} \times K^{\text{fn}} \longrightarrow K^{\text{ab}} \times K^{\text{ab}} \simeq K^{\#} \times K^{\#} \xrightarrow{e_{\bar{L}}} \mathbb{G}_{m,S}.$$

Comme l'ensemble des points de  $S$  où elle ne coïncide pas avec  $e_{\bar{L}}^L$  est un ouvert, nous pouvons appliquer le raisonnement de 5.1 et nous ramener à la dimension 1, ce qui démontre 2.4 (v), ainsi que l'inclusion  $K_S^{\text{fn}} \subset (K_{\mu}^{\text{f}})^{\perp}$  et l'énoncé de non-dégénérescence sur  $K^{\text{ab}}$  dans (iv) (puisque  $\bar{L}$  est non dégénéré). Enfin les autres assertions de (iv) en résultent d'après 4.3.

## 7. Application à la variété duale.

7.1. Théorème. Soit  $S$  un schéma intègre localement noethérien normal de point générique  $\eta$ . Soit  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable dont la fibre générique  $A_{\eta}$  est une variété abélienne. Alors :

(i) Il existe un unique  $S$ -schéma en groupes semi-stable à fibres connexes, noté  $A^{t,0}$ , prolongeant la variété duale  $A_{\eta}^t$  de  $A_{\eta}$ , et une unique biextension  $P$  de  $(A^{t,0}, A)$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$  prolongeant la biextension de Poincaré  $P_{\eta}$  sur  $A_{\eta}^t \times A_{\eta}$ .

(ii) Soit  $L^0$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A^0$ , dont la restriction  $L_{\eta}$  à  $A_{\eta}$  est non dégénérée. Notons  $A^{[1]}$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A$  contenant le groupe  $K_S(L_{\eta})$  de 2.4. Alors le morphisme  $\varphi_{L_{\eta}} : A_{\eta} \longrightarrow A_{\eta}^t$  se prolonge en un unique morphisme  $\varphi_{L_{\eta}, S} : A^{[1]} \longrightarrow A^{t,0}$ ,

et l'on a  $\text{Ker}(\varphi_{L_\eta, S}) = K_S(L_\eta)$ . De plus si  $L^{[1]}$  est un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste sur  $A^{[1]}$  prolongeant  $L^\circ$ , on a un isomorphisme canonique de biextensions sur  $A^{[1]} \times A^{[1]}$  :

$$(7.1.1) \quad \mathcal{D}_2(L^{[1]}) \xrightarrow{\sim} (\varphi_{L_\eta, S} \times \text{Id}_{A^{[1]}})^*(P_{A^{t,0} \times A^{[1]}})$$

prolongeant l'isomorphisme habituel sur  $A_\eta \times A_\eta$ , et l'extension centrale de  $K_S(L_\eta) = \text{Ker}(\varphi_{L_\eta, S})$  par  $\mathbb{G}_{m, S}$  déduite de cet isomorphisme par I.4.1, coïncide avec l'extension  $\mathcal{G}(L^{[1]})$  de 2.4 (iii).

Démontrons (i). L'assertion d'unicité pour  $A^{t,0}$  est bien connue en codimension 1 sur  $S$ , et en codimension  $\geq 2$  elle en résulte par [R1], IX.1.4. L'existence et l'unicité de  $P$  résultent de II,3.6.

Pour l'existence de  $A^{t,0}$  nous pouvons supposer  $S$  local. Il existe alors sur  $A^\circ$  un  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L^\circ$  comme dans (ii) (par exemple ample relativement à  $S$ , cf. [R1]). Il suffit alors de montrer que le faisceau quotient  $A^\circ/K_S(L_\eta) \cap A^\circ$  est un schéma, puisque  $A_\eta^t$  s'identifie à  $A_\eta/K(L_\eta)$ . Plus généralement :

7.1.2. Lemme. Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable,  $K$  un sous-schéma en groupes fermé de  $A$ , plat et quasi-fini sur  $S$ . On suppose vérifiée l'une des deux hypothèses suivantes :

(i) localement pour la topologie étale sur  $S$ ,  $A$  est quasi-projectif.

(ii)  $K$  est étale sur  $S$ .

Alors le faisceau quotient  $A/K$  est un  $S$ -schéma en groupes (évidemment semi-stable).

Démonstration : montrons d'abord que  $A/K$  est un espace algébrique sur  $S$  (cf. [K]). C'est clair dans le cas (ii) ; dans le cas (i) la question est locale sur  $S$  pour la topologie étale, donc nous pouvons supposer que  $A$  est quasi-projectif sur  $S$  et que  $K$  se dévise en

$$0 \longrightarrow K^f \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où  $K^f$  est fini et plat et  $E$  étale sur  $S$ . D'après SGA 3, V.4.1 et l'hypothèse de quasi-projectivité, le quotient  $A' = A/K^f$  est un schéma, donc  $A/K = A'/E$  est bien un espace algébrique.

Pour voir que  $A/K$  est un schéma, il suffit de remarquer que (localement sur  $S$ ) il existe  $N \geq 1$  tel que  $K \subset N A$  ; il existe donc un mor-

phisme quasi-fini  $\pi : A/K \longrightarrow A$ , et l'on applique [K], II.6.16 (un espace algébrique quasi-fini et séparé sur un schéma est un schéma). ■

(ii). Le quotient  $A^{[1]}/K_S(L_\eta)$  s'identifie à  $A^\circ/K_S(L_\eta) \cap A^\circ$  puisque  $A^{[1]} = K_S(L_\eta)A^\circ$ . Il s'identifie donc aussi à  $A^{t^\circ}$  d'après la construction faite en (i); modulo cette identification, on définit  $\varphi_{L_\eta, S}$  comme la projection naturelle  $A^{[1]} \longrightarrow A^{[1]}/K_S(L_\eta)$ .

L'isomorphisme (7.1.1) résulte de II,3.6. Enfin on a sur le torseur  $L^{[1]}$  restreint à  $K_S(L_\eta)$  deux structures d'extension centrale qui coïncident au point générique de  $S$ , donc coïncident sur  $S$ . ■

## 8. Gonflement des modèles semi-stables.

8.1. Proposition. Soient  $S$  un schéma,  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable,  $j : H \hookrightarrow H'$  un morphisme de  $S$ -schémas en groupes commutatifs étales, séparés et quasi-finis sur  $S$ , qui est une immersion ouverte, et  $\varphi : H \longrightarrow A$  un morphisme fini de  $S$ -schémas en groupes. Alors la somme amalgamée  $A' = A \amalg_H H'$  existe dans la catégorie des  $S$ -schémas en groupes commutatifs; de plus le morphisme naturel  $H' \longrightarrow A'$  est fini, le morphisme naturel  $A \longrightarrow A'$  est une immersion ouverte, et  $A'$  est un  $S$ -schéma en groupes semi-stable.

En effet considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} : H &\longrightarrow A \times_S H' \\ h &\longmapsto (\varphi(h), -j(h)) . \end{aligned}$$

Comme  $\text{pr}_2 \circ \bar{\Delta} : H \longrightarrow H'$  est une immersion,  $\bar{\Delta}$  est une immersion.

Comme  $\text{pr}_1 \circ \bar{\Delta} : H \longrightarrow A$  est fini et  $H'$  séparé,  $\bar{\Delta}$  est fini (EGA II, 6.1.5).

Donc  $\bar{\Delta}$  est une immersion fermée, et comme  $H$  est plat sur  $S$ , le quotient

$$A' = \text{Coker}(\bar{\Delta})$$

est un schéma en groupes semi-stable (cas (ii) de 7.1.2) et il est immédiat que c'est la somme amalgamée cherchée. Pour voir que le morphisme naturel  $A \xrightarrow{u} A'$  est une immersion ouverte il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 (a, h) & A \times_S H & \xrightarrow{\text{Id} \times j} & A \times_S H' & \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \pi & \text{(projection naturelle)} \\
 a + \varphi(h) & A & \xrightarrow{u} & A' & 
 \end{array}$$

est cartésien, les deux flèches verticales étant des épimorphismes de même noyau. Comme  $\pi$  est fidèlement plat et que  $\text{Id} \times j$  est une immersion ouverte,  $u$  est une immersion ouverte.

On montre de même que  $v: H' \rightarrow A'$  est fini, grâce au diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
 (h, h') & H \times_S H' & \xrightarrow{\varphi \times \text{Id}} & A \times_S H' & \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \pi & \\
 j(h) + h' & H' & \xrightarrow{v} & A' & \blacksquare
 \end{array}$$

**8.2. Corollaire.** Soient  $S$  un schéma noethérien excellent intègre,  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable,  $N$  un entier  $\gg 1$ . Il existe alors un morphisme fini surjectif  $\pi: S_1 \rightarrow S$ , avec  $S_1$  intègre normal, et un  $S_1$ -schéma en groupes semi-stable  $A'_1$ , contenant  $A_1 = A \times_S S_1$  comme sous-groupe ouvert et ayant même fibre générique que lui, et tel que le noyau de la multiplication par  $N$  dans  $A'_1$  soit fini.

Désignons en effet par  $F$  le corps des fonctions de  $S$  et par  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$ . Soit  $F_1$  une extension finie de  $F$  contenue dans  $\bar{F}$ , telle que les points d'ordre  $N$  de  $A(\bar{F})$  soient rationnels sur  $F_1$ , et prenons pour  $S_1$  le normalisé de  $S$  dans  $F_1$ , qui est fini sur  $S$  puisque  $S$  est excellent. Notons  $G$  le groupe fini  ${}_N A_1(F_1)$ . Pour tout  $a \in G$ , considérons l'adhérence  $\overline{\{a\}}$  de  $a$  dans  $A_1$ , munie de sa structure de sous-schéma réduit. Comme  $\overline{\{a\}}$  est contenu dans  ${}_N A_1$  il est quasi-fini sur  $S_1$ ; comme  $a$  est rationnel sur  $F_1$ , le morphisme naturel  $\overline{\{a\}} \rightarrow S_1$  est birationnel donc est une immersion ouverte d'après le "Main theorem" de Zariski (puisque  $S_1$  est normal). Considérons le schéma somme

$$H = \coprod_{a \in G} \overline{\{a\}}$$

c'est de façon naturelle un  $S$ -schéma en groupes puisque la loi de groupe de  $A_1$  induit des morphismes

$$\overline{\{a\}} \times_S \overline{\{b\}} \longrightarrow \overline{\{a+b\}} \quad (a, b \in G)$$

qui sont d'ailleurs des immersions ouvertes.

On a par ailleurs une immersion ouverte

$$j : H \longrightarrow H' := G_{S_1} = \coprod_{a \in G} S_1$$

de  $H$  dans le  $S_1$ -groupe constant  $H'$ , et un morphisme naturel

$$\varphi : H \longrightarrow A_1$$

induit par les inclusions  $\overline{\{a\}} \hookrightarrow A_1$ , et  $\varphi$  est fini puisque ces dernières sont des immersions fermées. Nous pouvons donc appliquer 8.1 et poser

$$A'_1 = A_1 \mu_H H' ;$$

c'est bien un  $S_1$ -schéma en groupes semi-stable contenant  $A_1$  comme sous-groupe ouvert ;  $A'_1$  et  $A_1$  ont même fibre générique car  $H$  et  $H'$  ont tous deux pour fibre générique  $G_{F_1}$ . Enfin, comme  $A'_1$  est semi-stable, le groupe  ${}_N A'_1$  est plat sur  $S$  donc son espace sous-jacent est l'adhérence dans  $A'_1$  de la fibre générique  $({}_N A'_1)_{F_1} = H'_{F_1}$  ; c'est donc aussi l'image dans  $A'_1$  du groupe constant  $H'$ , qui est fini sur  $S$ . Il en résulte que  $({}_N A'_1)_{\text{red}}$  est fini sur  $S$  ce qui achève la démonstration. ■

8.2.1. Compléments. Supposons que  $S$  soit normal, que  $N$  soit inversible sur  $S$  et (pour fixer les idées) que  $A_F$  soit une variété abélienne de dimension  $g$  sur  $F$ . Le morphisme  $\pi$  consiste à rendre rationnels les points d'ordre  $N$  de  $A_{\overline{F}}$  ; si  $U$  désigne un ouvert de  $S$  tel que  $A_U$  soit un  $U$ -schéma abélien, on peut supposer de plus, dans 8.2, que :

- a)  $\pi$  est étale au-dessus de  $U$ .
- b)  $\pi$  est modérément ramifié en codimension 1 sur  $S$ .
- c)  $\pi$  est galoisien, de groupe de Galois isomorphe à un sous-groupe de  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ .

En effet a) et c) résultent du fait que  $({}_N A)_U$  est isomorphe, localement pour la topologie étale sur  $U$ , à  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_U^{2g}$ . Montrons b). Soit  $x$  un point de codimension 1 de  $S$  et soit  $I_x^{(p)} \subset \text{Gal}(F_S/F)$  le groupe d'inertie sauvage correspondant, où  $p$  est la caractéristique résiduelle de  $x$ . Il s'agit de montrer que, pour tout nombre premier  $\ell \neq p$ ,  $I_x^{(p)}$  opère trivialement sur le module de Tate  $T_\ell(A_{F_S})$ . Comme  $GL(T_\ell(A_{F_S}))$  est un groupe de Lie  $\ell$ -adique et que  $I_x^{(p)}$  est un pro- $p$ -groupe, l'action en question se factorise par un quotient fini de  $I_x^{(p)}$  ; comme  $A$  a réduction semi-stable au point  $x$ , cette action est unipotente (SGA 7, IX.3.5) donc triviale.

## CHAPITRE V

Représentations des groupes thêtaSommaire.

- 0. Introduction.
- 1. Rappels et notations.
- 2. Représentations de poids 1 des groupes thêta non dégénérés.
- 3. Représentations de poids 1 et sous-groupes de niveau.

0. Introduction.

Ce chapitre est entièrement indépendant des précédents ; il vise à établir des théorèmes de structure pour les représentations de poids 1 des "groupes thêta non dégénérés" sur une base quelconque, à valeurs dans un module non nécessairement localement libre. Le cas d'un groupe lisse (qui est essentiellement celui des classiques "groupes de Heisenberg finis") est traité dans [M3] ; celui d'un groupe non nécessairement lisse sur un corps algébriquement clos se trouve dans l'appendice de [Se] (d'après des notes de Mumford).

Au §2 on obtient l'analogie du théorème de structure habituel (th. 2.4.2) lorsque l'on admet l'existence d'une représentation localement libre ayant le "bon rang" ; on montre ensuite qu'une telle représentation existe après un changement de base fidèlement plat (et même lisse, cf. th. 2.7). Le §3 étudie les invariants d'une représentation de poids 1 sous un "sous-groupe de niveau" (th. 3.2) et en particulier montre explicitement, lorsque le sous-groupe de niveau est "lagrangien", comment reconstituer la représentation à partir de ses invariants (th. 3.4).

1. Rappels et notations.

1.0. Dans tout ce chapitre,  $S$  désigne un schéma. Si  $X$  est un  $S$ -schéma affine sur  $S$ , on note  $\underline{A}(X)$  la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente associée, de sorte que  $X \simeq \text{Spec } \underline{A}(X)$ .

Tous les (pré) faisceaux considérés seront sur le petit site des  $S$ -schémas plats sur  $S$ , avec la topologie fppf. En particulier un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent  $M$  est identifié au faisceau  $T \longmapsto \Gamma(T, M_T)$ , et un  $S$ -schéma plat sur  $S$  au faisceau qu'il représente.



On note  $QC_S$  la catégorie des  $\mathcal{O}_S$ -modules quasi-cohérents.

1.1. Tous les  $S$ -schémas en groupes seront supposés dans ce chapitre affines et plats sur  $S$ . Si  $G$  est un tel schéma en groupes, un  $G$ -module (à gauche) est par définition un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent  $M$ , muni d'une représentation linéaire de  $G$  (au sens des faisceaux), i.e. d'un morphisme de faisceaux en groupes

$$(1.1.1) \quad \rho : G \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(M)$$

ou, ce qui revient au même (en considérant le point de  $G$  à valeurs dans le  $S$ -schéma  $G$  correspondant à  $\text{Id}_G$ ) d'un automorphisme du  $\mathcal{O}_G$ -module  $M_G$ , ou encore d'un homomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$(1.1.2) \quad M \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes M$$

vérifiant certaines relations. Lorsque l'on interprète  $\underline{A}(G) \otimes M$  comme le faisceau  $\underline{\text{Hom}}(G, M)$  des "fonctions sur  $G$  à valeurs dans  $M$ ", alors l'homomorphisme (1.1.2) associe à  $m \in M$  la fonction  $g \mapsto \rho(g)(m)$  sur  $G$ .

1.2. Si  $M$  est un  $G$ -module, on note  $M^G$  le sous-faisceau de  $M$  formé des  $G$ -invariants. Remarquons que  $M^G$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent : en effet, désignant par  $M_{\text{zar}}$  la restriction de  $M$  au petit site zarisien de  $S$ , ceci revient à dire que la formation de  $(M_{\text{zar}}^H)^G$  commute au changement de base plat, ce qui est immédiat car il peut se définir comme le noyau d'un morphisme convenable

$$M_{\text{zar}} \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes M_{\text{zar}}.$$

(Cette propriété des invariants est la raison essentielle pour laquelle nous nous limitons au petit site, lequel suffit à nos besoins puisque nous ne considérons que des schémas en groupes plats).

1.3. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes : le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\underline{A}(G) = \underline{\text{Hom}}(G, \mathcal{O}_S)$  est muni d'une structure naturelle de  $(G \times G)$ -module, grâce à la formule

$$(1.3.1) \quad [(\gamma, \gamma')f](g) = f(\gamma'^{-1}g\gamma) \quad (f \in \underline{A}(G); \gamma, \gamma', g \in G).$$

Nous noterons  $\underline{A}(G)_+$  (resp.  $\underline{A}(G)_-$ ) le  $G$ -module obtenu en restreignant l'action ci-dessus à  $\{1\} \times G$  (resp.  $G \times \{1\}$ ). Notons que  $\underline{A}(G)_+$  est simplement la représentation régulière (droite) de  $G$ .

Si  $M \in \text{QC}_S$  nous noterons  $M^{\text{triv}}$  le  $G$ -module  $M$  muni de l'action triviale de  $G$ . On vérifie alors sans difficulté le lemme suivant :

1.3.2. Lemme. Si  $M$  est un  $G$ -module, le morphisme (1.1.2)

$$M \longrightarrow \underline{A}(G) \otimes M = \underline{\text{Hom}}(G, M)$$

est un  $G$ -morphisme de  $M$  dans  $\underline{A}(G)_+ \otimes M^{\text{triv}}$ , et un isomorphisme de  $M^{\text{triv}}$  avec le sous-module

$$(\underline{A}(G)_- \otimes M)^G = \underline{\text{Hom}}_G(G, M)$$

de  $\underline{A}(G) \otimes M$ . ■

1.4. Si  $G$  est un  $S$ -schéma en groupes, on note  $I_G \subset \underline{A}(G)$  l'idéal de la section unité. Si  $G$  est fini localement libre sur  $S$ , on note  $\hat{G}$  son dual de Cartier, de sorte que

$$(1.4.1) \quad \hat{G} = \underline{\text{Hom}}_{S\text{-groupes}}(G, \mathbb{G}_{m,S})$$

$$\underline{A}(\hat{G}) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-Mod}}(\underline{A}(G), \mathcal{O}_S)$$

et que  $\underline{A}(\hat{G})$  est de façon naturelle un  $\underline{A}(G)$ -module, qui n'est autre que le module dualisant relatif de  $G$  sur  $S$ .

Le groupe  $G$  opère de façon naturelle sur le faisceau  $\underline{A}(\hat{G})$ ; on note

$$(1.4.2) \quad D_G = \underline{A}(\hat{G})^G \subset \underline{A}(\hat{G})$$

le sous- $\mathcal{O}_S$ -module des "mesures invariantes" de  $G$ . Il possède les propriétés suivantes (cf. [R3], Appendice) :

(1.4.3)  $D_G$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible et un idéal de  $\underline{A}(\hat{G})$ ; les idéaux  $I_{\hat{G}}$  et  $D_G$  de  $\underline{A}(\hat{G})$  sont localement facteurs directs dans  $\underline{A}(\hat{G})$ ; leur formation commute à tout changement de base, et chacun est l'annulateur de l'autre.

(1.4.4) Le morphisme

$$\underline{A}(G) \otimes_{\mathcal{O}_S} D_G \longrightarrow \underline{A}(\hat{G})$$

déduit de la structure de  $\underline{A}(G)$ -module sur  $\underline{A}(\hat{G})$  est un isomorphisme de  $\underline{A}(G)$ -modules (on notera que le dualisant  $\underline{A}(\hat{G})$  est un  $\underline{A}(G)$ -module inversible).

(1.4.5) On dispose par dualité du  $\mathcal{O}_S$ -module inversible  $D_{\hat{G}} \hat{\leftarrow} \underline{A}(G)$  :  
alors le morphisme

$$D_{\hat{G}} \otimes_{\mathcal{O}_S} D_G \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

induit par l'accouplement naturel entre  $\underline{A}(G)$  et  $\underline{A}(\hat{G})$ , est une dualité parfaite entre  $D_G$  et  $D_{\hat{G}}$  (loc. cit., lemme 7).

## 2. Représentations de poids 1 des groupes thêta non dégénérés.

2.0. On se donne dans ce § un  $S$ -schéma en groupes commutatif  $K$ , fini localement libre de rang  $d^2$  sur  $S$ , et un groupe thêta  $\mathcal{G}$  au-dessus de  $K$ , c'est-à-dire ([M2], § 23) une extension centrale

$$(2.0.1) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 1$$

de  $K$  par  $\mathbb{G}_{m,S}$ , que nous supposerons non dégénérée, c'est-à-dire que l'accouplement alterné

$$(2.0.2) \quad e : K \times K \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}$$

défini par  $e(\pi(g), \pi(g')) = [g, g'] = gg'g^{-1}g'^{-1}$ , est une dualité parfaite. Notons que  $\mathcal{G}$  est affine et plat sur  $S$  puisque c'est un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $K$ .

2.1. Si  $M$  est un  $\mathcal{G}$ -module, la restriction à  $\mathbb{G}_{m,S}$  de l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $M$  fournit une décomposition naturelle

$$(2.1.1) \quad M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^{(i)}$$

où  $M^{(i)}$  est le plus grand sous-module de  $M$  sur lequel  $\mathbb{G}_m$  opère par le caractère  $\lambda \mapsto \lambda^i$ . On dit que  $M$  est de poids  $i \in \mathbb{Z}$  si  $M = M^{(i)}$ .

En particulier, l'action de  $\mathcal{G}$  sur lui-même par translations donne une décomposition

$$(2.1.2) \quad \underline{A}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underline{A}^{(i)}(\mathcal{G})$$

où  $\underline{A}^{(i)}(\mathcal{G})$  est l'ensemble des fonctions  $f$  sur  $\mathcal{G}$  vérifiant  $f(\lambda g) = \lambda^i f(g)$  pour  $\lambda \in \mathbb{G}_m$  et  $g \in \mathcal{G}$ . Il est alors immédiat qu'un  $\mathcal{G}$ -module  $M$  est de poids  $i$  si et seulement si le morphisme (1.1.2)

$$M \longrightarrow \underline{A}(\mathcal{G}) \otimes M$$

se factorise par  $\underline{A}^{(i)}(\mathcal{G}) \otimes M$ .

2.2. Bien entendu la décomposition (2.1.2) ne dépend que du  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $K$  sous-jacent à  $\mathcal{Q}$  : de façon précise si  $L$  est le  $\mathcal{O}_K$ -module inversible associé à ce toseur (de sorte que  $\mathcal{Q} = \underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_K\text{-mod}}(\mathcal{O}_K, L)$ ) et si  $p : K \rightarrow S$  désigne le morphisme structural, on a

$$(2.2.1) \quad \underline{A}^{(i)}(\mathcal{Q}) = p_*(L^{\otimes -i})$$

ce qui montre que  $\underline{A}^{(i)}(\mathcal{Q})$  est un  $\underline{A}(K)$ -module inversible et un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang  $d^2$ .

Il est immédiat que l'action de  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  sur  $\underline{A}(\mathcal{Q})$  définie en 1.3 respecte la décomposition (2.1.2) ; nous noterons

$$(2.2.2) \quad E^{(i)}$$

le  $(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ -module ainsi obtenu, ayant  $\underline{A}^{(i)}(\mathcal{Q})$  pour module sous-jacent, et

$$(2.2.3) \quad E_+^{(i)} \quad (\text{resp. } E_-^{(i)}) ,$$

(conformément à 1.3) le  $\mathcal{Q}$ -module obtenu en restreignant à  $\{1\} \times \mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{Q} \times \{1\}$ ) l'action de  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  sur  $E^{(i)}$  ; il est clair que  $E_+^{(i)}$  (resp.  $E_-^{(i)}$ ) est de poids  $i$  (resp.  $-i$ ).

Nous nous intéresserons désormais surtout aux  $\mathcal{Q}$ -modules de poids 1 ; ils forment une catégorie abélienne, que nous noterons

$$\text{REP}^1(\mathcal{Q}) .$$

Considérons d'abord le  $(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ -module  $E^{(1)}$  :

2.3. Lemme.  $E^{(1)}$  est un  $(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ -module irréductible, au sens suivant : tout sous- $(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ -module de  $E^{(1)}$  est de la forme  $IE^{(1)}$ , où  $I$  est un idéal de  $\mathcal{O}_S$ .

La démonstration est identique à celle de [Se], Th. A.4, reprise dans [Sz], VII, 5.2.3.1 : si  $W \subset E^{(1)}$  est invariant sous  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ , il est en particulier invariant sous la diagonale  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ , d'où l'on déduit que si  $f \in W$  et  $\gamma \in \mathcal{Q}$ ,  $W$  contient encore la fonction

$$g \mapsto f(\gamma^{-1}g\gamma) = [\gamma^{-1}, g]f(g) .$$

Comme  $\mathcal{Q}$  est non dégénéré,  $[\gamma^{-1}, g] = e(\pi(g), \pi(\gamma))$  parcourt l'ensemble des caractères de  $K$  lorsque  $\gamma$  parcourt  $\mathcal{Q}$  ; appliquant ceci au caractère universel de  $K$  (défini après le changement de base  $\hat{K} \rightarrow S$ ), on en déduit facilement que  $W$  est un sous- $\underline{A}(K)$ -module de

$E^{(1)}$ , donc de la forme  $JE^{(1)}$  où  $J$  est un idéal de  $\underline{A}(K)$ , car  $E^{(1)}$  est un  $\underline{A}(K)$ -module inversible. Enfin comme  $W$  est invariant sous  $\zeta \times \{1\}$ , l'idéal  $J$  est invariant par translations donc provient d'un idéal de  $\mathcal{O}_S$ . ■

2.4. Supposons maintenant donné un  $\zeta$ -module

$$V \in \text{REP}^{(1)}(\zeta)$$

qui soit localement libre de rang  $d$  en tant que  $\mathcal{O}_S$ -module (on rappelle que  $\text{rg } K = d^2$ ).

Le morphisme (1.1.2) (pour  $M=V$ ) donne naissance à un homomorphisme

$$(2.4.1) \quad V \otimes_{\mathcal{O}_S} V^\vee \longrightarrow \underline{A}^{(1)}(\zeta) = E^{(1)}$$

qui, à  $v \otimes v^\vee \in V \otimes V^\vee$ , associe la fonction  $g \longmapsto \langle gv, v^\vee \rangle$  sur  $\zeta$ . C'est manifestement un  $\zeta \times \zeta$ -morphisme, lorsque l'on fait opérer  $\zeta \times \{1\}$  sur  $V$  par l'action donnée de  $\zeta$ , et  $\{1\} \times \zeta$  sur  $V^\vee$  par l'action contragrédiente.

2.4.2. Théorème.

(i) Le morphisme (2.4.1) est un isomorphisme.

(ii)  $V$  est un  $\zeta$ -module irréductible (au sens de 2.3).

(iii) Si  $M$  est un  $\zeta$ -module de poids 1 quelconque, le  $\zeta$ -morphisme naturel

$$(2.4.2.1) \quad \alpha_M : V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\zeta}(V, M)^{\text{triv}} \longrightarrow M$$

$$v \otimes u \longmapsto u(v)$$

est un isomorphisme.

(iv) Si  $N$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent, le  $\zeta$ -morphisme naturel

$$(2.4.2.2) \quad \beta_N : N \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\zeta}(V, V \otimes N^{\text{triv}})$$

$$x \longmapsto (v \longmapsto v \otimes x)$$

est un isomorphisme.

2.4.3. Corollaire. Les foncteurs

$$M \longmapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{Q}}(V, M) : \text{REP}^1(\mathcal{Q}) \longrightarrow \text{QC}_S$$

$$N \longmapsto V \otimes N^{\text{triv}} : \text{QC}_S \longrightarrow \text{REP}^1(\mathcal{Q})$$

sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre.

C'est en effet une reformulation de 2.4.2 (iii) et (iv).

Démontrons 2.4.2 (i). Grâce à 2.3, nous savons que l'image de (2.4.1) est de la forme  $IE^{(1)}$ , où  $I \subset \mathcal{O}_S$  est un idéal. Considérons le composé

$$V \otimes V^{\vee} \xrightarrow{(2.4.1)} \underline{A}^{(1)}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_S$$

où  $\varepsilon$  est l'évaluation à l'origine de  $\mathcal{Q}$ . Ce composé n'est autre que la forme canonique  $v \otimes v^{\vee} \longmapsto \langle v, v^{\vee} \rangle$  donc est surjectif. Il en résulte que  $I = \mathcal{O}_S$  donc que (2.4.1) est surjectif, d'où notre assertion puisque  $V \otimes V^{\vee}$  et  $E^{(1)}$  sont de même rang  $d^2$ .

Pour établir (ii) considérons un sous- $\mathcal{Q}$ -module  $W$  de  $V$  : alors  $W \otimes V^{\vee}$  est un sous- $(\mathcal{Q} \times \mathcal{Q})$ -module de  $V \otimes V^{\vee} \simeq E^{(1)}$ , donc il existe un idéal  $I \subset \mathcal{O}_S$  tel que  $W \otimes V^{\vee} = I(V \otimes V^{\vee}) = (IV) \otimes V^{\vee}$  d'où  $W = IV$ , cqfd.

Notons ensuite que (iv) résulte de (iii) : il est en effet immédiat que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V \otimes N & \xrightarrow{\text{Id}_V \otimes \beta_N} & V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{Q}}(V, V \otimes N^{\text{triv}}) \\ & \searrow \text{Id}_{V \otimes N} & \swarrow \alpha_{V \otimes N^{\text{triv}}} \\ & & V \otimes N^{\text{triv}} \end{array}$$

est commutatif : si donc  $\alpha_{V \otimes N^{\text{triv}}}$  est un isomorphisme, il en est de même de  $\text{Id}_V \otimes \beta_N$ , donc de  $\beta_N$ .

Pour montrer (iii), considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{Q}}(V, M) & \xleftarrow{\text{Id}_V \otimes (\text{inclusion naturelle})} & V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(V, M) \\ \downarrow \alpha_M & & \downarrow \wr \\ & & V \otimes V^{\vee} \otimes M \\ & \nearrow \gamma & \downarrow \wr \\ & & E^{(1)} \otimes M \\ & \xrightarrow{(1.1.2)} & \end{array}$$

Je dis que ce diagramme est commutatif. D'abord, si  $v \in V$ ,  $v^v \in V^v$  et  $m \in M$ , l'image de  $v \otimes v^v \otimes m$  par la flèche (2.4.1)  $\otimes \text{Id}_M$  est la fonction  $g \mapsto \langle gv, v^v \rangle_m$  sur  $\mathcal{G}$  à valeurs dans  $M$ . On en déduit que si  $v \in V$  et  $u \in \underline{\text{Hom}}(V, M)$  (et en particulier si  $u \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}}(V, M)$ ) alors  $\gamma(v \otimes u)$  est la fonction

$$g \mapsto u(gv) .$$

Partons maintenant de  $v \in V$  et  $u \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}}(V, M)$ . Alors  $\alpha_M(v \otimes u) = u(v) \in M$ , et lorsqu'on applique le morphisme (1.1.2) à cet élément de  $M$  on trouve la fonction

$$g \mapsto gu(v) = u(gv)$$

puisque  $u$  est un  $\mathcal{G}$ -morphisme, d'où la commutativité annoncée.

D'autre part, faisons opérer  $\mathcal{G}$  sur  $V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}_S}(V, M)$  par l'action triviale sur  $V$  et par  $(g, u) \mapsto gug^{-1}$  sur  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}_S}(V, M)$ ; il est alors immédiat que  $\gamma$  est un  $\mathcal{G}$ -morphisme à valeurs dans  $E_{-}^{(1)} \otimes M$ ; il en résulte que  $\alpha_M$  s'identifie à la flèche induite par  $\gamma$  sur les  $\mathcal{G}$ -invariants, puisque  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}}(V, M) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}_S}(V, M)^{\mathcal{G}}$  par définition, et qu'on a déjà vu (1.3.2) que  $M = (E_{-}^{(1)} \otimes M)^{\mathcal{G}}$ . Ceci achève la démonstration puisque  $\gamma$  est un isomorphisme. ■

2.5. Les résultats de 2.4 amènent à poser le problème de l'existence (après un changement de base "raisonnable") d'une représentation localement libre de rang  $d$ . Commençons par indiquer la méthode "classique" pour obtenir de telles représentations :

2.5.1. Définition. Un sous-groupe de niveau de  $\mathcal{G}$  est un sous-schéma en groupes  $H \subset \mathcal{G}$ , fini localement libre sur  $S$  et tel que  $H \cap \mathcal{G}_m = \{1\}$ . Un sous-groupe de niveau est dit lagrangien s'il est de rang  $d$  sur  $S$ .

Si  $H$  est un sous-groupe de niveau de  $\mathcal{G}$ , la projection  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow K$  induit un isomorphisme de  $H$  sur un sous-groupe  $H_1$  de  $K$ ; en particulier  $H$  est commutatif et  $H_1$  est isotrope pour la forme  $e : K \times K \rightarrow \mathcal{G}_m$ , donc le rang  $d'$  de  $H$  divise  $d$ , et l'orthogonal  $H_1^{\perp}$  de  $H_1$  (noyau du morphisme composé  $K \xrightarrow{\sim} \hat{K} \rightarrow \hat{H}_1$ ) est fini localement libre de rang  $d^2/d'$ . En particulier  $H$  est lagrangien si et seulement si  $H_1 = H_1^{\perp}$ ; nous dirons dans ce cas que  $H_1$  est un sous-groupe lagrangien de  $K$ . On prendra garde qu'un sous-groupe lagrangien n'a pas nécessairement de supplémentaire : on peut avoir par exemple

$K = (\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}) \times \mu_{n^2}$  et  $H_1 \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mu_n$ . Enfin il résulte de la démonstration de 2.5.4 ci-dessous que  $H$  est lagrangien si et seulement si, pour tout changement de base  $S' \rightarrow S$ , le groupe  $H_{S'}$  est maximal parmi les sous-groupes de niveau de  $\mathcal{Q}_{S'}$ .

2.5.2. Proposition. Soit  $H \subset \mathcal{Q}$  un sous-groupe de niveau de rang  $d'$ , et posons

$$V = (E_-^{(1)})_H = (E^{(1)})_{\{1\} \times H} = \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}).$$

Alors  $V$  est un sous- $\mathcal{Q}$ -module de  $E_+^{(1)}$ , localement libre de rang  $d^2/d'$  comme  $\mathcal{O}_S$ -module. En particulier si  $H$  est lagrangien,  $V$  est localement libre de rang  $d$ .

En effet,  $V$  est le faisceau des morphismes  $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{O}_S$  vérifiant  $f(hg) = f(g)$  et  $f(\lambda g) = \lambda f(g)$  pour  $h \in H$ ,  $g \in \mathcal{Q}$  et  $\lambda \in \mathbb{G}_m$ . Il s'identifie donc à l'image directe sur  $S$  d'un certain faisceau inversible sur  $K/H$  (à savoir le dual du faisceau inversible associé au  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $H \setminus \mathcal{Q}$  sur  $K/H$ ) d'où la proposition puisque  $K/H$  est localement libre de rang  $d^2/d'$ . ■

Nous voyons donc que l'existence d'un sous-groupe de niveau lagrangien implique celle d'une représentation de poids 1, localement libre de rang  $d$ . Or :

2.5.3. Proposition. Le foncteur

$$N: (\text{Sch}/S)^{\circ} \rightarrow (\text{Ens})$$

qui, à un  $S$ -schéma  $S'$ , associe l'ensemble des sous-groupes de niveau lagrangiens de  $\mathcal{Q}_{S'}$ , est représentable par un  $S$ -schéma propre et surjectif sur  $S$ .

Démonstration : on représente d'abord le foncteur  $N_1$  des sous-groupes lagrangiens de  $K$  par un fermé de la grassmannienne des quotients de rang  $d$  de l'algèbre  $\underline{A}(K)$  de  $K$ . Sur le schéma obtenu (encore noté  $N_1$ ) on a le sous-groupe universel  $H_1 \subset K_{N_1}$ ; le faisceau des relèvements de  $H_1$  dans  $\mathcal{G}_{N_1}$  est alors un torseur (sur  $N_1$ ) sous le groupe fini  $\hat{H}_1$ , puisque  $\text{Ext}^1(H_1, \mathbb{G}_m) = 0$ . Ce tosseur est le  $S$ -schéma propre cherché, la surjectivité résultant du lemme ci-dessous :

2.5.4. Lemme. Si  $S = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps algébriquement clos, le groupe  $\mathcal{Q}$  admet un sous-groupe de niveau lagrangien.



En effet, soit  $H_1 \subset K$  un sous-groupe maximal parmi les sous-groupes isotropes, et soit  $H_1^\perp$  son orthogonal pour la forme  $e$ . Supposons  $H_1 \subsetneq H_1^\perp$  et soit  $Z \subset H_1^\perp/H_1$  un sous-groupe de rang premier. Soit  $H \subset \mathcal{G}$  un sous-groupe de niveau relevant  $H_1$  (il en existe car  $\text{Ext}^1(H_1, \mathbb{G}_m) = 0$ ) et considérons le groupe thêta non dégénéré

$$\bar{\mathcal{G}} = \pi^{-1}(H_1^\perp)/H$$

au-dessus de  $H_1^\perp/H_1$  : alors d'après [M2], § 23, lemme 1 (ou [Sz], VII, th. 2.3) l'image réciproque de  $Z$  dans  $\bar{\mathcal{G}}$  est un groupe commutatif, i.e.  $Z$  est isotrope dans  $H_1^\perp/H_1$ , ce qui contredit le choix de  $H_1$ . On a donc  $H_1 = H_1^\perp$ , donc  $H_1$  et  $H$  sont de rang  $d$  puisque  $K/H_1^\perp \simeq \hat{H}_1$ . ■

La proposition 2.5.2 et le lemme 2.5.4 permettent de retrouver (compte tenu de 2.4) le classique

**2.5.5. Théorème.** On suppose que  $S = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps algébriquement clos. Alors  $\mathcal{G}$  admet une unique représentation irréductible  $V$  de poids 1. On a  $\dim_k V = d$ , et toute représentation de poids 1 de  $\mathcal{G}$  est somme directe de copies de  $V$ . ■

**2.5.6. Remarque.** Si le corps  $k$  n'est plus supposé algébriquement clos, il reste évidemment vrai que toute représentation de poids 1 de  $\mathcal{G}$  est de rang multiple de  $d$ .

2.6. Il n'y a aucune raison pour que le schéma  $N$  de 2.5.3 soit plat sur  $S$  ; j'ignore même si le morphisme  $N \rightarrow S$  est un épimorphisme de schémas. Revenant au problème initial de 2.5, remarquons d'abord que si  $V$  est un  $\mathcal{G}$ -module de poids 1, localement libre de rang  $d$ , alors  $V$  est, en vertu de 2.4.2 (i), localement isomorphe à un facteur direct du  $\mathcal{G}$ -module  $E_+^{(1)}$ . Ceci nous conduit à poser, pour tout  $S$ -schéma  $S'$  :

$$(2.6.1) \quad \mathcal{P}(S') = \{ \text{sous-}\mathcal{G}\text{-modules de } (E_+^{(1)})_{S'}, \text{ localement facteurs directs de rang } d \text{ comme sous-}\mathcal{O}_{S'}\text{-modules} \} .$$

Il est immédiat que  $\mathcal{P}$  est représentable par un fermé d'une grassmannienne convenable donc par un  $S$ -schéma propre ; de plus le morphisme  $\mathcal{P} \rightarrow S$  est surjectif grâce à 2.5.3.

**2.7. Théorème.** Le  $S$ -schéma  $\mathcal{P}$  de (2.6.1) est propre et lisse sur  $S$ , et ses fibres géométriques sont des espaces projectifs de dimension  $d-1$  (autrement dit,  $\mathcal{P}$  est un " $S$ -schéma de Severi-Brauer").

Démonstration : supposons d'abord qu'il existe un  $\mathbb{G}$ -module  $V$  de poids 1, localement libre de rang  $d$ . On a alors (2.4.2)  $V \otimes V^\vee \simeq E_+^{(1)}$ , et les sous- $\mathbb{G}$ -modules de rang  $d$  de  $E_+^{(1)}$  sont (d'après 2.4.3) de la forme  $V \otimes W$  où  $W \subset V^\vee$  est inversible. Ceci établit un isomorphisme entre  $\mathcal{P}$  et le schéma  $\mathcal{P}(V^\vee)$  des "droites" de  $V^\vee$ , d'où l'assertion sur les fibres géométriques. Pour voir que  $\mathcal{P}$  est lisse sur  $S$ , nous pouvons supposer  $S = \text{Spec } A$  avec  $A$  local. Soit  $S_0 = \text{Spec}(A/I)$  où  $I$  est un idéal de carré nul. Posons  $\mathbb{G}_0 = \mathbb{G} \times_S S_0$ , et soit

$$\rho_0 : \mathbb{G}_0 \longrightarrow \text{GL}(V_0)$$

une représentation de poids 1, où  $V_0 = (A/I)^d$ .

Posant  $V = A^d$ , il s'agit de montrer que  $\rho_0$  se relève en

$$\rho : \mathbb{G} \longrightarrow \text{GL}(V)$$

(nécessairement de poids 1).

Soit  $r$  un entier  $\gg 1$  et considérons la représentation

$$\rho_0^{(r)} : \mathbb{G}_0 \longrightarrow \text{GL}(V_0^{\oplus r})$$

déduite de  $\rho_0$ , et supposons que  $\rho_0^{(r)}$  se relève en

$$\rho' : \mathbb{G} \longrightarrow \text{GL}(W)$$

où  $W$  est libre de rang  $rd$  avec  $W_0 \simeq V_0^r$ . Nous pouvons évidemment supposer que  $W = V^r$  (de façon compatible à la décomposition  $W_0 = V_0^r$ ). Pour tout  $g \in \mathbb{G}$ ,  $\rho'(g) : V^r \longrightarrow V^r$  est représenté par une matrice  $(\rho^{ij}(g))$  ( $1 \ll i, j \ll r$ ) à coefficients dans  $\text{End}(V)$ . De plus  $\rho^{ii}(g) = \rho_0(g) \pmod{I}$  et  $\rho^{ij}(g)$  est à coefficients dans  $I$  si  $i \neq j$ . Pour  $g$  et  $g' \in \mathbb{G}$ , la relation  $\rho'(gg') = \rho'(g)\rho'(g')$  implique en particulier ("produit par blocs") :

$$\rho^{11}(gg') = \sum_{i=1}^r \rho^{1i}(g)\rho^{i1}(g') = \rho^{11}(g)\rho^{11}(g')$$

puisque, pour  $i \neq 1$ ,  $\rho^{1i}$  et  $\rho^{i1}$  sont à coefficients dans  $I$ , et que  $I^2 = 0$ . Donc  $\rho^{11} : \mathbb{G} \longrightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation de  $\mathbb{G}$  relevant  $\rho_0$ .

Il suffit maintenant de remarquer que  $V_0^d \simeq V_0 \otimes V_0 \simeq E_0^{(1)}$ , donc que  $\rho_0^{(d)}$  se prolonge en la représentation naturelle de  $\mathbb{G}$  sur  $E_+^{(1)}$ , et d'appliquer le calcul ci-dessus avec  $r = d$ . ■

### 3. Représentations de poids 1 et sous-groupes de niveau.

3.0. On se donne  $S$  et  $\mathcal{G}$  comme en 2.0, et l'on fixe de plus un sous-groupe de niveau  $H \subset \mathcal{G}$  ; on note  $H_1$  l'image de  $H$  dans  $K$ , et  $H_1^\perp \supset H_1$  son orthogonal ; on pose de plus

$$\mathcal{G}' = \pi^{-1}(H_1^\perp)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}'/H = H \backslash \mathcal{G}' ;$$

il est immédiat que  $\mathcal{G}'$  est le centralisateur de  $H$  dans  $\mathcal{G}$ , que c'est un sous-groupe invariant de  $\mathcal{G}$ , et que  $\bar{\mathcal{G}}$  est un groupe thêta non dégénéré au-dessus de

$$\bar{K} = H_1^\perp/H_1 .$$

Si  $H$  est lagrangien, on a simplement  $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{m,S}$ .

3.1. Soit  $M$  un  $\mathcal{G}$ -module : le sous- $\mathcal{O}_S$ -module  $M^H$  des  $H$ -invariants est de façon naturelle un  $\bar{\mathcal{G}}$ -module, qui est de poids  $i$  dès que  $M$  est un  $\mathcal{G}$ -module de poids  $i$ . On obtient ainsi un foncteur

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{REP}^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \text{REP}^1(\bar{\mathcal{G}}) \\ M & \longmapsto & M^H . \end{array}$$

### 3.2. Théorème.

(i) Le foncteur (3.1.1) est une équivalence de catégories.

(ii) Soit  $M$  un  $\mathcal{G}$ -module de poids 1, et soit  $P$  un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent, muni des actions triviales de  $\mathcal{G}$  et  $\bar{\mathcal{G}}$ . Alors le morphisme naturel de  $\bar{\mathcal{G}}$ -modules

$$M^H \otimes P \longrightarrow (M \otimes P)^H$$

est un isomorphisme. En particulier le foncteur (3.1.1) commute à tout changement de base.

Démonstration : par descente fidèlement plate appliquée au  $S$ -schéma  $\mathcal{P}$  de (2.6.1) (grâce au théorème 2.7) on peut supposer que  $\mathcal{G}$  admet une représentation de poids 1, localement libre de rang  $d$ , que nous noterons  $V$  ; on sait alors (2.4.3) que tout  $\mathcal{G}$ -module de poids 1 est de la forme  $V \otimes P^{\text{triv}}$  pour un unique  $P$  quasi-cohérent sur  $S$ .

Commençons par montrer (ii) : d'après ce qui précède il suffit de le faire pour  $M=V$  ; considérons donc le morphisme

$$(3.2.1) \quad V^H \otimes P \longrightarrow (V \otimes P)^H ;$$

tensorisant par  $V^V$  (muni des actions triviales de  $\mathbb{Q}$  et  $\bar{\mathbb{Q}}$ ) on obtient

$$(3.2.2) \quad V^H \otimes V^V \otimes P \longrightarrow (V \otimes P)^H \otimes V^V$$

mais comme  $V^V$  est localement libre il est clair que (3.2.2) s'identifie à

$$(3.2.3) \quad (V \otimes V^V)^H \otimes P \longrightarrow (V \otimes V^V \otimes P)^H .$$

Or le théorème 2.4.2 affirme que le  $\mathbb{Q}$ -module  $V \otimes V^V$  (pour les actions de  $\mathbb{Q}$  envisagées ici) est isomorphe à  $E_+^{(1)}$ . Nous sommes donc ramenés à prouver que

$$(3.2.4) \quad (E_+^{(1)})^H \otimes P \longrightarrow (E_+^{(1)} \otimes P)^H$$

est un isomorphisme ; or il est immédiat que les deux membres s'identifient à

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{G}_{m,S}}(\mathbb{Q}/H, P) ,$$

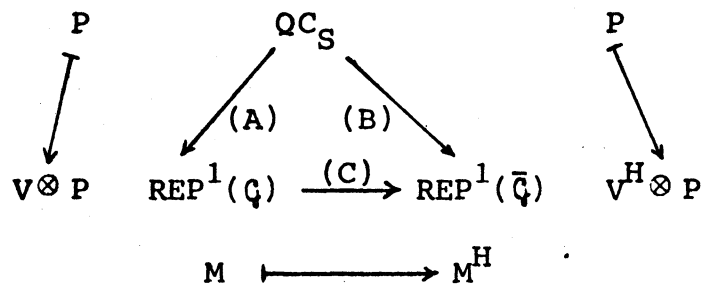
la notation  $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{G}_{m,S}}$  désignant les morphismes de faisceaux qui sont "de poids 1", i.e. compatibles aux actions naturelles de  $\mathbb{G}_{m,S}$ .

Il reste à établir (i). Notons  $d'$  le rang de  $H$ , et montrons d'abord que le  $\bar{\mathbb{Q}}$ -module  $V^H$  est localement libre de rang  $d/d'$  comme  $\mathcal{O}_S$ -module (on pourra donc lui appliquer 2.4.2 puisque  $\bar{K}$  est de rang  $d^2/d'^2$ ). Il suffit pour cela de voir que le  $\mathcal{O}_S$ -module

$$V^H \otimes V^V = (V \otimes V^V)^H = (E_+^{(1)})^H$$

est localement libre de rang  $d^2/d'$  ; la démonstration est entièrement analogue à celle de la proposition 2.5.2.

Ceci étant, l'assertion (i) résulte de la considération du diagramme de foncteurs suivant :



L'assertion (ii), déjà prouvée, montre que ce diagramme est commutatif (à isomorphisme près) ; le foncteur (A) est une équivalence grâce à 2.4.3, et il en est de même de (B) d'après ce qui vient d'être dit. ■

3.2.5. Remarque. Il résulte du théorème ci-dessus que pour tout  $M \in \text{REP}^1(\mathcal{Q})$ , le  $\mathcal{Q}$ -module  $M$  est induit par  $M^H$  lorsque l'on considère celui-ci comme un  $\mathcal{Q}'$ -module grâce à l'isomorphisme  $\bar{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}'/H$  : en effet si  $M_1$  est un  $\mathcal{Q}$ -module (que l'on peut supposer de poids 1), on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{Q}}(M^H, M_1) = \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(M^H, M_1^H) = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{Q}}}(M^H, M_1^H) = \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(M, M_1) .$$

3.3. Dans le cas où  $\mathcal{Q}$  admet une représentation  $V$ , localement libre de rang  $d$ , la démonstration de 3.2 donne un quasi-inverse du foncteur  $M \mapsto M^H$  : c'est le foncteur

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} \text{REP}^1(\bar{\mathcal{Q}}) &\longrightarrow \text{REP}^1(\mathcal{Q}) \\ N &\longmapsto V \otimes \underline{\text{Hom}}_{\bar{\mathcal{Q}}}(V^H, N)^{\text{triv}} . \end{aligned}$$

Nous allons l'expliciter un peu plus dans le cas particulier où  $H$  est un sous-groupe de niveau lagrangien et où

$$V = (E_{-}^{(1)})^H \quad (\text{cf. 2.5.2}).$$

Dans ce cas, on a  $\bar{\mathcal{Q}} = \mathcal{G}_{m,S}$  et  $V^H$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible, comme on l'a vu dans la démonstration de 3.2 (puisque  $d' = d$ , avec les notations de loc. cit.). On obtient donc, comme quasi-inverse de  $M \mapsto M^H$ , le foncteur

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} \text{QC}_S &\longrightarrow \text{REP}^1(\mathcal{Q}) \\ N &\longmapsto V \otimes (V^H)^{-1} \otimes N . \end{aligned}$$

Il s'agit donc de calculer  $V^H$  :

3.3.3. Lemme.  $V^H$  est canoniquement isomorphe au faisceau  $D_H$  des mesures invariantes sur  $H$  (1.4).

Démonstration :  $V^H$  est par définition l'ensemble des  $f \in \underline{A}(\mathcal{Q})$  vérifiant, pour  $h \in H$ ,  $g \in \mathcal{Q}$  et  $\lambda \in \mathcal{G}_m$  :

$$(a) \quad f(hg) = f(g) \quad , \quad \text{i.e.} \quad f \in \underline{\text{Hom}}(H \backslash \mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) = \underline{A}(H \backslash \mathcal{Q})$$

$$(b) \quad f(\lambda g) = \lambda f(g) \quad , \quad \text{i.e.} \quad f \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{G}_m}(H \backslash \mathcal{Q}, \mathcal{O}_S) = \underline{A}^{(1)}(H \backslash \mathcal{Q}) = V$$

$$(c) \quad f(gh) = f(g) .$$

Nous allons construire un morphisme

$$\varphi : D_H \longrightarrow \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}) = V$$

et montrer ensuite qu'il induit un isomorphisme de  $D_H$  sur  $V^H$ .

Localement sur  $S$ , il existe une section

$$\sigma : H \setminus K \longrightarrow H \setminus \mathcal{Q}$$

du  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $H \setminus \mathcal{Q}$  sur  $H \setminus K$  : en effet si  $S$  est local,  $H \setminus K$  est semi-local donc  $\text{Pic}(H \setminus K)$  est nul. Nous pouvons de plus supposer que  $\sigma$  respecte les sections unités de  $H \setminus K$  et  $H \setminus \mathcal{Q}$ , i.e. que

$$(3.3.3.1) \quad \sigma(e_{H \setminus K}) = e_{H \setminus \mathcal{Q}}.$$

Une fois choisie une telle section, on obtient un isomorphisme de  $\underline{A}(H \setminus K)$ -modules :

$$(3.3.3.2) \quad \varphi_\sigma : \underline{A}(H \setminus K) \xrightarrow{\sim} V = \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q})$$

en associant à la fonction  $f$  sur  $H \setminus K$  la fonction  $\varphi_\sigma(f)$  sur  $H \setminus \mathcal{Q}$  telle que pour  $\lambda \in \mathbb{G}_m$  et  $k \in H \setminus K$ , on ait

$$\varphi_\sigma(f)(\lambda\sigma(k)) = \lambda f(k)$$

puisque tout  $g \in H \setminus \mathcal{Q}$  s'écrit de façon unique  $g = \lambda\sigma(k)$ .

Bien entendu  $\varphi_\sigma$  dépend du choix de  $\sigma$  ; mais si l'on change  $\sigma$  en  $\alpha\sigma$  (où  $\alpha : H \setminus K \longrightarrow \mathbb{G}_m$  vérifie  $\alpha(e_{H \setminus K}) = 1$  à cause de (3.3.3.1)), on obtient immédiatement la formule

$$\varphi_{\alpha\sigma}(f)(\lambda\sigma(k)) = \alpha(k)^{-1} \lambda f(k)$$

d'où  $(\varphi_{\alpha\sigma}(f) - \varphi_\sigma(f))(\lambda\sigma(k)) = \lambda(\alpha(k)^{-1} - 1)f(k)$ .

Comme la fonction  $k \longmapsto \alpha(k)^{-1} - 1$  est dans l'idéal  $I_{H \setminus K}$ , nous voyons que la restriction de  $\varphi_\sigma$  à l'idéal annulateur de  $I_{H \setminus K}$  ne dépend pas de  $\sigma$ . Comme d'autre part  $H \setminus K$  est isomorphe à  $\hat{H}$  grâce à la forme commutateur  $e$  de  $\mathcal{Q}$ , cet annulateur s'identifie à  $\underline{\text{Ann}}_{\underline{A}(\hat{H})}(I_{\hat{H}}) = D_H$  (1.4.3).

En bref nous obtenons grâce à  $\varphi_\sigma$  un isomorphisme (globalement défini sur  $S$ ) de  $D_H$  sur un sous- $\mathcal{O}_S$ -module de  $V$  qui n'est autre que l'annulateur, dans le  $\underline{A}(H \setminus K)$ -module  $V$ , de l'idéal  $I_{H \setminus K}$ , puisque  $\varphi_\sigma$  est un isomorphisme de  $\underline{A}(H \setminus K)$ -modules. En particulier ce sous- $\mathcal{O}_S$ -module est inversible et localement facteur direct, et puisque nous savons que  $V^H$  est inversible il suffit, pour achever la démonstration,

de montrer que

$$\underline{\text{Ann}}_V(I_{H \setminus K}) \subset V^H.$$

Soit donc  $f \in V$ , annulée par  $I_{H \setminus K}$  : nous pouvons considérer  $f$  comme une fonction sur  $\mathcal{Q}$  vérifiant les conditions (a) et (b) énoncées au début de la démonstration. Il reste à vérifier la condition (c) ; or si  $g \in \mathcal{Q}$  et  $h \in H$ , on a

$$\begin{aligned} f(gh) &= f([g, h]hg) = [g, h]f(hg) && \text{(condition (b))} \\ &= [g, h]f(g) && \text{(condition (a)).} \end{aligned}$$

Mais pour  $h$  fixé, la fonction  $g \mapsto [g, h]$  provient d'un caractère  $\chi^h$  de  $H \setminus K$  (via la projection  $\mathcal{Q} \rightarrow H \setminus \mathcal{Q} \rightarrow H \setminus K$ ) ; en particulier  $1 - \chi^h$  est dans  $I_{H \setminus K}$  donc  $f = \chi^h f$  puisque  $f$  annule  $I_{H \setminus K}$ , i.e.

$$f(gh) = [g, h]f(g) = f(g)$$

ce qui établit la condition (c) et achève la démonstration. ■

Nous pouvons résumer comme suit les résultats de 3.3 :

**3.4. Théorème.** Soit  $H$  un sous-groupe de niveau lagrangien de  $\mathcal{Q}$  : alors pour tout  $M \in \text{REP}^1(\mathcal{Q})$ , on a un isomorphisme canonique

$$M \simeq \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}) \otimes_{D_H^{-1}} M^H$$

de  $\mathcal{Q}$ -modules, l'action de  $\mathcal{Q}$  sur  $\underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q})$  étant déduite des translations à droite sur  $H \setminus \mathcal{Q}$ , et l'action sur  $D_H$  et  $M^H$  étant triviale.

**3.5. Compléments.** Lorsque  $H$  n'est plus supposé lagrangien, on peut montrer que le foncteur (3.1.1) admet pour quasi-inverse le foncteur

$$(3.5.1) \quad \text{REP}^1(\bar{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \text{REP}^1(\mathcal{Q})$$

$$N \longmapsto \underline{\text{Hom}}_{\bar{\mathcal{Q}}}(H \setminus \mathcal{Q}, N) \otimes_{D_H^{-1}} ;$$

ici on fait opérer  $\bar{\mathcal{Q}}$  sur  $H \setminus \mathcal{Q}$  par translations à gauche, de sorte que  $\underline{\text{Hom}}_{\bar{\mathcal{Q}}}(H \setminus \mathcal{Q}, N)$  a bien un sens ; ce dernier est alors muni de l'action de  $\mathcal{Q}$  déduite des translations à droite sur  $H \setminus \mathcal{Q}$  de sorte que le second membre de (3.5.1) est bien un  $\mathcal{Q}$ -module de poids 1 (avec action triviale de  $\mathcal{Q}$  sur  $D_H^{-1}$ ).

Pour voir que (3.5.1) est un quasi-inverse de (3.1.1) il suffit, puisque (3.1.1) est une équivalence, de construire, pour tout  $M \in \text{REP}^1(\mathcal{Q})$ , un isomorphisme canonique

$$(3.5.2) \quad \zeta_M : M \otimes_{D_H} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_{\bar{Q}}(H \backslash Q, M^H) .$$

Introduisons d'abord une notation commode. Si  $G$  est un  $S$ -schéma en groupes commutatif fini localement libre et  $P$  un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent, l'accouplement naturel

$$\underline{A}(G) \otimes \underline{A}(\hat{G}) \longrightarrow \mathcal{O}_S$$

induit par tensorisation un morphisme

$$P \otimes \underline{A}(G) \otimes \underline{A}(\hat{G}) \longrightarrow P$$

ou encore un morphisme

$$(3.5.3) \quad \underline{\text{Hom}}(G, P) \otimes \underline{A}(\hat{G}) \longrightarrow P .$$

Conformément à l'usage de [R3], nous pouvons considérer les sections de  $\underline{A}(\hat{G})$  comme des mesures sur  $G$ ; dans ces conditions, l'homomorphisme (3.5.3) sera noté

$$(3.5.4) \quad f \otimes \mu \longrightarrow \int_G f(g) \mu_g \quad (f \in \underline{\text{Hom}}(G, P); \mu \in \underline{A}(\hat{G})) .$$

Nous pouvons alors définir le morphisme  $\zeta_M$  annoncé : si  $m \in M$  et si  $\mu \in D_H$  est une mesure invariante sur  $H$ , on considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : Q &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto \varphi(g) = \int_H (hgm) \mu_h : \end{aligned}$$

il est alors immédiat que  $\varphi$  est  $H$ -invariante à gauche et que  $\varphi(g) \in M^H$  pour tout  $g \in Q$ , donc  $\varphi \in \underline{\text{Hom}}(H \backslash Q, M^H)$ , et il est non moins clair que  $\varphi : H \backslash Q \longrightarrow M^H$  est un  $\bar{Q}$ -morphisme, qui est par définition  $\zeta_M(m \otimes \mu)$ . Nous n'infligerons pas au lecteur les calculs sinistres montrant que  $\zeta_M$  est un isomorphisme, et nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.



## CHAPITRE VI

L'image directeSommaire.

0. Introduction.

1.  $\mathcal{C}(L)$  et la descente.

2. Faisceaux amples : cas où la base est un trait.

3. Généralisation à une base normale quelconque.

4. Application : un théorème de négativité de l'image directe.

5. Caractéristique 2 : la variante de Mori.

0. Introduction.

Etant donné un schéma  $S$ , supposé normal irréductible pour simplifier, un  $S$ -schéma en groupes semi-stable  $A \xrightarrow{f} S$  qui est génériquement un schéma abélien, et un faisceau inversible cubiste  $L$  sur  $A$ , ample relativement à  $S$ , on s'intéresse dans ce chapitre aux propriétés de l'image directe  $f_*L$ .

L'action du groupe  $\mathcal{C}(L)$  (construit au chapitre IV) sur  $f_*L$  s'avère un outil aussi efficace que dans la théorie classique [M3] : c'est ainsi que l'on obtient sans difficultés les énoncés habituels sur la descente par isogénie de  $L$  et de ses sections (§1).

Pour une étude plus fine on est conduit (comme aux chapitres II et IV) à traiter d'abord le cas où  $S$  est un trait (§2) : dans ce cas  $f_*L$  est automatiquement libre de rang fini, et est, lorsque  $K(L)$  est fini sur  $S$ , un  $\mathcal{C}(L)$ -module irréductible au sens du chapitre V. On en déduit un résultat qui sera essentiel dans toute la suite, le théorème 2.4 "d'invariance par gonflement" lorsque  $L$  est symétrique et  $K(L^{\otimes 2})$  fini sur  $S$ .

Lorsque  $\dim S \geq 2$  on ne dispose de résultats intéressants (§3) que lorsque  $L$  est symétrique ; on procède en quelque sorte en sens inverse du §2, en étendant d'abord (3.4) le théorème 2.4 déjà cité, puis en montrant que, sous les mêmes hypothèses,  $f_*L$  est localement libre (3.5 ; l'énoncé est même plus précis) et que sa formation commute à tout changement de base "raisonnable" (3.5.3). La démonstration, un peu délicate, occupe la majeure partie du §3 ; elle fait un usage essentiel des

résultats du chapitre V, et s'inspire en partie (notamment le lemme 3.6.5) de résultats de Mumford.

Enfin le "théorème de négativité" du §4 donne un avant-goût des techniques des chapitres suivants, reposant sur l'idée d'évaluer les sections aux points d'ordre fini.

## 1. $\mathcal{G}(L)$ et la descente.

1.0. Dans tout ce § on se donne :

- un schéma localement noethérien  $S$
- deux  $S$ -schémas en groupes  $A \xrightarrow{f} S$  et  $B \xrightarrow{g} S$ , lisses, commutatifs, séparés et de type fini sur  $S$
- un morphisme surjectif (donc plat, grâce à EGA IV, 11.3.10)  $\lambda : A \longrightarrow B$  de  $S$ -schémas en groupes ; on note  $H = \text{Ker } \lambda$ .

On fait de plus sur  $A$  et  $B$  l'hypothèse suivante :

(1.0.1) il existe un sous-schéma ouvert  $U \subset S$ , schématiquement dense dans  $S$ , tel que les schémas induits  $A_U$  et  $B_U$  soient des  $U$ -schémas abéliens.

On se donne par ailleurs sur  $G_m$ -torseur cubiste  $L$  sur  $A$ . Au-dessus de l'ouvert  $U$ , on dispose alors du sous-groupe fermé

$$K_U = K(L_U) \subset A_U$$

et de l'extension centrale  $\mathcal{G}_U = \mathcal{G}(L_U)$  de  $K_U$  par  $G_{m,U}$ , laquelle "opère" naturellement sur le toseur  $L_U$ ; ces données sont équivalentes à celle d'une trivialisation naturelle de la biextension  $\mathcal{D}_2(L_U)$  restreinte à  $K_U \times A_U$  (I, §3 et 4).

Dans ces conditions on suppose de plus donnés :

- un sous-schéma en groupes fermé  $K$  de  $A$ , prolongeant  $K_U$
- une trivialisation de la biextension  $\mathcal{D}_2(L)|_{K \times A}$ , prolongeant la trivialisation naturelle de  $\mathcal{D}_2(L_U)$  sur  $K_U \times A_U$ ; ou encore, en d'autres termes, une extension centrale

$$1 \longrightarrow G_{m,S} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

prolongeant  $\mathcal{G}_U$ , et munie de plus d'une action sur  $L$  prolongeant l'action de  $\mathcal{G}_U$  sur  $L_U$ , le  $G_m$ -torseur sur  $K$  sous-jacent à  $\mathcal{G}$  s'identifiant alors naturellement à la restriction à  $K$  du toseur  $L$ .

1.1. Remarque. Les données  $K$  et  $\mathcal{Q}$  ci-dessus existent en particulier dans chacun des cas suivants :

1)  $U=S$ , i.e.  $A$  est un  $S$ -schéma abélien (!)

2)  $S$  est régulier de dimension 1 (IV, §3)

3)  $S$  est normal aux points de  $S-U$ ,  $A$  est semi-stable sur  $S$ , et le faisceau  $L_U$  sur le schéma abélien  $A_U$  est non dégénéré (IV, 2.4) : dans ce cas on peut même supposer  $K$  plat et quasi-fini sur  $S$ .

1.2. Proposition (descente de toseurs cubistes). Sous les conditions de 1.0, il y a équivalence entre :

(i) la catégorie des couples  $(M, \alpha)$  où  $M$  est un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $B$  et  $\alpha : \lambda^* M \xrightarrow{\sim} L$  un isomorphisme cubiste

(ii) comme (i), en supprimant deux fois "cubiste"

(iii) la catégorie (discrète) des morphismes  $\beta : H \rightarrow \mathcal{Q}$  de  $S$ -schémas en groupes, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H = \text{Ker } \lambda & \\ & \searrow \beta & \downarrow \\ \mathcal{Q} & \longrightarrow K & \longrightarrow A \end{array}$$

En particulier, pour que  $L$  se descende à  $B$ , il faut et il suffit que  $H$  soit un sous-groupe de  $K$ , et que l'extension centrale induite sur  $H$  par  $\mathcal{Q}$  soit triviale.

Démonstration : comme les trois catégories en question sont des groupoïdes rigides, les équivalences se réduisent simplement à des bijections entre classes d'isomorphisme d'objets.

Montrons d'abord l'équivalence entre (i) et (ii). Si  $M$  est un  $G_m$ -torseur sur  $B$  et  $\alpha : \lambda^* M \xrightarrow{\sim} L$  un isomorphisme, il s'agit de trouver sur  $M$  une structure cubiste descendant celle de  $L$ . Or on a déjà sur  $M$  une rigidification déduite de celle de  $L$ , grâce à l'isomorphisme  $\alpha$ . On en déduit, au-dessus de  $U$  (puisque  $B_U$  est un schéma abélien) une unique structure cubiste sur  $M_U$  compatible à cette rigidification, donc aussi à la structure cubiste de  $L_U$ . Soit  $\tau$  la section de  $\mathcal{D}_3(L)$  sur  $A^3$  définissant la structure cubiste de  $L$  : sa restriction  $\tau_U$  à  $U$  est compatible avec la donnée de descente sur  $\mathcal{D}_3(L)_U$  (relativement à  $\lambda \times \lambda \times \lambda : A^3 \rightarrow B^3$ ) déduite de  $(\mathcal{D}_3(M), \mathcal{D}_3(\alpha))$ , puisque nous venons de voir que  $\tau_U$  provient d'une structure cubiste sur  $M_U$ . Comme  $A_U^3$  est schématiquement dense dans  $A^3$ ,  $\tau$  est elle-même compatible à la donnée de descente en question, d'où par descente

fidèlement plate une trivialisation de  $\mathcal{D}_3(M)$  sur  $B^3$ , qui est automatiquement une structure cubiste.

(i)  $\longrightarrow$  (iii) : partons de  $(M, \alpha)$  comme dans (i). On en déduit sur  $L$  une donnée de descente relativement à  $\lambda$ , c'est-à-dire une action de  $H$  sur le  $S$ -schéma sous-jacent à  $L$ , compatible à l'action par translations sur  $A$ . Le  $S$ -schéma  $L$  est d'autre part muni d'une section  $\varepsilon$  déduite de la rigidification. On en déduit un  $S$ -morphisme  $\beta$  ("orbite de  $\varepsilon$ "), rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & H \\ & \beta \swarrow & \downarrow \\ L & \longrightarrow & A \end{array}$$

Au-dessus de  $U$ , il est bien connu ([M2], § 23 ou [Sz], exp. VII) que  $H_U \subset K_U$  et que  $\beta : H_U \longrightarrow (L_U)|_{K_U} = \mathcal{G}(L_U)$  est un morphisme de groupes. Mais comme  $H$  est plat sur  $S$ ,  $H_U$  est schématiquement dense dans  $H$  donc  $H \subset K$  (car  $H \cap K$  est un fermé de  $H$  contenant  $H_U$ ) et  $\beta$  se factorise donc en  $H \longrightarrow \mathcal{G} = L|_K$ , qui est encore un morphisme de groupes par densité.

Enfin, si l'on se donne  $\beta : H \longrightarrow \mathcal{G}$  comme dans (iii), l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $L$  donne par restriction une action de  $H$  sur  $L$ , c'est-à-dire une donnée de descente relativement à  $\lambda$ . ■

1.3. Corollaire. On suppose de plus que  $H$  est fini sur  $S$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe  $S' \longrightarrow S$  fini et plat tel que le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_{S'}$  sur  $A_{S'} = A \times_S S'$  se descende à  $B_{S'}$ .

(ii)  $H \subset K$ , et  $H$  est isotrope pour la forme commutateur  $e^L : K \times K \longrightarrow \mathbb{G}_m$  déduite de l'extension centrale  $\mathcal{G}$  (en d'autres termes l'extension de  $H$  par  $\mathbb{G}_m$  induite par  $\mathcal{G}$  est commutative).

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on peut dans (i) prendre pour  $S'$  un toseur sous le dual de Cartier  $\hat{H}$  de  $H$ .

Il est en effet immédiat que (i) implique (ii). Inversement, puisque  $\text{Ext}_{S, \text{fppf}}^1(H, \mathbb{G}_{m, S}) = 0$  (voir par exemple [Sz], VII, démonstration de 2.3 (i)), une extension commutative devient triviale après changement de base par un toseur sous  $\text{Hom}(H, \mathbb{G}_{m, S}) = \hat{H}$ . ■

1.4. Nous allons maintenant étudier les propriétés de l'image directe

$$(1.4.1) \quad \mathcal{G} = f_*L$$

du faisceau inversible associé au  $\mathcal{G}_m$ -torseur  $L$  (encore noté  $L$  par abus d'écriture).

1.4.2. Lemme.  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent.

Démonstration (Raynaud) : d'abord  $\mathcal{G}$  est quasi-cohérent d'après EGA I, 6.7.1. D'autre part la question est locale sur  $S$  donc on peut supposer  $S$  noethérien. Soit  $j : U \hookrightarrow S$  l'inclusion naturelle ; d'autre part pour tout  $n \gg 1$ , soit  $A_n \hookrightarrow A$  le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de la section unité  $e_A : S \rightarrow A$ .

Considérons alors le diagramme commutatif de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$\begin{array}{ccc} f_*L & \xrightarrow{(a)} & j_*(f_U)_*L_U \\ \downarrow (b) & & \downarrow (b') \\ f_*(L|_{A_n}) & \xrightarrow{(a')} & j_*(f_U)_*(L_U|_{A_{n,U}}) \end{array}$$

La flèche (a) est injective puisque  $L$  est localement libre et  $A_U$  schématiquement dense dans  $A$ . D'autre part, la famille des  $(A_{n,U})_{n \gg 1}$  est schématiquement dense dans  $A_U$  (EGA IV, 11.10) puisque  $A_U$  est lisse à fibres connexes sur  $U$ , donc la flèche naturelle

$$(f_U)_*L_U \longrightarrow \varprojlim_n (f_U)_*(L_U|_{A_{n,U}})$$

est injective. Comme  $(f_U)_*L_U$  est cohérent sur  $U$  ( $A_U$  est propre !) et que  $U$  est noethérien, il existe  $n \gg 1$  tel que

$$(f_U)_*L_U \longrightarrow (f_U)_*(L_U|_{A_{n,U}})$$

soit injectif ; il en résulte que, pour  $n$  assez grand, (b') est injectif donc (b') $\circ$ (a) est injectif et il en est de même de (b), d'où le lemme car,  $A_n$  étant fini sur  $S$ ,  $f_*(L|_{A_n})$  est cohérent. ■

1.4.3. Soit  $S'$  un  $S$ -schéma. Pour tout  $\gamma \in \mathcal{G}(S')$ , l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $L$  donne un isomorphisme

$$(1.4.3.1) \quad \gamma : L_{S'} \xrightarrow{\sim} T_{\gamma}^*L_{S'}$$

de faisceaux inversibles sur  $A_{S'}$ ,  $\bar{\gamma}$  désignant l'image de  $\gamma$  par le morphisme  $\mathcal{G} \rightarrow K \hookrightarrow A$ . Passant à l'image directe par

$f_{S'} : A_{S'} \longrightarrow S'$ , on obtient un isomorphisme composé

$$(1.4.3.2) \quad f_{S', *L_{S'}} \xrightarrow{\chi} f_{S', *(T_{\bar{\gamma}}^* L_{S'})} \xrightarrow{T_{\bar{\gamma}}^*} f_{S', *L_{S'}}$$

d'où une action à gauche du groupe  $\mathcal{Q}(S')$  sur le  $\mathcal{O}_{S'}$ -module quasi-cohérent  $f_{S', *L_{S'}}$ . De plus l'action du sous-groupe  $\mathcal{G}_m(S') \subset \mathcal{Q}(S')$  n'est autre que l'action naturelle par homothéties.

En d'autres termes nous avons défini une action du faisceau  $\mathcal{Q}$  (sur  $S_{\text{fppf}}$ ) sur le faisceau  $W(L)$  défini par

$$(1.4.3.3) \quad S' \longmapsto W(L)(S') = \Gamma(S', f_{S', *L_{S'}}) = H^0(A_{S'}, L_{S'}) .$$

1.4.4. Soit maintenant

$$\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$$

un sous-schéma en groupes de  $\mathcal{Q}$ , plat sur  $S$ . Prenons  $S' = \mathcal{Q}'$  dans les considérations précédentes : on a un élément canonique de  $\mathcal{Q}(S') = \text{Hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}', \mathcal{Q})$  défini par l'inclusion  $\mathcal{Q}' \hookrightarrow \mathcal{Q}$ , d'où un automorphisme

$$(1.4.4.1) \quad \rho \in \text{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}'}}\text{-Mod}(f_{\mathcal{Q}', *L_{\mathcal{Q}'}}) .$$

Comme la formation de l'image directe commute au changement de base plat  $\mathcal{Q}' \longrightarrow S$ , on a

$$f_{\mathcal{Q}', *L_{\mathcal{Q}'}} = \delta_{\mathcal{Q}'}$$

d'où un automorphisme du  $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}'}$ -module  $\delta_{\mathcal{Q}'}$  (qui est cohérent, grâce à 1.4.2 ci-dessus), c'est-à-dire un morphisme de  $S$ -foncteurs

$$(1.4.4.2) \quad \mathcal{Q}' \longrightarrow \underline{\text{GL}}(\delta)$$

qui est évidemment un morphisme de groupes. Nous obtenons ainsi une action de  $\mathcal{Q}'$  sur le  $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}'}$ -module  $\delta$ , c'est-à-dire, de façon précise, sur le foncteur  $V(\delta)$  défini par

$$(1.4.4.3) \quad V(\delta)(S') = \Gamma(S', \delta_{S'}) .$$

Bien entendu le morphisme naturel

$$V(\delta) \longrightarrow W(L)$$

est compatible aux actions de  $\mathcal{Q}'$  sur les deux membres ; d'autre part, pour étudier l'action de  $\mathcal{Q}'$  sur  $V(\delta)$ , on peut (comme au chap. V) se

restreindre au "petit site fppf" de  $S$ .

Exemple. Replaçons-nous dans la situation de la Prop. 1.2. Soient  $M$  un faisceau inversible sur  $B$ ,  $\alpha: \lambda^* M \xrightarrow{\sim} L$  un isomorphisme et soit  $\beta: H \rightarrow \mathcal{G}$  le relèvement correspondant. Comme  $H$  est plat sur  $S$ , nous pouvons prendre pour  $\mathcal{G}'$  le sous-groupe  $\tilde{H}$ , image de  $\beta$ ; nous obtenons ainsi une action de  $H$  sur  $\mathcal{G}$ . Si  $s$  est une section de  $\mathcal{G}$  sur  $S$  (ou sur un ouvert de  $S$ , ou même sur un  $S$ -schéma plat quelconque), une traduction fastidieuse débouche sur les équivalences :

$s \in \mathcal{G}^H \iff s \in H^0(A, L)$  est compatible à la donnée de descente (relativement à  $\lambda$ ) définie par  $\beta \iff s$  provient d'une section de  $M$  sur  $B$ .

En résumé :

1.4.5. Proposition (descente de sections). Dans les conditions de 1.0, soient  $M$  un  $\mathcal{O}_B$ -module inversible,  $\alpha: \lambda^* M \xrightarrow{\sim} L$  un isomorphisme, et  $\beta: H \rightarrow \mathcal{G}$  le relèvement correspondant (1.2). Alors le morphisme naturel

$$g_* M \hookrightarrow f_* L = \mathcal{G}$$

identifie  $g_* M$  au sous-module  $\mathcal{G}^H$  de  $\mathcal{G}$  formé des invariants sous l'action de  $H$  déduite de  $\beta$ . ■

Une autre application importante de 1.4 s'obtient lorsqu'on suppose que  $K$  (et donc  $\mathcal{G}$ ) est plat sur  $S$ . On obtient alors une représentation de poids 1 (V, §2) de l'extension centrale  $\mathcal{G}'$  dans le  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent  $\mathcal{G}$ . Si l'on suppose de plus que  $K$  est fini sur  $S$ , le lemme suivant va nous permettre d'appliquer les résultats du chapitre V :

1.4.6. Lemme. On suppose que  $K$  est fini et plat sur  $S$  et que  $A$  est semi-stable. Alors  $\mathcal{G}$  est un groupe thêta non dégénéré (V, 2.0).

En effet, l'hypothèse sur  $K$  entraîne déjà que  $L_U$  est un faisceau inversible non dégénéré sur le schéma abélien  $A_U$ . Par ailleurs, la forme commutateur de  $\mathcal{G}$  induit un morphisme de  $S$ -schémas finis localement libres :

$$\gamma: K \rightarrow \hat{K}.$$

Il faut montrer que  $\gamma$  est un isomorphisme ; cela se voit sur les fibres et nous pouvons donc remplacer  $S$  par un  $S$ -schéma  $S'$  tel que le morphisme  $S' \rightarrow S$  soit surjectif ; prenant pour  $S'$  le normalisé de  $S_{\text{red}}$ , nous sommes ainsi ramenés au cas où  $S$  est normal, et notre assertion résulte donc de IV, 2.4. ■

1.4.7. Proposition. On suppose  $K$  fini et plat sur  $S$  de rang  $d^2$ , et  $A$  semi-stable. On se place dans la situation de 1.4.5 et l'on suppose que  $H \subset K$  est fini localement libre de rang  $d$  (donc est lagrangien ( $V$ , 2.5.1) pour la forme  $e^L$  sur  $K$ ). Alors on a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_S$ -modules :

$$f_*L \xrightarrow{\sim} g_*M \otimes \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}) \otimes D_H^{-1}$$

où  $D_H$  désigne le  $\mathcal{O}_S$ -module inversible des mesures invariantes sur  $H$  ( $V$ , 1.4) et  $\underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q})$  la représentation standard de poids 1 de  $\mathcal{Q}$  associée à  $H$ , définie en  $V$ , 2.5.2. (Bien entendu,  $H$  est ici identifié à un sous-groupe de  $\mathcal{Q}$  grâce au relèvement  $\beta$  de 1.4.5).

Compte tenu du lemme précédent et de 1.4.5, cela résulte en effet de  $V$ , 3.4 appliqué à la représentation  $f_*L$  de  $\mathcal{Q}$ . ■

1.4.7.1. Remarque. La proposition ci-dessus ne présente un intérêt que lorsque  $f_*L \neq 0$ , ce qui, puisque  $L_U$  est non dégénéré, signifie que  $L_U$  est ample sur  $A_U$  relativement à  $U$ ; on sait de plus, dans ce cas, que  $f_*L_U$  (resp.  $g_*M_U$ ) est localement libre de rang  $d$  (resp. 1) sur  $U$ .

1.4.8. Corollaire. Sous les hypothèses de 1.4.7, on suppose de plus que  $L_U$  est ample sur  $A_U$  relativement à  $U$ , et que  $f_*L$  est localement libre sur  $S$  (il est alors nécessairement de rang  $d$ , et  $g_*M$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible). Notons  $K'$  le  $S$ -schéma en groupes  $K/H$ , considéré comme sous-groupe de  $B = A/H$ , et  $M_{K'}$ , la restriction à  $K'$  du faisceau inversible  $M$ . Alors on a un isomorphisme naturel de  $\mathcal{O}_S$ -modules inversibles

$$\Lambda^d f_*L \simeq (g_*M)^{\otimes d} \otimes \Lambda^d f_{* \mathcal{O}_H} \otimes (N_{K'/S} M_{K'})^{-1}$$

où  $N_{K'/S}$  désigne la norme. De plus le  $\mathcal{O}_S$ -module inversible  $N_{K'/S} M_{K'}$  est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(S)$  : de façon précise, si  $m$  est un entier annulant  $H$ , sa classe dans  $\text{Pic}(S)$  est annulée par  $2m$ , et même par  $m$  si  $m$  est impair.

Démonstration : la proposition précédente donne, en prenant les déterminants

$$(1.4.8.1) \quad \det f_*L \simeq (g_*M)^{\otimes d} \otimes D_H^{\otimes -d} \otimes \det \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}) .$$

Rappelons que le torseur  $\mathcal{Q}$  sur  $K$  s'identifie à la restriction à  $K$  du  $G_m$ -torseur  $L^\circ$  associé à  $L$ . Or le torseur  $M^\circ$  associé à  $M$  s'identifie au quotient de  $L^\circ$  par l'action de  $H$  déduite de l'inclusion  $\beta : H \hookrightarrow \mathcal{Q}$ . En particulier  $M_{K'}^\circ$  s'identifie canoniquement à  $H \setminus \mathcal{Q}$ , en



tant que  $G_m$ -torseur sur  $K'$ .

Il en résulte que  $\underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q})$  (faisceau des  $S$ -morphisms de  $H \setminus \mathcal{Q}$  dans  $G_{a,S}$  compatibles à l'action de  $G_m$ ) s'identifie à  $g_*(M_{K'}^{-1})$ , donc :

$$(1.4.8.2) \quad \det \underline{A}^{(1)}(H \setminus \mathcal{Q}) \simeq \det(g_* M_{K'}^{-1}) \simeq \det(g_* \mathcal{O}_{K'}) \otimes N_{K'}/S^{M_{K'}^{-1}}$$

d'où en reportant dans (1.4.8.1)

$$(1.4.8.3) \quad \det f_* L \simeq (g_* M)^{\otimes d} \otimes D_H^{\otimes -d} \otimes \det(g_* \mathcal{O}_{K'}) \otimes (N_{K'}/S^{M_{K'}^{-1}})^{-1}.$$

Comme  $H$  est un sous-groupe lagrangien de  $K$  pour la forme commutateur de  $\mathcal{Q}$ , on a par ailleurs un isomorphisme canonique

$$K' = K/H \xrightarrow{\sim} \hat{H}$$

donc

$$D_H^{\otimes -d} \otimes \det g_* \mathcal{O}_{K'} \simeq \det(D_H^{-1} \otimes \hat{f}_* \mathcal{O}_{\hat{H}})$$

où  $\hat{f} : \hat{H} \rightarrow S$  désigne le morphisme structural. Enfin on sait (V, 1.4.4) que  $\hat{f}_* \mathcal{O}_{\hat{H}} \simeq (f_* \mathcal{O}_H) \otimes D_H$ , d'où finalement

$$D_H^{\otimes -d} \otimes \det g_* \mathcal{O}_{K'} \simeq \det f_* \mathcal{O}_H$$

qui donne la formule cherchée, en reportant dans (1.4.8.3).

Enfin, pour établir la dernière assertion, remarquons que  $M_{K'}^0$  est un toseur cubiste sur le groupe  $K'$ , lequel est annulé par  $m$  puisqu'il s'identifie à  $\hat{H}$ . On peut donc lui appliquer (I, 5.7), ce qui achève la démonstration puisque  $N_{K'}/S : \text{Pic}(K') \rightarrow \text{Pic}(S)$  est un morphisme de groupes. ■

1.4.8.4. Remarque. L'adjectif "naturel" de 1.4.8 signifie que l'isomorphisme en question est fonctoriel pour les isomorphismes de faisceaux inversibles cubistes, et possède de plus la propriété suivante : soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un morphisme de schémas (avec  $S'$  localement noethérien) tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit schématiquement dense dans  $S'$  (si l'ouvert  $U \subset S$  de (1.0.1) est choisi maximal), et tel que la formation de l'image directe  $f_* L$  commute au changement de base  $\pi$  ; alors l'isomorphisme de 1.4.8 est compatible au changement de base  $\pi$ .

## 2. Faisceaux amples : cas où la base est un trait.

2.0. Soit  $\Lambda$  un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $F$  et de corps résiduel  $k$ . On note  $S = \text{Spec } \Lambda$ ,  $\{\eta\} = \text{Spec } F$ ,  $\{s\} = \text{Spec } k$ .

Soit  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable dont la fibre générique  $A_\eta$  est une variété abélienne sur  $F$ , et soit  $L$  un faisceau inversible cubiste sur  $A$ . On suppose de plus que  $L_\eta$  est ample sur  $A_\eta$ . On dispose alors du sous-groupe fermé  $K(L) \subset A$ , plat et quasi-fini sur  $S$  (IV, 3.4) et du schéma en groupes  $\mathcal{G}(L)$  (IV, 3.3.3), extension centrale de  $K(L)$  par  $G_{m,S}$ , non dégénérée dès que  $K(L)$  est fini sur  $S$  (IV, 2.4).

2.1. Proposition.  $L$  est ample sur  $A$ .

Démonstration : lorsque la fibre fermée  $A_0$  de  $A$  est connexe, cela résulte de [R1], théorème VIII.2. Dans le cas général soit  $m$  un entier annulant le groupe  $\Phi = A_0/A_0^0$  des composantes connexes de  $A_0$ . La multiplication par  $m$  induit un morphisme surjectif

$$[m] : A \longrightarrow A^0.$$

Le groupe  $K(L^{\otimes m^2}) = [m^2]^{-1}(K(L))$  contient le noyau  ${}_m A$  de la multiplication par  $m^2$ . Il en résulte que le sous-groupe  ${}_m A \subset K(L^{\otimes m^2})$  est isotrope pour la forme commutateur  $e^{L^{\otimes m^2}}$  : il suffit en effet de le vérifier sur la fibre générique, or si  $x$  et  $y \in {}_m A_\eta$ , on a

$$e^{L^{\otimes m^2}}(mx, my) = e^{L^{\otimes m^2}}(m^2 x, y) = 1$$

avec  $mx$  et  $my \in {}_m A_\eta$ , et il suffit de remarquer que la multiplication par  $m$  induit un épimorphisme  ${}_m A_\eta \longrightarrow {}_m A_\eta$ .

Quitte à faire un changement de base fini  $S' \longrightarrow S$ , on peut donc supposer que  $L^{\otimes m^2}$  provient d'un faisceau inversible  $M$  sur  $A^0$ , via le morphisme  $[m]$  (nous ne sommes pas tout à fait dans les conditions de 1.3 puisque  ${}_m A$  est seulement quasi-fini ; cependant notre assertion est vraie sur la fibre générique, d'où un  $M_\eta$  sur  $A_\eta$ , d'où un  $M$  sur  $A^0$  puisque  $A_0^0$  est connexe, et l'on a  $[m]^* M \simeq L^{\otimes m^2}$  à cause de l'unicité du prolongement cubiste). La proposition en résulte car  $M$  est ample sur  $A^0$  (cas connexe) donc  $L^{\otimes m^2}$  est ample puisque  $[m]$  est quasi-fini.  $\square$

2.2. Proposition. Pour tout  $n \gg 1$ , notons  $A^{[n]}$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A$  contenant  $K(L^{\otimes n})$ . Alors, pour tout  $n \gg 2$ , la restriction de  $L^{\otimes n}$  à  $A^{[n]}$  est engendrée par ses sections globales sur  $A^{[n]}$ .

Rappelons d'abord le "théorème du carré", résultant de l'existence d'une structure cubiste sur  $L$  : le morphisme de  $S$ -foncteurs

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{A/S} \\ x &\longmapsto \text{classe de } (T_x^* L) \otimes L^{-1} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

En particulier, si  $y_1, \dots, y_n \in A(S)$  vérifient  $y_1 + \dots + y_n = 0$ , alors

$$(2.2.1) \quad T_{Y_1}^* L \otimes \dots \otimes T_{Y_n}^* L \simeq L^{\otimes n} .$$

Démontrons alors la proposition (on s'inspire du cas classique des schémas abéliens). Il est clair qu'il existe une section  $\sigma \in H^0(A^{[n]}, L)$  qui n'est pas identiquement nulle sur la fibre spéciale  $A_0^{[n]}$  : il suffit de partir d'une section non nulle  $\sigma_\eta \in H^0(A_\eta, L_\eta)$  et de la multiplier par un élément de  $F$  de valuation égale à

$$- \inf_C v_C(\sigma_\eta)$$

où  $C$  parcourt l'ensemble des composantes de  $A_0^{[n]}$ .

Soit alors  $C$  une composante de  $A_0^{[n]}$  sur laquelle  $\sigma \neq 0$ , et soit  $x$  un point de  $C$  (que l'on peut supposer rationnel sur  $k$  car la proposition est "invariante par changement de base plat"). Il existe alors (quitte encore à changer de base)  $n$  points  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$  de  $A_0^\circ(k)$  vérifiant  $\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_n = 0$  et  $\sigma(x + \bar{y}_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . On peut même prolonger ces points en des sections  $y_1, \dots, y_n \in A^\circ(S)$  vérifiant  $y_1 + \dots + y_n = 0$ , et on a donc

$$[(T_{Y_1}^* \sigma) \otimes (T_{Y_2}^* \sigma) \otimes \dots \otimes (T_{Y_n}^* \sigma)](x) \neq 0$$

ce qui donne, d'après (2.2.1) une section de  $L^{\otimes n}$  sur  $A^{[n]}$ , non nulle au point  $x$ .

Donc  $L^{\otimes n}$  est sans point base sur la composante  $C$ . Mais comme le groupe  $\mathcal{G}(L^{\otimes n})$  opère transitivement sur  $A_0^{[n]}$  (par définition de  $A^{[n]}$ ) et opère sur  $H^0(A^{[n]}, L^{\otimes n})$  de manière compatible aux translations,  $L^{\otimes n}$  est aussi sans point base sur  $A_0^{[n]}$ . ■

**2.3. Définition.** On dit que  $L$  est totalement symétrique si, localement pour la topologie fppf sur  $S$ ,  $L$  est de la forme  $M \otimes [-1]_A^*(M)$ , pour un faisceau inversible cubiste  $M$  sur  $A$ .

(On rappelle que  $S$  est un trait ; pour un cas plus général voir 3.2 ci-dessous).

2.3.1. Remarques. Il revient au même de dire qu'il existe  $S' \rightarrow S$  fini surjectif tel que  $L_{S'}$  soit de la forme  $M \otimes [-1]_{A_{S'}}^*(M)$  sur  $A_{S'}$ . Il suffit même (au moins si  $S$  est excellent) que  $S'$  soit le spectre d'une extension finie de  $F$  puisqu'alors, quitte à étendre encore le corps de base,  $M$  se prolonge au-dessus du normalisé de  $S$  dans  $S'$ .

Autre définition équivalente : il existe  $S' \rightarrow S$  quasi-fini et dominant tel que  $L_{S'}$  soit isomorphe à  $M^{\otimes 2}$ , avec  $M$  cubiste symétrique sur  $A_{S'}$ .

On vérifie aussi que tout ceci équivaut à la condition que  $L_\eta$  soit totalement symétrique sur  $A_\eta$  au sens de [M3], §2.

Enfin, il résulte de 2.2 que si  $L$  est totalement symétrique, sa restriction à l'ouvert  $A^{[1]}$  "engendré" par  $K(L)$  (notation de 2.2) est engendrée par ses sections globales : on peut en effet supposer (après changement de base) que  $L$  est le carré d'un  $M$  ample sur  $A$ , et on applique 2.2 à  $M$ .

Le théorème suivant est dû à Mumford (non publié) lorsque  $f_*L$  est de rang 1 et que 2 est inversible sur  $S$  :

2.4. Théorème. Sous les hypothèses de 2.0, on suppose  $L$  symétrique et  $K(L^{\otimes 2})$  fini sur  $S$ . Alors, avec les notations de 2.2 :

$$(i) \quad H^0(A, L) = H^0(A^{[2]}, L)$$

$$(ii) \quad H^0(A, L^{\otimes 2}) = H^0(A^{[2]}, L^{\otimes 2}) .$$

2.4.1. Corollaire. On suppose  $L$  totalement symétrique et  $K(L)$  fini sur  $S$ . Alors  $H^0(A, L) = H^0(A^{[1]}, L)$  (notation de 2.2).

En effet, grâce à un changement de base plat on peut supposer que  $L = M^{\otimes 2}$  avec  $M$  symétrique ; le corollaire résulte alors de 2.4 (ii) appliqué à  $M$ .

2.4.2. Lemme. Si  $L$  est symétrique il existe  $\sigma \in H^0(A, L)$ , non identiquement nulle sur  $A_\circ$ , telle que le diviseur  $\text{div}(\sigma)$  sur  $A$  soit symétrique (i.e. invariant par  $[-1]_A$ ).

En effet soit  $\varphi : L \xrightarrow{\sim} [-1]_A^* L$  l'unique isomorphisme induisant l'identité sur la section unité. Cet isomorphisme induit une involution  $\tau$  de  $H^0(A, L)$  par la formule  $\tau(\sigma) = \varphi^*([-1]_A^* \sigma)$ . Il existe donc  $\sigma'_\eta \in H^0(A_\eta, L_\eta)$  non nulle telle que  $\tau(\sigma'_\eta) = \pm \sigma'_\eta$  ; il suffit dès lors de multiplier  $\sigma'_\eta$  par un élément convenable de  $F^\times$  pour obtenir un élément  $\sigma$  de  $H^0(A, L)$ , qui vérifie  $\tau(\sigma) = \pm \sigma$ . ■

2.4.3. Prouvons maintenant le théorème. Notons  $d$  le rang de  $f_*L$  : alors  $K(L)$  (resp.  $K(L^{\otimes 2})$ ) est fini et plat de rang  $d^2$  (resp.  $4^g d^2$ ) sur  $S$ , et  $\mathcal{G}(L)$  (resp.  $\mathcal{G}(L^{\otimes 2})$ ) est un groupe thêta non dégénéré au-dessus de  $K(L)$  (resp.  $K(L^{\otimes 2})$ ). Considérons d'abord l'inclusion naturelle

$$(2.4.3.1) \quad H^0(A, L^{\otimes 2}) \hookrightarrow H^0(A^{[2]}, L^{\otimes 2}) .$$

Les deux membres sont des  $\Lambda$ -modules libres de rang  $2^g d$ , munis tous deux d'une action de poids 1 de  $\mathcal{G}(L^{\otimes 2})$ , et donc irréductibles pour ces actions (V, 2.4.2). L'image de (2.4.3.1) est donc de la forme  $I \cdot H^0(A^{[2]}, L^{\otimes 2})$  où  $I$  est un idéal de  $\Lambda$ . Pour établir (ii) il suffit donc de montrer que le morphisme déduit de (2.4.3.1) par tensorisation par  $k$  est non nul, i.e. qu'il existe une section  $\sigma \in H^0(A, L^{\otimes 2})$  dont la restriction à  $A_0^{[2]}$  n'est pas identiquement nulle.

Or soit  $\sigma_1 \in H^0(A, L)$  comme dans le lemme 2.4.2 et soit  $x_0 \in A_0$  tel que  $\sigma_1(x_0) \neq 0$ . Comme  $\text{div}(\sigma_1)$  est symétrique on a aussi  $\sigma_1(-x_0) \neq 0$ . Si  $x \in A(S)$  est une section de  $A$  passant par  $x_0$ , il suffit de prendre

$$\sigma = T_x^*(\sigma_1) \otimes T_{-x}^*(\sigma_1)$$

qui est bien une section de  $T_x^*L \otimes T_{-x}^*L \simeq L^{\otimes 2}$ , et qui est non nulle à l'origine de  $A_0$  par construction. Ceci démontre (ii).

Enfin, (i) est une conséquence facile de (ii) : si  $\sigma \in H^0(A^{[2]}, L)$ , nous pouvons considérer  $\sigma$  comme une section méromorphe de  $L$  sur  $A$ . L'assertion (ii) montre que  $\sigma^{\otimes 2}$  n'a pas de pôles sur  $A$ , donc  $\sigma$  n'a pas de pôles sur  $A$ , cqfd. ■

On peut même préciser les choses de la manière suivante :

2.5. Proposition. On suppose  $L$  symétrique (resp. totalemtent symétrique) et  $K(L^{\otimes 2})$  (resp.  $K(L)$ ) fini sur  $S$ . Soit  $X$  un sous-schéma non vide de  $A^{[2]}$  (resp.  $A^{[1]}$ ), fini et plat sur  $S$  et invariant par  $K(L^{\otimes 2})$  (resp.  $K(L)$ ) (par exemple, on peut prendre  $X = K(L^{\otimes 2})$  resp.  $K(L)$ ). Alors le morphisme de restriction

$$(2.5.1) \quad H^0(A, L) \longrightarrow H^0(X, L|_X)$$

est scindé, i.e. fait de  $H^0(A, L)$  un facteur direct de  $H^0(X, L|_X)$ .

(En d'autres termes : toute section de  $L$  qui s'annule sur la fibre fermée  $X_0 = X \cap A_0$  de  $X$ , s'annule sur  $A_0$ ).

Démontrons d'abord le cas totalement symétrique. Grâce à 2.4.1 on peut remplacer  $A$  par  $A^{[1]}$ . Le morphisme (2.5.1) est  $\mathbb{Q}(L)$ -équivariant et  $H^0(A, L)$  est un  $\mathbb{Q}(L)$ -module irréductible donc il suffit de voir que le morphisme déduit de (2.5.1) par tensorisation par  $k$  est non nul pour conclure qu'il est injectif. Mais ce dernier point est évident puisque  $L$  est engendré par ses sections sur  $A^{[1]}$  (2.3.1). Le cas symétrique en résulte immédiatement : si  $\sigma$  est une section de  $L$  sur  $A$ , nulle sur  $X \cap A_0$ , alors  $\sigma^{\otimes 2}$  est une section de  $L^{\otimes 2}$  nulle sur  $X \cap A_0$ , donc nulle sur  $A_0$  d'après le cas précédent. Donc  $\sigma$  est nulle sur  $A_0$ . ■

2.5.1. Remarque. Dans le cas des schémas abéliens, on a plus généralement (sans hypothèse de symétrie) :

Proposition. Soient  $A \xrightarrow{f} S$  un schéma abélien sur un schéma  $S$  quelconque,  $L$  un faisceau inversible sur  $A$ , ample (resp. ample et engendré par ses sections) relativement à  $S$ ,  $m$  un entier  $\gg 2$ . Soit  $X$  un sous-schéma de  $A$ , fini, plat et surjectif sur  $S$  et invariant sous  $K(L^{\otimes m})$  (resp.  $K(L)$ ). Alors le morphisme de restriction

$$f_* L \longrightarrow f_*(L|_X)$$

est injectif et localement scindé.

On laisse au lecteur la démonstration, analogue à celle de 2.5.

2.6. Nous allons maintenant reformuler 2.4 en termes de valuations, en supposant  $\Lambda$  complet. Soit  $v: F^\times \rightarrow \Gamma = F^\times/\Lambda^\times$  la valuation de  $F$  définie par  $\Lambda$ ; soient  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$ ,  $\bar{v}: \bar{F}^\times \rightarrow \bar{\Gamma}$  un prolongement de  $v$  (le groupe  $\bar{\Gamma}$  est alors isomorphe à  $\mathbb{Q}$ ),  $\bar{\Lambda}$  l'anneau de  $\bar{v}$ ,  $\bar{S} = \text{Spec } \bar{\Lambda}$ . On dispose alors du modèle de Néron  $\bar{A} \rightarrow \bar{S}$  de  $A_{\bar{F}}$  sur  $\bar{S}$ , que l'on peut définir comme suit : soient  $(F_i)_{i \in I}$  les extensions finies de  $F$  contenues dans  $\bar{F}$ ; pour tout  $i \in I$  soit  $\Lambda_i = \bar{\Lambda} \cap F_i$ , et soit  $A_i$  le modèle de Néron de  $A_{F_i}$  sur  $\Lambda_i$ ; si  $F_i \subset F_j$ , on a une immersion ouverte

$$A_i \times_{S_i} S_j \longrightarrow A_j$$

qui permet de poser

$$\bar{A} = \varinjlim_i (A_i \times_{S_i} \bar{S}) :$$

c'est un  $\bar{S}$ -schéma en groupes, réunion croissante de sous-groupes ouverts lisses de présentation finie sur  $\bar{S}$  ; sa fibre générique s'identifie à  $A_{\bar{F}}$ , et l'homomorphisme naturel

$$\bar{A}(\bar{S}) \longrightarrow A_{\bar{F}}(\bar{F}) = A(\bar{F})$$

est un isomorphisme puisque  $\bar{A}(\bar{S}) = \varinjlim_i A_i(S_i) = \varinjlim_i A(F_i)$ .

Pour tout  $i \in I$ , considérons le faisceau inversible cubiste  $L_{F_i}$  sur  $A_{F_i}$  : il existe alors  $F_j \supset F_i$  telle que  $L_{F_j} = L_{F_i} \times_{F_i} F_j$  se prolonge en un unique faisceau inversible cubiste  $L_{ij}$  sur  $A_i \times_{S_i} S_j$ , d'où par changement de base un faisceau cubiste  $\bar{L}_i$  sur l'ouvert  $A_i \times_{S_i} \bar{S}$  de  $\bar{A}$ . Pour  $i$  variable, les  $\bar{L}_i$  sont évidemment compatibles entre eux et l'on obtient donc un faisceau inversible cubiste  $\bar{L}$  sur  $\bar{A}$ , prolongeant  $L_{\bar{F}}$  ; on définit de même un sous-groupe fermé

$$K(\bar{L}) \subset \bar{A}$$

qui prolonge  $K(L_{\bar{F}})$  et dont l'algèbre  $\mathcal{O}_{K(\bar{L})}$  est un  $\bar{A}$ -module libre de rang fini : en effet il existe  $i$  et  $j$  tels que  $K(L_{ij})$  soit fini sur  $S_j$  et il suffit alors de poser  $K(\bar{L}) = K(L_{ij}) \times_{S_j} \bar{S}$ .

On peut ainsi définir le sous-groupe ouvert  $\bar{A}^{[n]}$ , pour tout  $n \gg 1$ , comme dans 2.2. Remarquons que  $\bar{A}^{[n]}$  est un  $\bar{S}$ -schéma de présentation finie puisque  $K(\bar{L})$  est contenu dans l'un des ouverts  $A_i \times_{S_i} \bar{S}$ . Soit  $\bar{s}$  le point fermé de  $\bar{S}$ , et soit  $\bar{\Phi}$  le groupe des composantes connexes de  $\bar{A}_{\bar{s}}$ . Comme le corps résiduel  $\kappa(\bar{s})$  est algébriquement clos, on peut considérer  $\bar{\Phi}$  comme un groupe abélien ordinaire (qui est d'ailleurs un groupe de torsion). Pour tout  $x \in \bar{\Phi}$ , notons (pour plus de clarté)  $C_x$  la composante de  $\bar{A}_{\bar{s}}$  correspondante. L'anneau local dans  $\bar{A}$  du point générique de  $C_x$  est un anneau de valuation, le groupe de la valuation en question s'identifiant canoniquement à  $\bar{\Gamma}$  ; on notera  $v_x$  la valuation correspondante (à valeurs dans  $\bar{\Gamma}$ ) sur le corps des fonctions de  $\bar{A}$ . De même, si  $\sigma$  est une section méromorphe de  $\bar{L}$ , on peut parler de la valuation  $v_x(\sigma)$  de  $\sigma$  le long de la composante  $C_x$ .

Alors le théorème de Mumford (2.4) prend la forme suivante :

2.6.1. Théorème. Soit  $\sigma \in H^0(A_{\bar{F}}, L_{\bar{F}})$ , considérée comme une section méromorphe de  $\bar{L}$  sur  $\bar{A}$ . Alors la fonction

$$x \longmapsto v_x(\sigma)$$

de  $\bar{\Phi}$  dans  $\bar{\Gamma}$  est minorée et atteint son minimum.

De plus, si  $L$  est symétrique (resp. totalement symétrique), ce minimum est atteint en un  $x \in \bar{\Phi}$  correspondant à une composante de  $\bar{A}_S^{[2]}$  (resp.  $\bar{A}_S^{[1]}$ ).

Démonstration : commençons par le cas symétrique. Notant

$$\bar{\Phi}^{[2]} = \bar{A}_S^{[2]} / \bar{A}_S^0$$

il s'agit de montrer que, pour tout  $x \in \bar{\Phi}$ , on a

$$(2.6.1.1) \quad v_x(\sigma) \gg \inf_{y \in \bar{\Phi}^{[2]}} v_y(\sigma).$$

En multipliant  $\sigma$  par un élément convenable de  $\bar{F}^X$ , on se ramène au cas où le second membre de (2.6.1.1) est nul ; on a donc

$$\sigma \in H^0(\bar{A}^{[2]}, L)$$

et le théorème 2.4 implique donc que  $\sigma$  est régulière le long de la composante  $x$  : il suffit en effet de l'appliquer sur une extension finie  $F_i$  convenable de  $F$ , i.e. telle que  $x$ ,  $\bar{\Phi}^{[2]}$  et  $\sigma$  soient définis sur  $\Lambda_i$ . On a donc bien  $v_x(\sigma) \gg 0$ , comme annoncé.

Le cas totalement symétrique se démontre de même. Le cas général se déduit du cas symétrique : il suffit de remarquer qu'il existe  $a \in \bar{A}(\bar{S})$  tel que  $T_a^*(\bar{L})$  soit symétrique, et comme on sait (III, 1.1.9.1) que  $T_a^*(\bar{L})$  admet une structure cubiste (non canonique), le cas symétrique s'applique. ■

### 3. Généralisation à une base normale quelconque.

3.0. Dans tout ce § on se donne un schéma localement noethérien  $S$ , un  $S$ -schéma en groupes semi-stable  $A \xrightarrow{f} S$ , un ouvert dense  $U \subset S$  tel que  $A_U$  soit un  $U$ -schéma abélien, et un faisceau inversible cubiste  $L$  sur  $A$ . On fait de plus les hypothèses suivantes :

(3.0.1)  $L_U$  est ample sur  $A_U$  (relativement à  $f_U : A_U \rightarrow U$ )

(3.0.2) pour tout point  $x \in S - U$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_{S,x}$  est normal.

L'hypothèse (3.0.2) implique que  $U$  est schématiquement dense dans  $S$  puisque  $\mathcal{O}_{X,x}$  est intègre si  $x \notin U$ . De plus (3.0.1) et (3.0.2) impliquent, grâce à IV, 2.4. l'existence d'un sous-groupe fermé



$$K(L) \subset A ,$$

plat et quasi-fini sur  $S$  et prolongeant  $K(L_U)$ , ainsi que celle d'une extension centrale

$$1 \longrightarrow G_{m,S} \longrightarrow Q(L) \longrightarrow K(L) \longrightarrow 0 ,$$

non dégénérée dès que  $K(L)$  est fini sur  $S$ , et opérant sur  $L$ .

Enfin nous supposerons dans ce qui suit que

(3.0.3)  $L$  est symétrique.

Nous pouvons alors généraliser 2.1 :

3.1. Proposition. Sous les hypothèses de 3.0,  $L$  est ample sur  $A$  (relativement à  $S$ ).

La question est locale sur  $S$ , et comme  $L_U$  est déjà ample sur  $U$ , on peut supposer  $S$  normal grâce à (3.0.2). Lorsque  $A$  est à fibres connexes, la proposition résulte de [R1], XI 1.13 et de l'unicité du prolongement de  $L_U$  à  $A$ . Dans le cas général il existe (localement sur  $S$ ) un entier  $m \gg 1$  tel que la multiplication par  $m$  se factorise en

$$[m] : A \longrightarrow A^{\circ} \hookrightarrow A .$$

D'après le cas connexe,  $L|_{A^{\circ}}$  est ample sur  $A^{\circ}$ ; comme  $[m]$  est quasi-fini,  $[m]^*(L|_{A^{\circ}})$  est ample sur  $A$ , mais ce dernier faisceau est isomorphe à  $L^{\otimes m^2}$  puisque  $L$  est symétrique (I,5.5). ■

3.1.1. Remarque. J'ignore si la proposition 3.1 reste vraie sans hypothèse de symétrie sur  $L$ .

3.2. Définition. Nous dirons que  $L$  est totalement symétrique si  $L_U$  est totalement symétrique sur le schéma abélien  $A_U$ , i.e. s'il existe  $U' \longrightarrow U$  fidèlement plat tel que  $L_U$ , soit de la forme  $M_U \otimes [-1]^*(M_U)$  pour un faisceau inversible (cubiste)  $M_U$ , sur  $A_U$ , (que l'on peut d'ailleurs supposer symétrique).

3.2.1. Remarques.

a) Si  $L$  est totalement symétrique le morphisme  $U' \longrightarrow U$  de 3.2 peut être choisi fini et plat : en effet on peut prendre pour  $U'$  le sous-schéma de  $\text{Pic}_{A_U/U}$  qui paramètre les  $M$  symétriques vérifiant  $M^{\otimes 2} \simeq L$  : ce sous-schéma est un torseur sous le groupe des points d'ordre 2 de

$\text{Pic}_{A_U/U}$ , donc est fini et plat.

b) Lorsque  $S$  est un trait, la notion introduite ici coïncide avec celle de 2.3, en vertu des remarques 2.3.1.

c) Si  $L$  est totalement symétrique il est facile de voir (au moins si  $S$  est noethérien excellent) qu'il existe  $\pi : S' \rightarrow S$  fini surjectif tel que  $L_S$ , soit le carré d'un  $M$  symétrique sur  $A_S$  : en effet, supposant  $S$  intègre, il existe une extension finie  $F'_1$  du corps des fonctions  $F$  de  $S$  telle que  $L_{F'_1}$  soit le carré d'un  $M_{F'_1}$  symétrique sur la variété abélienne  $A_{F'_1}$ . Remplaçant ensuite  $F'_1$  par une extension finie  $F'$  convenable, on applique à  $M_{F'}$  le théorème de prolongement II,3.5 sur le normalisé  $S'$  de  $S$  dans  $F'$  : l'unicité du prolongement cubiste assure que le faisceau cubiste symétrique  $M_S$ , prolongeant  $M_{F'}$ , vérifie  $M_S^{\otimes 2} \simeq L_S$ .

3.3. Comme dans 2.2, notons  $A^{[n]}$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A$  contenant  $K(L^{\otimes n}) = [n]_A^{-1}(K(L))$ , et

$$f^{[n]} : A^{[n]} \rightarrow S$$

le morphisme structural. Le théorème 2.4 se généralise alors sans difficulté, ainsi que son corollaire 2.4.1 :

3.4. Théorème. (i) On suppose que  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$ . Alors le morphisme naturel

$$(3.4.1) \quad f_* L \rightarrow f_*^{[2]}(L|_{A^{[2]}})$$

est un isomorphisme.

(ii) On suppose  $K(L)$  fini sur  $S$  et  $L$  totalement symétrique. Alors le morphisme naturel

$$(3.4.2) \quad f_* L \rightarrow f_*^{[1]}(L|_{A^{[1]}})$$

est un isomorphisme.

Le théorème est une conséquence de 2.4 et de la propriété fondamentale suivante de l'image directe :

3.4.3. Lemme. Soit  $V \subset S$  un ouvert schématiquement dense (resp. un gros ouvert (II,3.1)) de  $S$ , et soit  $j : V \hookrightarrow S$  l'inclusion. Alors le mor-

phisme naturel

$$f_*L \longrightarrow j_*j^*f_*L$$

est injectif (resp. bijectif).

Cela résulte immédiatement du fait que,  $A$  étant lisse sur  $S$ , l'ouvert  $f^{-1}(V)$  est schématiquement dense dans  $A$  (resp. est un gros ouvert de  $A$ ) et du fait que  $L$  est localement libre sur  $A$ . ■

En particulier, lorsque  $V$  est un gros ouvert,  $f_*L$  est déterminé par sa restriction à  $V$ . Or, le théorème 3.4 est vrai au-dessus de l'ouvert  $U$  de "bonne réduction" (puisque  $A_U^{[2]} = A_U^{[1]} = A_U$ ), ainsi qu'au-dessus des points de  $S-U$  qui sont de codimension 1 dans  $S$  (car on peut alors appliquer 2.4 ou 2.4.1). Vu l'hypothèse (3.0.2), le morphisme naturel (3.4.1) est donc, dans le cas (i), un isomorphisme au-dessus d'un gros ouvert de  $S$ , donc est un isomorphisme ; la démonstration de (ii) est la même. ■

#### 3.4.4. Remarques.

1) Le théorème 3.4 utilise seulement l'hypothèse que  $K(L^{\otimes 2})$  (dans le cas (i)) ou  $K(L)$  (dans le cas (ii)) est fini au-dessus des points de codimension 1 de  $S$ .

2) Bien entendu l'analogie de 2.4 (ii) est vrai aussi puisque c'est un cas particulier de 3.4 (ii).

Nous allons maintenant nous attaquer à la généralisation, plus délicate, de 2.5 ; de même que 2.4 elle a été démontrée par Mumford (non publié) sous des hypothèses plus restrictives :

3.5. Théorème. On suppose  $K(L^{\otimes 2})$  fini sur  $S$  (resp.  $K(L)$  fini et  $L$  totalement symétrique). Posons  $X = K(L^{\otimes 2})$  (resp.  $K(L)$ ). Alors le morphisme de restriction

$$(3.5.1) \quad f_*L \longrightarrow f_*(L|_X)$$

est localement scindé, i.e.  $f_*L$  est localement facteur direct dans  $f_*(L|_X)$ . En particulier  $f_*L$  est localement libre (car  $f_*(L|_X)$  l'est).

3.5.2. Remarque. Il revient au même de dire que pour tout  $x \in S$ , le morphisme

$$(f_*L) \otimes \kappa(x) \longrightarrow f_*(L|_X) \otimes \kappa(x)$$

induit par (3.5.1) est injectif : en d'autres termes, si une section de  $L$  au-dessus d'un voisinage de  $x$  est identiquement nulle sur  $X \times_S \kappa(x)$ , elle est identiquement nulle sur toute la fibre  $A \times_S \kappa(x)$ , et elle appartient même à  $\underline{m}_x(f_*L)_x$ .

3.5.3. Corollaire (changement de base). On se place sous les hypothèses (respées ou non) de 3.5. Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un morphisme de schémas tel que l'ouvert  $\pi^{-1}(U)$  soit schématiquement dense dans  $S'$ . Soient  $A'$ ,  $f'$ ,  $L'$  les objets induits sur  $S'$  par  $A$ ,  $f$ ,  $L$ . Alors l'homomorphisme naturel

$$(3.5.3.1) \quad \pi^* f_* L \longrightarrow f'_* L'$$

est un isomorphisme.

Démontrons le corollaire. Posons  $X' = X \times_S S' \subset A'$ . Comme  $X$  est fini et plat sur  $S$ , le morphisme naturel

$$\pi^* f_*(L|_X) \longrightarrow f'_*(L'|_{X'})$$

est un isomorphisme. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^* f_* L & \xrightarrow{(a)} & f'_* L' \\ (c) \searrow & & \swarrow (b) \\ & f'_*(L'|_{X'}) & \end{array}$$

où la flèche (c) est localement scindée d'après 3.5. A fortiori, (a) est localement scindée ; la question étant locale sur  $S'$  on peut donc supposer que

$$(3.5.3.2) \quad f'_* L' = \pi^* f_* L \oplus T .$$

Comme  $A_U$  est un  $U$ -schéma abélien et que  $L$  est ample, (3.5.3.1) est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $U = \pi^{-1}(U)$  de  $S'$ , donc  $T_U = 0$ . En d'autres termes, si  $j' : U' \hookrightarrow S'$  désigne l'inclusion,  $T$  est dans le noyau du morphisme naturel

$$f'_* L' \longrightarrow j'_* j'^* f'_* L' ;$$

or ce dernier est injectif d'après l'hypothèse sur  $\pi$  et le lemme 3.4.3 (qui n'utilise pas d'hypothèse de normalité sur la base), d'où  $T = 0$ , cqfd. ■

### 3.6. Démonstration de 3.5 : réductions diverses.

3.6.1. L'assertion de 3.5 étant de nature locale sur  $S$ , nous pouvons supposer que  $S$  est affine et même, grâce à EGA IV, 8.8.2, que  $S$  est le spectre d'une  $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini (donc un schéma excellent).

Nous dirons pour abrégé que  $(A, L, X)$  vérifie la condition (C) en un point  $x$  de  $S$  si le morphisme (3.5.1) est scindé au-dessus de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{S, x}$ . Notons

$$W \subset S$$

l'ouvert formé des points  $x$  tels que  $(A, L, X)$  vérifie (C) en  $x$ . D'après 2.5 et la remarque 2.5.1,  $W$  contient  $U$  et les points de  $S-U$  qui sont de codimension 1 dans  $S$  (car ces derniers, d'après 3.0.2, sont des points réguliers de  $S$ ). Se plaçant en un point maximal de  $S-W$ , on peut donc supposer que  $S$  est local normal de dimension  $\geq 2$ , de point fermé  $s$ , et que  $W$  contient  $S-\{s\}$ . Enfin on peut toujours remplacer  $S$  par un  $S$ -schéma fidèlement plat, et nous supposons donc désormais que

$$(3.6.2) \left\{ \begin{array}{l} S = \text{Spec } R, \text{ où } R \text{ est un anneau local complet normal à corps} \\ \text{résiduel } k \text{ séparablement clos, et } (A, L, X) \text{ vérifie (C) au-} \\ \text{dessus de l'ouvert } V = S-\{s\}, \text{ où } s \text{ désigne le point fermé} \\ \text{de } S. \end{array} \right.$$

3.6.3. Lemme (descente). Soit  $F'$  une extension finie du corps des fractions de  $R$ , et soit  $S' = \text{Spec } R'$  le normalisé de  $S$  dans  $F'$ , de sorte que  $R'$  est encore local normal complet et que le morphisme  $\pi : S' \rightarrow S$  est fini local surjectif. Notons  $A', f', L', X'$  les objets déduits de  $A, f, L, X$  par le changement de base  $\pi$ . Si  $(A', L', X')$  vérifie (C) (3.6.1) au point fermé  $s'$  de  $S'$ , alors  $(A, L, X)$  vérifie (C) au point  $s$  (donc sur  $S$ ), et de plus  $\pi^* f_* L \xrightarrow{\sim} f'_* L'$ .

Démonstration : posons  $\mathcal{G} = f_*(L|_X)$ ,  $\mathcal{G}' = \pi^* \mathcal{G} = f'_*(L'|_{X'})$ . Comme  $R$  est local,  $\mathcal{G}$  est libre : soit  $(e_1, \dots, e_N)$  une base de  $\mathcal{G}$ .

Désignons par  $V_1 \subset S$  l'ouvert au-dessus duquel  $\pi$  est plat : comme  $S$  est normal,  $S'$  intègre et  $\pi$  surjectif, l'ouvert  $V_1$  contient tous les points de codimension (i.e. de profondeur)  $\leq 1$  de  $S$ . Posons  $V'_1 = \pi^{-1}(V_1)$ , et désignons par  $j_1 : V_1 \hookrightarrow S$  et  $j'_1 : V'_1 \hookrightarrow S'$  les inclusions canoniques. Notons que  $\pi|_{V'_1} : V'_1 \rightarrow V_1$  est fidèlement plat, et que le morphisme

$$\pi^* f_* L \longrightarrow f'_* L'$$

est un isomorphisme au-dessus de  $V_1$ . D'autre part  $f_* L$  est localement libre sur  $V_1$ ; notons  $d$  son rang.

Par hypothèse le morphisme

$$(3.6.3.1) \quad f'_* L' \longrightarrow \mathcal{O}'$$

est scindé sur  $S'$ , i.e.  $f'_* L'$  est (localement) libre, nécessairement de rang  $d$ , sur  $S'$ , et (3.6.3.1) induit un morphisme injectif de  $\kappa(s')$ -vectoriels :

$$(3.6.3.2) \quad f'_* L' \otimes \kappa(s') \longrightarrow \mathcal{O}' \otimes \kappa(s') .$$

Il existe donc  $d$  éléments de la base  $(e_i)$  de  $\mathcal{O}'$ , par exemple  $e_1, \dots, e_d$ , tels que si  $\mathfrak{F}$  désigne le quotient de  $\mathcal{O}'$  par le sous-module engendré par les  $e_j$  pour  $j > d$ , l'homomorphisme composé

$$(3.6.3.3) \quad f'_* L' \otimes \kappa(s') \xrightarrow{(3.6.3.2)} \mathcal{O}' \otimes \kappa(s') \longrightarrow \mathfrak{F} \otimes \kappa(s')$$

soit un isomorphisme. Comme  $S'$  est local, cela implique que le composé

$$(3.6.3.4) \quad f'_* L' \xrightarrow{(3.6.3.1)} \mathcal{O}' \longrightarrow \pi^* \mathfrak{F}$$

est encore un isomorphisme. C'est en particulier un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $V'_1$ ; il en résulte par descente fidèlement plate que l'homomorphisme composé

$$u : f_* L \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

est un isomorphisme au-dessus de  $V_1$ . Mais on sait (3.4.3) que

$$f_* L = j_{1*} j_1^* f_* L$$

et on a évidemment  $\mathfrak{F} = j_{1*} j_1^* \mathfrak{F}$  puisque  $\mathfrak{F}$  est libre; donc si  $u$  est un isomorphisme au-dessus de  $V_1$ , c'est un isomorphisme. ■

3.6.4. Lemme. Pour que  $(A, L, X)$  vérifie (C) au point  $s$ , il faut et il suffit que le morphisme naturel

$$(3.6.4.1) \quad (f_* L) \otimes k \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k$$

où l'on a posé  $\mathcal{O} = f_*(L|_X)$  soit non nul (on rappelle que  $k$  désigne le corps résiduel de  $s \in S$ ).

La condition est évidemment nécessaire puisque  $f_*L \neq 0$ .

Réciproquement, considérons le morphisme naturel (3.5.1)

$$f_*L \longrightarrow \mathcal{O}$$

Le groupe  $\mathcal{G}(L)$  opère sur  $f_*L$  et sur  $\mathcal{O}$  avec poids 1 (car  $X$  est invariant sous  $K(L)$ ) et le morphisme (3.5.1) est manifestement un  $\mathcal{G}(L)$ -morphisme. Désignant par  $d^2$  le rang de  $K(L)$ , on sait que  $f_*L$  est localement libre de rang  $d$  sur un gros ouvert  $V_1$  de  $S$ . D'autre part (3.6.4.1) est un morphisme de représentations de poids 1 de  $\mathcal{G}(L) \times_S \text{Spec } k$ , donc s'il n'est pas nul il est de rang  $\geq d$  par V,2.5.6.

Il existe donc un quotient  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}$ , libre de rang  $d$ , tel que

$$(f_*L) \otimes k \longrightarrow \mathcal{O} \otimes k \longrightarrow \mathcal{F} \otimes k$$

soit surjectif, donc par Nakayama le composé

$$f_*L \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$$

est surjectif ; c'est donc un isomorphisme au-dessus de  $V_1$  puisque  $f_*L$  et  $\mathcal{F}$  sont alors localement libres de même rang, et l'on conclut comme dans la démonstration de 3.6.3. ■

Nous allons maintenant ramener la démonstration du théorème 3.5 à celle du lemme suivant :

3.6.5. Lemme.  $S$  étant comme en 3.6.2, on suppose que  $K(L^{\otimes 4})$  est fini sur  $S$ . Alors il existe une section globale  $\sigma \in H^0(A, L^{\otimes 4})$ , non nulle à l'origine  $e_{A_0}$  de la fibre fermée  $A_0$  de  $A$ .

3.6.6. Montrons comment ce lemme implique 3.5.

1) Plaçons-nous d'abord dans le cas où ( $S$  étant toujours comme en 3.6.2) le faisceau  $L$  de 3.5 est seulement supposé symétrique et où  $X = K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$  : il s'agit de montrer que  $(A, L, X)$  vérifie la condition (C) de 3.6.1. Grâce au lemme de descente 3.6.3, nous pouvons remplacer  $S$  par son normalisé dans une extension finie du corps des fractions de  $S'$ , donc supposer qu'il existe (grâce à IV, 8.2 et II, 3.5)

- un  $S$ -schéma en groupes  $A'$  contenant  $A$  comme sous-groupe ouvert avec la même fibre générique

- un faisceau inversible cubiste  $L'$  sur  $A'$  prolongeant  $L$

tels que  $Y = K(L'^{\otimes 4})$  soit fini sur  $S$ .

Il est clair que si  $(A', L', X)$  vérifie (C) il en est de même de  $(A, L, X)$  car  $H^0(A, L) = H^0(A', L')$  d'après 3.4 (i) : nous pouvons donc remplacer  $A$  par  $A'$ , i.e. supposer que  $Y = K(L^{\otimes 4})$  est fini sur  $S$ . Notons  $A^{[2]}$  (resp.  $A^{[4]}$ ) le plus petit sous-groupe ouvert de  $A$  contenant  $X$  (resp.  $Y$ ) et considérons le morphisme  $\lambda : A^{[4]} \rightarrow A^{[2]}$  de multiplication par 2 ; nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \lambda : A^{[4]} & \longrightarrow & A^{[2]} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_Y : Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a  $Y = \lambda^{-1}(X)$ , et comme  $Y$  est fini,  $\lambda_Y$  est fidèlement plat, i.e. on a  $X = Y/H$  où l'on a posé

$$H = \text{Ker } \lambda = {}_2A .$$

Par définition de  $A^{[2]}$  et  $A^{[4]}$ ,  $\lambda$  est donc aussi surjectif, donc on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow A^{[4]} \xrightarrow{\lambda} A^{[2]} \longrightarrow 0 .$$

Comme  $L$  est symétrique on a

$$\lambda^* L \simeq L^{\otimes 4} \quad (\text{I}, 5.5) .$$

Considérons le diagramme commutatif de  $R$ -modules

$$(3.6.6.1) \quad \begin{array}{ccc} M = H^0(A^{[4]}, L^{\otimes 4}) & \xrightarrow{u} & H^0(Y, L^{\otimes 4}|_Y) = \nu \\ \lambda^* \uparrow & & \uparrow \lambda_Y^* \\ H^0(A^{[2]}, L) & \xrightarrow{v} & H^0(X, L|_X) . \end{array}$$

Le groupe  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(L^{\otimes 4})$  opère sur  $M$  et  $\nu$ , et le morphisme  $u$  ci-dessus est compatible à ces actions. L'isomorphisme  $\lambda^* L \simeq L^{\otimes 4}$  définit d'après 1.2 un relèvement de  $H = \text{Ker } \lambda$  dans  $\mathcal{G}$ , permettant d'identifier  $H$  à un "sous-groupe de niveau" de  $\mathcal{G}$  au sens de V, 2.5.1. Par descente des sections, le diagramme (3.6.6.1) s'identifie alors au diagramme

$$(3.6.6.2) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & \nu \\ \uparrow & & \uparrow \\ M^H & \xrightarrow{u^H} & \nu^H . \end{array}$$



Enfin on sait (3.4) que  $H^0(A, L) = H^0(A^{[2]}, L) = M^H$ , de sorte qu'il suffit de prouver (compte tenu de 3.6.4) que l'homomorphisme

$$u^H \otimes k : M^H \otimes k \longrightarrow v^H \otimes k$$

est non nul. Or il s'identifie, d'après V, 3.2 (ii) à

$$(u \otimes k)^H : (M \otimes k)^H \longrightarrow (v \otimes k)^H$$

et d'après l'équivalence de catégories V, 3.2 (i) (appliquée à  $\mathcal{O} \otimes k$ ), ce dernier est non nul dès que

$$u \otimes k : M \otimes k \longrightarrow v \otimes k$$

est non nul, ce qui résulte immédiatement du lemme 3.6.5.

2) Supposons maintenant que  $L$  est totalement symétrique et que  $X = K(L)$  est fini sur  $S$ . Utilisant le lemme de descente 3.6.3 et la remarque 3.2.1, nous sommes ramenés au cas où  $L$  est le carré d'un faisceau ample symétrique  $L_1$  sur  $A$ . Comme  $X = K(L) = K(L_1^{\otimes 2})$  est fini,  $(A, L_1, X)$  vérifie (C) d'après ce qui précède et il existe donc une section  $\sigma \in H^0(A, L_1)$ , non identiquement nulle sur  $X \otimes k$ ; il en est donc de même de  $\sigma^{\otimes 2} \in H^0(A, L)$  et l'on conclut grâce à 3.6.4.

### 3.7. Démonstration du lemme 3.6.5.

3.7.1. Supposons donc que  $S = \text{Spec } R$  comme en 3.6.2, et que  $L$  est symétrique sur  $A$  avec  $Y = K(L^{\otimes 4})$  fini sur  $S$ .

Comme  $L$  est ample sur  $A$  (3.1), il existe un entier  $m \gg 1$  et une section globale

$$(3.7.1.1) \quad \sigma_1 \in H^0(A, L^{\otimes m})$$

telle que  $\sigma_1(e_{A_0}) \neq 0$ . Choisissons  $m$  premier à la caractéristique de  $k$ , et premier au rang de  $K(L^{\otimes 4})$ . On a alors

$$K(L^{\otimes m}) = [m]_A^{-1}(K(L)) \simeq K(L) \times ({}_m A)$$

et de même  $K(L^{\otimes 2m}) \simeq K(L^{\otimes 2}) \times ({}_m A)$

et le groupe  ${}_m A$  est étale sur  $S$ . Considérons la filtration

$$0 \subset ({}_m A)^\mu \subset ({}_m A)^{fn} \subset {}_m A$$

définie en IV, §1. Comme la décomposition  $K(L^{\otimes m}) = {}_m A \times K(L)$  est évidemment orthogonale pour la forme  $e^{L^{\otimes m}}$  sur  $K(L^{\otimes m})$ , le théorème d'orthogonalité IV, 2.4 (iv) implique que  $({}_m A)^{fn}$  est l'orthogonal de  $({}_m A)^\mu$  dans  ${}_m A$ , et que  $e^{L^{\otimes m}}$  induit une dualité parfaite sur le quotient  $({}_m A)^{ab} = ({}_m A)^{fn}/({}_m A)^\mu$ . Ce dernier est fini étale sur  $S$  donc s'identifie à un groupe fini ordinaire, et il existe donc un sous-groupe constant  $H \subset ({}_m A)^{fn}$  tel que  $H/({}_m A)^\mu$  soit lagrangien (V, 2.5.1) dans  $({}_m A)^{ab}$ . Autrement dit,  $H$  est égal à son orthogonal dans  ${}_m A$ , et l'orthogonal de  $H$  dans  $K(L^{\otimes m})$  est simplement  $H \times K(L)$ .

Notons qu'il suffit de démontrer 3.6.5 "après changement de base fini surjectif"  $\pi : S' \rightarrow S$  : si (3.6.5) est vrai sur  $S'$ , alors  $L'^{\otimes 4}$  vérifie (C), donc, par le lemme de descente, on a  $\pi^* f_* L'^{\otimes 4} \xrightarrow{\sim} f_* L'^{\otimes 4}$  donc l'existence d'une section de  $L'^{\otimes 4}$  non nulle à l'origine implique l'existence d'une telle section pour  $L^{\otimes 4}$ .

En particulier nous pouvons supposer qu'il existe un "gonflement"  $A \subset A_1$  de  $A$ , tel que  ${}_m A_1$  soit fini sur  $S$ , et un faisceau inversible  $L_1$  sur  $A_1$  prolongeant  $L$ . Nous choisirons  $A_1$  de telle sorte que

$$mA_1 = A$$

de sorte que, vu nos hypothèses, on a un morphisme fini de multiplication par  $m$  :

$$[m] : A_1 \rightarrow A_1 / {}_m A_1 \simeq A ;$$

toutefois la section  $\sigma_1$  de (3.7.1.1) ne se prolonge pas nécessairement en une section de  $L_1^{\otimes m}$  sur  $A_1$ .

Posons alors  $B = A/H$ ,  $B_1 = A_1/H$ , de sorte que l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \searrow q & \\ 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{p_1} & B_1 & \xrightarrow{q_1} & A \end{array}$$

où la ligne supérieure est exacte et où  $q_1 p_1 = [m]$ , de sorte que  $q_1$  est surjectif ; son noyau n'est autre que  $p_1({}_m A_1)$  qui est fini, donc  $q_1$  identifie  $A$  au quotient de  $B_1$  par un sous-groupe fini étale.

3.7.2. Le sous-groupe  $H \subset A$  étant isotrope, il se relève, puisque  $S$  est strictement hensélien, dans  $\mathcal{G}(L^{\otimes m})$  (et aussi dans  $\mathcal{G}(L_1^{\otimes m})$ , qui contient  $\mathcal{G}(L^{\otimes m})$ ). Si l'on fixe un tel relèvement, les autres s'en

déduisent en le multipliant par un caractère de  $H$ . Chaque caractère  $\chi : H \rightarrow \mathbb{G}_m$  donne ainsi naissance, par descente, à un faisceau inversible  $M(\chi)$  sur  $B$  (resp.  $M_1(\chi)$  sur  $B_1$ ), et l'on a

$$H^0(B, M(\chi)) = H^0(A, L^{\otimes m})^\chi,$$

sous-module de  $H^0(A, L^{\otimes m})$  sur lequel  $H \subset \mathcal{Q}(L)$  opère par le caractère  $\chi$ . Comme  $k$  est séparablement clos et que  $H$  est un groupe fini ordinaire, d'ordre premier à la caractéristique de  $k$ , on a

$$H^0(A, L^{\otimes m}) = \bigoplus_{\chi \in \hat{H}} H^0(A, L^{\otimes m})^\chi.$$

L'existence de  $\sigma_1 \in H^0(A, L^{\otimes m})$  non nulle à l'origine implique celle d'une telle section dans l'un des sous-espaces propres  $H^0(A, L^{\otimes m})^\chi$ , donc d'un faisceau inversible  $M$  sur  $B$ , descendant  $L^{\otimes m}$ , et d'une section

$$(3.7.2.1) \quad \sigma_2 \in H^0(B, M) \quad , \quad \sigma_2(e_{B_0}) \neq 0.$$

Notons que  $M$  se prolonge en un faisceau inversible  $M_1$  sur  $B_1$  descendant  $L_1^{\otimes m}$ , puisque le relèvement  $H \hookrightarrow \mathcal{Q}(L^{\otimes m})$  correspondant à  $M$  est aussi un relèvement dans  $\mathcal{Q}(L_1^{\otimes m})$ . D'autre part l'orthogonal de  $H$  dans  $K(L^{\otimes m})$  (resp.  $K(L^{\otimes 2m})$ ) est  $H \times K(L)$  (resp.  $H \times K(L^{\otimes 2})$ ) donc  $p$  induit des isomorphismes

$$K(L) \xrightarrow{\sim} K(M)$$

$$K(L^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} K(M^{\otimes 2})$$

de sorte que  $K(M^{\otimes 2}) \subset B$  est fini sur  $S$ . Cependant  $M$  n'est pas nécessairement symétrique ; mais si nous posons

$$N_1 = M_1 \otimes [-1]^* M_1 \quad , \quad N = N_1|_B$$

alors  $N_1$  est totalement symétrique et  $p_1^* N_1 \simeq L_1^{\otimes 2m}$ . Posons alors

$$(3.7.2.2) \quad \sigma_3 = \sigma_2 \otimes [-1]^* \sigma_2 \in H^0(B, N) :$$

alors  $\sigma_3(e_{B_0}) \neq 0$  et, comme  $K(N) = K(M^{\otimes 2})$  est fini et  $N$  totalement symétrique on conclut par 3.4 (ii) que  $\sigma_3$  se prolonge en une section de  $N_1$  sur  $B_1$ , encore notée  $\sigma_3$ .

3.7.3. Le faisceau inversible  $N_1^{\otimes m}$  sur  $B_1$  vérifie

$$p_1^*(N_1^{\otimes m}) \simeq L_1^{\otimes 2m^2} \simeq p_1^* q_1^*(L^{\otimes 2})$$

de sorte que  $N_1^{\otimes m}$  et  $q_1^*(L^{\otimes 2})$  sont totalement symétriques et ont même image réciproque dans  $A_1$ . En conséquence ils sont isomorphes : il suffit en effet de le vérifier au-dessus d'un point générique géométrique  $\bar{\eta}$  de  $S$  ; si l'on pose  $E = N_1^{\otimes m} \otimes q_1^*(L^{\otimes -2})$ , alors  $E_{\bar{\eta}}$  appartient au noyau de  $B^t \xrightarrow{p^t} A^t$  donc est d'ordre fini ; il est d'autre part le carré d'un faisceau inversible symétrique (i.e. d'ordre 2) donc est trivial.

Il en résulte que le noyau de  $q_1 : B_1 \rightarrow A$  se relève dans  $Q(N_1^{\otimes m})$  (car  $N_1^{\otimes m}$  provient de  $A$ ) ; comme ce noyau est un  $S$ -groupe fini constant, d'ordre premier à  $\text{car}(k)$ , on peut répéter l'argument de 3.7.2 et déduire, de l'existence de  $\sigma_3$  (3.7.2.2), un faisceau inversible  $P$  sur  $A$ , tel que  $q_1^*P \simeq N_1^{\otimes m}$  (et donc  $[m]^*P \simeq L_1^{\otimes 2m^2} \simeq [m]^*L^{\otimes 2}$ ) et une section

$$\sigma_4 \in H^0(A, P)$$

telle que  $\sigma_4(e_{A_0}) \neq 0$ . Enfin le faisceau  $P \otimes [-1]^*P$  est totalement symétrique, et a même image réciproque par  $[m]$  que  $L^{\otimes 4}$  (à savoir  $L_1^{\otimes 4m^2}$ ), donc, comme précédemment,  $P \otimes [-1]^*P \simeq L^{\otimes 4}$ . La section

$$\sigma_5 = \sigma_4 \otimes [-1]^*\sigma_4 \in H^0(A, P \otimes [-1]^*P) = H^0(A, L^{\otimes 4})$$

répond donc à la question. Ceci achève la démonstration de 3.6.5 et celle de 3.5. ■

Grâce au théorème 3.5, nous pouvons maintenant étendre partiellement la proposition 2.2 :

**3.8. Proposition.** Pour tout  $n \gg 1$  notons  $A^{[n]}$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A$  contenant  $K(L^{\otimes n})$ . Alors :

(i) Si  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$ , alors pour tout  $n \gg 1$ , la restriction de  $L^{\otimes 2n}$  à  $A^{[2n]}$  est engendrée par ses sections (relativement à  $S$ ) sur  $A^{[2n]}$ .

(ii) Si  $L$  est totalement symétrique (et  $K(L)$  fini sur  $S$ , comme toujours), alors pour tout  $n \gg 1$  la restriction de  $L^{\otimes n}$  à  $A^{[n]}$  est engendrée par ses sections sur  $A^{[n]}$ .

Démonstration : nous pouvons supposer  $S$  local.

(i) Nous savons grâce à 3.5 qu'il existe une section de  $L$  sur  $A^{[2n]}$  qui n'est pas identiquement nulle sur la fibre fermée  $A_0^{[2n]}$  de  $A^{[2n]}$  (puisque  $K(L^{\otimes 2}) \subset A^{[2n]}$ ). La démonstration est alors la même que celle

de 2.2, conséquence formelle du théorème du carré et de l'action de  $Q(L^{\otimes 2n})$  sur  $L^{\otimes 2n}$ .

(ii) Nous pouvons supposer  $S$  excellent (par exemple essentiellement de type fini sur  $\mathbb{Z}$ ) ; il suffit de plus (grâce à 3.5.3) de démontrer (ii) après un changement de base fini surjectif, et nous sommes ramenés grâce à 3.2.1 c) au cas où  $L$  est le carré d'un faisceau inversible symétrique : on applique alors (i) à ce dernier. ■

3.8.1. Remarque. Sous les hypothèses de (ii) ci-dessus par exemple, j'ignore (même lorsque  $S$  est un trait) si, pour  $n \gg 2$ , la restriction de  $L^{\otimes n}$  à  $A^{[n]}$  est très ample sur  $A^{[n]}$  relativement à  $S$ .

#### 4. Application : un théorème de négativité de l'image directe.

4.0. On se donne  $S, A, L$  comme en 3.0 et on suppose pour simplifier  $S$  connexe noethérien ; on suppose de plus, comme dans le théorème 3.5, que  $X = K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$  (resp. que  $X = K(L)$  est fini et  $L$  totalement symétrique) ; on note  $g$  la dimension relative de  $A$  sur  $S$ ,  $d$  le rang de  $f_*L$  (on rappelle que  $f_*L$  est localement libre (3.5)), de sorte que  $X$  est fini et plat sur  $S$  de rang  $4^g d^2$  (resp.  $d^2$ ). Enfin on suppose dans ce § que

(4.0.1)  $X$  est étale sur  $S$ .

Comme  $X$  est isomorphe à son dual de Cartier, ceci équivaut à supposer que  $X$  est d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de  $S$  ; comme d'autre part  $d$  est pair si  $L$  est totalement symétrique, nous voyons que (4.0.1) équivaut dans tous les cas à

(4.0.2)  $2d$  est inversible sur  $S$ .

#### 4.1. Théorème.

(i) Il existe un revêtement fini étale  $\pi : S' \rightarrow S$  tel que  $\pi^*(f_*L)^\vee$  soit engendré par ses sections globales sur  $S'$ .

(ii) Il existe un entier  $n \gg 1$  tel que le faisceau inversible  $(\wedge^d f_*L)^{\otimes -n}$  soit engendré par ses sections globales sur  $S$ .

4.2. Montrons (i). Vu nos hypothèses, on peut, quitte à remplacer  $S$  par un revêtement étale convenable, supposer que le schéma en groupes  $X$  est constant sur  $S$ . Notons  $r$  son rang ; on sait (d'après I,5.7) que

$L_X^{\otimes 2r}$  est trivial, et comme  $2r$  est inversible sur  $S$ , il existe  $S' \xrightarrow{\pi} S$  fini étale tel que  $L_{X'}$  soit trivial, avec  $X' = \pi^*X$ . Remplaçant alors  $S$  par  $S'$ , on a un isomorphisme

$$f_*(L|_X) \simeq \mathcal{O}_S^r$$

d'où grâce à 3.5 un morphisme injectif localement scindé

$$f_*L \longrightarrow \mathcal{O}_S^r$$

d'où notre assertion (compte tenu du fait que la formation de  $f_*L$  commute aux changements de base considérés, lesquels sont d'ailleurs plats).

4.3. Posons  $M = (\wedge^d f_*L)^{-1}$  : il résulte de (i) que  $\pi^*M$  est engendré par ses sections sur  $S'$ , et même par  $r$  sections globales (avec  $r = \text{rg } X$ ) d'après 4.2 ci-dessus, donc définit un morphisme

$$\varphi : S' \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{r-1} = P$$

tel que  $\varphi^*\mathcal{O}_P(1) \simeq \pi^*M$ .

Pour établir (ii) il suffit (puisque  $S$  est quasi-compact) de trouver, pour chaque point  $y \in S$ , un entier  $n \gg 1$  et une section  $s \in H^0(S, M^{\otimes n})$  telle que  $s(y) \neq 0$ . Or si  $x_1, \dots, x_k$  sont les points de  $S'$  au-dessus de  $y$ , l'ensemble  $\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)\} \subset P$  est fini donc il existe  $m \gg 1$  et  $h \in H^0(P, \mathcal{O}_P(m))$  tels que  $h(\varphi(x_i)) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ), d'où une section  $s' = \varphi^*h \in H^0(S', \pi^*M^{\otimes m})$  telle que  $s'(x_i) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). La section

$$s = N_{S'/S}(s') \in H^0(S, M^{\otimes m \deg(\pi)}) \quad (\text{EGA II, 6.5})$$

répond donc à la question. ■

## 5. Caractéristique 2 : la variante de Mori.

5.0. L'inconvénient majeur du théorème 4.1 est qu'il suppose que 2 est inversible sur  $S$ , même lorsque  $K(L)$  est étale. On va montrer ici comment contourner dans certains cas ce genre de difficultés, en exploitant une idée de S. Mori.

Soit  $\zeta$  une racine cubique non triviale de l'unité dans  $\mathbb{C}$ , et considérons l'anneau  $\mathbb{Z}[\zeta] \simeq \mathbb{Z}[X]/(1+X+X^2)$ . Si  $T$  désigne un topos, la donnée d'un  $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Module de  $T$  équivaut à celles d'un Groupe commutatif

A de T et d'un homomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[\zeta] \longrightarrow \text{End } A$$

ou encore d'un automorphisme

$$[\zeta]_A : A \longrightarrow A$$

du Groupe commutatif A, vérifiant  $\text{Id}_A + [\zeta]_A + [\zeta]_A^2 = 0$ .

Soient A un  $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Module de T, G un Groupe commutatif de T, et L un G-torseur cubiste sur (le  $\mathbb{Z}$ -Module sous-jacent à) A. Nous dirons que L est  $\zeta$ -invariant si les toseurs cubistes L et  $[\zeta]_A^* L$  sont isomorphes.

5.1. Proposition. Soient A un  $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Module du topos T, G un Groupe commutatif de T, L un G-torseur cubiste  $\zeta$ -invariant sur A.

Alors :

(i) le G-torseur cubiste  $L^{\otimes 3}$  est symétrique, i.e.

$$[-1]_A^*(L^{\otimes 3}) \simeq L^{\otimes 3}$$

(ii) il existe une décomposition fonctorielle en L :

$$L \simeq L^s \otimes L^a$$

où  $L^s$  et  $L^a$  sont deux G-torseurs cubistes  $\zeta$ -invariants,  $L^s$  étant symétrique et  $L^a$  étant muni d'une structure d'extension commutative de A par G, telle que l'extension  $(L^a)^{\otimes 3}$  soit triviale.

Pour démontrer (i), posons  $M = L \otimes [-1]_A^* L^{-1}$  : on rappelle (I,5.7.1) que M admet une structure naturelle d'extension de A par G. On a alors

$$(5.1.1) \quad M^{\otimes 3} \simeq M \otimes [\zeta]_A^*(M) \otimes [\zeta^2]_A^*(M),$$

isomorphisme d'extensions déduit d'un isomorphisme cubiste

$$L \xrightarrow{\sim} [\zeta]_A^* L.$$

Mais grâce à la structure d'extension de M, le second membre de (5.1.1) n'est autre que  $(\text{Id}_A + [\zeta]_A + [\zeta^2]_A)^*(M)$  donc est trivial, cqfd.

On en déduit (ii) en écrivant

$$L = \underbrace{L^{\otimes 3} \otimes (L \otimes [-1]_A^*(L))^{-1}}_{L^s} \otimes \underbrace{(L^{-1} \otimes [-1]_A^*(L))}_{L^a}. \blacksquare$$

5.2. Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma en  $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Modules semi-stable (i.e. tel que le schéma en groupes sous-jacent soit semi-stable). La décomposition 5.1 (ii) pour un  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $\zeta$ -invariant sur  $A$  permet d'appliquer les techniques du chapitre II, §3. Ainsi :

5.2.1. Théorème. Soit  $U$  un ouvert schématiquement dense de  $S$  (ou bien le spectre du corps des fonctions de  $S$ , si  $S$  est intègre). On suppose que  $S$  est normal aux points de  $S-U$ , et que les fibres de  $A$  aux points de  $S-U$  sont connexes. Alors tout  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $\zeta$ -invariant sur  $A_U$  se prolonge en un (unique)  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste (nécessairement  $\zeta$ -invariant) sur  $A$ .

C'est en effet une conséquence immédiate de II, 3.3. De même :

5.2.2. Théorème. Sous les hypothèses de 5.2, on suppose de plus que  $S$  est normal intègre de point générique  $\eta$ , et que  $A_\eta$  est une variété abélienne. Soit  $n$  un entier annulant les groupes de composantes connexes des fibres de  $A$ , et supposons que :

a) les points géométriques d'ordre  $8n^4$  (ou seulement  $n^4$  si  $n$  est impair) de  $A_\eta$  sont rationnels sur  $\kappa(\eta)$

b) il en est de même des points géométriques d'ordre  $9n$ .

Alors tout  $\mathbb{G}_m$ -torseur cubiste  $\zeta$ -invariant sur  $A_\eta$  se prolonge à  $A$ .

Démonstration : si  $L_\eta$  est  $\zeta$ -invariant sur  $A_\eta$ , considérons la décomposition

$$L_\eta = L_\eta^s \otimes L_\eta^a$$

de 5.1 (ii). L'hypothèse a) permet de prolonger  $L_\eta^s$  en vertu de II,3.5, et l'on vérifie que  $L_\eta^a$  se prolonge grâce à l'hypothèse b), en procédant comme dans la démonstration de II,3.5 (il faut remarquer qu'en raison des propriétés de  $L_\eta^a$ , les obstructions aux points de codimension 1 sont additives et annulées par 3). ■

5.3. Sous les hypothèses de 5.2, soit  $U \subset S$  un ouvert dense tel que  $A_U$  soit un  $U$ -schéma abélien, et supposons que  $S$  soit normal aux points de  $S-U$ . Donnons-nous de plus un faisceau inversible cubiste  $\zeta$ -invariant  $L$  sur  $A$ , tel que  $L_U$  soit ample sur  $A_U$  relativement à  $U$ . Cette condition implique, d'ailleurs, que  $L$  est ample sur  $A$  relativement à  $S$  : en effet  $L^{\otimes 3}$  est symétrique et on peut donc lui appliquer 3.1.



Nous sommes donc dans des conditions entièrement analogues à celles de 3.0, la symétrie étant ici remplacée par la  $\zeta$ -invariance.

Nous allons maintenant étendre à cette situation les principaux résultats du §3 ; les démonstrations, analogues à celles de loc. cit., seront simplement esquissées.

5.4. Définition. Sous les hypothèses de 5.3, nous dirons que  $L$  est totalement  $\zeta$ -invariant s'il existe  $U' \rightarrow U$  fidèlement plat tel que  $L_{U'}$  soit isomorphe à  $M_{U'}^{\otimes 3}$  où  $M_{U'}$  est cubiste  $\zeta$ -invariant sur  $A_{U'}$ .

5.4.1. Remarques.

a) le faisceau  $M_{U'}$  de 5.4 peut être supposé symétrique (en vertu de 5.1 (ii)) ; en particulier si  $L$  est totalement  $\zeta$ -invariant il est symétrique ;

b) il n'est pas suffisant, pour que  $L$  soit totalement  $\zeta$ -invariant, d'exiger que  $L_U$  soit localement de la forme  $M \otimes [\zeta]^* M \otimes [\zeta^2]^* M$  ; toutefois cette condition est suffisante si  $[\zeta]^* M$  est algébriquement équivalent à  $M$  et si  $3$  est inversible sur  $S$  (exercice : utiliser le fait que  $(\zeta - \text{id})$  opérant sur le dual  $A_U^t$  de  $A_U$  est une isogénie) ;

c) la remarque a) montre que le morphisme  $U' \rightarrow U$  de 5.4 peut être supposé fini et plat ;

d) si  $L$  est totalement  $\zeta$ -invariant et si  $S$  est noethérien excellent, il existe  $\pi : S' \rightarrow S$  fini surjectif tel que  $L_{S'} \simeq M_{S'}^{\otimes 3}$  avec  $M_{S'}$  symétrique et  $\zeta$ -invariant sur  $A_{S'}$  (cf. 3.2.1 c)).

5.4.2. Exemple. Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $A$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable,  $U \subset S$  un ouvert dense tel que  $A_U$  soit un  $U$ -schéma abélien et que  $S$  soit normal aux points de  $S-U$ . On suppose de plus que  $3$  est inversible sur  $S$ . Considérons le  $S$ -schéma en groupes semi-stable

$$A_1 = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta] ;$$

c'est de façon naturelle un  $\mathbb{Z}[\zeta]$ -module ; la base  $(1, \zeta)$  de  $\mathbb{Z}[\zeta]$  permet d'identifier  $A_1$  à  $A^2$ , l'action de  $\zeta$  étant donnée par la matrice

$$[\zeta] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soit  $L$  un faisceau inversible cubiste sur  $A$  ; notons  $L_1$  le faisceau inversible sur  $A_1 \simeq A^2$  défini par

$$L_1 = \text{pr}_1^* L \otimes \text{pr}_2^* L \otimes (\text{pr}_1 - \text{pr}_2)^* L .$$

Un calcul immédiat montre que le morphisme  $\varphi_{L_1} : A_{1,U} \longrightarrow A_{1,U}^t$  est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2\varphi_L & -\varphi_L \\ -\varphi_L & 2\varphi_L \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que  $[\zeta]^t \circ \varphi_{L_1} \circ [\zeta] = \varphi_{L_1}$  ; en d'autres termes,  $[\zeta]^* L_1$  est algébriquement équivalent à  $L_1$  sur le schéma abélien  $A_{1,U}$  . Il en résulte, d'après la remarque b) ci-dessus, que le faisceau

$$L_2 = L_1 \otimes [\zeta]^* L_1 \otimes [\zeta^2]^* L_1$$

est totalement  $\zeta$ -invariant sur  $A_2$  . Enfin on vérifie que

$$K(L_2) = [9]_{A_1}^* (K(L) \times K(L)) ,$$

de sorte que  $K(L_2)$  est étale sur  $S$  si  $K(L)$  l'est.

**5.5. Théorème.** Sous les hypothèses de 5.3, définissons  $f^{[n]} : A^{[n]} \longrightarrow S$  comme en 3.3. Alors

(i) si  $K(L^{\otimes 3})$  est fini sur  $S$ , le morphisme naturel

$$(5.5.1) \quad f_* L \longrightarrow f_*^{[3]} (L|_{A^{[3]}})$$

est un isomorphisme.

(ii) Si  $K(L)$  est fini sur  $S$  et  $L$  totalement  $\zeta$ -invariant, le morphisme naturel

$$(5.5.2) \quad f_* L \longrightarrow f_*^{[1]} (L|_{A^{[1]}})$$

est un isomorphisme.

Démonstration (esquisse) : on se ramène d'abord comme dans 3.4 au cas où  $S$  est un trait : posons donc  $S = \text{Spec } \Lambda$ , où  $\Lambda$  est un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $F$  et de corps résiduel  $k$  ; on pose  $\{\eta\} = \text{Spec } F$ ,  $\{s\} = \text{Spec } k$ ,  $A_0 = A \otimes k$ . Par changement de base fidèlement plat on peut supposer de plus que  $F$  contient les racines cubiques de l'unité. Considérons alors l'unique isomorphisme

$$u : L \xrightarrow{\sim} [\zeta]_A^* L$$

de faisceaux inversibles cubistes sur  $A$  : il induit un automorphisme d'ordre 3 de  $H^0(A, L)$ , et l'hypothèse sur  $F$  implique donc qu'il existe un vecteur propre pour cette action, d'où une section  $\sigma \in H^0(A, L)$ , non identiquement nulle sur  $A_0$ , et dont le diviseur est  $\zeta$ -invariant. Dans ces conditions soit  $x \in A(S)$  tel que  $x(S) \cap \text{div}(\sigma) = \emptyset$  : alors

$$\sigma_1 = T_x^* \sigma \otimes T_{\zeta x}^* \sigma \otimes T_{\zeta^2 x}^* \sigma$$

est une section, non nulle à l'origine de  $A_0$ , du faisceau

$$T_x^* L \otimes T_{\zeta x}^* L \otimes T_{\zeta^2 x}^* L \simeq L^{\otimes 3} \quad (\text{car } 1 + \zeta + \zeta^2 = 0).$$

Il en résulte que, dans le cas (i), le morphisme naturel

$$H^0(A, L^{\otimes 3}) \longrightarrow H^0(A^{[3]}, L^{\otimes 3})$$

qui est un morphisme de représentations irréductibles de  $\zeta(L^{\otimes 3})$ , est non nul dans la fibre spéciale donc est un isomorphisme. On en déduit (ii) puisqu'après un changement de base convenable on a  $L \simeq M^{\otimes 3}$  où  $M$  est  $\zeta$ -invariant ; d'autre part sous l'hypothèse (i), si  $\sigma \in H^0(A^{[3]}, L)$  alors  $\sigma^{\otimes 3} \in H^0(A^{[3]}, L^{\otimes 3})$  se prolonge à  $A$ , donc  $\sigma$  se prolonge à  $A$ . ■

**5.6. Théorème.** Sous les hypothèses de 5.3, supposons  $K(L^{\otimes 3})$  fini sur  $S$  (resp.  $K(L)$  fini et  $L$  totalement  $\zeta$ -invariant) et posons  $X = K(L^{\otimes 3})$  (resp.  $K(L)$ ). Alors le morphisme naturel

$$(5.6.1) \quad f_* L \longrightarrow f_*(L|_X)$$

est injectif localement scindé.

En conséquence (cf. 3.5.3) la formation de  $f_* L$  commute à tout changement de base  $\pi : S' \longrightarrow S$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit schématiquement dense dans  $S'$ .

**5.6.2. Cas où  $A$  est un  $S$ -schéma abélien :** c'est un cas particulier de 2.5.1.

**5.6.3. Cas où  $S$  est un trait :** ce cas se démontre exactement comme 2.5, en remarquant que si  $L$  est totalement  $\zeta$ -invariant il est engendré par ses sections sur l'ouvert  $A^{[1]}$  (notation de 3.3) : ceci résulte immédiatement de 2.2.

**5.6.4.** La question étant locale sur  $S$  nous sommes ramenés, pour démontrer 5.6, au cas où  $S$  est le spectre d'un anneau local complet normal

de dimension  $\gg 2$  à corps résiduel séparablement clos, et où (5.6.1) est localement scindé sur l'ouvert  $V = S - \{s\}$ , où  $s$  désigne le point fermé de  $S$ . Il est alors immédiat que le lemme de descente 3.6.3 est encore valable. De plus le théorème 5.5 implique que si  $A'$  est un modèle semi-stable de  $A_\eta$ , contenant  $A$  comme sous-groupe ouvert, et si  $L$  se prolonge en  $L'$  sur  $A'$ , alors  $H^0(A, L) = H^0(A', L')$ . Par changement de base et gonflement, nous pouvons donc supposer de plus que  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$ .

5.6.5. Réduction au cas symétrique : si  $L$  est totalement  $\zeta$ -invariant il est symétrique d'après 5.1. Sinon on a  $L = L^S \otimes L^a$  avec  $L^S$  symétrique et  $L^a$  d'ordre 3 (5.1 (ii)) ; il existe donc (quitte à changer de base et à appliquer le lemme de descente) une section  $\alpha \in K(L^{\otimes 3})(S)$  telle que  $L \simeq T_\alpha^*(L^S)$ . Comme la translation par  $\alpha$  respecte  $X = K(L^{\otimes 3})$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_*L & \longrightarrow & f_*(L|_X) \\ \uparrow T_\alpha^* & & \uparrow T_\alpha^* \\ f_*L^S & \longrightarrow & f_*(L^S|_X) \end{array}$$

et il suffit donc de prouver 5.6 pour  $L^S$ .

5.6.6. Fin de la démonstration : supposant  $L$  symétrique et  $K(L^{\otimes 2})$  fini, il résulte de 3.5.3 que la formation de  $f_*L$  commute au changement de base  $\pi : S' \rightarrow S$ , où  $S'$  est le normalisé d'un sous-schéma fermé intègre de dimension 1 de  $S$  rencontrant l'ouvert  $U$  de bonne réduction. Comme 5.6 équivaut à l'injectivité de

$$f_*L \otimes \kappa(s) \longrightarrow f_*(L|_{X \otimes \kappa(s)}),$$

il suffit de démontrer 5.6 sur  $S'$  et nous sommes ainsi ramenés au cas d'un trait (5.6.3). ■

5.7. Proposition. Sous les hypothèses de 5.3, définissons  $A^{[n]}$  comme dans 3.3. Alors :

(i) si  $K(L^{\otimes 3})$  est fini sur  $S$ , alors pour tout  $n \gg 1$ , la restriction de  $L^{\otimes 3n}$  à  $A^{[3n]}$  est engendrée par ses sections (relativement à  $S$ ) sur  $A^{[3n]}$ .

(ii) Si  $K(L)$  est fini sur  $S$  et  $L$  totalemtent  $\zeta$ -invariant, alors pour tout  $n \gg 1$  la restriction de  $L^{\otimes n}$  à  $A^{[n]}$  est engendrée par ses sections sur  $A^{[n]}$ .

La démonstration est analogue à celle de 3.8. ■

Nous pouvons enfin adapter le théorème de négativité 4.1 :

5.8. Théorème. Sous les hypothèses de 5.6, supposons de plus que  $S$  est noethérien et que  $X$  (notation de loc. cit.) est étale sur  $S$ . Alors

(i) Il existe un revêtement fini étale  $\pi : S' \rightarrow S$  tel que  $\pi^*(f_*L)^{\vee}$  soit engendré par ses sections globales sur  $S'$ .

(ii) Il existe un entier  $n \gg 1$  tel que le faisceau inversible  $(\det f_*L)^{\otimes -n}$  soit engendré par ses sections globales sur  $S$ .

Démonstration : on procède comme dans 4.1. ■

Bien entendu, si  $d$  désigne le rang de  $f_*L$  (de sorte que  $K(L)$  est de rang  $d^2$ ), l'hypothèse sur  $X$  équivaut au fait que  $3d$  soit inversible sur  $S$ .

## CHAPITRE VII

Structures de niveau, plongements grassmanniensSommaire

- 0. Introduction.
  - 1. Structures de niveau et rigidifications : définition, existence.
  - 2. Cas des schémas abéliens : le théorème de plongement.
  - 3. Application aux schémas de modules  $\mathcal{M}_{g,d,n}$ .
  - 4. Le  $\mathbb{Z}$ -schéma  $\mathcal{M}_{g,d}$ .
  - 5. Le cas séparable : compléments au théorème de plongement.
  - 6. Retour au cas semi-stable : une propriété de prolongement.
0. Introduction.

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème de plongement 2.6, qui donne explicitement un plongement projectif (plus précisément "grassmannien") d'un certain schéma de modules fins paramétrant des schémas abéliens polarisés munis d'une "N-rigidification". Cette dernière notion est un raffinement de la notion familière de structure de niveau  $N$ , le groupe structural étant, au lieu du groupe habituel  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ , une extension de celui-ci par le tore  $G_m^{N^{2g}-1}$ . Il est même possible, grâce à la notion de "N-rigidification restreinte", de "réduire" le groupe en question à un groupe fini ; on retrouve ainsi au §3 la représentabilité des schémas de modules habituels  $\mathcal{M}_{g,d,n}$  pour  $n \geq 3$ , sans utiliser de théorie générale des invariants.

Un autre intérêt est que l'on obtient, sur ces schémas de modules, des faisceaux amples "explicites", i.e. calculables en termes du foncteur représenté. Plus précisément chacun des schémas de modules fins construits (noté ici  $S$ ) porte un schéma abélien universel  $A \xrightarrow{f} S$ , et un faisceau inversible cubiste  $L$  sur  $A$ , ample relativement à  $S$  ; le thème général de ce chapitre est qu'alors le faisceau inversible

$$(\det f_* L)^{-1}$$

est ample sur  $S$  ; dans chaque cas cela résulte plus ou moins trivialement de la définition du plongement grassmannien de 2.6.

On construit encore au §3 des compactifications des schémas de modules grossiers  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  ( $n \gg 1$ ), liées aux plongements du §2. Ces compactifications semblent malheureusement dépourvues d'une bonne interprétation "modulaire" ; on a toutefois, pour un schéma en groupes semi-stable sur une base normale, une propriété de prolongement en codimension 1 (§6) qui sera utilisée au chapitre XI.

A l'exception du §6 précité, ce chapitre ne dépend que dans une faible mesure des précédents ; le lecteur qu'intéressent surtout les schémas abéliens pourra, après avoir pris connaissance de la définition 1.2, aborder directement les §2 à 5.

Notations. Dans tout ce chapitre on fixe un entier  $g \gg 1$ . Pour tout entier  $N \gg 1$ , on pose

$$(0.1) \quad \tilde{N} = (2, N)_N = \begin{cases} 2N & (N \text{ pair}) \\ N & (N \text{ impair}) \end{cases}$$

On note  $E_N$  le groupe

$$(0.2) \quad E_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}$$

et pour tout schéma  $S$  on désigne par  $E_{N,S}$  le  $S$ -schéma en groupes constant de valeur  $E_N$ .

### 1. Structures de niveau et rigidifications : définition, existence.

On rappelle d'abord la proposition suivante (I,5.7) :

1.1. Proposition. Soit  $L$  un  $G$ -torseur cubiste sur un Groupe commutatif  $A$ , et soit  $N$  un entier annulant  $A$ . Alors  $L^{\otimes N}$  admet une trivialisation canonique (comme  $G$ -torseur cubiste sur  $A$ ).

1.2. Définition. Soient  $A \xrightarrow{f} S$  un schéma en groupes semi-stable de dimension relative  $g$  sur un schéma  $S$ ,  $L$  un  $G_m$ -torseur cubiste sur  $A$ ,  $N$  un entier  $\gg 1$  inversible sur  $S$ .

a) Une structure de niveau  $N$  sur  $A$  est par définition un isomorphisme  $\nu : E_{N,S} \xrightarrow{\sim} N^A$  de  $S$ -schémas en groupes.

b) Une  $N$ -rigidification de  $(A,L)$  est un couple  $(\nu, \sigma)$  où  $\nu$  est une structure de niveau  $N$  et  $\sigma$  une trivialisation du  $G_m$ -torseur

$v^*L$ , qui coïncide sur la section nulle avec la trivialisatıon donnée par la structure cubiste de  $L$ .

c) Une  $N$ -rigidification  $(v, \sigma)$  est restreinte si  $\sigma^{\otimes \tilde{N}}$  coïncide avec la trivialisatıon canonique de  $v^*L^{\otimes \tilde{N}}$  donnée par 1.1.

1.3. Proposition. Soient  $S$  un schéma normal intègre,  $U \subset S$  un ouvert non vide,  $A_U$  un  $U$ -schéma abélien de dimension relative  $g$  ayant réduction semi-stable aux points de codimension 1 de  $S$ . Soient  $L_U$  un  $G_m$ -torseur cubiste symétrique sur  $A_U$  et  $N \gg 2$  un entier inversible sur  $S$ .

Alors il existe un gros ouvert  $V \subset S$  contenant  $U$  et une suite de morphismes finis surjectifs

$$V_2 \xrightarrow{\pi_2} V_1 \xrightarrow{\pi_1} V, \quad \pi = \pi_1 \circ \pi_2$$

avec les propriétés suivantes :

(i)  $\pi_1$  est galoisien, modérément ramifié sur  $V$  et étale sur  $U$ ; son groupe de Galois est un sous-groupe de  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/N\tilde{N}\mathbb{Z})$ , et il existe un  $V_1$ -schéma en groupes semi-stable  $A_{V_1}$  prolongeant  $A_U \times_V V_1$ , un  $G_m$ -torseur cubiste  $L_{V_1}$  sur  $A_{V_1}$  prolongeant  $L_U \times_V V_1$ , et une structure de niveau  $N$  sur  $A_{V_1}$ .

(ii)  $\pi_2$  est principal homogène de groupe contenu dans  $E_{N-\{0\}} \simeq \mu_N^{N^2g-1}$  (donc  $\pi_2$  est étale) et  $(\pi_2^*A_{V_1}, \pi_2^*L_{V_1})$  possède une  $N$ -rigidification restreinte.

Si de plus il existe un  $S$ -schéma en groupes semi-stable  $A_S$  prolongeant  $A_U$ , on peut supposer que  $V=S$  à condition de remplacer, dans (i),  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/N\tilde{N}\mathbb{Z})$  par  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/N\tilde{N}^3\mathbb{Z})$ .

Démonstration : soit  $\pi_1$  rendant rationnels les points d'ordre  $N\tilde{N}$  de la fibre générique : il existe sur  $V_1$  (pour  $V$  convenable) un modèle semi-stable  $A'_{V_1}$  ayant une structure de niveau  $N\tilde{N}$ , d'après IV, 8.2.1.

Il suffit de prendre pour  $A_{V_1}$  le plus petit sous-groupe ouvert de  $A'_{V_1}$  contenant les points d'ordre  $N$ , l'existence de  $L_{V_1}$  résultant alors de II, 1.2.8 (ou II, 1.2.8.1 si  $N$  est impair) quitte à restreindre  $V$ . Pour le complément  $V=S$  dans le cas semi-stable, on rend rationnels les points d'ordre  $N\tilde{N}^3$  et on applique II, 3.5. ■



## 2. Cas des schémas abéliens : le théorème de plongement.

2.0. Soient  $d$  et  $N$  deux entiers  $\gg 1$ . Pour tout schéma  $S$ , on note

$$(2.0.1) \quad \text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$$

l'ensemble des classes de  $S$ -isomorphisme de suites  $(A, L, \nu, \sigma)$ , où :

.  $A$  est un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$ .

.  $L$  est un faisceau inversible cubiste sur  $A$ , ample relativement à  $S$  et de degré  $d^2$  (i.e. l'isogénie  $\varphi_L : A \rightarrow A^t$  définie par  $L$  est de degré  $d^2$ ), et vérifiant de plus

$$(2.0.2) \quad 4^A \subset K(L) = \text{Ker } \varphi_L ;$$

cette condition signifie que, localement sur  $S_{\text{fppf}}$ ,  $L$  est la puissance quatrième d'un faisceau (automatiquement ample) sur  $A$ . Elle implique que  $L$  est très ample relativement à  $S$  ([M2], § 17).

.  $(\nu, \sigma)$  est une  $N$ -rigidification (1.2) de  $(A, L)$ .

2.1.  $\text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$  est de façon naturelle un foncteur contravariant en  $S$ . Lorsque  $N \gg 3$ , les objets  $(A, L, \nu, \sigma)$  ci-dessus n'ont pas d'automorphismes non triviaux ([M2], § 21, th. 5) ce qui implique que  $\text{Abrig}_{g,d,N}^+$  est même un faisceau pour la topologie fppf. Notons que  $\text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$  est vide si  $4^g$  ne divise pas  $d$  (à cause de (2.0.2)), ou si  $N$  n'est pas inversible sur  $S$ .

Nous supposons dans la suite du §2, sauf mention expresse du contraire, que  $N \gg 3$ . Ceci rend inoffensifs les abus de langage tels que "soit  $(A, L, \nu, \sigma) \in \text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$ ".

2.2. Définition. Une constellation de type  $(g, d, N)$  sur un schéma  $S$  est la donnée :

- d'un  $\mathcal{O}_S$ -module  $V$ , localement libre de rang  $d$
- d'un  $S$ -plongement  $\alpha : E_{N,S} \hookrightarrow P = P(V)$ , tel que pour tout  $x \in S$  l'image de  $\alpha \otimes \kappa(x)$  engendre  $P \otimes \kappa(x)$  (au sens des espaces projectifs)
- d'une trivialisations  $\sigma$  de  $\alpha^* \mathcal{O}_P(1)$  sur  $E_{N,S}$ .

2.2.1. Exemple. Soit  $X = (A, L, \nu, \sigma) \in \text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$ , et soit  $f : A \rightarrow S$  le morphisme structural. On a alors un morphisme

$$(2.2.1.1) \quad \alpha : E_{N,S} \rightarrow P(f_* L) = P$$

composé de  $\nu: E_{N,S} \xrightarrow{\sim} N^g$  et du plongement  $N^g \hookrightarrow \mathbb{P}^g$  défini par  $L$ . D'autre part  $\alpha^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^g}(1)$  s'identifie canoniquement à  $\nu^* L$  donc  $\sigma$  s'interprète comme une trivialisatation de  $\alpha^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^g}(1)$  sur  $E_{N,S}$ . On a en fait le résultat suivant :

**2.3. Proposition.** Avec les notations de 2.2.1,  $(f_* L, \alpha, \sigma)$  est une constellation de type  $(g, d, N)$  sur  $S$  dès que  $N^2 \gg g!d$ .

La seule chose à vérifier est que si  $S$  est le spectre d'un corps (que l'on peut supposer algébriquement clos) les points d'ordre  $N$  de  $A$  ne sont pas dans un même hyperplan de  $\mathbb{P}^g$ . Vu l'hypothèse sur  $N$  cela résulte du lemme suivant ([M4], Prop. 7.7) :

**2.3.1. Lemme.** Soient  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  sur un corps  $k$  algébriquement clos,  $L$  un faisceau inversible très ample sur  $A$ , de degré  $d^2$ . Soient  $H \subset \mathbb{P}(H^0(A, L))$  une hypersurface de degré  $s$  ne contenant pas  $A$ , et  $N \gg 1$  un entier. Alors :

$$\frac{\text{long}_k(H \cap N^g A)}{N^{2g}} \ll s \frac{g!d}{N^2}.$$

Rappelons la démonstration de [M4] : soit  $\gamma \subset A$  une courbe passant par l'origine, section de  $A$  par un sous-espace linéaire de codimension  $g-1$ , et telle que  $[N]_A^{-1}(\gamma) \not\subset H$ . Alors si  $\ell = c_1(L) \in CH^1(A)$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{long}_k(H \cap N^g A) &\ll ([N]_A^{-1}(\gamma) \cdot H) = ([N]_A^*(\ell^{g-1}) \cdot H) \\ &= N^{2g-2} (\ell^{g-1} \cdot H) \quad (\text{th. du cube}) \\ &= N^{2g-2} s \deg_{\mathbb{P}(H^0(L))}(A) \\ &= N^{2g-2} s g!d \quad (\text{Riemann-Roch}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous supposerons désormais vérifiée, jusqu'à nouvel ordre, la condition

$$N^2 \gg g!d$$

de 2.3, et nous noterons

$$(2.3.2) \quad C(X) = (f_* L, \alpha, \sigma)$$

la constellation associée, par la méthode de 2.2.1, à  $X = (A, L, \nu, \sigma)$ .

2.4. Soit  $\Sigma = (V, \alpha, \sigma)$  une constellation sur  $S$ . Notant  $\pi : E_{N,S} \rightarrow S$  le morphisme structural, la donnée de  $\alpha : E_{N,S} \rightarrow \mathbb{P}$  équivaut à celle d'un quotient inversible  $L$  de  $\pi^*V$ . Comme  $L$  s'identifie canoniquement à  $\alpha^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ , on obtient grâce à la trivialisaton  $\sigma$  de  $L$ , un morphisme surjectif

$$(2.4.1) \quad \pi^*V \longrightarrow \mathcal{O}_{E_{N,S}}$$

de faisceaux localement libres sur  $E_{N,S}$ , ce qui équivaut par adjonction à un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$(2.4.2) \quad u(\Sigma) : V \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{E_{N,S}} \simeq \mathcal{O}_S^{E_N}.$$

La condition supplémentaire sur  $\alpha$ , selon laquelle  $\alpha(E_{N,S})$  engendre  $\mathbb{P}$ , revient évidemment à imposer que  $u(\Sigma)^\vee$  soit surjectif. En bref, la constellation  $\Sigma$  détermine un morphisme

$$(2.4.3) \quad t(\Sigma) : S \longrightarrow \mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_{d, N^{2g}}$$

où  $\mathbb{G}$  désigne la grassmannienne (sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ) des sous-faisceaux localement facteurs directs de rang  $d$  de  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^{E_N}$ .

Il est immédiat que la surjectivité de (2.4.1) se traduit, en termes de  $u(\Sigma)$ , de la façon suivante : pour tout  $a \in E_N$ , notons  $\varepsilon_a : \mathcal{O}_S^{E_N} \rightarrow \mathcal{O}_S$  la forme coordonnée correspondante ("évaluation au point  $a$ ") ; alors les morphismes

$$V \xrightarrow{u(\Sigma)} \mathcal{O}_S^{E_N} \xrightarrow{\varepsilon_a} \mathcal{O}_S$$

sont tous surjectifs. Réciproquement un sous-fibré  $V \subset \mathcal{O}_S^{E_N}$  vérifiant cette condition détermine un  $S$ -morphisme  $\alpha : E_{N,S} \rightarrow \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}$  et une trivialisaton de  $\alpha^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ . Enfin,  $\alpha$  est un plongement si et seulement si, pour  $a \neq b$  dans  $E_N$ , le morphisme

$$\Lambda^2 V \xrightarrow{\Lambda^2 u(\Sigma)} \Lambda^2 (\mathcal{O}_S^{E_N}) \xrightarrow{\varepsilon_a \wedge \varepsilon_b} \mathcal{O}_S$$

est surjectif, (condition qui implique la précédente). Si l'on note

$$(2.4.4) \quad \mathcal{V} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{E_N}$$

le sous-fibré universel sur  $\mathbb{G}$ , et

$$(2.4.5) \quad \mathcal{A}b_1 \subset \mathbb{G}$$

le sous-schéma ouvert de  $\mathbb{G}$  au-dessus duquel les morphismes

$$(2.4.6) \quad \Lambda^2 \mathcal{V} \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{E_N} \xrightarrow{\varepsilon_a \wedge \varepsilon_b} \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \quad (a \neq b)$$

sont surjectifs, nous avons donc établi :

2.4.7. Proposition. Le foncteur

$S \longmapsto \{ \text{classes d'isomorphisme de constellations de type } (g, d, N) \text{ sur } S \}$   
est représenté par l'ouvert  $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{G}$  de (2.4.5).

On a en particulier sur  $\mathcal{A}_1$  une constellation universelle :

$$(2.4.8) \quad \underline{\Sigma} = (\mathcal{V}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma})$$

avec

$$\begin{array}{ccc} E_{N, \mathcal{A}_1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P} = \mathbb{P}(\mathcal{V})_{\mathcal{A}_2} \\ & \searrow \pi & \swarrow \varrho \\ & & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

et  $\underline{\sigma} : \mathcal{O}_{E_{N, \mathcal{A}_1}} \simeq \underline{\alpha}^* \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(1)$ .

2.5. Soit  $X = (A \xrightarrow{f} S, L, \nu, \sigma) \in \text{Abrig}_{g, d, N}^+(S)$  (avec  $N^2 > g!d$ , comme toujours). Nous noterons

$$(2.5.1) \quad t(X) = t(C(X)) \in \mathcal{A}_1(S) = \text{Hom}(S, \mathcal{A}_1) \subset \text{Hom}(S, \mathbb{G})$$

(cf. (2.3.2) et (2.4.3)) :  $t(X)$  est donc le point de  $\mathbb{G}$  qui correspond au morphisme composé de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$(2.5.2) \quad f_* L \xrightarrow{\alpha^*} \pi_* \alpha^* L \xrightarrow{\varrho} \pi_* \mathcal{O}_{E_{N, S}} \simeq \mathcal{O}_S^{N^2 g}.$$

Il est immédiat que  $t(X)$  est fonctoriel en  $S$  (on rappelle que la formation de  $f_* L$  commute à tout changement de base). Nous avons donc défini un morphisme de faisceaux sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$  :

$$(2.5.3) \quad t : \text{Abrig}_{g, d, N}^+ \longrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/N] \subset \mathbb{G}$$

$$X \longmapsto t(X).$$

2.6. Théorème. On suppose que  $N^2 > 2g!d$ . Alors le morphisme  $t$  de (2.5.3) induit un isomorphisme de  $\text{Abrig}_{g, d, N}^+$  avec (le foncteur représenté par) un sous-schéma localement fermé de  $\mathbb{G}$ .

Les points cruciaux sont rassemblés dans la proposition suivante (c'est ici qu'intervient de façon essentielle l'hypothèse (2.0.2)) :

2.7. Proposition. Avec les notations de 2.5, on pose de plus  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f_*L)$ . On note  $p : \mathbb{P} \rightarrow S$  le morphisme structural,  $E = \bigcap_N A \subset \mathbb{P}$ ,  $\mathcal{Y}_A$  (resp.  $\mathcal{Y}_E$ ) le faisceau d'idéaux de  $A$  (resp.  $E$ ) dans  $\mathbb{P}$ . Alors :

(i) le morphisme naturel  $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) \rightarrow p_*\mathcal{O}_A(2)$  est surjectif ; en conséquence le faisceau  $p_*\mathcal{Y}_A(2)$  est localement libre de rang  $\binom{d+1}{2} - 2^g d$  ; sa formation commute à tout changement de base, et l'on a

$$R^i p_*\mathcal{Y}_A(2) = 0, \quad i > 0.$$

(ii) Le morphisme naturel  $p^*p_*\mathcal{Y}_A(2) \rightarrow \mathcal{Y}_A(2)$  est surjectif ; en d'autres termes,  $A$  est (localement sur  $S$ ) intersection de quadriques dans  $\mathbb{P}$ .

Si de plus  $N^2 > 2g!d$ , alors :

(iii)  $p_*\mathcal{Y}_A(2) = p_*\mathcal{Y}_E(2)$  ; en d'autres termes (compte tenu de (ii))  $A$  est localement sur  $S$  l'intersection des quadriques contenant  $E$ .

(iv) Le morphisme naturel de  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres

$$(2.7.1) \quad \beta(X) : p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) \rightarrow p_*\mathcal{O}_E(2)$$

est localement scindé (i.e. Coker  $\beta$  est localement libre) et est de rang  $2^g d$ .

Démonstration :

(i) Le fait que  $R^i p_*\mathcal{Y}_A(2) = 0$  pour  $i \gg 2$  est évident puisque  $R^i p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) = R^i p_*\mathcal{O}_A(2) = 0$  pour  $i \gg 1$ . D'autre part nous utiliserons constamment le fait que la formation des images directes  $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$ ,  $p_*\mathcal{O}_A(2)$  et  $p_*\mathcal{O}_E(2)$  commute à tout changement de base. Il suffit en particulier de montrer la surjectivité de

$$p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2) \rightarrow p_*\mathcal{O}_A(2)$$

lorsque  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos. Or elle équivaut à la surjectivité de

$$(f_*L)^{\otimes 2} \rightarrow f_*(L^{\otimes 2})$$

et résulte donc de [M5], th. 9 p. 68 puisque  $L$  est la puissance quatrième d'un faisceau ample sur  $A$ .

(ii) Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps l'assertion résulte de [M5], th. 10 p. 80 ; dans le cas général on en déduit que pour tout  $x \in S$  le morphisme

$$p^* p_* (\mathcal{Y}_A(2) \otimes \kappa(x)) \longrightarrow \mathcal{Y}_A(2) \otimes \kappa(x)$$

est surjectif (en effet, par platitude,  $\mathcal{Y}_A \otimes \kappa(x)$  est l'idéal de  $A_{\kappa(x)}$  dans  $\mathbb{P}_{\kappa(x)}$ ). Or ce morphisme est déduit par changement de base (d'après (i)) de

$$p^* p_* \mathcal{Y}_A(2) \longrightarrow \mathcal{Y}_A(2) ;$$

ce dernier est donc aussi surjectif.

(iii) Désignant par  $\mathcal{Y}_{E/A}$  l'idéal de  $E$  dans  $A$ , il suffit d'établir que  $p_* \mathcal{Y}_{E/A}(2)$  est nul. Or ce dernier est le noyau de

$$(2.7.2) \quad p_* \mathcal{O}_A(2) \longrightarrow p_* \mathcal{O}_E(2)$$

et notre assertion n'est donc qu'un avatar de 2.3 : comme (2.7.2) "commute au changement de base" on se ramène au cas d'un corps et on applique 2.3.1 avec  $s=2$ .

(iv) On a  $\text{Ker } \beta(X) = p_* \mathcal{Y}_E(2) = p_* \mathcal{Y}_A(2)$  d'après (iii) donc  $\text{Im } \beta$  s'identifie à  $p_* \mathcal{O}_A(2)$  (d'où le rang de  $\beta$ ) et  $\text{Coker } \beta$  au conoyau du morphisme (2.7.2), lequel, comme on l'a vu, est injectif après tout changement de base, donc localement scindé. ■

2.8. Il résulte déjà de 2.7 que, sous l'hypothèse  $N^2 > 2g!d$ , le morphisme  $t$  de (2.5.3) est un monomorphisme : on reconstitue en effet  $(A, L, \nu, \sigma)$  à partir de  $(f_* L, \alpha, \sigma)$  (notation de 2.2.1) de la façon suivante :

.  $A$  est le sous-schéma de  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f_* L)$  défini par l'idéal image de

$$p^* p_* \mathcal{Y}_\alpha(2) \longrightarrow \mathcal{O}_\mathbb{P}$$

où  $p: \mathbb{P} \rightarrow S$  est la projection, et  $\mathcal{Y}_\alpha$  l'idéal du fermé de  $\mathbb{P}$  image de  $\alpha: E_{N,S} \hookrightarrow \mathbb{P}$  (autrement dit  $A$  est l'intersection des quadriques contenant  $\alpha(E_{N,S})$ ).

.  $L$  est le faisceau inversible induit par  $\mathcal{O}_\mathbb{P}(1)$  sur  $A$ .

.  $\nu$  n'est autre que  $\alpha: E_{N,S} \hookrightarrow A \hookrightarrow \mathbb{P}$ .

.  $\sigma = \sigma$ .

Il suffit donc, pour établir 2.7, de prouver (supposant désormais  $N^2 > 2g!d$ ):

(2.8.1) il existe un sous-schéma localement fermé  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_1$ , tel que  $t$  se factorise par  $\mathcal{U}$ , et un  $X = (A, L, \nu, \sigma) \in \text{Abrig}_{g,d,N}^+(\mathcal{U})$  tel que

$t(X) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_1$  soit l'inclusion naturelle.

En effet, l'objet  $X$  ainsi construit, considéré comme morphisme de  $\mathcal{M}$  dans  $\text{Abrig}_{g,d,N}^+$ , est alors une section de  $t$  sur  $\mathcal{M}$ , d'où le théorème puisque  $t$  est de plus un monomorphisme. Bien entendu,  $X$  est alors l'objet universel de  $\text{Abrig}_{g,d,N}^+(\mathcal{M})$ .

**2.9. Définition.** Soit  $\Sigma = (V, \alpha, \sigma)$  une constellation sur  $S$  et soit  $r$  un entier. Notons comme d'habitude  $p : P = P(V) \longrightarrow S$  le morphisme naturel, et posons  $E = \alpha(E_{N,S}) \subset P$ . Considérons le morphisme naturel de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$(2.9.1) \quad \beta(\Sigma) : p_* \mathcal{O}_P(2) \longrightarrow p_* \mathcal{O}_E(2) .$$

Nous dirons que  $\Sigma$  vérifie la condition  $(Q_r)$  si  $\beta(\Sigma)$  est localement scindé (i.e. son conoyau est localement libre) et de rang  $r$ .

Nous noterons  $\text{EQ}(\Sigma)$  (enveloppe quadratique de  $\Sigma$ ) le sous-schéma de  $P$  défini par l'idéal  $p^*(\text{Ker } \beta(\Sigma))$  (intersection des quadriques contenant  $E$ ).

Notons que  $\beta(\Sigma)$  peut s'interpréter comme un morphisme

$$\text{Sym}^2 V \longrightarrow \mathcal{O}_S^{E_N}$$

grâce à  $\alpha : E_N \longrightarrow E$  et à  $\sigma^{\otimes 2} : \mathcal{O}_{E_N} \xrightarrow{\sim} \alpha^* \mathcal{O}_P(2)$ .

**2.9.2. Remarque.** Si  $\Sigma$  vérifie  $(Q_r)$  alors pour tout changement de base  $S' \longrightarrow S$ ,  $\Sigma_{S'}$  vérifie  $(Q_r)$  et l'on a

$$\text{EQ}(\Sigma_{S'}) = \text{EQ}(\Sigma) \times_S S' .$$

La première assertion est triviale et la seconde résulte du fait que si  $\beta(\Sigma)$  est localement scindé la formation de son noyau commute au changement de base.

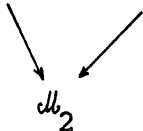
**2.9.3.** Soit  $X \in \text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$  : alors, en vertu de la proposition 2.7, la constellation  $C(X)$  associée à  $X$  vérifie  $(Q_r)$  avec

$$r = 2^g d ,$$

et de plus, avec  $X = (A, L, v, \sigma)$ , on a

$$(2.9.3.1) \quad A = \text{EQ}(C(X)) .$$

2.10. Posant donc  $r = 2^g d$ , il est immédiat que le sous-foncteur de  $\mathcal{A}_1$  formé des constellations vérifiant  $(Q_r)$  est représentable par un sous-schéma localement fermé  $\mathcal{A}_2$  de  $\mathcal{A}_1$  (défini par des idéaux de Fitting convenables) ; d'après (2.9.3),  $t$  se factorise par  $\mathcal{A}_2$ . Considérons la constellation  $\Sigma_2$  induite sur  $\mathcal{A}_2$  par la constellation universelle  $\underline{\Sigma}$  de (2.4.8), et posons

$$A_2 = \text{EQ}(\Sigma_2) \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}|_{\Sigma_2}$$


$\swarrow$        $\searrow$   
 $\mathcal{A}_2$

2.11. Soit  $X$  comme en (2.9.3) : alors le polynôme de Hilbert (relatif à  $S$ ) de  $L$  sur  $A$  est

$$H(n) = n^g d.$$

Introduisons donc la strate de platitude ([M6], 8)

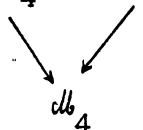
$$\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$$

définie par la propriété suivante : un morphisme  $S \rightarrow \mathcal{A}_2$  se factorise par  $\mathcal{A}_3$  si et seulement si le sous-schéma  $A_2 \times_{\mathcal{A}_2} S$  de  $\mathbb{P}_2 \times_{\mathcal{A}_2} S$  est plat sur  $S$  de polynôme de Hilbert  $H(n)$ . Alors  $t$  se factorise par  $\mathcal{A}_3$ , et le schéma  $A_3 \rightarrow \mathcal{A}_3$  induit par  $A_2$  est plat de polynôme de Hilbert  $H$ , pour le plongement  $A_3 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}|_{\mathcal{A}_3}$ .

2.12. Comme  $A_3$  est plat sur  $\mathcal{A}_3$ , il existe un plus grand sous-schéma ouvert

$$\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}_3$$

tel que  $A_4 = A_3|_{\mathcal{A}_4}$  soit lisse sur  $\mathcal{A}_4$ , et  $t$  se factorise par  $\mathcal{A}_4$ . Notons que l'on a un diagramme naturel (puisque  $A_4 = \text{EQ}(\underline{\Sigma}|_{\mathcal{A}_4})$ )

$$E_N, \mathcal{A}_4 \hookrightarrow A_4 \hookrightarrow \mathbb{P}_4 = \mathbb{P}|_{\mathcal{A}_4}$$


$\swarrow$        $\searrow$   
 $\mathcal{A}_4$

et en particulier une section  $e_4 : \mathcal{A}_4 \rightarrow A_4$  correspondant à l'origine de  $E_N$ . D'après [M4], th. 6.14, il existe un plus grand sous-schéma



ouvert

$$\mathcal{A}_5 \subset \mathcal{A}_4$$

tel que  $A_5 = A_4|_{\mathcal{A}_5}$  admette une structure de schéma abélien de section unité  $e_5 = e_4|_{\mathcal{A}_5}$ , et  $t$  se factorise par  $\mathcal{A}_5$ . De plus  $A_5$  est de dimension relative  $g$ , et le faisceau inversible ample  $L_5$  sur  $A_5$  induit par  $\mathcal{O}_P(1)$  est de degré  $d^2$  sur  $A_5$  puisque son polynôme de Hilbert est  $n^g d$ .

2.13. Il existe un plus grand sous-schéma fermé

$$\mathcal{A}_6 \subset \mathcal{A}_5$$

tel que, si  $L_6$  est le faisceau inversible sur  $A_6 = A_5|_{\mathcal{A}_6}$  induit par  $L_5$ , on ait

$$K(L_6) \supset 4A_6.$$

2.14. Il existe un plus grand sous-schéma fermé

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_7 \subset \mathcal{A}_6$$

tel que  $\alpha_7 = \alpha|_{\mathcal{A}_7}$  soit une structure de niveau  $N$ , et  $t$  se factorise par  $\mathcal{A}_7$ . De plus on a une trivialisatation naturelle  $\sigma_7$  de  $\alpha_7^* L_7$  (où  $L_7 = L_6|_{\mathcal{A}_7}$ ) induite par  $\sigma$  (2.4.8); si l'on munit  $L_7$  de la structure cubiste compatible avec  $\sigma_7$ , on obtient sur  $(A_7, L_7)$  une  $N$ -rigidification au sens de 1.2. Il est alors immédiat que l'élément de  $\text{Abriq}_{g,d,N}^+(\mathcal{A})$  ainsi défini vérifie la propriété annoncée dans (2.8.1), et le théorème 2.6 est donc démontré. ■

Dans le corollaire qui suit on ne suppose plus que  $N^2 \gg g!d$  :

2.15. Corollaire. Pour  $d$  et  $N \gg 1$  et pour tout schéma  $S$ , notons

$$\text{Abpic}_{g,d,N}^+(S)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets  $(A, L, \nu)$  où  $A$ ,  $L$  et  $\nu$  sont comme dans 2.0. Alors pour  $N \gg 3$ , le foncteur  $\text{Abpic}_{g,d,N}^+$  est représentable par un schéma quasi-projectif  $M$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$ . De plus si  $(A, L, \nu)$  désigne l'élément universel de  $\text{Abpic}_{g,d,N}^+(M)$ , et  $f: A \rightarrow M$  le morphisme structural, alors le faisceau inversible

$$\lambda = (\wedge^d f_* L)^{-1}$$

est ample sur  $M$  .

Démonstration : on a des morphismes naturels

$$(2.15.1) \quad \underline{\text{Abpic}}_{g,d,N'}^+ \xrightarrow{\pi_{N,N'}} \underline{\text{Abpic}}_{g,d,N}^+$$

pour  $N$  divisant  $N'$  ; si  $N \geq 3$  et si  $N$  et  $N'$  ont les mêmes facteurs premiers (i.e. si  $\mathbb{Z}[1/N] = \mathbb{Z}[1/N']$ ), le morphisme  $\pi_{N,N'}$  est même principal homogène sous le groupe fini

$$\text{Ker}(\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

ce qui nous ramène (en remplaçant  $N$  par une puissance convenable) au cas où  $N^2 \geq 2g!d$  . On a d'autre part un morphisme naturel

$$\underline{\text{Abrig}}_{g,d,N}^+ \longrightarrow \underline{\text{Abpic}}_{g,d,N}^+$$

(oubli de la rigidification  $\sigma$  , avec les notations de 2.0), lequel (si  $N \geq 3$ ) est principal homogène sous le groupe  $G_m^{E_N - \{0\}}$  . Ce groupe peut même être réduit à un groupe fini, en considérant le sous-foncteur

$$(2.15.2) \quad \underline{\text{Abres}}_{g,d,N}^+ \subset \underline{\text{Abrig}}_{g,d,N}^+$$

formé des  $(A,L,\nu,\sigma)$  telle que  $(\nu,\sigma)$  soit restreinte au sens de 1.2. L'inclusion ci-dessus est évidemment représentable par une immersion fermée, et le composé

$$\underline{\text{Abres}}_{g,d,N}^+ \longrightarrow \underline{\text{Abpic}}_{g,d,N}^+$$

est principal homogène sous le groupe fini étale  $\mu_N^{E_N - \{0\}}$  .

Il suffit donc, pour prouver l'amplitude de  $\lambda$  (et donc la quasi-projectivité de  $M$ ) d'établir l'assertion analogue sur  $\underline{\text{Abrig}}_{g,d,N}^+$  . Or si  $(A,L,\nu,\sigma)$  désigne l'objet universel sur  $S = \underline{\text{Abrig}}_{g,d,N}^+$  , le plongement  $t : S \longrightarrow G$  de 2.6 était défini par un morphisme

$$f_* L \hookrightarrow \mathcal{O}_S^{N \cdot 2g} .$$

En particulier  $f_* L \simeq t^* \nu$  où  $\nu$  est le "sous-fibré universel" sur  $G$  . Notre assertion résulte donc du fait que  $(\wedge^d \nu)^{-1}$  est ample (et même très ample) sur  $G$  puisqu'il définit le plongement de Plücker de  $G$  . ■

### 3. Application aux schémas de modules $\mathcal{A}_{g,d,n}$ .

3.0. Soient  $d$  et  $n$  deux entiers  $\gg 1$ . Désignons par

$$(3.0.1) \quad \underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(S)$$

pour tout schéma  $S$ , l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets  $(A, \xi, \nu)$  où :

- .  $A$  est un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$  ;
- .  $\xi : A \rightarrow A^t$  est une polarisation de degré  $d^2$  : en d'autres termes,  $\xi$  est une isogénie de degré  $d^2$  qui, localement sur  $S_{\text{fppf}}$ , est de la forme  $\varphi_L$ , où  $L$  est un faisceau inversible ample sur  $A$  ;
- .  $\nu : E_{n,S} \xrightarrow{\sim} {}_n A$  est une structure de niveau  $n$ .

3.1. Si  $(A, \xi, \nu)$  est comme ci-dessus, considérons le faisceau de Poincaré  $P$  sur  $A^t \times A$ , et posons

$$(3.1.1) \quad L(\xi) = \left( \text{Id}_A \right)^* (P)^{\otimes 2}.$$

On a alors

$$(3.1.2) \quad \varphi_{L(\xi)} = 4\xi : A \rightarrow A^t$$

d'où il résulte que  $(A, L(\xi), \nu)$  définit un élément de  $\underline{\text{Abpic}}_{g, 4^g d, n}^+(S)$ .

Posant pour abrégier

$$(3.1.3) \quad \bar{d} = 4^g d$$

nous avons ainsi défini un morphisme de foncteurs

$$(3.1.4) \quad \underline{\text{Ab}}_{g,d,n} \rightarrow \underline{\text{Abpic}}_{g, \bar{d}, n}^+$$

qui est injectif en vertu de (3.1.2). Inversement si l'on part de  $(A, L, \nu)$  dans  $\underline{\text{Abpic}}_{g, \bar{d}, n}^+(S)$ , la condition (2.0.2) montre qu'il existe une unique isogénie  $\xi_L : A \rightarrow A^t$  telle que  $4\xi_L = \varphi_L$  ; on en déduit alors que l'image de (3.1.4) est formée des  $(A, L, \nu)$  tels que  $L \simeq L(\xi_L)$  ; par suite le morphisme (3.1.4) est représentable par une immersion fermée. Appliquant alors 2.15, on retrouve :

3.2. Théorème. Pour  $n \gg 3$ , le foncteur  $\underline{\text{Ab}}_{g,d,n}$  de (3.0.1) est représentable par un schéma quasi-projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$ , noté  $\mathcal{A}_{g,d,n}$ . De plus si  $(A, \xi, \nu)$  désigne l'élément universel de  $\underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(\mathcal{A}_{g,d,n})$  et  $f : A \rightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}$  le morphisme structural, alors le faisceau inversible

$$(\wedge^{\bar{d}} f_* L(\xi))^{-1}$$

(avec  $\bar{d} = 4g$ , et  $L(\xi)$  défini en (3.1.1)) est ample sur  $\mathcal{H}_{g,d,n}$ . ■

(Remarque : comme des schémas de modules grossiers vont bientôt apparaître, il est préférable dès maintenant de distinguer  $\underline{Ab}_{g,d,n}$  de  $\mathcal{H}_{g,d,n}$ ).

3.3. Pour  $d$  et  $n \gg 1$  et pour tout schéma  $S$ , notons

$$(3.3.1) \quad \underline{\tilde{Ab}}_{g,d,n}(S)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets  $(A, \xi, \nu, \sigma)$  où  $(A, \xi, \nu)$  est comme en 3.0, et où  $(\nu, \sigma)$  est une  $n$ -rigidification restreinte (1.2) pour  $(A, L(\xi))$ ; on a donc une projection naturelle (oubli de  $\sigma$ ) :

$$(3.3.2) \quad \underline{\tilde{Ab}}_{g,d,n} \longrightarrow \underline{Ab}_{g,d,n}$$

qui, pour  $n \gg 3$ , est un revêtement principal de groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{E_n - \{0\}}$ .

Soit  $N$  un entier  $\gg 1$  multiple de  $n$ , et vérifiant  $N^2 \gg 2g! \bar{d}$ . On va s'intéresser au morphisme composé

$$(3.3.3) \quad \underline{\tilde{Ab}}_{g,d,N} \longrightarrow \underline{\tilde{Ab}}_{g,d,n} \longrightarrow \underline{Ab}_{g,d,n}.$$

On sait que  $\underline{\tilde{Ab}}_{g,d,N}$  est représentable par un schéma noté

$$(3.3.4) \quad \tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N} \xrightarrow{t} \mathbb{G} \simeq \mathbb{G}_{\bar{d}, N^{2g}};$$

de plus si  $\nu \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{E_N}$  désigne le sous-fibré universel, alors  $\nu$  induit sur  $\tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N}$  le sous-fibré

$$f_* L \hookrightarrow f_* \nu^* L \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N}}^{E_N}$$

où  $(A, L, \nu, \sigma)$  est l'objet universel sur  $\tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N}$  et  $f: A \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N}$

le morphisme structural. Les groupes  $\Gamma_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{E_N - \{0\}}$  et  $\text{Aut}(E_N) \simeq \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  opèrent sur le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{E_N}$ , respectivement par l'action diagonale et par permutation des coordonnées. On obtient ainsi une action sur  $\mathbb{G}$  d'un groupe  $G_N$ , produit semi-direct de  $\Gamma_N$  par  $\text{Aut}(E_N)$ , ainsi qu'une  $G_N$ -linéarisation ([M4], §3, 1.6) de  $\nu$  pour cette action. De plus l'action en question respecte  $\tilde{\mathcal{H}}_{g,d,N}$ , et correspond, bien sûr, à l'opération "changement de  $N$ -rigidification".

### 3.4. Schémas de modules grossiers, compactifications.

Gardons les hypothèses et notations de 3.3, et fixons de plus un "schéma de base" noethérien  $S_0$  au-dessus de  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$ . Nous désignerons encore (par abus d'écriture) par  $\underline{\text{Ab}}_{g,d,N}$ ,  $\tilde{\underline{\text{Ab}}}_{g,d,N}$ , etc., les restrictions de ces foncteurs à la catégorie des  $S_0$ -schémas, et par  $\tilde{\mathcal{K}}_{g,d,N}$ , etc. les images réciproques des schémas correspondants sur  $S_0$ . Posons

$$(3.4.1) \quad G_{n,N} = \text{Ker}(G_N \longrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

où  $G_N$  est défini en 3.3, la première flèche étant la surjection naturelle et la seconde s'obtenant en plongeant  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$  dans  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}$  au moyen de la multiplication par  $N/n$ . On pose alors

$$(3.4.2) \quad \mathcal{K}_{g,d,n} = \tilde{\mathcal{K}}_{g,d,N} / G_{n,N},$$

l'action de  $G_{n,N}$  étant induite par celle de  $G_N$ . Nous allons voir, par des considérations standard (cf. [M4], Prop. 5.4) que  $\mathcal{K}_{g,d,n}$  est un schéma de modules grossier pour le foncteur  $\underline{\text{Ab}}_{g,d,n}$  sur la catégorie des  $S_0$ -schémas ([M4], déf. 7.4) et est donc indépendant du choix de  $N$ .

3.4.3. En effet soit  $S$  un  $S_0$ -schéma et soit  $(A, \xi, \nu)$  comme en 3.0. Alors il existe un revêtement  $\tilde{S} \xrightarrow{p} S$  qui "paramètre" les  $N$ -rigidifications de  $(A, L)$  compatibles avec  $\nu$ . Ce revêtement est étale galoisien de groupe  $G_{n,N}$  et l'on a une  $N$ -rigidification naturelle  $(\tilde{\nu}, \tilde{\sigma})$  de  $(p^*A, p^*L(\xi))$  compatible avec  $p^*\nu$ , d'où un morphisme

$$(3.4.3.1) \quad \tilde{S} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{\mathcal{K}}_{g,d,N}$$

compatible aux actions de  $G_{n,N}$ , d'où par passage au quotient un morphisme

$$(3.4.3.2) \quad S \xrightarrow{j} \mathcal{K}_{g,d,N}.$$

Nous avons ainsi défini un morphisme de foncteurs

$$(3.4.3.3) \quad \psi : \underline{\text{Ab}}_{g,d,n} \longrightarrow \mathcal{K}_{g,d,n}$$

et il est immédiat que tout morphisme  $\underline{\text{Ab}}_{g,d,n} \longrightarrow Y$ , où  $Y$  est représentable, se factorise par  $\psi$ , puisque le composé

$$\tilde{\mathcal{K}}_{g,d,N} \longrightarrow \underline{\text{Ab}}_{g,d,n} \longrightarrow Y$$

est  $G_{n,N}$ -invariant donc passe au quotient. Enfin il reste à voir que pour tout corps algébriquement clos  $\Omega$ , l'application

$$\psi(\Omega) : \underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}(\Omega)$$

est bijective : ceci résulte du fait que, puisque  $G_{n,N}$  est fini, l'espace sous-jacent à  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  est quotient par  $G_{n,N}$  de l'espace sous-jacent à  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$ .

3.4.3.4. Remarque. Bien entendu, si  $n \gg 3$ ,  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  coïncide avec le schéma de modules fin de 3.2.

3.4.4. Désignons maintenant par  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$  l'adhérence schématique de  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$  dans  $\mathcal{G}$ , et posons

$$(3.4.4.1) \quad \bar{\mathcal{A}}_{g,d,n} = \tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N} / G_{n,N}.$$

Nous obtenons ainsi une compactification de  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  qui, elle, dépend de  $N$  (la notation  $\bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}$  est donc abusive).

3.4.5. Considérons sur  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$  le faisceau inversible

$$(3.4.5.1) \quad \tilde{\lambda}_N$$

induit par le faisceau inversible  $\Lambda^{\bar{d}} \mathcal{V}^{\nu}$  sur  $\mathcal{G}$ , de sorte que  $\tilde{\lambda}_N$  est très ample sur  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$ . On a vu en 3.3 que  $\mathcal{V}$  est muni d'une  $G_N$ -linéarisation naturelle ; il en est donc de même de  $\tilde{\lambda}_N$  sur  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$ . Par suite il existe un entier  $r \gg 1$  tel que  $\tilde{\lambda}_N^{\otimes r}$  provienne d'un faisceau inversible (automatiquement ample) sur le quotient  $\bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}$  : il suffit de prendre  $r = \text{Card } G_{n,N}$  et de remarquer que

$$\tilde{\lambda}_N^{\otimes r} = \bigotimes_{\gamma \in G_{n,N}} \gamma^* \tilde{\lambda}_N.$$

En d'autres termes,  $\tilde{\lambda}_N$  se redescend en une classe ample

$$(3.4.5.2) \quad \lambda_n \in \text{Pic}(\bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

3.4.6. Sur l'ouvert  $\mathcal{A}_{g,d,n} \subset \bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}$ ,  $\lambda_n$  admet l'interprétation "modulaire" suivante :

Proposition. Soit  $(A, \xi, \nu)$  comme en 3.0, soit  $f: A \longrightarrow S$  le morphisme structural, et soit  $j: S \longrightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}$  le morphisme associé (3.4.3). Alors  $j^* \lambda_n$  est la classe dans  $\text{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$  du faisceau inversible

$$(\det f_*L(\xi))^{-1}$$

où  $L(\xi)$  est défini en (3.1.1).

Reprenons en effet les notations de 3.4.3. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N} \xrightarrow{t} \mathbb{G} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ S & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}_{g,d,n} \end{array}$$

où  $\tilde{j}$  est associé à  $(p^*A, p^*\xi, \tilde{\nu}, \tilde{\sigma})$  ; on sait alors que l'image réciproque par  $t \circ j$  du sous-fibré universel  $\mathcal{V}$  n'est autre que  $p^*f_*L(\xi)$  ; on vérifie d'autre part sans surprise que la  $G_{n,N}$ -linéarisation de  $p^*f_*L(\xi)$  correspondant à sa donnée de descente naturelle pour  $p$ , coïncide avec la linéarisation induite par celle de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathbb{G}$  ; la proposition en résulte. ■

3.4.7. Remarque. La raison pour laquelle nous avons introduit le schéma de base  $S_0$  est qu'il n'y a, semble-t-il, aucune raison (si  $n \leq 2$ ) pour que la formation du schéma de modules grossier  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  (et a fortiori de  $\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,n}$ ) commute au changement de base. Toutefois leur formation est compatible (vu leur construction comme quotients) à la restriction à un ouvert de  $S_0$  ; cette remarque va être utilisée au § suivant.

#### 4. Le $\mathbb{Z}$ -schéma $\mathcal{A}_{g,d}$ .

4.1. Nous nous intéressons dans ce § au cas  $n=1$ . La remarque finale de 3.4.7 permet alors de construire au-dessus de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  le schéma de modules grossier  $\mathcal{A}_{g,d,1}$ , noté désormais  $\mathcal{A}_{g,d}$ . De façon précise donnons-nous deux entiers  $n_1$  et  $n_2$  premiers entre eux et  $\gg 3$ , et posons  $S_i = \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n_i]$  ( $i=1,2$ ).

Au-dessus de  $S_i$  nous avons un schéma de modules  $\mathcal{A}_{g,d}^{(i)}$ , quotient de  $\mathcal{A}_{g,d,n}^{(i)}$  (avec des notations évidentes) par le groupe  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$  ; au-dessus de  $S_{12} = S_1 \cap S_2$ ,  $\mathcal{A}_{g,d}^{(i)} \times_{S_i} S_{12}$  s'identifie aussi au quotient de  $\mathcal{A}_{g,d,n_1n_2}^{(i)}$  par  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z})$  (pour  $i=1,2$ ), ce qui permet de recoller  $\mathcal{A}_{g,d}^{(1)}$  et  $\mathcal{A}_{g,d}^{(2)}$  en un  $\mathbb{Z}$ -schéma  $\mathcal{A}_{g,d}$ , qui est naturellement un schéma de modules grossier pour le foncteur  $\text{Ab}_{g,d,1}$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Notons d'autre part  $\lambda^{(i)} = \lambda_1^{(i)} \in \text{Pic}(\mathcal{A}_{g,d}^{(i)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  la classe ample définie au moyen de 3.2.5. Je dis que les restrictions de ces deux classes au-dessus de  $S_{12}$  coïncident dans  $\text{Pic}(\mathcal{A}_{g,d} \times_{\mathbb{Z}} S_{12}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et définissent donc une classe ample

$$\lambda \in \text{Pic}(\mathcal{A}_{g,d}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} ;$$

il suffit en effet de remarquer que si  $(A \xrightarrow{f} \mathcal{A}_{g,d,n_1 n_2}, \xi)$  désigne le schéma abélien polarisé universel sur  $\mathcal{A}_{g,d,n_1 n_2}$ , alors l'image réciproque de  $\lambda^{(i)}$  via le morphisme naturel  $\mathcal{A}_{g,d,n_1 n_2} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}_{g,d}^{(i)}$  s'identifie à la classe du faisceau inversible  $\det(f_* L(\xi))^{\vee}$ , ce qui entraîne que  $\lambda^{(1)}$  et  $\lambda^{(2)}$  coïncident modulo torsion au-dessus de  $S_{12}$  puisque la restriction de  $\pi$  au-dessus de  $S_{12}$  est le passage au quotient par un groupe fini.

En résumé :

4.2. Théorème. Le schéma de modules grossier pour le foncteur  $\text{Ab}_{g,d,1}$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  existe et est quasi-projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . ■

4.3. Interprétation champêtre. Notons

$$(4.3.1) \quad \text{AB}_{g,d}$$

la catégorie des  $(S, A, \xi)$  où  $S$  est un schéma,  $A$  un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$  et  $\xi$  une polarisation de degré  $d^2$  sur  $A$ ; un morphisme  $(S', A', \xi') \rightarrow (S, A, \xi)$  est par définition un morphisme de schémas  $u: S' \rightarrow S$ , plus un isomorphisme  $A' \xrightarrow{\sim} u^* A$ , compatible aux polarisations. La catégorie  $\text{AB}_{g,d}$  (ainsi que ses analogues  $\text{AB}_{g,d,n}$ ,  $\tilde{\text{AB}}_{g,d,n}$ , etc., que le lecteur devine) est un champ de groupoïdes ([D-M], §4) au-dessus de la catégorie des schémas munie de la topologie fppf (ou de la topologie étale). En associant à  $(A \xrightarrow{f} S, \xi)$  comme ci-dessus le faisceau inversible

$$(4.3.2) \quad \lambda(S, A, \xi) = (\det f_* L(\xi))^{-1}$$

sur  $S$ , on définit un faisceau inversible  $\lambda$  sur  $\text{AB}_{g,d}$ , qui est ample au sens suivant :

4.3.3. Définition. Un faisceau inversible  $M$  sur  $\text{AB}_{g,d}$  est ample s'il vérifie les conditions équivalentes qui suivent :



(i) pour tout  $n \geq 3$  l'image réciproque de  $M$  sur  $AB_{g,d,n}$  est ample (ceci a un sens car  $AB_{g,d,n}$  est représentable par un schéma)

(ii) pour tout schéma  $S$  et tout morphisme quasi-fini  $j : S \rightarrow AB_{g,d}$ , le faisceau inversible  $j^*M$  est ample sur  $S$

(iii) même condition que (ii),  $j$  étant seulement supposé quasi-affine.

L'équivalence des trois conditions est immédiate, parce que la question est locale sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  et que les morphismes

$$(4.3.4) \quad AB_{g,d,n} \longrightarrow AB_{g,d} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/n]$$

sont représentables par des morphismes finis surjectifs : en fait le premier membre est représentable par  $\mathcal{A}_{g,d,n}$ , et le second s'identifie au champ quotient  $[\mathcal{A}_{g,d,n}/GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})]$  ([D-M], 4.8).

4.3.5. Les considérations sur les schémas de modules grossiers se ramènent à la remarque suivante : on a un morphisme naturel

$$AB_{g,d} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{g,d}$$

(qui fait de  $\mathcal{A}_{g,d}$ , par définition de celui-ci, la limite inductive du foncteur naturel  $AB_{g,d} \rightarrow (\text{Sch})$ ), et  $\varphi$  induit un isomorphisme

$$\varphi^* : \text{Pic}(\mathcal{A}_{g,d}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \text{Pic}(AB_{g,d}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

(remarquer que  $\text{Pic}(AB_{g,d} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/n])$  s'identifie pour  $n \geq 3$  à  $\text{Pic}^G(\mathcal{A}_{g,d,n})$ , groupe des classes de faisceaux inversibles équivariants sous  $G = GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ). Enfin, comme  $\varphi$  est fini, on remarque qu'un faisceau inversible  $M$  sur  $AB_{g,d}$  est ample si et seulement si il provient d'une classe ample dans  $\text{Pic}(\mathcal{A}_{g,d}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

Remarquons enfin que les compactifications  $\overline{\mathcal{A}}_{g,d,n}$  construites au §3 ne semblent pas se prêter à ce genre de considérations.

## 5. Le cas séparable : compléments au théorème de plongement.

5.0. L'hypothèse  $N^2 \geq 2g!d$  du théorème 2.7 servait à assurer les propriétés suivantes (qui impliquent la conclusion de 2.7) :

(5.0.1) Pour tout schéma  $S$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]$  et tout

$(A \xrightarrow{f} S, L, \nu, \sigma) \in \text{Abrig}_{g,d,N}^+(S)$ , alors

(i) le morphisme naturel

$$(5.0.1.1) \quad f_*L \longrightarrow f_*(L|_{N^A})$$

est injectif et localement scindé.

(ii) Le morphisme naturel

$$\text{Sym}^2(f_*L) \longrightarrow f_*(L^{\otimes 2})$$

est surjectif ; de plus si  $S$  est le spectre d'un corps,  $A$  est intersection de quadriques dans  $\mathbb{P}(H^0(L(\xi)))$ .

(iii) Le morphisme naturel

$$(5.0.1.2) \quad f_*(L^{\otimes 2}) \longrightarrow f_*(L^{\otimes 2}|_{N^A})$$

est injectif et localement scindé.

Il est clair que (iii) implique (i). La condition (i) sert à définir le morphisme  $t$  de (2.6.3), et (ii) et (iii) assurent que  $A$  est, dans  $\mathbb{P}(H^0(A, L))$ , intersection des quadriques contenant  $N^A$ . Notons d'ailleurs que (ii) est toujours vérifiée ([M5], th. 9 p. 68 et th. 10 p. 80). Il suffit donc, pour obtenir 2.7, que  $N$  vérifie (iii).

Or on rappelle (VI, 2.5.1) que le morphisme naturel

$$f_*(L^{\otimes 2}) \longrightarrow f_*(L^{\otimes 2}|_{K(L^{\otimes 2})})$$

est toujours injectif localement scindé ; la condition (iii) ci-dessus sera donc vérifiée dès que

(5.0.2) le groupe  $K(L^{\otimes 2})$  est annulé par  $N$ .

5.1. Cette condition impose toutefois (puisque  $N$  est inversible sur  $S$ ) que  $d$  soit inversible sur  $S$  (on rappelle que  $d$  est pair et même divisible par  $4^g$ , faute de quoi  $\text{Abriq}_{g,d,N}^+$  est vide). Le groupe  $K(L)$  a dans ce cas ses fibres géométriques isomorphes à des groupes du type

$$(5.1.1) \quad H(\underline{\delta}) = \bigoplus_{i=1}^g (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})^2$$

$$\underline{\delta} = (d_1, \dots, d_g), \quad d_i \gg 1, \quad d_{i+1} | d_i, \quad d = d_1 \dots d_g$$

(cf. [M3], §1) ; la suite  $\underline{\delta}$  est alors par définition le type de  $L$ . La condition (5.1.3) équivaut à

(5.1.2)  $N$  est divisible par  $2d_1$  ;

notons que l'existence d'une structure de niveau  $N$  implique déjà, sous cette hypothèse, que  $K(L^{\otimes 2})$  est localement constant.

Si l'on fixe  $\underline{\delta} = (d_1, \dots, d_g)$  comme en (5.1.1) et si l'on note

(5.1.3)  $\text{Abrig}_{g, \underline{\delta}, N}^+$

le sous-foncteur (sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/Nd_1]$ ) de  $\text{Abrig}_{g, d, N}^+$  formé des  $(A, L, \nu, \sigma)$  tels que  $L$  soit de type  $\underline{\delta}$ , alors on obtient, dès que  $d_1 | N$ , un morphisme (analogue à (2.5.3))

(5.1.4)  $t : \text{Abrig}_{g, \underline{\delta}, N}^+ \longrightarrow \mathbb{G}_{d, N2g}$

car la condition (i) de (5.0.1) est alors vérifiée. De plus on a la variante suivante de 2.6, avec essentiellement la même démonstration (compte tenu des considérations de 5.0) :

5.2. Théorème. On suppose que  $2d_1 | N$ . Alors le morphisme  $t$  de (5.1.4) est un plongement. ■

5.2.1. Bien entendu, si  $(A \xrightarrow{f} S, L, \nu, \sigma)$  désigne l'objet universel sur  $S = \text{Abrig}_{g, \underline{\delta}, N}^+$ , le plongement  $t : S \hookrightarrow \mathbb{G}_{d, N2g}$  correspond au morphisme de faisceaux localement libres :

$$f_*L \longrightarrow f_*(L|_{NA}) \xrightarrow{(\nu, \sigma)} \mathbb{G}_S^E.$$

6. Retour au cas semi-stable : une propriété de prolongement.

6.0. Soient  $S$  un schéma,  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable,  $L$  un faisceau inversible cubiste totalement symétrique sur  $A$ , ample relativement à  $S$ . On suppose qu'il existe un ouvert schématiquement dense  $U \subset S$  avec les propriétés suivantes :

(6.0.1)  $A_U$  est un  $U$ -schéma abélien

(6.0.2) pour tout  $x \in S-U$ , l'anneau local  $\mathbb{G}_{S, x}$  est normal.

On suppose encore :

(6.0.3)  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$  et contient  $4A$

et l'on note  $d^2$  le rang de  $K(L)$ , de sorte que (chapitre VI)  $f_*L$  est

localement libre de rang  $d$ .

Enfin on se donne un entier  $N$  inversible sur  $S$ , et une  $N$ -rigidification  $(\nu, \sigma)$  de  $(A, L)$ . On en déduit comme au §2 un morphisme

$$(6.0.4) \quad f_*L \longrightarrow \mathcal{O}_S^{E_N}$$

composé de l'évaluation aux points d'ordre  $N$

$$(6.0.5) \quad f_*L \longrightarrow f_*(L|_{N^A})$$

et de l'isomorphisme déduit de  $(\nu, \sigma)$

$$(6.0.6) \quad f_*(L|_{N^A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^{E_N}.$$

On fait alors l'hypothèse supplémentaire suivante :

(6.0.7) la restriction à  $U$  du morphisme (6.0.5) (donc aussi de (6.0.4)) est injective localement scindée.

Cette hypothèse est satisfaite en particulier si  $N^2 > g!d$  (en vertu de 2.3) ou si  $K(L)$  est annulé par  $N$  (VI, 2.5.1).

6.1. Sous les hypothèses ci-dessus, l'homomorphisme (6.0.4) définit (§2) un morphisme

$$(6.1.1) \quad t_U : U \longrightarrow \mathbb{G}$$

de  $U$  dans la grassmannienne des sous-faisceaux localement facteurs directs de rang  $d$  de  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^{E_N}$ , et l'on a un isomorphisme canonique

$$(6.1.2) \quad t_U^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \xrightarrow{\sim} (\wedge^d f_*L)^{-1}$$

où  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$  désigne le dual du déterminant du sous-fibré universel de  $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{E_N}$  sur  $\mathbb{G}$ .

Bien entendu la connaissance du morphisme  $t_U$  détermine  $(A, L, \nu, \sigma)$  si  $N^2 > 2g!d$  (§2) ou si  $K(L^{\otimes 2})$  est annulé par  $N$  (§5).

D'autre part, la condition (6.0.2) implique, puisque  $\mathbb{G}$  est propre sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , l'existence d'un gros ouvert  $V$  de  $S$  contenant  $U$  et d'un morphisme

$$(6.1.3) \quad t_V : V \longrightarrow \mathbb{G}$$

prolongeant  $t_U$ .

6.2. Proposition. L'isomorphisme (6.1.2) se prolonge sur V en un homomorphisme de faisceaux inversibles

$$(6.2.1) \quad t_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow (\Lambda^d_{f_*L})_V^{-1} .$$

De plus si  $K(L)$  est annulé par  $N$  on peut prendre  $V=S$  , et (6.2.1) est un isomorphisme.

Démonstration : lorsque  $K(L)$  est annulé par  $N$  , il résulte de VI, 3.5 que le morphisme (6.0.4) est injectif et localement scindé, d'où la proposition dans ce cas (c'est essentiellement l'argument de VI, 4.1).

Dans le cas général le morphisme (6.0.4) détermine un morphisme

$$(6.2.2) \quad u : \Lambda^d_{\mathcal{O}_S} E_N \longrightarrow (\Lambda^d_{f_*L})^{-1} .$$

Si  $I$  désigne l'image de  $u$  , il est immédiat que l'on peut prendre pour  $V$  le plus grand ouvert de  $S$  au-dessus duquel  $I$  est inversible ; le morphisme composé

$$V \xrightarrow{t_V} \mathbb{G} \xrightarrow{\text{Plücker}} \mathbb{P}(\Lambda^d(\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^{E_N}))$$

correspond alors au quotient inversible  $I_V$  de  $\Lambda^d(\mathcal{O}_V^{E_N})$ , donc  $t_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$  s'identifie à  $I_V \subset (\Lambda^d_{f_*L})_V^{-1}$  . ■

## CHAPITRE VIII

Image directe et différentiellesSommaire

- 0. Introduction.
  - 1. Position du problème.
  - 2. Cas d'une base de caractéristique  $p > 0$ .
  - 3. Cas des schémas abéliens.
  - 4. Cas d'une base de caractéristique nulle.
0. Introduction.

Ce chapitre est consacré au résultat clé (selon l'auteur) du présent travail. Sous sa forme générale il est encore à l'état de conjecture et est énoncé au §1 ; on en démontre ensuite des cas particuliers (essentiellement le cas d'égale caractéristique et le cas des schémas abéliens). Le lecteur est invité à se reporter au §1 pour l'énoncé du problème (1.2) et son état actuel (1.3, 1.4). L'auteur se permet d'ajouter ici qu'il est (au moment où il écrit ces lignes) raisonnablement optimiste quant à l'accessibilité, au moins, de la "formule clé canonique"  $FCC(\text{Spec } \mathbb{Z}, g, 1)$  (notation de 1.2). Par contre les méthodes employées ne jettent guère de lumière "conceptuelle" sur l'origine d'une telle formule.

1. Position du problème.

1.0. Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $A \xrightarrow{f} S$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable de dimension relative  $g$  (supposée constante). Soit  $L$  un faisceau inversible cubiste sur  $A$ , ample relativement à  $S$ , et symétrique. Notons  $U \subset S$  l'ouvert au-dessus duquel  $A$  est un schéma abélien, et faisons les hypothèses suivantes :

(1.0.1)  $U$  est schématiquement dense dans  $S$ , et de plus  $S$  est normal aux points de  $S-U$ .

(1.0.2)  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S$ , ou bien  $L$  est totalement symétrique (VI, 3.2) et  $K(L)$  est fini sur  $S$ .

On sait alors (VI, 3.5) que  $f_*L$  est localement libre sur  $S$ , et que (VI, 3.5.3) sa formation commute à tout changement de base  $S' \xrightarrow{\pi} S$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit schématiquement dense dans  $S'$ ; pour abrégier nous appellerons admissible un tel changement de base, et nous poserons par ailleurs

$$d = \text{rg}(f_*L) ,$$

ce rang étant supposé constant sur  $S$ ; on a donc  $d^2 = \text{rg}_S K(L)$ .

Posons

$$(1.0.4) \quad \bar{\omega}_{A/S} = \wedge^g e_A^* \Omega_{A/S}^1$$

où  $e_A : S \rightarrow A$  est la section unité;  $\bar{\omega}_{A/S}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible et nous noterons  $\delta(A, L)$  le faisceau inversible

$$(1.0.5) \quad \delta(A, L) = (\wedge^d f_*L)^{\otimes 2} \otimes \bar{\omega}_{A/S}^{\otimes d}$$

qui sera le héros de ce chapitre.

### 1.1. Premières propriétés de $\delta(A, L)$ .

1.1.1. Changement de base : la formation de  $\delta(A, L)$  commute à tout changement de base admissible au sens de 1.0.

1.1.2. Changement de modèle : soit  $A_1 \xrightarrow{f_1} S$  un  $S$ -schéma en groupes semi-stable contenant  $A$  comme sous-groupe ouvert et coïncidant avec  $A$  au-dessus de l'ouvert  $U$ , et soit  $L_1$  un faisceau inversible cubiste sur  $A_1$  prolongeant  $L$ . Alors on a

$$\delta(A, L) = \delta(A_1, L_1) ;$$

il est clair en effet que  $\bar{\omega}_{A_1/S} = \bar{\omega}_{A/S}$ , et d'autre part VI, 3.4 entraîne que  $f_{1*}L_1 = f_*L$  (compte tenu de (1.0.2)).

1.1.3. Comportement par isogénie. Soit  $H$  un sous-schéma en groupes de  $A$ , fini et plat sur  $S$ . Posons  $B = A/H$  et soient  $\lambda : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow S$  les morphismes naturels. Donnons-nous de plus un isomorphisme

$$L \simeq \lambda^* M$$

où  $M$  est un faisceau inversible cubiste symétrique sur  $B$  (nécessairement ample relativement à  $S$ ) tel que  $K(M^{\otimes 2})$  soit fini sur  $S$  et que  $g_*M$  soit un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible : en d'autres termes  $M$  définit

une polarisation principale sur  $B_U$ . Cette condition équivaut au fait que  $H$  soit un sous-groupe lagrangien (V, 2.5.1) de  $K(L)$ ; remarquons qu'alors  $K(M^{\otimes 2}) = {}_2B$ . Posons enfin (comme dans VI, 1.4.8)

$$K' = K(L)/H \subset B ;$$

c'est un sous-groupe de  $B$ , fini et plat de rang  $d$  et isomorphe à  $\hat{H}$ .

Proposition. Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un isomorphisme naturel

$$(1.1.3.1) \quad \delta(A, L) \xrightarrow{\sim} \delta(B, M)^{\otimes d} \otimes_{N_{K'/S}} (M_{K'})^{\otimes -2}$$

où  $M_{K'}$  est la restriction de  $M$  à  $K'$ , et  $N_{K'/S}$  la norme.

De plus soit  $m$  un entier annulant  $H$  (par exemple  $m=d$ ) : il existe alors un isomorphisme naturel

$$(1.1.3.2) \quad \delta(A, L)^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} \delta(B, M)^{\otimes md} .$$

Le mot "naturel" signifie ceci : à toute situation du type 1.1.3 ci-dessus, on peut associer un isomorphisme (1.1.3.1) (resp. (1.1.3.2), une fois fixé l'entier  $m$ ) de façon compatible à tout changement de base admissible et à tout changement de modèle.

La seconde assertion de la proposition est conséquence de la première puisque  $M_{K'}^{\otimes 2m}$  admet une trivialisatation naturelle (I, 5.7).

Montrons la première assertion. Le corollaire VI, 1.4.8 nous fournit un isomorphisme naturel

$$(1.1.3.3) \quad \Lambda^d f_* L \xrightarrow{\sim} (g_* M)^{\otimes d} \otimes \Lambda^d f_* \mathcal{O}_H \otimes_{N_{K'/S}} (M_{K'})^{\otimes -1} .$$

Introduisons le faisceau  $D_H$  des mesures invariantes sur  $H$  (V, 1.4) et notons  $\underline{A}(X)$  (comme au chapitre V) la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre d'un  $S$ -schéma  $X$  affine sur  $S$  : par exemple,  $f_* \mathcal{O}_H = \underline{A}(H)$ . On a :

$$(1.1.3.4) \quad \underline{A}(\hat{H}) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-mod}}(\underline{A}(H), \mathcal{O}_S) = \underline{A}(H)^\vee$$

et d'autre part (V, 1.4.4) :

$$(1.1.3.5) \quad \underline{A}(\hat{H}) \simeq \underline{A}(H) \otimes_{\mathcal{O}_S} D_H \quad (\text{comme } \mathcal{O}_S\text{-modules})$$

d'où, en combinant (1.1.3.4) et (1.1.3.5) et en prenant les déterminants :

$$(1.1.3.6) \quad (\Lambda^d \underline{A}(H))^{\otimes 2} \simeq D_H^{\otimes -d} .$$



En reportant dans (1.1.3.3)<sup>⊗2</sup>, on obtient finalement

$$(1.1.3.7) \quad (\Lambda^d f_* L)^{\otimes 2} \simeq (g_* M)^{\otimes 2d} \otimes_{D_H}^{\otimes -d} \otimes_{N_{K'/S}(M_{K'})}^{\otimes -2} .$$

D'autre part le faisceau  $\bar{\omega}_{A/S}$  (resp.  $\bar{\omega}_{B/S}$ ) n'est autre que le dualisant relatif de A (resp. B) sur S, restreint à la section unité. Il en résulte que  $\bar{\omega}_{A/S} \otimes \bar{\omega}_{B/S}^{-1}$  s'identifie canoniquement au dualisant relatif de H, restreint à la section unité. Le dualisant de H, considéré comme module sur la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $\underline{A}(H)$ , n'est autre que  $\underline{A}(\hat{H}) = \underline{A}(H) \otimes_{\mathcal{O}_S} D_H$  : si on le restreint à la section unité on obtient donc  $D_H$ , d'où un isomorphisme naturel

$$(1.1.3.8) \quad \bar{\omega}_{A/S} \simeq \bar{\omega}_{B/S} \otimes_{D_H} .$$

Enfin on a par définition

$$\delta(A, L) = (\Lambda^d f_* L)^{\otimes 2} \otimes_{\bar{\omega}_{A/S}}^{\otimes d}$$

et il suffit d'appliquer au second membre (1.1.3.7) et (1.1.3.8) pour obtenir l'isomorphisme annoncé. ■

1.2. Pour abrégé nous appellerons donnée de type  $(g, d)$  un triplet  $(S, A, L)$  comme en 1.0, avec  $\dim(A/S) = g$  et  $\text{rg}(f_* L) = d$ . Nous considérerons dans ce chapitre les énoncés suivants :

FC(S, g, d) ("formule clé") : pour toute donnée  $(S, A, L)$  de type  $(g, d)$  sur S donné, le faisceau  $\delta(A, L)$  est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(S)$ .

FCC( $S_0$ , g, d) ("formule clé canonique",  $S_0$  étant un schéma) : il existe un entier  $m \gg 1$  tel que l'on puisse associer à tout  $S_0$ -schéma S et à toute donnée  $(S, A, L)$  de type  $(g, d)$  une trivialisations de  $\delta(A, L)^{\otimes m}$ , de manière compatible à tout changement de base admissible (1.1.1) et à tout changement de modèle (1.1.2).

D'autre part nous désignerons par  $\text{FC}^{\text{ab}}(S, g, d)$  et  $\text{FCC}^{\text{ab}}(S_0, g, d)$  les énoncés analogues aux deux précédents, obtenus en imposant de plus à A d'être un S-schéma abélien.

L'auteur conjecture que  $\text{FCC}(\text{Spec } \mathbb{Z}, g, d)$  est vraie pour tous g et d. Nous établirons dans ce chapitre les cas particuliers suivants de cette conjecture :

1.3. Théorème. Soient  $g$  et  $d$  deux entiers, et  $k$  un corps premier.

(i)  $FCC(\text{Spec } k, g, 1)$  est vraie ; de plus si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , l'exposant  $m$  intervenant dans l'énoncé de  $FCC(\text{Spec } k, g, 1)$  peut être pris égal à  $(p^2 - 1)p^{2g+2}$ .

(ii)  $FC(S, g, d)$  est vraie pour tout  $k$ -schéma noethérien normal excellent  $S$ .

(iii)  $FCC^{ab}(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/d], g, d)$  est vraie.

(iv)  $FC^{ab}(S, g, d)$  est vraie pour tout schéma noethérien normal excellent  $S$ .

1.4. Commentaires. Nous commencerons (au §2) par démontrer (i) lorsque  $k = \mathbb{F}_p$  ; en utilisant le morphisme de Frobenius. Au §3 nous établirons (iii) à partir d'un résultat dû à L. Szpiro et à l'auteur, selon lequel  $FC^{ab}(S, g, d)$  est vraie pour tout schéma  $S$  sur lequel  $d$  est inversible. Ce résultat repose sur le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck et sera publié ailleurs. Au §4 on en déduit (i) lorsque  $k = \mathbb{Q}$ .

En ce qui concerne ce dernier cas, on peut montrer que l'exposant  $m$  de l'énoncé peut être pris égal à 4, lorsqu'on impose à  $A$  la condition supplémentaire suivante : pour tout point  $x \in S$  la multiplicité à l'origine de  $A_x$  du "diviseur thêta" défini par  $L_x$  est paire. Ceci résulte de l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann ([M7], chapitre II, §5). Nous n'aborderons pas ici cet aspect de la question (que m'a indiqué D. Mumford), mais signalons que cette méthode donne une information intéressante : supposant de plus que  $S = \text{Spec } \mathbb{C}$ , le  $\mathbb{C}$ -vectoriel  $\bar{\omega}_{A/S} = H^0(A, \Omega_A^g)$  est muni d'une norme hermitienne naturelle, par la formule

$$(1.4.1) \quad \|\alpha\|^2 = c \int_{A(\mathbb{C})} \alpha \wedge \bar{\alpha} \quad (\alpha \in H^0(A, \Omega_A^g))$$

où  $c$  est une constante ne dépendant que de  $g$ . D'autre part le fibré  $L$  sur  $A$  admet également une métrique hermitienne canonique (II, §2) que nous noterons  $\rho$ , d'où une norme sur  $H^0(A, L)$  par la formule

$$(1.4.2) \quad \|s\|^2 = \int_{A(\mathbb{C})} \rho(s(x))^2 dx \quad (s \in H^0(A, L))$$

où  $dx$  désigne la mesure de Haar normalisée sur  $A(\mathbb{C})$ . Par suite le  $\mathbb{C}$ -vectoriel  $\delta(A, L)$  est encore muni d'une norme hermitienne et l'on peut montrer que pour un choix judicieux de la constante  $c$  de (1.4.1), la trivialisat ion annoncée de  $\delta(A, L)^{\otimes 4}$  est de norme 1.

Enfin les assertions (ii) et (iv) de 1.2 résultent respectivement de (i) et (iii) en vertu du lemme ci-dessous :

1.5. Lemme. Soit  $S$  un schéma noethérien normal excellent. On suppose  $FC(S',g,1)$  (resp.  $FC^{ab}(S',g,1)$ ) vérifiée chaque fois que  $S'$  est un  $S$ -schéma normal quasi-fini sur  $S$ . Alors  $FC(S,g,d)$  (resp.  $FC^{ab}(S,g,d)$ ) est vraie pour tout  $d \gg 1$ .

Démonstration : pour fixer les idées nous nous placerons dans le cas non respé, le cas "abélien" étant entièrement analogue. Soit  $(S,A,L)$  une donnée de type  $(g,d)$  : nous pouvons supposer  $S$  intègre et il suffit de voir qu'il existe un gros ouvert  $V \xrightarrow{j} S$ , et un morphisme surjectif, fini et plat  $\pi : V' \rightarrow V$  tels que  $\pi^* j^* \delta(A,L)$  soit d'ordre fini dans  $\text{Pic}(V')$  : en effet  $j^* : \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(V)$  est injectif puisque  $V$  est un gros ouvert et  $S$  normal, et d'autre part  $N_{V'/V} \circ \pi^*$  est la multiplication par  $\deg(\pi)$  dans  $\text{Pic}(V)$ .

1.5.1. Grâce à un changement de base  $V' \rightarrow S$  du type ci-dessus, on peut supposer que le groupe  $\zeta(L)$  admet un sous-groupe de niveau lagrangien  $H$ , au sens de V, 2.5.1 : si  $S_1$  désigne le  $S$ -schéma propre et surjectif paramétrant ces sous-groupes (V, 2.5.3), considérer un sous-schéma fermé intègre  $S_2$  de  $S_1$ , génériquement fini sur  $S$ , puis le normalisé  $S_3$  de  $S_2$  : comme  $S$  est excellent,  $S_3$  est alors fini et plat au-dessus d'un gros ouvert de  $S$ , et il est normal.

Supposant donc l'existence d'un tel  $H$ , on pose  $B = A/H_1$  où  $H_1$  est l'image de  $H$  dans  $K(L)$  ; on a alors un faisceau inversible cubiste  $M'$  sur  $B$ , tel que  $L = \lambda^* M'$ , où  $\lambda : A \rightarrow B$  est la projection canonique (VI, 1.2). De plus, comme  $H$  est lagrangien,  $M'$  est de degré 1, i.e. définit une polarisation principale de  $B_U$ .

1.5.2. Le faisceau  $M'$  n'est pas nécessairement symétrique. Cependant, soit  $\eta$  le point générique de  $S$  : il existe (quitte à changer de base) une section  $b_\eta$  de  $B$  au-dessus de  $\eta$ , telle que le "translaté tordu"

$$T_{b_\eta}^* M'_\eta \otimes g^* b_\eta^* M'^{-1}$$

soit symétrique, où  $g : B \rightarrow S$  désigne le morphisme structural. Ce faisceau admet de plus une structure cubiste naturelle (III, 1.1.9.1). Par changement de base (toujours fini et plat au-dessus d'un gros ouvert de  $S$ ) et gonflement des modèles  $A$  et  $B$ , on peut supposer que  $b_\eta$  se prolonge en une section  $b \in B(S)$ , elle-même image d'une section  $a \in A(S)$ . Posons dans ces conditions

$$M = T_p^* M' \otimes g^* b^* M'^{-1} ;$$

alors  $M$  est cubiste (III, loc. cit.) et symétrique, et l'on a

$$(1.5.2.1) \quad \lambda^* M \simeq T_a^* L \otimes f^* a^* L^{-1} .$$

En particulier  $(\lambda^* M \otimes L^{-1})_\eta$  est dans  $\text{Pic}^0(A_\eta)$  et est symétrique donc est d'ordre 2, ce qui montre que  $(T_a^* L_\eta \otimes L_\eta^{-1})^{\otimes 2}$  est trivial, donc

$$a \in K(L^{\otimes 2}) .$$

Ceci entraîne que  $a$  est d'ordre fini dans  $A(S)$ , donc que le faisceau inversible  $a^* L$  est d'ordre fini dans  $\text{Pic } S$  (I, 5.7) ; on peut donc supposer (après changement de base) qu'il est trivial, et (1.5.2.1) devient

$$(1.5.2.2) \quad \lambda^* M \simeq T_a^* L .$$

Enfin la translation par  $a$  fournit un isomorphisme

$$T_a^* : f_* L \xrightarrow{\sim} f_* T_a^* L$$

d'où un isomorphisme

$$\delta(A, L) \xrightarrow{\sim} \delta(A, T_a^* L) .$$

Par hypothèse  $\delta(B, M)$  est d'ordre fini ; il en est donc de même de  $\delta(A, T_a^* L) = \delta(A, L)$ , grâce à (1.5.2.2) et à la Prop. 1.1.3. ■

## 2. Cas d'une base de caractéristique $p > 0$ .

2.0. Dans tout ce § on fixe un nombre premier  $p$  , et l'on se propose de démontrer  $\text{FCC}(\text{Spec } \mathbb{F}_p, g, 1)$  pour tout  $g \gg 1$  ; plus précisément :

2.1. Théorème. A toute donnée  $(S, A, L)$  de type  $(g, 1)$  sur un schéma  $S$  de caractéristique  $p$  , on peut associer canoniquement une trivialis-  
sation  $\sigma_p(A, L)$  du faisceau inversible

$$\delta(A, L)^{\otimes (p^2 - 1)p^{2g+2}} ,$$

de manière compatible à tout changement de base admissible et à tout  
changement de modèle.

2.2. Le cas où  ${}_{2p^2}A$  est fini.

Nous allons d'abord, grâce à une "frobeniuserie", démontrer 2.1 en nous restreignant aux  $(S,A,L)$  tels que le noyau  ${}_{2p^2}A$  de la multiplication par  $2p^2$  dans  $A$  soit fini sur  $S$  (condition vérifiée en particulier si  $A$  est un schéma abélien).

Soit donc  $(S,A,L)$  de type  $(g,1)$ , avec  ${}_{2p^2}A$  fini sur  $S$ .

2.2.1. Introduisons, pour tout  $n \gg 1$ , le plus petit sous-groupe ouvert

$$A^{[n]} \subset A$$

contenant  ${}_n A$ ; remarquons à ce propos que

$${}_n A = K(L^{\otimes n})$$

puisque  $L$  est de degré 1. La multiplication par  $p$  induit en particulier un morphisme

$$(2.2.1.1) \quad [p] : A^{[2p^2]} \longrightarrow A^{[2p]}$$

qui identifie  $A^{[2p]}$  au quotient de  $A^{[2p^2]}$  par le sous-groupe fini et plat  ${}_p A$ . De plus  $L$  est symétrique et  $K([p]^* L^{\otimes 2}) = {}_{2p^2}A \subset A^{[2p^2]}$  est fini par hypothèse; nous sommes donc dans les conditions d'application de la proposition 1.1.3, avec  $m=p$  et  $d=p^{2g}$ , d'où un isomorphisme naturel

$$(2.2.1.2) \quad \delta(A, [p]^* L)^{\otimes p} \simeq \delta(A, L)^{\otimes p^{2g+1}}$$

en remarquant que l'on a, grâce à 1.1.2 (changement de modèle) :

$$\delta(A^{[2p^2]}, [p]^* L) = \delta(A, [p]^* L)$$

$$\delta(A^{[2p]}, L) = \delta(A, L) .$$

2.2.2. Or comme  $L$  est symétrique on a un isomorphisme canonique (I, 5.5)

$$[p]^* L \simeq L^{\otimes p^2}$$

ce qui permet de descendre  $[p]^* L$  non seulement suivant  $[p]$  comme ci-dessus, mais aussi suivant le frobenius relatif itéré  $\Phi_{A/S}$  défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_A^2 & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 & & \Phi_{A/S} & & \\
 A & \xrightarrow{\quad} & A' & \xrightarrow{W} & A \\
 & \searrow f & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 & & S & \xrightarrow{F_S^2} & S
 \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien et où  $F_S$  (resp.  $F_A$ ) désigne le frobenius absolu de  $S$  (resp.  $A$ ). Le sel de la chose réside dans le fait que l'on a canoniquement

$$(2.2.2.1) \quad [p]^*L \simeq L^{\otimes p^2} \simeq (F_A^2)^*L = \Phi_{A/S}^* L'$$

en posant

$$L' = W^*L ;$$

$(A', L')$  est donc obtenu à partir de  $(A, L)$  par le changement de base admissible  $F_S^2 : S \rightarrow S$ , d'où des isomorphismes naturels

$$(2.2.2.2) \quad \delta(A', L') \simeq (F_S^2)^* \delta(A, L) \simeq \delta(A, L)^{\otimes p^2} .$$

Nous pouvons enfin appliquer 1.1.3 à l'isogénie  $\Phi_{A/S}$  (avec  $m = p^2$  et  $d = p^{2g}$ ) d'où :

$$\delta(A, [p]^*L)^{\otimes p^2} \simeq \delta(A, \Phi_{A/S}^* L')^{\otimes p^2} \quad (2.2.2.1)$$

$$\simeq \delta(A', L')^{\otimes p^{2g+2}} \quad (1.1.3)$$

$$\simeq \delta(A, L)^{\otimes p^2} \cdot p^{2g+2} \quad (2.2.2.2)$$

d'où finalement en comparant à (2.2.1.2) élevé à la puissance  $p$  :

$$\delta(A, L)^{\otimes p^{2g+2}} \simeq \delta(A, L)^{\otimes p^2} \cdot p^{2g+2}$$

qui fournit une trivialisations naturelle (!) de  $\delta(A, L)^{\otimes (p^2-1)p^{2g+2}}$ , comme annoncé.

### 2.3. Le cas général.

Nous disposons maintenant, pour tout  $(S, A, L)$  de type  $(g, 1)$ , lorsque  $S$  est un schéma de caractéristique  $p > 0$  et que  ${}_{2p^2}A$  est fini sur  $S$ , d'une trivialisations

$$\sigma_p(A, L)$$

du faisceau inversible  $\delta(A,L)^{\otimes(p^2-1)p^{2g+2}}$  sur  $S$ , compatible à tout changement de base admissible et à tout changement de modèle :

Ne faisant plus d'hypothèse de finitude sur  ${}_{2p^2}A$ , notons  $U$  (comme dans 1.0) l'ouvert de  $S$  au-dessus duquel  $A$  est un schéma abélien : il suffit, pour achever la démonstration, de prouver que la trivialisation  $\sigma_p(A_U, L_U)$  de  $\delta(A,L)^{\otimes(p^2-1)p^{2g+2}}$  au-dessus de  $U$  se prolonge à  $S$ .

Nous pouvons pour cela remplacer  $S$  par le spectre de l'anneau local d'un point de  $S-U$  (qui est normal (1.0.1)), puis, grâce à EGA IV, 8.8.2, supposer que  $S$  est essentiellement de type fini sur  $\mathbb{F}_p$  donc excellent (et toujours normal). Il suffit alors de trouver un morphisme fini surjectif  $\pi : S' \rightarrow S$ , avec  $S'$  normal, tel que  $\sigma_p(A_U, L_U)$  se prolonge à  $S'$  après le changement de base  $\pi$ . Or il suffit pour cela de choisir  $S'$  (grâce à IV, 8.2) tel que  $A_S$  admette un gonflement  $A'$  tel que  ${}_{2p^2}A'$  soit fini sur  $S'$ , et tel que  $L_S$  admette un prolongement cubiste  $L'$  sur  $A'$  : la trivialisation  $\sigma_p(A', L')$  réalise alors le prolongement cherché. ■

### 3. Cas des schémas abéliens.

Nous utiliserons le résultat suivant, dû à L. Szpiro et à l'auteur, et dont la preuve sera donnée ailleurs :

3.1. Théorème. Soient  $S$  un schéma,  $d$  un entier inversible sur  $S$ . Alors  $FC^{ab}(S, g, d)$  est vraie pour tout  $g \gg 1$ .

On se propose ici de déduire de 3.1 le théorème suivant :

3.2. Théorème. Pour tous  $g$  et  $d \gg 1$ ,  $FCC^{ab}(\text{Spec } \mathbb{Z}[1/d], g, d)$  est vraie.

3.2.1. Désignons par  $X_{g,d}$  le champ  $([D-M], \S 4)$  formé des données  $(S, A, L)$  de type  $(g, d)$  où  $A$  est de plus un  $S$ -schéma abélien. Nous pouvons considérer  $\delta(A, L)$ , pour  $(S, A, L)$  variable, comme un faisceau inversible sur  $X_{g,d}$ , que nous noterons désormais  $\delta_{g,d}$ . Si, pour tout champ  $X$  (sur la catégorie des schémas) et tout entier  $n$ , nous notons  $X[1/n]$  le champ  $X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$ , alors l'assertion de 4.2 est simplement que la restriction de  $\delta_{g,d}$  à  $X_{g,d}[1/d]$  est d'ordre fini.

Pour tout entier  $n \gg 1$  notons  $X_{g,d,n}$  le champ des  $(S,A,L,\nu)$  où  $(S,A,L)$  est dans  $X_{g,d}$  et où  $\nu$  est une structure de niveau  $n$  sur  $A$ . On a alors un morphisme

$$\pi_n : X_{g,d,n} \longrightarrow X_{g,d}[1/n]$$

qui identifie  $X_{g,d}[1/n]$  au champ quotient  $[X_{g,d,n}/GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})]$  ([D.M], 4.8) pour l'action naturelle de  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  sur  $X_{g,d,n}$ . De plus, pour  $n \gg 3$ , le champ  $X_{g,d,n}$  est représentable.

3.2.2. Traitons d'abord le cas  $d > 1$ . Si l'on prend pour  $n$  une puissance de  $d$  qui soit  $\gg 3$ , alors  $X_{g,d}[1/d]$  est donc quotient (au sens des champs) du schéma  $X_{g,d,n}$ . Une trivialisations de  $\delta_{g,d}^{\otimes m}$  sur  $X_{g,d}[1/d]$  équivaut donc à une trivialisations de  $\pi_n^* \delta_{g,d}^{\otimes m}$  sur  $X_{g,d,n}$ , compatible à l'"action" naturelle de  $GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  sur  $\pi_n^* \delta_{g,d}$ . Or le théorème 3.1 appliqué à l'objet universel sur  $X_{g,d,n}$  affirme l'existence d'un entier  $k \gg 1$  tel que  $\pi_n^* \delta_{g,d}^{\otimes k}$  soit trivial : il en résulte immédiatement que

$$\pi_n^* \delta_{g,d}^{\otimes k \cdot \text{Card } GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$$

admet une trivialisations équivariante, cqfd.

3.2.3. Plaçons-nous désormais dans le cas où  $d=1$ . La méthode ci-dessus montre qu'il existe, pour tout nombre premier  $p$ , un entier  $m_p \gg 1$  et une trivialisations  $\sigma_{(p)}$  de  $\delta_{g,1}^{\otimes m_p}$  sur  $X_{g,1}[1/p]$ . Il s'agit de prolonger l'une des  $\sigma_{(p)}$  à  $X_{g,1}$  tout entier. Pour cela nous aurons besoin de renseignements sur la géométrie de  $X_{g,1}$ .

3.2.4. Soit  $AB_{g,1}$  le champ des schémas abéliens principalement polarisés. On a un morphisme naturel

$$(3.2.4.1) \quad X_{g,1} \longrightarrow AB_{g,1}$$

$$(A \longrightarrow S, L) \longmapsto (A \longrightarrow S, \varphi_L : A \xrightarrow{\sim} A^t)$$

qui admet la structure suivante : soit  $H \longrightarrow AB_{g,1}$  le champ des points d'ordre 2 du dual du schéma abélien universel sur  $AB_{g,1}$  (en d'autres termes les objets de  $H$  sont les  $(A \longrightarrow S, \xi, M)$  où  $(A \longrightarrow S, \xi) \in AB_{g,1}$  et où  $M$  est un faisceau inversible d'ordre 2 sur  $A$ ) ; alors  $X_{g,1}$  est un  $H$ -torseur sur  $AB_{g,1}$ . Par suite le morphisme (3.2.4.1) est fini, plat et localement d'intersection complète, et même étale au-dessus de  $AB_{g,1}[1/2]$ . De plus comme  $AB_{g,1}$  est lisse sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$



(Grothendieck), le champ  $X_{g,1}$  est même plat et localement d'intersection complète relative sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , et lisse au-dessus de  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/2]$ .

3.2.5. Soit  $(A \xrightarrow{f} S, L)$  un objet de  $X_{g,1}$ . On a un unique isomorphisme de symétrie

$$s : L \xrightarrow{\sim} [-1]_A^*(L)$$

respectant les rigidifications. On en déduit une involution

$$\tau(A, L) : f_*L \xrightarrow{\sim} f_*[-1]^*L \xrightarrow{[-1]^*} f_*L$$

c'est-à-dire, comme  $f_*L$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible, une section de  $\mu_{2,S}$ . Nous obtenons ainsi un morphisme

$$(3.2.5.1) \quad \tau : X_{g,1} \longrightarrow \mu_2 \simeq \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^2-1)) .$$

Comme  $\mu_2$  est réunion des deux sections  $T=1$  et  $T=-1$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ ,  $X_{g,1}$  est réunion des fermés

$$(3.2.5.2) \quad X^+ = \tau^{-1}(1) \quad , \quad X^- = \tau^{-1}(-1)$$

dont les restrictions au-dessus de  $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/2]$  sont aussi ouvertes.

Si  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ , alors  $\tau(A, L)$  est un élément de  $\mu_2(k) = \{-1, +1\}$  qui n'est autre que  $(-1)^\nu$  où  $\nu$  est la multiplicité à l'origine du diviseur thêta (l'unique diviseur du système linéaire  $|L|$ ).

3.3. Lemme. Les fibres génériques  $X_{\mathbb{Q}}^+$  et  $X_{\mathbb{Q}}^-$  de  $X^+$  et  $X^-$  sont géométriquement irréductibles.

3.3.1. Montrons d'abord que ce lemme implique le théorème. Il a pour conséquence que, pour presque tout nombre premier  $p$ , les champs  $X^+ \times \text{Spec } \mathbb{F}_p$  et  $X^- \times \text{Spec } \mathbb{F}_p$  sont géométriquement irréductibles (on se ramène au cas d'un schéma en considérant une composante convenable d'un schéma de modules fin  $X_{g,1,n}$ , et l'on applique EGA IV, 9.7.7). Pour un tel nombre premier  $p \neq 2$ , on considère comme en 3.2.3 une trivialisatation  $\sigma_{(p)}$  de  $\delta_{g,1}^{\otimes m}$  au-dessus de  $X_{g,1}[1/p]$ , avec  $m \gg 1$ . Si l'on regarde  $\sigma_{(p)}$  comme une section méromorphe sur  $X_{g,1}$  tout entier, son diviseur est de la forme  $a(X^+ \times \text{Spec } \mathbb{F}_p) + b(X^- \times \text{Spec } \mathbb{F}_p)$  où  $a$  et  $b \in \mathbb{Z}$  (puisque  $X_{g,1}$  est lisse sur  $\mathbb{Z}[1/2]$ ) et par suite  $\delta_{g,1}^{\otimes m}$  est de la forme  $\tau^*M$  où  $M$  est un faisceau inversible sur  $\mu_2$ . On conclut en remarquant que  $\text{Pic}(\mu_2) = 0$  (on obtient  $\mu_2$  en recollant deux exemplaires de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  par le point fermé  $\text{Spec } \mathbb{F}_2$ ).

3.4. Démonstration de 3.3 (esquisse) : notons  $X_{an}$  le "champ analytique complexe" déduit de  $X_{g,1}$  : un objet de  $X_{an}$  est de la forme  $(A \xrightarrow{f} S, L)$ , où  $S$  est un espace analytique complexe,  $A$  un  $S$ -espace analytique en groupes, propre et lisse sur  $S$  à fibres connexes de dimension  $g$ , et  $L$  un faisceau inversible symétrique rigidifié sur  $A$ , ample de degré 1 relativement à  $S$  (de sorte que  $A$  est projectif sur  $S$  et mérite donc le titre de "S-schéma abélien"). Alors  $X_{an}$  est réunion des deux ouverts fermés  $X_{an}^+$  et  $X_{an}^-$  déduits de  $X^+$  et  $X^-$ , et il s'agit de montrer que  $X_{an}^+$  et  $X_{an}^-$  sont irréductibles (au sens analytique).

3.4.1. Description de  $X_{an}^+$  : considérons l'espace de Siegel

$$\mathbb{H}_g = \{ \Omega \in M_g(\mathbb{C}) \mid \Omega \text{ est symétrique, et la matrice symétrique réelle } \operatorname{Im}(\Omega) \text{ est définie positive} \}$$

et le réseau (relatif à  $\mathbb{H}_g$ )

$$\Lambda = \{ (z, \Omega) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g \mid z \in \mathbb{Z}^g \oplus \Omega \mathbb{Z}^g \} .$$

La fonction thêta de Riemann sur  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ , donnée par la série

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i {}^t m \Omega m + 2\pi i {}^t m z)$$

a une propriété de quasi-périodicité relativement à  $\Lambda$  ([M7], chap. II, §1), qui entraîne que son diviseur est  $\Lambda$ -invariant. Si nous posons

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g / \Lambda \xrightarrow{f} \mathbb{H}_g$$

alors le diviseur en question induit un diviseur symétrique sur  $\mathcal{H}$ , que nous noterons  $\Theta^+$ . Notant  $\mathcal{L}^+$  le faisceau inversible  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}(\Theta^+) \otimes f^* e^* \mathcal{O}_{\mathbb{H}_g}(-\Theta^+)$  sur  $\mathcal{H}$  (où  $e : \mathbb{H}_g \rightarrow \mathcal{H}$  est la section nulle), alors  $(\mathcal{H} \xrightarrow{f} \mathbb{H}_g, \mathcal{L}^+)$  est un objet de  $X_{an}^+$ , que l'on peut voir comme un morphisme

$$(3.4.1.1) \quad \mathbb{H}_g \longrightarrow X_{an}^+ .$$

Enfin le groupe symplectique  $\operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  opère sur  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$  en respectant  $\Lambda$  ; l'image de  $(z, \Omega)$  par  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  est

$$({}^t(C\Omega + D)^{-1} z, (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1})$$

(cf. [M7], chap. II, §4). Il opère donc en particulier sur  $\mathcal{H}$  de manière compatible à son action sur  $\mathbb{H}_g$ .

3.4.1.2. Proposition. Le morphisme (3.4.1.1) identifie  $X_{\text{an}}^+$  au champ quotient  $[\Gamma^+ \backslash \mathbb{H}_g]$  (au sens de [D-M], 4.8), où  $\Gamma^+ \subset \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  désigne le stabilisateur du diviseur  $\Theta^+$  (c'est le groupe  $\Gamma_{1,2}$  de [I] et [M7]).

3.4.2. Description de  $X_{\text{an}}^-$  : choisissons une section d'ordre 2

$$\alpha : \mathbb{H}_g \longrightarrow \frac{1}{2}\Lambda/\Lambda \subset \mathcal{H}$$

telle que pour tout  $\Omega \in \mathbb{H}_g$ , la multiplicité du diviseur  $\Theta_\Omega^+$  au point  $\alpha(\Omega)$  de  $\mathcal{H}_\Omega$  soit impaire, par exemple

$$\alpha(\Omega) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et désignons par  $\Theta^- \subset \mathcal{H}$  le translaté par  $\alpha$  de  $\Theta^+$ , et par  $\mathcal{L}^-$  le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}(\Theta^-) \otimes f^* e^* \mathcal{O}_{\mathcal{H}}(-\Theta^-)$ . Alors  $(\mathcal{H} \xrightarrow{f} \mathbb{H}_g, \mathcal{L}^-)$  est un objet de  $X_{\text{an}}^{-}$ , c'est-à-dire un morphisme

$$(3.4.2.1) \quad \mathbb{H}_g \longrightarrow X_{\text{an}}^- .$$

3.4.2.2. Proposition. Notons  $\Gamma^- \subset \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  le stabilisateur de  $\Theta^-$ . Alors  $X_{\text{an}}^-$  s'identifie grâce à (3.4.2.1) au quotient  $[\Gamma^- \backslash \mathbb{H}_g]$ .

3.4.3. La démonstration de 3.4.1.2 et 3.4.2.2 aurait sa place naturelle dans la littérature sur les fonctions thêta ; on se bornera ici à en donner les grandes lignes.

Le champ  $X_{g,1}[1/2]$  admet encore la description suivante : c'est la catégorie des  $(A \xrightarrow{f} S, \xi, q)$  où  $(A \xrightarrow{f} S, \xi)$  est un objet de  $\text{AB}_{g,1}[1/2]$ , et où

$$q : {}_2A \longrightarrow \mu_{2,S}$$

est une forme quadratique vérifiant

$$(3.4.3.1) \quad q(x+y)q(x)q(y) = e_2(x,y)$$

où  $e_2 : {}_2A \times {}_2A \longrightarrow \mu_2$  est la forme alternée sur  ${}_2A = \text{Ker}(2\xi)$  définie par la polarisation  $2\xi$ . On passe de  $(A, L)$  à  $(A, \xi, q)$  en prenant  $\xi = \varphi_L$  et  $q = e_*^L$  ([M3], §2). Une forme quadratique  $q$  vérifiant (3.4.3.1) s'appelle une thêta-caractéristique pour le  $\mathbb{F}_2$ -vectoriel symplectique  $({}_2A, e_2)$ . De plus l'invariant  $\tau(A, L)$  de 3.2.5 n'est autre que  $(-1)^\varepsilon$  où  $\varepsilon \in \mathbb{F}_2$  est l'invariant d'Arf ([D-G], III, §5, 2.7) de  $e_*^L$ .

Par exemple, dans le cadre analytique, la forme  $e_{*}^{\mathcal{L}^+}$  associée à l'objet  $(A \rightarrow \mathcal{H}_g, \mathcal{L}^+)$  de 3.4.1 est la suivante : soient  $\Omega \in \mathcal{H}_g$  et

$$m + \Omega n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g)$$

un point de  $\mathbb{C}^g$  au-dessus de  $2\mathcal{H}_\Omega$  ; alors

$$e_{*}^{\mathcal{L}^+}(\Omega(m + \Omega n)) = (-1)^{4t_{m,n}} .$$

Il résulte de la théorie classique de Riemann que le morphisme

$$\mathcal{H}_g \longrightarrow AB_{g,1}^{\text{an}}$$

défini par l'objet  $(\mathcal{H} \xrightarrow{f} \mathcal{H}_g, \varphi_{\mathcal{L}^+})$  de  $AB_{g,1}^{\text{an}}(\mathcal{H}_g)$  fait de  $AB_{g,1}^{\text{an}}$  le champ quotient  $[\text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}_g]$ . Autrement dit,  $AB_{g,1}^{\text{an}}$  est connexe et son groupe fondamental s'identifie à  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ .

Les considérations ci-dessus impliquent que le revêtement naturel

$$X^{\text{an}} \longrightarrow AB_{g,1}^{\text{an}}$$

$$(A, L) \longmapsto (A, \varphi_L)$$

est "classifié" par le  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ -ensemble

$E =$  ensemble des thêta-caractéristiques pour le  $\mathbb{F}_2$ -vectoriel  $(\mathbb{F}_2)^{2g}$  et la forme symplectique standard

et que le sous-revêtement  $X_{\text{an}}^+$  (resp.  $X_{\text{an}}^-$ ) correspond aux thêta-caractéristiques paires (resp. impaires), i.e. dont l'invariant d'Arf est égal à 0 (resp. 1). Les propositions 3.4.1.2 et 3.4.1.3 résultent du fait que  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  opère transitivement sur l'ensemble des thêta-caractéristiques paires (resp. impaires) : cette dernière assertion est prouvée dans [I], chap. V, §6, corollaire de la Prop. 2 et lemme 25. ■

#### 4. Cas d'une base de caractéristique nulle.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

4.1. Théorème. Pour tout  $g \gg 1$ ,  $\text{FCC}(\text{Spec } \mathbb{Q}, g, 1)$  est vraie.

Nous aurons besoin d'abord de quelques lemmes.

4.2. Lemme. Soient  $S_0$  un schéma et  $d$  un entier  $\geq 1$ . Alors  $\text{FCC}(S_0, 2, d^2)$  implique  $\text{FCC}(S_0, 1, d)$ .

Démonstration : soit  $(S, A, L)$  une donnée de type  $(1, d)$  où  $S$  est un  $S_0$ -schéma. Alors  $(S, A \times_S A, \text{pr}_1^* L \otimes \text{pr}_2^* L)$  est une donnée de type  $(2, d^2)$  et il est immédiat que  $\delta(A \times A, \text{pr}_1^* L \otimes \text{pr}_2^* L)$  s'identifie canoniquement à  $\delta(A, L)^{\otimes 2d}$  : ceci résulte du fait que  $\bar{\omega}_{A \times A/S} \simeq \bar{\omega}_{A/S}^{\otimes 2}$ , et de la formule de Künneth (on rappelle que  $A$  est plat sur  $S$ ). Le lemme en résulte. ■

Nous supposons donc désormais que l'entier  $g$  de 4.1 est  $\geq 2$ . Gardant les notations  $X^+$  et  $X^-$  de (3.2.5.2), nous pouvons dès lors bénéficier du lemme suivant :

4.3. Lemme. On a  $H^0(X_{\mathbb{Q}}^+, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{Q}}}^+) = H^0(X_{\mathbb{Q}}^-, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{Q}}}^-) = \mathbb{Q}$ . En conséquence, pour presque tout nombre premier  $p$ , les champs  $X^+ \otimes_{\mathbb{F}_p}$  et  $X^- \otimes_{\mathbb{F}_p}$  n'ont pas de fonctions globales non constantes.

Démonstration : nous nous limiterons à  $X_{\mathbb{Q}}^+$  pour fixer les idées. Il s'agit de montrer que le schéma de modules grossier  $Y$  associé n'a pas de fonctions globales non constantes. Celui-ci est un revêtement fini connexe (à cause de 3.3) du schéma de module grossier  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{g,1})_{\mathbb{Q}}$  des variétés abéliennes principalement polarisées. Ce dernier admet une compactification  $\bar{\mathcal{K}}$  (la compactification de Satake) qui, pour  $g \geq 2$ , a la propriété que  $\dim(\bar{\mathcal{K}} - \mathcal{K}) \ll \dim \mathcal{K} - 2$ . Par suite le schéma de modules grossier  $Y$  admet également une compactification ayant la même propriété. Le lemme en résulte. ■

4.4. Le théorème 3.2 implique l'existence d'un entier  $m \geq 1$  et d'une trivialisations, que nous noterons  $\sigma^{\text{ab}}$ , du faisceau  $\delta_{g,1}^{\otimes m}$  sur  $X_{g,1}$  (notations de 3.2.1). En particulier, pour toute donnée  $(S, A, L)$  de type  $(g, 1)$ , on dispose d'une trivialisations  $\sigma^{\text{ab}}(A_U, L_U)$  de  $\delta(A, L)^{\otimes m}$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de "bonne réduction" de  $A$ . Le théorème 4.2 sera démontré si l'on établit que, lorsque  $S$  est de caractéristique nulle,  $\sigma^{\text{ab}}(A_U, L_U)$  se prolonge en une trivialisations de  $\delta(A, L)$  sur  $S$ . Nous allons procéder pour cela par "réduction modulo  $p$  assez grand".

4.5. Pour tout nombre premier  $p$ , posons  $m_p = (p^2 - 1)p^{2g+2}$  et considérons la trivialisations  $\sigma_p$  construite en 2.1 pour les données de type  $(g, 1)$  en caractéristique  $p$ . Nous pouvons considérer sa restriction au champ  $X_{g,1} \otimes_{\mathbb{F}_p}$ , que nous noterons  $\sigma_p^{\text{ab}}$ . Dans ces conditions

$(\sigma_p^{ab})^{\otimes m}$  et  $(\sigma_p^{ab})^{\otimes m}_p$  donnent deux trivialisations de  $\delta_{g,1}^{\otimes mm}_p$  sur  $X_{g,1} \otimes \mathbb{F}_p$ , et il résulte donc du lemme 4.3 que pour presque tout  $p$ , il existe des constantes  $c_p^+$  et  $c_p^- \in \mathbb{F}_p^\times$  telles que

$$(4.5.1) \quad \begin{aligned} (\sigma_p^{ab})^{\otimes m}_p &= c_p^+ (\sigma_p^{ab})^{\otimes m} && \text{sur } X^+ \otimes \mathbb{F}_p \\ (\sigma_p^{ab})^{\otimes m}_p &= c_p^- (\sigma_p^{ab})^{\otimes m} && \text{sur } X^- \otimes \mathbb{F}_p \end{aligned}$$

4.6. Lemme. Pour presque tout nombre premier  $p$  et toute donnée  $(S, A, L)$  de type  $(g, 1)$  sur un  $\mathbb{F}_p$ -schéma  $S$ , la trivialisations  $\sigma^{ab}(A_U, L_U)$  de  $\delta(A, L)^{\otimes m}$  sur l'ouvert  $U$  de bonne réduction de  $A$  se prolonge à  $S$ .

Démonstration : la question est locale aux points de  $S-U$  et nous pouvons donc supposer  $S$  normal irréductible. Dans ce cas  $U$  est connexe donc le morphisme  $U \rightarrow X_{g,1}$  défini par  $(A_U, L_U)$  se factorise par  $X^+$  ou  $X^-$ , et par suite d'après (4.5.1),  $(\sigma_p^{ab})^{\otimes m}_p$  se prolonge sur  $S$  pour presque tout  $p$  en  $c_p^+ \cdot \sigma_p^{\otimes m}$  ou  $c_p^- \cdot \sigma_p^{\otimes m}$  suivant le cas. Donc  $\sigma^{ab}$  se prolonge puisque  $S$  est normal. ■

4.7. Fin de la démonstration de 4.1 : soit  $(S, A, L)$  une donnée de type  $(g, 1)$  où  $S$  est un  $\mathbb{Q}$ -schéma. La question du prolongement de  $\sigma(A_U, L_U)$  est locale sur  $S$  et nous pouvons donc supposer  $S$  affine de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , puis que  $(S, A, L)$  provient par tensorisation par  $\mathbb{Q}$  d'une donnée de type  $(g, 1)$  (notée désormais  $(S, A, L)$ ) où :

.  $S$  est un schéma normal intègre de type fini sur  $\mathbb{Z}$

. pour tout nombre premier  $p$ , le schéma  $S \otimes \mathbb{F}_p$  est normal et l'ouvert  $U$  de bonne réduction induit un ouvert dense de  $S \otimes \mathbb{F}_p$  (donc  $(S, A, L)$  induit sur  $S \otimes \mathbb{F}_p$  une donnée de type  $(g, 1)$ ).

Le diviseur de  $\sigma(A_U, L_U)$  (considérée comme section méromorphe de  $\delta(A, L)^{\otimes m}$  sur  $S$ ) induit pour tout  $p$  assez grand, d'après 4.6, le diviseur nul sur  $S \otimes \mathbb{F}_p$  : il induit donc 0 sur la fibre générique, ce qui achève la démonstration. ■

## CHAPITRE IX

Positivité de  $\bar{\omega}$ Sommaire.

0. Introduction.

1. Un lemme de Zarhin.

2. Positivité de  $\bar{\omega}$ .3. Cas des schémas abéliens : amplitude de  $\bar{\omega}$ .0. Introduction.

On recueille ici les premiers fruits de la "formule clé" du chapitre VIII, jointe aux propriétés de "négativité de l'image directe" des chapitre VI et VII.

Si  $A$  est un schéma en groupes semi-stable sur un schéma normal excellent  $S_0$  "vérifiant la formule clé", on montre en 2.1 qu'il existe  $n \gg 1$  tel que le faisceau  $\bar{\omega}_{A/S_0}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales sur  $S_0$ . On utilise pour cela un lemme de Zarhin, démontré au §1, qui permet de se ramener au cas "principalement polarisé".

Au §3 (qui est indépendant des deux précédents) on montre l'amplitude du "faisceau  $\bar{\omega}$ " sur le champ modulaire des schémas abéliens polarisés. C'est une conséquence immédiate de la formule clé pour les schémas abéliens et de l'"anti-amplitude de l'image directe" résultant des plongements grassmanniens du chapitre VII.

1. Un lemme de Zarhin.

Nous esquissons ici une démonstration, inspirée de notes de P. Deligne, du lemme suivant :

1.1. Lemme. Soit  $d$  un entier  $\gg 1$ . A tout schéma  $S$  et tout  $S$ -schéma abélien  $A$  muni d'une polarisation  $\psi : A \rightarrow A^t$  de degré  $d^2$ , on peut associer canoniquement, de manière compatible à tout changement de base, une polarisation principale sur  $(A \times A^t)^4$ .

Démonstration : soient  $S, A, \psi$  comme ci-dessus.

1.2. Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini : alors  $A \otimes_{\mathbb{Z}} M$  est un  $S$ -schéma abélien (isomorphe à  $A^{\text{rg } M}$ ), et l'on a un isomorphisme canonique

$$\zeta(A, M) : (A \otimes M)^t \xrightarrow{\sim} A^t \otimes M^*$$

où  $M^*$  est le dual  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  de  $M$ . Cet isomorphisme est de plus compatible à la bidualité, au sens suivant : l'isomorphisme composé

$$(A \otimes M)^{tt} \xrightarrow{(\zeta(A, M)^{-1})^t} (A^t \otimes M^*)^t \xrightarrow{\zeta(A^t, M^*)} A^{tt} \otimes M^{**} \longrightarrow A \otimes M$$

où la dernière flèche résulte de la bidualité pour  $A$  et pour  $M$ , est l'isomorphisme de bidualité ([M2], § 13) pour  $A \otimes M$ .

1.3. Soit  $B$  une forme bilinéaire sur  $M$ , considérée comme un homomorphisme  $B : M \rightarrow M^*$ . On peut alors associer à la polarisation  $\psi : A \rightarrow A^t$  l'homomorphisme

$$\psi \otimes B : A \otimes M \longrightarrow A^t \otimes M^* \simeq (A \otimes M)^t .$$

Ce dernier est une isogénie si et seulement si  $B$  est non dégénérée sur  $\mathbb{Q}$ , et est symétrique (i.e. vérifie  $(\psi \otimes B)^t = \psi \otimes B$ ) si et seulement si  $B$  est symétrique, ce dernier point résultant de la compatibilité énoncée en 1.2. Enfin  $\psi \otimes B$  est une polarisation si et seulement si  $B$  est symétrique définie positive : c'est en effet trivial si  $B$  est diagonalisable dans  $M$ , et l'on se ramène à ce cas en remarquant que  $B$  est diagonalisable sur un sous-groupe d'indice fini  $M'$  de  $M$  et que l'homomorphisme naturel  $A \otimes M' \rightarrow A \otimes M$  est une isogénie.

Le morphisme  $\psi \otimes B$  est le composé

$$A \otimes M \xrightarrow{\psi \otimes \text{id}_M} A^t \otimes M \xrightarrow{\text{id}_{A^t} \otimes B} A^t \otimes M^*$$

et le degré de  $\psi \otimes \text{id}_M$  est  $d^{2\text{rg } M}$ , celui de  $\text{id}_{A^t} \otimes B$  est  $|\det B|^{2g}$  où  $|\det B|$  est le cardinal de  $\text{Coker } B$  et où  $g = \dim(A/S)$ . On a donc

$$(1.3.1) \quad \deg(\psi \otimes B) = d^{2\text{rg } M} |\det B|^{2g} .$$

1.4. Supposons désormais  $B$  définie positive. Pour toute polarisation  $\xi : C \rightarrow C^t$  sur un schéma abélien  $C$ , notons  $e^\xi : \text{Ker } \xi \times \text{Ker } \xi \rightarrow G_m$  la forme alternée associée.

Posant  $K = \text{Ker } \psi$ , il est d'abord immédiat que  $K \otimes M \subset \text{Ker}(\psi \otimes B)$ . De plus supposons que  $B$  soit divisible par  $d^2$  : alors, posant



$B' = \frac{1}{d^2}B$ , on a pour  $x$  et  $y \in \text{Ker}(\psi \otimes B')$  :

$$e^{\psi \otimes B}(x, y) = e^{\psi \otimes B'}(x, y) d^2 = e^{\psi \otimes B'}(d^2 x, y)$$

Comme  $K$  est annulé par  $d^2$ , il en résulte en particulier que le sous-groupe  $K \otimes M$  de  $\text{Ker}(\psi \otimes B')$  est isotrope pour la forme  $e^{\psi \otimes B}$ .

1.5. Prenons  $M$  de la forme  $M = M_1 \times M_2$  où  $M_1$  et  $M_2$  sont  $\mathbb{Z}$ -libres de même rang  $r$ , et supposons que la forme bilinéaire  $B_2$  induite par  $B$  sur  $\{0\} \times M_2$  soit divisible par  $d^2$ . Identifions  $A \otimes M$  à  $(A \otimes M_1) \times (A \otimes M_2)$  et posons (avec  $K = \text{Ker } \psi$ ) :

$$K' = \{0\} \times (K \otimes M_2) \subset (A \otimes M_1) \times (A \otimes M_2).$$

La functorialité de la forme  $e^{\psi \otimes B}$  pour l'injection naturelle  $A \otimes M_2 \hookrightarrow A \otimes M$ , jointe aux considérations de 1.4 (appliquées à la polarisation induite par  $\psi \otimes B$  sur  $A \otimes M_2$ , qui n'est autre que  $\psi \otimes B_2$ ), montre que  $K'$  est isotrope dans  $\text{Ker}(\psi \otimes B)$ , et par suite que la polarisation  $\psi \otimes B$  se descend en une polarisation  $\theta$  sur

$$(A \otimes M_1) \times (A \otimes M_2 / K \otimes M_2) \simeq (A \otimes M_1) \times (A^t \otimes M_2) \simeq (A \times A^t)^r.$$

De plus le degré de  $\theta$  est

$$\begin{aligned} \text{deg } \theta &= \text{deg}(\psi \otimes B) / (\text{rg } K')^2 \\ &= d^{4r} \times (\det B)^{2g} / d^{4r} \\ &= (\det B)^{2g} \end{aligned}$$

en vertu de (1.3.1) et du fait que  $K' \simeq K^r$  est de rang  $d^{2r}$ .

1.6. Il suffit donc, pour démontrer 1.1, de trouver un  $\mathbb{Z}$ -module  $N$ , libre de rang 4, et une forme bilinéaire définie positive  $B$  sur  $N \times N$ , divisible par  $d^2$  sur  $\{0\} \times N$  et unimodulaire (i.e.  $\det B = 1$ ). Prenons pour  $N$  l'anneau  $\mathbb{H}$  des quaternions  $a+bi+cj+dk$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , et cherchons  $B$  sous la forme

$B =$  partie réelle d'une forme  $\mathbb{H}$ -hermitienne positive sur  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ .

Si la forme hermitienne a pour matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$  avec  $a$  et  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{H}$ , alors on vérifie que  $\det B = (ac - b\bar{b})^4$ . Il s'agit donc de résoudre (posant  $b = x+iy+jz+kt$ )

$$\begin{cases} a > 0, c > 0, d^2 | c \\ ac-1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \end{cases}$$

d'où le lemme puisque tout entier naturel est somme de quatre carrés.  $\square$

1.6. Autre version. Zarhin me signale que 1.1 est un cas particulier de [Z4], lemme 2.5 : avec les notations de loc. cit. on prend  $W = \text{Ker } \lambda$  et l'on remarque qu'alors  $X^8/\tilde{W}$  est isomorphe à  $(X^t)^4 \times X^4$ , grâce à l'isomorphisme

$$\begin{aligned} X^4 \times X^4 &\xrightarrow{\sim} X^4 \times X^4 \\ (u, v) &\longmapsto (u, Iu+v) . \end{aligned}$$

## 2. Positivité de $\bar{\omega}$ .

2.1. Théorème. Soit  $S_0$  un schéma noethérien normal excellent. On fait sur  $S_0$  l'hypothèse suivante :

(H) pour tout entier  $g \gg 1$  et tout  $S_0$ -schéma normal  $S$  fini sur  $S_0$ , la formule clé  $FC(S, g, 1)$  est vraie (VIII, 1.2).

Soit  $A \xrightarrow{f} S_0$  un  $S_0$ -schéma en groupes semi-stable, abélien au-dessus d'un ouvert dense de  $S_0$ . Alors il existe un entier  $n \gg 1$  tel que  $\bar{\omega}_{A/S_0}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales sur  $S_0$  (notation de VIII, 1.0.4).

2.2. Remarque. L'hypothèse (H) ci-dessus est vérifiée en particulier, en vertu de VIII, 1.3 (i), si  $S_0$  est un schéma sur un corps.

2.3. Démonstration de 2.1 : on peut naturellement supposer  $S_0$  intègre, de point générique  $\eta$ . Soit  $S \xrightarrow{\pi} S_0$  le normalisé de  $S_0$  dans une extension finie de  $\kappa(\eta)$  : on montre comme en VI, 4.3 qu'il suffit de trouver un entier  $n' \gg 1$  tel que  $\pi^* \bar{\omega}_{A/S_0}^{\otimes n'}$  soit engendré par ses sections sur  $S$  (la norme d'un faisceau inversible sur  $S$  a encore un sens dans cette situation, cf. EGA II, 6.5).

2.4. Lemme. Soient  $A$  et  $S_0$  comme dans 2.1, avec  $S_0$  connexe de point générique  $\eta$ . Soit  $A^t$  un modèle semi-stable sur  $S_0$  de la variété duale  $A_\eta^t$  de  $A_\eta$  (l'existence de  $A^t$  est assurée par IV, 7.1). Alors le faisceau inversible

$$\bar{\omega}_{A/S_0} \otimes \bar{\omega}_{A^t/S_0}^{-1}$$

est d'ordre fini dans  $\text{Pic}(S_0)$ .

(Ce lemme n'utilise pas l'hypothèse (H) de 2.1).

Démonstration : par changement de base du type 2.3 et gonflement de  $A$ , on peut supposer qu'il existe sur  $A$  un faisceau inversible cubiste symétrique  $L$ , ample relativement à  $S_0$  et tel que  $K(L)$  soit fini sur  $S_0$ . D'après l'unicité du modèle semi-stable à fibres connexes ([R1], IX.1.5) on peut prendre

$$A^t = A/K(L)$$

(cf. IV, 7.1.2). On a alors (VIII, 1.1.3.8)

$$\bar{\omega}_{A/S_0} \simeq \bar{\omega}_{A^t/S_0} \otimes D_{K(L)}$$

mais comme  $K(L)$  est isomorphe à son dual de Cartier on a

$$D_{K(L)}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_{S_0}.$$

Le lemme en résulte. ■

2.5. Grâce au lemme 2.4 nous pouvons, pour démontrer 2.1, remplacer  $A$  par  $(A \times A^t)^4$  puisque  $\bar{\omega}_{(A \times A^t)^4/S_0}$  a même classe dans  $\text{Pic}(S_0) \otimes \mathbb{Q}$  que  $\bar{\omega}_{A/S_0}^{\otimes 8}$ . Le lemme de Zarhin (1.1) nous permet donc de supposer que  $A_\eta$  admet une polarisation principale, et même (après changement de base) qu'il existe sur  $A$  un faisceau inversible cubiste symétrique  $L$ , ample relativement à  $S_0$  et de degré 1 sur  $A_\eta$ . D'autre part la question est locale sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , et nous sommes donc ramenés à traiter deux cas :

(2.5.1) 2 est inversible sur  $S_0$  : on peut, par changement de base et gonflement, supposer que  $K(L^{\otimes 2})$  est fini sur  $S_0$ . On applique alors VI, 4.1 (ii) : il existe  $n > 0$  tel que  $(f_*L)^{\otimes -n}$  soit engendré par ses sections. Par ailleurs, d'après l'hypothèse (H), on a  $\bar{\omega}_{A/S_0} \simeq (f_*L)^{\otimes -2}$  dans  $\text{Pic}(S_0) \otimes \mathbb{Q}$  ; le théorème en résulte dans ce cas.

(2.5.2) 3 est inversible sur  $S_0$  : on applique alors la construction de VI, 5.4.2 : posant  $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}[T]/(1+T+T^2)$ , on peut remplacer  $A$  par  $A_1 = A \otimes \mathbb{Z}[\zeta] \simeq A^2$  ; on construit dans loc. cit., à partir de  $L$ , un faisceau inversible totalement  $\zeta$ -invariant (VI, 5.4)  $L_2$  sur  $A_1$  tel

que  $K(L_2) = {}_9A_1$ . Quitte à changer de base on peut supposer que  $K(L_2)$  est fini et l'on peut alors appliquer VI, 5.8. On conclut comme ci-dessus grâce à l'hypothèse (H). ■

### 3. Cas des schémas abéliens : amplitude de $\bar{\omega}$ .

3.0. Conformément à VII, 4.3, désignons par  $AB_{g,d}$  le champ des schémas abéliens  $A \rightarrow S$  de dimension relative  $g$  munis d'une polarisation  $\xi$  de degré  $d^2$ . On dispose sur  $AB_{g,d}$  du faisceau inversible  $\bar{\omega}$ , dont la "valeur" sur l'objet  $(A \rightarrow S, \xi)$  est par définition le  $\mathcal{O}_S$ -module inversible  $\bar{\omega}_{A/S}$ .

3.1. Théorème. Le faisceau inversible  $\bar{\omega}$  est ample sur  $AB_{g,d}$  au sens de VII, 4.3.3.

Démonstration : fixant  $n \gg 3$ , il s'agit par définition de montrer que l'image réciproque de  $\bar{\omega}$  sur le champ représentable  $AB_{g,d,n}$  est ample. Soit  $Y$  le normalisé du schéma de modules  $\mathcal{M}_{g,d,n}$  correspondant, et soit  $(A \xrightarrow{f} Y, \xi)$  le schéma abélien polarisé sur  $Y$  déduit du morphisme naturel  $Y \rightarrow AB_{g,d}$ . Il suffit de montrer que  $\bar{\omega}_{A/Y}$  est ample sur  $Y$  puisque le morphisme  $Y \rightarrow AB_{g,d,n}$  est fini surjectif. Or, comme  $Y$  est quasi-fini sur  $AB_{g,d}$ , le faisceau  $(\det f_* L(\xi))^{-1}$  est ample sur  $Y$  d'après VII, 3.2 (où  $L(\xi)$  est le faisceau défini en VII, 3.1.1). Puisque  $L(\xi)$  est symétrique notre assertion résulte donc de  $FC^{ab}(Y, g, 4^g d)$  qui est vraie d'après VIII, 1.3 (iv). ■

## CHAPITRE X

Hauteurs projectives et familles limitéesSommaire.

1. Familles limitées d'applications rationnelles.
2. Familles limitées et graphes.
3. Hauteurs.
4. Le théorème de la hauteur bornée.

0. Introduction.

Dans ce chapitre, indépendant des précédents, on étudie la notion de "famille limitée" de points d'un  $k$ -schéma de type fini  $X$ , à valeurs dans un corps de fonctions  $F$  sur le corps de base  $k$ . De tels points peuvent être considérés comme des applications rationnelles d'un modèle  $S$  de  $F$  sur  $k$ , à valeurs dans  $X$ ; on montre alors au §2 qu'un ensemble  $\mathcal{S} \subset X(F)$  est limité si et seulement si les "graphes" correspondants forment une famille limitée, au sens habituel, de sous-schémas fermés de  $S \times X$ , où  $S$  est un modèle normal projectif fixé de  $F$ .

On introduit au §3 les versions "géométrique" et "numérique" de la hauteur projective d'un point de  $X(F)$ , la hauteur numérique étant la hauteur habituelle définie dans [L]. Le lien avec les familles limitées est exprimé par le "théorème de la hauteur bornée" (4.2); il faut avouer, hélas, que l'obstination mise jusque-là à éviter toute hypothèse de séparabilité pour  $F$  est bien mal récompensée (sauf en dimension 1), en raison du peu de souplesse de la théorie des "coordonnées de Chow" et de l'incapacité de l'auteur à s'en passer.

1. Familles limitées d'applications rationnelles.

1.0. On fixe un corps de fonctions  $F$  sur un corps  $k$ , c'est-à-dire une extension de type fini de  $k$ . Un modèle de  $F$  (sur  $k$ ) est par définition un  $k$ -schéma intègre séparé de type fini  $S$ , muni d'un  $k$ -isomorphisme de  $F$  avec le corps des fonctions de  $S$ .

1.1. Définition. Soient  $S$  un modèle de  $F$  et  $X$  un  $k$ -schéma intègre de type fini. Soit  $\mathcal{S}$  une partie de  $X(F)$ , considérée comme un ensemble d'applications rationnelles  $S \dashrightarrow X$ . On dit que  $\mathcal{S}$  est  $k$ -limitée (ou simplement limitée s'il n'y a pas de confusion) s'il existe un  $k$ -schéma de type fini  $T$ , un ouvert  $U \subset T \times_k S$  et un  $k$ -morphisme  $\varphi : U \rightarrow X$  tels que pour tout  $f : S \dashrightarrow X$  dans  $\mathcal{S}$ , il existe un point  $x_f \in T(k)$  tel que

(i)  $x_f \in \text{pr}_1(U)$  ;

(ii) l'application rationnelle de  $S = \{x_f\} \times S$  dans  $X$  induite par  $\varphi$  (qui est définie à cause de (i)) coïncide avec  $f$ .

1.1.1. Cette notion est en réalité indépendante du modèle  $S$  : il est en effet immédiat que la définition obtenue en remplaçant  $S$  par  $\text{Spec } F$  dans 1.1 est équivalente à 1.1.

Un sous-ensemble d'une partie limitée de  $X(F)$  est limité, de même qu'une réunion finie de parties limitées.

1.1.2. Dans les conditions de 1.1, nous dirons que  $T$ ,  $U$  et  $\varphi$  paramètrent  $\mathcal{S}$ . Quitte à modifier  $T$  on peut supposer que  $\text{pr}_1 : U \rightarrow T$  est surjective (remplacer  $T$  par l'ouvert  $\text{pr}_1(U)$ , ce qui est licite d'après (i)), que  $T$  est réduit ou même régulier (remplacer  $T$  par une somme finie de sous-schémas réguliers de  $T$  recouvrant  $T$ ). Notons que si  $T$  est régulier, il est lisse sur  $k$  en chacun de ses points  $k$ -rationnels, ce qui permet, en remplaçant  $T$  par son ouvert de lissité, de supposer  $T$  lisse (i.e. géométriquement régulier) sur  $k$ . On peut aussi, par exemple, supposer que l'ensemble des points  $x_f$ , pour  $f \in \mathcal{S}$ , est dense dans  $T$ , etc.

1.1.3. Si  $g : S' \rightarrow S$  est un morphisme de  $k$ -schémas intègres de type fini (ou même une application rationnelle) et si  $\mathcal{S} \subset X(F)$  est limité, il est immédiat que l'ensemble des composés  $f \circ g$  ( $f \in \mathcal{S}$ ), qui sont définis, est limité.

1.2. Proposition. Soient  $X$  et  $Y$  deux  $k$ -schémas intègres de type fini et soit  $j : X \hookrightarrow Y$  une immersion. Pour que  $\mathcal{S} \subset X(F)$  soit limité il faut et il suffit que son image par  $j$  dans  $Y(F)$  le soit.

Démonstration : l'implication ( $\mathcal{S}$  limité  $\implies j(\mathcal{S})$  limité) est triviale. Réciproquement supposons  $j(\mathcal{S})$  limité. Soit  $S$  un modèle de  $F$  et soient  $T$ ,  $U \subset T \times S$  et  $\varphi : U \rightarrow Y$  paramétrant  $j(\mathcal{S})$ . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & T \times S & \longleftrightarrow & U & \xrightarrow{\varphi} & Y \\
 & \swarrow \text{pr}_1 & & \uparrow j' & & \uparrow j \\
 & & & U' & \xrightarrow{\psi} & X \\
 & \searrow \text{pr}_U & & & & 
 \end{array}$$

où l'on a posé  $U' = X \times_Y U$ , de sorte que  $j'$  est une immersion. Nous sommes bien entendu ramenés à deux cas :

1er cas :  $j$  est une immersion ouverte. Alors  $U'$  est un ouvert de  $U$  (donc de  $T \times S$ ) et le lecteur vérifiera sans peine que  $\mathcal{G}$  est paramétré par  $T$ ,  $U'$  et  $\psi$ .

2ème cas :  $j$  est une immersion fermée. Posons

$$T' = \{x \in T \mid \text{pr}_U^{-1}(x) \subset U'\}.$$

Alors  $T'$  est fermé dans  $T$  car  $T - T' = \text{pr}_U(U - U')$  et  $\text{pr}_U$  est ouverte. Par construction,  $V = U' \cap (T' \times S) = U \cap (T' \times S)$  est ouvert dans  $T' \times S$ . D'autre part si  $f: S \dashrightarrow X$  est dans  $\mathcal{G}$ , le point  $x_{j \circ f} \in T(k)$  qui "paramètre"  $j \circ f$  est dans  $T'$  puisque  $\varphi((\{x\} \times S) \cap U) = (j \circ f)(S) \subset X$ . On en conclut que  $\mathcal{G}$  est paramétré par  $T'$ ,  $V \subset T' \times S$  et  $\psi|_V: V \rightarrow X$ . ■

### 1.3. Remarques.

a) Sous les hypothèses de 1.2, si  $\mathfrak{F} \subset Y(F)$  est limité, il en est de même de  $\mathfrak{F} \cap j(X(F)) \subset Y(F)$  donc aussi, d'après 1.2, de l'ensemble des  $f \in X(F)$  telles que  $j \circ f \in \mathfrak{F}$ .

b) Grâce à 1.2 on peut ramener de nombreuses questions au cas où la "variété but"  $X$  est affine, en écrivant  $X$  comme réunion finie de sous-variétés affines (par exemple ouvertes)  $X_i$ , et en remarquant qu'alors  $X(F)$  est réunion des  $X_i(F)$ . On peut aussi représenter ensuite chaque  $X_i$  comme ouvert d'une variété projective, et se ramener ainsi au cas où  $X$  est projective, ou même à  $X = \mathbb{P}_k^n$ .

c) On peut bien entendu étendre la notion de famille limitée au cas où  $F = F_1 \times \dots \times F_n$  où les  $F_i$  sont des corps de fonctions ; un modèle de  $F$  est alors un  $k$ -schéma réduit de type fini dont l'anneau total des fonctions est  $F$ , et l'on doit simplement modifier la condition 1.1 (i) en exigeant que  $\text{pr}_1^{-1}(x_f) \cap U$  soit dense dans  $\text{pr}_1^{-1}(x_f)$ . On constate alors sans surprise que  $\mathcal{G} \subset X(F)$  est limité si et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , l'image de  $\mathcal{G}$  par l'application naturelle  $X(F) \rightarrow X(F_i)$  est limitée dans  $X(F_i)$ . Cette brillante "généralisation" peut toutefois rendre des services dans le cas d'un corps de fonctions  $F$

tel que  $\text{Spec } F$  ne soit pas géométriquement irréductible sur  $k$ .

## 2. Familles limitées et graphes.

2.0. On fixe dans ce § un modèle normal projectif  $S$  du corps de fonctions  $F$  sur  $k$ , ainsi qu'un  $k$ -schéma projectif intègre  $X$ .

Si  $P$  désigne un  $k$ -schéma, on rappelle qu'un ensemble  $\mathcal{Y}$  de sous-schémas fermés de  $P$  est dit limité s'il existe un  $k$ -schéma de type fini  $T$  et un sous-schéma fermé  $Z \subset T \times_k P$ , plat sur  $T$ , tel que pour tout  $Y \in \mathcal{Y}$  appartenant à  $\mathcal{Y}$  il existe  $x \in T(k)$  tel que  $Z_x = Y$ . Lorsque  $P = \mathbb{P}_k^N$ , cette condition implique que les degrés des  $Y \in \mathcal{Y}$  sont bornés ; la théorie des "coordonnées de Chow" [Sa] montre que la réciproque est vraie si les  $Y \in \mathcal{Y}$  sont équidimensionnels et géométriquement réduits sur  $k$  ([G], 2.4).

2.1. Soit  $f: S \dashrightarrow X$  une application rationnelle, définie sur un ouvert non vide  $V$  de  $S$ . Notons

$$(2.1.1) \quad \Gamma(f) \subset S \times X$$

l'adhérence schématique, dans  $S \times X$ , du graphe de  $f|_V$  (lequel est un fermé de  $V \times X$ ) ;  $\Gamma(f)$  sera appelé, par abus de langage, le graphe de  $f$ .

Désignons par  $\mathcal{H}$  le schéma de Hilbert [G] des sous-schémas fermés de  $S \times X$  (qui est un  $k$ -schéma localement de type fini) et soit

$$(2.1.2) \quad \mathcal{Y} \subset \mathcal{H} \times S \times X$$

le sous-schéma universel : c'est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{H} \times S \times X$ , plat sur  $\mathcal{H}$ . Pour tout  $f \in X(F)$ , notons

$$(2.1.3) \quad \gamma(f) \in \mathcal{H}(k)$$

le point correspondant au sous-schéma  $\Gamma(f) \subset S \times X$ , de sorte que  $\Gamma(f)$  s'identifie à  $\mathcal{Y}_{\gamma(f)}$ . Notons que par construction la projection  $\Gamma(f) \rightarrow S$  est birationnelle. Considérons le diagramme

$$(2.1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{p} & \mathcal{H} \times S \\ & \searrow q & \swarrow \psi \\ & & \mathcal{H} \end{array}$$



où  $p$ ,  $q$  et  $\psi$  sont les projections naturelles. Remarquons que  $p$  est propre et que  $q$  et  $\psi$  sont plats et de type fini. Notons

$$(2.1.5) \quad U \subset \mathbb{A}^1 \times S$$

le plus grand sous-schéma ouvert de  $\mathbb{A}^1 \times S$  au-dessus duquel  $p$  est un isomorphisme ; d'autre part, pour  $f \in X(F)$ , soit  $V(f)$  un ouvert de définition de  $f$  : il s'identifie à un ouvert, encore noté  $V(f)$ , de  $\{\gamma(f)\} \times S \subset \mathbb{A}^1 \times S$ , au-dessus duquel

$$p_{\gamma(f)} : \mathbb{A}^1_{\gamma(f)} \longrightarrow \{\gamma(f)\} \times S$$

est un isomorphisme. Je dis qu'alors

$$(2.1.6) \quad V(f) \subset U .$$

Pour cela il suffit d'établir (puisque  $p$  est propre) que si  $y \in V(f)$  et si  $x$  est le point de  $\mathbb{A}^1_y$  au-dessus de  $y$ , alors  $p$  est plat au point  $x$  : mais ceci résulte du critère de platitude par fibres EGA IV, 11.3.10, appliqué au faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_y}$ .

Si l'on note  $p_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$  l'isomorphisme induit par  $p$ , on obtient un  $k$ -morphisme

$$(2.1.7) \quad \varphi : U \longrightarrow X$$

par composition de  $p_U^{-1}$  avec la projection  $\mathbb{A}^1 \longrightarrow X$ . Il est alors immédiat (grâce à (2.1.6)) que  $\mathbb{A}^1$ ,  $U$  et  $\varphi$  "paramètrent" l'ensemble  $X(F)$  au sens de 1.1.2 (à ceci près que  $\mathbb{A}^1$  n'est pas en général de type fini mais seulement localement de type fini sur  $k$ ).

**2.2. Théorème.** Si  $\delta \subset X(F)$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\delta$  est limité (1.1)

(ii) l'ensemble des graphes  $\Gamma(f) \subset S \times X$  (2.1.1), pour  $f \in \delta$ , est limité.

Démonstration : l'implication (ii)  $\implies$  (i) résulte de la construction 2.1, puisque (ii) signifie que les points  $\gamma(f) \in \mathbb{A}^1(k)$  (2.1.3), pour  $f \in \delta$ , appartiennent à un sous-schéma de type fini de  $\mathbb{A}^1$ .

Montrons que (i) implique (ii) :  $\delta$  étant supposé limité, soient  $T$ ,  $U \subset T \times S$  et  $\varphi : U \longrightarrow X$  paramétrant  $\delta$  ; on supposera que  $pr_1 : U \longrightarrow T$  est surjective et que  $T$  est réduit.

Notons  $\Gamma \subset T \times S \times X$  l'adhérence schématique du graphe  $\Gamma_o$  de  $\varphi$  (lequel est isomorphe à  $U$ ). Il faut prendre garde que si  $x \in T(k)$ ,  $\Gamma_x$  peut ne pas être l'adhérence schématique de  $(\Gamma_o)_x$ . Soit  $T' \subset T$  le plus grand sous-schéma ouvert de  $T$  tel que  $\Gamma_{T'}$  soit plat sur  $T'$  : c'est un ouvert dense de  $T$  puisque  $T$  est réduit. Soit  $T''$  l'ensemble des  $t \in T'$  tels que  $\Gamma_t$  soit sans composantes immergées et que  $(\Gamma_o)_t$  soit un ouvert dense de  $\Gamma_t$ . Alors  $T''$  est ouvert dans  $T'$  ; en effet nos deux conditions équivalent aux deux suivantes :

(a)  $\Gamma_t$  est sans composantes immergées, et  $\dim \Gamma_t = \dim(\Gamma_o)_t$   
(=  $\dim S$ )

(b) si  $Y = \Gamma - \Gamma_o$ , alors  $\dim Y_t < \dim S$ .

La première condition est ouverte en vertu de EGA IV, 12.2.1, (iii) et (iv), et la seconde par le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV, 13.1.3). De plus  $T''$  contient les points maximaux de  $T'$  (et de  $T$ ) donc est dense dans  $T$ .

Si  $t \in T''$ , alors  $\Gamma_t$  est automatiquement l'adhérence schématique de  $(\Gamma_o)_t$  dans  $\{t\} \times S \times X$ . En particulier si  $t \in T''(k)$  et si  $f_t$  désigne l'application rationnelle de  $S$  dans  $X$  paramétrée par  $t$ , alors

$$(2.2.1) \quad \Gamma_t = \Gamma(f_t).$$

Il suffit dès lors de recommencer l'opération au-dessus du fermé  $T - T''$  de  $T$  ; comme  $T$  est noethérien on obtient finalement un nouveau schéma de paramètres  $T_1$  pour  $\mathcal{S}$ , somme disjointe finie de sous-schémas localement fermés de  $T$ , et un sous-schéma  $\Gamma_1 \subset T_1 \times S \times X$ , plat sur  $T_1$  et tel que pour tout  $t \in T_1(k)$ , on ait (avec les notations ci-dessus)  $(\Gamma_1)_t = \Gamma(f_t)$  : ceci prouve que les  $\Gamma(f)$  ( $f \in \mathcal{S}$ ) forment une famille limitée. ■

**2.3. Corollaire.** Soit  $k'$  une extension de  $k$  telle que  $k' \otimes_k F$  soit intègre, et soit  $F'$  le corps des fractions de  $k' \otimes_k F$ . Pour que  $\mathcal{S} \subset X(F)$  soit  $k$ -limité, il faut et il suffit que son image dans  $X(F')$  soit  $k'$ -limitée.

En effet la construction du graphe commute au changement de base  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ , et un ensemble  $\mathcal{S}$  de sous- $k$ -schémas de  $S \times X$  est limité si et seulement si l'ensemble de sous-schémas de  $(S \times X)_k$ , déduit de  $\mathcal{S}$  par extension des scalaires, est limité. ■

3. Hauteurs.

3.0. On fixe dans ce § un modèle normal  $S$  du corps de fonctions  $F$  et l'on pose  $r = \dim S$ . Soit  $X$  une  $k$ -variété (i.e. un  $k$ -schéma séparé de type fini) intègre et propre sur  $k$ , et soit  $L$  un faisceau inversible sur  $X$ . Si  $f: S \dashrightarrow X$  est une application rationnelle notons  $U_f \subset S$  son domaine de définition : c'est un gros ouvert (II, 3.1) de  $S$ , donc (comme dans III, §3) on a un homomorphisme naturel

$$(3.0.1) \quad \text{Pic}(U_f) \longrightarrow \text{CH}_{r-1}(S)$$

qui est même un isomorphisme si  $U$  est régulier. L'image par cet homomorphisme de la classe du faisceau inversible  $f^*L$  est alors un élément

$$(3.0.2) \quad \text{hg}_{S,L}(f) \in \text{CH}_{r-1}(S)$$

appelé hauteur géométrique de  $f \in X(F)$ , relativement au faisceau  $L$  et au modèle  $S$ .

3.0.3. Remarque. Si  $X$  est une variété abélienne sur  $k$  et  $L_F$  le faisceau inversible sur  $X_F$  déduit de  $L$ , on vérifie immédiatement que la hauteur de (3.0.2) coïncide (modulo torsion) avec celle de III, 3.2 : il suffit de remarquer que le modèle de Néron de  $X_F$  sur  $S$  est le schéma abélien constant  $X \times S$ , et que le prolongement cubiste de  $L_F$  est le faisceau  $\text{pr}_1^*L$  sur  $X \times S$ .

3.1. Propriétés de la hauteur.

$$(3.1.1) \quad \text{Additivité en } L : \text{hg}_{S, L_1 \otimes L_2}(f) = \text{hg}_{S, L_1}(f) + \text{hg}_{S, L_2}(f).$$

(3.1.2) Fonctorialité en  $X$  : si l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ S & \dashrightarrow & X \\ & \text{g} \circ f & \end{array}$$

avec  $Y$  propre, alors  $\text{hg}_{S,L}(g \circ f) = \text{hg}_{S, g^*L}(f)$ .

(3.1.3) Fonctorialité en  $S$  (cf. III, 3.3.4) : si  $\pi: S' \rightarrow S$  est un morphisme dominant et génériquement fini de  $k$ -variétés normales, alors :

(i) si  $\pi$  est propre, on a (pour tout  $f: S \dashrightarrow X$ ) :

$$(\deg \pi) \text{hg}_{S,L}(f) = \pi_*(\text{hg}_{S',L}(f \circ \pi)) \in \text{CH}_{r-1}(S)$$

(ii) si  $\pi$  est quasi-fini, on a

$$\text{hg}_{S',L}(f \circ \pi) = \pi^*(\text{hg}_{S,L}(f)) \in \text{CH}_{r-1}(S') .$$

En effet (ii) est trivial ; on en déduit (i) lorsque  $\pi$  est fini en appliquant  $\pi_*$  aux deux membres de (ii), puis dans le cas général en raisonnant comme dans III, 3.3.4.

3.2. Hauteur numérique : supposons maintenant  $S$  projective et soit  $L_0$  un faisceau inversible ample sur  $S$  . On a alors un homomorphisme

$$(3.2.1) \quad \text{deg}_{L_0} : \text{CH}_{r-1}(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

"intersection avec  $\ell_0^{r-1}$ ", où  $\ell_0$  est l'élément de l'anneau de Chow de  $S$  défini par  $L_0$  ; si  $L_0$  est très ample et définit un plongement  $i : S \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $\text{deg}_{L_0}(Z)$  est simplement le degré du cycle  $i(Z)$  de  $\mathbb{P}^n$  .

On pose alors

$$(3.2.2) \quad h_{L_0,L}(f) = \text{deg}_{L_0} \text{hg}_{S,L}(f) \in \mathbb{Z}$$

pour tout  $f \in X(F)$  et tout faisceau inversible  $L$  sur  $X$  ;  $h_{L_0,L}(f)$  est par définition la hauteur numérique de  $f$  (relativement à  $S$ ,  $L_0$  et  $L$ ).

3.2.3. Nous nous intéresserons en particulier au cas où  $L$  est ample sur  $X$  : dans ce cas il est immédiat que  $h_{L_0,L}(f) \gg 0$ , et que  $h_{L_0,L}(f) = 0$  si et seulement si  $f$  est "constante", i.e. se factorise par le  $k$ -schéma fini  $\text{Spec } H^0(S, \mathcal{O}_S)$ .

3.3. Décomposition en termes locaux : supposons  $X = \mathbb{P}_k^N$  et  $L = \mathcal{O}_X(1)$ , et soient  $f_0, \dots, f_N$  des coordonnées homogènes de  $f \in X(F)$ . Alors

$$(3.3.1) \quad \text{hg}_{S,L}(f) \text{ est la classe du diviseur } -\inf_{0 \leq i \leq N} \text{div}_S(f_i)$$

$$(3.3.2) \quad h_{L_0,L}(f) = -\text{deg}_{L_0} \left( \inf_i \text{div}_S(f_i) \right).$$

On démontre (3.3.1) en remarquant que, sur un gros ouvert convenable de  $S$ ,  $f^*L$  s'identifie à l'idéal fractionnaire engendré par les  $f_i$  ; or le diviseur  $-\inf_i \text{div}_S(f_i)$  est le diviseur de la section rationnelle de cet idéal définie par la fonction  $1 \in \mathcal{O}_S$  . Enfin (3.3.2) est conséquence immédiate de (3.3.1).

Bien entendu, (3.3.2) est la définition "habituelle" de la hauteur, et son interprétation comme degré (3.2.2) est bien connue ([L], chap. 3, §3).

#### 4. Le théorème de la hauteur bornée.

4.0. Soit  $S$  un modèle normal projectif du corps des fonctions  $F$ , muni d'un faisceau inversible très ample  $L_0$ , d'où un plongement

$$S \subset \mathbb{P}_k^d.$$

Soit  $f: S \dashrightarrow \mathbb{P}_k^N$  une application rationnelle : nous considérerons le graphe  $\Gamma(f) \subset S \times \mathbb{P}_k^N$  de  $f$  (2.1.1) comme un sous-schéma de  $\mathbb{P}_k^q$ , avec  $q = (N+1)(d+1) - 1$ , grâce au plongement de Segre  $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^q$ .

4.1. Théorème. Avec les notations ci-dessus, posons  $h(f) = h_{L_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}(f)$  et  $r = \dim S$ . Alors :

$$\deg_{\mathbb{P}^d} S + rh(f) \ll \deg_{\mathbb{P}^q} \Gamma(f) \ll B(h(f))$$

où  $B: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction ne dépendant que de  $r$  et  $\deg_{\mathbb{P}^d} S$ .

Démonstration : après une extension convenable (par exemple transcendente pure) du corps  $k$ , on peut supposer que celui-ci est infini.

4.1.1. Introduisons d'abord quelques notations. Nous désignerons respectivement par  $x$  et  $y$  les opérateurs (de degré  $-1$ )  $c_1(\text{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))$  et  $c_1(\text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$  dans le groupe  $\text{CH}(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N)$ . Si  $V \subset \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N$  est un sous-schéma fermé purement de dimension  $m$ , et si  $u$  est un opérateur de degré  $-m$  dans  $\text{CH}(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N)$ , on notera, par abus d'écriture,  $u(V)$  le degré de l'élément  $u([V])$  de  $\text{CH}_0(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N)$ .

4.1.2. Lemme. Dans la situation de 4.1, et avec les notations de 4.1.1, on a :

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbb{P}^d} S &= x^r(\Gamma(f)) \\ h(f) &= x^{r-1}y(\Gamma(f)) \\ \deg_{\mathbb{P}^q} \Gamma(f) &= (x+y)^r(\Gamma(f)). \end{aligned}$$

Démonstration : la première inégalité est immédiate puisque la projection  $\alpha : \Gamma(f) \rightarrow S$  est birationnelle. La troisième résulte du fait que  $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^q}(1)) = x+y$  comme opérateur sur  $\text{CH}(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N)$ , ceci par définition du plongement de Segre. Enfin la hauteur géométrique  $hg_{S, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}(f)$  n'est autre que l'élément  $\alpha_*(y([\Gamma(f)]))$  de  $\text{CH}_{r-1}(S)$  (considérer un gros ouvert  $U \subset S$  sur lequel  $f$  est un morphisme, et remarquer que  $\text{CH}_{r-1}(S) = \text{CH}_{r-1}(U)$ ). La seconde égalité en résulte. ■

4.1.3. Le lemme ci-dessus implique la première inégalité de 4.1, puisque,  $L_0$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$  étant engendrés par leurs sections, les termes du développement de  $(x+y)^r(\Gamma(f))$  sont tous positifs.

La seconde inégalité de 4.1 résulte du lemme suivant, que je dois à W. Fulton :

4.1.4. Lemme. Les entiers  $d, N$  et  $r$  étant fixés, il existe une application  $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout sous-schéma  $V$  de  $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N$ , purement de dimension  $r$ , tel que  $x^r(V) \neq 0$ , on ait

$$x^i y^j(V) \ll G(x^r(V), x^{r-1} y(V))$$

pour tout  $(i, j)$  tel que  $i+j=r$  (notation de 4.1.1).

Démonstration.

4.1.4.1. Supposons déjà bornés les  $x^{r-i} y^i(V)$  pour  $i=0, \dots, r-1$ . Soit  $\Lambda \subset \mathbb{P}^d$  un sous-espace linéaire "générique" de dimension  $d-r+s$  et posons  $W = V \cap (\Lambda \times \mathbb{P}^N)$ , de sorte que  $\dim W = s$ . Alors pour  $i$  et  $j \geq 0$ ,  $i+j=s$ , on a

$$x^i y^j(W) = x^{r-j} y^j(V)$$

ce qui montre (en remplaçant  $V$  par  $W$ ) qu'il suffit, pour établir le lemme, de borner  $y^r$  en termes de  $x^r, x^{r-1} y, \dots, xy^{r-1}$ .

4.1.4.2. Traitons maintenant le cas  $r \leq 2$ . Lorsque  $r \leq 1$ , le lemme est trivial. Lorsque  $r=2$ , le théorème de l'indice de Hodge (appliqué à une désingularisation de  $V_{\text{red}}$ ) implique que la forme quadratique

$$(u, v) \mapsto (ux+vy)^2(V)$$

sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est soit dégénérée, soit de type  $(+, -)$  (remarquer que  $x+y$  est ample) et par suite, si  $x^2(V) \neq 0$ , le discriminant du polynôme  $(Tx+y)^2(V) = T^2 x^2(V) + 2Txy(V) + y^2(V)$  est  $\geq 0$ , d'où

$$y^2(V) \ll xy(V)^2/x^2(V)$$

dès que  $x^2(V) > 0$ .

4.1.4.3. Pour  $r > 2$ , soit  $W$  une section linéaire générique de dimension 2 de  $V \subset \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^N \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^q$ . Alors  $[W] = (x+y)^{r-2}([V])$ , et  $x^i y^j(W) = [(x+y)^{r-2} x^i y^j](V)$  pour  $i+j=2$ . D'après le cas  $r=2$  ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} y^r(V) &\ll [(x+y)^{r-2} y^2](V) = y^2(W) \\ &\ll xy(W)^2/x^2(W) \\ &= (x+y)^{r-2} xy(V)^2 / (x+y)^{r-2} x^2(V) . \blacksquare \end{aligned}$$

Le théorème 4.1 est donc démontré.

4.1.5. Remarque. Lorsque  $F$  est une extension séparable de  $k$  (autrement dit lorsque  $S$  est géométriquement réduit), on montre en s'inspirant de [L], chapitre 3, §3, que l'on a en fait l'inégalité

$$(4.1.5.1) \quad \deg_{\mathbb{P}^q} \Gamma(f) \ll (h(f) + \deg S)^r ;$$

il y faut toutefois quelques précautions, l'auteur avouant ne pas bien comprendre la notion d'intersection utilisée dans loc. cit., lemme 3.5. Sans hypothèse de séparabilité, l'inégalité (4.1.5.1) résulterait d'une "inégalité de Bezout" du type de celle annoncée à la fin de [F-H].

Le théorème suivant rassemble les résultats de 2.2 et 4.1 :

4.2. Théorème de la hauteur bornée. Soient  $S$  un modèle normal projectif de  $F$  muni d'un faisceau ample  $L_0$ ,  $X$  une  $k$ -variété projective munie d'un faisceau ample  $L$ . Soit  $\delta$  une partie de  $X(F)$ , et considérons les propriétés suivantes :

- (i)  $\delta$  est limitée.
- (ii) Les graphes  $\Gamma(f)$ , pour  $f \in \delta$ , forment une famille limitée dans  $S \times X$ .
- (iii) Les  $\Gamma(f)$ , pour  $f \in \delta$ , sont de degré borné relativement au faisceau ample  $\text{pr}_1^* L_0 \otimes \text{pr}_2^* L$  sur  $S \times X$ .
- (iv) Les hauteurs  $h_{L_0, L}(f)$ , pour  $f \in \delta$ , sont bornées.

Alors on a les implications

$$(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv) .$$

De plus les conditions (i) à (iv) sont équivalentes si F est une extension séparable de k , ou si F est de degré de transcendance 1 sur k .

Démonstration : l'équivalence (i)  $\iff$  (ii) a déjà été démontrée (2.2), et (iii)  $\iff$  (iv) est une conséquence de 4.1 (on se ramène immédiatement au cas où  $L_0$  et  $L$  sont très amples, puis au cas où  $X = \mathbb{P}_k^N$ ). L'implication (ii)  $\implies$  (iii) est bien connue ainsi que sa réciproque dans le cas séparable (2.0). Lorsque  $F$  est de degré de transcendance 1, alors  $S$  est une courbe normale projective donc, pour  $f \in X(F)$ ,  $\Gamma(f)$  est une courbe isomorphe à  $S$  ; son polynôme de Hilbert est donc déterminé par son degré, et l'on applique [G], 3.2. ■



## CHAPITRE XI

Applications aux variétés abéliennes  
sur les corps de fonctions

Sommaire.

- 0. Introduction et notations.
- 1. Hauteurs modulaires.
- 2. Hauteur différentielle et hauteur stable.
- 3. Comparaison des différentes hauteurs.
- 4. Applications : critère d'isotrivialité, familles limitées.
- 5. Application aux variétés ordinaires.

0. Introduction et notations.

0.1. Etant donné un corps  $k$ , une  $k$ -variété normale intègre  $S$  de corps des fonctions  $F$ , et une variété abélienne polarisée  $(A_F, \xi_F)$  sur  $F$ , on définit dans ce chapitre différentes notions de hauteur pour  $(A_F, \xi_F)$  : la "hauteur modulaire", déduite du morphisme  $\text{Spec } F \rightarrow \mathcal{A}_{g,d}$  associé à  $(\mathcal{A}_F, \xi_F)$  ; la "hauteur différentielle" associée à l'algèbre de Lie relative d'un "modèle de Néron" de  $A_F$  sur un gros ouvert de  $S$  ; enfin la "hauteur stable" qui est une version semi-stable de la précédente. Chacune de ces hauteurs a comme toujours une version "géométrique", élément de  $\text{CH}_{r-1}(S) \otimes \mathbb{Q}$  (avec  $r = \dim S$ ) et, lorsque  $S$  est projective, une version "numérique". Ces hauteurs sont reliées par des inégalités rassemblées en 3.2 ; on montre en particulier au §3 comment la "formule clé" du chapitre VIII permet de comparer la hauteur modulaire et la hauteur stable.

On en déduit au §4 un "critère d'isotrivialité" : supposant  $S$  projective, pour que  $A_F$  devienne "constante" sur une extension finie de  $F$  (resp. sur une extension finie non ramifiée en codimension 1 sur  $S$ ) il faut et il suffit que sa hauteur stable (resp. sa hauteur différentielle) soit nulle. D'autre part on montre un théorème de "famille limitée" pour les  $(A_F, \xi_F)$  dont la hauteur stable (ou différentielle) est majorée par une constante fixée, ceci en supposant, malheureusement, que  $F$  est une extension séparable de  $k$ . La notion de "famille limitée" obtenue est d'ailleurs grossière (4.6) mais le résultat sera précisé au chapitre suivant.

Enfin, lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , on déduit du critère d'isotrivialité, selon une idée de M. Raynaud, que si  $A_F$  a réduction ordinaire en codimension 1 sur  $S$  projective, alors  $A_F$  est isotriviale ; de plus le "lieu ordinaire" sur le schéma de modules  $(\mathcal{A}_{g,d})_k$  est un ouvert quasi-affine.

0.2. Notations. Dans tout ce chapitre on fixe un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et des entiers  $g \gg 1$ ,  $d \gg 1$ ,  $N \gg 3$ . On suppose de plus que  $p \nmid N$  et que, en posant  $\bar{d} = 4^g d$  :

$$(0.2.1) \quad N^2 \gg 2g! \bar{d}, \text{ ou bien } N \text{ est divisible par } 8d.$$

Tous les schémas envisagés dans ce chapitre sont des  $k$ -schémas. Nous considérerons en particulier, pour tout  $n \gg 1$ , le  $k$ -schéma de modules grossier

$$(0.2.2) \quad \mathcal{A}_{g,d,n}$$

des variétés abéliennes munies d'une polarisation de degré  $d^2$  et d'une structure de niveau  $n$  ; c'est un  $k$ -schéma de type fini, qui est de plus un schéma de modules fin si  $n \gg 3$ . Si  $S$  est un  $k$ -schéma et si  $(A \xrightarrow{f} S, \xi, \nu) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(S)$  (notation de VII, 3.0) nous désignerons par

$$(0.2.3) \quad j_n(A, \xi, \nu) : S \longrightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}$$

le morphisme associé.

Nous ne considérerons que des structures de niveau  $n$  divisant  $N$ . Dans ce cas on a construit en VII, 3.4 une compactification

$$(0.2.4) \quad \mathcal{A}_{g,d,n} \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}$$

de  $\mathcal{A}_{g,d,n}$ , ainsi qu'une classe ample

$$(0.2.5) \quad \lambda_n \in \text{Pic}(\bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Pour  $(A \xrightarrow{f} S, \xi, \nu) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(S)$  nous noterons encore  $j_n$  le composé du morphisme  $j_n$  de (0.2.3) et de l'inclusion (0.2.4). On rappelle (VII, 3.4.6) qu'alors l'élément  $j_n^* \lambda_n \in \text{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$  est la classe du faisceau inversible  $(\det f_* L(\xi))^{-1}$  où  $L(\xi)$ , défini en VII, 3.1.1, est un faisceau inversible sur  $A$  vérifiant  $\varphi_{L(\xi)} = 4\xi : A \longrightarrow A^t$ .

Rappelons que  $\bar{\mathcal{A}}_{g,d,n}$  figure, par définition, dans un diagramme commutatif

$$(0.2.6) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\pi}_{g,d,N} & \longrightarrow & \tilde{\pi}_{g,d,N} \xrightarrow{t} \mathbb{G} \simeq (\mathbb{G}_{\bar{d}, N^{2g}})_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{g,d,n} & \longrightarrow & \bar{\pi}_{g,d,n} \end{array}$$

où  $\tilde{\pi}_{g,d,N}$  est le schéma de modules fin défini en VII, 3.3, les flèches verticales étant des morphismes de passage au quotient par l'action d'un groupe fini ; de plus  $\lambda_n$  est déduit par descente du faisceau  $t^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$  sur l'adhérence  $\tilde{\pi}_{g,d,N}$  de  $\tilde{\pi}_{g,d,N}$ . Tout ceci, dans le cas où  $N^2 > 2g! \bar{d}$ , résulte directement de VII, 3.4 avec  $S_0 = \text{Spec } k$  ; dans le cas où  $N$  est divisible par  $8d$ , on remarque que les constructions de loc. cit. sont encore valables en appliquant VII, 5.2 puisque l'hypothèse  $8d|N$  implique que  $\text{Ker}(2\varphi_{L(\xi)}) = \text{Ker}(8\xi)$  est annulé par  $N$ .

Enfin dans le cas particulier où  $n=1$ , nous noterons simplement

$$(0.2.7) \quad \pi_{g,d} = \pi_{g,d,1} ; \quad \bar{\pi}_{g,d} = \bar{\pi}_{g,d,1} ; \quad \underline{\text{Ab}}_{g,d} = \underline{\text{Ab}}_{g,d,1} ; \quad \lambda = \lambda_1$$

et, pour  $(A, \xi) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(S)$  on posera

$$(0.2.8) \quad j(A, \xi) = j_1(A, \xi) : S \longrightarrow \bar{\pi}_{g,d} .$$

### 1. Hauteurs modulaires.

1.0. Dans tout ce § on désigne par  $S$  une  $k$ -variété normale irréductible de dimension  $r$ , et par  $F$  son corps des fonctions. Si  $S$  est projective, nous supposons fixé un faisceau inversible ample  $L_0$  sur  $S$ . Si  $(A_F, \xi_F) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(F)$ , nous pourrions donc considérer le morphisme

$$j(A_F, \xi_F) : \text{Spec } F \longrightarrow \bar{\pi}_{g,d}$$

de (0.5) comme une application rationnelle du modèle  $S$  dans  $\bar{\pi}_{g,d}$ .

1.1. Définition. Soit  $(A_F, \xi_F) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(F)$ .

1) La hauteur géométrique modulaire de  $(A_F, \xi_F)$  (relativement au modèle  $S$  de  $F$ ) est l'élément

$$\text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$$

défini par

$$\text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) = \text{hg}_{S,\lambda}(j(A_F, \xi_F)) ,$$

hauteur géométrique (X, 3.0.2) de  $j(A_F, \xi_F) \in \overline{\mathcal{H}}_{g,d}(F)$  relativement à S et à  $\lambda \in \text{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,d})_{\mathbb{Q}}$ .

2) Supposons de plus S projective. La hauteur modulaire (numérique) de  $(A_F, \xi_F)$  relativement (à S et) au faisceau ample  $L_0$  sur S est le rationnel (cf. X, 3.2.2)

$$h_{\text{mod}_{L_0}}(A_F, \xi_F) = h_{L_0, \lambda}(j(A_F, \xi_F)) = \deg_{L_0} h_{\text{mod}_S}(A_F, \xi_F) \in \mathbb{Q}$$

qui est  $\gg 0$  d'après X, 3.2.3.

On prendra garde que les hauteurs ainsi définies dépendent de la compactification  $\overline{\mathcal{H}}_{g,d}$ , donc de l'entier N.

Bien entendu, la hauteur relative à  $\lambda \in \text{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,d})_{\mathbb{Q}}$  doit s'entendre ainsi : si  $m \in \mathbb{N}$  est tel que  $m\lambda$  soit la classe d'un faisceau inversible L, alors  $hg_{S, \lambda} = \frac{1}{m} hg_{S, L}$ .

1.2. Soit U un gros ouvert de S, soit  $(A_U \xrightarrow{f} U, \xi_U) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(U)$  et soit  $(A_F, \xi_F)$  l'objet induit sur  $\text{Spec } F$ . Alors  $j(A_F, \xi_F)$  se prolonge en le morphisme  $j(A_U, \xi_U) : U \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,d}$  et il résulte de VII, 3.4.6 et de la définition de la hauteur que  $h_{\text{mod}_S}(A_F, \xi_F)$  s'identifie, via l'isomorphisme naturel  $\text{CH}_{r-1}(S) \xrightarrow{\sim} \text{CH}_{r-1}(U)$ , à la classe dans  $\text{CH}_{r-1}(U)_{\mathbb{Q}}$  du faisceau inversible  $(\det f_* L(\xi_U))^{-1}$  sur U.

1.3. Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un morphisme dominant et génériquement fini de k-variétés normales, et soit  $F'$  le corps des fonctions de  $S'$ . Alors si  $(A_F, \xi_F) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(F)$  on a

(1.3.1) si  $\pi$  est propre :

$$h_{\text{mod}_S}(A_F, \xi_F) = \frac{1}{\deg \pi} \pi_* h_{\text{mod}_{S'}}(A_{F'}, \xi_{F'}) .$$

(1.3.2) Si  $\pi$  est quasi-fini :

$$h_{\text{mod}_S}(A_F, \xi_F) = \pi^* h_{\text{mod}_{S'}}(A_{F'}, \xi_{F'}) .$$

Ces deux formules résultent de X, 3.1.3.

1.4. Soit  $(A_F, \xi_F, \nu_F) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d,n}(F)$  (où n divise N). Il résulte aussitôt du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 j_n(A_F, \xi_F, \nu_F) & \xrightarrow{\quad} & \bar{h}_{g,d,n} \\
 \downarrow S & & \downarrow \alpha \\
 j(A_F, \xi_F) & \xrightarrow{\quad} & \bar{h}_{g,d}
 \end{array}$$

et du fait que  $\lambda_n = \alpha^* \lambda$ , que l'on a, compte tenu de X, 3.1.2 :

$$(1.4.1) \quad \text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) = \text{hg}_{S, \lambda_n}(j_n(A_F, \xi_F, \nu_F)) .$$

## 2. Hauteur différentielle et hauteur stable.

2.0. On garde  $S$ ,  $F$  et  $L_0$  comme dans 1.0. Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ . Il existe alors un gros ouvert  $U \subset S$  et un  $U$ -schéma en groupes  $A_U$  sur  $U$  prolongeant  $A_F$ , et qui est un "modèle de Néron en codimension 1" de  $A_F$ , au sens suivant : pour tout point  $x$  de codimension 1 de  $U$  (ou de  $S$ ),  $A_U \times_U \text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}$  est un modèle de Néron de  $A_F$  sur l'anneau de valuation discrète  $\mathcal{O}_{U,x}$ . Posons alors, comme dans VIII, 1.0.4 :

$$(2.0.1) \quad \bar{\omega}_{A_U/U} = \det e_{A_U}^* \Omega_{A_U/U}^1$$

où  $e_{A_U} : U \rightarrow A_U$  est la section unité de  $A_U$ . C'est un faisceau inversible sur le gros ouvert  $U$ , et il définit donc une classe dans  $\text{Pic } U$ , donc aussi dans  $\text{CH}_{r-1}(S)$ .

### 2.1. Définition.

1) Avec les notations ci-dessus, on appelle hauteur géométrique différentielle de la variété abélienne  $A_F$  (relativement à  $S$ ), et on note

$$\text{hgdif}_S(A_F) \in \text{CH}_{r-1}(S)$$

la classe dans  $\text{CH}_{r-1}(S)$  du module inversible  $\bar{\omega}_{A_U/U}$  sur le gros ouvert  $U \subset S$ .

2) Si  $S$  est projective on appelle hauteur différentielle de  $A_F$  (relativement à  $L_0$ ) l'entier

$$\text{hdif}_{L_0}(A_F) = \deg_{L_0} \text{hgdif}_S(A_F) \in \mathbb{Z} .$$

2.2. Notation. Si  $z_1, z_2 \in \text{CH}_{r-1}(S)$  nous noterons

$$z_1 \prec z_2$$

la relation "la classe  $z_2 - z_1$  contient un cycle effectif (i.e. à coefficients  $\gg 0$ )".

2.3. Proposition. Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  un morphisme dominant et génériquement fini,  $S'$  étant une k-variété normale de corps des fonctions  $F'$ . Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ . Alors :

(i) si  $\pi$  est propre, on a

$$\pi_* \text{ hgdif}_{S'}(A_{F'}) \prec (\text{deg } \pi) \text{ hgdif}_S(A_F) \quad \text{dans } \text{CH}_{r-1}(S)$$

(ii) si  $\pi$  est quasi-fini, on a

$$\text{ hgdif}_S(A_F) \prec \pi^* \text{ hgdif}_{S'}(A_{F'}) \quad \text{dans } \text{CH}_{r-1}(S').$$

De plus, dans chacun des deux cas, l'égalité a lieu dès que  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1 sur  $S$ , et aussi dès que  $\pi$  est étale au-dessus des points de codimension 1 de  $S$ .

Montrons d'abord (ii). En remplaçant  $S$  et  $S'$  par des gros ouverts convenables, on peut supposer que  $A_F$  (resp.  $A_{F'}$ ) se prolonge en un modèle de Néron (au sens de 2.0)  $A_S \rightarrow S$  (resp.  $A_{S'} \rightarrow S'$ ), et que de plus on a un morphisme de  $S'$ -schémas en groupes

$$(2.3.1) \quad A_S \times_S S' \rightarrow A_{S'}$$

se réduisant (aux points de codimension 1 de  $S'$ ) au morphisme déduit de la propriété universelle du modèle de Néron  $A_{S'}$ . On en déduit alors un morphisme de  $\mathcal{O}_{S'}$ -modules inversibles

$$(2.3.2) \quad \bar{\omega}_{A_{S'}/S'} \rightarrow \pi^* \bar{\omega}_{A_S/S}$$

qui est un isomorphisme au point générique de  $S'$ , d'où l'inégalité annoncée. L'égalité dans le cas semi-stable, ou lorsque  $\pi$  est étale en codimension 1, résulte du fait que (2.3.1) est alors une immersion ouverte au-dessus des points de codimension 1 de  $S'$  : (2.3.2) est donc un isomorphisme.

L'assertion (i) se déduit de (ii) comme d'habitude dans le cas fini en appliquant  $\pi_*$  aux deux membres de (ii) ; on est ainsi ramené au cas où  $\pi$  est birationnel, et il suffit de se restreindre à un gros ouvert de  $S$  au-dessus duquel  $\pi$  est un isomorphisme. ■

2.4.  $A_F$  étant toujours une variété abélienne sur  $F$ , on sait qu'il existe une variété normale  $S'$ , de corps de fonctions  $F'$ , et un morphisme fini surjectif  $\pi : S' \rightarrow S$  tels que  $A_{F'}$  ait réduction semi-stable en codimension 1 sur  $S'$ .

2.4.1. Lemme. Avec les notations ci-dessus, l'élément

$$x' = \text{hgdif}_{S'}(A_{F'})_{\mathbb{Q}} \in \text{CH}_{r-1}(S')_{\mathbb{Q}}$$

est image par  $\pi^*$  d'un (unique) élément  $x$  de  $\text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$ , vérifiant

$$(2.4.1.1) \quad x = \frac{1}{\text{deg } \pi} \pi_* x' \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$$

et indépendant du choix de  $S'$ .

Démonstration : si  $x' = \pi^* x$  alors  $x$  est nécessairement défini par (2.4.1.1). Vérifions d'abord que  $x$ , défini par (2.4.1.1), est indépendant de  $S'$ . Pour cela soient  $\pi_i : S'_i \rightarrow S$  ( $i=1,2$ ) deux morphismes finis surjectifs tels que, si  $F'_i$  désigne le corps des fonctions de  $S'_i$ ,  $A_{F'_i}$  ait réduction semi-stable sur  $S'_i$ . Désignons par  $S''$  une composante de la normalisée de  $(S'_1 \times_S S'_2)_{\text{red}}$ , et par  $F''$  son corps des fonctions, de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$(2.4.1.2) \quad \begin{array}{ccc} & S'' & \\ P_1 \swarrow & & \searrow P_2 \\ S'_1 & & S'_2 \\ \pi_1 \searrow & S & \swarrow \pi_2 \end{array}$$

où les morphismes sont finis surjectifs.

On a alors, en posant  $x'_i = \text{hgdif}_{S'_i}(A_{F'_i})$  et  $x'' = \text{hgdif}_{S''}(A_{F''})$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{deg } \pi_1} \pi_{1*}(x'_1) &= \frac{1}{\text{deg}(\pi_1 p_1)} \pi_{1*} p_{1*}(x'') \quad (\text{car } x'_i = \frac{1}{\text{deg } p_i} p_{i*}(x'') \text{ d'après} \\ &\quad 2.3) \\ &= \frac{1}{\text{deg}(\pi_2 p_2)} \pi_{2*} p_{2*}(x'') \\ &= \frac{1}{\text{deg } \pi_2} \pi_{2*}(x'_2) . \end{aligned}$$

Ceci établit l'indépendance par rapport à  $S'$ .

Il reste à vérifier que, définissant  $x$  par (2.4.1.1), on a

$$(2.4.1.3) \quad x' = \pi^*(x) \quad \text{dans } \text{CH}_{r-1}(S')_{\mathbb{Q}} .$$

Remarquons pour cela que le diagramme (2.4.1.2) donne naissance à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{CH}_{r-1}(S'')_{\mathbb{Q}} & \\
 P_1^* \nearrow & & \nwarrow P_2^* \\
 \text{CH}_{r-1}(S'_1)_{\mathbb{Q}} & & \text{CH}_{r-1}(S'_2)_{\mathbb{Q}} \\
 \pi_1^* \nwarrow & & \nearrow \pi_2^* \\
 & \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} &
 \end{array}$$

où toutes les flèches sont injectives ; en conséquence, avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned}
 & x'_1 \text{ provient de } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} \\
 \iff & x'' \text{ provient de } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} \quad (\text{car } x'' = p_i^* x'_i \text{ d'après 2.3 (ii)}) \\
 \iff & x'_2 \text{ provient de } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} .
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier (2.4.1.3) pour un choix particulier de  $S'$ . Or nous pouvons supposer  $S'$  galoisien sur  $S$  de groupe  $G$ , auquel cas  $x'$  est invariant par  $G$  puisque  $A_F$  provient d'une variété abélienne sur  $F$ , et l'on a donc :

$$(\deg \pi)x' = \sum_{g \in G} gx' = \pi^* \pi_*(x') = (\deg \pi) \cdot \pi^*(x) . \blacksquare$$

2.4.2. Définition. Dans la situation de 2.4.1, l'élément  $x = \frac{1}{\deg \pi} \pi_* x'$  est par définition la hauteur géométrique stable de  $A_F$  sur  $S$ , et se note

$$\text{hgs}_S(A_F) \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} .$$

Lorsque  $S$  est projective on appelle hauteur stable (numérique) de  $A_F$  relativement au faisceau ample  $L_O$ , le rationnel

$$\text{hs}_{L_O}(A_F) = \deg_{L_O} \text{hgs}_S(A_F) \in \mathbb{Q} .$$

La notion de hauteur stable permet de reformuler et de préciser 2.3 :

2.5. Proposition. Gardons les notations de 2.3, et notons

$$z_1 \not\sim_{\mathbb{Q}} z_2 \quad (z_1, z_2 \in \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}})$$



la relation "il existe  $m > 0$  tel que la classe  $m(z_2 - z_1)$  contienne un cycle effectif". Alors :

(i) on a  $\text{hgs}_S(A_F) \prec_{\mathbb{Q}} \text{hgdif}_S(A_F)$  dans  $\text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$

avec égalité dès que  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1 sur  $S$ .

(ii) Si  $S$  est projective, on a d'après (i)

$$\text{hs}_{L_0}(A_F) \prec \text{hdif}_{L_0}(A_F)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1 sur  $S$ .

(iii) Dans la situation de 2.3 (i), on a

$$\text{hgs}_S(A_F) = \frac{1}{\text{deg } \pi} \pi_* \text{hgs}_{S'}(A_{F'}) \quad \text{dans } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} .$$

(iv) Dans la situation de 2.3 (ii), on a

$$\text{hgs}_{S'}(A_{F'}) = \pi^* \text{hgs}_S(A_F) \quad \text{dans } \text{CH}_{r-1}(S')_{\mathbb{Q}} .$$

La seule chose à vérifier est le "seulement si" dans (ii) (nous laissons (iii) et (iv) au lecteur). Comme dans la démonstration de 2.3, on considère le morphisme

$$(2.3.2) \quad \bar{\omega}_{A'_{S'}/S'} \longrightarrow \pi^* \bar{\omega}_{A_S/S}$$

où  $A'_{S'}$  est un modèle semi-stable sur un  $S'$  convenable, fini sur un gros ouvert de  $S$ . Alors si l'égalité a lieu dans (ii), les deux membres de (2.3.2) sont des faisceaux inversibles de même degré relativement à  $\pi^* L_0$ ; comme (2.3.2) est non nul c'est donc un isomorphisme. Par suite  $A_S \times_S S' \rightarrow A'_{S'}$  est étale, donc  $A_S \times_S S'$  est semi-stable et il en est de même de  $A_S$ . ■

### 3. Comparaison des différentes hauteurs.

3.1. Théorème. Avec les hypothèses et notations de 1.0, soit

$(A_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}(F)$ . Alors on a dans  $\text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  l'inégalité (où  $\bar{d} = 4^g d$ )

$$\text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) \prec_{\mathbb{Q}} \frac{\bar{d}}{2} \text{hgs}_S(A_F) ,$$

le symbole  $\prec_{\mathbb{Q}}$  étant défini en 2.5. De plus l'inégalité ci-dessus est une égalité dans chacun des deux cas suivants :

(i)  $A_F$  a bonne réduction en codimension 1 sur S (i.e. se prolonge en un schéma abélien au-dessus d'un gros ouvert de S)

(ii) le noyau de l'isogénie  $4\xi_F : A_F \rightarrow A_F^t$  est annulé par N (condition qui implique que  $p \nmid 2d$ , et qui est vérifiée sous l'hypothèse  $8d \mid N$  de (0.2.1)).

Bien entendu, dans le cas projectif on en déduit la version "numérique" suivante :

3.1.1. Corollaire. Sous les hypothèses de 3.1, supposons de plus S projective. Alors on a

$$\text{hmod}_{L_O}(A_F, \xi_F) \ll \frac{d}{2} \text{hs}_{L_O}(A_F)$$

avec égalité dans chacun des cas (i) et (ii) de 3.1. ■

3.1.2. Démonstration de 3.1 : soit  $S'$  une  $k$ -variété normale de corps des fonctions  $F'$  et  $\pi : S' \rightarrow S$  un morphisme fini surjectif : vu le comportement de  $\text{hgmod}_S$  et  $\text{hgs}_S$  par le changement de base  $\pi$  (1.3, 2.5) il suffit de démontrer 3.1 pour la variété polarisée  $(A_{F'}, \xi_{F'})$  et le modèle  $S'$  de  $F'$ . En particulier, remplaçant  $S$  par un  $S'$  idoine, nous pouvons supposer qu'il existe

- 1) un gros ouvert  $V \subset S$ ,
- 2) un  $V$ -schéma en groupes semi-stable  $A_V \xrightarrow{f} V$ ,
- 3) un faisceau inversible cubiste (automatiquement totalement symétrique)  $L_V$  sur  $A_V$  prolongeant  $L(\xi_F)$  (VII, 3.1.1), tel que  $K(L_V)$  soit fini sur  $A_V$ ,
- 4) une  $N$ -rigidification restreinte  $(\nu_V, \sigma_V)$  (VII, 1.2) de  $(A_V, L_V)$ .

3.1.3. Grâce à 4) ci-dessus nous obtenons, par définition du schéma de modules  $\tilde{\mathcal{X}}_{g,d,N}$  (VII, 3.3.4), un diagramme commutatif (cf. (0.2.6))

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{j}_N} & \tilde{\mathcal{X}}_{g,d,N} \xrightarrow{t} \mathbb{G} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ V & & \\ \downarrow & & \\ S & \xrightarrow{j(A_F, \xi_F)} & \mathcal{X}_{g,d} \end{array}$$

où  $U$  désigne comme de coutume l'ouvert de  $V$  où  $A_V$  a bonne réduction. Le morphisme composé  $t \circ \tilde{j}_N : U \rightarrow \mathbb{G}$  n'est autre que le morphisme  $t_U = t(A_U, L_U, \nu_U, \sigma_U)$  de VII, 2.5.1. D'autre part  $\text{hgmod}_S(A_F, \xi_F)$  n'est autre que la hauteur géométrique de  $j(A_F, \xi_F)$  relativement à  $S$  et à

la classe ample  $\lambda$  sur  $\bar{\mathbb{P}}_{g,d}$  ; or  $q^*\lambda$  est la classe de  $t^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$  sur  $\bar{\mathbb{P}}_{g,d,N}$ , d'où (X, 3.1.2)

$$(3.1.3.1) \quad \text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) = \text{hg}_{S, \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)}(t_U) .$$

Lorsque  $A_F$  a bonne réduction en codimension 1, alors  $U$  est un gros ouvert et il résulte de la définition de la hauteur et de celle de  $t_U$  que dans ce cas

$$\begin{aligned} \text{hg}_{S, \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)}(t_U) &= \text{classe dans } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} \text{ de } t_U^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \\ &= \text{classe de } (\det f_* L_U)^{-1} \\ &= \frac{\bar{d}}{2} \times \text{classe de } \bar{\omega}_{A_U/U} \text{ (formule clé VIII, 1.3 (i))} \\ &= \frac{\bar{d}}{2} \text{ hgs}_S(A_F) \end{aligned}$$

puisque  $A_U$  est semi-stable et que  $L(\xi_F)$  est de degré  $\bar{d}^2$ .

Dans le cas général on sait seulement (VII, 6.2) que, quitte à restreindre  $V$ ,  $t_U$  se prolonge en  $t_V: V \rightarrow \mathbb{G}$  et que l'on a un homomorphisme

$$(3.1.3.2) \quad t_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow (\det f_* L_V)^{-1}$$

qui est un isomorphisme au-dessus de  $U$ . La classe dans  $\text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  de  $t_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$  est encore  $\text{hg}_{S, \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)}(t_U)$ , et celle de  $(\det f_* L_V)^{-1}$  coïncide avec  $\frac{\bar{d}}{2} \text{ hgs}_S(A_F)$  d'après la formule clé donc (3.1.3.2) implique l'inégalité de 3.1. Enfin lorsque  $\text{Ker}(4\xi_F)$  est annulé par  $N$ , le groupe  $K(L_V)$  est annulé par  $N$  donc (3.1.3.2) est un isomorphisme (VII, 6.2) d'où l'égalité dans ce cas. ■

Pour plus de commodité, nous pouvons rassembler les inégalités obtenues :

3.2. Théorème. Avec les hypothèses et notations de 1.0, soit

$(A_F, \xi_F) \in \underline{\text{Ab}}_{g,d}(F)$ . Alors

$$(i) \quad 0 \ll_{\mathbb{Q}} \text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) \ll_{\mathbb{Q}} \text{hgs}_S(A_F) \ll_{\mathbb{Q}} \text{hg dif}_S(A_F) \text{ dans } \text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}} .$$

(ii) Si  $S$  est projective on a

$$0 \ll \text{hmod}_{L_O}(A_F, \xi_F) \ll \text{hs}_{L_O}(A_F) \ll \text{hdif}_{L_O}(A_F) .$$

(iii) La seconde inégalité de (i) (resp. (ii)) est une égalité si  $A_F$  a bonne réduction en codimension 1, ou si  $\text{Ker}(4\xi_F)$  est annulé par  $N$ .

(iv) La dernière inégalité de (i) (resp. (ii)) est une égalité si (resp. si et seulement si)  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1.

(v) Dans le cas où  $S$  est projective, l'une des inégalités (ii) est une égalité si et seulement si l'inégalité (i) correspondante est une égalité.

Démonstration : la première inégalité de (i) est immédiate par définition de la hauteur projective. L'assertion (v) résulte du fait qu'un cycle effectif de degré 0 est nul. Le reste résulte de 2.5 et 3.1. ■

#### 4. Applications : critère d'isotrivialité, familles limitées.

On garde les hypothèses et notations de 1.0.

4.1. Définition. Soit  $(A_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}(F)$ . Nous dirons que  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants (par rapport à  $k$ ) si le morphisme  $j(A_F, \xi_F)$  de (0.2.8) peut se factoriser en

$$\text{Spec } F \longrightarrow \text{Spec } k' \longrightarrow \mathcal{A}_{g,d}$$

où  $k'$  est une extension finie de  $k$ .

4.2. Proposition. Pour que  $(A_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}(F)$  soit à modules constants, il faut et il suffit qu'il existe une extension finie  $k''$  de  $k$  et une extension finie  $F'$  de  $F$  contenant  $k''$ , telles que  $(A_{F'}, \xi_{F'})$  provienne d'une variété abélienne polarisée sur  $k''$ . De plus on peut alors supposer  $F'$  séparable sur  $F$ .

Démonstration : la condition est évidemment suffisante. Réciproquement, il suffit de choisir  $F'$  telle que  $A_{F'}$  possède une structure de niveau  $n \gg 3$  : si  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants, le morphisme  $j_n : \text{Spec } F' \longrightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}$  associé se factorise par un  $k$ -schéma fini  $\text{Spec } k''$ , d'où la conclusion puisque  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  est un schéma de modules fin. ■

4.3. Définition. Nous dirons que  $(A_F, \xi_F)$  est isotriviale sur  $S$  si elle est à modules constants et si de plus l'extension  $F'$  de 4.2 peut être choisie non ramifiée aux points de codimension 1 de  $S$ .

4.4. Proposition. Soit  $(A_F, \xi_F) \in \underline{Ab}_{g,d}(F)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $(A_F, \xi_F)$  est isotriviale sur  $S$  .

(ii)  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants sur  $S$  et  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1 sur  $S$  .

(iii)  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants et  $A_F$  a bonne réduction en codimension 1 sur  $S$  .

Démonstration : si  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants elle a bonne réduction potentielle en codimension 1, d'où l'équivalence de (ii) et (iii).

(iii)  $\implies$  (i) : il suffit de prendre comme "extension trivialisante"  $F'$  l'extension de  $F$  rendant rationnels les points d'ordre  $n \gg 3$  de  $A_F$  (avec  $p \nmid n$ ), comme dans la démonstration de 4.2 : cette extension est bien non ramifiée sous l'hypothèse (iii).

(i)  $\implies$  (iii) : supposons  $(A_F, \xi_F)$  isotriviale et soit  $F'$  comme dans 4.3. Alors  $A_{F'}$  a évidemment bonne réduction en codimension 1 sur le normalisé de  $S$  dans  $F'$ , lequel est étale en codimension 1 sur  $S$  d'où la conclusion puisque la formation de la composante neutre du modèle de Néron commute au changement de base étale. ■

4.5. Théorème. Supposons  $S$  projective et soit  $(A_F, \xi_F) \in \underline{Ab}_{g,d}(F)$ .

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants sur  $S$  .

(ii)  $\text{hgmod}_S(A_F, \xi_F) = 0$  .

(ii bis)  $\text{hmod}_{L_0}(A_F, \xi_F) = 0$  .

(iii)  $\text{hgs}_S(A_F) = 0$  .

(iii bis)  $\text{hs}_{L_0}(A_F) = 0$  .

b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(iv)  $(A_F, \xi_F)$  est isotriviale sur  $S$  .

(v)  $\text{hgdif}_S(A_F) = 0$  dans  $\text{CH}_{r-1}(S)_{\mathbb{Q}}$  .

(v bis)  $\text{hdif}_{L_0}(A_F) = 0$  .

Démonstration : les équivalences (ii)  $\iff$  (ii bis), (iii)  $\iff$  (iii bis), (v)  $\iff$  (v bis) résultent de 3.2 (v).

a) L'équivalence de (i) et (ii) résulte de X, 3.2.3, et (iii bis) implique (ii bis) en vertu de 3.2 (ii). Il reste à voir que (i) implique

(iii) : ceci résulte du comportement de la hauteur stable par changement de base (2.5) et de 4.2 ci-dessus.

b) Le fait que (iv) implique (v) résulte de la définition 4.3 et du comportement de la hauteur différentielle par changement de base étale en codimension 1 (2.3). Réciproquement si  $\text{hdif}_{L_0}(A_F) = 0$  alors  $\text{hs}_{L_0}(A_F) = 0$  (3.2 (ii)) donc  $(A_F, \xi_F)$  est à modules constants d'après a), et de plus on a  $\text{hs}_{L_0}(A_F) = \text{hdif}_{L_0}(A_F)$  donc (3.2 (iv))  $A_F$  a réduction semi-stable en codimension 1 et l'on conclut par 4.4. ■

4.6. Théorème. On suppose que S est projective, et de plus que S est géométriquement réduite (i.e. F séparable) sur k ou de dimension 1. Soit e un réel. Alors l'ensemble des applications rationnelles

$$j(X_F) : S \dashrightarrow \mathcal{H}_{g,d}$$

où  $X_F$  parcourt l'ensemble des  $(A_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}(F)$  vérifiant  $\text{hdif}_{L_0}(A_F) \ll e$  (resp.  $\text{hs}_{L_0}(A_F) \ll e$ ) est limité au sens de VII, 1.1.

Cela résulte en effet de 3.2 (ii) et du théorème de la hauteur bornée X, 4.2. ■

On a bien entendu une version "fine" du résultat ci-dessus :

4.7. Corollaire. Avec les hypothèses et notations de 4.6 soit de plus n un entier premier à p et  $\gg 3$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des  $(A_F, \xi_F, \nu_F) \in \text{Ab}_{g,d,n}(F)$  vérifiant  $\text{hdif}_{L_0}(A_F) \ll e$  est limité au sens suivant : il existe un k-schéma de type fini T, un ouvert  $U \subset T \times_k \text{Spec } F$  tel que  $\text{pr}_1(U) = T$ , et un élément  $\chi_U$  de  $\text{Ab}_{g,d,n}(U)$ , tels que pour tout  $X_F \in \mathcal{S}$  il existe  $x \in T(k)$  tel que  $X_F = (x \times \text{id}_{\text{Spec } F})^*(\chi_U) \in \text{Ab}_{g,d,n}(F)$ .

Ceci résulte immédiatement de 4.6 compte tenu de 1.4 et du fait que  $\mathcal{H}_{g,d,n}$  est un schéma de modules fin. Remarquons qu'ici on a  $\text{hdif}_{L_0}(A_F) = \text{hs}_{L_0}(A_F)$  puisque l'existence d'une structure de niveau  $n \gg 3$  implique la réduction semi-stable. ■

## 5. Application aux variétés ordinaires.

5.0. Sous les hypothèses de 1.0, on suppose de plus que le corps  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ . Si  $T$  est un  $k$ -schéma, on rappelle qu'un  $T$ -schéma en groupes semi-stable  $A$  est dit ordinaire si le noyau du frobenius relatif  $F_{A/T}$  est de type multiplicatif. Enfin on suppose que la variété  $S$  est projective.

5.1. Théorème (Raynaud). Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ . Si  $A_F$  a réduction ordinaire sur  $S$  (i.e. si son modèle de Néron en chaque point de codimension 1 est ordinaire) alors  $A_F$  est isotriviale sur  $F$ .

Démonstration : soit  $A_V$  un "modèle de Néron" de  $A_F$  sur un gros ouvert convenable  $V$  de  $S$ . Quitte à opérer un changement de base étale en codimension 1, on peut supposer que le noyau du frobenius relatif de  $A_V$  est isomorphe à  $(\mu_p)_V^g$ . A fortiori le faisceau  $\bar{\omega}_{A_V/V}$  est trivial d'où  $\text{hgdif}_S(A_F) = 0$  et l'on applique 4.5. ■

Pour les schémas abéliens on a la variante suivante :

5.2. Théorème. Pour tout  $n \gg 1$ , premier à  $p$ , soit  $\Omega \subset \mathcal{A}_{g,d,n}$  l'ouvert correspondant aux variétés ordinaires. Alors  $\Omega$  est quasi-affine.

Démonstration : comme le morphisme naturel  $\mathcal{A}_{g,d,n} \rightarrow \mathcal{A}_{g,d}$  est fini, l'assertion est indépendante de  $n$  et nous pouvons donc supposer que  $n \gg 3$ . On dispose alors du schéma abélien universel  $A_n \rightarrow \mathcal{A}_{g,d,n}$ . Le faisceau inversible  $\bar{\omega}_{A_n/\mathcal{A}_{g,d,n}}$  est ample sur  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  (IX, 3.1) et sa restriction à  $\Omega$  devient triviale après un changement de base fini  $\Omega' \rightarrow \Omega$  (voir la démonstration de 5.1). Par suite  $\mathcal{O}_{\Omega'}$  est ample sur  $\Omega'$ , donc  $\Omega'$  (et aussi  $\Omega$ ) est quasi-affine. ■

## CHAPITRE XII

Variétés abéliennes à lieu de mauvaise réduction fixé ;  
le théorème de Zarhin

Sommaire.

- 0. Introduction et notations.
- 1. Compléments sur le groupe fondamental modéré.
- 2. Variétés abéliennes à réduction modérée ; le théorème de Zarhin.

0. Introduction et notations.

0.1. Dans tout ce chapitre  $k$  désigne un corps de caractéristique  $p \gg 0$ ,  $S$  une  $k$ -variété normale irréductible projective de dimension  $r$ ,  $F$  son corps des fonctions, et  $D \subset S$  un fermé purement de codimension 1. On se donne de plus un gros ouvert  $V$  de  $S$  tel que  $V$  et  $V \cap D$  soient lisses sur  $k$  (en particulier l'extension  $F/k$  est séparable) et l'on pose  $U = V - D$ .

0.2. Ce chapitre vise à préciser le théorème de famille limitée XI, 4.6 lorsque l'on se restreint aux variétés abéliennes polarisées  $(A_F, \xi_F)$  sur  $F$ , à hauteur bornée par une constante donnée, et qui de plus ont bonne réduction en codimension 1 sur  $U$  et réduction modérée aux points maximaux de  $D$ . On obtient alors une propriété de "famille limitée après changement de base fixe" moyennant l'hypothèse que le groupe de Galois  $\text{Gal}(k_S/k)$  est topologiquement de type fini. Cette dernière hypothèse (vérifiée si  $k$  est fini ou séparablement clos) permet d'appliquer les résultats du §1.

Lorsque  $k$  est fini, on en déduit un théorème de Zarhin [Z1] qui implique (cf. [Z2]) la conjecture de Tate sur les homomorphismes de variétés abéliennes sur  $F$  ainsi que la semi-simplicité des représentations  $\ell$ -adiques attachées à ces variétés.

1. Compléments sur le groupe fondamental modéré.

1.1. Avec les notations de 0.1, notons  $\text{REV}^D(V)$  la catégorie des revêtements étales de  $U$ , modérément ramifiés le long de  $D$ , c'est-à-dire modérément ramifiés en chaque point maximal de  $D$ . On sait (SGA 1, XIII.2.1.3 ou [G-M], 2.4.2) que  $\text{REV}^D(V)$  est une catégorie galoisienne.



Une fois choisi un point géométrique  $\xi : \text{Spec } \Omega \longrightarrow U \subset V$ , il existe donc un groupe profini, noté

$$(1.1.1) \quad \pi_1^D(V, \xi)$$

et appelé groupe fondamental modéré de  $V$  relativement à  $D$ , tel que  $\text{REV}^D(V)$  soit équivalente (via le foncteur "fibre en  $\xi$ ") à la catégorie des ensembles finis munis d'une action de  $\pi_1^D(V, \xi)$ .

Notons que si  $V' \subset V$  est un gros ouvert de  $V$ , le théorème de pureté SGA 2, X.3.4 entraîne que le foncteur naturel

$$\text{REV}^D(V) \longrightarrow \text{REV}^D(V')$$

est une équivalence. Si  $\xi$  est un point géométrique de  $V'$  on a donc un isomorphisme

$$\pi_1^D(V', \xi) \longrightarrow \pi_1^D(V, \xi)$$

induit par l'inclusion  $V' \hookrightarrow V$ .

1.2. Soit  $U_1 \longrightarrow U$  un revêtement étale de  $U$ , modérément ramifié le long de  $D$ , et désignons par  $V_1 \longrightarrow V$  le normalisé de  $V$  dans l'anneau total des fractions de  $U_1$  (de sorte que  $V_1 \times_V U = U_1$  puisque  $U$  est régulier). Soit  $x$  un point de  $V$ , et soit  $a \in \mathcal{O}_{V,x}$  une équation locale de  $D$  en  $x$ . Le lemme d'Abhyankar (SGA 1, XIII.5.3 ou [G-M], 2.3.2) affirme alors qu'il existe un voisinage étale  $W$  de  $x$  dans  $V$  tel que  $V_1 \times_V W$  soit somme de schémas du type

$$(1.2.1) \quad \text{Spec } \mathcal{O}_W[T]/(T^n - a)$$

où  $\text{car}(k) \nmid n$  (remarque : nous sommes ici dans un cas particulier de loc. cit., celui où le diviseur  $D$  est régulier).

En particulier le schéma  $V_1$  est régulier. Par ailleurs soit  $Y \subset V$  un sous-schéma localement fermé lisse et transverse à  $D$ , i.e. tel que  $D \cap Y$  soit un diviseur lisse de  $Y$ . Alors  $V_1 \times_V Y$  est encore, localement sur  $Y$ , du type (1.2.1), donc  $U_1 \times_V Y$  est un revêtement étale de  $Y \cap U$ , modérément ramifié le long de  $Y \cap D$ . Ceci permet de définir un foncteur "restriction à  $Y$ "

$$(1.2.2) \quad \text{REV}^D(V) \longrightarrow \text{REV}^{D \cap Y}(Y)$$

d'où, pour tout point géométrique  $\xi$  de  $Y \cap U$ , un homomorphisme canonique

$$(1.2.3) \quad \pi_1^D(Y, \xi) \longrightarrow \pi_1^D(V, \xi) .$$

De plus, avec les notations ci-dessus, le schéma  $V_1 \times_V Y$  est encore régulier, donc coïncide avec le normalisé de  $Y$  dans  $U_1 \times_V Y$ .

1.3. Théorème. On suppose  $k$  séparablement clos. Alors le groupe profini  $\pi_1^D(V, \xi)$  est topologiquement de type fini (pour un point géométrique quelconque  $\xi$  de  $U$ ).

Démonstration : lorsque  $\dim S = 1$  ce théorème est démontré dans SGA 1, XIII.2.12. Le cas général se ramène à celui-là : soit en effet  $C \subset V$  une courbe propre et lisse, section de  $V$  par un sous-espace linéaire (pour un plongement fixé  $S \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$ ) et transverse à  $D$ . Il suffit de voir que si  $\xi$  désigne un point géométrique de  $C-D$ , l'homomorphisme naturel

$$(1.3.1) \quad \pi_1^{D \cap C}(C, \xi) \longrightarrow \pi_1^D(V, \xi)$$

de (1.2.3) est surjectif, ce qui équivaut à l'assertion :

(1.3.2) pour tout revêtement étale connexe  $U_1$  de  $U$ , modéré le long de  $D$ , le revêtement induit  $U_1 \times_V C$  de  $C-D$  est connexe.

Or soit  $S_1$  (resp.  $V_1$ ) le normalisé de  $S$  (resp.  $V$ ) dans  $U_1$  : alors  $S_1$  est irréductible donc par le "théorème de Bertini" SGA 1, X.2.10,  $S_1 \times_V C = V_1 \times_V C$  est connexe ; comme nous l'avons vu en 1.2 il est de plus régulier donc irréductible, et l'ouvert  $U_1 \times_V C$  de  $V_1 \times_V C$  est bien connexe. ■

1.4. Corollaire. Soit  $k_s$  une clôture séparable de  $k$ . On suppose vérifiée la condition

(GTF) le groupe de Galois  $\text{Gal}(k_s/k)$  est topologiquement de type fini.

Alors le groupe  $\pi_1^D(V)$  est topologiquement de type fini.

Démonstration : remplaçant  $k$  par l'extension finie  $H^0(S, \mathcal{O}_S) = H^0(V, \mathcal{O}_V)$ , on peut en effet supposer que  $S$  et  $V$  sont géométriquement connexes sur  $k$ . Notant  $S_s = S \times_k k_s$ , etc., fixons un point géométrique  $a_s : \text{Spec } \Omega \longrightarrow U_s$  et notons  $a$  (resp.  $b$ ) le point géométrique de  $U$  (resp.  $\text{Spec } k$ ) déduit de  $a_s$ . On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1^D(V_s, a_s) \longrightarrow \pi_1^D(V, a) \longrightarrow \pi_1(\text{Spec } k, b) \longrightarrow 0$$

analogue à SGA 1, IX.6.1. Ceci démontre le corollaire puisque  $\pi_1^{D_S}(V_S, a_S)$  est de type fini d'après 1.3 et que  $\pi_1(\text{Spec } k, b)$  l'est par hypothèse.  $\square$

1.5. Remarque. La condition (GTF) est vérifiée en particulier dans les cas suivants :

(i)  $k$  est séparablement clos.

(ii)  $k$  est fini.

(iii)  $k = C((T))$ , où  $C$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Dans les cas (ii) et (iii), en effet,  $\text{Gal}(k_S/k)$  est isomorphe à  $\hat{\mathbb{Z}}$ .

## 2. Variétés abéliennes à réduction modérée ; le théorème de Zarhin.

2.0. Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$  et soit  $x$  un point de codimension 1 de  $S$ . Nous dirons que  $A_F$  est à réduction modérée au point  $x$  si pour tout nombre premier  $\ell \neq p$  (ou simplement pour un tel  $\ell$ ) le module de Tate  $T_\ell(A_{\overline{F}})$  est modérément ramifié en  $x$ . Ceci équivaut à la propriété qu'il existe une extension finie galoisienne  $F'$  de  $F$ , modérément ramifiée en  $x$ , telle que  $A_{F'}$  soit à réduction semi-stable au-dessus de  $x$ .

Le résultat suivant est la raison d'être du §1 :

2.1. Théorème. Soient  $g$  et  $n$  deux entiers  $\gg 1$ , avec  $p \nmid n$ . Supposons que le corps  $k$  vérifie la condition (GTF) de 1.4. Il existe alors une extension finie galoisienne  $F_1$  de  $F$ , modérément ramifiée (en codimension 1) sur  $S$  et non ramifiée (idem) sur  $U$ , ayant la propriété suivante : pour toute variété abélienne  $A_F$  sur  $F$ , de dimension  $g$ , à réduction modérée (en codimension 1) sur  $S$  et à bonne réduction (idem) sur  $U$ , la variété abélienne  $A_{F_1}$  sur  $F_1$  admet une structure de niveau  $n$  (ce qui entraîne, si  $n \gg 3$ , que  $A_{F_1}$  a réduction semi-stable sur le normalisé  $S_1$  de  $S$  dans  $F_1$ ).

Démonstration : si  $A_F$  est comme dans l'énoncé, les structures de niveau  $n$  sur  $A_F$  sont "paramétrées" par le revêtement

$$\text{Isom}_F((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_F^{2g}, n, A_F)$$

de  $\text{Spec } F$ . Si  $\xi$  désigne un point géométrique de  $\text{Spec } F$ , les hypothèses faites sur  $A_F$  impliquent que ce revêtement se prolonge en un

objet de  $\text{REV}^D(V)$  (notation de 1.1) donc correspond à un homomorphisme

$$\nu_n(A_F) : \pi_1^D(V, \xi) \longrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) .$$

L'hypothèse (GTF) implique que  $\pi_1^D(V, \xi)$  est topologiquement de type fini (1.4) donc que l'ensemble

$$\text{Hom}(\pi_1^D(V, \xi), \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$$

est fini. L'intersection des noyaux des  $\nu_n(A_F)$ , pour  $A_F$  variable, est donc un sous-groupe d'indice fini, qui correspond à l'extension  $F_1$  annoncée. ■

2.2. Corollaire. Avec les hypothèses et notations de 2.1, on fixe un entier  $d \gg 1$ , un faisceau inversible ample  $L_0$  sur  $S$  et un réel  $e$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $(A_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}(F)$  telles que  $A_F$  ait bonne réduction sur  $U$  et réduction modérée sur  $S$ , et telles que

$$\text{hdif}_{L_0}(A_F) \ll e \quad (\text{resp. } \text{hs}_{L_0}(A_F) \ll e).$$

Alors il existe une extension finie galoisienne  $F_1$  de  $F$  telle que l'image de  $\mathcal{S}$  dans  $\text{Ab}_{g,d}(F_1)$  soit une famille limitée au sens de XI, 4.7.

Démonstration : il suffit de prendre pour  $F_1$  l'extension annoncée en 2.1, avec  $n \gg 3$  : le corollaire résulte alors de XI, 4.7. ■

2.2.1. Remarque. L'application naturelle

$$\alpha : \mathcal{S} \longrightarrow \text{Ab}_{g,d}(F_1)$$

n'est pas injective en général ; toutefois, si  $(A_F, \xi_F) \in \mathcal{S}$ , l'ensemble  $\alpha^{-1}\alpha(A_F, \xi_F)$  est en bijection avec  $H^1(\text{Gal}(F_1/F), \text{Aut}_{F_1}(A_{F_1}, \xi_{F_1}))$ , ensemble fini dont le cardinal peut être explicitement borné puisque ([M2], § 21, th. 5)  $\text{Aut}(A_{F_1}, \xi_{F_1})$  s'identifie, pour tout  $n \gg 3$  premier à  $p$ , à un sous-groupe de  $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

2.3. Corollaire. Avec les hypothèses et notations de 2.2, on suppose que  $k$  est fini (ce qui implique (GTF)). Alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  de 2.2 est fini.

En effet l'image de  $\mathcal{S}$  dans  $\text{Ab}_{g,d}(F_1)$  est alors finie et l'on conclut par la remarque 2.2.1. ■

Lorsque  $p \nmid d$ , le corollaire qui suit est dû à Zarhin [Z1] si  $p \neq 2$  et à S. Mori (non publié) si  $p = 2$ .

2.4. Corollaire. On suppose  $k$  fini. Soit  $A_F$  une variété abélienne sur  $F$ . Alors l'ensemble des  $(B_F, \xi_F) \in \text{Ab}_{g,d}^{(F)}$  telles qu'il existe une isogénie  $A_F \rightarrow B_F$  de degré premier à  $p$ , est fini.

Démonstration : on peut supposer, quitte à remplacer  $F$  par une extension finie galoisienne et à appliquer la remarque 2.2.1, que  $A_F$  est à réduction modérée (ou même semi-stable) sur  $S$ . Dans ces conditions les  $B_F$  auront encore réduction modérée avec le même lieu de mauvaise réduction que  $A_F$ . De plus une isogénie première à  $p$  de  $B_F$  sur  $A_F$  se prolonge en codimension 1 en une isogénie première à  $p$  (donc étale) des modèles de Néron, et par suite (pour  $L_0$  ample sur  $S$ )

$$\text{hdif}_{L_0}(B_F) = \text{hdif}_{L_0}(A_F) .$$

Il suffit dès lors d'appliquer 2.3. ■

2.4.1. Remarque. La restriction sur le degré d'isogénie est essentielle. Par exemple prenons  $S = \mathbb{P}_k^1$  : il existe sur  $S$  un schéma abélien  $A$  non isotrivial et isogène à un schéma abélien constant  $A_0$  ([Sz], VIII). Munissons-le d'une polarisation  $\xi$  (par exemple principale, cf. loc. cit.). Pour tout  $k$ -morphisme  $\varphi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ , le schéma abélien  $\varphi^*A$  est isogène à  $\varphi^*A_0 \simeq A_0$ , donc aussi à  $A$ , et la polarisation  $\varphi^*\xi$  est de même degré que  $\xi$ . Mais on a

$$\text{hs}_{\mathcal{O}_S(1)}(\varphi^*A_F) = (\deg \varphi) \text{hs}_{\mathcal{O}_S(1)}(A_F)$$

et  $\text{hs}_{\mathcal{O}(1)}(A_F) > 0$  puisque  $A$  n'est pas isotrivial. Par suite l'ensemble des classes d'isomorphisme des  $(\varphi^*A_F, \varphi^*\xi_F)$  lorsque  $\varphi$  parcourt  $\text{Hom}_k(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{P}_k^1)$ , est infini.

Enfin, Zarhin [Z2] déduit de 2.4 le résultat suivant :

2.5. Théorème. On suppose  $k$  fini. Soient  $A$  et  $B$  deux variétés abéliennes sur  $F$  et  $\ell$  un nombre premier  $\neq p$ . Désignons par  $T_\ell(A)$  et  $T_\ell(B)$  les modules de Tate  $\ell$ -adiques respectifs de  $A$  et  $B$ , considérés comme  $\mathbb{Z}_\ell$ -faisceaux étales sur  $\text{Spec } F$ .

(i) L'homomorphisme canonique

$$\text{Hom}_F(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell\text{-faisceaux}}(T_\ell(A), T_\ell(B))$$

est un isomorphisme.

(ii) Le  $\mathbb{Q}_\ell$ -faisceau  $T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$  est semi-simple. ■

2.6. En caractéristique nulle, et sous les hypothèses de 2.2, G. Faltings [F1] a montré qu'il existe une constante  $c$  telle que l'on ait  $h_{L_0}(A_F) \ll c$  pour toute  $(A_F, \xi_F) \in \underline{Ab}_{g,d}(F)$  telle que  $A_F$  ait bonne réduction sur  $U$ . La conclusion de 2.2 est donc valable sans restriction de hauteur, i.e. "en prenant  $e = +\infty$ ".

Bibliographie

- EGA A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ.- Eléments de Géométrie Algébrique. Springer et Pub. Math. I.H.E.S.
- SGA A. GROTHENDIECK et al. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie. Springer Lecture Notes et Masson-North Holland.
- [A] S.Ju. ARAKELOV.- Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. Math. USSR Izvestija 8 (1974) n° 6, 1167-1180.
- [B] L. BREEN.- Fonctions thêta et théorème du cube. Springer Lecture Notes 980.
- [D] P. DELIGNE.- Preuve des conjectures de Tate et Shafarevich. Séminaire Bourbaki, 1983/84, exposé 616.
- [D-G] M. DEMAZURE et P. GABRIEL.- Groupes algébriques, tome I. Masson-North Holland.
- [D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD.- The irreducibility of the space of curves of given genus. Pub. Math. I.H.E.S. n° 36.
- [F1] G. FALTINGS.- Arakelov's Theorem for Abelian Varieties. Invent. Math. 73 (1983), 337-348.
- [F2] G. FALTINGS.- Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent. Math. 73 (1983), 349-366.
- [F-H] W. FULTON et J. HANSEN.- A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings. Ann. of Math. 110 (1979), 159-166.
- [G] A. GROTHENDIECK.- Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de Hilbert, Sém. Bourbaki 1960/61, exposé 221.
- [G-M] A. GROTHENDIECK et J.-P. MURRE.- The Tame Fundamental Group of a Formal Neighbourhood of a Divisor with Normal Crossings on a Scheme. Springer Lecture Notes 208.
- [I] J. IGUSA.- Theta Functions. Springer Grundlehren n° 104.
- [K] D. KNUTSON.- Algebraic Spaces. Springer Lecture Notes 203.
- [L] S. LANG.- Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer.
- [M1] D. MUMFORD.- Bi-extensions of formal groups. Proceedings of the 1968 Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, Oxford University Press.
- [M2] D. MUMFORD.- Abelian Varieties. Oxford University Press.
- [M3] D. MUMFORD.- On the Equations Defining Abelian Varieties. Invent. Math. 1 (1966), 287-354 ; 3 (1967), 75-135 et 215-244.
- [M4] D. MUMFORD.- Geometric Invariant Theory. Springer Ergebnisse n° 34.

- [M5] D. MUMFORD.- Varieties Defined by Quadratic Equations, dans "Questions on Algebraic Varieties", CIME 1969.
- [M6] D. MUMFORD.- Lectures on Curves on an Algebraic Surface. Princeton University Press.
- [M7] D. MUMFORD.- Tata Lectures on Theta I. Progress in Mathematics, vol. 28 (Birkhäuser).
- [MB] L. MORET-BAILLY.- Variétés abéliennes polarisées sur les corps de fonctions. C. R. Acad. Sc. Paris, 296 (1983), 267-270.
- [M-T] B. MAZUR et J. TATE.- Canonical Height Pairings via Biextensions. Arithmetic and Geometry vol. I (dédié à I.R. Shafarevich), Progress in Mathematics n° 35 (Birkhäuser).
- [N] A. NÉRON.- Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. Ann. of Math. 82 (1965), 249-331.
- [R1] M. RAYNAUD.- Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. Springer Lecture Notes 119.
- [R2] M. RAYNAUD.- Variétés abéliennes et géométrie rigide. Actes du congrès international de Nice 1970, tome 1, p. 473-477.
- [R3] M. RAYNAUD.- Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$ . Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 241-280.
- [Sa] P. SAMUEL.- Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique. Springer Ergebnisse n° 4.
- [Se] T. SEKIGUCHI.- On projective normality of abelian varieties II. J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 709-727.
- [Sz] L. SZPIRO et al. Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. Astérisque vol. 86.
- [Z1] Yu.G. ZARKHIN.- Abelian varieties in characteristic  $p$ . Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 19 (1976), 240-244.
- [Z2] Ju.G. ZARHIN.- Endomorphisms of Abelian varieties over fields of finite characteristic. Math. USSR Izvestija 9 (1975) n° 2, 255-260.
- [Z3] Yu.G. ZARKHIN.- Finiteness theorem for isogenies of Abelian varieties over function fields of finite characteristic. Funct. Anal. and Appl. 8 (1974), 301-303.
- [Z4] Yu.G. ZARKHIN.- Endomorphisms of Abelian varieties and points of finite order in characteristic  $p$ . Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 21 (1977), 737-744.

L. Moret-Bailly  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématique, bât. 425  
 91405 ORSAY (France)



Index terminologique

admissible (changement de base)	VIII, 1.0
constellation	VII, 2.2
corps de fonctions	X, 1.0
cubiste (structure, torseur)	I, 2.4.5 et 6.3
donnée de type $(g,d)$	VIII, 1.2
graphe (d'une application rationnelle)	X, 2.1
gros ouvert	II, 3.1
groupe fondamental modéré	XII, 1.1
hauteur canonique	III, 3.4.1 et 4.4.1
hauteur géométrique canonique	III, 3.2 et 4.4.1
hauteur géométrique	X, 3.0
hauteur numérique	X, 3.2
hauteur [géométrique] différentielle	XI, 2.1
hauteur [géométrique] modulaire	XI, 1.1
hauteur [géométrique] stable	XI, 2.4.2
$\zeta$ -invariant	VI, 5.0
irréductible ( $\mathbb{Q}$ -module —)	V, 2.3
isotriviale (variété abélienne —)	XI, 4.3
limité (ensemble, famille —)	
- d'applications rationnelles	X, 1.1
- de sous-schémas	X, 2.0
- de schémas abéliens	XI, 4.7
modules constants	XI, 4.1
$G$ -module	V, 1.1
poids (d'un $\mathbb{Q}$ -module)	V, 2.1
pointé(e) de degré $n$	
application —	I, 1.1
morphisme —	I, 1.3
réduction modérée	XII, 2.0
$N$ -rigidification [restreinte]	VII, 1.2
semi-stable (schéma en groupes —)	II, 1.2.7
sous-groupe de niveau [lagrangien],	
sous-groupe lagrangien	V, 2.5.1
structure de niveau $N$	VII, 1.2
symétrique (torseur cubiste —)	II, 1.2.4
totalelement $\zeta$ -invariant	VI, 5.4
totalelement symétrique	VI, 2.3 ; VI, 3.2

Index des notations

$\underline{A}(X)$	V, 1.0
$\underline{A}(G)_+ ; \underline{A}(G)_-$	V, 1.3
$\underline{A}^{(i)}(Q)$	V, 2.1.2
$\mathcal{A}_{g,d}$	VII, 4.1
$\mathcal{A}_{g,d,N}$	VII, 3.2 ; VII, 3.4.2
$\tilde{\mathcal{A}}_{g,d,N}$	VII, 3.3.4
$\overline{\mathcal{A}}_{g,d,N} ; \overline{\mathcal{A}}_{g,d,N}$	VII, 3.4.4
$\underline{Ab}_{g,d,n}$	VII, 3.0.1
$AB_{g,d}$	VII, 4.3.1
$\tilde{Ab}_{g,d,N}$	VII, 3.3.1
$\underline{Abpic}^+_{g,d,N}$	VII, 2.15
$\underline{Abres}^+_{g,d,N}$	VII, 2.15.2
$\underline{Abriq}^+_{g,d,N}$	VII, 2.0.1
$BIEXT(A,B;G)$	I, 7.1
condition (C)	VI, 3.6.1
$C(X)$	VII, 2.3.2
$CH_1(S)$	III, 3.0
$CUB(A,G)$	I, 2.4.5
$\mathcal{D}_n(f)$	I, 1.1
$\mathcal{D}_n(L)$	I, 2.1
$\frac{L_\eta}{d}$	II, 1.1
$D_G$	V, 1.4.2
$e_A$ : section unité du Groupe A	
$e_{L,\sigma}$	I, 3.3.2
$\frac{L_\eta}{e_S}$	IV, 3.2.1
$E_N$	VII, 0.2

$EQ(\Sigma)$	VII, 2.9
$EXT(A, G)$	I, 7.1
$FC; FCC; FC^{ab}; FCC^{ab}$	VIII, 1.2
$\mathcal{Q}(L)$	I, 4.3 ; IV, 3.3.3
condition (GTF)	XII, 1.4
$h_{H, L}(x)$	III, 3.4.1 et 4.4.1 ; X, 3.2.2
$hg_{S, L}(x)$	III, 3.2 et 4.4.1 ; X, 3.0.2
$hdif_{L_O}(A_F) ; hg dif_S(A_F)$	XI, 2.1
$hmod_{L_O}(A_F, \xi_F) ; hgmod_S(A_F, \xi_F)$	XI, 1.1
$hs_{L_O}(A_F) ; hgs_S(A_F)$	XI, 2.4.2
$Hom_E^{(n)}(A, G)$	I, 1.3
$I_G$	V, 1.4
$K(L)$	I, 4.2 ; IV, 3.3.1
$K_S(L_\eta)$	IV, 3.1.2
$L(\xi)$	VII, 3.1.1
condition ( $Q_r$ )	VII, 2.9
$QC_S$	V, 1.0
$REP^1(\mathcal{Q})$	V, 2.2
$REV^D(V)$	XII, 1.1
$T_x$ : translation par $x$ (dans un groupe commutatif)	
$TORSRIG(A, G)$	I, 2.6
$X_{g, d}$	VIII, 3.2.1
$\Gamma(f)$	X, 2.1.1
$\delta(A, L)$	VIII, 1.0.5
$\frac{\delta}{g, d}$	VIII, 3.2.1
$\tilde{\lambda}_N ; \lambda_n$	VII, 3.4.5
$\pi_1^D(V, \xi)$	XII, 1.1.1
$\rho_{V, \varepsilon, x}^L$	III, 1.0.1

$\varphi_L$	I, 4.1 ; IV, 3.3.1
$\varphi_{L,\eta,S}$	IV, 3.1.1
$\bar{\omega}_{A/S}$	VIII, 1.0.4

Exposants, indices :

$A^t$ : dual du schéma abélien $A$	
$A^0$ : composante neutre du schéma en groupes lisse $A$	
$A_{\text{for}}$	IV, 2.0.1
${}_n A$ : noyau de la multiplication par $n$ dans $A$	
$X^f$	IV, 1.0.1
$H^{fn} ; H^\mu ; H^{ab}$	IV, 1.1 et 1.2
$H_{U/S}^f ; H_{U/S}^{fn} ; H_{U/S}^\mu ; H_{U/S}^{ab}$	IV, 1.3
$A^{\natural}$	IV, 2.2.1
$H_{U/S}^{\flat} ; H_{U/S}^{\natural} ; H_{U/S}^{\#}$	IV, 2.3
$M^G$ (invariants du $G$ -module $M$ )	V, 1.2
$M^{\text{triv}}$	V, 1.3
$M^{(i)}$	V, 2.1

Symboles divers :

$[n]_A$ : multiplication par $n$ dans $A$	
$\langle \sigma, x \rangle_{v, \varepsilon}$	III, 1.2.1
$\langle D, \alpha \rangle_v$	III, 1.3
$\leftarrow$	XI, 2.2
$\leftarrow_{\mathbb{Q}}$	XI, 2.5

N° d'impression 674

2ème trimestre 1984