



HAL
open science

Etude par simulation numérique de la génération des vagues de vent à la surface d'un liquide visqueux

Florent Burdairon

► **To cite this version:**

Florent Burdairon. Etude par simulation numérique de la génération des vagues de vent à la surface d'un liquide visqueux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2023. Français. NNT: 2023INPT0050 . tel-04165693

HAL Id: tel-04165693

<https://theses.hal.science/tel-04165693v1>

Submitted on 19 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Dynamique des fluides

Présentée et soutenue par :

M. FLORENT BURDAIRON

le lundi 12 juin 2023

Titre :

Etude par simulation numérique de la génération des vagues de vent à la surface d'un liquide visqueux

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur de Thèse :

M. JACQUES MAGNAUDET

Rapporteurs :

M. GEORG DIETZE, CNRS

M. STEPHANE VINCENT, UNIVERSITE GUSTAVE EIFFEL

Membres du jury :

MME PATRICIA ERN, CNRS TOULOUSE, Présidente

M. FRANÇOIS CHEDEVERGNE, ONERA TOULOUSE, Membre

M. FRÉDÉRIC MOISY, UNIVERSITE PARIS-SACLAY, Membre

À mon père

À Michelle

*Somehow it seems to fill my head with ideas – only I don't
exactly know what they are!*

Lewis Carroll, *Through the Looking-Glass, and What Alice Found There*

Remerciements

Quelqu'un m'a dit il y a quelques années : « une thèse, c'est à la fois un sprint et un marathon ». Je dirais qu'une thèse, c'est un marathon ponctué de sprints, dont le dernier et pas des moindres concerne la rédaction du manuscrit. Alors quand une pandémie vous tombe sur le coin de la figure... (y'a quoi plus long qu'un marathon?)

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté l'invitation, pour l'attention qu'ils ont portée à mes travaux, pour avoir consacré un peu de leur temps à la lecture de ce manuscrit, et pour les échanges riches qui en ont découlés. Je remercie ainsi François Chedevergne et Frédéric Moisy, les rapporteurs Georg Dietze et Stéphane Vincent, et enfin la présidente Patricia Ern.

Je remercie nos collaborateurs orcéens du FAST Marc Rabaud, Frédéric Moisy, Marine Aulnette et Jishen Zhang pour nos discussions fructueuses dans le cadre du projet ANR *ViscousWindWaves*. Je remercie également les camarades toulousains : François Charru, qui a tout d'abord été mon professeur en première année de master et sans qui je n'aurais probablement pas fait cette thèse, Romain Mathis du groupe ASI, et Benjamin Blaisot pour nos discussions tantôt professionnelles autour de la soufflerie S2, tantôt amicales autour d'un verre.

Comme une plante, une thèse a besoin d'un bon environnement pour s'épanouir. Je remercie ainsi chaleureusement les membres de l'IMFT, Eric Climent son directeur, Céline Perles-Picotto la gestionnaire des ressources humaines, Florence Colombies la gestionnaire de projets, Muriel Sabater la gestionnaire du Service Reprographie, le Service Informatique dans son ensemble, et Sylvie Senny la secrétaire du groupe FEP. Je remercie également Pierre Elyakime du Service Cosinus, qui nous a aidé au cours des développements numériques, et qui gère désormais à lui seul le bon fonctionnement du code JADIM.

Je remercie tous les membres du jeune (quand j'ai commencé) groupe FEP, notamment Pascal Fede pour m'avoir invité aux réunions de groupe mensuelles. Merci également à Thomas Bonometti pour toute l'aide qu'il m'a apportée (merci de nous avoir dépanné quelques heures de calcul!). Je remercie également les membres du groupe ASI, avec qui nous partageons notre salle de repos (et la précieuse machine à café!) et nos bureaux. À ce propos, je salue mes cobureaux, d'abord Nicolas, un camarade rencontré à l'université et avec qui j'ai commencé ma thèse, et qui a laissé un vide lorsqu'il est parti, partiellement rempli par mon second cobureau Baptiste.

Je remercie les enseignants du département Mécanique de l'Université Paul Sabatier de m'avoir accueilli dans leurs rangs pendant 3 ans, notamment Enrica Masi, Alain Bergeon, Christophe Airiau, David Fabre, et Gerald Bardan. Un merci particulier à Sylvie Saintlos pour m'avoir tendu la main quand j'en avais besoin.

J'ai une pensée particulière pour les doctorants et post-doctorants du laboratoire, passés et présents, en vrac : Guillaume, Karim, Corentin, Dylan, Ivana, Cyril, Sarah, Klervia, Bilal, Javier, Victor, Mateus,

Abigael, Alexandre, Atiyeh, François, Marion, Elisa, Terrence. J'en ai probablement oublié quelques uns, j'espère qu'ils me pardonneront. Je salue également les camarades Anthony, pour les discussions souvent passionnées à propos de sujets parfois triviaux, Jean pour sa motivation (beaucoup de faiblesse a quitté mon corps!), Victor pour sa bonne humeur (santé Marion!), et Sylvain avec qui on refait le monde jusqu'à (trop) tard alors que tous les autres sont partis se coucher. Enfin, j'adresse des remerciements spéciaux à Asma et Marie, des camarades doctorantes que j'ai connues à l'université en licence. Je les remercie notamment pour leur précieuse amitié, leur bonne humeur, et toute l'aide qu'elles ont pu m'apporter.

Lorsque j'envisageais de commencer une thèse, on m'a dit que l'encadrement était très important. Je me suis rendu compte au cours de ces dernières années que je n'avais pas bien saisi la portée de ce conseil. Si je peux à mon tour en donner un aux futures générations, je dirais aujourd'hui que l'encadrement est ultra fondamental, plus important que le sujet de thèse lui-même. Ainsi, je ne remercierai jamais assez mon directeur de thèse Jacques Magnaudet, qui m'a guidé et soutenu du début à la fin. En plus de son érudition et de sa rigueur scientifique, je tiens à souligner ses qualités exemplaires d'encadrement, sa pédagogie et sa disponibilité sans faille pendant toutes ces années. Je suis particulièrement reconnaissant pour sa présence et son entrain dans les moments de doute, ainsi que nos échanges et nos discussions passionnantes, quel que soit le sujet, scientifique ou non.

Pour finir, je remercie ma famille, mes frangins Camille, Emilie et Aurélien, ainsi que leurs petites tribus respectives. C'est toujours un plaisir de remonter en Moselle pour les voir et passer un peu de temps ensemble, comme une cure de bien-être, et un déchirement lorsqu'il faut en repartir. Leur soutien m'a été, et le reste encore, très précieux. Loin des yeux mais pas loin du cœur.

Résumé

De nombreux travaux ont été menés durant les dernières décennies afin de tester et d'enrichir les modèles de génération et de croissance des vagues de vent. Des travaux expérimentaux récents ont révélé certains aspects de l'influence de la viscosité du liquide sur le mécanisme de croissance de ces vagues. Cette thèse s'inscrit dans ce cadre, et vise à étudier cette influence à l'aide de simulations numériques.

Elle s'appuie sur le code de recherche JADIM, développé à l'IMFT, qui permet de simuler une large gamme d'écoulements incompressibles diphasiques. Afin de capturer les évolutions de l'interface, nous utilisons une approche de type *Volume of Fluid*, et nous faisons varier la viscosité du liquide sur deux ordres de grandeur.

Pour tenir compte de la turbulence dans l'air, nous nous basons sur une approche de type RANS. Nous supposons que les mouvements ondulatoires de l'interface sont bidimensionnels, et qu'ils sont décorrélés des fluctuations turbulentes tridimensionnelles. Cela nous permet de moyennner spatialement l'écoulement dans la direction transverse aux vagues. Cette opération introduit des contraintes turbulentes inconnues dans les équations de quantité de mouvement, que nous modélisons à l'aide d'un champ de viscosité turbulente dans l'air. Bien que cette approche nécessite des hypothèses beaucoup plus fortes que celle basée sur la simulation des grandes échelles (LES), ou a fortiori la simulation directe (DNS), elle est également bien moins coûteuse en temps de calcul. Cela nous permet de faire varier le nombre de Reynolds turbulent sur un ordre de grandeur, bien au-delà des études par LES ou DNS les plus récentes menées sur une configuration similaire.

La viscosité turbulente est estimée à l'aide du modèle de Spalart-Allmaras, très utilisé pour les écoulements aérodynamiques complexes à haut nombre de Reynolds. Elle y est solution d'une équation de transport, qui fait intervenir la vorticité de l'écoulement résolu, et la distance locale à la paroi la plus proche (ici l'interface). Nous avons implémenté ce modèle dans le code JADIM, puis l'avons testé sur trois configurations monophasiques canoniques : l'écoulement turbulent en canal plan développé ; l'écoulement au-dessus d'une marche descendante (comme modèle d'écoulement décollé) ; et l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée rigide fixe, avec et sans décollement. Pour cette dernière configuration, le modèle prédit le bon déphasage des grandeurs pariétales, mais l'amplitude de leurs variations est plus faible que ce qu'indiquent les données expérimentales.

Après avoir mis au point un protocole d'initialisation précis, nous avons réalisé de nombreuses simulations numériques diphasiques. Pour chaque cas, nous avons suivi l'évolution temporelle du moment d'ordre deux de l'interface, afin de caractériser la croissance ou la décroissance d'une perturbation initiale en fonction de la viscosité du liquide. Nous avons calculé les taux de croissance des modes dominants, qui se comparent bien aux prédictions du modèle de Miles. Nous avons également analysé les évolutions temporelles des spectres spatiaux des déformations de l'interface. Certains cas montrent une croissance en plusieurs phases successives, due au décalage du mode dominant vers les petits nombres d'ondes au cours du temps. Malgré les biais possibles induits par les limitations du modèle de turbulence, notre approche s'avère capable de reproduire les mécanismes de génération des vagues de vent sur l'eau et sur des liquides plus visqueux.

Ce travail pourra dans la suite être enrichi de deux manières : en considérant le cas des très hautes viscosités, afin de capturer les solitons visqueux récemment mis en évidence expérimentalement ; et bien sûr en améliorant le modèle de turbulence, afin de mieux prendre en compte les déséquilibres de la turbulence au-dessus de l'interface déformée.

Abstract

Many studies have been carried out over the last decades to test and improve wind-wave generation and growth models. Recent experimental works have revealed some aspects of the influence of the liquid viscosity on the mechanisms governing this growth. This PhD is part of this framework, and aims at studying this influence by means of numerical simulations.

It relies on the research code JADIM, developed at IMFT, devoted to the simulation of two-phase incompressible flows. To track the evolution of the interface, we use a *Volume of Fluid* approach, and vary the liquid viscosity over two orders of magnitude.

To account for turbulence in the air, we employ a RANS approach. We assume that the orbital movements of the interface are two-dimensional, and that they are uncorrelated with the three-dimensional turbulent fluctuations. This allows us to spatially average the flow in the transverse direction, perpendicular to the wave propagation. This averaging process introduces unknown turbulent stresses in the momentum equations, that we model through an eddy-viscosity distribution. Although this approach implies much stronger assumptions than the one based on large-eddy simulations (LES), or a fortiori on direct simulations (DNS), it is also much less computationally expensive. Thanks to this, we were able to vary the turbulent Reynolds number over one order of magnitude, exceeding by far the range of conditions explored in most recent LES and DNS studies on similar configurations.

The eddy-viscosity is estimated through the Spalart-Allmaras model, widely used for complex aerodynamical flows at high Reynolds number. The eddy-viscosity is computed as the solution of a transport equation, involving the resolved flow vorticity and the local distance to the nearest wall (here the interface). We have implemented this model in the JADIM code, and first tested it in three canonical one-phase configurations : the fully-developed plane channel flow ; the flow above a backward-facing step (a model for separated flows) ; and the flow above a fixed rigid wavy wall, with and without separation. For the latter, the phase angle of the wall quantities (pressure and shear stress) is well predicted, but the amplitude of their variations is weaker than indicated by experimental data.

After setting up a precise initialisation protocol, we carried out a large series of two-phase computations. In each case, we followed the time evolution of the second moment of the interface to characterize the dependence of the growth or decay of an initial disturbance on the liquid viscosity. We computed the growth rates of the dominant modes, which compares well with Miles' model. We also analysed time evolutions of spatial spectra of the interface deformations. Some cases exhibit a three-stage growth, due to the shift of the dominant mode towards a smaller wavenumber as time proceeds. Despite the possible bias induced by the limitations of the turbulence model, our approach appears to be able to reproduce the mechanisms of wind-wave generation over water and over more viscous liquids.

In the future, this work could be enriched along two ways : by considering the case of very high liquid viscosities, to track viscous solitons that have been recently observed experimentally ; and obviously by improving the turbulence model, to better take care of non-equilibrium effects induced by the deformed interface on the turbulence in the air flow.

Table des matières

Contexte et plan du manuscrit	xv
1 Introduction et état de l'art	1
1.1 Ondes de surface	1
1.1.1 Théorie potentielle	2
1.1.2 Mécanisme de Kelvin-Helmholtz	4
1.1.3 Cas général et influence de la viscosité	7
1.2 Vagues de vent	9
1.2.1 Éléments théoriques	9
1.2.2 Études expérimentales sur les vagues de vent	13
1.3 Turbulence au-dessus d'une paroi ondulée indéformable	20
1.3.1 Éléments théoriques	20
1.3.2 Études expérimentales et numériques	22
2 Simulations de vagues de vent et modélisation de la turbulence dans l'air	29
2.1 Études par simulation numérique des vagues de vent	29
2.1.1 Études monophasiques de l'impact d'une phase sur l'autre	30
2.1.2 Études du couplage entre le vent et les déformations de l'interface	34
2.2 Modélisation de la turbulence	39
2.2.1 Description de la problématique	39
2.2.2 Cadre de la modélisation	41
2.2.3 Modèles de viscosité turbulente	44
3 Implémentation et validations numériques d'un modèle de turbulence	51
3.1 Modèle de Spalart-Allmaras	51
3.2 Implémentation du modèle de Spalart-Allmaras dans JADIM	55
3.2.1 Discrétisation en espace	55
3.2.2 Discrétisation en temps	57
3.2.3 Calcul de la distance d	58
3.3 Validations du modèle sur différents écoulements monophasiques	59
3.3.1 Écoulement en demi-canal	59
3.3.2 Écoulement derrière une marche descendante	60

3.3.3	Écoulement au-dessus d'une paroi ondulée	67
3.4	Conclusion	80
4	Mise en place des expériences numériques sur les vagues de vent	81
4.1	Suivi de l'interface	81
4.2	Adaptation du modèle de turbulence	84
4.2.1	Différentiation entre les deux phases	84
4.2.2	Calcul de la distance à la paroi	84
4.3	Protocoles des expériences numériques	88
4.3.1	Conception du maillage	88
4.3.2	Initialisation de l'écoulement	89
4.3.3	Génération de vagues de vent	93
5	Génération numérique de vagues de vent	97
5.1	Introduction	97
5.2	Présentation des expériences numériques	97
5.2.1	Caractéristiques des simulations numériques	97
5.2.2	Évolution temporelle de la perturbation initiale	98
5.2.3	Hypothèse d'écoulement laminaire dans le liquide	102
5.3	Contenu spectral des déformations de l'interface	106
5.3.1	Champs de vagues	107
5.3.2	Distribution spectrale de l'amplitude des déformations de l'interface	109
5.3.3	Évolution temporelle des spectres spatiaux	113
5.4	Croissance des vagues	117
5.4.1	Définition des taux de croissance	117
5.4.2	Mesure du taux de croissance du mode le plus amplifié	118
5.5	Conclusion	121
6	Conclusion et perspectives	123
6.1	Résumé des travaux réalisés	123
6.2	Perspectives	126
A	Éléments théoriques des ondes de surface	129
B	A combined VOF-RANS approach for studying the evolution of incipient wind-generated waves over a viscous liquid	133
C	Spectrogrammes	159
	Table des figures	167
	Liste des tableaux	169

Contexte et plan du manuscrit

Lorsqu'un vent, un écoulement d'air turbulent, souffle sur la surface d'un liquide, il impose des fluctuations de pression et de cisaillement sur l'interface entre l'air et le liquide. S'il souffle suffisamment fort, des ondes, dites vagues de vent, peuvent être générées sur cette interface. La difficulté principale dans l'étude de ces vagues tient aux interactions entre la turbulence et les déformations de l'interface. Les premiers modèles de génération et de croissance des vagues de vent remontent au début du siècle dernier. Deux théories principales ont émergé à la fin des années 1950. Celle de Phillips, de type résonance entre les fluctuations turbulentes de pression et les déformations de l'interface, décrit la génération d'ondes à partir d'une interface initialement plane. Celle de Miles, de type instabilité de cisaillement, décrit la croissance de ces ondes sous l'effet des contraintes exercées par le vent sur l'interface. Depuis lors, de nombreux travaux ont été menés afin de tester et d'enrichir ces modèles.

La majeure partie d'entre eux se concentrent sur le système air/eau. Cependant, des travaux expérimentaux récents ont révélé certains aspects de l'influence de la viscosité du liquide sur le mécanisme de croissance des vagues de vent. Une équipe du laboratoire FAST a ainsi mis en évidence trois régimes de déformation de la surface en fonction de cette viscosité et de la vitesse du vent. Les deux premiers, les ridules et les ondes régulières, concernent des liquides dont la viscosité se situe entre 1 et 300 fois celle de l'eau. Les premières sont des structures tridimensionnelles de très petite amplitude, et elles apparaissent à basse vitesse de vent. Les ondes régulières sont des vagues classiques, essentiellement bidimensionnelles et dont les crêtes font face au vent. Elles apparaissent lorsque la vitesse du vent augmente et dépasse un certain seuil, qui dépend de la viscosité du liquide. Le troisième régime survient à très forte viscosité. Dans ce cas, un train d'ondes régulières peut se déstabiliser et donner naissance à un soliton visqueux, une structure fortement non-linéaire.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux menés au FAST, plus précisément dans le cadre du projet ANR *Viscous Wind Waves*, impliquant le FAST et l'IMFT, et vise à étudier l'influence de la viscosité sur la génération des vagues de vent à l'aide de simulations numériques. Nous nous appuyons pour cela sur le code de recherche JADIM, développé à l'IMFT, qui permet de simuler une large gamme d'écoulements incompressibles diphasiques. Nos simulations sont bidimensionnelles, et concernent uniquement le régime des ondes régulières. Ce travail de thèse peut néanmoins servir de base pour étudier la génération de solitons visqueux. Le présent manuscrit est organisé comme suit.

Le premier chapitre introduit le phénomène des vagues de vent. Dans un premier temps, nous présentons quelques résultats théoriques relatifs aux ondes de surface, et en particulier l'influence de la viscosité du liquide sur leur propagation. Nous abordons dans la deuxième partie les modèles de Phillips et de Miles, puis nous proposons un état de l'art sur les expériences de génération et de propagation de vagues de vent en laboratoire. Nous terminons ce chapitre avec quelques résultats théoriques et expérimentaux concernant les

écoulements turbulents au-dessus d'une paroi ondulée, situation pertinente vis-à-vis du scénario de Miles.

Le deuxième chapitre aborde les stratégies de simulation numérique des vagues de vent. Historiquement, les premiers travaux numériques sur ce sujet se sont concentrés sur les déséquilibres de la turbulence dans l'air, provoqués par une paroi ondulée rigide. Les études suivantes se sont intéressées à des écoulements monophasiques de plus en plus complexes, jusqu'à la configuration diphasique des interactions couplées vagues/vent. Nous examinons les différentes approches employées, et en particulier les méthodes de simulation diphasique avec une interface mobile. Nous présentons l'approche *Volume of Fluid*, utilisée dans JADIM pour capturer les évolutions de l'interface. La seconde partie est consacrée au cadre de notre modélisation de la turbulence dans l'air. Elle est basée sur une approche de type *RANS*, qui introduit des corrélations turbulentes entre les fluctuations de vitesse. Nous modélisons ces corrélations inconnues à l'aide d'un champ de viscosité turbulente dans l'air. Nous terminons ce chapitre en présentant plusieurs modèles destinés à prédire cette viscosité turbulente.

Le modèle que nous avons retenu est celui de Spalart-Allmaras, très utilisé pour les écoulements aérodynamiques complexes à haut nombre de Reynolds. Le troisième chapitre est consacré à ce modèle. Dans un premier temps, nous présentons le modèle en détails. La viscosité turbulente y est solution d'une équation de transport, qui fait intervenir la vorticité de l'écoulement résolu, et la distance locale à la paroi la plus proche. Nous abordons ensuite l'implémentation de ce modèle que nous avons réalisée dans JADIM, et en particulier le calcul de la distance dans des écoulements monophasiques. Nous avons testé cette implémentation sur trois configurations monophasiques. La troisième partie de ce chapitre concerne ces validations, et notamment celle relative aux écoulements au-dessus d'une paroi ondulée, avec ou sans décollement.

La mise en place des expériences numériques destinées à l'étude de la croissance des vagues de vent est détaillée dans le quatrième chapitre. Nous présentons d'abord la méthode de suivi de l'interface. Nous abordons ensuite les adaptations que nous avons dues apporter au modèle de Spalart-Allmaras pour réaliser ces simulations diphasiques. Elles concernent en particulier le calcul de la distance, qui devient alors la distance locale à l'interface. L'étude de la génération des vagues de vent nécessite un protocole d'initialisation précis. Nous terminons ce chapitre en détaillant celui que nous avons mis en place. Il consiste à appliquer une perturbation initiale impulsionnelle, qui peut ensuite être amplifiée sous l'action du vent. Nous illustrons cette évolution avec quelques résultats préliminaires de croissance de cette perturbation pour trois liquides de viscosités différentes.

Le cinquième et dernier chapitre concerne les résultats des simulations de génération des vagues de vent. Dans une première partie, nous présentons une vue d'ensemble de nos expériences numériques. Afin de caractériser la croissance ou la décroissance de la perturbation initiale, nous avons suivi l'évolution temporelle du moment d'ordre deux de l'interface. Nous analysons les diverses évolutions observées en fonction de la viscosité du liquide et de la vitesse du vent. La seconde partie est consacrée au contenu spectral des déformations de l'interface, et en particulier à leur évolution temporelle. Certains cas montrent une croissance en plusieurs phases successives, due au décalage du mode dominant vers les petits nombres d'onde au cours du temps. Dans la troisième partie, nous présentons les taux de croissance des modes dominants. Ils se comparent bien aux prédictions du modèle de Miles, et nous discutons leur dépendance par rapport à la viscosité du liquide et à la vitesse du vent.

Deux annexes complètent le manuscrit. La première est consacrée à des éléments théoriques classiques relatifs aux ondes de surface. Nous y présentons l'approche potentielle, la méthode pour obtenir la relation

de dispersion des ondes gravito-capillaires en profondeur finie, et quelques aspects non-linéaires. La seconde annexe reproduit l'article que nous avons soumis au *European Journal of Mechanics-B/Fluids* en avril 2023. De nature principalement méthodologique, il présente le cadre de nos expériences numériques, et reprend la plupart des éléments des chapitres 2 à 4, avec quelques illustrations issues du chapitre 5.

Chapitre 1

Introduction et état de l'art

1.1 Ondes de surface

Lorsque deux phases fluides différentes sont en contact l'une avec l'autre, elles sont séparées par une interface. Cette dernière peut être définie comme une surface de discontinuité des propriétés physiques des fluides. Elle peut subir des déformations, et être sujette au phénomène d'ondes de surface, ou ondes superficielles. Une onde est caractérisée par l'évolution d'une grandeur physique autour d'un état d'équilibre. Cette évolution est provoquée par la compétition entre un déséquilibre, qui crée une accélération, et une force de rappel, qui tend en permanence à ramener cette grandeur vers l'équilibre. Dans le cas des ondes de surface, cette grandeur est la position de l'interface, et on peut observer deux types de force de rappel. D'une part, la gravité, lorsqu'il y a présence d'un champ de pesanteur g ; d'autre part, la capillarité, qui est présente lorsque deux phases fluides immiscibles sont en contact. Cette dernière est caractérisée par la tension interfaciale γ . Suivant le type de phénomène étudié, et les échelles considérées, l'une de ces forces peut prendre le dessus sur l'autre. On pourra alors parler respectivement d'onde de gravité, ou d'onde capillaire. L'origine des ondes de surface peut être très variée : un objet comme un galet tombant dans l'eau ou ricochant à sa surface, et venant briser la tranquillité d'un plan d'eau ; un écoulement dans l'un ou l'autre fluide, comme le vent qui souffle ou la présence d'un courant sous la surface, etc.

Les premières descriptions mathématiques des ondes de surface doivent beaucoup à Euler, qui a mis en place le cadre des équations de l'hydrodynamique au 18ème siècle (*Craik (2004)*). Plus tard, Cauchy et Poisson se sont penchés sur le problème d'une perturbation se propageant dans un milieu infini, à partir d'une condition initiale donnée. Leurs travaux ont posé les bases du problème de la valeur initiale, ou problème de Cauchy, c'est-à-dire l'association d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles avec une condition initiale. Au 19ème siècle, *Airy (1841)* proposa la formulation de la théorie linéaire des ondes de surface que l'on connaît aujourd'hui. Il dériva la relation de dispersion, et montra que les trajectoires des particules sont des ellipses, réduites à des cercles en profondeur infinie. Il s'est également intéressé à l'influence du fond sur la propagation des ondes. Quelques années plus tard, *Stokes (1847)* reprit les bases mises en place par Airy, et réalisa une incursion dans le domaine non-linéaire.

La physique des ondes de surface est très riche, et de nombreux travaux ont été menés depuis ces études pionnières pour mieux comprendre le phénomène. Il serait illusoire d'en faire une présentation exhaustive.

Nous présentons ci-dessous les principaux résultats de la théorie potentielle, quelques effets non-linéaires importants, et l'influence de la viscosité sur la propagation des ondes de surface.

1.1.1 Théorie potentielle

Théorie linéaire

L'étude des ondes de surface se fait souvent dans le cadre des écoulements air/eau, par exemple à la surface de l'océan. Dans ce cas, il peut être légitime, en première approximation, de négliger les effets visqueux. Le cadre formel de la théorie linéaire est rappelé dans l'annexe A. Soit une onde de longueur d'onde λ , et de pulsation σ . La phase de cette onde se propage à une vitesse $c = \sigma/k$, ou $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde. On définit également la vitesse de groupe de cette onde $c_g = \partial\sigma/\partial k$. En l'absence d'effet dissipatif, cette dernière est la vitesse de propagation associée à l'énergie de l'onde (*Crapper (1984)*). Quand on s'intéresse à un phénomène ondulatoire, il est courant de chercher une relation de dispersion. Il s'agit d'une relation qui décrit les interactions entre le spectre spatial et le spectre temporel, et relie deux des trois quantités (k, σ, c). Pour les ondes de surface gravito-capillaires en profondeur h finie, on montre que cette relation peut s'écrire (*Crapper (1984)*) :

$$c = \left(\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh(kh) \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{k} (1 + \epsilon_T) \tanh(kh) \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

où $\epsilon_T = \gamma k^2 / \rho g$. Ce terme est l'inverse du nombre de Bond construit à partir de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, et il rend compte des effets de tension superficielle. On peut définir une longueur d'onde limite $\lambda_m = 2\pi l_c$, où $l_c = (\gamma/\rho g)^{1/2}$ est la longueur capillaire¹, et on y associe la vitesse $c_m = c(\lambda_m) = (4\gamma g/\rho)^{1/4}$. Le couple (λ_m, c_m) définit ainsi une limite entre les ondes capillaires ($\lambda < \lambda_m$), et les ondes de gravité ($\lambda > \lambda_m$). On peut en particulier le constater sur la figure 1.1, où nous avons tracé la courbe $c(\lambda)$. Il s'agit ici d'un cas en profondeur infinie, où nous avons posé $h = 100\lambda_m$. Cela correspond à $hk_m \gg 1$, et le terme en \tanh devient donc négligeable.

Les ondes de surface ont la propriété remarquable d'être dispersives, ce que l'on peut voir dans la relation (1.1) avec la dépendance de la vitesse de phase c en fonction du nombre d'onde k : deux ondes de fréquences différentes σ_1 et σ_2 se propageront à des vitesses différentes. Ainsi dans le cadre des écoulements non visqueux, une onde monochromatique se propage sans se déformer en raison de l'absence de phénomène dissipatif, mais une onde contenant au moins 2 composantes harmoniques distinctes subit des déformations à cause de la dispersion. De ce fait un train d'onde contenant plusieurs fréquences différentes pourra par exemple avoir tendance à s'étaler dans l'espace, et donner lieu à des interférences entre les différentes composantes.

Si l'on considère la propagation d'ondes sur un courant avec un profil de vitesse uniforme U_0 , on retrouve une relation de dispersion similaire à (1.1). La présence du courant induit simplement un décalage Doppler de la vitesse de phase de l'onde. On peut observer plusieurs situations en fonction du rapport entre la vitesse de groupe de l'onde relativement au courant, et U_0 (*Peregrine et Jonsson (1983)*). Mentionnons par exemple le phénomène de « wave blocking ». Lorsque l'onde rencontre un courant opposé suffisamment intense, ce dernier peut la stopper et elle apparaît alors comme stationnaire à un observateur extérieur.

1. En réalité il faudrait remplacer ρ par $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, la différence de densité entre le liquide (2) et l'air (1). Dans la plupart des cas diphasiques qui nous intéressent ici, le rapport ρ_2/ρ_1 est tel que l'on peut négliger la densité de l'air.

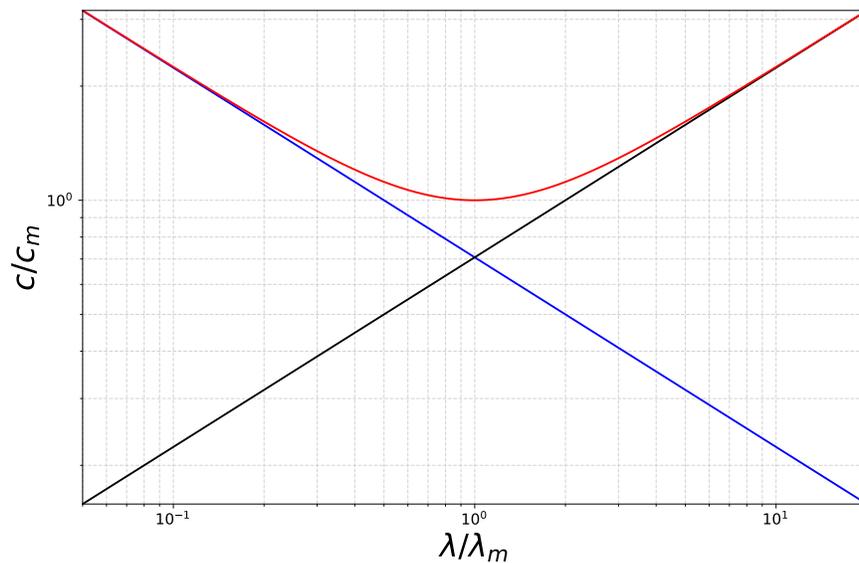


FIGURE 1.1 – Vitesse de phase des ondes de surface en eau profonde : en rouge les ondes gravito-capillaires, en bleu les ondes capillaires ($\epsilon_T \gg 1$), et en noir les ondes gravitaires ($\epsilon_T \ll 1$)

Effets non-linéaires

Suite aux travaux d’Airy, Stokes s’est attaqué aux effets d’amplitude finie. L’article *Stokes (1847)* est généralement cité comme le travail fondateur de la théorie non-linéaire (*Craik (2005)*). Stokes adopte comme point de départ l’approche potentielle. Il linéarise le problème en retenant les termes jusqu’à l’ordre trois par rapport à a/λ , où a est l’amplitude de l’élévation de surface ζ . Il montre qu’en profondeur infinie, celle-ci prend alors la forme

$$\zeta = a \cos k(x - ct) - \frac{ka^2}{2} \cos 2k(x - ct) + \frac{3}{8}k^2a^2 \cos 3k(x - ct) \quad (1.2)$$

Plus de détails sont fournis en annexe (A.2). En reprenant le raisonnement jusqu’à l’ordre trois, il montre que la célérité de cette onde en profondeur infinie s’écrit

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{k^2a^2}{2}\right) \quad (1.3)$$

Le second terme entre les parenthèses est une correction non-linéaire à la vitesse de phase des ondes linéaires en profondeur infinie. Le profil d’onde à l’ordre trois est reproduit de l’article original dans la figure 1.2 pour $a = 7\lambda/80$. Les non-linéarités rendent les crêtes plus pointues, et augmentent l’extension longitudinale des creux. Par rapport à l’onde d’Airy, cette forme se rapproche davantage des vagues que l’on peut observer dans la réalité.

Un autre résultat remarquable de *Stokes (1847)* est le phénomène appelé dérive de Stokes. Il s’agit d’un déplacement moyen de particules fluides dans la direction de propagation de l’onde. La théorie linéaire prédit qu’elles ont des trajectoires fermées elliptiques. Le fait de conserver les non-linéarités permet de montrer qu’en plus elles sont transportées vers l’aval. La trajectoire horizontale est modifiée par un terme positif (du



FIGURE 1.2 – Profil d'onde d'après (1.2), tiré de *Stokes (1847)*

moins du signe de c), et qui croît linéairement avec le temps. Cela correspond à une sur vitesse, dépendante de la profondeur, et maximale au niveau de l'interface. Elle est donnée par

$$U = a^2 k^2 c e^{-2ky} \text{ en profondeur infinie} \quad (1.4)$$

$$U = a^2 k^2 c \frac{e^{2k(y+h)} + e^{-2k(y+h)}}{(e^{2kh} + e^{-2kh})^2} \text{ en profondeur finie} \quad (1.5)$$

Pour finir sur les aspects non-linéaires, mentionnons l'instabilité modulationnelle, mise en lumière par *Benjamin et Feir (1967)*. Cette instabilité est due au caractère dispersif des ondes de surface. On peut en résumer le mécanisme ainsi. Soit un train d'onde de fréquence ω , se propageant avec des perturbations de fréquences voisines $\omega(1 \pm \delta)$. Si $0 < \delta \leq \sqrt{2}ka$ (avec a l'amplitude du train d'onde), l'interaction peut devenir instable. L'onde se déforme alors et subit des modulations d'amplitude, donnant lieu à une concentration localisée et importante de l'énergie. Ce dernier point peut mener éventuellement à la dislocation de l'onde. Cette instabilité peut être renforcée par la présence d'un courant (*Li et al. (1988), Nwogu (2009)*). Elle est parfois invoquée comme explication possible du phénomène de vague scélérate (*Kharif et Pelinovsky (2003), Janssen et Herbers (2009)*), qui consiste en une onde de très grande amplitude capable d'engloutir les plus grands navires (*Kharif et Pelinovsky (2003)*).

1.1.2 Mécanisme de Kelvin-Helmholtz

Nous avons présenté quelques résultats sur la propagation des ondes de surface en supposant leur pré-existence. Nous considérons ici un mécanisme de génération de ces ondes. Il a été étudié par de nombreux auteurs depuis plus d'un siècle, et développé en premier par Lord Kelvin et Helmholtz au 19ème siècle.

Considérons la configuration particulière de deux fluides non-visqueux de densités différentes, et soumis à un écoulement cisailé. Les deux fluides sont séparés par une interface plane, où la tension interfaciale est γ , et le champ de pesanteur vertical g . On suppose que le fluide léger est situé au-dessus du fluide lourd, et ainsi l'ensemble est stable par rapport à l'instabilité de Rayleigh-Taylor. À l'équilibre, l'interface est située en $z = 0$.

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut être étudiée en considérant les perturbations d'un écoulement quasi-parallèle. Relaxons l'hypothèse d'écoulement irrotationnel. L'idée est de décomposer les champs (vitesse et pression notamment) en deux parties : l'une stationnaire, liée à un écoulement parallèle $U(z)\mathbf{e}_x$; l'autre fluctuante dans le temps, liée à aux perturbations autour du profil stationnaire. Dans le cadre des écoulements parallèles, si l'idée est de chercher une condition d'instabilité, on peut simplifier la géométrie en se ramenant à un problème bidimensionnel à l'aide du théorème de Squire.² Cette simplification permet notamment

2. À tout mode tridimensionnel instable (\mathbf{k}, σ) peut être associé un mode bidimensionnel plus instable $(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\sigma})$, avec la transformation de Squire $(\tilde{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \tilde{\sigma} = \sigma \tilde{\mathbf{k}}/k_x)$ (*Charru (2012)*).

d'introduire une fonction de courant ψ liée à la partie fluctuante du champ de vitesse, et qui rend compte des perturbations des lignes de courant. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à deux équations scalaires selon x et z (respectivement directions longitudinale et verticale de l'écoulement). La pression peut ensuite être éliminée par différentiation croisée. S'intéressant à de petites perturbations, on écrit la fonction de courant comme le produit d'une perturbation élémentaire bidimensionnelle, de nombre d'onde k et pulsation ω , avec une fonction de l'altitude z : $\psi(x, z, t) = f(z) \exp i(kx - \omega t)$. En injectant ce type de solution dans l'équation précédente, on établit l'équation de Rayleigh (où nous avons noté ∂_z la dérivation par rapport à l'altitude z) :

$$(U - c) (\partial_{zz} - k^2) f - (\partial_{zz} U) f = 0 \quad (1.6)$$

Notons que cette équation peut être vue comme la version asymptotique non-visqueuse de l'équation d'Orr-Sommerfeld. En reprenant le raisonnement depuis le début et en y ajoutant la viscosité, on montre que cette équation s'écrit :

$$(U - c) (\partial_{zz} - k^2) f - (\partial_{zz} U) f = -\frac{i\nu}{k} (\partial_{zz} - k^2)^2 f \quad (1.7)$$

L'avantage de cette approche est que l'on peut considérer les deux phases comme un unique fluide dont les propriétés physiques varient très rapidement aux abords de l'interface. Le couplage s'effectue alors à l'aide des conditions aux limites à l'interface. En appliquant le même traitement aux conditions aux limites, on obtient un problème aux valeurs propres. L'étude de ce dernier permet d'établir une relation de dispersion, dépendante du profil de vitesse $U(z)$. Celle-ci prédit la vitesse de propagation et le taux de croissance des perturbations, et on peut alors en déduire une condition d'instabilité.

Pour étudier le mécanisme de Kelvin-Helmholtz, on peut considérer un profil très simple uniforme par morceaux $U(z) = \{U_2 \text{ si } z < 0 \mid U_1 \text{ si } z > 0\}$. La relation de dispersion pour ce profil de vitesse s'écrit alors (*Chandrasekhar (1981)*) :

$$c = \frac{\omega}{k} = -(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \pm \left[\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2} - \alpha_1 \alpha_2 \Delta U^2 \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

avec $\alpha_i = \rho_i / (\rho_1 + \rho_2)$, et où l'on a noté $\Delta U = U_2 - U_1$ le différentiel de vitesse. La présence du signe \pm indique la possibilité que les perturbations puissent se propager dans un sens ou l'autre. Simplifions le système en supposant que le rapport de densité ρ_2 / ρ_1 est très grand, alors $\alpha_1 \sim \rho_1 / \rho_2$ et $\alpha_2 \sim 1$. Le terme sous la racine est alors donné par :

$$\Delta = \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \Delta U^2 \quad (1.9)$$

Si Δ est négatif, la relation (1.8) admet deux valeurs complexes conjuguées. Leur partie imaginaire est donnée par $\pm |\Delta|^{1/2}$, et elle représente le taux de croissance de la perturbation. Cela implique alors l'existence d'une solution avec un taux de croissance positif, qui donne lieu à une instabilité. Les perturbations sont donc stables si $\Delta \geq 0$. Cela est immédiat pour toutes les longueurs d'onde en l'absence d'écoulement cisailé. On retrouve alors la relation de dispersion des ondes de surface (1.1) (en profondeur infinie). Négligeons dans un premier temps l'influence de la capillarité. Il existe alors un nombre d'onde minimal k_{min} au-delà duquel toutes les valeurs de k sont instables. Cette valeur minimale dépend du différentiel de vitesse, et est donnée par

$$k_{min} = \frac{\rho_2 g}{\rho_1 \Delta U^2} \quad (1.10)$$

En l'absence de capillarité, tout saut de vitesse produit ainsi une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, quelle que soit son intensité. Dans ce cas, pour un profil donné, il existe une longueur d'onde maximale $\lambda_{max} = 2\pi/k_{min}$. C'est celle que l'on devrait observer expérimentalement.

Si l'on réintroduit l'influence de la capillarité, la condition de stabilité s'écrit

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \Delta U^2 < \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_2} \quad (1.11)$$

Le second membre admet une valeur minimale $k_{min} = l_c^{-1}$, où l_c est la longueur capillaire. Il existe alors une valeur critique du différentiel de vitesse donnée par :

$$\Delta U_c = \left(\frac{4\gamma\rho_2g}{\rho_1^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{2\gamma}{\rho_1 l_c} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

En-dessous de cette valeur critique, les perturbations sont stables. Au-dessus, il existe une longueur d'onde maximale correspondant à la longueur capillaire. L'existence d'un différentiel de vitesse critique, au-delà duquel les perturbations sont instables, tient à la présence de la tension de surface, qui permet de stabiliser le système en-deçà d'une valeur critique.

Notons qu'au-delà de la valeur critique (1.12), toutes les longueurs d'onde, mêmes infiniment courtes, sont amplifiées. Pour corriger cette prédiction manifestement contraire aux observations, il est nécessaire d'ajouter les effets visqueux, ce qui introduit une longueur d'onde minimale de coupure, comme démontré par *LeBlond et Mairardi (1987)* (voir section suivante). Cette analyse, basée sur l'équation de Rayleigh, est le point de départ du modèle de Miles (*Miles (1957)*) pour expliquer la génération des vagues de vent (voir 1.2.1). *Miles (1959b)* s'intéresse au mécanisme de Kelvin-Helmholtz en présence d'un liquide visqueux, et à sa pertinence pour expliquer la génération d'ondes de surface. Il considère un écoulement cisaillé dans l'air de type couche limite turbulente $U(y) = U_1 \log(y/z_0)$, où z_0 est une longueur qui modélise les effets de rugosité de l'interface. Il dérive alors un système d'équations permettant de calculer la vitesse minimale U_1 capable de déstabiliser l'interface. Il applique ce modèle au cas d'une huile plus visqueuse que l'eau, employée expérimentalement par *Francis (1954b)*. Pour une densité de 875 kg/m^3 , une viscosité dynamique de 25 Pa s et une tension interfaciale de 34 mN/m , il obtient une vitesse minimale $U_1 = 0.93 \text{ m/s}$, comparable à la vitesse de 0.97 m/s mesurée par Francis. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz semble donc adéquate pour décrire la génération d'ondes à la surface d'un liquide visqueux. En revanche, pour le système air/eau, ce modèle prédit $U_1 \sim 2 \text{ m/s}$, alors qu'on peut observer des ondes de surface pour des vitesses nettement inférieures. Ce mécanisme n'est donc pas suffisant pour expliquer le seuil de génération d'ondes à la surface de liquides de faible viscosité comme l'eau. *Lindsay (1984)* reprend également l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en ne considérant que la viscosité du liquide. Il montre que la présence de cette viscosité réduit la vitesse critique donnée par (1.12) selon la relation

$$\Delta U_{c,vis} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \Delta U_{c,non-vis} \quad (1.13)$$

Dans la limite où le rapport des densités ρ_2/ρ_1 est très grand, ces deux vitesses sont très proches et la présence de la viscosité ne modifie que très peu le mécanisme de Kelvin-Helmholtz.

1.1.3 Cas général et influence de la viscosité

Un traitement de l'influence de la viscosité sur la propagation des ondes gravito-capillaires dans un cadre linéaire est présenté par *Lamb (1932)* (article 349) pour une profondeur infinie. Plus récemment, *LeBlond et Mainardi (1987)* ont réalisé une étude plus complète prenant en compte les effets visqueux. Ils ont également tenu compte des effets de profondeur. Les auteurs discutent notamment les limites des cas extrêmes d'ondes complètement amorties par la viscosité et dont la propagation devient impossible. Pour illustrer cette limite, intéressons-nous au cas bidimensionnel et partons d'une décomposition du champ de vitesse \mathbf{u} en deux contributions potentielle et rotationnelle, cette dernière représentée par une fonction de courant ψ . Les champs de vitesse et pression sont solutions des équations de Navier-Stokes, et les conditions aux limites sont similaires à celles présentées précédemment. Les auteurs relèvent qu'il existe ici trois échelles de longueur, à savoir la profondeur H , la longueur d'onde λ , et l'échelle de diffusion visqueuse $D = (\nu/\sigma)^{1/2}$, où σ est la fréquence des ondes non amorties donnée par la relation (1.1). Nous pouvons ainsi construire les trois grandeurs sans dimension suivantes

$$\zeta = \frac{i\omega}{\sigma} \quad \epsilon = kH \quad \theta = \frac{\nu k^2}{\sigma} = \left(\frac{2\pi D}{\lambda}\right)^2 \quad (1.14)$$

Ici ω est la fréquence des ondes amorties. Ces trois nombres sont dans l'ordre : le rapport des fréquences des ondes amorties/non amorties, le rapport entre profondeur et longueur d'onde (qui permet de distinguer les cas de profondeur infinie et de profondeur faible), et le rapport entre échelle de diffusion visqueuse et longueur d'onde.

En introduisant des solutions ondulatoires classiques en $\exp i(kx - \omega t)$, LeBlond et Mainardi obtiennent une relation de dispersion plus complexe et plus complète, où $\alpha = \epsilon(1 - \zeta/\theta)^{1/2}$:

$$\frac{4\alpha}{\epsilon}\theta(2\theta - \zeta) + \frac{\sinh \alpha}{\sinh \epsilon} + \left(1 + (2\theta - \zeta)^2 + \frac{4\alpha^2}{\epsilon^2}\theta^2\right) \sinh \alpha \sinh \epsilon - \frac{\alpha}{\epsilon} (1 + (2\theta - \zeta)^2 + 4\theta^2) \cosh \alpha \cosh \epsilon = 0 \quad (1.15)$$

En profondeur infinie ($\epsilon \gg 1$), (1.15) se réduit à la relation

$$\left[1 + (2\theta - \zeta)^2\right]^2 = 16\theta^3(\theta - \zeta) \quad (1.16)$$

Cette relation était déjà connue précédemment. Elle est notamment discutée brièvement par *Lamb (1932)* (article 349, équation 16). Selon LeBlond et Mainardi, deux racines ne sont pas physiquement acceptables, car elles mènent à une croissance exponentielle avec la profondeur. Les deux autres sont caractérisées par la présence d'une coupure pour $\theta_0 = 1.31$. Pour $\theta < \theta_0$ les racines sont complexes et correspondent à des ondes propagatives. La vitesse de propagation de ces ondes est sensiblement la même qu'en l'absence de viscosité loin de la coupure, et chute brutalement au voisinage de cette dernière. Pour $\theta > \theta_0$ les racines deviennent réelles et il n'y a plus de propagation possible. L'une de ces racines est liée aux déformations de l'interface qui ne se propagent plus et sont lentement amorties par la viscosité, et dont les mouvements associés sont très faibles (*the surface deformation root*). L'autre, à dominante rotationnelle, correspond à un amortissement visqueux rapide de perturbations de petite amplitude (*the diffusive root*). La coupure correspond à une longueur d'onde de coupure λ_0 dépendante de la viscosité du liquide. À faible viscosité, comme pour l'eau, la limite inférieure λ_0 se trouve plutôt du côté des ondes capillaires, et elle se décale du côté gravitaire pour les

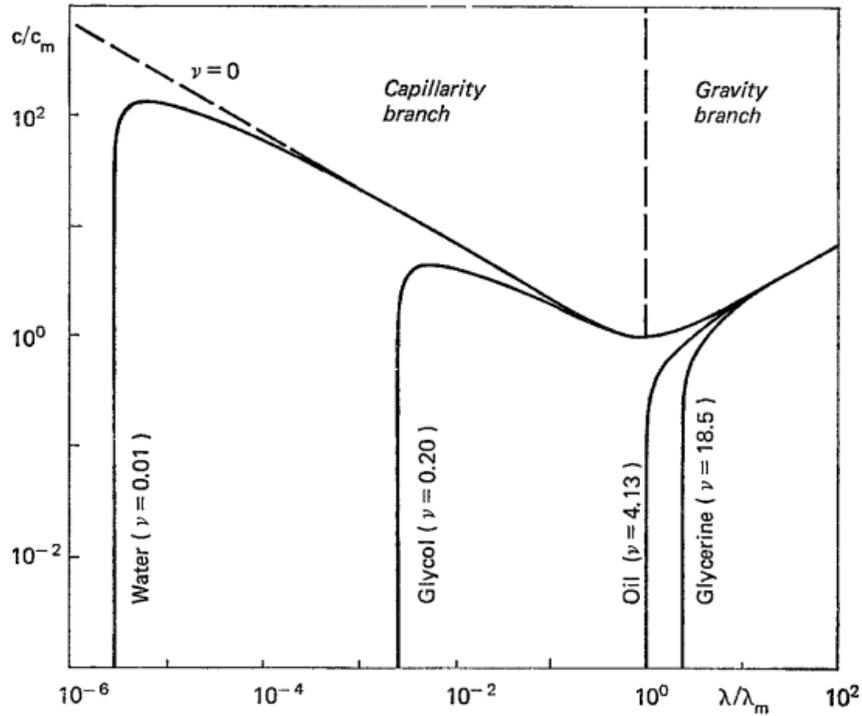


FIGURE 1.3 – Vitesse de phase des ondes gravito-capillaires en profondeur infinie déterminée par *LeBlond et Mainardi (1987)*, pour différents liquides visqueux.

liquide de forte viscosité, comme la glycérine. Les auteurs font notamment remarquer que la valeur $1.31 \sim 1$ correspond au moment il y a équivalence entre échelle de diffusion visqueuse et longueur d'onde. L'évolution de la vitesse de phase c avec la longueur d'onde λ est reproduite sur la figure 1.3, pour quatre liquides de différentes viscosités, mais de densités similaires à celle de l'eau. Les grandeurs ont été adimensionnées comme sur la courbe 1.1. Les quatre courbes convergent vers celle de la célérité en profondeur infinie pour les grandes longueurs d'onde. La viscosité affecte très peu leur célérité loin de la coupure, mais elle joue un rôle essentiel dans la dissipation car l'amortissement est proportionnel à $2\nu k^2$.³

En prenant en compte l'effet de la profondeur H , en plus de la coupure aux petites longueurs d'onde s'ajoute un autre obstacle à la propagation du côté des grandes longueurs d'onde. Pour H fixée, les perturbations de grande longueur d'onde étant également celles de basse fréquence, elles ressentent la dissipation due aux frottements sur le fond d'autant plus que la longueur de diffusion visqueuse $D = (\nu/\sigma)^{1/2}$ est grande et qu'elle s'approche de H . Au-delà de $D \gtrsim H$, les ondes sont complètement dissipées et il n'y a plus de propagation possible. La courbe $c(\lambda)$ est affectée comme précédemment pour les grandes longueurs d'onde. En profondeur finie, la zone de propagation est donc encadrée par une longueur d'onde minimale λ_0 fixée par les propriétés du liquide, et une longueur d'onde maximale λ_1 fixée par la profondeur H . Il existe donc deux mécanismes qui peuvent réduire la taille de cette zone et s'opposer à la propagation : la diminution de la profondeur ou l'augmentation de la viscosité du liquide. Pour chaque liquide, il existe ainsi une profondeur minimale $H \sim \lambda_0$ en-deçà de laquelle aucune onde ne peut se propager.

3. Relation (27) : la fréquence est donnée par $\omega = \pm\sigma - 2i\nu k^2$, pour des grandeurs en $\exp i(kx - \omega t)$.

1.2 Vagues de vent

Les vagues de vent sont un type particulier d'ondes de surface dont le moteur est un écoulement turbulent dans l'air, qui impose un cisaillement et des fluctuations de pression et de cisaillement sur l'interface entre l'air et le liquide. L'exemple le plus évident de ce phénomène est celui des vagues à la surface des océans ou des lacs, générées par le vent atmosphérique. On rencontre également un phénomène de même nature dans certains processus industriels, comme par exemple l'atomisation d'une nappe de liquide par un gaz turbulent, notamment lors de l'injection de carburant dans les moteurs-fusée. Les vagues de vent ont fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques et expérimentales visant à comprendre les mécanismes de transfert de l'énergie du vent vers les déformations de l'interface, et la manière dont celles-ci s'organisent pour former des ondes.

Nous avons vu que le mécanisme de Kelvin-Helmholtz peut être une explication à la génération d'ondes. Au milieu des années 1950, *Ursell (1956)* fit une revue de l'état de l'art dans laquelle il résuma l'avancement des connaissances théoriques sur la génération des vagues de vent en ces termes : « nothing very satisfying » *Kinsman (1965)*). Deux modèles ont été développés en parallèle à la fin de la même décennie. D'un côté celui de *Phillips (1957)* décrit la manière dont les fluctuations de pression dues à la turbulence peuvent exciter certains modes d'onde de surface. Il établit alors une condition de résonance qui prédit les fréquences qui seront sélectionnées et amplifiées par le vent. D'un autre côté, celui de *Miles (1957)* se concentre sur les conséquences du cisaillement imposé par le vent. Il établit alors une condition sur le profil de vitesse moyen du vent permettant d'atteindre un taux de transfert d'énergie positif du vent vers les ondes de surface. Ces deux modèles ont par la suite été améliorés, par les mêmes auteurs puis par d'autres. Ils constituent encore aujourd'hui le socle de la théorie de génération des vagues par un vent turbulent *Mitsuyasu (2015)*.

Nous présentons dans un premier temps les modèles de Phillips et de Miles. Puis, dans un second temps, nous passons en revue quelques études expérimentales, menées sur le système air/eau et sur des liquides plus visqueux.

1.2.1 Éléments théoriques

Le modèle de Phillips

Le modèle proposé par *Phillips (1957)* est un modèle de résonance. La turbulence dans l'air génère des fluctuations de pression sur l'interface. Les fluctuations de pression, résultant de la turbulence dans l'air, peuvent entrer en résonance avec des déformations de l'interface. Ces dernières vont être amplifiées et donner lieu à des vagues de vent.

Soit $k = |\mathbf{k}|$ le nombre d'onde, qui rend compte de l'échelle de longueur d'une taille de tourbillon. On introduit une durée $T(\mathbf{k})$ d'existence des tourbillons correspondant à l'échelle de longueur k . Cette durée permet de faire une distinction d'échelles de temps. Pour les temps courts tels que $t \ll T(\mathbf{k})$, on peut considérer que la turbulence est simplement advectée en bloc par l'écoulement moyen dans l'air. Ainsi, le champ de pression interfaciale, lié à la turbulence de l'air, est de même transporté sans être altéré. En revanche, sur des échelles de temps plus grandes, telles que $t > T(\mathbf{k})$, on est obligé de considérer les fluctuations temporelles de la turbulence dues aux interactions entre les tourbillons, et qui altèrent le champ de pression à l'interface au cours du temps.

Dans un premier temps, intéressons-nous aux échelles de temps courtes, telles que $t \ll T(\mathbf{k})$. Cela nous permet d'étudier les premiers instants de la génération des ondes. À partir d'une analyse spectrale de l'élévation de l'interface $\zeta(\mathbf{x}, t)$, on peut montrer que le spectre en énergie des ondes atteint son maximum vers les plus petites longueurs d'onde. Ainsi, les composantes du spectre de pression les plus efficaces pour exciter des ondes de surface sont les plus grands nombres d'onde. Ceux-ci correspondent également aux plus petits tourbillons qui dissipent l'énergie. L'étude du spectre d'énergie $\phi(\mathbf{k}, t)$ du champ d'onde $\zeta(\mathbf{x}, t)$ fait apparaître la condition de résonance

$$U(k) \cos(\alpha) = c(k) \equiv \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

Cette relation sélectionne les modes k dont la vitesse de propagation $c(k)$ est égale à la vitesse moyenne du vent U projetée dans leur direction de propagation α . On note cette vitesse $U(k)$ pour signifier qu'elle est celle à laquelle un mode k dans le spectre du champ de pression est transporté, ou de manière équivalente la vitesse moyenne du vent à une hauteur $\sim 1/k$ au-dessus de l'interface. Le nombre d'onde k représente à la fois la taille des tourbillons advectés en bloc par le vent moyen et la longueur d'onde des modes de surface sélectionnés par ce mécanisme de résonance.

Compte tenu de l'allure générale de $c(k)$ (voir la figure 1.4), il existe une direction critique α_c qui sépare le domaine spatial en deux. Pour les directions telles que $\alpha < \alpha_c$, c'est-à-dire "proches" de la direction du vent, le mécanisme de résonance peut exciter deux longueurs d'onde distinctes. L'une dans le domaine capillaire si la longueur capillaire est supérieure à la taille des plus petits tourbillons, et l'autre dans le domaine des ondes de gravité. Pour les autres directions telles que $\alpha > \alpha_c$, il n'est pas possible d'exciter d'onde via ce mécanisme de résonance. En particulier, pour la direction critique α_c , les deux modes mentionnés précédemment coalescent en un seul. De plus on peut montrer que c'est dans cette direction que se trouvent les modes les plus amplifiés. La valeur de l'angle critique α augmente avec l'intensité du vent moyen U , et peut atteindre quasiment 90° pour des vents forts. Cependant cette analyse se limitant aux tout premiers instants, cette situation ne peut être observable que de manière passagère.

On peut noter que le point limite où $\alpha = \alpha_c$ se trouve au voisinage de c_m , le minimum de $c(k)$. En effet si $U = c_m$, un seul mode est excité et est orienté dans la direction du vent ($\cos \alpha = 1$). Cela donne une estimation de la vitesse minimale de vent nécessaire pour générer des ondes. La vitesse c_m est donc une vitesse minimale en-deçà de laquelle il n'est pas possible d'exciter la moindre vaguelette. Notons cependant qu'il ne s'agit que d'une condition nécessaire, et non-suffisante.

Aux échelles de temps plus grandes, telles que $t \gg T(\mathbf{k})$, il y a croissance et développement des ondes générées par la résonance. On peut montrer que ces ondes continuent à être amplifiées, et que leur énergie croît linéairement, jusqu'à ce que les effets non-linéaires ne soient plus négligeables.

Le modèle de Phillips fournit un cadre satisfaisant pour expliquer comment l'interface peut se déformer en partant d'un état initialement plat. Il s'applique ainsi aux tous premiers stades de génération de vagues de vent. Pour cette raison, il est très difficile de faire l'observation du mécanisme décrit par Phillips en conditions réelles. Des auteurs ont rapporté l'avoir observé et quantifié dans des expériences en laboratoire (*Geva et Shemer (2022)*). Une autre limite de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte les effets d'interaction entre l'air et le champ de vagues. Enfin, il a été noté que les fluctuations de pression dans une atmosphère turbulente sont bien plus faibles qu'initialement supposées par Phillips (*Stewart (1974)*). Ainsi le doute subsiste sur la capacité du mécanisme de Phillips à expliquer la croissance des vagues.

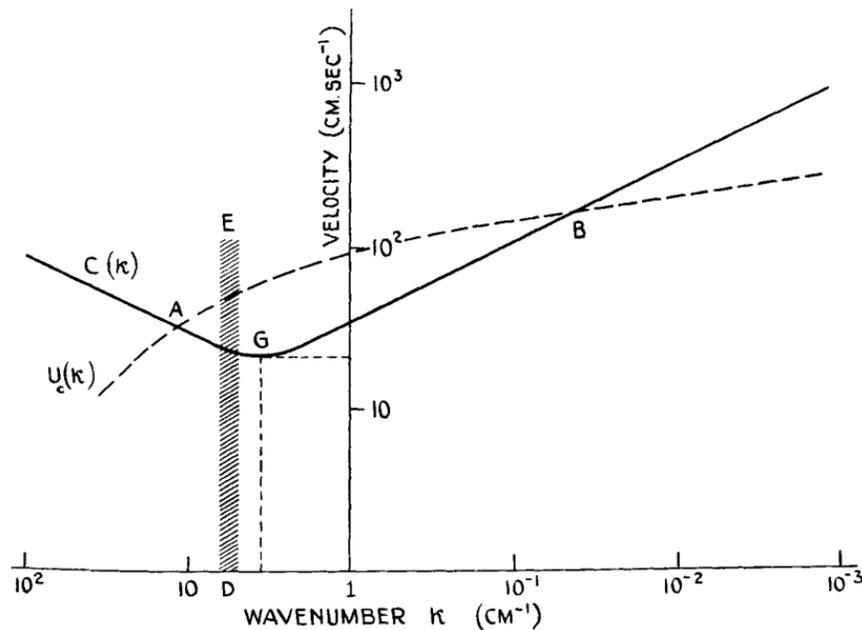


FIGURE 1.4 – Nombres d’onde sélectionnés par la résonance décrite dans le modèle de Phillips (figure reprise de *Phillips (1957)*). Les points A et B correspondent aux deux modes capillaire et gravitaire excités dans la direction du vent moyen ($\alpha = 0$). A mesure que α augmente, son cosinus diminue et la courbe de vitesse $U_c(k)$ est décalée vers le bas, jusqu’à devenir tangente à la courbe $c(k)$ pour $\alpha = \alpha_c$. Au-delà les deux courbes sont dissociées et il n’y a plus de mode excitable par la résonance.

Le modèle de Miles

Miles (1957) propose un autre mécanisme basé sur une instabilité de cisaillement. Il rend compte du taux de transfert d’énergie de l’écoulement d’air vers les ondes de surface. Miles formule son modèle à partir d’une approche perturbative sur une configuration bidimensionnelle. Il suppose l’air et l’eau non visqueux, en écoulement incompressible, et l’écoulement dans l’eau irrotationnel. Il s’intéresse à la situation suivante : soit un écoulement turbulent dans l’air, avec un profil de vitesse moyenne $U(z)\mathbf{e}_x$, correspondant à un écoulement parallèle, et une perturbation infinitésimale de l’interface notée $\zeta(x, t)$. Les champs associés à cette perturbation, comme la vitesse et la pression dynamique, sont également supposés infinitésimaux de façon à pouvoir linéariser les conditions aux limites à l’interface. Notons que les fluctuations turbulentes sont négligées par Miles par rapport aux perturbations liées aux ondes, et la turbulence dans l’air n’est prise en compte qu’au travers du profil de vitesse moyen $U(z)$. La suite du raisonnement mène à l’équation de Rayleigh. Miles résout alors cette équation pour un profil de vitesse logarithmique, et établit une expression pour le taux de transfert de l’énergie contenue dans l’écoulement d’air vers la perturbation. Il parvient à montrer que ce taux de transfert peut être positif s’il existe une altitude critique z_c au-dessus de l’interface telle que $U(z_c) = c$. Autrement dit s’il existe une altitude à laquelle la vitesse du vent est égale à la vitesse de phase de la perturbation. Miles montre que la croissance de la perturbation est alors exponentielle, à la différence du modèle de Phillips qui prédit une croissance linéaire. Le modèle de Miles nécessite que deux conditions essentielles soient réunies : tout d’abord la couche critique doit se situer près de l’interface, à une altitude qui soit une petite fraction de la longueur d’onde de la perturbation ; ensuite le profil moyen $U(z)$

doit être concave au moins au niveau de la couche critique $z = z_c$, autrement dit $U''(z_c) < 0$.

Si *Miles (1957)* présente une approche essentiellement mathématique, *Lighthill (1962)* propose une explication physique de ce modèle. On peut la résumer ainsi : soit une perturbation sinusoidale infinitésimale de l'interface qui se propage à la vitesse c . Sa présence induit des perturbations dans l'air, avec des maxima de pression au niveau des creux et des minima au niveau des crêtes. Cette distribution de pression fait que l'air qui franchit une crête rencontre ensuite une surpression, puis est redirigé vers la crête. Cela crée alors une force qui s'oppose au gradient de pression. Lighthill calcule le travail moyen de cette force en prenant en compte les déplacements de l'interface, et montre qu'il est nul partout sauf au niveau de la couche critique. Il y a donc transfert d'énergie (et de quantité de mouvement) de l'écoulement d'air vers le liquide. Les perturbations dans l'écoulement d'air, induites par le champ de vagues, diminuent de manière exponentielle avec la hauteur. Il est donc nécessaire que l'épaisseur de la couche critique ne soit qu'une petite fraction de la longueur d'onde. A noter que Miles apporte une correction à son modèle afin de prendre en compte la direction α de propagation des ondes, en remplaçant simplement la condition $U(z_c) = c$ par $U(z_c) \cos \alpha = c$, ce qui n'est pas sans rappeler la condition de résonance du modèle de Phillips (1.17).

L'article séminal *Miles (1957)* présente les grandes lignes du modèle. L'auteur a ensuite développé et raffiné son modèle à travers plusieurs articles successifs. Dans *Miles (1959a)* et *Miles (1962)*, il intègre les effets visqueux, ce qui l'amène à considérer l'équation d'Orr-Sommerfeld. Dans ce dernier article, il montre notamment la possibilité d'une résonance entre deux types d'onde : d'une part les vagues, des ondes à la surface libre perturbées par le cisaillement de l'air ; d'autre part, des ondes de Tollmien-Schlichting qui se développent dans l'air, et peuvent être perturbées par les déformations de la surface. *Miles (1967)* enrichit encore le modèle initial en y ajoutant l'impact des perturbations orbitales sur les contraintes de Reynolds. Pour cela, l'auteur procède à une opération de moyenne dans la direction transverse y , afin d'éliminer les corrélations entre perturbations orbitales et turbulentes. Il propose une modélisation préliminaire des contraintes turbulentes, qu'il reprend plus tard dans *Miles (1993)* et *Miles (1996)*. Il se repose sur l'hypothèse de Boussinesq, et introduit un champ de viscosité turbulente, bâti sur un modèle de longueur de mélange, laquelle est supposée se conserver le long des lignes de courant. Il en déduit alors une version modifiée de l'équation de Rayleigh, et il obtient une prédiction du taux de croissance en accord avec les observations, dès lors que $c/u_* > 1$.

Enfin, dans *Miles (1960)*, Miles propose de combiner son modèle initial à celui de Phillips. Il montre que les deux mécanismes sont compatibles, et proposent une vision complémentaire. Selon cette vision, le mécanisme de Phillips est pertinent pour expliquer la génération des vagues à partir d'une interface plane, tandis que celui de Miles est plus approprié pour expliquer leur croissance ultérieure.

1.2.2 Études expérimentales sur les vagues de vent

Dans l'optique d'étudier les mécanismes de génération des vagues par le vent, nous nous concentrons sur les études en laboratoire et laissons de côté les études de terrain. Nous présentons ci-dessous une revue de travaux expérimentaux sur le système air-eau, puis quelques études qui se sont intéressées à l'influence de la viscosité du liquide.

Le système air-eau

Le système air-eau a été étudié de manière extensive, pour son application aux vagues océaniques et pour sa simplicité de mise en oeuvre par rapport à d'autres types de liquide. Le phénomène des vagues de vent est

riche et complexe, et en laboratoire on peut l'aborder de plusieurs manières. On peut s'intéresser à différents régimes d'interaction vague/vent : la phase de croissance, la propagation des ondes, les interactions vague/vent et vague/courant, ou encore les interactions non-linéaires des vagues entre elles. On peut également séparer les études en fonction de la méthode employée pour générer des vagues. Par exemple, si l'on s'intéresse à leur seuil d'apparition, on peut étudier des vagues générées spontanément par le vent. Ces ondes contiennent un spectre large, et cela peut donner lieu à des interactions non-linéaires. Dans le régime gravito-capillaire, lorsque les ondes sont en phase de croissance, on peut observer des ondes capillaires courir à l'amont des crêtes d'ondes gravitaires. Afin de s'affranchir de ces phénomènes complexes, on peut également générer des ondes par batteur, et étudier leur interaction avec le vent. Les ondes générées ainsi sont essentiellement sinusoïdales. Cette méthode permet d'étudier des ondes monochromatiques de fréquence donnée, et de réduire le champ d'étude à une partie du spectre.

Kunishi (1963) rapporte des résultats expérimentaux de génération de vagues de vent en canal. Il s'intéresse au développement spatial de ces ondes, et identifie trois régimes en fonction de la vitesse du vent. A basse vitesse, il décrit la présence de légers tremblements de la surface (*initial tremors*) qui ne sont pas à proprement parler des ondes. Puis lorsque le vent dépasse un seuil critique, des ondelettes commencent à apparaître (*initial wavelets*). C'est la phase de croissance des vagues. Il observe la présence simultanée de ces deux régimes dans le canal, la région d'apparition des ondelettes étant plutôt située à l'aval. Enfin apparaît un troisième régime de vagues matures, proches d'un état de mer (*sea waves*), correspondant à un régime d'ondes saturées et d'interactions non-linéaires. *Kawai (1979)* donne une description temporelle des vagues lorsqu'un vent commence soudainement à souffler sur une interface initialement plane. Au début, un écoulement cisailé se met en place dans les couches d'eau superficielles. Puis les premières ondelettes apparaissent quelques secondes plus tard. Elles sont d'abord régulières et à crête longue dans la direction normale au vent, puis suivies par des vagues irrégulières, et de crête plus petite.

Afin d'éprouver les prédictions des modèles de Miles et Phillips, de nombreuses études s'intéressent à la génération des vagues. La génération et la croissance peuvent être étudiées de deux points de vues : la croissance spatiale, en effectuant des mesures à plusieurs fetchs⁴ ; ou la croissance temporelle à fetch fixé. Le mécanisme de Phillips intervient à plus petite amplitude que celui de Miles, c'est pourquoi il est plus difficile à observer et quantifier expérimentalement. La plupart des études sur la génération se concentrent donc essentiellement sur le mécanisme de Miles.⁵ Généralement, l'étude de la croissance spatiale est la plus aisée à mettre en oeuvre. La raison en est que la croissance temporelle peut être rapide et difficile à capturer expérimentalement. À l'inverse, la croissance spatiale peut être étudiée en régime permanent. Il suffit de démarrer un ventilateur, et d'attendre qu'un écoulement d'air turbulent soit établi. Cela permet par exemple d'étudier le seuil d'apparition des vagues en fonction de la vitesse du vent. Les caractéristiques des vagues ainsi générées sont ensuite mesurées à différents fetchs le long du canal. Des sondes ponctuelles⁶ peuvent être utilisées pour mesurer l'évolution temporelle de l'élévation de surface. Pour des vagues générées spontanément

4. Distance sur laquelle le vent souffle, depuis l'origine de la surface libre, jusqu'à la position locale.

5. « Phillips' mechanism has been left without any definite evidence to examine its efficacy » (*Kawai (1979)*).

6. Il en existe de différents types, principalement résistives ou capacitives. Le principe des sondes résistives est d'immerger partiellement un système conducteur dans l'eau. On fait alors passer un courant électrique à l'intérieur de ce dernier, puis on mesure sa résistance. Cette dernière varie linéairement avec la longueur immergée, et donne directement accès à l'élévation de surface. Une sonde capacitive, en revanche, est constituée d'un matériau conducteur (généralement du cuivre), recouvert d'un matériau diélectrique afin d'isoler le cœur. Ce dernier constitue une première électrode. La sonde est ensuite immergée dans l'eau, qui constitue ainsi la seconde électrode du condensateur. La capacité électrique de ce dernier varie avec l'élévation de la surface (*Kinsman (1965)*).

par le vent, leur longueur d'onde et leur vitesse de phase peuvent être mesurées à partir de séries de clichés (*Hidy et Plate (1966)*).

Pour $U_\infty < 3$ m/s,⁷ *Hidy et Plate (1966)* observent des oscillations, mais pas à proprement parler des vagues. Il s'agit probablement des tremblements initiaux rapportés par Kunishi. Au-delà, des vagues commencent à se former. À basse vitesse de vent, les vagues se forment loin en aval. Leur surface est plutôt lisse à l'amont de la crête, et ridée à l'aval. À mesure que la vitesse de l'air augmente, la zone de génération des vagues se décale de plus en plus vers l'amont du canal, et la surface à l'amont des crêtes devient de moins en moins lisse, certainement le signe d'un enrichissement du spectre. Les auteurs notent qu'au cours de leur propagation, la vitesse et la longueur d'onde des vagues augmentent. Cela s'accompagne d'un décalage du mode fondamental vers les basses fréquences, qu'ils quantifient en calculant le spectre en énergie des ondes et son évolution avec le fetch. Ce phénomène, connu sous le nom de *downward frequency shift*, est une caractéristique des vagues de vent. Les auteurs montrent également que l'énergie de ce fondamental croît de manière exponentielle avec le fetch, ce qui suggère un mécanisme d'instabilité de cisaillement similaire à celui de Miles. Ils notent tout de même que la fréquence initiale des vagues, au tout début de leur génération, est compatible avec la prédiction donnée par le modèle de Phillips.

Sutherland (1968) rapporte des résultats expérimentaux similaires, avec une croissance spatiale de type exponentiel. Il note que les taux de croissance sont en accord avec le modèle de Miles pour des fréquences inférieures à 3.5 Hz. Au-delà, le modèle prédit des taux de croissance bien plus élevés que ceux mesurés.

Gottifredi et Jameson (1970) et *Wilson et al. (1973)* se sont intéressés à la croissance spatiale de vagues générées par un batteur pour des vents faibles (inférieurs à 5.5 m/s pour les premiers, 1.84 m/s pour les seconds). *Gottifredi et Jameson (1970)* notent que lorsque le batteur est à l'arrêt, le seuil de vitesse pour générer des vagues est de 3 m/s (3.5 m/s pour de l'eau normale, 2.5 m/s pour de l'eau distillée). Mentionnons également qu'ils rapportent une vitesse de vent seuil de 6 m/s pour du glycérol 11.6 fois plus visqueux que l'eau. Pour les vagues générées pas un batteur, ils situent le seuil à une vitesse de frottement de $u_* \sim 5$ cm/s. Généralement, celle-ci est calculée à partir du profil de vitesse dans l'air en supposant un profil logarithmique au-dessus d'une paroi rugueuse. Les auteurs étudient des fréquences de 3.85 Hz à 7.62 Hz, soit des longueurs d'onde de 2 à 6 fois la longueur d'onde capillaire λ_c (ondes gravito-capillaires), tandis que *Wilson et al. (1973)* étudient la plage 2.06 Hz à 6.04 Hz, soit de 3 à 22 fois λ_c (ondes gravito-capillaires et purement gravitaires). Ils supposent que la croissance spatiale des vagues suit une loi exponentielle. Ils calculent alors des taux de croissance temporelle β à partir de la conversion suivante :

$$\beta = \frac{c_g}{x_2 - x_1} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \quad (1.18)$$

où c_g est la vitesse de groupe de l'onde, et a_i est l'amplitude mesurée à la position longitudinale x_i . Le logarithme du rapport des amplitudes est donc le taux de croissance spatiale. Ils trouvent alors des taux de croissance en accord avec le modèle de Miles, bien que plus faibles que prédit par la théorie. *Gottifredi et Jameson (1970)* indiquent que cela reste vrai pour des vitesses de vent inférieures à 3 m/s (5 m/s pour du glycérol).

Comme indiqué ci-dessus, *Hidy et Plate (1966)* rapportent quelques observations de génération temporelle de vagues, notamment une croissance de type exponentiel, et un décalage de la fréquence fondamentale vers

7. U_∞ est la vitesse de l'air à 20 cm au-dessus de la surface.

les basses fréquences. Il a cependant fallu attendre le milieu des années 1970 pour commencer à voir apparaître des résultats quantitatifs de croissance temporelle. *Larson et Wright (1975)* utilisent la technologie de mesure de *microwave backscattering*, basée sur la diffraction d'ondes de Bragg dans des cristaux. L'idée ici est d'éclairer une partie de la surface avec une onde plane électromagnétique de longueur d'onde donnée. Les composantes de vague se propageant à cette même longueur d'onde réfléchissent alors une partie de l'onde électromagnétique (condition de Bragg). Il suffit ensuite de mesurer l'intensité de l'onde ainsi réfléchie pour remonter à l'amplitude des vagues. La précision de la technique de mesure est de l'ordre de $10 \mu\text{m}$. *Larson et Wright (1975)* parviennent à étudier ainsi la croissance temporelle de vagues plus courtes qu'auparavant. En effet, ils rapportent des longueurs d'onde allant de 0.7 à 7 cm, soit 0.4 à 4 fois λ_c . Les vagues sont générées par un vent abrupt sur une surface initialement plane, en utilisant un volet qui permet de générer l'écoulement d'air instantanément. Les vitesses de vent sont également plus élevées qu'auparavant, allant jusqu'à 15 m/s. Ils observent une croissance exponentielle de l'amplitude jusqu'à la saturation, ce qui va dans le sens d'un mécanisme d'instabilité de type Miles. Les auteurs ne rapportent pas de croissance linéaire, mais soulignent que ce comportement a pu être caché par une opération de moyenne (spatiale) des mesures, ou dans la phase transitoire de croissance du vent après ouverture du volet. Ils n'observent pas d'influence particulière du fetch sur les taux de croissance. Ceux-ci semblent suivre une loi de puissance par rapport à u_* , avec un exposant proche de 1.5 (1.484 ± 0.027).

Kawai (1979) mesure la croissance temporelle à l'aide de sondes ponctuelles de type résistif, placées à différents fetchs. Il étudie le train d'onde initial généré lorsqu'un vent abrupt souffle sur une interface initialement plane. Les vitesses de vent étudiées sont comprises entre 4.2 et 8.4 m/s. Il calcule des spectres en fréquence du champ d'ondes à partir de fenêtres temporelles glissantes. C'est l'une des premières études à montrer ainsi l'évolution temporelle du spectre d'énergie du train d'onde initial lors de la phase de génération des vagues. La croissance de l'énergie suit une loi exponentielle, ce qui va dans le sens d'une instabilité de cisaillement comme mécanisme de croissance. Comme *Larson et Wright*, *Kawai* rapporte une augmentation du taux de croissance avec u_* suivant une loi de puissance. Il observe deux stades d'évolution du spectre. Tout d'abord une croissance de l'énergie des ondes, qui présentent un mode fondamental dont la fréquence reste quasiment constante. Puis une seconde phase où l'énergie continue de croître, mais pas de manière monotone. Cela s'accompagne d'une diminution de la fréquence du fondamental, et de l'apparition intermittente d'un second pic. *Kawai* note que le moment où la fréquence du fondamental commence à baisser coïncide avec la transition entre des vagues régulières et irrégulières. Il montre que la fréquence initiale croît avec la vitesse de frottement u_* , mais elle semble indépendante du fetch. L'auteur note que l'apparition des premières vagues est déterminée de façon un peu arbitraire par la précision des outils de mesure, à savoir entre 25 et 50 μm . Cependant, ces amplitudes sont inférieures à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, qu'il évalue à 0.03 cm minimum pour un vent de 7.4 m/s.

Le cisaillement imposé par le vent sur la surface semble jouer un rôle important dans le transfert de quantité de mouvement aux vagues. *Okuda et al. (1977)* rapportent des mesures de ce cisaillement pour des ondes lentes ($u_*/c \sim 1.5$). Ils utilisent pour cela une méthode de distorsion de lignes de bulles d'hydrogène. L'idée est d'émettre des bulles d'hydrogène, ici de 50 μm , dans l'eau. Elles vont alors servir de traceurs. On peut raisonnablement supposer que la vitesse suit un profil linéaire dans la sous-couche visqueuse juste sous l'interface (les auteurs rapportent une épaisseur de l'ordre de 1 mm pour une vitesse de 6.2 m/s). On peut alors relier le déplacement des bulles au cisaillement interfacial. Les auteurs rapportent la distribution de

ce dernier le long d'une vague. Les mesures montrent une croissance du cisaillement à l'amont de la crête, la position du maximum se trouvant peu avant celle-ci. Puis il subit une chute rapide à l'aval de la crête, passe par des valeurs négatives, et retourne à des valeurs positives autour de 30 degrés après la crête. *Kawai (1979)* utilise la même technique pour mesurer l'évolution temporelle du cisaillement interfacial. Il montre que juste après l'ouverture du volet, le cisaillement croît rapidement jusqu'à saturation, puis les premières vagues commencent à être générées quelques instants (plusieurs secondes) après. Il rapporte également que ce cisaillement est bien plus faible pour les ondes initiales que pour des vagues pleinement développées, d'un à deux ordres de grandeur. Des mesures de la vitesse interfaciale U_0 montrent que celle-ci croît continuellement au cours du temps, avec un ralentissement à partir du moment où le cisaillement sature.

Après environ deux décennies d'études visant à caractériser le taux de croissance des vagues de vent par le mécanisme de Miles, *Plant (1982)* propose un point d'étape sur le sujet. À partir d'une collecte de données issues de plusieurs études expérimentales et observationnelles, il propose une expression pour le taux de croissance temporel :

$$\beta = [(0.04 \pm 0.02)\omega \cos \theta] \left(\frac{u_{*,a}}{c} \right)^2 \quad (1.19)$$

où θ est l'angle entre le vent et la direction de propagation des vagues. Cette expression est valable pour une gamme de fréquences comprises entre $g/2\pi U_{10}$ et 20 Hz, où U_{10} est la vitesse du vent à 10 m d'altitude au-dessus de la surface. Ce résultat est compatible avec l'expression donnée par *Miles (1959a)* :

$$\beta = \frac{\rho_a \omega \xi}{\kappa^2 \rho_w} \left(\frac{u_{*,a}}{c} \right)^2 - 4\nu\omega^2/c^2 \quad (1.20)$$

où le second terme représente la dissipation visqueuse, $\kappa = 0.41$, et ξ est un coefficient fonction de u_*/c , qui vaut notamment 3.3 pour $u_*/c > 0.1$. En prenant cette dernière valeur de ξ , cela revient à $\beta = 0.025\omega(u_*/c)^2 - 4\nu\omega^2/c^2$, ce qui est compatible avec la relation donnée par Plant.

Kahma et Donelan (1988) cherchent à caractériser le seuil de vitesse de vent nécessaire pour générer des vagues. Ils effectuent des mesures à fetch fixé à l'aide d'un système optique. Un laser éclaire l'interface, qui va réfléchir la lumière vers un capteur situé au-dessus de la veine. Ce capteur permet de mesurer la pente locale de l'interface, et ils parviennent à mesurer des amplitudes de l'ordre de 10 μm . Ils calculent alors le taux de croissance en supposant un mécanisme de croissance exponentielle, et définissent la vitesse de vent minimale comme étant celle pour laquelle le taux de croissance devient positif. Selon eux, la vitesse de frottement minimale théorique, calculée à partir de l'instabilité de cisaillement, serait de 5 cm/s. Expérimentalement, ils observent une vitesse de frottement minimale de 2 cm/s. Ils notent cependant que si, pour des vents forts, les taux de croissance correspondent à ceux prédits par le mécanisme de Miles, pour des vents faibles, les taux de croissance théoriques sont plus faibles que ceux mesurés. Cela pourrait indiquer que ce n'est pas le mécanisme principal dans ce régime. Ils s'intéressent alors au spectre d'énergie des toutes premières vagues à vent faible. En utilisant un spectre de fluctuations de pression mesuré en laboratoire, ils obtiennent un bon accord entre leurs mesures et la prédiction donnée par Phillips. La croissance des toutes premières vagues à vent faible semblerait donc plutôt suivre un mécanisme de résonance de type Phillips. Puis lorsque l'amplitude des vagues devient suffisamment importante, le mécanisme d'instabilité de cisaillement prendrait le relai.

Plus récemment, le développement de techniques optiques plus sophistiquées a permis d'élargir le spectre

d'étude des vagues de vent.⁸ La méthode diffère d'une équipe à l'autre, mais le principe reste le même. Il s'agit de placer un motif au fond de/sous la cuve d'eau, puis de l'éclairer à l'aide d'une ou plusieurs sources lumineuses. Le motif va alors réfléchir la lumière vers le haut. Au passage de l'interface, la lumière réfléchie est déviée par réfraction. Une caméra placée au-dessus de la veine à la verticale du motif permet de capturer cette lumière. Connaissant le motif en l'absence de vagues, on peut calculer les déplacements de la surface ou sa pente d'après les lois de la réfraction. Cela permet alors de calculer un spectre 2D dans le plan (k, θ) , où θ désigne la direction de l'onde par rapport à la direction du vent. Par exemple, *Jähne et Riemer (1990)* utilisent une boîte remplie de particules en latex au fond du réservoir d'eau. Ils l'illuminent alors dans les deux directions longitudinales et transverses, afin d'obtenir les pentes dans chacune de ces directions. Ils étudient des vagues de longueurs d'onde situées entre 0.2 et 14 fois la longueur d'onde capillaire, pour des vitesses de vent allant jusqu'à 17 m/s, et pour un fetch fixé à 100 m. *Zhang et Cox (1994)* utilisent quant à eux un motif coloré, éclairé dans la direction longitudinale. Les gradients de couleur et d'intensité lumineuse permettent ainsi d'obtenir une information sur les pentes dans les deux directions. Leur étude se concentre sur des vagues courtes à fetch fixe de 24 m, avec des vitesses de vent entre 5 et 10 m/s. À l'aide d'une telle méthode optique, *Caulliez et Collard (1999)* ont réalisé la première étude en laboratoire rapportant l'évolution de vagues tridimensionnelles. Ils utilisent un motif placé au fond de l'eau, qu'ils éclairent à l'aide de deux sources lumineuses de couleurs différentes disposées à 90 degrés. Cela leur permet d'étudier des vagues relativement courtes, pour $2 < \lambda/\lambda_c < 15$, et d'obtenir des spectres d'énergie dans le plan (k, θ) . Ils identifient ainsi plusieurs régimes de vagues en fonction de la vitesse du vent et du fetch.

Influence de la viscosité

Dans les années 1950, Francis a utilisé des huiles de viscosité croissante, allant de 250 fois à environ 58000 fois la viscosité cinématique de l'eau (*Francis (1954b)*, *Francis (1954a)*). Pour l'huile la moins visqueuse, il rapporte un seuil de vitesse de vent de 0.967 m/s nécessaire pour générer des ondes. Passé ce seuil, il observe des trains d'onde de petite longueur d'onde ($1 \text{ cm} \sim 0.6\lambda_c$), présents essentiellement à l'aval du canal, et de très faible amplitude. Un phénomène remarquable se passe alors : l'une des crêtes peut soudain devenir instable et croître rapidement en amplitude. Elle se détache alors du reste du train d'onde, et se propage rapidement vers l'aval, poussée par le vent. Selon Francis, il ne s'agit pas de l'onde solitaire classique,⁹ en raison de la forme et de l'asymétrie de cette onde. Il s'agit plutôt d'un soliton visqueux, résultat d'un équilibre entre le vent et la dissipation visqueuse (*Aulnette et al. (2019)*). Francis extrapole ses mesures de vitesse dans l'air jusqu'au niveau des crêtes (soit 0.05 cm au-dessus de la position moyenne de l'interface). Pour cela il suppose un profil de vitesse logarithmique, auquel il associe une mesure du cisaillement interfacial. Il trouve une vitesse de l'ordre de 0.5 à 0.56 m/s, ce qui est en bon accord avec la prédiction de 0.516 m/s donnée par le mécanisme de Kelvin-Helmholtz. Le nombre de solitons visqueux présents simultanément dans le canal semble aléatoire, ainsi que la distance entre deux crêtes successives. Lorsque la vitesse du vent augmente, la zone de génération se déplace vers l'amont du canal. La quantité de solitons visqueux augmente, jusqu'à former des trains d'onde similaires à ceux que l'on peut observer sur le système air/eau. Notons que si la densité reste proche de celle de l'eau (875 kg/m^3), la tension de surface est plus faible et vaut 34 mN/m, ce qui donne une longueur d'onde capillaire $\lambda_c = 1.2 \text{ cm} = 0.73\lambda_{c,eau}$. Cette description reste sensiblement la même

8. *Gomit (2013)* propose une revue détaillée des différentes techniques de mesure optique d'une surface libre.

9. Observée par Scott Russell, et solution de l'équation de Korteweg-de-Vries obtenue à partir de l'équation d'Euler pour un liquide non-visqueux (*Charru (2012)*).

pour des liquides de viscosité plus importante. Même l'accord avec la prédiction donnée par le mécanisme de Kelvin-Helmholtz semble toujours tenir, alors que ce dernier suppose un liquide non-visqueux.

Depuis, peu d'études expérimentales se sont intéressées à l'influence de la viscosité du liquide sur la génération et la propagation des vagues de vent, jusqu'à celles récemment menées au FAST. Cette équipe a utilisé une technique optique¹⁰ permettant de mesurer des déformations de l'interface avec une précision verticale de l'ordre du μm .

Paquier et al. (2015) ont étudié expérimentalement la génération spatiale de vagues de vent sur un mélange d'eau et de glycérol. La densité du liquide est de l'ordre de celle de l'eau ($1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$), la viscosité cinématique 30 fois plus élevée que celle de l'eau, et la tension de surface de 60 mN/m, soit une longueur d'onde capillaire $\lambda_c = 1.42 \text{ cm} = 0.83\lambda_{c,eau}$. Les auteurs rapportent des profils moyens de vitesse dans les deux phases. Dans l'air, à l'aide de fil chaud, ils obtiennent des profils logarithmiques à différents fetchs, d'où ils tirent la vitesse de frottement le long du canal. Leurs expériences correspondent ainsi à un nombre de Reynolds de frottement basé sur la demi-hauteur d'air entre 160 et 1000. Dans le liquide, ils effectuent des mesures par vélocimétrie par image de particules (PIV). Ils montrent que la vitesse moyenne suit un profil de Poiseuille avec un écoulement de retour dans la partie inférieure. Cette étude a permis de mettre en évidence deux régimes de vagues en fonction de l'intensité du vent. À basse vitesse, la surface présente des déformations tridimensionnelles de très faible amplitude, jusqu'à environ 10 μm . Elles sont peu organisées, et essentiellement allongées suivant la direction du vent. Il s'agit du régime des ridules (*wrinkles*). Lorsque la vitesse du vent franchit un seuil, des vagues régulières commencent à se former. Il s'agit du régime classique, dans lequel les vagues sont essentiellement bidimensionnelles et présentent des crêtes faisant face au vent. Pour des vitesses proches de ce seuil, on observe la superposition de ces deux régimes.

Paquier et al. (2016) étudient l'influence de la viscosité du liquide sur l'amplitude des déformations, et le seuil de transition entre ces deux régimes. Les auteurs utilisent des liquides de viscosité variant sur presque trois ordres de grandeur, tout en conservant une densité proche de celle de l'eau. Dans le régime des ridules, l'amplitude saturée semble croître suivant une loi de puissance en $u_*^{3/2}$ pour toutes les viscosités testées (figure 1.5). En ce qui concerne le seuil de transition entre les deux régimes, ils montrent que la vitesse de frottement critique $u_{*,c}$ augmente avec la viscosité comme $\nu^{0.2}$. Au-delà de ce seuil, des ondes régulières sont générées, et leur amplitude croît spatialement de manière exponentielle. L'amplitude saturée de ces ondes croît également avec u_* suivant une loi de puissance, avec un exposant plus élevé que pour les ridules et dépendant de la viscosité.

Ils ont également mis en lumière un troisième régime pour des liquides de très haute viscosité, au-delà de 100 à 200 fois la viscosité cinématique de l'eau. Il vient remplacer le régime régulier lorsque la vitesse du vent dépasse un seuil critique. Il s'agit d'ondes solitaires poussées par le vent, similaires à celles observées par Francis. Ces ondes présentent un creux à l'amont, suivi d'une pente abrupte vers la crête. La pente sur la face en aval est beaucoup plus douce. Une vue de profil d'une série de solitons est visible sur la figure 1.6.

Ce régime est le sujet d'étude central de *Aulnette et al. (2019)*. Ces auteurs s'intéressent à la génération de solitons visqueux par le vent sur un liquide de viscosité cinématique 1000 fois supérieure à celle de l'eau. Lorsque la vitesse du vent est suffisamment élevée, on observe la génération de petits trains d'onde instables dont l'amplitude augmente au cours de la propagation (avec un taux de croissance qui augmente avec la vitesse du vent). Puis une des crêtes est fortement amplifiée, un soliton de grande amplitude apparaît, et il

10. Technique de *Free-Surface Synthetic Schlieren* présentée par *Moisy et al. (2009)*. Ici le motif est un écran constitué de points noirs et blancs aléatoires.

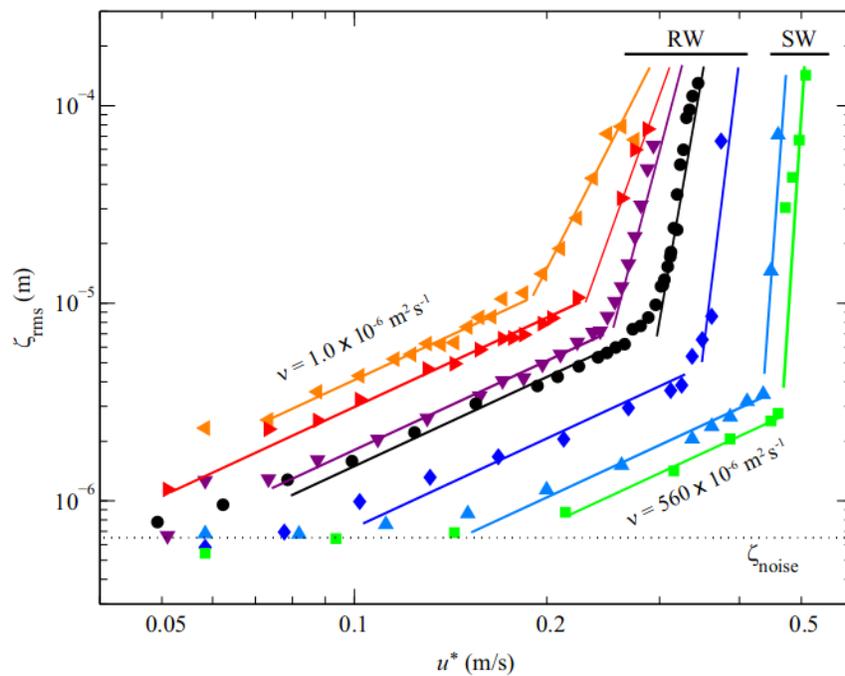


FIGURE 1.5 – Amplitude saturée des déformations de surface en fonction de la vitesse de frottement, pour des liquides de viscosité variable (couleurs). *RW* désigne les ondes régulières, et *SW* les solitons visqueux. Tirée de *Paquier et al. (2016)*.

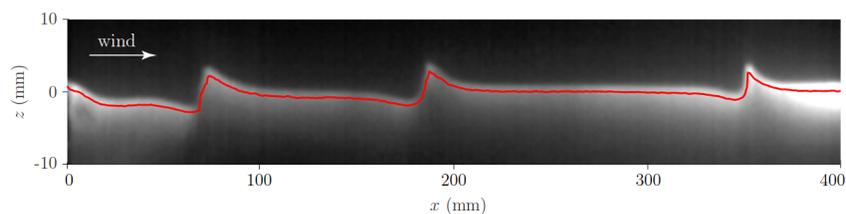


FIGURE 1.6 – Vue de profil des solitons visqueux. Tirée de *Aulnette et al. (2019)*.

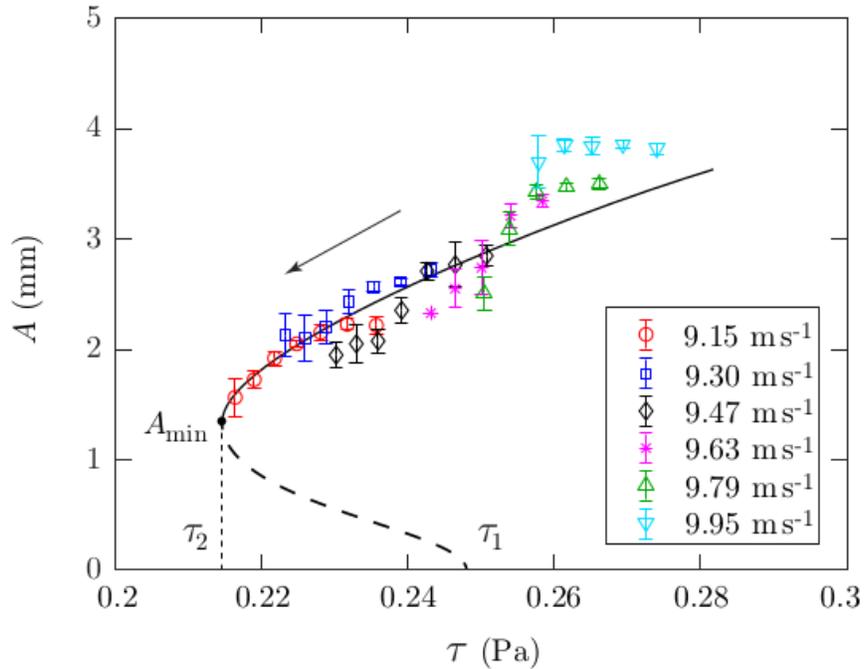


FIGURE 1.7 – Amplitude des solitons visqueux en fonction du cisaillement local pour différentes vitesses de vent. Tirée de *Aulnette et al. (2019)*.

est poussé par le vent vers l'aval. Le mécanisme de génération proposé se base sur un scénario d'instabilité faisant intervenir une bifurcation sous-critique. Lorsque le cisaillement imposé par le vent sur l'interface dépasse un seuil τ_1 , un soliton est généré. Puis au cours de sa propagation, le cisaillement local diminue, et lorsqu'il passe en-dessous d'un second seuil $\tau_2 < \tau_1$, le soliton s'évanouit. *Aulnette et al. (2019)* parviennent à reproduire la branche stable de cette bifurcation (voir la figure 1.7) en mesurant l'évolution de l'amplitude des solitons pour plusieurs vitesses de vent. Le cisaillement a été évalué en utilisant la loi (1.21) pour une couche limite turbulente développée, où U_a est la vitesse moyenne du vent, ρ_a et ν_a sont la densité et la viscosité cinématique de l'air, $x + x_0$ est la distance totale sur laquelle la couche limite se développe¹¹, et $C = 0.029$ un coefficient sans dimension.

$$\frac{\tau(x)}{\rho_a U_a^2} = C \left(\frac{U_a(x + x_0)}{\nu_a} \right)^{-0.2} \quad (1.21)$$

1.3 Turbulence au-dessus d'une paroi ondulée indéformable

Les défis posés par la compréhension de la mécanique des vagues de vent tiennent à l'interaction entre le vent, un écoulement complexe en raison de la turbulence, et les vagues qui sont le résultat des déformations de l'interface. Afin de mieux comprendre l'action du vent sur l'interface, il est intéressant de faire un pas en arrière et d'aborder la question de la structure de la turbulence sur paroi ondulée. Nous présentons ici

11. x_0 représente la distance entre la sortie de la soufflerie et le début du réservoir de liquide, et x le fetch.

quelques résultats théoriques et observations expérimentales sur paroi ondulée, sans et avec décollement.

1.3.1 Éléments théoriques

Dans la foulée du premier article de Miles sur la génération des vagues de vent, *Benjamin (1959)* a mené une étude théorique de l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée, dans le but de calculer les contraintes pariétales (pression et cisaillement). Dans cette étude Benjamin s'est intéressé à un écoulement à nombre de Reynolds grand mais fini (les effets visqueux sont pris en compte), au-dessus d'une paroi qui peut être rigide ou non, fixe ou mobile, mais qui reste sinusoïdale avec une amplitude a et une nombre d'onde k , et de faible cambrure ($ak \ll 1$). L'écoulement est considéré essentiellement parallèle, de sorte que les effets de la paroi ondulée sur l'écoulement sont périodiques, et ceux dûs à des fluctuations transitoires sont négligés. Benjamin considère ainsi des cas sans décollement. Bien que cet ensemble d'hypothèses ne s'applique strictement qu'à des écoulements laminaires, on peut supposer que ces résultats restent valables pour des écoulements turbulents sans décollement dès lors que l'on considère l'écoulement moyen. Cette façon de penser est bien entendu fortement inspirée de l'approche développée par *Miles (1957)*, comme le souligne Benjamin lui-même (« the analysis amplifies the work of Miles (1957) »). L'auteur se place dans le référentiel de l'onde, et suppose le problème bidimensionnel. Il procède alors à un changement de système de coordonnées orthogonales, définies par

$$\xi = x - ia e^{-k(z-ix)} \quad (1.22)$$

$$\eta = z - a e^{-k(z-ix)} \quad (1.23)$$

La paroi est ainsi simplement repérée par $\eta = 0$. Benjamin introduit ensuite une fonction de courant qui sera solution de l'équation d'Orr-Sommerfeld. Il écrit alors une décomposition harmonique des contraintes de pression et de cisaillement à la paroi, ce qui donne pour ce dernier :

$$\tau_s = \tau_0 + T_s a e^{ik\xi} \quad (1.24)$$

où $\tau_0 = U'(0)/Re$ est le cisaillement pariétal généré par l'écoulement non-perturbé. Quant à la pression, elle s'écrit :

$$p = P(\eta) a e^{ik\xi} \quad (1.25)$$

et la pression pariétale est donc donnée par $P_s = P(0)$.

Benjamin étudie alors trois cas : tout d'abord celui d'un profil de vitesse linéaire, pour lequel il peut résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld ; puis le cas d'un profil de vitesse de couche limite laminaire, composé d'un quart de sinusoïde près de la paroi, puis d'un profil plat au-delà ; et enfin celui d'un profil de couche limite général. Pour ce dernier, il calcule une solution approchée de l'équation de Rayleigh sans choisir un profil de vitesse particulier. Il montre alors que l'amplitude de la pression pariétale est approximativement égale à :

$$P_s = -k^2 (1 - 1.288 e^{i\pi/6} \Delta) \int_0^\infty U^2 e^{-k\eta} d\eta \quad (1.26)$$

où $\Delta = km[U_\infty/U'(0)]^2$. Cette relation est quasiment identique à celle qu'il obtient pour le profil de couche limite laminaire, en remplaçant simplement l'intégrale par 1. Elle est cependant d'un intérêt pratique limité,

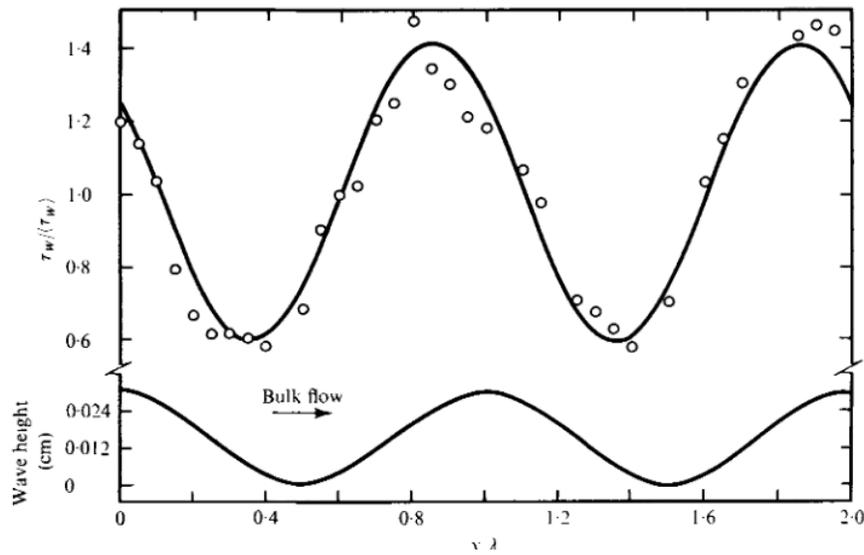


FIGURE 1.8 – Distribution du cisaillement pariétal au-dessus d’une paroi ondulée en l’absence de décollement sur une longueur d’onde, tirée de *Zilker et al. (1977)*. Ici $2a/\lambda = 0.0125$, $Re = 9680$, $k^+ = 0.00584$ et $a^+ = 6.7$. Les points sont des données expérimentales, la courbe en trait plein représente le premier harmonique.

si on ne connaît pas le profil de vitesse $U(\eta)$.

Quant à la partie ondulatoire du cisaillement pariétal, Benjamin établit la relation

$$T_s = 1.372e^{i\pi/6}U_\infty^2 k\alpha \quad (1.27)$$

où $\alpha = k^{2/3}[ReU'(0)]^{-1/3}$, résultat qui est très similaire à celui obtenu pour le profil de couche limite laminaire, et plus facile à évaluer expérimentalement ou numériquement.

1.3.2 Études expérimentales et numériques

Lors d’un écoulement turbulent au-dessus d’une paroi ondulée rigide, le fluide subit une expansion (dans les creux) suivie d’une contraction (au-dessus des crêtes). En accord avec la relation de Bernoulli, l’expérience montre la présence d’une surpression au niveau des creux. Cela génère une modulation du gradient de pression local. Cette modulation dépend de l’intensité de l’écoulement et de la cambrure de la paroi. Si elle devient très intense, le gradient de pression peut changer de signe localement et devenir adverse. Dans ce cas l’écoulement subit un décollement et un recollement entre deux crêtes successives, et on observe une zone de recirculation dans le creux.

Des expériences en laboratoire ont été menées à partir des années 1970, et ont été poursuivies durant une vingtaine d’années par l’équipe d’Hanratty à l’Université de l’Illinois. La configuration commune à toutes ces études est un canal fermé, dans lequel l’écoulement est confiné entre une plaque rigide ondulée et une plaque plane. Plusieurs plaques ondulées sont utilisées, toutes de même longueur et constituées de 10 longueurs d’onde d’amplitude a uniforme. Seule l’amplitude varie d’une plaque à l’autre. Les auteurs peuvent ainsi faire varier la cambrure des ondes a/λ et le nombre de Reynolds, défini à partir de la vitesse débitante U_b et de la demi-hauteur de canal h .

Selon des mesures de *Zilker et al. (1977)* pour une cambrure de $2a/\lambda = 0.0125$ et un nombre de Reynolds $Re = 9680$, l'écoulement est non-décollé, et le cisaillement pariétal suit une distribution sinusoïdale reproduite sur la figure 1.8. Dans cet article, les auteurs cherchent à tester pour quelles valeurs de cambrure et de nombre de Reynolds cela reste vrai. Ils se concentrent sur des mesures de contraintes pariétales (pression et cisaillement), et investiguent la dépendance linéaire de l'amplitude du cisaillement par rapport à celle de l'onde. Le cisaillement a été mesuré sur les ondes 1, 2, 5, 6, 9 et 10, et ils ne relèvent pas de changement significatif au-delà de la deuxième onde. Ils étudient les rapports $2a/\lambda = 0.0312$ et 0.05 , où est λ la longueur d'onde, et font varier le nombre de Reynolds de 3000 à 32000. Aucune séparation n'est observée pour $2a/\lambda = 0.0312$, mais un début de décollement apparaît pour $2a/\lambda = 0.05$ lorsque $Re \leq 19260$.

Les auteurs appliquent une décomposition de Fourier à leurs mesures de cisaillement, et calculent l'amplitude et le déphasage des deux premiers harmoniques. Ils montrent que le premier harmonique est suffisant pour décrire la distribution de cisaillement pariétal sur toute la longueur d'onde, et que l'amplitude de ses variations croît avec l'amplitude de l'onde. Cette description est satisfaisante lorsque $a^+ < 27$; au-delà, les effets non-linéaires ne sont plus négligeables et la modélisation ci-dessus est mise en défaut (l'exposant + indique une adimensionnalisation par les grandeurs de paroi, définies plus loin). De même, la distribution de pression suit une loi en cosinus à faible cambrure; elle atteint son maximum au milieu de l'onde au-dessus du creux, et son minimum au-dessus de la crête.

Pour expliquer ce comportement linéaire, les auteurs utilisent une modélisation initiée par *Thorsness et al. (1978)*, et détaillée ci-dessous. Ils considèrent un système de coordonnées (x, z) associé à la couche limite, et supposent l'écoulement bidimensionnel et utilisent une formulation en fonction de courant. En considérant la moyenne temporelle des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes, ils établissent une équation semblable à celle d'Orr-Sommerfeld. Parmi les termes supplémentaires se trouvent les contraintes turbulentes. Ils linéarisent alors le problème, en adoptant une décomposition harmonique de la forme $f(x, z) = \bar{f}(z) + a\hat{f}(z)e^{ikx}$. Ici \bar{f} représente l'écoulement moyen sur une longueur d'onde, et $a\hat{f}$ est l'amplitude de la partie fluctuante. Les solutions fournissent des distributions de pression et cisaillement pariétaux qui suivent elles aussi une décomposition harmonique. Le cisaillement s'exprime ainsi sous la forme $\tau_w = \bar{\tau} + a\hat{\tau} \cos(kx + \theta_\tau)$. Notons que la partie moyenne permet de définir une vitesse de frottement $u_* = (\bar{\tau}/\rho)^{1/2}$, et l'échelle visqueuse correspondante $\delta_\nu = \nu/u_*$. Les contraintes de Reynolds sont modélisées en introduisant une viscosité turbulente, pour laquelle les auteurs choisissent le modèle de longueur de mélange de *Van Driest (1956)* :

$$l = \kappa z \left(1 - e^{-\frac{z^+}{A^+}} \right) \quad (1.28)$$

où κ est la constante de von Kármán, $z^+ = z/\delta_\nu$, et A^+ le coefficient d'amortissement ou constante de Van Driest, ici adimensionnée et égale à 26. Cette dernière modélise la zone de transition où les contraintes visqueuses et turbulentes sont d'intensités comparables. Les contraintes visqueuses dominent pour $z^+ \ll A^+$, tandis que les contraintes turbulentes dominent pour $z^+ \gg A^+$. Cette constante peut donc être interprétée comme une mesure de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, à un coefficient de proportionnalité près. Le problème majeur d'un tel modèle est qu'il est local. Afin de corriger cela et de prendre en compte un éventuel effet longitudinal, les auteurs introduisent un effet de relaxation inspiré de travaux expérimentaux menés à l'Université de Standford dans les années 1960 et 1970, et résumés par *Kays et Moffat (1975)*. Tout d'abord

la constante de Van Driest est modifiée afin de tenir compte des effets dus à la présence d'un gradient de pression longitudinal p_x^+ :

$$A^+ = \frac{25}{a \left[v_0^+ + b \left(\frac{p_x^+}{1 + c v_0^+} \right) \right] + 1} \quad (1.29)$$

où v_0^+ est une éventuelle vitesse de transpiration à la paroi, et a , b et c sont des paramètres numériques dont les valeurs dépendent du régime d'écoulement. En l'absence de vitesse de transpiration, on a simplement $a = 7.1$ et :

- $b = 4.25$ et $c = 10$ si $p_x^+ \leq 0$
- $b = 2$ et $c = 0$ sinon

Dans la limite où le gradient de pression est faible, la relation (1.29) peut se simplifier en

$$A^+ = 25 (1 + k_1 p_x^+) \quad (1.30)$$

avec $k_1 \sim -30$. Cette modélisation de A^+ est valable pour un écoulement à l'équilibre, comme au-dessus d'une paroi plane. Pour prendre en compte des effets non-locaux, *Kays et Moffat (1975)* proposent d'ajouter une sorte d'effet retard en modifiant A^+ , qui devient solution de l'équation

$$\frac{dA_{eff}^+}{dx^+} = \frac{A_{eq}^+ - A_{eff}^+}{k_D} \quad (1.31)$$

où k_D est une constante dont la valeur est fixée empiriquement (*Kays et Moffat (1975)* indiquent environ 4000). Ici A_{eq}^+ est calculée à partir de (1.30), c'est la constante à l'équilibre en l'absence de perturbation.

Abrams et Hanratty (1985) ont repris cette modélisation pour étudier l'influence de la longueur d'onde sur l'amplitude et le déphasage du cisaillement pariétal. Les mesures de cisaillement sont effectuées sur les ondes 6, 8 et 9, sans observer de différence entre les trois séries de mesures. L'amplitude et le déphasage de la partie fluctuante du cisaillement pariétal $\hat{\tau}$ sont calculées par interpolation sinusoïdale de leurs données expérimentales. Ces distributions sont reproduites respectivement sur les figures 1.9 et 1.10. Ici $\alpha^+ = k\delta_\nu$ mesure le rapport entre la longueur d'onde et l'échelle visqueuse. Nous le noterons désormais k^+ (à ne pas confondre avec le paramètre du modèle de relaxation nommé k_D^+ sur ces figures). Les points expérimentaux sont repérés par les symboles, restreints à l'intervalle $0.0005 < k^+ < 0.01$. Les courbes représentent des modélisations différentes de la turbulence, qui sont comme suit :

- modèle quasi-laminaire : les contraintes visqueuses dominent les contraintes turbulentes, comme s'il n'y avait pas de turbulence
- turbulence gelée : pas d'effet de l'ondulation de la paroi sur la longueur de mélange, seule la partie non-harmonique est considérée
- modèle de turbulence à l'équilibre : modèle de *Kays et Moffat (1975)* sans la correction hors-équilibre ($k_D = 0$ donc $A_{eff}^+ = A_{eq}^+$), la constante de Van Driest est modifiée par le gradient de pression longitudinal
- modèle de relaxation : modèle complet de *Kays et Moffat (1975)*, avec $k_D = 1650$.

Les deux premiers modèles cherchent à représenter les cas extrêmes où la longueur d'onde est très petite, et/ou la turbulence très peu intense. Ils ne devraient donc être valides que pour de grandes valeurs de k^+ . Dans

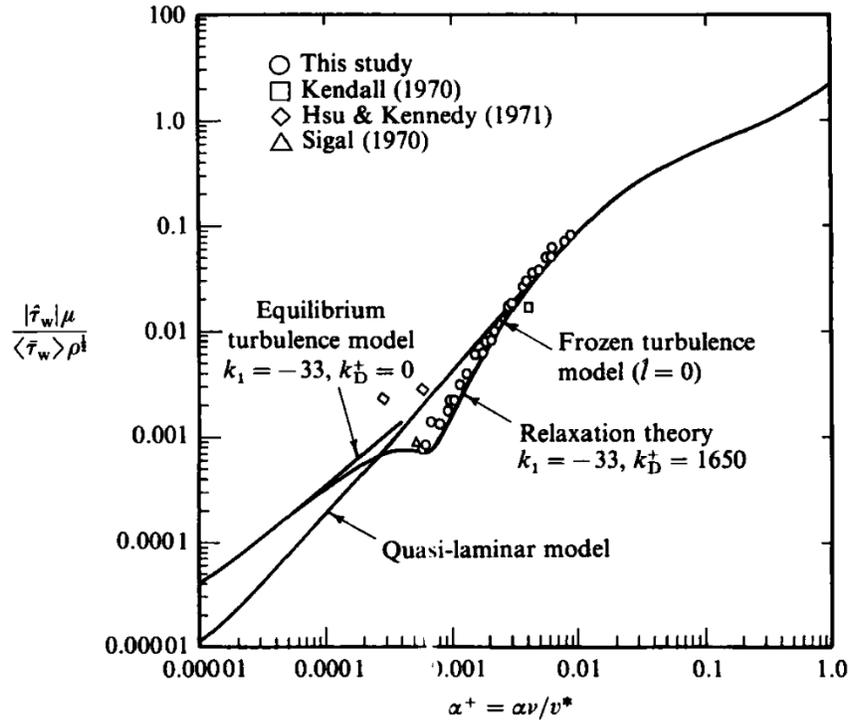


FIGURE 1.9 – Amplitude de la partie fluctuante du cisaillement au-dessus d'une paroi ondulée en l'absence de décollement, en fonction du nombre d'onde adimensionné k^+ . Tiré de *Abrams et Hanratty (1985)*.

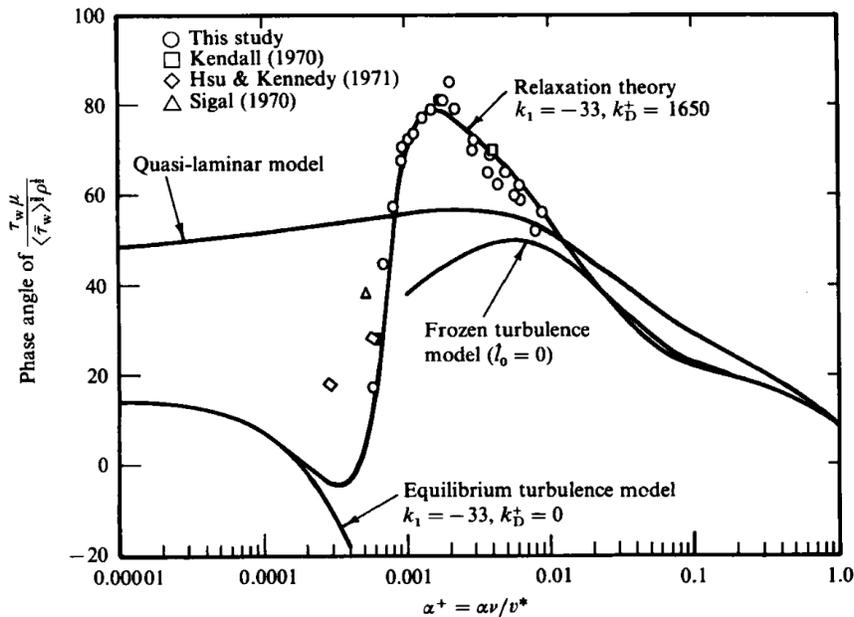


FIGURE 1.10 – Déphasage de la partie fluctuante du cisaillement au-dessus d'une paroi ondulée en l'absence de décollement, en fonction du nombre d'onde adimensionné k^+ . Tiré de *Abrams et Hanratty (1985)*.

ce cas l'écoulement est très peu perturbé par les ondulations de la paroi. La zone où ces perturbations se font sentir est très fine et très proche de la paroi. Cette intuition semble être confirmée par les prédictions de phase et d'amplitude au-delà de $k^+ = 0.01$, qui sont similaires à celles du modèle de relaxation sur cet intervalle. En particulier on note que le modèle quasi-laminaire (le plus grossier des deux) surévalue le déphasage mais suit la bonne tendance, et semble converger vers les deux autres modèles pour $k^+ \sim 1$. Comme on peut s'y attendre compte tenu des limites de ces deux modèles, ils sont incapables de capturer l'évolution des deux distributions pour de faibles valeurs de k^+ . Avec les valeurs retenues $k_1 = -33$ et $k_D = 1650$, les auteurs parviennent à obtenir un bon accord entre le modèle de relaxation et leurs données expérimentales. Partant de ce constat, ils en extrapolent les prédictions et constatent une convergence avec le modèle à l'équilibre à très petit k^+ . Si l'on en croit ces extrapolations, cela pourrait indiquer une influence négligeable des effets hors-équilibre à très bas k^+ .

Si l'on considère l'interprétation commune de la constante de Van Driest en tant que mesure de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (à un facteur près), cette étude tend à montrer qu'un traitement fin de la turbulence en très proche paroi peut être nécessaire pour prédire correctement le cisaillement pariétal, en tout cas pour une certaine gamme de valeurs de k^+ . Notons que les vagues de vent naissantes (et donc celles que nous avons simulées) se situent plutôt dans l'intervalle $k^+ > 0.01$, et ne sont donc pas concernées par cet effet de relaxation (voir chapitre 3).

Frederick et Hanratty (1988) se sont intéressés au profil de vitesse sur une paroi ondulée sans décollement. Ils ont adopté la même modélisation que ci-dessus. Ils présentent deux séries de mesure réalisées par vélocimétrie laser, l'une avec le comportement linéaire décrit par *Zilker et al. (1977)*, et l'autre dans laquelle les effets non-linéaires sont présents. Pour le premier cas, $2a/\lambda = 0.03125$, $Re = 6400$ et $k^+ = 0.008$, ce qui correspond à $a^+ = 12.3$. Pour cette valeur de k^+ , le modèle quasi-laminaire est suffisant pour décrire la distribution de cisaillement. Notons que le cisaillement pariétal n'est pas directement mesuré, et les mesures de vitesses ne descendent pas en-dessous de $z^+ = 2$. Ainsi les auteurs calculent la vitesse de frottement u_* à partir de la relation empirique $\tau_w = U_b \sqrt{f/2}$, où $f = 0.0612Re^{-1/4}$, contrairement aux études précédentes. Le profil de vitesse moyenne sur une longueur d'onde se compare bien avec un profil équivalent sur une plaque plane. Près de la paroi, le profil de vitesse suit bien les évolutions de la paroi. À l'inverse, le profil dans le cœur de l'écoulement évolue avec retard, par rapport à la partie basse de l'écoulement. Les auteurs comparent leurs mesures au modèle linéaire présenté plus haut. Ils remplacent toutefois l'expression de la longueur de mélange par un modèle plus simplifié, développé par *Reynolds et Tiederman (1967)* et présenté plus loin (voir chapitre 2). Ils ont ainsi calculé des profils de vitesse théoriques, et la comparaison avec leurs données expérimentales est moins flatteuse que pour la distribution de cisaillement pariétal. Plus précisément, le modèle prédit une plus faible amplitude des variations de vitesse provoquées par la plaque ondulée. Selon les auteurs, cette différence vient de la modélisation des variations ondulatoires de contraintes turbulentes par une viscosité turbulente. Ils suggèrent même qu'en les ignorant complètement, on prédit de plus grandes variations du profil de vitesse, en meilleur accord avec les données expérimentales. Ce constat peut être rapproché des observations expérimentales de *Stewart (1970)*. Ce dernier étudie le profil de vitesse dans l'air au-dessus de vagues générées par un batteur à une fréquence fixe de 1.96 Hz, soit une longueur d'onde $\lambda = 40.8 \text{ cm} = 23.8\lambda_c$. Il indique que le profil moyen sur une onde est logarithmique. Mais la distribution longitudinale des vitesses n'est pas compatible avec une modulation harmonique, qui impliquerait un profil uniforme le long de l'onde à condition de le mesurer comme une fonction de $\eta = z - ae^{kz} \cos(kx)$.

Zilker et Hanratty (1979) présentent des résultats expérimentaux en présence d'un léger décollement (contraintes pariétales et vitesse longitudinale). Les cambrures étudiées sont $2a/\lambda = 0.05, 0.125$ et 0.2 . Les auteurs étudient l'influence du nombre de Reynolds et de l'amplitude de l'onde sur la zone de recirculation. Ils repèrent la position des points de décollement et de recollement à l'aide d'un colorant injecté juste à l'amont de la crête. Ils utilisent le modèle linéaire présenté plus haut pour prédire les positions de ces deux points. La comparaison avec les données expérimentales n'est pas parfaite, mais le modèle semble fournir une première estimation qualitativement satisfaisante. La présence d'une zone de recirculation déforme la distribution de pression pariétale en faisant apparaître un plateau sur la première moitié de l'onde, juste avant le creux. Ce plateau retarde ainsi la croissance de la pression, et il est précisément localisé là où la zone de recirculation est la plus épaisse. Le maximum de pression quant à lui est décalé vers l'aval, et sa position coïncide avec celle du point de recollement. Alors qu'en l'absence de décollement, l'amplitude de variation de la pression croît avec celle de l'onde, les auteurs rapportent que le décollement a un effet inverse. La distribution du cisaillement pariétal s'écarte grandement du profil sinusoidal, et devient de plus en plus asymétrique. La zone autour du minimum (qui est négatif et se trouve donc dans la zone de recirculation) s'agrandit, tandis que le maximum devient plus piqué. Ce dernier est en revanche toujours localisé peu avant la crête. En raison de limites techniques, *Zilker et Hanratty (1979)* fournissent peu de détails sur ce qui se passe dans la zone de recirculation.

Buckles et al. (1984) sont les premiers à notre connaissance à le faire. Ils reprennent le cas $2a/\lambda = 0.2$, dans la même configuration que ci-dessus. Ils présentent la distribution des lignes de courant, l'évolution du profil de vitesse longitudinale tout le long de l'onde, et les distributions de pression et cisaillement pariétaux (toutes ces distributions sont moyennées dans le temps). Par une interpolation de la vitesse à une altitude d'environ 2.5% de l'amplitude de l'onde, ils localisent les deux points où elle s'annule, c'est-à-dire le décollement à $x/\lambda = 0.14$ et le recollement à $x/\lambda = 0.69$. Les profils de vitesse s'écartent grandement de la loi logarithmique classiquement observée au-dessus d'une plaque plane, voire au-dessus d'une paroi ondulée à petite amplitude. Cependant, le profil moyen le long de l'onde présente un comportement logarithmique jusqu'à une altitude d'environ 1000 unités de parois (depuis la position moyenne de l'onde). *Buckles et al. (1984)* présentent également des résultats instationnaires. Ils rapportent que la structure de la zone de recirculation n'est pas figée, et que l'écoulement peut y changer de sens de façon intermittente.

Chapitre 2

Simulations de vagues de vent et modélisation de la turbulence dans l'air

Les vagues de vent sont un système complexe, mettant en jeu une interface déformable entre deux phases, de densités et viscosités très différentes, et dont l'une au moins est soumise à un écoulement turbulent. Ainsi se posent deux questions majeures quand il s'agit de simuler un tel phénomène. D'une part, il faut être capable de résoudre l'écoulement dans chaque phase, et de suivre l'évolution de l'interface lorsqu'elle se déforme. Au cours des tous premiers stades de la génération des vagues, leur évolution est linéaire par rapport à la cambrure. On peut considérer que l'amplitude des déformations reste faible, et l'interface monovaluée. Si la simulation s'aventure dans le régime non-linéaire, cela n'est plus nécessairement le cas. L'interface peut devenir multi-valuée, voire subir des changements de topologie. On peut penser notamment à des inclusions d'air dans le liquide, au déferlement qui peut s'accompagner de la formation de bulles, ou à des éjections de gouttes. Ces phénomènes sont importants notamment quand on s'intéresse aux échanges de matière et d'énergie entre l'océan et l'atmosphère (*Ayet et Chapron (2022)*). D'autre part, se pose la question de la simulation de la turbulence dans l'air (voire dans le liquide). Celle-ci est le moteur de la génération des vagues de vent, il est donc capital de la traduire correctement numériquement. En retour, elle est impactée par les déformations de l'interface. Les déséquilibres de la turbulence suite à ces déformations constituent une question encore ouverte dans l'étude des vagues de vent.

Nous abordons dans un premier temps les stratégies de simulation numérique des vagues de vent, et la question de la modélisation et du suivi de l'interface. Nous présentons notre stratégie de modélisation de la turbulence dans la seconde partie de ce chapitre.

2.1 Études par simulation numérique des vagues de vent

La question de la simulation numérique des vagues de vent est abordée de deux manières, par ordre de complexité. Dans un premier temps, les études se sont concentrées sur une seule des deux phases. Beaucoup

de travaux ont ainsi étudié l'influence des déformations de l'interface sur les déséquilibres de la turbulence dans l'air. En parallèle, des auteurs se sont également intéressés à l'influence des contraintes imposées par le vent sur l'interface, et à leur impact sur l'écoulement dans le liquide. On peut penser ainsi à l'étude de la turbulence sous-marine générée par le vent. Avec le développement du calcul intensif, et les connaissances acquises au travers des travaux précédents, des études numériques des interactions couplées vagues/vent ont commencé à voir le jour dans les années 1990. Nous présentons ci-dessous l'évolution des stratégies mises en œuvre pour la simulation numérique des vagues de vent.

Avant cela, penchons-nous sur le traitement de l'interface. On distingue principalement deux méthodes de traitement numérique d'une interface : les méthodes sur grille fixe ou mobile (*Scardovelli et Zaleski (1999)*). Les premières adoptent une approche eulérienne. Nous entendons par là que le domaine numérique est confondu avec un domaine physique immobile, et que les fluides coulent à travers à lui. Nous abordons ce type d'approche plus en détails dans la section consacrée aux études diphasiques.

A l'inverse, les méthodes sur grille mobile suivent une approche plutôt lagrangienne. Les frontières du domaine numérique suivent celles du domaine physique en mouvement. Parmi celles-ci, retenons les méthodes *boundary-fitted*, ou méthodes d'ajustement aux limites. Dans un écoulement diphasique, l'interface séparant deux phases non-miscibles est une frontière évolutive pour chaque phase. Une méthode *boundary-fitted* consiste ainsi à déformer le domaine numérique pour que ses frontières épousent l'interface à tout instant. Le domaine physique est simplifié à l'aide d'un changement de coordonnées, qui suit les déformations d'une ou plusieurs frontières, internes ou externes. Le domaine numérique obtenu après transformation est généralement un rectangle, ou pavé rectangulaire, et représenté par un maillage cartésien fixe. La figure 2.1 en illustre le principe. Il est alors plus aisé d'intégrer les équations de conservation sur le domaine numérique, plus simple à manipuler que le domaine physique complexe. Cependant, le changement de coordonnées introduit des termes supplémentaires, via le jacobien de la transformation. Celui-ci doit être recalculé à chaque itération, afin de suivre les évolutions instantanées de l'interface. Si cette dernière subit des déformations trop importantes, par exemple en cas de déferlement, il peut être nécessaire de redéfinir le maillage. Pour l'application aux vagues de vent, cela limite l'amplitude des ondes qui peuvent être simulées. Cette approche a également des limites lors de changements de topologie de l'écoulement, comme en cas de coalescence ou de fragmentation (*Lakehal et al. (2002)*). Notons que les méthodes *boundary-fitted* ne sont pas limitées aux écoulements diphasiques. Elles ont été employées de façon extensive pour tout type d'écoulement monophasique avec une frontière lisse mais complexe. Celle-ci peut par exemple être une paroi ondulée, rigide ou déformable, fixe ou mobile, et simulant par exemple l'effet d'un champ de vagues stationnaire.

2.1.1 Études monophasiques de l'impact d'une phase sur l'autre

Impact des déformations de l'interface sur les déséquilibres de la turbulence dans l'air

Les premières études numériques des vagues de vent remontent aux années 1970. Elles se sont concentrées sur l'impact du champ de vagues sur la turbulence dans l'air. En raison de capacités de calcul limitées, ces premiers travaux ont été réalisés à l'aide d'une approche RANS (*Reynolds-averaged Navier-Stokes*). Les contraintes turbulentes dans l'air sont modélisées à l'aide d'un champ de viscosité turbulente. Ce type d'approche est abordé plus en détail dans la seconde partie de ce chapitre, consacrée à la modélisation de la turbulence dans l'air.

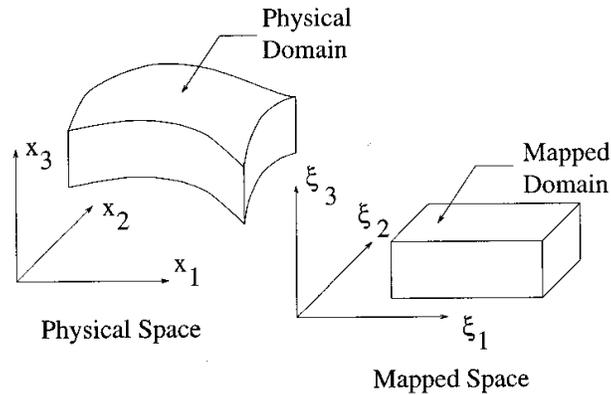


FIGURE 2.1 – Illustration de la méthode *boundary-fitted*. Le domaine physique, potentiellement déformable, est transformé en un domaine numérique plus simple, et qui reste fixe. Tiré de *De Angelis et al. (1997)*.

L'un des tous premiers travaux numériques est proposé par *Davis (1970)*. Il intègre numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld en utilisant des conditions aux limites linéarisées. Il modélise les contraintes turbulentes dans l'air de deux manières différentes. D'un côté, à l'aide d'une hypothèse quasi-laminaire, dans laquelle il considère que la turbulence dans l'air n'est pas affectée par les vagues. Les contraintes turbulentes ne dépendent ainsi que de la hauteur par rapport à l'altitude moyenne de l'interface. Cela correspond au formalisme de *Miles (1957)*. D'un autre côté, il considère que les propriétés de l'écoulement dans l'air dépendent de la hauteur locale au-dessus de la surface instantanée, conformément au formalisme de *Benjamin (1959)*. Il réalise des calculs pour c/u_* variant de 7.2 à 24.9, c'est-à-dire des ondes rapides et une turbulence faible.

Par la suite, *Townsend (1972)* étudie la propagation tridimensionnelle des vagues en tenant compte de l'orientation du vent. Il modélise les contraintes turbulentes à l'aide de l'énergie cinétique turbulente, définie par $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$, où $\bar{\cdot}$ désigne l'opération de moyenne temporelle. Il considère une expression du cisaillement inspirée de *Bradshaw et al. (1967)*, de la forme $\tau_{xz} = 0.30k$.¹ Il résout ainsi les équations de quantité de mouvement couplées à l'équation de l'énergie cinétique turbulente linéarisée, réécrite pour faire apparaître les contraintes turbulentes. Sa modélisation s'arrête à la sous-couche visqueuse, qu'il prend en compte à l'aide d'une hauteur de rugosité z_0 . Il considère un profil de vitesse moyenne U logarithmique de la forme

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \log(z/z_0) - kc_0/m \quad (2.1)$$

où k est le nombre d'onde de la vague, dont la vitesse de phase est c_0 , et m est la composante du vecteur d'onde alignée avec la direction du vent. Il montre que le taux de transfert de l'énergie du vent vers les vagues vaut environ $15(\rho_a/\rho_w)(u_*/c)^2$, si $U(z \sim 1/k) > c_0$, et tant que $ak < 0.1$.

Gent et Taylor (1976) et *Al-Zanaidi et Hui (1984)* simulent un écoulement bidimensionnel au-dessus d'un champ de vagues monochromatiques, à l'aide d'une hauteur de rugosité z_0 . Ils se placent dans le référentiel des vagues, et utilisent une méthode *boundary-fitted* basée sur une transformation conforme. Les premiers auteurs calculent la viscosité turbulente à partir de la résolution de l'équation de l'énergie cinétique turbulente, et d'un modèle de longueur de mélange, qui fait intervenir z_0 . Ils présentent des distributions de pression et de cisaillement sur la surface, ainsi que des cartes de contraintes turbulentes et de TKE pour $ak = 0.157$. Pour

1. Paramètre $a_1 = 0.15$, selon la notation de *Bradshaw et al. (1967)*.

une rugosité uniforme, ils montrent que le taux de transfert de l'énergie du vent vers le champ de vagues est du même ordre de grandeur que celui calculé par *Miles (1957)* et *Miles (1959b)*, et qu'il diminue légèrement avec leur amplitude. Ils considèrent également une rugosité avec un profil harmonique, simulant l'effet de modes non-dominants générés par des effets non-linéaires. Ils montrent alors que le taux de croissance peut augmenter significativement avec l'amplitude des vagues. Pour une amplitude de variation de z_0 égale à la moitié de sa valeur moyenne, ils calculent un taux de croissance $\beta \sim 60(\rho_a/\rho_w)(u_*/c)^2$, pour $ak = 0.01$. *Al-Zanaidi et Hui (1984)* utilisent le modèle à deux équations $k - \omega$ de *Saffman et Wilcox (1974)*, qui permet de résoudre l'écoulement jusque dans la sous-couche visqueuse. Ce modèle fait intervenir une hauteur de rugosité z_0 via la condition sur l'interface de la dissipation spécifique ω . Nous abordons cette modélisation plus en détail à la fin du chapitre. Ils considèrent des vagues de petite amplitude. Au premier ordre, les perturbations orbitales liées aux vagues sont donc harmoniques de la forme $\phi(\xi, \eta) = \phi_0(\eta) + ak\phi_1(\eta) \exp(ik^+\xi)$. En introduisant cette décomposition dans les équations de quantité de mouvement et du modèle $k - \omega$, ils se ramènent à un problème unidimensionnel dans la direction verticale. Ils montrent que le taux de transfert de l'énergie du vent vers le champ de vagues dépend grandement de la rugosité z_0 , c'est-à-dire de l'état de la surface. Ils obtiennent ainsi la relation suivante sur le taux de croissance :

$$\beta = \delta_i \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{U_\lambda}{c} - 1 \right)^2 \quad (2.2)$$

où U_λ est la vitesse du vent à l'altitude $z = \lambda$, et δ_i un coefficient numérique, qui vaut 0.04 si la surface est lisse et 0.06 si elle est rugueuse. Ils étudient également le cas de vagues à contre-vent, et dans ce cas ils indiquent que $\delta_i = -0.024$ ou -0.04 respectivement.

L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs a permis les premières études par simulation numérique directe (DNS) d'écoulements turbulents. Les premières études par DNS de l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée ont commencé à voir le jour dans les années 1990. La plupart d'entre elles reposent sur une méthode *boundary-fitted*, qui utilise une transformation pour se ramener à un domaine numérique rectangulaire. *Maass et Schumann (1994)*, *De Angelis et al. (1997)* et *Cherukat et al. (1998)* étudient l'écoulement turbulent au-dessus d'une paroi ondulée sinusoïdale, à l'aide d'une DNS couplée à une transformation non-conforme du domaine du physique. Les deux directions horizontales sont inchangées, tandis que la direction verticale subit la transformation $\bar{z} = H(z - h)(H - h)$, où h repère la paroi ondulée, et H est la hauteur moyenne du canal. Les premiers auteurs considèrent une paroi de grande amplitude ($a/\lambda = 0.05$), et observent un décollement à l'aval des crêtes, pour un nombre de Reynolds moyen de 4780. *De Angelis et al. (1997)* effectuent des DNS pseudo-spectrales pour $a/\lambda = 0.025$ et 0.05 . Afin d'étudier les effets de la paroi sur les statistiques de la turbulence, et sur l'écoulement moyen, ils considèrent ainsi deux configurations. L'une à la limite du décollement, et l'autre en écoulement complètement décollé. *Cherukat et al. (1998)* étudient le cas $ak = 0.05$ à l'aide de DNS spectrales par éléments finis. Pour un nombre de Reynolds moyen de 3460, ils observent un écoulement décollé et confirment l'influence de la paroi sur l'écoulement moyen. Ce décollement donne lieu à une couche de cisaillement, et la zone de recirculation n'est pas figée au cours du temps.

Henn et Sykes (1999) réalisent des simulations numériques sur paroi ondulée à l'aide de la simulation aux grandes échelles (LES). Cette approche leur permet de couvrir une large gamme d'écoulements non-décollés et décollés, en faisant varier l'amplitude de $ak = 0.0155$ à 0.1 . Ils utilisent pour cela une transformation non-conforme similaire à celle présentée ci-dessus. *Sullivan et al. (2000)* étudient le cas d'une paroi ondulée

de grande amplitude ($a/\lambda = 0.1$) par DNS, pour $Re=8000$. La paroi est mobile, et ils se placent dans le référentiel de l'onde. Le domaine numérique est issu d'une transformation conforme du domaine physique. La condition aux limites de vitesse sur la paroi correspond à la vitesse orbitale d'une onde de gravité en grande profondeur. Ils font varier le rapport c/u_* , et l'amplitude des ondes en restant dans le domaine $ak < 0.1$. Ils montrent que les ondes rapides diminuent la traînée de forme, et les ondes lentes l'augmentent. Plus tard, *Yang et Shen (2010)* considèrent le même problème pour différents types de paroi. Ils étudient successivement l'effet d'une paroi stationnaire, avec mouvement vertical, correspondant à une onde d'Airy, ou à une onde de Stokes.

Plus récemment, des auteurs ont employé la LES afin d'étudier les effets des vagues sur les grandes échelles de la turbulence (*Yang et al. (2013)*, *Sullivan et al. (2014)*, *Husain et al. (2019)*). Par exemple, *Hao et Shen (2022)* étudient à l'aide d'une LES l'effet de rafales de vent au-dessus d'un champ de vagues de petite amplitude ($ak = 0.05$).

Caractéristiques de la turbulence sous une surface libre

Si le vent souffle suffisamment fort, l'écoulement dans le liquide peut devenir turbulent. C'est particulièrement vrai si le liquide est peu visqueux, comme l'eau.

Une surface libre est une frontière où la vitesse normale est nulle, donc il n'y a pas de transfert de quantité de mouvement vers l'extérieur, mais la vitesse tangentielle est libre d'évoluer. Dans ces conditions, la fluctuation de vitesse normale à l'interface croît linéairement avec la distance à celle-ci, ce qui entraîne une croissance linéaire du cisaillement turbulent. À l'inverse, près d'une paroi solide, le cisaillement turbulent a un profil cubique, et donc a une croissance beaucoup plus lente. *Calmet et Magnaudet (1998)* étudient l'impact de la condition imposée sur la surface libre à l'aide de LES. Ils considèrent une frontière plane, soumise à un cisaillement nul ou imposé, et étudient l'impact de cette condition sur le transfert de masse à travers l'interface, notamment à haut nombre de Schmidt.² Ils prédisent des taux de transferts en bon accord avec les données expérimentales. Bien que ces dernières correspondent généralement à des interfaces non strictement planes, cet accord suggère que les échanges de masse à travers l'interface sont essentiellement gouvernés par les grandes échelles de la turbulence. *Tsai (1998)* étudie l'effet d'un courant cisailé turbulent sous la surface libre. Il simule par DNS une couche cisailée sous la surface, et examine en détails la structure de la turbulence dans cette couche. Pour cela, il impose une condition de glissement sur la frontière inférieure, et considère des conditions linéarisées sur la surface. Ce dernier point lui permet de simuler un domaine fixe, dont la frontière supérieure correspond à la position moyenne de l'interface. Il montre que les fluctuations de vitesse verticale s'atténuent fortement au voisinage de l'interface, et que le maximum de dissipation se situe près de la surface, à environ un quart de l'épaisseur de la couche de cisaillement. *Tsai et al. (2005)* étudient un écoulement turbulent sous une surface libre cisailée. Ils imposent un cisaillement constant, correspondant à un nombre de Reynolds turbulent initial d'environ 260. Ils inhibent les déformations de la surface afin d'examiner les conséquences de ce cisaillement sur le transport d'un scalaire passif. Ils montrent que l'écoulement présente une sous-couche visqueuse située juste sous l'interface, et une couche logarithmique un peu plus loin. La couche visqueuse a une épaisseur d'environ 3 unités de longueur visqueuse $\delta_\nu = \nu/u_*$. Si z^+ est la profondeur adimensionnée par δ_ν , la couche logarithmique démarre très près de l'interface, aux alentours de $z^+ = 10$, et s'étend jusqu'à $z^+ = 100$. La couche tampon située entre les deux est donc très

2. Rapport entre la viscosité cinématique, qui gouverne la diffusion de quantité de mouvement, et la diffusivité moléculaire.

réduite, alors qu'elle couvre l'intervalle $5 < z^+ < 30$ dans le cas d'une paroi solide (*Wilcox (2006), Schlichting et Gersten (2017)*). Pour un écoulement au-dessus d'une paroi solide, la couche tampon, qui est la zone de transition entre les deux, se situe dans l'intervalle $5 < z^+ < 30$ (*Wilcox (2006), Schlichting et Gersten (2017)*). Ainsi sous une surface libre, on retrouve un profil similaire mais avec une couche tampon et une sous-couche visqueuse bien plus fines. Ce constat est partagé par *Enstad et al. (2006)*, qui étudient une configuration similaire en présence d'une stratification en densité.

Il est à noter que si le cisaillement imposé sur l'interface est suffisamment fort, des *streaks* peuvent se créer sous la surface,³ comme l'ont montré *Lam et Banerjee (1992)* à l'aide de DNS. Ces structures sont classiques près d'une paroi solide, et l'étude de ces auteurs montre que c'est l'intensité du cisaillement, et non la condition de non-glissement en tant que telle, qui est responsable de leur génération.

2.1.2 Études du couplage entre le vent et les déformations de l'interface

À la suite des travaux portant sur les déséquilibres de la turbulence au-dessus d'une paroi, les premières études numériques des interactions couplées vagues/vent ont commencé dans les années 1990. Elles concernaient au départ des simulations d'écoulement gaz/liquide sur une interface plane. Celle-ci sépare le domaine en deux, chacun correspondant à une phase dont les limites sont fixes. *Lombardi et al. (1996)* invoquent ainsi le cas limite de forces gravitationnelles et de tension de surface importantes pour justifier cette simplification drastique. Ils étudient un écoulement gaz/liquide cisailé dans le référentiel de l'interface en réalisant une DNS, pour un nombre de Reynolds turbulent $Re_* = 60.4$ dans chaque phase (basé sur la hauteur de liquide). Chaque phase est résolue séparément avec une méthode à pas fractionné. Elles sont couplées via les conditions aux limites sur l'interface, en imposant la continuité des vitesses lors de la résolution de la première phase, puis la continuité des cisaillements lors de celle de la seconde. Les auteurs montrent que dans cette configuration, la turbulence dans le gaz a les mêmes caractéristiques que pour un écoulement au-dessus d'une paroi plane fixe. Ce travail a été repris par *Liu et al. (2009)* pour un nombre de Reynolds turbulent $Re_{*,a} = 271$ côté air, et $Re_{*,l} = 120$ côté liquide.

Lin et al. (2008) présentent des résultats de DNS de vagues de vent de très petite amplitude ($ak < 0.01$). L'écoulement dans l'air est de type Couette, entraîné par une vitesse imposée sur la frontière supérieure. Chaque phase est résolue séparément, puis elles sont couplées via les conditions aux limites. L'interface apparaît ici comme une frontière fixe pour chaque phase, elle est virtuellement plane et alignée sur le maillage. En réalité, les conditions aux limites sont linéarisées pour être écrites au niveau de la position moyenne de l'interface $z = 0$. Elles sont discrétisées à l'aide de différences finies centrées, ce qui nécessite l'ajout de cellules fantômes de part et d'autre de $z = 0$. L'élévation de l'interface est ensuite calculée à partir de la condition cinématique. Cette approche permet aux auteurs d'étudier les tous premiers stades de génération des vagues de vent, tant que les effets non-linéaires restent négligeables. Leur simulation correspond à $Re_{*,a} = 230$ et $Re_{*,l} = 120$, basés sur la hauteur d'air (la hauteur de chaque sous-domaine est la même). Pour initialiser la simulation, les auteurs imposent un profil de vitesse moyen dans chaque phase, puis ils ajoutent une force artificielle afin de rendre l'écoulement turbulent. Tout cela est réalisé en maintenant l'interface plane, le temps que la turbulence soit établie de chaque côté. Ils observent deux régimes de croissance, le premier linéaire, propre au mécanisme de Phillips, et le second exponentiel, propre à un mécanisme d'instabilité comme celui

3. Il s'agit de fluctuations de la vitesse transverse, qui interviennent dans la sous-couche visqueuse, et forment des structures très allongées dans le sens de l'écoulement.

de Miles. Durant la croissance linéaire, les déformations de l'interface n'ont que très peu d'influence sur la turbulence dans les deux phases. Les écoulements dans l'air et dans l'eau sont semblables respectivement à ceux au-dessus d'une paroi et sous une surface libre, toutes deux planes. Le taux de croissance devient exponentiel lorsque les fluctuations de pression sur l'interface entrent en phase avec la cambrure des ondes.

Approche *boundary-fitted*

Une des toutes premières études par DNS qui suit les déformations de l'interface au cours du temps a été réalisée par *Fulgosi et al. (2003)*. Chaque phase est résolue séparément, et les sous-domaines physiques sont transformés en suivant l'approche de *De Angelis et al. (1997)*. Les conditions aux limites sur l'interface permettent de coupler les deux phases. Chaque écoulement est entraîné par un gradient de pression constant, dont le signe change d'une phase à l'autre. Cela génère ainsi globalement un écoulement cisailé de directions opposées dans chaque sous-domaine. L'élévation de l'interface est repérée par f , et calculée comme solution d'une équation d'advection. Compte tenu de l'évolution de f , la transformation doit être mise à jour à chaque pas de temps. Les auteurs souhaitent étudier l'influence de ces ondes sur la turbulence dans l'air. L'interface est initialement plane. Ils simulent des ondes capillaires de cambrure très petite ($ak = 0.01$), avec $Re_* \sim 85$ dans chaque phase (basé sur la hauteur d'air). Ils montrent que la turbulence dans l'air est moins anisotrope et plus intense au voisinage de l'interface que pour un écoulement en canal. Pour appuyer ce constat, ils étudient chacun des termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Alors que les termes de production sont semblables au cas du canal, ceux de dissipation, de diffusion visqueuse et de transport turbulent dans la direction normale à l'interface sont plus faibles. La présence des vagues entraîne également une légère diminution de la traînée, ou autrement dit de la vitesse de frottement interfaciale.

Komori et al. (2010) réalisent une DNS d'un écoulement diphasique cisailé, pour $Re_{*,a} = 210$ côté air (basé sur la hauteur d'air). Ils étudient la turbulence dans chaque phase, et montrent que les vagues générées par le vent renforcent la turbulence dans le liquide.

Zonta et al. (2015) étudient la croissance de vagues de vent en présence d'un contre-courant. Chaque phase est entraînée par un gradient de pression de signe variable. Les auteurs fixent le nombre de Reynolds turbulent (basé sur la hauteur d'air) à 85 dans les deux phases, et font varier les nombres de Froude et de Weber. L'interface est initialement plane, et ils suivent son élévation au cours du temps. Ils montrent que cette dernière croît au départ comme $t^{2/5}$.

Yang et Shen (2011b) ont mis au point un protocole de simulation de vagues de vent basé sur une transformation non-conforme du domaine physique. La surface déformable peut être la frontière inférieure, pour étudier la turbulence au-dessus d'un champ de vagues, ou la frontière supérieure, pour étudier un écoulement de surface libre. *Yang et Shen (2011a)* appliquent cette méthode au premier cas, où l'écoulement est résolu par DNS. Intéressés par les applications aux interactions vagues/vent, ils couplent cela à un solveur potentiel pour simuler l'évolution du champ d'ondes. Ils étudient ainsi les cas d'un train d'onde et d'un champ de vague à large spectre. Ils rapportent également des résultats de DNS couplées, pour simuler des ondes d'interface entre deux fluides visqueux. Cette méthode a été réutilisée à de multiples reprises par Shen avec d'autres collaborateurs. Par exemple, *Hao et Shen (2019)* étudient les évolutions à long terme des vagues de vent. Pour cela, ils simulent l'écoulement d'air par LES, et le champ de vagues à l'aide d'un solveur potentiel. L'écoulement d'air est initialisé avec un profil logarithmique, auquel sont ajoutées des perturbations pour le rendre turbulent. Le champ de vagues est quant à lui initialisé à partir d'un spectre empirique, issu du Joint

North Sea Wave Project (JONSWAP). Ce dernier est un projet des années 1970, qui visait à obtenir des jeux de données issues de mesures expérimentales de spectres en Mer du Nord. Plus récemment, *Li et Shen (2022)* étudient la génération de vagues de vent par le mécanisme de Phillips. L'écoulement dans l'air est de type Couette, entraîné par un cisaillement constant imposé sur la frontière supérieure. Les auteurs commencent par générer cet écoulement en maintenant l'interface plane et fixe, tandis que le liquide est au repos. Une fois que l'écoulement dans l'air est établi, l'interface est libre de se déformer. Les nombres de Reynolds turbulents sont fixés à 268 côté air, et 120 côté eau. Ils observent des phases successives de croissance de l'énergie des vagues, d'abord linéaire puis exponentielle. Selon les auteurs, la croissance linéaire est limitée à une fenêtre temporelle de $20H/u_{*,a}$, où H est la hauteur d'air.

Approches sur grille fixe

Les méthodes sur grille fixe adoptent une approche eulérienne, dans laquelle l'interface traverse les éléments du maillage. Le domaine numérique, identique au domaine physique, est discrétisé sur une grille fixe, sur laquelle les équations de conservation sont intégrées. On distingue les méthodes de type suivi d'interface (*front-tracking*), et les méthodes de type capture d'interface (*front-capturing*) (*Tryggvason et al. (2011)*). Les méthodes de type suivi sont des méthodes hybrides, qui ajoutent une seconde grille déformable qui suit les mouvements de l'interface (*Unverdi et Tryggvason (1992)*). À notre connaissance, la quasi-intégralité des études de vagues de vent sur grille fixe sont réalisées à partir de méthodes de capture d'interface. Dans ce cas, les deux phases sont considérées comme un unique fluide. Les propriétés physiques sont des distributions spatiales non-uniformes, variant rapidement au passage de l'interface. L'avantage de ces méthodes est leur simplicité de mise en place, car on ne résout alors qu'un seul jeu d'équations sur tout le domaine numérique. Les deux approches les plus répandues sont la méthode *Level-Set* (LS) et la méthode *Volume of Fluid* (VOF). Elles se basent sur une fonction couleur f , un champ scalaire qui permet de discriminer les deux phases, et solution d'une équation d'advection du type

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (2.3)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse résolu du fluide.

La méthode LS repose sur la distance locale algébrique à l'interface. Ce champ est algébrique dans le sens où il est positif dans une phase, et négatif dans l'autre. L'interface est ainsi représentée par l'iso-surface (ou iso-ligne pour un écoulement bidimensionnel) $\phi = 0$. Les propriétés physiques sont alors calculées à l'aide d'une fonction de Heaviside $H(\phi)$. Par exemple, $H(\phi)$ vaut 0 si $\phi < -\alpha\Delta$, 1 si $\phi > \alpha\Delta$, et varie continuellement entre 0 et 1 dans l'intervalle $-\alpha\Delta < \phi < \alpha\Delta$. Δ représente la taille des cellules, et α est un coefficient qui permet de contrôler l'épaisseur numérique de l'interface (*Tryggvason et al. (2011)*). Cette méthode est efficace pour capturer l'interface au cours du temps, et elle est simple à mettre en oeuvre. Cependant elle n'est pas en soit conservative vis-à-vis de la masse. Des efforts répétés ont été entrepris pour corriger ce défaut, mais au prix d'une complexité accrue de la méthode (*Tryggvason et al. (2011)*).

Les simulations numériques de vagues de vent réalisées dans ce travail de thèse l'ont été à l'aide du module VOF du code de calcul JADIM. Cette méthode repose sur le taux de présence ou fraction volumique C_i de la phase i (*Hirt et Nichols (1981)*). Cette fonction vaut 1 dans les cellules remplies par la phase i , 0 dans les autres phases fluides, et prend des valeurs intermédiaires dans les cellules traversées par les interfaces. Pour

0	0	0	0
0.8	0.65	0.15	0
1	1	0.95	0.4
1	1	1	0.85

FIGURE 2.2 – Schéma de principe de la méthode *VOF*. Le taux de présence associé à une phase vaut 1 dans les cellules entièrement remplies par cette phase, 0 dans les autres phases, et prend des valeurs intermédiaires dans les cellules traversées par l'interface.

une configuration diphasique, il suffit de définir une seule distribution C pour l'une des deux phases. Le taux de présence est ainsi similaire à la fonction de Heaviside discutée ci-dessus. L'interface est représentée par l'iso-surface (ou iso-ligne) $C = 0.5$. La masse volumique se calcule simplement à partir de la conservation de la masse $\rho = \sum_i \rho_i C_i$. Si C est le taux de présence de la phase 2, alors elle s'écrit $\rho = \rho_2 C + \rho_1 (1 - C)$. Pour la viscosité, il n'existe pas de relation aussi naturelle, et il est nécessaire d'utiliser un modèle. Le plus répandu consiste à s'inspirer de la masse volumique, et ainsi à calculer une moyenne arithmétique de la forme $\mu = C\mu_2 + (1 - C)\mu_1$. On peut également considérer la moyenne géométrique $\mu = \mu_1\mu_2 / (C\mu_1 + (1 - C)\mu_2)$. On montre qu'au niveau de l'interface, le premier modèle permet un calcul correct des contraintes normales, tandis que le second est pertinent pour les contraintes de cisaillement (*Benkenida et Magnaudet (2000)*).

Avec la méthode *VOF*, l'interface est une surface matérielle interne au fluide dont le mouvement est résolu. Les conditions aux limites sur l'interface sont donc implicites, la continuité des vitesses et cisaillements est toujours assurée. C'est l'avantage principal de cette méthode, et ce qui la rend intéressante pour l'étude des vagues de vent. Elle permet ainsi d'étudier des déformations d'interface très importantes. L'autre avantage de cette méthode, qui découle du précédent, tient dans la gestion de la topologie de l'interface. Si celle-ci change, l'algorithme ne nécessite pas d'adaptation particulière.⁴ L'approche *VOF* a ainsi été utilisée notamment par *Deike et al. (2015)* et *Mostert et Deike (2020)* pour étudier le déferlement des vagues de vent en profondeur finie. Les premiers ont étudié les effets capillaires, tandis que les seconds se sont concentrés sur la dissipation inertielle associée au déferlement d'une onde solitaire. *Deike et al. (2016)* ont étudié les effets statistiques des bulles générées par le déferlement en profondeur infinie.

Toutefois, une attention particulière doit être accordée à la tension interfaciale γ , qui intervient théoriquement dans la condition dynamique à l'interface. Comme on ne manipule pas directement cette dernière, il est nécessaire de traduire son influence autrement. Pour cela, on introduit dans les équations de Navier-Stokes une densité volumique de force, distribuée dans tout l'espace, et de la forme $\gamma/\rho(\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\delta_I$. Ici \mathbf{n} est

4. « No special provision is necessary to perform reconnection or breakup of the interface and in this sense the change of topology is implicit in the algorithm. » (*Scardovelli et Zaleski (1999)*)

la normale à l'interface, et δ_I est une distribution de Dirac centrée sur l'interface. Le code JADIM utilise la méthode *Continuous Surface Force* (CSF), développée par *Brackbill et al. (1992)*. Elle consiste à distribuer la tension de surface au voisinage de l'interface à l'aide des gradients de C . La normale est calculée selon la relation $\mathbf{n} = \nabla C / \|\nabla C\|$, et la distribution de Dirac est évaluée comme $\delta_I = \|\nabla C\|$. Cette formulation a l'avantage de ne pas reposer sur la connaissance explicite de la position de l'interface. Cependant, comme elle repose sur gradients locaux de C , des variations brusques de l'orientation de l'interface peuvent générer des composantes artificielles de la force capillaire. Pour éviter ou limiter ce problème, on procède généralement à un lissage du taux de présence au voisinage de l'interface. Celle-ci n'est alors plus une surface de discontinuité, mais une zone de transition qui s'étend sur plus d'une cellule d'épaisseur. Notons également que le calcul des gradients de C introduit des erreurs, liées à la discrétisation spatiale. Ces erreurs peuvent générer des courants parasites (*spurious currents*) au voisinage de l'interface. Ces courants peuvent être complètement éliminés dans certaines approches. Dans JADIM, on se contente de limiter leur influence en lissant le champ de taux de présence plusieurs fois (*Bonometti (2005)*).

Wu et Deike (2021), puis *Wu et al. (2022)*, ont réalisé des DNS de vagues de vent à l'aide d'une approche VOF. Notons que ces auteurs utilisent également un algorithme de raffinement du maillage (*adaptive mesh refinement*) pour gérer les différentes échelles de la turbulence. Les premiers considèrent un écoulement laminaire bidimensionnel dans l'air, avec un profil de vitesse linéaire, afin de modéliser la sous-couche visqueuse. Pour tous les cas qu'ils rapportent, le nombre de Reynolds turbulent dans l'air (basé sur la hauteur de la couche d'air) ne dépasse pas 192. L'interface est initialisée avec une onde de Stokes d'ordre trois, de cambrure initiale $ak = 0.05$ (l'écoulement dans le liquide est initialisé en accord avec cette solution). Les auteurs étudient ainsi la croissance d'une vague de longueur d'onde donnée, qu'ils font varier de 0.9 à 24.4 cm. Pour les vagues ainsi simulées, le rapport u_*/c varie de 0.4 à 1. *Wu et al. (2022)* utilisent le même protocole, sur un domaine tridimensionnel, pour u_*/c variant de 0.125 à 0.5. L'interface est initialement plane, et figée le temps d'établir un écoulement turbulent dans l'air. Le nombre de Reynolds turbulent correspondant, basé sur la vitesse de frottement *nominale*,⁵ est fixé à 720. Le nombre d'onde k étant également fixé, cette configuration correspond à $k^+ = kv/u_* = 0.029$. Les auteurs font varier le rapport des viscosités, ce qui leur permet de fixer les nombres de Reynolds turbulent dans l'air et moyen dans le liquide indépendamment, ce dernier étant de l'ordre de 10^5 .

Pour finir, notons que les méthodes VOF et LS peuvent être couplées pour bénéficier à la fois des bonnes propriétés de conservation de la masse de la première, et du suivi d'interface précis de la seconde. C'est le cas par exemple de la méthode CLSVOF, développée par *Sussman et Puckett (2000)*. *Yang et al. (2018)* ont appliqué cette méthode à l'étude du déferlement par DNS. Ils considèrent un écoulement de type Couette, entraîné par un cisaillement constant imposé sur la frontière supérieure. La méthode consiste à résoudre la fonction distance ϕ , puis le taux de présence C . Ce dernier est utilisé pour altérer ϕ au voisinage de l'interface, de façon à assurer la conservation de la masse. Puis la densité et la viscosité sont calculées à partir de ϕ .

2.2 Modélisation de la turbulence

Nous abordons dans cette seconde partie notre stratégie de modélisation de la turbulence dans l'air. Après avoir décrit la problématique, nous présentons le cadre de la modélisation. Nous discutons ensuite des

5. C'est la vitesse de frottement qui permet d'équilibrer le gradient de pression de forçage.

\mathcal{L}_n	$u_{*,c}$	$Re_{*,c}$	N_n^K/N_1^K
\mathcal{L}_1	0.15	508	/
\mathcal{L}_{10}	0.23	805	2.8
\mathcal{L}_{100}	0.36	1276	7.9

TABLE 2.1 – Évolution de la vitesse de frottement critique avec la viscosité (en m/s). Le nombre de Reynolds turbulent est calculé à partir de la demi-hauteur d’air $h = 5.25$ cm de *Paquier et al. (2016)*. Le nombre de cellule N_n^K est calculé comme $Re_{*,c}^{9/4}$.

différentes stratégies qui existent, dont une en particulier que nous avons testée sans grand succès. Le modèle de turbulence que nous avons retenu est abordé plus en détails au chapitre suivant.

2.2.1 Description de la problématique

La stratégie de simulation qui permet de rendre compte le plus fidèlement d’un écoulement turbulent est la DNS. Celle-ci consiste à résoudre les équations de conservation sans modélisation de la turbulence. Il est alors nécessaire d’utiliser un maillage très raffiné, afin de capturer les structures dissipatives de l’écoulement. Celles-ci sont caractérisées par les échelles de Kolmogorov. Soit L l’échelle intégrale de l’écoulement, et Re_L le nombre de Reynolds intégral, basé sur L et sur la vitesse d’injection, caractéristique des gros tourbillons. L’échelle de Kolmogorov l_K suit la relation

$$l_K \propto L Re_L^{-3/4} \quad (2.4)$$

Quand on discrétise le domaine numérique, la plus petite cellule doit avoir une taille au plus de l’ordre de l_K . Le nombre de points du maillage est alors proportionnel à $(L/l_K)^3$, soit $Re_L^{9/4}$.

La génération des vagues de vent est caractérisée par une vitesse de vent seuil, en-deçà de laquelle la surface reste au repos. *Paquier et al. (2016)* ont étudié l’influence de la viscosité du liquide sur le seuil de transition entre le régime des ridules⁶, et le régime des vagues régulières. Ils montrent que la vitesse de frottement critique dans l’air suit la relation

$$u_{*,c} \propto \nu_l^n \quad \text{où } n = 0.2 \quad (2.5)$$

Ainsi lorsque la viscosité du liquide augmente, il faut souffler plus fort pour parvenir à générer des vagues. À titre indicatif, le tableau 2.1 rassemble les valeurs de $u_{*,c}$ calculées à partir de (2.5) pour plusieurs viscosités de liquide. Pour simplifier la lecture, nous utilisons la notation \mathcal{L}_n pour indiquer un liquide n fois plus visqueux que l’eau. L’évolution en loi de puissance se répercute directement sur le nombre de Reynolds turbulent dans l’air.

Les travaux numériques les plus récents menés par DNS sur le système air/eau se situent bien en-dessous de ces valeurs. *Li et Shen (2022)* étudient le mécanisme de Phillips pour $Re_* = 268$, et *Wu et al. (2022)* étudient la croissance exponentielle de vagues pré-existantes pour $Re_* = 720$. Nous souhaitons étudier l’influence de la viscosité du liquide sur la génération des vagues en la faisant varier sur plusieurs ordres de grandeur. Les valeurs rapportées dans le tableau 2.1 correspondent uniquement au seuil de la génération des vagues de vent

6. Nous rappelons que ce sont des structures de très faible amplitude, alignées avec la direction du vent.

regulières. Notre but est également d'étudier plusieurs vitesses de vent pour une viscosité fixée. La DNS ne semble donc pas appropriée pour une telle étude paramétrique.

La LES représente une approche moins gourmande en ressources. Elle est adaptée notamment aux simulations d'écoulements océaniques, pour représenter l'interaction entre la couche limite atmosphérique et un champ de vagues à large spectre. Cette approche consiste à simuler uniquement les grandes échelles de la turbulence, après avoir défini une échelle de coupure arbitraire dans le spectre turbulent. En-dessous de cette échelle de coupure, l'écoulement n'est pas résolu. Pour rendre compte de l'effet des petites échelles, situées en-deçà de cette échelle de coupure, sur les échelles résolues, il est nécessaire de mettre au point des modèles de sous-maille. Nous avons présenté quelques études numériques de vagues de vent à l'aide de LES à la section précédente. Celles-ci emploient une approche numérique de type *boundary-fitted*. Dans une situation monophasique, les modèles de sous-maille décrivent les corrélations entre les fluctuations turbulentes de vitesse non-résolues. Dans une simulation diphasique reposant sur une méthode à grille fixe, une cellule peut être remplie de liquide à un instant, puis d'air à l'instant suivant. Les fluctuations de l'interface, et donc du taux de présence, peuvent alors avoir une contribution de sous-maille. L'application d'un filtre spatial aux équations de conservation de quantité de mouvement entraîne alors l'apparition de très nombreuses corrélations, d'ordre deux ou trois entre les fluctuations de vitesse et de taux de présence. Il faut donc être capable de modéliser ces corrélations, ce qui n'est pas une chose aisée. Des travaux ont été initiés afin d'évaluer l'importance de ces diverses corrélations à partir de DNS d'écoulements diphasiques académiques (*Labourasse et al. (2007)*, *Vincent et al. (2008)*). À notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude de génération de vagues de vent par LES qui repose sur une méthode VOF.

Notre modélisation de la turbulence s'inscrit dans le cadre plus classique des études de type RANS. Malgré les biais propres à ce type d'approche, nous l'avons choisie car elle permet une étude paramétrique de la génération des vagues de vent basée sur une approche VOF. De plus, des travaux théoriques (*Ó Náraigh et al. (2011)*) montrent que ce type d'approche est capable de prédire l'instabilité d'une interface soumise à un écoulement turbulent. Nous présentons ci-dessous le cadre de cette modélisation.

2.2.2 Cadre de la modélisation

Séparation des composantes turbulentes et orbitales

Nous cherchons à décomposer les champs en trois contributions : un champ moyen, qui ne dépend que de la distance à la position moyenne de l'interface ; un champ instationnaire ondulatoire, lié à la dynamique de l'interface ; et un champ instationnaire tridimensionnel turbulent. Supposons qu'il existe un opérateur de moyenne qui permet de séparer les contributions turbulentes du reste de l'écoulement, notons-le $\langle \cdot \rangle$. Alors pour tout champ ϕ , on a

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \langle \phi \rangle(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

où ϕ' est la contribution turbulente. Cet opérateur a les propriétés suivantes pour deux champs ϕ et ψ :

$$\langle \phi' \rangle = 0 \quad (2.7)$$

$$\langle \langle \phi \rangle \psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle \quad (2.8)$$

$$\langle \phi \psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle + \langle \phi' \psi' \rangle \quad (2.9)$$

Notons x la direction du vent, y la direction transverse, et z la direction verticale. La position instantanée de l'interface est repérée par $\zeta(x, y, t)$. Dans le cadre du modèle de Miles, les fluctuations instationnaires de l'interface ne sont dues qu'à l'interaction entre le champ de vitesse moyen et l'interface. Cela signifie que $\langle \zeta \rangle = \zeta$, et que les corrélations entre les contributions turbulentes u'_i , et les déformations de la surface ζ sont nulles. Autrement dit, $\langle u'_i \zeta \rangle = 0$, tandis que $\langle u_i \zeta \rangle = \langle u_i \rangle \zeta \neq 0$. Nous supposons que le champ de vagues est bidimensionnel, soit $\zeta(x, y, t) = \zeta(x, t)$. Alors la moyenne spatiale dans la direction transverse y est une définition convenable pour $\langle \cdot \rangle$. *Reynolds et Hussain (1972)* utilisent un formalisme similaire pour l'analyse de données expérimentales des interactions entre un champ d'ondes et un écoulement cisailé turbulent. L'opération $\langle \cdot \rangle$ est alors la moyenne de phase. *Miles (1993)* propose un raisonnement similaire basé sur la moyenne dans la direction y .

Dans le cadre d'une simulation VOF bidimensionnelle, les déformations de l'interface sont définies à partir du taux de présence $C(x, z, t)$. L'interface est repérée par l'iso-ligne $C(x, z, t) = 0.5$. Il y a donc équivalence entre la dynamique de C et celle de ζ . Cela se traduit mathématiquement par

$$C(x, z, t) = \mathcal{H}[\zeta(x, t) - z] \quad (2.10)$$

où \mathcal{H} est une fonction de Heaviside légèrement lissée, qui est nulle si $z > \zeta(x, t)$, et vaut 1 si $z < \zeta(x, t)$.⁷ Nous pouvons alors reformuler la décomposition ci-dessus à partir du taux de présence. Ainsi, $\langle C \rangle = C$. Par conséquent $\langle C u'_i \rangle = 0$, et $\langle C u_i \rangle = \langle C \rangle \langle u_i \rangle$. La quantité de mouvement locale s'écrit $\rho u_i = (C \rho_l + (1 - C) \rho_a) u_i$. Sa moyenne s'écrit donc $\langle \rho u_i \rangle = (\langle C \rangle \rho_l + (1 - \langle C \rangle) \rho_a) \langle u_i \rangle = \rho \langle u_i \rangle$. Cet opérateur n'entraîne donc pas de corrélation entre les propriétés physiques ρ et μ d'une part, et les fluctuations turbulentes du champ de vitesse d'autre part. De ce fait, la seule corrélation faisant intervenir ces fluctuations est celle qui provient du terme non-linéaire $u_i u_i = \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle + 2u'_i \langle u_i \rangle + u'_i u'_i$.

Pour simplifier la lecture, nous omettons les crochets autour du taux de présence. C désigne donc directement le taux de présence résolu. Idem pour la densité et la viscosité, qui sont des distributions spatiales définies à partir de C . Appliquons cet opérateur aux équations de conservation. Nous considérons un écoulement incompressible, donc la conservation de la masse est équivalente à la conservation du volume. L'équation de conservation du volume moyennée devient ainsi

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (C \langle u_i \rangle) = 0 \quad (2.11)$$

L'équation de quantité de mouvement moyennée (RANS) s'écrit quant à elle

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle u_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = \rho g_i - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \langle S_{ij} \rangle) - \gamma \kappa \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tau_{ij}^t) \quad (2.12)$$

avec le tenseur des déformations $2S_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$. Ici g_i représente la i -ème composante de l'accélération de pesanteur. Nous reviendrons là-dessus dans le chapitre 4. Le dernier terme traduit la contribution de la tension interfaciale γ , selon le modèle CSF présenté à la section précédente. Ici κ est la courbure moyenne locale, calculée à partir des gradients de C .

En appliquant l'opérateur de moyenne, nous avons fait apparaître le terme non-linéaire $\tau_{ij}^t = -\langle u'_i u'_j \rangle$, qui

⁷. Numériquement, l'interface a une épaisseur de deux à trois mailles. Plus de détails sur ce point sont fournis dans la section précédente.

définit le tenseur des contraintes turbulentes (spécifiques).⁸ Ce tenseur est symétrique ($\tau_{ij}^t = \tau_{ji}^t$), et contient six composantes inconnues. Il manque donc six équations modèle pour fermer le système d'équations.

Transport des contraintes turbulentes

On peut établir une équation de transport pour chaque composante du tenseur τ_{ij}^t à partir des équations non-moyennées de quantité de mouvement. Si on les écrit sous la forme $\mathcal{N}(u_i) = 0$, on peut former le système d'équations $\langle u'_i \mathcal{N}(u_j) + u'_j \mathcal{N}(u_i) \rangle$. Après prise de leur moyenne, on montre qu'on obtient les équations de transport suivantes (*Wilcox (2006)*) :

$$\frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j} = -\tau_{ik}^t \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \tau_{jk}^t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_k} + D_{ijk} \right] \quad (2.13)$$

Dans le membre de droite, les deux premiers termes sont des termes de production. On a introduit trois nouveaux tenseurs, définis par

$$\epsilon_{ij} = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle \quad ; \quad \Pi_{ij} = \left\langle \frac{p'}{\rho} \frac{S'_{ij}}{2} \right\rangle \quad ; \quad D_{ijk} = \langle u'_i u'_j u'_k \rangle + \frac{1}{\rho} \langle p' u'_i \rangle \delta_{jk} + \frac{1}{\rho} \langle p' u'_j \rangle \delta_{ik} \quad (2.14)$$

Le premier est homogène à un taux de dissipation, le second est un terme de redistribution par la pression, et le dernier de transport turbulent. Ils constituent de nouvelles inconnues, sous la forme de corrélations doubles ou triples. Le terme de transport D_{ijk} est souvent modélisé à l'aide des gradients de τ_{ij}^t . La dissipation peut être modélisée sous la forme $\epsilon_{ij} = (2/3)\epsilon\delta_{ij}$, où $\epsilon = \epsilon_{ii}/2$ ($\delta_{ii} = 3$). L'argument derrière ce modèle très simple est de considérer que la dissipation a lieu au niveau des plus petites échelles, où la turbulence est supposée isotrope. Le terme ϵ peut alors être calculé comme dans le modèle $k - \epsilon$ (voir ci-dessous). Il existe plusieurs modèles pour le terme Π_{ij} . Citons par exemple les modèles SSG de *Speziale et al. (1991)*, et LRR de *Launder et al. (1975)*. L'approche basée sur la résolution de (2.13) est qualifiée de modélisation de second ordre, car elle consiste à calculer directement les moments turbulents d'ordre deux. Elle permet ainsi de connaître finement les six composantes du tenseur des contraintes turbulentes. De ce fait, elle est évidemment lourde à mettre en œuvre, et nécessite des conditions aux limites appropriées pour chaque composante de τ_{ij}^t .

Modélisation sous forme de viscosité turbulente

Cette approche beaucoup plus simple repose sur une hypothèse formulée par *Boussinesq (1877)*. L'idée est de rendre compte de l'affaiblissement des gradients de vitesse de l'écoulement moyen provoqué par la turbulence. Pour cela, on introduit dans les équations de quantité de mouvement un terme dissipatif, qui joue un rôle similaire à la viscosité moléculaire. C'est la viscosité turbulente, qui n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement turbulent. Ainsi elle doit dépendre de « l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite » (*Boussinesq (1877)*).

L'inspiration commence avec le tenseur des contraintes, défini par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.15)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Le premier terme rend compte des

8. C'est une quantité par unité de masse.

contraintes normales, induites par la pression. Le second terme correspond aux contraintes tangentielles et rend compte des effets visqueux. Pour un fluide newtonien, les contraintes visqueuses sont proportionnelles aux cisaillements, ce qui se traduit par $\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$. L'approximation de Boussinesq consiste à modéliser le tenseur des contraintes turbulentes de manière similaire. On introduit alors un champ de viscosité turbulente ν_t , qui fait le lien entre le cisaillement turbulent et les gradients de vitesse moyenne selon la relation

$$\tau_{ij}^t = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2\nu_t\langle S_{ij} \rangle \quad (2.16)$$

où $k = \langle q^2 \rangle / 2 = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$ est l'énergie cinétique turbulente. L'écoulement étant incompressible, $S_{ii} = \langle S_{ii} \rangle = 0$. Le premier terme est donc la partie symétrique du tenseur des contraintes turbulentes. Il agit de manière semblable à la pression pour le tenseur σ_{ij} . On incorpore donc ce terme au champ de pression moyenne $\langle p \rangle$, et la pression résolue est définie par

$$P = \langle p \rangle + \rho \frac{2}{3}k \quad (2.17)$$

En introduisant cette formulation dans l'équation (2.12), on obtient l'équation de quantité de mouvement moyennée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle u_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = \rho \mathbf{g} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} ((\mu + \rho \nu_t) \langle S_{ij} \rangle) - \gamma \kappa \frac{\partial C}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tau_{ij}^t) \quad (2.18)$$

À ce stade, nous n'avons fait que repousser le problème de la fermeture, et on doit désormais se demander comment modéliser ν_t . Nous présentons ci-dessous quelques stratégies de modélisation de cette viscosité turbulente.

2.2.3 Modèles de viscosité turbulente

Modèles algébriques

Le modèle le plus simple est un modèle algébrique proposé par *Prandtl (1925)*. Il introduit le concept de longueur de mélange l , qui représente la longueur caractéristique des tourbillons les plus énergétiques. Sur la base de considérations dimensionnelles, on montre que $\nu_t \propto l^2 T^{-1}$, où T est un temps caractéristique de ces tourbillons. Ce temps peut être construit à partir des gradients de vitesse moyenne. Dans un écoulement quasi-parallèle, où les gradients de vitesse se situent principalement dans la direction verticale z , Prandtl propose de modéliser la viscosité turbulente selon la relation

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (2.19)$$

Pour un écoulement de couche limite turbulente au-dessus d'une paroi, on suppose que la taille caractéristique l est proportionnelle à la distance z à la paroi :

$$l = \kappa z \quad (2.20)$$

avec $\kappa \sim 0.4$ la constante de von Kármán. Pour un tel écoulement de paroi, on distingue plusieurs couches. Très près de la paroi, les contraintes visqueuses dominent les contraintes turbulentes, et on parle alors de

sous-couche visqueuse. Son épaisseur est estimée à l'aide de l'échelle de longueur $\delta_\nu = \nu/u_*$, où u_* est la vitesse de frottement, définie à partir du cisaillement pariétal. Très au-delà, se trouve une région où le rapport des contraintes s'inverse, et les contraintes visqueuses deviennent négligeables. On peut alors raisonnablement considérer que la viscosité turbulente ν_t est bien plus grande que la viscosité moléculaire. Dans cette région, la vitesse longitudinale suit un profil de loi logarithmique de la forme

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log(z^+) + cte \quad (2.21)$$

L'exposant + signifie que les quantités ont été adimensionnées par rapport aux grandeurs de paroi. La loi (2.21) reste vraie pour $z/h \ll 1$, où h est une longueur caractéristique de l'écoulement moyen (hauteur de canal, diamètre de canalisation, etc.). Alors la viscosité turbulente s'écrit $\nu_t/\nu = \kappa z^+$ dans la couche logarithmique. *Pirozzoli (2014)* note que les déviations à la loi logarithmique apparaissent à partir de $z/h \sim 0.2 - 0.3$.

Clauser (1956) propose un modèle de viscosité turbulente en deux parties, jusqu'à la limite supérieure de la couche limite. Dans la partie inférieure de l'écoulement, ν_t suit le modèle de longueur de mélange de Prandtl. Dans les couches supérieures, la viscosité turbulente devient constante. Ce comportement est proposé en considérant que la paroi n'a plus beaucoup d'influence sur les tourbillons en-dehors de la couche logarithmique.

Van Driest (1956) propose une reformulation de ce modèle pour y inclure les effets visqueux. Il considère la zone de transition entre les couches visqueuses et logarithmiques. C'est la région où les contraintes visqueuses et turbulentes sont comparables. Il établit alors le modèle suivant, déjà discuté dans le chapitre 1 :

$$l = l_0 \left(1 - e^{-\frac{z^+}{A^+}} \right) \quad (2.22)$$

où l_0 est la longueur de mélange de Prandtl définie par (2.20). La constante A^+ représente ainsi l'épaisseur de cette couche de transition.

Suivant *Cess (1958)*, *Reynolds et Tiederman (1967)* proposent un modèle analytique de la viscosité turbulente pour un écoulement développé dans un canal plan. Elle est donnée par

$$\frac{\nu_t}{\nu}(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[\frac{\kappa Re \sqrt{B}}{3} (2\eta - \eta^2)(3 - 4\eta + 2\eta^2) \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta Re \sqrt{B}}{A^+}\right) \right) \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

où $\eta = z/h$ est la distance à la paroi, adimensionnée par la demi-hauteur h du canal. Ce modèle est inspiré du modèle de longueur de mélange, et il fait intervenir les constantes de von Kármán κ , et de Van Driest A^+ . B est le gradient de pression moteur adimensionné par la vitesse débitante U_m , sur laquelle est défini le nombre de Reynolds Re :

$$B = -\frac{h}{\rho U_m^2} \frac{dP}{dx} \quad Re = \frac{U_m h}{\nu} \quad (2.24)$$

On montre que le produit $Re\sqrt{B}$ est équivalent au nombre de Reynolds turbulent $Re_* = u_* h/\nu$. À l'équilibre,

la projection de l'équation de Navier-Stokes stationnaire suivant x devient

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.25)$$

À la paroi, τ_{xz} est égal au cisaillement pariétal τ_* , et il est nul sur le plan de symétrie. En intégrant (2.25) sur la hauteur h , et en adimensionnant la pression par la vitesse débitante U_m , on montre que $B = u_*^2/U_m^2 = (Re_*/Re)^2$. Cela permet de faire intervenir le nombre de Reynolds turbulent directement dans le calcul de ν_t .

La figure 2.3a montre l'évolution de la viscosité turbulente adimensionnée ν_t/ν , pour un écoulement en canal jusqu'à $\eta = 1$. L'insert montre le comportement très près de la paroi. Dans cette région de l'écoulement, le modèle (2.23) se réduit à

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \frac{\kappa^2 Re_*^4}{A^2} \eta^4 + O(\eta^5) \quad (2.26)$$

Un développement asymptotique des fluctuations turbulentes montre que $u' = az + bz^2 + O(z^3)$, tandis que $w' = cz^2 + O(z^3)$ (*Wilcox (2006)*). Le cisaillement turbulent va donc comme z^3 . Dans la sous-couche visqueuse, l'écoulement est dominé par la viscosité moléculaire. Il s'agit donc d'un écoulement laminaire, et le profil de vitesse moyenne est linéaire.⁹ Ainsi la viscosité turbulente doit présenter un profil cubique en z . Le modèle de Cess-Reynolds-Tiederman prédit donc une décroissance trop rapide de la viscosité turbulente très près de la paroi. Cette caractéristique est héritée du modèle de Van Driest, sur lequel il est basé. Toutefois cette inconsistance n'est pas dramatique, car cette région de l'écoulement est dominée par les effets visqueux.

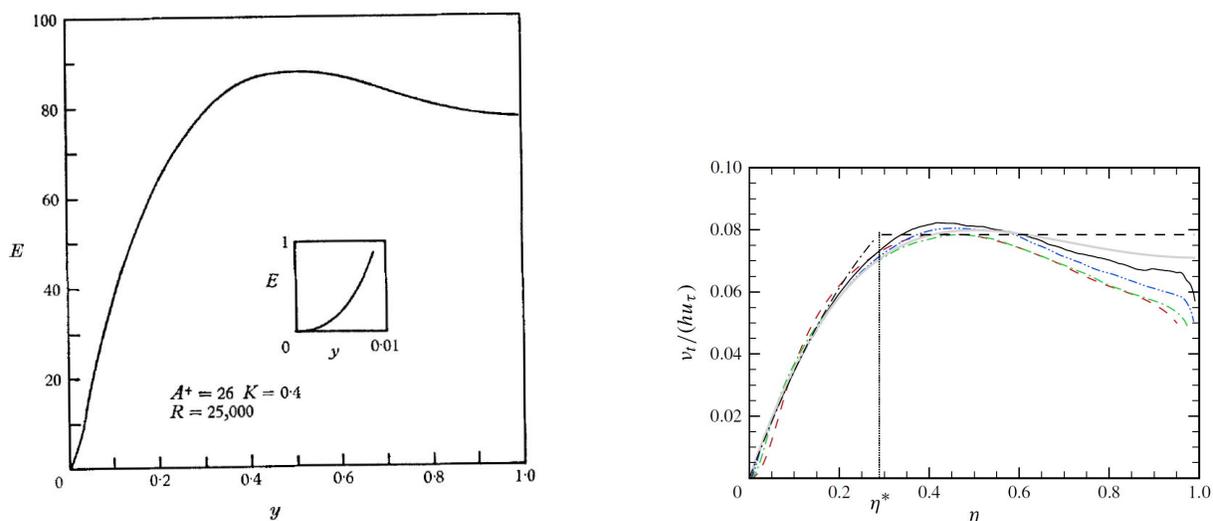
Pirozzoli (2014) considère la formulation non-visqueuse suivante, pour un très haut nombre de Reynolds :

$$\frac{\nu_t}{\nu}(\eta) = Re_* \frac{\kappa}{6} (2\eta - \eta^2)(3 - 4\eta + 2\eta^2) = Re_* \frac{\kappa}{6} (1 - \xi^2)(1 + 2\xi^2) \quad (2.27)$$

où $\xi = 1 - \eta$. Il compare ce modèle, ainsi que celui de longueur de mélange modifié de Clauser, avec des résultats de DNS en canal jusqu'à $Re_* = 4000$. La figure 2.3b montre les profils de viscosité turbulente ainsi obtenus. Le modèle discuté ici parvient à reproduire les mêmes caractéristiques que les viscosités turbulentes calculées à partir des DNS. Comme on peut s'y attendre, plus Re est élevé, plus l'accord se confirme.

L'intérêt principal de ce modèle est d'offrir une expression analytique simple, qui ne fait intervenir que la distance à la paroi et le nombre de Reynolds turbulent. Il est valable sur toute la hauteur de la couche limite, jusqu'au cœur de l'écoulement. En revanche, il s'agit d'un modèle uniforme suivant x , et invariant dans le temps. Son adaptation à une couche limite au-dessus d'une interface déformable nécessite une attention particulière. De plus, la simplicité de ce modèle est aussi sa plus grande faiblesse. En effet, c'est un modèle local qui ne dépend que de la distance verticale z à la paroi. Sur une paroi plane, son caractère local peut se justifier par l'auto-similarité de l'écoulement. En revanche, sur une paroi non plane (et éventuellement déformable), il ne permet pas de rendre compte de l'influence de l'amont sur l'aval. Nous avons tenté d'implémenter ce modèle dans des simulations diphasiques. La distance η devient la distance verticale à l'interface. La variation longitudinale de l'interface intervient ainsi implicitement dans le modèle via η . La procédure pour repérer la position de l'interface est présentée au début du chapitre 4. Elle fournit une courbe monovaluée $z_s(x)$, correspondant aux maxima de l'interface. Se pose alors la question de la gestion de ν_t lorsque l'interface devient multivaluée. Prenons l'exemple d'un déferlement, l'interface présente un profil en S, et il peut y

9. On montre ce comportement à partir de la relation (2.25), où $\tau_{xz} = 2\mu d\langle u \rangle/dz$.



(a) Modèle (2.23). Ici $E = \nu_t/\nu$, et y est la distance adimensionnée notée η dans le texte. Tiré de *Reynolds et Tiederman (1967)*.

(b) Comparaison du modèle de Cess-Reynolds-Tiederman dans la limite $Re_* \rightarrow \infty$ (ligne grise), avec des résultats de DNS pour Re_* allant de 546 à 4079 (lignes colorées du rouge vers le noir), et le modèle de longueur de mélange modifié de Clauser (tirets noirs). Tiré de *Pirozzoli (2014)*.

FIGURE 2.3 – Évolution de la viscosité turbulente en canal d'après le modèle de Cess-Reynolds-Tiederman.

avoir au moins trois positions de l'interface l'une au-dessus de l'autre pour une abscisse x donnée. Nous avons supposé dans un premier temps que, dans les régions multi-valuées, l'air présent sous la courbe $z_s(x)$ n'est pas turbulent, et que l'on pouvait simplement y imposer $\nu_t = 0$. Cette situation peut alors générer des discontinuités longitudinales de ν_t , liées aux discontinuités de z_s . Pour résoudre ce problème, nous avons tenté d'appliquer des lissages longitudinaux au champ ν_t . Enfin, lorsque l'interface est fortement déformée, il peut y avoir un décollement de la couche limite à partir des crêtes. *Franceschini et al. (2020)* rapporte des résultats de DNS de l'écoulement au-dessus d'une marche descendante lisse avec décollement. La figure 2.4 présentent la distribution de viscosité turbulente à l'aval de la marche. On y constate la présence d'un excès de ν_t . Cela est impossible à reproduire à partir d'un modèle local comme celui de Cess-Reynolds-Tiederman. Il est alors nécessaire de chercher un modèle plus sophistiqué.

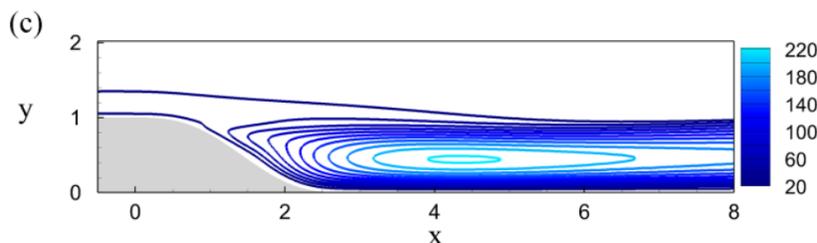


FIGURE 2.4 – Distribution de viscosité turbulente à l'aval d'une marche descendante lisse avec décollement. Tiré de *Franceschini et al. (2020)*, d'après une DNS de *Dandois et al. (2007)*.

Modèles basés sur l'énergie cinétique turbulente

La plupart des modèles de viscosité turbulente non-algébriques font appel à l'énergie cinétique turbulente *Schlichting et Gersten (2017)*. Pour rappel $k = \langle u'_i u'_i \rangle = -\tau_{ii}^t$. On peut donc établir une équation pour k à partir de l'équation (2.13). En remarquant que $\Pi'_{ii} = 0$, on montre que l'évolution de k est gouvernée par l'équation

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij}^t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle - \frac{1}{\rho} \langle p' u'_j \rangle \right] \quad (2.28)$$

Dans le membre de droite, les termes représentent, dans l'ordre, la production turbulente, la pseudo-dissipation $\epsilon = \nu \langle u'_{i,j} u'_{i,j} \rangle$, la diffusion visqueuse, le transport turbulent, et un terme de diffusion par la pression. En-dehors de la diffusion visqueuse, tous les termes sont inconnus et doivent être modélisés par des lois de fermeture. Les deux derniers termes sont issus du tenseur D_{ijk} défini par (2.14). Ils peuvent être considérés comme une forme de diffusion turbulente, et sont alors modélisés à l'aide du gradient de k , sous la forme $\nu_t k_{,j}$. Le terme de production est modélisé sous la forme (2.16), et nécessite de trouver un modèle pour ν_t . L'équation (2.28) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij}^t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.29)$$

L'énergie cinétique turbulente est dimensionnellement homogène à $L^2 T^{-2}$, et la pseudo-dissipation à $L^2 T^{-3}$. On peut donc exprimer cette dernière sous la forme $\epsilon \propto k^{3/2}/L$, où L est une longueur caractéristique des grandes échelles de la turbulence. De même, on montre que $\nu_t \propto k^{1/2} L$. Si on établit un modèle pour L , le système est fermé.

Prandtl (1945) propose un modèle où L est définie à partir de la longueur de mélange.

Bradshaw et al. (1967) proposent une relation empirique reliant directement le cisaillement turbulent et l'énergie cinétique turbulente :

$$\tau_{xz}^t = 0.30k \quad (2.30)$$

Cette modélisation est applicable aux couches limites, aux jets et aux couches de mélange. La pseudo-dissipation est remplacée par $(\tau_{xz}^t)^{3/2}/L$, et L suit un profil similaire à celui proposé par *Clauser (1956)*. L'équation de k devient alors une équation des contraintes turbulentes. *Townsend (1972)* applique ce modèle à la génération des vagues de vent. Il définit la longueur à partir de l'altitude par rapport à la position moyenne des vagues. Le terme de diffusion turbulente est modélisé sous forme du gradient de τ_{xz} .

Afin de rendre compte des effets d'un gradient de pression adverse, *Pletcher (1978)* calcule la longueur L à l'aide d'une équation différentielle ordinaire.

D'autres modèles dits à deux équations se concentrent sur la modélisation de la dissipation, plutôt que celle de la longueur L . Le modèle $k - \epsilon$ propose de résoudre une équation de transport de la pseudo-dissipation. Celle-ci est modélisée sur la base d'une approche similaire à celle qui conduit à l'équation (2.29). À partir de considérations dimensionnelles, on a $\nu_t \propto k^2/\epsilon$, ce qui permet de faire le lien entre les équations de k et de ϵ . Le modèle $k - \omega$ suit une approche similaire. Au lieu de considérer la pseudo-dissipation ϵ , on pose $\omega = \epsilon/k$, et on résout une équation de transport pour ω . Cette grandeur est la dissipation par unité d'énergie cinétique turbulente, ou encore le taux de dissipation spécifique.¹⁰ Elle est homogène à l'inverse d'un temps,

10. « dissipation per unit turbulent kinetic energy » selon *Schlichting et Gersten (2017)*, « specific dissipation rate » selon *Wilcox (1989)*.

c'est pourquoi on parle aussi de fréquence de la turbulence. On calcule alors la viscosité turbulente $\nu_t = k/\omega$.

À l'approche d'une paroi, ν_t va comme z^3 alors que k va comme z^2 . Ainsi la pseudo-dissipation a un comportement singulier de la forme $1/z$. Le même problème se pose pour ω . La question des conditions aux limites est donc délicate à traiter pour ces variables. La régularisation est généralement réalisée à l'aide de fonctions de paroi. Une stratégie est d'utiliser la notion de rugosité. On considère une altitude z_r non nulle, proche de la paroi, et telle que $u(z_r) = 0$. Au-dessus, la vitesse suit un profil logarithmique de la forme (2.21). Connaissant le cisaillement pariétal, on en déduit la taille de la rugosité z_r . Le premier point du maillage est alors placé à cette altitude. En $z = z_r$, les autres grandeurs, et en particulier ϵ , sont finies. Cette approche convient pour des écoulements simples où la vitesse suit un profil logarithmique. Lorsque l'écoulement présente un décollement, la modélisation devient plus ardue. *Wilcox (1989)* propose une solution pour le modèle $k-\omega$ en présence d'un gradient de pression adverse. Il modifie le profil de vitesse à l'aide du gradient de pression local. Si le traitement d'une paroi solide est complexe, cela est d'autant plus vrai pour une interface déformable. Si on souhaite adapter ce type de modèle à la simulation des vagues de vent, plusieurs questions se posent. Comment déterminer cette altitude ? Doit-elle être fixe ou variable, et si oui comment ? Dans le cadre d'une approche VOF sans reconstruction d'interface, comment définir cette sous-couche explicitement ?

Modèles à une équation

Il existe une autre alternative dont nous n'avons pas encore parlé. Il s'agit de modèles qui résolvent directement une équation de transport pour la viscosité turbulente. C'est l'approche que nous avons choisie pour modéliser la turbulence dans l'air. *Wilcox (2006)* propose une revue de plusieurs de ces modèles, et notamment du modèle de Spalart-Allmaras, qui a retenu notre attention. En plus de sa simplicité de mise en œuvre, il permet d'appréhender aisément les conditions aux limites sur une paroi.

Le chapitre 3 lui est consacré. Les adaptations de ce modèle à des écoulements diphasiques sont abordées au chapitre 4.

Chapitre 3

Implémentation et validations numériques d'un modèle de turbulence

Nous avons présenté au chapitre précédent notre stratégie de modélisation de la turbulence dans l'air. Elle fait intervenir une distribution de viscosité turbulente pour représenter les contraintes turbulentes. Nous avons choisi d'utiliser le modèle de Spalart-Allmaras pour prédire cette viscosité. Nous présentons dans ce chapitre ce modèle, et l'implémentation que nous avons réalisée dans JADIM. Nous terminons avec quelques cas tests monophasiques, à savoir le canal plan, la marche descendante, et l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée. Pour chacun de ces cas tests, nous comparons nos résultats à des données expérimentales et/ou numériques.

3.1 Modèle de Spalart-Allmaras

Le modèle de Spalart-Allmaras (SA) est un modèle à une équation, proposé au début des années 1990 pour l'étude des écoulements aérodynamiques à haut nombre de Reynolds. Il a été présenté en premier lieu en 1992, dans un article de conférence (*Spalart et Allmaras (1992)*). Ses auteurs l'ont ensuite republié dans la revue La Recherche Aérospatiale (*Spalart et Allmaras (1994)*). Ils ont construit ce modèle en ayant en tête des écoulements cisailés quasi-parallèles, comme les jets ou les écoulements de couche limite turbulente. Il est adapté à des obstacles profilés ou non, comme l'indique la figure 3.1. De nombreuses études, principalement pour des écoulements compressibles, se sont reposées sur ce modèle¹, et il a fait l'objet de plusieurs mises à jour. Nous avons utilisé la version présentée par *Allmaras et al. (2012)*. Cette dernière corrige notamment un problème de définition du terme de production.

Le modèle consiste en une équation de transport directement pour la viscosité turbulente. Il est ainsi plus simple à mettre en place que des modèles plus complexes comme les modèles $k - \epsilon$ ou $k - \omega$ par exemple. En outre, il a l'avantage de reposer sur des conditions aux limites simples et naturelles, puisque la viscosité

1. 1778 citations pour l'article de 1992 selon la base de données Web of Science Core Collection consultée le 29 octobre 2021.

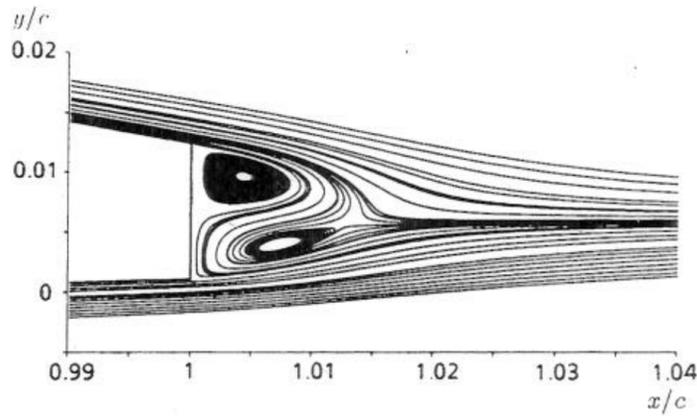


FIGURE 3.1 – Lignes de courant à l'arrière d'un obstacle profilé obtenues grâce au modèle de Spalart-Allmaras (figure tirée de *Spalart et Allmaras (1994)*)

turbulente s'annule simplement sur les parois. Cette équation ne découle bien entendu pas directement des principes fondamentaux. Elle a été construite pas à pas, afin de rendre compte des différentes caractéristiques des écoulements turbulents que le modèle aborde. Il fait ainsi intervenir plusieurs paramètres numériques, calibrés notamment pour retrouver la loi logarithmique classique d'un écoulement de couche limite au-dessus d'une paroi plane. Il prend en compte le raccordement à la paroi via un traitement particulier de la sous-couche visqueuse. Le modèle complet dispose d'un terme (*trip term*) pour rendre compte de la transition vers la turbulence. Nous n'avons pas intégré ce terme, car nous considérons que la couche limite dans l'air est déjà largement turbulente avant la génération des vagues. La version que nous avons utilisée est résumée par les trois relations suivantes :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = P - D + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}))\nabla\tilde{\nu}] + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2 \quad (3.1)$$

$$P = c_{b1}\tilde{\Omega}\tilde{\nu} \quad D = c_{w1}f_w \left[\frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 \quad (3.2)$$

$$\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu} \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.3)$$

Le terme du membre de gauche de (3.1) représente la dérivée particulaire, au sens de l'écoulement résolu. Dans le membre de droite, les termes représentent dans l'ordre la production, la dissipation, et la diffusion. Nous détaillons ces termes un à un plus loin. Les valeurs des paramètres numériques sont rassemblées dans le tableau 3.1. Les indices des différentes quantités correspondent ainsi à leur rôle dans le modèle :

- b pour le modèle de base, qui comprend les termes de production et de diffusion, impliqués dans les écoulements cisailés libres
- w pour le terme de destruction, lié à la présence d'une paroi (*wall*), comme dans les écoulements de couche limite
- v pour la correction visqueuse, qui rend compte des aspects liés à la valeur finie du nombre de Reynolds.

L'équilibre entre les trois termes du membre de droite de (3.1) est garanti en imposant que $c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma$.

c_{b1}	c_{b2}	σ	κ	c_{w1}	c_{w2}	c_{w3}	c_{v1}	c_{v2}	c_{v3}
0.135	0.622	2/3	0.41	2.76	0.3	2	7.1	0.7	0.9

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle de Spalart-Allmaras

Le modèle est construit de sorte que la solution de cette équation de transport, notée $\tilde{\nu}$, suive un profil linéaire, égal à $\kappa z u_*$ jusqu'à la paroi. Cela permet notamment de retrouver la loi de paroi logarithmique pour la vitesse longitudinale. La distribution de viscosité turbulente ν_t est ensuite calculée à partir de $\tilde{\nu}$ via la relation 3.3. Elle fait intervenir une fonction d'amortissement f_{v1} , comprise entre 0 et 1. Ainsi les deux distributions sont identiques dans la couche logarithmique et jusque dans le cœur de l'écoulement, tandis que dans la sous-couche visqueuse ν_t suit un profil quartique proportionnel à z^4 .

Nous nous intéressons en premier lieu au terme de production P . La viscosité turbulente a un lien étroit avec les gradients de vitesse moyenne. Dans les écoulements aérodynamiques, la turbulence est généralement corrélée à la présence de vorticité. C'est donc assez naturellement que les auteurs ont choisi cette dernière comme source pour la quantité à résoudre. Ils précisent qu'il peut y avoir des régions de vorticité sans présence de turbulence, par exemple derrière les chocs, mais que la vorticité y est de toute façon trop faible pour générer une viscosité turbulente significative. Le terme de production P est construit ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} & f_{v2} &= 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \\ \tilde{\Omega} &= \Omega + \begin{cases} \bar{\Omega} & \text{si } \bar{\Omega} \geq -c_{v2} S \\ \frac{S(c_{v2}^2 S + c_{v3} \bar{\Omega})}{(c_{v3} - 2c_{v2}) S - \bar{\Omega}} & \text{si } \bar{\Omega} < -c_{v2} S \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans ces expressions, Ω est la norme de la vorticité de l'écoulement résolu, et $\bar{\Omega}$ est une correction visqueuse par rapport à Ω . Le terme $\tilde{\Omega}$ est ainsi une modification de la vorticité, tenant compte des effets visqueux.   l'origine, la définition était simplement $\tilde{\Omega} = \Omega + \bar{\Omega}$ *Spalart et Allmaras (1992)*. Comme le montre la figure 3.2, il existe une gamme de valeurs de $\tilde{\nu}$ pour lesquelles f_{v2} peut être négative. Il existe donc des régions de l'écoulement où $\tilde{\Omega}$ peut devenir nulle, voire négative si Ω est suffisamment faible (par exemple dans la partie supérieure de la couche limite). Pour pallier ce problème, *Allmaras et al. (2012)* proposent une correction en fonction de la valeur de $\bar{\Omega}/\Omega$, indiquée par (3.4), et représentée sur la figure 3.3. La courbe en tirets noirs correspond au modèle original de 1992. La partie rouge correspond à la formulation alternative de $\bar{\Omega}$, qui s'applique si $\bar{\Omega} < -c_{v2} \Omega$. Cette correction introduit les paramètres c_{v2} et c_{v3} . Le premier permet de contrôler le point à partir duquel la correction doit s'appliquer, indiquée par la séparation entre les courbes rouge et en tirets noirs. Le second contrôle le niveau asymptotique de $\tilde{\Omega}$ pour $\bar{\Omega}/\Omega \rightarrow -\infty$.

Nous nous tournons vers le terme de destruction D . Une paroi agit le plus souvent comme source de turbulence, en générant de la vorticité. Elle agit également comme un puits. Les fluctuations de pression transmettent l'information concernant la position de la paroi en tout point de l'écoulement. Cette dernière bloque ainsi les fluctuations de vitesse normale, qu'elle contraint à s'annuler. Les auteurs ont ainsi construit le terme de destruction à partir de la distance locale à la paroi la plus proche, notée d . Ce terme prend la forme $D \propto (\tilde{\nu}/d)^2$, et sa formulation complète est le second élément de 3.2. Nous avons déjà discuté du

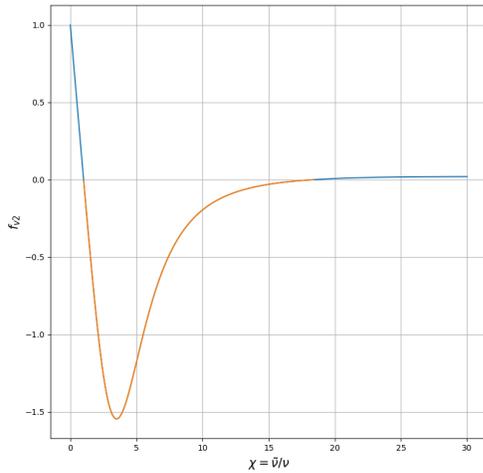


FIGURE 3.2 – Fonction correctrice f_{v2} dans le modèle de Spalart-Allmaras. En orange l'intervalle sur lequel $f_{v2} < 0$

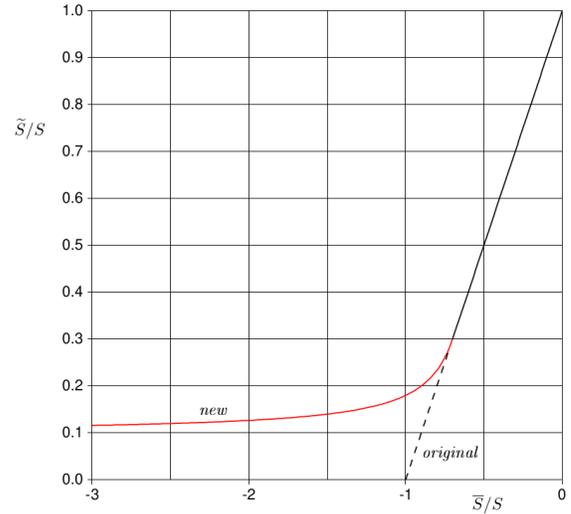


FIGURE 3.3 – Correction de la vorticité modifiée. Tirée de *Allmaras et al. (2012)*

paramètre numérique c_{w1} . La fonction f_w est une fonction de paroi, définie par :

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad r = \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\Omega} \kappa^2 d^2}, r_{lim} \right) \quad (3.5)$$

Elle fait intervenir un paramètre sans dimension r . Il est construit comme une longueur de mélange $l_m = \sqrt{\nu_t/S}$, adimensionnée par la distance d . La figure 3.4 montre l'évolution de f_w en fonction de r . Cette fonction est maximale près de la paroi, où elle est de l'ordre de 1. Dans la couche logarithmique, $r = 1$ par construction, et ainsi $f_w = 1$ également. Enfin, f_w tend vers 0 dans la partie externe de la couche limite. La valeur limite r_{lim} est une sécurité mise en place lorsque $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$.   partir de $r \sim 1$, la fonction de paroi f_w sature très vite à environ $c_{w2} = 2$. Cette valeur limite est donc simplement fixée à 10. La distance d est un élément crucial du terme de destruction. Nous avons employé des stratégies de calcul différentes pour l'évaluer dans des écoulements à une et deux phases. Nous détaillons la méthode dans le cadre des validations monophasiques un peu plus loin. La méthode suivie pour la génération des vagues de vent est exposée dans le prochain chapitre.

Nous terminons cette section en examinant le terme de diffusion. Notons que le préfacteur σ correspond à un nombre de Prandtl turbulent. Le terme de diffusion est constitué de deux éléments. Le premier correspond à une diffusion fickienne. Il est construit avec l'opérateur de diffusion classique $\nabla \cdot ((\tilde{\nu}/\sigma)\nabla\tilde{\nu})$. On peut remarquer que ν_t est à la fois le coefficient de diffusion, et l'argument de l'opérateur de diffusion. Cette écriture implique donc que la viscosité turbulente est auto-diffusante. Les auteurs remarquent que cela peut mener à un problème de non-unicité de la solution. Pour lever cette indétermination, ils ont ajouté la viscosité moléculaire au coefficient de diffusion. Le second élément est construit par analogie avec les produits de ∇k et $\nabla \varepsilon$ qui apparaissent dans le modèle $k - \varepsilon$. Le modèle introduit ainsi un second terme de diffusion, faisant intervenir des produits de dérivées premières de $\tilde{\nu}$.

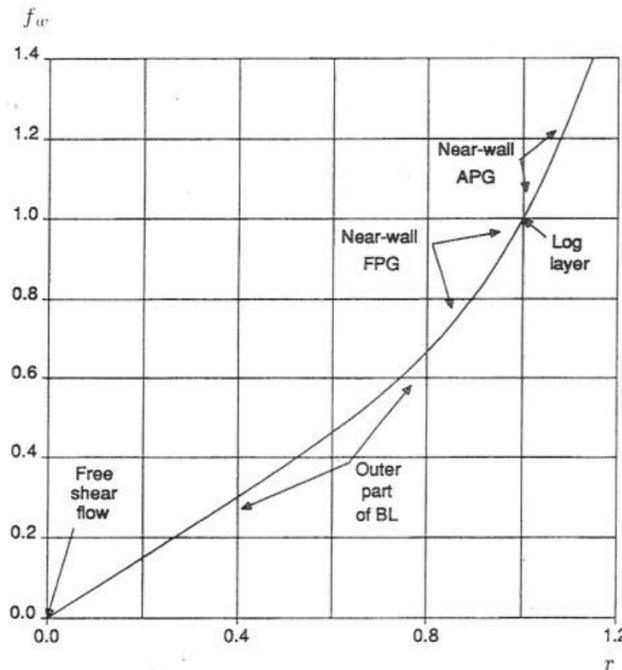


FIGURE 3.4 – Évolution de la fonction de paroi f_w d'après *Spalart et Allmaras (1994)*

Les conditions initiales sont détaillées plus loin, lorsque nous abordons l'implémentation numérique du modèle. Notons tout de même que $\tilde{\nu} = 0$ est solution de (3.1). Ainsi, si l'on initialise la distribution $\tilde{\nu}$ avec un champ uniformément nul, alors elle le restera au cours du temps. Les conditions aux limites de ce modèle s'imposent naturellement. D'une part, à l'approche d'une paroi, les fluctuations turbulentes s'évanouissent, alors que les gradients de vitesse restent non nuls. Une condition de type Dirichlet $\nu_t = 0$ s'impose donc sur toute paroi présente dans le domaine. D'autre part, nous avons également utilisé un type de frontière dite symétrique ou *free-slip*. Elle représente la transition vers une zone de l'écoulement située "très loin" de la partie qui nous intéresse, comme l'écoulement potentiel au-dessus d'une couche limite. Les gradients y sont négligeables voire nuls, et il n'y a pas de création de vorticité. Cela se traduit mathématiquement par une condition de type Neumann, telle que $\partial \nu_t / \partial n|_{\Gamma} = 0$, où n représente la normale à la frontière Γ .

3.2 Implémentation du modèle de Spalart-Allmaras dans JADIM

Nous présentons ici l'implémentation du modèle SA que nous avons réalisée dans JADIM. Nous exposons la stratégie suivie pour résoudre l'équation 3.1, notamment sa discrétisation spatiale et temporelle, puis discutons du traitement de la distance d dans des écoulements monophasiques.

3.2.1 Discrétisation en espace

Le code de calcul JADIM utilise une formulation en volumes finis sur un maillage structuré décalé. Le principe de cette formulation est le suivant : le domaine de calcul est divisé en cellules ou volumes de contrôle, sur lesquelles sont ensuite intégrées les équations de Navier-Stokes, l'équation de continuité, voire les équations

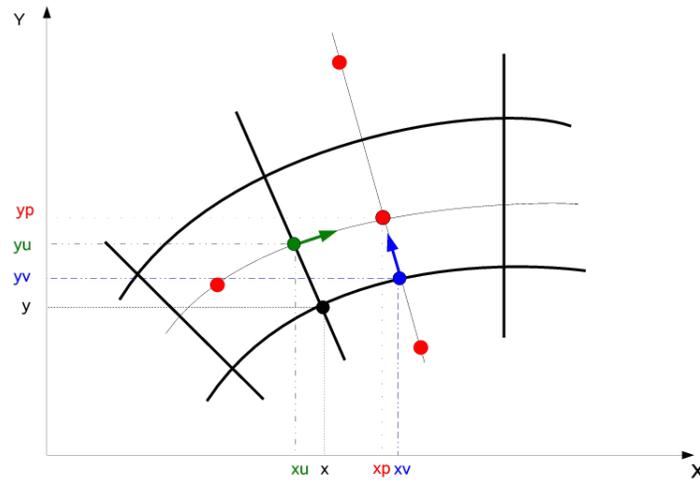


FIGURE 3.5 – Schéma d'un maillage bidimensionnel décalé

de transport des scalaires. Afin de diminuer l'ordre de dérivation des termes de diffusion, on les exprime à l'aide de l'opérateur divergence, puis on utilise le théorème de la divergence pour transformer les intégrales volumiques en intégrales surfaciques. Le volume d'une cellule étant supposé petit, on approxime les intégrales volumiques des termes non-diffusifs par le produit entre l'intégrande et le volume élémentaire de la cellule. Les contributions surfaciques sont quant à elles approximées par des différences de flux entre les facettes de la cellule. Le code ainsi formulé a une précision d'ordre deux en espace.

Le maillage est dit décalé car les variables scalaires (pression, taux de présence, température, etc.) sont résolues aux nœuds de pression situés à l'intérieur des cellules du maillage, tandis que les composantes du vecteur vitesse sont résolues aux nœuds de vitesse situés sur les faces des cellules. Prenons l'exemple de la figure 3.5. On repère la cellule par les indices (i, j, k) . Le nœud de pression, en rouge sur la figure, a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Alors le nœud de vitesse horizontale u (vert) se trouve sur la face dite ouest, entre les cellules i et $i - 1$, le nœud de vitesse verticale v (bleu) sur la face dite sud, entre j et $j - 1$, et le nœud de la 3ème composante de vitesse w (non représentée) sur la face dite arrière, entre k et $k - 1$. Le maillage est construit de façon à placer les facettes à mi-chemin entre les nœuds de pression, et non l'inverse. Cela permet d'améliorer la précision de la discrétisation des contraintes visqueuses (*Calmet et Magnaudet (1997)*).

La viscosité turbulente étant une variable scalaire, elle sera calculée aux nœuds de pression. Appliquons le principe exposé ci-dessus à l'équation 3.1. On se place dans une cellule i, j, k . Son volume est donné par $dV_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k := dV$. On intègre l'équation sur ce volume, et on obtient :

$$\int_{dV} \frac{D\tilde{\nu}}{Dt} dV = \int_{dV} \left(P - D + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2] \right) dV \quad (3.6)$$

Les intégrales volumiques sont approximées par leur contenu, à savoir le produit entre l'intégrande, évalué au nœud de pression, et le volume de la cellule dV . On utilise le théorème de la divergence sur le premier terme de diffusion $\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu})$ afin de faire apparaître une intégrale surfacique :

$$\int_{dV} \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) dV = \oint_{\partial V} (\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial V} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n_i} dS_i \quad (3.7)$$

où ∂V est la surface englobant le volume dV , dS_i est l'aire élémentaire de la i -ème facette, et la répétition de l'indice i signifie une sommation sur les trois directions de l'espace, selon la convention d'Einstein.

L'intégrale surfacique est approximée par une somme de flux. Chaque flux correspond au contenu de l'intégrale, évalué sur le noeud de vitesse situé sur la facette correspondante. Par exemple, dans la direction x , le flux résultant s'écrit :

$$\left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x} dS \right]_{x=x_u(i)}^{x=x_u(i+1)} \quad (3.8)$$

où x_u est l'abscisse du noeud de vitesse horizontale u , tel que sur la figure 3.5. Le calcul du gradient sur un noeud de vitesse se fait naturellement par différences finies, centrées sur ce noeud. Le coefficient de diffusion $\nu + \tilde{\nu}$ est calculé en prenant simplement la moyenne non pondérée entre les valeurs de part et d'autre de la facette. En effet rappelons que les facettes sont situées par construction à mi-chemin entre les noeuds de pression. Afin d'obtenir le flux, l'ensemble est pondéré d'un signe dépendant de l'orientation de la normale sortante, c'est-à-dire positif pour les facettes est, nord et avant, et négatif pour les facettes ouest, sud et arrière.

Finalement, la formulation en volumes finis de l'équation de Spalart-Allmaras est donnée par :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} dV = \left(P - D + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right) dV + \text{signe}(\mathbf{n}_i) (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n_i} dS_i \Big|_{\text{facette } i} \quad (3.9)$$

3.2.2 Discrétisation en temps

L'avancement temporel est effectué à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta (RK) d'ordre 3. On y associe un schéma de Crank-Nicolson pour résoudre les termes visqueux de manière semi-implicite. En raison de ce dernier, le schéma global est d'ordre 2 en temps. Cette méthode est exposée en détail par *Calmet et Magnaudet (1997)* pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans une formulation tridimensionnelle, avec également une équation de transport pour un scalaire.

En ce qui concerne spécifiquement l'équation (3.1), on peut remarquer que le terme de destruction est négatif. Nous avons donc décidé de le traiter implicitement. Cela permet de renforcer la partie diagonale de la matrice composée des termes implicites, et donc de rendre le schéma plus stable.

Résumons l'intégration de l'équation (3.1) à chaque itération temporelle. Tout d'abord, nous calculons la distance d dans tout le domaine. Elle ne change pas entre chaque étape du schéma de RK, et n'est donc calculée qu'à la 1ère étape. C'est le cas également pour une configuration diphasique, car l'équation de transport du taux de présence est résolu avant d'entamer les étapes du schéma de RK. Ensuite, pour chacune des trois étapes RK, nous calculons les termes explicites de l'équation 3.9. Puis la matrice constituée des termes implicites est inversée, et on met à jour $\tilde{\nu}$. Par sécurité, nous vérifions s'il y a des endroits où la distribution de $\tilde{\nu}$ est négative. Cela ne devrait pas arriver, mais si tel est le cas, nous régularisons le calcul en imposant une valeur nulle. Enfin, nous appliquons l'amortissement visqueux (3.3) afin d'obtenir le champ final ν_t . C'est ce dernier qui intervient dans les équations de Navier-Stokes, conformément à (2.12). En ce qui concerne l'initialisation, nous imposons simplement un champ uniforme $\tilde{\nu} = 10\nu$ sur tout le domaine de calcul, où ν est la viscosité cinématique du fluide. Puis nous appliquons la correction visqueuse présentée plus

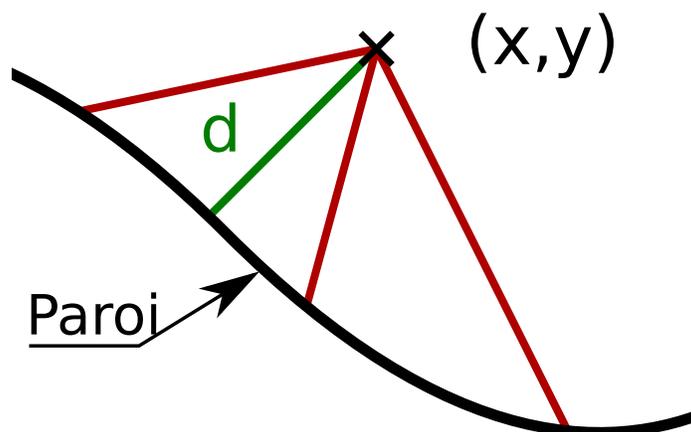


FIGURE 3.6 – Méthode de calcul de la distance à la paroi la plus proche d dans le cas d'une paroi non plane. En rouge, la distance au voisin l , en vert la distance recherchée.

haut pour passer au champ final ν_t .

L'adaptation de ce protocole aux configurations diphasiques est abordée au chapitre suivant.

3.2.3 Calcul de la distance d

La distance d représente la distance à la paroi la plus proche, et elle intervient en de nombreux endroits du modèle. De manière explicite dans le terme de destruction $(\nu_t/d)^2$, dans la fonction multiplicative f_w via le calcul de r , mais également dans les corrections visqueuses apportées à la vorticité modifiée \tilde{S} . Le calcul de d est donc crucial, et nécessite un soin particulier. Dans une configuration diphasique, la distance d permet également de faire le lien entre le modèle de turbulence dans l'air d'une part, et les déformations de l'interface d'autre part. Nous aborderons son calcul dans ce cas au chapitre suivant. Nous présentons ci-dessous la méthode employée pour déterminer d dans différentes configurations monophasiques.

Le cas du canal est le plus simple à gérer. Il s'agit d'un écoulement au-dessus d'une paroi plane, et la valeur naturelle pour d est directement l'altitude z .

Le cas d'une paroi non plane mais monoval e, comme une marche descendante ou une paroi ondulée, nécessite un traitement un peu plus élaboré. Considérons un point (i, j) d'un maillage bidimensionnel. On cherche à calculer la distance $d_{i,j}$ entre ce point et la paroi, repérée par $z_s(x)$. Pour cela, on balaie les l_m voisins de chaque côté dans la direction horizontale, le long d'une ligne du maillage repérée par j . Pour $-l_m \leq l \leq l_m$, on calcule la distance d_l entre le point courant (i, j) , et le point de la paroi repérée par les coordonnées $(x_{l,j}, z_s(x_{l,j}))$. On prend alors le minimum des d_l pour obtenir la valeur recherchée, donnée par :

$$d_{i,j} = \min \{d_l, -l_m \leq l \leq l_m\} \quad (3.10)$$

Cette méthode est résumée par la figure 3.6. Si la frontière supérieure est soumise à une condition de Dirichlet, on recommence le processus pour calculer la plus petite distance à la paroi supérieure. Il suffit de prendre le minimum des deux distances pour obtenir le résultat final désiré pour d .

Dans le cas de la marche descendante, la zone sous la marche fait partie du domaine de calcul mais n'est

pas résolue. Pour cette raison, le calcul de la distance d nécessite une adaptation. Avant de calculer d_l , on vérifie si $z_{l,j} > z_s(x_{l,j})$. Si tel n'est pas le cas, cela signifie que le l -ième voisin se trouve sous la marche. Dans ce cas, on parcourt l'ensemble des voisins ll situés entre i et l le long de la ligne de maillage repérée par j :

- tant que $z_{ll,j} > z_s(x_{ll,j})$, on est en-dehors de la marche, et on incrémente d_l avec le pas d'espace local $\Delta x_{ll,j}$
- lorsque ce n'est plus le cas, cela signifie que l'on a traversé la face verticale de la marche et qu'on est allé "trop loin". On retranche alors $\Delta x_{ll,j}/2$ à la valeur de d obtenue précédemment.

Ceci étant fait, on a calculé la plus petite distance à la paroi inférieure.

3.3 Validations du modèle sur différents écoulements monophasiques

Nous avons réalisé des simulations sur trois configurations monophasique, dans le but de valider l'implémentation du modèle SA, et de tester sa réponse sur différents types d'écoulement. Le premier cas test auquel nous nous sommes intéressés est celui du canal. C'est l'un des écoulements de référence sur lesquels les différents paramètres du modèle ont été calibrés. Le deuxième cas test est celui de la marche descendante. Cette configuration classique est adaptée pour étudier le comportement du modèle en cas de décollement. Le dernier cas test d'intérêt concerne l'écoulement turbulent au-dessus d'une paroi ondulée rigide. En-dehors d'une paroi flexible, c'est la configuration monophasique qui s'approche le plus de celle des vagues de vent. Pour chacune de ces trois configurations, nous présentons les caractéristiques de l'écoulement, son initialisation, puis nous comparons les prédictions fournies par le modèle SA avec des données de référence expérimentales et/ou numériques.

3.3.1 Écoulement en demi-canal

Nous avons pris pour référence des simulations numériques directes (DNS) d'écoulements turbulents pleinement développés en canal, réalisées à l'Université Polytechnique de Madrid. Plusieurs distributions sont disponibles en accès libre depuis <https://torroja.dmt.upm.es/channels/>, en particulier les profils de vitesse moyenne. On définit le nombre de Reynolds turbulent à partir de la demi-hauteur h du canal

$$Re_* = \frac{u_* h}{\nu} \quad \text{où } u_* = (\tau_*/\rho)^{1/2} \quad (3.11)$$

Nous avons utilisé les données de quatre simulations, dont les nombres de Reynolds turbulents sont 180, 550, 934 (*del Álamo et Jiménez (2003)*) et 2003 (*Hoyas et Jiménez (2006)*).

Nous avons réalisé des simulations sur un domaine tridimensionnel, avec des conditions aux limites périodiques sur les frontières latérales (est, ouest, avant et arrière), et une condition de non-glissement sur la frontière sud. Nos simulations sont de type RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*). Le plan médian du canal est donc un plan de symétrie pour la solution RANS, et nous nous sommes limité à la moitié inférieure du canal. Nous avons ainsi imposé une condition de symétrie sur la frontière nord. Nous avons utilisé le même maillage 3D pour les quatre simulations. Le maillage est uniforme dans les directions horizontales x et y , tandis que le pas d'espace dans la direction verticale z croît à mesure qu'on s'éloigne de la paroi.

Re_*	Δz_{min}^+	$\Delta z_{max}^+ / \Delta z_{min}^+$	Δx^+	Δy^+	t_{fin}^+
180	0.129	75	18.0	3.30	2870
550	0.395	75	55.0	10.1	26793
934	0.670	75	93.4	17.1	77266
2003	1.44	75	200	36.7	355000

 TABLE 3.2 – Caractéristiques des simulations en demi-canal pour Re_* variable.

Les valeurs adimensionnées des pas d'espace sont résumées dans le tableau 3.2, où l'exposant + signifie une adimensionnalisation par l'unité de paroi $\delta_\nu = \nu/u_*$. Le domaine comprend 50 cellules dans la direction x , et 64 suivant y et z . Les dimensions sont $5h$, $1.175h$ et h dans les directions respectives.

Pour chaque simulation, nous imposons un gradient de pression longitudinal $P_x < 0$ uniforme. La relation 2.25 établit un lien direct entre le gradient de pression longitudinal et le cisaillement pariétal sur la frontière sud, donc le nombre Reynolds turbulent. Nous utilisons ainsi cette relation pour calculer la bonne valeur de P_x , correspondant au nombre de Reynolds que nous souhaitons imposer. Le champ de vitesse est initialisé avec un demi-profil de Poiseuille, calculé à partir du gradient de pression P_x . Les simulations sont arrêtées au bout de 10^5 itérations, ce qui représente un temps physique de 5000 s. Les valeurs adimensionnées par $t_\nu = \nu/u_*^2$ sont rapportées dans le tableau 3.2.

Les profils de vitesse horizontale u le long de la verticale ont été extraits pour chaque simulation à l'instant final. Nous les avons rassemblés sur la figure 3.7, au côté des données de référence. Nous observons un bon accord entre les données de DNS et nos résultats. Cela est d'autant plus frappant pour le cas $Re_* = 2003$, pour lequel aucun point ne se trouve en-dessous de $z^+ = 1$. Rappelons que le maillage est identique entre les quatre simulations.

Nous proposons de comparer les prédictions des modèles SA et de Reynolds & Tiederman (*Reynolds et Tiederman (1967)*) pour un écoulement en demi-canal. Nous avons réalisé une simulation similaire à celles ci-dessus, pour $Re_* = 1000$. Les distributions verticales de viscosité turbulente calculées à partir de ces deux modèles sont rapportées sur la figure 3.8. Les profils sont qualitativement similaires, bien que le modèle SA prédise un niveau de viscosité turbulente un peu plus élevé au cœur du canal. La figure 3.9 montre le profil de ν_t très proche de la paroi. Le premier point se situe dans la sous-couche visqueuse à $z^+ < 1$. La courbe est une interpolation à l'aide d'un polynôme de degré quatre.

Le modèle SA sur un demi-canal prédit des profils de vitesse en bon accord avec les résultats de DNS, et ce même avec une résolution modeste très proche de la paroi. Les simulations monophasiques présentées ci-dessous concernent uniquement des géométries bidimensionnelles.

3.3.2 Écoulement derrière une marche descendante

Certains écoulements de couche limite peuvent présenter un décollement. Ce phénomène a généralement lieu lorsque l'écoulement rencontre un gradient de pression adverse, qui s'oppose alors à lui. Si ce gradient de pression devient trop important, il y a décollement de la couche limite. Les écoulements décollés peuvent survenir dans des configurations aérodynamiques, par exemple à l'aval un véhicule en mouvement. Cela peut également se produire à l'aval d'une vague si sa cambrure devient importante. Cet effet peut avoir un impact sur la durée de vie des solitons visqueux via un phénomène d'abri (*sheltering effect*) (*Aulnette et al. (2019)*). Dans une géométrie complexe, il peut être délicat de prédire la survenue et la position d'un décollement.

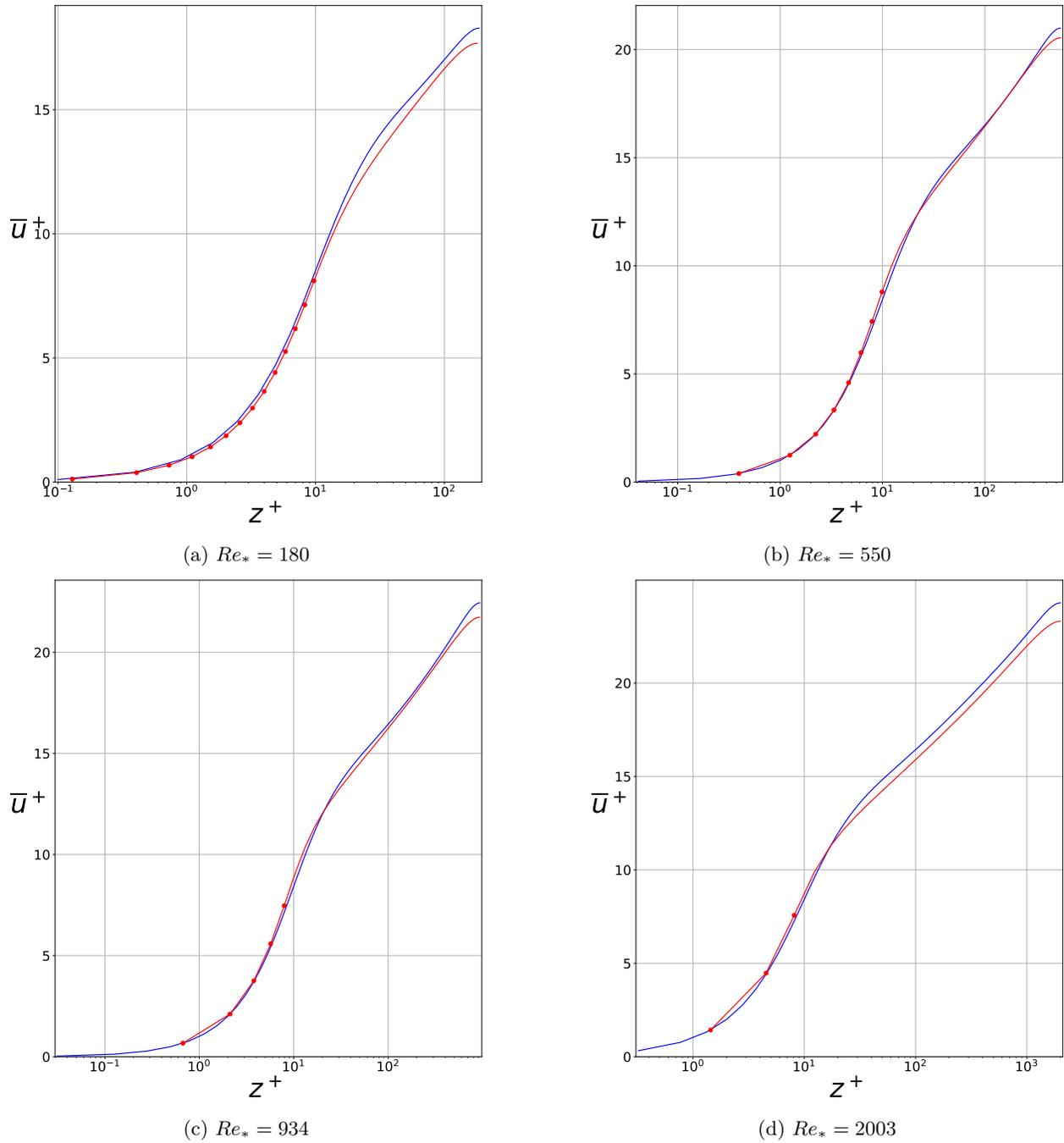


FIGURE 3.7 – Profils de vitesse en demi canal ouvert : comparaison entre les profils de DNS de référence (en bleu), et ceux obtenus après calculs sous JADIM (en rouge). Le modèle de Spalart-Allmaras est activé. Les premières cellules situées à $y^+ < 10$ sont indiquées par des points.

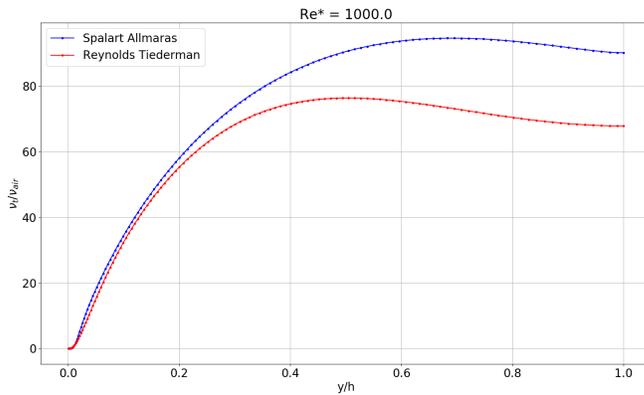


FIGURE 3.8 – Profils de viscosité turbulente obtenus avec les modèles de Reynolds & Tiederman et de Spalart-Allmaras (écoulement en demi-canal pour $Re_* = 1000$)

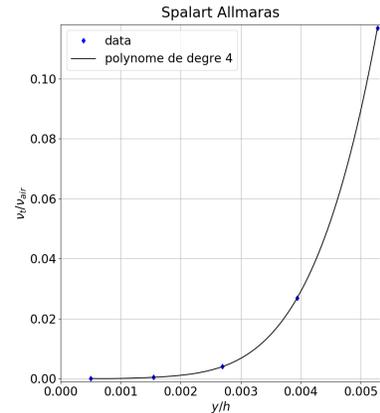


FIGURE 3.9 – Profil de Spalart-Allmaras en proche paroi (écoulement en demi-canal pour $Re_* = 1000$)

La géométrie simple de la marche descendante permet de forcer un décollement sur le nez de la marche. De nombreux travaux ont été menés sur ce type de configuration. *Le et al. (1997)* présentent des résultats de DNS en aval d'une marche, et les comparent aux travaux expérimentaux de *Jovic et Driver (1994)*.

La configuration adoptée est celle de la figure 3.10. Contrairement à la DNS, nous nous sommes restreints à un domaine bidimensionnel. Notons h la hauteur de la marche, la hauteur totale du domaine est $L_z = 6h$. La partie située à l'amont de la marche a une longueur $L_i = 10h$, et la longueur totale est $L_x = 30h$. L'origine du repère se trouve au pied de la marche. Nous construisons un domaine rectangulaire de dimensions $L_x \times L_z$, qui contient la marche. Ses frontières sont donc incluses dans le domaine numérique. Afin de les repérer, nous utilisons un champ binaire, qui vaut 0 à l'intérieur de la marche, et 1 à l'extérieur. Les équations ne sont résolues que dans les cellules où cet indicateur vaut 1. Le maillage est non-uniforme dans les deux directions, les zones les plus raffinées étant situées à proximité des frontières de la marche. On compte 501 cellules dans la direction horizontale, et le pas d'espace varie de $\Delta x_{\text{min}}^+ = 1.38$ à $\Delta x_{\text{max}}^+ = 39$. Dans la direction verticale, il y a 192 cellules, dont 120 au-dessus de la marche, et le pas d'espace varie de $\Delta z_{\text{min}}^+ = 0.27$ à $\Delta z_{\text{max}}^+ = 3.45$. Le raffinement sur les plans $z = 0$ et $z = h$ est le même. La figure 3.11 montre le maillage ainsi construit.

Nous imposons des conditions de non-glissement sur les deux frontières de la marche et sur la frontière sud située en aval, et une condition de symétrie sur la frontière nord. Sur la frontière ouest, nous imposons une condition d'entrée. Pour cela, nous effectuons d'abord une simulation en demi-canal bidimensionnel de hauteur $5h$. Ce calcul a les mêmes caractéristiques que l'écoulement situé au-dessus de la marche. En particulier le même nombre de Reynolds, et un maillage en hauteur identique à celui situé au-dessus de la marche. Les distributions de vitesse horizontale et de viscosité turbulente ainsi générées sont copiées et utilisées en tant que condition d'entrée pour la marche. Compte tenu de la condition à l'ouest, la frontière est nécessaire une condition de sortie. Pour cela, nous imposons aux gradients horizontaux de vitesse et de viscosité turbulente de s'annuler.

L'écoulement étudié par *Le et al. (1997)* a un nombre de Reynolds $Re_h = 5100$, basé sur la hauteur de la marche h et la vitesse maximale en entrée U_0 . Notre calcul correspond à $Re_h = 5182$, et le nombre de

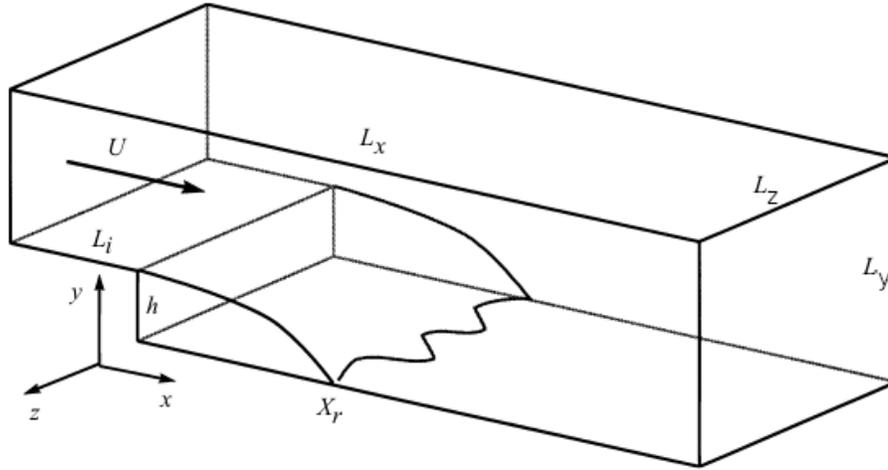


FIGURE 3.10 – Configuration de l'écoulement derrière une marche descendante. X_r représente l'emplacement du recollement de la couche limite suite au décollement provoqué par la marche. Tiré de *Le et al. (1997)*.

Reynolds turbulent basé sur la hauteur du demi-canal $5h$ vaut $Re_* = 227$. Pour initialiser la simulation, nous imposons les conditions d'entrée sur toute la longueur du domaine, au-dessus du plan $z = h$.

Nous rapportons les lignes de courant sur la figure 3.12a. Pour comparaison, les lignes de courant de *Le et al. (1997)* sont représentées sur la figure 3.12b. L'expansion abrupte du canal génère un décollement, situé sur le nez de la marche, suivi d'une zone de recirculation, puis un recollement plus loin en aval. La zone située entre le décollement et le recollement se décompose en trois parties, ou "bulles", bien reproduites par le modèle SA. Une grande structure s'étend du nez de la marche jusqu'au recollement. Plus proche de la marche se trouve une zone dans laquelle le fluide tourne dans l'autre sens. Enfin, on devine une troisième bulle, de taille beaucoup plus petite que les deux autres, collée au pied de la marche. Cette dernière n'est pas présente sur la figure de référence, mais *Le et al. (1997)* relèvent bien son existence. Pour calculer les tailles respectives de ces bulles, nous repérons les zéros du cisaillement pariétal (présenté plus loin 3.14b). Le tableau 3.3 rassemble les positions où le cisaillement pariétal change de signe. Nous y avons également indiqué les valeurs correspondantes des deux références numérique et expérimentale. Pour cette dernière, seule l'emplacement du recollement est disponible. Les tailles de la plus petite et de la plus grande structure sont supérieures à celles indiquées par *Le et al. (1997)*, et inférieure pour la structure intermédiaire. L'emplacement du recollement prédit par notre calcul est en bon accord avec ces travaux, puisqu'il est situé entre les deux références.

Nous rapportons les profils verticaux de vitesse longitudinale sur la figure 3.13, à différentes abscisses en aval de la marche. Les profils prédits avec le modèle SA sont qualitativement similaires à ceux de *Le et al. (1997)* et *Jovic et Driver (1994)*. Les vitesses au cœur du canal (en $z/h = 3$) sont de l'ordre de $0.9 U_0$ et inférieures aux deux références. Les gradients de vitesse $\partial U/\partial z$ près de la paroi semblent plus faibles en valeur absolue.

La pression et le cisaillement pariétaux sont rapportés sur la figure 3.14, le long du plan $y = 0$ en aval de la marche. Nous les avons calculés par extrapolation des gradeurs correspondantes à l'intérieur du domaine, le long des lignes verticales de maillage. La pression p_w est définie comme $p_w = (P(x, z = 0) - P(x = 0, z = 0))/(\frac{1}{2}\rho U_0^2)$, et le cisaillement comme $\tau_w = \mu(\partial_n u)/(\frac{1}{2}\rho U_0^2)$, ∂_n désignant la dérivée suivant la normale locale

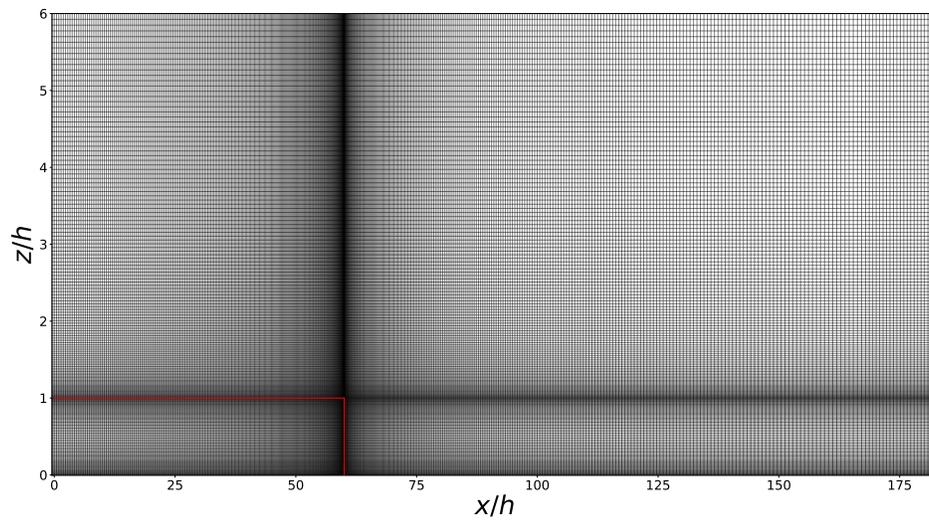
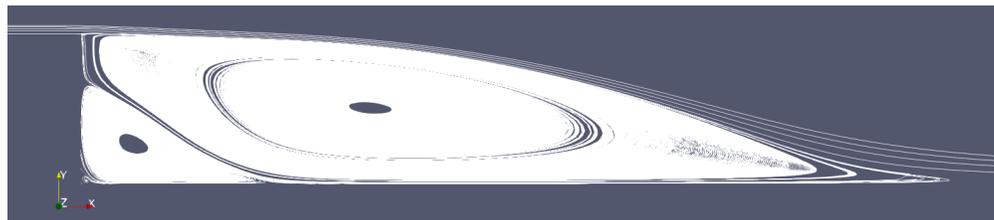
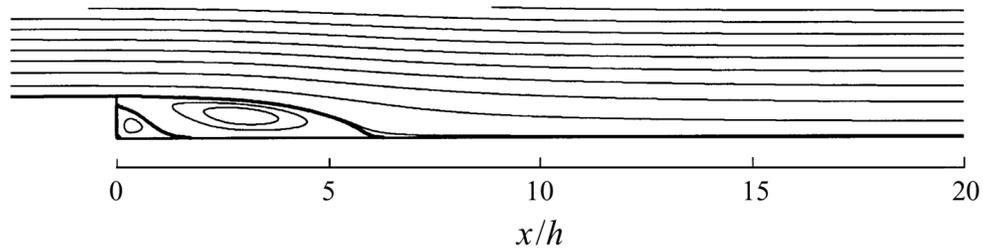


FIGURE 3.11 – Maillage de la marche descendante. Les frontières de la marche sont indiquées en rouge.



(a) Simulation avec JADIM



(b) *Le et al. (1997)*

FIGURE 3.12 – Lignes de courant à l'aval de la marche descendante

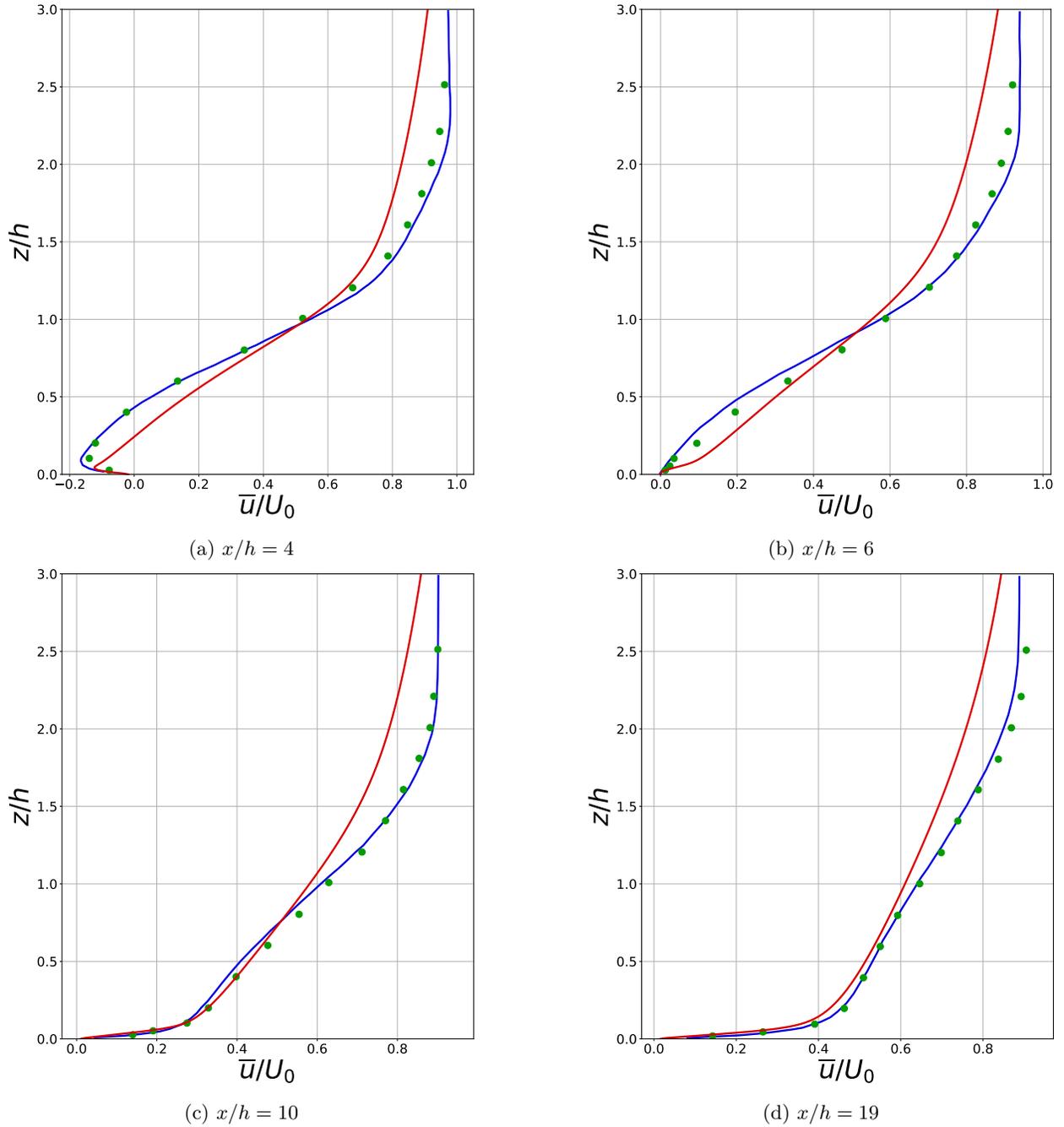


FIGURE 3.13 – Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses en aval de la marche. Comparaison entre les profils expérimentaux (en vert), de DNS (en bleu), et ceux obtenus après calculs sous JADIM (en rouge).

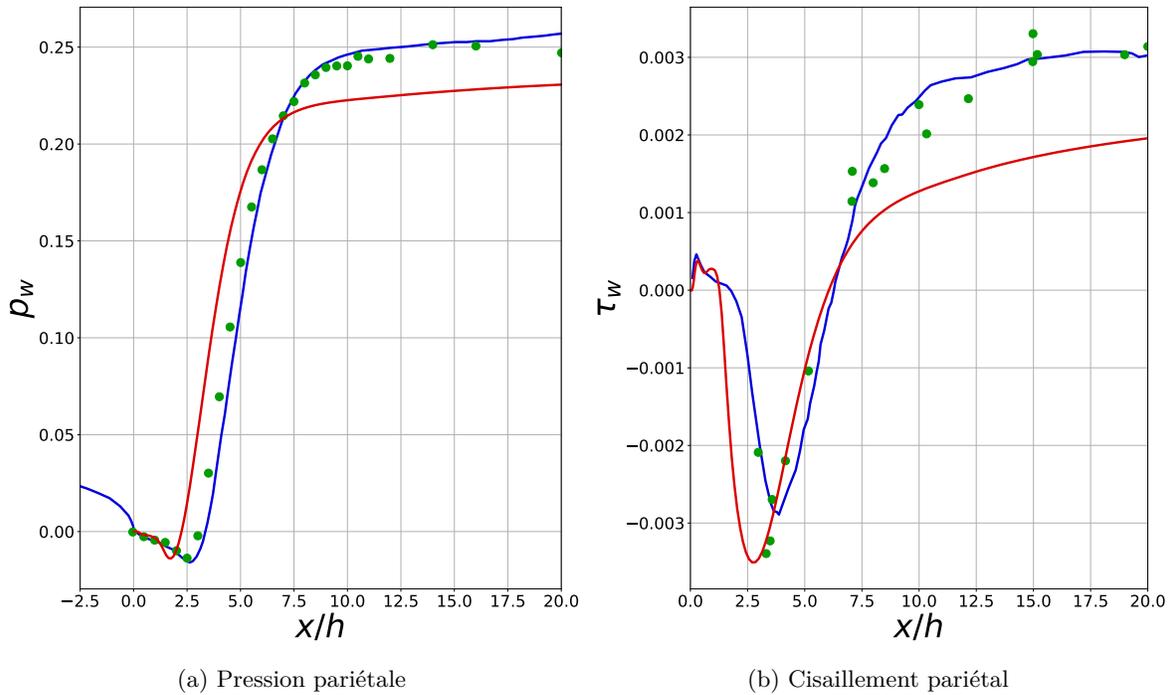


FIGURE 3.14 – Grandeurs pariétales en aval de la marche

Expérience	premier zéro	deuxième zéro	troisième zéro
JADIM	0.068	1.270	6.052
<i>Le et al. (1997)</i>	0.042	1.76	6.28
<i>Jovic et Driver (1994)</i>	n/a	n/a	6.0-6.1

 TABLE 3.3 – Valeurs de x/h correspondant aux changements de signe de τ_w

à la paroi. La pression pariétale est ainsi calibrée de façon à valoir zéro au pied de la marche. Les profils sont qualitativement similaires à ceux de *Le et al. (1997)* et *Jovic et Driver (1994)*. On reconnaît les deux plus grosses bulles sur la distribution du cisaillement pariétal, la troisième étant trop petite pour être visualisée ainsi. Le minimum du cisaillement dans la zone de recirculation est inférieur à celui des deux références. Loin en aval, les valeurs des deux distributions prédites par le modèle SA sont également plus basses.

Le modèle SA permet de prédire les lignes de courant et l'emplacement du recollement en accord avec la DNS et les données expérimentales. Les profils de vitesse et les grandeurs pariétales sont semblables, mais ils indiquent des valeurs inférieures aux distributions de référence. C'est un aspect de ce modèle que nous retrouverons en partie sur les écoulements au-dessus d'une paroi ondulée.

3.3.3 Écoulement au-dessus d'une paroi ondulée

Nous avons considéré l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée dans les deux situations sans et avec décollement, respectivement à petite et grande amplitude d'onde a/λ . Nous présentons les caractéristiques de ces deux configurations, puis les profils de vitesse longitudinale et les distributions pariétales. Nous avons également étudié une correction du modèle qui prend en compte les effets de courbure, et l'influence du

TABLE 2. Separation and Reattachment Locations

Case	Separation(x/λ)	Reattachment(x/λ)
Buckles <i>et al.</i> [13]	0.14	0.69
Patel <i>et al.</i> [6]	0.08	0.73
Henn and Skyes [11]	0.06	0.75
<i>SST</i>	0.06	0.81
$k - \omega$	0.06	0.77
<i>BSL</i>	0.06	0.76
<i>SMC - ω</i>	0.06	0.77
<i>SMC - BSL</i>	0.06	0.76

FIGURE 3.15 – Positions du décollement et du recollement pour l’écoulement au-dessus d’une paroi ondulée à grande amplitude. Comparaisons de *Segunda et al. (2016)* entre différents modèles de turbulence, la LES de *Henn et Sykes (1999)*, et les données expérimentales de *Buckles et al. (1984)* (ces deux derniers ont été entourés en rouge). Les entrées *SST*, $k - \omega$ et *BSL* désignent des modèles de viscosité turbulente à deux équations, tandis que *SMC- ω* et *SMC-BSL* désignent des modèles de transport des contraintes turbulentes basés sur ω .

nombre d’onde adimensionnel $k^+ = k\delta_\nu$ sur le cisaillement pariétal.

La configuration est similaire à celle des dispositifs expérimentaux de l’équipe d’Hanratty discutés au chapitre 1, en particulier *Zilker et al. (1977)* pour l’écoulement non-décollé avec $a/\lambda = 0.0155$, et *Buckles et al. (1984)* pour l’écoulement à grande amplitude avec $a/\lambda = 0.1$. Nous nous sommes inspiré des travaux de *Henn et Sykes (1999)*, qui ont mené des simulations aux grandes échelles (LES) d’écoulement turbulent sur paroi ondulée, pour des pentes variant entre 0 et 0.628. En plus de ceux-ci, notons également des travaux plus récents portant sur le cas décollé. *Segunda et al. (2016)* font une analyse numérique à l’aide de huit modèles de turbulence proposés par le code commercial ANSYS (le modèle SA n’en fait pas partie). Ils comparent les résultats de ces modèles aux données de *Buckles et al. (1984)* et *Henn et Sykes (1999)*. Ils considèrent trois modèles de viscosité turbulente à deux équations (de type $k - \epsilon$ et $k - \omega$), ainsi que cinq modèles de transport des contraintes turbulentes. Parmi ceux-ci, trois sont basés sur l’équation du taux de dissipation ϵ , et deux sur l’équation de dissipation spécifique ω . Les distributions de vitesse longitudinale, ainsi que de pression et cisaillement pariétaux, sont reproduits de manière satisfaisante par les trois modèles de viscosité turbulente, et encore mieux par les deux modèles de second ordre utilisant ω . En revanche, les trois modèles basés sur ϵ sont incapables de prédire un décollement dans le creux. Les autres modèles prédisent une taille de recirculation plus grande que celle déterminée expérimentalement, mais en accord avec les travaux de *Henn et Sykes (1999)*. Les positions du décollement et du recollement sont reproduites sur la figure 3.15. Dans tous les cas, ces modèles prédisent un niveau de turbulence plus bas que l’expérience. Les auteurs attribuent ce fait soit à la géométrie de l’écoulement, soit à une différence de condition d’entrée entre l’expérience et la configuration numérique. *Segunda et al. (2018)* rapportent des résultats expérimentaux sur la même configuration obtenus par mesures PIV. Ils situent notamment le décollement à $x/\lambda = 0.13$, et le recollement à $x/\lambda = 0.72$.

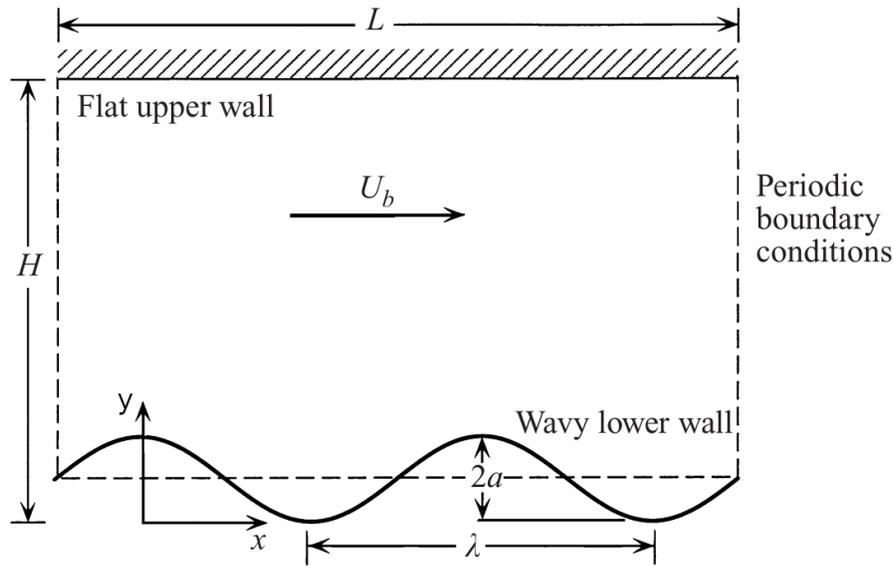


FIGURE 3.16 – Configuration de l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée (*Henn et Sykes (1999)*).

Les études expérimentales sont généralement menées à l'aide d'un canal comprenant une dizaine de longueur d'onde pour établir un écoulement périodique.² La configuration retenue par *Henn et Sykes (1999)* est celle d'un canal périodique comprenant deux longueurs d'onde. Ils précisent que les simulations sur quatre longueurs d'onde donnent des résultats identiques, ce que nous avons pu vérifier par nous-même. Pour les deux amplitudes, la configuration est identique et résumée sur la figure 3.16. La paroi ondulée est repérée par $z_w(x) = a \cos(kx)$, où $k = 2\pi/\lambda$. L'origine de z est donc située sur la position moyenne de l'onde. La hauteur totale du domaine H varie légèrement d'une configuration à l'autre, mais avec toujours $H \sim \lambda$. Notons la présence d'une paroi sur la frontière supérieure, à la différence des configurations étudiées précédemment. Nous imposons ainsi des conditions de non-glissement sur les frontières nord et sud, et des conditions périodiques dans la direction longitudinale.

Henn et Sykes (1999) utilisent une transformation de coordonnées pour se ramener à un domaine numérique rectangulaire. Les coordonnées horizontales x et y sont inchangées, tandis que la coordonnée verticale devient $\eta = H(z - z_w)/(H - z_w)$. Nous avons mené nos simulations sur des maillages curvilignes orthogonaux. Ils sont reproduits sur les figures 3.17a et 3.17b. Nous les avons générés à l'aide d'un mailleur orthogonal, créé par *Blanco (1992)*. Dans un premier temps, on construit un maillage cartésien de dimensions $L \times H$, puis on lui applique une série de transformations successives, pour arriver au maillage curviligne désiré. Ces transformations utilisent un paramètre pour contrôler le degré de resserrement des lignes du maillage, appelé facteur de distribution, et noté β . Plus il est grand, plus les lignes sont uniformément réparties, plus il est proche de 1 et plus elles sont resserrées. Les facteurs de distribution utilisés sont 999 dans la direction x , et 1.001 dans la direction z . Cette dernière valeur nous permet d'obtenir un maillage final plus raffiné près des frontières nord et sud. Les pas d'espace ainsi obtenus sont résumés dans le tableau 3.4.

² *Buckles et al. (1984)* et *Segunda et al. (2018)* la situent sur la huitième longueur d'onde. Ils notent que l'écoulement n'est plus nécessairement périodique sur la longueur d'onde suivante. Cette dernière peut présenter une couche de cisaillement, qui démarre peu après la première crête, et dont l'épaisseur croît en aval.

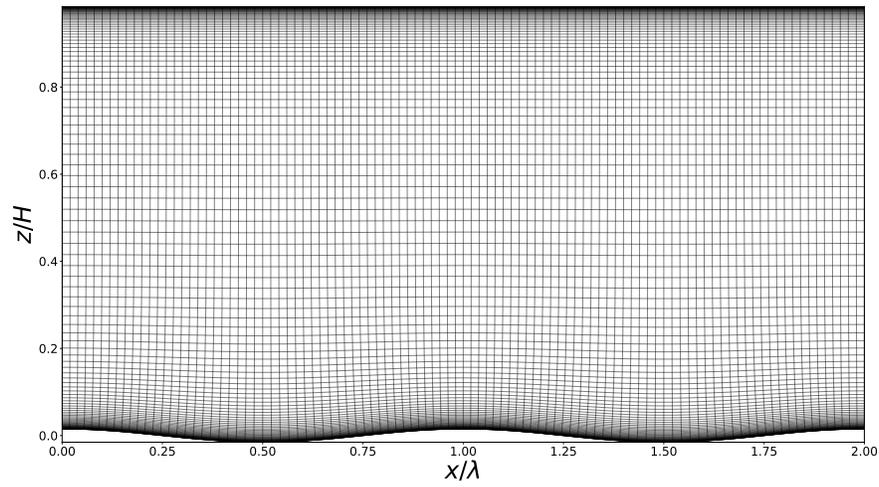
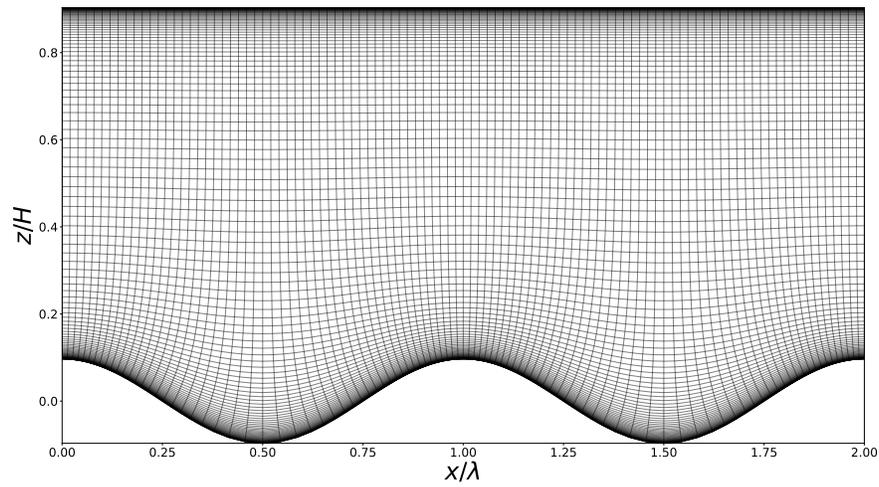

 (a) Écoulement non-décollé avec $a/\lambda = 0.0155$

 (b) Écoulement décollé avec $a/\lambda = 0.10$

FIGURE 3.17 – Maillages curvilignes pour étudier l'écoulement turbulent au-dessus d'une paroi ondulée.

a/λ	H/λ	Re_b (ref)	Re_b (JADIM)	Re_*	Δz_{min}^+	$\Delta z_{max}^+/\Delta z_{min}^+$	H_{ref}
0.0155	1.0155	6560	6564	370			$H - a$
0.1	1.033	10600	10597	330			$H - 2a$

TABLE 3.4 – Caractéristiques des simulations à petite et grande longueur d'onde

À la différence du demi-canal, nous ne cherchons pas à imposer le nombre de Reynolds turbulent, mais le nombre de Reynolds moyen Re_b . Celui-ci est calculé à partir de la demi-hauteur moyenne du canal, et de la vitesse débitante U_b . Cette dernière est définie par

$$U_b = H_{ref}^{-1} \int_{z_w}^H U(x, z) dz \quad (3.12)$$

Ici H_{ref} est une hauteur de référence, qui diffère légèrement entre les cas petite et grande amplitude. Dans le premier cas, c'est simplement la hauteur moyenne du canal $H_m = H - a$. Dans le second cas, il s'agit de la hauteur minimale $H - 2a$. Cette différence de définition a été introduite par *Buckles et al. (1984)*, probablement car la distribution de vitesse dans les creux participent peu au débit en tant que tel.

L'écoulement est entraîné par un gradient de pression longitudinal $P_x < 0$. Il ne semble pas y avoir de relation directe simple entre P_x et Re_b pour un écoulement au-dessus d'une paroi ondulée. Nous avons donc procédé itérativement de la façon suivante. Considérons un profil de Poiseuille entre deux parois planes (séparées de H), généré par un gradient de pression longitudinal P_x . Nous choisissons pour point de départ une valeur de P_x correspondant au nombre de Reynolds souhaité. Nous initialisons le champ de vitesse avec ce profil de Poiseuille, que nous tronquons à zéro dans les creux ($z < a$). Le champ de viscosité turbulente initial $\tilde{\nu}$ suit également un profil parabolique :

$$\frac{\tilde{\nu}}{\nu} = 40 \frac{(z - a)(H - z)}{H_m^2} \quad (3.13)$$

Nous avons utilisé ce profil plutôt qu'une valeur initiale homogène pour plusieurs raisons. D'une part, nous avons constaté que lorsque l'on initialise $\tilde{\nu}$ avec une valeur uniforme non-nulle, le calcul est long à converger près des parois. Cela est probablement dû à la combinaison de deux facteurs : la condition sur les parois est $\tilde{\nu} = 0$, ce qui impose une variation abrupte du profil vertical de $\tilde{\nu}$; or dans cette zone de l'écoulement, les mailles sont très petites en hauteur et ont un ratio $\Delta x / \Delta z$ important. Un profil avec une progression moins abrupte au voisinage des parois semble résoudre ce problème. D'autre part, on peut estimer que le profil en régime permanent s'approche d'une parabole. En réalité, le profil de ν_t présente en plus un déficit au coeur du canal. Ce profil parabolique pour ν_t permet au calcul de converger plus rapidement. Le maximum, égal à 10ν , se trouve ainsi au coeur du canal, et ses minima sont nuls et situés sur les parois. Nous exécutons le calcul, jusqu'à atteindre la convergence. Nous évaluons cette dernière en calculant la variation relative de Re_b entre deux itérations. La convergence est atteinte lorsque cette différence est inférieure à 10^{-10} . Nous réitérons alors ce processus, pour différentes valeurs de P_x , jusqu'à obtenir des valeurs de Re_b satisfaisantes. Ces dernières sont résumées dans le tableau 3.4, aux côtés des valeurs de référence de *Henn et Sykes (1999)*. Nous y avons également rapporté les valeurs du nombre de Reynolds turbulent Re_* , calculé à partir de la demi-hauteur moyenne de canal. La vitesse de frottement est définie à partir de la valeur moyenne du cisaillement pariétal sur une longueur d'onde : $\bar{u}_* = \langle \tau_w / \rho \rangle^{0.5}$.

Écoulement non-décollé

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas non-décollé à petite amplitude.

La vitesse horizontale, moyennée sur une période, est reproduite sur la figure 3.18. Les données expérimentales ont été moyennées sur des lignes de hauteur constante par rapport à la paroi ondulée. Les données

de LES ont été moyennées sur des lignes $\eta = cte$. Nous avons moyenné nos données le long des lignes du maillage, qui ne sont pas à hauteur constante par rapport à la paroi. L'altitude z^+ est ici l'altitude moyenne des lignes du maillage. Comme le notent *Henn et Sykes (1999)*, les profils expérimentaux et issus de la LES sont très semblables, malgré la différence de méthode de moyennage. Cela semble être également le cas avec nos propres données. Nos résultats et ceux de la LES encadrent les mesures expérimentales sur toute la hauteur du canal. Les trois profils se confondent à proximité de la paroi inférieure. Sur le reste de la hauteur, notre calcul surestime légèrement la vitesse par rapport aux deux autres profils. Le maximum de vitesse, situé au coeur du canal, atteint $20.5 \bar{u}_*$. Pour comparer, nous avons effectué une simulation dans un canal plan dont la hauteur est identique à la hauteur moyenne du cas avec paroi ondulée. Le forçage est également conservé. La courbe noire représente le profil de vitesse ainsi calculé. En moyenne sur une longueur d'onde, le profil de vitesse au-dessus d'une paroi ondulée est donc très proche de celui du canal plan. On peut estimer que la couche logarithmique commence à $z^+ \sim 25$ pour notre simulation, $z^+ \sim 40$ pour les données expérimentales, et $z^+ \sim 50$ pour les résultats de LES. Par rapport à ces deux références, le calcul avec le modèle SA semble ainsi prédire une couche tampon plus fine, et le profil est en moyenne moins affecté par l'ondulation de la paroi. Considérons un profil logarithmique de la forme

$$U = \frac{\bar{u}_*}{\kappa} \log(z^+) + B \quad (3.14)$$

Nous avons calculé une régression linéaire sur l'intervalle $40 < z^+ < 200$ pour les deux cas, indiquées sur la figure 3.18 par les lignes en pointillés. Nous trouvons $\kappa = 0.361$ pour le canal plan, et $\kappa = 0.345$ au-dessus de la paroi ondulée, soit une différence relative de moins de 5 %. C'est également respectivement 10 % et 14 % de moins que la valeur habituelle $\kappa = 0.4$. Toutefois, cette différence avec $\kappa = 0.4$ est peut-être due à un effet de bas nombre de Reynolds. Si on se réfère à la figure 3.7, les profils de vitesse en canal plan exhibent une pente semblable pour les trois plus hautes valeurs de Re_* . Pour $Re_* = 180$, la pente prédite par le modèle SA est un peu plus faible que celle prédite par la DNS de *del Álamo et Jiménez (2003)*. La simulation avec une paroi ondulée que nous examinons ici correspond à $Re_* = 370$, basé sur la vitesse de frottement moyenne.

L'évolution du profil de vitesse sur une longueur d'onde est rapportée sur la figure 3.19. Les profils sont regroupés deux par deux, les deux abscisses étant décalées de $\lambda/2$. Ici, l'altitude z^+ est recalculée pour avoir le zéro sur la position locale de la paroi. Comme l'indiquait le profil de vitesse moyen, le modèle de SA prédit une vitesse légèrement plus élevée au coeur du canal, tout le long de l'onde. Au-dessus des crêtes ($x/\lambda = 0$ et 1.0), le profil semble bien reproduit. C'est également à cet endroit qu'il s'approche le plus de la loi logarithmique. C'est dans le creux ($x/\lambda = 0.5$) que les plus grandes différences apparaissent, en particulier à proximité de la paroi inférieure. Dans la première moitié de l'onde, la vitesse est trop élevée, l'écart pouvant atteindre un facteur deux, tandis que dans la seconde moitié elle est plus basse que les références.

Nous nous tournons désormais vers les grandeurs pariétales. Nous les avons calculées comme pour la marche descendante, c'est-à-dire par extrapolation des grandeurs à l'intérieur du domaine, le long des lignes verticales de maillage. Les distributions le long d'une longueur d'onde sont rapportées sur les figures 3.20a et 3.20b. La pression y est définie comme $p_w = (P(x, z_w(x)) - P(0, z_w(0))) / (\frac{1}{2}\rho U_b^2)$, et le cisaillement comme $\tau_w = \mu(\partial_n u) / (\rho \bar{u}_*^2)$. La pression pariétale est ainsi calibrée de façon à être nulle au niveau de la première crête. Nous commentons les courbes en pointillés rouges plus loin.

La distribution de pression suit un profil sinusoïdal, avec un maximum au-dessus du creux. On peut noter une légère dissymétrie amont/aval, Cela est dû à la présence du gradient de pression longitudinal P_x , qui

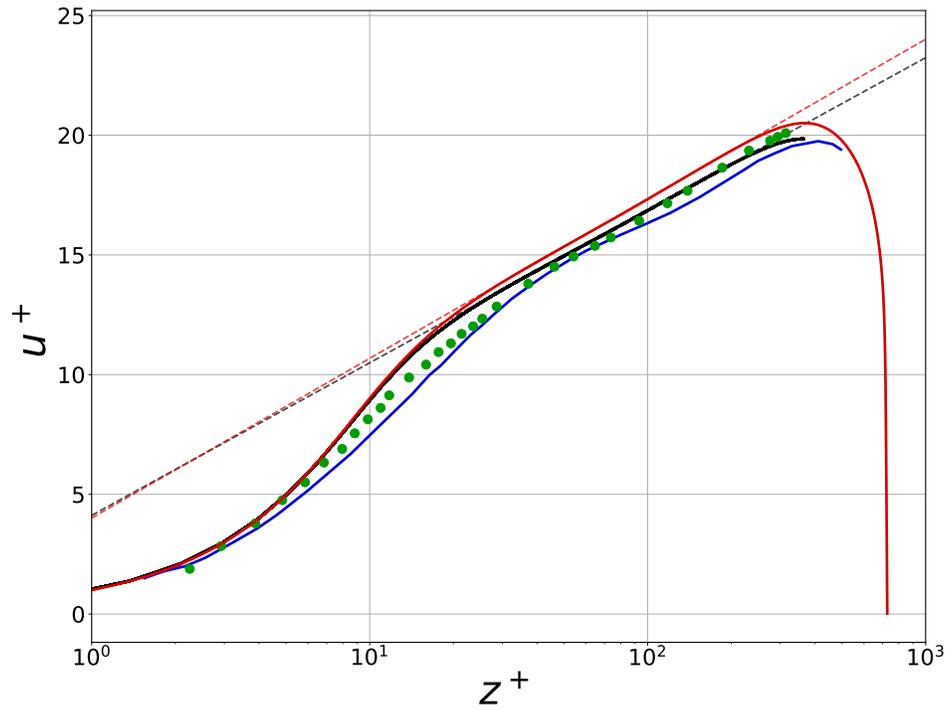


FIGURE 3.18 – Profil de vitesse horizontale moyenné le long d'une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.0155$). En rouge le profil calculé avec JADIM. En bleu les résultats de LES de *Henn et Sykes (1999)*, en vert les données expérimentales de *Zilker et al. (1977)*. En noir, le profil obtenu pour un canal plan. Les lignes en pointillés sont des régressions linéaires sur l'intervalle $40 < z^+ < 200$.

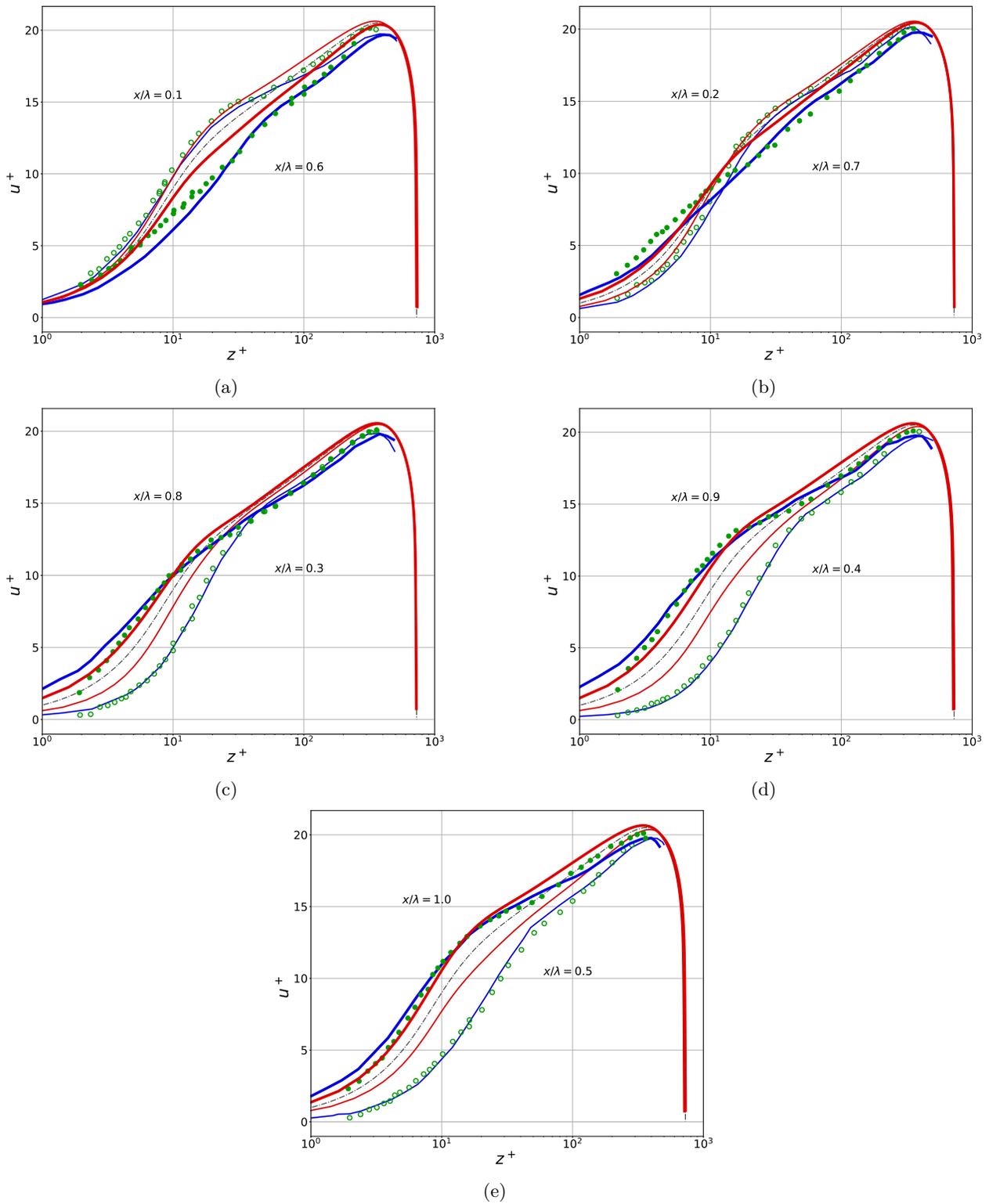


FIGURE 3.19 – Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses le long d’une longueur d’onde ($a/\lambda = 0.0155$). Nous avons indiqué les positions $x/\lambda \leq 0.5$ avec des lignes en trait fin et des symboles, et les positions $x/\lambda > 0.5$ avec des lignes en trait épais et des symboles fermés. Le profil moyenné sur une longueur d’onde est indiqué sur chaque sous-figure par une ligne en tirets d’onde.

induit une composante $P_x x$ le long du canal. Si l'on trace p_w sur les deux longueurs d'onde, on constate en effet une diminution globale de la pression due au gradient de pression moteur. Cette diminution mise à part, on retrouve un profil harmonique comme prédit par *Benjamin (1959)*. En calibrant la pression sur chaque longueur d'onde pour caler le zéro sur la première crête, les deux courbes se superposent.

En ce qui concerne le cisaillement pariétal, le déphasage semble bien reproduit par rapport aux courbes de référence. On constate cependant que la distribution est plus aplatie que les deux références. Ainsi, le cisaillement est trop faible sur les crêtes, et trop élevé au niveau des creux. Ce comportement est cohérent avec les observations précédentes à propos des profils de vitesse. Il suggère un manque de "dynamique" du modèle de turbulence dans la direction de l'écoulement. Notons que les distributions sur les deux longueurs d'onde se superposent parfaitement.

Le modèle SA original ne tient pas compte d'éventuels effets de courbure. Afin de corriger cela, *Spalart et Shur (1997)* ont proposé une modification à partir d'invariants galiléens. Le modèle corrigé est noté SARC (RC pour *Rotation and Curvature*). L'idée est de multiplier le terme de production $c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}$ de l'équation (3.1) par la fonction suivante :

$$f_{r1} = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} (1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2} \tilde{r})) - c_{r1} \quad (3.15)$$

Cela introduit trois nouveaux paramètres numériques : $c_{r1} = 1$, $c_{r2} = 2$, $c_{r3} = 1$. La fonction f_{r1} dépend de r^* et \tilde{r} , deux quantités sans dimension qui tiennent compte des taux de déformation et de rotation locaux. En particulier, $r^* = S/\Omega$, où S est la norme du tenseur des déformations, et Ω celle du tenseur des rotations. La seconde quantité fait intervenir les composantes de ces deux tenseurs, et les dérivées lagrangiennes du premier. *Zhang et Yang (2013)* proposent une alternative plus simple et moins coûteuse en calculs. Ils remplacent la définition de *Spalart et Shur (1997)* par le nombre de Richardson local, défini par

$$Ri = \frac{\Omega}{S} \left(\frac{\Omega}{S} - 1 \right) \quad (3.16)$$

Ils appliquent cette correction à un écoulement au-dessus d'une paroi convexe, et dans une conduite en U. Ils montrent qu'elle améliore la précision du modèle SA original, et que cette redéfinition de \tilde{r} est plus efficace que l'originale en terme de coût de calcul.

Nous avons appliqué cette correction aux écoulements sur paroi ondulée. Les résultats sont visibles sur les distributions pariétales sous formes de croix rouges.

On peut constater que dans le cas non-décollé, la prise en compte des effets de courbure n'apporte qu'une modification très marginale. Le maximum de pression est modifié de moins de 0.5 %, et on devine un très léger déphasage du cisaillement. Cela semble aller dans le sens d'une réponse linéaire de l'écoulement à la paroi lorsque l'amplitude est petite.

Nous avons discuté au chapitre 1 d'un effet de relaxation sur le cisaillement pariétal, observé et quantifié par *Abrams et Hanratty (1985)*. Nous avons donc souhaité vérifier le comportement du modèle de SA lorsque le nombre d'onde adimensionné k^+ varie. Pour cela, nous avons repris la configuration exposée plus haut, c'est-à-dire le même maillage et la même valeur de forçage P_x . Nous avons modifié la viscosité moléculaire du fluide afin de faire varier k^+ . Les valeurs explorées, ainsi que le nombre de Reynolds turbulent et le pas d'espace minimum correspondant sont résumés sur le tableau 3.5. La vitesse de frottement moyenne est sensiblement la même d'un calcul à l'autre. La variation du nombre de Reynolds est donc due quasiment exclusivement à la variation de ν . Pour chaque cas étudié, nous avons calculé la distribution du cisaillement

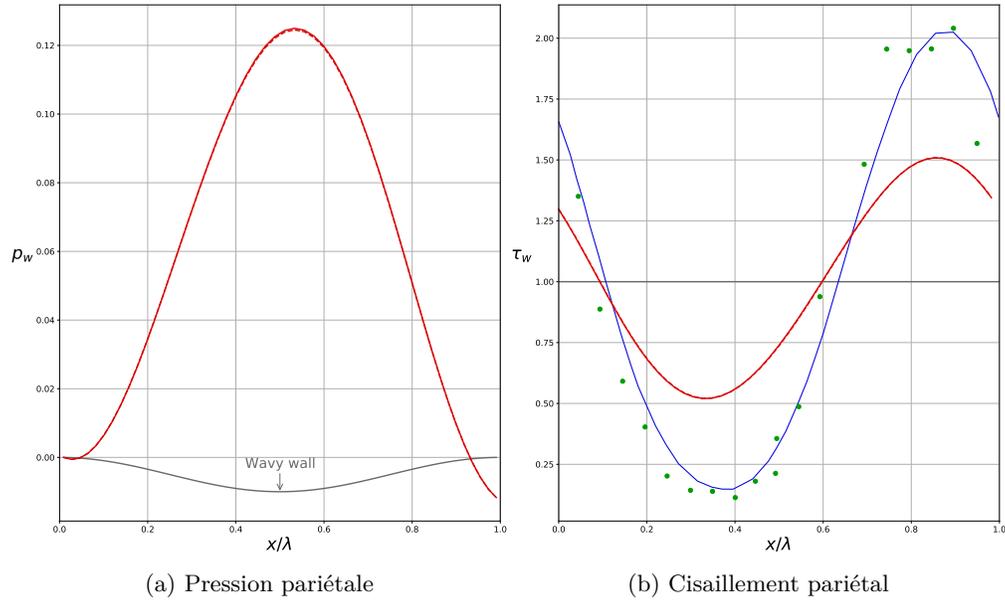


FIGURE 3.20 – Grandeurs pariétales sur une longueur d’onde ($a/\lambda = 0.0155$). Le code couleur est le même que sur les figures précédentes de profils de vitesse. Les points rouges correspondent au modèle SARC.

pariétal comme ci-dessus. Ces distributions suivent toutes une forme sinusoidale, l’hypothèse d’une réponse linéaire reste donc cohérente. Nous avons alors effectué une transformée de Fourier du cisaillement pariétal, puis nous en avons extrait l’amplitude et le déphasage du mode fondamental. Nous les avons reproduits sur la figure 3.21, en plus des données expérimentales d’*Abrams et Hanratty (1985)* et du modèle de relaxation. Nos prédictions d’amplitude sont presque toujours inférieures aux données de référence, mais elles suivent une tendance similaire avec k^+ . Pour $k^+ < 8 \times 10^{-3}$, nos simulations ne parviennent pas à reproduire l’effet de relaxation. Au-delà en revanche, il y a un très bon accord entre nos données et le modèle de relaxation. Cela malgré le fait que ce dernier repose sur deux paramètres numériques, que *Abrams et Hanratty (1985)* ont ajusté à leurs mesures.

Des travaux récents ont étudié cet effet de relaxation à l’aide d’un modèle de transport des contraintes turbulentes (*Stuck et al. (2022)*). Avec cette modélisation, les auteurs parviennent à reproduire la distribution du déphasage du cisaillement pariétal correctement jusqu’à $k^+ \sim 0.001$. L’amplitude quant à elle est toujours surestimée par rapport aux données expérimentales de *Abrams et Hanratty (1985)*.

Écoulement décollé

Nous nous intéressons désormais au cas de l’écoulement décollé à grande amplitude. Nous rapportons la distribution des lignes de courant sur la figure 3.22, aux côtés de celles de *Segunda et al. (2018)*, obtenues expérimentalement sur une configuration similaire. Les couleurs indiquent la distribution de vitesse horizontale, adimensionnée par U_b . Il faut noter que l’échelle de référence n’est pas linéaire, mais les valeurs extrêmes sont similaires. Les limites de la figure correspondent à la moitié inférieure du canal ($z_{max}/\lambda \sim 0.5$). L’écoulement présente un décollement peu après la crête ($x/\lambda \sim 0.15$), puis recolle aux trois quarts de la longueur d’onde. Entre ces deux points, se trouve une zone de recirculation, dont la taille longitudinale est similaire

k^+	Re_b	Re_*	Δy_{min}^+
6.5×10^{-4}	115635	4857	2.50×10^{-1}
8.5×10^{-4}	85546	3691	1.90×10^{-1}
2.0×10^{-3}	33093	1565	8.05×10^{-2}
5.0×10^{-3}	11840	623	3.20×10^{-2}
8.6×10^{-3}	6500	364	1.87×10^{-2}
1.2×10^{-2}	4458	260	1.33×10^{-2}
2.1×10^{-2}	2452	153	7.87×10^{-3}
3.0×10^{-2}	1566	104	5.37×10^{-3}
4.0×10^{-2}	1112	79	4.05×10^{-3}

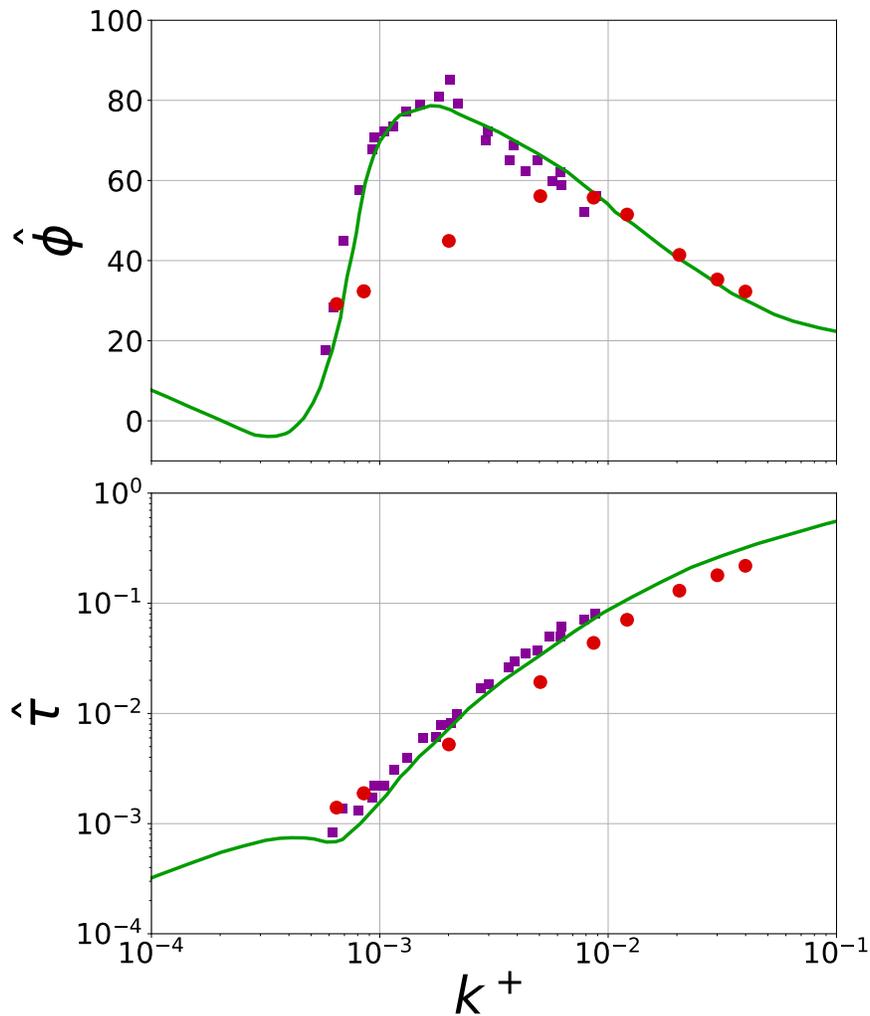
 TABLE 3.5 – Caractéristiques des simulations en faisant varier k^+ .


FIGURE 3.21 – Evolution du déphasage (en haut) et de l'amplitude (en bas) du cisaillement pariétal avec k^+ . Les symboles carrés sont les données expérimentales d'*Abrams et Hanratty (1985)*. La courbe correspond au modèle de relaxation de ces derniers. Les symboles ronds sont les résultats des simulations avec JADIM et le modèle de SA.

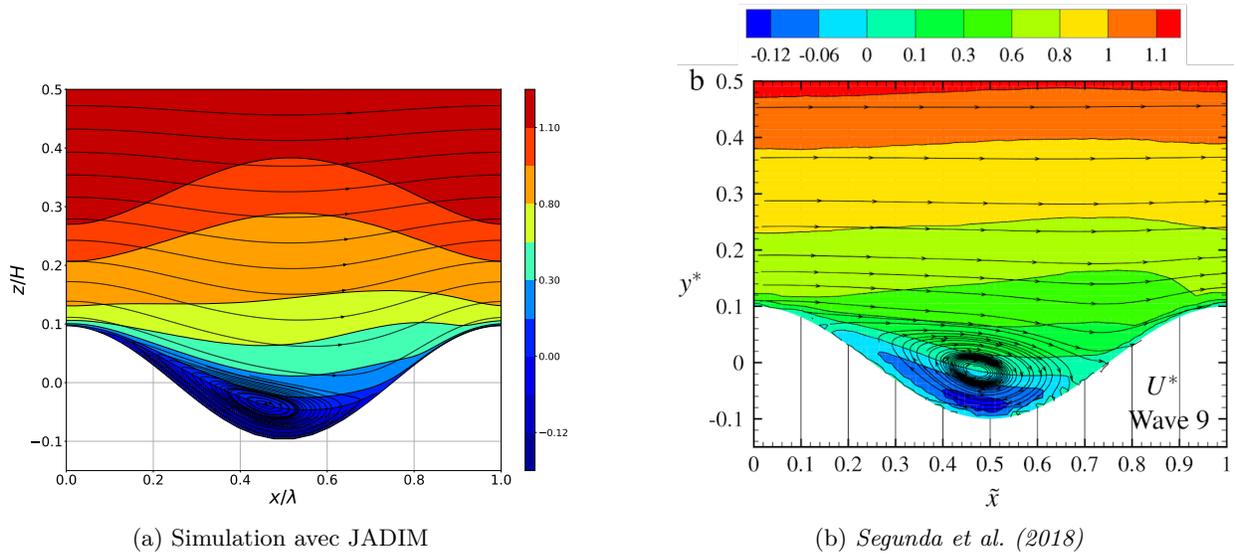


FIGURE 3.22 – Lignes de courant au-dessus d’une paroi ondulée à grande amplitude

à celle de la figure de référence. Les positions du décollement et du recollement peuvent être déterminées à partir du cisaillement pariétal. Pour cela, nous cherchons les points où il change de signe. Nous relevons ainsi $x/\lambda = 0.072$ pour le décollement, et $x/\lambda = 0.72$ pour le recollement. Le modèle SA prédit un décollement légèrement précoce, et un recollement un peu tardif. Ces valeurs sont tout de même plus proches des mesures expérimentales que les résultats de la LES, ainsi que les autres modèles de turbulence testés par *Segunda et al. (2016)* (voir figure 3.15). L’extension en hauteur de la zone de recirculation est en revanche plus limitée. Au milieu de l’onde, on peut situer le haut de la zone de recirculation au niveau de la ligne moyenne de z_w , alors qu’elle atteint presque la hauteur des crêtes sur la figure de référence. Les iso-lignes de vitesse longitudinale sont semblables jusqu’à environ $z^+ = 0.15$. Au-delà, elles sont plus aplaties sur la figure 3.22b. Notre simulation présente ainsi un ralentissement de la vitesse au-dessus du creux. Cela est la conséquence d’une surpression, qui s’étend assez loin au-dessus du creux, jusqu’à au moins $z^+ = 0.4$, comme l’indique la figure 3.23.

Nous rapportons les profils de vitesse longitudinale le long de l’onde sur les figures 3.24. La vitesse y est adimensionnée par la vitesse débitante, et l’altitude par la hauteur totale. Le profil de vitesse n’est plus comparable à celui au-dessus d’une plaque plane. La vitesse au centre du canal se situe entre les données expérimentales et celles de la LES. Le maximum est généralement plus faible et situé plus bas que pour les données de référence. A proximité de la paroi inférieure, la vitesse est trop ralentie au-dessus des crêtes. Ce comportement est semblable à celui relevé précédemment en l’absence de décollement. En revanche, il semble y avoir un bon accord avec les données expérimentales au-dessus du creux.

La pression et le cisaillement pariétaux sont reportés sur la figure 3.25. Les définitions sont les mêmes que précédemment, à ceci près que l’adimensionnalisation du cisaillement est ici réalisé par rapport à la vitesse débitante. Comme pour le cas non-décollé, les distributions sur chaque longueur d’onde se superposent parfaitement, donc nous ne rapportons que la première.

Tout le long de l’onde, la pression pariétale reste à un niveau inférieur à celle prédite par la LES, et celle déterminée expérimentalement. On peut remarquer la présence d’un plateau local sur la première moitié de

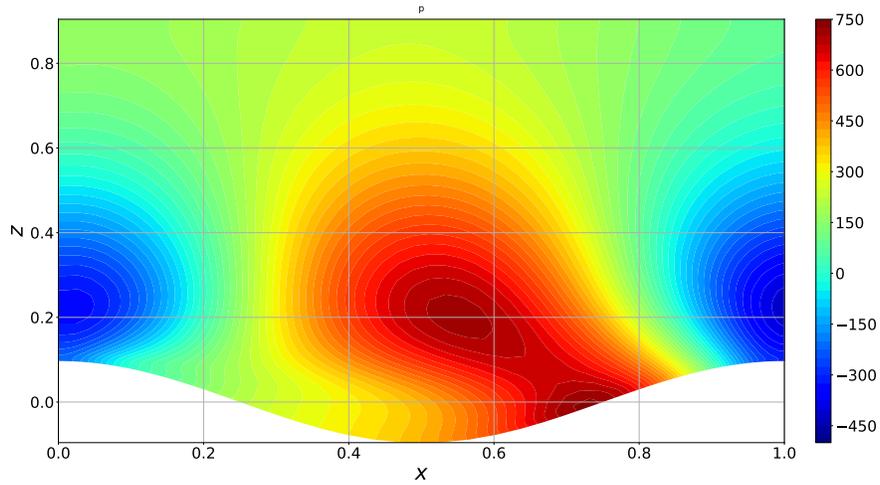


FIGURE 3.23 – Distribution de pression au-dessus d'une paroi ondulée à grande amplitude. La pression est adimensionnée par $\frac{1}{2}\rho U_b^2$.

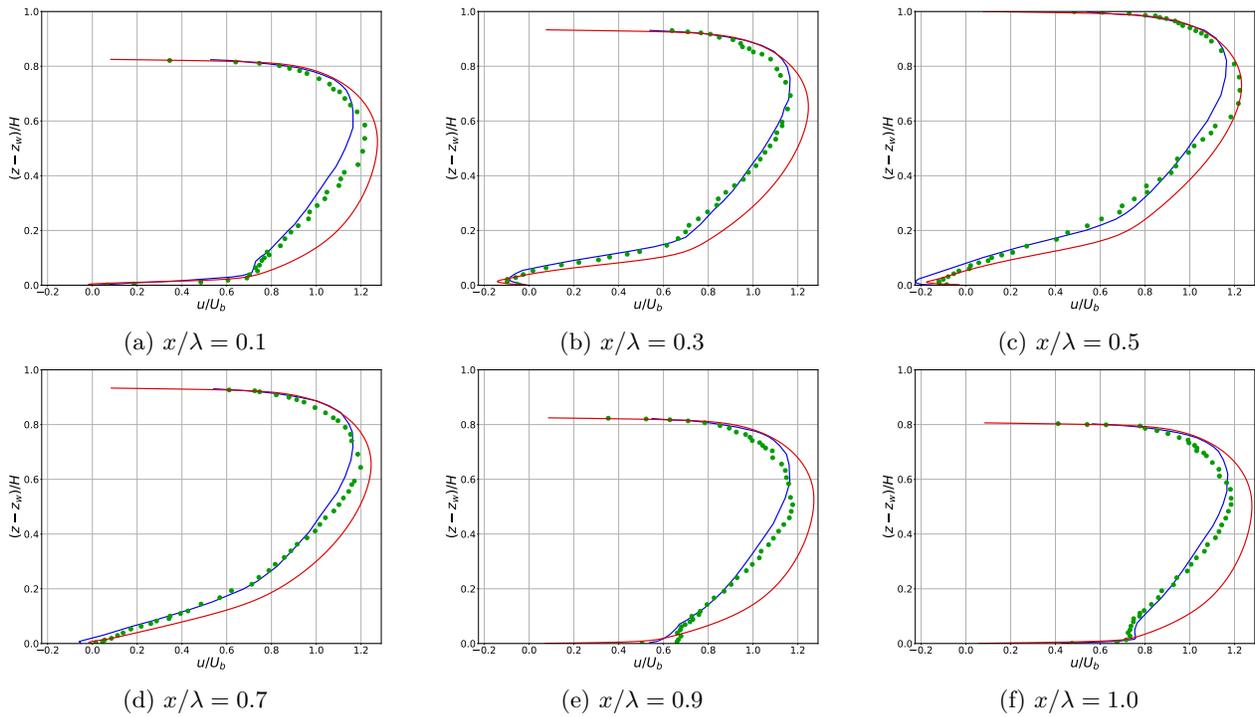


FIGURE 3.24 – Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses le long d'une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.1$). En bleu les résultats de LES de *Henn et Sykes (1999)*, en vert les données expérimentales de *Buckles et al. (1984)*, en rouge les profils calculés avec JADIM.

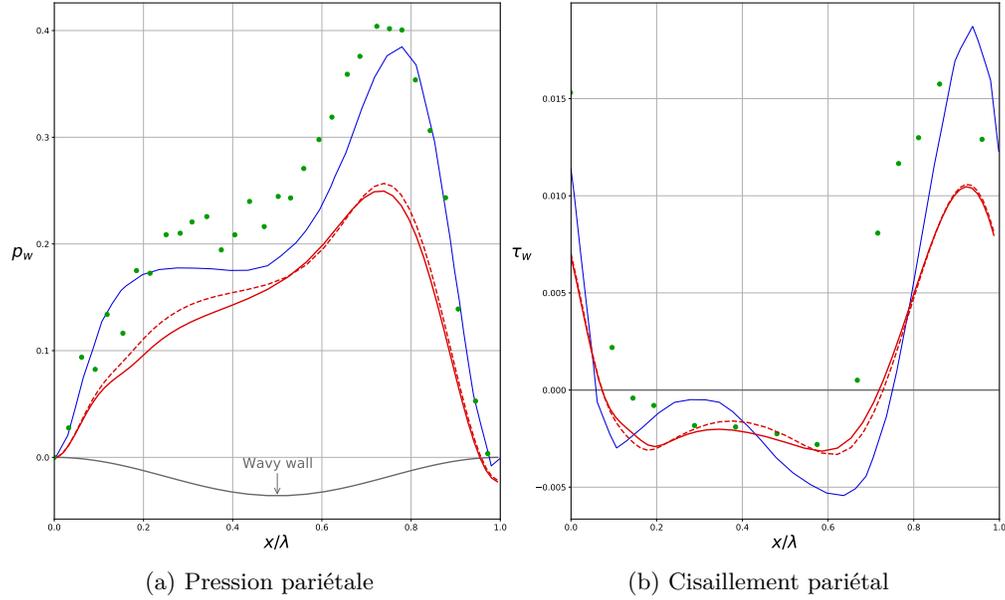


FIGURE 3.25 – Grandeurs pariétales sur une longueur d’onde ($a/\lambda = 0.1$). Le code couleur est le même que sur les figures précédentes de profils de vitesse. Les points rouges correspondent au modèle SARC.

la courbe pour la LES et l’expérience. Bien que ce ne soit pas très clair pour cette dernière, il semble que ce soit tout de même un comportement habituel des écoulements décollés sur paroi ondulée (*Zilker et Hanratty (1979)*). La plupart des modèles de turbulence testés par *Segunda et al. (2016)* présentent également cette caractéristique. Le modèle SA prédit un ralentissement de la croissance de la pression, mais pas suffisant pour faire apparaître un plateau. La correction de courbure du modèle SARC relève légèrement le niveau de pression, et fait apparaître un début de plateau. En jouant avec le paramètre c_{r2} , nous avons pu accentuer ce dernier, mais ce faisant le maximum de pression est réduit.

La distribution de cisaillement présente un profil similaire aux données de référence. Le cisaillement diminue rapidement à l’aval de la crête, jusqu’à changer de signe. Il reste négatif sur une grande partie de l’onde, à un niveau relativement constant, puis change à nouveau de signe à l’aval du creux. Il augmente alors rapidement pour atteindre son maximum juste avant la crête suivante. Comme nous l’avons relevé pour l’écoulement non-décollé, ce maximum n’est pas assez important au niveau des crêtes. Cela signifie que l’écoulement y est trop ralenti, comme noté précédemment sur les profils de vitesse. En revanche, le niveau minimum dans la zone de recirculation est en bon accord avec les mesures expérimentales, notamment pour x/λ entre 0.35 et 0.6.

Les valeurs de cisaillement rapportées par *Henn et Sykes (1999)* et *Buckles et al. (1984)* sont adimensionnées par la vitesse débitante U_b . Connaissant le nombre de Reynolds Re_b , nous pouvons en déduire le nombre de Reynolds turbulent. Pour cela, nous utilisons le fait que le rapport des nombres de Reynolds est égal au rapport des vitesses U_b et \bar{u}_* . Cette relation s’écrit

$$Re_* = Re_b \left(\frac{\bar{\tau}_w}{2} \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

Nous rappelons qu'ici τ_w est le cisaillement adimensionné par $\frac{1}{2}\rho U_b^2$. Nous estimons alors que $Re_* = 489$ pour la LES, et $Re_* = 528$ pour les données expérimentales de *Buckles et al. (1984)*. Cela représente un rapport d'environ 1.5 par rapport à nos données. Quantitativement, l'aire du côté négatif est du même ordre de grandeur entre nos données et la LES, alors qu'elle varie du simple au double du côté positif. C'est le signe que le frottement est globalement sous-évalué sur l'ensemble de la longueur d'onde, et plus particulièrement au voisinage des crêtes. Cela se traduit par un nombre de Reynolds turbulent plus faible.

Les corrections apportées par le modèle SARC sont plus prononcées que pour l'écoulement non-décollé, mais restent encore très marginales. Nous avons décidé d'utiliser le modèle original pour nos simulations de croissance de vagues de vent.

3.4 Conclusion

Nous avons présenté le modèle de turbulence que nous avons retenu pour simuler la turbulence dans l'air. Il s'agit du modèle de Spalart-Allmaras, qui prédit la viscosité turbulente par résolution d'une équation de transport. Nous avons présenté son implémentation dans JADIM, notamment le calcul de la distance à la paroi la plus proche pour des écoulements monophasiques. Nous avons testé ce modèle sur plusieurs configurations monophasiques. Comme attendu, le modèle se comporte très bien en canal. Pour l'écoulement non-décollé sur paroi ondulée, les profils de vitesse et de grandeurs pariétales sont en bon accord avec l'expérience et la LES de référence. C'est également le cas du déphasage et de l'amplitude du cisaillement pariétal tant que $k^+ > 8 \times 10^{-3}$. Quantitativement, le modèle SA prédit tout de même des grandeurs pariétales plus élevées dans les creux et plus basses sur les crêtes. Nous avons également étudié des configurations plus complexes présentant un décollement, comme la marche descendante et la paroi ondulée à grande amplitude. Nous avons pu constater que le modèle parvient à reproduire qualitativement les observations expérimentales. Cependant, comme pour la paroi ondulée sans décollement, il semble souffrir d'un manque de dynamisme dans la direction de l'écoulement, comme le montre notamment l'évolution du cisaillement pariétal sur paroi ondulée à grande amplitude. L'écoulement est trop freiné sur les crêtes, et pas assez ralenti dans les creux. Cela est sans doute dû, respectivement, à un excès et un défaut de viscosité turbulente. Nous avons tenté de diminuer l'influence de la diffusion horizontale, mais cela n'a pas donné de résultats sensiblement différents. Cela semble représenter la limite pour un modèle à une équation, qui ne dispose que d'une seule échelle de temps, contrairement aux modèles à deux équations. Nous l'avons tout de même retenu pour sa simplicité d'approche, et ses résultats intéressants pour les écoulements en couche limite turbulente.

Chapitre 4

Mise en place des expériences numériques sur les vagues de vent

Nous présentons les stratégies que nous avons mises en place pour générer des vagues de vent numériquement. Nous commençons par présenter la méthode de suivi de l'interface. Nous abordons ensuite les ajustements que nous avons apportés au modèle de turbulence, afin de l'adapter à une interface déformable. Suite à cela, nous détaillons le protocole que nous avons mis en place pour les expériences numériques de vagues de vent. Nous présentons également quelques résultats pour illustrer ce dernier point. L'ensemble des résultats sera discuté plus en détail au chapitre suivant.

4.1 Suivi de l'interface

Pour simuler un écoulement diphasique, nous utilisons le module *VOF* de JADIM. Le principe a été présenté précédemment au chapitre 2. Rappelons que la méthode est sans reconstruction d'interface. Cela signifie que l'on ne connaît pas explicitement l'évolution temporelle de l'interface. Nous souhaitons accéder à cette information pour deux raisons. D'une part, elle nous permet de caractériser la croissance et l'évolution des vagues. D'autre part, le modèle de turbulence nécessite de calculer la distance à l'interface.

Notons la position locale instantanée de l'interface $\zeta(x, t)$. L'interface est repérée par l'équation $z = \zeta(x, t)$. Si on détermine ζ , on peut en déduire sa position moyenne, et ses moments d'ordre supérieur. La position moyenne doit rester constante au cours du temps, car le domaine est périodique, et ne possède donc pas d'entrée et de sortie. C'est un indicateur qui permet de vérifier que la conservation du volume est bien respectée. Parmi les autres moments, l'écart-type ζ_{rms} est défini par

$$\zeta_{rms}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \zeta(x, t)^2 dx \quad (4.1)$$

où L est la longueur du domaine. Il permet de caractériser la croissance temporelle des vagues.

On repère un point du maillage par les indices i et j , dans les directions respectivement horizontale et verticale. Le domaine est cartésien, donc les lignes du maillage sont des isolignes à x ou z constant. Les coordonnées du point (i, j) sont alors repérées par (x_i, z_i) .

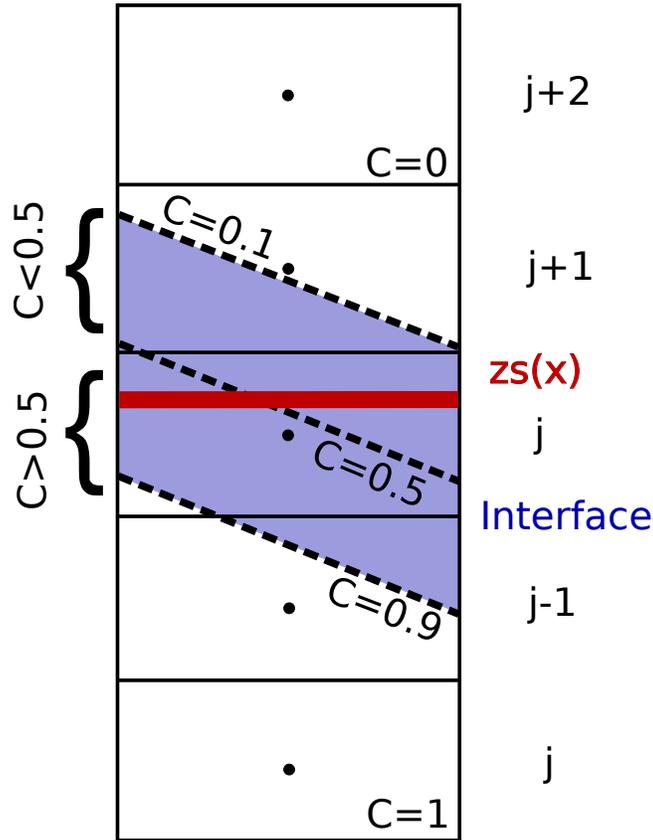


FIGURE 4.1 – Illustration de la méthode SLIC pour interpolation de l’interface

Dans le cadre d’une approche VOF, rappelons que l’on peut également repérer l’interface par l’isoligne $C = 0.5$. Celle-ci peut se trouver entre deux points du maillage. Avant de calculer sa position, nous avons mis en place une première étape pour approximer celle-ci. Nous considérons que $C = 0$ dans l’air, et 1 dans le liquide. Pour chaque abscisse x_i , nous cherchons l’altitude z_j telle que l’encadrement $C_{i,j+1} < 0.5 \leq C_{i,j}$ est vérifié. Pour cela, l’algorithme de détection démarre en haut du domaine, balaie l’ensemble des cellules vers le bas, et s’arrête dès que cet encadrement est confirmé. Si l’interface est multi-valuée, l’altitude z_j ainsi calculée est sa position la plus haute, à l’abscisse x_i .

Pour calculer ζ , nous utilisons une méthode *Simple Line Interface Calculation* (SLIC). Il s’agit d’une technique géométrique, dont le principe, illustré par la figure 4.1, est d’approcher localement l’interface par des segments. Nous utilisons des maillages bidimensionnels cartésiens, et supposons que l’interface est mono-valuée. Nous avons donc fait le choix de l’approcher par des segments horizontaux. Notons la position ainsi interpolée $z_s(x, t)$. Nous pouvons écrire l’aire de la colonne de liquide, située à l’abscisse x_i , de deux

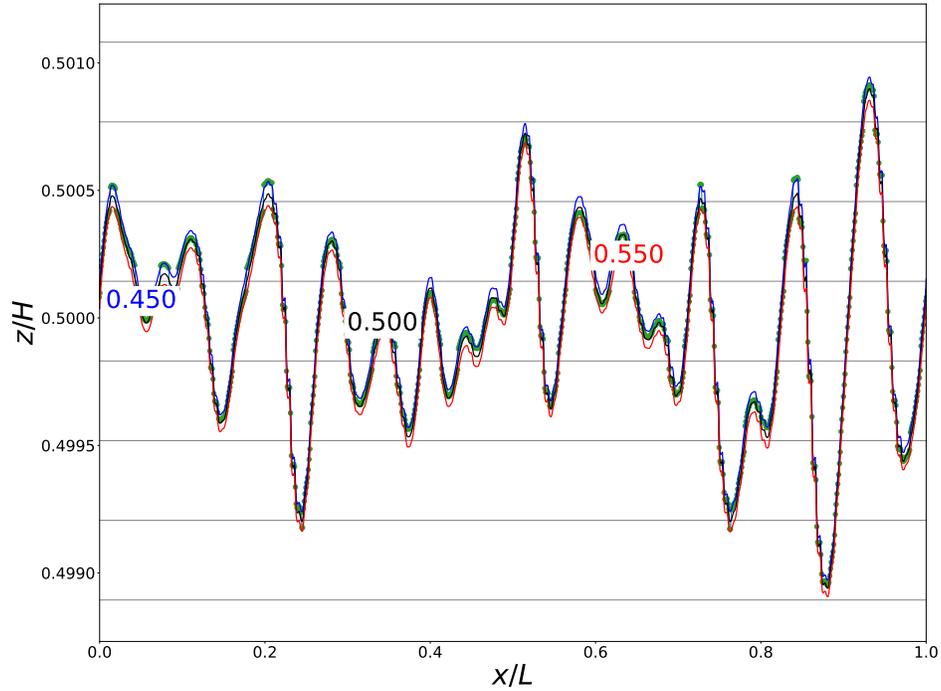


FIGURE 4.2 – Exemple de position interpolée z_s . La courbe $z_s(x)$ est indiquée en vert. Les autres courbes sont des courbes de niveau de C , dont les valeurs sont indiquées sur la figure. Les lignes horizontales représentent les lignes du maillage pour les nœuds de pression.

manières différentes :

$$S(x_i) = z_s(x_i)\Delta x \quad (4.2)$$

$$S(x_i) = [z_{i,j} + C_{i,j}(z_{j+1} - z_j) + C_{i,j+1}(z_{j+2} - z_{j+1})]\Delta x \quad (4.3)$$

Pour écrire cela, la seule hypothèse nécessaire sur le maillage est qu'il soit cartésien. De plus, 4.2 et 4.3 sont écrits à abscisse fixée, donc il n'est pas nécessaire que le pas d'espace Δx soit régulier. À partir de l'égalité des deux aires, on montre la relation

$$z_s(x_i) = z_j + C_{i,j}(z_{j+1} - z_j) + C_{i,j+1}(z_{j+2} - z_{j+1}) \quad (4.4)$$

Le taux de présence dépend du temps, donc $z_s = z_s(x, t)$. Nous utilisons cette position interpolée pour calculer la position moyenne et le moment d'ordre deux de la position de l'interface. La figure 4.2 montre un exemple de distribution de z_s , pour une simulation diphasique de vagues de vent en phase de croissance. La courbe interpolée est repérée en vert. Nous avons tracé des courbes de niveau de C , ainsi que les lignes horizontales du maillage. Les coordonnées sont adimensionnées par la longueur L et la hauteur H du domaine. La position moyenne de l'interface est alors $z/H = 0.5$. La position de z_s est bien encadrée par les courbes de niveau $C = 0.45$ et $C = 0.55$. On peut observer à certains endroits une surévaluation de z_s , mais elle ne dépasse pas 20 % de la hauteur d'une maille. Plus de détails sur les dimensions du maillage sont fournis ci-dessous (4.3.1). Un exemple pour un cas multi-valué est présenté sur la figure 4.4b.

4.2 Adaptation du modèle de turbulence

Le modèle SA a été construit pour des écoulements monophasiques. Il nécessite donc quelques adaptations pour l'appliquer à une configuration diphasique.

Rappelons qu'une distribution nulle de viscosité turbulente est une solution stable de l'équation du modèle SA. Il faut donc l'initialiser avec un champ non nul. Plus de détails sur l'initialisation de ν_t sont présentés plus loin, lorsque nous abordons le protocole d'initialisation des expériences numériques.

4.2.1 Différentiation entre les deux phases

Nous supposons que l'écoulement dans le liquide est laminaire. La distribution de viscosité turbulente ν_t ne devrait donc être définie et résolue que dans l'air. Cependant, conformément à l'approche à un fluide de la méthode VOF, ν_t doit être un champ qui s'étend sur l'ensemble du domaine de calcul. Pour s'assurer que la viscosité turbulente reste nulle dans le liquide, nous effectuons une troncature de ν_t à l'aide du taux de présence C . Au cours d'une itération temporelle, et à chaque étape du schéma de Runge-Kutta, une fois que l'avancement en temps de $\tilde{\nu}$ a été calculé, nous effectuons l'opération

$$\nu_t = (1 - C)f_{v1}\tilde{\nu} \quad (4.5)$$

Rappelons que f_{v1} est une fonction du modèle de turbulence. Elle modélise le passage de la couche logarithmique à la sous-couche visqueuse. Cette opération permet d'imposer une distribution nulle dans le liquide, et de conserver la contribution de l'air au-dessus de l'interface. Cette méthode fonctionne bien pour une interface mono- ou multi-valuée. Elle peut être insuffisante pour gérer d'éventuelles occlusions de liquide, des poches qui se détachent dans l'air, etc. Nous supposons que ce type de phénomène ne se produira pas pour les vagues de vent dans les régimes qui nous intéressent.

Si l'on souhaite lever l'hypothèse d'un écoulement laminaire dans le liquide, le traitement ci-dessus ne tient plus. Une piste pour différencier les deux phases peut être d'agir via la fonction f_{v1} . Pour rappel, cette dernière est définie par

$$f_{v1} = \frac{(\nu_t/\tilde{\nu})^3}{(\nu_t/\tilde{\nu})^3 + c_{v1}^3} \quad (4.6)$$

Cette fonction fait le lien entre la variable intermédiaire $\tilde{\nu}$, et la véritable viscosité turbulente ν_t , qui intervient dans les équations de quantité de mouvement. Elle vaut 1 dans presque tout l'écoulement, sauf très près de la paroi, ou ici de l'interface. Pour un écoulement turbulent sous une surface libre, la sous-couche visqueuse est environ deux fois plus fine qu'en présence d'une condition d'adhérence. De plus, la couche tampon, entre les couches visqueuse et logarithmique, est quasiment inexistante. On peut donc modéliser ce comportement en fixant f_{v1} à 1 dans tout le liquide, c'est-à-dire lorsque $C > 0.5$. Plus précisément, il suffit de modifier la relation (4.5) sous la forme

$$\nu_t = [f_{v1} + C(1 - f_{v1})]\tilde{\nu} \quad (4.7)$$

4.2.2 Calcul de la distance à la paroi

Dans le modèle SA, la distance à la paroi est cruciale pour déterminer le terme de destruction. Elle intervient également à plusieurs autres endroits du modèle. Pour les écoulements diphasiques auxquels nous

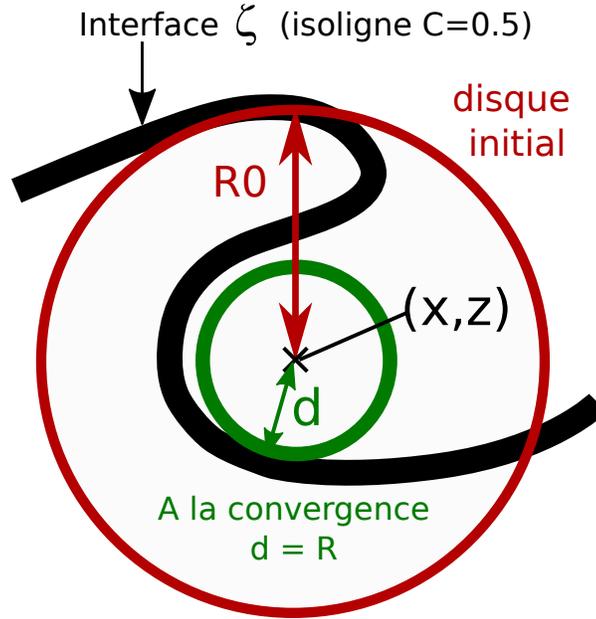


FIGURE 4.3 – Schéma explicatif de l'algorithme de calcul de la distance à l'interface

nous intéressons, il n'y a pas d'échange de matière entre les deux fluides. Nous considérons que l'interface se comporte comme une paroi imperméable déformable pour l'air. Contrairement aux cas monophasiques, l'altitude de cette paroi n'est pas nécessairement monovaluée, par exemple en présence d'un déferlement. Le calcul de la distance doit donc être adapté pour les simulations diphasiques.

Pour un écoulement monophasique, d est la distance locale à la paroi la plus proche. Si l'interface est monovaluée et relativement plane, on peut déterminer d à partir de la position interpolée z_s . Pour une abscisse x , il suffit de prendre directement la différence entre l'altitude z et la position $z_s(x)$. Si l'interface subit de fortes déformations, cela n'est plus suffisant. A fortiori si elle devient multivaluée, car z_s ne repère alors que la position la plus haute de l'interface.

L'idée que nous avons retenue est de comparer le taux de présence local en un point (i, j) , et le taux de présence moyenné sur un voisinage de ce point. Plus précisément, ce voisinage est un disque de rayon R , et centré en (i, j) . Tant que la différence entre les deux taux de présence est supérieure à une erreur critique, le rayon R est incrémenté. Lorsque la différence devient inférieure à l'erreur critique, on a atteint la distance d , car c'est le dernier rayon R calculé. Cette méthode est appliquée partout dans l'air. Comme nous considérons que le liquide est en écoulement laminaire, nous devrions y imposer une valeur uniformément nulle. Cela n'est pas possible pour des raisons numériques. Nous imposons alors une valeur arbitrairement petite, à partir du plus petit pas d'espace du maillage, toutes directions confondues. Cela donne plus de poids au terme de destruction, et assure ainsi que l'on a bien $\nu_t = 0$ dans le liquide au cours de la simulation.

Nous détaillons l'algorithme de calcul de d , dont le principe est représenté sur la figure 4.3. Soit un point (i, j) dans l'air. Au lieu de partir de $R_0 = 0$, nous utilisons l'interpolation z_s en première approximation. Nous définissons le rayon initial du disque comme $R_0 = |z_{i,j} - z_s(x_{i,j})|$. Cela définit un voisinage centré en (i, j) , et qui traverse éventuellement l'interface. Comme souligné ci-dessus, cette valeur initiale peut fournir une très

bonne approximation de d . On peut donc économiser du temps de calcul en choisissant directement $d = R_0$. Cela est pertinent pour des altitudes "suffisamment loin" de l'interface, où l'influence de d devient négligeable. Nous appliquons cette estimation initiale si $R_0 > 5z_{s,rms}$. Sinon, l'algorithme entre dans un processus itératif pour raffiner le calcul de R . A l'itération n , le rayon est noté R^n . L'algorithme balaie chaque point (i', j') du maillage, et effectue les opérations suivantes. Nous introduisons un champ α , qui prend les valeurs 0 ou 1 si le point (i', j') est respectivement à l'extérieur, ou à l'intérieur du disque. Pour cela nous comparons le rayon R^n et la distance l , définie par

$$l_{i,j}(i', j') = \left((x_{i,j} - x_{i',j'})^2 + (z_{i,j} - z_{i',j'})^2 \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

Nous comptons également le nombre N_c^n de cellules remplies de liquide et présentes à l'intérieur du disque. Le taux de présence d'air moyen dans le disque de rayon R , dont la surface est notée S , est défini par

$$f(R) = \frac{\int_S \alpha(1 - C) dS}{\int_S \alpha dS} \quad (4.9)$$

et la différence relative par rapport au taux de présence d'air local, $f(0) = 1 - C_{i,j}$, s'écrit

$$E(R) = \frac{|f(R) - f(0)|}{f(0)} \quad (4.10)$$

Nous calculons donc $f(R^n)$, puis $E(R^n)$. Si cette différence est supérieure à une erreur critique E_c , nous diminuons la valeur du rayon $R^n = R_{n-1} - \delta$. Ici δ est le plus petit pas d'espace à l'intérieur du disque. L'opération est répétée tant que $E(R^n) > E_c$, $N_c^n \neq 0$ et $R^n > 0$. La partie itérative de l'algorithme se termine donc si l'erreur descend en-dessous d'une valeur critique, s'il n'y a plus du tout de liquide dans le disque, ou si R devient négatif. Ce dernier point est une sécurité algorithmique. Si $R_n > 0$, nous calculons la moyenne entre R_n et R_{n-1} pour affiner la distance d . La raison en est que R_n sous-estime cette distance, et R_{n-1} la sur-estime. Sinon, la distance doit être très petite, inférieure à la taille de la maille. Afin de renforcer le terme de destruction et de stabiliser l'équation, nous imposons simplement $d = \delta$. Dans JADIM, le taux de présence n'est pas soumis au schéma de Runge-Kutta, il n'est donc résolu qu'une fois par pas de temps. Il en est de même pour le calcul de la distance d .

Cette méthode a été appliquée sur un cas non-physique d'interface multivaluée. Le maillage est bidimensionnel, carré, de côté 1 et comprenant 100 cellules dans chaque direction. Le taux de présence a été initialisé tel qu'on peut le voir sur la figure 4.4a. L'interface est composée d'un cercle de rayon 0.25 et centré en (0.5, 0.5), et d'une ligne horizontale qui se trouve en $z = 0.6875$. La figure 4.4b représente la courbe monovaluée de z_s , obtenue par méthode SLIC, et qui permet d'initialiser le calcul de d . La distance ainsi calculée est visible sur la partie droite de la figure 4.5. On peut remarquer que la valeur dans le liquide est uniforme et très faible. La distribution est en bon accord avec la distribution théorique, représentée sur la partie gauche. Cette dernière a été calculée à partir de la même distribution de taux de présence. La taille grossière des mailles explique les différences entre les deux distributions. Pour les simulations de vagues de vent, nous avons utilisé des maillages bien moins grossiers, et avons fait en sorte que l'interface se trouve toujours dans une zone très raffinée.

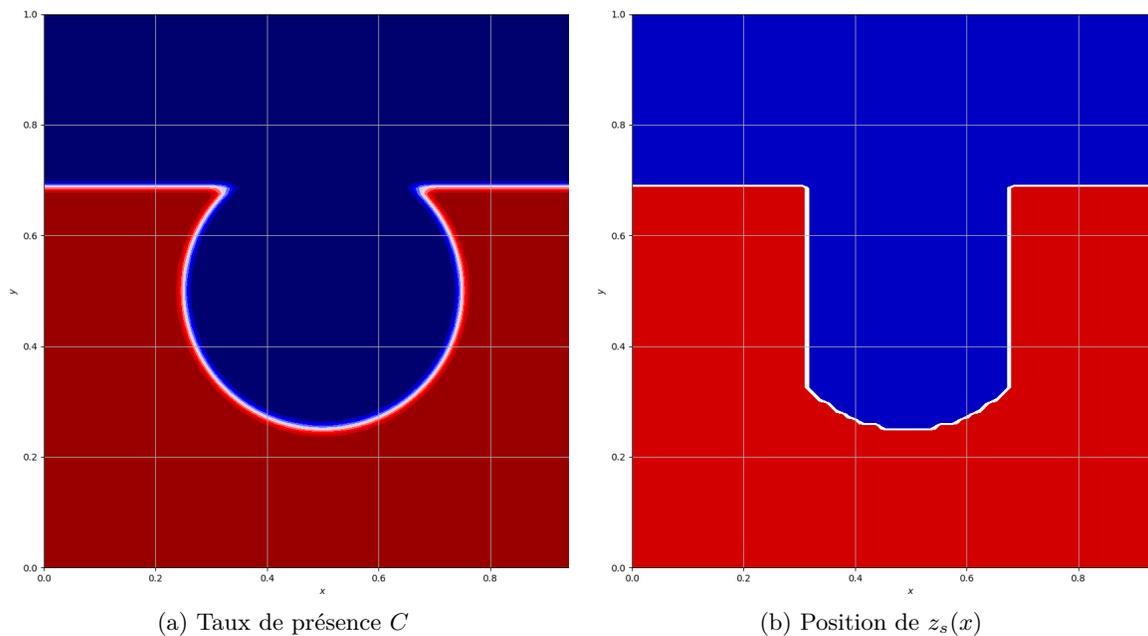


FIGURE 4.4 – Interface multivaluée permettant de tester l’algorithme de calcul de la distance à l’interface.

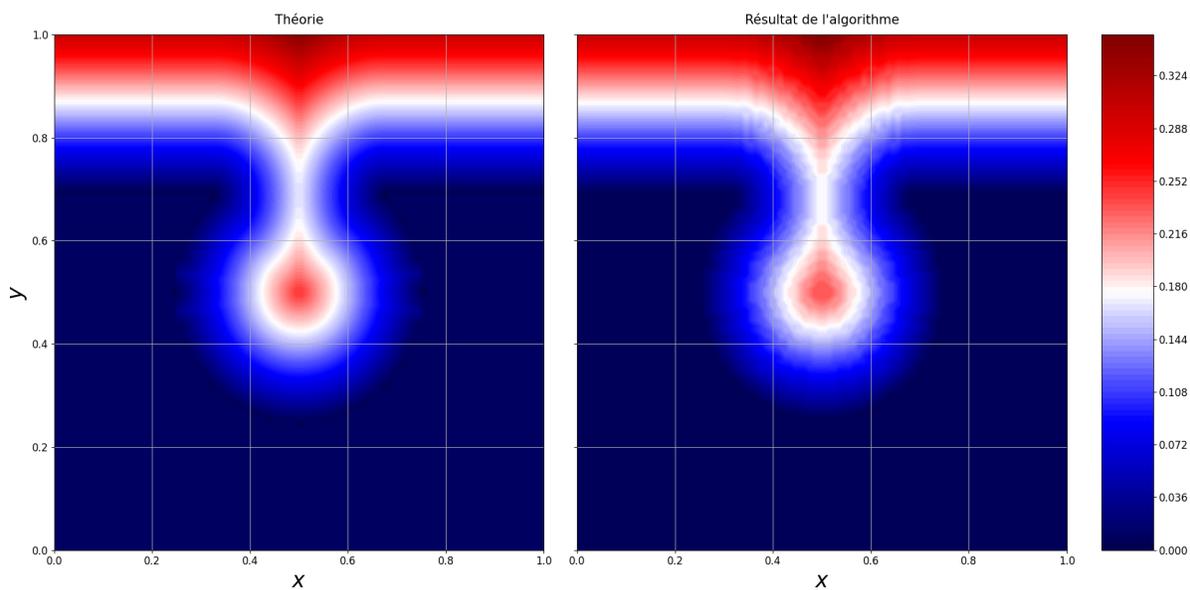


FIGURE 4.5 – Distance à une interface multivaluée : à gauche la distance théorique, à droite la distance calculée avec l’algorithme implémenté dans JADIM.

4.3 Protocoles des expériences numériques

Nous présentons le protocole que nous avons mis en place pour initialiser une simulation de développement de vagues de vent. Nous présentons successivement la conception du maillage, l'initialisation de l'écoulement, et la méthode utilisée pour générer une perturbation d'interface.

4.3.1 Conception du maillage

Le domaine de calcul est bidimensionnel. On repère les directions horizontale et verticale par x et z . Les dimensions dans ces deux directions sont notées respectivement L et H . Les rapports L/H sont indiqués dans le chapitre suivant. Leur valeur est généralement de 1.5. La dimension H est toujours la même. Notons z_0 la hauteur de liquide, et $Z = z/(H - z_0)$ l'altitude adimensionnée. Ainsi $Z_0 = z_0/(H - z_0)$ est le rapport entre la hauteur de liquide et la hauteur d'air. Les valeurs de H et Z_0 ont été choisies notamment afin de conserver une hauteur de liquide similaire à celles utilisées dans les expériences du FAST (*Paquier et al. (2016), Aulnette et al. (2019)*).

Nous considérons la frontière nord, située en $z = H$, comme un plan de symétrie, donc le cisaillement y est nul. Sur la frontière sud, en $z = 0$, nous imposons une condition d'adhérence. Le domaine est périodique dans la direction horizontale.¹

Il n'y a pas de condition d'entrée et de sortie, donc la position moyenne de l'interface est également sa position initiale. Dans les faits, nous avons systématiquement choisi $Z_0 = 1$. L'interface est ainsi placée au centre du canal, et chaque phase occupe en moyenne un domaine de hauteur z_0 . Dans la direction horizontale, le pas d'espace Δx est uniforme. Dans la direction verticale, le domaine est composé de trois parties. Du sud au nord, elles ont les caractéristiques suivantes : un premier bloc, où le pas d'espace Δz diminue jusqu'à atteindre une valeur Δz_{min} ; un bloc uniforme, d'épaisseur Δ , qui s'étend de part et d'autre de z_0 , et où $\Delta z = \Delta z_{min}$; enfin, un troisième bloc symétrique du premier par rapport à z_0 . Le maillage ainsi construit est non-uniforme, et symétrique par rapport à z_0 . L'épaisseur de la zone raffinée est fixe entre les diverses simulations, et vaut $\Delta/H = 1/8$. La présence de cette zone au centre du domaine a pour but de capturer précisément les déformations de l'interface.

Nous souhaitons résoudre les petites échelles de la couche limite au-dessus de l'interface, jusqu'à la sous-couche visqueuse. Celle-ci a pour échelle caractéristique $\delta_\nu = \nu/u_*$, où ν est la viscosité cinématique, et u_* la vitesse de frottement sur l'interface. Pour un écoulement monophasique au-dessus d'une plaque plane, cette dernière est définie à partir du cisaillement pariétal τ_* . Pour un écoulement diphasique, les caractéristiques physiques sont différentes de part et d'autre de l'interface. La continuité du cisaillement impose $\tau_* = \tau_{*,a} = \tau_{*,l}$, où $\tau_{*,i} = \rho_i u_{*,i}^2$. On peut ainsi définir deux échelles $\delta_{\nu,a}$ et $\delta_{\nu,l}$, de chaque côté de l'interface. On montre que $u_{*,a} = R^{1/2} u_{*,l}$, où l'on a introduit le rapport des densités $R = \rho_l/\rho_a$. Notons également le rapport des viscosités $\Lambda = \mu_l/\mu_a$. Le rapport des échelles de longueur visqueuses est donné par

$$\frac{\delta_{\nu,l}}{\delta_{\nu,a}} = \Lambda R^{-1/2} \quad (4.11)$$

1. Si L est la longueur du domaine : $\Phi(x=0) = \Phi(x=L)$ pour tout champ Φ résolu, sauf la pression. Celle-ci est composée d'une partie strictement périodique, et d'une partie linéaire, induite par un gradient de pression de forçage $\Delta P/L$ qui permet d'entraîner l'écoulement.

Pour un rapport de densité de 1000, $R^{1/2} \sim 31$. À 20 degrés et sous une pression de 1 atm, on évalue le rapport des viscosités dynamiques pour le couple air/eau à environ 56. Nous avons conservé le rapport des viscosités cinématiques, ce qui correspond pour $R = 1000$ à $\Lambda = 67$. Le rapport défini par (4.11) devient égal à environ 2.12, supérieur à 1. L'échelle visqueuse est donc plus petite du côté air. Les liquides que nous avons étudiés sont autant ou plus visqueux que l'eau, donc ce rapport est supérieur ou égal à cette valeur. Nous avons construit la taille de la plus petite cellule Δz_{min} à partir de $\delta_{\nu,a}$. Plus précisément, nos simulations ont été effectuées avec $\Delta z_{min} \sim 0.5\delta_{\nu,a}$, par valeur inférieure.

Désormais, nous abandonnons l'indicage $(a)/(l)$ pour les quantités de paroi. Dans la suite, les variables adimensionnées par ces dernières sont notées avec l'exposant $+$. Par exemple, $z^+ = z/\delta_\nu$ pour la position verticale, $t^+ = t/t_\nu$ pour le temps, avec $t_\nu = \delta_\nu/u_* = \nu/u_*^2$, et $u^+ = u/u_*$ pour la vitesse. Nous définissons le nombre de Reynolds turbulent dans l'air comme $Re_* = u_*(H - z_0)/\nu_a$.

Pour un écoulement monophasique en canal au-dessus d'une paroi plane, et si le domaine est périodique dans la direction horizontale, les quantités résolues ne dépendent que de la distance à la paroi. L'étirement horizontal des mailles n'est donc généralement pas un problème. En raison des déformations de l'interface, ce n'est pas le cas pour la simulation des vagues de vent. Nous avons pu vérifier qu'avec un étirement trop élevé, des instabilités numériques peuvent survenir sur l'interface, lorsque ses déformations deviennent "trop grandes". On doit donc s'efforcer de brider le rapport $\Delta x/\Delta z$, afin de limiter l'étirement des mailles. Cela se fait alors au prix d'un coût de calcul plus élevé. Un rapport $\Delta x/\Delta z_{min} \sim 5$ semble être un bon compromis, et c'est la valeur retenue pour la plupart des simulations diphasiques que nous avons menées.

Notons N_x et N_z le nombre de mailles dans les directions x et z , respectivement. Le nombre de cellules dans la zone raffinée s'écrit $N_\Delta = \Delta/\Delta_{min}$. Compte tenu de ce qui a été indiqué ci-dessus, ce nombre se réécrit simplement $N_\Delta = Re_*/2$. Les deux autres blocs contiennent chacun environ $0.35 N_\Delta$. Cela porte ainsi le nombre total de cellules dans la direction verticale à $N_z \sim 1.7N_\Delta = 0.85Re_*$. Dans la direction horizontale, il y a $N_x \sim 0.8Re_*L/H$ cellules.

Les valeurs numériques des dimensions du maillage sont détaillées au chapitre suivant.

4.3.2 Initialisation de l'écoulement

L'interface initiale est plane, et située au centre du domaine en $z = z_0$. Nous considérons que l'écoulement est turbulent dans l'air, et laminaire dans le liquide.

L'ensemble de l'écoulement est entraîné à l'aide d'un gradient de pression horizontal, que nous notons P_x . Il est appliqué uniformément sur toute la hauteur du domaine. Nous introduisons une composante de gravité horizontale g_x . Notons alors $G_i = P_x - \rho_i g_x$ le gradient de pression moteur de la phase i , c'est-à-dire G_a dans l'air et G_l dans le liquide. Grâce à la présence de la densité en préfacteur, la gravité permet d'appliquer un forçage différencié entre les deux phases. Il y a équivalence entre les couples (P_x, g_x) et (G_a, G_l) .

Côté liquide

Nous supposons que l'écoulement est laminaire. Dans cette configuration, le profil de vitesse stationnaire est de type Poiseuille, donc quadratique en z :

$$u(z) = \frac{G_l}{2\mu_l} z^2 + Az + B \quad (4.12)$$

Ce profil doit respecter la condition d'adhérence en $z = 0$, donc $B = 0$. La continuité du cisaillement sur l'interface impose que

$$G_l + \frac{\mu_l}{z_0} A = \frac{\rho_a u_*^2}{h_l} \quad (4.13)$$

Dans les expériences en laboratoire (*Paquier et al. (2016)*, *Aulnette et al. (2019)*), l'utilisation d'une cuve fermée génère un écoulement de retour. Nous souhaitons prendre cet effet en compte. Pour le modéliser, nous fixons le débit dans le liquide à zéro. Si on intègre le profil sur toute la hauteur de liquide, entre $z = 0$ et $z = z_0$, la condition de débit nul s'écrit

$$G_l z_0 + 3\mu_l A = 0 \quad (4.14)$$

Les deux dernières relations permettent de déterminer complètement le profil (4.12). Il faut cependant ajouter une troisième condition pour déterminer G_a . Celle-ci vient de la relation qui lie le cisaillement sur l'interface et le gradient de pression dans l'air. En effet, le nombre de Reynolds turbulent Re_* est directement lié à τ_* . Comme il s'agit d'un paramètre de la simulation, en le choisissant, nous imposons le cisaillement interfacial, c'est-à-dire la condition dynamique tangentielle. L'équation de quantité de mouvement stationnaire projetée dans la direction horizontale s'écrit

$$-G_a + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Par intégration sur la verticale, entre la surface ($z = z_0$) et la frontière supérieure ($z = H$), on obtient

$$G_a(H - z_0) + \rho_a u_*^2 = 0 \quad (4.16)$$

Techniquement, dans nos simulations nous imposons le couple (P_x, g_x) . Après manipulations, on montre que le système constitué des équations (4.13), (4.14) et (4.16) se réécrit sous la forme

$$P_x^+ - g_x^+ = -1 \quad (4.17)$$

$$P_x^+ - Rg_x^+ + \frac{\Lambda}{Z_0 Re_*} A_2^+ = \frac{1}{Z_0} \quad (4.18)$$

$$P_x^+ - Rg_x^+ + 3\frac{\Lambda}{Z_0 Re_*} A_2^+ = 0 \quad (4.19)$$

Les facteurs d'adimensionnalisation sont indiqués dans le tableau 4.1. Ce système linéaire se résout aisément. Les rapports de densité R et de hauteur Z_0 sont maintenus constants dans toutes les simulations. En choisissant le rapport de viscosité Λ , et le nombre de Reynolds turbulent Re_* , nous pouvons déterminer complètement le gradient de pression de forçage P_x et la composante horizontale de gravité g_x . Pour un tel profil, on montre que la vitesse à l'interface s'écrit

$$u_s^+ = \frac{1}{4} \frac{\rho_a u_* z_0}{\mu_l} \quad (4.20)$$

Côté air

Le modèle ci-dessus est laminaire. On pourrait choisir de partir d'une solution similaire dans l'air, puis laisser le modèle de turbulence affecter le champ de vitesse pour obtenir un profil turbulent. Un profil de

$$\begin{array}{l|l} P_x & \rho_a u_*^2 / z_0 \\ g_x & u_*^2 / z_0 \\ A & u_* / z_0 \end{array}$$

TABLE 4.1 – Facteurs d’adimensionnalisation pour les termes apparaissant dans le système (4.17)-(4.19)

Poiseuille sur un canal de demi-hauteur h généré par un gradient de pression moteur G_a s’écrit

$$u(z) = \frac{G_a}{\mu_a} h z \left(\frac{z}{2h} - 1 \right) \quad (4.21)$$

La vitesse maximale est atteinte au centre du canal, en $z = h$. En utilisant la relation (4.15), on montre qu’elle vaut $(Re_*/2)u_*$. Pour un écoulement en canal turbulent, la vitesse au centre vaut environ $20 u_*$ (voir par exemple les profils de vitesse présentés dans le chapitre précédent). Si on initialisait l’écoulement dans l’air avec le profil (4.21), la vitesse sur la frontière supérieure serait surestimée d’un facteur $Re_*/40$. La plupart des simulations que nous avons menées correspondent à des valeurs de Re_* de l’ordre de 1000, et alors ce facteur vaut 25. Il ne semble donc pas raisonnable de considérer directement un tel profil comme condition initiale.

Nous avons d’abord envisagé d’utiliser des profils analytiques. Par exemple un profil en loi de puissance 1/7ème, un profil composite de type loi linéaire/logarithmique, etc. Nous avons finalement décidé d’utiliser un véritable profil de couche limite turbulente, en effectuant un calcul préliminaire en canal bidimensionnel monophasique. Ainsi, à chaque simulation diphasique, nous associons une simulation monophasique de l’écoulement turbulent dans l’air. Celle-ci a les mêmes caractéristiques que celles de la simulation diphasique côté air. L’écoulement a les mêmes caractéristiques physiques, le même nombre de Reynolds turbulent, la même géométrie dans la direction verticale, et les mêmes conditions aux limites.

Pour le maillage, la taille de la plus petite maille est conservée, de même que la raison de croissance du pas d’espace quand on s’éloigne de la paroi. L’étirement des mailles ne pose pas de problème ici, il est généralement de 10. La frontière sud est une paroi plane sur laquelle la condition d’adhérence s’applique, la frontière nord est un plan de symétrie (le cisaillement y est donc nul), et des conditions de périodicité sont appliquées entre les frontières est et ouest. Le modèle de turbulence est bien entendu activé. L’initialisation est similaire à celle utilisée pour la validation en canal, présentée dans le chapitre précédent. En particulier, nous utilisons le profil (4.21) pour le champ de vitesse. Ici cela ne pose pas de problème, car le maillage est bien plus modeste, en particulier dans la direction horizontale. La simulation est menée jusqu’au régime stationnaire, que nous estimons atteint pour $t^+ > 5 \times 10^4$. Nous copions alors, à l’identique, les champs de vitesse, pression et viscosité turbulente. Nous les injectons dans la partie "air" de la configuration diphasique, où $C < 0.5$, et l’interface prend la place de la paroi plane. En raison de la condition d’adhérence imposée pour le calcul monophasique, le champ de vitesse ainsi généré est nul sur l’interface. Ce n’est pas le cas côté liquide, et la vitesse à l’interface u_s est connue analytiquement, d’après la relation (4.20). Il suffit donc d’appliquer une translation d’amplitude u_s au profil turbulent côté air pour respecter la continuité des vitesses à l’interface.

Le profil composite ainsi construit est reproduit sur la figure 4.6. La ligne verticale indique le zéro de u , et la ligne horizontale la position initiale de l’interface. Le profil est uniforme dans la direction horizontale, et respecte la continuité de la vitesse et du cisaillement au passage de l’interface. L’écoulement qui est ainsi généré est par construction incompressible. La vitesse sur l’interface vaut $u^+ = 3.0$, et la vitesse maximale

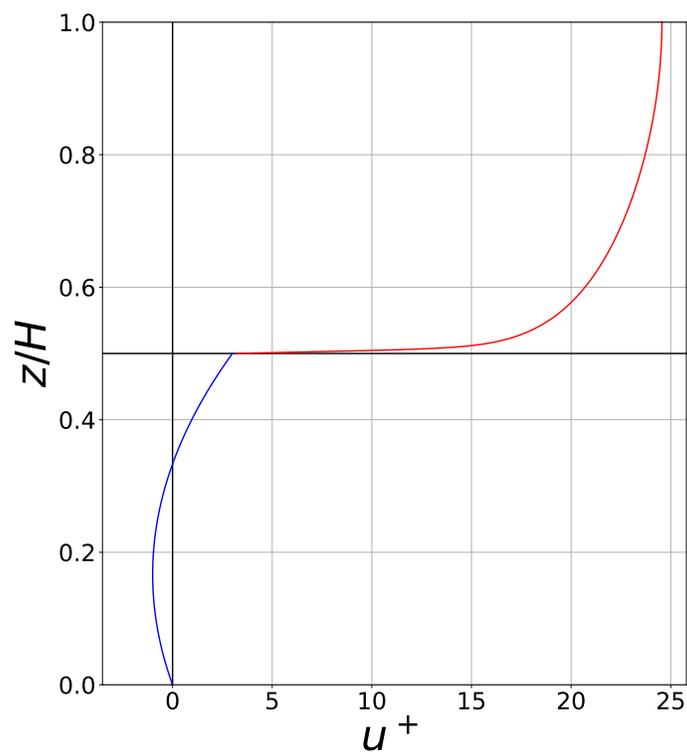


FIGURE 4.6 – Profil de vitesse composite ($Re_* = 800$, $\Lambda = 67$). En bleu le profil de Poiseuille dans le liquide, en rouge le profil turbulent dans l'air.

dans l'air par rapport à u_s^+ vaut environ 22.5.

4.3.3 Génération de vagues de vent

L'interface reste figée pendant les premiers instants de la simulation. Pour cela, il suffit de ne pas mettre à jour le taux de présence. Plus précisément, l'équation de transport du taux de présence est résolue à chaque instant, mais les modifications sont ensuite écrasées en ré-imposant la distribution initiale. Afin de nous assurer que le profil composite de vitesse est bien stationnaire, nous laissons évoluer la simulation jusqu'à l'instant $t_0^+ = 100$. Nous imposons ensuite une perturbation de très faible amplitude sur l'interface afin d'exciter les vagues. La notion d'infinitésimal n'existe pas numériquement, nous sommes donc obligés d'imposer une amplitude finie. L'idée est toutefois de la maintenir aussi petite que possible, en particulier plus petite que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Un ordre de grandeur proche de la hauteur de la maille semble raisonnable.

Lors des premiers essais, nous imposons une perturbation indicielle dans le temps, c'est-à-dire un échelon de Heaviside. L'interface était déformée suivant un profil prédéfini à un instant donné $t = t_0$. Puis elle était libre de se déformer à partir de cet état, via l'évolution du taux de présence. Cette méthode induit cependant plusieurs problèmes d'ordre numérique. Par exemple, si l'on considère une perturbation sinusoïdale, le fluide situé juste en-dessous d'une crête devient du liquide alors que c'était juste avant de l'air. Dans cette "poche" devenue liquide, le profil de vitesse est celui de l'écoulement de couche limite dans l'air. Aussi près de l'interface, la viscosité turbulente joue très peu de rôle, c'est la viscosité moléculaire qui domine. Le fluide est donc soudainement soumis à une viscosité bien plus grande, et il va être fortement ralenti. Inversement, au-dessus d'un creux, le fluide devient de l'air. La viscosité moléculaire diminue d'au moins un ordre de grandeur, voire plus dans certains cas, et la viscosité turbulente y est initialement nulle. La viscosité effective du fluide devient donc bien plus faible qu'à l'instant précédent. L'air va donc être fortement accéléré, tout en se heurtant à une poche de fluide bien plus dense et visqueux en aval (sous la crête suivante). Sans traitement particulier, cette situation génère des problèmes numériques qui mènent à un déchirement de l'interface. Plus le nombre de Reynolds turbulent est élevé, plus ce phénomène est marqué. Un moyen de régulariser ce problème serait d'adapter le champ de viscosité turbulente aux déformations de l'interface. Cela n'est toutefois envisageable que pour des profils simples, comme une sinusoïde.

La méthode que nous avons retenue est celle d'une perturbation impulsionnelle dans le temps. À l'instant $t = \Delta t_0$, l'interface est déformée pendant un pas de temps seulement. À l'issue de ce pas de temps, la perturbation s'est imprimée sur le reste des champs résolus. À l'instant suivant, nous imposons à nouveau le profil initial plat. Au-delà, nous levons la restriction sur l'évolution du taux de présence, et l'interface est libre de se déformer. Cela nous évite d'avoir à manipuler les champs de vitesse et viscosité turbulente pour les adapter aux déformations de l'interface. Pour imposer une perturbation $\zeta_0(x)$, nous définissons le profil du taux de présence par

$$C(x, z) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z - \zeta_0(x)}{\gamma_d \Delta z_{min}} \right) \right] \quad (4.22)$$

où "erf" est la fonction erreur. γ_d est un paramètre, de l'ordre de 1, qui contrôle l'"ouverture" de la fonction erreur, donc l'épaisseur de l'interface. Nous le fixons à 1, le minimum possible, ce qui définit une épaisseur d'interface de 2 mailles.

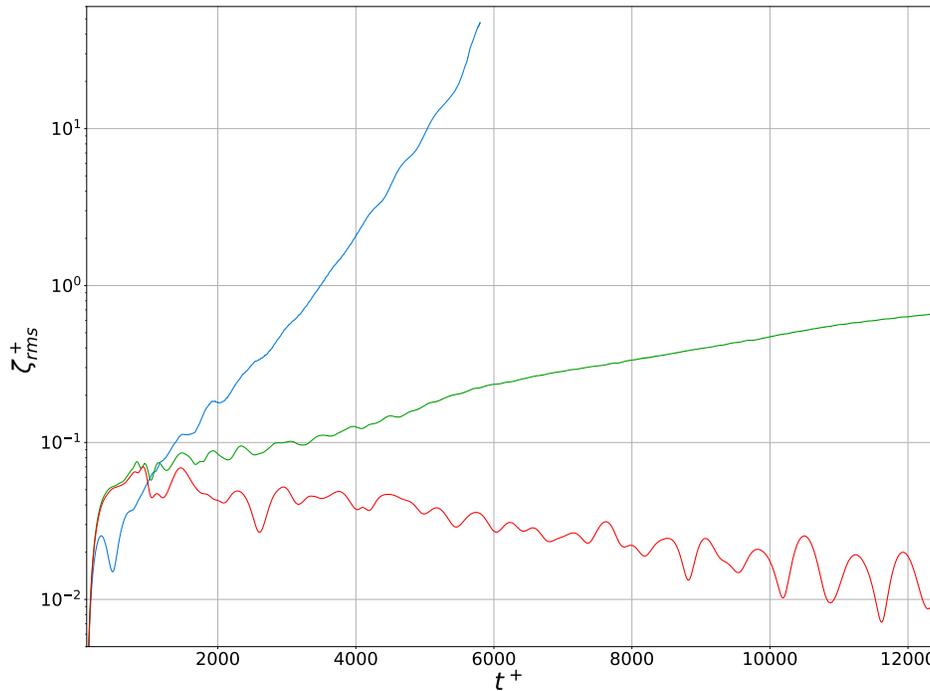


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle du moment d'ordre 2 de l'élévation de surface pour $Re_* = 800$ et $\Lambda = 67$ (bleu), 800 (vert) et 2000 (rouge). La perturbation initiale est harmonique.

Perturbation sinusoïdale

C'est le premier profil de perturbation que nous avons testé. Nous avons appliqué la méthode pour un nombre de Reynolds fixé, et des liquides de différentes viscosités, \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_{12} et \mathcal{L}_{30} .² La longueur d'onde est H , avec $L/H = 3$, et l'amplitude $a = 2\delta_\nu$. Cette dernière correspond à environ 4 mailles, car $\Delta z^+ \sim 0.5$ (donc 8 mailles crête-à-crête). Nous avons simulés ces trois configurations, jusqu'à des stades avancés du développement de la perturbation, soit plusieurs dizaines de périodes pour le cas \mathcal{L}_1 . La figure 4.7 représente l'évolution temporelle de ζ_{rms} pour ces trois cas. Elle met clairement en évidence la dépendance de la croissance de la perturbation initiale à la viscosité du liquide. Ces courbes sont discutées plus en détails dans le chapitre suivant.

Un profil sinusoïdal est réducteur, car il prédétermine la longueur d'onde de la perturbation. Pour lever cette contrainte, on pourrait simuler plusieurs fois la même configuration, en faisant varier cette longueur d'onde. Pour les simulations ci-dessus, la taille $N_x \times N_z$ du maillage est $522 * 678 \sim 3.5 \times 10^5$. Sur un noeud de calcul constitué de 36 coeurs, la simulation \mathcal{L}_1 présentée ci-dessus a duré 5378 h mono-coeur. Renouveler cette simulation plusieurs fois, en ne changeant que la longueur d'onde, aurait un coût de calcul prohibitif. Cela est incompatible avec une étude paramétrique sur Λ et Re_* .

2. Rappelons que \mathcal{L}_q , désigne un liquide q fois plus visqueux que l'eau.

Perturbation sous forme d'un bruit blanc

Afin de ne pas avoir à prescrire la longueur d'onde de la perturbation, nous avons raffiné la méthode en imposant une déformation de type bruit blanc. Cela permet d'exciter toute une gamme de nombres d'onde à la fois. Ils peuvent alors croître ou non, indépendamment les uns des autres tant que l'on reste dans le domaine linéaire.

Soit la fonction

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^N \cos(k_n + 2\pi\Phi_n) \quad (4.23)$$

Elle est construite comme une somme de fonctions harmoniques, avec $k_n = 2\pi f_n = 2\pi n/L_x$. La fréquence maximale est fixée à $f_{max} = 1/(4\Delta x)$.³ Φ_n est un nombre aléatoire, tiré à partir d'une loi de probabilité uniforme sur $[0; 1]$. Pour le générer, nous utilisons la routine Fortran *random_number*. Le caractère aléatoire est maîtrisé à l'aide de la routine Fortran *random_seed*. Elle permet d'imposer une graine pour initialiser le tirage aléatoire. La longueur L fixe la fréquence minimale. Le pas d'espace Δx étant uniforme, il est déterminé par le nombre de points N_x . Le couple (L, N_x) fixe alors la fréquence maximale, donc le nombre total de modes N . Le spectre de la perturbation est ainsi déterminé par le maillage et la graine du tirage aléatoire. Les caractéristiques du maillage sont essentiellement imposées par le nombre de Reynolds turbulent. Nous pouvons ainsi réaliser des simulations à Re_* constant avec le même spectre pour la perturbation initiale.

La fonction (4.23) est par construction à moyenne nulle, et son moment d'ordre 2 dépend uniquement du nombre de modes N :

$$\eta_{rms} = \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (4.24)$$

Nous pouvons alors construire un profil d'interface dont l'élévation est donnée par $\zeta = z_0 + \zeta'$, avec $\zeta' = a\eta/\sqrt{N}$. L'écart-type de la perturbation vaut $a/\sqrt{2}$, ce qui est équivalent à une perturbation harmonique d'amplitude a . Nous avons réalisé trois simulations identiques à celles ci-dessus. La perturbation a un profil de bruit blanc, d'amplitude a identique, c'est-à-dire $2\delta_\nu$. Les évolutions temporelles de ζ_{rms} sont reproduites sur la figure 4.8. Elles sont très proches de celles de la figure 4.7, bien que nous n'imposions plus la longueur d'onde principale.

Le reste de nos simulations a été réalisé avec ce type de perturbation.

3. Critère de Shannon

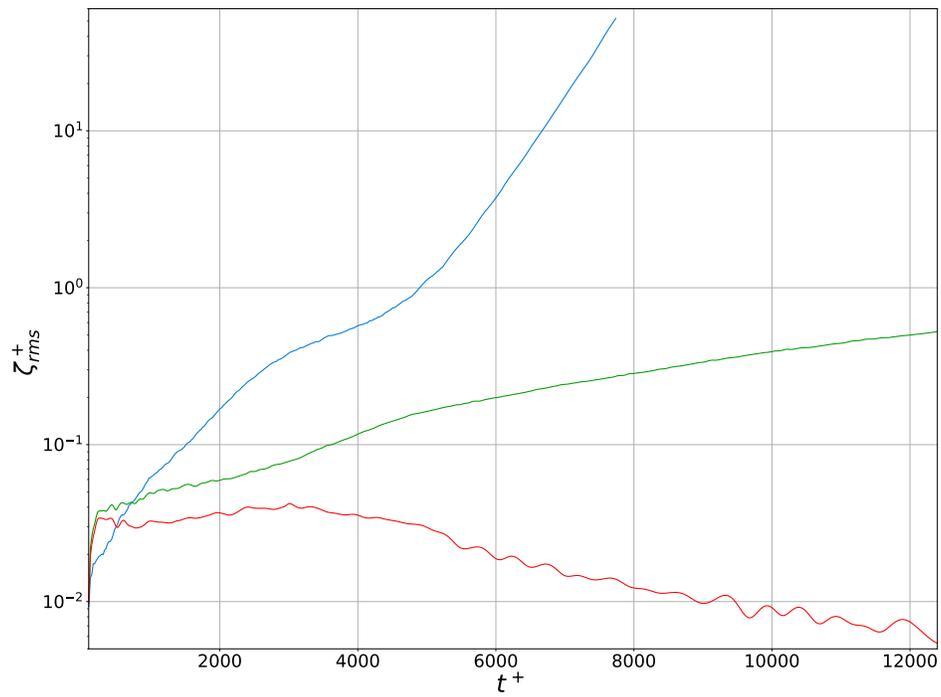


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle du moment d'ordre 2 de l'élévation de surface pour $Re_* = 800$ et $\Lambda = 67$ (bleu), 800 (vert) et 2000 (rouge). Perturbation initiale de type bruit blanc.

Chapitre 5

Génération numérique de vagues de vent

5.1 Introduction

Nous présentons les résultats de nos expériences numériques des vagues de vent. Nous commençons par une vue de l'ensemble de nos simulation, en particulier la croissance ou la décroissance de la perturbation initiale. Nous abordons ensuite le contenu spectral de ces expériences, notamment son évolution temporelle. Nous nous intéressons enfin aux taux de croissance des perturbations, et leurs liens avec la vitesse du vent.

5.2 Présentation des expériences numériques

5.2.1 Caractéristiques des simulations numériques

Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des expériences numériques réalisées en configuration diphasique. Ces simulations ont été menées suivant le protocole exposé dans le chapitre précédent. Elles ont été réalisées sur le supercalculateur Olympe, du mésocentre CALMIP. Pour la majorité d'entre elles, nous avons utilisé un noeud de calcul complet. Chaque noeud est équipé de deux processeurs Intel Skylake 6140 à 2.3 Ghz 18 coeurs, soit un total de 36 coeurs et de 192 Go de mémoire par noeud. Pour les plus hautes vitesses de vent, nous avons utilisé 48 coeurs sur deux noeuds, pour des questions de mémoire.

La viscosité de l'air est fixée à $\mu_a = 1.5 \times 10^{-5}$ Pa s, et le rapport de densité à $R = \rho_l/\rho_a = 1000$. Nous maintenons la tension de surface constante à $\gamma = 72.8 \times 10^{-3}$ N/m pour tous les liquides, de façon à mettre en évidence l'effet de leur viscosité. Le nombre de Reynolds turbulent Re_* correspond au cisaillement interfacial imposé au début de la simulation, lorsque l'interface est encore plane. La plupart des simulations ont été menées sur un domaine de dimensions $L/H = 1.5$.

Nous avons fait varier la viscosité dynamique μ_l du liquide sur deux ordres de grandeur, de 1 à 100 fois celle de l'eau. Cette dernière est fixée à $\mu_{eau} = 1 \times 10^{-3}$ Pa s. Nous introduisons le rapport des viscosités $\Lambda = \mu_l/\mu_a$. La valeur de référence de l'eau est donc $\Lambda_{eau} = 67$, et nous notons \mathcal{L}_q un liquide pour lequel le rapport de viscosité vaut $\Lambda = q\Lambda_{eau}$.

\mathcal{L}_q	Λ	Re_*	u_* (cm/s)	L/H	$\Delta x/\Delta z_{min}$	$\Delta z_{max}/\Delta z_{min}$	N_x	N_z
\mathcal{L}_1	67	228	8.56	1.5	4.97	13.72	282	228
		453	17	1.5	5.03	16.91	546	408
		613	23	1.5	4.94	18.78	750	528
		800	30	1.5	4.69	19.29	1026	678
		1067	40	1.5	5.03	19.09	1290	918
\mathcal{L}_{10}	667	613	23	1.5	4.94	18.78	750	528
		1067	40	1.5	4.97	19.09	1290	918
\mathcal{L}_{12}	800	800	30	3.0	18.46	19.29	522	678
\mathcal{L}_{30}	2000	800	30	3.0	18.46	19.29	522	678
\mathcal{L}_{100}	6667	613	23	1.5	4.94	18.78	750	528
		1067	40	1.5	4.97	19.09	1290	918
		1333	50	1.5	5.10	18.98	1602	1158
		1600	60	1.5	4.99	18.86	1926	1368
		1867	70	1.5	5.06	19.02	2240	1608

TABLE 5.1 – Caractéristiques des expériences numériques de génération des vagues de vent. La vitesse de frottement est définie à partir du gradient de pression moteur dans l’air $u_* = (G_a(z_0 - H)/\rho_a)^{1/2}$.

Les caractéristiques de l’ensemble des simulations sont rapportées dans le tableau 5.1. Les dimensions du maillage ne dépendent que de Re_* , sauf pour $Re_* = 800$. Pour ce dernier cas, nous avons utilisé deux maillages différents. Le premier correspond à $L/H = 3$, et un étirement des mailles d’environ 18.5. Nous avons simulé les cas \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_{12} et \mathcal{L}_{30} , pour lesquels les évolutions temporelles de ζ_{rms} ont été montrées à la fin du chapitre précédent. Pour le cas \mathcal{L}_1 , le calcul est devenu instable en fin de simulation, lorsque l’amplitude des vagues devient grande. Nous avons alors restreint l’étirement des mailles à environ 5, ce qui a permis de stabiliser le calcul sur des temps plus longs. Afin de garder le coût de calcul mesuré, nous avons également réduit le rapport L/H à 1.5. Ces deux dernières valeurs ont été retenues pour le reste des expériences numériques présentées ci-dessous. Le rapport entre le plus grand et le plus petit pas d’espace Δz ne dépasse jamais 20. En d’autres termes, la plus grande maille a une taille verticale inférieure à $10\delta_\nu$.

5.2.2 Évolution temporelle de la perturbation initiale

Nous présentons ici les évolutions temporelles de ζ_{rms} pour les 14 configurations du tableau 5.1. Nous les avons rassemblées comme suit : d’abord les simulations pour \mathcal{L}_1 , puis pour des viscosités intermédiaires à Re_* constant, et enfin les cas \mathcal{L}_{100} pour plusieurs vitesses de vent. Certaines expériences peuvent apparaître dans plus d’une catégorie.

Cas de l’eau

Le plus petit nombre de Reynolds $Re_* = 228$ simulé correspond à une vitesse de frottement $u_* = 8.56$ cm/s. C’est la vitesse de frottement choisie par *Lin et al. (2008)* pour des simulations de type Couette, en imposant la vitesse sur la frontière supérieure du domaine. L’évolution temporelle du moment d’ordre deux ζ_{rms} de l’élévation de l’interface ζ est rapportée sur la figure 5.1. L’amplitude est adimensionnée par $\delta_\nu = \nu_a/u_* = z_0/Re_*$, et le temps par $t_\nu = \nu/u_*^2$. La courbe débute à $t^+ = \Delta t_0^+ = 100$, c’est-à-dire au moment où la perturbation est appliquée. La réponse à cette perturbation se traduit dans un premier temps par une décroissance de l’amplitude de ζ . Cette tendance se poursuit jusqu’à environ $t^+ = 3000$, où ζ_{rms}^+

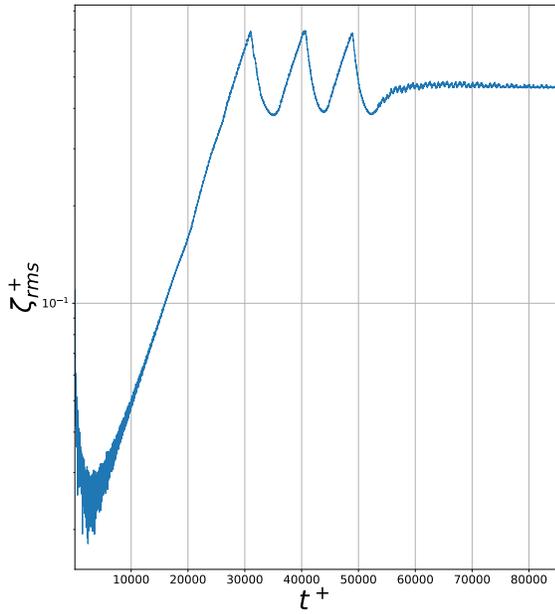


FIGURE 5.1 – Évolution temporelle de ζ_{rms}^+ pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 228$.

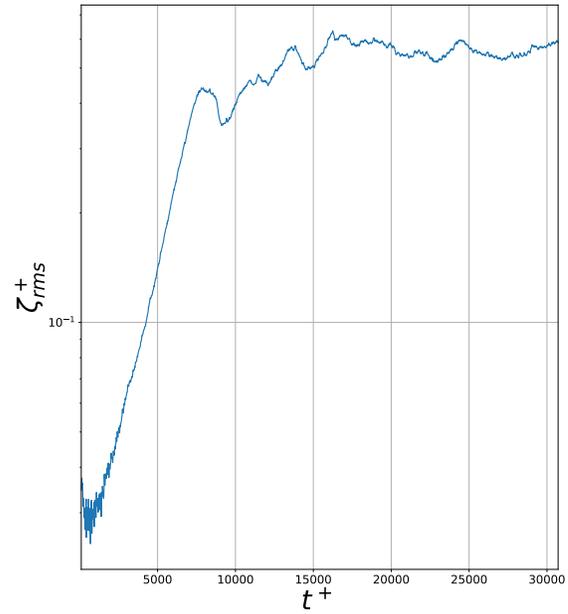


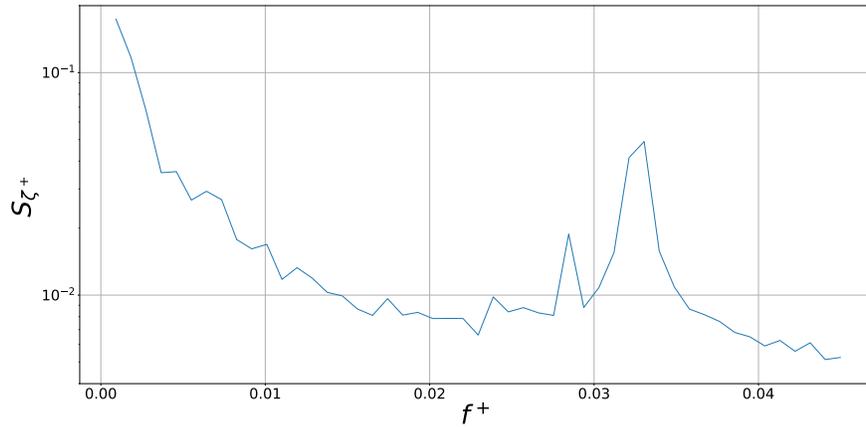
FIGURE 5.2 – Évolution temporelle de ζ_{rms}^+ pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 453$.

oscille entre 2×10^{-2} et 3×10^{-2} . S'ensuit une phase de croissance entre $t^+ = 3000$ et $t^+ = 26000$. La croissance est exponentielle, et le taux de croissance est constant sur toute cette durée. On peut remarquer un léger infléchissement vers $t^+ = 20500$. Entre $t^+ = 26000$ et $t^+ = 52000$, ζ_{rms} oscille trois fois entre 4×10^{-1} et 7×10^{-1} . Chaque oscillation comporte une première phase de croissance exponentielle, avec le même taux de croissance que précédemment, puis une phase de décroissance plus raide mais non-uniforme. Enfin, l'amplitude sature au-delà de $t^+ = 52000$, à une valeur d'environ 4.6×10^{-1} . Un mode sinusoïdal d'amplitude a a un moment d'ordre deux $\zeta_{rms} = a/\sqrt{2}$. Pour rappel, l'amplitude de la perturbation initiale est $a^+ = 2$, ce qui correspond ainsi à $\zeta_{rms}^+ = \sqrt{2} \sim 1.4$. L'amplitude rms saturée vaut donc environ 33 % de cette valeur.

Pour l'eau, la vitesse de frottement seuil prédite par les expériences de *Paquier et al. (2016)* est de 14.5 cm/s. Pour $Re_* = 228$, la vitesse de frottement est de 8.56 cm/s, soit 60 % de cette valeur, et tout comme *Lin et al. (2008)*, notre simulation numérique prédit la génération d'un train d'onde. La raison est probablement liée au caractère bidimensionnel de notre configuration, qui interdit la naissance de ridules tridimensionnelles observées expérimentalement. Nous discutons plus en détail les taux de croissance mesurés lors des différentes simulations dans la dernière partie de ce chapitre.

Le cas $Re_* = 453$ est rapporté sur la figure 5.2. Il correspond à une vitesse de frottement double de 17 cm/s. L'évolution de ζ_{rms} est similaire à celle décrite ci-dessus durant la première partie de la simulation. La phase de croissance s'étend de $t^+ = 1000$ jusqu'à 7500. Ensuite, ζ_{rms} suit une croissance bien plus faible, à laquelle se superpose une oscillation lente mais moins régulière que dans le cas $Re_* = 228$. À partir de $t^+ = 16000$, l'amplitude sature autour de 5.5×10^{-1} .

On peut noter que pendant toute la durée de la simulation, une oscillation de très faible amplitude à haute fréquence se superpose à l'évolution décrite ci-dessus. Pour le cas $Re_* = 228$, nous avons calculé le


 FIGURE 5.3 – Spectre temporel de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 453$.

spectre temporel de ζ_{rms} pendant la phase saturée, sur un intervalle de t^+ compris entre 58750 et 83800. Ce spectre temporel S_ζ a été obtenu par transformée de Fourier rapide (FFT) de ζ_{rms} , sur une fenêtre glissante d'une durée d'environ $T^+ = 1066$, avec un recouvrement d'une demi-fenêtre. Ce spectre est rapporté sur la figure 5.3. On y voit la présence d'une basse fréquence autour de $f^+ = 9.2 \times 10^{-3}$, et d'une haute fréquence près de $f^+ = 0.033$.

Toujours en ce qui concerne le cas de l'eau, nous avons également étudié des vitesses de vent plus importantes, correspondant à $Re_* = 613, 800$ et 1067 , soit respectivement $u_* = 0.23$ m/s, 0.3 m/s et 0.4 m/s. Les évolutions de ζ_{rms} sont rapportées sur la figure 5.4. Elles présentent toutes trois une structure similaire, avec une croissance en plusieurs phases successives. Dans un premier temps, l'amplitude croît suivant une loi exponentielle. Le taux de croissance est régulier, et sa valeur augmente avec la vitesse du vent. Puis la croissance ralentit fortement, voire s'arrête momentanément pour $Re_* = 613$ et $Re_* = 1067$. Après cette phase de quasi-stagnation, une seconde phase de croissance prend le relais. Le taux de croissance est à nouveau régulier, et sa valeur est similaire à celle de la première phase. Pour $Re_* = 613$ et 1067 , nous avons arrêté les simulations avant la survenue éventuelle d'une saturation. Pour $Re_* = 800$, l'amplitude rms en fin de simulation ($t^+ \sim 8000$) atteint environ 50 unités de paroi. Cette valeur correspond à une sinusoïde équivalente d'environ 300 cellules crête-à-crête. Pour une telle amplitude, l'algorithme de calcul de la distance d à l'interface devient très gourmand en temps. C'est pourquoi nous n'avons pas poursuivi cette simulation plus loin, ce qui nous aurait éventuellement permis d'observer une saturation de l'amplitude.

Influence de la viscosité

Nous abordons ici le cas de liquides plus visqueux que l'eau. Nous reprenons les trois dernières vitesses de vent présentées ci-dessus. Les évolutions temporelles de ζ_{rms} sont rapportées sur les figures 5.5a à 5.5c. Nous y avons indiqué le cas de l'eau en bleu, un cas intermédiaire en vert (\mathcal{L}_{10} et \mathcal{L}_{12}), et le cas le plus visqueux en orange ou rouge. À vitesse de vent fixée, on voit clairement l'influence de la viscosité du liquide sur la croissance ou non de la perturbation initiale.

À $Re_* = 613$, les perturbations ne croissent que pour des liquides au plus 10 fois plus visqueux que l'eau. Le cas \mathcal{L}_1 a été discuté ci-dessus. Pour \mathcal{L}_{10} , l'amplitude croît dans un premier temps avec un taux de

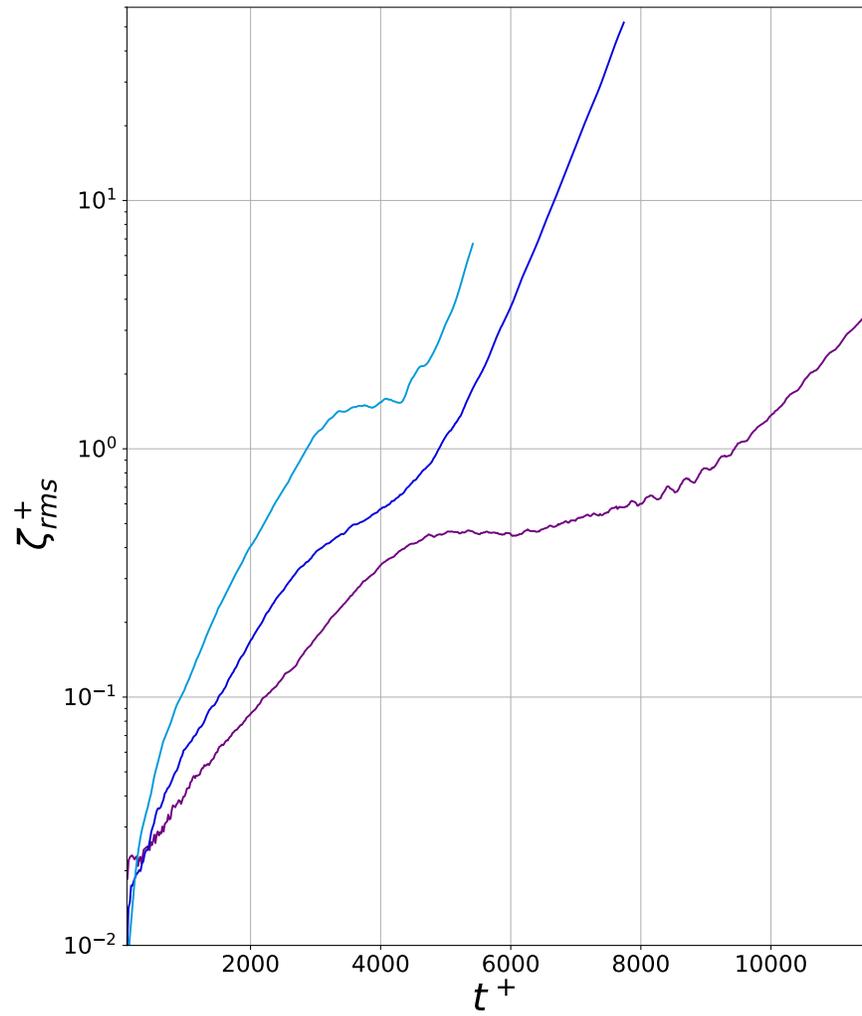


FIGURE 5.4 – Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et Re_* variable. $Re_* = 613$ en violet, $Re_* = 800$ en bleu foncé, et $Re_* = 1067$ en bleu clair.

croissance similaire au cas \mathcal{L}_1 . Puis elle atteint un maximum autour de $t^+ = 3000$, pour une valeur d'envion 6×10^{-2} , et entame ensuite une phase de décroissance. Pour \mathcal{L}_{100} , on observe un comportement similaire, avec une première phase de croissance extrêmement courte. Le taux de décroissance de la perturbation est bien plus marqué que pour \mathcal{L}_{10} . Pour ce dernier cas, on peut penser que la vitesse du vent est proche du seuil de génération des vagues de vent.

À $Re_* = 800$, on observe une croissance de la perturbation pour \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_{12} . Pour ce dernier cas, on distingue trois étapes dans l'évolution de ζ_{rms} . Chacune correspond à une croissance exponentielle avec un taux de croissance régulier. La première s'étend jusqu'à environ $t^+ = 3000$, puis la croissance s'accélère momentanément jusqu'à environ $t^+ = 5000$. Elle ralentit alors, et le taux de croissance est similaire à celui de la première étape. La croissance est très lente, et nous n'avons pas mené la simulation suffisamment loin pour éventuellement observer une saturation. Pour le cas \mathcal{L}_{30} , la perturbation est stable et suit une évolution similaire au cas \mathcal{L}_{10} ci-dessus.

À $Re_* = 1067$, on observe une croissance pour les trois cas simulés. Le cas \mathcal{L}_{10} démarre avec un taux de croissance plus élevé que celui de \mathcal{L}_1 , mais à partir de $t^+ = 200$, la croissance ralentit et se poursuit avec un taux de croissance plus faible que pour l'eau pour des temps similaires. Pour \mathcal{L}_{100} , l'amplitude semble évoluer de manière similaire au cas $Re_* = 453$ pour l'eau. Après une première phase de croissance rapide, ζ_{rms} se stabilise autour de 9×10^{-2} , et nous observons ainsi une saturation du train d'onde.

Cas très visqueux

Nous avons rassemblé sur la figure 5.6 l'ensemble des simulations pour \mathcal{L}_{100} .

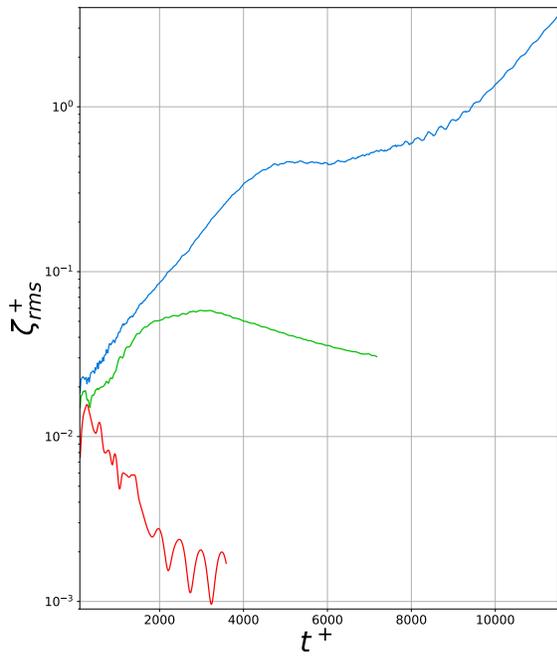
La plus basse vitesse de vent correspond à $Re_* = 613$. Après une courte phase de croissance qui culmine à $\zeta_{rms} = 1.5 \times 10^{-2}$, l'amplitude des déformations décroît et l'interface est stable vis-à-vis de la perturbation initiale.

Pour les cas $Re_* = 1067$ et 1333 , l'amplitude suit dans un premier temps une phase de croissance exponentielle, puis la croissance ralentit fortement, plus tôt pour $Re_* = 1067$ que pour $Re_* = 1333$. Dans le premier cas, l'amplitude sature à environ 8×10^{-2} . Pour le second cas, on ne distingue pas clairement une phase saturée. Cependant, l'évolution semble très similaire au cas précédent. Si elle se poursuit au même rythme, on peut estimer qu'une saturation devrait intervenir peu après $t^+ = 5000$, avec une amplitude d'environ 3×10^{-1} à 4×10^{-1} .

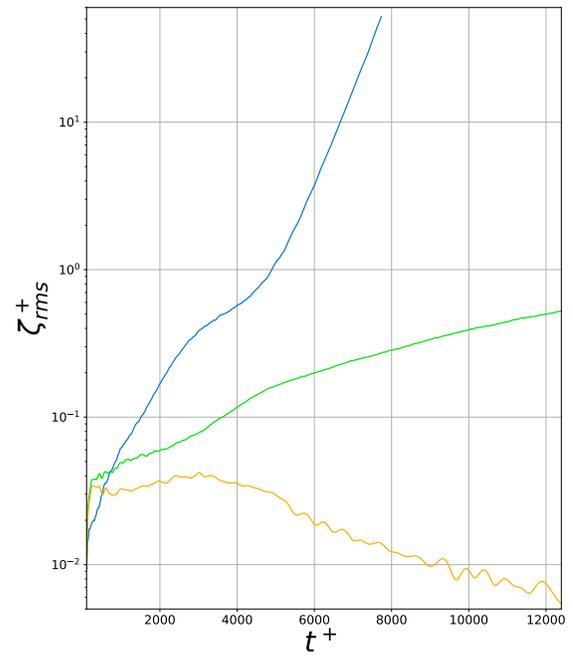
Les deux plus hautes vitesses de vent correspondent à $Re_* = 1600$ et 1867 . Dans les deux cas, l'amplitude croît sans discontinuer. L'évolution commence par une courte phase de croissance exponentielle, puis le taux de croissance diminue. Il se stabilise sur une nouvelle valeur, et une seconde phase de croissance exponentielle prend le relais, avec un taux de croissance plus faible que durant la première. On observe un second ralentissement pour $Re_* = 1867$, à partir de $t^+ = 3000$. Pour le premier cas à $Re_* = 1600$, des problèmes numériques sont apparus qui ont déstabilisé l'interface. Dans les deux cas, l'amplitude en fin de simulation est telle que nous n'avons pas poursuivi les simulations, pour les mêmes raisons que le cas de l'eau pour $Re_* = 800$.

5.2.3 Hypothèse d'écoulement laminaire dans le liquide

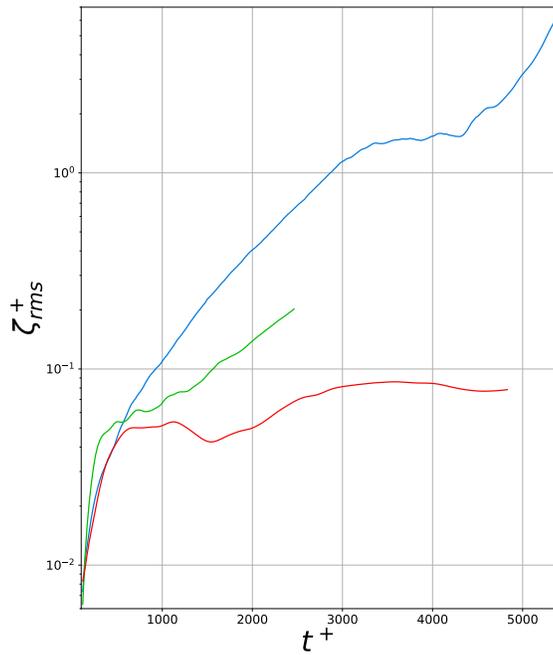
L'écoulement dans le liquide a toujours été supposé laminaire. On peut évaluer la pertinence de cette hypothèse en calculant le nombre de Reynolds dans le liquide. Construisons ce nombre à partir de la vitesse à l'interface, donnée par (4.20). Soit αz_0 une fraction de la hauteur de liquide. Le nombre de Reynolds basé



(a) $Re_* = 613$ - $\Lambda = 667$ en vert, $\Lambda = 6667$ en rouge



(b) $Re_* = 800$ - $\Lambda = 800$ en vert, $\Lambda = 2000$ en orange



(c) $Re_* = 1067$ - $\Lambda = 667$ en vert, $\Lambda = 6667$ en rouge

FIGURE 5.5 – Évolution temporelle de ζ_{rms} pour Λ et Re_* variables. En bleu $\Lambda = 67$.

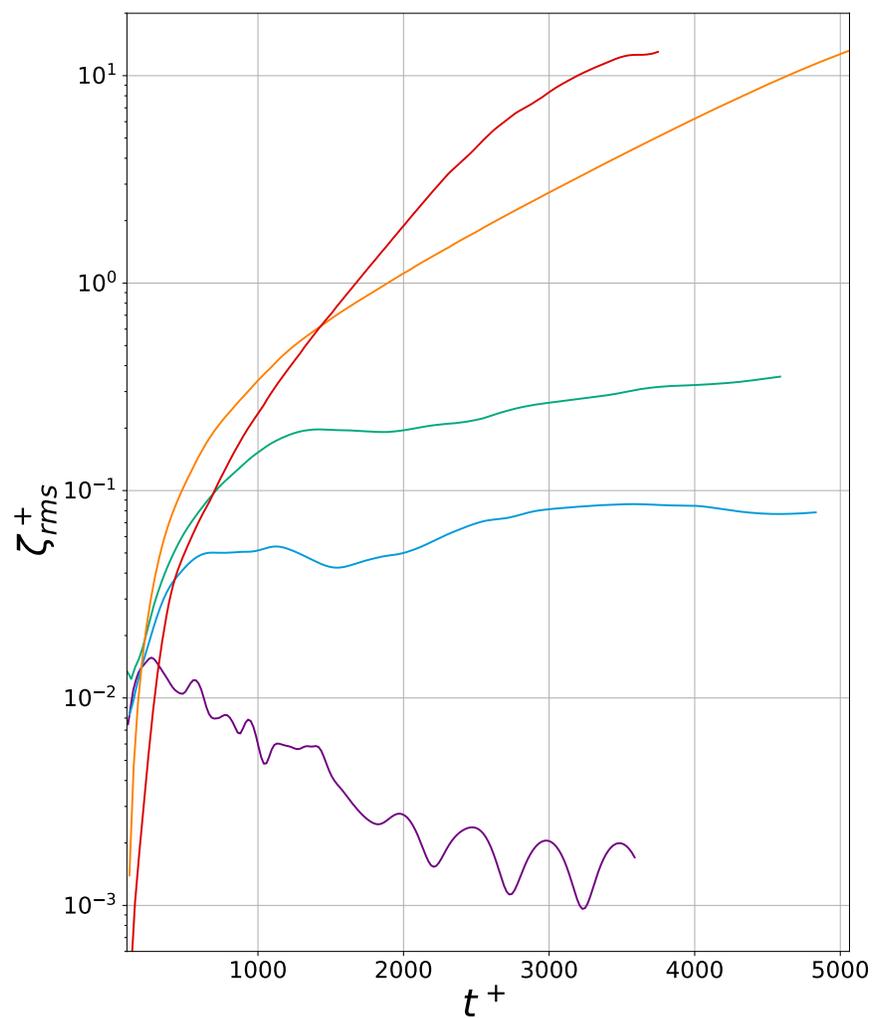


FIGURE 5.6 – Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 6667$ et Re_* variable. $Re_* = 613$ en violet, $Re_* = 1067$ en bleu, $Re_* = 1333$ en vert, $Re_* = 1600$ en orange, et $Re_* = 1867$ en rouge.

\mathcal{L}_q	Λ	Re_*	u_s^+	Re_l
\mathcal{L}_1	67	228	0.85	1930
		453	1.69	7619
		613	2.29	13951
		800	2.99	23762
		1067	3.98	42270
\mathcal{L}_{10}	667	613	0.23	141
		1067	0.40	427
\mathcal{L}_{12}	800	800	0.25	167
\mathcal{L}_{30}	2000	800	0.10	27
\mathcal{L}_{100}	6667	613	0.02	1
		1067	0.04	4
		1333	0.05	7
		1600	0.06	10
		1867	0.07	13

TABLE 5.2 – Évolution de la vitesse à l'interface en fonction du rapport des viscosités et du nombre de Reynolds turbulent dans l'air.

sur u_s et αz_0 s'exprime par

$$Re_l = \alpha \frac{\rho_l u_s z_0}{\mu_l} = \frac{\alpha}{4} R \left(\frac{Re_*}{\Lambda} \right)^2 \quad (5.1)$$

où Re_* est le nombre de Reynolds turbulent côté air. La région de l'écoulement qui joue un rôle sur la génération et la propagation des vagues est la couche de cisaillement située près de l'interface. Dans le liquide, le cisaillement s'annule en $z = z_0/3$, et la hauteur de la couche de cisaillement correspond à $\alpha = 2/3$. Les valeurs de u_s^+ et de Re_l ainsi calculées sont réunies dans le tableau 5.2.

Pour un écoulement en canal plan, si l'on considère le nombre de Reynolds basé sur la demi-hauteur du canal et la vitesse au centre, l'écoulement est linéairement stable tant que $Re < 5772$ (*Orszag (1971)*). Cependant, il est maintenant bien établi que la transition à la turbulence s'opère via une bifurcation sous-critique. En présence de perturbations d'amplitude finie, la turbulence apparaît ainsi pour des nombres de Reynolds beaucoup plus bas (*Sano et Tamai (2016)* rapportent une valeur critique $Re = 830$). Sur la base de ce critère, pour tous les cas où le liquide est au moins 10 fois plus visqueux que l'eau, l'hypothèse d'écoulement laminaire dans liquide s'avère pertinente. C'est en revanche beaucoup plus discutable pour les cas \mathcal{L}_1 . Pour la plus petite vitesse de frottement, $Re_l = 1930$ et l'écoulement est probablement encore transitionnel. Au-delà de cette valeur, l'hypothèse d'écoulement laminaire est certainement mise en défaut.

Une des conséquences de cette hypothèse est la prédiction d'un fort courant de surface u_s . Lorsqu'un train d'ondes est généré en présence d'un tel courant, une couche critique peut apparaître sous l'interface, où la vitesse du fluide est égale à la célérité des ondes. Nous développons cette idée dans la section suivante. Une autre conséquence concerne la dissipation dans le liquide. L'équation horizontale de quantité de mouvement dans le liquide s'écrit de manière similaire à la relation (4.15), en remplaçant le gradient de pression moteur de l'air par celui du liquide. Si on la multiplie par la vitesse horizontale, et qu'on l'intègre sur toute la hauteur de liquide, on obtient la relation

$$- \int_{z=0}^{z=z_0} \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} dz + u_s \tau_* = 0 \quad (5.2)$$

où l'on a supposé que le débit est nul. Le premier terme correspond à la dissipation. Si on modifie le courant de

surface u_s tout en imposant le même cisaillement interfacial τ_* , on change la dissipation totale dans le liquide. Il en serait de même pour la distribution de dissipation, notamment dans la région proche de l'interface.

Un moyen de lever l'hypothèse d'écoulement laminaire dans l'eau consisterait à résoudre le modèle de Spalart-Allmaras dans les deux phases. Pour cela, on peut suivre la procédure présentée dans le chapitre précédent, en particulier à l'aide de la relation (4.7). Se pose alors la question de l'initialisation des profils de vitesse et de viscosité turbulente. Un modèle de ces deux grandeurs est développé dans l'appendice B de l'annexe B. Nous considérons que, sous la surface, la sous-couche visqueuse est très fine, et que la couche tampon est quasiment inexistante. Pour prédire le profil initial de viscosité turbulente, nous considérons le modèle de Cess-Reynolds-Tiederman dans la limite non-visqueuse (forme (2.27)). Conformément au comportement observé dans une couche cisailée sous une surface libre, nous supposons que le cisaillement turbulent varie linéairement avec la distance à l'interface, et que sa pente correspond au gradient de pression moteur G_l . Pour une couche de cisaillement d'épaisseur $(1 - \delta_l)z_0$, le cisaillement s'annule à l'altitude $\delta_l z_0$. On peut alors intégrer verticalement l'équation horizontale de quantité de mouvement, sur toute la hauteur de la couche de cisaillement. La vitesse suit ainsi un profil logarithmique, dont l'argument est une fonction rationnelle de z . En plus de δ_l , ce modèle introduit un second paramètre libre $U_0 = U(\delta_l z_0)$. Pour $U_0 = 0$, le modèle prédit un courant de surface

$$\frac{u_s}{u_{*,l}} = 3 + \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{Re_{*,l}}{2} \right) \quad (5.3)$$

où $Re_{*,l}$ est le nombre de Reynolds turbulent dans le liquide basé sur l'épaisseur de la couche de cisaillement, et la vitesse de frottement sous l'interface $u_{*,l}$. *Enstad et al. (2006)* rapportent une valeur $u_s/u_{*,l} \sim 14.9$ pour $Re_{*,l} = 150$, tandis que le modèle ci-dessus prédit $u_s/u_{*,l} \sim 13.8$, soit 8 % de moins. En considérant que l'épaisseur de la couche de cisaillement est similaire à la hauteur d'air $H - z_0$, cette valeur de $Re_{*,l}$ correspond à $Re_{*,a} \sim 324$ pour l'eau, et le courant de surface adimensionné par la vitesse de frottement côté air vaut environ 0.45. Avec ce modèle, on peut aussi imposer une condition de débit nul dans le liquide en choisissant δ_l et U_0 de façon adéquate. Pour cela, il est nécessaire de modéliser la partie basse de l'écoulement, située en-dessous de $z = \delta_l z_0$. En construisant un profil d'écoulement en demi-canal, et sur la base de lois empiriques tirées de résultats expérimentaux, on peut estimer ces deux paramètres en fonction du cisaillement imposé sur l'interface.

Ce modèle est prometteur pour initialiser une simulation avec ces conditions turbulentes dans les deux phases. Toutefois, nous n'avons pas eu l'occasion de l'implémenter. Ainsi toutes nos simulations reposent sur l'hypothèse d'écoulement laminaire dans le liquide. Comme nous l'avons montré, cette dernière est valable pour des liquides au moins 10 fois plus visqueux que l'eau, mais beaucoup plus discutable pour cette dernière.

5.3 Contenu spectral des déformations de l'interface

Nous abordons maintenant le contenu spectral des déformations ζ des expériences numériques présentées ci-dessus. Dans un premier temps, nous décrivons des champs de vagues pour quelques cas. Puis nous examinons des spectres instantanés en nombre d'onde à différents instants. Enfin, nous visualisons l'évolution temporelle de quelques spectres à l'aide de spectrogrammes.

5.3.1 Champs de vagues

Nous pouvons visualiser le champ de vagues instantané à l'aide du taux de présence. La figure 5.7 en montre des distributions pour le cas \mathcal{L}_1 avec $Re_* = 800$. Les figures correspondent à deux instants pris lors de la seconde phase de croissance de ζ_{rms} , alors que les déformations ont atteint une amplitude importante, de plusieurs unités visqueuses. Nous y avons superposé la distribution des lignes de courant. Le champ de vague est dominé par une longueur d'onde $\lambda_0 = L/2$, la même sur les deux figures. Pour ce mode, on calcule $k_0 z_0 = 4.2$. D'autre part, la période d'une onde en grande profondeur à la surface d'un liquide non-visqueux est donnée par

$$T = 2\pi \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\Delta\rho} \right)^{-1/2} \quad (5.4)$$

La période du mode dominant vaut ainsi $T = 1131t_\nu$. La propagation de cette onde n'est donc pas affectée par le fond, et très peu par les effets visqueux. On peut définir une cambrure des vagues $k_0 \zeta_{rms}$ à partir du mode dominant $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Dans ce cas, la cambrure passe de 0.02 pour $t^+ = 5992$, à environ 0.087 pour $t^+ = 7004$, donc les vagues sont en régime faiblement non-linéaire. Pour rappel, on peut définir un nombre d'onde adimensionné $k^+ = k\delta_\nu = 2\pi\nu/\lambda/u_*$. Ici, ce nombre vaut $k_0^+ = 5.2 \times 10^{-3}$. L'écoulement dans l'air se trouve donc dans un régime pour lequel le modèle de Spalart-Allmaras prédit assez mal le déphasage du cisaillement sur l'interface. On devine la présence de modes de plus petite longueur d'onde, superposés au mode dominant. Sur la première figure, les lignes de courant dans l'air sont relativement parallèles au-delà de $z/H = 0.6$, ce qui indique que l'écoulement y ressent peu les ondulations de l'interface, dont l'amplitude rms est d'environ 4 unités visqueuses. Sur la seconde figure, l'amplitude des déformations est environ 4 fois plus grande, et les ondulations s'impriment sur les lignes de courant jusqu'à $z/H \sim 0.8$. Dans le liquide, la distribution des lignes de courant forme des structures fermées, dont le centre se trouve à une altitude d'environ $z/H = z/2z_0 = 1/3$. C'est à cette altitude que l'écoulement moyen change de signe dans le liquide, en raison de la condition de débit nul. Les positions des centres de ces structures se situent légèrement en aval des crêtes, tandis que la première ligne de courant juste sous l'interface suit de près les ondulations de cette dernière. Ces figures sont obtenues dans le référentiel fixe. Dans le référentiel du mode dominant, qui se propage à la vitesse de phase c_0 , ces mêmes structures sont décalées vers le haut, plus près de l'interface. De petites structures fermées apparaissent également, à proximité du fond, et déphasées de π par rapport aux précédentes.

La figure 5.8 montre la distribution des lignes de courant pour le liquide \mathcal{L}_{100} avec $Re_* = 1600$, à un instant très avancé de la simulation $t^+ = 5063$. On identifie un mode dominant, pour $\lambda_0 = L/6$. Dans ce cas, le nombre d'onde adimensionné vaut $k_0^+ = 7.8 \times 10^{-3}$, et le modèle de turbulence prédit bien le déphasage du cisaillement. L'amplitude rms des déformation est d'environ 11 unités visqueuses, et la cambrure vaut 0.086. On observe à nouveau une série de lignes de courant fermées dans le liquide. Leur structure semble indiquer la présence d'un deuxième mode $\lambda_1 = 2\lambda_0$. Contrairement au cas précédent, les positions des centres des structures fermées coïncident avec celles des creux du train d'ondes, et la première ligne de courant sous l'interface est en opposition de phase avec cette dernière.

La différence de déphasage des structures fermées avec l'interface entre les deux liquides s'explique par la différence entre les deux courants de surface. Comparé à la vitesse de phase du mode dominant c_0 , ce dernier est environ 3 fois plus grand pour l'eau, alors que pour le liquide plus visqueux, il est environ 6 fois plus faible. Ainsi, une couche critique, où la vitesse de l'écoulement égale celle des ondes, existe sous l'interface

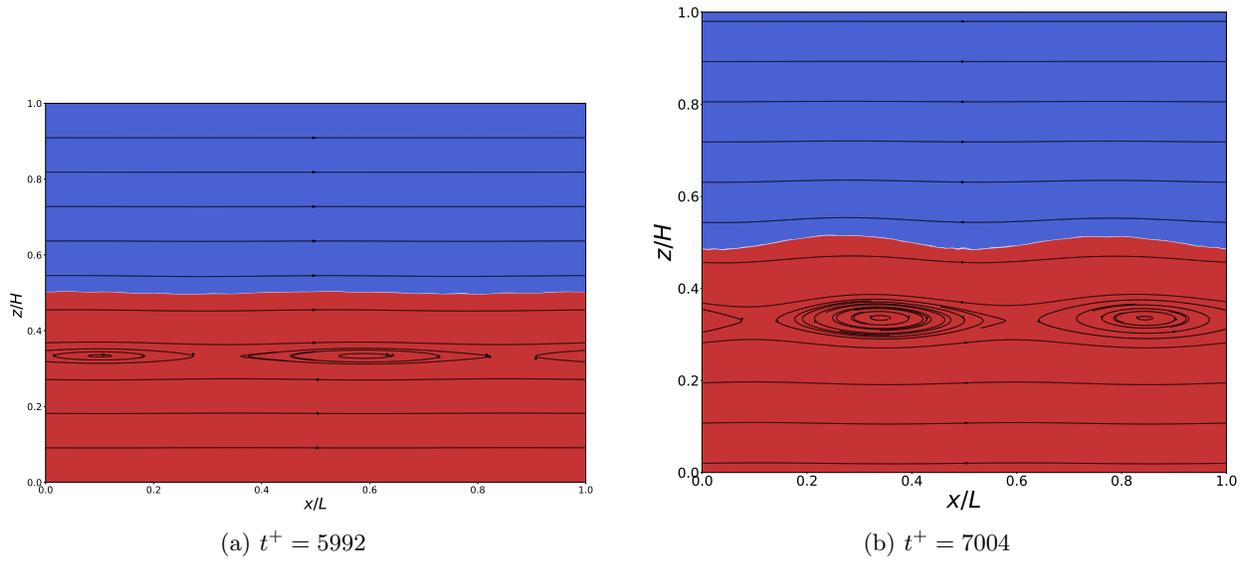


FIGURE 5.7 – Lignes de courant dans le référentiel fixe pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 800$. Les couleurs correspondent au taux de présence, l'air en bleu et le liquide en rouge.

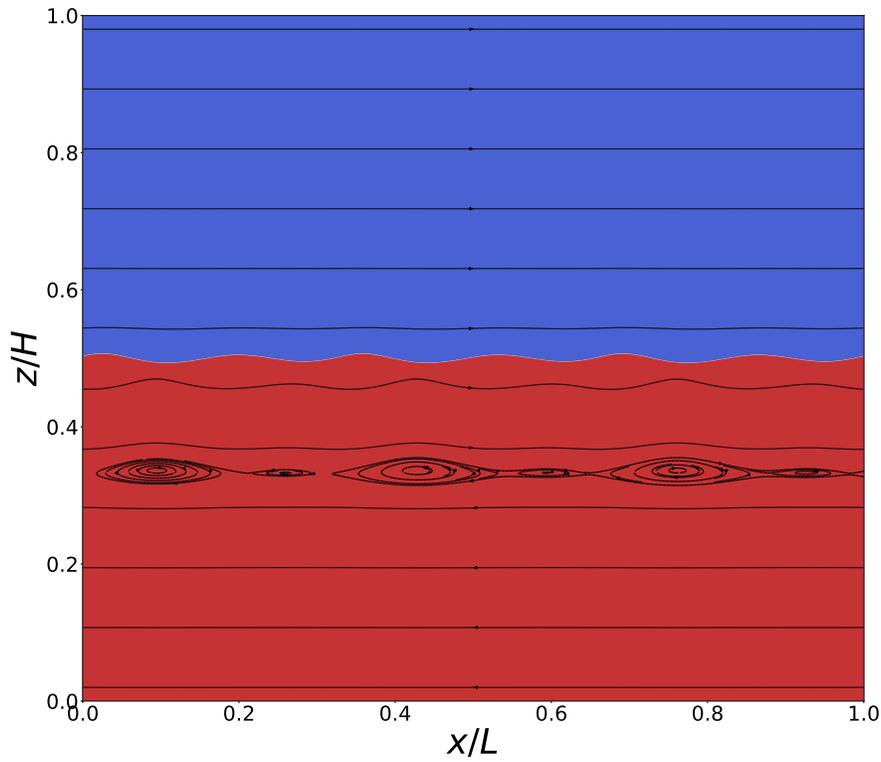


FIGURE 5.8 – Lignes de courant dans le référentiel fixe pour $\Lambda = 6667$ et $Re_* = 1600$, à $t^+ = 5063$.

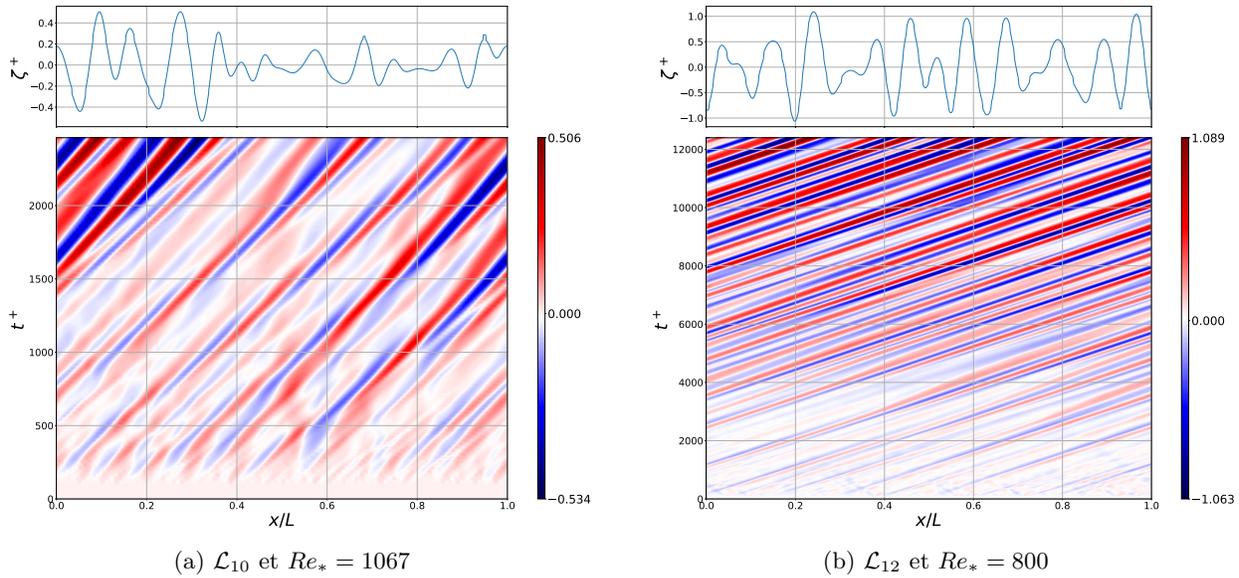


FIGURE 5.9 – Amplitude des déformations de l'interface pour deux liquides environ 10 fois plus visqueux que l'eau. En haut, la distribution spatiale au dernier instant de la simulation. En bas, un diagramme spatio-temporel montrant l'évolution de l'amplitude des déformations à chaque abscisse au cours du temps.

pour l'eau, alors qu'elle se situe dans l'air pour le liquide \mathcal{L}_{100} . Les perturbations de vitesse induites par le train de vagues sont donc quasiment irrotationnelles pour le liquide le plus visqueux, alors qu'elles possèdent une composante rotationnelle importante dans l'eau. Pour une onde de surface en écoulement irrotationnel, la fonction de courant atteint ses maxima sous les crêtes et ses minima sous les creux, à une altitude z fixée. Dans le référentiel fixe, ceci se traduit par une distribution en opposition de phase comme celle de la figure 5.8. À l'inverse, le rapport u_s/c_0 étant important pour le cas de l'eau, il y a peu de différences entre le référentiel fixe et celui lié aux ondes, d'où la distribution des lignes de courant quasiment en phase avec les déformations de l'interface.

La figure 5.9a montre un diagramme spatio-temporel des déformations de l'interface pour \mathcal{L}_{10} et $Re_* = 1067$. L'amplitude représentée correspond à l'altitude de l'interface par rapport à sa position moyenne. L'amplitude maximale est de l'ordre de 0.5 unité visqueuse, soit deux mailles crête à crête. On ne voit pas un mode dominant se détacher aussi clairement que sur les figures précédentes. Le champ de vagues ressemble plus à une série de trains d'ondes successifs. La figure 5.9b montre une distribution similaire pour \mathcal{L}_{12} et $Re_* = 800$. L'amplitude maximale est de l'ordre de 1 unité visqueuse, soit quatre mailles crête à crête. Le champ de vague est plus structuré, et on devine la présence d'un mode dominant correspondant à $\lambda_0 \sim L/10$.

5.3.2 Distribution spectrale de l'amplitude des déformations de l'interface

Échelles de coupure

Les dimensions d'un maillage encadrent les longueurs d'onde que nous pouvons simuler. D'une part, le domaine étant périodique, l'extension longitudinale L impose une longueur d'onde maximale $\lambda_{sup} = L = 2\pi/k_{inf}$. Pour quasiment toutes nos simulations, L est fixée à $1.5H$, et ainsi $k_{inf} \sim 0.14k_c$. Pour les deux cas où $L/H = 3$, ce nombre d'onde descend à $k_{inf} \sim 0.07k_c$. On rappelle que le nombre capillaire est défini

Re_*	α	k_{sup}/k_c
228	4.97	19.6
453	5.03	38.5
613	4.94	53.1
800	4.69	73.0
800	18.46	18.5
1067	4.97	91.9
1333	5.10	111.8
1600	4.99	137.2
1867	5.06	157.9

TABLE 5.3 – Nombre d’onde maximal k_{sup} que le maillage peut capturer, adimensionné par le nombre capillaire.

\mathcal{L}_q	Λ	k_{vis}/k_c
\mathcal{L}_1	67	3.4×10^5
\mathcal{L}_{10}	667	3.4×10^3
\mathcal{L}_{12}	800	2.47×10^3
\mathcal{L}_{30}	2000	380
\mathcal{L}_{100}	6667	34

TABLE 5.4 – Nombre d’onde de coupure k_{vis} en fonction de la viscosité du liquide, adimensionné par le nombre capillaire.

comme $k_c = 1/l_c$, où l_c est la longueur capillaire telle que définie dans le chapitre 1. D’autre part, la taille des mailles impose une longueur d’onde minimale, qu’on peut estimer à environ $\lambda_{inf} = 2\Delta x = 2\pi/k_{sup}$. Compte tenu des caractéristiques du maillage présentées dans le chapitre précédent, on montre que ce nombre d’onde supérieur se réécrit sous la forme

$$k_{sup} = \frac{\pi}{\alpha z_0} Re_* \quad (5.5)$$

où $\alpha = \Delta x/\Delta z_{min} \sim 5$ pour la plupart des simulations. Nous avons rassemblé les valeurs calculées avec (5.5) dans le tableau 5.3. Les modes que nous pouvons capturer sont donc compris dans l’intervalle $k_{inf} \leq k \leq k_{sup}$, où k_{inf} est fixe la plupart du temps, et k_{sup} augmente avec la vitesse du vent.

En outre, nous avons présenté dans le chapitre 1 deux mécanismes qui peuvent s’opposer à la propagation des ondes de surface sur un liquide visqueux en profondeur finie. D’une part, il existe un nombre d’onde de coupure k_{vis} dépendant de la viscosité du liquide. En-dessous de k_{vis} , les ondes se propagent en s’atténuant, en raison de la dissipation par la viscosité, et au-delà elles sont complètement amorties et ne peuvent pas se propager. D’après *LeBlond et Mainardi (1987)*, cette coupure correspond à $\theta = \theta_0 = 1.31$, où $\theta = \nu_l k^2/\sigma$, avec σ la pulsation non-amortie des ondes. Cette dernière est solution de la relation de dispersion (1.1), où la célérité des ondes s’écrit $c = \sigma/k$. Ainsi, le nombre d’onde de coupure dû à la viscosité est donné implicitement par la relation

$$\nu_l k^3 = \theta_0^2 \left(g + \frac{\gamma}{\rho_l} k^2 \right) \tanh(kz_0) \quad (5.6)$$

On peut aisément résoudre (5.6) numériquement. Les valeurs de k_{vis} pour les viscosités que nous avons étudiées sont rapportées dans le tableau 5.4. Nous avons indiqué deux cas à $Re_* = 800$ car nous avons utilisé deux maillages différents. Les valeurs de ce tableau sont à comparer avec celles du tableau 5.3. Pour tous les liquides de viscosité inférieure à 100 fois celle de l’eau, on constate que $k_{sup} < k_{vis}$. En revanche, les cas \mathcal{L}_{100} ont été simulés avec un nombre de Reynolds supérieur à 613, et dans ce cas $k_{sup} > k_{vis}$. La limite théoriquement imposée par k_{vis} est indiquée sur les spectrogrammes présentés dans l’annexe C sous forme d’une ligne rouge. On peut voir que des modes situés au-dessus de cette limite sont excités, mais la majorité de l’énergie des vagues se trouve en-dessous.

D’autre part, le fond peut avoir une influence sur la propagation des ondes de surface. Compte tenu du facteur $\tanh(kh)$ qui intervient dans la relation de dispersion, la limite ce mécanisme intervient pour des

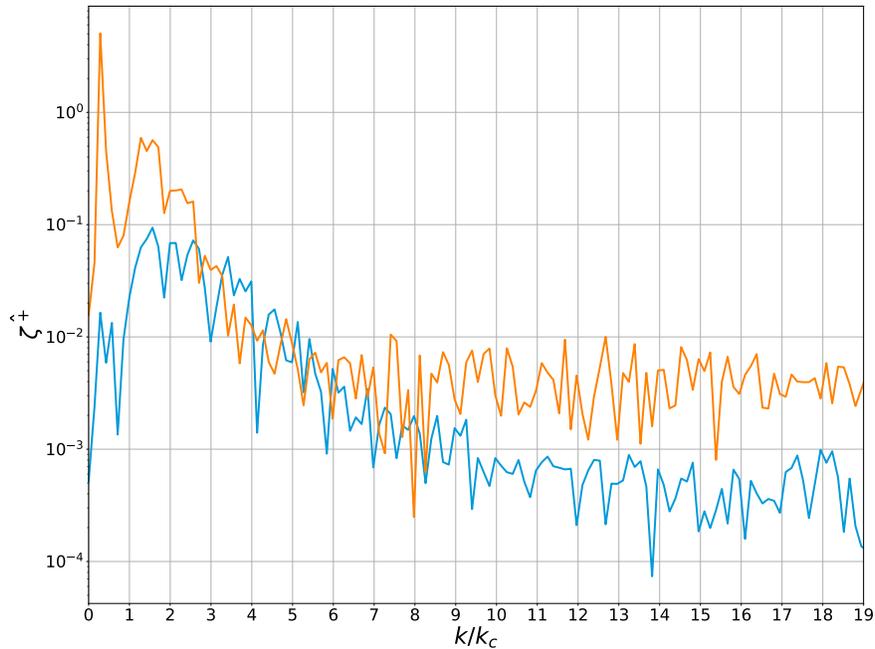
ondes telles que $k_h h \sim 2$, où h est la profondeur de liquide. Cette dernière vaut ici $h = z_0$, et c'est un paramètre maintenu constant au cours de toutes les simulations dont nous discutons. Dans ce cas, les ondes atténuées par la présence du fond correspondent à $k_h \sim 0.14k_c$. Compte tenu de la valeur de k_{inf} , une petite gamme de modes que nous pouvons exciter ressent l'influence du fond. Toutefois, $\tanh(k_{inf} z_0) \sim 0.77$, donc cette influence reste limitée.

Spectres instantanés

Nous discutons maintenant des spectres d'amplitude instantanés $\hat{\zeta}(k)$. Ceux-ci sont calculés à partir d'une FFT de la distribution instantanée de $\zeta(x, t)$. La distribution spectrale obtenue est adimensionnée par δ_ν , et les nombres d'onde sont adimensionnés par le nombre capillaire k_c . Pour une onde sinusoïdale, l'énergie totale par unité de surface de la vague est proportionnelle au carré de son amplitude (*Lamb (1932)*). On peut ainsi définir une densité spectrale d'énergie $E_\zeta(k) = |\hat{\zeta}(k)|^2$.

La figure 5.10 montre le cas \mathcal{L}_1 pour Re_* à deux instants différents, pris au cours des deux phases de croissance de ζ_{rms} . La première courbe correspond à un instant peu avancé de la simulation, et l'amplitude des déformations de l'interface vaut environ 7×10^{-1} unité visqueuse. L'énergie spectrale se trouve essentiellement contenue dans l'intervalle $1.2 \leq k/k_c \leq 2.8$. Son maximum, qui vaut environ 0.1, est atteint pour $k_0/k_c \sim 1.55$, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 \sim 0.09L$. Les modes les plus amplifiés sont donc à ce stade plutôt du côté des ondes capillaires. L'amplitude est environ un ordre de grandeur plus bas pour les petits nombres d'onde tels que $k/k_c < 1$. Au-delà de $k/k_c = 3$, elle diminue graduellement suivant une loi de puissance k^n avec $n \sim -2.3$, jusqu'à atteindre un niveau moyen inférieur à 0.001. Ce niveau est le même au-delà des limites de la figure. La seconde courbe correspond à un instant plus avancé de la simulation, le même que sur la figure 5.7. L'amplitude des déformations a crû à environ 0.35 unité visqueuse, soit deux mailles d'amplitude crête à crête pour un profil sinusoïdal équivalent. On peut voir sur le spectre que le niveau moyen de l'amplitude spectrale a également augmenté. Sa distribution spectrale a beaucoup changé au sein de l'intervalle $0 \leq k/k_c \leq 10$. Une composante principale a émergé pour $k_0/k_c \sim 0.285$, soit une longueur d'onde $\lambda_0 = L/2$. C'est le mode principal que l'on voit sur les distributions de lignes de courant analysées précédemment. Le nombre d'onde du mode dominant a ainsi diminué d'un facteur 5.55 par rapport à $t^+ = 2004$. On distingue un plateau correspondant à l'intervalle $1.2 \leq k/k_c \leq 2.8$ précédemment mentionné, à un niveau d'amplitude un ordre de grandeur plus bas que le mode fondamental. Au-delà, la densité d'amplitude du spectre diminue en-dessous de 0.01. Au dernier instant simulé, à savoir $t^+ = 7004$, le mode dominant est toujours $k_0/k_c = 0.285$, et les autres modes ont une amplitude au moins deux ordres de grandeur plus faible. Pour le mode dominant, la vitesse de phase c/c_m , calculée à partir de (1.1), vaut 1.38, contre 1.32 dans la limite $\epsilon_T \ll 1$, soit une différence de moins de 4 %. Au cours de sa croissance, le champ de vagues est passé d'un régime gravito-capillaire dominé par la tension de surface, à un régime purement gravitaire.

Nous nous proposons maintenant de comparer les spectres de deux liquides de viscosités similaires, de l'ordre de 10 fois celle de l'eau, à savoir \mathcal{L}_{12} et \mathcal{L}_{10} . Les vitesses de vent sont différentes pour ces deux cas, respectivement $Re_* = 800$ et 1067. Nous avons sélectionné deux instants différents, pour lesquels les amplitudes ζ_{rms} sont relativement comparables, à savoir 6×10^{-2} et 2×10^{-1} . Les spectres sont réunis sur la figure 5.11. Pour le cas \mathcal{L}_{12} , le rapport L/H vaut 3 et le domaine est deux fois plus long que pour le cas \mathcal{L}_{10} . Ainsi la résolution en nombre d'onde est plus grande, mais le nombre d'onde maximal que le maillage que peut capturer est de 18 pour le premier cas, et de 92 pour le second. Malgré ce dernier point, l'essentiel de


 FIGURE 5.10 – Spectre instantané pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 800$. En bleu à $t^+ = 2004$, en orange à $t^+ = 5992$.

l'énergie est concentré pour des nombres d'onde inférieurs à $10k_c$. Dans la figure 5.11a, le cas \mathcal{L}_{12} correspond à l'instant $t^+ = 2046$, et le cas \mathcal{L}_{10} à l'instant $t^+ = 680$. Le niveau des modes dominants est semblable pour les deux liquides, le maximum étant situé à environ 3.5×10^{-2} . Pour \mathcal{L}_{12} , l'énergie des modes dominants se trouve dans l'intervalle $0.57 \leq k/k_c \leq 1.7$, et on distingue deux modes d'intensité comparable à $k_0/k_c \sim 1$ et $k_1/k_c \sim 1.28$. Ces valeurs correspondent à des longueurs d'onde respectives $\lambda_0 \sim$ et $\lambda_1 \sim$. Pour \mathcal{L}_{10} , l'énergie est principalement contenue dans un intervalle deux fois plus étendu, soit $0.57 \leq k/k_c \leq 2.7$. Le nombre d'onde du mode dominant vaut $k/k_c \sim 1.7$. Notons que pour ce cas, le liquide est environ 17 % moins visqueux, et la vitesse du vent est 33 % plus grande. Par rapport au liquide \mathcal{L}_{12} , la décroissance de l'amplitude spectrale est plus lente, et le spectre est plus étendu. Ce dernier point est cohérent avec la distribution des déformations de l'interface de la figure 5.9b. Celle-ci montre en effet un champ de vagues plus proche d'une série de trains d'onde localisés spatialement, ce qui se traduit par un spectre plus étendu en nombre d'onde. Dans la figure 5.11b, les spectres correspondent aux instants $t^+ = 6033$ pour le cas \mathcal{L}_{12} , et $t^+ = 2439$ pour le cas \mathcal{L}_{10} . Ainsi pour le liquide le plus visqueux, l'amplitude du champ de vagues a crû de 0.06 à 0.2 en un intervalle de temps $\Delta t^+ = 3987$, contre $\Delta t^+ = 1759$ pour \mathcal{L}_{10} . La croissance des ondes pour ce dernier est donc plus de celle observée pour \mathcal{L}_{12} . Nous reviendrons plus en détail sur les taux de croissance dans la dernière section de ce chapitre. Pour \mathcal{L}_{12} , aux deux modes k_0 et k_1 mentionnés précédemment s'ajoute un troisième mode dominant pour $k_2/k_c = 0.64$, soit une longueur d'onde $\lambda_2 \sim$. À la fin de la simulation, le mode $k_0/k_c = 1$ domine le spectre, encadré par les modes k_1 et k_2 sus-mentionnés. La décroissance de l'amplitude en direction des plus grands nombres d'onde est plus importante qu'à l'instant précédent. Pour \mathcal{L}_{10} , l'énergie se concentre sur un intervalle de nombres d'onde plus restreint $1 \leq k/k_c \leq 2.1$. Le mode dominant est estimé à $k/k_c \sim 1.4$, soit une diminution de 18 % par rapport à l'instant précédent. Comme pour \mathcal{L}_{12} , on remarque que la décroissance de l'amplitude est plus rapide que précédemment vers les grands nombres d'onde.

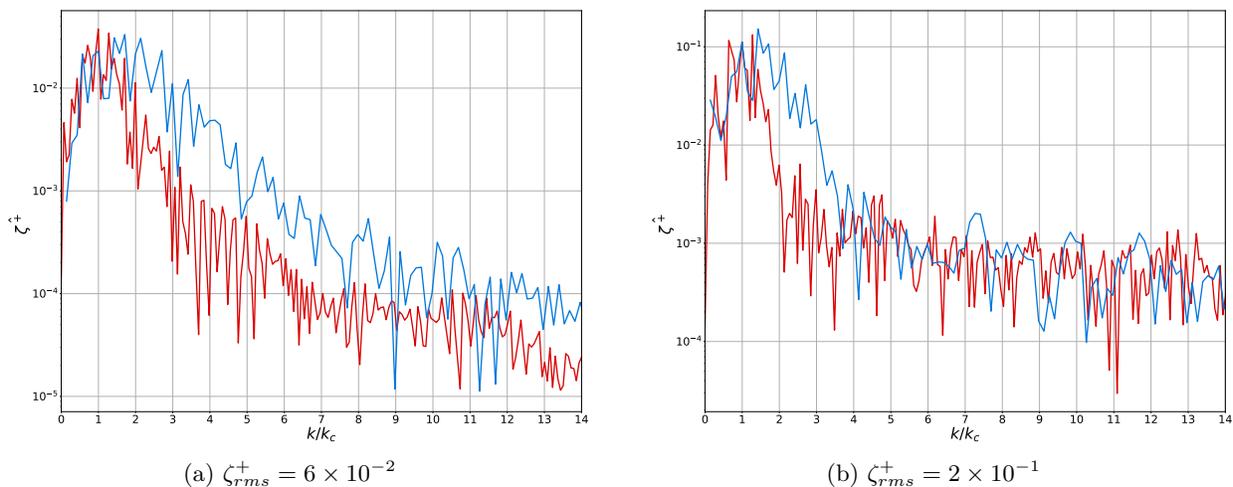


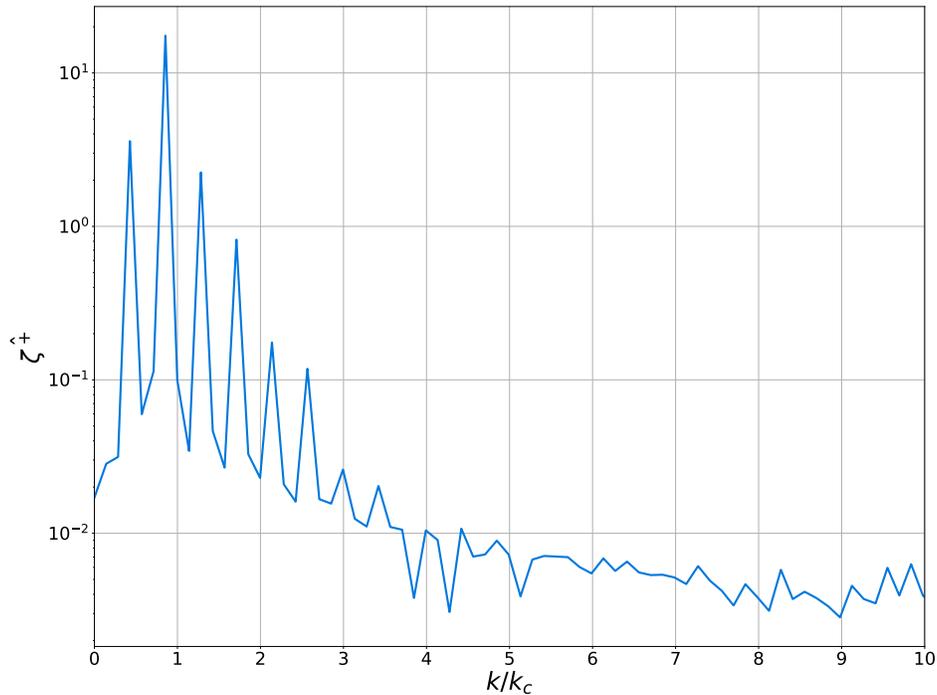
FIGURE 5.11 – Spectres instantanés pour deux liquides visqueux à instants différents. En rouge le cas \mathcal{L}_{12} pour $Re_* = 800$, en bleu le cas \mathcal{L}_{10} pour $Re_* = 1067$.

Nous n'avons pas de données à des temps plus avancés pour le cas \mathcal{L}_{10} . En revanche, pour \mathcal{L}_{12} , la simulation continue jusqu'à $t^+ \sim 12000$. Comme noté dans la section précédente, l'amplitude croît continûment jusqu'à cet instant final. À ce moment-là, l'énergie se concentre sur des nombres d'onde situés entre $k/k_c = 0.64$ et 1, ce dernier étant le mode dominant.

Nous terminons cette description du contenu spectral par le cas \mathcal{L}_{100} pour $Re_* = 1600$. La figure 5.12 montre le spectre de ζ à un instant avancé $t^+ = 5005$, situé à la fin de la simulation. La distribution de la densité spectrale d'amplitude est bien différente de celle des spectres précédemment analysés. Ici elle est portée par une série discrète de raies bien définies, dont le mode dominant se situe à $k_0/k_c \sim 0.855$, soit $\lambda_0 = L/6$. C'est le mode principal que l'on voit sur la figure 5.8. Les autres raies correspondent à un mode sous-harmonique $k_0/2$, puis une succession de modes harmoniques $3k_0/2$, $2k_0$, etc. jusqu'à $3k_0$, dont l'amplitude se situe deux ordres de grandeurs plus bas. Le niveau de l'amplitude des grands nombres d'onde est trois ordres de grandeur plus faible que celui du mode dominant. À un instant aussi avancé de la simulation, la cambrure est d'environ 0.1, et le régime des vagues est donc déjà non-linéaire. Le spectre 5.12 suggère ainsi que des interactions non-linéaires sont à l'œuvre. Plus précisément, on peut penser qu'une instabilité sous-harmonique (*Su et al. (1982)*, *Longuet-Higgins (1978a)*) est responsable de l'émergence du mode $k_0/2$, tandis qu'une instabilité super-harmonique (*Longuet-Higgins (1978b)*) est responsable de celle des modes $2k_0$, $3k_0$, etc.

5.3.3 Évolution temporelle des spectres spatiaux

Cette sous-section est consacrée à l'évolution temporelle du spectre spatial des déformations de l'interface. Nous avons commencé à l'aborder ci-dessus en discutant l'évolution du spectre entre deux instants pour quelques cas. Nous nous proposons de visualiser ici l'évolution temporelle de $\hat{\zeta}(k, t)$ sous forme de spectrogrammes, c'est-à-dire de cartes de $\hat{\zeta}$ en fonction du nombre d'onde et du temps. Les spectrogrammes de chaque expérience numérique présente dans le tableau 5.1 sont rassemblés dans l'annexe C. Pour chaque figure, le temps t^+ est représenté en abscisse, et le nombre d'onde k/k_c en ordonnée. La barre de couleur


 FIGURE 5.12 – Spectre instantané pour $\Lambda = 6667$ et $Re_* = 1600$ à $t^+ = 5005$.

indique l'intensité du spectre adimensionnée par δ_ν . Les figures de l'annexe C montrent les spectrogrammes complets, avec un agrandissement sur les petits nombres d'onde. Nous nous proposons de discuter ici quelques cas, en nous concentrant sur les fenêtres correspondant aux agrandissements.

Les cas non-amplifiés correspondent aux figures C.6, C.9 et C.10. On observe dans un premier temps une amplification de l'amplitude spectrale sur tout l'intervalle de nombres d'onde. Les grands nombres d'onde sont rapidement atténués, tandis qu'une gamme de petits nombres d'onde continue de croître. Pour $Re_* = 613$, cette gamme est plus importante pour le liquide \mathcal{L}_{10} (figure C.6) que pour \mathcal{L}_{100} (figure C.10). Puis on observe une atténuation graduelle de l'amplitude de la perturbation pour tous les nombres d'onde dans ces deux liquides.

Pour tous les autres cas, nous avons rassemblé dans le tableau 5.5 le nombre d'onde du mode le plus amplifié k_0/k_c . Il est systématiquement inférieur à 1, hormis pour le liquide \mathcal{L}_{10} . Pour ce dernier, rappelons que l'amplitude rms des déformations à la fin de la simulation atteint 0.2 unité visqueuse et continue de croître. On observe sur la figure C.7 qu'un mode de nombre d'onde légèrement inférieur à 1 est en croissance, comme les spectres instantanés précédents le laisser suggérer. Compte tenu des autres spectrogrammes, on peut penser que ce mode finit par devenir le mode dominant à plus long terme.

Le tableau 5.5 indique également les valeurs du nombre adimensionné $k_0^+ = k_0\delta_\nu$. Pour rappel, on peut considérer qu'au-delà de $k^+ = 8 \times 10^{-3}$, le modèle de Spalart-Allmaras prédit le bon déphasage du cisaillement sur l'interface. Pour le liquide \mathcal{L}_1 , ce critère est vérifié pour les deux plus basses vitesses de vent. Il l'est également pour les liquides intermédiaires, ainsi que les vitesses de vent intermédiaires pour le liquide \mathcal{L}_{100} . Le cas le plus défavorable correspond à $Re_* = 1067$ pour l'eau, pour lequel $k_0^+ \sim 4 \times 10^{-3}$. Dans ce cas, on peut estimer d'après la figure 3.21 que le déphasage est sous-estimé d'environ 40 %.

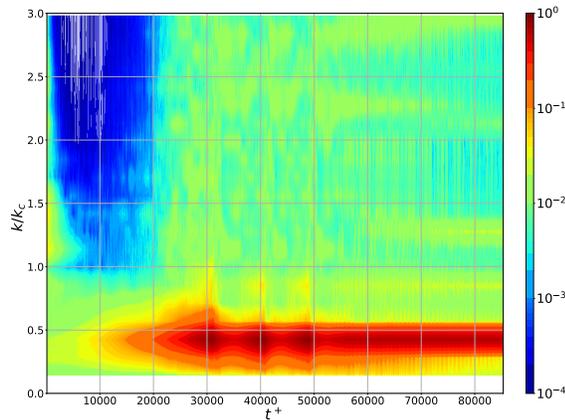
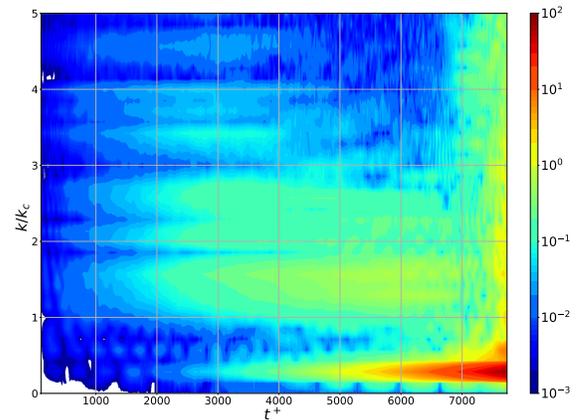
\mathcal{L}_q	Λ	Re_*	k_0/k_c	k_0^+	u_s/c_0
\mathcal{L}_1	67	228	0.425	2.7×10^{-2}	0.267
		453	0.853	2.8×10^{-2}	1.234
		613	0.285	6.8×10^{-3}	1.650
		800	0.285	5.2×10^{-3}	2.812
		1067	0.285	3.9×10^{-3}	5.003
\mathcal{L}_{10}	667	1067	1.425	2.0×10^{-2}	0.671
\mathcal{L}_{12}	800	800	0.995	1.8×10^{-2}	0.324
\mathcal{L}_{100}	6667	1067	0.427	5.9×10^{-3}	0.059
		1333	0.855	9.4×10^{-3}	0.107
		1600	0.855	7.9×10^{-3}	0.155
		1867	0.855	6.7×10^{-3}	0.211

TABLE 5.5 – Nombre d'onde du mode le plus amplifié pour tous les cas où des vagues de vent sont générées.

La figure 5.13 montre le spectrogramme dans le cas de l'eau pour $Re_* = 228$. Au début de la simulation, on peut voir que toute une gamme de nombres d'onde est excitée, ce qui est la signature de la perturbation initiale introduite sous forme de bruit blanc. Rapidement, l'amplitude des grands nombres d'onde est atténuée, tandis qu'émerge clairement un mode principal pour $k_0/k_c \sim 0.425$, soit $\lambda_0 = L/3$. On distingue les trois oscillations notées précédemment autour de $t^+ = 31000$, 41000 et 49000 . Elles s'impriment sur l'ensemble du spectre, et non seulement sur le mode dominant. Le mode le plus amplifié reste le même tout le long de la simulation, c'est-à-dire jusqu'à saturation de l'amplitude et au-delà. On devine les harmoniques $2k_0$ et $3k_0$ à partir de $t^+ = 70000$, mais leur intensité est encore au moins un ordre de grandeur inférieure à celle du mode dominant.

Le spectrogramme de l'eau pour $Re_* = 800$, soit un vent 3.5 fois plus fort, est rapporté sur la figure (5.14). L'amplitude initiale de la perturbation est trop faible pour apparaître sur la figure. En revanche, on observe rapidement la bande dominante $1 \leq k/k_c \leq 3$, puis l'émergence nette du mode dominant $k_0/k_c = 0.285$ mentionné précédemment. On peut remarquer que certains modes situés au-delà de $k/k_c = 3$ sont d'abord amplifiés, puis leur intensité commence à décliner lorsque celle du mode $k_0/k_c = 0.285$ devient importante. En fin de simulation, une large gamme de nombres d'onde dépasse une intensité de 1, probablement le signe d'interactions non-linéaires. Ainsi comme nous l'avons souligné précédemment, le nombre d'onde du mode dominant diminue au cours de la croissance et de la propagation des vagues. Ce phénomène est une caractéristique des jeunes vagues de vent, connue généralement sous le nom de *frequency downshift*. L'évolution temporelle de la densité spectrale de l'amplitude est à mettre en regard de celle de l'amplitude de l'élévation de surface. Nous avons présenté au début du chapitre l'évolution temporelle de ζ_{rms} (figure 5.4). Nous avons noté la présence d'une croissance en plusieurs étapes, principalement deux phases de croissance exponentielle séparées par un ralentissement temporaire. La première phase est caractérisée par la croissance d'un mode dominant, dont l'amplitude finit par saturer, ce qui induit ce ralentissement. Puis un autre mode prend le relais, devient à son tour dominant, et c'est la croissance de ce dernier qui porte l'augmentation globale de ζ_{rms} dans la seconde phase de croissance exponentielle.

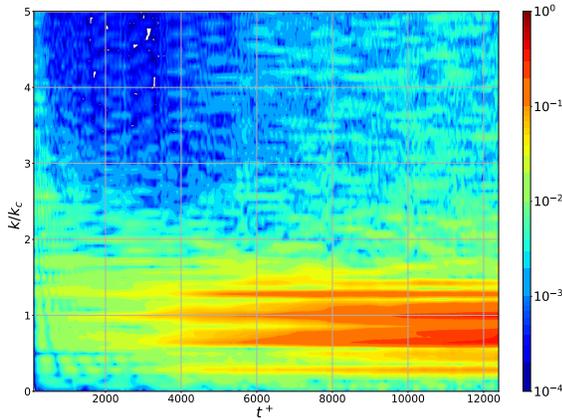
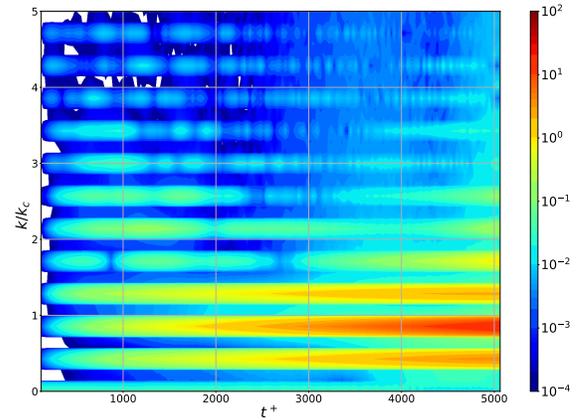
Cette description pour $Re_* = 800$ peut s'appliquer aux autres cas \mathcal{L}_1 , sauf pour la plus petite vitesse de vent. En plus du mode le plus amplifié, le tableau 5.5 indique le rapport entre le courant de surface u_s et la célérité c_0 de ce mode, pour tous les cas de croissance de vagues. Pour l'eau, passé $Re_* = 228$, l'hypothèse d'écoulement laminaire dans le liquide impose un courant de surface supérieur à la célérité du mode le plus


 FIGURE 5.13 – $\Lambda = 67 - Re_* = 228$

 FIGURE 5.14 – $\Lambda = 67 - Re_* = 800$

amplifié. La différence de comportement observée dans l'évolution des spectres tient donc très probablement à l'intensité du courant de surface. On peut alors raisonnablement penser que dans le cas $Re_* = 228$, l'écoulement sous la surface est quasi-laminaire, alors qu'il devrait être turbulent pour les vitesses de vent supérieures. Si $u_s/c_0 > 1$, il existe une couche critique dans le liquide, comme souligné précédemment. En imposant un écoulement laminaire dans le liquide, nous laissons donc la possibilité d'un courant de surface suffisamment fort pour déplacer la couche critique de l'air vers le liquide. Malgré cela, la présence d'une couche critique dans l'une des deux phases semble rester le mécanisme principal de génération des vagues suivant le scénario de Miles. En laissant la possibilité à l'écoulement dans le liquide d'être turbulent, nous ne changerions ainsi pas le mécanisme de génération, mais plutôt les modes qui seraient sélectionnés. D'autre part, la distribution verticale de la dissipation dans le liquide n'est pas la même entre les cas laminaire et turbulent. Ainsi, l'hypothèse d'un écoulement laminaire pourrait avoir un impact sur la durée de la croissance, et repousser une phase de saturation à des amplitudes de déformation plus élevées.

Pour les liquides plus visqueux, la distribution des spectres d'amplitude est généralement plus étendue, comme l'indiquaient les spectres instantanés pour les liquides \mathcal{L}_{10} et \mathcal{L}_{12} . Pour ce dernier, avec $Re_* = 800$, la figure 5.15 montre que le spectre est au départ dominé par le mode $k_1/k_c \sim 1.28$. Puis, vers $t^+ = 2000$, ce mode est concurrencé par le mode $k_0/k \sim 1$, qui devient dominant autour de $t^+ = 3000$. Cela coïncide avec la phase d'accélération de la croissance de ζ_{rms} (figure 5.5b), qui ralentit vers $t^+ = 5000$ alors que le mode k_1 domine à nouveau le spectre. Entre temps, le troisième mode $k_2/k_c \sim 0.64$ atteint une amplitude comparable aux deux autres, puis le mode k_0 redevient dominant en fin de simulation. C'est cette concurrence entre plusieurs modes qui semble avoir un impact sur l'évolution du taux de croissance de ζ_{rms} au cours du temps.

Pour le liquide \mathcal{L}_{100} , on observe la création de composantes sous et super-harmoniques pour les deux vitesses de vent les plus élevées, soit $Re_* = 1600$ et 1867 . Dans le premier cas (figure 5.16), on voit très tôt ($t^+ \sim 500$) l'émergence de trois modes principaux, qui consistent en un mode dominant $k_0/k_c = 0.855$, encadré par un sous-harmonique $k_0/2$ et par le mode $3k_0/2$, correspondant à leur composition linéaire. D'autres harmoniques apparaissent à des stades plus avancés de la simulation. Pour la plus haute vitesse de vent, le mode dominant est également $k_0/k_c = 0.855$, mais on observe un nombre bien plus important d'harmoniques (figure C.14).

FIGURE 5.15 – $\Lambda = 800$ - $Re_* = 800$ FIGURE 5.16 – $\Lambda = 6667$ - $Re_* = 1600$

5.4 Croissance des vagues

5.4.1 Définition des taux de croissance

Nous nous intéressons maintenant aux taux de croissance induits par l'action du vent sur l'interface.

Considérons une onde monochromatique de la forme $\zeta(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}$, de petite amplitude a réelle, et où k et ω sont des nombres réels, liés par la relation de dispersion (1.1) donnée dans le chapitre 1. Dans le liquide, l'énergie volumique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. On calcule l'énergie de l'onde par intégration de cette énergie volumique sur toute la hauteur de liquide. On montre que pour une onde de surface, libre et en l'absence de dissipation, elle s'écrit $(1/2)\rho_l g a^2$ (Crapper (1984)). Il s'agit d'une densité locale d'énergie par unité de surface horizontale. Pour un champ de vagues avec un spectre en nombre d'onde continu, on définit l'énergie locale (Komen et al. (1994)) comme

$$E = \frac{1}{2}\rho_l g \int E_\zeta(k) dk \quad (5.7)$$

où $E_\zeta = |\hat{\zeta}|^2$ est la densité spectrale d'énergie du mode k , définie à partir de l'amplitude spectrale $\hat{\zeta}$. Ainsi, pour une onde monochromatique et en l'absence de forçage ou de dissipation, on retrouve $E = (1/2)\rho_l g a^2$. En présence d'un puits ou d'une source d'énergie, l'énergie de l'onde n'est pas conservée. Pour une onde en développement dans le régime linéaire, l'énergie est solution d'une équation d'évolution de la forme (Komen et al. (1994))

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c_g \frac{\partial E}{\partial x} = P - D \quad (5.8)$$

où P et D sont des termes de production et de dissipation, et $c_g = \partial\omega/\partial k$ est la vitesse de groupe.

Lorsque le vent souffle sur une interface, il exerce des contraintes normale et tangentielle sur celle-ci. Le modèle de Phillips considère que les modes du spectre des fluctuations de pression, en phase avec les modes de l'interface, peuvent entrer en résonance avec ces derniers. Le taux de transfert de l'énergie du champ turbulent de pression vers l'interface est alors constant, et vaut $P = \rho_a^2 u_*^3 / \rho_l$. L'énergie du champ de vagues croît donc linéairement au cours du temps. Compte tenu de l'approche RANS que nous avons adoptée, nous ne pouvons pas observer un tel comportement. Examinons maintenant le cas du scénario de Miles (1957).

Dans ce cadre, s'il existe une couche critique dans l'air à proximité de l'interface, le travail des contraintes interfaciales en présence d'une perturbation $\zeta(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}$ induit un taux de production de l'énergie de la forme

$$P = \alpha \omega \frac{\rho_a}{\rho_l} \left(\frac{u_*}{c} \right)^2 E \quad (5.9)$$

où α est un facteur sans dimension. *Plant (1982)* donne un encadrement de ce préfacteur qui vaut $\beta = \alpha \rho_a / \rho_l = 0.04 \pm 0.02$. Ainsi l'énergie de l'onde croît exponentiellement, et on peut écrire $E(t) = E_0 e^{\gamma_f t}$, où γ_f est le taux de croissance lié au forçage du vent. D'après (5.9), il est donné par

$$\frac{\gamma_f}{\omega} = \alpha \frac{\rho_a}{\rho_l} \left(\frac{u_*}{c} \right)^2 \quad (5.10)$$

D'autre part, l'énergie de l'onde peut être dissipée par la viscosité du liquide. À partir de considérations énergétiques, *Lamb (1932)* montre que l'amplitude d'une onde monochromatique amortie par la viscosité est gouvernée par

$$\frac{da}{dt} = -2\nu_l k^2 a \quad (5.11)$$

Son énergie est donc dissipée avec un taux de dissipation $\gamma_\nu = -4\nu_l k^2$.

Lorsqu'un vent souffle sur la surface d'un liquide visqueux, il y a ainsi compétition entre le forçage du vent, qui induit un taux de croissance brut γ_f , et la dissipation par la viscosité du liquide représentée par γ_ν . La génération des vagues de vent est gouvernée par le taux de croissance net

$$\gamma = \gamma_f + \gamma_\nu \quad (5.12)$$

et l'évolution temporelle de l'énergie des ondes s'écrit $E(t) = E_0 e^{\gamma t}$.

5.4.2 Mesure du taux de croissance du mode le plus amplifié

Nous calculons les taux de croissance à partir de l'énergie du mode le plus amplifié k_0 . Pour le liquide \mathcal{L}_{30} , et pour les liquides \mathcal{L}_{10} et \mathcal{L}_{100} à $Re_* = 613$, la perturbation initiale est stable. Son énergie est dissipée car la vitesse du vent se situe en-dessous du seuil critique de génération des vagues, et le taux de croissance net est négatif. Pour autant, nous pouvons calculer le taux de croissance brut après prise en compte de la dissipation visqueuse.

Le mode le plus amplifié est défini comme celui pour lequel le spectre d'amplitude atteint son maximum au cours de la simulation. Son énergie est définie par $E_\zeta(k_0, t) = |\hat{\zeta}(k_0, t)|^2$. Pour chaque expérience numérique, nous procédons comme suit. Nous supposons que l'amplitude du mode k_0 suit une croissance exponentielle au début de la simulation, juste après application de la perturbation initiale. L'énergie du mode k_0 se met alors sous la forme $\log(E_\zeta(k_0, t)) = \gamma t + \beta$. Nous effectuons une régression linéaire de $\log(E_\zeta)$ par la méthode des moindres carrés sur un intervalle de temps sélectionné manuellement. Pour les vitesses de vent situées en-dessous du seuil critique, l'évolution de l'amplitude débute par une phase de croissance, atteint un maximum, puis entame une décroissance exponentielle. La régression est donc calculée sur cette seconde phase.

Nous avons rassemblé sur la figure 5.17 l'évolution temporelle de l'énergie du mode dominant, adimensionnée par δ_ν^2 . La droite rouge en pointillés indique le résultat de la régression linéaire. Pour l'eau, la croissance initiale de l'énergie est bien exponentielle, avec un taux de croissance constant, sur laquelle se superposent des

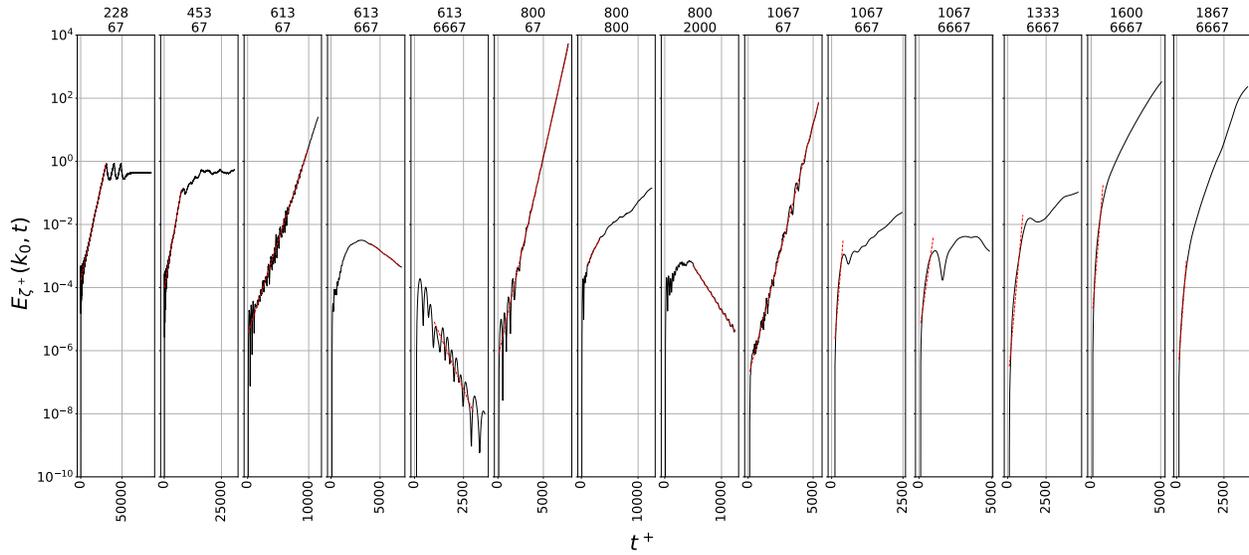


FIGURE 5.17 – Évolution temporelle de l'énergie du mode dominant pour chaque simulation de croissance de vagues de vent. La droite en rouge indique la régression linéaire utilisé pour calculer les taux de croissance. Pour chaque courbe, le premier nombre indique le nombre de Reynolds Re_* , et le second le rapport des viscosités Λ .

oscillations de petite amplitude. Pour les cas où la perturbation initiale est stable, la phase de décroissance exponentielle apparaît clairement sur la figure. Pour les liquides visqueux, la phase de croissance exponentielle n'est pas toujours bien définie. Par exemple pour \mathcal{L}_{100} à $Re_* = 1600$, on distingue deux phases, avant et après $t^+ \sim 850$. La seconde correspond à une croissance à taux constant, tandis que dans la première phase ce taux est légèrement variable. Nous calculons ainsi un taux de croissance moyen pour les liquides très visqueux.

Après calcul du taux de croissance net γ , nous calculons le taux brut γ_f d'après (5.12). Les valeurs adimensionnées de γ_f/ω sont rassemblées sur la figure 5.18. L'axe des abscisses indique le rapport u_*/c entre la vitesse de frottement et la célérité du mode k . Les couleurs représentent la viscosité du liquide, et le type de symbole la vitesse du vent. Nous avons indiqué l'encadrement de *Plant (1982)* par des lignes en pointillés et en trait plein. On observe deux régimes, suivant que les ondes sont rapides ($u_*/c < 1$), ou lentes ($u_*/c > 1$). Les taux de croissance pour les liquides de faible viscosité semblent s'accorder avec la partie supérieure de l'encadrement de *Plant* $0.04 \leq \beta \leq 0.06$. Pour l'eau, on observe une augmentation du préfacteur β lorsque la vitesse du vent augmente. Ce changement de régime s'opère pour les vitesses de vent auxquelles l'écoulement dans le liquide devient en réalité turbulent. Le liquide \mathcal{L}_{30} est indiqué par le symbole orange, et les liquides \mathcal{L}_{10} et \mathcal{L}_{100} à $Re_* = 613$ par les triangles pointes en bas, respectivement bleu et rouge. Malgré la décroissance de l'amplitude, nous avons pu calculer le taux de transfert de l'énergie du vent vers le champ de vagues. Pour le liquide \mathcal{L}_{100} , les taux de croissance s'alignent du côté des ondes lentes, pour presque toutes les vitesses de vent simulées. C'est le cas également du liquide \mathcal{L}_{10} pour $Re_* = 1067$. La droite la plus haute correspond à un préfacteur $\beta = 0.75$, soit 18.75 fois plus que la valeur moyenne donnée par *Plant (1982)*. Toutefois, l'encadrement indiqué par les lignes en pointillés correspond à des mesures expérimentales pour l'eau. Malgré la valeur élevée que nous trouvons, il est indéniable que la distribution des taux de croissance bruts pour le liquide \mathcal{L}_{100} s'accorde avec le modèle de Miles.

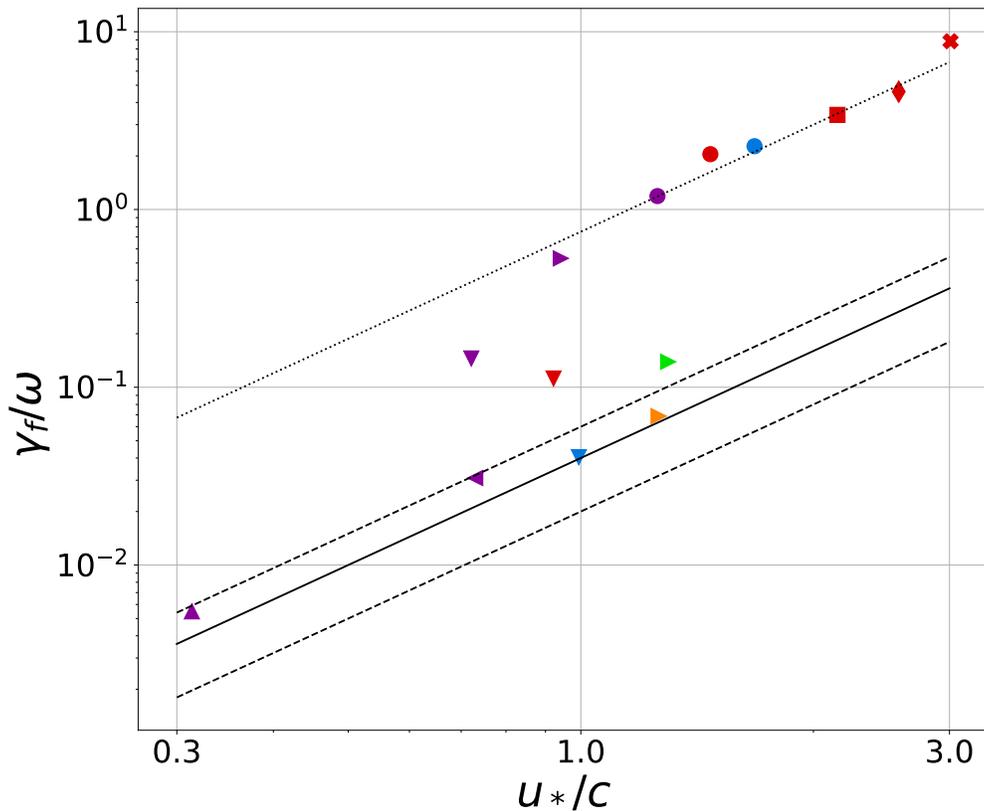


FIGURE 5.18 – Taux de croissance brut du mode fondamental pour chaque simulation réalisée. Les lignes en pointillés indiquent l’encadrement de *Plant (1982)*; la ligne en trait plein est la médiane de cet encadrement. La ligne la plus haute a été calculée à partir de (5.9) avec $\beta = 0.75$. Les couleurs correspondent aux différents liquides : \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_{10} , \mathcal{L}_{12} , \mathcal{L}_{30} et \mathcal{L}_{100} . Les symboles représentent les vitesses de vent : $Re_* = 228(\triangle)$, 453(\triangleleft), 613(∇), 800(\triangleright), 1067(\circ), 1333(\square), 1600(\diamond) et 1867(\times).

On peut noter que pour l’eau, les plus hautes vitesses de vent s’alignent sur la même droite que pour le liquide \mathcal{L}_{100} . Il s’agit de simulations supposant un écoulement laminaire dans le liquide, alors qu’il devrait être turbulent. Si tel était le cas, cela aurait un impact direct sur la dissipation sous la surface, ce qui modifierait le taux de dissipation γ_ν du mode k .

5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de nos simulations numériques diphasiques. Pour chacune d’entre elle, nous avons calculé le moment d’ordre deux de l’élévation de surface ζ_{rms} , et suivi son évolution temporelle. Nous avons également calculé des spectres spatiaux d’amplitude, et suivi leurs évolutions temporelles. L’ensemble des spectrogrammes ainsi construits sont rassemblés dans l’annexe C. Enfin, à partir des spectres d’amplitude, nous avons calculé les spectres d’énergie. Pour chaque cas simulé, nous avons identifié le mode le plus amplifié, suivi l’évolution temporelle de son énergie, et nous avons ainsi pu calculer son taux de croissance. En retranchant le taux de dissipation dû à la viscosité, nous en avons déduit le taux d’injection d’énergie du vent vers le champ de vagues.

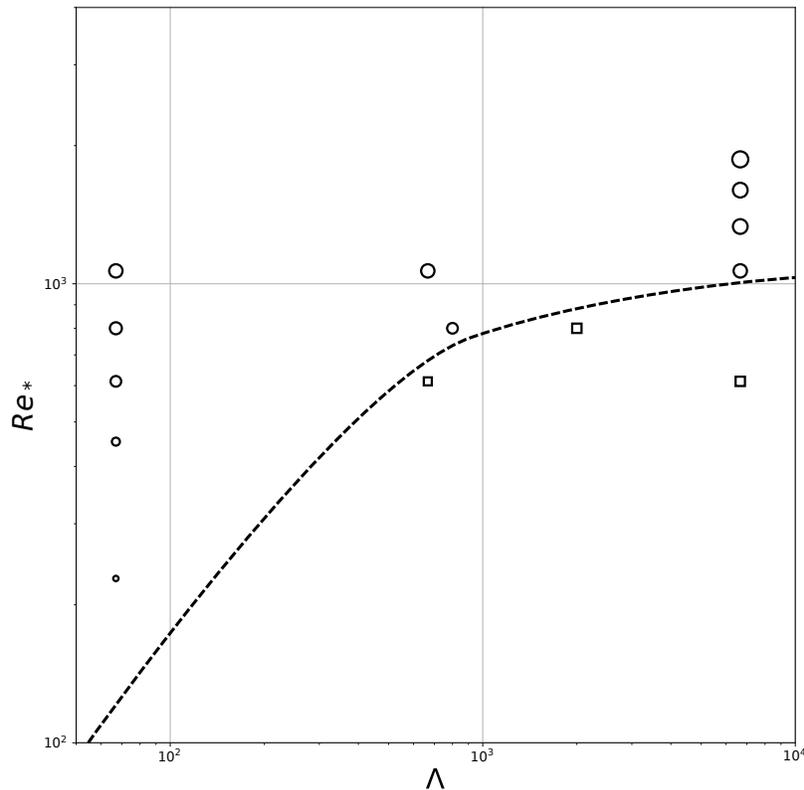


FIGURE 5.19 – Diagramme de phase dans le plan (Λ, Re_*) . La taille des marqueurs est corrélée au taux de croissance adimensionné γ_f/ω du mode le plus amplifié. La courbe en pointillés est une estimation du seuil entre les régions stable (en-dessous) et instable (au-dessus) du plan (Λ, Re_*) .

À partir de la connaissance des taux de croissance, nous avons placé chaque cas simulé dans le plan (Λ, Re_*) sur la figure 5.19. Chaque point correspond à une simulation diphasique. Les cercles indiquent les cas où l’amplitude de la perturbation initiale est amplifiée, et les carrés les cas où elle est amortie. Le plan (Λ, Re_*) est ainsi séparé en deux régions, où la perturbation est stable ou instable. Nous rappelons que *Paquier et al. (2016)* observent un seuil de transition du régime des *wrinkles* au régime des vagues régulières suivant une loi de puissance de la forme $u_{*,c} \propto \nu_t^{0.2}$. Toutefois, ce seuil correspond à une transition d’un régime tridimensionnel vers un régime bidimensionnel, que nos simulations bidimensionnelles ne peuvent pas capturer. De plus, il s’agit vraisemblablement d’une transition du mécanisme de Phillips vers celui de Miles, que nous ne pouvons pas étudier en raison de notre approche *RANS*, cette dernière éliminant la possibilité de capturer le spectre des fluctuations turbulentes au cœur du premier mécanisme. Le seuil de transition entre les régions stable et instable dans la figure 5.19 est estimé à l’aide de la courbe en pointillés. Le seuil ne semble ainsi pas suivre une loi de puissance $Re_{*,c} \propto \Lambda^n$ régulière, où $Re_{*,c}$ est le nombre de Reynolds critique. On distingue un changement de comportement du seuil pour $\Lambda \sim 1000$: en-deçà, la courbe en pointillés suit une loi de puissance avec $n \sim 0.75$, tandis qu’au-delà, $n \sim 0.15$. Afin de mieux quantifier le seuil de transition, il serait pertinent de mener des simulations supplémentaires dans la région traversée par la courbe en pointillés, en particulier pour $Re_* \sim 100$ dans le cas de l’eau ($\Lambda = 67$), et pour $Re_* \sim 1000$ pour le liquide \mathcal{L}_{100} ($\Lambda = 6667$).

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Résumé des travaux réalisés

Les vagues de vent constituent un phénomène physique complexe, qui résulte de l'interaction entre un écoulement turbulent et une interface déformable. En fonction de l'intensité du vent, on distingue plusieurs régimes de déformations de l'interface (*Paquier et al. (2015)*). À basse vitesse, la distribution des déformations est tridimensionnelle, et forme des structures de petite amplitude alignées avec la direction du vent. Au-delà d'un seuil de vitesse, des vagues régulières avec des crêtes face au vent peuvent émerger. Ces structures sont alors quasiment bidimensionnelles.

Nous avons présenté dans le chapitre 1 les deux mécanismes classiques susceptibles d'expliquer la génération de telles vagues. D'une part, le modèle de Phillips qui s'intéresse à l'action des fluctuations turbulentes de pression sur l'interface. Suite à leurs interactions avec les déformations de l'interface, il prédit qu'elles peuvent générer des vagues selon un mécanisme de résonance entre les deux. L'amplitude des vagues croît alors linéairement au cours du temps. D'autre part, le modèle de Miles, qui considère l'action du vent moyen sur une déformation infinitésimale de l'interface. Les contraintes interfaciales exercées par le vent moyen peuvent alimenter la perturbation via un mécanisme d'instabilité de cisaillement. L'amplitude de la perturbation croît alors exponentiellement. Ces deux mécanismes sont complémentaires, et on peut envisager la génération de vagues par le vent selon le scénario suivant : lorsqu'un vent souffle sur une interface calme, le mécanisme de Phillips peut générer des déformations d'interface, qui peuvent ensuite croître via le mécanisme de Miles.

La littérature regorge d'études observationnelles et expérimentales sur le sujet des vagues générées par le vent, et de leurs interactions. Le chapitre 1 propose une revue concentrée sur les études en laboratoire. Historiquement, la question de l'influence de la viscosité du liquide a très peu été abordée. Elle est pourtant intéressante à plus d'un titre. Faire varier cette viscosité permet d'en apprendre plus sur la physique des interactions vagues/vent. En l'augmentant, on augmente les gradients de vitesse à l'interface, et on peut mettre en lumière des interactions sous-jacentes précédemment cachées. En particulier, *Paquier et al. (2016)* ont montré que le seuil de transition entre les régimes de ridules et de vagues régulières dépend de la viscosité du liquide. Pour les très hautes viscosités, le régime des ondes régulières laisse place à un troisième régime d'interaction fortement non-linéaire, qui conduit à la formation de solitons visqueux (*Aulnette et al. (2019)*). Très peu de travaux concernés par des liquides plus visqueux que l'eau ont été réalisés jusqu'ici. Encore moins

en ce qui concerne des études par simulation numérique.

Quand on s'attaque à la simulation numérique des vagues de vent, trois questions doivent être abordées. Tout d'abord, il faut définir les limites temporelles et spatiales de la simulation. Cherche-t-on à étudier la génération d'une vague sous l'action du vent, les interactions entre le vent et un champ de vagues déjà développé, etc. ? Notre étude s'inscrit dans la première catégorie. De plus, nous nous intéressons à des vagues en condition de laboratoire, ce qui impose des conditions et des échelles différentes d'une étude visant, par exemple, les interactions kilométriques entre la couche limite atmosphérique et un champ de vagues océaniques.

Ensuite, il faut être capable de capturer la dynamique d'une interface mobile et déformable, séparant l'air et le liquide. Nous avons présenté et analysé plusieurs méthodes employées dans la littérature dans la première partie du chapitre 2. Notre approche repose sur une méthode *Volume of Fluid*. Il s'agit d'une approche sur grille fixe, dite à un fluide car les deux phases sont traitées comme un seul et même milieu, de propriétés variables dans l'espace. Les propriétés physiques sont alors représentées par des distributions spatiales, dont les gradients sont situés au voisinage immédiat de l'interface. Nos simulations numériques ont été menées à l'aide du code de recherche JADIM, développé à l'IMFT. Dans JADIM, la méthode VOF n'utilise pas de reconstruction d'interface, c'est-à-dire que l'écoulement est résolu sans connaissance explicite des déformations ζ . Nous avons présenté au début du chapitre 4 la méthode de suivi de ces déformations que nous avons mise au point.

Enfin, la troisième question à aborder est celle de la prise en compte de la turbulence dans l'air. Un enjeu crucial pour comprendre la génération des vagues par le vent réside dans la compréhension des déséquilibres de la turbulence provoqués par les déformations de l'interface. L'écoulement turbulent au-dessus d'une paroi ondulée représente une configuration adaptée pour étudier cet aspect. Nous avons présenté des travaux expérimentaux consacrés à ce problème à la fin du chapitre 1. Le chapitre 2 aborde les différentes approches numériques envisageables. Les premiers travaux numériques portant sur les vagues de vent concernaient l'écoulement turbulent au-dessus d'une paroi ondulée fixe par une approche RANS. Avec l'augmentation des capacités de calcul, les études se sont complexifiées, jusqu'à la simulation d'un écoulement diphasique tridimensionnel par DNS. Toutefois, ce type d'approche reste encore très coûteux, et ne permet pas d'envisager une étude paramétrique consistant à faire varier la vitesse du vent et la viscosité du liquide. Nous abordons donc cette problématique à l'aide d'une modélisation de type RANS. Nous supposons que l'écoulement moyen et le champ de vagues sont bidimensionnels, et nous effectuons une moyenne transverse des équations du mouvement. Suivant le scénario de Miles, nous considérons que les déformations de l'interface n'ont pas de contribution turbulente. Les fluctuations de l'interface ne sont donc pas corrélées avec les fluctuations turbulentes du champ de vitesse. Toutefois, cette opération de moyenne introduit dans les équations de quantité de mouvement des corrélations turbulentes entre les composantes du champ de vitesse. Ces corrélations sont inconnues, et nous les modélisons à l'aide d'une viscosité turbulente. La fin du chapitre 2 est consacrée à une présentation de différentes approches destinées à évaluer cette dernière. Notons que le cadre de notre modélisation a deux limites. Avec l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel, notre approche n'est pas capable d'étudier le régime des ridules, et en particulier le seuil de transition vers les vagues régulières. D'autre part, l'approche RANS n'est pas adaptée à l'étude du mécanisme de Phillips, qui repose sur la prise en compte du spectre de la turbulence dans l'air.

Nous avons choisi de calculer la viscosité turbulente à l'aide du modèle de Spalart-Allmaras. Il s'agit d'un

modèle adapté aux écoulements aérodynamiques à haut nombre de Reynolds, principalement utilisé pour résoudre des écoulements compressibles. Le chapitre 3 lui est entièrement consacré. Le modèle consiste en une équation de transport de la viscosité turbulente. Il met en jeu un terme de production, construit à partir de la vorticité de l'écoulement résolu ; un terme de diffusion, en partie construit sur le modèle d'une diffusion fickienne, où la viscosité turbulente est à la fois diffusante et diffusée ; et un terme de destruction, basé sur la distance locale à la paroi la plus proche. Ce modèle est séduisant pour l'étude des vagues de vent car ses conditions aux limites sont très simples à mettre en œuvre. Nous discutons les caractéristiques de ce modèle au début du chapitre 3, puis l'implémentation que nous avons réalisée dans JADIM. La dernière partie de ce chapitre présente des validations que nous avons menées sur des configurations monophasiques. La plus pertinente pour l'étude des vagues de vent est celle de l'écoulement au-dessus d'une paroi ondulée, sans et avec décollement. Dans les deux cas, le modèle de Spalart-Allmaras parvient à reproduire les caractéristiques principales de l'écoulement. C'est le cas en particulier des distributions pariétales de pression et de cisaillement, d'importance capitale dans le scénario de Miles. Nous avons pu estimer le déphasage du cisaillement pariétal en fonction du nombre d'onde turbulent k^+ . En nous basant sur la comparaison avec des mesures expérimentales d'*Abrams et Hanratty (1985)*, nous concluons que l'hypothèse de viscosité turbulentes et le modèle de Spalart-Allmaras sont bien adaptés tant que $k^+ > 8 \times 10^{-3}$. Toutefois, dans cette gamme de k^+ , l'amplitude des variations de la pression et du cisaillement le long de l'onde est sous-estimée. Nous observons également cette sous-estimation cela pour le cas décollé. Cet écart par rapport aux observations traduit une limite de ce modèle par rapport à d'autres plus complexes, comme les modèles à deux équations. Le modèle de Spalart-Allmaras ne permet de modéliser qu'une seule échelle de temps, ce qui contraint sa dynamique et celle du modèle numérique dans son ensemble.

Nous avons présenté dans le chapitre 4 la mise en place des simulations numériques de génération de vagues de vent, et en particulier, les adaptations que nous avons apportées au modèle de turbulence pour l'employer dans une telle configuration. Nous y avons abordé également le protocole d'initialisation, qui consiste en une perturbation impulsionnelle de très petite amplitude sur toute la surface du liquide. Nous suivons alors l'évolution temporelle des déformations de l'interface, et en particulier leur moment d'ordre deux ζ_{rms} . Des premiers exemples de résultats ont été présentés à la fin du chapitre 4, tandis que le chapitre 5 a été consacré à l'analyse détaillée des résultats de l'ensemble de nos expériences numériques. Celles-ci peuvent être regroupées en trois catégories : le cas de l'eau, des liquides de viscosité intermédiaire entre 10 et 30 fois celle de l'eau, et un liquide très visqueux de viscosité cent fois supérieure à celle de l'eau. Nous avons présenté dans un premier temps une vue d'ensemble de ces expériences, notamment des évolutions temporelles de ζ_{rms} qui montrent la croissance ou non de la perturbation initiale en fonction de la vitesse du vent et de la viscosité du liquide. Nous avons abordé ensuite l'analyse spectrale de ces évolutions, d'abord via des spectres instantanés d'amplitude, puis à l'aide de spectrogrammes qui montrent l'évolution temporelle du spectre en nombre d'onde. Pour l'eau, un mode dominant émerge de la perturbation initiale, puis le nombre d'onde de ce mode diminue au cours du temps. Il s'agit d'un phénomène de *frequency downshift* caractéristique des vagues de vent. Le spectre est plus riche lorsque la viscosité du liquide augmente. En particulier pour le liquide \mathcal{L}_{100} , les spectres pour les très hautes vitesses de vent suggèrent la présence d'instabilités sous- et sur-harmoniques. Enfin, nous avons calculé le taux de croissance du mode le plus amplifié, y compris pour les situations stables. Après correction par la dissipation visqueuse, nous obtenons les taux de croissance bruts liés à l'injection d'énergie du vent dans le champ de vagues. La comparaison pour les liquides peu visqueux

s'avère en bon accord avec le modèle de Miles. C'est le cas également pour les liquides les plus visqueux, mais avec un préfacteur β supérieur d'un ordre de grandeur aux données expérimentales rassemblées par *Plant (1982)*. Ces dernières concernent toutefois uniquement le cas air/eau.

6.2 Perspectives

Dans les expériences numériques que nous avons réalisées, la simulation de la turbulence n'a été prise en compte que dans l'air. Pour les liquides dont la viscosité est supérieure d'au moins un ordre de grandeur à celle de l'eau, il est raisonnable de considérer que l'écoulement y est laminaire. Toutefois, c'est beaucoup moins le cas pour l'eau, lorsque le nombre de Reynolds Re_* turbulent dans l'air excède un seuil compris entre 228 et 453. Dans ce cas, l'hypothèse « académique » d'écoulement laminaire dans le liquide a deux conséquences. D'une part, elle prédit un courant de surface élevé, qui peut être supérieur à la célérité du mode dominant. Il existe alors une couche critique, mais elle est située sous la surface, et non dans l'air. Quelle est la conséquence du déplacement de cette couche critique à travers la surface, vers le liquide ? Nous observons encore une croissance exponentielle de la perturbation initiale, donc le mécanisme de Miles semble toujours à l'œuvre. Le déplacement de la couche critique semble toutefois avoir un impact sur le taux de croissance de la perturbation. D'autre part, la dissipation dans un écoulement turbulent sous une surface libre ne suit pas la même distribution que pour un écoulement laminaire. De ce fait, l'hypothèse laminaire a certainement un impact sur le taux et la durée de la croissance de la perturbation.

Quelle conséquence est la plus pertinente ? Peut-être sont-elles indissociables l'une de l'autre. Pour répondre à cette question, il est nécessaire de procéder à une simulation sur une configuration identique à celles que nous avons étudiées, et de lever l'hypothèse laminaire. Nous avons rapidement abordé une solution possible dans le chapitre 4. Conformément au cadre de l'approche VOF, le modèle de Spalart-Allmaras est résolu partout, quelle que soit la nature de l'écoulement dans le liquide. Pour y rendre l'écoulement laminaire, nous avons procédé à une troncature de la viscosité turbulente. Pour y rendre l'écoulement turbulent, il faudrait commencer par retirer cette troncature. Compte tenu des propriétés de la turbulence sous une surface libre, il suffirait alors de supprimer la correction visqueuse, effectuée normalement via la fonction f_{v1} , afin d'obtenir une description raisonnable des variations du cisaillement sous l'interface. Un modèle pour initialiser les profils de vitesse et de viscosité turbulente correspondants est proposé dans l'appendice B de l'article annexé à ce manuscrit (B).

En ce qui concerne la modélisation de la turbulence dans l'air, on peut évidemment envisager d'autres modèles. L'approche numérique que nous avons mise en place peut s'accomoder d'un autre modèle de turbulence, à condition qu'il dispose également de conditions aux limites simples à mettre en œuvre sur l'interface. On peut également envisager de combiner plusieurs modèles ensemble, afin de profiter des avantages des uns et des autres. Le modèle de Spalart-Allmaras a tendance à trop contraindre la dynamique dans le cœur de l'écoulement, c'est-à-dire à trop répercuter ce qu'il se passe au voisinage immédiat d'une paroi. On pourrait par exemple utiliser ce modèle à proximité de l'interface, puis un autre modèle de type $k - \epsilon$ ou $k - \omega$ dans le reste de l'écoulement d'air, voire carrément un modèle de second ordre. Cela permettrait une gestion simple de la turbulence près de l'interface, tout en introduisant une seconde échelle de temps dans le cœur de l'écoulement.

Le cadre de travail proposé par notre étude peut servir de base pour étudier la génération de solitons

visqueux. Ceux-ci sont des structures fortement non-linéaires qui apparaissent sur des liquides très visqueux (plus de 300 fois celle de l'eau). Lorsque le vent souffle, des trains d'ondes de petite amplitude naissent puis disparaissent de manière intermittente. Puis soudain, une des crêtes de ce train d'ondes se déstabilise et son amplitude augmente fortement, tandis que les autres disparaissent. Cette instabilité donne naissance à un soliton visqueux, fruit de la compétition entre le forçage du vent et la dissipation visqueuse. Lorsqu'il apparaît, le soliton visqueux se propage rapidement vers l'aval, jusqu'à éventuellement disparaître. Le scénario proposé pour expliquer la génération de solitons visqueux repose sur une bifurcation sous-critique, dont le paramètre est le cisaillement du vent sur l'interface (*Aulnette et al. (2019)*). Lorsque le cisaillement dépasse un seuil τ_1 , un soliton visqueux est généré. Alors qu'il est poussé par le vent, le cisaillement interfacial diminue. Lorsque ce dernier passe en-dessous d'un second seuil $\tau_2 < \tau_1$, le soliton visqueux disparaît. Compte tenu de ce scénario, un soliton visqueux ne peut être généré par une perturbation de très petite amplitude. *Aulnette et al. (2022)* ont étudié la génération de solitons forcés par un batteur. On peut envisager un protocole similaire pour générer numériquement des solitons. Une piste serait d'ajouter une force volumique dans l'équation de quantité de mouvement verticale, localisée dans le temps et l'espace, de la forme

$$\mathbf{f}_0 = f_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0) \mathbf{e}_z \quad (6.1)$$

où f_0 est l'intensité, constante, de cette force, appliquée en \mathbf{x}_0 , à l'instant t_0 . Numériquement, il faudrait appliquer cette force orientée vers le haut, sur un petit volume, situé sous l'interface, pendant une durée très courte δt . L'action de cette force pousserait alors la colonne de fluide située au-dessus, et générerait une déformation de l'interface. Cette opération devrait être menée jusqu'à atteindre une amplitude finie de déformation A_0 . Par des considérations dimensionnelles, on peut conclure que $f_0 = A_0 / \delta t^2$. Nous avons entamé des développements en ce sens, afin de chercher l'intensité de cette force (voir figure ci-dessous). La déformation ainsi engendrée est symétrique, alors que la structure d'un soliton visqueux ne l'est pas. Il présente une dépression à l'amont, suivie d'une pente raide, presque surplombante, jusqu'à la crête, et une pente bien plus douce en aval. Une piste plus prometteuse serait ainsi de considérer un dipôle, avec une composante négative à l'amont et positive à l'aval.

Ce travail de thèse a été réalisé dans le cadre du projet ANR *Viscous Wind Waves*, qui réunit les laboratoires FAST et IMFT. Nous avons discuté à plusieurs reprises des travaux expérimentaux menés au FAST. En plus des travaux numériques réalisés au cours de cette thèse, des expériences en soufflerie sont également menées à l'IMFT. Ces dernières consistent à étudier l'influence de la turbulence incidente sur le développement des ridules et des vagues régulières. Pour ce faire, une grille est placée en amont de la veine de la soufflerie. Les expérimentateurs disposent de plusieurs grilles passives, avec des tailles de maille différentes, et d'une grille active. Cette dernière permet de modifier les propriétés locales de la turbulence incidente (intensité, échelle intégrale, etc.). Des premières mesures d'amplitudes des déformations de l'interface ont été menées sur un liquide visqueux, de viscosité 50 fois supérieure à celle de l'eau, avec ou sans grille passive. Une prochaine campagne de mesures devrait utiliser la grille active.

Dans le cadre numérique que nous avons développé, prendre en compte les caractéristiques d'une telle turbulence exigerait de repenser les conditions aux limites. Nous avons considéré que la couche limite dans l'air est pleinement développée, et nos expériences numériques ont été menées sur une configuration périodique. Pour traiter l'évolution longitudinale d'un tel système impliquant un forçage de la turbulence par une grille passive ou active, il serait nécessaire de considérer des conditions d'entrée pour la turbulence (énergie

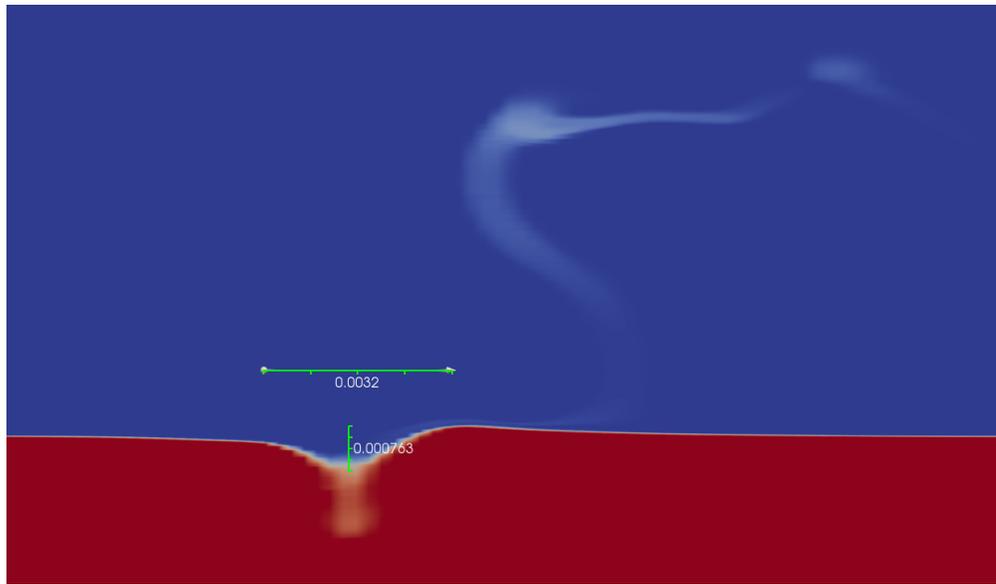


FIGURE 6.1 – Forme de l’interface et taux de présence suite à l’application d’une force quasi-ponctuelle de type monopôle. Agrandissement au voisinage de l’interface. Essai pour $Re_* = 1333$, $\Lambda = 6667$, $A_0 = 10\Delta z_{min}$ et $\delta t^+ = 13$. Image prise à $t^+ = 80$.

cinétique, échelle intégrale), reflétant les propriétés imposées par la grille. Une telle modification requerrait aussi un traitement particulier des conditions de sortie, en particulier dans le cadre d’une approche VOF.

Annexe A

Éléments théoriques des ondes de surface

Nous présentons ici les principaux éléments de la théorie linéaire, ainsi que quelques effets développements non-linéaires.

A.1 Théorie linéaire

Considérons l'interface entre deux phases immiscibles non visqueuses. Compte tenu du dernier point, le cadre le plus simple pour appréhender la propagation d'ondes sur cette interface est celui de la théorie potentielle. Notons \mathbf{u} le champ de vitesse eulérienne. Considérons un écoulement irrotationnel, c'est-à-dire tel que $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Il existe alors un champ ϕ , tel que $\mathbf{u} = \nabla\phi$. On appelle ce champ le potentiel des vitesses. Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité s'écrit simplement $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Le potentiel ϕ vérifie alors, dans tout le domaine fluide, l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \tag{A.1}$$

Cette équation est linéaire par construction. Les non-linéarités interviennent uniquement dans les conditions aux limites. Une fois qu'elles sont spécifiées, l'équation (A.1) détermine la cinématique du mouvement.

A.1.1 Conditions aux limites

Sans perte de généralité, limitons-nous à un problème bidimensionnel, et notons x et z les directions respectivement horizontale et verticale. Considérons un milieu infini suivant x . L'interface est repérée par $z = \zeta$, et sa position moyenne est située en $z = 0$. La phase supérieure occupe une région semi-infinie suivant z . Suivant si la phase inférieure est bornée ou non par une paroi solide, la condition cinématique au fond peut prendre deux formes :

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=z_f} = 0 \text{ si paroi au fond} \quad ; \quad \phi(z \rightarrow -\infty) \rightarrow 0 \text{ si profondeur infinie} \tag{A.2}$$

où $z = z_f(x, t)$ est l'équation du fond, éventuellement mobile. La première forme découle de l'imperméabilité de la paroi, qui impose la vitesse normale par continuité.

À celle-ci, on ajoute les conditions cinématique et dynamique sur l'interface. La première concerne la continuité des vitesses normales, et elle s'écrit, en $z = \zeta$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

En toute généralité, la condition dynamique se décline en deux parties. D'une part la continuité des contraintes tangentielles, et d'autre part le saut des contraintes normales, dû aux effets de tension de surface. En l'absence d'effet visqueux, la première condition n'est pas nécessairement respectée, et la condition dynamique peut simplement être décrite par l'équation de Bernoulli sur l'interface. La tension interfaciale induit un saut de pression, donné par la formule de Laplace :

$$p_{liq} - p_{air} = \gamma \nabla_s \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

où γ est la tension interfaciale, \mathbf{n} la normale à l'interface, et ∇_s est l'opérateur de divergence sur l'interface. On définit la courbure moyenne locale de l'interface comme $\kappa = \nabla_s \cdot \mathbf{n}$. Pour un problème bidimensionnel, cela se réduit à $\partial \mathbf{n} / \partial x$. L'équation de l'interface est donnée par $S(x, z, t) = z - \zeta = 0$, et la normale s'écrit :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2}} \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z\right) \quad (\text{A.5})$$

On montre alors que la courbure est donnée par :

$$\kappa = -\frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (\text{A.6})$$

La condition dynamique sur l'interface s'écrit finalement, en $z = \zeta$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\zeta + \frac{\gamma}{\rho} \kappa = 0 \quad (\text{A.7})$$

où ρ est la masse volumique du liquide.

On peut chercher la solution stationnaire de ce problème par séparation des variables. On montre alors qu'elle prend la forme du produit d'une fonction harmonique et d'une exponentielle. En profondeur finie, avec un fond plat situé en $z_f = -h$, elle s'écrit

$$\Phi(x, z) = \cosh k(z + h) (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \quad (\text{A.8})$$

k est une constante positive, que l'on interprétera comme le nombre d'onde.

A.1.2 Relation de dispersion

Le problème mathématique ainsi posé peut être linéarisé. On suppose pour cela que les déplacements sont petits par rapport à une grandeur de référence. Typiquement la longueur d'onde λ , en supposant une faible cambrure a/λ , où a est l'amplitude de l'onde. Les vitesses, quant à elles, sont supposées petites par rapport à la célérité des ondes. On montre en fait que ceci découle de l'hypothèse précédente. On peut alors linéariser les équations (A.3) et (A.7), en ne conservant que les termes d'ordre a/λ . En particulier, la courbure se linéarise en $\kappa = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. On peut alors combiner les deux équations (A.3) et (A.7), en éliminant ζ au profit de ϕ . Pour cela, on dérive la seconde par rapport au temps, et on utilise la première pour éliminer les dérivées temporelles de ζ . Cela fournit la relation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{A.9})$$

Soit $\Phi(x, z)$ une solution stationnaire de (A.1). Une onde propagative de pulsation σ est décrite par $\phi = \Phi(x, y) e^{i\sigma t}$. En injectant cette forme dans l'équation précédente, on montre que la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires en profondeur finie s'écrit (*Crapper (1984)*) :

$$c = \left(\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh(kh) \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{k} (1 + \epsilon_T) \tanh(kh) \right)^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

où $\epsilon_T = \gamma k^2 / \rho g$. Cette relation est discutée dans le chapitre 1.

A.2 Effets non-linéaires

Nous présentons brièvement la démarche de *Stokes (1847)*, et les principaux résultats qui en découlent. Nous mettons de côté les effets de tension de surface.

A.2.1 Profil de l'élévation de surface

Considérons une solution propagative linéaire du type $\phi = A \cosh k(y+h) \sin k(x-ct)$. La condition (A.7) peut se réécrire en une relation qui lie directement l'élévation de surface ζ à des dérivées partielles de ϕ . À l'ordre un en A/λ , l'élévation de surface s'écrit $\zeta = a \cos k(x-ct)$, où $a = -(\sigma/g)A \cosh h$, avec la pulsation de l'onde $\sigma = kc$. *Stokes (1847)* pousse le développement à l'ordre 2. Il reformule la condition (A.3) en une relation qui n'inclue que des dérivées partielles de ϕ . En y injectant la forme ci-dessus pour ϕ , il obtient la relation

$$g\phi_y - c^2 \phi_{xx} - 6A^2 k^2 c \sin 2k(x-ct) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{A.11})$$

Pour satisfaire cette équation, il est nécessaire d'apporter une correction au potentiel des vitesses. Cette correction s'écrit $B \cosh 2k(y+h) \cos 2k(x-ct)$. Elle se répercute sur l'élévation de surface, qui est alors donnée par :

$$\zeta = a \cos k(x-ct) - K a^2 \cos 2k(x-ct) \quad (\text{A.12})$$

où le préfacteur K est donné par :

$$K = \frac{k (e^{kh} + e^{-kh})(e^{2kh} + e^{-2kh} + 4)}{(e^{kh} - e^{-kh})^3} \quad (\text{A.13})$$

Il tend simplement vers $k/2$ en profondeur infinie ($kh \gg 1$). Si a/h reste petit par rapport à $(h/\lambda)^2$, alors K tend vers $3/(4k^2h^2)$ en faible profondeur ($kh \ll 1$).

Stokes reprend le raisonnement ci-dessus et étend le développement jusqu'à l'ordre 3. Il obtient alors en profondeur infinie :

$$\zeta = a \cos k(x - ct) - \frac{ka^2}{2} \cos 2k(x - ct) + \frac{3}{8}k^2a^2 \cos 3k(x - ct) \quad (\text{A.14})$$

Le profil de cette onde est représenté sur la figure 1.2. Dans ce cas, la célérité doit également être corrigée d'un terme proportionnel à a^2 . Elle s'écrit ainsi

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{k^2a^2}{2}\right) \quad (\text{A.15})$$

A.2.2 Dérive de Stokes

Considérons une particule dont la position moyenne est repérée par (x_0, z_0) . Sa position instantanée est alors donnée par $(x = x_0 + \xi, z = z_0 + \eta)$. En première approximation on peut considérer que $\xi = ae^{-kz} \sin k(x - ct)$ et $\eta = ae^{-kz} \cos k(x - ct)$. D'autre part, on peut noter que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.17})$$

En développant ces deux relations, et en y injectant les formes approchées présentées plus haut, Stokes montre que la position de la particule est donnée par :

$$\xi = ae^{-kz} \sin k(x - ct) + a^2k^2cte^{-2kz} \quad \eta = ae^{-kz} \cos k(x - ct) \quad (\text{A.18})$$

Au premier ordre, la trajectoire verticale ne change donc pas. La trajectoire horizontale est modifiée par un terme du signe de c , et qui croît linéairement avec le temps. Cela correspond à une survitesse dépendante de la profondeur et maximale au niveau de l'interface, et donnée par

$$U = a^2k^2ce^{-2kz} \text{ en profondeur infinie} \quad (\text{A.19})$$

$$U = a^2k^2c \frac{e^{2k(z+h)} + e^{-2k(z+h)}}{(e^{2kh} + e^{-2kh})^2} \text{ en profondeur finie} \quad (\text{A.20})$$

Annexe B

A combined VOF-RANS approach for studying the evolution of incipient wind-generated waves over a viscous liquid

Nous reproduisons ici l'article que nous avons soumis au *European Journal of Mechanics-B/Fluids* en avril 2023. Après une présentation de l'état de l'art des simulations numériques des vagues de vent, nous détaillons le cadre de modélisation que nous avons retenu, présentons le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras, puis des validations pour un écoulement au-dessus d'une paroi ondulée, et discutons quelques résultats des simulations diphasiques de vagues de vent. Le contenu de cet article couvre la majorité du travail décrit dans les chapitres 2, 3 et 4, avec quelques emprunts au chapitre C (un article ultérieur sera consacré à l'analyse physique détaillée des résultats de simulation).

A combined VOF-RANS approach for studying the evolution of incipient two-dimensional wind-driven waves over a viscous liquid

Florent Burdairon^a, Jacques Magnaudet^{a,*}

^a*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France*

Abstract

Recent laboratory experiments have revealed that important insights into the physical processes involved in the wind-driven generation of surface waves may be obtained by varying the viscosity of the carrying liquid over several orders of magnitude. The present paper reports on the development of a companion approach aimed at studying similar phenomena through numerical simulation, a way expected to remove some of the experimental limitations, especially in the near-interface region, and to allow the relative influence of several physical processes to be assessed by disregarding or inactivating arbitrarily some of them. After reviewing available options, we select an approach based on the combination of a volume of fluid technique to track the evolution of the air-liquid interface, and a two-dimensional Reynolds-averaged version of the Navier-Stokes equations supplemented with a turbulence model to predict the velocity and pressure fields in both fluids. We examine the formal and physical frameworks in which such a time-dependent two-dimensional formulation is meaningful, and close the governing momentum equations with the one-equation Spalart-Allmaras model which directly solves a transport equation for the eddy viscosity. For this purpose, we assume the interface to behave as a rigid wall with respect to turbulent fluctuations in the air, and implement a versatile algorithm to compute the local distance to the interface whatever its shape. We first assess the performance of this model in the single-phase configurations of unseparated and separated flows over a wavy rigid wall, which are of specific relevance with respect to wind-wave generation. Then, we discuss the initialization protocol used in two-phase simulations, which involves an impulse disturbance with a white noise distribution applied to the interface position. We finally present some examples of interface evolutions obtained at several wind speeds with liquids of various viscosities, and discuss the underlying physics revealed by the associated statistics of interface disturbances, streamline patterns and energy spectra.

Keywords: wind-wave generation, air-liquid interface, numerical simulation, volume of fluid, turbulence model

1. Introduction

Understanding and predicting how wind blowing over a liquid generates waves at its surface and how the wave field in turn alters the turbulent motions above that surface and possibly below it has challenged oceanographers and fluid dynamicists for more than a century [1; 2; 3]. The manner in which turbulence influences or even governs the physical mechanisms involved in the wind-wave generation process is still in debate, although the two founding theories that attempt to rationalize these mechanisms are now two-thirds of a century old. In the first of them, Phillips [4] explored the

possibility of a resonance between the turbulent pressure fluctuations in the boundary layer above the surface and the free deformation modes of that surface. This mechanism leads to a linear growth of surface deformations, and subsequent measurements have suggested that it may be appropriate for describing the very early stages of the wind-wave growth [5]. Simultaneously, Miles [6] developed an inviscid theory in which surface deformations grow according to a two-dimensional linear instability mechanism leading to an exponential growth. In the original version of this theory, the sole role of turbulence is to set a logarithmic mean velocity profile in the boundary layer, which results in a mean shear stress at the liquid surface. Somewhat later, Miles improved his initial model in several respects, considering among other factors the influence of viscous correc-

*Corresponding author

Email addresses: florent.burdairon@imft.fr (Florent Burdairon), jmagnaud@imft.fr (Jacques Magnaudet)

tions in the air flow [7], and that of the surface viscous stress in slightly viscous liquids [8], which he showed to be significant in the generation of capillary and short gravity waves. Later, initially stimulated by Lighthill's reinterpretation of Miles' generic instability mechanism in terms of a 'vortex force' [9], several attempts were carried out to include the influence of wave-induced turbulent stresses on the energy transfer from the air flow to the waves [10; 11; 12; 13; 14; 15]. Turbulent stresses modelled thanks to various closures were shown to increase significantly this transfer. The predicted growth rates display a reasonable, albeit closure-dependent, agreement with experimental data for short waves, but invariably under-predict dramatically the growth of long waves.

For obvious reasons, most of the theoretical developments and experimental measurements to date have focused on the air-water system. However, considering more viscous liquids is also of the utmost interest. First of all, it provides a stringent test to available theoretical models. For instance, the minimum wind speed beyond which waves start to emerge and propagate increases strongly with the liquid viscosity [16; 17; 18], and a consistent model has to predict properly this increase. Also, it was recently shown that specific waves taking the form of 'viscous solitons' develop at the surface of liquids with a viscosity several hundreds times that of water [19]. Understanding the underlying mechanisms and how the transition from regular wave trains to such viscous solitons operates is of clear interest from the point of view of pattern formation in free-surface flows [20]. From a methodological viewpoint, one may expect viscous liquids to be better candidates than water to test the predictions of two-dimensional theories because their larger viscosity reduces the velocity gradients in the horizontal direction perpendicular to wave propagation, making small-scale three-dimensional turbulence-driven structures less prone to develop at their surface.

Up to now, the few studies devoted to the generation of wind waves at the surface of viscous liquids have been experimental in nature. High-precision optical techniques have been instrumental in the detection of minute interface deformations [21], and particle image velocimetry has provided detailed access to the instantaneous velocity fields in vertical planes, both in the air and in the liquid, with the exception of the two-phase region located between the troughs and crests of the deforming interface. In air-water systems, numerical simulation has proven to efficiently complement laboratory measurements performed to unravel details of the interaction between the two fluids, especially within the crucial two-phase region where accurate measurements

can hardly be achieved. Here we report on the development and application of a similar approach in the case of wind-wave generation at the surface of liquids of arbitrary viscosity. The present paper primarily aims at presenting step by step the elaboration of the corresponding computational strategy. This makes it basically methodological in nature, providing a 'proof of concept' rather than a physical discussion of results. An extensive presentation of these results and a detailed discussion of the underlying physical processes is deferred to a forthcoming publication.

The paper is organized as follows. Section 2 discusses the various computational strategies developed over the last decades, and for some of them over the last few years, to simulate the evolution of wind-induced surface waves. In § 3, we specify the modelling framework adopted in the present investigation, and discuss its potentialities and intrinsic limitations. The set of governing equations considered in this approach, including the turbulence model, is detailed in § 4. The numerical framework and the specific issues related to the use of this turbulence model in the two-phase flow configurations of interest here are discussed in § 5. Performances of the turbulence model in single-phase configurations directly relevant to wind-wave generation, especially the flow over a rigid wavy wall, are presented and analyzed in § 6. Section 7 finally considers the canonical two-phase configurations relevant to the problem of wind-wave generation over a viscous liquid. We detail the initialisation protocol, a crucial aspect in this problem, and present some typical flow evolutions. We summarize the main findings of this study in § 8.

2. Review of available modelling strategies

Simulating the evolution of wind-generated surface waves opposes major numerical difficulties. Indeed, this situation combines the need to follow the deformation (and possibly the topological changes) of a gas-liquid interface, with that of simulating a high-Reynolds-number turbulent air flow. Most numerical attempts to date dealt with the first issue by using coordinate transformations thanks to which the time-evolving interface is mapped onto a plane. In general, the underlying transformation is only performed on the vertical coordinate, so that the three coordinates in the transformed space are no longer mutually orthogonal. For this reason, numerous additional terms arise in the momentum equations [22; 23; 24; 25; 26; 27]. If one is only interested in the very early stages of the wave development, the boundary conditions to be satisfied at the interface, i.e. the no-penetration (or kinematic) condition,

together with the continuity of velocities and stresses, the latter including the hydrostatic and capillary contributions, may be linearized and projected onto the undeformed interface, thus avoiding the above coordinate transformation [28; 29]. Of course, both approaches assume that the interface remains single-valued, which makes situations involving breaking waves out of reach. Recently, another route started to be explored by considering the potentialities offered by the volume of fluid (VOF) approach and some of its variants [30; 31; 32]. The VOF approach is routinely used in the context of two-phase flows involving drops and bubbles. In this formulation, a single set of governing equations is solved throughout the flow domain, the local fluid properties (i.e. density and viscosity) and the capillary force being determined by computing the time advancement of the local volume fraction of one of the fluids. The key advantage of this approach is that one no longer needs to make the grid evolve in order to adjust to the instantaneous position of the interface, which allows for the use of the Cartesian form of the governing equations. The difficulty is transferred to the robustness and accuracy of the numerical schemes that are required to (i) ensure volume conservation of each fluid and (ii) deal with very large gradients in the physical properties (hence, in the velocity gradients) in the interfacial region. Nevertheless, major progress has been achieved on these technical aspects over the last two decades. This is why this approach is adopted in the present work.

The second issue is that air flows capable of generating waves at a liquid surface are necessarily turbulent. In the air-water system, tiny three-dimensional surface deformations start to be observed when the wind velocity in the bulk exceeds approximately 1.5 m.s^{-1} [5], and the critical wind velocity beyond which regular two-dimensional waves emerge directly is close to 3.6 m.s^{-1} [18]. More commonly, air flow characteristics relevant to wind-wave generation are expressed in terms of the friction velocity, u^* , defined as the square root of the shear stress (divided by the air density) at the interface. The above two thresholds correspond to $u^* \approx 0.07 \text{ m.s}^{-1}$ and $u^* \approx 0.18 \text{ m.s}^{-1}$, respectively. State-of-the-art direct numerical simulations [27; 32] handle friction velocities of the order of 0.1 m.s^{-1} , and this approach looks ideal to get detailed insight into the processes involved in the wave generation mechanism. Nevertheless, dealing with liquids significantly more viscous than water imposes much more stringent requirements. For instance, two-dimensional waves at the surface of a liquid a hundred times more viscous than water only form when the air velocity exceeds $\approx 8 \text{ m.s}^{-1}$, i.e. the critical friction velocity is approximately

$u^* = 0.35 \text{ m.s}^{-1}$. Hence, there is a factor of 4 in between the critical conditions for such a system compared with the air-water system, and this translates into a factor of $4^{9/4} \approx 23$ in the number of grid points required to solve the entire range of turbulent motions in the air, down to the Kolmogorov scale. Although such large simulations are not out of reach nowadays, they remain extremely expensive and do not allow a parametric study of the problem at a reasonable cost.

An appealing alternative is to turn to large eddy simulation (LES). This approach has been extensively used by several groups in connection with the coordinate transformation technique discussed above. Such phase-resolved LES have been carried out over prescribed waves, be they periodic [33; 34], or distributed in the form of a broadband spectrum [35] or a wave packet [36]. In the most recent studies, LES is employed to solve the turbulent air flow, and a potential flow solver is used to evolve the wave train over time, with a surface pressure distribution exported from the LES field at the corresponding instant of time [26]. A recent review of the various numerical techniques and subgrid-scale models employed in the LES approach, and of the advances it has provided in the understanding of wind-wave couplings is given in [37]. This review points out that LES has not yet been employed in conjunction with the VOF approach. The reasons are not discussed but are easy to understand. Indeed, modeling subgrid-scale transfers in regions alternately filled with liquid and air is a formidable task since, compared to single-phase turbulent flows, the filtered momentum equations involve many different second- and third-order unknown correlations for which appropriate closure laws have to be formulated [38].

A simpler route has been employed for several decades in connection with air-water interfaces distorted by a prescribed two-dimensional periodic wave. It consists in using a Reynolds-averaged version of the Navier-Stokes equations expressed in a reference frame travelling with the wave, coupled with a phenomenological turbulence closure relating the relevant components of the Reynolds stress tensor to the local characteristics of the flow field. A hierarchy of turbulence models has been used for this purpose, from the simplest zero-equation mixing length model [39], to the most sophisticated five-equation Reynolds-stress models [39; 40; 41], *via* one-equation models combining a transport equation for the turbulent kinetic energy with a prescribed distribution for the turbulent integral length scale [41; 42]. An important issue encountered with this approach stands in the boundary conditions at the interface. While each Reynolds-averaged velocity com-

ponent is assumed to match the corresponding orbital velocity component at the water surface, phenomenological boundary conditions are employed for the turbulent unknowns. In the above references, these conditions rely on the existence of a logarithmic velocity profile and a local equilibrium between turbulent energy production and dissipation in the logarithmic region above the interface. This ‘wall-function’ approach has the definite advantage of reducing the overall computational cost by avoiding the need for highly refined grids very close to the interface, and it appears suitable for dealing with already well-developed surface waves. Conversely, it constitutes one of the main limitations of the Reynolds-averaged approach as soon as the prediction of the evolution of small-amplitude interface deformations is concerned, since the local characteristics and the longitudinal profiles of the turbulent stresses in the viscous sublayer and the buffer layer above the interface are then expected to play a major role [13; 14; 43]. Therefore, in such a context, turbulence models allowing the use of ‘natural’ boundary conditions for the turbulent quantities right at the interface are mandatory.

3. Modelling framework

In what follows, we make use of the above Reynolds-averaged framework to represent the effects of turbulence above the air-liquid interface and possibly below it, in conjunction with a turbulence model obeying a ‘natural’ condition at the interface, the evolution of which is tracked with a VOF approach. Examining the evolution of non-periodic time-dependent interface deformations while representing effects of turbulence through a Reynolds-averaged approach may seem contradictory at first glance. The crucial underlying issue is that of the separation between turbulent and orbital velocity and pressure fluctuations, which is an extremely complex task in the presence of a non-periodic three-dimensional wave field [44; 45; 46]. Here, ‘orbital’ refers to fluctuations resulting from or correlated with any normal displacement of the interface. Obviously, the above issue simplifies drastically if a clear separation of time scales between the two components exists, as the response of waves evolving over ‘long’ time scales to the forcing of turbulent fluctuations covering a range of ‘short’ time scales may then be studied in the framework of governing equations averaged over an intermediate time scale. However, this appealing framework is unfortunately not appropriate, since the characteristic time scales of wind-generated interface deformations generally overlap those involved in

the turbulent motion [12]. Therefore, a strict and consistent separation can only be achieved by introducing a convenient spatial averaging procedure combined with a drastic simplifying assumption on the geometry of the interface.

This is rigorously achieved by assuming that interface displacements are two-dimensional, taking place in the (x, z) plane, say, and spatially averaging the governing equations in the y direction perpendicular to wave propagation [13; 47; 48]. Then, turbulent fluctuations being fully three-dimensional, they depend on both the local position $\mathbf{X} = (x, y, z)$ and time, t , while interface-related quantities only depend on $\mathbf{x} = (x, z)$, the projection of the local position onto the vertical plane, and t . In this framework, any quantity $\Phi(\mathbf{X}, t)$ may be decomposed in the form

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t) + \Phi'(\mathbf{X}, t), \quad (1)$$

where the operator $\langle \cdot \rangle$ corresponds to a spatial averaging in the y direction, and $\Phi'(\mathbf{X}, t)$ stands for the turbulent fluctuation of Φ . With this definition, $\langle \Phi \rangle$ and Φ' are uncorrelated, so that $\langle \langle \Phi \rangle \Phi' \rangle \equiv 0$. The above framework implies that quantities directly related to the instantaneous position of the interface do not have a turbulent component. In the VOF approach, this position is defined with the help of the volume fraction of one of the fluids, say C . Geometrical properties of the interface, such as its local unit normal, \mathbf{n} , and mean curvature, $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$, are also defined using the first and second derivatives of C in the form $\mathbf{n} = \nabla C / \|\nabla C\|$ and $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$, respectively. Similarly, the local density and viscosity of the two-fluid medium only depend on C and possibly on its gradients. For the above reason, C and the above geometrical or physical properties do not have a turbulent component. Hence, for instance,

$$C(\mathbf{X}, t) \equiv \langle C \rangle(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

so that $\langle C \Phi \rangle = \langle \langle C \rangle \Phi \rangle = \langle C \rangle \langle \Phi \rangle$. Note that since the operator $\langle \cdot \rangle$ acts only in the y direction, no spatial filtering is performed in the x direction along which waves propagate. Therefore, the smallest scales of the interface deformation in the (x, z) plane may still be resolved.

The averaged Navier-Stokes equations based on the application of the operator $\langle \cdot \rangle$ are similar to the classical incompressible Reynolds-averaged equations. In particular, turbulence only appears through the second-order correlation tensor $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$, with $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{X}, t)$ the local fluid velocity. If needed, x -averaged quantities, hereinafter denoted with an overbar, may be defined by integrating the quantity

of interest over the appropriate distance, which has to be much larger than the lowest wavenumber present in the spectrum of C . These averaged quantities still depend on z and t , e.g., $\overline{\Phi}(z, t)$, and the difference $\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t) - \overline{\Phi}(z, t)$ represents the orbital contribution to Φ .

Obviously, the simplifying assumption that interface deformations are two-dimensional reduces severely the generality of the physical situations that may be studied in the corresponding framework. In particular, it prevents any progress in the study of the development of the longitudinal streaks and three-dimensional tiny ‘wrinkles’ that deform the air-water interface at low wind speeds and/or short fetches, and may be thought of as the precursors of two-dimensional waves [5; 18; 49; 50]. For the same reason, it also removes the possibility of examining the relevance of the intrinsically three-dimensional Phillips mechanism [4]. Despite these serious restrictions, the proposed approach is appealing in that it is potentially suitable for exploring the two-dimensional evolution of the interface in connection with Miles instability mechanism [6; 7; 9; 51]. Indeed, this instability scenario considers the evolution of a two-dimensional interface $z = \eta(x, t)$ subjected to pressure and shear stress distributions resulting from a prescribed $\overline{\mathbf{u}}(z)$ -velocity profile in the air flow, set by turbulent motions in the boundary layer. Turbulence models operating in the framework of the Reynolds-averaged momentum equations have precisely been designed to predict the corresponding mean shear. After Miles established his initial ‘quasi-laminar’ theory [6], the role of wave-induced (or ‘orbital’ according to the present terminology) turbulent stresses in the wave growth was reconsidered [52], and even suggested to overcome the efficiency of the original mechanism in the growth of young waves [14]. Since then, this claim has been revised, comparisons between field data and predictions provided by a linear stability analysis incorporating several different turbulence models having led to the conclusion that orbital turbulent stresses play only a secondary role in the wave growth process [53]. This issue may also be assessed in the framework defined above. This is why one can expect that this route may provide interesting new insights into the efficiency and relevance of the Miles mechanism and its variants in the generation of wind waves at the surface of liquids of arbitrary viscosity, provided a suitable turbulence model is employed. Moreover, compared with DNS and LES approaches, the much more modest cost of VOF-RANS simulations offers two decisive benefits. First, parametric investigations implying a large number

of runs may be performed (only 5 runs were carried out in the state-of-the-art DNS study reported in [32]). Second, much higher wind speeds may be considered, which is a key condition when examining the wave growth at the surface of viscous liquids. For instance, in [32] the friction velocity was set to $0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, while results with friction velocities up to $0.6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ will be discussed in § 7.3.

4. Governing equations and turbulence model

In principle, a Reynolds stress model solving transport equations for the four components $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$, $\langle w'^2 \rangle$, $\langle u'w' \rangle$ and for at least an extra scalar quantity related to the integral length scale (such as the dissipation rate) is desirable. Indeed, such models are designed to account for nonlocal and non-equilibrium effects which are expected to take place in the outer part of the boundary layer above the air-liquid surface when the latter deforms [14; 15; 43]. However, designing proper near-interface modifications in the transport equation for the dissipation rate or any related scale-defining quantity is far from obvious, a difficulty most of the time circumvented through the use of a ‘wall-function’ approach. For this reason, we did not retain this type of model here and rather opted for a much simpler one-equation eddy-viscosity model. As will be shown later, despite several deficiencies, this model accurately reproduces the mean flow profile and captures most of the important aspects of the air flow variations above a wavy surface in the regimes of interest here. Therefore, we consider it as a useful step to explore the potentialities of the general approach designed above, although more sophisticated models will certainly have to be considered in the future.

Having selected an eddy-viscosity closure, the Reynolds stress tensor $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ is related to the strain-rate tensor $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}(\nabla\langle \mathbf{u} \rangle + \nabla\langle \mathbf{u} \rangle^T)$ in the form $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle = \frac{2}{3}\langle k \rangle \mathbf{I} - 2\nu_t \langle \mathbf{S} \rangle$, with $\langle k \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle$ the turbulent kinetic energy per unit mass, ν_t the eddy viscosity and \mathbf{I} the unit tensor. In the framework of the VOF approach, the Reynolds-averaged two-phase flow is then governed by the averaged Navier-Stokes equations

$$\partial_t C + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla C = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho\langle \mathbf{u} \rangle) + \nabla \cdot (\rho\langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) &= \rho \mathbf{g} \\ -\nabla \mathcal{P} + 2\nabla \cdot [(\mu + \rho\nu_t)\langle \mathbf{S} \rangle] &- \gamma\kappa\nabla C, \end{aligned} \quad (5)$$

with ρ and μ the local density and viscosity of the two-fluid medium ($\nu = \mu/\rho$ being the kinematic viscosity), γ the surface tension, $\mathcal{P} = \langle P \rangle + \frac{2}{3}\rho\langle k \rangle$ the modified pressure, \mathbf{g} denoting gravity. In (5), the capillary force is expressed using the classical formalism introduced in [54] and the mean curvature of the interface is computed as $\kappa = \nabla \cdot (\nabla C / \|\nabla C\|)$. The local density and viscosity are defined through the linear relations

$$\rho(C) = C\rho_l + (1-C)\rho_a, \quad \mu(C) = C\mu_l + (1-C)\mu_a, \quad (6)$$

with indices l and a referring to the properties of the liquid and air, respectively.

Similar to all quantities in (3)-(5), the eddy viscosity is defined throughout the flow domain, so that no boundary condition can be imposed on it at the interface. Therefore, ν_t -variations across the successive subregions of the boundary layer above the interface and possibly below it have to be directly obtained *via* the turbulence model. This means that this model has to take into account in one way or another the distance to the interface to achieve the proper behaviour of the Reynolds stresses in its vicinity. In what follows, we consider that the air flow ‘feels’ the interface as a rigid wall. More specifically, what is assumed here is that the normal velocity fluctuation is zero at the interface, so that the non-diagonal component of the Reynolds stress tensor ($\langle u'w' \rangle$ in the case of a flat interface located at a constant z) vanishes there. This assumption is relevant given that (i) turbulence originates in the air flow, not in the liquid, and (ii) the density ratio ρ_a/ρ_l is very small, so that a normal velocity fluctuation in the air flow barely deforms the liquid surface. Obviously, the flow in the liquid may also be turbulent if entrainment by the air flow in the plane locally tangent to the interface is strong enough and the liquid has a low enough viscosity. This point will be discussed later.

To predict the variations of the eddy viscosity, we selected the Spalart-Allmaras model [55]. This model, widely used in the context of high-Reynolds-number aerodynamic flows over complex geometries, directly solves a transport equation for the eddy viscosity, following the early proposal of [56]. More precisely, in a single-phase wall-bounded flow, the model first determines an auxiliary turbulent viscosity, $\tilde{\nu}_t$, by solving the transport equation

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\nu}_t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \tilde{\nu}_t &= c_{b1} f_r \tilde{\Omega} \tilde{\nu}_t - c_{w1} f_w \left[\frac{\tilde{\nu}_t}{\ell} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{\nu}_t) \nabla \tilde{\nu}_t] + c_{b2} \nabla \tilde{\nu}_t \cdot \nabla \tilde{\nu}_t \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

In (7), ℓ is the local distance to the wall, and $\tilde{\Omega}$ denotes a positive scalar quantity which, beyond the viscous and

buffer regions, equals the local vorticity magnitude $\Omega = (2 \boldsymbol{\Omega} : \boldsymbol{\Omega})^{1/2}$, with $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T)$ the rotation-rate tensor. The various functions and constants in (7) are determined in such a way that, in a near-wall region, $\tilde{\nu}_t \propto \ell$ and $\tilde{\Omega} \propto \ell^{-1}$ down to the wall; see Appendix A for details. Then, the eddy viscosity ν_t involved in (5) is related linearly to $\tilde{\nu}_t$ *via* an empirical damping function, f_{v1} , in the form

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu}_t. \quad (8)$$

The function f_{v1} tends to 0 as the wall is approached and is unity far from it. This damping function allows accurate estimates of the turbulent shear stress to be obtained in near-wall regions, including the buffer and viscous sublayers. The various empirical functions and constants involved in (7)-(8) are detailed in Appendix A. Interestingly, in [13], Miles suggested that the Spalart-Allmaras model, which was brand new at that time, could be a good candidate to explore the influence of the orbital Reynolds stresses on the growth of wind-generated waves.

The above model extends straightforwardly to the air flow involved in the two-phase configurations of interest here, provided $\ell(\mathbf{x}, t)$ is considered as the distance from any position located in the air flow, i.e. in the region such that $1 - C(\mathbf{x}, t) > 0.5$, to the interface. The evaluation of ℓ will be detailed in the next section. Variations of ν_t across the boundary layer are obtained through the empirical functions f_w and f_{v1} involved in (7)-(8), plus the near-wall correction of the vorticity magnitude $\tilde{\Omega}$ (see (A.2)).

If the flow in the liquid beneath the interface is considered laminar, as it will be in the examples discussed in § 7.3, this condition is straightforwardly enforced by extending (8) throughout the two-phase flow domain in the form

$$\nu_t = (1 - C) f_{v1} \tilde{\nu}_{t>,} \quad (9)$$

where $\tilde{\nu}_{t>}(\mathbf{x}, t)$ denotes the solution of (7) computed when the considered position \mathbf{x} stands in the air at time t . The ‘constitutive’ equation (9) leaves the eddy viscosity in the air flow unchanged but sets it to zero in the liquid. In cases where the flow in the liquid is turbulent, as happens with water beyond wind speeds of a few meters per second, the model may easily be adapted to predict the eddy viscosity in the liquid. Indeed, for physical reasons discussed in Appendix B, turbulence beneath an air-liquid interface behaves differently from that close to a rigid wall. As a result, the turbulent shear stress in the liquid grows linearly with the distance to the interface, even within the viscous sublayer, just as $\tilde{\nu}_t$ does in (7). Consequently, one merely needs to set $f_{v1} \equiv 1$ in (8) to obtain a realistic decay of the eddy viscosity as the

interface is approached from below. In such turbulent-turbulent configurations, the eddy viscosity throughout the two-phase flow becomes

$$\nu_t = (1 - C)f_{v1}\tilde{\nu}_{t>} + C\tilde{\nu}_{t<}, \quad (10)$$

with $\tilde{\nu}_{t<}(\mathbf{x}, t)$ the local value of $\tilde{\nu}_t$ computed from (7) when the considered position stands in the liquid, i.e. $C(\mathbf{x}, t) > 0.5$.

5. Numerical framework and specific techniques

The governing equations (3)-(7) are solved using the JADIM code developed at IMFT. This second-order finite volume code solves the Navier-Stokes equations and scalar transport equations on a staggered grid. Equations are written in general orthogonal curvilinear coordinates [57], which makes the treatment of the curved geometries considered in some test cases of § 6 straightforward. Time-advancement is achieved with a third-order Runge-Kutta scheme for advective and source terms, and a semi-implicit Crank-Nicolson scheme for viscous terms [58]. Incompressibility is enforced to machine accuracy at the end of each time step by solving a Poisson equation for the pressure increment. Equation (3) governing the evolution of the interface is solved using a flux-limiting transport scheme split into a succession of one-dimensional steps [59]. No geometrical reconstruction procedure is applied to locate the interface, which is merely defined as the iso-surface $C = 0.5$. An algebraic procedure aimed at limiting the spreading of volume fraction gradients in the presence of strong stretchings acting in the direction normal to the interface is available in the code [59] but was not activated in the computations reported below. Indeed, in the shear-driven configurations considered here, the dominant stretching stands in the plane locally parallel to the interface. In (5), the capillary force at a location \mathbf{x} is computed using a smoothed distribution of the volume fraction gradients, obtained by applying a weighted spatial averaging procedure to the distribution of C in a prescribed neighbourhood of \mathbf{x} [59]. In (7), the production term and the nonlinear diffusion term, $\sigma^{-1}c_{b2}\nabla\tilde{\nu}_t \cdot \nabla\tilde{\nu}_t$, are treated as source terms, while the Fick-like diffusion term, $\sigma^{-1}\nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}_t)\nabla\tilde{\nu}_t]$, and the wall-destruction term are handled with the Crank-Nicolson scheme; treating this destruction term implicitly contributes to the numerical stability of the overall algorithm.

In all computations reported below, the flow takes place over a rigid wall on which Dirichlet conditions

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}, \quad \tilde{\nu}_t = 0, \quad (11)$$

are imposed. The upper boundary may either be a symmetry plane or a rigid flat wall. In the former case, free-slip conditions

$$\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n}_u = 0, \quad \mathbf{n}_u \cdot \nabla[\langle \mathbf{u} \rangle - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n}_u) \mathbf{n}_u] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_u \cdot \nabla\tilde{\nu}_t = 0 \quad (12)$$

are imposed, \mathbf{n}_u denoting the unit normal to the considered plane. The flow is periodic in the streamwise (x) direction in all cases.

An important issue in the determination of the turbulent viscosity is the evaluation of the distance $\ell(\mathbf{x}, t)$ to the interface at a given position \mathbf{x} . In the case of a single-phase wall-bounded flow, we compute ℓ by first building an explicit parametric representation of the wall geometry in the form $\mathbf{x}_w(s) \equiv (x_w(s), z_w(s))$ with $ds = (dx_w^2 + dz_w^2)^{1/2}$ the infinitesimal arc-length element. Then we vary s along the wall (actually within a ‘reasonable’ finite interval of streamwise positions x_w on both sides of x), compute the distance $\ell_s(\mathbf{x}) = \{(x - x_w(s))^2 + (z - z_w(s))^2\}^{1/2}$ within this interval and set $\ell(\mathbf{x}) = \min_s(\ell_s(\mathbf{x}))$. In two-phase configurations, assuming that the interface remains single-valued, we locate it using the standard SLIC technique [60]. That is, starting from the top of the domain, we examine the volume fraction in the successive grid cells encountered at a given x by decreasing z until we detect the first cell in which $C(\mathbf{x}, t) > 0.5$. This gives a first approximation of the interface position at the considered abscissa, $z_i(x, t)$. Then, the precise position of the interface, $z_s(x, t)$, is obtained by requesting that the liquid volume enclosed below the interface equals that given by the volume fraction field, which yields

$$z_s(x, t) = z_i(x, t) + \int_{z_i}^{z_s} C(x, z', t) dz'. \quad (13)$$

We then compute $\ell(\mathbf{x}, t)$ as in the single-phase case. However, it may happen, especially in long runs, that the interface does not remain single-valued, since some wave components may overturn. In such cases, the above approach is no longer sufficient, as it only allows the uppermost position of the interface at a given abscissa to be detected. To deal with these more general situations, we employ the following strategy. We define a disc of radius R centered at the current location \mathbf{x} , and introduce the index $\alpha(x', z')$ such that $\alpha = 1$ at all cell positions (x', z') belonging to the disc, i.e. such that $(x' - x)^2 + (z' - z)^2 \leq R^2$, and $\alpha = 0$ otherwise. Then, starting with the initial guess $R = \ell(\mathbf{x}, t)$ provided by the above SLIC technique, we compute the average volume fraction within the disc, i.e.

$$\mathcal{C}(R, t) = \frac{\int_V \alpha(x', z') C(x', z', t) dV}{\int_V \alpha(x', z') dV}. \quad (14)$$

We compare $\mathcal{C}(R, t)$ with the local volume fraction at the disc centre, $C(\mathbf{x}, t)$. If the relative difference between the two exceeds a prescribed tolerance, this is an indication that the volume fraction has varied within the disc, so that the distance to the interface is actually less than R . Therefore, we decrease R until $\mathcal{C}(R, t)$ becomes close enough to $C(\mathbf{x}, t)$. The final determination of $\ell(\mathbf{x}, t)$ is obtained by interpolating the last two values of R involved in the iterative process, as the final one underestimates the distance to the interface while the penultimate one overestimates it.

6. Preliminary tests: single-phase computations

Before considering wind-wave generation, it is necessary to assess the performances and limitations of the turbulence model in relevant single-phase flows. The simplest configuration of interest here is presumably the fully-developed turbulent flow in a plane channel. This flow is also relevant with respect to the initialization of two-phase configurations because the corresponding velocity and turbulent viscosity fields are used during this stage, as will be seen in § 7. The corresponding tests are detailed in Appendix C. It is shown that the model allows the mean velocity profile to be predicted accurately, even at high Reynolds number, with a very limited number of grid points located in the viscous sublayer. This is a good indication that the various near-wall and viscous corrections involved in (7)-(8) perform well in a zero-pressure gradient flow over a flat wall.

A more complex single-phase configuration directly relevant to wind-wave generation is that of a turbulent flow over a rigid wavy wall. This configuration has been extensively studied experimentally by Hanratty and coworkers, both in unseparated and separated configurations resulting from small- [61; 62; 63] and large- [64; 65; 66] amplitude undulations, respectively. The turbulence response to these undulations revealed several subtleties, starting with the amplitude and phase shift of the streamwise variations of the wall pressure and shear stress, and the position of the separation and reattachment points in the separated case. Measurements in the unseparated configuration established that standard mixing length-type models are unable to predict the above phase shifts for ‘long’ undulations with wavenumber k such that $k^+ = k\delta_\nu \lesssim 0.01$, with $\delta_\nu = \nu/u^*$ the near-wall viscous length scale. In contrast, accurate predictions were obtained whatever k^+ by introducing an *ad hoc* ‘relaxation’ of the mixing length accounting for the nonlocal influence of the streamwise pressure gradient on the thickness of the buffer layer

and viscous sublayer [67]. Since then, this flow configuration has been extensively investigated experimentally (with large-amplitude undulations) [68; 69; 70; 71] and computationally, be it through DNS [72; 73; 74; 75], LES [76; 77; 78; 79], or RANS simulations with two-equation turbulence models [71; 78; 80; 81; 82; 83].

Here we assess the performance of the Spalart-Allmaras model in two distinct wavy wall configurations, corresponding to unseparated and separated flows, respectively. These two cases, based on the experimental conditions of [61; 63] on the one hand and [65] on the other hand, were taken as reference in a previous LES study [76], and these LES predictions are also used below for the sake of comparison. The flow domain is a wavy channel with total height H from the wave trough ($z = -a$) to an upper rigid flat wall ($z = H - a$), both walls been subjected to a no-slip condition. The shape of the wavy wall is defined as $z_w(x) = a \cos(2\pi x/\lambda)$ and the wave steepness $2a/\lambda$ is 0.031 in the unseparated case and 0.2 in the separated one, the wavelength being close to the mean channel height $H_m = H - a$ in both cases. The flow Reynolds number Re_b based on the height $H_m/2$ and bulk velocity $U_b = H_{ref}^{-1} \int_0^{H_m} \bar{u}(z') dz'$ is 6560 in the unseparated case (with $H_{ref} = H_m$) and 10600 in the separated one (with $H_{ref} = H_m - a$). The grid is curvilinear and orthogonal, with 144 cells from wall to wall and 52 cells over one wavelength. It is nonuniform across the channel, with a minimum near-wall cell size $\Delta z_{min}^+ = \Delta z_{min} \bar{u}^*/\nu$ close to 0.04 and 0.09 in the unseparated and separated cases, respectively, \bar{u}^* denoting the wavelength-averaged friction velocity on the wavy wall. Computations are carried out by prescribing the pressure gradient $d\bar{\mathcal{P}}/dx$ and initializing the velocity and turbulent viscosity fields from $z = 0$ to $z = H_m$ with the corresponding Poiseuille profile and the parabolic distribution $\bar{v}_t(\mathbf{x}, t = 0) = 40 \nu z (H_m - z)/H_m^2$, respectively. In addition, the initial velocity and turbulent viscosity distributions are both set to zero in the trough region $-a \leq z \leq 0$.

Figure 1 displays the pressure and shear stress distributions along the wavy wall in the unseparated case. The dimensionless wall pressure and shear stress are respectively defined as $p_w(x/\lambda) = (\mathcal{P}(x, z_w(x)) - \mathcal{P}(0, z_w(0)))/(\frac{1}{2}\rho U_b^2)$ and $\tau_w(x/\lambda) = \mu \partial_n \langle u \rangle(x, z_w(x))/(\rho \bar{u}^{*2})$, with ∂_n the normal derivative with respect to the wall. In line with experiments at a higher Re_b and larger wave steepness [61], the wall pressure predicted by the one-equation turbulence model (subfigure (a)) is seen to exhibit a nearly harmonic response, with a maximum located slightly downstream

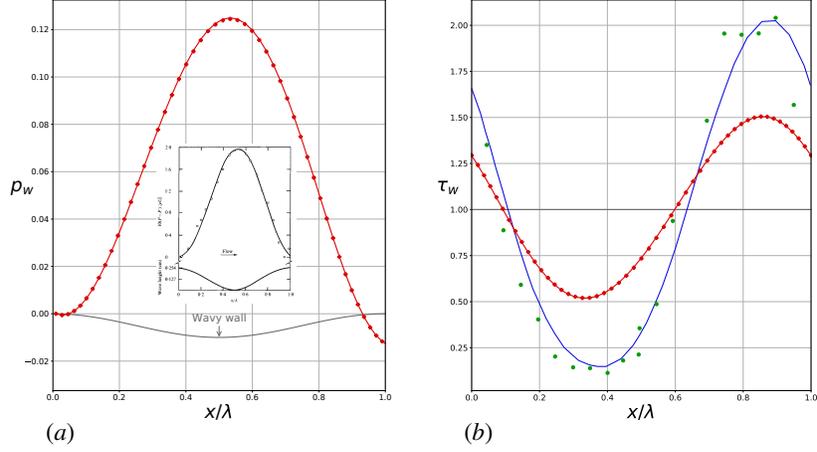


Figure 1: Wall distributions in a non-separated flow over a wavy wall with $2a/\lambda \approx 0.031$, $H_m/\lambda = 1$ and $Re_b \approx 6560$ ($Re^* = H_m \bar{u}^2 / 2\nu = 370$, $k^+ = \pi Re^{*-1} H_m / \lambda \approx 8.5 \times 10^{-3}$). —: present predictions with the standard turbulence model ($f_c = 1$ in (7)); +: predictions with the curvature-sensitized turbulence model (f_c given by A.6)-(A.7)). (a) normalized pressure p_w ; the inset displays the experimental distribution determined in [61] for $2a/\lambda \approx 0.05$ and $Re_b \approx 1.5 \times 10^4$. (b) normalized shear stress; ●: experiments [61] ($Re_b \approx 7850$); —: LES prediction [76].

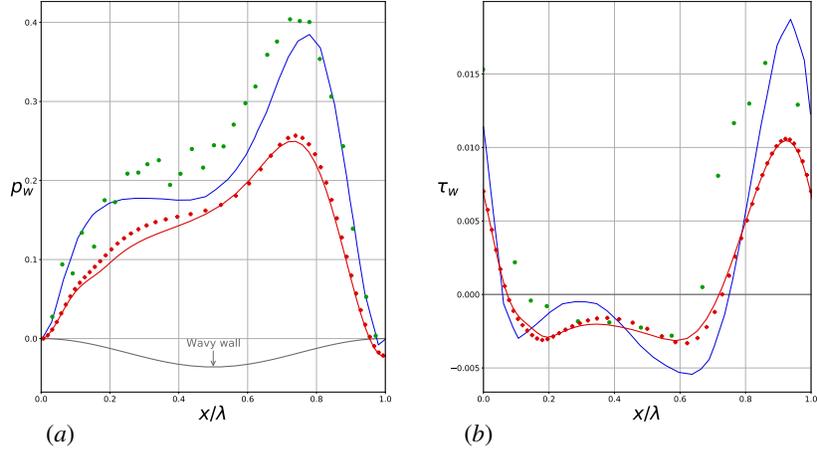


Figure 2: Wall distributions in a separated flow over a wavy wall with $Re_b \approx 10600$ ($Re^* = 1370$), $H_m/\lambda = 0.933$ and $2a/\lambda = 0.2$. For caption, see figure 1; experimental data are taken from [65] ($Re_b \approx 12000$).

of the trough. Although it corresponds to different flow conditions, the experimental distribution shown in the inset confirms these conclusions. In contrast, the shear stress profile (subfigure (b)) is found to be shifted ahead of the wall profile by nearly 55° (the angular phase shift is defined as $360 \times (1 - x_\tau/\lambda)$, with x_τ the position of the maximum of τ_w). As the figure shows, this phase shift is in good agreement with experimental results and LES predictions. However, the magnitude of the shear-stress variations is severely under-estimated, especially on the wind-ward side of the crest where the model predicts a 50% increase of the shear stress with respect to its mean

value, while the experimental data and the LES result both indicate a twofold increase.

The distributions of p_w and τ_w in the separated case are shown in figure 2. Here again, the general appearance of the two distributions is correctly captured but the maxima, located 90° and 50° ahead of the crest for p_w and τ_w , respectively, are under-estimated by nearly 30%. The wall shear stress is predicted to become negative at $x/\lambda \approx 0.072$ and to return to positive at $x/\lambda \approx 0.720$, in slightly better agreement with experimental measurements than the LES prediction. Nevertheless, experiments rather indicate that the flow de-

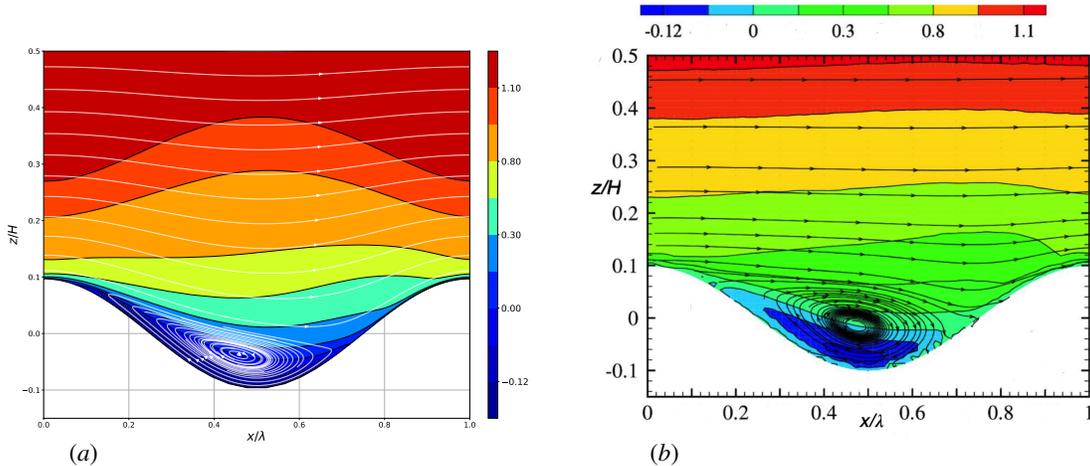


Figure 3: Streamlines in a separated flow over a wavy wall with $Re_b \approx 10600$, $H_m/\lambda = 0.933$ and $2a/\lambda = 0.2$. (a): present results; (b): experiments (adapted from figure 5(b) of [71]). The color scale corresponds to isovalues of the streamwise mean velocity $\langle u \rangle(x, z)$.

taches at $x/\lambda \approx 0.13$ and reattaches at $x/\lambda \approx 0.66$, so that the model actually somewhat anticipates the detachment on the leeward side of the crest and slightly delays the reattachment. Second-order models systematically suffer from the same shortcoming [83]. The model predicts that the position of the p_w -maximum coincides with that of the reattachment point, in line with the experimental findings of [64]. In the detached region, the wall shear stress predicted by the Spalart-Allmaras model is in better agreement with the nearly flat distribution revealed by experiments than that computed in the reference LES. Predictions of the curvature-sensitized version of the model, in which the magnitude of the production term in (7) is modulated by the local ratio of the rotation and strain rates according to (A.6), exhibits marginal differences with those of the standard model. The most noticeable difference is found on the wall pressure, which increases on the leeward side of the crest when curvature effects are accounted for, making a ‘shoulder’ appear in the p_w -distribution, in line with that exhibited by experimental and LES results.

Figure 3 shows the streamline pattern in the separated case, and compares it with the experimental pattern determined in [71]. The separated zone is seen to extend over most of the region located above the trough in both panels. Nevertheless, the recirculation region predicted with the Spalart-Allmaras model is flatter than that observed in the experiment. For instance, in the plane $x/\lambda = 0.5$, i.e. right above the trough, the top of the recirculation stands at the altitude $z/H \approx 0$, while it is detected at $z/H \approx 0.06$ in the experiment. Also, the foot-

print of the disturbance induced in the distribution of the streamwise velocity $\langle u \rangle(x, z)$ by the wavy wall persists deeper in the bulk in the computation. Indeed, a significant bump, associated with a velocity minimum, is noticed in the core region ($z/H \lesssim 0.5$), while the corresponding experimental distribution exhibits a much flatter profile.

In summary, the tests performed in an unseparated turbulent flow over a wavy wall reveal that the one-equation Spalart-Allmaras model correctly predicts the phase of the wall pressure and shear stress distributions in the considered case, which corresponds to $k^+ \approx 8.5 \times 10^{-3}$. Additional results for other k^+ are reported in Appendix D. They confirm these conclusions for larger k^+ (relevant to wind-wave generation), while for smaller k^+ (more relevant to swell propagation) the model fails to predict correctly the phase lag, as systematically observed with turbulence models based on the eddy viscosity concept [14; 43; 67]. In the separated configuration, the model predicts the position of the detachment and reattachment points fairly well, although it underpredicts the extent of the recirculating region in the direction normal to the wall. In both cases, the main deficiency of the model with respect to present purposes appears to be the significant under-prediction of the amplitude of the p_w - and τ_w -variations, especially that of their peak values. In other terms, the Spalart-Allmaras model seems to ‘soften’ flow variations along the sinusoidal wall profile too much. It might be that this deficiency can be attenuated by tuning some of the empirical functions and constants of the models detailed in

(A.3)-(A.5). However, these parameters have been calibrated in a number of flows in the past, and any change in one of them improving the predictions in the specific configuration considered here might be detrimental in other flows. This is why we did not attempt to tune any of these parameters. The only attempt we made consisted in setting the diffusion term (last term in the right-hand side of (7)) to zero in the streamwise direction, to favor sharper variations of the eddy viscosity along the flow direction. However, this attempt did not reveal any significant change in the p_w - and τ_w -distributions, nor in those of the mean velocity field $\langle u \rangle(x, z)$.

The results reported in Appendix C establish that the Spalart-Allmaras model reproduces the mean shear profile across a fully-developed turbulent boundary layer well, even with a coarse discretization in the viscous sublayer. This makes this model suitable for studying the initial wave growth in the spirit of Miles’ ‘quasi-laminar’ theory [6]. When the wave amplitude grows, so do the wave-induced Reynolds stresses. As the tests performed with the flow above a wavy wall revealed, the model reproduces the shape of the pressure and shear stress distributions at the wall qualitatively well but under-predicts the amplitude of their variations along the wave profile, especially in the unseparated regime. However, the linear stability results of [53] led to the conclusion that wave-induced Reynolds stresses affect only secondarily the wave growth in this regime. Hence the deficiency of the turbulence model is not expected to alter significantly the corresponding predictions. With further growth of the wave amplitude, the near-surface flow separates. The model predicts the positions where separation and reattachment take place quite well, but still under-predicts the peaks of the wall distributions by nearly 35%. This under-prediction has presumably sizeable effects on the characteristics of the saturated wave field. However, we are presently primarily interested in the early stages of the growth and of the interactions among the wave components. This is why the performances of the model reported in the various tests we carried out, combined with its simplicity and numerical robustness, make us confident that it is suitable for our objectives.

7. Two-phase configurations

7.1. Geometry and grid

We now turn to the two-phase computations based on the complete set of equations (3)-(7). The simulations are carried out in a rectangular domain with dimensions $L \times H$ in the streamwise (x) and vertical (z)

liquid	Re^*	$\frac{L}{H}$	$\frac{\Delta x}{\Delta z_{min}}$	$\frac{\Delta z_{max}}{\Delta z_{min}}$	N_x	N_z
\mathcal{L}_1	228	1.5	4.97	13.72	282	228
	453	1.5	5.03	16.91	546	408
	613	1.5	4.94	18.78	750	528
	800	1.5	4.69	19.29	1026	678
	1067	1.5	5.03	19.09	1290	918
\mathcal{L}_{10}	613	1.5	4.94	18.78	750	528
	1067	1.5	4.97	19.09	1290	918
\mathcal{L}_{12}	800	3.0	18.46	19.29	522	678
\mathcal{L}_{30}	800	3.0	18.46	19.29	522	678
\mathcal{L}_{100}	613	1.5	4.94	18.78	750	528
	1067	1.5	4.97	19.09	1290	918
	1333	1.5	5.10	18.98	1602	1158
	1600	1.5	4.99	18.86	1926	1368
	1867	1.5	5.06	19.02	2240	1608

Table 1: Characteristic parameters of the simulations. The mean interface is located midway between the bottom wall and top symmetry plane in all cases. \mathcal{L}_q denotes a liquid whose viscosity is q times that of water.

directions, respectively. The flow is assumed periodic in the x -direction, while no-slip and free-slip conditions apply on the bottom and top walls, respectively. In all runs discussed below, the mean level of the interface, z_0 , is assumed to stand midway between the bottom and upper surfaces, which is close to the experimental conditions of [18]. Computations make use of a grid with a nonuniform cell spacing in the z -direction on both sides of the mean interface. More precisely, the cell spacing decreases gradually from $z = 0$ to $z = z_0 - \Delta/2$, stays constant within the stripe $z_0 - \Delta/2 \leq z \leq z_0 + \Delta/2$, and re-increases from $z = z_0 + \Delta/2$ to the upper free-slip wall located at $z = H$. We set the grid spacing in the intermediate stripe to $\Delta z_{min} \approx 0.5\delta_v$, with $\delta_v = \nu/u^*$ the characteristic near-wall length scale of the air flow. We choose a thickness $\Delta/H = 1/8$ for the stripe, which, under most conditions, makes the refined region thick enough to track the possible development of surface waves until saturation. Since $Re^* = (H - z_0)/\delta_v$, and $z_0 = H/2$, this choice yields a number of cells $N_\Delta \approx \frac{\Delta}{0.5\delta_v} = \frac{H}{4\delta_v} = \frac{1}{2}Re^*$ within this stripe. The lower and upper non-uniform regions are discretized with $0.35N_\Delta$ cells each, so that the height of the largest cells (adjacent to the bottom wall and upper free-slip surface, respectively), is approximately $10\delta_v$. A uniform cell spacing, Δx , is imposed in the streamwise direction. To avoid excessive cell distortion in the refined region, the ratio $\Delta x/\Delta z_{min}$ is maintained close to 5 in most cases. This yields a total number of cells in the streamwise direction $N_x = L/\Delta x = \frac{L}{H} \frac{H}{\Delta} N_\Delta \frac{\Delta z_{min}}{\Delta x}$, so that with $\Delta/H = 1/8$, $N_\Delta = \frac{1}{2}Re^*$ and

$\frac{\Delta x}{\Delta z_{min}} \approx 5$ one has $N_x \approx 0.8Re^*L/H$. Gathering the above information, the total number of cells is seen to be approximately $0.8Re^*L/H \times 0.85Re^* \approx 0.7(L/H)Re^{*2}$. For instance, with $Re^* = 800$ and $L/H = 3/2$, the grid comprises a total number of 1026×678 cells. The flow and grid characteristics employed in the 14 runs discussed in § 7.3 are summarized in table 1. Obviously, the domain length L has to be chosen large enough for the growth of the relevant interfacial modes to remain unconstrained by the imposed x -periodicity. This is no problem in the early stages of the growth but can become an issue in late stages if low-wavenumber modes are still developing. In such cases, the remedy consists in designing a new $2L$ -long grid with the same z -discretization, and continuing the run on that grid with the last fields computed on the initial L -long grid used as initial conditions. The same procedure can be repeated several times if necessary.

7.2. Initialization protocol

The air flow is driven by the mean pressure gradient $d\bar{\mathcal{P}}/dx$, and the control parameter of the simulations is the friction velocity at the interface, u^* , the two being related through the constraint $\rho_a u^{*2} = -\frac{H}{2}d\bar{\mathcal{P}}/dx$ resulting from the streamwise momentum balance. A small negative streamwise gravity component, g_x , may be introduced in order to impose a zero mean flowrate in the liquid, then mimicking the experiments of [18] in which the liquid was enclosed in a rectangular tank. Indeed, the x -component of the total driving force per unit volume in the air is $G_a = \rho_a g_x - d\bar{\mathcal{P}}/dx$ while that in the liquid is $G_l = \rho_l g_x - d\bar{\mathcal{P}}/dx$. Since $\rho_l/\rho_a \gg 1$, a small but nonzero g_x leaves the driving force virtually unchanged in the air flow ($G_a \approx -d\bar{\mathcal{P}}/dx$) but may provide the dominant contribution in the liquid ($G_l \approx \rho_l g_x$).

As long as the flow in the liquid is considered laminar, it is initialized with the Poiseuille profile $\bar{u}_l(z) = \mu_l^{-1}[G_l(z_0 - z/2) + \rho_a u^{*2}]z$ which satisfies the no-slip condition at the lower wall and the continuity of shear stresses at the mean interface position. In cases a zero net liquid flow rate is assumed, as it will be in all simulations discussed in § 7.3, the condition $\int_0^{z_0} \bar{u}_l(z')dz' = 0$ yields $G_l = -\frac{3}{2}\rho_a u^{*2}z_0^{-1}$. Other prescriptions may be used for G_l . For instance, imposing $G_l = -\rho_a u^{*2}z_0^{-1}$ yields a zero-shear-stress condition at the bottom of the liquid layer. In the case of water, the subsurface flow is turbulent under most wind conditions. Hence, the above Poiseuille flow and estimates for G_l are physically inadequate. The appropriate initialization procedure is described in Appendix B.

To initialize the air flow, we perform a separate run to

compute the single-phase turbulent flow in a plane half-channel of height $H - z_0$, with the friction velocity at the lower wall set to u^* . The discretization used in this preliminary run is identical to that described above, i.e. a constant grid spacing $\Delta z_{min} = 0.5\nu/u^*$ is employed over a $\Delta/2$ -thick region adjacent to the wall, followed by a growing spacing up to the upper free-slip surface. Once this run has converged, the corresponding velocity and turbulent viscosity fields are pasted in the upper part of the two-phase computational domain, after the velocity of the liquid at the position of the mean interface, $\bar{u}_i = \bar{u}_l(z = z_0)$, has been added to the computed air velocity profile to enforce the continuity of velocities at $z = z_0$. It is worth noting that when the flow in the liquid is laminar and the zero-flowrate condition holds, one has $\bar{u}_i = \mu_l^{-1}[G_l z_0/2 + \rho_a u^{*2}]z_0 = \frac{z_0}{4\mu_l}\rho_a u^{*2}$. Then, defining the characteristic Reynolds number in the liquid as $Re_l = \frac{2}{3}\rho_l \bar{u}_i z_0/\mu_l$ (the factor of $2/3$ resulting from the fact that the minimum of $\bar{u}(z)$ stands at the position $z = z_0/3$), Re_l may be shown to be related to the friction Reynolds number of the air flow, $Re^* = \rho_a(H - z_0)u^*/\mu_a$, as $Re_l = \frac{2\rho_l}{3\rho_a}[\frac{z_0}{2(H - z_0)}\frac{\mu_a}{\mu_l}Re^*]^2$. Hence, considering for instance a liquid 10 times more viscous than water and a configuration with $z_0 = H/2$ and $Re^* = 800$, one has $Re_l \approx 270$. This estimate indicates that the flow in the liquid remains laminar, even though the air flow above the interface is strongly turbulent; the more viscous the liquid is, the more this conclusion holds.

After the above initialization of the velocity and turbulent viscosity fields is completed, the solution of (3)-(7) starts to be advanced in time. However, to make sure that the matching of velocities and shear stresses at the interface does not introduce any disturbance in the discretized solution, we first let the simulation run from $t = 0$ to $t = \Delta t_0 = 100\nu/u^{*2}$ without updating the volume fraction distribution, $C(\mathbf{x}, t)$. Then, we add an impulse disturbance, $\zeta_0(x)\delta(t - \Delta t_0)$, to the initial interface position z_0 , with $\delta(t)$ the Dirac delta function. In practice, the disturbance is applied during one time step. Then we let then the solution of (3)-(7), including the volume fraction and local fluid properties, evolve freely for $t > \Delta t_0$. Two specific disturbance shapes have been considered. One is merely the harmonic distribution $\zeta_0(x) = a \cos(kx)$, the wavenumber k being necessarily a multiple of the minimum wavenumber allowed by the length of the domain, $2\pi/L$. To avoid prescribing a specific wavenumber, we generally rather make use of a white noise disturbance defined as

$$\zeta_0(x) = aN^{-1/2} \sum_{n=1}^N \cos(k_n x + 2\pi\Phi_n), \quad (15)$$

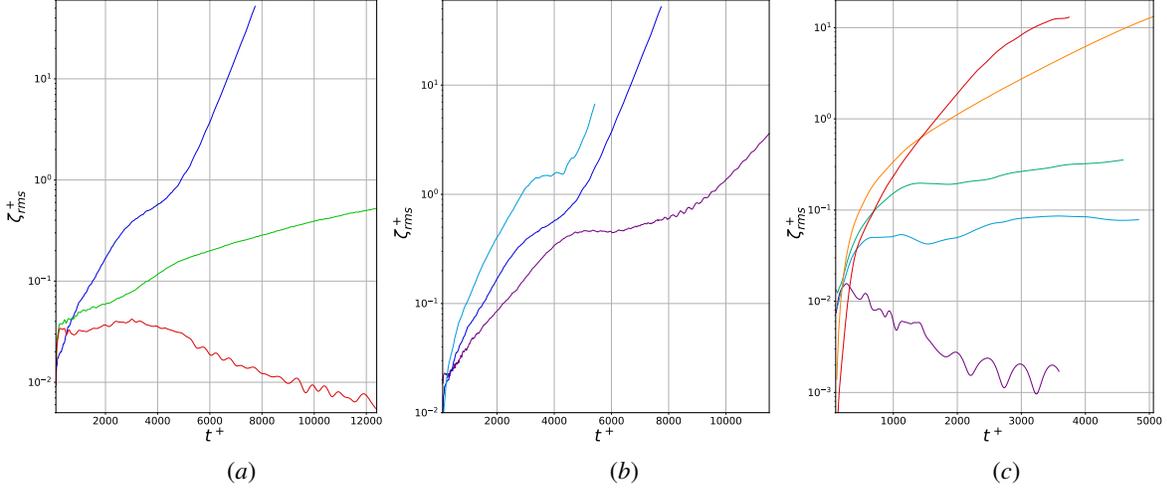


Figure 4: Evolution of the rms interface deformation for different liquid viscosities and wind conditions. (a): water (blue), \mathcal{L}_{12} (green) and \mathcal{L}_{30} (red) under constant wind conditions ($Re^* = 800$); (b): water for $Re^* = 613$ (purple), 800 (blue), and 1067 (cyan); (c): \mathcal{L}_{100} for $Re^* = 613$ (purple), 1067 (blue), 1333 (green), 1600 (orange), 1867 (red). As we are mostly interested in the initial stages of the wave growth and interactions of the growing components of the wave field, simulations were carried out over a prescribed number of time steps. This is why waves have reached saturation in some cases while their amplitude is still growing in others.

with $k_n = 2\pi n/L$, $k_N = \pi/(2\Delta x)$ and Φ_n a random phase. This phase is provided by a dedicated routine guaranteeing the same Φ_n -distribution, hence the same disturbance spectrum, in all runs performed on a given grid. An important advantage of (15) is that a single run allows us to observe simultaneously the growth of a large number of independent wavelengths, as long as effects of nonlinear interactions are negligibly small. More precisely, with $L/H = 3/2$ and the above estimate $N_x = 0.8Re^*L/H$, the number of modes evolving in the numerical domain is found to be $N_x/2 \approx 0.6Re^*$.

For a given a , the above two disturbances have identical root-mean square (rms) amplitudes. In both cases, we select $a = 2\delta_v$, which corresponds to 4 grid cells since $\Delta z_{min} \approx 0.5\delta_v$. Whatever the selected form of $\zeta(x)$, the perturbation of the interface position is translated into a volume fraction disturbance in the form

$$C(x, z, t = \Delta t_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_0 - \zeta_0(x)}{\gamma_d \Delta z_{min}} \right) \right\}, \quad (16)$$

where γ_d is an $O(1)$ -parameter controlling the thickness of the transition region across which the volume fraction changes from 0 above the interface to 1 in the liquid ($\gamma_d = 1$ in what follows).

7.3. A few examples of interface evolutions

We finally present some typical results for the evolution of the interface obtained thanks to the approach developed throughout the paper. An extensive discussion

of the results and on their consequences with respect to the influence of the liquid viscosity on the growth of surface waves is deferred to a forthcoming publication. In what follows, the zero-flow-rate condition is enforced in the liquid in all cases, and the impulse disturbance used to trigger the generation of wind waves obeys the white noise distribution (15). To isolate effects of the liquid viscosity, the other physical properties of the liquid, namely surface tension and density, are kept constant and equal to values corresponding to water. For the same reason, the flow in the liquid is considered laminar in all runs, although in the case of water it would actually be turbulent under most wind conditions. In what follows, a liquid q times more viscous than water will be denoted as \mathcal{L}_q for the sake of conciseness. Surface deformations and times are normalized by the viscous near-wall scales of the air flow, $\delta_v = \nu/u^*$ and $t_v = \nu/u^{*2}$, respectively, and the corresponding normalized quantities are denoted with a + superscript.

Figure 4(a) shows how the same initial interface disturbance submitted to the same wind speed ($Re^* = 800$) evolves for three liquids of increasing viscosity, namely water, \mathcal{L}_{12} and \mathcal{L}_{30} . With water, two stages during which ζ_{rms}^+ exhibits a sharp, nearly exponential increase emerge, separated by an intermediate stage corresponding to a milder increase from $t^+ \approx 3000$ to $t^+ \approx 5000$. As we shall see later, the two exponential growths are associated with disturbance components having distinct wavenumbers. At the end of the simulation ($t^+ \approx 8000$),

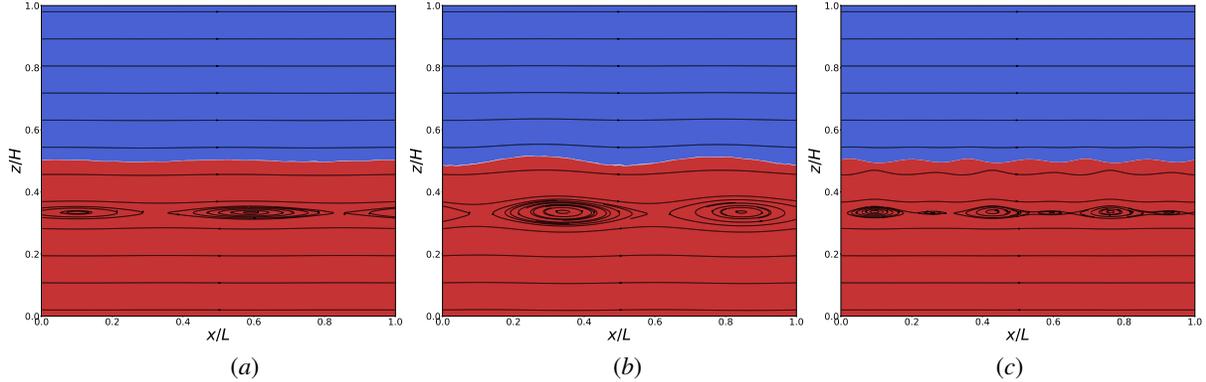


Figure 5: Snapshots of the interface deformation and streamline patterns in the laboratory frame in which the bottom wall is at rest. (a): water for $Re^* = 800$ at $t^+ = 6000$; (b): same at $t^+ = 7000$; (c): \mathcal{L}_{100} for $Re^* = 1600$ at $t^+ \approx 5000$. The liquid (red) and air (blue) layers are defined as the regions where the instantaneous volume fraction $C(\mathbf{x}, t)$ is larger or smaller than 0.5, respectively. All open streamlines are uniformly spaced. Closed streamlines are also uniformly spaced but their spacing is tighter, to better reveal the local flow structure.

the surface deformation is still growing exponentially and its rms value has already reached 50 viscous length units (see the comment in the caption of figure 4). In the case of \mathcal{L}_{12} , the interface evolution follows a different route. Here also, three distinct stages may be identified but the rms deformation now exhibits its strongest growth rate during the short intermediate period. The deformation is still growing at $t^+ = 6000$ but the growth rate is decreasing and this trend persists at later stages ($\zeta_{rms}^+ \approx 0.5$ at $t^+ = 12000$). Therefore, the saturated wave amplitude is expected to be of the order of the viscous near-wall length scale in that case. Last, after having slightly grown up to $t^+ \approx 3000$, the deformations at the surface of \mathcal{L}_{30} start to decay. This trend goes on throughout the simulation and the rms deformation at $t^+ = 12000$ is typically one order of magnitude weaker than the broad maximum reached at $t^+ \approx 3000$. Consequently, with $Re^* = 800$, present simulations predict that large-amplitude waves develop at the surface of water, while in the case of \mathcal{L}_{12} waves barely reach an amplitude of the order of δ_v , and disturbances at the surface of \mathcal{L}_{30} first grow transiently but then experience a continuous decay.

Figure 4(b) shows how the deformation varies with the wind speed at the surface of water in a range of conditions corresponding approximately to dimensional bulk air velocities from 4.5 m.s⁻¹ to 8 m.s⁻¹, the latter being the highest speed considered in [18]. Not surprisingly, the higher the wind speed the stronger the growth rate, i.e. the larger ζ_{rms}^+ at a given t^+ . One may also notice that the three evolutions exhibit common trends, especially the three-stage structure already noticed in figure 4(a), with an intermediate stage during which the

growth rate is significantly weaker than at shorter and longer times. Actually, the growth rate may even vanish during that stage at low enough wind speed, as the curve corresponding to $Re^* = 613$ indicates. The case of \mathcal{L}_{100} is considered in figure 4(c). After the initial transient, the rms deformation quickly decays at the lowest wind speed ($Re^* = 613$), while it stays almost constant and of the order of one-tenth of δ_v for $Re^* = 1067$ (note that this is the wind condition yielding the largest growth for water in figure 4(b)). Increasing the wind speed, the interface deformation is found to exhibit a more consistent growth for $Re^* = 1333$, but its rms value is still significantly less than δ_v at the end of the simulation. In contrast, the highest two wind conditions ($Re^* = 1600$ and $Re^* = 1867$) give rise to a continuous growth, with a growth rate decreasing gradually over time and yielding amplitudes larger than $10\delta_v$ at the end of the computation. It is worth noting that the three-stage structure observed with water does not exist in the case of \mathcal{L}_{100} , which suggests qualitative differences in the evolution of the interface deformation in the presence of low- and high-viscosity liquids.

Some examples of the interface and streamline patterns after the interface deformation has reached a sizable amplitude are displayed in figure 5. The wavelength $\lambda_0 = L/2$ is seen to dominate the wave field at such long times in the case of water (figures 5(a – b)), while a shorter dominant wave with $\lambda_0 = L/6$ has emerged in the case of \mathcal{L}_{100} (figure 5(c)). The corresponding wave steepness $2\pi\zeta_{rms}/\lambda_0$ is close to 0.09 and 0.10, respectively, indicating that waves are reaching a stage in which nonlinear effects become significant. A series of closed streamlines is seen to exist in the liq-

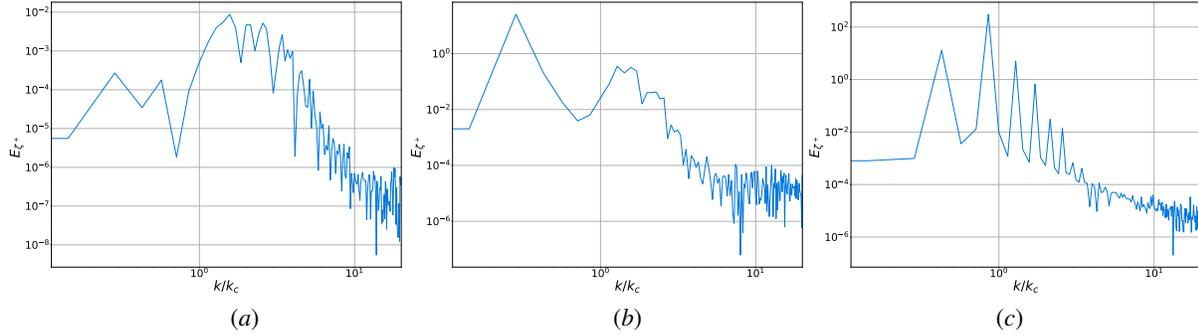


Figure 6: Power spectral density $E_{\zeta^*}(k/k_c)$ of the wave field. (a): water for $Re^* = 800$ at $t^+ = 2000$; (b) same at at $t^+ = 6000$; (c): \mathcal{L}_{100} for $Re^* = 1600$ at $t^+ = 5000$. Wavenumbers are normalized by the capillary wavenumber $k_c = (\rho_l g / \gamma)^{1/2}$.

uid in all cases, and stands approximately two thirds of the height of the liquid. This feature is due to the zero-flowrate condition that forces the bottom part of the liquid to recirculate. The vertical positions of the centroids of the closed streamlines almost coincide with those of the wave troughs in the case of \mathcal{L}_{100} , while they are slightly ahead of the positions of the crests in the case of water. Similarly, the crests and troughs of the first streamline beneath the interface nearly coincide with those of the latter in the case of water, while the undulations of this streamline and those of the interface are almost phase-opposed for \mathcal{L}_{100} . The reason for this difference may be qualitatively understood by noting that, owing to the presence of the μ_l^{-1} pre-factor in the expression of the surface mean velocity \bar{u}_i , the phase speed c_0 of the dominant wave with wavenumber k_0 , roughly estimated as $c_0 = (g/k_0)^{1/2}$, is approximately five times larger than \bar{u}_i in figure 5(c), while it is only one-third of it in figures 5(a–b). Therefore, a critical layer exists in the latter case while it does not in the former. Consequently, waves propagating at the surface of \mathcal{L}_{100} are nearly irrotational, while those propagating over the water layer have a significant vortical component. The stream function of an irrotational monochromatic wave at a given z is known to reach its maxima below the crests and its minima below the troughs, which, when observed in the fixed laboratory frame, translates into the phase-opposed pattern displayed in figure 5(c). Conversely, since the ratio c_0/\bar{u}_i is small in the case of water, the corresponding interface deforms slowly in the laboratory frame and is then close to a streamline. This is why the streamline distribution in figures 5(a–b) is reminiscent of the Kelvin’s cat’s eye pattern. Obviously, the streamline pattern observed in figures 5(a–b) would be significantly modified if the flow in the water were treated as turbulent, as it is in practice at the considered

wind speed. In that case, the approximate model developed in Appendix B indicates that the surface current would be approximately 6 times weaker than predicted assuming laminar conditions, so that no critical layer would exist in the liquid. Influence of the laminar vs turbulent nature of the wind-driven subsurface current in the case of water will be discussed in a forthcoming paper.

Figure 6 shows some typical wave energy spectra, $E_{\zeta^*}(k/k_c)$, still for the two cases of water at $Re^* = 800$ and \mathcal{L}_{100} at $Re^* = 1600$. The capillary wavenumber $k_c = (\rho_l g / \gamma)^{1/2}$, kept constant in all runs, is used to normalize wavenumbers. In the fairly early stage displayed in figure 6(a), several wavenumbers located in the range $1.2 \leq k/k_c \leq 2.8$ dominate the wave field, the energy peak being reached at $k_0/k_c \approx 1.55$, i.e. for a wavelength $\lambda_0 \approx 0.09L$. The energy contained in lower wavenumbers such that $k/k_c < 1$ is typically two orders of magnitude weaker. Beyond $k/k_c \approx 3$, the energy density decays gradually as the wavenumber increases, until $k/k_c \approx 10$ where it is four orders of magnitude weaker than the peak value. Then it remains at similar levels down to the highest wavenumber allowed by the grid (not shown). As time proceeds, the spectral content in the range $k/k_c \lesssim 10$ changes dramatically. In subfigure (b), i.e. at a time instant thrice as long as in subfigure (a), a single component dominates the wave field, carrying an energy density almost three orders of magnitude larger than that found in the previously dominant wavenumber range. This component corresponds to $k_0/k_c \approx 0.285$, i.e. $\lambda_0 = L/2$. Therefore, the dominant wavenumber has been reduced by a factor of 5.55 in between the two snapshots. This wavenumber downshift is the counterpart of the well-known frequency downshift observed with spatially growing waves, especially at short fetch [84; 85; 86]. Frequency down-

shift is known to be a consequence of the Benjamin-Feir instability. Dissipative effects such as wave breaking and generation of capillary ripples were readily identified as the possible relevant sources of dissipation in mechanically-generated waves [84; 87]. Nevertheless, purely conservative three-dimensional effects were later shown to strongly promote the phenomenon [88], although the possibility that they may produce the observed downshifts without the presence of any source of dissipation was debated [88; 89]. With wind-generated waves, turbulence in the air and possibly in the liquid adds another obvious source of dissipation. Assuming a logarithmic velocity profile in the air and a constant eddy viscosity in both air and water, it has been shown that frequency downshifts in reasonable agreement with experimental data may be predicted in two-dimensional configurations involving both pure gravity waves [90] and gravity-capillary waves [91]. Here, three-dimensional effects are absent and wave breaking does not occur in the stages corresponding to figures 6(*a* – *b*). Moreover, the flow in the liquid is artificially forced to stay laminar and the corresponding viscous dissipation in the bulk is negligibly small given the low viscosity of water. Therefore the only significant source of dissipation stands in the turbulence in the air boundary layer, possibly supplemented with some viscous near-surface dissipation in water due to the presence of steep high-wavenumber capillary ripples in the trough region of the carrying gravity wave (see figure 5(*b*)). What present results show is that large downshifts take place even within this restrictive modelling framework. Comparing these predictions with laboratory observations showing how the dominant wave length grows with increasing fetch, for both water and more viscous liquids, is of course an important test for the present approach, including the selected one-equation turbulence model.

Figure 6(*c*) reveals a very different spectral distribution of the wave energy in the case of \mathcal{L}_{100} . Here, most of this energy is contained in a discrete series of rays consisting of a dominant component $k_0/k_c \approx 0.855$, i.e. $\lambda_0 = L/6$, its subharmonic $k_0/2$, and the successive harmonics $3k_0/2$, $2k_0$, etc. Energy has decayed by six orders of magnitude in between the dominant component and the fourth harmonic $k = 4k_0$. The energy distribution found in figure 6(*c*) is a clear indication that intense subharmonic [85; 92] and superharmonic [93] instabilities may affect wind-generated waves propagating over high-viscosity liquids, as is customary with nonlinear irrotational surface waves. Since the wave steepness is close to 0.1 here, the presence of already significant nonlinear effects is no surprise.

8. Summary and concluding remarks

In this paper, we reported the successive steps of the development of a consistent numerical approach aimed at computing the evolution of the interface separating a viscous liquid layer from a turbulent air flow blowing over it. The final aim was to obtain a numerical set up capable of providing predictions for the growth of wind-driven waves developing at the surface of a liquid which may be several orders of magnitude more viscous than water, which implies high bulk velocities in the air, hence a broad spectrum of eddies within the boundary layer. After reviewing the strengths and limitations of the various available simulation approaches, these flow conditions led us to favour the combination of a one-fluid formulation of the entire time-evolving flow field, combined with a Reynolds-averaged formulation of the governing equations. Given that the time scales of the orbital and turbulent motions generally overlap, we showed that the simplest way to combine these two formulations in a consistent manner is achieved by defining the averaging operator as a spatial average in the transverse horizontal direction perpendicular to the mean wind. We discussed the restrictions implied by the inherently two-dimensional approach resulting from this choice, especially the fact that it is unsuitable for studying the occurrence and development of tiny three-dimensional wrinkles at the interface, and to examine the relevance of Phillips resonance mechanism in the very early stages of the interface deformation. In contrast, Miles instability mechanism being primarily two-dimensional, the designed modelling framework is appropriate for assessing its relevance over a wide range of liquid viscosities and air flow conditions.

Due to the selected Reynolds-averaged formulation, turbulent stresses appear in the resulting momentum equations. The potentialities of the proposed approach then depend to a significant extent on the choice of an appropriate turbulence closure for these stresses, and in a second step of the selected turbulence model. Although deficiencies of eddy-viscosity type closures in the outer part of the boundary layer above a wavy wall have been identified for a long time, we adopted such a closure here and selected the one-equation Spalart-Allmaras model to compute the eddy viscosity throughout the flow. Besides its simplicity and numerical robustness, this model has the advantage that the transported quantity, i.e. the eddy viscosity, vanishes at the interface since turbulent fluctuations in the air flow ‘feel’ it as a rigid wall, given the large liquid-to-air density ratio. More sophisticated alternatives, i.e. two-equation and full Reynolds-stress models, all solve a

transport equation for a lengthscale-determining quantity, such as the dissipation rate, which exhibits a more complex near-wall behaviour, a feature complicating the description of the viscous sublayer which is of special importance in the present problem.

The reported tests of the turbulence model in single-phase wall-bounded flows revealed its strengths and weaknesses. Among the former, the model was shown to produce accurate near-wall mean velocity distributions in a fully-developed channel flow, even with a sparse number of cells in the viscous and buffer layers. In the range of wavenumbers relevant to the generation of short (i.e. young) wind waves, it also correctly predicts the phase shift of the wall pressure and shear stress distributions in the unseparated flow over a wavy wall. Similarly, it predicts quite well the location of the detachment and reattachment points in the separated flow over a large-amplitude wavy wall. The main shortcoming of the model in this type of flow appears to be its significant under-estimate of the maxima of the wall pressure and shear stress, especially that of the excess surface shear in the windward region ahead of the wave crest. Obviously, one may expect this shortcoming to have some consequences on the predicted wave field, and this is an issue to be examined in detail in the next steps of this study.

Having qualified the turbulence model in single-phase flows, we turned to two-phase configurations. In the examples we considered, the flow is assumed to be turbulent above the interface and laminar in the liquid, obeying a zero-flowrate condition in the latter. We paid special attention to the initialization procedure, to make sure that the initial composite velocity field is a stationary solution of the discretized two-phase problem as long as the interface remains flat. Then, we introduced a small impulse disturbance in the interface position, the spectral content of which corresponds either to a monochromatic wave or to a white noise distribution. We then presented a short selection of results based on evolutions of the rms disturbance, streamline and interface patterns, and energy spectra of the wave field for liquids of various viscosities. These results revealed the key influence of the liquid viscosity on the nature and structure of the observed evolutions. Obviously, for a given air friction velocity, the higher the liquid viscosity the lower the growth rate. Conversely, for a given liquid, the higher the friction velocity the stronger the growth rate. Provided the air flow is strong enough to make waves develop at the surface of a liquid one hundred times more viscous than water, we found that the corresponding growth rate decreases continuously over time and the wave field is essentially composed of a series

of rays dominated by a carrier wave, the subharmonic with a wavenumber of half, and some higher harmonics resulting from the combination of these two and from nonlinear interactions. In contrast, in the case of water, a strong wavenumber downshift takes place as the disturbance grows, resulting in two separate stages during which the corresponding dominant ray grows exponentially. This downshift, together with the growth rate and critical wind speed below which the disturbance is damped, are among the main indicators to be compared with experimental measurements in a forthcoming paper. The influence of the subsurface current, which was artificially kept laminar in the presented runs performed with water but would actually be turbulent under natural conditions, also deserves specific attention. Indeed, we observed that the large surface current resulting from the laminar assumption induces the presence of a critical layer beneath the interface, while such a feature does not exist if the subsurface current is turbulent. This difference may have consequences on the wave growth and even on the selected preferential wavenumber.

Improvements in the numerical approach presented here will presumably mostly come from the introduction of a more accurate turbulence model. However, which model offers the best predictability with respect to the targeted problem while guaranteeing a good numerical stability is still to be determined. In particular, it seems that preserving the efficiency of the one-equation model close to the interface, which is due to the combination of the physical ingredients it incorporates and of the versatile technique we implemented to compute the local distance from an arbitrarily-shaped interface, would make sense. However, a Reynolds-stress transport model is presumably required further away from the interface to properly capture the out-of-equilibrium effects resulting from the distortion imposed by the growing waves on the large-scale turbulent eddies. A zonal approach in which these two types of models would be matched at some position lying in the logarithmic layer might offer the best compromise. An alternative and simpler possibility could be the so-called QCR (quadratic constitutive relation) correction to the Spalart-Allmaras model proposed in [94]. This correction, which goes beyond the eddy-viscosity assumption by introducing a quadratic constitutive law for the Reynolds stress tensor, is known to reproduce the anisotropy of the normal stresses in a wall-bounded shear flow well. For this reason, this quadratic extension might be a good candidate to improve the predictions obtained with the basic Spalart-Allmaras model at a modest extra cost. In any case, detailed tests are still necessary to reach a firm conclusion regarding the best

turbulence modelling strategy.

CRedit authorship contribution statement

Florent Burdairon: Investigation, Validation, Formal analysis, Writing - original draft. **Jacques Magaudet:** Conceptualization, Formal analysis, Writing - review & editing, Supervision, Funding acquisition.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgements

The specific computational developments described in the paper owe much to the continuous support of P. Elyakime. F. Burdairon's fellowship was granted by the ViscousWindWaves project of the French National Research Agency (Project No. ANR-18-CE30-0003). Computations were made possible by the allocation of HPC resources in the CALMIP supercomputing meso-center under grant P22032.

Appendix A. Detail of the turbulence model

In (7), the wall-corrected vorticity magnitude $\tilde{\Omega}$ involved in the production term is defined as [95]

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \Omega + \Omega_\ell \quad \text{if } \Omega_\ell/\Omega > -c_{v2}, \\ \tilde{\Omega} &= \Omega \left\{ 1 + \frac{c_{v2}^2 \Omega + c_{v3} \Omega_\ell}{(c_{v3} - 2c_{v2})\Omega - \Omega_\ell} \right\} \quad \text{otherwise,} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

with the near-wall correction Ω_ℓ such that

$$\Omega_\ell = f_{v2} \frac{\tilde{v}_t}{\kappa^2 \ell^2}. \quad (\text{A.2})$$

The damping functions f_{v1} (involved in (8) and (10)) and f_{v2} are prescribed as

$$f_{v1} = \frac{(\tilde{v}_t/\nu)^3}{(\tilde{v}_t/\nu)^3 + c_{v1}^3} \quad \text{and} \quad f_{v2} = \frac{1 + (f_{v1} - 1)(\tilde{v}_t/\nu)}{1 + f_{v1}(\tilde{v}_t/\nu)}, \quad (\text{A.3})$$

so that $f_{v1} \rightarrow 1$ and $f_{v2} \rightarrow 0$ for large \tilde{v}_t/ν , and $f_{v1} \rightarrow 0$ and $f_{v2} \rightarrow 1$ when $\tilde{v}_t/\nu \rightarrow 0$. Similarly, the function

f_w in the wall-destruction term of (7) is requested to become unity at the wall and to vanish far from it. It is defined as

$$\begin{aligned} f_w &= g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \\ \text{with } g &= r[1 + c_{w2}(r^5 - 1)] \quad \text{and } r = \frac{\tilde{v}_t}{\kappa^2 \tilde{\Omega} \ell^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Last, the prescribed values for the empirical constants involved in the model are

$$\begin{aligned} c_{b1} &= 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad \sigma = 2/3, \\ c_{v1} &= 7.1, \quad c_{v2} = 0.7, \quad c_{v3} = 0.9, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \approx 3.24, \\ c_{w2} &= 0.3, \quad c_{w3} = 2.0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

and the von Kármán constant κ is set to 0.41.

In the original version of the model, the function f_r weighting the production term in (7) is unity. Since then, the model was checked in flows involving curved streamlines [96; 97] and it was suggested that its performance may be improved by making f_r depend on the relative magnitude of rotation and strain effects. A simple formulation for such a correction, involving the norm of the rotation- and strain-rate tensors, was proposed in [98] in the context of a two-equation turbulence model. The idea is to define a curvature/rotation Richardson number $\frac{\Omega}{\mathcal{S}} \left(\frac{\Omega}{\mathcal{S}} - 1 \right)$ comparing the time scales associated with the rotational and straining contributions to the local velocity gradient, $\mathcal{S} = (2 \langle \mathbf{S} \rangle : \langle \mathbf{S} \rangle)^{1/2}$ denoting the norm of the strain-rate tensor. This formulation was adapted to the Spalart-Allmaras model in [99], with the weighting function defined as

$$f_r = (1 + c_{r1}) \frac{2\mathcal{S}}{\mathcal{S} + \Omega} \left\{ 1 - c_{r3} \tan^{-1} \left[c_{r2} \frac{\Omega}{\mathcal{S}} \left(\frac{\Omega}{\mathcal{S}} - 1 \right) \right] \right\} - c_{r1} \quad (\text{A.6})$$

with

$$c_{r1} = 1.0, \quad c_{r2} = 2.0, \quad c_{r3} = 1.0. \quad (\text{A.7})$$

In thin shear flows, $\Omega = \mathcal{S}$, so that $f_r = 1$, which leaves the magnitude of the production term in (7) unchanged. In contrast, f_r is larger than unity in strain-dominated regions (e.g. $f_r(\Omega/\mathcal{S} = 0.8) \approx 1.91$), increasing the magnitude of the production term, hence that of v_t . Conversely, f_r is smaller than unity in vorticity-dominated regions and becomes negative beyond $\Omega/\mathcal{S} \approx 1.2$, extinguishing turbulence in vortex cores. Since Ω/\mathcal{S} is unity at the wall, so is f_r . Hence, in (A.5), the relation linking c_{w1} to c_{b1} , c_{b2} , σ and κ remains unchanged.

Appendix B. Approximate characteristics of a turbulent liquid layer beneath a sheared interface

Since the viscosity ratio μ_l/μ_a is always large, even with water, turbulence beneath an air-liquid interface subjected to a prescribed shear stress does not obey a no-slip condition, unless the surface is contaminated by surfactants. For this reason, nonzero tangential velocity fluctuations subsist in the liquid all the way to the interface. In contrast, the normal fluctuation vanishes on it, provided the turbulence intensity is not strong enough to distort the surface. These combined behaviours yield a linear growth of the turbulent shear stress as the distance to the interface, $z_0 - z$, increases. This difference with the more familiar situation of a no-slip wall has direct consequences on the structure of the near-surface flow. In particular, compared with the boundary layer adjacent to a no-slip wall, the viscous sublayer is almost twice as thin and the buffer layer is virtually absent [100; 101; 102], so that the log-law for the mean velocity applies much closer to the surface. This is why setting the damping function f_{v1} involved in (9) and (A.3) to unity in the liquid is sufficient to obtain a realistic description of the near-interface region with the Spalart-Allmaras model. This is also why a simple approximate eddy-viscosity profile valid throughout the liquid layer can be derived.

For this, let us first consider that the subsurface flow consists of a layer with kinematic viscosity $\nu_l = \mu_l/\rho_l$ extending from the interface $z = z_0$ at which the shear stress $\rho_l u_l^{*2} \equiv \rho_a u^{*2}$ applies, down to a lower plane $z = \delta_l z_0$ at which the shear stress vanishes (the index l is used to denote quantities in the liquid in cases an ambiguity may exist). Since the shear stress varies linearly in between the two planes, the streamwise momentum equation governing the vertical variations of the mean velocity $\bar{u}_l(z)$ integrates to $\rho_l(\nu_l + \nu_t)d_z \bar{u}_l = G_l(z_0 - z) + \rho_l u_l^{*2}$, with $G_l = -[(1 - \delta_l)z_0]^{-1} \rho_l u_l^{*2}$. We introduce the relevant friction Reynolds number $Re_l^* = (1 - \delta_l)z_0 u_l^*/\nu_l$ and the dimensionless distances $Z = (z - \delta_l z_0)/[(1 - \delta_l)z_0]$ and $\mathcal{Z}^+ = (z_0 - z)u_l^*/\nu_l$. With these notations, the previous momentum balance takes the dimensionless form

$$(1 + \nu_t^+)d_z U^+ = Re_l^* Z, \quad (\text{B.1})$$

with $\nu_t^+ = \nu_t/\nu_l$ and $U^+ = \bar{u}_l/u_l^*$. To obtain a simple representation of the eddy viscosity valid throughout the subsurface flow, we start from the distribution proposed in [103; 104] in the case of a fully-developed channel flow. This ν_t -profile, which was designed to predict the eddy viscosity down to the wall, was later proved to be accurate even in the core of the flow [105]. Disregarding

the viscous contributions specific to a no-slip wall, this eddy viscosity profile reduces in present notation to

$$\nu_t^+ = \frac{\kappa}{6} Re_l^* (1 - Z^2)(1 + 2Z^2). \quad (\text{B.2})$$

This expression yields $\nu_t^+ \approx \kappa Re_l^* (1 - Z) \equiv \kappa \mathcal{Z}^+$ in the limit $Z \rightarrow 1$, with κ the Von Kármán constant. In the core, it passes through a maximum at $Z = \frac{1}{2}$, where $\nu_t^+ = \frac{3}{16} \kappa Re_l^*$, before reaching a slightly lower minimum, $\nu_t^+ = \frac{1}{6} \kappa Re_l^*$, at $Z = 0$.

Assuming $\nu_t^+ \gg 1$ and inserting (B.2) into (B.1) allows the latter to be integrated, yielding the velocity profile

$$U^+(Z) = U_0^+ + \frac{1}{\kappa} \log \frac{1 + 2Z^2}{1 - Z^2}, \quad (\text{B.3})$$

with $U_0^+ = U^+(Z = 0)$. Equation (B.3) is expected to predict reasonably well the mean velocity distribution up to the outer edge of the viscous sublayer, located approximately at $\mathcal{Z}^+ = 3$, i.e. $Z = 1 - 3Re_l^{*-1}$ [100; 101; 102]. Assuming $Re_l^* \gg 1$, (B.3) predicts $U^+(\mathcal{Z}^+ = 3) \approx U_0^+ + \kappa^{-1} \log \frac{Re_l^*}{2}$. Within the viscous sublayer, (B.1) reduces to $d_z U^+ \approx Re_l^*$, so that

$$U^+(Z) = U_0^+ + \kappa^{-1} \log \frac{Re_l^*}{2} + 3 + Re_l^*(Z - 1). \quad (\text{B.4})$$

The above model predicts a surface velocity $U^+(1) = U_0^+ + \kappa^{-1} \log \frac{Re_l^*}{2} + 3$. With $Re_l^* = 150$ and $U_0^+ = 0$, this yields $U^+(1) \approx 13.8$, which differs by less than 8% from the DNS prediction $U^+(1) \approx 14.9$ of [102]. Similarly, one gets $U^+(1) - U_0^+ \approx 15.2$ with $Re_l^* = 260$, whereas the DNS results of [101] indicate $U^+(1) - U_0^+ \approx 17.0$. Integrating (B.3) from $Z = 0$ to $Z = 1$ yields a depth-averaged velocity $U_0^+ + U_{mt}$, where $U_{mt} = \kappa^{-1}(\log 3 - 2 \log 2 + \sqrt{2} \tan^{-1} \sqrt{2}) \approx 2.66$. Integrating (B.3) only up to $\mathcal{Z}^+ = 3$ and considering the actual velocity profile (B.4) within the viscous sublayer results in the viscous correction $[\frac{9}{2} - \kappa^{-1}(6 \log 3 - 3)]Re_l^{*-1} \approx -4.5Re_l^{*-1}$, leading to the slightly more accurate estimate

$$U_{mt} \approx 2.66 - 4.5Re_l^{*-1}. \quad (\text{B.5})$$

This finding predicts $U_{mt} \approx 2.63$ for $Re_l^* = 150$, which differs by 6% from the value 2.48 reported in [102].

The free parameters δ_l and U_0^+ of the above model may be used to impose approximately a zero flow rate when this constraint applies. For this purpose, we consider that, in the lower part of the liquid layer extending from $z = 0$ (at which a no-slip condition holds) to $z = \delta_l z_0$ (at which the shear stress vanishes), the weak remaining flow is similar to that in a half-channel with a centerline velocity $U_c = U_0^+ u_l^*$ and a friction velocity

u_b^* , hence a friction Reynolds number $Re_b^* = u_b^* \delta_l z_0 / \nu_l = k_b \mathcal{U} Re_l^*$, with $k_b = \delta_l / (1 - \delta_l)$ and $\mathcal{U} = u_b^* / u_l^*$. In such a flow, correlations for the friction coefficient in the turbulent regime indicate that the approximate height-averaged velocity, say $U_{mb} u_l^*$, is close to $0.85 U_c$, whereas the friction velocity u_b^* decreases with Re_b^* following the approximate law $u_b^* = (0.04 + 0.2 Re_b^{*-1/2}) |U_c|$ [106]. Therefore, assuming that these correlations still provide reasonable estimates at the modest Reynolds number expected in this bottom boundary layer, the zero-flowrate condition reads approximately

$$U_0^+ + U_{mt} + k_b U_{mb} \approx U_{mt} + (1 + 0.85 k_b) U_0^+ = 0. \quad (\text{B.6})$$

Moreover, the total shear stress is linear throughout the entire liquid layer, implying $\mathcal{U}^2 = k_b$, hence

$$U_0^+ \approx - \frac{25 k_b^{1/2}}{1 + 5 k_b^{-3/4} (1 + k_b)^{1/2} Re_{l0}^{*-1/2}}, \quad (\text{B.7})$$

with $Re_{l0} = z_0 u_l^* / \nu_l = (1 + k_b) Re_l^*$ the Reynolds number based on the friction velocity u_l^* at the interface and the thickness z_0 of the entire liquid layer. Using the above estimate for U_{mt} , (B.6)-(B.7) may be solved to obtain k_b , hence δ_l and U_0^+ . For instance, with $Re_{l0} = 200$, one finds $k_b \approx 0.103$, so that $\delta_l \approx 0.093$ and $U_0^+ \approx -2.42$. Similarly, $k_b \approx 0.077$, $\delta_l \approx 0.0715$ and $U_0^+ \approx -2.49$ for $Re_{l0} = 400$, revealing a decrease of δ_l as the wind speed increases.

The above findings may straightforwardly be used to initialize the flow field in the liquid. If no condition has to be imposed on the flowrate, the bottom of the liquid layer is assumed to experience no shear and to be at rest. Therefore, one simply sets $U_0^+ = 0$ and $\delta_l = 0$, so that the driving force per unit volume is $G_l = -\rho_l u_l^{*2} / z_0$, with the friction velocity u_l^* at the liquid surface being related to that in the air flow through $u_l^* = \left(\frac{\rho_a}{\rho_l}\right)^{1/2} u^*$. This friction velocity is used to make (B.2) and (B.3)-(B.4) dimensional and initialize the eddy viscosity and velocity profiles with the corresponding estimates. At the bottom wall, the resolved velocity obeys a Dirichlet condition $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}$, while the eddy viscosity obeys the Neumann condition $\mathbf{n} \cdot \nabla \nu_t = 0$, with \mathbf{n} the normal to the wall. If the zero-flowrate condition has to be enforced, one first makes use of (B.6)-(B.7) to estimate δ_l and U_0^+ , and finally determine $G_l = -[(1 - \delta_l) z_0]^{-1} \rho_l u_l^{*2}$, which slowly decreases as the wind speed increases ($G_l \approx -1.10 \rho_l u_l^{*2} / z_0$ for $Re_{l0}^* = 200$ and $G_l \approx -1.08 \rho_l u_l^{*2} / z_0$ for $Re_{l0}^* = 400$, to be compared with $G_l = -\frac{3}{2} \rho_l u_l^{*2} / z_0$ in the laminar regime). Then, the plane $z = \delta_l z_0$ is considered as a virtual bottom sliding with speed $U_c = U_0^+ u_l^*$. The normal velocity, $\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{n}$, and the normal derivative

of the eddy viscosity, $\mathbf{n} \cdot \nabla \nu_t$, are both assumed to vanish on that virtual bottom. Last, the $\nu_t(z)$ - and $\bar{u}(z)$ -profiles are initialized as above throughout the layer $\delta_l z_0 < z \leq z_0$.

Appendix C. Performance of the turbulence model in a fully-developed channel flow

We considered the fully-developed flow in a plane channel characterized by the friction Reynolds number $Re^* = u^* H / \nu$, with H the channel half-height and u^* the friction velocity related to the prescribed pressure gradient $d\mathcal{P}/dx$ through $u^* = (-\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{P}}{dx} H)^{1/2}$. We simulated this flow for several Reynolds numbers up to $Re^* = 2000$, to compare the mean velocity profiles with the DNS data of [107] and [108] (available online at <https://torroja.dmt.upm.es/channels/>). For this purpose, we used a non-uniform grid with 64 cells from the wall to the centerline. This grid was obtained by prescribing a geometric sequence with a minimum cell size $\Delta y_{min} = 4.4 \times 10^{-3} H$ and a common ratio 1.035. With these characteristics, the height of the cell closest to the wall ranges from $0.79 \delta_\nu$ for $Re^* = 550$ (figure C.7(a)) to $2.88 \delta_\nu$ for $Re^* = 2003$ (figure C.7(c)), with $\delta_\nu = \nu / u^*$ the characteristic near-wall length scale. We kept the grid unchanged on purpose for all Re^* in order to check the sensitivity of the model to grid under-resolution in the viscous sublayer. Computations were initialized with a Poiseuille velocity half-profile corresponding to the prescribed pressure gradient and a uniform nonzero turbulent viscosity $\tilde{\nu}_t(\mathbf{x}, t = 0) = 10 \nu$. Figure C.7 shows that the computed profiles of $\bar{u}(z)$ are in good agreement with the DNS data whatever Re^* . A slight underestimate of the velocity throughout the log-layer is observed at the highest Re^* , for which only one grid point stands within the viscous sublayer. Despite this poor near-wall resolution, the velocity profile is still closely approximated within the buffer layer, say up to $z^+ \approx 20$ (with $z^+ = z / \delta_\nu$), and the difference between the two predictions at a given z^+ does not exceed 3% throughout the log-layer.

Appendix D. Influence of the relative wavelength on the performance of the turbulence model in the flow over a wavy wall

In the framework of the test cases devoted to the flow over a wavy wall, we carried out several runs in which the relative wavenumber of the undulations, $k^+ = k \nu / u^*$, was varied in order to quantify the range of k^+ over which the predictions of the turbulence model

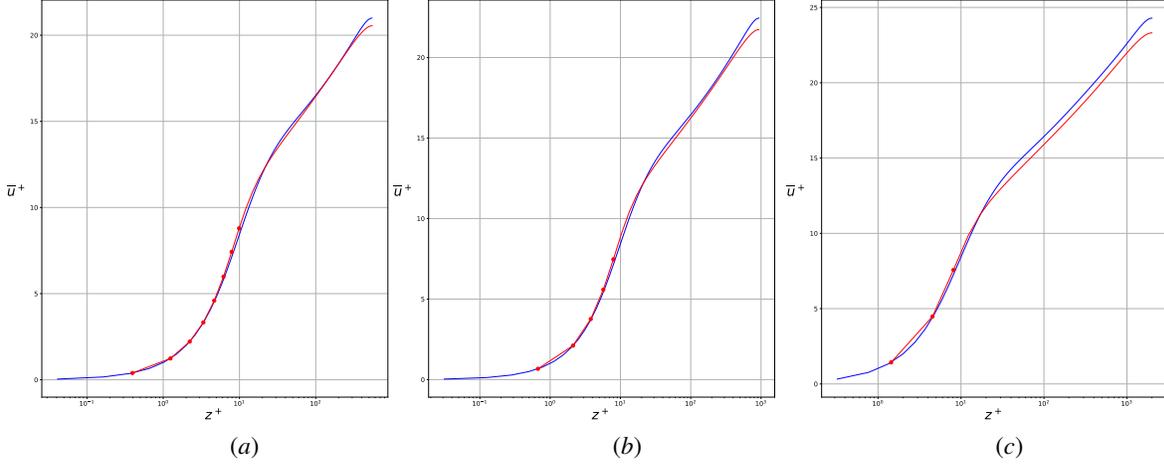


Figure C.7: Mean velocity profiles in a plane channel at three different Reynolds numbers, all computed with the same grid. (a): $Re^* = 550$; (b): $Re^* = 934$; (c): $Re^* = 2003$. Red line: present results; blue line: DNS data from [107] ($Re^* = 550$ and 934) and [108] ($Re^* = 2003$). The red bullets indicate the grid points in the near-wall region $z^+ \leq 10$.

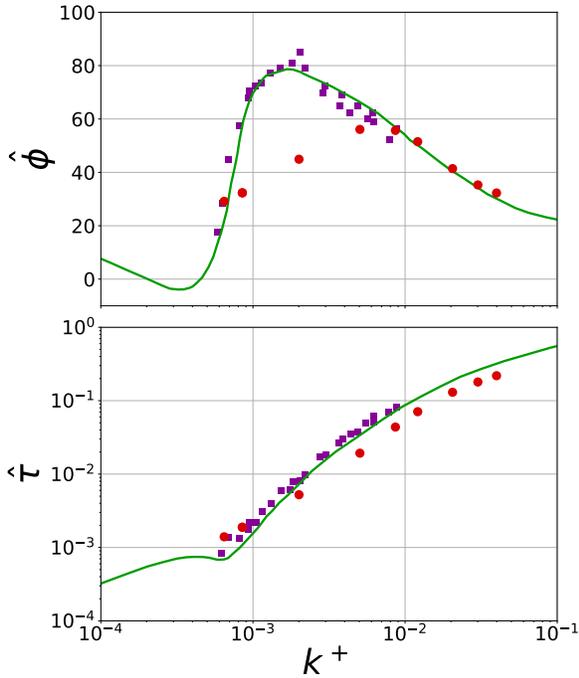


Figure D.8: Variations of the phase angle (top) and amplitude (bottom) of the wall stress stress in an unseparated turbulent flow over a wavy wall. \bullet : present predictions for $ak = 0.097$; \blacksquare : experiments from [67] with $ak = 0.035$; --- : relaxation model [67].

may be considered accurate. Defining the vertical position on the wavy wall as $z_w(x) = a \cos kx$, the wall shear

stress (normalized by $\overline{\rho u^*{}^2}$) may be written in the form $\tau_w(x) = \bar{\tau}_w + \hat{\tau} \cos(kx + \hat{\phi})$. Figure D.8 displays the variations of the phase angle $\hat{\phi}$ and amplitude $\hat{\tau}$ with respect to k^+ , and compares them with the experimental data gathered in [67] and the predictions of the ‘relaxation’ mixing length model proposed in the same reference. In this model, the Van Driest parameter routinely used to obtain accurate predictions of the mean velocity profile very close to the wall (say for $z^+ < 25$) is modified to account for the influence of the streamwise pressure gradient. The relevant pressure gradient at a given streamwise position is considered to have a nonzero phase shift with respect to the actual local pressure gradient. This phase shift, which results from the non-local influence of the periodic forcing imposed to the near-wall turbulence structure by the wall undulations, is estimated through a first-order differential equation modelling the corresponding relaxation. This modified mixing length model involves two additional k^+ -independent parameters that were tuned to obtain the best possible agreement with experimental results over the whole range of k^+ . Predictions of this relaxation model are shown with a solid line in figure D.8. It is seen that the phase angle $\hat{\phi}$ provided by the Spalart-Allmaras model agrees very well with these predictions down to $k^+ \approx 8 \times 10^{-3}$. In contrast, the Spalart-Allmaras model predicts a decrease of $\hat{\phi}$ with k^+ for $k^+ \lesssim 6 \times 10^{-3}$, while experimental data and predictions of the relaxation model show that the phase angle goes on increasing as k^+ decreases, down to $k^+ \approx 1.5 \times 10^{-3}$. This deficiency is actually shared by all turbulence models based on the eddy-viscosity closure

and can only be removed by turning to second-order Reynolds stress models. Indeed, the eddy-viscosity concept assumes that the off-diagonal components of the Reynolds stress tensor are directly proportional to the local strain rate of the mean flow. This local relationship holds as long as the distortion introduced by the wall undulations is fast enough, but is no longer valid beyond a certain critical wavelength at which non-local effects become significant [14; 43]. It is this non-locality that was artificially introduced through the influence of the ‘relaxed’ pressure gradient in the modified mixing length model of [67]. Fortunately, the largest wavelengths considered in the present work correspond to $k^+ = 5 \times 10^{-3}$, a position at which the one-equation model underestimates ϕ by only 10° . Therefore, this deficiency is not expected to alter significantly the predictions of the growth of short wind-generated waves, such as those considered in § 7.3. In contrast, the bottom subfigure makes it clear that the model consistently under-predicts the amplitude of shear stress variations, in line with the observations of § 6. This is presumably its most serious limitation in the present context.

References

- [1] G. J. Komen, M. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, S. Hasselmann, P. A. E. M. Janssen, *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [2] I. S. F. Jones, Y. Toba, (eds.), *Wind Stress Over the Ocean*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] P. Janssen, *The Interaction of Ocean Waves and Wind*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] O. M. Phillips, On the generation of waves by turbulent wind, *J. Fluid Mech.* 2 (1957) 417–445.
- [5] K. K. Kahma, M. A. Donelan, On the generation of waves by turbulent wind, *J. Fluid Mech.* 192 (1988) 339–364.
- [6] J. W. Miles, On the generation of surface waves by shear flows, *J. Fluid Mech.* 3 (1957) 185–204.
- [7] J. W. Miles, On the generation of surface waves by shear flows. Part 2, *J. Fluid Mech.* 6 (1959) 568–582.
- [8] J. W. Miles, On the generation of surface waves by shear flows. Part 4, *J. Fluid Mech.* 13 (1962) 423–448.
- [9] M. J. Lighthill, Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind, *J. Fluid Mech.* 14 (1962) 385–398.
- [10] J. W. Miles, On the generation of surface waves by shear flows. Part 5, *J. Fluid Mech.* 30 (1967) 163–175.
- [11] S. J. Jacobs, An asymptotic theory for the turbulent flow over a progressive water wave, *J. Fluid Mech.* 174 (1987) 69–80.
- [12] C. A. van Duin, P. A. E. M. Janssen, An analytic model of the generation of surface gravity waves by turbulent air flow, *J. Fluid Mech.* 236 (1992) 197–215.
- [13] J. W. Miles, Surface-wave generation revisited, *J. Fluid Mech.* 256 (1993) 427–441.
- [14] S. E. Belcher, J. C. R. Hunt, Turbulent shear flow over slowly moving waves, *J. Fluid Mech.* 251 (1993) 109–148.
- [15] J. W. Miles, Surface-wave generation: a viscoelastic model, *J. Fluid Mech.* 322 (1996) 131–145.
- [16] J. R. D. Francis, Wave motion and the aerodynamic drag on a free oil surface, *Phil. Mag.* 45 (1954) 695–702.
- [17] J. C. Gottifredi, G. J. Jameson, The growth of short waves on liquid surfaces under the action of a wind, *Proc. R. Soc. London Ser. A-Math. Phys. Eng. Sci.* 319 (1970) 373–397.
- [18] A. Paquier, F. Moisy, M. Rabaud, Viscosity effects in wind wave generation, *Phys. Rev. Fluids* 1 (2016) 083901.
- [19] M. Aulnette, M. Rabaud, F. Moisy, Wind-sustained viscous solitons, *Phys. Rev. Fluids* 4 (2019) 084003.
- [20] M. Aulnette, J. Zhang, M. Rabaud, F. Moisy, Kelvin-Helmholtz instability and formation of viscous solitons on highly viscous liquids, *Phys. Rev. Fluids* 7 (2022) 014003.
- [21] F. Moisy, M. Rabaud, K. Salsac, A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface, *Exp. Fluids* 46 (2009) 1021–1036.
- [22] M. Fulgosi, D. Lakehal, S. Banerjee, V. De Angelis, Direct numerical simulation of turbulence in a sheared air-water flow with a deformable interface, *J. Fluid Mech.* 482 (2003) 319–345.
- [23] S. Komori, R. Kurose, K. Iwano, T. Ukai, N. Suzuki, Direct numerical simulation of wind-driven turbulence and scalar transfer at sheared gas-liquid interfaces, *J. Turbul.* 11 (2010) 1–20.
- [24] D. Yang, L. Shen, Direct-simulation-based study of turbulent flow over various waving boundaries, *J. Fluid Mech.* 650 (2010) 131–180.
- [25] F. Zonta, A. Soldati, M. Onorato, Growth and spectra of gravity-capillary waves in countercurrent air/water turbulent flow, *J. Fluid Mech.* 777 (2015) 245–259.
- [26] X. Hao, L. Shen, Wind-wave coupling study using LES of wind and phase-resolved simulation of nonlinear waves, *J. Fluid Mech.* 874 (2019) 391–425.
- [27] T. Li, L. Shen, The principal stage in wind-wave generation, *J. Fluid Mech.* 934 (2022) A41.
- [28] W. T. Tsai, A numerical study of the evolution and structure of a turbulent shear layer under a free surface, *J. Fluid Mech.* 354 (1998) 239–276.
- [29] M. Lin, C. Moeng, W. Tsai, P. P. Sullivan, S. E. Belcher, Direct numerical simulation of wind-wave generation processes, *J. Fluid Mech.* 616 (2008) 1–30.
- [30] Z. Yang, B.-Q. Deng, L. Shen, Direct numerical simulation of wind turbulence over breaking waves, *J. Fluid Mech.* 850 (2018) 120–155.
- [31] J. Wu, L. Deike, Wind wave growth in the viscous regime, *Phys. Rev. Fluids* 6 (2021) 094801.
- [32] J. Wu, S. Popinet, L. Deike, Revisiting wind wave growth with fully coupled direct numerical simulations, *J. Fluid Mech.* 951 (2022) A18.
- [33] P. P. Sullivan, J. B. Edson, T. Hristov, J. C. McWilliams, Large-eddy simulations and observations of atmospheric marine boundary layers above nonequilibrium surface waves, *J. Atmos. Sci.* 65 (2008) 1225–1245.
- [34] W.-Y. Zhang, W.-X. Huang, C.-X. Xu, Very large-scale motions in turbulent flows over streamwise traveling wavy boundaries, *Phys. Rev. Fluids* 4 (2019) 054601.
- [35] P. P. Sullivan, J. C. McWilliams, E. G. Patton, Large-eddy simulation of marine atmospheric boundary layers above a spectrum of moving waves, *J. Atmos. Sci.* 71 (2014) 4001–4027.
- [36] P. P. Sullivan, M. L. Banner, R. P. Morison, W. L. Peirson, Turbulent flow over steep steady and unsteady waves under strong wind forcing, *J. Phys. Oceanogr.* 48 (2018) 3–27.
- [37] G. Deskos, J. C. Y. Lee, C. Draxl, M. A. Sprague, Review of wind-wave coupling models for large-eddy simulation of the marine atmospheric boundary layer, *J. Atmos. Sci.* 78 (2021) 3025–3045.
- [38] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent,

- O. Lebaigue, J.-P. Caltagirone, P. Sagaut, Towards large eddy simulation of isothermal two-phase flows: Governing equations and a priori tests, *Int. J. Multiphase Flow* 33 (2007) 1–39.
- [39] C. Mastenbroek, V. K. Makin, M. H. Garat, J. P. Giovanangeli, Experimental evidence of the rapid distortion of turbulence in the air flow over water waves, *J. Fluid Mech.* 318 (1996) 273–302.
- [40] J. F. Meirink, V. K. Makin, Modelling low-Reynolds-number effects in the turbulent air flow over water waves, *J. Fluid Mech.* 415 (2000) 155–174.
- [41] P. Y. Li, D. Xu, P. A. Taylor, Numerical modelling of turbulent airflow over water waves, *Bound.-Layer Meteor.* 95 (2000) 397–425.
- [42] P. R. Gent, P. A. Taylor, A numerical model of the air flow above water waves, *J. Fluid Mech.* 77 (1976) 105–128.
- [43] S. E. Belcher, J. C. R. Hunt, Turbulent flow over hills and waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 30 (1998) 507–538.
- [44] A. Y. Benilov, B. N. Filyushkin, Application of methods of linear filtration to an analysis of fluctuations in the surface layer of the sea, *Izv. Acad. Sci. USSR, Atmos. Oceanic Phys.* 6 (1970) 477–482.
- [45] L. Thais, J. Magnaudet, A triple decomposition of the fluctuating motion below laboratory wind water waves, *J. Geophys. Res.* 100 (1995) 741–755.
- [46] T. Hristov, C. Friehe, S. Miller, Wave-coherent fields in air flow over ocean waves: Identification of cooperative behavior buried in turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 5245–5248.
- [47] O. M. Phillips, *The Dynamics of the Upper Ocean*, Cambridge University Press, 1977.
- [48] A. Ayet, B. Chapron, The dynamical coupling of wind-waves and atmospheric turbulence: A review of theoretical and phenomenological models, *Bound.-Layer Meteor.* 183 (2022) 1–33.
- [49] G. Caulliez, N. Ricci, R. Dupont, The generation of the first visible wind waves, *Phys. Fluids* 10 (1998) 757–759.
- [50] F. Veron, W. K. Melville, Experiments on the stability and transition of wind-driven water surfaces, *J. Fluid Mech.* 446 (2001) 25–65.
- [51] T. B. Benjamin, Shearing flow over a wavy boundary, *J. Fluid Mech.* 6 (1959) 161–205.
- [52] A. A. Townsend, Flow in a deep turbulent boundary layer over a surface distorted by water waves, *J. Fluid Mech.* 55 (1972) 719–735.
- [53] L. Ó Náraigh, P. D. M. Spelt, T. A. Zaki, Turbulent flow over a liquid layer revisited: multi-equation turbulence modelling, *J. Fluid Mech.* 683 (2011) 357–394.
- [54] J. Brackbill, D. Kothe, C. Zemach, A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Phys.* 100 (1992) 335–354.
- [55] P. R. Spalart, S. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *Rech. Aérosp.* 1 (1992) 5–21.
- [56] V. W. Nee, L. S. G. Kovaznay, Simple phenomenological theory of turbulent shear flows, *Phys. Fluids* 12 (1969) 473–484.
- [57] J. Magnaudet, M. Rivero, J. Fabre, Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow, *J. Fluid Mech.* 284 (1995) 97–135.
- [58] I. Calmet, J. Magnaudet, Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow, *Phys. Fluids* 9 (1997) 438–455.
- [59] T. Bonometti, J. Magnaudet, An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics, *Int. J. Multiphase Flow* 33 (2007) 109–133.
- [60] W. F. Noh, P. Woodward, SLIC (simple line interface calculation), in: A. I. van Dooren, P. J. Zandbergen (Eds.), *Lect. Notes Phys.*, Vol. 59, Springer, New York, 1976, pp. 330–340.
- [61] D. P. Zilker, G. W. Cook, T. J. Hanratty, Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows, *J. Fluid Mech.* 82 (1977) 29–51.
- [62] C. Thorsness, P. E. Morrisroe, T. J. Hanratty, A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave, *Chem. Eng. Sci.* 33 (1978) 579–592.
- [63] K. A. Frederick, T. J. Hanratty, Velocity measurements for a turbulent non-separated flow over solid waves, *Exp. Fluids* 6 (1988) 477–486.
- [64] D. P. Zilker, T. J. Hanratty, Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows, *J. Fluid Mech.* 90 (1979) 257–271.
- [65] J. Buckles, T. J. Hanratty, R. J. Adrian, Turbulent flow over large-amplitude wavy surfaces, *J. Fluid Mech.* 140 (1984) 27–44.
- [66] J. D. Kuzan, T. J. Hanratty, R. J. Adrian, Turbulent flows with incipient separation over solid waves, *Exp. Fluids* 7 (1989) 88–98.
- [67] J. Abrams, T. J. Hanratty, Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface, *J. Fluid Mech.* 151 (1985) 443–455.
- [68] N. Kruse, A. Günther, P. R. von Rohr, Dynamics of large-scale structures in turbulent flow over a wavy wall, *J. Fluid Mech.* 485 (2003) 87–96.
- [69] C. Wagner, S. Kuhn, P. R. von Rohr, Scalar transport from a point source in flows over wavy walls, *Exp. Fluids* 43 (2007) 261–271.
- [70] A. M. Hamed, A. Kamdar, L. Castillo, L. P. Chamorro, Turbulent boundary layer over 2D and 3D large-scale wavy walls, *Phys. Fluids* 27 (2015) 106601.
- [71] V. M. Segunda, S. J. Ormiston, M. F. Tachie, Experimental and numerical investigation of developing turbulent flow over a wavy wall in a horizontal channel, *Eur. J. Mech. - B/Fluids* 68 (2018) 128–143.
- [72] C. Maass, U. Schumann, Direct numerical simulation of separated turbulent flow over wavy boundary, in: E. H. Hirschel (Ed.), *Notes Numer. Fluid Mech.*, Vol. 52, 1996, pp. 227–241.
- [73] V. De Angelis, P. Lombardi, S. Banerjee, Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall, *Phys. Fluids* 9 (1997) 2429–2442.
- [74] P. Cherukat, Y. Na, T. J. Hanratty, J. B. McLaughlin, Direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow over a wavy wall, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 11 (1998) 109–134.
- [75] H. S. Yoon, O. A. El-Samni, A. T. Huynh, H. H. Chun, H. J. Kim, A. H. Pham, I. R. Park, Effect of wave amplitude on turbulent flow in a wavy channel by direct numerical simulation, *Ocean Eng.* 36 (2009) 697–707.
- [76] D. S. Henn, R. I. Sykes, Large-eddy simulation of flow over wavy surfaces, *J. Fluid Mech.* 383 (1999) 75–112.
- [77] J. Cui, V. C. Patel, C. L. Lin, Prediction of turbulent flow over rough surfaces using a force field in large eddy simulation, *J. Fluids Eng.-Trans. ASME* 125 (2003) 2–9.
- [78] Y. S. Chang, A. Scotti, Modeling unsteady turbulent flows over ripples: Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS) versus large-eddy simulation (LES), *J. Geophys. Res.-Oceans* 109 (2004) C09012.
- [79] C. Wagner, S. Kenjeres, P. R. von Rohr, Dynamic large eddy simulations of momentum and wall heat transfer in forced convection over wavy surfaces, *J. Turbul.* 12 (2011) 1–27.
- [80] V. C. Patel, J. T. Chon, J. Y. Yoon, Turbulent flow in a channel with a wavy wall, *J. Fluids Eng.-Trans. ASME* 113 (1991) 579–586.
- [81] S. Knotek, M. Jicha, Simulation of flow over a wavy solid surface: comparison of turbulence models, in: *EPJ Web Conf.* -

- EFM11, Vol. 25, 2012, p. 01040.
- [82] K. Chaib, D. Nehari, N. Sad Chemloul, CFD simulation of turbulent flow and heat transfer over rough surfaces, in: *Energy Procedia*, Vol. 74, 2015, pp. 909–918.
- [83] V. M. Segunda, S. Ormiston, M. Tachie, Numerical analysis of turbulent flow over a wavy wall in a channel, in: *Proc. ASME 2016 Fluids Eng. Div. Summer Meet.*, Vol. 1A, 2016, pp. FEDSM2016-7712, V01AT03A014.
- [84] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, W. E. Ferguson, Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains, *J. Fluid Mech.* 83 (1977) 49–74.
- [85] M. Y. Su, M. Bergin, P. Marler, R. Myrick, Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains, *J. Fluid Mech.* 124 (1982) 45–72.
- [86] N. E. Huang, S. R. Long, S. Zheng, The mechanism for frequency downshift in nonlinear wave evolution, *Adv. Appl. Mech.* 32 (1996) 59–117.
- [87] W. K. Melville, The instability and breaking of deep-water waves, *J. Fluid Mech.* 115 (1982) 165–185.
- [88] K. Trulsén, K. B. Dysthe, Frequency downshift in three-dimensional wave trains in a deep basin, *J. Fluid Mech.* 352 (1997) 359–373.
- [89] F. Dias, C. Kharif, Nonlinear gravity and capillary-gravity waves, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31 (1999) 301–346.
- [90] T. Hara, C. C. Mei, Frequency downshift in narrow-banded surface waves under the influence of wind, *J. Fluid Mech.* 230 (1991) 429–477.
- [91] T. Hara, C. C. Mei, Wind effects on the nonlinear evolution of slowly varying gravity-capillary waves, *J. Fluid Mech.* 267 (1994) 221–250.
- [92] M. S. Longuet-Higgins, The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics, *Proc. R. Soc. London Ser. A-Math. Phys. Eng. Sci.* 360 (1978) 489–505.
- [93] M. S. Longuet-Higgins, The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. I. Superharmonics, *Proc. R. Soc. London Ser. A-Math. Phys. Eng. Sci.* 360 (1978) 471–488.
- [94] P. R. Spalart, Strategies for turbulence modelling and simulations, *Int. J. Heat Fluid Flow* 21 (2000) 252–263.
- [95] S. R. Allmaras, F. T. Johnson, P. R. Spalart, Modifications and clarifications for the implementation of the Spalart-Allmaras turbulence model, in: *Proc. 7th Int. Conf. Comput. Fluid Dyn.*, 2012, pp. ICCFD7-1902.
- [96] P. R. Spalart, M. Shur, On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature, *Aerosp. Sci. Technol.* 5 (1997) 297–302.
- [97] M. L. Shur, M. K. Strelets, A. K. Travin, P. R. Spalart, Turbulence modeling in rotating and curved channels: Assessing the Spalart-Shur correction, *AIAA J.* 8 (2000) 784–792.
- [98] A. Hellsten, Some improvements in Menter’s $k-\omega$ SST turbulence model, in: *Proc. 29th AIAA Fluid Dyn. Conf.*, 1998, pp. A98-32817.
- [99] Q. Zhang, Y. Yang, A new simpler rotation/curvature correction method for Spalart-Allmaras turbulence model, *Chin. J. Aeronaut.* 26 (2013) 326–333.
- [100] W. McLeish, G. E. Putland, Measurements of wind-driven flow profile in the top millimeter of water, *J. Phys. Oceanogr.* 5 (1975) 515–518.
- [101] W.-T. Tsai, S.-M. Chen, C.-H. Moeng, A numerical study on the evolution and structure of a stress-driven free-surface turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.* 545 (2005) 163–192.
- [102] L. I. Enstad, R. Nagaosa, G. Alendal, Low shear turbulence structures beneath stress-driven interface with neutral and stable stratification, *Phys. Fluids* 18 (2006) 055106.
- [103] R. D. Cess, A survey of the literature on heat transfer in turbulent tube flow, *Tech. Rep. 8-0529-R24.*, Westinghouse Research (1958).
- [104] W. C. Reynolds, W. G. Tiederman, Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus’s theory, *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 253–272.
- [105] S. Pirozzoli, Revisiting the mixing-length hypothesis in the outer part of turbulent wall layers: Mean flow and wall friction, *J. Fluid Mech.* 745 (2014) 378–397.
- [106] M. M. M. El Tebany, A. J. Reynolds, Velocity distributions in plane turbulent channel flows, *J. Fluid Mech.* 100 (1980) 1–29.
- [107] J. C. Del Álamo, J. Jiménez, Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels, *Phys. Fluids* 15 (2003) L41–L44.
- [108] S. Hoyas, J. Jiménez, Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau=2003$, *Phys. Fluids* 18 (2006).

Annexe C

Spectrogrammes

Nous présentons ci-dessous les spectrogrammes complets des expériences numériques discutées dans le chapitre . Nous avons rassemblé les figures ainsi : d'abord les cas \mathcal{L}_1 pour l'eau, puis des liquides de viscosités intermédiaires, et enfin les cas \mathcal{L}_{100} . Pour chaque figure, l'axe des abscisses est le temps en unité de paroi t_ν , l'ordonnée est le nombre d'onde adimensionné par la longueur capillaire l_c , et l'intensité du spectre est adimensionnée par δ_ν . L'énergie spectrale est principalement concentrée sur les petits nombres d'onde. C'est pourquoi nous montrons un agrandissement sur cette région du spectre, indiquée par l'encadré en haut à droite de la figure. Les limites de cette région sont également soulignées sur la figure principale à l'aide d'un rectangle noir. En particulier, les bornes temporelles sont conservées. Afin de limiter l'étendue de l'échelle des couleurs, nous avons tronqué le spectre en-deçà d'une valeur arbitrairement basse. Ces régions apparaissent sous forme de zones blanches. Nous avons indiqué, quand c'est possible, le nombre d'onde de coupure k_0 calculé d'après (5.6) à l'aide d'une droite rouge. Dans les faits, il ne figure que pour les cas \mathcal{L}_{100} . Pour les autres cas, sa valeur est trop grande pour apparaître sur la figure.

C.1 Cas \mathcal{L}_1

Cette section concerne les figures C.1 à C.5.

C.2 Viscosités intermédiaires

Cette section concerne les figures C.6 à C.9.

C.3 Cas \mathcal{L}_{100}

Cette section concerne les figures C.10 à C.14.

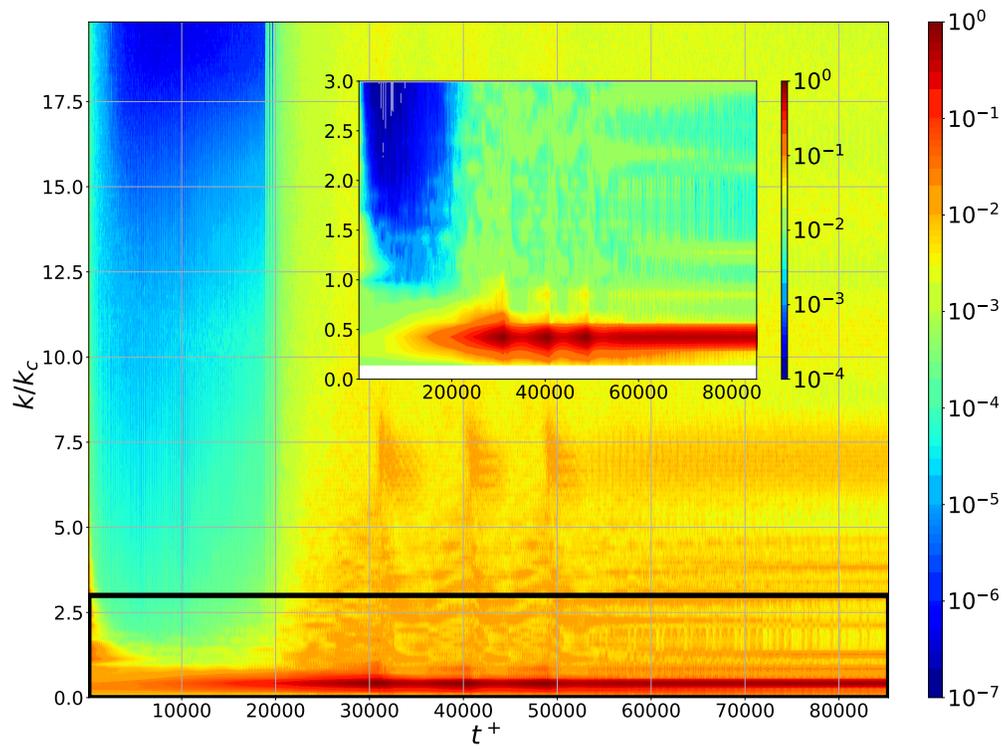


FIGURE C.1 - $\Lambda = 67 - Re_* = 228$

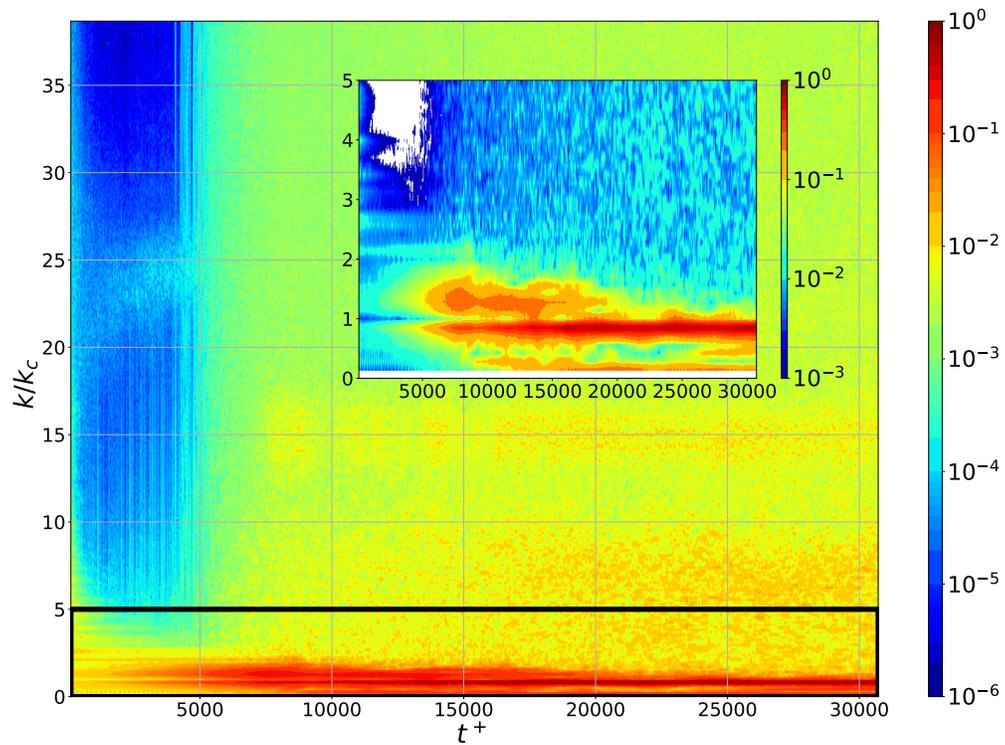
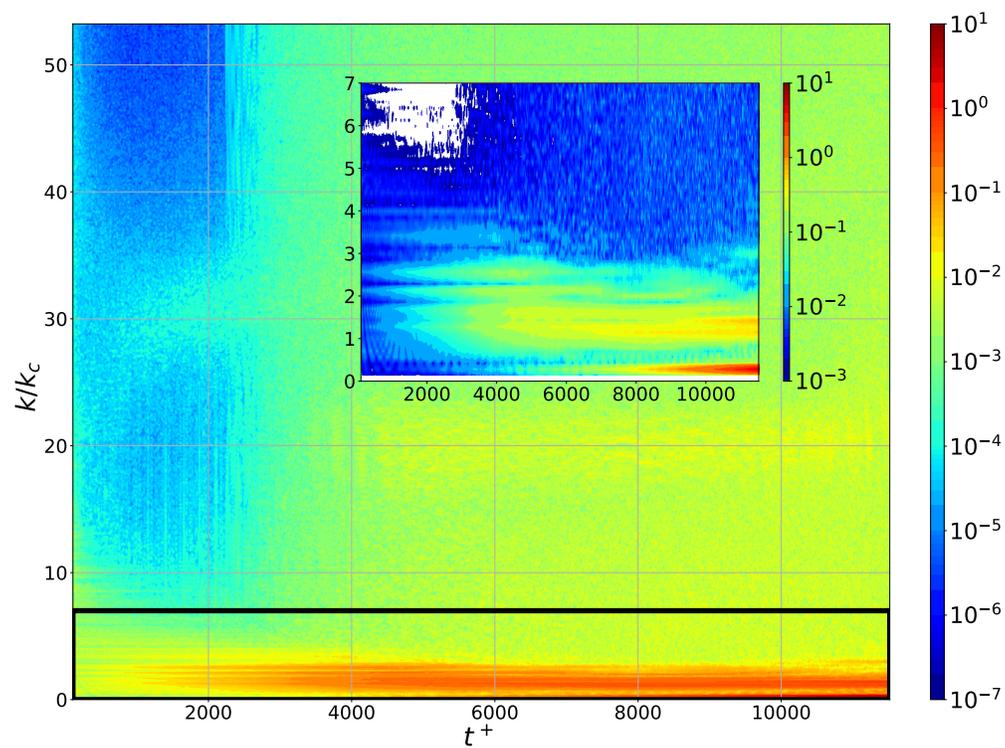
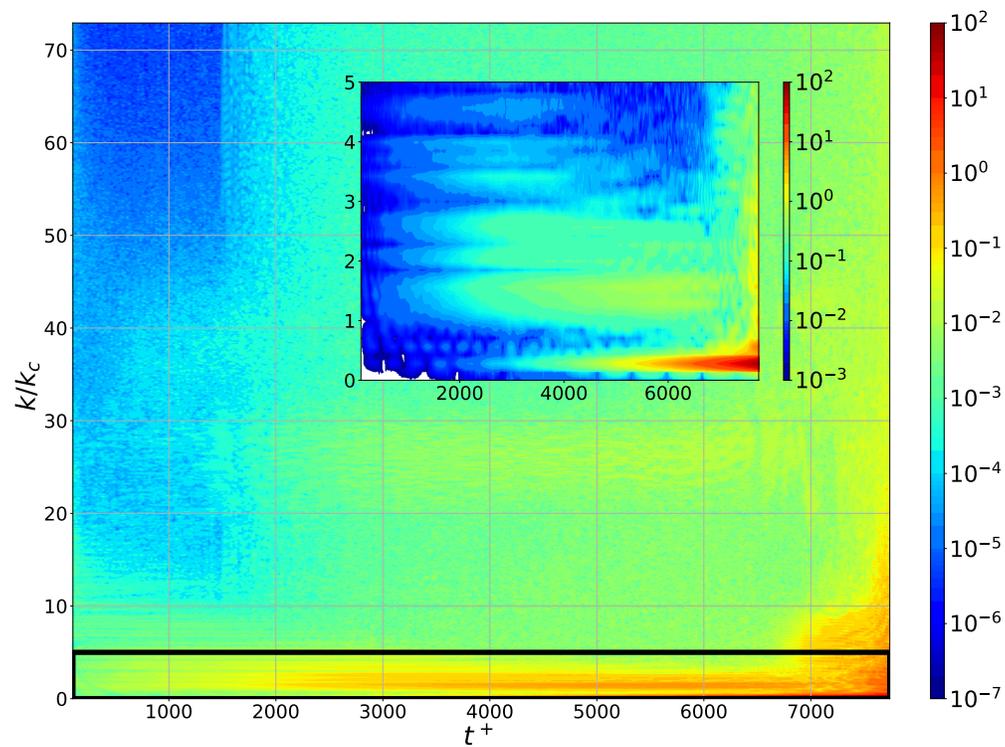


FIGURE C.2 - $\Lambda = 67 - Re_* = 453$

FIGURE C.3 – $\Lambda = 67 - Re_* = 613$ FIGURE C.4 – $\Lambda = 67 - Re_* = 800$

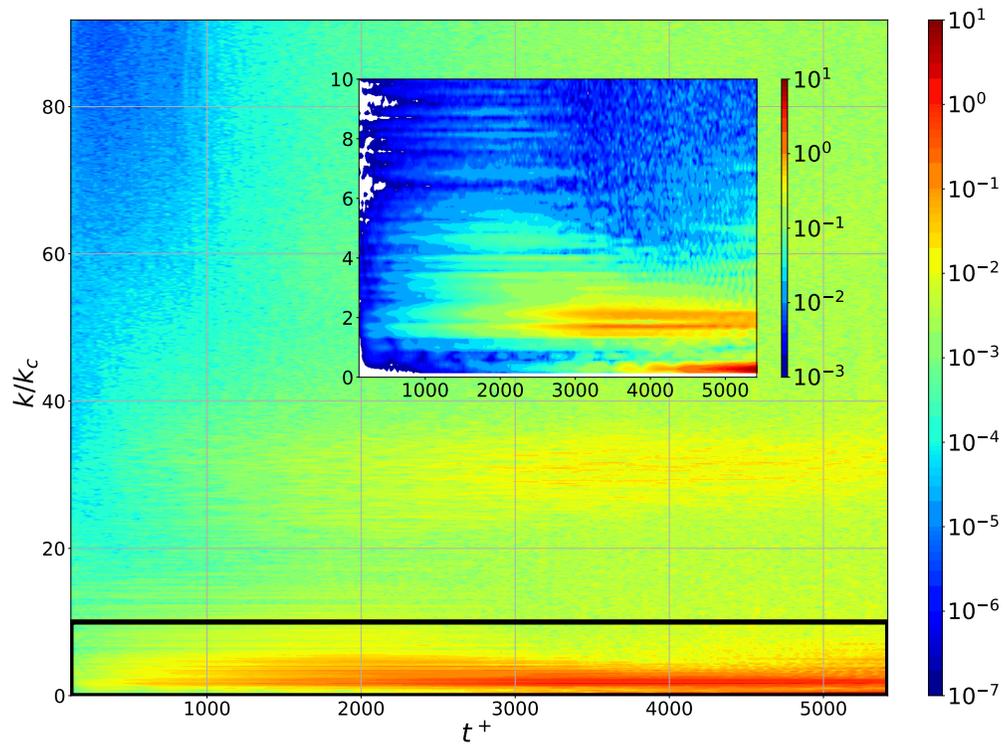


FIGURE C.5 - $\Lambda = 67 - Re_* = 1067$

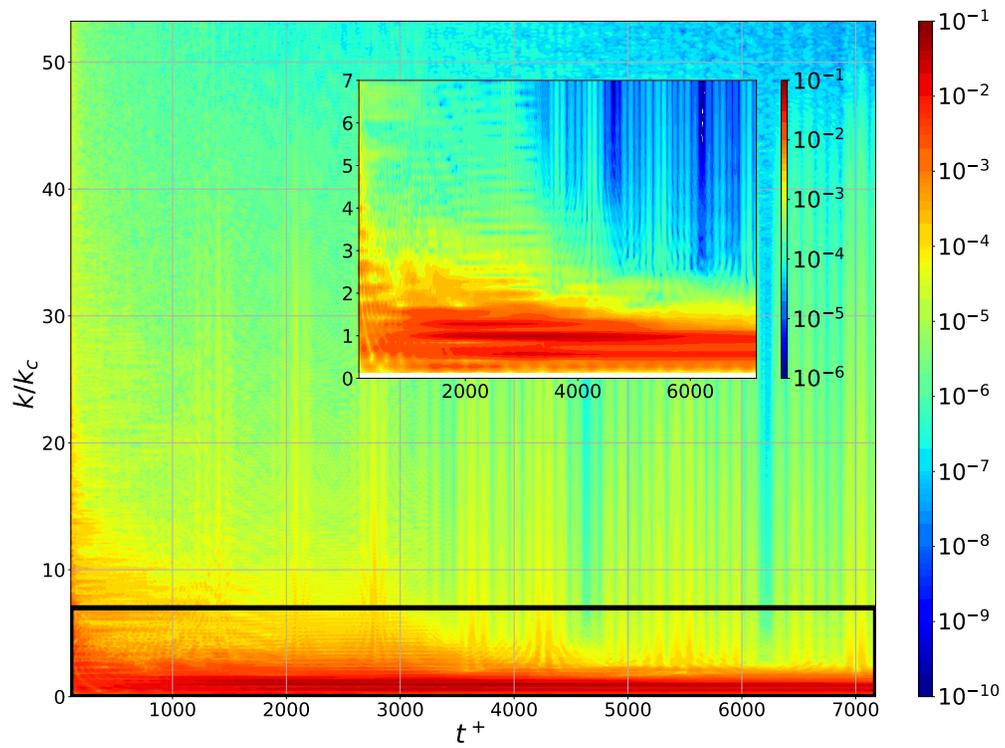
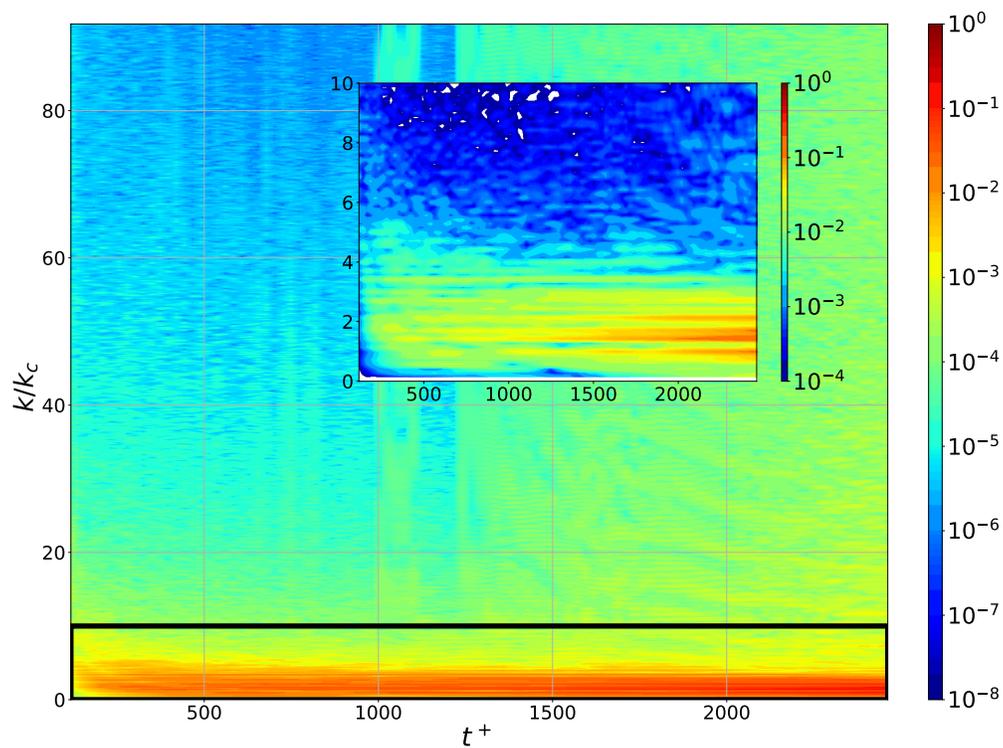
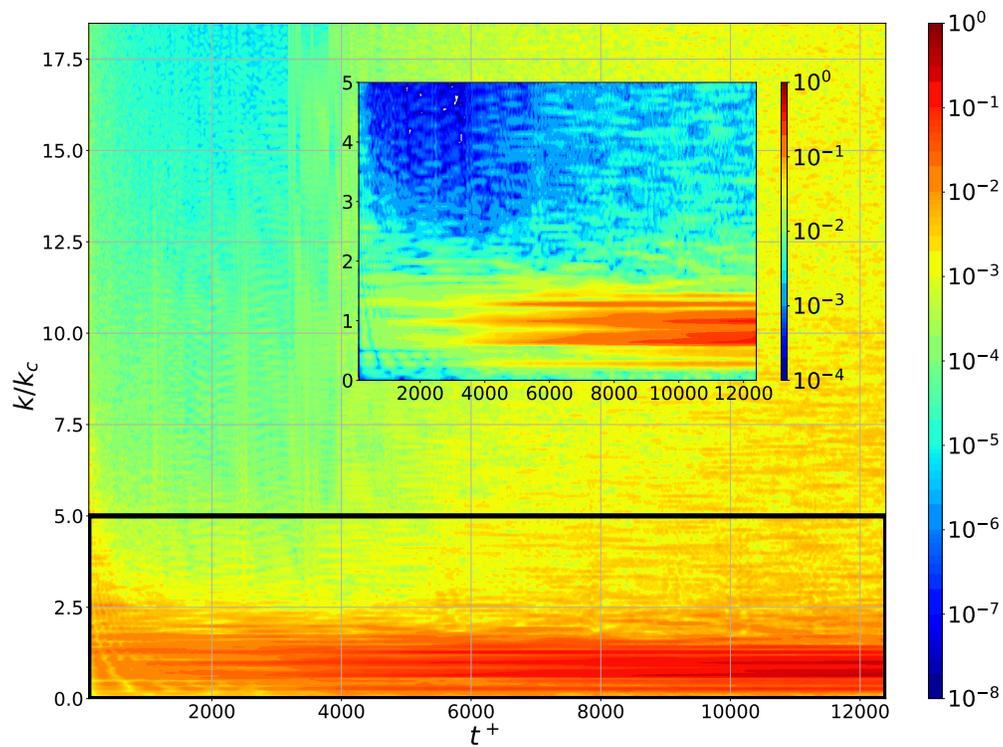


FIGURE C.6 - $\Lambda = 667 - Re_* = 613$

FIGURE C.7 - $\Lambda = 667 - Re_* = 1067$ FIGURE C.8 - $\Lambda = 800 - Re_* = 800$

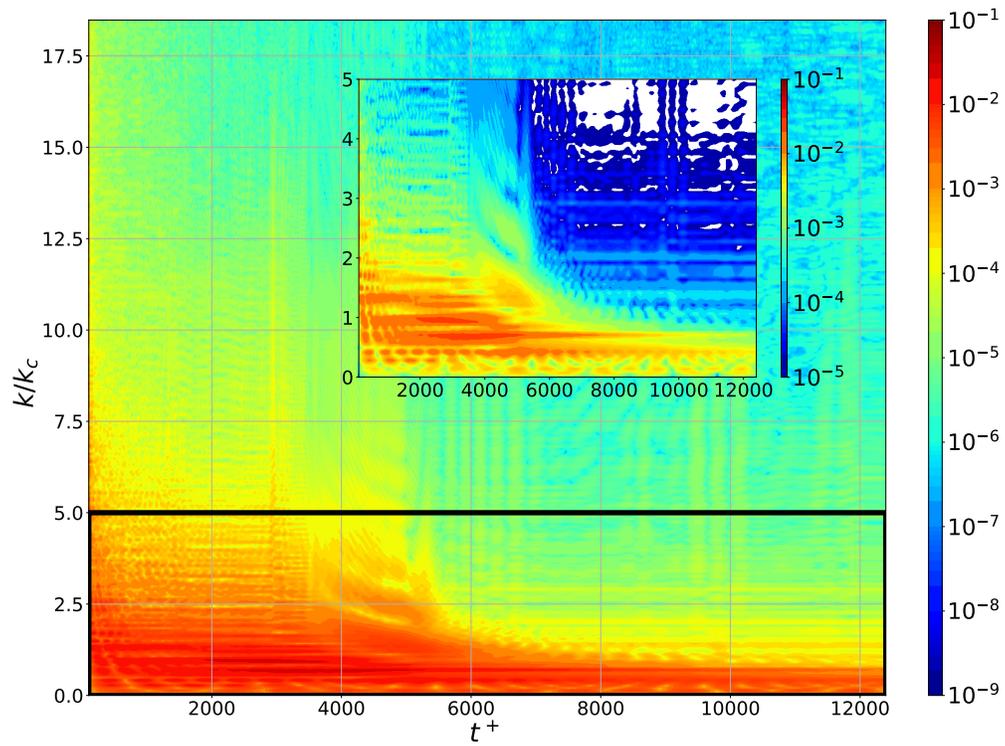


FIGURE C.9 - $\Lambda = 2000 - Re_* = 800$

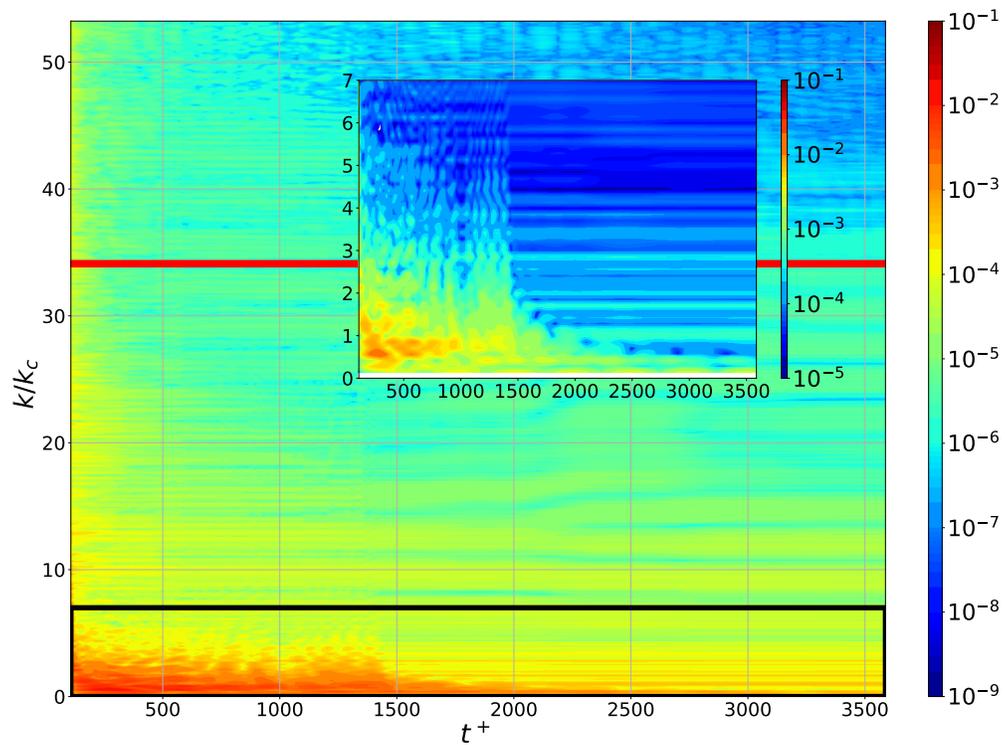
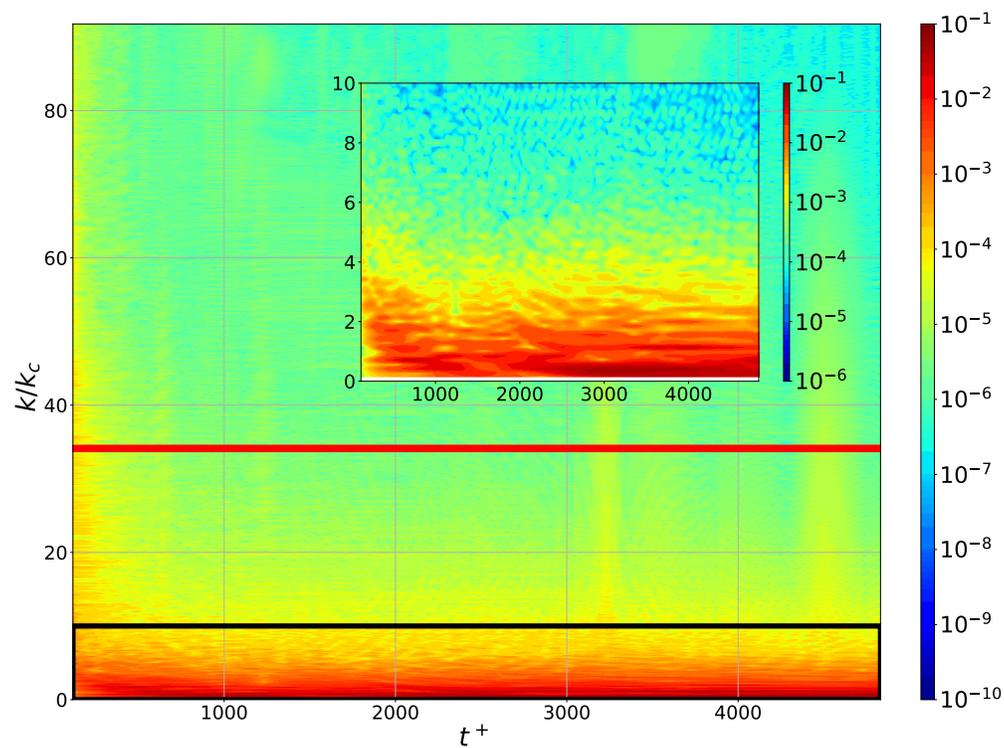
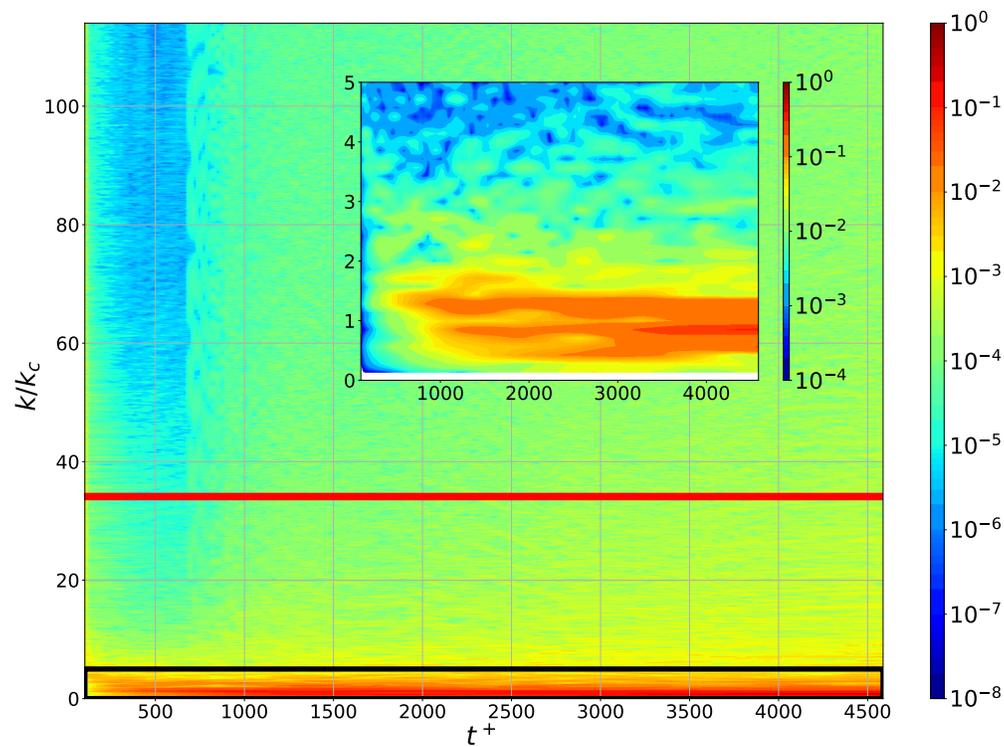


FIGURE C.10 - $\Lambda = 6667 - Re_* = 613$

FIGURE C.11 – $\Lambda = 6667 - Re_* = 1067$ FIGURE C.12 – $\Lambda = 6667 - Re_* = 1333$

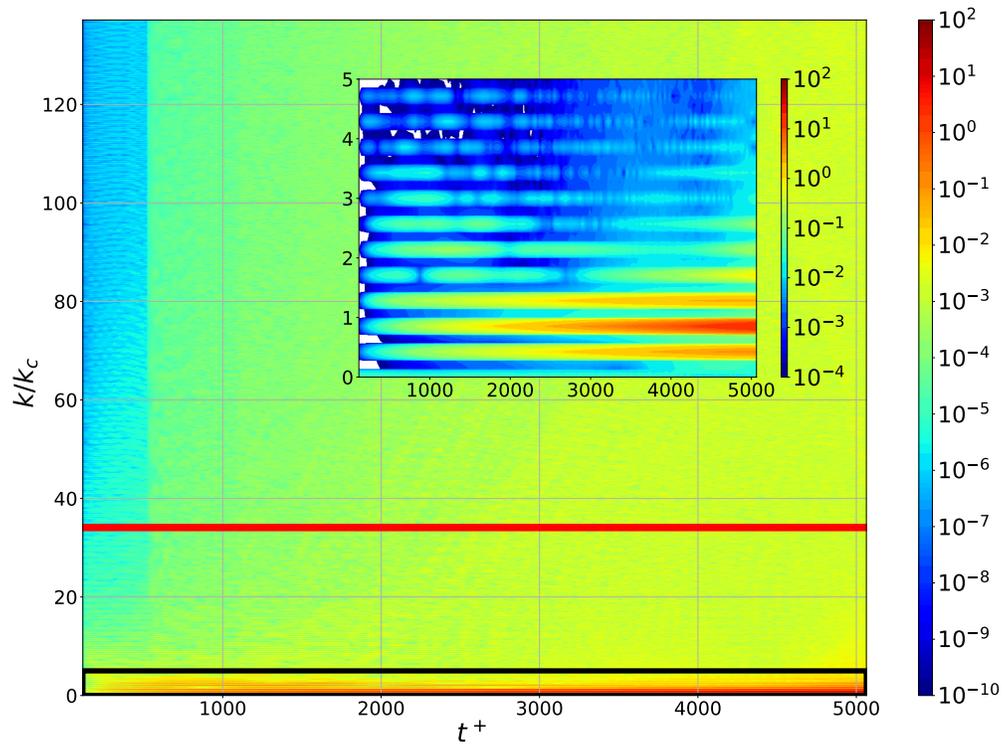


FIGURE C.13 – $\Lambda = 6667 - Re_* = 1600$

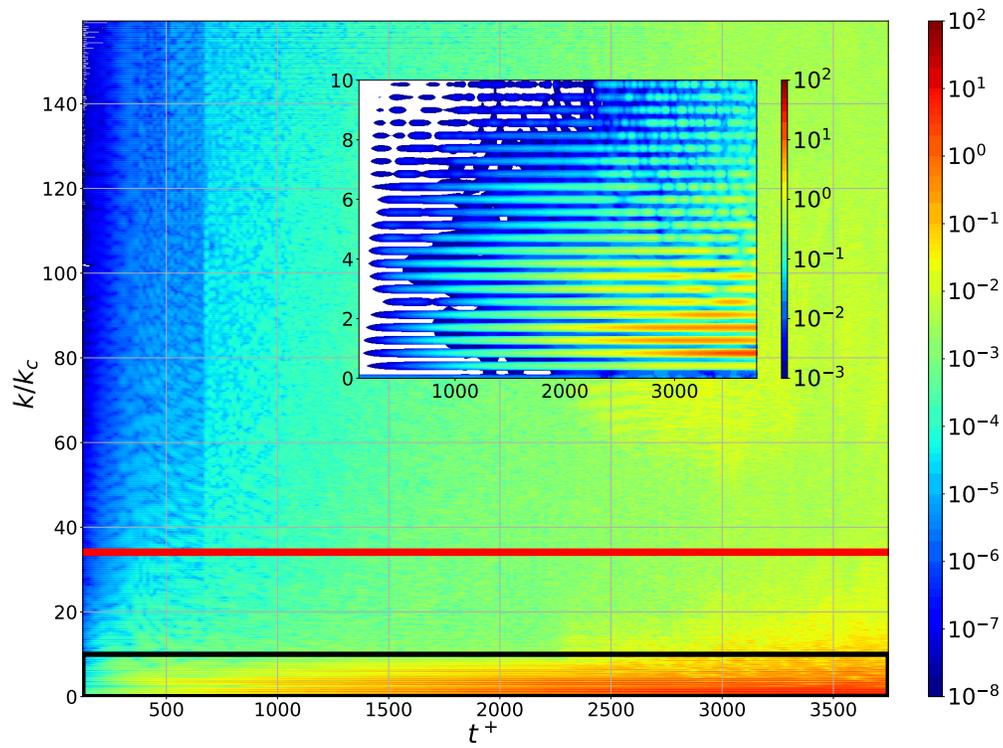


FIGURE C.14 – $\Lambda = 6667 - Re_* = 1867$

Bibliographie

- Abrams J. et Hanratty T. J.** (1985). Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface. *J. Fluid Mech.* 151, 443-455.
- Airy G. B.** (1841). *Tides and waves. Encyclopædia Metropolitana.* Mixed Sciences. Vol. 3. In Hugh James Rose; et al. (eds.), 396.
- Allmaras S. R., Johnson F. T. et Spalart P. R.** (2012). Modifications and clarifications for the implementation of the spalart-allmaras turbulence model. *Computational Fluid Dynamics*, 11.
- Aulnette M., Rabaud M. et Moisy F.** (2019). Wind-sustained viscous solitons. *Phys. Rev. Fluids* 4, 084003.
- Aulnette M., Zhang J., Rabaud M. et Moisy F.** (2022). Kelvin-Helmholtz instability and formation of viscous solitons on highly viscous liquids. *Phys. Rev. Fluids* 7, 014003.
- Ayet A. et Chapron B.** (2022). The dynamical coupling of wind-waves and atmospheric turbulence : a review of theoretical and phenomenological models. *Boundary Layer Meteorol.* 183, 1-33.
- Benjamin T. B.** (1959). Shearing flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.* 6, 161-205.
- Benjamin T. B. et Feir J. E.** (1967). The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* 27, 417-430.
- Benkenida A. et Magnaudet J.** (2000). Une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. *C.R. Acad. Sci., Ser. IIB : Mec., Phys., Chim., Astron.* 328, 25-32.
- Blanco A.** (1992). Génération de maillages orthogonaux. Mémoire de DEA. INP Toulouse.
- Bonometti T.** (2005). Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes. Thèse de doctorat. INP Toulouse.
- Boussinesq J.** (1877). *Essai sur la Théorie des Eaux Courantes.* Imprimerie Nationale.
- Brackbill J. U., Kothe D. B. et Zemach C.** (1992). A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.* 100, 335-354.
- Bradshaw P., Ferriss D. H. et Atwell N. P.** (1967). Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.* 28, 593-616.
- Buckles J., Hanratty T. J. et Adrian R. J.** (1984). Turbulent flow over large-amplitude wavy surfaces. *J. Fluid Mech.* 140, 27-44.
- Calmet I. et Magnaudet J.** (1997). Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids* 9, 438-455.
- (1998). High-Schmidt number mass transfer through turbulent gas-liquid interfaces. *Int. J. Heat Fluid Flow* 19, 522-532.

- Caulliez G. et Collard F.** (1999). Three-dimensional evolution of wind waves from gravity-capillary to short gravity range. *Eur. J. Mech. B. Fluids* 18, 389-402.
- Cess R. D.** (1958). A survey of the literature on heat transfer in turbulent tube flow. *Westinghouse Research Rep.*
- Chandrasekhar S.** (1981). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Courier Corporation. 720 p. ISBN : 978-0-486-64071-6.
- Charru F.** (2012). *Instabilités Hydrodynamiques*. Savoirs Actuels. EDP Sciences. ISBN : 978-2-7598-0110-7.
- Cherukat P., Na Y., Hanratty T. et McLaughlin J.** (1998). Direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow over a wavy wall. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 11, 109-134.
- Clauser F. H.** (1956). The Turbulent Boundary Layer. *Advances in Applied Mechanics*. Sous la dir. de H. L. Dryden et Th. von Kármán. T. 4. Elsevier, 1-51.
- Craik A. D.** (2004). The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36, 1-28.
— (2005). George gabriel stokes on water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37, 23-42.
- Crapper G. D.** (1984). *Introduction to Water Waves*. Ellis Horwood. 224 p. ISBN : 978-0-13-485863-0. Google Books : sDVvAAAACAAJ.
- Dandois J., Garnier E. et Sagaut P.** (2007). Numerical simulation of active separation control by a synthetic jet. *J. Fluid Mech.* 574, 25-58.
- Davis R. E.** (1970). On the turbulent flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.* 42, 721-731.
- De Angelis V., Lombardi P. et Banerjee S.** (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall. *Phys. Fluids* 9, 2429-2442.
- Deike L., Melville W. K. et Popinet S.** (2016). Air entrainment and bubble statistics in breaking waves. *J. Fluid Mech.* 801, 91-129.
- Deike L., Popinet S. et Melville W. K.** (2015). Capillary effects on wave breaking. *J. Fluid Mech.* 769, 541-569.
- Del Álamo J. C. et Jiménez J.** (2003). Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys. Fluids* 15, L41-L44.
- Enstad L. I., Nagaosa R. et Alendal G.** (2006). Low shear turbulence structures beneath stress-driven interface with neutral and stable stratification. *Phys. Fluids* 18, 055106.
- Franceschini L., Sipp D. et Marquet O.** (2020). Mean-flow data assimilation based on minimal correction of turbulence models : Application to turbulent high Reynolds number backward-facing step. *Phys. Rev. Fluids* 5, 094603.
- Francis J. R. D.** (1954a). LXIX. Correspondence. Wave motions on a free oil surface. *Philos. Mag.* 1, 685-688.
— (1954b). LXXVI. Wave motions and the aerodynamic drag on a free oil surface. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 45, 695-702.
- Frederick K. A. et Hanratty T. J.** (1988). Velocity measurements for a turbulent nonseparated flow over solid waves. *Exp. Fluids* 6, 477-486.
- Fulgosi M., Lakehal D., Banerjee S. et Angelis V. D.** (2003). Direct numerical simulation of turbulence in a sheared air-water flow with a deformable interface. *J. Fluid Mech.* 482, 319-345.
- Gent P. R. et Taylor P. A.** (1976). A numerical model of the air flow above water waves. *J. Fluid Mech.* 77, 105-128.

- Geva M. et Shemer L.** (2022). Excitation of initial waves by wind : a theoretical model and its experimental verification. *Phys. Rev. Lett.* 128, 124501.
- Gomit G.** (2013). Développement de techniques de mesure de surfaces libres par moyens optiques : application à l'analyse de l'écoulement généré par un modèle de bateau en bassin des carènes. Thèse de doctorat. Université de Poitiers.
- Gottfredi J. C. et Jameson G. J.** (1970). The growth of short waves on liquid surfaces under the action of a wind. *Proc. R. Soc. London A* 319, 373-397.
- Hao X. et Shen L.** (2019). Wind-wave coupling study using LES of wind and phase-resolved simulation of nonlinear waves. *J. Fluid Mech.* 874, 391-425.
- (2022). Large-eddy simulation of gusty wind turbulence over a travelling wave. *J. Fluid Mech.* 946, A8.
- Henn D. S. et Sykes R. I.** (1999). Large-eddy simulation of flow over wavy surfaces. *J. Fluid Mech.* 383, 75-112.
- Hidy G. M. et Plate E. J.** (1966). Wind action on water standing in a laboratory channel. *J. Fluid Mech.* 26, 651-687.
- Hirt C. W. et Nichols B. D.** (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 39, 201-225.
- Hoyas S. et Jiménez J.** (2006). Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$. *Phys. Fluids* 18, 011702.
- Husain N. T., Hara T., Buckley M. P., Yousefi K., Veron F. et Sullivan P. P.** (2019). Boundary layer turbulence over surface waves in a strongly forced condition : les and observation. *J. Phys. Oceanogr.* 49, 1997-2015.
- Jähne B. et Riemer K. S.** (1990). Two-dimensional wave number spectra of small-scale water surface waves. *J. Geophys. Res. : Oceans* 95, 11531-11546.
- Janssen T. T. et Herbers T. H. C.** (2009). Nonlinear wave statistics in a focal zone. *J. Phys. Oceanogr.* 39, 1948-1964.
- Jovic S. et Driver D. M.** (1994). Backward-Facing Step Measurements at Low Reynolds Number, $Re_h=5000$. *NASA Techn. Rep.* 108807.
- Kahma K. K. et Donelan M. A.** (1988). A laboratory study of the minimum wind speed for wind wave generation. *J. Fluid Mech.* 192, 339-364.
- Kawai S.** (1979). Generation of initial wavelets by instability of a coupled shear flow and their evolution to wind waves. *J. Fluid Mech.* 93, 661.
- Kays W. M. et Moffat R. J.** (1975). *The Behavior of Transpired Turbulent Boundary Layers*.
- Kharif C. et Pelinovsky E.** (2003). Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B. Fluids* 22, 603-634.
- Kinsman B.** (1965). *Wind Waves, Their Generation and Propagation on the Ocean Surface*. Prentice-Hall. 712 p. Google Books : xKR0nQEACAAJ.
- Komen G. J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S. et Janssen P. A. E. M.** (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*. Cambridge Univ. Press. 554 p. ISBN : 978-0-521-47047-6. Google Books : 23VjQgAACAAJ.
- Komori S., Kurose R., Iwano K., Ukai T. et Suzuki N.** (2010). Direct numerical simulation of wind-driven turbulence and scalar transfer at sheared gas-liquid interfaces. *J. Turbul.* 11, 1-10.

- Kunishi H.** (1963). An Experimental Study on the Generation and Growth of Wind Waves. T. 61. Institut Kyoto Univ., 1-41.
- Labourasse E., Lacanette D., Toutant A., Lubin P., Vincent S., Lebaigue O., Caltagirone J. .- et Sagaut P.** (2007). Towards large eddy simulation of isothermal two-phase flows : Governing equations and a priori tests. *Int. J. Multiphase Flow* 33, 1-39.
- Lakehal D., Meier M. et Fulgosi M.** (2002). Interface tracking towards the direct simulation of heat and mass transfer in multiphase flows. *Int. J. Heat Fluid Flow* 23, 242-257.
- Lam K. et Banerjee S.** (1992). On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow. *Phys. Fluids A* 4, 306-320.
- Lamb H.** (1932). *Hydrodynamics. 6th Edition.* Cambridge Univ. Press.
- Larson T. R. et Wright J. W.** (1975). Wind-generated gravity-capillary waves : laboratory measurements of temporal growth rates using microwave backscatter. *J. Fluid Mech.* 70, 417-436.
- Launder B. E., Reece G. J. et Rodi W.** (1975). Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* 68, 537-566.
- Le H., Moin P. et Kim J.** (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* 330, 349-374.
- LeBlond P. H. et Mainardi F.** (1987). The viscous damping of capillary - gravity waves. *Acta Mech.* 68, 203-222.
- Li J. C., Hui W. H. et Donelan M. A.** (1988). Effects of Velocity Shear on the Stability of Surface Deep Water Wave Trains. *Nonlinear Water Waves.* Sous la dir. de K. Horikawa et H. Maruo. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer, 213-220. ISBN : 978-3-642-83331-1.
- Li T. et Shen L.** (2022). The principal stage in wind-wave generation. *J. Fluid Mech.* 934, A41.
- Lighthill M. J.** (1962). Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind. *J. Fluid Mech.* 14, 385-398.
- Lin M.-Y., Moeng C.-H., Tsai W.-T., Sullivan P. P. et Belcher S. E.** (2008). Direct numerical simulation of wind-wave generation processes. *J. Fluid Mech.* 616, 1-30.
- Lindsay K. A.** (1984). The Kelvin-Helmholtz instability for a viscous Interface. *Acta Mech.* 52, 51-61.
- Liu S., Kermani A., Shen L. et Yue D. K. P.** (2009). Investigation of coupled air-water turbulent boundary layers using direct numerical simulations. *Phys. Fluids* 21, 062108.
- Lombardi P., De Angelis V. et Banerjee S.** (1996). Direct numerical simulation of near-interface turbulence in coupled gas-liquid flow. *Phys. Fluids* 8, 1643-1665.
- Longuet-Higgins M. S.** (1978a). The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water ii. subharmonics. *Proc. R. Soc. London A* 360, 489-505. JSTOR : 79545.
- (1978b). The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. i. superharmonics. *Proc. R. Soc. London A* 360, 471-488. JSTOR : 79544.
- Maass C. et Schumann U.** (1994). Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Wavy Boundary. *Direct and Large-Eddy Simulation I.* Sous la dir. de P. R. Voke, L. Kleiser et J.-P. Chollet. T. 26. Dordrecht : Springer Netherlands, 287-297. ISBN : 978-94-010-4434-9 978-94-011-1000-6.
- Miles J.** (1993). Surface-wave generation revisited. *J. Fluid Mech.* 256, 427-441.
- (1996). Surface-wave generation : a viscoelastic model. *J. Fluid Mech.* 322, 131-145.
- Miles J. W.** (1959a). On the generation of surface waves by shear flows. Part 2. *J. Fluid Mech.* 6, 568-582.

- (1957). On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.* 3, 185-204.
- (1959b). On the generation of surface waves by shear flows Part 3. Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech.* 6, 583-598.
- (1960). On the generation of surface waves by turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* 7, 469-478.
- (1962). On the generation of surface waves by shear flows. Part 4. *J. Fluid Mech.* 13, 433-448.
- (1967). On the generation of surface waves by shear flows. Part 5. *J. Fluid Mech.* 30, 163-175.
- Mitsuyasu H.** (2015). Reminiscences on the study of wind waves. *Proc. Jpn. Acad. Ser. B, Phys. Biol. Sci.* 91, 109-130. pmid : 25864467.
- Moisy F., Rabaud M. et Salsac K.** (2009). A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Exp. Fluids* 46, 1021-1036.
- Mostert W. et Deike L.** (2020). Inertial energy dissipation in shallow-water breaking waves. *J. Fluid Mech.* 890, A12.
- Nwogu O. G.** (2009). Interaction of finite-amplitude waves with vertically sheared current fields. *J. Fluid Mech.* 627, 179-213.
- Ó Náraigh L., Spelt P. D. M. et Zaki T. A.** (2011). Turbulent flow over a liquid layer revisited : multi-equation turbulence modelling. *J. Fluid Mech.* 683, 357-394.
- Okuda K., Kawai S. et Toba Y.** (1977). Measurement of skin friction distribution along the surface of wind waves. *J. Oceanogr. Soc. Jpn.* 33, 190-198.
- Orszag S. A.** (1971). Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.* 50, 689-703.
- Paquier A., Moisy F. et Rabaud M.** (2015). Surface deformations and wave generation by wind blowing over a viscous liquid. *Phys. Fluids* 27, 122103.
- (2016). Viscosity effects in wind wave generation. *Phys. Rev. Fluids* 1, 083901.
- Peregrine D. H. et Jonsson I. G.** (1983). *Interaction of Waves and Currents*. Fort Belvoir, VA : Defense Technical Information Center.
- Phillips O. M.** (1957). On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.* 2, 417-445.
- Pirozzoli S.** (2014). Revisiting the mixing-length hypothesis in the outer part of turbulent wall layers : mean flow and wall friction. *J. Fluid Mech.* 745, 378-397.
- Plant W. J.** (1982). A relationship between wind stress and wave slope. *J. Geophys. Res. : Oceans* 87, 1961-1967.
- Pletcher R. H.** (1978). Prediction of incompressible turbulent separating flow. *J. Fluids Eng.* 100, 427-433.
- Prandtl L.** (1925). 7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *ZAMM - J of Appl. Math. and Mech.* 5, 136-139.
- (1945). *Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz*. Nachri. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Klasse. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht. S. [6] - 19.
- Reynolds W. C. et Hussain A. K. M. F.** (1972). The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* 54, 263-288.
- Reynolds W. C. et Tiederman W. G.** (1967). Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory. *J. Fluid Mech.* 27, 253-272.
- Saffman P. G. et Wilcox D. C.** (1974). Turbulence-model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA Journal* 12, 541-546.
- Sano M. et Tamai K.** (2016). A universal transition to turbulence in channel flow. *Nat. Phys.* 12, 249-253.

- Scardovelli R. et Zaleski S.** (1999). Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31, 567-603.
- Schlichting H. et Gersten K.** (2017). *Boundary-Layer Theory*. 9^e éd. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. ISBN : 978-3-662-52917-1.
- Segunda V. M., Ormiston S. J. et Tachie M. F.** (2016). Numerical analysis of turbulent flow over a wavy wall in a channel. Proc. ASME 2016 Fluids Eng. Div. Summer Meet. T. 1A. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- (2018). Experimental and numerical investigation of developing turbulent flow over a wavy wall in a horizontal channel. *Eur. J. Mech. B. Fluids* 68, 128-143.
- Spalart P. et Allmaras S.** (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th Aerospace Sci. Meet. and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- (1994). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aérospatiale* 1, 5-21.
- Spalart P. R. et Shur M.** (1997). On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. *Aerosp. Sci. Technol.* 1, 297-302.
- Speziale C. G., Sarkar S. et Gatski T. B.** (1991). Modelling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.* 227, 245-272.
- Stewart R. W.** (1974). The air-sea momentum exchange. *Boundary Layer Meteorol.* 6, 151-167.
- Stewart R. H.** (1970). Laboratory studies of the velocity field over deep-water waves. *J. Fluid Mech.* 42, 733-754.
- Stokes G. G.** (1847). On the theory of oscillatory waves. *Trans. Camb. Philos. Soc.*
- Stuck M., Olazabal-Loumé M., Couzi J. et Chedeveigne F.** (2022). On the role of turbulence in scallops formation on the ablative heat shield of a reentry vehicle. *2nd.Int. Conf. Flight Vehicules, Aerothermodynamics and Re-entry Missions Eng. (FAR 2022)*. Heilbronn, Germany : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 9.
- Su M.-Y., Bergin M., Marler P. et Myrick R.** (1982). Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains. *J. Fluid Mech.* 124, 45-72.
- Sullivan P. P., McWilliams J. C. et Moeng C.-H.** (2000). Simulation of turbulent flow over idealized water waves. *J. Fluid Mech.* 404, 47-85.
- Sullivan P. P., McWilliams J. C. et Patton E. G.** (2014). Large-eddy simulation of marine atmospheric boundary layers above a spectrum of moving waves. *J. Atmos. Sci.* 71, 4001-4027.
- Sussman M. et Puckett E. G.** (2000). A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.* 162, 301-337.
- Sutherland A. J.** (1968). Growth of spectral components in a wind-generated wave train. *J. Fluid Mech.* 33, 545-560.
- Thorsness C. B., Morrisroe P. E. et Hanratty T. J.** (1978). A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave. *Chem. Eng. Sci.* 33, 579-592.
- Townsend A. A.** (1972). Flow in a deep turbulent boundary layer over a surface distorted by water waves. *J. Fluid Mech.* 55, 719-735.
- Tryggvason G., Scardovelli R. et Zaleski S.** (2011). *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows*. Cambridge Univ. Press. ISBN : 978-0-511-97526-4.

- Tsai W.-T.** (1998). A numerical study of the evolution and structure of a turbulent shear layer under a free surface. *J. Fluid Mech.* 354, 239-276.
- Tsai W.-T., Chen S.-M. et Moeng C.-H.** (2005). A numerical study on the evolution and structure of a stress-driven free-surface turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* 545, 163-192.
- Unverdi S. O. et Tryggvason G.** (1992). A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.* 100, 25-37.
- Ursell** (1956). *Wave Generation by Wind*. 6^e éd. In *Surveys in Mechanics*. Cambridge Univ. Press.
- Van Driest E. R.** (1956). On Turbulent Flow Near a Wall. *J. Aeronaut. Sci* 23, 1007-1011.
- Vincent S., Larocque J., Lacanette D., Toutant A., Lubin P. et Sagaut P.** (2008). Numerical simulation of phase separation and a priori two-phase LES filtering. *Comput. Fluids* 37, 898-906.
- Wilcox D. C.** (1989). Wall matching, a rational alternative to wall functions. 27th Aerospace Sci. Meet. Heilbronn, Germany.
- Wilcox D. C.** (2006). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries. 522 p. ISBN : 978-1-928729-08-2.
- Wilson W. S., Banner M. L., Flower R. J., Michael J. A. et Wilson D. G.** (1973). Wind-induced growth of mechanically generated water waves. *J. Fluid Mech.* 58, 435-460.
- Wu J. et Deike L.** (2021). Wind wave growth in the viscous regime. *Phys. Rev. Fluids* 6, 094801.
- Wu J., Popinet S. et Deike L.** (2022). Revisiting wind wave growth with fully coupled direct numerical simulations. *J. Fluid Mech.* 951, A18.
- Yang D., Meneveau C. et Shen L.** (2013). Dynamic modelling of sea-surface roughness for large-eddy simulation of wind over ocean wavefield. *J. Fluid Mech.* 726, 62-99.
- Yang D. et Shen L.** (2010). Direct-simulation-based study of turbulent flow over various waving boundaries. *J. Fluid Mech.* 650, 131-180.
- (2011a). Simulation of viscous flows with undulatory boundaries : Part II. Coupling with other solvers for two-fluid computations. *J. Comput. Phys.* 230, 5510-5531.
- (2011b). Simulation of viscous flows with undulatory boundaries. Part I : Basic solver. *J. Comput. Phys.* 230, 5488-5509.
- Yang Z., Deng B.-Q. et Shen L.** (2018). Direct numerical simulation of wind turbulence over breaking waves. *J. Fluid Mech.* 850, 120-155.
- Al-Zanaidi M. A. et Hui W. H.** (1984). Turbulent airflow over water waves—a numerical study. *J. Fluid Mech.* 148, 225-246.
- Zhang Q. et Yang Y.** (2013). A new simpler rotation/curvature correction method for Spalart–Allmaras turbulence model. *Chin. J. Aeronaut.* 26, 326-333.
- Zhang X. et Cox C. S.** (1994). Measuring the two-dimensional structure of a wavy water surface optically : A surface gradient detector. *Exp. Fluids* 17, 225-237.
- Zilker D. P., Cook G. W. et Hanratty T. J.** (1977). Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows. *J. Fluid Mech.* 82, 29-51.
- Zilker D. P. et Hanratty T. J.** (1979). Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows. *J. Fluid Mech.* 90, 257-271.
- Zonta F., Soldati A. et Onorato M.** (2015). Growth and spectra of gravity–capillary waves in counter-current air/water turbulent flow. *J. Fluid Mech.* 777, 245-259.

Table des figures

1.1	Vitesse de phase des ondes de surface en eau profonde : en rouge les ondes gravito-capillaires, en bleu les ondes capillaires ($\epsilon_T \gg 1$), et en noir les ondes gravitaires ($\epsilon_T \ll 1$)	3
1.2	Profil d'onde d'après (1.2), tiré de <i>Stokes (1847)</i>	4
1.3	Vitesse de phase des ondes gravito-capillaires en profondeur infinie déterminée par <i>LeBlond et Mainardi (1987)</i> , pour différents liquides visqueux.	8
1.4	Nombres d'onde sélectionnés par la résonance décrite dans le modèle de Phillips (figure reprise de <i>Phillips (1957)</i>). Les points A et B correspondent aux deux modes capillaire et gravitaire excités dans la direction du vent moyen ($\alpha = 0$). A mesure que α augmente, son cosinus diminue et la courbe de vitesse $U_c(k)$ est décalée vers le bas, jusqu'à devenir tangente à la courbe $c(k)$ pour $\alpha = \alpha_c$. Au-delà les deux courbes sont dissociées et il n'y a plus de mode excitable par la résonance.	11
1.5	Amplitude saturée des déformations de surface en fonction de la vitesse de frottement, pour des liquides de viscosité variable (couleurs). <i>RW</i> désigne les ondes régulières, et <i>SW</i> les solitons visqueux. Tirée de <i>Paquier et al. (2016)</i>	19
1.6	Vue de profil des solitons visqueux. Tirée de <i>Aulnette et al. (2019)</i>	20
1.7	Amplitude des solitons visqueux en fonction du cisaillement local pour différentes vitesses de vent. Tirée de <i>Aulnette et al. (2019)</i>	21
1.8	Distribution du cisaillement pariétal au-dessus d'une paroi ondulée en l'absence de décollement sur une longueur d'onde, tirée de <i>Zilker et al. (1977)</i> . Ici $2a/\lambda = 0.0125$, $Re = 9680$, $k^+ = 0.00584$ et $a^+ = 6.7$. Les points sont des données expérimentales, la courbe en trait plein représente le premier harmonique.	23
1.9	Amplitude de la partie fluctuante du cisaillement au-dessus d'une paroi ondulée en l'absence de décollement, en fonction du nombre d'onde adimensionné k^+ . Tiré de <i>Abrams et Hanratty (1985)</i>	25
1.10	Déphasage de la partie fluctuante du cisaillement au-dessus d'une paroi ondulée en l'absence de décollement, en fonction du nombre d'onde adimensionné k^+ . Tiré de <i>Abrams et Hanratty (1985)</i>	26
2.1	Illustration de la méthode <i>boundary-fitted</i>	31
2.2	Schéma de principe de la méthode <i>VOF</i> . Le taux de présence associé à une phase vaut 1 dans les cellules entièrement remplies par cette phase, 0 dans les autres phases, et prend des valeurs intermédiaires dans les cellules traversées par l'interface.	37

2.3	Évolution de la viscosité turbulente en canal d’après le modèle de Cess-Reynolds-Tiederman.	46
2.4	Distribution de viscosité turbulente à l’aval d’une marche descendante lisse avec décollement. Tiré de <i>Franceschini et al. (2020)</i> , d’après une DNS de <i>Dandois et al. (2007)</i> .	47
3.1	Lignes de courant à l’arrière d’un obstacle profilé obtenues grâce au modèle de Spalart-Allmaras (figure tirée de <i>Spalart et Allmaras (1994)</i>)	52
3.2	Fonction correctrice f_{v2} dans le modèle de Spalart-Allmaras. En orange l’intervalle sur lequel $f_{v2} < 0$.	54
3.3	Correction de la vorticité modifiée. Tirée de <i>Allmaras et al. (2012)</i>	54
3.4	Évolution de la fonction de paroi f_w d’après <i>Spalart et Allmaras (1994)</i>	55
3.5	Schéma d’un maillage bidimensionnel décalé	56
3.6	Méthode de calcul de la distance à la paroi la plus proche d dans le cas d’une paroi non plane. En rouge, la distance au voisin l , en vert la distance recherchée.	58
3.7	Profils de vitesse en demi canal ouvert : comparaison entre les profils de DNS de référence (en bleu), et ceux obtenus après calculs sous JADIM (en rouge). Le modèle de Spalart-Allmaras est activé. Les premières cellules situées à $y^+ < 10$ sont indiquées par des points.	61
3.8	Profils de viscosité turbulente obtenus avec les modèles de Reynolds & Tiederman et de Spalart-Allmaras (écoulement en demi-canal pour $Re_* = 1000$)	62
3.9	Profil de Spalart-Allmaras en proche paroi (écoulement en demi-canal pour $Re_* = 1000$)	62
3.10	Configuration de l’écoulement derrière une marche descendante. X_r représente l’emplacement du recollement de la couche limite suite au décollement provoqué par la marche. Tiré de <i>Le et al. (1997)</i> .	63
3.11	Maillage de la marche descendante. Les frontières de la marche sont indiquées en rouge.	64
3.12	Lignes de courant à l’aval de la marche descendante	64
3.13	Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses en aval de la marche. Comparaison entre les profils expérimentaux (en vert), de DNS (en bleu), et ceux obtenus après calculs sous JADIM (en rouge).	65
3.14	Grandeurs pariétales en aval de la marche	66
3.15	Positions du décollement et du recollement pour l’écoulement au-dessus d’une paroi ondulée à grande amplitude. Comparaisons de <i>Segunda et al. (2016)</i> entre différents modèles de turbulence, la LES de <i>Henn et Sykes (1999)</i> , et les données expérimentales de <i>Buckles et al. (1984)</i> (ces deux derniers ont été entourés en rouge). Les entrées <i>SST</i> , $k - \omega$ et <i>BSL</i> désignent des modèles de viscosité turbulente à deux équations, tandis que <i>SMC-ω</i> et <i>SMC-BSL</i> désignent des modèles de transport des contraintes turbulentes basés sur ω .	68
3.16	Configuration de l’écoulement au-dessus d’une paroi ondulée (<i>Henn et Sykes (1999)</i>).	69
3.17	Maillages curvilignes pour étudier l’écoulement turbulent au-dessus d’une paroi ondulée.	70
3.18	Profil de vitesse horizontale moyenné le long d’une longueur d’onde ($a/\lambda = 0.0155$). En rouge le profil calculé avec JADIM. En bleu les résultats de LES de <i>Henn et Sykes (1999)</i> , en vert les données expérimentales de <i>Zilker et al. (1977)</i> . En noir, le profil obtenu pour un canal plan. Les lignes en pointillés sont des régressions linéaires sur l’intervalle $40 < z^+ < 200$.	72

3.19	Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses le long d'une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.0155$). Nous avons indiqué les positions $x/\lambda \leq 0.5$ avec des lignes en trait fin et des symboles, et les positions $x/\lambda > 0.5$ avec des lignes en trait épais et des symboles fermés. Le profil moyenné sur une longueur d'onde est indiqué sur chaque sous-figure par une ligne en tirets noirs.	73
3.20	Grandeurs pariétales sur une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.0155$). Le code couleur est le même que sur les figures précédentes de profils de vitesse. Les points rouges correspondent au modèle SARC.	75
3.21	Evolution du déphasage (en haut) et de l'amplitude (en bas) du cisaillement pariétal avec k^+ . Les symboles carrés sont les données expérimentales d' <i>Abrams et Hanratty (1985)</i> . La courbe correspond au modèle de relaxation de ces derniers. Les symboles ronds sont les résultats des simulations avec JADIM et le modèle de SA.	76
3.22	Lignes de courant au-dessus d'une paroi ondulée à grande amplitude	77
3.23	Distribution de pression au-dessus d'une paroi ondulée à grande amplitude. La pression est adimensionnée par $\frac{1}{2}\rho U_b^2$.	78
3.24	Profils de vitesse horizontale à différentes abscisses le long d'une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.1$) En bleu les résultats de LES de <i>Henn et Sykes (1999)</i> , en vert les données expérimentales de <i>Buckles et al. (1984)</i> , en rouge les profils calculés avec JADIM.	78
3.25	Grandeurs pariétales sur une longueur d'onde ($a/\lambda = 0.1$). Le code couleur est le même que sur les figures précédentes de profils de vitesse. Les points rouges correspondent au modèle SARC.	79
4.1	Illustration de la méthode SLIC pour interpolation de l'interface	82
4.2	Exemple de position interpolée z_s . La courbe $z_s(x)$ est indiquée en vert. Les autres courbes sont des courbes de niveau de C , dont les valeurs sont indiquées sur la figure. Les lignes horizontales représentent les lignes du maillage pour les nœuds de pression.	83
4.3	Schéma explicatif de l'algorithme de calcul de la distance à l'interface	85
4.4	Interface multivaluée permettant de tester l'algorithme de calcul de la distance à l'interface.	87
4.5	Distance à une interface multivaluée : à gauche la distance théorique, à droite la distance calculée avec l'algorithme implémenté dans JADIM.	87
4.6	Profil de vitesse composite ($Re_* = 800$, $\Lambda = 67$). En bleu le profil de Poiseuille dans le liquide, en rouge le profil turbulent dans l'air.	92
4.7	Évolution temporelle du moment d'ordre 2 de l'élévation de surface pour $Re_* = 800$ et $\Lambda = 67$ (bleu), 800 (vert) et 2000 (rouge). La perturbation initiale est harmonique.	94
4.8	Évolution temporelle du moment d'ordre 2 de l'élévation de surface pour $Re_* = 800$ et $\Lambda = 67$ (bleu), 800 (vert) et 2000 (rouge). Perturbation initiale de type bruit blanc.	96
5.1	Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 228$.	99
5.2	Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 453$.	99
5.3	Spectre temporel de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 453$.	100
5.4	Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 67$ et Re_* variable. $Re_* = 613$ en violet, $Re_* = 800$ en bleu foncé, et $Re_* = 1067$ en bleu clair.	101
5.5	Évolution temporelle de ζ_{rms} pour Λ et Re_* variables. En bleu $\Lambda = 67$.	103

5.6	Évolution temporelle de ζ_{rms} pour $\Lambda = 6667$ et Re_* variable. $Re_* = 613$ en violet, $Re_* = 1067$ en bleu, $Re_* = 1333$ en vert, $Re_* = 1600$ en orange, et $Re_* = 1867$ en rouge.	104
5.7	Lignes de courant dans le référentiel fixe pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 800$. Les couleurs correspondent au taux de présence, l'air en bleu et le liquide en rouge.	108
5.8	Lignes de courant dans le référentiel fixe pour $\Lambda = 6667$ et $Re_* = 1600$, à $t^+ = 5063$	108
5.9	Amplitude des déformations de l'interface pour deux liquides environ 10 fois plus visqueux que l'eau. En haut, la distribution spatiale au dernier instant de la simulation. En bas, un diagramme spatio-temporel montrant l'évolution de l'amplitude des déformations à chaque abscisse au cours du temps.	109
5.10	Spectre instantané pour $\Lambda = 67$ et $Re_* = 800$. En bleu à $t^+ = 2004$, en orange à $t^+ = 5992$	112
5.11	Spectres instantanés pour deux liquides visqueux à instants différents. En rouge le cas \mathcal{L}_{12} pour $Re_* = 800$, en bleu le cas \mathcal{L}_{10} pour $Re_* = 1067$	113
5.12	Spectre instantané pour $\Lambda = 6667$ et $Re_* = 1600$ à $t^+ = 5005$	114
5.13	$\Lambda = 67 - Re_* = 228$	116
5.14	$\Lambda = 67 - Re_* = 800$	116
5.15	$\Lambda = 800 - Re_* = 800$	117
5.16	$\Lambda = 6667 - Re_* = 1600$	117
5.17	Évolution temporelle de l'énergie du mode dominant pour chaque simulation de croissance de vagues de vent. La droite en rouge indique la régression linéaire utilisé pour calculer les taux de croissance. Pour chaque courbe, le premier nombre indique le nombre de Reynolds Re_* , et le second le rapport des viscosités Λ	119
5.18	Taux de croissance brut du mode fondamental pour chaque simulation réalisée. Les lignes en pointillés indiquent l'encadrement de <i>Plant (1982)</i> ; la ligne en trait plein est la médiane de cet encadrement. La ligne la plus haute a été calculée à partir de (5.9) avec $\beta = 0.75$. Les couleurs correspondent au différents liquides : \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_{10} , \mathcal{L}_{12} , \mathcal{L}_{30} et \mathcal{L}_{100} . Les symboles représentent les vitesses de vent : $Re_* = 228(\triangle)$, $453(\triangleleft)$, $613(\nabla)$, $800(\triangleright)$, $1067(\circ)$, $1333(\square)$, $1600(\diamond)$ et $1867(\times)$	120
5.19	Diagramme de phase dans le plan (Λ, Re_*) . La taille des marqueurs est corrélée au taux de croissance adimensionné γ_f/ω du mode le plus amplifié. La courbe en pointillés est une estimation du seuil entre les régions stable (en-dessous) et instable (au-dessus) du plan (Λ, Re_*)	122
6.1	Forme de l'interface et taux de présence suite à l'application d'une force quasi-ponctuelle de type monopôle. Agrandissement au voisinage de l'interface. Essai pour $Re_* = 1333$, $\Lambda = 6667$, $A_0 = 10\Delta z_{min}$ et $\delta t^+ = 13$. Image prise à $t^+ = 80$	128
C.1	$\Lambda = 67 - Re_* = 228$	160
C.2	$\Lambda = 67 - Re_* = 453$	160
C.3	$\Lambda = 67 - Re_* = 613$	161
C.4	$\Lambda = 67 - Re_* = 800$	161
C.5	$\Lambda = 67 - Re_* = 1067$	162
C.6	$\Lambda = 667 - Re_* = 613$	162
C.7	$\Lambda = 667 - Re_* = 1067$	163
C.8	$\Lambda = 800 - Re_* = 800$	163

C.9 $\Lambda = 2000 - Re_* = 800$	164
C.10 $\Lambda = 6667 - Re_* = 613$	164
C.11 $\Lambda = 6667 - Re_* = 1067$	165
C.12 $\Lambda = 6667 - Re_* = 1333$	165
C.13 $\Lambda = 6667 - Re_* = 1600$	166
C.14 $\Lambda = 6667 - Re_* = 1867$	166

Liste des tableaux

2.1	Évolution de la vitesse de frottement critique avec la viscosité (en m/s). Le nombre de Reynolds turbulent est calculé à partir de la demi-hauteur d'air $h = 5.25$ cm de <i>Paquier et al. (2016)</i> . Le nombre de cellule N_n^K est calculé comme $Re_{*,c}^{9/4}$.	40
3.1	Paramètres du modèle de Spalart-Allmaras	53
3.2	Caractéristiques des simulations en demi-canal pour Re_* variable.	60
3.3	Valeurs de x/h correspondant aux changements de signe de τ_w	66
3.4	Caractéristiques des simulations à petite et grande longueur d'onde	68
3.5	Caractéristiques des simulations en faisant varier k^+ .	76
4.1	Facteurs d'adimensionnalisation pour les termes apparaissant dans le système (4.17)-(4.19)	91
5.1	Caractéristiques des expériences numériques de génération des vagues de vent. La vitesse de frottement est définie à partir du gradient de pression moteur dans l'air $u_* = (G_a(z_0 - H)/\rho_a)^{1/2}$.	98
5.2	Évolution de la vitesse à l'interface en fonction du rapport des viscosités et du nombre de Reynolds turbulent dans l'air.	105
5.3	Nombre d'onde maximal k_{sup} que le maillage peut capturer, adimensionné par le nombre capillaire.	110
5.4	Nombre d'onde de coupure k_{vis} en fonction de la viscosité du liquide, adimensionné par le nombre capillaire.	110
5.5	Nombre d'onde du mode le plus amplifié pour tous les cas où des vagues de vent sont générées.	115