



**HAL**  
open science

# Sur la réduction des modèles linéaires : analyse de données en automatique

Liliane Bel

► **To cite this version:**

Liliane Bel. Sur la réduction des modèles linéaires : analyse de données en automatique. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1985. Français. NNT : . tel-04158640

**HAL Id: tel-04158640**

**<https://theses.hal.science/tel-04158640v1>**

Submitted on 11 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

## THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3<sup>o</sup> CYCLESPECIALITE : STATISTIQUES

PAR

Liliane BEL

**SUJET :** *Sur la réduction des modèles linéaires : Analyse de données en automatique.*

soutenue le 10 Octobre 1985 devant la Commission d'examen

MM. D. DACUNHA-CASTELLE Président

G. OPPENHEIM

G. MICHAILESCO

J. DUPONT

A. RAULT



## REMERCIEMENTS

Je remercie Didier DACUNHA-CASTELLE de m'avoir accueillie dans son laboratoire pour réaliser cette thèse et d'avoir bien voulu accepter de présider le jury.

Je remercie Georges OPPENHEIM de m'avoir suivie tout au long de de travail,

je remercie Georges MICHAILESCO des conseils qu'il m'a apporté,

je remercie Jean DUPONT de s'être intéressé à cette étude et de m'avoir permis de l'appliquer à ARIANE,

je remercie André RAULT de l'intérêt qu'il a apporté à ce travail.

Je les remercie tous les quatre d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Roger ASTIER, Christian DUHAMEL, Yves MISITI, Jean-Michel POGGI et Luc ROBBIANO de leur amitié et du soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de ce travail.

Enfin j'adresse toute ma gratitude à Anne-Marie BAILLET et Nicole PARVAN pour avoir assuré la frappe de ce mémoire avec beaucoup de compétences.

## SUMMARY

Two state space model reduction methods are studied: aggregation method and the balanced state space representation method.

In the case of aggregation a new method of selecting eigenvalues is proposed, which is both geometrical and sequential. Problems of robustness of aggregation are evoked and resolved in some particular cases.

The balanced state space representation is approached by means of controllability and observability degrees. The notion of perturbability degree is introduced.

Then we study the application of those two methods to reduced order compensator design.

The two methods are finally applied to the system representing the launch booster Ariane flying.

KEY WORDS: aggregation, balanced state space representation,  
reduced order compensator.

## PLAN

-----

INTRODUCTION	1
I. REDUCTION DANS LA BASE D'ETAT	
I.1. Notations et définitions	5
I.2. Réduction par agrégation	9
I.2.1. Propriétés usuelles de l'agrégation	11
I.2.2. Liens entre agrégation et troncature	16
I.2.3. Sélection des valeurs propres d'un modèle agrégé par des critères énergétiques	20
a) Définitions	20
b) Sélection des valeurs propres	23
c) Indices de qualité	30
d) Exemple numérique	31
e) Calculs des contributions dans quelques cas particuliers	37
f) Remarque sur la dépendance entre sélection et entrée, robustesse de l'agrégation	38
I.2.4. Calcul de la matrice de sortie	43
a) Par troncature	44
b) Par optimisation	44
I.2.5. Conclusion	48
I.3. Troncature dans la base d'équilibre	49
I.3.1. Notations	50
I.3.2. Degrés de commandabilité et d'observabilité	51
a) Etude de la commandabilité	51
b) Etude de l'observabilité	54
c) Etude conjointe de l'observabilité et de la commandabilité	56
d) Etude de la perturbabilité	70
I.3.3. Application à la réduction de modèles	78
I.3.4. Conclusion	84
I.4. Conclusion	86
II. COMMANDE D'ORDRE REDUIT.	
II.1. Commande sur le modèle agrégé	90
I.1.1. Ecriture du système initial bouclé par une commande d'ordre réduit	91
II.1.2. Théorème de Siljak stochastique	93
I.1.3. Application au cas linéaire déterministe	98
II.1.4. Conditions suffisantes de stabilité	101
II.2. Commande d'ordre réduit utilisant la représentation équilibrée	104
II.3. Conclusion	109

III. EXEMPLE D'APPLICATION.	110
III.1. Classement énergétique des modes en vue de l'agrégation.....	112
III.2. Etude de la base d'équilibre .....	136
III.3. Comparaison de trajectoires .....	143
III.3.1. Sous système stable .....	143
a) Etude de l'entrée impulsion .....	143
b) Etude de l'entrée échelon .....	144
c) Etude des valeurs propres des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre .....	144
III.3.2. Système complet .....	146
a) Etude de l'entrée impulsion .....	146
b) Etude de l'entrée échelon .....	147
c) Etude des valeurs propres des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre .....	148
III.4. Conclusion .....	171
 CONCLUSION	 173
ANNEXE A	177
ANNEXE B	184
BIBLIOGRAPHIE.	194

## INTRODUCTION

Les moyens de plus en plus sophistiqués mis en oeuvre pour modéliser des systèmes complexes conduisent souvent à des représentations de très grandes dimensions.

Or les méthodes utilisées pour résoudre les problèmes posés par ces systèmes complexes nécessitent une simplification préalable afin d'y apporter une solution efficace.

Cette simplification passe par une réduction du système initial.

Les procédures de réduction sont constamment utilisées de façon spontanée par les ingénieurs qui sont confrontés à des problèmes de traitement numérique.

Il s'agit ici d'étudier la réduction de modèles d'une façon méthodique en s'attachant à déterminer les caractéristiques indispensables à un bon modèle réduit.

En particulier on attend d'un tel modèle qu'il reflète les principales propriétés du système initial, que ce soit d'un point de vue commandabilité, observabilité ou perturbabilité.

Il semble souhaitable aussi que le modèle réduit ait la même stabilité ou instabilité que le système initial.

Enfin on espère avoir un comportement entrée-sortie aussi fidèle que possible, pour une classe d'entrées assez large.

Les procédures de réduction font l'objet d'une littérature abondante depuis une vingtaine d'années. On peut les classer en deux groupes:



- les méthodes de type fréquentiel (Routh, Padé, ...) qui s'attachent essentiellement à décrire le comportement entrée-sortie,
- les méthodes de réduction dans la base d'état, qui cherchent à réduire la dimension de l'espace d'état.

Ce deuxième groupe de méthodes a l'avantage de s'adapter facilement aux systèmes multivariables. De plus la représentation d'état, contrairement à la fonction de transfert, décrit le comportement interne du système. Cela permet à ces méthodes de mieux contrôler les propriétés du modèle réduit.

Ce sont donc deux méthodes de réduction dans la base d'état que nous avons particulièrement étudié ici: l'agrégation et la troncature dans la base d'équilibre.

Nous traitons tout d'abord l'agrégation. L'agrégation introduite par Aoki [1] en 1967 est caractérisée par l'existence d'une relation linéaire entre l'état initial et l'état réduit. Cette relation linéaire permet de contrôler la dynamique du modèle réduit. L'agrégation permet de plus d'avoir un modèle réduit stabilisable ou commandable si le système initial l'est et admet des commandes d'ordre réduit stabilisantes.

Sa mise en oeuvre a suscité beaucoup de travaux, elle passe essentiellement par un choix de valeurs propres de la matrice dynamique. On expose les méthodes dites de types énergétiques introduites par Michaillesco [16]. Ces méthodes cherchent à obtenir une sortie du modèle agrégé d'énergie la plus proche possible de celle du système initial pour une entrée donnée.

Une nouvelle méthode réalisant un compromis avantageux des méthodes exposées est proposée. Cette méthode est largement inspirée de la méthode statistique de régression pas à pas. Il s'agit de minimiser un critère quadratique sur un certain nombre de composantes. Ce critère est minimisé séquentiellement ce qui donne à la méthode une grande souplesse tout en lui gardant une certaine optimalité.

Le problème de la robustesse de l'agrégation vis à vis d'une famille d'entrées appliquées au système est soulevé et résolu dans quelques cas particuliers. Pour cela on a utilisé des théorèmes classiques de convergence dans des espaces fonctionnels.

Nous traitons dans un deuxième temps la réduction de modèles par troncature dans la base d'équilibre.

La réduction par troncature dans la base d'équilibre est basée sur une étude factorielle de l'espace d'état.

Cette méthode introduite par Moore [17] en 1981 détermine les directions de l'espace d'état à la fois les plus observables et les plus commandables. Ce sont ces directions, qui sont supposées refléter le mieux le comportement interne du système, qui sont conservées dans le modèle réduit.

Cela permet d'introduire les notions de degré de commandabilité et d'observabilité d'une direction donnée de l'espace d'état.

Etendant ces notions aux systèmes stochastiques on définit le degré de perturbabilité d'une direction. Cette nouvelle notion permet de définir de nouveaux invariants du système qui servent à classer les directions de l'espace d'état.

La détermination de ces invariants passe par la décomposition simultanée de certaines matrices du système en valeurs singulières. Elle équivaut à fixer un nouveau produit scalaire sur l'espace d'état.

Sous certaines conditions les modèles réduits obtenus de cette façon ont les mêmes propriétés de stabilité, de commandabilité et d'observabilité que le système initial.

On étudie dans la deuxième partie l'utilisation d'un modèle réduit pour la synthèse d'une loi de commande d'ordre réduit. Nous traitons plus particulièrement le point de vue de la stabilité.

Dans le cas de l'agrégation, l'existence d'une relation linéaire entre l'état agrégé et l'état initial assure à une commande par retour d'état agrégé de stabiliser le système initial sous des conditions très faibles. Le problème de la commande par retour d'état agré-

gé et estimé, soulevé par Siret [23] est repris ici. On donne des conditions suffisantes sur les gains d'estimation et de commande pour assurer la stabilité du système initial rebouclé par cette commande d'ordre réduit.

Dans le cas de la réduction par troncature dans la base d'équilibre, l'absence de relation entre l'état initial et l'état réduit empêche l'obtention de résultats de stabilité simples, même lorsqu'il s'agit d'une commande par retour d'état réduit non estimé. On peut toutefois dégager des conditions suffisantes dans quelques cas particuliers.

Dans les deux cas les conditions suffisantes de stabilité sont obtenues en majorant les termes de couplage d'une matrice dont les deux blocs diagonaux sont stables. Cette majoration utilise des résultats d'inégalité sur les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive, solution d'une équation de Lyapounov.

Dans la troisième partie les deux méthodes de réduction présentées ont été appliquées au système représentant le lanceur Ariane IV-44L en vol.

Ce système est un système stochastique de par la présence de phénomènes aléatoires tels que le vent. Nous avons traité le système discrétisé à la fréquence de 10 Hz qui est la fréquence des mesures effectuées.

La comparaison des deux méthodes est menée en représentant les trajectoires des sorties obtenues par les différents modèles réduits.

Enfin une étude de la dynamique des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre montre une grande similitude entre les deux méthodes dans ce cas particulier.

## 1. REDUCTION DE SYSTEMES DANS LA BASE D'ETAT

---

### I.1. NOTATIONS ET DEFINITIONS

DEFINITION 1.1. On appelle système linéaire stochastique (S), la donnée de trois espaces vectoriels  $X, U, Y$ , de trois applications linéaires

$$\begin{cases} a : X \rightarrow X \\ b : U \rightarrow X \\ c : X \rightarrow Y \end{cases}$$

et de deux matrices de covariance  $R, Q$  dans une base initiale.

On note

$$\begin{aligned} n &= \dim X \\ r &= \dim U \\ q &= \dim Y \end{aligned}$$

$R$  est une matrice  $n \times n$ ;  $Q$  une matrice  $q \times q$ .

A chaque système (S) on associe deux applications  $s_c$  et  $s_d$ .

La première est :

$$s_c : U \times \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^+$$

$$(u(t), t, x_0) \rightarrow y(t)$$

telle que

$$(1.1) \quad \begin{cases} dx = ax(t) dt + bu(t) dt + dv \\ dy = cx(t) dx + d\omega \\ x_0 = x(0) \end{cases}$$

Les processus stochastiques  $(v(t), t \in \mathbb{R}^+)$  et  $(\omega(t), t \in \mathbb{R}^+)$  sont des processus de Wiener orthogonaux entre eux et de la conditions initiale  $x_0$ , de moyenne zéro et covariance  $Rdt$  et  $Qdt$  respectivement.

La seconde application est :

$$s_d : U \times \mathbb{N} \times X \rightarrow Y \times \mathbb{N}$$

$$(u(t), t, x_0) \rightarrow y(t)$$

telle que

$$(1.2) \quad \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + bu(t) + \varepsilon(t) \\ y(t) = ex(t) + \eta(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où  $(\varepsilon(t))_{t \in \mathbf{N}}$ ,  $(\eta(t))_{t \in \mathbf{N}}$  sont deux processus de bruit blanc orthogonaux entre eux et de la condition initiale  $x_0$  avec

$$(1.3) \quad \begin{cases} E(\varepsilon(t)) = E(\eta(t)) = 0 & t \in \mathbf{N} \\ E(\varepsilon(t) \varepsilon(t')^T) = R f(t-t') & t, t' \in \mathbf{N} \\ E(\eta(t) \eta(t')^T) = Q f(t-t') & t, t' \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Les résultats obtenus utilisent la forme discrète (1.2). Toute différence entre la forme discrète et la forme continue sera signalée.

On note  $A, B, C$  les matrices de  $a, b, c$ , dans les bases canoniques de  $X, Y$  et  $U$ .

PROPOSITION 1.1. Soit  $P$  une matrice de changement de base de  $X$ , et  $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$  la nouvelle base. Alors les matrices de  $a, b, c$  notées  $A_{(p)}$ ,  $B_{(p)}$ ,  $C_{(p)}$ , s'écrivent dans la nouvelle base :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A_{(p)} &= P^{-1} A P \\ B_{(p)} &= P^{-1} B \\ C_{(p)} &= C P \end{aligned}$$

La matrice  $R$  devient

$$(1.5) \quad R_{(p)} = P^{-1} R P^{-T}$$

On s'intéresse aux couples de systèmes  $(S)$  et  $(S')$

$$(S) = (X, U, Y, a, b, c, R, Q)$$

$$(S') = (X', U, Y, a', b', c', R', Q')$$

tels que l'on ait :

$$(1.6) \quad \begin{cases} X' \subset X & \dim X' = m < n \\ U' = U \\ Y' = Y \end{cases}$$

on a alors

$$s'_d : U \times \mathbb{N} \times X' \rightarrow Y \times \mathbb{N} \\ (u(t), t, x'_0) \rightarrow y(t)$$

telle que

$$(1.7) \quad \begin{cases} x(t+1) = a'x'(t) + b'u(t) + \varepsilon'(t) \\ y(t+1) = c'x'(t) + \eta'(t) \\ x'(0) = x_0 \end{cases}$$

Notations : Si  $X' \oplus X'' = X$ ,  $P_{X''}^{X'}$  est la projection sur  $X'$  parallèlement à  $X''$   
 $d_{X'}$  est la restriction de  $d$  à  $X'$   
 $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n$ .

DEFINITION 1.2. : Système réduit par troncature

a) Le système  $(S') = (X', U', Y', a', b', c', R', Q')$  est un système réduit par troncature d'état du système  $(S)$  si et seulement si  $(S)$  et  $(S')$  vérifient (1.6) et il existe un supplémentaire  $X''$  de  $X'$  dans  $X$  tel que

$$(1.8) \quad \begin{cases} a' = P_{X''}^{X'} a_{X'} \\ b' = P_{X'} b \\ R' = [I_m \ 0] R \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

b)  $(S')$  est un système réduit par troncature si on a de plus

$$(1.9) \quad \begin{cases} c' = c_{X'} \\ Q' = Q \end{cases}$$

DEFINITION 1.3. 3 Le système  $(S') = (X', U', Y', a', b', c', R', Q')$  est un système réduit par agrégation linéaire du système  $(S)$  si et seulement si  $(S)$  et  $(S')$  vérifient (1.6) et si il existe une application linéaire  $\ell : X \rightarrow X'$  surjective telle que pour tout  $(u(t))_{t \in \mathbb{N}}$

$$(1.10) \quad \ell x(t) = x'(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{N}$$

Ces deux définitions introduisent les deux méthodes de réduction de système dans la base d'état les plus répandues, nous allons étudier plus particulièrement la méthode d'agrégation et une méthode de troncature appelée réduction dans la base d'équilibre.

Remarque :

i) La troncature d'état et l'agrégation sont des propriétés ne concernant que  $(a, b, R)$ ,  $(a', b', R')$ ,  $X, X'$  et  $U$  et non l'équation d'observation c'est-à-dire  $(Y, c, c', Q, Q')$

ii) L'agrégation relie deux systèmes  $(S)$  et  $(S')$  par une relation linéaire entre les variables d'état  $(x(t))_{t \geq 0}$ ,  $(x'(t))_{t \geq 0}$  de ces systèmes. Cette relation linéaire est indépendante de  $t$  et des propriétés très fortes vont en découler.

iii) L'hypothèse de surjectivité de l'opérateur d'agrégation  $\ell$  est essentielle, on verra dans les propriétés de l'agrégation où elle intervient.

## I.2. REDUCTION PAR AGREGATION.

Nous allons dans cette première partie exposer les principales propriétés de l'agrégation et les différentes façons de la mettre en oeuvre.

L'*agrégation* est caractérisée par le fait qu'il existe une relation linéaire entre l'état du système initial et l'état du modèle réduit. Cette relation entraîne de nombreuses propriétés de structures sur les matrices dynamiques et des propriétés liées à la commandabilité et à la stabilisabilité du système.

On étudie ensuite les liens entre *troncature* et *agrégation* et on en déduit un paramétrage des modèles agrégés d'un système donné.

Le choix d'un bon modèle agrégé constitue la suite de l'étude. L'étape primordiale dans cet objectif est le choix des valeurs propres qui seront considérées comme déterminantes pour le modèle.

Pour cela nous avons retenu les méthodes basées sur des critères énergétiques.

Après avoir exposé trois méthodes nous leur donnons une illustration géométrique originale qui nous permet de les interpréter et de les comparer. Cette illustration constitue une présentation pédagogique de la réduction par agrégation.

Les deux premières méthodes établissent un classement des valeurs propres, elles sont donc assez souples, par contre elles ne sont pas optimales géométriquement.

La troisième méthode est basée sur la minimisation d'une distance et est donc optimale géométriquement par contre elle est très lourde en calculs et surtout elle n'est pas séquentielle ce qui lui donne une grande rigidité.

L'exposé de ces méthodes en suggère une quatrième inspirée d'une technique bien connue de l'analyse des données : *la régression pas à pas* [19] .



Cette méthode, de même que la régression pas à pas par rapport à la régression classique, ne donne pas toujours la meilleure réduction possible, mais elle a l'avantage d'être séquentielle donc peu coûteuse en calculs et d'être plus proche de la méthode optimale que les autres méthodes séquentielles existantes.

Cette nouvelle méthode sera appelée : *Agrégation Géométrique Séquentielle*.

Un reproche fréquemment émis sur l'agrégation est sa dépendance vis à vis du type d'entrée, ce qui en fait une méthode de réduction non intrinsèque au système.

Un début de réponse est apporté à ce reproche : on montre que l'agrégation reste la même dans un voisinage de l'entrée  $u_0 \in E$ ,  $E$  étant une famille d'entrées soumise à certaines conditions, d'où une propriété de robustesse.

L'agrégation d'un système est terminée lorsqu'on a choisi la matrice de sortie du modèle réduit, nous exposons les deux principales méthodes utilisées pour ce choix.

Le système étudié est un système bruité, les résultats obtenus sur des systèmes déterministes ont été systématiquement étendus au cas stochastique.

### I.2.1. Propriétés usuelles de l'agrégation.

Soit  $L$  la matrice de  $\ell$  dans les bases où sont exprimés  $x(t)$  et  $x'(t)$ .

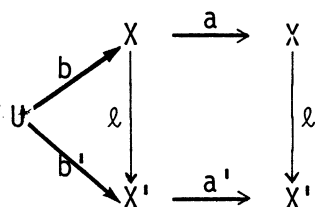
PROPRIETE 1. Le système  $(S')$  est agrégé par  $\ell$  du système  $(S)$  si et seulement si :

$$(1.11) \quad \begin{cases} a'\ell = \ell a \\ b' = \ell b \\ R' = L R L^T \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} x'(t) = \ell x(t) \forall (u(t))_{t \geq 0} &\iff x'(t+1) = \ell a x(t) + \ell b u(t) + \ell \varepsilon(t) = a' \ell x(t) + b' u(t) + \varepsilon'(t) \forall (u(t))_{t \geq 0} \\ &\iff (\ell a - a' \ell) x(t) + \ell \varepsilon(t) - \varepsilon'(t) = (b' - \ell b) u(t) \forall (u(t))_{t \geq 0} \\ &\iff \begin{cases} \ell a = a' \ell \\ \ell b = b' \\ R' = L R L^T \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

On a le diagramme commutatif suivant :



Les sous-espaces invariants de  $\ell$  jouent un rôle essentiel dans l'agrégation comme le montre la propriété 2.

PROPRIETE 2. [4] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système agrégé de  $S$  par l'opérateur linéaire  $\ell$  est que le noyau de  $\ell$  soit invariant par  $a$ .

Démonstration.

\* nécessaire : supposons qu'il existe un système  $(S')$  agrégé de  $(S)$  par  $\ell$ .

Soit  $x \in \text{Ker } \ell$ .

$$(1.11) \Rightarrow \ell ax = a' \ell x = 0 \text{ donc } ax \in \text{Ker } \ell.$$

\* suffisante : supposons que le noyau de  $\ell$  soit invariant par  $a$ .

On construit alors le modèle agrégé suivant :

soit  $(v_{m+1} \dots v_n)$  une base du noyau de  $\ell$ , et  $(v_1 \dots v_m)$  telle que  $(v_1 \dots v_n)$  soit une base de  $X$ . Soit  $T = (v_1 \dots v_n)$ . Soit  $L$  la matrice de  $\ell$  dans la base  $T$ .

$L = [K, 0]$   $L$  étant de rang  $m$ ,  $K$  est d'ordre plein.

Soient  $A$  et  $B$  les matrices de  $a$  et  $b$  dans la base  $T$ , partitionnées suivant  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  et  $(v_{m+1}, \dots, v_n)$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Soit } \begin{cases} A' = KA_1K^{-1}, \\ B' = KB_1 \\ R' = LRL^T \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} LA = [K \ 0]A = [KA_1 \ 0] = A'L \\ LB = [K \ 0]B = KB_1 = B' \\ R' = LRL^T. \end{cases}$$

Les applications linéaires associées à  $a'$  et  $b'$  vérifient bien (1.11) et le système  $(S') = (X', U', Y', a', b', c', R', Q')$  avec  $X' = \text{Im } \ell$  et  $c', Q'$  quelconques, est agrégé du système  $(S)$  par la relation  $\ell$ .  $\square$

La propriété suivante montre que les valeurs propres de  $a'$  sont une partie de celles de  $a$  et étudie les liens entre les sous-espaces propres.

PROPRIÉTÉ 3. [4] Soit  $(S')$  agrégé de  $(S)$  par l'application  $\ell$ .

Les valeurs propres de  $a'$  sont des valeurs propres de  $a$  (2 valeurs propres étant considérées comme distinctes si leurs sous-espaces propres asso-

ciés sont distincts), et si  $\lambda_i$  est une valeur propre commune à  $a$  et  $a'$ ,  $E_{\lambda_i}$  et  $E'_{\lambda_i}$  ses sous-espaces propres associés dans  $X$  et  $X'$  alors :

$$1 \leq m_i = \dim E'_{\lambda_i} \leq n_i = \dim E_{\lambda_i}.$$

Soit  $(u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n_i})$  le vecteur propre et les vecteurs propres généralisés associés à  $\lambda_i$  pour  $a$ . Alors  $(\ell(u_{i,n_i-m_i+1}), \ell(u_{i,n_i-m_i+2}), \dots, \ell(u_{i,n_i}))$  sont le vecteur propre et les vecteurs propres généralisés associés à  $\lambda_i$  pour  $a'$ .

### Démonstration.

a) On suppose que  $A =$  matrice de  $a$  est diagonalisable, alors tout sous espace invariant de  $a$  est engendré par des vecteurs propres de  $a$ .

Soit  $T = (v_1 \dots v_n)$  la base des vecteurs propres, telle que  $(v_{m+1} \dots v_n)$  engendrent le noyau de  $\ell$ .

$\forall 1 \leq i \leq m \quad \ell a(v_i) = \lambda_i(\ell v_i) = a'(\ell v_i)$  donc  $\lambda_i$  est valeur propre de  $a'$  associée au vecteur propre  $\ell(v_i)$ .  $a'$  possédant exactement  $m$  valeurs propres on a obtenu tout le spectre de  $a'$ .

b) Si  $A$  n'est pas diagonalisable.

Soit  $u_{i,1}$  le vecteur propre associé à  $\lambda_i$  de  $a$ ,  $u_{i,2} \dots u_{i,n_i}$  les vecteurs propres généralisés associés à  $\lambda_i$ .

Tout sous espace invariant de  $a$  est engendré par des vecteurs propres de  $a$  et les vecteurs propres généralisés associés à ces vecteurs propres jusqu'à l'ordre  $r_i \leq n_i$ .

Supposons que  $(u_{i,1} \dots u_{i,r_i}) \in \text{Ker } \ell$ ,  $u_{i,r_i+1} \notin \text{Ker } \ell$

$$\ell a(u_{i,r_i+1}) = \ell(u_{i,r_i} + \lambda_i u_{i,r_i+1}) = \lambda_i \ell u_{i,r_i+1} = a' \ell u_{i,r_i+1} \neq 0$$

donc  $\ell u_{i,r_i+1}$  est un vecteur propre de  $\ell$  associé à  $\lambda_i$  pour  $a'$ .

$\ell[(a - \lambda_i \text{Id})u_{i,r_i+j}] = \ell[u_{i,r_i+j-1}] = (a' - \lambda_i \text{Id})\ell(u_{i,r_i+j})$  pour  $2 \leq j \leq n_i - r_i = m_i$

donc  $[\ell(u_{i,r_i+j})]_{2 \leq j \leq m_i}$  est la famille des vecteurs propres généralisés

associée au vecteur propre  $\ell(u_{i,r_i+1})$ .  $\square$

Remarque : Si  $\ell$  n'était pas surjective, les valeurs propres de  $a'$  seraient constituées de  $m'$  valeurs propres de  $a$  ( $m'$  étant le rang de  $\ell$ ) et de  $m-m'$  valeurs propres quelconques.

On étudie maintenant les propriétés liées à la commandabilité et à la stabilisabilité des systèmes agrégés, et leur conséquence.

PROPRIETE 4. [16,6] Soit  $(S')$  un système agrégé du système  $(S)$  par la relation  $\ell$ . Si  $(S)$  est commandable alors  $(S')$  est commandable.

Démonstration. Soit  $A, B, L, A', B'$  les matrices de  $a, b, \ell, a', b'$  dans les bases où sont exprimés  $(x(t))_{t \geq 0}, (x'(t))_{t \geq 0}$ .

Si  $(S)$  est commandable on a

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

d'où  $\text{rang } L[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = m$  puisque  $L$  est de rang  $m$

$$\begin{aligned} m &= \text{rang } L[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \\ &= \text{rang } [LB, LAB, \dots, LA^{n-1}B] \\ &= \text{rang}[B', A'B', \dots, A'^{n-1}B'] . \end{aligned}$$

Donc le système  $(S')$  est aussi commandable.  $\square$

Remarque : Si  $\ell$  n'est pas surjective les valeurs propres de  $a'$  qui ne viennent pas de  $a$ , correspondent à des modes non commandables.

PROPRIETE 5. Soit  $(S')$  un système agrégé du système  $(S)$  par la relation  $\ell$ . Si  $(S)$  est stabilisable alors  $(S')$  est stabilisable.

Démonstration. Si  $(S)$  est stabilisable on a la propriété suivante :

S'il existe  $w \in \mathbb{R}^n$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\begin{cases} w^T B = 0 \\ w^T A = \lambda w^T \end{cases} \quad \text{alors } w=0 \text{ ou } |\lambda| < 1 .$$

Soit  $w' \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\begin{cases} w'^T B' = 0 \\ w'^T A' = \lambda w'^T \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} w'^T L B = 0 \\ w'^T A' L = \lambda w'^T L \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} (L^T w')^T B = 0 \\ (L^T w')^T A = \lambda (L^T w')^T \end{cases}$$

et  $L^T w' = 0$  ou  $|\lambda| < 1$ .

$L$  étant de rang  $m$ ,  $\text{Ker } L^T = \{0\}$  donc

$$L^T w' = 0 \implies w' = 0, \text{ et } (S') \text{ est stabilisable. } \square$$

La propriété suivante est une propriété essentielle de l'agrégation puisqu'elle permet d'implanter une commande calculée sur le système agrégé  $(S')$  sur le système  $(S)$  sans déstabiliser celui-ci.

PROPRIÉTÉ 6. [23] Soit  $u(t) = kx'(t)$  une commande par retour d'état stabilisant le système  $(S')$  agrégé du système  $(S)$  par la relation  $\ell$ . Si toutes les valeurs propres instables de  $a$  sont aussi valeurs propres de  $a'$  alors la commande  $u(t) = k\ell x(t)$  stabilise le système  $(S)$ .

Démonstration. Si  $u(t) = k\ell x(t)$  on a

$$x(t+1) = (a + bk\ell)x(t) + \varepsilon(t).$$

Soit  $v_i$ ,  $m+1 \leq i \leq n$  vecteur propre de  $a$ , appartenant au noyau de  $\ell$ .

$$(a + bk\ell)v_i = av_i = \lambda_i v_i.$$

Les  $n-m$  valeurs propres de  $a$  qui ne sont pas valeurs propres de  $a'$  sont valeurs propres de  $a + bk\ell$ , et elles sont stables par hypothèse.

Soit  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , vecteur propre de  $(a + bk\ell)$  et  $v_j$  n'appartient pas au noyau de  $\ell$

$$\begin{cases} (a + bk\ell) v_j = \lambda_j v_j \\ \ell(a + bk\ell) v_j = \lambda_j \ell v_j \\ (a' + b'k)\ell v_j = \lambda_j \ell v_j \end{cases}$$

donc  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  est valeur propre de  $(a' + b'k)$  donc stable puisque  $k$  stabilise  $(S')$ .

Les valeurs propres de  $(a + bk\ell)$  sont par conséquent toutes stables et  $u(t) = k\ell x(t)$  stabilise  $(S)$ .  $\square$

### I.2.2. Liens entre agrégation et troncature.

La proposition 13, principale dans cette partie, est originale.

PROPOSITION 1.2. L'agrégation est une réduction par troncature d'état dans une base particulière suivie d'un changement de coordonnées.

HYPOTHESES. Le système  $(S') = (X', U, Y, a', b', c', R', Q')$  est un système réduit par agrégation du système  $(S) = (X, Y, U, a, b, c, R, Q)$  par l'application surjective  $\ell_1$ .

Démonstration.

1ère étape. Lien entre les matrices de  $a$  et  $a'$  :

On se place dans  $X$  et  $X'$  dans des bases  $B$  et  $B'$  telles que si  $A$  et  $A'$  sont les matrices de  $a$  et  $a'$  dans ces bases,  $A$  et  $A'$  sont Jordan (éventuellement  $B' \neq B$ )

$$A = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_p & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_p & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_p & \\ & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right| \quad \text{alors } A' = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_{i_1} & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{i_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_{i_r} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_{i_r} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_{i_r} & \\ & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right|$$

Si  $B = (e_{\lambda_1}^1, \dots, e_{\lambda_1}^{n_1}, \dots, e_{\lambda_p}^1, \dots, e_{\lambda_p}^{n_p})$ , on peut réordonner la base  $B$  en une

base  $B_1 = (e_{\lambda_{i_1}}^{n_{i_1}-m_{i_1}}, \dots, e_{\lambda_{i_1}}^{n_{i_1}}, \dots, e_{\lambda_{i_r}}^{n_{i_r}}, \dots) = (B', B'')$  pour avoir :

$\tilde{A}$  est la matrice de  $a$  dans la base  $B_1$  et

$$\tilde{A} = \left| \begin{array}{c|c} -A' & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right| \quad \text{avec } B \text{ et } C \text{ éventuellement non nuls.}$$

Soit  $X'' = \text{Ker } \ell$ ,  $B''$  engendre  $X''$ .

Soit  $X'$  engendré par  $B'$ .

Alors  $A' = P_{X'}^{X''} A P_{X'}^{X''}$ ,  $P_{X'}^{X''}$  étant la matrice  $\left| \begin{array}{c} I_m \\ 0 \end{array} \right|$  dans la base  $B_1$

donc  $\left\{ \begin{array}{l} \ell_0 = P_{X'}^{X''} \\ a'_0 = \ell_0 a_{X'} \end{array} \right.$  vérifient  $\ell_0 a' = a'_0 \ell_0$

2ème étape. Construction d'un modèle agrégé.

On sait par hypothèse qu'il existe  $\ell_1$  surjective telle que

$$\begin{cases} \ell_1 a = a' \ell_1 \\ \ell_1 b = b' \\ L_1 R L_1^T = R' \end{cases}$$

$\ell_1$  étant surjective sa matrice dans une base convenablement choisie peut s'écrire

$$L_1 = \begin{bmatrix} M & \vdots & 0 \\ & \ddots & \\ & & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et } M \text{ carrée de rang plein.}$$

Soit  $m : X' \rightarrow X'$  l'application bijective à laquelle  $M$  est associée on a :

$$\ell_1 = m \ell_0.$$

Soit alors le modèle  $(S'') = (X', U, Y, f, g, c', \tilde{R}, Q')$  construit de la manière suivante :

i) On réduit (S) par troncature d'état suivant la décomposition  $X'$  et  $X''$  associée aux bases  $B'$  et  $B''$ . On obtient

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1) = (\ell_0 a_{X'}) \tilde{x}(t) + \ell_0 b u(t) + \varepsilon'(t) \\ x(t) = \ell_0 x(t) \\ \text{cov}(\varepsilon'(t)) = P_{X''}^{X'} R P_{X''}^{X'T} \end{cases}$$

ii) Faisons le changement  $m$  de coordonnées dans  $X'$ ,

$$z = m \tilde{x}$$

alors on a

$$z(t+1) = m \tilde{x}(t+1) = (m \ell_0 a_{X'}) m^{-1} z(t) + m \ell_0 u(t) + m \varepsilon'(t)$$

que l'on note

$$z(t+1) = f z(t) + g u(t) + \tilde{\varepsilon}(t) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} f = m \ell_0 a_{X'} m^{-1} \\ g = m \ell_0 b \\ \text{cov}(\tilde{\varepsilon}(t)) = \tilde{R} = M \text{cov}(\varepsilon'(t)) M^T \end{cases}$$



On vérifie que  $(S'')$  est en fait égal à  $(S')$  :

$$\begin{aligned}
 g &= m \ell_0 b = \ell_1 b = b' \\
 f \ell_1 &= m \ell_0 a_{X'} m^{-1} \ell_1 \\
 &= m \ell_0 a_{X'} \ell_0 \quad \text{or} \quad (\ell_0 a_{X'}) \ell_0 = a'_0 \ell_0 = \ell_0 a \\
 &= m \ell_0 a \\
 &= \ell_1 a \\
 \tilde{R} &= M P_{X''}^{X'} R P_{X''}^{X'} M^T = L_1 R L_1^T.
 \end{aligned}$$

Les relations  $\begin{cases} g = \ell_1 b \\ f \ell_1 = \ell_1 a \\ R = L_1 R L_1^T \end{cases}$  sont vérifiées. Donc le système que l'on

vient de construire est bien le système réduit par agrégation du système  $S$  par la relation d'agrégation  $\ell_1$  et  $(S'') = (S')$ .  $\square$

Commentaire. On vient de montrer que tout système agrégé s'obtient par une troncature d'état dans une base convenablement choisie suivie d'un changement de coordonnées dans le sous-espace conservé.

REMARQUE. Si  $m = \text{Id}_m$  alors le modèle agrégé est obtenu par troncature d'état dans une base Jordan.

PROPOSITION 1.3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réduction par troncature d'état soit une agrégation est que l'espace tronqué  $X''$  soit invariant par  $a$ .

Démonstration.

i) Condition suffisante. Soit le système  $(X', U, Y, a', b', c', R', Q') = (S')$  réduit par troncature suivant la décomposition  $X' \oplus X'' = X$  du système  $(S) = (X, U, Y, a, b, c, R, Q)$  tel que  $X''$  soit invariant par  $a$ .

Construisons le système agrégé de relation d'agrégation  $P_{X'}^{X''}$  d'état  $\tilde{x}$

$$\tilde{x}(t) = P_{X'}^{X''} x(t)$$

on a

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= P_{X'}^{X''} \tilde{x}(t+1) = P_{X'}^{X''} (ax(t) + bu(t) + \varepsilon(t)) \\ &= P_{X'}^{X''} [a(P_{X'}^{X''} x(t) + P_{X''}^{X'} x(t)) + bu(t) + \varepsilon(t)] \\ &= P_{X'}^{X''} a P_{X'}^{X''} x(t) + P_{X'}^{X''} (a P_{X''}^{X'} x(t)) + P_{X'}^{X''} bu(t) + P_{X'}^{X''} \varepsilon(t)\end{aligned}$$

$P_{X''}^{X'} x \in X''$ ,  $X''$  invariant par  $a$  donc  $a(P_{X''}^{X'} x) \in X''$  et  $P_{X'}^{X''} [a P_{X''}^{X'} x] = 0$

donc

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= P_{X'}^{X''} a_{X'} \tilde{x}(t) + P_{X'}^{X''} bu(t) + P_{X'}^{X''} \varepsilon(t) \\ &= a' \tilde{x}(t) + b' u(t) + \varepsilon'(t) \text{ par hypothèse sur } S'.\end{aligned}$$

Donc  $(S')$  est un système agrégé de relation d'agrégation  $P_{X'}^{X''}$ .

ii) Condition nécessaire. Le système  $(S')$  réduit par troncature suivant la décomposition  $X' \oplus X'' = X$  est aussi réduit par agrégation.

On sait donc que

$$\begin{cases} a' = P_{X'}^{X''} a_{X'} \\ b' = P_{X'}^{X''} b \quad \text{d'où } \ell = P_{X'}^{X''} \text{ puisque } b' = \ell b \\ R' = [I_m \ 0] R \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ x'(t) = \ell x(t) \quad \forall (t). \end{cases}$$

Comme  $\text{Ker } \ell = X''$  et que  $\text{Ker } \ell$  est invariant par  $a$  on a  $X''$  invariant par  $a$ . Le résultat est démontré.

Des propositions 12 et 13 précédentes on déduit le paramétrage simple suivant des système agrégés d'un système donné  $S$ .

Notons  $B$  une base dans laquelle la matrice de  $a$  est Jordan.

Soit  $V(a)$  l'ensemble des sous-espaces invariants de  $a$ .

A tout  $X''$  dont  $B''$  est une base, avec  $B'' \subset B$  on associe le sous-espace  $X'$  engendré par  $B'$  telle que  $B = B' \cup B''$ .

Soit  $M(X')$  l'ensemble des automorphismes de  $X'$ .

COROLLAIRE 1. L'ensemble  $I = \{(X'', m) \mid X'' \in V(a), m \in M(X')\}$  est en bijection avec l'ensemble des modèles agrégés de  $S$ .

Soit  $(X'', m)$  associé au système agrégé  $(S')$  alors l'opérateur d'agrégation est  $\ell = m P_{X'}^{X''}$ .

Remarquons que le paramétrage est construit à l'aide du sous-espace non conservé dans l'agrégation.

### I.2.3. Sélection des valeurs propres d'un modèle agrégé par des critères énergétique

D'après le corollaire 1.1 pour agréger un système (S) il suffit de se donner un sous-espace invariant par  $a$  de  $X$  donc une partie des valeurs propres de  $a$  comptées avec leur ordre de multiplicité et un automorphisme  $m$  de  $X'$ . Dans ce paragraphe, nous allons exposer quelques méthodes pour la sélection des valeurs propres conservées.

NOTATIONS. Soit  $z(t) \in \mathbb{R}^d$ .

On note

$$\|z(t)\|^2 = z^T(t)z(t)$$

$$\underline{z} = (z(t))_{t \geq 0}$$

$$\|\underline{z}\|_N^2 \left\{ \begin{array}{l} = \sum_{t=0}^N \|z(t)\|^2 \quad \text{si } t \in \mathbb{N} \\ = \int_0^N \|z(t)\|^2 dt \quad \text{si } t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

$$\|\underline{z}\|_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \|\underline{z}\|_N.$$

#### I.2.3.a). Définitions

DEFINITIONS 1.4. Soit le système (S) de variable d'état  $\underline{x}, x_p = (x_p(t))_{t \geq 0}$  est appelé régime permanent de  $\underline{x}$  si les relations suivantes sont vérifiées

$$(1.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E ( \|x(t) - x_p(t)\| ) = 0$$

$$(1.13) \quad E (x_p(t)) \text{ est soit une constante}$$

soit une fonction linéaire ou parabolique  
soit une fonction périodique

$$\underline{y}_p = (y_p(t))_{t \geq 0} \quad \text{ou}$$

$$(1.14) \quad y_p(t) = c x_p(t) + \eta(t) \quad t \in \mathbb{N}$$

est appelé régime permanent de  $\underline{y}$ .

DEFINITION 1.5. Soit le système (S) de variable d'état  $\underline{X}$  de régime permanent

$\underline{X}_p$ .  $\underline{X}_T = (x_T(t))_{t \geq 0}$  vérifiant

$$(1.15) \quad \underline{X}_T = \underline{X} - \underline{X}_p$$

est appelée régime transitoire de  $\underline{X}$ .

$\underline{Y}_T = (y_T(t))_{t \geq 0}$  vérifiant

$$(1.16) \quad \underline{Y}_T = \underline{Y} - \underline{Y}_p = c \underline{X}_T$$

est appelée régime transitoire de  $\underline{Y}$ .

On s'intéresse aux sorties du système (S) obtenues lorsque les entrées sont excitées séparément, c'est-à-dire qu'on applique successivement les entrées  $\bar{u}_k(t) = (0, \dots, u_k(t), \dots, 0)^T$   $k = 1, \dots, r$  au système. On note  $\underline{Y}(u_k)$  la sortie obtenue lorsqu'on applique l'entrée  $(\bar{u}_k(t))_{t \geq 0}$ .

DEFINITION 1.6.

i) L'énergie globale (resp. moyenne) du régime transitoire du système (S) sur  $[0, N]$  est définie par :

$$(1.17) \quad w_T^N(S) = \sum_{k=1}^r E \|\underline{Y}_T(u_k)\|_N^2 \quad (\text{resp. } \bar{w}_T^N(S) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r E \|\underline{Y}_T(u_k)\|_N^2).$$

ii) L'énergie globale (resp. moyenne) du régime permanent du système (S) sur  $[0, N]$  est définie par :

$$(1.18) \quad w_p^N(S) = \sum_{k=1}^r E \|\underline{Y}_p(u_k)\|_N^2 \quad (\text{resp. } \bar{w}_p^N(S) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r E \|\underline{Y}_p(u_k)\|_N^2).$$

Pour alléger les notations on supposera que  $r=1$ . Néanmoins les formules du tableau 1.1 sont écrites pour  $r \geq 1$ .

On cherche à mesurer l'influence de chaque coordonnée  $X_i$  de  $\underline{X}$  sur  $\underline{Y}$ . Pour cela, si  $C$  est la matrice de  $c$  on écrit  $C = (C_1 \dots C_n)$  où  $C_i$  est une matrice  $q \times 1$ , et on a :

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \sum_{i=1}^n C_i X_i + n \quad (n = n(t)_{t \geq 0}) \\ \underline{Y}_T &= \sum_{i=1}^n C_i X_{iT} \\ \underline{Y}_p &= \sum_{i=1}^n C_i X_{ip} + n \end{aligned}$$

et on a les définitions suivantes.

DEFINITION 1.7. Soit  $\underline{Y}_i = C_i X_i$ ,  $\underline{Y}_T^i = C_i X_{iT}$ ,  $\underline{Y}_p^i = C_i X_{ip}$ .  $\underline{Y}^i$  (resp.  $\underline{Y}_T^i$ ,  $\underline{Y}_p^i$ ) est appelé la contribution de  $\underline{X}_i$  (resp.  $\underline{X}_{ip}, \underline{X}_{iT}$ ) à  $\underline{Y}$  (resp.  $\underline{Y}_T, \underline{Y}_p$ ).

On a donc  $\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}^i + \eta$ ,  $\underline{Y}_T = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_T^i$ ,  $\underline{Y}_p = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_p^i + \eta$ .

Soit  $\alpha \in \{P, T\}$  notons

$$(1.19) \quad \langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^j \rangle_N = E \left[ \sum_{t=1}^N y_\alpha^i(t)^T y_\alpha^j(t) \right]$$

on obtient

$$(1.20) \quad W_T^N(S) = \sum_{ij=1}^n \langle \underline{Y}_T^i, \underline{Y}_T^j \rangle_N$$

on a de même

$$(1.21) \quad W_p^N(S) = \sum_{ij=1}^n \langle \underline{Y}_p^i, \underline{Y}_p^j \rangle_N + NQ$$

en notant  $\langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^j \rangle_{\bar{N}} = \frac{1}{\bar{N}} \langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^j \rangle_N$ , on obtient

$$(1.22) \quad \begin{cases} W_T^{\bar{N}} = \sum_{ij=1}^n \langle \underline{Y}_T^i, \underline{Y}_T^j \rangle_{\bar{N}} \\ W_p^{\bar{N}} = \sum_{ij=1}^n \langle \underline{Y}_p^i, \underline{Y}_p^j \rangle_{\bar{N}} + Q. \end{cases}$$

DEFINITION 1.8. Soit  $G_{ij}(\alpha, \beta) = \langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^j \rangle_\beta$  où  $\alpha \in \{P, T\}$ ,  $\beta \in \{N, \bar{N}\}$ ,  $N \in \mathbb{R}^+$

-  $G_{ij}(\alpha, \beta)$  est appelé la contribution jointe de  $\underline{X}_{i\alpha}$  et  $\underline{X}_{j\alpha}$  à l'énergie  $W_\alpha^\beta(S)$ .

-  $G_{ij}(\alpha, \beta)$  est appelé la contribution propre de  $\underline{X}_{i\alpha}$  à l'énergie  $W_\alpha^\beta(S)$ .

-  $G_i(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( G_{ij}(\alpha, \beta) + G_{ji}(\alpha, \beta) \right) = \frac{1}{2} \left[ \langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^i \rangle_\beta + \langle \underline{Y}_\alpha^i, \underline{Y}_\alpha^i \rangle \right]$   
est appelé la contribution globale de  $\underline{X}_i$  à  $W_\alpha^\beta$ .

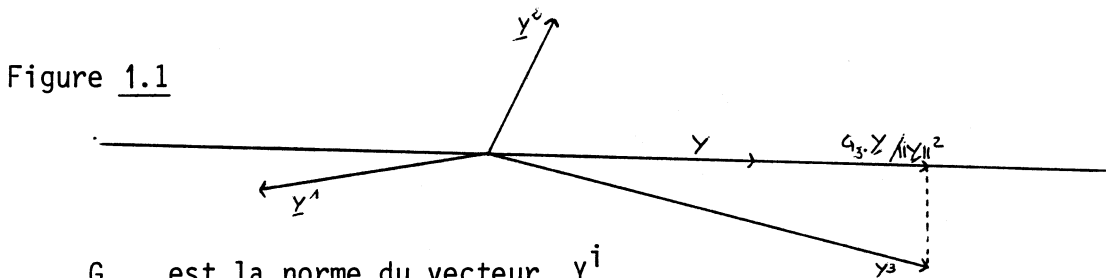
Des notations complètes étant maintenant posées nous les simplifions et dans la suite nous omettrons les indices  $\alpha$  et  $\beta$ . D'autre part le bruit  $\eta$  n'ayant rien à voir avec les diverses contributions à l'énergie on supposera

qu'il est nul et on a

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i, \quad W(S) = \sum_{ij=1}^n G_{ij}.$$

Interprétation géométrique.

Regardons  $\underline{Y}$  comme un vecteur



$G_{ii}$  est la norme du vecteur  $\underline{Y}^i$ .

$G_{ij}$  est le produit scalaire des vecteurs  $(\underline{Y}^i, \underline{Y}^j)$ ; s'ils sont normés c'est le cosinus de leur angle.

$G_i$  est proportionnel à l'abscisse du projeté orthogonal de  $\underline{Y}^i$  sur la direction  $\underline{Y}$ .

### I.2.3.b). Sélection des valeurs propres.

Si le système est instable on conservera les valeurs propres instables avec leur ordre de multiplicité dans le modèle agrégé. En effet, d'après la propriété 6 du §I.21, si ces valeurs propres sont stabilisées par une commande par retour d'état sur le modèle agrégé elles seront stabilisées par la même commande sur le système initial.

On divise donc le système en deux sous-systèmes, l'un conservant les modes instables l'autre conservant les modes stables, et c'est ce dernier que l'on agrège.

Pour cela, suivant les données du problème on choisit les paramètres  $(\alpha, \beta)$  (permanent ou transitoire, énergie globale ou moyenne, choix de l'intervalle d'étude), et on écrit le système dans une base où la matrice de  $a$  est Jordan. La matrice de covariance  $Q$  n'intervenant pas dans la sélection des valeurs propres on la suppose nulle et on écrit

$$W = \sum_{ij=1}^n G_{ij}.$$

Les méthodes de sélection suivantes sont basées sur des critères énergétiques présentés plus haut.

1er cas. On suppose que  $a$  admet une matrice diagonale.

i) Méthode (1) [16,6]. On classe les  $G_{ij}$  par valeurs décroissantes. On retient les  $m$  valeurs propres correspondant aux  $m$  plus grandes contributions propres. Si  $m$  n'est pas fixé à l'avance on cherche un "trou" dans la suite de contributions. Pour éviter de retenir deux modes qui se compenseraient on teste le signe de  $G_{ij} + G_{ji}$ . S'il est négatif avec  $\lambda_i$  proche de  $\lambda_j$  et  $G_{ij}$  proche de  $G_{ji}$  on élimine les valeurs propres du classement. S'il est positif on les garde.

Interprétation géométrique.

On garde les coordonnées  $X_i$  telles que leur contribution à  $Y$ ,  $Y^i$  aient les plus grandes normes. Si  $Y^i$  et  $Y^j$  sont de normes comparables, mais avec un cosinus négatif on considère que leur résultante est négligeable et on les élimine du classement.

Cette interprétation suggère plusieurs remarques :

\*) Le sous-système conservé risque d'avoir une énergie beaucoup plus forte que le système initial puisque seules les coordonnées fournissant une énergie élevée sont conservées.

\*\*). Deux vecteurs  $(Y_i, Y_j)$  de normes comparables de cosinus négatif mais proche de 0 seront éliminés alors que leur résultante peut contribuer beaucoup à  $Y$ .

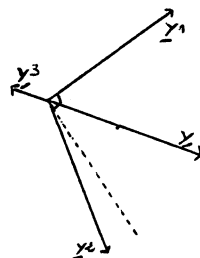


Figure 1.2.

dans ce cas de figure  $Y^3$  sera retenu et non  $Y^1$ , ni  $Y^2$ .

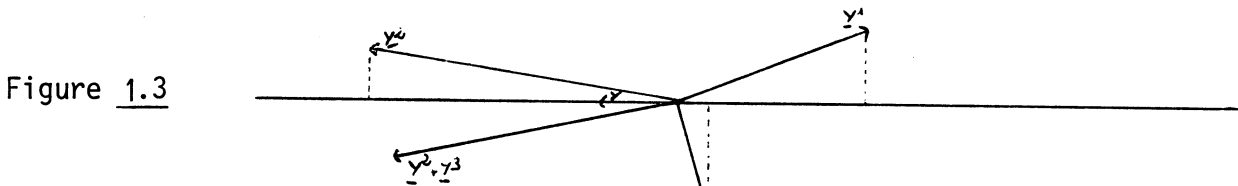
ii) Méthode (2) [24]. On classe les  $G_i$  par valeurs décroissantes. On retient les  $m$  valeurs propres correspondant aux  $m$  plus grandes contributions

globales. De même que précédemment si  $m$  n'est pas fixe on cherche un trou dans le classement.

Interprétation géométrique.

On garde les coordonnées  $X_i$  telles que leur contribution à  $\underline{Y}$ ,  $\underline{Y}^i$  aient les projetés orthogonaux sur  $\underline{Y}$  de plus grandes abscisses.

Ainsi que pour la méthode (1) on risque de conserver un sous-système beaucoup plus énergétique que le système initial par exemple dans le cas de figure suivant :



Si on garde deux coordonnées ce seront les coordonnées  $X_2$  et  $X_3$  qui seront conservées et  $\|\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3\|$  est bien plus grande que  $\|\underline{Y}\|$ .

iii) Méthode (3) [4]. On suppose  $m$  déterminé à l'avance.

Soit  $\mathcal{I}_m = \{I/I \subset \{1,2,\dots,n\}, \text{card}(I) = m\}$ .

On cherche à minimiser sur  $I \in \mathcal{I}_m$

$$(1.23) \quad R_m = \left\| \underline{Y} - \sum_{\substack{i \in I \\ \text{card } I = m}} \underline{Y}^i \right\|^2 \quad \text{où } \|\cdot\| \text{ est la norme associée au produit scalaire défini en (1.19).}$$

Or  $R_m = \sum_{i,j=m+1}^n G_{ij}$ . On cherche les  $(n-m)$  valeurs propres qui minimisent  $\sum_{i,j=m+1}^n G_{ij}$  qui seront les valeurs propres non conservées. Pour cela on peut disposer les  $G_{ij}$  dans un tableau  $n \times n$  et on choisit les  $(n-m)$  lignes et les colonnes correspondantes telles que la somme des éléments situés à leur intersection soit minimale, et on élimine les coordonnées correspondantes.

Interprétation géométrique.

On cherche le vecteur  $\underline{Y}_m = \sum_{\substack{i \in I \\ I \in \mathcal{I}_m}} \underline{Y}^i$  qui soit le plus proche de  $\underline{Y}$ .

Cette méthode fournit l'optimum parmi les sous-espaces de dimension  $m$  mais elle a l'inconvénient de ne pas être séquentielle. Si le choix a priori de  $m$  s'avérait mauvais il faut recommencer tous les calculs avec un autre  $m$ ,



de plus pour  $m$  fixé il faut calculer  $R_m$  pour tous les  $(n-m)$ uplet de valeurs propres.

Cette méthode suggère une quatrième méthode qui serait un moyen terme entre l'approche géométrique satisfaisante tout en étant séquentielle.

Méthode (4) : Agrégation géométrique séquentielle (AGS).

1. On cherche  $\underline{Y}^i$  qui minimise  $J_1 = \|\underline{Y} - \underline{Y}^i\|$ , c'est-à-dire qu'on cherche  $I$ ,  $\text{card } I = n-1$  tel que  $J_1 = \sum_{i,j \in I} G_{ij}$  soit minimum.

Soit  $i_1 \notin I$ ,  $\lambda_{i_1}$  est la première valeur propre conservée.

2.  $\underline{Y}^{i_1}$  étant fixé on cherche  $\underline{Y}^i$   $i \in I_1$  qui minimise  $J_2 = \|\underline{Y} - \underline{Y}^1 - \underline{Y}^i\|$  c'est-à-dire qu'on cherche  $I \subset I_1$ ,  $\text{card } I = n-2$  tel que  $\sum_{i,j \in I_2} G_{ij}$  soit minimum. Soit  $i_2 \notin I$ ,  $\lambda_{i_2}$  est la seconde valeur propre conservée.

3. A l'étape  $m$   $\underline{Y}^{i_1}, \dots, \underline{Y}^{i_{m-1}}$  ayant été déterminés on cherche  $\underline{Y}^i$  tel que  $J_m = \|\underline{Y} - \sum_{j=1}^{m-1} \underline{Y}^{i_j} - \underline{Y}^i\|$  soit minimum.

4. Si  $m$  n'est pas fixé à l'avance on peut le déterminer de façon que le critère  $J_m$  soit assez faible.

Remarque : Pour chaque  $m$ , on a  $J_m < R_m$  où  $R_m$  est défini en (1.23).

Interprétation géométrique.

On commence par chercher le vecteur  $\underline{Y}^1$  le plus proche de  $\underline{Y}$ . Celui-ci étant déterminé on cherche le vecteur  $\underline{Y}^2$  le plus proche de  $\underline{Y} - \underline{Y}^1$ , puis le plus proche de  $\underline{Y} - \underline{Y}^1 - \underline{Y}^2$  et ainsi de suite jusqu'au moment où on estime que  $\underline{Y}^1 + \underline{Y}^2 + \dots + \underline{Y}^m$  est assez proche de  $\underline{Y}$ . Par exemple pour la situation suivante, on a :

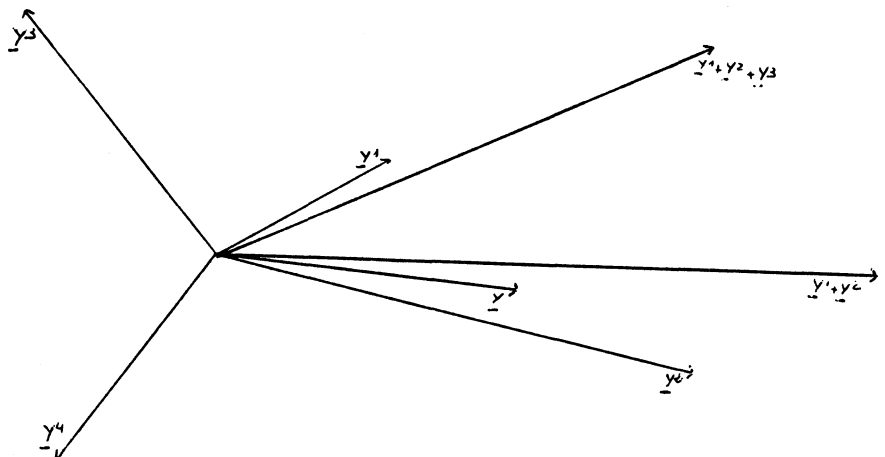


Figure 1.4.

Et c'est la coordonnée  $X_1$  qui est conservée.

On remarque sur cette figure que le résultat à l'étape  $m$  n'est pas forcément meilleur qu'à l'étape  $m-1$ . Il faut donc ordonner tous les  $\underline{Y}^i$  et à chaque étape calculer le critère  $J_i$  et choisir  $m$  seulement lorsque tous les critères  $J_i$  sont connus.

Pour  $m$  fixé cette procédure contrairement à la méthode (3) n'est pas optimum. Par contre elle a l'avantage d'être séquentielle et de nécessiter moins de calculs. Elle est toutefois plus coûteuse en calculs que les deux premières méthodes mais elle présente l'avantage d'être plus satisfaisante géométriquement.

2° cas. Si  $a$  n'est pas diagonalisable.

Les paramètres  $(\alpha, \beta)$  étant choisis on calcule l'énergie de (S) dans une base dans laquelle la matrice de  $a$  est Jordan. Soit  $J$  cette matrice

$$(1.24) \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{bmatrix} \quad \dim J_i = n_i$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) \\ \vdots \\ x_{1,n_1}(t) \\ \vdots \\ x_{p,n_p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{bmatrix} \quad \text{correspond à la partition}$$

de l'espace  $X$  associée à  $J$ .

Dans cette base  $C$  s'écrit

$$(1.25) \quad \begin{cases} C = (C_1 \dots C_p) & \text{où} \\ C_i = (C_{i_1} \dots C_{i,n_i}) \end{cases}$$

Les diverses contributions à  $\underline{Y}$  de la définition 1.7 seront notées  $(\underline{Y}^{i,j})_{\substack{1 < i < p \\ 1 < j < n_i}}$ .

Les contributions à l'énergie de la définition 1.8 seront notées

$$G_{i,j;k,\ell} = \langle \underline{Y}^{i,j} ; \underline{Y}^{k,\ell} \rangle .$$

On définit de plus les contributions par blocs.

$$(1.26) \quad \begin{cases} \underline{Y}^i = \sum_{j=1}^{n_i} \underline{Y}^{i,j} & \text{contributions à la sortie} \\ G_{i,k} = \langle \underline{Y}^i, \underline{Y}^k \rangle & \text{contributions à l'énergie.} \end{cases}$$

Seule la méthode 3 a été étendue au cas où  $a$  n'est pas diagonalisable.

Nous allons donc étendre les méthodes de sélection décrites précédemment au cas où  $a$  n'est pas diagonalisable en nous servant des résultats obtenus à la propriété 3 du § I.2.1. Pour chacune des méthodes (1), (2), (4) on procédera de la façon suivante :

i) Dans chaque bloc (i) de Jordan on détermine suivant la méthode choisie les contributions conservées en tenant compte du fait que si  $m_i$  vecteurs sont retenus ce ne peut être que les vecteurs

$$(\underline{Y}^{i, n_i - m_i}, \dots, \underline{Y}^{i, n_i}).$$

ii) Ayant déterminé un représentant de chaque bloc de Jordan on les classe comme dans le cas diagonalisable.

Cette façon de procéder présente l'inconvénient de ne pas pouvoir classer toutes les contributions les unes par rapport aux autres. Par contre, compte tenu des contraintes dues à l'agrégation dans le cas non diagonalisable elle est simple et facile à mettre en oeuvre.

i) Méthode (1).

$$1. \quad \text{Soit } W_i^{m_i} = \sum_{j, \ell = n_i - m_i}^{n_i} G_{i,j}; i, \ell.$$

Pour tout  $(i, m_i)_{\substack{1 < i < p \\ 1 < m_i < n_i}}$  on classe  $W_i^{m_i}$  par valeurs décroissantes. On ne

garde que le plus grand des  $W_i^{m_i} = W_i^{m_i 0}$  pour chaque  $i$  dans le classement.

2. Les sous-espaces retenus sont ceux qui ont le plus grand  $W_i^{m_i 0}$ .

ii) Méthode (2).

1. Soit

$$(1.27) \quad S_i^{m_i} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=n_i-m_i}^{n_i} \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{n_k} G_{i,j;k,\ell} + G_{k,\ell;i,j} \right].$$

$$\text{Soit } S_i^{m_i 0} = \sup_{1 \leq m_i \leq n_i} S_i^{m_i}.$$

2. On classe les  $S_i^{m_i 0}$  et on retient les sous-espaces associés aux plus grands.

iii) Méthode (3).

Soit

$$(1.28) \quad S_{i,k}^{m_i, m_k} = \sum_{j=1}^{n_i-m_i} \sum_{\ell=1}^{n_k-m_k} G_{i,j;k,\ell}.$$

On cherche à minimiser

$$(1.29) \quad R_m = \sum_{i,k=1}^p S_{i,k}^{m_i, m_k} \quad m = \sum_{i=1}^p m_i$$

Pour cela on construit la matrice  $S$  partitionnée comme  $J$  (1.24) d'éléments  $S_{i,j}^{m_i, m_j}$  puis on choisit les lignes (au maximum une par bloc) et les colonnes correspondantes telles que la somme des éléments situés à leurs intersections soit minimale et on élimine les sous-espaces correspondants.

iv) Méthode d'agrégation géométrique séquentielle.

1. Pour chaque  $i$  on cherche  $m_i$ , ( $1 \leq m_i \leq n_i$ ) pour que

$$\| \underline{Y}^i - \sum_{j=n_i-m_i}^{n_i} \underline{Y}^{i,j} \| \text{ soit assez petit.}$$

$$\text{Soit } \underline{m}_i \underline{Y}^i = \sum_{j=n_i-m_i}^{n_i} \underline{Y}^{i,j}.$$

2. On cherche ensuite parmi les  $(\underline{m}_i \underline{Y}^i)_{1 \leq i \leq p}$  celui qui minimise  $\| \underline{Y} - \underline{m}_i \underline{Y}^i \|$ , celui-ci étant choisi, on cherche parmi ceux qui restent celui qui minimise  $\| \underline{Y} - \underline{m}_i \underline{Y}^i - \underline{m}_k \underline{Y}^k \|$ . On détermine  $m = \sum_{i < k \leq p} m_i$  de façon à ce que  $\| \underline{Y} - \sum_{i < k} \underline{m}_i \underline{Y}^i \|$

soit aussi petite que possible.

Soit  $(\gamma_i^{m_i})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq m_i \leq n_i}}$  les contributions retenues. Les sous-espaces conservés

seront les sous-espaces associés aux valeurs propres  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s}$  engendrés par les  $n_i - m_i$  derniers vecteurs propres généralisés.

### I.2.3.c) Indices de qualité.

Pour vérifier a posteriori la qualité de la réduction Skelton [24] propose de calculer

$$(1.30) \quad ME = \frac{\sum_{i,j=m+1}^n G_{ij}}{\sum_{ij=1}^n G_{ij}}$$

dans le cas diagonalisable, que l'on étend facilement en

$$(1.31) \quad ME = \frac{\sum_{i,k=1}^n \sum_{j=1}^{n_i - m_i} \sum_{\ell=1}^{n_k - m_k} G_{i,j;k,\ell} / W(S)}$$

dans le cas non-diagonalisable.

Plus l'énergie de la partie négligée est faible plus ME (Model Error) est faible.

La minimisation de ce critère correspond à la méthode (3).

REMARQUE. Duc [6] propose de juger la qualité de la réduction à l'aide du critère suivant :

$$(1.32) \quad J^2 = \frac{\sum_{i,j=m+1}^n G_{ij}}{\sum_{ij=1}^m G_{ij}}$$

dans le cas diagonalisable.

Ce critère est d'autant plus faible que l'énergie de la partie négligée est faible tandis que l'énergie de la partie conservée est forte.

L'énergie totale du système n'étant pas la somme des énergies : les termes de couplage  $G_{ij}$ ,  $i \neq j$ , peuvent être négatifs, les deux critères ne sont pas équivalents.

### I.2.3.d) Exemple numérique

Afin d'illustrer les différences entre les quatre méthodes précédemment décrites nous avons fabriqué un exemple simple. Il s'agit d'un système d'ordre 4, continu, à une entrée, une sortie, déterministe écrit dans une base dans laquelle la matrice dynamique est diagonale.

Le système d'écrit sous forme matricielle :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = \Lambda x(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) = Cx(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

où

$$\Lambda = \text{diag} (-1 ; -2 ; -3 ; -4)$$

$$B^T = (1 ; 1 ; 2 ; 2)$$

$$C = (1 ; 1 ; -2 ; 2)$$

On étudie l'énergie globale du régime transitoire du système auquel on applique une entrée impulsion.

La matrice  $G$  des contributions de la définition 1.8 est le produit terme à terme de la matrice  $C^T C$  et de la matrice  $V$  définie par

$$V = \int_0^{\infty} x(t) x(t)^T dt$$

$V$  est solution de l'équation de Lyapounov :

$$\Lambda V + V \Lambda^T = -BB^T$$

On a donc dans notre cas :

$$V = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 2/5 \\ 1/3 & 1/4 & 2/5 & 1/3 \\ 1/2 & 2/5 & 2/3 & 4/7 \\ 2/5 & 1/3 & 4/7 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.33 & -1 & 0.8 \\ 0.33 & 0.25 & -0.8 & 0.66 \\ -1 & -0.8 & 2.66 & -2.28 \\ 0.8 & 0.66 & -2.28 & 2 \end{bmatrix} = (G_{ij})_{\substack{i=1,4 \\ j=1,4}}$$

Donnons d'abord les résultats numériques de chacune des méthodes.

Méthode 1 :

Valeurs propres classées	$G_{ii}$ : contributions propres	Critère : $G_{ii}/\text{Sup}_i(G_{ii})$
$\lambda_3 = -3$	2.66	1
$\lambda_4 = -4$	2.	0.75
$\lambda_1 = -2$	0.5	0.38
$\lambda_2 = -2$	0.25	0.09

On conserve les axes dont les contributions propres sont les plus grandes.

Le test du signe de  $G_{ij}+G_{ji}$  n'a pas lieu d'être appliqué ici puisque les valeurs propres  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont égales à -3 et -4 respectivement.

Le critère donne un "trou" entre les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

D'après cette méthode on conserverait donc les valeurs propres  $\lambda_3$  ;  $\lambda_4$  et  $\lambda_1$ .

Méthode 2

Valeurs propres classées	Contributions globales: $G_i$	Critère : $G_i / \text{Sup}(G_i)$
$\lambda_4 = -4$	1.18	1
$\lambda_1 = -1$	0.63	0.53
$\lambda_2 = -2$	0.44	0.37
$\lambda_3 = -3$	-1.42	-1.25

On conserve les axes dont les contributions globales sont les plus grandes.

Le critère donne un "trou" entre les valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

On conserverait donc d'après cette méthode les valeurs propres  $\lambda_4$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .



Méthode 3 :

Ordre de réduction $m$	Famille de valeurs propres	Critère : $R_m$
1	$\lambda_1$	0.07 (*)
	$\lambda_2$	0.2
	$\lambda_3$	6.33
	$\lambda_4$	0.47
2	$(\lambda_1 ; \lambda_2)$	0.1 (*)
	$(\lambda_1 ; \lambda_3)$	3.57
	$(\lambda_1 ; \lambda_4)$	1.31
	$(\lambda_2 ; \lambda_3)$	4.1
	$(\lambda_2 ; \lambda_4)$	1.16
	$(\lambda_3 ; \lambda_4)$	1.41
3	$(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3)$	2
	$(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_4)$	2.66
	$(\lambda_1 ; \lambda_3 ; \lambda_4)$	0.25 (*)
	$(\lambda_2 ; \lambda_3 ; \lambda_4)$	0.5

Pour un ordre de réduction donné  $m$ , cette méthode nous donne le  $m$ -uplet

signalé par (\*) qui minimise le critère  $R_m$  défini par l'expression (1.23).

Le système étant ici d'ordre faible on a pu calculer  $R_m$  pour toutes les valeurs de  $m$  inférieures à 4 et on constate que la famille de valeurs propres qui minimise le critère sur  $m$  est le singleton  $\{\lambda_1 = -1\}$

Méthode 4 :

Ordre de réduction $m$	Famille de valeurs propres	Critère : $J_m$
1	$\lambda_1$	0.07 (*)
	$\lambda_2$	0.2
	$\lambda_3$	6.33
	$\lambda_4$	0.47
2	$(\lambda_1 ; \lambda_2)$	0.1 (*)
	$(\lambda_1 ; \lambda_3)$	3.57
	$(\lambda_1 ; \lambda_4)$	1.31
3	$(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3)$	2 (*)
	$(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_4)$	2.66

Pour chaque ordre de réduction on calcule le critère  $J_m$  d'après la méthode d'agrégation géométrique séquentielle. Le critère optimum pour chaque ordre est signalé par (\*). On conservera une famille d'axes si le critère  $J_m$  est aussi petit que possible.

On s'aperçoit ici que plus l'ordre de réduction est élevé plus le critère  $J_m$  est grand.

La meilleure réduction d'après cette méthode est celle qui ne conserve que la valeur propre  $\lambda_1 = -1$ .

### Conclusion :

La divergence entre les conclusions de ces différentes méthodes s'explique de la façon suivante :

L'énergie du système global est plus faible que la contribution propre à l'énergie des modes rapides ( $G_{33} = 2.66$  et  $G_{44} = 2$ ). Ces deux modes en fait se compensent sans toutefois rentrer dans le cadre du test de signe de la méthode 1.

Les méthodes 3 et 4 qui cherchent à minimiser un critère énergétique tiennent compte de cette compensation et ne retiennent pas ces deux modes.

La méthode 2 donne le plus mauvais résultat au sens du critère ME défini par l'expression 1.30. Ceci est dû au fait que la matrice G comporte beaucoup de termes négatifs, et comme le suggère la figure 1.3 cette méthode est inadaptée à ces cas.

Des deux méthodes 3 et 4 qui donnent le bon résultat au sens du critère ME la méthode 4 est celle qui nécessite le moins de calculs : 9 calculs de critères au lieu de 14.

Elle donne toutefois un moins bon résultat quand l'ordre  $m$  de la réduction devient élevé : le fait d'imposer les premiers modes induit une contrainte qui devient forte avec l'ordre et qui ne permet pas d'atteindre le critère optimum à  $m$  fixé.

I.2.3.e) Calculs des contributions dans quelques cas particuliers.

On se place dans le cas discret, on suppose que  $a$  est diagonalisable, on note  $\Lambda$  sa matrice dans la base diagonale,  $B$  et  $C$  les matrices de  $b$  et  $c$  dans cette base. On suppose de plus que  $x(0) = 0$ .

Les contributions  $G_{ij}$  sont les éléments d'une matrice  $G$  formée par le produit termes à termes (noté  $*$ ) de la matrice  $\bar{C}^T C$  et d'une matrice  $V$  définie par

$$(1.33) \quad \begin{cases} V(\alpha) = E \sum_{t=1}^N \bar{x}_{\alpha}^T(t) x_{\alpha}(t) & \text{s'il s'agit de l'énergie globale} \\ V(\alpha) = E \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{x}_{\alpha}^T(t) x_{\alpha}(t) \right) & \text{s'il s'agit de l'énergie moyenne.} \end{cases}$$

$$(1.34) \quad G = \bar{C}^T C (*) V.$$

On se place dans le cas  $N = +\infty$  et on donne pour plusieurs types d'entrées l'équation que satisfait  $V$ .

TABLEAU 1.1.

	Régime transitoire (global)	régime permanent (moyen)
Impulsion $u(t)=1 \ t=0$ $u(t)=0 \ t>0$ $R = 0$	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = -B \bar{B}^T$	0
Echelon $u(t)=1 \ t>0$ $R = 0$	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = (I - \Lambda)^{-1} B \bar{B}^T (I - \bar{\Lambda})^{-1}$	$(I - \Lambda) V (I - \bar{\Lambda}) = B \bar{B}^T$
Bruit blanc $u(t) \ 0$ $R \neq 0$	*	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = -R$
Impulsion + bruit	*	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = -R$
Echelon + bruit	*	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = (I - \Lambda)^{-1} [\Lambda B \bar{B}^T \bar{\Lambda} - B \bar{B}^T] (I - \bar{\Lambda})^{-1} - R$
Impulsion + Echelon $Bu(t) = B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t)$ $u_1(t) = \text{impulsion}$ $u_2(t) = \text{échelon}$ $R = 0$	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V =$ $-[B_1 + (I - \Lambda)^{-1} B_2] [\bar{B}_1 + (I - \bar{\Lambda})^{-1} \bar{B}_2]^T$	$(I - \Lambda) V (I - \bar{\Lambda}) = B_2 \bar{B}_2^T$
Impulsion + Echelon + Bruit	*	$\Lambda V \bar{\Lambda} - V = (I - \Lambda)^{-1} [\Lambda B \bar{B}^T \bar{\Lambda} - B \bar{B}^T] (I - \bar{\Lambda})^{-1} - R$

I.2.3.f) Remarque sur la dépendance entre sélection et entrée : Robustesse de l'agrégation.

La critique majeure formulée à l'encontre des méthodes de sélection énergétiques, est que la réduction dépend du type d'entrée, alors que les méthodes du type fréquentiel sont intrinsèques au système.

On peut penser en effet que si le type d'entrée appliqué comporte une incertitude (un échelon de très courte durée, au lieu d'une impulsion par exemple) et que le résultat des deux réductions est radicalement différent, alors cette méthode de réduction est peu robuste.

Nous commençons ici cette étude et montrons que sous certaines conditions ce phénomène ne se produit pas.

NOTATIONS.

Les résultats qui suivent sont valables pour les régimes permanents, transitoires et les énergies moyennes et globales. Nous omettons les indices  $\alpha$  et  $\beta$ .

L'étude est restreinte au cas suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}^+ \\ R = 0 \\ \dim U = 1 \end{array} \right.$$

Hypothèses: On suppose que  $a$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et stable.

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ,  $B$  et  $C$  sont les matrices de  $a, b, c$  dans une base où la matrice de  $a$  est diagonale.

Soit  $E$  une famille de signaux d'entrées ;  $E = (u^\eta(t), u^0(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  telle que  $u^\eta(t) \rightarrow u^{(0)}(t)$  dans un sens à préciser (presque partout, uniformément, au sens des distributions) quand  $\eta \rightarrow 0$  ;  $\eta$  désignant ici un paramètre.

Pour tout  $\eta$  ; soit  $(x^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  la solution de l'équation différentielle

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^\eta(t) = \Lambda x^\eta(t) + Bu^\eta(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. .$$

$$(1.36) \quad y^\eta(t) = Cx^\eta(t)$$

et  $G_{ij} = \langle Y^i ; Y^j \rangle$  conformément aux définitions (1.7) et (1.8) .

Le problème est le suivant : sous quelles conditions le choix des valeurs propres à conserver pour le modèle agrégé est-il le même pour  $\eta$  petit que pour  $\eta = 0$  ?

Sous les hypothèses suivantes :

i)  $u^\eta(t) \rightarrow u^0(t)$  presque partout quand  $\eta \rightarrow 0$  .

$$(u^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^2(\mathbb{R}^+) \text{ pour tout } \eta > 0$$

Il existe  $C$  tel que :  $|u^\eta(t)| < C$  ,  $\forall \eta$  ,  $\forall t$  et  $\exists T$   $u^\eta(t) = 0$  si  $t > T$  .

ii) La famille d'éléments de  $L^1\{u^\eta(t)\}$  est une unité approchée c'est-à-dire

$$*) \quad \int_{\mathbb{R}^+} u^\eta(t) dt = 1 \quad \text{pour tout } \eta .$$

$$**) \quad M = \sup_{\eta} \int_{\mathbb{R}^+} u^\eta(t) dt < \infty .$$

\*\*\*) pour tout voisinage compact  $V$  de  $0$  on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{V^c} |u^\eta(t)| dt = 0$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4. Sous les hypothèses i) ou ii)  $G_{ij}^\eta \rightarrow G_{ij}^0$  quand  $\eta \rightarrow 0$

COROLLAIRE 1.2. Soit  $E$  un ensemble de signaux vérifiant les hypothèses i) ou ii). Il existe un voisinage  $V$  dans  $E$  de  $u^0 \in E$  dans lequel l'agrégation est indépendante du signal.

Démonstration de la proposition 1.4.

Pour chaque coordonnée  $x_i^\eta(t)$  on peut écrire

$$x_i^\eta(t) = \int_0^t u^\eta(s) \cdot b_i e^{\lambda_i(t-s)} ds$$

Soit  $E_i$  l'application définie par :

$$E_i(t) = e^{\lambda_i t} \Pi_{\mathbb{R}^+}(t) \quad \text{alors}$$

$$(1.37) \quad x_i^\eta(t) = (u^\eta * E_i)(t)$$

Plaçons-nous dans le cadre de l'hypothèse i) .

Montrons d'abord que  $x_i^\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_i^0(t)$  pour tout  $t$  .

Fixons  $t > 0$  ;

$$(1.38) \quad |u^\eta(s)| e^{\lambda_i(t-s)} \Pi(s) < C e^{\lambda_i(t-s)} \Pi(s) \in L^1([0,t], \mathbb{R}^+)$$

$$(1.39) \quad u^\eta(s) e^{\lambda_i(t-s)} \Pi(s) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u^0(s) e^{\lambda_i(t-s)} \Pi(s) \quad \text{pour presque tout } s.$$

(1.38), (1.39) et le théorème de convergence dominée donnent :

$$x_i^\eta(t) = \int_0^t u^\eta(s) e^{\lambda_i(t-s)} ds \rightarrow \int_0^t u^0(s) e^{\lambda_i(t-s)} ds = x_i^0(t)$$

quand  $\eta \rightarrow 0$  . Ce résultat est valable pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  .

De plus  $(E_i(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^1(\mathbb{R}^+)$  puisque  $\Lambda$  est stable, et

$$(u^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^2(\mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad (1.37) \quad \text{donnent}$$

$$(x_i^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^2(\mathbb{R}^+) \quad \text{pour tout } \eta \quad \text{et}$$

$$(1.40) \quad \|x_i\|_2 \leq \|u^\eta\|_2 \|E_i\|_1 .$$

Montrons maintenant que  $G_{ij}^\eta \rightarrow G_{ij}^0$  quand  $\eta \rightarrow 0$

$$G_{ij} = C_i C_j \int_0^\infty x_i^\eta(t) x_j^\eta(t) dt$$

Or pour tout  $t \geq 0$ ,  $x_i^\eta(t) x_j^\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} x_i^0(t) x_j^0(t)$  et

$$(x_i^\eta(t) x_j^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad (\text{Hölder})$$

$$\text{Si } t < T \quad x_i^\eta(t) x_j^\eta(t) \leq \frac{c^2}{\lambda_i \lambda_j} (1 - e^{-\lambda_i t}) (1 - e^{-\lambda_j t}) \mathbb{1}_{t>0}$$

$$\text{Si } t > T \quad x_i^\eta(t) x_j^\eta(t) \leq \frac{c^2}{\lambda_i \lambda_j} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} (1 - e^{-\lambda_i T}) (1 - e^{-\lambda_j T}) \mathbb{1}_{t>0}$$

On peut donc majorer pour tout  $\eta$ ,  $(x_i^\eta(t); x_j^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  par une même fonction de  $L^1(\mathbb{R}^+)$  et réappliquer le théorème de Lebesgue qui nous donne

$$\int x_i^\eta(t) \cdot x_j^\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int x_i^0(t) x_j^0(t) \quad \text{et}$$

$$G_{ij}^\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} G_{ij}^0 \quad \square$$

Plaçons-nous dans le cadre de l'hypothèse ii)  $\{u^\eta(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  étant une unité approchée, (1.37) donne

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|x_i^\eta(t) - E_i(t)\|_p = 0 \quad \forall p \in [1, +\infty]$$

et  $x_i^\eta(t)$  converge uniformément vers  $E_i(t)$

donc  $(x_i^\eta(t) \cdot x_j^\eta(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$  converge uniformément vers  $(E_i(t) E_j(t))_{t \in \mathbb{R}^+} \in L^1(\mathbb{R}^+)$

$$\text{et } \int x_i^\eta(t) \cdot x_j^\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int E_i(t) E_j(t) \quad \text{et}$$

$$G_{ij}^\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} G_{ij}^0 \quad \square$$

Démonstration du corollaire :

Les divers critères ou classements des méthodes de sélection des valeurs propres sont uniquement des fonctions additives des  $G_{ij}$ . Donc si  $G_{ij}^\eta \rightarrow G_{ij}^0$  quand  $\eta \rightarrow 0$  pour  $\eta$  assez petit la sélection sera la même pour  $\eta$  petit que pour  $\eta = 0$ , et il existe un voisinage de  $u_0$  dans la famille  $E$  où l'agrégation reste la même.



Exemple 1 :

On voudrait appliquer l'échelon  $u^0(t) = \mathbb{1}_{0 \leq t \leq 1}$  mais on risque d'appliquer une rampe

$$u^\eta(t) = (f(\eta) + g(\eta)t) \mathbb{1}_{0 \leq t \leq 1}$$

où  $f(\eta) \rightarrow 1$  quand  $\eta \rightarrow 0$ .

$g(\eta) \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow 0$ .

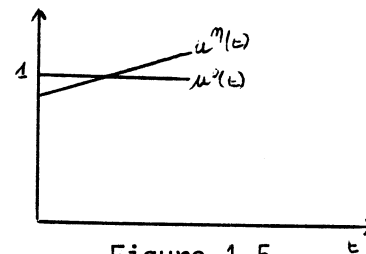


Figure 1.5

On est dans le cadre de l'hypothèse i). Du corollaire on déduit que pour  $\eta$  assez petit le choix des valeurs propres est le même que pour  $\eta = 0$ .

Exemple 2 :

On voudrait appliquer une impulsion  $u^0(t)$  mais on applique un échelon  $u^\eta(t) = \frac{1}{\eta} \mathbb{1}_{[0, \eta]}(t)$  ( $\eta < 1$ ). La famille  $\{u^\eta(t)\}_{0 < \eta < 1}$  est une unité approchée et on est dans le cadre de l'hypothèse ii).

Donc pour  $\eta$  assez petit on aura la même sélection de valeurs propres pour un échelon de surface 1 et de base  $\eta$  que pour une impulsion.

Exemple 3 :

Le résultat précédent est facilement généralisable à une famille de combinaisons linéaires d'échelons de la forme

$$u^\eta(t) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \mathbb{1}_{[k, k+\eta]}(t)$$

qui tendent au sens des distributions vers le train d'impulsion,

$$u^0(t) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \delta_k(t)$$

#### I.2.4. Calcul de la matrice de sortie.

Le sous-espace conservé étant choisi on a fait une première approximation de  $y(t)$  par  $\sum_{\substack{i \in I \\ \text{card } I = m}} y_i(t)$ . On cherche ici à affiner cette approximation.

##### I.2.4.a) Par troncature.

Par la méthode de réduction par troncature la matrice de sortie du système (S) est définie par

$$C' = C_{X'}$$

$X'$  étant le sous-espace conservé, cela revient à approcher  $y(t)$  par

$$y'(t) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{card } I = m}} y_i(t) + \eta(t).$$

Dans le cas où la troncature de l'équation d'état est équivalente à une agrégation (de relation d'agrégation  $\lambda_0 = P_{X'}^{X''}$ ) on peut de plus assurer l'égalité des régimes permanents en ajoutant un terme de commande dans l'équation de sortie.

On se place dans le cas non bruité, et on suppose que le régime permanent est une fonction constante de  $t$ . On cherche  $d'$  tel que

$$(1.41) \quad \begin{cases} y'(t) = c'x'(t) + d'u(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) \end{cases}$$

Pour cela on pose  $x''(t) = x''(t+1)$ , ( $x''(t) = P_{X''}^{X'} x(t)$ ), pour  $t$  assez grand.

On a donc

$$\begin{aligned} x''(t+1) &= x''(t) = P_{X''}^{X'} a_{X''} x''(t) + P_{X''}^{X'} b u(t) \\ &= a'' x''(t) + b'' u(t) \end{aligned}$$

d'où  $x''(t) = (id - a'')^{-1} b'' u(t)$  pour  $t$  assez grand. De plus

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} c'x'(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} c'u(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} c'x'(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} c''x''(t) \quad \text{où } c'' = c_{X''} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} c'x'(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} c''(id - a'')^{-1} b'' u(t). \end{aligned}$$

Pour avoir l'identité des régimes permanents il suffit de prendre

$$(1.42) \quad d' = c''(\text{id}-a'')^{-1}$$

Dans le cas continu on pose  $\dot{x}''(t) = 0$  et on obtient  $e' = -c''a'^{-1}b''$ .

Dans le cas bruité on obtient le même résultat en remplaçant  $x, x', x'', y, y'$  par leurs espérances, on aura donc

$$y'(t) = c'x'(t) + c''(\text{id}-a'')^{-1}u(t) + \eta(t)$$

et on a l'égalité des régimes permanents en moyenne.

#### I.2.4.b) Par optimisation [6]

Les coordonnées conservées étant fixées  $x'(t) = (x_1'(t) \dots x_m'(t))^T$  on cherche une matrice  $C'$  telle que si

$$(1.43) \quad y'(t) = C'x'(t) + \eta(t) \quad \text{on ait}$$

$$(1.44) \quad J_N = E\left(\sum_{t=1}^N \|y(t) - y'(t)\|\right) \text{ minimum,}$$

tout en assurant l'égalité des régimes permanents, donc en introduisant un terme de commande supplémentaire dans l'équation (1.43)

$$\begin{aligned} y(t) - y'(t) &= (C - CL_0) x(t) - Du(t) \\ &= (C - C'L_0)x_T(t) + (C - C'L_0)x_p(t) - Du(t) \\ &= y_T(t) - y_T'(t) + y_p(t) - y_p'(t). \end{aligned}$$

L'égalité des régimes permanents entraîne

$$(1.45) \quad \begin{aligned} E(y_p(t)) &= E(y_p'(t)) \text{ pour tout } t, \text{ et} \\ Du(t) &= (C - C'L_0)E(x_p(t)). \end{aligned}$$

La minimisation de  $J_N$  est alors équivalente à la minimisation de

$$(1.46) \quad \begin{aligned} J_N' &= E\left(\sum_{t=1}^N \|y_T(t) - y_T'(t)\|\right) \\ J_N' &= E\left(\sum_{t=1}^N \text{trace} [(C - C'L_0)x_T(t)]^T [(C - C'L_0)x_T(t)]\right) \\ &= \text{trace}(C - C'L_0)^T (C - C'L_0) V_T^N \quad \text{où } V_T^N = E\left(\sum_{t=1}^N x_T(t)x_T(t)^T\right) \end{aligned}$$

et pour calculer  $C'$  on résoud

$$\frac{\partial J_N}{\partial C'} = 0$$

ce qui donne

$$(1.47) \quad C' = C V_T^N L_0^T (L_0 V_T^N L_0^T)^{-1}$$

on obtient ensuite  $D$  en posant

$$E(x_p(t+1)) = E(x_p(t)) \quad \text{d'où}$$

$$E(x_p(t+1)) = E(x_p(t)) = A E(x_p(t)) + B u(t)$$

$$E(x_p(t)) = (I-A)^{-1} B u(t) \quad , \quad \text{et}$$

$$(1.48) \quad D = (C - C' L_0) (I-A)^{-1} B$$

dans le cas continu on a

$$D = -(C - C' L_0) A^{-1} B.$$

Le modèle agrégé quasi-optimal est donc obtenu en 2 étapes :

i) choix des modes conservés.

ii) les modes étant fixés, choix d'une matrice  $C$  de sortie optimale et éventuellement d'une matrice  $D$  de commande sur la sortie pour assurer l'égalité des régimes permanents.

Un modèle agrégé optimal serait obtenu en minimisant à la fois sur  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$  ( $\mathcal{L} = \{ \ell \text{ opérateur d'agrégation } \}$ ) et  $c' \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \{ c, \text{ applications linéaires de } \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q \quad m < n \}$$

le critère

$$J_N(\text{op}) = E \left( \sum_{t=1}^N \| y(t) - c' \ell x(t) - \eta(t) \|^2 \right)$$

avec la contrainte  $m = \dim \text{Im } \ell$ .

Remarque 1 : Le choix de la matrice d'observation par optimisation ne donne pas l'observabilité du modèle agrégé même si le système initial est observable.

En effet soit le système discret écrit sous forme matricielle :

$$(S) : \begin{cases} x(t+1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1 \\ 1/15 \end{pmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = (1/16, 1, -1/2)x(t) & t \in \mathbb{N} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Ce système est observable et commandable. On lui applique une entrée impulsion, et on étudie l'énergie globale du régime transitoire. La matrice  $V = \sum_{t=0}^{\infty} x(t) x(t)^T$  est solution de l'équation de Lyapounov :

$$\Lambda V \Lambda^T - V = -BB^T$$

d'où :

$$V = \begin{bmatrix} 1/192 & 1/20 & 1/160 \\ 1/20 & 4/3 & 1/20 \\ 1/160 & 1/20 & 1/125 \end{bmatrix}$$

La matrice  $G$  des contributions de la définition 1.8 est donnée par le produit termes à termes de  $V$  et  $C^T C$ . D'où :

$$G = \begin{bmatrix} 1/42652 & 1/320 & -1/53760 \\ 1/320 & 4/3 & 1/420 \\ -1/53760 & 1/420 & 1/55125 \end{bmatrix}$$

Supposons que l'on désire conserver un modèle réduit d'ordre 2. Alors quelle que soit la méthode adoptée on conserve les valeurs propres  $\lambda_1 = 1/2$  et  $\lambda_2 = -1/2$ .

Une matrice d'agrégation  $L$  est alors donnée par :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après (1.47) la matrice d'observation du modèle agrégé  $C'$  est donnée par :

$$C' = CVL^T (LVL^T)^{-1}$$

et on obtient le modèle agrégé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/16 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad t \in \mathbf{N} \\ y(t) = (0, 0.93) x(t) \quad t \in \mathbf{N} \\ x'(0) = 0 \end{array} \right.$$

où la composante  $x'_1$  de  $x'$  n'est pas observable.

### Remarque 2 :

On peut renouveler la critique sur l'influence du type d'entrée choisi pour le calcul de  $C'$ . En effet la formule (1.47) montre clairement que  $C'$  dépend de l'entrée à travers la matrice  $V_T^N$ .

Michaïlesco [16] a proposé une solution à ce problème avec l'agrégation uniforme : la matrice  $C'$  est calculée de façon à minimiser un critère  $J$  qui est une borne supérieure de l'erreur  $\|y - y'\|$  pour toutes les entrées d'un ensemble admissible  $U$ .

### I.2.5. Conclusion

L'avantage principal de l'agrégation sur les autres méthodes de réduction dans la base d'état est l'existence d'une relation linéaire entre l'état initial et l'état réduit.

Nous verrons dans un chapitre suivant que l'existence de cette relation fait de l'agrégation la méthode de réduction la mieux adaptée aux problèmes de commande d'ordre réduit. L'étude comparative des méthodes de sélection de valeurs propres sur des critères énergétiques a permis de dégager les résultats suivants :

La méthode optimale est la méthode (3) mais elle n'est applicable que pour des petits systèmes en raison de son aspect combinatoire.

Pour de gros systèmes il semble préférable d'utiliser les méthodes (1) et (4) plus faciles à mettre en oeuvre et nécessitant moins de calculs. La méthode (1) donne de bons résultats pour les ordres de réduction élevés tandis que la méthode (4) donne de meilleurs résultats pour les ordres de réduction faibles. Le problème de la dépendance de l'agrégation vis à vis de l'entrée appliquée au système a été soulevé ici dans quelques cas particuliers. La propriété de robustesse qui a été dégagée sous certaines hypothèses demande à être étendue dans des cas plus généraux : familles d'entrées plus larges, système stochastiques et discrets.

Enfin il serait intéressant d'étudier une autre sorte de robustesse : celle de l'agrégation vis à vis de l'estimation des paramètres du système initial.

### 1.3. TRONCATURE DANS LA BASE D'EQUILIBRE.

Nous présentons dans cette deuxième partie les principales propriétés de la représentation équilibrée. Cette méthode qui a suscité de nombreux travaux depuis son introduction par Moore [9] en 1980, présente une certaine analogie avec l'analyse statistique en composantes principales [14].

Dans les deux cas il s'agit de classifier les directions de l'espace d'étude après une analyse factorielle : en statistiques cette analyse est réalisée par la diagonalisation de la matrice symétrique de covariance (ou de corrélation), en automatique elle est réalisée par la diagonalisation simultanée des deux grammians caractérisant la commandabilité et l'observabilité. Nous reprenons les différents résultats connus, les étendons au cas des systèmes discrets, et les généralisons au cas où les matrices de commandabilité et observabilité sont calculées sur un horizon fini et au cas où ces matrices ne sont pas de rang plein.

Pour cela nous introduisons les notions de degré de commandabilité et d'observabilité d'une direction donnée. Enfin en nous inspirant largement des résultats précédents nous introduisons le degré de perturbabilité des directions de l'espace d'état d'un système stochastique, et définissons des familles d'invariants d'un tel système. Ces familles d'invariants associés aux directions de l'espace d'état permettent de dégager les axes qui contiennent le maximum d'informations sur le système en un sens à préciser.

Ce sont ces axes qui sont conservés dans la réduction par troncature dans la base d'équilibre.

Nous traiterons dans un premier temps les systèmes déterministes, invariants dans le temps, discrets et citons ensuite les résultats équivalents dans le cas continu.



I.3.1. NOTATIONS.

Le système étudié s'écrit donc en utilisant les notations précédemment employées (§ I.1) :

$$\begin{cases} x(t+1) = ax(t) + bu(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = cx(t) & t \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit, A,B,C les matrices des applications a,b,c dans les bases de départ.

L'état au temps t, x(t) s'écrit en fonction de l'état initial et de la suite de commandes u(0),...u(t) :

$$x(t) = Bu(t-1) + ABu(t-2) + \dots + A^t x(0) \quad t \in \mathbb{N}^*$$

Notons  $Q_t = [B, AB, \dots, A^{t-1}B]$   $t \in \mathbb{N}^*$

et  $\underline{U}_t = [u(t-1), \dots, u(0)]^T$   $t \in \mathbb{N}^*$

alors si  $x(0) = 0$  on a,

$$(1.49) \quad x(t) = Q_t \underline{U}_t \quad t \in \mathbb{N}^*.$$

Supposons maintenant qu'aucune entrée n'est appliquée au système jusqu'au temps t ( $u(k) = 0, k \leq t$ ), et soit la suite d'observations y(0),... y(t-1), on a alors :

$$[y(0), y(1), \dots, y(t-1)] = [C, CA, \dots, CA^{t-1}] x_0 \quad t \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Soit } O_t = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{t-1} \end{bmatrix} \quad \text{et } \underline{Y}_t = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(t-1) \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{N}^*$$

On a :

$$(1.50) \quad \underline{Y}_t = O_t x_0 \quad t \in \mathbb{N}^*.$$

On note  $Z_{(b)}$  la matrice Z exprimée dans la base  $b = (b_i)_{i=1, n}$ .

On rappelle les définitions et propriétés bien connues des matrices et espaces de commandabilité et observabilité.

DEFINITION 1.9.  $Q_t$  (resp.  $O_t$ ) sont appelées matrice de commandabilité (resp. observabilité) du système, sur  $t$  pas,  $t \in \mathbb{N}^*$ .

Remarque. L'image de  $Q_t$  est l'ensemble des points accessibles à partir de  $0$  en  $t$  pas. Le noyau de  $O_t$  est l'ensemble des vecteurs d'état qui ne peuvent être reconstitués à partir de l'observation sur  $t$  pas.

DEFINITION 1.10.  $\text{Im } Q_n$  est appelé espace de commandabilité et est noté  $X_C$ . C'est l'espace des vecteurs d'état accessibles à partir de  $0$ .  $\text{Ker } O_n$  est appelé espace de non observabilité et est noté  $X_0$ . C'est l'espace des vecteurs d'état inobservables.

PROPRIETES. a) Les sous-espaces vectoriels  $\text{Im } Q_t$  pour  $t = 1, 2, \dots$  forment une suite croissante, constante pour  $t \geq n$ .

b) Les sous-espaces  $\text{Ker } O_t$  pour  $t = 1, 2, \dots$  forment une suite décroissante, constante pour  $t \geq n$ .

### I.3.2. DEGRES DE COMMANDABILITE ET D'OBSERVABILITE.

L'outil primordial de la troncature dans la base d'équilibre est la décomposition en valeurs singulières.

Les principales définitions et propriétés sont rappelées dans l'annexe A.

#### I.3.2. a) ETUDE DE LA COMMANDABILITE.

Soit  $Q_t$  la matrice de commandabilité sur  $t$  pas. Prenons  $t \geq n$  pour s'assurer que  $\text{Im } Q_t$  est maximum, et soit  $\rho$  le rang de  $Q_t$ .

La décomposition en valeurs singulières de  $Q_t$  permet d'écrire (voir Annexe A) :

il existe  $V, W$  avec  $V : n \times n$  orthogonale

$W : n \times n$  à colonnes orthonormées ;

des réels  $\delta_1, \dots, \delta_\rho$  avec  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_\rho > 0$  tels que :

$$(1.51) \quad Q_t = VDW^T$$

où  $D = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_\rho, 0, \dots, 0)$ .

D'après les résultats sur les valeurs singulières on a les propriétés suivantes :

PROPRIETE 1. Les vecteurs  $v_1, \dots, v_\rho$  formant les  $\rho$  premières colonnes de  $V$  déterminent une base orthonormée de  $X_c$  l'espace de commandabilité.

PROPRIETE 2. SOIT  $x \in \text{Im } Q_t$ . L'équation en  $\underline{U}_t$

admet pour solution  $x = Q_t \underline{U}_t$  où  $\underline{U}_t \in U^t$

$$\underline{U}_t = (w_1, \dots, w_\rho) \begin{bmatrix} \delta^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_\rho^T \end{bmatrix} x$$

$$(1.52) \quad \underline{U}_t^T \underline{U}_t = x^T (v_1, \dots, v_\rho) \begin{bmatrix} \delta_1^{-2} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_\rho^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_\rho^T \end{bmatrix} x$$

De plus  $\underline{U}_t$  est optimal dans le sens suivant : pour toute autre solution  $\underline{U}'_t$  de l'équation on a

$$\underline{U}_t^T \underline{U}_t \leq \underline{U}'_t^T \underline{U}'_t$$

COROLLAIRE 1.3. L'ensemble des points de l'espace d'état  $X$  atteignables en  $t$  pas par une entrée  $\underline{U}_t$  d'énergie  $\underline{U}_t^T \underline{U}_t$  au plus égale à 1 est un ellipsoïde de  $X_c$  de demi-axes  $(\delta_1 v_1, \dots, \delta_\rho v_\rho)$ .

Le corollaire indique qu'avec une même énergie  $\underline{U}_t^T \underline{U}_t = 1$  le système peut atteindre  $\delta_1 v_1$  ou  $\delta_2 v_2$ , ou  $\delta_\rho v_\rho$ .  $\delta_1$  étant supérieur ou égal à  $\delta_2$  on peut donc aller plus loin dans la direction de  $v_1$  que dans la direction de  $v_2$ .

Cela amène à introduire le degré de commandabilité.

DEFINITION 1.11. Soit  $x \in X$  et soit  $\underline{U}_t(x)$  l'entrée d'énergie minimale permettant d'arriver en  $x$  en  $t$  pas, telle que  $\underline{U}_t(x) \neq 0$ . On appelle degré de commandabilité associé à une direction  $D$  de  $X$  ( $x$  étant un vecteur directeur de la direction  $D$ ) la quantité suivante :

$$(1.53) \quad i_c(D_x) = x^T x / (\underline{U}_t(x) \cdot \underline{U}_t(x)).$$

PROPRIETES : i)  $i_c(D_x)$  ne dépend pas du vecteur  $x$  choisi dans la direction  $D_x$ .

ii) Ce degré est invariant par changement de base orthogonal dans  $X$ . Par contre ce degré n'est pas invariant lorsque le produit scalaire sur  $X$  varie.

iii) Dans la base  $V$  de  $x$  constituée par les vecteurs associés aux  $\rho$  premières colonnes de  $V$  le calcul du degré de commandabilité est donnée par la formule :

$$(1.54) \quad i_c(D_x) = x_{(v_\rho)}^T x_{(v_\rho)} / x_{(v_\rho)}^T D_\rho^{-2} x_{(v_\rho)}$$

où  $x_{(v_\rho)} = V_\rho^T x$  ;  $D_\rho = \text{diag}(\delta_1 \dots \delta_\rho)$ .

INTERPRETATION : Le degré  $i_c(D_x)$  donne une indication sur la facilité à commander la direction  $D_x$ . En effet plus  $i_c(D_x)$  est grand moins il faut d'énergie pour amener l'état loin dans la direction  $D_x$ . La direction la plus commandable est donnée par  $D_{v_1}$ , son degré est :

$$i_c(D_{v_1}) = \delta_1^2.$$

$$\text{En effet } x_{(v_\rho)}^T D_\rho^{-2} x_{(v_\rho)} \geq \delta_1^{-2} x_{(v_\rho)}^T x_{(v_\rho)}$$

$$\text{et } i_c(D_x) \leq \delta_1^2 \text{ pour tout } x \in X_c,$$

l'égalité étant atteinte pour  $x = v_1$ .

La décomposition en valeurs singulières de la matrice de commandabilité permet donc d'obtenir des directions de l'espace d'état orthogonales, ordonnées suivant leur degré de commandabilité, la première de ces directions ayant le degré de commandabilité maximum.

On remarque toutefois qu'un changement d'échelle sur les coordonnées des variables d'état suffit à bouleverser cette hiérarchie. Ainsi une direction représentant un angle peut passer de peu commandable si elle est mesurée en radians à très commandable si elle est mesurée en degré.

Le degré de commandabilité est donc sensible aux unités utilisées et il convient d'avoir toujours cette restriction à l'esprit avant de procéder à des comparaisons entre directions.

### I.3.2. b) ETUDE DE L'OBSERVABILITE.

On reprend la même démarche que précédemment (§ I.3.2. a)) avec la matrice  $O_t$  d'observabilité sur  $t$  pas. On choisit  $t \geq n$  pour avoir  $\text{Ker } O_t$  minimal, et on note  $\nu$  le rang de  $O_t$ .

Si on suppose  $u(k) = 0$  pour  $k = 0, t$  soit

$$\underline{Y}_t^T = [y^T(0), \dots, y^T(t-1)]^T \quad t \in \mathbb{N}^*$$

on a :  $\underline{Y}_t^T = O_t x_0$   $t \in \mathbb{N}^*$ .

Les éléments de l'espace d'état appartenant à  $\text{Ker } O_t$  ne sont pas observables et on peut les caractériser à l'aide de la décomposition en valeurs singulières de  $O_t$  :

Il existe  $V, W$  avec  $V : n \times n$  orthonormale

$W : n \times n$  à colonnes orthonormées ;

des réels  $\delta_1 \dots \delta_\nu$  avec  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_\nu > 0$ , tels que

$$(1.55) \quad O_t = W D V^T$$

où  $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu, 0, \dots, 0)$ .

PROPRIETE 1. Les vecteurs  $v_1 \dots v_{\nu}$  formant les  $n-\nu$  colonnes de  $V$  déterminent une base de  $X_{\nu+1}^n = \text{Ker } O_t$ , sous espace des vecteurs d'état inobservables.

PROPRIETE 2. L'énergie de la sortie obtenue à partir d'un vecteur  $x \notin \text{Ker } O_t$  s'écrit :

$$\underline{Y}_t^T \underline{Y}_t = x^T V D^2 V^T x \quad t \in \mathbb{N}^*$$

COROLLAIRE 1.4. L'ensemble des vecteurs de l'espace d'état  $X$  donnant une sortie d'énergie  $\underline{Y}_t^T(x) \underline{Y}_t(x)$  au plus égale à 1 est un ellipsoïde de demi-axes

$$\frac{v_1}{\delta_1}, \dots, \frac{v_{\nu}}{\delta_{\nu}}$$

Le corollaire indique que pour obtenir une suite de sorties de même énergie égale à 1 il faut moins se déplacer sur l'axe de l'espace d'état engendré par  $v_1$  que sur l'axe engendré par  $v_{\nu}$ .

Cela nous amène à définir le degré d'observabilité.

DEFINITION 1.12. Soit  $\underline{Y}_t(x)$  la sortie en  $t$  pas obtenue à partir de  $x \neq 0$ . On appelle degré d'observabilité associé à la direction  $D_x$  engendrée par  $x$  de l'espace d'état la quantité suivante :

$$(1.56) \quad i_o(D_x) = \underline{Y}_t^T(x) \underline{Y}_t(x) / x^T x.$$

PROPRIETES : Ce degré a les mêmes propriétés que celui de commandabilité :

- i) Il ne dépend pas du vecteur  $x$  choisi dans la direction  $D_x$
  - ii) Il est invariant par changement de base orthogonal.
- Il varie en général lorsque le produit scalaire sur  $X$  varie.

iii) Son calcul est particulièrement simple dans la base formée par les vecteurs de la matrice  $V$

$$(1.57) \quad i_{o \ x} (D) = x_{(v)}^T D^2 x_{(v)} / x_{(v)}^T x_{(v)}$$

où  $x_{(v)} = V^T x$ .

INTERPRETATION. Le degré  $i_{o \ x} (D)$  donne une indication sur la facilité à observer la direction étudiée. En effet plus  $i_{o \ x} (D)$  est grand plus l'énergie de la sortie est élevée pour une même énergie de l'état initial, et on vérifie que si  $x \in X_{\bar{o}}$  alors  $i_{o \ x} (D) = 0$ .

La direction la plus observable est donnée par  $D_{v_1}$  avec  $i_{o \ v_1} (D) = \delta_1^2$ .

La décomposition en valeurs singulières de la matrice d'observabilité donne une suite de directions orthogonales de l'espace d'état, ordonnées par degré d'observabilité décroissant, la première de ces directions ayant le degré d'observabilité maximum.

Les restrictions faites quant au changement de base non orthogonal pour la commandabilité sont toujours valables dans le cas de l'observabilité.

### 1.3.2. c) ETUDE CONJOINTE DE L'OBSERVABILITE ET DE LA COMMANDABILITE.

On a déterminé précédemment deux suites de directions orthogonales ordonnées soit par degré décroissant de commandabilité soit par degré décroissant d'observabilité. La première direction de chaque famille est la direction la plus commandable ou la plus observable de l'espace d'état pour le produit scalaire initial c'est-à-dire celui pour lequel la base de départ est orthonormée. Ces deux bases s'obtiennent à partir de la base initiale par un changement de base orthogonal.

Nous allons maintenant chercher à déterminer une suite de directions orthogonales engendrant l'espace d'état et ordonnées vis à vis des deux degrés simultanément, en nous autorisant à changer de produit scalaire.

Pour cela nous allons considérer la matrice  $O_t Q_t$  pour  $t \geq n$ ,

$$O_t Q_t = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{t-1} \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{t-1} & \dots & CA^{2(t-1)} B \end{bmatrix} \quad t \geq n$$

La matrice  $O_t Q_t$  a une structure de matrice de Hankel par blocs, le bloc  $(i, j)$  étant  $CA^{i+j-2} B$ .

On vérifie facilement que cette matrice est invariante par changement de base sur  $X$ .

On peut donner à cette matrice l'interprétation suivante :

Soit  $x_0$  l'état du système à l'instant 0, à partir de l'état initial  $x(-t)$  fixé à l'instant  $-t$  et de la suite des entrées:

$$\underline{U}_t = (u(-t), \dots, u(-1))^T \quad \text{on a : } x_0 = x(0) = Q_t \underline{U}_t .$$

La suite des sorties  $y(0), y(1), \dots, y(t-1)$ , obtenue à partir de l'instant initial  $x_0$ , et avec la commande  $u(j) = 0$  pour  $j \geq 0$  s'écrit

$$(1.58) \quad \underline{Y}_t^T = (y^T(0), \dots, y^T(t-1))^T \quad \underline{Y}_t^T = O_t Q_t \underline{U}_t^T \quad t \geq n$$

La matrice  $O_t Q_t$  traduit donc une relation entrée-sortie qui est invariante par changement de base sur l'état, et contient toute l'information du système étudié du point de vue observabilité et commandabilité. Nous allons décomposer cette matrice en valeurs singulières, celles-ci constituant un invariant du système par changement de base sur l'état.

Nous allons d'abord traiter les cas des systèmes commandables (resp. observables), les démonstrations étant particulièrement simples et parlantes dans ces cas ; nous généraliserons ensuite aux systèmes non commandables et non observables.



THEOREME 1.5. [7].

Supposons le système commandable (resp. observable). Il existe à chaque instant  $t$ ,  $t \geq n$  une base de l'espace d'état telle que les directions de cette base aient toutes un degré de commandabilité (resp. observabilité) égal à 1, et soient ordonnées par degré décroissant d'observabilité (resp. commandabilité).

De plus les degrés de commandabilité (resp. observabilité) obtenus sont les valeurs singulières de la matrice  $O_t Q_t$ .

Démonstration : On omet l'indice de temps  $t$ .

Supposons le système commandable. La décomposition de  $Q$  en valeurs singulières donne

$$Q = VDU^T \quad \text{où } D \text{ est diagonale de rang plein.}$$

Par le changement de base  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  de matrice  $VD$  la matrice

de commandabilité s'écrit :

$$Q_{(b)} = (VD)^{-1} VDU^T = U^T ;$$

et  $Q_{(b)} Q_{(b)}^T = I_n$  puisque  $V$  est orthonormale et

$$O_{(b)} = OVD .$$

La décomposition en valeurs singulières de  $O_{(b)}$  de rang  $\nu$  donne

$$O_{(b)} = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^T \quad \text{avec} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \delta & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \delta & \\ & & & & \nu & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Soit la base  $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$  associée aux colonnes de la matrice  $V$ , dans cette base

$$Q_{(a)} = \tilde{V}^{-1} U^T \quad \text{d'où} \quad Q_{(a)} Q_{(a)}^T = I_n$$

$$O_{(a)} = \tilde{U} \tilde{D} \quad \text{d'où} \quad Q_{(a)}^T O_{(a)} = D^2$$

$$\text{et} \quad O_{(a)} Q_{(a)} = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^T \tilde{U}^T$$

$\tilde{U}$  et  $\tilde{V}^T \tilde{U}^T$  sont des matrices à colonnes orthonormées. Donc pour le produit scalaire qui rend la base  $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$  orthonormale l'application linéaire associée à  $O_{(a)} Q_{(a)}$  a pour valeurs singulières les valeurs diagonales de  $\tilde{D}$ .  $\square$

REMARQUE. Ce produit scalaire n'a pas de raison d'être le même que celui de départ puisqu'un des changement de base effectué a pour matrice  $VD$ , qui n'est pas orthonogonale si  $D$  n'est pas la matrice identité.

Dans le cas où le système est commandable, la base  $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$  indiquée par le théorème donne un produit scalaire pour lequel toutes les directions de cette base sont également commandables alors que les vecteurs de la base sont ordonnés par degré d'observabilité décroissant.

Dans le cas où le système est observable, dans la base  $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$  indiquée par le théorème, si  $x_{(a)}$  est un vecteur exprimé dans cette base on a

$$\underline{Y} = O_{(a)} x_{(a)} \quad \text{et} \quad \underline{Y}^T = x_{(a)}^T O_{(a)}^T$$

et pour le nouveau produit scalaire la relation entrée-sortie est isométrique.

Toutes les directions de l'espace d'état ont même degré d'observabilité, le sous-espace de commandabilité  $X_c$  admet  $(a_j)_{1 \leq j \leq \rho}$  pour base orthonormale, les directions  $a_1 \dots a_\rho$  étant ordonnées par degré de commandabilité décroissant ( $\delta_1^2 \geq \delta_2^2 \geq \dots \geq \delta_\rho^2 > 0 \dots 0$ ).

THEOREME 1.6. [7].

Supposons le système commandable (resp. observable). Si les valeurs singulières non nulles de la matrice  $O_t Q_t$  sont distinctes deux à deux alors les directions observables (resp. commandables) de la base donnée par le théorème 1.5 sont déterminées de manière unique.

Démonstration. Supposons le système observable, soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et

$(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux bases pour lesquelles on a

$$\begin{aligned} Q_{(a)} Q_{(a)}^T &= Q_{(b)} Q_{(b)}^T = D^2 \\ Q_{(a)}^T O_{(a)} &= O_{(b)}^T O_{(b)} = I_n \end{aligned} \quad \text{où } D^2 = \begin{bmatrix} \delta_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_{\rho}^2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\rho$  est le rang de la matrice  $OQ$ .

Nous allons montrer que pour  $1 \leq i \leq \rho$  on a

$$\begin{aligned} a_i &= b_i \quad \text{ou} \\ a_i &= -b_i \end{aligned}$$

Soit  $P$  la matrice de passage entre les bases  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$

alors,  $O_{(b)} = O_{(a)} P$  et  $O_{(b)}^T O_{(b)} = I_n$  entraîne  $P^T P = I_n$ , donc  $P$  est orthonormale.

D'autre part  $Q_{(b)} = P^{-1} Q_{(a)}$  et  $D^2 = P^{-1} D^2 P$ .  $D$  étant diagonale de

valeurs propres non nulles distinctes, les colonnes 1 à  $\rho$  de  $P$  sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres, donc de la

forme  $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix}$  pour  $1 \leq i \leq \rho$  et  $P$  étant orthonormées  $\alpha_i = \pm 1$  pour  $1 \leq i \leq \rho$ .  $\square$

DEFINITION 1.13. [17]. Les valeurs singulières non nulles de la matrice de Hankel  $O_t Q_t$  sont appelées les modes du second ordre du système au temps  $t$  ( $t \geq n$ ).

Une base de l'espace d'état dans laquelle les lignes de la matrice de commandabilité (resp. les colonnes de la matrice d'observabilité) sont orthonormales est appelée base entrée-normale (resp. base sortie-normale).

PROPRIETE. Les modes du second ordre sont invariants par changement de base sur  $X$ .

Remarque. Le choix d'une base entrée (resp. sortie) normale revient à fixer le produit scalaire dans  $X$  utilisé pour calculer les degrés d'observabilité (resp. commandabilité).

En effet on peut considérer que le fait d'avoir tous les indices d'observabilité égaux à 1 revient à imposer une échelle liée au système et non aux unités initiales choisies pour décrire les variables d'état.

D'autre part le fait que les degrés d'observabilité (resp. commandabilité) ainsi choisis soient invariants par changement de base d'état montre que ces degrés ont bien une signification intrinsèque au système.

DEFINITION 1.14. Une base de l'espace d'état dans laquelle les matrices  $O_t^T O_t$  et  $Q_t^T Q_t$  sont égales à une même matrice diagonale est appelée base d'équilibre au temps  $t$ ,  $t \geq n$ .

**THEOREME 1.7. [7].**

Supposons le système observable et commandable, et soit  $\delta_1 \geq \delta_2 \dots \geq \delta_n > 0$  les valeurs singulières de la matrice  $O_t Q_t$ ,  $t \geq n$ .

Alors il existe une base d'équilibre  $(d_j)_{1 \leq j \leq n}$  dans laquelle

$$\begin{matrix} O \\ t(d) \end{matrix}^T \begin{matrix} O \\ t(d) \end{matrix} = Q \begin{matrix} Q \\ t(d) \end{matrix}^T = \text{diag}(\delta_1 \dots \delta_n)$$

et pour laquelle les degrés de commandabilité et d'observabilité d'une direction  $D_x$  vérifient

$$i_c(D_x) = \frac{\begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}^T \begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}}{\begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}^T D^{-1} \begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}} ; i_o(D_x) = \frac{\begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}^T D x \begin{matrix} (d) \\ (d) \end{matrix}}{\begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}^T \begin{matrix} x \\ (d) \end{matrix}}$$

De plus la base  $(\delta_j^{1/2} d_j)_{1 \leq j \leq n}$  est une base entrée normale et la base  $(\delta_j^{-1/2} d_j)_{1 \leq j \leq n}$  est une base sortie normale.

Démonstration. i) On omet l'indice  $t$ .  $OQ$  est de rang  $n$  :

$$\begin{aligned} \text{rang}(OQ) &\leq \inf(\text{rang } O, \text{rang } Q) = n, \\ \text{rang}(OQ) &\geq \text{rang}(O^T (OQ) Q^T) = \text{rang}((O^T O)(Q Q^T)) \geq n \end{aligned}$$

donc

$$\text{rang}(OQ) = n.$$

ii)  $OQ$  étant de rang  $n$ , le théorème précédent nous assure l'existence d'une base entrée normale  $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$  dans laquelle

$$Q \begin{matrix} Q \\ (a) \end{matrix}^T = I_n ; O \begin{matrix} O \\ (a) \end{matrix}^T = D^2$$

Soit alors le changement d'échelle défini par

$$d_j = \delta_j^{-1/2} a_j \quad \text{de matrice de passage } D^{-1/2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} O \begin{matrix} (d) \end{matrix} &= D^{1/2} O \begin{matrix} (a) \end{matrix} \quad \text{d'où } Q \begin{matrix} Q \\ (d) \end{matrix}^T = D \\ O \begin{matrix} (d) \end{matrix} &= O \begin{matrix} (a) \end{matrix} D^{-1/2} \quad \text{d'où } O \begin{matrix} O \\ (a) \end{matrix}^T = D. \end{aligned}$$

On a donc les mêmes degrés de commandabilité et d'observabilité pour les directions  $d_1, \dots, d_n$  et la direction  $d_1$  est à la fois la plus observable et la plus commandable.  $\square$

La base d'équilibre est unique au signe près dans le cas où les valeurs singulières de  $OQ$  sont distinctes deux à deux.

Cas particulier. Supposons que le système soit observable et commandable et que les dimensions des entrées et sorties soient égales à 1. Supposons de plus que les valeurs singulières de  $OQ$  soient toutes distinctes. Alors les matrices  $A, B, C$  dans la base d'équilibre ont une structure particulière.

THEOREME 1.8.

Sous les hypothèses énoncées ci-dessus les matrices du système :  $A, B$  et  $C$  dans la base d'équilibre vérifient les relations suivantes :

$$(1.59) \quad \begin{cases} SA = A^T S \\ SB = C^T \end{cases}$$

où  $S$  est une matrice signe ( $S = \text{diag}\{-1\}^+$ ). De plus la signature de  $S$  est égale à l'indice de Cauchy de la fonction de transfert du système.

Démonstration. Le système étant observable et commandable il existe une unique matrice symétrique régulière  $R$  telle que [1] :

$$(1.60) \quad \begin{cases} RA = A^T R \\ RB = C^T \end{cases}$$

de plus la signature de  $R$  est l'indice de Cauchy de la fonction de transfert du système qui est aussi la signature de la matrice de Hankel  $OQ$  si  $t = +\infty$ . (On rappelle que l'indice de Cauchy d'une fonction rationnelle est égal au nombre de poles moins le nombre de zéros de cette fonction).

Montrons que cette matrice  $R$  est une matrice signe. Les relations (1.60) entraînent

$$RQ_t = O_t^T$$

comme dans la base équilibrée on a :

$$Q_t Q_t^T = O_t^T O_t = D$$

et que l'on a supposé que les valeurs diagonales de  $D^2$  sont distinctes ;

$$(1.61) \quad D = R D R \text{ implique}$$

$$D = R^{-1} D R^{-1}$$

et 
$$D^2 = R^{-1} D^2 R$$

donc  $R$  est une matrice diagonale,  $R = \text{diag}(r_i)$  et la relation (1.61) donne  $r_i^2 = 1$ ,  $i = 1, n$ , donc la matrice  $R$  est une matrice signe.  $\square$

Remarque : Cette démonstration se fait de façon identique dans le cas continu, on observe que l'horizon utilisé pour les matrices  $Q_t$  et  $O_t$  est indifférent du moment qu'il est supérieur à  $n$  et que complémentaiement à [9], on a démontré le résultat quel que soit l'horizon.

Revenant au cas général, nous allons maintenant étendre les résultats obtenus, au cas où le système n'est ni observable ni commandable. On omet l'indice de temps  $t$ , pour alléger les notations.

THEOREME 1.9.

Il existe une base de l'espace d'état telle que :

- i) les directions commandables et observables ont le même degré de commandabilité et d'observabilité, ces degrés sont les valeurs singulières non nulles de la matrice  $OQ$  ;
- ii) les directions commandables (resp. observables) et non observables (resp. non commandables) ont pour degré de commandabilité (resp. observabilité) 1.

Démonstration. Le principe de la démonstration part de la remarque suivante : soit  $P$  une matrice de changement de base, les matrices  $Q Q^T$  et  $O^T O$  s'écrivent dans cette base :  $P^{-1} Q Q^T P^{-T}$  et  $P^T O^T O P$ .

Or si  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$  est la base initiale de  $X$  et  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq n} = \{P e_j\}_{1 \leq j \leq n}$

la nouvelle base, la base duale de  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq n}$  est la base  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq n} = \{(P^{-1})^T e'_j\}_{1 \leq j \leq n}$  où  $\{e'_j\}_{1 \leq j \leq n}$  est la base duale de  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$ .

Nous allons donc travailler avec les espaces duaux de X, Y et U.

Si q et o sont les applications linéaires associées aux matrices O et Q on a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{q} & U & \xrightarrow{\sim i_2} & U' & \xleftarrow{q^*} & X' \\
 \downarrow & & & & & & \uparrow o^* \\
 Y & \xleftarrow{\sim} & & & & & Y' \\
 & & & i_1 & & & 
 \end{array}$$

Pour des raisons de clarté on omettra de noter les isomorphismes  $i_1$  et  $i_2$ .

On va chercher une base  $\{a_j\}_{1 \leq j \leq n}$  de X telle que sa base duale  $\{a'_j\}_{1 \leq j \leq n}$  vérifie

$$\begin{cases}
 o^* o(a_j) = \lambda_j a'_j & \text{pour } j = 1, n \\
 qq^*(a'_j) = \gamma_j a_j & \text{pour } j = 1, n
 \end{cases}$$

On rappelle que si E est un espace vectoriel et  $E_1 \subset E$ ,  $E'_2 \subset E'$  des sous espaces vectoriels tels que

$$(E'_2)^\perp \oplus E_1 = E,$$

pour toute base  $e_1 \dots e_p$  de  $E_1$ , il existe  $e'_1 \dots e'_p$  une base de  $E'_2$  telle que

$$\langle e_i ; e'_j \rangle = \delta_{ij} \text{ pour } i, j \leq p.$$

Soit  $H' \subset X'$  un supplémentaire de  $(\text{Ker } o)^\perp$  dans  $X'$  et

$$H'_1 = H' \cap \text{Ker } q^* .$$

Si  $e'_1 \dots e'_p$  est une base de  $H'$  telle que  $e'_1 \dots e'_p$  engendrent  $H'_1$



il existe une base  $e_1, \dots, e_p$  de  $\text{Ker } o$  telle que pour  $i \leq p_1$  ;  $j \leq p_1$ , on a :

$$\langle e_i ; o^* o e_j \rangle = 0$$

$$\langle e'_i ; q q^* e'_j \rangle = 0.$$

Donc la forme quadratique  $q q^*$  est identiquement nulle sur  $H'$  et la forme quadratique  $o^* o$  est identiquement nulle sur l'espace  $H_1$  engendré par la famille  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq p_1}$ . On suppose maintenant que  $H'_1 = \{0\}$  et on se ramène au cas où  $\text{Ker } q^* \subset (\text{Ker } \theta)^\perp$ .

Soit  $\tilde{G} = \{v \in X ; \langle v, o^* o v \rangle = 0 \text{ et } u \in (\text{Ker } q^*)^\perp\}$

$\text{Ker } o \subset \tilde{G}$ .

Soit  $u_1 \dots u_n$  une base de  $X$  telle que

$u_1 \dots u_{m_1}$  soit une base de  $\text{Ker } \theta$   
 $u_1 \dots u_{m_1}, u_{m_1+1} \dots u_m$  soit une base de  $(\text{Ker } q^*)^\perp$

et par Hilbert-Schmidt :

$$\langle u_i ; o o^* u_j \rangle = \delta_{ij} \text{ pour } m_1 \leq i, j \leq n.$$

Les vecteurs  $u_{m_1+1} \dots u_n$  appartiennent à  $G$ , en effet

$$\langle u_i ; o o^* u_j \rangle = 0 \text{ si } i > m, \text{ et } m_1 < j \leq m.$$

D'autre part  $(\text{Ker } q^*)^\perp \cap \tilde{G} = \text{Ker } o$ , en effet si  $m_1 < j \leq m$

$$\langle u_j ; o o^* u_j \rangle = 1 \neq 0 ;$$

donc  $u_j \notin G$ .

Soit  $G$  engendré par  $u_{m_1+1} \dots u_n$ .

Il existe une base  $u'_1 \dots u'_n$  duale de  $u_1 \dots u_n$  telle que  $u'_{m_1+1} \dots u'_n$  soit une base de  $\text{Ker } q^*$ . Ces bases  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et

$(u'_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifient donc :

- (\*)  $\langle u_i, o^* o u_j \rangle = 0$  si  $j \leq m_1$
- (\*,\*)  $\langle u_i, o^* o u_j \rangle = 0$  si  $i \leq m_1$
- (\*,\*,\*)  $\langle u_i, o^* o u_j \rangle = \delta_{ij}$  si  $i, j \geq m_1$
- $\langle u'_i, qq^* u'_j \rangle = 0$  si  $j \geq m+1$
- $\langle u'_i, qq^* u'_j \rangle = 0$  si  $i \geq m+1$ .

La forme quadratique  $qq^*$  n'est pas dégénérée sur l'espace engendré par la famille  $\{u'_1 \dots u'_m\}$ . On peut donc appliquer le théorème 1.5. Soit  $\{v'_j\}_{1 < j < m}$  la nouvelle base obtenue.

La base  $e'_1 \dots e'_1, v'_1 \dots v'_1, u'_{m+1} \dots u'_n$  a pour base duale  $e_1 \dots e_{p_1}, v_1 \dots v_m, u_{m+1} \dots u_n$  et la famille  $(v_1 \dots v_m)$  engendre le même espace que la famille  $u_1 \dots u_m$ . Cette nouvelle base est la base cherchée.  $\square$

DEFINITION 1.14. Une base répondant aux caractéristiques du théorème 1.9 est appelée une base de pseudo-équilibre.

Remarques. Cette base permet d'obtenir une réalisation minimale du système en ne conservant que les directions ayant un degré de commandabilité et d'observabilité non nul.

La démonstration donnée en [7] du théorème 1.9 fournit un algorithme permettant d'obtenir une réalisation minimale du système à partir d'une réalisation quelconque.

Cas des systèmes continus.

On évoque ici brièvement les résultats similaires aux précédents dans le cas continu [8], [17].

Le système s'écrit alors sous la forme :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) = c x(t) & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Les degrés de commandabilité et d'observabilité à l'horizon  $T$  sont obtenus en décomposant en valeurs singulières les grammians de commandabilité et d'observabilité :

$$(1.62) \quad W_c^2 = \int_0^T e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$(1.63) \quad W_o^2 = \int_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

$W_c^2$  joue le rôle de  $\hat{Q}_t Q_t^T$ , et  $W_o^2$  joue le rôle de  $\hat{O}_t^T O_t$ .

On obtient alors une représentation équilibrée du système en se plaçant dans une base de l'espace d'état dans laquelle ces grammians sont tous deux égaux à une même matrice diagonale  $\Sigma^2$ .

Si  $W_c^2 = V \Sigma_c^2 V^T$  et  $W_o^2 = V_o \Sigma_o^2 V_o^T$  sont les décompositions en valeurs singulières de  $W_c^2$  et  $W_o^2$ , alors les valeurs singulières de la matrice

$$H = \Sigma_o^2 V_o^T V_c \Sigma_c^2$$

sont invariantes par changement de base sur  $X$ . Ces valeurs singulières sont par définition les modes du second ordre du système continu.

Cette matrice  $\hat{H}$  joue le rôle de la matrice  $OQ$  dans le cas discret.

On a de plus la propriété suivante :

Soit le système discret écrit sous forme matricielle

$$S_d : \begin{cases} x(t+1) = A^d x(t) + B^d u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = C^d x(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

obtenu en discrétisant le système  $S_c$  au pas  $t_s$ . On a :

$$\begin{aligned} A^d &= \exp(At_s) \\ B^d &= \int_0^{t_s} e^{A(t_s-t)} dt \\ C^d &= C \end{aligned}$$

et soit  $Q_{T/t_s}$  et  $O_{T/t_s}$  les matrices de commandabilité et d'observabilité sur l'horizon  $T/t_s$ , associées.

PROPOSITION 1.10 [17]. Les modes du second ordre du système continu sont les limites pour  $t_s \rightarrow 0$  des modes du second ordre du système discrétisé au pas  $t_s$ .

Dans le cas particulier des systèmes à une entrée et une sortie et si l'horizon est infini on a les propriétés suivantes :

PROPRIETE 1 [8]. Si le système est asymptotiquement stable, commandable et observable alors les matrices  $(A,B,C)$  du système dans la base d'équilibre sont entièrement déterminées par les données suivantes :

- les modes du second ordre du système
- la matrice signe introduite dans le théorème 1.8.
- la matrice de commande  $B$ .

Principe de la démonstration :

On utilise les relations (1.59) et le fait que dans la base d'équilibre la matrice A est solution des équations de Lyapounov :

$$\Sigma^2 A + A^T \Sigma^2 = -C^T C$$

$$\Sigma^2 A^T + A \Sigma^2 = -B B^T$$

PROPRIETE 2 [8]. Les valeurs propres  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  du grammien croisé

$$W_{co} = \int_0^\infty e^{At} B (e^{At} C)^T dt$$

vérifient la relation suivante :

$$\Lambda = S \Sigma^2$$

où  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

$\Sigma^2 = \text{diag}\{\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2\}$ ,  $\{\sigma_i\}_{i=1, n}$  sont les modes du second ordre du système et S est la matrice signe associée à la représentation équilibrée, de plus

$$W_{co}^2 = W_c^2 W_o^2.$$

Démonstration : voir Fernando-Nicholson [8].

Remarque : la matrice  $W_{co}$  joue alors le rôle de la matrice OQ du cas discret.

I.3.2. d) ETUDE DE LA PERTURBABILITE.

Nous avons étudié précédemment le cas des systèmes déterministes et montré comment on pouvait dégager des directions de l'espace d'état qui soit à la fois les plus commandables et les plus observables, donc qui contiennent le plus d'information relative au système quant à ces notions.

Dans le cas où le système est stochastique une troisième caractéristique s'ajoute à celles de la commandabilité et de l'observabilité : la perturbabilité.

Après avoir défini la perturbabilité nous allons nous intéresser aux directions de l'espace d'état les plus perturbables et tenter d'établir un parallèle entre l'étude conjointe commandabilité-observabilité et celles de commandabilité-perturbabilité et perturbabilité-observabilité. Plaçons nous dans le cas où l'entrée est identiquement nulle mais les vecteurs d'état sont bruités.

L'équation d'état s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + \varepsilon(t) & t \in \mathbb{N} \\ x(0) = 0 & \text{d'où} \end{cases}$$

$$(1.64) \quad x(t+1) = \sum_{j=1}^t A^{t-j} \varepsilon(j) \quad t \in \mathbb{N}$$

où  $\varepsilon(t)$  est un bruit blanc.

Soit  $D_d$  une direction de l'espace, de vecteur directeur  $d$  avec  $d^T d = 1$ . La projection de  $x(t)$  sur cette direction est  $d^T x(t)$  qui est une variable aléatoire dont on calcule la variance.

Si cette variance est élevée on dira que la direction  $D_d$  est fortement perturbable, si la variance est proche de 0 on dira que la direction  $D_d$  est peu perturbable, c'est-à-dire peu sensible aux perturbations constituées par les bruits.

DEFINITION 1.16. Le degré de perturbabilité d'une direction  $D_d$  au temps  $t$  est défini par

$$i_p(D_d) = \text{var}(d^T x(t)) / d^T d$$

où  $d \neq 0$  est un vecteur de la direction  $D$ .

THEOREME 1.11.

Soit  $t$  fixé. Il existe une suite de directions orthogonales de vecteurs directeurs  $(d_1 \dots d_n)$  de l'espace d'état, ordonnées par degré de perturbabilité décroissant, qui sont les directions propres de la matrice de covariance de l'état à l'instant  $t$ .

Démonstration :

$$\text{var}(d^T x(t)) = d^T \text{cov}(x(t), x(t)) d.$$

La matrice  $\text{cov}(x(t), x(t))$  étant symétrique, semi-définie positive, il existe une suite de directions propres orthogonales ordonnées suivant les valeurs propres respectives décroissantes. Cette suite fournit une solution.  $\square$

Etudions maintenant l'effet d'un changement de base de l'espace d'état sur les degrés de perturbabilité.

PROPOSITION 1.12. Les degrés de perturbabilité d'une direction donnée restent inchangés par changement de base orthogonal.

Démonstration : évident.

La notion de perturbabilité d'une variable d'état ainsi que celles de commandabilité et d'observabilité est donc étroitement liée au produit scalaire qui est défini sur l'espace d'état.

Un changement de base non orthogonal (par exemple un changement d'échelle) modifierait donc le degré de perturbabilité d'une même direction à un instant donné. Pour avoir des quantités invariantes nous allons de même que précédemment traiter conjointement perturbabilité et commandabilité et perturbabilité et observabilité.

Pour plus de concision on appellera forme quadratique de perturbabilité ou commandabilité ou observabilité à un instant donné  $t$  les formes quadratiques induites par les matrices de covariance  $W_t$  de l'état à l'instant  $t$  et les matrices  $Q_t^T Q_t$  et  $O_t^T O_t$  où  $Q_t$  et  $O_t$  sont les matrices de commandabilité et d'observabilité à l'instant  $t$ .

Si une des formes quadratiques est dégénérée on qualifiera de pseudo-produit scalaire l'application bilinéaire qui lui est associée et on appellera sous-espace dégénéré son noyau.

THEOREME 1.13.

A chaque instant  $t \geq n$  il existe une base de l'espace d'état telle que :

les directions engendrant le supplémentaire de la somme des sous-espaces dégénérés pour les formes quadratiques de perturbabilité et commandabilité, sont ordonnées par degré croissant de commandabilité et décroissant de perturbabilité.

Démonstration : Pour alléger les notations on omet l'indice de temps  $t$ . Il existe une matrice de changement de base  $P$  et des scalaires réels  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que [5] :

$$\begin{cases} P^T W P = \Lambda & \Lambda = \text{diag}(\lambda_i)_{i=1,n} \\ P^T Q Q^T P = \Delta & \Delta = \text{diag}(\delta_i)_{i=1,n} \end{cases}$$

et la base associée à  $P$  peut être décomposée en 4 sous-familles :

$$e_1 \dots e_{n_1} ; e_{n_1+1} \dots e_{n_2} ; e_{n_2+1} \dots e_{n_3} ; e_{n_3+1} \dots e_n$$

telles que :

$$\begin{cases} e_i^T W e_i = 0 \\ e_i^T Q Q^T e_i = 0 \end{cases} \quad \text{si } i \leq n_1$$

$n_1$  est la dimension de l'intersection des sous-espaces dégénérés pour les deux formes quadratiques.

$$\begin{cases} e_i^T W e_i = 0 \\ e_i^T Q Q^T e_i = \delta_i^2 > 0 \end{cases} \quad \text{si } n_1 < i \leq n_2$$

$n_2 - n_1$  est la dimension de l'intersection du sous-espace dégénéré pour la forme quadratique de perturbabilité et d'un supplémentaire du sous-espace dégénéré pour la forme quadratique de commandabilité.

$$\begin{cases} e_i^T W e_i = \lambda_i^2 > 0 \\ e_i^T Q Q^T e_i = 0 \end{cases} \quad \text{si } n_2 < i \leq n_3$$

$n_3 - n_2$  est la dimension de l'intersection du sous-espace dégénéré pour la forme quadratique de commandabilité et d'un supplémentaire du sous-espace dégénéré pour la forme quadratique de perturbabilité.



$$\begin{cases} e_i^T W e_i = \lambda_i^2 > 0 \\ e_i^T Q Q^T e_i = \delta_i > 0 \end{cases} \quad \text{si } i > n_3$$

$n-n_3$  est la dimension d'un supplémentaire de la somme des sous-espaces dégénérés pour les deux formes quadratiques.

Soit  $T^{-1} = \tilde{\Lambda}^{-1/2} P^{-T}$  où  $\tilde{\Lambda}$  est diagonale avec

$$\tilde{\Lambda}_{ii} = 1 \quad \text{si } \lambda_i = 0$$

$$\tilde{\Lambda}_{ii} = \lambda_i^2 \quad \text{si } \lambda_i^2 > 0$$

On a  $T^{-1} W T^{-T} = \tilde{\Lambda}^{-1/2} P^{-T} P^T W P P^{-1} \tilde{\Lambda}^{-1/2}$

$$= \tilde{\Lambda}^{-1/2} \Lambda \tilde{\Lambda}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n_2 & \\ 0 & I_{n-n_2} \end{bmatrix}$$

d'autre part

$$T^{-1} Q Q^T T^{-T} = \tilde{\Lambda}^{-1/2} \Delta \tilde{\Lambda}^{-1/2}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \gamma_{n_3+1}^2 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \gamma_n \end{bmatrix} = \Gamma = \text{diag}(\gamma_i^2)_{1 \leq i \leq n}$$

où  $\gamma_i = \delta_i / \lambda_i^2$  pour  $i > n_3$  et les  $\gamma_i$  sont rangés par ordre décroissant (quitte à réordonner  $\Lambda$ ).

Soit  $M^{-1} = \Gamma^{-1/4} T^{-1}$  où  $\Gamma$  est diagonale avec

$$\Gamma_{ii} = 1 \quad \text{si } \gamma_i = 0$$

$$\Gamma_{ii} = \gamma_i^2 \quad \text{si } \gamma_i^2 \neq 0$$



Remarque : De même que dans le cas commandabilité/observabilité si la matrice d'observabilité est de rang plein les degrés sont déterminés de manière unique.

Lorsqu'on parle de degré de perturbabilité (ou de commandabilité ou d'observabilité) il est toujours nécessaire de préciser et la base dans laquelle on travaille, et le produit scalaire utilisé. Ces degrés ne sont pas une notion intrinsèque au système mais fonction des unités et variables employées.

Les couples de degrés déterminés par les théorèmes 1.9, 1.13 et 1.14 peuvent être compris comme la détermination préalable d'un même (pseudo) produit scalaire par rapport auquel ces degrés sont calculés.

Par abus de langage on parlera non des degrés de commandabilité relatifs au produit scalaire déterminé par le théorème 1.13 mais des degrés de commandabilité-perturbabilité, de même pour les degrés de commandabilité-observabilité ou perturbabilité-observabilité.

On a donc obtenu pour un système donné des familles d'invariants qui sont liés à des couples de caractéristiques de ce système.

Ces familles  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  sont :

$\mathcal{F}_1 =$  (degrés de commandabilité/observabilité)

$\mathcal{F}_2 =$  (degrés de commandabilité/perturbabilité)

$\mathcal{F}_3 =$  (degrés d'observabilité/perturbabilité)

Ces familles d'invariants ne sont de cardinal  $n$  que lorsque les matrices de commandabilité, d'observabilité et de covariance sont de rang plein. En général, ces familles ne sont pas égales sauf dans les cas suivants :

PROPOSITION 1.15. Supposons que les matrices de commandabilité, d'observabilité et de covariance de l'état soient de rang plein.

a) Les trois familles  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  sont égales si et seulement si :

Les degrés de commandabilité/observabilité sont égaux à 1 et si la base d'équilibre associée est orthonormée pour le produit scalaire induit par la matrice de covariance de l'état.

b) Les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont égales si et seulement si :

La base  $(p_j)_{j=1,n}$  de matrice de passage  $P$  qui vérifie :

$$P = \Gamma^{1/2} P^{-1}$$

où  $P^{-1}$  est la matrice de passage de la base d'équilibre commandabilité/observabilité ,

$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}_{i=1,n}$  ,  $\gamma_i$  sont les degrés de commandabilité/observabilité,

est orthonormée pour le produit scalaire induit par  $W$ .

Démonstration : pour que  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$  il faut et il suffit qu'il existe une matrice  $P$  de rang plein et une diagonale positive telle que :

$$(1.65) \quad \begin{cases} P^{-1} Q Q^T P^{-T} = \Gamma \\ P^T O O P = \Gamma \\ P^{-1} W P^{-T} = \Gamma^{-1} \end{cases}$$

d'où le résultat b).

Pour avoir de plus

$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$  il faut et il suffit d'avoir (1.65) et

$$P^T O O P = \Gamma^{-1}$$

d'où la condition a).  $\square$

### I.3.3. APPLICATION A LA REDUCTION DE MODELES.

Lors d'une réduction de modèle on cherche à garder dans le modèle réduit ce qui est le plus caractéristique du modèle initial. La représentation dans la base d'équilibre donne des directions de la base d'état qui sont ordonnées par degré de commandabilité et d'observabilité décroissants. Il paraît donc naturel d'envisager une réduction de modèle par troncature qui conserverait les directions de la base d'équilibre à la fois les plus observables et les plus commandables.

On sait d'autre part que les modes du second ordre non nuls du système qui sont aussi les valeurs singulières de la matrice de Hankel permettent de déterminer une réalisation minimale du système. En négligeant les directions peu observables et peu commandables dans la base d'équilibre on peut considérer que l'on obtient une réalisation "presque minimale" du système.

Dans le cas général il n'existe pas de base de l'espace d'état qui soit ordonnée à la fois par degré croissant de commandabilité, de perturbabilité et d'observabilité. Une réduction qui tiendrait compte de ces trois propriétés paraît difficile à envisager, on traitera donc uniquement les systèmes déterministes.

On suppose que le système à réduire est écrit dans la base d'équilibre, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = Cx(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit  $(\delta_i)_{i=1, n}$  les modes du second ordre du système. Supposons

dans un premier temps qu'il existe  $k \in [1, n]$  tel que  $\sum_{i=m+1}^n \delta_i \ll \sum_{i=1}^m \delta_i$ ;

partitionnons le système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où  $x_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  appartient à un sous-espace de  $X$  de dimension  $m$ .  
Le modèle réduit

$$(1.66) \quad \begin{cases} x_1(t+1) = A_{11} x_1(t) + B_1 u(t) \\ \hat{y}(t) = C_1 x_1(t), \end{cases}$$

néglige les directions de la base d'équilibre qui sont très peu commandables et observables par rapport à celles qui sont conservées.

Dans le cas où une séparation du type  $\sum_{i=m+1}^n \delta_i \ll \sum_{i=1}^m \delta_i$  ne peut être réalisée, le critère déjà utilisé pour l'agrégation

$$(1.67) \quad J^2 = \frac{\|\hat{y} - y\|^2}{\|y\|^2},$$

calculé pour chaque sous système obtenu par troncature dans la base d'équilibre, peut aider à déterminer, en utilisant un seuil (usuellement  $J \leq 10\%$ ) le nombre de directions retenues.

On étudie maintenant les propriétés du modèle réduit de cette manière.

Les systèmes instables peuvent être traités de deux façons : soit à horizon fini, soit comme pour l'agrégation en les découplant en une partie stable et instable et ne traitant que la partie stable ce qui permet de travailler à horizon infini.

Les propriétés présentées ci-après concernent les systèmes asymptotiquement stables dans le cas où l'horizon est infini.

THEOREME 1.16 [18].

Supposons que le système soit commandable (resp. observable). Alors les deux sous-systèmes obtenus par troncature dans la base d'équilibre sont asymptotiquement stables.

Démonstration : Supposons le système commandable. Dans la base d'équilibre la matrice  $QQ^T$  est diagonale et de rang plein. Soit  $D$  cette matrice. A horizon infini, la matrice  $D$  est solution de l'équation de Lyapounov :

$$(1.68) \quad ADA^T - D = -BB^T$$

où  $A$  et  $B$  sont les matrices dynamiques et de commande dans la base d'équilibre.

Soit  $A_{11}$  et  $B_1$  les matrices dynamiques et de commande du modèle réduit, et partitionnons l'équation (1.68) :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 B_2^T \\ B_2 B_1^T & B_2 B_2^T \end{bmatrix}$$

le coin supérieur gauche donne

$$(1.69) \quad A_{11} D_1 A_{11}^T - A_{12} D_2 A_{12}^T - D_1 = -B_1 B_1^T$$

Soit  $(\lambda, v)$  tels que  $A_{11}^T v = \lambda v$ , alors

$$(|\lambda|^2 - 1) v^* D_1 v = -(v^* A_{12} D_2 A_{12}^T v + v^* B_1 B_1^T v) \leq 0 \quad \text{donc} \quad |\lambda|^2 - 1 \leq 0.$$

Supposons  $|\lambda| = 1$ , alors

$$\begin{cases} v^* A_{12} = 0 & \text{puisque } D_2 \text{ est définie positive} \\ v^* B_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (v^* \ 0) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \lambda(v^*, 0) \\ (v^* \ 0) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

ce qui contredit l'hypothèse de commandabilité donc  $|\lambda| < 1$  et  $A_{11}$  est asymptotiquement stable.  $\square$

THEOREME 1.17 [18].

Supposons que la partition du système soit telle que le plus petit des modes du second ordre correspondant au sous-système conservé soit strictement supérieur au plus grand des modes du second ordre du sous-système négligé.

Alors le sous-système obtenu par troncature dans la base d'équilibre est commandable et observable si le système initial l'est.

LEMME. La matrice dynamique du système équilibré vérifie :

$$\|A\| \leq 1$$

où  $\|A\|$  représente la norme opérateur de  $A$ .

Démonstration : le système étant équilibré on a

$$(1.70) \quad A D A^T - D = -B B^T$$

$$(1.71) \quad A^T D A - D = -C^T C$$

en multipliant (1.70) par  $A^T$  et  $A$  et en l'ajoutant à (1.71) on a

$$A^T A D A^T A - D = -(A^T B B^T A + C^T C)$$

Soit  $(\lambda, v)$  tel que  $A^T A v = \lambda v$ , on a

$$(|\lambda|^2 - 1) v^T D v = -(v^T A^T B B^T A v + v^T C^T C v) \leq 0,$$



donc  $|\lambda|^2 \leq 1$ .

Or  $\|A\|^2$  est la plus grande valeur propre de  $AA^T$ , donc  $\|A\| < 1$ .  $\square$

Démonstration du théorème : Supposons que le sous système (1.66) ne soit pas observable, alors il existe  $v$  et  $\lambda$  vecteur propre et valeur propre de  $A_{11}$  tels que

$$\begin{cases} A_{11} v = \lambda v \\ C v = 0 \\ \|v\| = 1 \end{cases}$$

et  $(1-|\lambda|^2) v^* D_1 v = v^* A_{12}^T D_2 A_{21} v$  d'après (1.69) or

$v^* D_1 v \geq \sigma_m^2(D_1)$  où  $\sigma_m^2(D_1)$  est la plus petite valeur propre de  $(DD^T)$   
 $v^* A_{21}^T D_2 A_{21} v \leq \|A_{21} v\|^2 \sigma_M^2(D_2)$  où  $\sigma_M^2(D_2)$  est la plus grande valeur propre de  $(DD^T)$

d'où  $(1-|\lambda|^2) \sigma_m^2(D_1) \leq \|A_{21} v\|^2 \sigma_M^2(D_2)$

d'après le lemme

$$\left\| \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} v \right\| \leq 1$$

donc

$$\|A_{11} v\|^2 + \|A_{21} v\|^2 \leq 1 \text{ implique } \|A_{21} v\|^2 < 1 - |\lambda|^2$$

et

$$(1-|\lambda|^2) \sigma_m^2(D_1) \leq (1-|\lambda|^2) \sigma_M^2(D_2).$$

Le sous-système étant asymptotiquement stable on a :

$$1 - |\lambda|^2 > 0$$

et

$$\sigma_m^2(D_1) \leq \sigma_M^2(D_2)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse formulée.

La démonstration de la commandabilité se fait de la même manière. □

Remarque : Le sous-système de matrice dynamique  $A_{22}$ , de commande  $B_2$  et d'observation  $C_2$  n'est pas nécessairement observable ou commandable.

Le cas continu est légèrement différent :

PROPOSITION 1.18. Soit  $S_C$  un système continu. Supposons que les ensembles de modes du second ordre correspondant aux sous-systèmes conservé et négligé n'aient pas de valeurs communes, alors les deux sous-systèmes sont asymptotiquement stables, commandables et observables.

Démonstration : voir Pernebo et Silverman [18].

Remarque : Les démonstrations des propriétés indiquées ci-dessus utilisent essentiellement les équations de Lyapounov (1.70) et (1.71).

Elles ne sont donc pas généralisables en utilisant des démarches semblables dans les cas où l'on travaille à horizon fini ou si le système initial est instable.

Dans ces cas on n'a actuellement aucun résultat concernant la stabilité ou l'instabilité du modèle réduit, ni la commandabilité ou l'observabilité.

#### I.3.4. CONCLUSION.

L'étude de la représentation équilibrée nous a permis d'introduire les notions de degré de commandabilité, d'observabilité et de perturbabilité d'une direction donnée de l'espace d'état.

Si ces notions apportent beaucoup quant à la compréhension interne d'un système, nous avons vu qu'elles dépendent étroitement du produit scalaire choisi pour calculer les degrés. L'étude conjointe de la commandabilité et de l'observabilité, de la commandabilité et de la perturbabilité, ou de l'observabilité et la perturbabilité est une manière de choisir le produit scalaire et donne des familles de degrés qui sont invariantes par changement de base sur l'espace d'état. Dans le cas où seule une des trois propriétés du système a besoin d'être étudiée, indépendamment des deux autres, on peut envisager une normalisation des directions de la base d'état initiale afin de s'affranchir des contraintes liées aux unités utilisées. Une telle norme devrait avoir une signification propre au système, on peut penser par exemple aux contributions introduites dans le cas de l'agrégation.

Les différentes sortes de degré ont été définies pour un horizon fini fixé. Dans le cas des systèmes stables, il est facile d'étendre cette définition au cas de l'horizon infini en utilisant les équations de Lyapounov associées aux grammiens de commandabilité et d'observabilité et à la matrice de covariance du vecteur d'état. Il serait intéressant d'étudier l'éventuelle convergence des degrés lorsque l'horizon tend vers l'infini.

Certaines propriétés, stabilité, commandabilité, observabilité, des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre ont pu être dégagées dans les cas où le système initial est stable et où la réduction est effectuée à horizon infini.

L'étude de ces propriétés demande à être étendue au cas des réductions effectuées à horizon fini et aux systèmes instables. La réduction d'un système instable (Chapitre III) nous montera qu'on obtient dans ce cas particulier, un système réduit instable, ce fait doit encore être prouvé théoriquement.

Le lien entre la réduction et l'horizon où celle-ci est réalisé doit lui aussi être établi de façon théorique. Enfin comme dans le cas de l'agrégation, il serait intéressant d'étudier la robustesse des différentes familles de degrés vis à vis de l'estimation des paramètres du système.

#### I.4. CONCLUSION.

Les deux méthodes de réduction de modèles présentées sont les deux méthodes de réduction dans la base d'état le plus couramment utilisées.

Leurs objectifs sont sensiblement différents : alors que l'agrégation a pour but de reproduire le plus fidèlement possible le comportement entrée-sortie du système initial tout en conservant une partie de la dynamique, la réduction dans la base d'équilibre cherche à conserver les directions de l'espace d'état les plus significatives au sens des couples commandabilité-observabilité, commandabilité-perturbabilité ou perturbabilité-observabilité. La philosophie des deux méthodes est donc fondamentalement différente : alors que l'agrégation tente de reproduire un comportement externe, la réduction dans la base d'équilibre tente de reproduire un comportement interne. C'est cette différence de conception qui explique la différence de mise en oeuvre dans les deux cas.

Pour réaliser une réduction par agrégation il est impératif de choisir le type d'entrée qui est appliqué au système, et chaque type d'entrée différent entraîne une réduction différente.

La réduction dans la base d'équilibre est indépendante du type d'entrée appliqué. Elle est à notre avis d'un usage plus général que l'agrégation.

D'un point de vue quantitatif il paraît difficile de comparer les deux méthodes.

Le critère de réduction mesurant l'écart entre les sorties du système initial et du modèle réduit peut être calculé dans chaque cas particulier pour les deux méthodes. Dans le cas de la représentation équilibrée il n'y a pas d'équivalent algébrique à l'expression (1.32) ; ceci ne permet pas d'établir de comparaison dans le cas général.

Toutefois dans le cas où la base d'équilibre du système initial coïncide avec une base dans laquelle la matrice dynamique est diagonale on peut dégager un résultat :

PROPOSITION 1.19. Soit (S) le système déterministe suivant :

$$(S) : \begin{cases} x(t+1) = ax(t) + bu(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = cx(t) & t \in \mathbb{N} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

On suppose que (S) est stable, commandable, observable.

On suppose que la matrice de  $a$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont distinctes deux à deux.

Supposons que la base d'équilibre de (S) coïncide avec une base dans laquelle la matrice de  $a$  soit diagonale.

Supposons que l'entrée appliquée au système soit une impulsion à l'instant 0.

Alors la méthode de réduction par agrégation et la méthode de réduction par troncature dans la base d'équilibre à horizon infini conduisent au même modèle réduit.

Démonstration. On note  $\Lambda, B, C$  les matrices de  $a, b$  et  $c$  dans la base d'équilibre

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} ; \quad B^T = (B_1, \dots, B_n) ; \quad C = (C_1, \dots, C_n).$$

Soit  $Q$  et  $O$  les matrices de commandabilité et d'observabilité du système à horizon infini dans cette base.

$$\text{Soit } W = \sum_{t=0}^{\infty} x(t)x(t)^T.$$

$OO^T$  et  $Q^T Q$  sont solutions de l'équation d'inconnue  $D$ ,  $D$  symétrique positive :

$$(1.70) \quad \Lambda D \Lambda^T - D = -B B^T$$

$\Lambda$  est diagonale dans cette base, et l'entrée appliquée est une impulsion, donc  $W$  est également solution de l'équation (1.70) (voir Tableau 1.1).

$$\text{Soit } D = OO^T = Q^T Q = W.$$

D'après le théorème 1.6 on a

$$D = \text{diag}\{\delta_i\}_{i=1,n}$$

et l'équation (1.70) s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{l} \delta_i |\lambda_i|^2 - \delta_i = -B_i B_i^T \quad i = 1, n \\ B_i B_j^T = 0 \quad i \neq j, i = 1, n, j = 1, n. \end{array} \right.$$

On a aussi d'après (1.71)

$$\begin{array}{l} \delta_i |\lambda_i|^2 - \delta_i = -C_i C_i^T \quad i = 1, n \\ C_i C_j = 0 \quad i \neq j. \end{array}$$

Remarquons que si  $\dim(U) = 1$  (resp.  $\dim Y = 1$ ) ceci implique

$B = 0$  (resp.  $C = 0$ ).

On a donc

$$\delta_i = \frac{B_i B_i^T}{1 - |\lambda_i|^2} = \frac{\gamma_i^2}{1 - |\lambda_i|^2} \quad i = 1, n$$

où  $B_i B_i^T = C_i C_i^T = \gamma_i^2 \quad i = 1, n.$

La matrice  $G$  de la définition (1.8) nécessaire au classement des valeurs propres est alors

$$G = \text{diag} \left\{ \frac{\gamma_i^2}{1 - |\lambda_i|^2} \right\}_{i=1, n}$$

Toutes les méthodes d'agrégation donnent pour ce cas particulier le même classement et les directions propres sont ordonnées par indices

$$G_{ii} = \frac{\gamma_i^2}{1 - |\lambda_i|^2} \quad \text{décroissants.}$$

Les directions de la base d'équilibre qui sont aussi les directions propres, sont ordonnées par indice

$$\delta_i = \frac{\gamma_i^2}{1 - |\lambda_i|^2} \quad \text{décroissant.}$$

On a donc le même classement des mêmes directions dans les deux cas et on obtient la même réduction.

REMARQUE. Ce résultat montre que dans le cas où l'on peut comparer les deux méthodes d'un point de vue algébrique on obtient la même réduction. Son application reste toutefois exceptionnelle : en général la base d'équilibre ne coïncide pas avec une base où la matrice dynamique est diagonale.



## II - COMMANDE D'ORDRE REDUIT.

Un modèle réduit déterminé de façon à approcher au mieux le système initial, peut servir à déterminer une commande d'ordre réduit.

La commande appelée commande d'ordre réduit est une commande calculée sur le modèle réduit (par un critère quadratique, placement de poles ou autre) et réinjectée dans le système initial.

Nous allons étudier les propriétés du système initial rebouclé par cette commande d'ordre réduit.

En particulier nous étudions la stabilité de ce système lorsque la commande est calculée sur un modèle réduit par agrégation et sur un modèle réduit par troncature dans la base d'équilibre.

### II.1. - COMMANDE SUR LE MODELE AGREGÉ.

On a vu dans la première partie (propriété 6, paragraphe I.2.1) qu'une commande par retour d'état stabilisant le modèle agrégé, stabilise le système initial dès que les valeurs propres instables du système ont été conservées dans le modèle agrégé.

On étudie maintenant le cas où l'état doit être estimé par une procédure de filtrage de type Kalman.

La sortie réellement observée étant la sortie du système initial, c'est celle-ci qui est utilisée pour construire un estimateur de l'état agrégé.

Cette procédure va introduire un terme supplémentaire dans la matrice dynamique du système rebouclé par rapport au résultat classique de la commande par retour d'état estimé [2].

On établit ici des conditions suffisantes de stabilité du système rebouclé.

Des questions semblables ont été étudiées par Siret [23] et Duc [6] :

Siret [23] propose deux démarches symétriques :

- Soit de construire un estimateur de l'état agrégé et reboucler le système initial par une commande par retour d'état agrégé estimé.

C'est la démarche que nous avons adoptée ici.

- Soit de construire un estimateur de l'état initial, agréger celui-ci, et reboucler le système initial par une commande par retour d'état estimé agrégé.

Cette démarche est en fait un cas particulier de la précédente.

Dans les deux cas la stabilité du système initial rebouclé n'est pas assurée et l'auteur propose de procéder à des constructions d'estimateurs successives, suivies par des simulations afin de réaliser une synthèse de commande la plus performante possible.

Duc [6] propose d'implanter une commande par retour de sortie conçue de la manière suivante :

- On construit un estimateur de l'état agrégé qui est une fonction linéaire de la sortie du système initial.
- C'est cet estimateur qui remplace l'état agrégé dans la loi de commande déterminée sur le modèle réduit.

Il montre qu'il existe un voisinage de 0 tel que si la valeur du critère défini par l'expression (1.32) se trouve dans ce voisinage alors la loi de commande ainsi déterminée est stabilisante pour le système initial. Mais l'impossibilité dans laquelle on se trouve de donner une borne chiffrée à ce voisinage fait que la stabilité du système initial n'est pas assurée a priori.

#### II.1.1. Ecriture du système initial bouclé par une commande d'ordre réduit.

Ecrivons le système initial (1.2) rebouclé par une commande calculée sur le modèle agrégé.

Soit  $(u(t))_{t \in \mathbb{N}} \in U$  une commande par retour d'état agrégé stabilisant le modèle agrégé on a :

$$(2.1) \quad \begin{cases} u(t) = Gx'(t) & t \in \mathbb{N} ; & G : r \times m \\ \text{spectre}(A'+B'G) \subset D(0,1) \end{cases}$$

Soit  $\hat{x}'(t)_{t \in \mathbb{N}}$  un estimateur de  $x'(t)_{t \in \mathbb{N}}$  obtenu par le filtre suivant :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \hat{x}'(t+1) = A' \hat{x}'(t) + B' u(t) + K' [C' \hat{x}'(t) - y(t)] & t \in \mathbb{N} \\ \hat{x}'(0) = x'(0) & K : m \times q \end{cases}$$

$K'$  le gain d'estimation est choisi de façon que la matrice  $A' + K'C'$  soit stable.

La sortie  $y'(t)_{t \in \mathbb{N}}$  du modèle agrégé a été remplacée par la sortie  $y(t)_{t \in \mathbb{N}}$  du système initial qui est la sortie réellement observée.

On rappelle que la sortie  $y'(t)$  du modèle agrégé est calculée de façon à minimiser un critère quadratique qui mesure l'écart entre les sorties  $y'(t)$  du modèle agrégé et  $y(t)$  du système initial (voir § I.2.4.b)).

Soit  $e'(t)_{t \in \mathbb{N}} \in X$  l'erreur d'estimation de l'état réduit :

$$(2.3) \quad e'(t) = x'(t) - \hat{x}'(t) \quad t \in \mathbb{N}.$$

$A' + K'C'$  étant une matrice stable on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e'(t) = 0.$$

Rebouclons le système initial par la commande  $(u(t))_{t \in \mathbb{N}}$  donnée par l'expression (2.1).

Un calcul élémentaire montre que le système  $(S_e)$  de variable d'état, l'état initial  $(x(t))_{t \in \mathbb{N}}$  et l'erreur d'estimation  $(e'(t))_{t \in \mathbb{N}}$  s'écrit sous forme matricielle :

$$(2.4) \quad (S_e) : \begin{bmatrix} x(t+1) \\ e'(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BGL & -BG \\ -K'(C'L-C) & A'+K'C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{N}$$

La propriété 6 du § I.2.1 nous assure la stabilité de la matrice  $A+BGL$  et la matrice  $K'$  a été choisie de façon à avoir  $A'+K'C'$  stable.

Le fait d'avoir remplacé la sortie  $(y'(t))_{t \in \mathbb{N}}$  par la sortie  $(y(t))_{t \in \mathbb{N}}$  dans l'estimation de l'état agrégé a introduit le terme  $-K(C'L-C)$  dans la matrice dynamique du système (S). Ce terme interdit de conclure directement à la stabilité du système rebouclé (2.4).

Nous allons étudier des conditions suffisantes portant sur les termes  $K'(C'L-C)$  et BG pour assurer la stabilité du système (S).

Pour cela nous allons utiliser des résultats sur la stabilité des systèmes interconnectés.

### II.1.2. Théorème de Siljak stochastique.

Un théorème de Siljak [21] donne des conditions suffisantes de stabilité asymptotique d'un système continu déterministe formé de sous systèmes interconnectés asymptotiquement stables.

Nous allons étendre ce théorème au cas des systèmes discrets stochastiques.

#### NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit (S) un système dont  $x_t \in \mathbb{R}^n$  représente l'état à l'instant  $t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , et qui s'écrit :

$$(2.5) \quad (S) : \begin{cases} x_{t+1} = f(t, x_t, \varepsilon_t) & t \in \mathbb{N} \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est un processus aléatoire de  $\mathbb{R}^n$ .  
 $f$  est une fonction mesurable bornée sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

En outre plaçons nous dans le cas où 0 est le seul point d'équilibre du système :

$$(2.6) \quad 0 = f(t, 0, \varepsilon_t).$$

Le système (S) est formé des  $s$  sous-systèmes interconnectés  $(S_i)$

de variable d'état  $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$  ( $n = \sum_{i=1}^s n_i$ )

$$(2.7) \quad (S_i): x_{t+1}^i = g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i) + h_i(t, x_t, \varepsilon_t) \quad i = 1, s.$$

Les  $\varepsilon^i = (\varepsilon_t^i)_{t \in \mathbb{N}}$  sont des processus aléatoires de  $\mathbb{R}^{n_i}$  indépendants deux à deux et indépendantes de la condition initiale  $x_0$ .

Les fonctions  $g_i$  sont mesurables bornées sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$  et pour tout  $t \in \mathbb{N}$  vérifient

$$(2.8) \quad 0 = g_i(t, 0, \varepsilon_t^i).$$

Les fonctions d'interconnexions  $h_i$  définies sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sont mesurables, elles s'écrivent :

$$h_i(t, x_t, \varepsilon_t) = h_i(t, e_{i1}x_t^1, \dots, e_{ij}x_t^j, \dots, e_{is}x_t^s, \varepsilon_t)$$

où  $\{e_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \in \{0, 1\}^{s^2}$ .

On note  $\mathcal{F}_t^i$  les tribus engendrées par  $\{x_0^i \dots x_t^i\}$   $i = 1, s$  et  $(S_i)$  le sous-système :

$$(S_i) : \begin{cases} x_{t+1}^i = g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i) \\ x_0^i = x_0^i \end{cases}$$

HYPOTHESES COMPLEMENTAIRES.

Pour tout  $i$ ,  $i = 1, s$ , il existe des fonctions  $v_i$  telles que :

$v_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , vérifiant les trois propriétés suivantes :

i) les  $v_i$  sont lipschitziennes : il existe  $K_i > 0$  telle que pour tout  $x^i, x^{i'} \in \mathbb{R}^{n_i}$  on ait :

$$|v_i(x^i) - v_i(x^{i'})| \leq K_i \|x^i - x^{i'}\|.$$

ii) il existe deux fonctions  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  croissantes telles que pour tout  $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$  :

$$\alpha_i(\|x^i\|) \leq v_i(x^i) \leq \beta_i(\|x^i\|).$$

iii) il existe une fonction  $\gamma_i$  continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$\gamma_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_i(z) > 0 \quad \text{si} \quad z > 0$$

$$\lim_{\|x^i\| \rightarrow \infty} \gamma_i(\|x^i\|) > 0 \quad x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

pour tout  $t \in \mathbb{N}$  :  $E^{\mathcal{F}_t^i} \{v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i)\} \leq -\gamma_i(\|x_t^i\|) \quad \text{p.s.}$

De plus :

iv) quel que soit  $j, j = 1, s$  il existe une constante  $\xi_{ij} > 0$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{N}$

$$E^{\mathcal{F}_t} (\|h_i(t, x_t, \varepsilon_t)\|) \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \xi_{ij} \gamma_j(\|x_t^j\|).$$

REMARQUES : les conditions ii) et iii) assurent la stabilité asymptotique des sous-systèmes  $(S_i)$  [15].

La condition iv) interdit à  $\|h_i\|$  de tendre trop vite vers l'infini.

Les conditions i) et iv) sont les mêmes conditions que celles posées par Siljak dans le cas continu déterministe.

THEOREME 2.1. Sous les hypothèses et hypothèses complémentaires,

pour toute famille  $\{e_{ij}\}_{i=1, s} \in \{0, 1\}^{s^2}$ ,  $x = 0$  est asymptotiquement stable pour le système (S) si les mineurs principaux de la matrice  $W = \{w_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}}$  avec  $w_{ij} = -\delta_{ij} + e_{ij} K_i \xi_{ij}$  satisfont les inégalités :

$$(2.9) \quad (-1)^k \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ w_{k1} & \dots & \dots & w_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pour tout } k, k = 1, s.$$

Démonstration.

Calculons  $E^{\mathcal{F}_t} \{v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i)\}$  où  $\mathcal{F}_t$  est la tribu engendrée par  $\{x_0, \dots, x_t\}$

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{F}_t}(v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i)) &= E^{\mathcal{F}_t}\{v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i) + h_i(t, x_t, \varepsilon_t)) - v_i(x_t^i)\} \\ &= E^{\mathcal{F}_t}\{v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i) + h_i(t, x_t, \varepsilon_t)) - v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i)) \\ &\quad + v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i)) - v_i(x_t^i)\} \end{aligned}$$

Or 
$$E^{\mathcal{F}_t}\{v_i[g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i) + h_i(t, x_t, \varepsilon_t)] - v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i))\} \leq$$

$$E^{\mathcal{F}_t}\{K_i \|h_i(t, x_t, \varepsilon_t)\| \} \leq K_i \sum_{j=1}^s e_{ij} \gamma_j(\|x_t^j\|)$$

d'après la propriété i) pour la première inégalité et ii) pour la seconde et

$$E^{\mathcal{F}_t}(v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i)) - v_i(x_t^i)) = E^{\mathcal{F}_t^i}(v_i(g_i(t, x_t^i, \varepsilon_t^i)) - v_i(x_t^i))$$

d'après l'hypothèse d'indépendance des processus  $\varepsilon^i$ . On a alors

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{F}_t}(v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i)) &\leq K_i \sum_{j=1}^s e_{ij} \xi_{ij} \gamma_j(\|x_t^j\|) - \gamma_i(\|x_t^i\|) \\ &= \sum_{j=1}^s w_{ij} \gamma_j(\|x_t^j\|) . \end{aligned}$$

Or  $W = (w_{ij})_{i=1, s}$  est une matrice de Metzler c'est-à-dire que tous ses éléments diagonaux sont positifs ou nuls. De plus l'inégalité des mineurs (2.9) fait que  $W$  est aussi une matrice de Hicks.

Toute matrice de Metzler qui est aussi une matrice de Hicks vérifie la propriété suivante [22] :

Pour tout  $c \in \mathbb{R}^{+s}$ , il existe  $d \in \mathbb{R}^{+s}$  tels que

$$(2.10) \quad d^T W = -c^T$$

Soit 
$$v(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_s(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma(\|x\|) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\|x^1\|) \\ \vdots \\ \gamma_s(\|x^s\|) \end{bmatrix}$$

Soit  $c \in \mathbb{R}^{+s}$  donné et  $d$  déterminé par l'expression (2.10).

Soit  $\nu$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow d^T \nu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on a } E^{\mathcal{F}_t}(\nu(x_{t+1}) - \nu(x_t)) &\leq \sum_{i=1}^s d^i \sum_{j=1}^s w_{ij} \gamma_j(\|x_j\|) = d^T W \gamma(\|x\|) \\ &= -c^T \gamma(\|x\|). \end{aligned}$$

Définissons  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par :

$$\alpha(\|x\|) = \sum_{i=1}^s d^i \alpha_i(\|x^i\|)$$

$$\beta(\|x\|) = \sum_{i=1}^s d^i \beta_i(\|x^i\|)$$

$$\gamma(\|x\|) = \sum_{i=1}^s c^i \gamma_i(\|x^i\|)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissantes,  $\gamma$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie :

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(z) > 0 \quad \text{si } z > 0$$

$$\gamma \text{ continue et } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \gamma(\|x\|) > 0$$

et

$$\alpha(\|x\|) \leq \nu(x) \leq \beta(\|x\|)$$

$$E^{\mathcal{F}_t}(\nu(x_{t+1}) - \nu(x_t)) \leq -\gamma(\|x_t\|) \text{ p.s.}$$

On en déduit que  $\nu$  est une fonction de Lyapounov pour le système (S) et que le point d'équilibre  $x=0$  du système (S) est asymptotiquement stable pour toute famille

$$\{e_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} \in \{0,1\}^{s^2}. \square$$



### II.1.3. Application au cas linéaire déterministe

Nous allons appliquer le théorème précédent au cas simple d'un système discret linéaire déterministe.

Soit (S) le système formé des s sous-systèmes interconnectés (S<sub>i</sub>)

$$(S_i) : x_{t+1}^i = A_i x_t^i + \sum_{j=1}^s e_{ij} A_{ij} x_t^j \quad t \in \mathbb{N}, i=1, s$$

Les matrices A<sub>i</sub> sont supposées stables et on pose pour chaque i :

$$(2.11) \quad v_i(x^i) = (x^{iT} H_i x^i)^{1/2}$$

où H<sub>i</sub> est la matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapounov,

$$(2.12) \quad A_i^T H_i A_i - H_i = -G_i$$

où G<sub>i</sub> est une matrice symétrique définie positive donnée.

On note  $\lambda_m(Z)$  la valeur propre minimum de la matrice Z  
 $\lambda_M(Z)$  la valeur propre maximum de la matrice Z  
 $\sigma_M^M(Z) = (\lambda_M(Z^T Z))^{1/2}$

on note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i=1, s$  définie par :

$$\|x^i\| = (x^{iT} x^i)^{1/2}$$

Vérifions que v<sub>i</sub> définie en (2.11) possède les propriétés requises pour appliquer le théorème 2.1.

i) v<sub>i</sub> est Lipschitzienne en x<sup>i</sup>

$$|v_i(x^i) - v_i(x^{i'})| \leq \lambda_M^{1/2}(H_i) \|x^i - x^{i'}\| \quad \text{pour tout } x^i, x^{i'} \in \mathbb{R}^{n_i}$$

ii)  $\lambda_m(H_i)^{1/2} \|x_i\|^{1/2} \leq v_i(x^i) \leq \lambda_M^{1/2}(H_i) \|x_i\|$  pour tout x<sup>i</sup> ∈ ℝ<sup>n<sub>i</sub></sup>

on pose alors

$$\alpha_i(\|x^i\|) = \lambda_m^{1/2}(H_i) \|x^i\|$$

$$\beta_i(\|x^i\|) = \lambda_M^{1/2}(H_i) \|x^i\|$$

et α<sub>i</sub> et β<sub>i</sub> possèdent les propriétés demandées.

iii)  $x_{t+1}^i = A_i x_t^i$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i) &= \frac{x_t^{iT} A_i^T H_i A_i x_t^i - x_t^{iT} H_i x_t^i}{(x_t^{iT} A_i^T H_i A_i x_t^i)^{1/2} + (x_t^{iT} H_i x_t^i)^{1/2}} \\ &= \frac{-x_t^{iT} G_i x_t^i}{(x_t^{iT} A_i^T H_i A_i x_t^i)^{1/2} + (x_t^{iT} H_i x_t^i)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i) \leq \frac{-\lambda_m(G_i) \|x_t^i\|^2}{[\lambda_M^{1/2}(A_i^T H_i A_i) + \lambda_M^{1/2}(H_i)] \|x_t^i\|}$$

$$v_i(x_{t+1}^i) - v_i(x_t^i) \leq \frac{-\lambda_m(G_i) \|x_t^i\|}{2\lambda_M^{1/2}(H_i)}$$

La dernière inégalité utilise la relation

$$\lambda_M(V_1 - V_2) \leq \lambda_M(V_1) - \lambda_m(V_2)$$

pour  $V_1$  et  $V_2$  matrices hermitiennes, ce qui donne

$$\lambda_M(A_i^T H_i A_i) = \lambda_M(H_i - G_i) \leq \lambda_M(H_i) - \lambda_m(G_i) \leq \lambda_M(H_i)$$

En posant

$$\gamma_i(\|x_t^i\|) = \frac{\lambda_m(G_i) \|x_t^i\|}{2\lambda_M^{1/2}(H_i)} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{N}$$

on obtient une fonction  $\gamma_i$  qui répond aux caractéristiques demandées.

iv) Pour tout  $i, i=1, s$

$$\|h_i(t, x_t)\| \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \|A_{ij} x_t^j\| \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \lambda_M^{1/2} (A_{ij}^T A_{ij}) \|x_t^j\|$$

$$\|h_i(t, x_t)\| \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \frac{\lambda_m(G_j) 2\lambda_M^{1/2}(H_j)}{2\lambda_M^{1/2}(H_j) \lambda_m(G_j)} \lambda_M^{1/2} (A_{ij}^T A_{ij}) \|x_t^j\|$$

$$\|h_i(t, x_t)\| \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \frac{2\lambda_M^{1/2}(H_j)}{\lambda_m(G_j)} \lambda_M^{1/2} (A_{ij}^T A_{ij}) \gamma_j (\|x_t^j\|)$$

en posant 
$$\xi_{ij} = \frac{2\lambda_M^{1/2}(H_j)}{\lambda_m(G_j)} \lambda_M^{1/2} (A_{ij}^T A_{ij}) \quad i, j=1, s$$

on a

$$\|h_i(t, x_t)\| \leq \sum_{j=1}^s e_{ij} \xi_{ij} \gamma_j (\|x_t^j\|) \quad \text{pour tout } i=1, s$$

ce qui montre que la propriété est vérifiée.

En posant  $w_{ij} = -\delta_{ij} + e_{ij} 2\lambda_M^{1/2}(H_i) \lambda_M^{1/2}(H_j) \lambda_m^{-1}(G_j) \lambda_M^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij})$   $i, j=1, s$  on est donc en mesure d'appliquer le théorème 2.1.

Nous allons l'appliquer au cas de deux systèmes couplés, c'est à dire :  $e_{12}=e_{21}=1$  et  $e_{11}=e_{22}=0$ .

PROPOSITION 2.2

Soit (S) un système formé de deux sous-systèmes stables couplés.

$$(S_i): x_{t+1}^i = A_i x_t^i + A_{ij} x_t^j \quad i, j=1,2$$

Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux matrices symétriques définies positives données,  $H_1$  et  $H_2$  deux matrices symétriques définies positives telles que:

$$A_i^T H_i A_i - A_i = -G_i \quad i=1,2$$

Si

$$\lambda_M(H_1) \lambda_M(H_2) \lambda_m^{-1}(G_1) \lambda_m^{-1}(G_2) \sigma_M(A_{12}) \sigma_M(A_{21}) < 1/4$$

alors le système (S) est stable.

Démonstration

La matrice introduite par le théorème 2.1 est ici:

$$W = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2\lambda_M^{1/2}(H_1)\lambda_M^{1/2}(H_2)\sigma_M(A_{12})}{\lambda_m(G_2)} \\ \frac{2\lambda_M^{1/2}(H_2)\lambda_M^{1/2}(H_1)\sigma_M(A_{21})}{\lambda_m(G_1)} & -1 \end{bmatrix}$$

Les inégalités (2.9) s'écrivent

$$w_{11} = -1 < 0$$

$$\det(W) = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = 1 - 4\lambda_M(H_1)\lambda_M(H_2)\lambda_m^{-1}(G_1)\lambda_m^{-1}(G_2)\sigma_M(A_{12})\sigma_M(A_{21}) < 0$$

Cette dernière inégalité suffit à montrer la stabilité du système (S) et démontre la proposition. □

II.1.4. Conditions suffisantes de stabilité.

Reprenons le système (S)<sub>e</sub>

$$(2.4) \quad (S)_e \quad \begin{bmatrix} x(t+1) \\ e'(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BGL & -BG \\ -K'(C'L-C) & A'+K'C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

Les processus  $(\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{N}}$ ,  $(\eta(t))_{t \in \mathbb{N}}$  étant indépendants entre eux et de la condition initiale, la stabilité du système (S)<sub>e</sub> est assurée dès que la matrice dynamique est stable.

On peut donc se ramener au cas déterministe.

Les matrices  $A+BGL$  et  $A'+K'C'$  étant stables (voir § II.1.1), si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux matrices symétriques définies positives données, il existe  $H_1$  et  $H_2$  deux matrices symétriques définies positives telles que:

$$(2.13) \quad \begin{cases} (A+BGL)^T H_1 (A+BGL) - H_1 = -G_1 \\ (A'+K'C')^T H_2 (A'+K'C') - H_2 = -G_2 \end{cases}$$

On est donc dans la situation de la proposition 2.2 et on en déduit un premier résultat:

COROLLAIRE 2.1

Pour toutes matrices symétriques définies positives  $G_1, G_2$ ;  $H_1$  et  $H_2$  étant définies par la relation (2.13), si

$$(2.14) \quad \sigma_M(BG) \sigma_M(K'(C'L-C)) < 1/4 \frac{\lambda_m(G_1) \lambda_m(G_2)}{\lambda_M(H_1) \lambda_M(H_2)}$$

alors le système  $(S)_e$  est stable.

Ce premier résultat qui a le mérite de donner un critère chiffré de stabilité du système initial rebouclé par une commande d'ordre réduit, dépend toutefois des matrices  $G_1$  et  $G_2$  qui sont extérieures au système.

Pour avoir une condition qui ne dépende que des paramètres du système on minore le second membre de (2.14).

Dans ce but on utilise un résultat du à Yasuda et Hirai [27]:

LEMME

Soit  $A$  une matrice asymptotiquement stable et  $G_1$  une matrice symétrique positive donnée.

Supposons que

$$1 - \sigma_M^2(A) > 0$$

Soit  $H_1$  solution de

$$A^T H_1 A - H_1 = -G_1$$

alors

$$(2.15) \quad \lambda_M(H_1) \leq \frac{\lambda_M(G_1)}{1 - \sigma_M^2(A)}$$

Démonstration : voir [27]

On en déduit le second résultat:

COROLLAIRE 2.2

Sous les hypothèses de la proposition 2.2,

si

$$1 - \sigma_M^2(A+BGL) > 0$$

$$1 - \sigma_M^2(A'+K'C') > 0$$

et si

$$(2.16) \quad \sigma_M(BG)\sigma_M(K'(C'L-C)) < 1/4 [1 - \sigma_M^2(A+BGL)] [1 - \sigma_M^2(A'+K'C')]$$

alors le système (S<sub>e</sub>) est stable.

Démonstration

Soit G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub> deux matrices symétriques définies positives et H<sub>1</sub> et H<sub>2</sub> définies par la relation (2.13).

D'après le lemme on a:

$$1/4 \frac{(1 - \sigma_M^2(A+BGL))(1 - \sigma_M^2(A'+K'C'))}{\lambda_M(G_1)\lambda_M(G_2)} < 1/4 \frac{\lambda_m(G_1)\lambda_m(G_2)}{\lambda_M(H_1)\lambda_M(H_2)}$$

On peut choisir les G<sub>i</sub>, i=1,2 telles que:

$$\frac{\lambda_m(G_i)}{\lambda_M(G_i)} = 1 \quad i=1,2$$

et l'inégalité (2.16) assure la stabilité du système (S<sub>e</sub>) d'après le corollaire 2.1. □

Remarques :

Le corollaire 2.2 ne s'applique que dans les cas où les matrices  $A+BGL$  et  $A'+K'C'$  ont une norme opérateur inférieure à 1.

Pour obtenir une commande d'ordre réduit par retour d'état estimé qui soit stabilisante pour le système initial il suffit donc d'avoir:

- i) une matrice de commande  $G$  telle que  $A'+B'G$  soit stable,
- ii) une matrice d'estimation  $K'$  telle que  $A'+K'C'$  soit stable,
- iii) que la condition (2.14) soit satisfaite pour un couple de matrices symétriques définies positives  $(G_1, G_2)$ .

Si de plus on a  $\sigma_M(A+BGL) < 1$  et  $\sigma_M(A'+K'C') < 1$  alors la condition (2.16) est suffisante.

Il est nécessaire de construire un algorithme permettant de satisfaire ces conditions. Des essais numériques pourront alors être effectués.

II.2 - COMMANDE D'ORDRE REDUIT UTILISANT LA REPRESENTATION EQUILIBREE.

On examine ici brièvement les caractéristiques d'une commande calculée comme précédemment sur le modèle réduit et réinjectée dans le système initial, le modèle réduit étant cette fois obtenu par troncature dans la base d'équilibre.

On étudie le cas d'une commande par retour d'état réduit non estimé, et on se place dans le cas déterministe.

Soit (S) le système initial écrit sous forme matricielle:

$$(S) \quad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = Cx(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On suppose que (S) est instable. On a vu (chapitre I.3.3) qu'un système instable peut être réduit de deux manières différentes en utilisant la représentation équilibrée.

- i) Soit en réduisant le système globalement sur un horizon fini.
- ii) Soit en découplant les parties stables et instables.

On réduit alors uniquement la partie stable, le modèle réduit est alors le système découplé formé du sous-système instable et de la réduction du sous-système stable. Cette démarche permet de travailler à horizon infini et de pouvoir utiliser les théorèmes 1.16 et 1.17.

Ecrivons le système rebouclé dans les deux cas.

- i) Si on réduit le système globalement sur un horizon fini, dans la base d'équilibre le système partitionné s'écrit:

$$(S): \begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = [C_1 \quad C_2] x(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le modèle réduit s'écrit:

$$(S_r): \begin{cases} x_1(t+1) = A_{11}x_1(t) + B_1u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y_1(t) = C_1x_1(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit  $(u(t))_{t \in \mathbb{N}} \in U$ , une commande d'ordre réduit calculée sur le modèle réduit et qui le stabilise:

$$\begin{cases} u(t) = G_1 x_1(t) & t \in \mathbb{N} \\ \text{spectre}(A_{11} + G_1 B_1) \subset D(0, 1) \end{cases}$$

Le système initial rebouclé par cette commande d'ordre réduit s'écrit:

$$(S_{bc1}): \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + G_1 B_1 & A_{12} \\ A_{21} + G_1 B_1 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = [C_1 \quad C_2] x(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On voit qu'en l'absence d'informations sur la stabilité de la matrice  $A_{22}$  on ne peut pas utiliser la proposition 2.2. On ne peut donc déduire de notre étude, dans ce cas des conditions suffisantes qui permettent d'assurer la stabilité du système initial rebouclé.



ii) En découplant les sous-systèmes stables et instables on peut écrire dans une nouvelle base, le système (S) de la façon suivante:

$$(S): \begin{cases} \begin{bmatrix} x^i(t+1) \\ x^s(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^i & 0 \\ 0 & A^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^i(t) \\ x^s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^i \\ B^s \end{bmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = [C^i \quad C^s] \begin{bmatrix} x^i(t) \\ x^s(t) \end{bmatrix} & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où

$$(S^i): \begin{cases} x^i(t+1) = A^i x^i(t) + B^i u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y^i(t) = C^i x^i(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est le sous-système instable de (S): les valeurs propres de  $A^i$  sont toutes les valeurs propres instables de A, et

$$(S^s) \begin{cases} x^s(t+1) = A^s x^s(t) + B^s u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y^s(t) = C^s x^s(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est le sous système stable de (S): les valeurs propres de  $A^s$  sont toutes les valeurs propres stables de A.

Le sous-système  $(S^s)$  partitionné dans une base d'équilibre s'écrit:

$$(S^s): \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1^s(t+1) \\ x_2^s(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12}^s \\ A_{21}^s & A_{12}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^s(t) \\ x_2^s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y_1^s(t) + y_2^s(t) = [C_1^s \quad C_2^s] \begin{bmatrix} x_1^s(t) \\ x_2^s(t) \end{bmatrix} & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le modèle réduit du sous-système stable s'écrit:

$$(S_r^s): \begin{cases} x_1^s(t+1) = A_{11}^s x_1^s(t) + B_1^s u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y_1^s(t) = C_1^s x_1^s(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et le modèle réduit ( $S_r$ ) du système initial ( $S$ ) s'obtient en ajoutant le sous-système instable ( $S_i$ ) au modèle réduit ( $S_r^s$ ):

$$(S_r): \begin{cases} x_r(t+1) = \begin{bmatrix} x^i(t+1) \\ x_1^s(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_{11}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^i(t) \\ x_1^s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^i \\ B_1^s \end{bmatrix} u(t) & t \in \mathbb{N} \\ y_r(t) = [C^i \quad C_r^s] \begin{bmatrix} x^i(t) \\ x_1^s(t) \end{bmatrix} & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Posons  $A_r = \begin{bmatrix} A^i & 0 \\ 0 & A_{11}^s \end{bmatrix}$  ;  $B_r = \begin{bmatrix} B^i \\ B_1^s \end{bmatrix}$  ;  $C_r = [C^i \quad C_r^s]$

Soit  $(u(t))_{t \in \mathbb{N}} \in U$  une commande calculée sur le modèle réduit ( $S_r$ ) et qui le stabilise:

$$\begin{cases} u(t) = G_r x_r(t) & t \in \mathbb{N} \\ \text{spectre}(A_r + G_r B_r) \subset D(0,1) \end{cases}$$

Le système initial ( $S$ ) rebouclé par cette commande d'ordre réduit s'écrit:

$$(S_{bcl}): \begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} A_r + B_r G_r & \begin{bmatrix} 0 \\ A_{12}^s \end{bmatrix} \\ [0 \quad A_{21}^s] + B_r G_r & A_{22}^s \end{bmatrix} x(t) & t \in \mathbb{N} \\ y(t) = [C_r \quad C_r^s] x(t) & t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si l'horizon de réduction est infini le théorème 1.16 nous dit que la matrice  $A_{22}^s$  est asymptotiquement stable. La matrice  $A_r + B_r G_r$  étant aussi asymptotiquement stable, on peut appliquer la proposition 2.2.

On peut également adapter le corollaire 2.2 au système ( $S_{bcl}$ ).

Notons  $A_{21} = [0 \quad A_{12}^s]$  et  $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{12}^s \end{bmatrix}$ .

COROLLAIRE 2.3

Supposons que  $\sigma(A_r + B_r G_r) < 1$  et  $\sigma(A_{22}^s) < 1$ .

Si  $\sigma_M(A_{21}) \sigma_M(A_{12}) < 1/4 [1 - \sigma_M^2(A_r + B_r G_r)] [1 - \sigma_M^2(A_{22}^s)]$

alors le système bouclé ( $S_{bcl}$ ) est asymptotiquement stable.

Remarque:

Le cas où le système initial est stable se ramène très facilement au cas ii).

Dans ce cas, si on réduit à horizon fini, le corollaire 2.3 donne des conditions suffisantes de stabilité.

En l'absence de résultats théoriques plus généraux il reste toujours la possibilité de vérifier a posteriori les propriétés de la commande d'ordre réduit sur chaque application traitée.

C'est ce qui a été fait par Sezer et Siljak [20] qui utilisent la réduction dans la base d'équilibre pour déterminer une commande d'ordre réduit et qui se servent d'un critère de sous-optimalité sur la commande pour déterminer l'ordre de la réduction.

Cette commande est calculée par minimisation d'un critère quadratique sur le modèle réduit. Le critère de sous-optimalité est le rapport entre la valeur minimum du critère quadratique obtenue sur le modèle initial, et la valeur du critère quadratique obtenue par la commande d'ordre réduit réinjectée dans le système initial.

Cette démarche implique le calcul d'une commande d'ordre réduit pour tous les ordres de réduction, et surtout le calcul de la commande optimale pour le système initial.

C'est donc une démarche assez lourde qui cadre mal avec les objectifs d'une commande d'ordre réduit.

Une autre approche est proposée par Jonckheere et Silverman [12]. Les systèmes étudiés sont les systèmes continus stochastiques. Lorsque la réduction doit être réalisée en vue de la commande, on considère les deux équations de Riccati de filtrage et de commande:

$$A\Pi + \Pi A^T + BB^T - \Pi CC^T \Pi = 0$$

$$A^T P + PA + C^T C - PBB^T P = 0$$

$\Pi$  et  $P$  sont deux matrices symétriques définies positives. Les matrices de covariance et de pénalisation sont posées égales à la matrice identité.

On effectue ensuite la décomposition en valeurs singulières de  $P$  et  $\Pi$  et on se place dans une base où ces deux matrices sont diagonales. Le modèle réduit est alors obtenu par troncature dans cette nouvelle base et les gains de commande et de filtrage sont obtenus par troncature de  $P$  et  $\Pi$  dans cette base.

On montre que le système initial bouclé par cette commande d'ordre réduit est dissipatif donc stable.

### II.3 - CONCLUSION

La réduction de modèles est un outil intéressant pour réaliser une commande d'ordre réduit.

Dans le cas où la réduction est obtenue par agrégation la commande d'ordre réduit par retour d'état est stabilisante pour le système initial et permet de placer les poles qui ont été conservés dans le modèle agrégé.

Lorsque l'état doit être estimé on a pu dégager des conditions suffisantes sur les gains de commande et d'estimation afin d'assurer la stabilité du système initial rebouclé.

Lorsque la réduction est réalisée par troncature dans la base d'équilibre sur des critères de commandabilité et d'observabilité, une commande d'ordre réduit par retour d'état n'est pas stabilisante a priori pour le système initial.

Nous avons procédé à la réduction à horizon infini et découplé les parties stables et instables du système initial pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité.

Ces conditions sont obtenues de la même manière que les conditions suffisantes de stabilité dans le cas de l'agrégation: en majorant les termes de couplages d'une matrice dont les deux blocs diagonaux sont stables afin d'en assurer la stabilité.

Dans le cas de la réduction par troncature dans une base d'équilibre il semble toutefois préférable d'opter comme Jonckere et Silverman pour un équilibre filtrage-commande lorsque la réduction a pour but le calcul d'une commande d'ordre réduit.

### III. EXEMPLE D'APPLICATION.

Les deux méthodes de réduction présentées ont été appliquées au système représentant le pilotage du lanceur ARIANE IV-44L avec empenage.

Le système du lanceur peut être représenté par un vecteur d'état dont la dynamique temporelle est contrôlée par un vecteur de commande et forcée par un vecteur de perturbations. Des détecteurs fournissent un vecteur de sortie dont la dynamique est bruitée par un bruit de mesures.

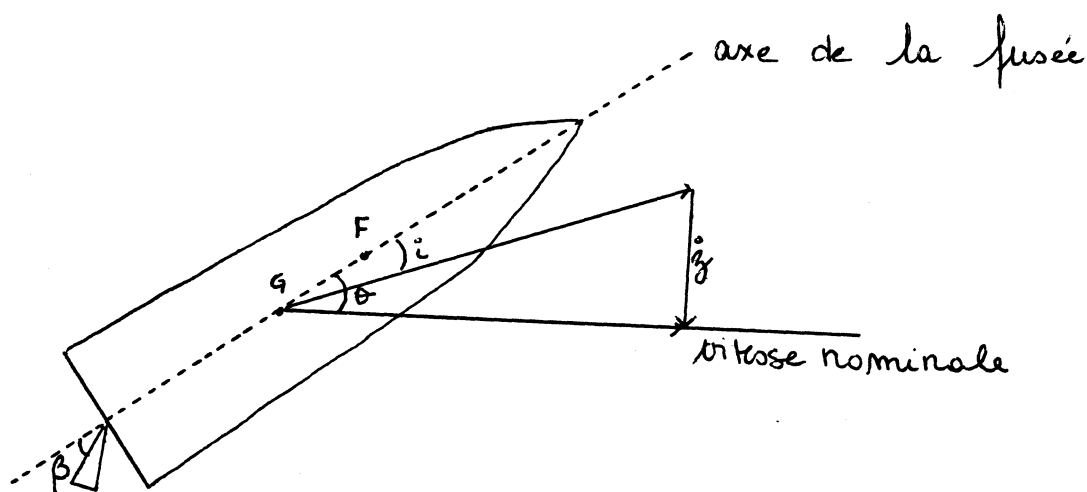
Les deux dynamiques d'état et de sortie sont linéaires, mais différents paramètres variant avec l'altitude (résistance de l'air..) ces dynamiques ne sont pas stationnaires.

Ce système est un système stochastique de par la présence des mesures bruitées et le fait que l'engin est soumis à des perturbations aérodynamiques aléatoires.

Les mesures sont prélevées de manière discrète, et l'équation d'état a été discrétisée à la même fréquence d'échantillonnage de 10 Hz.

#### PRESENTATION DES VARIABLES D'ETAT.

Le lanceur se présente de la façon suivante :



F : foyer d'application des forces aérodynamiques.

G : centre de gravité.

Le modèle servant à l'élaboration du bloc de pilotage comprend sept variables d'état qui sont :

$\dot{\theta}$  : vitesse de tangage

$\theta$  : attitude

$\dot{\beta}$  : vitesse de braquage

$\beta$  : angle des tuyères

$\dot{z}$  : dérive transversale

$w_r$  : vent réduit (1ère composante)

$w_1$  : vent réduit (2nde composante)

On rajoute à ce bloc, un bloc modélisant les quatre premiers modes de flexion de la fusée et leurs dérivées,

$(q_i, \dot{q}_i)_{i=1,4}$  ; ce qui donne un système de dimension 15.

La variable de commande est l'angle de braquage  $\beta$  et la variable de sortie est l'attitude  $\theta$  mesurée par un gyroscope.

Il s'agit donc d'un système mono-entrée, mono-sortie. Les positions respectives du centre de gravité et du centre de poussée en font un système instable, et la présence des variables de vent dans l'équation d'état, un système non commandable.

Le but du pilotage est de minimiser la dérive  $\dot{z}$  tout en surveillant l'incidence  $i$ , à l'aide de l'angle de braquage  $\beta$ .

La durée du vol est de 134 secondes. La présence de vents importants autour de la période de 90 s fait que cet instant est particulièrement critique, nous avons réalisé les études les plus approfondies sur le système représentant le lanceur à cet instant.

Trois types d'études ont été réalisées :

1. Réduction par agrégation :

On a effectué le classement énergétique des modes dans diverses situations.

Cette étude a été menée sur la période 83 s - 97 s.

2. Représentation dans la base d'équilibre :

On a effectué le calcul des modes du second ordre sur le système considéré comme déterministe et calculé la base d'équilibre à 90 s.

3. Comparaison de trajectoires :

Pour deux entiers différents et pour différents ordres de réduction on a représenté les sorties des modèles réduits obtenus par les deux méthodes.

III.1. CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES EN VUE DE L'AGREGATION.

Le logiciel utilisé est le logiciel Clamod [6], qui a été modifié pour pouvoir s'adapter à une classe de modèles plus large (stochastiques, instables), pour tourner sur un micro-ordinateur aux capacités scientifiques limitées (pas de complexes) et le langage Fortran 77 a été standardisé.

De plus les méthodes (2) et (4) (voir § I.2.3 b)) ont été programmées et ajoutées au logiciel ce qui permet la comparaison de ces méthodes et de la méthode (1), initiale proposée par Michailesco [16].

STRUCTURE DU PROGRAMME :

a) Une partie conversationnelle propose à l'utilisateur plusieurs possibilités :

i) système à temps discret, continu.

ii) système stochastique, déterministe.

iii) entrée : impulsion, échelon, rampe.

iv) régime transitoire, permanent.

v) méthode (1), (2), (4), qu'on a appelées méthode LSS, méthode Skelton, méthode AGS.

b) Le programme découple alors les parties stables et instables du système et calcule la solution V de l'équation de Lyapounov associée aux paramètres sur la partie stable (cf. Tableau 1.1).

c) Le classement des modes est effectué suivant la méthode choisie.

Plusieurs lectures des paramètres associés aux possibilités ii) à iv) sont possibles pour une même exécution, ce qui évite de devoir repasser par une diagonalisation du système.

RESULTATS DISPONIBLES :

Le programme donne en sortie un fichier appelé 'RESULT' où l'on peut lire :

- les matrices initiales du système (dynamique, d'entrée, de sortie, de covariance).
- la matrice des vecteurs propres et son inverse.
- les deux sous-systèmes stables et instables dans la base diagonale.
- pour chaque lecture de paramètres on a :
  - \* un tableau avec les valeurs propres (par paire conjuguée : seule une valeur propre est mentionnée dans le tableau mais l'énergie associée est l'énergie de la paire) classées suivant la somme des énergies avec leurs parties réelles, imaginaires, leurs modules, le critère de classement (l'énergie propre pour la méthode LSS, la distance pour la méthode AGS, la valeur de la projection pour la méthode Skelton) et le critère relatif (le rapport de l'énergie propre sur l'énergie maximale pour la méthode LSS, la distance sur l'énergie maximale pour la méthode AGS, le rapport de la valeur de la projection sur la valeur de la projection maximale pour la méthode Skelton) qui permet de déterminer l'ordre de la réduction.
  - \* la matrice V solution de l'équation de Lyapounov.
  - \* la matrice d'énergie G de la définition 1.8.
  - \* le régime permanent ( $\Lambda_1^{-1}B$ ) pour un échelon,  $\Lambda_1^{-2}B$  pour une rampe, si  $\Lambda_1$  est la partie stable de la matrice dynamique diagonalisée).

RESULTATS SUR ARIANE.

On a d'abord essayé les trois méthodes sur le système déterministe à 90 s pour une entrée impulsion et une entrée échelon. La table 3.1 a) montre les matrices du système à cet instant.

\* Etudes des valeurs propres :

La figure 3.2 montre les valeurs propres de la matrice dynamique à 90 s situées par rapport au cercle unité dans le plan complexe. Les valeurs propres sont numérotées par module croissant.



Le système a cinq valeurs propres réelles dont deux instables, et cinq paires de valeurs propres conjuguées.

Etant donné la fréquence d'échantillonnage (10 Hz) le module des valeurs propres est très proche de 1 et sur les 13 valeurs propres stables, 10 ont un module supérieur à 0.9.

#### COMPARAISON DES METHODES (TABLEAUX 2).

La table 3.3 a) montre les classements obtenus par les trois méthodes dans le cas où le système est supposé déterministe (la matrice de covariance est posée égale à 0), dans les cas où l'entrée est successivement une impulsion puis un échelon.

Le classement obtenu pour les trois méthodes dans le cas de l'entrée impulsion est le même à l'exception près suivante : la valeur propre numéro 1 (en fait la paire conjuguée (1.2)) est classée dernière par la méthode de Skelton alors qu'elle est en sixième position pour les deux autres.

Ceci est dû au signe de la projection associée à ce mode qui est ici négatif et de valeur absolue élevée.

Pour d'autres exemples traités (voir § I.2.3 d)) on a aussi remarqué un comportement différent de celui des autres, de la méthode Skelton, lorsque la matrice d'énergie  $G$  comporte des termes négatifs, il semble que cette méthode soit inadaptée pour ces cas.

Si l'on examine maintenant les critères de sélection on voit deux "trous" plus ou moins marqués suivant la méthode utilisée : pour la méthode LSS on a une cassure très nette entre les couples (10-11) et (7-8) puis une deuxième entre le couple (1-2) et la valeur propre réelle n° 9.

La méthode AGS présente une cassure entre la valeur propre réelle n°4 et le couple (10-11) puis une autre entre les couples (5-6) et (1-2), et la méthode Skelton a ses cassures entre les couples (10-11) et (7-8) et (5-6) et la valeur propre réelle n°3.

D'après ces critères pratiquement concordants pour les trois méthodes un bon modèle réduit du sous-système stable devrait être obtenu en conservant les valeurs propres (12-13) ; 4 et (10-11) le modèle conservant toutes les valeurs propres exceptées les 2

valeurs propres non commandables 9 et 3 et le couple rapide (1-2) devant être lui très proche de la réalité au point de vue comportement entrée-sortie pour une entrée impulsion.

La même étude comparative pour une entrée échelon amène les remarques suivantes (table 3.3.b) :

Les méthodes LSS et AGS comme dans le cas de l'impulsion donnent un classement absolument identique, alors que le phénomène de déclassement de la "projection négative" se reproduit dans le cas de la méthode Skelton pour le couple (1-2) et de façon encore plus flagrante pour le couple (10-11).

On s'aperçoit ici de l'importance capitale de la classe de l'entrée choisie. Pour les trois méthodes on observe en effet une permutation des valeurs propres classées en tête 4 et (12-13), la valeur propre réelle n° 4 étant classée en tête de façon très nette lorsque l'entrée appliquée est un échelon.

Une rapide étude algébrique permet de comprendre ce phénomène :

Comparons les termes diagonaux de la matrice G associés à une valeur propre dans le cas d'une impulsion et d'un échelon (cf. Tab. 1.1). On a :

$$G_{ii} = \frac{\bar{b}_i \bar{b}_i \bar{c}_i \bar{c}_i}{1 - \lambda_i \bar{\lambda}_i} \quad \text{dans le cas de l'impulsion}$$

$$G_{ii} = \frac{\bar{b}_i \bar{b}_i \bar{c}_i \bar{c}_i}{(1 - \lambda_i)(1 - \lambda_i \bar{\lambda}_i)(1 - \bar{\lambda}_i)} \quad \text{dans le cas de l'échelon.}$$

Dans le cas de l'échelon l'introduction du terme  $|1 - \lambda_i|^2$  au dénominateur favorise les valeurs propres proches de 1 dans le plan complexe ce qui explique que la valeur propre réelle  $\lambda_4 = 0.94083$  ait une énergie propre multipliée par 100 dans le cas de l'échelon par rapport au cas de l'impulsion, alors que la valeur propre  $\lambda_{12} = 0.71092 - i 0.70054$  qui vérifie  $|1 - \lambda_{12}| \simeq 0.6$  ait son énergie simplement multipliée par 2, d'où la permutation.

La première cassure se situe pour les trois méthodes de façon très nette après le couple (12-13), ce qui donne de façon globale le même modèle réduit que dans le cas de l'impulsion et atténué l'effet de la spécificité de l'entrée.

La deuxième cassure se situe de même que dans le cas de l'impulsion et pour les trois méthodes après le couple (5-6).

L'examen de la matrice des vecteurs propres (Table 3.1.b) montre que la direction associée à la valeur propre n° 4 est essentiellement engendrée par la variable de dérive  $\dot{z}$ , les directions associées au couple conjugué (12-13) sont dues au premier mode de flexion, et les directions associées au couple conjugué (10-11) sont dues au second mode de flexion. Ce sont donc ces variables qui sont considérées comme les plus énergétiques par l'agrégation et sur lesquelles se base la réduction pour le système considéré comme déterministe.

#### ETUDE CHRONOLOGIQUE.

##### \* Etude des valeurs propres.

La figure 3.4 montre l'évolution des valeurs propres de la matrice dynamique sur la période 83-97 s, la flèche indiquant l'évolution temporelle.

Les valeurs propres évoluent assez lentement sur la période considérée, certaines ne bougent pratiquement pas ((1-2), 14) les couples de valeurs propres (5-6) et (7-8) présentent par contre une évolution plus significative sans toutefois arriver à se croiser.

##### \* Evolution des classements.

Pour chaque système on a étudié les cas suivants :

      entrée impulsion  
système déterministe, régime transitoire :      entrée échelon

      entrée impulsion  
système stochastique, régime permanent      :      entrée échelon

Les trois méthodes ayant donné des résultats similaires on n'a gardé que la méthode AGS pour cette étude.

\* Résultats déterministes (Tables 3-5).

Les valeurs propres étant classées par module croissant et ce classement changeant dans le temps la valeur propre réelle portant le n°11 jusqu'à 87 s porte à partir de 90 s le n°9, le couple auparavant numéroté (9-10) devenant le couple (10-11).

Les tables 3.5.a) et 3.5.e) montrent que pour les deux entrées considérées les classements sont identiques sur la période considérée, les ordres de grandeur des quantités "distance" et "critère" restant comparables, de façon très claire pour l'impulsion, légèrement moins pour le critère dans le cas de l'échelon.

Les cassures sont toutefois aussi clairement marquées qu'à 90 s, une première après le groupe ((12-13),4) la seconde après le couple (5-6).

\* Résultats stochastiques (Tables 3-6).

La table 3.6.c) montre les résultats à 90 s : l'entrée impulsion fait apparaître une très nette prédominance de la valeur propre réelle n°9 qui est un des modes non commandables (table 3.1.c)) et qui était par conséquent classé dernier dans le cas déterministe.

L'aspect stochastique étant additif (voir Tableau 1.1) c'est la forte variance de ce mode 8.738 (table 3.1.d)) qui explique ce changement de situation, on observe que l'autre mode non commandable  $\lambda_3$  (table 3.1.c)) qui a aussi une variance élevée (64.02) mais qui est plus rapide que le précédent, est classé en troisième position. Les modes commandables sont déclassés par rapport au cas déterministe mais les groupes déjà observés précédemment (4,(10-11),(12-13)) et ((5-6),(7-8)) sont conservés.

On a ici aussi 2 cassures assez nettes : une première après la valeur propre réelle 4 qui isole les modes n° 9 et 4, une deuxième qui isole le mode très rapide (1-2) des autres.

Le phénomène des valeurs propres non commandables mais à forte variance apparaît aussi dans le cas de l'entrée échelon mais à un degré moindre (le mode n° 9 est classé en 3ème position alors que le n° 3 est en 5ème position), par contre le classement des valeurs propres commandables est resté le même que dans le cas déterministe si on excepte la permutation des couples (1-2) et (7-8) en fin de clas-

sement. On n'observe pas de cassures aussi nette dans ce cas-ci que dans le cas précédent, par contre, on remarque que la valeur du critère est très faible dès le premier mode classé (de l'ordre de  $3.10^{-3}$ ).

On a vu que les directions associées à la valeur propre n°4 et au couple (12-13) sont essentiellement engendrées par la variable de dérive  $\dot{z}$  et le premier mode de flexion. Les nouvelles valeurs propres n°3 et 9 qui interviennent dans le cas stochastique sont surtout dues aux variables de mesure du vent (Table 3.1.b)).

La comparaison de ces résultats sur la période 83-97 s (Tables 3.6.a) à 3.6.d)) montre de même que dans le cas déterministe une grande stabilité des phénomènes observés à 90 s, les valeurs des quantités "distance" et "énergie" présentant toutefois une plus grande variabilité tout en respectant les ordres de grandeurs.

MATRICES DU SYSTEME

TABLE 3.1 a)

TEMPS 90

F : MATRICE DE DYNAMIQUE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1.001	0.033	-0.000	-0.016	0.000	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000
2	0.100	1.002	0.000	-0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000
3	-0.000	-0.000	-0.438	-4.667	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000
4	-0.000	0.000	0.006	-0.342	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000
5	-0.167	-3.523	-0.001	-0.151	0.997	0.033	0.001	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000
6	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.999	0.039	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000
7	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.039	0.855	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
8	0.473	11.533	-1.514	-509.301	0.050	-0.484	-0.010	0.709	-5.450	0.001	0.011	0.000	-0.006	-0.001	0.017
9	0.014	0.609	0.465	-28.492	0.003	-0.026	-0.000	0.090	0.713	0.000	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.001
10	1.206	20.626	-18.140	-910.014	0.090	-0.868	-0.024	-0.008	-0.102	-0.222	-17.327	0.001	-0.036	-0.001	0.086
11	0.037	1.450	1.050	-64.177	0.006	-0.061	-0.001	-0.000	-0.008	0.054	-0.212	0.000	0.001	-0.000	-0.001
12	0.276	-2.618	-22.531	-127.123	-0.011	0.109	-0.004	-0.001	0.014	0.000	-0.023	-0.809	19.129	0.001	0.055
13	0.012	0.246	0.023	-13.296	0.001	-0.010	-0.000	-0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.014	-0.819	-0.000	0.001
14	-0.427	5.395	29.531	-367.440	0.023	-0.224	0.006	0.002	-0.040	-0.000	0.024	0.001	0.038	-0.707	25.001
15	-0.020	-0.364	0.401	20.195	-0.002	0.015	0.000	0.000	0.002	-0.000	-0.000	-0.000	0.001	-0.017	-0.720

G : MATRICE DE COMMANDE

1	-0.039
2	-0.002
3	4.667
4	1.342
5	-0.373
6	0.000
7	-0.000
8	-1303.920
9	-66.980
10	-2225.140
11	-155.149
12	446.356
13	-17.437
14	-451.218
15	36.158

H : MATRICE D'OBSERVATION

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00014	0.00000	0.00008	0.00000	-0.00008	0.00000	0.00007

## matrice modale

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.5571E-04	-.3093E-04	-.1181E-03	-.2232E-02	.6537E-06	.6567E-07	.1215E-06	-.9895E-07	.1149E-03	.1161E-05
2	.4413E-06	.2153E-05	.8206E-04	.3660E-02	.1526E-08	-.1688E-07	-.2702E-08	-.3252E-08	-.9371E-03	-.1490E-07
3	-.9633E-01	-.1410	-.5209E-16	-.2760E-13	-.4343E-17	-.3194E-17	-.5361E-13	-.8893E-13	.5840E-15	-.1428E-12
4	.5633E-02	-.1711E-02	.2093E-17	.1160E-15	.1135E-17	-.1860E-17	-.1535E-14	.3678E-14	.4364E-18	.2331E-14
5	.4913E-03	-.3741E-03	.6914E-02	.2245	.5385E-05	.5563E-06	.9372E-06	-.7538E-06	-.1512	.2779E-05
6	-.3185E-16	-.2833E-16	-.2079E-01	.8634E-14	.5796E-18	-.1535E-17	-.1080E-15	-.3438E-15	-.5999E-01	.6771E-16
7	.1933E-16	-.3737E-16	.7118E-01	-.3018E-14	-.4943E-17	-.1773E-17	.2100E-16	.6025E-16	.1752E-01	-.1418E-16
8	2.368	-.8951	-.2916E-02	-.6030E-02	.2426E-01	.2486E-02	.4576E-02	-.3706E-02	-.2383E-03	.2325E-01
9	.4949E-02	.8715E-01	.2026E-02	.9887E-02	.5789E-04	-.6263E-03	-.1012E-03	-.1224E-03	.1942E-02	-.2633E-03
10	9.841	-.8565E-01	-.1671E-02	-.3376E-02	.8977E-01	.9209E-02	.1773E-01	-.1439E-01	-.1329E-03	-23.92
11	-.9899E-01	.3246	.1161E-02	.5536E-02	.2144E-03	-.2318E-02	-.3929E-03	-.4745E-03	.1084E-02	.3193
12	-1.758	3.260	-.1919E-03	-.3854E-03	.4205	.4689E-01	-17.72	14.75	-.1527E-04	-.1517E-01
13	-.8905E-01	-.9154E-01	.1334E-03	.6320E-03	.1101E-02	-.1086E-01	.4026	.4740	.1243E-04	.1889E-03
14	.4771	-5.322	.2991E-03	.6019E-03	44.60	4.415	.1181	-.9379E-01	.2375E-04	.1376E-01
15	.1701	.7075E-01	-.2078E-03	-.9870E-03	.1024	-1.151	-.2562E-02	-.3160E-02	-.1929E-03	-.1579E-03

	11	12	13	14	15
1	.2612E-06	.3311E-06	.5411E-06	.9420E-04	.1798E-02
2	.6471E-07	.6944E-07	-.4273E-07	.2327E-02	.3370E-02
3	-.4864E-13	-.2878E-12	-.5096E-12	.1362E-12	.2562E-13
4	-.2151E-14	-.2648E-14	.5460E-14	-.6699E-15	-.1400E-15
5	.4734E-06	.2200E-04	.3787E-04	-1.103	-.2091
6	-.8800E-15	-.9362E-14	.4598E-14	.1263E-12	.5866E-14
7	.1705E-15	.1755E-14	-.1046E-14	-.3559E-13	-.1534E-14
8	.4602E-02	6.053	10.49	-.2118E-03	.2766E-02
9	.1297E-02	1.346	-.7813	-.5242E-02	.5184E-02
10	-5.601	-.5236E-01	-.8937E-01	-.1180E-03	.1547E-02
11	-1.334	-.1147E-01	.6758E-02	-.2924E-02	.2899E-02
12	-.3309E-02	-.3669E-02	-.6248E-02	-.1348E-04	.1763E-03
13	-.8458E-03	-.8018E-03	.4735E-03	-.3353E-03	.3303E-03
14	.2760E-02	.8104E-02	.1384E-01	.2089E-04	-.2758E-03
15	.7675E-03	.1776E-02	-.1046E-02	.5206E-03	-.5168E-03

## matrice modale inverse

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.1160E-13	.1865E-13	-1.784	147.0	-.3111E-12	.8533E-12	.2610E-12	-.1272E-12	.4779E-12	.2137E-13
2	-.1384E-13	-.2172E-12	-5.875	-100.5	-.6644E-12	.1784E-11	.5802E-12	-.2555E-12	-.3019E-12	.2845E-13
3	-.4430E-12	.6047E-12	-.1333E-14	-.1632E-12	.1933E-13	4.485	15.36	.2981E-15	.9824E-14	-.8902E-17
4	-211.6	128.6	.1853E-01	2.391	.2534	-3.505	-1.548	.1009E-04	-.4460E-05	-.1020E-04
5	.4516E-02	.1744E-01	-.6125	-14.89	.7815E-04	-.7522E-03	-.8319E-04	-.2915E-04	-.1137E-03	.1266E-04
6	.2642E-02	-.1834	-.6754	14.19	-.7956E-03	.7658E-02	-.5635E-05	-.3536E-05	.1132E-02	.2423E-06
7	.6291E-02	-.1427	-1.263	-15.42	-.6189E-03	.5957E-02	-.7871E-04	-.2062E-04	.6215E-03	.2048E-04
8	-.1804E-02	-.1699	-.4127	21.62	-.7420E-03	.7141E-02	.7006E-04	.1626E-04	.7489E-03	-.1856E-04
9	-.2111E-09	.2546E-10	-.8451E-14	.2430E-11	-.1880E-11	-18.22	-5.322	-.1078E-14	-.1148E-12	.8590E-16
10	.5014E-01	-.2080	-.3897	65.55	-.8784E-03	.8459E-02	-.8180E-03	-.3399E-03	.1405E-02	-.3959E-01
11	.1354E-02	.8548	-1.393	-19.76	.3718E-02	-.3580E-01	-.2657E-03	-.7587E-04	-.6079E-02	-.9477E-02
12	-.7650E-01	-1.168	.2491	-13.69	-.5127E-02	.4946E-01	.2010E-02	.4144E-01	.5564	.4097E-04
13	-.1584	.7056	-.2388	-33.94	.2989E-02	-.2888E-01	.2273E-02	.7142E-01	-.3210	.6822E-04
14	-99.75	-4.133	.9230E-02	1.230	-.9243	2.385	.6257	.8521E-05	.1347E-05	-.4927E-05
15	298.7	159.9	-.2250E-01	-3.400	.3629	-3.016	-.6050	-.1679E-04	-.1149E-04	.1449E-04

	11	12	13	14	15
1	-.2613E-12	-.2395E-13	-.7308E-12	.2512E-15	.6810E-14
2	.2561E-12	.1118E-13	-.6714E-12	-.2022E-16	.6212E-14
3	-.9486E-15	.1205E-16	.9301E-15	.1440E-17	-.3528E-16
4	.7774E-05	-.1412E-05	.1420E-05	.3100E-05	-.2090E-05
5	.4103E-04	.1457E-03	.4345E-03	.2223E-01	.8523E-01
6	-.4877E-03	.9455E-05	-.5641E-02	.1977E-02	-.8608
7	-.6608E-03	-.3306E-01	1.029	.3090E-03	-.9860E-02
8	-.7820E-03	.2808E-01	1.236	-.2688E-03	-.1154E-01
9	.1083E-13	-.1073E-15	-.9273E-14	.4356E-17	.1579E-15
10	.1663	-.3871E-04	.1805E-03	.8023E-04	-.3484E-03
11	-.7100	-.9509E-05	-.6912E-03	.1935E-04	.1437E-02
12	.5116E-03	.1052E-04	.1355E-03	-.2275E-04	-.3020E-03
13	-.3522E-03	.1802E-04	-.9000E-04	-.3914E-04	.1816E-03
14	.6611E-06	-.7185E-06	.2656E-06	.1586E-05	-.4822E-07
15	.5452E-05	.2030E-05	.2737E-06	-.4462E-05	-.2087E-05

Table 3.1.b): Matrices modale, et modale inverse du système

modele reduit d'ordre:15 diagonalise

-----  
matrice dynamique

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-.3898	-.1535	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.1535	-.3898	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.8660	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.9408	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	-.7138	-.6449	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.6449	-.7138	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.8138	-.5160	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.5160	-.8138	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.9878	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.2170
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.9671
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

	11	12	13	14	15
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	-.9671	.0000	.0000	.0000	.0000
11	-.2170	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.7109	.7005	.0000	.0000
13	.0000	-.7005	.7109	.0000	.0000
14	.0000	.0000	.0000	1.004	.0000
15	.0000	.0000	.0000	.0000	1.055

-----  
matrice d'entree

	1
1	188.9
2	-162.2
3	-.6559E-12
4	11.26
5	-29.71
6	-16.03
7	-59.73
8	17.86
9	.1163E-10
10	148.7
11	98.80
12	-108.7
13	-118.3
14	5.955
15	-16.82

-----  
matrice de sortie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.1061E-04	.3016E-04	.8186E-04	.3659E-02	.7119E-05	-.8018E-04	-.3302E-04	-.3889E-04	-.9373E-03	.2700E-04
	11	12	13	14	15					
1	-.1128E-03	-.1843E-03	.1069E-03	.2327E-02	.3370E-02					

Table 3.1.c) Matrices dynamique, d'entree et de sortie dans la base modale.



## matrice de covariance

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.2039E-01	-.6079E-02	-.8991E-12	.1174E-03	-.4170E-03	.4331E-02	.2084E-02	.6187E-02	.3402E-12	.6469E-02
2	-.6079E-02	.3190E-01	.1075E-11	-.1039E-03	.5887E-02	.2892E-03	.7893E-02	-.3508E-02	-.3809E-12	.2410E-03
3	-.8991E-12	.1075E-11	64.02	-6.713	.3810E-04	.1723E-03	.1931E-03	.1426E-03	-23.64	-.1253E-02
4	.1174E-03	-.1039E-03	-6.713	.7042	-.1576E-04	.1885E-05	-.2337E-04	.2125E-04	2.480	.1651E-03
5	-.4170E-03	.5887E-02	.3810E-04	-.1576E-04	.1297E-02	.1589E-03	.1792E-02	-.5969E-03	-.1778E-04	.5086E-03
6	.4331E-02	.2892E-03	.1723E-03	.1885E-05	.1589E-03	.1045E-02	.8394E-03	.1302E-02	-.6260E-04	.1405E-02
7	.2084E-02	.7893E-02	.1931E-03	-.2337E-04	.1792E-02	.8394E-03	.2851E-02	.6563E-05	-.7402E-04	.1517E-02
8	.6187E-02	-.3508E-02	.1426E-03	.2125E-04	-.5969E-03	.1302E-02	.6563E-05	.2130E-02	-.4864E-04	.1639E-02
9	.3402E-12	-.3809E-12	-23.64	2.480	-.1778E-04	-.6260E-04	-.7402E-04	-.4864E-04	8.738	.4392E-03
10	.6469E-02	.2410E-03	-.1253E-02	.1651E-03	.5086E-03	.1405E-02	.1517E-02	.1639E-02	.4392E-03	.2495E-02
11	-.6146E-02	.8897E-02	-.3091E-02	.2720E-03	.1376E-02	-.9115E-03	.1254E-02	-.2180E-02	.1152E-02	-.1562E-02
12	.7349E-03	-.1314E-02	.1179E-01	-.1234E-02	-.2043E-03	.9349E-04	-.2118E-03	.2679E-03	-.4378E-02	.1785E-03
13	-.2118E-02	.1493E-02	.5947E-02	-.6336E-03	.1296E-03	-.3770E-03	-.5773E-04	-.6206E-03	-.2161E-02	-.7092E-03
14	.6083E-04	-.5212E-04	2.801	-.2940	-.3247E-05	.1773E-04	.7953E-05	.2398E-04	-1.036	-.3192E-04
15	-.1528E-03	.1277E-03	-2.775	.2913	.1063E-04	-.3338E-04	-.7634E-05	-.5116E-04	1.027	.2078E-06
	11	12	13	14	15					
1	-.6146E-02	.7349E-03	-.2118E-02	.6083E-04	-.1528E-03					
2	.8897E-02	-.1314E-02	.1493E-02	-.5212E-04	.1277E-03					
3	-.3091E-02	.1179E-01	.5947E-02	2.801	-2.775					
4	.2720E-03	-.1234E-02	-.6336E-03	-.2940	.2913					
5	.1376E-02	-.2043E-03	.1296E-03	-.3247E-05	.1063E-04					
6	-.9115E-03	.9349E-04	-.3770E-03	.1773E-04	-.3338E-04					
7	.1254E-02	-.2118E-03	-.5773E-04	.7953E-05	-.7634E-05					
8	-.2180E-02	.2679E-03	-.6206E-03	.2398E-04	-.5116E-04					
9	.1152E-02	-.4378E-02	-.2161E-02	-1.036	1.027					
10	-.1562E-02	.1785E-03	-.7092E-03	-.3192E-04	.2078E-06					
11	.3572E-02	-.4910E-03	.8836E-03	-.1643E-03	.2044E-03					
12	-.4910E-03	.7087E-04	-.1153E-03	.5230E-03	-.5246E-03					
13	.8836E-03	-.1153E-03	.2799E-03	.2473E-03	-.2309E-03					
14	-.1643E-03	.5230E-03	.2473E-03	.1228	-.1217					
15	.2044E-03	-.5246E-03	-.2309E-03	-.1217	.1206					

Table 3.1.d) Matrice de covariance dans la base modale

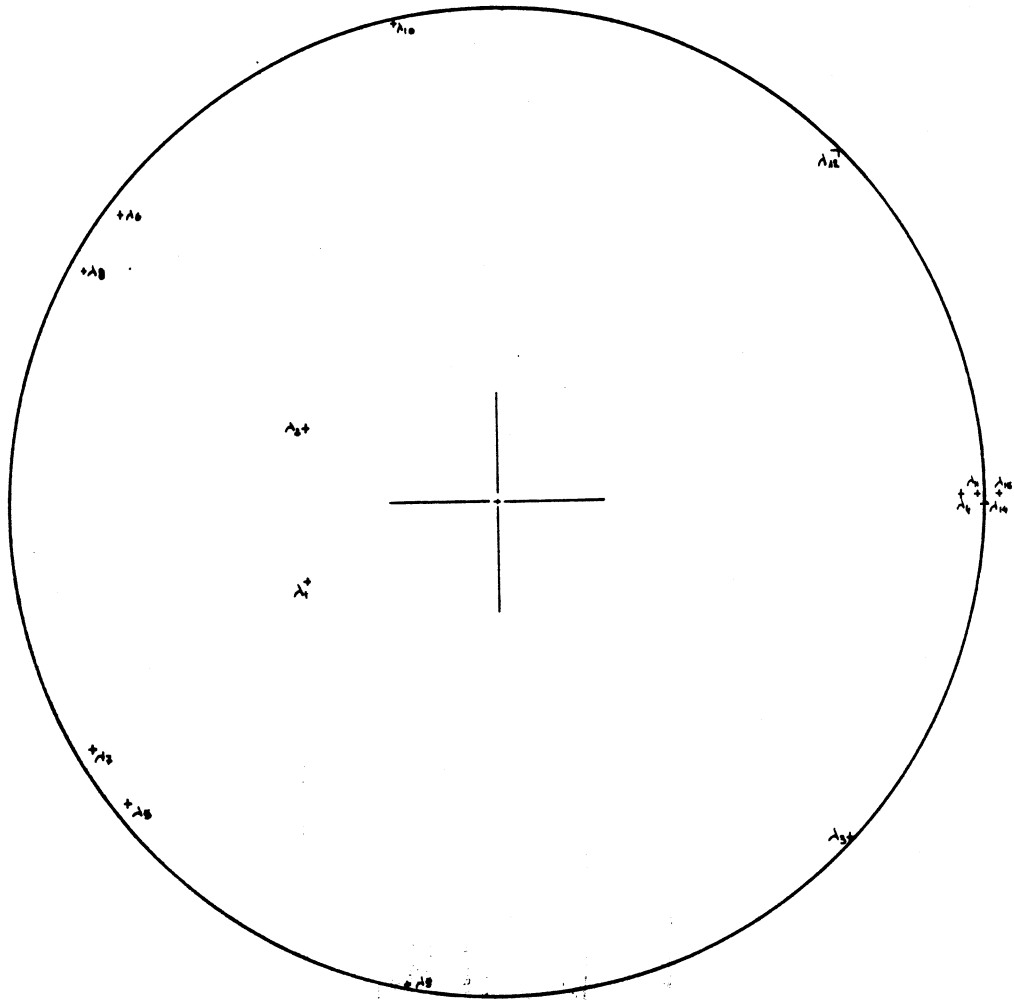


Figure 3.2: Valeurs propres du système à  $t = 90s$

## ARIANE T=90s: COMPARAISON DES TROIS METHODES

no	p. reelle	p. imagin	module
1	.10040E+01	.00000E+00	.10040E+01
2	.10548E+01	.00000E+00	.10548E+01

parametres:

```

entree impulsion
regime transitoire
methode lss
systeme deterministe

```

\*\*\*\*\*  
CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
\*\*\*\*\*

NO	P. REELLE	P. IMAGIN.	MODULE	ENERGIE	COEFFICIENT
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.15254E+00	1.0000000000
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.14788E-01	.0969473120
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.12077E-01	.0791722598
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.65969E-04	.0004324811
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.46672E-04	.0003059697
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.15454E-04	.0001013112
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.0000000000
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.0000000000

parametres:

```

entree impulsion
regime transitoire
methode ags
systeme deterministe

```

\*\*\*\*\*  
CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
\*\*\*\*\*

no	p. reelle	p. imagin	module	distance	critere
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.26076E-01	.14303E+00
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.12187E-01	.66847E-01
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.15449E-03	.84739E-03
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.68528E-04	.37588E-03
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.15454E-04	.84764E-04
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:

```

entree impulsion
regime transitoire
methode skelton
systeme deterministe

```

\*\*\*\*\*  
CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
\*\*\*\*\*

no	p. reelle	p. imagin.	module	energie	critere
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.15439E+00	.10000E+01
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.16192E-01	.10488E+00
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.11565E-01	.74907E-01
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.12402E-03	.80327E-03
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.10178E-03	.65923E-03
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.00000E+00
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	-.56108E-04	-.36342E-03

parametres:

-----  
 entree echelon  
 regime transitoire  
 methode lss  
 systeme deterministe

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

NO	P. REELLE	P. IMAGIN.	MODULE	ENERGIE	COEFFICIENT
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.42244E+01	1.0000000000
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.26650E+00	.0630866659
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.50499E-02	.0011954254
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.18668E-04	.0000044191
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.14141E-04	.0000033475
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.50915E-05	.0000012053
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.0000000000
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.0000000000

parametres:

-----  
 entree echelon  
 regime transitoire  
 methode ags  
 systeme deterministe

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.27088E+00	.59728E-01
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.50640E-02	.11166E-02
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.42699E-04	.94151E-05
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.19033E-04	.41967E-05
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.50915E-05	.11227E-05
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:

-----  
 entree echelon  
 regime transitoire  
 methode skelton  
 systeme deterministe

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin.	module	energie	critere
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.42443E+01	.10000E+01
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.29162E+00	.68709E-01
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.57144E-03	.13464E-03
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.56306E-03	.13266E-03
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E-11	.00000E+00
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	-.46679E-03	-.10998E-03
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	-.14648E-02	-.34512E-03

Table 3.3. b)

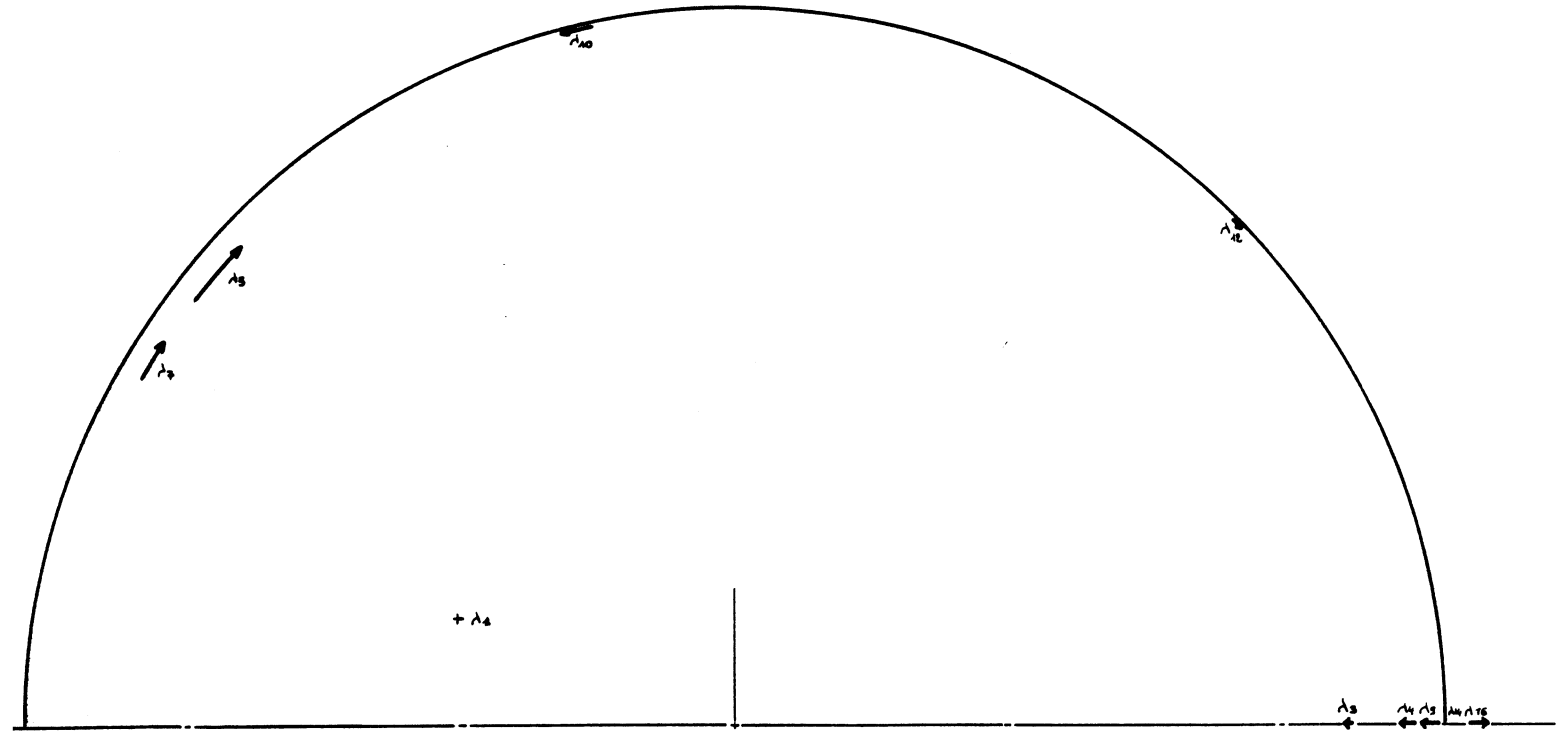


Figure 3.4: Evolution des valeurs propres sur la période 83.97s

ARIANE T=83s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 \*\*\*\*\*

supression du sous-systeme instable:  
 -----

no	p.reelle	p.imagin	module
1	.10046E+01	.00000E+00	.10046E+01
2	.10348E+01	.00000E+00	.10348E+01

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime transitoire  
 systeme deterministe

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
12	.71593E+00	-.69544E+00	.99810E+00	.47896E-01	.23741E+00
4	.95787E+00	.00000E+00	.95787E+00	.12320E-01	.61070E-01
9	-.19599E+00	.97169E+00	.99126E+00	.18092E-03	.89681E-03
7	-.83526E+00	.48136E+00	.96403E+00	.76884E-04	.38110E-03
5	-.75824E+00	.59315E+00	.96268E+00	.28005E-04	.13881E-03
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	.99397E+00	.00000E+00	.99397E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.87101E+00	.00000E+00	.87101E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime transitoire  
 systeme deterministe

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.95787E+00	.00000E+00	.95787E+00	.26927E+00	.12744E-01
12	.71593E+00	-.69544E+00	.99810E+00	.52213E-02	.24711E-03
9	-.19599E+00	.97169E+00	.99126E+00	.48237E-04	.22829E-05
7	-.83526E+00	.48136E+00	.96403E+00	.21546E-04	.10197E-05
5	-.75824E+00	.59315E+00	.96268E+00	.10404E-04	.49237E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	.99397E+00	.00000E+00	.99397E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.87101E+00	.00000E+00	.87101E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3.5 a)

ARIANE T=87s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES.  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 \*\*\*\*\*

supression du sous-systeme instable:  
 -----

no	p.reelle	p.imagin	module
1	.10042E+01	.00000E+00	.10042E+01
2	.10438E+01	.00000E+00	.10438E+01

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime transitoire  
 systeme deterministe  
 \*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
12	.71309E+00	.69834E+00	.99809E+00	.34875E-01	.18345E+00
4	.95034E+00	.00000E+00	.95034E+00	.12249E-01	.64436E-01
9	-.20778E+00	-.96918E+00	.99120E+00	.16361E-03	.86066E-03
7	-.82252E+00	.50234E+00	.96379E+00	.68663E-04	.36119E-03
5	-.73247E+00	.62408E+00	.96228E+00	.14433E-04	.75921E-04
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	.99132E+00	.00000E+00	.99132E+00	.00000E+00	.00005E+00
3	.86811E+00	.00000E+00	.86811E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime transitoire  
 systeme deterministe  
 \*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.95034E+00	.00000E+00	.95034E+00	.27016E+00	.27242E-01
12	.71309E+00	.69834E+00	.99809E+00	.51253E-02	.51681E-03
9	-.20778E+00	-.96918E+00	.99120E+00	.45112E-04	.45489E-05
7	-.82252E+00	.50234E+00	.96379E+00	.18941E-04	.19099E-05
5	-.73247E+00	.62408E+00	.96228E+00	.46569E-05	.46958E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
11	.99132E+00	.00000E+00	.99132E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86811E+00	.00000E+00	.86811E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3-5.b)

ARIANE T=90s  
=====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N)  
N =15 NE = 1 NS = 1

supression du sous-systeme instable:

no	p.reelle	p.imagin	module
1	.10040E+01	.00000E+00	.10040E+01
2	.10548E+01	.00000E+00	.10548E+01

parametres:

entree impulsion  
regime transitoire  
systeme deterministe

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.26076E-01	.14303E+00
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.12187E-01	.66847E-01
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.15449E-03	.84739E-03
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.68528E-04	.37588E-03
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.15454E-04	.84764E-04
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:

entree echelon  
regime transitoire  
systeme deterministe

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.27088E+00	.59728E-01
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.50640E-02	.11166E-02
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.42699E-04	.94151E-05
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.19033E-04	.41967E-05
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.50915E-05	.11227E-05
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3-5c)



ARIANE T=93s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 .....

supression du sous-systeme instable:  
 -----

no	p.reelle	p.imagin	module
1	.10039E+01	.00000E+00	.10039E+01
2	.10606E+01	.00000E+00	.10606E+01

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime transitoire  
 systeme deterministe  
 .....

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 .....

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
12	.70872E+00	.70276E+00	.99807E+00	.23527E-01	.12970E+00
4	.93609E+00	.00000E+00	.93609E+00	.12092E-01	.66658E-01
10	-.22772E+00	.96459E+00	.99111E+00	.13856E-03	.76384E-03
7	-.80776E+00	.52525E+00	.96351E+00	.61090E-04	.33677E-03
5	-.70034E+00	-.65925E+00	.96181E+00	.17352E-04	.95655E-04
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98207E+00	.00000E+00	.98207E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86365E+00	.00000E+00	.86365E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime transitoire  
 systeme deterministe  
 .....

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 .....

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.93609E+00	.00000E+00	.93609E+00	.27191E+00	.81885E-01
12	.70872E+00	.70276E+00	.99807E+00	.49878E-02	.15021E-02
10	-.22772E+00	.96459E+00	.99111E+00	.38017E-04	.11449E-04
7	-.80776E+00	.52525E+00	.96351E+00	.17062E-04	.51383E-05
5	-.70034E+00	-.65925E+00	.96181E+00	.59569E-05	.17939E-05
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.98207E+00	.00000E+00	.98207E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86365E+00	.00000E+00	.86365E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3.5.d)

ARIANE T=97s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1

supression du sous-systeme instable:  
 -----

no	p.reelle	p.imagin	module
1	.10038E+01	.00000E+00	.10038E+01
2	.10609E+01	.00000E+00	.10609E+01

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 .....

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime transitoire  
 systeme deterministe

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 .....

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
12	.70572E+00	.70576E+00	.99806E+00	.24248E-01	.13115E+00
4	.93638E+00	.00000E+00	.93638E+00	.11921E-01	.64479E-01
10	-.24437E+00	.96042E+00	.99103E+00	.11361E-03	.61448E-03
7	-.80341E+00	.53173E+00	.96343E+00	.46584E-04	.25196E-03
5	-.68992E+00	-.66993E+00	.96166E+00	.21431E-04	.11592E-03
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.96592E+00	.00000E+00	.96592E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86046E+00	.00000E+00	.86046E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime transitoire  
 systeme deterministe

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 .....

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.93638E+00	.00000E+00	.93638E+00	.27350E+00	.76197E-01
12	.70572E+00	.70576E+00	.99806E+00	.48654E-02	.13555E-02
10	-.24437E+00	.96042E+00	.99103E+00	.30698E-04	.85524E-05
7	-.80341E+00	.53173E+00	.96343E+00	.13510E-04	.37639E-05
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.67142E-05	.18706E-05
5	-.68992E+00	-.66993E+00	.96166E+00	.00000E+00	.00000E+00
9	.96592E+00	.00000E+00	.96592E+00	.00000E+00	.00000E+00
3	.86046E+00	.00000E+00	.86046E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3.5-e)

ARIANE T=83s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N), B(N,NE), C(NS,N), R(N,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1

parametres:

-----  
 entree impulsion  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES

\*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
11	.99397E+00	.00000E+00	.99397E+00	.27951E-04	.26153E+00
4	.95787E+00	.00000E+00	.95787E+00	.18139E-06	.16972E-02
3	.87101E+00	.00000E+00	.87101E+00	.44106E-08	.41269E-04
9	-.19599E+00	.97169E+00	.99126E+00	.22649E-08	.21192E-04
12	.71593E+00	-.69544E+00	.99810E+00	.29041E-09	.27172E-05
7	-.83526E+00	.48136E+00	.96403E+00	.15011E-09	.14045E-05
5	-.75824E+00	.59315E+00	.96268E+00	.40743E-10	.38122E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:

-----  
 entree echelon  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES

\*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.95787E+00	.00000E+00	.95787E+00	.12163E-02	.67548E-03
12	.71593E+00	-.69544E+00	.99810E+00	.31801E-03	.17661E-03
11	.99397E+00	.00000E+00	.99397E+00	.14192E-03	.78818E-04
9	-.19599E+00	.97169E+00	.99126E+00	.31681E-06	.17594E-06
3	.87101E+00	.00000E+00	.87101E+00	.13966E-06	.77561E-07
5	-.75824E+00	.59315E+00	.96268E+00	.17614E-05	.97820E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.12858E-05	.71408E-06
7	-.83526E+00	.48136E+00	.96403E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3-6-a)

ARIANE T=87s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N, N), B(N, NE), C(NS, N), R(N, N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 \*\*\*\*\*

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime permanent  
 systeme stochastique  
 \*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
11	.99132E+00	.00000E+00	.99132E+00	.44729E-04	.30456E+00
4	.95034E+00	.00000E+00	.95034E+00	.56192E-06	.38261E-02
3	.86811E+00	.00000E+00	.86811E+00	.45018E-08	.30653E-04
9	-.20778E+00	-.96918E+00	.99120E+00	.22953E-08	.15628E-04
12	.71309E+00	.69834E+00	.99809E+00	.25485E-09	.17353E-05
5	-.73247E+00	.62408E+00	.96228E+00	.12987E-09	.88430E-06
7	-.82252E+00	.50234E+00	.96379E+00	.34789E-10	.23688E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime permanent  
 systeme stochastique  
 \*\*\*\*\*

CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.95034E+00	.00000E+00	.95034E+00	.14025E-02	.14090E-02
12	.71309E+00	.69834E+00	.99809E+00	.38298E-03	.38475E-03
11	.99132E+00	.00000E+00	.99132E+00	.11455E-03	.11508E-03
9	-.20778E+00	-.96918E+00	.99120E+00	.11482E-05	.11535E-05
3	.86811E+00	.00000E+00	.86811E+00	.59039E-06	.59312E-06
5	-.73247E+00	.62408E+00	.96228E+00	.62173E-07	.62460E-07
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.12116E-05	.12172E-05
7	-.82252E+00	.50234E+00	.96379E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3.6-b)

ARIANE T=90s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N),R(N,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 \*\*\*\*\*

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.62125E-04	.38127E+00
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.17193E-05	.10552E-01
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.45690E-08	.28040E-04
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.23292E-08	.14295E-04
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.23671E-09	.14527E-05
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.11943E-09	.73295E-06
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.34517E-10	.21183E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*  
 1CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.94083E+00	.00000E+00	.94083E+00	.14822E-02	.27788E-02
12	.71092E+00	-.70054E+00	.99808E+00	.45863E-03	.85982E-03
9	.98780E+00	.00000E+00	.98780E+00	.11698E-03	.21931E-03
10	-.21703E+00	.96711E+00	.99116E+00	.21164E-05	.39678E-05
3	.86598E+00	.00000E+00	.86598E+00	.40112E-06	.75201E-06
5	-.71381E+00	.64492E+00	.96201E+00	.15672E-06	.29381E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.11545E-05	.21644E-05
7	-.81381E+00	.51602E+00	.96362E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3.6-c)

ARIANE T=93s  
 =====

DIAGONALISATION ET CLASSEMENT ENERGETIQUE DES MODES  
 D'UN SYSTEME A(N,N),B(N,NE),C(NS,N),R(N,N)  
 N =15 NE = 1 NS = 1  
 \*\*\*\*\*

parametres:  
 -----

entree impulsion  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
9	.98207E+00	.00000E+00	.98207E+00	.10328E-03	.63655E+00
4	.93609E+00	.00000E+00	.93609E+00	.34602E-05	.21327E-01
3	.86365E+00	.00000E+00	.86365E+00	.46336E-08	.28559E-04
10	-.22772E+00	.96459E+00	.99111E+00	.23565E-08	.14524E-04
12	.70872E+00	.70276E+00	.99807E+00	.20583E-09	.12686E-05
5	-.70034E+00	-.65925E+00	.96181E+00	.11052E-09	.68118E-06
7	-.80776E+00	.52525E+00	.96351E+00	.33453E-10	.20619E-06
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.00000E+00	.00000E+00

parametres:  
 -----

entree echelon  
 regime permanent  
 systeme stochastique

\*\*\*\*\*  
 CLASSEMENT DES MODES SUIVANT LA SOMME DES ENERGIES  
 \*\*\*\*\*

no	p.reelle	p.imagin	module	distance	critere
4	.93609E+00	.00000E+00	.93609E+00	.15880E-02	.38239E-02
12	.70872E+00	.70276E+00	.99807E+00	.57459E-03	.13837E-02
9	.98207E+00	.00000E+00	.98207E+00	.12394E-03	.29846E-03
10	-.22772E+00	.96459E+00	.99111E+00	.35452E-05	.85372E-05
3	.86365E+00	.00000E+00	.86365E+00	.88737E-07	.21368E-06
5	-.70034E+00	-.65925E+00	.96181E+00	.42195E-06	.10161E-05
1	-.38981E+00	.15352E+00	.41895E+00	.11002E-05	.26493E-05
7	-.80776E+00	.52525E+00	.96351E+00	.00000E+00	.00000E+00

Table 3-6-d)

### III.2. ETUDE DE LA BASE D'EQUILIBRE.

Nous rappelons ici une partie des résultats mentionnés en [7] et qui sont utiles en vue de la réduction du système dans la base d'équilibre.

L'étude porte sur le système déterministe et comprend :

- une étude factorielle sur les systèmes aux temps 30, 60, 90 et 120 s, effectuée sur un horizon de 20 pas correspondant à un intervalle de 2 secondes sur lequel il est raisonnable de considérer le système comme constant.

Pour chacun de ces temps sont étudiés :

- i) l'observabilité du système en considérant le produit scalaire dans l'espace d'état pour lequel la base initiale est ortho-normée.
- ii) la commandabilité du système avec le même produit scalaire.
- iii) une base de pseudo-équilibre dans laquelle les treize premiers vecteurs ont même indice respectivement d'observabilité et commandabilité alors que les deux derniers vecteurs de cette base sont non commandables et ont un indice d'observabilité égal à 1.
- iv) une évolution des modes du second ordre  $(\sigma_i(t))_{i=1,8}$  pour  $t$  variant de 3 à 134 s par pas de 1 seconde.

On s'est limité à 8 modes car en général les valeurs de  $\sigma_9(t), \dots, \sigma_{15}(t)$  sont négligeables.

#### ANALYSE DES RESULTATS.

Nous considérons plus particulièrement pour les raisons exposées précédemment les résultats de l'analyse factorielle au temps  $t=90$  s.

##### i) Etude de l'observabilité.

La table 3.7 nous donne les vecteurs singuliers à droite de la matrice d'observabilité, les valeurs singulières de la matrice d'observabilité dans la base initiale et les rapports de deux valeurs singulières consécutives. L'examen des vecteurs singuliers à droite de la matrice d'observabilité nous montre que les deux directions les plus observables pour le produit scalaire qui rend la base initiale

orthonormée sont

$$\begin{matrix} -0.7159 \dot{\theta} & - & 0.6982 \theta \\ \text{et} & & \\ & & 0.6981 \dot{\theta} & - & 0.7159 \theta \end{matrix}$$

c'est-à-dire que les variables de tangage  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  sont les plus facilement observables.

Ce résultat n'est guère surprenant sachant que la variable  $\theta$  est la seule variable observée du système.

Les valeurs singulières correspondant aux treize derniers vecteurs singuliers à droite sont très faibles par rapport aux 2 premières sans toutefois pouvoir être considérées comme nulles.

On peut donc considérer le système comme observable.

ii) Etude de la commandabilité.

La table (3.8) nous donne les vecteurs singuliers à gauche de la matrice de commandabilité, les valeurs singulières de la matrice de commandabilité dans la base initiale et les rapports de deux valeurs singulières consécutives.

Les deux dernières valeurs singulières sont nulles, et les vecteurs singuliers correspondants sont

$$\begin{matrix} 0.9180 \omega_2 & - & 0.3966 \omega_1 \\ 0.3966 \omega_1 & - & 0.9180 \omega_1 \end{matrix} ,$$

donc engendrés par les variables de mesure du vent.

Les premiers vecteurs singuliers représentant les directions les plus commandables de l'espace pour le produit scalaire qui rend la base initiale orthonormée sont essentiellement engendrés par les modes de flexion.

Les deux premiers vecteurs singuliers peuvent être assimilés aux deux premiers modes de flexion qui sont donc les variables les plus commandables.

On remarque que les dérivées des modes de flexion sont moins commandables que les modes de flexion eux-mêmes.

Les variables de tangage  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  sont très peu commandables, les variables de braquage  $\beta$  et  $\dot{\beta}$  et de dérive  $\dot{z}$  sont légèrement commandables.



iii) Analyse de la base de pseudo-équilibre.

La table 3.9 nous donne les coordonnées des vecteurs de la base de pseudo-équilibre dans la base initiale et les coordonnées des vecteurs de la base initiale dans la base de pseudo-équilibre.

On remarque que les coordonnées des vecteurs de la base d'équilibre ont une valeur beaucoup plus élevée lorsqu'elles se rapportent aux directions engendrées par les modes de flexion (directions 8 à 15).

Cela tendrait à montrer que les variables des modes de flexion sont celles qui sont à la fois le plus observables et commandables du système.

La table 3.10 nous donne les modes du second ordre du système ainsi que les matrices de dynamique, de commande et d'observation dans la base de pseudo-équilibre.

Le premier mode du second ordre est trois fois supérieur à son suivant immédiat et on peut considérer qu'à partir du 9ème, les modes du second ordre sont négligeables devant le premier. On a :

$$\sum_{i=1}^8 \sigma_i = 4.4309$$

$$\sum_{i=9}^{13} \sigma_i = 0.2453$$

et 
$$\sum_{i=9}^{13} \sigma_i / \sum_{i=1}^8 \sigma_i = 0.055$$

On peut vérifier que

$$|FF(i,j)| = |FF(j,i)|$$

et

$$|GG(i)| = |HH(i)|$$

conformément au théorème 1.8.

iv) Evolution des modes du second ordre.

La table 3.11 comprend deux graphiques qui permettent de comparer les modes du second ordre 1 et 2 d'une part et les modes du second ordre 2 à 8 d'autre part.

Pour la clarté des représentations on a représenté la racine carrée des modes du second ordre.

Les modes 9 à 13 pouvant être considérés comme négligeables sur la période du vol n'ont pas été figurés.

Le premier graphique montre une nette divergence entre les deux premiers modes,  $\sigma_1^{1/2}$  étant toujours supérieur à  $2\sigma_2^{1/2}$ . On remarque que  $\sigma_2$  est pratiquement constant sur toute la période, alors que  $\sigma_1$  présente plus de variations notamment sur la période 60-100 s.

Le second graphique montre que l'on peut classer les modes du second ordre du n°2 à 8 en trois groupes :

un groupe qui contient les modes 2 et 3,

un groupe qui contient les modes 4, 5, 6

et enfin un groupe qui contient les modes 7 et 8.

On remarque qu'il peut y avoir des chevauchements à l'intérieur d'un même groupe, c'est particulièrement le cas pour le groupe des modes 4, 5 et 6.

Cela peut donner une indication au moment de la réduction dans la base d'équilibre ; afin de conserver les mêmes modes à chaque instant il faut éviter de tronquer à l'intérieur d'un groupe où l'on observe des chevauchements.

Au vu de ces résultats on peut espérer avoir un très bon modèle réduit en tronquant dans la base d'équilibre à l'ordre 8.

RESULTATS DE LA DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES DE LA MATRICE D'OBSERVABILITE INITIALE

TEMPS 90

TABLE 3.7

VQ : VECTEURS SINGULIERS A DROITE DE LA MATRICE D'OBSERVABILITE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-0.7159	0.6981	-0.0119	0.0063	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0001	-0.0001	0.0004	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.6982	-0.7159	0.0011	-0.0016	0.0000	-0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
3	0.0000	-0.0001	-0.0030	0.0039	0.8952	0.2695	0.0690	0.1870	-0.2807	-0.0533	0.0652	-0.0023	0.0156	-0.0076	-0.0066
4	0.0078	-0.0032	-0.0097	0.0191	-0.0040	-0.0003	-0.0004	0.0019	-0.0010	-0.0003	0.0013	-0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0005
5	-0.0003	0.0006	-0.0021	-0.1070	0.0021	-0.0057	0.0034	0.0018	-0.0096	0.0555	-0.0174	-0.2440	-0.4324	0.8484	-0.1324
6	0.0031	-0.0054	0.0187	0.9740	-0.0070	0.0016	0.0093	0.0098	-0.0391	0.2011	-0.0108	-0.0234	-0.0435	-0.0784	-0.0100
7	0.0004	-0.0008	0.0041	0.1973	-0.0250	0.0892	-0.0734	-0.0217	0.1652	-0.9551	0.0297	-0.0176	-0.0240	-0.0719	-0.0111
8	0.0000	0.0000	0.0012	0.0035	0.0047	0.0109	-0.0191	-0.0748	0.1747	0.0654	0.9506	-0.0090	-0.0067	-0.0425	0.2314
9	0.0000	0.0000	-0.0011	0.0031	0.0378	-0.8842	-0.0887	-0.1477	0.2150	-0.0415	-0.0414	0.0016	-0.0095	0.0031	0.0011
10	-0.0000	-0.0000	0.0002	-0.0008	0.0101	0.0045	-0.0082	-0.0405	-0.0220	-0.2103	-0.0445	-0.3503	0.0779	0.0069	0.0069
11	0.0000	-0.0000	-0.0026	0.0002	0.2418	0.3658	-0.1100	-0.5699	0.6439	0.1547	-0.1772	0.0047	-0.0211	0.0145	-0.0149
12	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0001	0.0027	0.0033	-0.0009	0.0212	-0.0016	-0.0060	0.0790	0.5413	-0.7475	0.2548	-0.2670
13	0.0000	0.0000	-0.0004	0.0061	0.0112	-0.0297	0.8699	0.2808	0.4026	-0.0062	-0.0325	0.0084	0.0083	-0.0057	-0.0056
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0008	-0.0004	-0.0109	-0.0069	-0.0047	0.0054	-0.0580	0.8027	0.3493	-0.4365	0.1985
15	-0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0052	0.0300	0.0528	-0.4607	0.7300	0.4870	0.1043	-0.0530	-0.0069	0.0039	0.0004	0.0152

D : VALEURS SINGULIERES DE LA MATRICE D'OBSERVABILITE DANS LA BASE INITIALE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	7.6512	1.6411	0.0327	0.0040	0.0006	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

RAPPORT RAPPORT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		0.2145	0.0199	0.1214	0.1519	0.6413	0.5376	0.7495	0.7736	0.5965	0.3699	0.1115	0.6559	0.5562	0.2103

RESULTATS DE LA DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES DE LA MATRICE DE COMMANDABILITE INITIALE

TEMPS 90

TABLE 3.8

VQ : VECTEURS SINGULIERS A GAUCHE DE LA MATRICE DE COMMANDABILITE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0003	-0.0003	0.0037	-0.0311	0.1160	0.8376	0.5330	0.0000	0.0000
2	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0002	-0.0005	0.0052	-0.0438	0.0538	0.5291	-0.8457	-0.0000	0.0000
3	0.0000	-0.0001	0.0014	0.0007	0.0006	-0.0012	0.0332	0.1046	0.9813	0.1213	0.1006	-0.0126	-0.0018	-0.0000	-0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	-0.0001	0.0003	-0.0065	0.0097	0.1024	-0.0039	-0.9866	0.1255	0.0165	0.0000	0.0000
5	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0016	0.0003	-0.0021	0.0137	-0.1222	0.9908	-0.0102	0.0517	-0.0203	-0.0000	0.0000
6	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.9180	0.3966
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.3966	-0.9180
8	-0.0158	-0.9993	-0.0267	-0.0181	-0.0013	0.0046	-0.0011	-0.0008	0.0000	0.0001	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
9	-0.0018	-0.0010	-0.0030	0.0005	0.9955	0.0946	-0.0006	0.0012	-0.0008	0.0014	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
10	-0.9997	0.0164	-0.0204	0.0004	0.0018	0.0011	-0.0012	-0.0006	0.0002	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
11	-0.0013	-0.0052	0.0152	0.0090	0.0946	-0.9953	0.0003	-0.0096	-0.0004	0.0006	-0.0004	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
12	-0.0125	-0.0303	0.6067	0.7939	-0.0037	0.0162	-0.0164	0.0056	-0.0015	-0.0004	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
13	-0.0009	-0.0012	-0.0126	0.0139	0.0000	-0.0081	0.5027	0.8575	-0.1049	-0.0238	-0.0057	0.0004	0.0001	-0.0000	-0.0000
14	0.0166	0.0099	-0.7939	0.6074	0.0027	-0.0063	-0.0121	-0.0141	0.0025	0.0005	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
15	0.0008	0.0010	-0.0076	-0.0155	-0.0006	-0.0054	-0.8636	0.5032	-0.0238	-0.0116	0.0080	-0.0009	-0.0000	-0.0000	0.0000

D : VALEURS SINGULIERES DE LA MATRICE DE COMMANDABILITE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	12551.8906	5897.8594	3288.5442	2955.6221	779.9924	692.9768	82.0872	57.9186	7.9054	6.2935	0.5951	0.2443	0.0211	0.0000	0.0000

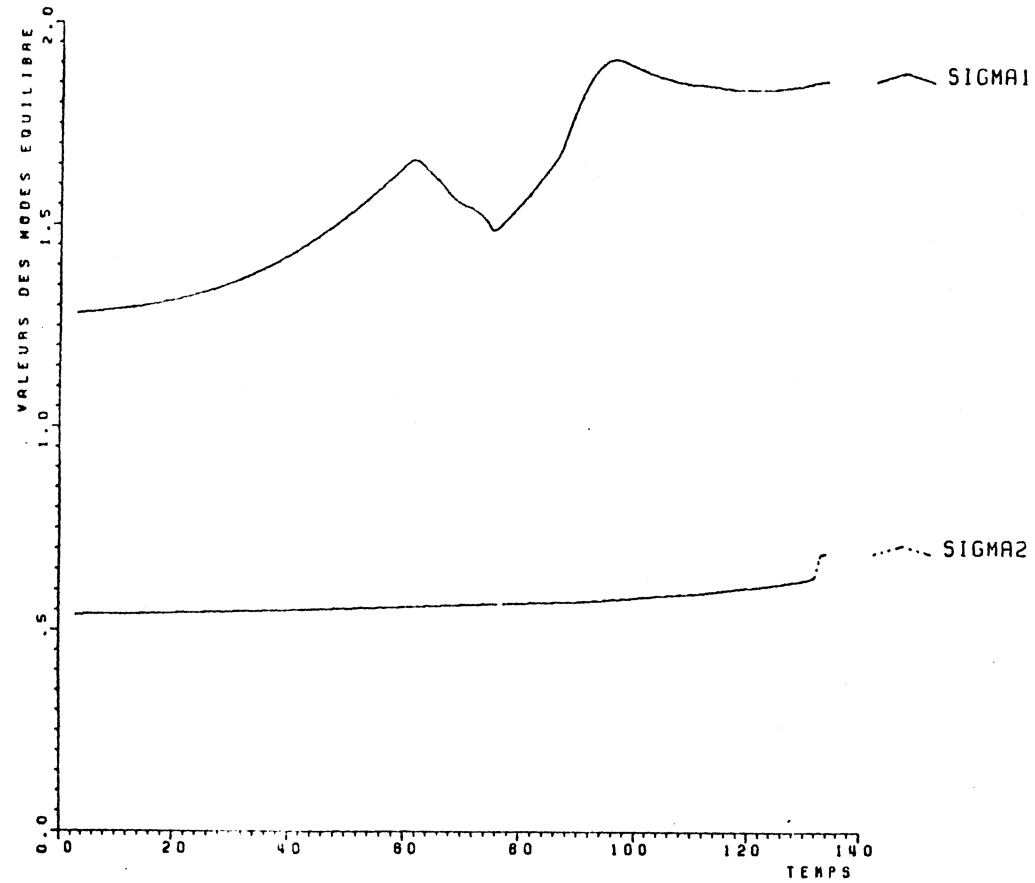
RAPPORT RAPPORT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		0.4699	0.5576	0.8988	0.2639	0.8884	0.1185	0.7056	0.1365	0.7961	0.0946	0.4105	0.0864	0.0000	0.6252

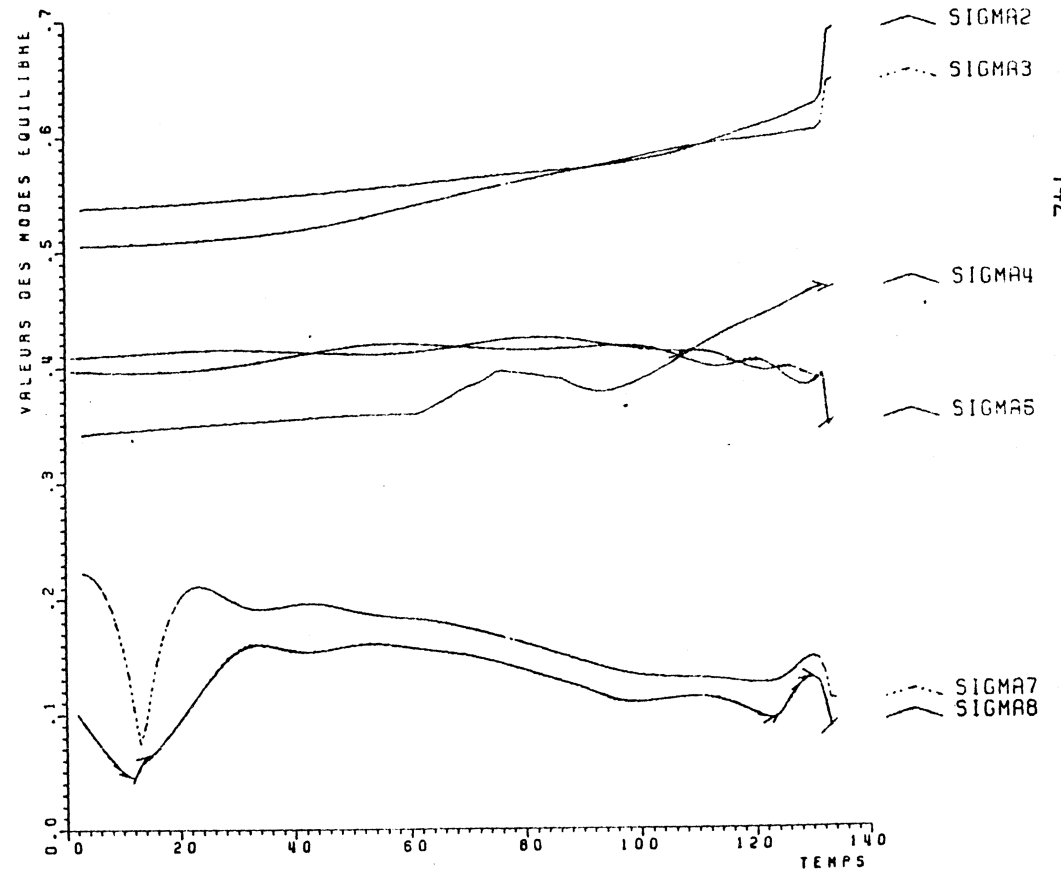


Pour la clarté des représentations  $[\sigma_i(\tau)]^{1/2}$  est représenté

MODES EQUILIBRE NOS 1 ET 2



MODES EQUILIBRE NOS 2 A 8



### III.3. COMPARAISON DE TRAJECTOIRES.

Pour chacune des deux méthodes (agrégation et troncature dans la base d'équilibre), on a représenté la sortie obtenue pour les différents ordres de réduction possibles, pour une entrée donnée.

On cherche à voir par un critère visuel de ressemblance si les critères d'arrêt pour les réductions sont compatibles avec les résultats graphiques.

On a étudié deux entrées : l'entrée impulsion et l'entrée échelon qui sont les deux entrées les plus utilisées en automatique.

On a réduit deux systèmes : le sous-système stable et le système complet instable.

De plus pour chaque ordre de réduction dans la base d'équilibre on a calculé les valeurs propres de la matrice dynamique du modèle réduit afin de les comparer aux valeurs propres conservées par l'agrégation du même ordre.

#### III.3.1. SOUS-SYSTEME STABLE.

On se place toujours au temps  $t = 90$  s et l'on écrit le système dans une base où la matrice dynamique est diagonale afin de découpler les sous-systèmes stables et instables.

On isole la partie stable que l'on considère comme un nouveau système.

Pour calculer les différents modèles réduits on écrit d'une part ce nouveau système dans une base d'équilibre et l'on opère par troncature pour tous les ordres possibles.

D'autre part les modèles agrégés sont obtenus d'après le classement énergétique décrit au § III.1 selon l'entrée considérée, et la matrice de sortie est calculée d'après la méthode indiquée au § I.2.4.b).

Le système étant stable on a choisi de tracer les courbes entrées-sorties sur un horizon de 500 pas, ce qui permet de comparer les régimes transitoires et permanents des modèles réduits.

III.3.1. a) Etude de l'entrée impulsion.

Les figures 3.12 a) à 3.12 d) et 3.13 a) à 3.13 d) montrent les courbes entrée-sortie pour une entrée impulsion des modèles réduits par agrégation et par troncature dans la base d'équilibre, pour les ordres 2, 3, 5 et 13. L'ordre 13 représente le modèle stable initial et pour les deux méthodes dès l'ordre 5 les courbes entrée-sortie sont très proches de la courbe entrée-sortie du système initial.

Pour les ordres 2 et 3 les modèles réduits par agrégation donnent des courbes proches de la courbe du modèle initial, alors que les modèles réduits dans la base d'équilibre donnent des courbes qui tout en respectant les ordres de grandeur ont un comportement beaucoup plus amorti que la courbe du système réel.

III.3.1. b) Etude de l'entrée échelon.

Les figures 3.1 a) à 3.14 d) et 3.15 a) à 3.15 d) montrent les courbes entrée-sortie pour une entrée échelon des modèles réduits par agrégation et par troncature dans la base d'équilibre pour les ordres 1,3,5 et 13.

Comme dans le cas de l'entrée impulsion, dès l'ordre 5 les deux méthodes donnent des modèles réduits qui ont des courbes entrée-sortie très proches de la courbe du modèle initial.

Dans le cas de l'agrégation dès l'ordre 3 les courbes sont ressemblantes.

Par contre, l'amortissement des courbes obtenues pour les modèles réduits dans la base d'équilibre pour les ordres inférieurs à 5 est assez mal décrit.

III.3.1. c) Etude des valeurs propres des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre.

Le sous-système stable étant obtenu par découplage du système complet, les valeurs propres de sa matrice dynamique forment un sous-ensemble des valeurs propres du système d'origine.

On sait que l'agrégation est caractérisée par la conservation d'un sous-ensemble des valeurs propres du système initial, par contre la troncature dans la base d'équilibre se faisant alors qu'il y a

des couplages on ne connaît pas a priori les valeurs propres des matrices dynamiques obtenues après réduction. On a donc calculé pour chaque ordre de réduction dans la base d'équilibre, les valeurs propres de la nouvelle matrice dynamique.

La table 3.16 montre les valeurs propres des matrices dynamiques obtenues après réduction dans la base d'équilibre (les valeurs propres conjuguées ne figurent qu'une fois et sont obtenues par leur couple partie réelle, partie conjuguée).

On constate que les valeurs propres trouvées sont proches de certaines valeurs propres du modèle complet, ceci dès l'ordre 5.

En effet soit  $\lambda_i$  les valeurs propres du système initial et  $\tilde{\lambda}_i$  celles du modèle réduit à l'ordre 5 on a le tableau suivant :

$\lambda_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\frac{ \lambda_i - \tilde{\lambda}_i }{ \lambda_i }$
0.9408	0.9417	$10^{-4}$
(+0.2170; ±0.9671)	(-0.2212; ±0.9675)	$4.10^{-3}$
(0.7109; ±0.7005)	(0.7109; ±0.6997)	$8.10^{-4}$

Tableau 3.17

Le tableau montre qu'on a une précision de l'ordre de  $10^{-3}$  sur les valeurs propres du modèle réduit dans la base d'équilibre.

On remarque de plus que les valeurs propres concernées : 0.9408 ; (-0.2170 ; ± 0.9671) ; (0.7109 ; ± 0.7005) sont les valeurs propres conservées par l'agrégation à l'ordre 5.

D'autre part l'ordre 5 est l'ordre pour lequel on a pu constater une grande similitude entre les courbes entrée-sortie obtenues après réduction par les deux méthodes et la courbe entrée-sortie du modèle initial.



### III.3.2. SYSTEME COMPLET.

On considère cette fois le système complet au temps  $t = 90$  s. La base d'équilibre est calculée à partir du système initial, et les modèles réduits sont obtenus par troncature dans cette base.

Pour former les modèles réduits instables par agrégation, on a réintégré le sous-système instable aux différents modèles agrégés du sous-système stable.

Le système étant cette fois instable on a tracé les courbes entrée-sortie sur un horizon de 50 pas et 100 pas dans le cas de l'impulsion et 25 et 100 pas dans le cas de l'échelon pour éviter l'effet d'écrasement dû à l'échelle.

#### III.3.2. a) Entrée impulsion.

Les figures 3.17 a) et 3.17 b) montrent les courbes entrée-sortie du système réel pour une entrée impulsion sur 50 et 100 pas.

C'est à ces courbes que nous allons comparer les courbes entrée-sortie des modèles réduits.

Les figures 3.18 a) à 3.18 d) montrent les courbes entrée-sortie pour l'entrée impulsion des modèles réduits par agrégation pour les ordres 4, 5 et 7. Pour l'ordre 4 on a tracé les courbes sur 50 et 100 pas.

La courbe sur 100 pas permet de voir que dès l'ordre 4 on a globalement un très bon ordre de grandeur sur la sortie (à  $10^{-2}$  près), par contre il faut aller jusqu'à l'ordre 7 pour avoir une courbe sur 50 pas identique à celle du modèle réel.

Nous avons vu que dès l'ordre 5 on obtenait une très bonne approximation du sous-système stable. Il n'est donc pas surprenant que dans le cas du système instable on obtienne une bonne approximation pour l'ordre 7 étant donné qu'on a rajouté les deux valeurs propres instables. Les figures 3.19 a) à 3.19 d) montrent les courbes entrée-sortie pour l'entrée impulsion des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre pour les ordres 4, 1 et 6.

La courbe entrée-sortie du modèle réduit d'ordre 1 (qui ne peut être obtenue dans le cas de l'agrégation puisqu'on doit garder les

deux modes instables) est intéressante parce qu'elle montre que dès le premier ordre de réduction on a un modèle instable, ce qu'aucun résultat théorique n'avait démontré. De plus l'ordre de grandeur est assez bien respecté.

L'analyse des valeurs propres des modèles réduits dans la base d'équilibre confirmera ces observations.

Pour l'ordre 4 on a tracé les courbes sur 50 et 100 pas ce qui permet de voir que lorsqu'on s'éloigne de l'origine l'ordre de grandeur de la sortie est moins bien respecté que dans le cas de l'agrégation. Par contre dès l'ordre 6 (ordre qui ne peut être obtenu pour l'agrégation étant donné la contrainte sur les valeurs propres conjuguées), la courbe entrée-sortie du modèle réduit est identique sur 50 pas à la courbe entrée-sortie du modèle initial.

### III.3.2. b) Etude de l'entrée échelon.

Les figures 3.20 a) et 3.20 b) montrent les courbes entrée-sortie du modèle réel pour une entrée échelon sur 25 et 100 pas.

C'est à ces courbes que nous allons comparer les courbes entrée-sortie pour une entrée échelon des modèles réduits. Les figures 3.21 a) à 3.21 d) montrent les courbes entrée-sortie pour l'entrée échelon des modèles réduits par agrégation pour les ordres 5, 3 et 7. Pour l'ordre 5 on a tracé les courbes sur 25 et 100 pas. Les deux courbes sont pratiquement identiques à celles obtenues pour le modèle réel, ceci rejoint l'observation faite dans le cas stable : dès l'ordre 3, pour l'entrée échelon on avait une bonne ressemblance des courbes.

La courbe obtenue pour l'ordre 3 sur 50 pas est assez différente de celle obtenue pour le modèle réel, ce qui s'explique par le fait qu'à cet ordre on ne garde que des valeurs propres réelles, ce qui supprime les oscillations. La courbe obtenue pour l'ordre 7 sur 50 pas est identique à celle du modèle réel.

Les figures 3.22 a) à 3.22 f) montrent les courbes entrée-sortie pour l'entrée échelon des modèles réduits dans la base d'équilibre pour les ordres 5, 1, 4, 6 et 8.

Pour l'ordre 5 les courbes sont moins ressemblantes aux courbes obtenues pour le modèle réel que dans le cas de l'agrégation. En par-

ticulier pour  $t = 100$ , l'erreur relative entre les deux sorties est de  $\frac{258.69-211.07}{211.07} = 22\%$ . Dans le cas du sous-système stable on avait aussi remarqué qu'il fallait un ordre plus élevé dans le cas de la réduction dans la base d'équilibre pour obtenir des courbes ressemblantes.

Sur 25 pas à l'ordre 6 on a une courbe presque identique à celle du modèle réel.

III.3.2. c) Etude des valeurs propres des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre.

Ainsi que lors de l'étude du sous-système stable on a calculé les valeurs propres de la matrice dynamique des différents modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre. La table 3.23 montre les valeurs propres obtenues pour chaque ordre de réduction.

De même que dans le cas stable les valeurs propres obtenues pour chaque ordre de réduction sont très proches de certaines valeurs propres du système réel.

Pour l'ordre 6 par exemple si  $\tilde{\lambda}_i$  représente les valeurs propres du modèle réduit et  $\lambda_i$  les valeurs propres correspondantes du système réel, on a le tableau suivant :

$\lambda_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\frac{ \lambda_i - \tilde{\lambda}_i }{ \lambda_i }$
0.9408	0.95	$10^{-2}$
1.055	1.056	$10^{-3}$
(+0.7109; ±0.7005)	(-0.7109; ±0.7003)	$2.10^{-4}$
(-0.2170; ±0.9671)	(-0.2180; ±0.9671)	$10^{-3}$

Tableau 3.24

Ce tableau montre qu'il y a une erreur relative allant de 10 à  $10^{-4}$  sur les valeurs propres du modèle réduit d'ordre 6 par rapport aux valeurs propres du système initial.

Comme on l'avait remarqué à l'examen des courbes, dès l'ordre 1 le modèle réduit est instable et la valeur propre de ce modèle est assez proche de la valeur propre  $\lambda_{15} = 1.055$  la plus instable du système initial.

Le fait que jusqu'à l'ordre 6 la valeur de ce mode instable reste assez élevée (1.068 à 1.066) par rapport à  $\lambda_{15}$  explique que les courbes entrée-sortie des modèles réduits divergent lorsque  $t$  devient grand (courbes 3.19 b) et 3.22 b)).

On constate qu'à partir de l'ordre 6, l'ordre d'entrée des valeurs propres dans les modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre est le même que dans le cas de l'agrégation à l'exception près suivante :

Alors que l'agrégation conserve systématiquement toutes les valeurs propres instables du système initial la valeur propre  $\lambda_{14} = 1.004$  n'intervient dans la réduction dans la base d'équilibre qu'à l'ordre 13.

Ceci signifie que la direction associée à cette valeur propre est peu observable et peu commandable tout en étant instable.

Le comportement entrée-sortie n'est donc pas affecté par son omission pour les ordres inférieurs, par contre une commande d'ordre réduit calculé sur un modèle réduit d'ordre inférieur à 13 aurait toutes les chances de ne pas stabiliser cette valeur propre instable.

Fig 3.12 Modèle stable : réduction par aggrégation, entrée impulsion

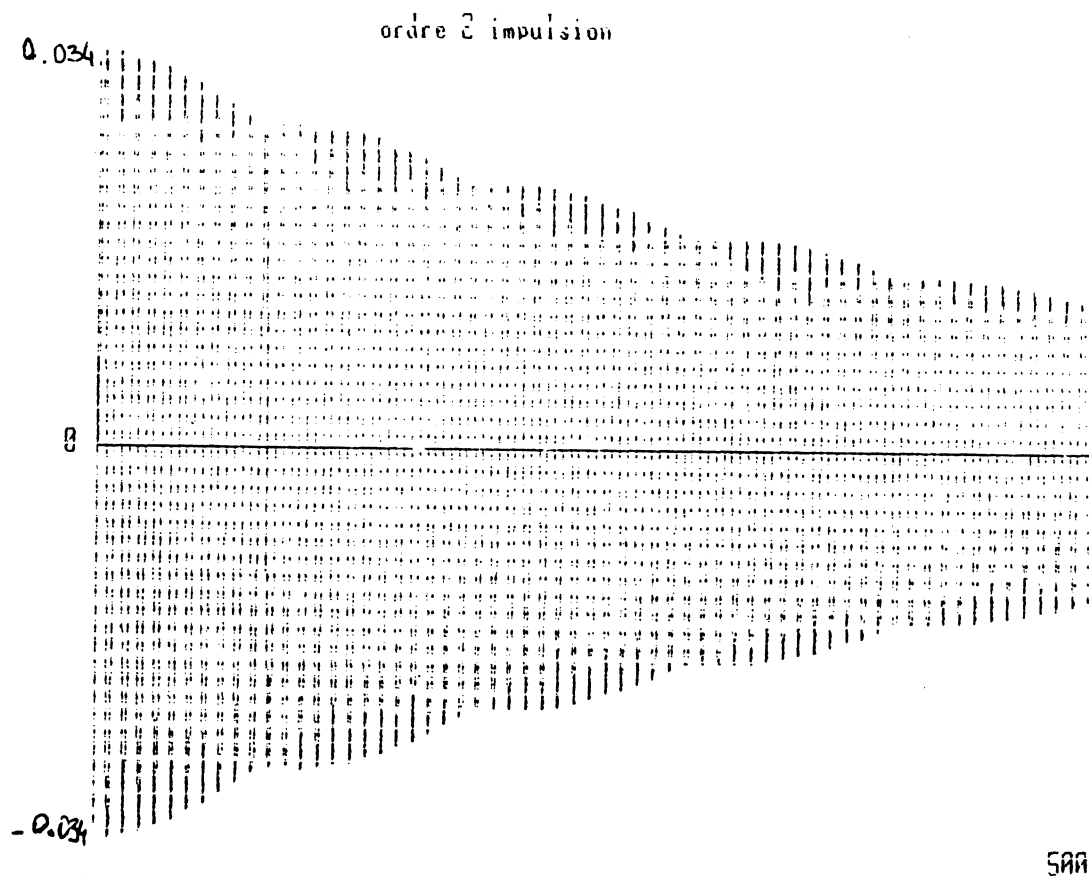


Fig 3.12.a)

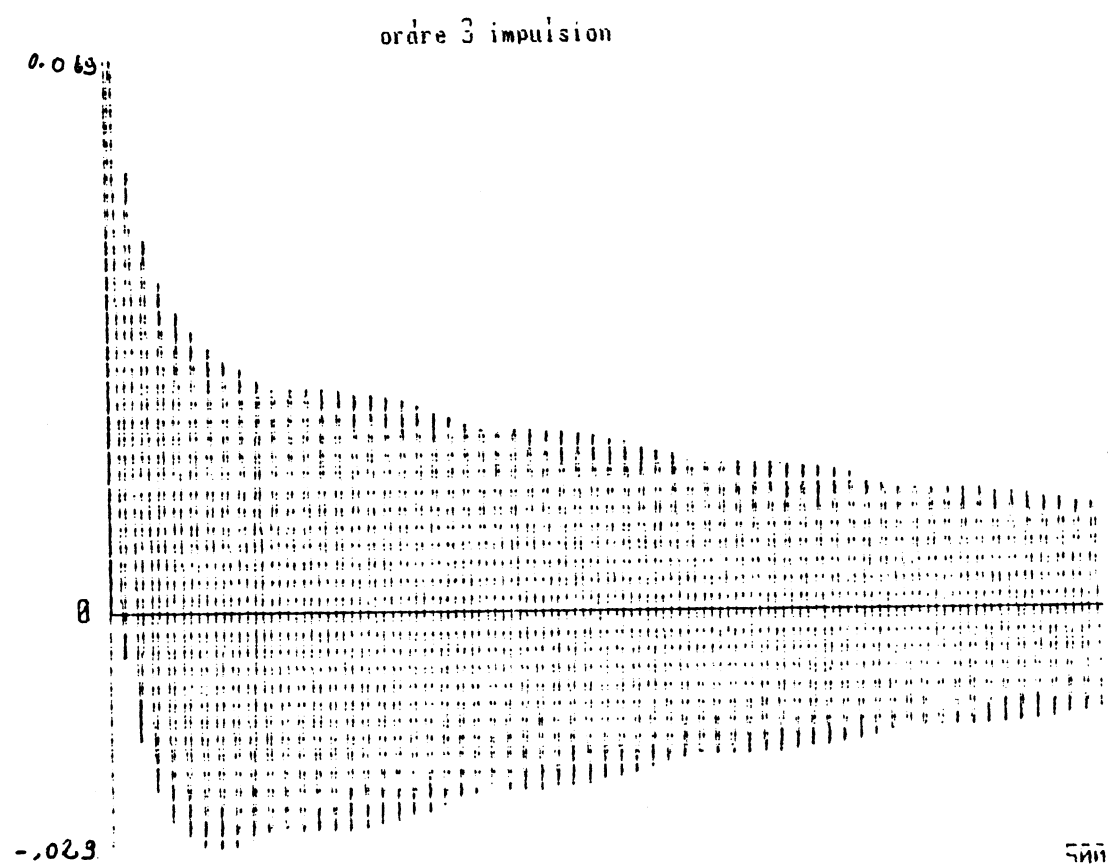


Fig 3.12.b)

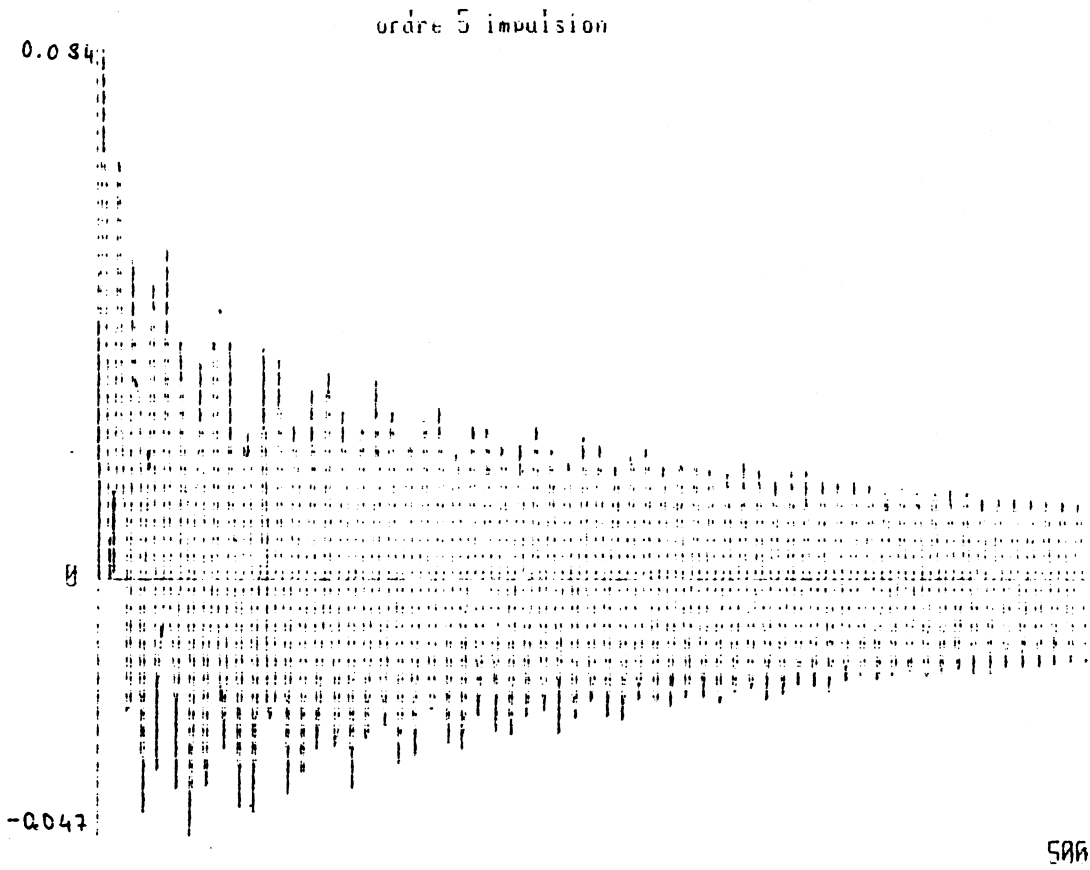


Fig. 3.12.c)

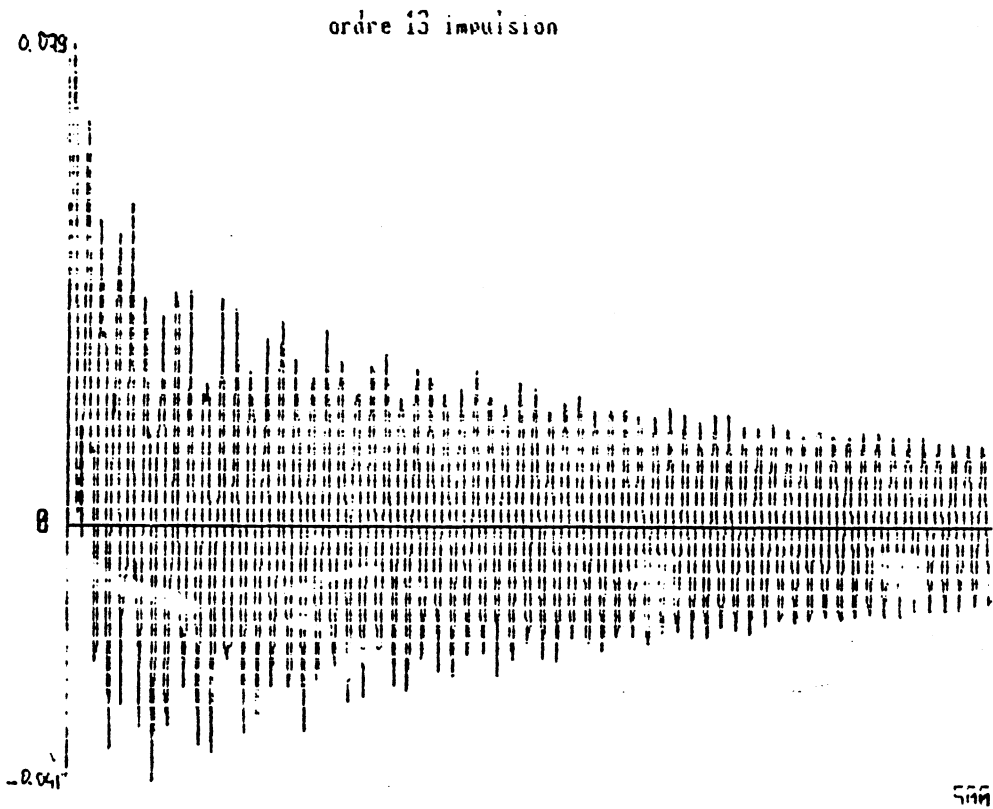


Fig. 3.12.d)

Fig 3.13 Modèle stable : réduction dans la base d'équilibre  
entrée impulsion.

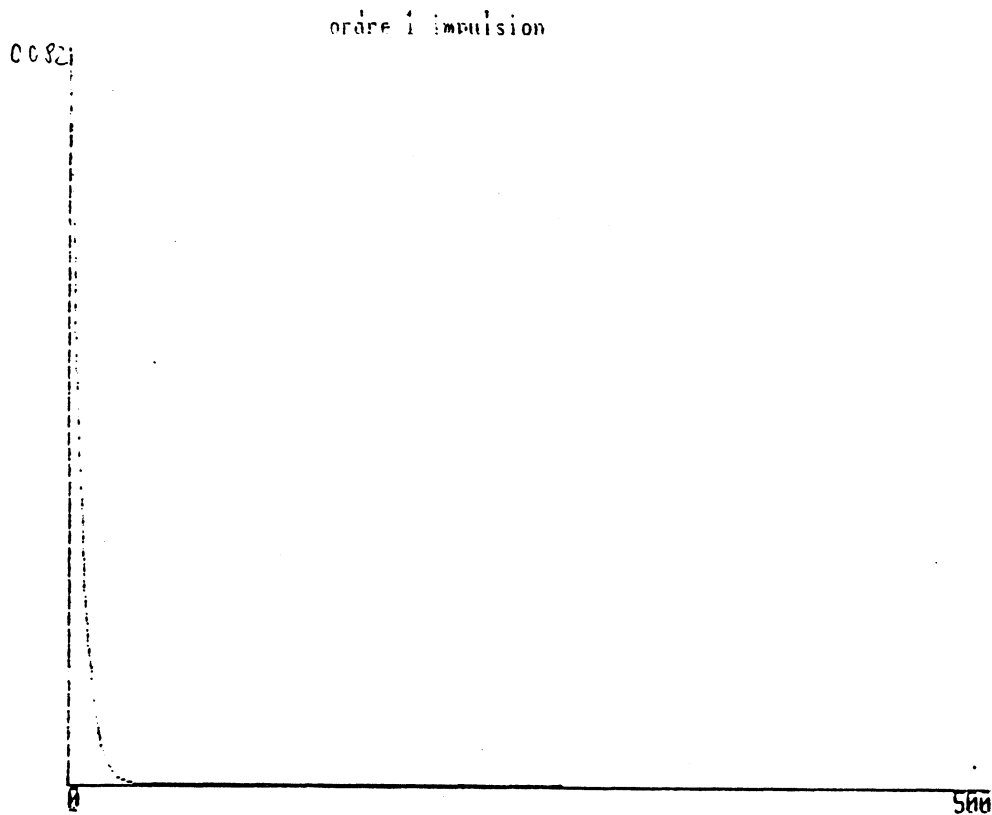


Fig 3.13 a)

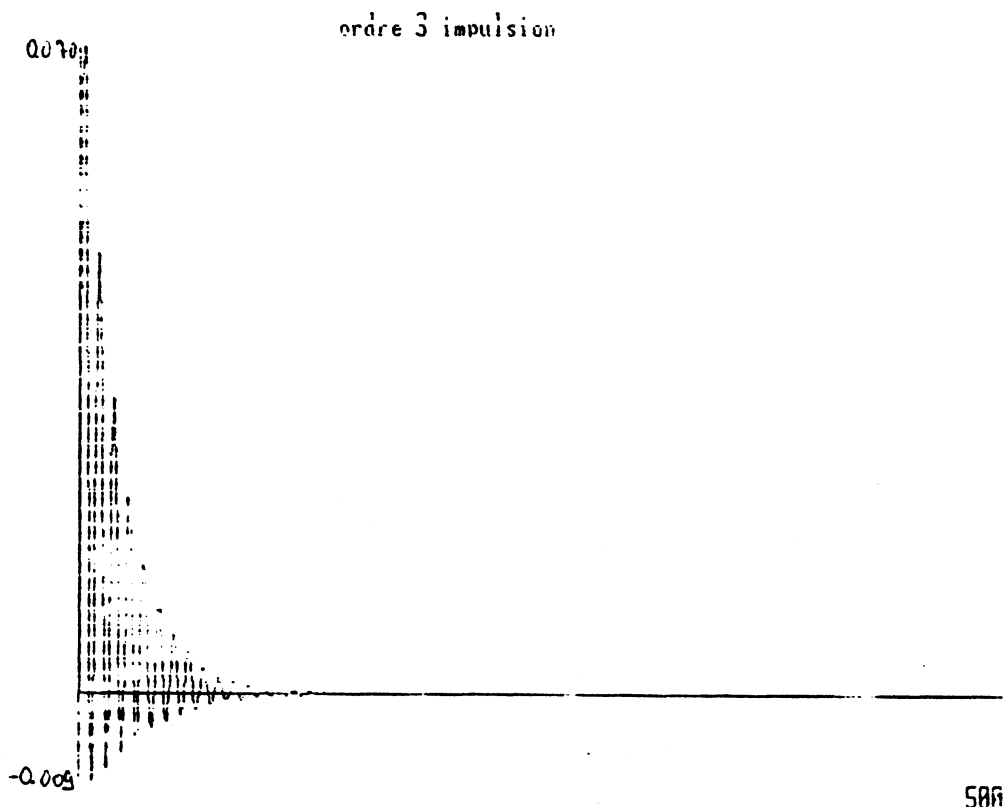


Fig 3.13 b)

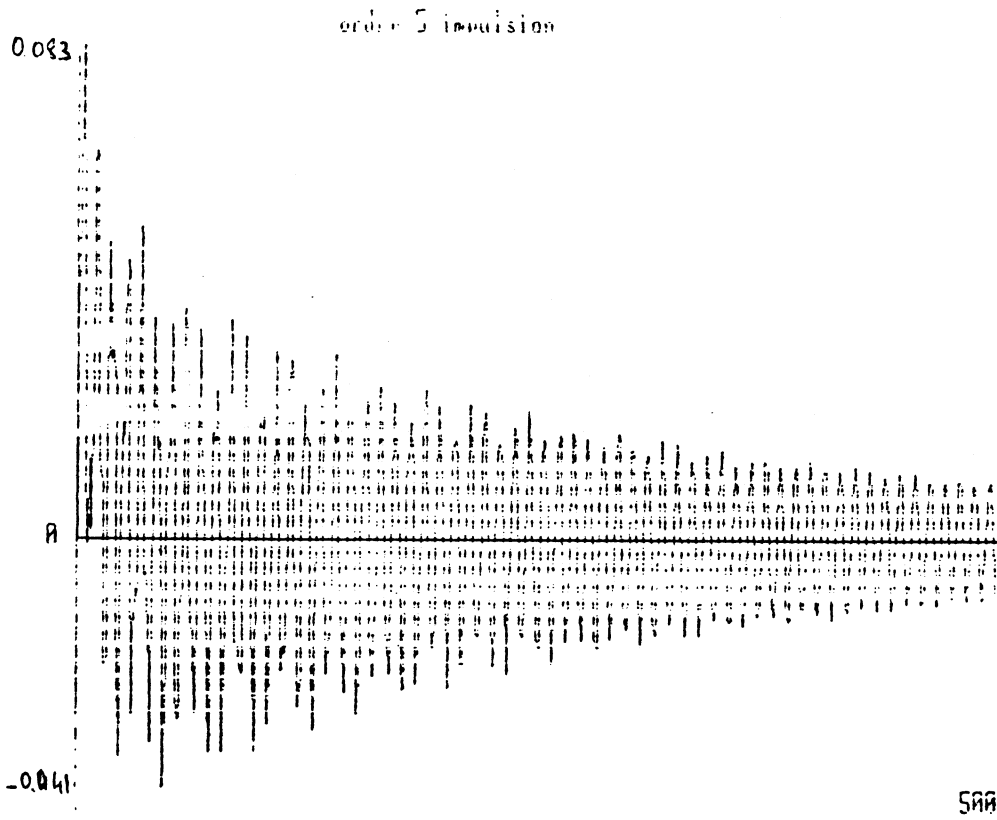


Fig 3.13.c)

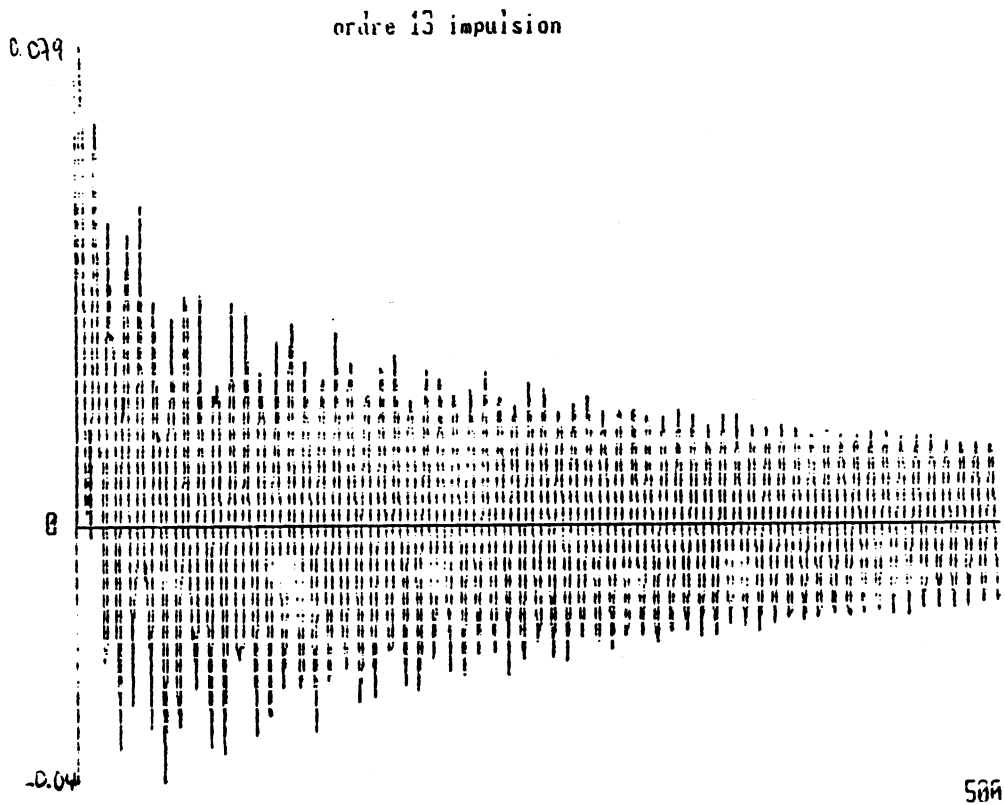


Fig 3.13.d)



Fig 3.14 Modèle stable : réduction par aggrégation, entrée échelon.

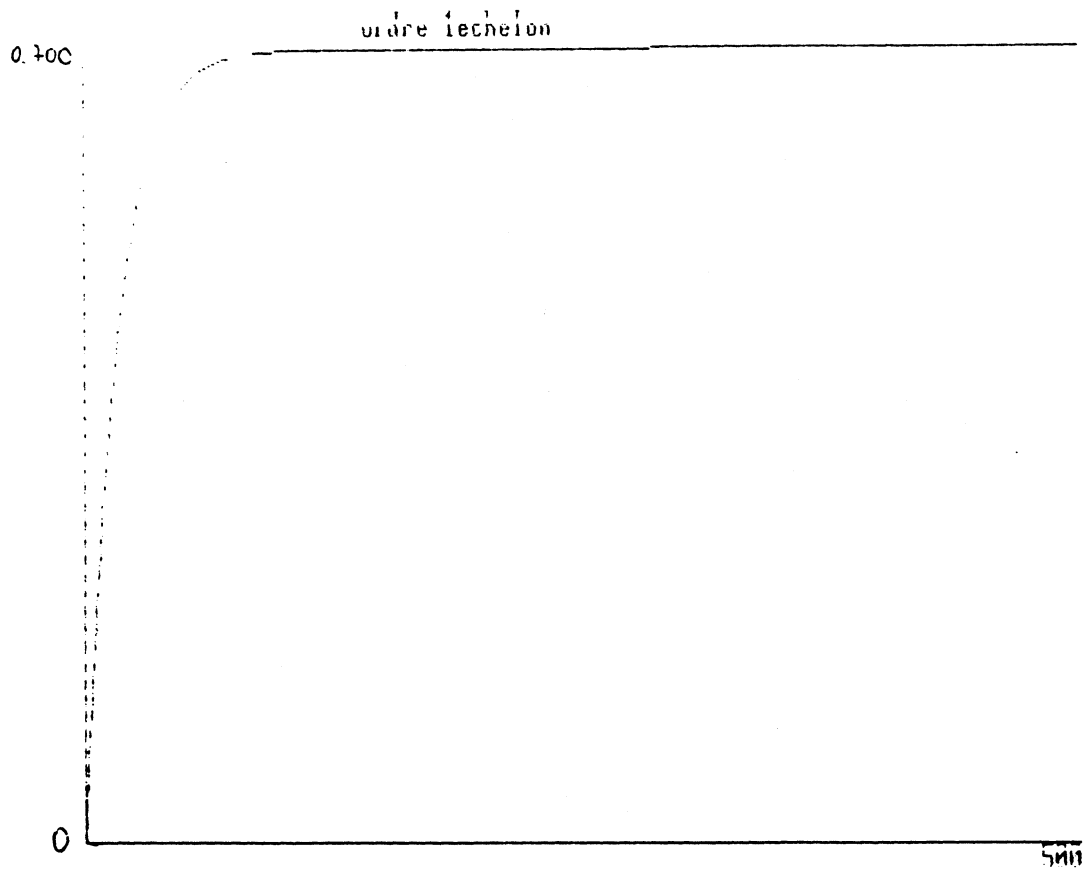


Fig 3.14. a)

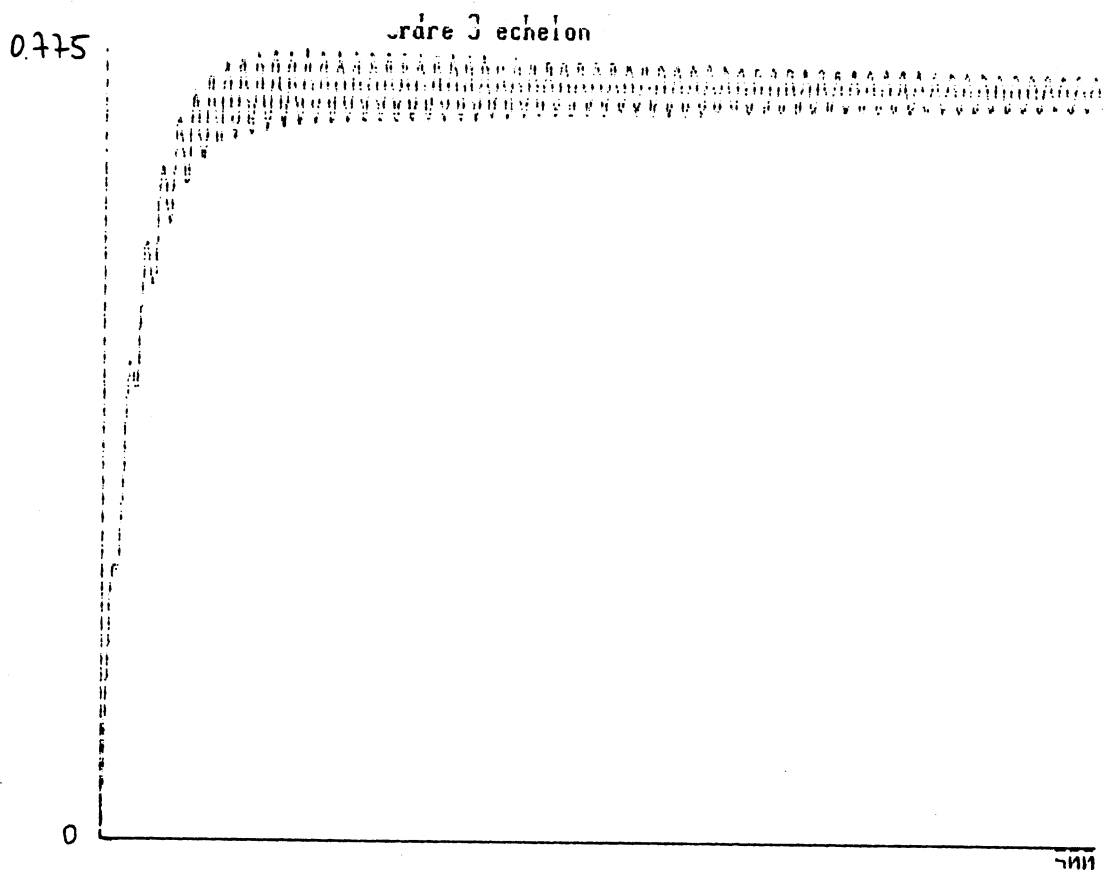


Fig 3.14. b)

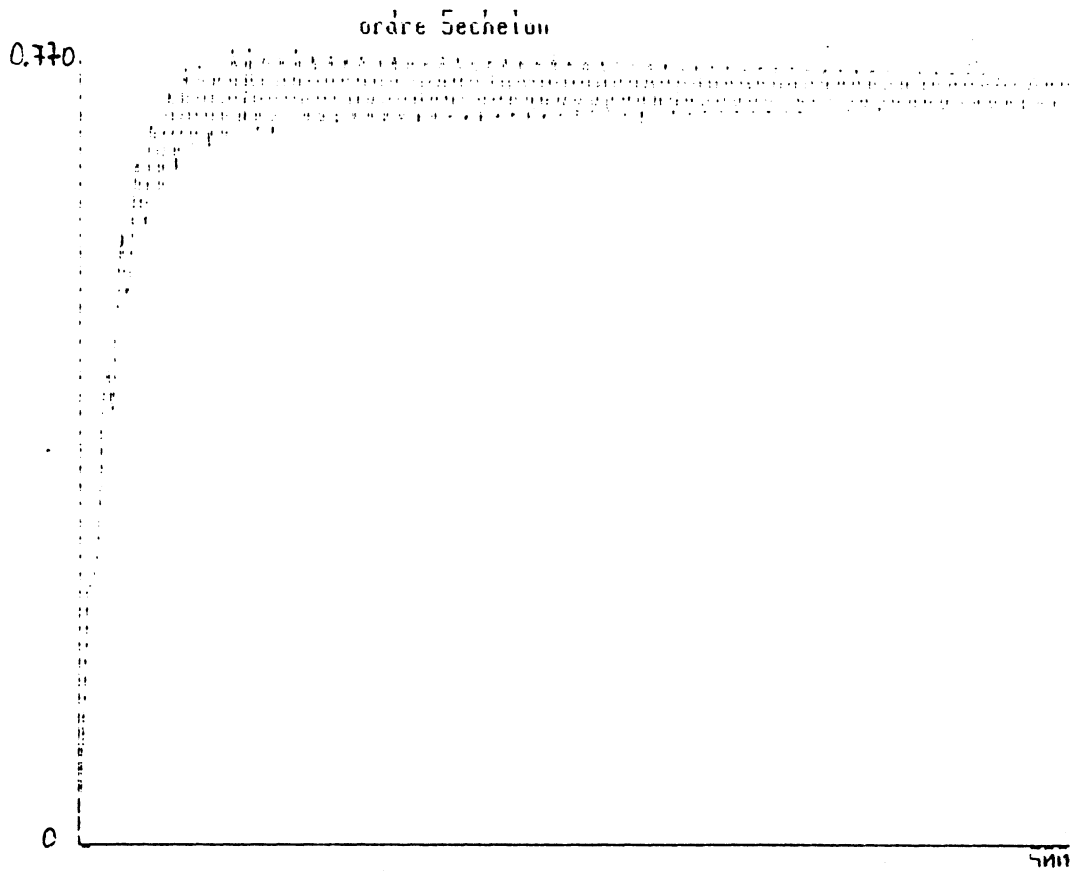


Fig 3.14.c)

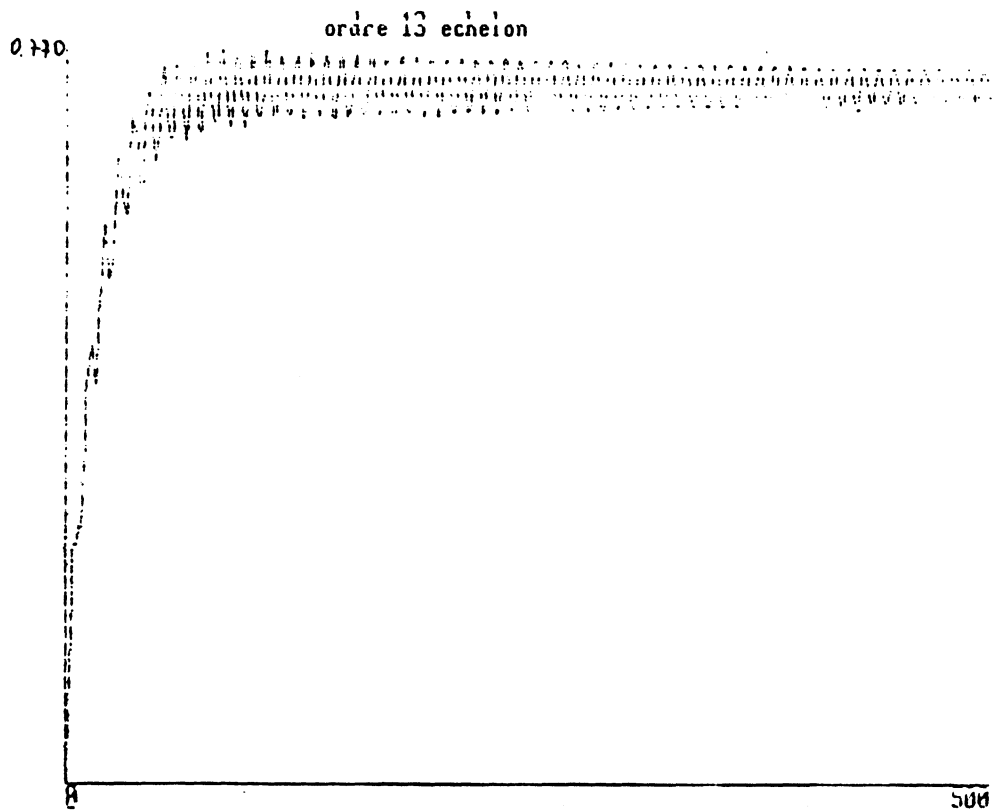


Fig 3.14.d)

Fig 3.15 Modèle stable : réduction dans la base d'équilibre, en hec échelon.

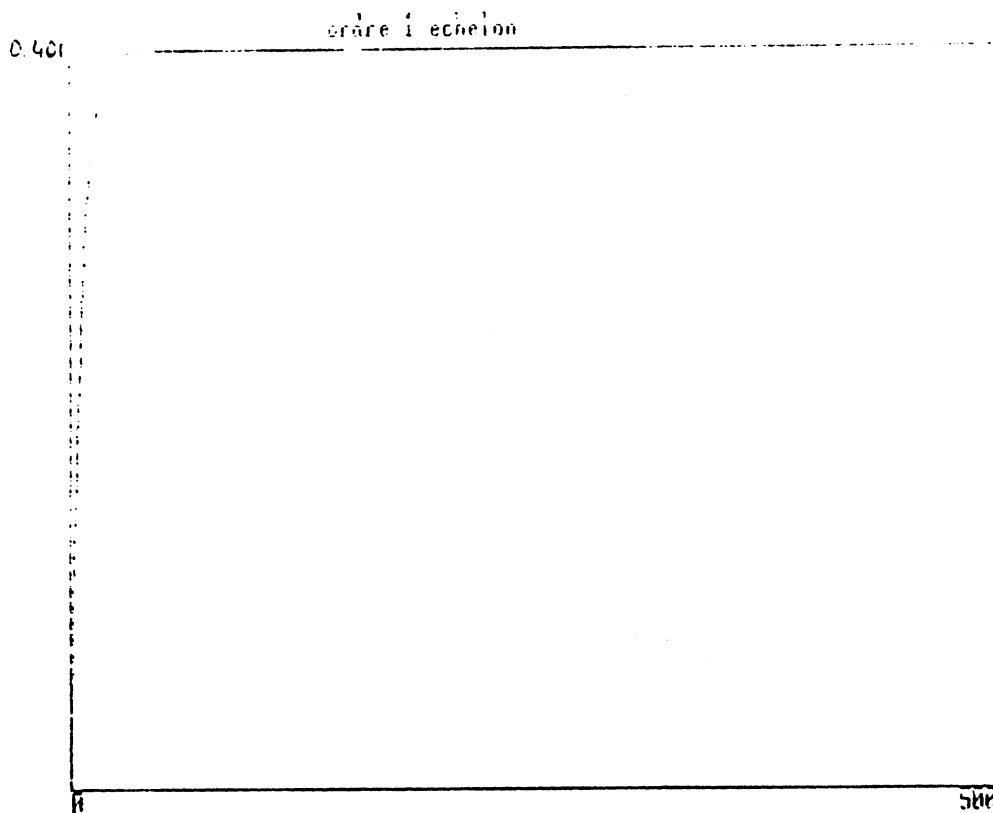


Fig 3.15a)

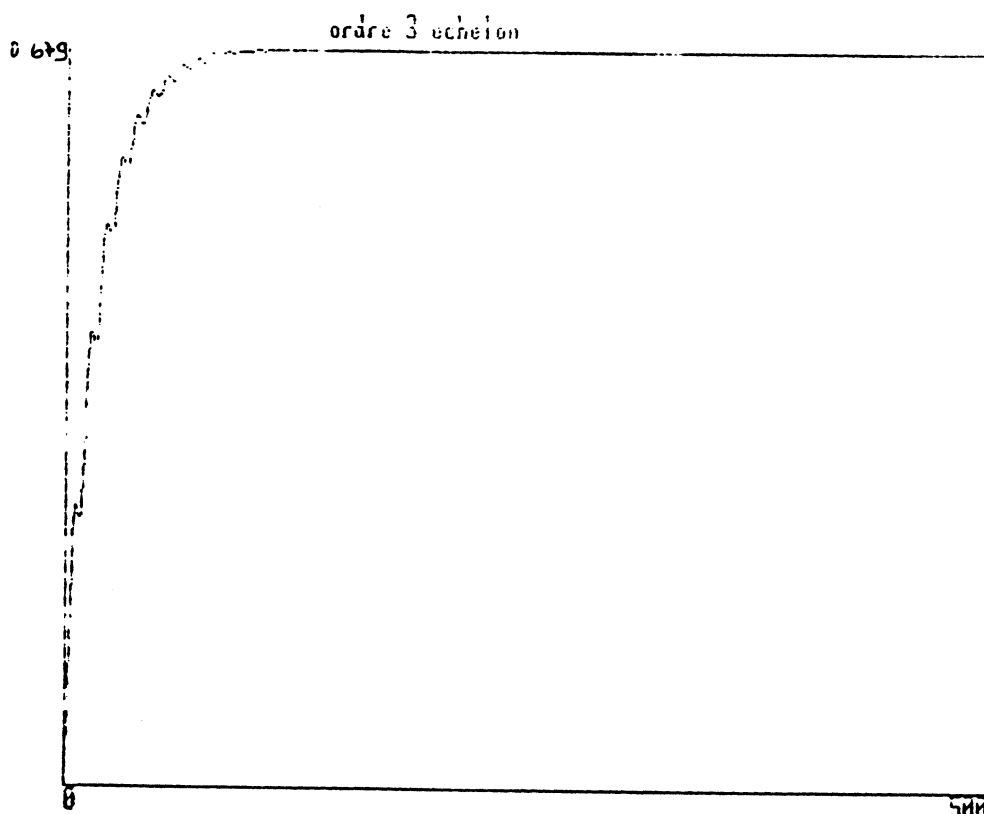


Fig 3.15.b)

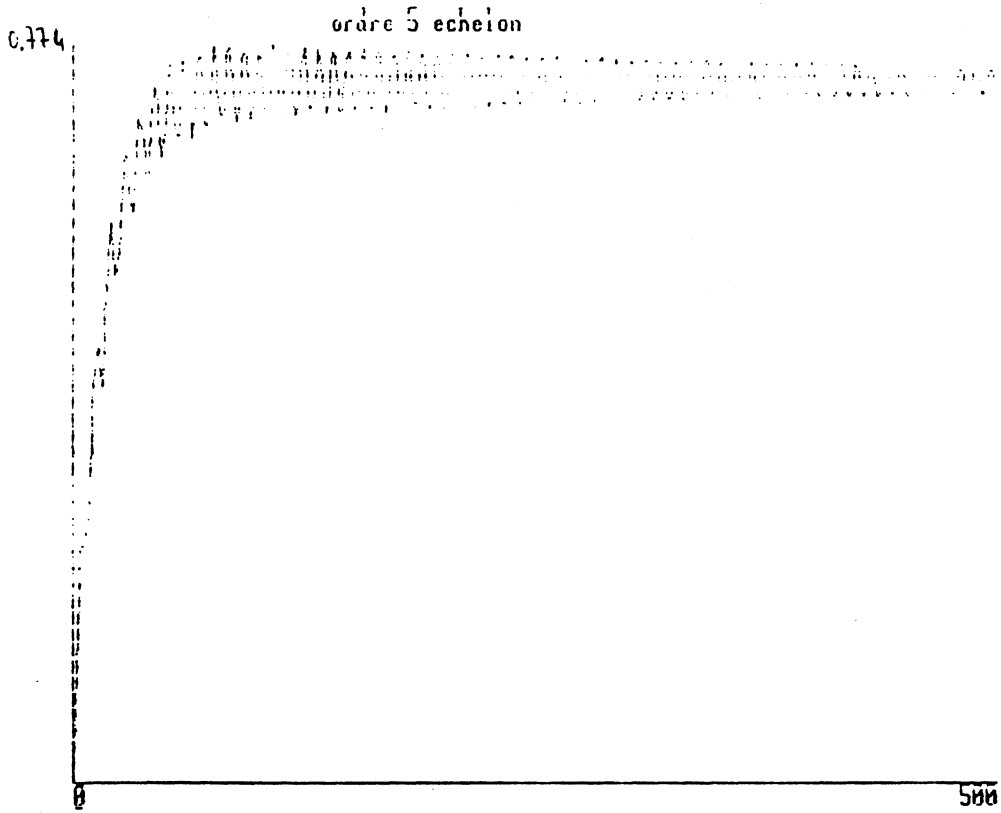


Fig 3.15.c)

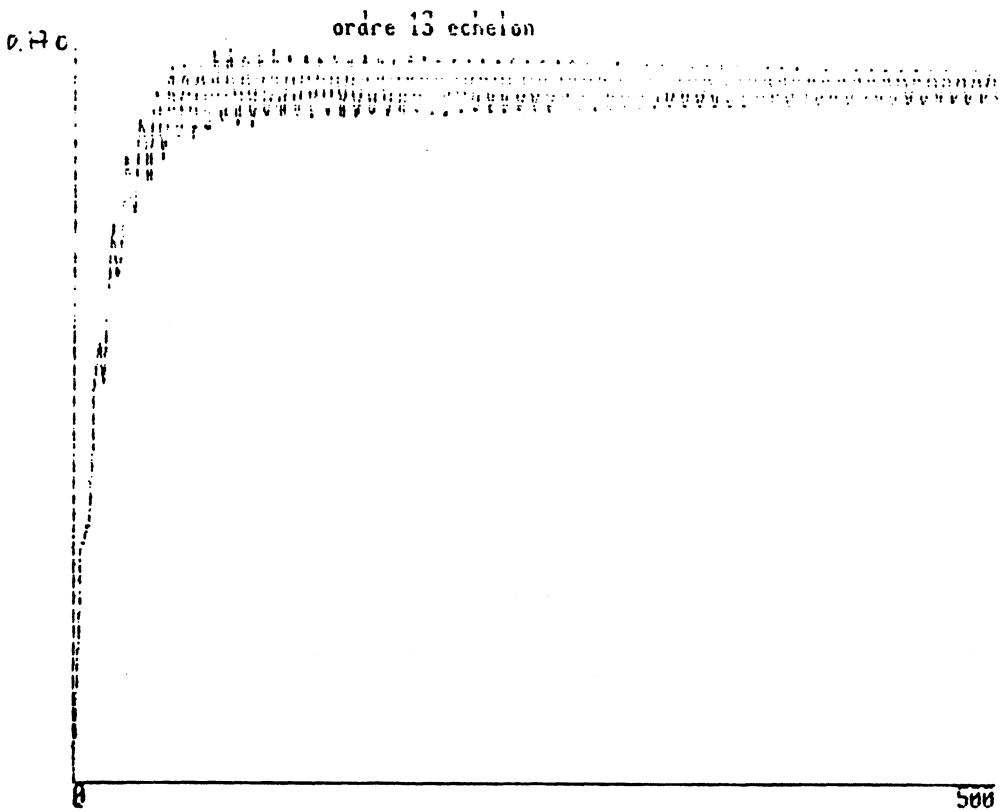


Fig 3.15.d)

```

* ordre *
*
*
* 1 * 0.8460 *
*
*
* 2 *(0.7398;±0.6635)*
*
*
* 3 *(0.6889;±0.6635)*0.9447*
*
*
* 4 *(0.6967;±0.6989)*0.9496*-0.2817*
*
*
* 5 *(0.7109;±0.6997)*0.9417*(-0.2212;±0.9675)*
*
*
* 6 *(0.7119;±0.7003)*0.9393*(-0.2212;±0.9649)*-0.7907*
*
*
* 7 *(0.7108;±0.7002)*0.9420*(-0.2166;±0.9677)*(-0.7267;±0.4938)*
*
*
* 9 *(0.7108;±0.7005)*0.9409*(-0.2165;±0.9671)*(-0.7638;±0.4607)*(-0.6945;±0.7031)*
*
*
* 11 *(0.7108;±0.7005)*0.9409*(-0.2170;±0.9671)*(-0.8138;±0.5160)*(-0.7138;±0.6449)*(-0.3898;±0.1535)*
*
*
* 13 *(0.7108;±0.7005)*0.9408*(-0.2170;±0.9671)*(-0.8138;±0.5160)*(-0.7138;±0.6449)*(-0.3898;±0.1535)*0.8660±0.9878*
*
*

```

Table 3.16: Valeurs propres des modeles reduits par troncation dans la base d'equilibre ; sous-systeme stable.

Fig 3.17: Modèle complet, entrée impulsion

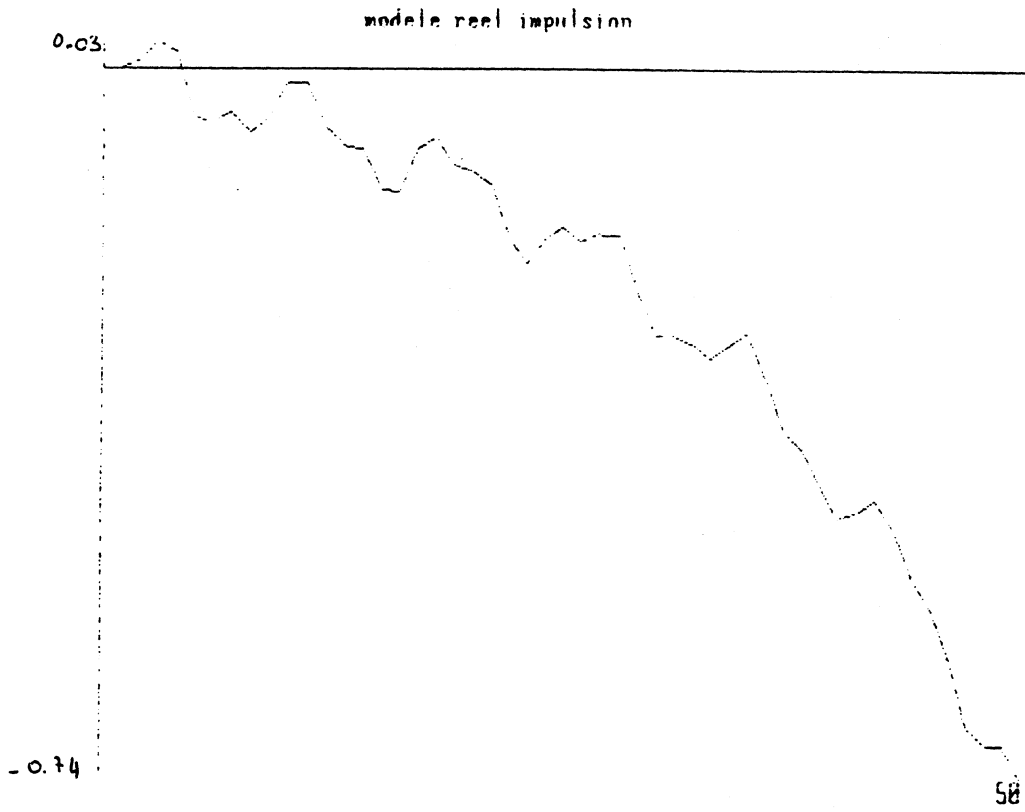


Fig 3.17.a)

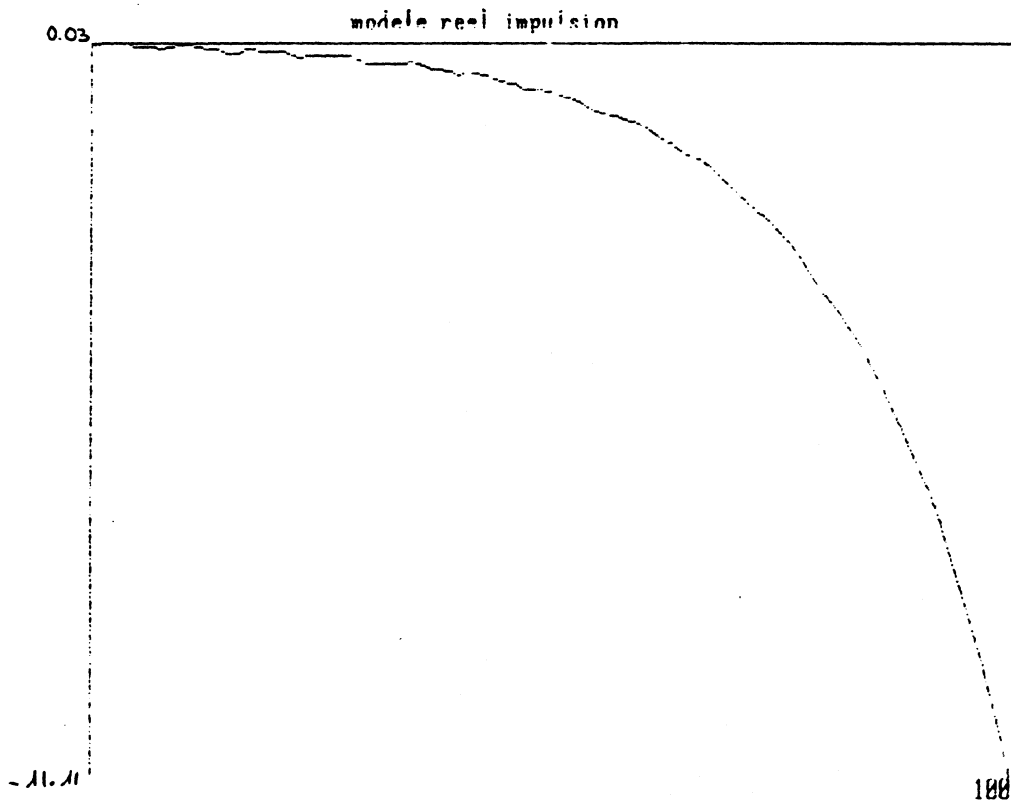


Fig 3.17.b)

Fig 3.18

Systeme instable. Réduction par agregation, entrée un pulsion

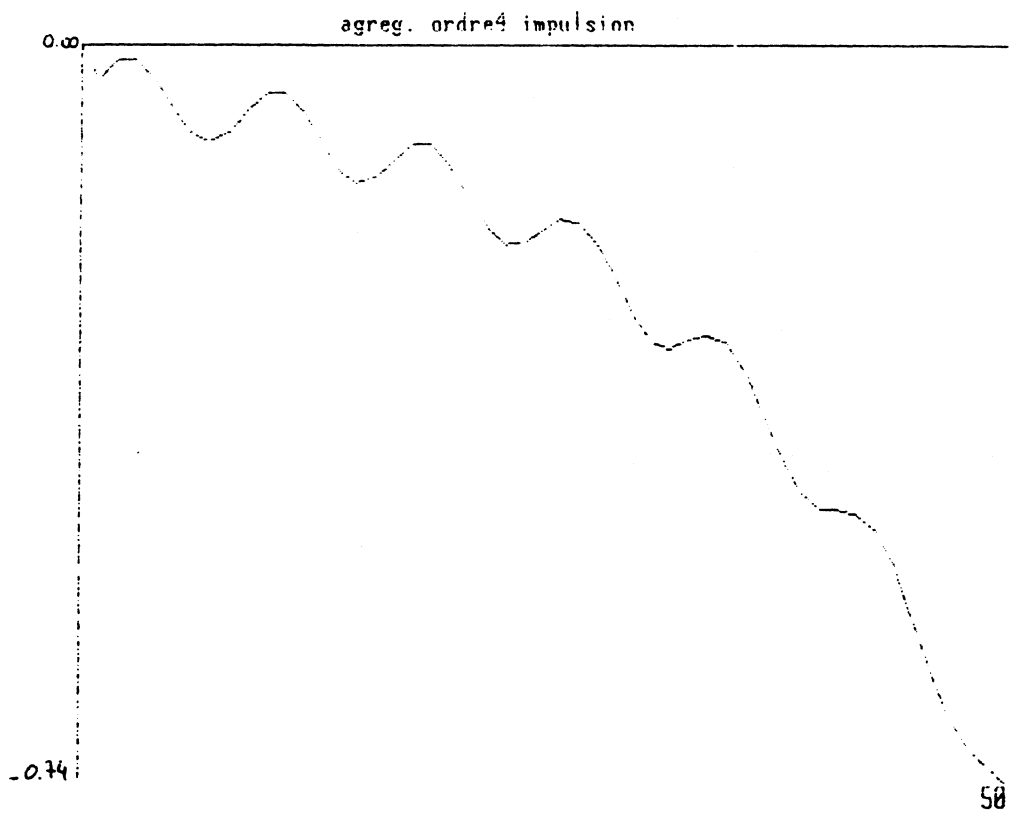


Fig 3.18 a)

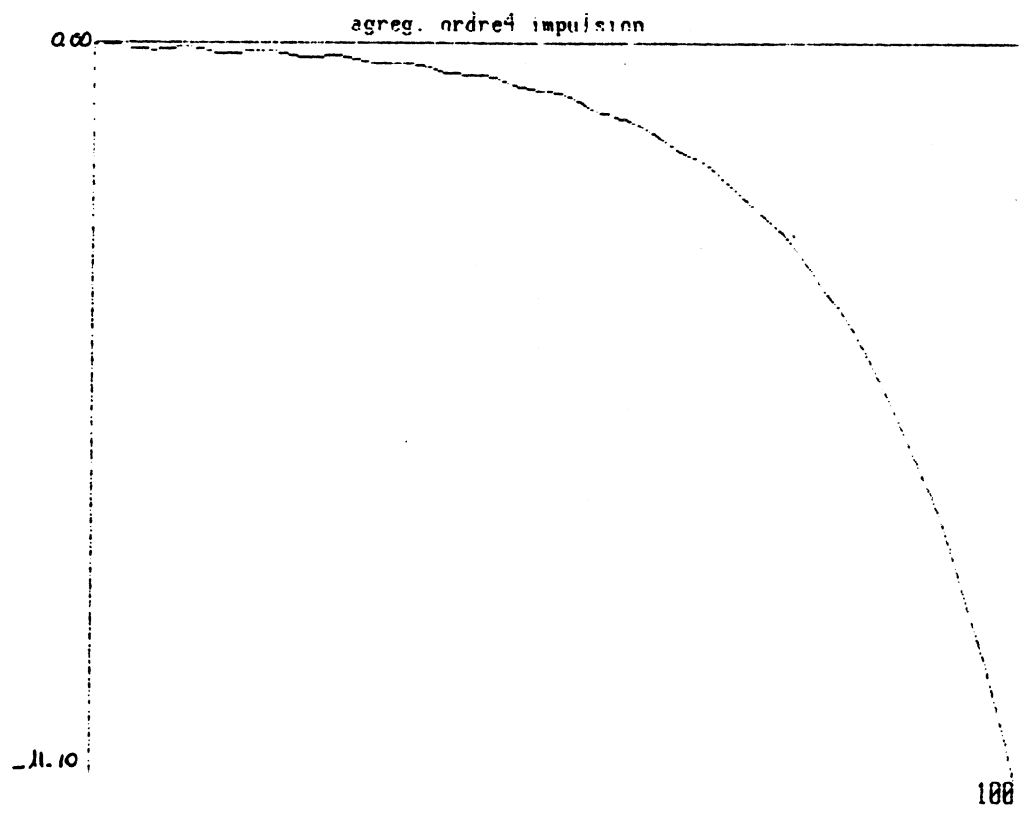


Fig 3.18. b)

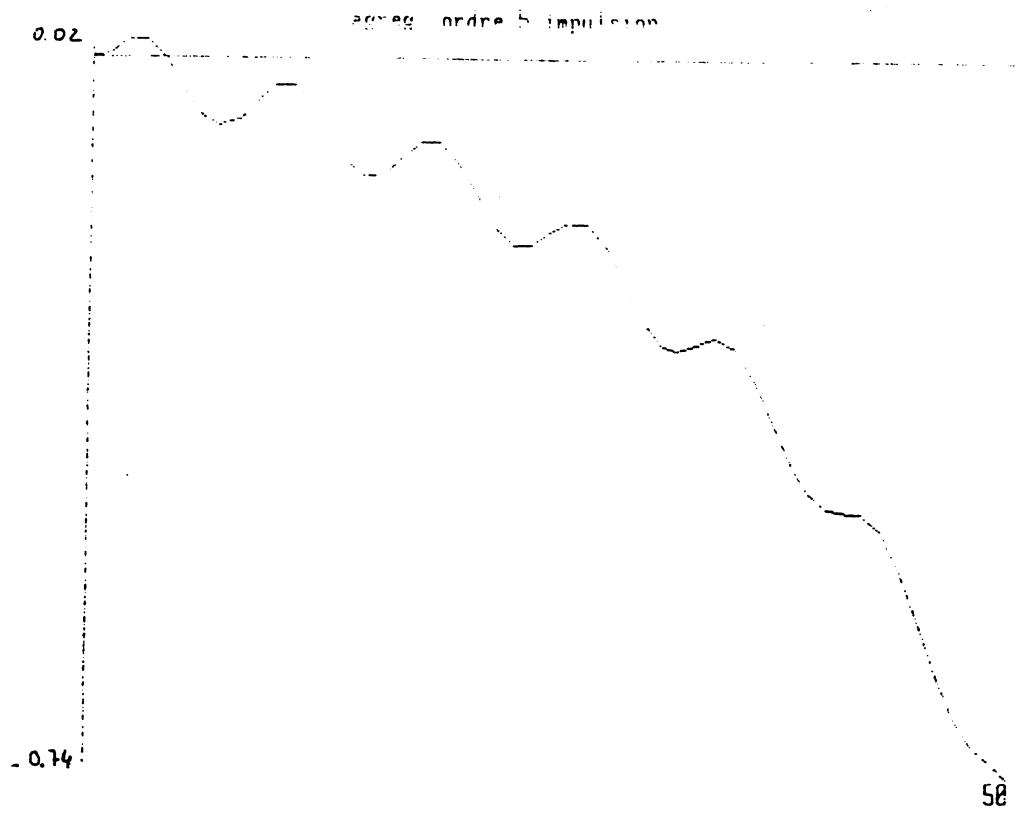


Fig 3.18 c)

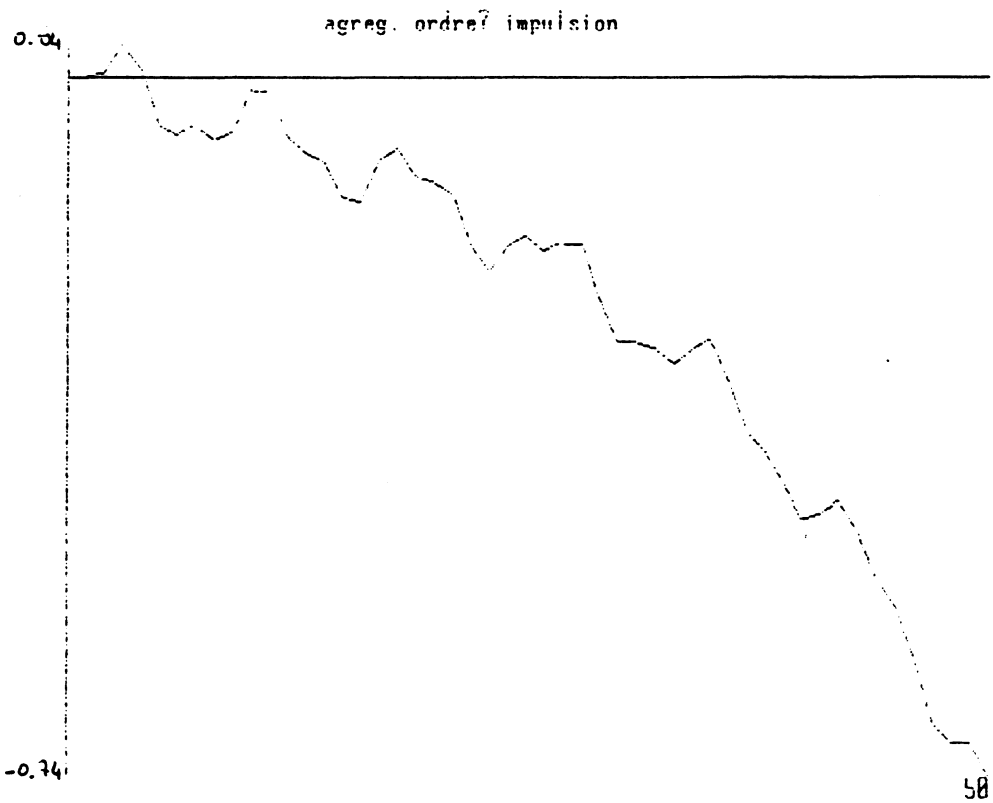


Fig 3.18 d)



Fig 3.19. Systeme instable, reduction dans la base d'equilibre,  
entree impulsions

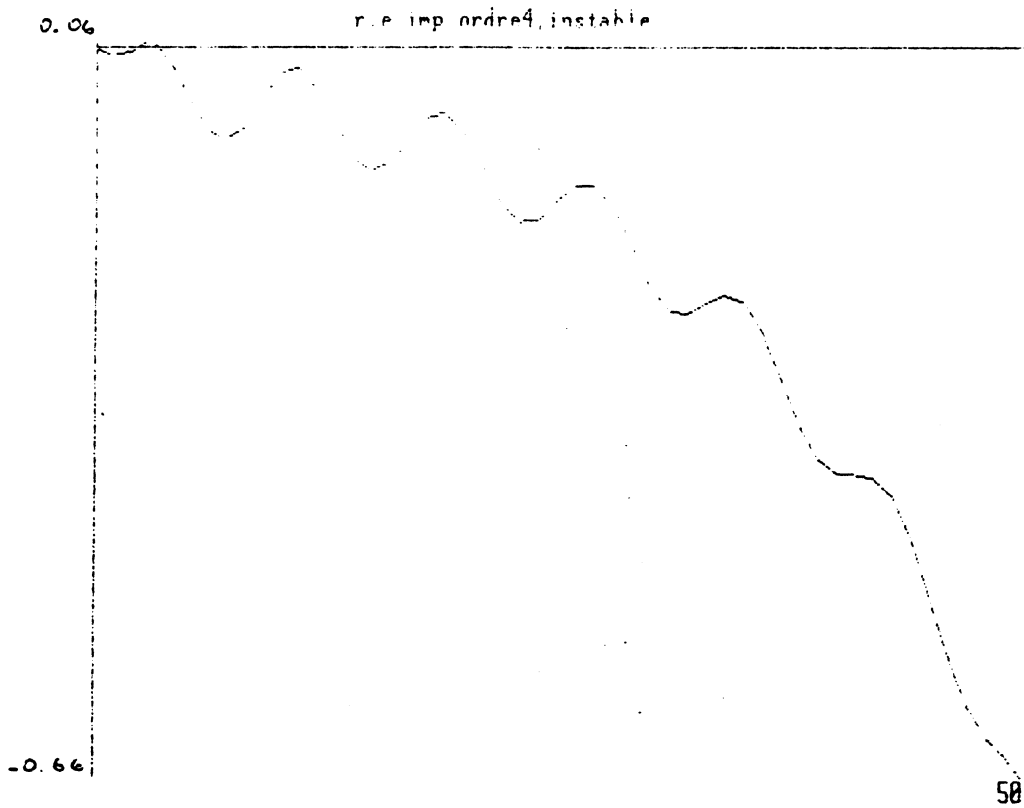


Fig 3.19. a)

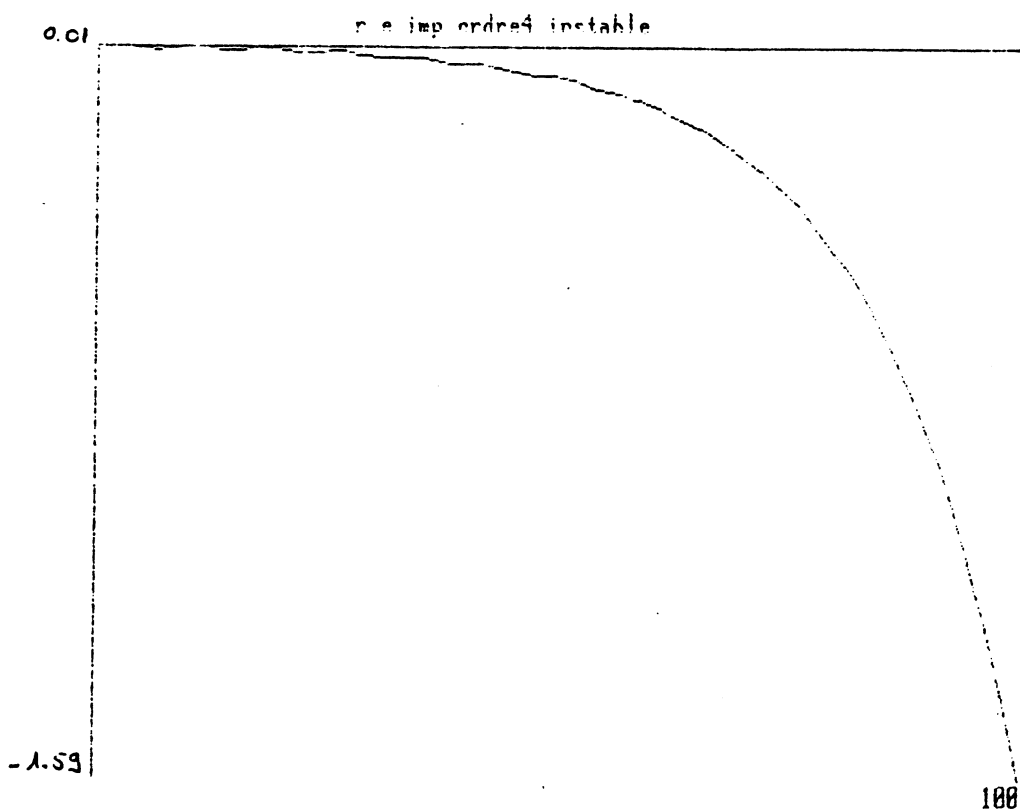


Fig 3.19. b)

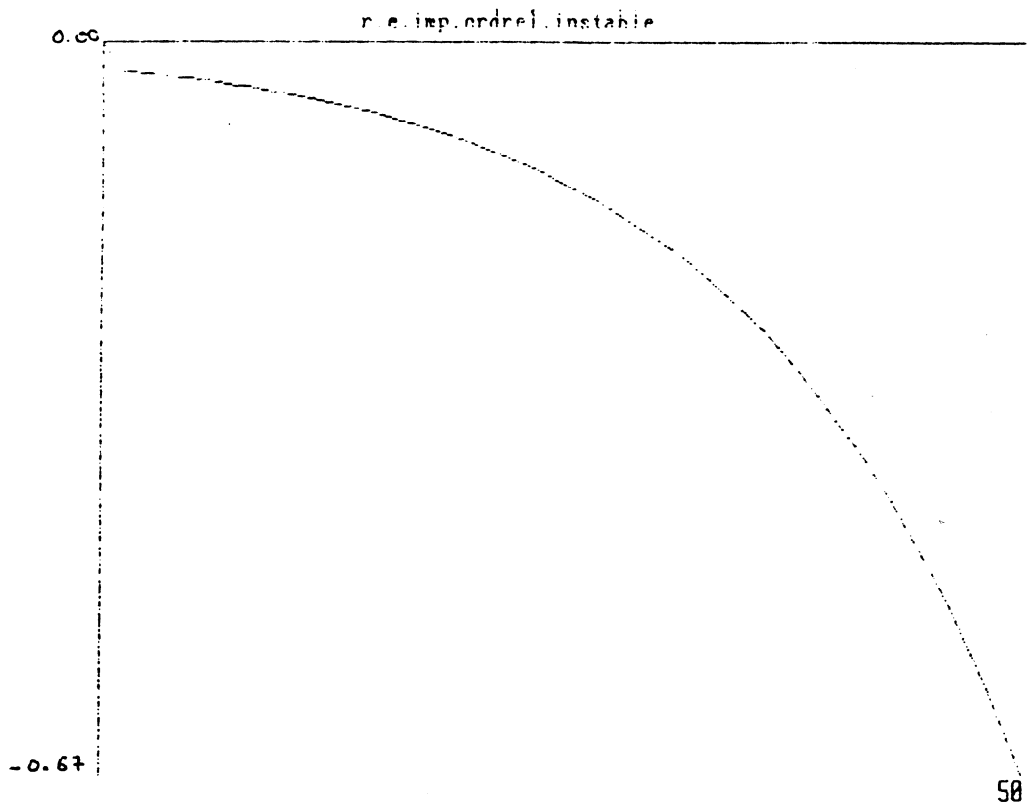


Fig 3.19 c)

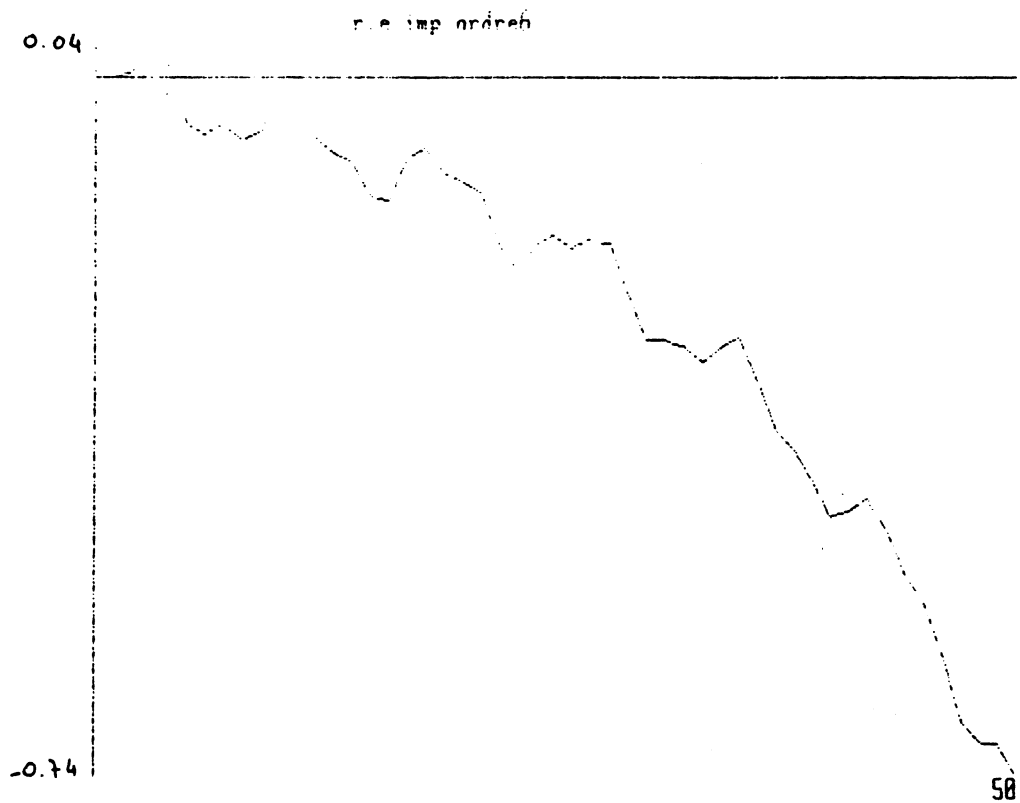


Fig 3.19 d)

Fig 3.20: Modèle réel, entrée échelon

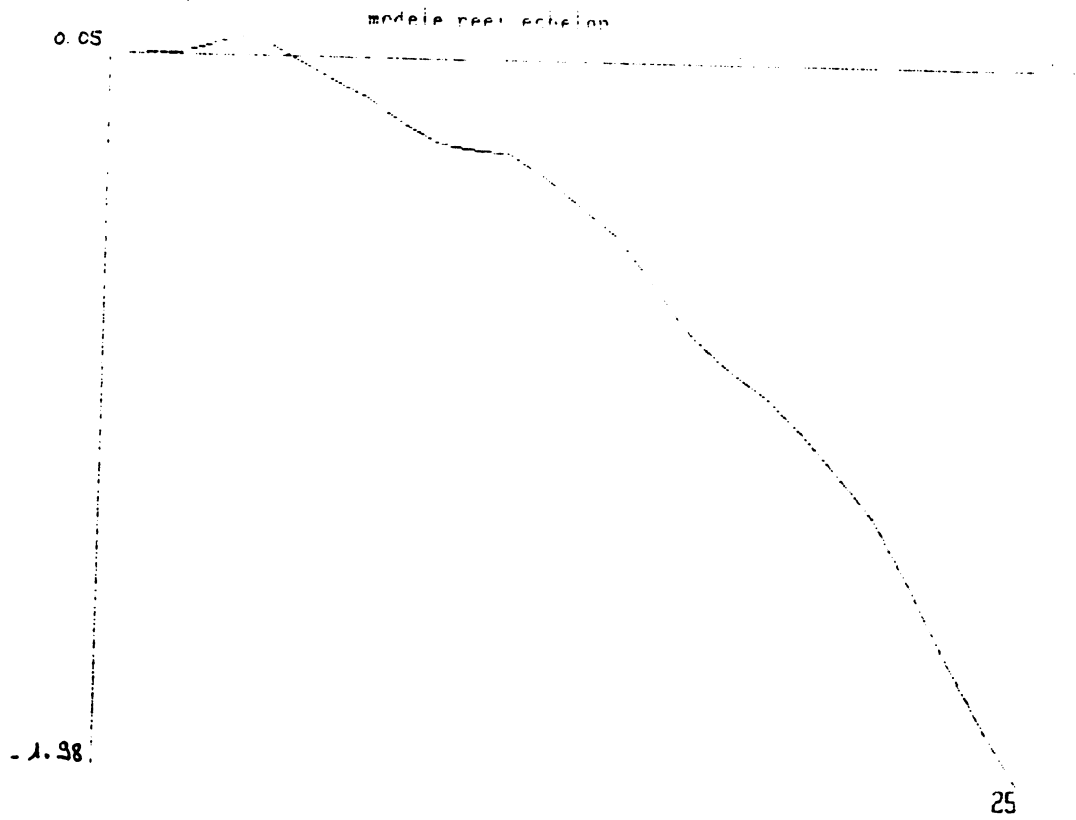


Fig 3.20-a)

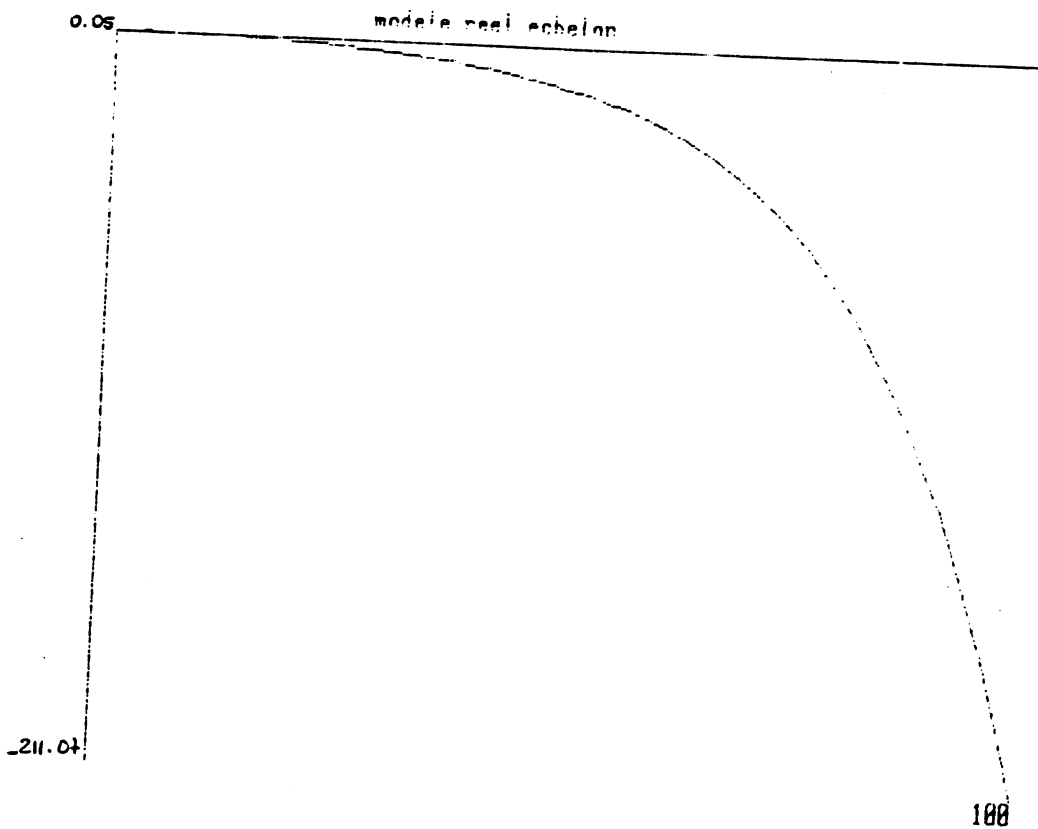


Fig 3.20-b)

Fig 3.21: Système instable, réduction par agrégation, entrée échelon

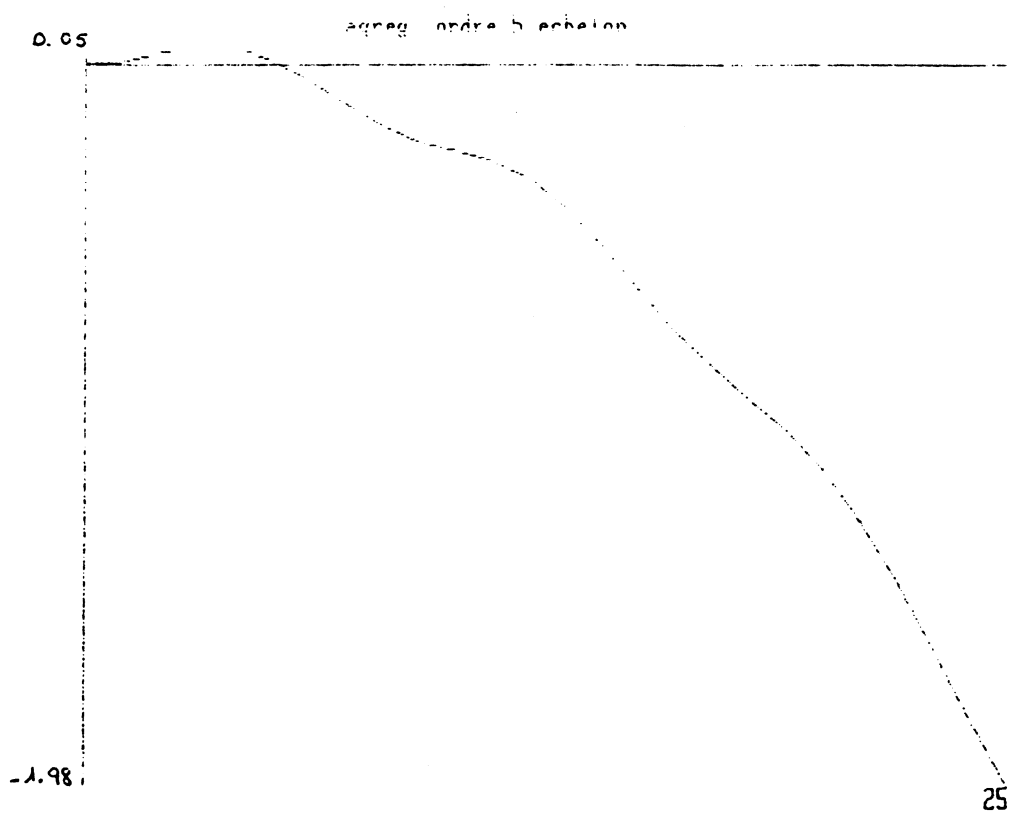


Fig 3.21 a)

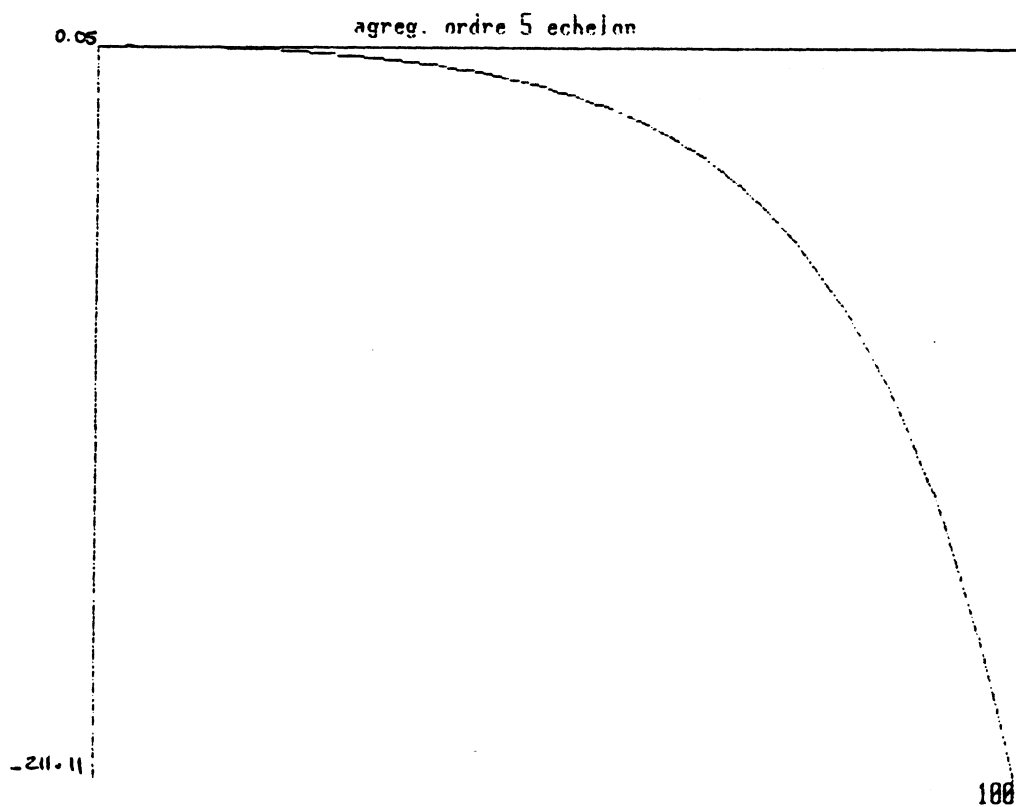


Fig 3.21. b)

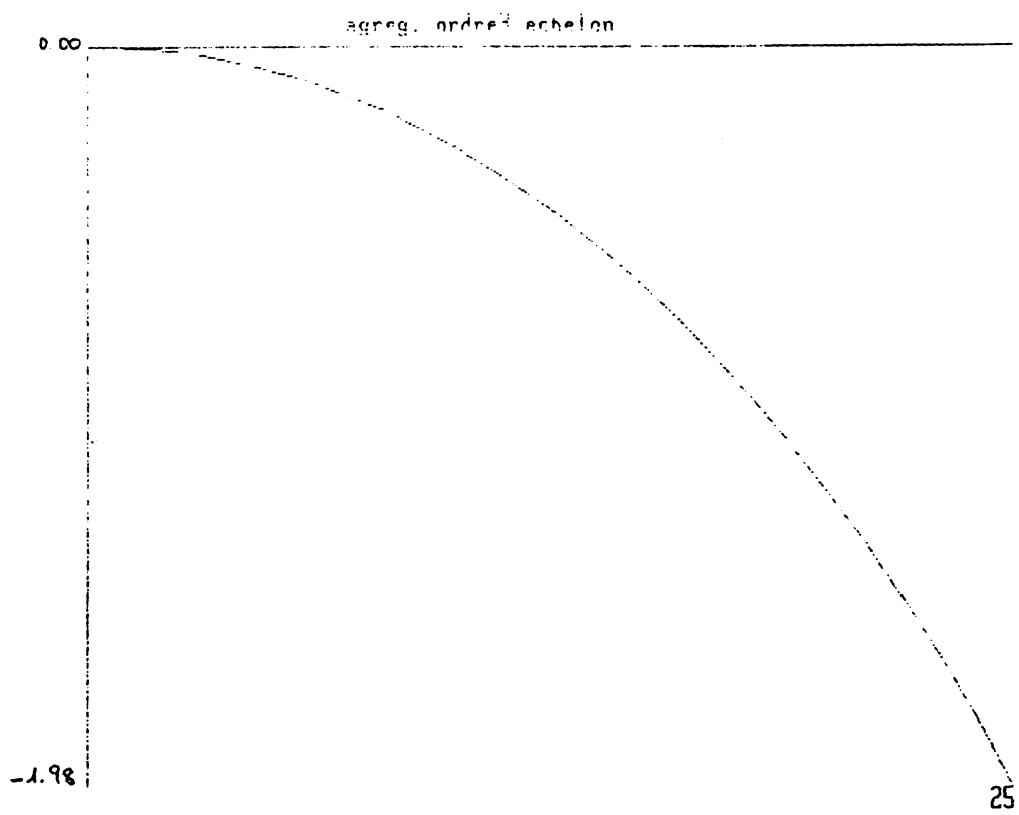


Fig 3.21.c)

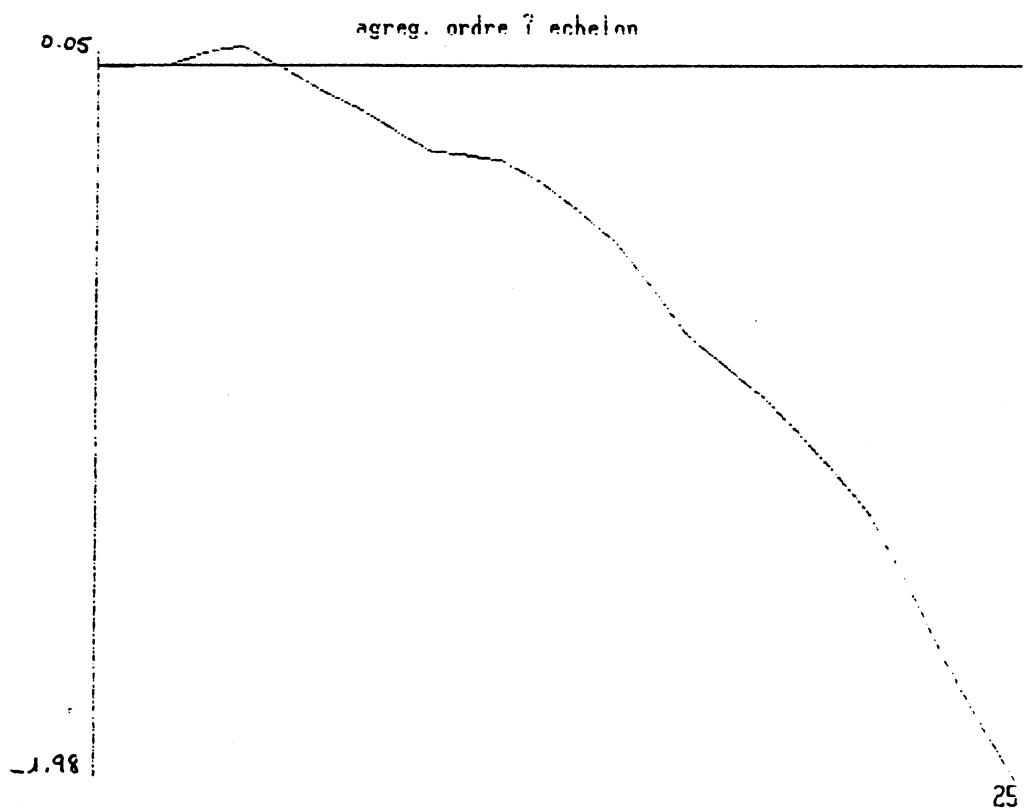


fig 3.21.d)

Fig 3.22: Système instable, réduction dans la base d'équilibre  
entrée échelon

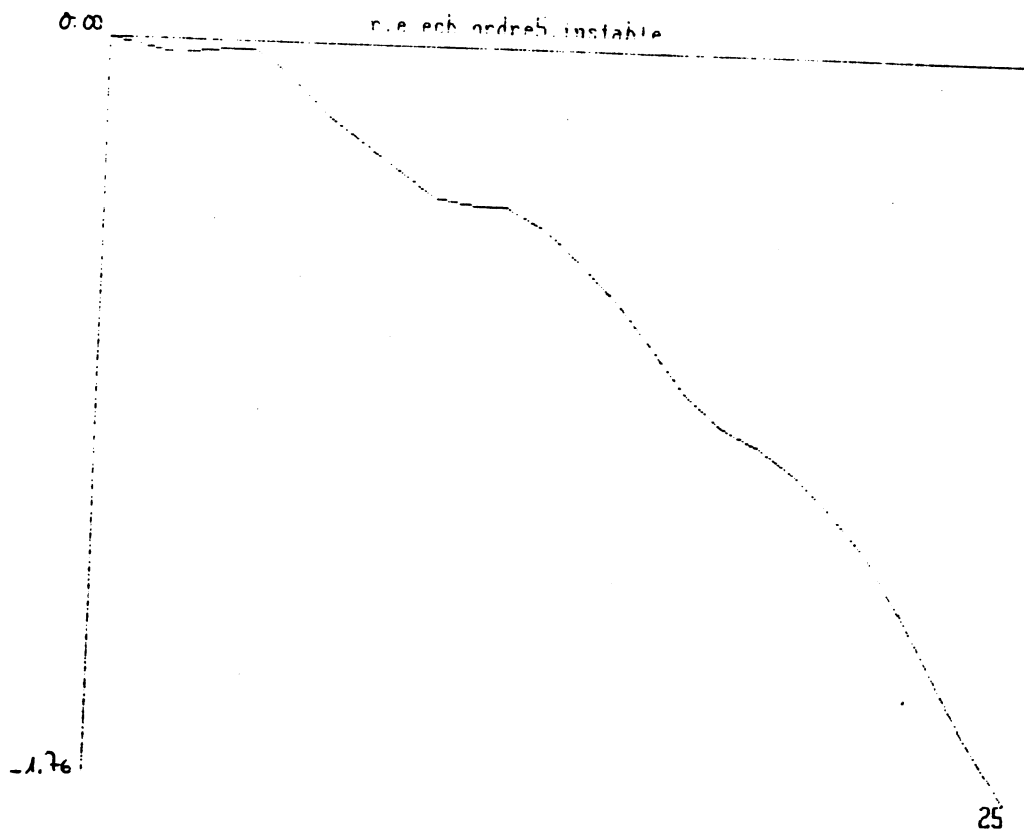


Fig 3.22 a)

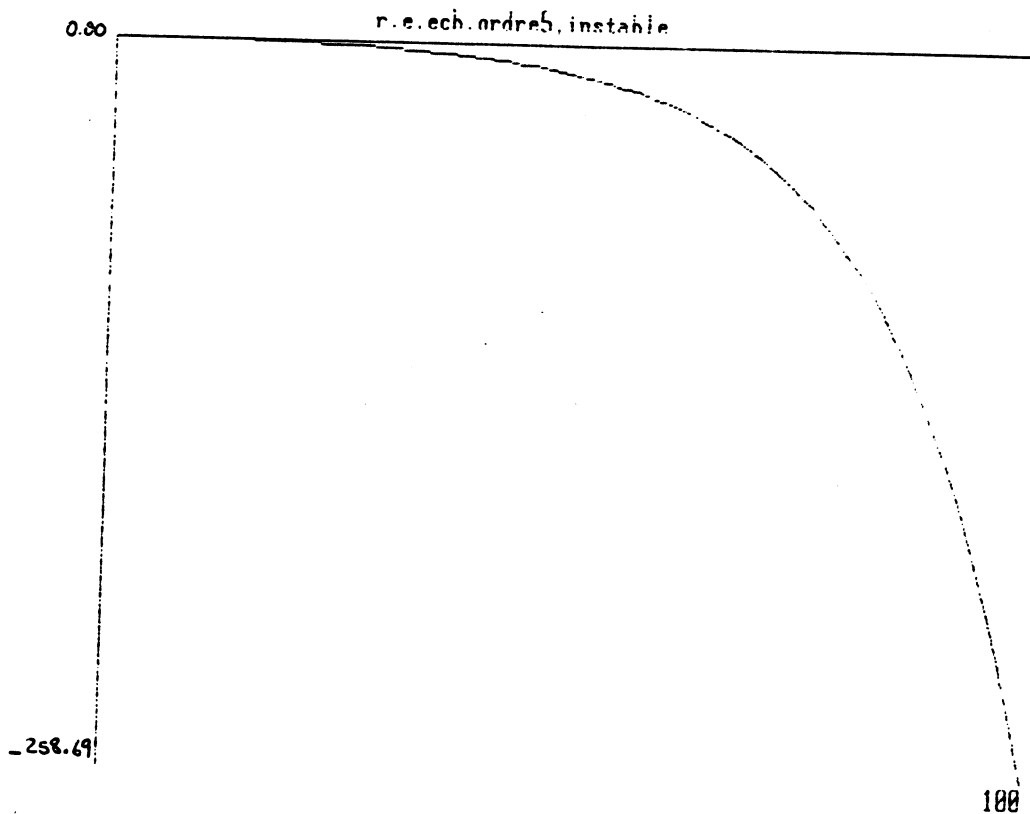


Fig 3.22 b)

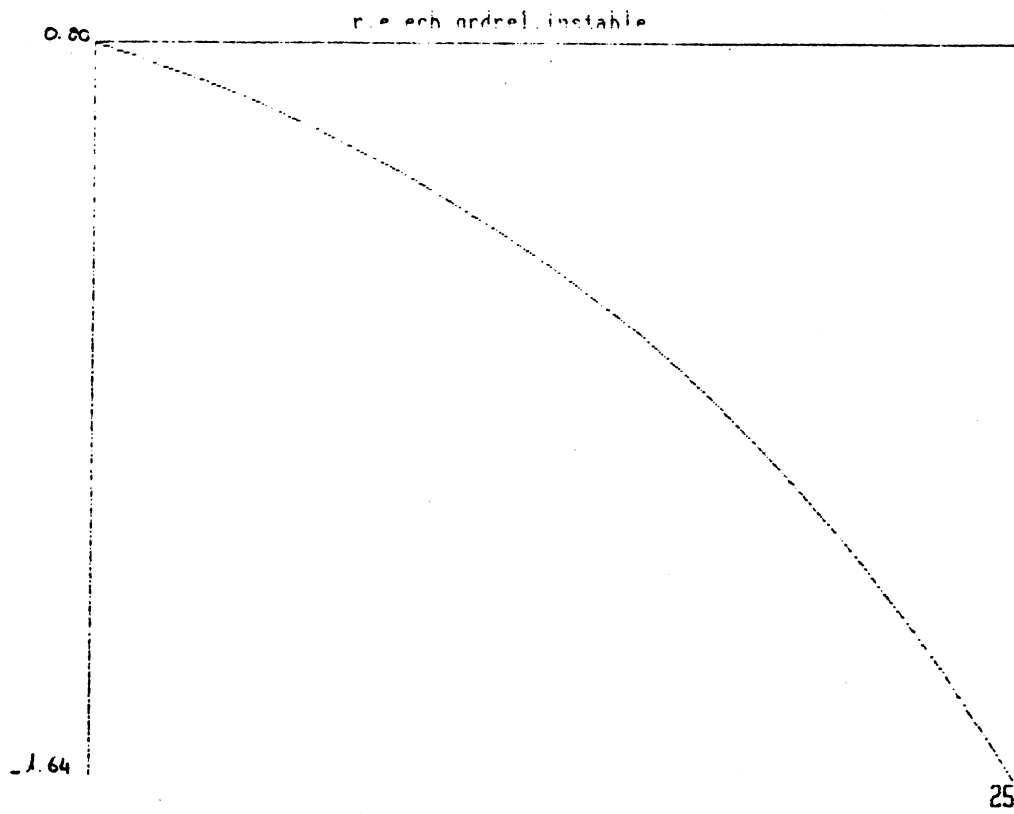


Fig 3.22 c)

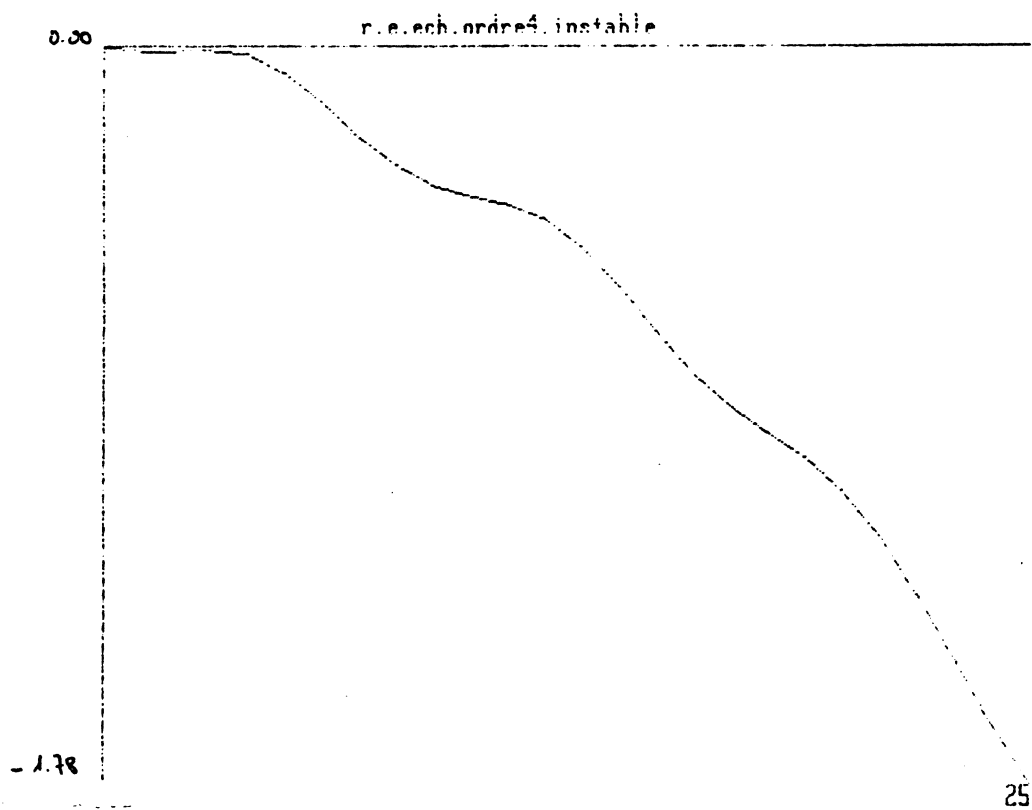


Fig 3.22 d)

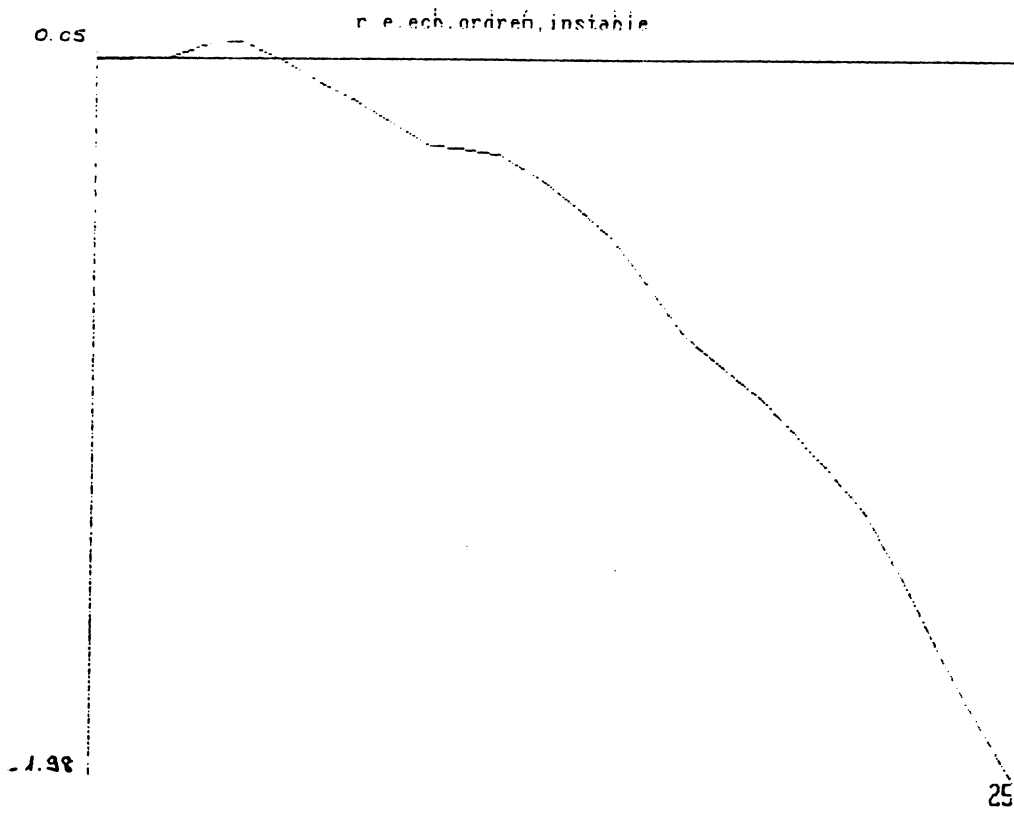


Fig 3.22 e)

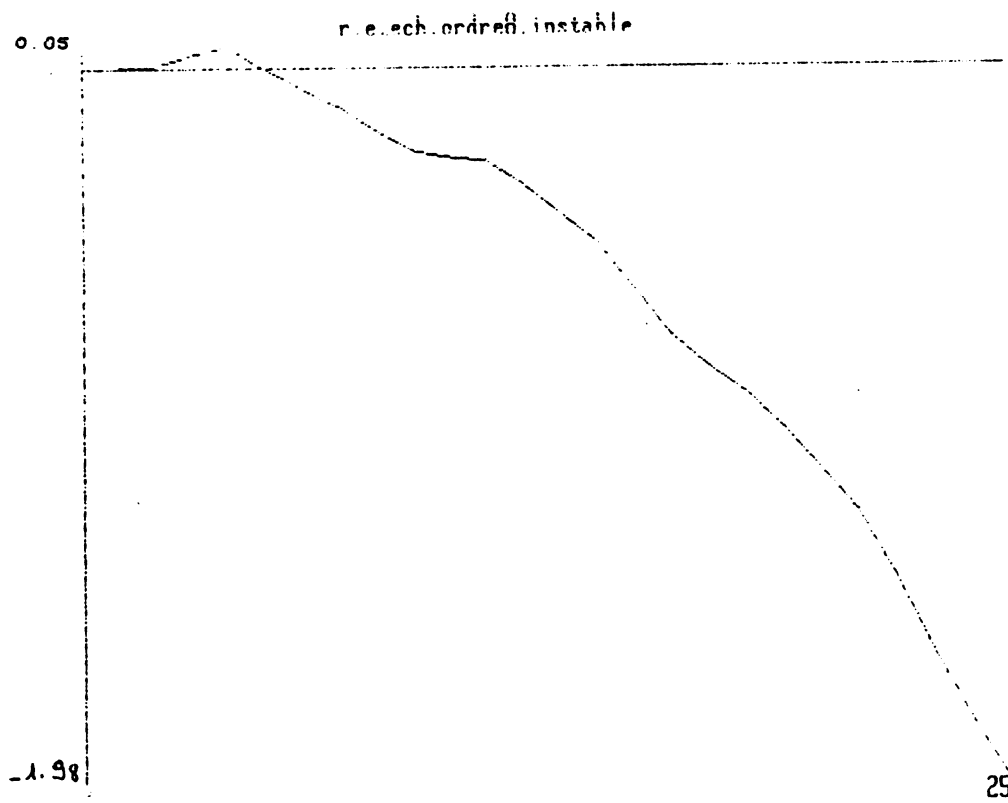


Fig 3.22 f)



1	1.068		
2	1.064	0.7195	
3	1.065	0.7097	±0.6936
4	1.065	0.7046	±0.7008
5	1.066	0.7106	±0.6976
6	1.056	0.7109	±0.7003
7	1.056	0.7110	±0.7003
8	1.056	0.7108	±0.7005
9	1.056	0.7108	±0.7005
10	1.056	0.7108	±0.7005
11	1.056	0.7109	±0.7004
12	1.056	0.7110	±0.7005
13	1.055	0.7109	±0.7005
14	1.055	0.7109	±0.7005
15	1.055	0.7109	±0.7005

Table 3.23: Valeurs propres des matrices dynamiques des modeles reduit dans la base d'equilibre, systeme complet.

#### III.4. CONCLUSION.

Nous avons mis en oeuvre les deux méthodes de réduction de modèles présentées, sur le système représentant le lanceur ARIANE en vol.

Le classement des valeurs propres en vue de l'agrégation a montré que les méthodes exposées donnent sensiblement le même résultat, du moins pour les ordres de réduction faibles.

Dans le cas du système déterministe on a pu constater l'importance du type d'entrée choisi, pour le classement des valeurs propres : le passage d'une entrée impulsion à une entrée échelon a inversé le classement des deux premières valeurs propres classées.

Mais pour les deux cas le sous-système stable admet le même modèle réduit d'ordre 5 avec un bon critère de réduction.

Le système complet peut alors être réduit à l'ordre 7 en intégrant les deux valeurs propres instables. Les directions propres concernent essentiellement les variables de dérive et du premier et second modes de flexion.

Le système n'étant pas stationnaire la même étude réalisée sur plusieurs temps différents entre 83 s et 97 s a montré que les résultats obtenus sur cette période sont stables.

L'étude du système stochastique a fait apparaître la prédominance des valeurs propres représentant les mesures du vent. Ces valeurs propres n'étant pas commandables elles n'apparaissaient qu'en dernière position dans le classement obtenu dans le cas déterministe.

Le calcul des modes du second ordre et de la base d'équilibre au temps  $t = 90$  s a montré que les directions à la fois les plus observables et les plus commandables sont les modes de flexion, et que les huit premiers modes du second ordre sont beaucoup plus significatifs que les sept derniers.

Enfin l'étude des trajectoires de sorties des modèles réduits nous a permis de comparer les deux méthodes sur ce système particulier.

En général les courbes obtenues par les modèles agrégés sont plus vite ressemblantes aux courbes obtenues par le modèle réel que celles obtenues par les modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre.

L'agrégation ayant pour but de refléter au mieux le comportement entrée-sortie (voir § I.4), ce résultat était prévisible. On remarque tout de même que pour chaque entrée différente on doit recalculer le modèle agrégé alors que dans le cas de la troncature dans la base d'équilibre on obtient de bons résultats pour les deux entrées avec le même modèle réduit.

L'étude des valeurs propres des matrices dynamiques obtenues après réduction dans la base d'équilibre montre qu'à partir d'un certain ordre (5 dans le cas stable, 6 dans le cas instable) les valeurs propres sont très proches des valeurs propres du système réel.

Dans le cas stable à partir de l'ordre 5 les valeurs propres du modèle réduit par troncature dans la base d'équilibre peuvent être considérées comme égales aux valeurs propres conservées par le modèle agrégé.

Dans le cas instable, une des valeurs propres instables qui est conservée a priori dans les modèles agrégés n'apparaît pas dans les modèles réduits par troncature. A cette différence près les autres valeurs propres peuvent être considérées comme égales aux valeurs propres conservées par l'agrégation dès l'ordre 7. Ceci explique que pour cet exemple, d'un point de vue comportement entrée-sortie les deux méthodes peuvent être considérées comme équivalentes à partir de l'ordre de réduction 7.

CONCLUSION

Nous avons cherché dans ce travail à étudier et comparer les deux principales méthodes de réduction de modèles dans la base d'état: l'agrégation et la troncature dans la base d'équilibre.

S'il ne nous a pas paru possible de mener une comparaison sur des critères algébriques, nous avons tout de même pu dégager les points suivants:

- L'agrégation permet de mieux contrôler la dynamique du modèle réduit que la troncature dans la base d'équilibre. Ceci est particulièrement clair dans l'exemple traité, pour lequel le système initial comporte deux valeurs propres instables. Jusqu'à l'ordre 13 les modèles réduits dans la base d'équilibre de ce système ne contiennent qu'une seule valeur propre instable.

Remarquons toutefois que cet inconvénient peut être surmonté en découplant le système en deux sous-systèmes stable et instable et en ne réduisant que le sous-système stable.

Cependant, même dans le cas stable on n'a aucune indication sur les valeurs propres des modèles réduits, si ce n'est que dans le cas où la réduction est effectuée à horizon infini, le modèle réduit est également stable.

L'étude des valeurs propres des modèles réduits obtenus sur l'exemple traité a montré qu'en fait ces valeurs sont très proches des valeurs propres du système initial, ceci dès un ordre de réduction faible.

Ce résultat qui est aussi remarqué par [13], doit toutefois encore être confirmé par une approche plus théorique.

-L'agrégation cherche mieux à rendre compte du comportement entrée-sortie que la représentation équilibrée, qui s'attache plus à refléter le comportement interne du système. Cependant pour chaque entrée différente appliquée au système, il faut effectuer une nouvelle agrégation alors que la réduction est totalement indépendante de l'entrée choisie dans le cas de la troncature dans la base d'équilibre. Les simulations effectuées dans l'exemple numérique pour deux entrées différentes ont montré que les deux méthodes sont pratiquement équivalentes pour ce cas particulier.

-On obtient des résultats sur la stabilité d'une commande d'ordre réduit beaucoup plus satisfaisants dans le cas de l'agrégation que dans le cas de la troncature dans la base d'équilibre.

La stabilité pour une commande par retour d'état réduit est assurée lors d'une réduction par agrégation sous des hypothèses très faibles, alors qu'on n'obtient que des conditions suffisantes sous des hypothèses restrictives dans le cas d'une réduction par troncature dans la base d'équilibre.

Ces conditions sont obtenues en majorant les termes de couplages d'une matrice dont les deux blocs diagonaux sont stables, afin que celle-ci reste stable.

Ces mêmes conditions ont servi à établir des conditions suffisantes de stabilité pour un système bouclé par une commande par retour d'état réduit estimé dans le cas de l'agrégation.

Ce problème semble devoir être résolu en choisissant d'autres invariants du système pour effectuer une réduction par troncature dans la base d'équilibre en vue de la commande, que ceux considérés ici.

Ces trois points montrent que pour chaque application particulière l'une ou l'autre méthode a ses avantages et ses inconvénients. Dans l'état actuel des recherches on ne peut en déclarer l'une meilleure que l'autre.

Certains points méritent d'être approfondis et feront l'objet de recherches ultérieures.

Si l'agrégation a été largement étudiée par de nombreux auteurs le problème soulevé ici de la robustesse de l'agrégation vis à vis de l'entrée appliquée au système n'a été résolu que dans quelques cas particuliers. Il reste entre autres à traiter les cas des systèmes discrets et stochastiques.

Nous avons introduit différents types de degrés: commandabilité, observabilité, perturbabilité et pour obtenir des quantités invariantes par changement de base sur l'espace d'état, nous avons couplé ces degrés. Pour traiter ces degrés isolément il faut déterminer un produit scalaire propre au système, on peut penser par exemple à la matrice des contributions introduite dans l'étude de l'agrégation.

Ces degrés sont calculés à horizon fini, il reste à étudier une éventuelle convergence lorsque l'horizon tend vers l'infini. En effet lorsque l'horizon est infini et si le système initial est stable le modèle réduit possède des propriétés de stabilité, commandabilité et observabilité. Il serait intéressant de voir si ces propriétés sont vérifiées pour un horizon assez large.

Ces mêmes propriétés doivent aussi être étudiées dans le cas où le système est instable.

L'observation faite dans plusieurs cas particuliers de la "convergence" des valeurs propres des modèles réduits par troncature dans la base d'équilibre vers des valeurs propres du système initial doit encore être démontrée. Si ce fait est prouvé il faudrait comparer la sélection des valeurs propres opérée par la troncature dans la base d'équilibre et celle effectuée par le classement énergétique des modes en vue de l'agrégation, présenté ici. Dans l'exemple particulier traité on a pu observer une grande similitude dans les deux cas.

Enfin pour les deux méthodes, la robustesse de la réduction vis à vis de l'estimation des paramètres du système initial doit être étudiée. Ce problème qui est réel puisque la plupart des systèmes à réduire sont préalablement identifiés, n'a encore jamais été traité à notre connaissance.

Nous avons obtenu des conditions suffisantes de stabilité pour des commandes d'ordre réduit dans certains cas. Ces conditions passent par une majoration des gains de commande et d'estimation. L'algorithme permettant de réaliser ces conditions doit encore être mis en oeuvre.

ANNEXE A: Décomposition en valeurs singulières

Soit  $a$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions finies  $e$  et  $f$ .

On note  $\langle ; \rangle_E$  (resp.  $\langle ; \rangle_F$ ) le produit scalaire sur  $E$  (resp. sur  $F$ ) et on suppose que  $e \leq f$ .

PROPOSITION A.1 Il existe deux bases orthonormées  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  dans  $E$ ;  $(u_j)_{1 \leq j \leq f}$  dans  $F$ , et des réels positifs ou nuls  $(\sigma_i)_{i=1, f}$  tels que

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_e \geq 0 \\ a(v_i) = \sigma_i u_i \end{cases} \quad \text{pour } i=1, e$$

DEMONSTRATION Soit  $a^*$  l'application linéaire adjointe de  $a$ .

$a^* \circ a$  est un endomorphisme symétrique dont la matrice est diagonalisable dans une base orthogonale et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Soit  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  une telle base que l'on choisit de plus orthonormée

et  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq e}$  tels que,

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_e \\ a^* \circ a(v_i) = \sigma_i^2 v_i \end{cases} \quad \text{et} \quad i=1, e$$



Soit  $\tilde{u}_i = a(v_i)$ ,  $i=1, e$

$$\langle \tilde{u}_i; \tilde{u}_j \rangle_F = \langle a(v_i); a(v_j) \rangle_F = \langle v_i; a^* \circ a(v_j) \rangle_E = \delta_{ij} \cdot \sigma_i^2$$

Soit  $u_i = \tilde{u}_i / \sigma_i$   $i=1, e$

$(u_i)_{1 \leq i \leq e}$  est une famille orthonormée que l'on complète par  $u_{e+1}, \dots, u_f$  pour former une base orthonormée de F qui vérifie :

$$a(v_i) = \sigma_i u_i \quad i=1, e. \quad \square$$

DEFINITION A.1  $\sigma_1, \dots, \sigma_e$  sont appelées les valeurs singulières de a.

$u_1, \dots, u_f$  sont appelés les vecteurs singuliers à gauche de a.

$v_1, \dots, v_e$  sont appelés les vecteurs singuliers à droite de a.

REMARQUE: Pour tout  $x \in E$  on a :

$$a(x) = \sum_{i=1}^e u_i \sigma_i \langle v_i; x \rangle_E$$

PROPRIETES i)  $a^*$  vérifie:  $a^*(u_i) = \sigma_i v_i$  pour  $i=1, e$

$$a^*(u_i) = 0 \quad \text{pour } i=e+1, \dots, f$$

ii)  $(\sigma_i^2)_{1 \leq i \leq e}$  et  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  sont les valeurs propres de  $a^* \circ a$ .

iii) Soit r le rang de a. Alors a a r valeurs singulières non nulles. De plus  $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une base de l'image de a,  $\text{Im}(a)$  et  $(v_i)_{r+1 \leq i \leq e}$  est une base du noyau de a,  $\text{Ker}(a)$ .

iv) L'équation

$$a(x)=y \quad x \in E ; y \in \text{Im}(a)$$

admet

$$x_0 = \sum_{i=1}^r v_i 1/\sigma_i \langle u_i; y \rangle_F$$

pour solution.

De plus on a:

$$\langle x_0; x_0 \rangle_E \leq \langle x; x \rangle_E$$

pour tout  $x$  solution de  $a(x)=y$

DEMONSTRATION Soit deux bases orthonormées  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  de  $E$  et

$(u_i)_{1 \leq j \leq f}$  de  $F$  et  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq e}$  des réels positifs ou nuls tels que:

$$\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_e \geq 0 \\ a(v_i) = \sigma_i u_i \quad \text{pour } i=1, e \end{cases}$$

$$i) \langle a^*(u_i); v_j \rangle_E = \langle u_i; a(v_j) \rangle_F = \langle u_i; \sigma_j u_j \rangle_F = \delta_{ij} \sigma_i \quad i=1, e$$

d'où

$$a^*(u_i) = \sum_{j=1}^e v_j \langle a^*(u_i); v_j \rangle = \sigma_i v_i \quad \text{si } i \leq e$$

$$a^*(u_i) = 0 \quad \text{si } i > e$$

$$ii) \langle a^* \circ a(v_i); v_j \rangle_E = \langle a(v_i); a(v_j) \rangle_F = \sigma_i \sigma_j \langle u_i; u_j \rangle_F = \delta_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

d'où

$$a^* \circ a(v_i) = \sum_{j=1}^e v_j \langle a^* \circ a(v_i); v_j \rangle_E = \sigma_i^2 v_i \quad i=1, e$$

iii)  $r$  est le rang de  $a^* \circ a$  donc  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0$  et

$$\sigma_{r+1}^2 = \dots = \sigma_e^2 = 0$$

$$\text{On a: } a(x) = \sum_{i=1}^e u_i \sigma_i \langle x; v_i \rangle_E = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i \langle x; v_i \rangle_E \quad \text{et}$$

$(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une base de  $\text{Im}(a)$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(a)$  ;  $x = \sum_{i=r+1}^e v_i \langle x; v_i \rangle_E$

$a(x)=0$  donc  $\langle x; v_i \rangle_E = 0$  pour  $i=1, r$

$$x = \sum_{i=r+1}^e v_i \langle x; v_i \rangle_E$$

iv) Soit  $x_0 = \sum_{i=1}^r v_i / \sigma_i \langle u_i; y \rangle_F$   $y \in \text{Im}(a)$

$$a(x_0) = \sum_{i=1}^r a(v_i) / \sigma_i \langle u_i; y \rangle_F = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i / \sigma_i \langle u_i; y \rangle_F$$

$$a(x_0) = \sum_{i=1}^r u_i \langle u_i; y \rangle_F = y \quad \text{puisque } y \in \text{Im}(a)$$

Soit  $x$  une autre solution de  $a(x)=y$ ,  $y \in \text{Im}(a)$

on a :

$$x - x_0 \in \text{Ker}(a)$$

et d'après iii)  $\langle x - x_0; x_0 \rangle_E = 0$

$$\text{donc} \quad \langle x, x \rangle_E = \langle x - x_0; x - x_0 \rangle_E + \langle x_0; x_0 \rangle_E \geq \langle x_0; x_0 \rangle_E$$

On a de plus les propriétés suivantes:

PROPRIÉTÉ Si  $\| \cdot \|_E$  est la norme associée au produit scalaire de  $E$ , alors

$$\sigma_i = \min_{\substack{S \subseteq E \\ \dim S = e - i + 1}} \left\{ \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} \|a(x)\| \right\} \quad i=1, e$$

$$\sigma_i = \max_{\substack{S \subseteq E \\ \dim S = i}} \left\{ \min_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} \|a(x)\| \right\} \quad i=1, e$$

DEMONSTRATION i) Soit  $S$  un sous espace de  $E$  de dimension  $e-i+1$ .  $S \cap [v_{i+1}, \dots, v_e]^\perp$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , donc contient un élément

non nul  $x_0$  qui s'écrit:

$$x_0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i$$

$$\text{et } \|a(x_0)\| = \sigma_1^2 \lambda_1^2 + \dots + \sigma_i^2 \lambda_i^2 \geq (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_r^2) \sigma_i^2,$$

d'où  $\sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} \{\|a(x)\|\} \geq \sigma_i$  pour tout sous espace S.

ii) Soit  $S_0 = [v_i, \dots, v_e]$  de dimension  $e-i+1$ , et  $x \in S_0$ .

$$x = \sum_{j=1}^e \lambda_j v_j$$

$$\|a(x)\| = \sigma_i^2 \lambda_i^2 + \dots + \sigma_e^2 \lambda_e^2 \leq \sigma_i^2 (\lambda_i^2 + \dots + \lambda_e^2) = \sigma_i^2,$$

d'où  $\sup_{\substack{x \in S_0 \\ \|x\|=1}} \{\|a(x)\|\} \leq \sigma_i$ .

Les résultats i) et ii) démontrent la première inégalité, la seconde égalité se démontre de la même manière.  $\square$

PROPRIETE Soit  $\|a\|_2$  la norme opérateur de a, i.e.

$$\|a\|_2 = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \{\|a(x)\|_F\}$$

Soit  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq e}$ , (resp  $(\tau_i)_{1 \leq i \leq e}$ ) les valeurs singulières ordonnées d'une application linéaire a (resp b) de E dans F.

Alors

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \|a-b\|_2 \quad \text{pour } i=1, e.$$

DEMONSTRATION Soit  $c=a-b$ , S un espace de dimension  $e-i+1$  tel que

$$\sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|_E=1}} \{\|b(x)+c(x)\|_F\} \leq \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|_E=1}} \{\|b(x)\|_F\} + \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|_E=1}} \{\|c(x)\|_F\} = \tau_i + \|a-b\|_2.$$

De même

$$\tau_i \leq \sigma_i + \|a-b\|_2,$$

d'où

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \|a-b\|_2. \square$$

PROPOSITION A.2 Toute matrice A de dimension  $f \times e$  peut se décomposer sous la forme:

$$A = UDV^T$$

où U est une matrice  $f \times f$  orthogonale,

D est une matrice "diagonale",  $D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \sigma_e & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_e \geq 0$ ,

V est une matrice  $e \times e$  orthogonale.

DEMONSTRATION

Soit  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  et  $(u_i)_{1 \leq i \leq f}$  les bases déterminées par la proposition

A.1. Dans ces bases la matrice de A s'écrit:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \sigma_e & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Il suffit de poser U, la matrice de changement de base  $(u_i)_{1 \leq i \leq f}$  et V, la matrice de changement de base  $(v_i)_{1 \leq i \leq e}$  pour avoir le résultat.  $\square$

REMARQUE 1 En ne gardant que les premières colonnes de U on peut écrire

$$A = S\Delta V^T$$

où S:  $f \times e$  est une matrice à colonnes orthonormées

$\Delta$ :  $e \times e$  est une matrice diagonale

V:  $e \times e$  est une matrice orthogonale.

REMARQUE 2 Soit P et Q deux matrices de changement de base orthonormée sur E et F.

On a,

$$(QAP^T)^T (QAP^T) = PA^T Q^T QAP^T = PA^T AP^T$$

$PP^T = I_e$  donc  $A^T A$  et  $PA^T AP^T$  ont les mêmes valeurs propres.

On en déduit que les valeurs singulières de a ne changent pas lorsqu'on fait un changement de base orthonormée sur un des deux espaces.

Par contre si P et Q ne sont pas orthogonales, les valeurs singulières de a peuvent varier.

En effet, soit  $A = UDV^T$  et les matrices de changement de base

$$Q = \Delta U^T ; \quad P = \Delta' V^T$$

où  $\Delta = \text{diag}\{\delta_i\}_{1 \leq i \leq f}$  ;  $\Delta' = \text{diag}\{\delta'_i\}_{1 \leq i \leq e}$ .

D'après la Proposition A.2 on a,

$$QAP^T = \Delta D \Delta'^T$$

et les valeurs singulières de A dans les nouvelles bases sont:

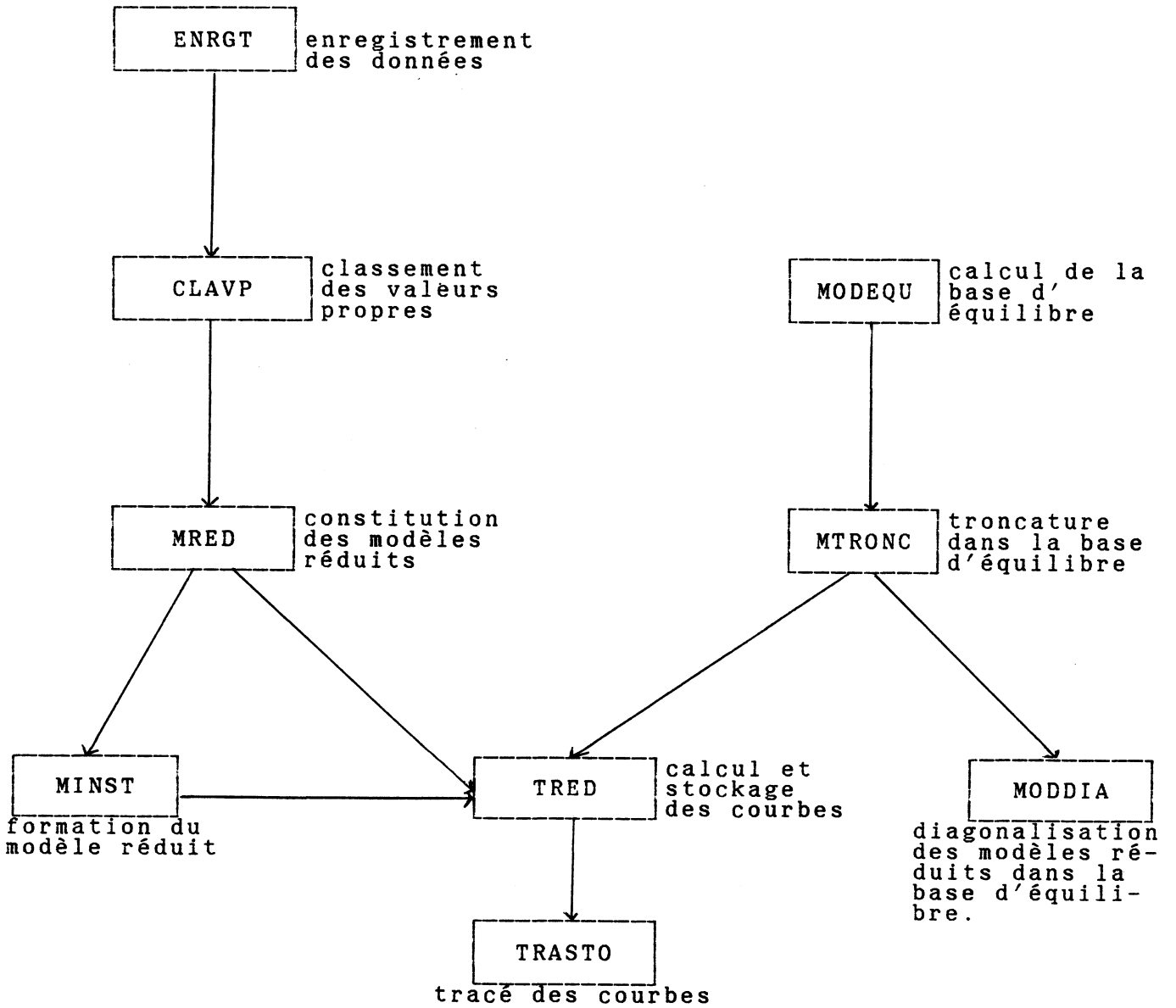
$$\{\delta_i \sigma_i \delta'_i\}_{1 \leq i \leq f}$$

Il suffit de choisir convenablement  $\Delta$  et  $\Delta'$  pour avoir des valeurs singulières qui parcourent  $\mathbb{R}^+$ .

La notion de valeurs singulières n'est donc pas une notion intrinsèque à l'application linéaire a comme la notion de valeurs propres, mais apparaît comme étroitement liée aux produits scalaires utilisés dans les deux espaces E et F.

ANNEXE B: PROGRAMMES INFORMATIQUES

Schéma général



Programme CLAVP

Ce programme est une extension du programme CLAMOD écrit par DUC [6].

Il effectue le classement des valeurs propres d'un système initial. Plusieurs lectures de paramètres sont possibles pour une même diagonalisation.

Dimensions maximales:

A	: 15 × 15
B	: 15 × 3
C	: 3 × 15
R	: 15 × 15

Fichier d'entrée: CLAM1 (sortie de ENRGT)

Fichiers de sortie: SYSTA : sous-système stable sous forme diagonale  
SYDIAG: système complet sous forme diagonale.  
CLAM2 : matrice solution de l'équation de Lyapounov et régime permanent (pour la dernière lecture de paramètres).  
RESULT: résultats des classifications.

Questions posées:

- dimension du système
- nombre d'entrées
- nombre de sorties
- système continu, discret
- pondération des entrées
- pondération des sorties

[ -entrée impulsion, échelon, rampe  
-énergie du transitoire, du permanent  
-méthode lss, ags, skelton  
-système déterministe, stochastique  
-étude globale, par sortie, par entrée-sortie

Possibilité de relire le dernier groupe de paramètres autant de fois que nécessaire.



Sous programmes utilisés:

EIGRF (IMSL) : calcul des valeurs propres  
et vecteurs propres d'une  
matrice quelconque.

LINVF2 (IMSL): inversion d'une matrice  
quelconque.

Programme ENRGT

Ce programme lit à l'écran les matrices A,B,C,R du système initial et les range dans le fichier CLAM1.

Dimensions maximales:

A	: 15 × 15
B	: 15 × 3
C	: 3 × 15
R	: 15 × 15

Fichier de sortie: CLAM1 : matrices du système rangées sous format libre.

Questions posées:

- dimension du système
- nombre d'entrées
- nombre de sorties
- système stochastique ou déterministe

Remarques: Si les données à enregistrer sont déjà stockées sur un fichier, il faut écrire un programme qui les lise et les écrive dans CLAM1.

CLAM1 est constitué de la manière suivante:

les matrices A,B,C,R sont entrées en colonnes, sous format, libre double précision.

Si le système est déterministe la matrice R est nulle.

Programme MINST:

Ce programme forme les matrices FF,GG,HH des modèles réduits instables à partir des matrices F,G,H des modèles réduits stables calculés par MRED,et du système complet mis sous forme diagonale.

Dimensions maximales:

A,FF : 15 × 15  
F : 13 × 13  
B,GG : 15 × 3  
G : 13 × 3  
C,HH : 3 × 15  
H : 3 × 13  
E : 3 × 3

Fichiers d'entrée: -SYDIAG (sortie de CLAVP)

-fichier de stockage des modèles réduits stables  
(sortie de MRED)

Fichier de sortie: -fichier de stockage des modèles réduits instables

Questions posées:

- dimension n du système initial
- nombre d'entrées
- nombre de sorties
- nombre de valeurs propres instables
- nombre de modèles instables à former

Programme MODDIA

Ce programme calcule la forme diagonalisée d'un ou plusieurs modèles réduits.

Dimensions maximales:    F : 15 × 15  
                                  G : 15 × 3  
                                  H : 3 × 15  
                                  R : 15 × 15

Fichier d'entrée:    fichier des modèles réduits (sortie de MTRONC)

Fichier de sortie:    MDIAG : donne les matrices F,G,H,R dans la base diagonale réelle ainsi que les matrices modales (option)

Questions posées:    - système stochastique, déterministe  
                              - impression des matrices modales  
                              - nombre de modèles réduits à diagonaliser

Sous-programmes utilisés:    EIGRF (IMSL) calcul des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice quelconque.  
                                  LINV2F (IMSL) inversion d'une matrice quelconque.

Programme MODEQU

Ce programme écrit par C. Duhamel est une adaptation de la version GENSTAT écrite par R. Astier [7]. Il calcule les matrices A, B, C dans la base d'équilibre et les modes du second ordre du système.

Dimensions maximales:            A : 15 × 15  
                                      B : 15 × 15  
                                      C : 15 × 15

Fichier d'entrée:    DONNEES: -titre  
                                      -format (I3): dimension d'entrée, dimension  
                                      d'état, dimension de sortie, horizon d'étude  
                                      , indicateur de changement d'échelle (0=non)  
                                      indicateur d'impressions intermédiaires  
                                      (0=non)  
                                      -format de lecture des matrices A, B, C.  
                                      -matrices A, B, C en lignes dans la base  
                                      initiale

Fichier de sortie:    SORTIE: -matrices A, B, C dans la base d'équilibre  
                                      -modes du second ordre  
                                      -matrices de commandabilité et d'observa-  
                                      bilité  
                                      -en option: les différents changements de  
                                      base successifs.

Sous-programmes utilisés:    LSVDF(IMSL): décomposition en valeurs singu-  
                                      lières.  
                                      LINV2F(IMSL): inversion d'une matrice quel-  
                                      que.

Programme MRED

Ce programme est une adaptation du programme MAOPT écrit par Duc [6].

IL calcule les matrices F,G,H,E des différents modèles réduits. Seuls les systèmes discrets sont traités.

Dimensions maximales:

A,F	: 15 × 15
B,G	: 15 × 3
C,H	: 3 × 15
D,E	: 3 × 3

Fichiers d'entrée:

- fichier des données initiales (SYSTA par exemple, ou CLAM1)
- CLAM2 (sortie de CLAVP: pour la dernière lecture des paramètres)

Fichier de sortie: fichier de stockage des modèles réduits

---

Questions posées:

- nom du fichier de stockage du modèle initial
- nom du fichier de stockage des modèles réduits
- dimension du système
- nombre d'entrées
- nombre de sorties
- système continu, discret
- largeur de page: 72 ou 132 (pour l'impression des matrices) •
- matrice D (relation entrée-sortie)
- pondération à appliquer en entrée

- nombre de modèles réduits à calculer
- pour chaque modèle réduit:
  - dimension du modèle agrégé
  - no des modes retenus
  - calcul de H et E au choix:
    - H sans contrainte, E=D
    - H avec contrainte échelon, E=D
    - H sans contrainte, E avec contrainte échelon
    - H avec contrainte rampe, E avec contrainte échelon
  - impression des matrices

Sous-programmes utilisés:   LINV2F (IMSL) inversion d'une matrice quelconque





Programme TRASTO

Ce programme permet de tracer les courbes calculées par TRED sur un nombre de points variable.

Dimensions maximales: nombre de points : 500

Fichier d'entrée: fichier de stockage des courbes

Questions posées: - nom du fichier de stockage(6 caractères)  
- nombre de points à tracer

Possibilité de revenir au début autant de fois que nécessaire.

Sous programmes utilisés: TRA (bibliothèque SIRIUS) tracé de courbes

Programme TRED

Ce programme calcule la réponse de chaque modèle réduit à une entrée test pour chaque couple entrée-sortie.

Dimensions maximales:            F : 15 × 15  
  G : 15 × 3  
  H : 3 × 15  
  E : 3 × 3  
  nombre de points : 500

Fichier d'entrée :    - fichier des modèles réduits

Fichiers de sortie:    - fichier de stockage des courbes(un fichier par courbe)

Questions posées:    -nom du fichier des modèles réduits  
                                  - nombre de modèles à traiter  
                                  pour chaque modèle:  
                                  - nombre de points à calculer  
                                  - entrée impulsion, échelon, rampe  
                                  - titre de la courbe  
                                  - stockage des résultats  
                                  si oui : nom du fichier de stockage  
                                  - tracé de la courbe  
                                  possibilité de tracer plusieurs courbes par  
                                  modèle.

Sous-programmes utilisés:    TRA (bibliothèque SIRIUS) tracé de courbes.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON B.D.O., 1972.  
On the computation of the Cauchy Index. Quaterly of applied Mathematics, January 1972.
- [2] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., 1971.  
Linear optimal control. Prentice Hall.
- [3] AOKI M., 1968.  
Control of large scale systems by agregation. IEEE TAC, AC-13, pp. 246-253.
- [4] COMMAULT C., GUERIN J.P., 1978.  
Propriétés et structure des systèmes agrégés. Application au problème de la projection optimale. RAIRO Automatique vol. 12, n° 4, 1978, p. 377-390.
- [5] DEMPSTER, 1969.  
Elements of continuous multivariate analysis. Addison-Wesley, publishing Company.
- [6] DUC G., 1981.  
Etude de grands systèmes par modèle agrégé et méthode de perturbation. Thèse de Dr Ingénieur, Paris XI, 1981, 514.
- [7] Equipe de statistique d'Orsay, décembre 1983.  
Robustesse des systèmes non complètement observable. Contrat de Recherche n° 21460-4562.
- [8] FERNANDO K.V., NICHOLSON H., 1983.  
On the structure of balanced and Other Principal Representations of SISO systems. IEEE TAC, AC-28, n°2, p.228-231
- [9] FERNANDO K.V., NICHOLSON H., 1983.  
On the Cauchy Index of Linear Systems. IEEE TAC, AC-28, n° 2, p. 222-224.
- [10] GOLUB G.M., REINSCH C., 1970.  
Singular value decomposition and least squares solutions Numer. Math. vol. 14, p. 403-420.
- [11] HARSHAVARDHANA P., JONKHEERE E.A., SILVERMAN L.M., 1984.  
Stochastic balancing and approximation. Stability and minimality. IEEE TAC, AC-29, n° 8, p. 744-746.
- [12] JONKHEERE E.A., SILVERMAN L.M., 1983.  
A Sew Set of Invariants for Linear Systems. Application to reduced order compensator design. IEEE TAC, AC-28, n°10, p. 953-964.
- [13] LASTMAN G.S., SINHA N.K.  
A Comparison of the Balanced Matrix Method and the Aggregation Method of Model Reduction. IEEE TAC, AC-30, n° 3, p. 301-304.

- [14] LEBART-FENELON, 1973.  
Statistique et Informatique Appliquée. DUNOD 2nd édition.
- [15] METIVIER M., 1980.  
Fonctions de Lyapounov aléatoires et stabilité stochastique. Outils et modèles mathématiques pour l'Automatique. Ed. R.C.P. du C.N.R.S.
- [16] MICHAILESCO G., 1979.  
Approximation des systèmes complexes pour des modèles de dimension réduite. Thèse d'Etat, Paris XI, n° d'ordre 2121.
- [17] MOORE B.C., 1981.  
Principal Component Analysis in Linear Systems : controllability, Observability and Model Reduction. IEEE TAC, AC-26, n° 1, p. 17-31.
- [18] PERNEBO L., SILVERMAN L., 1982.  
Model Reduction via Balanced State Representation. IEEE TAC, AC-27, n° 2, p. 382-387.
- [19] RAO C.R., 1965.  
Linear Statistical Inference and its Applications. John Wiley and Son.
- [20] SEZER M.E., SILJAK D.D., 1982.  
Validation of Reduced Order Models for Control Systems Design. AIAA J. Guidance, vol. 5, n° 5, p. 430-437.
- [21] SILJAK D.D., 1981.  
Complex Dynamic Systems : Stability, Control, and Reliability. Lecture Notes on Complex Dynamic Systems.
- [22] SILJAK D.D., 1978.  
Large Scale Dynamic Systems : Stability and Structure. Math. Holland, New York.
- [23] SIRET J.M., 1978.  
Sur la synthèse de lois de commande sous optimales par agrégation. Thèse d'Etat, Paris XI, n° d'ordre 514.
- [24] SKELTON R.E., 1980.  
Lost Decomposition of Linear Systems with Application to Model Reduction. Internation. Journ. of Control, vol. 32 n° 6, p. 1039-1055.
- [25] STEWART G.W., 1973.  
Introduction to Matrix Computations. New York, Acad. Press.
- [26] VIERREST E., KAILATH Th., 1983.  
On Generalized Balanced Realization. IEEE TAC, AC-28, p. 833-844.
- [27] YASUDA K., HIRAI K., 1979.  
Upper and Lower Bounds on the Solution of the Algebraic Ricatti equation. IEEE TAC, AC-24, n° 3, p. 483-487.