



**HAL**  
open science

# Sensibilité des robots parallèles à câbles aux incertitudes des paramètres géométriques des poulies et mécanique des câbles

Thibaut Paty

## ► To cite this version:

Thibaut Paty. Sensibilité des robots parallèles à câbles aux incertitudes des paramètres géométriques des poulies et mécanique des câbles. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2021. Français. NNT : 2021TOU30305 . tel-04164378

**HAL Id: tel-04164378**

**<https://theses.hal.science/tel-04164378>**

Submitted on 18 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

en vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

*délivré par*  
*Université Toulouse III - Paul Sabatier*

---

Présentée et soutenue par  
Thibaut PATY

le 16 décembre 2021

## Sensibilité des robots parallèles à câbles aux incertitudes des paramètres géométriques des poulies et mécaniques des câbles

---

École doctorale : **MEGEP - Mécanique, Énergétique, Génie civil, Procédés**

Spécialité : **Génie mécanique, mécanique des matériaux**

Unité de recherche :  
**Institut Clément Ader, UMR CNRS 5312,**

Thèse dirigée par  
**Stéphane SEGONDS et Nicolas BINAUD**

Jury

**M. Marc GOUTTEFARDE**, Rapporteur  
**M. Philippe WENGER**, Rapporteur  
**M. Stéphane CARO**, Examinateur  
**M<sup>me</sup> Floriane LAVERNE**, Examinatrice  
**M. Florian BUGARIN**, Invité  
**M. Yann LANDON**, Invité



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs, Stéphane SEGONDS et Nicolas BINAUD, de m'avoir offert la chance de pouvoir réaliser cette aventure qu'est la thèse. Merci Stéphane d'avoir dirigé, partagé tes intuitions et connaissances lors de ces trois années. De la même manière, Nicolas, je t'exprime toute ma gratitude pour l'ensemble de tes apports et du temps que tu m'as consacré autant pour travailler que pour me remotiver dans les moments compliqués.

Je suis reconnaissant envers tous les membres du jury. Premièrement, merci Marc GOUTTEFARDE et Philippe WENGER de m'avoir fait l'honneur de rapporter ce manuscrit de thèse. Je tiens en second lieu à remercier Stéphane CARO d'avoir présidé ce jury de thèse mais aussi de m'avoir accompagné durant la publication de mon premier article. Je suis reconnaissant à Floriane LAVERNE pour l'échange à la suite de ma présentation. Un grand merci à Florian BUGARIN pour sa présence durant les trois ans ainsi que lors de la présentation des travaux de thèse, mais aussi pour sa contribution à cette dernière. Je tiens à remercier tout particulièrement Yann LANDON qui fut là au début et à la fin de cette aventure et sans qui elle n'aurait certainement jamais commencé.

Je suis reconnaissant à tout le personnel du laboratoire ICA pour leur bonne humeur. J'aimerais notamment exprimer ma reconnaissance à Steven MARGUET pour la passion qu'il met dans ses cours et qui m'a donné envie de poursuivre en parcours conception puis par la suite en thèse. J'aimerais remercier plus particulièrement les doctorants des pauses cafés sans qui les trois années de thèse n'auraient clairement pas été aussi agréables. Merci à Louis, Lara, Adrien, Ange, Alexandra, Ljoudi, Hassan, Souques, Alexy, Martha. Merci à vous pour tous ces bons moments, ces pauses... après-midis de pauses, ces soirées doctorants ou non! On se donne rendez-vous pour d'autres grands moments ensemble! Sincèrement merci.

Comment ne pas parler du bureau AR2018 et surtout de ses locataires! Si je les présente chronologiquement, un merci infini à Adama, mon sensei, qui m'a accueilli dans son bureau (qu'il avait privatisé avant mon arrivée) et qui est une personne exceptionnelle. Merci Adama et bien sûr Jennifer pour ces nombreuses soirées cocktails, BBQ, nouvel an et autres! Par la suite Julien nous a rejoint, et merci à lui pour tous ses conseils et ces moments de discussion sur le bricolage, la vie etc. Merci à lui de m'avoir écouté me plaindre quand ça n'allait pas. Pour finir, le petit dernier, Arthur! Un grand merci à toi pour ta bonne humeur, ton petit côté beauf et surtout (et pas des moindres) ces parties de Geoguessr et SauteCanton endiablées! On se retrouve au pied des murs d'escalade ou... des comptoirs des bistrotts ou les deux!

J'aimerais remercier mes amis de Strasbourg qui sont toujours là même après 10 ans! Je sais que je peux compter sur vous quand je rentre pour sortir et décompresser. Donc merci à toute l'équipe du squat, merci Alexandre, Amélie, Cyril, Baptiste, Lucile, Bastien, Claire,

## Remerciements

---

Gaël, Julie, Marco, Thibaut et bien évident un merci particulier à Paul ! Un grand merci aux « Toulousains » merci pour ces 8 dernières années et les prochaines. Merci à Pablo (même si tu es loin on ne t'oublie pas), Yohan, Bilal et Adrien merci pour ces soirées, ces week-ends, ces après-midis qui m'ont permis de m'échapper un peu. Comment oublier le plus ancien ? ! Oui je parle bien de toi Aymeric. Merci d'être venu assister à ce jour si particulier, sans toi ça n'aurait pas été pareil.

Je tiens à remercier Marie-Pascale et Jean-Michel pour m'avoir accueilli dans leur famille et d'être toujours aussi bienveillants. Merci Marie d'avoir pris le temps de relire mes premiers chapitres, ça a fortement réduit les erreurs de français.

J'aimerais remercier une personne qui m'a accompagné sur une longue période et pas des plus simples. Merci Cathie de m'avoir aidé et soutenu quand j'étais enfant, merci pour ta patience et ta pédagogie.

Il est venu l'heure d'aborder les personnes les plus importantes dans ma vie... ma famille. Merci Vincent pour tout ton humour et tes bonnes bouteilles. Je tiens à faire un gros bisou à Lucien et merci pour cette petite année où tu m'as apporté tellement de bonheur (et c'était l'année où il en fallait !). Comment te remercier Amandine ? Tu as tant fait pour moi, tu es une grande sœur merveilleuse sans qui je ne serais pas celui que je suis maintenant. Merci de m'avoir toujours soutenu même si (je le sais) à des moments tu devais être plus proche d'avoir envie de m'étriper. Je t'aime.

Maman, Papa, je n'ai pas de mots pour vous exprimer tout ce que je ressens. Vous vous êtes tellement battus pour moi. Je suis tellement fier d'être votre enfant. Sans vous je n'aurais jamais pu réaliser cette thèse et encore plus que ça, me construire et m'épanouir comme je l'ai fait. Vous m'avez fait confiance dans mes choix. Merci d'avoir toujours été présents, toujours attentionnés et aimants. On ne se le dit pas assez souvent mais je vous aime.

Pour finir j'aimerais remercier Marion qui a le courage de me supporter depuis maintenant 8 ans (j'espère plus encore dans le futur) et en particulier plus durant ces trois ans de thèse. J'aurais arrêté mille fois si tu n'avais pas été là. Je t'aime.

Ces remerciements ne représentent que le millième de ce que je ressens à votre égard. Merci encore à vous tous.

# Sommaire

Remerciements . . . . .	iii
Sommaire . . . . .	v
<hr/>	
Introduction . . . . .	1
1 État de l’art sur les Robots Parallèles à Câbles . . . . .	3
1.1 Introduction sur les robots parallèles à câbles . . . . .	4
1.2 Modélisations des robots parallèles à câbles . . . . .	13
1.3 Outils Mathématiques . . . . .	28
1.4 Analyse de sensibilité . . . . .	31
1.5 Conclusion et cadre de l’étude . . . . .	32
2 Modélisations statiques et erreur de pose des robots parallèles à câbles suspendus . . . . .	35
2.1 Modèles Géométriques Étendus . . . . .	36
2.2 Prise en compte du comportement mécanique du câble . . . . .	44
2.3 Méthode d’évaluation de l’erreur de pose théorique . . . . .	53
2.4 Conclusion . . . . .	61
3 Analyse de sensibilité des paramètres géométriques et mécaniques de RPC suspendus à 3ddl . . . . .	63
3.1 Conception mécanique détaillée de l’architecture des poulies . . . . .	64
3.2 Description et erreur de pose des cas d’études de RPC à 3ddl . . . . .	70
3.3 Analyse de sensibilité des paramètres géométriques de la poulie . . . . .	88
3.4 Analyse de sensibilité des paramètres mécaniques de la chaîne d’actionnement du RPC . . . . .	98
3.5 Influence de la taille du RPC sur la sensibilité des paramètres géométrico-mécaniques	113
3.6 Conclusion . . . . .	116
4 Étude de l’influence de l’hystérésis du module de Young des câbles . . . . .	119
4.1 Influence de la non-linéarité du module de Young des câbles . . . . .	120
4.2 Recherche des points d’ancrages des poulies minimisant l’erreur de pose théorique	134
4.3 Conclusion . . . . .	146
Conclusion générale et perspectives . . . . .	147
Conclusion générale . . . . .	147
Perspectives . . . . .	150

A	Modèle de poulie pesante . . . . .	153
A.1	Modèle géométrique de poulie pesante équipée d'une articulation de type joint de cardan . . . . .	154
A.2	Résultats . . . . .	156
<hr/>		
	Table des figures . . . . .	159
	Liste des tableaux . . . . .	163
	Nomenclature . . . . .	165
	Bibliographie . . . . .	171
	Publications Personnelles . . . . .	183
	Article de revues d'audience internationale avec comité de lecture: . . . . .	183
	Table des matières . . . . .	185

# Introduction

Les robots sont le sujet central dans cette thèse. Ils font l'objet pour le grand public, en plus de la terreur véhiculée par les récits de sciences fictions, d'une crainte de voir la société être contrôlée par les robots. Cela serait synonyme pour les travailleurs de perdre leur place et leur utilité au sein de la société. Or, bien souvent, le mot *robot* évoque uniquement des robots humanoïdes et de façon sous-jacente le domaine de l'intelligence artificielle. La robotique est bien plus vaste que cela et ses objectifs foncièrement opposés à cette représentation. Le mot *robot* est défini par le *Larousse* comme un : « Appareil automatique capable de manipuler des objets ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe, modifiable ou adaptable ». Au regard de cette définition, un robot n'est autre qu'un système automatique reproduisant uniquement une action désignée et implémentée sous forme de code informatique. Aucune notion de libre arbitre ou de quelconque réflexion n'est associée au système du robot, ces thématiques réfèrent au domaine des intelligences artificielles. Les formes que peuvent prendre les robots sont variées, des robots humanoïdes, étant encore au début de leur développement, jusqu'aux robots sériels, équipant déjà toutes les chaînes d'assemblage automobile. Ce dernier exemple illustre bien que la robotique est déjà largement répandue et implantée dans l'industrie. Pour pouvoir palier aux différentes sollicitations que ce milieu exige, de nombreuses architectures de système ont été développées. Nous avons déjà cité les robots sériels prenant la forme d'un bras mécanisé. La famille du robot faisant l'objet des recherches développées dans ce manuscrit est celle des robots parallèles. J.P. Merlet définit cette famille, sur le site de l'INRIA, comme : « [...] un mécanisme en chaîne cinématique fermée, constitué d'un organe terminal à degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes. ». Ce type de robot peut être constitué de chaînes d'actionnement rigides ou souples, ce dernier type nommé Robots Parallèles à Câbles (RPC) sera le sujet principal de cette thèse.

La définition du mot *robot*, renvoie à la nécessité qu'un tel système remplisse certaines conditions, la précision fait partie de celles-ci. Actuellement, les robots parallèles à segments rigides sont largement employés dans des applications variées et présentent une très grande précision mais restent généralement limités en terme de volume de travail. En ce qui concerne les RPC cela n'est pour le moment pas encore le cas. Ce système encore relativement récent fait l'objet de recherches afin de pouvoir l'utiliser pour des applications industrielles, médicales et autres. En effet, de par leur actionnement par câbles les RPC présentent certains avantages non négligeables, mais aussi des problématiques qui leurs sont propres. À l'heure actuelle, pour être précis, un RPC est souvent asservi par de nombreux capteurs et contrôles de position visuels ou lasers. La mise en place de processus de commande complexe est aussi une solution, mais reste limitant dans la mise en œuvre en temps réel. De plus, la phase d'étude de pré-conception d'un RPC est souvent restreinte au choix du nombre de câbles, de ses dimensions et de son architecture. Actuellement, c'est uniquement après sa fabrication qu'il



est recherché à améliorer la précision d'un RPC en rajoutant des systèmes d'asservissement. Cette dernière étape ajoute un coût financier significatif de par l'équipement nécessaire et le travail que cela génère. C'est aux vues de ces observations que le sujet de cette thèse a été développé. La problématique ayant guidé nos études peut alors se formaliser comme « Quels sont les paramètres et les incertitudes de la chaîne d'actionnement affectant la précision de la plateforme mobile du RPC et quels sont les choix à faire lors de la conception pour limiter leurs effets ? ». Dans un premier temps nous nous sommes focalisés sur les paramètres géométriques liés aux poulies de renvoi des câbles. Par la suite, les travaux s'intéressent au comportement mécanique particulier des câbles.

Ce manuscrit regroupant l'ensemble des travaux menés est agencé en quatre chapitres. Le chapitre 1 explore la littérature existante afin d'en extraire les avantages. Ce chapitre expose les méthodes et modèles ayant déjà été développés pour étudier les RPC, leur espace de travail, les câbles, et ceux permettant la gestion des tensions dans les câbles. Le chapitre 2 met en place les modèles développés pour nos études et qui seront appliqués tout au long des études suivantes. Quatre modèles complets sont présentés, ils prennent en compte au fur et à mesure de plus en plus de paramètres des RPC. Les chapitres 3 et 4 regroupent l'ensemble des études, des résultats et des analyses. Dans le chapitre 3 une nouvelle poulie avec une articulation de type joint de cardan est conçue. Des études sont conduites sur l'influence de cette nouvelle poulie sur l'erreur de pose théorique de la plateforme mobile à l'aide de plan d'expériences. La première étude concerne les paramètres décrivant géométriquement les poulies. Ensuite une seconde s'intéresse à différents facteurs influençant le comportement mécanique des câbles. De plus, cette dernière étude est menée sur différentes dimensions de RPC. Le chapitre 4, pour finir, se focalise sur le phénomène d'hystérésis impactant le module de Young des câbles. Dans ce chapitre nous cherchons à quantifier l'impact qu'a ce comportement sur l'erreur de pose théorique. Pour finir, une méthode de recherche de la structure optimale de RPC vis-à-vis de l'erreur de pose théorique maximale due à l'hystérésis est présentée. Une conclusion générale suivie des perspectives de recherches viendra clore ce manuscrit.

# 1

## État de l'art sur les Robots Parallèles à Câbles

1.1	Introduction sur les robots parallèles à câbles	4
1.1.1	Définitions	5
1.1.2	Applications	10
1.2	Modélisations des robots parallèles à câbles	13
1.2.1	Modélisations	13
1.2.2	Gestions des tensions	17
1.2.3	Espaces de travail	18
1.2.4	Modélisations des câbles	20
1.3	Outils Mathématiques	28
1.3.1	Outils d'optimisations	28
1.3.2	Plan d'expériences	29
1.4	Analyse de sensibilité	31
1.5	Conclusion et cadre de l'étude	32

Le domaine des mécanismes parallèles entraînés par des câbles est un champ relativement récent dans le domaine des robots parallèles. Effectivement, les premiers modèles sont développés dans les années 90, notamment par Albus [Alb+92] et Hirata [Hir+92], alors que le développement des mécanismes parallèles à segments rigide a quant à lui débuté à la moitié du XX<sup>ème</sup> siècle par V.E. Gough pour le test de pneumatiques [Gal16].

À l'heure actuelle les RPC restent très ancrés dans le monde académique. La grande majorité de ceux présent dans l'industrie sont développés en partenariat avec des laboratoires, comme l'illustre le projet CAROCA de l'IRT Jules Verne en partenariat avec Airbus, Naval Group et STX France [Gag+15b; Gag+18]. Très peu de RPC sont fabriqués en série, la plupart sont des commandes spécifiques. Cependant, nous pouvons citer l'entreprise Haption avec le RPC INCA dédié aux interfaces à retour d'efforts ou encore les entreprises Spidercam et SkyCam vouées à filmer des événements sportifs ou culturels dans des structures de grandes dimensions.

De par leur utilisation, la précision est une caractéristique prépondérante de ces systèmes. L'amélioration de la précision peut-être obtenue de différentes manières. Il est ainsi possible de mettre en place un asservissement par capteur et un contrôle en temps réel afin de corriger et de compenser l'erreur de pose. Pour accroître la précision des RPC une autre solution est d'améliorer la précision des modèles employés dans les schémas de commande, au prix d'une augmentation du temps de calcul, rendant la commande en temps réelle difficile. Il est aussi possible de s'attarder sur une conception préliminaire robuste aux variations des paramètres

de conception. Cependant, cela implique de connaître au mieux les phénomènes entraînant leur imprécision. Il est à noter que les deux solutions ne sont pas incompatibles.

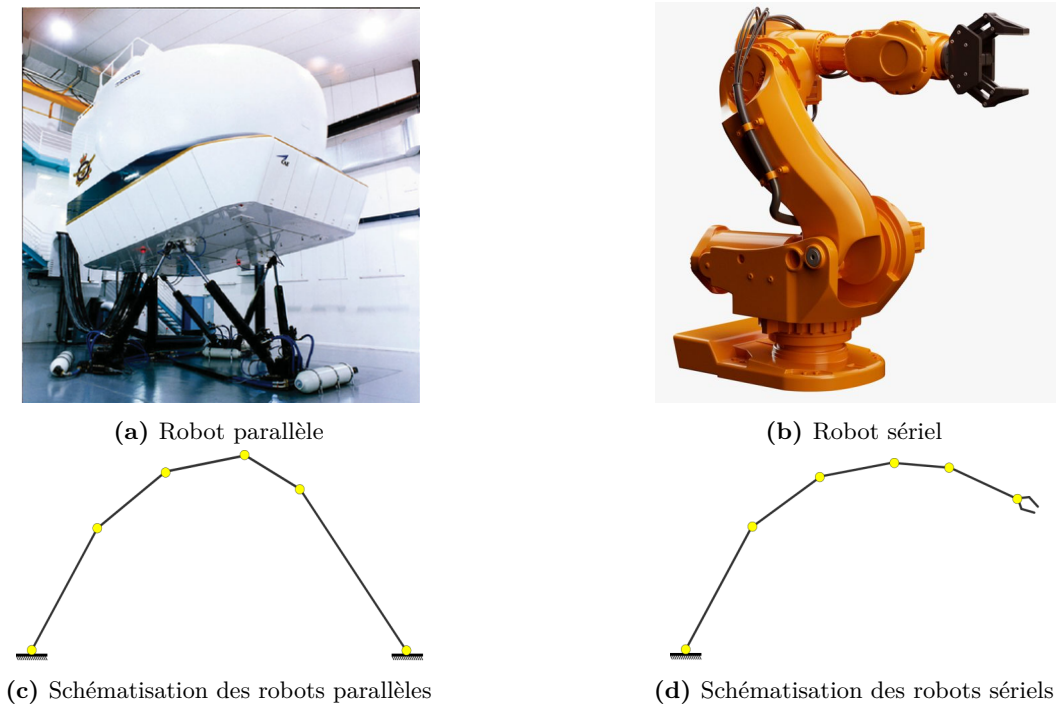
L'axe d'étude de cette thèse se portant sur la seconde solution, nous explorerons, au travers de ce chapitre, les travaux de recherches existants portant sur les Robots Parallèles à Câbles (RPC), sujet principal de cette thèse. Nous chercherons ainsi à présenter les RPC par leurs architectures et leurs particularités ainsi que leurs applications. De plus, ce chapitre nous permettra d'appréhender les outils précédemment développés pour l'étude des RPC et ainsi identifier les verrous scientifiques persistants dans le domaine.

Dans un premier temps, une présentation des RPC, de leur architecture et de leur environnement est faite. Par la suite, les différentes solutions pour modéliser et répondre aux problématiques des RPC sont présentées. Les outils mathématiques et numériques utilisés durant ces travaux de thèse seront ensuite évoqués. Pour finalement, conclure ce chapitre et énoncer le cadre de l'étude qui sera menée dans la suite de ce manuscrit de thèse.

## 1.1 Introduction sur les robots parallèles à câbles

La robotique est un domaine ayant connu une croissance importante dans l'industrie au cours des dernières décennies. Cette évolution peut être expliquée par l'envie d'améliorer les conditions de travail des employés en réduisant les tâches répétitives, dangereuses et pénibles. Cela peut aussi être vu comme une envie d'accroître les cadences et la productivité. Effectivement, les manipulateurs qu'ils soient parallèles ou sériels permettent la réalisation de tâches variées, pouvant être complexes tout en maintenant un rythme élevé.

Comme cela a été évoqué, il existe différentes familles d'architectures de robots. Ces familles permettent de répondre à des problématiques et échelles variées. Il existe ainsi deux grandes catégories : les manipulateurs parallèles et les manipulateurs sériels. Les robots parallèles sont un type particulier de manipulateur se traduisant par une chaîne cinématique fermée contrairement à leurs homologues les manipulateurs sériels en chaîne cinématique ouverte (Fig. 1.1). Les robots sériels schématisés dans la Fig. 1.1d sont un enchaînement de segments rigides liés par des articulations motorisées constituant une unique chaîne cinématique ouverte reliant la base et l'organe terminal mobile. L'architecture parallèle quant à elle, se traduit par la présence d'une Plate-forme Mobile (PM) dotée de  $n$  degrés de liberté, étant reliée à sa base par un nombre défini de chaînes cinématiques formant une ou un ensemble de chaînes cinématiques fermées (Fig. 1.1c).



**Figure 1.1** – Présentation et schématisation des robots parallèles et sériels

Les RPC sont une sous-famille des robots parallèles, ayant la particularité de remplacer les segments rigides par des câbles. Cette spécificité engendre de nombreuses différences dans leurs comportements mécaniques comparativement aux robots sériels. Ces différences ont une répercussion sur l'ensemble de l'étude des RPC, allant de leur conception jusqu'à leur processus de commande et leur mise en service.

Dans cette partie, nous définirons plus longuement le concept de RPC en définissant tout d'abord sa structure de façon générale. Puis nous rentrerons plus en détails sur les différentes configurations existantes pour enfin étudier les applications des RPC actuelles et futures. Par la suite, nous chercherons à définir les concepts d'espace de travail et de précision.

### 1.1.1 Définitions

Qu'est-ce qu'un RPC ? C'est la question à laquelle nous allons répondre dans ces prochaines pages. Effectivement, avant de pouvoir correctement traiter les problématiques de ces travaux de thèse il est nécessaire de connaître au mieux le domaine d'étude de celle-ci. Tout d'abord nous fixerons la structure et les notations associées. Nous explorerons, ensuite, les différentes architectures de RPC existantes. Pour finalement présenter toute l'étendue des possibilités de ces systèmes au travers d'applications existantes ou en cours d'étude.

#### 1.1.1.1 Structure

Dans cette section, nous allons chercher à définir la structure d'un RPC. C'est-à-dire, observer les similitudes entre les RPC. Cette première étape nous permettra ainsi d'introduire les différents sous-systèmes mécaniques composant les RPC ainsi qu'à présenter le paramétrage employé tout au long de cet exposé.

La figure 1.2 représente un RPC pouvant être qualifié de générique. Effectivement, cette image nous permettra d'introduire les différentes parties composant un RPC.

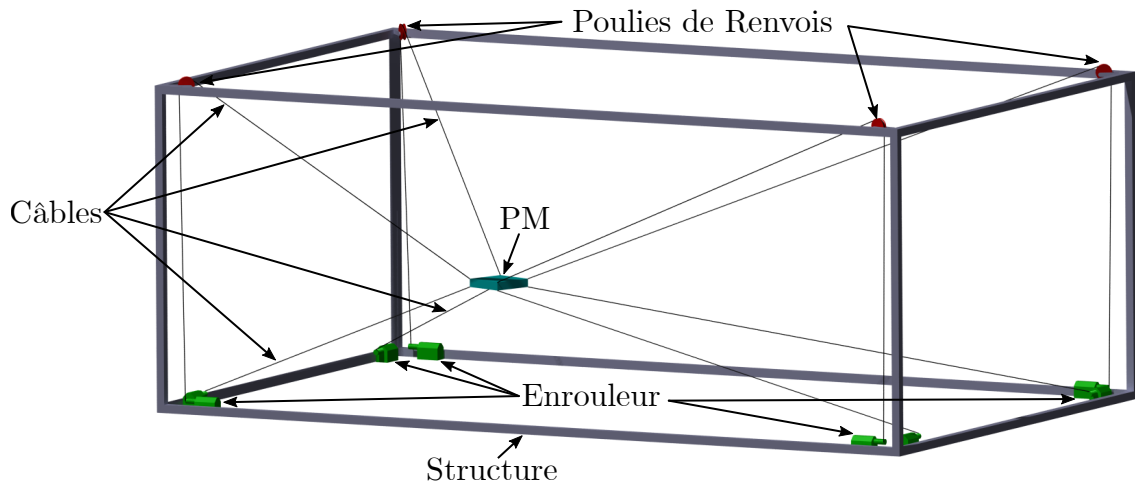


Figure 1.2 – Représentation d'un RPC générique

Tout d'abord la première partie observable est la structure porteuse, représentée en gris sur la Fig. 1.2. La structure d'un RPC est cruciale dans son fonctionnement et son maintien. En effet, elle soutient, la plupart du temps, l'ensemble des autres sous-systèmes et est chargée de transmettre les efforts générés par l'utilisation du RPC au sol. Ce bâti doit donc être rigide afin de ne pas introduire de fortes erreurs de positionnement dans l'utilisation du RPC. Dans la majorité des cas cette structure est composée de profilés ou treillis métalliques constituant une structure imposante comme représenté sur la Fig. 1.2 et mise en œuvre pour les RPC comme CAROCA [Gag+15a], CoGiRo [Din+13] ou encore les RPC IPAnema 1 et 2 [Pot+13]. Cependant, la multitude de problématiques auxquelles les RPC cherchent à répondre a conduit à développer d'autres solutions. Nous pouvons citer [Gos+10] où les actionneurs des câbles sont fixés aux murs. La solution mise en œuvre dans [Mer+10], sur un RPC dédié au secourisme dans des environnements post-catastrophes naturelles, remplace cette structure lourde et encombrante par une série de trépieds. Cela confère au RPC une légèreté et une adaptabilité lui permettant d'effectuer des interventions rapides sur des zones complexes. Nous pouvons encore citer des RPC ayant un bâti mobile comme le prototype de RPC Fastkit [Ped+20; Ras+18] où les sous-systèmes de la chaîne d'actionnement des câbles sont fixés sur un bâti lui-même monté sur une base motorisée. De la même manière le RPC présenté par Erskine [Ers+19] où la structure habituellement rigide est remplacée par des drones volants. Il est à noter que les solutions de structures légères ou qui ne sont pas ancrées au sol, engendrent nécessairement une limitation dans l'utilisation du RPC. En effet, une masse transportée trop élevée pour ce type de structure entraînerait un défaut d'intégrité du RPC vis-à-vis des tensions dans les câbles et des liaisons à la structure.

Un manipulateur a, par définition, le rôle de manipuler ou de réaliser des actions sur son environnement. Il est donc nécessaire qu'il soit doté d'une interface pour interagir avec celui-ci nommée Plate-forme Mobile (PM) ou encore effecteur. Sa forme peut être variée en fonction de la problématique à laquelle elle est en charge de répondre. Elle est représentée par un parallélépipède bleu sur la figure 1.2. La PM est reliée à la structure et est entraînée exclusivement, dans le cadre des RPC, par une série de câbles. En fonction des RPC elle est dotée de  $n$  degrés de liberté (ddl) étant au maximum de 3 translations et 3 rotations pour un RPC non planaire. Son emplacement dans l'espace est nommé la pose de la PM, composé par sa position  $\mathbf{p}$  en  $x$ ,  $y$  et  $z$  et son orientation  $\mathbf{o}$  décrit par les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . L'ensemble de ces ddl peuvent être contrôlés ou non en fonction du nombre de câbles du RPC. Cette particularité sera évoquée plus en détail dans la partie 1.1.1.2. Pour illustrer cette partie nous pouvons citer la PM du RPC CAROCA [Pic+18b] ou encore celle du RPC CoGiRo [Gou+15a]. De plus, dans un certain nombre de travaux la PM est ramenée à un

point masse [Bak+19a; Bor+09]. Cela réduit le nombre maximal de ddl de 6 à 3, en effet ce type de PM ne possède que les 3 ddl en translation. Tout comme pour la structure du RPC, d'autres types de géométries de PM sont étudiées comme dans [Mét+21] où il est cherché à augmenter la capacité d'orientation, à l'aide d'un effecteur sphérique motorisé. Nous pouvons aussi citer Weber [Web+15] ramenant les actionneurs des câbles sur la PM et non plus fixés sur le bâti fixe du RPC.

Les parties structurales principales ayant été passées en revue, nous allons maintenant remonter la chaîne d'actionnement de la PM afin d'observer ses composants. Tout d'abord un élément clef des RPC est sans aucun doute les câbles. En effet, c'est grâce à ce composant que les RPC se distinguent des mécanismes parallèles classiques et lui confèrent ses principaux avantages mais aussi inconvénients. Effectivement, cela permet au RPC d'être un système extrêmement léger en comparaison de ses capacités de charge. De plus, cela lui permet d'atteindre des capacités dynamiques importantes de par la faible inertie de ses parties mobiles. De même, cette particularité réduit sa consommation d'énergie. Cependant, de par sa construction un câble travaille de façon unidirectionnelle. Cela se traduit par le fait qu'il ne peut générer uniquement des efforts de tractions. Un phénomène de flambage apparaît immédiatement lorsqu'il est soumis à des efforts de compression. En fonction de ses dimensions et de son champ d'utilisation un RPC peut être constitué de câbles aux propriétés différentes. En effet, il existe une multitude de types de câbles, tels que les câbles métalliques (acier galvanisé, acier inoxydable etc.) mais aussi des câbles en matériaux polymère (Dyneema, Kevlar etc.) sans oublier que ces câbles peuvent être composés de plusieurs matériaux. Il est important de noter que sa construction engendre des propriétés mécaniques différentes. Cependant, les câbles et leurs comportements seront développés plus en détail dans la section 1.2.4 et feront l'objet d'une partie de l'étude menée dans les chapitres 3 et 4.

Pour générer les efforts nécessaires à mouvoir la PM il est indispensable de pouvoir réduire les longueurs des câbles. Les RPC sont donc équipés d'actionneurs ayant comme rôle de modifier les dimensions longitudinales des câbles (représentés en vert sur la figure 1.2). Ces actionneurs dans le cadre des RPC sont la plupart du temps des enrouleurs. Cela permet un gain de place en enroulant le câble autour d'une bobine. De plus, cela permet une meilleure conservation du câble lors de l'inactivité du RPC. Nous pouvons observer dans les articles [Iza+13; Jin+17; Sch+16; Yon+14] différents modèles ou prototypes d'enrouleurs. Cependant, il existe également des actionneurs linéaires comme présentés par Merlet [Mer08] mais limitant forcément les dimensions du RPC.

Quelle que soit l'architecture du RPC et de par la contrainte de travail en tension des câbles, nous pouvons observer la présence constante de câbles provenant de la partie supérieure du RPC. Plusieurs solutions existent pour contraindre les câbles à sortir du haut du RPC. La première est de fixer les actionneurs directement sur la partie supérieure du RPC et de faire sortir le câble directement de l'enrouleur comme sur le RPC IPAnema 1 [Mie+10]. La seconde solution, celle illustrée sur la Fig. 1.2, est de ramener l'ensemble des enrouleurs au sol puis de faire remonter les câbles vers des poulies de renvois (en rouge sur la Fig. 1.2). Nous pouvons observer cette solution technique sur le RPC CAROCA [Gag+16] ou encore sur le RPC simulateur [Mie+16]. Cette solution présente l'avantage de réduire l'encombrement du RPC ainsi que de pouvoir s'adapter à des dimensions et des charges plus importantes que la première. Effectivement, plus un RPC doit transporter des charges lourdes plus ses câbles doivent être de section importante et donc entraînés par des actionneurs conséquents. L'inconvénient de cette technique est d'intégrer à la chaîne d'actionnement un mécanisme supplémentaire, qu'est la poulie, et donc d'introduire des incertitudes et une complexité de modélisation supplémentaire. Dans le chapitre 3 nous étudierons plus en détails l'architecture des poulies ainsi que leurs effets sur les RPC.

Nous venons de définir la structure générale d'un RPC nous permettant maintenant de connaître le système et ses sous-systèmes. Dans la prochaine partie nous présenterons les différentes architectures des RPC et leurs avantages et inconvénients.

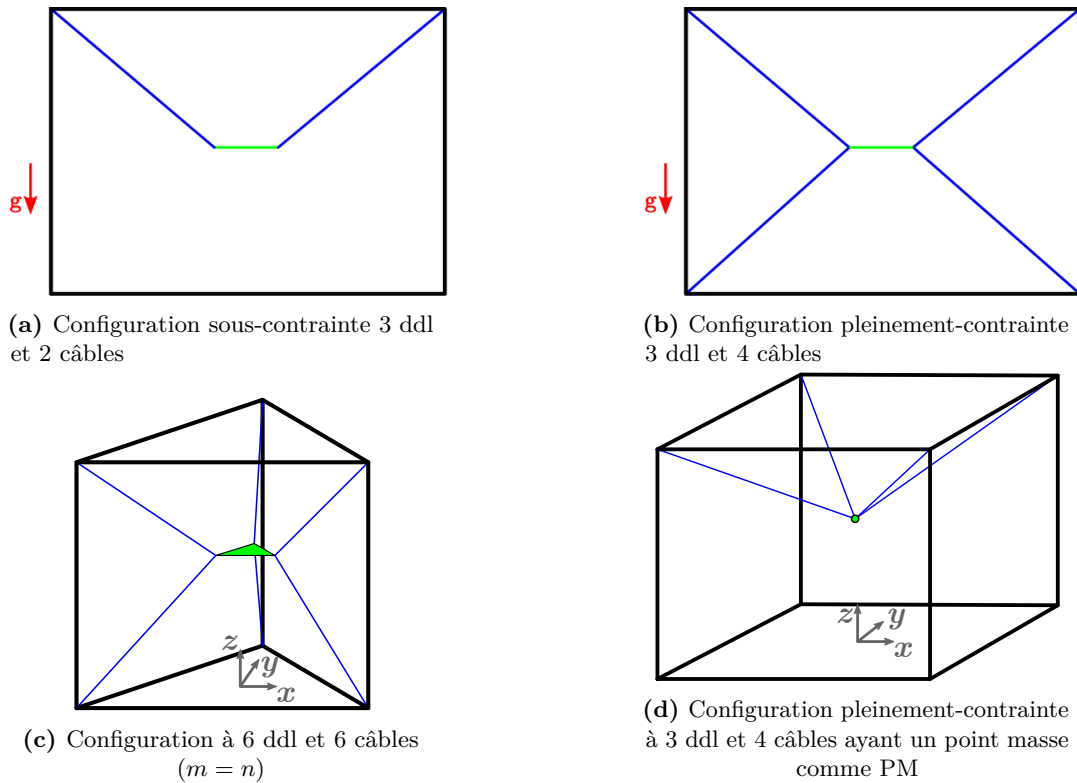
### 1.1.1.2 Les différentes configurations et architectures de RPC

La multitude de problématiques existantes impose aux concepteurs de savoir s'adapter et proposer des solutions techniques y répondant au mieux. Effectivement, autant dans l'industrie qu'ailleurs la nécessité de performance est prépondérante. Or les RPC sont des systèmes présentant un intérêt majeur de par leur forte reconfigurabilité, attribuée par leur conception simple et légère. Nous avons vu précédemment que la PM d'un RPC est dotée de  $n$  ddl. Or l'ensemble des  $n$  ddl peuvent être contrôlés en fonction du nombre de câbles  $m$  présents dans la chaîne d'actionnement. Dans cette section nous définirons ainsi les différentes configurations existantes ainsi que les architectures développées avec leurs avantages et inconvénients. En effet, nous ferons une différence entre la configuration d'un RPC et son architecture. La première concerne son nombre de câbles par rapport à ses ddl, et ainsi permet de définir sa capacité de contrôle de la PM. Le second terme décrit l'organisation des câbles et donc la façon dont le RPC est assemblé.

**Configuration sous-contrainte :** Un RPC est dit sous-contraint quand son nombre de câbles est inférieur au nombre de ddl de la PM ( $m < n + 1$ ) [Rie11]. Dans cette configuration l'ensemble des ddl de l'effecteur ne peut être contrôlé. C'est par exemple le cas dans le schéma présenté à la Fig. 1.3a où il est possible de contrôler l'ensemble des ddl de translation, néanmoins le ddl de rotation ne peut être maîtrisé. Pour définir correctement la pose de la PM dans ces configurations il est nécessaire de déterminer les ddl non contrôlés. Ce type de RPC a été étudié dans différentes architectures [Car+10; Hwa+20]. Il est aussi possible de combiner ce genre de RPC avec des systèmes mécaniques rigides afin de contrôler, ou du moins contraindre, les ddl libres [Beh+04; Hey+04; Yua+]. Il est à noter que des architectures avec  $m = n$  peuvent exister comme sur Fig. 1.3d. En revanche, comme l'indique Lamaury dans sa thèse [Lam14] l'absence de redondance d'actionnement entraîne une unique solution dans le jeu de tensions  $\mathbf{t}$ . Il peut donc exister des poses de la PM où le vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  comprend des valeurs négatives, signifiant qu'un ou plusieurs câbles devraient pousser sur la PM, ceci n'étant pas possible physiquement.

**Configuration pleinement-contrainte :** Un RPC pleinement-contraint signifie qu'il est composé de plus de câbles que de degrés de liberté  $m \geq n + 1$  [Rie11]. De par son nombre de câbles ce RPC est capable de contrôler l'ensemble des ddl de la PM comme l'a démontré Kawamura [Kaw+93]. Cependant, une configuration pleinement-contrainte demande une réflexion sur la disposition des câbles, autant pour les points de sorties que pour ceux de fixations sur la PM. Effectivement, cela est nécessaire pour pouvoir équilibrer réellement n'importe quel torseur d'effort sur la PM. Une configuration pleinement-contrainte est représentée sur la Fig. 1.3b. Ce type de solution permet d'éviter la présence de tension négative de par son infinité de solutions à son équilibre statique(cf. partie 1.2.4). Ce type de configuration nécessite une gestion des tensions des câbles grâce à un algorithme de gestion de tensions, pour permettre la meilleure sélection de  $\mathbf{t}$  et ainsi éviter la génération de tensions antagonistes nuisants à la performance du RPC. De nombreux travaux traitent de tels RPC [Ars10; Bos+07; Bru+06; Zha+20a].

**Architectures suspendues :** Ce type d'architecture est certainement l'une des plus simples à illustrer de par sa similarité avec les grues communément observables lors de chantiers de construction. Ce type de montage se traduit par le fait que l'ensemble des points de sorties des câbles est placé au-dessus de la hauteur maximale de la PM (cf. Fig 1.4a). Dans le cas des RPC suspendus il est possible de considérer la gravité comme un câble virtuel toujours vertical ayant une tension constante orientée en  $z$  négatif, permettant de maintenir les câbles supérieurs en tension. Il est possible de contrôler l'ensemble des  $n$  ddl de la PM en fonction du nombre de câbles comme vu précédemment. Cependant, ce type d'architecture ne permet pas d'équilibrer n'importe quel torseur d'effort. Effectivement, de par le caractère unidirectionnel de son actionnement et de sa construction les efforts suivant l'axe vertical  $z$  positif, ne peuvent être compensés et impliquent inévitablement des tensions négatives dans les câbles. Néanmoins, ce type d'architecture présente comme avantage de libérer l'entièreté de l'espace



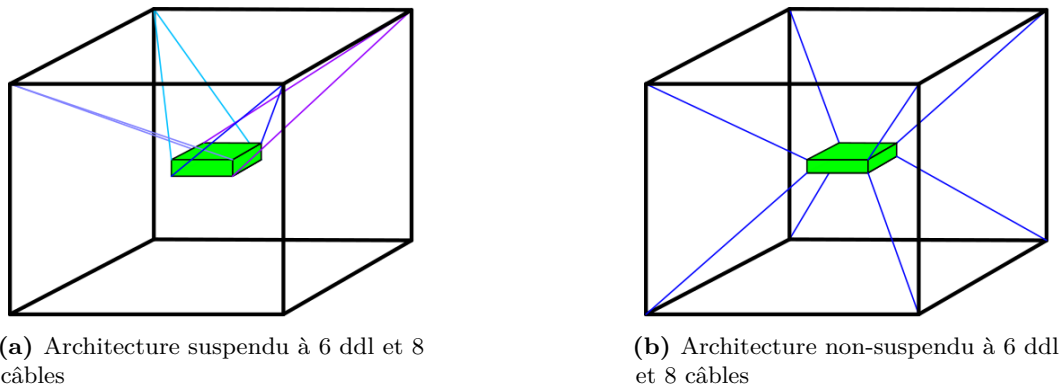
**Figure 1.3** – Schémas d'illustration des configurations possibles des RPC

au sol et donc d'autoriser la cohabitation homme/robot ainsi que de réduire les interférences entre les câbles. Ce type de RPC fait l'objet d'un nombre important d'études [Alp+02; Gag+14; Zi+08]. De plus, il est possible d'intégrer un système rigide dirigé vers  $z$  négatif, comme dans [Zha+20b], afin de palier l'inconvénient généré par l'aspect unidirectionnel des câbles.

**Architectures non-suspendues :** L'architecture non-suspendue signifie que le RPC ne possède pas uniquement des câbles provenant de sa partie supérieure mais est également équipé de câbles arrivant du sol (cf. Fig. 1.4b). Cette construction est aussi souvent nommée « pleinement contrainte » dans la littérature, mais nous avons fait le choix ici de différencier configuration et architecture afin de rester le plus précis possible. En effet, il nous est possible d'imaginer un RPC à 6 ddl et 5 câbles non suspendus et donc sous-contraint ; d'où la nécessité de différencier les termes. Ce type de RPC présente, à l'inverse des suspendus, la capacité d'équilibrer la totalité des torseurs d'efforts quelle que soit la direction des forces (en restant dans les tensions admissibles des câbles). Pour autant, cela nécessite une grande attention dans la gestion des tensions afin de ne pas générer des tensions antagonistes créant des efforts internes trop importants. De plus, la surface au sol est difficilement accessible par la présence de câbles rendant la zone dangereuse. D'autre part, les interférences entre les câbles sont plus fréquentes et sont donc à prendre en compte lors du calcul des espaces de travail. Des RPC basés sur ce type d'architecture ont été développés dans différents travaux [Are+08; Pic+21; San+13].

Avant de clore cette partie, notons que grâce à la forte capacité de reconfigurabilité des RPC, certains RPC développés peuvent être modifiés afin de correspondre à une architecture suspendue ou non. Ce genre de RPC est appelé RPC reconfigurable. Nous pouvons citer dans ce cas le RPC CAROCA [Gag+18] ou encore le ReelAx8 [Iza+13].





**Figure 1.4** – Schémas d'illustration des architectures des RPC

Nous venons de définir les RPC dans leur globalité, autant sur leurs composants que sur les différentes solutions techniques permettant de répondre à une multitude de problématiques. Avant de continuer, nous pouvons noter que les travaux présentés dans cette thèse s'intéresseront uniquement à des RPC suspendus équipés d'une PM étant un point masse. La majorité des études présentées dans les prochains chapitres porteront sur un RPC pleinement-contraint. Nous allons voir différentes applications où les RPC ont justement été mis en œuvre. Cela nous permettra d'illustrer l'étendue des possibilités qu'offre les RPC.

## 1.1.2 Applications

Bien que les RPC soient des systèmes relativement récents, datant du milieu des années 90, de nombreuses mises en application ont déjà vu le jour. Effectivement, les avantages amenés par des actionnements par câbles ont conduit au développement des RPC pour répondre à des problématiques variées. Comme nous l'avons déjà dit les RPC présentent des qualités telles qu'une masse et une inertie faibles, une forte capacité dynamique, une démontabilité et reconfigurabilité faciles ainsi qu'une adaptabilité aux dimensions très importante. Nous pouvons citer quelques exemples d'applications déjà mis en œuvre.

L'une des plus connues et l'une des premières utilisées à grande échelle, est le système de caméra embarquée sur un RPC installé dans les stades pour filmer les événements sportifs (Fig. 1.5b). Différents modèles existent, la SkyCam [Sky] et la SpiderCam [Spi]. Cela permet au RPC de ne pas encombrer visuellement les ciels des stades grâce à la section réduite des câbles. De plus, au regard de la dimension importante des stades l'utilisation de RPC est toute indiquée. Ce RPC est commandé à l'aide d'un opérateur et son effecteur est équipé d'une caméra orientable permettant de corriger les erreurs de poses. En effet, cette utilisation ne nécessite pas une précision importante, expliquant certainement l'utilisation précoce du système. En restant dans les RPC connus du grand public nous pouvons citer le radiotélescope FAST (Five-hundred-meter Aperture Spherical Radio Telescope) [Dua+09; Koz+06] (Fig. 1.5a). Il a été mis en lumière par l'actualité récente en rentrant en activité fin 2018, et a déjà permis de découvrir plus de 300 pulsars. C'est un RPC suspendu à 6 câbles de très grande dimension. Pour assumer cette très grande échelle, il est construit dans un bassin naturel [Nan+00]. De plus, une plateforme de Stewart [Bor+14] est installée dans l'effecteur afin de corriger les erreurs de pose de la PM et pouvoir capter précisément les ondes venant de l'espace [Yao+13]. Cet exemple est certainement la meilleure illustration de la capacité d'action des RPC à très grande échelle. Cependant, pour des dimensions et des longueurs de câbles aussi importantes il est obligatoire de prendre en compte le fléchissement du câble sous sa propre masse ainsi que mettre en place une gestion des tensions [Li+13]. Nous verrons plus en détails la modélisation des câbles dans la section 1.2.4.

Nous venons d'explorer deux exemples d'application à grande échelle mais n'ayant qu'un impact réduit sur le grand public. Des études cherchent aussi à développer des RPC d'aide à la personne. Les RPC peuvent de par leur adaptativité et leur gestion des efforts applicables sur la PM permettre une aide dans le processus de rééducation des membres inférieurs et supérieurs [Ben+21; Che+19; Gon+13; Lar+19]. En effet, de par leur capacité à travailler dans un plan ou dans un espace 3D, il est possible de concevoir des RPC permettant de faire réaliser des exercices variés au patient. Dans un autre domaine de l'aide à la personne, des RPC sont développés pour le secours à la personne dans les environnements post-catastrophe (tremblement de terre, tsunami, etc.) [Bos+05; Mer+10; Nur+17]. Le RPC est tout dédié à ce domaine par sa facilité de démontage et de transport ainsi que par sa reconfigurabilité aisée. Dans un but plus divertissant, même si applicable à l'industrie du futur, les RPC peuvent permettre une immersion plus complète par leur application dans le domaine haptique [Hir+92]. Effectivement, l'un des avantages évoqué et utilisé dans le cas du RPC SkyCam et SpiderCam est la faible présence visuelle des câbles. En effet, l'objectif de ce type de système est d'être le plus immersif possible, ainsi l'absence de gêne visuelle à un fort intérêt. Le robot INCA (cf. Fig. 1.5c) permet de ressentir un retour de force afin d'avoir l'impression de tenir un objet ou de heurter un obstacle [Che+14; Man10]. Le RPC SPIDAR-H [Ing+05] permet de ressentir la force exercée par une balle attrapée en plein vol.

Au regard de l'ensemble des applications déjà citées, nous pouvons voir l'importance du rayon d'action des RPC. Nous pouvons encore citer les RPC développés pour la construction de bâtiment par impression massive de béton [Bos+07; Iza+17; Iza+18; Tho+21]. Cette technologie fait l'objet de nombreuses recherches mais bien souvent est réalisée avec des manipulateurs sériels [Dub+17; Kho+16; Lea+12; Val+19], donc limités en dimension. Les RPC permettraient de s'affranchir de cette contrainte.

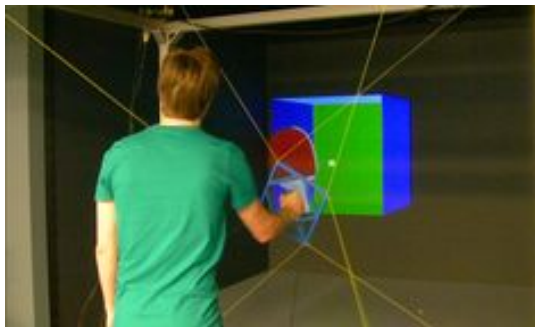
L'une des applications les plus communément imaginées, de par leur architecture proche des grues, est la manutention et le déplacement d'objets [Pic+18b] (cf. Fig. 1.5d). Ils peuvent ainsi réaliser des tâches de manutention dans des environnements inhospitaliers [Iza+15]. De plus, leur capacité dynamique leur permet d'atteindre des vitesses très importantes et donc de réaliser un nombre considérable de tâches en peu de temps [Kaw+95; Zha+20b].



(a) Radiotélescope FAST



(b) RPC suspendus équipé d'une caméra



(c) RPC INCA Haptiques



(d) RPC CoGiRo

**Figure 1.5** – Exemples d'applications des RPC

Nous venons d'explorer un certain nombre de mise en applications des RPC. Cela nous a permis de mettre en avant la pluridisciplinarité de ce système. De plus, au travers de ces exemples les avantages ont été mis en lumière par rapport au robot parallèle à segments rigides. Cependant, un RPC présente aussi des inconvénients nécessitant une réflexion et des études spécifiques lors de leur conception. Ces avantages et inconvénients en comparaison des robot parallèles classiques sont résumés dans le tableau 1.1.

Avantages	Inconvénients
-Réduction de la masse	-Actionnement unidirectionnel
-Réduction de l'inertie des parties mobiles	-Flexibilité des câbles
-Augmentation de la capacité dynamique	-Précision
-Réduction de la consommation d'énergie	-Fléchissement du câble sous sa propre masse
-Démontage rapide et facile	-Résolution du modèle direct complexe
-Reconfiguration rapide et facile	-Schéma de commandes complexe pour gérer les tensions dans les câbles
-Dimension de l'espace de travail	-Détermination de l'espace de travail
-Réduction de la perturbation visuelle	-Modélisation sous hypothèses fortes
-Facilité du stockage des câbles	-Comportement vibratoire

**Table 1.1** – Tableau des avantages et inconvénients des RPC

Nous venons de définir un RPC par sa composition ainsi que par les configurations et les architectures qu'il peut prendre. Nous avons, de plus, défini les avantages et inconvénients. Nous allons nous intéresser maintenant aux différentes modélisations géométriques et mécaniques des RPC.

## 1.2 Modélisations des robots parallèles à câbles

Dans cette section, nous rappellerons les différents modèles développés pour décrire géométriquement et mécaniquement les RPC. En effet, dans le cadre de l'étude et de la conception des RPC il est utile de pouvoir modéliser leur comportement afin de déterminer les performances avant de débiter un développement plus approfondi. Comme nous l'avons observé précédemment un RPC est un système nécessitant une gestion précise de ses éléments. Effectivement, pour positionner un effecteur à une pose désirée il est impératif de déterminer la longueur des câbles. Cependant, un RPC présente l'inconvénient de demander une gestion de ses tensions afin de rester dans les tensions admissibles. De plus, l'ensemble des contraintes liées au RPC génère des espaces de travail particuliers. Dans cette section, nous allons tout d'abord chercher à définir les différentes modélisations communément utilisées dans l'étude des RPC. Dans un second temps nous verrons les méthodes de gestion de tension dans les câbles. Par la suite, nous définirons différents espaces de travail permettant le bon fonctionnement du RPC. Finalement, nous observerons plus particulièrement le câble et ses modélisations.

### 1.2.1 Modélisations

Plusieurs modélisations existent pour décrire un RPC. En effet, le niveau de modélisation permet de prendre en compte ou non différents systèmes. Deux types de problématique de modélisation existent, les modèles inverses et les modèles directs.

**Problématique inverse :** Le modèle inverse répond à la question : « quelle est l'action nécessaire pour atteindre la pose souhaitée ? ». Dans le cadre des RPC, cela se traduit par la recherche des longueurs des câbles  $\mathbf{l} = [l_1 \dots l_m]$ , où  $m$  est le nombre de câbles, nécessaire pour une pose désirée de la PM.

**Problématique directe :** À l'opposé de la problématique inverse le modèle directe s'intéresse à la question : « quelle est la pose correspondante à un jeu d'actions définies ? ». Pour les RPC, nous cherchons donc la pose de la PM en connaissant les longueurs des câbles  $\mathbf{l}$ .

Nous allons voir deux modèles mis en place et utilisés couramment dans l'étude des RPC. Tout d'abord nous développerons le modèle classique pour ensuite l'étendre avec la présence des poulies.

#### 1.2.1.1 Modélisation Géométrico-statique

Ce modèle est développé pour décrire géométriquement et mécaniquement un RPC [Gag+14; Han+21]. Il est la composition du modèle géométrique ainsi que de l'équilibre statique. L'utilisation de câbles impose de calculer les tensions dans les câbles afin de s'assurer de leurs mises en tension. Il est nécessaire tout d'abord de paramétrer le RPC. Le paramétrage défini dans la Fig. 1.6 fixe les bases de l'ensemble des modèles développés et utilisés dans cette thèse.

La figure. 1.6 est une représentation simplifiée du  $i^{\text{ème}}$  câble de la chaîne d'actionnement d'un RPC, où  $i = 1, \dots, m$  avec  $m$  le nombre de câbles. Les points  $A_i$  sont les points de sorties des câbles et sont considérés comme fixes. La PM est décrite par son centre gravité  $P$  ainsi que par les points de fixation des câbles  $B_i$ . Le vecteur  $\mathbf{b}_i$  entre  $P$  et  $B_i$  permet la description de la géométrie de la PM du RPC dans le repère de la PM  $\mathcal{R}_p$ . Le vecteur

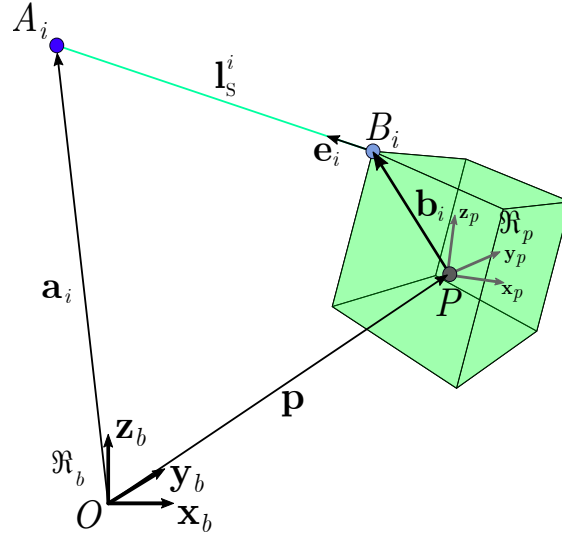


Figure 1.6 – Paramétrisation du modèle classique du RPC

$\mathbf{a}_i = (a_{i_x} \ a_{i_y} \ a_{i_z})^T$  connecte le point  $A_i$  et  $O$ , centre du repère global  $\mathfrak{R}_b$ . La position  $P$  de la PM est décrite dans  $\mathfrak{R}_b$  par  $\mathbf{p}$  reliant  $O$  et  $P$ . L'orientation de la PM est décrite dans  $\mathfrak{R}_b$  par la matrice de rotation  $\mathbf{R}(\mathbf{o})$  reliant  $\mathfrak{R}_b$  et  $\mathfrak{R}_p$ .

**Modèle inverse :** Le modèle géométrique inverse [Alb+92] cherche à décrire la longueur de câble déployé entre  $A_i$  et  $B_i$  définie par  $\mathbf{l}_S^i$ . Ce vecteur est exprimé par l'équation de boucle fermée :

$$\mathbf{l}_S^i = \mathbf{a}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{o})\mathbf{b}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}(\mathbf{o})$  liant  $\mathfrak{R}_b$  et  $\mathfrak{R}_p$  est défini par l'Eq. 1.2.

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont les angles d'Euler. La longueur de câble déployé de l'actionneur  $l_S^i$  est égale à la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{l}_S^i$  :

$$l_S^i = \|\mathbf{l}_S^i\|_2 \quad (1.3)$$

Le modèle géométrique venant d'être défini, l'équilibre de la PM peut être introduit. En effet, le câble  $i$  accroché à la PM au point  $B_i$  génère un effort  $t_i$  dans la direction  $\mathbf{e}_i$ . Il est nécessaire de résoudre les équations de la statique afin de connaître l'ensemble des tensions présentes dans les  $m$  câbles et de s'assurer de leurs valeurs positives pour le bon fonctionnement du RPC. Pour ce faire, le principe fondamental de la statique est appliqué au point  $P$  de la PM, ainsi chaque câble applique une force  $t_i\mathbf{e}_i$  et génère un moment  $\mathbf{b}_i\mathbf{R}(\mathbf{o}) \times t_i\mathbf{e}_i$  en  $P$ , où  $\times$  est le produit vectoriel. Nous pouvons donc définir le torseur des efforts appliqués par un câble par  $t_i\mathbf{J}_i$ ,  $\mathbf{J}_i$  étant la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}$  dépendant de la pose de la PM exprimée dans l'Eq. 1.11.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{b}_1 \mathbf{R}(\mathbf{o}) \times \mathbf{e}_1)^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i^T & (\mathbf{b}_i \mathbf{R}(\mathbf{o}) \times \mathbf{e}_i)^T \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Il est à noter que la matrice  $\mathbf{J}$  est de dimension  $m \times 6$ . Le principe fondamental de la statique s'écrit donc comme dans l'Eq. 1.5.

$$\mathbf{J}\mathbf{t} + \mathbf{w}_e = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{t} = [t_1 \dots t_m]$  est le jeu de tension,  $\mathbf{w}_e$  est le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur la PM, s'exprimant  $\mathbf{w}_e = [\mathbf{f}, \mathbf{m}]^T$ , avec  $\mathbf{f}$  le vecteur des efforts extérieurs appliqués au point  $P$  et  $\mathbf{m}$  les moments générés par ces efforts en  $P$ .

À partir de l'Eq. 1.5 nous pouvons déterminer  $\mathbf{t}$  par l'équation suivante :

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}\mathbf{w}_e \quad (1.6)$$

avec  $\mathbf{W} = -\mathbf{J}^{-1}$  [Rob+98 ; Wil98], sous condition que la matrice soit carrée, c'est le cas d'un RPC ayant autant de câbles que de ddl. Cela explique la difficulté de déterminer et de maintenir les câbles en tension dans les cas des RPC sur-contraints. En effet, dans ces cas-là, il existe une infinité de solutions à l'Eq. 1.6. Cependant, toutes les solutions données ne sont physiquement pas admissibles. Il est donc nécessaire de garder les câbles en tension ainsi que de maintenir leurs valeurs dans un intervalle de fonctionnement défini. Les RPC demandent donc de porter une attention particulière à la gestion des tensions pour les sélectionner au mieux. De nombreuses études et méthodes ont été développées sur ce sujet et seront plus amplement développées dans la partie 1.2.2.

**Modèle direct :** Concernant la résolution du modèle direct, la tâche devient plus complexe [Car+11 ; Jia+10]. La recherche de la pose de la PM dépendant d'un jeu de paramètres  $\mathbf{l}_S^i$  qui peut s'écrire sous la forme d'une fonction  $f$  (cf. Eq. 1.7).

$$[\mathbf{p}, \mathbf{o}] = f(\mathbf{l}_S^i) \quad (1.7)$$

Cela impose de résoudre simultanément l'équilibre statique de la PM, impliquant la détermination des inconnues  $[\mathbf{p}, \mathbf{o}, \mathbf{t}]^T$  où  $\mathbf{t}$  est le vecteur des tensions des câbles. Rappelons ici, qu'il existe une infinité de solution pour l'équilibre statique de la PM dans le cas d'un RPC sur-contraint. Carricato a démontré dans [Car+11] que pour un RPC spatial à 3 câbles il existe 156 solutions, mais que seulement une partie de ces solutions est dite faisable. Merlet propose dans [Mer+15] une résolution du modèle direct par analyse d'intervalle d'un RPC à 8 câbles. Bosscher dans [Bos+07] cherche la pose de la PM d'un RPC à 12 câbles, pour ce faire il simplifie son architecture par uniquement 4 câbles virtuels et cherche l'intersection des sphères de rayon  $l^i$ . La résolution du modèle direct est la plupart du temps réalisée grâce à des algorithmes d'optimisation [Rie11 ; Yua+15].

### 1.2.1.2 Modélisation Géométrique étendue prenant en compte la poulie de renvoi

Nous venons de décrire les RPC comme ayant des câbles sortant d'un unique point fixe  $A_i$ . Certains RPC sont effectivement équipés de systèmes permettant de s'approcher de tels modèles [Bak+19b]. Cependant, cela complexifie et ajoute un coût à la fabrication du RPC. C'est pourquoi la prise en compte des poulies est nécessaire dans le modèle. Pott a pris en compte la poulie et son rayon dans le calcul de la longueur de câbles [Pot12] tout comme [Jin+18 ; Pic+18a].

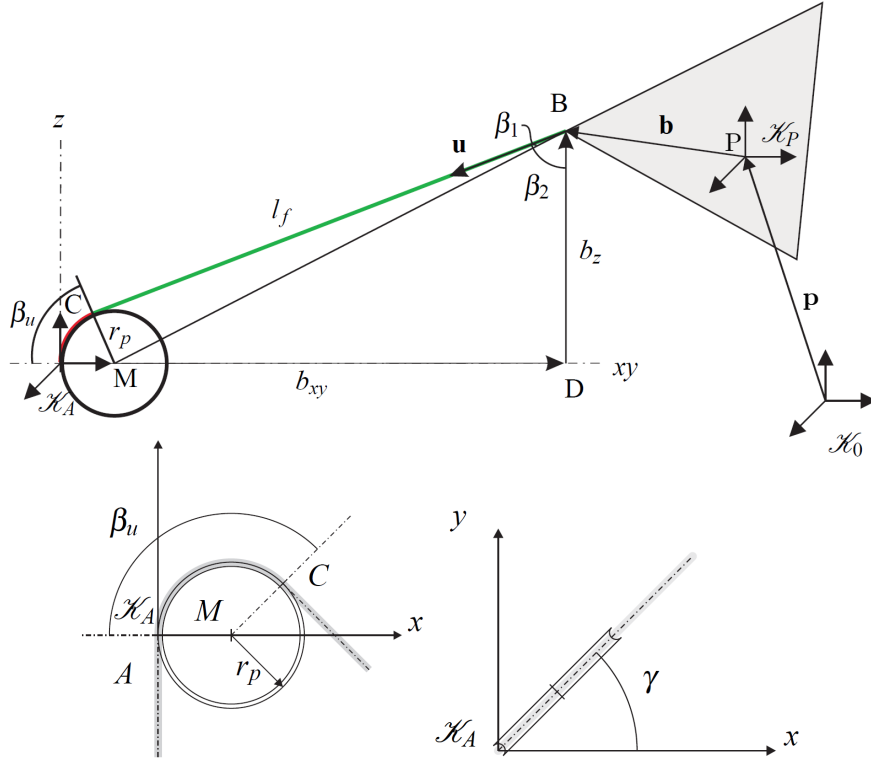


Figure 1.7 – Schéma du modèle géométrique prenant en compte les poulies [Pot12]

La Fig. 1.7 permet de fixer les paramètres du modèle. La poulie est décrite par son centre  $M$  et son rayon  $r_p$ . De plus, le point d'entrée du câble dans la poulie est fixé au point  $A$  et le câble y rentre verticalement. L'axe de pivot de la poulie passe par  $A$  et est colinéaire à l'axe  $z$ . La prise en compte des poulies nécessite de calculer l'orientation de la poulie  $\gamma$  ainsi que la position de sortie du câble noté  $C$  qui sont fonction de  $P$ . En effet, la poulie de par sa construction sur pivot cherche à s'aligner dans le sens de l'effort, c'est-à-dire dans le plan composé par les vecteurs  $z$  et  $u$ . Cette orientation est définie par  $\gamma = \arctan2(b_y, b_x)$  étant l'angle entre le plan  $xz$  et le plan  $zu$ . Ce modèle intègre la longueur enroulée sur la poulie et la longueur de câble déployé, permettant ainsi de limiter l'erreur due à la non prise en compte de la poulie. La longueur totale du câble peut s'écrire comme suit :

$$l = \beta_u r_p + l_f \quad (1.8)$$

où  $\beta_u$  est l'angle formé par les droites  $(MA)$  et  $(MC)$  et  $l_f$  la longueur libre en sortie de poulie définie par la norme euclidienne du vecteur  $CB$ . L'angle  $\beta_u$  est défini à l'aide des angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , comme étant la décomposition de l'angle formé entre  $b_z$  et  $l_f$  au point  $B$ . L'équation 1.9 permet d'exprimer  $\beta_u$ .

$$\beta_u = \beta_1 + \beta_2 = \arccos \frac{l_f}{\sqrt{(b_{xy} - r_p)^2 + b_z^2}} + \arccos \frac{b_z}{\sqrt{(b_{xy} - r_p)^2 + b_z^2}} \quad (1.9)$$

où les  $b_{xy} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$  et  $b_z$  sont les coordonnées du point  $B$  dans le repère lié à la poulie. La longueur libre du câble  $l_f$  est définie facilement par une application du théorème de Pythagore. Le vecteur  $MB$  est considéré comme connu dans le modèle inverse. Il est ainsi possible de définir  $l_f$  comme dans l'Eq. 1.10.

$$l_f = \sqrt{\frac{(b_{xy} - r_p)^2 + b_z^2}{r_p^2}} \quad (1.10)$$

Nous venons de voir le modèle géométrique inverse comprenant la poulie pour le calcul de longueur déployée par le RPC. Le calcul des tensions présent dans les câbles est défini de la même manière que précédemment (cf. Eq. 1.5). La matrice  $\mathbf{J}$  s'écrivant :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^T & (\mathbf{bR}(\mathbf{o}) \times \mathbf{u})^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}^T & (\mathbf{bR}(\mathbf{o}) \times \mathbf{u})^T \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Pour ce qui est du modèle direct il est nécessaire maintenant de recalculer la position de la poulie en plus de la pose de la PM et de ses tensions. Les inconnues du problème direct deviennent ainsi  $[\mathbf{p}, \mathbf{o}, \mathbf{t}, \gamma, \beta_u]^T$ .

Nous venons de voir deux modèles géométrico-statiques permettant la description des RPC. Cependant, ce modèle s'arrête à la définition en mode statique, or un RPC est souvent mené à travailler dynamiquement de par son application. Pour les décrire dans de telles utilisations des modèles dynamiques ont été développés [Bak+17; Bak+19a; Bay+15; Meu+09] afin de définir les vitesses et les accélérations d'enroulement des enrouleurs pour réaliser une trajectoire désirée. Le travail en mode dynamique demande une gestion des vibrations des câbles et donc de la raideur du RPC. Cependant, les travaux réalisés dans cette thèse sont réduits à des études statiques et donc nous ne chercherons pas à définir plus en détail les modèles dynamiques des RPC.

Comme nous avons pu voir au travers de cette section l'un des problèmes majeurs de l'étude des RPC est la gestion des tensions dans les câbles et ce principalement dans le cas des RPC sur-contraints. De plus, la prise en compte de la poulie est simplifiée, ce réduisant à l'introduction du réa dans les modèles et à considérer le point d'entrée dans celle-ci comme fixe. L'articulation et donc le déport du point  $A_i$  que cela peut entraîner sont effectivement négligés. De plus, la prise en compte des modèles prenant en compte de nombreux paramètres et ceux développés dans le chapitre 2 sont, cependant, difficilement intégrables à une résolution en temps réel. Dans la section suivante nous étudierons les différentes solutions développées pour déterminer et trouver la meilleure solution de  $\mathbf{t}$ .

## 1.2.2 Gestions des tensions

La tension dans les câbles d'un RPC est une contrainte prépondérante dans l'étude de ceux-ci. Comme nous l'avons vu précédemment, au travers de l'Eq. 1.6 la détermination des tensions  $\mathbf{t}$  dans les câbles est une question complexe. En effet, dans le cas d'un RPC avec  $m = n$  la matrice  $\mathbf{J}$  est carrée et donc l'Eq. 1.6 admet une unique solution  $\mathbf{t}$  mais ne garantit pas la non-négativité des tensions imposées par l'aspect unidirectionnelle des câbles. Dans les autres cas de RPC, donc avec  $m \neq n$ , la matrice  $\mathbf{J}$  n'est plus carrée et n'est donc plus inversible et l'utilisation de pseudo-inverse, de type Moore-Penrose, est nécessaire. Dans cette situation l'Eq. 1.6 admet une multitude de solutions  $\mathbf{t}$ . Il est donc nécessaire de mettre en place une stratégie de gestion des tensions afin de garder leurs valeurs dans un ensemble garantissant leur intégrité et d'optimiser leur distribution. Ces algorithmes sont appelés Algorithmes de Distribution des Tensions ou Tensions Distribution Algorithm (TDA) en anglais. Nous allons voir au travers de cette section les approches existantes pour répondre à cette problématique.

Un grand nombre de travaux cherchant à déterminer une distribution optimale des tensions se sont appuyés sur des algorithmes d'optimisation. Il est alors cherché à minimiser



une fonction coût. La méthode la plus communément observée est de considérer comme fonction coût la norme  $p$  de  $\mathbf{t}$  comme exprimé dans l'Eq. 1.12.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{t}} \|\mathbf{t}\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m t_i^p} \\ \text{t.q. } \mathbf{W}\mathbf{t} &= \mathbf{w}_e \\ t_{i_{min}} &\leq t_i \leq t_{i_{max}}, \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $p$  est la dimension de la norme. La dimension de la norme utilisée a une influence sur les tensions  $\mathbf{t}$  obtenues. L'utilisation de la norme 1 [Mer04] minimise les tensions des câbles, mais présente l'inconvénient de pouvoir engendrer des discontinuités dans la distribution des tensions. La norme 2 aussi dite norme euclidienne [Bru+06; Yua+16], minimise aussi  $\mathbf{t}$  mais résout le problème de discontinuité de la distribution des tensions et est donc souvent utilisée dans le cadre des RPC. La norme infinie peut être également utilisée comme fonction objectif mais tout comme la norme 1, elle est susceptible de générer des résultats discontinus [Gos+11]. Dans les modèles que nous utiliserons durant la thèse présentée ici, nous chercherons à minimiser la norme 2 de  $\mathbf{t}$ . En effet, nous voulons nous assurer d'obtenir des résultats continue.

En minimisant les tensions cela permet de réduire l'énergie consommée par les enrouleurs. Les solutions présentées ne peuvent être implémentées dans des programmes en temps réel de par leur utilisation d'algorithmes d'optimisation coûteux en temps de calcul [Pot14]. Cela implique donc de devoir calculer à l'avance la distribution des tensions pour une tâche désirée rendant le RPC beaucoup moins reconfigurable et adaptable au cours de son utilisation. Pour pallier ce problème des solutions ont été développées pour s'implémenter dans des applications en temps réel. Ces méthodes cherchent les polytopes définissant l'ensemble des solutions des tensions faisables pour une pose [Bou; Gen+20; Gou+15b; Lam14; Pic+21].

Nous venons de définir succinctement les différentes solutions de gestion de distribution des tensions. Les méthodes en temps réel n'étant pas mises en œuvre dans les travaux de cette thèse, elles n'ont été développées que succinctement. Comme nous l'avons vu, les RPC présentent la possibilité de travailler sur un espace important même s'il est nécessaire de faire attention à un certain nombre de paramètres pour son bon fonctionnement. C'est pourquoi, de nombreuses études ont été menées afin de définir et de connaître les espaces de travail en fonction des caractéristiques des RPC. Ces espaces sont définis dans la section suivante.

### 1.2.3 Espaces de travail

L'espace de travail d'un système est la zone regroupant l'ensemble des points atteignables par l'effecteur. Dans le cas des robots sériels et parallèles à segments rigides ce volume est généralement imposé par les butées articulaires, les singularités et les interférences entre parties mobiles. En revanche, les RPC ne sont généralement pas contraints en butée articulaire étant donné les longueurs des câbles possiblement infinies. Effectivement, pour les RPC, la principale contrainte est la nécessité de garder l'ensemble des câbles tendus, de par leur capacité de travail unidirectionnelle. Pour ce faire plusieurs définitions d'espace de travail ont été proposées.

**Espace des Poses Polyvalentes (EPP) ou Wrench Closure Workspace (WCW) :** Gouttefarde définit dans sa thèse [Gou05] cet espace comme : « [...] l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles n'importe quel torseur peut être généré à l'effecteur en tendant les câbles du mécanisme, les tensions dans les câbles n'étant pas limitées. ». Cela se traduit mathématiquement par [Ars10; Gou+05] :

$$EPP = \{\mathbf{p} \mid \forall \mathbf{f}_e \exists \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{f}_e$  est l'ensemble des torseurs d'efforts extérieurs,  $\mathbf{t}$  est le jeu de tensions et  $\mathbf{p}$  l'ensemble des poses admissibles au sens de l'EPP.

**Espace des Torseurs Générable (ETG) ou Wrench Feasible Workspace (WFW) :** Cet espace est plus restrictif que l'EPP car il contraint les tensions des câbles dans un ensemble fini, ainsi que les torseurs admissibles [Bos+06 ; Kum+19]. Comme pour l'EPP, Gouttefarde le définit comme : « [...] l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles tout torseur d'un ensemble de torseurs peut être généré en tendant les câbles tel que les tensions qui en résultent ne dépassent pas certaines valeurs maximales ». Mathématiquement l'ETG est écrit comme :

$$ETG = \{\mathbf{p} \mid \forall \mathbf{f}_e \in \{\mathbf{f}\} \exists \mathbf{t} \in [t_{min}, t_{max}], \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (1.14)$$

où  $[t_{min}, t_{max}]$  est l'ensemble des tensions admissibles. Ces tensions sont définies afin de préserver la performance du RPC ainsi que l'intégrité du câble. En effet,  $t_{min}$  permet aux câbles de rester tendu pour éviter un effet néfaste sur la précision du RPC tout en conservant un profil quasi-rectiligne. Dépasser une tension maximum admissible du câble, notée  $t_{max}$ , réduit sa durée de vie voire même peut engendrer sa rupture. Limiter cette tension permet de conserver ses propriétés en le gardant dans son intervalle élastique et donc d'accroître sa durée de vie.  $\{\mathbf{f}\}$  est l'ensemble des torseurs pouvant être générés par le RPC dans toutes les poses dans l'ETG. Cet espace est particulièrement intéressant lors de la conception d'un RPC ayant un cahier des charges correctement défini comportant les efforts engendrés par l'utilisation du manipulateur.

**Espace de Travail Statique (ETS) ou Static Equilibrium Workspace (SEW) :** Il représente un sous espace de l'ETG. En d'autres termes, il correspond à l'ensemble des poses permettant d'équilibrer le poids de la PM [Ebe+04 ; Kum+18 ; Rob+98].

$$ETS = \{\mathbf{p} \mid \exists \mathbf{t} \in [t_{min}, t_{max}], \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{f}_g = \mathbf{0}\} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{f}_g$  représente le torseur d'effort dû à la masse de la PM de telle façon que :  $\mathbf{f}_g = [0 \ 0 \ -m_{PM}g \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , avec  $m_{PM}$  égale à la masse de la PM et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Cet espace de travail est particulièrement adapté aux RPC suspendus du fait de leur incapacité à générer des efforts dans l'ensemble des directions.

D'autres espaces de travail ont été développés [Dua+14] afin de répondre à un ensemble de critères. Il est à noter que dans cette thèse nous n'utiliserons que les notions d'ETS. Ci-après, une liste non exhaustive des espaces de travail définis dans la littérature.

**Force Closure Workspace (FCW) :** Cet espace représente l'ensemble des poses où le RPC est capable de générer des efforts compensant un ensemble de forces définies, sans limite de tension [Pha+06].

**Twist Feasible Workspace (TFW) :** Ce volume regroupe l'ensemble des poses où la PM est capable de produire un ensemble donné de vitesses linéaires et de rotations tout en respectant les limites d'enroulement imposées par les actionneurs [Gag+15a].

**Dynamic Workspace (DW) :** Barrette définit cet ensemble comme étant toutes les poses et conditions dynamiques maintenant les câbles en tension [Bar+05]. Il est à noter que l'espace de travail dynamique permet dans certain cas d'atteindre, de façon ponctuelle, des positions se trouvant en dehors de l'enveloppe du RPC [Zha+16].

Avant de clore cette section, il reste à définir un dernier espace qui sera utilisé dans les travaux de cette thèse.

**Espace Régulier (ER) ou Regular Workspace (RW) :** Ce volume permet de réduire un espace accessible, de forme complexe, en un volume géométrique simple tel qu'un cylindre, un pavé ou autre [Bin+10]. L'utilité majeure des ER est de simplifier la comparaison entre deux robots, ou plus, permettant ainsi de les comparer sur un Espace Régulier Commun ( $ER_C$ ), correspondant à l'intersection de l'ER du premier et du second (Eq. 1.16). De plus, cela permet une meilleure représentation du gain d'espace de travail lors de la comparaison de deux manipulateurs ou plus.

$$ER_C = \bigcap_{i=1}^n ER_i \quad (1.16)$$

où  $i = 1, \dots, n$  représentant le  $i^{\text{ème}}$  RPC comparé et  $n$  le nombre total de RPC.

## 1.2.4 Modélisations des câbles

Le câble est l'élément central des RPC. En effet, l'ensemble des avantages que présente ce système est conféré par les câbles. Cependant, c'est aussi une des sources principales de difficulté pour leurs applications (cf. section 1.1). Il est donc nécessaire d'étudier le comportement du câble afin de réduire l'influence des inconvénients de ce dernier pour ne profiter majoritairement que de ses avantages. Comme nous avons pu le voir un RPC peut être défini suivant plusieurs indices d'efficacité, par son volume de travail (cf. section 1.2.3) ou sa précision de pose. Or les câbles par leur comportement et leurs tensions non-constantes en fonction de la pose ont un effet autant sur l'espace de travail que sur la précision de pose. Nous allons voir au travers de cette section plus en détails le câble, de sa structure jusqu'aux différentes méthodes de modélisation mises en œuvre dans l'étude des RPC.

### 1.2.4.1 Structure des câbles et comportement

Il existe une grande variété de câbles répondant à un ensemble de problématiques toutes plus variées les unes des autres. Le câble est utilisé depuis toujours sous sa forme la plus simple de cordage. Sa construction actuelle toronnée en acier n'est apparue qu'à partir du début du XIX<sup>ème</sup> siècle. D'abord, voués à des applications de génie civil, les câbles se sont rapidement imposés dans des applications multiples. Nous les retrouvons par exemple dans les premiers avions, dans les mines ou encore plus récemment les téléphériques ou les ascenseurs. Comme nous l'avons évoqué précédemment, les câbles sont utilisés dans la robotique parallèle à partir de 1992 [Alb+92 ; Hir+92] développant ainsi la sous-famille des robots parallèles à câbles. La première caractéristique d'un câble est le matériel utilisé, il peut varier en fonction de son utilisation. Il peut être fabriqué en métal (acier galvanisé, inoxydable, nitinol, aluminium, tungstène), en matériaux synthétiques (polypropylène, nylon etc.) ou encore en combinant différents matériaux (infiltration de plastique, différence entre matériaux composant le cœur et l'extérieur). Il existe de nombreux types d'architecture de câbles apportant différentes résistances et propriétés anti-giratoires. Un câble est composé de fils. Un ensemble de fils compose un toron, plusieurs torons sont disposés autour d'un cœur, plein ou toronné, appelé âme (cf. Fig. 1.8). L'ensemble constitue un câble. Cette construction a une influence importante sur les caractéristiques mécaniques du câble, la raideur, la résistance à la rupture. Un câble est donc caractérisé par son nombre de torons et le nombre de fils qui composent ces torons. La nomenclature associée au câble est  $Nombre_{Toron} \times Nombre_{Fil}$ . À titre d'exemple, un câble comme représenté sur la Fig. 1.8, si nous considérons son âme comme une âme en textile, aurait la dénomination « Câble 6x19 âme textile ».

De par leur construction, les câbles sont sujet à des variations non-déterministes de leurs paramètres mécaniques. Effectivement, leur élasticité exacte, paramètre essentiel de l'étude du RPC, est impossible à obtenir. Le module de Young  $E$  du câble est non-constant car il

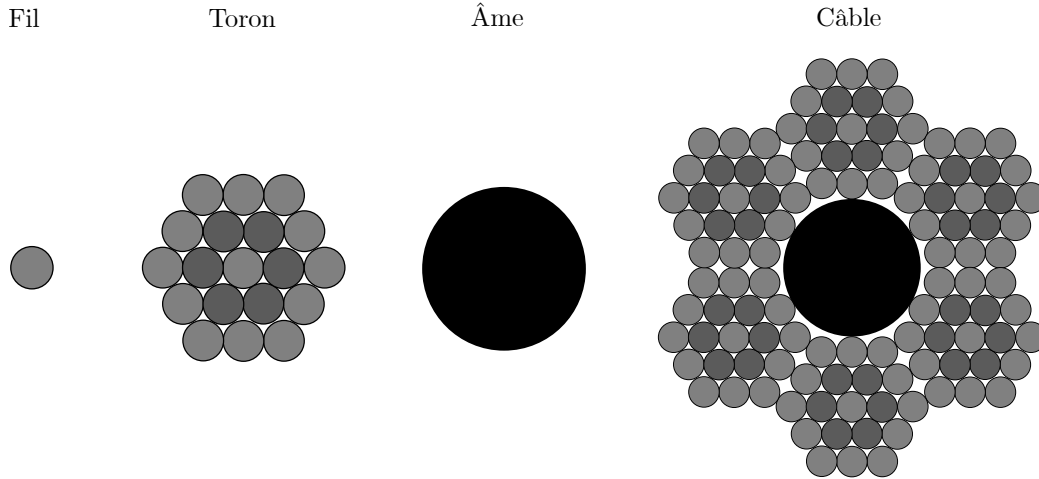


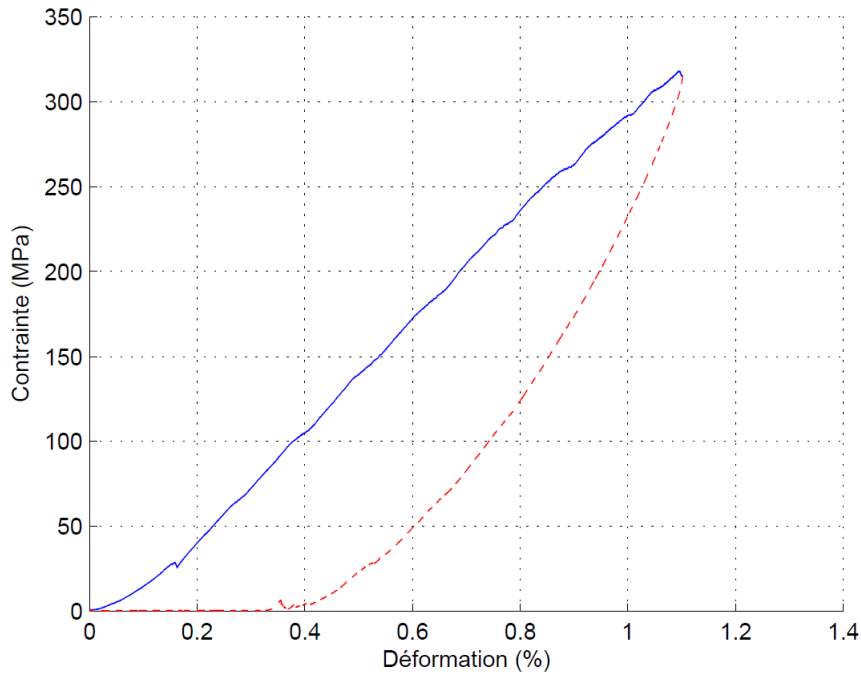
Figure 1.8 – Parties composant un câble

varie en fonction de la tension du câble et de l'état précédent de celui-ci. Les câbles sont sujets, de par leur architecture, à des frottements internes entre torons, mais aussi entre fils. De plus, lors d'un effort de traction, des déplacements internes des fibres par resserrement apparaissent. Il est donc facile d'imaginer que si un câble passe de l'état relâché à tendu, alors ses fils et torons ne seront plus agencés exactement de la même manière et donc ses propriétés mécaniques d'élasticité en seront impactées. Cependant, si le câble se détend, cela n'indique pas forcément que ses propriétés reviennent à leur état initial, de par la présence de frottements internes. Ce phénomène est appelé hystérésis (cf. Fig. 1.9). Il est visible sur la Fig. 1.9 que lors du chargement (trait plein) et déchargement (trait pointillé) les courbes ne se superposent pas et nous pouvons observer une nette différence. Riehl dans sa thèse [Rie11] indique qu'un rodage du câble est nécessaire afin de limiter cet effet mais qu'il existera toujours un comportement différent en chargement et en déchargement. De plus, dans sa thèse il a pu observer la différence de profil de courbe Contrainte/Déformation en fonction de la construction du câble : un câble  $1 \times 19$  a un module de Young  $E$  quasi linéaire alors qu'un câble  $6 \times 7$  a un  $E$  fortement non-linéaire. En effet, [Zhu+07] met en évidence une évolution non-linéaire de  $E$  lors de la variation de tension dans le câble. [Bak+18] a pu montrer que l'incertitude sur  $E$  peut aller jusqu'à plusieurs dizaines de  $GPa$ .

L'ensemble de ces variations non-déterministes rendent la modélisation complète des câbles extrêmement complexe. Pour déterminer le module de Young exacte d'un câble il serait nécessaire de réaliser des essais de traction afin d'en extraire la fonction correspondante de  $E$  en fonction de l'effort appliqué. Au cours de sa thèse, Rhiel [Rie11] a prouvé que l'élasticité d'un câble pouvait être approximée à un polynôme  $P(\sigma)$  de degrés  $d$  en fonction de la construction et de la composition du câble. Il a donc exprimé le module de Young d'un câble en fonction de l'effort (cf. Eq. 1.17) où  $\sigma$  est la contrainte dans le câble.

$$E = \frac{\sigma}{P(\sigma)} \quad (1.17)$$

La prise en compte d'une élasticité non-linéaire complexifie fortement les résolutions des modèles de câbles. Ainsi, généralement, l'étude des RPC se ramène à une approximation d'un  $E$  constant. Cette valeur d'élasticité est déterminée en fixant les limites d'utilisation du câble. Effectivement, la norme ISO 12076 indique qu'un câble doit travailler entre 10% et 30% de la tension de rupture  $T_r$ . Néanmoins, dans le cadre des RPC, respecter un tel intervalle d'utilisation est compliqué. Or la norme ISO 4309 indique que des effets de plastification locale dans le câble peuvent apparaître à partir de 60% de  $T_r$ . Cela permet d'étendre l'intervalle

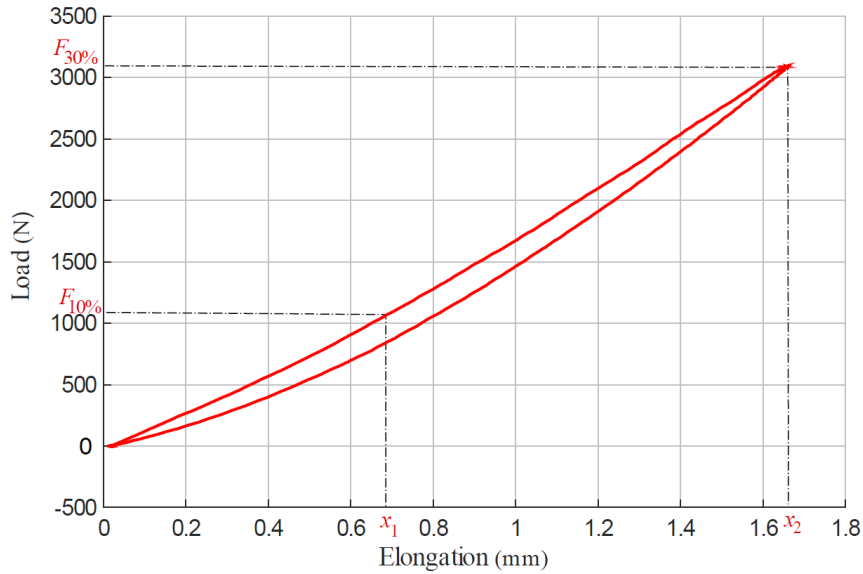


**Figure 1.9** – Représentation de l'hystérésis d'un câble DYNEEMA [Rie11]

d'utilisation des câbles. Afin de traduire au mieux le comportement mécanique du câble, le module de Young est ramené à une valeur constante en fonction de son intervalle d'utilisation par l'Eq. 1.18.

$$E = l_0 \frac{U\%_{min} T_r - U\%_{max} T_r}{S \Delta l} \quad (1.18)$$

où  $l_0$  est la longueur initiale de l'échantillon,  $\Delta l$  l'allongement du câble,  $S$  sa section et  $U\%_{min}$  et  $U\%_{max}$  respectivement le pourcentage d'utilisation minimum et maximum du câble. La Fig. 1.10 permet de représenter cette simplification pour déterminer le module de Young entre 10% et 30% (respectant donc la norme ISO 12076) dans le cadre de l'étude menée par Baklouti [Bak+18].



**Figure 1.10** – Courbe d’élongation/chargement d’un câble métallique et détermination du module de Young entre 10% et 30% [Bak+18]

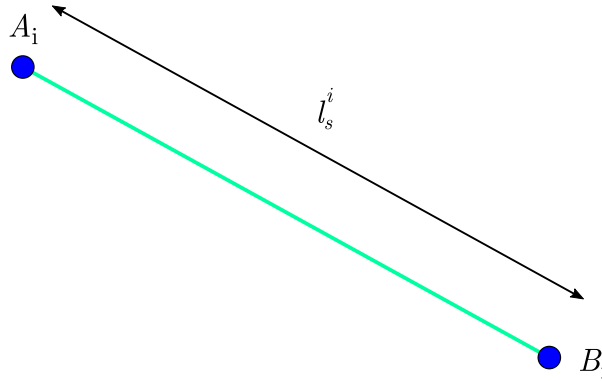
Nous venons d’observer la complexité du comportement des câbles engendrée par leur construction. L’une des problématiques importantes des RPC est donc de déterminer le meilleur choix pour modéliser les câbles. Dans ce manuscrit nous prendrons en compte de différentes manières la modélisation des câbles. Dans un premier temps son module de Young sera ramené à une valeur nominale, puis évoluera dans une plage de variation afin d’analyser l’influence de son incertitude sur l’erreur de pose de la PM. Son rayon sera considéré comme constant et sa masse linéique sera l’un des paramètres mécaniques de l’analyse de sensibilité de l’erreur de pose de la PM dans le chapitre 3. Nous allons voir ci-après les différentes solutions développées pour prendre en compte les câbles.

#### 1.2.4.2 Modélisations du profil des câbles dans le cadre des RPC

Les câbles sont des systèmes complexes dans lesquels de nombreux phénomènes se produisent au cours de leur utilisation (resserrement des fils, semi-plastification, frottement inter-fils etc.). L’ensemble de ces actions a un impact sur les caractéristiques mécaniques générales du câble. L’étude propre du câble est ainsi un domaine vaste et complexe ayant menée à de nombreuses recherches autant dans le champ des RPC que celui du génie civil. Dans ce dernier on peut retrouver des études traitant d’une modélisation en éléments finis des câbles [Baj+12; Bon+19; Ela+04; Lal+17], permettant l’observation des phénomènes de façon détaillée. Il est ainsi possible d’observer les efforts que chaque toron applique sur les autres et de mieux prédire les défaillances et leurs raisons. Par ailleurs, de telles études sont complexes à mettre en application dans le cadre des RPC de par la présence d’une multitude de câbles. Les modèles sont en effet lourds en temps de calcul, si nous imaginons ajouter la PM, les poulies, etc., à cette modélisation nous observerions une augmentation du temps de calcul exponentielle. De plus, l’implémentation dans un processus de commande en temps réel est rendue encore plus délicate par la nécessité de rapidité d’action. C’est pour ces différentes raisons, que nous recherchons à modéliser les câbles dans une vision macroscopique, en ne cherchant pas à simuler l’ensemble des phénomènes, mais uniquement leurs réponses sur les caractéristiques mécaniques. De ce fait, le câble est considéré comme un corps homogène. Trois modèles principaux sont utilisés pour l’étude des RPC. Il est à noter que l’ensemble des modèles développés présente un câble ayant un module de Young considéré comme constant.

**Modèle à segment rigide :** Ce modèle est le plus basique et celui permettant de considérer le modèle géométrico-statique (cf. section 1.2.1.1) juste. En effet, ici les câbles sont ramenés à des segments rigides indéformables sans masse (cf. Fig. 1.11). Ainsi la longueur calculée grâce à l'Eq. 1.1 reste inchangée quelle que soit la charge sur la PM et le type de câble monté sur le RPC. De plus, les tensions présentes dans le câble sont considérées comme uniformes, c'est-à-dire que la tension au point  $B_i$  est la même qu'au point  $A_i$ .

Cette modélisation est admissible dans le cadre de RPC de petites dimensions avec des masses à transporter faibles et des câbles rigides. Les hypothèses faites ici sont fortes et peuvent engendrer de fortes erreurs sur la pose de la PM.



**Figure 1.11** – profil d'un câble modélisé en tant que segment rigide

**Modèle à segment élastique :** Ici la propriété d'élasticité unidirectionnelle du câble est intégrée au modèle du câble considéré comme un segment. La déformation du câble n'est plus admise comme inexistante mais régie par la loi de Hooke. Cette loi, exprimée par l'Eq. 1.19 permet de lier les contraintes  $\sigma$  appliquées au câble avec l'allongement relative  $\varepsilon$  en fonction du module de Young  $E$  quantifiant l'élasticité du câble. Sachant que  $\varepsilon$  s'exprime comme le rapport entre  $\Delta l$  et  $l_0$  où  $l_0$  est la longueur non-déformée et  $\Delta l$  l'allongement et que  $\sigma$  est la contrainte dans le câble, c'est-à-dire la division de l'effort dans le câble  $t$  par sa section  $S$ . Il est possible d'extraire l'allongement  $\Delta l$  du câble (cf. 1.19).

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \Delta l = \frac{l_0 t}{ES} \quad (1.19)$$

Le modèle à segment élastique (cf. Fig. 1.12) nécessite de connaître le jeu de tension  $\mathbf{t}$  pour pouvoir correctement déterminer l'allongement du câble. Dans le cadre du modèle inverse cela ne pose pas de problème car la direction du vecteur unitaire du câble est connue car équivalent à  $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$  et permet donc de calculer  $\mathbf{t}$ . Or dans le modèle direct cherchant à déterminer la pose de la PM, les coordonnées exactes de  $B_i$  sont inconnues et les seules variables connues sont les longueurs initiales des câbles. Il est donc nécessaire de résoudre simultanément l'équilibre de la PM et le modèle géométrique [Mer08].

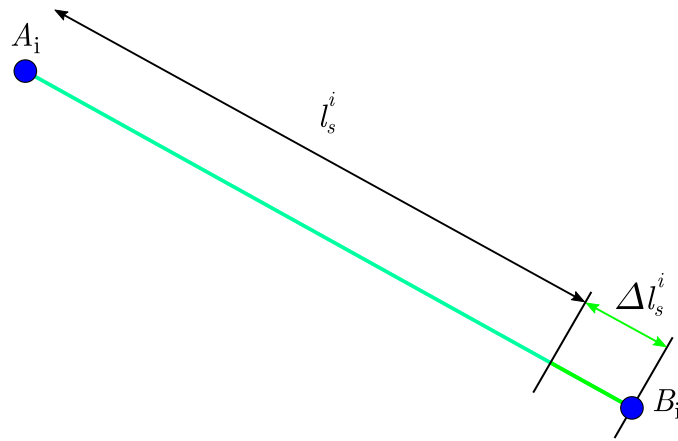


Figure 1.12 – profil d'un câble modélisé en tant que segment élastique

Le modèle à segment élastique fait des hypothèses simplificatrices admissibles dans le cas des RPC de faibles dimensions mais pouvant admettre des efforts importants dans les câbles. En effet, la déformation longitudinale due à ces fortes tensions engendre des erreurs de poses pouvant être importantes et donc néfaste à la réalisation de l'action désirée.

**Modèle à caténaire :** Lorsqu'un RPC transporte des charges importantes les câbles doivent être dimensionnés en conséquence. Cela engendre ainsi des câbles devant être plus résistants, donc ayant une section plus importante, augmentant leur masse linéaire. De plus, des dimensions de RPC importantes ont comme conséquences de générer de grandes longueurs de câbles utiles. Or, lorsqu'une grande quantité de longueur de câble est déployée et que sa masse linéique est importante, le profil du câble se traduit par une courbe non linéaire due à son propre poids. Le modèle caténaire retranscrit le fléchissement du câble sous son propre poids ainsi que son élasticité. Ce modèle a tout d'abord été développé pour le domaine du génie civil par Irvine [Irv81], puis par la suite adapté au RPC [Koz+06].

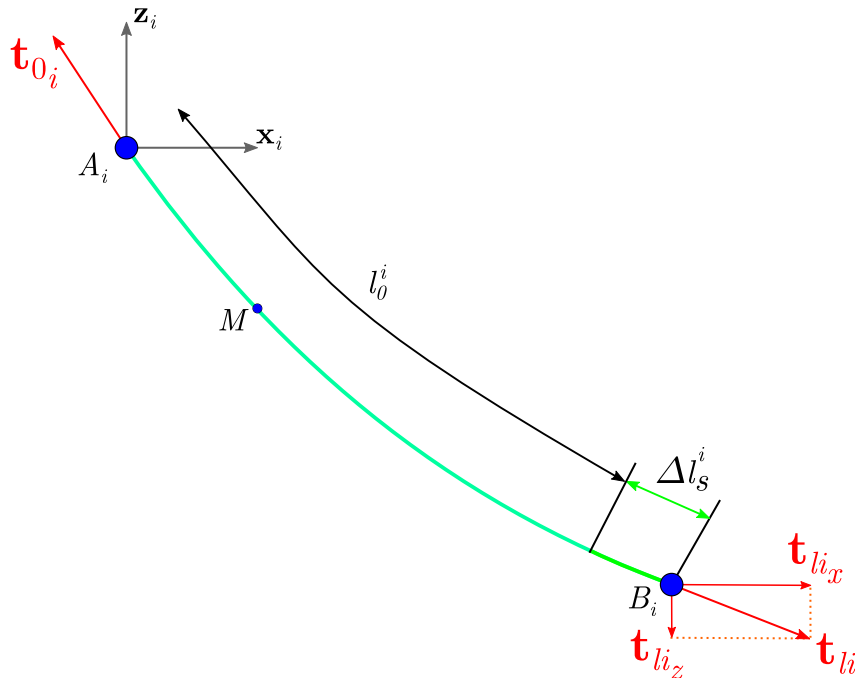


Figure 1.13 – profil d'un câble fléchi sous son propre poids



Comme nous l'avons vu précédemment un câble est mécaniquement décrit par ses grandeurs physiques. Ce modèle prenant en compte le fléchissement sous le poids propre du RPC, il est nécessaire de définir la masse linéique du câble qui est notée  $\mu_0$ , en plus de la section du câble  $S$  ainsi que de son élasticité  $E$ . La figure 1.13 représente le profil d'un câble fléchi. Le câble est décrit dans le plan le comprenant qui est défini par les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{z}_i$ . Un point quelconque  $M$  du câble est décrit par ses coordonnées  $x_i$  et  $z_i$  ayant comme abscisse curviligne non déformée  $0 \leq s_i \leq l_0^i$  et comme abscisse déformée  $0 \leq p_i \leq l_i$ . Les efforts appliqués par la PM sur le câble en  $B_i$  sont notés  $\mathbf{t}_{l_i}$  et sont décomposés par ses composantes en  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{z}_i$ , c'est-à-dire  $t_{l_{i_x}}$  et  $t_{l_{i_z}}$ , et de norme euclidienne  $t_{l_i}$ . L'effort exercé au point de fixation  $A_i$  est noté  $\mathbf{t}_{0_i}$ . Les équations 1.20 et 1.21 traduisent l'équilibre au point  $M$ .

$$t(s_i) \frac{dx}{dp_i} = t_{l_{i_x}} \quad (1.20)$$

$$t(s_i) \frac{dz}{dp_i} = t_{l_{i_z}} + \mu_0 g (s_i - l_0^i) \quad (1.21)$$

où  $\frac{dx}{dp_i}$  et  $\frac{dz}{dp_i}$  sont le cosinus et le sinus de l'angle pris par l'élément de câble étudié. En plus des équations Eq. 1.20 et Eq. 1.21 il est possible d'exprimer la contrainte géométrique de l'Eq. 1.22.

$$\left(\frac{dx}{dp_i}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp_i}\right)^2 = 1 \quad (1.22)$$

Il est possible de déterminer l'équation décrivant  $t(s_i)$  en remplaçant  $\frac{dx}{dp_i}$  et  $\frac{dz}{dp_i}$  dans l'Eq. 1.22 par leurs équations Eq. 1.20 et Eq. 1.21 (cf. 1.23).

$$t(s_i) = \sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + (t_{l_{i_z}} + \mu_0 g (s_i - l_0^i))^2} \quad (1.23)$$

Étant donné que dans le modèle caténaire l'élasticité du câble est modélisée, il est nécessaire de mettre en équation la loi de Hooke. La loi de Hooke appliquée à un élément de câble est exprimée comme par l'Eq. 1.24.

$$t(s_i) = ES \left( \frac{dp_i}{ds_i} - 1 \right) \quad (1.24)$$

Pour déterminer le profil du câble il est donc nécessaire d'exprimer les équations de  $x(s_i)$  et  $z(s_i)$ , ce qui est possible à partir des équations déjà mises en place précédemment.

**Détermination de  $x(s_i)$  :** Nous cherchons donc à exprimer la position en  $x$  de n'importe quel point du câble, ce qui revient à l'énoncer en fonction de  $s_i$ , son abscisse curviligne non déformée. Pour ce faire nous désirons exprimer  $\frac{dx}{ds_i}$  or il est admis que  $\frac{dx}{ds_i} = \frac{dx}{dp_i} \frac{dp_i}{ds_i}$ . Ainsi d'après l'Eq. 1.20 et l'Eq. 1.24 nous obtenons :

$$\frac{dx}{ds_i} = \frac{t_{l_{i_x}}}{ES} + \frac{t_{l_{i_x}}}{t(s_i)} \quad (1.25)$$

En remplaçant  $t(s_i)$  par son expression déterminée par l'Eq. 1.23 nous trouvons que :

$$\frac{dx}{ds_i} = \frac{t_{l_{i_x}}}{ES} + \frac{t_{l_{i_x}}}{\sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + (t_{l_{i_z}} + \mu_0 g(s_i - l_{0_i}))^2}} \quad (1.26)$$

En intégrant l'Eq. 1.26 il est obtenu l'équation décrivant le profil du câble en  $x$ .

$$x(s_i) = \frac{t_{l_{i_x}} s_i}{ES} + \frac{|t_{l_{i_x}}|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \frac{t_{l_{i_z}} + \mu_0 g(s_i - l_{0_i})}{t_{l_{i_x}}} - \sinh^{-1} \frac{t_{l_{i_z}} - \mu_0 g l_{0_i}}{t_{l_{i_x}}} \right] \quad (1.27)$$

**Détermination de  $z(s_i)$  :** L'équation définissant la position en  $z$  de n'importe quel point du câble est déterminée de façon analogue à l'Eq. 1.27,  $z(s_i)$  s'exprime comme :

$$z(s_i) = \frac{t_{l_{i_z}} s_i}{ES} + \frac{\mu_0 g}{ES} \left( \frac{s_i^2}{2} - l_{0_i} s_i \right) + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + (t_{l_{i_z}} + \mu_0 g(s_i - l_{0_i}))^2} - \sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + (t_{l_{i_z}} - \mu_0 g l_{0_i})^2} \right] \quad (1.28)$$

Nous venons de définir l'ensemble des équations nécessaires à la résolution du modèle d'Irvine. Ces équations donnent les coordonnées du point  $M$  du  $i^{\text{ème}}$  câble en fonction de son abscisse curviligne  $s_i$ . Maintenant nous pouvons définir le modèle inverse et direct.

**Modèle inverse :** Le modèle d'Irvine lie la longueur des câbles ainsi que leurs efforts appliqués à leurs extrémités. Il est donc nécessaire de les résoudre en même temps. Ainsi le modèle géométrique inverse revient à déterminer à la fois les longueurs non déformées  $l_{0_i}$  ainsi que les composantes des tensions  $t_{l_i}$  c'est à dire  $t_{l_{i_x}}$  et  $t_{l_{i_z}}$ . Les inconnues de ce modèle pour un robot à  $m$  câbles et à  $n$  ddl sont :

$$[t_{l_{1_x}} \ t_{l_{1_z}} \ l_{0_1} \ \cdots \ t_{l_{n_x}} \ t_{l_{n_z}} \ l_{0_n}]_{1 \times 3n} \quad (1.29)$$

Le modèle géométrique inverse détermine la longueur des câbles en connaissant la position de l'effecteur. Ainsi les paramètres connus sont ici la position de la PM se traduisant donc par la connaissance de  $x_i(s_i = l_{0_i})$  et  $z_i(s_i = l_{0_i})$ . Les Eq. 1.27 et Eq. 1.28 peuvent alors s'écrire comme l'Eq. 1.30 et l'Eq. 1.31 en admettant que  $s_i = l_{0_i}$ .

$$x(l_{0_i}) = \frac{t_{l_{i_x}} l_{0_i}}{ES} + \frac{|t_{l_{i_x}}|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{l_{i_z}}}{t_{l_{i_x}}} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{l_{i_z}} - \mu_0 g l_{0_i}}{t_{l_{i_x}}} \right) \right] \quad (1.30)$$

$$z(l_{0_i}) = \frac{t_{l_{i_z}} l_{0_i}}{ES} - \frac{l_{0_i}^2 \mu_0 g}{2ES} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + t_{l_{i_z}}^2} - \sqrt{t_{l_{i_x}}^2 + (t_{l_{i_z}} - \mu_0 g l_{0_i})^2} \right] \quad (1.31)$$

Il est ainsi obtenu  $2m$  équations. Par ailleurs, il est connu que le vecteur  $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$  exprimé dans le repère du câble a comme formulation :

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i(l_{0_i}) \\ 0 \\ z_i(l_{0_i}) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{c_i}^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{R}(\mathbf{o}) \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \quad (1.32)$$

où  $\mathbf{R}_{c_i}$  est la matrice de rotation entre le repère global et celui du câble. Étant donné que le modèle d'Irvine relie tension et longueur non déformée il est nécessaire de le résoudre simultanément avec l'équilibre statique de l'Eq. 1.5. La résolution géométrique inverse de ce modèle appliqué au RPC consiste alors à résoudre le système suivant exprimé dans l'Eq. 1.33.

$$\begin{cases} -\mathbf{W}_f \mathbf{t} + \mathbf{w}_e = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_{c_1}^{-1}(\mathbf{x}_{PF} + \mathbf{R}(\mathbf{o})\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n - \mathbf{R}_{c_n}^{-1}(\mathbf{x}_{PF} + \mathbf{R}(\mathbf{o})\mathbf{b}_n - \mathbf{a}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.33)$$

**Modèle direct :** Le modèle géométrique direct à l'inverse du modèle géométrique inverse cherche à déterminer la position de l'effecteur en connaissant le jeu de longueurs de câbles initiales  $\mathbf{l}_0$ . La résolution de ce modèle se fait avec le même système que présenté dans l'Eq. 1.33, cependant le vecteur des inconnues s'exprime maintenant comme :

$$[\mathbf{p}^T \mathbf{o}^T \cdots t_{l_{1x}} \ t_{l_{1z}} \cdots t_{l_{nx}} \ t_{l_{nz}}]_{1 \times (m+2n)} \quad (1.34)$$

La résolution du modèle d'Irvine appliqué au RPC est, autant pour la problématique inverse que directe, une question demandant la résolution simultanée des tensions et de la géométrie, et cela pour l'ensemble des câbles en même temps. De plus, les équations d'Irvine sont non-linéaires ce qui complexifie encore leur résolution. La recherche de solution est alors principalement faite par méthode numérique comme Riehl qui lors de sa thèse [Rie11] a utilisé la fonction « *fmincom* » de Matlab. D'autres approches ont été développées pour chercher à réduire le coût de calcul, comme à l'aide d'analyse par intervalles [Mer15 ; Mer18 ; Mer19].

Dans cette partie, nous avons présenté ce qu'était un câble et avons pu observer la complexité de sa modélisation pour déterminer son allongement et son profil. Différents modèles existent réalisant plus ou moins d'hypothèses simplificatrices fortes. Il est donc important de correctement définir l'étendue de notre modélisation pour un RPC afin de sélectionner au mieux le modèle de câble. De plus, l'intégration d'un module de Young non-constant au modèle élastique ainsi que caténaire est complexe et n'est, au travers de la bibliographie, pas réalisé. Lors des travaux présentés dans les chapitres suivants, la modélisation des câbles évoluera au fur et à mesure. En effet, au début les câbles seront considérés comme des segments élastiques pour, par la suite être modélisés comme des caténaires élastiques. La prochaine partie s'intéressera aux outils mathématiques utilisés au travers de cette thèse.

## 1.3 Outils Mathématiques

Dans les études menées au cours de la thèse présentée ici, nous utiliserons une série d'outils mathématiques permettant de résoudre et d'analyser nos travaux. Cette partie est dédiée à la présentation de ces dispositifs. Nous introduirons tout d'abord les processus d'optimisation mis en place pour résoudre les modèles développés dans le chapitre 2 puis nous verrons le principe de plan d'expériences permettant l'analyse de sensibilité de nos paramètres.

### 1.3.1 Outils d'optimisations

Un processus d'optimisation cherche à minimiser (ou maximiser dans de plus rares cas) la réponse à un problème exprimé sous forme d'une fonction coût ou aussi appelée fonction objectif tout en respectant une série de contraintes. Ces méthodes permettent la résolution de systèmes complexes à résoudre analytiquement mais aussi de déterminer la meilleure solution d'un ensemble de solutions possibles. Cette discipline est une branche des mathématiques faisant l'objet de nombreuses recherches, aboutissant donc à une multitude d'algorithmes répondant à différentes problématiques. Dans le cadre de notre travail nous utilisons trois fonctions à des fins d'optimisation et de résolution que nous allons présenter.

**lsqnonlin** : Est une fonction de Matlab, permettant la résolution d'un système non linéaire d'équations en contraignant les variables dans des ensembles finis. En d'autres mots, nous recherchons les solutions  $\mathbf{x}$  résolvant l'ensemble des  $n$  équations non-linéaires du système  $F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \dots f_n(\mathbf{x})]^T$ . Mathématiquement, l'algorithme cherche à minimiser la norme euclidienne des fonctions du système comme exprimé dans l'Eq. 1.35 [Lev44 ; Mar63].

$$\min_{\mathbf{x}} \|F(\mathbf{x})\|_2^2 = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})^2 \quad (1.35)$$

Cette fonction présente l'avantage de résoudre les systèmes non-linéaires tout en permettant de restreindre la solution  $\mathbf{x}$  à un ensemble fini  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}]$ .

**fmincon** : Est aussi une fonction de Matlab. À l'inverse de « lsqnonlin » cherchant une solution à un problème, « fmincon » recherche à minimiser une fonction scalaire  $f(\mathbf{x})$ , nommée fonction coût/objectif, tout en respectant des contraintes d'égalités et/ou d'inégalités linéaires ou non et en bornant les variables  $\mathbf{x}$ . Nous pouvons exprimer cette problématique comme l'Eq. 1.36.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ t.q. \\ c(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ c_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \\ \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}] \end{array} \right. \quad (1.36)$$

où  $c(\mathbf{x})$  et  $c_{eq}(\mathbf{x})$  sont les systèmes de fonctions non-linéaires de contraintes d'inégalité et d'égalité au problème.  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}_{eq}$  ainsi que  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}_{eq}$  sont les matrices et les vecteurs liés aux contraintes linéaires d'inégalité et d'égalité. Cette fonction, permet de déterminer un minimum à la fonction coût. Pour l'utilisation de cette fonction il est nécessaire cependant de fixer une valeur initiale de recherche  $\mathbf{x}_0$ . Or « fmincon » recherche le minimal le plus proche de  $\mathbf{x}_0$  pouvant être un minimum local et non le minimum global.

**PSwarm** : Est un algorithme développé par Vaz [Vaz20]. Cette méthode permet une recherche de motifs, garantissant la convergence vers des points stationnaires. Dans la phase de la recherche de motifs, un schéma d'essaim de particules est appliqué afin d'explorer globalement la non-convexité possible de la fonction objectif [Le +12 ; Vaz+07 ; Vaz+09]. Cet algorithme permet tout comme « fmincon » une recherche de solutions minimisant une fonction  $f$  mais sans contrainte non-linéaire.

### 1.3.2 Plan d'expériences

La méthode des plans d'expériences est utilisée dans de multiples domaines scientifiques, autant dans les sciences appliquées qu'humaines. Initialement développée pour faciliter et limiter le nombre d'essais réalisés lors d'expériences réelles, cette méthode est vite apparue comme généraliste et applicable à l'ensemble des essais tant numériques qu'expérimentaux. Cette science peut être qualifiée de science de l'organisation des essais et cherche à réduire au strict minimum le nombre d'essais tout en extrayant la même quantité d'informations de ces expériences [Ant06 ; Bar14 ; Bow+19 ; Kro+15]. En effet, à chaque type d'étude un certain nombre de facteurs peuvent être retenus comme possiblement influant sur le résultat final. La question est donc « à quel niveau chacun de ces facteurs impacte la réponse de l'expérience ? ». C'est à cette question que le plan d'expériences répond, en mettant en équation les essais, extrayant ainsi les influences et interactions de chacun des paramètres.

Un plan d'expériences dans sa forme la plus classique, c'est à dire un plan d'expériences factoriels à deux niveaux, cherche à déterminer l'influence de  $k$  facteurs. Comme son nom l'indique ce plan d'expériences comporte deux niveaux, un bas (noté  $-$ ) et un haut (noté  $+$ ) impliquant donc que chaque facteur, qu'il soit continu ou discret, doit pouvoir se réduire à deux valeurs. Nous allons par la suite construire notre plan d'expériences composant l'ensemble des configurations possibles entre les  $k$  facteurs, ce qui revient à déterminer les  $2^k$  essais. Dans l'objectif de mieux illustrer nous allons nous fixer sur un plan d'expériences à 3 facteurs, comprenant donc 8 essais. La méthodologie reste cependant la même quel que soit le nombre  $k$ . Nous avons donc le plan d'expériences suivant (cf. Tab. 1.2). Ce plan d'expériences organise le processus expérimental à mettre en place.

Essais	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	-	-	-
2	-	-	+
3	-	+	-
4	-	+	+
5	+	-	-
6	+	-	+
7	+	+	-
8	+	+	+
Domaine d'étude			
Niveau $-$	Facteur 1 $-$	Facteur 2 $-$	Facteur 3 $-$
Niveau $+$	Facteur 1 $+$	Facteur 2 $+$	Facteur 3 $+$

**Table 1.2** – Exemple de plan d'expériences factoriels complet à deux niveaux et à 3 facteurs

Lorsque l'ensemble des essais décrit dans le plan d'expériences est réalisé nous obtenons 8 résultats, appelés réponses du plan d'expériences et notés  $y_i$  par la suite, où  $i$  est le numéro de l'essai. Nous pouvons donc exprimer cette campagne d'essais sous forme d'un système de 8 équations à 8 inconnues. Ces dernières sont notées  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  et  $a_{123}$ . L'interprétation de ces inconnues est la suivante :

- $a_0$  est la valeur de réponse au centre du domaine d'étude, aussi définie comme étant la moyenne des  $k$  réponses, ici des 8 réponses ;
- $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont les effets propres à chaque facteur ;
- $a_{12}, a_{13}$  et  $a_{23}$  sont les interactions entre les facteurs, ainsi  $a_{12}$  décrit l'interaction entre le facteur 1 et 2 ainsi de suite ;
- $a_{123}$  est l'interaction entre l'ensemble des facteurs ;

Nous pouvons donc écrire ce système d'équations sous forme matriciel comme sur l'Eq. 1.37.

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{a} \tag{1.37}$$

où  $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_8]^T$  est le vecteur des réponses et  $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_{12} \ a_{13} \ a_{23} \ a_{123}]^T$  le vecteur des inconnues.  $\mathbf{M}$  est la matrice définissant le système et s'exprime par l'Eq. 1.38.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

La matrice  $\mathbf{M}$  étant carrée et ayant son déterminant non-nul, elle est donc inversible, nous pouvons obtenir l'expression de  $\mathbf{a}$  et ainsi connaître les effets de chaque facteur.

Nous venons d'explorer le principe de plan d'expériences dans sa composition la plus simple. Cependant, il existe de nombreux types de plan d'expériences permettant de s'adapter à la complexité des expériences, les plans d'expériences factoriels fractionnaires à deux niveaux  $2^{k-p}$ , les plans de Plackett et Burman [Van+07], les plans du second degré admettant des facteurs continus prenant plus de deux niveaux, etc. Dans notre cadre, nous nous limiterons à des études ayant 4 facteurs ou moins et pouvant être réduit à une valeur haute et basse, nous permettant ainsi de restreindre notre utilisation des plans d'expériences aux modèles factoriels à deux niveaux. Dans le cas de nos travaux les plans d'expériences seront utilisés pour déterminer l'influence des paramètres géométriques et mécaniques sur la précision de la pose de la PM du RPC. Cette analyse de sensibilité permettra d'améliorer la robustesse de conception des architecture de RPC. La partie suivante présentera le principe d'analyse de sensibilité.

## 1.4 Analyse de sensibilité

Les performances d'un système, quel qu'il soit, sont affectées par ses paramètres d'entrées. Par exemple le résultat d'une expérience en chimie peut-être influencé par la concentration des différents composés ou encore la température ambiante de la pièce dans laquelle est menée l'essai. Dans le cadre d'un système mécanique sa performance peut être évaluée par son efficacité énergétique, sa précision ou encore sa robustesse. Ces critères peuvent être affectés par la valeur des paramètres décrivant les différents sous-systèmes.

Dans le cas d'un robot, l'analyse de sensibilité cherche à observer l'influence des paramètres de conception sur la précision de la PM. En effet, la position de la PM est influencée par le choix des paramètres de conception, mais aussi par l'incertitude portée par ces paramètres. De plus, la particularité des RPC est l'utilisation de câbles dans la chaîne d'actionnement se traduisant par une diminution de la rigidité globale par rapport à leurs homologues les robots sériels ou parallèles à segment rigide. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.4.1 un câble est touché par une incertitude sur son module de Young. Ainsi en plus d'incertitude sur les paramètres géométriques du système il est nécessaire d'ajouter un volet d'incertitudes sur les paramètres mécaniques des câbles dans l'analyse de sensibilité.

Dans notre étude portant sur les RPC, l'analyse de sensibilité nous permettra de déterminer l'influence des paramètres de conception pour comprendre au mieux leur rôle dans la précision de la PM. L'objectif de cette analyse est de guider le concepteur dans ses choix au niveau de la phase de conception préliminaire. De plus, nous pourrions observer l'impact que les incertitudes inhérentes à la construction des câbles ont sur la position de la PM. Cela nous permettra de mieux comprendre le phénomène et ainsi chercher à le compenser au mieux.

L'analyse de sensibilité peut être menée de bien des manières, par la méthode des indices de Sobole [Alh+16 ; Tos+20], la méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Testing)

[Guo+17; Tar+17], la méthode de Morris [Che+16; Mor91] ou encore par plan d'expériences. Au sein de nos études nous avons favorisé cette dernière méthode. Elle a été décrite plus haut dans ce chapitre (cf. 1.3.2).

D'un point de vu des RPC, nous pouvons citer l'article S. Baklouti [Bak+18] travaillant sur la sensibilité des RPC aux incertitudes élasto-géométrique. Cet article étudie 62 incertitudes élasto-géométrique pour le RPC CAROCA à 8 câbles soit 51 incertitudes géométriques et 11 mécaniques. La modélisation du RPC prend en compte le fléchissement du câble. S. Baklouti a ainsi pu observer l'importance de prendre en compte l'effet d'hystérésis des câbles dans la modélisation des erreurs. De plus, ils ont pu observer que les erreurs géométriques sur l'erreur de précision en statique était significatif.

Cette section a introduit le concept d'analyse de sensibilité et a, à travers l'article de S. Baklouti, montrée l'importance des incertitudes sur la précision des RPC.

## 1.5 Conclusion et cadre de l'étude

Au travers de ce chapitre, nous avons présenté le concept de RPC, nous permettant d'intégrer les termes qui seront utilisés tout au long de ce manuscrit ainsi que de se familiariser avec son mécanisme, ses particularités et ses architectures possibles. Par la suite, les modèles développés pour la modélisation géométrico-statique des RPC ont été présentés ainsi que les réponses existantes aux problèmes de gestion des tensions dans les câbles et de la définition de l'espace de travail des RPC. Une présentation plus axée sur les câbles a ensuite été développée afin de comprendre leur comportement mécanique ainsi que les problématiques en découlant. Les modélisations des câbles mises en place dans le domaine des RPC venant en complément des modèles géométrico-statiques ont été étudiées. Par la suite, les outils mathématiques utilisés dans le cadre de cette thèse ont été explicités. Pour finir, le principe d'analyse de sensibilité a été présenté. Ce chapitre a introduit les notions nécessaires à l'étude des RPC d'un point de vue mécanique en se restreignant au domaine statique.

Au cours de cette partie nous avons pu mettre l'accent sur un certain nombre de problématiques inhérentes aux RPC (cf. 1.1). L'ensemble de ces problématiques impacte directement le fonctionnement des RPC. En effet, cela engendre des erreurs de poses de la PM tant en position  $\mathbf{p}$  qu'en orientation  $\mathbf{o}$ , se traduisant donc par des problèmes de précision. Actuellement, cela est compensé par un travail important d'étalonnage et d'asservissement par capteurs. Il est observable qu'une partie de ces problématiques est directement liée à la chaîne d'actionnement du RPC et fait déjà l'objet de nombreuses études. D'autres restent encore assez floues et peu étudiées. Nous pouvons déjà souligner que l'étude des RPC comportant des poulies de renvois avec des enrouleurs au sol est un domaine restreint. L'ensemble des modèles développés néglige la longueur existante entre la sortie de l'enrouleur et l'entrée de la poulie, appelée longueur morte. Cette longueur est sujet au phénomène d'élasticité et de fléchissement engendrant une variation de longueur de câble, et impactant donc la pose finale de la PM. D'autre part, la présence de poulies engendre forcément un certain nombre de paramètres géométriques supplémentaires ayant plus ou moins d'influence sur la pose de la PM. De plus, nous avons pu observer que la déformation des câbles est un domaine présentant une forte influence sur les RPC, ce qui est marqué en plus par une forte incertitude propre à sa construction rendant son étude et sa modélisation complexe et imposant de devoir faire des hypothèses simplificatrices fortes. En effet, la prise en compte de l'ensemble de ces paramètres au sein d'un processus de commande en temps réel est rendu extrêmement complexe de par le temps de calcul élevé que cela demande.

Le cadre de l'étude découle de ces verrous scientifiques encore présents. Cette thèse ce concentre exclusivement sur la conception de l'architecture mécanique des RPC, ainsi tout le processus de commande et de l'étalonnage n'est pas pris en compte. Nous pouvons en revanche apporter par notre expertise une étude et un regard sur le comportement

mécanique des RPC. La question que nous nous sommes posée est : « Comment pouvons-nous améliorer la modélisation des RPC et leur conception préliminaire afin de réduire initialement l'imprécision des RPC ». Les travaux réalisés se sont donc focalisés sur l'influence de la prise en compte de la poulie dans les modèles ainsi que sur l'étude des différents paramètres la composant. Il est de plus recherché à comprendre l'influence de l'incertitude du câble due à son hystérésis. La sensibilité des différents paramètres est ainsi étudiée et la recherche d'architecture réduisant leurs influences, permettant d'éviter un processus de commande trop complexe, est par la suite réalisée. Dans un premier temps au chapitre 2, nous définirons l'ensemble des modèles développés et utilisés dans cette thèse dont la particularité est la prise en compte de la longueur morte et le développement d'une nouvelle architecture de poulie. Le chapitre 3 présentera l'étude s'axant sur la géométrie de la poulie et son influence sur la précision des RPC. Finalement dans le chapitre 4, nous intégrerons l'hystérésis de chacun des câbles dans le modèle le plus complet de RPC développé dans cette thèse et analyserons et quantifierons son influence sur l'incertitude de pose de la PM.





# 2

## Modélisations statiques et erreur de pose des robots parallèles à câbles suspendus

2.1	Modèles Géométriques Étendus . . . . .	36
2.1.1	Prise en compte de la longueur morte du câble dans le modèle standard . . . . .	36
2.1.2	Prise en compte de la géométrie des poulies . . . . .	38
2.2	Prise en compte du comportement mécanique du câble . . . . .	44
2.2.1	Élasticité uni-directionnelle du câble . . . . .	45
2.2.2	Fléchissement du câble . . . . .	46
2.3	Méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique . . . . .	53
2.3.1	Quantification de l'erreur de pose théorique . . . . .	53
2.3.2	Méthodologie de comparaison de plusieurs RPC . . . . .	60
2.4	Conclusion . . . . .	61

Ce chapitre établit les modèles développés et utilisés tout au long de cette thèse. Ces modélisations prennent en compte un ensemble de paramètres géométriques souvent négligés dans l'étude des RPC. Le premier d'entre eux est la géométrie des poulies de renvoi. Le second est, la longueur de câble entre l'enrouleur et l'entrée de la poulie, nommée longueur morte. Dans les chapitres suivants, ces modèles seront enrichis par le comportement mécanique des câbles, c'est-à-dire leur élasticité et leur fléchissement. Par ailleurs, les travaux menés dans cette thèse visent à étudier l'influence d'un nouveau type d'articulation de poulie sur la précision des RPC. Nous détaillerons ainsi les modèles pour deux types d'architecture de poulie. Il est à noter que toutes ces modélisations sont développées pour des RPC de type suspendu. Cela a comme influence sur les modèles que la totalité des câbles provient de la partie supérieure du RPC et que les efforts extérieurs appliqués sur la PM sont verticaux et constants. De plus, les modélisations des RPC sont réalisées pour des configurations statiques. Pour ne pas alourdir les notations, le terme "statique" ne sera donc pas rappelé dans la dénomination des modèles. Ainsi les modèles « géométrico-statiques » seront notés uniquement « géométrique ».

La contribution majeure de ce chapitre est le développement de modèles généraux, prenant en compte simultanément des paramètres géométriques et mécaniques qui sont étudiés de manière indépendante dans la littérature. Ceux-ci permettent une analyse numérique détaillée de la pose de la PM. Nous verrons tout d'abord le paramétrage appliqué à la chaîne d'actionnement d'un RPC puis sa modélisation géométrique. Par la suite, nous intégrerons la prise en compte du comportement mécaniques des câbles dans ces modèles. Finalement, une méthodologie d'évaluation de l'erreur de pose théorique est proposée.

## 2.1 Modèles Géométriques Étendus

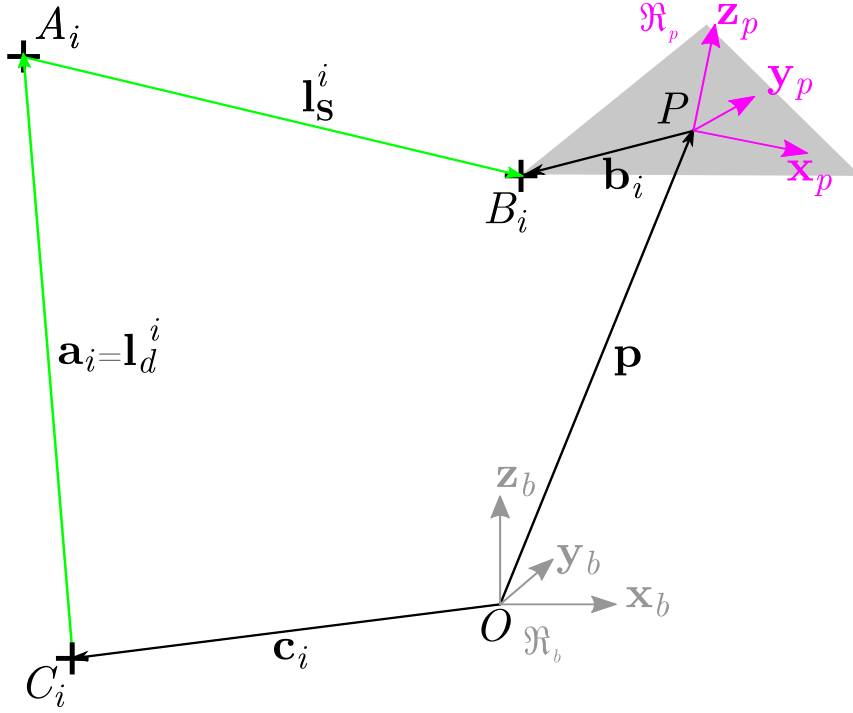
Comme nous avons pu l'évoquer dans le chapitre 1 pour qu'un RPC possède une architecture suspendue, deux solutions existent. La première, est de fixer directement l'enrouleur sur la structure supérieure du RPC, ce qui, dans le cadre des RPC de petite dimension est possible. Ce type de fixation est nettement moins adaptée pour les RPC de grande dimension. La seconde, est de fixer ces enrouleurs au sol et de faire monter le câble en le faisant passer par une poulie, dite de renvoi, pour ensuite le faire redescendre vers la PM. Cette dernière solution est généralement utilisée pour des RPC ayant des dimensions extérieures de plusieurs mètres. C'est cette dernière architecture qui est modélisée et étudiée, car elle offre un panel d'utilisation plus important. Notons, à notre connaissance, qu'aucun modèle ne prend en compte la longueur de câble existante entre la sortie de l'enrouleur et l'entrée de la poulie, appelée longueur morte. Cette partie du câble est pourtant affectée, au même titre que la longueur utile, par des phénomènes de déformation élastiques. De plus, les modèles prenant en compte les poulies [Pot12] considèrent toujours que l'entrée du câble dans le réa se fait parallèlement à l'axe de rotation de la pivot. Nous modéliserons une poulie plus générale dite « classique » n'ayant aucune contraintes spécifiques. De plus, une seconde architecture de poulie plus innovante, ayant une articulation de type joint de cardan, est également étudiée. Une comparaison de ces deux poulies permettra de déterminer les configurations intéressantes pour l'utilisation de la poulie à joint de cardan dans le cadre des RPC.

La modélisation géométrique permet de définir la position et la longueur de l'ensemble des composants du RPC en fonction soit de la pose de la PM (modèle Inverse) soit des longueurs des câbles (modèle Direct). Cette modélisation peut prendre en compte un certain nombre de paramètres. Pour chaque modèle un paramétrage est nécessaire afin de définir les notations propres au modèle. Une partie des notations mise en place est identique à celle décrite dans le chapitre 1 mais seront rappelées et certaines redéfinies.

Dans ce chapitre, nous verrons donc tout d'abord l'ajout de la longueur morte du câble dans le modèle standard du RPC. Par la suite, nous établirons les modèles dits « étendus » avec les poulies. En effet, nous nommerons ces modèles « modèles étendus » pour les distinguer du modèle standard ne prenant pas en compte les poulies ni les longueurs mortes (cf. section 1.2.1.1). Nous commencerons par établir le modèle géométrique étendu d'un RPC équipé avec des poulies ayant comme articulation un pivot d'axe vertical. Enfin, le modèle géométrique étendu avec des poulies à joint de cardan sera présenté.

### 2.1.1 Prise en compte de la longueur morte du câble dans le modèle standard

Dans cette modélisation nous prenons comme base le modèle dit « standard » de la bibliographie. Cependant, au lieu de considérer que le câble est composé d'une unique longueur nous prenons également en compte la longueur entre l'enrouleur et le point de renvoi dans le calcul de la longueur totale de câble. En effet, dans la définition géométrique standard des RPC, les poulies sont simplifiées et modélisées par des points de passages fixes notés  $A_i$ , avec  $i = 1, \dots, m$  l'indice d'un chemin de câble, où  $m$  est le nombre de câbles du RPC. Le Modèle Géométrique Inverse Standard ( $MGI_S$ ) est généralement obtenu, pour une pose donnée de la PM, en déterminant les longueurs utiles  $l_S^i$  entre les points de sortie des câbles  $A_i$  et les points d'attache des câbles à l'effecteur  $B_i$ , comme illustré dans la figure Fig. 2.1.



**Figure 2.1** – Paramétrisation de la  $i^{\text{ème}}$  chaîne d'actionnement d'un RPC sans prise en compte de la poulie de renvoi

Comme expliqué précédemment la longueur de câble reliant les points  $A_i$  aux points de sortie des enrouleurs, notés  $C_i$ , est intégrée au modèle géométrique standard. Il est à noter que dans le cadre de cette étude nous supposons les points  $C_i$  fixes et les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  colinéaires à l'axe  $\mathbf{z}_b$ . L'utilisation d'enrouleurs présentant un point de sortie du câble imposé par un guide permet de respecter cette hypothèse [Jin+17]. Cette longueur est appelée la longueur morte  $l_d^i$ . Un RPC est représenté de façon simplifiée par une chaîne vectorielle pour chaque chemin de câble  $i$ . Dans les modèles standards les câbles sont assimilés à des segments rigides indéformables non-pesants, ainsi leur longueur utile n'est autre que la norme euclidienne de la somme des vecteurs reliant les différents points de la chaîne cinématique. Le modèle géométrique inverse qualifié de standard est donc défini par :

$$\mathbf{l}_S^i = \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

où la norme euclidienne de  $\mathbf{l}_S^i$  est la longueur utile standard  $l_S^i$  du  $i^{\text{ème}}$  câble,  $\mathbf{p}$  est le vecteur position reliant le point  $O$ , centre du repère de base  $\mathcal{R}_b$ , au point  $P$ , centre théorique de la PM.  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation du repère  $\mathcal{R}_p$  lié à la PM par rapport au repère  $\mathcal{R}_b$ . Le vecteur  $\mathbf{b}_i$  décrit la géométrie de la PM dans le repère  $\mathcal{R}_p$ .  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{c}_i$  sont les vecteurs qui positionnent respectivement les points  $A_i$  et  $C_i$  comme illustré sur la figure Fig.2.1.

La longueur morte  $l_d^i$  est décrite par la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{l}_d^i$  reliant la sortie de l'enrouleur et le point de renvoi  $A_i$ . Dans la modélisation standard ce vecteur est constant quelle que soit la pose de la PM, c'est-à-dire que  $\mathbf{l}_d^i = \mathbf{a}_i$ . Étant donné que l'étude est complétée par cette longueur morte, la longueur totale standard du câble  $i$  déployée, notée  $L_{T_S}^i$ , à prendre en compte s'écrit :

$$L_{T_S}^i = \|\mathbf{l}_S^i\|_2 + \|\mathbf{l}_d^i\|_2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

Cette modélisation nous permettra dans le chapitre 3 de calculer les différents modèles géométriques directs prenant en compte les longueurs mortes ainsi que les poulies de renvois.

## 2.1.2 Prise en compte de la géométrie des poulies

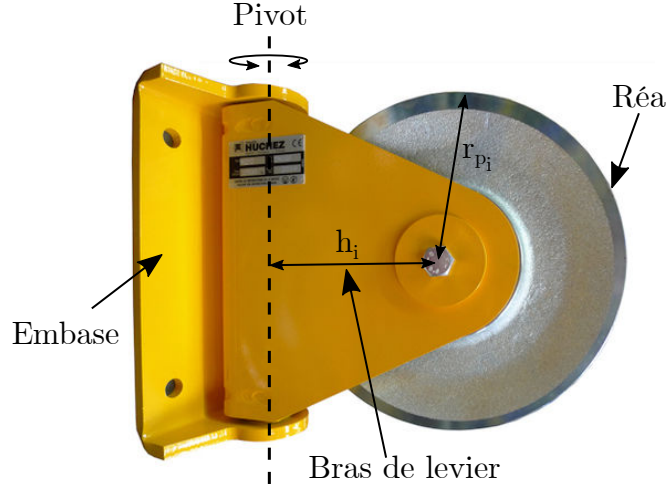
Les poulies font parties intégrantes des RPC, mais leur prises en compte dans les modèles actuels est encore rare. De plus, un modèle comprenant les poulies ainsi que les longueurs mortes de câbles n'a jamais été établi, à notre connaissance, dans la littérature. Cette partie s'attellera à formaliser ces modèles pour les deux types d'architecture de poulies étudiées dans ce manuscrit. Nous commencerons par mettre en place la modélisation pour une poulie ayant un pivot d'axe vertical comme articulation. Ensuite, le modèle géométrique étendu avec des poulies à joint de cardan sera présenté.

### 2.1.2.1 Prise en compte d'une poulie ayant une articulation de type pivot

Cette section formalise la modélisation d'un RPC équipé de poulies à pivot. Ce type de poulie est couramment utilisé dans de nombreux domaines, tel que dans la manutention, la construction ou encore dans le naval. L'articulation pivot autorise un ddl de rotation autour d'un axe vertical, ce qui permet à la poulie de s'aligner avec la direction de l'effort appliqué au câble. De ce fait, les différentes parties du câble restent toujours dans un plan verticale quelque soit la pose de la PM. Il est à noter que la plupart des RPC sont équipés de poulie limitant la torsion du câble en contraignant le point d'entrée du câble dans le réa à un point fixe, à l'image du RPC CAROCA [Bak+18]. L'installation du câble dans ce type de poulie peut devenir complexe et surtout lorsque le câble est équipé d'anneaux de fixation à son extrémité. De plus, dans l'idée d'un RPC reconfigurable facilement, il serait bon de limiter ce type de contraintes d'assemblage. C'est pourquoi, dans cette thèse nous sommes intéressés à modéliser une poulie sans contrainte sur le point d'entrée du câble, laissant ainsi assez d'ouverture pour une installation rapide du câble. Tout d'abord, définissons les composants de ce type de poulie. La figure 2.2 présente un exemple de poulie ayant une articulation de type pivot vertical. Au travers de cette figure nous pouvons présenter les termes associés à chaque composant de la poulie. Le réa est la « roue » de la poulie où le câble vient s'enrouler. Elle est équipée d'une gorge sur l'ensemble de son périmètre afin de guider le câble. Ce réa est en liaison pivot avec le bras de levier par le biais d'un axe souvent équipé de roulement à billes. En effet, cela réduit les frottements, permettant ainsi à le réa d'accompagner sans résistance le câble dans son mouvement. Le bras de levier permet de relier le réa à l'embase de fixation par l'intermédiaire d'une seconde liaison pivot d'axe vertical. L'ensemble de tous ces éléments définissent ce que nous appelons la poulie.

Maintenant, que les termes propres aux poulies sont définis, il est nécessaire de fixer les notations employées pour définir les équations des modèles prenant en compte ces poulies. Notons que ces modèles sont qualifiés de « étendu » afin de marquer la différence par rapport aux modèles standards et souligner la présence des poulies de renvoi. Pour gagner en clarté le type de poulie utilisé dans le modèle sera précisé dans son nom. Ainsi nous noterons le modèle inverse « Modèle Géométrique Inverse Étendu à Pivot » ( $MGI_{EP}$ ) et le direct « Modèle Géométrique Direct Étendu à Pivot » ( $MGD_{EP}$ ). Dans un premier temps, nous avons schématisé une chaîne d'actionnement, c'est-à-dire paramétrer l'ensemble d'un câble de l'enrouleur à son point de fixation sur la PM. La Fig. 2.3a présente ce paramétrage ainsi que la schématisation cinématique de l'articulation de la poulie.

Nous pouvons observer que la paramétrisation est proche de celle du modèle standard (cf. Fig. 2.1). Cependant, l'ajout de la poulie impose la définition des paramètres qui lui sont propres. Tout d'abord, nous pouvons noter que le point  $A_i$  est considéré ici comme le point d'ancrage de la poulie à la structure fixe du RPC et non plus comme le point de sortie du câble. Ce point est situé sur l'axe de rotation de la pivot et est le centre du repère de l'articulation de la poulie  $\mathcal{R}_{art}$ . Le centre de le réa est représenté par  $H_i$ . Nous



**Figure 2.2** – Exemple de poulie à pivot et sa nomenclature (Poulie de renvoi Huchez gamme PA)

pouvons décrire la géométrie de la poulie par deux valeurs. La première est le rayon  $r_{p_i}$  du réa, représentant la distance entre le centre  $H_i$  et le fond de gorge du réa. La seconde est la longueur du bras de levier  $h_i$  défini par la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{h}_i$  reliant les points  $A_i$  et  $H_i$ . La position dans l'espace cartésien de la poulie est définie par l'angle  $\alpha_i$  (cf. Fig. 2.3b). Cet angle permet l'alignement du plan  $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$  avec le plan formé par les trois points  $C_i, A_i$  et  $B_i$ . Cet angle est fonction de la pose de la PM (cf. Eq. 2.3).

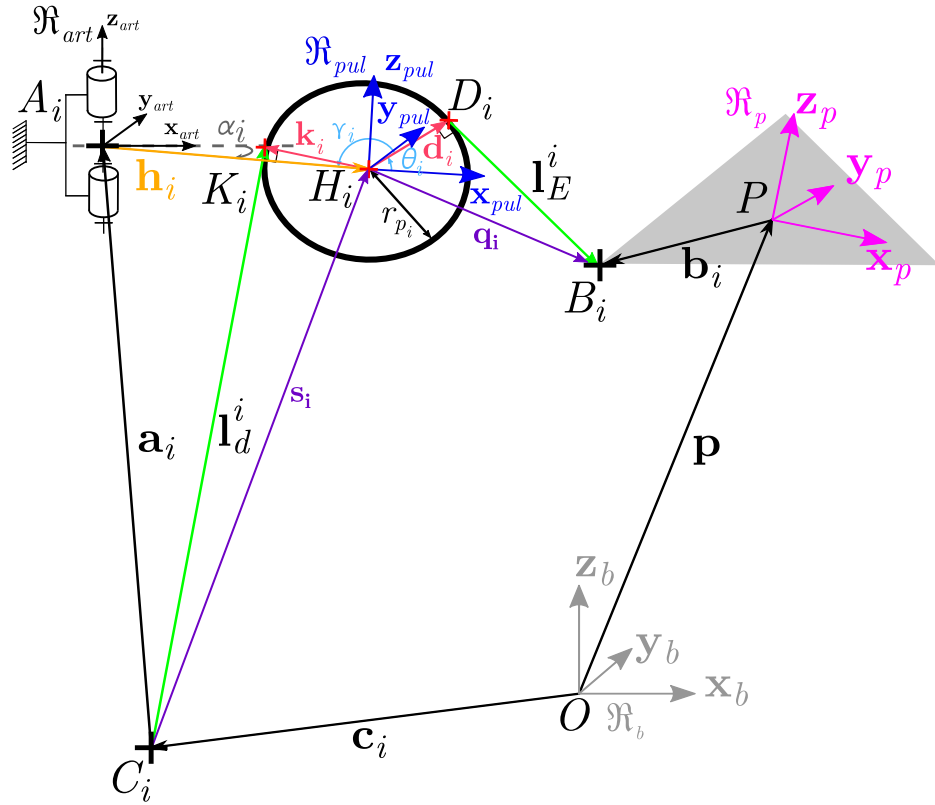
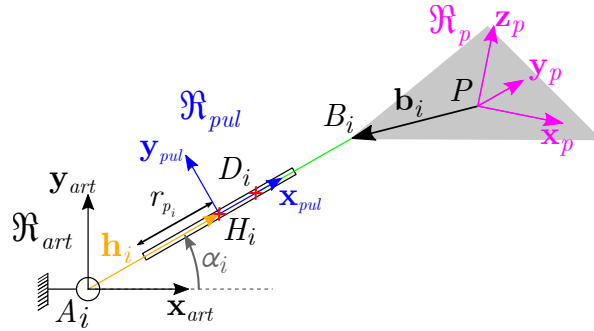
$$\alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{l}_S^i \cdot \mathbf{x}_b}{\|\mathbf{l}_S^i\|_2} \right) \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{l}_S^i$  est la longueur de câble utile du modèle standard (cf. Fig. 2.1), et permet d'exprimer le vecteur reliant les points  $A_i$  et  $B_i$ . Précisons que le repère  $\mathfrak{R}_{pul}$  est le repère attaché à la poulie et dans lequel l'ensemble des paramètres de celle-ci est exprimé. Le point d'entrée du câble en provenance de l'enrouleur est noté  $K_i$  et est décrit par le vecteur  $\mathbf{k}_i$  exprimé dans  $\mathfrak{R}_{pul}$ . Le point de sortie du câble en direction du point  $B_i$  est noté  $D_i$  et est défini par le vecteur  $\mathbf{d}_i$  exprimé dans le repère  $\mathfrak{R}_{pul}$ . La longueur utile du câble notée  $l_E^i$  est décrite par la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{l}_E^i$  reliant le point  $D_i$  au point d'attache du câble à l'effecteur  $B_i$ . Pour respecter l'équilibre statique les vecteurs  $\mathbf{l}_E^i$  et  $\mathbf{d}_i$  doivent être orthogonaux. Le vecteur  $\mathbf{l}_E^i$  nécessaire pour résoudre le MGI $_{EP}$  s'écrit comme indiqué par l'Eq. 2.4.

$$\mathbf{l}_E^i = \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i - \mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}(\alpha_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i] \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}(\alpha_i)$  est la matrice de rotation du repère de la poulie  $\mathfrak{R}_{pul}$  autour de  $\mathbf{z}_b$  en fonction de  $\alpha_i$  (cf. Eq. 2.5).  $\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\theta_i)$  est la matrice de rotation autour de  $\mathbf{y}_{pul}$  permettant d'exprimer la position du point  $D_i$  dans le repère attaché à la poulie  $\mathfrak{R}_{pul}$  en fonction de l'angle  $\theta_i$  (cf. Eq. 2.6).  $\theta_i$  est l'angle entre  $\mathbf{d}_i$  et l'axe  $\mathbf{x}_{pul}$  du repère  $\mathfrak{R}_{pul}$  qui est lié à la poulie.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$


 (a) Paramétrisation de la  $i^{\text{ème}}$  chaîne d'actionnement d'un RPC équipé de poulie à pivot

 (b) Représentation de l'orientation de la poulie dans le plan  $(A_i, \mathbf{x}_{art}, \mathbf{y}_{art})$ 
**Figure 2.3** – paramétrisation d'un RPC équipé de poulie à pivot

$$\mathbf{R}_{y_{pul_i}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 & \sin(\theta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_i) & 0 & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Maintenant que les matrices de rotation ont été définies, nous pouvons donc exprimer sous forme développée la partie  $\mathbf{R}_{z_b}(\alpha_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{y_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i]$  (cf. Eq. 2.7).

$$\mathbf{R}_{z_b}(\alpha_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{y_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i] = [h_i + r_{p_i} \cos(\theta_i)][\cos(\alpha_i)\mathbf{x}_b - \sin(\alpha_i)\mathbf{y}_b] + r_{p_i} \sin(\theta_i)\mathbf{z}_b \quad (2.7)$$

L'angle  $\theta_i$ , permettant le positionnement du point de sortie du câble  $D_i$  doit être défini. L'équation 2.8 exprime cet angle en fonction de la pose de la PM représenté ici par le vecteur  $\mathbf{q}_i$  reliant  $H_i$  et  $B_i$  (cf. Fig. 2.3a).

$$\theta_i = \cos^{-1} \left( \frac{r_{p_i}}{\|\mathbf{q}_i\|_2} \right) - \left[ \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{z}_{pul}}{\|\mathbf{q}_i\|_2} \right) \right] \quad (2.8)$$

La détermination de la longueur totale étendue  $L_{T_E}^i$  du câble  $i$  déployé nécessite de connaître, en plus de  $\mathbf{l}_E^i$  et  $\mathbf{l}_d^i$ , la longueur d'enroulement du câble autour de la poulie. Notons qu'ici  $\mathbf{l}_d^i$  n'est plus confondue avec  $\mathbf{a}_i$  et n'est plus constant puisqu'il est fonction de la pose de la PM. Dans la plupart des prototypes de RPC le point de sortie  $C_i$  des enrouleurs est fixe grâce à des modèles d'enrouleurs avec guidage de câble [Jin+17] et est confondu avec l'axe du pivot de la poulie. Cela a pour effet d'éviter une trop forte variation de la courbure du câble étant donné qu'il appartient toujours au plan  $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$  et que son entrée dans la poulie est tangente au diamètre extérieur. L'alignement de la poulie avec le point  $B_i$  de la PM est à tout moment respecté. Dans cette configuration, pour déterminer  $\mathbf{l}_d^i$ , il est possible d'identifier que la position du point d'entrée du câble dans la poulie  $K_i$  est constante dans le repère  $\mathcal{R}_{pul}$  de la poulie. En effet, comme  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{z}_i$  sont considérés colinéaires, l'angle entre  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{l}_d^i$  est toujours le même. Il en ressort que la norme euclidienne  $\|\mathbf{l}_d^i\|_2$  est constante et donc indépendante de la position de la PM. En revanche, pour la partie du câble enroulée sur la poulie, sa longueur est fonction de la pose de la PM car décrite par le produit entre  $\gamma_i$  l'angle séparant  $\mathbf{k}_i$  et  $\mathbf{d}_i$  et  $r_{p_i}$  le rayon de la poulie. Géométriquement, il est possible de décrire l'angle  $\gamma_i$  par l'Eq. 2.9.

$$\gamma_i = \pi - \left[ \theta_i + \left( \cos^{-1} \left( \frac{r_{p_i}}{\mathbf{s}_i} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{h_i}{\mathbf{s}_i} \right) \right) \right] \quad (2.9)$$

où le vecteur  $\mathbf{s}_i$  relie le point central de la poulie  $H_i$  à la sortie de l'enrouleur  $C_i$ . Nous pouvons finaliser le MGI $_{E_P}$  en calculant la longueur totale étendue déployée  $L_{T_E}^i$  pour une pose définie à l'aide de l'Eq. 2.10.

$$L_{T_E}^i = \|\mathbf{l}_E^i\|_2 + \|\mathbf{l}_d^i\|_2 + \gamma_i r_{p_i} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

En ce qui concerne le modèle direct MGD $_{E_P}$  pour un jeu de longueurs totales déployées  $\mathbf{L}_{T_E} = [L_{T_E}^1 \dots L_{T_E}^m]^T$ , avec  $i = 1, \dots, m$ , la recherche d'une pose de la PM admissible n'est plus l'unique objectif. En effet, il est aussi important d'équilibrer les poulies en recherchant les angles  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_m]^T$  permettant par la suite de déterminer l'ensemble des valeurs des paramètres des poulies. L'ensemble des inconnues du système du MGD $_{E_P}$  peut donc s'écrire comme  $[\mathbf{p}, \mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_m]$ . Dans le cadre d'un RPC ayant autant de ddl que de câbles il est possible de mettre en place un processus de résolution itératif du MGD $_{E_P}$  comme présenté dans la partie 2.3. Notons que pour un RPC pleinement-contraint une méthode de résolution par un outil d'optimisation numérique (cf. section 1.3.1) est plus judicieuse car moins coûteuse en temps de calcul.

### 2.1.2.2 Prise en compte d'une poulie ayant une articulation de type joint de cardan

Lors des travaux réalisés dans cette thèse nous avons cherché à étudier l'influence du type d'articulation montée sur les poulies. Classiquement les poulies sont soit totalement fixes soit, dans le cadre des RPC, montées sur un pivot (cf. Fig. 2.2). Cependant, serait-il possible d'utiliser un autre type de liaison sur les poulies afin de gagner en performance? Voici l'une des questions à laquelle nous chercherons à répondre. Pour ce faire nous avons imaginé de



remplacer la poulie par une articulation de type joint de cardan, conférant à la poulie deux ddl de rotation. Il est à noter qu'une architecture de poulie avec cette cinématique n'est, à notre connaissance, pas développée chez les fabricants. Ce nouveau type de poulie a comme avantage de s'aligner à la direction de l'effort, réduisant considérablement les contraintes internes dans bras de levier. En effet, étant donné que ce dernier ne travaille quasiment plus en flexion mais principalement en traction, cela conduit à une réduction du moment de flexion appliqué au point de fixation de la poulie, permettant ainsi, pour un même matériaux, de réduire la masse des pièces structurelles de la poulie. Dans l'objectif d'étudier cette nouvelle architecture de poulie dans le cadre des RPC, nous allons définir la modélisation d'un RPC équipé d'une telle poulie de renvoi. Tout comme précédemment cette modélisation sera qualifiée d'étendue et notée, pour le modèle inverse  $MGI_{E_C}$  et  $MGD_{E_C}$  dans le cas de la modélisation directe. L'indice  $C$  correspondant cette fois-ci à une articulation de la poulie de type joint de cardan.

De plus, la masse propre de la poulie n'est pas prise en compte car son poids est négligeable devant les tensions des câbles, comme démontré dans l'annexe A.

Il est visible sur la Fig. 2.4a que de nombreux points communs existent avec le paramétrage du RPC équipé d'une poulie avec un pivot. En effet, tout comme la poulie à pivot, la poulie à joint de cardan peut se déplacer dans l'espace mais cette fois-ci selon deux axes de rotations, dont les paramètres sont  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  (cf. Fig.2.4). Les deux angles d'orientation du joint de cardan,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , sont dorénavant nécessaires pour la détermination de la position du centre de la poulie  $H_i$ . L'angle  $\alpha_i$  est défini de la même manière que dans le cadre de la poulie à pivot. L'angle  $\beta_i$  quant à lui, est l'angle formé entre le plan horizontal ( $A_i, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b$ ) et  $\mathbf{h}_i$ , il est donc fonction de la pose de la PM et tout comme  $\alpha_i$  il doit respecter l'équilibre statique du RPC. L'angle  $\beta_i$  est pour sa part influencé par la masse propre de la poulie. Pour rappel, dans notre modélisation la masse propre de la poulie n'est pas prise en compte car son poids est négligeable devant les tensions des câbles, comme démontré dans l'annexe A. Alors afin de respecter l'équilibre statique des forces,  $H_i$  doit se trouver sur la bissectrice de l'angle entre  $\mathbf{t}_u^i$  et  $\mathbf{t}_d^i$  (cf. Fig. 2.4b); ce qui est équivalent à la bissectrice de l'angle  $\Phi_i$  étant l'angle entre  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{l}_s^i$ . Cette configuration d'équilibre statique n'est vraie que si les frottements générés dans les différentes liaisons de la poulie sont négligés ainsi que sa masse propre. Pour ce qui est des frottements si nous considérons que l'ensemble des liaisons pivots de la poulie sont réalisées à l'aide de roulements, cette hypothèse est admissible. Cela permet de considérer que les forces en entrée et en sortie de la poulie sont égales. D'un point de vue purement géométrique nous pouvons exprimer  $\beta_i$  par l'Eq. 2.11, dans l'hypothèse où  $C_i$  est vertical à  $A_i$ , ce qui sera respecté dans l'ensemble des travaux de cette thèse.

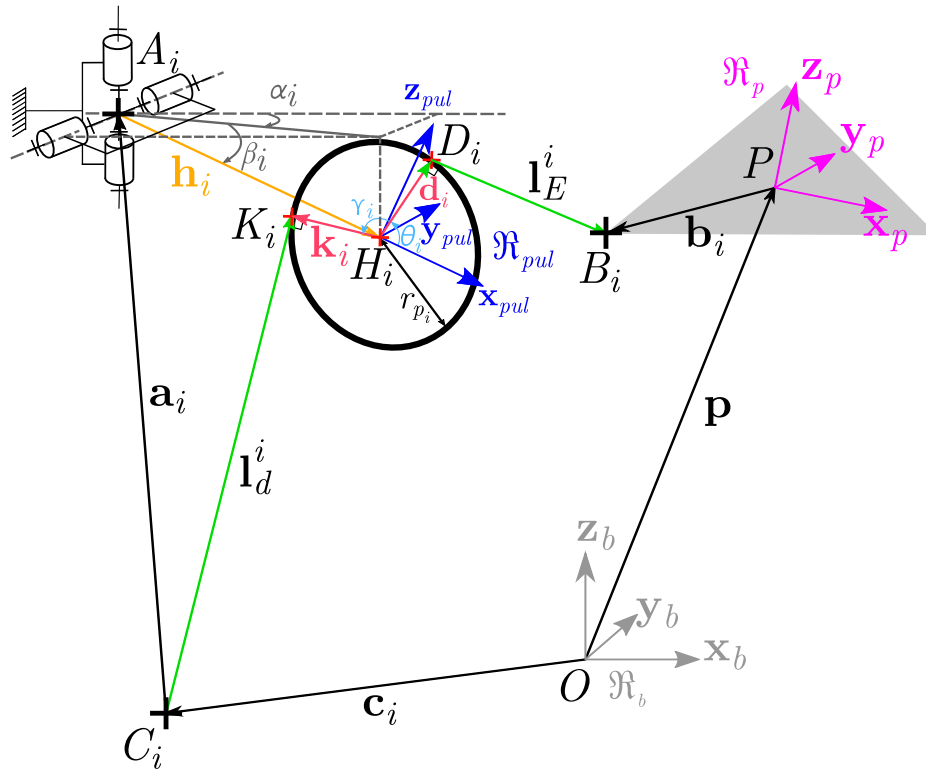
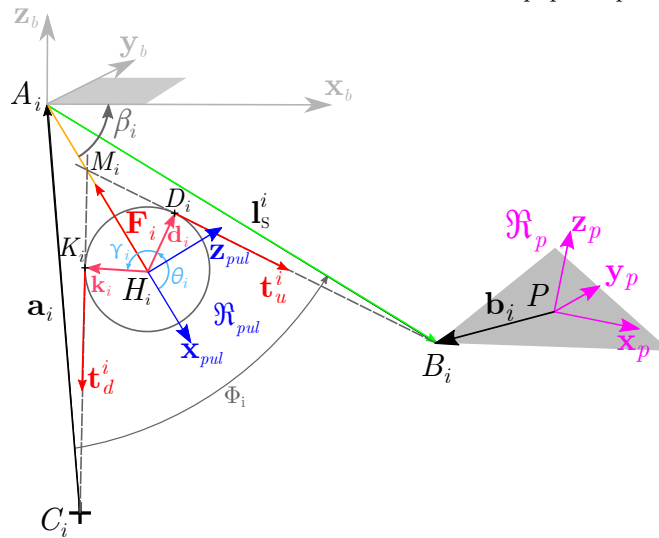
$$\beta_i = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \quad (2.11)$$

En partant de ce principe, le  $MGI_{E_C}$  calculant la longueur utile de câble se détermine avec la même chaîne vectorielle que dans l'équation Eq. 2.4. Cependant, dans cette configuration, l'articulation imposant une rotation supplémentaire implique que l'Eq. 2.4 s'écrive comme l'Eq. 2.12.

$$\mathbf{l}_E^i = \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i - \mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}(\alpha_i)\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\beta_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i] \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\beta_i)$  est la matrice de rotation du pivot d'axe  $\mathbf{y}_{pul_i}$  du joint de cardan de la poulie  $i$ .

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & 0 & \sin(\beta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_i) & 0 & \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$


 (a) Paramétrisation de la  $i^{\text{ème}}$  chaîne d'actionnement d'un RPC équipé de poulie à joint de cardan


(b) Représentation de l'équilibre statique de la poulie dans le plan \$(A\_i, x\_{pul}, z\_{pul})\$

**Figure 2.4** – Paramétrisation d'un RPC équipé de poulie à joint de cardan

La matrice de rotation définie, nous pouvons donc exprimer sous forme développée la partie  $\mathbf{R}_{z_b}(\alpha_i)\mathbf{R}_{y_{pul_i}}(\beta_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{y_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i]$  (cf. Eq. 2.14).

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}(\alpha_i)\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\beta_i)[\mathbf{h}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul_i}}(\theta_i)\mathbf{d}_i] = [(r_{p_i} \cos(\theta_i) + h_i) \cos(\beta_i) + r_{p_i} \sin(\theta_i) \sin(\beta_i)](\cos(\alpha_i)\mathbf{x}_b - \sin(\alpha_i)\mathbf{y}_b) - [(r_{p_i} \cos(\theta_i) + h_i) \sin(\beta_i) - r_{p_i} \sin(\theta_i) \cos(\beta_i)]\mathbf{z}_b \quad (2.14)$$

où l'angle  $\theta_i$  est exprimé, dans ce cas, en fonction de  $\gamma_i$ , angle formé par le vecteur  $\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ , (cf. Eq. 2.15). Or nous pouvons connaître la position de  $K_i$  par la nullité du produit scalaire, entre  $\mathbf{l}_d^i$  et  $\mathbf{k}_i$ , et de même pour  $D_i$  entre  $\mathbf{l}_E^i$  et  $\mathbf{d}_i$ .

$$\theta_i = \pi - \frac{\gamma_i}{2} \quad (2.15)$$

Tout comme dans le modèle poulie à pivot, la longueur totale  $L_{TE}^i$  est calculée avec l'équation Eq. 2.10. La différence tient dans le fait que la longueur morte  $l_d^i$  n'est plus constante à cause de l'utilisation d'un joint de cardan sur la poulie. En effet, le point d'entrée du câble dans la poulie  $K_i$  étant fonction de la pose de l'effecteur de la PM, il peut se déplacer dans ce cas verticalement.  $\|\mathbf{l}_d^i\|_2$  pour  $i = 1, \dots, m$  s'exprime donc comme :

$$\|\mathbf{l}_d^i\|_2 = \sqrt{\left[ h_i \sin\left(\frac{\Phi_i}{2}\right) \right]^2 + \left[ \mathbf{a}_i \mathbf{x}_b - h_i \cos\left(\frac{\Phi_i}{2}\right) \right]^2 - r_{p_i}} \quad (2.16)$$

Nous pouvons exprimer le  $\text{MGI}_{EC}$  comme l'Eq. 2.10 en remplaçant  $\|\mathbf{l}_E^i\|_2$  et  $\|\mathbf{l}_d^i\|_2$  par leur équation c'est-à-dire Eq. 2.12 et Eq. 2.16 respectivement.

Tout comme pour le modèle de RPC équipé de poulie à pivot, le  $\text{MGD}_{EC}$  est plus complexe à résoudre. En plus de devoir définir la pose de la PM, la position des poulies ainsi que des points d'entrée  $K_i$  et de sortie  $D_i$  sont aussi des inconnues du système. Le  $\text{MGD}_{EC}$  cherche donc à déterminer les inconnues  $[\mathbf{p}, \mathbf{o}, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_i, \beta_i]^T$ . Tout comme pour le  $\text{MGD}_{EP}$  il est possible de le résoudre de façon itérative dans des conditions particulières présentées dans la partie 2.3.

Nous venons de mettre en place une série de modèles permettant la modélisation géométrique complète d'une chaîne d'actionnement d'un RPC. Cela permet de prendre en compte un certain nombre de paramètres supplémentaires et donc d'étudier plus en détail le comportement cinématique d'un RPC. Néanmoins, nous avons vu dans le chapitre 1 que l'une des sources d'incertitude majeure dans les RPC est le comportement mécanique des câbles. Dans la section suivante nous allons donc nous attarder sur l'intégration des différentes modélisations des câbles dans les modèles géométriques étendus.

## 2.2 Prise en compte du comportement mécanique du câble

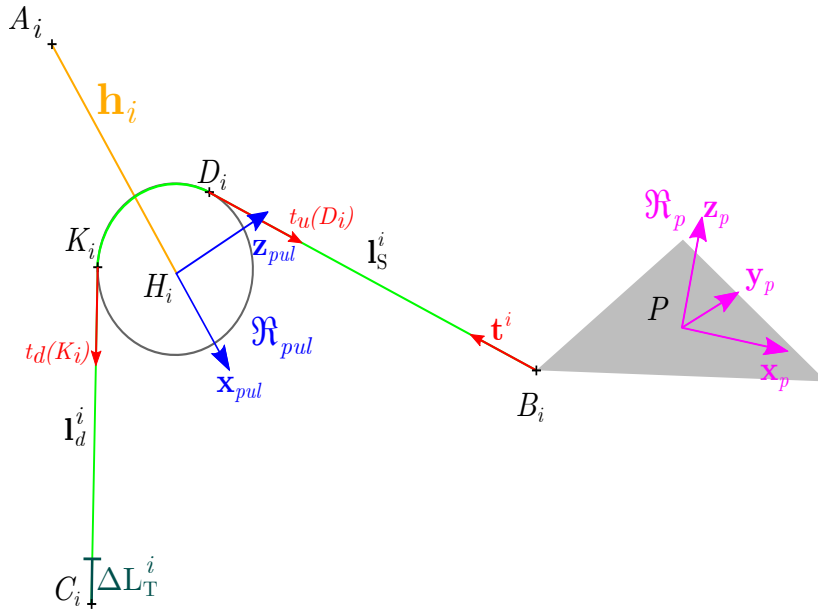
Cette section, se focalise sur l'ajout du comportement mécanique des câbles dans les modèles géométriques précédemment développés. L'objectif est d'obtenir des modèles elasto-géométriques. Il est à noter que, comme les modèles géométriques, les modèles elasto-géométriques sont déterminés pour une étude statique des RPC. De plus, seul le phénomène de déformation du câble, dû à l'élasticité et au fléchissement, est étudié. Les phénomènes vibratoires pouvant affecter le comportement du câble ne sont pas étudiés dans ces travaux. La prise en compte de l'action des câbles sur la PM impose de déterminer les tensions dans chaque câble afin de trouver l'équilibre statique du RPC. En effet, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1 les câbles subissent des déformations par les tensions qu'ils supportent.

Nous avons aussi vu que différents niveaux de modélisation pouvaient être mis en œuvre. Dans les modèles présentés dans ce chapitre, les longueurs mises en tension ne sont plus uniquement les longueurs utiles mais bien les longueurs totales.

Pour rappel, dans cette thèse nous faisons l'hypothèse que les frottements internes à la poulie sont négligeables grâce à la présence de roulements dans les articulations. La conséquence de cette hypothèse est que les normes euclidiennes des tensions en entrée et en sortie de poulie sont égales. Cela peut être écrit comme  $t_u^i(D_i) = t_d^i(K_i)$ , avec  $t_u^i(D_i)$  la tension du câble utile au point  $D_i$  et  $t_d^i(K_i)$  la tension du câble mort au point  $K_i$  (cf. Fig. 2.5). De plus, il est considéré que la tension dans la partie du câble enroulé  $\gamma_i r_{p_i}$  est constante tout le long de cette longueur. Nous savons que quand le câble est considéré comme un segment rectiligne la détermination de ces tensions revient à résoudre le principe fondamental de la statique explicité par l'Eq. 1.6. Nous pouvons ainsi connaître les tensions dans les câbles et donc déterminer si ceux-ci sont trop ou pas assez en tension. En effet, lorsque la tension est trop forte supérieure à 60% de  $t_{lim}$  (cf. norme ISO 4309 :2010) le câble risque de se rompre et au contraire, lorsque la tension est trop faible il peut se détordre. Cela permet d'obtenir un espace de travail statique sans risque et de calculer l'allongement linéaire des câbles. En effet, les modèles présentés jusqu'à maintenant sont uniquement géométriques et les caractéristiques mécaniques du câble n'y sont pas prises en compte. Pourtant, ces dernières sont sources d'erreurs importantes sur la précision du RPC. Pour pallier ce problème nous pouvons enrichir les modèles étendus afin de prendre en compte la déformation des câbles sur l'entièreté de la chaîne d'actionnement. De plus, comme nous l'avons vu, la prise en compte de ces phénomènes peut être de plusieurs niveaux. Nous pouvons considérer uniquement une élasticité uni-directionnelle, ou bien c'est l'ensemble de la déformation du câble qui est modélisé, c'est-à-dire son élasticité mais également son fléchissement sous son propre poids. Dans une première partie, nous considérerons uniquement l'élasticité uni-directionnelle du câble. Par la suite nous intégrerons la modélisation du fléchissement du câble sur l'ensemble de la chaîne d'actionnement.

## 2.2.1 Élasticité uni-directionnelle du câble

Cette section va s'intéresser à intégrer l'élasticité uni-directionnelle aux modèles géométrique étendus. Ces modèles seront appelés modèles élasto-géométrique étendus et notés  $MEGI_E$  pour le modèle inverse et  $MEGD_E$  pour le direct. Il est important de préciser que la prise en compte de l'élasticité se fait de manière analogue pour un RPC ayant soit des poulies à pivot soit des poulies à joint de cardan. Cette modélisation considère le câble comme un segment. De ce fait, il ne peut s'allonger que dans le sens de l'effort. De plus, sa masse étant négligée sa tension est identique en tout point du câble et sera notée  $\mathbf{t}_i$ , de norme euclidienne  $t_i$ . La figure 2.5 schématise cet allongement dans le plan du  $i^{ème}$  câble de la chaîne d'actionnement. Nous avons fait le choix de représenter l'allongement  $\Delta L_T^i$  au niveau du point  $C_i$  mais dans la réalité cet allongement est réparti sur l'entièreté de la longueur du câble.



**Figure 2.5** – Schématisation du modèle élasto-géométrique étendu, représentation dans le plan du  $i^{\text{ème}}$  le câble ( $H_i$ ,  $\mathbf{x}_{pul}$ ,  $\mathbf{z}_{pul}$ )

L'application de la loi de Hooke se fait de la même manière que décrite dans la section 1.2.4.2 du chapitre 1, à la seule différence que ce n'est pas l'allongement de la longueur utile  $\Delta l_0$  qui est recherchée mais bien l'allongement de la longueur totale  $\Delta L_T^i$  (cf. Eq. 2.17).

$$\Delta L_T^i = \frac{L_T^i t_i}{E_i S_i} \quad (2.17)$$

où  $E_i$  est le module de Young du  $i^{\text{ème}}$  câble et  $S_i$  sa section. Nous pouvons déjà observer que le fait de prendre en compte l'élasticité sur l'entièreté du câble déployé impliquera un allongement forcément supérieur au cas où la longueur morte est négligée.

Dans le cadre du MEGI<sub>E</sub>, nous rechercherons la longueur totale initiale du câble  $L_T^i$  pour qu'avec l'élasticité prise en compte la PM soit à la pose désirée. Notons que cette résolution est possible analytiquement. En ce qui concerne le MEGD<sub>E</sub>, la prise en compte de l'élasticité amplifie encore la complexité de sa résolution. Il est nécessaire de trouver une pose de la PM satisfaisant les tensions des câbles tout en calculant l'allongement de ceux-ci. Un schéma de résolution est présenté dans la section 2.3.

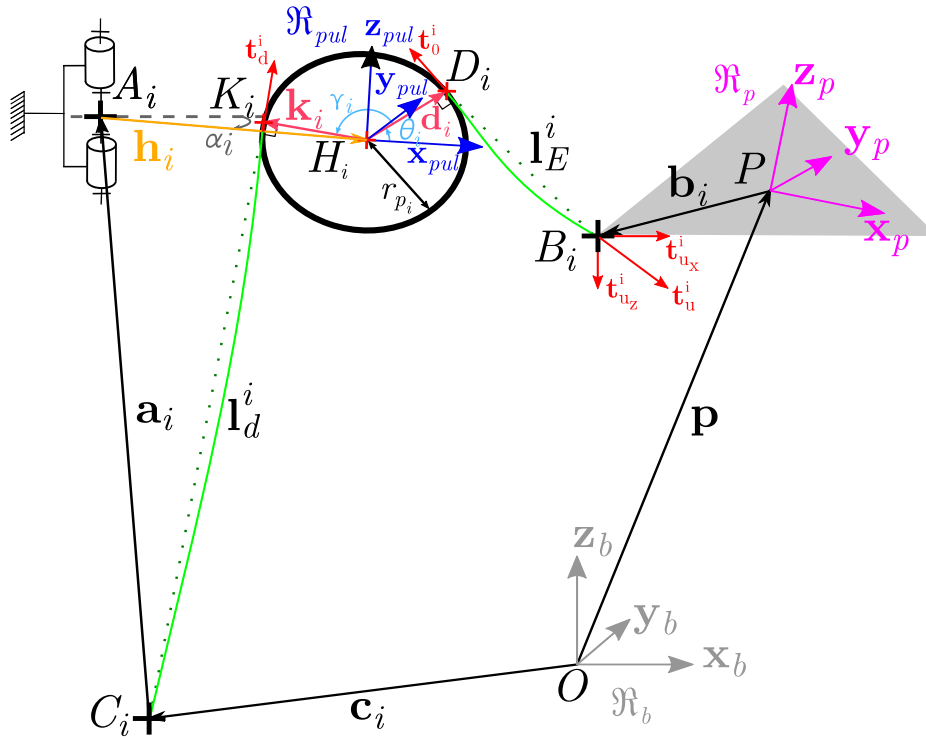
## 2.2.2 Fléchissement du câble

Nous venons de voir qu'un câble peut être, de façon relativement simple, approximé à un segment élastique. L'avantage de ce précédent modèle est qu'il nécessite uniquement le calcul du jeu de tensions  $\mathbf{t}$  et des longueurs totales pour avoir une idée de l'allongement que présenteront les câbles. Cependant, la forme que prend le câble de par sa masse est totalement négligée. Dans le cas où une longueur de câble devient suffisamment importante, sa propre masse n'est plus négligeable, influençant son comportement mécanique. Cela est encore plus vrai dans le cas d'un câble ayant une masse linéique importante ou d'un RPC de dimension importante. Pour modéliser ce phénomène le modèle d'Irvine, présenté dans la section 1.2.4.2 du chapitre 1, est appliqué à chacun des câbles. Dans le cadre de nos modèles étendus comprenant la poulie et la longueur morte, il est nécessaire de modéliser

le fléchissement de la longueur utile et celui de la longueur morte. Pour chaque chaîne d'actionnement le modèle d'Irvine sera donc appliqué deux fois. Des modèles prenant en compte les poulies et le fléchissement ont déjà été développés par Fabritius [Fab+20; Fab+21], mais la longueur morte reste toujours négligée et les poulies à joint de cardan n'y sont pas traitées. Nous avons pourtant pu voir que l'élasticité était fonction de la longueur, et influence donc forcément l'allongement total du câble. Nous allons donc voir comment le fléchissement du câble a été intégré aux modèles élasto-géométriques étendus. Quel que soit le type d'articulation de la poulie, la logique est identique. Ce modèle sera dénommé de façon générale : Modèle Fléchissant Inverse Étendu (MFI<sub>E</sub>) et Modèle Fléchissant Direct Étendu (MFD<sub>E</sub>). Néanmoins, dans le cadre d'une poulie à joint de cardan le système de résolution comportera des équations supplémentaires. Nous chercherons à définir ces systèmes tout d'abord pour un RPC ayant des poulies avec comme articulation une pivot puis pour un RPC avec des poulies à joint de cardan.

### 2.2.2.1 RPC équipé de poulie à pivot

Le modèle d'Irvine a déjà été présenté dans le chapitre 1 pour une application simple reliant deux points (cf. section 1.2.4.2). Nous cherchons ici, à définir le profil du câble utile ainsi que celui de la longueur morte (cf. Fig.2.6). Pour rappel, les propriétés du câble sont le module de Young  $E_i$ , sa section  $S_i$  et sa masse linéique  $\mu_0$ .



**Figure 2.6** – Paramétrisation d'une chaîne d'actionnement d'un RPC avec une poulie à pivot et un câble fléchi

La figure 2.6 représente le paramétrage de la chaîne d'actionnement du câble  $i$ . Nous pouvons voir le profil fléchi du câble sous son propre poids entre le point  $C_i$  et  $K_i$  ainsi qu'entre  $D_i$  et  $B_i$ . La tension  $\mathbf{t}_u^i$  au point  $B_i$  est exprimée dans le plan  $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$  à l'aide de ses composantes  $t_{u_x}^i$  et  $t_{u_z}^i$ . La tension  $\mathbf{t}_d^i$  représente la tension dans la longueur morte du câble au point  $K_i$  et est exprimé dans le plan  $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$  par ses composantes  $t_{d_x}^i$  et

$\mathbf{t}_{d_z}^i$ . Tout d'abord, pour décrire le fléchissement du câble nous allons appliquer l'Eq. 1.30 et l'Eq. 1.31 aux différentes longueurs du câble. Premièrement, en ce qui concerne la longueur utile nous pouvons écrire la série d'équations décrivant le profil du câble en  $\mathbf{x}_{pul}$  et  $\mathbf{z}_{pul}$  au point  $B_i$ , correspondant donc à une abscisse curviligne  $s_i = l_E^i$ .

$$\begin{cases} x(l_E^i) = \frac{t_{u_x}^i l_E^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{u_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i}{t_{u_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i}{t_{u_x}^i} \right) \right] \\ z(l_E^i) = \frac{t_{u_z}^i l_E^i}{E_i S_i} - \frac{l_E^{i2} \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{u_x}^{i2} + t_{u_z}^{i2}} - \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} \right] \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Pour ce qui est d'exprimer le profil de la longueur morte du câble  $i$ , nous considérerons que le point  $C_i$  est à l'abscisse curviligne  $s_i = 0$  et donc le point  $K_i$  à une abscisse curviligne  $s_i = l_d^i$ . Les équations 1.30 et l'Eq. 1.31 au point  $K_i$  pour cette partie s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x(l_d^i) = \frac{t_{d_x}^i l_d^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{d_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i}{t_{d_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i}{t_{d_x}^i} \right) \right] \\ z(l_d^i) = \frac{t_{d_z}^i l_d^i}{E_i S_i} - \frac{l_d^{i2} \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{d_x}^{i2} + t_{d_z}^{i2}} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \right] \end{cases} \quad (2.19)$$

Comme nous l'avons expliqué la tension en entrée de poulie est identique à la tension en sortie. Cette hypothèse permet ainsi de fixer comme condition limite l'égalité des tensions aux points  $K_i$  et  $D_i$ . Or, d'après l'Eq. 1.23 du modèle d'Irvine nous pouvons écrire la contrainte suivante :

$$\sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} = \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \quad (2.20)$$

De plus, il est nécessaire de conserver la tangence du câble à l'entrée et à la sortie de la poulie. Les produits scalaires entre le  $\mathbf{k}_i$  et  $\mathbf{t}_d^i$  ainsi qu'entre  $\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{t}_u^i$  sont nécessairement nuls (cf. Eq. 2.21).

$$\begin{cases} 0 = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{t}_u^i \\ 0 = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_d^i \end{cases} \quad (2.21)$$

Bien sûr, l'équilibre statique de la PM doit être résolu ainsi l'Eq. 1.5 est intégrée au système de résolution du problème. L'angle  $\alpha_i$  doit aussi être recalculé afin d'aligner la poulie au point d'ancrage du câble sur la PM,  $B_i$ . Nous pouvons ainsi écrire le système d'équations Eq. 2.22 correspondant au modèle inverse étendu pour un RPC ayant des poulies à pivot comportant le fléchissement du câble (MFI $_{EP}$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(l_E^i) = \frac{t_{u_x}^i l_E^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{u_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i}{t_{u_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i}{t_{u_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_E^i) = \frac{t_{u_z}^i l_E^i}{E_i S_i} - \frac{l_E^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{u_x}^{i2} + t_{u_z}^{i2}} - \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} \right] \\
 x(l_d^i) = \frac{t_{d_x}^i l_d^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{d_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i}{t_{d_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i}{t_{d_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_d^i) = \frac{t_{d_z}^i l_d^i}{E_i S_i} - \frac{l_d^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{d_x}^{i2} + t_{d_z}^{i2}} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \right] \\
 0 = \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \\
 0 = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{t}_u^i \\
 0 = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_d^i \\
 \mathbf{0} = \mathbf{J} \mathbf{t}_u + \mathbf{w}_e \\
 \alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{l}_S^i \cdot \mathbf{x}_b}{\|\mathbf{l}_S^i\|_2} \right)
 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Pour résoudre le modèle direct étendu ayant des poulies à pivot et prenant en compte le fléchissement ( $\text{MFD}_{E_P}$ ) il est nécessaire de forcer la longueur totale des câbles déployée à rester constante. En effet, la somme des longueurs de câble déployées doit être égale à la longueur de câble totale imposée  $L_T^i$  (cf. Eq. 2.23).

$$L_T^i = l_E^i + l_d^i + \gamma_i r_{p_i} \quad (2.23)$$

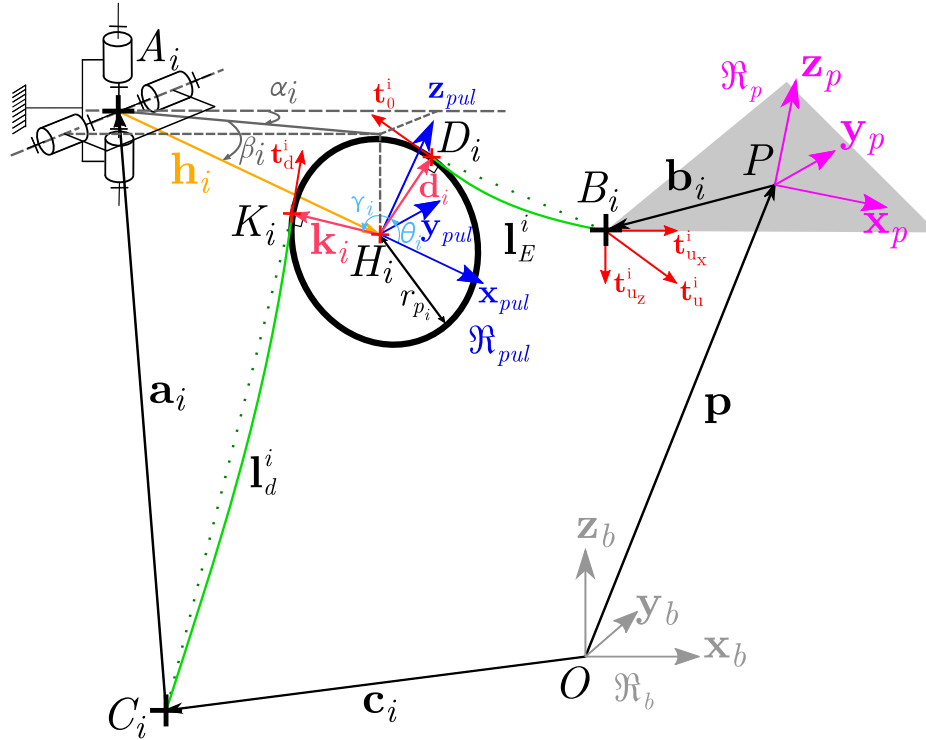
Le système d'équations décrivant le  $\text{MFD}_{E_P}$  est donc composé de l'Eq. 2.22 et de l'Eq. 2.23 faisant monter son nombre d'équations à  $9m + 3$  (cf. Eq. 2.24),  $m$  étant le nombre total de câble. Le système sera résolu à l'aide de la fonction « *lsqnonlin* » de Matlab, afin de pouvoir contraindre les variables dans des ensembles finis. À la fin de ce processus les coordonnées de la pose de la PM seront ainsi connues pour un jeu de longueurs de câble donné.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(l_E^i) = \frac{t_{u_x}^i l_E^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{u_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i}{t_{u_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i}{t_{u_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_E^i) = \frac{t_{u_z}^i l_E^i}{E_i S_i} - \frac{l_E^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{u_x}^{i2} + t_{u_z}^{i2}} - \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} \right] \\
 x(l_d^i) = \frac{t_{d_x}^i l_d^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{d_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i}{t_{d_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i}{t_{d_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_d^i) = \frac{t_{d_z}^i l_d^i}{E_i S_i} - \frac{l_d^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{d_x}^{i2} + t_{d_z}^{i2}} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \right] \\
 0 = \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \\
 0 = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{t}_u^i \\
 0 = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_d^i \\
 \mathbf{0} = \mathbf{J} \mathbf{t}_u + \mathbf{w}_e \\
 \alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{l}_S^i \cdot \mathbf{x}_b}{\|\mathbf{l}_S^i\|_2} \right) \\
 L_T^i = l_E^i + l_d^i + \gamma_i r_{p_i}
 \end{array} \right. \quad (2.24)$$



### 2.2.2.2 RPC équipé de poulie à joint de cardan

L'application du modèle d'Irvine au RPC équipé de poulie à joint de cardan se fait de manière analogue que dans le cadre des poulies à pivot (Fig. 2.7). Cependant, l'angle  $\beta_i$  décrivant l'inclinaison verticale de la poulie sous les efforts du RPC, doit être calculé. Cela impose de rajouter une série d'équations aux systèmes précédemment exprimés.

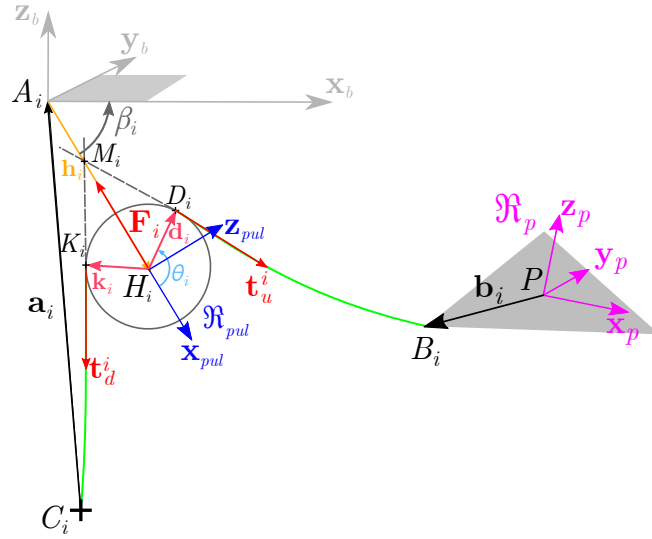


**Figure 2.7** – Paramétrisation d'une chaîne d'actionnement d'un RPC avec une poulie à joint de cardan et un câble fléchi

Pour déterminer l'inclinaison verticale de la poulie, c'est-à-dire l'angle  $\beta_i$ , nous devons déterminer la position du point  $M_i$ , point d'intersection entre les droites de vecteur directeur  $\mathbf{t}_u^i$  au point  $D_i$  et  $\mathbf{t}_d^i$  au point  $K_i$  (cf. Fig. 2.8). Pour cela, les équations paramétriques sont écrites pour les deux droites. L'équation 2.25 représente l'équation paramétrique de la droite de la partie utile du câble et l'Eq. 2.26 celle de la droite de la partie morte du câble.

$$\begin{cases} x = x_{D_i} + t_{u_x} q_i \\ y = 0 \\ z = z_{D_i} + t_{u_z} q_i \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} x = x_{K_i} + t_{d_x}^i q_i' \\ y = 0 \\ z = z_{K_i} + t_{d_z}^i q_i' \end{cases} \quad (2.26)$$



**Figure 2.8** – Équilibre statique de la poulie à joint de cardan et un câble fléchi dans le plan  $(A_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$

où  $q_i$  et  $q'_i$  sont les paramètres des équations paramétriques. Nous pouvons donc décrire la position du point  $M_i$  dans le plan  $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$  par les équations 2.27.

$$\begin{cases} x_{M_i} = h_i \cos(\beta_i) + r_{p_i} \cos(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_x}^i q'_i \\ z_{M_i} = h_i \sin(\beta_i) + r_{p_i} \sin(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_z}^i q'_i \end{cases} \quad (2.27)$$

Nous pouvons à l'aide du point  $M_i$  exprimer l'angle  $\beta_i$  (cf. Eq. 2.28).

$$\beta_i = \tan^{-1} \left( \frac{|z_{M_i}|}{|x_{M_i}|} \right) \quad (2.28)$$

Le système d'équations enrichi du calcul de l'angle  $\beta_i$  s'exprime dans le cadre du MFI $_{EC}$  comme sur l'Eq. 2.29.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(l_E^i) = \frac{t_{u_x}^i l_E^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{u_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i}{t_{u_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i}{t_{u_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_E^i) = \frac{t_{u_z}^i l_E^i}{E_i S_i} - \frac{l_E^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{u_x}^{i2} + t_{u_z}^{i2}} - \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} \right] \\
 x(l_d^i) = \frac{t_{d_x}^i l_d^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{d_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i}{t_{d_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i}{t_{d_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_d^i) = \frac{t_{d_z}^i l_d^i}{E_i S_i} - \frac{l_d^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{d_x}^{i2} + t_{d_z}^{i2}} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \right] \\
 0 = \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \\
 0 = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{t}_u^i \\
 0 = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_d^i \\
 \mathbf{0} = \mathbf{J} \mathbf{t}_u + \mathbf{w}_e \\
 \alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{1}_S^i \cdot \mathbf{x}_b}{\|\mathbf{1}_S^i\|_2} \right) \\
 \beta_i = \tan^{-1} \left( \frac{|z_{M_i}|}{|x_{M_i}|} \right) \\
 x_{M_i} = h_i \cos(\beta_i) + r_{p_i} \cos(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_x}^i q'_i \\
 z_{M_i} = h_i \sin(\beta_i) + r_{p_i} \sin(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_z}^i q'_i
 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Tout comme pour le RPC équipé de poulie à pivot, le modèle direct doit conserver la longueur de câble totale  $L_T^i$  imposée en entrée. Pour exprimer cette contrainte il est nécessaire d'ajouter au MFI $_{EC}$  l'Eq. 2.23. Nous pouvons donc écrire le MFD $_{EC}$  comme un système d'équations à  $12m + 3$  équations (cf. Eq. 2.30).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(l_E^i) = \frac{t_{u_x}^i l_E^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{u_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i}{t_{u_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i}{t_{u_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_E^i) = \frac{t_{u_z}^i l_E^i}{E_i S_i} - \frac{l_E^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{u_x}^{i2} + t_{u_z}^{i2}} - \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} \right] \\
 x(l_d^i) = \frac{t_{d_x}^i l_d^i}{E_i S_i} + \frac{|t_{d_x}^i|}{\mu_0 g} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i}{t_{d_x}^i} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i}{t_{d_x}^i} \right) \right] \\
 z(l_d^i) = \frac{t_{d_z}^i l_d^i}{E_i S_i} - \frac{l_d^i \mu_0 g}{2 E_i S_i} + \frac{1}{\mu_0 g} \left[ \sqrt{t_{d_x}^{i2} + t_{d_z}^{i2}} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \right] \\
 0 = \sqrt{t_{u_x}^{i2} + (t_{u_z}^i - \mu_0 g l_E^i)^2} - \sqrt{t_{d_x}^{i2} + (t_{d_z}^i - \mu_0 g l_d^i)^2} \\
 0 = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{t}_u^i \\
 0 = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{t}_d^i \\
 \mathbf{0} = \mathbf{J} \mathbf{t}_u + \mathbf{w}_e \\
 \alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{1}_S^i \cdot \mathbf{x}_b}{\|\mathbf{1}_S^i\|_2} \right) \\
 \beta_i = \tan^{-1} \left( \frac{|z_{M_i}|}{|x_{M_i}|} \right) \\
 x_{M_i} = h_i \cos(\beta_i) + r_{p_i} \cos(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_x}^i q'_i \\
 z_{M_i} = h_i \sin(\beta_i) + r_{p_i} \sin(\theta_i + \gamma_i - \beta_i) + t_{d_z}^i q'_i \\
 L_T^i = l_E^i + l_d^i + \gamma_i r_{p_i}
 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Cette section a permis de définir les deux méthodes d'intégration de la déformation des câbles dans les modèles géométriques étendus déjà présentés en section 2.1. Nous avons pu observer que l'ajout d'une élasticité linéaire à l'aide de la loi de Hooke s'avère relativement aisée dans le cadre d'une problématique inverse. En ce qui concerne la prise en compte du fléchissement du câble sous son propre poids couplé à l'effet de l'élasticité, à l'aide du modèle d'Irvine, cela s'avère plus complexe. Dans la section suivante de ce chapitre nous verrons comment l'erreur théorique de pose est évaluée à l'aide des modèles standards et étendus. De ce fait nous verrons dans un premier temps les méthodes d'évaluation de l'erreur de pose théorique et de résolution des différents modèles directs. Par la suite, nous présenterons la méthodologie nous permettant de comparer différents RPC vis-à-vis de leur erreur de pose théorique.

## 2.3 Méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique

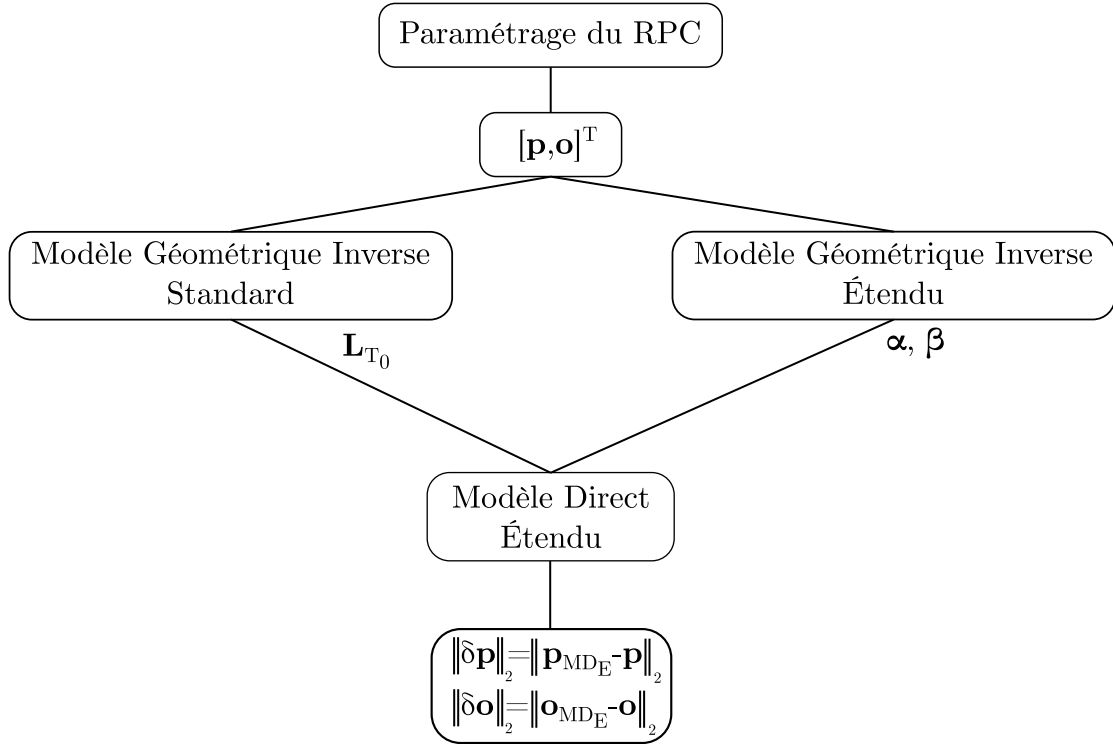
Au cours des travaux réalisés dans cette thèse nous allons étudier l'influence sur la pose de la PM des paramètres n'étant pas pris en compte dans les modèles standards. Il est donc important de définir une méthode permettant de quantifier les effets de la non prise en compte de ces paramètres sur la pose de la PM. Cette section, présentera premièrement la méthode pour comparer la pose de la PM utilisant un modèle comportant des hypothèses simplificatrices avec un celle utilisant un modèle étendu. Pour cela un indice d'évaluation de l'erreur de pose théorique de la PM est mis en place. Deuxièmement, nous développerons une méthodologie de comparaison de différentes architectures de RPC vis-à-vis de leur erreur de pose théorique.

### 2.3.1 Quantification de l'erreur de pose théorique

Dans cette partie nous allons expliquer la méthodologie d'évaluation de l'erreur de pose théorique pour une pose donnée de la PM. Cette méthode sera mise en application dans l'ensemble des travaux de cette thèse. Dans un premier temps, nous verrons la méthodologie d'obtention de l'indice d'évaluation de l'erreur de pose théorique entre deux modèles. Par la suite, nous présenterons les deux schémas de résolution des modèles directs qui seront essentiels à l'évaluation de l'erreur de pose théorique.

#### 2.3.1.1 Méthode d'évaluation de l'erreur de pose

La méthode d'évaluation de l'erreur de pose est cruciale dans les études menées ici. Comme nous l'avons évoqué cette méthode permet d'évaluer, vis-à-vis de la pose de la PM, l'erreur commise par l'utilisation d'un modèle standard dans la commande des RPC. Au cours de l'enrichissement des modèles étendus cette méthode évoluera dans sa résolution. En effet, la résolution se complexifiera à mesure que les modèles étendus intégreront des paramètres supplémentaires.



**Figure 2.9** – Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  et  $\|\delta \mathbf{o}\|_2$

La figure 2.9 présente le processus général pour évaluer une erreur de pose théorique  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  et  $\|\delta \mathbf{o}\|_2$  faite lors de la non prise en compte d'un sous-système du RPC dans la modélisation, comme par exemple les poulies. L'appellation modèle direct étendu regroupe le modèle géométrique direct étendu (sans élasticité des câbles) et le modèle élasto-géométrique direct étendu (avec élasticité des câbles). La première étape est le paramétrage du RPC, qui consiste à fixer les paramètres structuraux du robot comme la longueur et la hauteur du RPC mais aussi les dimensions géométriques des poulies  $r_{p_i}$  et  $h_i$  ainsi que les propriétés du câble, c'est-à-dire son rayon  $r_c$ , sa masse linéique  $\mu_0$ , son élasticité  $E_i$  et ses tensions admissibles  $t_{min}$  et  $t_{max}$ . Une pose désirée de la PM est ensuite indiquée grâce aux vecteurs position  $\mathbf{p}$  et d'orientation  $\mathbf{o}$ . Tout d'abord, il est nécessaire de calculer le modèle géométrique inverse standard afin de définir les longueurs totales de câble à déployer  $\mathbf{L}_{T_0} = [L_{T_0}^1, \dots, L_{T_0}^m]^T$ . Ce jeu de longueurs sera, par la suite, la valeur d'entrée du modèle direct étendu composant l'étape suivante de l'organigramme de la Fig. 2.9. Le modèle géométrique inverse étendu, c'est-à-dire avec les mêmes hypothèses que le modèle direct de l'étape d'après, est aussi calculé. Cette étape permet d'obtenir les valeurs de position des différentes poulies,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_m]^T$  et  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$ . Ces données serviront de valeur initiale au processus de résolution du modèle direct étendu. Ce dernier permet de calculer une pose de la PM représentant sa situation atteinte si les longueurs de câble étaient calculées avec un modèle géométrique inverse standard. Pour quantifier l'erreur lorsque des hypothèses simplificatrices sont réalisées nous observerons la différence entre la pose désirée  $[\mathbf{p}, \mathbf{o}]^T$  et la pose obtenue  $[\mathbf{p}_{MDE}, \mathbf{o}_{MDE}]^T$ . Dans les travaux présentés dans ce manuscrit la PM est approximée à un point masse, ce qui a comme effet d'annuler les ddl de rotation décrit par le vecteur  $\mathbf{o}$ . Cette considération peut représenter une limitation aux travaux effectués. Cependant, nous avons voulu, dans ces premières études, nous concentrer exclusivement sur les erreurs de position de la PM, sans perturbations dû à une orientation parasite. Certains RPC sont équipés de PM spécifiques afin de compenser leur erreur d'orientation comme le RPC FAST [Yao+13]. La différence

entre les poses se résume donc à la différence entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}_{MDE}$ . La norme euclidienne de cette différence peut être calculée afin d'obtenir un indice d'évaluation de l'erreur de position théorique noté  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ , plus simple à intégrer au processus de comparaison.  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sera également la réponse des plans d'expériences utilisés pour analyser l'influence sur la précision des différents paramètres étudiés dans cette thèse.

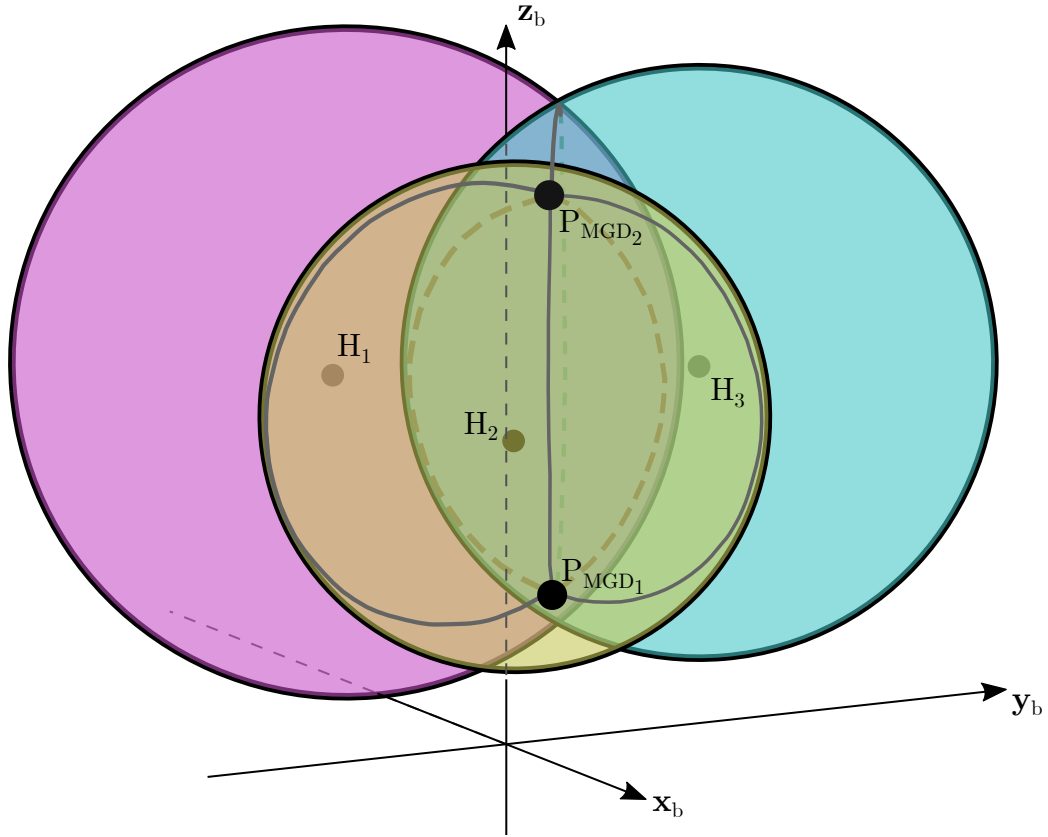
Nous venons de voir la méthode qui sera mise en application lors des études menées dans la suite des travaux. Cependant, il reste encore à définir les schémas de résolution des modèles directs. Deux méthodes ont été mises en œuvre pour résoudre les modèles directs étendus. Dans un premier temps nous verrons un schéma de résolution itératif et ensuite un mettant en application des méthodes de résolution numérique de type optimisation.

### 2.3.1.2 Schéma de résolution itératif du modèle direct étendu

La résolution du modèle géométrique direct est une problématique souvent étudiée dans la littérature et présente une complexité importante. Les modèles directs étendus avec les poulies et les longueurs mortes ne dérogent pas à la règle. Cependant, la méthode mise en place dans la Fig. 2.9 demande sa résolution. Dans la première partie des travaux menés dans le cadre de cette thèse le modèle direct étendu est résolu de façon itératif, car moins coûteux en temps de calcul qu'une résolution par un algorithme d'optimisation.

Tout d'abord, il faut mettre en place les hypothèses réalisées sur la géométrie du RPC. Il sera considéré que les RPC étudiés sont équipés d'une PM ramenée à un point masse afin d'étudier exclusivement l'erreur de position sans perturbation due à l'orientation de la PM. Les ddl de la PM se ramènent donc uniquement au ddl en translation, ainsi la pose de la PM est décrite par son vecteur position  $\mathbf{p}$ . Les RPC étudiés seront donc tous des RPC 3 ddl. De plus, l'architecture est choisie suspendue afin de limiter les interférences de câbles au niveau du sol et d'avoir des RPC plus simples de montage/démontage. Deux configurations de RPC seront mises en œuvres, l'une sous-contrainte à 3 câbles, donc autant de câbles que de ddl, et une autre pleinement-contrainte ayant 1 câble de plus que de ddl (cf. section 1.1.1.2). Dans le cadre d'une résolution itérative pour les RPC à 3 ddl pleinement contraints à 4 câbles, nous choisissons une combinaison de 3 câbles parmi les 4 afin de réaliser la position de la PM. La combinaison conservée est celle minimisant l'erreur de pose entre la pose désirée  $P$  et celle obtenue avec le modèle direct, pouvant être noté  $P_{MD}$ . Dans ce cas, le câble supplémentaire n'intervient pas dans l'équilibre statique du RPC. Cette hypothèse a pour objectif de simplifier le calcul des tensions dans les câbles aux bornes de la PM en rendant la matrice  $\mathbf{J}$  carrée (cf. Eq. 1.5), impliquant une unique solution au jeu des tensions  $\mathbf{t}$ . De ce fait, la méthode de gestion des tensions choisie est d'uniquement vérifier si la solution  $\mathbf{t}$  de l'Eq. 1.5 est comprise dans l'ensemble des tensions admissibles  $[t_{min} \ t_{max}]$ . L'espace de travail dans lequel s'inscrit cette méthode est l'Espace de Travail Statique (ETS).

Au regard de ces hypothèses simplificatrices il est possible de résoudre le modèle direct étendu, avec ou sans prise en compte de l'élasticité des câbles, comme l'intersection de trois sphères de rayon  $R_i$  (cf. Fig. 2.10).



**Figure 2.10** – Intersection de trois sphères pour la résolution du modèle direct étendu ( $MD_E$ ) d'un RPC à 3 ddl ramené à trois câbles

Pour résoudre le modèle direct étendu il faut commencer par déterminer l'intersection entre les différentes sphères de centre  $H_i$  et de rayon  $R_i = l_E^i$ .  $R_i$  est facilement déterminable par l'Eq. 2.31.

$$R_i = \sqrt{(L_{T_0}^i - \|\mathbf{I}_d^i\|_2 - \gamma_i r_{p_i})^2 + r_{p_i}^2} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

L'intersection des trois sphères se traduit analytiquement par le système à trois équations suivant :

$$\begin{cases} (x - h_{x_1})^2 + (y - h_{y_1})^2 + (z - h_{z_1})^2 = (L_{T_S}^1 - \|\mathbf{I}_d^1\|_2 - \gamma_1 r_{p_1})^2 + r_{p_1}^2 \\ (x - h_{x_2})^2 + (y - h_{y_2})^2 + (z - h_{z_2})^2 = (L_{T_S}^2 - \|\mathbf{I}_d^2\|_2 - \gamma_2 r_{p_2})^2 + r_{p_2}^2 \\ (x - h_{x_3})^2 + (y - h_{y_3})^2 + (z - h_{z_3})^2 = (L_{T_S}^3 - \|\mathbf{I}_d^3\|_2 - \gamma_3 r_{p_3})^2 + r_{p_3}^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Avec  $\mathbf{h}_i = (h_{x_i} \ h_{y_i} \ h_{z_i})^T$  et où  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont solutions du système d'équations Eq.2.32, et représentent les coordonnées des points  $P_{MD_k}$  qui sont les positions accessibles de la PM. Dans le cas d'un RPC à trois câbles effectifs, il est à noter qu'il existe deux solutions,  $k = 1, 2$ . La figure Fig.2.10 illustre les solutions  $P_{MD_1}$  et  $P_{MD_2}$ . Les câbles ne travaillant qu'en traction, une seule des solutions est physiquement atteignable, c'est la solution « basse » qui est retenue, respectant la contrainte de tension positive dans les câbles. Ce point est écrit  $P_{MD_1}$  dans la Fig.2.10, et sera noté  $P_{MD_E}$  dans le reste du manuscrit. Toutefois à

l'observation du système d'équations Eq. 2.32 il est possible de voir que ce système est sous déterminé. Effectivement  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont indéterminés mais l'ensemble des  $\mathbf{h}_i = (h_{x_i} \ h_{y_i} \ h_{z_i})^T$  représentant le centre des poulies l'est aussi. Ce dernier ne peut être déterminé réellement que lorsque la pose de la PM est connue ce qui n'est pas le cas lors de la résolution du MGD<sub>E</sub>. De plus, il est nécessaire de connaître l'angle  $\gamma_i$  ainsi que  $I_d^i$ , tous deux dépendants aussi de la pose de la PM. Il est alors possible de mettre en parallèle les équations de la statique présentées précédemment (cf. Eq. 1.5) comme étant fonction de  $\mathbf{p}$ . Cependant ce système est complexe à résoudre car non linéaire. C'est pourquoi nous avons eu recours à une méthode numérique d'itérations successives des paramètres géométriques cherchant à tendre vers une variation de position inférieure à une erreur  $\varepsilon_P$ , suffisamment petite, entre deux itérations. Un premier calcul de  $P_{MDE}$  est réalisé avec l'Eq. 2.32, noté  $P_{MDE}^0$  où les conditions initiales de la position de la poulie, sont tirées du MGI étendu pour une position théorique  $\mathbf{p}$  donnée (cf. Fig. 2.9). Cependant, les positions des poulies ne satisfont pas les conditions d'équilibre. C'est pour cela que le processus itératif est important. Par la suite, le re-calcul des paramètres des poulies est réalisé pour respecter les contraintes d'équilibre statique pour la position calculée grâce au modèle direct étendu précédent. C'est-à-dire, que la position  $H_i$  du centre des réas est re-déterminée en prenant comme position de la PM la position  $P_{MDE}^0$ . Par la suite, le jeu de tensions  $\mathbf{t}$  est aussi re-calculé afin de connaître les tensions dans les câbles. Dans le cas où l'élasticité uni-directionnelle est prise en compte l'étape d'après cherche à calculer l'allongement de la longueur du câble totale correspondant,  $\Delta L_T^i$ . Dans le cas où cette élasticité est négligée le processus passe directement à l'étape d'après. Cette dernière, consiste à re-calculer la longueur de câble utile. Cela revient à soustraire la longueur morte  $l_d^i$  et la longueur enroulée  $\gamma_i r_{p_i}$  à la longueur totale  $L_{T_0}^i$  et additionnée de l'allongement  $\Delta L_T^i$  si l'élasticité des câbles est prise en compte. Finalement, une nouvelle position  $P_{MDE}^j$  est calculée grâce au système de l'Eq. 2.32 et à l'Eq. 1.5. Notons  $\mathbf{p}_{MDE}^j$  le vecteur position du point  $P_{MDE}^j$  dans le repère de base  $\mathcal{F}_b$  à l'itération  $j$ . La condition d'arrêt est alors vérifiée, si  $\|\mathbf{p}_{MDE}^j - \mathbf{p}_{MDE}^{j-1}\|_2 < \varepsilon_P$ , si ce n'est pas le cas une itération de plus est réalisée. Lorsque la condition d'arrêt est respectée, à l'itération  $j = u$ , il est considéré que  $P_{MDE}^u$  est solution du modèle direct étendu. Ce processus est représenté dans l'organigramme de la figure Fig.2.11.

La Fig. 2.11 permet de nous rendre compte de la bonne capacité d'adaptation de cette méthode du fait qu'elle utilise les modèles inverses pour calculer les positions des éléments mécaniques tels que la poulie. De plus, cette méthode admet une précision maîtrisable avec le critère d'arrêt  $\varepsilon_P$  défini par l'utilisateur, contribuant ainsi à l'obtention de résultats fiables et relativement rapides. L'inconvénient majeur de ce processus est la difficulté de résolution dans le cas de RPC pleinement-contraint. Cependant, il est toujours possible d'ajouter une étape de TDA après le calcul des tensions  $\mathbf{t}_j$ . L'obtention de cette dernière valeur doit aussi être adaptée car la matrice  $\mathbf{J}$  n'est plus carrée et donc plus inversible. L'utilisation de la pseudo inverse de Moore-Penrose s'impose.

Dans nos travaux ce schéma est mis en œuvre dans la première partie du chapitre 3, c'est-à-dire dans l'étude des paramètres géométriques liés à la présence des poulies de renvoi. Nous allons maintenant décrire plus en détails un schéma de résolution par le biais de fonction d'optimisation permettant la prise en compte de paramètres supplémentaires tel que le fléchissement des câbles.

### 2.3.1.3 Schéma de résolution par optimisation du modèle direct étendu

Nous avons présenté précédemment les modèles prenant en compte le fléchissement du câble sous son propre poids (cf. section 2.2.2). La résolution de ces modélisations sont complexes de par le nombre de paramètres inter-dépendants et le nombre d'équations important,  $9m + 3$  pour un RPC avec des poulies à pivot et  $12m + 3$  pour les poulies ayant un joint de cardan comme articulation. La résolution de façon itérative est donc lourde à appliquer et perd son avantage en temps de calcul. C'est pourquoi nous avons fait le choix de



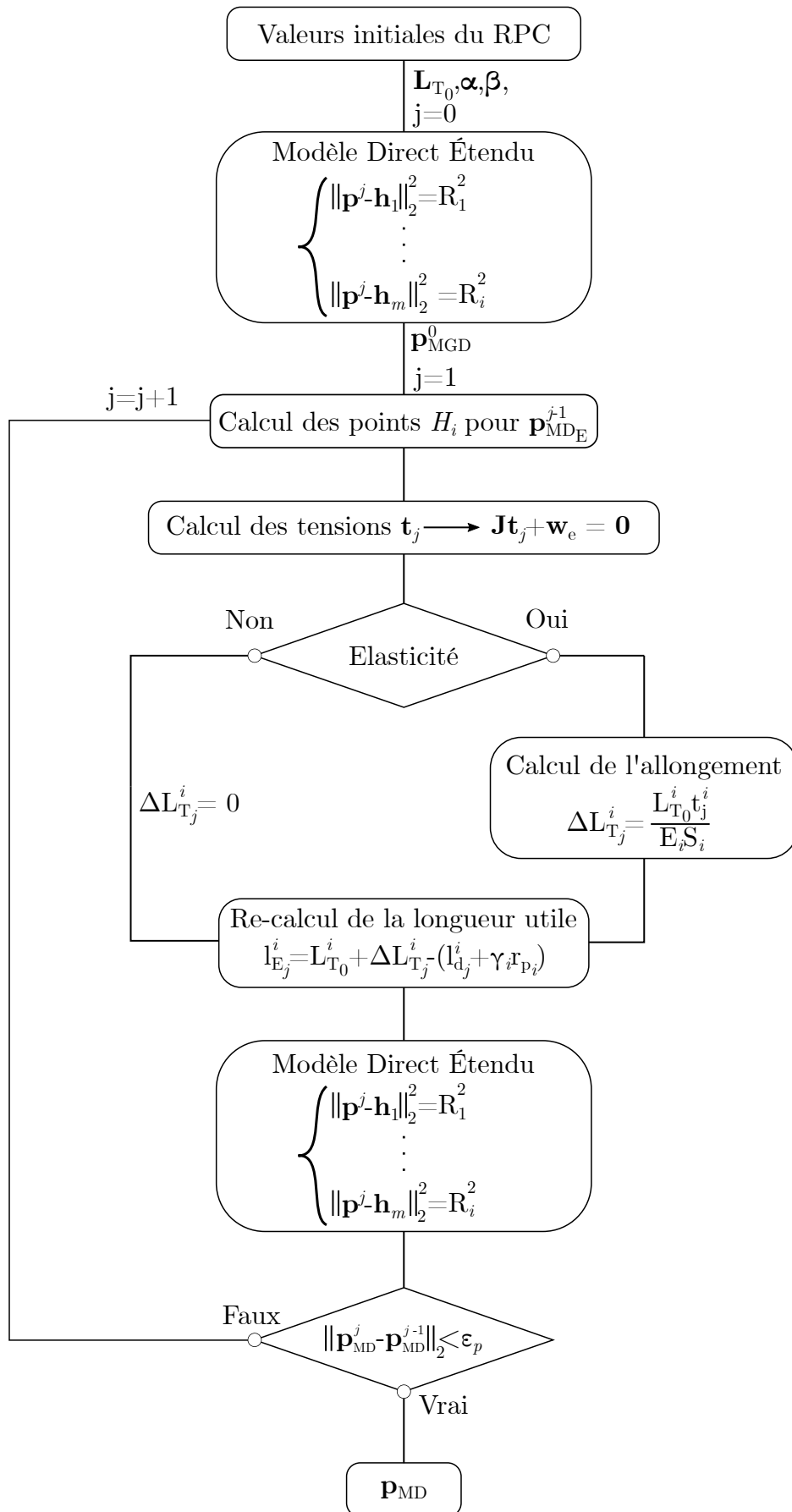


Figure 2.11 – Schéma de résolution itératif du Modèle Direct Étendu

faire appel à des fonctions d'optimisation. Dans le cadre de la résolution d'un système comme présenté par l'Eq. 2.24, pour des poulies à pivot, ou par l'Eq. 2.30, pour des poulies à joint de cardan, la fonction *lsqnonlin* de Matlab se trouve être parfaitement adaptée au problème. En effet, cette fonction cherche à résoudre un problème non-linéaire sans contrainte tout en admettant l'entrée d'ensemble borné de recherches des solutions finies.

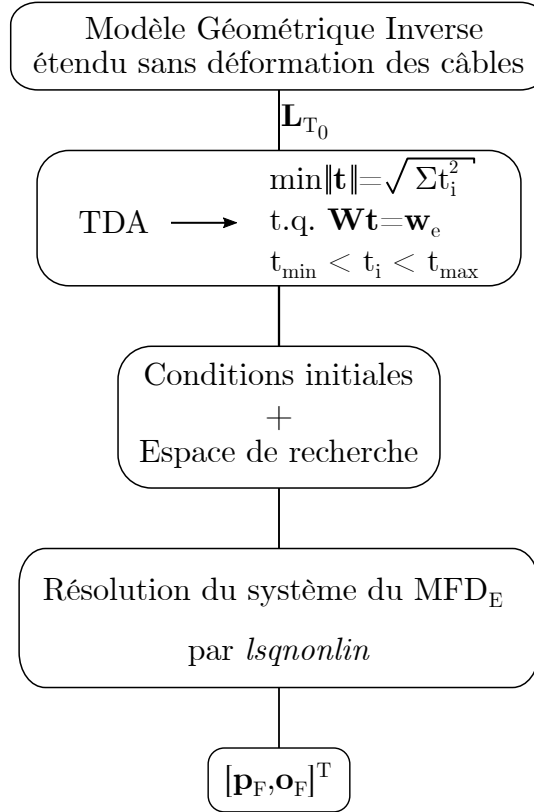


Figure 2.12 – Schéma de résolution du  $\text{MFD}_E$

La figure 2.12 présente le processus pour mener à bien la résolution des  $\text{MFD}_E$ . Tout comme pour le schéma itératif (cf. Fig. 2.11), il s'intègre à la place de l'étape « Modèles Direct Étendus » de la Fig. 2.9. Au cours de notre étude cette résolution a été utilisée afin d'observer l'influence du fléchissement du câble ainsi que la variation de leur module de Young. Cela signifie que le modèle par rapport auquel il est comparé est un modèle géométrique étendu, c'est-à-dire sans prise en compte de l'élasticité des câbles, permettant ainsi de s'affranchir de la résolution du  $\text{MGI}_S$  (cf. Fig. 2.9). En effet, le  $\text{MGI}_E$  nous permet d'obtenir notre jeu de valeurs initiales de longueurs totales  $\mathbf{L}_{T_0}$  ainsi que celles décrivant les positions des poulies. *lsqnonlin* nécessite des valeurs initiales afin de pouvoir commencer sa recherche de solutions optimales et plus ces valeurs sont proches d'une solution plus le calcul sera rapide. Néanmoins, le  $\text{MGI}_E$  ne fixe que les conditions initiales géométriques et dans le cadre du  $\text{MFD}_E$  l'une des inconnues est la valeur des tensions dans les câbles. Pour ce faire, une TDA est appliquée à la suite du  $\text{MGI}_E$ , permettant d'obtenir une distribution des tensions répondant aux contraintes des RPC. Il est à noter que dans le cadre de cette modélisation l'ensemble des câbles de RPC pleinement-contraint doit être pris en compte, car les câbles « non-utiles » génèrent une force sur la PM de par leur poids qui n'est plus négligeable. Cela impose donc l'utilisation de la TDA. Il a été fait le choix de minimiser la norme euclidienne du jeu de tensions  $\mathbf{t}$ , ce qui a comme effet de réduire la consommation énergétique du RPC. L'étape suivante du schéma de résolution est de fixer les conditions initiales obtenues précédemment

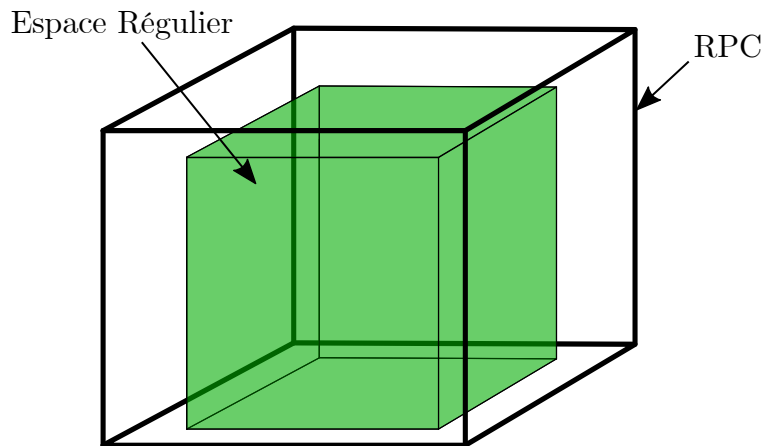
ainsi que de borner le domaine de recherche de chaque variable. Cela permet à la fonction d'optimisation de chercher uniquement des solutions admissibles au système. De plus cela impose automatiquement une gestion des tensions lors de la résolution du MFD<sub>E</sub>. À l'issue de ce processus la pose de la PM est connue grâce à  $[\mathbf{p}_F, \mathbf{o}_F]^T$  ainsi que l'ensemble des inconnues du système, c'est-à-dire  $[\alpha_i, \beta_i, \mathbf{t}_u^i, \mathbf{t}_d^i]^T$ , pour  $i = 1, \dots, m$ .

### 2.3.2 Méthodologie de comparaison de plusieurs RPC

L'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  présentée dans la Fig. 2.9 permet d'observer l'erreur faite sur une position théorique quand des paramètres du RPC ne sont pas pris en compte dans la détermination des longueurs des câbles à déployer. Dans l'objectif de comparaison des RPC ayant des paramètres différents, comme des rayons de poulie, des bras de levier ou une articulation de poulie différente, nous devons mettre en place une méthode permettant de les comparer entre eux. L'une des solutions est de déterminer, dans l'ensemble de l'espace de travail statique, l'erreur de pose théorique de chaque RPC par un indice global d'évaluation. Pour ce faire, la moyenne des erreurs de pose sur un espace de travail donnée est donc calculée (cf. Eq. 2.33). Il est à noter, que cet indice global d'évaluation de l'erreur de pose théorique servira également comme réponse des plans d'expériences utilisé pour analyser l'influence des paramètres de conception.

$$\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\delta\mathbf{p}_i\|_2 \quad (2.33)$$

où  $N$  est le nombre de positions de la PM sur lequel la moyenne est calculée. Dans le cadre des RPC ce nombre de positions est déterminé par son espace de travail et la discrétisation équirépartie de ce dernier. Or comme nous le verrons par la suite dans le chapitre 3 cet espace de travail est influencé par la dimension des poulies et les effets mécaniques du câble. Pour obtenir un indice de comparaison général de l'erreur de pose théorique le nombre  $N$  entre les différents RPC doit être le même. La meilleure solution pour cela est de déterminer un ER<sub>C</sub> (cf. 1.2.3) pour pouvoir discrétiser cet espace en  $N$  poses. La discrétisation sera donc toujours la même quel que soit le RPC. Pour cela il sera nécessaire de faire une première série de calculs pour déterminer les ETS de chaque RPC testé pour ensuite trouver l'ER<sub>C</sub> le plus grand compris dans ces espaces de travail. Dans le cadre de ces travaux, l'ER<sub>C</sub> recherché est de la forme de la structure du RPC, c'est-à-dire cubique et ses faces sont parallèles à celles du RPC (cf. Fig. 2.13).



**Figure 2.13** – Représentation d'un espace régulier compris dans l'espace de travail statique du RPC

À l'issue de ce processus nous connaissons donc l'erreur moyenne dans l' $ER_C$  pour chaque RPC. De plus, nous pouvons observer le ou les RPC limitant l' $ER_C$  ainsi que l'évolution des volumes des ETS propres à chaque RPC en fonction de différents paramètres de conception. Ainsi en fonction de l'application du RPC et du degré de précision requis il sera possible de sélectionner les valeurs des paramètres répondant au mieux au cahier des charges.

## 2.4 Conclusion

Les pages de ce chapitre sont vouées aux modèles et méthodes développés durant les travaux menés dans cette thèse. Les modèles inverses, directs, standards ou encore étendus y sont présentés. Concernant ces derniers, d'un point de vue géométrique ces modèles prennent en compte les poulies de renvois dans la cinématique des RPC. Les apports majeurs de ces modèles sont la prise en compte de la longueur morte des câbles entre la sortie de l'enrouleur et l'entrée de la poulie de renvoi, mais aussi le développement d'une nouvelle architecture de poulie sur la base d'un joint de cardan. La seconde partie de ce chapitre présente l'intégration du comportement mécanique des câbles dans les modèles géométriques précédemment présentés. Cela nous permet de représenter leurs effets sur l'intégralité de la chaîne d'actionnement d'un RPC grâce aux modèles élasto-géométriques étendus obtenus. La troisième section s'intéresse elle à la mise en place d'un indice d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Dans cette section les différentes méthodes de résolution des modèles directs étendus sont présentées, car nécessaire à la détermination de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . De plus, un indice global d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ , voué à l'analyse de sensibilité et à la comparaison de différents RPC est aussi développé.

Ce chapitre a permis de mettre en place les bases théoriques et l'ensemble des modèles nécessaires au bon déroulement des analyses exposées dans les chapitres suivants. Les modèles développés sont uniques et permettent une prise en compte complète et une étude des systèmes et phénomènes présents tout au long de la chaîne d'actionnement. Effectivement, dans les analyses menées sur l'élasticité des câbles, la longueur morte est toujours négligée or cette longueur est aussi affectée par ces phénomènes. De plus, la présence des poulies est peu modélisée et la sélection de leurs paramètres reste un domaine où il existe encore de forts verrous scientifiques. Dans le chapitre 1 il a pu être mis en lumière le manque d'études sur l'influence de la présence des poulies et surtout des paramètres géométriques la décrivant. Le tableau 2.1 résume les différents modèles mis en place dans ce chapitre. Dans le tableau 2.1 les pictogrammes verts indiquent la prise en compte du paramètre et les rouges la non prise en compte de ce dernier. Les pictogrammes oranges permettent de schématiser la modélisation des câbles (segment rigide, segment élastique uni-directionnel ou fléchissement), et seront utilisées dans les organigrammes présentant les modélisations utilisées lors des différentes études menées dans les prochains chapitres.

Le chapitre suivant s'intéressera à combler le manque d'études sur la sensibilité des RPC vis-à-vis des paramètres géométriques des poulies, mais aussi des paramètres mécaniques des câbles. Pour ce faire nous étudierons tout d'abord uniquement les effets des paramètres géométriques des poulies sur l'erreur de pose théorique et nous chercherons un schéma d'optimisation de ces paramètres pour minimiser cette erreur. Par la suite, les effets des phénomènes mécaniques des câbles seront analysés ainsi que leur évolution vis-à-vis des dimensions du RPC. De plus, nous présenterons plus en détail la conception de la poulie ayant comme articulation un joint de cardan.

	Longueur Morte	Poules	Segment rigide	Segment élastique	Fléchissement
Modèle géométrique standard (MGL <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub> )	✓	✗	✓	✗	✗
Modèle géométrique étendu à segment rigide (MGL <sub>E</sub> /MGD <sub>E</sub> )	✓	✓	✓	✗	✗
Modèle élasto-géométrique étendu à segment élastique (MEGL <sub>E</sub> /MEGD <sub>E</sub> )	✓	✓	✗	✓	✗
Modèle fléchissant étendu avec élasticité et fléchissement (MFI <sub>E</sub> /MFD <sub>E</sub> )	✓	✓	✗	✗	✓

Table 2.1 – Tableau récapitulatif des modèles mis en place dans le Chapitre 2

# 3

## Analyse de sensibilité des paramètres géométriques et mécaniques de RPC suspendus à 3ddl

3.1	Conception mécanique détaillée de l'architecture des poulies . . . . .	64
3.1.1	Conception . . . . .	64
3.1.2	Dimensionnement . . . . .	68
3.1.3	Étude de l'influence de la masse de la poulie sur l'erreur de pose théorique . . . . .	70
3.2	Description et erreur de pose des cas d'études de RPC à 3ddl . . . . .	70
3.2.1	Architecture de RPC à 3 câbles . . . . .	72
3.2.2	Extension pour un RPC à 4 câbles . . . . .	73
3.2.3	Étude de l'erreur de positionnement des RPC . . . . .	75
3.3	Analyse de sensibilité des paramètres géométriques de la poulie . . . . .	88
3.3.1	Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun . . . . .	88
3.3.2	Influence des paramètres géométriques sur l'erreur de pose théorique . . . . .	91
3.3.3	Détermination des paramètres géométriques optimaux des poulies . . . . .	93
3.4	Analyse de sensibilité des paramètres mécaniques de la chaîne d'actionnement du RPC . . . . .	98
3.4.1	Évolution de l'erreur de pose théorique en fonction du module de Young pour des câbles en segment élastique . . . . .	98
3.4.2	Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun . . . . .	104
3.4.3	Influence des paramètres mécaniques sur l'erreur de pose théorique . . . . .	110
3.5	Influence de la taille du RPC sur la sensibilité des paramètres géométrico-mécaniques . . . . .	113
3.6	Conclusion . . . . .	116

Les chapitres précédents ont fixé les bases et les modèles des études menées dans cette thèse. Le chapitre 1 a exploré la bibliographie afin d'en extraire les connaissances nécessaires au développement de nos travaux, mais a également mis en avant les verrous scientifiques persistants dans le domaine des RPC. Par notre affinité avec le champ du génie mécanique, les travaux ont été orientés à des fins d'amélioration du processus de conception préliminaire en apportant les connaissances nécessaires pour la réalisation du meilleur choix d'architecture possible. Dans cet objectif, le chapitre 2 s'intéresse à établir les modèles décrivant les RPC avec les paramètres que nous désirons étudier.

Au travers du chapitre 3, nous allons étudier et analyser l'erreur de pose de la PM à l'aide des modèles et méthodes présentés précédemment. Nous pourrons ainsi analyser l'influence des paramètres géométriques des poulies ainsi que des paramètres mécaniques des câbles sur la précision de pose de la PM. Dans un premier temps nous détaillerons les étapes de la conception des articulations des poulies et particulièrement celle de la nouvelle poulie à joint de cardan. Par la suite, nous mettrons en place l'architecture et la configuration des RPC sur lesquelles les études seront menées. Puis, nous déterminerons la sensibilité des paramètres géométriques de la poulie à l'aide d'un plan d'expériences. Avec la même méthode nous observerons la sensibilité des paramètres géométrico-mécaniques liés à la chaîne d'actionnement ( $E$ ,  $\mu_0$ , le type d'articulation de la poulie ainsi que la masse de la PM). Finalement, nous analyserons l'évolution de l'effet de ces paramètres en fonction des dimensions du RPC.

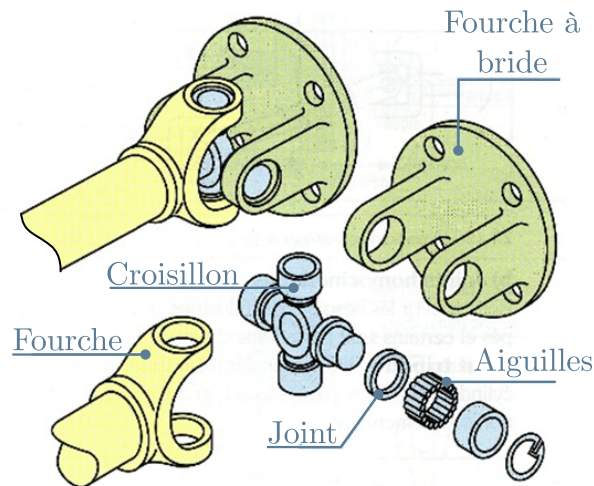
## 3.1 Conception mécanique détaillée de l'architecture des poulies

Ce manuscrit s'intéresse en partie à l'effet des poulies de renvoi sur la précision de la PM. Communément, les poulies utilisées dans le cadre des RPC sont des poulies avec une articulation pivot et un guide d'entrée du câble (cf. Fig. 2.2). Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes interrogés sur la possibilité de réduire l'effet de ces poulies sur l'erreur de pose de la PM lorsqu'elles sont négligées dans les modèles géométriques. Dans cet objectif, nous avons décidé de concevoir une poulie avec une articulation de type joint de cardan. Ce type de poulie n'existe, à notre connaissance, pas dans les catalogues des fabricants. De plus, d'un point de vue mécanique elle nous laisse à penser qu'elle réduirait les contraintes de flexion présentes dans son bras de levier. Cette nouvelle architecture de poulie sera comparée à une poulie plus classique. Dans un souci de simplification du montage/démontage du RPC, nous avons fait le choix de la confronter à une poulie à pivot sans guide d'entrée du câble.

Dans cette section nous décrivons la conception de la poulie à joint de cardan. Une étude par éléments finis sera par la suite réalisée afin de comparer les contraintes internes à celles d'une poulie à pivot. Finalement, nous étudierons l'influence de la prise en compte de la masse propre de la poulie dans les modèles.

### 3.1.1 Conception

Dans cette étape nous intégrons une articulation de type joint de cardan simple (cf. Fig. 3.1) sur une poulie. Ce type d'articulation est communément employé pour la transmission d'une rotation entre deux arbres d'axes non confondus, comme dans le cadre de l'arbre de transmission d'une voiture. Dans notre cas nous ne cherchons pas à transmettre une rotation mais uniquement à libérer deux degrés de rotation, d'où l'utilisation d'un joint de cardan simple. Une des fourches de notre cardan est fixée à la structure du RPC, ce qui aura comme effet de permettre à l'autre d'avoir 2ddl de rotation autour des deux axes du croisillon. Nous allons décrire le processus de conception que nous avons mis en œuvre dans le cadre de la poulie à joint de cardan. Il est à noter que la conception et le dimensionnement de la poulie sont fonction du RPC et des masses transportées.



**Figure 3.1** – Schéma d'un joint de cardan [Fan21]

Suite à ces considérations sur la cinématique de l'articulation étudiée, les dimensions du croisillon et donc de l'ensemble sont conditionnées par le dimensionnement des douilles à aiguilles permettant la rotation sans frottement des fourches. Nous devons donc connaître les dimensions de ces dernières. Pour ce faire, nous devons déterminer les efforts qu'elles seront susceptibles de subir. Pour cela, nous prenons la tension maximale subie par les câbles dans l'espace de travail et nous faisons l'hypothèse qu'une douille subit la moitié de cet effort. Un facteur de sécurité de 2.5 est appliqué sur cette valeur de tension pour assurer la tenue aux variations d'effort possibles. Il est à noter que ces valeurs sont variables en fonction du RPC, de sa charge, de ses câbles etc. Il est donc nécessaire de bien dimensionner ou choisir les poulies en fonction des conditions d'utilisations du RPC. Lorsque les dimensions des douilles à aiguilles sont fixées il est possible de choisir le croisillon adéquat. Il existe une gamme très large vendue par les industriels. Concernant le maintien en position des douilles, elles sont bloquées par des circlips au niveau des alésages des bras de levier. Notre choix technique au sujet du bras de levier a été de le décomposer en deux pièces indépendantes facilitant son montage, mais aussi permettant de réduire les interférences possibles entre lui et la fourche fixe lors des rotations de la poulie. Les deux composants formant le bras de levier sont identiques et symétriques suivant leur plan médian. En effet, les cages à aiguilles supportant l'axe de rotation du réa sont dimensionnées de la même façon que les douilles à aiguilles du croisillon. Cela signifie que l'alésage accueillant la douille est identique à celui accueillant la cage. La fourche fixe permettant de lier la poulie avec la structure externe du RPC est conçue afin de libérer sa partie centrale pour agrandir les angles de rotation  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  accessibles (cf. Fig. 2.4). Il est à noter que la poulie doit être montée dans un sommet supérieur de la structure du RPC de façon à ce que le débattement angulaire  $\alpha_i$  du réa soit symétrique et le plus faible possible. En effet, dans le cas d'une structure parallélépipédique de RPC, cela permet à la poulie de couvrir l'ensemble des  $90^\circ$  de débattement angulaire. De plus, à l'image d'une bielle et afin de simplifier l'assemblage de la poulie, la fourche fixe supérieure est décomposée en deux parties. Nous avons donc un chapeau qui vient se fixer par l'intermédiaire de deux vis. Cela permet une insertion plus aisée du croisillon et de la douille à aiguille pour verrouiller ensuite le tout à l'aide d'un circlips. La conception finale de cette poulie est illustrée sur la Fig. 3.2 à l'aide d'une Conception Assisté par Ordinateur (CAO).



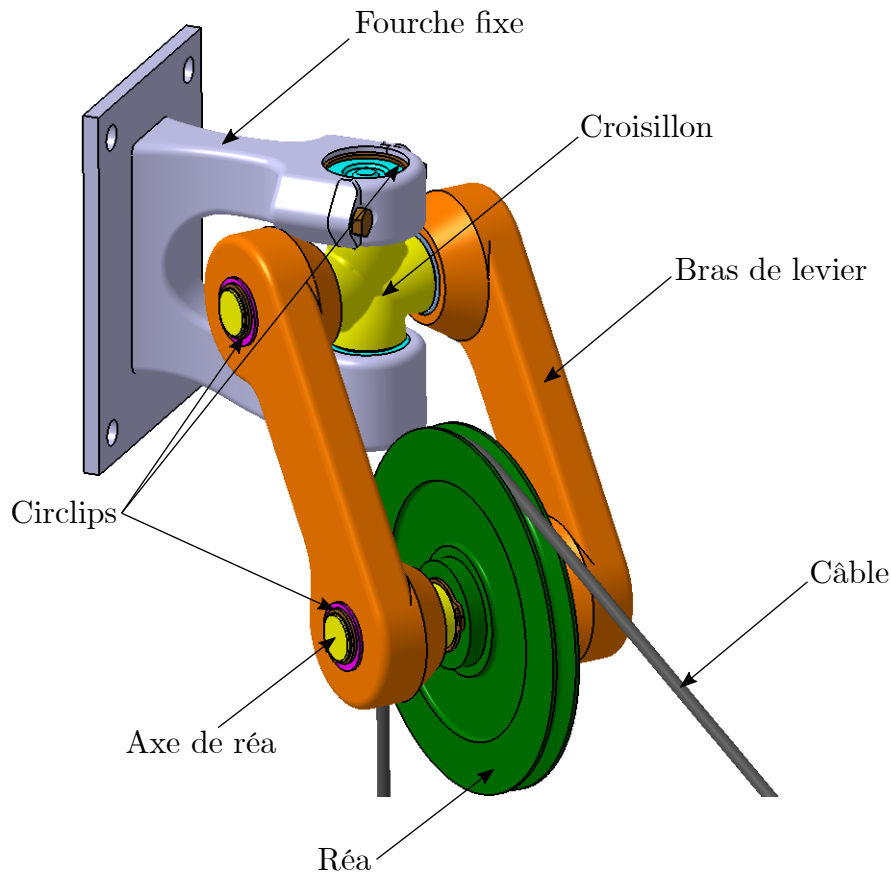
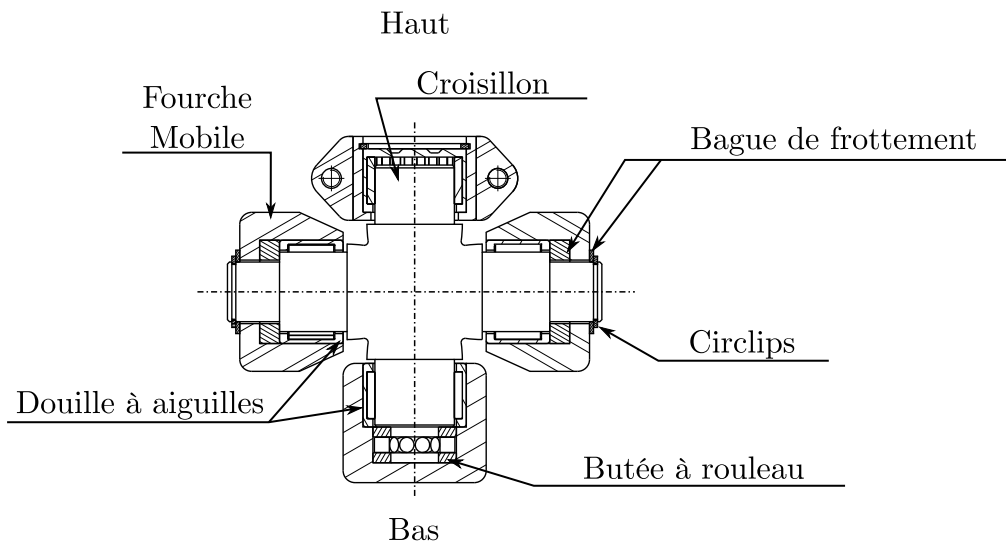


Figure 3.2 – CAO de la poulie à joint cardan

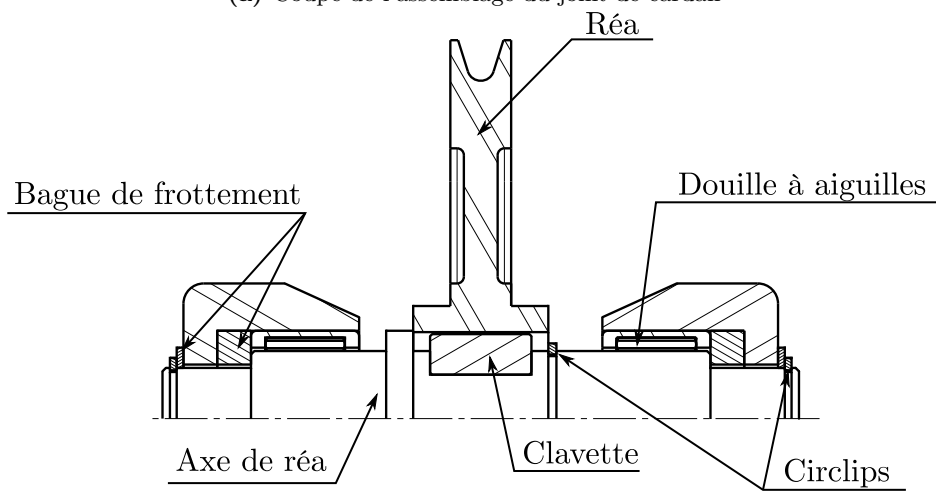
La CAO de cette poulie a été réalisée sur le logiciel CATIA V5. Cela nous a aidé à observer l'absence d'interférence dans les différentes positions que la poulie peut prendre. De plus, nous pouvons aussi nous faire une idée de la montabilité de notre conception. Pour des pièces fabriquées en Aluminium 6063, cela donnerait ainsi une masse des pièces mobiles, c'est-à-dire toutes les pièces allant des bras de levier jusqu'à le réa, de  $0.7kg$  soit un poids de  $6.85N$ . Ces chiffres correspondent à un réa de rayon de  $50mm$  et des bras de levier de  $104mm$ .

Les coupes présentées dans les Fig. 3.3a et Fig. 3.3b nous permettent d'illustrer plus clairement l'assemblage des parties mobiles. Nous pouvons observer sur la Fig. 3.3a le montage du joint de cardan équipé de douilles à aiguilles et des butées à rouleaux pour permettre au croisillon de tourner librement dans les alésages et est maintenue en position par des circclips d'un coté et des épaulements de l'autre. Du coté du réa, elle est reliée au bras de levier à l'aide d'un axe (cf. Fig. 3.3b). Le réa est fixe par rapport à cette axe à l'aide d'un montage par clavette verrouillé par un circclips. L'axe quand à lui est monté sur des douilles à aiguilles et des butées à rouleaux. Cette axe est maintenu en position par des circclips à ses extrémités.

Maintenant que la conception et le dimensionnement des différentes pièces composant cette poulie sont réalisés ainsi que sa CAO, nous pouvons comparer son comportement mécanique vis-à-vis des efforts qu'elle subit par rapport à une poulie classique.



(a) Coupe de l'assemblage du joint de cardan



(b) Coupe du réa et de son assemblage au bras de levier

**Figure 3.3** – Dessins d'ensemble de la nouvelle architecture de poulie à joint de cardan

### 3.1.2 Dimensionnement

La conception de la poulie à joint cardan ayant été faite, nous menons une étude par éléments finis pour observer les contraintes subies par les différentes pièces de la poulie. De plus, nous allons comparer ces résultats à ceux d'une poulie à pivot afin de déterminer celle minimisant les contraintes mécaniques. Cette étude nous permettra de confirmer ou non la réduction des contraintes dans le bras de levier de la poulie à joint de cardan. Nous pourrions également observer les forces appliquées aux points d'ancrages des poulies sur la structure du RPC. Premièrement, il est nécessaire de modéliser une poulie à pivot. Pour ce faire, nous avons décidé de bloquer par des cannelures la rotation suivant l'axe horizontal du croisillon de la poulie à joint cardan. Nous obtenons ainsi une poulie à pivot (cf. Fig. 3.4) avec une géométrie quasi-identique à la poulie à joint de cardan. Cela nous permet de réaliser une comparaison et des analyses simples des deux poulies.

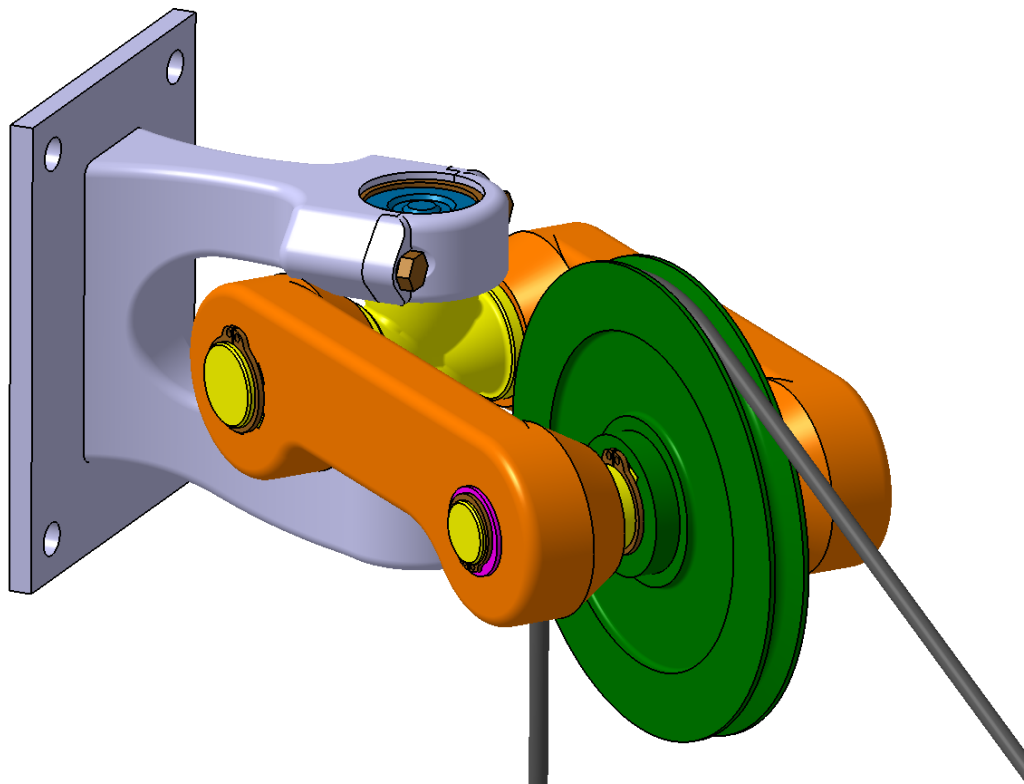


Figure 3.4 – CAO de la poulie à pivot

Pour l'analyse par éléments finis nous utiliserons le logiciel ABAQUS. Dans un premier temps, il est nécessaire de définir les conditions aux limites du système. Nous appliquerons au niveau des trous de fixation de la partie fixe de la poulie un point encastré relié aux surfaces grâce à des "Rigid Body", permettant de simuler la fixation par éléments filetés. De plus, les efforts appliqués sur la poulie par le câble, donc au point  $D_i$  et  $K_i$ , sont ramenés à une force équivalente appliquée au point  $H_i$  centre de l'axe de rotation du réa. Le réa est considéré comme un corps rigide rendant l'hypothèse précédente correcte. L'axe de rotation, le croisillon ainsi que les roulements sont aussi considérés comme des corps rigides. Cela nous permet de simplifier le modèle calculé et de réduire le temps de calcul. Ces simplifications sont réalisées sur les deux modèles de poulies. L'analyse est réalisée dans le cadre d'un RPC de structure cubique de  $15m$  de coté et transportant une masse de  $200kg$ . La position des poulies est celle correspondant à une pose initiale  $\mathbf{p}$  de la PM générant un effort de tension

dans les câbles important. Dans notre cas d'étude  $\mathbf{p} = [-2.25, -6.75, 13]^T$ , la Fig 3.5 illustre le RPC étudié dans cette configuration.

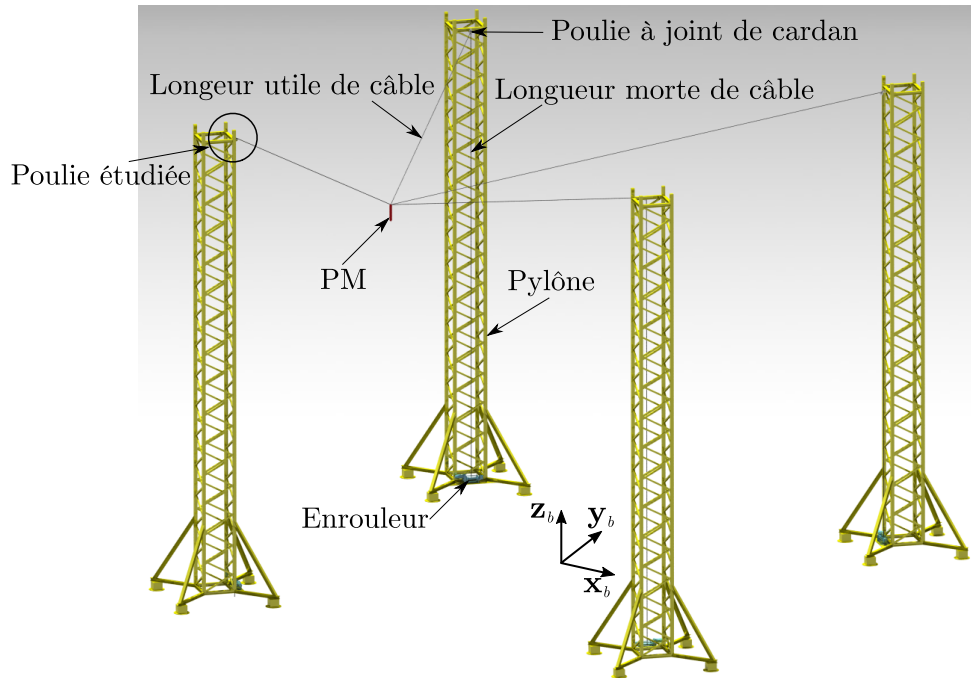


Figure 3.5 – CAO d'un RPC de grande dimension avec  $\mathbf{p}_{ini} = [-2.25, -6.75, 13]^T$

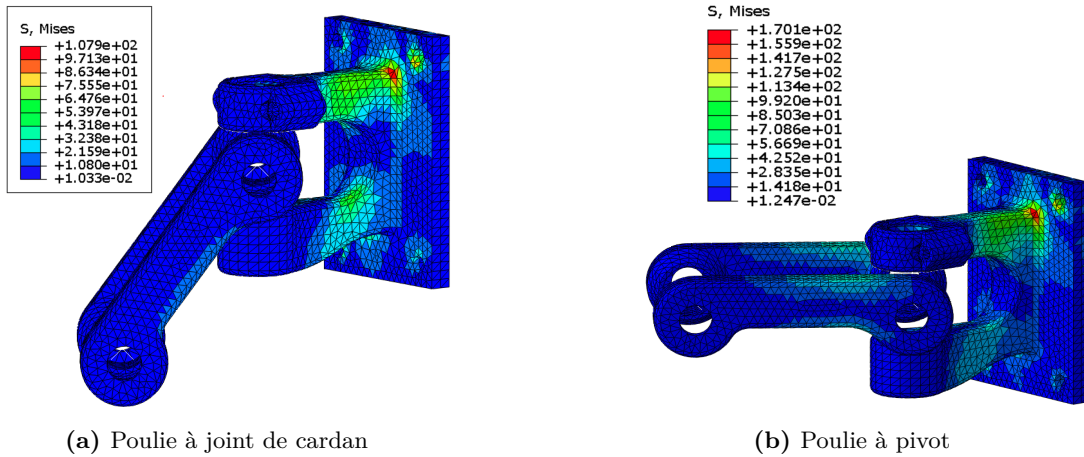


Figure 3.6 – Contraintes équivalentes de von Mises pour les deux types de poulies étudiées

La figure 3.6 met en parallèle les résultats obtenus pour une poulie à joint de cardan et une à pivot. Le matériau utilisé pour l'analyse est l'aluminium 6063, il a une limite d'élasticité de  $160\text{MPa}$ . À l'aide des figures 3.6a et 3.6b nous pouvons observer que la poulie à joint de cardan a une contrainte équivalente maximale de  $107.9\text{MPa}$  alors que la poulie à pivot a elle une contrainte maximale de  $170.1\text{MPa}$ . La contrainte maximale présente dans la poulie à pivot est près de 58% plus élevée que celle à joint de cardan, ce qui n'est pas négligeable. Cette contrainte est, de plus, supérieure à celle admissible par le matériau utilisé. De plus, l'ensemble des contraintes dans le bras de levier sont clairement moins importantes dans

le cas de la poulie à joint de cardan. Pour compléter notre étude nous pouvons évaluer les efforts maximaux transmis aux points de fixations dans les deux cas. La poulie à joint de cardan réduit l'effort maximal appliqué aux fixations, un effort de  $3585N$  est transmis à la structure au niveau de la fixation supérieure droite alors que sur cette même fixation l'effort est de  $5199N$  dans le cas d'une poulie à pivot. La poulie à joint de cardan semble réduire considérablement les efforts appliqués sur les points de fixations. Nous pouvons ainsi imaginer simplifier les structures des RPC voire même réaliser des ancrages dans des murs de façon plus aisée qu'actuellement.

Au travers de cette étude nous avons pu mettre en avant les avantages mécaniques de la poulie ayant comme articulation un joint de cardan. Effectivement, cette poulie permet de réduire les contraintes internes subies ainsi que les efforts qu'elle transmet à la structure. Cela permettrait ainsi de dimensionner de façon plus légère les fixations et la structure du RPC. Cependant, il est à noter que l'architecture de la poulie à pivot n'a pas fait l'objet d'une conception optimale, ce qui permettrait de réduire les contraintes afin de respecter les limites élastiques du matériau.

### 3.1.3 Étude de l'influence de la masse de la poulie sur l'erreur de pose théorique

L'équilibre statique de la poulie équipée d'un joint de cardan est, de par son articulation, sujet à la gravité. Effectivement, la masse mobile de la poulie, c'est-à-dire celle du réa plus celle du bras de levier, va générer une variation du point  $H_i$  centre du réa. La prise en compte de ce poids doit être intégrée au modèle afin d'observer son influence sur le résultat final. L'annexe A présente la mise en équation de ce modèle. Ce dernier nous permet d'observer la variation de l'erreur de pose théorique lors de la non-prise en compte de la masse de la poulie. Pour ce faire, nous regardons la différence de l'erreur de pose théorique de la PM entre la modélisation avec la masse de la poulie et celle la négligeant. Pour un chargement de la PM de  $300kg$ , cette différence de position est de l'ordre de  $10^{-6}mm$  en moyenne pour un RPC à 3 câbles ayant une structure en prisme triangulaire droit semi-régulier de  $15m$ . Dans le cas d'un RPC de même structure, mais trois fois plus petit ( $5m$  de côté), cette erreur moyenne est de l'ordre de  $10^{-5}mm$ . Cette étude nous permet d'observer que la masse de la poulie joue un rôle négligeable sur l'erreur de pose théorique de la PM et d'autant plus quand les dimensions du RPC deviennent importantes. Dans la suite des modèles nous négligerons donc cette masse afin de gagner en temps de calcul.

Cette section a présenté la conception de la nouvelle poulie à joint de cardan introduite dans cette thèse ainsi qu'une comparaison mécanique avec la poulie à pivot. Cela a démontré l'intérêt mécanique de cette nouvelle poulie. De plus, nous avons démontré que la masse des pièces mobiles est négligeable sur l'erreur de pose théorique de la PM.

## 3.2 Description et erreur de pose des cas d'études de RPC à 3ddl

Pour travailler sur les RPC et étudier les effets de leurs paramètres, il est tout d'abord obligatoire de définir l'architecture et la configuration du RPC. C'est ce que nous appelons le cas d'étude. Dans un premier temps, l'analyse portera sur deux types de RPC, un ayant une configuration sous-contrainte avec  $m = n$  et un autre pleinement-contraint avec  $m = n + 1$ . Dans les deux cas, les RPC ont une architecture suspendue. Effectivement, nous avons jugé cette architecture plus polyvalente, grâce à son espace au sol libre et à l'absence de câbles pouvant générer des tensions antagonistes ainsi qu'à sa facilité à être reconfiguré. Afin de nous concentrer exclusivement sur l'erreur de position sans orientation parasite, nous considérerons

la PM comme un point masse. Cela aura comme effet de supprimer les ddl de rotation  $\mathbf{o}$  ainsi que de simplifier la résolution des modèles présentés dans le chapitre 2. Les modèles ne chercheront plus à déterminer l'ensemble des positions des points  $B_i$ , mais uniquement celle du point  $P$  où tous les câbles se retrouvent attachés. Pour les premières études nous prendrons en compte uniquement une élasticité uni-directionnelle constante pour les câbles.

Dans cette partie nous présentons des premiers résultats nous permettant l'observation de la position atteinte et l'erreur de pose théorique lorsque la longueur totale des câbles  $\mathbf{L}_T$  est calculée avec un modèle standard, mais utilisée dans un RPC avec des poulies. Pour ce faire nous devons définir des valeurs de paramètres géométriques fixes pour mener les calculs à bien. Néanmoins, ces données sont vouées à évoluer dans le reste de nos travaux. Il est donc nécessaire de définir les dimensions des poulies (rayon  $r_p$  et bras de levier  $h$ ) ainsi que les caractéristiques des câbles (module de Young  $E$  et diamètre  $d_c$ ). Pour les dimensions de la poulie nous nous sommes inspirés de celles des poulies Huchez<sup>TM</sup> de 133mm de diamètre d'enroulement (cf. Fig. 2.2 : Poulies de renvoie articulées avec chapes en équerre), ce qui correspond à un  $r_p = 66.5mm$ . Quant au bras de levier  $h$  il est égal à 100mm. Ces poulies sont articulées avec un pivot, et il n'existe pas, à notre connaissance, de poulie ayant une embase à joint de cardan chez les industriels. Afin de comparer au mieux les deux modèles de poulies nous avons considéré qu'elles ont les mêmes rayons  $r_p$  et bras de levier  $h$  que les poulies à pivot. De plus, pour une architecture donnée toutes les poulies sont considérées identiques, en terme de paramètres géométriques ( $h$  et  $r_p$ ) et d'articulation (pivot ou joint de cardan). En ce qui concerne les paramètres mécaniques des câbles nous nous basons sur l'article de Baklouti [Bak+18] où les valeurs du module de Young  $E$  du câble en fonction du pourcentage de la tension de rupture sont indiquées. D'après la norme ISO 12076 le câble doit travailler dans un intervalle de 10% et 30% de sa force de rupture, ce qui induit un module de Young de 102.2GPa. Même si dans un RPC il est difficile de garantir que les câbles travaillent toujours entre 10% et 30% de leur force de rupture, le module de Young est considéré comme constant dans cette partie. Afin de respecter les contraintes de courbure maximale sur les câbles et connaissant la géométrie des poulies, le diamètre de tous les câbles est fixé à 4mm comme pour le CAROCA [Bak+18]. Les câbles choisis sont des Carl Stahl Technocables Ref 1692 ayant pour tension à la rupture  $T_r = 10.29kN$  et pour masse linéique  $\mu_0 = 0.1015kg.m^{-1}$ . Les structures des RPC étudiées dans ce manuscrit ont soit une forme de prisme triangulaire droit semi-régulier (3ddl pour 3 câbles) soit une forme cubique (3ddl pour 4 câbles) de 5m de coté. Les longueurs de câbles en sortie de poulie ne peuvent pas dépasser  $5\sqrt{3} \simeq 8.66m$  (diagonale du cube de 5m) pour les architectures choisies, la masse maximale d'un câble est donc inférieure à 0.88kg. Finalement, pour évaluer l'allongement des câbles et résoudre le MEGD<sub>E</sub>, il faut prendre en compte les efforts sur la PM. Pour cela, la somme de la masse de la PM et de la charge transportée doit être suffisamment élevée par rapport à celle des câbles pour éviter leur fléchissement et donc négliger leur masse linéique  $\mu_0$ . Il faut cependant respecter la tension maximale admissible  $T_a$  des câbles. Cette tension est choisie en s'appuyant sur la norme européenne ISO 4309 : 2010 qui indique que, pour un câble normalisé, si la tension ne dépasse pas 60% de  $T_r$  alors la limite élastique n'est pas atteinte. Dans notre étude, pour conserver une marge de sécurité,  $T_a$  vaut 50% de  $T_r$ , c'est-à-dire 5.14kN. Pour ces raisons, la masse  $m_{PM}$ , qui correspond à la masse de la charge transportée plus la masse de la PM, est fixée à 300kg. Le tableau Tab. 3.1 récapitule les valeurs des paramètres élasto-géométriques choisis.

Paramètres	$h$	$r_p$	$m_{PM}$	$E$	$d_c$	$T_a$
Valeurs	100mm	66.5mm	300kg	102.2GPa	4mm	5.14kN

**Table 3.1** – Paramètres élasto-géométriques des RPC étudiés

Cette section présente les RPC étudiés dans la suite de cette thèse ainsi que les premiers résultats sur la précision du RPC de la non-prise en compte des poulies et de la longueur morte dans les modèles standards. Tout d'abord nous présentons un RPC sous-contraint en actionnement pour par la suite nous intéresser au RPC pleinement-contraint. Les premières études accompagnant les présentations des cas d'études nous permettront d'analyser l'effet de la non prise en compte des poulies dans la détermination des longueurs des câbles nécessaires à la mise en position de la PM. De plus, nous pourrons observer l'influence de la forme de la structure et du nombre de câbles du RPC, pour un nombre de ddl équivalent, sur la répartition des erreurs de poses théoriques de la PM.

### 3.2.1 Architecture de RPC à 3 câbles

Le premier des deux RPC étudiés se compose de 3 câbles. Cette configuration fait de lui un RPC sous-contraint comportant autant de câbles que de ddl. Ce type de RPC a déjà fait l'objet d'étude dans un certain nombre de travaux. Nous pouvons citer le RPC de secours à la personne [Bos+05] ou encore le NIMS3D [Bor+09]. Il est le RPC le plus simple dans la catégorie des RPC spatiaux. Il peut donc se mouvoir dans un espace en trois dimensions et non pas dans un plan.

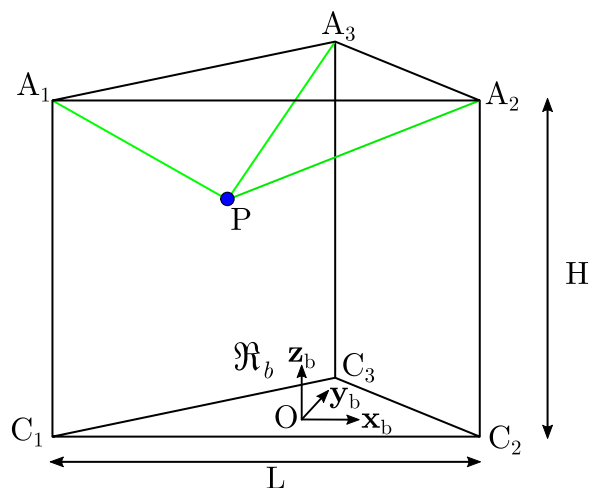


Figure 3.7 – Représentation du  $\text{RPC}_3$  étudié dans nos travaux

Ce RPC, présenté sur la Fig. 3.7, a la forme d'un prisme triangulaire droit semi-régulier. Il est défini par la longueur  $L$  de ses cotés, séparant deux points  $A_i$ , et sa hauteur  $H$ , distance entre le point  $A_i$  et  $C_i$  pour un même  $i$ . Les points de sortie des enrouleurs  $C_i$  sont fixes et situés à la verticale des points  $A_i$ . Le point  $O$  centre du repère global  $\mathcal{R}_b$  est localisé au barycentre du triangle équilatéral à une hauteur  $H = 0$ . Les trois câbles sont reliés au point  $P$  représentant la PM sous forme d'un point masse. De par l'égalité entre le nombre de câbles et les ddl, la matrice Jacobienne  $J$  devient carrée et inversible. Cela simplifie l'obtention des tensions dans les câbles de par l'unique solution à l'Eq. 1.5. Cependant, il est nécessaire de contrôler les valeurs de cette solution pour rester dans les conditions admissibles à la bonne utilisation des câbles.

Afin d'observer l'influence de la forme du RPC, il est utilisé dans la première partie des travaux sur l'influence des paramètres géométriques de la poulie sur l'erreur de pose théorique de la PM. De plus, afin d'améliorer la lisibilité nous noterons ce RPC,  $\text{RPC}_3$ . L'indice 3 correspond ici au nombre de câbles que possède le RPC. Cette notation se trouvera enrichie en fonction du type d'articulation des poulies. Ainsi le  $\text{RPC}_3$  équipé de poulies avec un articulation de type pivot sera noté  $\text{RPC}_{3_p}$  et pour les poulies à joint de cardan  $\text{RPC}_{3_C}$ .

### 3.2.2 Extension pour un RPC à 4 câbles

La deuxième architecture de RPC sur laquelle nous porterons notre attention est un RPC suspendu comportant quatre chaînes d'actionnement et ayant toujours un point masse en guise de PM. Ce RPC fait donc partie des RPC pleinement-contraints. Il est à noter que ce type de RPC est plus proche de la majorité de ceux observables dans la littérature, comme pour le RPC de secours à la personnes [Nur+17] ou encore le cas d'étude de [Pas+19].

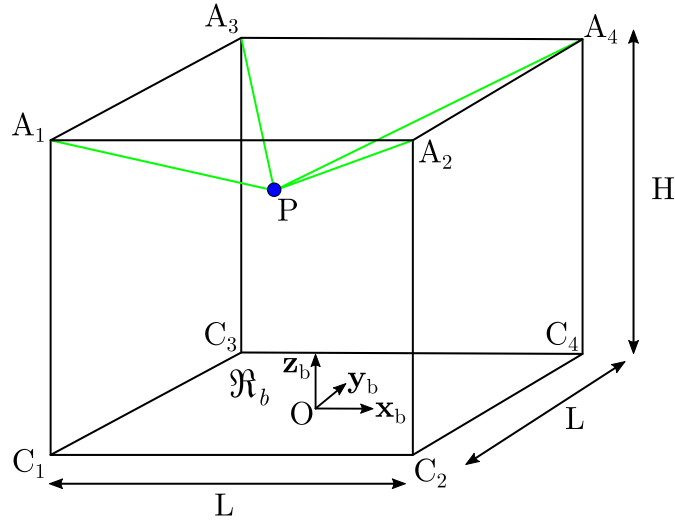


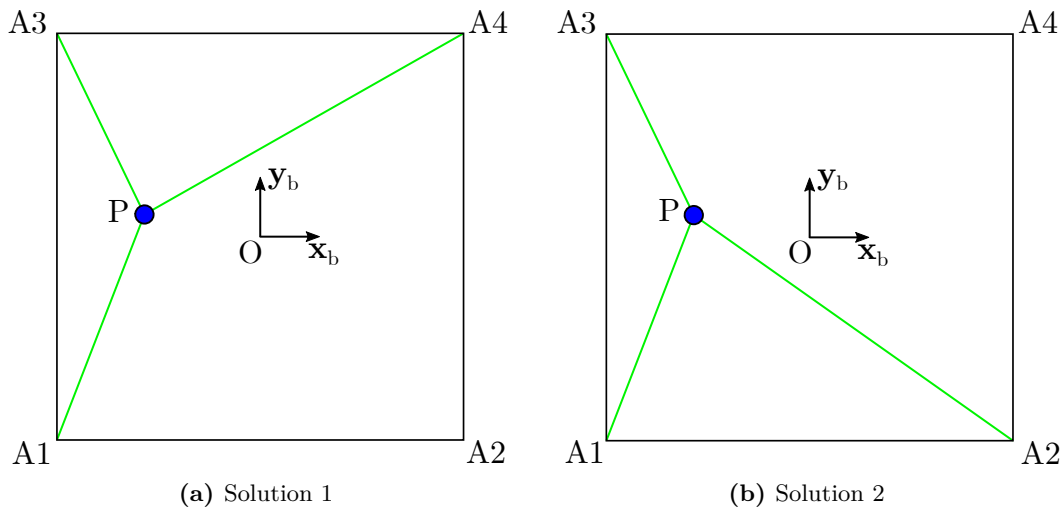
Figure 3.8 – Représentation du RPC<sub>4</sub> étudié

La figure 3.8 schématise la géométrie de ce RPC équipé de quatre chaînes d'actionnement. Il est de forme cubique de côté  $L$ . Tout comme pour le RPC<sub>3</sub> sa structure est définie par la position des points d'ancrage des poulies  $A_i$  et des points de sortie des enrouleurs  $C_i$ . Le repère global  $\mathcal{R}_b$  est fixé au centre du carré inférieur ( $H = 0$ ) où les vecteurs unitaires le composant sont colinéaires au vecteur directeur des arêtes du cube. La présence du 4<sup>ème</sup> câble rend la résolution de l'Eq. 1.5 plus complexe. En effet, la matrice Jacobienne  $J$  n'est plus carrée donc plus inversible. Pour déterminer le jeu de solution  $\mathbf{t}$  il est nécessaire d'utiliser la pseudo inverse de Moore-Penrose pour déterminer  $\mathbf{t}$  comme sur l'Eq. 3.1.

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}^+ \mathbf{f} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.1)$$

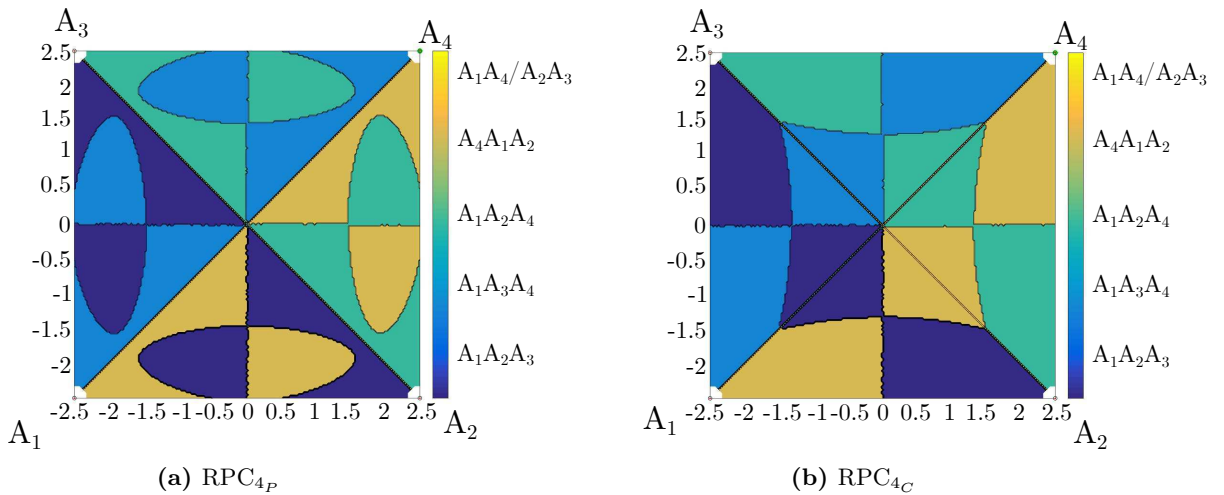
où  $\mathbf{W}^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{N}$  est le noyau de  $\mathbf{W}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur de dimension  $r$ ,  $r$  étant le degrés de redondance du RPC ( $r = m - n$ ). Cependant, cette équation implique un nombre important de solutions et nécessite la mise en place d'une méthode de gestion des tensions permettant de trouver une solution  $\mathbf{t}$  valable au sens du critère choisie. Ce processus est mis en place dans un second temps, lorsque le fléchissement est intégré aux modèles, car le quatrième câble générera forcément un effort sur la PM. Cependant, lorsque la masse propre des câbles n'est pas prise en compte, pour atteindre une position  $P$ , seuls 3 câbles sur 4 sont nécessaires. En effet, le 4<sup>ème</sup> câble ne génère alors pas d'effort sur la PM. De ce fait, dans la première partie de cette étude nous ramènerons à 3 câbles parmi 4 le RPC<sub>4</sub>. Il existe deux configurations de câbles possibles pour une position de la PM. Nous cherchons à déterminer quel jeu de câbles parmi les deux possibles minimise notre indice d'erreur de pose théorique  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  défini dans la section 3.2.3.1. La figure 3.9 illustre les deux jeux de câbles possibles pour atteindre une position donnée.





**Figure 3.9** – Les deux solutions possibles pour une position donnée de 3 câbles parmi 4 pour l'évaluation de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$

Dans l'exemple de la figure 3.9 les configurations possibles sont les câbles passant par  $A_1A_3A_4$  et  $A_1A_2A_3$ . Nous pouvons réaliser cet exercice pour l'ensemble des positions du RPC. La figure 3.10 montre, sur un plan horizontal à  $2.5m$ , la répartition des configurations qui minimise  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Les dimensions du RPC sur lesquelles ces configurations ont été recherchées sont  $L = 5m$  et  $H = 5m$  pour un RPC équipé avec les poulies et les câbles précédemment présentés (cf. Tab. 3.1).



**Figure 3.10** – Répartition des configurations minimisant  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur un plan horizontal à  $2.5m$

Au travers de la Fig 3.10 nous pouvons observer que la répartition des zones créées par les configurations de câbles s'avère relativement différente entre un  $RPC_4$  avec des poulies à pivot ( $RPC_{4P}$ ) et un  $RPC_4$  avec des poulies à joint de cardan ( $RPC_{4C}$ ). Il est à noter que, dans le cas d'une trajectoire, cette méthode peut présenter des discontinuités lors du passage entre différentes configurations.

### 3.2.3 Étude de l'erreur de positionnement des RPC

Les RPC étudiés au cours des travaux de cette thèse ont été présentés ainsi que, pour les RPC pleinement-contraints, la méthode pour déterminer quelle configuration de câbles minimise  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . De plus, cela nous a permis de mettre en place une notation pour définir clairement les cas d'études sur lesquels nous travaillerons :

- $\text{RPC}_3$  : RPC à 3 câbles suspendus prismatiques (prisme triangulaire droit semi-régulier) ;
- $\text{RPC}_4$  : RPC à 4 câbles suspendus cubiques (parallélépipède de base carré) ;
- $\text{RPC}_{3_P}$  -  $\text{RPC}_{4_P}$  : RPC équipé de poulies à pivot ;
- $\text{RPC}_{3_C}$  -  $\text{RPC}_{4_C}$  : RPC équipé de poulies à joint de cardan ;

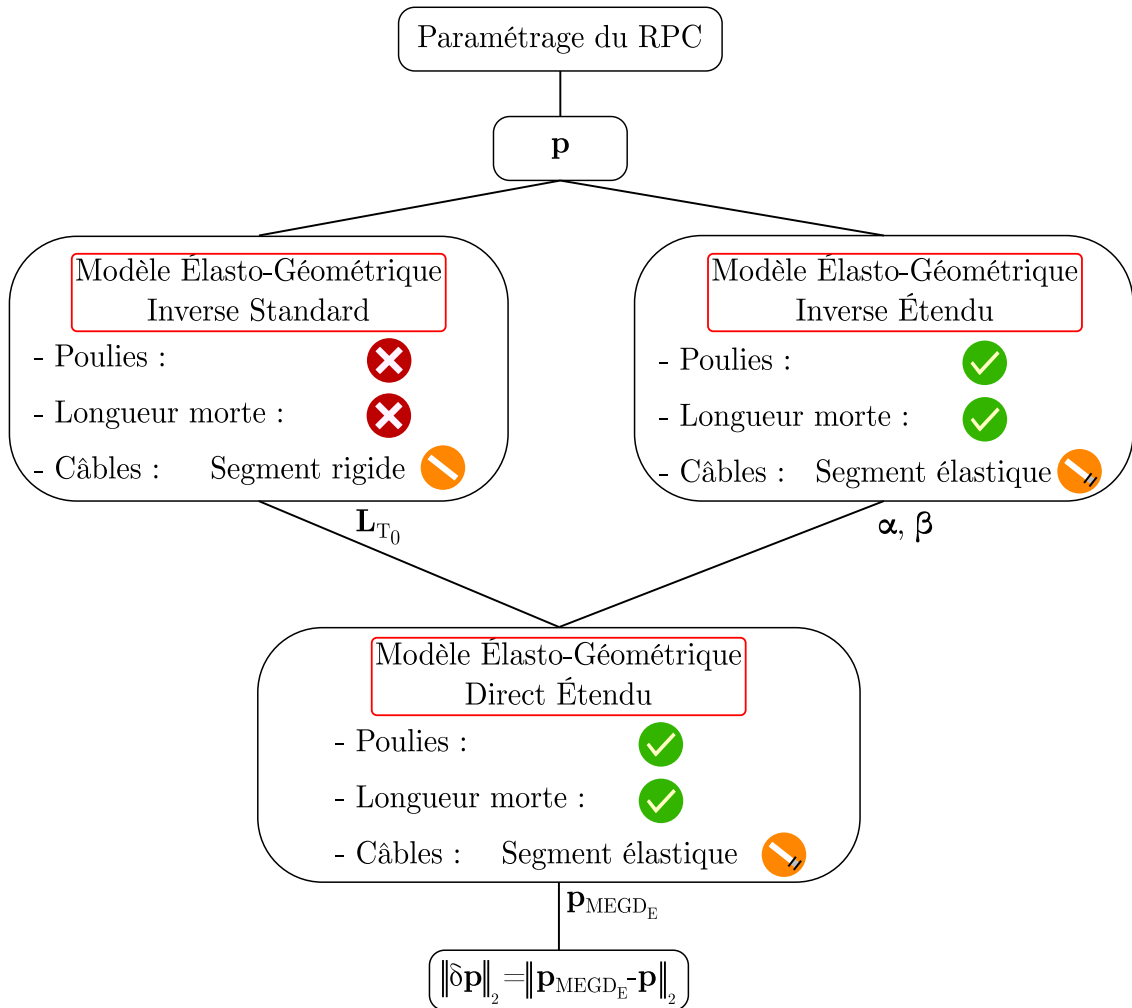
Afin d'observer les effets de la présence des poulies ainsi que de l'élasticité des câbles, plusieurs analyses vont être présentées en utilisant l'indice d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Tout d'abord, l'erreur sur une trajectoire rectiligne traversant l'espace de travail est étudiée. Puis des iso-contours d'erreurs sur un plan horizontal à une hauteur fixée sont présentés. Enfin, un volume limité en erreur de position maximale est déterminé. Pour faciliter les comparaisons entre les deux types de poulies, les résultats obtenus sont mis en parallèle sur les deux configurations de RPC suspendu. Pour observer les effets des différentes articulations de poulies les RPC étudiés ici ont comme dimension  $L = 5m$  et  $H = 5m$ .

#### 3.2.3.1 Méthodologie d'évaluation de l'erreur de pose théorique

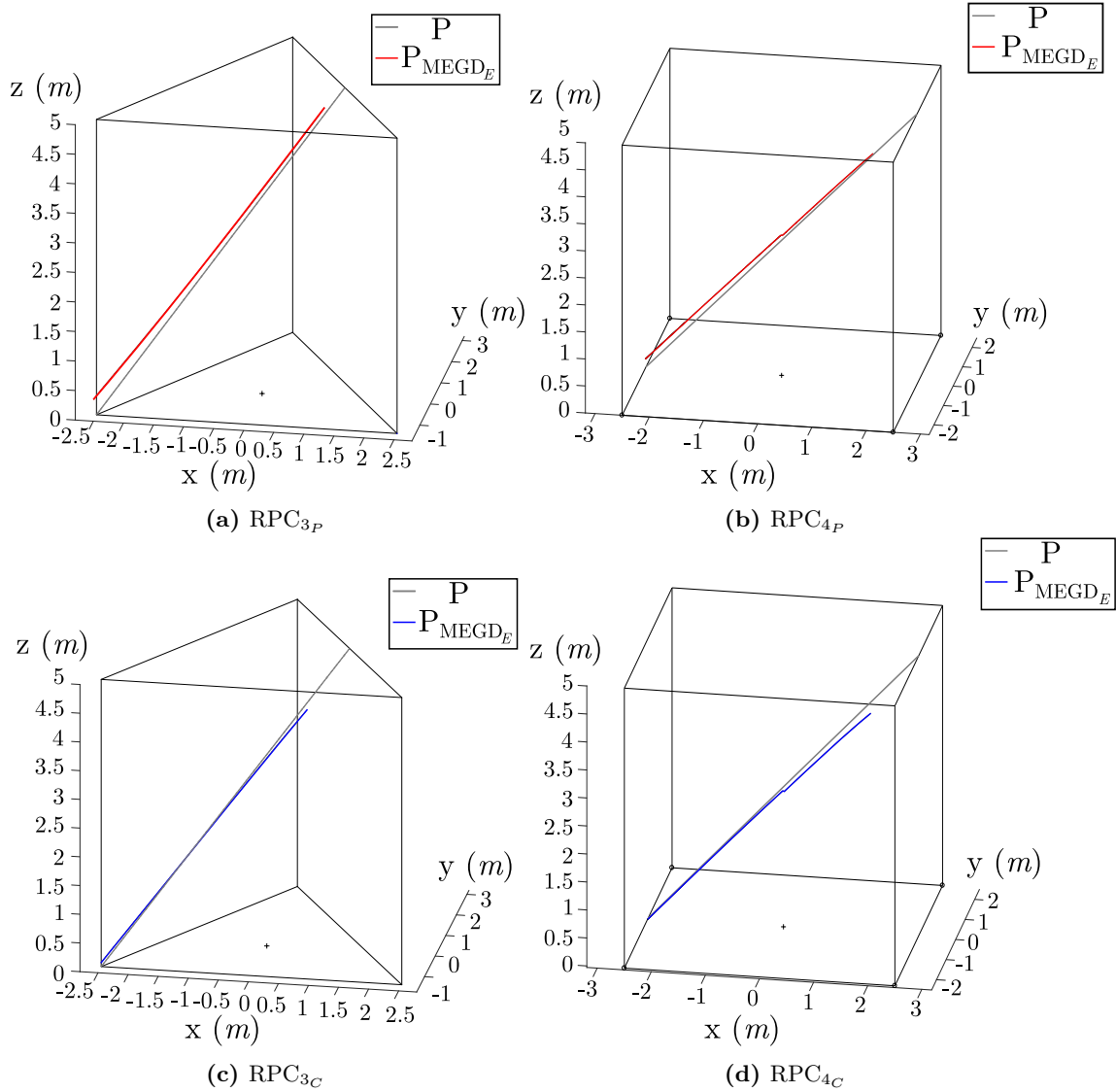
Dans l'objectif d'analyser les effets des poulies et de leurs paramètres géométriques, nous utilisons la méthode présentée dans la Fig. 2.9. Afin de clarifier l'étude nous rappelons cette méthode dans la Fig. 3.11 en ajoutant les hypothèses de chaque modèle utilisé.

#### 3.2.3.2 Analyse de l'erreur de pose théorique sur une trajectoire

Pour obtenir le plus d'informations possibles sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ , le choix de la trajectoire s'est porté sur une trajectoire rectiligne traversant l'espace de travail des RPC en oblique de bas en haut. Dans le cas du  $\text{RPC}_4$  la trajectoire n'est pas dans la diagonale de l'espace de travail « cubique », ceci afin de ne pas être dans le cas particulier où l'ensemble des poses peut être réalisé uniquement à partir de deux câbles. La figure 3.12 illustre les trajectoires proposées à l'étude, ainsi que les positions des points de la trajectoire calculés à l'aide du  $\text{MEGD}_E$  (cf. Tab. 2.1).



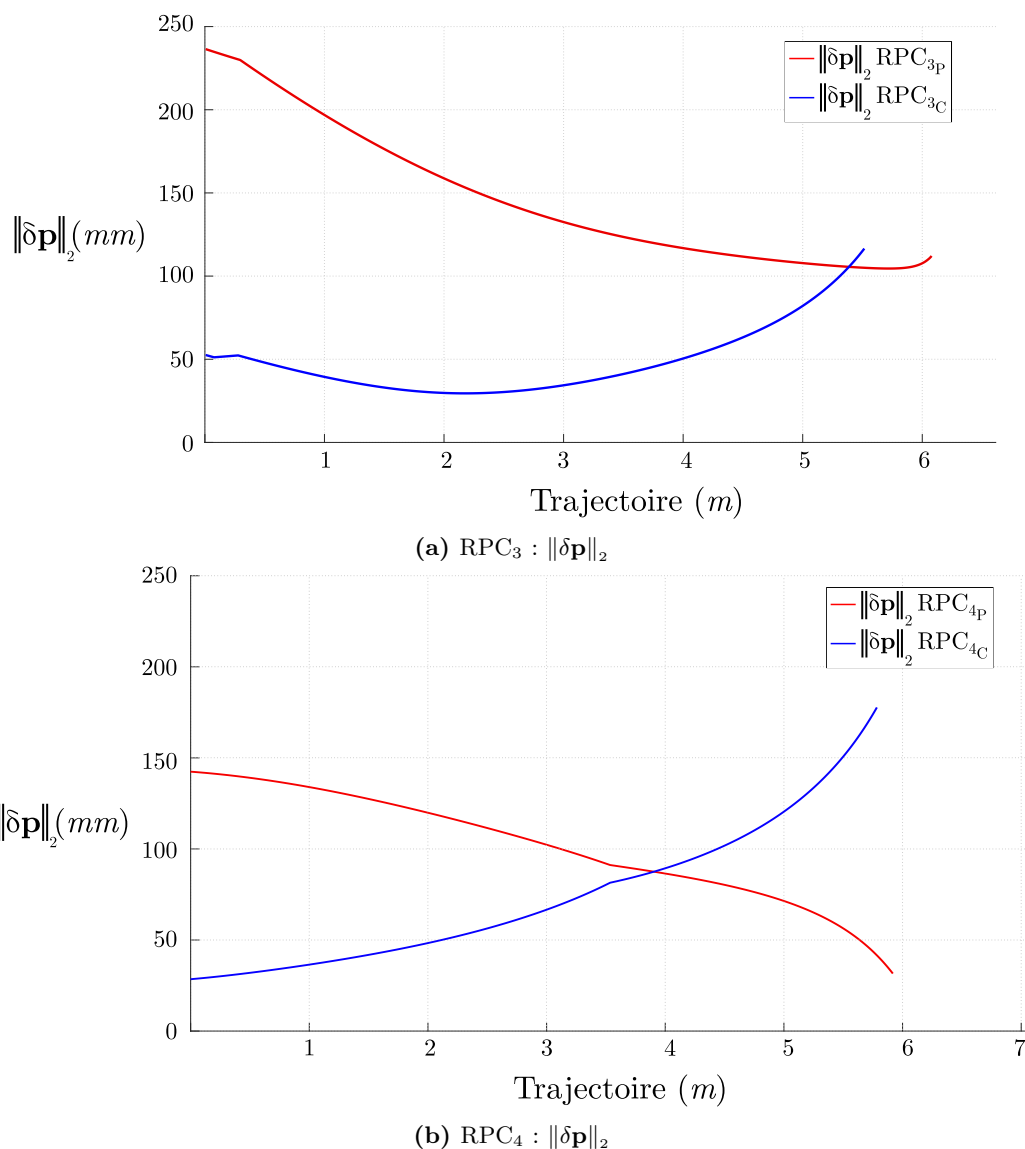
**Figure 3.11** – Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$



**Figure 3.12** – Trajectoires théoriques rectilignes et trajectoires réelles traversant l'espace de travail des RPC étudiés

La figure 3.12 représente les trajectoires théoriques en gris, mais aussi celles calculées avec le MEGD<sub>E</sub>, en rouge dans le cas des RPC avec une poulie à pivot et en bleu pour ceux ayant une poulie à joint de cardan. Les longueurs des trajectoires pour les RPC<sub>3</sub> et RPC<sub>4</sub> sont respectivement de 6.61m et 7.07m. De façon générale, il est observable que la présence des poulies et de l'élasticité des câbles entraînent toujours une erreur de position. Cette erreur est analysée grâce à l'indice d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . La figure 3.13 montre les résultats de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  pour les deux RPC étudiés et pour les deux types d'architectures de poulies.

Tout d'abord, il est à noter que les différentes erreurs ne sont pas évaluées jusqu'à la fin des trajectoires théoriques car plusieurs contraintes limitent le calcul de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Premièrement, les contraintes sur les tensions dans les câbles, c'est-à-dire que si une des tensions du vecteur  $\mathbf{t}$  dépasse la tension maximale admissible  $T_a = 5.14kN$  alors la position  $P$  est exclue des positions atteignables. De même, lors du calcul itératif des  $P_{MEGD_E}$  si les tensions dépassent  $T_a$  alors le vecteur  $\mathbf{p}_{MEGD_E}$  n'est pas calculé. Ces positions se trouvent en haut de l'espace



**Figure 3.13** – Erreurs de pose théoriques  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en  $mm$  sur une trajectoire théorique rectiligne :  $6.61m$  à pour le RPC<sub>3</sub> et  $7.07m$  pour le RPC<sub>4</sub>

de travail, car les tensions des câbles augmentent avec la hauteur de la PM. Deuxièmement, certaines positions  $P_{MEGDE}$  ne peuvent pas être déterminées car les longueurs de câbles calculées avec le MGI<sub>S</sub> sont trop courtes pour trouver une intersection entre les sphères (cf. Eq. 2.32). Au regard des Fig. 3.13a et 3.13b, ces positions se situent dans la partie haute de l'espace de travail, pour des hauteurs supérieures à  $4.50m$ . C'est pour cela que dans le cas du RPC<sub>3</sub>, les  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  pour les poulies à pivot sont évalués le long des trajectoires sur  $6.05m$  et pour celles à joint de cardan jusqu'à  $5.45m$ . Pour les RPC<sub>4</sub>,  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  se calcule pour  $5.92m$  et  $5.80m$  respectivement pour les poulies à pivot et à joint de cardan. Pour les RPC choisis, l'utilisation des poulies à pivot semble permettre d'accéder à une hauteur légèrement plus importante que les poulies à joint de cardan. Concernant le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  l'analyse est identique pour les deux RPC. Nous remarquons tout d'abord une tendance similaire dans l'évolution des erreurs entre le RPC<sub>3</sub> et le RPC<sub>4</sub>. Ce sont les RPC équipés de poulies à joint de cardan qui ont les erreurs les plus faibles sur la partie basse de la trajectoire. Ceci

est plus marquant pour les  $\text{RPC}_4$ . C'est à  $3.90m$  sur la trajectoire théorique que les erreurs  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  des  $\text{RPC}_{4P}$  deviennent moins importantes que celles des  $\text{RPC}_{4C}$ . En effet, le long de la trajectoire le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  des  $\text{RPC}_{4C}$  est croissant et celui des  $\text{RPC}_{4P}$  est décroissant. C'est donc principalement dans la partie inférieure de l'espace de travail que les  $\text{RPC}_{4C}$  minimisent l'erreur de pose théorique. Pour les  $\text{RPC}_3$ , c'est seulement en haut de la trajectoire, à  $5.39m$  pour une longueur totale de  $6.05m$ , que les erreurs du  $\text{RPC}_{3C}$  deviennent plus importantes que celles du  $\text{RPC}_{3P}$ . Le tableau Tab. 3.2 donne les valeurs minimales et maximales de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur les trajectoires proposées pour les quatre RPC à l'étude.

Configuration	$\text{RPC}_{3P}$	$\text{RPC}_{3C}$	$\text{RPC}_{4P}$	$\text{RPC}_{4C}$
min de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$	$107mm$	$25mm$	$31mm$	$29mm$
max de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$	$237mm$	$116mm$	$142mm$	$179mm$

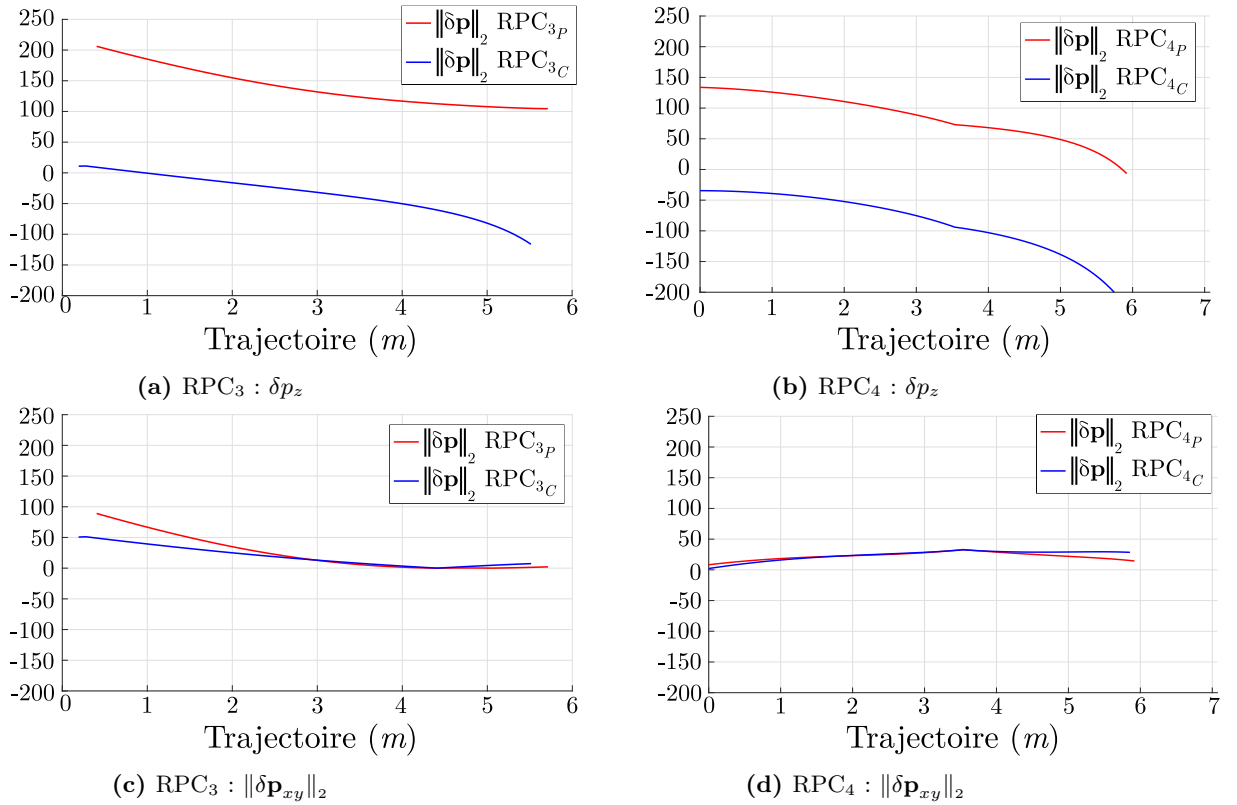
**Table 3.2** – Valeurs minimales et maximales de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en  $mm$  sur une trajectoire théorique rectiligne

Pour compléter cette analyse, il est intéressant de voir dans le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  la part due à l'erreur de position verticale  $\delta p_z$  et celle due à l'erreur de position horizontale  $\|\delta\mathbf{p}_{xy}\|_2$ , étant la norme euclidienne des composantes de  $\delta\mathbf{p}$  en  $\mathbf{x}_b$  et  $\mathbf{y}_b$  exprimé comme :

$$\|\delta\mathbf{p}_{xy}\|_2 = \sqrt{(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_b)^2 + (\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_b)^2} \quad (3.2)$$

La figure 3.14 montre la décomposition de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ .

Les résultats de la figure Fig. 3.14 montrent que l'erreur de position verticale  $\delta p_z$  est globalement prépondérante par rapport à  $\|\delta\mathbf{p}_{xy}\|_2$  pour les  $\text{RPC}_3$  et les  $\text{RPC}_4$  et ceci quel que soit le type de poulie. De plus, les trajectoires réelles des  $\text{RPC}_P$  ( $\text{RPC}_{3P}$  et  $\text{RPC}_{4P}$ ) sont décalées suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  positif, ainsi les  $\text{RPC}_P$  présentent une tendance à remonter la position de la PM. A contrario, pour les  $\text{RPC}_C$  ( $\text{RPC}_{3C}$  et  $\text{RPC}_{4C}$ ) le décalage est suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  négatif sur l'ensemble de la trajectoire, à l'exception des positions situées en bas de l'espace de travail pour le  $\text{RPC}_{3C}$ . Il ne faut, cependant, pas oublier que plus la masse  $m_{PM}$  est élevée, plus l'allongement des câbles est important. Donc, dans la configuration présentée, l'erreur de pose théorique des  $\text{RPC}_C$  a tendance à augmenter si la charge appliquée à la PM est plus importante. Le phénomène inverse se produit pour les RPC avec poulies à pivot, jusqu'à ce que  $P_{MEGD_E}$  passe en dessous de la trajectoire théorique. Par ailleurs, pour les  $\text{RPC}_3$ , il existe une position ne générant pas d'erreur  $\|\delta\mathbf{p}_{xy}\|_2$ . Cette position, qui se trouve à  $4.41m$  sur la trajectoire, correspond à une position dite « symétrique », c'est-à-dire que la PM est équidistant de toutes les poulies. Au vu de ces premiers résultats, il apparaît qu'il est difficile de négliger les paramètres élasto-géométriques dans la modélisation des RPC. De plus, le type de poulies utilisé présente une influence certaine sur l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ .

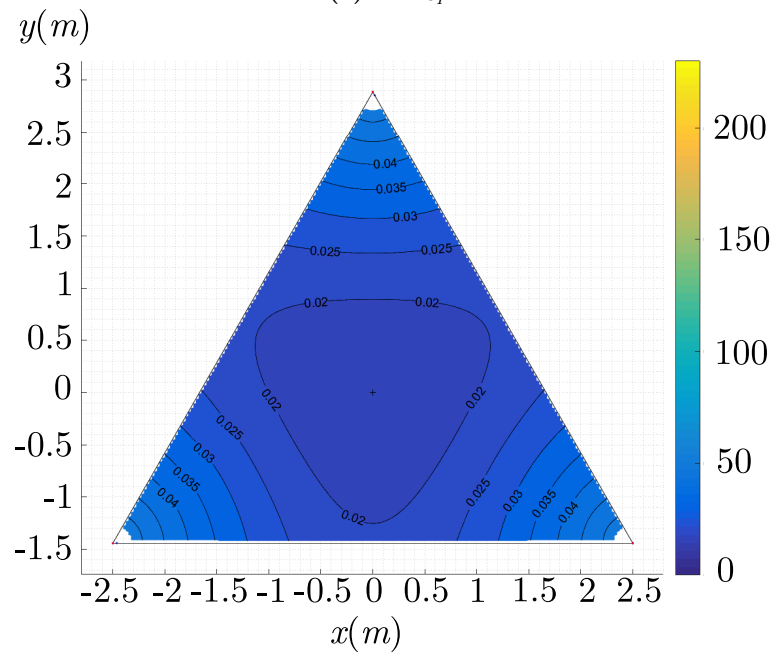
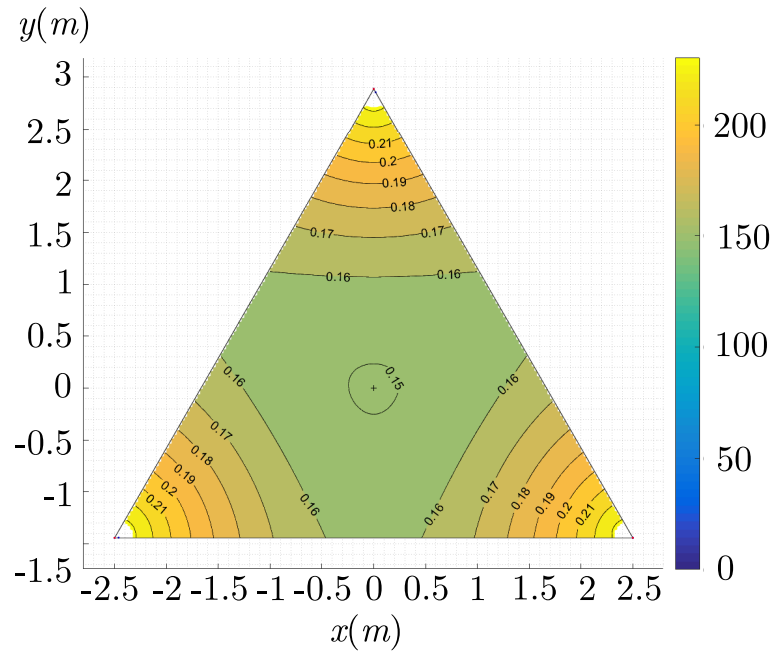


**Figure 3.14** – Erreurs de position en altitude  $\delta p_z$  et dans le plan horizontal  $\|\delta \mathbf{p}_{xy}\|_2$  sur une trajectoire théorique rectiligne : 6.61m pour le RPC<sub>3</sub> et 7.07m pour le RPC<sub>4</sub>

### 3.2.3.3 Analyse de l'erreur de pose théorique sur un plan horizontal : iso-contours d'erreurs

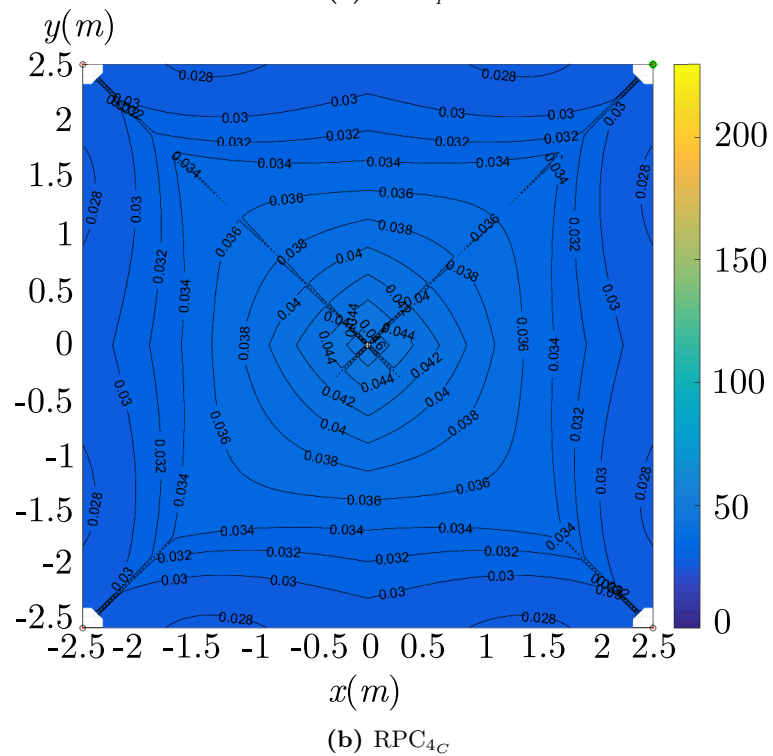
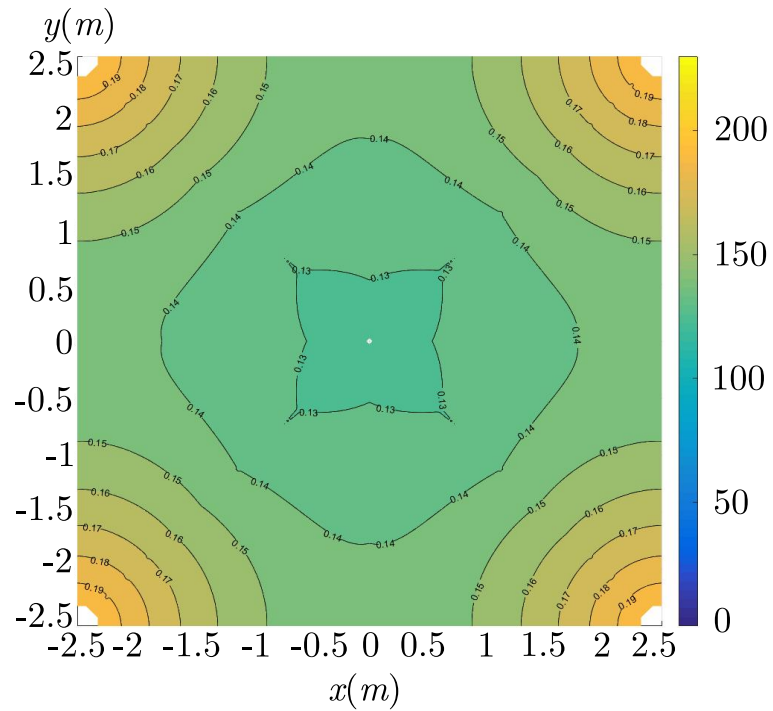
Pour aller plus loin dans l'analyse de l'erreur de pose théorique, les iso-contours de  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  sont tracés dans un plan horizontal au niveau du sol et à mi-hauteur de l'espace de travail, c'est-à-dire à 0m et à 2.5m. Les iso-contours des Fig. 3.15, Fig. 3.16, Fig. 3.17 et Fig. 3.18 permettent d'observer plus en détail les effets de la prise en compte des poulies et de l'élasticité des câbles par rapport au modèle standard.

Les figures 3.15 représentent les iso-contours de  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  pour un RPC<sub>3</sub> équipé soit de poulies à pivot soit de poulies à joint de cardan. Les Fig. 3.16 quant à elles représentent les iso-contours de  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  pour le RPC<sub>4P</sub> et le RPC<sub>4C</sub>. Nous pouvons observer que l'erreur de pose théorique minimale se situe au centre du plan, pour le RPC<sub>3P</sub> où le minimum de  $\|\delta \mathbf{p}\|_2 = 150mm$ , pour le RPC<sub>3C</sub> où  $\|\delta \mathbf{p}\|_2 = 20mm$  et pour le RPC<sub>4P</sub> où  $\|\delta \mathbf{p}\|_2 = 130mm$ . Cela n'est pas vérifié dans le cas du RPC<sub>4C</sub> où nous pouvons observer des erreurs  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  plus faibles sur la périphérie de l'espace de travail égale à 28mm qu'à son centre où nous retrouvons le  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  maximal égale à  $\|\delta \mathbf{p}\|_2 = 46mm$ . Cependant, les erreurs de pose théorique générées par les RPC<sub>C</sub> sont bien moins importantes que celles présentes dans le cas des RPC<sub>P</sub>.

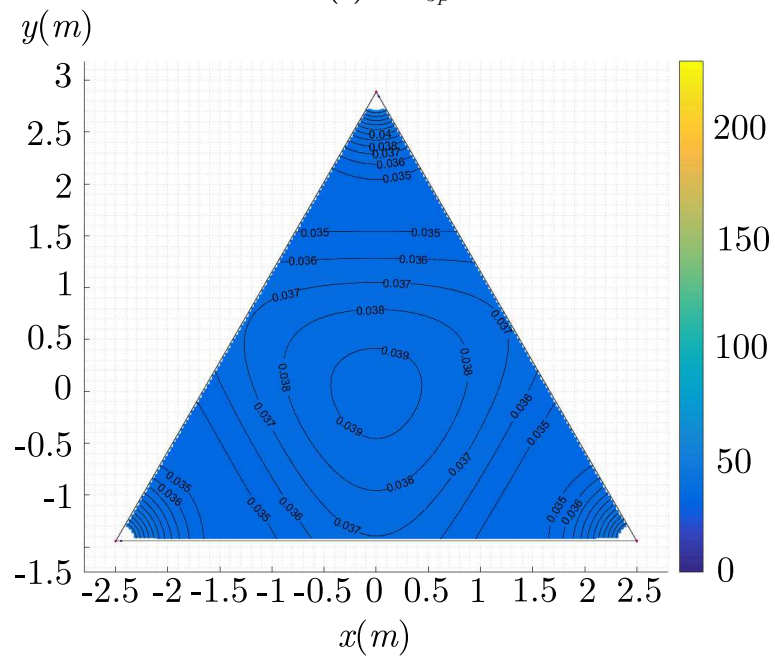
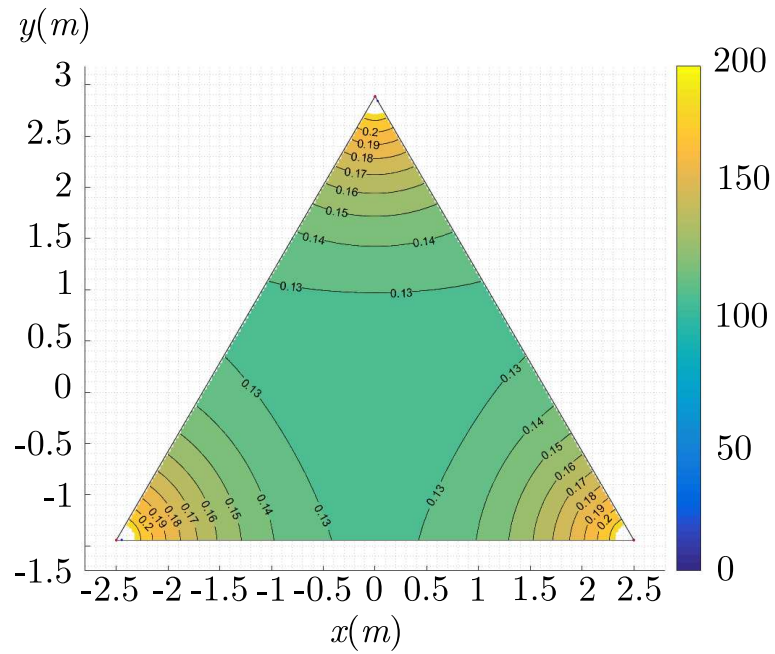


**Figure 3.15** – Iso-Contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur un plan horizontal à une hauteur de  $0m$  pour un  $RPC_{3P}$  et  $RPC_{3C}$

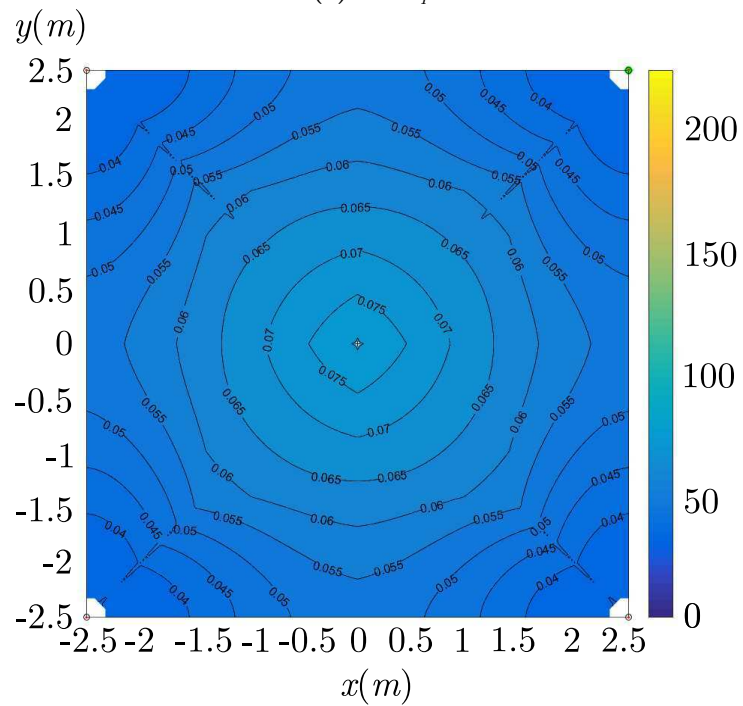
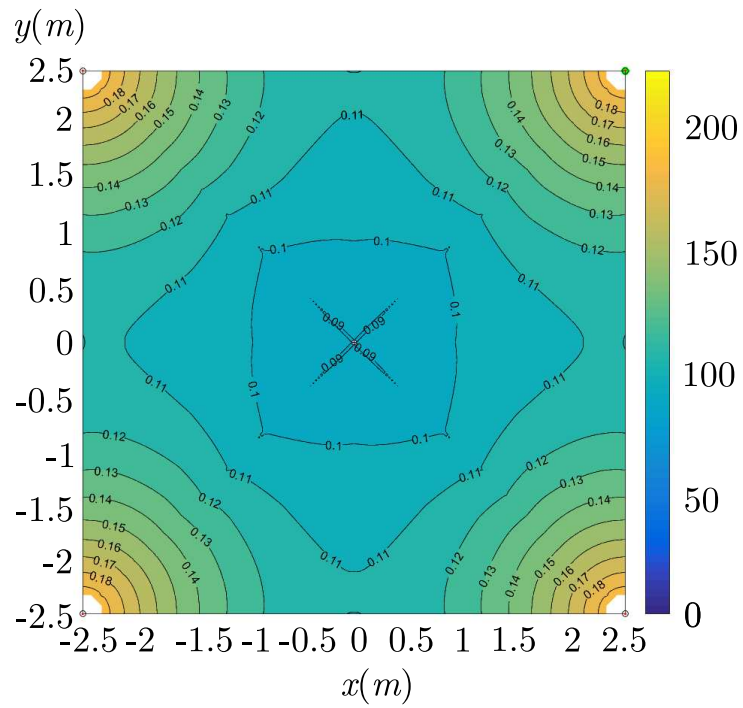




**Figure 3.16** – Iso-Contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur un plan horizontal à une hauteur de  $0m$  pour un  $RPC_{4P}$  et  $RPC_{4C}$



**Figure 3.17** – Iso-Contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur un plan horizontal à une hauteur de  $2.5m$  pour un  $RPC_{3P}$  et  $RPC_{3C}$



**Figure 3.18** – Iso-Contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur un plan horizontal à une hauteur de  $2.5m$  pour un RPC<sub>4P</sub> et RPC<sub>4C</sub>

Les figure 3.17 et 3.18 représente les iso-contours sur un plan à mi-hauteur du RPC, soit à 2.5m. Nous observons pour les RPC<sub>P</sub> que c'est au centre de la zone étudiée que  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est minimal (130mm pour le RPC<sub>3P</sub> et 90mm pour le RPC<sub>4P</sub>) et plus la position se rapproche des sommets des zones d'étude et plus  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  augmente (210mm pour le RPC<sub>3P</sub> et 190mm pour le RPC<sub>4P</sub>). A contrario, le RPC<sub>4C</sub> a ses valeurs minimales de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  (35mm) qui se situent dans les angles. Concernant les RPC<sub>3C</sub>, la valeur minimale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  (35mm) se situe dans une zone intermédiaire entre le centre et les sommets. Pour les RPC<sub>C</sub> ce n'est donc pas autour des positions symétriques (PM équidistante des poulies) que l'erreur de pose théorique est la plus faible. Le contraire est observable pour le RPC<sub>4C</sub> puisque le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est maximal dans la zone centrale, avec une valeur de 80mm (cf. Fig. 3.18b).

La première observation qu'il est possible de faire avec ces résultats (cf. Fig. 3.15, Fig. 3.16, Fig. 3.17 et Fig. 3.18) est que les iso-contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  à 0m et 2.5m de hauteur permettent de confirmer l'observation faite avec les trajectoires, c'est-à-dire que les erreurs  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sont moins importantes dans les RPC<sub>C</sub> que dans les RPC<sub>P</sub>.

### 3.2.3.4 Analyse d'un volume de travail limité en erreur

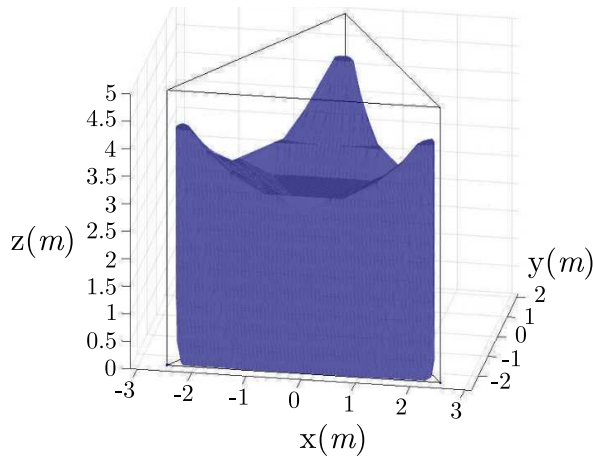
Il est également possible de regarder l'influence de l'erreur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur l'espace de travail des RPC. Pour cela, la représentation d'un volume limité en erreur, noté  $V_L$ , permet d'analyser la précision d'une configuration de RPC en terme d'espace de travail. Cela permet d'identifier la zone de l'espace de travail où le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est garanti inférieur à une valeur donnée. Ces résultats sont obtenus en conservant toutes les positions atteignables en terme de tension maximale dans les câbles, d'accessibilité géométrique et ne dépassant pas une erreur de position limite notée  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$ . Par la suite, la fonction *alphaShape* de Matlab<sup>®</sup> permet de générer graphiquement le volume  $V_L$  d'après un ensemble de points et ainsi de déterminer la valeur numérique de ce volume. Afin de normaliser les résultats, le ratio  $R_V$  entre  $V_L$  et le volume total  $V_T$  de la structure du RPC est calculé et permet de comparer les quatre RPC.  $V_T = 54.13m^3$  pour les RPC<sub>3</sub> et  $V_T = 125m^3$  pour les RPC<sub>4</sub>. Les volumes sont tracés pour deux  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  différents (50mm et 150mm).  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 50mm$  est choisi car c'est une erreur de position « classique » des RPC, c'est-à-dire qu'elle correspond à 1/100 des dimensions extérieures des RPC, qui sont ici de  $L = 5m$  et  $H = 5m$ . Puis une erreur maximale trois fois plus importante est utilisée pour comparer l'évolution des volumes,  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 150mm$ . La figure Fig. 3.19 illustre les volumes ainsi obtenus.

La première observation au vu des volumes limités en erreur est qu'il n'existe pas de  $V_L$  pour les RPC<sub>P</sub> avec un  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 50mm$  et donc  $R_V = 0$ . La seconde observation, afin de comparer le type de poulie, est que le  $R_V$  des RPC<sub>C</sub> est supérieur à celui des RPC<sub>P</sub> pour un même  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$ . Le tableau Tab. 3.3 montre les résultats obtenus pour les  $R_V$ .

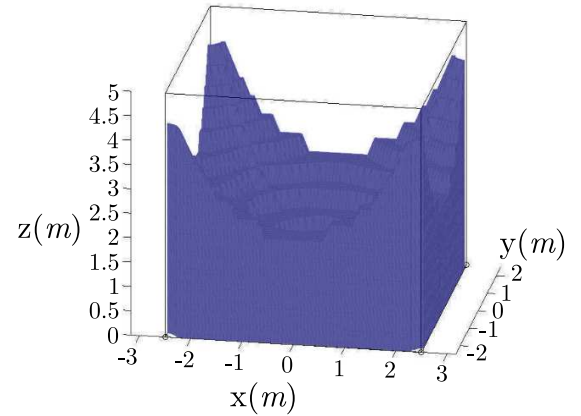
Configuration	RPC <sub>3P</sub>	RPC <sub>3C</sub>	RPC <sub>4P</sub>	RPC <sub>4C</sub>
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{lim} = 50mm$	0	0.59	0	0.45
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{lim} = 150mm$	0.54	0.75	0.72	0.79

**Table 3.3** – Valeurs des ratio sur les volumes :  $R_V = \frac{V_L}{V_T}$

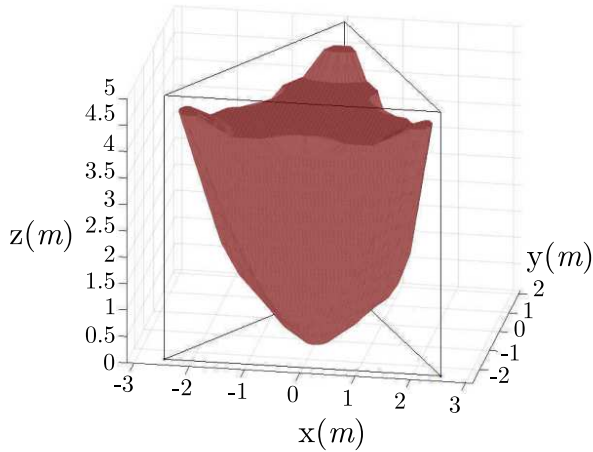
De plus, les figures Fig. 3.19c et Fig. 3.19d montrent que pour les RPC<sub>P</sub> le  $V_L$  se réduit en premier par le bas de l'espace de travail, c'est-à-dire au niveau du sol. Ce qui peut être pénalisant car c'est généralement dans cette zone que les RPC sont utilisés. Par exemple, pour des opérations de pick and place ou d'impression massive de béton. La figure Fig. 3.20 montre l'évolution de  $R_V$  en fonction de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$ .



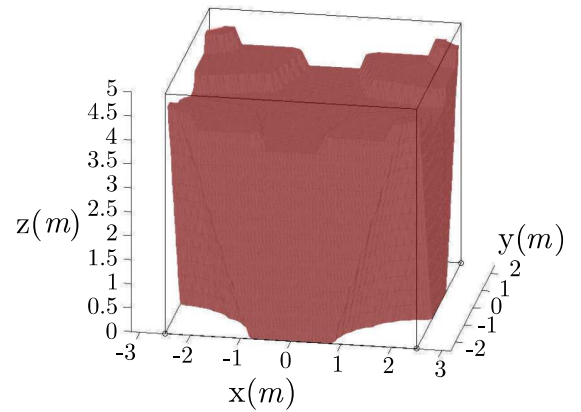
(a)  $RPC_{3C}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 50mm$  :  $R_V = 0.59$



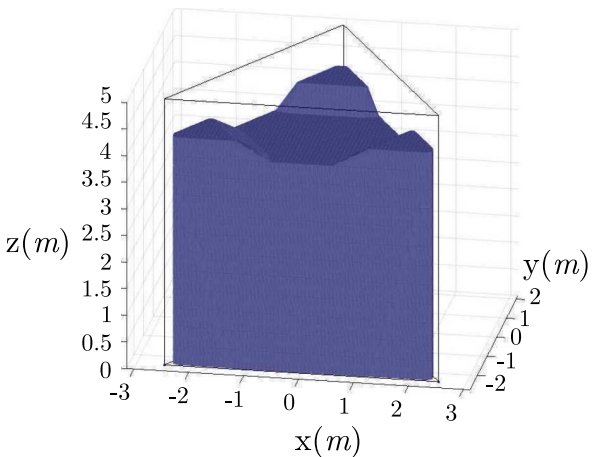
(b)  $RPC_{4C}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 50mm$  :  $R_V = 0.45$



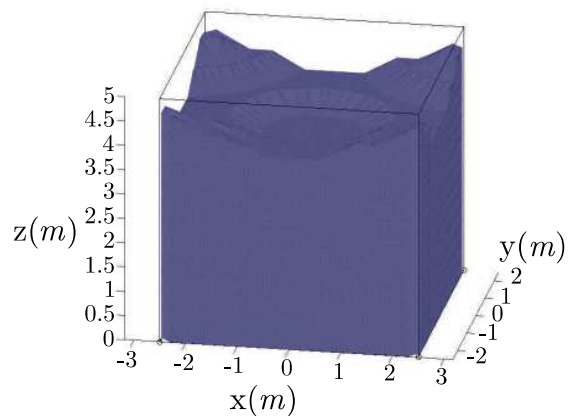
(c)  $RPC_{3P}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 150mm$  :  $R_V = 0.54$



(d)  $RPC_{4P}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 150mm$  :  $R_V = 0.72$

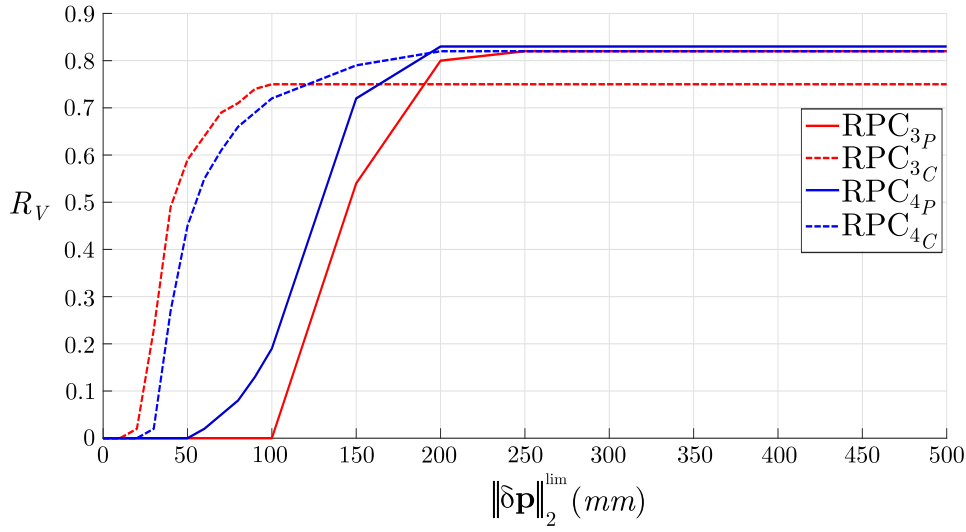


(e)  $RPC_{3C}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 150mm$  :  $R_V = 0.75$



(f)  $RPC_{4C}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 150mm$  :  $R_V = 0.79$

**Figure 3.19** – Volume limité en erreur  $V_L$  pour un  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$



**Figure 3.20** – Évolution de  $R_V$  en fonction  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  pour les  $RPC_3$  et  $RPC_4$

L'analyse des courbes de la figure Fig. 3.20 montre que si  $R_V = 0.5$ , correspondant à un taux de remplissage de 50% du  $V_T$ , alors  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 149mm$  et  $128mm$  respectivement pour le  $RPC_{3P}$  et le  $RPC_{4P}$ . Tandis que pour les  $RPC_C$ ,  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim} = 430mm$  pour le  $RPC_{3C}$  et  $510mm$  pour le  $RPC_{4C}$ . Pour un ratio  $R_V$  identique, les  $RPC_C$  minimisent  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  par rapport aux  $RPC_P$ . D'autre part, il est à souligner que les taux de remplissage maximaux  $R_V^{max}$  n'atteignent jamais 100%, car les  $V_L$  sont toujours inférieurs aux  $V_T$  dû au fait que les  $V_L$  sont aussi limités en tension et en accessibilité géométrique. Il est intéressant de voir que dès qu'un  $R_V$  n'est plus égal à 0 cela correspond à la valeur minimale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur l'ensemble de l'espace de travail, noté  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$ . De plus, les RPC atteignent leur  $R_V^{max}$  respectif pour des  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  différents. Ce  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  correspond donc à l'erreur maximale de position que le RPC peut avoir entre l'utilisation des modèles standards et étendus, cette erreur est notée  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$ . Le tableau Tab. 3.4 récapitule pour chaque configuration de RPC quelles sont les valeurs de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$ .

Configuration	$RPC_{3P}$	$RPC_{3C}$	$RPC_{4P}$	$RPC_{4C}$
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{min}$	103.5mm	16mm	51.3mm	23.2mm
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{max}$	231.6mm	99.3mm	197.5mm	175.3mm

**Table 3.4** – Erreur minimale et maximale de position de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en mm

Les valeurs ainsi obtenues des  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  montrent que les  $RPC_C$  ont des erreurs minimale et maximale plus faibles que celles des  $RPC_P$ . Connaissant l'aspect des  $V_L$  (cf. Fig. 3.19), il est à noter que le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  des  $RPC_P$  se situe au niveau du sol vers les points  $C_i$  de l'espace de travail (cf. Fig. 3.8), tandis que pour les  $RPC_C$  leur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  se trouve en haut de l'espace de travail pour une position équidistante des poulies. Toutes les observations faites sur les  $V_L$  confirment celles réalisées avec les trajectoires (cf. Part. 3.2.3.2) et les iso-contours d'erreur (cf. Part. 3.2.3.3). En effet, avec les paramètres élasto-géométriques choisis, les  $RPC_C$  semblent minimiser l'erreur de position  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  par rapport aux  $RPC_P$ . Cela peut s'expliquer par le chemin plus court à parcourir par le câble lors de l'utilisation

de poulie à joint cardan. En effet, la longueur totale calculée avec le modèle géométrique inverse est considérée comme une constante dans notre méthode de calcul. La poulie à joint cardan pouvant, grâce à ses 2 ddl, descendre suivant l'axe  $\mathbf{z}$  en comparaison de la poulie à pivot qui elle reste à hauteur constante. Pour regarder plus en détail l'influence du choix des valeurs des paramètres élasto-géométriques ( $h$ ,  $r_p$ ,  $E$  et le type de poulie), les parties suivantes analysent leurs effets et leurs interactions en utilisant la méthodologie des plans d'expériences. La méthode proposée permet de quantifier l'erreur pose théorique de la PM pour un RPC donné quand les longueurs de câbles sont déterminées avec le MGI<sub>S</sub>. Il s'avère que le choix du type de poulie semble être un choix important et doit être réfléchi pour minimiser l'erreur lors de la commande du RPC avec les modèles géométriques standards. De plus, la configuration à 3 ou 4 câbles apparaît être un facteur n'influençant pas de façon significative l'erreur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ .

Cette section s'est intéressée aux erreurs de pose théorique des RPC étudiés. En effet, les premières explorations de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  permettant de présenter les différentes formes de résultats ont aidés à observer l'influence de la configuration du RPC sur l'effet de la non-prise en compte des poulies dans le calcul des longueurs totales. Cela nous permet de mettre en évidence que la géométrie de la structure du RPC ne semble pas jouer un effet prépondérant sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Cette observation peut cependant être aussi due à la non prise en compte du 4<sup>ème</sup> câbles pour le RPC à 4 câbles. Nous avons toutefois choisi de continuer nos études sur le RPC pleinement-contraint à 4 câbles et 3 ddl car plus proche de RPC communément rencontrés. Effectivement, un parallélépipède est la forme la plus proche d'une pièce classique ou même d'un bâtiment. De plus, la gestion du 4<sup>ème</sup> câble nous permettra dans un second temps d'observer de façon plus réaliste les effets de la masse propre des câbles sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  lors de l'utilisation du modèle de câble fléchissant. Dans la suite de cette thèse nous reviendrons à une notation plus simple du type RPC<sub>P</sub> et RPC<sub>C</sub>.

### 3.3 Analyse de sensibilité des paramètres géométriques de la poulie

Dans cette section nous allons chercher à définir l'effet de paramètres géométriques liés à la poulie sur l'erreur de pose théorique de la PM  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Comme nous l'avons vu une poulie est un système composé d'un ensemble de pièces ayant chacune des dimensions propres pouvant affecter les performances du RPC.

Au travers de cette section nous définissons tout d'abord le plan d'expériences qui nous aider à extraire les effets des poulies. Nous analysons par la suite, à l'aide du plan d'expériences, les influences des paramètres géométriques sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Finalement, nous présentons une méthodologie pour trouver la combinaison de ces paramètres géométriques qui minimisent l'erreur de pose théorique.

#### 3.3.1 Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun

La méthode des plans d'expériences a été présentée dans le chapitre 1. Cette partie va fixer les paramètres étudiés et définira les deux niveaux de valeur que ces facteurs prendront au cours de l'étude.

Premièrement, il est nécessaire de connaître les paramètres dont nous voulons évaluer les effets. Dans le cadre de cette étude sur la sensibilité des paramètres géométriques de la poulie nous décomposons ce système en trois paramètres appelés « facteurs » pour le plan d'expériences. Le premier est le type d'articulation de la poulie, c'est-à-dire soit une articulation de type pivot soit joint de cardan. Le deuxième facteur est le bras de levier  $h$

et le troisième facteur important est le rayon du réa  $r_p$ . L'objectif est donc de déterminer l'influence de chacun de ces facteurs. Cette influence est évaluée non pas sur une pose  $\mathbf{p}$ , mais sur un ensemble de poses dans un espace de travail régulier. Il a été choisi comme réponse au plan d'expériences, nous servant à quantifier les effets, l'indice global  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ . Cet indice est dit global car il représente la moyenne des  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  dans l'espace de travail régulier commun ( $ER_C$ ) et est exprimé par l'Eq. 3.3.

$$\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\delta\mathbf{p}_j\|_2 \quad (3.3)$$

où  $N$  représente la discrétisation de l' $ER_C$ , ici  $N = 250000$  et est répartie homogènement dans l' $ER_C$ .

Le plan d'expériences est dit factoriel complet à trois facteurs (cf. section 1.3.2). Pour rappel, ces types de plans d'expériences sont les plus simples à concevoir et permettent de quantifier toutes les interactions des différents facteurs, mais sont plus coûteux puisqu'ils couvrent toutes les combinaisons de niveaux entre tous les facteurs. D'autre part, le plan d'expériences comprend deux niveaux, un niveau haut et un niveau bas, ceci afin de pouvoir l'adapter sans distinction aux différents facteurs. Effectivement,  $r_p$  et  $h$  sont des facteurs continus contrairement à l'articulation de la poulie qui n'a que deux configurations possibles (pivot ou joint de cardan). Il faut à présent définir les bornes minimales et maximales de  $r_p$  et de  $h$ . Dans cette optique, il est décidé de contraindre géométriquement la poulie à une architecture dite classique impliquant que le bras de levier ait une dimension supérieure au rayon de poulie. Cela permet d'éviter les interférences possibles entre la poulie elle-même et son articulation. Les niveaux hauts et bas du rayon de poulie  $r_p$  sont déterminés en premier, puis ce sont ceux du bras de levier  $h$ . Afin de rester dans un domaine d'étude cohérent, il est décidé que la moyenne des niveaux de  $r_p$  correspond au rayon de poulie utilisé dans la partie 3.2, c'est-à-dire  $\bar{r}_p = 66.5mm$ . Par ailleurs, pour éviter la fatigue ou l'usure prématurée du câble, il faut respecter quelques précautions et notamment lors de l'utilisation de poulies. En effet, un câble peut se détériorer si sa courbure est trop faible, la notion de rayon de courbure du câble doit être prise en compte. Dans le cas de poulie, ce rayon de courbure correspond directement au rayon de la poulie  $r_p$ . Dans ces conditions, la règle usuelle est que le rapport entre  $r_p$  et le rayon du câble  $r_c$  doit être supérieur à 20. Pour certains types de composition de câble (nombre et disposition des torons, des fils et de l'âme) ce rapport peut être supérieur ou inférieur. Dans le cas du câble Carl Stahl Technocables Ref 1692, le constructeur indique que le rapport entre  $r_p$  et  $r_c$  doit être supérieur à 16. Dans cette étude,  $r_c$  est égal à  $2mm$ ,  $r_p$  doit être strictement supérieur à  $32mm$ . Le niveau inférieur de  $r_p$  est donc fixé à  $35mm$  par sécurité et le niveau haut à  $98mm$ . Il est à noter que l'intervalle  $r_p \in [35mm; 98mm]$  correspond aux ordres de grandeur des rayons de poulies couramment utilisées. Les bornes de  $h$  sont alors fixées à  $100mm$  au niveau bas et à  $150mm$  au niveau haut pour respecter les contraintes d'interférences géométriques de la poulie. Le rayon du câble  $r_c$  est pris en compte dans les choix des bornes de  $h$  afin d'éviter les interférences câble/articulation. Les différents essais du plan d'expériences sont présentés sur le tableau 3.5.



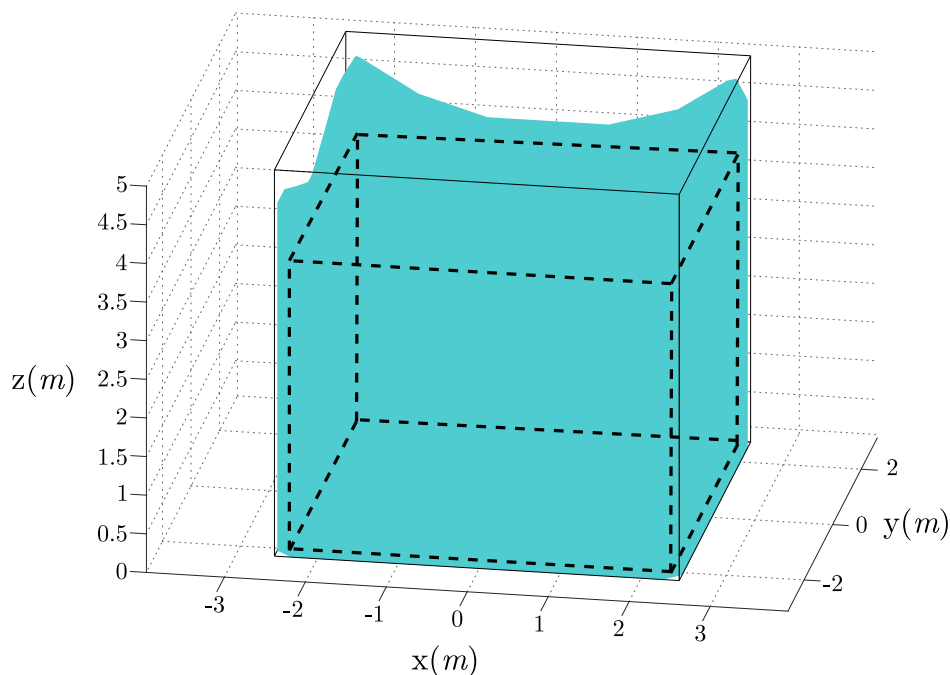
$N^{\circ}$ essai	Articulation	$h$	$r_p$
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1

Domaine d'étude			
Niveau -1	Pivot	100mm	35mm
Niveau +1	Joint de cardan	150mm	98mm

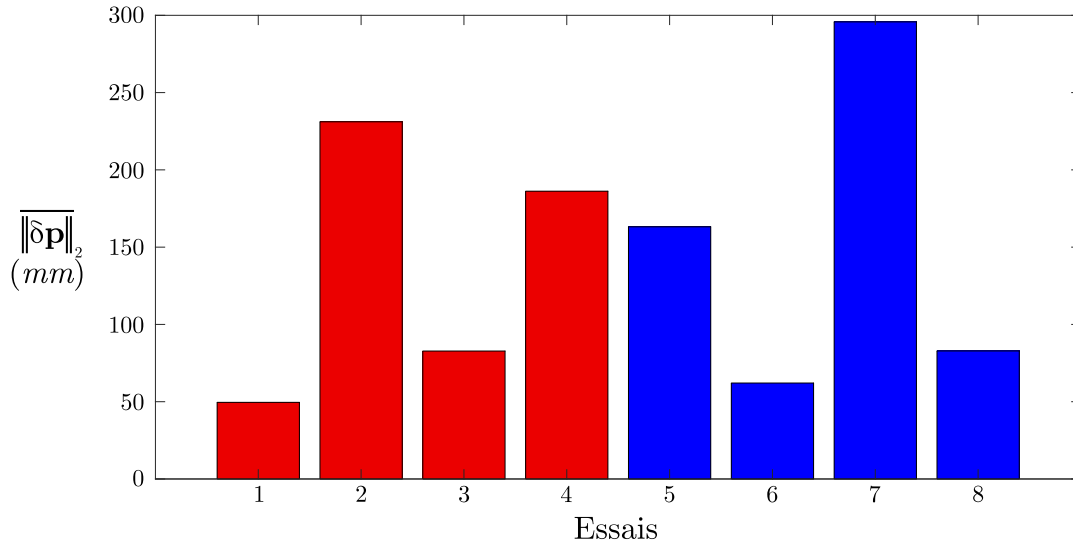
**Table 3.5** – Plan d'expériences factoriel complet à trois facteurs

Le plan d'expériences se compose donc de huit essais qui vont être évalués dans la partie suivante à l'aide du critère  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Cependant, une première série d'essais est nécessaire afin d'extraire l'ensemble des espaces de travail, représentant l'ETS atteignable de chaque essai du plan d'expériences. De ces ETS nous pouvons déterminer simplement les espaces réguliers ( $ER$ ) pour chacun des essais. L'union de ces huit  $ER$  forme l' $ER_C$  (cf. Eq. 1.16). Il s'avère que parmi les huit  $ER$  celui ayant le volume le plus petit est celui correspondant à la configuration de l'essai 6, noté  $ER_6$ . Cela correspond à la configuration avec des poulies à joint de cardan,  $h = 100mm$  et  $r_p = 98mm$ . L'étude des espaces réguliers montre que l' $ER_6$  est complètement inclus dans les sept autres  $ER$ , cela implique que l' $ER_6$  est directement l' $ER_C$ . Le volume de l' $ER_C$ , noté  $V_{ER_C}$ , est de  $80.31m^3$  soit un  $R_V$  (ratio  $V_{ER_C}/V_T$  égale à 0.64. La figure 3.21 illustre l'espace de travail limité en tension et en accessibilité géométrique de la configuration numéro 6 des essais ainsi que l' $ER_C$ .


**Figure 3.21** – Espace régulier commun  $ER_C$

### 3.3.2 Influence des paramètres géométriques sur l'erreur de pose théorique

Le plan d'expériences est maintenant défini ainsi que les pré-requis pour son utilisation. Nous pouvons à présent analyser les résultats qu'il génère. Pour ce faire nous testons les RPC des huit essais sur l' $ER_C$ . Tout d'abord, nous pouvons observer les réponses  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  de chaque essai. Dans un second temps les effets et interactions des facteurs sont déterminés à l'aide de l'Eq. 1.37 et analysés.



**Figure 3.22** – Histogramme des réponses  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  en fonction des huit essais du plan d'expériences

En prenant les huit réponses de manière globale (cf. Fig. 3.22), la configuration de l'essai 1 minimise  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  avec une valeur de  $50\text{mm}$ . Cette configuration correspond à un  $RPC_P$  avec  $h = 100\text{mm}$  et  $r_p = 35\text{mm}$ . Inversement, c'est la configuration de l'essai 7 qui maximise la réponse pour une valeur de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  de  $290\text{mm}$ . Elle correspond à un  $RPC_C$  avec  $h = 150\text{mm}$  et  $r_p = 35\text{mm}$ . En fonction du choix des paramètres géométriques il peut donc y avoir une différence de plus de  $240\text{mm}$  sur l'erreur moyenne dans l' $ER_C$ . Par ailleurs, les essais peuvent être différenciés en deux catégories, celle des  $RPC_P$  et celle des  $RPC_C$ . Le plan d'expériences est construit de telle manière que les essais 1 à 4 correspondent aux configurations des  $RPC_P$  et les essais de 5 à 8 à celles des  $RPC_C$ . Ce sont les configurations des essais 1 et 6 qui minimisent le plus  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ , l'essai 1 étant une configuration de  $RPC_P$  et l'essai 6 une configuration de  $RPC_C$ . Il est intéressant d'observer que pour ces deux essais, le niveau du facteur  $h$  est identique, mais que celui du facteur  $r_p$  est opposé. En effet, pour l'essai 1 le facteur  $r_p$  est au niveau bas tandis que pour l'essai 6 il est au niveau haut. De plus, les essais 3 et 8 montrent la plus faible variation de la réponse par rapport aux essais 1 et 6. Il est observable qu'entre les essais 1 et 3 des  $RPC_P$  et les essais 6 et 8 des  $RPC_C$  seul le facteur  $h$  change de niveau. D'autre part, l'essai 2 donne la plus mauvaise configuration pour les  $RPC_P$ , mais le niveau des facteurs  $h$  et  $r_p$  est identique à l'essai 6 ( $h : -1, r_p : +1$ ) qui correspond quant à lui à la meilleure configuration des  $RPC_C$ . Ces premières observations montrent qu'il y a une forte interaction entre les trois facteurs  $h, r_p$  et le type d'articulation de la poulie. En effet, le type d'articulation de la poulie influence fortement le choix des valeurs des paramètres géométriques  $h$  et  $r_p$ . La partie suivante analyse globalement, c'est-à-dire sur l'ensemble du plan d'expériences, les effets et interactions entre les trois facteurs géométriques. Les résultats que cette méthode génère peuvent se décomposer en deux parties, les effets

principaux de chaque facteur (cf. Fig. 3.23) et les interactions entre eux (cf. Fig. 3.24) obtenus à l'aide de la méthode d'analyse des plan d'expériences présentée dans le chapitre 1.

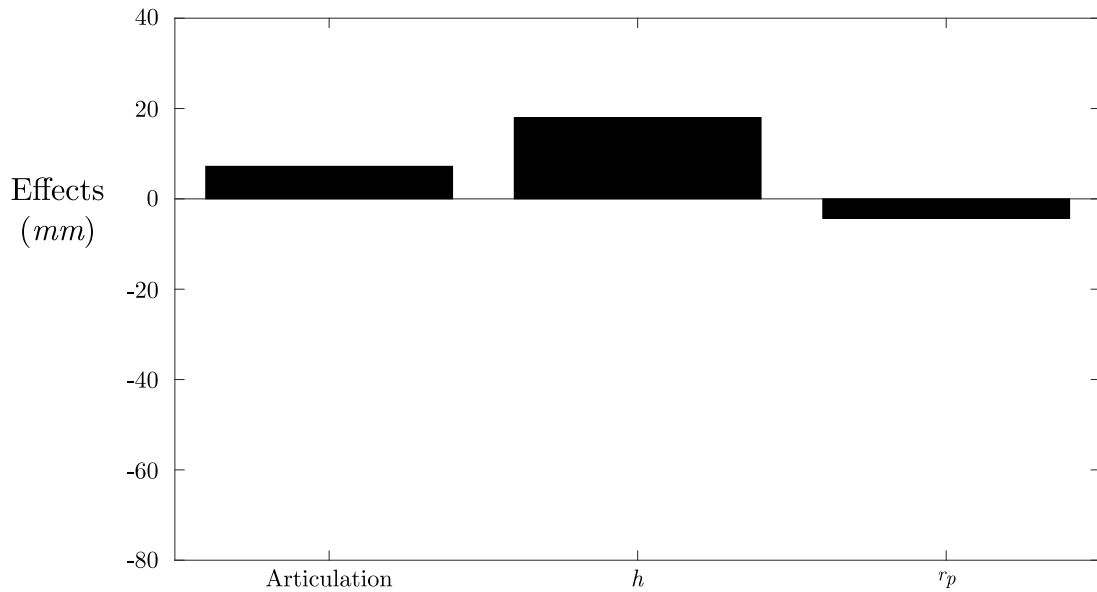


Figure 3.23 – Effets des facteurs

La figure 3.23 présente les effets des facteurs analysés par le plan d'expériences. Nous pouvons observer que le bras de levier a l'effet le plus important sur l'erreur de pose théorique. En effet, l'effet de l'articulation et du rayon de réa seul ne semble pas être prépondérant vis-à-vis de l'effet de  $h$ .

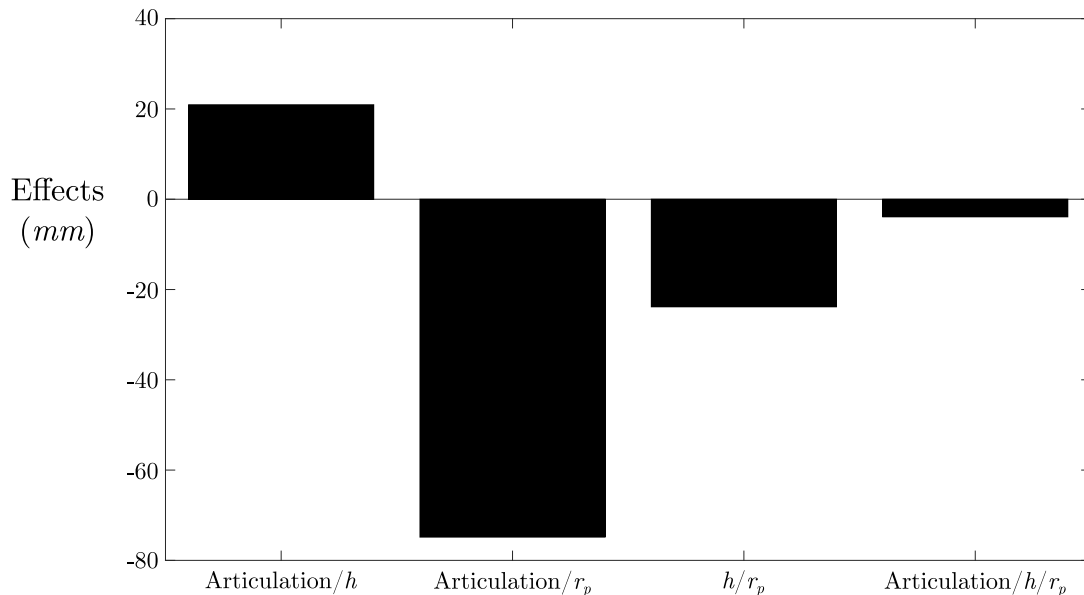


Figure 3.24 – Interactions entre facteurs

Les résultats de la Fig. 3.24 confirment les premières observations faites précédemment sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  (cf. section 3.2). Effectivement, il est notable que l'interaction entre le rayon

de poulie  $r_p$  et le type d'articulation joue un rôle majeur dans l'évolution de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  et que l'interaction du premier ordre la plus faible correspondant à celle entre  $h$  et le type d'articulation de la poulie ne peut pas être écartée. Les résultats de la Fig. 3.24 montrent également que l'effet du facteur  $h$  et son couplage avec  $r_p$  ne sont pas négligeables. Il faut donc considérer le rayon de réa  $r_p$  mais aussi le bras de levier  $h$  comme des facteurs influents.

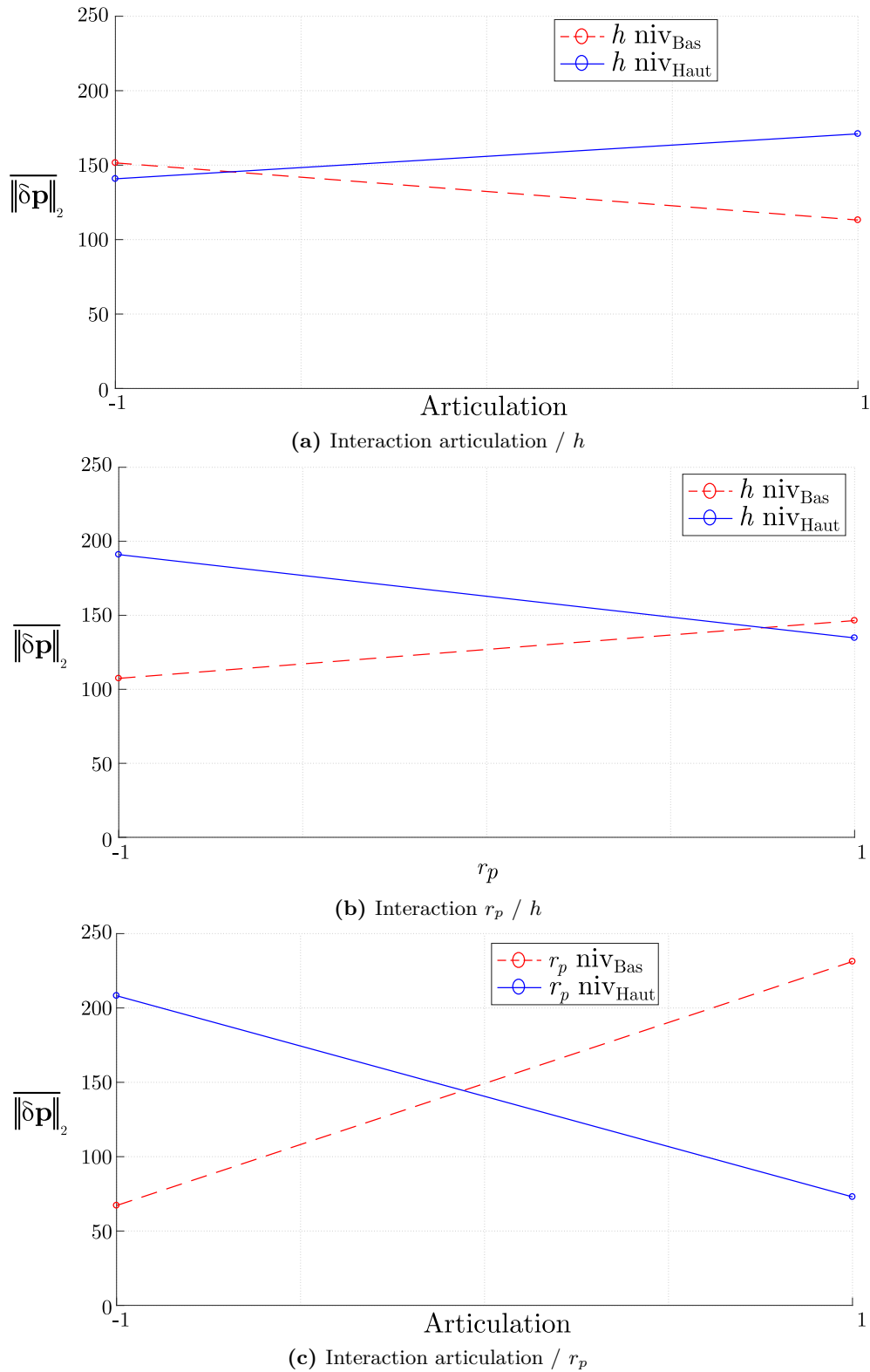
Au vu des interactions avec les autres facteurs cela implique que le choix de l'articulation a un impact certain sur  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ . En effet, modifier le type d'articulation des poulies dans l'objectif d'améliorer l'erreur moyenne  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  du RPC sans changement des dimensions des autres paramètres peut avoir un effet négatif. De plus, les interactions du première ordre ont une influence plus importante que les effets des facteurs seuls. Cela confirme la nécessité de faire attention au couplage des facteurs géométriques découlant de la présence des poulies. Il est également remarquable, que si une modélisation de la réponse est faite dans des travaux futurs, l'interaction du deuxième ordre pourra être négligée, étant relativement faible au vu des résultats obtenus.

Par ailleurs, le couplage des paramètres géométriques étant important, il est intéressant d'analyser plus en détail l'évolution des interactions des facteurs du plan d'expériences. Pour ce faire les essais sont étudiés deux à deux en moyennant la réponse  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  afin de compenser l'influence du troisième facteur, c'est-à-dire que deux essais sont associés lorsque seulement un facteur change de niveau. Par exemple, pour évaluer l'évolution du couplage entre  $h$  et  $r_p$  (cf. Fig. 3.25b), les essais 1 et 5 correspondent au niveau bas de  $h$  et  $r_p$  où seul le facteur articulation change de niveau. La moyenne de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  des essais 1 et 5 est donc faite. Cette nouvelle réponse moyennée permet de compenser l'influence de l'articulation de poulie pour un niveau bas de  $h$  et  $r_p$ . Cela est fait pour toutes les configurations où uniquement le facteur d'articulation change de niveau, c'est-à-dire l'essai 2 avec le 6 ( $h : -1, r_p : +1$ ), l'essai 3 avec le 7 ( $h : +1, r_p : -1$ ) et l'essai 4 avec le 8 ( $h : +1, r_p : +1$ ). Ces quatre réponses sont reliées deux à deux par une droite de telle manière qu'au passage du niveau bas au niveau haut de  $r_p$  le niveau de  $h$  reste constant (cf. Fig. 3.25b). La figure Fig. 3.25b montre donc l'évolution de l'interaction entre  $h$  et  $r_p$ , la figure Fig. 3.25a correspond à l'évolution de l'interaction entre l'articulation de poulie et  $h$ . Finalement la figure Fig. 3.25c illustre l'évolution de l'interaction entre l'articulation de poulie et  $r_p$ . Au regard des résultats de la figure Fig. 3.25, il apparaît que l'effet de la modification d'un facteur sur la réponse peut s'inverser en fonction du niveau de l'autre facteur. La figure Fig. 3.25c montre que le passage d'un  $RPC_{4P}$  à un  $RPC_{4C}$  peut améliorer l'indice  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  si  $r_p$  est au niveau haut, mais peut dégrader  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  si  $r_p$  est au niveau bas. De même les évolutions des interactions de la figure Fig. 3.25a illustrent que  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  diminue lors du passage d'un  $RPC_{4P}$  à un  $RPC_{4C}$  seulement si le facteur  $h$  est au niveau bas.

Au moment de choisir l'architecture des poulies le concepteur ne peut donc négliger aucun des trois facteurs géométriques étudiés. En effet, en terme d'effet et d'interaction,  $r_p$ ,  $h$  et l'articulation de la poulie ont une influence relativement forte sur  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ . Afin de conserver l'utilisation des modèles standards il doit exister une configuration géométrique de  $h$  et  $r_p$  pour chaque type de poulie (pivot ou joint de cardan) qui minimise  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ . La partie suivante recherche les configurations de  $h$  et  $r_p$  minimisant l'erreur de pose théorique moyen dans le cas d'un RPC à poulie à pivot et d'un RPC à poulie à joint de cardan.

### 3.3.3 Détermination des paramètres géométriques optimaux des poulies

Les observations précédentes indiquent que pour minimiser  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ , le couple de paramètres géométriques  $h$  et  $r_p$  ne se comporte pas de la même manière en fonction de l'articulation de la poulie. Pour illustrer cette différence de comportement, le nombre de paramètres étant de deux, il est possible de tracer les iso-contours de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  dans l' $ER_C$  en fonction de  $h$  et  $r_p$  pour



**Figure 3.25** – Évolution des interactions des facteurs géométriques en fonction de l'indice global d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en  $mm$  dans l' $ER_C$

Configuration	RPC <sub>P</sub> *	RPC <sub>C</sub> *
$h$	107.7mm	100mm
$r_p$	35mm	80mm
$\ \delta\mathbf{p}\ _2$	53.75mm	23.28mm

**Table 3.6** – Valeurs des paramètres géométriques optimaux  $h$  et  $r_p$  qui minimisent  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  dans le domaine d'étude du plan d'expériences

chaque type de poulie. Ces iso-contours permettent de déterminer des configurations de RPC<sub>P</sub> et de RPC<sub>C</sub> optimales vis-à-vis de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Dans l'objectif d'observer plus en détail le rôle que joue l'évolution des dimensions de  $h$  et  $r_p$  sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en fonction du type d'articulation de poulie, les figures Fig. 3.26a et Fig. 3.26b montrent sous forme d'iso-contours la modification de l'erreur de pose théorique moyen en fonction de  $h$  et  $r_p$ . Le domaine d'étude du plan d'expériences, borné par les niveaux bas et haut des facteurs  $h$  et  $r_p$ , est représenté sur les figures Fig. 3.26a et Fig. 3.26b par les points  $E_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) représentant respectivement les essais 1, 2, 3 et 4 pour les RPC<sub>P</sub> et les essais 5, 6, 7 et 8 pour les RPC<sub>C</sub>. Le placement des points  $E_i$  sur les iso-contours de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  permet de mieux situer les résultats du plan d'expériences (cf. Fig. 3.22). Il faut également noter que le domaine d'analyse est réduit à une forme triangulaire car les poulies sont contraintes géométriquement de telle sorte que le bras de levier  $h$  ait une dimension supérieure au rayon de poulie  $r_p$  pour éviter les interférences.

Les iso-contours des figures Fig. 3.26a et Fig. 3.26b montrent clairement des zones différentes qui minimisent l'erreur de pose théorique moyenne entre les RPC<sub>P</sub> et les RPC<sub>C</sub>. D'autre part, l'erreur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est minimale si  $h = r_p = 0mm$  car cela correspond au paramétrage des modèles standards. Il est alors possible, par régression linéaire, de trouver les équations des droites  $\mathcal{D}_P$  et  $\mathcal{D}_C$ , respectivement pour les RPC<sub>P</sub> et les RPC<sub>C</sub>, qui passent par l'origine et qui donnent la relation linéaire entre  $h$  et  $r_p$  qui minimise  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Les équations obtenues sont les suivantes :

$$\mathcal{D}_P : h = \frac{40}{13}r_p \quad (3.4)$$

$$\mathcal{D}_C : h = \frac{5}{4}r_p \quad (3.5)$$

Pour une valeur donnée de  $h$  ou de  $r_p$ , ces équations permettent de déterminer le jeu de paramètres  $(h, r_p)$  qui minimise  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Les résultats des figures Fig. 3.26a et Fig. 3.26b indiquent également que plus le jeu de paramètres  $(h, r_p)$  est proche de l'origine  $(0, 0)$  plus  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est faible. Dans ces conditions et avec les paramètres  $h$  et  $r_p$  bornés par leurs niveaux haut et bas, il apparaît que les intersections  $I_P$  et  $I_C$  (cf. Fig. 3.26a et 3.26b) des droites  $\mathcal{D}_P$  et  $\mathcal{D}_C$  avec le domaine d'étude du plan d'expériences, correspondent aux configurations optimales de  $h$  et  $r_p$  qui minimisent  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Les résultats des paramètres géométriques pour les architectures optimales notés RPC<sub>P</sub>\* et RPC<sub>C</sub>\* sont récapitulés dans le tableau Tab. 3.6.

Les RPC<sub>C</sub> ont une configuration qui minimise le plus  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  dans le domaine d'étude borné par le plan d'expériences. Par ailleurs, la pente de la droite  $\mathcal{D}_C$  est plus faible que celle de  $\mathcal{D}_P$ , cela implique qu'il est possible d'augmenter significativement  $r_p$  tout en conservant un  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  relativement faible. Connaissant les contraintes de rayon de courbure maximale des câbles, si  $r_p$  augmente alors le diamètre du câble peut augmenter et donc la charge transportable par le RPC peut être plus grande. Les RPC<sub>C</sub> semblent donc être plus à même de transporter des charges lourdes lorsque le concepteur veut minimiser les erreurs de position de la PM faites par l'utilisation des modèles standards.

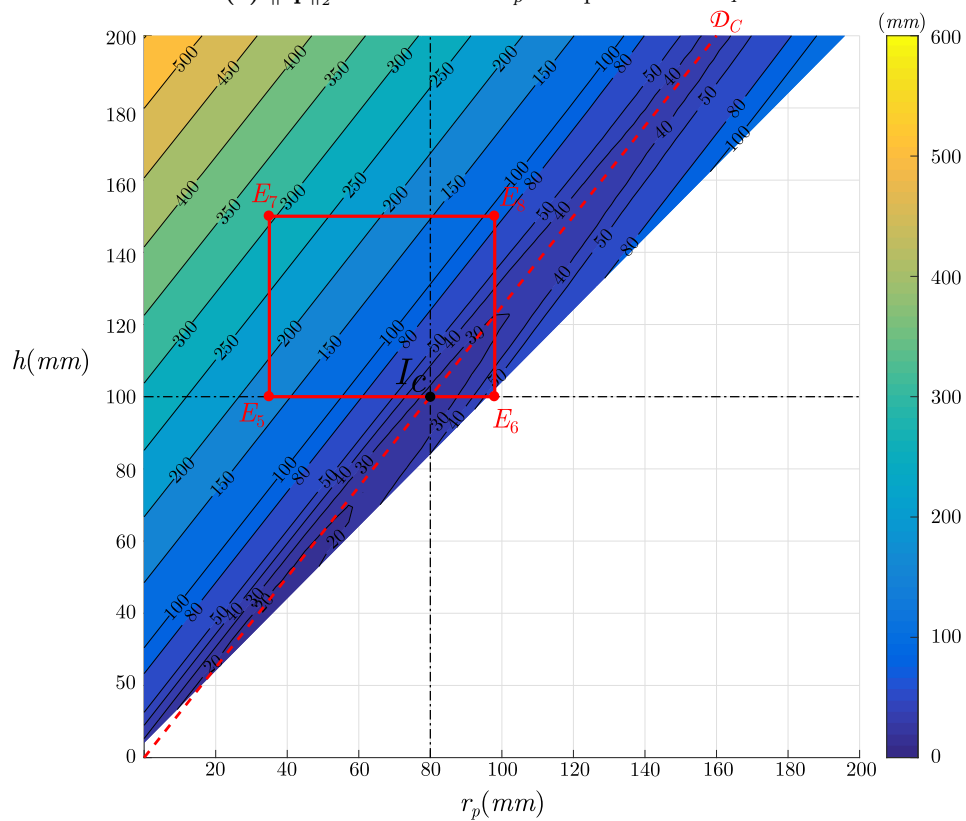
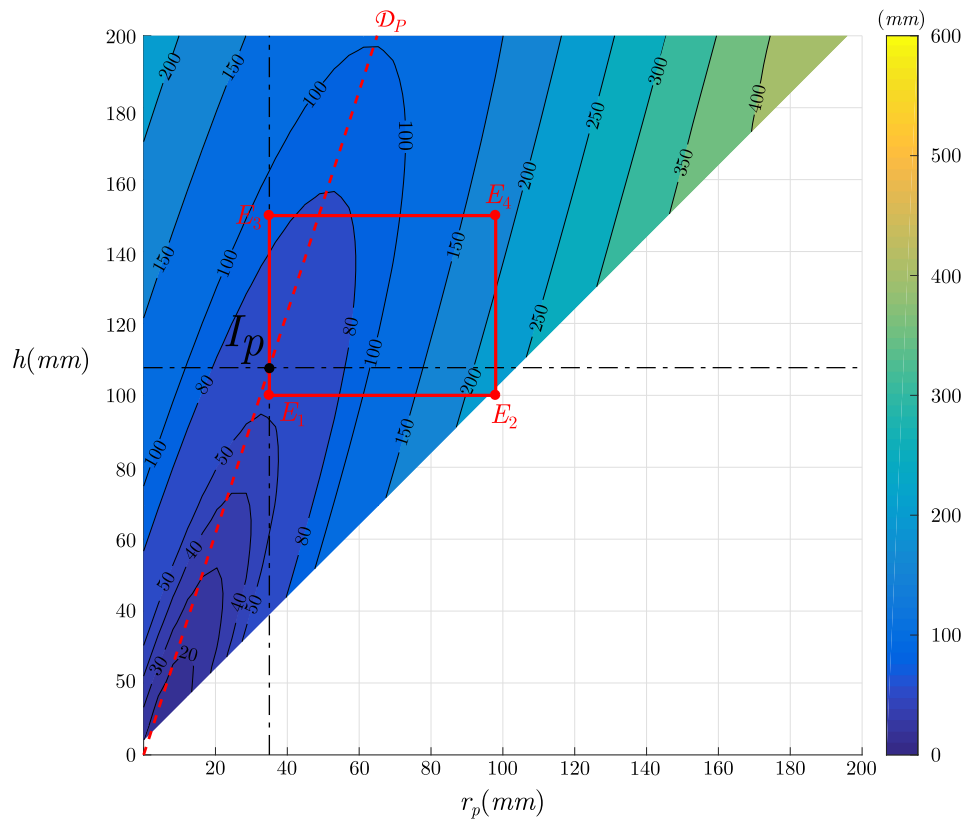
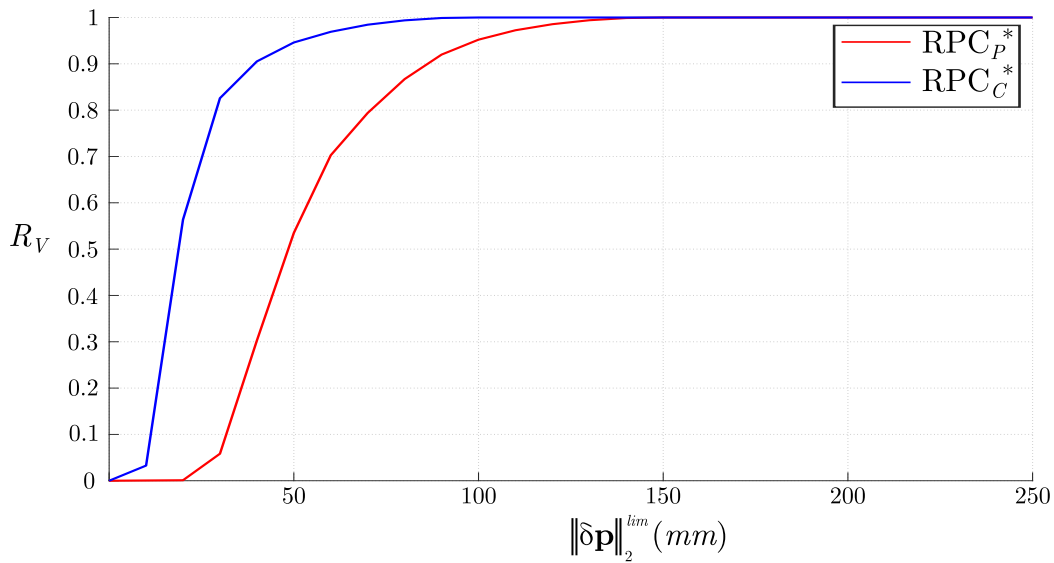


Figure 3.26 –  $\|\overline{\delta \mathbf{p}}\|_2$  en fonction de  $r_p$  et  $h$

Nous pouvons noter, néanmoins, que l'utilisation de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  ne permet pas d'avoir d'information sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  dans l' $ER_C$ . Pour cela et pour compléter l'étude sur l'erreur de pose théorique, les évolutions des volumes de travail limités en erreur dans l'espace régulier commun sont tracées. Le concepteur peut donc s'appuyer sur trois indicateurs pour choisir la configuration de RPC qui optimise l'erreur de pose théorique par rapport à l'utilisation des modèles standards. Ces indicateurs sont  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ ,  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$ . Pour donner au concepteur un panel d'indicateurs suffisamment pertinents pour le guider dans ses choix au niveau de la conception de RPC, l'étude sur l'erreur de pose théorique moyen est complétée par la détermination de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  pour le  $RPC_P^*$  et le  $RPC_C^*$ . Pour cela l'évolution de leur volume de travail limité en erreur  $V_L$  dans l' $ER_C$  sont étudiés. En revanche, le ratio des volumes  $R_V$  est fait ici entre  $V_L$  et le volume  $V_{ER_C}$  de l' $ER_C$ . Ce ratio est donc compris entre 0 et 1 et permet de déterminer  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  dès que  $R_V$  prend une valeur non nulle et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  quand  $R_V$  atteint la valeur de 1. La figure Fig. 3.27 montre l'évolution des  $R_V$  pour le  $RPC_P^*$  et le  $RPC_C^*$ .



**Figure 3.27** – Évolution des  $R_V$  en fonction de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{lim}$  en  $mm$  pour  $RPC_P^*$  et  $RPC_C^*$

Il est visible sur la figure Fig. 3.27 que le  $R_V$  du  $RPC_C^*$  croît plus rapidement vers son maximum que celui du  $RPC_P^*$ . Cela confirme le fait que l'erreur  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  de  $RPC_C^*$  est plus faible que celle du  $RPC_P^*$ . En plus de donner l'évolution des  $V_L$ , ces ratios permettent également de déterminer les  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  de chaque RPC. Le tableau Tab. 3.7 récapitule les résultats ainsi obtenus.

Configuration	$RPC_P^*$	$RPC_C^*$
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{min}$	2.3mm	1.3mm
$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{max}$	149.7mm	101.7mm

**Table 3.7** – Erreurs minimale et maximale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  dans l' $ER_C$  des configurations optimales  $RPC_P^*$  et  $RPC_C^*$

Dans l' $ER_C$  tous les indices d'évaluation de l'erreur de pose théorique dus à l'utilisation des modèles standards vont dans le même sens. En effet,  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ ,  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{min}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{max}$  sont



plus faibles pour la configuration optimale  $RPC_C^*$ . Avec l'ensemble des résultats obtenus dans cette partie, l'utilisation de poulies à joint de cardan dans les RPC suspendus minimise globalement l'erreur de pose théorique de la PM entre les modèles standards et étendus lorsque le module de Young des câbles est considéré constant. Cependant, certains articles comme [Bak+18] montrent que le module de Young  $E$  des câbles possède une forte incertitude. Ce non-déterminisme est causé, comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre 1, par un comportement non-linéaire en fonction de la tension dans le câble et d'un phénomène d'hystérésis entre le chargement et le déchargement du câble. De ce fait, en fonction de l'utilisation du RPC, une incertitude se crée sur les  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  et donc sur l'indice  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$ . La section suivante s'intéressera aux effets de ces phénomènes.

## 3.4 Analyse de sensibilité des paramètres mécaniques de la chaîne d'actionnement du RPC

Un RPC est, comme nous l'avons vu, composé de différents systèmes. Parmi ceux-ci, nous venons d'étudier l'influence sur la précision de la non prise en compte des poulies de renvoi dans les modèles standards ainsi que la sensibilité de chaque paramètre géométrique la composant. Or, d'après les articles constituant la bibliographie, le comportement mécanique lié au câble joue un rôle prépondérant dans l'erreur de pose de la PM. Cette section s'intéresse à quantifier ces effets sur l'erreur de pose théorique de la PM. Pour ce faire, nous verrons tout d'abord l'évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  ainsi que  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  pour différents module de Young des câbles. Par la suite, une étude par plan d'expériences sera menée pour quantifier les effets sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du module de Young, de la masse de la PM, de la masse linéique du câble ainsi que de l'articulation de la poulie.

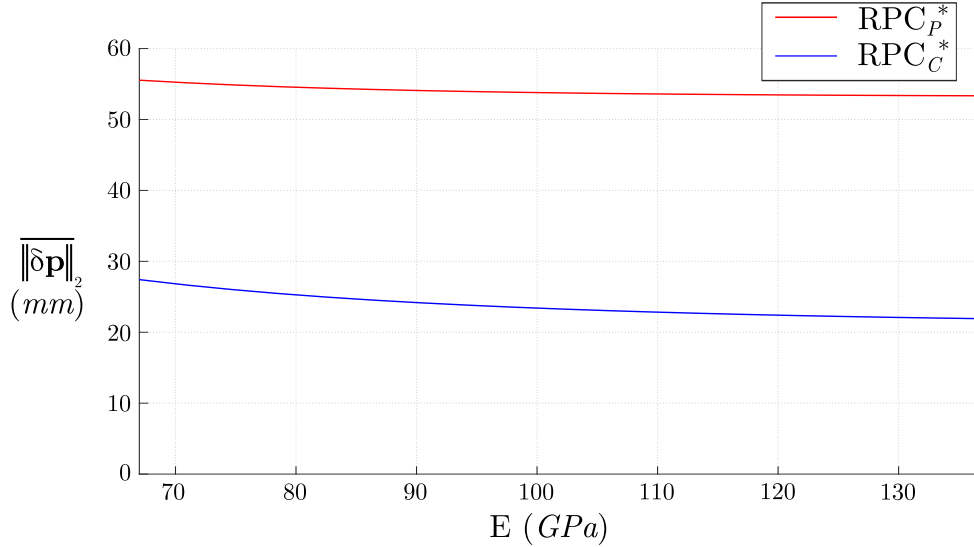
### 3.4.1 Évolution de l'erreur de pose théorique en fonction du module de Young pour des câbles en segment élastique

Dans cette partie nous chercherons à quantifier l'incertitude sur l'erreur de pose théorique lorsque le module de Young est approximé à une valeur nominale  $E_{nom}$  (cf. Eq. 1.18). D'après le constructeur, un câble a une plage d'utilisation comprise entre un module de Young minimal  $E_{min}$  et un module de Young maximal  $E_{max}$ . Bien souvent, afin de simplifier la modélisation du module de Young, ce dernier est approximé à une valeur nominale  $E_{nom}$  permettant une prise en compte de l'élasticité linéaire relativement aisée (cf. section 1.2.4). Nous allons voir l'incertitude existante lors de cette approximation. Pour ce faire nous étudions tout d'abord l'évolution de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  en fonction du module de Young compris entre les deux bornes minimum et maximum. Par la suite, nous verrons l'évolution de cette incertitude sur une trajectoire comme celle définie à la section 3.2.3.2. Cette partie étudie les deux configurations optimales  $RPC_P^*$  et  $RPC_C^*$  précédemment définies (cf. Tab. 3.6), qui sont déterminées avec une élasticité constante des câbles de  $102.2GPa$ .

#### 3.4.1.1 Quantification de l'incertitude sur l'indice global de l'erreur de pose théorique

Pour étudier l'influence de la variabilité du module de Young  $E$ , l'analyse se porte sur la variation de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  dans l' $ER_C$  en fonction de l'évolution de  $E$ . Nous rappelons que d'après la norme ISO 12076, un câble doit travailler entre 10% et 30% de sa charge de rupture  $T_r$ . Or comme précisé dans [Bak+18], un câble installé sur un RPC ne travaille pas forcément dans cet intervalle. Dans ces travaux, il est considéré que les câbles travaillent entre 5%

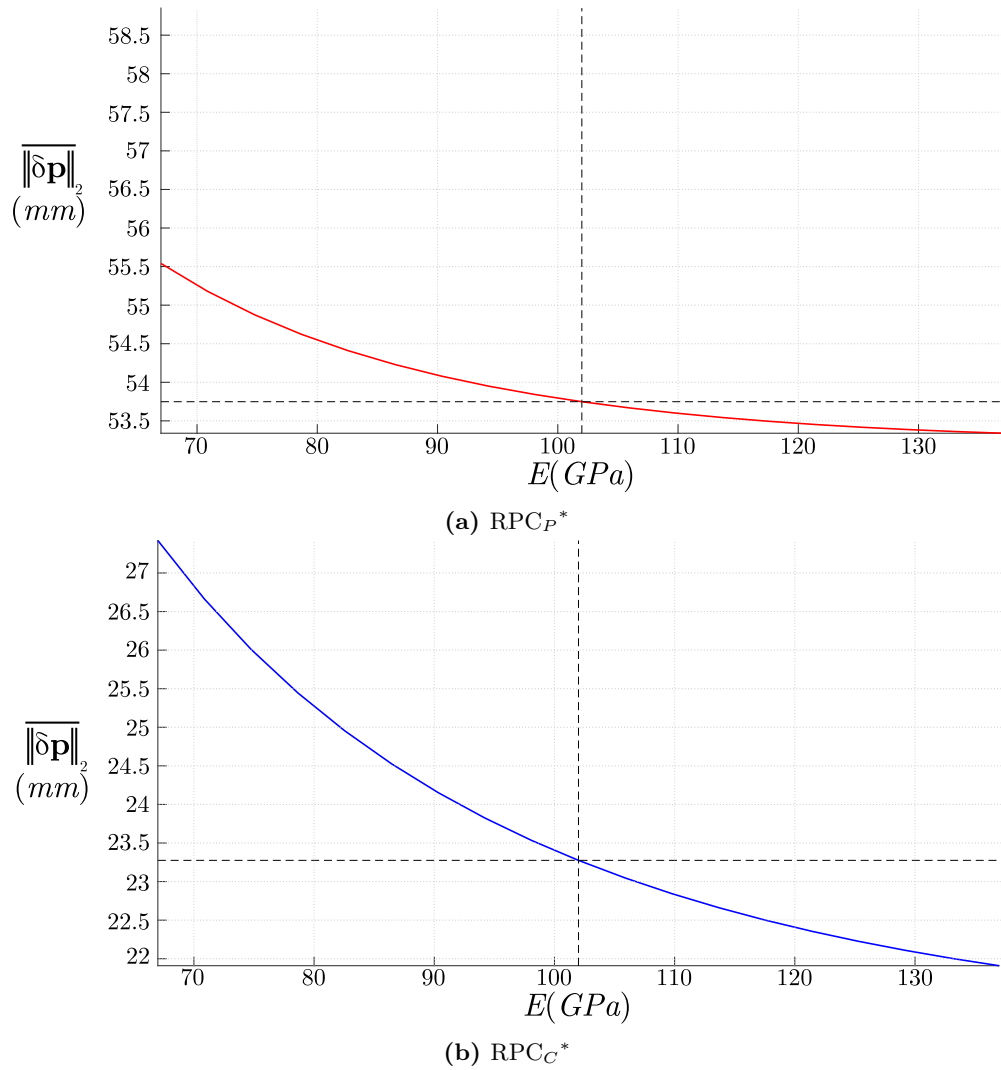
et 50% de  $T_r$ . Au regard des résultats expérimentaux présentés dans l'article de Baklouti [Bak+18] et en extrapolant les valeurs de  $E$ , une incertitude de  $70GPa$  répartie également autour de  $102.2GPa$  est déterminée. Cette incertitude de  $\pm 35GPa$  permet de prendre en compte l'ensemble des variations de l'élasticité (non-linéarité, hystérésis, pourcentage de tensions, vieillissement du câble, etc.). Le module d'élasticité est alors contraint à l'intervalle  $[67.2GPa; 137.2GPa]$  car  $E = 102.2 \pm 35GPa$ . La figure Fig. 3.28 représente l'évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en fonction du module de Young  $E$  du câble et ceci pour chacune des configurations optimales déterminées précédemment, c'est-à-dire pour le  $RPC_P^*$  et le  $RPC_C^*$ .



**Figure 3.28** – Évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en fonction  $E$  pour le  $RPC_P^*$  et le  $RPC_C^*$

Premièrement, il est remarquable que le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du  $RPC_P^*$  reste toujours supérieur à celui du  $RPC_C^*$ , ce qui corrobore les observations déjà effectuées précédemment. De plus, l'évolution globale des courbes suit la même tendance, l'accroissement du module de Young entraîne une diminution de l'erreur de pose théorique moyenne. Par ailleurs, il est notable que le  $RPC_P^*$  a une variation totale du  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  moins importante que celle du  $RPC_C^*$ . Pour mieux observer cet effet de la variation de  $E$  et quantifier l'incertitude sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ , la Fig. 3.29 retrace de manière indépendante les courbes de la Fig. 3.28.

Pour une incertitude équirépartie de l'élasticité, l'incertitude autour de la position nominale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est dissymétrique pour les deux configurations de RPC étudiées. Effectivement, la variation de l'erreur de pose théorique moyenne évolue beaucoup plus rapidement quand  $E$  diminue par rapport à la valeur moyenne de  $102.2GPa$ . Il est alors possible de déterminer que la moyenne des erreurs comprise dans l' $ER_C$  est de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2 = 53.75_{-0.29}^{+1.5}mm$  pour le  $RPC_P^*$  et de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2 = 23.28_{-1.2}^{+3.9}mm$  pour le  $RPC_C^*$ . La variation totale  $\Delta\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est de  $1.79mm$  pour le  $RPC_P^*$  représentant 3.33% de l'erreur moyenne pour un  $E_{nom} = 102.2GPa$ . Dans le cas du  $RPC_C^*$  l'incertitude totale de  $\Delta\|\delta\mathbf{p}\|_2 = 5.1mm$  et représente 21.91%. Il est alors possible de dire, au vu de ces résultats, que la configuration optimale  $RPC_P^*$  présente une erreur de pose théorique moyenne dans l' $ER_C$  plus robuste que celle du  $RPC_C^*$  vis-à-vis des variations de l'élasticité des câbles. Finalement, même si le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du  $RPC_P^*$  est moins sensible aux variations de  $E$ , sa valeur minimale qui est de  $53.46mm$  reste largement supérieure à la valeur maximale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du  $RPC_C^*$  qui est de  $27.18mm$ . La partie suivante analyse l'évolution de l'incertitude de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  sur une trajectoire rectiligne traversant l' $ER_C$ .



**Figure 3.29** – Incertitude sur  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  en  $mm$  due à une variation de  $E = 102.2 \pm 35GPa$

### 3.4.1.2 Évaluation de l'incertitude de l'erreur de pose théorique sur une trajectoire

Pour observer plus en détails l'effet de l'incertitude du module de Young des câbles sur les variations des  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du  $\text{RPC}_P^*$  et du  $\text{RPC}_C^*$ , l'évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  le long d'une trajectoire rectiligne traversant l' $\text{ER}_C$  est tracée pour trois élasticités différentes. La figure 3.30 montre la trajectoire théorique que réalisent les RPC dans l' $\text{ER}_C$ .

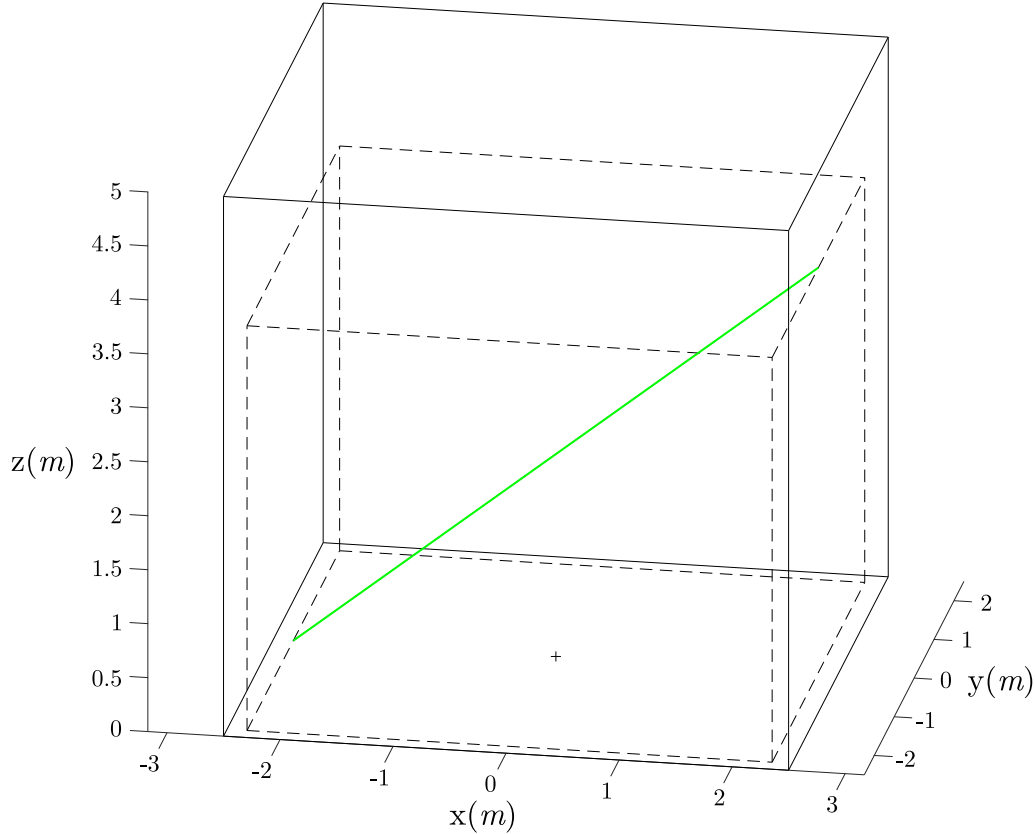
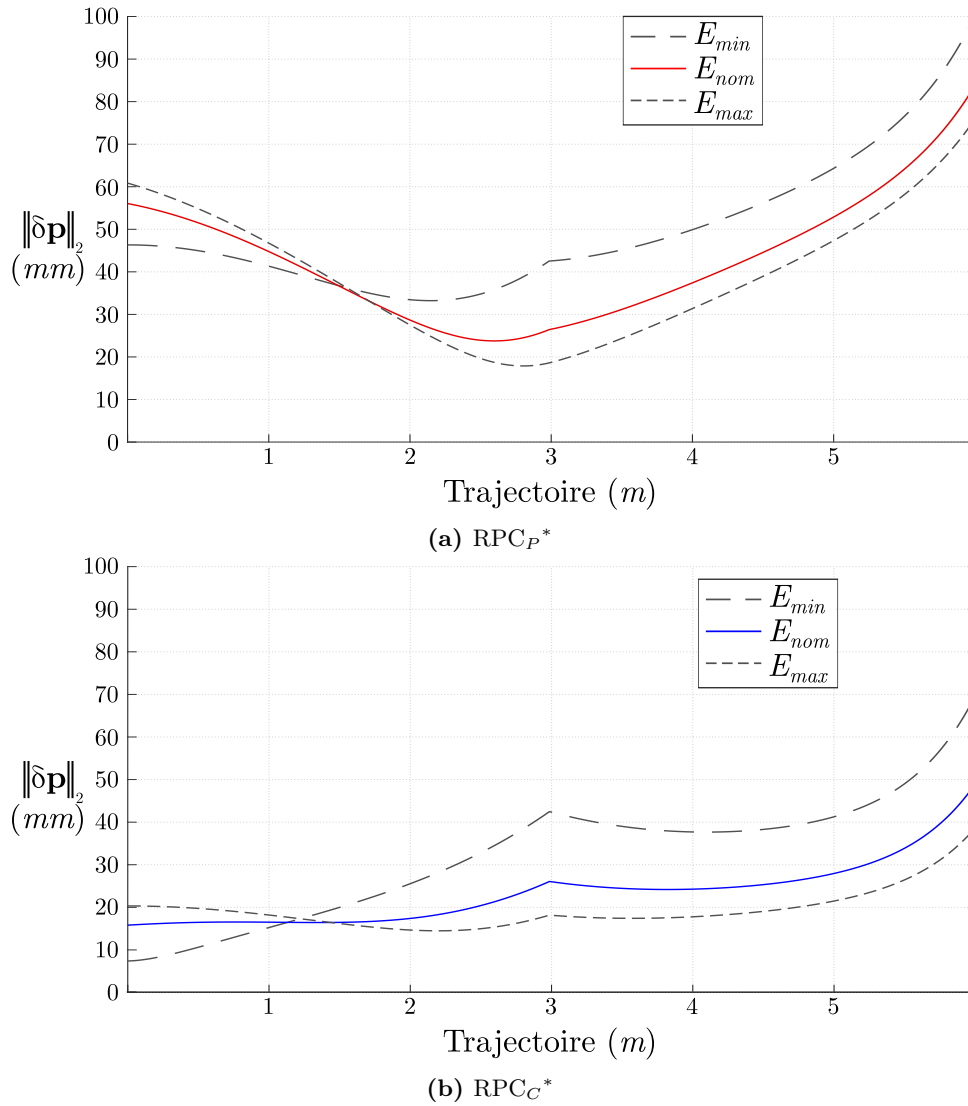


Figure 3.30 – Trajectoire rectiligne théorique dans l' $\text{ER}_C$

L'évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  le long de cette trajectoire théorique est tracée pour  $E_{min} = 67.2\text{GPa}$ ,  $E_{nom} = 102.2\text{GPa}$  et  $E_{max} = 137.2\text{GPa}$ . La figure Fig. 3.31 illustre les résultats obtenus.

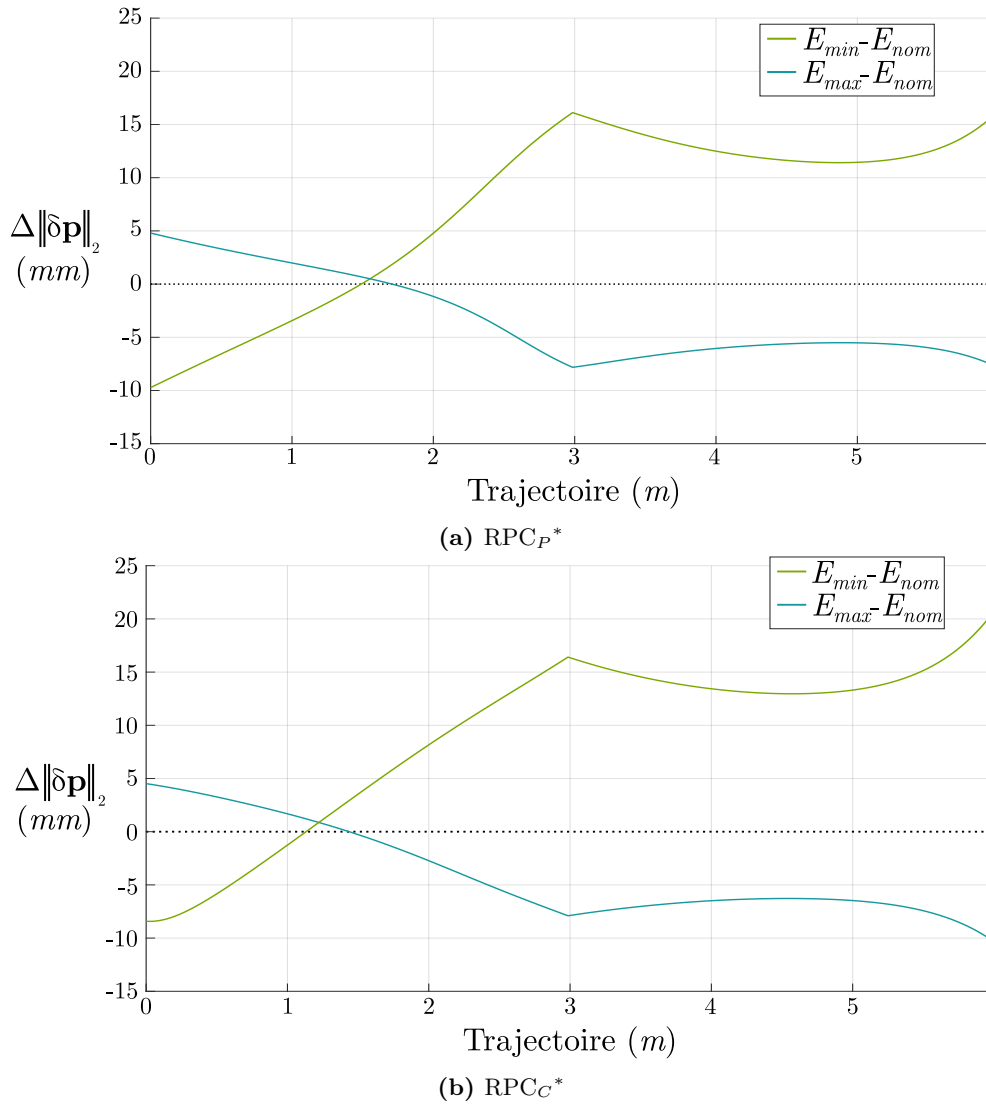
Les notations suivantes sont utilisées dans le reste de l'étude :  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_k}$  avec  $k = [min, nom, max]$  en fonction que le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est évalué avec  $E_{min}$ ,  $E_{nom}$  ou  $E_{max}$ . Pour cette analyse, la valeur choisie de  $E_k$  est identique sur l'ensemble des câbles. Tout d'abord, ce qui est intéressant de remarquer, c'est qu'en bas de l' $\text{ER}_C$ , donc au début de la trajectoire, ce sont les erreurs de position  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}}$  qui sont les plus importantes. Ce n'est donc pas toujours pour le plus grand module de Young des câbles que l'erreur de position est la plus faible. Une inversion entre  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{min}}$  se produit à une position de 1.55m le long de la trajectoire pour le  $\text{RPC}_P^*$  et de 1.23m pour le  $\text{RPC}_C^*$ . C'est au-dessus de ces positions que les configurations avec une élasticité  $E_{max}$  sur les câbles minimisent le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . De plus, pour le même  $E_k$ , le  $\text{RPC}_P^*$  présente des erreurs de position toujours plus élevées que celles du  $\text{RPC}_C^*$ . Cette observation est cohérente avec les résultats de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  illustrés sur la figure Fig. 3.28. Par ailleurs, il apparaît que les variations des  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  du  $\text{RPC}_C^*$  sont de façon générale plus élevées que celles du  $\text{RPC}_P^*$ . Cette observation se retrouve principalement sur la seconde moitié de la trajectoire, à une position supérieure à 3m. Il est



**Figure 3.31** – Évolution de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  en  $mm$  le long de la trajectoire théorique pour  $E_{min}$ ,  $E_{nom}$  et  $E_{max}$

à noter que le changement brutal de courbure à cette position correspond à une modification de configuration de 3 câbles parmi les 4 câbles disponibles des RPC. Pour mieux quantifier les incertitudes, les différences entre les  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{min}}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}}$  avec les  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$ , c'est-à-dire  $\Delta\|\delta\mathbf{p}\|_2 = \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{min}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$  et  $\Delta\|\delta\mathbf{p}\|_2 = \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$ , sont tracées en tout point de la trajectoire sur la figure Fig. 3.32.

Les figures 3.32a et 3.32b permettent de se rendre compte qu'il existe une certaine symétrie de comportement non-linéaire entre  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{min}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$ . De plus, l'incertitude totale sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  n'est pas constante et il existe des positions où elle est fortement réduite. En effet, l'incertitude minimale pour le  $RPC_P^*$  est de  $6.5 \cdot 10^{-1} mm$  à  $1.55m$  le long de la trajectoire et pour le  $RPC_C^*$  elle est de  $1.21mm$  à une position de  $1.13m$ . D'autre part, l'écart le plus important par rapport à la valeur nominale de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ , pour  $E_{nom} = 102.2GPa$ , a lieu pour les deux RPC dans le cas où l'élasticité des câbles est fixée à  $E_{min}$ . Pour le  $RPC_P^*$ , l'écart maximal est de  $16.1mm$  et est atteint à une hauteur



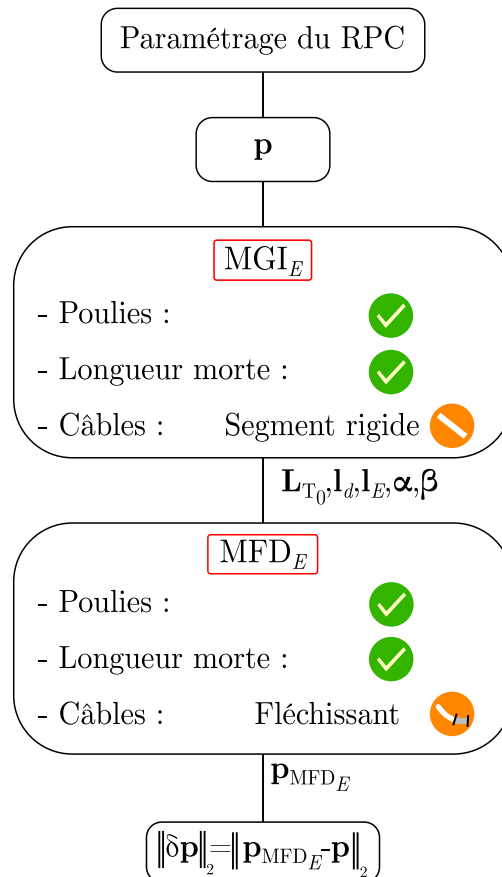
**Figure 3.32** –  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{min}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$  et  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$  en  $mm$  le long de la trajectoire théorique

de  $3m$ . En ce qui concerne le  $RPC_C^*$  la variation la plus grande est de  $20.3mm$  et est située uniquement en fin de trajectoire. Ces observations se retrouvent pour  $\|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{max}} - \|\delta\mathbf{p}\|_2^{E_{nom}}$  avec des valeurs plus faibles. Effectivement, avec  $E_{max}$ , l'écart maximal pour le  $RPC_P^*$  n'est que de  $7.8mm$  et pour ce qui est du  $RPC_C^*$  ce maximum n'est que de  $10.1mm$ . Au vu des résultats obtenus, la variation du module de Young, pouvant apparaître au cours de l'utilisation d'un câble et durant l'entièreté de sa vie, joue un rôle non négligeable sur l'erreur de pose théorique de la PM du RPC. L'incertitude engendrée par cette modification des caractéristiques mécaniques des câbles ne se traduit pas de façon identique en fonction du type d'articulation de poulie choisi. Le RPC équipé de poulies ayant une articulation de type pivot présente, aux regards des résultats, une meilleure robustesse aux variations de l'élasticité des câbles que celui ayant des poulies à joint de cardan. Cependant, l'incertitude sur l'indice global d'évaluation de l'erreur de pose théorique de la PM ne modifie pas le fait que l'architecture minimisant le plus  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  reste le  $RPC_C^*$ .

L'incertitude sur la valeur du module de Young engendre une erreur significative comme nous venons de l'observer grâce à l'analyse précédente. La question que nous nous sommes posée après l'observation de ces résultats est « quelle est la part que jouent les paramètres mécaniques du RPC sur l'erreur de pose théorique ? » C'est au travers des deux prochaines parties que nous nous apporterons des éléments de réponse à cette interrogation.

### 3.4.2 Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun

Pour aller plus loin dans l'analyse des effets des incertitudes mécaniques de la chaîne d'actionnement, nous menons une étude en suivant le même schéma que précédemment. C'est-à-dire, que nous définissons un plan d'expériences à 4 facteurs se basant sur l'indice global d'erreur de pose théorique sur un  $ER_C$  pour pouvoir en extraire les effets et les interactions. Au regard des phénomènes que nous voulons étudier, nous allons augmenter le niveau de modélisation de notre méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique. La méthode précédemment utilisée considérait, dans son modèle le plus complet, les câbles comme des segments élastiques ( $MEGI_E/MEGD_E$ ), or cela réduit fortement l'influence des effets mécaniques liés aux câbles comme la masse linéique  $\mu_0$  du câble, le module de Young  $E$  du câble ou encore la masse de la PM plus celle de sa charge  $m_{PM}$ .



**Figure 3.33** – Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  pour l'analyse des comportements mécaniques de la chaîne d'actionnement du RPC

L'organigramme présenté sur la Fig. 3.33 schématise la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique du point de vue des éléments principaux de la modélisation. Nous ne comparons plus un modèle fortement simplifié sans élasticité et sans poulie ( $MGI_S$ ) avec un modèle étendu avec une élasticité linéaire et des poulies ( $MEGI_E/MEGD_E$ ). Maintenant, le modèle de référence est le  $MGI_E$  (cf. Tab. 2.1). Ce modèle prend en compte l'ensemble des poulies et les longueurs mortes, mais pas l'élasticité dans le câble (cf. section 2.1.2.1 et 2.1.2.2). Il est comparé à un modèle  $MFI_E$  et  $MFD_E$  (cf. Tab. 2.1) de RPC prenant en compte les poulies et les longueurs mortes ainsi que l'élasticité et le fléchissement du câble (cf. section 2.2.2.1 et 2.2.2.2). Nous pouvons illustrer ce processus comme si la longueur de câble totale à déployer pour atteindre une position  $\mathbf{p}$  désirée était calculée avec un modèle géométrique inverse étendu, c'est-à-dire où l'ensemble des paramètres mécaniques des câbles sont négligés. La valeur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  représente alors l'erreur de pose théorique de la PM faite lorsque le fléchissement et l'élasticité du câble sont négligés. Il est à noter que le schéma de résolution du modèle fléchissant direct étendu ( $MFD_E$ ) est maintenant le schéma par optimisation présenté à la section 2.3.1.3. De plus, il est connu que les effets de fléchissement du câble deviennent significatifs pour des longueurs de câble devenant importantes. C'est pourquoi il est décidé de travailler sur un RPC de 15m de longueur sur 15m de hauteur. Une étude basée sur la même technique que celle menée dans la partie 3.3.3 a été conduite. Cette étude permet de déterminer les meilleurs paramètres pour les poulies afin de réduire les erreurs pouvant être engendrées par leurs présences. La première étape pour déterminer  $r_p$  et  $h$  optimaux est de définir les bornes de l'espace de recherche des paramètres.

$$\frac{r_p}{r_c} \leq 20 \quad (3.6)$$

$$r_p + 3r_c \leq h \quad (3.7)$$

Le rayon de poulie doit être au moins 20 fois supérieur au rayon du câble  $r_c$  (cf. Eq.3.6) et nous imposons que le bras de levier doit être supérieur à  $r_p$  plus trois fois à  $r_c$  (cf. Eq. 3.7). Nous pouvons fixer les bornes de recherche de nos valeurs  $r_p$  et  $h$  décrivant la poulie. Nous avons les domaines de variations :  $r_p \in [40mm; 80mm]$  et  $h \in [46mm; 86mm]$ . L'indice nous permettant de juger de l'efficacité du jeu de paramètres testés est définie par l'erreur de pose théorique moyenne  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  sur l'ETS du RPC. Les paramètres mécaniques sont, pour cette étape, fixés aux valeurs médianes des bornes du plan d'expériences présentées par le Tab. 3.9, c'est-à-dire que  $\mu_0 = 0.75kg.m^{-1}$ ,  $E = 102.2Gpa$  et  $m_{PM} = 150kg$ .

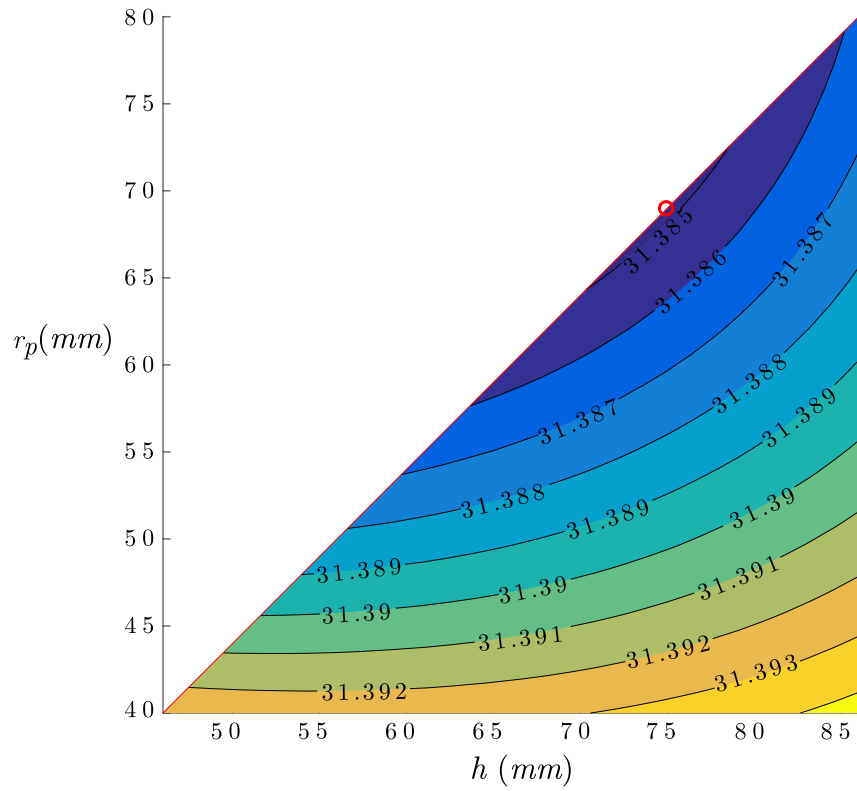
La figure 3.34 nous permet de définir un jeu de paramètres en fonction de l'articulation de la poulie. En effet, la combinaison de  $r_p$  et  $h$  permettant de minimiser  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  sera considérée comme étant optimale. Elle est représentée par un cercle rouge sur les figures 3.34a et 3.34b. La première observation possible est que la variation entre les différentes valeurs de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  est relativement faible, de l'ordre du dixième de millimètre, nous indiquant que les dimensions géométriques des poulies dans le cadre d'un RPC de 15m de côté semblent jouer un effet minime. Les valeurs décrivant géométriquement la poulie sont résumées dans le Tab. 3.8.

	RPC <sub>P</sub>	RPC <sub>C</sub>
$r_p$ (mm)	68.6	80
$h$ (mm)	74.6	86

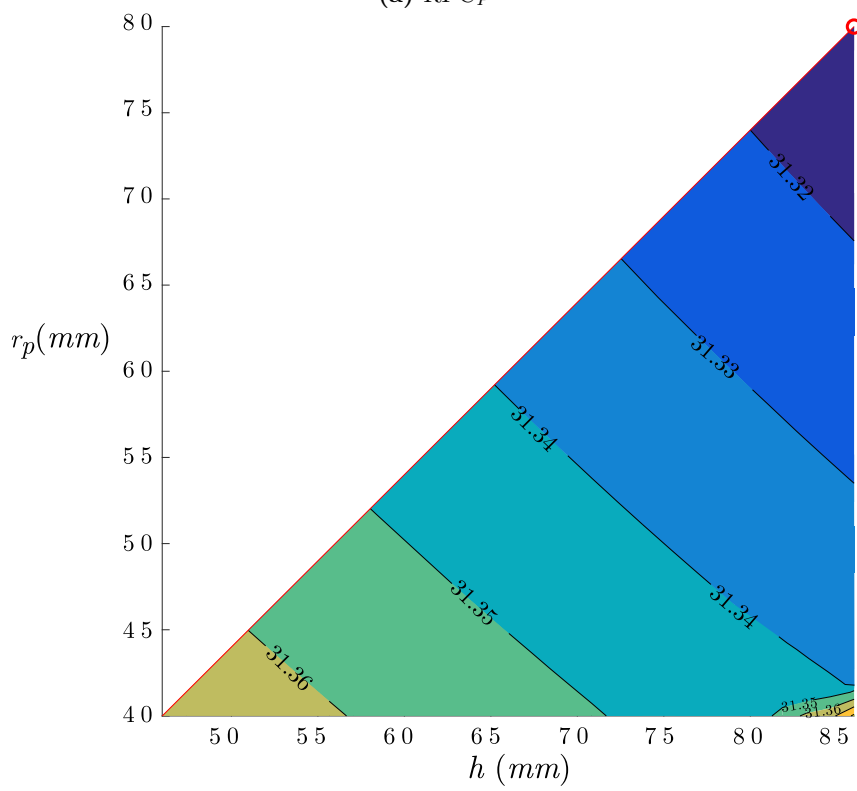
**Table 3.8** – Valeurs optimales des paramètres géométriques de la poulie

Maintenant que la géométrie du cas d'étude est déterminée et que la méthode pour obtenir l'indice de l'erreur de pose théorique utilisée au cours de l'étude des phénomènes mécaniques





(a)  $RPC_P$



(b)  $RPC_C$

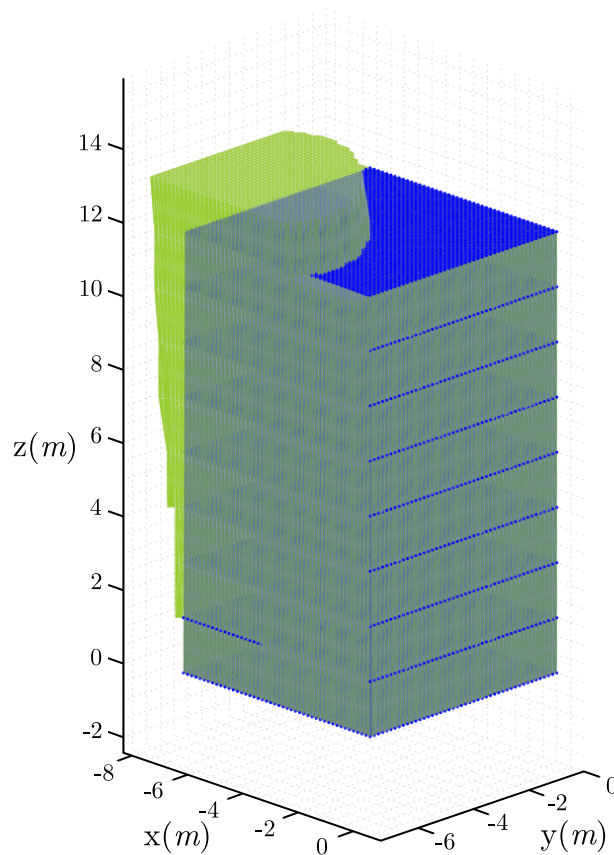
**Figure 3.34** –  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  (mm) en fonction de  $h$  et  $r_p$

est mise en place, nous pouvons nous intéresser aux différents facteurs que nous analyserons dans le plan d'expériences (cf. section 1.3.2). Cette section s'intéresse à la précision du RPC vis-à-vis d'une variation d'un paramètre mécanique de la chaîne d'actionnement. Le premier paramètre est le module de Young  $E$  du câble. Comme cela a déjà été évoqué, il est sujet à une forte variabilité ne pouvant être réellement modélisée. Nous avons vu dans la partie 3.4.1 qu'une variation de  $\pm 35GPa$  autour de sa valeur nominale  $E_{nom}$  peut générer des erreurs importantes sur la pose théorique de la PM. Cette nouvelle étude nous permet de quantifier cet effet par rapport aux autres paramètres mécaniques. De plus, le modèle de référence ayant été redéfini, nous pouvons extraire plus clairement son effet en s'affranchissant de celui de la non-prise en compte de la poulie dans le modèle. Les bornes du plan d'expériences sont les mêmes que précédemment, c'est-à-dire  $E_{min} = 67.2GPa$  et  $E_{max} = 134.4GPa$ . Le second paramètre pouvant fortement varier durant l'utilisation du RPC est la masse transportée. Nous avons vu que les applications d'un RPC sont variées et peuvent même être vouées à changer au cours de sa vie (RPC reconfigurable par exemple). Nous pouvons également imaginer, un RPC utilisé pour de la manutention dans un hangar. Il peut à des moments être chargé et à d'autres vide. Nous avons ainsi fixé la masse à vide  $m_{PM_{min}} = 100kg$ . Pour la borne haute du plan d'expériences nous considérons que le RPC transportera uniquement des masses ne dépassant pas  $100kg$  ce qui signifie une borne supérieure de  $m_{PM_{max}} = 200kg$ . Il est important de rappeler que la PM est toujours considérée comme un point masse afin de s'affranchir des ddl de rotation. Le troisième paramètre mécanique qui peut générer une erreur de pose théorique est la masse linéique du câble  $\mu_0$ . Elle représente la masse au mètre du câble et est donc dépendant de la construction de ce dernier. Au cours de l'étude des catalogues constructeurs de câble nous avons pu observer la grande diversité de  $\mu_0$  pour des valeurs de ruptures proches et un diamètre identique (ici  $d_c = 4mm$ ). En effet, nous pouvons citer le câble  $6 \times 7$  galvanisé de référence 1031 de chez LEVAC ayant une valeur de rupture de  $1060kg$  pour une masse linéique  $\mu_0 = 0.05kg.m^{-1}$ . Pour une valeur de rupture de  $1050kg$  nous pouvons toutefois citer le câble  $19 \times 7$  galvanisé de référence 3445 de l'entreprise *J-Cardan et fils* ayant une masse linéique de  $\mu_0 = 0.1kg.m^{-1}$  soit le double du câble  $6 \times 7$  pour une résistance à la rupture quasi-identique. Cette observation reflète la grande diversité de câbles existants et surtout l'importance du toronnage du câble sur sa masse linéique. Il a été décidé d'intégrer ce facteur au plan d'expériences pour mieux comprendre l'impact de  $\mu_0$  et donc de mieux guider le concepteur dans son processus de choix lors de l'élaboration d'un RPC. Les bornes du plan d'expériences pour  $\mu_0$  sont fixées en comparant les masses linéiques d'un ensemble de câbles de diamètre  $4mm$  et en prenant les deux valeurs les plus distantes. Cela nous donne un  $\mu_{0_{min}} = 0.05kg.m^{-1}$  et un  $\mu_{0_{max}} = 0.1kg.m^{-1}$ . Un quatrième facteur est ajouté à l'étude, à savoir l'articulation de la poulie. L'ajout de ce facteur permet de vérifier si le type d'articulation de la poulie peut avoir un effet sur l'erreur de pose théorique lorsque le modèle calculant  $\mathbf{L}_T$  les prends en compte. Une autre manière de le voir est d'étudier si une articulation de poulie peut réduire les effets des facteurs mécaniques du RPC. Tout comme dans l'étude de la section 3.3 le niveau bas de ce facteur représente une poulie à pivot et le niveau haut une poulie à joint de cardan. Le plan d'expériences final est présenté par le Tab. 3.9.

$N^{\circ}$ Essais	Articulation	$E$	$m_{MP}$	$\mu_0$
1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	+1
3	-1	-1	+1	+1
4	-1	+1	+1	+1
5	-1	+1	-1	+1
6	-1	-1	+1	-1
7	-1	+1	+1	-1
8	-1	+1	-1	-1
9	+1	-1	-1	-1
10	+1	-1	-1	+1
11	+1	-1	+1	+1
12	+1	+1	+1	+1
13	+1	+1	-1	+1
14	+1	-1	+1	-1
15	+1	+1	+1	-1
16	+1	+1	-1	-1
Domaine d'étude				
Niveau -1	Pivot	67.2GPa	100kg	0.05kg.m <sup>-1</sup>
Niveau +1	Joint de cardan	134.4GPa	200kg	0.1kg.m <sup>-1</sup>

**Table 3.9** – Plan d'expériences complet à quatre facteurs

Le plan d'expériences à quatre facteurs présenté sur le Tab. 3.9 propose seize essais différents. Tout comme dans l'étude de la section 3.3, pour comparer ces seize essais nous recherchons l' $ER_C$ . Pour ce faire une première série de calculs est menée sur l'espace total du RPC, c'est-à-dire limité par sa structure. De cela, nous obtenons donc seize volumes atteignables du RPC au sens de l' $ETS$ . Il est alors possible d'extraire un espace régulier propre à chaque configuration et de déterminer l'intersection de ces seize  $ER$  correspondant à l' $ER_C$  (cf. Eq.1.16). Le volume ainsi obtenu est un parallélépipède inscrit dans la structure du RPC. Dans le cadre des 16 essais, c'est le deuxième essai qui se trouve être limitant. En effet, c'est celui présentant la base la plus étroite. Les  $ETS$  possède deux plans de symétrie verticaux, pour gagner en temps de calcul, seul un quart de l' $ER_C$  est représenté sur la Fig. 3.35.



**Figure 3.35** – Représentation de l' $ER_C$  incluse dans le quart de l'espace atteignable de l'essai 2

L' $ER_C$  illustré par la Fig. 3.35, est dit limité en largeur par l'essai 2, mais aussi par l'essai 5. Le carré de base ainsi formé fait  $13.48m$  de coté. La limite verticale de l' $ER_C$  est fixée par une multitude d'essais, le 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12, 14 et 15, à  $12m$  de haut. Il est à noter que nous avons choisi de réduire l'espace de calcul au quart du RPC afin de réduire le temps de calcul tout en augmentant la discrétisation de l'espace d'évaluation. Cela est possible de par la double symétrie présente dans un RPC cubique à 4 câbles.

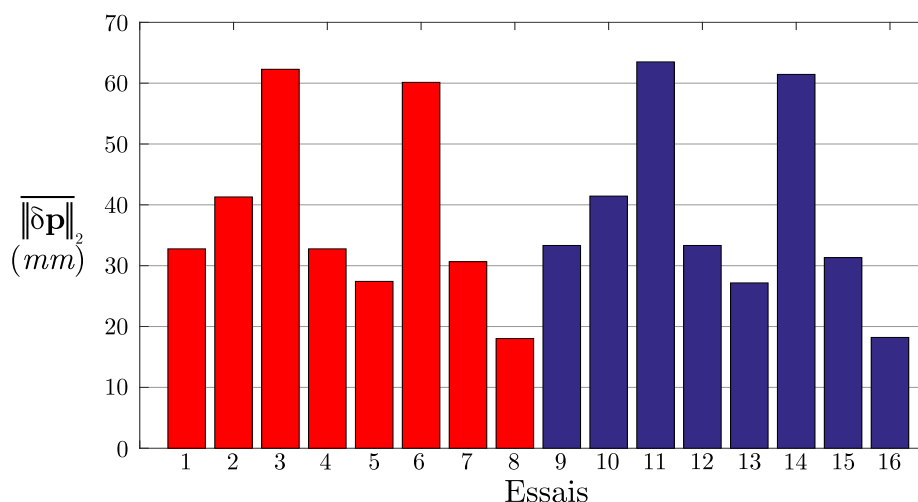
L'analyse des résultats des  $ER$  ainsi que des ETS nous fournit une première base de travail intéressante. Nous pouvons observer que les  $ER$  sont contraints en largeur par une réduction de l'espace statique à la base des RPC. Cette diminution d'aire est due à la limite de tension  $t_{min} = 10.29N$  qui ne peut être respectée pour le câble opposé. En effet, dans la première partie nous considérons uniquement trois câbles parmi quatre (cf. section 3.2.2). Dans cette étude le quatrième câble est pris en compte et génère des efforts sur la PM. Cela implique que lorsque la PM se trouve dans le coin opposé à un câble, ce dernier se relâche totalement, limite donc l'ETS et par conséquent l' $ER$  du RPC. Nous avons remarqué que les essais 11, 12, 14 et 15 génèrent des  $ER$  avec les bases carrées les plus importantes. Cela, indique qu'un RPC avec des poulies équipées d'articulation de type joint de cardan aurait tendance à admettre un ETS plus important.

Nous venons de mettre en place le cadre de notre étude sur la sensibilité de l'erreur de pose théorique aux paramètres mécaniques et avons rappelé la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique. Par la suite nous avons fixé les paramètres géométriques optimaux des poulies en nous inspirant de la méthode précédemment mise en place (cf. section 3.3.3).

La résolution du plan d'expériences nous permet d'extraire les effets et interactions de chaque paramètre. Finalement, un  $ER_C$  a été délimité afin de calculer  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  sur le même espace quelque soit l'essai du plan d'expériences et ainsi obtenir des résultats comparables. Maintenant, que l'ensemble de la procédure a été détaillée, nous pouvons nous intéresser aux résultats du plan d'expériences.

### 3.4.3 Influence des paramètres mécaniques sur l'erreur de pose théorique

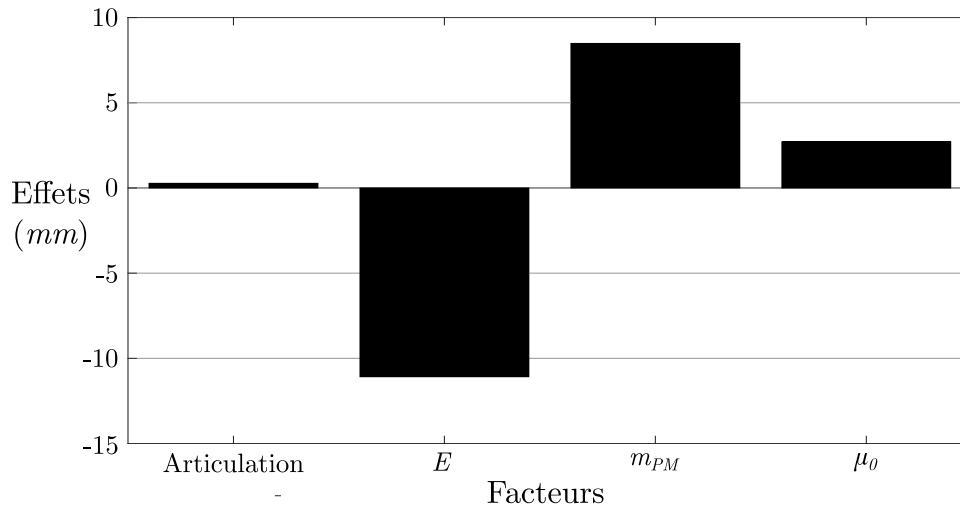
Tout comme la partie analysant les effets des paramètres géométriques de la poulie sur l'erreur de pose théorique, les résultats concernant l'influence des paramètres mécaniques sur l'erreur de pose théorique, peuvent se différencier en deux parties. Tout d'abord les résultats bruts, c'est-à-dire les valeurs de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  pour chaque essais. Par la suite, les effets et interactions de chaque paramètre peuvent être calculés.



**Figure 3.36** – Histogramme des réponses  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  en fonction des seize essais du plan d'expériences concernant les facteurs mécaniques du RPC

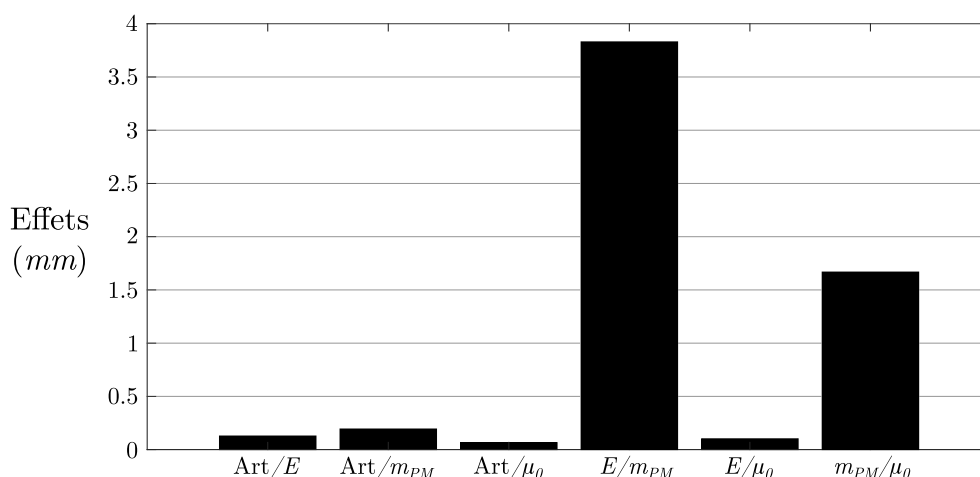
La figure 3.36 présente les valeurs de  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  pour chaque essai du plan d'expériences présenté dans le Tab. 3.9. Les huit premiers histogrammes rouges représentent les configurations munies de poulies à pivot, les huit suivants en bleu sont les RPC équipés de poulies à joint de cardan. D'un point de vue quantitatif, nous observons que la moyenne des  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2}$  pour l'ensemble des RPC équipé de poulie à pivot est sensiblement égale à celle des RPC équipé de poulie à joint de cardan. En effet, dans le premier cas elle est égale à  $38.3mm$  et dans le second à  $38.5mm$ . Cela nous indique que l'articulation semble ne pas avoir d'effet sur les erreurs de pose théorique générées par les phénomènes mécaniques du RPC. Ce très faible écart peut s'expliquer en partie par le fait que nous avons sélectionné les paramètres géométriques optimaux pour chacun des types de poulies. De plus, au regard de l'échelle du RPC ( $L = H = 15m$ ) le type de poulie, quelle que soit l'articulation, semble pouvoir être négligeable. Nous pouvons aussi voir que le type d'articulation ne semble pas interagir avec les autres facteurs étant donné la similitude entre les essais ayant les mêmes niveaux de  $E$ ,  $\mu_0$  et  $m_{PM}$  (1 avec 9, 2 avec 10 et ainsi de suite). La configuration générant le meilleur résultat est la 8 avec une erreur moyenne  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2} = 18.02mm$ . Cependant, son équivalent à poulie à joint de cardan est très proche avec  $\overline{\|\delta\mathbf{p}\|_2} = 18.21mm$ . En effet,  $0.19mm$  de différences entre deux articulations de poulies, à l'échelle d'un RPC de  $15m$  par  $15m$ , est négligeable. Les configurations 8 et 16 correspondent à un câble de rigidité importante, avec une masse  $m_{PM}$

et une masse linéique de câble faibles. Cela est donc relativement logique d'obtenir une erreur moyenne plus faible. Pour ce qui est des configurations les plus critiques, en terme d'erreur de pose théorique moyenne, ce sont les essais 3 et 11 avec un  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  égale à  $62.29mm$  dans le premier cas et  $63.5mm$  dans le second. L'écart d'erreur de  $1.21mm$  reste une valeur très faible vis-à-vis du RPC étudié ( $< 0.01\%$  de la dimension d'un côté du RPC). Ces deux essais sont les opposés des deux meilleures solutions (8 et 16). Ils correspondent à un câble relativement élastique, mais devant supporter une masse  $m_{PM}$  importante et dont la masse linéique  $\mu_0$  est élevée. Ces premières observations sont logiques. En effet, lorsqu'un câble est rigide avec une masse linéique faible et une masse à transporter réduite influence moins l'erreur de pose théorique que lorsque le câble est fortement élastique et que les masses sont élevées. Si nous confrontons ces résultats aux résultats obtenus précédemment lors de l'étude des effets des paramètres géométriques (cf. Fig. 3.22) de la poulie nous pouvons clairement observer que les valeurs des erreurs de pose théorique moyennes ont significativement diminuées. Cela prouve l'intérêt majeur de la prise en compte des poulies de renvois dans le calcul des longueurs de câble totales à déployer. Il est donc important d'intégrer les paramètres géométriques des poulies dans les modèles de commandes afin d'accroître leur précision en positionnement. Nous pouvons approfondir notre analyse à l'aide des effets et interactions entre facteurs pour observer en détails l'influence de chacun.



**Figure 3.37** – Histogramme des effets des facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC

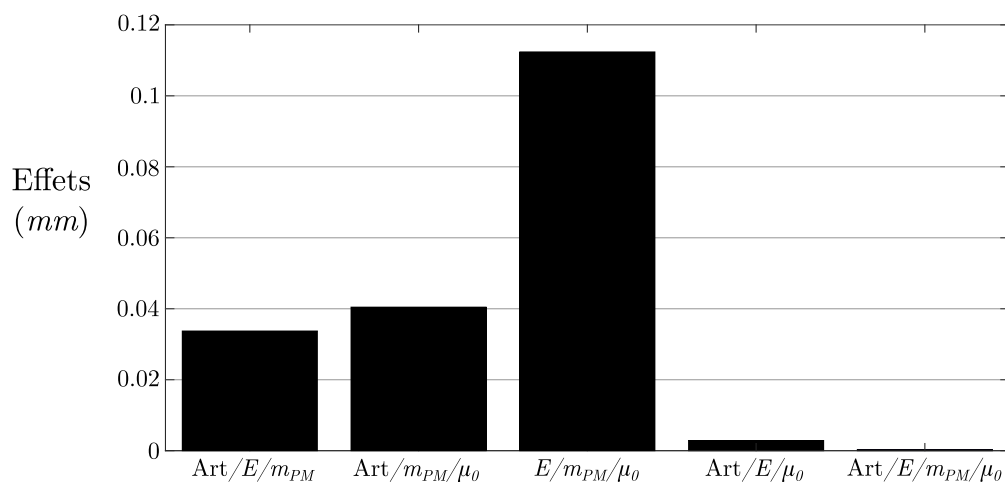
L'étude des effets des facteurs étudiés par le plan d'expériences nous permet de connaître le rôle de chacun d'entre eux de l'erreur globale dans l' $ER_C$  et peut être illustré sous forme d'histogramme comme sur la Fig. 3.37. Ce qui nous interpelle tout de suite est la quasi-absence de l'effet dû à l'articulation de la poulie. Cela confirme notre première observation sur les valeurs de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Si nous continuons notre analyse, nous pouvons voir que l'effet du module de Young  $E$  du câble est négatif ( $11.1mm$  en absolu). Cette valeur négative nous indique que le passage du niveau bas au niveau haut améliore la réponse du plan d'expérience donc  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Ainsi un câble rigide permettra de réduire l'erreur globale de pose théorique du RPC. En ce qui concerne les deux autres effets, nous pouvons observer qu'à l'inverse du module de Young, leurs effets sont positifs indiquant que leur évolution vers le niveau haut engendre une décroissance des performances du RPC en terme d'erreur de pose théorique. L'effet de  $m_{PM}$ , la masse de la PM plus celle de la charge transportée est cependant plus important ( $8.49mm$ ) que celui de la masse linéique du câble  $\mu_0$  ( $2.71mm$ ).



**Figure 3.38** – Histogramme des interactions d'ordre 1 entre les facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC

L'interaction de premier ordre représente l'interaction entre deux facteurs et est représentée sur la Fig. 3.38. De façon globale, la plupart de ces interactions sont négligeables par rapport aux effets principaux. Cependant, deux d'entre elles se démarquent, l'interaction entre  $E$  et  $m_{PM}$  et entre  $m_{PM}$  et  $\mu_0$ . La plus importante est l'interaction  $E/m_{PM}$  ( $3.82mm$ ), sa valeur est supérieure à celle de l'effet de  $\mu_0$  ( $2.71mm$ ). Cela nous indique la forte connexion entre la masse  $m_{PM}$  et l'élasticité du câble  $E$ . En effet, plus un câble est soumis à un effort important plus il s'allonge et donc génère des erreurs de pose théorique importantes. Inversement plus un câble est élastique plus il s'allongera lorsqu'il est soumis à un effort. La seconde interaction non négligeable est celle reliant  $m_{PM}$  et  $\mu_0$ . Elle nous montre que  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  est impactée par l'évolution simultanée des masses.

La figure 3.39 représente les interactions d'ordre 2 et 3 entre les facteurs. Rappelons qu'au regard des valeurs des effets et des interactions d'ordre 1, ces interactions peuvent être négligées.



**Figure 3.39** – Histogramme des interactions d'ordre 2 et 3 entre les facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC

L'étude conduite sur la sensibilité des RPC vis-à-vis des paramètres mécaniques de sa chaîne d'actionnement nous a permis d'observer le rôle important du module de Young

dans l'erreur de pose théorique. Tout d'abord, nous avons pu observer que sur un RPC cubique de  $5m$  de coté une poulie ayant comme articulation une pivot engendre un intervalle d'incertitude plus important sur l'erreur de pose théorique vis-à-vis des variations du module de Young. Cependant, les erreurs de pose théoriques sont plus élevées sur ce  $RPC_P$ . Par la suite, avec l'ajout du fléchissement du câble et la prise en compte des poulies dans le calcul de la longueur totale de câble initial sur un RPC de  $15m$  par  $15m$ , tout en sélectionnant les architectures de poulies optimales, nous avons observé la faible influence de l'articulation de la poulie sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Par ailleurs, la poulie à joint de cardan semble augmenter l'espace statique accessible par la PM. Pour finir, l'effet du module de Young semble être le plus important et son augmentation est bénéfique pour l'erreur globale de pose théorique de la PM. Les dimensions du RPC semble avoir une influence sur les études que nous avons réalisé. La partie suivant met en évidence les résultats de la section 3.4.3 pour différentes tailles de RPC.

### 3.5 Influence de la taille du RPC sur la sensibilité des paramètres géométrico-mécaniques

Pour compléter les conclusions de la partie précédente, il est intéressant d'étudier l'évolution de ces effets en fonction des dimensions du RPC. Nous savons que la prise en compte du fléchissement devient nécessaire lorsque le RPC commence à avoir des longueurs de câble déployées importantes. Cette étude nous permettra de comprendre un peu mieux cette nécessité.

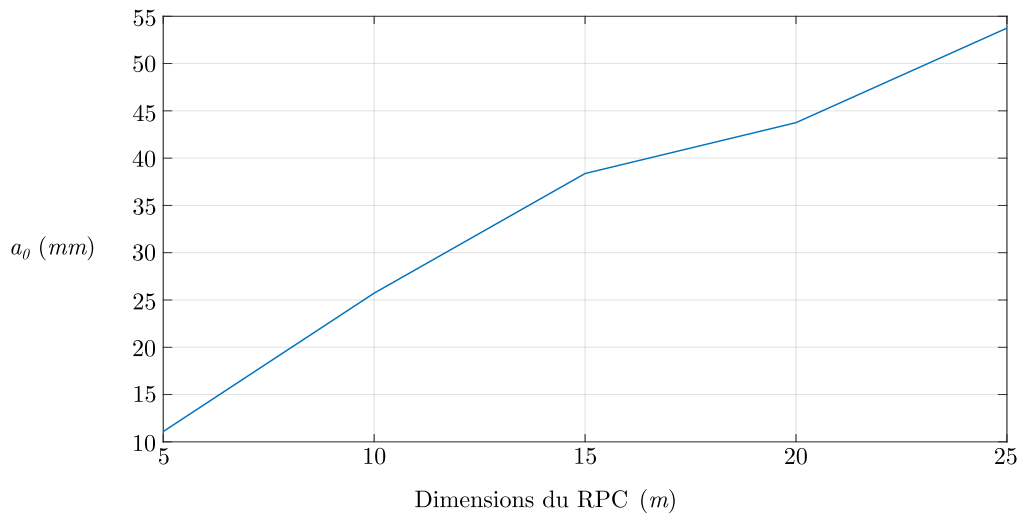
Nous avons appliqué le processus précédemment présenté (cf. section 3.4) en faisant varier la dimension du RPC de  $5m$  par  $5m$  jusqu'à  $25m$  par  $25m$ . Pour ce faire nous avons appliqué la même procédure que dans la section 3.4.2. C'est-à-dire que nous avons avant toute chose déterminé le jeu de paramètres géométriques optimaux des poulies pour chaque dimension de RPC étudiée (cf. Tab. 3.10). Afin de simplifier les notations nous avons associé à l'abréviation RPC sa dimension en indice. Par exemple, un RPC cubique de  $10m$  de coté est noté  $RPC_{10}$ .

Notation du RPC		RPC <sub>5</sub>	RPC <sub>10</sub>	RPC <sub>15</sub>	RPC <sub>20</sub>	RPC <sub>25</sub>
lxLxH (m)		5x5x5	10x10x10	15x15x15	20x20x20	25x25x25
$r_p(mm)$	Pivot	80	80	68.57	40	40
	Joint de cardan	80	80	80	42.86	42.86
$h(mm)$	Pivot	86	86	74.57	46	46
	Joint de cardan	86	86	86	86	86

**Table 3.10** – Valeurs des dimensions du RPC et paramètres géométriques optimaux des poulies qui minimisent le  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$

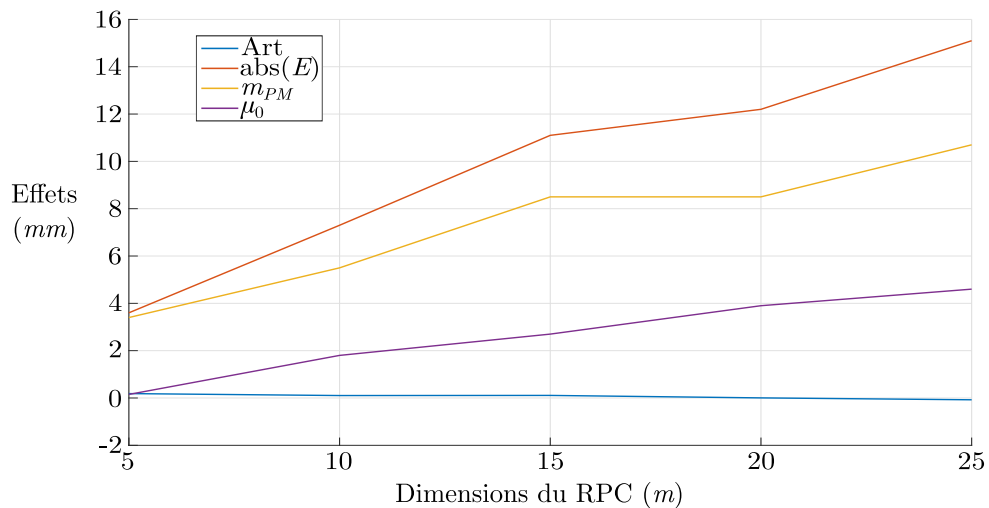
Au regard du Tab. 3.10 plus la taille du RPC devient importante et plus les dimensions optimales des poulies semblent diminuer. Cela est dû au fait que les poulies ont un effet de plus en plus négligeable sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  et se traduit par une variation de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  extrêmement faible quelque soit le jeu de paramètres  $r_p$  et  $h$  choisi. Nous pouvons déterminer un  $ER_C$  propre à chaque dimension de RPC, à l'aide des valeurs du Tab. 3.10, et ainsi mettre en œuvre la méthode d'analyse par plan d'expériences avec les mêmes facteurs que dans le Tab. 3.9. Nous pouvons observer l'évolution de la moyenne de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  pour chaque plan d'expériences. C'est-à-dire, que pour chaque dimension de RPC les seize essais sont réalisés et de ces seize essais nous pouvons en extraire une moyenne générale, qui est représentée sur la Fig. 3.40. Dans la section 1.3.2 du chapitre 1 cette valeur est notée  $a_0$ .





**Figure 3.40** – Évolution de  $a_0$  en fonction de la dimension du RPC de forme cubique

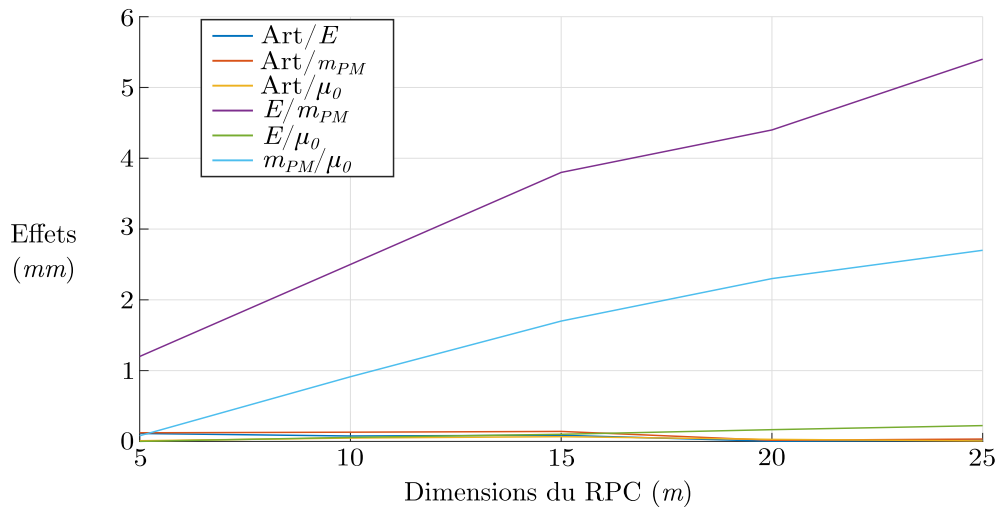
Sur la figure 3.40, nous pouvons observer une augmentation des erreurs de pose théorique en fonction de l'augmentation de la taille du RPC. Effectivement, plus le RPC est grand plus les longueurs de câbles totales déployées sont importantes, représentant donc une source d'erreur potentielles plus élevée. Nous pouvons tracer l'évolution des effets (cf. Fig. 3.41) et des interactions (cf. Fig. 3.42) en fonction des dimensions du RPC pour pouvoir analyser le rôle que chaque facteur. En toute logique les effets de chaque facteur seront croissants étant donné l'augmentation des erreurs de pose due aux dimensions du RPC.



**Figure 3.41** – Évolution de la valeur des effets des facteurs du plan d'expériences en fonction des dimensions du RPC

La figure 3.41 montre l'évolution des effets calculés à l'aide du plan d'expérience Tab. 3.9 en fonction des dimensions de la structure du RPC. Afin de rendre l'ensemble plus lisible et comparable nous affichons la valeur absolue de l'effet du module de Young. Premièrement, l'effet de  $E$  est constamment supérieur aux autres. Ainsi les observations précédemment faites, dans la littérature et par nous, semblent concorder quelque soit la dimension du RPC. Un des points intéressant à relever est que sa valeur est proche de celle de l'effet de  $m_{PM}$

pour un  $\text{RPC}_5$ . Cela nous indique que les deux facteurs ont le même degré d'importance dans les RPC de plus petite dimension. Par la suite, leur valeur se différencie tout en suivant une évolution croissante avec une pente moyenne plus importante pour l'effet du module de Young. En ce qui concerne l'effet de  $\mu_0$ , la masse linéique du câble, nous pouvons visualiser clairement le moment où il devient nécessaire de modéliser le câble avec un profil fléchi et non plus juste élastique. Effectivement, pour un  $\text{RPC}_5$  il est évident que  $\mu_0$  semble négligeable alors que par la suite son effet croît significativement, rendant sa prise en compte nécessaire dans les modèles pour les RPC de plus grande dimensions. Le rôle de l'articulation apparaît clairement négligeable au regard des effets des autres facteurs. Nous pouvons voir que pour un  $\text{RPC}_5$  l'effet de l'articulation peut avoir une influence significative, mais dès que nous passons à des valeurs de RPC supérieures cet effet diminue et tend vers zéro. Cela est très certainement dû au fait que nous prenons les poulies en compte dans le calcul des longueurs totales déployées permettant de limiter significativement l'erreur de longueur de câble initiale. Cela démontre encore une fois l'importance de calculer la longueur totale de câble nécessaire pour une pose  $\mathbf{p}$  en prenant les poulies en compte. Il est possible de traiter ces courbes à l'aide d'une régression linéaire afin de connaître leur pente et donc d'observer leur « vitesse » d'accroissement. La pente de l'effet de  $E$  est alors égale à  $6.10^{-4}$ , ce qui est clairement plus important que celle de la masse  $m_{PM}$  qui est de  $4.10^{-4}$ . L'effet du module de Young gagne en importance plus vite que l'effet de  $m_{PM}$  ce qui confirme nos premières observations. L'effet de  $\mu_0$  présente une pente plus faible, de  $2.2.10^{-4}$ , mais son évolution n'est donc pas négligeable pour des RPC de dimensions importantes. Nous avons vu que certaines interactions d'ordre 1 entre facteurs ne sont pas négligeables (cf. Fig. 3.38). Leur évolution en fonction des dimensions du RPC est représentée sur la Fig. 3.42.



**Figure 3.42** – Évolution de la valeur des interactions d'ordre 1 des facteurs du plan d'expériences en fonction de la dimension du RPC

L'interaction entre  $E$  et  $m_{PM}$ , représentée en violet sur la Fig. 3.42, est la plus forte sur l'ensemble du domaine de l'étude, ce que nous avons déjà pu remarquer sur le  $\text{RPC}_{15}$ . Pour un  $\text{RPC}_5$  il est intéressant de remarquer que cette dernière est l'unique interaction non négligeable. Cela démontre encore une fois le faible intérêt de considérer la masse linéique du câble pour des RPC de petites dimensions. Cependant, l'interaction entre  $m_{PM}$  et  $\mu_0$  croît en fonction de la dimension du RPC, indiquant que modéliser un câble par le modèle d'Irvine présente un intérêt pour la précision du RPC.

Cette section concerne l'évolution des effets des paramètres mécaniques du RPC, ce qui aide en fonction des dimensions du RPC à mieux appréhender les phénomènes mécaniques

de la chaîne d'actionnement. Le moment où il est nécessaire de faire un changement dans la modélisation du câble est clairement identifié par augmentation de l'effet de  $\mu_0$  pour des RPC ayant des structures de l'ordre de la dizaine de mètres. Effectivement, le module de Young et la masse de PM plus celle de la charge transportée jouent un rôle significatif quelque soit la dimension du RPC ce qui n'est pas le cas pour la masse linéique du câble. De plus, nous avons pu confirmer que le type d'articulation présente un effet sur  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$  insignifiant quelque soit l'échelle du RPC, lorsque nous calculons  $\mathbf{L}_T$  avec un  $MGI_E$ . Cela est encore plus représentatif quand les dimensions du RPC augmentent.

### 3.6 Conclusion

Les études et analyses de ce chapitre avaient comme objectif d'analyser la sensibilité de RPC vis-à-vis de plusieurs paramètres géométriques et mécaniques. Pour cela, il a été choisi comme cas d'étude des RPC à 3ddl. La PM a été ramenée à un point masse afin de s'affranchir des ddl de rotation dus à l'orientation  $\mathbf{o}$  de la PM. Les études de ce chapitre se sont appuyées sur les modèles et méthodes développées dans le chapitre 2.

Ce chapitre a montré les influences de différents paramètres sur l'erreur de pose théorique des RPC, en allant des paramètres géométriques induits par la poulie jusqu'à l'effet de l'échelle du RPC en passant par l'influence des paramètres mécaniques de la chaîne d'actionnement. Le protocole de conception d'une poulie ayant comme articulation principale un joint de cardan a tout d'abord été présenté, pour ensuite être comparé mécaniquement à l'aide d'éléments finis, à une poulie standard à pivot. Dans un second temps, deux cas d'étude ont été mis en place, nous donnant l'occasion d'analyser l'influence de la forme des RPC sur la répartition des erreurs de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Cette partie nous a permis, par la suite, de nous focaliser sur une seule architecture de RPC à 4 câbles. Les effets des paramètres  $r_p$ ,  $h$  décrivant géométriquement la poulie ainsi que son articulation ont ensuite été analysés à l'aide d'un plan d'expériences prenant comme réponse la moyenne des erreurs de pose théorique  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Lorsque les effets de ces paramètres ont été analysés, l'étude s'est orientée vers l'influence des paramètres mécaniques induits par la chaîne d'actionnement du RPC, c'est-à-dire  $E$ ,  $m_{PM}$  et  $\mu_0$  tout en gardant le type d'articulation de l'étude afin de comprendre son rôle dans l'ensemble. Cette dernière étude a été étendue à une série de dimension de RPC pour observer l'influence de la taille du RPC sur l'effet des paramètres mécaniques.

Ce chapitre a apporté un certain nombre de réponses, autant sur la compréhension des phénomènes en jeu dans un RPC que dans la conception de ces derniers. Si nous reprenons la chronologie du chapitre, il a été vu un processus de conception de poulie et un premier design pour la nouvelle poulie équipée d'un joint de cardan en guise d'articulation principale. Cette dernière a été présentée, vis-à-vis d'une poulie standard, l'intérêt de réduire considérablement le moment de flexion présent dans le bras de levier ainsi que les efforts appliqués sur l'ensemble du système et surtout les points d'ancrage de la poulie à la structure. Une première étude sur la valeur de l'erreur de pose théorique entre deux types de RPC nous a appris que la forme d'un RPC semble de ne pas jouer d'effet significatif sur la répartition des erreurs pour des dimensions structurales identiques. Cela nous a permis d'orienter le reste des études sur une seule configuration de RPC pleinement-contraint en actionnement. De plus, ces premiers résultats, semblent indiquer une réduction des erreurs de pose théorique dans le cas des RPC équipés de poulie à joint de cardan ainsi qu'une capacité à générer des volumes de travail plus grand pour une erreur de pose théorique maximale donnée. Le plan d'expériences portant sur l'étude des paramètres géométriques de la poulie indique un fort lien entre les différents facteurs. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs est nécessaire lors de la sélection des poulies pour un RPC. Nous avons vu qu'il existe des jeux de paramètres géométriques optimaux permettant une réduction significative de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . L'étude sur l'élasticité des câbles semble indiquer une diminution de l'amplitude de l'incertitude de l'erreur de pose théorique pour des poulies à pivot vis-à-vis des variations du module de Young du câble. Toutefois la

---

poulie à joint de cardan reste moins influente au regard de  $\|\delta\mathbf{p}\|_2$ . Le changement de modèle déterminant la longueur totale de câble à déployer a permis de réduire l'erreur de pose théorique imputable aux présences de poulies et donc d'analyser les phénomènes mécaniques plus en détail. Cette étude, a mis en lumière le très faible effet de l'articulation de la poulie lorsque  $\mathbf{L}_T$  est calculé à l'aide du  $\text{MGI}_E$  ainsi que le rôle crucial que joue la variation du module de Young du câble dans l'erreur de pose théorique. Dans le cadre d'un RPC ayant des dimensions plus faibles la modélisation du fléchissement du câble est superflu, mais celle de l'élasticité linéaire, fonction de  $E$  et  $m_{PM}$ , reste nécessaire pour accroître la précision de pose de la PM. Lorsque les dimensions du robot deviennent plus grandes il est fortement conseillé de prendre en compte  $\mu_0$  dans les modèles.

Au regard des résultats nous indiquant l'importance du module de Young du câble dans l'erreur de pose théorique et en connaissant la quasi impossibilité de déterminer exactement cette valeur au cours du temps, le chapitre suivant s'intéresse, à l'étude de la pose de la PM vis-à-vis d'une variation indépendante de  $E$  pour chaque câble. De plus, une méthode de détermination des points de fixation  $A_i$  des poulies réduisant l'erreur de pose théorique de la PM est présentée et illustrée. Il est à noter qu'au vu des conclusions de ce chapitre les travaux suivants se porteront donc sur un RPC à quatre câbles de  $15m$  par  $15m$  nous semblant relativement représentatif au niveau des effets des paramètres élasto-géométriques ainsi qu'aux cas d'applications existants [Iza+17; Iza+18; Nur+17]. Nous considérerons que le RPC est équipé de poulie à joint de cardan car l'effet de l'articulation semble négligeable et qu'elle offre de bons résultats en terme de tenue mécanique et de précision de la PM.



# 4

## Étude de l'influence de l'hystérésis du module de Young des câbles

4.1	Influence de la non-linéarité du module de Young des câbles . . . . .	120
4.1.1	Prise en compte du phénomène d'hystérésis . . . . .	120
4.1.2	Incertitude sur l'erreur de pose théorique . . . . .	125
4.2	Recherche des points d'ancrages des poulies minimisant l'erreur de pose théorique	134
4.2.1	Procédure d'optimisation de la structure du RPC . . . . .	136
4.2.2	Structure optimale du RPC minimisant l'erreur de pose théorique . . .	136
4.3	Conclusion . . . . .	146

Dans ce chapitre, nous cherchons à modéliser et étudier l'influence du phénomène d'hystérésis affectant les câbles. Dans le cadre d'un RPC, cette évolution non-linéaire du module de Young affecte la pose de la PM. En effet, les études d'influences présentées dans le chapitre précédent ont mis en lumière le rôle prépondérant du module de Young du câble dans les erreurs de poses de la PM. Cela nous indique qu'une variation de ce dernier peut être source d'erreurs de poses théoriques importantes. De plus, au vu de cette variabilité du module de Young, chacun des câbles s'en trouve affecté indépendamment. Cela implique des dissymétries au niveau des comportements mécaniques des câbles. À notre connaissance cette dissymétrie n'a jamais été étudiée auparavant.

Les apports majeurs de ce chapitre sont l'élaboration et la présentation d'une méthode numérique de prise en compte de module de Young propre à chaque câble composant le RPC. Une étude de l'erreur de pose théorique générée par l'incertitude sur le module de Young de chacun des câbles est par la suite développée. Il est alors possible de déterminer un volume d'incertitude de l'erreur de pose théorique dû au phénomène d'hystérésis et à la non-linéarité du module de Young des câbles. De plus, une méthode de recherche des points d'ancrage des poulies minimisant l'incertitude de l'erreur de pose théorique de la PM vis-à-vis de l'hystérésis est présentée. Ce chapitre se focalise tout d'abord sur l'étude de l'influence de l'hystérésis sur la pose de la PM pour une variabilité du module de Young propre à chacun des câbles. Dans un second temps, il est cherché à minimiser l'erreur de pose de la PM engendrée par les câbles en cherchant les points d'ancrage optimaux  $A_i$  des poulies de renvoi.

## 4.1 Influence de la non-linéarité du module de Young des câbles

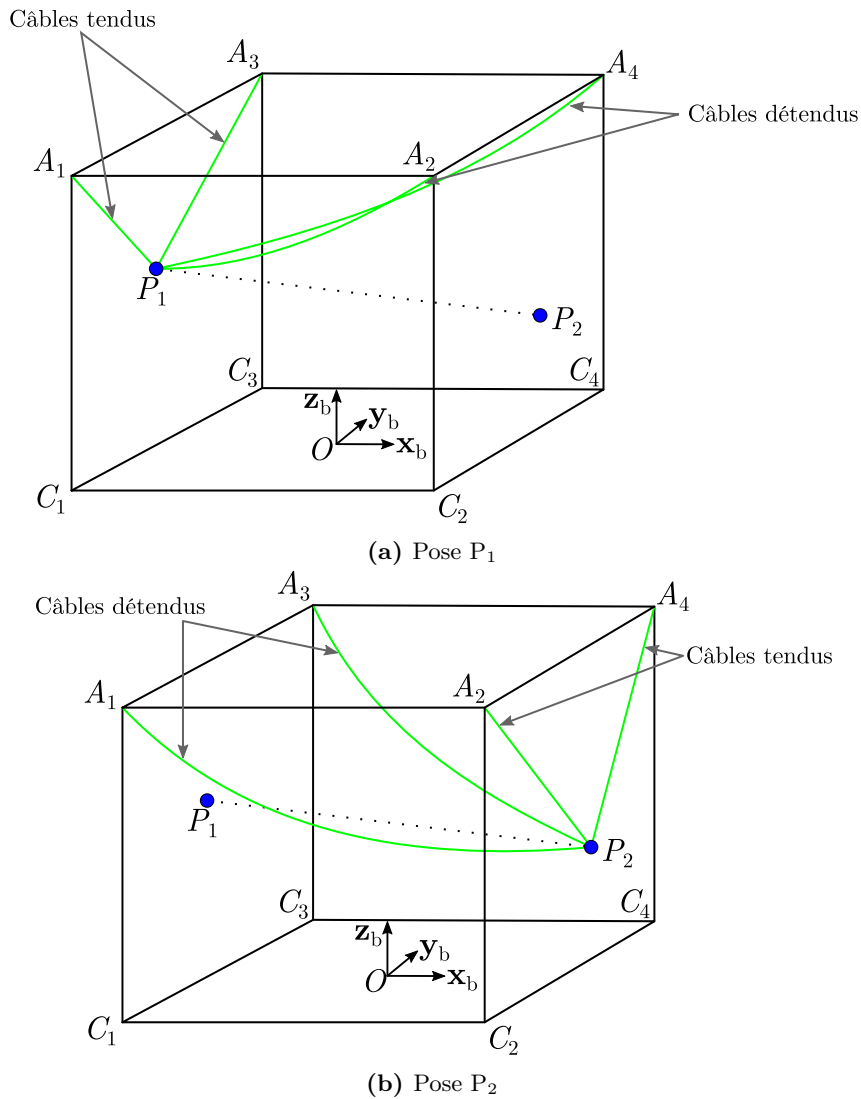
Comme nous avons pu le constater dans le chapitre 1, un câble n'est pas un solide indéformable, homogène et ayant des propriétés mécaniques invariables au cours du temps et de son utilisation. A contrario, un tube métallique est considéré isotrope, homogène et aux propriétés mécaniques constantes, c'est-à-dire qu'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions, que les éléments le constituant sont de même nature et que ces propriétés mécaniques ne varient pas dans le temps. Dans le cas d'un câble, il ne peut être uniquement soumis qu'à des efforts de traction sous peine de flambage immédiat. De plus, un câble n'est ni isotrope ni homogène de par sa construction (cf. Fig. 1.8), à l'exception des câbles synthétiques de type DYNEEMA. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, ces particularités ont mené à différents niveaux de modélisation. Cependant, dans l'utilisation et la modélisation des câbles dans le cadre des RPC, les incertitudes aléatoires des paramètres mécaniques liés aux câbles sont rarement prises en compte et toujours de manière indépendante. Cette section s'intéressera à leurs modélisations au travers tout d'abord d'une définition du cadre de l'étude et de la méthodologie mise en œuvre. Par la suite, il sera analysé une série de résultats nous permettant de prendre la mesure de l'influence de ces paramètres sur l'erreur de pose théorique de la PM.

### 4.1.1 Prise en compte du phénomène d'hystérésis

Nous avons précédemment étudié l'influence sur l'erreur de pose théorique d'une variation du module de Young des câbles (cf. section 3.4). Cependant, cette variation a été supposée identique sur l'ensemble des  $m$  câbles. Dans cette partie nous cherchons à définir la conséquence de l'hystérésis des câbles dans le cadre d'un RPC. Puis, nous présenterons la méthode nous permettant d'étudier l'influence de ce phénomène sur la précision des RPC. Pour cela, nous considérerons chaque module de Young des câbles ayant une valeur  $E_i$  spécifique,  $i = 1, \dots, m$ .

#### 4.1.1.1 Définition de l'hystérésis et de l'incertitude sur le module de Young du câble dans le cadre d'un RPC

Les RPC sont des systèmes utilisant des câbles de façon peu conventionnelle. Classiquement, un câble utilisé en construction civile a un chargement statique. Nous pouvons citer les grues qui ont un fonctionnement dynamique, sans être une architecture parallèle, où une masse est suspendue à l'extrémité d'un câble vertical limitant grandement les mouvements internes de ses torons. Dans le cadre d'un RPC les efforts appliqués aux câbles peuvent varier rapidement lors d'une trajectoire donnée (cf. Fig. 4.1). Or cette variation de tension n'a pas une répercussion linéaire sur la déformation du câble à cause du phénomène d'hystérésis évoqué dans la section 1.2.4. La figure 4.1 illustre une évolution de l'état des câbles pour une trajectoire rectiligne.

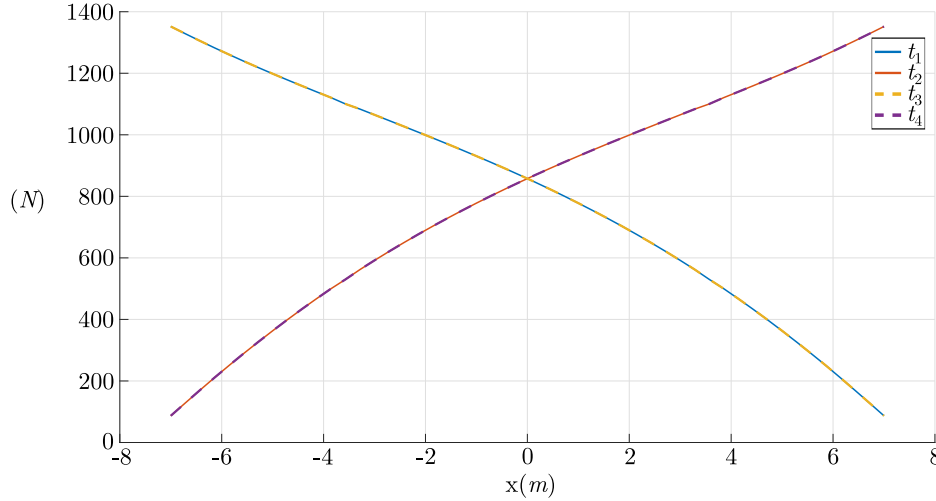


**Figure 4.1** – Représentation de l'évolution de l'état des câbles en fonction d'une trajectoire

Nous observons qu'aux extrémités  $P_1$  et  $P_2$  de la trajectoire rectiligne de la Fig. 4.1 les câbles changent d'état de tension. Il est à noter que la Fig. 4.1 est une représentation exagérée de la déformation des câbles afin d'illustrer l'évolution des tensions dans les câbles. La figure 4.2 montre, en utilisant la TDA (cf. section 2.3.1.3), l'évolution des tensions des câbles le long de la trajectoire rectiligne entre  $P_1 = [-7, 0, 7.5]$  et  $P_2 = [7, 0, 7.5]$ . Lors du déplacement de la PM du point  $P_1$  vers le point  $P_2$  les câbles 2 et 4 se tendent afin de mettre en mouvement la PM, les faisant passer de détendus à tendus et inversement pour les câbles 1 et 3. Comme nous l'avons vu au travers de la Fig. 1.9 le câble lors d'une phase de détente ou de tension ne présente pas la même évolution de déformation impliquant donc un module de Young  $E$  variant. Au vu de ces observations, lors d'une trajectoire de la PM, les câbles du RPC se retrouvent donc avec des modules de Young qui varient indépendamment les uns des autres, notés  $E_i$  où  $i = 1, \dots, m$ . Dans les modèles précédemment utilisés, ainsi que dans ceux mis en œuvre dans la littérature,  $E_i$  est approximée à une grandeur nominale, notée  $E_{nom}$ . Cette grandeur nominale est déterminée à l'aide de l'Eq. 1.18 et est identique pour la totalité des  $m$  câbles. Dans la littérature où une variation de  $E$  est considérée, son étude se



résume à faire varier sa valeur de façon similaire pour tous les câbles (cf. Chapitre 3). C'est au travers de ces observations que nous avons décidé d'étudier l'erreur de pose théorique de la PM due à la variabilité des modules de Young.



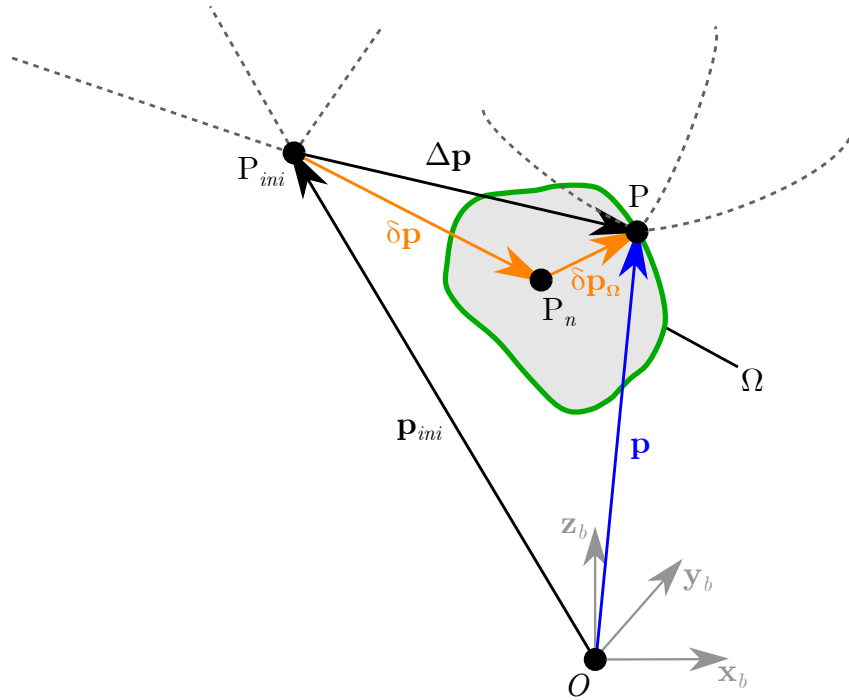
**Figure 4.2** – Évolution des tensions utiles  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , dans les câbles le long d'une trajectoire rectiligne entre  $P_1$  et  $P_2$

#### 4.1.1.2 Procédure d'optimisation mise en place

L'objectif de ce chapitre est de travailler sur l'influence et la réduction de l'effet de l'hystérésis du câble sur l'erreur de pose théorique de la PM. Il nous est donc indispensable de développer une méthode pour quantifier cette influence. Cette partie présente le modèle mis en place pour cette étude. Comme cela a déjà été évoqué, l'hystérésis de l'élasticité des câbles est un phénomène difficile à modéliser. La détermination en temps réel du module de Young est donc pour le moment impossible. Ainsi, enrichir les modèles avec un module de Young  $E_i$  propre à chaque câble sans connaître sa valeur exacte pose problème. Pour cela nous nous sommes tournés vers l'étude des cas extrêmes, c'est-à-dire déterminer le jeu de modules de Young  $\mathbf{E} = [E_1, \dots, E_m]^T$ , maximisant ou minimisant l'erreur de pose théorique de la PM.

Dans un premier temps, différentes erreurs de pose peuvent être distinguées. La figure 4.3 schématise et formalise ces notations. La position  $P_{ini}$  définie par le vecteur de pose  $\mathbf{p}_{ini}$  décrit la position désirée de la PM. Lorsque les longueurs de câble totales sont calculées avec un modèle  $MGI_E$  (cf. Tab. 2.1) et utilisées comme données d'entrée au  $MFD_E$  (cf. Tab. 2.1) avec un module de Young nominal  $E_{nom}$ , la position nominale calculée est notée  $P_n$ . L'erreur réalisée entre les deux positions est représentée par le vecteur  $\delta\mathbf{p}$ , de norme euclidienne  $\delta p$ . Jusqu'à présent c'est cette erreur que nous analysons dans nos études comme étant l'erreur de pose théorique. À partir de maintenant, voulant étudier l'influence de l'hystérésis nous admettons que la PM se situe dans un espace  $\Omega$  représentant le volume d'incertitude de l'erreur de pose théorique de la PM. La position  $P$ , décrite par le vecteur de pose  $\mathbf{p}$ , représente la position réelle lorsque les modules de Young des câbles ont une valeur  $E_i$  comprise entre une valeur minimale  $E_{min}$  et une maximale  $E_{max}$ . L'erreur entre  $P_n$  et  $P$  est noté  $\delta\mathbf{p}_\Omega$  et représente l'erreur due à la variabilité des  $E_i$  propre à chaque câble. L'erreur entre la position initiale  $\mathbf{p}_{ini}$  et  $\mathbf{p}$  est notée  $\Delta\mathbf{p}$  et s'exprime comme :

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{ini} = \delta\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}_\Omega \quad (4.1)$$



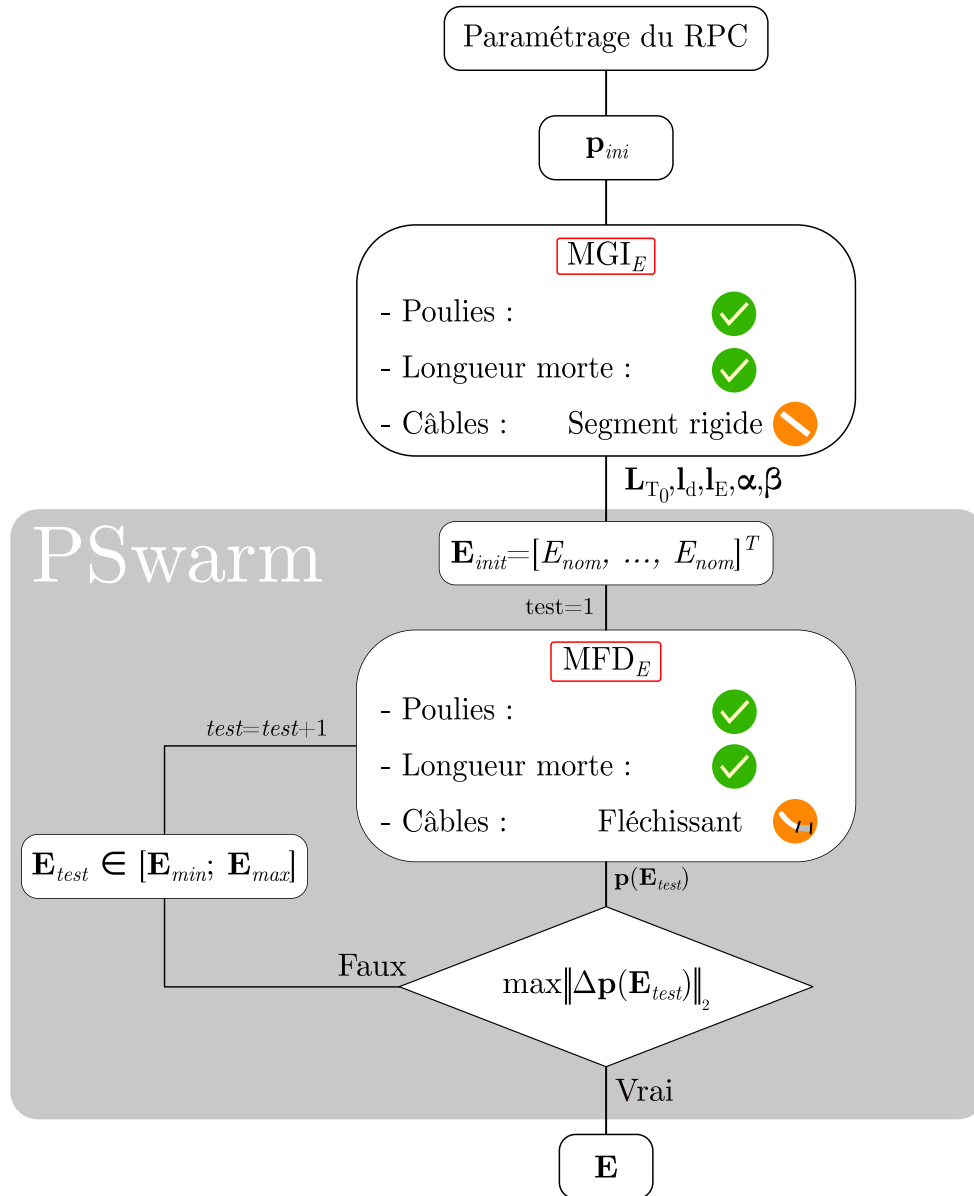
**Figure 4.3** – Schématisation des erreurs de pose théoriques de la PM dues aux incertitudes du module d'Young  $E_i$  propre à chaque câble  $i$

La position  $P$  peut prendre une infinité de coordonnées incluses dans  $\Omega$ . C'est pourquoi nos études se focalisent premièrement sur la frontière de  $\Omega$ . Puis, plus précisément sur la valeur maximale de  $\Delta p$  notée  $\Delta p_{max}$  et de norme euclidienne  $\Delta p_{max}$ . Cette valeur nous permet de connaître l'erreur de pose théorique maximale pour une position désirée. La formulation de ce problème se traduit par un problème d'optimisation à  $m$  paramètres, correspondant dans notre cas d'étude à  $m = 4$ . Ce problème est exprimé par l'Eq. 4.2.

$$\begin{cases} \Delta p_{max} = \min_{\mathbf{E}}(-\Delta p) \\ \text{Contraintes :} \\ E_i \geq E_{min} \\ E_i \leq E_{max} \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\Delta p$  représente la norme euclidienne de l'erreur de pose théorique  $\Delta \mathbf{p}$ . L'algorithme d'optimisation utilisé dans cette section est *PSwarm* évoqué dans la section 1.3 du chapitre 1. Le processus de résolution pour l'obtention du jeu de modules de Young  $\mathbf{E}$  maximisant la norme euclidienne  $\Delta p$  de l'erreur de pose théorique  $\Delta \mathbf{p}$  est représenté sur la Fig. 4.4.

La méthode mise en œuvre dans cette section est fondamentalement la même que celle de la Fig. 3.33 à la nuance près que le  $MFD_E$  est inclus dans une fonction d'optimisation. *PSwarm* est un algorithme d'optimisation, il recherche la convergence vers un point stationnaire de la valeur de sa fonction objectif. Pour ce faire, une multitude d'itérations, en faisant varier les valeurs des paramètres d'optimisation, doit être réalisée. Dans notre cas ces paramètres sont les modules de Young des câbles notés  $\mathbf{E} = [E_1, \dots, E_m]^T$ . Pour permettre de réaliser la première résolution du  $MFD_E$  servant de référence, il est nécessaire de fournir à l'algorithme *PSwarm* des valeurs initiales pour les paramètres d'optimisation. Ces valeurs sont  $\mathbf{E}_{init}$  les valeurs initiales des modules de Young des câbles,  $\mathbf{L}_{T_0}$  le vecteur des longueurs totales des câbles calculées avec le  $MGI_E$ ,  $\mathbf{l}_E$  le vecteur regroupant les longueurs utiles des câbles étendus



**Figure 4.4** – Organigramme de la méthode d'obtention du jeu de modules de Young  $\mathbf{E}$  générant l'erreur de pose théorique maximale  $\Delta p_{max}$

et  $\mathbf{l}_d$  le vecteur des longueurs morte des câbles. Par la suite, jusqu'à ce que l'algorithme trouve une zone où  $\Delta p$  atteigne son maximum, une série d'itérations est réalisée testant des jeux de paramètres différents, notés  $\mathbf{E}_{test}$  où l'indice *test* représente le numéro d'itération. Lorsque *PSwarm* a fini de converger vers la valeur maximale de  $\Delta p$ , l'algorithme s'interrompt. Le jeu de paramètres final  $\mathbf{E}$  est alors connu, ainsi que la valeur du  $\Delta p$  la plus pénalisante en terme de pose de la PM pour le RPC, c'est-à-dire  $\Delta p_{max}$ . Nous pouvons alors traduire cette méthode comme la recherche de la position  $P$  la plus éloignée de  $P_{ini}$  lorsque les longueurs totales des câbles déployées sont calculées avec le  $MGI_E$ .

## 4.1.2 Incertitude sur l'erreur de pose théorique

La méthode d'étude de l'influence de l'hystérésis sur chaque câble indépendamment les uns des autres ayant été introduite nous pouvons analyser l'influence de la variation du module de Young de façon détaillée. Voulant orienter notre analyse uniquement sur ce phénomène nous fixons l'ensemble des autres paramètres géométriques et mécaniques. Les travaux portent donc sur un RPC pleinement-contraint à 4 câbles de forme cubique et de dimension  $L = 15m$  et  $H = 15m$ . Ce RPC est équipé de poulies ayant comme articulation un joint de cardan. Il est considéré que les câbles montés sur le robot ont comme caractéristiques une tension de rupture de  $T_r = 10.29kN$ , un rayon  $r_c = 2mm$  et une masse linéique  $\mu_0 = 7.5 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^{-1}$ . En gardant les mêmes hypothèses sur les tensions admissibles du câble que dans le chapitre 3 (entre 5% et 50% de  $T_r$ ) nous avons une tension minimale  $t_{min} = 0.51kN$  et une maximale  $t_{max} = 5.15kN$ . En ce qui concerne l'élasticité du câble les bornes dans lesquelles les  $E_i$  peuvent varier sont  $E_{min} = 71.5GPa$  et  $E_{max} = 132.8GPa$ . L'élasticité nominale est pour sa part de  $E_{nom} = 102.2GPa$ . Les paramètres géométriques décrivant la poulie sont les suivants : un rayon de réa  $r_p = 50mm$  et un bras de levier de  $h = 104mm$ . Le rayon de réa permet de respecter l'Eq. 3.6. De plus, la taille du bras de levier permet de libérer la rotation du bras de levier pour que la poulie puisse balayer l'ensemble de l'espace de travail du RPC (cf. section 3.1). Finalement, nous considérons que la masse de la PM, considérée comme un point masse, est de  $m_{PM} = 200kg$  charge comprise. Les valeurs de ces paramètres sont rappelées dans le Tab. 4.1.

Paramètres géométriques	$L(m)$	$H(m)$	$h(mm)$	$r_p(mm)$	$r_c(mm)$
Valeurs	15	15	104	50	2
Paramètres mécaniques	$E_{nom}(GPa)$	$E_i \in (GPa)$	$t_i \in (kN)$	$m_{PM} (kg)$	$\mu_0(kg \cdot m^{-1})$
Valeurs	102.2	[71.5 ; 132.8]	[0.51 ; 5.15]	200	$7.5 \cdot 10^{-2}$

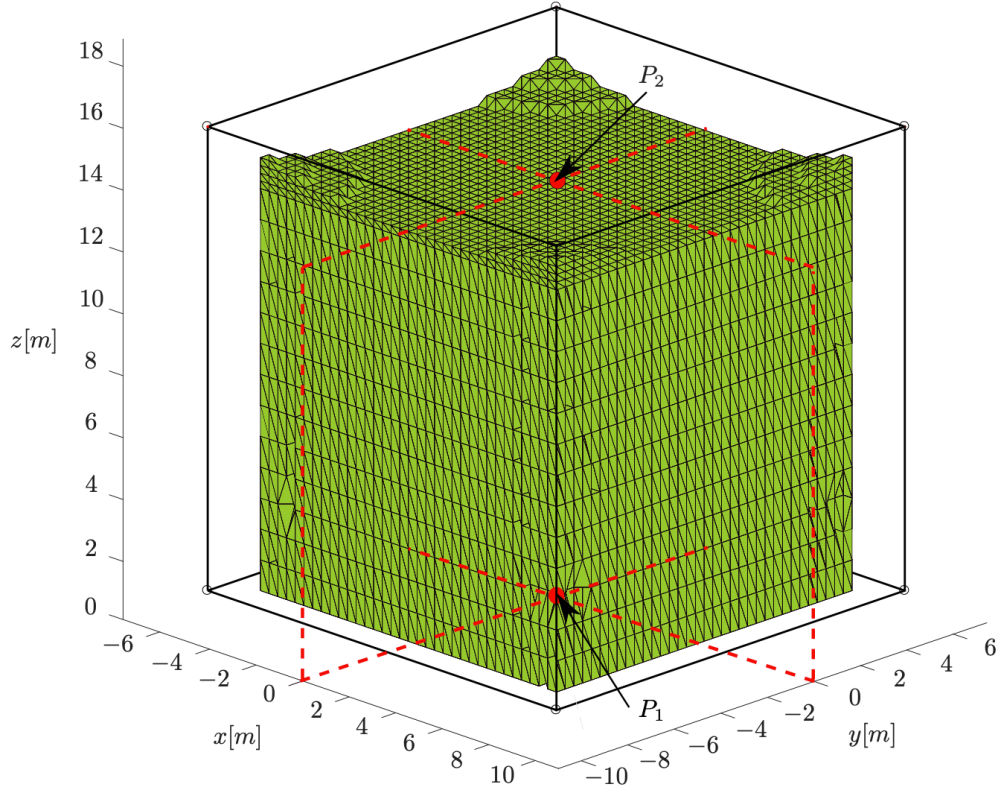
**Table 4.1** – Paramètres géométriques et mécaniques du RPC étudié dans le cadre de l'étude portant sur l'influence de l'hystérésis des câbles sur la précision de la PM

Le cas d'étude défini, il est maintenant possible de commencer notre étude au travers tout d'abord d'une analyse sur deux positions extrêmes représentant l'erreur  $\delta p$  la plus importante et la plus faible de l'ETS du RPC. Par la suite, les  $\Delta p_{max}$  le long d'une trajectoire hélicoïdale seront analysés et enfin nous étudierons  $\Delta p_{max}$  sur un plan à horizontale  $0m$  et un à  $7.5m$  de hauteur.

### 4.1.2.1 Erreur de pose théorique sur une position

Dans l'objectif d'analyser l'erreur de pose théorique maximale ainsi que de représenter l'espace d'incertitude  $\Omega$ , nous réalisons tout d'abord la procédure décrite à la Fig. 4.4 sur des positions uniques. Dans le but d'obtenir le plus d'informations pour notre analyse, les positions nous semblant les plus adéquates sont celles présentant l'erreur  $\delta p$  la plus petite

et la plus grande de l'ETS. En effet, en trouvant ces positions nous admettons que le RPC présente des erreurs comprises entre ces deux valeurs. Afin de trouver ces deux positions, nous avons tout d'abord cherché à définir l'ETS du RPC en considérant la valeur nominale du module de Young,  $E_{nom}$  (cf. Fig. 4.5). Par la suite, les positions ayant l'erreur  $\delta p$  la plus importante et la plus faible ont été déterminées. Elles sont notées, dans la Fig. 4.5,  $P_1$  pour celle minimisant  $\delta p$  et  $P_2$  pour celle maximisant  $\delta p$ .



**Figure 4.5** – ETS du RPC et localisation des position maximisant et minimisant  $\delta p$

Dans le cadre de ce RPC cubique de  $15m$  de coté l'erreur  $\delta p$  maximale se situe en  $P_2$  correspondant à  $\mathbf{p}_{ini} = [0, 0, 13.25]^T$  en  $m$ . L'erreur  $\delta p$  est égale à  $319.4mm$ . Pour ce qui est de l'erreur minimale, localisée au point  $P_1$  de vecteur  $\mathbf{p}_{ini} = [0, 0, 0]^T$ , elle est d'une valeur de  $29.3mm$ . Comme nous l'avons déjà observé lors de l'étude des erreurs de pose théorique d'une poulie à joint de cardan dans la partie 3.2.3, l'erreur maximale est située au centre du plan horizontal du RPC à  $13.25m$  de hauteur. En effet, lorsque la PM est positionnée en haut de l'ETS en  $P_2$ , les quatre câbles atteignent, de façon équivalente, une forte sollicitation en tension générant une erreur exclusivement suivant l'axe  $\mathbf{z}$ .

Connaissant les positions où se concentrent les erreurs de pose théorique minimale et maximale, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'effet du phénomène d'hystérésis du module de Young  $E_i$  des câbles sur l'erreur de pose théorique de la PM. Pour cela, nous pouvons tout d'abord déterminer pour les positions  $P_1$  et  $P_2$  un volume représentant l'espace  $\Omega$  en générant un ensemble de combinaisons  $\mathbf{E}$ . L'espace d'incertitude de l'erreur de pose théorique de la PM  $\Omega$  est représenté sur la Fig. 4.6 pour la position  $P_1$  et sur la Fig. 4.7 pour la position  $P_2$ .

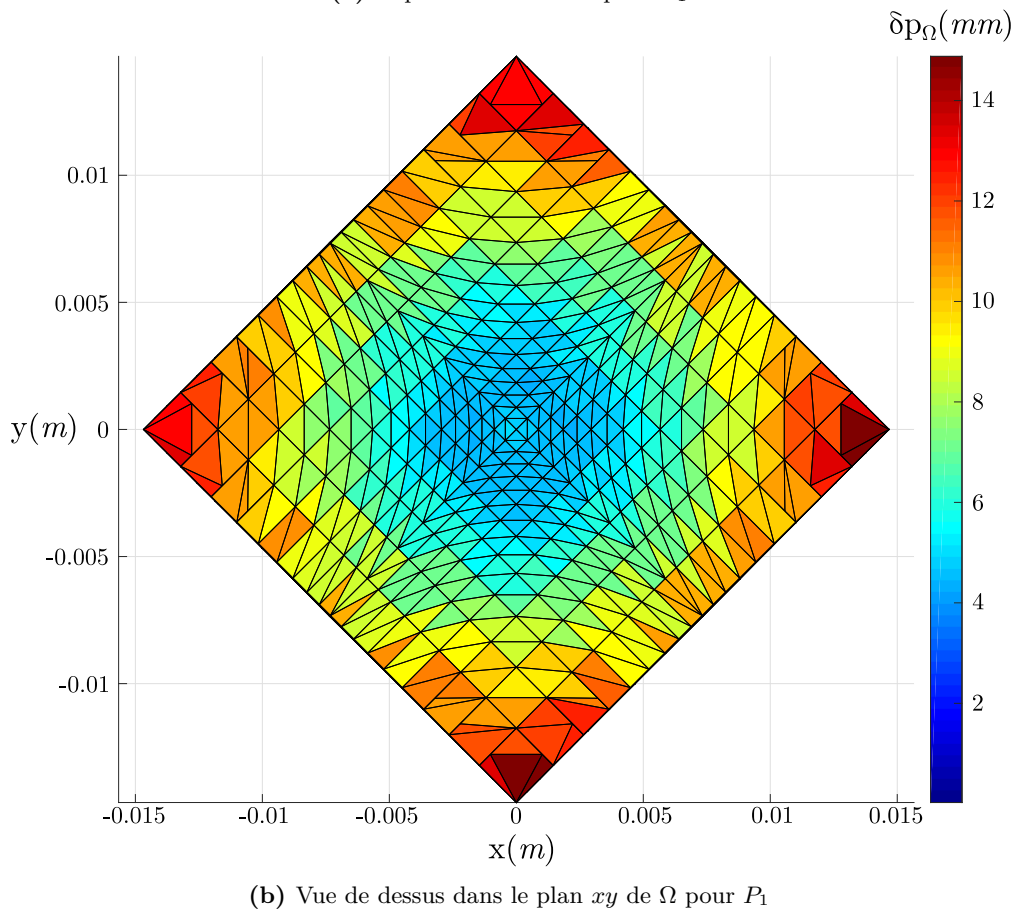
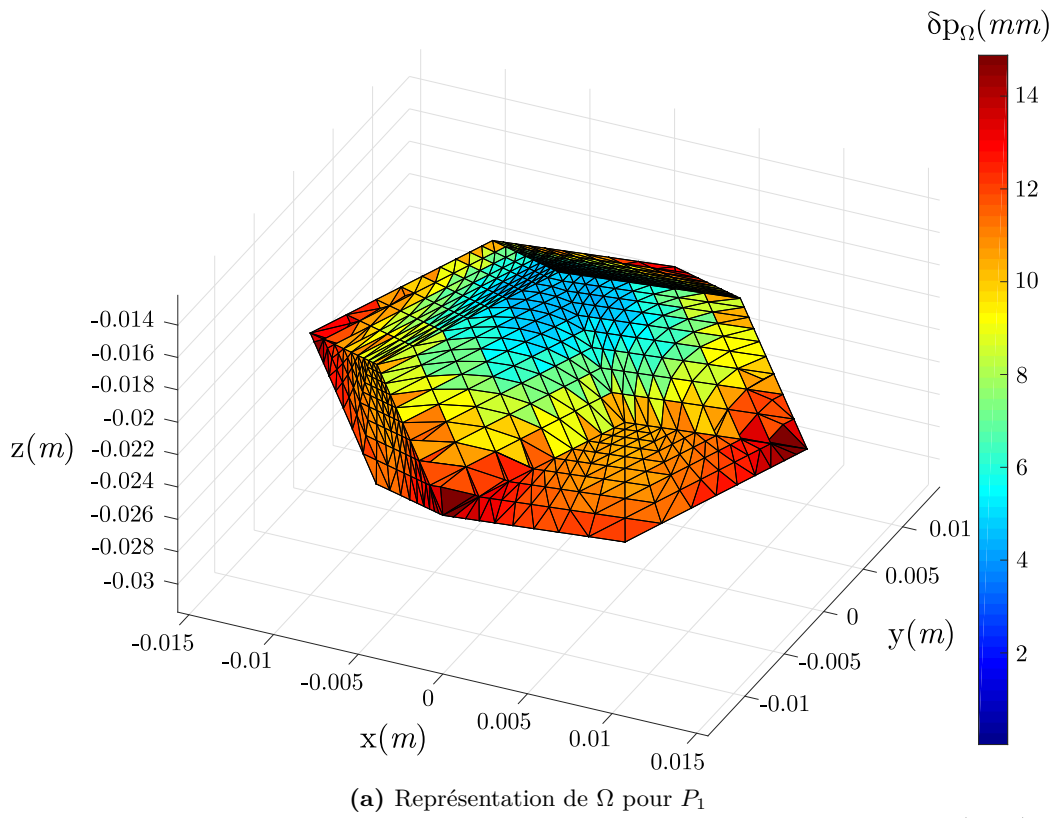
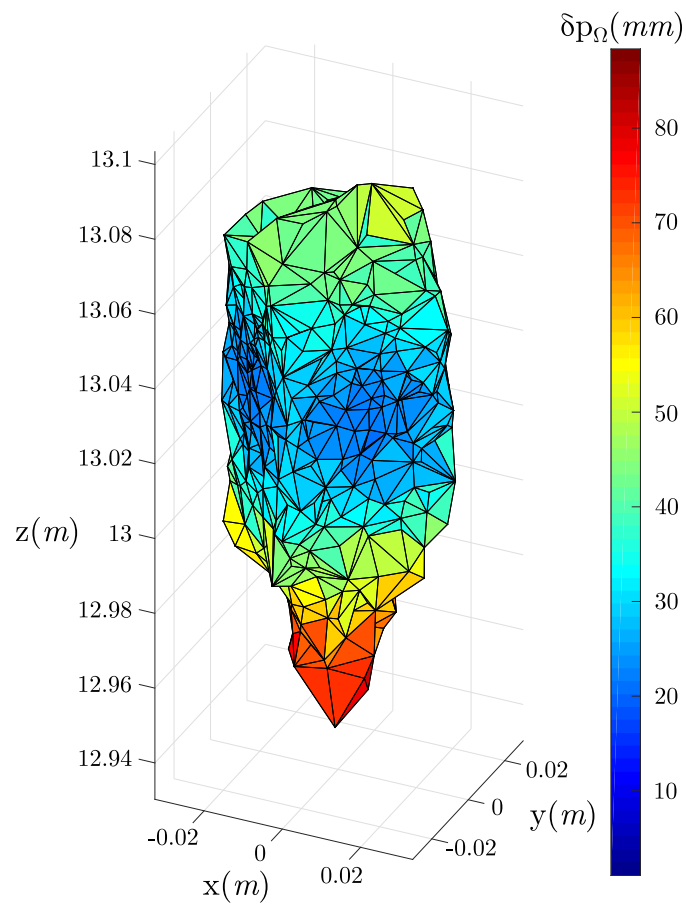
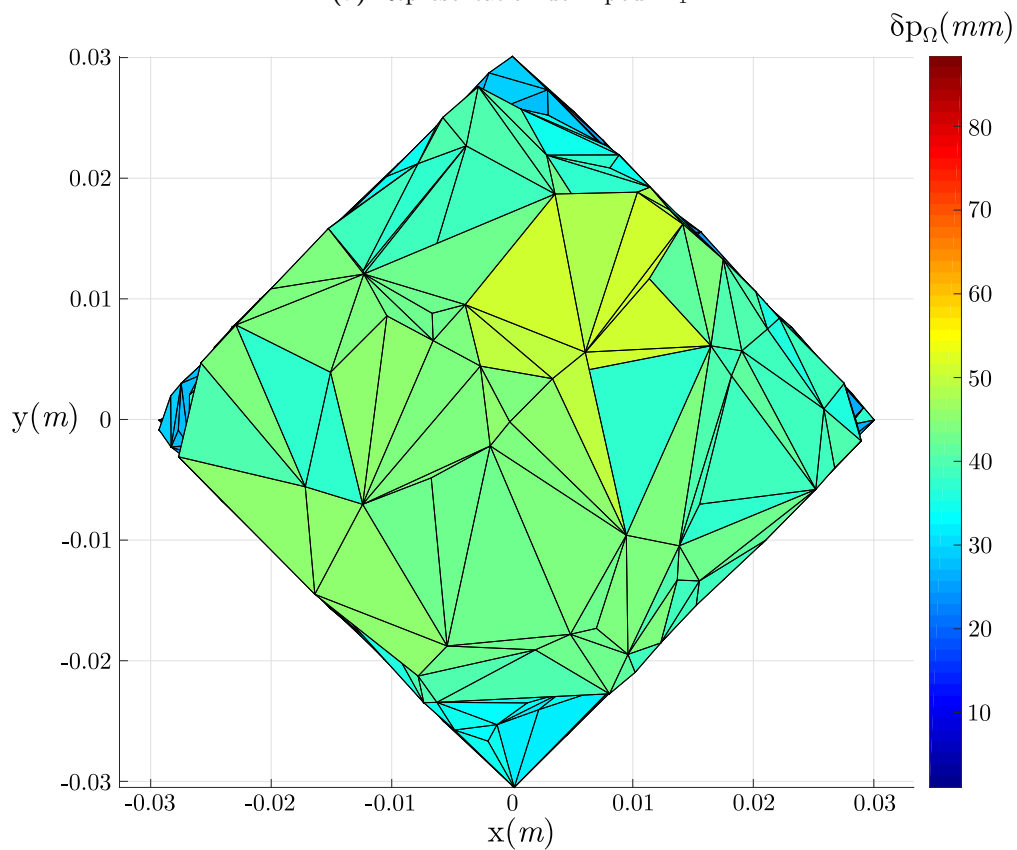


Figure 4.6 – Espace d’incertitude  $\Omega$  pour la position  $P_1$  minimisant  $\delta p$  ( $= 19.5mm$ )



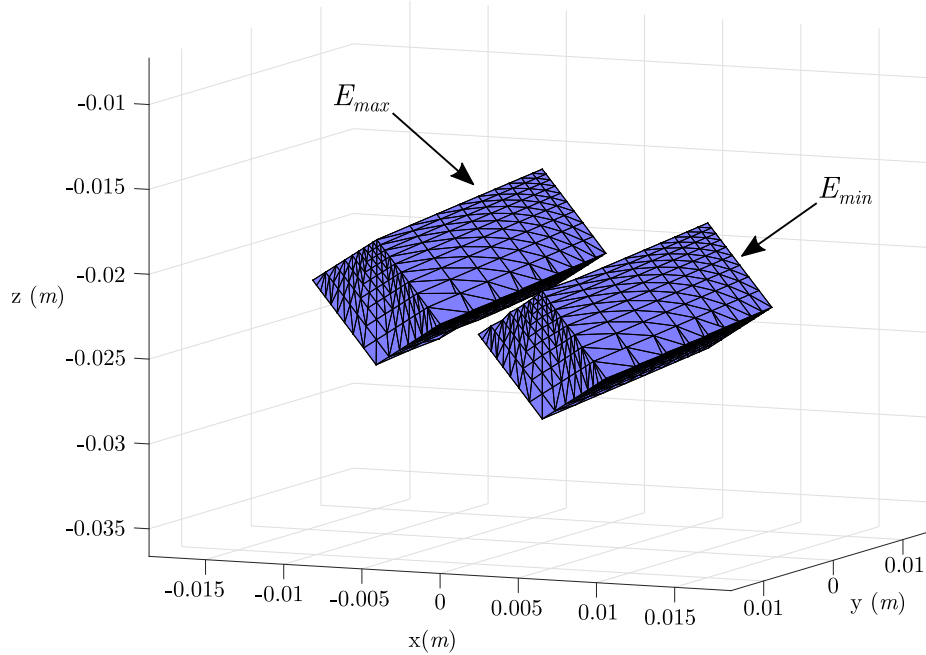
(a) Représentation de  $\Omega$  pour  $P_1$



(b) Vue de dessus dans le plan  $xy$  de  $\Omega$  pour  $P_1$

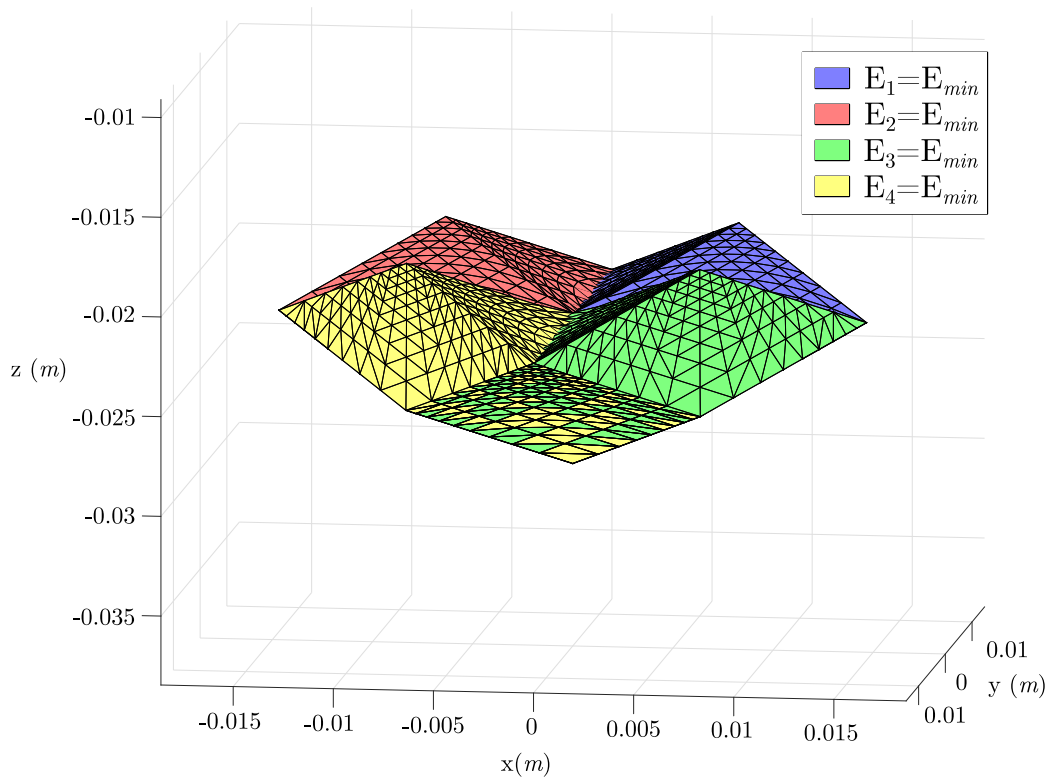
Dans un premier temps, l'analyse géométrique des espaces d'incertitude nous permet d'observer que le volume de la zone d'incertitude  $\Omega$  au niveau du sol ( $\Omega_{P_1}$ ) est bien plus petite que celui se situant sur le haut de l'ETS du RPC ( $\Omega_{P_2}$ ). En effet, le premier a un volume  $\Omega_{P_1}$  de  $3.126 \times 10^{-6} m^3$  alors que le second a un volume  $\Omega_{P_2}$  bien plus important avec  $1.513 \times 10^{-4} m^3$ . Il semblerait ainsi que la longueur des câbles déployée n'implique pas une augmentation de l'espace d'incertitude. Cependant, c'est l'augmentation des tensions qui semble jouer, un rôle important sur le volume de la zone d'incertitude de l'erreur de pose théorique de la PM. De plus, nous pouvons remarquer que  $\Omega_{P_1}$  est bien moins allongé suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  que  $\Omega_{P_2}$ . L'observation des Fig. 4.6b et Fig. 4.7b permet de se rendre compte que la projection de  $\Omega$  sur le plans  $xy$  est de forme carrée pour les deux positions étudiées  $P_1$  et  $P_2$ , mais pas de même dimension. En effet, la dispersion dans le plan  $xy$  est de l'ordre de deux fois plus importante en  $P_2$  qu'en  $P_1$ . Nous pouvons extraire des sous-espaces de  $\Omega$  en cherchant les zones où le module de Young  $E_i$  d'un câble est contraint à une des bornes, c'est-à-dire soit  $E_{min}$  soit  $E_{max}$ . Pour la position  $P_1$ , ces sous-espaces sont obtenus en conservant l'ensemble des positions  $P$  de la PM calculées pour un  $E_i = E_{min}$  (cf. Fig. 4.8a) et pour un  $E_i = E_{max}$  (cf. Fig. 4.8b).

Lorsqu'une face des volumes présentés dans les figures de la Fig. 4.8 est de type damier à deux couleurs cela signifie qu'elle appartient à deux sous-espaces. L'observation de la Fig. 4.8a nous permet de connaître les combinaisons  $\mathbf{E}$  limitant l'enveloppe inférieure de  $\Omega$ . Nous voyons que le jeu de modules de Young  $\mathbf{E}$  des faces latérales de  $\Omega$  en forme de losange comprend toujours, pour le câble opposé à cette face, un module de Young minimal. De plus, la surface inférieure de l'espace  $\Omega$  est l'intersection de deux sous-espaces. Cela signifie que chaque face de la frontière inférieure de  $\Omega$  est limitée par les deux câbles opposés à cette face avec un  $E_i = E_{min}$ . La figure 4.8b représente l'ensemble des positions pour un des  $E_i$  fixés à la valeur  $E_{max}$ . Les observations sont proches de celles précédemment formulées au détail près qu'elles sont inversées. En effet, lorsqu'un câble a une valeur de  $E_i$  maximale, la zone  $\Omega$  correspondant est du même côté que celui du câble et non à l'opposé. La figure 4.9 représente les deux sous-espaces pour un même câble fixé soit à  $E_{min}$  soit à  $E_{max}$ , les autres câbles pouvant toujours prendre des valeurs  $E_i \in [E_{min}; E_{max}]$ .

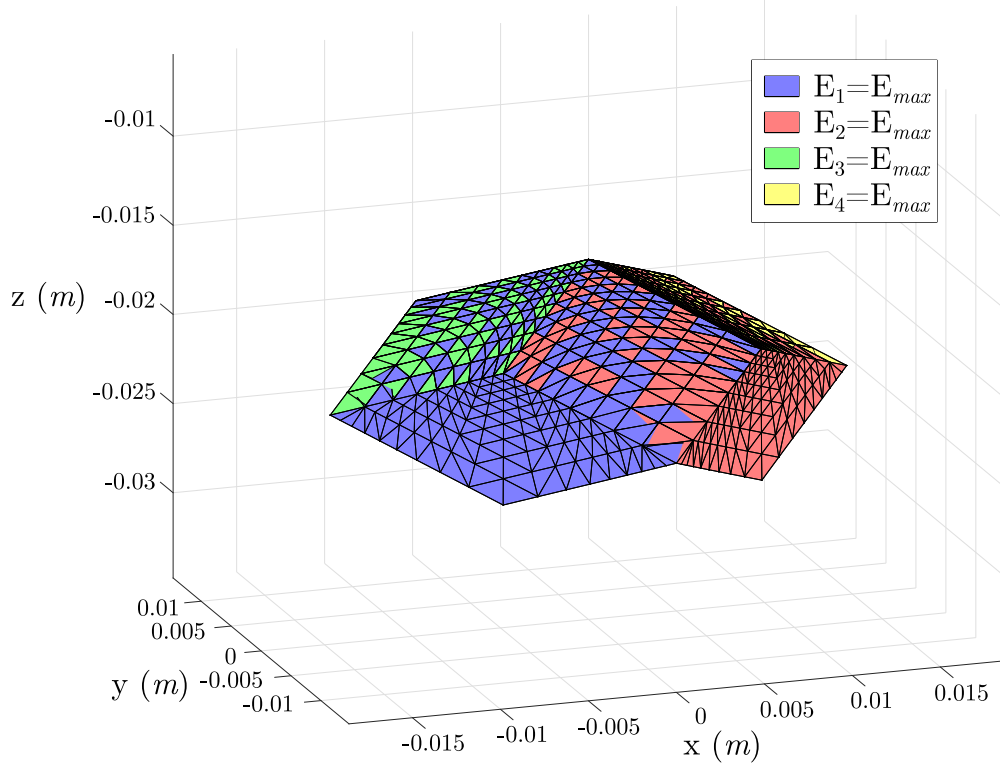


**Figure 4.9** – Sous-Espaces correspondant au câble  $i = 1$  ayant soit  $E_{min}$  soit  $E_{max}$





(a) Sous-espace de  $\Omega$  pour  $E_i = E_{min}, i = 1, \dots, 4$



(b) Sous-espace de  $\Omega$  pour  $E_i = E_{max}, i = 1, \dots, 4$

**Figure 4.8** – Sous-espaces de  $\Omega$  lorsqu'un des  $E_i$  correspondant aux bornes  $E_{min}$  et  $E_{max}$  pour la position  $P_1$

Les figures 4.8 et 4.9 ont montré que les frontières de  $\Omega$  sont obtenues pour un jeu de  $\mathbf{E}$  comportant toujours au moins un module de Young  $E_i$  égal à une valeur minimale ou maximale. Maintenant que nous avons décrit plus en détail le rôle des câbles dans l'espace d'incertitude  $\Omega$ , revenons à l'analyse des Fig. 4.6 et Fig. 4.7. Le gradient de couleur des Fig. 4.6 et Fig. 4.7 représente la valeur de la norme euclidienne de  $\delta\mathbf{p}_\Omega$  en  $mm$ . Nous pouvons voir que la partie supérieure de  $\Omega_{P_1}$  est principalement bleu indiquant une plus faible différence entre  $P_n$  et  $P$ . Tandis que la partie inférieure de  $\Omega_{P_1}$  tend vers le rouge ce qui correspond à des valeurs de  $\delta p_\Omega$  plus importantes. Cela signifie que la position nominale  $P_n$ , pour un  $E_{nom}$  sur chaque câble, n'est pas centrée dans l'espace d'incertitude  $\Omega$ . Si nous mettons en parallèle les résultats de la partie 3.4.1, cela confirme que lorsque les câbles prennent des valeurs  $E_i$  majoritairement faibles cela a plus d'influence sur l'erreur de pose théorique de la PM que lorsque les  $E_i$  sont principalement élevés (cf. Fig 3.28). Cet effet semble moins marqué pour la position  $P_2$  maximisant  $\delta p$ , indiquant que  $P_n$  est légèrement plus centré dans  $\Omega_{P_2}$  et que donc la variation du module de Young semble jouer un rôle plus symétrique autour de  $E_{nom}$ . Nous pouvons nous attarder sur la quantification des différentes erreurs au travers du Tab. 4.2, résumant les valeurs de  $\Delta p_{max}$ ,  $\delta p$  et  $\delta p_\Omega$  pour les deux positions  $P_1$  et  $P_2$ .

Position de la PM ( $m$ )	$\Delta p_{max}$ ( $mm$ )	$\delta p$ ( $mm$ )	$\delta p_\Omega$ ( $mm$ )	% de $\delta p_\Omega$ vis-à-vis $\delta p$
$P_1 = [0, 0, 0]^T$	29.3	19.5	9.8	46.6%
$P_2 = [0, 0, 13.25]^T$	302.6	214.3	88.3	41.2%

**Table 4.2** – Tableau résumant les valeurs pour  $\Delta p_{max}$ ,  $\delta p$  et  $\delta p_\Omega$  pour  $P_1$  et  $P_2$

Les erreurs  $\delta p$  dues au fléchissement du câble avec une élasticité nominale sont bien plus importantes que celles générées par la variation du module de Young des câbles  $\delta p_\Omega$  due à la boucle d'hystérésis. En effet, l'erreur maximale  $\delta p_\Omega$  est de l'ordre de  $15mm$  pour la position  $P_1$  (cf. Fig 4.6). Concernant cette même erreur pour la position  $P_2$ , elle est bien plus significative puisque sa valeur est de l'ordre de  $90mm$ . Cependant, si nous regardons le pourcentage que représente  $\delta p_\Omega$  par rapport à  $\delta p$  nous pouvons remarquer que dans le cas de la position  $P_1$ ,  $\delta p_\Omega$  représente 46.6% de  $\delta p$ . Or pour la position  $P_2$  cette erreur représente 41.2% de  $\delta p$ . Il semblerait donc que la part de l'erreur due à l'hystérésis des câbles,  $\delta p_\Omega$ , soit plus importante au sol que sur le haut de l'ETS.

#### 4.1.2.2 Erreur de pose théorique sur une trajectoire hélicoïdale

Comme nous le savons les RPC sont voués à être utilisés dans une multitude d'applications nécessitant de devoir s'adapter à une multitude de trajectoires. Nous avons donc voulu observer l'évolution de  $\Delta p_{max}$  le long d'une trajectoire. Il a été choisi d'étudier son évolution sur une trajectoire hélicoïdale continue proche de celles que nous pouvons rencontrer dans les applications de fabrication additive [Dio+21]. La figure 4.10 montre cette trajectoire hélicoïdale théorique ainsi que l'erreur de pose théorique maximale de la PM tout au long de celle-ci. L'hélice de cette trajectoire a un rayon de  $4m$  et un pas de  $3m$  sur toute la hauteur du RPC.

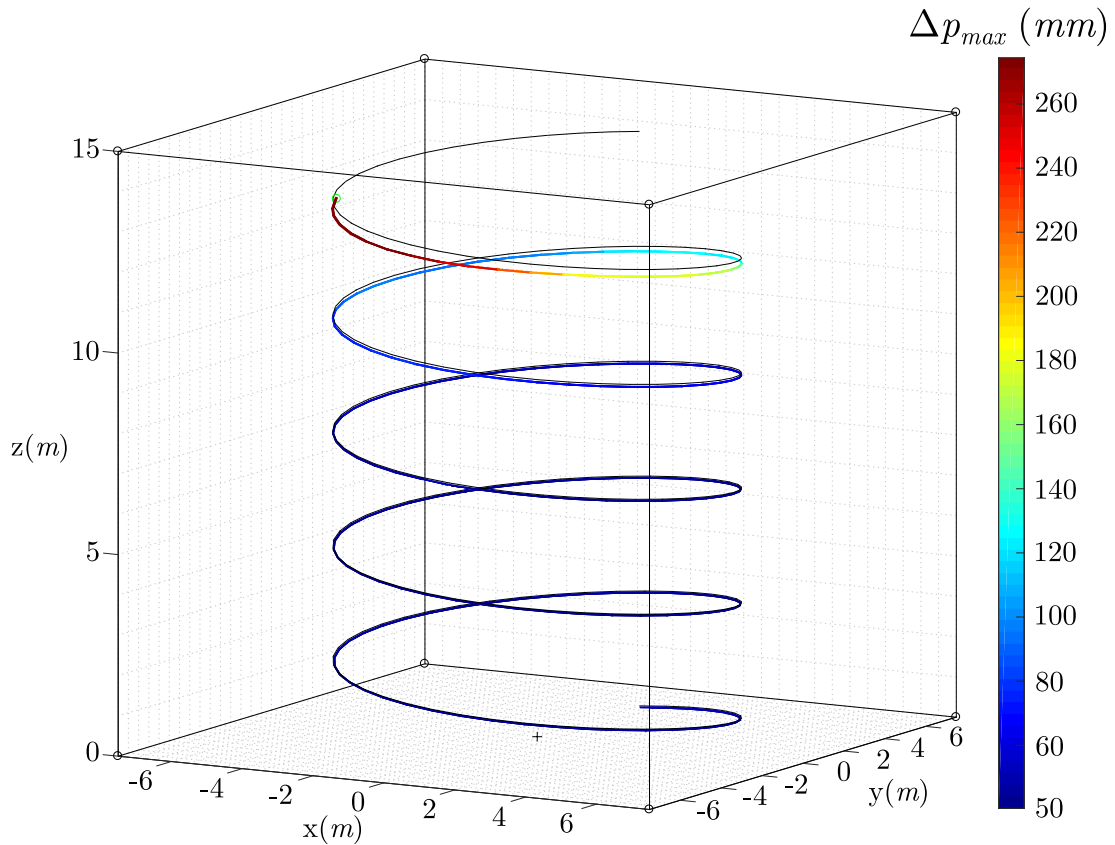
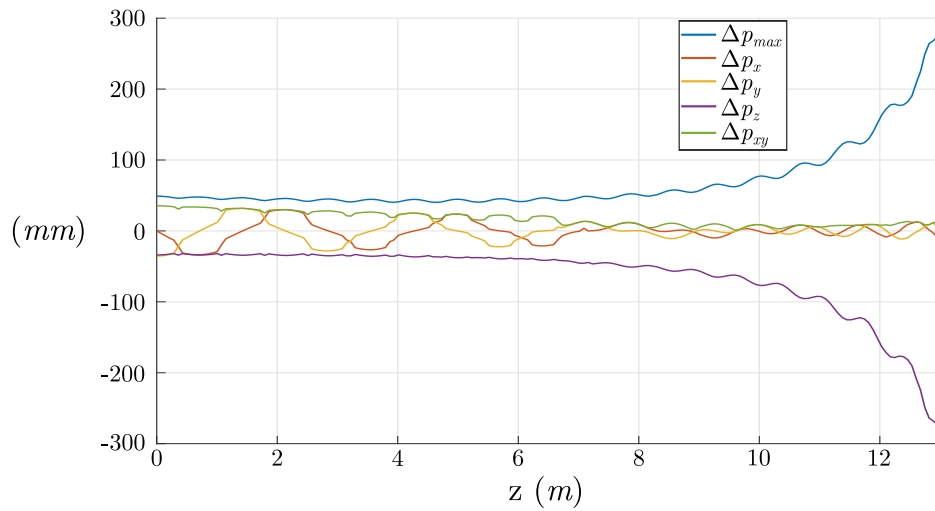


Figure 4.10 –  $\Delta p_{max}$  sur une trajectoire hélicoïdale

Tout d'abord nous pouvons observer que la trajectoire réelle s'arrête avant d'atteindre le sommet de la trajectoire théorique. En effet, la trajectoire réelle s'arrête à une hauteur de  $12.96m$  pour une hauteur théorique de  $15m$ . Cela est dû à la limitation des tensions dans les câbles. L'erreur  $\Delta p_{max}$  varie entre  $49mm$ , au niveau du sol, et  $274mm$ , sur le haut de l'espace de travail à  $12.96m$ . La différence d'erreur  $\Delta p_{max}$  est donc relativement importante. Cependant, nous pouvons observer que l'erreur  $\Delta p_{max}$  a une variation très faible, proche d'une constante, sur la moitié basse de la trajectoire et augmente rapidement sur la fin. En effet, à  $8m$  de hauteur nous avons un  $\Delta p_{max} = 52mm$ . Après cette hauteur, nous pouvons noter une croissance rapide de l'erreur de pose théorique maximale. La figure 4.11 détaille l'évolution de l'erreur  $\Delta p_{max}$  ainsi que sa décomposition suivant les axes  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$ ,  $\mathbf{z}_b$  et dans le plan  $xy$  en fonction de la hauteur de la trajectoire.



**Figure 4.11** – Évolution de la norme euclidienne de  $\Delta \mathbf{p}_{max}$ , de sa décomposition suivant les axes  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$  et  $\mathbf{z}_b$  ainsi que dans le plan  $xy$  en fonction de la hauteur de la trajectoire hélicoïdale théorique

$\Delta p_{xy}$  est la norme euclidienne de l'erreur  $\Delta p_{max}$  dans le plan  $xy$ . Les erreurs  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  et  $\Delta p_z$  sont les composantes dans chacune des directions. Nous pouvons voir que l'erreur  $\Delta p_{max}$  est, comme nous l'avons observé sur la Fig. 4.10, constante sur la première moitié de la trajectoire. Nous pouvons voir sur la Fig. 4.11 que l'erreur prépondérante est  $\Delta p_z$  suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$ . Nous pouvons néanmoins noter que l'erreur  $\Delta p_{xy}$  dans le plan  $xy$  est plus importante au début de la trajectoire et est du même ordre de grandeur que  $\Delta p_z$ . Les erreurs  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  et donc  $\Delta p_{xy}$  ont un comportement inverse de l'erreur  $\Delta p_z$  puisqu'elles diminuent sur la deuxième partie de la trajectoire. De ces observations, nous pouvons déjà dire que travailler sur le bas de l'espace de travail d'un RPC plutôt que vers le haut permet de réduire fortement l'erreur  $\Delta p_{max}$ , de l'ordre de 82%, et autorise l'application d'une stratégie d'étalonnage au vue de la quasi-constance de l'erreur de pose théorique maximale.

### 4.1.2.3 Erreur de pose théorique sur un plan

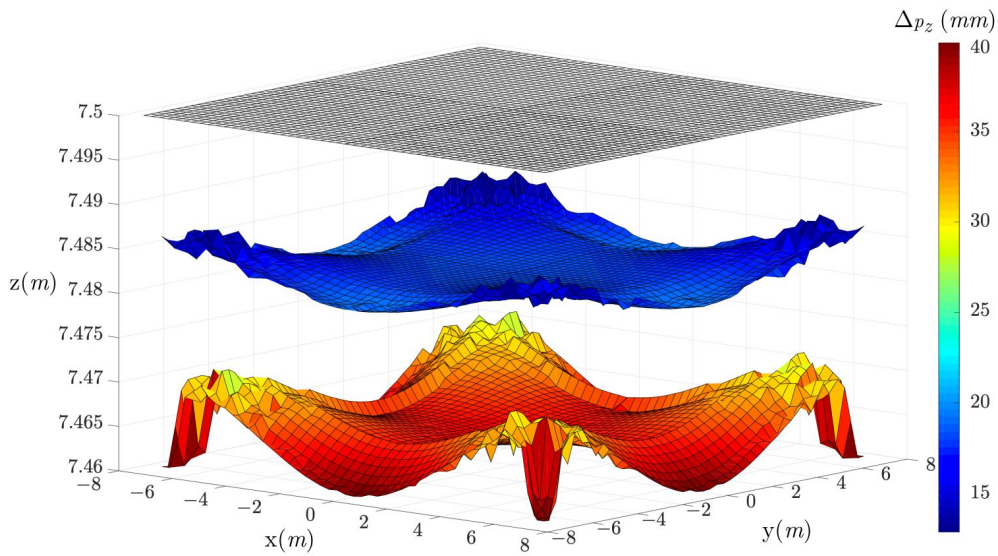
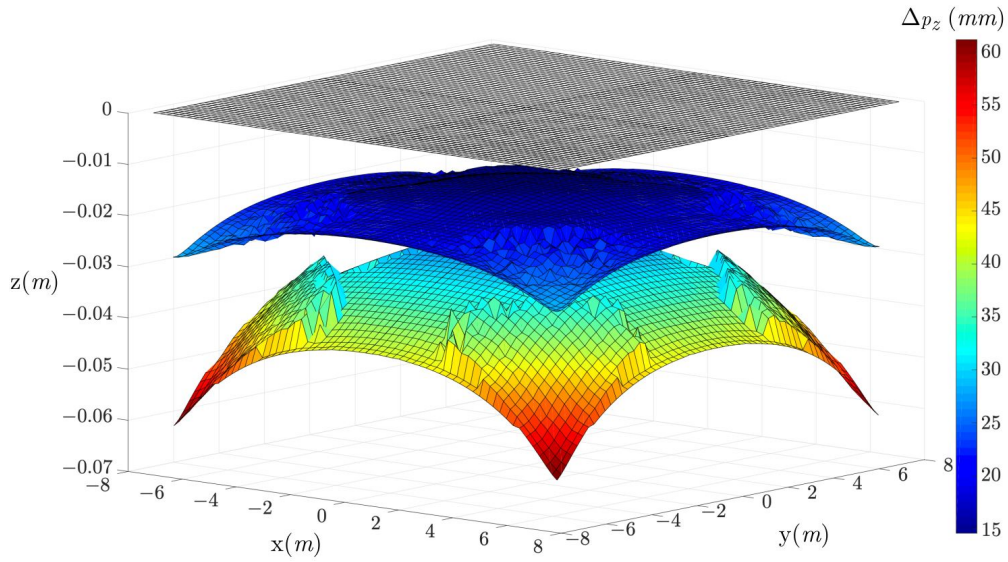
L'étude de l'influence de l'hystérésis des câbles sur la précision des RPC a été menée sur des positions de la PM ainsi que sur une trajectoire. Maintenant, il est intéressant d'observer l'erreur de pose théorique sur l'ensemble d'un plan horizontal à une hauteur fixe. Pour cela nous discrétiserons, en  $N$  positions équitablement réparties, deux plans à des hauteurs différentes,  $0m$  (cf. Fig. 4.12a) et  $7.5m$  (cf. Fig. 4.12b). Pour chacun des points testés nous observerons la position  $P$  maximisant  $\Delta p_z$  (cf. Fig. 4.3), mais aussi celle le minimisant. De ces deux informations nous pouvons générer deux surfaces, représentant les limites de l'incertitude de l'erreur de pose théorique suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$ .

Sur la figure 4.12, les plans horizontaux gris sont les plans théoriques de l'ensemble des positions initiales  $P_{ini}$ . L'espace entre les deux surfaces des Fig. 4.12 représente la zone d'incertitude de position de la PM suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$ . L'erreur de pose théorique  $\Delta p_z$  suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  la plus importante observable au niveau du sol est de  $61mm$ . La valeur de cette erreur à  $7.5m$  de hauteur est de  $40mm$ . Nous pouvons donc remarquer qu'elle est plus importante au niveau du sol. De plus, nous pouvons voir que la forme de la zone d'incertitude de la PM au niveau du sol est opposée à celle observée à  $7.5m$ . La courbure des surfaces au niveau du sol est effectivement bien plus élevée que celles à mi-hauteur. Au niveau du sol les erreurs maximales de pose théorique  $\Delta p_z$  de la PM sont plus faibles au centre que sur les bords du plan étudié, alors que sur le plan horizontale à  $7.5m$  ces erreurs sont réparties plus uniformément sur la surface. L'erreur maximale  $\delta p_\Omega$ , due au phénomène d'hystérésis, présente dans ces deux zones est de  $28mm$  et se situe au niveau du sol. Si nous ramenons cela à la dimension du RPC étudié (cube de  $15m$  de coté) cette erreur est faible (0.19%).

Cette section a étudié l'influence de l'hystérésis sur la précision des RPC au travers d'une méthode permettant d'extraire des valeurs d'erreurs de pose théorique pour des variations indépendantes du module de Young de chacun des câbles. Cela nous a tout d'abord permis d'observer l'espace d'incertitude  $\Omega$  de de l'erreur de pose théorique de la PM. L'erreur  $\Delta p_{max}$  semble avoir une norme euclidienne relativement constante sur la première partie d'une trajectoire hélicoïdale permettant donc son étalonnage et une augmentation de la précision du RPC. Il a également été observé que les zones d'incertitude suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  au niveau de deux plans horizontaux à  $0m$  et à  $7.5m$  ont des formes différentes, mais présentent cependant des erreurs  $\delta p_\Omega$  inférieures ou égales à  $28mm$ , erreur faible au regard de la dimension du RPC étudié. Finalement, cette section nous a permis de quantifier l'erreur de pose théorique maximale et de voir la part de l'erreur due au phénomène d'hystérésis du module de Young et celle due à la non prise en compte de l'élasticité des câbles. Il en résulte que le phénomène d'hystérésis peut augmenter de l'ordre de 50% l'erreur de pose théorique déterminée avec une élasticité nominale  $E_{nom}$  constante dans l'ensemble des câbles.

## 4.2 Recherche des points d'ancrages des poulies minimisant l'erreur de pose théorique

Au travers des travaux déjà présentés dans cette thèse nous avons pu observer que le choix de la modélisation pour calculer la longueur totale de câbles à déployer est cruciale pour réduire les erreurs induites par la géométrie des poulies ainsi que l'effet des paramètres mécaniques. Cependant, nous avons aussi vu que l'hystérésis du câble génère une erreur ne pouvant être prédit et uniquement approximé à un espace d'incertitude  $\Omega$  de l'erreur de pose théorique de la PM ainsi qu'à une erreur maximale  $\Delta p_{max}$ . La seule action que nous pouvons donc avoir est de chercher à réduire le volume de l'espace  $\Omega$  et donc la valeur de  $\Delta p_{max}$ . Il existe une multitude de paramètres pouvant influencer  $\Omega$  et  $\Delta p_{max}$ . Nous avons décidé de nous focaliser sur les positions des points d'ancrage des poulies  $A_i$ . Nous présenterons donc dans cette section une recherche de structure de RPC optimale vis-à-vis de l'hystérésis des câbles. Des études cherchant à optimiser la structure d'un RPC existent déjà. Nous



**Figure 4.12** – Surface d'erreur de pose théorique verticale  $\Delta p_{z_{min}}$  et  $\Delta p_{z_{max}}$  pour des positions de PM sur un plan horizontal à  $0m$  (a) et à  $7.5m$  (b)

pouvons citer l'article de Ben Hamida et al. [Ben+21] mettant en place une optimisation multi-objectifs pour déterminer la meilleure structure en terme de nombre de câbles et de positions de point de sortie des câbles dans la conception d'un RPC médical voué à la rééducation des membres supérieurs. Cette étude cherche à minimiser le volume occupé par le robot ainsi que la valeur des tensions. Nguyen et al. dans [Ngu+14a] cherche à connaître la meilleure architecture suspendue à quatre câbles pour un RPC servant à la maintenance d'avion. Tout comme dans l'étude de Hamida cette optimisation est multi-critères et cherche d'une part à minimiser l'énergie consommée donc la somme des tensions et d'autre part à maximiser la rigidité du RPC. Notre étude se détache de ces travaux cités ci-dessus de par la prise en compte de l'hystérésis des câbles dans la recherche de la structure optimale d'un RPC vis-à-vis de la précision de la PM. Dans un premier temps, la procédure de recherche qui a été mise en œuvre est explicitée. Par la suite, nous observerons l'évolution de la structure du RPC, permettant de réduire  $\Delta p_{max}$  et donc  $\delta p_{\Omega}$ , au cours de la réalisation d'une trajectoire.

### 4.2.1 Procédure d'optimisation de la structure du RPC

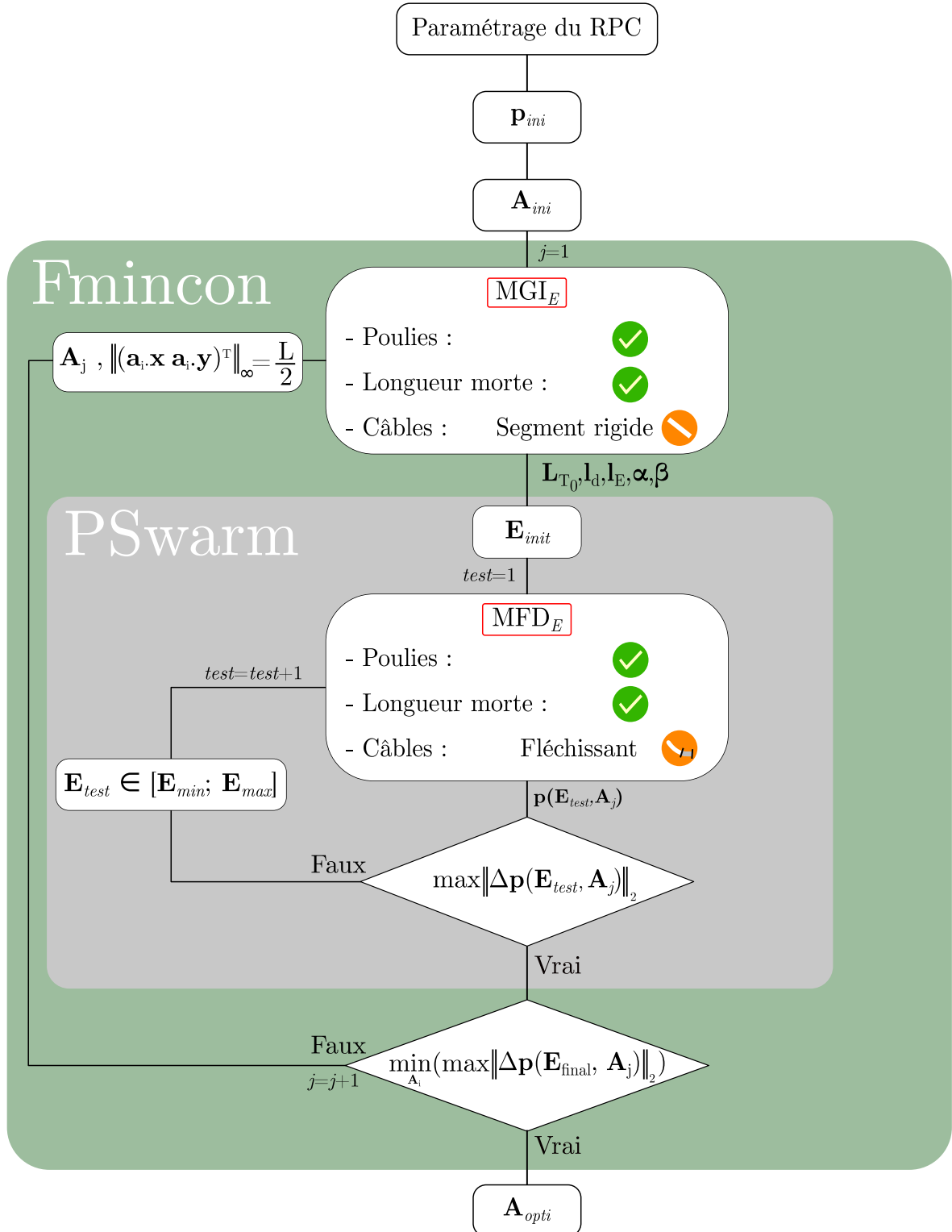
Cette section va présenter la méthodologie que nous avons établie afin de rechercher la structure optimale d'un RPC afin de minimiser l'effet de l'hystérésis des câbles sur la précision de la PM. Pour cela nous allons rajouter une étape d'optimisation au processus présenté à la Fig. 4.4. En effet, étant donné que nous continuons l'étude en prenant en compte l'hystérésis, il est nécessaire de calculer  $\Delta p_{max}$ . Voulant de plus réduire l'effet de l'hystérésis des câbles nous allons chercher à minimiser la valeur de  $\Delta p_{max}$  en faisant varier les coordonnées des points d'ancrage  $A_i$  des poulies de renvoi.

La figure 4.13 présente la globalité de la méthode mise en place.  $\mathbf{A}_j$  est la matrice de dimension  $4 \times 2$ , des coordonnées des points  $A_i$ , testée à chaque passage de la fonction d'optimisation. Cette matrice comprend uniquement les valeurs en  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_b$ ) et  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y}_b$ ) étant celles autorisées à varier car la valeur en  $\mathbf{z}_b$  reste constante et égale à  $H = 15m$ . Notre objectif étant de garder une structure de fixation des points d'ancrage des poulies de forme cubique, il nous est nécessaire de forcer les points  $A_i$  à rester sur un carré de coté  $L$ . Pour cela nous mettons en place une contrainte forçant la norme infini du vecteur décrivant la position du point  $A_i$  dans le plan  $xy$  à être égale à  $L/2$ . Tout comme la plupart des procédures d'optimisation il est nécessaire d'y apporter une valeur initiale  $\mathbf{A}_{ini}$  des paramètres. Dans l'objectif de déterminer l'optimum global des positions des points  $A_i$  pour un temps de calcul raisonnable, nous avons mis en place une première série de calculs où les arrêtes de la structure du RPC sont discrétisées en quatre points et où l'ensemble des configurations est testé. Cela nous amène à 256 configurations plus la configuration carrée de base, donc 257 configurations au total. À la fin de cette série de tests une solution semi-optimale des positions des points d'ancrage  $\mathbf{A}_{semi-opt}$  est obtenue. Cette dernière est alors utilisée comme jeu de paramètres initiaux  $\mathbf{A}_{ini} = \mathbf{A}_{semi-opt}$ . À la fin du processus présenté dans la Fig. 4.13, la structure  $\mathbf{A}_{opti}$  qui permet de minimiser l'effet de l'hystérésis des câbles sur la précision de la PM est connue pour une position  $P_{ini}$ . Ce problème d'optimisation peut être formalisé comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{A}_i} (\max_{\mathbf{E}}(\Delta p)) \\ \text{t.q.} \\ \left\| (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_b \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y}_b)^T \right\|_{\infty} = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.2.2 Structure optimale du RPC minimisant l'erreur de pose théorique

Pour les RPC, la réalisation de trajectoire est essentielle. Durant son déplacement la PM va se situer à différents points de l'espace de travail du RPC. Comme nous l'avons vu les



**Figure 4.13** – Organigramme de la procédure de recherche de la structure optimale du RPC pour améliorer la précision de la PM vis-à-vis de l'hystérésis des  $E_i$  des câbles



erreurs  $\Delta p_{max}$  ne sont pas constantes dans l'espace de travail du RPC (cf. Fig. 4.12). Pour cela, nous rechercherons les différentes structure minimisant  $\Delta p_{max}$  à l'aide de la méthode présentée précédemment et observerons son évolution. Dans l'objectif de réduire les temps de calculs nous avons considéré que chaque point  $A_i$  ne peut bouger que suivant une seule direction. La figure 4.14 représente les directions de déplacement possible des points  $A_i$  lors du processus d'optimisation.

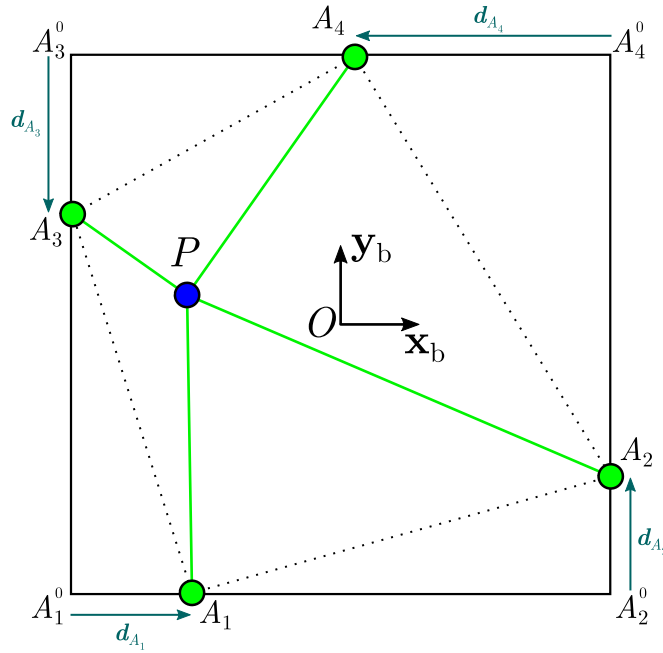


Figure 4.14 – Direction de déplacement possible des points  $A_i$

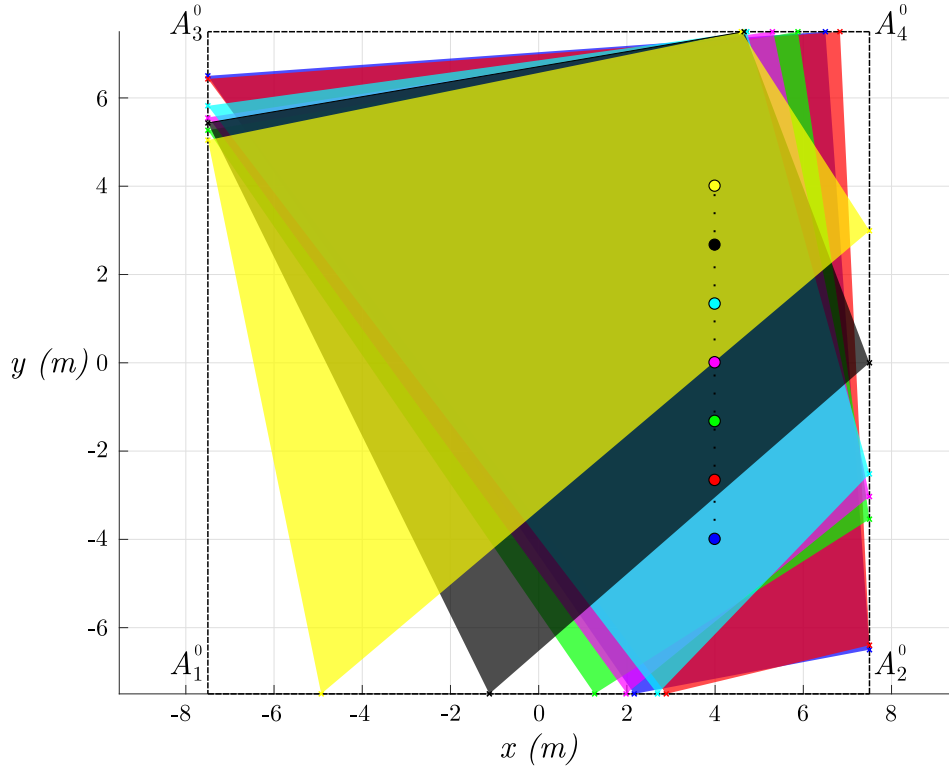
Chacun des points d'ancrage  $A_i$  des poulies à la structure peut donc se déplacer uniquement suivant une seule direction. Les points  $A_1$  et  $A_4$  peuvent donc translater suivant  $x_b$ .  $A_2$  et  $A_3$  pour leur part sont mobiles dans la direction  $y_b$ . Pour exprimer ce déplacement nous évaluons la distance selon leur position d'origine notée  $A_i^0$  grâce au vecteur  $d_{A_i}$ . La norme euclidienne de ce vecteur est noté  $d_{A_i}$  et est compris entre  $0m$  et  $15m$ . La configuration obtenue de ces quatre points donne un quadrilatère quelconque ayant ses sommets en contact avec à la structure initiale du RPC. Ce quadrilatère représente la structure optimale du RPC minimisant l'effet de l'hystérésis sur l'erreur  $\Delta p_{max}$  pour une pose de la PM désirée.

Dans l'objectif de suivre l'évolution de la structure en fonction de la position de la PM nous mettons en œuvre la méthode décrite précédemment (cf. Fig. 4.13) sur une trajectoire discrétisée en  $N$  positions. Nous suivons le long d'une trajectoire, rectiligne dans un premier temps puis circulaire dans un second temps, les configurations optimales dans lesquelles le RPC doit se trouver pour minimiser les erreurs de poses théoriques maximales sur chacune des positions de la trajectoire discrétisée.

#### 4.2.2.1 Trajectoire rectiligne à hauteur constante

La première des trajectoires étudiée est rectiligne dans un plan horizontal et évolue uniquement entre  $-4m$  et  $4m$  suivant l'axe  $y_b$ , pour des valeurs constantes suivant l'axe  $x_b$  à  $4m$  et suivant l'axe  $z_b$  à  $0m$  de hauteur. Nous obtenons donc une trajectoire faisant  $8m$  de long au niveau du sol. Cette dernière peut être assimilée à un quart d'une trajectoire carrée. Les résultats obtenus dans ce cas seront transposables, pour les autres côtés du carré, à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  près.

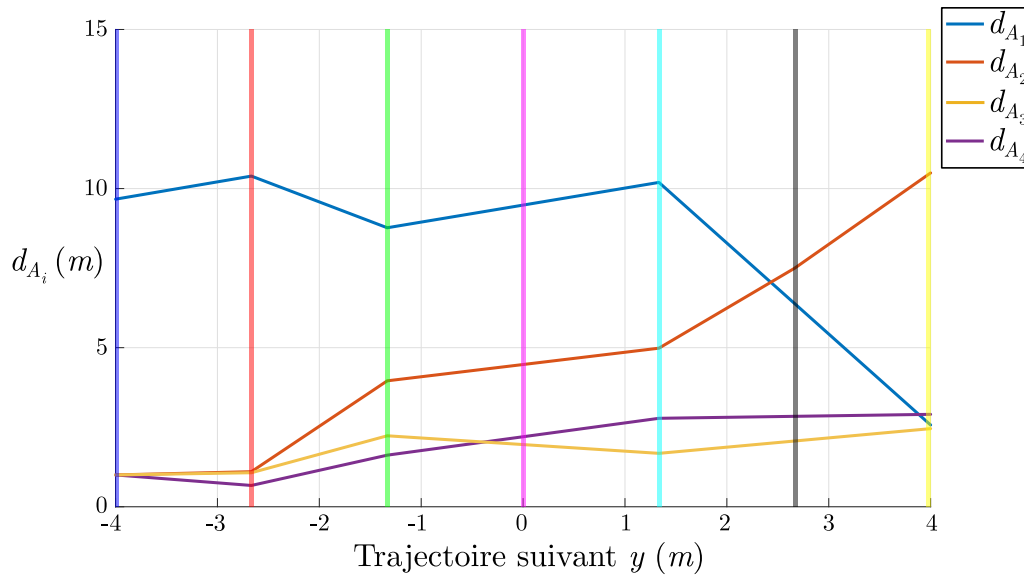
La méthode utilisée présente un temps de calcul relativement important au vu de sa multitude d'étapes, il est fait le choix de discrétiser en sept positions la trajectoire de la PM. Ce nombre nous permet de couvrir la totalité de la trajectoire tout en suivant l'évolution de  $\mathbf{A}_{opti}$  de façon continue. En effet, le calcul des points  $\mathbf{A}_{semi-opti}$  demande à lui seul un coût de calcul important avec les 257 architectures à tester pour une position de la PM, faisant monter à 1799 tests le nombre total d'itérations pour les sept positions de la trajectoire.



**Figure 4.15** – Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire rectiligne au niveau du sol

Les positions des points d'ancrage optimaux  $\mathbf{A}_{opti}$  sont calculées et l'ensemble des sept structures optimales du RPC est représenté sur la Fig. 4.15. Chaque quadrilatère représentant une structure optimale pour une position de la PM et est dessiné d'une couleur différentes avec une transparence afin d'améliorer la lisibilité de la Fig. 4.15. Il est à noter que l'empilement des quadrilatères suit la réalisation de la trajectoire. C'est pourquoi le quadrilatère bleu correspondant à la première position ( $\mathbf{p}_{ini} = [4 \ -4 \ 0]^T$ ) de la trajectoire se trouve au dernier plan de la Fig. 4.15 et inversement pour la position  $\mathbf{p}_{ini} = [4 \ 4 \ 0]^T$  en jaune se trouvant être la dernière de la trajectoire. La première observation est que pour cette trajectoire, qui est parallèle à un coté de la structure initiale du RPC, génère des déplacements faibles, vis-à-vis des dimensions du RPC, des points  $A_3$  et  $A_4$ . En effet, nous voyons que les sept points de  $A_3$  et de  $A_4$  créent des regroupements de points d'ancrage relativement proches. En ce qui concerne les points  $A_1$  et  $A_2$  ils sont sujet à des variations bien plus importantes au cours de la trajectoire. Nous pouvons noter un regroupement des points  $A_1$  uniquement pour les cinq premières positions (du bleu au cyan) autour d'une position moyenne de  $A_1 = [2; -7.5; 15]^T$ . Le point d'ancrage  $A_2$  présente aussi une concentration de ces cinq premiers points, mais moins marquée que pour  $A_1$ . Effectivement, une distance de près de  $3m$  sépare les deux premiers points d'ancrage  $A_2$  (bleu et rouge) avec les trois suivants (vert, rose et cyan). Les structures optimales correspondant à la fin de la trajectoire sont pour leur part très différentes

du reste. En effet, nous observons une forte variation de la géométrie du quadrilatère pour les deux dernières positions de la trajectoire (noir et jaune). Si nous analysons les structures dans leur globalité nous pouvons voir que l'optimisation de la position des points  $A_i$  conduit à une structure de RPC ayant son côté le plus petit au plus proche de la position de la PM. Cela explique le changement de configuration pour les deux dernières positions de la PM, où nous observons que le côté le plus court du RPC ne peut plus être celui entre  $A_1$  et  $A_2$ , mais celui entre  $A_2$  et  $A_4$ . De plus, nous pouvons constater que la forme du quadrilatère jaune est très proche de celle du bleu à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  près. L'évolution des valeurs  $d_{A_i}$  en fonction de la trajectoire est représentée sur la Fig. 4.16. Cette représentation nous permet de voir le déplacement de chacun des points  $A_i$  par rapport à sa position initiale  $A_i^0$ .



**Figure 4.16** – Évolution de la distance  $d_{A_i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en  $m$  en fonction de la position de la PM sur la trajectoire rectiligne au niveau du sol

Le code couleur est le même que sur la Fig. 4.15, c'est-à-dire que les bandes verticales transparentes représentent les différentes positions de la trajectoire. Les lignes brisées représentent l'évolution des valeurs des  $d_{A_i}$  en fonction de la position de la PM sur la trajectoire. Ces résultats confirment les premières observations faites précédemment. Nous voyons que les points  $A_3$  et  $A_4$  présentent une stabilité globale dans leur position avec une légère croissance. Le point  $A_1$  pour sa part est relativement constant sur les cinq premières positions de la trajectoire pour, par la suite, glisser proche de son point d'origine  $A_1^0$ . À l'inverse le point  $A_2$  présente une croissance tout au long de la trajectoire avec une pente plus importante sur les deux dernières positions. Nous observons ainsi le glissement de configuration observé sur la Fig. 4.15. La structure du RPC se voit grandement modifiée en fonction de la position de la PM pour réduire l'erreur  $\Delta p_{max}$ . Dans l'objectif de quantifier l'apport de cette optimisation des points d'ancrage  $A_i$  des RPC dans la réduction de l'erreur  $\Delta p_{max}$  nous pouvons comparer ces structures avec le RPC carré initial, comme étudié dans le chapitre 3. Pour ce faire, nous avons observé l'erreur moyenne de  $\Delta p_{max}$  sur les sept points de la trajectoire que nous noterons  $\overline{\Delta p_{max}}$ . Les résultats obtenus sont récapitulés dans le Tab. 4.3.

Structure du RPC	Cubique	$\overline{\mathbf{A}_{opti}}$	$\mathbf{A}_{opti}$	$\overline{\mathbf{A}_{opti}}$ par partie
$\overline{\Delta p_{max}}$	47mm	84.8mm	37.2mm	39.2mm

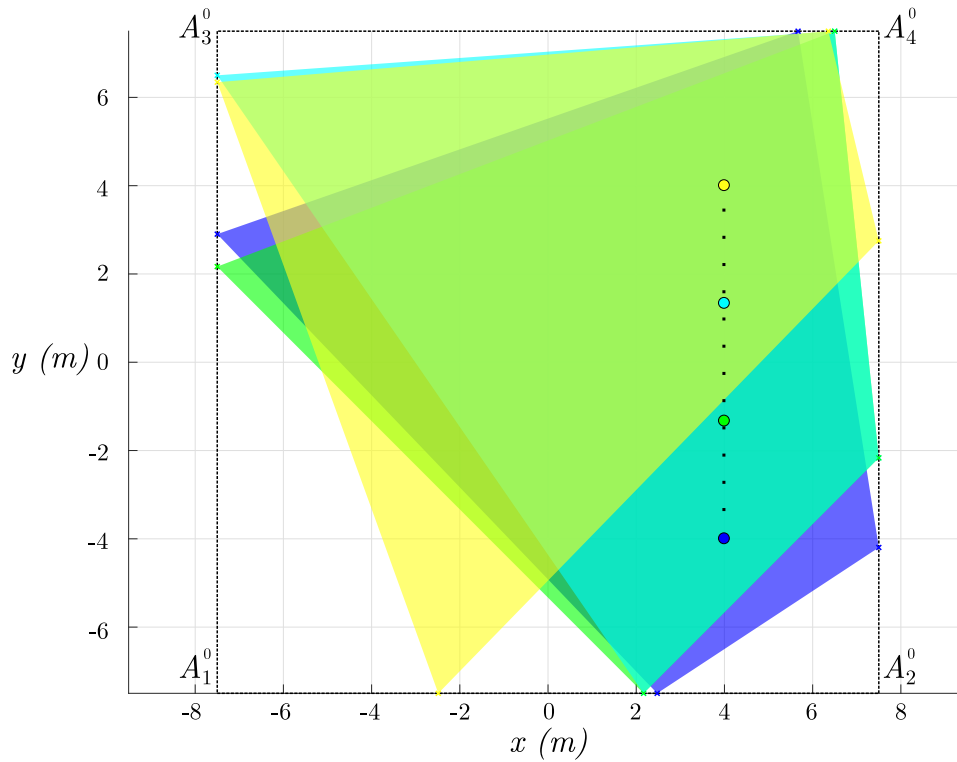
**Table 4.3** – Tableau résumant les valeurs de  $\overline{\Delta p_{max}}$  pour des structures de RPC pour une trajectoire rectiligne au sol

L'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  a été évaluée sur différentes structures (cf. Tab. 4.3). Premièrement, sur une structure dite cubique, comme celle que nous avons étudiée dans le chapitre 3 et au début du chapitre 4. Les données obtenues sur la structure carré nous servirons de référence pour la comparaison de l'ensemble des structures. La seconde structure évaluée est celle obtenue en faisant la moyenne des positions des points  $A_i$  optimaux pour chaque câble sur la totalité de la trajectoire. Cela nous donne quatre points d'ancrage  $A_i$  constants et donc une structure fixe de RPC optimale moyennée notée  $\overline{\mathbf{A}_{opti}}$ . La moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  est évaluée aussi pour chaque structure optimale obtenue (cf. Fig. 4.15). Pour finir,  $\overline{\Delta p_{max}}$  est calculée sur un RPC ayant des structures optimales moyennées par partie, c'est-à-dire que nous réalisons la moyenne des structures optimales uniquement pour celles proche entre elles. Comme nous l'avons remarqué précédemment sur la Fig. 4.15 deux groupes de points se détachent des résultats. Le premier concerne les cinq premières positions de la PM et le second est propre aux deux dernières positions. Nous faisons donc la moyenne des  $\overline{\mathbf{A}_{opti}}$  cinq premières structures nous donnant une structure optimale moyennée pour le début de la trajectoire et de même pour la fin de la trajectoire. Par la suite, nous calculons  $\overline{\Delta p_{max}}$  en faisant changer la structure du RPC pour les deux dernières positions de la trajectoire.

Au vu des valeurs de  $\overline{\Delta p_{max}}$  dans le Tab. 4.3 pour différentes structures, nous pouvons déjà affirmer que moyenniser la position des points d'encrage suite aux résultats de l'optimisation ( $\overline{\mathbf{A}_{opti}}$ ) ne génère par une structure améliorant la précision de la PM. Cependant, ce résultat est à pondérer car au regard des valeurs de l'erreur  $\Delta p_{max}$ , seule celle de la première position de la PM est beaucoup plus grande faisant croître sensiblement l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$ . Si nous excluons cette position nous obtenons une erreur moyenne sur les six autres positions de 43.1mm, soit une erreur moyenne inférieure à celle générée par un RPC cubique. Un gain de près de 10mm peut être constaté entre  $\overline{\Delta p_{max}}$  calculée sur une structure cubique ( $\overline{\Delta p_{max}} = 47mm$ ) et celle avec une structure optimale s'adaptant tout au long de la trajectoire ( $\overline{\Delta p_{max}} = 37.2mm$ ). Cependant, cela demande d'avoir un RPC équipé de points d'ancrage montés sur actionneur linéaire [Ngu+14b] ou sur des bases mobiles [Ras+18]. Au regard des résultats il est cependant possible de proposer une structure semi-optimale par partie. Seulement deux configurations de RPC différentes sont donc nécessaire pour la réalisation de la trajectoire désirée en assurant une amélioration de l'erreur de pose théorique maximale de 7.8mm soit 2mm de moins que pour une structure optimale évoluant en permanence avec les positions de la PM. Par ailleurs, un changement aussi radical de position des points d'ancrage nécessiterait un re-calibrage du RPC. Néanmoins, cela montre que si nous voulons travailler dans une zone bien précise nous pouvons trouver une architecture améliorant l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$ . L'optimisation des points d'ancrage  $A_i$  peut donc apporter une contribution importante à la réduction de l'erreur de pose théorique maximale due au fléchissement et à l'hystérésis des câbles.

Par la suite nous avons réalisé la même trajectoire sur un plan horizontal se trouvant à une hauteur de 7.5m afin de pouvoir observer l'évolution des structures optimales obtenues avec notre méthode. La trajectoire a été discrétisée en seulement quatre poses afin de réduire le temps de calcul, car nous voulons uniquement suivre l'évolution des structures en fonction de la hauteur.

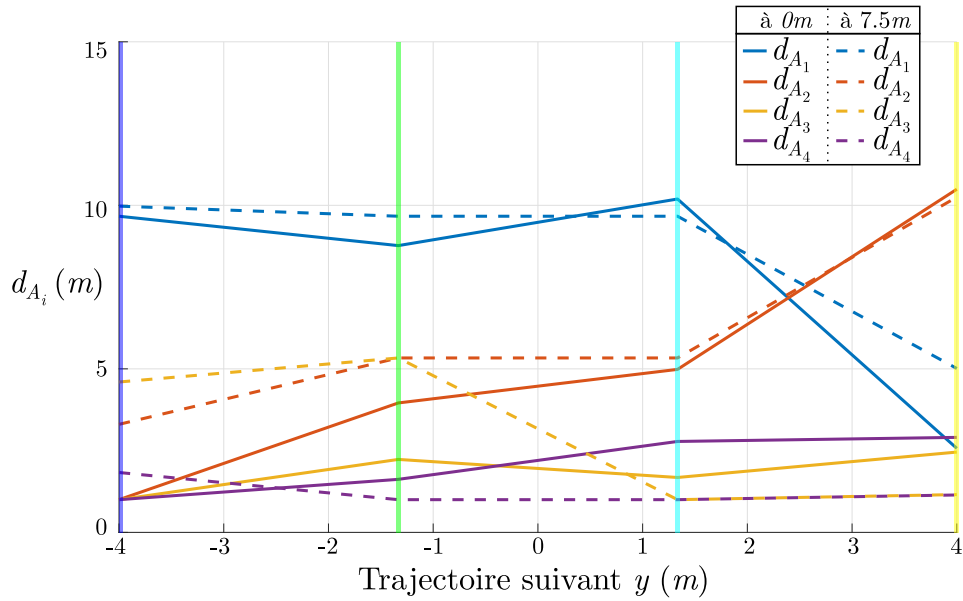
Le code de couleurs des poses de la trajectoire de la Fig. 4.17 respecte celui mis en place dans la Fig. 4.15. Si nous comparons les structures minimisant  $\Delta p_{max}$  au niveau du



**Figure 4.17** – Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire rectiligne horizontale à 7.5m de hauteur

sol et à mi-hauteur du volume du RPC, nous observons certaines similitudes. Effectivement, nous observons que les points  $A_1$  et  $A_2$  ont tendance à être proche sur la majorité de la trajectoire. Cela a comme effet d'avoir le plus petit côté du quadrilatère du RPC qui se situe au plus proche des positions de la PM. Tout comme précédemment, à la fin de la trajectoire, la configuration du RPC change pour faire du plus petit côté le segment entre  $A_2$  et  $A_4$ . Pour les trois premières positions nous remarquons un regroupement des points  $A_i$ . Les positions du point  $A_4$  varient très peu, tout comme pour la trajectoire au niveau du sol. Cependant, le point d'ancrage  $A_3$  ne forme plus un groupe unique, comme dans la Fig. 4.15, mais deux groupes, l'un pour deux premières positions de la trajectoire et un autre pour les deux dernières. Pour pouvoir analyser plus en détail l'évolution des structures optimales en fonction de la hauteur de la trajectoire, l'évolution de  $d_{A_i}$  est tracée pour chaque point  $A_i$  et mise en parallèle avec l'évolution de  $d_{A_i}$  pour la trajectoire au niveau du sol (cf. Fig. 4.16).

La figure 4.18 représente l'évolution des valeurs  $d_{A_i}$  pour les trajectoires rectilignes à 0m (traits pleins) et à 7.5m (traits discontinus). L'évolution générale de l'ensemble des points suit globalement la même tendance. En effet, l'évolution de  $A_1$  est quasi identique pour les deux hauteurs de la trajectoire. Le point  $A_2$  a une croissance très proche sur la fin de la trajectoire, mais commence plus loin de son origine dans le cas d'une trajectoire à 7.5m. En ce qui concerne le point d'ancrage  $A_3$  nous pouvons observer une différence de position significative en début de trajectoire, mais cet écart se réduit grandement sur la fin de la trajectoire. En ce qui concerne le point  $A_4$  celui-ci ne présente pas une variation importante tout au long de la trajectoire et cela pour les deux hauteurs. De plus, l'ordre de grandeur de  $d_{A_4}$  au niveau du sol et à mi-hauteur est le même.



**Figure 4.18** – Comparaison des distances  $d_{A_i}$  entre les structures pour une trajectoire au niveau du sol et à mi-hauteur du volume du RPC

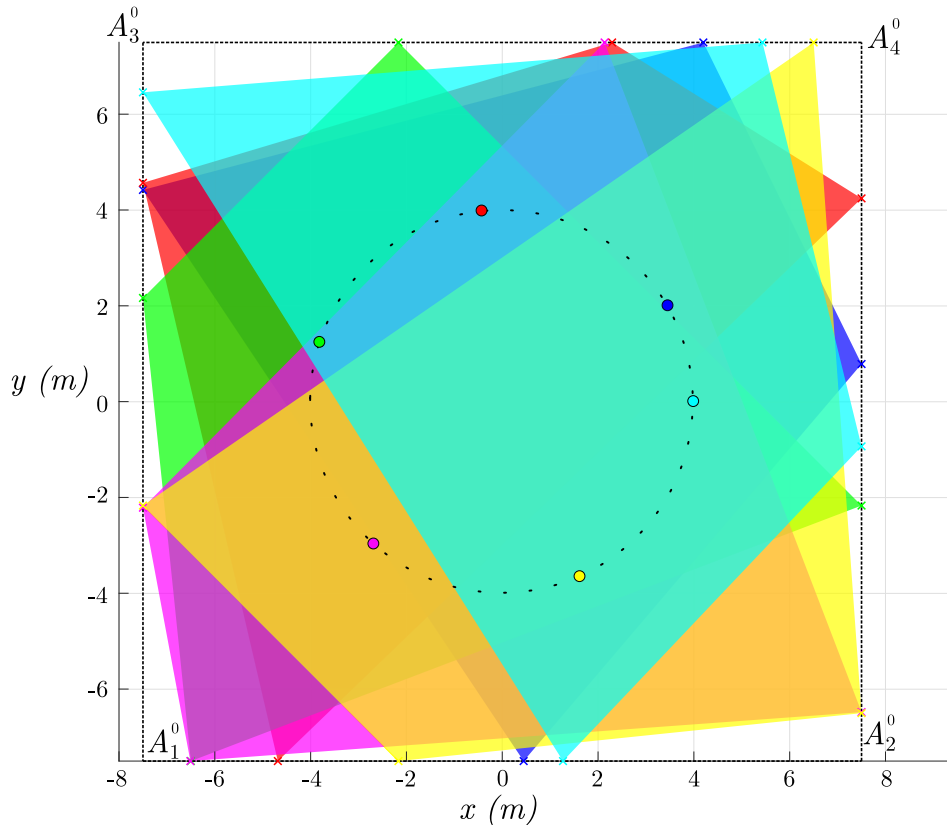
Structure du RPC	Cubique	$\overline{\mathbf{A}_{opti}}$	$\mathbf{A}_{opti}$	$\overline{\mathbf{A}_{opti}}$ par partie
$\overline{\Delta p_{max}}$ à 0m	48.5mm	171.3mm	38.4mm	51mm
$\overline{\Delta p_{max}}$ à 7.5m	46.3mm	163.3mm	28.8mm	42.3mm
$\overline{\Delta p_{max}}$ sur les deux trajectoires	47.4mm	167.3mm	33.6mm	46.6mm

**Table 4.4** – Tableau résumant les valeurs de  $\overline{\Delta p_{max}}$  pour des structures de RPC pour une trajectoire au niveau du sol et à mi-hauteur du volume du RPC

Nous pouvons nous interroger sur la possibilité de trouver une structure optimale permettant de réduire l'influence de l'hystérésis dans le cas des deux trajectoires. Tout d'abord, nous évaluons, sur chacune des trajectoires, l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  pour une structure cubique du RPC. Par la suite, nous essayons de trouver une valeur moyenne des points d'ancrage à l'aide de l'ensemble des points  $A_i$  calculés précédemment sur la trajectoire à 0m et à 7.5m. Cependant, cette structure ne permet pas d'atteindre l'ensemble des positions des trajectoires. En effet, la première position de la trajectoire à 0m ne peut être calculée car elle n'appartient plus à l'espace de travail du RPC. Les points  $A_1$  et  $A_2$  sont donc légèrement déplacés afin d'inclure cette première position dans l'espace de travail du RPC. Cela engendre comme problème que l'erreur  $\Delta p_{max}$  sur cette première position devient extrêmement importante et fait augmenter considérablement la moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  sur les trajectoires. Si cette position n'est pas prise en compte dans le calcul de  $\overline{\Delta p_{max}}$  nous obtenons une valeur de 43.4mm. L'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  obtenue grâce aux structures optimales propres à chaque position calculée est par la suite analysée, révélant un gain significatif de précision de la PM. Au regard de nos observations nous avons déterminé des structures moyennes optimales par partie en moyennant les positions des points  $A_i$  regroupés. Dans cette étude la trajectoire au niveau du sol a été ramenée uniquement aux quatre positions communes aux deux trajectoires, expliquant les différences pour la première ligne du Tab. 4.4.

### 4.2.2.2 Trajectoire circulaire à hauteur constante

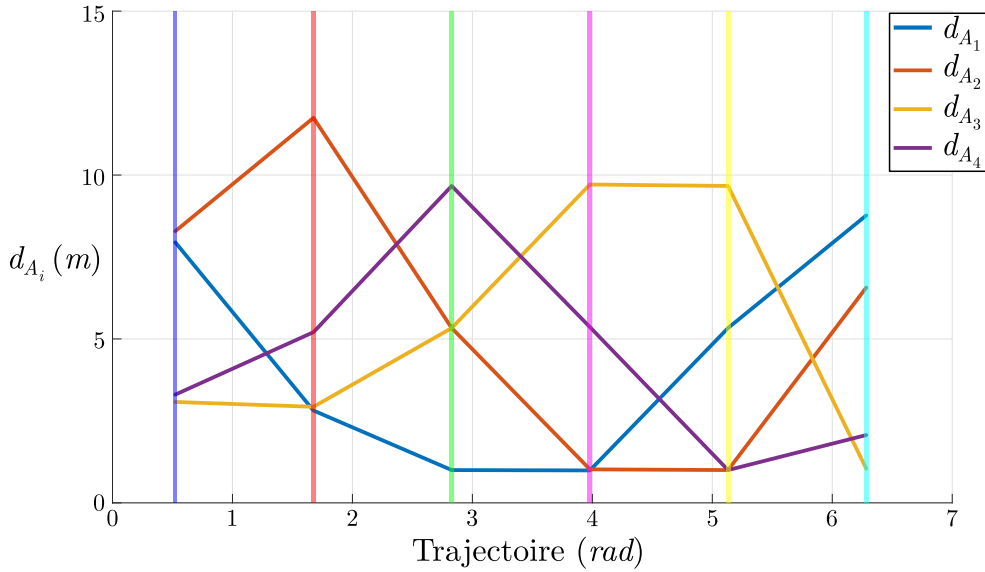
L'évolution des structures optimales vient d'être évaluée le long d'une trajectoire rectiligne à deux hauteurs différentes. Cependant, une grande partie des trajectoires pouvant être rencontrées lors de la mise en application des RPC sont de forme circulaire. Nous allons appliquer notre processus de calcul et d'analyse pour observer l'évolution des structures minimisant  $\Delta p_{max}$  sur une trajectoire circulaire. Cette trajectoire sera discrétisée en six poses réparties le long d'un cercle de  $4m$  de rayon centré en  $O$ , centre du repère global du RPC, et situé au niveau du sol, donc à  $0m$ .



**Figure 4.19** – Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire circulaire au niveau du sol

Comme pour les autres trajectoires, nous pouvons suivre le déplacement des points  $A_i$  en fonction de la position de la PM sur la trajectoire. La trajectoire étant circulaire, la structure du RPC change significativement de forme. Une certaine forme de rotation du RPC peut être observée. Par exemple, si nous comparons la structure bleue avec la rose nous pouvons remarquer une rotation de  $\pi$  quasi parfaite. Nous retrouvons ce que nous avons déjà remarqué, lors de l'étude d'une trajectoire rectiligne, à savoir le fait que le segment le plus petit du quadrilatère optimale calculée se retrouve toujours au plus près de la position correspondante.

À l'image des Fig. 4.16 et Fig. 4.18 nous avons tracé l'évolution des distances  $d_{A_i}$  pour la trajectoire circulaire (cf. Fig. 4.20). Nous retrouvons le cycle de rotation des structures observé précédemment. Sur ce type de trajectoire nous voyons qu'il est impossible de déterminer une structure moyenne ni même moyenne par partie. Il serait nécessaire soit de garder une structure cubique soit d'avoir des points  $A_i$  mobiles. Cette dernière solution pose des



**Figure 4.20** – Évolution de la distance  $d_{A_i}$  en  $m$  en fonction de la position de la PM sur la trajectoire circulaire au niveau du sol

problèmes d'étalonnage étant donnée le reconfigurage perpétuel des chaînes d'actionnement des câbles que cela nécessiterait.

Structure du RPC	Cubique	$\mathbf{A}_{opti}$
$\overline{\Delta p_{max}}$	41.9mm	32.9mm

**Table 4.5** – Tableau résumant les valeurs de  $\overline{\Delta p_{max}}$  pour la structure cubique et les structures optimales du RPC pour une trajectoire circulaire au niveau du sol

Tout comme pour des trajectoires rectilignes le gain obtenu en optimisant la position des points d'ancrage  $A_i$  n'est pas négligeable (cf. Fig. 4.5). À l'aide des structures optimales du RPC, pour chaque position de la PM, nous obtenons une réduction de  $\overline{\Delta p_{max}}$  de 21.5%.

Cette section s'est intéressée à réduire l'influence de l'hystérésis et du fléchissement du câble par l'optimisation de la position des points d'ancrage des poulies  $A_i$ . Il a été cherché à minimiser l'erreur de pose théorique maximale de la PM  $\Delta p_{max}$  générée par la non prise en compte du fléchissement et de l'hystérésis du câble (cf. Fig. 4.3). L'optimisation des points d'ancrage minimise l'erreur imputable aux comportements mécaniques du câble. En effet, nous obtenons dans l'ensemble des cas une réduction de l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  de 20% à 30% par rapport à celle calculée pour un RPC cubique. Cependant, la recherche d'une structure optimale fixe à l'aide de la position moyenne des points d'ancrage optimaux des poulies n'est pas une solution admissible car l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  augmente et certaines positions de la PM peuvent ne plus appartenir à l'espace de travail du RPC. Cela demande donc une réflexion plus poussée lors du développement du RPC pour des trajectoires données. Une structure optimale fixe semble exister pour des trajectoires rectilignes, mais de dimensions plus petites que celles évaluées. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, une structure du RPC reconfigurable en temps réel semble être pour le moment la seule alternative afin d'améliorer l'erreur de pose théorique maximale due au fléchissement du câble et au phénomène d'hystérésis de son module de Young.



### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord rappelé que les câbles sont des structures mécaniques complexes de par leur fabrication, rendant la connaissance de leur module de Young difficile lors de l'utilisation du RPC. Ce module de Young est souvent approximé à une valeur nominale constante pour tous les câbles du RPC. Ce chapitre avait donc pour objectif d'étudier l'influence du phénomène d'hystérésis du module de Young des câbles sur l'erreur de pose théorique de la PM du RPC. Pour cela une méthode a été mise en place afin d'affecter des valeurs variables de module de Young indépendamment sur chacun des câbles et de déterminer la configuration la plus pénalisante sur la pose de la PM. Cela nous a permis d'évaluer l'erreur de pose théorique maximale  $\Delta p_{max}$ , représentant l'erreur la plus importante possible pour une position désirée  $\mathbf{p}_{ini}$  de la PM lorsque le fléchissement du câble et l'hystérésis du module de Young sont négligés dans la modélisation du RPC.

Ce chapitre s'axant sur l'hystérésis du comportement élastique des câbles se décompose en deux parties distinctes. La première partie de ce chapitre est vouée à l'observation de l'influence du phénomène d'hystérésis sur la précision de la PM du RPC. Nous avons donc cherché à représenter l'effet que l'incertitude aléatoire du module Young avait sur la pose de la PM. Les positions minimisant et maximisant l'erreur  $\delta p$ , calculées avec les valeurs nominales du module de Young, ont tout d'abord été analysées. L'espace d'incertitude  $\Omega$  de l'erreur de pose théorique de la PM peut être extrait pour ces positions ainsi que les différentes erreurs le constituant. L'erreur de pose théorique maximale  $\Delta p_{max}$  est ensuite évaluée le long d'une trajectoire hélicoïdale. Par la suite, les surfaces limites d'erreur de  $\Delta p_{z_{max}}$  et  $\Delta p_{z_{min}}$  pour des plans horizontaux de l'espace de travail du RPC sont tracées pour évaluer l'incertitude de l'erreur de pose théorique verticale. La seconde partie cherche à minimiser l'effet de l'hystérésis en optimisant la position des points d'ancrage  $A_i$  des poulies. Une fois la méthode présentée, elle est appliquée sur une trajectoire rectiligne horizontale à deux hauteurs différentes du RPC ainsi que sur une trajectoire circulaire. Cela afin d'observer l'évolution de la structure optimale du RPC ainsi que l'erreur moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  par rapport à une structure de référence cubique.

Ces travaux nous ont permis d'observer premièrement l'espace d'incertitude  $\Omega$  de l'erreur de pose théorique de la PM due à l'hystérésis. À la position  $P_1$ , minimisant  $\delta p$ ,  $\Omega$  présente une forme géométrique régulière avec un volume bien plus faible que celui de l'espace  $\Omega$  de la position  $P_2$  maximisant  $\delta p$ . En effet, ce dernier est plus allongé et présente donc un volume plus important. Il semblerait donc que les tensions jouent un rôle plus important que la longueur des câbles déployées sur la forme et le volume de l'espace de  $\Omega$ . De plus, il a pu être remarqué que les espaces  $\Omega$  ne sont pas centrés autour de la position nominale  $P_n$ , qui est déterminée avec un module de Young nominal constant et identique sur l'ensemble des câbles. Cela confirme les résultats du chapitre 3 indiquant qu'un module d'Young faible aurait plus d'influence sur l'erreur de pose théorique qu'un module d'Young élevé même si les valeurs sont équiréparties autour de sa valeur nominale  $E_{nom}$ . Au regard de la relative constance de l'erreur  $\Delta p_{max}$  sur la moitié basse de la trajectoire hélicoïdale, une stratégie d'étalonnage permettrait de réduire cette erreur. Cependant, nous avons pu constater que le bord de l'espace de travail du RPC était bien plus sensible aux erreurs générées par l'hystérésis de l'élasticité des câbles. De plus, ces erreurs peuvent être réduites de près de 30% en cherchant à optimiser les positions des points d'ancrage des poulies sur la structure. La position de ces points semblent jouer un rôle important dans l'influence qu'a l'hystérésis sur l'erreur de pose théorique maximale de la PM. Par ailleurs, la conception et la réalisation d'un RPC ayant des points  $A_i$  mobiles est actuellement complexe et lourde de mise en œuvre. Il semblerait cependant que des structures optimales moyennes sur des morceaux des trajectoires étudiées réduiraient l'influence de l'hystérésis sur l'erreur de pose moyenne  $\overline{\Delta p_{max}}$  de la PM. Il est à noter que ce type de structure conviendrait uniquement pour des zones cibles restreintes de l'espace de travail du RPC.

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Les travaux de recherches que nous avons présentés au travers de ce manuscrit de thèse traitent de la modélisation, de l'analyse de sensibilité et de l'optimisation des Robots Parallèles à Câbles (RPC). Nous nous sommes intéressés plus précisément à la sensibilité des RPC suspendus à 3 degrés de libertés (ddl), avec une Plate-forme Mobile (PM) considérée comme un point masse, vis-à-vis des incertitudes liées aux paramètres géométriques des poulies de renvoi ainsi qu'au comportement mécanique des câbles. Il est à noter que les modèles développés et mis en application dans ces travaux sont statiques et ne prennent pas en compte le comportement dynamique des RPC.

Le manuscrit comporte quatre chapitres. Tout d'abord un état de l'art est mené dans le chapitre 1. Cela a permis d'introduire les différents termes, notions, et modèles déjà présents dans le domaine des RPC et utiles comme base à nos réflexions. Des verrous scientifiques ont aussi été mis en lumière au travers de ce chapitre. L'amélioration de la précision des RPC ressort comme un enjeu majeur de ce système mécanique. Une des causes de cette relative faible précision est la non prise en compte dans les modèles standards des poulies de renvoi et de la longueur morte des câbles c'est-à-dire entre les poulies et les enrouleurs. De plus, une quasi absence d'étude sur l'influence des paramètres géométriques des poulies sur la pose de la PM et des phénomènes mécaniques inhérents au câble, tel que l'hystérésis, a pu être constatée. Cependant, des applications de RPC sont développées et utilisées en condition réelle. Cela s'explique soit par des utilisations ne demandant pas une précision millimétrique, soit par l'ajout d'un système de compensation d'erreur de pose, mais aussi par la mise en place d'un asservissement et des schémas de commande complexes. Des modèles trop complexes ne permettent pas une commande efficace en temps réel. Au regard de ces observations le sujet de la thèse présenté a comme objectif principal d'obtenir une conception préliminaire optimale de RPC, dans le but de simplifier les schémas de commande tout en augmentant la précision de la pose de la PM.

À la suite de ces observations, le chapitre 2 établit les modèles statiques dits étendus. Le terme « étendus » permet de souligner l'ajout des paramètres géométriques des poulies ainsi que de la longueur morte des câbles. Comme cela a été remarqué dans le chapitre 1, la modélisation du comportement mécanique des câbles peut-être menée à différentes échelles, de l'élasticité uni-directionnelle jusqu'au fléchissement élastique du câble. Trois modèles statiques étendus ont ainsi été mis en équation permettant de mener à bien les études tant sur la prise en compte des paramètres géométriques que sur les paramètres mécaniques des câbles. Il est à noter que ces modèles ont été établis pour une poulie dite « classique » donc avec une articulation de type pivot vertical, mais aussi pour une nouvelle architecture de

poulie ayant une articulation de type joint de cardan. Cette dernière n'est pas industrialisée ni utilisée dans les RPC actuellement et est étudiée dans la suite du manuscrit. La dernière partie du chapitre est dédiée à l'élaboration d'une méthode de quantification d'erreur de pose théorique de la PM. Cette méthode nous permet de quantifier localement et globalement l'erreur de pose théorique réalisée lors de la non prise en compte de paramètres de conception dans un modèle inverse. Ces indices nous donnent la possibilité de suivre l'évolution des erreurs le long de trajectoires rectilignes, sur des plans horizontaux à l'aide des iso-contours d'erreur et dans un volume. Il est également possible de comparer les erreurs de pose globale entre plusieurs RPC ayant des paramètres géométriques ou mécaniques différents. L'indice d'évaluation de l'erreur de pose globale est donc utilisé comme réponse dans les analyses de sensibilité qui sont développées dans les chapitres suivants pour l'étude des paramètres géométriques des poulies ainsi que du comportement mécanique des câbles. Le chapitre 3 se focalise sur l'analyse de sensibilité de RPC à 3 ddl ayant un point masse comme PM, tout d'abord vis-à-vis des paramètres géométriques des poulies, puis du comportement mécanique des câbles. Une première conception de la poulie à joint de cardan est de plus présentée, nous permettant d'en connaître la masse et ainsi de justifier sa non prise en compte dans les modèles étendus. L'influence des paramètres géométriques des poulies, c'est-à-dire son rayon de réa, sa longueur de bras de levier ainsi que son articulation principale est étudiée sur l'erreur de pose théorique de la PM. Dans cette étude les câbles sont considérés comme des segments élastiques avec un module de Young constant et identique quel que soit le câble. Nous avons pu ainsi remarquer que la forme du RPC ne semblait pas influencer la répartition des erreurs de pose, nous permettant donc de nous focaliser uniquement sur un RPC suspendu cubique à 4 câbles avec un point masse comme PM. À l'aide d'un plan d'expériences nous avons pu observer de fortes interactions entre les différents paramètres géométriques indiquant la nécessité, lors de la conception préliminaire d'un RPC, de les prendre tous en compte pour sélectionner les poulies adéquates. Pour ce faire, une méthode de tests fournissant l'évolution de l'indice d'évaluation globale d'erreur de pose théorique en fonction du rayon du réa et de la dimension du bras de levier a été proposée. Cette méthode facilite la sélection préliminaire des dimensions géométriques des poulies. Grâce à ces connaissances nous avons pu fixer ces paramètres afin de focaliser l'étude sur l'analyse de sensibilité par rapport aux incertitudes du comportement mécanique liées à l'utilisation de câbles dans la chaîne d'actionnement. L'influence du module de Young des câbles, de leur masse linéique, de la masse de la PM et de l'articulation des poulies, dont la géométrie a été optimisée, est étudiée au travers de l'application d'un plan d'expériences. Cette étude confirme que le module de Young des câbles joue un rôle prépondérant dans l'erreur de pose théorique de la PM. De plus, l'évolution de l'erreur de pose théorique de la PM n'est pas linéaire suivant la variation du module de Young. Nous avons par la suite pu observer l'évolution des effets des incertitudes mécaniques en fonction des dimensions du RPC montrant clairement une influence prépondérante du module de Young et de la masse de la PM sur l'erreur de pose théorique. Une évolution de l'effet de la masse linéique du câble est toutefois à noter lors de l'augmentation de la taille du RPC. Dans le quatrième et dernier chapitre, l'accent est mis sur l'hystérésis du module de Young des câbles, phénomène générant un comportement mécanique non-déterministe des câbles. Dans ce chapitre, le module de Young de chacun des câbles est considéré indépendant des autres. Nous avons mis en place une méthode d'optimisation permettant de déterminer le jeu de modules de Young générant l'erreur de pose théorique de la PM la plus importante et la plus faible. Il a pu être observé que, sur la moitié basse de l'espace de travail, l'erreur de pose théorique maximale due à l'hystérésis et au fléchissement est relativement constante et augmente rapidement sur la partie haute du RPC. L'erreur de pose théorique due à ce phénomène non-déterministe peut représenter près de 50% de l'erreur de pose générée par un modèle étendu à module de Young nominal constant. Dans la seconde partie de ce chapitre, la position des points d'ancrages des poulies sur la structure du RPC est optimisée pour réduire l'influence de l'hystérésis sur l'erreur de pose théorique maximale de la PM. Il en ressort que cette erreur, due au comportement particulier des câbles, peut-être réduite

significativement en réfléchissant à la position des points d’ancrages des poulies pour des applications déterminées au préalable.

Nous pouvons retrouver les apports des travaux menés dans cette thèse dans le Tab. 4.6.

Chapitre 2	Chapitre 3	Chapitre 4
- Modèle Géométrique Étendu	- Présentation d’une nouvelle architecture de poulie à joint de cardan	- Méthode de prise en compte de l’hystérésis du module de Young du câble
- Modèle Élasto-Géométrique Étendu	- Poulie à joint de Cardan qui minimise $\ \delta\mathbf{p}\ _2$	- L’erreur due à l’hystérésis peut représenter près de 50% de l’erreur générée par un module de Young nominal
- Modèle Fléchissant Étendu	- Ensemble des paramètres géométriques des poulies importants lors de la conception	- $\Delta p_{max}$ est relativement constant sur la majeure partie de l’ETS
- Schéma de résolution itératif	- Méthode de sélection du jeu de paramètres $r_p/h$ pour chaque type de poulie	- Méthode d’optimisation des points d’ancrages des poulies pour réduire $\Delta p_{max}$
- Schéma de résolution du MFD <sub>E</sub>	- Module de Young est le paramètre mécanique le plus influent quelque soit la dimension du RPC  - L’effet de la masse linéique $\mu_0$ croissant avec la dimension du RPC	- Réduction de $\Delta p_{max}$ significatif en travaillant sur la position des points d’ancrage des poulies

**Table 4.6** – Tableau récapitulatif des conclusions de la thèse

Nous pouvons rappeler la problématique, que nous avons formulé dans l’introduction, « Quels sont les paramètres et les incertitudes de la chaîne d’actionnement affectant la précision de la plateforme mobile du RPC et quels sont les choix à faire lors de la conception pour limiter leurs effets ? ». Au regard de ces résultats nous pouvons apporter comme réponse à notre problématique que les poulies et de ses paramètres géométriques jouent un rôle pour des structures de RPC inférieur à 5m de côté. Cependant, leurs effets sur l’erreur de pose théorique de la PM peut être fortement réduit lors de leurs prises en compte dans le modèle inverse. Leur dimensionnement nécessite la prise en compte de l’ensemble de leurs paramètres géométriques et il existe un jeu de paramètres rayon de réa/bras de levier minimisant l’erreur de pose théorique. De plus, la nouvelle poulie avec une articulation de type joint de cardan est un choix technique réduisant l’erreur de pose théorique de la PM ainsi que les contraintes mécaniques internes. Quelle que soit l’échelle du RPC il est nécessaire de prendre en compte l’incertitude sur les paramètres mécaniques des câbles lors de la conception. Une recherche des positions optimales des points d’ancrages des poulies permet cependant d’améliorer la précision vis-à-vis de l’hystérésis des câbles, mais réduit l’espace de travail du RPC.

D’un point de vue méthodologique, ce manuscrit introduit des modèles statiques permettant de prendre en compte l’ensemble des paramètres géométriques des poulies combinés soit

à une modélisation des câbles sous forme de segment élastique soit à une modélisation de leur fléchissement. Une méthode de comparaison entre deux modèles est aussi présentée et permet d'analyser l'effet de paramètres. La prise en compte de l'hystérésis a de plus été formalisée aidant ainsi à connaître l'erreur de pose théorique maximale de la PM si les valeurs bornant le module de Young sont connues.

## Perspectives

Dans un premier temps il serait intéressant d'étendre l'étude sur l'optimisation des points d'ancrage à une optimisation non plus sur une position unique mais sur une trajectoire rectiligne globalement prise en compte. Cela nous permettrait de déterminer la réelle architecture globale minimisant l'erreur de pose théorique pour du suivi de trajectoire. De plus, il serait intéressant de coupler cela avec d'autres problématiques de sélection de la géométrie d'un RPC, comme la dimension du volume de travail. Par la suite, il serait intéressant d'intégrer une géométrie de PM aux modèles. En effet, La PM, dans ces travaux, a été considérée comme un point masse réduisant ses ddl aux trois translations. Cela impliquerait donc une gestion de l'orientation de celle-ci par l'ajout de câbles. Nous pourrions ainsi étudier le RPC avec une PM à orientation constante. Cela aura comme effet de réduire les espaces de travail ainsi que les espaces réguliers des RPC, de modifier la répartition des tensions dans les câbles, mais aussi de devoir prendre en compte les différentes interférences entre les câbles ou entre les câbles et les éléments de la structure du RPC dans les modèles. Une étude de sensibilité aux incertitudes pourra donc être à nouveau menée, se basant sur les méthodes déjà développées dans cette thèse, afin d'en extraire les effets sur l'orientation de la PM. Une optimisation de la position des points d'ancrage des poulies, mais aussi des points de fixation des câbles sur la PM pourra être menée afin de réduire l'influence de l'hystérésis sur la précision de la PM. Une modélisation de l'enrouleur et de l'angle de sortie du câble de celui-ci serait un plus au modèle. Cela permettrait de prendre en compte une petite variation de longueur de câble générée par l'angle de sortie de l'enrouleur dans la longueur morte du câble et donc dans son allongement.

En restant dans les études numériques, mais nécessitant un temps d'étude plus important, nous pourrions nous intéresser au comportement dynamique du RPC et de la poulie à joint de cardan. En effet, les travaux ont montré de bon résultats de la part de la poulie équipée d'un joint de cardan sur la réduction d'erreur de pose théorique. Cependant, cette thèse s'est restreinte au domaine statique. Une étude en dynamique de ces poulies serait utile et permettrait d'observer leur réaction au changement de direction, leur effet sur le caractère vibratoire du RPC ainsi que l'effet de l'inertie de celles-ci sur les erreurs de pose de la PM. Par la suite, un prototype de cette architecture de poulie pourra être fabriqué. Des essais expérimentaux comparatifs avec des poulies « classiques » pourront être réalisés dans l'objectif de conclure sur l'efficacité de cette architecture de poulie dans le domaine des RPC.

Les études numériques menées ont permis de quantifier la sensibilité des RPC à un ensemble de paramètres géométriques et mécaniques. Cependant, sur la suite des études, il serait judicieux de réaliser des essais expérimentaux, pour valider les modèles et résultats obtenus numériquement. De plus, des essais de traction/détente sur les câbles utilisés permettraient de mieux caractériser les variations du module de Young des câbles dues à l'hystérésis afin d'extraire des espaces d'incertitude plus précis. Il pourra être implémenté une loi d'évolution de l'élasticité du câble par rapport à son état de tension précédent ou à extraire des probabilités de valeur des tensions dans les câbles dans l'objectif de préciser l'espace d'incertitude. De plus, le développement d'un système permettant de modifier rapidement les points d'ancrage des poulies au cours de la réalisation d'une trajectoire sans réétalonnage pourrait grandement augmenter la précision des RPC. Cependant, cela demanderait une étude poussée et le développement complet d'un RPC.

Dans un futur plus lointain l'équipe de recherche au sein du laboratoire souhaite orienter ses recherches dans le domaine de l'impression 3D de béton grâce à des RPC. Il serait alors essentiel de développer et fabriquer un prototype de RPC répondant à cette application. Cela nous permettra de mettre en application l'ensemble des technologies qui auront été développées et étudiées dans cette thèse et par la suite. De plus, une expertise plus poussée dans le domaine de la commande et de l'étalonnage des RPC devra alors être acquise.





# Modèle de poulie pesante

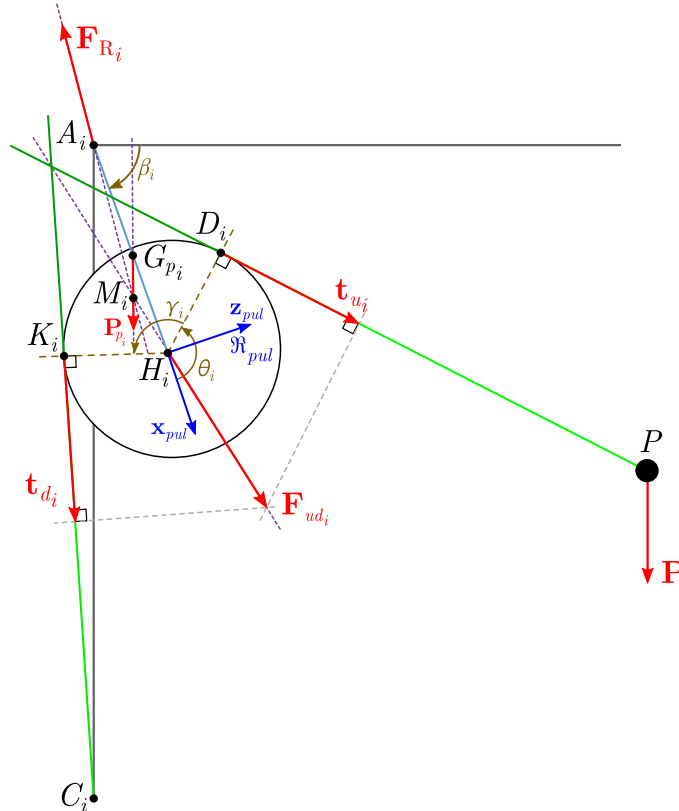
A.1	Modèle géométrique de poulie pesante équipée d'une articulation de type joint de cardan	154
A.2	Résultats	156

Cette annexe décrit la mise en place des équations du modèle géométrique avec des poulies équipées de joint de cardan pesante dans l'objectif de vérifier l'hypothèse faite dans cette thèse de ne pas prendre sa masse en compte. Effectivement, dans cette thèse la masse du système Réa + Bras de levier ( $m_{p_i}$ ) composant les poulies est négligée. Cependant, dans le cadre d'une telle architecture de poulie cette masse joue forcément un rôle dans l'équilibre statique du système et donc sur la pose finale de la Plateforme Mobile (PM). Nous cherchons donc à quantifier son influence. Dans la première partie de cette annexe, les équations sont mises en places. Puis, les résultats sont analysés afin de déterminer si la masse  $m_{p_i}$  peut-être ou non négligée.



## A.1 Modèle géométrique de poulie pesante équipée d'une articulation de type joint de cardan

Les équations de ce modèle sont basées sur le schéma présenté sur la Fig. A.1 et la Fig. 2.4a.



**Figure A.1** – Paramétrisation d'une poulie pesante dans le plan  $(A_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$

Pour déterminer la position de la poulie en prenant en compte sa masse propre il est nécessaire de résoudre un système d'équation décrivant la statique de la PM ainsi que de la poulie. Dans ce modèle, la masse de la poulie comprend la masse de la réa et la masse du bras de levier. Le point d'application du poids de ce système est localisé par le point  $G_{p_i}$  point de gravité de l'ensemble Réa+Bras de levier, éloigné d'une distance  $e$  de  $A_i$  et se trouvant sur la droite  $(A_i H_i)$ ,  $H_i$  correspondant au centre de la réa.  $\mathbf{t}_{u_i}$  et  $\mathbf{t}_{d_i}$  sont les tensions respectivement dans la partie utile du câble et la longueur morte.  $\mathbf{F}_{ud_i}$  est la force équivalente des tensions et  $\mathbf{F}_{R_i}$  la force de réaction du support au point  $A_i$ . Le poids dû à la masse de la PM est noté  $\mathbf{P}$ , orienté suivant  $\mathbf{z}$  négatif et est appliqué au centre de la PM considéré comme un point masse, noté  $P$ . Les points géométriques dépendant de la pose de la PM seront exprimés en coordonnées polaires. Les inconnues du système sont  $[\mathbf{t}_{u_i} \mathbf{t}_{d_i} \mathbf{F}_{R_i} \mathbf{F}_{du} \beta_i \theta_i \gamma_i]$  ce qui revient donc à 11 inconnues par câble. L'angle  $\beta_i$  permet le positionnement de  $H_i$  et  $G_{p_i}$ . Les angles  $\theta_i$  et  $\gamma_i$  décrivent, respectivement l'angle entre  $\mathbf{x}_{pul}$  et  $\mathbf{d}_i$  et entre  $\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ , définissent la position de  $D_i$  et  $K_i$ .

**Tangence en sortie et en entrée de poulie :** Les câbles en entrée et en sortie des poulies doivent respecter une contrainte de tangence. Le produit scalaire entre le vecteur tension du

câble utile  $\mathbf{t}_{u_i}$  et le vecteur  $\mathbf{d}_i$  doit être nul et de même pour celui entre le vecteur tension de la partie morte du câble  $\mathbf{t}_{d_i}$  et  $\mathbf{k}_i$  (cf. Eq. A.1).

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{u_i}^T \cdot \mathbf{d}_i = 0 \\ \mathbf{t}_{d_i}^T \cdot \mathbf{k}_i = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{t}_{u_i} = [t_{u_{xi}}, t_{u_{zi}}]^T$  est la tension dans la partie utile du câble.  $\mathbf{t}_{d_i} = [t_{d_{xi}}, t_{d_{zi}}]^T$  est pour sa part la tension dans la longueur morte du câble. Nous pouvons noter  $\mathbf{d}_i$ , dans le repère  $\mathfrak{R}_{pul}$ , comme :

$$\begin{cases} x_{d_i} = r_p \cos(\theta_i) \\ z_{d_i} = r_p \sin(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Nous pouvons de même exprimer  $\mathbf{k}_i$  dans le repère de la poulie comme :

$$\begin{cases} x_{k_i} = r_p \cos(\theta_i + \gamma_i) \\ z_{k_i} = r_p \sin(\theta_i + \gamma_i) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

le système d'équations A.1 peut alors s'écrire comme :

$$\begin{cases} t_{u_{xi}} r_p \cos(\theta_i) + t_{u_{zi}} r_p \sin(\theta_i) = 0 \\ t_{d_{xi}} r_p \cos(\theta_i + \gamma_i) + t_{d_{zi}} r_p \sin(\theta_i + \gamma_i) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

**Résultante statique :** D'après le théorème de la résultante statique nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{R_{ix}} + \mathbf{F}_{du_{xi}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{R_{iz}} + \mathbf{P}_{p_i} + \mathbf{F}_{du_{zi}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

**Tensions dans les câbles :** Pour la détermination de la tension du câble utile  $\mathbf{t}_{u_i}$  le Principe Fondamental de la Statique (PFS) est réalisé au point  $P$ , centre de la PM :

$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^m \mathbf{t}_{u_i} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

Cette notation est équivalente à l'Eq. 1.5 mais permet de mettre l'accent sur les vecteurs  $\mathbf{t}_{u_i}$  et non sur leur norme euclidienne  $t_i$ . En considérant que la poulie est montée sur roulement lui permettant une rotation avec un minimum de frottement autour de son axe de rotation. La tension de la longueur morte du câble  $\mathbf{t}_{d_i}$  peut donc s'exprimer en fonction de la norme euclidienne  $\mathbf{t}_{u_i}$  (cf. Eq. A.7).

$$t_{u_i} \mathbf{u}_{d_i} = \mathbf{t}_{d_i} \quad (\text{A.7})$$

où  $t_{u_i}$  est la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{t}_{u_i}$  et  $\mathbf{u}_{d_i}$  le vecteur unitaire le long de la longueur morte de câble  $i$ .

La force combinée des tensions  $\mathbf{F}_{du}$  et  $\mathbf{t}_{d_i}$  s'appliquant au point  $H_i$  peut alors s'exprimer comme :

$$\mathbf{F}_{du_i} = \mathbf{t}_{u_i} + \mathbf{t}_{d_i} \quad (\text{A.8})$$

**Moment statique au point  $A_i$  :** Nous savons que  $G_i$  et  $H_i$  sont alignés suivant  $\mathbf{h}_i$  et donc dépendent tous deux de  $\beta_i$ . Ainsi, il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} x_{G_i} = e \cos(\beta_i) \\ z_{G_i} = e \sin(\beta_i) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

et

$$\begin{cases} x_{H_i} = h \cos(\beta_i) \\ z_{H_i} = h \sin(\beta_i) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Nous pouvons appliquer le théorème du moment statique du PFS en  $A_i$ , ce qui nous permet d'écrire que :

$$\mathbf{h}_i \wedge \mathbf{F}_{du_i} + \mathbf{g}_i \wedge \mathbf{P}_{p_i} = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

où  $\mathbf{g}_i$  est le vecteur entre  $A_i$  et  $G_{p_i}$ . En développant l'équation A.11 il est obtenu :

$$\begin{cases} h \cos(\beta_i) \\ 0 \\ h \sin(\beta_i) \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{du_{ix}} \\ 0 \\ -F_{du_{iz}} \end{cases} + \begin{cases} e \cos(\beta_i) \\ 0 \\ e \sin(\beta_i) \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P_{p_i} \end{cases} = \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

En résolvant l'Eq. A.12, une unique composante du moment en  $\mathbf{y}$  est générée, permettant d'exprimer  $\beta_i$  (cf. Eq. A.13).

$$\beta_i = \tan^{-1} \left( -\frac{hF_{du_{iz}} + eP_{p_i}}{hF_{du_{ix}}} \right) \quad (\text{A.13})$$

**Système Final :** Le système décrivant le modèle de poulie à joint de cardan pesante peut être écrit dans sa globalité comme présenté dans Eq. A.14. La résolution de ce système se fait à l'aide de la fonction d'optimisation de matlab "*fmincon*".

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{u_i}^T \cdot \mathbf{d}_i = 0 \\ \mathbf{t}_{d_i}^T \cdot \mathbf{k}_i = 0 \\ \mathbf{F}_{R_{ix}} + \mathbf{F}_{du_{ix}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{R_{iz}} + \mathbf{P}_{p_i} + \mathbf{F}_{du_{iz}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{P} + \sum_{i=1}^m \mathbf{t}_i = \mathbf{0} \\ t_{u_i} \mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{t}_{d_i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_{u_i} + \mathbf{t}_{d_i} - \mathbf{F}_{du} = \mathbf{0} \\ \tan^{-1} \left( -\frac{hF_{du_{iz}} + eP_{p_i}}{hF_{du_{ix}}} \right) - \beta_i = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Résultats

Maintenant que le système décrivant la position de la poulie prenant en compte sa propre masse est établie, il est possible d'évaluer l'erreur réalisée lorsque les  $m_{p_i}$  sont négligées dans la modélisation. Pour se faire, la position calculée avec le modèle de poulie non-pesante  $\mathbf{p}$  est comparée avec le modèle de poulie pesante  $\mathbf{p}_m$ . L'indice de comparaison  $\delta \mathbf{p}_m$  est établie

comme étant la norme euclidienne de la différence de position de la PM entre les modèles prenant ou non en compte les masses des poulies (cf. Eq. A.15).

$$\delta p_m = \|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}\|_2 \quad (\text{A.15})$$

En évaluant  $\delta p_m$  sur l'ensemble du volume d'un RPC<sub>3</sub> l'erreur moyenne est de  $5 \cdot 10^{-6} mm$  pour un RPC à 3 câbles de  $15m$  de long et  $15m$  de haut et de  $10^{-5} mm$  pour un RPC à 3 câbles de  $5m$  par  $5m$ . En comparaison à l'erreur moyenne induite par la prise en compte des paramètres géométriques, l'hypothèse réalisée dans la thèse de négliger la masse de la poulie est donc admissible.



# Table des figures

1.1	Présentation et schématisation des robots parallèles et sériels . . . . .	5
1.2	Représentation d'un RPC générique . . . . .	6
1.3	Schémas d'illustration des configurations possibles des RPC . . . . .	9
1.4	Schémas d'illustration des architectures des RPC . . . . .	10
1.5	Exemples d'applications des RPC . . . . .	12
1.6	Paramétrisation du modèle classique du RPC . . . . .	14
1.7	Schéma du modèle géométrique prenant en compte les poulies [Pot12] . . . . .	16
1.8	Parties composant un câble . . . . .	21
1.9	Représentation de l'hystérésis d'un câble DYNEEMA [Rie11] . . . . .	22
1.10	Courbe d'élongation/chargement d'un câble métallique et détermination du module de Young entre 10% et 30% [Bak+18] . . . . .	23
1.11	profil d'un câble modélisé en tant que segment rigide . . . . .	24
1.12	profil d'un câble modélisé en tant que segment élastique . . . . .	25
1.13	profil d'un câble fléchi sous son propre poids . . . . .	25
2.1	Paramétrisation de la $i^{ème}$ chaîne d'actionnement d'un RPC sans prise en compte de la poulie de renvoi . . . . .	37
2.2	Exemple de poulie à pivot et sa nomenclature (Poulie de renvoi Huchez gamme PA) . . . . .	39
2.3	paramétrisation d'un RPC équipé de poulie à pivot . . . . .	40
2.4	Paramétrisation d'un RPC équipé de poulie à joint de cardan . . . . .	43
2.5	Schématisation du modèle elasto-géométrique étendu, représentation dans le plan du $i^{ème}$ le câble $(H_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$ . . . . .	46
2.6	Paramétrisation d'une chaîne d'actionnement d'un RPC avec une poulie à pivot et un câble fléchi . . . . .	47
2.7	Paramétrisation d'une chaîne d'actionnement d'un RPC avec une poulie à joint de cardan et un câble fléchi . . . . .	50

2.8	Équilibre statique de la poulie à joint de cardan et un câble fléchi dans le plan $(A_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$ . . . . .	51
2.9	Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ et $\ \delta\mathbf{o}\ _2$ . . . . .	54
2.10	Intersection de trois sphères pour la résolution du modèle direct étendu (MD <sub>E</sub> ) d'un RPC à 3 ddl ramené à trois câbles . . . . .	56
2.11	Schéma de résolution itératif du Modèle Direct Étendu . . . . .	58
2.12	Schéma de résolution du MFD <sub>E</sub> . . . . .	59
2.13	Représentation d'un espace régulier compris dans l'espace de travail statique du RPC . . . . .	60
3.1	Schéma d'un joint de cardan [Fan21] . . . . .	65
3.2	CAO de la poulie à joint cardan . . . . .	66
3.3	Dessins d'ensemble de la nouvelle architecture de poulie à joint de cardan . . . . .	67
3.4	CAO de la poulie à pivot . . . . .	68
3.5	CAO d'un RPC de grande dimension avec $\mathbf{p}_{ini} = [-2.25, -6.75, 13]^T$ . . . . .	69
3.6	Contraintes équivalentes de von Mises pour les deux types de poulies étudiées . . . . .	69
3.7	Représentation du RPC <sub>3</sub> étudié dans nos travaux . . . . .	72
3.8	Représentation du RPC <sub>4</sub> étudié . . . . .	73
3.9	Les deux solutions possibles pour une position donnée de 3 câbles parmi 4 pour l'évaluation de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ . . . . .	74
3.10	Répartition des configurations minimisant $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ sur un plan horizontal à 2.5m . . . . .	74
3.11	Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ . . . . .	76
3.12	Trajectoires théoriques rectilignes et trajectoires réelles traversant l'espace de travail des RPC étudiés . . . . .	77
3.13	Erreurs de pose théoriques $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ en mm sur une trajectoire théorique rectiligne : 6.61m à pour le RPC <sub>3</sub> et 7.07m pour le RPC <sub>4</sub> . . . . .	78
3.14	Erreurs de position en altitude $\delta p_z$ et dans le plan horizontal $\ \delta\mathbf{p}_{xy}\ _2$ sur une trajectoire théorique rectiligne : 6.61m pour le RPC <sub>3</sub> et 7.07m pour le RPC <sub>4</sub> . . . . .	80
3.15	Iso-Contours de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ sur un plan horizontal à une hauteur de 0m pour un RPC <sub>3P</sub> et RPC <sub>3C</sub> . . . . .	81
3.16	Iso-Contours de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ sur un plan horizontal à une hauteur de 0m pour un RPC <sub>4P</sub> et RPC <sub>4C</sub> . . . . .	82
3.17	Iso-Contours de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ sur un plan horizontal à une hauteur de 2.5m pour un RPC <sub>3P</sub> et RPC <sub>3C</sub> . . . . .	83
3.18	Iso-Contours de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ sur un plan horizontal à une hauteur de 2.5m pour un RPC <sub>4P</sub> et RPC <sub>4C</sub> . . . . .	84
3.19	Volume limité en erreur $V_L$ pour un $\ \delta\mathbf{p}\ _2^{lim}$ . . . . .	86
3.20	Évolution de $R_V$ en fonction $\ \delta\mathbf{p}\ _2^{lim}$ pour les RPC <sub>3</sub> et RPC <sub>4</sub> . . . . .	87
3.21	Espace régulier commun $ER_C$ . . . . .	90

---

3.22	Histogramme des réponses $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en fonction des huit essais du plan d'expériences . . . . .	91
3.23	Effets des facteurs . . . . .	92
3.24	Interactions entre facteurs . . . . .	92
3.25	Évolution des interactions des facteurs géométriques en fonction de l'indice global d'évaluation de l'erreur de pose théorique $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en <i>mm</i> dans l' $ER_C$ . . . . .	94
3.26	$\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en fonction de $r_p$ et $h$ . . . . .	96
3.27	Évolution des $R_V$ en fonction de $\ \delta\mathbf{p}\ _2^{lim}$ en <i>mm</i> pour $RPC_P^*$ et $RPC_C^*$ . . . . .	97
3.28	Évolution de $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en fonction $E$ pour le $RPC_P^*$ et le $RPC_C^*$ . . . . .	99
3.29	Incertitude sur $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en <i>mm</i> due à une variation de $E = 102.2 \pm 35GPa$ . . . . .	100
3.30	Trajectoire rectiligne théorique dans l' $ER_C$ . . . . .	101
3.31	Évolution de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ en <i>mm</i> le long de la trajectoire théorique pour $E_{min}$ , $E_{nom}$ et $E_{max}$ . . . . .	102
3.32	$\ \delta\mathbf{p}\ _2^{E_{min}} - \ \delta\mathbf{p}\ _2^{E_{nom}}$ et $\ \delta\mathbf{p}\ _2^{E_{max}} - \ \delta\mathbf{p}\ _2^{E_{nom}}$ en <i>mm</i> le long de la trajectoire théorique . . . . .	103
3.33	Organigramme de la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ pour l'analyse des comportements mécaniques de la chaîne d'actionnement du RPC . . . . .	104
3.34	$\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ ( <i>mm</i> ) en fonction de $h$ et $r_p$ . . . . .	106
3.35	Représentation de l' $ER_C$ incluse dans le quart de l'espace atteignable de l'essai 2 . . . . .	109
3.36	Histogramme des réponses $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ en fonction des seize essais du plan d'expériences concernant les facteurs mécaniques du RPC . . . . .	110
3.37	Histogramme des effets des facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC . . . . .	111
3.38	Histogramme des interactions d'ordre 1 entre les facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC . . . . .	112
3.39	Histogramme des interactions d'ordre 2 et 3 entre les facteurs du plan d'expériences concernant les paramètres mécaniques du RPC . . . . .	112
3.40	Évolution de $a_0$ en fonction de la dimension du RPC de forme cubique . . . . .	114
3.41	Évolution de la valeur des effets des facteurs du plan d'expériences en fonction des dimensions du RPC . . . . .	114
3.42	Évolution de la valeur des interactions d'ordre 1 des facteurs du plan d'expériences en fonction de la dimension du RPC . . . . .	115
4.1	Représentation de l'évolution de l'état des câbles en fonction d'une trajectoire . . . . .	121
4.2	Évolution des tensions utiles $t_i$ , $i = 1, \dots, 4$ , dans les câbles le long d'une trajectoire rectiligne entre $P_1$ et $P_2$ . . . . .	122
4.3	Schématisation des erreurs de pose théoriques de la PM dues aux incertitudes du module d'Young $E_i$ propre à chaque câble $i$ . . . . .	123
4.4	Organigramme de la méthode d'obtention du jeu de modules de Young $\mathbf{E}$ générant l'erreur de pose théorique maximale $\Delta p_{max}$ . . . . .	124



4.5	ETS du RPC et localisation des position maximisant et minimisant $\delta p$ . . .	126
4.6	Espace d'incertitude $\Omega$ pour la position $P_1$ minimisant $\delta p$ ( $= 19.5mm$ ) . . .	127
4.7	Espace d'incertitude $\Omega$ pour la position $P_2$ maximisant $\delta p$ ( $= 214.3mm$ ) . . .	128
4.9	Sous-Espaces correspondant au câble $i = 1$ ayant soit $E_{min}$ soit $E_{max}$ . . .	129
4.8	Sous-espaces de $\Omega$ lorsqu'un des $E_i$ correspondant aux bornes $E_{min}$ et $E_{max}$ pour la position $P_1$ . . . . .	130
4.10	$\Delta p_{max}$ sur une trajectoire hélicoïdale . . . . .	132
4.11	Évolution de la norme euclidienne de $\Delta \mathbf{p}_{max}$ , de sa décomposition suivant les axes $\mathbf{x}_b$ , $\mathbf{y}_b$ et $\mathbf{z}_b$ ainsi que dans le plan $xy$ en fonction de la hauteur de la trajectoire hélicoïdale théorique . . . . .	133
4.12	Surface d'erreur de pose théorique verticale $\Delta p_{z_{min}}$ et $\Delta p_{z_{max}}$ pour des positions de PM sur un plan horizontal à $0m$ (a) et à $7.5m$ (b) . . . . .	135
4.13	Organigramme de la procédure de recherche de la structure optimale du RPC pour améliorer la précision de la PM vis-à-vis de l'hystérésis des $E_i$ des câbles	137
4.14	Direction de déplacement possible des points $A_i$ . . . . .	138
4.15	Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire rectiligne au niveau du sol . . . . .	139
4.16	Évolution de la distance $d_{A_i}$ , $i = 1, \dots, 4$ , en $m$ en fonction de la position de la PM sur la trajectoire rectiligne au niveau du sol . . . . .	140
4.17	Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire rectiligne horizontale à $7.5m$ de hauteur . . . . .	142
4.18	Comparaison des distances $d_{A_i}$ entre les structures pour une trajectoire au niveau du sol et à mi-hauteur du volume du RPC . . . . .	143
4.19	Représentation des différentes structures optimales pour une trajectoire circulaire au niveau du sol . . . . .	144
4.20	Évolution de la distance $d_{A_i}$ en $m$ en fonction de la position de la PM sur la trajectoire circulaire au niveau du sol . . . . .	145
A.1	Paramétrisation d'une poulie pesante dans le plan $(A_i, \mathbf{x}_{pul}, \mathbf{z}_{pul})$ . . . . .	154

# Liste des tableaux

1.1	Tableau des avantages et inconvénients des RPC . . . . .	12
1.2	Exemple de plan d'expériences factoriels complet à deux niveaux et à 3 facteurs . . . . .	30
2.1	Tableau récapitulatif des modèles mis en place dans le Chapitre 2 . . . . .	62
3.1	Paramètres élasto-géométriques des RPC étudiés . . . . .	71
3.2	Valeurs minimales et maximales de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ en $mm$ sur une trajectoire théorique rectiligne . . . . .	79
3.3	Valeurs des ratio sur les volumes : $R_V = \frac{V_L}{V_T}$ . . . . .	85
3.4	Erreur minimale et maximale de position de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ en $mm$ . . . . .	87
3.5	Plan d'expériences factoriel complet à trois facteurs . . . . .	90
3.6	Valeurs des paramètres géométriques optimaux $h$ et $r_p$ qui minimisent $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ dans le domaine d'étude du plan d'expériences . . . . .	95
3.7	Erreurs minimale et maximale de $\ \delta\mathbf{p}\ _2$ dans l' $ER_C$ des configurations optimales $RPC_P^*$ et $RPC_C^*$ . . . . .	97
3.8	Valeurs optimales des paramètres géométriques de la poulie . . . . .	105
3.9	Plan d'expériences complet à quatre facteurs . . . . .	108
3.10	Valeurs des dimensions du RPC et paramètres géométriques optimaux des poulies qui minimisent le $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$ . . . . .	113
4.1	Paramètres géométriques et mécaniques du RPC étudié dans le cadre de l'étude portant sur l'influence de l'hystérésis des câbles sur la précision de la PM . . . . .	125
4.2	Tableau résumant les valeurs pour $\Delta p_{max}$ , $\delta p$ et $\delta p_\Omega$ pour $P_1$ et $P_2$ . . . . .	131
4.3	Tableau résumant les valeurs de $\overline{\Delta p_{max}}$ pour des structures de RPC pour une trajectoire rectiligne au sol . . . . .	141
4.4	Tableau résumant les valeurs de $\overline{\Delta p_{max}}$ pour des structures de RPC pour une trajectoire au niveau du sol et à mi-hauteur du volume du RPC . . . . .	143

4.5	Tableau résumant les valeurs de $\overline{\Delta p_{max}}$ pour la structure cubique et les structures optimales du RPC pour une trajectoire circulaire au niveau du sol	145
4.6	Tableau récapitulatif des conclusions de la thèse . . . . .	149

# Nomenclature

## Abréviations

$RPC_C^*$	Architecture optimales du $RPC_C$
$RPC_P^*$	Architecture optimales du $RPC_P$
ddl	degrés de liberté
DW	Dynamic Workspace
EPP	Espace des Poses Polyvalentes
ER	Espace Régulier
$ER_C$	Espace Régulier Commun
ETG	Espace des Torseurs Générables
ETS	Espace de Travail Statique
FCW	Force Closure Workspace
$MEGD_E$	Modèle Elasto-Geometrique static Direct Étendu
$MEGI_E$	Modèle Elasto-Geometrique static Inverse Étendu
$MFD_E$	Modèle Fléchissant static Direct Étendu
$MFI_E$	Modèle Fléchissant static Inverse Étendu
$MGD_E$	Modèle Geometrique static Direct Étendu
$MGD_S$	Modèle Geometrique static Direct Standard
$MGI_E$	Modèle Geometrique static Inverse Étendu
$MGI_S$	Modèle Geometrique static Inverse Standard
$MGI_{EC}$	Modèle Géométrique Direct Étendu à joint de Cardan
$MGI_{EP}$	Modèle Géométrique Inverse Étendu à joint de Cardan
$MGI_{EP}$	Modèle Géométrique Direct Étendu à Pivot
$MGI_{EP}$	Modèle Géométrique Inverse Étendu à Pivot
PM	Plate-forme Mobile
RPC	Robot Parallèle à Câbles
$RPC_3$	RPC avec trois câbles

- RPC<sub>4</sub> RPC avec quatre câbles  
 RPC<sub>C</sub> RPC avec poulie à joint de cardan  
 RPC<sub>L</sub> RPC de dimension  $L$   
 RPC<sub>P</sub> RPC avec poulie à pivot  
 TDA Tensions Distribution Algorithm  
 TFW Twist Feasible Workspace

**Erreurs**

- $\Delta \overline{\|\delta \mathbf{p}\|_2}$  Variation de  $\overline{\|\delta \mathbf{p}\|_2}$  pour deux valeurs de  $E_i$  différentes  
 $\Delta \mathbf{p}$  Erreur entre la pose  $\mathbf{p}_{ini}$  et la pose prenant en compte l'hystérésis et la déformation des câbles  
 $\delta \mathbf{p}_\Omega$  Erreur due à l'hystérésis des câbles  
 $\Delta \mathbf{p}_{max}$  Valeur maximale de  $\Delta \mathbf{p}$   
 $\Delta \overline{\|\delta \mathbf{p}\|_2}$  Variation de  $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  pour deux valeurs de  $E_i$  différentes  
 $\Delta p_{max}$  Norme euclidienne de la valeur maximale de  $\Delta \mathbf{p}$   
 $\Delta p_{xy}$  Norme euclidienne de l'erreur  $\Delta \mathbf{p}$  dans le plan  $xy$   
 $\Delta p_x$  Composante de  $\Delta \mathbf{p}$  suivant  $\mathbf{x}_b$   
 $\Delta p_y$  Composante de  $\Delta \mathbf{p}$  suivant  $\mathbf{y}_b$   
 $\Delta p_z$  Composante de  $\Delta \mathbf{p}$  suivant  $\mathbf{z}_b$   
 $\overline{\|\delta \mathbf{p}\|_2}$  Erreur de pose théorique globale de la PM  
 $\|\delta \mathbf{o}\|_2$  Erreur d'orientation théorique de la PM  
 $\|\delta \mathbf{p}\|_2$  Erreur de pose théorique de la PM  
 $\|\delta \mathbf{p}_{xy}\|_2$  Erreur de pose théorique de la PM dans le plan  $xy$   
 $\|\delta p_z\|_2$  Erreur de pose théorique de la PM suivant  $\mathbf{z}_b$   
 $\|\delta \mathbf{p}\|_2^{lim}$  Erreur de pose théorique de la PM limite  
 $\|\delta \mathbf{p}\|_2^{max}$  Erreur maximale de pose théorique de la PM  
 $\|\delta \mathbf{p}\|_2^{min}$  Erreur minimale de pose théorique de la PM

**Paramètres**

- $\alpha_i$  Angle de la pivot vertical de la poulie  $i$   
 $\beta_i$  Angle entre le plan horizontale ( $O, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b$ ) et  $\mathbf{h}_i$   
 $\boldsymbol{\alpha}$  Ensemble des angles  $\alpha_i$  du RPC  
 $\Delta L_T^i$  Allongement du câble  
 $\epsilon_P$  Critère d'arrêt du schéma de résolution itératif du MGD<sub>E</sub>  
 $\gamma_i$  Angle entre  $\mathbf{d}_i$  et  $\mathbf{k}_i$   
 $\mu_0$  Masse linéique du câble ( $kg.m^{-1}$ )  
 $\Omega$  Espace d'incertitude de la pose de la PM vis-à-vis de l'hystérésis  
 $\overline{\Delta p_{max}}$  Moyenne de  $\Delta p_{max}$  pour plusieurs pose de PM  
 $\overline{A_i}$  Position moyenne des points d'ancrage optimaux pour plusieurs pose de PM

---

$\Phi$	Angle entre $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{l}_S^i$
$\phi, \theta$ et $\psi$	Angles d'Euler
$\mathfrak{R}_b$	Repère global du RPC
$\mathfrak{R}_p$	Repère de la PM
$\mathfrak{R}_{art}$	Repère de l'articulation de la poulie centré en $A_i$
$\mathfrak{R}_{pul}$	Repère de la poulie centré en $H_i$
$\mathbf{a}_i$	Vecteur entre $O$ et $A_i$ dans MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub> et entre $C_i$ et $A_i$ dans les autres modèles
$\mathbf{A}_{opti}$	Position des points d'ancrage des poulie $A_i$ minimisant $\Delta p_{max}$
$\mathbf{A}_{semi-opti}$	Position des points d'ancrage discrétisés des poulies $A_i$ minimisant $\Delta p_{max}$
$\mathbf{b}_i$	Vecteur entre $P$ et $B_i$
$\mathbf{c}_i$	Vecteur entre $O$ et $C_i$
$\mathbf{d}_i$	Vecteur entre $H_i$ et $D_i$
$\mathbf{E}$	Jeu des modules de Young $E_i$ maximisant ou minimisant l'erreur de pose théorique de la PM
$\mathbf{h}_i$	Vecteur entre $A_i$ et $H_i$
$\mathbf{J}$	Matrice Jacobienne
$\mathbf{k}_i$	Vecteur entre $H_i$ et $K_i$
$\mathbf{l}$	Longueurs des câbles des MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub>
$\mathbf{l}_d^i$	Vecteur de longueur morte du $i^{\text{ème}}$ câble
$\mathbf{l}_S^i$	Vecteur de la longueur utile du $i^{\text{ème}}$ câbles du MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub>
$\mathbf{L}_{T_0}$	Jeu des longueurs totale initial pour la méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique
$\mathbf{L}_{T_E}$	Jeu des longueurs totale des câbles dans MGI <sub>E</sub> /MGD <sub>E</sub>
$\mathbf{L}_{T_S}$	Jeu des longueurs totale des câbles dans MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub>
$\mathbf{o}$	Orientation de la PM
$\mathbf{p}$	Position de la PM
$\mathbf{p}_{ini}$	Vecteur de pose désirée de la PM
$\mathbf{p}_{MEGD_E}$	Vecteur de position de la PM déterminée avec le MEGD <sub>E</sub>
$\mathbf{q}_i$	Vecteur entre $H_i$ et $B_i$
$\mathbf{R}$	Matrice de rotation reliant $\mathfrak{R}_b$ et $\mathfrak{R}_p$
$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_{pul}}$	Matrice de rotation du repère $\mathfrak{R}_{pul}$ autour de $\mathbf{y}_{pul}$
$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_b}$	Matrice de rotation du repère $\mathfrak{R}_{pul}$ autour de $\mathbf{z}_b$
$\mathbf{s}_i$	Vecteur entre $C_i$ et $H_i$
$\mathbf{t}$	Jeu des tensions dans les $m$ câbles
$\mathbf{t}_d^i$	Vecteur tension de la partie morte du $i^{\text{ème}}$ câble
$\mathbf{t}_u^i$	Vecteur tension de la partie utile du $i^{\text{ème}}$ câble
$\mathbf{W}$	$-\mathbf{J}^{-1}$
$\mathbf{w}_e$	Torseur des actions mécaniques extérieures

## Nomenclature

---

$\theta_i$	Angle entre $\mathbf{x}_{pul}$ et $\mathbf{d}_i$
$A_i$	point de sortie du $i^{\text{ème}}$ câble pour les modèle MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub> et point d'ancrage de la $i^{\text{ème}}$ poulies pour les autres modèles
$B_i$	Point d'attache du $i^{\text{ème}}$ câble
$C_i$	Point de sortie de l'enrouleur du $i^{\text{ème}}$ câble
$d_c$	Diamètre du câble
$D_i$	Point de sortie de la poulie du $i^{\text{ème}}$ câble
$d_{A_i}$	Distance entre le point d'ancrage optimisé de la $i^{\text{ème}}$ poulie avec sa position initiale
$E_i$	Module de Young du $i^{\text{ème}}$ câble ( <i>GPa</i> )
$E_{max}$	Valeur maximale du module de Young
$E_{min}$	Valeur minimale du module de Young
$E_{nom}$	Valeur nominale du module de Young
$g$	Accélération de la pesanteur
$H$	Hauteur de la structure du RPC
$H_i$	Centre de la $i^{\text{ème}}$ poulie
$K_i$	Point d'entrée dans la poulie du $i^{\text{ème}}$ câble
$L$	Longueur des cotés de la structure du RPC
$l_d^i$	Longueur morte du $i^{\text{ème}}$ câble
$l_E^i$	Longueur utile du $i^{\text{ème}}$ câble dans les modèles étendus
$l_S^i$	Longueur du $i^{\text{ème}}$ câble du MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub>
$L_{TE}$	Longueur totale du $i^{\text{ème}}$ câble dans MGI <sub>E</sub> /MGD <sub>E</sub>
$L_{TS}^i$	Longueur totale du $i^{\text{ème}}$ câble dans MGI <sub>S</sub> /MGD <sub>S</sub>
$m$	Nombre de câble
$M_i$	Point d'intersection entre $\mathbf{t}_d^i$ and $\mathbf{t}_u^i$
$m_{PM}$	Masse de la charge transportée plus la masse propre de la PM
$N$	Nombre de discrétisation pour le calcul de $\overline{\ \delta\mathbf{p}\ _2}$
$n$	Nombre de ddl
$O$	Centre du repère global $\mathfrak{R}_b$
$P$	Centre la PM
$P_n$	Position obtenu en considérant l'élasticité des câble comme étant égale à $E_{nom}$
$P_{ini}$	Position désirée de la PM
$P_{MEGD_E}$	Pose de la PM déterminée avec le MEGD <sub>E</sub>
$r_c$	Rayon du câble
$r_p$	Rayon du réa de la poulie
$R_V$	Ratio entre $V_L$ et $V_T$
$R_V^{max}$	Ratio $R_V$ maximal
$S_i$	Section du $i^{\text{ème}}$ câble

---

$T_a$	Tension maximale admissible
$t_d^i$	Tension de la partie morte du $i^{\text{ème}}$ câble
$t_i$	Tension dans le $i^{\text{ème}}$ câble
$T_r$	Tension de rupture du câble
$t_u^i$	Tension de la partie utile du $i^{\text{ème}}$ câble
$t_{d_x}^i$	composante en $\mathbf{x}$ de $\mathbf{t}_d^i$
$t_{d_z}^i$	composante en $\mathbf{z}$ de $\mathbf{t}_d^i$
$t_{max}$	Tension maximale admissible
$t_{min}$	Tension minimale admissible
$t_{u_x}^i$	composante en $\mathbf{x}$ de $\mathbf{t}_u^i$
$t_{u_z}^i$	composante en $\mathbf{z}$ de $\mathbf{t}_u^i$
$V_L$	Volume du RPC limité en erreur de pose théorique de la PM
$V_T$	Volume total du RPC





# Bibliographie

- [Alb+92] James Albus, Roger Bostelman et Nicholas Dagalakis. “The NIST robo crane”. en. In: 97.3 (1992), p. 13 (cf. p. 3, 14, 20).
- [Alh+16] I Alhossen, C Villeneuve-Faure, F Baudoin, F Bugarin et S Segonds. “[Sensitivity analysis of the electrostatic force distance curve using Sobol’s method and design of experiments](#)”. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 50.3 (déc. 2016), p. 035304 (cf. p. 31).
- [Alp+02] A.B. Alp et S.K. Agrawal. “Cable suspended robots: design, planning and control”. en. In: *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*. T. 4. Washington, DC, USA: IEEE, 2002, p. 4275-4280 (cf. p. 9).
- [Ant06] Jiju Antony. “[Taguchi or classical design of experiments: a perspective from a practitioner](#)”. en. In: *Sensor Review* 26.3 (juill. 2006). Sous la dir. Andreas Koschan, p. 227-230 (cf. p. 29).
- [Are+08] Mohammad M. Aref, Pooneh Gholami et Hamid D. Taghirad. “Dynamic and Sensitivity Analysis of KNTU CDRPM: A Cable Driven Redundant Parallel Manipulator”. en. In: *2008 IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*. Beijing: IEEE, oct. 2008, p. 528-533 (cf. p. 9).
- [Ars10] Marc Arsenault. “Optimization of the prestress stable wrench closure workspace of planar parallel three-degree-of-freedom cable-driven mechanisms with four cables”. en. In: *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Anchorage, AK: IEEE, mai 2010, p. 1182-1187 (cf. p. 8, 18).
- [Baj+12] Hugues Bajas, Damien Durville et Arnaud Devred. “[Finite element modelling of cable-in-conduit conductors](#)”. en. In: *Superconductor Science and Technology* 25.5 (mai 2012), p. 054019 (cf. p. 23).
- [Bak+17] Sana Baklouti, Eric Courteille, Stéphane Caro et Mohamed Dkhil. “[Dynamic and Oscillatory Motions of Cable-Driven Parallel Robots Based on a Nonlinear Cable Tension Model](#)”. en. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 9.6 (oct. 2017), p. 061014 (cf. p. 17).
- [Bak+18] Sana Baklouti, Stéphane Caro et Eric Courteille. “[Sensitivity Analysis of the Elasto-Geometrical Model of Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots* 53 (2018). Sous la dir. Clément Gosselin, Philippe Cardou, Tobias Bruckmann et Andreas Pott, p. 37-49 (cf. p. 21-23, 32, 38, 71, 98, 99).
- [Bak+19a] Sana Baklouti, Stéphane Caro et Eric Courteille. “Elasto-dynamic Model-Based Control of Non-redundant Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: *ROMANSY 22 – Robot Design, Dynamics and Control*. Sous la dir. Vigen Arakelian et Philippe Wenger. T. 584. Cham: Springer International Publishing, 2019, p. 238-246 (cf. p. 7, 17).

- [Bak+19b] Sana Baklouti, Eric Courteille, Philippe Lemoine et Stéphane Caro. “[Vibration reduction of Cable-Driven Parallel Robots through elasto-dynamic model-based control](#)”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 139 (sept. 2019), p. 329-345 (cf. p. 15).
- [Bar+05] Guillaume Barrette et Clément M. Gosselin. “[Determination of the Dynamic Workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms](#)”. en. In: *Journal of Mechanical Design* 127.2 (mars 2005), p. 242-248 (cf. p. 19).
- [Bar14] Miryam Barad. “Design of Experiments (DOE)—A Valuable Multi-Purpose Methodology”. en. In: (2014), p. 12 (cf. p. 29).
- [Bay+15] Hassan Bayani, Rasoul Sadeghian, Mehdi Tale Masouleh et Ahmad Kalhor. “On the control of planar cable-driven parallel robot via classic controllers and tuning with intelligent algorithms”. en. In: *2015 3rd RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM)*. Tehran, Iran: IEEE, oct. 2015, p. 623-628 (cf. p. 17).
- [Beh+04] Saeed Behzadipour et Amir Khajepour. “[Design of reduced DOF parallel cable-based robots](#)”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 39.10 (oct. 2004), p. 1051-1065 (cf. p. 8).
- [Ben+21] Ines Ben Hamida, Med Amine Laribi, Abdelfattah Mlika, Lotfi Romdhane, Saïd Zeghloul et Giuseppe Carbone. “[Multi-Objective optimal design of a cable driven parallel robot for rehabilitation tasks](#)”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 156 (fév. 2021), p. 104141 (cf. p. 11, 136).
- [Bin+10] Nicolas Binaud, Stéphane Caro et Philippe Wenger. “[Sensitivity comparison of planar parallel manipulators](#)”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 45.11 (nov. 2010), p. 1477-1490 (cf. p. 20).
- [Bon+19] Matthieu Bonneric, Véronique Aubin et Damien Durville. “[Finite element simulation of a steel cable - rubber composite under bending loading: Influence of rubber penetration on the stress distribution in wires](#)”. en. In: *International Journal of Solids and Structures* 160 (mars 2019), p. 158-167 (cf. p. 23).
- [Bor+09] P.H. Borgstrom, N.P. Borgstrom, M.J. Stealey, B. Jordan, G.S. Sukhatme, M.A. Batalin et W.J. Kaiser. “[Design and Implementation of NIMS3D, a 3-D Cabled Robot for Actuated Sensing Applications](#)”. en. In: *IEEE Transactions on Robotics* 25.2 (avr. 2009), p. 325-339 (cf. p. 7, 72).
- [Bor+14] Julia Borrás, Federico Thomas et Carme Torras. “[New Geometric Approaches to the Analysis and Design of Stewart–Gough Platforms](#)”. en. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19.2 (avr. 2014), p. 445-455 (cf. p. 10).
- [Bos+05] Paul Bosscher, Robert L. Williams et Melissa Tummino. “A Concept for Rapidly-Deployable Cable Robot Search and Rescue Systems”. en. In: *Volume 7: 29th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*. Long Beach, California, USA: ASMEDC, jan. 2005, p. 589-598 (cf. p. 11, 72).
- [Bos+06] P. Bosscher, A.T. Riechel et I. Ebert-Uphoff. “Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots”. en. In: *IEEE Transactions on Robotics*. T. 22. Oct. 2006, p. 890-902 (cf. p. 19).
- [Bos+07] Paul Bosscher, Robert L. Williams, L. Sebastian Bryson et Daniel Castro-Lacouture. “[Cable-suspended robotic contour crafting system](#)”. In: *Automation in Construction* 17.1 (nov. 2007), p. 45-55 (cf. p. 8, 11, 15).
- [Bou] Samuel Bouchard. “GÉOMÉTRIE DES ROBOTS PARALLÈLES ENTRAÎNÉS PAR DES CÂBLES.” fr. Thèse de doct. (cf. p. 18).
- [Bow+19] Gregory D. Bowden, Bernd J. Pichler et Andreas Maurer. “[A Design of Experiments \(DoE\) Approach Accelerates the Optimization of Copper-Mediated 18F-Fluorination Reactions of Arylstannanes](#)”. en. In: *Scientific Reports* 9.1 (déc. 2019), p. 11370 (cf. p. 29).

- 
- [Bru+06] Tobias Bruckmann, Andreas Pott, Daniel Franitza et Manfred Hiller. “A Modular Controller for Redundantly Actuated Tendon-Based Stewart Platforms”. en. In: (2006), p. 13 (cf. p. 8, 18).
- [Car+10] M. Carricato et J.-P. Merlet. “[Geometrico-Static Analysis of Under-Constrained Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine*. Sous la dir. Jadran Lenarcic et Michael M. Stanisic. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010, p. 309-319 (cf. p. 8).
- [Car+11] Marco Carricato et Jean-Pierre Merlet. “Direct geometrico-static problem of under-constrained cable-driven parallel robots with three cables”. en. In: *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Shanghai, China: IEEE, mai 2011, p. 3011-3017 (cf. p. 15).
- [Che+14] Ryad Chellal, Edouard Laroche et Loic Cuvillon. “An H<sub>∞</sub> methodology for position control of 6-DoF Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: *2014 European Control Conference (ECC)*. Strasbourg, France: IEEE, juin 2014, p. 358-363 (cf. p. 11).
- [Che+16] Qiang Cheng, Qiunan Feng, Zhifeng Liu, Peihua Gu et Guojun Zhang. “[Sensitivity analysis of machining accuracy of multi-axis machine tool based on POE screw theory and Morris method](#)”. en. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 84.9-12 (juin 2016), p. 2301-2318 (cf. p. 32).
- [Che+19] Qiao Chen, Bin Zi, Zhi Sun, Yuan Li et Qingsong Xu. “[Design and Development of a New Cable-Driven Parallel Robot for Waist Rehabilitation](#)”. en. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 24.4 (août 2019), p. 1497-1507 (cf. p. 11).
- [Din+13] Dinh Quan Nguyen, Marc Gouttefarde, Olivier Company et Francois Pierrot. “On the simplifications of cable model in static analysis of large-dimension cable-driven parallel robots”. en. In: *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Tokyo: IEEE, nov. 2013, p. 928-934 (cf. p. 6).
- [Dio+21] Adama Diourté, Florian Bugarin, Cyril Bordreuil et Stéphane Segonds. “[Continuous three-dimensional path planning \(CTPP\) for complex thin parts with wire arc additive manufacturing](#)”. In: *Additive Manufacturing* 37 (2021), p. 101622 (cf. p. 131).
- [Dua+09] B.Y. Duan, Y.Y. Qiu, F.S. Zhang et B. Zi. “[On design and experiment of the feed cable-suspended structure for super antenna](#)”. en. In: *Mechatronics* 19.4 (juin 2009), p. 503-509 (cf. p. 10).
- [Dua+14] Q. J. Duan et Xuechao Duan. “[Workspace Classification and Quantification Calculations of Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Advances in Mechanical Engineering* 6 (jan. 2014), p. 358727 (cf. p. 19).
- [Dub+17] R. Duballet, O. Baverel et J. Dirrenberger. “[Classification of building systems for concrete 3D printing](#)”. en. In: *Automation in Construction* 83 (nov. 2017), p. 247-258 (cf. p. 11).
- [Ebe+04] I. Ebert-Uphoff et P.A. Voglewede. “On the connections between cable-driven robots, parallel manipulators and grasping”. en. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2004, 4521-4526 Vol.5 (cf. p. 19).
- [Ela+04] D. Elata, R. Eshkenazy et M.P. Weiss. “[The mechanical behavior of a wire rope with an independent wire rope core](#)”. en. In: *International Journal of Solids and Structures* 41.5-6 (mars 2004), p. 1157-1172 (cf. p. 23).
- [Ers+19] Julian Erskine, Abdelhamid Chriette et Stephane Caro. “Control and Configuration Planning of an Aerial Cable Towed System”. en. In: *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Montreal, QC, Canada: IEEE, mai 2019, p. 6440-6446 (cf. p. 6).

- [Fab+20] M. Fabritius et A. Pott. “An Inverse Kinematic Code for Cable-Driven Parallel Robots Considering Cable Sagging and Pulleys”. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science*. Sous la dir. Doina Pisla, Burkhard Corves et Calin Vaida. Cham: Springer International Publishing, 2020, p. 423-431 (cf. p. 47).
- [Fab+21] M. Fabritius et A. Pott. “A Forward Kinematic Code for Cable-Driven Parallel Robots Considering Cable Sagging and Pulleys”. In: *Advances in Robot Kinematics 2020*. Sous la dir. Jadran Lenarčič et Bruno Siciliano. Cham: Springer International Publishing, 2021, p. 218-225 (cf. p. 47).
- [Fan21] Jean-Louis Fanchon. *Guide des sciences et technologies industrielles*. fr. Nathan/Afnor, 2021 (cf. p. 65).
- [Gag+14] Lorenzo Gagliardini, Stephane Caro, Marc Gouttefarde, Philippe Wenger et Alexis Girin. “Optimal design of cable-driven parallel robots for large industrial structures”. en. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Hong Kong, China: IEEE, mai 2014, p. 5744-5749 (cf. p. 9, 13).
- [Gag+15a] Lorenzo Gagliardini, Stephane Caro et Marc Gouttefarde. “Dimensioning of cable-driven parallel robot actuators, gearboxes and winches according to the twist feasible workspace”. en. In: *2015 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. Gothenburg, Sweden: IEEE, août 2015, p. 99-105 (cf. p. 6, 19).
- [Gag+15b] Lorenzo Gagliardini, Stéphane Caro, Marc Gouttefarde, Philippe Wenger et Alexis Girin. “A Reconfigurable Cable-Driven Parallel Robot for Sandblasting and Painting of Large Structures”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Andreas Pott et Tobias Bruckmann. T. 32. Cham: Springer International Publishing, 2015, p. 275-291 (cf. p. 3).
- [Gag+16] L. Gagliardini, S. Caro, M. Gouttefarde et A. Girin. “Discrete reconfiguration planning for Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 100 (juin 2016), p. 313-337 (cf. p. 7).
- [Gag+18] Lorenzo Gagliardini, Marc Gouttefarde et Stéphane Caro. “Design of Reconfigurable Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: *Mechatronics for Cultural Heritage and Civil Engineering*. Sous la dir. Erika Ottaviano, Assunta Pelliccio et Vincenzo Gattulli. T. 92. Series Title: Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering. Cham: Springer International Publishing, 2018, p. 85-113 (cf. p. 3, 9).
- [Gal16] Jaime Gallardo-Alvarado. “The Original Stewart Platform”. en. In: *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Cham: Springer International Publishing, 2016, p. 281-299 (cf. p. 3).
- [Gen+20] Xinyu Geng, Meng Li, Yufei Liu, Yuanyuan Li, Wei Zheng et Zhibin Li. “Analytical tension-distribution computation for cable-driven parallel robots using hypersphere mapping algorithm”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 145 (mars 2020), p. 103692 (cf. p. 18).
- [Gon+13] Rogério Sales Gonçalves, João Carlos Mendes Carvalho, Lucas Antonio Oliveira Rodrigues et André Marques Barbosa. “Cable-Driven Parallel Manipulator for Lower Limb Rehabilitation”. en. In: *Applied Mechanics and Materials* 459 (oct. 2013), p. 535-542 (cf. p. 11).
- [Gos+10] Clément Gosselin, Samuel Bouchard et Laboratoire de Robotique, Département de Génie Mécanique, Université Laval Québec, 1065 avenue de la médecine, Québec, Qc, Canada. “A Gravity-Powered Mechanism for Extending the Workspace of a Cable-Driven Parallel Mechanism: Application to the Appearance Modelling of Objects”. en. In: *International Journal of Automation Technology* 4.4 (juill. 2010), p. 372-379 (cf. p. 6).

- 
- [Gos+11] Clément Gosselin et Martin Grenier. “On the determination of the force distribution in overconstrained cable-driven parallel mechanisms”. en. In: *Meccanica* 46.1 (fév. 2011), p. 3-15 (cf. p. 18).
- [Gou+05] Marc Gouttefarde et Clément M. Gosselin. “WRENCH-CLOSURE WORKSPACE OF SIX-DOF PARALLEL MECHANISMS DRIVEN BY 7 CABLES”. en. In: *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering* 29.4 (déc. 2005), p. 541-552 (cf. p. 18).
- [Gou+15a] Marc Gouttefarde, Jean-Francois Collard, Nicolas Riehl et Cedric Baradat. “Geometry Selection of a Redundantly Actuated Cable-Suspended Parallel Robot”. en. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.2 (avr. 2015), p. 501-510 (cf. p. 6).
- [Gou+15b] Marc Gouttefarde, Johann Lamaury, Christopher Reichert et Tobias Bruckmann. “A Versatile Tension Distribution Algorithm for  $n$ -DOF Parallel Robots Driven by  $n+2$  Cables”. en. In: *IEEE Transactions on Robotics* 31.6 (déc. 2015), p. 1444-1457 (cf. p. 18).
- [Gou05] Marc Gouttefarde. “Analyse de l’espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles”. fr. Thèse de doct. 2005 (cf. p. 18).
- [Guo+17] Shijie Guo, Gedong Jiang et Xuesong Mei. “Investigation of sensitivity analysis and compensation parameter optimization of geometric error for five-axis machine tool”. en. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 93.9-12 (déc. 2017), p. 3229-3243 (cf. p. 32).
- [Han+21] Vincentius A Handojo, Adlina T Syamlan, Latifah Nurahmi, Bambang Pramujati, Mohamad N Tamara et Unggul Wasiwitono. “Cable Driven Parallel Robot with Big Interference-Free Workspace”. en. In: (2021), p. 15 (cf. p. 13).
- [Hey+04] Thomas Heyden et Christoph Woernle. “Flatness-Based Trajectory Tracking Control of an Underconstrained Cable Suspension Manipulator”. en. In: *PAMM* 4.1 (déc. 2004), p. 129-130 (cf. p. 8).
- [Hir+92] Y. Hirata et M. Sato. “3-dimensional Interface Device For Virtual Work Space”. en. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. T. 2. Raleigh, NC: IEEE, 1992, p. 889-896 (cf. p. 3, 11, 20).
- [Hwa+20] Sung Wook Hwang, Jeong-Hyeon Bak, Jonghyun Yoon et Jong Hyeon Park. “Oscillation Reduction and Frequency Analysis of Under-Constrained Cable-Driven Parallel Robot with Three Cables”. en. In: *Robotica* 38.3 (mars 2020), p. 375-395 (cf. p. 8).
- [Ing+05] Francois-Xavier Inglese, Philippe Lucidarme, Paul Richard et Jean-Louis Ferrier. “PREVISE - A Human-Scale Virtual Environment with Haptic Feedback:” en. In: *Proceedings of the Second International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. Barcelona, Spain: SciTePress - Science, 2005, p. 140-145 (cf. p. 11).
- [Irv81] Max Irvine. *Cable Structures*. en. Irvine Max. MIT Press Series, 1981 (cf. p. 25).
- [Iza+13] Jean-Baptiste Izard, Marc Gouttefarde, Micaël Michelin, Olivier Tempier et Cedric Baradat. “A Reconfigurable Robot for Cable-Driven Parallel Robotic Research and Industrial Scenario Proofing”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Tobias Bruckmann et Andreas Pott. T. 12. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 135-148 (cf. p. 7, 9).
- [Iza+15] Jean-Baptiste Izard, Micael Michelin et Cédric Baradat. “Fusion reactor handling operations with cable-driven parallel robots”. en. In: *Fusion Engineering and Design* 98-99 (oct. 2015), p. 1505-1508 (cf. p. 11).
- [Iza+17] Jean-Baptiste Izard, Alexandre Dubor, Pierre-Elie Hervé, Edouard Cabay, David Culla, Mariola Rodriguez et Mikel Barrado. “Large-scale 3D printing with cable-driven parallel robots”. en. In: *Construction Robotics* 1.1-4 (déc. 2017), p. 69-76 (cf. p. 11, 117).

- [Iza+18] Izard, Alexandre Dubor, Pierre-Elie Hervé, Edouard Cabay, David Culla, Mariola Rodriguez et Mikel Barrado. “[On the Improvements of a Cable-Driven Parallel Robot for Achieving Additive Manufacturing for Construction](#)”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots* (2018), p. 353-363 (cf. p. 11, 117).
- [Jia+10] Qimi Jiang et Vijay Kumar. “The Direct Kinematics of Objects Suspended From Cables”. en. In: *Volume 2: 34th Annual Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*. Montreal, Quebec, Canada: ASMEDC, jan. 2010, p. 193-202 (cf. p. 15).
- [Jin+17] XueJun Jin, Jinlong Piao, Eunpyo Choi, Jinwoo Jung, Jong-Oh Park et Chang-Sei Kim. “A novel winch system for a precise cable length control of a cable- driven parallel robot system”. en. In: (2017), p. 7 (cf. p. 7, 37, 41).
- [Jin+18] XueJun Jin, Jinwoo Jung, Jinlong Piao, Eunpyo Choi, Jong-Oh Park et Chang-Sei Kim. “[Solving the pulley inclusion problem for a cable-driven parallel robotic system: Extended kinematics and twin-pulley mechanism](#)”. en. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 32.6 (juin 2018), p. 2829-2838 (cf. p. 15).
- [Kaw+93] S. Kawamura et K. Ito. “A new type of master robot for teleoperation using a radial wire drive system”. en. In: *Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '93)*. T. 1. Yokohama, Japan: IEEE, 1993, p. 55-60 (cf. p. 8).
- [Kaw+95] S. Kawamura, W. Choe, S. Tanaka et S.R. Pandian. “Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drive system”. en. In: *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. T. 1. Nagoya, Japan: IEEE, 1995, p. 215-220 (cf. p. 11).
- [Kho+16] Behrokh Khoshnevis, Xiao Yuan, Behnam Zahiri, Jing Zhang et Bin Xia. “[Construction by Contour Crafting using sulfur concrete with planetary applications](#)”. en. In: *Rapid Prototyping Journal* 22.5 (août 2016), p. 848-856 (cf. p. 11).
- [Koz+06] K. Kozak, Qian Zhou et Jinsong Wang. “Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass”. en. In: *IEEE Transactions on Robotics*. T. 22. Juin 2006, p. 425-433 (cf. p. 10, 25).
- [Kro+15] Grzegorz Krolczyk, Andrzej Metelski, Radoslaw Maruda et Stanislaw Legutko. “[Taguchi Design of Experiment in the Optimization of Tool Life in Turning Process of Duplex Stainless Steel DSS](#)”. en. In: *Applied Mechanics and Materials* 809-810 (nov. 2015), p. 189-194 (cf. p. 29).
- [Kum+18] Atal Anil Kumar, Jean-François Antoine, Patrick Zattarin et Gabriel Abba. “Influence of payload and platform dimensions on the static workspace of a 4-cable driven parallel robot”. en. In: (2018), p. 7 (cf. p. 19).
- [Kum+19] Atal Anil Kumar, Jean-François Antoine, Patrick Zattarin et Gabriel Abba. “[Workspace Analysis of a 4 Cable-Driven Spatial Parallel Robot](#)”. en. In: *ROMANSY 22 – Robot Design, Dynamics and Control*. Sous la dir. Vigen Arakelian et Philippe Wenger. T. 584. Series Title: CISM International Centre for Mechanical Sciences. Cham: Springer International Publishing, 2019, p. 204-212 (cf. p. 19).
- [Lal+17] Sébastien Lalonde, Raynald Guilbault et Frédéric Légeron. “[Modeling multilayered wire strands, a strategy based on 3D finite element beam-to-beam contacts - Part I: Model formulation and validation](#)”. en. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 126 (juin 2017), p. 281-296 (cf. p. 23).
- [Lam14] Johann Lamaury. “Contribution à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d’actionnement”. fr. Thèse. Montpellier 2, 2014 (cf. p. 8, 18).
- [Lar+19] M. A. Laribi, G. Carbone et S. Zeghloul. “[Cable driven robot for lower limb rehabilitation: motion specifications and design process](#)”. en. In: *Advances in Mechanism and Machine Science*. Sous la dir. Tadeusz Uhl. T. 73. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Cham: Springer International Publishing, 2019, p. 123-131 (cf. p. 11).

- 
- [Le+12] H. A. Le Thi, A. I. F. Vaz et L. N. Vicente. “Optimizing radial basis functions by d.c. programming and its use in direct search for global derivative-free optimization”. en. In: *TOP* 20.1 (avr. 2012), p. 190-214 (cf. p. 29).
- [Lea+12] Neil Leach, Anders Carlson, Behrokh Khoshnevis et Madhu Thangavelu. “[Robotic Construction by Contour Crafting: The Case of Lunar Construction](#)”. en. In: *International Journal of Architectural Computing* 10.3 (sept. 2012), p. 423-438 (cf. p. 11).
- [Lev44] Kenneth Levenberg. “[A method for the solution of certain non-linear problems in least squares](#)”. en. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 2.2 (juill. 1944), p. 164-168 (cf. p. 29).
- [Li+13] Hui Li, Xinyu Zhang, Rui Yao, Jinghai Sun, Gaofeng Pan et Wenbai Zhu. “[Optimal Force Distribution Based on Slack Rope Model in the Incompletely Constrained Cable-Driven Parallel Mechanism of FAST Telescope](#)”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Tobias Bruckmann et Andreas Pott. T. 12. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 87-102 (cf. p. 10).
- [Man10] Singh Manvendra. *INCA CAD*. 2010 (cf. p. 11).
- [Mar63] Donald W. Marquardt. “[An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters](#)”. en. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11.2 (juin 1963), p. 431-441 (cf. p. 29).
- [Mer+10] J-P Merlet et D Daney. “A portable, modular parallel wire crane for rescue operations”. en. In: *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Anchorage, AK: IEEE, mai 2010, p. 2834-2839 (cf. p. 6, 11).
- [Mer+15] Jean-Pierre Merlet et Julien Alexandre-dit-Sandretto. “[The Forward Kinematics of Cable-Driven Parallel Robots with Sagging Cables](#)”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Andreas Pott et Tobias Bruckmann. T. 32. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Cham: Springer International Publishing, 2015, p. 3-15 (cf. p. 15).
- [Mer04] J-P. Merlet. “[Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots](#)”. en. In: *On Advances in Robot Kinematics*. Sous la dir. J. Lenarčič et C. Galletti. Dordrecht: Springer Netherlands, 2004, p. 211-218 (cf. p. 18).
- [Mer08] J-P. Merlet. “Kinematics of the wire-driven parallel robot MARIONET using linear actuators”. en. In: *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Pasadena, CA, USA: IEEE, mai 2008, p. 3857-3862 (cf. p. 7, 24).
- [Mer15] Jean-Pierre Merlet. “The kinematics of cable-driven parallel robots with sagging cables: preliminary results”. en. In: *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seattle, WA, USA: IEEE, mai 2015, p. 1593-1598 (cf. p. 28).
- [Mer18] Jean-Pierre Merlet. “Computing Cross-Sections of the Workspace of Suspended Cable-Driven Parallel Robot with Sagging Cables Having Tension Limitations”. en. In: 2018, p. 6 (cf. p. 28).
- [Mer19] J-P Merlet. “Some properties of the Irvine cable model and their use for the kinematic analysis of cable-driven parallel robots”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* (2019), p. 10 (cf. p. 28).
- [Mét+21] Marceau Métillon, Philippe Cardou, Kévin Subrin, Camilo Charron et Stéphane Caro. “[A Cable-Driven Parallel Robot with Full-Circle End-Effector Rotations](#)”. In: *arXiv:2101.02783 [cs]* (jan. 2021). arXiv: 2101.02783 (cf. p. 7).
- [Meu+09] G. Meunier, B. Boulet et M. Nahon. “[Control of an Overactuated Cable-Driven Parallel Mechanism for a Radio Telescope Application](#)”. en. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 17.5 (sept. 2009), p. 1043-1054 (cf. p. 17).



- [Mie+10] Philipp Miermeister et Andreas Pott. “Modelling and Real-Time Dynamic Simulation of the Cable-Driven Parallel Robot IPAnema”. en. In: *New Trends in Mechanism Science*. Sous la dir. Doina Pisla, Marco Ceccarelli, Manfred Husty et Burkhard Corves. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010, p. 353-360 (cf. p. 7).
- [Mie+16] Philipp Miermeister, Maria Lachele, Rainer Boss, Carlo Masone, Christian Schenk, Joachim Tesch, Michael Kerger, Harald Teufel, Andreas Pott et Heinrich H. Bulthoff. “The CableRobot simulator large scale motion platform based on cable robot technology”. en. In: *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Daejeon, Korea (South): IEEE, oct. 2016, p. 3024-3029 (cf. p. 7).
- [Mor91] Max D. Morris. “Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments”. In: *Technometrics* 33.2 (1991), p. 161-174. eprint: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00401706.1991.10484804> (cf. p. 32).
- [Nan+00] Rendong Nan et Bo Peng. “A Chinese concept for the 1 km<sup>2</sup> radio telescope”. en. In: *Acta Astronautica* 46.10-12 (juin 2000), p. 667-675 (cf. p. 10).
- [Ngu+14a] Dinh Quan Nguyen et Marc Gouttefarde. “Study of Reconfigurable Suspended Cable-Driven Parallel Robots for Airplane Maintenance”. en. In: Chicago, 2014, p. 82-1689 (cf. p. 136).
- [Ngu+14b] Dinh Quan Nguyen, Marc Gouttefarde, Olivier Company et Francois Pierrot. “On the analysis of large-dimension reconfigurable suspended cable-driven parallel robots”. en. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Hong Kong, China: IEEE, mai 2014, p. 5728-5735 (cf. p. 141).
- [Nur+17] Latifah Nurahmi, Bambang Pramujati, Stephane Caro et Jeffrey. “Dimension synthesis of suspended eight cables-driven parallel robot for search-and-rescue operation”. en. In: *2017 International Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA)*. Surabaya: IEEE, oct. 2017, p. 237-241 (cf. p. 11, 73, 117).
- [Pas+19] Chiara Passarini, Damiano Zanotto et Giovanni Boschetti. “Dynamic Trajectory Planning for Failure Recovery in Cable-Suspended Camera Systems”. en. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 11.2 (avr. 2019), p. 021001 (cf. p. 73).
- [Ped+20] Nicolò Pedemonte, Tahir Rasheed, David Marquez-Gamez, Philip Long, Étienne Hocquard, Francois Babin, Charlotte Fouché, Guy Caverot, Alexis Girin et Stéphane Caro. “FASTKIT: A Mobile Cable-Driven Parallel Robot for Logistics”. en. In: *Advances in Robotics Research: From Lab to Market*. Sous la dir. Antoni Grau, Yannick Morel, Ana Puig-Pey et Francesca Cecchi. T. 132. Series Title: Springer Tracts in Advanced Robotics. Cham: Springer International Publishing, 2020, p. 141-163 (cf. p. 6).
- [Pha+06] Cong Bang Pham, Song Huat Yeo, Guilin Yang, Mustafa Shabbir Kurbanhusen et I-Ming Chen. “Force-closure workspace analysis of cable-driven parallel mechanisms”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 41.1 (jan. 2006), p. 53-69 (cf. p. 19).
- [Pic+18a] Etienne Picard, Stéphane Caro, Fabien Claveau et Franck Plestan. “Pulleys and Force Sensors Influence on Payload Estimation of Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: oct. 2018 (cf. p. 15).
- [Pic+18b] Etienne Picard, Stéphane Caro, Franck Plestan et Fabien Claveau. “Control Solution for a Cable-Driven Parallel Robot With Highly Variable Payload”. en. In: *Volume 5B: 42nd Mechanisms and Robotics Conference*. Quebec City, Quebec, Canada: ASME, août 2018, V05BT07A013 (cf. p. 6, 11).

- 
- [Pic+21] Etienne Picard, Stéphane Caro, Franck Plestan et Fabien Claveau. “[Stiffness Oriented Tension Distribution Algorithm for Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Advances in Robot Kinematics 2020* 15 (2021). Sous la dir. Jadran Lenarčič et Bruno Siciliano. Series Title: Springer Proceedings in Advanced Robotics, p. 209-217 (cf. p. 9, 18).
- [Pot+13] Andreas Pott, Hendrick Mütterich, Werner Kraus, Valentine Schmidt, Philipp Miermeister et Alexander Verl. “IPAnema: A family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Tobias Bruckmann et Andreas Pott. T. 12. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 119-134 (cf. p. 6).
- [Pot12] Andreas Pott. “Influence of Pulley Kinematics on Cable-Driven Parallel Robots”. In: *Latest Advances in Robot Kinematics*. Sous la dir. Jadran Lenarčič et Manfred Husty. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012, p. 197-204 (cf. p. 15, 16, 36).
- [Pot14] Andreas Pott. “[An Improved Force Distribution Algorithm for Over-Constrained Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Computational Kinematics*. Sous la dir. Federico Thomas et Alba Perez Gracia. T. 15. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014, p. 139-146 (cf. p. 18).
- [Ras+18] Tahir Rasheed, Philip Long, David Marquez-Gamez et Stéphane Caro. “[Tension Distribution Algorithm for Planar Mobile Cable-Driven Parallel Robots](#)”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Clément Gosselin, Philippe Cardou, Tobias Bruckmann et Andreas Pott. T. 53. Cham: Springer International Publishing, 2018, p. 268-279 (cf. p. 6, 141).
- [Rie11] Nicolas Riehl. “Modélisation et conception de robots parallèles à câbles de grande dimension”. fr. Thèse de doct. 2011 (cf. p. 8, 15, 21, 22, 28).
- [Rob+98] Rodney G. Roberts, Todd Graham et Thomas Lippitt. “[On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots](#)”. en. In: *Journal of Robotic Systems* 15.10 (1998), p. 17 (cf. p. 15, 19).
- [San+13] Julien Alexandre dit Sandretto, David Daney et Marc Gouttefarde. “[Calibration of a Fully-Constrained Parallel Cable-Driven Robot](#)”. en. In: *Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control*. Sous la dir. Friedrich Pfeiffer, Franz G. Rammerstorfer, Jean Salençon, Bernhard Schrefler, Paolo Serafini, Vincent Padois, Philippe Bidaud et Oussama Khatib. T. 544. Series Title: CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vienna: Springer Vienna, 2013, p. 77-84 (cf. p. 9).
- [Sch+16] Valentin Schmidt et Andreas Pott. “[Investigating the effect of cable force on winch winding accuracy for cable-driven parallel robots](#)”. en. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 230.3 (sept. 2016), p. 237-241 (cf. p. 7).
- [Sky] SkyCam. *Skycam* (cf. p. 10).
- [Spi] SpiderCam. *spidercam* (cf. p. 10).
- [Tar+17] S. Tarantola et Thierry A. Mara. “[variance-based sensitivity indices of computer models with dependent inputs: the Fourier Amplitude Ssensitivity Test](#)”. en. In: *International Journal for Uncertainty Quantification* 7.6 (2017), p. 511-523 (cf. p. 32).
- [Tho+21] Tuong Phuoc Tho et Nguyen Truong Thinh. “[Using a Cable-Driven Parallel Robot with Applications in 3D Concrete Printing](#)”. en. In: *Applied Sciences* 11.2 (jan. 2021), p. 563 (cf. p. 11).
- [Tos+20] Michel Tosin, Adriano M. A. Côrtes et Americo Cunha. “[A Tutorial on Sobol’ Global Sensitivity Analysis Applied to Biological Models](#)”. en. In: *Networks in Systems Biology*. Sous la dir. Fabricio Alves Barbosa da Silva, Nicolas Carels, Marcelo Trindade dos Santos et Francisco José Pereira Lopes. T. 32. Series Title: Computational Biology. Cham: Springer International Publishing, 2020, p. 93-118 (cf. p. 31).

- [Val+19] Marco Valente, Abbas Sibai et Matteo Sambucci. “Extrusion-Based Additive Manufacturing of Concrete Products: Revolutionizing and Remodeling the Construction Industry”. en. In: *Journal of Composites Science* 3.3 (sept. 2019), p. 88 (cf. p. 11).
- [Van+07] K. Vanaja et R.H. Shobha Rani. “Design of Experiments: Concept and Applications of Plackett Burman Design”. en. In: *Clinical Research and Regulatory Affairs* 24.1 (jan. 2007), p. 1-23 (cf. p. 31).
- [Vaz+07] A. Ismael F. Vaz et Luís N. Vicente. “A particle swarm pattern search method for bound constrained global optimization”. en. In: *Journal of Global Optimization* 39.2 (sept. 2007), p. 197-219 (cf. p. 29).
- [Vaz+09] A. I.F. Vaz et L. N. Vicente. “PSwarm: a hybrid solver for linearly constrained global derivative-free optimization”. en. In: *Optimization Methods and Software* 24.4-5 (oct. 2009), p. 669-685 (cf. p. 29).
- [Vaz20] A. Ismael F. Vaz. *PSwarm Solver*. en. 2020 (cf. p. 29).
- [Web+15] Xavier Weber, Loic Cuvillon et Jacques Gangloff. “Active vibration canceling of a cable-driven parallel robot in modal space”. en. In: *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seattle, WA, USA: IEEE, mai 2015, p. 1599-1604 (cf. p. 7).
- [Wil98] Robert L. Williams II. “Cable-Suspended Haptic Interface”. en. In: *International Journal of Virtual Reality* 3.3 (jan. 1998), p. 13-20 (cf. p. 15).
- [Yao+13] Rui Yao, Hui Li et Xinyu Zhang. “A Modeling Method of the Cable Driven Parallel Manipulator for FAST”. en. In: *Cable-Driven Parallel Robots*. Sous la dir. Tobias Bruckmann et Andreas Pott. T. 12. Series Title: Mechanisms and Machine Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 423-436 (cf. p. 10, 54).
- [Yon+14] M. Yoneyama, S. Ma et S. Hirose. “Development of Unicorn Reel: Hermetic traction-controllable cable reel with passive-lever level winder”. In: *2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014)*. Déc. 2014, p. 1180-1185 (cf. p. 7).
- [Yua+] Kei Yuasa, Tatsuo Arai, Yasushi Mae, Kenji Inoue, Kunio Miyawaki et Noriho Koyachp. “Hybrid Drive Parallel Arm For Heavy Material Handling”. en. In: (), p. 7 (cf. p. 8).
- [Yua+15] Han Yuan, Eric Courteille et Dominique Deblaise. “Static and dynamic stiffness analyses of cable-driven parallel robots with non-negligible cable mass and elasticity”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 85 (mars 2015), p. 64-81 (cf. p. 15).
- [Yua+16] Han Yuan, Eric Courteille et Dominique Deblaise. “Force Distribution With Pose-Dependent Force Boundaries for Redundantly Actuated Cable-Driven Parallel Robots”. en. In: *Journal of Mechanisms and Robotics* 8.4 (août 2016), p. 041004 (cf. p. 18).
- [Zha+16] Nan Zhang et Weiwei Shang. “Dynamic trajectory planning of a 3-DOF under-constrained cable-driven parallel robot”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 98 (avr. 2016), p. 21-35 (cf. p. 19).
- [Zha+20a] Zeqing Zhang, Hung Hon Cheng et Darwin Lau. “Efficient Wrench-Closure and Interference-Free Conditions Verification for Cable-Driven Parallel Robot Trajectories Using a Ray-Based Method”. en. In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 5.1 (jan. 2020), p. 8-15 (cf. p. 8).
- [Zha+20b] Zhaokun Zhang, Zhufeng Shao et Liping Wang. “Optimization and implementation of a high-speed 3-DOFs translational cable-driven parallel robot”. en. In: *Mechanism and Machine Theory* 145 (mars 2020), p. 103693 (cf. p. 9, 11).
- [Zhu+07] Z.H. Zhu et S.A. Meguid. “Nonlinear FE-based investigation of flexural damping of slacking wire cables”. en. In: *International Journal of Solids and Structures* 44.16 (août 2007), p. 5122-5132 (cf. p. 21).

---

[Zi+08] B. Zi, B.Y. Duan, J.L. Du et H. Bao. “[Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot](#)”. en. In: *Mechatronics* 18.1 (fév. 2008), p. 1-12 (cf. p. 9).



# Publications Personnelles

## Article de revues d'audience internationale avec comité de lecture :

- Thibaut PATY, Nicolas Binaud, Stéphane Caro, Stéphane Segonds, "Cable-driven parallel robot modelling considering pulley kinematics and cable elasticity", en, In : *Mechanism and Machine Theory* 159 (Mai 2021), p. 104263.



# Table des matières

<i>Remerciements</i> .....	iii
<i>Sommaire</i> .....	v
<hr/>	
<b>Introduction</b> .....	1
<b>1 État de l'art sur les Robots Parallèles à Câbles</b> .....	3
1.1 Introduction sur les robots parallèles à câbles .....	4
1.1.1 Définitions .....	5
1.1.1.1 Structure .....	5
1.1.1.2 Les différentes configurations et architectures de RPC .....	8
1.1.2 Applications .....	10
1.2 Modélisations des robots parallèles à câbles .....	13
1.2.1 Modélisations .....	13
1.2.1.1 Modélisation Géométrico-statique .....	13
1.2.1.2 Modélisation Géométrique étendue prenant en compte la poulie de renvoi .....	15
1.2.2 Gestions des tensions .....	17
1.2.3 Espaces de travail .....	18
1.2.4 Modélisations des câbles .....	20
1.2.4.1 Structure des câbles et comportement .....	20
1.2.4.2 Modélisations du profil des câbles dans le cadre des RPC .....	23
1.3 Outils Mathématiques .....	28
1.3.1 Outils d'optimisations .....	28
1.3.2 Plan d'expériences .....	29
1.4 Analyse de sensibilité .....	31
1.5 Conclusion et cadre de l'étude .....	32
<b>2 Modélisations statiques et erreur de pose des robots parallèles à câbles suspendus</b> .....	35
2.1 Modèles Géométriques Étendus .....	36
2.1.1 Prise en compte de la longueur morte du câble dans le modèle standard .....	36
2.1.2 Prise en compte de la géométrie des poulies .....	38
2.1.2.1 Prise en compte d'une poulie ayant une articulation de type pivot .....	38
2.1.2.2 Prise en compte d'une poulie ayant une articulation de type joint de cardan .....	41
2.2 Prise en compte du comportement mécanique du câble .....	44
2.2.1 Élasticité uni-directionnelle du câble .....	45



2.2.2	Fléchissement du câble . . . . .	46
2.2.2.1	RPC équipé de poulie à pivot . . . . .	47
2.2.2.2	RPC équipé de poulie à joint de cardan . . . . .	50
2.3	Méthode d'évaluation de l'erreur de pose théorique . . . . .	53
2.3.1	Quantification de l'erreur de pose théorique . . . . .	53
2.3.1.1	Méthode d'évaluation de l'erreur de pose . . . . .	53
2.3.1.2	Schéma de résolution itératif du modèle direct étendu . . . . .	55
2.3.1.3	Schéma de résolution par optimisation du modèle direct étendu . . . . .	57
2.3.2	Méthodologie de comparaison de plusieurs RPC . . . . .	60
2.4	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Analyse de sensibilité des paramètres géométriques et mécaniques de RPC suspendus à 3ddl . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1	Conception mécanique détaillée de l'architecture des poulies . . . . .	64
3.1.1	Conception . . . . .	64
3.1.2	Dimensionnement . . . . .	68
3.1.3	Étude de l'influence de la masse de la poulie sur l'erreur de pose théorique . . . . .	70
3.2	Description et erreur de pose des cas d'études de RPC à 3ddl . . . . .	70
3.2.1	Architecture de RPC à 3 câbles . . . . .	72
3.2.2	Extension pour un RPC à 4 câbles . . . . .	73
3.2.3	Étude de l'erreur de positionnement des RPC . . . . .	75
3.2.3.1	Méthodologie d'évaluation de l'erreur de pose théorique . . . . .	75
3.2.3.2	Analyse de l'erreur de pose théorique sur une trajectoire . . . . .	75
3.2.3.3	Analyse de l'erreur de pose théorique sur un plan horizontal : iso-contours d'erreurs . . . . .	80
3.2.3.4	Analyse d'un volume de travail limité en erreur . . . . .	85
3.3	Analyse de sensibilité des paramètres géométriques de la poulie . . . . .	88
3.3.1	Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun . . . . .	88
3.3.2	Influence des paramètres géométriques sur l'erreur de pose théorique . . . . .	91
3.3.3	Détermination des paramètres géométriques optimaux des poulies . . . . .	93
3.4	Analyse de sensibilité des paramètres mécaniques de la chaîne d'actionnement du RPC . . . . .	98
3.4.1	Évolution de l'erreur de pose théorique en fonction du module de Young pour des câbles en segment élastique . . . . .	98
3.4.1.1	Quantification de l'incertitude sur l'indice global de l'erreur de pose théorique . . . . .	98
3.4.1.2	Évaluation de l'incertitude de l'erreur de pose théorique sur une trajectoire . . . . .	101
3.4.2	Définition du plan d'expériences et de l'espace régulier commun . . . . .	104
3.4.3	Influence des paramètres mécaniques sur l'erreur de pose théorique . . . . .	110
3.5	Influence de la taille du RPC sur la sensibilité des paramètres géométrico-mécaniques . . . . .	113
3.6	Conclusion . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Étude de l'influence de l'hystérésis du module de Young des câbles . . . . .</b>	<b>119</b>
4.1	Influence de la non-linéarité du module de Young des câbles . . . . .	120
4.1.1	Prise en compte du phénomène d'hystérésis . . . . .	120
4.1.1.1	Définition de l'hystérésis et de l'incertitude sur le module de Young du câble dans le cadre d'un RPC . . . . .	120
4.1.1.2	Procédure d'optimisation mise en place . . . . .	122
4.1.2	Incertaince sur l'erreur de pose théorique . . . . .	125
4.1.2.1	Erreur de pose théorique sur une position . . . . .	125

---

4.1.2.2	Erreur de pose théorique sur une trajectoire hélicoïdale . . . . .	131
4.1.2.3	Erreur de pose théorique sur un plan . . . . .	134
4.2	Recherche des points d'ancrages des poulies minimisant l'erreur de pose théorique . . . . .	134
4.2.1	Procédure d'optimisation de la structure du RPC . . . . .	136
4.2.2	Structure optimale du RPC minimisant l'erreur de pose théorique . . . . .	136
4.2.2.1	Trajectoire rectiligne à hauteur constante . . . . .	138
4.2.2.2	Trajectoire circulaire à hauteur constante . . . . .	144
4.3	Conclusion . . . . .	146
<b>Conclusion générale et perspectives . . . . .</b>		<b>147</b>
	Conclusion générale . . . . .	147
	Perspectives . . . . .	150

---

<b>A</b>	<b>Modèle de poulie pesante . . . . .</b>	<b>153</b>
A.1	Modèle géométrique de poulie pesante équipée d'une articulation de type joint de cardan . . . . .	154
A.2	Résultats . . . . .	156

---

<i>Table des figures . . . . .</i>	159
<i>Liste des tableaux . . . . .</i>	163
<i>Nomenclature . . . . .</i>	165
<i>Bibliographie . . . . .</i>	171
<i>Publications Personnelles . . . . .</i>	183
<i>Article de revues d'audience internationale avec comité de lecture: . . . . .</i>	183
<i>Table des matières . . . . .</i>	185





## Résumé

### Sensibilité des robots parallèles à câbles aux incertitudes des paramètres géométriques des poulies et mécaniques des câbles

Cette thèse s'intéresse à la modélisation et à l'étude de sensibilité des Robots Parallèles à Câbles (RPC) aux paramètres géométriques et mécaniques. Ce système robotique présente de nombreux avantages dans son utilisation mais sa conception et sa commande demeurent des problématiques fortes. Ces travaux étudient l'influence sur la précision des RPC des paramètres géométriques introduits par la présence des poulies, mais aussi des phénomènes mécaniques liés à l'utilisation des câbles dans la chaîne d'actionnement. L'objectif principal est d'obtenir une conception préliminaire de RPC optimale, dans le but de simplifier les schémas de commandes tout en augmentant leur précision. Un état de l'art est réalisé au chapitre 1, mettant en lumière les verrous scientifiques persistants dans le domaine des RPC. Le chapitre 2 présente le développement de modèles, dits étendus, pour tous types de RPC. Ces modèles prennent en compte les poulies, la longueur morte ainsi que l'élasticité uni-directionnelle du câble et son fléchissement. Dans les chapitres suivants, les analyses portent sur des RPC suspendus à 3 degrés de liberté ayant un point masse comme Plate-forme Mobile (PM). Le chapitre 3 s'intéresse dans un premier temps à la conception d'une nouvelle architecture de poulie sur la base d'un joint de cardan. Dans un second temps, l'influence des paramètres géométriques des poulies sur la précision des RPC est étudiée. L'élasticité des câbles est par la suite étudiée pour observer son effet sur l'erreur de pose de la PM. Le chapitre 4 traite de l'incertitude sur l'élasticité en la considérant indépendante d'un câble à l'autre. Cela nous permet de présenter l'influence du phénomène d'hystérésis de l'élasticité des câbles sur l'incertitude de pose de la PM. La dernière partie de ce chapitre s'intéresse à l'optimisation de l'architecture de RPC afin de réduire l'erreur de pose de la PM imputable à l'hystérésis. Les méthodes d'analyse des incertitudes et les résultats présentés dans ces travaux de thèse permettent une meilleure compréhension de la répartition de l'erreur de pose de la PM lors de l'utilisation des RPC et un nouvel éclairage sur leur prise en compte lors de la conception préliminaire.

MOTS-CLÉS : Robot Parallèle à Câbles, Analyse de Sensibilité, Incertitudes, Précision, Poulies, Comportement Mécanique des Câbles

---

## Abstract

### Sensitivity of cable-driven parallel robots to uncertainties in pulley geometry and cable mechanical parameters

This thesis focuses on the modelling and sensitivity study of Cable-Driven Parallel Robots (CDPR) with respect to geometrical and mechanical parameters. This robotic system has many advantages in its use, but its design and control remain major issues. This work studies the influence on the precision of the CDPR of the geometric parameters introduced by the presence of the pulleys, but also of the mechanical phenomena linked to the use of cables in the actuation chain. The main objective is to obtain an optimal preliminary design of the CDPR, in order to simplify the control schemes while increasing their accuracy. A state of the art is presented in Chapter 1, highlighting the remaining scientific bottlenecks in the field of CDPRs. Chapter 2 presents the development of so-called extended models for all types of CDPRs. These models take into account pulleys, dead length and uni-directional cable elasticity and deflection. In the following chapters, analyses are carried out for suspended 3-degree-of-freedom CDPRs with a mass point as Mobile Platform (MP). In chapter 3, the design of a new pulley architecture based on a cardan joint is first considered. In a second step, the influence of the pulley geometrical parameters on the accuracy of the CDPR is studied. The elasticity of the cables is then studied to observe its effect on the MP installation error. Chapter 4 deals with the uncertainty in the elasticity by considering it independent from one cable to another. This allows us to present the influence of the hysteresis phenomenon of the cables elasticity on the uncertainty of the MP installation. The last part of this chapter focuses on the optimisation of the CDPR architecture in order to reduce the MP installation error due to hysteresis. The uncertainty analysis methods and results presented in this thesis work provide a better understanding of the distribution of MP error when using CDPRs and shed new light on their consideration at the preliminary design stage.

KEYWORDS: Cable-Driven Parallel Robot, Sensitivity Analysis, Uncertainties, Accuracy, Pulleys, Mechanical Behaviour of Cables