



**HAL**  
open science

# Accouplements des polynômes complexes

Lei Tan

► **To cite this version:**

Lei Tan. Accouplements des polynômes complexes. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1987. Français. NNT: . tel-04163017

**HAL Id: tel-04163017**

**<https://theses.hal.science/tel-04163017>**

Submitted on 17 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
n° d'ordre :

6388)

UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

# THESE

présentée

Pour obtenir

le titre de DOCTEUR en MATHEMATIQUES

PAR

TAN Lei

---

**SUJET :** Accouplements des polynômes complexes

soutenu le 25 septembre 1987 devant la Commission d'examen

MM. F. LAUDENBACH..... Président

A. DOUADY

J.H. HUBBARD

M. REES

J.-C. YOCCOZ



English title : Matings of complex polynomials.

Abstract.

Let  $f$  and  $g$  be two monic quadratic complex polynomials. Take two copies of the complex plane  $\mathbb{C}$  and compactify them by adding a circle at the infinity, then sew up these two circles to make a topological sphere  $S^2$ . Get  $f$  and  $g$  mapping on each hemisphere of  $S^2$ . We obtain a mapping  $F$  from  $S^2$  to its self. It's a branched covering and we call it a topological mating of  $f$  and  $g$ .

The union of the orbits by  $F$  of the critical points of  $F$  is defined to be the postcritical set of  $F$ . Thurston defined an equivalence between postcritically finite branched coverings of  $S^2$ . Suppose that  $f$  and  $g$  are postcritically finite. We say that  $f$  and  $g$  can be mated if  $F$  (modified in some cases) is equivalent to a rational function. If  $f$  and  $g$  can be mated, then we can obtain the sphere  $S^2$  by sewing up the boundaries of the filled in Julia sets of  $f$  and  $g$ .

Quadratic polynomials with bounded postcritical set are parameterized by the Mandelbrot set  $M$ . Let  $\bar{W}$  be the closure of the principal component of the interior of  $M$ . If the parameters of  $f$  and  $g$  are in conjugate components of  $M - \bar{W}$ , then  $f$  and  $g$  cannot be mated. Douady and Hubbard conjectured that they can be mated in all other cases. We prove this conjecture in this thesis by using a criterion of Thurston, and by supporting on the works of Silvio Levy and of Mary Rees.

This result can be generalized to polynomials of greater degree but having only one critical point.

Key-words: complex polynomial, rational function, iteration, Julia set, Mandelbrot set, lamination, mating, analytic dynamical system



## Remerciements

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Adrien DOUADY, mon directeur de thèse, qui m'a appris à faire la recherche dès le début, et m'a encouragé et soutenu tout au long de ce travail. Je suis reconnaissante de l'attention qu'il a pris, pour m'écouter et m'aider, à tout moment où j'ai eu une difficulté, même si parfois celle-ci ne concernait pas seulement du travail mathématique. J'apprécie surtout son sens de humour qui a fait une ambiance de recherche très chaleureuse et très agréable. C'est aussi grâce à lui que j'ai pu pénétrer dans le monde des mathématiciens du système dynamique holomorphe, et rencontrer, par exemple, John H. Hubbard et Mary Rees.

Je exprime également mes remerciements sincères

-à François LAUDENBACH, pour son intérêt à ma thèse et l'honneur qu'il m'a fait de présider le Jury;

-à John Hamal HUBBARD, qui a montré un intérêt constant à mes travaux, et a accepté de venir de Bonn pour faire partie du Jury, grâce à lui, j'ai pu faire un voyage inoubliable à l'Université de Cornell;

-à Mary REES, dont le travail m'a sans doute servi comme un point clé pour terminer cette thèse, pour qu'elle a accepté avec gentillesse d'être rapporteur de cette thèse, et pour son hospitalité sympathique, son encouragement et les discussions favorables pendant la période que je travaillais à Liverpool;

-à Jean-Christophe YOCCOZ, pour avoir accepté d'être membre du Jury;

-à Pierrette SENTENAC et Pierre LAVAUERS, qui ont consacré beaucoup de temps à la lecture d'une première version, leurs conseils m'ont été très remarquables pour améliorer la rédaction;

-à tous ceux qui ont participé à la manifestation à Ithaca pour mon refus de visa, leur sens de justice m'a profondément impressionné;

-aux personnels du département de mathématique de l'Université de Paris-Sud et du centre mathématique à l'Ecole Normale Supérieure, leurs travaux m'ont simplifié la vie;

-aux étudiants chinois à Orsay, et de plus Anne DEJEAN et Françoise EMERY, leur amitié m'a été reconnaissable et m'a enrichie la vie.



## Chapitre 1. Introduction

### 1.1. Introduction

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme monique de degré  $d > 1$ . Au voisinage de  $\infty$ , ce polynôme est analytiquement conjugué à  $z \rightarrow z^d$ . On compactifie  $\mathbb{C}$  à  $\tilde{\mathbb{C}}$  en ajoutant un cercle à l'infini:

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{ \infty \cdot e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \}$$

et on prolonge  $f$  en  $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$  en posant

$$\tilde{f}(\infty \cdot e^{2i\pi\theta}) = \infty \cdot e^{2i\pi d\theta},$$

on obtient ainsi une application continue  $\tilde{f}$ , qui est aussi un revêtement ramifié de degré  $d$  de  $\tilde{\mathbb{C}}$  sur  $\tilde{\mathbb{C}}$  avec les mêmes points de ramification que  $f$ . On prend maintenant deux polynômes moniques  $f, g$  de degré  $d$ , et on les "accouple" de façon topologique: on identifie  $S^2$  à

$$\tilde{\mathbb{C}} \times \{+, -\} / (\infty \cdot e^{2i\pi\theta}, +) \sim (\infty \cdot e^{-2i\pi\theta}, -)$$

et l'équateur  $E$  à  $\mathbb{T}$  par

$$(\infty \cdot e^{2i\pi\theta}, +) \longrightarrow \theta$$

et on définit  $f \perp g : S^2 \rightarrow S^2$  par

$$f \perp g|_{\tilde{\mathbb{C}} \times \{+\}} = \tilde{f} \quad \text{et} \quad f \perp g|_{\tilde{\mathbb{C}} \times \{-\}} = \tilde{g}$$



Comme  $\tilde{f}(\theta) = -\tilde{g}(-\theta)$  pour tout  $\theta \in E$ , les actions de  $f$  et  $g$  sur  $E$  sont compatibles. Donc  $f \perp g$  est bien défini. Comme  $f \perp g|_E : \theta \rightarrow d\theta$  est un revêtement non ramifié de  $E$ , l'application  $f \perp g$  est un revêtement ramifié de degré  $d$  de  $S^2$  sur  $S^2$  avec les points de ramifications dans  $S^2 - E$ .

Soit  $f$  un revêtement ramifié de  $S^2$  sur  $S^2$  (resp. un polynôme de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ ). On note  $f^n$  la  $n$ -ième itérée  $f \circ f \circ \dots \circ f$  de  $f$ . On note  $P_f$  l'ensemble postcritique de  $f$ , réunion des orbites directes par  $f$  des valeurs critiques de  $f$  dans  $S^2$  (resp. des valeurs critiques de  $f$  dans  $\mathbb{C}$ ). Alors  $P_{f \perp g} = P_f \cup P_g$  (réunion disjointe).

Thurston a défini une relation d'équivalence dans l'ensemble des revêtements ramifiés de  $S^2$  sur  $S^2$  à ensemble postcritique fini. Les fractions rationnelles sont en particulier des revêtements ramifiés de  $S^2$  sur  $S^2$ , de plus, elles sont analytiques pour la structure complexe standard sur  $S^2$ . Thurston a donné un critère (une condition nécessaire et suffisante) pour qu'un revêtement ramifié soit équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle ([DH3] et [Th]).

Nous dirons que deux polynômes  $f$  et  $g$  sont strictement accouplables si  $f \perp g$  est équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle. On donnera au chapitre 6 une définition d'accouplements dégénérés.

On étudie ici particulièrement les conditions d'accouplements des polynômes ayant un seul point critique (ce qui est le cas en degré deux). Le critère de Thurston est souvent difficile à vérifier. Le but de ce travail est de démontrer une conjecture de Douady et Hubbard d'un critère simple et

direct pour que deux polynômes de même degré ayant chacun un seul point critique soient accouplables (strictement ou de façon dégénérée).

Tout polynôme monique de degré  $d$  ayant un seul point critique est conjugué par une translation à un polynôme de la forme:

$$f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow z^d + c .$$

L'unique point critique de  $f_c$  est  $0$  et la valeur critique est  $c$ . Le degré de ramification de  $f_c$  en  $0$  est  $d$ . On pose  $P_c = P_{f_c}$ .

On note  $M_d$  l'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  pour lesquels l'orbite de  $0$  par  $f_c$  est bornée (l'ensemble  $M_2$  est connu comme l'ensemble de Mandelbrot), et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  pour lesquels  $P_c$  est fini. Alors  $\mathcal{D} \subset M_d$ , l'ensemble  $M_d$  est compact, plein, connexe, et symétrique par rapport à l'axe réel (Figure 1). On note  $W_0$  la composante de  $\tilde{M}_d$  contenant  $0$ . Les fermetures des composantes connexes de  $M_d - \bar{W}_0$  sont deux à deux conjuguées sauf éventuellement une (quand  $d$  est pair) qui intersecte l'axe réel, qui est conjuguée à elle-même.

Soient  $f_c$  et  $f_{c'}$  deux polynômes à ensembles postcritiques finis. Pour  $c \in \mathcal{D} \cap W_0$  (ceci entraîne  $c=0$  d'après le chapitre 4), les deux polynômes sont toujours accouplables. En effet  $f_c \perp f_{c'}$  est équivalent au sens de Thurston à  $f_{c'}$ . D'autre part, si  $c$  et  $c'$  sont dans des composantes conjuguées de  $M_d - \bar{W}_0$ , on montre facilement que  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont non accouplables ([Le] et chapitre 7). En degré 2, Douady et Hubbard ont conjecturé la réciproque ([D1]).

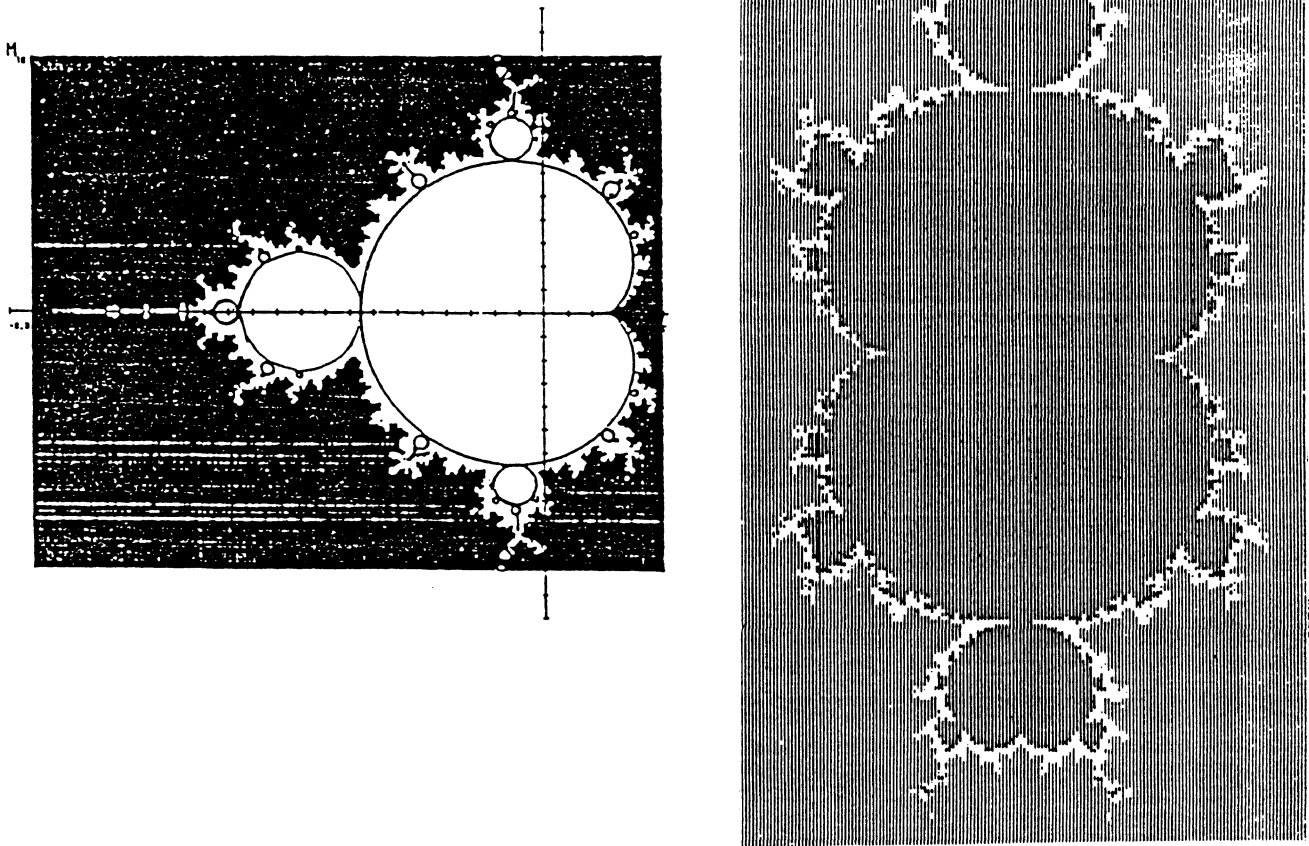


Figure 1.1  $M_2$  (l'ensemble de Mandelbrot) et  $M_3$

En utilisant le critère de Thurston, S. Levy a fait une première réduction de cette conjecture ([Le]). Nous avons obtenu ensuite des résultats partiels ([Ta]). Une démonstration complète (présentée dans le cas de degré deux) a été récemment donnée par M. Rees ([R1]), mais celle-ci est un peu longue. En combinant ce que nous avons obtenu avec des idées extraites de M. Rees, nous présentons au chapitre 7 une démonstration relativement courte et valable pour un degré  $d$  quelconque. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 1. Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$ ,  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$  ( $d \geq 2$ ) à ensembles postcritiques finis. Alors  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont accouplables (strictement ou de

façon dégénérée) si et seulement si  $c$  et  $c'$  ne sont pas dans des composantes conjuguées de  $M_d - \bar{W}_0$ .

## 1.2. Préliminaires

On utilisera le théorème d'uniformisation de Riemann: toute surface de Riemann  $U$  (i.e. variété  $\mathbb{C}$ -analytique de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$ ) simplement connexe est isomorphe à  $D$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , où  $D$  est le disque unité ouvert. Un tel isomorphisme est appelé une représentation conforme de la surface  $U$ .

On extrait ici quelques notations et résultats élémentaires.

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d > 1$ . On appelle ensemble de Julia rempli de  $f$ , qu'on note  $K_f$ , l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f^n(z) \not\rightarrow \infty$ , et on appelle ensemble de Julia de  $f$ , qu'on note  $J_f$ , la frontière de  $K_f$ .

Proposition 1.1 (DH21.III). Soit  $f$  un polynôme monique de degré  $d$ . On suppose  $K_f$  connexe. Alors il existe une représentation conforme de Riemann

$$\Phi: \mathbb{C} - K_f \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} - \bar{D},$$

tangente à l'identité en  $\infty$  (i.e.  $\Phi(z)/z \rightarrow 1$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ ), qui conjugue  $f$  à  $z \rightarrow z^d$ . Si de plus  $K_f$  est localement connexe, alors

$$\psi_f = \Phi^{-1}: \mathbb{C} - \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C} - K_f$$

admet un prolongement continu de  $\mathbb{C} - D$  à  $\mathbb{C} - \hat{K}_f$  ; l'application

$$\gamma_f: \theta \rightarrow \gamma_f(\theta) = \psi_f(e^{2i\pi\theta})$$

de  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur  $\partial K_f$  vérifie

$$\gamma_f(d\theta) = f(\gamma_f(\theta))$$

(formule de semi-conjugaison).

Si  $K_f$  est connexe et localement connexe, on peut définir d'après cette proposition les notations suivantes (en négligeant l'indice  $f$  lorsque ce n'est pas ambigu):

a) le potentiel  $G_f(z) = \text{Log} |\psi^{-1}(z)|$  pour  $z \in \mathbb{C} - \hat{K}_f$ ;

b) les équipotentiels

$$N_f(s) = \{\psi(e^{s+2i\pi\theta}) \mid \theta \in \mathbb{T}\} = \{z \mid G_f(z) = s\};$$

c) les rayons externes  $R_f(\theta) = \{\psi(e^{s+2i\pi\theta}) \mid 0 \leq s < \infty\}$  avec les points d'aboutissement  $\gamma_f(\theta)$ ;

d)  $\text{Arg}(z)$  l'ensemble des arguments externes de  $z \in \mathbb{C} - \hat{K}_f$ , i.e. des  $\theta$  tels que  $z \in R_f(\theta)$ .

Si  $z \in \mathbb{C} - K_f$ , l'ensemble  $\text{Arg}(z)$  admet un unique élément; si  $z \in J_f$ , cet ensemble peut avoir plusieurs éléments.

Soient  $\Sigma = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  la sphère riemannienne et  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$  une fonction holomorphe. L'orbite d'un point  $z \in \Sigma$  par  $f$ , notée  $\text{Or}(z)$ , est l'ensemble des points  $f^n(z)$ ,  $n \geq 0$ . Un point périodique pour  $f$  est un point  $x$  de  $\mathbb{C}$  tel qu'il existe un entier  $n > 0$  pour lequel  $f^n(x) = x$ . Le plus petit  $n$  ayant cette propriété est la période  $k$  de  $x$ . Le cycle de  $x$  est alors  $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ , où  $x_i = f^i(x)$ , et le multiplicateur de ce cycle est  $\rho = \prod_i f'(x_i)$ . On dit que  $x$  est un point périodique attractif (resp.

répulsif, resp. indifférent) si  $|\rho| < 1$  (resp.  $|\rho| > 1$ , resp.  $|\rho| = 1$ ). Un point périodique est dit superattractif si  $\rho = 0$ ; cela équivaut à l'existence d'un point critique dans le cycle. On dit que  $x$  est un point prépériodique s'il existe un entier non négatif  $j$  tel que  $f^j(x)$  soit périodique. Un tel  $j$  minimal est appelé prépériode de  $x$ . Si  $x$  est prépériodique mais non périodique, on dit que  $x$  est strictement prépériodique. Dans ce cas là, la prépériode de  $x$  est strictement positive.

Par exemple, pour  $f = f_i : z \rightarrow z^2 + i$ , on a

$$0 \xrightarrow{f} i \xrightarrow{f} i-1 \xrightarrow{f} -i \xrightarrow{f} i-1,$$

donc 0 est prépériodique de prépériode 2 et  $\{i-1, -i\}$  est un cycle périodique répulsif, et  $P_f = \{i, i-1, -i\}$ . Pour  $g = f_{-1} : z \rightarrow z^2 - 1$ , on a

$$0 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{g} 0,$$

donc  $P_g = \{0, -1\}$  et le cycle  $\{0, -1\}$  est superattractif.

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On note  $\tilde{d} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $t \rightarrow dt$  la multiplication par  $d$ . Supposons que  $t$  est prépériodique pour  $\tilde{d}$ , i.e. il existe  $j$  et  $k$  tels que  $d^{j+k}t = d^k t$ . Alors pour  $j, k$  minimaux  $t$  est de la forme  $p/d^j(d^k - 1)$ . Le dénominateur de  $t$  est premier à  $d$  si et seulement si  $j=0$ , i.e. si et seulement si  $t$  est périodique.

Lemme 1.2. Dans  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , soit  $A$  un fermé tel que  $\tilde{d}$  induise une injection continue  $q$  de  $A$  dans  $A$ . Alors  $A$  est fini, et les éléments de  $A$  sont des rationnels à dénominateur premier à  $d$ . En particulier  $q$  est

une bijection de  $A$  sur  $A$ .

**Démonstration.** Ce lemme est démontré dans [D1] pour  $d=2$  et  $q$  bijective. La démonstration s'étend au cas de  $d$  quelconque et  $q$  injective. Comme  $A$  et  $q(A)$  sont compacts,  $q^{-1}: q(A) \rightarrow A$  est uniformément continue. Il existe donc  $\alpha (< \frac{1}{2})$  tel que  $|t-t'| < \alpha$  entraîne

$$|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| < 1/(2d),$$

ceci entraîne en fait  $|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| < \alpha/d$  : soient

$$q^{-1}(t) = t/d + i/d, \quad q^{-1}(t') = t'/d + j/d,$$

alors

$$d \cdot |q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| = |t - t' + i - j| < \frac{1}{2},$$

mais

$$|t - t'| < \alpha < \frac{1}{2},$$

on a donc  $i=j$  et  $|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| = |t - t'|/d < \alpha/d$ .

On peut recouvrir  $q(A)$  par des ensembles ouverts  $V_1, \dots, V_k$  de diamètre  $< \alpha$ . Alors  $q^{-n}(V_i)$  est de diamètre  $< \alpha/d^n$ , et par suite  $q(A)$  a au plus  $k$  éléments. Donc  $A$  est fini,  $q$  est bijective et chaque élément de  $A$  est périodique pour  $q$ , c'est-à-dire à dénominateur premier à  $d$ .

**Cqfd.**

**Proposition 1.3.** Soit  $f$  polynôme de degré  $d$  tel que  $K_f$  soit connexe et localement connexe.

Pour  $z \in J_f$  périodique, l'ensemble  $\text{Arg}(z)$  est constitué d'un nombre fini de rationnels à dénominateur premier à  $d$ .

Pour  $z \in J_f$  strictement prépériodique, l'ensemble  $\text{Arg}(z)$  est constitué d'un nombre fini de rationnels à dénominateur non premier à  $d$ .

Et comme complément, pour  $z$  prépériodique, chaque argument de  $z$  est de la même prépériode pour la multiplication par  $d$  que la prépériode de  $z$  pour  $f$ .

Preuve. Supposons d'abord  $y \in J_f$  et le degré de ramification de  $f$  en  $y$  est  $d'$  (qui est 1 si  $y$  n'est pas un point critique). Alors  $f$  est conjugué à  $z \rightarrow z^d$  au voisinage de  $y$ . Comme l'image par  $f$  d'un rayon externe est encore un rayon externe, l'application  $f$  induit un revêtement de degré  $d'$  sur les rayons externes de  $y$ . Par la formule de semi-conjugaison dans la proposition 1.1, l'application  $\tilde{d}$  induit un revêtement de degré  $d'$  sur  $\text{Arg}(y)$ .

D'après Fatou et Julia ([D1]), l'ensemble de Julia  $J_f$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs. En particulier, pour  $z \in J_f$  périodique, le cycle  $\{z_0 = z, z_1, \dots, z_{k-1}\}$  de  $z$  n'est pas superattractif donc ne contient pas de point critique. Ainsi  $\tilde{d}$  induit une application injective de  $A = \bigcup_i \text{Arg}(z_i)$  à  $A$  lui-même. Par le lemme 1.2, l'ensemble  $A$  est fini, les éléments de  $A$  sont à dénominateur premier à  $d$  et  $\# \text{Arg}(z_i) = \# \text{Arg}(z_j)$  pour tous  $i, j: 0 \leq i, j \leq k-1$ .

Pour  $z \in J_f$  strictement prépériodique,  $z$  tombe en un temps fini dans un cycle périodique  $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$  avec  $\# \text{Arg}(z_i) = n$  fini. Alors  $\# \text{Arg}(z)$  est un multiple de  $n$  et tout élément de  $\text{Arg}(z)$  est strictement prépériodique pour  $\tilde{d}$  donc est à dénominateur non premier à  $d$ .

Café.



Proposition 1.4 (IDH2].III). Pour  $f=f_c : z \rightarrow z^d + c$ , l'ensemble de Julia rempli  $K_f$  est compact et plein (i.e.  $\mathbb{C}-K_f$  est connexe). De plus

a) si  $0 \in K_f$ , l'ensemble  $K_f$  est connexe;

b) si  $0 \notin K_f$ , l'ensemble  $K_f$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

L'ensemble postcritique  $P_f$  de  $f$  est l'orbite de  $c=f(0)$ . Il est fini si et seulement si  $0$  est prépériodique.

Proposition 1.5 (IDH2].III). Supposons  $P_f$  fini.

a) Si  $0$  est périodique, alors  $0 \in \tilde{K}_f$ . Pour tout  $a \in P_f$ , il existe un disque ouvert  $\Delta_a \subset \tilde{K}_f$  contenant  $a$  vérifiant  $f(\bar{\Delta}_a) \subset \Delta_{f(a)}$ ; on pose

$$A_f = \bigcup_{a \in P_f} \Delta_a .$$

b) Si  $0$  est strictement prépériodique, alors  $0 \in \partial K_f = K_f$ ; on pose  $A_f = P_f$ .

En tout cas pour  $R$  assez grand tel que  $f^{-1}(\bar{D}_R) \subset D_R$  (où  $D_R$  est le disque ouvert centré en  $0$  de rayon  $R$ ), il existe une métrique infinitésimale  $\mu_f$  (métrique Riemannienne) sur  $D_R - A_f$  pour laquelle  $f$  est fortement dilatant ( $\|Tf\| > 1$ ); elle induit une métrique qu'on note aussi  $\mu_f$  sur  $D_R - \tilde{A}_f$  qui définit la même topologie que la topologie ordinaire et qui vérifie

$$\exists \tau_f > 1, \forall x \in D_R - \tilde{A}_f, \exists V \text{ voisinage de } x, \forall y \in V, \\ \mu_f(f(x), f(y)) \geq \tau_f \mu_f(x, y) .$$

Proposition 1.6 (IDH2]. Si  $P_f$  est fini, alors  $K_f$  est connexe et localement connexe, et toute composante connexe de  $\tilde{K}_f$  est prépériodique pour  $f$ .

## Chapitre 2. Résultats de Thurston et de Levy

### 2.1. Critère de Thurston

Soit  $F$  un revêtement ramifié de  $S^2$  sur  $S^2$  à ensemble postcritique fini. Soit  $X$  un espace topologique compact; on dit que deux applications

$$\zeta : X \longrightarrow S^2, \quad \zeta' : X \longrightarrow S^2$$

sont homotopes (rel  $P_F$ ) si il existe  $(\zeta_s)$  une homotopie vérifiant  $\zeta_0 = \zeta$ ,  $\zeta_1 = \zeta'$ , et  $\zeta_s^{-1}(P_F)$  indépendant de  $s$ . On dit que deux fermés  $Y, Y'$  de  $S^2$  sont homotopes (rel  $P_F$ ) s'il existe un compact  $X$  et deux équivalences d'homotopie  $\zeta : X \rightarrow Y$  et  $\zeta' : X \rightarrow Y'$  telles que  $\zeta$  et  $\zeta'$  soient homotopes (rel  $P_F$ ).

Dans le texte suivant, sans qu'on le précise chaque fois, toutes les homotopies concernées seront des homotopies (rel  $P_F$ ).

Il existe une fonction minimale

$$\nu : S^2 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

telle que  $\nu = 1$  sur  $S^2 - P_F$ , et  $\nu(x)$  pour  $x \in P_F$  soit un multiple de  $\nu(y) \cdot \deg_y F$  pour tout  $y \in F^{-1}(x)$ . Par conséquent, pour un ensemble de points  $x_1, \dots, x_n$  qui forme un cycle périodique de  $F$  (i.e.  $F(x_i) = x_{i+1}$  et  $F(x_n) = x_1$ ), l'entier  $\nu(x_i)$  est constant pour tout  $i$ , de plus, s'il existe un point critique dans ce cycle,  $\nu(x_i) = \infty$  pour tout  $i$ . On dit que l'orbifold  $O_F = (S^2, \nu)$  de  $F$  est hyperbolique si sa caractéristique d'Euler

$$\chi(O_F) = 2 - \sum_{x \in P_F} (1 - 1/\nu(x))$$

vérifie  $\chi(O_F) < 0$ . Par exemple, pour  $g : z \rightarrow z^2 - 1$  et  $F = g \circ g$  l'ensemble postcritique  $P_F$  a quatre points et  $\nu(x) = \infty$  pour tout  $x \in P_F$ , et  $\chi(O_F) = -2 < 0$ .

**Définition 2.1 (équivalence au sens de Thurston).** Soient  $F$  et  $G$  deux revêtements ramifiés de degré  $d$  de  $S^2$  sur  $S^2$  à ensemble postcritique fini. On dit que  $F$  et  $G$  sont équivalents (au sens de Thurston) s'il existe deux homéomorphismes  $\theta$  et  $\theta'$  de  $S^2$  sur  $S^2$  tels que:  $\theta(P_F) = \theta'(P_F) = P_G$ , que  $\theta$  et  $\theta'$  soient isotopes (rel  $P_G$ ), et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_F) & \xrightarrow{F} & (S^2, P_F) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta' \\ (S^2, P_G) & \xrightarrow{G} & (S^2, P_G) \end{array}$$

commute.

En particulier si  $F$  et  $G$  sont topologiquement conjugués, (i.e.  $\exists \theta$  homéomorphisme de  $S^2$  avec  $\theta \circ F \circ \theta^{-1} = G$ ), alors  $F$  et  $G$  sont équivalents au sens de Thurston.

Comme précédemment, on s'intéresse ici si un accouplement topologique, étant un revêtement ramifié, est équivalent à une fraction rationnelle. Avec la théorie de l'espace de Teichmüller, Thurston a ramené ce problème d'équivalence à une fraction rationnelle à un objet combinatoire et algébrique: la valeur propre dominante d'une matrice positive qu'on associe à une multicourbe  $F$ -invariante définie ci-dessous.

On dit qu'une matrice  $A=(a_{ij})$  est positive si  $a_{ij} \geq 0$  pour tout  $i$  et  $j$ . En vertu d'une théorie classique ([G]), pour toute matrice positive  $A$  il existe une valeur propre  $\lambda(A)$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}_+$  qu'on appelle valeur propre dominante de  $A$  telle que toute valeur propre  $\mu$  de  $A$  vérifie  $|\mu| \leq \lambda$ .

Une courbe fermée simple  $\gamma \subset S^2 - P_F$  est dite non périphérique si chacune des deux composantes de  $S^2 - \gamma$  contient au moins deux points postcritiques. Un système des courbes  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  est appelé une multicourbe si les  $\gamma_i$  sont non périphériques, deux à deux disjointes et deux à deux non homotopes (rel  $P_F$ ). A chaque multicourbe  $\Gamma$ , on associe une matrice positive

$$F_\Gamma = (f_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

de la façon suivante: si aucune composante de  $F^{-1}(\gamma_j)$  n'est homotope à  $\gamma_i$  (rel  $P_F$ ), on pose  $f_{ij} = 0$ ; s'il existe  $k$  composantes  $\delta_{1j}, \dots, \delta_{kj}$  de  $F^{-1}(\gamma_j)$  homotopes à  $\gamma_i$  (rel  $P_F$ ), on pose  $f_{ij} = \sum_{p=1}^k (1/d_p)$ , où  $d_p$  est le degré de  $F|_{\delta_{pj}} : \delta_{pj} \rightarrow \gamma_j$ . Une multicourbe  $\Gamma$  est dite F-invariante si pour  $\gamma_j \in \Gamma$ , chaque composante de  $F^{-1}(\gamma_j)$  est soit périphérique, soit homotope à une courbe dans  $\Gamma$  (rel  $P_F$ ). On peut alors énoncer le critère suivant:

Critère de Thurston. Un revêtement ramifié  $F$  à  $P_F$  fini et à orbifold hyperbolique est équivalent à une fraction rationnelle si et seulement s'il n'existe pas de multicourbe F-invariante  $\Gamma$  telle que  $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$ .

Pour une démonstration, voir [DH3] ou [Th]. Ce critère efficace,

est pourtant souvent difficile à vérifier ([DH3]). Un étudiant de W. Thurston, Silvio Levy, a fait une première simplification de ce critère dans sa thèse de Ph. D. ([Le]). Le théorème de Levy utilise comme critère des multicourbes composées de courbes sur lesquelles le degré de  $F$  est 1 (ce qu'on appellera des cycles de Levy). Son résultat s'applique tout particulièrement aux revêtements ramifiés de degré deux, mais nous montrons avec une démonstration de Mary Rees et John H. Hubbard qu'il se prolonge aux revêtements ramifiés de degré quelconque ayant seulement deux valeurs critiques.

**Remarque 2.2.** Si une multicourbe  $F$ -invariante  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  contient une sous-multicourbe  $F$ -invariante  $\Gamma' = \{\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_n\}$ ,  $s \geq 1$ , autrement dit pour chaque  $\gamma_i \in \Gamma'$ , aucune composante de  $F^{-1}(\gamma_i)$  n'est homotope à une courbe de  $\Gamma - \Gamma'$ , alors la matrice  $F_\Gamma$  est sous la forme

$$F_\Gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & F_{\Gamma'} \end{pmatrix}$$

où  $F_{\Gamma'}$  est la matrice associée à  $\Gamma'$ ,  $A$  est la matrice  $F_{\Gamma - \Gamma'}$ , et  $0$  est la matrice nulle de  $s \times (n-s)$ . Les valeurs propres de  $F_\Gamma$  sont la réunion des valeurs propres de  $F_{\Gamma - \Gamma'}$  et de  $F_{\Gamma'}$ , et

$$\lambda(F_\Gamma) = \max\{\lambda(F_{\Gamma - \Gamma'}), \lambda(F_{\Gamma'})\}.$$

## 2.2. Critère de Levy

Soit  $F$  un revêtement ramifié de degré  $d$  ayant seulement deux valeurs critiques (ce qui est le cas en degré deux). Alors  $F$  a exactement deux points critiques distincts, et le degré de ramification de  $F$  en chacun de ces points est  $d$ .

On dit qu'une multicourbe  $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$  est un cycle de Levy si aucune des  $\gamma_j$  ne sépare les deux valeurs critiques, et si les  $(\gamma_j)_{1 \leq j \leq n}$  forment un cycle périodique à homotopie près, c'est-à-dire que pour chaque  $j$ , il existe une composante  $\delta_j$  de  $F^{-1}(\gamma_j)$  qui est homotope à  $\gamma_{j-1}$  (ou à  $\gamma_n$  si  $j=1$ ) (rel  $P_F$ ). On voit bien que sous ces conditions, l'application  $F|_{\delta_j}: \delta_j \rightarrow \gamma_j$  est un homéomorphisme de degré 1 pour tout  $j$ . Dans  $F\hat{\Gamma} = (\hat{f}_{ij})$ , on a alors  $\hat{f}_{i,i+1} \geq 1$ ,  $0 \leq i < s$  et  $\hat{f}_{s1} \geq 1$ .

Propriété 2.3. Si une multicourbe  $F$ -invariante  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  contient un cycle de Levy  $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ , alors  $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$ .

Ceci résulte du théorème suivant ([G]): si deux matrices carrées  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  vérifient  $b_{ij} \geq a_{ij} \geq 0$  pour tous  $i$  et  $j$ , alors  $\lambda(B) \geq \lambda(A)$ . Dans notre cas, on prend  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  avec  $a_{i,i+1} = 1$ ,  $0 \leq i < s$ ,  $a_{s1} = 1$  et  $a_{ij} = 0$  pour tous autres  $i$  et  $j$ , alors  $\lambda(A) = 1$  et  $f_{ij} \geq a_{ij}$  pour tous  $i$  et  $j$ , donc  $\lambda(F_\Gamma) \geq \lambda(A) = 1$ .

L'énoncé du théorème suivant est une version plus générale du théorème 4.1 de la thèse de Levy ([Le]), mais la démonstration est due Mary Rees et John H. Hubbard.

Théorème 2. Soit  $F$  un revêtement ramifié de degré  $d$  ayant seulement deux valeurs critiques et à ensemble postcritique  $P_F$  fini. Alors il existe une multicourbe  $F$ -invariante  $\Gamma$  avec  $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$  si et seulement s'il existe un cycle de Levy  $\hat{\Gamma}$  pour  $F$ .

Démonstration.  $\Leftarrow$ . Quitte à modifier  $F$  dans sa classe de Thurston, on peut supposer le cycle de Levy invariant. Alors les composantes des

$F^{-n}(\gamma)$ ,  $\gamma \in \hat{\Gamma}$  sont disjointes. Elles forment donc un nombre fini de classes d'homotopie dans  $S^2 - P_F$ . Les classes qui sont non périphériques forment une multicourbe  $F$ -invariante  $\Gamma$  contenant  $\hat{\Gamma}$ . On a donc  $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$  par la propriété 2.3.

$\Rightarrow$ . Quitte à se restreindre à une sous-multicourbe  $F$ -invariante on peut supposer que la multicourbe  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  avec  $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$  dans l'hypothèse du théorème est minimale, c'est-à-dire qu'elle vérifie que chaque  $\gamma \in \Gamma$  figure dans  $F^{-1}(\gamma')$  pour une certaine  $\gamma' \in \Gamma$ .

Pour  $\Gamma'$  une sous multicourbe de  $\Gamma$ , on note  $F^{-1}\Gamma'$  l'ensemble des courbes de  $\Gamma$  représentant les classes d'isotopie (rel  $P_F$ ) des composantes connexes de  $\bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} F^{-1}(\gamma')$ . Ainsi, dire que  $\Gamma$  est minimale est équivalent à dire  $F^{-1}\Gamma = \Gamma$ .

Posons  $A = F_\Gamma$ , et notons  $\mathfrak{K}$  l'espace linéaire à base  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Pour  $\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \dots + a_n\gamma_n \in \mathfrak{K}$ , on définit

$$\|\gamma\| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Décomposons  $\Gamma$  en  $\Gamma' \cup \Gamma''$  avec

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \mid \|A^n \gamma\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}.$$

On a les propriétés suivantes:

1)  $F^{-1}\Gamma' \subset \Gamma'$  donc  $\Gamma'' \subset F^{-1}\Gamma''$ .

Preuve. Soit  $\gamma \in \Gamma'$ . On a  $A\gamma = a_{j_1}\gamma_{j_1} + a_{j_2}\gamma_{j_2} + \dots + a_{j_m}\gamma_{j_m}$  avec  $a_{j_i} > 0$ ,

$1 \leq i \leq m$ . Alors  $F^{-1}\{\gamma\} = \{\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \dots, \gamma_{j_m}\}$ , et  $\|A^{n+1}\gamma\| \geq a_{j_i} \|A^n \gamma_{j_i}\|$  pour tout  $i$ . D'où le résultat.

2)  $\Gamma'' \neq \emptyset$  (car  $\lambda(F_{\Gamma'}) < 1$ ).

3)  $\forall \gamma \in \Gamma''$ , on a  $F^{-1}\{\gamma\} \cap \Gamma'' \neq \emptyset$  (sinon  $F^{-1}\{\gamma\} \subset \Gamma'$  et puis  $\gamma \in \Gamma'$ ).

**Définition.** Une courbe  $\gamma \in S^2 - P_F$  non périphérique est dite séparante si les deux valeurs critiques se trouvent dans les différentes composantes de  $S^2 - \gamma$ .

Si  $\Gamma''$  ne contient pas de courbe séparante, on peut extraire un cycle de Levy dans  $\Gamma''$  de la façon suivante: on commence par une courbe  $\beta_0 = \gamma_i \in \Gamma''$ , on prend  $\beta_1$  une courbe dans  $\Gamma''$  telle que  $\beta_0 \in F^{-1}(\beta_1)$ , et  $\beta_2$  une courbe de  $\Gamma''$  telle que  $\beta_1 \in F^{-1}(\beta_2)$ , et ainsi de suite. Les  $\beta_i$  existent car par la propriété 1) l'on a  $\Gamma'' \subset F^{-1}\Gamma''$ . Comme  $\Gamma''$  ne contient qu'un nombre fini de courbes, on aura  $\beta_{i+p} = \beta_i$  pour certains  $i$  et  $p$ , et l'ensemble  $\hat{\Gamma} = \{\beta_i, \dots, \beta_{i+p}\}$  forme un cycle de Levy.

Supposons maintenant qu'il existe des courbes séparantes dans  $\Gamma''$ . Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des composantes-disques de

$$S^2 - \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i.$$

4)  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ , et un disque  $D$  est dans  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $\partial D \subset \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i$  et  $D \cap \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i = \emptyset$ .

5) Si  $D \in \mathcal{D}$ , toutes les composantes de  $F^{-1}D$  sont des disques. Sinon  $D$  contient les deux valeurs critiques de  $F$  donc  $D$  contient aussi une courbe



séparante de  $\Gamma''$ , ce qui contredit la définition de  $D$ .

6) Soit  $D'$  une composante de  $F^{-1}D$ ,  $D \in \mathcal{D}$ , avec  $\partial D'$  isotope à  $\gamma_i \in \Gamma$ , alors la composante  $B$  de  $S^2 - \gamma_i$  isotope à  $D'$  ne contient pas de courbe de  $\Gamma''$ .

Preuve. Supposons qu'il existe  $\gamma \in \Gamma''$ ,  $\gamma \subset B$ . Par la propriété 1) il existe  $\delta \in \Gamma''$  telle que  $\gamma \in F^{-1}\{\delta\}$ . Comme  $B$  est isotope à  $D'$ , la courbe  $\gamma$  est isotope à une courbe non périphérique dans  $D'$ . D'autre part, comme  $\delta \cap D = \emptyset$ , on a  $F^{-1}\{\delta\} \cap D' = \emptyset$ , c'est-à-dire que  $\gamma$  est aussi isotope à une courbe non périphérique dans  $S^2 - D'$ . Impossible.

7) Par 5) et 6), pour  $D \in \mathcal{D}$  et  $\gamma = F^{-1}(D)$ , chaque élément de  $F^{-1}\{\gamma\}$  est une courbe qui entoure un disque isotope à une composante de  $F^{-1}D$  et ne contenant pas de courbe de  $\Gamma''$ .

8) Par 3) et 7), si  $D \in \mathcal{D}$ , il existe au moins une composante  $D'$  de  $F^{-1}D$  homotope à un disque  $B$  avec  $\partial B \in \Gamma''$ , et  $B \cap \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i = \emptyset$ , et par 4),  $B \in \mathcal{D}$ .

9) Si  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ ,  $D_1 \neq D_2$ , alors  $F^{-1}D_1 \cap F^{-1}D_2 = \emptyset$ . Et pour toute composante  $D'_1$  de  $F^{-1}D_1$  et toute composante  $D'_2$  de  $F^{-1}D_2$ , si  $\partial D'_1$  et  $\partial D'_2$  sont isotopes à  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2} \in \Gamma$  respectivement, alors la composante  $B_1$  de  $S^2 - \gamma_{i_1}$  qui est isotope à  $D'_1$  et la composante  $B_2$  de  $S^2 - \gamma_{i_2}$  qui est isotope à  $D'_2$  sont disjointes, car sinon  $P_F \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  et ensuite  $P_F \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , absurde.

10) Par 8) et 9), il existe une application injective multivaluée  $\tau: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  donné par les images de  $D \in \mathcal{D}$  sont les éléments de  $\mathcal{D}$  qui sont isotopes à

une composante de  $F^{-1}D$ . Comme  $\mathcal{D}$  est fini, l'application  $\tau$  est en effet bijective.

11) Posons  $\Delta = \{\partial D \mid D \in \mathcal{D}\}$ . Si on définit  $\tau(\partial D) = \partial(\tau D)$ , alors  $\tau : \Delta \rightarrow \Delta$  est aussi une bijection, et par 7), l'ensemble  $F^{-1}\{\delta\}$  ( $\delta \in \Delta$ ) a exactement un élément dans  $\Gamma''$ . On peut donc extraire un cycle de courbes  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$  dans  $\Gamma''$  périodiques pour  $\tau$  donc périodiques pour  $F^{-1}$  (i.e.  $\tau(\delta_i) = \delta_{i+1}$ , et  $\tau(\delta_{p-1}) = \delta_0$ ). Notons  $k_i$  le degré de  $F: \delta'_i \rightarrow \delta_i$ , où  $\delta'_i$  est la composante de  $F^{-1}(\delta_i)$  isotopie à  $\delta_{i+1}$ . On a

$$A\delta_i = (1/k_i)\delta_{i+1} + \sum_{\gamma \in \Gamma', x_i(\gamma)} \gamma, \quad \forall i.$$

En particulier,

$$A^2\delta_0 = (1/k_0)A\delta_1 + \sum_{\gamma \in \Gamma', x_0(\gamma)} A\gamma = (1/k_0k_1)\delta_2 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y_2(\gamma)} \gamma, \dots,$$

$$A^p\delta_0 = (1/k)\delta_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)} \gamma, \quad \text{où } k = k_0k_1 \dots k_{p-1}.$$

Donc

$$A^{np}\delta_0 = (1/k^n)\delta_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)} (\gamma/k^{n-1} + A^p\gamma/k^{n-2} + \dots + A^{(n-1)p}\gamma).$$

Comme  $\lambda(F_{\Gamma'}) < 1$ , il existe  $\mu < 1$  et  $C > 0$  tels que  $\|A^p\gamma\| \leq C\mu^i$  pour tout  $\gamma \in \Gamma'$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|A^{np}\delta_0\| &\leq (1/k^n)\|\delta_0\| + C\left(\sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)}\right) (1/k^{n-1} + \mu/k^{n-2} + \dots + \mu^{n-1}) \\ &= (1/k^n)\|\delta_0\| + C\left(\sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)}\right) ((1 - \mu^n k^n) / k^{n-1}(1 - \mu k)). \end{aligned}$$

Si  $k > 1$ , alors  $\|A^{np}\delta_0\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Mais cela contredit l'hypothèse  $\delta_0 \in \Gamma''$ , on en déduit donc  $k=1$ , i.e.  $k_0 = k_1 = \dots = k_{p-1} = 1$ . Autrement dit,  $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\}$  est un cycle de Levy.

Caqd.



## Chapitre 3. Arguments externes des points fixes et des points périodiques dans l'ensemble de Julia

### 3.1. Ensembles de Julia

Soit  $f = f_c : z \rightarrow z^d + c$  à ensemble postcritique fini.

Rappelons que  $K_c$  est connexe et localement connexe. Comme  $f_c$  est monique, il existe une unique représentation conforme

$$\Phi : \mathbb{C} - K_c \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} - \bar{D}$$

tangente à l'identité en  $\infty$  conjuguant  $f_c$  à  $z \rightarrow z^d$  ( Proposition 1.1 ), et pour tout  $\theta \in \mathbb{T}$  un point d'aboutissement  $\gamma(\theta)$  du rayon externe  $R_c(\theta)$  avec  $f_c(\gamma(\theta)) = \gamma(d\theta)$  ( chapitre 1 ). Pour  $z \in \partial K_c = J_c$ , l'ensemble  $\text{Arg}(z)$  est l'ensemble des arguments externes de  $z$ .

Il existe un algorithme simple pour calculer  $d\theta$  à partir de  $\theta$  : développons  $\theta$  en base  $d$  :

$$\theta = 0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$$

alors

$$d\theta = 0, s_2 s_3 \dots s_{n+1} \dots ,$$

qui est un shift à droite du développement de  $\theta$ . Pour  $\theta, \eta$  deux arguments vérifiant  $\eta < \theta$ , il existe un entier  $k$  et un  $\delta$  de la forme  $i/d$  tels que  $d^{k-1}\eta < \delta < d^{k-1}\theta$  : soient

$$\theta = 0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$$

$$\eta = 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots ,$$

alors  $\exists k$  minimal tel que  $s_{k+1} > t_{k+1}$ , donc pour  $\delta = 0, s_{k+1} 00 \dots$  qui est en fait  $s_{k+1}/d$ , on a  $d^k \eta < \delta < d^k \theta$ . Notons

$$B = \{z \in J_c \mid \exists \theta, \theta' \in \text{Arg}(z), \exists i, \text{ tels que } 0 \leq \theta \leq i/d \leq \theta' \leq 1\}.$$

**Remarque 3.1.** Pour tout point  $z \in J_c$  avec  $\# \text{Arg}(z) \geq 2$ , il existe  $k$  tel que  $f^k(z) \in B$ .

Soient  $x, y \in J_c$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Arg}(x)$ , et  $\eta_1, \eta_2 \in \text{Arg}(y)$ . Les ensembles

$$R(\theta_1) \cup \{x\} \cup R(\theta_2) \quad \text{et} \quad R(\eta_1) \cup \{y\} \cup R(\eta_2)$$

ne se rencontrent pas sauf si  $x=y$ . En terme des arguments externes, si  $x \neq y$ , alors  $\text{Arg}(x)$  est contenu dans un intervalle de  $\mathbb{T}$  limité par deux arguments consécutifs de  $y$ .

Notons  $\beta = \gamma(0)$ , c'est un pont fixe, et  $\beta_i = \gamma(i/d)$ ,  $i=0, 1, \dots, d-1$ . Evidemment  $f_c(\beta_i) = \beta$ . En effet les  $\beta_i$  sont deux à deux distincts du fait que  $\beta \neq c$  (sinon  $f_c^{-1}(c) = 0$  est aussi un point fixe, i.e.  $c=0$ , mais dans ce cas là  $K_c = \bar{D}$  et  $\beta = 1 \neq 0$ ), donc  $f_c^{-1}(\beta) = \{\beta_i\}$ .

Rappelons que pour  $z \in K_c$ , on appelle orbite de  $z$  l'ensemble

$$\text{Or}(z) = \{f^n(z) \mid n \geq 0\};$$

et pour  $\theta \in \mathbb{T}$  on appelle orbite de  $\theta$  l'ensemble

$$\text{Or}(\theta) = \{d^n \theta \mid n \geq 0\}.$$

Si  $z$  (resp.  $\theta$ ) est prépériodique pour  $f_c$  (resp. pour  $\tilde{d}$  la multiplication par  $d$ ), l'ensemble  $Or(z)$  (resp.  $Or(\theta)$ ) est fini. On pose  $Arg(X)$  la réunion de  $Arg(x)$  pour  $x \in X$ .

Dans [DH2], Douady et Hubbard ont construit un objet combinatoire pour chaque polynôme  $f_c$  : l'arbre de Hubbard  $H_c$ . On rappelle ici les définitions et quelques résultats essentiels.

Si  $0$  est strictement prépériodique,  $\tilde{K}_c = \emptyset$ ; si  $0$  est périodique,  $\tilde{K}_c \neq \emptyset$ , chaque composante connexe  $U$  de  $\tilde{K}_c$  contient un unique point  $x_U$  tombant en un temps fini par  $f_c$  dans le cycle de  $0$ . Le point  $x_U$  détermine à multiplication par un nombre complexe de module 1 près un homéomorphisme

$$\psi_U : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$$

induisant un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -analytique de  $U$  sur  $D$  et vérifiant  $\psi_U(x_U) = 0$ . Nous appelons arc réglementaire tout arc  $\ell_c \subset K_c$  ayant la propriété que pour toute composante  $U$  de  $\tilde{K}_c$ ,  $\psi_U(\ell_c \cap \bar{U})$  est contenu dans la réunion de deux rayons de  $\bar{D}$ . Pour  $x, y$  deux points quelconques de  $K_c$ , il existe un unique arc réglementaire  $\gamma$  de  $x$  à  $y$ . Nous appelons arbre de Hubbard de  $f_c$  l'enveloppe réglementairement convexe  $H_c$  de l'ensemble postcritique  $P_c$ , et arbre de Hubbard augmenté  $\hat{H}_c$  l'enveloppe réglementaire de  $P_c \cup \bigcup_i \{\beta_i\}$ . Ces enveloppes sont des arbres topologiques finis.

On a les propriétés suivantes:

1) ([DH2], IV). Notons  $(H_\sigma)$  (resp.  $(\hat{H}_\sigma)$ ) les fermetures des composantes connexes de  $H_c - \{0\}$  (resp. de  $\hat{H}_c - \{0\}$ ), alors  $f_c$  induit

une application continue de  $H_c$  (resp. de  $\hat{H}_c$ ) dans lui-même, dont la restriction à chacun des  $H_\sigma$  (resp.  $\hat{H}_\sigma$ ) est injective.

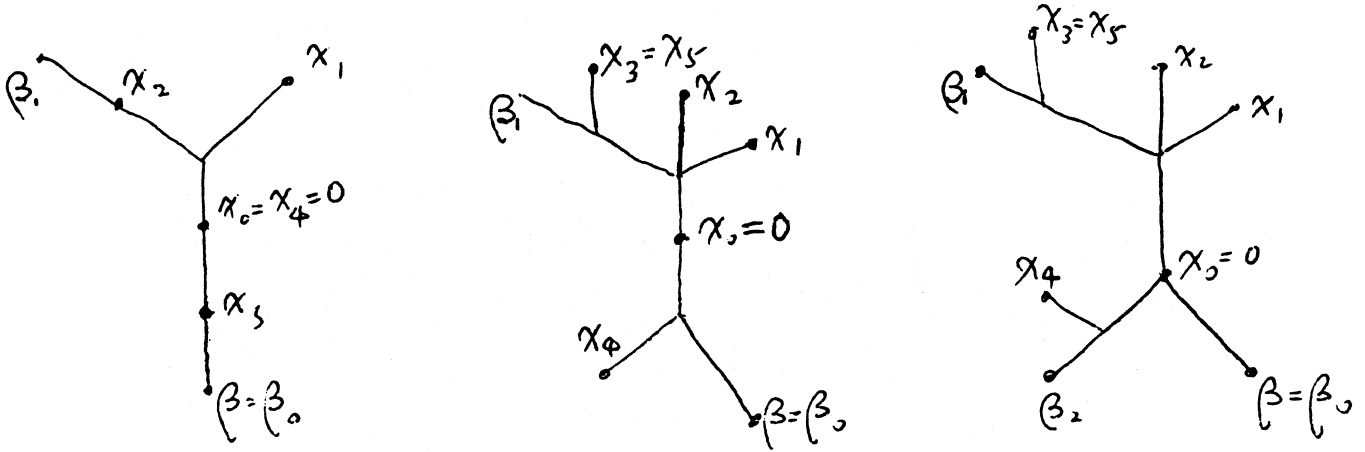


Figure 3.1. Exemples d'arbres de Hubbard

2) La valeur critique  $c$  est une extrémité de  $\hat{H}_c$  ([DH2], IV).

3) Supposons  $0$  périodique de période  $p$  pour  $f=f_c$ . Alors  $0 \in \hat{K}_c$ . Pour  $i=0, 1, 2, \dots, p-1$ , on note  $U_i$  la composante de  $\hat{K}_c$  contenant  $f^i(0)$ . En particulier,  $0 \in U_0$ ,  $c \in U_1$ .

(3.1). Il existe dans  $(\partial U_1)$   $d-1$  points  $\tau_0, \dots, \tau_{d-2}$  de période divisant  $p$ , parmi lesquels un seul est dans  $\partial U_1 \cap H_c$  qu'on note  $\tau_0$ . Preuve: Par [DH2], IV,  $f^p : U_1 \rightarrow U_1$  est conjugué à  $z \rightarrow z^d$ , d'où l'existence de  $\tau_0$ . Par 2),  $\tau_0$  est unique.

(3.2). Le point  $\tau_0$  a au moins deux arguments externes (par (3.1)), et les  $\tau_1, \dots, \tau_{d-2}$  ont un seul argument externe ([DH2], VII).

(3.3). Soient  $\theta_0, \theta_{d-1}$  les deux arguments externes de  $\tau_0$  adjacents à  $U_1$ , et  $\theta_i$  l'argument externe de  $\tau_i$ ; on peut numérotter les  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$  de façon que (Figure 3.2) :

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1.$$

Preuve. Par 2), l'argument 0 n'est pas dans l'intervalle  $[\theta_0, \theta_{d-1}]$ .

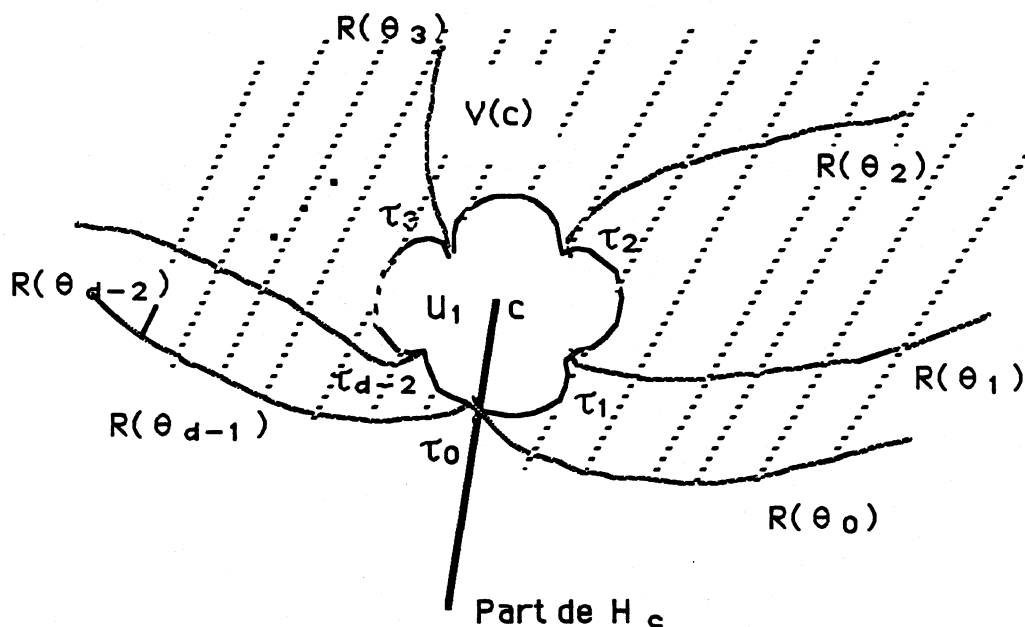


Figure 3.2.  $\bar{U}_1$

(3.4). On appelle  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \theta_{d-1}$  les arguments associés à  $f_c$ . Ils sont périodiques de période  $p$  (la période de  $c$ ) pour la multiplication par  $d$  ([DH2], VII).

(3.5).  $0 \in [\beta, c]$ . Preuve. Prenons  $y \in \partial U_1 - \{\tau_0\}$  et  $\eta$  un argument externe de  $y$ , les points d'aboutissement  $y', y''$  de  $R(\eta/d)$  et  $R(\eta/d + (d-1)/d)$  sont des images réciproques de  $y$ , ils appartiennent à  $\partial U_0 - \hat{H}_c$ . Comme

$$\eta/d < \eta < \eta/d + (d-1)/d,$$

les courbes  $R(\eta) \cup [y, \beta] \cup R(0)$  et  $R(\eta/d) \cup [y', y''] \cup R(\eta/d + (d-1)/d)$  se croisent nécessairement à cause de la disposition de leurs asymptotes, et ne peuvent se rencontrer qu'en 0, d'où  $0 \in [\beta, y]$ , et  $0 \in [\beta, c]$ .



(3.6). Prenons  $\ell_c = f^{-1}([\beta, c])$ . Alors  $\ell_c = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, \beta_i]$  (où  $\{\beta_i\} = f^{-1}(\beta)$ ),  $[0, \beta_i] \cap [0, \beta_j] = \{0\}$  (si  $i \neq j$ ), et  $\ell_c$  est l'enveloppe réglémentaire de  $\bigcup_i \beta_i$  et  $\ell_c \cap J_c = B$ . Preuve. L'ensemble  $\ell_c$  est un revêtement de degré  $d$  de  $[\beta, c]$  ramifié au dessus de  $0$ , ayant comme extrémités  $\{\beta_i\}$ ,  $0 \leq i \leq d-1$ , et  $f_c : [0, \beta_i] \rightarrow [c, \beta]$  est un homéomorphisme, d'où  $\ell_c = \bigcup [0, \beta_i]$ . Comme  $\text{Arg}(\beta_i) = \{i/d\}$ , par la définition de  $B$ , un point  $z$  appartient à  $B$  si et seulement si

$$z \in (\bigcup [0, \beta_i]) \cap J_c = \ell_c \cap J_c.$$

(3.7). On note  $\{v_0, v_1, \dots, v_{d-1}\}$  les images inverses de  $\tau_0$  par  $f_c$ .

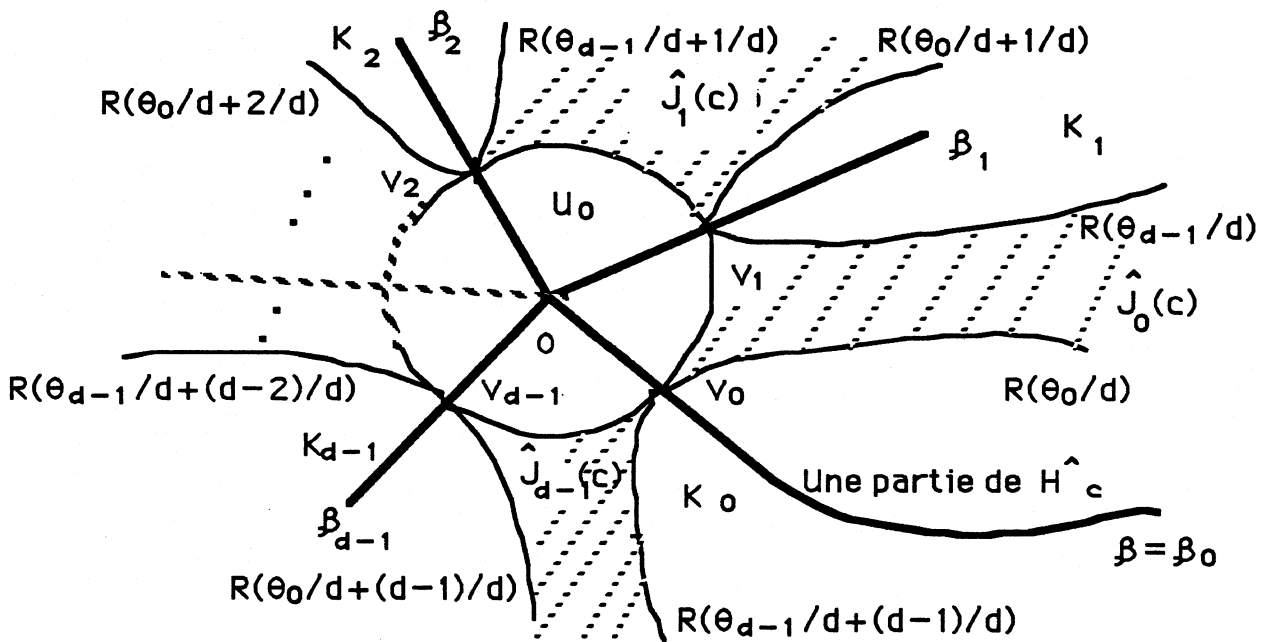


Figure 3.3.  $\bar{U}_0$

(3.8).  $\{v_i\} \subset \partial U_0 \cap H_c$  et quitte à renuméroter, on peut supposer  $v_i \in [0, \beta_i]$ ,  $i=0, 1, \dots, d-1$ . Preuve.  $\tau_0 \in \partial U_1 \cap H_c$ , donc  $\{v_i\} \subset \partial U_0 \cap H_c$ .

De plus  $\tau_0 \in [c, \beta]$ , par 3.6,  $\{V_i\} \subset \mathcal{L}_c \subset \hat{H}_c$ , et chaque  $[0, \beta_i]$  contient exactement un point des  $V_0, V_1, \dots, V_{d-1}$ .

$$(3.9). \quad \gamma(\theta_{d-1}/d + (i-1)/d) = \gamma(\theta_0/d + i/d) = V_i.$$

Preuve. Pour tout  $i$ , les deux arguments externes  $\xi_i, \eta_i$  de  $V_i$  adjacents à  $[V_i, 0]$  vérifient  $(i-1)/d < \xi_i < i/d < \eta_i < (i+1)/d$ , et leurs images par  $f_c$  sont  $\theta_0, \theta_{d-1}$  (les deux arguments externes de  $\tau_0$  adjacents à  $[\tau_0, c]$ ). En comptant le tour sur  $\partial U_0$  (Figure 3.3) on obtient le résultat.

4) Supposons que  $0$  est strictement prépériodique pour  $f_c$ , alors  $\hat{K}_c = \emptyset$ ,  $c \in \partial K_c$  et  $\text{Arg}(c)$  est fini non vide (proposition 1.3).

(4.1). On appelle les arguments externes de  $c$  arguments associés à  $f_c$ .

$$(4.2). \quad \text{Soit } \text{Arg}(c) = \{\theta_j\}; \text{ on a } \text{Arg}(0) = \bigcup_j \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} \{(\theta_j + i)/d\}.$$

(4.3).  $0 \in [\beta, c]$ . Preuve. Comme  $R(\theta_j/d)$  et  $R(\theta_j/d + (d-1)/d)$  aboutissent en  $0$ , et

$$\theta_j/d < \theta_j < \theta_j/d + (d-1)/d,$$

les courbes  $R(0) \cup [\beta, c] \cup R(\theta_j)$  et  $\bar{R}(\theta_j/d) \cup \bar{R}(\theta_j/d + (d-1)/d)$  sont obligées de se couper à cause de la disposition des asymptotes, et elles ne peuvent se couper qu'en  $0$ , d'où le résultat.

(4.4). Comme dans (3.6), pour  $\mathcal{L}_c$  l'enveloppe réglementaire de  $\{\beta_i\}$ , on a

$$\mathcal{L}_c = f^{-1}([\beta, c]) = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, \beta_i]$$

avec  $[0, \beta_i] \cap [0, \beta_j] = \{0\}$  (si  $i \neq j$ ) et  $\mathcal{L}_c \cap \partial K_c = B$ .

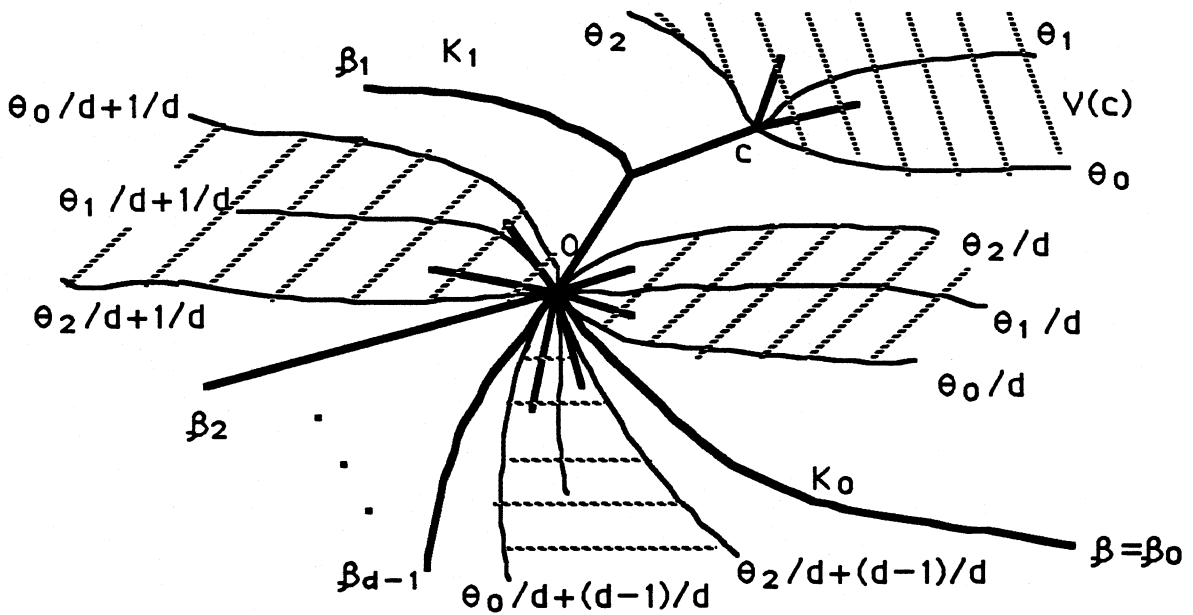


Figure 3.4. Une partie de  $\hat{H}_c$  pour  $c$  tel que  $\hat{K}_c = \emptyset$ .

Notation. Pour simplifier, quoique  $0$  soit périodique ou prépériodique pour  $f_c$ , on note  $\theta, \tilde{\theta}$  le plus petit et le plus grand argument associé à  $f_c$ .

5) Pour tout  $i$ , le point  $\beta_i$  n'a pas d'autre argument externe que  $i/d$ , et par conséquent  $\beta_i$  est une extrémité de  $\hat{H}_c$ . Preuve. Comme  $f_c \beta_i \rightarrow \beta$  est un homéomorphisme local, il suffit de montrer que  $\beta$  n'a que l'argument externe  $0$ . Soit  $t \neq 0$  un autre argument de  $\beta$ . Alors pour tout  $n$ , l'argument  $d^n t$  est aussi un argument externe de  $\beta$ , et

$$0 < d^n t < \theta/d \quad \text{ou} \quad \tilde{\theta}/d + (d-1)/d < d^n t < 1$$

(3) et 4)). Supposons  $0 < t < \theta/d$ . Il existe  $k$  tel que pour  $n \leq k$

$$0 < d^n t < \theta/d,$$

mais  $\tilde{\theta}/d + (d-1)/d < d^{k+1}t < 1$ . Posons  $s = d^k t$ , on a donc  $0 < s < \theta/d$ , mais  $ds > \tilde{\theta}/d + (d-1)/d$  entraîne

$$s > \tilde{\theta}/d^2 + (d-1)/d^2 > \theta/d,$$

absurde.

6) On note  $V(c)$  la région de  $\mathbb{C}$  limité par  $R(\theta)$ ,  $R(\tilde{\theta})$  et  $\partial U_1$  (si ceci existe) ne contenant pas 0, et on pose (Figures 3.2 et 3.4)

$$I_i(c) = [\tilde{\theta}/d + (i-1)/d, \theta/d + i/d], J_i(c) = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset I_i(c)\}$$

$$\hat{I}_i(c) = ]\theta/d + i/d, \tilde{\theta}/d + i/d[, \hat{J}_i(c) = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset \hat{I}_i(c)\}$$

$i = 0, 1, \dots, d-1$ .

(6.1). Par 3) et 4), et les figures 3.3, 3.4, si un argument externe d'un point  $z \in K_c$ ,  $z \neq 0$  est dans  $I_i(c)$  (resp.  $\hat{I}_i(c)$ ), alors tout argument externe de  $z$  est dans le même intervalle.

(6.2). Par 2),

$$V(c) \cap (H_c \cap \partial K_c) = \emptyset, \text{ donc}$$

$$\hat{J}_i(c) \cap H_c = f^{-1}(V(c) \cap \partial K_c) \cap H_c = \emptyset,$$

en terme des arguments externes:  $\text{Arg}(H_c \cap \partial K_c) \cap \hat{I}_i(c) = \emptyset$ .

(6.3). Soit  $z \in J_c$ ; si  $z \in V(c)$ , l'ensemble  $f^{-1}(z)$  a  $d$  points et chaque  $\hat{J}_i(c)$  en contient un; si  $z \in \mathbb{C} - \bar{V}(c)$ , l'ensemble  $f^{-1}(z)$  a  $d$  points et chaque  $J_i(c)$  en contient un.

(6.4). Par (6.3), pour  $\tilde{d} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} : \theta \rightarrow d\theta$  et  $z \in J_c$  avec  $\theta, \theta'$  deux arguments externes distincts de  $z$ , l'ensemble  $\tilde{d}^{-1}(\{\theta, \theta'\})$  a  $2d$  éléments regroupés en  $d$  classes, chaque classe est constituée de deux arguments externes consécutifs de  $z$ , et ces deux arguments sont tous les deux dans  $\text{Arg}(x)$  pour un certain  $x \in f^{-1}(z)$ .

7) Notons  $\theta(c)$ ,  $\tilde{\theta}(c)$  le plus petit et le plus grand argument associé à  $f_c$  et  $m(c)=[\theta(c), \tilde{\theta}(c)]$ . Si  $c \neq c'$ , alors soit  $m(c) \cap m(c') = \emptyset$  soit l'un des  $m(c)$ ,  $m(c')$  est contenu dans l'intérieur de l'autre. Si  $m(c') \subset \overset{\circ}{m}(c)$ , alors  $m(c')$  est contenu dans l'intervalle ouvert limité par deux arguments consécutifs associés à  $f_c$ , par suite  $I_i(c) \subset I_i(c')$  et  $\hat{I}_i(c') \subset \hat{I}_i(c)$ .

8) Soit  $\{\theta_j\}$  l'ensemble des arguments associés à  $f_c$ . Il existe  $i(c) \in \{1, 2, \dots, d-1\}$  tel que pour tout  $j$

$$(i(c)-1)/(d-1) < \theta_j < i(c)/(d-1).$$

On montrera ce résultat dans le chapitre 4.

9) Pour  $c \neq 0$ , et  $P_c$  fini, le polynôme  $f_c$  a  $d$  points fixes distincts. Parmi ces points fixes il existe  $d-1$  qui ont un argument externe de la forme  $i/(d-1)$ , ils sont notés par

$$\varepsilon_i = \gamma(i/(d-1)), \quad i=0, 1, \dots, d-2,$$

et l'autre point fixe, noté  $\alpha_c$ , admet plus d'un argument externe et  $\alpha_c \in [c, \beta] \cap B$ . Preuve. Le fait que chaque  $\varepsilon_i$  a un seul argument externe est parce que le point  $\varepsilon_0 = \beta$  n'en a qu'un (5)). Quant à  $\alpha_c$ , on montre d'abord  $\alpha_c \in J_c = \partial K_c$ : pour 0 strictement prépériodique,  $\alpha_c \in K_c = \partial K_c$ ; pour 0 périodique et  $c \neq 0$ , le point  $\alpha_c$  se situe également au bord de  $K_c$  car sinon il doit être attiré par le cycle attractif de 0 dont la période est supérieure à 1. Ainsi  $\text{Arg}(\alpha_c)$  est non vide et  $\#\text{Arg}(\alpha_c) \geq 2$  (sinon  $\alpha_c$  serait l'un des  $\varepsilon_i$ ). Pour tout  $\theta \in \text{Arg}(\alpha_c)$ , on a  $d\theta \in \text{Arg}(\alpha_c)$  et  $\theta \neq d\theta$ . Par la remarque 3.1, on a  $\{\alpha_c\} = \text{Or}(\alpha_c) \cap B \neq \emptyset$ , d'où  $\alpha_c \in B \subset \ell_c$ . Mais  $f(\ell_c) = [c, \beta]$ , et  $f_c(\alpha_c) = \alpha_c$ , on a  $\alpha_c \in [c, \beta]$ .

10) Soient  $\{\theta_j\}$  et  $i(c)$  comme dans 8). Pour  $0$  périodique, notons  $K'$  l'adhérence de la composante de  $K_c - \{\tau_0\}$  contenant  $0$ , et  $K_i$  l'adhérence de la composante de  $K_c - \{v_i\}$  contenant  $J_i(c)$ ,  $i=0, 1, \dots, d-1$ ; pour  $0$  strictement prépériodique, notons  $K'$  l'adhérence de la composante de  $K_c - \{c\}$  contenant  $0$ , et  $K_i$  l'adhérence de la composante de  $K_c - \{0\}$  contenant  $J_i(c)$ ,  $i=0, 1, \dots, d-1$ .

Alors dans tous les cas chaque  $K_i$  sauf  $i=i(c)$  contient un des  $\varepsilon_j$ , et  $K_{i(c)}$  contient  $\alpha_c$ , de plus,  $c \in K_{i(c)}$ .

Preuve. On remarque d'abord par 8) et pour  $k=i(c)$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &> (k-1)/(d-1) \text{ donc } \tilde{\theta} > \tilde{\theta}/d + (k-1)/d \\ \theta &< k/(d-1) \text{ donc } \theta < \theta/d + k/d,\end{aligned}$$

mais par 3) et 4) les points

$$\chi(\theta) = \chi(\tilde{\theta}) \text{ et } \chi(\tilde{\theta}/d + (k-1)/d) = \chi(\theta/d + k/d)$$

sont distincts, donc pour tout  $j$

$$(k-1)/(d-1) < \tilde{\theta}/d + (k-1)/d < \theta_j < \theta/d + k/d < k/(d-1),$$

et par suite  $c \in K_{i(c)}$  et pour tout  $j$ , on a  $\varepsilon_j = \chi(j/d-1) \in K_{i(c)}$ . Par conséquent  $K-K' \subset K_{i(c)}$ , et  $K_i \subset K'$  pour  $i \neq i(c)$ . Chaque  $K_i$  est connexe et contractile, et

$$f_c : K_i \longrightarrow K'$$

est un homéomorphisme, donc par le théorème de Lefschetz il existe au

moins un point fixe de  $f_c$  dans  $K_i$ ,  $i \neq i(c)$ . Quant à  $K_{i(c)}$ , posons  $H_{i(c)} = H_c \cap K_{i(c)} \cap K'$  qui est connexe et contractile, alors  $f_c$  induit une application injective de  $H_{i(c)}$  à  $H_c$ . Soit  $\pi : H_c \rightarrow H_c$  l'application vérifiant  $\pi|_{H_{i(c)}} = \text{identité}$  et  $\pi(H_c - H_{i(c)}) = \{0\}$ , alors l'application  $\pi \circ f_c|_{H_{i(c)}}$  admet un point fixe, et ce point n'est pas 0, il est donc un point fixe de  $f_c$ . Dans le cas où 0 est périodique, les  $K_i$  sont disjoints, et dans le cas où 0 est strictement prépériodique, l'unique point dans  $\bigcap_i K_i$  est 0 qui est non périodique donc non fixe. Donc les points fixes dans  $K_i$  et ceux dans  $K_{i'}$  sont distincts lorsque  $i \neq i'$ . Comme  $f_c$  n'a que  $d$  points fixes, chaque  $K_i$  en contient exactement un. Comme aucun des  $\varepsilon_j$  n'est dans  $K_{i(c)}$ , on a  $\alpha_c \in K_{i(c)}$ . Par conséquent, chaque  $K_i$  pour  $i \neq i(c)$  contient un des  $\varepsilon_j$ .

Comme  $1 \leq i(c) \leq d-1$ ,  $c \notin K_0$ .

11) ([DH2], VII). Pour  $\mathcal{L}_c$  l'enveloppe réglementaire de  $\{\beta_i\}$  défini dans 3) et 4), l'ensemble  $\mathcal{L}_c \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} R_c(i/d)$  divise le plan en  $d$  parties, on note  $C_i$  l'adhérence de la composante de  $\mathbb{C} - \mathcal{L}_c \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} R_c(i/d)$  qui contient  $R_c(\theta)$  pour  $i/d \leq \theta \leq (i+1)/d$ . Il existe un algorithme pour calculer le développement en base  $d$  d'un argument externe  $\theta$  d'un point  $z \in \partial K_c$  :  $\theta = 0, s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots$ , avec  $s_n = i$  si  $R_c(d^n \theta) \subset C_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Précaution: le développement de  $i/d$  est soit  $0, (i-1)(d-1)(d-1) \dots$  soit  $0, i00 \dots$ ).

12) ([Ta]). Posons  $PJ_c = \{z \in J_c \mid z \text{ périodique et } \# \text{Arg}(z) \geq 2\}$ . Par exemple,  $\alpha_c \in PJ_c$ ; si 0 est périodique, le point  $\tau_0$  défini dans 3) est dans  $PJ_c$ .

Dans  $K_c$  (resp. dans  $\mathbb{T}$ ), il existe des sous-ensembles qui ne

contiennent aucun point de  $PJ_c$  (resp. de  $\text{Arg}(PJ_c)$ ), ce sont les régions interdites (resp. zones interdites); il existe aussi des sous-ensembles  $X$  (resp.  $I$ ) tel que pour tout  $z \in PJ_c$ ,  $Or(z) \cap X \neq \emptyset$  (resp. pour tout  $\theta \in \text{Arg}(PJ_c)$ ,  $Or(\theta) \cap I \neq \emptyset$ ), ce sont les régions obligatoires (resp. zones obligatoires).

En particulier,  $PJ_c \subset H_c$ ; et les ensembles  $\ell_c$ ,  $[\alpha_c, c]$ ,  $f^{-1}([\alpha_c, c])$  sont obligatoires,  $V(c) \cap K_c$  et  $\hat{J}_i(c)$  ( $V(c)$  et  $\hat{J}_i(c)$  sont définies dans 6)) sont interdites et  $\hat{m}(c)$ ,  $\hat{I}_i(c)$  (elles sont définies dans 6) et 7)) sont des zones interdites.

Preuve. Pour tout  $z \in PJ_c$ , on a  $Or(z) \cap B \neq \emptyset$ , et  $B \subset \ell_c \subset \hat{H}_c$ , donc  $B$ ,  $\ell_c$ ,  $\hat{H}_c$  sont obligatoires. De plus, comme  $f(\hat{H}_c) \subset \hat{H}_c$  et  $z$  périodique, on a  $z \in \hat{H}_c$  et par suite  $PJ_c \subset \hat{H}_c$ . Comme

$$f(\ell_c) = [c, \beta] = [c, \alpha_c] \cup [\alpha_c, \beta]$$

( $\alpha_c \in [c, \beta]$  par 9)), et il existe  $x_n \in [\alpha_c, \beta]$ ,  $x_n \rightarrow \beta$  tels que  $f^n(x_n) = \alpha_c$  et  $x_{n+1} \in [x_n, \beta]$ , pour tout  $x \in [\alpha_c, \beta]$ ,  $x \in [x_n, x_{n+1}]$ , on a

$$f^n(x) \in [x_0, x_1] = [\alpha_c, x_1] \text{ et } f^{n+1}(x) \in [\alpha_c, c],$$

ceci entraîne que  $[\alpha_c, c]$  et donc  $f^{-1}[\alpha_c, c]$  sont obligatoires. De plus, comme  $[\alpha_c, c] \subset H_c$  et  $f(H_c) \subset H_c$ , l'arbre de Hubbard  $H_c$  est non seulement obligatoire mais  $PJ_c \subset H_c$ . Comme  $H_c \cap (V(c) \cup \hat{J}_i(c)) = \emptyset$  (6)),  $V(c) \cap K_c$  et  $\hat{J}_i(c)$  sont des régions interdites et par suite  $\hat{m}(c)$  et  $\hat{I}_i(c)$  sont des zones interdites.

On définit une relation d'équivalence entre les arguments externes par  $\eta \sim_c \eta' \Leftrightarrow \gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')$ . Il existe un algorithme pour déterminer si  $\eta$  et  $\eta'$  sont équivalents:



**Lemme 3.2.** a)  $\eta \sim_c \eta'$  si et seulement si  $\forall n$ ,

$$\exists i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in I_i(c)$$

ou

$$\exists j \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in \hat{I}_j(c).$$

b) Si de plus  $\eta$  et  $\eta'$  sont périodiques par la multiplication par  $d$  (i.e. à dénominateur premier à  $d$ ) et  $\eta \neq \eta'$ , alors  $\eta \sim \eta'$  si et seulement si

$$\forall n, \exists i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in I_i(c).$$

La partie a) est démontrée dans le chapitre 8 de [W] en degré  $d=2$ , mais la démonstration s'étend en degré  $d$  quelconque pour les polynômes  $f_c : z \rightarrow z^d + c$ . La partie b) est une partie de 12) car sous notre hypothèse  $\eta, \eta' \in \text{Arg}(PJ_c)$ .

**Lemme 3.3.** Soient  $c, c' \in \mathbb{C}$  à  $P_c, P_{c'}$  finis avec

$$m(c') \subset \tilde{m}(c)$$

(où  $m(c)$  est défini dans 7)). Alors  $\forall z \in PJ_c$ , il existe un unique  $z' \in PJ_{c'}$  tel que  $\text{Arg}(z) \subset \text{Arg}(z')$ . En particulier,

$$\text{Arg}(\alpha_c) \subset \text{Arg}(\alpha_{c'}).$$

**Démonstration.** Par définition de  $I_i(c)$  et de  $I_i(c')$  dans 6), on voit que  $I_i(c) \subset I_i(c')$  pour tout  $i$ . Prenons  $\eta, \eta' \in \text{Arg}(z)$ , ils sont périodiques par hypothèse  $z \in PJ_c$ . D'après le lemme 3.2,

$\forall n, \exists i$ , tel que  $d^n(\eta), d^n(\eta') \in I_i(c) \subset I_i(c')$ .

Donc  $\eta \sim_{c'} \eta'$  par le même lemme. Posons  $z' = \gamma_{c'}(\eta)$ , on a

$$\text{Arg}(z) \subset \text{Arg}(z').$$

En particulier, pour  $\eta, d\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$ , qui vérifient automatiquement  $\eta \neq d\eta$ , on a  $\eta \sim_{c'} d\eta$ , i.e.  $\gamma_{c'}(\eta) = \gamma_{c'}(d\eta) = f_{c'}(\gamma_{c'}(\eta))$  (proposition 1.1). Le point  $\gamma_{c'}(\eta)$  est donc un point fixe de  $f_{c'}$  ayant plus d'un argument externe. Il est donc  $\alpha_{c'}$ .

Cafid.

Le corollaire du lemme suivant nous précise qu'en fait  $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z')$  sous la même condition.

Lemme 3.4. ( [La1], [La2], [Th] et [Ta] en degré 2 ). Soient  $c \in \mathbb{C}$  à  $P_c$  fini et  $z \in P_{J_c}$  de période  $q$ . Alors

- a) tout élément de  $\text{Arg}(z)$  est périodique d'une même période  $p$  par la multiplication par  $d$ , et  $p = kq$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  ;
- b) la ligne  $\gamma = R(\xi) \cup \{z\} \cup R(\xi')$  pour  $\xi, \xi' \in \text{Arg}(z)$  sépare  $P_c$ , i.e. chaque composante de  $\mathbb{C} - \gamma$  rencontre  $P_c$  ; En particulier, pour  $\eta, \eta' \in \text{Arg}(\alpha_c)$ ,  $R(\eta) \cup \{\alpha_c\} \cup R(\eta')$  sépare  $P_c$  ;
- c) si  $\#\text{Arg}(z) \geq 3$ , tout élément de  $\text{Arg}(z)$  est dans la même orbite par la multiplication par  $d$ , et  $f^q$  opère transitivement sur les rayons externes de  $z$ , donc  $k$  (défini dans a)) est le nombre des arguments externes de  $z$ , et  $m/k$  est irréductible et est le nombre de rotation combinatoire de  $f$  en  $z$  (cf. la preuve de a)); si  $\#\text{Arg}(z) = 2$ , les deux arguments de  $z$  peuvent être dans une même orbite (alors  $p = 2q$ ) ou dans des orbites différentes (alors  $p = q$ ).

Corollaire 3.5. Soient  $c, c' \in \mathbb{C}$  à  $P_c, P_{c'}$  finis avec  $m(c') \subset \bar{m}(c)$ , alors  $\forall z \in PJ_c, \exists! z' \in PJ_{c'}$  tel que  $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z')$ . En particulier,

$$\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c'}) .$$

Démonstration. D'après le lemme 3.3, il suffit de démontrer  $\# \text{Arg}(z) = \# \text{Arg}(z')$ . Soient  $q, q'$  les périodes de  $z, z'$  et  $k, k'$  les nombres des arguments externes de  $z, z'$  respectivement. Comme  $f_{c'}^{q'}(z') = z'$ , l'entier  $q$  est un multiple de la période  $q'$  de  $z'$ , il est donc premier à  $k'$ , autrement dit  $f_{c'}^q$  opère transitivement sur les rayons externes de  $z'$ , d'où  $\# \text{Arg}(z) = \# \text{Arg}(z')$ .

Qfd.

Démonstration du lemme 3.4. a) On a  $f^q$  localement conjugué à  $w \rightarrow \lambda w$  (où  $\lambda = (f^q)'(z)$ ). On oriente chaque rayon externe  $R_i$  de  $z$  en mettant une flèche de  $z$  à l'infini. On dit que  $R_{i_2}$  suit  $R_{i_1}$  s'il existe une composante connexe  $U$  de  $\mathbb{C} - \bigcup_i R_i$  telle que  $\partial U = R_{i_2}^- \cup R_{i_1}$ , où  $R_{i_2}^-$  est  $R_{i_2}$  avec l'orientation inverse. Comme  $f^q$  préserve l'orientation de  $\partial U$ , on déduit que  $f^q(R_{i_2})$  suit  $f^q(R_{i_1})$  si  $R_{i_2}$  suit  $R_{i_1}$ . On peut donc numéroter les rayons externes de  $z$  en  $R_1, R_2, \dots, R_n$  de façon que  $R_{i+1 \pmod n}$  suit  $R_i$ , et on a  $f^q(R_i) = R_{i+m \pmod n}$  avec  $m$  ne dépendant pas de  $i$ . On dit que  $m/n$  est le nombre de rotation combinatoire de  $f$  en  $z$ . Pour  $k$  le dénominateur de  $m/n$  sous forme irréductible, on a  $f^{kq}(R_i) = R_i$ , i.e.  $p = kq$  est la période de tous les arguments externes de  $z$ .

b) On a  $z \in H_c$  ( $PJ_c \subset H_c$  par 12)). Si  $z$  est une extrémité de  $H_c$ , alors  $z \in P_c = \text{Or}(c)$  et tout point dans l'orbite de  $z$  est une extrémité de  $H_c$ , donc  $z$  n'a qu'un seul argument externe ([DH2], exposé VII, 4,

page 62~64), ceci contredit l'hypothèse que  $z \in PJ_c$ . Le point  $z$  n'est donc pas une extrémité de  $H_c$ , alors dans chacune des composantes de  $\mathbb{C} - \gamma$  il existe au moins une extrémité de  $H_c$  et les extrémités de  $H_c$  sont tous postcritiques.

c) L'argument ci-dessous est analogue à l'argument de Thurston pour le cas de degré deux ([Th]). On définit d'abord une distance dans  $[0,1]$  par

$$\mu(\theta, \theta') = \min\{|\theta - \theta'|, 1 - |\theta - \theta'|\}.$$

Si  $\mu(\theta, \theta') \leq 1/(d+1)$ ,  $\mu(d\theta, d\theta') \geq \mu(\theta, \theta')$ ; si  $\mu(\theta, \theta') \geq 1/(d+1)$ ,

$$\mu(d\theta, d\theta') = 1 - d\mu(\theta, \theta') \leq 1/(d+1) \leq \mu(\theta, \theta').$$

Pour  $\theta, \theta'$  distincts, il existe  $k$  tel que  $\mu(d^k\theta, d^k\theta') > 1/(d+1)$ .

Soit  $x \in J_c \cap H_c$ . Parmi les couples d'arguments externes de  $x$  il existe un couple  $\{\theta(x), \theta'(x)\}$  tel que  $\mu(\theta(x), \theta'(x))$  soit maximal. Comme les extrémités de  $H_c$  sont dans l'orbite de  $c$ , dans l'ensemble  $\{\mu(\theta(x), \theta'(x)) \mid x \in J_c \cap H_c\}$ , si  $c$  est strictement prépériodique,  $\mu(\theta(c), \theta'(c))$  (qui peut être nul) est minimal et  $\mu(\theta(0), \theta'(0))$  est maximal; si  $0$  est périodique, alors  $\mu(\theta(\tau_0), \theta'(\tau_0))$  est minimal et  $\mu(\theta(v_i), \theta'(v_i))$  est maximal (il est constant pour tout  $i$ ) (3) ([Th]).

Soit  $z \in J_c \cap H_c$ ,  $z \neq c$ . Notons  $z_0 = z, z_1, \dots, z_{d-1}$  les  $d$  points distincts tels que  $f(z_i) = f(z)$  (6). Alors

$$f^{-1}([c, f(z)]) = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, z_i]$$

avec  $[0, z_i] \cap [0, z_j] = \{0\}$  (si  $i \neq j$ ) et  $\theta(z_i), \theta'(z_i)$  sont les deux

arguments de  $z_i$  adjacents à  $[0, z_i]$ , avec

$$\mu(\theta(z_i), \theta'(z_i)) = \mu(\theta(z), \theta'(z)).$$

On note  $\mathfrak{C}(z)$  la fermeture de la composante de  $H_c - \{z_0, \dots, z_{d-1}\}$  contenant 0.

Supposons maintenant que  $\mu(\theta(z), \theta'(z)) \geq 1/(d+1)$ . Il existe au plus un autre couple  $\{\eta(z), \eta'(z)\}$  d'arguments externes consécutifs de  $z$  vérifiant  $\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$ . Pour  $\xi, \xi' \in \text{Arg}(\mathfrak{C}(z))$  avec  $\xi \sim_c \xi'$ , on a soit

$$\mu(\xi, \xi') \geq \mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$$

soit

$$\mu(\xi, \xi') \leq (1 - \mu(\eta(z), \eta'(z))) / d;$$

pour  $\xi, \xi' \in \text{Arg}(J_c - \mathfrak{C}(z))$  avec  $\xi \sim_c \xi'$ , on a  $\mu(\xi, \xi') \leq \mu(\eta(z), \eta'(z))$ .

**Remarque 3.6.** Soient  $z$  tel que  $\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$ ,  $k \geq 0$  minimal tel que  $f^k(z) \in \mathfrak{C}(z)$  et  $\zeta, \zeta'$  deux arguments consécutifs de  $z$  tels que  $\mu(\zeta, \zeta') \geq 1/(d+1)$ , alors

$$\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq \mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1).$$

Parce que

$$\mu(d\zeta, d\zeta') = 1 - d\mu(\zeta, d\zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

et pour  $0 < n < k$ ,  $f^n(z) \in J_c - \mathfrak{C}(z)$ ,

$$\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq \mu(d^n \zeta, d^n \zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

donc

$$\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

d'où le résultat.

Supposons  $z \in PJ_c$  de période  $q$ . On peut même supposer que  $z$  vérifie  $\mathcal{C}(z) \cap Or(z) = \{z\}$ , i.e.  $z$  est le point dans  $Or(z)$  le plus proche de  $0$  (donc  $f(z)$  le point le plus proche de  $c$ ), évidemment  $\mu(\theta(z), \theta'(z)) > 1/(d+1)$ . Soit  $x \in Or(z)$ ,  $x \neq z$ ,  $\zeta, \zeta'$  deux arguments externes consécutifs de  $x$  tels que  $\mu(\zeta, \zeta') \geq 1/(d+1)$ , alors en appliquant si nécessaire plusieurs fois le résultat de la remarque ci-dessus, pour  $k$  minimal tel que  $f^k(x) = z$ , on a  $\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq 1/(d+1)$ , donc  $\{d^k \zeta, d^k \zeta'\} = \{\theta(z), \theta'(z)\}$  ou  $\{\eta(z), \eta'(z)\}$ .

Soit  $\#Arg(z) \geq 3$ , il existe  $\xi, \xi'$  arguments externes consécutifs de  $z$  tel que  $\mu(\xi, \xi') \leq 1/(d+1)$ , il existe  $m$  tel que

$$\mu(d^m \xi, d^m \xi') \geq 1/(d+1).$$

Posons  $x = f^m(z)$  et  $\zeta = d^m \xi, \zeta' = d^m \xi'$ , il existe  $k$  tel que  $f^k(x) = z$ , donc  $\{d^{k+m} \xi, d^{k+m} \xi'\}$  est un autre couple d'arguments externes consécutifs de  $z$ , ceci veut dire que  $f^q$  n'est pas une rotation triviale sur les rayons externes de  $z$ , si de plus  $\eta(z), \eta'(z)$  existent, alors

$$\{d^q \eta(z), d^q \eta'(z)\} \neq \{\eta(z), \eta'(z)\}$$

donc

$$\{d^q \eta(z), d^q \eta'(z)\} = \{\theta(z), \theta'(z)\},$$

par conséquent,  $f^q$  opère transitivement sur les rayons externes de  $z$ .

Le résultat pour le cas où  $\#Arg(z) = 2$  est évident.

Caqd.



## Chapitre 4. Arguments externes et internes dans l'espace de paramètres

### 4.1. Composantes hyperboliques

Soit  $f=f_c : z \rightarrow z^d+c$ . On note  $K_c$  l'ensemble de Julia de  $f_c$  et  $P_c$  l'ensemble postcritique de  $f_c$ .

Notation. On note  $M_d$  l'ensemble des  $c$  tels que  $K_c$  soit connexe, et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des  $c$  tels que  $P_c$  soit fini.

L'ensemble  $M_d$  est invariant par la rotation de  $1/(d-1)$  tour du fait que le polynôme  $f : z \rightarrow z^d+c$  est conjugué à  $g : z \rightarrow \lambda^{1-d}z^d+\lambda c$  (i.e.  $\exists \Phi : \mathbb{C} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$  tel que  $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = g$ ) donc  $c \in M_d$  entraîne  $\lambda c \in M_d$  pour  $\lambda$  racine  $d-1$  de 1.

On rappelle ici quelques notations et résultats essentiels montrés dans [DH2] et [DGH].

1). Il existe une représentation conforme  $\psi_M$  de  $\mathbb{C}-\bar{D}$  à  $\mathbb{C}-M_d$ , tangente à l'identité en  $\infty$ . On ne sait pas si  $M_d$  est localement connexe, donc on ne sait pas si  $\psi_M$  se prolonge au bord, mais on sait que tous les rayons externes d'arguments rationnels aboutissent. On peut donc définir pour  $\theta$  rationnel  $R_M(\theta) = \{\psi_M(e^{s+2i\pi\theta}) \mid 0 \leq s < \infty\}$  le rayon externe d'argument  $\theta$ , et  $\gamma_M(\theta) = \psi_M(e^{2i\pi\theta})$  le point d'aboutissement.

2). Notons  $M'$  l'ensemble des  $c$  tels que  $f_c$  admette un cycle attractif à distance finie. Alors  $M' \subset \tilde{M}_d$  et chaque composante de  $M'$  est une



composante de  $\mathring{M}_d$ . Les composantes connexes de  $M'$  sont appelées composantes hyperboliques de  $M_d$ .

3). Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $M_d$ . La période du cycle attractif de  $f_c$  pour tout  $c \in W$  est la même, c'est la période de  $W$ .

4). On note  $p_W(c)$  le multiplicateur du cycle périodique attractif de  $f_c$ . L'application  $p_W : c \rightarrow p_W(c)$  induit un revêtement de degré  $d-1$  de  $W$  à  $D$  ramifié au dessus de  $0$ , et elle se prolonge continument au bord de  $W$ . Le point  $c(W) = p^{-1}(0)$  est l'unique point de  $W$  tel que  $0$  soit périodique pour  $f_c$ , on l'appelle centre de  $W$ . Sur  $\partial W$ , il existe  $d-1$  points  $c_0(W), c_1(W), \dots, c_{d-2}(W)$  ayant comme image par  $p_W$  le même point  $1 \in \partial D$ , ce sont les racines de  $W$ . Ces racines ont chacune un unique argument externe, sauf une qu'on note  $c_0(W)$  qui en a deux, c'est la racine principale de  $W$ . Les  $d$  arguments externes  $\{\theta_0, \dots, \theta_{d-1}\}$  des racines de  $W$  avec l'ordre

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1$$

sont appelés arguments-racines de  $W$ , ce sont exactement les arguments associés à  $f_{c(W)}$  ([DH1], [DGH] et 3) de 3.1). Ainsi la période des  $\theta_i$  est la même que celle de  $W$  (3) de 3.1). On peut numérotter les  $c_i(W)$ ,  $i \geq 1$  de façon que

$$\gamma_M(\theta_0) = \gamma_M(\theta_{d-1}) = c_0(W), \text{ et } \gamma_M(\theta_i) = c_i(W), \text{ } 1 \leq i \leq d-2.$$

5). On donne à  $c_0(W)$  l'argument interne  $0$  dans  $W$ . Pour un point quelconque  $x \in \partial W$  avec  $p(x) = e^{2i\pi t}$ , on définit l'argument interne de  $x$  dans  $W$  par

$$t/(d-1)+p/(d-1)=(t+p)/(d-1)$$

où  $p$  est un entier déterminé de façon qu'en comptant le tour sur  $\partial W$  les arguments internes sont compatibles avec l'argument interne de  $c_0(W)$ . En particulier, l'argument interne de  $c_i(W)$  est  $i/(d-1)$ .

6). Un point  $c \in \partial W$  a un argument interne rationnel non de la forme  $i/(d-1)$  si et seulement si  $c$  est la racine principale d'une autre composante  $W'$ . Une composante hyperbolique  $W'$  est dite non primitive si sa racine principale  $c=c_0(W')$  est au bord d'une autre composante  $W$ . Si ce point  $c$  a un argument interne rationnel  $t=p/q$  irréductible dans  $W$ , alors pour  $k$  la période de  $W$  et  $q'$  minimal tel que  $q'(d-1)$  soit un multiple de  $q$ , la période de  $W'$  est  $kq'$ . On donnera dans 4.3 un algorithme pour calculer les arguments-racines de  $W'$  en utilisant  $t$  et les arguments-racines de  $W$ . On verra que les arguments de  $c_0(W')$  sont toujours dans une même orbite.

7). Rappelons que  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des  $c \in M_d$  tels que l'ensemble postcritique  $P_c$  soit fini, il est aussi l'ensemble des  $c$  tels que  $0$  soit prépériodique pour  $f_c$ . On décompose  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  en définissant  $\mathcal{D}_0$  l'ensemble des  $c \in M_d$  tels que  $0$  soit périodique pour  $f_c$ , qui est aussi l'ensemble des centres des composantes hyperboliques de  $M_d$ , et  $\mathcal{D}_2$  l'ensemble des  $c \in M_d$  tels que  $0$  soit strictement prépériodique pour  $f_c$ , (dans la terminologie de Douady et Hubbard  $\mathcal{D}_1$  est réservé pour les racines principales des composantes hyperboliques de  $M_d$ , mais on ne s'en sert pas ici).

8). Pour  $c \in \mathcal{D}$  on appelle les arguments associés à  $f_c$  arguments associés à  $c$  dans  $M_d$  : pour  $c \in \mathcal{D}_0$ , ce sont les arguments-racines de la

composante hyperbolique de  $M_d$  ayant  $c$  comme centre ; pour  $c \in \mathcal{D}_2$  ce sont les arguments externes de  $c$  dans  $K_c$ , ce sont également les arguments externes de  $c$  dans  $M_d$  ([DH2] et [DGH]).

9). Notons  $W_0$  la composante hyperbolique de  $M_d$  contenant  $0$ . C'est la composante principale de  $M_d$ . Les arguments  $0$  et  $1$  sont considérés comme deux arguments différents pour que la racine principale de  $W_0$  ait aussi deux arguments externes. Par symétrie, le rayon externe  $R_M(0)$  est une partie de l'axe réel et  $\gamma_M(0) \in \partial W_0$ . Comme  $W_0$  est aussi invariant par la rotation de  $1/(d-1)$  tour, on a  $\gamma_M(i/(d-1)) \in \partial W_0$  pour tout  $i$  et ce sont les racines de  $W_0$ . Ceci prouve la propriété 8) de 3.1.

10). Soit  $\kappa(t)$  le point sur  $\partial W_0$  d'argument interne  $t$ . Pour  $t=p/q$  rationnel irréductible tel que  $\kappa(t)$  non racine de  $W_0$ , on note  $W(t)$  la composante hyperbolique de  $M_d$  ayant  $\kappa(t)$  comme racine principale, et  $c(t)$  le centre de  $W(t)$ . On note également  $q'=q'(t)$  la période de  $W(t)$ , il est donc l'entier minimal tel que  $q'(d-1)$  soit un multiple de  $q$ .

11). Les  $d$  arguments-racines de  $W(t)$  sont de la forme

$$\theta_i(t) = (p' + i)/(d^{q'} - 1), \quad 0 \leq i \leq d-1, \quad p' \in \mathbb{N}$$

avec  $\gamma_M(\theta_0(t)) = \gamma_M(\theta_{d-1}(t)) = \kappa(t)$  et dans l'espace dynamique de  $f_{c(t)}$ , pour  $\alpha_{c(t)}$  l'unique point fixe de  $f_{c(t)}$  ayant plus d'un argument externe (9) de 3.1), on a

$$\text{Arg}(\alpha_{c(t)}) = \text{Or}(\theta_0(t)) = \text{Or}(\theta_{d-1}(t)),$$

et de plus  $\theta_0(t)$  et  $\theta_{d-1}(t)$  sont les deux arguments de  $\alpha_{c(t)}$  adjacents à l'arc réglementaire  $[\alpha_{c(t)}, c(t)]$ .

12). Analysons maintenant les composantes hyperboliques de période 2 .  
Notons successivement

$$t_{2,j} = 1/2(d-1) + j/(d-1) = (\frac{1}{2} + j)/(d-1) ,$$

$$c_{2,j} = c(t_{2,j}) , \kappa_{2,j} = \kappa(t_{2,j}) \text{ et } W_{2,j} = W(t_{2,j}) , j=0,1,\dots,d-2 .$$

Comme  $f_c^2(0) = c^d + c$  , l'équation  $f_c^2(0) = 0$  a  $d-1$  solutions non nulles, il existe donc exactement  $d-1$  composantes hyperboliques de  $M_d$  de période 2 , ces composantes sont donc  $W_{2,0} , W_{2,1} , \dots , W_{2,d-2}$  , et tout argument de période deux pour la multiplication par  $d$  est un argument-racine d'une de ces composantes. Par un simple calcul on peut en déduire qu'en base  $d$  les arguments-racines de  $W_{2,j}$  sont

$$\{ \theta_0(t_{2,j}) , \theta_1(t_{2,j}) , \dots , \theta_{d-1}(t_{2,j}) \} =$$

$$\{ 0, [j(j+1)] , 0, [j(j+2)] , \dots , 0, [(j+1)j] \}$$

(où  $0, [s_1 s_2 \dots s_n] = 0, s_1 s_2 \dots s_n s_1 s_2 \dots s_n \dots s_1 s_2 \dots s_n \dots$ ), avec

$$\text{Arg}(\kappa_{2,j}) = \{ 0, [j(j+1)] , 0, [(j+1)j] \}$$

et

$$\theta_{d-1}(t_{2,j}) - \theta_0(t_{2,j}) = 1/(d+1) .$$

Par exemple, dans  $M_3$  , il y a deux composantes hyperboliques de période deux, leur centre est  $i$  et  $-i$  respectivement, leurs arguments-racines sont  $\{ 0, [01] , 0, [10] \}$  et  $\{ 0, [21] , 0, [12] \}$  respectivement.

#### 4.2 Membres de l'espace de paramètres

Définition. On appelle  $M(t)$  membre d'argument interne  $t$  de  $M_d$  ,

l'adhérence de la composante de  $M - \{x(t)\}$  qui ne contient pas 0. On note  $\mathcal{D}_t = M(t) \cap \mathcal{D}$  (qui est vide si  $t$  est irrationnel ([Y])).

Soient  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $\theta, \tilde{\theta}$  le plus petit et le plus grand argument associé à  $c$  dans  $M_d$  donc associé à  $f_c$ ; alors  $\theta_0(t) \leq \theta \leq \tilde{\theta} \leq \theta_{d-1}(t)$ , et donc  $m(c) \subset m(c(t))$ . D'après le corollaire 3.5, on déduit  $\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c(t)})$  pour tout  $c \in \mathcal{D}_t$ . De plus, on a

**Lemme 4.1.** Soient  $t \in S^1$ ,  $\theta_0(t) = p/(d^q - 1)$ ,  $\theta_{d-1}(t) = (p + d - 1)/(d^q - 1)$ ,  $c \in \mathcal{D}_t$ ,  $f = f_c$ ,  $z \in J_c$  et  $\xi, \eta \in \text{Arg}(z)$  de période  $q'$ . Alors  $q' \geq q$ , et  $q' = q$  si et seulement si  $z = \alpha_c$ .

**Démonstration.** Comme  $[\alpha_c, c]$  est une région obligatoire (12 de 3.1), l'intervalle  $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)]$  est une zone obligatoire. On peut donc supposer  $\xi, \eta \in [\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)]$ . Comme  $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)[$ ,  $[d\theta_0(t), d\theta_{d-1}(t)[$ , ...,  $[d^{q-1}\theta_0(t), d^{q-1}\theta_{d-1}(t)[$  sont deux à deux disjoints, on a  $q' \geq q$ . L'ensemble  $\Theta$  des arguments de période  $q$  dans  $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)[$  est  $\{\theta_i = (p+i)/(d^q - 1), i=0, 1, \dots, d-2\}$ . Soit  $\zeta$  un argument associé à  $f_c$ . Les ensembles  $S_i = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset [(\zeta+i)/d, (\zeta+i+1)/d[ \}$ ,  $i=0, 1, \dots, d-1$  forment une partition de  $J_c - \{0\}$ . Pour  $j \geq 0, k > 0, j+k \leq q-2$ , on a  $d^{q-1}k/(d^q - 1) = d^{q-1}\theta_{j+k} - d^{q-1}\theta_j$  et  $(d-1)/d > d^{q-1}k/(d^q - 1) > 1/d$ . Donc  $\gamma_c(d^{q-1}\theta_{j+k})$  et  $\gamma_c(d^{q-1}\theta_j)$  ne sont pas dans un même  $S_i$ . On en déduit que les  $\gamma_c(\theta_0), \gamma_c(\theta_1), \dots, \gamma_c(\theta_{d-2})$  sont deux à deux distincts. Donc  $\xi \notin \Theta$  et  $q' \neq q$ . D'où  $q' > q$ .

**Qfd.**

Si  $t \neq t'$ , alors les deux orbites  $Or(\theta_0(t))$  et  $Or(\theta_0(t'))$  sont disjointes. Comme  $M$  est symétrique par rapport à l'axe réel,  $M_t$  et  $M_{1-t}$  sont conjugués, et  $\text{Arg}(\alpha_{c(1-t)}) = \{1 - \theta \mid \theta \in \text{Arg}(\alpha_{c(t)})\} = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c(t)})$ .

Il en résulte que:

Lemme 4.2. Deux points  $c$  et  $c'$  sont dans le même membre de  $M_d$  si et seulement si  $\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c'})$ . Ils sont dans des membres conjugués de  $M_d$  si et seulement si  $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$ , si et seulement s'il existe  $\eta$  tel que  $\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$  et  $1 - \eta \in \text{Arg}(\alpha_{c'})$ .

En particulier, les  $M(t_{2,j})$  sont deux à deux conjugués sauf éventuellement un (quand  $d$  est pair) qui intersecte l'axe réel et qui est donc conjugué à lui-même.

Pour chaque membre  $M(t)$  de  $M_d$  on note  $\theta(t)$ ,  $\tilde{\theta}(t)$  les deux arguments externes de  $\chi(t) = M(t) \cap \bar{W}_0$ , qui sont aussi le plus petit et le plus grand argument-racine de  $W(t)$ . Soit  $c \in M_d$ . Connaissant un couple d'arguments  $\eta$ ,  $\eta'$  équivalents pour  $f_c$ :  $\eta \sim_c \eta'$ ,  $\eta \neq \eta'$ , on a

Un algorithme pour détecter dans quel membre de  $M_d$  se situe la valeur  $c$  (sauf si  $d > 2$  et  $c$  est dans l'un des  $M(t_{2,j})$ ):

Développons  $\eta$  et  $\eta'$  en base  $d$ :

$$\eta = 0, u_1 u_2 \dots$$

$$\eta' = 0, u'_1 u'_2 \dots$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $d^p(\eta) \sim_c d^p(\eta')$ . Posons  $\delta_i = |u_i - u'_i|$ . Si la série  $\delta_i$  se termine par  $j000\dots$ ,  $j \neq 0$ , i.e.  $\exists k$  tel que  $\delta_k = j \neq 0$  et  $\delta_n = 0$  pour tout  $n \geq k$ , alors le point d'aboutissement de  $R_c(d^k \eta)$  et  $R_c(d^k \eta')$  est le point critique  $0$ , et  $d^{k+1}(\eta) = d^{k+1}(\eta') = \theta$  est un argument externe de  $c$ , il existe  $t_0$  tel que  $\theta \in [\theta(t_0), \tilde{\theta}(t_0)]$ , donc  $c \in M(t_0)$ . Dans tous les autres cas  $\gamma_c(\eta)$  n'est pas une préimage de  $0$ , on a  $\delta_i = 0, 1$  ou  $d-1$

d'après la propriété 11 de 3.1 : deux composantes  $C_i - \{0\}$  et  $C_j - \{0\}$  sont disjointes sauf si  $C_i$  et  $C_j$  sont consécutifs, i.e. si  $|j-i|=1$  ou  $|j-i|=d-1$ . Si la série  $\delta_i$  se termine par 1111..., alors  $c \in M(t)$  pour  $t$  l'un des  $t_{2,j}$ , mais on ne sait pas lequel à priori. La série ne se termine jamais par  $(d-1)(d-1)(d-1)(d-1)\dots$  : sinon ceci implique que la future orbite périodique de  $\gamma_c(\eta)$  est complètement contenue dans l'arc réglementaire  $[0, \beta] - \{\beta\}$ , ce qui contredit que  $[\alpha_c, c]$  qui est disjoint de  $[0, \beta]$  est obligatoire (12 de 3.1). Dans le cas où il existe un entier  $k$  tel que  $\delta_k \neq 0$  et  $\delta_{k+1} = 0$ , on prétend qu'il existe  $t_0$  tel que

$$\theta(t_0) \leq d^{k+1}\eta, d^{k+1}\eta' \leq \tilde{\theta}(t_0) \text{ et } c \in M(t_0)$$

pour la raison suivante: Pour  $z = \gamma_c(\eta)$  et  $\mathcal{L}_c = \cup [0, \beta_i]$  défini comme dans 3) et 4) de 3.1, les rayons  $\tilde{R}(d^k\eta)$  et  $\tilde{R}(d^k\eta')$  sont dans des différentes zones de  $(\mathbb{C} - \mathcal{L}_c) \cup \cup_i R(i/d)$ , tandis que  $\tilde{R}(d^{k+1}\eta)$  et  $\tilde{R}(d^{k+1}\eta')$  sont dans une même zone de  $(\mathbb{C} - \mathcal{L}_c) \cup \cup_i R(i/d)$ , donc  $f_c^k(z) \in \mathcal{L}_c$  et  $f_c^{k+1}(z) \notin \mathcal{L}_c$ . Mais

$$f_c(\mathcal{L}_c) = [\alpha_c, \beta] \cup [\alpha_c, c] \subset \mathcal{L}_c \cup [\alpha_c, c],$$

on a  $f_c^{k+1}(z) \in [\alpha_c, c]$ . Donc  $d^{k+1}\eta$  et  $d^{k+1}\eta'$  se trouvent dans l'intervalle limité par les deux arguments externes  $\zeta, \tilde{\zeta}$  de  $\alpha_c$  adjacents à  $[\alpha_c, c]$ , et  $\zeta, \tilde{\zeta}$  sont exactement les deux arguments externes de  $\kappa(t_0)$  où  $t_0$  est tel que  $c \in M(t_0)$ .

#### 4.3. Modulation et chemin combinatoire

On pose  $M = M_d$ . Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $M$  avec  $c = c(W)$  le centre de  $W$ . Il existe une copie  $M_W$  de  $M$ , située dans  $M$ ,

et dans laquelle  $W$  correspond à la composante principale  $W_0$ . Précisément, il existe une injection continue  $\Psi_w : M \rightarrow M$  telle que  $\Psi_w(0) = c$ ,  $\Psi_w(W_0) = W$ , et pour  $M_w = \Psi_w(M)$ ,  $\partial M_w \subset \partial M$ . Pour  $x \in M$ , le point  $\Psi_w(x)$  est appelé un modulé de  $c$  par  $x$ , et est noté par

$$c \perp x .$$

Soient  $x \in \partial M$  et  $\xi$  un argument externe de  $x$  dans  $M$ . Alors à  $\xi$  correspond un argument externe  $\xi'$  de  $c \perp x$  dans  $M$ , qui peut être obtenu par l'algorithme suivant: rappelons que la multiplication par  $d$  d'un argument  $\theta$  est un shift à droite du développement de  $\theta$  en base  $d$ , donc si  $\theta$  est de période  $k$  le développement de  $\theta$  se répète au bout du  $k$ -ième chiffre, notons  $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{d-1}$  les arguments-racines de  $W$  ( donc  $\chi_M(\theta_0) = \chi_M(\theta_{d-1})$  ), développons les  $\theta_i$  et  $\xi$  en base  $d$ :

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0, [u_1^i u_2^i \dots u_k^i] \\ &= 0, u_1^i u_2^i \dots u_k^i u_1^i u_2^i \dots u_k^i \dots u_1^i u_2^i \dots u_k^i \dots, \quad i=0,1,\dots,d-1 \end{aligned}$$

et

$$\xi = 0, s_1 s_2 \dots s_n \dots ,$$

où  $k$  est la période de  $\theta_i$ , alors

$$\xi' = 0, u_1^{s_1} u_2^{s_1} \dots u_k^{s_1} u_1^{s_2} u_2^{s_2} \dots u_k^{s_2} \dots u_1^{s_n} u_2^{s_n} \dots u_k^{s_n} \dots .$$

Donc si  $\xi$  est de période  $q$ , l'argument  $\xi'$  est de période  $kq$ . On note

$$\xi' = \{\theta_i\} \perp \xi .$$



On s'intéresse surtout aux arguments-racines d'une composante hyperbolique  $W'$  non primitive. Si la racine principale  $c_0(W')$  de  $W'$  est au bord d'une autre composante hyperbolique  $W$  de période  $k$  dont le centre est  $c(W)$ , et  $c_0(W')$  admet un argument interne  $t$  dans  $W$ , alors

$$c_0(W') = c(W) \perp \chi(t).$$

Donc  $W'$  peut être considérée comme un modulé de  $c(W)$  par  $W(t)$ . Soient  $\{\theta_i\}$  les arguments-racines de  $W$  et  $\{\theta_i(t)\}$  ceux de  $W(t)$ ; alors les arguments-racines de  $W'$  sont

$$\eta_j = \{\theta_i\} \perp \theta_j(t), \quad j=0, 1, \dots, d-1,$$

avec toujours  $\chi_M(\eta_0) = \chi_M(\eta_{d-1}) = c_0(W')$ . Comme  $\theta_0(t)$  et  $\theta_{d-1}(t)$  sont dans une même orbite pour la multiplication par  $d$  (4.1), il existe  $p$  tel que  $d^p(\theta_0(t)) = \theta_{d-1}(t)$ , autrement dit si

$$\theta_0(t) = 0, [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \dots \varepsilon_q]$$

alors

$$\theta_{d-1}(t) = 0, [\varepsilon_{p+1} \dots \varepsilon_q \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p],$$

et par l'algorithme décrit plus haut

$$d^{pk} \eta_0 = \eta_{d-1},$$

c'est-à-dire que les deux arguments de la racine principale d'une composante hyperbolique non primitive sont toujours dans une même orbite pour la multiplication par  $d$ .

Rappelons que  $m(c)$  pour  $c \in \mathcal{D}$  est l'intervalle limité par le plus

petit et le plus grand argument associé à  $c$ . On définit un semi-ordre dans  $\mathcal{D}$  par

$$c < c' \Leftrightarrow \tilde{m}(c) \supset m(c'),$$

et on définit le chemin combinatoire de  $c' \in \mathcal{D}$  par

$$\text{ch}(c') = \{c \in \mathcal{D} \mid c \leq c'\}.$$

Alors  $\text{ch}(c')$  est totalement ordonnée et le point  $0 \in W_0$  est l'élément minimal de  $\text{ch}(c')$  pour tout  $c' \in \mathcal{D}$ . Rappelons que  $c(t)$  est le centre de la composante hyperbolique  $W(t)$  de racine principale  $\chi(t) \in \partial W_0$  qui est d'argument interne  $t$  dans  $W_0$ . On appelle  $c \in \text{ch}(c')$  un point de bifurcation dans  $\text{ch}(c')$  si  $c \perp c(t) \in \text{ch}(c')$  pour un  $t$  différent des  $t_{2,j}$ .

Pour  $c \in \mathcal{D}_0$ , i.e. pour  $c$  tel que  $0$  soit périodique pour  $f_c$ , on note  $p(c)$  la période de  $0$  pour  $f_c$ , qui est aussi la période des arguments- racines de la composante hyperbolique ayant  $c$  comme centre. On a

**Proposition 4.3.** Soient  $c$  un point de bifurcation dans  $\text{ch}(c')$  et  $\hat{c} \in \mathcal{D}_0 \cap \text{ch}(c')$  vérifiant  $c < \hat{c}$ , alors  $p(c) < p(\hat{c})$ .

**Démonstration.** Posons  $k = p(c)$ . La période  $k$  est aussi la période des arguments associés  $\theta_0, \dots, \theta_{d-1}$  à  $c$ . Soient

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1$$

$$\theta_i = 0, [u_1^i u_2^i \dots u_k^i], \quad i = 0, 1, \dots, d-1.$$

Les arguments associés à  $\hat{c}$  sont dans un intervalle limité par deux

arguments consécutifs associés à  $c$ , supposons que c'est l'intervalle  $]\theta_j, \theta_{j+1}[$ . Notons  $a_j = c \perp c_{2,j}$ , et  $\eta_j, \tilde{\eta}_j$  le plus petit et le plus grand argument associé à  $a_j$  dans  $M_d$ . Alors les arguments associés à  $\hat{c}$  sont dans une composante de

$$]\theta_j, \theta_{j+1}[ - [ \eta_j, \tilde{\eta}_j ] .$$

Comme

$$\theta_0(t_j) = 0, [j(j+1)], \text{ donc}$$

$$\eta_j = \{ \theta_i \} \perp \theta_0(t_j) = 0, [u_1^j u_2^j \dots u_k^j u_1^{j+1} u_2^{j+1} \dots u_k^{j+1}] ;$$

comme

$$\theta_{d-1}(t_j) = 0, [(j+1)j], \text{ donc}$$

$$\tilde{\eta}_j = \{ \theta_i \} \perp \theta_{d-1}(t_j) = 0, [u_1^{j+1} u_2^{j+1} \dots u_k^{j+1} u_1^j u_2^j \dots u_k^j] .$$

D'où

$$\theta_j < \eta_j < \tilde{\eta}_j < \theta_{j+1}$$

$$\eta_j - \theta_j = 0,0\dots00**\dots \leq 0,0\dots01 = 1/d^k < 1/(d^k - 1) \text{ et}$$

$$\theta_{j+1} - \tilde{\eta}_j = 0,0\dots00**\dots \leq 0,0\dots01 = 1/d^k < 1/(d^k - 1) .$$

Donc dans les intervalles  $]\theta_j, \eta_j[$  et  $[\tilde{\eta}_j, \theta_{j+1}[$  il existe au plus un argument périodique pour la multiplication par  $d$  de période inférieure ou égale à  $k$ . Or le point  $\hat{c}$  a plus d'un argument associé, et ses arguments associés sont dans

$$]\theta_j, \eta_j[ \cup [\tilde{\eta}_j, \theta_{j+1}[ ,$$

ils sont donc de période supérieure à  $k$ , autrement dit

$$k = p(c) < p(\hat{c}) .$$

Cqfd.

Dans [La1] et [La2], P. Lavaurs a montré qu'il y a une bijection

entre l'ensemble  $ch(c') \cap \mathcal{D}_0$  et l'ensemble des cycles périodiques de  $K_c$  dont chaque point admet au moins deux arguments externes, et en particulier une bijection entre l'ensemble des points de bifurcation dans  $ch(c')$  et l'ensemble des cycles périodiques dans  $K_c$  composés par des points de branchement dans l'arbre de Hubbard  $H_c$ , autrement dit des points ayant chacun plus de deux arguments externes. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de branchement dans  $H_c$ , il n'y a qu'un nombre fini de points de bifurcation dans  $ch(c')$ . On a enfin

**Corollaire 4.4.** Supposons  $c_0, c_1, \dots, c_n$  les points de bifurcation dans  $ch(c')$ , à l'ordre  $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ , alors

$$p(c_0) < p(c_1) < \dots < p(c_n).$$



## Chapitre 5. Accouplements

### 5.1. Accouplement

Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes moniques de degré  $d$  à  $K_f, K_g$  connexes. Pour pouvoir utiliser la métrique introduite dans la proposition 1.5, on va modifier la définition de l'accouplement topologique de  $f$  et  $g$ . On fixe un niveau de potentiel  $s$  positif, on pose

$$L_f = \{z \in \mathbb{C} \mid G_f(z) \leq s\},$$

$$L_g = \{z \in \mathbb{C} \mid G_g(z) \leq s\}$$

et on identifie  $S^2$  à

$$L_f \amalg L_g / \psi_f(e^{s+2i\pi\theta}) \sim \psi_g(e^{s-2i\pi\theta}),$$

et  $\mathbb{T}$  avec l'équateur  $E$  par

$$\theta \longrightarrow \psi_f(e^{s+2i\pi\theta}).$$

On choisit ensuite un niveau  $s' < s/d$  positif et on définit un difféomorphisme strictement croissant  $h$  de  $[0, 2s]$  vers lui-même avec

$$h(t) = dt, \quad h(2s-t) = 2s-dt \quad \text{pour } t \in [0, s'], \quad \text{et } h(s) = s$$

(Figure 5.1). On définit l'accouplement topologique  $F = f \amalg g$  de  $f$  et  $g$  par

$$F|_{K_f} = f, \quad F|_{K_g} = g$$

$$F(\psi_f(e^{t+2i\pi\theta})) = \psi_f(e^{h(t)+2i\pi d\theta}), \quad \text{et}$$

$$F(\psi_g(e^{t+2i\pi\theta})) = \psi_g(e^{h(2s-t)+2i\pi d\theta}).$$

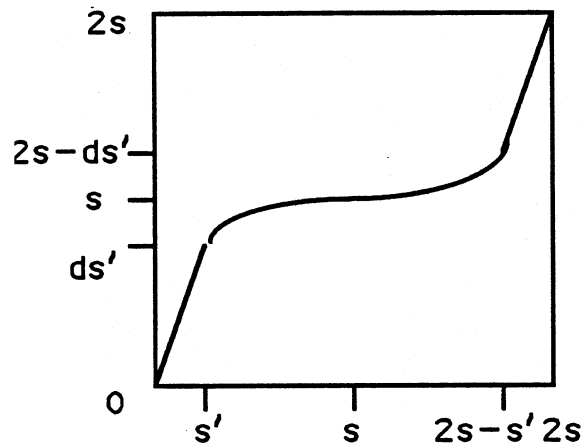


Figure 5.1. L'application h

F coincide par définition de h avec f ( resp. avec g ) pour  $z \in L_f$  et  $G_f(z) \leq s'$  ( resp. pour  $z \in L_g$  et  $G_g(z) \leq s'$  ). On a

$$F(\theta) = d\theta$$

pour  $\theta \in E$ . L'application F est topologiquement conjuguée à  $f \cup g$  définie en 1.1. En particulier, l'équivalence au sens de Thurston de F à une fraction rationnelle ne dépend pas de choix de  $s$ ,  $s'$  et h. On peut donc donner la définition suivante: f et g sont strictement accouplables si F est équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle. Dans  $S^2 = L_f \cup L_g / \sim$ , on pose

$$J = J_f \cup J_g ; K = K_f \cup K_g ;$$

$$N(t) = N_f(t) \text{ et } \Psi(t, \theta) = \psi_f(e^{t+2i\pi\theta}) \text{ pour } 0 < t \leq s ;$$

$$N(t) = N_g(2s-t) \text{ et } \Psi(t, \theta) = \psi_g(e^{2s-t-2i\pi\theta}) \text{ pour } 2s > t \geq s .$$

L'ensemble  $(L_f \cup L_g / \sim) - \tilde{K}$  est réunion des rayons externes de f et de g, (en effet  $R_f(\theta) \cap L_f$  et  $R_g(-\theta) \cap L_g$  se coincident au point  $\theta$  de

l'équateur). On appelle rayon externe d'argument  $\theta$  de  $F$  l'ensemble

$$R_F(\theta) = R(\theta) = (R_f(\theta) \cap L_f) \cup (R_f(-\theta) \cap L_g) / \sim .$$

Une réunion finie de rayons externes d'arguments rationnels de  $F$  forme un graphe. On note  $Q$  l'ensemble des graphes ainsi obtenus admettant chacun un nombre fini de composantes connexes, et  $PQ$  le sous-ensemble des éléments de  $Q$  périodiques par  $F$ .

Soient  $f: z \rightarrow z^d + c$  et  $g: z \rightarrow z^d + c'$  à  $P_f, P_g$  finis et  $F = f \cup g$ . Alors  $F$  est un revêtement ramifié de degré  $d$  à  $P_F$  fini, et  $F$  admet seulement deux valeurs critiques. Avec les notations de la proposition 1.5 on pose

$$A = A_f \cup A_g, \mu = \mu_f \cup \mu_g \text{ et } \tau = \min(\tau_f, \tau_g).$$

Pour la métrique  $\mu$ , le revêtement  $F$  est fortement dilatant au voisinage de  $K - \tilde{A}$ . Dans le théorème 2 un cycle de Levy est toujours composé de courbes à homotopie près. Mais en utilisant cette métrique  $\mu$ , on verra comme complément de la proposition ci-dessous qu'on peut déduire un cycle de Levy à un cycle de graphes de  $PQ$ . On dit qu'un ensemble  $X \subset S^2$  est mono-invariant par  $F$  si  $F|_X: X \rightarrow X$  est un homéomorphisme, ceci entraîne que  $X \subset F^{-1}(X)$ . On pose

$$E_0 = \bigcup_{s' \leq t \leq 2s - s'} N(t) = \Psi(E \times [s', 2s - s'])$$

et on note

$$\mathcal{R} = \left\{ \gamma \text{ courbe fermée dans } S^2 - A \mid \gamma \cap E_0 = \Psi(Y \times [s', 2s - s']) \right. \\ \left. \text{avec un } Y \subset E \text{ fini} \right\} .$$

On munit dans l'ensemble des fermés de  $S^2 - \tilde{A}$  la distance de Hausdorff  $D$ .



On a

Proposition 5.1. Soit  $X=X_0$  une réunion de sous-ensembles connexes fermés disjoints de  $S^2$  où  $\partial X$  est une réunion finie de courbes de  $\mathfrak{R}$ . Supposons qu'une partie  $X_1$  de  $F^{-1}(X_0)$  est isotope à  $X_0$  (rel  $P_F$ ) avec  $F: X_1 \xrightarrow{\approx} X_0$  un homéomorphisme. On peut donc relever l'isotopie par cette branche de  $F^{-1}$  et obtenir une suite  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  telle que  $F: X_{n+1} \xrightarrow{\approx} X_n$  soit un homéomorphisme ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) avec  $X_{n+1}$  isotope à  $X_n$ . Alors l'ensemble  $X_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$  existe, il est compact, mono-invariant par  $F$ , et

$$X_\infty = G_f \cup G_g \cup \Psi(Y \times [0, 2s])$$

avec  $G_f \subset K_f$ ,  $G_g \subset K_g$ ,  $Y \subset E$ , et  $G_f, G_g$  et  $Y$  finis.

Complément 1. L'ensemble  $Y = X_\infty \cap E$  est composé par des arguments rationnels à dénominateur premier à  $d$ , et  $X_\infty$  est un graphe de  $PQ$ .

C'est immédiat par le lemme 1.2 et par la forme de  $X_\infty$ .

Complément 2. Tout ensemble  $X$  fermé dans  $S^2$  mono-invariant par  $F$  et à bord dans  $\mathfrak{R}$ , est d'intérieur vide.

On peut appliquer la proposition 5.1 à  $X$  et on obtient  $X_\infty = X$ .

Complément 3. Soient  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  un cycle de Levy, et  $X = \bigcup_i \gamma_i$ . Alors l'ensemble  $X_\infty$  obtenu par la proposition 5.1 est un graphe de  $PQ$ .

Démonstration de la proposition 5.1. Par hypothèse, on voit d'abord  $X \cap \tilde{A} = \emptyset$ , car si  $z \in X \cap \tilde{A} \cap P_F$ , alors  $z$  est dans l'orbite d'une des deux valeurs critiques de  $F$  et cette orbite est périodique. Comme  $z \in X_1$ , on a  $F(z) \in X \cap \tilde{A} \cap P_F$ , ainsi toute l'orbite de  $z$  est dans  $X$ , donc il existe une valeur critique dans  $X$ , ce qui est impossible par hypothèse que  $X_1$  est isotope à  $X$ .

On pose  $Y_n = X_n \cap E$ ,

$$E_n = F^{-n}(E_0) = \Psi(E \times [(1/d^n)s', 2s - (1/d^n)s']),$$

et

$$B_n = X_n \cap (S^2 - \tilde{E}_n).$$

Par hypothèse,

$$X_0 = (X_0 \cap E_0) \cup B_0 = \Psi(Y_0 \times [s', 2s - s']) \cup B_0,$$

donc

$$X_n = (X_n \cap E_n) \cup B_n = \Psi(Y_n \times [(1/d^n)s', 2s - (1/d^n)s']) \cup B_n.$$

Comme  $\partial X_0 \cap N(t)$  est fini pour tout  $t$ , les nombres des composantes connexes de  $Y_n$  et de  $B_n$  sont finis et constants. On a

$$D(Y_{n+1}, Y_n) \leq D(Y_n, Y_{n-1})/d$$

et

$$D(B_{n+1}, B_n) \leq D(B_n, B_{n-1})/\tau$$

et par conséquent  $Y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$  et  $B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  existent (car l'ensemble des fermés de  $S^2 - \tilde{A}$  est complet par rapport à la métrique  $D$ ), et  $B_\infty \subset K_f \sqcup K_g$ . Il en résulte que  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  existe, et

$$X_\infty = \Psi(Y_\infty \times [0, 2s]) \cup B_\infty.$$

Si on note  $\lambda_n$  (resp.  $\rho_n$ ) le diamètre maximal des composantes connexes de  $Y_n$  (resp. de  $B_n$ ), alors

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1}/d \quad \text{et} \quad \rho_n \leq \rho_{n-1}/\tau,$$

donc  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\rho_n \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $Y=Y_\infty$  et  $G_f \cup G_g = B_\infty$  sont finis.

Cqfd.

## 5.2. Classes d'équivalences des points fixes dans l'accouplement

Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$  et  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$  avec  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{t'}$ ;  $S^2 = L_c \amalg L_{c'} / \sim$ ,  $F = f_c \amalg f_{c'}$ . Notons  $\omega = F^{-1}(c)$  et  $\omega' = F^{-1}(c')$  (points critiques).

**Définition.** On définit " $\approx$ " la relation d'équivalence algébrique engendrée par  $x \approx y$  s'il existe  $\theta$  tel que  $x, y \in R_F(\theta)$ . On note  $[x]$  la classe de  $x$ .

Si  $x \in Q$ , alors  $[x]$  est le graphe maximal de  $Q$  contenant  $x$ , et toute extrémité de  $[x]$  est un point de  $J = J_c \cup J_{c'}$  ayant un seul argument externe, et  $[x] \cap E$  est fini. Rappelons que la prépériode d'un point  $x$  est l'entier  $j$  minimal tel que  $F^j(x)$  soit périodique. Comme  $P_F$  est la réunion de l'orbite de  $\omega$  et de l'orbite de  $\omega'$  par  $F$ , pour tout entier  $j > 0$  donné, il existe au plus un point dans chacune de ces deux orbites, donc au plus deux points dans  $P_F$  ayant  $j$  comme prépériode. Par conséquent, si  $x \in J$  est strictement prépériodique, la classe  $[x]$  est aussi strictement prépériodique et  $\# [x] \cap P_F \leq 2$ . Comme  $\omega$  et  $c$  (resp.  $\omega'$  et  $c'$ ) ont des différentes prépériodes, on a  $[\omega] \cap [c] = \emptyset$  (resp.  $[\omega'] \cap [c'] = \emptyset$ ). Si  $[c] \neq [c']$ , alors  $[\omega]$  et  $[\omega']$  sont des revêtements de degré  $d$  de  $[c]$  et de

$[c']$  ramifiés au dessus de  $\omega$  et de  $\omega'$  respectivement. Si  $[c]=[c']$ , alors  $[\omega]=[\omega']$  est un revêtement de  $[c]$  de degré  $d$  ramifié au dessus de  $\omega$  et  $\omega'$ . L'application  $F$  préserve la relation d'équivalence, i.e. si  $F(x)=y$ ,  $F([x])=[y]$ , de plus,  $[x]$  est une composante connexe de  $F^{-1}([y])$ , et si  $\omega, \omega' \in [x]$ , alors

$$F|_{[x]} : [x] \longrightarrow [y]$$

est un homéomorphisme et  $[x]$  est l'une des  $d$  composantes connexes de  $F^{-1}([y])$ .

On dit qu'une classe  $[x]$  est non contractile si  $[x]$  contient une courbe fermée. Autrement,  $[x]$  est contractile. Par exemple, si  $[x]$  est un arc contenant deux points de  $P_F$ , elle est contractile. Si  $F(x)=y$  et si  $[x]$  ne contient pas en même temps  $\omega$  et  $\omega'$ , (ou également si  $[y]$  ne contient pas en même temps  $c$  et  $c'$ ), alors  $[x]$  est contractile si et seulement si  $[y]$  est contractile. Si  $[c]=[c']$ , alors  $[\omega]=[\omega']$  est toujours non contractile.

On s'intéresse ici surtout les classe d'équivalences contenant des points fixes de  $F$ . Pour  $i=0, 1, \dots, d-2$ , on note  $\varepsilon_i(c)$  et  $\varepsilon_i(c')$  les points fixes de  $f_c$  et de  $f_{c'}$  ayant l'unique argument externe  $i/(d-1)$ , et  $\alpha_c$  et  $\alpha_{c'}$  les points fixes de  $f_c$  et de  $f_{c'}$  ayant plus d'un argument externe (9) de 3.1). Dans  $S^2 = L_c \amalg L_{c'} / \sim$ , l'ensemble  $\varepsilon_i = [\varepsilon_i(c)] = [\varepsilon_{d-1-i}(c')]$  est formé par un unique rayon externe de  $F$ , il est donc contractile, ( $i=0, 1, \dots, d-2$ ). Quant à  $[\alpha_c]$  et  $[\alpha_{c'}]$ , on a

**Proposition 5.2.** Soient  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{t'}$ . Alors  $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$ , i.e.  $\alpha_c \approx \alpha_{c'}$  si et seulement si  $t+t'=1$ , (qui est équivalent à

$$\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$$

par le lemme 4.2).

**Démonstration.**  $\Rightarrow$ . Soit  $\ell$  le chemin le plus court dans  $[\alpha_c]$  joignant  $\alpha_c$  et  $\alpha_{c'}$ . S'il existe  $x \in J_c \cap \ell$  différent de  $\alpha_c$ , alors  $x \in PJ_c$  et les arguments externes de  $x$  ont une même période que les arguments de  $\alpha_c$ . Ceci contredit le lemme 4.1, on déduit donc  $\ell \cap J_c = \{\alpha_c\}$ , et pareillement  $\ell \cap J_{c'} = \{\alpha_{c'}\}$ . Ainsi  $\ell$  est formé par un unique rayon externe  $R(\eta)$  de  $F$ , et on a  $\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$  et  $1 - \eta \in \text{Arg}(\alpha_{c'})$ . D'après le lemme 4.2, on a  $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$ , d'où le résultat.

$\Leftarrow$ . C'est évident par  $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$ .

Cqfd.

### 5.3. Araignées

Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$  et  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$  avec  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{t'}$ ;  $F = f_c \perp f_{c'}$ . On étudie ici les classes d'équivalence de  $F$  qui contiennent au moins un point périodique ayant plus de deux arguments externes.

Rappelons que  $Or(z)$  est l'orbite de  $z \in J = J_c \cup J_{c'}$  par  $F$  et  $Or(\theta)$  est l'orbite de  $\theta \in E$  ( $E$  l'équateur) par la multiplication par  $d$ , que dans  $S^2 = L_c \perp L_{c'} / \sim$  le rayon externe de  $F$  d'argument  $\theta$  est  $R_F(\theta) = R(\theta)$ , que  $Q$  est l'ensemble des graphes connexes obtenus par une réunion finie de rayons externes de  $F$  d'arguments rationnels, et que  $PQ$  est l'ensemble des éléments de  $Q$  périodiques par  $F$ . On pose successivement

$$PJ = PJ_c \perp PJ_{c'} = \{z \in J \mid z \text{ périodique et } \# \text{Arg}(z) \geq 2\};$$

$$S = \{z \in PJ \mid \text{les arguments de } z \text{ sont dans une même orbite}\};$$

$$S_1 = \{z \in S \mid \# \text{Arg}(z) = 2\};$$

$$S_2 = \{z \in S \mid \# \text{Arg}(z) \geq 3\} = \{z \in PJ \mid \# \text{Arg}(z) \geq 3\} \text{ (Lemme 3.4) ;}$$

$T = PJ - S = \{z \in PJ \mid \# \text{Arg}(z) = 2, \text{ les deux arguments de } z \text{ ne sont pas dans une même orbite}\}.$

Soit  $\ell$  un graphe périodique de  $Q$ . Comme deux rayons externes de  $F$  ne se rencontrent pas sauf éventuellement à leurs extrémités, les points de branchement de  $\ell$  sont dans  $J$  et par suite sont des points de  $S_2$ . Soient  $z_1, z_2 \in T$  d'un même côté de  $E$  avec  $\text{Arg}(z_i) = \{\theta_i, \eta_i\}$ ,  $i=1, 2$ . Si  $Or(\theta_1) = Or(\theta_2)$ , alors  $Or(z_1) = Or(z_2)$  et donc  $Or(\eta_1) = Or(\eta_2)$ .

Soit  $z \in S$  de période  $p$ , et  $(R_{z,1}, R_{z,2}, \dots, R_{z,n})$  les rayons externes de  $F$  aboutissant en  $z$ , ordonnés dans le sens que  $R_{z,i+1}$  suit  $R_{z,i}$  à partir de  $R_{z,1}$  choisi arbitrairement (Lemme 3.4). Si l'on a  $F^p(R_{z,i}) = R_{z,i+m} \pmod{n}$ , alors d'après le lemme 3.4 c), l'entier  $m$  ne dépend pas de  $i$  et la fraction  $m/n$  est irréductible (i.e.  $m$  est premier à  $n$ ), qui est nommée le nombre de rotation combinatoire de  $z$ . Il existe donc  $k$  qui est un multiple de  $p$  tel que  $F^k(R_{z,i}) = R_{z,i+1} \pmod{n}$ . On oriente  $R_{z,1}$  en mettant une flèche de  $z$  vers l'équateur, et on prolonge  $R_{z,1}$  dans  $PQ$  suivant cette direction jusqu'au premier moment qu'on rencontre un point de  $J$  qui n'est pas dans  $T$ , on note ce point  $a_{z,1}$  et on note le chemin obtenu  $\ell_{z,1}$ . On pose  $a_{z,i+1} = F^{ik}(a_{z,1})$  et  $\ell_{z,i+1} = F^{ik}(\ell_{z,1})$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ . Alors les  $\ell_{z,i}$  sont deux à deux disjoints sauf éventuellement à leurs extrémités, et on définit l'araignée de  $z$  par

$$A(z) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \ell_{z,j}.$$

Par construction, les  $a_{z,i}$  sont dans une même orbite, ils ne sont pas dans  $T$  (car  $a_{z,1}$  ne l'est pas) et les autres points de  $\ell_{z,i} \cap J$  sont dans  $T$ . Il en résulte que  $A(z)$  ne dépend pas du choix de  $R_{z,1}$ . En effet  $A(z)$

vérifie encore les propriétés suivantes:

a) Si  $\exists 0 < u, v < n$  tels que  $a_{z,u} = a_{z,u+v \pmod n}$ , alors  $a_{z,i} = a_{z,j} = x$  pour tous  $i, j$ , et  $[z] = A(x) = A(z)$ .

Preuve. Comme  $F^{vk}(a_{z,u}) = a_{z,u}$ , on a  $F^{vk}(a_{z,i}) = a_{z,i}$  i.e.  $a_{z,i} = a_{z,i+v \pmod n}$  pour tout  $i$ . Vu l'orientation des  $\ell_i$  correspondante à celle des  $R_i$ , on déduit que  $a_{z,i} = a_{z,j}$  pour tous  $i, j$ . Réappliquons le résultat à  $x = a_{z,1} = a_{z,i}$ , on a  $[z] = A(x) = A(z)$ .

Par conséquent,  $x$  et  $z$  ont le même nombre de rayons externes, même période, et des nombres de rotation opposés (i.e. la somme des nombres de rotation combinatoire de  $x$  et de  $y$  est 1).

b) Si  $x = a_{z,1} \in S$ , alors  $[z] = A(x) = A(z)$ .

Preuve. Posons  $y = a_{z,2}$ , il suffit de montrer  $y = x$ , le reste est démontré par a).

Regardons les araignées  $A(x)$  et  $A(y)$  en choisissant pour  $R_{x,1}$  et  $R_{y,1}$  les rayons externes de  $x$  et de  $y$  occupés par  $\ell_{z,1}$  et  $\ell_{z,2}$  respectivement, on a donc  $a_{x,1} = a_{y,1} = z$  et les  $a_{x,i}, a_{y,i}$  sont dans une même orbite. L'application  $F^k: A(x) \rightarrow A(y)$  préserve l'orientation des rayons externes de  $x$  et de  $y$ , par suite  $F^k(a_{x,i}) = a_{y,i}$  pour tout  $i$ . Or  $F^k(a_{x,1}) = a_{y,1} = a_{x,1}$ , c'est-à-dire que la période de l'orbite de  $a_{x,1}$  divise  $k$ , on a  $a_{x,i} = F^k(a_{x,i}) = a_{y,i}$  pour tout  $i$ . Vu l'orientation des rayons externes de  $x$  et de  $y$ , l'ensemble  $\{a_{x,i}\}$  ne contient qu'en effet au plus deux points.

Supposons d'abord que  $x \in S_2$ , i.e.  $x$  admet au moins trois arguments externes. Alors il existe  $u, u'$  tels que  $a_{x,u} = a_{x,u'}$ . Appliquons le résultat a) à  $x$  avec  $a_{x,u}, a_{x,u'}$ , on déduit que  $[x] \cap S = \{z, x\}$ , en particulier,  $y = a_{z,2} = x$ .

Ainsi  $x \in S_2$  entraîne  $z \in S_2$ . Si  $z \in S_1$  alors  $x, y \in S_1$ . D'après le

lemme 3.4 , pour  $p$  la période de  $z$  , l'entier  $2p$  est la période des arguments externes de  $z$  donc des arguments de  $x$  . Et par le même lemme  $p$  est la période de  $x$  . Mais  $F^p(x)=y$  puisque  $F^p(R_{z,1})=R_{z,2}$ , d'où  $x=y$  .

On peut énoncer alors

Lemme 5.3. Soit  $\gamma$  un graphe connexe de PQ non contractile et contenant un point  $z \in S_2$  , alors  $\gamma$  contient un autre point unique  $x \in S$ , et  $x$  et  $z$  ont même période, même nombre d'arguments externes, des nombres de rotations combinatoires opposés. De plus,  $x$  et  $z$  ne sont pas d'un même côté de l'équateur  $E$  .

Démonstration. Les extrémités de  $A(z)$  sont dans  $S$  sinon  $\gamma$  est contractile, donc par a) et b) le point  $x$  existe et vérifie toutes les conditions du lemme sauf la dernière: il reste donc à prouver que  $x$  et  $z$  ne sont pas d'un même côté de  $E$  . Supposons que  $x$  et  $z$  sont d'un même côté de  $E$  , par exemple,  $x, z \in J_{c'}$  . Si  $Or(x)$  et  $Or(z)$  sont disjointes, alors le cycle de  $x$  et le cycle de  $z$  représentent deux points de bifurcation dans le chemin combinatoire  $ch(c')$  de  $c'$  (4.2), avec la période de  $x$  égale à la période de  $z$  , ceci contredit le corollaire 4.4 . Si  $Or(x)=Or(z)$  , alors pour  $n (\geq 3)$  le nombre total des arguments externes de  $x$  (donc de  $z$  ) , et  $m(x)/n$  ,  $m(z)/n$  les nombres de rotation combinatoire de  $x$  et de  $z$  respectivement, on a  $m(x)=m(z)$  et  $m(x)/n+m(z)/n=1$  . Ceci est impossible car  $m(x)$  est premier à  $n$  par le lemme 3.4 c) .

Qqfd.

Corollaire 5.4. Soient  $\{\ell_1, \dots, \ell_u\}$  un cycle périodique (i.e.



$F(\ell_i) = \ell_{i+1} \pmod{u}$  ) de courbes fermées dans PQ , et  $G_1, \dots, G_s$  les composantes connexes de  $S^2 - \bigcup_i \ell_i$  . Alors chaque  $G_i$  est une classe de la relation d'équivalence " $\approx$ " et pour toute composante  $B$  de  $S^2 - \bigcup_i \ell_i$  , chaque composante  $\gamma$  de  $\partial B$  est aussi une génératrice du cycle , i.e.

$$\bigcup_n F^n(\gamma) = \bigcup_i \ell_i ,$$

et pour toute composante  $B'$  de  $S^2 - \bigcup_i \ell_i$  et toute composante  $\gamma'$  de  $\partial B'$  , il existe  $n$  tel que

$$\gamma' = F^n(\gamma) .$$

**Démonstration.** Si  $\ell_1 \cap S_2 = \emptyset$  , alors tout point dans  $\ell_1 \cap PJ$  admet exactement deux arguments externes, donc  $\ell_1 = [x]$  pour  $x \in PJ \cap \ell_1$  et les  $\ell_i$  sont deux à deux disjoints. Par conséquent,  $s = u$  et  $G_i = \ell_i = [F^{i-1}(x)]$ .

S'il existe  $z \in \ell_1 \cap S_2$  , alors  $\ell_1 \cap S = \{x, z\}$  par le lemme 5.3 , et pour  $G_1, G_2, \dots, G_s$  les composantes connexes de  $\bigcup_i \ell_i$  , avec  $\ell_1 \subset G_1$  , et  $F(G_i) = G_{i+1} \pmod{s}$  , on a

$$G_i = A(F^{i-1}(z)) = A(F^{i-1}(x)) = [F^{i-1}(z)] .$$

Le reste est évident par le même lemme.

Qfd.

## Chapitre 6. Accouplements dégénérés et orbifold non hyperbolique

### 6.1. Accouplements dégénérés

Soient  $f_c: z \rightarrow z^d + c$  ;  $f_{c'}: z \rightarrow z^d + c'$  ;  $P_f, P_g$  finis et  $F = f \cup g$ . Notons  $\omega = F^{-1}(c)$  et  $\omega' = F^{-1}(c')$  (les points critiques). Rappelons que dans  $S^2 = L_c \cup L_{c'} / \sim$ , on note  $J = J_c \cup J_{c'}$  et  $E$  l'équateur, et qu'un cycle de Levy est un ensemble de courbes fermées simples  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  dans  $S^2 - P_F$ , ces courbes sont non périphériques, deux à deux disjointes et deux à deux non homotopes rel  $P_F$ , aucune des  $\gamma_j$  ne sépare les deux valeurs critiques, et une composante de  $F^{-1}(\gamma_j)$  est isotope à  $\gamma_{j-1}$  (ou à  $\gamma_n$  si  $j=1$ ).

Définition. On dit qu'un cycle de Levy  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  est un cycle de Levy dégénéré pour  $F$  si en appliquant la proposition 5.1 à  $X = \bigcup_i \gamma_i$  on obtient pour  $X_\infty$  une réunion disjointe de graphes connexes périodiques contractiles (i.e. ne contenant pas de courbe fermée).

Supposons qu'il existe  $x \in P_F$  tel que  $\# [x] \cap P_F \geq 2$  et  $[x]$  contractile, on peut supposer que  $x = F^k(c)$ ,  $k \geq 0$ . Alors pour le futur cycle périodique  $F^j(x), \dots, F^{j+p-1}(x)$  de  $x$ , chaque classe  $[F^{j+i}(x)]$  est contractile et contient au moins deux points de  $P_F$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ . La frontière  $\gamma_i$  d'un petit voisinage de  $[F^{j+i}(x)]$  est une courbe non périphérique ( $\{c, c'\}$  et  $[F^{j+i}(x)]$  sont dans des composantes différentes de  $S^2 - \gamma_i$ ), et  $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1}\}$  forme un cycle de Levy dégénéré. Par le théorème 2 le revêtement ramifié  $F$  n'est pas équivalent au sens de Thurston à une fraction rationnelle. Mais on peut encore "accoupler"  $f_c$  et  $f_{c'}$  d'une façon dégénérée. Supposons  $[c] \cap [c'] = \emptyset$ , alors par 5.2 pour

tout  $x$ , la classe  $[x]$  est contractile si et seulement si  $[F(x)]$  est contractile. On construit un revêtement ramifié  $F'$  de la façon suivante:

Posons  $P=P_F$  si  $[c']$  (donc  $[y']$  pour tout  $y'$  dans l'orbite directe de  $c'$ ) est contractile, ou  $P$  égale à l'orbite de  $c$  (avec  $c$  inclus) sinon. Alors pour tout  $y \in F^{-1}(P)$ , l'ensemble  $[y]$  est contractile. Soient  $V_i$  un petit voisinage de  $[x_i]$  pour  $x_i \in P$  tel que

$$(V_i - [x_i]) \cap P_F = \emptyset ; V = \bigcup_i V_i \text{ et}$$

$$V' = F^{-1}(V) = \bigcup_j V'_j \text{ avec } x_j \in V'_j \cap F^{-1}(P).$$

Prenons une application continue  $\psi$  (resp.  $\psi'$ ) de  $S^2$  dans  $S^2$  vérifiant que  $\psi$  (resp.  $\psi'$ ) est l'identité sur  $S^2 - V$  (resp. sur  $S^2 - V'$ ), que  $\psi([x_i]) = \{\tilde{x}_i\}$  (resp.  $\psi'([x_j]) = \{\tilde{x}_j\}$ ) est un point unique, et que  $\psi$  (resp.  $\psi'$ ) est un homéomorphisme de  $V_i - [x_i]$  à  $V_i - \{\tilde{x}_i\}$  (resp. de  $V'_j - [x_j]$  à  $V'_j - \{\tilde{x}_j\}$ ) pour tout  $i$  (resp. pour tout  $j$ ). On définit  $F'$  de  $\psi'(S^2)$  à  $\psi(S^2)$  par

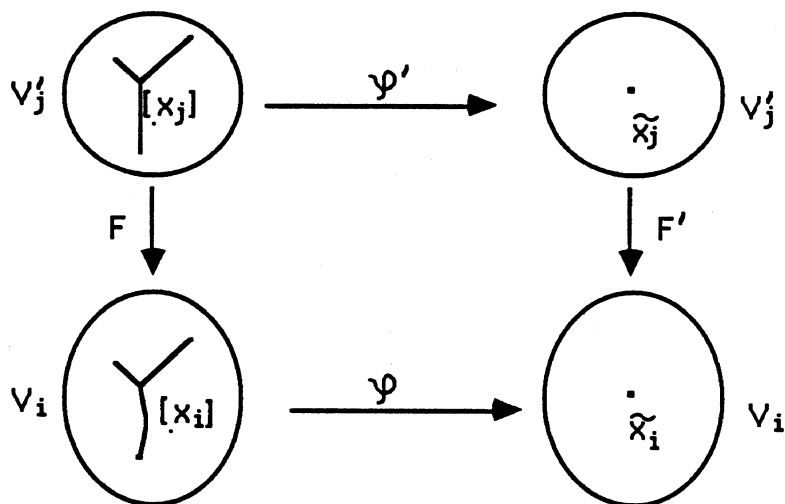


Figure 6.1.

$$F'|_{\varphi'(S^2)-V'} = F, \text{ et}$$

$$F'|_{V_j} = \varphi \circ F \circ \varphi'^{-1} \text{ et particulier si } F([x_j]) = [x_i], F'(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_i$$

pour tout  $j$  (Figure 6.1). On a  $P_{F'} = (P_F - P) \cup \{\tilde{x}_i | x_i \in P\}$ . On appelle  $F'$  l'accouplement dégénéré de  $f_c$  et  $f_{c'}$ .

Dans les autres cas, i.e. si chaque classe  $[x]$  contient au plus un point postcritique, ou si chaque classe qui contient au moins deux points postcritiques est non contractile, ou si  $[c] = [c']$ , on peut aussi définir l'accouplement dégénéré  $F'$  en prenant simplement  $F' = F$ . Par exemple, si  $c$  et  $c'$  sont tous les deux périodiques pour  $F$ , ils sont dans l'intérieur de leur ensemble de Julia rempli, et on prend donc  $F' = F$ .

En tout cas l'accouplement dégénéré  $F'$  admet un cycle de Levy si et seulement si  $F$  admet un cycle de Levy non dégénéré, ou bien  $[c] = [c']$  et  $[c]$  est contractile pour  $F$  (donc  $F' = F$ ).

Définition. Deux polynômes  $f_c$  et  $f_{c'}$  à ensemble postcritique fini sont accouplables si l'accouplement dégénéré  $F'$  de  $f_c$  et  $f_{c'}$  est équivalent à une fraction rationnelle au sens de Thurston.

Combinant le critère de Thurston et le critère de Levy, on a

Théorème 3. Soient  $F = f_c \# f_{c'}$  et  $F'$  l'accouplement dégénéré de  $f_c$  et  $f_{c'}$ . Si  $F'$  est à orbifold hyperbolique, alors  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont non accouplables si et seulement si, ou bien il existe un cycle de Levy non dégénéré pour  $F$ , ou bien  $[c] = [c']$  est contractile pour  $F$  (donc aussi pour  $F' = F$ ).

## 6.2. Accouplements dégénérés à orbifold non hyperbolique

Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$ ,  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ ,  $F = f_c \perp f_{c'}$  et  $F'$  l'accouplement dégénéré de  $f_c$  et  $f_{c'}$ . Par définition d'orbifold dans le chapitre 2,  $\nu(x) \geq d$  pour tout  $x \in P_{F'}$ .

**Lemme 6.1.** Si  $O_{F'}$  est non hyperbolique, alors ou bien  $c$  ou  $c'=0$ , ou bien  $c$  et  $c'$  sont tous les deux strictement prépériodiques pour  $F$ . Dans ce dernier cas, on a soit  $\#P_{F'}=3$ ; soit  $\#P_{F'}=4$  avec  $O_{F'}$  ayant les poids  $(2,2,2,2)$ .

**Démonstration.** Supposons que  $c, c'$  sont non nuls et au moins un des  $c, c'$  par exemple  $c$  est périodique pour  $F$  donc pour  $F'$ , alors comme  $\nu_{F'}(c)$  est un multiple de  $d \cdot \nu_{F'}(0)$  et  $\nu_{F'}(0)$  est un multiple de  $\nu_{F'}(c)$ , on a  $\nu_{F'}(x) = \infty$  pour tout  $x$  dans l'orbite de  $c$ , mais cette orbite contient au moins deux points, donc

$$\chi(O_{F'}) \leq -\sum_{x \in O_{F'}(c')} (1 - 1/\nu_{F'}(x)) < 0$$

i.e.  $O_{F'}$  est toujours hyperbolique.

Les deux valeurs critiques  $c, c'$  sont toujours distinctes pour  $F'$  et elles ne sont pas fixes, donc  $\#P_{F'} \geq 3$ . Si  $\#P_{F'} \geq 5$ , alors la caractéristique d'Euler de  $O_{F'}$  vérifie

$$\chi(O_{F'}) \leq 2 - 5 \times (1 - 1/d) < 0,$$

donc  $O_{F'}$  est toujours hyperbolique. Si  $\#P_{F'}=4$ , on a

$$\chi(O_{F'}) \leq 2 - 4 \times (1 - 1/d)$$

qui est négatif sauf si  $d=2$  et  $O_{F'}$  a les poids  $(2,2,2,2)$ .

Cqfd.

Il existe une méthode de construire quelques fractions rationnelles à orbifold non hyperbolique (exemples de Lattès généralisés): soient  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  un sous groupe avec  $\Gamma \approx \mathbb{Z}^2$ , et  $\Delta \subset S^1$  un sous groupe avec  $\Delta \cdot \Gamma = \Gamma$ . Posons  $E = \mathbb{C}/\Gamma$  et  $\Sigma = E/\Delta$ . Supposons  $\Sigma \approx \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (on peut démontrer que  $c'$  est automatique si  $\Delta \neq \{1\}$ ). Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\lambda \Gamma \subset \Gamma$ , le quotient  $f$  dans  $\Sigma$  de l'application  $t \rightarrow \lambda t$  est une fraction rationnelle à orbifold non hyperbolique (car le revêtement universel de  $O_f$  est  $\mathbb{C}$  ([DH3])).

Proposition 6.2. Soient  $c, c'$  tels que  $O_{F'}$  soit non hyperbolique. Alors  $F'$  n'est pas équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si  $c$  et  $c'$  sont dans des membres conjugués de  $M_d$ .

Démonstration. Si l'un des  $c, c'$  est égale à 0, par exemple  $c'=0$ , alors  $F$  est équivalent au sens de Thurston à l'application  $\hat{f}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}: \hat{f}|_{\mathbb{C}} = f_c$  et  $\hat{f}(\infty) = \infty$ . L'application  $\hat{f}$  est une fraction rationnelle, on voit donc que  $f_c$  et  $f_0$  sont accouplables et  $F' = F$ .

Dans le cas où  $c, c' \neq 0$ , par le lemme 6.1, on a  $\#P_{F'} = 3$  ou 4. Si  $\#P_{F'} = 3$ , alors par la proposition 9.2 de [DH3] l'application  $F'$  est toujours équivalent à une fraction rationnelle. Deux cas sont possibles:

$$I.1. \quad \omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} \varepsilon \xrightarrow{F} \varepsilon \quad \text{et} \quad \omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} \varepsilon' \xrightarrow{F} \varepsilon'$$

avec  $\varepsilon, \varepsilon'$  points fixes de  $F$  et  $[\varepsilon] = [\varepsilon']$  mais  $[c] \neq [c']$ . Ceci n'est pas possible pour  $d=2$  car le point  $[\varepsilon]$  pour  $F'$  a trois préimages:  $[\varepsilon], c$  et

$c'$ . La caractéristique d'Euler  $\chi(O_{F'})=2-3(1-1/d)$  est négative sauf si  $d=3$ . Pour  $d=3$ , il existe 4 valeurs de  $c$  dans  $M_3$  vérifiant

$$\omega \xrightarrow{f_c} c \xrightarrow{f_c} \varepsilon \xrightarrow{f_c} \varepsilon$$

qui sont  $\gamma_M(1/3)$ ,  $\gamma_M(2/3)$ ,  $\gamma_M(1/6)$ ,  $\gamma_M(5/6)$ , et dans notre cas  $c=c'$  est l'un de ces quatre valeurs pour que  $F$  vérifie les hypothèses. En fait la fraction rationnelle équivalente à  $F'$  est sous la forme

$$z \longrightarrow (z^3 \pm j)/(1 \pm jz^3) \text{ où } j=e^{2i\pi/3}=(-1+i\sqrt{3})/2,$$

et elle peut être réalisée comme un exemple de Lattès généralisé avec

$$\Gamma=\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}, \Delta=\{1, j, j^2\} \text{ et } \lambda=i\sqrt{3}.$$

II.  $\omega' \xrightarrow{F'} c' = \omega \xrightarrow{F'} c \xrightarrow{F'} \beta \xrightarrow{F'} \beta$ , alors

$\chi(O_{F'})=2-(1-1/d)-2(1-1/d^2)$  qui est négatif sauf si  $d=2$ . Dans  $M_2$ , on peut déterminer que  $c=-2 \in M(1/2)$  et  $c'=\gamma_M(1/4) \in M(1/3)$  ou bien  $c'=\gamma_M(3/4) \in M(2/3)$ ,  $c$  et  $c'$  sont dans les membres non conjugués de  $M_2$ , et  $F'$  est équivalent à une fraction rationnelle de la forme  $1/(2z^2-1)$ , et celle-ci peut être réalisée comme un exemple de Lattès généralisé avec

$$\Gamma=\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, \Delta=\{1, -1, i, -i\} \text{ et } \lambda=1+i.$$

Supposons que  $\#P_{F'}=4$ , par la proposition 6.1,  $d=2$  et  $c, c'$  sont tous les deux strictement prépériodiques pour  $F$ . Trois cas sont possibles:

III.  $[c]=[c']$ , alors  $F'=F$  et pour que  $\#P_{F'}=4$  il faut

$$\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta \text{ et}$$

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} \beta' \xrightarrow{F} \beta'$$

avec  $\beta, \beta'$  points fixes de  $F$  et  $[\beta]=[\beta']$ , on détermine que

$$c=c'=-2 = \gamma_M(\frac{1}{2}) \in M(1/2), F=f_{-2} \perp f_{-2}.$$

Le revêtement ramifié  $F$  n'est pas équivalent à une fraction rationnelle par la raison suivante:  $F$  est équivalent au quotient de  $h : (x,y) \rightarrow (2x,y) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dans l'espace  $S^2 \approx \Sigma = E/\pm$  où  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ , comme  $h$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire, son quotient n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire non plus, donc n'est pas une fraction rationnelle.

IV.  $[c] \neq [c']$  et  $\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} a \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta$  et

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} a' \xrightarrow{F} \beta' \xrightarrow{F} \beta'$$

avec  $\beta, \beta'$  points fixes de  $F$  et  $[a]=[a']$  et  $[\beta]=[\beta']$ , donc

$$\omega \xrightarrow{F'} c \searrow$$

$$\omega' \xrightarrow{F'} c' \xrightarrow{F'} a \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta,$$

on détermine que soit  $c=c'=\gamma_M(1/4) \in M(1/3)$  soit  $c=c'=\gamma_M(3/4) \in M(2/3)$  (donc  $c$  et  $c'$  sont dans un même membre de  $M_2$  qui n'est pas



conjugué à lui-même) et  $F'$  est équivalent à une fraction rationnelle de la forme

$$z \rightarrow (z^2 \pm i) / (1 \pm iz)$$

qui est conjuguée à  $z \rightarrow \pm(i/2)(z+1/z)$ . Cette fraction rationnelle est en fait un exemple de Lattès typique avec

$$\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, \Delta = \{1, -1\} \text{ et } \lambda = 1+i.$$

V.  $[c] \neq [c']$  et  $\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} a \xrightarrow{F} b \xrightarrow{F} a$  et

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} b' \xrightarrow{F} a' \xrightarrow{F} b'$$

avec  $[a]=[a']$  et  $[b]=[b']$ , alors pour  $F'$  :

$$\omega \xrightarrow{F'} c \xrightarrow{F'} a \searrow$$

$$\omega' \xrightarrow{F'} c' \xrightarrow{F'} b \xrightarrow{F'} a.$$

On détermine comme dans IV que soit  $c=c'=i \in M(1/3)$  soit  $c=c'=-i \in M(2/3)$  et  $F'$  est équivalent à une fraction rationnelle de la forme

$$(z^2+a)/(1+az^2) \text{ avec } a = (1 \pm i\sqrt{7})/4.$$

Mais on ne sait pas si cette fraction rationnelle peut être réalisée comme un exemple de Lattès.

Cqfd.

Mary Rees et Ben Wittner ont montré indépendamment dans leurs papiers ([R2] 4.3 et [W] 3.1) le théorème suivant:

Supposons  $d=2$  et  $c, c' \in M$  tels que 0 soit périodique pour  $f_c$  et  $f_{c'}$ . Supposons de plus que  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont accouplables et que  $G$  est une fraction rationnelle telle que  $F'=F=f_c \perp f_{c'}$  soit équivalent à  $G$  au sens de Thurston. On note  $J(G)$  la fermeture des points périodiques répulsifs de  $G$ . Alors la relation d'équivalence " $\approx$ " est automatiquement fermées, et il existe une application continue

$$\Phi : S^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

qui vérifie que

1.  $\Phi$  est surjective
2.  $\Phi \circ F = G \circ \Phi$
3.  $\Phi^{-1}(\bar{\mathbb{C}} - J(G)) = \check{K}_c \cup \check{K}_{c'}$
4.  $\Phi$  est injective et analytique sur  $\check{K}_c \cup \check{K}_{c'}$
5.  $\Phi$  est une limite uniforme de homéomorphismes
6.  $\Phi^{-1}(z)$  est une classe de la relation d'équivalence " $\approx$ " pour tout  $z \in \bar{\mathbb{C}}$ .

Par la propriété 6, l'application  $\Phi$  induit une conjugaison de  $(S^2/\approx, [F])$  à  $(\bar{\mathbb{C}}, G)$ , où  $[F]$  est l'application quotient de  $F$  sur  $S^2/\approx$ . Par suite  $S^2/\approx$  est une sphère. On peut donc réaliser l'accouplement de  $f_c$  et  $f_{c'}$  en collant  $K_c$  et  $K_{c'}$  le long leurs bords en identifiant  $\gamma_c(\theta)$  à  $\gamma_{c'}(-\theta)$ .

Mary Rees affirme qu'il existe des résultats analogues pour le cas où 0 est strictement prépériodique pour au moins un des  $f_c, f_{c'}$ .



## Chapitre 7. Démonstration du résultat principal

### 7.1 Réduction

Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$  et  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$  avec  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{t'}$  ;  
 $F = f_c \natural f_{c'}$  et  $F'$  l'accouplement dégénéré de  $f_c$  et  $f_{c'}$  . On démontre  
d'abord un théorème intermédiaire:

Théorème 4. Supposons que  $F$  est à orbifold hyperbolique. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

- a)  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont non accouplables;
- b) ou bien  $[c]=[c']$  est contractile (donc  $[\omega]=[\omega']$  non contractile), ou bien il existe un cycle de Levy  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  non dégénéré pour  $F$  et chaque  $\gamma_i$  traverse l'équateur  $E$  au moins une (donc deux) fois;
- c) il existe une courbe fermée  $\gamma'$  dans  $Q$  ;
- d) ou bien  $[c]=[c']$  est contractile (donc  $[\omega]=[\omega']$  non contractile), ou bien il existe un cycle de courbes fermées  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  dans  $PQ$  vérifiant  $F(\gamma_i)=\gamma_{i+1}$ ,  $i < m$ ,  $F(\gamma_m)=\gamma_1$ , aucune des  $\gamma_i$  ne sépare les deux valeurs critiques, et pour toute composante  $B$  de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ , chaque composante  $\gamma$  de  $\partial B$  est l'une des  $\gamma_i$  .

Démonstration. a)  $\Leftrightarrow$  b) est fait par le théorème 3. Une courbe dans un cycle de Levy traverse toujours l'équateur car sinon toute courbe du cycle serait homotope à une courbe complètement contenue dans une même demi-sphère de  $S^2 = L_c \natural L_{c'} / \sim$  par exemple  $L_c$ , et le cycle réduit à un cycle de Levy non dégénéré pour le revêtement  $\hat{f}_c : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  avec  $\hat{f}_c(\infty)=\infty$ , par suite  $\hat{f}_c$  ne devrait pas être équivalent à une fraction rationnelle au sens de Thurston, ce qui est absurde car  $\hat{f}_c$  est déjà une fraction rationnelle.

b)  $\Rightarrow$  c). Prenons  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  un cycle de Levy non dégénéré pour  $F$ . Appliquons la proposition 5.1 à  $X = \bigcup_i \gamma_i$ , on obtient  $X_\infty$  un graphe de PQ, et par hypothèse que le cycle de Levy soit non dégénéré au moins une composante de  $X_\infty$  est non contractile, il existe donc une courbe fermée dans PQ.

c)  $\Rightarrow$  d). S'il existe  $k$  tel que  $F^{k-1}(\gamma)$  soit non contractile mais  $F^k(\gamma)$  soit contractile, alors  $c, c' \in F^k(\gamma)$  et donc  $[c] = [c']$  est contractile.

Si  $F^n(\gamma')$  est non contractile pour tout  $n$ , alors la future orbite périodique de  $\gamma'$  forme un cycle de courbes fermées  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_u\}$  dans PQ. Par le corollaire 5.4, ce cycle induit un autre cycle de courbes fermées  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  vérifiant que pour toute composante  $B$  de  $S^2 - \bigcup_{1 \leq i \leq m} \gamma_i$ , chaque composante  $\gamma$  de  $\partial B$  est l'une des  $\gamma_i$ .

Une courbe fermée périodique  $\gamma$  de PQ ne sépare jamais les deux valeurs critiques, car premièrement  $c, c' \notin \gamma$  ( $c, c' \notin PQ$ ); deuxièmement, si  $\gamma$  séparait les deux valeurs critiques, sa préimage  $F^{-1}(\gamma)$  serait une seule courbe, elle devrait être dans  $Q$  et contenir tous les arguments de la forme  $\theta/d + i/d$  pour un  $\theta \in \gamma \cap E$  ( $i=0, 1, \dots, d-1$ ), mais comme  $\theta$  est périodique, l'un des  $\{\theta/d + i/d\}$  est encore périodique et les autres sont strictement prépériodiques, ainsi la courbe  $F^{-1}(\gamma)$  contient à la fois un argument à dénominateur premier à  $d$  et un argument à dénominateur non premier à  $d$ , ceci contredit la proposition 1.3.

d)  $\Rightarrow$  b). L'ensemble de la frontière d'un petit voisinage de chaque composante de  $\bigcup_i \gamma_i$  forme une multicourbe  $\Gamma$  dont on peut extraire un cycle de Levy, car aucune courbe de  $\Gamma$  ne sépare les deux valeurs

critiques, et une courbe au voisinage  $\gamma_i$  figure dans la préimage par  $F$  d'une courbe au voisinage de  $\gamma_{i+1} \pmod{m}$ .

Cafd.

Lemme 7.1 (Mary Rees). S'il existe un cycle de courbes

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$$

dans  $PQ$  dont aucune des  $\gamma_i$  ne sépare les deux valeurs critiques, alors les composantes-disques de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  forment une chaîne

$$R_1, R_2, \dots, R_v,$$

avec  $v \geq 2$  ; de plus  $c, c' \in R_1$  et  $F(R_i) = R_{i+1}$ ,  $1 \leq i < v$ .

Démonstration. Comme aucune des  $\gamma_i$  ne sépare les deux valeurs critiques, les points  $c$  et  $c'$  sont dans une même composante de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ . Un ensemble ouvert  $B$  est une composante de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  si et seulement si  $\partial B \subset \bigcup_i \gamma_i$  et  $B \cap \bigcup_i \gamma_i = \emptyset$ . Soit  $B$  une composante-disque de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  qui ne contient pas  $c$  et  $c'$  (ceci existe car  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  admet au moins deux composantes-disques). Comme  $\partial B \subset \bigcup_i \gamma_i$ , une unique composante  $\delta$  de  $F^{-1}(\partial B)$  est encore dans  $\bigcup_i \gamma_i$ , et la composante  $B'$  de  $F^{-1}(B)$  bornée par  $\delta$  est encore une composante de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  (car  $B' \cap \bigcup_i \gamma_i = \emptyset$ ). Posons  $B' = B_1$ . Si  $c, c' \notin B_1$ , on peut continuer à prendre  $B_2$  l'unique composante de  $F^{-1}(B_1)$  qui est encore une composante-disque de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ , et ainsi de suite. On prétend qu'il

existe un  $N$  tel que  $c, c' \in B_N$ . Car sinon il existe  $q$  et  $p$  tels que  $B_q = B_{q+p}$  et  $X = \bigcup_{q+1 \leq i \leq q+p} B_i$  est un ensemble mono-invariant par  $F$  à l'intérieur non vide, ceci contredit le complément 2 de la proposition 5.1. Prenons la chaîne la plus longue parmi les chaînes associées à chaque composante-disque de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ , et renumérotions-les, nous aurons  $R_1, R_2, \dots, R_\nu$ ,  $\nu \geq 2$ .

Cqfd.

**Remarque 7.2.** S'il existe un cycle de courbes fermées périodiques  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ , alors par le corollaire 5.4 on a  $\bigcup_i \gamma_i = \bigcup_j [F^j(z)]$  pour un certain  $z$ , et pour tout  $x \in S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ , la classe  $[x]$  est contenue dans la même composante de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  que  $x$ .

## 7.2. Démonstration finale

Soient  $f_c : z \rightarrow z^d + c$ ,  $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$  ( $d \geq 2$ ) à  $P_c, P_{c'}$  finis  $F = f_c \amalg f_{c'}$  et  $F'$  l'accouplement dégénéré de  $f_c$  et  $f_{c'}$ . On rappelle que  $M(t)$  est le membre d'argument interne  $t$  de  $M_d$  et  $\mathcal{D}_t = M(t) \cap \mathcal{D}$ .

**Théorème 1.** Les deux polynômes  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont non accouplables si et seulement s'il existe  $t$  tel que  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{1-t}$ .

**Démonstration.** Le cas où  $F'$  est à orbifold non hyperbolique est fait par la proposition 6.2. On suppose ici  $O_{F'}$  hyperbolique. On peut donc appliquer le théorème 4.

$\Leftarrow$ . D'après la proposition 5.2,  $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$  est non contractile, on peut tracer une courbe fermée là dedans, la condition c) du théorème 4 est donc

vérifiée. Le reste est fait par le même théorème.

⇒. Supposons que  $f_c$  et  $f_{c'}$  sont non accouplables. D'après les discussions de la section 6.2, on a  $c, c' \neq 0$ . Donc  $c \in \mathcal{D}_t$  et  $c' \in \mathcal{D}_{t'}$  pour certains  $t$  et  $t'$ .

D'après le théorème 4, ou bien  $[c]=[c']$  est contractile, ou bien il existe un cycle de courbes fermées périodiques  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  dans  $PQ$  dont aucune courbe ne sépare les deux valeurs critiques  $c$  et  $c'$ .

a) Si  $m=1$ , alors la courbe  $\gamma_1$  est mono-invariante par  $F$ . Par le lemme 7.1, on a  $S^2 - \gamma_1 = R_1 \cup R_2$ ,  $c, c' \in R_1$  et  $F(R_1) = R_2$ . Ceci implique que  $F: \gamma_1 \rightarrow \gamma_1$  renverse l'orientation de  $\gamma_1$ , il existe donc au moins deux points fixes de  $F$  dans  $\gamma_1$ . Comme ce sont des points fixes admettant plus d'un rayons externes, ce sont forcément  $\alpha_c$  et  $\alpha_{c'}$ . Par la proposition 5.2, on a  $t+t'=1$ .

b) Pour le cas où  $m>1$ , on a deux démonstrations pratiquement différentes. Nous les notons  $b1$  (avec  $b1', b1'', b1'''$ ) et  $b2$ .

b1) On définit d'abord une chaîne d'ensembles connexes  $R_1, R_2, \dots, R_\nu$  de la façon suivante:

Cas 1. S'il existe un cycle périodique  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  dans  $PQ$  avec  $m \geq 2$ , on prend  $(R_1, R_2, \dots, R_\nu)$  la chaîne des composantes-disques de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$  décrite dans le lemme 7.1;

Cas 2. Si  $[\omega]=[\omega']$  est non contractile avec  $[c]=[c']$  contractile, prenons  $[c], [F(c)], \dots, [F^{\nu-1}(c)]$  les classes disjointes de  $Or(c)$ , et prenons  $R_1=[c]$  et  $R_i=F^{i-1}(R_1)=[F^{\nu-1}(c)]$ ,  $2 \leq i \leq \nu$ .



Pour cette chaîne  $(R_i)$  dans les deux cas, notons successivement  $I = F^{-1}(R_1)$  qui est connexe et disjoint de  $R_1$ , et  $B_1, B_2, \dots, B_d$  les adhérences des  $d$  composantes de  $S^2 - I$  avec  $B_1$  contenant  $R_1$ . Les  $B_i$  sont fermées.

Pour un ensemble connexe  $U \subset S^2 - R_1$ , l'ensemble  $F^{-1}(U)$  a  $d$  composantes connexes, elles sont  $F^{-1}(U) \cap B_1, F^{-1}(U) \cap B_2, \dots, F^{-1}(U) \cap B_d$ , et pour tout  $i$ , l'application  $F : F^{-1}(U) \cap B_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme. De plus, si  $x \in \tilde{B}_i$ , alors  $[x] \in \tilde{B}_i$ .

$b1'$ ). Rappelons que les ensembles  $\varepsilon_i = [\varepsilon_i(c)] = [\varepsilon_{d-1-i}(c')]$ ,  $0 \leq i \leq d-2$  sont deux à deux disjoints et sont disjoints de  $[\alpha_c]$  et de  $[\alpha_{c'}]$ , et  $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$  si et seulement si  $t+t'=1$  (la section 5.2). Posons

$$Y = [\alpha_c] \cup [\alpha_{c'}] \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-2} \varepsilon_i.$$

L'ensemble  $Y$  a donc  $d$  composantes connexes si  $t+t'=1$ , et  $d+1$  composantes connexes si  $t+t' \neq 1$ . Chaque composante de  $Y$  est un graphe de PQ connexe mono-invariant par  $F$ .

Soit  $j \in \{2, 3, \dots, d\}$ . Prenons successivement  $U_0 = B_j$ , et  $U_n = F^{-1}(U_{n-1}) \cap B_j$ . On a  $U_n \subset U_{n-1}$  pour tout  $n$  car  $U_1 \subset U_0 = B_j$ . Comme  $B_j \cap P_F$  est fini, il existe  $k \geq 1$  tel que  $U_{k+1} = F^{-1}(U_k) \cap B_j$  soit isotope à  $U_k$  rel  $P_F$ . Appliquons la proposition 5.1 à  $U_k$  ( $F : U_{k+1} \rightarrow U_k$  est un homéomorphisme), on obtient  $U_{\infty, j}$  un graphe de PQ connexe contractile mono-invariant par  $F$ , et qui contient tous les points fixes de  $F$  dans  $B_j$ . Ainsi, l'ensemble

$$B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_d$$

contient au plus  $d-1$  composantes connexes de  $Y = [\alpha_c] \cup [\alpha_c'] \cup \bigcup_i \varepsilon_i$ .

Pour le cas 1, les ensembles  $I$  et  $R_1$  sont disjoints (car  $m \geq 2$ ); pour le cas 2, ceci est évident. Comme  $F(I) = R_1$ ,  $F(R_1) = R_2$ , et  $I, R_1, R_2$  sont deux à deux disjoints, l'ensemble  $I \cup R_1$  ne contient pas de point fixe de  $F$ , ni leur classe d'équivalence (dans le cas 2 c'est évident, dans le cas 1 il faut utiliser la remarque 7.2). Donc les autres composantes connexes de  $Y$  sont contenues dans  $B_1 - R_1$ .

b1''). Posons successivement  $B = B_1$ ,  $V_0 = B - \tilde{R}_1$  et

$$V_n = \{z \mid z, F(z), F^2(z), \dots, F^n(z) \in V_0\} = V'_{n-1} - \tilde{R}_1$$

où  $V'_{n-1} = F^{-1}(V_{n-1}) \cap B$ , autrement dit

$$\begin{aligned} V'_{n-1} &= \{z \mid z \in B; F(z) \in V_{n-1}\} \\ &= \{z \mid z \in B; F(z), F^2(z), \dots, F^n(z) \in B - \tilde{R}_1\}. \end{aligned}$$

On a  $V'_n \subset V'_{n-1}$  et  $V_n \subset V_{n-1}$  pour tout  $n$ .

On montre d'abord qu'il existe au moins une composante parmi les  $R_i$  qui est contenue dans  $S^2 - B$ : dans le cas 1, comme une composante de  $\partial I = F^{-1}(\partial R_1)$  est dans le cycle  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ , on a  $(S^2 - \tilde{B}) \cap \bigcup_i \gamma_i \neq \emptyset$ , donc  $S^2 - B$  contient des composantes-disques de  $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ ; dans le cas 2, pour le premier point périodique  $F^u(c)$  dans  $Or(c)$ , on a  $F^u(c) \notin R_1$ , et dans  $F^{-1}(F^u(c))$  il existe deux points postcritiques, et  $B$  n'en contient qu'un, ceci implique  $(S^2 - B) \cap P_F \neq \emptyset$  et donc  $(S^2 - B) \cap \bigcup_i R_i \neq \emptyset$ .

Ainsi il existe  $s \geq 1$  tel que

$$R_1, R_2, \dots, R_s \subset \tilde{B} \text{ et } R_{s+1} \subset S^2 - B.$$

Comme les  $R_2, \dots, R_s$  sont disjoints de  $R_1$ , pour  $z \in R_1$ , on a

$$F(z) \in R_2 \subset B - R_1, F^2(z) \in R_3 \subset B - R_1, \dots, F^{s-1}(z) \in R_s \subset B - R_1$$

et

$$F^s(z) \in R_{s+1} \subset S^2 - B.$$

Donc

$$R_1 \subset V_j \text{ pour } j \leq s-2 \text{ et } R_1 \cap V_j = \emptyset \text{ pour } j \geq s-1.$$

Par conséquent, si  $V_{n-1}$  est connexe alors  $V_n$  est connexe. Comme  $V_0$  est connexe, on en déduit par récurrence que  $V_n$  est connexe pour tout  $n$ .

De plus, pour  $n > s$ ,  $V_n = V'_{n-1}$  et  $F : V_n \xrightarrow{\approx} V_{n-1}$  est un homéomorphisme.

Comme  $V_s \cap P_F$  est fini, il existe un  $k > s$  tel que  $V_{k+1}$  soit isotope à  $V_k$  rel  $P_F$ . Mais  $V_{k+1}$  est une composante connexe de  $F^{-1}(V_k)$ , on peut donc appliquer la proposition 5.1 à  $V_k$  et obtenir  $V_\infty$  un élément de  $PQ$  connexe, mono-invariant par  $F$  (Figure 7.2), et qui contient tous les points fixes de  $F$  dans  $B$ .

Donc il existe au plus une composante connexe de l'ensemble  $Y =$

$$[\alpha_c] \cup [\alpha_{c'}] \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-2} \varepsilon_i \text{ contenue dans } B - R_1.$$

$b1''''$ ). Combinant les résultats de  $b1'$ ) et  $b1''$ ) on déduit que  $Y$  a au plus  $d$  composantes connexes. Ceci n'est possible que quand  $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$ . D'où  $t+t'=1$ .

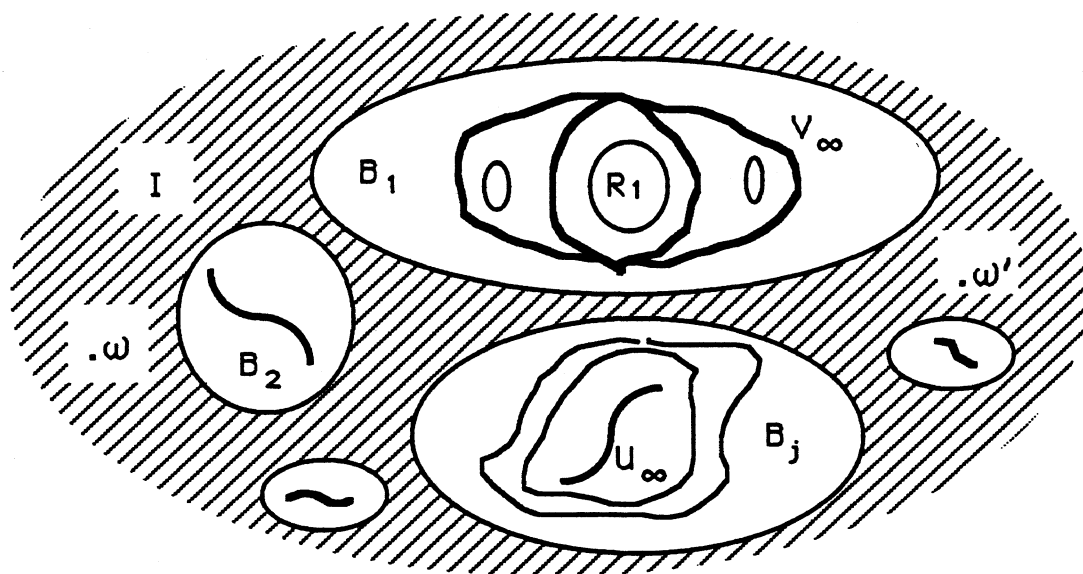


Figure 7.2

b2). On définit d'abord la même chaîne  $\{R_1, \dots, R_s\}$  comme dans b1). Posons  $I = F^{-1}(R_1)$  et  $B$  l'adhérence de la composante de  $S^2 - I$  contenant  $R_1$ .

Pour tout  $U \subset S^2$ , notons  $U' = F^{-1}(U) \cap B$ . Si  $U \subset S^2 - R_1$ , alors  $F : U' \rightarrow U$  est un homéomorphisme. Remarquons  $R'_1 = \emptyset$ , et  $R'_{i+1} = R_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, s$ .

On définit comme dans b1'') la suite  $V_0, V_1, \dots, V_n, \dots$ . Alors on a pareillement les résultats qu'il existe  $s$  tel que  $R_1, R_2, \dots, R_s \subset \tilde{B}$  et  $R_{s+1} \subset S^2 - B$ , et que l'ensemble  $V_\infty = \bigcup_{n \rightarrow \infty}^m V_n$  existe, qui est un graphe de PQ, et est connexe, et mono-invariant par  $F$ .

On montre ici que  $V_\infty$  est de plus non contractile. On pose  $R_{0,1} = \tilde{R}_1$  et  $R_{0,s+1} = S^2 - B$ . Alors on a  $S^2 - V_0 = R_{0,s+1} \cup R_{0,1}$  avec  $\tilde{R}_1 \subset R_{0,1}$  et  $R_{s+1} \subset R_{0,s+1}$ . Pour  $k = 1, 2, \dots, s-1$ , posons  $R_{k,1} = \tilde{R}_1$ ,  $R_{k,s+1} = S^2 - B$ , et  $R_{k,j} = R'_{k-1,j+1}$ ,  $j = s, s-1, \dots, s-k+1$ , alors

$$S^2 - V_k = (R_{k,s+1}UR_{k,s}U \dots UR_{k,s-k+1})UR_{k,1}$$

avec  $R_j \subset R_{k,j}$ ,  $j=s+1, s, s-1, \dots, s-k+1$ , et  $\tilde{R}_1 \subset R_{k,1}$ . En particulier

$$S^2 - V_{s-1} = (R_{s-1,s+1}UR_{s-1,s}U \dots UR_{s-1,2})UR_{s-1,1}.$$

Posons  $R_{s,s+1} = S^2 - B$ , et  $R_{s,j} = R'_{s-1,j+1}$ ,  $j=s, s-1, \dots, 1$ , alors  $R_i \subset R_{s,i}$  et

$$S^2 - V_s = R_{s,s+1}UR_{s,s}U \dots UR_{s,2}UR_{s,1}.$$

Ainsi  $S^2 - V_s$  admet  $s+1$  composantes dont chacune contient un des  $R_i$ .

Soit  $U$  un ensemble connexe tel que  $R_1 \subset U$ , alors  $F^{-1}(U)$  est connexes et  $ICF^{-1}(U)$ . Donc  $(S^2 - B)UU'$  est connexe. Pour  $n > s$ , on pose  $R_{n,s+1} = (S^2 - B)UR'_{n-1,1}$  et  $R_{n,j} = R'_{n-1,j+1}$ ,  $j=1, 2, \dots, s$ . Alors on a

$$S^2 - V_n = R_{n,1}UR_{n,2}U \dots UR_{n,s+1}$$

les  $R_{n,j}$  sont connexes, deux à deux disjoints, et  $R_j \subset R_{n,j}$  pour tout  $j$ .

En ce qui concerne  $V_\infty$ , comme pour  $n$  assez grand, les ensembles  $R_{n,1}, R_{n,2}, \dots, R_{n,s+1}$  sont dans des composantes distinctes de  $S^2 - V_\infty$ , l'ensemble  $V_\infty$  est bien non contractile.

Si  $V_\infty$  est une courbe, c'est-à-dire que  $V_\infty$  n'a pas de point de branchement, alors par la partie a) de ce théorème on déduit que  $\alpha_c, \alpha_{c'} \in V_\infty$  et ensuite  $t+t'=1$ . Si  $V_\infty$  admet des points de branchements, alors par le lemme 5.3, il en a exactement deux et qui ne sont pas d'un même côté de l'équateur, ce sont donc  $\alpha_c$  et  $\alpha_{c'}$ . D'après

la proposition 5.2, on a enfin  $t+t'=1$ .

Cqfd.

Remarque. On déduit par le fait  $V_n \subset V_{n-1}$  qu'il existe  $k > s$  tel que  $V_k$  soit isotope à  $V_{k-1}$ . On voit donc que  $\partial V_k$  est isotope à  $\partial V_{k-1}$ . Par la construction des  $R_{k,i}$ , on voit que  $\partial V_k$ , en temps qu'une partie des préimages du cycle de courbes originales  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ , forme un cycle de Levy, et l'unique composante non disque du complémentaire de ce nouveau cycle (elle est bien sûr  $V_k$ ) admet une préimage isotope à elle-même.

Si on vérifie bien la démonstration du lemme 7.1 et de b) ci-dessus, on voit que les arguments utilisés sont aussi valables pour les cycles de Levy non dégénéré (avec bien sûr les  $R_i, V_i$  à isotopie près), on obtient donc un complément qui est peut-être utile pour les autres:

Complément. Soit  $F$  un revêtement ramifié de  $S^2$  sur  $S^2$  ayant seulement deux points critiques. Supposons qu'il existe un cycle de Levy  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  non dégénéré pour  $F$ . Alors dans l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq m} F^{-n}(\gamma_i)$$

on peut extraire un autre cycle de Levy  $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k\}$  qui vérifie que dans  $S^2 - \bigcup_i \ell_i$  il existe une unique composante  $C$  qui n'est pas un disque topologique, et qu'on a  $F^{-1}(C) = C' \cup C''$ ,  $C' \cap C'' = \emptyset$ , et que  $C'$  est isotope à  $C$ . Ainsi on peut toujours supposer qu'un cycle de Levy non dégénéré vérifie cette propriété.



## Références Bibliographiques

- [BL] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bulletin of the A.M.S., Volume 11 , n°1 , Juillet 1984 .
- [BR] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv för Matematik 6 (1965), 103~144 .
- [DGH] R.L. Devaney, L.R. Goldberg et J.H. Hubbard, A dynamical approximation to the exponential map by polynomials, Preprint, 1987 .
- [DH1] A. Douady et J.H. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.A.S., t 294 ( 18 janvier 1984 ).
- [DH2] A. Douady et J.H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes, Publication d'Orsay, I et II, avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei et P. Sentenac, 1984~1985 .
- [DH3] A. Douady et J.H. Hubbard, A proof of Thurston's topological characterization of rational function, Preprint, Institut Mittag-Leffler.
- [D1] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbaki, 35<sup>e</sup> année, 1982-1983 , exposé n°599 , Novembre 1982 .
- [D2] A. Douady, Algorithms for computing angles in the Mandelbrot set, Proc. of the Conference on chaotic dynamics; Georgia Tech., Atlanta, U.S.A., avril 1985 .
- [G] Gantmacher, Matrix Theory, Chelsea Publishing Company, 1960 .



- [La1] P. Lavaurs, Les arbres de Hubbard périodiques sont concrets, Preprint.
- [La2] P. Lavaurs, Une description combinatoire de l'induction définie par  $M$  sur les rationnels à dénominateur impair, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série I, n°4, 1986.
- [Le] S. Levy, Critically finite rational maps, Thèse de Ph. D., Université de Princeton, Princeton, U.S.A., 1985.
- [R1] M. Rees, Realization of matings of polynomials as rational maps of degree two, manuscrit, 1986.
- [R2] M. Rees, Hyperbolic rational maps of degree two, Part I and II, Preprint de l'Université de Liverpool, 1986.
- [Ta] Tan lei, Accouplements des polynômes quadratiques complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n°17, 1986.
- [Th] B. Thurston, The combinatorics of iterated rational maps, Preprint de l'université de Princeton, Princeton, U.S.A., 1983.
- [W] B. Wittner, Thèse de Ph. D., Université de Cornell, Ithaca, U.S.A., 1986.
- [Y] J.-C. Yoccoz, Sur la taille des membres de l'ensemble de Mandelbrot, manuscrit, 1986.

## Table des matières

<b>Chapitre 1. INTRODUCTION.....</b>	<b>3</b>
1.1. Introduction .....	3
1.2. Préliminaires.....	7
<b>Chapitre 2. RESULTAT DE THURSTON ET DE LEVY.....</b>	<b>13</b>
2.1 Critère de Thurston.....	13
2.2. Critère de Levy .....	16
<b>Chapitre 3. ARGUMENTS EXTERNES DES POINTS FIXES</b>	
<b>ET DES POINTS PERIODIQUES DANS L'ENSEMBLE DE JULIA .....</b>	<b>22</b>
3.1. Ensembles de Julia.....	22
<b>Chapitre 4. ARGUMENTS EXTERNES ET INTERNES</b>	
<b>DANS L'ESPACE DE PARAMETRES.....</b>	<b>41</b>
4.1. Composantes hyperboliques dans l'espace de paramètres .....	41
4.2. Membres de l'espace de paramètres.....	46
4.3. Modulation et chemin combinatoire.....	49
<b>Chapitre 5. ACCOUPLEMENT.....</b>	<b>54</b>
5.1. Accouplement .....	54
5.2. Classes d'équivalences des points fixes dans l'accouplement .....	59
5.3. Araignée .....	61
<b>Chapitre 6. ACCOUPLEMENTS DEGENERES</b>	
<b>ET ORBIFOLD NON HYPERBOLIQUE.....</b>	<b>66</b>
6.1. Accouplements dégénérés.....	66
6.2. Accouplements dégénérés à orbifold non hyperbolique .....	69
<b>Chapitre 7. DEMONSTRATION DU RESULTAT PRINCIPAL .....</b>	<b>75</b>
7.1. Réduction.....	75
7.2. Démonstration finale.....	78
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>86</b>