



HAL
open science

Etude des perturbations du champ électromagnétique par un écoulement de métal liquide contenant une inclusion isolante

Rafaël Guichou

► **To cite this version:**

Rafaël Guichou. Etude des perturbations du champ électromagnétique par un écoulement de métal liquide contenant une inclusion isolante. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2019. Français. NNT : 2019INPT0044 . tel-04166709

HAL Id: tel-04166709

<https://theses.hal.science/tel-04166709>

Submitted on 20 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Dynamique des fluides

Présentée et soutenue par :

M. RAFAEL GUICHOU

le mardi 30 avril 2019

Titre :

Etude des perturbations du champ électromagnétique par un écoulement
de métal liquide contenant une inclusion isolante

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur(s) de Thèse :

M. PHILIPPE TORDJEMAN

M. WLADIMIR BERGEZ

Rapporteurs :

M. DOMINIQUE LESSELIER, CNRS PARIS

M. LAURENT DAVOUST, INP DE GRENOBLE

Membre(s) du jury :

Mme NATHALIE RAVEU, TOULOUSE INP, Président

M. KEVIN PAUMEL, CEA CADARACHE, Invité

M. PHILIPPE TORDJEMAN, TOULOUSE INP, Membre

M. THOMAS BOECK, TECHNISCHE UNIVERSITAT ILMENAU, Membre

M. WLADIMIR BERGEZ, TOULOUSE INP, Membre

RÉSUMÉ

Cette thèse se situe dans le cadre de la conception du réacteur nucléaire à caloporteur sodium ASTRID, actuellement à l'étude au CEA Cadarache. La mesure de vitesse du sodium liquide dans les boucles primaire et secondaire, ainsi que la détection de bulles, en cas de fuite par exemple, représentent un enjeu majeur pour le contrôle et la surveillance en fonctionnement du réacteur. Le caractère conducteur électrique du sodium liquide permet d'envisager l'utilisation de débitmètres à courants de Foucault, ou ECFM (pour *Eddy Current Flow Meter*) pour répondre à ces fonctions.

Une précédente thèse réalisée par Mitlesh Kumar a permis de découpler le signal mesuré à l'ECFM relatif à la vitesse du métal, de celui relatif à la présence d'hétérogénéités dans le métal (telles que des bulles). L'objet de la présente thèse est de caractériser expérimentalement et analytiquement les effets de la vitesse et de la présence d'une inclusion isolante sur le signal mesuré, à partir d'écoulements « modèles ». Cette approche, complémentaire avec un certain nombre d'études en écoulement « réel » recensées dans la littérature, a pour objectif d'apporter un outil de compréhension physique au système.

Deux dispositifs expérimentaux en métal liquide (galinstan) sont réalisés. Le premier dispositif représente un écoulement de galinstan en conduite cylindrique avec un champ de vitesse uniforme (écoulement piston), contenant une inclusion rigide électriquement isolante simulant une bulle. Le second dispositif expérimental est un écoulement en conduite de galinstan « réel » en l'absence d'inclusion. Les paramètres contrôlés sont la vitesse débitante du métal liquide (de 0.01 à 1 m/s), la taille et la position de l'inclusion (rayon entre 1 et 2.5 mm, profondeur entre 3 et 6 mm) et la fréquence (de 0.5 à 20 kHz). Le rayon de la conduite vaut 12.5 mm, et l'épaisseur de peau varie entre 2.4 et 15.3 mm sur cette plage de fréquence. Deux modèles théoriques, basés sur la résolution de l'équation d'induction du potentiel vecteur, sont en outre développés pour déterminer les effets de la vitesse et les effets de la présence de l'inclusion sur le signal mesuré.

Dans les deux expériences, il est montré que le signal mesuré relatif à la vitesse du métal varie linéairement avec la vitesse et est maximal à une certaine fréquence ($f \approx 2$ kHz ici). Ces résultats correspondent à ceux du premier modèle théorique et montrent un bon accord avec la littérature. Dans la première expérience par ailleurs, le passage de l'inclusion à travers l'ECFM se manifeste par une oscillation du signal mesuré. Le comportement de l'oscillation est correctement décrit par le second modèle théorique dans la limite des basses fréquences (jusqu'à 2 kHz) : l'amplitude de l'oscillation est alors proportionnelle au volume de l'inclusion et suit une loi de puissance en f^2 . Aux hautes fréquences, il est montré que l'amplitude et le déphasage du signal mesuré relatif à la présence de l'inclusion sont impactés de manière importante par la taille et la profondeur de l'inclusion. Un début de méthode inverse est développé à partir de ce résultat, pour déterminer la taille et la position de l'inclusion.

Mots-clés : courants de Foucault, diffusion électromagnétique, détection de bulle, métal liquide, vélocimétrie

ABSTRACT

This thesis is included in the conception of the prototype of Sodium Fast Reactor (SFR) AS-TRID, currently studied in the CEA Cadarache. Velocimetry of liquid sodium in the primary and secondary loops, and bubble detection in sodium (e.g. in case of leaks) represent a major issue for the control and oversight of the reactor. The electrical conductive property of liquid sodium allows to consider the use of Eddy Current Flow Meters (ECFM) for this purpose.

A previous thesis realized by Mithlesh Kumar highlighted a decoupling of the signal measured with the ECFM relative to the velocity, to the one relative to the presence of heterogeneities (such as bubbles). The object of the present thesis is to characterize experimentally and analytically the effects of velocity and the effects of the presence of an insulating inclusion on the measured signal, thanks to « modeled flows ». This approach, complementary with most of the studies of « real flows » existing in the litterature, aims to give a tool for a physical comprehension of the system.

Two experimental set-ups with liquid metal (galinstan) have been developed. The first set-up represent a galinstan flow in a cylindrical duct at uniform velocity (plug flow), advecting electrically insulating rigid inclusion simulating a bubble. The second experimental set-up is a galinstan flow in a cylindrical duct without inclusion. The controled parameters are the flow velocity (from 0.01 to 1 m/s), the size and location of the inclusion (radius from 1 to 2.5 mm, depth of 3 and 6 mm) and the frequency (from 0.5 to 20 kHz). The radius of the duct is equal to 12.5 mm, and the skin depth varies between 2.4 and 15.3 mm for this frequency range. Two theoretical models, based on the resolution of the induction equation of the vector potential, are moreover developed to determine velocity effects and inclusion effects on the measured signal.

In both experimental studies, it is shown that the measured signal relative to the liquid metal velocity varies linearly with velocity and is maximal at a given frequency ($f \approx 2$ kHz here). These results are corresponding well with those of the first theoretical model and show a good agreement with litterature. Besides, in the first experimental study, the passage of the inclusion through the ECFM manifests itself by an oscillation of the measured signal. The behaviour of the oscillation is well described by the second theoretical model within the limit of low frequencies (up to 2 kHz) : the amplitude of the oscillation is then proportionnal to the inclusion volume and follows a power law in f^2 . At high frequencies, it is shown that amplitude and phaseshift of the measured signal relative to the presence of an inclusion are highly impacted by inclusion size and depth. A first step of inverse method is developed from this result, in order to determine size and location of an inclusion.

Keywords : eddy-current, electromagnetic scattering, bubble detection, liquid metal, velocimetry

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mes encadrants de thèse, Philippe Tordjeman, Wladimir Bergez et Rémi Zamansky, pour m'avoir suivi durant ces trois années (et quelques) de thèse. Pour leur apport scientifique, mais également pour les discussions transverses aux sujets variés, ainsi que pour les sorties vélo dans les grands cols Pyrénéens (qui se sont avérées de plus en plus dures avec l'avancée de la thèse et le recul de ma forme physique).

Je souhaite remercier le CEA Cadarache pour le financement de la thèse, et plus particulièrement Kévin Paumel, Frédéric Michel et Jean-Philippe Jeannot qui m'ont accordé leur confiance et ont suivi mes travaux durant ces trois années.

Je remercie ensuite et tout particulièrement Greg, pour son aide précieuse dans la conception et la fabrication des dispositifs expérimentaux. Il m'est impossible d'évoquer Greg sans également penser à toutes nos discussions, parfois profondes et philosophiques, parfois plus légères, à propos de foot, d'alpinisme (Mont-Blanc), de cinéma, des péripéties de l'avenue de Muret, et de tout autre genre de chose. Je remercie également dans ce paragraphe Hervé Ayroles, pour son support sur la partie électronique des expériences.

Je tiens à remercier tous les doctorants/post-doctorants du groupe Interface que j'ai pu côtoyer durant mes trois années de thèse. Mes co-bureaux d'abord : Ilango, avec qui j'ai partagé le bureau durant les deux premières années dans une ambiance calme et reposée, et Emeryk, la dernière année, dans une ambiance plus loquace ponctuée de comptes-rendus des soirées du week-end, de débats footballistiques, et (d'un peu) de discussions scientifiques. Les gros sacs ensuite, dans l'ordre croissant : Seb, Paul et Flo ; pour les sorties montagne/escalade et pour leurs blagues douteuses. Esli, pour ses conseils précieux sur la santé et le bien-être (je pense tout particulièrement au « Golden Milk »). La fine fleur de l'humour à l'IMFT : Michel, mon mentor en termes de blagues de bon goût, et JB (ou Adrien, je ne sais plus). La team trail (parmi ceux que je n'ai pas encore cités) : Hacene, Romain, Alexis. La team foot du vendredi midi, trop fournie en « grande jugador » pour tous les citer. Et également Clément, Clémence, Guillaume, Julien, Gianluca, à qui je souhaite une bonne continuation pour la suite. Je remercie tout autant les permanents du groupe Interface, avec qui les pauses café et déjeuner étaient toujours l'occasion de conversations parfois houleuses, mais toujours enrichissantes. Je n'oublie pas les stagiaires, tombés sous l'influence de Flo, pour avoir amené de nombreux gâteaux aux pauses café de 10h.

Pour finir, j'aimerais remercier ma petite Elena qui m'a apporté un rayon de lumière dans la période si sombre de la rédaction de thèse. Sa sagesse et ses conseils avisés m'auront permis de gérer au mieux ces moments (un peu) difficiles. Je remercie également ma famille pour son soutien précieux, en particulier mon frère à qui je souhaite un bon courage pour la suite, et mes parents, qui sont une source d'inspiration de par leur courage et leur joie de vivre.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Revue de la littérature	7
1.1 Introduction	8
1.2 Débitmètres à courants de Foucault (ECFM)	8
1.2.1 Les différents types d'ECFM	8
1.2.2 ECFM en écoulement monophasique	9
1.2.3 ECFM en écoulement diphasique	15
1.3 Contrôle non destructif par courants de Foucault	18
1.3.1 Épaisseur de peau grande par rapport aux dimensions du défaut	19
1.3.2 Épaisseur de peau faible par rapport aux dimensions du défaut	20
1.3.3 Solutions par fonctions de Green	21
1.4 Conclusion	22
2 Dispositifs expérimentaux	25
2.1 Introduction	26
2.2 Pilotage de l'ECFM et méthode de mesure	26
2.2.1 Appareils utilisés	26
2.2.2 Description du système de pilotage de l'ECFM	28
2.3 Expérience 1 : métal liquide en mouvement uniforme contenant une inclusion isolée	31
2.3.1 Montage expérimental	31
2.3.2 Signaux mesurés après démodulation	35
2.4 Expérience 2 : écoulement de métal liquide en conduite	38
2.4.1 Montage expérimental	38
2.4.2 Signaux mesurés après démodulation - écoulement sans billes	44
2.4.3 Vélocimétrie ultrasonore Doppler (UVP)	45
2.5 Incertitudes de mesures et ajustement des caractéristiques de l'ECFM	50
2.5.1 Incertitudes de mesure	51
2.5.2 Ajustement des modèles théoriques de l'ECFM	51
2.6 Conclusion	56
Perturbation du champ électromagnétique par la vitesse du métal	61
3 Modélisation de l'influence de l'écoulement sur la réponse de l'ECFM	63
3.1 Introduction	64
3.2 Description du système et mise en équation	64

3.2.1	Équation du potentiel vecteur	64
3.2.2	Équation de la fonction de Green	66
3.2.3	Conditions aux frontières	67
3.3	Résolution du potentiel vecteur et calcul des grandeurs associées	67
3.3.1	Profil de vitesse uniforme	67
3.3.2	Profil de vitesse quelconque	70
3.3.3	Densité de courant électrique dans le métal liquide	72
3.3.4	Tension induite dans les bobines secondaires	73
3.4	Conclusion	74
4	Étude de la tension ΔV_U relative à la vitesse du métal liquide	75
4.1	Introduction	76
4.2	Détermination de ΔV_U à partir des signaux mesurés	76
4.2.1	Expérience 1	76
4.2.2	Expérience 2	77
4.3	Implémentation des profils de vitesse mesurés par UVP dans le modèle	78
4.4	Effets de la fréquence	79
4.4.1	Expérience 1 : champ de vitesse uniforme	80
4.4.2	Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme	81
4.5	Effets de la vitesse	83
4.5.1	Expérience 1 : champ de vitesse uniforme	83
4.5.2	Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme	84
4.5.3	Effets du profil de vitesse (étude analytique)	86
4.6	Effets de la conductivité électrique (étude analytique)	88
4.6.1	Différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$	89
4.6.2	Différence de tension $\Delta V^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$	90
4.7	Lois de similitude de ΔV_U et ΔV_U^*	93
4.7.1	Expression de la tension aux bornes d'une bobine secondaire	93
4.7.2	Expression de la différence de tension ΔV_U	94
4.7.3	Expression de la différence de tension ΔV_U^*	95
4.8	Conclusion	96
	Perturbation du champ électromagnétique par une inclusion	99
5	Modélisation de l'influence d'une inclusion sur la réponse de l'ECFM	101
5.1	Introduction	102
5.2	Description du système et mise en équation	102
5.3	Modèle non inductif	104
5.3.1	Équation de la perturbation	104
5.3.2	Solution du potentiel vecteur perturbé pour $\Omega_\alpha \ll 1$	105
5.3.3	Tension induite dans les bobines secondaires	105
5.3.4	Approximation du potentiel vecteur perturbé	107
5.3.5	Discussion	110
5.4	Première approche d'un modèle inductif	113
5.5	Conclusion	116

6 Étude de la tension ΔV_α relative à l'inclusion	119
6.1 Introduction	120
6.2 Détermination de ΔV_α à partir des signaux mesurés	120
6.3 Effets de la vitesse	124
6.4 Comportement aux basses fréquences	127
6.4.1 Comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux	127
6.4.2 Lois de puissance en fréquence	128
6.4.3 Effets de la taille et de la position de l'inclusion	132
6.4.4 Premier problème inverse pour déterminer la taille et la position de l'inclusion	133
6.5 Comportement aux hautes fréquences	135
6.5.1 Inclusion proche de la paroi ($h = 3$ mm) : résultats fréquentiels	135
6.5.2 Inclusion en profondeur dans le métal ($h = 6$ mm) : résultats fréquentiels .	136
6.5.3 Effets des hautes fréquences sur les signaux temporels $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. . .	139
6.5.4 Effet du déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0	141
6.5.5 Première approche d'une méthode de détermination de la profondeur de l'inclusion	144
6.6 Conclusion	152
Conclusion	155
Annexe A Éléments de théorie	159
A.1 Équations de l'électromagnétisme	159
A.1.1 Hypothèses préliminaires	159
A.1.2 Équations de Maxwell	160
A.1.3 Potentiel scalaire et potentiel vecteur	161
A.1.4 Conditions aux interfaces	161
A.1.5 Densités de courant	163
A.1.6 Équations du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A})	163
A.2 Équations de l'hydrodynamique	165
A.2.1 Hypothèses préliminaires	165
A.2.2 Équations du mouvement	166
Annexe B Publication : Perturbation of eddy-currents by one inclusion in liquid metal	169
Annexe C Publication : Experimental study of bubble detection in liquid metal	177
Bibliographie	187

INTRODUCTION

CONTEXTE INDUSTRIEL

Réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (SFRs)

Au regard des nouvelles demandes du marché de l'énergie, l'industrie nucléaire doit répondre à des exigences renforcées concernant notamment la sûreté des réacteurs, leur durabilité, une minimisation de leur coût et une diminution des déchets radioactifs. Plusieurs filières de réacteurs nucléaires, appartenant à la « génération IV », sont à l'étude pour répondre à ces différents critères. En particulier, les réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (ou SFRs, pour *Sodium-cooled Fast Reactors*) représentent une des solutions les plus prometteuses des systèmes de la génération IV. En France, le CEA dispose d'une large expérience dans le développement des SFRs, capitalisée grâce aux anciens réacteurs Rapsodie (1967-1983), Phénix (1974-2009) et Superphénix (1984-1997). Dans la continuité de ces réacteurs, le projet de prototype SFR mené actuellement au CEA, ASTRID (pour *Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration*), cherche à démontrer la possibilité d'une industrialisation des réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium.

Dans le prototype ASTRID, le sodium liquide est utilisé comme liquide de refroidissement, ou caloporteur, dans les circuits primaire et secondaire du réacteur (voir figure 1). À l'instar des autres métaux liquides, et à l'inverse de l'eau présente dans les réacteurs des générations précédentes, le sodium liquide est compatible avec l'utilisation des neutrons « rapides » pour le processus de fission nucléaire. Ces neutrons, dont l'énergie cinétique est environ quarante millions de fois supérieure aux neutrons « thermiques » utilisés dans les réacteurs à eau (1 MeV pour les premiers, 0.025 eV pour les seconds), présentent l'avantage de faire fissionner tous les noyaux lourds, et pas seulement les noyaux fissiles tels que l'isotope ^{235}U de l'uranium ou l'isotope ^{239}Pu du plutonium. Les réacteurs à neutrons rapides sont en outre à même d'être employés pour la surgénération, c'est à dire la production de matière fissile (^{239}Pu typiquement) à partir de matière fertile (^{238}U). La surgénération permet une exploitation de ressources minières beaucoup plus abondantes que celles utilisées actuellement, l'isotope ^{238}U représentant plus de 99% du minerai d'uranium.

Outre le fait qu'il ralentit peu les neutrons, le sodium liquide présente plusieurs avantages qui en font un candidat privilégié par rapport aux autres caloporteurs métalliques, tels que le plomb ou l'alliage eutectique plomb-bismuth. Une conductivité thermique et une capacité thermique élevées ainsi qu'une faible viscosité font d'abord du sodium liquide un excellent caloporteur. Sa plage de température à l'état liquide est importante (point de fusion à 98°C, point d'ébullition à 883°C), ce qui permet une gamme d'utilisation relativement large. Sa faible activation lorsqu'il est soumis à une irradiation limite la quantité de déchets radioactifs produits. Enfin, le sodium est peu corrosif, ce qui le rend compatible avec les aciers constituant la structure du réacteur. Le principal désavantage du sodium réside dans sa forte réactivité chimique, celui-ci pouvant brûler dans l'air

et exploser en contact avec de l'eau.

Le principe de fonctionnement du réacteur ASTRID est représenté dans la figure 1. Les aiguilles de combustible, contenant les matières fissile et fertile, sont regroupées de manière à former un assemblage combustible; les différents assemblages sont ensuite réunis pour constituer le cœur du réacteur (1). La chaleur émise lors de la fission nucléaire dans le cœur est évacuée grâce au circuit sodium primaire, entièrement contenu dans la cuve (7). L'échangeur intermédiaire (4), également interne à la cuve, permet les transferts thermiques du circuit sodium primaire vers le circuit sodium secondaire; tandis que l'échangeur sodium/gaz assure l'évacuation de la chaleur du circuit secondaire vers le circuit tertiaire. Une particularité du prototype ASTRID réside dans l'utilisation d'azote pressurisé dans le circuit tertiaire, substituant le cycle de conversion d'énergie vapeur usuel afin d'éviter les réactions sodium/eau. L'azote en sortie de l'échangeur sodium/gaz, porté à 515°C et 180 bars, est détendu dans la turbine. La rotation de la turbine fournit l'énergie mécanique transformée par l'alternateur en électricité.

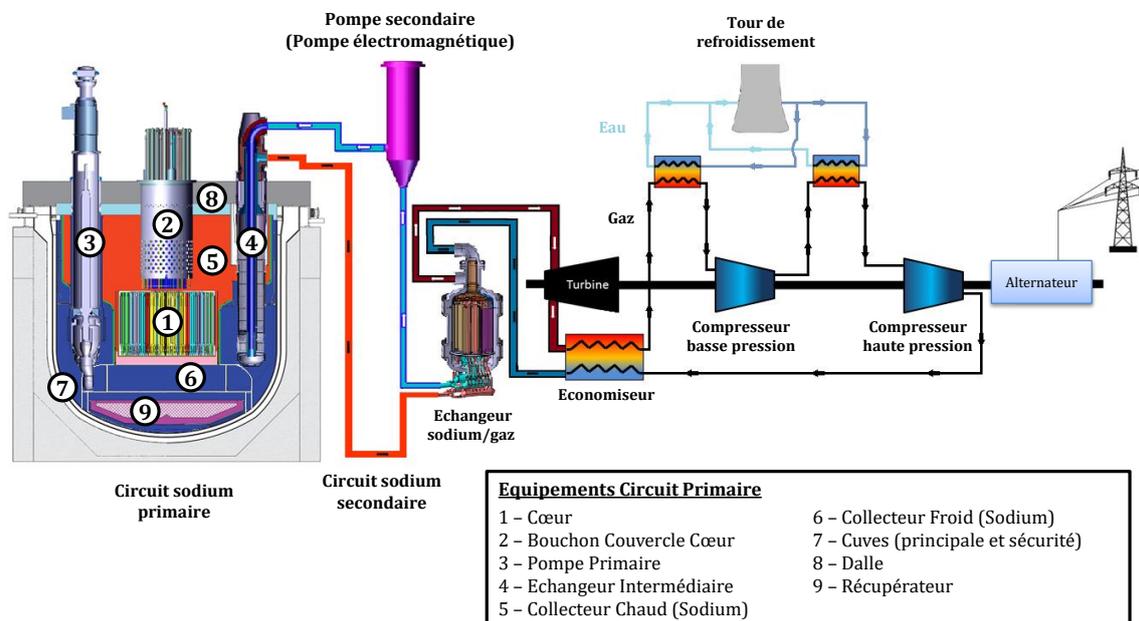


FIGURE 1 – Principe de fonctionnement du réacteur ASTRID (image CEA).

Mesure de vitesse du sodium et détection de fuites

Le contrôle et la surveillance en fonctionnement des circuits sodium primaire et secondaire représentent un des enjeux majeurs dans la conception du réacteur ASTRID. Les méthodes de contrôle et de surveillance doivent permettre un diagnostic rapide d'éventuels accidents ou incidents dans les circuits sodium, tels qu'une perte de débit ou une fuite, afin d'en limiter les conséquences sur le fonctionnement du réacteur. Dans le circuit primaire, la mesure de vitesse du sodium est prévue à titre R&D en sortie des assemblages du cœur (1). Elle est de plus requise dans la pompe primaire (3), comme organe de sureté pour détecter des chutes de pression à l'entrée du cœur, et comme mesure d'exploitation pour contrôler le débit de la pompe. Dans le circuit secondaire, la mesure de débit est réalisée entre la pompe secondaire et l'échangeur sodium/gaz. Une détection de gaz doit de plus être effectuée pour repérer une éventuelle fuite dans l'échangeur. Le cas échéant, des bulles d'azote de l'ordre du millimètre peuvent en effet se propager dans le circuit sodium

secondaire.

Les propriétés physiques et chimiques du caloporteur sodium étant relativement particulières, l'instrumentation doit satisfaire à des contraintes technologiques spécifiques. Bien que le caloporteur sodium soit opaque, éliminant de fait les méthodes d'inspection optiques, la technologie sodium peut tirer profit de certaines de ses propriétés (métal liquide à faible densité, conducteur électrique, bonne transmission du son et des ultrasons) pour développer une instrumentation adaptée. En particulier, le caractère conducteur électrique du sodium permet d'envisager l'emploi des débitmètres à courants de Foucault pour la mesure de vitesse et la détection de bulles. Les débitmètres à courants de Foucault se révèlent particulièrement intéressants pour leur robustesse, leur faible encombrement, leur caractère non intrusif et leur temps de réponse rapide. Bien que des tests expérimentaux aient déjà montré l'aptitude de ces systèmes à la mesure de vitesse et à la détection de bulles, le niveau de maturité actuel de la technologie n'est pas suffisant pour répondre aux exigences de sûreté du réacteur ASTRID.

OBJET DE LA THÈSE

Cette thèse s'inscrit dans le projet TECNA mené au CEA Cadarache (département DTN) dans le cadre du développement du réacteur ASTRID. L'objectif du projet est de développer un prototype de débitmètre à courants de Foucault capable à la fois de mesurer la vitesse du sodium liquide dans les circuits primaire et secondaire, et de détecter la présence de bulles dans l'écoulement.

Le débitmètre à courants de Foucault étudié dans cette thèse, illustré dans la figure 2, est constitué de trois bobines encerclant un écoulement de métal liquide : une bobine primaire P, et deux bobines secondaires S_1 et S_2 de part et d'autre de P. La bobine primaire P est alimentée en courant alternatif, générant un champ électromagnétique variable dans l'écoulement. Le métal liquide étant conducteur électrique, des courants de Foucault sont induits dans l'écoulement, dont la distribution spatiale est impactée par le champ de vitesse du métal d'une part, et par la présence de bulles, isolantes électriques, d'autre part. Les perturbations des courants de Foucault, et incidemment celles du champ électromagnétique, relatives au mouvement du métal et à la présence de bulles, sont mesurées par la différence de tension ΔV induite aux bornes des bobines secondaires.

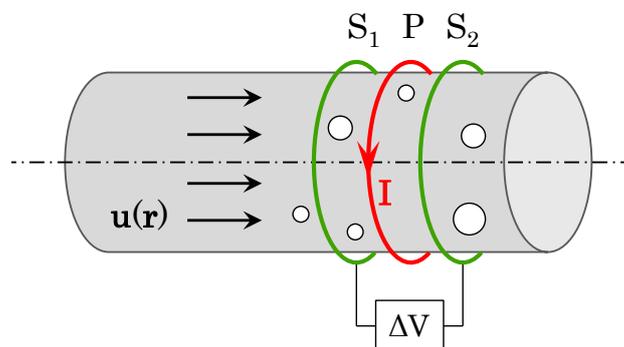


FIGURE 2 – Schéma de principe du débitmètre à courants de Foucault étudié dans la thèse. Le débitmètre est constitué d'une bobine primaire P, alimentée par un courant alternatif I , et entourée de deux bobines secondaires S_1 et S_2 . Un métal liquide, en écoulement à une vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ et contenant des bulles, traverse les bobines. La différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires permet de mesurer la vitesse de l'écoulement et de détecter la présence de bulles.

L'application de ce débitmètre à courants de Foucault à la mesure de vitesse et à la détection de bulles nécessite une compréhension de l'interaction entre un champ électromagnétique variable et un écoulement de métal liquide dans lequel des bulles sont présentes. Ce problème est ouvert, complexe, et inclue un nombre élevé de paramètres propres à l'électromagnétisme et à l'hydrodynamique. L'approche envisagée dans la thèse consiste à considérer seulement certains des phénomènes physiques mis en jeu lorsque le métal liquide et les bulles traversent le débitmètre, en étudiant le comportement du champ électromagnétique en présence d'écoulements « modèles ». En particulier, les effets de l'induction électromagnétique, générée par le champ de vitesse du métal liquide, seront étudiés en considérant un écoulement dont le profil de vitesse est axi-symétrique, développé, et non impacté par la présence de bulles. Les effets de la force de Laplace étant négligés, les phénomènes liés au couplage magnétohydrodynamique ne seront pas traités dans notre étude. Par ailleurs, les effets d'une hétérogénéité de conductivité électrique, telle qu'une bulle électriquement isolante dans le métal liquide, seront étudiés en modélisant la bulle par une inclusion rigide de taille, forme et position fixées. Cette démarche de modélisation est complémentaire avec la plupart des travaux sur les débitmètres à courants de Foucault existant dans la littérature, pour lesquelles l'étude de l'écoulement de métal liquide « réel » rend complexe la compréhension des différents phénomènes physiques.

Une précédente thèse, réalisée par Mithlesh Kumar [1], a permis de découpler les effets du champ de vitesse du métal liquide de ceux relatifs à la présence d'inclusions isolantes, dans le cas d'un mouvement rigide et d'inclusions axi-symétriques en surface du métal, pour un faible nombre de Reynolds magnétique ($R_m \ll 1$) et un faible taux de vide ($\alpha \lesssim 4\%$). Dans ces conditions, la différence de tension aux bornes des bobines secondaires du débitmètre s'écrit $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U + \Delta V_\alpha$, où la contribution ΔV_U est relative au champ de vitesse du métal liquide, et la contribution ΔV_α est relative à la présence d'inclusions dans le métal. À l'aide de cette décomposition de ΔV , l'objectif de la présente thèse est de caractériser séparément les effets du champ de vitesse (via la tension ΔV_U) et ceux liés à la présence d'inclusions isolantes (via la tension ΔV_α). Des écoulements « modèles », dans lesquels certains phénomènes physiques sont négligeables, sont étudiés à l'aide de deux dispositifs expérimentaux et deux modèles analytiques.

Le manuscrit est organisé comme suit.

Le chapitre 1 présente une revue de la littérature sur les débitmètres à courants de Foucault, et leur application à la détection de bulles. Un complément de bibliographie sur la détection de défauts en contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault, analogue à la détection de bulles dans notre cas, est également introduit.

Le chapitre 2 présente les deux dispositifs expérimentaux réalisés dans la thèse. Dans chaque dispositif, un écoulement de métal liquide « modèle » est sondé par un débitmètre à courants de Foucault dans le but d'étudier les perturbations du champ électromagnétique générées par la vitesse du métal et la présence d'une inclusion isolante rigide (simulant une bulle).

Les chapitres 3 et 4 traitent de la perturbation du champ électromagnétique par le premier des deux effets considérés : le champ de vitesse du métal liquide. Le chapitre 3 présente d'abord un modèle analytique de la perturbation du champ électromagnétique générée par le champ de vitesse du métal liquide. Le modèle est basé sur la résolution de l'équation du potentiel vecteur en l'absence d'inclusion isolante. Cette perturbation relative au mouvement du métal liquide se caractérise par une différence de tension ΔV_U aux bornes des bobines secondaires. Le chapitre 4 montre l'influence des différents paramètres (champ de vitesse de l'écoulement, fréquence, conductivité électrique du métal) sur la différence de tension ΔV_U . Les résultats du modèle analytique du chapitre 3 y sont comparés aux mesures des deux dispositifs expérimentaux décrits dans le chapitre 2.

Les chapitres 5 et 6 traitent de la perturbation du champ électromagnétique par la présence

d'une inclusion isolante (une bille rigide, ici) dans le métal. Le chapitre 5 présente premièrement un modèle de la perturbation du champ électromagnétique générée par la présence d'une inclusion isolée dans le métal liquide. Le modèle est basé sur la résolution de l'équation du potentiel vecteur sous une hypothèse de basses fréquences (modèle « non inductif »). La perturbation relative à la présence de l'inclusion se caractérise par une différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires. Le chapitre 6 montre l'influence des différents paramètres (vitesse, fréquence, taille et position de l'inclusion) sur la différence de tension ΔV_α . Les résultats du modèle non inductif du chapitre 5 y sont comparés aux mesures du premier dispositif expérimental, dans lequel l'inclusion est une bille sphérique isolante dont la taille et la position sont imposées.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre présente une revue de la littérature sur les débitmètres à courants de Foucault (ECFM) et leur application à la détection de bulles. Un complément de bibliographie sur la détection de défauts en contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault, analogue à la détection de bulles dans notre cas, est également introduit.

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	Débitmètres à courants de Foucault (ECFM)	8
1.2.1	Les différents types d'ECFM	8
1.2.2	ECFM en écoulement monophasique	9
1.2.3	ECFM en écoulement diphasique	15
1.3	Contrôle non destructif par courants de Foucault	18
1.3.1	Épaisseur de peau grande par rapport aux dimensions du défaut	19
1.3.2	Épaisseur de peau faible par rapport aux dimensions du défaut	20
1.3.3	Solutions par fonctions de Green	21
1.4	Conclusion	22

1.1 INTRODUCTION

Les débitmètres à courants de Foucault, ou ECFM (pour *Eddy Current Flow Meter*), ont connu un essor important durant les années 1950-1960, principalement aux États-Unis. Le développement de réacteurs nucléaires refroidis au métal liquide a notamment amené les Américains à étudier la possibilité de mesurer le débit d'écoulements de métaux liquides par courants de Foucault. Dès lors, les ECFM ont été l'objet de nombreuses recherches, trouvant des applications dans l'industrie nucléaire principalement, mais également dans la métallurgie. Plusieurs études ont en outre montré l'aptitude potentielle des ECFM à la détection de bulles dans un écoulement de métal liquide.

Dans la section 1.2 de ce chapitre, nous proposons une revue de la littérature sur les ECFM, servant de base aux travaux présentés par la suite. La section 1.3 présente un complément de bibliographie recensant plusieurs travaux effectués sur la détection de défauts en contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault, montrant une analogie avec la détection de bulles par ECFM.

1.2 DÉBITMÈTRES À COURANTS DE FOUCAULT (ECFM)

1.2.1 Les différents types d'ECFM

Il existe une variété importante de débitmètres à courants de Foucault recensés dans la littérature. L'appellation anglaise du dispositif, que nous utiliserons dans toute la suite de cette thèse, est « ECFM » pour Eddy Current Flow Meter. Malgré leur diversité, tous les ECFM sont basés sur le même principe : appliquer un champ électromagnétique variable dans un métal liquide à l'aide d'une bobine primaire, puis mesurer les perturbations du champ magnétique générées par la vitesse du métal et/ou la présence d'inclusions isolantes, telles que des bulles.

Le premier ECFM est breveté par Lehde et Lang en 1948 [2]. Le système basique du brevet est composé de trois bobines coaxiales ; deux bobines primaires alimentées en courant alternatif, et une bobine secondaire intercalée entre les deux (figure 1.1a). L'ensemble est enfermé dans une capsule isolante plongée dans un écoulement de liquide conducteur. Lorsque le liquide est statique, la tension dans la bobine secondaire est nulle car les effets inductifs des deux bobines primaires se compensent. Lorsque le liquide s'écoule en revanche, le champ magnétique est distordu par la vitesse du métal, générant une tension non nulle dans la bobine secondaire. L'amplitude de la tension mesurée varie avec la vitesse du fluide et permet une mesure du débit de l'écoulement.

Shercliff propose en 1962 une géométrie différente, l'ECFM externe (figure 1.1b), pour lequel le fluide circule à l'intérieur des bobines où le champ magnétique est plus intense [3]. Le couplage bobine-fluide dans cette configuration est ainsi meilleur que dans l'ECFM interne de Lehde et Lang. Par ailleurs, l'ECFM de Shercliff contient une seule bobine primaire, entourée de deux bobines secondaires de part et d'autre. Le signal mesuré est la différence des tensions V_1 et V_2 aux bornes des bobines secondaires S_1 et S_2 , noté $\Delta V = V_1 - V_2$, sensible à la vitesse de l'écoulement. Avec cette géométrie, les sources de bruit électromagnétique observables indépendamment dans chaque bobine secondaire s'annulent et le rapport signal sur bruit de la mesure est meilleur.

En se basant sur la géométrie de Shercliff, un ECFM externe constitué de 5 bobines est développé en 1975 par Feng *et al.* dans le but d'augmenter la sensibilité du système [4]. Trois bobines primaires sont utilisées : une première, P_1 , est placée au milieu, et les deux autres, P_2 et P_3 , sont situées aux extrémités du dispositif (figure 1.2). Deux bobines secondaires S_1 et S_2 sont intercalées entre les bobines primaires. Les bobines primaires P_2 et P_3 aux extrémités sont alimentées avec un courant alternatif en opposition de phase par rapport au courant dans la bobine primaire P_1 . Avec

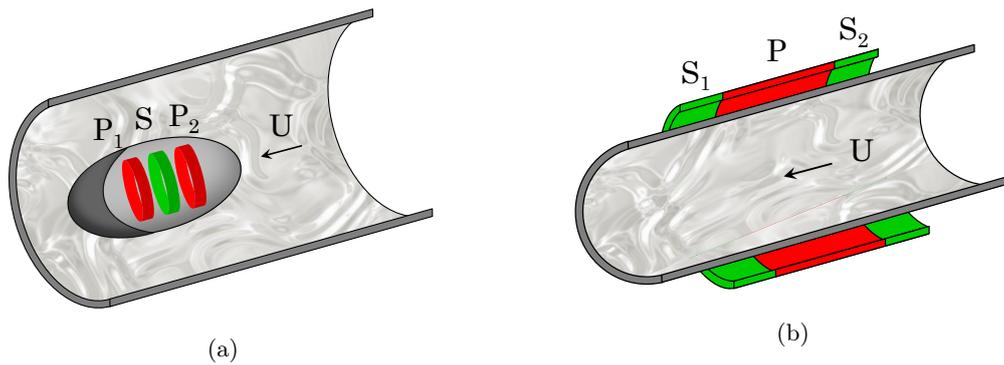


FIGURE 1.1 – (a) ECFM interne de Lehde et Lang [2]. (b) ECFM externe de Shercliff [3].

cette configuration, l'objectif est d'augmenter le gradient axial du potentiel vecteur par rapport à l'ECFM de Shercliff. Il s'avère en effet que la perturbation du champ électromagnétique par la vitesse de l'écoulement est justement reliée au gradient axial du potentiel vecteur (voir équation (1.1) ci-après). Ce gradient étant plus intense ici, les perturbations du champ électromagnétique relatives à la vitesse sont plus importantes et génèrent un signal plus grand aux bornes des bobines secondaires.

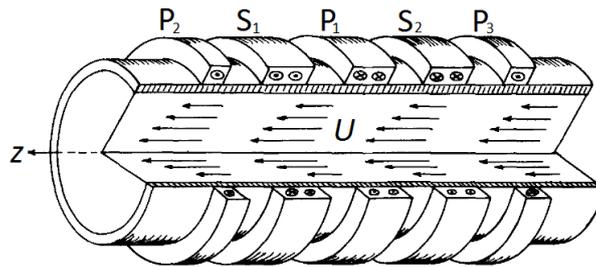


FIGURE 1.2 – ECFM externe à 5 bobines de Feng *et al.* [4].

D'autres géométries d'ECFM sont recensées, avec une seule bobine [5], deux bobines [5] ou quatre bobines [2]. Chacune d'elles présente ses avantages et ses inconvénients. Notons simplement qu'on différencie globalement deux types d'ECFM : les ECFM externes placés à l'extérieur de l'écoulement et traversés par le métal, et les ECFM internes, situés dans l'écoulement. Les ECFM externes ne sont pas en contact direct avec le métal liquide et sont ainsi affranchis des problèmes associés à la contamination de la sonde. Les ECFM internes sont en général protégés par une capsule (« dry type »), bien qu'il soit possible de les mettre en contact direct avec l'écoulement (« wet type ») pour améliorer leur sensibilité [6].

1.2.2 ECFM en écoulement monophasique

Dans cette partie, nous nous intéressons aux études antérieures sur les ECFM traversés par un écoulement de métal liquide en l'absence de bulle. Plusieurs approches théoriques et numériques ont été développées dans le but de décrire la perturbation du champ électromagnétique par la vitesse du métal liquide. On recense également un nombre important d'études expérimentales, en métal liquide (sodium ou mercure généralement) ou en métal solide (expériences « sèches », où des barreaux d'aluminium simulent l'écoulement de métal).

Les approches théoriques

À notre connaissance, l'intégralité des descriptions théoriques de l'ECFM monophasique concerne la géométrie de Shercliff, l'ECFM externe, où le métal liquide s'écoule à l'intérieur des bobines. L'écoulement est alors cylindrique et le champ de vitesse \mathbf{u} est simplement décrit par le profil de vitesse $u(r)$, où r est la coordonnée radiale. La bobine primaire, traversée par l'écoulement, est alimentée en courant alternatif $J_S(r, z)$ de pulsation ω , et génère un champ magnétique \mathbf{B} dans le métal liquide. En supposant une symétrie axiale, l'utilisation du potentiel vecteur \mathbf{A} , défini par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, permet de résoudre une seule équation suivant la composante angulaire $\mathbf{A} = A_\theta(r, z)e^{j\omega t}\mathbf{e}_\theta$. En coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel vecteur devient :

$$(\nabla^2 + k^2)A_\theta(r, z) = -\mu_0 J_S(r, z) + \mu_0 \sigma u(r) \frac{\partial A_\theta(r, z)}{\partial z}, \quad (1.1)$$

où $k = j\omega\mu_0\sigma$ (le lecteur peut se référer à l'annexe A pour une description détaillée de la mise en équation du potentiel vecteur). La méthode de résolution commune à toutes les approches recensées consiste à déterminer la fonction de Green de l'équation (1.1), c'est à dire la réponse du potentiel vecteur à une excitation de type Dirac. Par séparation des variables, la dépendance en z est résolue par transformée de Fourier de manière à obtenir une équation de Bessel pour la variable en r , dont la solution est connue.

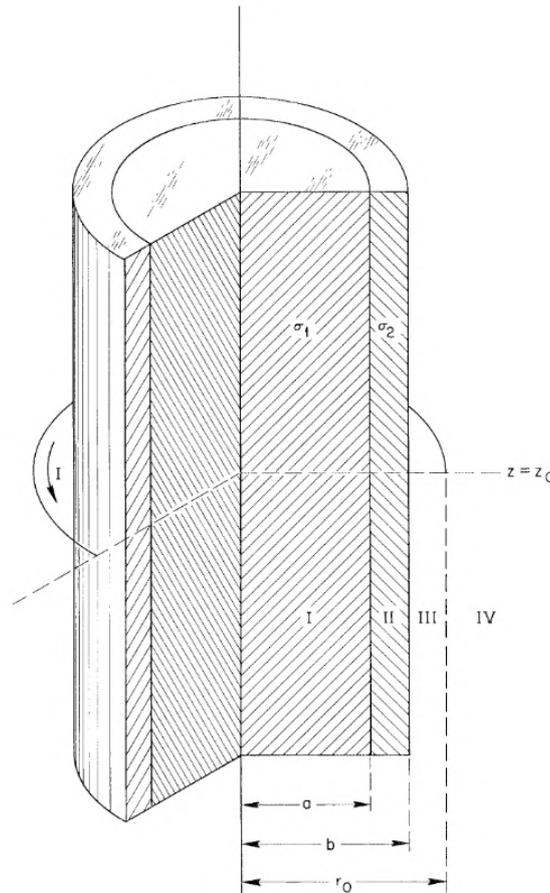


FIGURE 1.3 – Géométrie utilisée par Dodd et Deeds pour la résolution du potentiel vecteur dans le cas d'un métal statique [7].

La première solution de l'équation (1.1) est développée par Dodd et Deeds dans le cas d'un

métal statique, c'est à dire $u(r) = 0$ [7]. La solution analytique est donnée pour un système composé d'un cylindre intérieur de rayon a et de conductivité σ_1 , et d'une gaine de rayon extérieur b et de conductivité σ_2 , comme représenté sur la figure 1.3. Le système est excité par une bobine en fonction de Dirac alimentée par un courant I , de rayon $r = r_0$ et située en $z = z_0$. L'espace est divisé radialement en quatre zones : la zone I correspond au cylindre métallique intérieur, la zone II correspond à la gaine métallique, la zone III correspond à l'entrefer et la zone IV correspond à l'air à l'extérieur de la bobine. Le potentiel vecteur $A_\theta^i(r, z - z_0)$ dans chaque zone i s'exprime alors sous la forme d'une intégrale de fonctions de Bessel modifiées par :

$$A_\theta^1(r, z, r_0, z_0) = \int_0^\infty C_1(\alpha) I_1 \left[(\alpha^2 + j\omega\mu\sigma_1)^{1/2} r \right] \cos \alpha(z - z_0) d\alpha, \quad (1.2a)$$

$$A_\theta^2(r, z, r_0, z_0) = \int_0^\infty \left\{ C_2(\alpha) I_1 \left[(\alpha^2 + j\omega\mu\sigma_2)^{1/2} r \right] + D_2(\alpha) I_1 \left[(\alpha^2 + j\omega\mu\sigma_2)^{1/2} r \right] \right\} \cos \alpha(z - z_0) d\alpha, \quad (1.2b)$$

$$A_\theta^3(r, z, r_0, z_0) = \int_0^\infty \left[C_3(\alpha) I_1(\alpha r) + D_3(\alpha) I_1(\alpha r) \right] \cos \alpha(z - z_0) d\alpha, \quad (1.2c)$$

$$A_\theta^4(r, z, r_0, z_0) = \int_0^\infty D_4(\alpha) I_1(\alpha r) \cos \alpha(z - z_0) d\alpha, \quad (1.2d)$$

où les coefficients $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $D_2(\alpha)$, $C_3(\alpha)$, $D_3(\alpha)$ et $D_4(\alpha)$, propres à chaque zones, sont calculés pour chaque α à partir des conditions aux limites. Le potentiel vecteur généré par une bobine alimentée en courant (telle que la bobine primaire d'un ECFM) peut ensuite être obtenu par superposition des solutions, pour plusieurs fonctions de Dirac situées à une position (r_0, z_0) variable. On l'écrit :

$$A_{\text{total}}(r, z) = \iint_{\mathcal{P}} A_\theta(r, z, r_0, z_0) dr_0 dz_0, \quad (1.3)$$

où \mathcal{P} correspond à la section de la bobine alimentée en courant (bobine « primaire »). Connaissant le potentiel vecteur $A_{\text{total}}(r, z)$, la force électromotrice générée dans n'importe quelle bobine coaxiale au cylindre de métal (une bobine secondaire d'un ECFM, typiquement) peut être calculée par la loi de Faraday. En supposant que les spires sont distribuées uniformément sur la longueur de la bobine, la force électromotrice vaut :

$$V = j2\pi\omega \iint_{\mathcal{S}} r A_{\text{total}}(r, z) n_S dr dz, \quad (1.4)$$

où n_S est le nombre de spires par unité de longueur de la bobine, et \mathcal{S} est la section de cette bobine « secondaire ».

Pour un métal liquide en écoulement, le profil de vitesse $u(r)$ doit être défini dans l'équation du potentiel vecteur (1.1). Dans un premier temps, le profil de vitesse peut être supposé uniforme, c'est à dire $u(r) = \text{cst}$. Notons que cette hypothèse peut sembler adaptée aux écoulements turbulents, pour lesquels le profil moyen est quasi uniforme en dehors de la couche limite. La solution, obtenue par la même méthode que Dodd et Deeds, est donnée par Hirayama et montre un très bon accord avec des expériences « sèches » (ou un barreau d'aluminium en translation simule l'écoulement de métal) [8]. Pour le cas d'une vitesse non uniforme, une solution approchée, basée sur le théorème de réciprocité, est développée par Wiegand [9]. Une solution par développement perturbatif est également obtenue par Kahn et Philipps [10], le potentiel vecteur étant alors décomposé en $A_\theta(r, z) = A_\theta^0(r, z) + A_\theta^u(r, z)$ où $A_\theta^0(r, z)$ est la solution statique de Dodd et Deeds. Le développement perturbatif en vitesse amène à une relation explicite entre le champ de base $A_\theta^0(r, z)$ et le champ $A_\theta^u(r, z)$ perturbé par la vitesse, dont on déduit la tension perturbée dans les bobines secondaires de l'ECFM.

Résultats expérimentaux

La première application expérimentale de l'ECFM est réalisée par Evans dans le cadre de la conception du réacteur à neutrons rapides britannique (British Fast Breeder Reactor) en 1966 [11]. L'application est alors restreinte aux détections de chutes de débits, en raison de difficultés à corréler le signal mesuré au débit de l'écoulement. Un certain nombre d'études expérimentales ont depuis démontré la faisabilité de la débitmétrie par ECFM, les études théoriques et numériques apportant une aide précieuse pour le dimensionnement du dispositif et l'interprétation des mesures [4, 12].

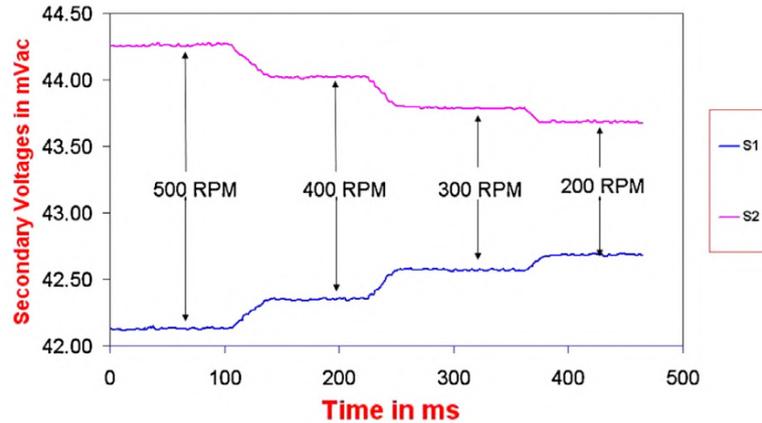


FIGURE 1.4 – Tension induite dans les bobines secondaires S_1 et S_2 de l'ECFM interne, pour un écoulement de sodium à différents débits [13].

La figure 1.4 montre un exemple de signal mesuré aux bornes de chaque bobine secondaire lorsqu'un écoulement de sodium traverse un ECFM interne, pour plusieurs débits [13]. Le débit de l'écoulement de sodium est indiqué par le nombre de tours par minute de la pompe (rpm). On remarque que les tensions V_1 et V_2 dans les bobines secondaires S_1 et S_2 subissent un décalage en réponse aux variations de débit. Ce décalage est de même amplitude pour les deux bobines secondaires, mais de signe opposé. En considérant la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ entre les bobines secondaires, le décalage de tension observé sur ΔV est alors deux fois plus élevé que celui observé sur les tensions V_1 et V_2 . C'est pourquoi la différence de tension ΔV est l'objet de la majorité des études recensées. Les effets des différents paramètres (débit, fréquence du courant dans la primaire, température) sur ΔV , décrits précisément dans la littérature, sont l'objet des prochains paragraphes.

L'influence du débit est d'abord caractérisée par des expériences « sèches », où l'écoulement de métal liquide est simulé par la translation d'un barreau d'aluminium dans un ECFM externe. Il est observé de manière générale que les différences de tensions ΔV mesurées sont linéaires avec la vitesse du barreau [15, 16]. Ce premier résultat concorde remarquablement avec les prédictions théoriques [8] et numériques [4]. L'ECFM interne se prêtant moins bien aux expériences sèches du fait de sa géométrie, nous ne recensons pas de publication pour cette configuration. Un banc d'essai comprenant un ECFM interne est cependant à l'étude au CEA Cadarache, dans le cadre du projet dans lequel est incluse cette thèse. En supplément des expériences sèches, des études en métal liquide montrent également la sensibilité des ECFM interne et externe au débit d'un écoulement réel. Il est observé de la même manière une tendance linéaire de la différence de tension ΔV en fonction de la vitesse débitante, pour des écoulements de sodium [13, 15, 14, 17] ou de mercure

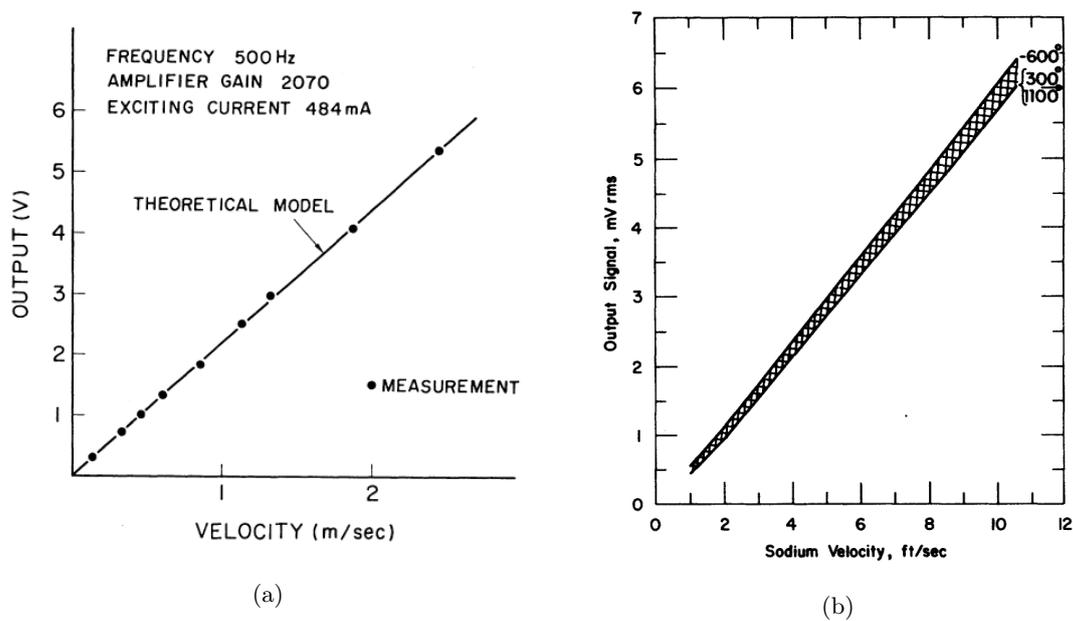


FIGURE 1.5 – Linéarité de la différence de tension ΔV avec la vitesse. (a) Expériences sèches de Hirayama, où un barreau d'aluminium en translation simule l'écoulement [8]. (b) Expérience en sodium de Brewer (courant d'excitation : 500 mA et 1000 Hz, température : de 300°F à 1100°F) [14].

[4]. La figure 1.5 représente l'évolution linéaire de la tension ΔV en fonction de la vitesse, pour les expériences sèches réalisées par Hirayama [8] et pour celles en sodium réalisées par Brewer [14].

Par ailleurs, l'approche théorique de l'ECFM interne développée par Wiegand montre l'existence d'une fréquence d'utilisation optimale de l'ECFM, dépendante notamment de la géométrie des bobines et du diamètre de l'écoulement [9]. La différence de tension ΔV est alors maximale pour cette fréquence. Cette prédiction théorique est premièrement validée expérimentalement avec des expériences sèches et en sodium par Wiegand lui-même [15]. Les expériences en mercure de Feng *et al.*, confrontées de plus à une modélisation numérique, confirment l'observation de cette fréquence optimale [4]. La figure 1.6 montre un exemple de la différence de tension ΔV en fonction de la fréquence, mesurée par Wiegand (figure 1.6a) et Feng *et al.* (figure 1.6b). L'optimum de fréquence est clairement visible dans les deux cas. En outre, les résultats théoriques de Wiegand et les résultats numériques de Feng *et al.* mettent en évidence la dépendance importante de ΔV au profil de vitesse de l'écoulement. La différence de tension ΔV divisée par la vitesse moyenne U est minimale pour le régime laminaire, puis augmente en régime turbulent jusqu'à être maximale pour le profil de vitesse uniforme $u(r) = \text{cst}$.

Enfin, il est observé de manière générale que la tension ΔV est fortement sensible à la température du métal liquide. Un changement de température induit en effet une modification des propriétés physiques du métal, telles que la conductivité électrique, la viscosité ou la masse volumique. Wiegand identifie cette dépendance à l'aide d'une étude numérique, et suggère d'effectuer les mesures dans la zone de fréquence optimale pour atténuer les effets de température [18]. Son étude montre par ailleurs que la sensibilité de l'ECFM diminue aux températures élevées (figure 1.7a). Deux raisons expliquent cette baisse de sensibilité : les métaux liquides sont généralement moins bons conducteurs électriques aux hautes températures, et la résistivité de la bobine primaire augmente avec la température. Pour compenser les effets de la température, il est possible de me-

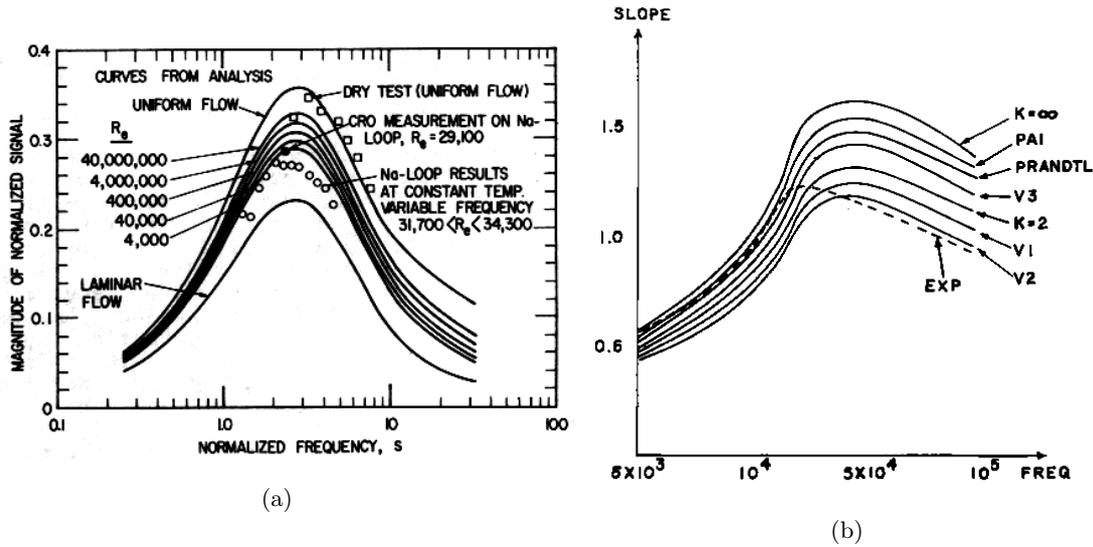


FIGURE 1.6 – Différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ en fonction de la fréquence. (a) Expériences sèches et en sodium de Wiegand, comparées aux résultats de son approche théorique pour divers profils de vitesse [15]. (b) Expériences sèches de Feng *et al.*, comparées aux résultats de la résolution numérique pour plusieurs profils de vitesse [4].

surser la différence de tension normalisée $\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$, au lieu de la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ usuelle. Il est en effet montré qu'il existe une fréquence critique à laquelle ce rapport devient indépendant des variations de température [19, 20]. L'existence de cette fréquence critique est confirmée expérimentalement par Sharma *et al.* [17], et par Sureshkumar *et al.* [13] (figure 1.7b). Notons que le mécanisme physique à l'origine de cette fréquence critique n'est pas expliqué.

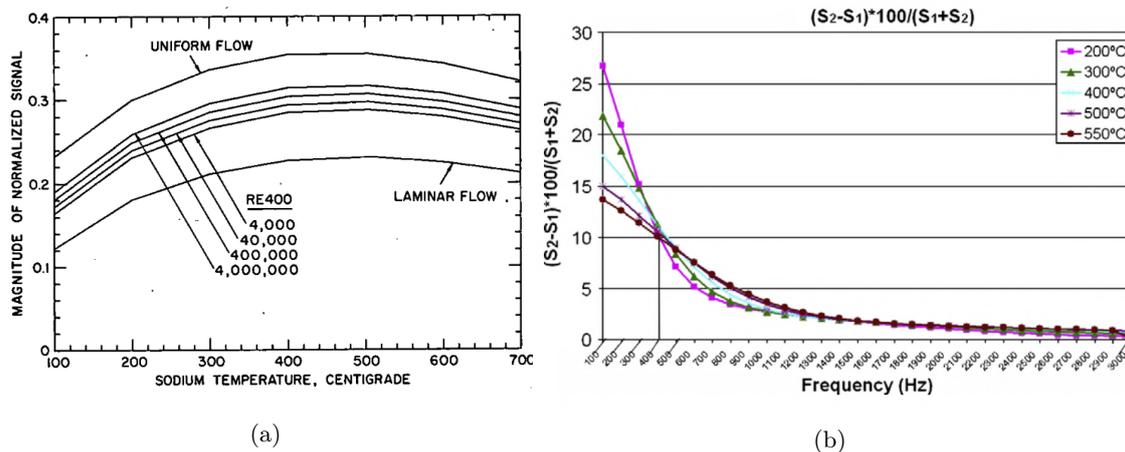


FIGURE 1.7 – (a) Différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ en fonction de la température du sodium, calculée numériquement pour plusieurs profils de vitesse [18]. (b) Différence de tension normalisée $\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$ en fonction de la fréquence, pour plusieurs températures [17].

Pour tous les résultats précédents, la grandeur d'intérêt conventionnelle est l'amplitude de la différence de tension ΔV (ou du rapport $\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$). La différence de tension ΔV peut également être analysée de manière alternative par la mesure de son déphasage [21]. Il est montré expérimentalement

talement que la mesure du déphasage est plus robuste que celle de l'amplitude [22]. Pour un ECFM à 3 bobines (deux secondaires et une primaire), le déphasage entre les deux bobines secondaires peut s'exprimer par [23] :

$$\Delta\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\bar{\omega}\pi^{-1}R_m K K_\sigma}{K_\sigma + \bar{\omega}(1 + \pi^{-1}R_m K)} \right], \quad (1.5)$$

où $\bar{\omega} = \omega\tau$ est la fréquence sans dimension du courant dans la bobine primaire, $\tau = L/U$ est le temps d'advection caractéristique, $R_m = \mu\sigma UL$ est le nombre de Reynolds magnétique égal au rapport entre le temps de diffusion magnétique $\mu_0\sigma L^2$ et le temps d'advection τ , et K et K_σ sont des constantes de calibration. Dans l'expression (1.5), on remarque que le déphasage $\Delta\varphi$ est linéaire avec R_m lorsque $R_m \rightarrow 0$. Par ailleurs, la dépendance fréquentielle de $\Delta\varphi$ pour les faibles R_m s'exprime par $\Delta\varphi \sim \bar{\omega}\pi^{-1}R_m K K_\sigma / (K_\sigma + \bar{\omega})$: le déphasage est donc d'abord croissant à basse fréquence, puis atteint un maximum et décroît jusqu'à s'annuler aux hautes fréquences. Ces comportements en vitesse et en fréquence sont observés expérimentalement par Buchenau *et al.* [23] (figure 1.8).

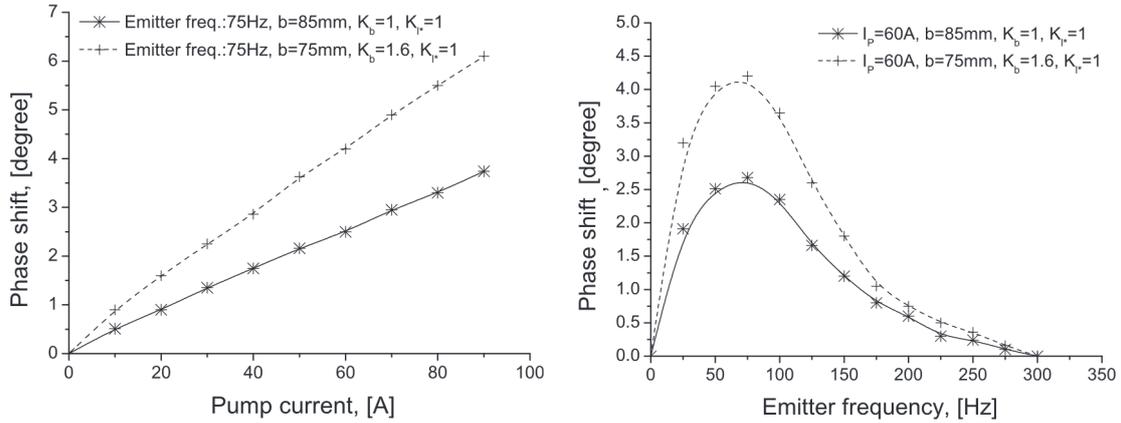


FIGURE 1.8 – Déphasage $\Delta\varphi$ entre les bobines secondaires S_1 et S_2 en fonction du débit de l'écoulement (a) et de la fréquence (b) [23].

1.2.3 ECFM en écoulement diphasique

L'aptitude d'un débitmètre électromagnétique à détecter la présence de bulles a été établie pour la première fois au laboratoire national d'Argonne (USA) en 1971, grâce à une étude expérimentale en sodium avec injection de bulles d'argon [24]. L'amplitude du signal mesuré subit alors des variations importantes lors du passage des bulles. Baker confirme ce premier résultat expérimental en 1976 grâce à une étude numérique d'un ECFM externe sous hypothèse d'axisymétrie, dans laquelle une bulle annulaire traverse les bobines [12]. La figure 1.9a montre un exemple de l'oscillation de la tension ΔV obtenue numériquement par Baker en résolvant l'équation d'induction du champ magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (1.6)$$

Dans une approche théorique, Krafft *et al.* montrent par la suite que le comportement observé est analogue à celui généré par le passage d'un dipôle magnétique dans l'ECFM [25].

La sensibilité de l'ECFM à la présence de bulles trouve une application particulière pour la mesure de taux de vide, lorsqu'une multitude de petites bulles est dispersée dans l'écoulement. Le

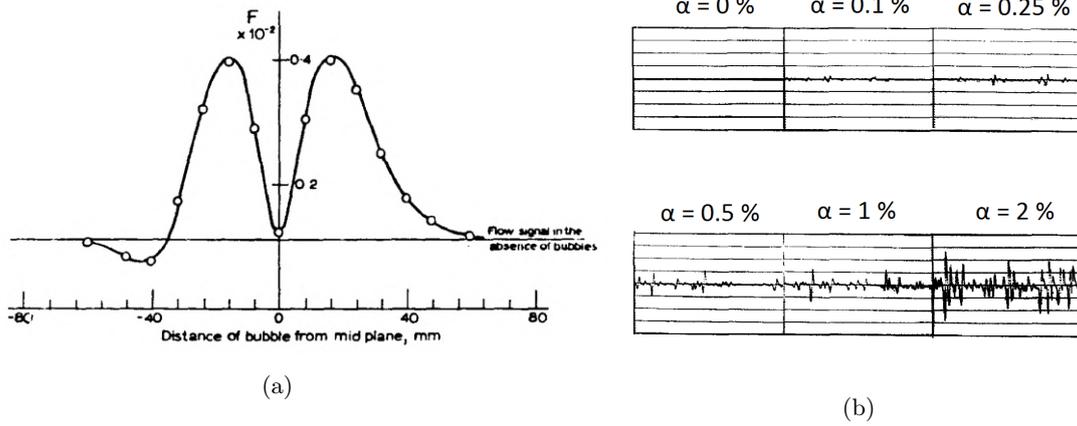


FIGURE 1.9 – (a) Tension ΔV durant le passage d’une bulle de forme annulaire à l’intérieur d’un ECFM, calculée numériquement par Baker [12]. (b) Tension ΔV pour plusieurs taux de vide dans un écoulement de sodium, mesurée expérimentalement par Nakamoto [26].

taux de vide, caractérisant la quantité de gaz en présence, est défini par :

$$\alpha(\%) = \frac{\text{débit de gaz}}{\text{débit de liquide} + \text{débit de gaz}} \times 100. \quad (1.7)$$

Dans la littérature, α est généralement compris entre 0% et 10% et les gaz utilisés sont l’argon et l’azote, dû au caractère hautement réactif du sodium notamment. Dans l’ensemble des études recensées, il est observé que la présence de bulles dispersées dans l’écoulement génère des fluctuations sur la tension ΔV , pour des expériences en sodium [26, 27] ou en galinstan [28]. Afin de différencier les fluctuations liées à la présence des bulles de celles liées au mouvement du liquide, Nakamoto *et al.* utilisent un dispositif de mesure sensible au déphasage du signal ΔV [26]. Il est alors observé que les signaux relatifs au vide et ceux relatifs à la vitesse ont un déphasage différent, permettant ainsi une décomposition de la tension ΔV . Les fréquences caractéristiques des fluctuations de ΔV liées au vide sont de plus différentes de celles des fréquences des fluctuations hydrodynamiques. La figure 1.9b montre un exemple des fluctuations mesurées, relatives à la présence de bulles dans un écoulement de sodium. Notons que l’approche théorique de Krafft *et al.*, dans laquelle la bulle est modélisée par un dipôle magnétique, explique ce comportement fluctuant par superposition des perturbations générées par chaque bulle [25].

Dans le but de comprendre le couplage entre les effets de vitesse et les effets du taux de vide sur la tension ΔV , Kumar *et al.* développent une expérience sèche où un barreau d’aluminium cylindrique, dans lequel sont usinées des cannelures, modélise le métal liquide diphasique [16, 1] (figure 1.10a). Un ECFM externe est translaté autour du barreau, le signal ΔV étant mesuré durant toute la translation. Pour un nombre de Reynolds magnétique et un taux de vide faibles, c’est à dire $R_m \ll 1$ et $\alpha < 4\%$, Kumar *et al.* identifient trois contributions dans la différence de tension ΔV , qu’on écrit alors :

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U + \Delta V_\alpha, \quad (1.8)$$

où ΔV_0 correspond à la tension mesurée lorsque $U = 0$ et $\alpha = 0$, ΔV_U est la perturbation de tension relative à la vitesse U du métal, et ΔV_α est la perturbation de tension relative au taux de vide α . On remarque que la contribution ΔV_0 est nulle par symétrie dans le cas idéal où les bobines secondaires sont identiques. Pour l’acquisition du signal ΔV , Kumar *et al.* utilisent notamment la détection synchrone, dans laquelle ΔV est de plus décomposé en une composante en phase $\Delta V_{||}$ et

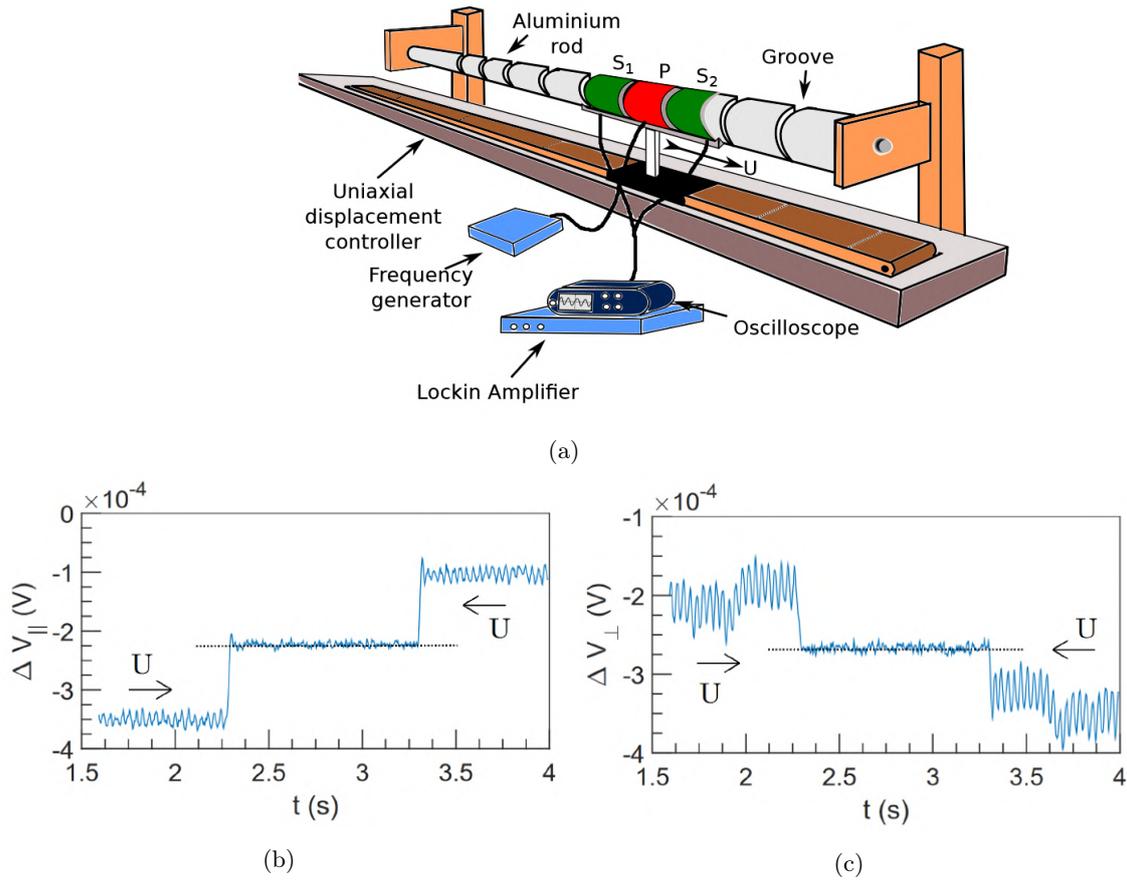


FIGURE 1.10 – (a) Dispositif expérimental de Kumar *et al.* [16] : ECFM en translation autour d'un barreau d'aluminium usiné de cannelures, simulant un écoulement de métal liquide diphasique. (b,c) Composantes en phase et en quadrature de la différence de tension ΔV , durant un aller-retour de l'ECFM.

une composante en quadrature ΔV_{\perp} , tel que $\Delta V = \Delta V_{\parallel} \cos(\omega t) + \Delta V_{\perp} \sin(\omega t)$. [29]. La référence de phase est l'intensité dans la bobine primaire $I = \hat{I} \cos(\omega t)$. En appliquant cette décomposition à l'expression (1.8), on déduit :

$$\begin{cases} \Delta V_{\parallel} = \Delta V_{0,\parallel} + \Delta V_{U,\parallel} + \Delta V_{\alpha,\parallel}, \\ \Delta V_{\perp} = \Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp} + \Delta V_{\alpha,\perp}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Les composantes en phase ΔV_{\parallel} et en quadrature ΔV_{\perp} , mesurées et démodulées pendant un aller-retour de l'ECFM, sont représentées dans les figures 1.10b et 1.10c. Les tensions $\Delta V_{0,\parallel}$ et $\Delta V_{0,\perp}$, indiquées par les lignes pointillées noires, sont non nulles du fait des différences de bobinage entre S_1 et S_2 , inhérentes à la fabrication des bobines. Les tensions $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ liées à la vitesse sont visibles par un décalage de tension, dont le signe dépend du sens de translation de l'ECFM. Enfin, la présence des cannelures sur le barreau se manifeste par une oscillation des signaux $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Ce comportement est analogue aux fluctuations observées par Nakamoto, figure 1.9b [26]. Grâce à cette décomposition du signal, Kumar *et al.* montrent que les tensions $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ ne sont pas sensibles à la vitesse de translation de l'ECFM et suivent une tendance linéaire avec α , dans la limite $\alpha < 4\%$.

D'autres méthodes basées sur l'induction permettent la détection de bulles dans les écoulements

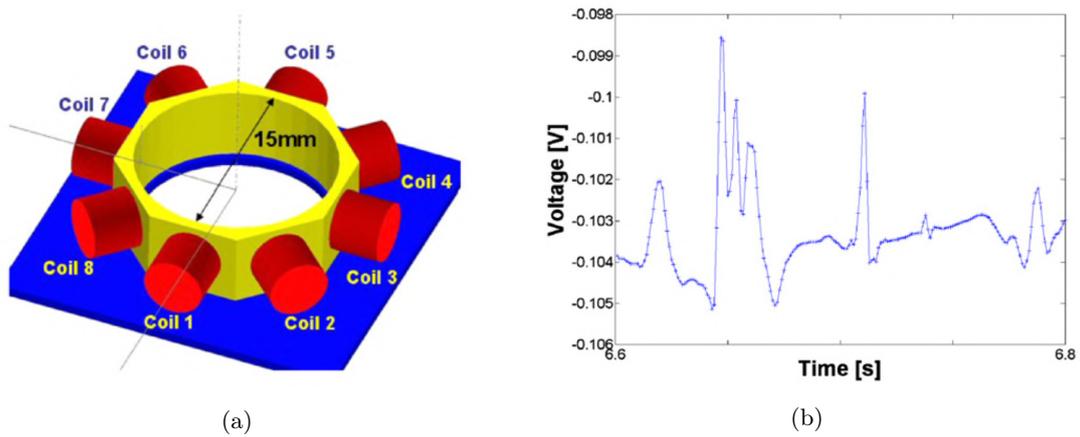


FIGURE 1.11 – (a) Dispositif expérimental utilisé pour la tomographie par induction magnétique [28]. (b) Tension aux bornes de la bobine 4, lorsque la bobine 3 est excitée en courant et qu'un écoulement de galinstan à bulles traverse le système.

de métaux liquides, telles que la tomographie par induction électromagnétique [28, 30, 31] ou la vélocimétrie par Force de Lorentz [32]. En particulier, Terzija *et al.* montrent expérimentalement la sensibilité appréciable de la tomographie par induction électromagnétique à la présence de bulles dans un écoulement de galinstan [33]. Leur dispositif de mesure est présenté dans la figure 1.11a. Plusieurs bobines, placées autour d'un écoulement de galinstan advectant des bulles, sont alimentées une à une en courant alternatif. Le champ magnétique généré dans le métal est perturbé par la présence des bulles, et cette perturbation est détectée par la mesure de tension aux bornes des bobines adjacentes à la bobine excitée. À titre d'exemple, la figure 1.11b montre le signal mesuré aux bornes de la bobine 4, lorsque la bobine 3 est excitée en courant. On remarque la présence de pics de tension sur le signal mesuré, que Terzija *et al.* attribuent au passage des bulles.

En définitive, la détection de bulles dans un écoulement de métal liquide à l'aide d'un ECFM (ou d'un dispositif inductif similaire) est démontrée par un certain nombre d'études expérimentales. Le passage d'une bulle isolée se manifeste par une variation d'amplitude de la tension mesurée ΔV . Lorsqu'une multitude de petites bulles est dispersée dans le métal, le signal mesuré est marqué par des fluctuations dont l'amplitude est proportionnelle au taux de vide α , lorsque celui-ci est suffisamment faible. Cette réponse du signal ΔV peut être déduite de la superposition des perturbations générées par chaque bulle. Cependant, les phénomènes physiques liés à la présence d'une bulle dans le métal liquide ne sont pas complètement expliqués. Afin de préparer une approche théorique du problème, la partie suivante recense quelques éléments de bibliographie sur le contrôle non destructif des métaux par courants de Foucault.

1.3 CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT

Bien qu'il n'existe que peu d'études traitant de l'effet d'une bulle sur le champ électromagnétique généré dans un métal liquide, la richesse bibliographique sur le contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault est particulièrement appréciable pour guider notre approche théorique. En ce sens, il faut remarquer que la perturbation du champ électromagnétique relative à la présence d'une bulle est analogue à celle d'un défaut dans une pièce métallique, en dehors des effets

hydrodynamiques. Dans les deux cas en effet, c'est le caractère isolant électrique de la bulle ou du défaut qui est à l'origine de la perturbation des courants de Foucault.

La méthode utilisée pour les sondes de contrôle non destructif et pour les ECFM est relativement similaire. Le conducteur électrique à sonder est d'abord excité par un champ électromagnétique variable, usuellement grâce à une bobine dite « primaire » alimentée en courant alternatif et placée à proximité du conducteur. La fréquence du courant alternatif peut varier de quelques dizaines de hertz à quelques mégahertz selon les applications [34] (page 488). Les perturbations du champ électromagnétique générées par la présence d'un défaut, d'une inclusion ou plus généralement d'une hétérogénéité dans le conducteur sont ensuite mesurées via les variations d'impédances de la même bobine primaire [35], ou d'autres bobines dans le voisinage de la primaire [36]. On note que cette méthode de mesure du champ perturbé est sensiblement différente de celle utilisée avec les ECFM, pour lesquels une différence de tension aux bornes des bobines secondaires est mesurée (puis démodulée dans certains cas). De ce fait, nous nous intéresserons principalement ici aux modélisations du champ électromagnétique perturbé, et laisserons de côté les calculs de variations d'impédance largement évoqués dans la littérature.

Une revue de littérature des approches théoriques utilisées en contrôle non destructif par courants de Foucault, datant de 1992, est donnée par Kriezis *et al.* [37]. Plus spécifiquement, les méthodes de modélisation de la diffusion des courants de Foucault basées sur les fonctions de Green et sur les formulations variationnelles sont décrites par Lesselier et Razeq dans un chapitre de l'ouvrage *Scattering* [34] (voir section suivante 1.3.3, page 21 de la thèse, pour plus de détails). De manière générale, en négligeant les effets de la vitesse du conducteur électrique par rapport à la sonde (par ailleurs considérés dans l'équation (1.1), page 10), le champ électromagnétique est gouverné par une équation de Helmholtz inhomogène, soit pour le potentiel vecteur \mathbf{A} [37, 38] :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - j\mu\sigma\omega \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_S, \quad (1.10)$$

où \mathbf{J}_S est la densité de courant « source » alimentant la bobine primaire, et μ et σ sont respectivement la perméabilité magnétique et la conductivité électrique des milieux traversés par le potentiel vecteur \mathbf{A} . Pour le cas du champ électrique \mathbf{E} , l'équation s'écrit :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + j\mu\sigma\omega \mathbf{E} = -j\mu\omega \mathbf{J}_S. \quad (1.11)$$

L'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$, déduite des équations (1.10) et (1.11) appliquées à une onde plane traversant un milieu conducteur semi-infini, est l'échelle de longueur propre à la diffusion du champ électromagnétique dans le conducteur. Dans le cas d'un défaut de dimension caractéristique a , la modélisation du champ électromagnétique perturbé distingue le cas où l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ est grande par rapport à a , c'est à dire $\delta \gg a$ (sous-section 1.3.1), et le cas où l'épaisseur de peau est petite devant les dimensions du défaut, c'est à dire $\delta \ll a$ (sous-section 1.3.2). Le cas des phénomènes diffusifs dans la zone intermédiaire $\delta \approx a$ est traité dans la sous-section 1.3.3.

1.3.1 Épaisseur de peau grande par rapport aux dimensions du défaut

Cette première configuration correspond à des fréquences faibles et un défaut de petite taille, c'est à dire $a/\delta \ll 1$. Dans le membre de gauche de l'équation de Helmholtz du potentiel vecteur (1.10), le terme en ω devient négligeable. Sous l'approximation quasi-statique, le potentiel vecteur obéit à une équation de Poisson $\nabla^2 \mathbf{A} \approx -\mu \mathbf{J}_S$. Sachant que \mathbf{J}_S est imposé dans la bobine primaire extérieure au conducteur sondé, le potentiel vecteur \mathbf{A} et la densité de courant induit \mathbf{j} obéissent à l'équation de Laplace dans le conducteur, c'est à dire $\nabla^2 \mathbf{A} \approx 0$ et $\nabla^2 \mathbf{j} \approx 0$. La

modélisation des courants de Foucault \mathbf{j} est alors analogue à celle du champ de vitesse \mathbf{u} d'un écoulement potentiel, obéissant à $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$, en hydrodynamique [39].

Pour un défaut sphérique, les solutions d'un écoulement potentiel autour d'une sphère sont appliquées par Burrows dans une étude souvent citée [40]. La perturbation du champ est alors équivalente à celle générée par un dipôle de courant. Dodd *et al.* étendent la solution pour des défauts de forme ellipsoïdale [41]. L'effet d'un défaut en surface, à deux dimensions tel qu'une fissure longue (figure 1.12a), ou à trois dimensions tel qu'une fissure courte (figure 1.12b), est caractérisé par Auld *et al.* [39]. Dans toutes ces géométries, la présence du défaut en surface ou en profondeur « gêne » le déplacement des charges dans le conducteur. L'atténuation du champ électromagnétique par les courants de Foucault est en conséquence réduite. Dans le cas d'un ECFM, on peut alors imaginer que la tension générée aux bornes d'une bobine secondaire, proportionnelle au flux magnétique qui la traverse, est plus importante en présence d'une hétérogénéité (telle qu'une bulle).

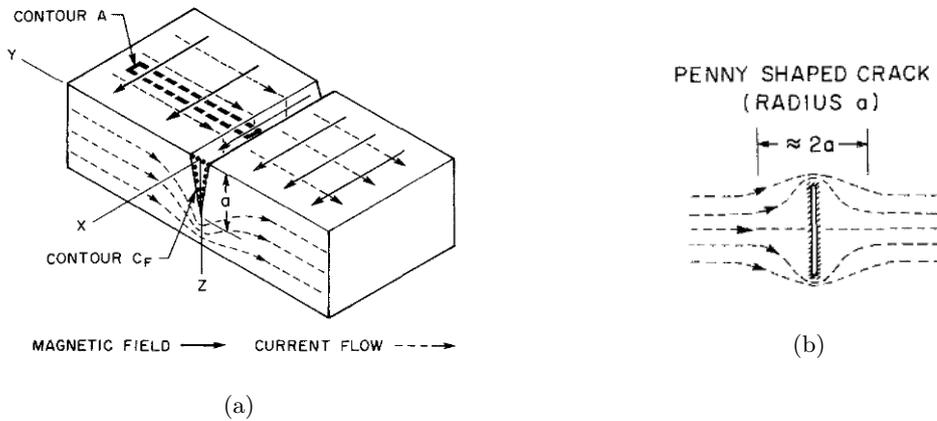


FIGURE 1.12 – Illustration des courants de Foucault contournant une fissure longue (a) et une fissure courte (b), sous l'hypothèse $\delta \gg a$ [39].

Sur la base du modèle de Burrows [40] et des résultats analytiques de Dodd et Deeds pour un cylindre conducteur infini [7], Zaman *et al.* déterminent les variations d'impédance d'une spire dues à un défaut à l'intérieur d'un cylindre de métal [42]. Il est montré que l'impédance de la spire est une fonction du champ électrique non perturbé (en l'absence de défaut) à la position du défaut. Pour le cas d'un défaut de petite taille, l'expression est simplifiée en n'utilisant que la valeur du champ électrique à la position du centre du défaut. La variation d'impédance ΔZ est de plus factorisée en deux termes F_a et F_d , le premier dépendant de la position axiale du défaut, et le second de la position radiale, telle que :

$$\Delta Z \approx \frac{\sigma V_f \omega^2 \mu_0^2}{\pi^2} F_a F_d, \quad (1.12)$$

où V_f est le volume du défaut. Nous utiliserons une factorisation similaire dans notre modélisation de l'effet d'une inclusion sur la différence de tension ΔV mesurée à l'ECFM, détaillée dans le chapitre 5.

1.3.2 Épaisseur de peau faible par rapport aux dimensions du défaut

Dans cette configuration, les fréquences sont élevées et le défaut est grand par rapport à l'épaisseur de peau, soit $a/\delta \gg 1$. Le champ électromagnétique est alors confiné au voisinage de la surface

du conducteur, dans la fine épaisseur de peau δ , et les études recensées concernent exclusivement les défauts de surface. L'hypothèse usuelle consiste à supposer que le champ magnétique extérieur $B_0 e^{j\omega t}$ appliqué sur la surface du métal n'est pas perturbé par la présence du défaut [43]. Pour modéliser l'effet du défaut, Auld *et al.* proposent de considérer que les courants induits sont distribués de manière uniforme au voisinage de la surface du métal, à l'exception des zones où des discontinuités géométriques sont présentes sur la surface [39]. Pour le cas d'une fissure de longueur infinie par exemple (figure 1.13a), les courants induits sont distribués uniformément en surface sauf au voisinage de la pointe et des bords de la fissure, représentés en rouge sur la figure 1.13a. Kahn *et al.* décrivent l'influence de cette non-uniformité en distinguant les effets de la pointe (figure 1.13b) et des bords (figure 1.13c) [44].

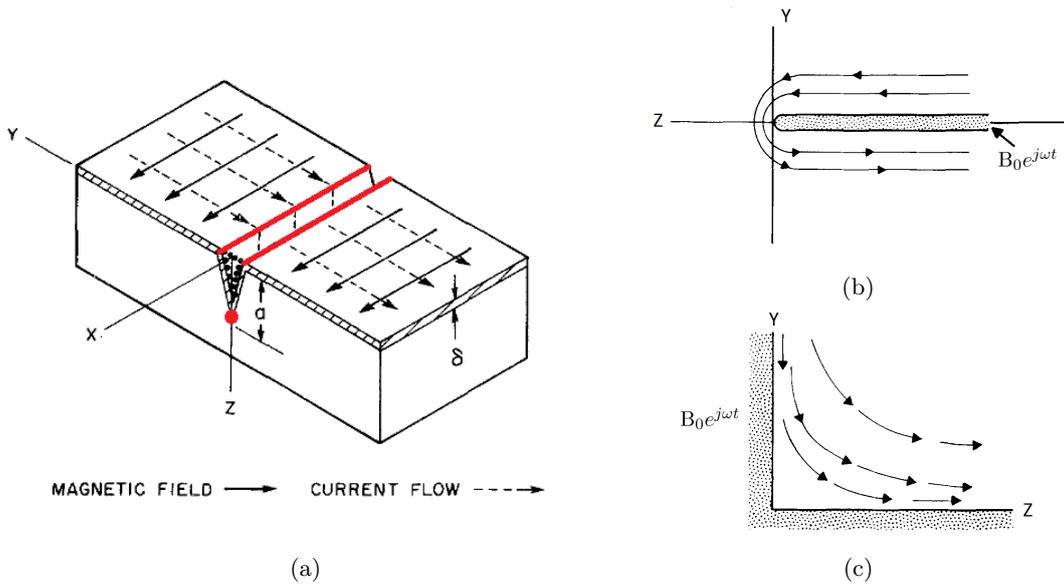


FIGURE 1.13 – Illustration des courants de Foucault contournant une fissure longue sous l'hypothèse $a/\delta \gg 1$: vue d'ensemble (a), gros plan sur la pointe de la fissure (b) et gros plan sur les bords (c).

Il est à noter que la méthode développée par Auld *et al.* et par Kahn *et al.* est applicable pour les défauts de surface seulement. Si le défaut est enfoui en profondeur dans le métal, les courants induits sont totalement atténués à la position du défaut et le champ électromagnétique perturbé est négligeable.

1.3.3 Solutions par fonctions de Green

Le problème plus général de la diffusion du champ électromagnétique dans un métal contenant une hétérogénéité en surface ou enfouie (sans prendre d'hypothèse du type $a/\delta \ll 1$ ou $a/\delta \gg 1$) doit être traité en considérant l'équation (1.10) du potentiel vecteur \mathbf{A} ou l'équation (1.11) du champ électrique \mathbf{E} . Dans le but de caractériser les effets de l'hétérogénéité sur le champ électromagnétique, il est usuel de décomposer le potentiel vecteur (ou alternativement le champ électrique) en un champ non perturbé (existant en l'absence d'hétérogénéité) et un champ perturbé. La détermination des fonctions de Green des équations (1.10) (pour \mathbf{A}) et (1.11) (pour \mathbf{E}) est à la base de plusieurs approches cherchant à décrire le champ perturbé [34]. On distingue alors les fonctions de Green scalaires, transformant une source de courant scalaire en un champ scalaire, et les fonctions de Green dyadiques (ou « dyades de Green »), transformant une source de courant

vectorielle en un champ vectoriel. La détermination de ces dernières est expliquée dans l'ouvrage de référence de Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory* [45].

À partir de la détermination de la fonction de Green dyadique de l'équation (1.11) pour le cas d'un conducteur semi-infini, Bowler *et al.* développent en 1991 une méthode de calcul du champ perturbé relatif à la présence d'un défaut 3D dans le conducteur, puis prédit la réponse de la sonde (en terme de variation d'impédance) [46]. En reprenant les notations de Bowler *et al.*, le champ électrique total s'écrit alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) + j\mu_0\omega \int_{\text{défaut}} \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.13)$$

où le champ électrique non perturbé est noté $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})$, et le champ électrique perturbé correspond au deuxième terme du membre de droite, contenant une intégrale volumique sur le domaine occupé par le défaut. Dans ce terme, on identifie la fonction de Green dyadique $\mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$, transformant une source électrique située en \mathbf{r}' en un champ électrique situé en \mathbf{r} , solution de l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - j\mu_0\sigma_0\omega \mathbf{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{I}, \quad (1.14)$$

où $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est la fonction delta de Dirac et \mathbf{I} est la matrice identité. Dans le terme du champ perturbé de l'équation (1.13) par ailleurs, le vecteur $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ est la densité de courant induit fictive à la position du défaut (correspondant à une source de Huygens), qu'on écrit $\mathbf{P}(\mathbf{r}') = -\sigma_0\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ dans le volume du défaut. La résolution de l'équation (1.13), qu'on identifie comme une équation intégrale de Fredholm du second type, est effectuée numériquement par Bowler *et al.* [46].

La méthode de détermination du champ perturbé, en utilisant une expression similaire à celle de l'équation (1.13), est utilisée dans plusieurs études ultérieures. Le cas d'un défaut défaut 3D dans un tube de métal est traité par Monebhurrin *et al.* [47]; celui d'un défaut défaut 3D dans une plaque est traité par Yoshida et Bowler en utilisant le potentiel vecteur [48]. À partir de l'expression du champ électrique (1.13) (perturbé et non perturbé), Norton et Bowler préconisent en particulier l'utilisation d'un algorithme itératif (de type moindres carrés) pour effectuer une méthode inverse [49], dans le but de reconstruire la géométrie d'un défaut à partir de la mesure des variations d'impédance de la sonde.

1.4 CONCLUSION

De nombreuses études sur les débitmètres à courants de Foucault, ou ECFM (pour *Eddy Current Flow Meter*), sont présentes dans la littérature, principalement pour la mesure de vitesse et dans une moindre mesure pour la détection de bulles. Bien qu'il existe une grande variété de systèmes répondant à cette appellation, deux types d'ECFM ressortent particulièrement : les ECFM externes, pour lesquels le métal liquide s'écoule à l'intérieur des bobines, et les ECFM internes, pour lesquels le métal liquide s'écoule autour des bobines.

Pour l'application à la mesure de vitesse, les ECFM externes ont été l'objet d'études expérimentales « sèches », où un barreau métallique (généralement en aluminium) en translation à l'intérieur des bobines simule l'écoulement, ainsi que d'études expérimentales en « situation réelle », avec un écoulement de métal liquide (usuellement du sodium, du galinstan voire du mercure). Les ECFM internes ont également été l'objet d'études expérimentales, quasiment exclusivement en métal liquide. La différence de tension mesurée aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM varie dans les deux cas linéairement avec la vitesse, et une fréquence optimale d'utilisation est identifiée (pour laquelle la réponse de l'ECFM est maximale). En outre, plusieurs approches théoriques modélisant la réponse d'un ECFM externe à un écoulement de métal liquide le traversant (en l'absence de

bulle) ont été réalisées. La solution dans le cas statique est donnée par Dodd et Deeds [7], celle en écoulement piston (vitesse uniforme) par Hirayama [8]. Dans le cas d'un écoulement à profil de vitesse non uniforme (laminaire, turbulent), il semble cependant que la réponse d'un ECFM externe est peu étudiée théoriquement dans la littérature, et n'a pas été confrontée de manière quantitative à des mesures expérimentales.

Pour l'application à la détection de bulles, plusieurs études expérimentales ont montré la sensibilité des ECFM au passage de bulles. Dans leur grande majorité, ces études expérimentales concernent un ensemble de bulles dispersées dans l'écoulement, caractérisé par un « taux de vide » α (fraction volumique de gaz dans l'écoulement). En présence de cette phase dispersée, la différence de tension aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM est marquée par la présence de fluctuations, dont l'amplitude est environ proportionnelle au taux de vide (dans la limite $\alpha \lesssim 4\%$). Il apparaît cependant que les approches théoriques cherchant à modéliser l'influence des bulles sur le champ électromagnétique généré par l'ECFM sont très peu présentes dans la littérature, voire inexistantes au meilleur de notre connaissance. Dans la démarche de modélisation théorique de l'ECFM que nous entreprendrons dans le chapitre 5, dans le but de caractériser les effets d'une bulle sur le champ électromagnétique, nous pourrions cependant nous baser sur les modèles théoriques développés en contrôle non destructif par courants de Foucault décrits en fin de ce chapitre. Nous ferons alors l'analogie entre la présence d'une bulle électriquement isolante dans un écoulement de métal liquide, et celle d'une inclusion isolante dans une pièce métallique, en excluant les effets hydrodynamiques propres à la bulle.

Finalement, nous utiliserons dans cette thèse la méthode d'acquisition et de décomposition du signal proposée par Kumar *et al.* [16, 1]. Dans cette méthode, la différence de tension aux bornes des bobines secondaires, démodulée à la fréquence d'excitation du courant dans la bobine primaire, est décomposée en trois contributions : $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U + \Delta V_\alpha$. À l'aide de deux dispositifs expérimentaux (présentés dans le chapitre 2) et du modèle théorique de l'ECFM en l'absence de bulle (décrit dans le chapitre 3), la contribution ΔV_U relative à la vitesse de l'écoulement sera traitée dans le chapitre 4. Avec les résultats de mesure du premier dispositif expérimental et les résultats du modèle de la perturbation générée par l'inclusion (décrit dans le chapitre 5), l'étude de la contribution ΔV_α relative à la présence d'une inclusion sera en outre traitée dans le chapitre 6.

CHAPITRE 2

DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

Ce chapitre présente les deux dispositifs expérimentaux réalisés dans cette thèse. Dans chaque dispositif, un écoulement de métal liquide « modèle » est sondé par un ECFM (débitmètre à courants de Foucault) dans le but d'étudier les perturbations du champ électromagnétique générées par la vitesse du métal et la présence d'une inclusion isolante électrique.

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Pilotage de l'ECFM et méthode de mesure	26
2.2.1	Appareils utilisés	26
2.2.2	Description du système de pilotage de l'ECFM	28
2.3	Expérience 1 : métal liquide en mouvement uniforme contenant une inclusion isolée	31
2.3.1	Montage expérimental	31
2.3.2	Signaux mesurés après démodulation	35
2.4	Expérience 2 : écoulement de métal liquide en conduite	38
2.4.1	Montage expérimental	38
2.4.2	Signaux mesurés après démodulation - écoulement sans billes	44
2.4.3	Vélocimétrie ultrasonore Doppler (UVP)	45
2.5	Incertitudes de mesures et ajustement des caractéristiques de l'ECFM	50
2.5.1	Incertitudes de mesure	51
2.5.2	Ajustement des modèles théoriques de l'ECFM	51
2.6	Conclusion	56

2.1 INTRODUCTION

Au regard des études antérieures présentées dans le chapitre 1, l'ECFM s'avère être une solution envisageable pour mesurer la vitesse d'un écoulement de métal liquide, et simultanément détecter la présence de bulles dans l'écoulement. La différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM peut en effet être décomposée en plusieurs contributions, dont une contribution ΔV_U relative à la vitesse du métal liquide et une deuxième ΔV_α relative à la présence de bulles. L'interaction entre le champ électromagnétique variable généré par l'ECFM et l'écoulement de métal liquide, transportant des bulles isolantes électriques, reste cependant un problème ouvert, pour lequel la base de données expérimentales existante doit être complétée.

Les deux dispositifs expérimentaux réalisés dans cette thèse ont pour objectif d'observer séparément les deux contributions ΔV_U et ΔV_α , à partir d'écoulements « modèles » simplifiés. Le premier dispositif représente un écoulement de métal liquide dont le champ de vitesse est uniforme (cas d'un profil de vitesse piston) advectant une inclusion sphérique isolante simulant la présence d'une bulle. Les effets de la vitesse du métal liquide, et de la taille et la position de l'inclusion, sont mesurés à l'ECFM. Le second dispositif est constitué d'un écoulement de métal liquide « réel », ne contenant pas de bulle ou d'inclusion, de manière à mesurer la tension ΔV_U et à caractériser les effets du débit et du profil vitesse. Les effets de la présence d'une inclusion dans cet écoulement pourront être mesurés avec ce dispositif dans une étude ultérieure.

Le pilotage de l'ECFM et la méthode de mesure, similaires pour les deux dispositifs expérimentaux, sont décrits dans la section 2.2. Le premier dispositif expérimental est présenté dans la section 2.3, et le second dispositif expérimental dans la section 2.4. Enfin, la section 2.5 fournit plusieurs éléments inhérents à la métrologie, tels que la détermination des incertitudes de mesure ou l'ajustement des modèles théoriques réalisés pour interpréter les mesures expérimentales.

2.2 PILOTAGE DE L'ECFM ET MÉTHODE DE MESURE

Cette section décrit le système de pilotage de l'ECFM commun aux deux expériences réalisées. La première étape consiste à alimenter l'ECFM en courant alternatif pour générer un champ électromagnétique variable dans le métal liquide. La seconde étape comprend la mesure de tensions aux bornes des bobines de l'ECFM et le traitement du signal par détection synchrone.

2.2.1 Appareils utilisés

Les appareils utilisés pour l'excitation et l'acquisition sont un lock-in amplifieur (amplificateur à détection synchrone) Zurich Instruments HF2LI MF et un amplificateur à transconductance réalisé par Hervé Ayroles (IMFT), représentés respectivement dans les figures 2.1a et 2.1b. L'association du lock-in amplifieur, utilisé comme générateur de fréquence, et de l'amplificateur à transconductance, générant un courant contrôlé par la tension de sortie du lock-in amplifieur, permet l'excitation de la bobine primaire. Le lock-in amplifieur est en outre utilisé pour la mesure et la démodulation des tensions aux bornes des bobines secondaires.

Lock-in amplifieur (Zurich Instruments HF2LI MF)

Le lock-in amplifieur (en français amplificateur à détection synchrone), communément appelé « lock-in », est un appareil permettant l'extraction de signaux de faible intensité dans un environnement fortement bruité. Les signaux à extraire sont en général modulés, en fréquence ou en



FIGURE 2.1 – Appareils utilisés pour l'excitation et l'acquisition. (a) Lock-in amplifieur Zurich Instruments HF2LI MF (image Zurich Instruments). (b) Amplificateur à transconductance (réalisation Hervé Ayroles, IMFT).

amplitude, sur une onde porteuse connue. L'appareil utilisé dans les expériences est le lock-in amplifieur Zurich Instruments HF2LI MF, représenté dans la figure 2.1a. Le pilotage du lock-in est effectué par le logiciel LabOne fourni par Zurich Instruments.

Le principe de la mesure est présenté dans la figure 2.2. Un signal sinusoïdal de référence $V_R(t) = \sqrt{2}e^{-j\omega_R t}$ de pulsation ω_R est émis par un générateur de fréquence (soit le lock-in lui-même, soit un appareil externe). Ce signal est modifié par le système à tester (DUT, Device Under Test) avec par exemple une modulation en fréquence ou en amplitude, une amplification ou une atténuation, un déphasage, etc. On note $V_S(t) = A_S \cos(\omega_S t + \Theta_S)$ le signal en sortie du système à tester, en remarquant que $\omega_S = \omega_R$ dans le cas de la modulation d'amplitude. Le lock-in mesure simultanément la référence $V_R(t)$ et le signal $V_S(t)$, puis effectue la détection synchrone permettant d'obtenir l'amplitude A_S et de le déphasage Θ_S du signal (déphasage par rapport à $V_R(t)$).

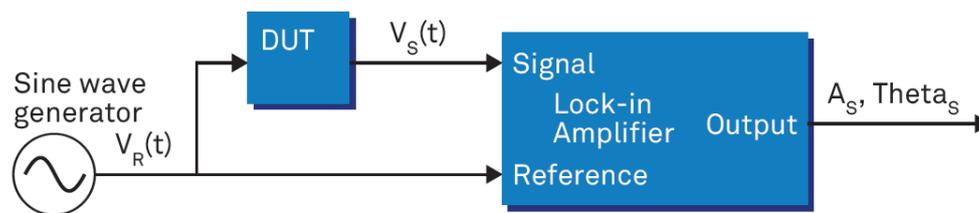


FIGURE 2.2 – Principe d'acquisition du signal de l'ECFM (DUT, Device Under Test) par le Lock-in Amplifier HF2LI MF (image Zurich Instruments).

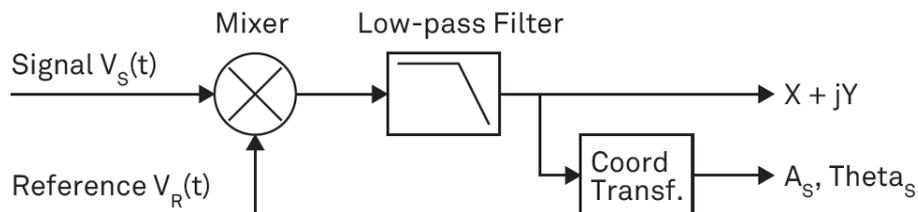


FIGURE 2.3 – Démodulation effectuée par le lock-in par l'association d'un mélangeur et d'un filtre passe-bas (image Zurich Instruments).

Le processus de détection synchrone effectué par le lock-in est décrit dans la figure 2.3. Dans un premier temps, le signal d'entrée $V_S(t)$ est multiplié dans un mélangeur par le signal de référence $V_R(t) = \sqrt{2}e^{-j\omega_R t}$ où ω_R est la pulsation la porteuse $V_R(t)$. Le signal en sortie du mélangeur, exprimé dans l'équation 2.1, est constitué d'une composante lente de pulsation $\omega_S - \omega_R$ et d'une composante rapide de pulsation $\omega_S + \omega_R$:

$$V_S(t) \times V_R(t) = V_S(t) \times \sqrt{2}e^{-j\omega_R t} = \frac{A_S}{\sqrt{2}}e^{+j[(\omega_S - \omega_R)t + \Theta_S]} + \frac{A_S}{\sqrt{2}}e^{-j[(\omega_S + \omega_R)t + \Theta_S]}. \quad (2.1)$$

Le signal (2.1) est ensuite traité par un filtre passe-bas (RC). En supposant que la composante rapide en $\omega_S + \omega_R$ est complètement coupée par le filtre, le signal en sortie du filtre devient :

$$X + jY = \langle V_S(t) \times V_R(t) \rangle \approx F(\omega_S - \omega_R) \frac{A_S}{\sqrt{2}} e^{j[(\omega_S - \omega_R)t + \Theta_S]}, \quad (2.2)$$

où le symbole $\langle \cdot \rangle$ indique le filtrage et $F(\omega_S - \omega_R)$ est la réponse en fréquence du filtre. Idéalement, $F(\omega_S - \omega_R) = 1$ en dessous de la fréquence de coupure et $F(\omega_S - \omega_R) = 0$ au-delà. En pratique, l'atténuation des hautes fréquences est caractérisée par la pente d'atténuation après la fréquence de coupure, propre au filtre et fixée à 24 dB/Oct. Le signal démodulé et filtré est finalement constitué d'une composante en phase X et d'une composante en quadrature Y par rapport à la référence de phase $V_R(t)$. Connaissant les composantes X et Y , l'amplitude R et le déphasage Θ sont obtenus par :

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right). \end{cases} \quad (2.3)$$

Amplificateur à transconductance

L'amplificateur à transconductance, en anglais Operational Transconductance Amplifier (OTA), est un appareil produisant un courant de sortie i_{out} proportionnel à la tension d'entrée v_{in} . Le rapport entre le courant de sortie et la tension d'entrée $g_m = i_{\text{out}}/v_{\text{in}}$ est appelé transconductance et s'exprime en siemens. L'appareil utilisé a une transconductance théorique $g_m = 0.5$ S (figure 2.1b). Une sortie additionnelle (port de gauche « VI_Mesure » sur la photo) fournit la tension aux bornes d'une résistance $R = 0.5 \Omega$, située à l'intérieur de l'appareil, et traversée par le courant i_{out} . En appliquant la loi d'Ohm, la mesure de cette tension permet ainsi de contrôler le courant de sortie et l'efficacité de l'OTA. Le couplage de l'OTA avec une source de tension AC (générateur de fréquence par exemple) permet d'obtenir une source de courant AC.

2.2.2 Description du système de pilotage de l'ECFM

Dans le protocole de mesure usuel d'un ECFM, l'étape d'excitation consiste d'abord à alimenter la bobine primaire P avec un courant alternatif, dont la fréquence et l'amplitude sont fixées. Comme il a été mentionné précédemment, le champ magnétique \mathbf{B} généré est modifié par le mouvement relatif du métal liquide et la présence de bulles. L'étape d'acquisition consiste ensuite à mesurer la différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires, sensible aux perturbations du champ \mathbf{B} , et à extraire les informations des signaux mesurés. La figure 2.4 présente le schéma fonctionnel du système d'excitation et d'acquisition utilisé pour les deux dispositifs expérimentaux.

Pour l'excitation de la bobine primaire P en courant alternatif, le lock-in amplifieur Zurich Instruments HF 2LI MF est utilisé comme générateur de fréquence. Dans les expériences, les signaux générés par le lock-in (Output 1 sur la figure 2.4) ont une fréquence fixe pouvant varier de

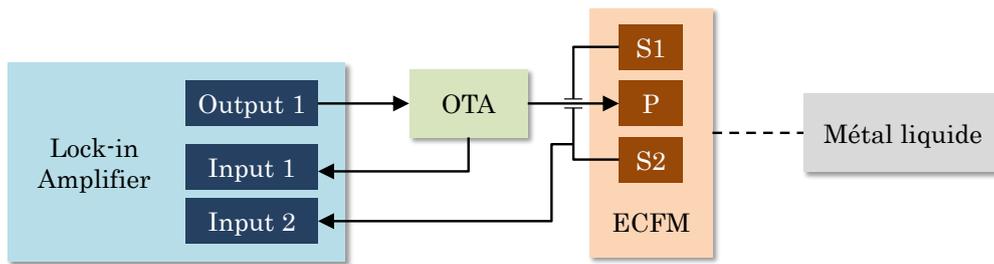
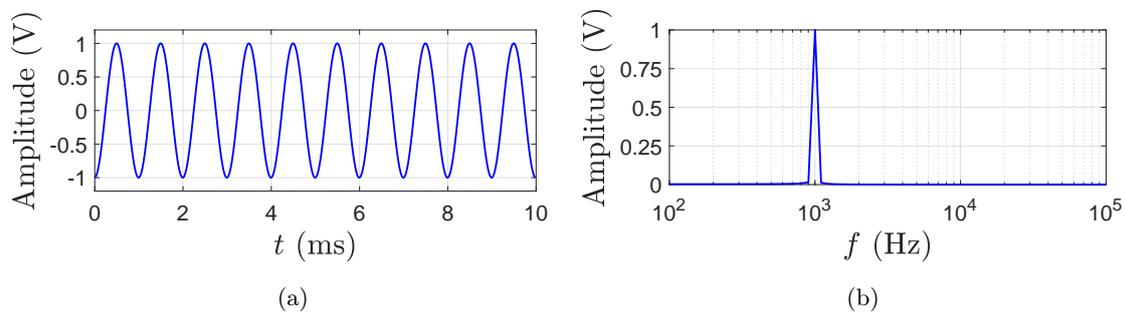
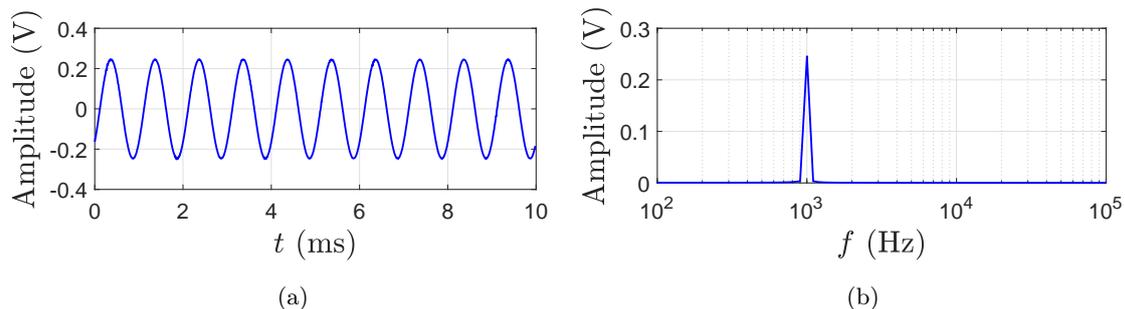


FIGURE 2.4 – Schéma fonctionnel du système d'excitation et d'acquisition.

500 Hz à 20 kHz et une tension efficace constante de 0.707 V (valeur RMS). La figure 2.5 montre un exemple de signal généré par l'Output 1 du lock-in pour une fréquence $f = 1000$ Hz.

FIGURE 2.5 – Exemple de signal généré par l'Output 1 du lock-in pour une fréquence $f = 1000$ Hz. (a) Signal temporel. (b) Spectre d'amplitude.

Le courant en sortie de l'OTA, proportionnel à la tension d'entrée (Output 1 du lock-in), alimente la bobine primaire de l'ECFM. La sortie additionnelle de l'OTA génère par ailleurs une tension directement proportionnelle au courant, mesurée par le lock-in (Input 1 sur la figure 2.4) et utilisée comme référence pour la démodulation. Le courant alimentant la bobine primaire est donc connu, en amplitude et en phase, grâce à l'Input 1. La figure 2.6 illustre un exemple de tension mesurée par l'Input 1 du lock-in pour une fréquence $f = 1000$ Hz.

FIGURE 2.6 – Exemple de signal mesuré par l'Input 1 du lock-in pour une fréquence $f = 1000$ Hz. (a) Signal temporel. (b) Spectre d'amplitude.

La tension d'entrée de l'OTA étant fixée à 0.707 V (valeur RMS) et la transconductance valant $g_m = 0.5$ S, la valeur efficace du courant de sortie de l'OTA est donc idéalement fixe à 0.354 A (valeur RMS). La tension en Input 1 correspondante est idéalement de 0.177 V (valeur RMS). Dans la figure 2.7, on remarque que la valeur efficace du courant calculée avec la mesure de l'Input 1 est

légèrement inférieure à la valeur idéale aux basses fréquences. On observe de plus une déviation en fonction de la fréquence à partir de 6000 Hz environ. Cette déviation provient probablement du montage électronique interne à l'OTA. Dans la suite de la thèse, on se base sur la mesure de la valeur efficace du courant I^e alimentant la bobine primaire comme paramètre d'entrée pour les modèles théoriques de l'ECFM.

L'acquisition du signal d'intérêt est effectuée par l'Input 2 du lock-in (voir figure 2.4). Le signal mesuré est la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$, où V_1 et V_2 sont les tensions aux bornes des bobines secondaires S_1 et S_2 . La figure 2.8 montre un exemple de tension mesurée par l'Input 2 du lock-in (signal non filtré, avant démodulation) pour une fréquence $f = 1000$ Hz. Un bruit de mesure est visible sur le signal temporel et sur le spectre d'amplitude, la tension ΔV étant relativement faible. Le montage expérimental n'étant pas protégé par un blindage, la pollution électromagnétique d'appareils électriques et électroniques environnants (présents dans la salle d'expériences) peut être à l'origine de ce bruit. La démodulation effectuée par le lock-in, en prenant l'Input 1 comme signal de référence, permet de détecter les informations relatives au mouvement du métal liquide et à la présence de bulles dans cet environnement bruité.

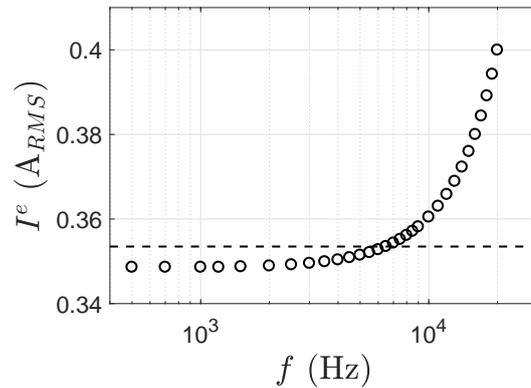


FIGURE 2.7 – Valeur efficace du courant de sortie de l'OTA en fonction de la fréquence du signal de l'Output 1. Les cercles correspondent aux valeurs mesurées par le lock-in amplifieur (Input 1). Le trait pointillé correspond à la valeur attendue du courant de sortie, sachant que la tension d'entrée est de $0.707 V_{RMS}$ et que la transconductance théorique vaut $g_m = 0.5$ S.

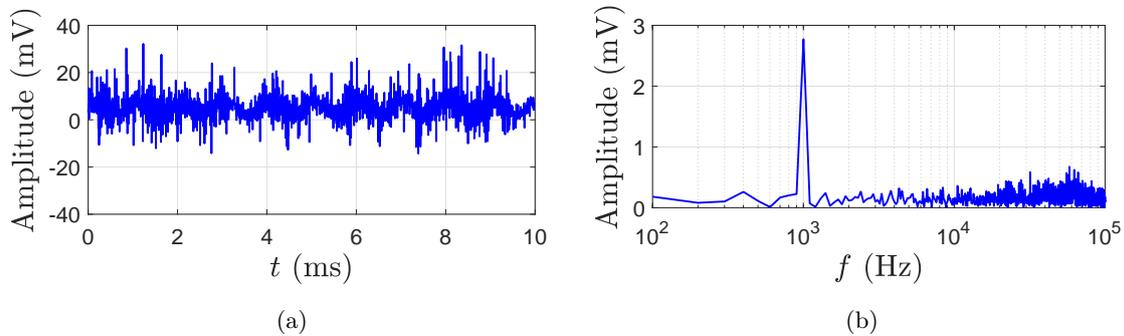


FIGURE 2.8 – Exemple de signal mesuré (non filtré, avant démodulation) par l'Input 2 du lock-in pour une fréquence $f = 1000$ Hz. (a) Signal temporel. (b) Spectre d'amplitude.

2.3 EXPÉRIENCE 1 : MÉTAL LIQUIDE EN MOUVEMENT UNIFORME CONTENANT UNE INCLUSION ISOLÉE

Cette section décrit le premier dispositif expérimental simulant un écoulement uniforme de métal liquide contenant une inclusion, excité par un champ électromagnétique variable. L'objectif général de l'étude est de caractériser les perturbations du champ électromagnétique générées par le mouvement du métal (du fait de l'induction) et par la présence d'une inclusion isolante dans le métal (ici une bille isolante simulant la présence d'une bulle), à l'aide d'un ECFM.

Pour observer les deux perturbations du champ individuellement, on considère une configuration simplifiée. Premièrement, l'inclusion dans le métal liquide est une bille isolante simulant la présence d'une bulle : ainsi, la position et la taille de l'inclusion peuvent être fixées. De plus, l'ensemble constitué par le métal et la bille repose immobile dans un tube : il n'y a a priori pas d'effets hydrodynamiques significatifs. On crée un mouvement relatif entre le métal et l'ECFM en déplaçant l'ECFM le long du tube à l'aide d'un banc de translation. De cette manière, le métal liquide est animé d'une vitesse uniforme (translation solide ou écoulement piston) par rapport à l'ECFM. Enfin, les effets collectifs de plusieurs inclusions ne sont donc pas considérés dans cette étude.

Le montage expérimental est décrit dans la sous-section 2.3.1. Les différents éléments, c'est à dire le métal liquide contenant une inclusion, l'ECFM et le banc de translation, sont détaillés dans chaque sous-partie. Le système d'excitation et d'acquisition relié à l'ECFM est celui présenté précédemment, constitué d'un lock-in amplifieur et d'un amplificateur à transconductance (voir figure 2.4).

La sous-section 2.3.2 présente quelques exemples de signaux temporels mesurés après démodulation par le lock-in. Les perturbations du champ électromagnétique générées par le mouvement du métal et par la présence de la bille sont observées sur les composantes en phase et en quadrature du signal mesuré. Un tube contenant uniquement du métal (sans bille) est utilisé comme témoin.

2.3.1 Montage expérimental

Cette partie décrit le montage expérimental représenté sur la figure 2.9a. La section d'essai est maintenue par un ensemble de profilés en aluminium. Le tube contenant le métal liquide est visible au milieu de la photo (cylindre vertical blanc). On peut apercevoir les bobines de l'ECFM autour de la partie supérieure du tube. Le banc de translation est situé verticalement derrière l'ECFM et le tube, moteur en bas. Une pièce en plastique (en beige sur la photo) fait le lien entre l'ECFM et le banc. On distingue les câbles de branchement de l'ECFM reliés au système d'acquisition sur la partie gauche. Le lock-in et l'OTA sont disposés sur la table à gauche de la structure (non visible sur la photo).

La figure 2.9b est une vue 3D représentant l'ECFM et le tube de métal liquide. On peut voir le métal liquide (en gris) reposant dans le tube, et la bille isolante fixée à l'intérieur du tube à l'aide d'un fil tendu verticalement.

Le tube de métal liquide contenant une inclusion, le banc de translation et l'ECFM sont décrits plus succinctement dans les prochaines parties.

Métal liquide contenant une inclusion

Le métal utilisé est un alliage eutectique de gallium, indium et étain, le galinstan (GaInSn), dont l'aspect est montré dans la figure 2.9c et dont les propriétés sont décrites dans le tableau 2.1. Ce métal présente l'avantage d'être liquide à température ambiante (température de fusion

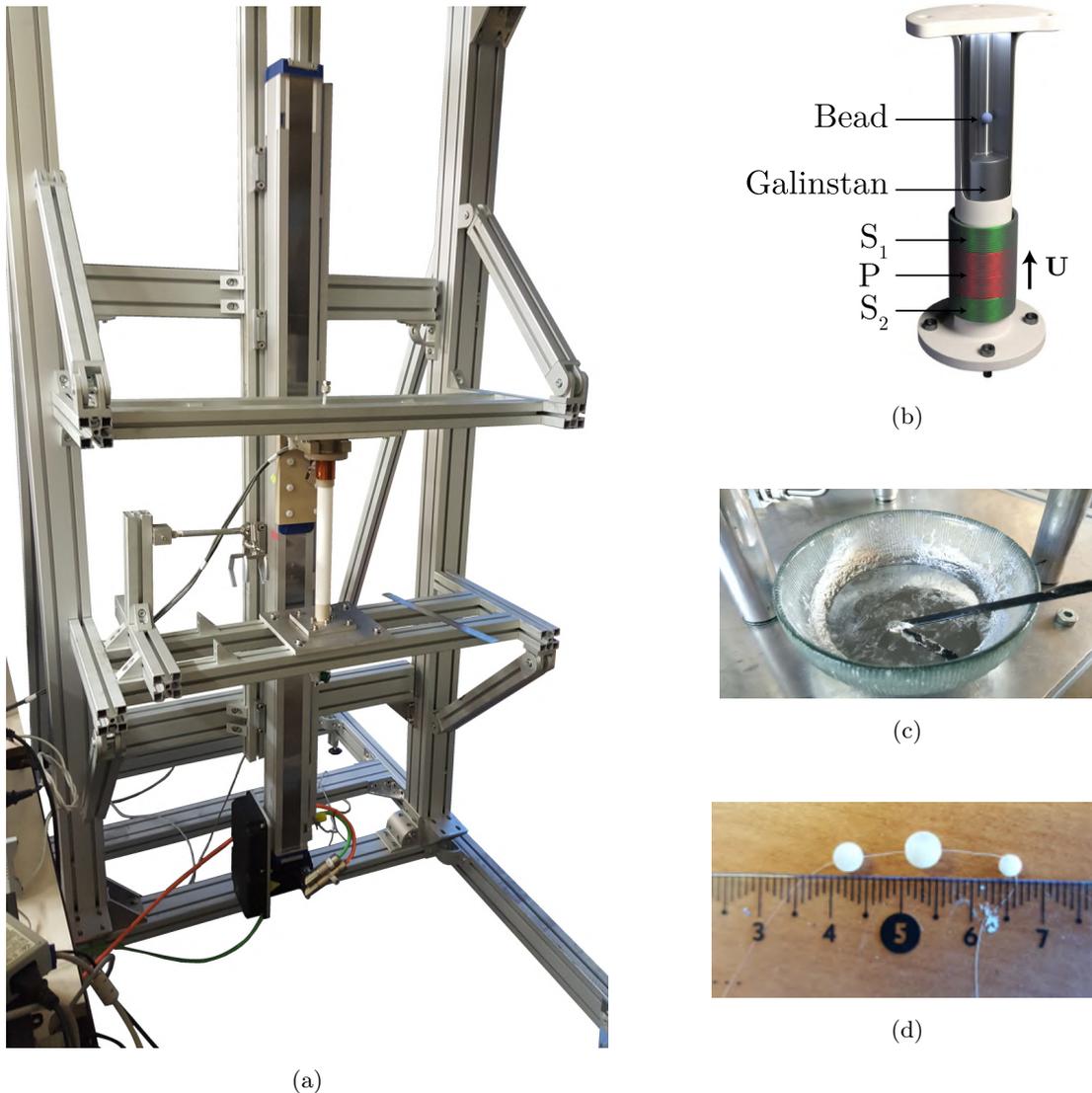


FIGURE 2.9 – (a) Vue générale de la section d’essai : tube contenant le galinstan et les billes (en blanc, au centre), ECFM (en haut du tube) et banc de translation (derrière le tube et l’ECFM). (b) Vue 3D du tube contenant le galinstan et une bille isolante (maintenue par un fil vertical), entouré par l’ECFM (image Emeryk Ablonet). (c) Coupelle contenant du galinstan. Des traces d’oxydes sont visibles sur la surface. (d) Photo des billes isolantes (matériau : polyamide VisiJet[®] M3 Crystal), percées et traversées par le fil (diamètre 3, 4 et 5 mm ici).

de 10.7°C) et d’être composé d’éléments peu toxiques, par opposition au mercure notamment. Il est par ailleurs très mouillant sur certaines surfaces comme le verre, et sujet à l’oxydation. Sa réactivité avec d’autres métaux comme l’aluminium et le cuivre nécessite une certaine précaution lors des manipulations. Le métal liquide utilisé est fourni par la société 5N Plus.

Le galinstan repose dans un tube vertical (diamètre intérieur 25 mm, diamètre extérieur 29 mm, longueur 300 mm) en vitrocéramique Macor, isolant et non ferromagnétique (propriétés dans le tableau 2.2). Deux bouchons en polymère PEEK (polyétheréthercétone, propriétés dans le tableau 2.2) sont collés aux extrémités du tube (colle mastic MS polymère) et assurent l’étanchéité. Un trou de diamètre 10 mm est percé dans chaque bouchon pour le remplissage du tube. Ce dernier

TABLEAU 2.1 – Propriétés physiques du galinstan (à 20°C).

Composition eutectique	Ga (66%), In (20.5%), Sn (13.5%)
Température eutectique (de fusion)	10.7°C
Masse volumique	6440 kg.m ⁻³
Viscosité cinématique	3.27 × 10 ⁻⁷ m ² .s ⁻¹
Viscosité dynamique	2.40 × 10 ⁻³ Pa.s
Tension de surface	0.718 N.m ⁻¹
Conductivité électrique	3.46 × 10 ⁶ S.m ⁻¹
Coefficient de dilatation thermique	1.8 × 10 ⁻⁴ K ⁻¹
Vitesse du son	2700 m.s ⁻¹

TABLEAU 2.2 – Propriétés des matériaux utilisés dans la section d’essai.

	Macor [®]	PEEK	VisiJet [®] M3 Crystal
Masse volumique	2520 kg.m ⁻³	1320 kg.m ⁻³	0.930 kg.m ⁻³
Module de Young	66.9 GPa	3.6 GPa	1.8 GPa
Température maximale d’utilisation	1000°C	260°C	121 °C
Résistance à la traction	–	–	45 MPa

se fait par injection de galinstan pressurisé par le trou du bouchon inférieur, chassant le gaz dans le tube par le trou du bouchon supérieur. Le tube est préalablement inerté à l’azote afin d’éviter l’oxydation du galinstan durant la procédure. Chaque tube contient un volume de 0.15 L, soit environ 0.95 kg de galinstan.

Chaque tube contient deux billes sphériques isolantes, fixées en position par un fil vertical. Les billes, percées en leur centre pour le passage du fil, sont réalisées par impression 3D (imprimante ProJet MJP 3600). Les billes percées sont représentées dans la figure 2.9d. Le matériau utilisé pour l’impression 3D est le polyamide VisiJet[®] M3 Crystal. Le diamètre des billes est de 2, 3, 4 ou 5 mm. Les billes sont collées au fil les traversant et espacées sur le fil d’une distance suffisamment grande de 90 mm pour éviter un recouvrement dans le signal mesuré par l’ECFM. Le volume de la goutte de colle déposée sur les billes est largement inférieur au volume des billes. La colle utilisée est une colle cyanoacrylate, et le fil est un fil de pêche de diamètre 50 μ m. Le fil est lui-même collé aux bouchons supérieur et inférieur du tube avant le remplissage, de manière à fixer la position radiale des billes dans le tube. La verticalité du tube et donc du fil assure un maintien en position de la bille : la colle résiste à la force de flottabilité exercée sur la bille, cette force ne modifie donc pas la position de la bille dans le tube. Un tube contenant du galinstan sans bille est utilisé comme témoin.

Banc de translation

Le banc de déplacement uniaxial UDC (Uniaxial Displacement Controller) est un système permettant la mise en translation de charges, dont la vitesse et la direction sont pilotées par un logiciel. Le modèle utilisé est le banc MF07B130-A00X160 de Thomson Linear, représenté dans la figure 2.10.

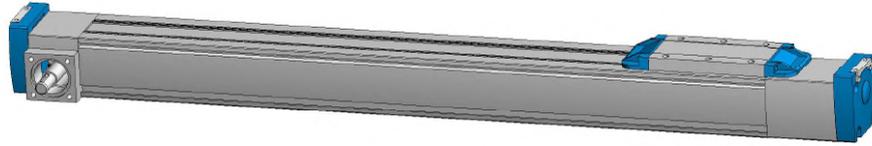


FIGURE 2.10 – Vue 3D du banc de translation MF07B130-A00X160 (Thomson Linear).

Le banc est composé d'un moteur (Servostar MAC23) entraînant une courroie sur laquelle est fixée la plaque de charge. Une charge (inférieure à 10 kg) peut être fixée à la plaque et tradatée sur une longueur maximale de 1600 mm. La vitesse de translation maximale s'élève à 5 m.s^{-1} pour une accélération maximale de 40 m.s^{-2} . Dans notre utilisation, la vitesse de l'ECFM est constante durant la translation, sur une plage de 1 mm.s^{-1} à 1 m.s^{-1} , et l'accélération jusqu'à la vitesse de croisière est fixée à 25 m.s^{-2} . À titre d'exemple, la distance d'accélération est de 20 mm pour atteindre une vitesse de 1 m.s^{-1} . Le banc peut être installé dans une orientation quelconque (vertical dans notre cas).

ECFM

L'ECFM est composé d'une bobine primaire P entourée de deux bobines secondaires S1 et S2. Les propriétés de chaque bobine sont données dans le tableau 2.3. Chaque bobine est composée d'un double enroulement de fil de cuivre (diamètre de brin 0.4 mm). Le sens d'enroulement est identique pour les trois bobinages. Les bobines sont enroulées autour d'une bague en polymère PEEK (propriétés dans le tableau 2.2) de diamètre intérieur 31 mm et diamètre extérieur 35 mm. La figure 2.11 présente une vue de dessus et une vue en coupe de l'ensemble.

TABLEAU 2.3 – Propriétés des bobines de l'ECFM.

	P	S1	S2
Diamètre intérieur	35 mm	35 mm	35 mm
Longueur	20 mm	10 mm	10 mm
Résistance	1.448 Ω	0.745 Ω	0.729 Ω
Inductance	263 μH	84.9 μH	91.8 μH

La bobine primaire est alimentée en courant alternatif par un amplificateur à transconductance, lui-même connecté au lock-in qui génère l'excitation. L'ECFM est fixé à un banc de déplacement uniaxial - piloté par ordinateur - et tradaté verticalement sur une plage de vitesse entre 1 mm/s et 1000 mm/s. Par changement de référentiel, l'ECFM sonde donc un écoulement de métal liquide de vitesse uniforme, contenant une inclusion isolante. Pour chaque mesure, l'ECFM fait dix allers-retours de manière à vérifier la répétabilité de l'expérience.

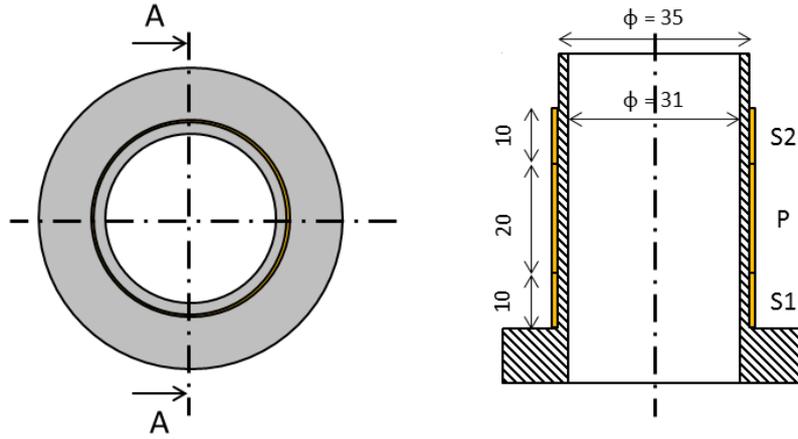


FIGURE 2.11 – Vue de dessus de l’ECFM (à gauche) et vue de la coupe A_A (à droite). Longueurs en millimètres.

2.3.2 Signaux mesurés après démodulation

Cette partie présente plusieurs exemples des signaux mesurés après l’étape de démodulation du signal, pour le cas du tube témoin (galinstan sans billes) et des tubes contenant les billes isolantes. L’analyse et l’interprétation de ces signaux est l’objet des chapitres de résultats 4 et 6.

Tube témoin (galinstan sans billes)

La figure 2.12 montre les différences de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation du signal par le lock-in, pendant deux translations de l’ECFM autour du tube témoin, c’est à dire sans billes dans le galinstan. L’ECFM est ici translaté à une vitesse $U = 50 \text{ mm.s}^{-1}$ et la fréquence du courant est $f = 1000 \text{ Hz}$. Dans le processus de démodulation, la tension ΔV est décomposée en une composante en phase $\Delta V_{\parallel} \propto \cos(\omega t)$ et une composante en quadrature $\Delta V_{\perp} \propto \sin(\omega t)$. On rappelle que la référence de phase est le courant dans la bobine primaire $I = \hat{I} \cos(\omega t)$. La première translation de l’ECFM est dirigée vers le bas (aller, $-$), la seconde vers le haut (retour, $+$). Le signal mesuré pendant la deuxième translation est renversé temporellement afin de le superposer au signal aller.

En utilisant la décomposition de la tension ΔV proposée par Kumar *et al.* [16, 1], les tensions ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} peuvent être décomposées en une contribution de base, mesurée lorsque $U = 0$ et indiquée 0, et une contribution relative à la vitesse de translation de l’ECFM, indiquée U . La décomposition s’écrit :

$$\begin{cases} \Delta V_{\parallel} = \Delta V_{0,\parallel} + \Delta V_{U,\parallel}, \\ \Delta V_{\perp} = \Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Expérimentalement, $\Delta V_{0,\parallel}$ et $\Delta V_{0,\perp}$ sont mesurées en faisant translater très lentement l’ECFM, typiquement à une vitesse $U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$, de sorte que l’induction générée par la vitesse soit négligeable. Sur la figure 2.12, les effets de la vitesse se manifestent par un décalage entre le signal aller (en bleu) et le signal retour (en rouge) sur la composante en phase comme sur celle en quadrature. La vitesse étant constante durant la translation, les décalages en tension le sont aussi. Les contributions $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ relatives à la vitesse sont obtenues en divisant par 2 l’écart moyen entre les signaux aller et retour. Remarquons que ce décalage de tension est dû au changement de signe de la vitesse de translation de l’ECFM, le sens de translation étant en effet

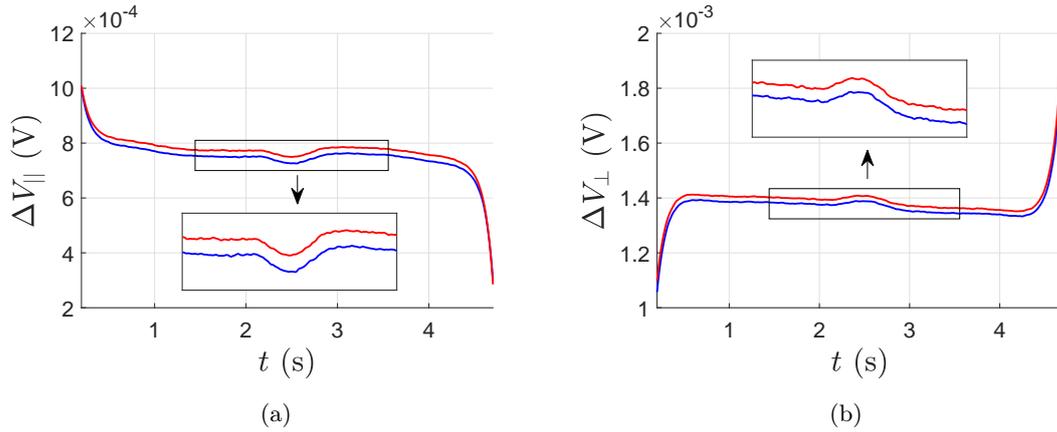


FIGURE 2.12 – Tube témoin : différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in (vitesse $U = 50 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1 \text{ kHz}$) : composantes en phase (a) et en quadrature (b). Sens de translation de l’ECFM : aller vers le bas (—), retour vers le haut (—).

opposé entre l’aller et le retour.

Pour les deux composantes $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} , les fortes déviations du signal sur les limites de la course de l’ECFM (à $t \approx 0.1$ et 4.6 s) sont dues aux effets de bord liés au montage de la section d’essai. La distribution des courants de Foucault générés par l’ECFM dans le métal liquide est en effet différente au milieu du tube et aux extrémités du tube. Lorsque l’ECFM est au milieu du tube, les effets de bord sont suffisamment lointains pour considérer le tube comme infini. Cette configuration correspond à la solution analytique de Dodd et Deeds [7], présentée dans le chapitre 1 (page 10). Lorsque l’ECFM est proche des extrémités du tube, les effets de bord deviennent non négligeables. Cette configuration correspond à la solution analytique de Theodoulidis [50], résolvant le champ électromagnétique généré par une bobine autour d’un cylindre conducteur de longueur finie. On note par ailleurs que les structures en aluminium de part et d’autre du tube sont fortement sujettes à l’induction lorsque l’ECFM est proche des extrémités du tube. La différence de tension entre les bobines secondaires peut donc être modifiée lorsque l’ECFM se rapproche de ces structures.

Par ailleurs, les deux composantes $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} comportent un léger saut lorsque l’ECFM est environ au-dessus du milieu du tube (à $t \approx 2.5 \text{ s}$). Cette anomalie, mise en évidence par les zooms dans les encadrés de la figure 2.12, est la signature d’un défaut de surface du tube en céramique contenant le galinstan. La fabrication du tube est réalisée par usinage : un outil usine l’intérieur du tube de chaque côté pour atteindre la côte de diamètre demandée. La jonction entre les deux usinages n’étant pas parfaite, une discontinuité sur le diamètre intérieur est observable, à la fois à l’œil nu et avec l’ECFM. L’effet de ce défaut sur les signaux mesurés est d’autant plus visible aux hautes fréquences. Une méthode de correction sera appliquée aux composantes $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} dans les résultats des chapitres 4 et 6 afin de corriger l’effet du défaut. Avec cette méthode, la perturbation relative au défaut est approchée par un signal gaussien dont l’amplitude et l’écart type sont calées, puis ce signal gaussien est soustrait à $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} de manière à contrebalancer la perturbation générée par le défaut.

Tube contenant les billes isolantes

La figure 2.13 montre un exemple des différences de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation du signal par le lock-in, mesurées sur 10 translations vers le bas (tons bleus) et 10 translations vers le haut (tons rouges) en présence de deux billes (vitesse $U = 50 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1000 \text{ Hz}$, profondeur de bille $h = 3 \text{ mm}$, diamètre bille $D_b = 4$ et 5 mm). Le signal est décomposé en une partie en phase ΔV_{\parallel} et une partie en quadrature de phase ΔV_{\perp} . Les décalages en tension entre les signaux allers et retours, dus à la vitesse de translation, sont toujours visibles. La présence des billes dans le tube de métal est clairement observable en comparaison avec le tube témoin, et se manifeste par une oscillation des tensions en phase et en quadrature lorsque l'ECFM survole les deux billes du tube : entre 1 s et 2 s pour la bille de diamètre 5 mm, et entre 2.7 s et 3.7 s pour celle de diamètre 4 mm. On remarque immédiatement que l'amplitude des oscillations est plus grande pour la plus grosse bille. L'effet du défaut de surface identifié sur le tube témoin, visible à $t \approx 2.6 \text{ s}$, mais n'est ici pas corrigé. Pour les composantes en phase et en quadrature de la tension à l'aller, un zoom sur une partie des signaux démodulés permet de visualiser les écarts entre chaque acquisition. Dans le cas de la figure 2.13, pour un sens de translation donné, les écarts types entre les courbes sont faibles ($1.27 \times 10^{-6} \text{ V}$ pour ΔV_{\parallel} et $1.31 \times 10^{-6} \text{ V}$ pour ΔV_{\perp} , soit un écart relatif inférieur à 0.17% et 0.09% respectivement) par rapport au signal mesuré.

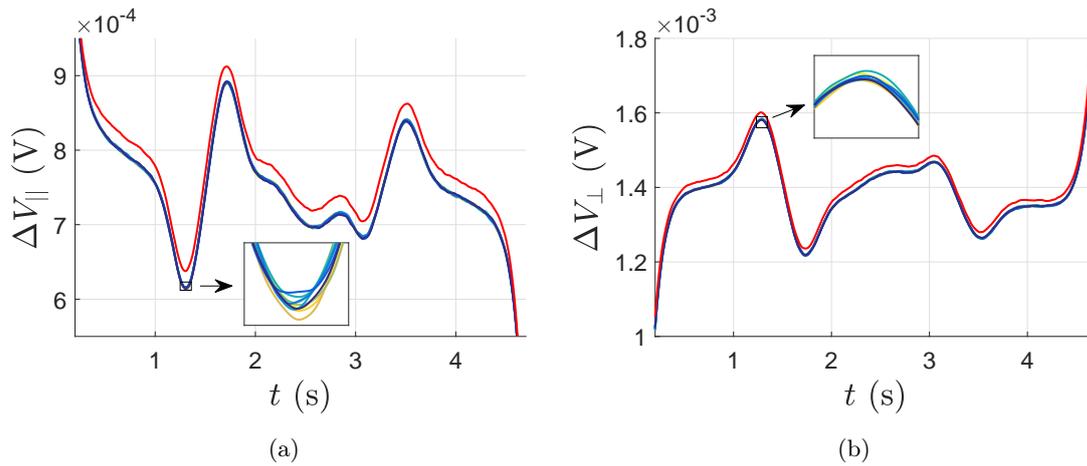


FIGURE 2.13 – Différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in (vitesse $U = 50 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, profondeur de bille $h = 3 \text{ mm}$, diamètre bille $D_b = 4$ et 5 mm) : composantes en phase (a) et en quadrature (b). Les signaux sont mesurés pour 10 translations vers le bas (allers, tons bleus) et 10 translations vers le haut (retours, tons rouges).

En utilisant la décomposition du flux magnétique proposée par Kumar *et al.* [16, 1], les tensions ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} peuvent maintenant être décomposées en une contribution de base, correspondant à un métal statique ne contenant pas de bille et indiquée 0, une contribution relative à la vitesse de translation de l'ECFM et indiquée U , et une contribution relative à la présence de la bille, indiquée α . La décomposition s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta V_{\parallel} = \Delta V_{0,\parallel} + \Delta V_{U,\parallel} + \Delta V_{\alpha,\parallel}, \\ \Delta V_{\perp} = \Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp} + \Delta V_{\alpha,\perp}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans le cas de l'expérience, les contributions $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ correspondent donc aux oscillations visibles sur la figure 2.13. On obtient directement ces contributions en retranchant respectivement

$\Delta V_{0,\parallel} + \Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp}$ aux signaux mesurés.

L'incertitude de mesure des signaux ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} est discutée en fin de chapitre dans la sous-section 2.5.1. Les effets de la vitesse, caractérisés par les décalages de tension $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$, seront étudiés dans le chapitre 4 et comparés à un modèle analytique. Les perturbations du champ électromagnétique par une bille isolante, se traduisant par une oscillation du signal en phase, $\Delta V_{\alpha,\parallel}$, et en quadrature, $\Delta V_{\alpha,\perp}$, seront ensuite analysées dans le chapitre 6. Un modèle théorique sera également développé afin d'interpréter les résultats et prédire les contributions $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ pour une configuration donnée.

2.4 EXPÉRIENCE 2 : ÉCOULEMENT DE MÉTAL LIQUIDE EN CONDUITE

Cette section décrit le second dispositif expérimental constitué d'un écoulement de métal liquide excité par un champ électromagnétique variable. L'objectif général de l'étude est de caractériser l'influence du champ de vitesse du métal liquide sur la distribution du champ électromagnétique, résultante de l'induction. Les résultats expérimentaux présentés dans cette thèse concernent un écoulement de métal liquide en l'absence d'inclusion (telle qu'une bulle ou une bille solide). Dans ce cas, le champ de vitesse du métal liquide est caractérisé par le profil de vitesse de l'écoulement. Les effets d'une inclusion sur le champ de vitesse (via le sillage hydrodynamique par exemple) pourront être observés à l'aide de cette expérience dans une étude ultérieure. Dans cette perspective, une bille statique sera fixée dans l'écoulement dans une des pièces de la section d'essai dans le but de mesurer à l'ECFM l'effet des perturbations hydrodynamiques générées par le sillage.

Une boucle de galinstan est conçue pour cette étude. Comme pour la première étude expérimentale, les perturbations du champ électromagnétique sont mesurées à l'aide d'un ECFM. Les mesures expérimentales sont réalisées sur une plage de débit entre 0.39 l.min^{-1} et 4.27 l.min^{-1} . En l'absence d'inclusion dans la boucle, les résultats pourront être comparés à ceux de la première étude expérimentale, où le profil de vitesse est uniforme.

Une description du montage expérimental est donnée dans la sous-section 2.4.1. Le pompage du galinstan, la section d'essai et l'ECFM sont détaillés dans chaque sous-partie. Le système de pilotage de l'ECFM, présenté dans la section 2.2, est le même que celui de la première étude expérimentale. La sous-section 2.4.2 présente les signaux temporels mesurés après démodulation par le lock-in amplifier. Enfin, la mesure des profils de vitesse de l'écoulement, réalisée par vélocimétrie ultrasonore Doppler, est décrite dans la sous-section 2.4.3.

2.4.1 Montage expérimental

Cette partie décrit le montage expérimental représenté sur la figure 2.14a. La section d'essai, maintenue par une structure de profilés en aluminium, est visible au milieu de la photo. On y distingue les ECFM dans la partie inférieure (couleur cuivre) et le système de vélocimétrie ultrasonore Doppler dans la partie supérieure. La pompe entraînant le galinstan est placée à l'extérieur de la structure, en bas à droite. On distingue les câbles de branchement de l'ECFM reliés au système d'acquisition sur la partie gauche de la photo. Le lock-in et l'OTA, non visibles sur la photo, sont disposés sur la table à gauche de la structure.

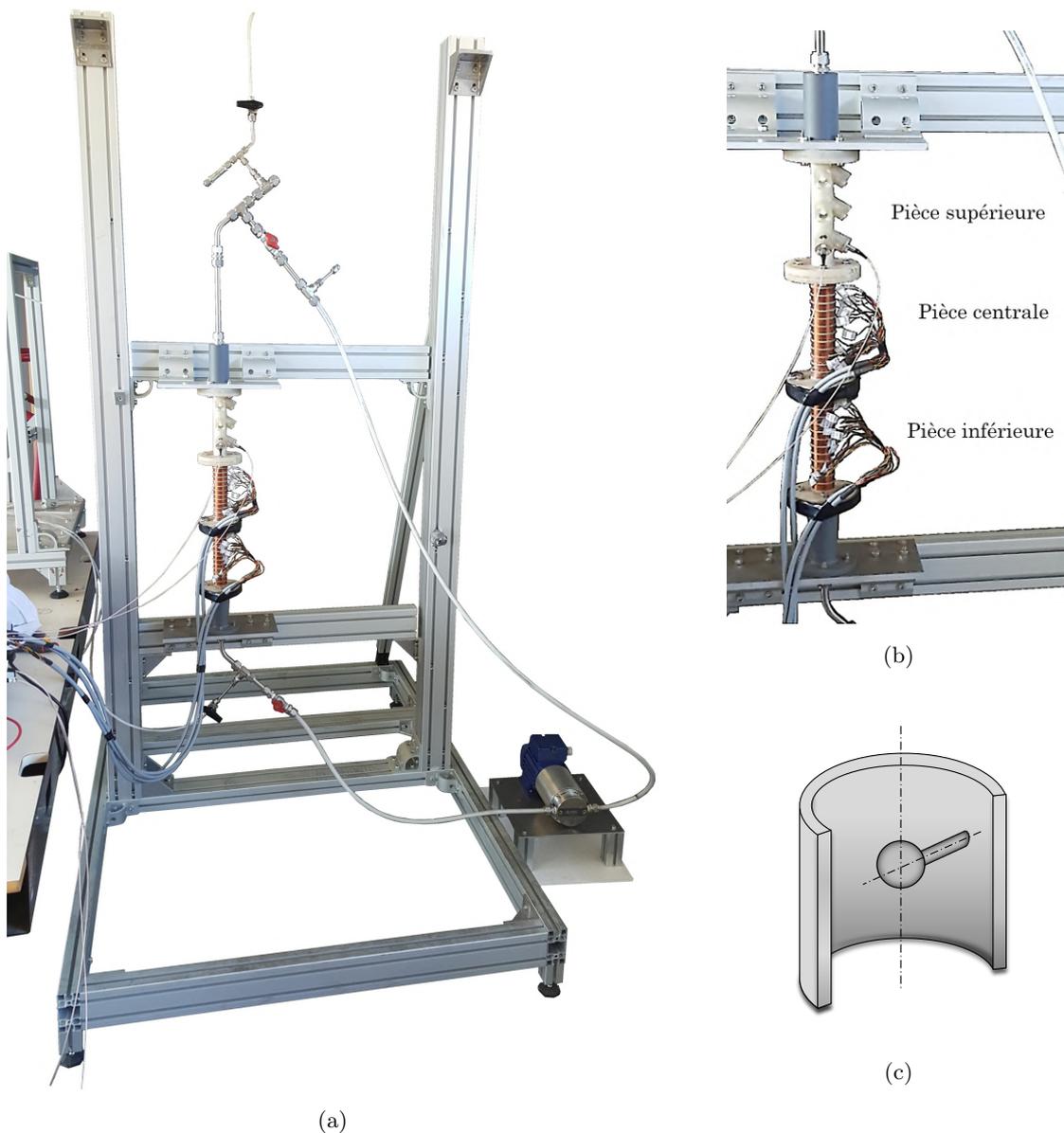


FIGURE 2.14 – (a) Vue générale de la boucle de galinstan : section d’essai comprenant les ECFM et le système de vélocimétrie ultrasonore Doppler (au centre), conduites en plastique flexible et en acier inox (diamètre intérieur 10 mm), et pompe volumétrique (en bas à droite). (b) Zoom sur la section d’essai, fabriquée en trois pièces. Les sondes UVP (Ultrasound Velocity Profiler) sont placées dans la pièce supérieure, et les bobines des ECFM sont enroulées autour des pièces centrale et inférieure. Une bille est fixée au milieu de la pièce centrale pour visualiser les phénomènes de sillage. (c) Schéma 3D du positionnement d’une bille à l’intérieur de la pièce centrale, en vue d’une étude ultérieure.

Section d’essai

La section d’essai est une longue conduite verticale, de 25 mm de diamètre intérieur et 540 mm de hauteur, constituée de trois pièces (photo dans la figure 2.14b), dans laquelle le galinstan s’écoule vers le bas. La pièce supérieure contient des emplacements pour les sondes UVP (Ultrasound

Velocity Profiler), utilisées pour la mesure du profil de vitesse de l'écoulement (voir sous-section 2.4.3). La pièce centrale et la pièce inférieure sont entourées de 13 bobines, pouvant jouer le rôle de bobine primaire ou secondaire d'un ECFM selon le branchement choisi. Les multiples combinaisons de branchements possibles permettent de sonder l'écoulement en diverses positions par ECFM. En amont de la pièce supérieure, un divergent est utilisé afin de stabiliser les conditions d'écoulement dans la section d'essai. La longueur d'établissement d'un écoulement en conduite étant usuellement estimée à 10 diamètres (soit 250 mm dans notre cas), on considère que l'écoulement est développé lorsque le métal liquide traverse la pièce centrale contenant les ECFM.

À titre de perspective, une bille de diamètre 8 mm sera placée au milieu de la pièce centrale, maintenue en position par une tige horizontale, comme représenté sur la figure 2.14c. Son sillage génère des perturbations hydrodynamiques pouvant être mesurées par les divers ECFM en aval de la bille. Pour cette géométrie particulière, une option de fabrication envisageable est l'impression 3D. La longueur importante de la section d'essai nécessite d'imprimer la section en trois pièces. Les pièces, d'une longueur de 180 mm chacune, sont reliées entre elles par des brides. L'impression 3D est réalisée au laboratoire (imprimante ProJet MJP 3600), et le matériau utilisé est le polyamide VisiJet[®] M3 Crystal (propriétés dans le tableau 2.2, page 33). Il est à noter qu'une impression de la section d'essai en une seule pièce a été testée et s'est avérée défectueuse : un flambage important a lieu durant le refroidissement après l'impression 3D, induisant une courbure de la pièce observable à l'œil nu.

Le dimensionnement de la tige qui maintient la bille doit répondre à deux critères : assurer une tenue mécanique aux efforts hydrodynamiques, et minimiser le sillage de la tige. Une tige à section elliptique orientée avec le grand axe dans le sens de l'écoulement permet de satisfaire efficacement aux deux critères. Le grand axe vaut ici 2 mm et le petit axe 0.5 mm. Les efforts hydrodynamiques correspondent ici à la poussée d'Archimède P_A et aux forces de traînée F_D sur la tige et la bille, qu'on exprime respectivement par :

$$P_A = \rho V g \quad \text{et} \quad F_D = \frac{1}{2} \rho S c_D U^2, \quad (2.6)$$

où ρ est la masse volumique du liquide, V le volume d'un corps immergé (tige ou bille, par exemple) et S sa surface apparente, g l'accélération de pesanteur, c_D le coefficient de traînée et U la vitesse du liquide loin du corps. Dans le cas d'un écoulement laminaire autour de la bille (nombre de Reynolds $Re_b = \rho U D / \nu$ inférieur à 1, où D est le diamètre de la bille et ν la viscosité cinématique du liquide), le coefficient de traînée de la bille est déterminé par la formule de Stokes :

$$c_D = \frac{24}{Re_b}. \quad (2.7)$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent et dans la limite $1 \leq Re_b \leq 2.6 \times 10^5$, le coefficient de traînée de la bille est déterminé par la corrélation de Turton et Levenspiel [51] :

$$c_D = \frac{24}{Re_b} (1 + 0.173 Re_b^{0.657}) + \frac{0.413}{1 + 16300 Re_b^{-1.09}}. \quad (2.8)$$

Dans les configurations étudiées ici, le nombre de Reynolds de la bille R_b varie entre 2.08×10^{-2} (pour $U \sim 1 \text{ cm.s}^{-1}$) et 2.08 (pour $U \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$). Dans le cas d'un écoulement de métal liquide confiné excité par un champ magnétique DC, on note que les effets de la force de Laplace sur le sillage d'une sphère rigide isolante électrique, fixée dans l'écoulement, ont été étudiés récemment par Delacroix et Davoust [52]. Du fait des faibles nombres de Hartmann et de Stuart utilisés dans l'étude ($Ha_b = BD\sqrt{\sigma/\eta} \leq 0.32$ et $N_b = B^2 D \sigma / \rho U \leq 0.45$ pour la plus grosse bille de diamètre $D = 5$ mm, voir page 167 de l'annexe A), ces effets magnétohydrodynamiques sont a priori négligeables

dans notre configuration. Par ailleurs, les coefficients de traînée d'une tige à section elliptique dans des écoulements laminaire et turbulent sont donnés par White [53] (page 489). Dans le cas d'un rapport grand axe/petit axe égal à 4, correspondant à notre tige, les coefficients de traînée de la tige en régimes laminaire et turbulent valent respectivement :

$$c_D = 0.35 \quad \text{et} \quad c_D = 0.15. \quad (2.9)$$

Les forces hydrodynamiques sur la tige et la bille étant déterminées par les expressions (2.6) à (2.9), on utilise les solutions classiques de résistance des matériaux pour le dimensionnement. La tige peut être modélisée par une poutre encastree-libre, ou « console », avec une charge uniformément répartie (efforts hydrodynamiques sur la tige) et une charge ponctuelle à l'extrémité libre (efforts hydrodynamiques sur la bille). On calcule d'abord la force de réaction à l'appui F , puis le moment fléchissant maximal $M_{fz \max}$ et la contrainte maximale σ_{\max} par :

$$M_{fz \max} = \begin{cases} FL & \text{si charge ponctuelle} \\ \frac{FL}{2} & \text{si charge répartie} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{fz \max}}{I_{Gz}} y_{\max}, \quad (2.10)$$

où L est la longueur de la poutre (ici la longueur de la tige, $L = 12.5$ mm), I_{Gz} le moment moment quadratique de la section elliptique (ici $I_{Gz} = 3.14$ mm⁴) et y_{\max} la distance la plus grande à l'axe neutre (ici le demi-grand axe de l'ellipse, $y_{\max} = 1$ mm). Les contraintes dans la tige peuvent être calculées à partir des expressions (2.6) à (2.9), pour une vitesse débitante $I = 0.5$ m.s⁻¹ (la vitesse débitante maximale de la pompe utilisée vaut 145 mm.s⁻¹ dans la section d'essai, voir partie suivante). En additionnant toutes les forces (c'est à dire si l'écoulement est vers le haut), on remarque que la contrainte totale de 139.3 kPa est bien inférieure à la contrainte de résistance à la flexion de 45 MPa du polyamide VisiJet[®] M3 Crystal. Afin de diminuer les efforts sur la tige cependant, l'écoulement du galinstan est orienté vers le bas de manière à ce que les forces de traînée s'opposent à la poussée d'Archimède. Il est à noter que la tenue en fatigue n'est pas considérée pour le dimensionnement.

Pompe volumétrique

La pompe utilisée pour la boucle est une pompe volumétrique à engrenages MDG-M4S6 fabriquée par Iwaki (photo dans la figure 2.15a). Les engrenages, poussant le liquide dans le corps de pompe, sont mis en mouvement par entraînement magnétique : un aimant (entraîneur) fixé sur l'axe moteur entraîne sans liaison mécanique, de manière synchrone, au travers du corps arrière, un autre aimant (entraîné) fixé aux engrenages. Grâce à l'absence de liaison mécanique entre le moteur et les engrenages dans le corps, l'entraînement magnétique permet une étanchéité totale de la pompe particulièrement intéressante pour l'usage du galinstan. Les pièces dans le corps de pompe sont par ailleurs en acier inox 316 hautement résistant à la corrosion, et non réactif avec le galinstan. Quelques spécifications de la pompe sont présentées dans le tableau 2.4. Le débit maximal de la pompe correspond à une vitesse débitante de 163 mm.s⁻¹ dans la section d'essai. La viscosité dynamique du galinstan est par ailleurs de 2.40×10^{-3} Pa.s (soit 2.40 cP), donc largement inférieure à la viscosité maximale de la pompe (200 cP).

Les pertes de charge dans la boucle sont estimées préalablement au choix de la pompe, et doivent être inférieures à la pression maximale de la pompe (0.6 MPa, tableau 2.4). On distingue les pertes de charge linéaires, dues à la friction dans les parties rectilignes de la boucle, des pertes de charge singulières, dues aux accidents de canalisation ou aux obstacles (coudes, vannes, clapets).



(a)



(b)

FIGURE 2.15 – (a) Photo de la pompe à engrenages Iwaki MDG-M4S6. (b) Photo du variateur Hitachi L200.

TABLEAU 2.4 – Spécifications de la pompe Iwaki MDG-M4S6.

Débit maximal	4.8 l.min ⁻¹
Pression maximale	0.6 MPa
Température	0 à 50°C
Viscosité maximale	200 cP

Les pertes de charge linéaires sont calculées avec l'équation de Darcy-Weisbach,

$$\Delta P = f_D \frac{L}{D_h} \rho \frac{U^2}{2}, \quad (2.11)$$

où f_D est le coefficient de frottement de Darcy, L est la longueur des conduites rectilignes et D_h leur diamètre hydraulique, ρ est la masse volumique du liquide et U est la vitesse débitante. Le coefficient de frottement de Darcy est dépendant du nombre de Reynolds de l'écoulement. On le calcule par [54] (pages 317 et 321) :

$$f_D = \begin{cases} \frac{64}{Re} & \text{si } Re < 2000 \\ 0.3164 Re^{-0.25} & \text{si } Re > 3000 \quad (\text{corrélacion de Blasius}) \end{cases}. \quad (2.12)$$

Les pertes de charge singulières sont calculées par :

$$\Delta P = K \rho \frac{U^2}{2}, \quad (2.13)$$

où le coefficient K des pertes de charge singulières dépend de la géométrie de l'accident de canalisation, ou de l'obstacle. Les valeurs du coefficient K sont données par White [53] (page 391) pour plusieurs géométries, résumées dans le tableau 2.5 pour un diamètre nominal de 1/2 pouce (soit 1.27 mm). Pour une vitesse $U = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ dans la section d'essai soit un débit de 14.7 l.min⁻¹, les pertes de charge linéaires s'élèvent à 0.229 MPa (en prenant 4 m de tubes à 10 mm de diamètre intérieur) et les pertes de charge singulières sont de 4.86 kPa, soit au total $\Delta P = 0.234 \text{ MPa}$. Les

pertes de charge ΔP estimées sont ici bien inférieures à la pression maximale de la pompe (de 0.6 MPa).

TABLEAU 2.5 – Valeurs du coefficient K des pertes de charge singulières pour plusieurs géométries [53] (page 391).

Coude à 45° (quantité : 2)	$K = 0.39$
Dérivation en T, écoulement droit (quantité : 2)	$K = 0.90$
Dérivation en T, écoulement à 90° (quantité : 1)	$K = 2.40$
Divergent (quantité : 1)	$K = 0.71$
Convergent (quantité : 1)	$K = 0.35$

Il est à mentionner que deux autres pompes ont été envisagées pour la boucle. Un premier test en galinstan a été effectué avec une pompe péristaltique (modèle 620UNR de Watson Marlow) : l'entraînement du liquide est assuré mais le débit pulsé, inhérent à ce type de pompe, ne correspond pas aux spécifications de l'étude expérimentale. La conception d'une pompe magnétohydrodynamique a également été envisagée.

La pompe MDG-M4S6 est alimentée électriquement par le variateur Hitachi L200 (figure 2.15b). Le variateur est alimenté en entrée par la tension du réseau (220 V, 50 Hz) et fournit en sortie une tension de 220 V à fréquence variable transmise au moteur de la pompe. La vitesse du moteur est réglée en faisant varier la fréquence en sortie du variateur, de 0 à 22 Hz dans notre utilisation. Le processus de régulation de fréquence dans le variateur génère un bruit électromagnétique important sur les appareils alentours (tels que l'ECFM) ainsi que des perturbations harmoniques sur le réseau électrique. Afin de limiter ces nuisances, le variateur est branché sur un secteur électrique différent de celui utilisé pour les mesures électroniques (lock-in, OTA) et éloigné de la section d'essai.

ECFM

Les bobines des ECFM sont entourées autour des pièces inférieure et centrale de la section d'essai. La figure 2.16 montre une photo de la pièce centrale de la section d'essai avant le montage. Chaque bobine mesure 10 mm de longueur pour un diamètre intérieur de 33 mm (correspondant au diamètre extérieur de la pièce), et est constituée de deux enroulements de fil de cuivre de diamètre 0.4 mm (correspondant à un nombre de spires par unité de longueur $n_S = 2.5$ spires.mm⁻¹). Les bobines sont séparées par un cran cylindrique large de 2 mm facilitant l'enroulement. Selon l'utilisation voulue, les bornes de chaque bobine peuvent être connectées sur l'amplificateur transconductance (pour former une bobine primaire) ou sur l'Input 2 du lock-in (pour former une bobine secondaire). De cette manière, un ECFM à trois bobines S₁-P-S₂ peut être constitué à plusieurs endroits de la pièce et donc mesurer un débit à diverses positions de l'écoulement (11 positions précisément étant donné qu'il y a 13 bobines). Il est par ailleurs possible de brancher deux bobines adjacentes en série de manière à former une bobine plus longue, par exemple pour intensifier le champ d'une bobine primaire. Les bobines sont numérotées dans l'ordre croissant de haut en bas, de 1 à 13 sur la pièce centrale et de 14 à 16 sur la pièce inférieure. La configuration des branchements de l'ECFM est indiquée par la suite par le numéro des bobines utilisées. Par exemple, la configuration 6-7-8 correspond à la bobine 6 utilisée pour la secondaire S₁, la bobine 7 pour la primaire P et la bobine 8 pour la secondaire S₂.

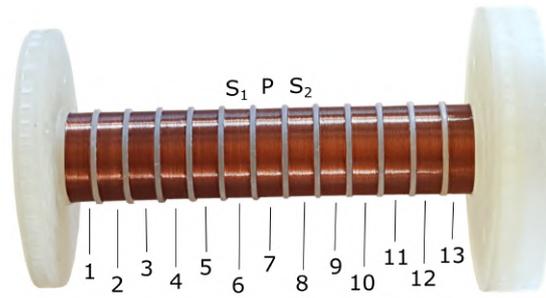


FIGURE 2.16 – Photo de la pièce centrale de la section d’essai, sur laquelle sont enroulées 13 bobines servant à la mesure par ECFM. La configuration d’ECFM 6-7-8 est indiquée à titre d’exemple.

2.4.2 Signaux mesurés après démodulation - écoulement sans billes

Cette partie contient plusieurs exemples de signaux mesurés et démodulés, en l’absence de bille statique dans l’écoulement. L’analyse et l’interprétation de ces signaux est l’objet du chapitre 4.

La figure 2.17 montre les différences de tension ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} entre les bobines secondaires (configuration 6-7-8) mesurées après démodulation du signal par le lock-in amplifier, pour différentes fréquences du variateur (donc différents débits d’écoulement) : 0 Hz (sans écoulement, —), 2 Hz (—), 6 Hz (—), 10 Hz (—), 14 Hz (—), 18 Hz (—) et 22 Hz (—). La mesure en statique représentée en noir sert de référence. Lorsque le débit augmente (du bleu au rouge), les effets de la vitesse se caractérisent par un décalage en tension du signal par rapport à la référence (—) similaire à celui observé dans la première expérience pour un écoulement à profil piston. On observe ce décalage sur la composante en phase ΔV_{\parallel} comme sur la composante en quadrature ΔV_{\perp} . Des fluctuations des signaux sont visibles pour certains débits, dont l’origine n’est pas discutée ici. Dans la suite, on s’affranchira de ces fluctuations en considérant uniquement les valeurs moyennes des décalages de tension.

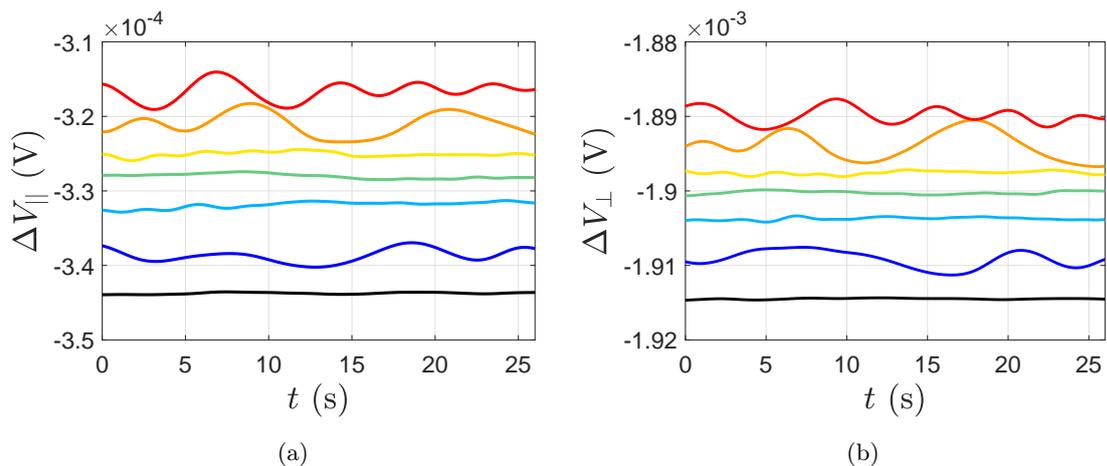


FIGURE 2.17 – Pour la section d’essai sans bille, composantes en phase (a) et en quadrature (b) de la différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in pour plusieurs fréquences du variateur (donc plusieurs débits d’écoulement) : 0 Hz (sans écoulement, —), 2 Hz (—), 6 Hz (—), 10 Hz (—), 14 Hz (—), 18 Hz (—) et 22 Hz (—). Fréquence du courant dans la primaire : 1 kHz.

En utilisant la décomposition du flux magnétique de Kumar *et al.* [16, 1] dans le cas d'un écoulement sans bulles et pour un faible Reynolds magnétique R_m , on retrouve l'équation (2.4) (page 35). Expérimentalement, les composantes $\Delta V_{0,\parallel}$ et $\Delta V_{0,\perp}$, idéalement nulles dans le cas où les bobines secondaires sont identiques, correspondent aux signaux mesurés lorsqu'il n'y a pas d'écoulement (courbes noires dans la figure 2.17), et les composantes ΔV_U et $\Delta V_{U,\perp}$ correspondent aux décalages en tension observés.

Il est à noter qu'un bruit de mesure important a été observé sur les signaux bruts (avant démodulation par le lock-in amplifier) lors de l'acquisition des signaux ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} (démodulés dans la figure 2.17). Ce bruit est a priori généré par le variateur de la pompe, au travers de perturbations par rayonnement électromagnétique et via le réseau électrique. Cette affirmation est justifiée par l'observation de perturbations similaires aux bornes d'un ECFM extérieur à la boucle, lorsque le variateur est actif. Le processus de démodulation effectué par le lock-in amplifier (voir section 2.2) permet de ne pas considérer le bruit de mesure généré par le variateur. Dans la démodulation en effet, le signal brut est multiplié par la porteuse, puis traité par un filtre passe-bas (RC) dont la fréquence de coupure est ici fixée suffisamment basse, à 100 mHz, pour atténuer la majorité des perturbations.

2.4.3 Vélométrie ultrasonore Doppler (UVP)

Cette partie décrit la méthode de vélocimétrie ultrasonore Doppler (UVP pour *Ultrasonic Velocity Profile*) utilisée pour mesurer le profil de vitesse de l'écoulement de métal liquide. Le principe physique de la méthode, ainsi que les paramètres de réglage importants, sont présentés dans un premier temps. Quelques exemples de profils mesurés sont présentés dans la deuxième sous-partie.

Principe de la méthode

La vélocimétrie ultrasonore Doppler est une méthode de mesure de vitesse basée sur la réflexion d'une onde ultrasonore sur des particules advectées dans un écoulement. Initialement utilisée pour caractériser les écoulements sanguins [55], cette méthode s'est largement répandue en mécanique des fluides pour la vélocimétrie de fluides opaques tels que les métaux liquides [56, 57, 58]. Dans le cadre de notre étude expérimentale, la vélocimétrie Doppler est utilisée pour mesurer les profils de vitesse de l'écoulement traversant l'ECFM. L'appareil utilisé est l'Ultrasound Velocity Profiler UVP-Duo de Met-Flow, présenté dans la figure 2.18a. Les profils obtenus permettent d'estimer le débit de l'écoulement, et donc son nombre de Reynolds. Ces profils pourront en outre être implémentés dans le modèle théorique de l'ECFM décrit dans le chapitre 3.



FIGURE 2.18 – (a) Photo de l'appareil de mesure : Ultrasound Velocity Profiler UVP-Duo (image Met-Flow). (b) Photo d'une sonde UVP 4 MHz de diamètre 5 mm.

Le principe physique de l'UVP, similaire à celui de l'écholocation ou du sonar, est illustré dans la figure 2.19. La sonde est un transducteur électro-acoustique basé sur l'effet piézo-électrique (photo de la figure 2.18b), jouant à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur. Une série de trains d'onde ultrasonores (ou « pulses ») est émise dans l'écoulement de métal suivant l'axe x de la figure 2.19. Chaque pulse est composé de $n = 2$ à 128 oscillations dont la fréquence f_0 , propre à la sonde, est égale dans notre cas à 8 MHz. Dans les expériences, nous fixons le nombre d'oscillations par pulse à $n = 4$. Lorsqu'un pulse rencontre une particule dans le liquide, une partie de l'énergie est réfléchiée. Si la particule est en mouvement par rapport à la sonde, l'écho est décalé en fréquence par rapport à f_0 par effet Doppler. Le décalage en fréquence f_d est directement relié à la vitesse relative u_x de la particule le long du rayon acoustique (axe x de la figure 2.19) par la relation :

$$\frac{u_x}{c} = \frac{f_d}{2f_0}, \quad (2.14)$$

où c est la vitesse du son dans le liquide. Cette formule intègre deux décalages Doppler, d'où la présence d'un facteur 2 dans le dénominateur du membre de droite. Le premier décalage est dû au mouvement relatif de la particule par rapport à l'émetteur (onde aller), et le second est dû au mouvement relatif du récepteur par rapport à la particule (onde retour). La vitesse u_x de la particule est déterminée grâce à la mesure de f_d ; et sa distance à la sonde x_p est déduite du temps de vol t du pulse ultrasonore entre l'émission et la réception, mesuré par l'UVP, tel que :

$$t = \frac{2x_p}{c}. \quad (2.15)$$

En résumé, les mesures du décalage en fréquence f_d et du temps de vol t du pulse ultrasonore permettent de calculer la vitesse et la position d'une particule dans le fluide. En supposant que les particules advectées sont suffisamment petites pour suivre le liquide, on peut déterminer le profil de vitesse de l'écoulement. Dans le cas du galinstan, il a été montré que des particules d'oxyde sont naturellement présentes en quantité suffisante dans le liquide pour effectuer les mesures UVP [58].

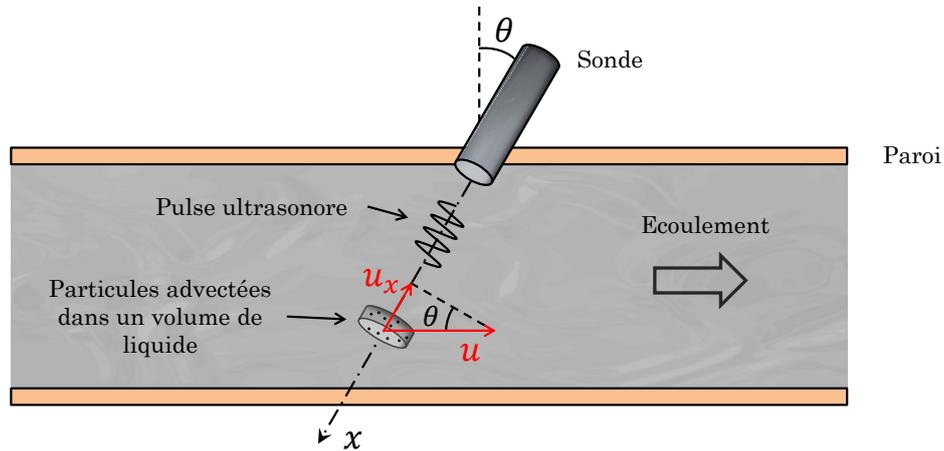


FIGURE 2.19 – Schéma de principe de l'UVP. Un pulse ultrasonore est émis par la sonde et se propage dans l'écoulement le long de l'axe x . Les particules advectées par l'écoulement interceptent l'onde ultrasonore et émettent un écho décalé en fréquence par effet Doppler.

La résolution spatiale du profil Δx est fixée par la vitesse du son dans le galinstan $c = 2700$ m.s⁻¹, la fréquence ultrason de la sonde f_0 et le nombre d'oscillations par pulse n , par la relation :

$$\Delta x = \frac{nc}{2f_0}. \quad (2.16)$$

La figure 2.20 illustre cette relation. Un pulse est émis par la sonde à l'instant $t_0 = 0$ s et avance dans l'écoulement le long de l'axe x à une vitesse c .

- À l'instant t_1 après l'émission, le début du pulse est à la position x_1 . Un écho commence à être généré par les particules présentes dans l'écoulement à la position x_1 . Cet écho sera capté par la sonde à partir de l'instant $T_1 = 2t_1$.
- À l'instant $t_2 = t_1 + n/2f_0$, le pulse a avancé de moitié et impacte les particules en $x_2 = x_1 + \Delta x$ où $\Delta x = nc/2f_0$. L'écho généré par ces particules arrivera sur la sonde à l'instant $T_1 + n/f_0$. Au même instant t_2 , les particules à la position x_1 émettent toujours un écho qui arrivera sur la sonde à l'instant $T_1 + n/2f_0$.
- À l'instant $t_3 = t_1 + n/f_0$, le pulse a avancé de sa propre longueur $2\Delta x$. Les particules situées à la position x_1 cessent de générer un écho ; leur dernier écho est capté par la sonde à l'instant $T_1 + n/f_0$. Les particules au-delà de x_1 génèrent un écho qui arrivera sur la sonde après $T_1 + n/f_0$.

Lorsque la sonde mesure les échos entre les instants T_1 et $T_1 + n/f_0$, les échos mesurés sont donc émis uniquement par des particules situées entre x_1 et $x_1 + \Delta x$. Les échos émis par les particules situées avant x_1 sont mesurés avant T_1 , et ceux émis par les particules après $x_1 + \Delta x$ sont mesurés après $T_1 + n/f_0$. De plus, les échos émis par les particules situées en x_1 arrivent nécessairement entre T_1 et $T_1 + n/f_0$. La résolution spatiale est donc égale à $\Delta x = nc/2f_0$, où Δx correspond alors à la longueur du volume de liquide dont les échos sont mesurés pendant un temps n/f_0 .

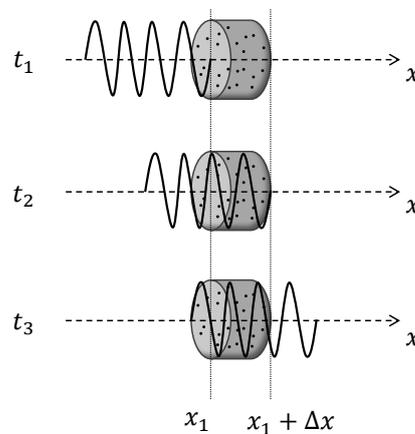


FIGURE 2.20 – Schéma illustrant le calcul de la résolution spatiale Δx de la mesure UVP.

Le réglage du nombre d'oscillations par pulse n influe sur la précision de mesure du décalage en fréquence f_d et, comme vu précédemment, sur la résolution spatiale Δx . Lorsque n augmente, la mesure du décalage Doppler f_d est plus précise au détriment de la résolution spatiale Δx . Il est donc nécessaire de faire un compromis lors du réglage du nombre d'oscillations par pulses. Pour les expériences réalisées dans cette étude, le réglage utilisé est $n = 4$. La résolution spatiale vaut dans ce cas $\Delta x = 0.675$ mm.

La mesure de f_d est relativement peu précise si on considère l'écho mesuré pour un seul pulse, d'autant plus si le nombre d'oscillations n est petit. La méthode utilisée par l'UVP est donc d'utiliser un faisceau ultrasonore contenant une répétition de pulses et de moyenner les mesures de f_d . Le nombre de pulses émis par la sonde pour construire un profil de vitesse est réglé dans notre cas à 256 : en chaque point du profil, les vitesses sont mesurées pour chaque pulse puis moyennées

sur les 256 répétitions. L'augmentation du nombre de pulses par profil permet une précision accrue sur la mesure de vitesse, mais engendre une résolution temporelle moins bonne. Dans le cadre des expériences, le temps nécessaire pour construire un profil de vitesse à partir des 256 pulses est égal à 240 ms. Le profil de vitesse moyen final est obtenu en mesurant 512 profils de vitesse (soit 131 072 pulses émis par le transducteur), pour un temps d'acquisition total de 123 s.

Un récapitulatif des paramètres de l'UVP utilisés dans les expériences est présenté dans le tableau 2.6.

TABLEAU 2.6 – Données utiles pour la vélocimétrie UVP.

Fréquence ultrason de la sonde f_0	8 MHz
Vitesse du son dans le galinstan c	2700 m.s ⁻¹
Nombre d'oscillations par pulse n	4
Durée d'un pulse Δt	0.5 μ s
Résolution spatiale Δx	0.675 mm
Nombre de pulses pour l'obtention d'un profil	256
Temps nécessaire pour l'obtention d'un profil	0.240 ms
Nombre de profils moyennés pour une acquisition	512
Temps d'une acquisition	123 s
Angle de la sonde par rapport à l'écoulement θ	30°

Exemples de profils de vitesse

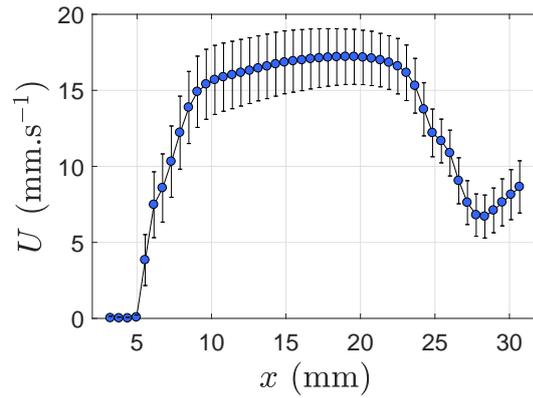
La figure 2.21a montre une photo de la pièce supérieure de la section d'essai contenant les emplacements pour les sondes UVP. Pour chaque acquisition, deux sondes UVP 8 MHz sont introduites dans les emplacements et placées de manière à être affleurantes à l'écoulement de galinstan. L'écoulement étant vers le bas, le sillage généré par la sonde est en aval de la zone de mesure et n'est pas intrusif. L'utilisation de deux sondes, perpendiculaires l'une par rapport à l'autre, permet de valider les mesures et de contrôler la symétrie de l'écoulement.

Les profils de vitesse mesurés par les deux sondes (figure 2.21a) sont présentés dans les figures 2.21b et 2.21c respectivement. Pour ces mesures, la fréquence en sortie du variateur est fixée à 2 Hz, et le nombre de Reynolds est de l'ordre de 1200. L'extrémité de la sonde en contact avec l'écoulement est située en $x = 5$ mm. L'écart de mesure entre les deux sondes est supérieur à 20% pour les points proches de la sonde ($5 \leq x \leq 9$ mm), et de l'ordre de 2% pour les points au centre de la conduite ($9 \leq x \leq 23$ mm). Les sondes sont en effet positionnées affleurantes à l'écoulement avec un certain jeu de positionnement. Ce jeu est susceptible de générer un écart de mesure important entre les deux sondes dans la zone de fort gradient de vitesse, c'est à dire à proximité de la sonde.

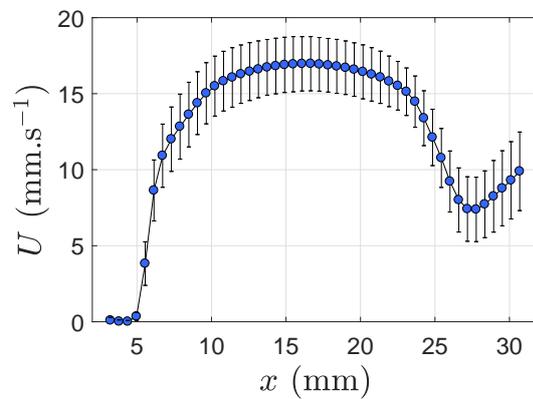
Par ailleurs, des réflexions multiples au voisinage de la paroi opposée à la sonde ($x \gtrsim 28$ mm) invalident la mesure du profil de vitesse dans cette zone. Le même phénomène est observé dans la littérature [58]. Nous nous intéressons par la suite à la première moitié du profil de vitesse mesurée de la sonde jusqu'au centre de la conduite, c'est à dire pour $5 \leq x \leq 17.5$ mm.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.21 – (a) Photo de l'installation des sondes utilisées pour la mesure UVP. (b,c) Exemples de profils de vitesse mesurés pour une fréquence en sortie du variateur de 2 Hz.

Du fait que la résolution spatiale Δx est grande par rapport à la l'épaisseur de couche limite ($\Delta x = 0.675$ mm), la position du contact sonde/écoulement, où la vitesse du liquide s'annule, n'est pas connue exactement lors de la mesure du profil de vitesse. Le « zéro » du profil est alors estimé à partir d'une extrapolation linéaire des deux premiers points du profil. La figure 2.22 montre un exemple des demi-profil mesurés par les deux sondes en extrapolant le point $x = 0$ mm, pour une fréquence du variateur de 12 Hz, soit un nombre de Reynolds de l'ordre de 5400.

Pour chaque sonde, le demi-profil mesuré est comparé à la corrélation de Reichardt, décrivant le profil de vitesse d'un écoulement turbulent développé dans une conduite cylindrique [59]. La corrélation de Reichardt donne une expression de la vitesse sans dimension $u^+ = u/u_\tau$ en fonction de la distance à la paroi sans dimension $y^+ = yu_\tau/\nu$,

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left[(1 + \kappa y^+) \frac{\frac{3}{2}(1 + \tilde{r})}{1 + 2\tilde{r}} \right] + C_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{y_1^+}\right) - \left(\frac{y^+}{y_1^+}\right) \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right], \quad (2.17)$$

où κ est la constante de Von Karman ($\kappa \approx 0.41$), C_1 une constante telle que $C_1 = 5.5 - \ln \kappa/\kappa \approx 7.8$, et $y_1^+ = 11$. On note ici $\tilde{r} = r/R$ la coordonnée radiale adimensionnée par le rayon R de la conduite cylindrique. Les paramètres utilisés pour l'adimensionnement de y^+ et u^+ sont la viscosité cinématique ν et la vitesse de friction à la paroi u_τ , inconnue dans notre cas. Il est en effet nécessaire

d'avoir une mesure du profil de vitesse très résolue à proximité de la paroi pour obtenir u_τ , i, ce qui n'est pas le cas des mesures UVP. La vitesse de friction u_τ est estimée ici par un calage de la corrélation avec les mesures expérimentales (par régression non linéaire). Un bon accord entre les mesures UVP et la corrélation est observé pour les débits les plus élevés (fréquence du variateur supérieure à 10 Hz, soit un nombre de Reynolds de supérieur à 4500) et pour les points au centre de la conduite. La mesure de vitesse dans la couche limite étant biaisée par le positionnement de la sonde dans l'écoulement, il est logique d'observer une déviation entre les mesures et la corrélation à proximité de la sonde (pour $x \lesssim 2.5$ mm sur la figure 2.22).

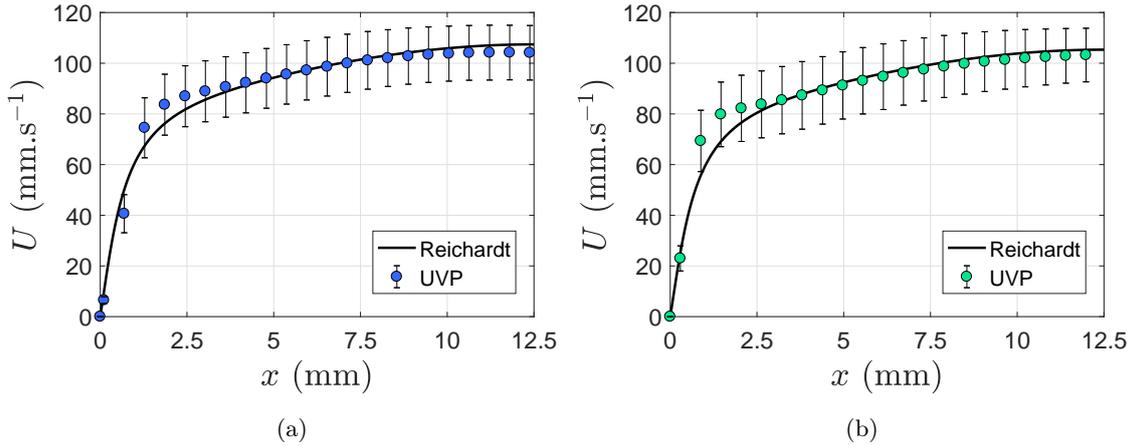


FIGURE 2.22 – Demi-profil de vitesse mesurés par l'UVP pour une fréquence en sortie du variateur de 12 Hz. Les profils sont comparés à la corrélation de Reichardt [59] (—), équation (2.22). (a) Sonde 5. (b) Sonde 10.

La mesure des profils de vitesse est effectuée sur une plage de débit correspondant à une fréquence en sortie du variateur fixée entre 2 Hz et 22 Hz. Pour chaque fréquence, les demi-profil mesurés par les deux sondes sont moyennés puis comparés à la corrélation de Reichardt. La valeur du débit peut ensuite être calculée en intégrant le profil de vitesse $u(r)$, déterminé par la corrélation, sur la section de la conduite. Ce calcul permet de calibrer le débit fourni par la pompe en fonction de la fréquence du variateur. La figure 2.23 montre que ce débit suit une tendance linéaire en fonction de la fréquence du variateur. Dans cette figure, pour chaque fréquence du variateur, le débit est calculé à partir d'une acquisition.

2.5 INCERTITUDES DE MESURES ET AJUSTEMENT DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ECFM

Cette partie présente une discussion sur deux aspects propres à la métrologie. Les incertitudes de mesure sont discutées dans une première sous-partie. Dans la deuxième sous-partie, une méthode d'ajustement (analogue à un étalonnage) des modèles théoriques de l'ECFM sur l'expérience est développée afin de pouvoir comparer quantitativement les résultats théoriques aux mesures expérimentales.

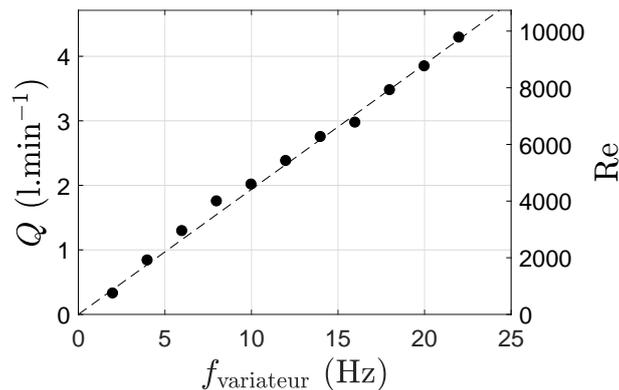


FIGURE 2.23 – Débit fourni par la pompe en fonction de la fréquence du variateur calculé à partir des mesures UVP (●), et approché par une interpolation linéaire (--) : $Q \approx 0.194 \times f_{\text{variateur}}$ (l.min⁻¹).

2.5.1 Incertitudes de mesure

Les mesures réalisées à l'ECFM sont soumises aux incertitudes de mesure usuelles, définies par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) et divisées en deux catégories [60] :

- les incertitudes évaluées par une évaluation de type A, c'est à dire une « évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par une analyse statistique des valeurs mesurées obtenues dans des conditions définies de mesurage » [60] (exemple : répétabilité, reproductibilité) ;
- les incertitudes évaluées par une évaluation de type B, c'est à dire une « évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par d'autres moyens qu'une évaluation de type A de l'incertitude » [60] (exemple : précision des appareils utilisés donnée par le constructeur, tolérance des pièces utilisées dans le montage, etc.).

Dans notre cas, les incertitudes de mesure sont évaluées à partir d'une étude de répétabilité (plusieurs mesures avec même procédure de mesure, même opérateur, mêmes conditions de fonctionnement, même objet mesuré, etc.). Pour l'expérience 1, la tension ΔV est mesurée à l'ECFM au cours de 10 allers-retours de l'ECFM autour d'un même tube (voir figure 2.13, page 37). L'écart-type entre les 10 allers-retours, de l'ordre de $2 \mu\text{V}$, correspond alors à l'incertitude de mesure. Pour l'expérience 2, la tension ΔV est mesurée 10 fois d'affilée, durant un temps de 25 s à chaque fois (voir figure 2.17, page 44). L'écart-type entre les 10 mesures correspond ici à l'incertitude de mesure.

Une étude de reproductibilité (procédure de mesure, opérateur, conditions de fonctionnement différents sur un objet similaire) ainsi qu'une évaluation de type B restent à effectuer pour déterminer les incertitudes de manière plus complète. Pour une évaluation de type B ultérieure, le tableau 2.7 rassemble les tolérances des différentes pièces utilisées dans les deux expériences, donnés par les fournisseurs. En outre, le tableau 2.8 présente la précision de mesure du Lock-in Amplifier donnée par Zurich Instruments.

2.5.2 Ajustement des modèles théoriques de l'ECFM

Les résultats expérimentaux sont comparés à plusieurs modèles théoriques dans les chapitres 4 et 6. Ces modèles contiennent un nombre élevé de paramètres, des données physiques (fréquence

TABLEAU 2.7 – Tolérances des pièces utilisées dans les deux dispositifs expérimentaux.

	Tolérance
Pièces d'impression 3D	0.025 à 0.05 mm par 25.4 mm des dimensions de la pièce
Pièces en PEEK	0.05 mm
Pièces en Macor	0.1 mm
Positionnement du fil (expérience 1)	0.25 mm

TABLEAU 2.8 – Précisions des entrées/sorties du Lock-in Amplifier.

Sensibilité de l'entrée	1 nV à 1.5 V
Résolution de la fréquence de référence (sortie)	0.7 μ Hz
Résolution de la phase de référence (sortie)	1.0 μ°

et intensité du courant dans la bobine primaire, conductivité du métal, champ de vitesse, etc) aux données géométriques (longueurs, diamètres et nombres de spires des bobines primaires et secondaires, diamètre de la conduite, etc). En particulier, le nombre de spires de chaque bobine n'est pas fixé dans la fabrication des ECFM, leur longueur étant déjà imposée. Dans le cas idéal, le nombre de spire par unité de longueur n_S des bobines vaut simplement :

$$n_S = \frac{1}{d_{\text{fil}}} = 2.5 \text{ spires.mm}^{-1} \quad \text{avec} \quad d_{\text{fil}} = 0.4 \text{ mm}, \quad (2.18)$$

où d_{fil} est le diamètre du fil de cuivre, identique pour toutes les bobines. Dans le cas réel cependant, le jeu entre les spires ainsi que les défauts inhérents à l'enroulement induisent une erreur relativement importante par rapport à la valeur idéale (2.18), dont l'estimation est difficile. De manière à déterminer une valeur précise du nombre de spires par unité de longueur, les inductances des bobines de l'ECFM sont mesurées à vide (en l'absence de métal liquide), puis comparées à l'inductance théorique calculée à partir de la géométrie de la bobine. Par méthode inverse, il est alors possible d'obtenir la valeur du nombre de spires par unité de longueur.

Détermination du nombre de spires par mesure d'inductance

Plusieurs formules - développées au début du XX^{ème} siècle, avant l'essor du calcul numérique, et basées sur des tables - permettent de calculer précisément les inductances. En particulier, Rosa développe en 1907 une méthode de calcul semi-empirique de l'auto-inductance d'un solénoïde de longueur quelconque avec un nombre quelconque de couches d'enroulement [61]. La démarche consiste à calculer d'abord l'inductance d'un solénoïde mince (d'épaisseur négligeable), puis à rajouter des termes correctifs pour tenir compte de l'épaisseur de la bobine et de la répartition du courant dans les fils. La géométrie de la bobine, de longueur l , de rayon moyen a et d'épaisseur t , est représentée dans la figure 2.24.

L'auto-inductance L_s d'un solénoïde de rayon a , de longueur l , et d'épaisseur infiniment mince, est déterminée dans un premier temps. L'épaisseur du solénoïde étant négligeable, le courant traversant ce solénoïde est surfacique (d'où l'indice « s »), et assimilable à une nappe de courant

cylindrique. En reprenant les notations de Rosa, le nombre de spires n' du solénoïde mince est défini par $n' = l/t$. L'auto-inductance L_s peut être calculée dans notre cas par la formule de Lorenz [62] :

$$L_s = \frac{4\pi n'}{3l^2} \left(d(4a^2 - l^2) E(k) + dl^2 F(k) - 8a^3 \right), \quad (2.19)$$

où $d = \sqrt{4a^2 + l^2}$, et $F(k)$ et $E(k)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce respectivement, de module $k = \frac{2a}{d}$, définies par :

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{et} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (2.20)$$

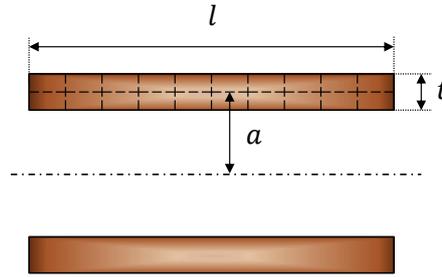


FIGURE 2.24 – Géométrie utilisée pour le calcul de l'inductance d'une bobine.

À partir de l'expression (2.19) de l'inductance L_s du solénoïde mince (d'épaisseur négligeable), l'inductance L_u d'un solénoïde épais peut être obtenue en soustrayant un terme correctif $\Delta_1 L$ à l'inductance L_s du solénoïde mince. L'inductance L_u obtenue est donc celle d'un solénoïde épais de longueur l , de rayon moyen a et d'épaisseur t , représenté dans la figure 2.24. Il est à noter que dans le calcul de L_u , le nombre de couches d'enroulement apparaît implicitement dans la valeur de l'épaisseur d'enroulement t . Par ailleurs, il est supposé dans ce calcul que la densité de courant traversant le solénoïde épais est distribuée uniformément (d'où l'indice « u »). On obtient L_u et $\Delta_1 L$ par :

$$L_u = L_s - \Delta_1 L \quad \text{et} \quad \Delta_1 L = 4\pi a n_S (A + B), \quad (2.21)$$

où A et B sont deux constantes déterminées à partir des courbes de la figure 2.25, en fonction de t/a et du nombre de couches d'enroulement N_e respectivement. Dans (2.21), n_S est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde épais qu'on cherche à déterminer. Il est à noter que l'inductance L_u obtenue par l'équation (2.21) correspond à une bobine formée d'une seule couche d'enroulement, d'épaisseur t . Afin de prendre en compte un éventuel surenroulement, l'inductance L_u doit être multipliée par N_e^4 . En utilisant le centimètre comme unité de longueur, l'inductance $L_u \times N_e^4$ s'exprime en milliHenry.

À partir des équations (2.19) et (2.21), il est observé que l'inductance L_u est sensible à l'épaisseur d'enroulement t , fixée dans le calcul et mesurée expérimentalement au pied à coulisse à $t = 0.85 \pm 0.05$ mm. L'erreur de mesure de ± 0.05 mm génère des variations non négligeables de l'inductance L_u (de l'ordre de $\pm 10\%$). La méthode d'inversion, consistant à retrouver le nombre de spires par unité de longueur n_S à partir de l'inductance L_u , est donc soumise à une imprécision importante due à l'erreur sur t . Dès lors, la problématique est de trouver le couple (n_S, t) tel que l'inductance calculée L_u soit égale à l'inductance mesurée, sachant que $t = 0.85 \pm 0.05$ mm.

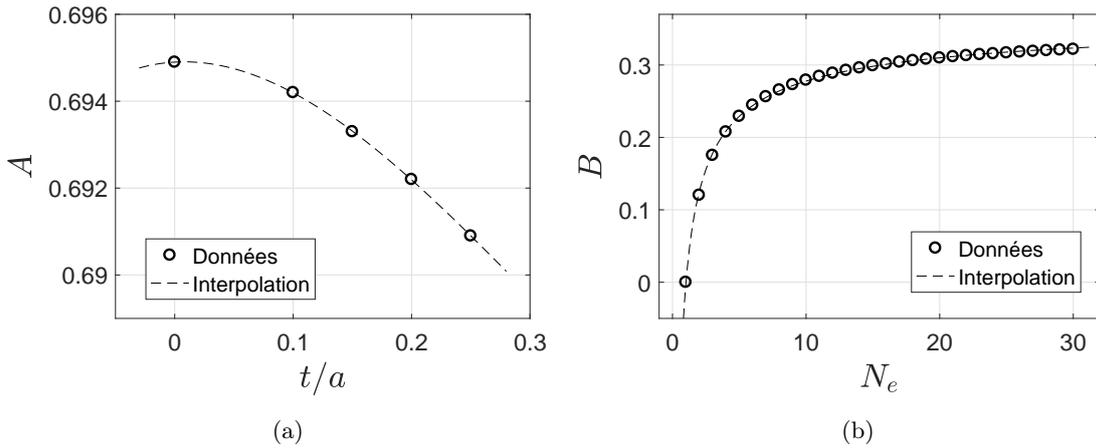


FIGURE 2.25 – Valeurs des constantes A et B utilisées pour le calcul du terme correctif $\Delta_1 L$, obtenues à partir des tables de Rosa [61] (○) et comparées à des interpolations (---). (a) Interpolation : $A \approx 0.1069 \times (t/a)^3 - 0.09687 \times (t/a)^2 + 0.001544 \times t/a + 0.6949$. (b) Interpolation : $B \approx -0.3751 \times N_e^{-0.5967} + 0.3727$.

Mesures complémentaires pour l'ajustement des modèles théoriques

Avec la méthode décrite dans la partie précédente, nous avons constaté que la valeur du nombre de spires par unité de longueur n_S n'est pas déterminée de manière précise à partir de la seule mesure de l'inductance de la bobine. En particulier, l'erreur de mesure sur l'épaisseur t de la bobine induit une erreur non négligeable dans le calcul de l'inductance ; l'inductance calculée ne peut donc pas être comparée précisément à l'inductance mesurée. Il est nécessaire d'utiliser une mesure complémentaire à celle de l'inductance pour déterminer de manière univoque les valeurs de n_S et t . Dans cet objectif, les amplitudes des tensions V_1 et V_2 dans les secondaires S_1 et S_2 , et de la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$, sont mesurées sur une large plage de fréquence. Dans toute la suite, on note les tensions aux bornes des bobines secondaires S_1 et S_2 et leur différence :

$$V_1 = \widehat{V}_1 e^{j\omega t}, \quad (2.22a)$$

$$V_2 = \widehat{V}_2 e^{j\omega t}, \quad (2.22b)$$

$$\Delta V = \Delta \widehat{V} e^{j\omega t}. \quad (2.22c)$$

La phase de référence est la phase du courant dans la bobine primaire. On note $\Theta_1 = \arg(\widehat{V}_1)$, $\Theta_2 = \arg(\widehat{V}_2)$ et $\Delta\Theta = \arg(\Delta \widehat{V})$ les déphasages de ces tensions. Les mesures sont effectuées pour deux configurations distinctes :

- ECFM à vide : il n'y a pas de galinstan à l'intérieur des bobines ;
- ECFM avec galinstan statique : un tube contenant du galinstan statique est placé au milieu de l'ECFM, ce qui correspond à la configuration des deux études expérimentales avec une vitesse nulle, donc $\Delta V_U = 0$, et l'absence d'inclusion isolante, donc $\Delta V_\alpha = 0$ (c'est à dire $\Delta V = \Delta V_0$).

Les tensions V_1 , V_2 et ΔV mesurées pour les deux configurations sont comparées à la solution analytique de Dodd et Deeds [7], présentée dans le chapitre 1 (page 10) et appliquée à notre géométrie. Notons que le calcul de V_1 , V_2 et ΔV avec cette solution analytique fait intervenir le nombre de spires par unité de longueur n_S et l'épaisseur t des bobines primaire et secondaires, qu'on cherche à déterminer. Une méthode de minimisation (moindres carrés) entre les tensions mesurées

et les tensions calculées permet, en supplément du calcul de l'inductance L_u , de déterminer un unique couple (n_S, t) associé à chaque bobine de l'ECFM.

À titre d'exemple, le tableau 2.9 donne les valeurs du nombre de spires par unité de longueur n_S et de l'épaisseur d'enroulement t estimés, pour chaque bobine de l'ECFM utilisé dans le premier dispositif expérimental (sous-section 2.3.1). On remarque ici que le nombre de spires par unité de longueur n_S est inférieur d'environ 10% par rapport à la valeur idéale (2.18), en raison du jeu entre les spires et des défauts d'enroulement inhérents au bobinage.

TABLEAU 2.9 – Résultats de l'optimisation donnant le nombre de spires par unité de longueur n_S et de l'épaisseur d'enroulement t de chaque bobine de l'ECFM utilisé dans l'expérience 1.

	P	S ₁	S ₂
n_S (spires.mm ⁻¹)	2.285	2.304	2.259
t (mm)	0.85	0.81	0.84

La figure 2.26 montre l'amplitude et le déphasage des tensions V_1 , V_2 et ΔV mesurées expérimentalement pour la première configuration (ECFM à vide), et calculées avec la solution analytique de Dodd et Deeds grâce aux valeurs optimisées de n_S et t (voir tableau 2.9). En complément de la solution de Dodd et Deeds, l'expression du potentiel vecteur généré par une bobine isolée (sans conducteur en présence), donnée par Durand [63] (page 99) et dont on déduit V_1 , V_2 et ΔV , permet de valider les résultats de l'optimisation. Il est à noter que les tensions dans les bobines secondaires sont déphasées de 90° par rapport au courant dans la bobine primaire, utilisé comme référence de phase. Ce résultat est cohérent : en l'absence de conducteur (tel que du galinstan), le champ électromagnétique généré n'est pas déphasé par rapport au courant dans la bobine primaire. La tension dans une bobine secondaire, proportionnelle aux variations temporelles du flux magnétique (loi de Faraday), est donc déphasée de 90° par rapport au courant de référence. L'écart d'environ 1° entre les déphasages des tensions mesurées et calculées peut être dû à la présence d'éléments métalliques dans le voisinage de l'ECFM (par exemple un boulon dans la pièce de maintien de l'ECFM).

La figure 2.27 montre l'amplitude et le déphasage des tensions V_1 , V_2 et ΔV mesurées expérimentalement pour la seconde configuration (ECFM avec galinstan statique), et calculées avec la solution analytique de Dodd et Deeds grâce aux valeurs optimisées de n_S et t (voir tableau 2.9). Dans ce cas, l'optimisation de n_S et t donne des résultats satisfaisants pour V_1 et V_2 mais montre ses limites pour ΔV , où des écarts importants sont observés sur l'amplitude, et à plus forte raison sur le déphasage. Les écarts observés sont dus à une légère déviation du déphasage de la tension mesurée V_1 (environ 0.2° sur la figure 2.27b) par rapport aux résultats de l'optimisation. En conséquence, la différence des déphasages Θ_1 et Θ_2 , idéalement nulle par symétrie, vaut expérimentalement $\delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 \approx -0.2^\circ$ (soit en radians, $\delta\Theta \approx -3.5 \times 10^{-3}$ rad). Pour caractériser l'effet de $\delta\Theta$ sur ΔV , on utilise le développement limité au premier ordre en $\delta\Theta \rightarrow 0$:

$$e^{j\delta\Theta} = 1 + j\delta\Theta + \mathcal{O}(\delta\Theta^2). \quad (2.23)$$

En injectant ce développement dans les relations (2.22a) et (2.22b), et en négligeant les termes en $\mathcal{O}(\delta\Theta^2)$, on obtient l'expression de la différence de tension aux bornes des bobines secondaires,

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \left(|\widehat{V}_1| - |\widehat{V}_2| + j|\widehat{V}_2|\delta\Theta \right) e^{j(\omega t + \Theta_1)}. \quad (2.24)$$

L'amplitude et le déphasage de ΔV , définis dans l'équation (2.22c), se déduisent directement :

$$|\Delta\widehat{V}| = \sqrt{\left(|\widehat{V}_1| - |\widehat{V}_2|\right)^2 + \left(|\widehat{V}_2|\delta\Theta\right)^2}, \quad (2.25a)$$

$$\Delta\Theta = \Theta_1 + \tan^{-1}\left(\frac{|\widehat{V}_2|}{|\widehat{V}_1| - |\widehat{V}_2|}\delta\Theta\right). \quad (2.25b)$$

Pour expliquer les écarts observés sur $\Delta\Theta$ dans la figure 2.27f, le terme en $\delta\Theta^2$ est négligé dans l'équation de $|\Delta\widehat{V}|$ (2.25a). On a alors :

$$|\Delta\widehat{V}| \approx |\widehat{V}_1| - |\widehat{V}_2| \quad \text{et donc} \quad \Delta\Theta \approx \Theta_1 + \tan^{-1}\left(\frac{|\widehat{V}_2|}{|\Delta\widehat{V}|}\delta\Theta\right). \quad (2.26)$$

En remarquant d'après les figures 2.27c et 2.27e que $|\widehat{V}_2|/|\Delta\widehat{V}| \approx 10^2$ et sachant que $\delta\Theta \approx -3.5 \times 10^{-3}$ rad, la fonction arc tangente peut être approchée par $\tan^{-1}(x) \approx x$. L'application numérique donne finalement une estimation du déphasage de la différence de tension ΔV ,

$$\Delta\Theta \approx \Theta_1 - 20^\circ. \quad (2.27)$$

Cette valeur correspond bien en ordre de grandeur à l'écart observé sur la figure 2.27f.

Pour conclure, le faible écart observé sur le déphasage de la tension V_1 génère des erreurs importantes sur l'amplitude, et à plus forte raison sur le déphasage de la différence de tension ΔV aux bornes des secondaires. Ces écarts ne sont pas observés sur la première configuration (ECFM à vide), car la différence $\delta\Theta$ entre les déphasages des tensions dans les deux bobines secondaires est suffisamment faible. Dans la deuxième configuration (ECFM avec galinstan statique), la différence $\delta\Theta$ impacte de manière significative la précision de l'ajustement du modèle théorique pour la différence de tension ΔV . Dans cette configuration, on remarque que cette différence de tension correspond à la contribution ΔV_0 dans la décomposition du flux magnétique de Kumar *et al.* [16, 1], mesurée lorsque le métal liquide est statique et ne contient pas d'inclusion ($\Delta V_U = 0$ et $\Delta V_\alpha = 0$). Bien que la méthode d'ajustement soit limitée pour décrire quantitativement la contribution ΔV_0 , nous montrerons dans les chapitres 4 et 6 que la méthode est en revanche appropriée pour une estimation précise des contributions ΔV_U et ΔV_α .

2.6 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les deux dispositifs expérimentaux réalisés pour étudier l'interaction entre le champ électromagnétique et un écoulement de métal liquide advectant une inclusion isolante électrique. Chaque dispositif représente un écoulement « modèle », de manière à observer séparément les perturbations du champ électromagnétique dues au mouvement du métal, et celles relatives à la présence d'une inclusion isolante simulant une bulle. Un ECFM (débitmètre à courants de Foucault) est utilisé à la fois pour appliquer le champ électromagnétique et mesurer les perturbations du champ relatives à la vitesse du métal et à la présence de l'inclusion, via l'acquisition de la différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM. Dans le second dispositif expérimental, un système de vélocimétrie ultrasonore Doppler est par ailleurs utilisé pour mesurer le profil de vitesse de l'écoulement.

L'étude des effets de la vitesse du métal liquide sur la tension ΔV est l'objet de la première partie des résultats. Un modèle théorique de la perturbation du champ électromagnétique est présenté dans le chapitre 3, puis les résultats du modèle sont comparés aux mesures expérimentales dans le chapitre 4.

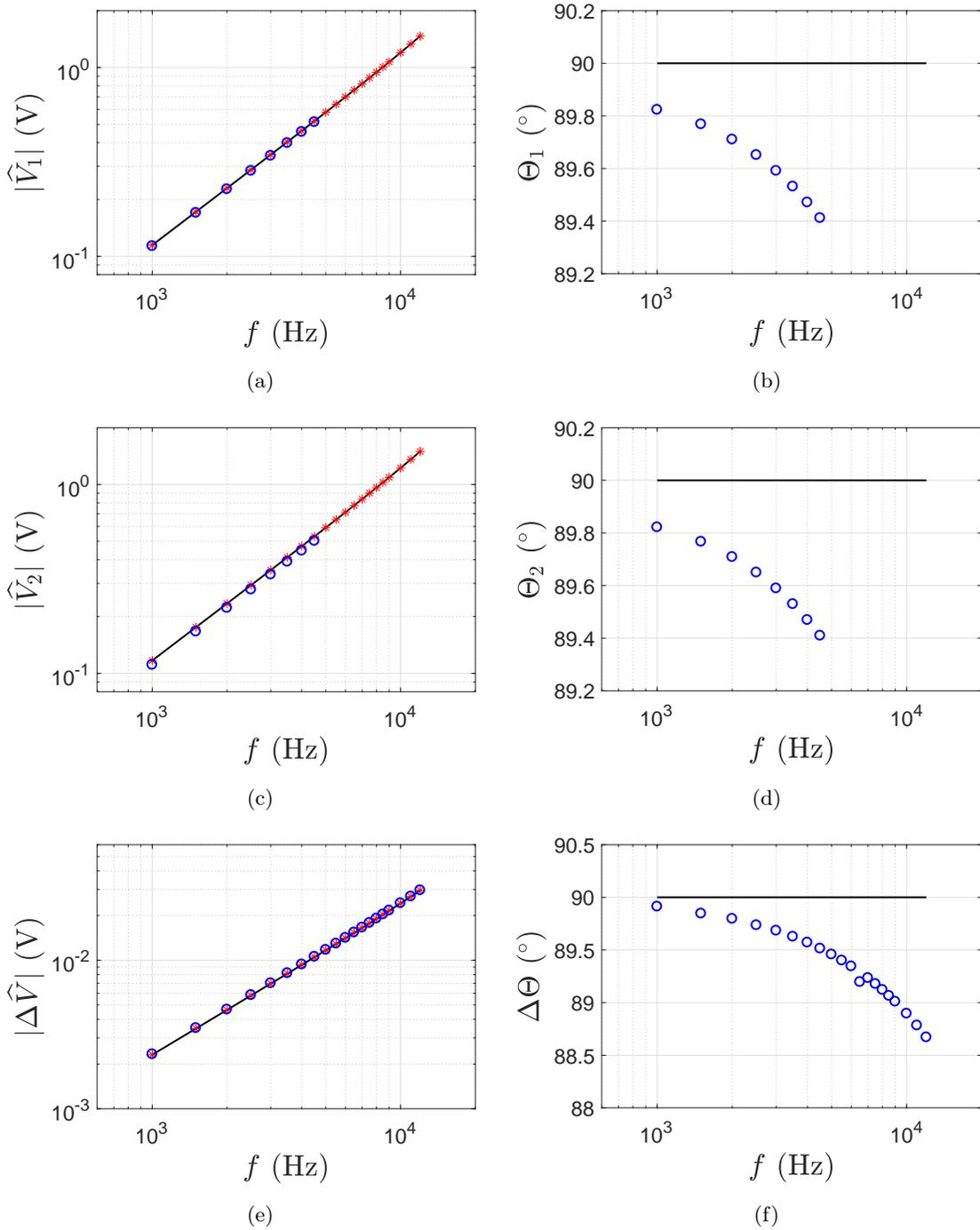


FIGURE 2.26 – Amplitude et déphasage des tensions dans l'ECFM à vide : tension dans la secondaire 1 (a,b), tension dans la secondaire 2 (c,d) et différence de tension entre les deux secondaires (e,f). Les mesures (\circ) sont comparées avec le modèle (—) et la solution de E. Durand ($*$) [63].

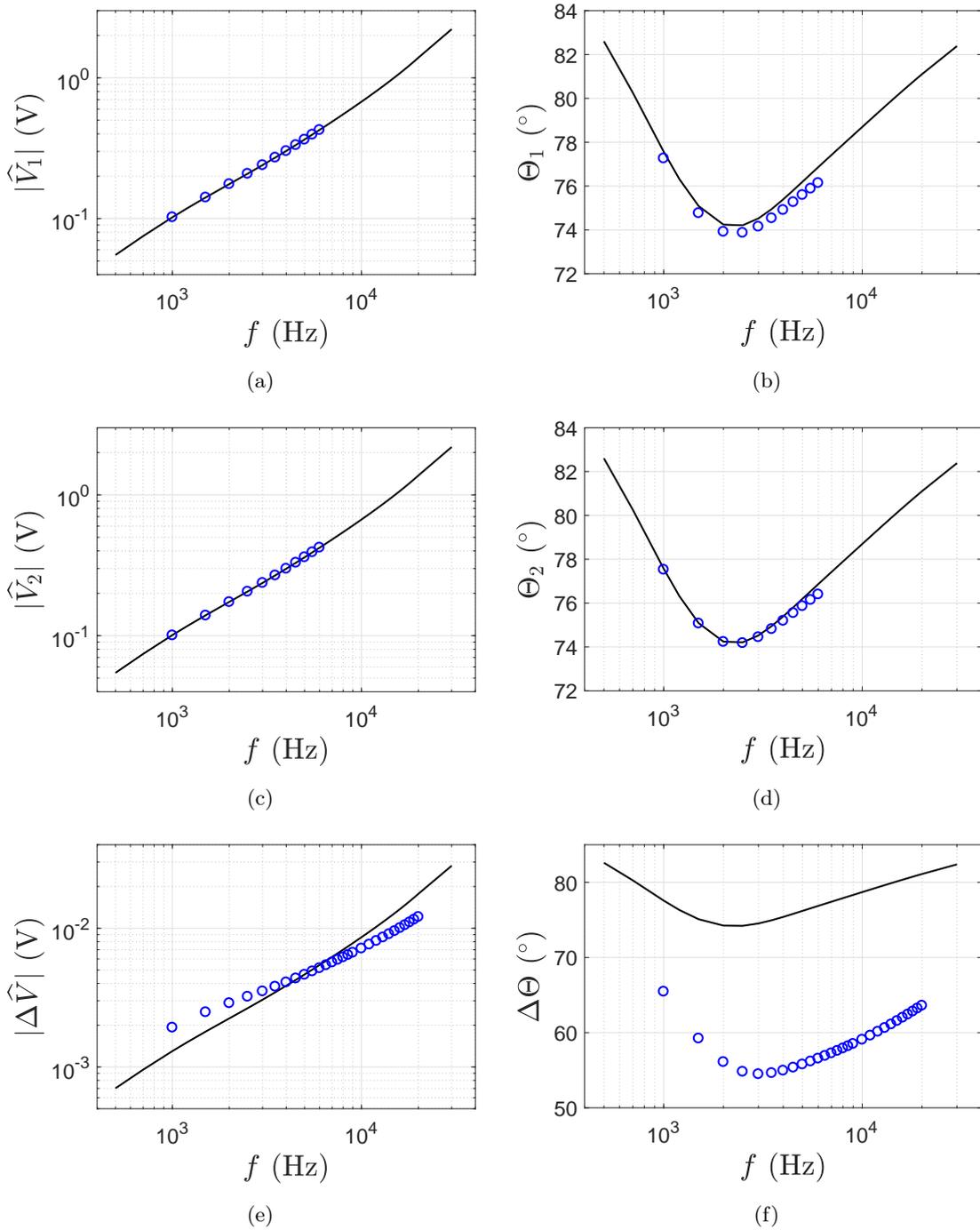


FIGURE 2.27 – Amplitude et déphasage des tensions dans l'ECFM avec galinstan statique : tension dans la secondaire 1 (a,b), tension dans la secondaire 2 (c,d) et différence de tension entre les deux secondaires (e,f). Les mesures (\circ) sont comparées avec le modèle ($-$).

Les perturbations de la tension ΔV relatives à la présence d'une inclusion dans le métal sont étudiées dans la seconde partie des résultats. Comme précédemment, un modèle théorique, décrit dans le chapitre 5, permet l'estimation de la perturbation générée par la présence de l'inclusion. Les résultats de ce modèle sont ensuite comparés aux mesures effectuées dans le premier dispositif expérimental dans le chapitre 6.

PERTURBATION DU CHAMP
ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR LA VITESSE
DU MÉTAL

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DE L'INFLUENCE DE L'ÉCOULEMENT SUR LA RÉPONSE DE L'ECFM

Ce chapitre présente un modèle analytique de la perturbation du champ électromagnétique générée par le champ de vitesse d'un écoulement de métal liquide traversant l'ECFM. À partir de la résolution de l'équation du potentiel vecteur en l'absence d'inclusion isolante (comme une bulle), les perturbations de tension dans l'ECFM relatives à la vitesse du métal sont calculées. Ce modèle sera comparé aux mesures expérimentales dans le chapitre 4.

Sommaire

3.1	Introduction	64
3.2	Description du système et mise en équation	64
3.2.1	Équation du potentiel vecteur	64
3.2.2	Équation de la fonction de Green	66
3.2.3	Conditions aux frontières	67
3.3	Résolution du potentiel vecteur et calcul des grandeurs associées	67
3.3.1	Profil de vitesse uniforme	67
3.3.2	Profil de vitesse quelconque	70
3.3.3	Densité de courant électrique dans le métal liquide	72
3.3.4	Tension induite dans les bobines secondaires	73
3.4	Conclusion	74

3.1 INTRODUCTION

Lorsque la bobine primaire de l'ECFM est alimentée en courant alternatif, un champ électromagnétique variable excite le métal liquide traversant les bobines et génère des courants induits, ou courants de Foucault, dans le métal du fait de l'induction électromagnétique. Dans le phénomène d'induction, on distingue une contribution relative au caractère alternatif du champ électromagnétique, et une contribution relative au mouvement du métal par rapport à l'ECFM. Cette seconde contribution est à l'origine de la dissymétrie du champ électromagnétique engendrant la différence de tension ΔV_U aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, dont la mesure est utilisée pour déterminer la vitesse de l'écoulement.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer analytiquement la distribution du champ électromagnétique dans le cas d'un écoulement de métal liquide en l'absence d'inclusion traversant l'ECFM, et dont le profil de vitesse est axisymétrique. La solution analytique est obtenue à partir de la résolution de l'équation du potentiel vecteur \mathbf{A} (défini à partir du champ magnétique \mathbf{B} par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). La tension ΔV_U relative à la vitesse du métal est ensuite calculée à partir du flux du champ magnétique traversant les bobines secondaires de l'ECFM.

La mise en équation du potentiel vecteur \mathbf{A} est décrite dans la section 3.2. À partir de l'équation de \mathbf{A} et des conditions aux frontières, une solution analytique est développée dans la section 3.3 à l'aide de la méthode des fonctions de Green. Deux configurations sont considérées dans la résolution : profil de vitesse uniforme et profil de vitesse non uniforme (laminaire, turbulent ou issu des mesures UVP).

3.2 DESCRIPTION DU SYSTÈME ET MISE EN ÉQUATION

3.2.1 Équation du potentiel vecteur

Cette section développe la mise en équation du potentiel vecteur appliquée à notre système d'étude. Un liquide conducteur s'écoule longitudinalement à une vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ dans un tube cylindrique infiniment long, de rayon intérieur R . L'écoulement est stationnaire et développé. À l'extérieur du tube, une bobine primaire P coaxiale au tube est alimentée par une densité de courant alternative $\mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{J}}_S e^{j\omega t}$ de pulsation ω , générant un champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) , où ϕ est le potentiel scalaire et \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Deux bobines secondaires S_1 et S_2 sont situées de part et d'autre de la bobine primaire. La différence de tension aux bornes des bobines secondaires, notée ΔV , est la valeur à déterminer. La figure 3.1 décrit le système. Le principe de résolution s'appuie sur la solution de Dodd et Deeds [7] (cas statique), décrite dans le chapitre 1 (page 10).

Il est supposé que le champ magnétique généré par la primaire ne perturbe pas l'écoulement, c'est à dire que les effets de la force de Laplace sont négligeables, du fait des faibles nombres de Hartmann et de Stuart considérés dans les configurations étudiées (voir annexe A, page 167). On précise ici que le nombre de Hartmann $Ha = BR/\sqrt{\sigma/\eta}$ représente le rapport entre la force de Laplace et les forces visqueuses, et le nombre de Stuart $N = B^2 R/\rho U$ représente le rapport entre la densité de la force de Laplace et la quantité de mouvement du métal liquide. Au regard des hypothèses de faible vitesse et basse fréquence (voir annexe A, page 159), le terme de courants de déplacement peut être négligé. Sous ces hypothèses et avec la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, les équations du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) s'écrivent :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \mu_0 \sigma \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\mathbb{1}_S \mu_0 \mathbf{J}_S, \quad (3.1a)$$

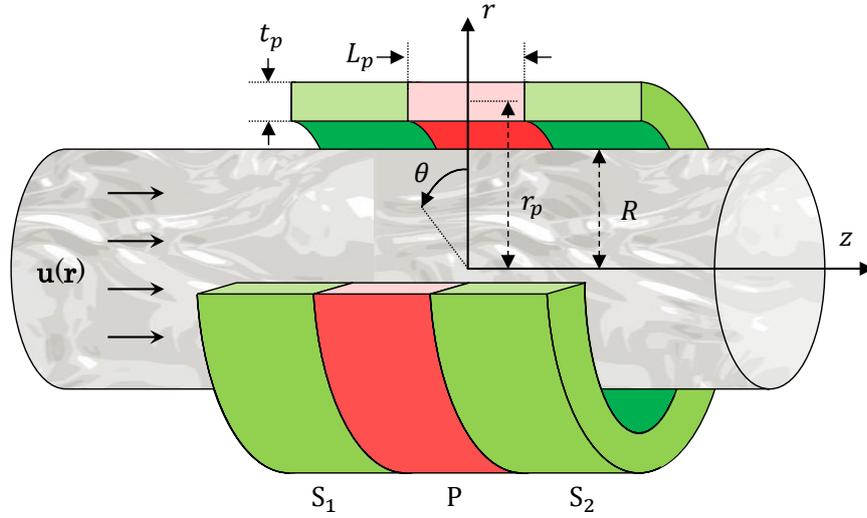


FIGURE 3.1 – Schéma de l'écoulement de métal traversant l'ECFM.

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})), \quad (3.1b)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et σ la conductivité électrique du milieu conducteur. On note $\mathbb{1}_C$ la fonction caractéristique du domaine C occupé par le conducteur (ici le cylindre infini, en gris dans la figure 3.1) et $\mathbb{1}_S$ la fonction caractéristique du domaine S occupé par la source de courant (ici la bobine primaire, en rouge), définies par :

$$\mathbb{1}_C(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in C \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin C \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_S(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in S \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin S \end{cases}, \quad (3.2)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position, et avec :

$$(r, z) \in C \Leftrightarrow r \in [0, R] \wedge z \in \mathbb{R}, \quad (3.3a)$$

$$(r, z) \in S \Leftrightarrow r \in \left[r_p - \frac{t_p}{2}, r_p + \frac{t_p}{2} \right] \wedge z \in \left[-\frac{L_p}{2}, \frac{L_p}{2} \right], \quad (3.3b)$$

où L_p est la longueur de la bobine primaire, r_p son rayon moyen et t_p son épaisseur.

Les équations (3.1a) et (3.1b) peuvent être mises sous forme adimensionnelle en utilisant les paramètres d'échelle suivants : le rayon intérieur du tube R , la pulsation caractéristique du champ ω , la vitesse moyenne de l'écoulement U et l'amplitude de la densité de courant source J_S . On définit les grandeurs adimensionnelles à partir de ces paramètres d'échelle,

$$t^* = \omega t, \quad \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{J}^* = \frac{\mathbf{J}}{J_S}, \quad \mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{\mu_0 J_S R^2}, \quad \phi^* = \frac{\sigma}{R J_S} \phi. \quad (3.4)$$

Dans notre cas, la source de courant sans dimension \mathbf{J}_S^* est un courant alternatif orthoradial dont l'amplitude et la pulsation sont égales à 1, c'est à dire $\mathbf{J}_S^* = e^{j t^*}$. Les astérisques sont abandonnés par la suite pour faciliter la lecture. Les équations sans dimension du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) deviennent donc :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \left(\nabla \phi + \Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{R}_m \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (3.5a)$$

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C \mathbf{R}_m \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})), \quad (3.5b)$$

où $R_m = \mu_0 \sigma U R$ est le nombre de Reynolds magnétique, correspondant au rapport entre le temps de diffusion magnétique $\mu_0 \sigma R^2$ et le temps d'advection caractéristique R/U , et $\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2$ est le paramètre d'écrantage, correspondant au rapport entre le temps de diffusion magnétique $\mu_0 \sigma R^2$ et l'inverse de la pulsation $1/\omega$.

Il est supposé que le champ de vitesse \mathbf{u} est stationnaire dans les équations (3.5a) et (3.5b), ce qui permet de considérer que le potentiel vecteur et le potentiel scalaire sont des champs monochromatiques de pulsation ω (sans dimension ici, $\omega = 1$), c'est à dire $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})e^{jt}$ et $\phi(\mathbf{r}, t) = \widehat{\phi}(\mathbf{r})e^{jt}$. En injectant ces expressions dans les équations (3.5a) et (3.5b), on obtient les équations des transformées $\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ et $\widehat{\phi}(\mathbf{r})$ qui, multipliées par e^{jt} pour utiliser les notations \mathbf{A} et ϕ plutôt que $\widehat{\mathbf{A}}$ et $\widehat{\phi}$, deviennent :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C (\nabla \phi + j\Omega \mathbf{A} - R_m \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})) = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (3.6a)$$

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C R_m \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (3.6b)$$

Il est supposé que le système présente une symétrie axiale. Avec les coordonnées cylindriques (r, θ, z) de la figure 3.1, on écrit alors $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \widehat{A}_r(r, z)e^{jt} \mathbf{e}_r + \widehat{A}_\theta(r, z)e^{jt} \mathbf{e}_\theta + \widehat{A}_z(r, z)e^{jt} \mathbf{e}_z$. La vitesse du liquide conducteur étant $\mathbf{u} = u(r) \mathbf{e}_z$, on déduit en développant l'équation (3.6a) sur les composantes r , θ et z que $\widehat{A}_r = \widehat{A}_z = 0$, soit $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \widehat{A}_\theta(r, z)e^{jt} \mathbf{e}_\theta$. Pour faciliter la lecture, on écrit par la suite la seule composante non nulle $\widehat{A}_\theta(r, z) = A(r, z)$.

En introduisant les coordonnées cylindriques dans l'équation (3.6b), on remarque que le membre de droite de l'équation (3.6b) s'annule. Le potentiel scalaire ϕ obéit alors à l'équation de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (3.7)$$

Sachant qu'aucun potentiel ϕ n'est imposé aux frontières et qu'on pose $\phi \rightarrow 0$ à l'infini, on déduit immédiatement que $\phi = 0$ en tout point de l'espace. En remplaçant $\nabla \phi = 0$ dans (3.6a), l'équation du potentiel vecteur $A(r, z)$ en coordonnées cylindriques devient alors :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mathbb{1}_C \left(j\Omega A + u(r) R_m \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -\mathbb{1}_S. \quad (3.8)$$

3.2.2 Équation de la fonction de Green

L'équation (3.8) étant linéaire inhomogène, le potentiel vecteur A peut être résolu par la méthode des fonctions de Green en écrivant :

$$A(\mathbf{r}) = \iiint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \quad (3.9)$$

où $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la fonction de Green de l'équation (3.8), $\mathbf{r} = (r, z)$ est la position où le champ A est calculé, S est le domaine occupé par la source de courant et $\mathbf{r}' = (r', z')$ est une position dans ce domaine. La fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ obéit à l'équation adjointe de (3.8) :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial G}{\partial r'} - \frac{G}{r'^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2} - \mathbb{1}_C \left(j\Omega G - u(r) R_m \frac{\partial G}{\partial z} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.10)$$

où $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi r'} \delta(r - r') \delta(z - z')$ est la fonction δ de Dirac.

On transforme cette EDP en une EDO par transformation de Fourier sur la variable z . Nous définissons $\widetilde{G}(r, \zeta, r', z')$ la transformée de Fourier de $G(r, z, r', z')$ par rapport à la variable z , telle que :

$$\widetilde{G}(r, \zeta, r', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r, z, r', z') e^{-j2\pi\zeta z} dz, \quad (3.11a)$$

$$\Leftrightarrow \quad G(r, z, r', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(r, \zeta, r', z') e^{j2\pi\zeta z} d\zeta, \quad (3.11b)$$

où ζ est la fréquence spatiale sans dimension.

En appliquant la transformation de Fourier inverse (3.11b) à l'équation (3.10), et sachant que la fonction caractéristique $\mathbb{1}_C$ du domaine C occupé par le conducteur (le cylindre infini) est indépendante de z , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} - \frac{\tilde{G}}{r^2} - (2\pi\zeta)^2 \tilde{G} - \mathbb{1}_C j \left(\Omega \tilde{G} + u(r) R_m 2\pi\zeta \tilde{G} \right) = -\frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'} \delta(r - r'), \quad (3.12)$$

décrivant l'évolution de la transformée de la fonction de Green \tilde{G} dans tout l'espace. La résolution de l'équation (3.12) est développée dans la section 3.3, en utilisant les conditions aux frontières de \tilde{G} présentées dans la sous-section suivante.

3.2.3 Conditions aux frontières

Cette sous-section présente les conditions aux frontières de la transformée de la fonction de Green \tilde{G} permettant la résolution de l'équation (3.12). Au regard de cette équation, une singularité est présente en $r = r'$ du fait du Dirac dans le membre de droite. Cette singularité se traduit par une relation de saut pour \tilde{G} et $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}$ en $r = r'$, que l'on déduit de (3.12), soit :

$$\left[\tilde{G}(r, \zeta, r', z') \right]_{r'-}^{r'+} = 0, \quad (3.13a)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{G}(r, \zeta, r', z')}{\partial r} \right]_{r'-}^{r'+} = -\frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'}. \quad (3.13b)$$

La singularité étant présente uniquement en $r = r'$, \tilde{G} et $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}$ sont continues (et infiniment dérivables) dans tout le reste de l'espace, c'est à dire $\forall r \neq r'$.

3.3 RÉOLUTION DU POTENTIEL VECTEUR ET CALCUL DES GRANDEURS ASSOCIÉES

Dans cette section, le premier objectif est de résoudre l'équation de la transformée de Fourier de la fonction de Green \tilde{G} par domaine, c'est à dire pour $r \neq r'$. Le terme source $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est ensuite introduit au travers des conditions de saut sur \tilde{G} et $\partial \tilde{G} / \partial r$ en $r = r'$, avec les équations (3.13a) et (3.13b). La fonction de Green G est obtenue subséquentement par la transformation de Fourier inverse (3.11b), puis finalement le potentiel vecteur est déterminé par intégration de la solution sur tout le volume de la bobine primaire par l'équation (3.9). La tension générée aux bornes des bobines secondaires est déduite directement par le calcul de la circulation du potentiel vecteur le long des spires de chaque bobine secondaire. Cette démarche est effectuée pour deux profils de vitesse $u(r)$ distincts : profil de vitesse uniforme (écoulement piston) et profil de vitesse réel (profil laminaire, profil turbulent moyen ou profils mesurés par les sondes UVP, par exemple).

3.3.1 Profil de vitesse uniforme

Cette sous-section présente la résolution du potentiel vecteur $A(r, z)$ dans le cas d'un écoulement piston, correspondant à un profil de vitesse uniforme, soit $u(r) = \text{cst}$. La vitesse étant

adimensionnée par la vitesse moyenne U de l'écoulement comme nous l'avons vu précédemment (3.4), on a simplement ici :

$$u(r) = 1. \quad (3.14)$$

L'équation de \tilde{G} pour $r \neq r'$ s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} - \frac{\tilde{G}}{r^2} - (2\pi\zeta)^2 \tilde{G} - \mathbb{1}_C j (\Omega \tilde{G} - R_m 2\pi\zeta \tilde{G}) = 0. \quad (3.15)$$

Pour déterminer \tilde{G} , l'espace est divisé radialement en trois zones cylindriques [7, 8], tel que représenté dans la figure 3.2 : le métal (zone 1, $r \leq R$), l'entrefer (zone 2, $R \leq r < r'$) et l'extérieur (zone 3, $r > r'$). On note \tilde{G}_i la transformée de Fourier de la fonction de Green dans chaque zone i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$, et on définit :

$$\lambda_i^2 = \begin{cases} (2\pi\zeta)^2 + j(\Omega - R_m 2\pi\zeta) & \text{si } i = 1 \text{ (métal)} \\ (2\pi\zeta)^2 & \text{si } i = 2, 3 \text{ (air)} \end{cases}. \quad (3.16)$$

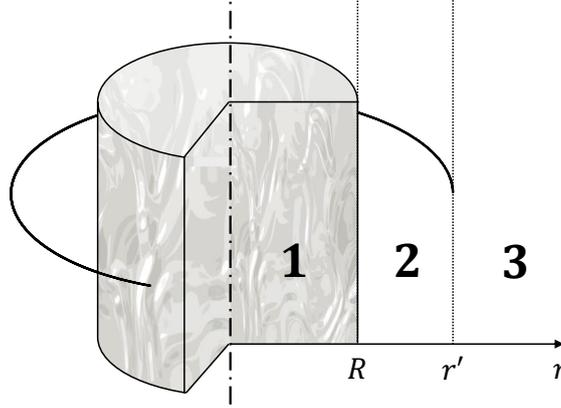


FIGURE 3.2 – Division radiale de l'espace en trois zones : le métal (zone 1, $r \leq R$), l'entrefer (zone 2, $R \leq r < r'$) et l'extérieur (zone 3, $r > r'$).

En injectant (3.16) dans (3.15), l'équation de \tilde{G}_i dans chaque zone i devient alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{G}_i}{\partial r} - \left(\lambda_i^2 + \frac{1}{r^2} \right) \tilde{G}_i = 0. \quad (3.17)$$

On identifie ici une équation de Bessel modifiée d'ordre 1, dont la solution s'exprime à partir des fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_1 et de deuxième espèce K_1 :

$$\tilde{G}_i = a_i I_1(\lambda_i r) + b_i K_1(\lambda_i r), \quad (3.18)$$

où a_i et b_i sont deux coefficients propres à chaque zone i , calculés pour chaque fréquence spatiale ζ à partir des conditions aux frontières entre chaque zone, et par les conditions aux limites en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

Pour que la solution \tilde{G}_i soit finie, le coefficient b_1 et le coefficient a_3 sont nécessairement nuls au regard du comportement divergent de K_1 et I_1 en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$ respectivement. De plus, \tilde{G}_i est continu entre les zones 1 et 2 ($r = R$) et entre les zones 2 et 3 ($r = r'$) ; et $\partial \tilde{G}_i / \partial r$ est continu entre les zones 1 et 2 mais discontinu entre les zones 2 et 3 par la condition (3.13b). Ces quatre

conditions se résument par un système de quatre équations :

$$\begin{bmatrix} I_1(\lambda_1 R) & -I_1(\lambda_2 R) & -K_1(\lambda_2 R) & 0 \\ \frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_1 R) & -\frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_2 R) & -\frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_2 R) & 0 \\ 0 & I_1(\lambda_2 r') & K_1(\lambda_2 r') & -K_1(\lambda_3 r') \\ 0 & \frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_2 r') & \frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_2 r') & -\frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_3 r') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

où la première et la deuxième ligne correspondent aux conditions de continuité de \tilde{G}_i et $\partial\tilde{G}_i/\partial r$ en $r = R$, tandis que la troisième et la quatrième ligne correspondent aux conditions de saut de \tilde{G}_i et $\partial\tilde{G}_i/\partial r$ en $r = r'$.

Dans le système (3.19), les dérivées des fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_1 et de deuxième espèce K_1 sont données par :

$$\frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_i r) = \lambda_i I_0(\lambda_i r) - \frac{1}{r} I_1(\lambda_i r), \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_i r) = -\lambda_i K_0(\lambda_i r) - \frac{1}{r} K_1(\lambda_i r), \quad (3.20b)$$

où I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre 0.

Avec les équations (3.20a) et (3.20b), la résolution du système (3.19) peut être effectuée numériquement ou analytiquement, en utilisant la méthode de Cramer. Dans le second cas, les coefficients sont alors obtenus par :

$$a_1 = \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r' D} K_1(\lambda_2 r') \left[K_1(\lambda_2 R) \left(\frac{I_1(\lambda_2 R)}{R} - \lambda_2 I_0(\lambda_2 R) \right) - I_1(\lambda_2 R) \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 R) + \frac{K_1(\lambda_2 R)}{R} \right) \right], \quad (3.21a)$$

$$a_2 = \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r' D} K_1(\lambda_2 r') \left[K_1(\lambda_2 R) \left(\frac{I_1(\lambda_1 R)}{R} - \lambda_1 I_0(\lambda_1 R) \right) - I_1(\lambda_1 R) \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 R) + \frac{K_1(\lambda_2 R)}{R} \right) \right], \quad (3.21b)$$

$$b_2 = \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r' D} K_1(\lambda_2 r') \left[I_1(\lambda_2 R) \left(\lambda_1 I_0(\lambda_1 R) - \frac{I_1(\lambda_1 R)}{R} \right) - I_1(\lambda_1 R) \left(\lambda_2 I_0(\lambda_2 R) - \frac{I_1(\lambda_2 R)}{R} \right) \right], \quad (3.21c)$$

$$b_3 = \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r' D} \left[\left(\frac{I_1(\lambda_1 R)}{R} - \lambda_1 I_0(\lambda_1 R) \right) \left(I_1(\lambda_2 r') K_1(\lambda_2 R) - K_1(\lambda_2 r') I_1(\lambda_2 R) \right) + I_1(\lambda_1 R) \left(K_1(\lambda_2 r') \left(\frac{I_1(\lambda_2 R)}{R} - \lambda_2 I_0(\lambda_2 R) \right) - I_1(\lambda_2 r') \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 R) + \frac{K_1(\lambda_2 R)}{R} \right) \right) \right], \quad (3.21d)$$

où D est le déterminant de la matrice 4×4 du système (3.19), calculé par :

$$D = I_1(\lambda_1 R) \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 R) + \frac{K_1(\lambda_2 R)}{R} \right) \left[K_1(\lambda_2 r') \left(\frac{I_1(\lambda_2 r')}{r'} - K_1(\lambda_2 R) \right) - I_1(\lambda_2 r') \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 r') + \frac{K_1(\lambda_2 r')}{r'} \right) \right] + K_1(\lambda_2 R) \left(\frac{I_1(\lambda_1 R)}{R} - \lambda_1 I_0(\lambda_1 R) \right) \times \quad (3.22)$$

$$\left[K_1(\lambda_2 r') \left(\lambda_2 I_0(\lambda_2 r') - \frac{I_1(\lambda_2 r')}{r'} \right) - I_1(\lambda_2 r') \left(\lambda_2 K_0(\lambda_2 r') + \frac{K_1(\lambda_2 r')}{r'} \right) \right].$$

Les coefficients a_1 , a_2 , b_2 et b_3 étant déterminés par les équations (3.21a) à (3.21d), la fonction \tilde{G}_i peut donc être calculée dans chaque zone i avec l'expression (3.18), pour une fréquence spatiale ζ donnée, c'est à dire avec :

$$\tilde{G}_i(r, \zeta, r', z') = a_i(\zeta, r', z') I_1(\lambda_i(\zeta)r) + b_i(\zeta, r', z') K_1(\lambda_i(\zeta)r). \quad (3.23)$$

La transformation de Fourier inverse (3.11b), calculée numériquement, donne la fonction de Green G_i dans chaque zone. Le potentiel vecteur est obtenu par l'intégration de G_i sur le volume S de la bobine primaire par l'équation (3.9).

L'expression de l'intégrale triple sur ce volume S peut être résolue en partie analytiquement de manière à éviter de surcharger les intégrations numériques. Avec les équations (3.21a) à (3.21d), on remarque d'abord que la transformée \tilde{G}_i peut être factorisée de la forme $\tilde{G}_i = \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'} \tilde{G}_i^*$. En injectant cette expression dans les équations (3.11b) et (3.9), le potentiel vecteur $A(r, z)$ devient :

$$A(r, z) = \int_{r_p - t_p/2}^{r_p + t_p/2} \int_0^{2\pi} \int_{-L_p/2}^{L_p/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'} \tilde{G}_i^*(r, \zeta, r') \right) e^{j2\pi\zeta z} d\zeta dz' d\theta' r' dr', \quad (3.24)$$

où L_p est la longueur de la bobine primaire, r_p son rayon moyen et t_p son épaisseur. L'origine $z = 0$ est ici prise au milieu de la bobine primaire. Après intégration en θ et en z , on obtient :

$$A(r, z) = \int_{r_p - t_p/2}^{r_p + t_p/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_i^*(r, \zeta, r') \frac{\sin(\pi\zeta L_p)}{\pi\zeta} e^{j2\pi\zeta z} d\zeta dr'. \quad (3.25)$$

On rappelle ici que le potentiel vecteur $A(r, z)$ est calculé à partir d'équations adimensionnelles. Le potentiel vecteur $A(r, z)$ exprimé en tesla mètre (T.m) est déduit par multiplication par le facteur d'échelle $\mu_0 J_S R^2$, comme décrit dans l'équation (3.4).

3.3.2 Profil de vitesse quelconque

Cette sous-section présente la résolution du potentiel vecteur $A(r, z)$ dans le cas d'un profil de vitesse $u(r)$ quelconque. La méthode de résolution, semi-analytique, est une extension de celle développée pour le profil piston dans la sous-section précédente.

Pour la résolution, le profil de vitesse $u(r)$ est approché par une fonction en escalier $u^*(r)$, définie entre $r = 0$ et $r = R$, comme illustré sur la figure 3.3. La fonction en escalier est composée de N paliers de même longueur Δr . La valeur de $u^*(r)$ sur le palier i est égale à la vitesse $u(r_i)$ calculée au milieu du palier en $r = r_i$. On exprime mathématiquement $u^*(r)$ par :

$$u^*(r) = \sum_{i=1}^N u(r_i) \mathbb{1}_{A_i}(r), \quad (3.26)$$

où $\mathbb{1}_{A_i}(r)$ est la fonction caractéristique du domaine A_i correspondant au palier i , définie par :

$$\mathbb{1}_{A_i}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in A_i \\ 0 & \text{si } r \notin A_i \end{cases} \quad \text{avec} \quad A_i = \left[r_i - \frac{\Delta r}{2}; r_i + \frac{\Delta r}{2} \right]. \quad (3.27)$$

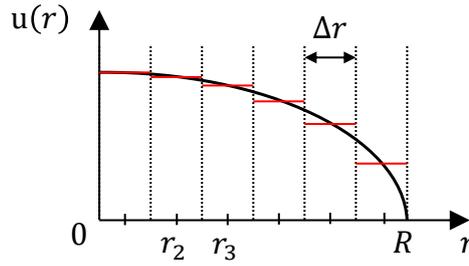


FIGURE 3.3 – Illustration de l'approximation du profil de vitesse $u(r)$ (—) par une fonction en escalier $u^*(r)$ (-).

De la même manière que pour le profil piston, l'espace est divisé radialement, en $N + 2$ zones cette fois. Les zones 1 à N sont situées dans le métal, d'une épaisseur Δr , chaque zone correspondant à un palier pour lequel $u^*(r)$ est constant. Comme précédemment, on note \tilde{G}_i la transformée de la fonction de Green dans chaque zone i , avec $i \in 1, \dots, N + 2$, et on définit :

$$\lambda_i^2 = \begin{cases} (2\pi\zeta)^2 + j(\Omega - u^*(r)R_m 2\pi\zeta) & \text{si } i \in 1, \dots, N \text{ (métal)} \\ (2\pi\zeta)^2 & \text{si } i = N + 1, N + 2 \text{ (air)} \end{cases}. \quad (3.28)$$

L'équation de \tilde{G}_i dans chaque zone i est identique à l'équation (3.17) résolue précédemment dans le cas du profil piston. La solution s'exprime alors par une combinaison de fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_1 et de seconde espèce K_1 , d'ordre 1, telle que :

$$\tilde{G}_i = a_i I_1(\lambda_i r) + b_i K_1(\lambda_i r), \quad (3.29)$$

où a_i et b_i sont deux coefficients propres à chaque zone i , calculés pour chaque fréquence spatiale ζ à partir des conditions aux frontières entre chaque zone, et par les conditions aux limites en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

Pour que la solution \tilde{G}_i soit finie, le coefficient b_1 et le coefficient a_{N+2} sont nécessairement nuls au regard du comportement divergent de K_1 et I_1 en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$ respectivement. De plus, \tilde{G}_i est continu à la frontière entre toutes les zones ; et $\partial\tilde{G}_i/\partial r$ est continu à la frontière entre toutes les zones sauf en $r = r'$, c'est à dire entre les zones $N + 1$ et $N + 2$, par la condition (3.13b). Les conditions sur \tilde{G}_i et $\partial\tilde{G}_i/\partial r$ appliquées aux $N + 1$ frontières entre les zones se résument par un système de $2N + 2$ équations algébriques à résoudre,

$$a_i I_1(\lambda_i r_k) + b_i K_1(\lambda_i r_k) - a_{i+1} I_1(\lambda_{i+1} r_k) - b_{i+1} K_1(\lambda_{i+1} r_k) = 0, \quad (3.30a)$$

$$a_i \frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_i r_k) + b_i \frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_i r_k) - a_{i+1} \frac{\partial I_1}{\partial r}(\lambda_{i+1} r_k) - b_{i+1} \frac{\partial K_1}{\partial r}(\lambda_{i+1} r_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq N + 1 \\ \frac{e^{-j2\pi\zeta z'}}{2\pi r'} & \text{si } i = N + 1 \end{cases}, \quad (3.30b)$$

où r_k est le rayon correspondant à la frontière entre la zone i et la zone $i + 1$ (avec $k \in 1, \dots, N + 1$). L'équation (3.30a) correspond à la condition sur \tilde{G}_i entre la zone i et la zone $i + 1$, et l'équation (3.30b) correspond à la condition sur $\partial\tilde{G}_i/\partial r$.

La résolution du système (3.30) est effectuée numériquement. Une étude de convergence sur le nombre de divisions N dans le métal est réalisée pour valider la résolution numérique, dans le cas d'un profil de vitesse turbulent moyen calculé par la corrélation de Reichardt [59] (voir page 49), avec un nombre de Reynolds $Re = 9.8 \times 10^4$ correspondant à une vitesse débitante $U = 0.145$

m.s⁻¹. L'étude est effectuée sur la différence de tension ΔV_U aux bornes des bobines secondaires relative au mouvement du métal liquide. Le calcul de ΔV_U à partir de \tilde{G}_i est détaillé dans la sous-section 3.3.4. La figure 3.4 montre les composantes en phase $\Delta V_{U,\parallel}$ et en quadrature $\Delta V_{U,\perp}$ de ΔV_U , calculées pour plusieurs nombres de zones N dans le métal à une fréquence $f = 20$ kHz. On rappelle que la référence de phase est la phase du courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_S . La fréquence utilisée pour l'étude de convergence correspond à la fréquence la plus élevée de la plage de mesure des expériences. Les gradients du potentiel vecteur dans le métal sont en effet plus intenses à cette fréquence (car la profondeur de pénétration diminue), le nombre de zones N nécessite en conséquence d'être maximal. Une convergence satisfaisante est observée pour $N = 300$ zones (erreur relative inférieure à 2% par rapport à $N = 400$ zones, pour $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$). Un maillage non uniforme plus raffiné à proximité de la paroi permettrait cependant d'accélérer la convergence.

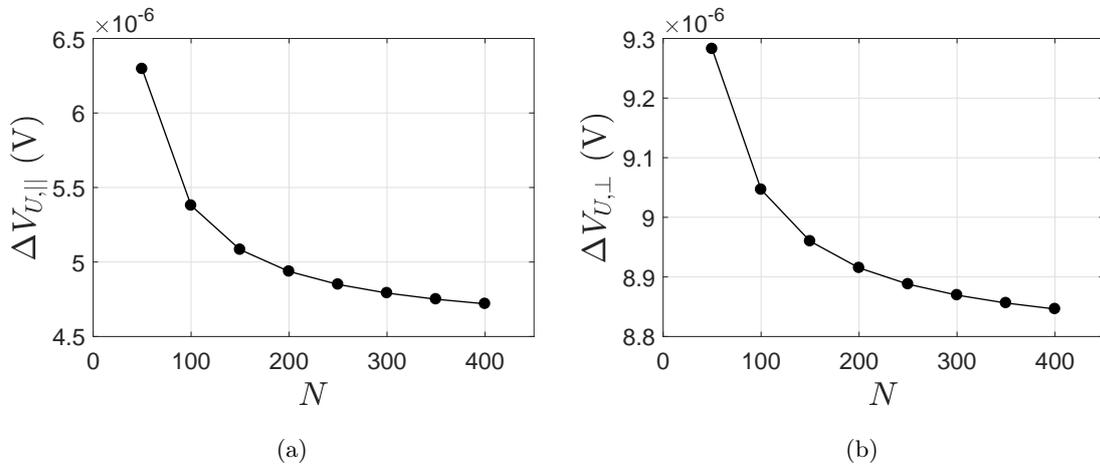


FIGURE 3.4 – Étude de convergence du nombre de divisions N dans le métal, effectuée sur la différence de tension ΔV_U aux bornes des bobines secondaires relative à la vitesse : composante en phase (a) et composante en quadrature (b). Fréquence $f = 20$ kHz, vitesse débitante $U = 0.145$ m.s⁻¹.

Comme pour l'écoulement piston, \tilde{G}_i étant déterminé, la fonction de Green G_i est calculée par la transformation de Fourier inverse (3.11b). Le potentiel vecteur $\mathbf{A}(r, z)$ est ensuite obtenu par intégration de G_i sur le volume S de la bobine primaire, et s'exprime comme précédemment par l'équation (3.25) (page 70).

3.3.3 Densité de courant électrique dans le métal liquide

La densité de courant \mathbf{j} dans le métal liquide peut être calculée directement à partir du potentiel vecteur avec la loi d'Ohm (équation (A.25) de l'annexe A, page 163). La loi d'Ohm sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\mathbf{j} = -\Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{R}_m \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (3.31)$$

Sachant que le potentiel vecteur est strictement orthoradial et harmonique de pulsation ω , c'est à dire $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A(r, z)e^{j\omega t}\mathbf{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques, la densité de courant (3.31) peut s'écrire

$\mathbf{j} = j(r, z)e^{jt}\mathbf{e}_\theta$ où :

$$j(r, z) = -j\Omega A(r, z) + u(r)\frac{\partial A(r, z)}{\partial z} \quad (3.32)$$

$$= -j \int_{r_p-t_p/2}^{r_p+t_p/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Omega}{\pi\zeta} + 2u(r)R_m \right) \tilde{G}_i^*(r, \zeta, r') \sin(\pi\zeta L_p) e^{j2\pi\zeta z} d\zeta dr', \quad (3.33)$$

où l'expression de $A(r, z)$ (3.25) est utilisée pour passer de (3.32) à (3.33).

3.3.4 Tension induite dans les bobines secondaires

La différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM peut également être calculée directement à partir du potentiel vecteur $A(r, z)$. La première étape consiste à calculer la force électromotrice (f.é.m.) ε générée dans une spire d'une des bobines secondaires. Les f.é.m. dans chaque spire sont ensuite sommées pour obtenir les tensions V_1 et V_2 aux bornes de chaque bobine secondaire, puis la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$.

La f.é.m. $\varepsilon(r, z)$ générée dans une spire par $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A(r, z)e^{jt}\mathbf{e}_\theta$ se calcule par la loi d'induction de Faraday, qu'on écrit ici sans dimension :

$$\varepsilon(r, z) = - \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = -j2\pi r A(r, z)e^{jt}, \quad (3.34)$$

où r et z correspondent au rayon de la spire et à sa position longitudinale (distance par rapport au milieu de la bobine primaire) respectivement.

La tension générée aux bornes d'une bobine secondaire est déduite par sommation des f.é.m. ε dans chaque spire de la bobine. Les spires sont distribuées sur la longueur L_s (sans dimension ici) de chaque couche d'enroulement. Le nombre de spires effectif par unité de longueur n_s (également sans dimension ici) est déterminé par la méthode présentée dans la sous-section 2.5.2 du chapitre 2. La sommation des f.é.m. dans toutes les spires d'une couche est d'abord effectuée par intégration de ε sur la longueur L_s . Les f.é.m. dans chaque couche, obtenues après cette intégration, sont ensuite sommées pour calculer la tension générée aux bornes de la bobine secondaire. En sachant que toutes les bobines fabriquées dans les expériences sont composées de 2 couches d'enroulement, les tensions V_1 et V_2 dans les bobines secondaires S_1 et S_2 s'écrivent respectivement :

$$V_1 = \sum_{i=1}^2 n_{s,1} \int_{-L_p/2-L_s}^{-L_p/2} \varepsilon(r_i, z) dz, \quad (3.35a)$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^2 n_{s,2} \int_{L_p/2}^{L_p/2+L_s} \varepsilon(r_i, z) dz, \quad (3.35b)$$

où r_i est le rayon d'une spire appartenant à la couche d'enroulement i , $n_{s,1}$ et $n_{s,2}$ sont les nombres de spires par unité de longueur de chaque bobine secondaire, et L_p est la longueur de la bobine primaire, comme représenté sur la figure 3.5. On rappelle que l'origine $z = 0$ est fixée au milieu de la bobine primaire. La différence de tension entre les bobines secondaires s'obtient finalement par :

$$\Delta V = V_1 - V_2. \quad (3.36)$$

Afin de déterminer la différence de tension ΔV_U relative au mouvement du métal liquide, ΔV est calculé par (3.36) pour le cas d'un métal liquide au repos (de sorte que $\Delta V = \Delta V_0$) et pour le cas du métal liquide en écoulement (de sorte que $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U$).

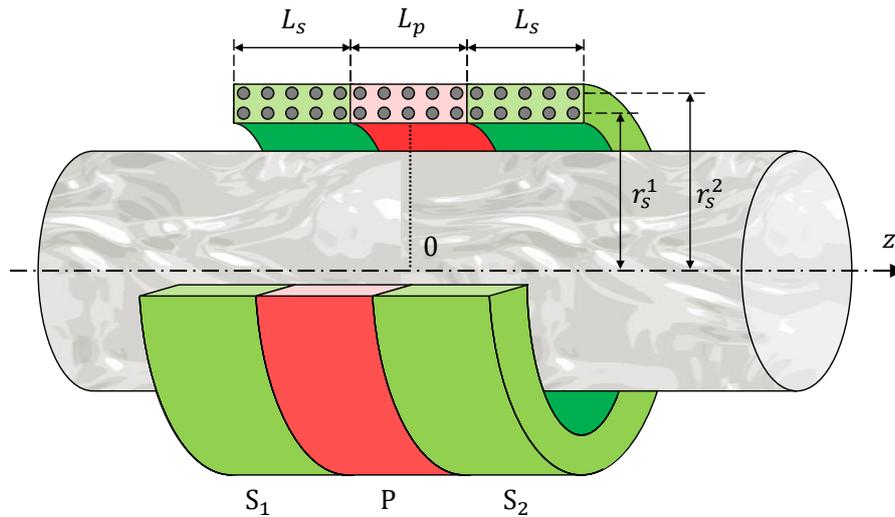


FIGURE 3.5 – Géométrie utilisée pour le calcul de la tension perturbée aux bornes des bobines secondaires.

3.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle analytique de l'ECFM traversé par un écoulement de métal liquide en l'absence de bulle (ou d'inclusion plus généralement). Le modèle est basé sur la résolution de l'équation du potentiel vecteur par la méthode des fonctions de Green, en imposant le profil de vitesse de l'écoulement comme donnée d'entrée. Une solution analytique sous forme intégrale est obtenue pour le cas du profil de vitesse uniforme (écoulement piston), correspondant à la configuration du premier dispositif expérimental. Une solution semi-analytique est en outre développée pour le cas d'un profil de vitesse quelconque. Grâce à cette seconde solution, les profils de vitesse mesurés par vélocimétrie ultrasonore Doppler dans le second dispositif expérimental peuvent être implémentés dans le modèle. La différence de tension ΔV_U générée par le mouvement du métal est ensuite calculée pour les deux types de profils (uniforme et quelconque). Les résultats du modèle analytique sont comparés aux mesures des deux dispositifs expérimentaux dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

ÉTUDE DE LA TENSION ΔV_U RELATIVE À LA VITESSE DU MÉTAL LIQUIDE

Ce chapitre présente l'étude de la différence de tension ΔV_U générée aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM par la vitesse relative du métal liquide le traversant. Les résultats du modèle théorique du chapitre 3 sont comparés aux mesures des deux dispositifs expérimentaux décrits dans le chapitre 2.

Sommaire

4.1	Introduction	76
4.2	Détermination de ΔV_U à partir des signaux mesurés	76
4.2.1	Expérience 1	76
4.2.2	Expérience 2	77
4.3	Implémentation des profils de vitesse mesurés par UVP dans le modèle	78
4.4	Effets de la fréquence	79
4.4.1	Expérience 1 : champ de vitesse uniforme	80
4.4.2	Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme	81
4.5	Effets de la vitesse	83
4.5.1	Expérience 1 : champ de vitesse uniforme	83
4.5.2	Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme	84
4.5.3	Effets du profil de vitesse (étude analytique)	86
4.6	Effets de la conductivité électrique (étude analytique)	88
4.6.1	Différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$	89
4.6.2	Différence de tension $\Delta V^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$	90
4.7	Lois de similitude de ΔV_U et ΔV_U^*	93
4.7.1	Expression de la tension aux bornes d'une bobine secondaire	93
4.7.2	Expression de la différence de tension ΔV_U	94
4.7.3	Expression de la différence de tension ΔV_U^*	95
4.8	Conclusion	96

4.1 INTRODUCTION

Le principe de base de la débitmétrie par courants de Foucault repose sur la dissymétrie du champ électromagnétique générée par le mouvement du métal liquide traversant l'ECFM. Cette dissymétrie est détectée par la mesure de la différence de tension ΔV aux bornes des bobines secondaires, qu'on peut décomposer en une contribution de base ΔV_0 , et une contribution relative au mouvement du métal liquide ΔV_U (en l'absence d'inclusion isolante, telle qu'une bulle, dans le métal) [16, 1]. Dans la méthode d'acquisition utilisée dans nos deux études expérimentales, chacune de ces deux contributions est en outre constituée d'une composante en phase avec le courant dans la bobine primaire de l'ECFM ($\Delta V_{0,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\parallel}$) et d'une composante en quadrature ($\Delta V_{0,\perp}$ et $\Delta V_{U,\perp}$). La décomposition de la tension ΔV aux bornes des bobines secondaires revient donc à écrire :

$$\begin{cases} \Delta V_{\parallel} = \Delta V_{0,\parallel} + \Delta V_{U,\parallel}, \\ \Delta V_{\perp} = \Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp}. \end{cases} \quad (4.1)$$

À partir des mesures effectuées dans les deux études expérimentales (chapitre 2, sections 2.3 et 2.4) et des résultats du modèle analytique (chapitre 3), l'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement des contributions en phase $\Delta V_{U,\parallel}$ et en quadrature $\Delta V_{U,\perp}$, relatives au mouvement du métal, en fonction des différents paramètres du système : la fréquence du champ électromagnétique f , la conductivité électrique du métal σ (fonction de la température), la vitesse débitante U et le profil de vitesse $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_z$ de l'écoulement.

La détermination de $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ à partir des mesures expérimentales de ΔV est décrite dans la section 4.2. Dans le cadre du deuxième dispositif expérimental, la section 4.3 présente l'implémentation des profils de vitesse mesurés par vélocimétrie ultrasonore Doppler dans le modèle analytique, dans le but de comparer les résultats du modèle aux mesures expérimentales. L'influence de la fréquence sur ΔV_U est présentée dans la section 4.4. La section 4.5 montre ensuite les effets du champ de vitesse du métal liquide, uniforme dans le premier dispositif expérimental et non uniforme dans le second, sur la tension ΔV_U . Les effets de la conductivité électrique sont traités dans la section 4.6, à partir des résultats du modèle théorique uniquement. L'étude des lois de similitude de la tension ΔV_U en fonction de la fréquence, de la vitesse et de la conductivité électrique est enfin présentée dans la section 4.7.

4.2 DÉTERMINATION DE ΔV_U À PARTIR DES SIGNAUX MESURÉS

Cette section présente la méthode utilisée pour déterminer et extraire la tension ΔV_U , constituée d'une composante $\Delta V_{U,\parallel}$ en phase avec le courant dans la bobine primaire et d'une composante en quadrature $\Delta V_{U,\perp}$, à partir de la mesure de ΔV . La méthode est sensiblement différente pour les deux dispositifs expérimentaux.

4.2.1 Expérience 1

La figure 4.1 rappelle l'allure de la différence de tension ΔV mesurée après démodulation dans le premier dispositif expérimental (décrit dans le chapitre 2, section 2.3), lors d'une translation (aller-retour) de l'ECFM autour du tube témoin (galinstan en l'absence de bille). La vitesse de translation est ici fixée à $U = \pm 500 \text{ mm.s}^{-1}$. La vitesse est définie positive à l'aller, et négative au retour. Les signaux mesurés pendant la translation retour (—) sont renversés temporellement de

manière à les comparer aux signaux mesurés pendant l'aller (—). Une mesure des signaux $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ effectuée à une vitesse faible de $U = \pm 1 \text{ mm.s}^{-1}$ est représentée en noir (—).

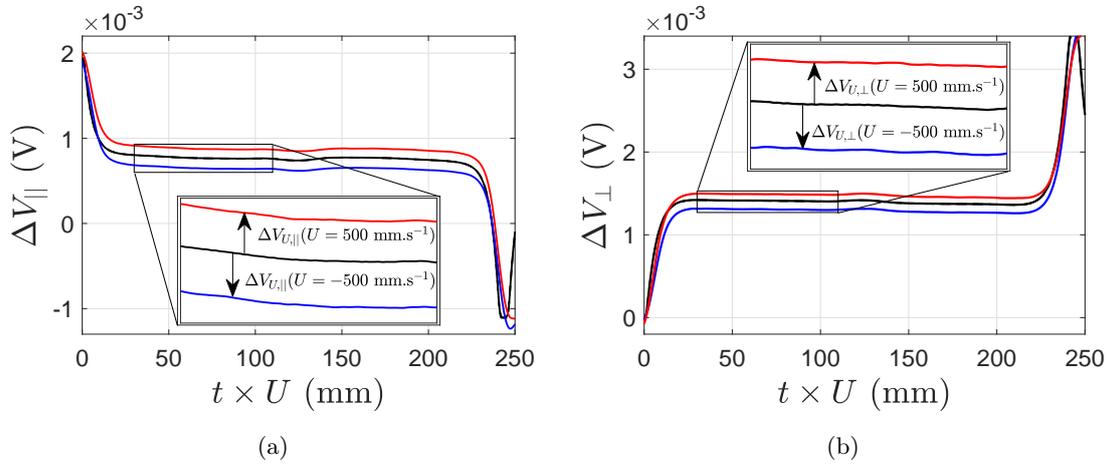


FIGURE 4.1 – Expérience 1 : composantes en phase (a) et en quadrature (b) de la différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in (vitesse $U = \pm 500 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1 \text{ kHz}$). Sens de translation de l'ECFM : aller descendant (—), retour ascendant (—).

L'effet de la vitesse se caractérise ici par un décalage des tensions $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ par rapport au signal quasi-statique ($U = \pm 1 \text{ mm.s}^{-1}$), à l'aller comme au retour. Ce décalage est constant durant la translation aller comme durant la translation retour, la vitesse étant imposée constante. Une symétrie est par ailleurs observée : le sens de la vitesse modifie uniquement le signe du décalage (positif à l'aller et négatif au retour pour les deux composantes $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$, comme représenté sur les zooms de la figure 4.1), l'amplitude du décalage restant inchangée. À partir de ces observations, nous définissons les paramètres caractéristiques de l'effet de la vitesse, $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, correspondant à la moyenne temporelle des décalages de tension en phase et en quadrature pendant une translation aller.

À partir des tensions moyennes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ déduites de la décomposition (4.1), on définit le module et la phase par :

$$|\overline{\Delta V}_U| = \sqrt{(\overline{\Delta V}_{U,\parallel})^2 + (\overline{\Delta V}_{U,\perp})^2}, \quad (4.2a)$$

$$\Theta_U = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{\Delta V}_{U,\perp}}{\overline{\Delta V}_{U,\parallel}} \right). \quad (4.2b)$$

4.2.2 Expérience 2

La figure 4.2 rappelle l'allure de la différence de tension ΔV mesurée après démodulation dans le second dispositif expérimental (décrit dans le chapitre 2, section 2.4), pour différents débits d'écoulement traversant l'ECFM (de 0.39 l.min^{-1} à 4.27 l.min^{-1} , soit une vitesse débitante entre 13 mm.s^{-1} et 145 mm.s^{-1}). L'écoulement est toujours dans le même sens, descendant ici. Une mesure des signaux $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ effectuée en l'absence d'écoulement ($U = 0 \text{ mm.s}^{-1}$) est représentée en noir (—).

Comme pour les mesures du premier dispositif expérimental, l'effet de la vitesse se caractérise par un décalage des tensions $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ par rapport au signal en l'absence d'écoulement (—).

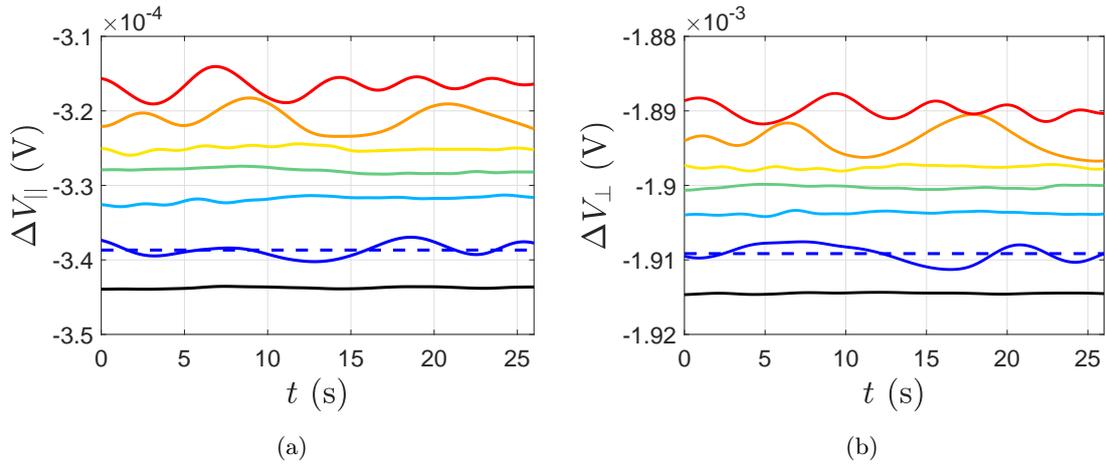


FIGURE 4.2 – Expérience 2 : composantes en phase (a) et en quadrature (b) de la différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in pour plusieurs vitesses débitantes. Sans écoulement (—), 13 mm.s^{-1} (—), 40 mm.s^{-1} (—), 66 mm.s^{-1} (—), 92 mm.s^{-1} (—), 119 mm.s^{-1} (—) et 145 mm.s^{-1} (—). Fréquence $f = 1 \text{ kHz}$.

L'amplitude du décalage augmente avec le débit, tandis que son signe est toujours positif étant donné que l'écoulement est toujours orienté dans le même sens (descendant). Un comportement fluctuant des tensions $\Delta V_{U,||}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ est notablement observé à certains débits : 0.39 l.min^{-1} (—), 3.49 l.min^{-1} (—) et 4.27 l.min^{-1} (—). L'origine de ces fluctuations reste à déterminer. Les perturbations électromagnétiques générées par le variateur de la pompe sont susceptibles d'expliquer le comportement observé. De la même manière que précédemment, les moyennes temporelles (sur une acquisition de 25 s) des décalages de tension en phase et en quadrature, notées $\overline{\Delta V}_{U,||}$ et $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, sont les paramètres caractéristiques de l'effet de la vitesse. Un exemple est montré sur la figure 4.2 pour le débit de 0.39 l.min^{-1} (--). Le module $|\overline{\Delta V}_U|$ et la phase Θ_U , calculés à partir des tensions moyennes en phase $\overline{\Delta V}_{U,||}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, sont définis dans les équations (4.2a) et (4.2b).

4.3 IMPLÉMENTATION DES PROFILS DE VITESSE MESURÉS PAR UVP DANS LE MODÈLE

Pour pouvoir comparer la différence de tension ΔV_U calculée par le modèle analytique et celle mesurée expérimentalement, le profil de vitesse $u(r)$ doit être renseigné dans le modèle. Dans le premier dispositif expérimental, le champ de vitesse est uniforme et le profil $u(r)$ est simplement égal à la vitesse de translation de l'ECFM. Dans le second dispositif expérimental, le profil de vitesse est mesuré par UVP (vélocimétrie ultrasonore Doppler, voir sous-section 2.4.3 du chapitre 2). L'implémentation des profils de vitesse UVP dans le modèle analytique est présentée dans cette section.

Les demi-profilés mesurés par les deux sondes UVP sont montrés dans la figure 4.3 pour toute la plage de débit considérée dans le second dispositif expérimental, de 0.39 l.min^{-1} à 4.27 l.min^{-1} (soit une vitesse débitante entre 13 mm.s^{-1} et 145 mm.s^{-1}). À débit donné, les profils mesurés par les deux sondes sont similaires à l'exception de la zone proche de la sonde. L'écart relatif entre les mesures des deux sondes peut en effet atteindre 80% pour $x \lesssim 2.5 \text{ mm}$. Dans cette zone, la mesure est soumise à une erreur importante car les sondes, placées affleurantes à l'écoulement avec un

certain jeu de positionnement, sont intrusives à la mesure. L'implémentation des profils de vitesse UVP « bruts » n'étant pas envisageable du fait de l'imprécision de mesure à proximité de la sonde, nous utilisons par la suite une approximation des profils UVP basée sur la corrélation de Reichardt [59].

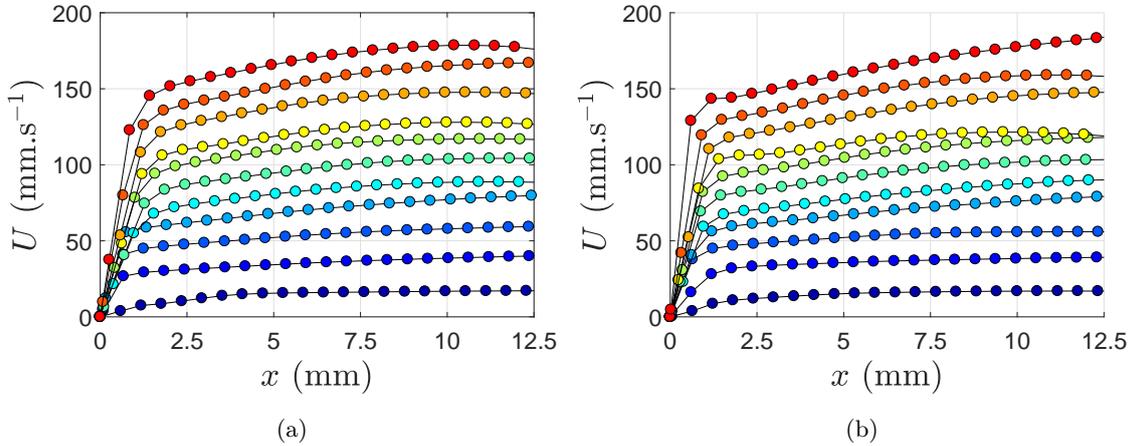


FIGURE 4.3 – Demi-profils de vitesse mesurés par l'UVP pour plusieurs débits d'écoulement : 0.39 l.min⁻¹ (●), 0.78 l.min⁻¹ (●), 1.16 l.min⁻¹ (●), 1.55 l.min⁻¹ (●), 1.94 l.min⁻¹ (●), 2.33 l.min⁻¹ (●), 2.72 l.min⁻¹ (●), 3.10 l.min⁻¹ (●), 3.49 l.min⁻¹ (●), 3.88 l.min⁻¹ (●) et 4.27 l.min⁻¹ (●). (a) Sonde 5. (b) Sonde 10.

Une extrapolation des profils de vitesse UVP mesurés par chaque sonde est d'abord effectuée de manière à obtenir une meilleure résolution spatiale Δx ($\Delta x = 0.675$ mm pour les profils UVP « bruts », soit 18 points pour un demi-profil, et $\Delta x = 0.042$ mm pour les profils extrapolés, soit 300 points pour un demi-profil). Les profils extrapolés sont ensuite moyennés sur les deux sondes, le profil extrapolé moyen étant représenté sur la figure 4.4 pour le débit de 1.94 l.min⁻¹ (—). Un profil de vitesse calculé avec la corrélation de Reichardt (- - , voir page 49) est calé sur le profil extrapolé moyen (—) avec une méthode de minimisation, pour les points du profil tels que $x \geq 2.5$ mm. Un bon accord est observé entre les deux profils dans la limite $x \geq 2.5$ mm. Pour les points proches de la sonde, une déviation entre le profil extrapolé moyen et la corrélation de Reichardt est observée, possiblement due à l'imprécision de la mesure UVP dans cette zone.

Les profils de vitesse calculés avec la corrélation de Reichardt, obtenus après calage sur le profil extrapolé moyen, sont implémentés dans le modèle analytique avec la méthode décrite dans la sous-section 3.3.2 du chapitre 3. Les profils implémentés sont représentés dans la figure 4.5 pour tous les débits considérés dans le deuxième dispositif expérimental. La différence de tension ΔV_U aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, calculée avec le modèle à partir de ces profils de vitesse, est comparée aux mesures expérimentales dans les sections suivantes.

4.4 EFFETS DE LA FRÉQUENCE

Dans cette section, les effets de la fréquence sur la tension ΔV_U , caractérisée par les paramètres $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, $|\overline{\Delta V_U}|$ et Θ_U définis dans la section précédente, sont étudiés dans le cadre des deux dispositifs expérimentaux réalisés (métal liquide en mouvement uniforme dans l'expérience 1, et non uniforme dans l'expérience 2). Les mesures expérimentales sont comparées aux résultats du modèle analytique présenté dans le chapitre 3.

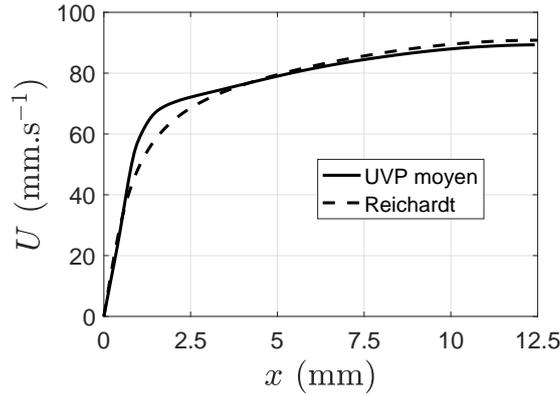


FIGURE 4.4 – Profil de vitesse UVP extrapolé et moyenné sur les deux sondes (—), comparé à la corrélation de Reichardt (- -).

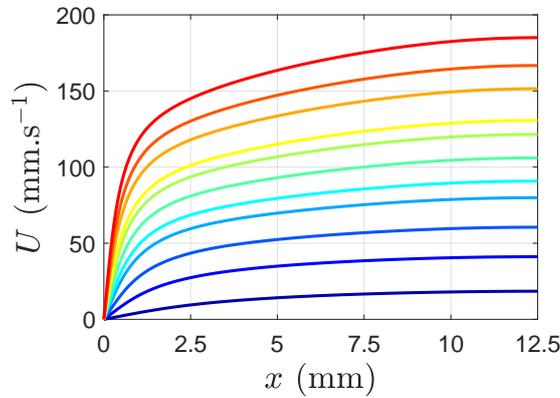


FIGURE 4.5 – Demi-profil de vitesse mesurés par l'UVP pour plusieurs débits d'écoulement : 0.39 l.min⁻¹ (—), 0.78 l.min⁻¹ (—), 1.16 l.min⁻¹ (—), 1.55 l.min⁻¹ (—), 1.94 l.min⁻¹ (—), 2.33 l.min⁻¹ (—), 2.72 l.min⁻¹ (—), 3.10 l.min⁻¹ (—), 3.49 l.min⁻¹ (—), 3.88 l.min⁻¹ (—) et 4.27 l.min⁻¹ (—).

4.4.1 Expérience 1 : champ de vitesse uniforme

La figure 4.6 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ (b), le module $|\overline{\Delta V_U}|$ (c) et la phase Θ_U (d) en fonction de la fréquence, mesurés dans le premier dispositif expérimental pour une vitesse de translation de l'ECFM de 100 mm.s⁻¹. Les mesures (○) sont comparées aux prédictions du modèle analytique (—).

La composante en phase $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et le module $|\overline{\Delta V_U}|$ ont un comportement similaire en fonction de la fréquence : une augmentation de $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et $|\overline{\Delta V_U}|$ est observée aux basses fréquences jusqu'au passage par un maximum, à $f \approx 2$ kHz dans les deux cas, puis ces paramètres décroissent au-delà de cette fréquence. Les mesures expérimentales suivent précisément les résultats du modèle analytique. Une faible déviation aux hautes fréquences ($f \gtrsim 12$ kHz) est cependant observée sur $|\overline{\Delta V_U}|$.

La composante en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ est décroissante sur une plage de fréquence entre $f = 1$ kHz et 8 kHz. Un changement de signe de $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ (positif à négatif) est de plus observé à une fréquence $f \approx 2.5$ kHz. Au-delà de 8 kHz, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ augmente et approche une asymptote nulle (mais reste négatif). Aux basses fréquences ($f \lesssim 1$ kHz), non mesurées expérimentalement, les résultats du modèle analytique indiquent une diminution de $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$. Aux hautes fréquences ($f \gtrsim 10$ kHz), l'incertitude de mesure liée à la répétabilité (voir sous-section 2.5.1 du chapitre 2) augmente.

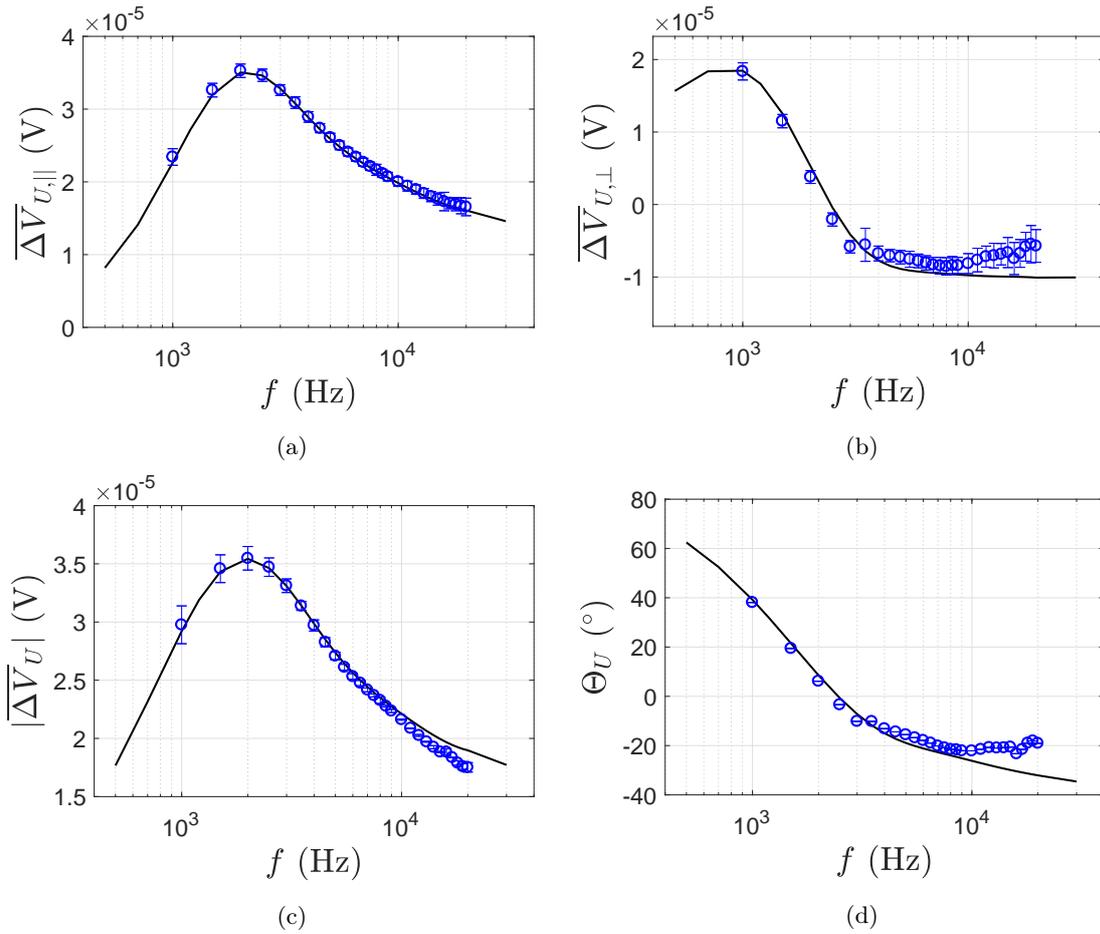


FIGURE 4.6 – Expérience 1 : décalage en tension ΔV_U généré par la translation de l’ECFM, en fonction de la fréquence. Composantes en phase (a) et en quadrature (b), module (c) et phase (d) pour une vitesse de translation $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$ (soit un débit équivalent de 2.95 l.min^{-1}). Les mesures (\circ) sont comparées avec le modèle analytique du chapitre 3 ($-$).

Une déviation entre les mesures et les résultats du modèle est par ailleurs observée, le modèle surestimant alors la tension $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$. La déviation observée se propage sur le module $|\overline{\Delta V}_U|$ et la phase Θ_U . L’origine de cette déviation n’est pas expliquée ici. On note enfin que la composante en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ est globalement plus faible que la composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ sur l’ensemble de la plage de fréquence considérée.

En dernier lieu, la phase Θ_U est positive pour $f \lesssim 2.5 \text{ kHz}$, puis négative au-delà dû au changement de signe de la composante en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$. Pour Θ_U , les résultats du modèle analytique sont en accord avec les mesures expérimentales jusqu’à une fréquence d’environ 8 kHz , au-delà de laquelle une déviation est visible, conséquente de la déviation observée sur $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$.

4.4.2 Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme

La figure 4.7 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ (b), le module $|\overline{\Delta V}_U|$ (c) et la phase Θ_U (d) en fonction de la fréquence, mesurées dans le second dispositif expérimental pour plusieurs vitesses débitantes de $U = 40 \text{ mm.s}^{-1}$ à $U = 145 \text{ mm.s}^{-1}$. Les mesures expérimentales sont comparées aux résultats du modèle analytique présenté dans le chapitre 3. Dans ce modèle, les profils de vitesse utilisés comme donnée d’entrée sont obtenus à partir des profils de

vitesse mesurés par UVP, comme décrit dans la section 4.3 de ce chapitre.

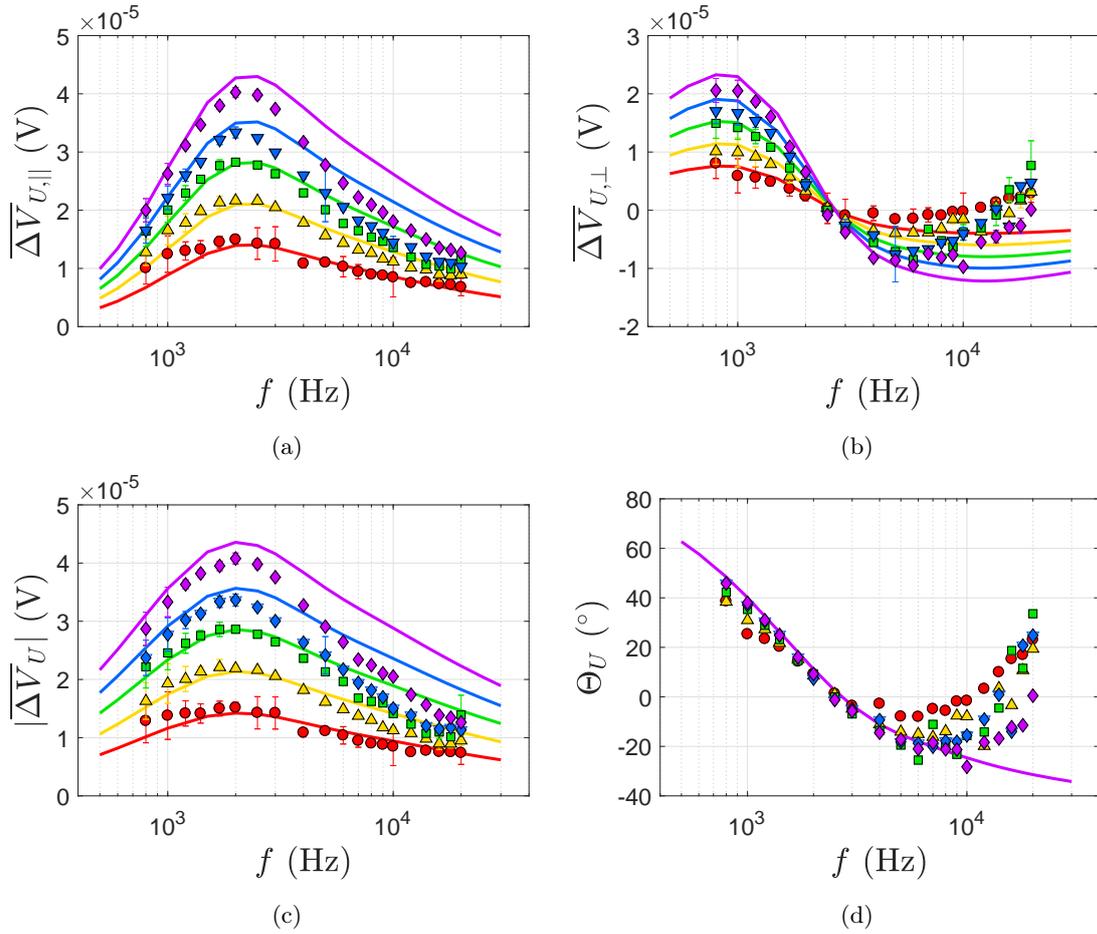


FIGURE 4.7 – Expérience 2 : décalage en tension ΔV_U généré par l'écoulement de galinstan, en fonction de la fréquence. Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) mesurées expérimentalement à différents débits d'écoulement : 1.29 l.min⁻¹ (●), 2.01 l.min⁻¹ (▲), 2.75 l.min⁻¹ (■), 3.48 l.min⁻¹ (▲) et 4.29 l.min⁻¹ (◆). Les mesures sont comparées avec le modèle (traits continus).

Les tensions $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, $|\overline{\Delta V_U}|$ et la phase Θ_U montrent de manière globale un comportement similaire à celui observé lors de la première expérience dans le cas d'un métal liquide animé d'une vitesse uniforme (figure 4.6). La composante en phase $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et le module $|\overline{\Delta V_U}|$ présentent en particulier un maximum à la même fréquence $f \approx 2$ kHz, indépendamment du débit de métal liquide.

Comme précédemment, la composante en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ est d'abord positive pour $f \lesssim 2.5$ kHz (avec un maximum autour de 800 Hz), puis négative pour $f \gtrsim 2.5$ kHz (avec un minimum entre 6 kHz et 8 kHz). Une déviation des mesures expérimentales de $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ est observée pour $f \gtrsim 10$ kHz avec un nouveau changement de signe ($\overline{\Delta V_{U,\perp}} > 0$) et une augmentation d'amplitude.

Enfin, la phase Θ_U est identique à celle mesurée dans l'expérience 1 pour les cinq débits considérés, jusqu'à une fréquence $f \approx 6$ kHz à partir de laquelle une forte dispersion des mesures est visible, relative à celle observée sur la composante en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$.

Pour les quatre paramètres $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, $|\overline{\Delta V_U}|$ et Θ_U , le modèle analytique est conforme aux mesures expérimentales dans la limite des basses fréquences ($f \lesssim 2$ kHz). Cette limite correspond

environ aux maximums de la composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et du module $|\overline{\Delta V}_U|$, et aux changements de signe de la composante en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ et de la phase Θ_U . Afin de proposer une première explication aux déviations observées au-delà de $f \approx 2$ kHz, on peut remarquer que les résultats du modèle analytique sont calculés avec des profils de vitesse « modèles », obtenus avec la corrélation de Reichardt à partir des profils mesurés par UVP (voir section 4.3 de ce chapitre. Comme il a été observé (figure 4.3, page 79), les profils UVP sont mesurés de manière précise au centre de l'écoulement, mais la méthode de mesure montre ses limites pour les points à proximité de la paroi. Lorsque la fréquence augmente, le champ électromagnétique se concentre justement en surface du fait de l'effet de peau ($\delta = 6.1$ mm pour $f = 2$ kHz et $\delta = 2.7$ mm pour $f = 10$ kHz). La tension ΔV_U est alors plus sensible au champ de vitesse proche de la paroi, soumis à une erreur importante lorsqu'on implémente les profils UVP dans le modèle analytique. L'influence du profil de vitesse est discutée de manière plus détaillée dans la sous-section 4.5.3 de ce chapitre.

4.5 EFFETS DE LA VITESSE

Cette section décrit les effets du champ de vitesse sur la tension ΔV_U , caractérisée par les paramètres $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, $|\overline{\Delta V}_U|$ et Θ_U . Deux aspects sont étudiés à travers les mesures des deux dispositifs expérimentaux et les résultats du modèle analytique du chapitre 3 : l'influence de la vitesse débitante, et celle du profil de vitesse.

Les effets de la vitesse débitante sont étudiés dans le cadre d'un champ de vitesse uniforme dans la sous-section 4.5.1 (correspondant aux mesures de la première expérience), puis non uniforme dans la partie 4.5.2 (correspondant aux mesures de la seconde expérience). Les effets du profil de vitesse sont traités dans la partie 4.5.3 à partir des résultats du modèle analytique.

4.5.1 Expérience 1 : champ de vitesse uniforme

La figure 4.8 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ (b), le module $|\overline{\Delta V}_U|$ (c) et la phase Θ_U (d) en fonction de la vitesse de translation de l'ECFM, mesurées dans le premier dispositif expérimental pour plusieurs fréquences entre 1 kHz et 3 kHz. Les mesures (cercles) sont comparées aux prédictions du modèle analytique (traits continus).

Les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, et le module $|\overline{\Delta V}_U|$, mesurés expérimentalement, suivent une tendance linéaire avec la vitesse pour les cinq fréquences considérées. Cette tendance est confirmée par les résultats du modèle analytique. L'erreur est plus importante pour les mesures à $U = 1$ mm.s⁻¹ et 10 mm.s⁻¹, ainsi que pour la composante en quadrature à la fréquence $f = 2.5$ kHz (○). Dans ces configurations, les signaux mesurés sont en effet relativement faibles et l'incertitude liée à la répétabilité (de l'ordre de 2 μV, voir section 2.5.1 du chapitre 2) nuit à la précision de la mesure.

Les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ mesurées expérimentalement étant linéaires avec la vitesse, la phase Θ_U calculée par l'équation (4.2b) à partir de $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ est logiquement invariante avec la vitesse pour les cinq fréquences considérées. Cette observation est consistante avec les résultats du modèle analytique. L'erreur observée aux faibles vitesses ($U = 1$ mm.s⁻¹ et 10 mm.s⁻¹) sur les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ se propage de manière importante sur Θ_U . Cependant, comme pour le module et les composantes en phase et en quadrature, les résultats aux vitesses plus élevées ($U \gtrsim 50$ mm.s⁻¹) montrent un très bon accord avec le modèle analytique.

Les effets de la fréquence ont par ailleurs été discutés dans la sous-section 4.4.1.

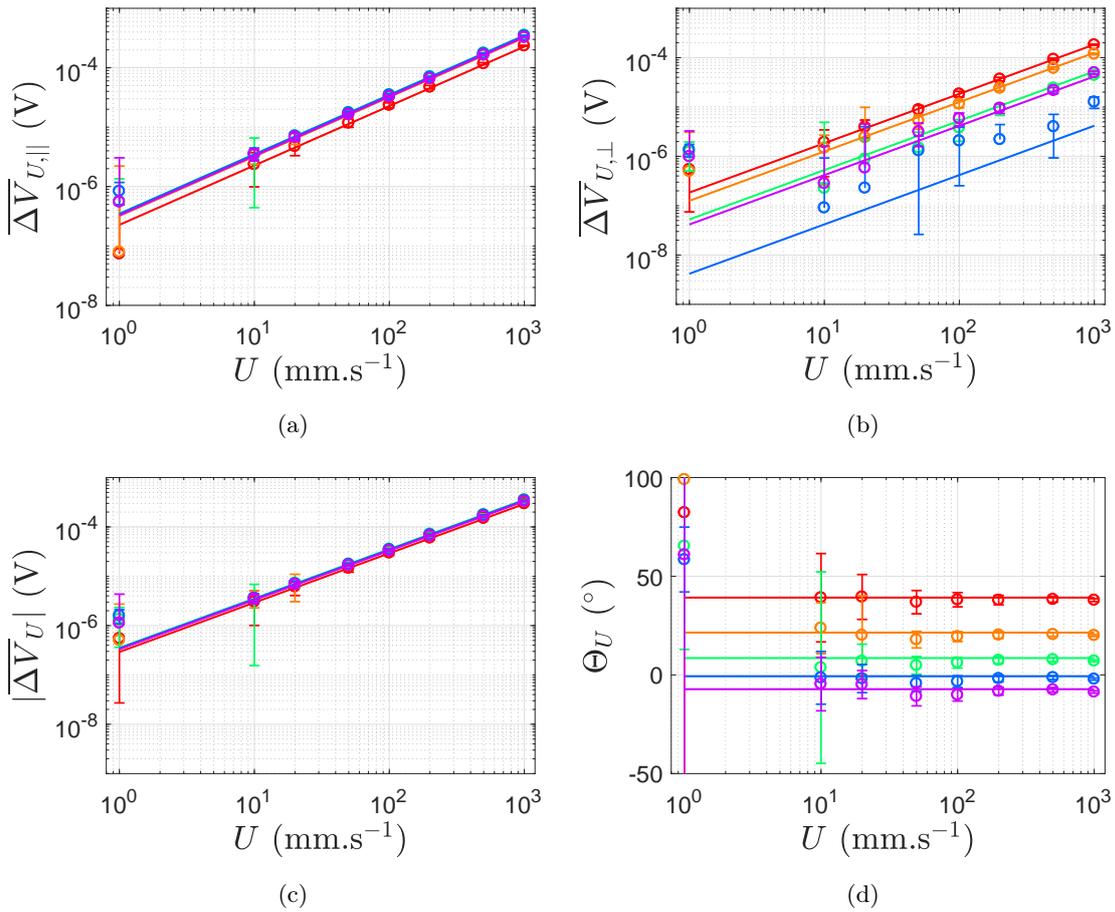


FIGURE 4.8 – Expérience 1 : décalage en tension ΔV_U généré par la translation de l'ECFM, en fonction de la vitesse de translation de l'ECFM. Composantes en phase (a) et en quadrature (b), module (c) et phase (d) pour différentes fréquences : 1 kHz (○), 1.5 kHz (○), 2 kHz (○), 2.5 kHz (○) et 3 kHz (○). Les mesures (ronds) sont comparées avec le modèle analytique (traits continus).

4.5.2 Expérience 2 : champ de vitesse non uniforme

La figure 4.9 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ (b), le module $|\overline{\Delta V}_U|$ (c) et la phase Θ_U (d) en fonction de la vitesse débitante de l'écoulement de galinstan, mesurés dans le second dispositif expérimental pour des fréquences de 800 Hz (●), 2 kHz (■) et 10 kHz (◆). Les mesures sont comparées aux résultats du modèle analytique (traits continus) calculés à partir des mesures de profil de vitesse par UVP.

Pour la fréquence $f = 2$ kHz (■), le comportement observé est similaire à celui de la première étude expérimentale : les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ ainsi que le module $|\overline{\Delta V}_U|$ suivent une tendance linéaire nette en fonction de la vitesse, tandis que la phase Θ_U reste constante. Les mesures expérimentales sont de plus en bon accord avec les résultats du modèle analytique (—), dans lequel les profils de vitesse mesurés par UVP sont utilisés comme donnée d'entrée.

Pour la fréquence $f = 800$ Hz (●), une tendance linéaire est également observée pour la composante en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, les mesures expérimentales suivant raisonnablement les résultats du modèle (—). La composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et le module $|\overline{\Delta V}_U|$ mesurés augmentent avec la

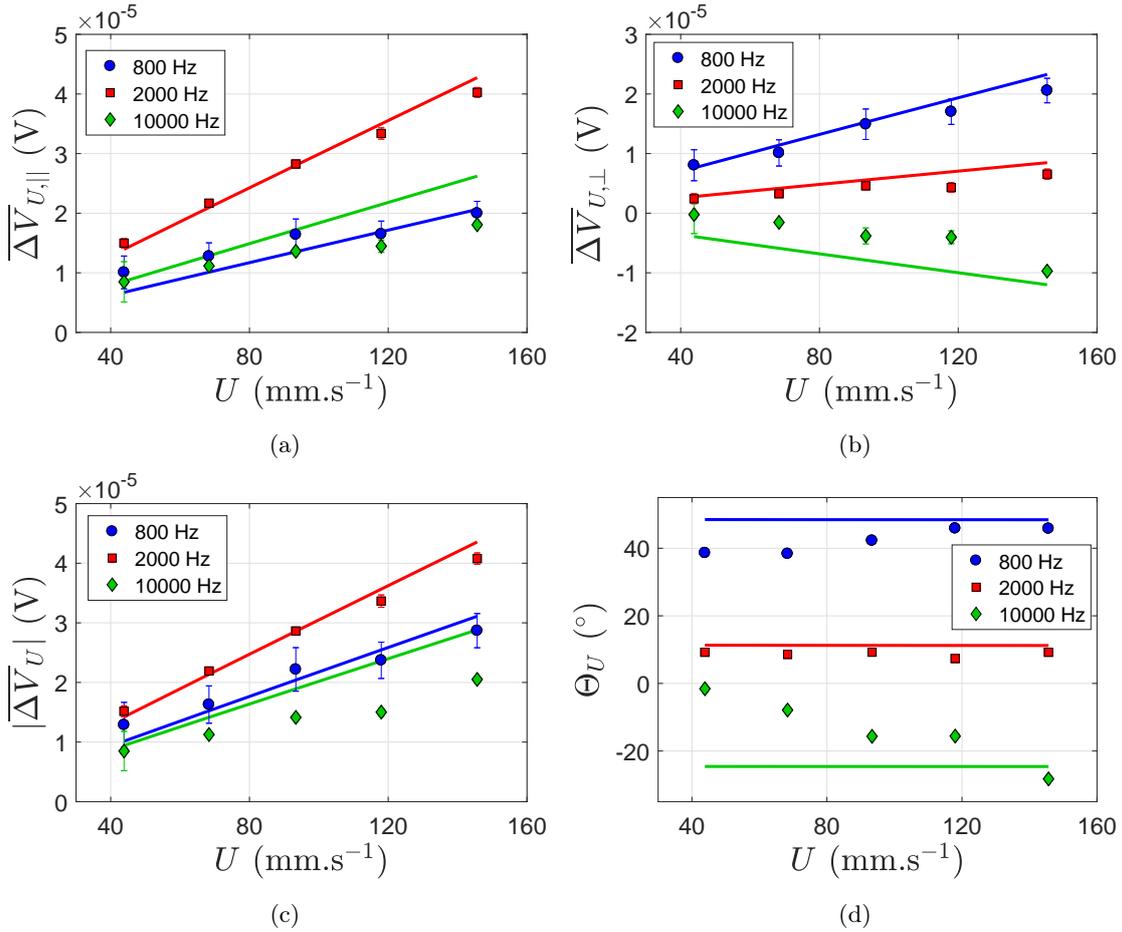


FIGURE 4.9 – Expérience 2 : décalage en tension ΔV_U généré par l'écoulement de galinstan, en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement. Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) mesurées expérimentalement à différentes fréquences : 800 Hz (●), 2 kHz (■) et 10 kHz (◆). Les mesures sont comparées avec le modèle analytique (—, — et — pour 800 Hz, 2 kHz et 10 kHz respectivement).

vitesse, mais une déviation est observée pour $U \gtrsim 120 \text{ mm.s}^{-1}$. Cette déviation n'est pas visible sur les résultats du modèle analytique. Enfin, la phase Θ_U augmente sensiblement avec la vitesse pour les mesures expérimentales jusqu'à atteindre la valeur constante calculée par le modèle. De manière générale, les mesures semblent être en meilleur accord avec le modèle analytique pour les vitesses les plus élevées, c'est à dire $U \gtrsim 120 \text{ mm.s}^{-1}$, pour lesquelles les erreurs de mesure sont a priori plus faibles.

Pour la fréquence $f = 10 \text{ kHz}$ (◆), les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ ainsi que le module $|\overline{\Delta V}_U|$ mesurés augmentent (en valeur absolue) avec la vitesse. Cependant, la tendance linéaire observée précédemment est ici moins nette. On observe en outre que la composante en quadrature est négative à cette fréquence : lorsque l'écoulement est descendant, le décalage de tension observé sur la composante en quadrature est donc négatif, à l'inverse des précédentes observations (voir figures 4.1 et 4.2). Ce changement de signe de $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ correspond à celui observé dans la section 4.4 au-delà d'une certaine fréquence $f \approx 2.5 \text{ kHz}$. Enfin, la phase Θ_U est négative sur toute la plage de vitesse (du fait de $\overline{\Delta V}_{U,\perp} < 0$) et décroissante. Une déviation importante des mesures expérimentales par rapport aux résultats du modèle analytique est globalement visible

sur les quatre paramètres $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, $|\overline{\Delta V_U}|$ et Θ_U . Cette déviation est observée sur toute la plage des hautes fréquences dans la section 4.4, et discutée dans la sous-section 4.5.3.

4.5.3 Effets du profil de vitesse (étude analytique)

Nous nous intéressons dans cette sous-section aux effets du profil de vitesse de l'écoulement sur la tension ΔV_U , directement lié au nombre de Reynolds de l'écoulement. Pour $Re \lesssim 2300$ en effet, l'écoulement est laminaire et le profil de vitesse est parabolique, tandis que pour $Re \gtrsim 10^4$, l'écoulement est turbulent et le profil de vitesse se rapproche de plus en plus d'un profil piston (vitesse uniforme) au fur et à mesure que Re augmente. L'étude est réalisée exclusivement à partir des résultats du modèle analytique décrit dans le chapitre 3, pour des profils de vitesse laminaire et piston (dont les expressions analytiques sont déterminées) et turbulents (pour lesquels une base de donnée expérimentale précise est fournie par Zagarola [64]). Du fait de l'erreur de mesure élevée sur les profils UVP mesurés dans l'expérience 2 (notamment à proximité de la paroi, voir section 4.4.2), nos mesures expérimentales ne sont pas utilisées pour étudier l'effet du profil de vitesse.

La figure 4.10 montre les différents profils de vitesse intégrés dans le modèle analytique pour une même vitesse débitante U . Le profil de vitesse piston (—) est par définition uniforme et vaut $u(r) = U$ dans toute la conduite. Le profil de vitesse laminaire (—) correspond à l'écoulement de Poiseuille, pour lequel $u(r) = 2U(1 - r^2/R^2)$, R étant le rayon de la conduite. Enfin, les profils de vitesse turbulents moyens utilisés dans le modèle sont ceux mesurés expérimentalement avec le dispositif Superpipe, réalisé à l'université de Princeton sur une large plage de nombres de Reynolds [64]. Dans notre étude, les nombres de Reynolds des profils turbulents considérés varient entre $Re = 3.16 \times 10^4$ (—) et $Re = 1.85 \times 10^5$ (—). Dans le cas du galinstan, ces nombres de Reynolds correspondent à une vitesse d'écoulement entre 0.41 m.s^{-1} et 2.43 m.s^{-1} à l'intérieur de la conduite de diamètre $2R = 25 \text{ mm}$ utilisée dans les expériences.

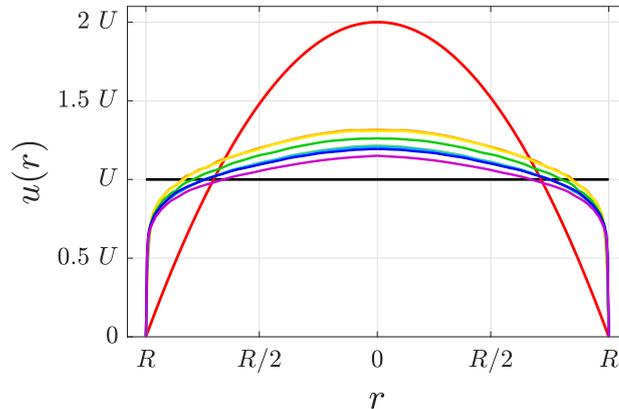


FIGURE 4.10 – Profils de vitesse implémentés dans le modèle analytique, pour une même vitesse débitante U . Profil piston (—), profil laminaire (—) et profils turbulents (données Superpipe [64]) : $Re = 3.16 \times 10^4$ (—), $Re = 4.17 \times 10^4$ (—), $Re = 5.67 \times 10^4$ (—), $Re = 7.43 \times 10^4$ (—), $Re = 9.88 \times 10^4$ (—), $Re = 1.46 \times 10^5$ (—) et $Re = 1.85 \times 10^5$ (—).

Le modèle analytique est appliqué pour les différents profils de vitesse de la figure 4.10 avec la géométrie de la première expérience. La figure 4.11 montre la tension ΔV_U calculée pour ces profils en fonction de la fréquence, pour une vitesse débitante fixée $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$. Les tendances suivies par les composantes en phase $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, le module $|\overline{\Delta V_U}|$ et la phase Θ_U

sont semblables pour tous les profils de vitesse, et analogues aux mesures expérimentales décrites précédemment (figures 4.6 et 4.7).

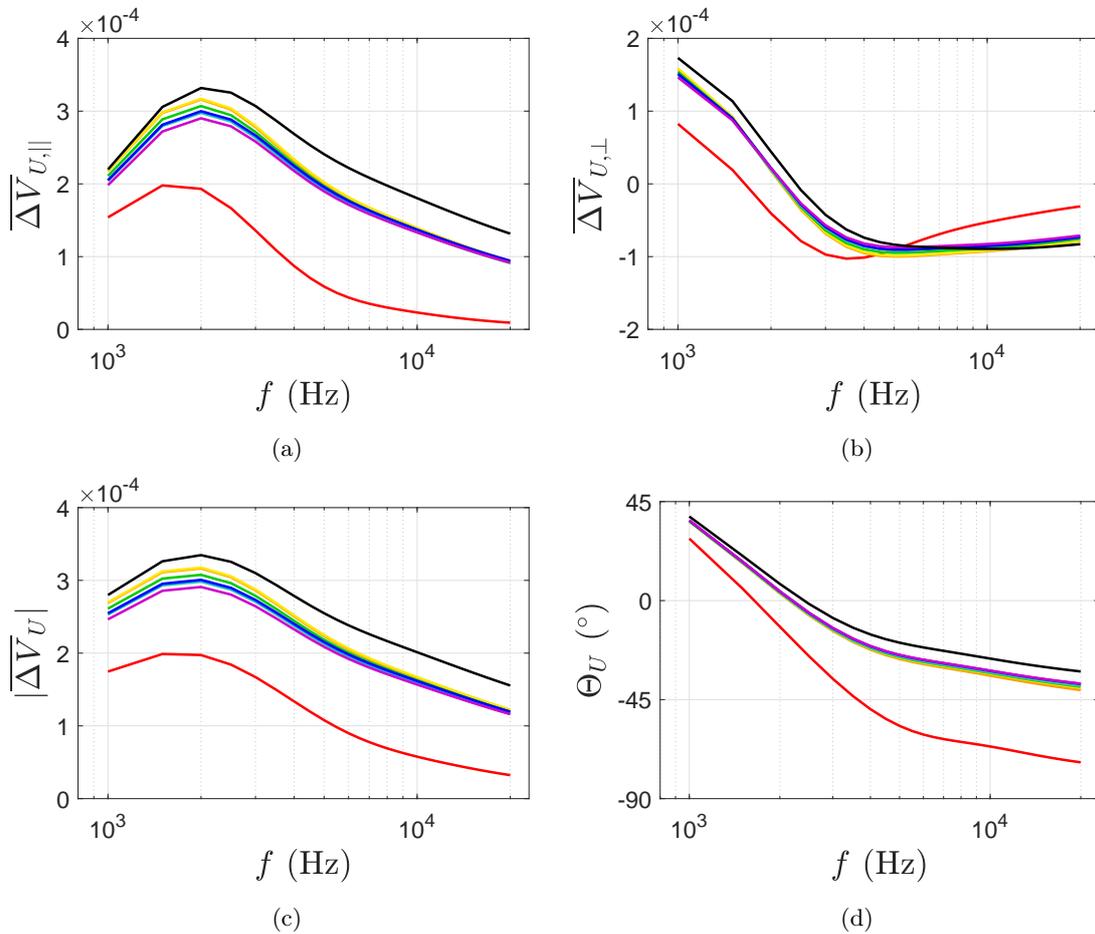


FIGURE 4.11 – Modèle analytique : décalage en tension ΔV_U en fonction de la fréquence. Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d). Profil piston (—), profil laminaire (—) et profils turbulents (données Superpipe [64]) : $\text{Re} = 3.16 \times 10^4$ (—), $\text{Re} = 4.17 \times 10^4$ (—), $\text{Re} = 5.67 \times 10^4$ (—), $\text{Re} = 7.43 \times 10^4$ (—), $\text{Re} = 9.88 \times 10^4$ (—), $\text{Re} = 1.46 \times 10^5$ (—) et $\text{Re} = 1.85 \times 10^5$ (—).

Pour la composante en phase $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et le module $|\overline{\Delta V_U}|$, l'écart entre les courbes des différents profils turbulents est faible (au maximum 5% pour $f = 1$ kHz), ces profils étant relativement similaires (voir figure 4.10). On observe par ailleurs un décalage de ces courbes par rapport à celles du profil piston (—), particulièrement aux hautes fréquences. Un écart important est également observé entre les courbes du profil de vitesse laminaire (—) et les courbes des autres profils (turbulents, et à plus forte raison piston). Enfin, le maximum des courbes $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}$ et $|\overline{\Delta V_U}|$ du profil laminaire (à $f \approx 1.5$ kHz) est légèrement décalé par rapport à celui des courbes des profils turbulents et piston (à $f \approx 2$ kHz).

Pour la composante en quadrature $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$, les courbes correspondant aux profils de vitesses turbulents et piston sont quasiment superposées sur toute la plage de fréquence considérée. Le changement de signe de $\overline{\Delta V_{U,\perp}}$ est cependant observé un peu plus tôt pour les profils turbulents (à $f \approx 2.2$ kHz) que pour le profil piston (à $f \approx 2.4$ kHz). La valeur minimale est également atteinte plus tôt (à $f \approx 5$ kHz) que pour le profil piston (à $f \approx 10$ kHz). Par ailleurs, la tension

$\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ correspondant au profil laminaire est clairement décalée vers la gauche par rapport aux autres courbes, avec un changement de signe à $f \approx 1.6$ kHz et une valeur minimale à $f \approx 3.5$ kHz. En dépit de ce décalage, la valeur de $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ pour le profil laminaire est similaire à celles des autres profils pour $f \lesssim 4$ kHz. Au-delà de cette fréquence, la tension $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ du profil laminaire est fortement déviée et tend rapidement vers une valeur nulle.

Enfin, la phase Θ_U décroît avec la fréquence pour tous les profils, avec une pente plus marquée pour le profil laminaire que pour les profils turbulents et le profil piston.

Les décalages des tensions $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ et $|\overline{\Delta V}_U|$ observés en fonction des différents profils de vitesse sont directement liés à la profondeur de pénétration du champ électromagnétique dans le métal liquide. Lorsque la fréquence augmente, l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega}$ diminue ($\delta = 6.1$ mm pour $f = 2$ kHz et $\delta = 2.7$ mm pour $f = 10$ kHz) et le champ électromagnétique n'est sensible qu'au champ de vitesse du métal proche de la paroi. Du fait du gradient de vitesse à la paroi, la vitesse dans la zone sondée est en l'occurrence plus faible pour les profils turbulents que pour le profil piston (jusqu'à une profondeur $h \approx 3$ mm), et identiquement, à plus forte raison, pour le profil laminaire (jusqu'à une profondeur $h \approx 4$ mm), comme on peut le voir sur la figure 4.10. Le champ électromagnétique est donc moins perturbé par un profil turbulent, et a fortiori par un profil laminaire, que par un profil piston (à débit égal). Les tensions $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ et $|\overline{\Delta V}_U|$ sont donc moins importantes en présence des écoulements laminaire et turbulents, plus particulièrement aux hautes fréquences où l'épaisseur de peau est faible.

Les effets du profil de vitesse sur ΔV_U , analysés ici à l'aide du modèle analytique, confirment les déviations entre les mesures expérimentales et les résultats du modèle au-delà de $f \approx 2$ kHz, observées dans la sous-section 4.4.2 (figure 4.7, page 82). Pour un débit donné, la valeur de la tension ΔV_U varie de manière non négligeable avec le profil de vitesse de l'écoulement (laminaire, turbulent ou piston). Ces variations sont particulièrement marquées aux hautes fréquences. Il est à noter cependant que l'influence du profil de vitesse sur ΔV_U est raisonnablement faible lorsque l'écoulement reste dans le régime turbulent, ce qui correspond aux conditions usuelles d'utilisation d'un ECFM.

4.6 EFFETS DE LA CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE (ÉTUDE ANALYTIQUE)

Dans cette section, une étude des effets de la conductivité électrique sur les signaux mesurés à l'ECFM est développée à partir du modèle analytique décrit dans le chapitre 3. Un lien est établi entre plusieurs observations expérimentales décrites dans la littérature [19, 20, 17, 13], concernant les effets de la température du métal liquide, et les effets d'une variation de sa conductivité électrique observés à l'aide du modèle analytique. La validité de la présente étude est corroborée par la bonne adéquation entre les résultats du modèle analytique et les mesures expérimentales du premier dispositif, observées précédemment (figures 4.6 et 4.8).

Les résultats qui vont suivre sont calculés pour une intensité $I = 1$ A dans la bobine primaire, et un métal en translation à une vitesse uniforme $U = 1$ m.s⁻¹. La géométrie de l'ECFM est celle du deuxième dispositif expérimental (voir section 2.4 du chapitre 2), à l'exception que les deux bobines secondaires sont supposées identiques (longueur de 10 mm, diamètre intérieur de 33 mm, nombre de spires par unité de longueur de 2.5 spires.mm⁻¹).

4.6.1 Différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$

Cette partie présente les effets de la conductivité électrique sur le signal mesuré usuellement à l'ECFM, c'est à dire la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ entre les bobines secondaires. Les deux bobines secondaires étant identiques dans le cas présent, la contribution de tension ΔV_0 est nulle et on déduit immédiatement $\Delta V = \Delta V_U$. Les paramètres caractéristiques de ΔV_U sont les mêmes que précédemment, à savoir $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, $|\overline{\Delta V}_U|$ et Θ_U .

La figure 4.12 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ (b), le module $|\overline{\Delta V}_U|$ (c) et la phase Θ_U (d) en fonction de la fréquence, calculées avec le modèle analytique pour cinq conductivités électriques proches de celles du galinstan ($\sigma = 3.46 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ à 20°C) et du sodium liquide ($\sigma = 3.78 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ à 500°C) : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—) et $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—). Les résultats obtenus pour la conductivité de l'aluminium ($\sigma = 37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$), régulièrement utilisé dans le cadre d'expériences « sèches » (voir section 1.2.2 du chapitre 1), sont représentés à titre comparatif (- -).

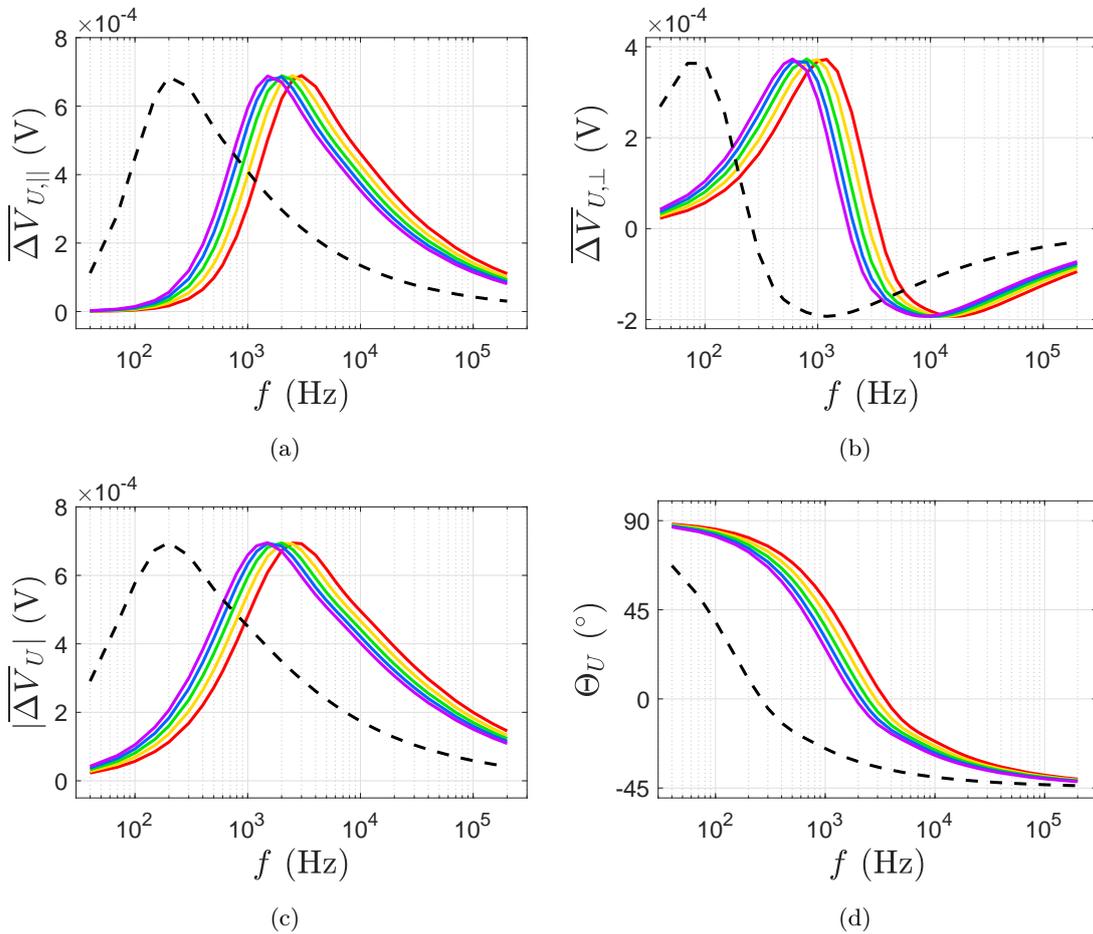


FIGURE 4.12 – Modèle analytique : décalage en tension ΔV_U généré par le mouvement du métal en fonction de la fréquence. Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) calculés pour cinq conductivités électriques : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—) et $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—). Les résultats obtenus pour la conductivité de l'aluminium ($\sigma = 37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$) sont représentés à titre comparatif (- -).

Les tensions $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, $|\overline{\Delta V}_U|$ et la phase Θ_U montrent un comportement similaire à

celui observé précédemment avec les deux études expérimentales, figures 4.6 et 4.7, pour toutes les conductivités électriques considérées. Le modèle étant calculé sur une large plage de fréquence, on observe de plus que les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$ et en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ ainsi que le module $|\overline{\Delta V}_U|$ tendent vers une valeur nulle aux basses et hautes fréquences. En outre, la phase Θ_U tend vers 90° aux basses fréquences, et vers -45° aux hautes fréquences.

L'augmentation de la conductivité électrique du métal induit un décalage des courbes $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, $|\overline{\Delta V}_U|$ et Θ_U vers les basses fréquences. En particulier, les maximums de tension observés sur $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$ et $|\overline{\Delta V}_U|$ apparaissent d'autant plus « tôt » que la conductivité augmente. En revanche, la forme des quatre courbes de $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}$, $\overline{\Delta V}_{U,\perp}$, $|\overline{\Delta V}_U|$ et Θ_U semble être conservée (avec un maximum constant de 6.9×10^{-4} V pour $|\overline{\Delta V}_U|$ par exemple). Cette remarque suggère l'existence d'une auto-similarité du signal de tension ΔV_U en fonction de la fréquence et de la conductivité, dont l'étude sera détaillée dans la section 4.7.

4.6.2 Différence de tension $\Delta V^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$

Nous nous intéressons dans cette partie aux effets de la conductivité électrique sur le signal $\Delta V^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$, utilisé comme alternative à la différence de tension usuelle $\Delta V = V_1 - V_2$ dans plusieurs études récentes [19, 20, 17, 13]. Dans ces études, il est en particulier montré expérimentalement que le décalage de tension de ΔV^* relatif à la vitesse de l'écoulement, noté ici ΔV_U^* , est indépendant de la température du métal à une certaine fréquence d'opération de l'ECFM (voir section 1.2.2 du chapitre 1). À partir des résultats du modèle analytique, nous proposons une explication à l'existence de cette fréquence « critique » en reliant les variations de température du métal aux variations de sa conductivité électrique, cette dernière étant un des paramètres du modèle.

Les mesures expérimentales en sodium liquide de Sharma *et al.* [17] sont effectuées pour une température du métal entre 200°C et 550°C (voir figure 1.7b, page 14). Les variations de la conductivité électrique du sodium correspondant à cette plage de température peuvent être calculées avec la corrélation proposée par Sobolev [65],

$$\frac{1}{\sigma} = (3.126 + 6.218 \times 10^{-3}T + 3.093 \times 10^{-5}T^2) \times 10^{-8} \quad \Omega\cdot\text{m}, \quad (4.3)$$

valable entre 371 K et 1155 K (soit entre 98°C et 882°C). La figure 4.14 montre la valeur de la conductivité électrique du sodium liquide en fonction de sa température, calculée avec l'expression (4.3). La zone grisée correspond à la plage de température étudiée expérimentalement par Sharma *et al.* [17]. On remarque que la conductivité électrique du sodium liquide varie du simple au double dans les expériences de Sharma *et al.* (de 7.7×10^6 S.m $^{-1}$ pour $T = 200^\circ\text{C}$ à 3.4×10^6 S.m $^{-1}$ pour $T = 550^\circ\text{C}$). Afin de quantifier l'effet de ces variations de conductivité électrique sur la tension ΔV^* , le modèle analytique est lancé pour les cinq conductivités représentées sur la figure 4.14 et utilisées précédemment : 2.8×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 3.4×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 4.0×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 4.6×10^6 S.m $^{-1}$ (●) et 5.2×10^6 S.m $^{-1}$ (●).

Pour ces cinq conductivités électriques, la figure 4.15 représente les composantes en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}^*$ (a), en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}^*$ (b), le module $|\overline{\Delta V}_U|^*$ (c) et la phase Θ_U^* (d) de la tension ΔV_U^* calculées avec le modèle analytique en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus pour la conductivité de l'aluminium ($\sigma = 37.7 \times 10^6$ S.m $^{-1}$) sont représentés à titre comparatif (- -).

Pour toutes les conductivités σ voisines de celle du sodium, la composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}^*$ tend vers une constante positive aux basses fréquences dont la valeur dépend de σ , puis décroît (à partir de 300 Hz) et change de signe entre 4 kHz et 7 kHz selon les conductivités. Au-delà de ces

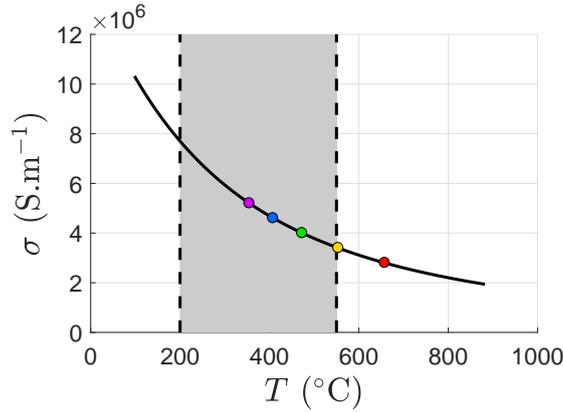


FIGURE 4.13

FIGURE 4.14 – Conductivité électrique du sodium liquide en fonction de la température, calculée avec la corrélation de Sobolev [65]. La zone grisée correspond à la plage de température des expériences effectuées par Sharma *et al.* [17]. Les conductivités électriques utilisées dans le modèle analytique sont montrées à titre comparatif : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●) et $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●).

fréquences, la composante $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}^*$ tend vers une valeur nulle. On remarque que la courbe relative à la conductivité de l'aluminium (--) suit une tendance différente de celles des autres conductivités : $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}^*$ décroît plus « tôt » en fréquence (dès 50 Hz) et change de signe également plus « tôt » (à 500 Hz) ; son amplitude est de plus beaucoup plus élevée (de l'ordre de 2.1×10^{-2} à une fréquence de 50 Hz) que celles des autres conductivités (valeurs maximales de 1.7×10^{-3} à 3.1×10^{-3} en dessous de 300 Hz). Les courbes correspondant aux cinq conductivités voisines de celle du sodium liquide s'intersectent en un même point, à une fréquence $f \approx 1.3 \text{ kHz}$. On remarque que la courbe correspondant à la conductivité de l'aluminium ne passe pas par ce point d'intersection.

La composante en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}^*$ est négative sur toute la plage de fréquence calculée et passe par une valeur minimale, située à une fréquence plus faible lorsque la conductivité électrique augmente. Comme pour la composante en phase, les courbes correspondant aux conductivités voisines de celle du sodium liquide s'intersectent environ à une même fréquence, $f \approx 5.3 \text{ kHz}$ ici. La courbe représentative de l'aluminium, décalée vers les basses fréquences par rapport aux autres courbes et plus grande en valeur absolue, ne passe pas par ce point d'intersection.

Le module $|\overline{\Delta V}_U|^*$ montre un comportement similaire à la composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,\parallel}^*$ aux basses fréquences : pour les conductivités voisines de celle du sodium, $|\overline{\Delta V}_U|^*$ tend vers une constante positive pour $f \lesssim 500 \text{ Hz}$ dont la valeur dépend de la conductivité, puis décroît au-delà de cette fréquence. Les courbes s'intersectent à une fréquence $f \approx 3.6 \text{ kHz}$ puis tendent vers une valeur nulle aux hautes fréquences. Comme précédemment, la courbe correspondant à la conductivité de l'aluminium est décalée vers les basses fréquences et son amplitude est plus élevée que pour les autres conductivités.

Enfin, la phase Θ_U^* tend vers 180° aux basses fréquences, puis décroît jusqu'à tendre vers 45° aux hautes fréquences. On remarque que les courbes correspondant aux différentes conductivités électriques ne s'intersectent pas.

Le comportement du module $|\overline{\Delta V}_U|^*$ entre 1.7 kHz et 4.3 kHz (zoom de la figure 4.15c), avec l'existence d'un point d'intersection à $f \approx 3.6 \text{ kHz}$, est fortement similaire à celui mesuré expérimentalement par Sharma *et al.* pour un sodium liquide entre 200°C et 550°C (voir figure

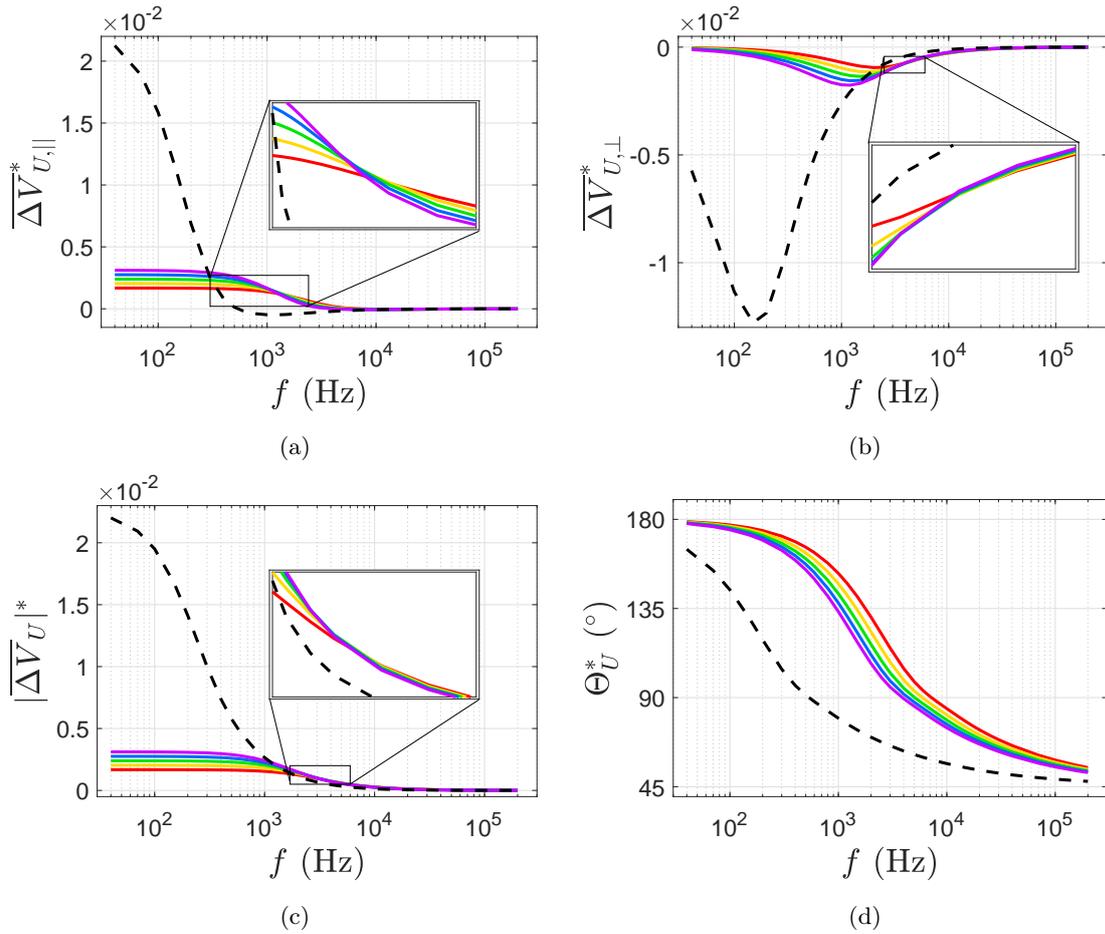


FIGURE 4.15 – Modèle analytique : décalage en tension ΔV_U^* généré par le mouvement du métal en fonction de la fréquence. Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) calculés pour cinq conductivités électriques : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—) et $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (—). Les résultats obtenus pour la conductivité de l'aluminium ($\sigma = 37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$) sont représentés à titre comparatif (- -).

1.7b, page 14). La différence de valeur de fréquence « critique » où apparaît le point d'intersection peut être liée à la différence de géométrie des expériences de Sharma *et al.* et du modèle analytique. Dans ces expériences en effet, l'ECFM utilisé est un ECFM interne, où le métal liquide circule à l'extérieur des bobines (voir sous-section 1.2.1 du chapitre 1 pour plus de détails). Le modèle analytique correspond en revanche à un ECFM interne, celui utilisé dans le second dispositif expérimental, et pour lequel le métal se situe à l'intérieur des bobines.

Pour conclure, l'existence de la fréquence critique observée expérimentalement dans plusieurs études récentes [19, 20, 17, 13], pour laquelle le signal ΔV_U^* ne varie pas avec la température du métal, peut être expliquée par notre modèle analytique en corrélant les variations de température aux variations de conductivité électrique du métal. D'après le modèle, la fréquence critique n'est pas la même pour la composante en phase $\overline{\Delta V}_{U,||}^*$, pour celle en quadrature $\overline{\Delta V}_{U,\perp}^*$ et pour le module $|\overline{\Delta V}_U|^*$. En outre, la géométrie de l'ECFM semble impacter significativement la valeur de cette fréquence critique. Enfin, au regard des résultats du modèle pour la conductivité de l'aluminium, la fréquence critique semble exister sur une plage relativement faible de conductivité électrique (de $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ à $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ dans le modèle analytique), qui par chance correspond

approximativement à celle utilisée expérimentalement avec le sodium liquide. La section suivante apporte des éléments de compréhension sur l'existence de cette fréquence critique observée avec les variations de conductivité, à partir d'une étude des lois de similitude des tensions ΔV_U et ΔV_U^* .

4.7 LOIS DE SIMILITUDE DE ΔV_U ET ΔV_U^*

Dans cette section, un développement des lois de similitudes des tensions ΔV_U et ΔV_U^* est présenté à partir de l'équation sans dimension du potentiel vecteur (3.6a) résolue dans le chapitre 3 (pour laquelle le potentiel scalaire est nul, $\phi = 0$). Les tensions ΔV_U et ΔV_U^* sont alors décrites par une unique relation tenant compte des quatre paramètres caractéristiques de l'étude (fréquence f , vitesse débitante U , profil de vitesse \mathbf{u} et conductivité électrique σ) en faisant intervenir le paramètre d'écrantage $\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2$ et le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0 \sigma U R$.

4.7.1 Expression de la tension aux bornes d'une bobine secondaire

Dans le cadre des études expérimentales, le nombre de Reynolds magnétique est faible et le potentiel vecteur \mathbf{A} peut s'écrire à l'aide d'un développement asymptotique en $R_m \rightarrow 0$, soit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + R_m \mathbf{A}_U + \mathcal{O}(R_m^2)$ (voir le tableau A.2 en annexe, page 167). En injectant cette expression dans l'équation sans dimension du potentiel vecteur (3.6a) et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en R_m , on obtient les équations de \mathbf{A}_0 (à l'ordre 0) et \mathbf{A}_U (à l'ordre 1),

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0 - \mathbb{1}_C j \Omega \mathbf{A}_0 = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S \quad \text{et} \quad \nabla^2 \mathbf{A}_U - \mathbb{1}_C j \Omega \mathbf{A}_U = -\mathbb{1}_C \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}_0, \quad (4.4)$$

où $\mathbb{1}_C$ est la fonction caractéristique du domaine C occupé par le conducteur (la conduite dans laquelle s'écoule le métal liquide), $\mathbb{1}_S$ est la fonction caractéristique du domaine S occupé par la source de courant (ici la bobine primaire), \mathbf{J}_S est la densité de courant source dans la bobine primaire adimensionnée par l'amplitude du courant J_S , et \mathbf{u} est le profil de vitesse adimensionné par la vitesse débitante U .

D'après les équations (4.4), pour une géométrie donnée de l'ECFM et de la conduite contenant le métal ($\mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_S$ fixés), le potentiel vecteur \mathbf{A}_0 n'est fonction que du paramètre d'écrantage Ω , tandis que le potentiel vecteur \mathbf{A}_U est fonction du paramètre d'écrantage Ω et du profil de vitesse sans dimension \mathbf{u} . Nous écrivons alors :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_U = \mathbf{A}_U(\Omega, \mathbf{u}). \quad (4.5)$$

À partir du potentiel vecteur \mathbf{A} , la tension V aux bornes d'une bobine secondaire est obtenue par la loi de Faraday (3.34) calculée sur chaque spire, puis sommée sur toutes les spires par les équations (3.35a) et (3.35b). En injectant l'expansion asymptotique $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + R_m \mathbf{A}_U + \mathcal{O}(R_m^2)$, on obtient la tension V aux bornes d'une bobine secondaire par :

$$V = \underbrace{\left(-j \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z_1}^{z_2} \oint \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{r}_i dz \right)}_{f_0(\Omega)} + R_m \underbrace{\left(-j \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z_1}^{z_2} \oint \mathbf{A}_U \cdot d\mathbf{r}_i dz \right)}_{f_U(\Omega, \mathbf{u})} + \mathcal{O}(R_m^2), \quad (4.6)$$

où le premier terme entre parenthèses, fonction de Ω uniquement d'après l'équation (4.5) pour une géométrie donnée, est écrit $f_0(\Omega)$ et le second terme entre parenthèses, fonction de Ω et \mathbf{u} d'après (4.5), est écrit $f_U(\Omega, \mathbf{u})$. Dans l'équation (4.6), n_s est le nombre de spires par unité de longueur de la bobine secondaire, z_1 et z_2 sont les coordonnées en z des deux extrémités de la bobine.

4.7.2 Expression de la différence de tension ΔV_U

La différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ s'obtient premièrement en appliquant l'expression (4.6) à chaque bobine secondaire. On remarque que le terme $f_0(\Omega)$, relatif au potentiel vecteur \mathbf{A}_0 , est identique dans chacune des deux bobines si celles-ci sont identiques (même longueur, même rayon et même nombre de spire par unité de longueur). En conséquence, la différence de tension ΔV_0 est nulle et on a $\Delta V = \Delta V_U$. On remarque en outre que le terme $f_U(\Omega, \mathbf{u})$, relatif au potentiel vecteur \mathbf{A}_U , est opposé dans les deux bobines secondaires, du fait du produit vectoriel dans le terme source $-\mathbb{1}_C \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}_0$ de l'équation de \mathbf{A}_U (4.4). La figure 4.16 montre l'allure des différents champs vectoriels dans le métal à titre explicatif. Dans la sous-figure 4.16c, on voit particulièrement que le champ $\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}_0$ est de signe opposé de part et d'autre de la bobine primaire, d'où le signe opposé de $f_U(\Omega, \mathbf{u})$ dans chaque bobine secondaire. En utilisant l'expression (4.6) et en négligeant les termes d'ordre 2 en R_m , la tension ΔV_U après simplification s'écrit donc :

$$\Delta V_U = 2R_m \times f_U(\Omega, \mathbf{u}). \quad (4.7)$$

Pour une géométrie et un profil de vitesse \mathbf{u} donnés, la tension ΔV_U s'exprime alors par une unique relation, caractérisée par la fonction f_U , tenant compte de la fréquence f , la vitesse U et la conductivité électrique σ .

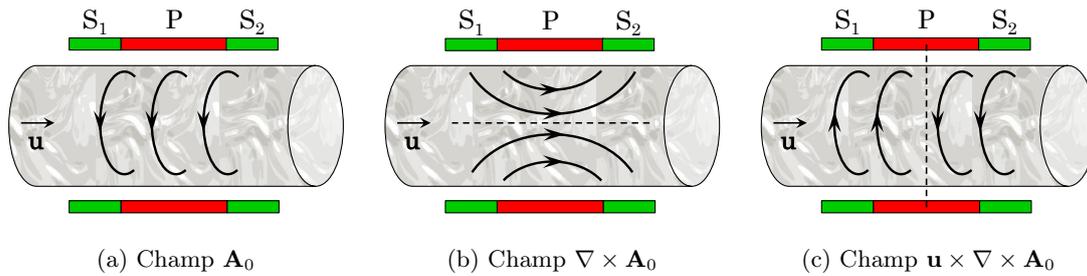


FIGURE 4.16 – Schéma illustratif des champs vectoriels intervenant dans le calcul du potentiel vecteur \mathbf{A}_U .

Dans l'équation (4.7), la tension ΔV_U est écrite sous forme adimensionnelle en utilisant les paramètres d'échelle définis précédemment dans l'équation (3.4) : le rayon intérieur de la conduite R , la pulsation caractéristique du champ ω et l'amplitude du courant source J_S . Le facteur d'échelle permettant l'obtention d'une tension ΔV_U homogène à des volts est alors $\mu_0 \omega J_S R^3$. Sous forme dimensionnelle, on obtient donc :

$$\Delta V_U = 2R_m \mu_0 \omega J_S R^3 \times f_U(\Omega, \mathbf{u}) \quad (\text{volt}) \quad (4.8)$$

$$= 2U \mu_0 \Omega J_S R^2 \times f_U(\Omega, \mathbf{u}) \quad (\text{volt}). \quad (4.9)$$

La figure 4.17 représente la courbe $\frac{\Delta V_U}{U} = 2\mu_0 \Omega J_S R^2 \times f_U(\Omega, \mathbf{u})$ obtenue à partir de la tension ΔV_U calculée par le modèle analytique, en fonction du paramètre d'écrantage Ω , pour les conductivités utilisées précédemment : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●) et $37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●). Le profil de vitesse \mathbf{u} est ici uniforme et la fréquence varie entre 40 Hz et 200 kHz pour chaque conductivité. On constate que la tension ΔV_U appartient à une courbe unique, définie par la relation (4.9), pour n'importe quelles fréquence, vitesse débitante et conductivité électrique dans la limite $R_m \ll 1$. On remarque en outre que le maximum de la composante en phase ($7 \times 10^{-4} \text{ V.s.m}^{-1}$ pour $\Omega \approx 10$, figure 4.17a) est plus important que le maximum de la composante en quadrature ($4 \times 10^{-4} \text{ V.s.m}^{-1}$ pour

$\Omega \approx 4$, figure 4.17b). Pour effectuer une mesure de vitesse, il semble donc préférable de mesurer la composante en phase (ou le module) en fixant le paramètre d'écrantage à $\Omega \approx 10$, ce qui correspond à une épaisseur de peau environ deux fois plus petite que le rayon de la conduite (plus précisément $R/\delta \approx 2.24$). Dans une étude ultérieure, il peut être intéressant de compléter la figure 4.17 en intégrant les tensions ΔV_U pour des profils de vitesse \mathbf{u} non uniformes (profil laminaire ou profils turbulents notamment).

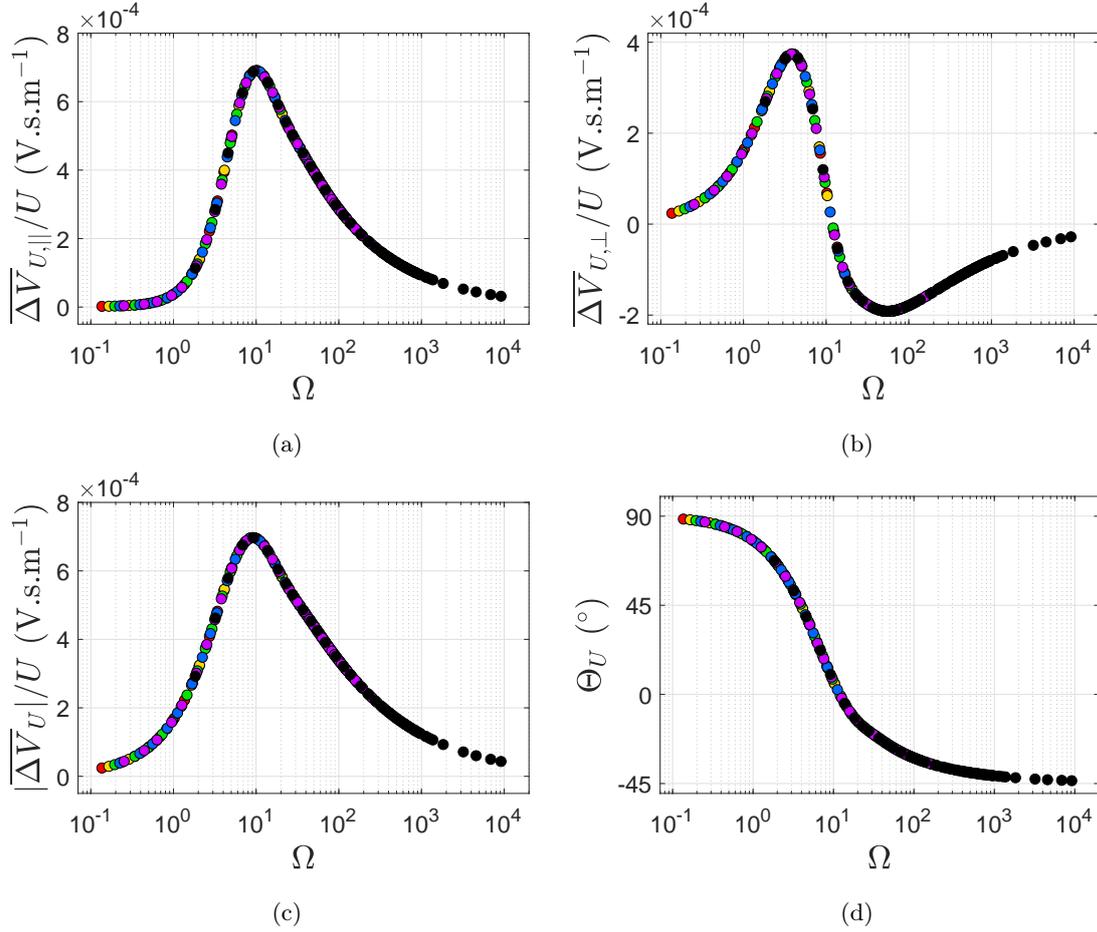


FIGURE 4.17 – Modèle analytique : courbe $\Delta V_U/U$ en fonction du paramètre d'écrantage Ω . Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) calculés pour six conductivités électriques : 2.8×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 3.4×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 4.0×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 4.6×10^6 S.m $^{-1}$ (●), 5.2×10^6 S.m $^{-1}$ (●) et 37.7×10^6 S.m $^{-1}$ (●). Le profil de vitesse sans dimension \mathbf{u} est uniforme et la fréquence varie entre 40 Hz et 200 kHz.

4.7.3 Expression de la différence de tension ΔV_U^*

La différence de tension sans dimension $\Delta V^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$ est également obtenue en appliquant l'équation (4.6) à chaque bobine secondaire. L'expression du numérateur vient d'être déterminée par l'équation (4.7). En utilisant l'hypothèse de faible nombre de Reynolds magnétique effectuée précédemment, c'est à dire $R_m \ll 1$, l'expression du dénominateur vient directement en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 1 en R_m dans l'expression (4.6), soit $V_1 + V_2 = 2f_0(\Omega) + \mathcal{O}(R_m)$. De plus, on remarque comme précédemment que $\Delta V^* = \Delta V_U^*$ dans le cas de deux bobines

secondaires identiques. En utilisant l'équation (4.7), on obtient alors :

$$\Delta V_U^* = R_m \times f_U^*(\Omega, \mathbf{u}), \quad (4.10)$$

où la fonction f_U^* est définie par $f_U^*(\Omega, \mathbf{u}) = f_U(\Omega, \mathbf{u})/f_0(\Omega)$. Comme pour ΔV_U , la tension ΔV_U^* s'exprime par une unique relation, caractérisée par la fonction f_U^* , et dans laquelle interviennent la fréquence f , la vitesse débitante U et la conductivité électrique σ , pour un profil de vitesse \mathbf{u} donné.

La figure 4.18 représente la courbe $\frac{\Delta V_U^*}{R_m} = f_U^*(\Omega, \mathbf{u})$ obtenue à partir des tensions V_1 et V_2 calculées par le modèle analytique, en fonction du paramètre d'écrantage Ω , pour les conductivités utilisées précédemment : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●) et $37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●). Comme précédemment, le profil de vitesse sans dimension \mathbf{u} est uniforme (c'est à dire $|\mathbf{u}| = 1$) et la fréquence varie entre 40 Hz et 200 kHz pour chaque conductivité. On constate que la tension $\Delta V_U^*/R_m$ appartient à une courbe unique définie par la relation (4.10), pour toutes les fréquences, vitesses débitantes et conductivités électriques dans la limite $R_m \ll 1$. Le palier observé aux basses fréquences sur la composante en phase (a) et le module (c) est ici clairement visible pour $\Omega \lesssim 1$.

Sur la figure 4.18a, la zone grisée indique la plage de variation du paramètre d'écrantage Ω correspondant à la plage de conductivité électrique considérée ($2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ à $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$), à fréquence fixée. Nous utilisons ici la fréquence critique $f_c = 1.3 \text{ kHz}$ pour laquelle les courbes $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}^*$ s'intersectent en un même point (voir figure 4.15a). Pour ces valeurs de conductivités et de fréquence, le paramètre d'écrantage Ω correspondant varie donc entre 4.5 et 8.3 dans cette zone. De la même manière, les zones grisées sur les figures 4.18b et 4.18c indiquent les plages du paramètre d'écrantage correspondant aux fréquences critiques de $\overline{\Delta V_{U,\perp}}^*$ et $|\overline{\Delta V_U}|^*$ ($f_c = 5.3 \text{ kHz}$ et $f_c = 3.6 \text{ kHz}$ respectivement, voir figures 4.15b et 4.15c), pour lesquelles une intersection des courbes est observée sur la plage de conductivité considérée. Le paramètre d'écrantage varie alors entre 18.3 et 34.0 pour $\overline{\Delta V_{U,\perp}}^*$, et entre 12.4 et 23.1 pour $|\overline{\Delta V_U}|^*$. Dans les trois cas, on remarque que la zone d'intersection est située dans la plage de paramètre d'écrantage Ω pour laquelle la pente est maximale (en valeur absolue). Une intersection des courbes $\overline{\Delta V_{U,\parallel}}^*$, $\overline{\Delta V_{U,\perp}}^*$ et $|\overline{\Delta V_U}|^*$ est a priori possible pour n'importe quelle plage de conductivité correspondant à cette plage de Ω dite « critique », à laquelle est associée une fréquence « critique » d'intersection. Plus la conductivité est élevée, plus l'intersection des courbes apparaît à une fréquence d'intersection faible (pour rester dans la plage de Ω critique).

Pour conclure, la figure 4.18 peut être utilisée pour déterminer la fréquence optimale d'utilisation de l'ECFM, pour laquelle l'incertitude de mesure liée à la température du métal liquide est minimale. En premier lieu, connaissant la plage de température d'utilisation du métal liquide, la plage de conductivité électrique associée doit d'abord être déterminée (à l'aide d'une corrélation par exemple). À fréquence donnée, cette plage de conductivité électrique correspond à une plage du paramètre d'écrantage $\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2$. La plage du paramètre d'écrantage optimale, ou « critique » (correspondant aux zones grisées de la figure 4.18), peut donc être choisie en fixant la fréquence d'utilisation adéquate. Une étude plus approfondie devra cependant prendre en compte les effets du profil de vitesse \mathbf{u} de l'écoulement, ainsi que l'influence de la géométrie de l'ECFM, sur le signal $\Delta V_U^*/R_m$.

4.8 CONCLUSION

À partir des mesures effectuées dans les deux dispositifs expérimentaux (décrits dans le chapitre 2) et des résultats du modèle analytique (présenté dans le chapitre 3), nous avons étudié dans ce

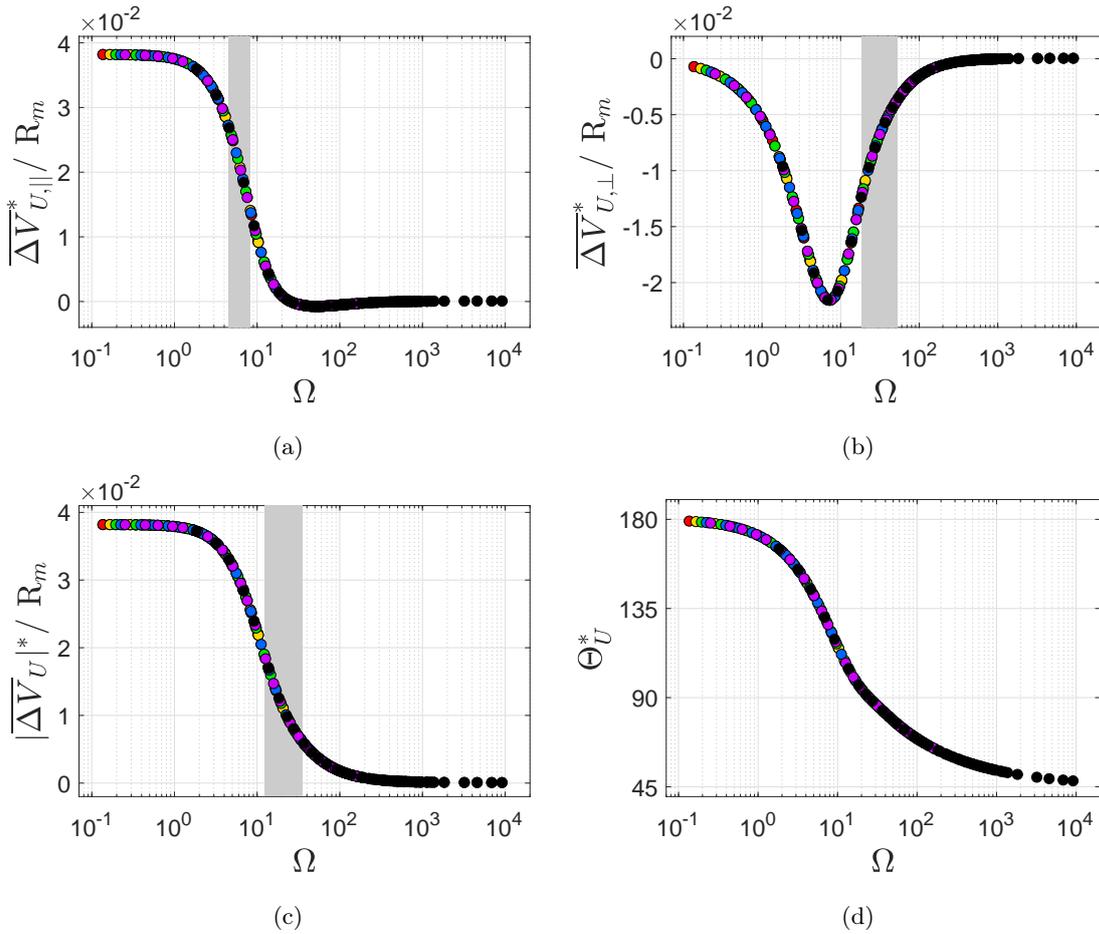


FIGURE 4.18 – Modèle analytique : courbe $\Delta V_U^*/R_m$ en fonction du paramètre d'écrantage Ω . Composantes en phase (a), en quadrature (b), module (c) et phase (d) calculés pour six conductivités électriques : $2.8 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $3.4 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $4.6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●), $5.2 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●) et $37.7 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (●). Le profil de vitesse \mathbf{u} est uniforme et la fréquence varie entre 40 Hz et 200 kHz.

chapitre le comportement de la tension ΔV_U générée aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM par la vitesse du métal liquide. Les différents paramètres de l'étude sont la fréquence du champ électromagnétique f , la conductivité électrique du métal σ , la vitesse débitante U et le profil de vitesse $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_z$ de l'écoulement.

L'étude en fréquence montre l'existence d'un optimum de fréquence, pour lequel la mesure de ΔV_U est maximale. Dans notre configuration, cet optimum de fréquence vaut $f \approx 2 \text{ kHz}$ pour la composante en phase $\Delta V_{U,\parallel}$ et le module $|\Delta V_U|$, et $f \approx 1 \text{ kHz}$ pour la composante en quadrature $\Delta V_{U,\perp}$. La fréquence optimale est en outre légèrement plus faible si l'écoulement est laminaire. Les mesures aux hautes fréquences ($f \gtrsim 2 \text{ kHz}$) sont par ailleurs sujettes à une dispersion non négligeable, et sont relativement faibles par rapport aux mesures basses fréquences car le champ électromagnétique pénètre peu dans le métal. Cette remarque est d'autant plus importante lorsque l'écoulement est laminaire, le champ de vitesse proche de la paroi étant plus faible que pour un écoulement turbulent (à débit égal).

La tension ΔV_U varie linéairement avec la vitesse débitante U pour un profil de vitesse \mathbf{u} donné. Ce résultat est observé avec le modèle analytique aussi bien qu'avec les mesures des deux

expériences réalisées, et s'explique grâce à une étude de similitude dans la limite des faibles nombres de Reynolds magnétiques, $R_m \ll 1$.

La conductivité électrique σ joue un rôle analogue à celui de la fréquence $f = \omega/2\pi$, par l'intermédiaire du paramètre d'écrantage $\Omega = \mu_0\sigma\omega R^2$. L'étude paramétrique sur σ est effectuée pour la différence de tension usuelle $\Delta V_U = V_1 - V_2$ entre les bobines secondaires, mais également pour la différence de tension adimensionnée $\Delta V_U^* = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$. Pour cette dernière, une fréquence optimale, ou « critique », est observée pour laquelle ΔV_U^* ne varie pas en fonction de σ . En reliant la conductivité électrique à la température du métal, nous montrons que cette fréquence critique correspond à celle mesurée dans plusieurs études expérimentales antérieures en sodium liquide à température variable [19, 20, 17, 13].

Finalement, les lois de similitudes des tensions ΔV et ΔV^* sont obtenues à l'aide des équations sans dimension du potentiel vecteur, dans lesquelles interviennent le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0\sigma UR$ et le paramètre d'écrantage $\Omega = \mu_0\sigma\omega R^2$. Pour une géométrie d'ECFM et un profil de vitesse donnés, chacune de ces deux tensions s'exprime alors par une unique relation en fonction de R_m et Ω , ou alternativement en fonction de f , U et σ . La détermination de cette relation permet notamment de prévoir les plages de fréquence optimales pour mesurer ΔV et ΔV^* , dépendant entre autres du métal liquide utilisé.

PERTURBATION DU CHAMP
ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR UNE
INCLUSION

CHAPITRE 5

MODÉLISATION DE L'INFLUENCE D'UNE INCLUSION SUR LA RÉPONSE DE L'ECFM

Ce chapitre présente une modélisation de la perturbation du champ électromagnétique générée par la présence d'une inclusion dans le métal liquide traversant l'ECFM. Dans un premier temps, les perturbations de tension dans l'ECFM relatives à l'inclusion sont calculées à partir de la résolution de l'équation du potentiel vecteur sous une hypothèse de faible paramètre d'écrantage ($\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2 \ll 1$), associée aux basses fréquences (modèle « non inductif »). En fin de chapitre, une première approche d'un modèle « inductif » est présentée dans le but d'étendre notre étude aux hautes fréquences. Les résultats du modèle non inductif ($\Omega \ll 1$) sont comparés aux mesures expérimentales dans le chapitre 6.

Sommaire

5.1	Introduction	102
5.2	Description du système et mise en équation	102
5.3	Modèle non inductif	104
5.3.1	Équation de la perturbation	104
5.3.2	Solution du potentiel vecteur perturbé pour $\Omega_\alpha \ll 1$	105
5.3.3	Tension induite dans les bobines secondaires	105
5.3.4	Approximation du potentiel vecteur perturbé	107
5.3.5	Discussion	110
5.4	Première approche d'un modèle inductif	113
5.5	Conclusion	116

5.1 INTRODUCTION

Lorsque la bobine primaire de l'ECFM est alimentée en courant alternatif, un champ électromagnétique variable excite le métal liquide traversant les bobines et génère des courants induits, ou courants de Foucault, dans le métal du fait de l'induction électromagnétique. La présence d'une inclusion isolante à l'intérieur du métal, telle qu'une bulle, modifie la distribution des courants induits et incidemment la distribution du champ électromagnétique. Par suite, la perturbation du champ relative à la présence de l'inclusion engendre une différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, dont la mesure permet de détecter l'inclusion et de caractériser ses propriétés géométriques (taille et position notamment).

L'objectif de ce chapitre est de déterminer analytiquement la perturbation du champ électromagnétique par une inclusion isolante transportée par l'écoulement de métal liquide. Un modèle dit « non inductif », car valable pour un faible paramètre d'écrantage ($\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2 \ll 1$) et donc associé aux basses fréquences, est développé à partir de la résolution de l'équation du potentiel vecteur \mathbf{A} (défini à partir du champ magnétique \mathbf{B} par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). La tension ΔV_α relative à la présence de l'inclusion est ensuite calculée à partir de la perturbation du flux magnétique traversant les bobines secondaires de l'ECFM.

La mise en équation du potentiel vecteur \mathbf{A} est décrite dans la section 5.2. La perturbation du potentiel vecteur relative à la présence de l'inclusion est résolue sous une hypothèse de faible paramètre d'écrantage dans la section 5.3. Une solution approchée de la perturbation est également développée dans cette section. Dans la section 5.4, une première approche d'un modèle « inductif » est brièvement présentée, dans le but de décrire le comportement de la perturbation aux hautes fréquences.

5.2 DESCRIPTION DU SYSTÈME ET MISE EN ÉQUATION

Cette section développe la mise en équation du potentiel vecteur appliquée au système suivant. Un liquide conducteur s'écoule longitudinalement à une vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ dans un tube cylindrique infiniment long, de rayon intérieur R . Une inclusion, électriquement isolante, est advectée par l'écoulement à la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}_\alpha)$ où \mathbf{r}_α est la position du centre de l'inclusion. À l'extérieur du tube, une bobine primaire P coaxiale au tube est alimentée par une densité de courant $\mathbf{J}_S = \widehat{\mathbf{J}}_S e^{j\omega t}$ de pulsation ω , générant un champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) , où ϕ est le potentiel scalaire et \mathbf{A} est le potentiel vecteur. Deux bobines secondaires S_1 et S_2 sont situées de part et d'autre de la bobine primaire. La différence de tensions aux bornes des bobines secondaires, notée ΔV , est la valeur à déterminer. La figure 5.1 décrit le système.

Sous les mêmes hypothèses que celles effectuées dans le précédent modèle théorique (chapitre 3), le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur \mathbf{A} obéissent à nouveau aux équations (3.1a) et (3.1b) (page 64). Maintenant, $\mathbb{1}_C$ est la fonction caractéristique du domaine C occupé par le conducteur (ici le cylindre infini auquel on retire le volume de l'inclusion) et $\mathbb{1}_S$ la fonction caractéristique du domaine S occupé par la source de courant (ici la bobine primaire). Remarquons que la fonction caractéristique $\mathbb{1}_C$ n'est pas constante dans le temps car l'inclusion est advectée par l'écoulement. Les équations adimensionnelles de ϕ et \mathbf{A} sont obtenues avec les mêmes paramètres d'échelle que ceux définis précédemment, dans l'équation (3.4) (page 65), et sont données par (3.5a) et (3.5a). On les rappelle ici :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \left(\nabla \phi + \Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{R}_m \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (5.1a)$$

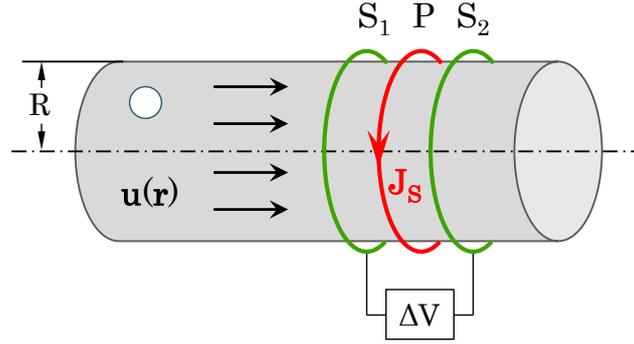


FIGURE 5.1 – Schéma de l'écoulement de métal liquide traversant l'ECFM, et dans lequel une inclusion est advectée.

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C R_m \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (5.1b)$$

Les ordres de grandeur du nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0 \sigma U R$ et du paramètre d'écrantage $\Omega = \mu_0 \sigma \omega R^2$ considérés dans l'étude, donnés dans l'annexe A (page A.2), permettent de faire les hypothèses suivantes :

$$R_m \ll \Omega \quad \text{et} \quad R_m \ll 1. \quad (5.2)$$

La première hypothèse correspond à une séparation d'échelle entre le temps advectif R/U (temps long) et la période du champ oscillant $2\pi/\omega$ (temps court). Cette hypothèse permet de simplifier la résolution des équations (5.1a) et (5.1b). Les variations temporelles de la fonction caractéristique $\mathbb{1}_C$, liées à l'advection de l'inclusion, peuvent en effet être négligées à l'échelle de temps $2\pi/\omega$. Avec la seconde hypothèse, les expansions asymptotiques lorsque $R_m \rightarrow 0$ s'écrivent $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \mathcal{O}(R_m)$ et $\phi = \phi^0 + \mathcal{O}(R_m)$. En négligeant les termes en $\mathcal{O}(R_m)$, les équations (5.1a) et (5.1b) deviennent :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \left(\nabla \phi + \Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (5.3a)$$

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (5.3b)$$

Sachant qu'aucun potentiel électrique ϕ n'est imposé aux frontières et qu'on pose $\phi \rightarrow 0$ à l'infini, on déduit immédiatement que $\phi = 0$ en tout point de l'espace. Le terme $\nabla \phi$ étant donc nul, l'équation du potentiel vecteur est alors une équation de diffusion avec un terme source :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S. \quad (5.4)$$

En utilisant l'hypothèse de séparation d'échelle, les variations temporelles du potentiel vecteur \mathbf{A} aux temps longs (à l'échelle $R/U \gg \mathcal{O}(1)$) sont considérées négligeables par rapport à celles aux temps courts (à l'échelle $2\pi/\omega \sim \mathcal{O}(1)$), c'est à dire $\partial \mathbf{A} / \partial t = j \mathbf{A}$ en posant $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{jt}$. L'équation du potentiel vecteur devient :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C j \Omega \mathbf{A} = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S. \quad (5.5)$$

On identifie une équation de Helmholtz inhomogène, le terme source dans le membre de droite correspondant à la densité de courant dans la bobine primaire.

Une méthode de résolution de l'équation (5.5) consiste à nouveau à déterminer la fonction de Green de l'équation dans tout l'espace. Les fonctions de Green de l'équation de Helmholtz (5.5) ont cependant une forme explicite pour certaines géométries particulières, telles que les géométries

cartésiennes, cylindriques ou sphériques [45]. Dans le problème considéré, le domaine conducteur C associe une géométrie sphérique (l'inclusion) à une géométrie cylindrique (le tube dans lequel s'écoule le métal liquide). En conséquence, la méthode des fonctions de Green n'est pas directement applicable à l'équation (5.5).

Le potentiel vecteur \mathbf{A} peut néanmoins être décomposé en un champ non perturbé \mathbf{A}_0 et un champ perturbé \mathbf{A}_α , c'est à dire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\alpha, \quad (5.6)$$

où la composante non perturbée \mathbf{A}_0 est déterminée dans le chapitre 3. La résolution de la composante perturbée \mathbf{A}_α est développée dans la section 5.3 en utilisant une approche « non inductive », c'est à dire en négligeant le terme inductif dans l'équation du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α . Ce dernier obéit alors à une équation de Poisson dont la fonction de Green est connue indépendamment de la géométrie du système. L'hypothèse non inductive réduit cependant la validité de la solution à une inclusion de petite taille proche de la paroi, et un champ à basse fréquence. Une première approche d'un modèle « inductif », tenant compte du terme inductif dans l'équation de \mathbf{A}_α , est présentée dans la section 5.4.

5.3 MODÈLE NON INDUCTIF

5.3.1 Équation de la perturbation

Il s'agit dans un premier temps de déterminer l'équation du potentiel vecteur perturbé $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$. On connaît premièrement les équations des champs \mathbf{A} et \mathbf{A}_0 , à savoir respectivement :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C j \Omega \mathbf{A} = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (5.7a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0 - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega \mathbf{A}_0 = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (5.7b)$$

où le terme de vitesse en R_m est négligé. Ici, on rappelle que C est le domaine occupé par le conducteur, c'est à dire un cylindre infini auquel on retire le volume de l'inclusion, et $\mathbb{1}_C$ est sa fonction caractéristique. On définit de plus le domaine C_0 occupé par le conducteur en l'absence d'inclusion, c'est à dire simplement le cylindre infini. Sa fonction caractéristique est notée $\mathbb{1}_{C_0}$.

L'équation (5.7b) est d'abord soustraite à l'équation (5.7a), ce qui donne :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha - \mathbb{1}_C j \Omega \mathbf{A} + \mathbb{1}_{C_0} j \Omega \mathbf{A}_0 = 0. \quad (5.8)$$

Notons que l'échelle de longueur utilisée dans l'équation (5.8) est celle intervenant dans les équations de \mathbf{A} (5.7a) et \mathbf{A}_0 (5.7b), c'est à dire le rayon du tube R . Cette échelle de longueur n'est pas forcément adaptée pour l'équation du potentiel vecteur perturbé $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$. On peut en effet pressentir que \mathbf{A}_α est maximal au voisinage de l'inclusion (à des distances de l'ordre du rayon de l'inclusion R_α) et tend vers zéro loin de l'inclusion (à des distances très supérieures à R_α). Par la suite, on utilise alors comme échelle de longueur le rayon de l'inclusion R_α . Ce changement d'échelle revient à multiplier l'équation (5.8) par R_α^2/R^2 . Avec l'équation (5.8) et sachant que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\alpha$, on obtient l'équation du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha - \mathbb{1}_C j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha = -\mathbb{1}_B j \Omega_\alpha \mathbf{A}_0, \quad (5.9)$$

où $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2 = \frac{R_\alpha^2}{R^2} \Omega$ est le paramètre d'écrantage associé à \mathbf{A}_α , B est le domaine correspondant à l'inclusion isolante et $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{C_0} - \mathbb{1}_C$ est sa fonction caractéristique.

Le champ perturbé \mathbf{A}_α obéit ainsi à une équation de Helmholtz de la même manière que les champs \mathbf{A} et \mathbf{A}_0 . En utilisant la loi d'Ohm, le terme source $-\mathbb{1}_B j \Omega_\alpha \mathbf{A}_0$ dans le membre de droite peut être relié à la densité de courant induite dans le liquide conducteur en l'absence d'inclusion par $\mathbf{j}_0 = -j \Omega_\alpha \mathbf{A}_0$. L'équation de \mathbf{A}_α se réécrit alors :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha - \mathbb{1}_C j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha = \mathbb{1}_B \mathbf{j}_0. \quad (5.10)$$

Le champ perturbé \mathbf{A}_α est ainsi généré par une densité de courant source $-\mathbf{j}_0$ dans le domaine de l'inclusion B . Il est à noter que le terme source $\mathbb{1}_B \mathbf{j}_0$ dans le membre de droite de l'équation (5.10) a un signe opposé à la densité de courant source, ici $-\mathbf{j}_0$. La densité de courant \mathbf{j}_0 doit être calculée au préalable à partir de la solution du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 , présentée dans le chapitre 3. Le terme $-\mathbb{1}_C j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha$ correspond par ailleurs à la perturbation des courants de Foucault par la présence de l'inclusion. Par la loi d'Ohm, on peut en effet définir $\mathbf{j}_\alpha = -j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha$ cette densité de courant perturbée, induite dans le domaine C occupé par le conducteur.

5.3.2 Solution du potentiel vecteur perturbé pour $\Omega_\alpha \ll 1$

L'expansion asymptotique du champ perturbé \mathbf{A}_α lorsque $\Omega_\alpha \rightarrow 0$ s'écrit $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^0 + \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha^1 + \mathcal{O}(\Omega_\alpha^3)$, dans laquelle on remarque que $\mathbf{A}_\alpha^0 = \mathcal{O}(\Omega_\alpha)$ et $\mathbf{A}_\alpha^1 = \mathcal{O}(\Omega_\alpha)$. On injecte cette expression dans l'équation (5.10). En se limitant aux termes à l'ordre 0 en Ω_α , on obtient une équation de Poisson pour \mathbf{A}_α^0 ,

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha^0 = \mathbb{1}_B \mathbf{j}_0. \quad (5.11)$$

La solution exacte de l'équation (5.11), sous forme intégrale, est directement connue par la fonction de Green de l'équation de Poisson. Le champ perturbé à l'ordre 0 en Ω_α s'obtient alors par :

$$\mathbf{A}_\alpha^0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_B \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'), \quad (5.12)$$

où \mathbf{r} est la position où le champ \mathbf{A}_α^0 est calculé, \mathbf{r}' est une position quelconque dans le domaine de l'inclusion B et $dV(\mathbf{r}')$ est un élément de volume situé en \mathbf{r}' . On rappelle que la densité de courant \mathbf{j}_0 induite dans le liquide conducteur sans inclusion est déterminée dans le chapitre 3, et s'écrit $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = j_0(r', z') \mathbf{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Au regard de l'expression de $j_0(r', z')$, la résolution de l'intégrale volumique sur B est réalisée numériquement en utilisant un maillage sphérique. L'élément de volume s'exprime alors par $dV(\mathbf{r}') = \rho'^2 \sin \theta' d\rho' d\theta' d\varphi'$, où $\rho' \in [0, R_\alpha]$, $\theta' \in [0, \pi]$ et $\varphi' \in [0, 2\pi]$. Le nombre d'éléments de volume $dV(\mathbf{r}')$ constituant le maillage de B est noté N^3 . La figure 5.2 montre l'étude de convergence du module et de l'argument de la norme du potentiel vecteur, $A_\alpha^0 = |\mathbf{A}_\alpha^0|$, en fonction de N^3 . L'étude de convergence est effectuée pour une inclusion de rayon $R_\alpha = 2.5$ mm située sous la bobine primaire à une distance de la paroi $h = 2.5$ mm, avec une fréquence $f = 20$ kHz. Le maillage doit en effet être plus raffiné pour les inclusions les plus volumineuses situées à proximité de la paroi et pour les hautes fréquences. Sous ces conditions, les gradients de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ sont a priori les plus importants dans le domaine B . Une convergence satisfaisante est atteinte pour $N^3 = 18 \times 18 \times 18$ éléments de volumes.

5.3.3 Tension induite dans les bobines secondaires

À partir du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α^0 (5.12), on peut calculer la différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires relative à la présence de l'inclusion, et la comparer aux mesures expérimentales. La première étape consiste à calculer la force électromotrice (f.é.m.) ε_α générée

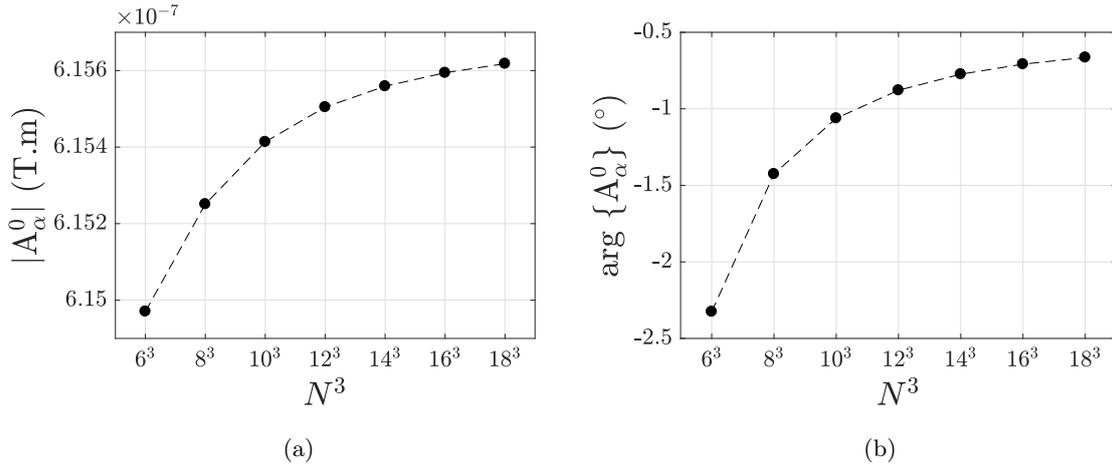


FIGURE 5.2 – Étude de convergence de la norme du potentiel vecteur $\mathbf{A}_\alpha^0 = |\mathbf{A}_\alpha^0|$, en fonction du nombre d'éléments de volume N^3 maillant le volume de l'inclusion B . (a) Module de \mathbf{A}_α^0 . (b) Argument de \mathbf{A}_α^0 .

dans une spire quelconque d'une des bobines secondaires. Les f.é.m. dans chaque spire sont ensuite sommées pour obtenir les tensions $V_{\alpha,1}$ et $V_{\alpha,2}$ aux bornes de chaque secondaire puis la différence de tension $\Delta V_\alpha = V_{\alpha,1} - V_{\alpha,2}$.

La f.é.m. ε_α générée dans une spire par $\mathbf{A}_\alpha^0 = \hat{\mathbf{A}}_\alpha^0 e^{jt}$ se calcule par la loi d'induction de Faraday, qu'on écrit ici sans dimension :

$$\varepsilon_\alpha = - \oint \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha^0}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = -j \oint \mathbf{A}_\alpha^0 \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.13)$$

En introduisant la solution exacte (5.12) dans l'équation (5.13), on obtient :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{j}{4\pi} \oint \iiint_B \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.14)$$

Comme il a été évoqué précédemment, l'intégrale sur le volume B associé à l'inclusion est réalisée numériquement. L'intégrale curviligne le long de la spire, associée à l'élément de spire $d\mathbf{r}$, est également réalisée numériquement. Notons qu'à l'aide d'une symétrie, il est possible d'effectuer l'intégrale sur une demi-spire. Dans ce cas, il faut 16 éléments de spire $d\mathbf{r}$ pour que l'intégrale curviligne sur la demi-spire soit convergée.

La tension générée aux bornes d'une bobine secondaire est déduite par sommation des f.é.m. ε_α dans chaque spire de la bobine. Les spires sont distribuées sur la longueur L_s de chaque couche d'enroulement. Le nombre de spires par unité de longueur n_s est déterminé par la méthode présentée dans la sous-section 2.5.2 du chapitre 2. La sommation des f.é.m. dans toutes les spires d'une couche est d'abord effectuée par intégration de ε_α sur la longueur L_s . Les f.é.m. dans chaque couche, obtenues après cette intégration, sont ensuite sommées pour calculer la tension générée aux bornes de la bobine secondaire. En sachant que toutes les bobines fabriquées dans les expériences sont composées de 2 couches d'enroulement, la tension $V_{\alpha,1}$ dans la bobine secondaire S_1 s'écrit par exemple :

$$V_{\alpha,1} = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi, \quad (5.15)$$

où r_s^i est le rayon d'une spire appartenant à la couche d'enroulement i , et z est la distance entre le milieu de la bobine et le centre de l'inclusion, comme représenté sur la figure 5.3. Notons que le

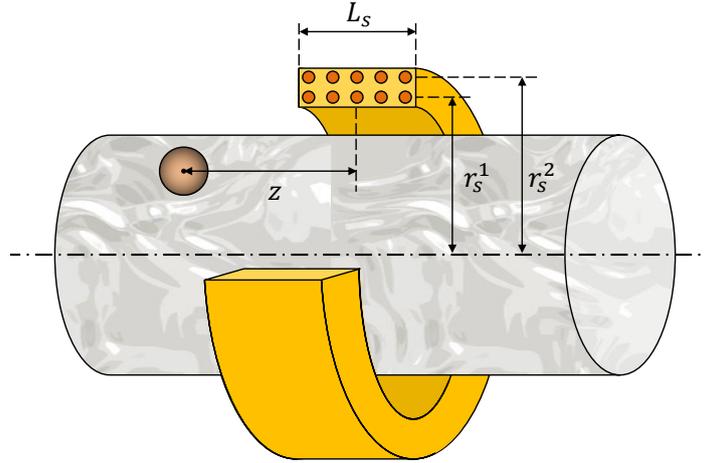


FIGURE 5.3 – Géométrie utilisée pour le calcul de la tension perturbée aux bornes d'une bobine secondaire.

calcul de la tension dans la bobine secondaire S_2 est identique. La différence de tension entre les bobines secondaires s'obtient finalement par :

$$\Delta V_\alpha = V_{\alpha,1} - V_{\alpha,2}. \quad (5.16)$$

5.3.4 Approximation du potentiel vecteur perturbé

Il est possible d'approcher la solution précédente du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α^0 (5.12) en considérant que la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ est environ uniforme dans le domaine B associé à l'inclusion, c'est à dire $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{cst}$. La figure 5.4 illustre l'approximation. On choisit ici d'approcher $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ par la densité de courant \mathbf{j}_0 calculée à la position du centre de l'inclusion \mathbf{r}_α , i.e. $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)$. On peut pressentir que cette approximation est valide pour les petites inclusions et les basses fréquences, pour lesquelles les gradients de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ dans le domaine B sont les moins importants. La solution précédente (5.12) est alors approchée par :

$$\mathbf{A}_\alpha^0(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)}{4\pi} \times \iiint_B \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'). \quad (5.17)$$



FIGURE 5.4 – Illustrations de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ dans le volume de l'inclusion (a) et de l'approximation uniforme, $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{cst}$ (b).

La résolution analytique de l'intégrale du membre de droite de l'équation (5.17) est décrite par Hamaker [66]. On considère d'abord un point P placé à une distance L du centre de l'inclusion, représenté dans la figure 5.5, tel que $L/R_\alpha = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| > 1$. Le système de coordonnées sphériques

(ρ, θ, φ) centré en P est utilisé par la suite. On définit la surface S_{ABC} , en forme de coupelle, résultant de l'intersection entre la sphère de rayon ρ centrée en P et la sphère représentant l'inclusion B.

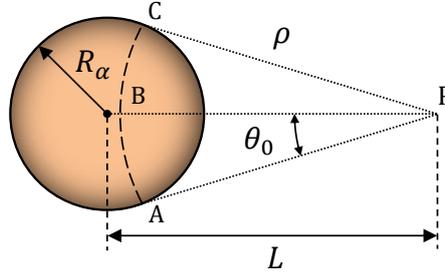


FIGURE 5.5 – Schéma explicatif du calcul du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α^0 , dans le cas de l'approximation uniforme $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{cst}$. Notons qu'ici, les distances R , ρ et L sont homogènes à une longueur.

En notant \mathcal{A} l'aire de S_{ABC} , l'intégrale dans l'équation (5.17) peut alors s'écrire :

$$\iiint_B \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') = \frac{1}{R_\alpha^3} \int_{L-R_\alpha}^{L+R_\alpha} \mathcal{A}(\rho) d\rho. \quad (5.18)$$

Notons que les grandeurs \mathbf{r} , \mathbf{r}' et $dV(\mathbf{r}')$ du membre de gauche sont sans dimension, alors que l'aire $\mathcal{A}(\rho)$ et les longueurs L , R_α^3 et $d\rho$ du membre de droite sont dimensionnées. Pour que l'équation (5.18) soit homogène et sans dimension, l'intégrale du membre de droite est donc divisée par R_α^3 , où le rayon de l'inclusion R_α est utilisé comme échelle de longueur. Pour déterminer l'expression de $\mathcal{A}(\rho)$, on définit d'abord l'angle θ_0 formé par les droites (PA) et (PB). Son expression en fonction des longueurs R_α , ρ et L est déduite du théorème d'Al-Kashi,

$$\cos \theta_0 = \frac{R_\alpha^2 - \rho^2 - L^2}{-2\rho L}. \quad (5.19)$$

L'aire $\mathcal{A}(\rho)$ est alors calculée par :

$$\mathcal{A}(\rho) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi\rho}{L} \left[R_\alpha^2 - (L - \rho)^2 \right]. \quad (5.20)$$

L'expression de $\mathcal{A}(\rho)$ est injectée dans l'équation (5.18). Après intégration sur ρ , en injectant dans l'équation (5.17) et sachant que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| = L/R_\alpha$, on obtient finalement l'approximation du champ perturbé,

$$\mathbf{A}_\alpha^0(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)}{3|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}. \quad (5.21)$$

Connaissant l'approximation du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α^0 par l'équation (5.21), on peut approcher la f.é.m. ε_α (sans dimension) générée dans une spire par la loi de Faraday (5.13). On écrit ici $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha) = j_{0,\alpha} \mathbf{e}_\theta$ la densité de courant à la position du centre de l'inclusion. On obtient d'abord :

$$\varepsilon_\alpha \approx j \frac{j_{0,\alpha}}{3} \oint \frac{\mathbf{e}_\theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.22)$$

Pour calculer la circulation dans l'équation (5.22), on définit un premier système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont l'origine est placée au centre de la spire O. On définit de plus le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) de même origine O, tel que le centre de l'inclusion soit dans

le plan $(O, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, à une distance r_α de l'axe (O, \mathbf{e}_z) et à une hauteur ξ de la spire. Un schéma représente le système dans la figure 5.6. La densité de courant à la position du centre de l'inclusion vaut donc $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha) = j_{0,\alpha} \mathbf{e}_\theta = -j_{0,\alpha} \mathbf{e}_x$. On note par ailleurs r_s le rayon de la spire.

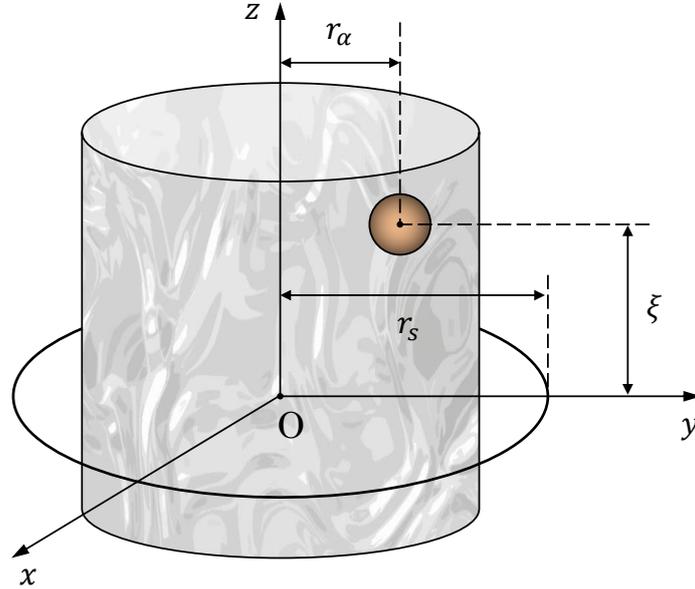


FIGURE 5.6 – Schéma du système : la spire de rayon r_s encercle l'écoulement, l'inclusion est à une hauteur ξ de la spire et excentrée d'une distance r_α . Les systèmes de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et cartésiennes (x, y, z) ont pour origine le centre de la spire O .

Le vecteur élémentaire $d\mathbf{r}$ le long de la spire s'écrit donc $d\mathbf{r} = r_s d\theta \mathbf{e}_\theta$ et le vecteur orthoradial du système cylindrique vaut $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$. De plus, la distance entre le centre de l'inclusion et un point quelconque de la spire vaut $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| = \sqrt{(r_s \sin \theta - r_\alpha)^2 + \xi^2 + (r_s \cos \theta)^2}$. On utilise le changement de variable $\theta = 2\beta - \pi/2$, et on adopte les notations suivantes,

$$S^2 = (r_s + r_\alpha)^2 + \xi^2 \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{4r_s r_\alpha}{S^2}, \quad (5.23)$$

de manière à écrire $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|$ sous la forme $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| = S\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}$. La circulation le long de la spire dans l'équation (5.22) devient alors :

$$\oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \frac{r_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \sin \theta d\theta \quad (5.24)$$

$$= \frac{2r_s}{S} \int_{\beta_0}^{\beta_0 + \pi} \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta, \quad (5.25)$$

où θ_0 et β_0 sont des scalaires quelconques. Pour passer de l'équation (5.24) à l'équation (5.25), on utilise ici la relation $\sin(2\beta - \pi/2) = 2 \sin^2 \beta - 1$ obtenue à partir des identités trigonométriques. En posant $\beta_0 = 0$ et en arrangeant les termes de l'intégrale, on a :

$$\oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{r} = -\frac{2r_s}{k^2 S} \int_0^\pi \frac{(2 - 2k^2 \sin^2 \beta) + (k^2 - 2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta. \quad (5.26)$$

On identifie ici les intégrales elliptiques de première et deuxième espèces, notées respectivement $F(\varphi, k)$ et $E(\varphi, k)$ [67], et définies par :

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad \text{et} \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta, \quad (5.27)$$

où $\varphi = \pi$ dans notre cas, et k est le module elliptique. La circulation le long d'une spire dans l'équation (5.22) s'écrit finalement sous une forme explicite,

$$\oint -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{r} = -\frac{2r_s}{k^2 S} \left[2E(\pi, k) + (k^2 - 2)F(\pi, k) \right]. \quad (5.28)$$

En injectant dans l'équation (5.22), on obtient finalement l'approximation de la f.é.m. ε_α générée par le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α^0 ,

$$\varepsilon_\alpha \approx -j \frac{2 \mathbf{j}_{0,\alpha} r_s}{3 k^2 S} \left[2E(\pi, k) + (k^2 - 2)F(\pi, k) \right]. \quad (5.29)$$

Notons qu'il n'y a pas de singularité si $k = 0$, c'est à dire si l'inclusion est au centre de l'écoulement soit $r_\alpha = 0$. En utilisant l'expression de \mathbf{j}_0 calculée dans le chapitre 3, on peut montrer que le développement limité en $r_\alpha \rightarrow 0$ du rapport $\mathbf{j}_{0,\alpha}/k^2$ tend vers un scalaire constant. Sachant que $F(\varphi, k) \sim \varphi$ et $E(\varphi, k) \sim \varphi$ pour $k \rightarrow 0$, le membre de droite de l'équation (5.29) s'annule alors, et la f.é.m. ε_α générée par la présence de l'inclusion est simplement nulle dans ce cas. Ce résultat est cohérent : la densité de courant étant nulle au centre de l'écoulement, la f.é.m. ε_α générée par la présence de l'inclusion est forcément nulle aussi.

Enfin, de la même manière que pour la solution précédente, la tension dans une bobine secondaire est calculée par sommation des f.é.m. ε_α dans chaque spire. En reprenant l'équation (5.15), la tension $V_{\alpha,1}$ dans la bobine secondaire S_1 s'exprime par exemple :

$$V_{\alpha,1} = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi, \quad (5.30)$$

où ξ est la distance axiale entre une spire quelconque de la bobine et le centre de l'inclusion, et r_s^i est le rayon d'une spire de la couche d'enroulement i , comme représenté dans la figure 5.6. Par ailleurs, n_s est le nombre de spires par unité de longueur, et z est la distance entre le milieu de la bobine et le centre de l'inclusion, comme représenté sur la figure 5.3. Le calcul de la tension dans la bobine secondaire S_2 est identique. La différence de tension entre les bobines secondaires s'obtient donc par :

$$\Delta V_\alpha = V_{\alpha,1} - V_{\alpha,2}. \quad (5.31)$$

5.3.5 Discussion

Un récapitulatif des résultats du modèle non inductif est présenté dans le tableau 5.1 pour la solution exacte, et dans le tableau 5.2 pour la solution approchée. On rappelle que toutes les expressions sont ici sans dimension, l'échelle de longueur utilisée étant le rayon de l'inclusion R_α . Les facteurs d'échelle permettant l'obtention des grandeurs à dimensions sont alors :

$$\begin{aligned} \text{Potentiel vecteur } \mathbf{A}_\alpha &\rightarrow \mu_0 J_S R_\alpha^2, \\ \text{F.é.m. } \varepsilon_\alpha &\rightarrow \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3, \\ \text{Tension } V_\alpha &\rightarrow \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3. \end{aligned}$$

À partir de la solution approchée, la différence de tension ΔV_α sans dimension peut s'exprimer simplement en fonction de la pulsation ω et de la position (h, z) de l'inclusion. Nous définissons ici $h = R - r_\alpha$ la distance entre le centre de l'inclusion et la paroi du tube de galinstan. Dans l'expression de la f.é.m. générée dans une spire (5.29),

$$\varepsilon_\alpha \approx -j \frac{2 \mathbf{j}_{0,\alpha} r_s}{3 k^2 S} \left[2E(\pi, k) + (k^2 - 2)F(\pi, k) \right],$$

on remarque dans un premier temps que :

TABLEAU 5.1 – Récapitulatif des résultats de la solution exacte du modèle non inductif.

Potentiel vecteur perturbé	$\mathbf{A}_\alpha^0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_B \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dV(\mathbf{r}')$
F.é.m. générée dans une spire	$\varepsilon_\alpha = -j \oint \mathbf{A}_\alpha^0 \cdot d\mathbf{r}$
Tension générée dans une bobine	$V_\alpha = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi$

TABLEAU 5.2 – Récapitulatif des résultats de la solution approchée du modèle non inductif.

Potentiel vecteur perturbé	$\mathbf{A}_\alpha^0(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)}{3 \mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha }$
F.é.m. générée dans une spire	$\varepsilon_\alpha \approx -j \frac{2j_{0,\alpha} r_s}{3k^2 S} \left[2E(\pi, k) + (k^2 - 2)F(\pi, k) \right]$
Tension générée dans une bobine	$V_\alpha = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi$

- S et k dépendent de r_s , h et ξ , par leur définition (5.23) ;
- $j_{0,\alpha}$ peut s'exprimer par $j_{0,\alpha} = \widehat{j}_{0,\alpha} e^{jt}$, où $\widehat{j}_{0,\alpha}$ dépend de la pulsation sans dimension $\omega = 1$ et de la position de l'inclusion (h, z) .

La tension V_α dans une bobine secondaire quelconque est ensuite déterminée par sommation des f.é.m. ε_α dans chaque spire de la bobine, donnée par l'équation (5.30). Pour la bobine secondaire S_1 , on l'écrit par exemple :

$$V_{\alpha,1} = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi, \quad (5.32)$$

où r_s^i est le rayon d'une spire de la couche d'enroulement i et z est la distance entre le milieu de la bobine et le centre de l'inclusion. On remarque que les dépendances en r_s et ξ disparaissent après l'intégration. La tension V_α dépend alors :

- de la pulsation ω ;
- de la position de l'inclusion (h, z) ;
- de la géométrie de la bobine secondaire : longueur L_s , nombre de spires par unité de longueur n_s et rayon r_s^i des spires de chaque couche d'enroulement i ;
- du temps, par l'exponentielle e^{jt} contenue implicitement dans ε_α .

Cette observation est valable pour les deux bobines secondaires S_1 et S_2 . Si de plus on considère que la géométrie des deux bobines est fixée, la différence de tension $\Delta V_\alpha = V_{\alpha,1} - V_{\alpha,2}$ (sans dimension) peut s'exprimer par :

$$\Delta V_\alpha \approx f_\omega(h, z)e^{jt}, \quad (5.33)$$

où la fonction $f_\omega(h, z)$ est obtenue par le calcul des tensions $V_{\alpha,1}$ et $V_{\alpha,2}$ dans les deux bobines secondaires. Il est à noter que $f_\omega(h, z)$ est une fonction à valeurs complexes, du fait du caractère complexe de la densité de courant $\hat{j}_{0,\alpha}$. Cette dernière s'obtient en effet par la loi d'Ohm, après résolution du potentiel vecteur \mathbf{A}_0 qui lui-même est complexe, par la forme de son équation (5.7b).

La différence de tension ΔV_α en Volts est obtenue par le facteur d'échelle $\mu_0\omega J_S R_\alpha^3$ et le changement d'échelle temporelle $t \rightarrow \omega t$, soit :

$$\Delta V_\alpha \approx \mu_0\omega J_S R_\alpha^3 f_\omega(h, z)e^{j\omega t}. \quad (5.34)$$

On remarque que la différence de tension ΔV_α est proportionnelle au volume de l'inclusion. Cette observation est cohérente par rapport aux résultats expérimentaux de Kumar *et al.* [16], pour lesquels une linéarité entre ΔV_α et le taux de vide α est identifiée (dans la limite $\alpha \leq 4\%$). Une fois déterminée pour une géométrie d'ECFM et une pulsation ω donnée, la fonction $f_\omega(h, z)$ sans dimension permet ainsi d'obtenir directement la tension perturbée ΔV_α relative à la présence d'une inclusion sphérique de rayon R_α à une position (h, z) .

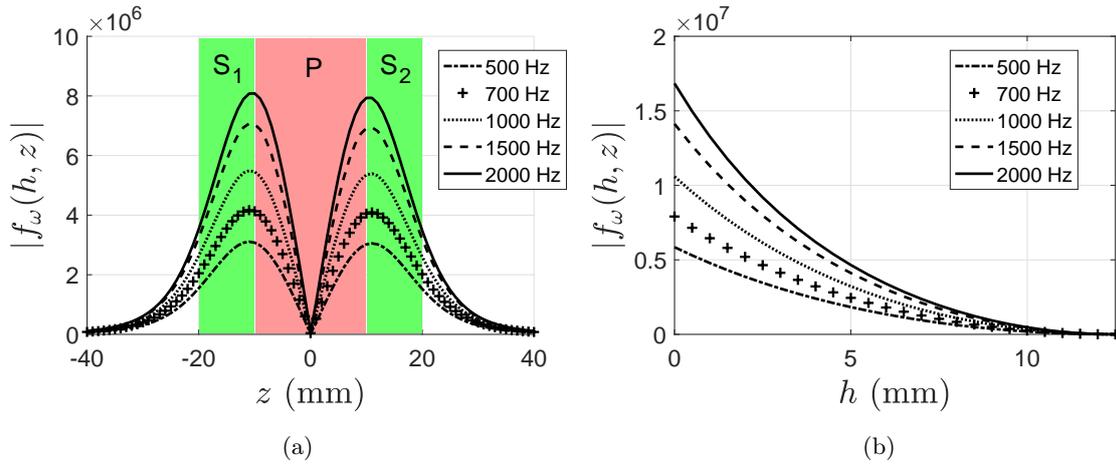


FIGURE 5.7 – Module de la fonction $f_\omega(h, z)$, calculée à plusieurs fréquences $f = \omega/2\pi$ pour la géométrie de la première étude expérimentale (sous-section 2.3.1 du chapitre 2). (a) Module $|f_\omega(h, z)|$ en fonction de la position axiale de l'inclusion z , située à une profondeur fixe $h = 3$ mm de la paroi du tube. (b) Module $|f_\omega(h, z)|$ en fonction de la profondeur h de l'inclusion, située sous une des extrémités de la bobine primaire, soit $z = \pm 10$ mm. Les positions axiale z et radiale h sont ici converties en dimensionnel afin de correspondre aux dimensions de l'expérience.

Notons que le signal $V_S(t)$ mesuré expérimentalement par le lock-in amplifieur correspond à la partie réelle de la tension ΔV_α calculée par (5.34), c'est à dire $V_S(t) = \text{Re}\{\Delta V_\alpha\}$. Le processus de démodulation effectué par le lock-in amplifieur est décrit dans le chapitre 2, section 2.2. En reprenant les notations de cette section, le signal mesuré s'écrit donc :

$$V_S(t) \approx \mu_0\omega J_S R_\alpha^3 \left[\text{Re}\{f_\omega(h, z)\} \cos(\omega t) - \text{Im}\{f_\omega(h, z)\} \sin(\omega t) \right], \quad (5.35)$$

ou alternativement,

$$V_S(t) \approx \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 |f_\omega(h, z)| \cos(\omega_S t + \Theta_S) \quad \text{avec} \quad \Theta_S = \arg \left\{ f_\omega(h, z) \right\}, \quad (5.36)$$

où $|f_\omega(h, z)|$ est le module de la fonction complexe $f_\omega(h, z)$. La première étape de la démodulation, décrite par l'équation (2.1) de la section 2.2.1, consiste à multiplier le signal mesuré $V_S(t)$ par le signal de référence $V_R(t) = \sqrt{2}e^{-j\omega_R t}$. Dans notre cas, la pulsation de référence ω_R correspond à la pulsation ω du courant dans la bobine primaire. De plus, la pulsation ω_S du signal mesuré $V_S(t)$ correspond également à la pulsation ω , du fait de la séparation des échelles de temps R/U et $2\pi/\omega$ effectuée précédemment. Le signal $V_S(t) \times V_R(t)$ est traité dans un filtre passe-bas dans la seconde étape de démodulation. En sortie du filtre, le signal démodulé s'écrit $X + jY$ par l'équation (2.2), où X et Y sont les composantes en phase et en quadrature du signal. Dans notre cas, nous utilisons les notations $X = \Delta V_{\alpha,||}$ pour la composante en phase, et $Y = \Delta V_{\alpha,\perp}$ pour la composante en quadrature, telles que :

$$\Delta V_{\alpha,||} \approx \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 \operatorname{Re} \left\{ f_\omega(h, z) \right\}, \quad (5.37a)$$

$$\Delta V_{\alpha,\perp} \approx \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 \operatorname{Im} \left\{ f_\omega(h, z) \right\}. \quad (5.37b)$$

On définit de plus le module $|\Delta V_\alpha| = \sqrt{\Delta V_{\alpha,||}^2 + \Delta V_{\alpha,\perp}^2}$, qui peut s'exprimer à l'aide des équations (5.37a) et (5.37b) par :

$$|\Delta V_\alpha| \approx \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 |f_\omega(h, z)|, \quad (5.38)$$

La figure 5.7 montre l'allure du module $|f_\omega(h, z)|$ en fonction des positions axiale et radiale de l'inclusion dans le tube, pour plusieurs pulsations ω . La géométrie correspond à celle de la première étude expérimentale (sous-section 2.3.1 du chapitre 2). On remarque que le maximum en z du module $|f_\omega(h, z)|$ se situe à $z \approx \pm L_p/2$, c'est à dire lorsque l'inclusion est sous une des extrémités de la bobine primaire. Par ailleurs, le module $|f_\omega(h, z)|$ décroît avec la profondeur de l'inclusion h et s'annule lorsque l'inclusion est au centre du tube ($h = 12.5$ mm) où $j_{0,\alpha} = 0$.

5.4 PREMIÈRE APPROCHE D'UN MODÈLE INDUCTIF

Nous présentons dans cette partie le principe de la seconde approche théorique, dans laquelle le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α peut être déterminé sans effectuer l'hypothèse non inductive $\Omega_\alpha \ll 1$. La première approche d'une résolution de \mathbf{A}_α est proposée ici ; la résolution complète nécessite cependant d'être réalisée dans une étude ultérieure. Le terme inductif étant cette fois pris en compte, ce modèle « inductif » permettra d'étendre la validité de la solution aux hautes fréquences, pour des inclusions de taille quelconque situées à une position quelconque dans l'écoulement de métal liquide.

À partir des équations du potentiel vecteur total \mathbf{A} (5.7a) et du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 (5.7b), l'équation du potentiel vecteur perturbé $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$ est d'abord obtenue par :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega \mathbf{A}_\alpha = -\mathbb{1}_B j \Omega (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\alpha), \quad (5.39)$$

où on rappelle que C_0 correspond au domaine occupé par le métal en l'absence d'inclusion (le cylindre infini) et B correspond au domaine occupé par l'inclusion. Les fonctions caractéristiques respectives sont ici notées $\mathbb{1}_{C_0}$ et $\mathbb{1}_B$. Cette équation est analogue à celle utilisée par Bowler pour déterminer la perturbation du champ électrique relative à la présence d'un défaut dans un conducteur [46]. Dans l'équation (5.39), le membre de droite est alors interprété comme un terme source linéaire en \mathbf{A}_α .

En rappelant que $\mathbf{A}_0 = A_0 \mathbf{e}_\theta$ d'après le chapitre 3 (page 66), l'expression en coordonnées cylindriques de l'équation (5.39) donne :

$$\nabla^2 A_\alpha^r - \frac{A_\alpha^r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha^\theta}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega A_\alpha^r = -\mathbb{1}_B j \Omega A_\alpha^r, \quad (5.40a)$$

$$\nabla^2 A_\alpha^\theta - \frac{A_\alpha^\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha^r}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega A_\alpha^\theta = -\mathbb{1}_B j \Omega (A_0 + A_\alpha^\theta), \quad (5.40b)$$

$$\nabla^2 A_\alpha^z - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega A_\alpha^z = -\mathbb{1}_B j \Omega A_\alpha^z, \quad (5.40c)$$

où A_α^r , A_α^θ et A_α^z sont les composantes en r , θ et z du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α et où le Laplacien scalaire est donné par :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.41)$$

L'équation de la composante A_α^z (5.40c) étant indépendante du potentiel vecteur non perturbé A_0 et sachant que $A_\alpha^z \rightarrow 0$ à l'infini, on déduit que cette composante est toujours nulle, soit $A_\alpha^z = 0$. Les équations des composantes A_α^r (5.40a) et A_α^θ (5.40b) peuvent être découplées en utilisant la méthode développée par Gottlieb [68]. En posant $A_\alpha^\pm = A_\alpha^r \pm j A_\alpha^\theta$, on obtient en effet en injectant dans (5.40a) et (5.40b) :

$$\nabla^2 A_\alpha^+ - \frac{A_\alpha^+}{r^2} + \frac{2j}{r^2} \frac{\partial A_\alpha^+}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega A_\alpha^+ = -\mathbb{1}_B j \Omega (A_\alpha^+ + j A_0). \quad (5.42a)$$

$$\nabla^2 A_\alpha^- - \frac{A_\alpha^-}{r^2} - \frac{2j}{r^2} \frac{\partial A_\alpha^-}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega A_\alpha^- = -\mathbb{1}_B j \Omega (A_\alpha^- + j A_0). \quad (5.42b)$$

Les composantes A_α^+ et A_α^- peuvent être déterminées à partir des fonctions de Green $G_\alpha^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $G_\alpha^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ par :

$$A_\alpha^+(\mathbf{r}) = +\Omega \iiint_B G_\alpha^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_0(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') - j \Omega \iiint_B G_\alpha^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_\alpha^+(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \quad (5.43a)$$

$$A_\alpha^-(\mathbf{r}) = -\Omega \iiint_B G_\alpha^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_0(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') - j \Omega \iiint_B G_\alpha^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_\alpha^-(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \quad (5.43b)$$

On identifie ici deux équations de Fredholm du second type, dont la résolution peut être effectuée numériquement [69]. Les fonctions de Green $G_\alpha^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $G_\alpha^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sont solutions des équations adjointes de (5.42a) et (5.42b) :

$$\nabla^2 G_\alpha^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{G_\alpha^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r'^2} \mp \frac{2j}{r'^2} \frac{\partial G_\alpha^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j \Omega G_\alpha^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.44)$$

où $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')}{r'}$ $\delta(\theta - \theta') \delta(z - z')$ est la fonction δ de Dirac.

Par transformation de Fourier sur z dans (5.44), on obtient deux équations aux dérivées partielles avec r et θ comme variables indépendantes. Nous définissons $\tilde{G}_\alpha^\pm(r, \theta, \zeta, r', \theta', z')$ la transformée de Fourier de $G_\alpha^\pm(r, \theta, z, r', \theta', z')$ par rapport à la variable z , telle que :

$$\tilde{G}_\alpha^\pm(r, \theta, \zeta, r', \theta', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha^\pm(r, \theta, z, r', \theta', z') e^{-j2\pi\zeta z} dz, \quad (5.45a)$$

$$\Leftrightarrow G_\alpha^\pm(r, \theta, z, r', \theta', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_\alpha^\pm(r, \theta, \zeta, r', \theta', z') e^{j2\pi\zeta z} d\zeta, \quad (5.45b)$$

où ζ est la fréquence spatiale sans dimension.

En appliquant la décomposition de Fourier (5.45b) à l'équation (5.44), et sachant que la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{C_0}$ du domaine C_0 (le cylindre infini) est indépendante de z , on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (2\pi\zeta)^2 - \frac{1}{r^2} \mp \frac{2j}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbb{1}_{C_0} j\Omega \right] \tilde{G}_\alpha^\pm = \frac{\delta(r-r')}{r'} \delta(\theta-\theta') e^{-j2\pi\zeta z'}. \quad (5.46)$$

La fonction \tilde{G}_α^\pm étant 2π -périodique en θ , on peut la décomposer en série de Fourier. En utilisant la somme de Fourier sous la forme exponentielle, on pose :

$$\tilde{G}_\alpha^\pm(r, \theta, \zeta, r', \theta', z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_\alpha^\pm(r, n, \zeta, r', \theta', z') e^{jn\theta}, \quad (5.47)$$

où $n \in \mathbb{Z}$, et $\tilde{G}_\alpha^\pm(r, n, \zeta, r', \theta', z')$ est le coefficient de Fourier. En injectant l'expression (5.47) dans l'équation (5.46), et sachant comme précédemment que la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{C_0}$ du domaine C_0 (le cylindre infini) est indépendante de θ , on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left((2\pi\zeta)^2 + \mathbb{1}_{C_0} j\Omega + \frac{(n \mp 1)^2}{r^2} \right) \right] \tilde{G}_\alpha^\pm = \frac{\delta(r-r')}{r'} e^{-j(n\theta'+2\pi\zeta z')}. \quad (5.48)$$

Dans l'équation (5.48), une singularité est présente en $r = r'$ du fait du Dirac dans le membre de droite. Cette singularité se traduit par une relation de saut pour \tilde{G}_α^\pm et $\frac{\partial \tilde{G}_\alpha^\pm}{\partial r}$, que l'on déduit de (5.48), soit :

$$\left[\tilde{G}_\alpha^\pm(r, n, \zeta, r', \theta', z') \right]_{r'^-}^{r'^+} = 0, \quad (5.49a)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{G}_\alpha^\pm(r, n, \zeta, r', \theta', z')}{\partial r} \right]_{r'^-}^{r'^+} = \frac{e^{-j(n\theta'+2\pi\zeta z')}}{r'}. \quad (5.49b)$$

La singularité étant présente uniquement en $r = r'$, \tilde{G}_α^\pm et $\frac{\partial \tilde{G}_\alpha^\pm}{\partial r}$ sont continues (et infiniment dérivables) dans tout le reste de l'espace, i.e. $\forall r \neq r'$.

Pour déterminer \tilde{G}_α^\pm à partir de l'équation différentielle (5.48) et des conditions de saut (5.49a) et (5.49b), l'espace est divisé radialement en trois zones cylindriques (comme précédemment pour la solution en l'absence d'inclusion, chapitre 3, page 68), tel que représenté sur la figure 5.8. La zone 1 ($r < r'$) et la zone 2 ($r' < r \leq R$) correspondent au métal, et la zone 3 ($r \geq R$) correspond à l'extérieur (air). La fonction \tilde{G}_α^\pm dans chaque zone i est notée $\tilde{G}_{\alpha,i}^\pm$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$, et on définit :

$$\lambda_i^2 = \begin{cases} (2\pi\zeta)^2 + j\Omega & \text{si } i = 1, 2 \text{ (métal)} \\ (2\pi\zeta)^2 & \text{si } i = 3 \text{ (air)} \end{cases}. \quad (5.50)$$

En injectant (5.50) dans (5.48), l'équation de $\tilde{G}_{\alpha,i}^\pm$ dans chaque zone i devient alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}_{\alpha,i}^\pm}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{G}_{\alpha,i}^\pm}{\partial r} - \left(\lambda_i^2 + \frac{(n \mp 1)^2}{r^2} \right) \tilde{G}_{\alpha,i}^\pm = 0. \quad (5.51)$$

On identifie ici une équation de Bessel modifiée d'ordre $m = (n \mp 1)^2$, dont la solution s'exprime à partir des fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_m et de seconde espèce K_m :

$$\tilde{G}_{\alpha,i}^\pm = a_i I_m(\lambda_i r) + b_i K_m(\lambda_i r), \quad (5.52)$$

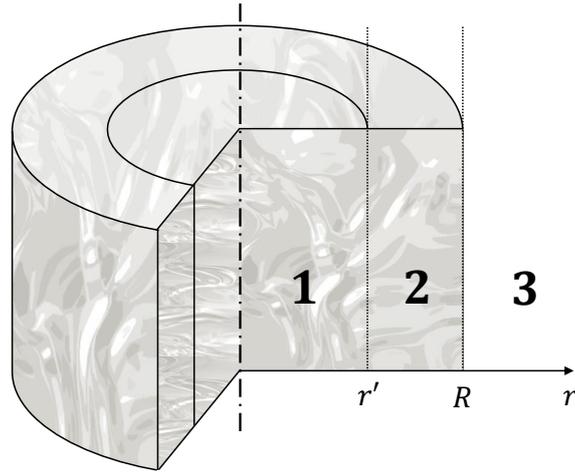


FIGURE 5.8 – Division radiale de l'espace en trois zones : le métal (zone 1, $r < r'$, et zone 2, $r' < r \leq R$) et l'extérieur (zone 3, $r \geq R$).

où $a_i = a_i(\zeta, n)$ et $b_i = b_i(\zeta, n)$ sont deux coefficients propres à chaque zone i , à calculer pour chaque ζ et chaque n à partir des conditions aux frontières dans chaque zone, et par les conditions aux limites en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

Le calcul de ces coefficients reste à effectuer, en reprenant la méthode de Cramer utilisée dans le chapitre 3. Avec la décomposition en série de Fourier (5.47) et la transformation de Fourier inverse (5.45b), les fonctions de Green $G_{\alpha,i}^+$ et $G_{\alpha,i}^-$ dans chaque zone i pourront alors être déterminées directement à partir de la solution (5.52). Les potentiels vecteurs A_α^+ et A_α^- pourront ensuite être calculés par résolution des équations intégrales de Fredholm (5.43a) et (5.43b), et les composantes radiale et longitudinale du potentiel vecteur pourront être déduites de la relation $A_\alpha^\pm = A_\alpha^r \pm jA_\alpha^\theta$. La différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, calculée à partir du potentiel vecteur $\mathbf{A}_\alpha = A_\alpha^r \mathbf{e}_r + A_\alpha^\theta \mathbf{e}_\theta$ par les équations (5.13) et (5.15) (page 106), pourra directement être comparée aux mesures expérimentales effectuées aux hautes fréquences, pour des inclusions de taille et position quelconques.

5.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle analytique « non inductif » de la perturbation du potentiel vecteur \mathbf{A}_α , relative à la présence d'une inclusion isolante dans l'écoulement de métal liquide traversant l'ECFM. En négligeant le terme inductif dans l'équation du potentiel vecteur \mathbf{A}_α (5.9), la zone de validité du modèle concerne la plage des basses fréquences, pour les petites inclusions proches de la paroi ($\Omega_\alpha \ll 1$). Le terme inductif étant négligé, \mathbf{A}_α obéit alors à une équation de Poisson, dont la solution par fonction de Green est connue et se présente sous une forme intégrale, donnée par l'équation (5.12). Dans le cadre du modèle non inductif, une solution approchée du potentiel vecteur \mathbf{A}_α est également développée, donnant une estimation de \mathbf{A}_α sous une forme explicite par l'équation (5.21). La différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, relative à la présence de l'inclusion, est ensuite calculée grâce à la loi de Faraday à partir du potentiel vecteur \mathbf{A}_α (ou de sa valeur approchée). Les résultats du modèle non inductif sont comparés aux mesures du premier dispositif expérimental dans le chapitre suivant.

Une première approche d'un modèle « inductif », valable notamment aux hautes fréquences, est

présentée en fin de ce chapitre. Une méthode de résolution par fonctions de Green est proposée, les fonctions de Green restant cependant à déterminer dans une prochaine étude. La méthode de résolution nécessite par ailleurs la résolution d'une intégrale de Fredholm.

CHAPITRE 6

ÉTUDE DE LA TENSION ΔV_α RELATIVE À L'INCLUSION

Ce chapitre présente l'étude de la différence de tension ΔV_α générée aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM par la présence d'une inclusion dans le métal liquide. Les résultats du modèle non inductif du chapitre 5 sont comparés aux mesures du premier dispositif expérimental, dans lequel l'inclusion est une bille sphérique isolante dont la taille et la position sont fixées.

Sommaire

6.1	Introduction	120
6.2	Détermination de ΔV_α à partir des signaux mesurés	120
6.3	Effets de la vitesse	124
6.4	Comportement aux basses fréquences	127
6.4.1	Comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux	127
6.4.2	Lois de puissance en fréquence	128
6.4.3	Effets de la taille et de la position de l'inclusion	132
6.4.4	Premier problème inverse pour déterminer la taille et la position de l'inclusion	133
6.5	Comportement aux hautes fréquences	135
6.5.1	Inclusion proche de la paroi ($h = 3$ mm) : résultats fréquentiels	135
6.5.2	Inclusion en profondeur dans le métal ($h = 6$ mm) : résultats fréquentiels	136
6.5.3	Effets des hautes fréquences sur les signaux temporels $\Delta V_{\alpha, }$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$	139
6.5.4	Effet du déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0	141
6.5.5	Première approche d'une méthode de détermination de la profondeur de l'inclusion	144
6.6	Conclusion	152

6.1 INTRODUCTION

Dans la première étude expérimentale, la grandeur mesurée est la différence de tension aux bornes des bobines secondaires ΔV , constituée d'une composante $\Delta V_{||}$ en phase avec le courant dans la bobine primaire, et d'une composante en quadrature ΔV_{\perp} . Les tensions $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} sont décomposées en une contribution de base, correspondant à un métal liquide statique ne contenant pas d'inclusion et indiquée 0, une contribution relative à la vitesse du métal, indiquée U , et une contribution relative à la présence de l'inclusion, indiquée α . La décomposition s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta V_{||} = \Delta V_{0,||} + \Delta V_{U,||} + \Delta V_{\alpha,||}, \\ \Delta V_{\perp} = \Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp} + \Delta V_{\alpha,\perp}. \end{cases} \quad (6.1)$$

On s'intéresse ici aux contributions en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ de la tension ΔV_α , relative à la présence de l'inclusion dans le métal.

La détermination de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ à partir de la mesure expérimentale de ΔV est décrite dans la section 6.2. La section 6.3 montre les effets de la vitesse de l'inclusion sur la tension ΔV_α . La réponse fréquentielle de ΔV_α est ensuite explorée en distinguant les basses fréquences ($f \lesssim 2$ kHz) dans la section 6.4, et les hautes fréquences ($f \gtrsim 2$ kHz) dans la section 6.5. Dans chacune des sections, l'influence de la taille de l'inclusion (caractérisée par son rayon R_α) et de sa position (caractérisée par sa distance à la paroi h) est analysée et interprétée à l'aide de comparaisons avec les résultats du modèle non inductif. On rappelle que le domaine de validité de ce modèle est défini par un paramètre d'écrantage $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2$ faible. Le tableau 6.1 indique les paramètres d'écrantage $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2$ traités dans les expériences.

TABLEAU 6.1 – Paramètre d'écrantage Ω_α relatif à l'inclusion, pour différentes valeurs du rayon de l'inclusion R_α et de la fréquence f .

	500 Hz	2 kHz	20 kHz
$R_\alpha = 1$ mm	1.34×10^{-2}	5.37×10^{-2}	5.37×10^{-1}
$R_\alpha = 2.5$ mm	8.34×10^{-2}	3.36×10^{-1}	3.36×10^0

6.2 DÉTERMINATION DE ΔV_α À PARTIR DES SIGNAUX MESURÉS

Cette section présente la méthode utilisée pour déterminer et extraire la tension ΔV_α , constituée d'une composante $\Delta V_{\alpha,||}$ en phase avec le courant dans la bobine primaire et d'une composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$, à partir de la mesure de ΔV .

La figure 6.1 rappelle l'allure de la différence de tension ΔV mesurée après démodulation dans le premier dispositif expérimental (—). Les contributions $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ relatives à la présence de l'inclusion se manifestent par une oscillation des tensions $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} , visibles sur la figure 6.1 pour les deux composantes (de $t = 1$ s à 2 s, puis de $t = 2.7$ s à 3.7 s). Pour isoler les contributions $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$, on soustrait les tensions $\Delta V_{0,||} + \Delta V_{U,||}$ et $\Delta V_{0,\perp} + \Delta V_{U,\perp}$ (- -) aux composantes en phase et en quadrature du signal mesuré ΔV . L'oscillation est donc décalée (par exemple de -7.6×10^{-4} V et -1.38×10^{-3} V pour $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} sur la figure 6.1) de manière à la centrer sur un axe $\Delta V_\alpha = 0$.

Dans la figure 6.1 par ailleurs, la présence du défaut de surface au milieu du tube, évoquée dans le chapitre 2 (sous-section 2.3.2, page 36), se manifeste par le « bump » sur $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} à $t \approx 2.5$ s. Une méthode de correction est appliquée aux composantes $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ afin de masquer l'effet du défaut. Avec cette méthode, un signal gaussien est calé sur ce bump, comme représenté sur la figure 6.1 (⋯), puis retranché aux deux composantes $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} de manière à contrebalancer la perturbation générée par le défaut.

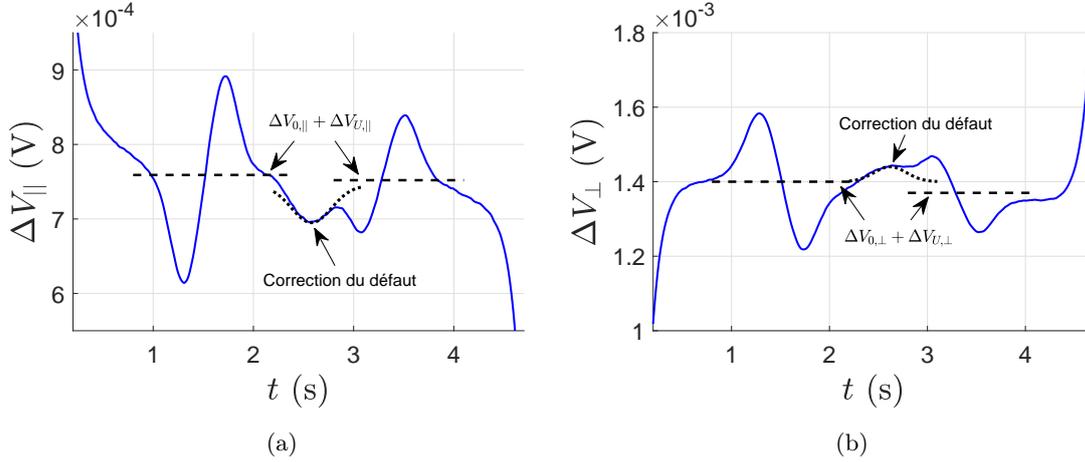


FIGURE 6.1 – Différence de tension ΔV entre les bobines secondaires après démodulation par le lock-in (vitesse $U = 50$ mm.s $^{-1}$, fréquence $f = 1$ kHz, profondeur d'inclusion $h = 3$ mm, rayon d'inclusion $R_\alpha = 2$ et 2.5 mm) : composantes en phase (a) et en quadrature (b).

Un exemple des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ obtenus après correction du défaut est montré dans la figure 6.2 pour les quatre tailles d'inclusion utilisées dans l'expérience (rayons $R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm). Ici, les inclusions sont fixées à une distance $h = 3$ mm de la paroi, la vitesse de translation de l'ECFM autour du tube est de 100 mm.s $^{-1}$ et la fréquence du courant dans la bobine primaire est de 1 kHz. Par symétrie, le milieu des oscillations (à $t \approx 0.39$ s) correspond au moment où l'inclusion est située sous le milieu de la bobine primaire. Les effets de la taille de l'inclusion sont particulièrement visibles sur les deux composantes $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$.

À partir des composantes en phase et en quadrature de la tension perturbée, on définit le module $|\Delta V_\alpha| = \sqrt{\Delta V_{\alpha,||}^2 + \Delta V_{\alpha,\perp}^2}$, illustré dans la figure 6.3 pour les mêmes paramètres que précédemment.

La figure 6.4 compare les tensions perturbées $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ prédites par le modèle non inductif (traits continus) et mesurées expérimentalement (traits discontinus) lorsqu'une inclusion de rayon $R_\alpha = 1.5$ mm traverse l'ECFM. Deux profondeurs d'inclusion sont testées : $h = 3$ mm (en bleu) et $h = 6$ mm (en rouge). La fréquence est fixée à 1 kHz. D'un point de vue qualitatif, les tensions perturbées calculées par le modèle ont une allure similaire aux tensions mesurées. Pour le modèle comme pour les mesures, on observe une oscillation des composantes en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ pour les deux profondeurs, dont les extremums se situent environ à $t \approx 0.29$ s et $t \approx 0.49$ s.

Une première explication des différences observées entre les amplitudes des oscillations prédites par le modèle et celles mesurées expérimentalement provient des incertitudes sur certains paramètres géométriques de l'expérience. Dans le dispositif expérimental en effet, la profondeur de l'inclusion est par exemple fixée avec une tolérance de ± 0.25 mm, tandis que le diamètre de l'inclusion est fixé à ± 0.025 mm. Les incertitudes liées à la géométrie du montage restent à dé-

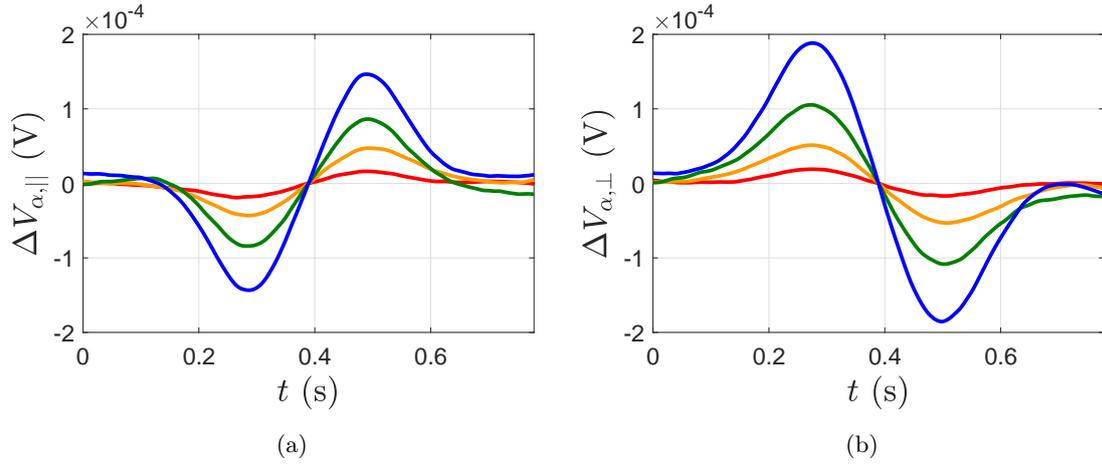


FIGURE 6.2 – Exemple de signaux temporels $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ obtenus après décomposition de la tension mesurée ΔV , pour plusieurs rayons d'inclusion R_α : 1 mm (—), 1.5 mm (—), 2 mm (—) et 2.5 mm (—). (a) Composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}$. (b) Composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Vitesse $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, profondeur d'inclusion $h = 3 \text{ mm}$.

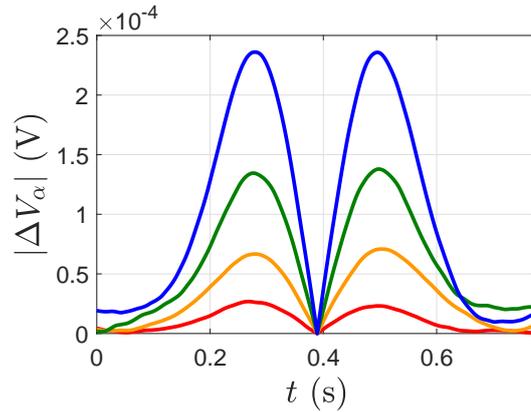


FIGURE 6.3 – Module $|\Delta V_\alpha| = \sqrt{\Delta V_{\alpha,||}^2 + \Delta V_{\alpha,\perp}^2}$ pour plusieurs pour plusieurs rayons d'inclusion R_α : 1 mm (—), 1.5 mm (—), 2 mm (—) et 2.5 mm (—). Vitesse $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$, fréquence $f = 1 \text{ kHz}$, profondeur d'inclusion $h = 3 \text{ mm}$.

terminer, par exemple au travers d'une étude de reproductibilité effectuée sur plusieurs tubes de galinstan, à géométrie donnée. Dans la thèse, on rappelle que seules les incertitudes de répétabilité sont calculées (plusieurs mesures effectuées pour un seul tube, comme précisé dans la sous-section 2.5.1 du chapitre 2).

On remarque que l'écart entre le modèle et les expériences est plus grand pour les inclusions en profondeur dans le galinstan (pour $h = 6 \text{ mm}$). L'augmentation de cet écart lorsque la profondeur h augmente, directement liée aux hypothèses effectuées dans le modèle non inductif, est discutée plus en détail dans la sous-section 6.4.3 de ce chapitre.

La figure 6.5 montre le module de la tension perturbée $|\Delta V_\alpha|$, calculé par le modèle non inductif (traits continus) et déduit des mesures expérimentales (traits discontinus) pour les mêmes paramètres que précédemment. Les zones colorées en vert et en rouge indiquent le moment où l'inclusion se situe sous les bobines secondaires S_1 et S_2 et sous la bobine primaire P . L'inclusion est ainsi détectée par l'ECFM dès qu'elle s'approche à une distance au centre de l'ECFM d'environ

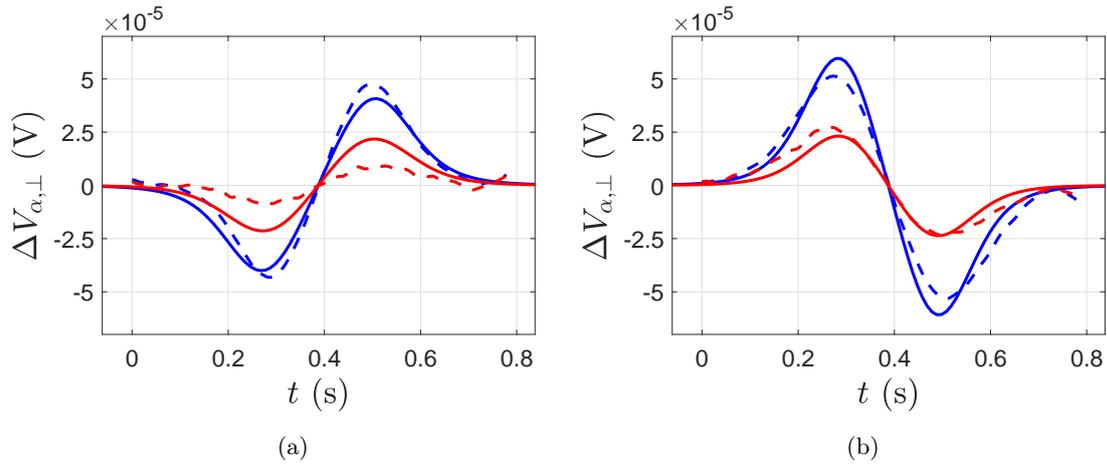


FIGURE 6.4 – Exemple des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ mesurés expérimentalement (traits discontinus) et calculés par le modèle non inductif (traits continus), pour une inclusion de rayon $R_\alpha = 1.5$ mm située à une profondeur $h = 3$ mm (—) et 6 mm (—) de la paroi du tube. (a) Composante en phase avec le courant dans la primaire $\Delta V_{\alpha,||}$. (b) Tension en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Vitesse $U = 100$ mm.s $^{-1}$, fréquence $f = 1$ kHz.

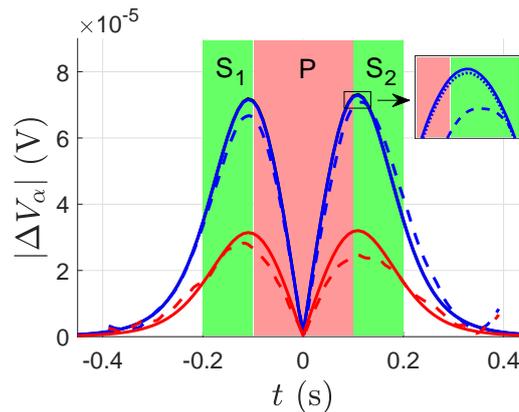


FIGURE 6.5 – Module $|\Delta V_\alpha|$ en fonction du temps, déduit des mesures expérimentales (traits discontinus) et calculé par le modèle non inductif (traits continus), pour une inclusion de rayon $R_\alpha = 1.5$ mm située à une profondeur $h = 3$ mm (—) et 6 mm (—) de la paroi du tube. En haut à droite : zoom montrant la précision de la solution approchée (trait en pointillés) par rapport à la solution exacte (trait continu). Vitesse $U = 100$ mm.s $^{-1}$, fréquence $f = 1$ kHz.

deux longueurs de la bobine primaire (correspondant à $t \approx \pm 0.4$ s, soit $z = \pm 40$ mm). On voit clairement que les extremums de l'oscillation correspondent aux moments où l'inclusion est environ sous les extrémités de la bobine primaire. Dans le zoom en haut à droite de la figure 6.5, la solution exacte du modèle non inductif, équations (5.12), (5.14) et (5.15), est par ailleurs comparée à la solution approchée dans laquelle on suppose une densité de courant uniforme dans le volume de l'inclusion, équations (5.21), (5.29) et (5.30). La solution approchée de la perturbation donne une très bonne estimation de la solution exacte dans ce cas.

Pour les études paramétriques suivantes, il est nécessaire de définir une grandeur caractéristique des oscillations $\Delta V_{\alpha,||}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}$ et $|\Delta V_\alpha|$. On définit dans un premier temps les paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$

et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ par :

$$\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max} = \max(\Delta V_{\alpha,\parallel}) - \min(\Delta V_{\alpha,\parallel}), \quad (6.2a)$$

$$\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max} = \max(\Delta V_{\alpha,\perp}) - \min(\Delta V_{\alpha,\perp}), \quad (6.2b)$$

tels que représentés sur les figures 6.6a et 6.6b. Il est à noter que cette définition implique forcément que $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max} \geq 0$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max} \geq 0$. De plus, l'orientation de l'oscillation (d'abord négative puis positive pour $\Delta V_{\alpha,\parallel}$, et inversement pour $\Delta V_{\alpha,\perp}$) n'est pas prise en compte dans les paramètres $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$. On dira dans la suite que l'oscillation de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ est « inversée » par rapport à l'oscillation de $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Cette définition est particulièrement utile pour les résultats aux hautes fréquences présentés dans la section 6.5. Enfin, on définit le paramètre $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ par

$$|\Delta V_\alpha|^{\max} = a + b, \quad (6.3)$$

où a et b correspondent aux valeurs aux deux pics du signal $|\Delta V_\alpha|$, représentés sur la figure 6.6c. De la même manière, cette définition implique que $|\Delta V_\alpha|^{\max} \geq 0$.

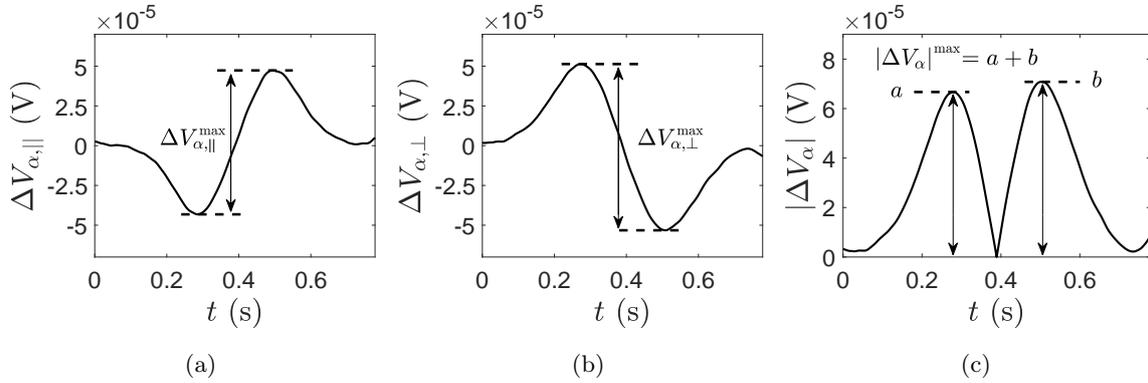


FIGURE 6.6 – Illustration des paramètres caractéristiques $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ utilisés dans l'étude, ici pour une inclusion de rayon $R_\alpha = 1.5$ mm située à une profondeur $h = 3$ mm de la paroi du tube. Vitesse $U = 100$ mm.s⁻¹, fréquence $f = 1$ kHz.

L'objet des sections suivantes est d'étudier les effets de la fréquence, de la vitesse et des variables propres à l'inclusion (taille et position) sur les paramètres $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$.

6.3 EFFETS DE LA VITESSE

Dans une étude antérieure, il a été observé que les effets de la vitesse de l'écoulement sur la tension ΔV_α sont négligeables pour des vitesses et des taux de vide suffisamment faibles [16]. L'équation du champ perturbé \mathbf{A}_α (5.10) montre également que les effets liés à vitesse du métal liquide sont négligeables, avec les hypothèses $R_m \ll 1$ et $R_m \ll \Omega$. On cherche ici à vérifier la faible sensibilité des tensions mesurées $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ en fonction de la vitesse.

La figure 6.7 représente les signaux démodulés ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} mesurés par le lock-in lorsque l'ECFM survole une inclusion de rayon $R_\alpha = 2.5$ mm située à une profondeur $h = 3$ mm dans le galinstan. Les vitesses de translation de l'ECFM varient ici de 1 mm.s⁻¹ (—) à 1 m.s⁻¹ (—), et la fréquence est fixée à 2 kHz. Afin de superposer les courbes, l'abscisse temporelle de chaque mesure est multipliée par la vitesse de translation respective. Les décalages en tensions $\Delta V_{U,\parallel}$ et $\Delta V_{U,\perp}$ liés à la vitesse (voir chapitre 4) sont visibles particulièrement sur la composante en phase. De plus, les tensions en phase $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ relatives à la présence de l'inclusion

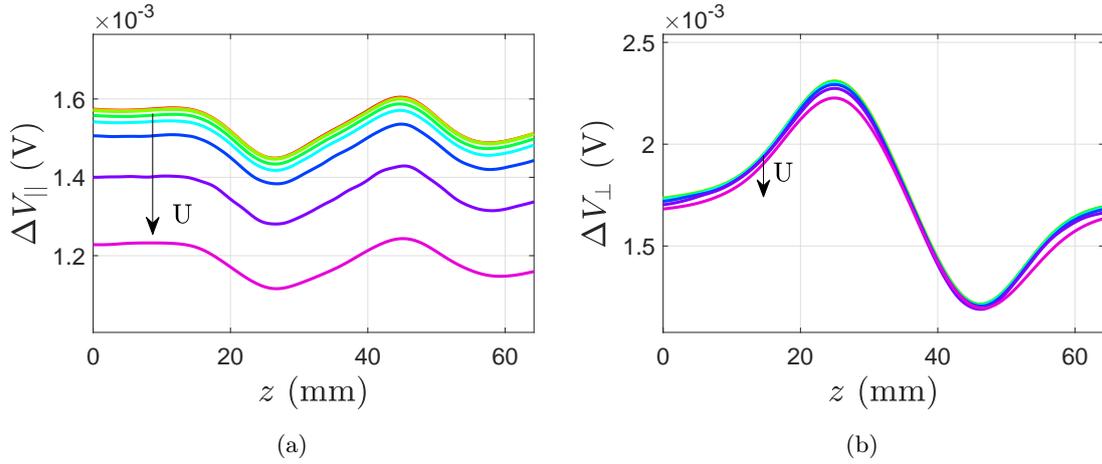


FIGURE 6.7 – Signaux $\Delta V_{||}$ et ΔV_{\perp} mesurés à différentes vitesses de translation U : 1 mm.s^{-1} (—), 10 mm.s^{-1} (—), 20 mm.s^{-1} (—), 50 mm.s^{-1} (—), 100 mm.s^{-1} (—), 200 mm.s^{-1} (—), 500 mm.s^{-1} (—), 1000 mm.s^{-1} (—), lorsque l’ECFM survole une inclusion de rayon $R_{\alpha} = 2.5 \text{ mm}$ à une profondeur $h = 3 \text{ mm}$. Fréquence $f = 2 \text{ kHz}$.

se manifestent par une oscillation pour toute la plage de vitesse. Pour les deux composantes, on remarque que les amplitudes des oscillations sont sensiblement identiques aux différentes vitesses.

Afin de confirmer cette première observation, la figure 6.8 montre les amplitudes des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ en fonction de la vitesse de translation, pour les inclusions de rayon $R_{\alpha} = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm situées à la profondeur $h = 3 \text{ mm}$. On observe que l’influence de la vitesse est faible sur $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ jusqu’à $U = 500 \text{ mm.s}^{-1}$. Une légère inflexion est ensuite visible à $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$, pour toutes les tailles d’inclusion et sur les deux composantes.

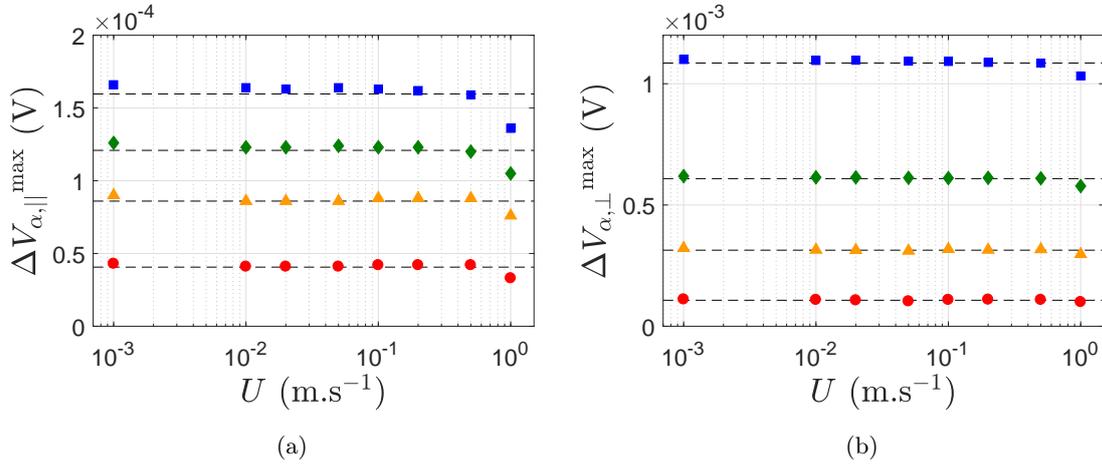


FIGURE 6.8 – Amplitude des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ (a) et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ (b) en fonction de la vitesse, pour des inclusions de rayon R_{α} variable : 1 mm (●), 1.5 mm (▲), 2 mm (◆) et 2.5 mm (■). Les inclusions sont situées à une profondeur fixée $h = 3 \text{ mm}$ dans le métal. Les droites noires discontinues représentent les valeurs moyennes pour chaque inclusion à titre indicatif. Fréquence $f = 2 \text{ kHz}$.

Une première explication de l’inflexion de $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ à $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ peut provenir de l’augmentation des effets de l’induction de Lorentz, devenant non négligeables à haute vitesse. On

remarque en effet que le Reynolds magnétique vaut $R_m = 0.11$ pour $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$, en prenant comme échelle de longueur le diamètre du tube de galinstan (25 mm). L'hypothèse $R_m \ll 1$ peut alors devenir discutable.

Il existe cependant un deuxième phénomène, lié à l'acquisition, à l'origine de cette déviation à haute vitesse. Dans l'étape de démodulation du signal par le lock-in, un filtre passe-bas est utilisé pour isoler les fréquences d'intérêt de la tension mesurée et diminuer le bruit de mesure (voir chapitre 2). La fréquence de coupure du filtre doit d'une part être suffisamment haute pour qu'aucune fréquence du signal d'intérêt ne soit atténuée, mais doit également être suffisamment inférieure à la fréquence de la porteuse pour éviter une altération du signal démodulé. Or à haute vitesse, les oscillations des tensions perturbées $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$, liées au temps de passage de l'inclusion dans l'ECFM, sont rapides et contiennent des fréquences élevées, nécessitant une fréquence de coupure plus grande. Les limites haute et basse de la fréquence de coupure sont alors en conflit : l'augmentation de celle-ci entraîne un signal filtré sur toute la plage de fréquence d'intérêt, mais déformé par la fréquence de la porteuse en contrepartie. À l'inverse, une fréquence de coupure plus basse permet un signal démodulé inaltéré par la fréquence de la porteuse, mais dont une partie de l'information à haute fréquence est coupée.

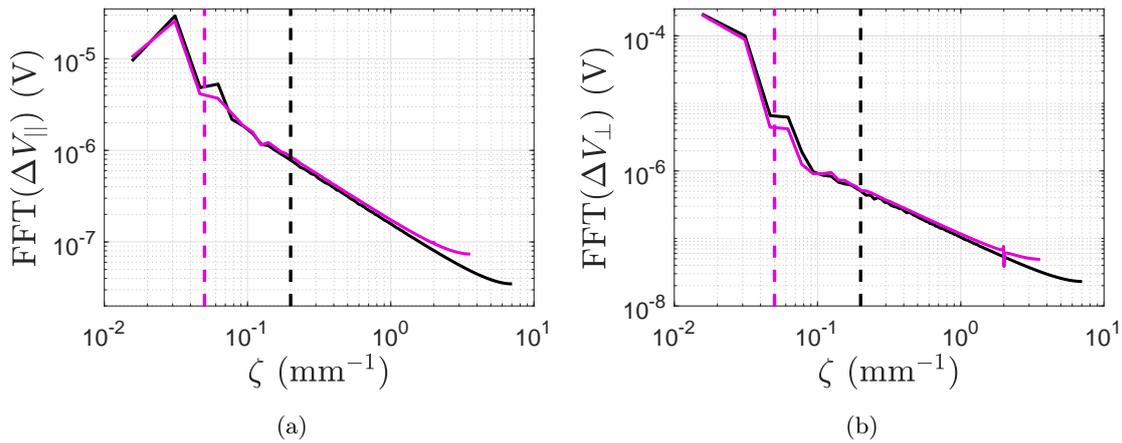


FIGURE 6.9 – FFT spatiales des tensions ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} démodulées représentées dans la figure 6.7, pour $U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ (—) et $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ (—). (a) Composante en phase. (b) Composante en quadrature. Les lignes verticales correspondent aux fréquences de coupure spatiales, obtenues en divisant la fréquence de coupure du filtre passe-bas (en Hz) par la vitesse respective U : $U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ (—) et $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ (—).

À titre d'exemple, la figure 6.9 montre les FFT des tensions ΔV_{\parallel} et ΔV_{\perp} montrées dans la figure 6.7, pour les deux vitesses extrémales $U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ (courbe noire) et $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ (courbe violette). La fréquence est notée ζ . Les fréquences de coupure (obtenues en divisant la fréquence de coupure du filtre, en Hz, par la vitesse respective U) sont indiquées par les lignes pointillées verticales pour chaque vitesse. On observe que la fréquence de coupure spatiale utilisée pour la vitesse $U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ est la plus élevée ($\zeta \approx 0.2 \text{ mm}^{-1}$), et permet de considérer la majorité des fréquences du signal d'intérêt. Les fréquences de coupure des vitesses intermédiaires (de $U = 10 \text{ mm.s}^{-1}$ à 500 mm.s^{-1}) sont légèrement plus basses (entre $\zeta \approx 0.10$ et 0.15 mm^{-1}). Enfin, la fréquence de coupure de la vitesse maximale ($U = 1 \text{ m.s}^{-1}$) est la plus faible ($\zeta \approx 0.05 \text{ mm}^{-1}$), et coupe potentiellement une partie du signal d'intérêt. Pour les composantes en phase et en quadrature, on remarque d'ailleurs que les FFT aux deux vitesses ($U = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ et 1 m.s^{-1})

sont similaires jusqu'à la fréquence de coupure $\zeta \approx 0.05 \text{ mm}^{-1}$ de la vitesse la plus élevée, puis un léger décalage est observé. Au-delà de cette fréquence en effet, une partie du signal à $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ est coupée par le filtre passe-bas. Il est à noter que pour la mesure à $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$, il a été choisi d'utiliser une fréquence de coupure basse ($f = 50.1 \text{ Hz}$) pour obtenir un signal démodulé peu altéré par la fréquence de la porteuse ($f = 2 \text{ kHz}$ ici), au détriment de la considération des fréquences les plus hautes du signal d'intérêt. L'amplitude de l'oscillation à cette vitesse est donc légèrement sous-estimée, comme il a été observé dans la figure 6.8.

En conclusion, le choix de la fréquence de coupure dans le processus de démodulation du signal mesuré est crucial, et doit être adapté en fonction de la fréquence de la porteuse et de la vitesse de l'écoulement. Il est de plus nécessaire de tenir compte de ce choix dans l'analyse des mesures expérimentales, notamment pour éviter une sous-estimation des tensions perturbées $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Notons que l'option « Sinc Filtering » du lock-in amplifieur, inemployée dans les expériences, permet d'utiliser une fréquence de coupure plus élevée tout en gardant un signal démodulé propre. Dans cet outil, les altérations dues à la fréquence de la porteuse et à ses harmoniques sont atténuées par un filtre en peigne.

6.4 COMPORTEMENT AUX BASSES FRÉQUENCES

Cette section décrit la réponse de l'ECFM à la présence d'une inclusion dans le métal liquide lorsque la fréquence d'excitation est faible, c'est à dire lorsque $\Omega_\alpha \ll 1$ (soit $f \lesssim 2 \text{ kHz}$ dans notre étude). Le comportement aux basses fréquences des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$, et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ est présenté dans la sous-section 6.4.1. Les lois de puissance aux basses fréquences de ces paramètres, obtenues à partir du modèle non inductif, sont données dans la sous-section 6.4.2. Les effets de la taille et la position de l'inclusion, caractérisés par son rayon R_α et sa profondeur h , sont discutés dans la sous-section 6.4.3. Enfin, une méthode de minimisation basée sur les résultats du modèle est développée dans la sous-section 6.4.4, dans le but de caractériser la taille et la position d'une inclusion à partir des signaux mesurés expérimentalement.

6.4.1 Comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux

Cette première sous-section montre le comportement aux basses fréquences des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ pour les deux profondeurs d'inclusion $h = 3$ et 6 mm . L'évolution en fréquence de ces paramètres est montrée dans la figure 6.10, pour plusieurs inclusions de rayon $R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm fixées à une profondeur $h = 3 \text{ mm}$ (sous-figures de gauche) et à une profondeur $h = 6 \text{ mm}$ (sous-figures de droite). Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif.

Sur la plage des basses fréquences, les paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ augmentent avec la fréquence pour les deux profondeurs et pour toutes les tailles d'inclusion. Une bonne correspondance entre les résultats du modèle non inductif et les mesures expérimentales est observée, particulièrement pour les fréquences les plus faibles de la plage basses fréquences ($f = 500 \text{ Hz}$, 700 Hz et 1000 Hz), et pour les inclusions de plus petite taille ($R_\alpha = 1$ et 1.5 mm , voire 2 mm) proches de la paroi ($h = 3 \text{ mm}$). On observe de plus une meilleure correspondance sur la composante en quadrature et sur le module que sur la composante en phase, notamment pour les petites inclusions. Les déviations observées avec l'augmentation de f , R_α et h sont liées à la limite de validité du modèle non inductif, dans lequel le paramètre d'écrantage est supposé petit, i.e. $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2 \ll 1$. Pour une fréquence $f = 1.5 \text{ kHz}$ par exemple, le paramètre d'écrantage vaut $\Omega_\alpha = 0.04$ pour une inclusion de rayon $R_\alpha = 1 \text{ mm}$ et $\Omega_\alpha = 0.25$ pour une inclusion de rayon

$R_\alpha = 2.5$ mm. L'hypothèse $\Omega_\alpha \ll 1$ n'est plus appropriée dans le second cas, et le modèle non inductif surestime l'amplitude de la perturbation.

On note que la solution approchée du modèle non inductif (traits discontinus) donne une très bonne estimation de la solution exacte (traits continus). Dans le cadre des basses fréquences en effet, les gradients de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ sont relativement faibles dans le volume B associé à l'inclusion, et l'approximation d'une densité de courant uniforme $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{cst}$ dans l'expression (5.12) est satisfaisante.

Enfin, trois lois de puissances (traits pointillés noirs) permettent de décrire le comportement des résultats expérimentaux et théoriques de la figure 6.10, lorsque la fréquence est suffisamment faible ($f \lesssim 1$ kHz ici) : $\Delta V_{\alpha,||}^{\max} \propto f^2$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max} \propto f^3$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max} \propto f^2$. Ces lois de puissance sont valides pour les deux profondeurs et les quatre tailles d'inclusion. L'obtention de ces lois est l'objet de la sous-section suivante.

6.4.2 Lois de puissance en fréquence

Cette sous-section développe l'obtention des lois de puissance des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ aux basses fréquences, grâce à une analyse du modèle non inductif décrit dans le chapitre précédent 5. L'étude est basée sur les équations du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 (5.7b) et du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α (5.10). Il convient d'abord de donner quelques définitions utilisées par la suite. En premier lieu, nous écrivons le potentiel vecteur perturbé sous la forme :

$$\mathbf{A}_\alpha = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \text{avec} \quad A_\alpha = \widehat{A}_\alpha e^{j\omega t}, \quad (6.4)$$

où $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha / A_\alpha$ est un vecteur unitaire, ω est la pulsation du champ oscillant, et \widehat{A}_α est un scalaire complexe. En utilisant les coordonnées polaires et cartésiennes, on écrit alors respectivement :

$$A_\alpha = |\widehat{A}_\alpha| e^{j\omega t + \Theta_\alpha} \quad \text{et} \quad A_\alpha = A_{\alpha,||} e^{j\omega t} + j \times A_{\alpha,\perp} e^{j\omega t}, \quad (6.5)$$

où $|\widehat{A}_\alpha|$ et $\Theta_\alpha = \arg\{\widehat{A}_\alpha\}$ sont l'amplitude et le déphasage du potentiel vecteur perturbé, et $A_{\alpha,||} = \text{Re}\{\widehat{A}_\alpha\}$ et $A_{\alpha,\perp} = \text{Im}\{\widehat{A}_\alpha\}$ correspondent aux composantes en phase et en quadrature du potentiel vecteur perturbé. On rappelle que la phase de référence est la phase du courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_S . Les composantes en phase et en quadrature du potentiel vecteur non perturbé, $A_{0,||}$ et $A_{0,\perp}$, et de la densité de courant associée, $j_{0,||}$ et $j_{0,\perp}$, sont définies de manière identique.

En considérant des fréquences suffisamment faibles, le paramètre d'écrantage $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2$ est par la suite négligé dans l'équation du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α (5.10). La solution (5.12) montre alors que le déphasage de \mathbf{A}_α est lié au déphasage de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ traversant le volume B associé à l'inclusion. En supposant que $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ est distribué uniformément dans le volume B , on déduit :

$$A_{\alpha,||} \propto j_{0,||} \quad \text{et} \quad A_{\alpha,\perp} \propto j_{0,\perp}, \quad (6.6)$$

où $j_{0,||}$ et $j_{0,\perp}$ sont ici les composantes en phase et en quadrature de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$.

À partir du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α , la différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires est obtenue avec la loi de Faraday (5.14) calculée sur chaque spire, puis sommée sur toutes les spires par l'équation (5.15). La dérivation temporelle du potentiel vecteur dans la loi de Faraday génère d'une part un déphasage de $\pi/2$ entre \mathbf{A}_α et ΔV_α , et introduit d'autre part un facteur ω dans l'expression de la tension. Avec l'équation (6.6), on déduit alors les lois de comportement aux basses fréquences des tensions $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ en fonction des densités de courant $j_{0,||}$ et $j_{0,\perp}$,

$$\Delta V_{\alpha,||} \propto j_{0,\perp} \times \omega \quad \text{et} \quad \Delta V_{\alpha,\perp} \propto j_{0,||} \times \omega. \quad (6.7)$$

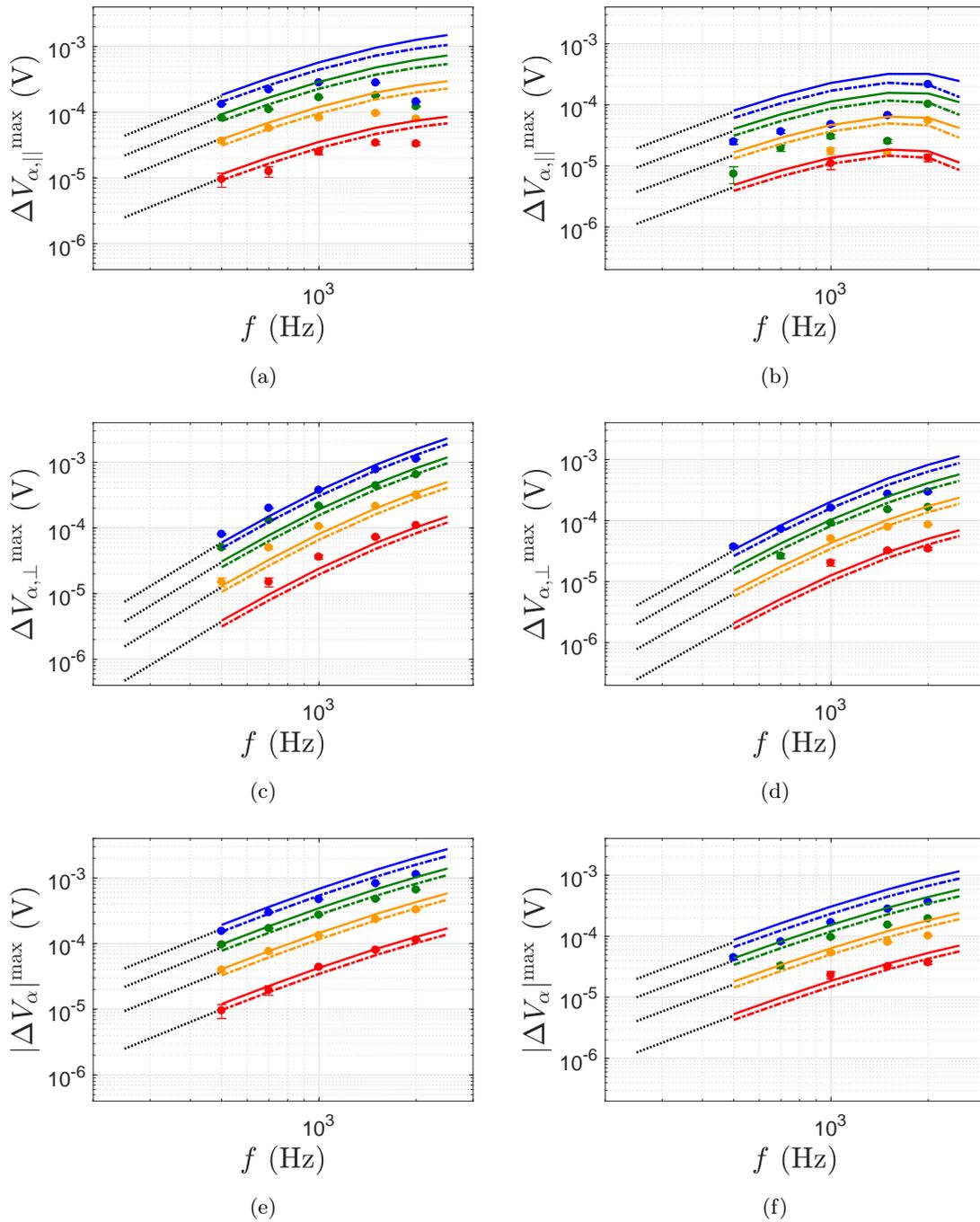


FIGURE 6.10 – Amplitude des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ (a,b), en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ (c,d) et en module $|\Delta V_{\alpha}|^{\max}$ (e,f), en fonction de la fréquence, pour des inclusions de rayon R_{α} variable : 1 mm (●), 1.5 mm (●), 2 mm (●) et 2.5 mm (●). Les figures de gauche (a,c,e) correspondent à une profondeur d'inclusion $h = 3$ mm, et celles de droite (b,d,f) à une profondeur d'inclusion $h = 6$ mm. Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif décrit dans le chapitre 5. La vitesse vaut ici $U = 100$ mm.s⁻¹. Les lignes pontillées noires montrent les tendances à basse fréquence : (a) $\Delta V_{\alpha,||}^{\max} \propto f^2$, (b) $\Delta V_{\alpha,||}^{\max} \propto f^3$ et (c) $|\Delta V_{\alpha}|^{\max} \propto f^2$.

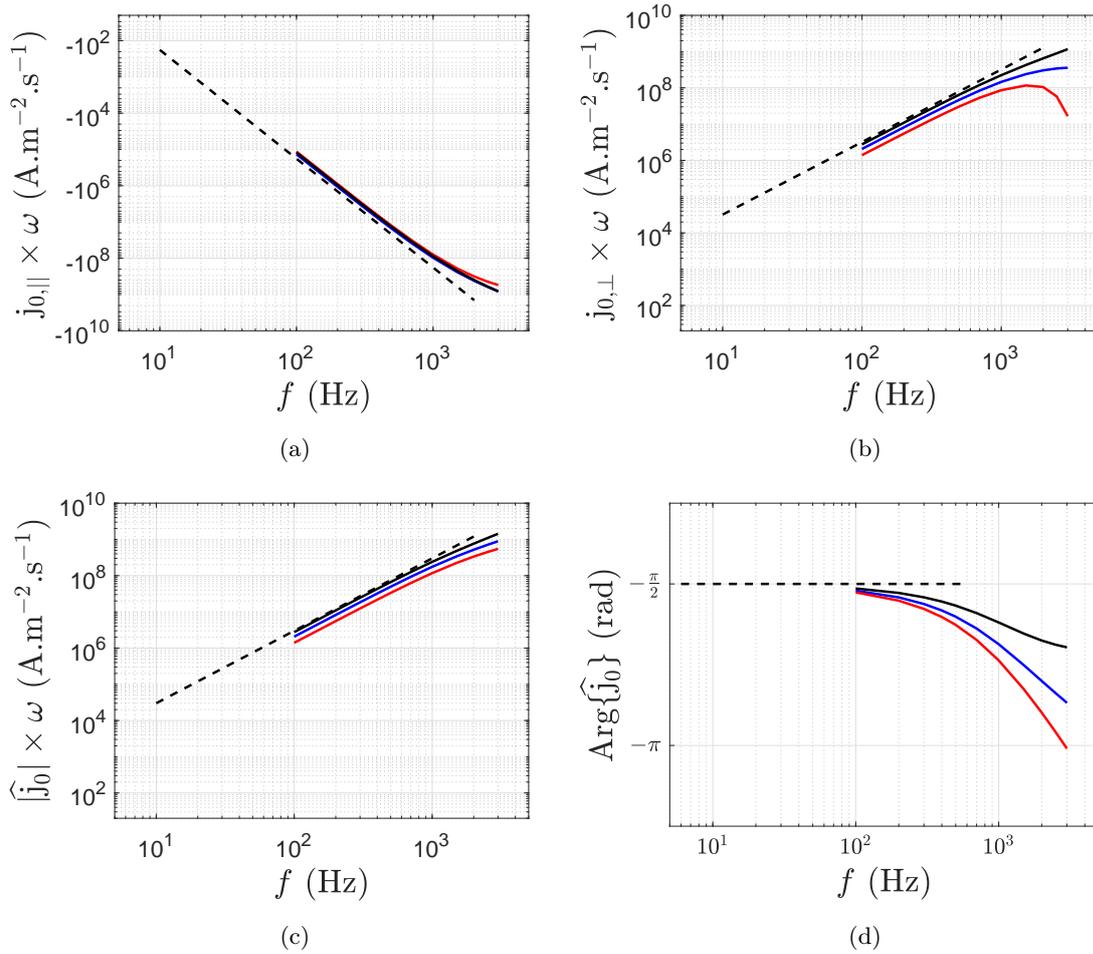


FIGURE 6.11 – Densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ à la position $\mathbf{r}' = (h, z)$, multipliée par la pulsation ω : composante en phase (a), composante en quadrature (b), amplitude (c) et déphasage (d). La position (h, z) correspond ici à celle d'une inclusion située sous une des extrémités de la bobine primaire ($z = \pm L_P/2$), en surface à $h = 0$ mm (—), ou en profondeur à $h = 3$ mm (—) ou $h = 6$ mm (—). Les lignes pointillées représentent les tendances aux basses fréquences : $-\omega^3$ pour la composante en phase, ω^2 pour la composante en quadrature et l'amplitude, et $-\pi/2$ pour le déphasage.

La figure 6.11 illustre la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ multipliée par la pulsation ω (composante en phase 6.11a, composante en quadrature 6.11b, amplitude 6.11c et déphasage 6.11d), calculée par la solution analytique du chapitre 3. On note que la composante en phase $j_{0,||}$ est négative. Ici, la position \mathbf{r}' où est calculée la densité de courant correspond aux deux profondeurs d'inclusion $h = 3$ mm (—) et 6 mm (—) considérées dans les expériences et à une distance axiale $z = \pm L_P/2$ (où L_P est la longueur de la bobine primaire). On rappelle que les pics des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ sont justement observés lorsque l'inclusion est située à $z = \pm L_P/2$ du milieu de la bobine primaire. Les composantes de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ en surface ($h = 0$ mm) pour le même z sont tracées à titre comparatif (—).

On remarque qu'aux basses fréquences et indépendamment de la profondeur h , les composantes en phase (a), en quadrature (b) et l'amplitude (c) suivent des lois de puissance en ω^{-3} , ω^2 et ω^2 respectivement, représentées par les traits pointillés noirs. En utilisant l'équation (6.7), on déduit

alors aux basses fréquences :

$$\begin{aligned}\Delta V_{\alpha,||} &\propto \mathbf{j}_{0,\perp} \times \omega \propto \omega^2, \\ \Delta V_{\alpha,\perp} &\propto \mathbf{j}_{0,||} \times \omega \propto -\omega^3, \\ |\Delta V_{\alpha}| &\propto |\widehat{\mathbf{j}}_0| \times \omega \propto \omega^2.\end{aligned}\tag{6.8}$$

À partir de ces trois relations, on peut déduire les lois de puissance des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_{\alpha}|^{\max}$. On rappelle que ces trois paramètres sont toujours positifs par leur définition, donnée par les équations (6.2a), (6.2b) et (6.3). En conséquence, la loi de puissance en $-\omega^3$ de la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ devient une loi de puissance en ω^3 pour le paramètre $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\Delta V_{\alpha,||}^{\max} &\propto \omega^2, \\ \Delta V_{\alpha,\perp}^{\max} &\propto \omega^3, \\ |\Delta V_{\alpha}|^{\max} &\propto \omega^2.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Les lois de puissance (6.9) sont comparées aux mesures expérimentales et aux résultats du modèle non inductif sur la figure 6.10.

Les tendances données par l'équation (6.9) peuvent être retrouvées à partir de l'équation du potentiel vecteur \mathbf{A}_0 associé à la densité de courant \mathbf{j}_0 , calculé en l'absence d'inclusion dans le métal par l'équation (5.7b). L'expansion asymptotique en $\Omega \rightarrow 0$, correspondant aux basses fréquences, s'écrit $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^0 + \Omega \mathbf{A}_0^1 + \mathcal{O}(\Omega^2)$. En injectant cette expression dans l'équation (5.7b) et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en Ω , on obtient les équations de l'ordre 0 et de l'ordre 1,

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0^0 = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S \quad \text{et} \quad \nabla^2 \mathbf{A}_0^1 = \mathbb{1}_{C_0} j \mathbf{A}_0^0,\tag{6.10}$$

où \mathbf{J}_S est la densité de courant source dans la bobine primaire utilisée comme référence de phase, $\mathbb{1}_S$ est la fonction caractéristique du domaine S occupé par la bobine et $\mathbb{1}_{C_0}$ est la fonction caractéristique du domaine occupé par le métal liquide, c'est à dire un cylindre infini. Les solutions des deux équations de Poisson (6.10) sont déterminées par la méthode des fonctions de Green, et s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{A}_0^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_0^1(\mathbf{r}) = -\frac{j}{4\pi} \iiint_{C_0} \frac{\mathbf{A}_0^0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}').\tag{6.11}$$

On remarque premièrement que le terme \mathbf{A}_0^0 est en phase avec \mathbf{J}_S . De plus, le terme \mathbf{A}_0^1 est en quadrature avec \mathbf{A}_0^0 , et donc en quadrature avec \mathbf{J}_S . En remplaçant dans l'expansion asymptotique $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^0 + \Omega \mathbf{A}_0^1 + \mathcal{O}(\Omega^2)$, on obtient les similitudes :

$$A_{0,||} \propto \widehat{\mathbf{J}}_S \quad \text{et} \quad A_{0,\perp} \propto \Omega \times \widehat{\mathbf{J}}_S.\tag{6.12}$$

Finalement, la densité de courant \mathbf{j}_0 associée à \mathbf{A}_0 est obtenue par la loi d'Ohm $\mathbf{j}_0 = -j\Omega \mathbf{A}_0$. Avec l'équation (6.12), on obtient alors :

$$\mathbf{j}_{0,||} \propto -\Omega^2 \times \widehat{\mathbf{J}}_S \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_{0,\perp} \propto \Omega \times \widehat{\mathbf{J}}_S,\tag{6.13}$$

desquelles on déduit les tendances aux basses fréquences de l'équation (6.8) en remarquant que $\Omega \propto \omega$. Il est à noter que la loi de puissance de l'amplitude $|\widehat{\mathbf{j}}_0|$ suit celle de la composante en quadrature $\mathbf{j}_{0,\perp}$, prédominante dans le développement perturbatif sur celle en phase $\mathbf{j}_{0,||}$.

Le raisonnement est valable en toute position \mathbf{r} dans le métal, et pas seulement aux positions de l'inclusion considérées dans l'expérience. Les comportements en fréquence décrits par l'équation

(6.8) seront donc observés pour n'importe quelle position et n'importe quelle taille d'inclusion. Plus concrètement, nous avons donc montré dans cette sous-section que les effets de la fréquence sont découplés des effets de la profondeur h et du rayon R_α de l'inclusion sur la plage des basses fréquences.

6.4.3 Effets de la taille et de la position de l'inclusion

Dans cette sous-section, l'influence de la taille et de la position de l'inclusion sur la tension perturbée ΔV_α aux basses fréquences ($f \lesssim 2$ kHz) est analysée à l'aide des résultats du modèle non inductif, développé dans le chapitre 5. Il a été montré dans ce modèle que la tension perturbée peut être estimée par l'expression (5.34), $\Delta V_\alpha \approx \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 f_\omega(h, z) e^{j\omega t}$, où J_S est la densité de courant dans la bobine primaire, R_α est le rayon de l'inclusion et $f_\omega(h, z)$ est une fonction complexe de la pulsation ω et de la position (h, z) de l'inclusion dans le métal. On rappelle que la fonction $f_\omega(h, z)$ est déterminée analytiquement par le calcul de la f.é.m. ε_α dans chaque spire des deux bobines secondaires, équation (5.29). Sa partie réelle est associée à la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ de la tension perturbée (5.37a), et sa partie imaginaire à la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ (5.37b).

Il a été observé que le maximum en z du module $|f_\omega(h, z)|$ est obtenu lorsque $z \approx \pm L_P/2$, c'est à dire lorsque l'inclusion est sous une des extrémités de la bobine primaire (figure 5.7). On définit par la suite $f_\omega^{\max}(h)$ la valeur maximale en z de $|f_\omega(h, z)|$, c'est à dire $f_\omega^{\max}(h) \approx |f_\omega(h, \pm L_P/2)|$. La tension $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ (définie dans la figure 6.6) peut alors être exprimée par :

$$|\Delta V_\alpha|^{\max} = \mu_0 \omega J_S R_\alpha^3 f_\omega^{\max}(h). \quad (6.14)$$

À partir de la relation (6.14), il est possible d'obtenir une unique courbe de la tension perturbée $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ pour toutes les tailles et profondeurs d'inclusion, en traçant $\Upsilon_\alpha = |\Delta V_\alpha|^{\max} / \mu_0 \omega J_S$ en fonction de $R_\alpha^3 f_\omega^{\max}(h)$. Les résultats expérimentaux sont comparés à cette courbe dans la figure 6.12 pour les quatre rayons d'inclusion ($R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm), les deux profondeurs ($h = 3$ et 6 mm) et les basses fréquences ($f = 500, 700, 1000, 1500$ et 2000 Hz). Les valeurs expérimentales de Υ_α sont calculées à partir d'une mesure de $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ pour R_α et h fixés, sachant que la fréquence $f = \omega/2\pi$ et la densité de courant dans la bobine primaire J_S sont imposés.

On observe premièrement que les valeurs expérimentales de Υ_α pour les inclusions proches de la paroi ($h = 3$ mm, cercles sur la figure) sont en bon accord avec la courbe théorique. Pour les inclusions situées en profondeur dans le métal ($h = 6$ mm, triangles), les points expérimentaux sont légèrement déviés en-dessous de la courbe. Lorsque la taille de l'inclusion augmente (particulièrement $R_\alpha = 2.5$ mm, en vert), une inflexion des points expérimentaux est également observée. Enfin, à une profondeur d'inclusion h et un rayon R_α fixés, une augmentation de la fréquence induit une déviation des points expérimentaux par rapport à la courbe théorique.

Les déviations des résultats expérimentaux par rapport à la courbe théorique, observées lorsque la fréquence f , le rayon d'inclusion R_α et la profondeur h augmentent, sont une conséquence directe des effets inductifs, négligés dans le modèle théorique. Premièrement, avec l'augmentation de f et R_α , le paramètre d'écrantage $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2$ augmente et l'hypothèse $\Omega_\alpha \ll 1$ n'est plus valable. D'autre part, avec l'augmentation de la profondeur h , le terme inductif $-\mathbb{1}_C j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha$ dans l'équation du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α (5.10) devient non négligeable par rapport au terme Laplacien $\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha$. Dans les deux cas, une densité de courant $\mathbf{j}_\alpha = -j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha$ est induite dans le métal environnant l'inclusion, et entraîne une atténuation du champ perturbé \mathbf{A}_α . L'atténuation se caractérise ici par des mesures expérimentales plus faibles que les prédictions théoriques lorsque f , R_α et h sont élevés : le modèle surestime alors la perturbation dans ces cas.

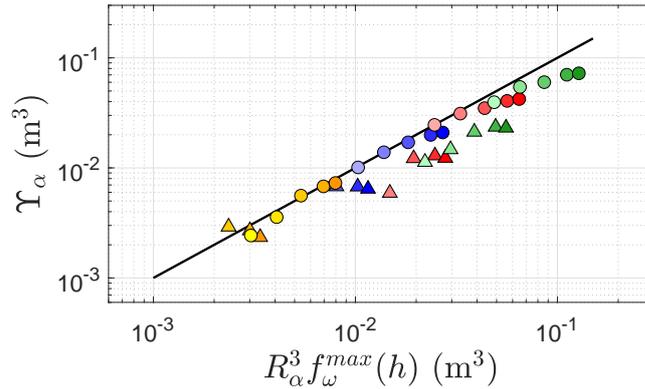


FIGURE 6.12 – Courbe théorique $\Upsilon_\alpha = |\Delta V_\alpha|^{\max}/\mu_0\omega J_S = R_\alpha^3 f_\omega^{\max}(h)$ obtenue par le modèle non inductif (—), et comparée aux résultats expérimentaux pour plusieurs rayons d’inclusion : 1 mm (tons jaunes), 1.5 mm (tons bleus), 2 mm (tons rouges) et 2.5 mm (tons verts). La profondeur où se situe l’inclusion est indiquée par des cercles pour $h = 3$ mm, et par des triangles pour $h = 6$ mm. Pour chaque inclusion, la fréquence est caractérisée par les nuances de couleur, du clair (500 Hz) vers le sombre (2 kHz).

6.4.4 Premier problème inverse pour déterminer la taille et la position de l’inclusion

La finalité de l’étude est de caractériser la taille et la position d’inclusions dans un métal liquide à partir de la mesure de la tension ΔV_α obtenue avec l’ECFM. Les inconnues du problème sont alors le rayon de l’inclusion R_α et sa profondeur h dans le métal. Pour une valeur expérimentale $\Upsilon_\alpha^{\text{exp}}$ obtenue à une fréquence f et une densité de courant J_S fixées, la valeur théorique $\Upsilon_\alpha^{\text{th}}$ peut être calculée pour n’importe quel rayon d’inclusion R_α et n’importe quelle profondeur h avec l’équation (6.14). Une méthode de minimisation entre la valeur expérimentale $\Upsilon_\alpha^{\text{exp}}$ et les valeurs théoriques $\Upsilon_\alpha^{\text{th}}$, calculées en fonction de R_α et h , est développée par la suite pour déterminer le couple (R_α, h) optimal tel que l’écart entre $\Upsilon_\alpha^{\text{exp}}$ et $\Upsilon_\alpha^{\text{th}}$ soit le plus faible possible. Ce couple optimal sera comparé à la valeur réelle de R_α et h , connue via le montage expérimental, afin de vérifier la validité de la méthode de minimisation.

Pour déterminer le couple (R_α, h) optimal, une minimisation par moindres carrés est effectuée sur la plage des basses fréquences considérée dans l’expérience (entre 500 Hz et 2 kHz). La fonction objectif à minimiser s’écrit ici :

$$G(R_\alpha, h) = \sum_{i=1}^N \left(\Upsilon_{\alpha,i}^{\text{exp}} - \Upsilon_{\alpha,i}^{\text{th}}(R_\alpha, h) \right)^2, \quad (6.15)$$

où l’indice i correspond à chaque fréquence f_i , et N est le nombre de fréquences pour lesquelles on mesure $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ (ici, $N = 5$ car $f_i = 500, 700, 1000, 1500$ ou 2000 Hz).

La figure 6.13 montre quatre courbes de niveau de la fonction objectif G en fonction de R_α et h , obtenues pour quatre configurations expérimentales distinctes. Chaque valeur expérimentale $(R_\alpha^{\text{exp}}, h^{\text{exp}})$ est indiquée par une croix blanche. Pour chaque configuration expérimentale, la fonction G est minimale sur toute une « vallée », en bleue sur la figure 6.13. La valeur $(R_\alpha^{\text{exp}}, h^{\text{exp}})$ expérimentale est située dans cette vallée pour les quatre configurations.

L’existence d’une courbe $G(R_\alpha, h)$ minimale (la « vallée ») suggère que la méthode de minimisation ne permet pas de déterminer un couple (R_α, h) de manière univoque. Une inclusion

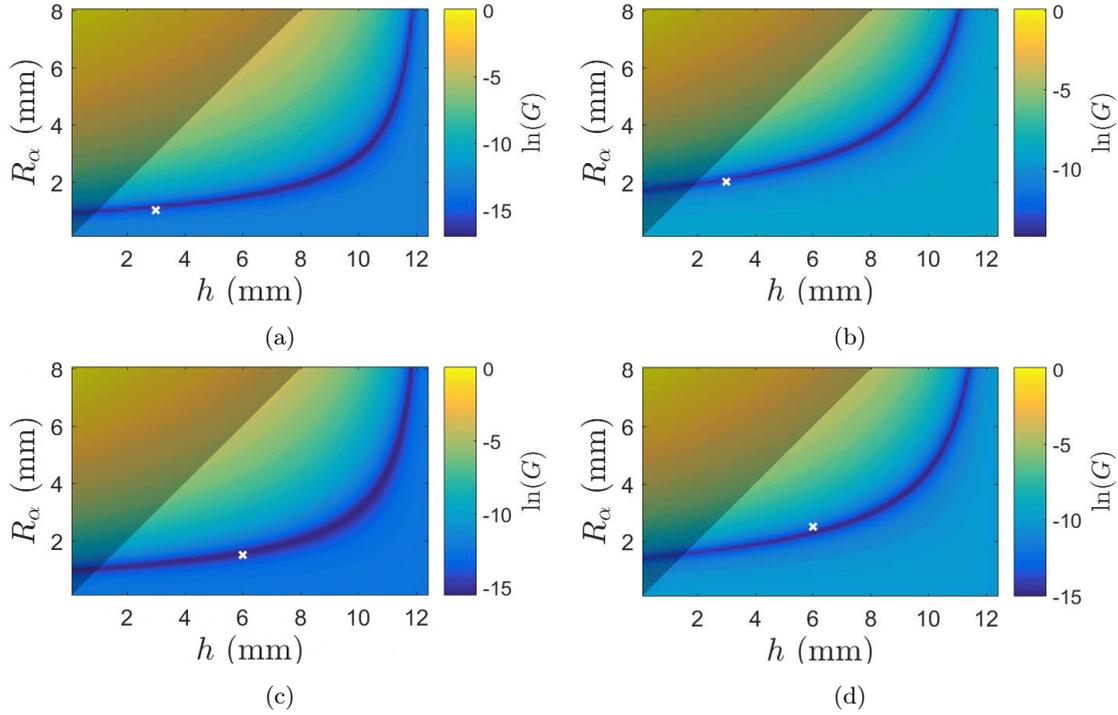


FIGURE 6.13 – Courbes de niveau de la fonction objectif G définie par l'équation (6.15), calculées pour quatre configurations expérimentales indiquées par des croix blanches : (a) $R_\alpha^{\text{exp}} = 1$ mm et $h^{\text{exp}} = 3$ mm, (b) $R_\alpha^{\text{exp}} = 2$ mm et $h^{\text{exp}} = 3$ mm, (c) $R_\alpha^{\text{exp}} = 1.5$ mm et $h^{\text{exp}} = 6$ mm, (d) $R_\alpha^{\text{exp}} = 2.5$ mm et $h^{\text{exp}} = 6$ mm. La zone grisée correspond à la configuration géométriquement impossible où l'inclusion sortirait du tube de métal liquide, pour $R_\alpha > h$.

volumineuse en profondeur dans le métal ($R_\alpha = 2$ mm et $h = 8$ mm sur la figure 6.13(a) par exemple) génère une perturbation similaire à celle d'une inclusion plus petite mais proche de la paroi ($R_\alpha = 1$ mm et $h = 1.5$ mm par exemple). Cette remarque peut être justifiée par l'analyse des lois de puissance aux basses fréquences effectuée précédemment dans la sous-section 6.4.2. Il a été montré en effet qu'aux basses fréquences, le module $|\Delta V_\alpha|$ de la différence de tension ΔV_α se comporte selon $|\Delta V_\alpha| \propto f^2$, d'après l'équation (6.8) (page 131). Pour une configuration expérimentale $(R_\alpha^{\text{exp}}, h^{\text{exp}})$ donnée, les modules $|\Delta V_\alpha|$ mesurés à deux fréquences f_1 et f_2 sont donc auto-similaires – avec un rapport de proportionnalité égal à $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$ – et les valeurs expérimentales de $\Upsilon_\alpha = |\Delta V_\alpha|^{\text{max}} / \mu_0 \omega J_S$ sont identiques pour les deux fréquences. En conséquence, la mesure à différentes fréquences (dans la limite des basses fréquences $f \lesssim 2$ kHz) du paramètre $|\Delta V_\alpha|^{\text{max}}$, utilisée dans la minimisation de la fonction $G(R_\alpha, h)$ (6.15), ne permet pas d'identifier un unique couple (R_α, h) correspondant à la configuration expérimentale. Notons cependant que la méthode de minimisation permet d'obtenir la courbe (R_α, h) minimale de manière relativement précise.

À partir de l'analyse aux basses fréquences, on remarque que la similarité des perturbations décrite dans le paragraphe précédent est valable pour tout le signal temporel $|\Delta V_\alpha|$, et pas seulement pour le paramètre $|\Delta V_\alpha|^{\text{max}}$. En conséquence, le choix du paramètre $|\Delta V_\alpha|^{\text{max}}$ caractéristique du signal $|\Delta V_\alpha|$ n'influe pas sur le résultat de la minimisation. Pour illustrer cette affirmation, la figure 6.14 montre les tensions $|\Delta V_\alpha|$ calculées par le modèle non inductif et normalisées par les amplitudes $|\Delta V_\alpha|^{\text{max}}$ respectives à chaque tension (pour les quatre tailles d'inclusion, les deux profondeurs et les cinq fréquences). Il est ici clair que l'allure du signal temporel $|\Delta V_\alpha|$ est similaire

pour toutes les configurations. On remarque que les courbes ne sont pas exactement superposées, étant donné que la limite basse fréquence est légèrement dépassée ici.

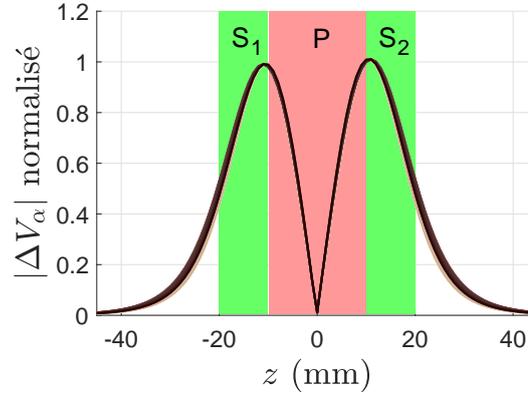


FIGURE 6.14 – Tensions $|\Delta V_\alpha|$ normalisées par les amplitudes maximales respectives $|\Delta V_\alpha|^{\max}$, obtenues avec le modèle théorique non inductif pour les quatre tailles d'inclusion ($R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm) et les deux profondeurs ($h = 3$ et 6 mm) aux basses fréquences ($f = 500, 700, 1000, 1500$ et 2000 Hz).

En conclusion, la minimisation basée sur le modèle théorique non inductif peut être la première étape d'une méthode inverse permettant de déterminer la taille et la position d'inclusions dans un écoulement. Une première indétermination est en effet levée par l'obtention de la courbe (R_α, h) minimale (vallée bleue dans la figure 6.13), mais une méthode complémentaire est nécessaire pour caractériser un couple unique (R_α, h) associé aux mesures de $|\Delta V_\alpha|$. Les mesures aux hautes fréquences peuvent en ce sens être envisagées.

6.5 COMPORTEMENT AUX HAUTES FRÉQUENCES

Cette section décrit la réponse de l'ECFM à la présence d'une inclusion dans le métal liquide lorsque la fréquence d'excitation est élevée, c'est à dire lorsque $\Omega_\alpha \geq 1$ (soit $f \gtrsim 2$ kHz dans notre étude). Le comportement aux hautes fréquences des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$, et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ est présenté dans les sous-sections 6.5.1 ($h = 3$ mm) et 6.5.2 ($h = 6$ mm). L'évolution fréquentielle de ces paramètres est expliquée par l'allure des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$, montrés dans la sous-section suivante 6.5.3. Dans la sous-section 6.5.4, le modèle non inductif, bien que développé sous une hypothèse de basses fréquences, permet de mettre en évidence les effets du déphasage des courants induits sur l'allure des signaux $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ mesurés expérimentalement. À partir de la compréhension des effets du déphasage, la dernière sous-section 6.5.5 propose une méthode de détermination de la profondeur h d'une inclusion, basée sur une expression simplifiée du déphasage du potentiel vecteur perturbé, et complémentaire à l'analyse aux basses fréquences de la section précédente 6.4.

6.5.1 Inclusion proche de la paroi ($h = 3$ mm) : résultats fréquentiels

Cette première sous-section montre le comportement aux hautes fréquences des paramètres $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ pour une inclusion proche de la paroi. L'évolution en fréquence de ces paramètres est montrée dans la figure 6.15, pour plusieurs inclusions de rayon $R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm fixées à une profondeur $h = 3$ mm. Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées

aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif. Ce modèle, bien que développé sous une hypothèse de basses fréquences, sera utilisé par la suite pour comprendre les phénomènes observés expérimentalement.

Sur la plage de fréquence considérée, on observe que les paramètres $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ augmentent avec la fréquence, à la fois pour les mesures et pour les deux solutions du modèle. Le paramètre $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ augmente avec la fréquence, puis décroît jusqu'à un minimum local, et augmente de nouveau aux hautes fréquences. Le minimum local observé sur $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ est dû à une inversion de l'oscillation du signal temporel $\Delta V_{\alpha,||}$, discutée dans la section 6.5.3 de ce chapitre. La fréquence où se trouve le minimum local diminue avec la taille de l'inclusion pour les mesures expérimentales (de 4 kHz pour $R_\alpha = 1$ mm à 2 kHz pour $R_\alpha = 2.5$ mm), et augmente à l'inverse pour la solution exacte du modèle non inductif (de 7 kHz pour $R_\alpha = 1$ mm à 10 kHz pour $R_\alpha = 2.5$ mm). Avec la solution approchée en revanche, la fréquence du minimum est indépendante de la taille des inclusions.

Les déviations entre les mesures expérimentales et les résultats du modèle non inductif, observées à partir de $f \gtrsim 2$ kHz, sont liées à la limite de validité du modèle non inductif, dans lequel le paramètre d'écrantage est supposé petit, i.e. $\Omega_\alpha = \mu_0 \sigma \omega R_\alpha^2 \ll 1$.

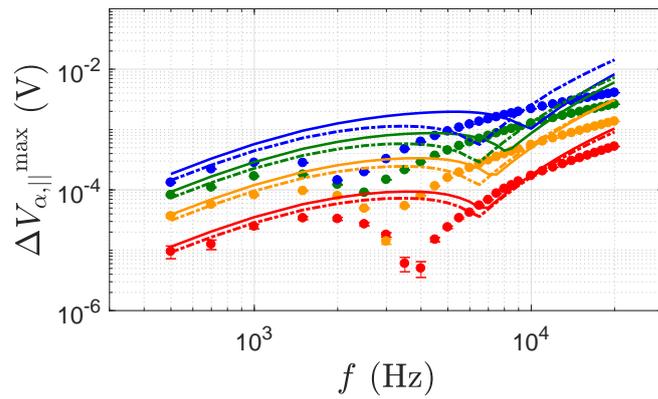
6.5.2 Inclusion en profondeur dans le métal ($h = 6$ mm) : résultats fréquentiels

Cette sous-section décrit le comportement aux hautes fréquences des paramètres $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ pour une inclusion en profondeur dans le métal. L'évolution en fréquence de ces paramètres est montrée dans la figure 6.16, pour plusieurs inclusions de rayon $R_\alpha = 1, 1.5, 2$ et 2.5 mm fixées à une profondeur $h = 6$ mm. Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif.

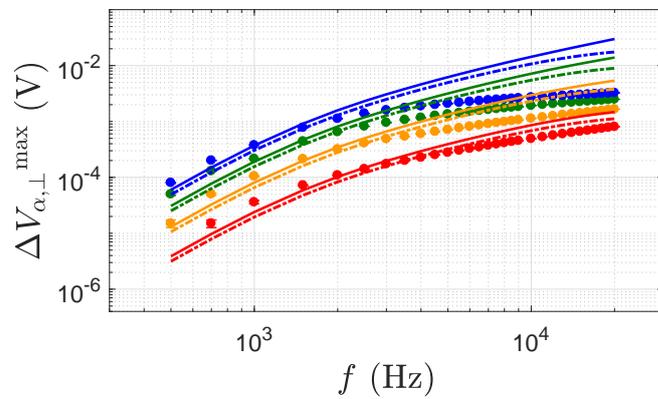
Sur la plage de fréquence considérée, la dépendance fréquentielle de la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ est caractérisée par l'apparition de lobes pour lesquels $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ est maximal, délimités par des régions de faibles amplitudes (minimums locaux) pour lesquelles une inversion des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,||}$ est observée. Sur les mesures expérimentales par exemple, on identifie un premier lobe autour de 1 kHz, puis un deuxième à 3.5 kHz et un troisième entre 12 kHz et 16 kHz selon les tailles d'inclusion. On note que le deuxième lobe à 3.5 kHz est le plus important. Sur les résultats du modèle non inductif, seuls les deux premiers lobes sont visibles, décalés en fréquence vers la droite par rapport aux résultats expérimentaux (1.5 kHz pour le premier lobe, et entre 16 kHz et 20 kHz pour le deuxième lobe) et d'amplitudes largement supérieures.

Le même type de comportement en lobes est observé sur la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$. Sur les mesures expérimentales, on observe cette fois-ci deux lobes : un premier très net pour toutes les tailles d'inclusion à environ 2 kHz, et un second visible pour les plus grosses inclusions (de rayon $R_\alpha \geq 1.5$ mm), situé entre 6 kHz et 8 kHz. Sur les résultats du modèle non inductif, un lobe est observé pour toutes les tailles d'inclusion autour de 7 kHz, et le début d'un deuxième se distingue à partir de 15 kHz environ. Comme pour la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$, on constate que les lobes obtenus par le modèle sont d'une part décalés vers les hautes fréquences par rapport aux mesures expérimentales, et d'autre part ont une amplitude beaucoup plus importante.

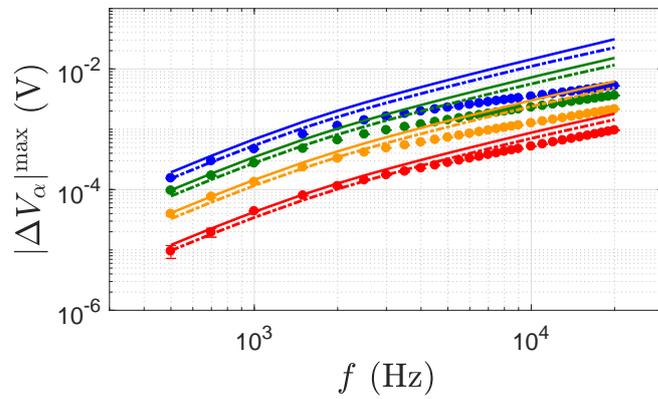
Il est à noter que l'oscillation de la tension $\Delta V_{\alpha,\perp}$ n'est pas mesurée à partir d'une certaine fréquence pour la profondeur $h = 6$ mm ($f = 4$ kHz pour $R_\alpha = 1$ mm par exemple). Au-delà de cette fréquence, le signal mesuré ΔV_\perp devient fluctuant et l'oscillation $\Delta V_{\alpha,\perp}$ liée à l'inclusion, de faible amplitude, n'est pas clairement identifiée. Pour les inclusions de taille intermédiaire, la limite de détectabilité est légèrement repoussée (10 kHz pour $R_\alpha = 1.5$ mm, 9 kHz pour $R_\alpha = 2$



(a)

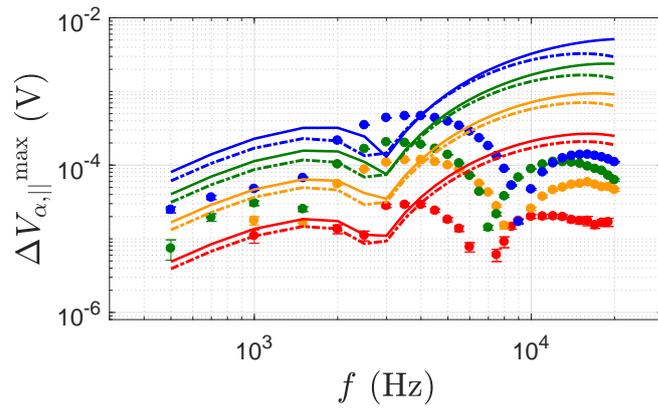


(b)

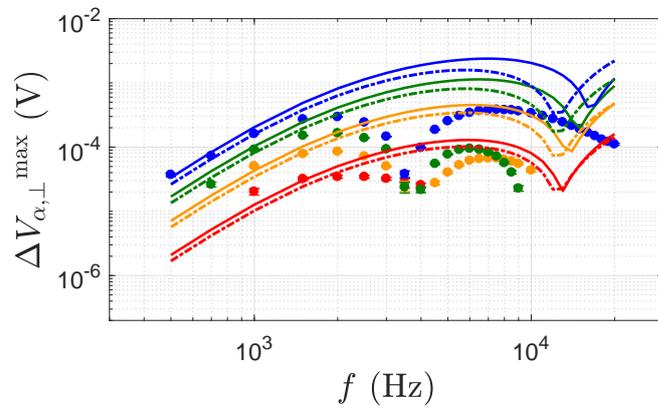


(c)

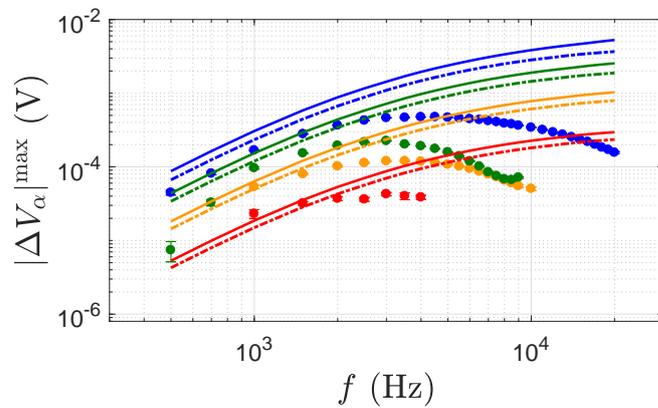
FIGURE 6.15 – Amplitude des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ (a), en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ (b) et en module $|\Delta V_{\alpha}|^{\max}$ (c), en fonction de la fréquence, pour des inclusions de rayon R_{α} variable : 1 mm (●), 1.5 mm (●), 2 mm (●) et 2.5 mm (●). Les inclusions sont situées à une profondeur fixée $h = 3$ mm dans le métal. Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif décrit dans le chapitre 5. La vitesse vaut ici $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 6.16 – Amplitude des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ (a), en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ (b) et en module $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ (c), en fonction de la fréquence, pour des inclusions de rayon R_α variable : 1 mm (●), 1.5 mm (●), 2 mm (●) et 2.5 mm (●). Les inclusions sont situées à une profondeur fixée $h = 6$ mm dans le métal. Les mesures expérimentales (cercles) sont comparées aux solutions exacte (traits continus) et approchée (traits discontinus) du modèle non inductif décrit dans le chapitre 5. La vitesse vaut ici $U = 100 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

mm). Seule la tension relative à l'inclusion la plus grande ($R_\alpha = 2.5$ mm) est mesurée sur toute la plage de fréquence. Il est probable que les défauts de surface sur le diamètre intérieur du tube de galinstan soient à l'origine de cette limite de détectabilité. Ceux-ci, bien que de petite taille (tolérance d'usinage de ± 0.1 mm), peuvent générer des perturbations indésirables relativement importantes aux hautes fréquences, de par leur localisation en surface du métal où les courants induits sont très intenses. Lorsque l'ECFM translate et sonde le métal liquide, une partie du signal mesuré ΔV_α est liée à ces défauts de surface et la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ est particulièrement impactée.

En raison de l'absence de mesure de $\Delta V_{\alpha,\perp}$ pour les inclusions de rayon $R_\alpha = 1, 1.5$ et 2 mm au-delà d'une certaine fréquence (4 kHz, 10 kHz et 9 kHz respectivement), les valeurs expérimentales du module $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ sont obtenues uniquement sur la plage de mesure de $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Pour l'inclusion la plus grande, les résultats expérimentaux sont valables sur toute la plage de fréquence et montrent que le module est d'abord croissant jusqu'à une certaine fréquence (ici $f \approx 4$ kHz), puis décroît. Pour le modèle non inductif, le module est croissant sur toute la plage de fréquence, et sa pente diminue de manière significative aux hautes fréquences.

Enfin, la solution approchée du modèle théorique donne une assez bonne estimation de la solution exacte pour toutes les tailles d'inclusion et sur toute la plage de fréquence considérée. Les gradients de la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ sont en effet plus faibles dans le cœur du métal, et l'approximation d'une densité de courant uniforme $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \mathbf{cst}$ dans le volume B associé à l'inclusion peut être appliquée dans l'expression (5.12).

6.5.3 Effets des hautes fréquences sur les signaux temporels $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$

Cette section est consacrée à l'analyse des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$, mesurés expérimentalement et calculés par le modèle non inductif. L'objectif est d'expliquer le comportement des paramètres $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$ observés dans les sous-sections précédentes 6.5.1 ($h = 3$ mm) et 6.5.2 ($h = 6$ mm).

Il a été observé que les deux composantes $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ évoluent d'abord en f^2 et f^3 respectivement aux basses fréquences, par l'équation (6.8), puis subissent une inflexion avec l'augmentation en fréquence jusqu'à arriver à un minimum local (parfois plusieurs). Pour les inclusions à une profondeur $h = 3$ mm par exemple, $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$ atteint expérimentalement ce minimum à une fréquence entre 2 kHz et 4 kHz selon les tailles d'inclusion (figure 6.15). Pour les inclusions à la profondeur $h = 6$ mm, $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$ atteint un premier minimum entre 1.5 kHz et 2.5 kHz puis un second autour de 8 kHz (figure 6.16a), tandis que $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ rencontre un minimum à 4 kHz (figure 6.16b). Ces comportements sont également observés sur les résultats théoriques, bien que la fréquence d'apparition des minimums soit supérieure aux expériences dans tous les cas. L'existence de ces minimums peut être expliquée à partir des signaux temporels $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$.

La figure 6.17 montre les signaux temporels $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ mesurés expérimentalement lorsque l'ECFM survole une inclusion de rayon $R_\alpha = 2.5$ mm à une profondeur $h = 3$ mm, pour les fréquences proches du minimum local de $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$ (entre 1.5 kHz et 4 kHz). On remarque que l'oscillation s'inverse dans cette plage de fréquence : avant l'inversion, le premier extremum de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ est négatif (à $t \approx 0.29$ s) et après l'inversion, le premier extremum est positif (à $t \approx 0.26$ s). On note de plus que le signal n'est pas complètement plat au moment de l'inversion (c'est à dire $\Delta V_{\alpha,\parallel} \neq 0$) mais forme plutôt une sorte d'ondelette, à 2 kHz et 2.5 kHz. À ces fréquences, la définition des paramètres $\Delta V_{\alpha,\parallel}^{\max}$, $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ et $|\Delta V_\alpha|^{\max}$, telle que décrite dans la figure 6.6 (page 124), devient inadaptée. Cette inversion de l'oscillation est observée de manière similaire sur les

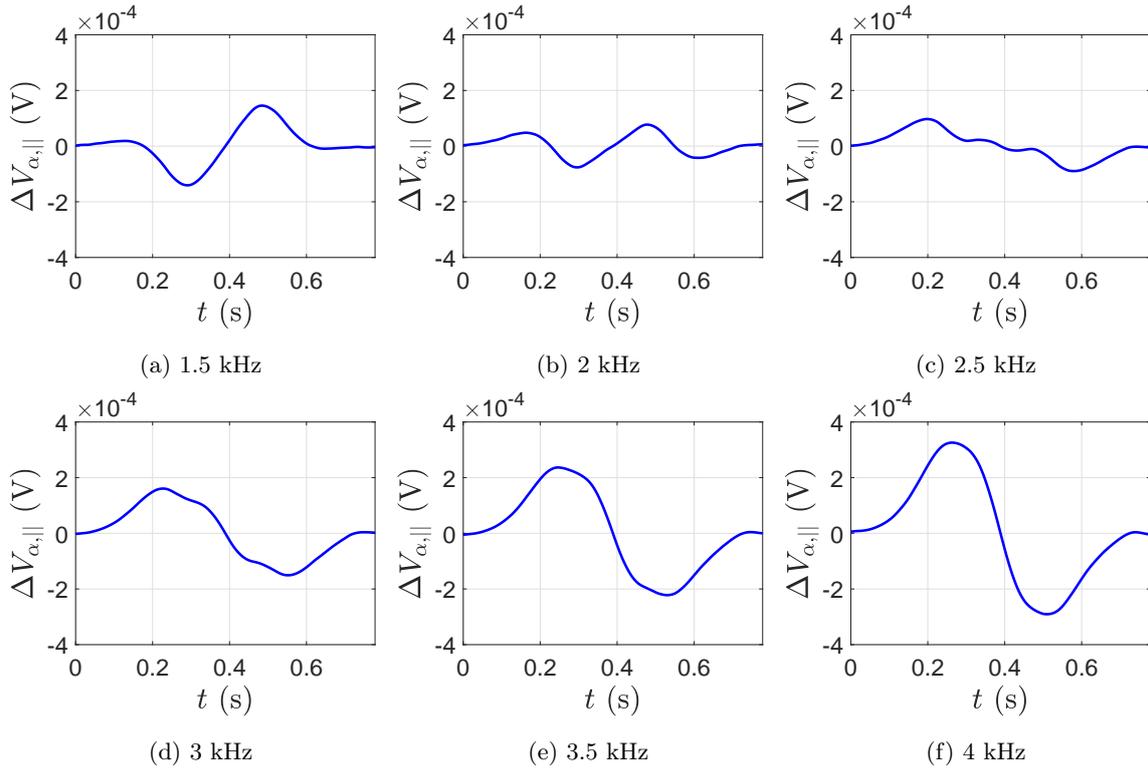


FIGURE 6.17 – Inversion de l'oscillation observée sur le signal mesuré $\Delta V_{\alpha,||}$. Vitesse $U = 100$ mm.s^{-1} , rayon de l'inclusion $R_\alpha = 2.5$ mm, profondeur de l'inclusion $h = 3$ mm.

signaux temporels en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ autour de chaque minimum local du paramètre $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$.

La figure 6.18 montre la même inversion de l'oscillation ($\Delta V_{\alpha,||}$ pour $R_\alpha = 2.5$ mm et $h = 3$ mm) observée sur les résultats théoriques du modèle non inductif (solution exacte). Cette fois, on note que l'inversion a lieu à des fréquences plus hautes, entre 7 kHz et 15 kHz. On déduit que les effets inductifs, négligés dans le modèle, jouent un rôle important dans l'inversion de l'oscillation, en particulier sur la fréquence d'inversion. Un comportement similaire aux signaux expérimentaux est cependant observé, sur l'inversion de l'oscillation et sur l'allure en ondelette (à 10 kHz et 11 kHz). Les résultats théoriques permettent ainsi une étude qualitative, et sont utilisés par la suite pour la compréhension physique des mesures expérimentales aux hautes fréquences.

Afin d'expliquer l'inversion des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ à l'aide du modèle non inductif, on s'intéresse au comportement de la tension dans une seule des deux bobines secondaires. La figure 6.19 représente la tension en phase $V_{1,\alpha,||}$ dans la bobine secondaire S_1 aux fréquences proches du minimum local de $\Delta V_{\alpha,||}$ (de 7 kHz en noir à 15 kHz en orange), obtenue par la solution exacte du modèle non inductif avec $R_\alpha = 2.5$ mm et $h = 3$ mm. Lors du passage de l'inclusion dans l'ECFM, la tension $V_{1,\alpha,||}$ a d'abord une forme de cloche légèrement asymétrique et orientée négativement à 7 kHz, puis l'amplitude de la tension décroît et on observe une faible oscillation de 9 kHz à 11 kHz. Enfin, à 13 kHz et 15 kHz, la tension $V_{1,\alpha,||}$ retrouve une forme de cloche asymétrique orientée cette fois positivement. Il est à noter que la tension $V_{2,\alpha,||}$ dans la bobine secondaire S_2 est identique par symétrie. En outre, un comportement similaire est observé sur les tensions en quadrature $V_{1,\alpha,\perp}$ et $V_{2,\alpha,\perp}$ lors de l'inversion de l'oscillation de $\Delta V_{\alpha,\perp}$.

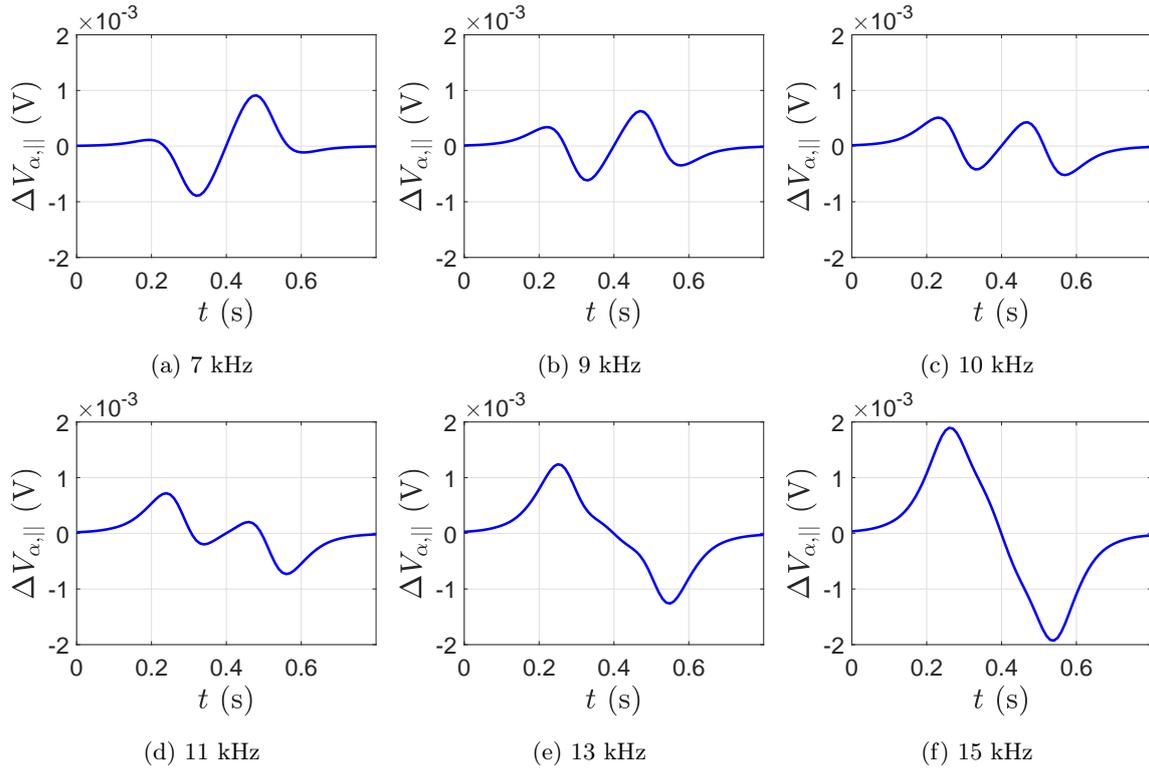


FIGURE 6.18 – Inversion de l’oscillation observée sur le signal $\Delta V_{\alpha,||}$ calculé par le modèle non inductif (solution exacte). Vitesse $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$, rayon de l’inclusion $R_{\alpha} = 2.5 \text{ mm}$, profondeur de l’inclusion $h = 3 \text{ mm}$.

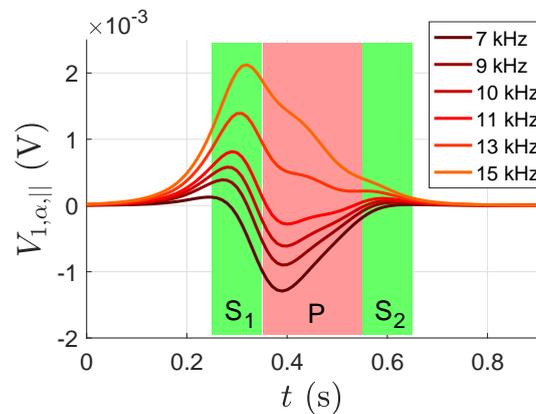


FIGURE 6.19 – Tension en phase $V_{1,\alpha,||}$ dans la bobine secondaire S_1 , calculée avec le modèle non inductif (solution exacte) à différentes fréquences. Vitesse $U = 100 \text{ mm.s}^{-1}$, rayon de l’inclusion $R_{\alpha} = 2.5 \text{ mm}$, profondeur de l’inclusion $h = 3 \text{ mm}$.

6.5.4 Effet du déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0

Dans cette sous-section, il est montré que le déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0 à la position de l’inclusion est à l’origine des phénomènes décrits dans les précédentes sections : changement de signe des tensions dans chaque bobine secondaire, inversion de l’oscillation de la différence de tension entre les secondaires, et existence de minimums locaux de $\Delta V_{\alpha,||}^{\max}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}^{\max}$ à certaines

fréquences. L'analyse est développée ici dans le cadre du modèle non inductif. L'extension de cette analyse aux résultats expérimentaux est décrite dans la sous-section suivante 6.5.5. Basé sur les résultats de la présente section, une expression simplifiée du déphasage du potentiel vecteur tenant compte des effets inductifs expliquera notamment les différences de fréquence d'inversion des oscillations entre les mesures expérimentales et le modèle non inductif.

On rappelle en premier lieu quelques définitions utiles. Nous écrivons le vecteur densité de courant $\mathbf{j}_0 = j_0 \mathbf{e}_0$, où $j_0 = \widehat{j}_0 e^{j\omega t}$ peut être exprimée en coordonnées polaires ou cartésiennes par :

$$j_0 = \widehat{j}_0 |e^{j\omega t + \Theta_0} \quad \text{ou} \quad j_0 = j_{0,\parallel} e^{j\omega t} + j \times j_{0,\perp} e^{j\omega t}. \quad (6.16)$$

Ici, $|\widehat{j}_0|$ est l'amplitude de la densité de courant, $\Theta_0 = \arg\{\widehat{j}_0\}$ est le déphasage, $j_{0,\parallel} = \text{Re}\{\widehat{j}_0\}$ est la composante en phase et $j_{0,\perp} = \text{Im}\{\widehat{j}_0\}$ est la composante en quadrature. La phase de référence est la phase du courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_S . Les composantes en phase et en quadrature des tensions dans les bobines secondaires, $V_{\alpha,\parallel}$ et $V_{\alpha,\perp}$, sont définies de la même manière.

La première étape consiste à relier le comportement des tensions en phase et en quadrature dans chaque bobine secondaire avec la distribution de la densité de courant \mathbf{j}_0 à la position de l'inclusion. Les équations sans dimension de la f.é.m. dans une spire (5.14) et dans une bobine (5.15) sont utilisées à cette fin :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{j}{4\pi} \oint \iiint_B \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{et} \quad V_\alpha = \sum_{i=1}^2 n_s \int_{z-L_s/2}^{z+L_s/2} \varepsilon_\alpha(r_s^i, \xi) d\xi.$$

On remarque en effet que la tension V_α générée aux bornes d'une bobine secondaire est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la densité de courant $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ traversant le volume B relatif à l'inclusion (par la présence de l'unité imaginaire j dans l'expression de la f.é.m. ε_α). Sous les hypothèses du modèle non inductif, la tension en phase $V_{\alpha,\parallel}$ dans chacune des bobines secondaires est donc relative à la densité de courant en quadrature $j_{0,\perp}$ (et inversement), soit :

$$V_{\alpha,\parallel} \propto j_{0,\perp} \quad \text{et} \quad V_{\alpha,\perp} \propto j_{0,\parallel}. \quad (6.17)$$

En se basant sur cette relation, nous nous intéressons alors à la distribution des composantes en phase $j_{0,\parallel}$ et en quadrature $j_{0,\perp}$ de la densité de courant. La figure 6.20 représente les courbes de niveau de la densité de courant en quadrature $j_{0,\perp}$, calculées à plusieurs fréquences (1 kHz, 2.5 kHz, 9 kHz et 15 kHz) par la solution analytique du chapitre 3. Deux inclusions de rayon $R_\alpha = 1$ mm et 2.5 mm situées à une profondeur $h = 3$ mm sont représentées à titre indicatif. Les lignes pointillées blanches (à 2.5 kHz, 9 kHz et 15 kHz) indiquent les endroits où la densité de courant $j_{0,\perp}$ change de signe. Les analyses suivantes sont effectuées pour la tension $V_{1,\alpha,\parallel}$ dans la bobine secondaire S_1 , sachant que la tension $V_{2,\alpha,\parallel}$ dans S_2 est similaire par symétrie.

- Pour $f = 1$ kHz, la densité de courant induite $j_{0,\perp}$ est négative dans tout le métal et plus intense sous la bobine primaire (entre $z = -10$ et 10 mm). Cette observation est en accord avec l'analyse basse fréquence effectuée précédemment, où il est montré que la densité de courant en quadrature $j_{0,\perp}$ est négative partout et proportionnelle à f , équation (6.13). En conséquence, la tension perturbée $V_{1,\alpha,\parallel}$, proportionnelle à $j_{0,\perp}$, est toujours négative et forme une cloche sous la bobine secondaire S_1 .

- Pour $f = 2.5$ kHz, la densité de courant $j_{0,\perp}$ sous la bobine primaire est toujours négative et plus intense qu'à 1 kHz. On observe de plus un changement de signe à partir d'une certaine profondeur, et on a $j_{0,\perp} > 0$ dans toute la zone centrale de l'écoulement. Lorsque les inclusions passent sous l'ECFM, elles rencontrent cependant une densité de courant $j_{0,\perp}$ négative. Comme

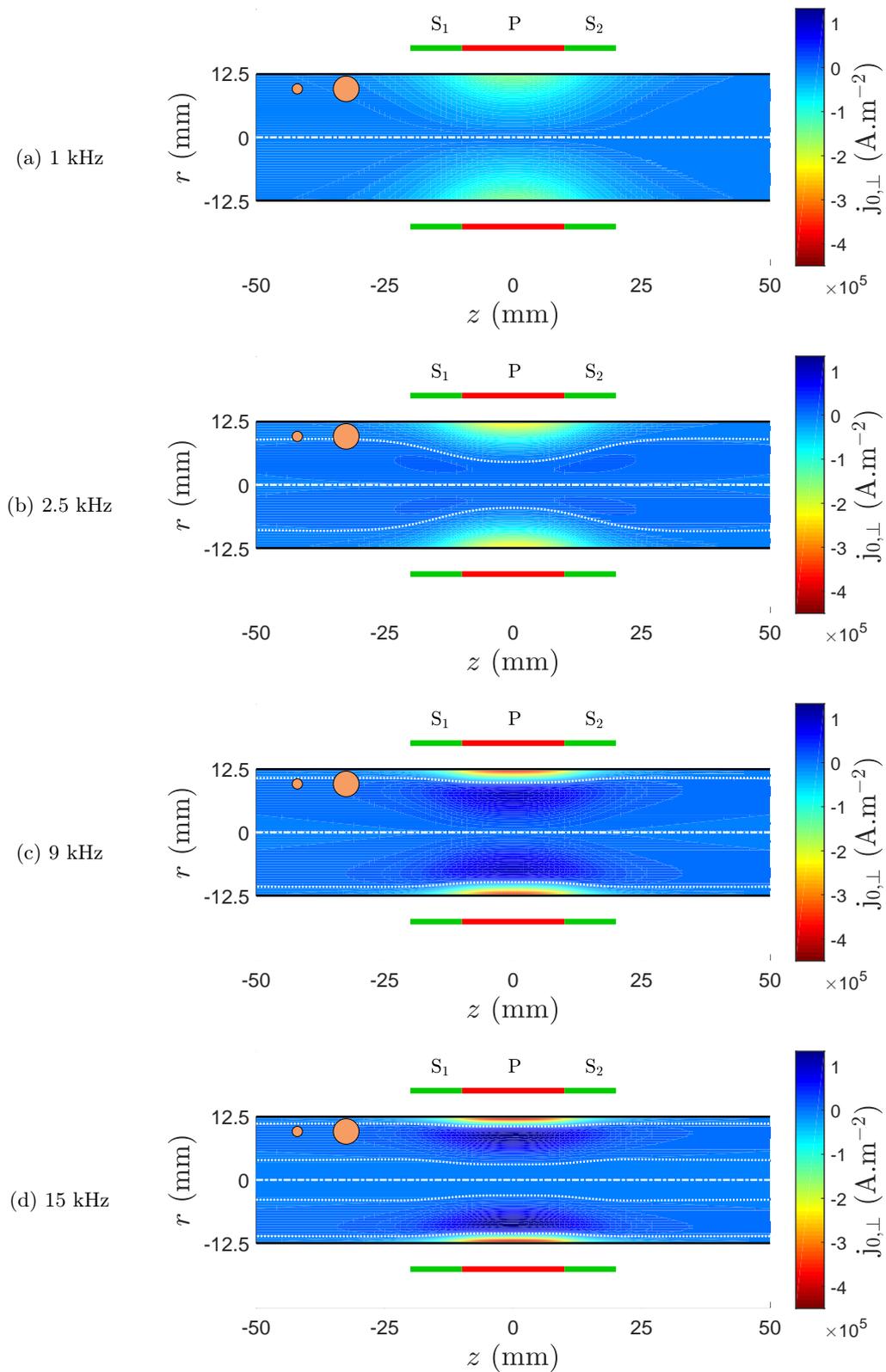


FIGURE 6.20 – Courbes de niveau de la densité de courant en quadrature $j_{0,\perp}$ à différentes fréquences. Deux inclusions de rayon $R_\alpha = 1$ mm et 2.5 mm situées à une profondeur $h = 3$ mm sont représentées à titre indicatif. Les lignes pointillées blanches indiquent les endroits où la densité de courant $j_{0,\perp}$ change de signe. La ligne discontinue blanche indique l'axe du cylindre. La position des bobines primaire et secondaires est indiquée par les rectangles verts et rouges de part et d'autre de l'écoulement.

précédemment, leur passage dans l'ECFM se manifeste sur $V_{1,\alpha,||}$ par une cloche orientée négativement.

- Pour $f = 9$ kHz, la densité de courant $j_{0,\perp}$ s'est encore intensifiée sous la bobine primaire, et le changement de signe de $j_{0,\perp}$ apparaît à une profondeur plus faible qu'à 2.5 kHz. Les inclusions à $h = 3$ mm sont alors à cheval sur une zone où $j_{0,\perp} < 0$ (proche de la paroi) et une autre où $j_{0,\perp} > 0$ (en profondeur). Le comportement de $V_{1,\alpha,||}$ devient plus difficile à expliquer dans ce cas. Cependant, on peut premièrement remarquer que les inclusions loin de l'ECFM (pour $|z| > 25$ mm) sont majoritairement dans la zone où $j_{0,\perp} > 0$. La tension perturbée $V_{1,\alpha,||}$ est donc a priori positive pour $|z| > 25$ mm. Par ailleurs, les inclusions s'approchant de l'ECFM rencontrent de plus en plus de densité de courant négative, du fait que la couche où $j_{0,\perp} < 0$ est plus épaisse sous l'ECFM. En remarquant que la densité de courant négative (proche de la paroi) est beaucoup plus intense que celle positive (en profondeur), on peut supposer que les termes négatifs ont plus de « poids » et génèrent une tension $V_{1,\alpha,||}$ négative lorsque les inclusions sont sous l'ECFM. Enfin, lorsque les inclusions ont traversé l'ECFM et s'éloignent, $V_{1,\alpha,||}$ redevient positif (pour $|z| > 25$ mm). À cette fréquence, le passage de l'inclusion se manifeste donc par une oscillation de $V_{1,\alpha,||}$.

- Pour $f = 15$ kHz, les inclusions sont majoritairement dans la zone où $j_{0,\perp} > 0$, durant toute leur translation. La tension $V_{1,\alpha,||}$ forme alors une cloche positive. On remarque par ailleurs qu'un deuxième changement de signe a lieu en profondeur ($r \approx 4$ mm soit $h \approx 8.5$ mm) : la densité de courant $j_{0,\perp}$ est à nouveau négative dans la zone centrale.

Le changement de signe de la densité de courant $j_{0,\perp}$ est donc à l'origine du changement de signe des tensions $V_{1,\alpha,||}$ et $V_{2,\alpha,||}$ dans S_1 et S_2 calculées avec le modèle non inductif (figure 6.19), et incidemment de l'inversion de l'oscillation observée sur la tension $\Delta V_{\alpha,||}$ (figure 6.18). Cette observation est également applicable à l'inversion de l'oscillation en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$: dans ce cas, c'est la densité de courant en phase $j_{0,||}$ qui change de signe. Notons que les changements de signe des courants en phase $j_{0,||}$ et en quadrature $j_{0,\perp}$ dans le métal sont indicateurs du déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0 , et du potentiel vecteur associé \mathbf{A}_0 . Lorsque $j_{0,||} = 0$, le déphasage de \mathbf{j}_0 vaut en effet $\Theta_0 = \pi/2 + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et lorsque $j_{0,\perp} = 0$, le déphasage vaut $\Theta_0 = k\pi$. À titre explicatif, la figure 6.21 montre les distributions du déphasage de \mathbf{j}_0 pour des fréquences de 5 kHz et 10 kHz, obtenues à partir de la solution analytique développée dans le chapitre 3. Il est observé que le déphasage de \mathbf{j}_0 (de la même manière que celui de \mathbf{A}_0) augmente avec la profondeur h et avec la fréquence f .

Grâce aux résultats du modèle non inductif, nous venons de montrer que le déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0 (donc du potentiel vecteur \mathbf{A}_0) à la position de l'inclusion génère une inversion des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ lorsque la profondeur h de l'inclusion ou la fréquence f augmentent. Du fait de ce déphasage, les densités de courant en phase $j_{0,||}$ et en quadrature $j_{0,\perp}$ changent de signe et passent par une valeur nulle à certaines positions. La profondeur où apparaît le changement de signe de $j_{0,||}$ et $j_{0,\perp}$ varie avec z , donc les tensions $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ ne sont jamais complètement nulles durant le passage d'une inclusion fixée à une profondeur h constante (d'où le signal en ondelettes observé sur les figures 6.18b, 6.18c et 6.18d). Ces observations sont valables pour les deux profondeurs d'inclusion considérées ($h = 3$ et 6 mm).

6.5.5 Première approche d'une méthode de détermination de la profondeur de l'inclusion

Dans cette sous-section, l'objectif est de développer une méthode de détermination de la profondeur de l'inclusion, à partir de la relation entre le déphasage du champ électromagnétique et

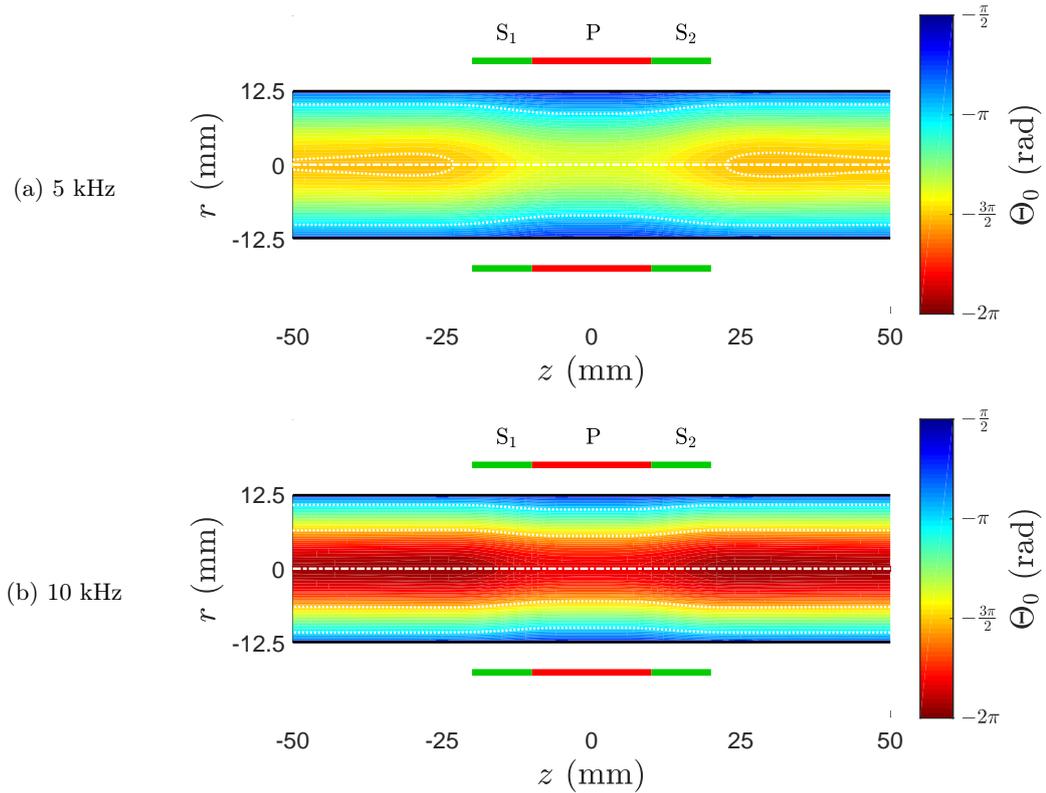


FIGURE 6.21 – Courbes de niveau du déphasage de \mathbf{j}_0 , noté Θ_0 , pour deux fréquences. Les lignes pointillées blanches indiquent les endroits où la phase est un multiple de $\pi/2$. La ligne discontinue blanche indique l’axe du cylindre. La position des bobines primaire et secondaires est indiquée par les rectangles verts et rouges de part et d’autre du métal.

l’inversion des oscillations de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. À partir d’une relation simplifiée entre la profondeur de l’inclusion et le déphasage du champ électromagnétique, la méthode est testée sur les résultats du modèle non inductif et sur les mesures expérimentales.

La première étape de la méthode consiste à déterminer une relation entre la profondeur h de l’inclusion et le déphasage du champ électromagnétique, à l’origine de l’inversion des oscillations comme nous venons de le voir. Dans une première approche, nous utilisons l’expression « usuelle » du déphasage des courants de Foucault dans un conducteur [70, 71], pour laquelle la phase de la densité de courant en surface du métal, en $x = 0$, est prise comme référence :

$$\Theta = -\frac{x}{\delta}. \quad (6.18)$$

Dans l’expression (6.18), $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega}$ est l’épaisseur de peau et x correspond à la distance par rapport à la surface du métal traversée par le champ électromagnétique. La relation que nous posons entre x et notre profondeur h , donnée par la suite, est différente dans le cas du modèle non inductif et dans le cas des expériences.

L’équation (6.18) signifie que la densité de courant à la distance x de la surface est déphasée d’un angle Θ par rapport à la densité de courant à la surface du métal, l’hypothèse sous-jacente étant que le métal occupe un demi-espace infini (voir figure 6.22). Dans ce cas, le champ électromagnétique se propage dans le métal à la manière d’une onde plane parallèle à la surface du métal. Bien que cette configuration soit clairement différente de la géométrie cylindrique de l’ECFM, les résultats qui vont

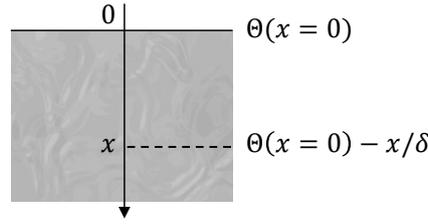


FIGURE 6.22

FIGURE 6.23 – Schéma illustratif du déphasage $\Theta = -x/\delta$ (6.18).

suivre permettent une première analyse, qualitative, du déphasage du champ électromagnétique en fonction de la profondeur h .

Cas du modèle non inductif

Dans cette partie, nous cherchons à comparer le déphasage calculé par la relation (6.18) avec les inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ observées sur les résultats du modèle non inductif.

Dans un premier temps, il convient de rappeler la relation entre les déphasages des différentes grandeurs électromagnétiques considérées : le potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 , la densité de courant non perturbée \mathbf{j}_0 , le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α et la différence de tension ΔV_α aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM. Dans le cadre du modèle non inductif, la relation entre ces déphasages est symbolisée dans la figure 6.24a :

- le potentiel vecteur \mathbf{A}_0 à la position de l'inclusion est d'abord déphasé par rapport au courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_S , d'un angle $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ à déterminer ;
- la densité de courant \mathbf{j}_0 est déphasée d'un angle $-\pi/2$ par rapport à \mathbf{A}_0 , du fait de la dérivation temporelle de \mathbf{A}_0 dans la loi d'Ohm, $\mathbf{j}_0 = -\sigma\partial\mathbf{A}_0/\partial t$;
- le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α n'est pas déphasé par rapport à \mathbf{j}_0 dans le modèle non inductif, celui-ci obéissant à l'équation de Poisson (5.11) (page 105) dans laquelle aucun terme complexe n'intervient ;
- enfin, la différence de tension ΔV_α est déphasée d'un angle $-\pi/2$ par rapport à \mathbf{A}_α , du fait de la dérivation temporelle de \mathbf{A}_α dans la loi de Faraday (5.3) (page 107).

On remarque ici que le déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 conditionne directement le déphasage de toutes les autres grandeurs. Dans le cadre de notre démarche qualitative, il est à noter que nous utilisons ici une représentation simplifiée du déphasage de \mathbf{A}_α et ΔV_α dans la figure 6.24a. Ces deux grandeurs se calculent effectivement par intégration de \mathbf{j}_0 et \mathbf{A}_α respectivement, équations (5.12) et (5.13), or le déphasage de \mathbf{j}_0 et \mathbf{A}_α dans ces intégrales est de toute évidence variable.

Dans une première approche, nous utilisons l'expression (6.18) pour estimer la valeur du déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$. La distance x par rapport à la surface du métal est posée arbitrairement par $x = x_1$, où x_1 est représenté dans la figure 6.24b et s'écrit en fonction de la profondeur h de l'inclusion :

$$x_1 = \frac{h\sqrt{(r_p - R + h)^2 + \left(\frac{L_p}{2}\right)^2}}{r_p - R + h}, \quad \text{tel que} \quad \Theta\{\mathbf{A}_0\} = -\frac{x_1}{\delta}. \quad (6.19)$$

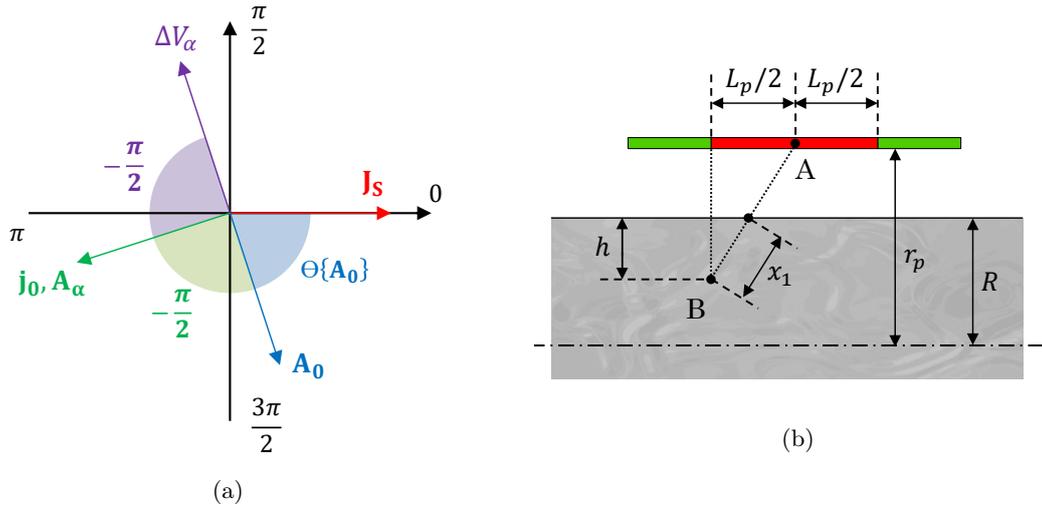


FIGURE 6.24 – (a) Schéma illustratif du déphasage des différentes grandeurs électromagnétiques, dans le cadre du modèle non inductif. (b) Géométrie utilisée pour calculer le déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 .

La distance x_1 représente ici la distance entre les points A et B, le point A étant situé au milieu de la bobine primaire ($r = r_p$ et $z = 0$) et le point B étant situé à la profondeur h , sous l'extrémité gauche de la bobine primaire ($r = R - h$ et $z = -L_p/2$). La position du point B est ici choisie de manière à correspondre à la valeur maximale de la tension ΔV_α (voir figures 6.5 et 6.14 par exemple, pages 123 et 135 respectivement). En prenant les dimensions du premier dispositif expérimental, $L_p = 20$ mm et $r_p = 17.5$ mm sont la longueur et le rayon de la bobine primaire, et $R = 12.5$ mm est le rayon du cylindre de métal. On obtient $x_1 = 4.80$ mm pour $h = 3$ mm et $x_1 = 8.11$ mm pour $h = 6$ mm.

Notons que le calcul du déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ par l'expression (6.19) comprend deux hypothèses importantes. D'une part, ce déphasage correspond à celui existant dans le métal dans un cas de diffusion 1D (diffusion du champ électromagnétique dans un demi-espace conducteur), comme évoqué précédemment. D'autre part, il est supposé que le déphasage du potentiel vecteur a lieu uniquement dans le métal. Autrement dit, le potentiel vecteur \mathbf{A}_0 dans l'air est toujours en phase avec la densité de courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_s . Dans l'expression (6.19), on constate par ailleurs que le déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ augmente avec la profondeur h (car x_1 augmente) et avec la fréquence f (car δ diminue), ce qui corrobore les observations de la sous-section précédente (figure 6.21, page 145).

À partir de l'expression du déphasage de \mathbf{A}_0 (6.19), les déphasages des autres grandeurs électromagnétiques sont connues directement par un décalage d'angle de $-\pi/2$ (pour \mathbf{j}_0 et \mathbf{A}_α) ou de $-\pi$ (pour ΔV_α), tel que représenté dans la figure 6.24a. En particulier, le déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = \Theta\{\mathbf{A}_0\} - \pi$ de la différence de tension ΔV_α peut être comparé aux inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ du modèle non inductif, en remarquant que l'inversion de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ correspond à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, et celle de $\Delta V_{\alpha,\perp}$ correspond à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La figure 6.25 montre le déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ de la différence de tension ΔV_α en fonction de la fréquence. En premier lieu, le déphasage calculé par l'expression (6.19) est représenté par les traits continus, pour différentes profondeurs h . À titre comparatif, le déphasage de la différence de tension ΔV_α du modèle non inductif est représenté pour les deux profondeurs $h = 3$ mm (ronds) et $h = 6$ mm (triangles) et les quatre tailles d'inclusion (rayon $R_\alpha = 1$ mm, 1.5 mm, 2 mm et 2.5

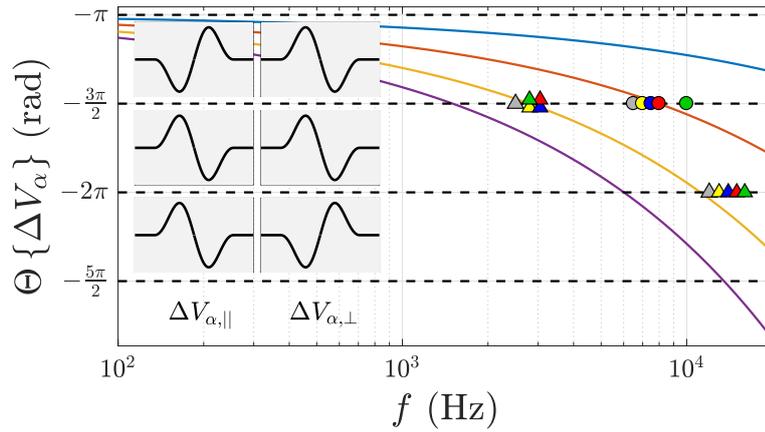


FIGURE 6.25 – Déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ calculé à partir de l'expression (6.19) pour plusieurs profondeurs : $h = 1$ mm (—), $h = 3$ mm (—), $h = 6$ mm (—) et $h = 9$ mm (—). Chaque valeur du déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ multiple de $\pi/2$ correspond à une inversion de $\Delta V_{\alpha,||}$ ou $\Delta V_{\alpha,\perp}$: lorsque $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$, $\Delta V_{\alpha,||}$ s'inverse, et lorsque $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$, $\Delta V_{\alpha,\perp}$ s'inverse. Les encadrés gris à gauche de la figure illustrent ces inversions. Les fréquences où sont observées ces inversions avec le modèle non inductif sont représentées, pour les deux profondeurs calculées $h = 3$ mm (ronds) et $h = 6$ mm (triangles) et les différentes tailles d'inclusion, de rayon $R_\alpha = 1$ mm (●, ▲), $R_\alpha = 1.5$ mm (●, ▲), $R_\alpha = 2$ mm (●, ▲) et $R_\alpha = 2.5$ mm (●, ▲). Les fréquences d'inversion observées avec la solution approchée du modèle non inductif sont également représentées pour ces deux profondeurs (●, ▲).

mm, en jaune, bleu, rouge et vert respectivement). Le déphasage de ΔV_α calculé avec la solution approchée du modèle non inductif est de plus représenté pour $h = 3$ mm (rond gris) et $h = 6$ mm (triangles gris), sachant que la taille des inclusions ne joue pas sur le déphasage dans la solution approchée. Dans le cas du modèle non inductif et de sa solution approchée, nous déterminons la valeur du déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ à partir des inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$: lorsque la fréquence augmente, une première inversion est observée sur le signal $\Delta V_{\alpha,||}$ pour $h = 3$ mm ($f \approx 7$ kHz) et $h = 6$ mm ($f \approx 3$ kHz), correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$, puis une seconde inversion est observée sur $\Delta V_{\alpha,\perp}$ pour $h = 6$ mm ($f \approx 13$ kHz), correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$.

Une correspondance satisfaisante est observée entre le déphasage calculé par l'expression (6.19) et le déphasage de la différence de tension ΔV_α du modèle non inductif, pour les deux profondeurs et les quatre tailles d'inclusion, ce qui permet de valider la cohérence de notre approche. Dans les deux cas, une augmentation de la profondeur h génère un déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ plus important, et incidemment une inversion des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ à une fréquence plus faible.

En ce qui concerne la taille des inclusions, nous venons d'évoquer que la taille d'inclusion n'influe pas sur la valeur du déphasage de ΔV_α dans le cas de la solution approchée du modèle non inductif (rond et triangles gris). Dans cette solution approchée en effet, il est supposé que la densité de courant \mathbf{j}_0 dans le domaine B relatif à l'inclusion est uniforme, et égale à la densité de courant à la position du centre de l'inclusion $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)$ (voir chapitre 5, page 107). Le déphasage de $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}_\alpha)$ n'étant pas modifié par la taille de l'inclusion, $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ est indépendant de la taille de l'inclusion sous cette approximation. Dans le cas du modèle non inductif en revanche (ronds et triangles de couleur), le déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ est impacté par la taille de l'inclusion car la densité de courant \mathbf{j}_0 dans le volume B n'est pas uniforme. En conséquence, les fréquences d'inversion des

oscillations varient avec la taille de l'inclusion, comme observé sur la figure 6.25. Plus précisément, on remarque que la fréquence d'inversion est d'autant plus élevée que l'inclusion est volumineuse, à profondeur h donnée. Lorsque l'inclusion est plus volumineuse en effet, une partie de son volume B se rapproche de la surface du métal, où la densité de courant \mathbf{j}_0 est plus intense et moins déphasée. Dans le modèle non inductif, \mathbf{j}_0 étant intégré sur le volume B pour calculer \mathbf{A}_α (équation (5.12), page 105), les courants intenses et peu déphasés proches de la paroi ont plus de « poids » dans l'intégration. En conséquence, \mathbf{A}_α est moins déphasé pour les inclusions plus volumineuses, et ΔV_α aussi, ce qui explique que les inversions de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ ont lieu à une fréquence plus élevée.

L'allure des tensions $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ associée à chaque plage de déphasage est représentée dans les encadrés gris dans la gauche de la figure 6.25, à titre illustratif. La première inversion a lieu pour $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$, sur la composante en phase $\Delta V_{\alpha,\parallel}$. La seconde inversion observée a lieu pour $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$, sur la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Comme décrit précédemment, les fréquences où apparaissent ces inversions sont directement dépendantes de la profondeur h de l'inclusion (et de sa taille, dans une moindre mesure).

Nous venons de montrer dans cette partie que l'expression du déphasage (6.19) donne une approximation correcte du déphasage de la différence de tension ΔV_α dans le cas du modèle non inductif. Nous cherchons maintenant à reproduire l'approche dans le cas des mesures expérimentales, pour lesquelles les fréquences d'inversion de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ sont différentes. L'objectif à terme est de corrélérer les fréquences d'inversion de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$, mesurées expérimentalement, avec la profondeur h d'une inclusion, pour déterminer h par méthode inverse.

Cas des mesures expérimentales

Dans cette partie, nous cherchons à comparer le déphasage calculé par la relation (6.18) avec les inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ observées sur les résultats des mesures expérimentales, en suivant la même démarche que dans la partie précédente.

Comme précédemment, nous rappelons la relation entre les déphasages des différentes grandeurs électromagnétiques considérées. Dans le cadre des mesures expérimentales, la relation entre ces déphasages est symbolisée dans la figure 6.26a :

- le potentiel vecteur \mathbf{A}_0 est déphasé par rapport au courant dans la bobine primaire \mathbf{J}_S , d'un angle $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$;
- la densité de courant \mathbf{j}_0 est déphasée d'un angle $-\pi/2$ par rapport à \mathbf{A}_0 , du fait de la dérivation temporelle de \mathbf{A}_0 dans la loi d'Ohm, $\mathbf{j}_0 = -\sigma\partial\mathbf{A}_0/\partial t$;
- le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α est cette fois-ci déphasé par rapport à \mathbf{j}_0 d'un angle $\Theta\{\mathbf{A}_\alpha\} - \Theta\{\mathbf{j}_0\}$, contrairement au cas du modèle non inductif, du fait du terme complexe $-\mathbb{1}_C j \Omega_\alpha \mathbf{A}_\alpha$ (« inductif ») dans l'équation de diffusion de \mathbf{A}_α (5.10) (page 105) ;
- enfin, la différence de tension ΔV_α est déphasée d'un angle $-\pi/2$ par rapport à \mathbf{A}_α , du fait de la dérivation temporelle de \mathbf{A}_α dans la loi de Faraday (5.3) (page 107).

Dans le cas présent, le déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_\alpha\} - \Theta\{\mathbf{j}_0\}$ du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α par rapport à \mathbf{j}_0 s'ajoute au déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ du potentiel vecteur non perturbé \mathbf{A}_0 , les valeurs de $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ et $\Theta\{\mathbf{A}_\alpha\} - \Theta\{\mathbf{j}_0\}$ déterminant directement le déphasage de toutes les autres grandeurs. Comme dans le cas précédent du modèle non inductif, la représentation du déphasage de \mathbf{A}_α et ΔV_α est simplifiée dans la figure 6.26a.

La valeur du déphasage $\Theta\{\mathbf{A}_0\}$ a été estimée dans la partie précédente (cas du modèle non inductif) par $\Theta\{\mathbf{A}_0\} = -x_1/\delta$, où x_1 est défini arbitrairement par l'expression (6.19) (voir figure

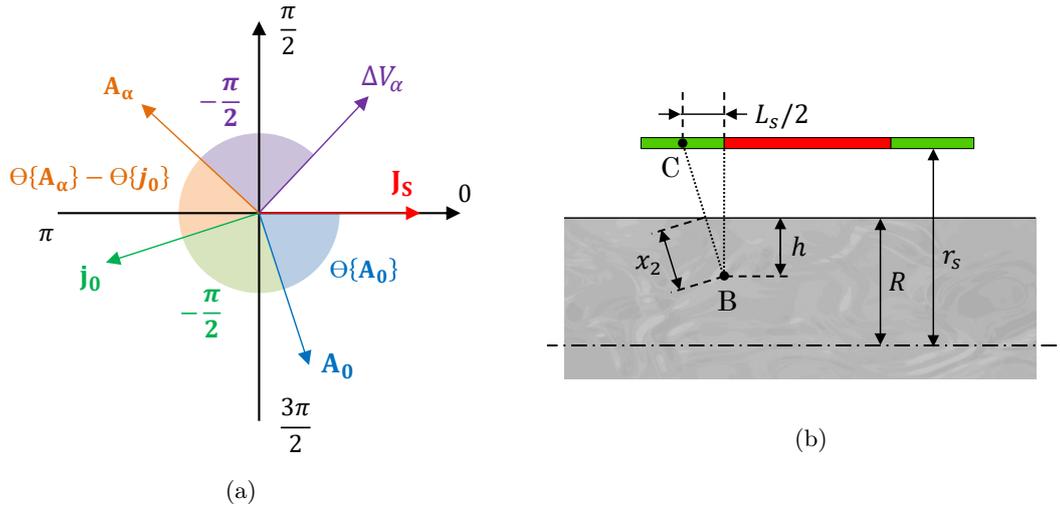


FIGURE 6.26 – (a) Schéma illustratif du déphasage des différentes grandeurs électromagnétiques, dans le cadre des mesures expérimentales. (b) Géométrie utilisée pour calculer les déphasages $\Theta\{A_0\}$ et $\Theta\{A_\alpha\}$ des potentiels vecteurs non perturbé A_0 et perturbé A_α .

6.24b). De manière analogue, nous cherchons ici à estimer la valeur du déphasage $\Theta\{A_\alpha\} - \Theta\{j_0\}$ à partir de l'expression (6.18). On rappelle que l'expression (6.18) correspond à un cas de diffusion 1D dans un milieu conducteur semi-infini. Dans cette expression, la distance x par rapport à la surface du métal est cette fois posée arbitrairement par $x = x_2$, où x_2 est représenté dans la figure 6.26b et s'écrit en fonction de la profondeur h de l'inclusion :

$$x_2 = \frac{h\sqrt{(r_s - R + h)^2 + \left(\frac{L_s}{2}\right)^2}}{r_s - R + h}, \quad \text{tel que} \quad \Theta\{A_\alpha\} - \Theta\{j_0\} = -\frac{x_2}{\delta}. \quad (6.20)$$

La distance x_2 correspond ici à la portion du segment [BC] occupée par le métal, le point B correspondant à la position de l'inclusion et le point C correspondant au milieu de la bobine secondaire gauche. En prenant les dimensions du premier dispositif expérimental, la longueur de la bobine secondaire vaut $L_s = 10$ mm et son rayon vaut $r_s = 17.5$ mm. On obtient $x_2 = 3.54$ mm pour $h = 3$ mm et $x_2 = 6.59$ mm pour $h = 6$ mm.

À partir de l'expression du déphasage $\Theta\{A_\alpha\} - \Theta\{j_0\}$ donnée par l'équation (6.20), et de celle du déphasage $\Theta\{A_0\}$ (6.19) calculée dans la partie précédente, le déphasage de la différence de tension aux bornes des bobines secondaires se calcule directement par (voir figure 6.26a) :

$$\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -\frac{(x_1 + x_2)}{\delta} - \pi. \quad (6.21)$$

Nous pouvons comparer le déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ calculé par l'expression (6.21) avec les inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ observées expérimentalement, sachant que l'inversion de $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ correspond à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, et celle de $\Delta V_{\alpha,\perp}$ correspond à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La figure 6.27 montre le déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ de la différence de tension ΔV_α en fonction de la fréquence. En premier lieu, le déphasage calculé par l'expression (6.21) est représenté par les traits continus, pour différentes profondeurs h . À titre comparatif, le déphasage de la différence de tension ΔV_α estimé des mesures expérimentales est représenté pour les deux profondeurs $h = 3$ mm (ronds) et $h = 6$ mm (triangles) et les quatre tailles d'inclusion (rayon $R_\alpha = 1$ mm, 1.5 mm, 2 mm et 2.5 mm, en jaune, bleu, rouge et vert respectivement). Dans le cas des mesures expérimentales,

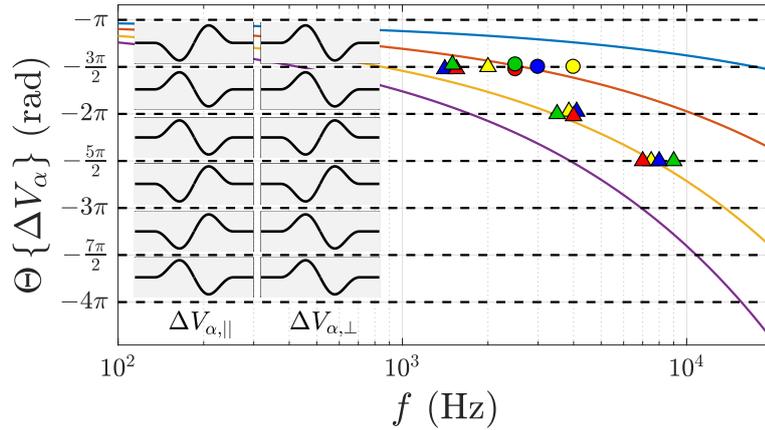


FIGURE 6.27 – Déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ calculé à partir de l'expression (6.21) pour plusieurs profondeurs : $h = 1$ mm (—), $h = 3$ mm (—), $h = 6$ mm (—) et $h = 9$ mm (—). Chaque valeur du déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ multiple de $\pi/2$ correspond à une inversion de $\Delta V_{\alpha,||}$ ou $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Les encadrés gris à gauche de la figure illustrent ces inversions. Les fréquences où sont observées expérimentalement ces inversions sont représentées, pour les deux profondeurs mesurées $h = 3$ mm (ronds) et $h = 6$ mm (triangles) et les différentes tailles d'inclusion, de rayon $R_\alpha = 1$ mm (●, ▲), $R_\alpha = 1.5$ mm (●, ▲), $R_\alpha = 2$ mm (●, ▲) et $R_\alpha = 2.5$ mm (●, ▲).

nous déterminons la valeur du déphasage $\Theta\{\Delta V_\alpha\}$ à partir des inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$: lorsque la fréquence augmente, une première inversion est observée sur le signal $\Delta V_{\alpha,||}$ pour $h = 3$ mm ($f \approx 3$ kHz) et $h = 6$ mm ($f \approx 1.5$ kHz), correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$, puis une seconde inversion est observée sur $\Delta V_{\alpha,\perp}$ pour $h = 6$ mm ($f \approx 4$ kHz), correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$, et une dernière inversion est observée expérimentalement sur $\Delta V_{\alpha,||}$ pour $h = 6$ mm ($f \approx 8$ kHz), correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -5\pi/2$.

Pour les mesures expérimentales effectuées à la profondeur $h = 3$ mm (ronds), seule la première inversion est observée, sur la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}$, pour une fréquence f comprise entre 2.5 kHz ($R_\alpha = 2$ mm et 2.5 mm) et 4 kHz ($R_\alpha = 1$ mm). Cette inversion correspond à un déphasage de tension $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$. Sachant que le déphasage calculé par (6.21) vaut $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$ pour $f = 2.7$ kHz, l'expression (6.21) estime dans ce cas le déphasage de manière convenable. On note cependant que l'expression (6.21) prédit une inversion de la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ à une fréquence $f = 11$ kHz, pour laquelle $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$. Cette inversion n'est observée expérimentalement pour aucune des quatre tailles d'inclusions.

Pour les mesures expérimentales effectuées à la profondeur $h = 6$ mm (triangles), trois inversions sont observées : la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ s'inverse d'abord entre 1.5 kHz et 2 kHz (correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi/2$), puis la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ s'inverse à 4 kHz (soit $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$), et la composante en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ s'inverse une deuxième fois entre 7 kHz et 9 kHz (soit $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -5\pi/2$). La deuxième et la troisième inversion correspondent de manière convenable au déphasage calculé par l'expression (6.21), pour lequel on obtient $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -2\pi$ à $f = 3.4$ kHz, et $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -5\pi/2$ à $f = 7.7$ kHz. L'expression (6.21) prédit cependant une première inversion à une fréquence $f = 900$ Hz inférieure à celle observée expérimentalement (entre 1.5 kHz et 2 kHz), ainsi qu'une quatrième inversion, pour la composante en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ (correspondant à $\Theta\{\Delta V_\alpha\} = -3\pi$), à une fréquence de 13.6 kHz, non observée expérimentalement.

Discussion

En premier lieu, en comparant les figures 6.25 (cas du modèle non inductif) et 6.27 (cas des mesures expérimentales), on constate que le déphasage $\Theta \{\Delta V_\alpha\}$ de la différence de tension ΔV_α est plus important dans le cas des mesures expérimentales que dans le cas du modèle non inductif. Cette différence de déphasage est due au fait que le modèle non inductif ne tient pas compte du déphasage du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α par rapport à la densité de courant \mathbf{j}_0 , généré par le terme « inductif » en $j\Omega_\alpha$ dans l'équation de diffusion de \mathbf{A}_α (5.10) (page 105). En conséquence, les inversions des oscillations de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ apparaissent à des fréquences plus élevées dans le cas du modèle non inductif.

Par ailleurs, au regard des différences entre le déphasage $\Theta \{\Delta V_\alpha\}$ déduit des mesures expérimentales et le déphasage $\Theta \{\Delta V_\alpha\}$ calculé par l'expression (6.21) (voir figure 6.27), l'expression simplifiée du déphasage $\Theta = -x/\delta$ (6.18) n'est pas suffisante pour décrire de manière satisfaisante les inversions des oscillations. En conséquence, la détermination d'une relation plus précise entre le déphasage $\Theta \{\Delta V_\alpha\}$ et la profondeur h de l'inclusion est nécessaire pour pouvoir caractériser h à partir des inversions de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. La résolution d'un modèle inductif 3D de la perturbation générée par l'inclusion, sur la base de l'approche présentée dans la section 5.4 du chapitre 5, peut être envisagée en ce sens. En dernier lieu, on remarque que les mesures expérimentales des inversions de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ aux hautes fréquences peuvent s'avérer difficiles en pratique, comme nous l'avons constaté pour le cas de la profondeur $h = 6$ mm (voir figure 6.16, page 138), ce qui peut constituer une limite à notre méthode.

6.6 CONCLUSION

À partir des mesures effectuées dans le premier dispositif expérimental (décrit dans le chapitre 2) et des résultats du modèle non inductif (présenté dans le chapitre 5), nous avons étudié dans ce chapitre le comportement de la tension ΔV_α générée aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM par la présence d'une inclusion isolante dans le métal liquide. La tension ΔV_α montre une oscillation (pour les composantes en phase et en quadrature) lors du passage de l'inclusion dans l'ECFM. Les différents paramètres de l'étude sont la vitesse débitante du métal U , la fréquence du champ électromagnétique f , la conductivité électrique du métal σ , la position et la taille de l'inclusion (caractérisées par sa profondeur h et son rayon R_α , celle-ci étant sphérique).

L'étude en vitesse confirme premièrement la faible influence de celle-ci sur la tension ΔV_α . Dans le processus de démodulation du signal, le choix du filtre passe-bas en fonction de la vitesse du métal liquide demeure particulièrement important. Aux hautes vitesses surtout, un réglage inadapté de la fréquence de coupure du filtre peut en effet causer une sous-estimation importante de la tension perturbée ΔV_α .

Les mesures expérimentales de ΔV_α aux basses fréquences (700 Hz à 2 kHz) sont comparées aux résultats du modèle non inductif. Le modèle donne une estimation satisfaisante de la perturbation générée par l'inclusion, particulièrement pour les petites inclusions ($R_\alpha = 1$ mm et 1.5 mm) proches de la paroi ($h = 3$ mm). Pour ces dernières, la tension ΔV_α est alors proportionnelle au volume de l'inclusion. Dans le cadre du modèle non inductif, des lois de puissance aux basses fréquences de la tension ΔV_α sont en outre déterminées et validées par les mesures : pour la composante en phase, $\Delta V_{\alpha,||} \propto f^2$, pour la composante en quadrature, $\Delta V_{\alpha,\perp} \propto f^3$, et pour le module, $|\Delta V_\alpha| \propto f^2$. Une méthode de minimisation entre les résultats du modèle et les mesures expérimentales est effectuée pour déterminer la taille et la position de l'inclusion. Il est montré que ces deux paramètres ne peuvent pas être déterminés de manière univoque aux basses fréquences par la mesure de ΔV_α . La

méthode de minimisation permet cependant de déterminer un couple (R_α, h) à partir d'une mesure de ΔV_α . Une méthode complémentaire est en ce sens nécessaire pour caractériser soit R_α , soit h .

Les mesures aux hautes fréquences peuvent être utilisées en ce sens. Aux hautes fréquences, plusieurs inversions des oscillations en phase $\Delta V_{\alpha,||}$ et en quadrature $\Delta V_{\alpha,\perp}$ sont observées à certaines fréquences. À l'aide des résultats du modèle non inductif, nous montrons que ces inversions sont relatives au déphasage du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α et au déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0 à la position de l'inclusion. À l'aide du modèle non inductif, il est observé que le déphasage de \mathbf{j}_0 varie de manière importante avec la profondeur de l'inclusion. La fréquence à laquelle une inversion de $\Delta V_{\alpha,||}$ ou $\Delta V_{\alpha,\perp}$ est observée dépend donc également de la profondeur h de l'inclusion. Une première approche d'une méthode de détermination de h est proposée en fin du chapitre, basée sur une relation simplifiée entre la profondeur h et les fréquences d'inversion de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$. Une relation plus précise nécessite cependant d'être caractérisée dans une étude ultérieure pour que la méthode soit applicable. Le développement d'un modèle inductif, valable aux hautes fréquences et dont une première approche est présentée dans le chapitre précédent, peut être envisagé pour caractériser la relation entre h et la fréquence d'inversion.

CONCLUSION

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'analyse de l'interaction entre un champ électromagnétique variable et un écoulement de métal liquide contenant des bulles, isolantes électriques. L'application de l'étude répond au besoin de mesure de vitesse et de détection de bulles dans les circuits primaire et secondaire d'un réacteur à neutrons rapides refroidi au sodium liquide tel que le prototype industriel ASTRID (pour *Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration*), réalisé au CEA Cadarache. Un débitmètre à courants de Foucault (ECFM pour *Eddy Current FlowMeter*) est utilisé dans le cadre de deux dispositifs expérimentaux pour étudier l'effet de l'écoulement de métal liquide sur le champ électromagnétique. Deux modèles théoriques de l'ECFM sont développés pour décrire les perturbations générées par le mouvement du métal et par la présence d'une inclusion isolante, telle qu'une bulle, dans le métal.

La revue de littérature des ECFM, présentée dans le chapitre 1, montre l'aptitude de ces systèmes à mesurer la vitesse d'un écoulement et suggère la possibilité de détecter des bulles. Kumar *et al.* [16, 1] ont réalisé en particulier des expériences « sèches », dans lesquelles l'écoulement de métal liquide diphasique est simulé par un barreau d'aluminium en translation, usiné de cannelures représentant des bulles. Le signal mesuré, i.e. la différence de tension $\Delta V = V_1 - V_2$ aux bornes des bobines secondaires de l'ECFM, peut alors être décomposé sous la forme $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U + \Delta V_\alpha$, pour un nombre de Reynolds magnétique $R_m \ll 1$ et un taux de vide $\alpha \lesssim 4\%$. La composante ΔV_0 correspond à la tension mesurée pour un métal liquide statique en l'absence de bulles, la composante ΔV_U correspond aux effets de la vitesse du métal liquide et la composante ΔV_α est relative à la présence de bulles. Dans l'ensemble de la littérature, la composante ΔV_U varie linéairement avec la vitesse moyenne de l'écoulement, et un optimum de fréquence est observé pour la mesure de ΔV_U . La composante ΔV_α se manifeste par une oscillation lorsqu'une bulle isolée passe dans l'ECFM, et par un signal fluctuant lorsqu'un ensemble de bulles le traverse. L'amplitude des oscillations est proportionnelle au taux de vide dans la limite $\alpha \lesssim 4\%$. Il est constaté que les phénomènes physiques à l'origine des perturbations de tension ΔV_U , et a fortiori de ΔV_α , ne sont pas complètement expliqués dans la littérature. La perturbation de tension ΔV_α générée par une bulle, isolante électrique, peut cependant être traitée par analogie à l'aide des résultats et méthodes propres au contrôle non destructif de défauts dans les métaux.

Dans le cadre de la thèse, deux dispositifs expérimentaux sont réalisés afin de mesurer les perturbations du champ électromagnétique par le mouvement d'un métal liquide et la présence d'inclusions (billes sphériques), via les tensions ΔV_U et ΔV_α respectivement. Les deux dispositifs expérimentaux, présentés dans le chapitre 2, sont constitués d'un ECFM traversé par un écoulement de métal liquide « modèle ». Dans le premier dispositif, le métal liquide est statique et l'ECFM est translaté à une vitesse constante. Une bille sphérique isolante électrique, simulant la présence d'une bulle, est fixée dans le métal avec une taille et une position données. Dans le second dispositif, un écoulement de métal traverse l'ECFM en l'absence de bulles. La méthode d'acquisition, basée sur la modulation d'amplitude, est identique pour les deux dispositifs. Les résultats expérimentaux

sont analysés par la suite en distinguant les effets de la vitesse, caractérisés par la tension ΔV_U , et ceux relatifs à la présence d'inclusions isolantes (bulles ou billes), caractérisés par la tension ΔV_α . Pour chaque effet, un modèle théorique est développé à partir de la résolution de l'équation d'induction du potentiel vecteur.

Les effets de la vitesse de l'écoulement sur le champ électromagnétique sont l'objet des chapitres 3 et 4. Le chapitre 3 développe un modèle analytique de l'ECFM traversé par un écoulement de métal liquide en l'absence de bulles. Les solutions sont obtenues pour divers profils de vitesse d'écoulement (uniforme, laminaire et turbulent moyen). Les résultats de ce modèle sont comparés aux mesures des deux dispositifs expérimentaux dans le chapitre 4. La tension ΔV_U relative à la vitesse du métal liquide y est analysée en fonction des différents paramètres de l'étude : fréquence du champ électromagnétique f , conductivité électrique du métal σ , vitesse débitante U et profil de vitesse $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_z$ de l'écoulement. Les résultats du modèle et les mesures expérimentales concordent avec la littérature : un optimum de fréquence est identifié pour la mesure de ΔV_U (à $f \approx 2$ kHz dans notre cas) et une linéarité en vitesse est observée. La tension ΔV_U décroît fortement au-delà de la fréquence optimale, du fait que le champ électromagnétique pénètre peu dans l'écoulement de métal liquide par effet de peau : l'utilisation des hautes fréquences est donc peu conseillée pour la mesure de vitesse. La conductivité électrique σ joue en outre un rôle analogue à la fréquence f , par l'intermédiaire du « paramètre d'écrantage », i.e. le nombre sans dimension $\Omega = \mu_0\sigma\omega R^2$. Il est montré que les variations de conductivité électrique peuvent être à l'origine de la fréquence critique observée dans la littérature, pour laquelle la différence de tension $\Delta V_U^* = V_1 - V_2/V_1 + V_2$ est invariante avec la température du métal liquide. Enfin, les lois de similitude des tensions ΔV_U et ΔV_U^* sont obtenues à l'aide du modèle analytique, faisant intervenir notamment le paramètre d'écrantage Ω et le nombre de Reynolds magnétique R_m . Pour une géométrie d'ECFM donnée, ces tensions s'expriment alors par $\Delta V_U = 2U\mu_0\Omega J_S R^2 \times f_U(\Omega, \mathbf{u})$ et $\Delta V_U^* = R_m \times f_U^*(\Omega, \mathbf{u})$, où J_S est la densité de courant dans la bobine primaire et $f_U(\Omega, \mathbf{u})$ et $f_U^*(\Omega, \mathbf{u})$ sont deux fonctions propres à une géométrie d'ECFM. La détermination de $f_U(\Omega, \mathbf{u})$ et $f_U^*(\Omega, \mathbf{u})$ permet notamment de prévoir les plages de fréquences optimales pour mesurer ΔV_U et ΔV_U^* , dépendant entre autres du métal liquide utilisé.

Les effets sur le champ électromagnétique de la présence d'une inclusion isolante, telle qu'une bulle dans le métal liquide, sont l'objet des chapitres 5 et 6. Le chapitre 5 développe un modèle théorique « non inductif », car valable aux « basses fréquences » (faible paramètre d'écrantage, c'est à dire $\Omega = \mu_0\sigma\omega R^2 \ll 1$), de la perturbation du potentiel vecteur générée par la présence d'une seule inclusion. Le potentiel vecteur perturbé obéit alors à une équation de Poisson, dont la solution est connue et se présente sous forme intégrale. Une solution approchée du potentiel vecteur perturbé, valable pour les petites inclusions, est en outre obtenue afin d'estimer la perturbation avec une formule explicite. Les résultats du modèle non inductif (et de sa solution approchée) sont comparés aux mesures du premier dispositif expérimental dans le chapitre 6. La tension ΔV_α relative à la présence de l'inclusion y est analysée en fonction des différents paramètres de l'étude : vitesse de l'inclusion U , fréquence du champ électromagnétique f , conductivité électrique du métal σ , position et taille de l'inclusion (caractérisées par sa profondeur h et son rayon R_α , celle-ci étant sphérique). L'étude en vitesse montre que ΔV_α ne varie pas avec la vitesse de l'inclusion, ce qui est en accord avec la décomposition de la tension $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_U + \Delta V_\alpha$ réalisée par Kumar *et al.* [16, 1]. Dans l'étude en fréquence, on distingue les phénomènes observés aux basses fréquences et aux hautes fréquences.

Aux basses fréquences, la tension ΔV_α obéit à des lois de puissance ($\Delta V_{\alpha,||} \propto f^2$ pour la composante en phase, $\Delta V_{\alpha,\perp} \propto f^3$ pour la composante en quadrature, et $|\Delta V_\alpha| \propto f^2$ pour le module) prédites à l'aide du modèle non inductif et observées expérimentalement. Une méthode

de minimisation entre les données théoriques et expérimentales est réalisée afin de déterminer la profondeur de l'inclusion h et son rayon R_α à partir de la mesure de ΔV_α . Cette méthode se montre robuste pour obtenir une courbe de R_α en fonction de h ; mais n'est pas suffisante pour déterminer R_α et h indépendamment.

Les mesures aux hautes fréquences sont envisageables pour compléter la méthode de minimisation aux basses fréquences, et ainsi mesurer la profondeur h de l'inclusion. Une inversion des oscillations $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ est en effet observée à certaines fréquences, ces fréquences dépendant en particulier de la profondeur h de l'inclusion. Il est montré que l'inversion de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ est due au déphasage du potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α et au déphasage de la densité de courant \mathbf{j}_0 à la position de l'inclusion, dépendant de h . Ces déphasages augmentent avec la fréquence f et la profondeur h de l'inclusion. À l'aide d'une relation simplifiée entre le déphasage et la profondeur h , une première approche inverse pour déterminer h à partir des inversions de $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ est proposée. Les résultats de cette approche permettent une bonne compréhension physique des résultats expérimentaux, mais une relation plus précise entre le déphasage et h est nécessaire pour obtenir un modèle inverse satisfaisant.

Perspectives de la thèse

Concernant les perturbations du champ électromagnétique relatives à la présence d'une inclusion isolante, une première perspective consiste à déterminer analytiquement le potentiel vecteur perturbé \mathbf{A}_α dans le cas « inductif », c'est à dire sans prendre l'hypothèse de faible paramètre d'écrantage, $\Omega \ll 1$, dans l'équation d'induction-diffusion de \mathbf{A}_α . Une première approche de la méthode de résolution pour ce cas « inductif » est présentée dans le chapitre 5. La différence de tension ΔV_α calculée à partir de \mathbf{A}_α peut ainsi être comparée aux mesures expérimentales sur toute la plage de fréquence. La comparaison des fréquences d'inversion des oscillations $\Delta V_{\alpha,||}$ et $\Delta V_{\alpha,\perp}$ sera un critère important pour la validation du modèle. En établissant une relation entre la profondeur h et la fréquence des inversions à partir du modèle « inductif », il sera alors possible de déterminer h , puis la taille de l'inclusion en appliquant les résultats du modèle « non inductif » aux mesures expérimentales aux basses fréquences.

L'étude de l'influence des effets hydrodynamiques relatifs à la présence d'une inclusion dans l'écoulement de métal liquide représente une deuxième perspective. En particulier, l'influence du sillage d'une inclusion, de sa trajectoire, ainsi que de sa forme sont autant de paramètres susceptibles de jouer de manière importante sur la tension ΔV_α . Dans cette étude, il sera important de distinguer le cas d'une inclusion solide (une bille par exemple), pour lequel une condition de non-glissement existe à l'interface liquide/solide, et le cas d'une inclusion gazeuse (une bulle), pour lequel une condition de glissement est présente à l'interface liquide/gaz. Pour le premier cas (inclusion solide), le deuxième dispositif expérimental (boucle de galinstan) présenté dans le chapitre 2 pourra être directement utilisé pour étudier les effets du sillage d'une bille sur la réponse de l'ECFM. Une étude expérimentale ultérieure composée d'un écoulement de métal liquide en présence d'une ou plusieurs bulles permettra en outre d'étudier le second cas évoqué (inclusion gazeuse).

Dans cette thèse, nous avons considéré uniquement le cas simplifié d'un métal liquide en présence d'une seule inclusion isolante. En application, la présence de plusieurs bulles dans l'écoulement est fortement envisageable dans le cas d'une fuite de gaz dans les circuits sodium primaire et secondaire du réacteur ASTRID. L'étude des effets collectifs relatifs à plusieurs bulles présentes dans l'écoulement représente donc un axe de recherche supplémentaire. Cette configuration pourra être étudiée directement à partir des résultats du modèle non inductif. En outre, en présence d'une

phase gazeuse dispersée (telle qu'un nuage de bulles), la solution approchée du modèle non inductif pourra donner une estimation de la tension perturbée ΔV_α relative à la phase dispersée avec un coût raisonnable en terme de temps de calcul. Cette seconde configuration pourra éventuellement être appliquée à la mesure de taux de vide.

Finalement, la géométrie d'ECFM envisagée prioritairement pour la conception du réacteur ASTRID est celle de l'ECFM interne, pour lequel l'écoulement passe à l'extérieur des bobines primaire(s) et secondaire(s). Pour une question de facilité expérimentale, nous avons étudié dans cette thèse la configuration de l'ECFM externe, où les bobines sont traversées par l'écoulement. L'extension de nos résultats à la géométrie de l'ECFM interne représente donc une étape importante dans le développement de l'ECFM envisagé pour la mesure de vitesse et la détection de bulles dans le cadre du projet ASTRID.

ANNEXE A

ÉLÉMENTS DE THÉORIE

A.1 ÉQUATIONS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Cette partie présente les bases de l'électromagnétisme sous les hypothèses propres aux problèmes d'induction, utilisées pour les approches théoriques des chapitres 3 et 5. Pour chaque approche, la méthode consiste à calculer le champ électromagnétique puis à déterminer la réponse de la sonde à partir du résultat obtenu. Les quatre équations de Maxwell décrivent l'évolution des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} générés par les charges électriques ρ_e et les densités de courant électrique \mathbf{J} . En supplément de ces équations générales, la loi d'Ohm décrit la relation entre le champ électrique \mathbf{E} et la densité de courant \mathbf{J} dans les milieux conducteurs.

A.1.1 Hypothèses préliminaires

- On suppose dans un premier temps que les mouvements du fluide sont lents par rapport à la vitesse de la lumière. Si U est la vitesse du fluide ($U \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$) et c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$), on a :

$$U \ll c. \quad (\text{A.1})$$

- Les dimensions de l'expérience sont supposées très inférieures à la longueur d'onde du champ électromagnétique dans l'air. En notant L la longueur caractéristique de l'expérience ($L \sim 10^{-2} \text{ m}$) et f la fréquence du champ ($f \sim 10^4 \text{ Hz}$), on a :

$$L \ll \frac{c}{f}. \quad (\text{A.2})$$

- Il est supposé que le sodium et le galinstan ne se polarisent pas sous l'effet du champ électrique. En notant $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ la permittivité du vide et ε la permittivité diélectrique du métal, on a :

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0. \quad (\text{A.3})$$

- De plus, le sodium et le galinstan sont faiblement paramagnétiques (susceptibilité magnétique $\chi_m = 8.8 \times 10^{-6}$ pour le sodium [72]). En notant $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide (ou constante magnétique) et $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$ la perméabilité magnétique du métal, on prend l'hypothèse :

$$\mu \approx \mu_0. \quad (\text{A.4})$$

• On suppose que les métaux liquides (sodium et galinstan ici) sont isotropes. En conséquence, la conductivité électrique, caractérisant l'aptitude des électrons à se déplacer, est un scalaire constant,

$$\sigma = \text{cst.} \quad (\text{A.5})$$

• Au regard de la conductivité électrique élevée du sodium et du galinstan, et de l'absence de polarisation par l'hypothèse (A.3), l'accumulation de charges dans le volume de métal est supposée nulle. L'échelle de temps pour homogénéiser les charges électriques, $\tau = \varepsilon_0/\sigma \sim 10^{-18}$ s, est en effet beaucoup plus faible que les temps caractéristiques considérés. Dans ce cadre, la densité de charge électrique totale est nulle, soit :

$$\rho_e = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Équations de Maxwell

Les hypothèses (A.1) à (A.6) permettent une simplification essentielle des équations de Maxwell, que nous présentons ici sous leur forme réduite.

L'équation de Maxwell-Gauss stipule premièrement que le flux du champ électrique à travers toute surface fermée est proportionnel à la charge électrique contenue dans la surface. À partir de l'hypothèse $\rho_e = 0$ (A.6), l'équation s'écrit, sous forme locale ou intégrale,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{ou} \quad \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (\text{A.7})$$

où $d\mathbf{S}$ est un élément de la surface fermée. L'équation locale se déduit de l'équation intégrale par le théorème de Green-Ostrogradski.

L'équation de Maxwell-Faraday, relative à l'induction électromagnétique, exprime le champ électrique en fonction des variations temporelles du champ magnétique. La circulation du champ électrique le long d'une courbe fermée est ainsi proportionnelle au flux magnétique traversant cette courbe. Sous forme locale ou intégrale, on l'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.8})$$

où $d\mathbf{l}$ est l'élément de longueur de la courbe fermée et $d\mathbf{S}$ est l'élément de surface. L'équation locale se déduit de l'équation intégrale par le théorème de Stokes.

À la différence de la charge électrique, il n'existe pas de charge ponctuelle (ou monopole) magnétique. Cette propriété fondamentale implique que le champ magnétique est à divergence nulle, soit :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Enfin, l'équation de Maxwell-Ampère relie le champ magnétique aux densités de courant électrique. On distingue deux contributions : les courants liés aux mouvements des charges électriques dans les conducteurs, notés \mathbf{J} , et les courants de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Au regard des hypothèses de faible vitesse (A.1) et de basse fréquence (A.2), cette seconde contribution est négligeable. En utilisant de plus l'hypothèse de non-aimantation (A.4), l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors sous forme locale ou intégrale :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{ou} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.10})$$

A.1.3 Potentiel scalaire et potentiel vecteur

Avec l'hypothèse $\rho_e = 0$ (A.6), les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} sont donc exprimés en fonction de la densité de courant \mathbf{J} par les équations (A.7) à (A.10). Il est possible d'utiliser deux autres quantités physiques pour décrire le champ électromagnétique : le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur \mathbf{A} . Dans le cas de l'ECFM, l'utilisation du potentiel vecteur \mathbf{A} peut faciliter la mise en équation du champ électromagnétique.

Pour définir ϕ et \mathbf{A} , on remarque premièrement que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Le champ magnétique \mathbf{B} étant justement de divergence nulle (A.9), le potentiel vecteur \mathbf{A} se définit par :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.11})$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est également nul, l'expression précédente (A.11) peut être injectée dans l'équation de Maxwell-Faraday (A.8) pour faire apparaître le potentiel scalaire ϕ . On obtient :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Le couple (ϕ, \mathbf{A}) ne définit cependant pas le champ électromagnétique de manière univoque. On peut montrer facilement que n'importe quel autre couple (ϕ', \mathbf{A}') peut satisfaire aux équations (A.11) et (A.12) en posant :

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (\text{A.13a})$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad (\text{A.13b})$$

où ψ est un champ scalaire quelconque. Les équations (A.13a) et (A.13b) donnent l'invariance de jauge des équations de Maxwell. Afin de définir ϕ et \mathbf{A} de manière non-ambigüe dans la résolution des équations, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge. Par commodité, nous utilisons par la suite la jauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.14})$$

A.1.4 Conditions aux interfaces

Les conditions aux interfaces des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont obtenues à partir des équations de Maxwell (A.7) à (A.10) sous leur forme intégrale [73, 74]. Avec la définition des potentiels scalaire et vecteur (A.11), (A.12) et (A.14), on déduit ensuite les conditions d'interface pour ϕ et \mathbf{A} . On s'intéresse par la suite à l'interface entre deux milieux (1) et (2) quelconques, et on définit \mathbf{n}_{12} le vecteur normal à l'interface orienté de (1) vers (2).

On considère d'abord un parallélépipède élémentaire traversé par l'interface, dont la hauteur h est infiniment mince (figure A.1a). En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss (A.7) sous sa forme intégrale, le flux électrique traversant le parallélépipède est égal à la charge contenue à l'intérieur du volume, c'est à dire zéro au regard de l'hypothèse $\rho_e = 0$ (A.6). Le parallélépipède étant infiniment mince, on déduit que la composante normale du champ électrique est continue, soit :

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0. \quad (\text{A.15})$$

De la même manière, le champ magnétique est à divergence nulle par l'équation (A.9) donc le flux magnétique traversant le parallélépipède est également nul. La composante normale du champ magnétique est donc continue sur l'interface, soit :

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Enfin, au regard de la jauge (A.14) choisie pour le potentiel vecteur \mathbf{A} , on déduit de manière similaire que la composante normale du potentiel vecteur est toujours continue, soit :

$$(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0. \quad (\text{A.17})$$

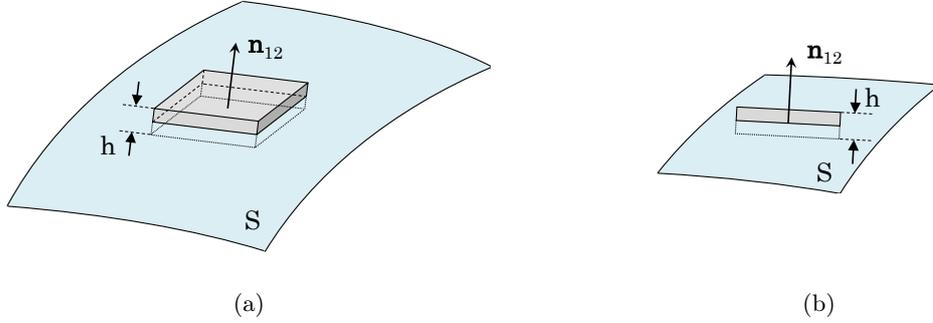


FIGURE A.1 – (a) Parallélépipède mince construit sur l'interface S entre deux milieux (1) et (2), utilisé pour l'établissement de la condition normale de \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{A} . (b) Surface mince construite sur l'interface S , utilisée pour l'établissement de la condition tangentielle de \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{A} .

On considère maintenant une surface élémentaire traversée par l'interface et orthogonale à celle-ci, dont la hauteur h est infiniment mince (figure A.1b). En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday (A.8) sous sa forme intégrale, la circulation du champ électrique sur le contour de la surface est égale aux variations temporelles du flux magnétique traversant celle-ci. La hauteur étant infiniment mince, la surface d'intégration tend vers zéro. En supposant que les variations du champ magnétique sont finies, le flux à travers la surface est donc nul. La composante tangentielle du champ électrique est alors toujours continue, soit :

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (\text{A.18})$$

De plus, l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale stipule que la circulation du champ magnétique sur le contour de la surface est égale à la densité de courant traversant celle-ci. La surface élémentaire étant infiniment mince, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue uniquement s'il existe une densité de courant surfacique \mathbf{J}_{surf} sur l'interface, soit :

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{surf}}. \quad (\text{A.19})$$

La condition tangentielle du potentiel vecteur se déduit directement de celle du champ magnétique, en remplaçant simplement $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ dans l'équation précédente (A.19). On écrit alors :

$$\mathbf{n}_{12} \times (\nabla \times \mathbf{A}_2 - \nabla \times \mathbf{A}_1) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{surf}}. \quad (\text{A.20})$$

Avec les hypothèses (A.1) à (A.6), on remarque premièrement que le champ électrique \mathbf{E} est continu à partir des équations (A.15) et (A.18). D'après les équations (A.17) et (A.20), le potentiel vecteur \mathbf{A} est également continu en tout point. En utilisant la définition du potentiel scalaire ϕ (A.12), on déduit que ce dernier doit aussi être continu (son gradient serait localement infini si ce n'était pas le cas), c'est à dire :

$$\phi_1 = \phi_2. \quad (\text{A.21})$$

Sachant que les composantes normales de \mathbf{E} et de \mathbf{A} sont continues par les équations (A.15) et (A.17), le gradient du potentiel scalaire est également continu en l'absence de charges libres à l'interface,

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\nabla \phi_1 - \nabla \phi_2) = 0. \quad (\text{A.22})$$

Il est à noter que l'existence d'une densité de charge électrique non nulle ($\rho_e \neq 0$) sur une interface est physiquement possible, bien que dans notre cas cette dernière soit nulle par l'hypothèse (A.6). On peut par exemple citer la polarisation des diélectriques, ou l'accumulation de charges en surface d'un conducteur en électrostatique. En revanche, l'existence d'une densité de courant surfacique \mathbf{J}_{surf} correspond à un cas idéal où un des milieux est de conductivité infinie. Ce cas est discuté dans la partie suivante.

A.1.5 Densités de courant

Sachant que $\rho_e = 0$ par l'hypothèse (A.6), le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , ou alternativement (ϕ, \mathbf{A}) , s'exprime uniquement en fonction de la densité de courant \mathbf{J} . Lors de la mise en équation des problèmes d'induction, il convient de faire la distinction entre les densités de courants externes, notées $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}$, et les densités de courants induits, notées \mathbf{j} . Les premières sont imposées au système alors que les secondes, générées par l'induction électromagnétique, doivent être résolues. Dans le cas de l'ECFM par exemple, $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}$ correspond à la densité de courant appliquée dans la bobine primaire, tandis que \mathbf{j} correspond aux courants de Foucault induits dans l'écoulement de métal. Dans l'équation de Maxwell-Ampère (A.10), on décompose alors la densité de courant par $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{J}_{\mathbf{S}}$.

Dans le cas des densités de courants induits \mathbf{j} , les charges mobiles se déplacent dans le conducteur sous l'effet du champ électrique \mathbf{E} . Leur déplacement est caractérisé par la conductivité électrique σ , supposée constante avec l'hypothèse (A.5). La loi d'Ohm s'écrit dans ce cas :

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}' = \mathbf{E}', \quad (\text{A.23})$$

où \mathbf{j}' est la densité de courant induit et \mathbf{E}' est le champ électrique, exprimés dans le référentiel du conducteur. Si celui-ci est en translation à une vitesse \mathbf{u} par rapport au référentiel du laboratoire (cas d'un écoulement de métal liquide par exemple), la transformation de Lorentz donne :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.24})$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs électrique et magnétique dans le référentiel du laboratoire. La densité de courant, correspondant au mouvement relatif des charges par rapport au conducteur, est considérée invariante par changement de référentiel, soit $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$. Finalement, en utilisant la transformation de Lorentz (A.24) puis en injectant les expressions du potentiel vecteur (A.11) et du potentiel scalaire (A.12), la loi d'Ohm (A.23) devient :

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (\text{A.25})$$

A.1.6 Équations du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A})

À partir des équations de Maxwell (A.7) à (A.10), nous avons d'abord introduit le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur \mathbf{A} dans les équations (A.11), (A.12) et (A.14). Les densités de courant \mathbf{J} ont ensuite été définies dans la partie précédente, en distinguant les courants induits \mathbf{j} , fonction de ϕ et de \mathbf{A} par la loi d'Ohm (A.25), des courants externes $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}$. Il reste maintenant à poser les équations du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) .

Afin d'écrire un seul système d'équations valable partout (dans le métal liquide, dans la bobine primaire de l'ECFM et dans l'air), nous introduisons premièrement les fonctions caractéristiques (ou indicatrices) propres à chaque domaine. Une fonction caractéristique associée à un domaine E ,

notée $\mathbb{1}_E$, est définie par :

$$\mathbb{1}_E(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in E \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin E \end{cases}, \quad (\text{A.26})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position. On utilise par la suite la fonction caractéristique $\mathbb{1}_C$ du domaine C occupé par le conducteur (le métal liquide) et $\mathbb{1}_S$ la fonction caractéristique du domaine S occupé par la source de courant (la bobine primaire de l'ECFM).

La première équation est l'équation d'induction, décrivant les mécanismes diffusifs et convectifs gouvernant la distribution du champ. On l'obtient en injectant $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{J}_S$ dans l'équation de Maxwell-Ampère (A.10). En remplaçant \mathbf{j} par l'expression obtenue avec la loi d'Ohm (A.25), on obtient alors l'équation d'induction du potentiel vecteur :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \mu_0 \sigma \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\mathbb{1}_S \mu_0 \mathbf{J}_S. \quad (\text{A.27})$$

La seconde équation dérive de la conservation de la densité de courant. Étant donné que la divergence d'un rotationnel est nulle, on déduit d'abord de l'équation de Maxwell-Ampère (A.10) que la densité de courant est à divergence nulle, soit $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. En injectant l'expression de \mathbf{j} obtenue par la loi d'Ohm (A.25), on obtient alors :

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (\text{A.28})$$

Les équations (A.27) et (A.28) peuvent s'écrire sous forme adimensionnelle par un choix d'échelle particulier des différentes grandeurs. Cette méthode présente un certain nombre d'intérêts, à commencer par la paramétrisation du système avec des nombres sans dimension. Des configurations a priori différentes, telles que les études en sodium du CEA et nos études en galinstan, peuvent ainsi être mises en comparaison. L'adimensionnement rend de plus les équations propices aux développements perturbatifs, utilisés dans les approches théoriques des chapitres 3 et 5. Nous définissons alors les paramètres d'échelle suivants : la longueur caractéristique L , la pulsation du champ alternatif ω , la vitesse caractéristique de l'écoulement U , la conductivité du métal σ et l'amplitude du courant source J_S . Les grandeurs sans dimension sont obtenues à partir de ces paramètres d'échelle par :

$$t^* = \omega t, \quad \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{J}^* = \frac{\mathbf{J}}{J_S}, \quad \mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{\mu_0 J_S L^2}, \quad \phi^* = \frac{\sigma}{L J_S} \phi. \quad (\text{A.29})$$

Les astérisques sont abandonnés par la suite pour faciliter la lecture. En injectant dans (A.27) et (A.28), on obtient finalement les équations sans dimension du champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbb{1}_C \left(\nabla \phi + \Omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{R}_m \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = -\mathbb{1}_S \mathbf{J}_S, \quad (\text{A.30a})$$

$$\nabla^2 \phi = \mathbb{1}_C \mathbf{R}_m \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})), \quad (\text{A.30b})$$

où Ω et \mathbf{R}_m sont les deux nombres sans dimension caractéristiques du système.

Le premier nombre sans dimension est le paramètre d'écrantage Ω , ou shielding parameter en anglais [75]. On le définit par le rapport entre le temps de diffusion magnétique $\mu_0 \sigma L^2$ et la période du champ oscillant $2\pi/\omega$ (à un facteur 2π près),

$$\Omega = \mu_0 \sigma \omega L^2. \quad (\text{A.31})$$

Le paramètre d'écrantage Ω caractérise l'importance des effets inductifs sur la distribution du champ. Lorsque Ω augmente, les effets inductifs sont importants et l'épaisseur de peau devient

petite par rapport aux dimensions du système. Le champ électromagnétique ne pénétrant pas dans le conducteur, on dit qu'il est « écranté », d'où l'appellation pour Ω .

Le second nombre sans dimension est le nombre de Reynolds magnétique R_m . On le définit par le rapport entre le temps de diffusion magnétique $\mu_0\sigma L^2$ et le temps d'advection caractéristique U/L ,

$$R_m = \mu_0\sigma UL. \quad (\text{A.32})$$

Le nombre de Reynolds magnétique caractérise l'importance de l'advection du champ électromagnétique dans le conducteur par rapport à la diffusion. À l'échelle du laboratoire, R_m est en général petit, c'est à dire $R_m \ll 1$. La distribution du champ électromagnétique est alors faiblement impactée par la vitesse du fluide. Toutefois, les effets du faible R_m sont utilisés pour la mesure de vitesse effectuée par ECFM, et sont décrits théoriquement dans le chapitre 3.

Le tableau A.2 donne les ordres de grandeurs des nombres sans dimensions Ω et R_m pour les facteurs d'échelles propres à notre étude, appliqués au sodium et au galinstan :

- Fréquence $f = 500$ Hz à 20 kHz ;
- Vitesse caractéristique $U \sim 1$ cm.s⁻¹ à 1 m.s⁻¹ ;
- Longueur caractéristique $L \sim 2.5 \times 10^{-2}$ m.

TABLEAU A.1 – Ordres de grandeurs des nombres sans dimension Ω et R_m .

	Ω	R_m
Sodium (500°C)	$10^1 - 10^2$	$10^{-3} - 10^{-1}$
Galinstan (20°C)	$10^1 - 10^2$	$10^{-3} - 10^{-1}$

Les équations (A.30a) et (A.30b), associées aux conditions d'interface (A.17), (A.20), (A.21) et (A.22), suffisent à décrire intégralement le champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) . Leur résolution est l'objet des approches théoriques des chapitres 3 et 5. Pour conclure, on remarque que le champ de vitesse \mathbf{u} du métal liquide doit être connu pour résoudre les équations du champ électromagnétique (A.30a) et (A.30b). La partie suivante apporte les outils nécessaires à la détermination de \mathbf{u} grâce aux équations de l'hydrodynamique.

A.2 ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

Le mouvement du métal liquide est gouverné par les équations de l'hydrodynamique, exprimant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement appliquées à une particule fluide. L'étude détaillée de ces équations n'est pas l'objet de la thèse ; nous les présentons cependant afin de caractériser le couplage magnétohydrodynamique existant dans un liquide conducteur soumis à un champ électromagnétique.

A.2.1 Hypothèses préliminaires

• L'effet Joule dans le métal est faible et le laboratoire est maintenu à température constante. On néglige alors les variations de température du métal liquide, soit :

$$T = \text{cst.} \quad (\text{A.33})$$

• On considère que les métaux liquides tels que le sodium et le galinstan sont des fluides incompressibles. En conséquence, leur masse volumique ρ est constante, soit :

$$\rho = \text{cst.} \quad (\text{A.34})$$

• Il est de plus supposé que le sodium et le galinstan à l'état liquide sont des fluides newtoniens, caractérisés par une viscosité dynamique η constante :

$$\eta = \text{cst.} \quad (\text{A.35})$$

• Enfin, en considérant un liquide pur et en l'absence d'oxydation, la tension de surface γ entre le sodium ou le galinstan et un gaz quelconque est supposée constante, soit :

$$\gamma = \text{cst.} \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Équations du mouvement

En exprimant les grandeurs dans un référentiel fixe, nous utilisons par la suite la formulation eulérienne. Le sodium et le galinstan étant des fluides newtoniens incompressibles, l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes s'écrivent respectivement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.37a})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.37b})$$

où ρ est la masse volumique du fluide et η sa viscosité dynamique, p est le champ de pression, \mathbf{g} est l'accélération de pesanteur, \mathbf{j} est la densité de courant électrique dans le métal liquide et \mathbf{B} est le champ magnétique. L'équation de continuité (A.37a) est déduite de la loi de conservation de la masse. L'équation de Navier-Stokes (A.37b) caractérise le bilan de quantité de mouvement sur une particule fluide. On remarque dans cette seconde équation la présence d'un terme strictement électromagnétique, la force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Ce terme propre aux liquides conducteurs est, avec l'induction électromagnétique, la deuxième cause du couplage magnétohydrodynamique.

Afin de caractériser l'importance de la force de Laplace par rapport aux autres forces exercées sur la particule fluide, il est utile d'écrire les équations du mouvement sous forme adimensionnelle en choisissant les échelles des différentes grandeurs. Nous définissons alors les paramètres d'échelle suivants : la longueur L , la vitesse U , le temps advectif L/U et la pression ρU^2 caractéristiques de l'écoulement, ainsi que le champ magnétique B et la densité de courant $B/\mu_0 L$ dans le métal liquide. À partir de ces paramètres d'échelle, les grandeurs sans dimension sont obtenues par :

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad t^* = \frac{U}{L}t, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{g}^* = \frac{L}{U^2}\mathbf{g}, \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \mathbf{J}^* = \frac{\mu_0 L}{B}\mathbf{J}. \quad (\text{A.38})$$

Les astérisques sont abandonnés par la suite pour faciliter la lecture. En injectant les grandeurs sans dimensions (A.38) dans l'équation de Navier-Stokes (A.37b), on obtient finalement :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\text{N}}{\text{R}_m} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.39})$$

où Re , N et R_m sont les trois nombres sans dimension caractéristiques du système.

Le premier nombre sans dimension est le nombre de Reynolds Re . On le définit par le rapport entre le temps de diffusion visqueuse $\rho L^2/\eta$ et le temps advectif L/U ,

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}. \quad (\text{A.40})$$

Le nombre de Reynolds caractérise le régime de l'écoulement (laminaire, transitoire ou turbulent). Dans le cas d'un écoulement en conduite cylindrique, lorsque Re est inférieur à 2000 environ, les forces visqueuses sont prépondérantes et l'écoulement est laminaire. Pour les Reynolds entre 2000 et 10000, des instabilités apparaissent dans l'écoulement et se développent ou s'atténuent selon les cas ; le régime est alors transitoire. Enfin, lorsque le Reynolds est supérieur à 10000, les instabilités ont suffisamment augmenté pour donner lieu à un écoulement chaotique. L'écoulement, dominé par les forces inertielles, est turbulent.

Le deuxième nombre sans dimension est le nombre de Reynolds magnétique R_m , défini précédemment dans l'équation (A.32). On remarque que R_m est présent à la fois dans les équations du champ électromagnétique (A.30a) et (A.30b) et dans l'équation de Navier-Stokes (A.39).

Enfin, le troisième nombre sans dimension est le nombre d'interaction magnétique N , ou nombre de Stuart, et parfois noté St . On le définit par :

$$N = \frac{B^2 L \sigma}{\rho U}, \quad \text{soit} \quad \frac{N}{R_m} = \frac{B^2 / \mu_0}{\rho U^2}. \quad (\text{A.41})$$

Le rapport N/R_m correspond au rapport entre le travail de la force de Laplace B^2/μ_0 et l'énergie cinétique du métal liquide ρU^2 .

Il est à noter que le nombre de Hartmann Ha peut être introduit à la place du nombre d'interaction magnétique N dans l'équation de Navier-Stokes (A.39). On le définit par :

$$Ha = \sqrt{ReN} = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (\text{A.42})$$

Le nombre de Hartmann caractérise l'importance relative de la force de Laplace par rapport aux forces visqueuses de l'écoulement.

TABLEAU A.2 – Ordres de grandeurs des nombres sans dimension Re , N , R_m et Ha .

	Re	N	R_m	N/R_m	Ha
Sodium (500°C)	$10^3 - 10^5$	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-3} - 10$	10^{-1}
Galinstan (20°C)	$10^3 - 10^5$	$10^{-4} - 10^{-2}$	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-4} - 1$	1

Le tableau A.2 donne les ordres de grandeurs des nombres sans dimensions Re , N , R_m et Ha , pour les facteurs d'échelles propres à notre étude, appliqués au sodium et au galinstan :

- Vitesse caractéristique $U \sim 1 \text{ cm.s}^{-1}$ à 1 m.s^{-1} ;
- Longueur caractéristique $L \sim 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$;
- Champ magnétique imposé $B \sim 1.7 \times 10^{-3} \text{ T}$. Pour estimer le champ magnétique imposé, on utilise les résultats du modèle analytique du chapitre 3, dans lequel le potentiel vecteur est résolu pour la géométrie de l'ECFM. La configuration calculée correspond à une fréquence $f = 20 \text{ kHz}$, le champ magnétique étant ici donné pour la position où il est le plus intense (sous la bobine primaire, en surface du métal).

ANNEXE B

PUBLICATION : PERTURBATION OF EDDY-CURRENTS BY ONE INCLUSION IN LIQUID METAL

Perturbation of eddy-currents by one inclusion in liquid metal

Cite as: J. Appl. Phys. 125, 094504 (2019); doi: 10.1063/1.5055062

Submitted: 6 September 2018 · Accepted: 17 February 2019 ·

Published Online: 4 March 2019



View Online



Export Citation



CrossMark

R. Guichou,¹ H. Ayroles,¹ R. Zamansky,¹  W. Bergez,¹ Ph. Tordjeman,¹ and K. Paumel² 

AFFILIATIONS

¹Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France

²Nuclear Technology Department, CEA, DEN, F-13108 Saint Paul Lez Durance, France

ABSTRACT

In this article, we present an analytical model to calculate the perturbation of the magnetic vector potential due to a non-conducting inclusion in a liquid metal translated at constant velocity. The model is valid for a low magnetic Reynolds number, Re_m , and a low shielding parameter, S_ω . We establish that the first order perturbation of the vector potential can be directly obtained from the value of the unperturbed eddy-current calculated at the location of the inclusion. An ECFM (Eddy-Current FlowMeter) device has been designed to validate the model and to study the frequency effects of the eddy-current and the volume of one inclusion and its location. We observe a good agreement between the model predictions and experimental data within the limit of the validity of the model. Based on scaling analysis, we show that a unique relation exists between the perturbation of the emf (electromotive force) measured with the ECFM and the volume of the inclusion and its location, which reflects the self-similarity of the model solution.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.5055062>

I. INTRODUCTION

When a flow of electrically conducting liquid undergoes an AC magnetic field, the presence of non-conducting inclusions modifies the electric current distribution. Understanding, predicting, and experimenting the distribution of the induced currents is important for fundamental magnetohydrodynamics and geophysics and is a key issue in many manufacturing processes or nuclear industry.¹⁻⁴ In this article, we propose a theoretical model of the perturbed magnetic vector potential caused by the distortion of eddy-currents around an inclusion immersed in a liquid metal flow. For a small magnetic Reynolds number, $Re_m = \mu_0 \sigma_0 UL$ (where μ_0 , σ_0 , and U are the magnetic permeability of the vacuum, the electrical conductivity, and the velocity of the liquid, respectively, and L is the length scale of the flow), this model predicts the effects of the main physical parameters, such as the location and size of the inclusion, the frequency, and the electrical properties of the liquid metal. The model is compared and agrees very well with experiments and shows that the location and the volume of the inclusion determine the perturbation of the vector potential through an explicit relation.

Maxwell first developed a multipolar model to characterize the equivalent electrical conductivity of a two-phase medium composed of a conducting continuum phase containing a dispersion of non-conducting spherical inclusions.⁵ This model is valid for DC electromagnetic fields but is not adapted to experiments in AC

fields.⁴ The main theoretical approach that takes into account the Faraday induction is due to Bowler who has modeled the electric field in a medium containing a flaw of different conductivity.⁶ The model is based on the Green function method and requires a numerical modelling to solve a Fredholm integral equation for the current density perturbation. This model predicts correctly the location and the size of surface defects. Furthermore, the hydrodynamics of a liquid metal flow with inclusions requires the coupled resolution of the Maxwell and the Navier-Stokes equations. In the case of the DC magnetic field, direct numerical simulations showed that the Lorentz force significantly modifies the wake and the inclusion dynamics.^{7,8} Finally, recent experimental studies show that the presence of a particle can be detected with a permanent magnet by the so-called Lorentz force velocimetry technique.⁹ In this paper, we focus on the magnetic field perturbation by a liquid flow with a single inclusion in an AC external field. The paper is organized as follows: the model is presented in Sec. II and the experimental setup that has been designed to explore the validity range of the model is depicted in Sec. III. Then, the results are presented and discussed in Sec. IV.

II. PERTURBATION MODEL

We consider a model of a liquid metal flow in a cylindrical duct that advects one non-conducting spherical inclusion of radius

R_b (Fig. 1). The present model is based on the determination of the magnetic vector potential, \mathbf{A} , in the presence of the inclusion. The electromagnetic field is generated by an external primary coil P supplied with AC current I^e , corresponding to a volume current density \mathbf{j}^e . The perturbation of \mathbf{A} is responsible for the difference of the magnetic flux through the secondary coils S1 and S2 when the liquid metal is flowing through the three coils. The device based on these principles is currently used to measure the flow rate and is called ECFM (Eddy-Current FlowMeter).¹⁰

In the model, we assume that the velocity field of the liquid metal is not perturbed by the magnetic field. Indeed, the magnetic interaction number is lower than unity due to a small advective time (Reynolds number > 1000), a hypothesis that is confirmed by previous experiments.⁴ For the gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, the induction equation for the non-dimensional vector potential is

$$\nabla^2 \mathbf{A} = n S_\omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - n Re_m \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{j}^e, \quad (1)$$

where $n = 1_{LM}(\mathbf{r})$ is the characteristic function of the liquid metal volume ($n = 1$ in the liquid metal and 0 outside of the duct and in the inclusion). Note that the current density \mathbf{j}^e is non-zero in the primary coil P only. In Eq. (1), the scalar potential gradient is neglected because of the absence of applied potential on the boundaries and $Re_m \ll 1$. The characteristic time is ω^{-1} , the inverse of the electrical current pulsation. The scale factor for \mathbf{A} is also defined as $\mu_0 J^e L^2$, where J^e is the amplitude of the external current density. The shielding parameter $S_\omega = \mu_0 \sigma_0 \omega L^2$ corresponds to the square ratio of L and the magnetic skin depth.¹¹ Note that the first two terms on the right-hand side of Eq. (1) correspond to magnetic induction by Faraday and velocity effects.

In the absence of inclusion, the unperturbed vector potential amplitude \mathbf{A}_0 defines the “base” field for the liquid metal and obeys the same equation (1). For the geometry considered in this model with a uniform axial velocity, \mathbf{A}_0 is orthonormal. The solution of Eq. (1) is obtained from the Green function method as

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int_{V_P} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \quad (2)$$

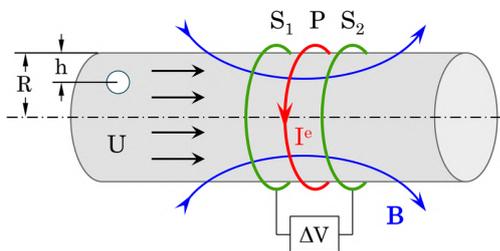


FIG. 1. Non-conducting inclusion advected by a flowing liquid metal and detected by an Eddy-Current FlowMeter (ECFM): P is the primary coil excited by an AC current I^e . S1 and S2 are two secondary coils, and U is the velocity of the liquid metal flow. The magnetic flux is measured with S1 and S2.

where V_P is the volume of the primary coil P and $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is the scalar Green function given by^{12,13}

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} [C_i(r') I_1(k_i r) + D_i(r') K_1(k_i r)] e^{j2\pi\zeta(z-z')} d\zeta. \quad (3)$$

In this equation, the i index corresponds to three different domains: $i = 1$ for the liquid metal, $i = 2$ for the gap between the liquid and the coils, and $i = 3$ for the region external to the coils. We define $k_i^2 = (2\pi\zeta)^2 + j(2\pi\zeta Re_m + S_\omega)$ for $i = 1$ and $k_i^2 = (2\pi\zeta)^2$ for $i = 2, 3$. In Eq. (3), the position is given in cylindrical coordinates with the origin at the P coil center. The constants C_i and D_i are determined from the jump conditions: $[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]_i^{i+1} = 0$, $[\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r}]_i^{i+1} = 0$, for $i = 1, 2$, except for the z position of the Dirac source where $[\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r}]_2^3 = 1$. In Eq. (3), I_1 and K_1 are the modified Bessel functions.¹⁴ Note that the induction in the metal, characterized by the imaginary part in k_1 , is responsible for a phase shift between \mathbf{A}_0 and the reference \mathbf{j}^e .

In the presence of one advected inclusion located at a distance h from the duct wall, the vector potential perturbation is $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0$. For standard experimental conditions, the advection time is much larger than ω^{-1} , which implies $Re_m \ll S_\omega$. Based on this scale separation, the time derivative in Eq. (1) corresponds to the fast variations at the scale ω^{-1} . Consequently, \mathbf{A}_α obeys at first order in Re_m to the following equation:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha \approx n S_\omega \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial t} - n_b S_\omega \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t}, \quad (4)$$

where $n_b = 1_b(\mathbf{r})$ is the characteristic function associated with the inclusion volume V_b . For a characteristic length $L = R_b$, which is small when compared with the skin depth, $S_\omega \ll 1$, and considering the expansion $\mathbf{A}_\alpha = S_\omega \mathbf{A}_\alpha^1 + S_\omega^2 \mathbf{A}_\alpha^2 + \dots$, Eq. (4) leads to a Poisson equation

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha^1 = -n_b \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} = n_b \mathbf{j}_0 \times S_\omega^{-1}, \quad (5)$$

where $n_b \mathbf{j}_0$ is the non-perturbed eddy-current in V_b obtained from the base field \mathbf{A}_0 (2). This equation shows that the first order perturbation of the vector potential due to a non-conducting inclusion is simply governed by the induced base field at the location of the inclusion. However, this perturbation is not damped by a diffusion-induction mechanism and does not generate eddy-current. To take into account induction, it should be necessary to consider the second order of \mathbf{A}_α perturbation. The electrical distribution of \mathbf{j}_0 around the inclusion is modified in $\mathbf{j}_0 + S_\omega \mathbf{j}_\alpha^1$, where $\mathbf{j}_\alpha^1 = \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha^1}{\partial t} \times -S_\omega$. Consequently, we expect an increase of dissipation in a thin layer surrounding the inclusion. Finally, in Eq. (5), $n_b \mathbf{j}_0$ is understood as the source term of the Poisson equation. Note that, at the first order of S_ω , the total electrical current density still respects the conservation equation in

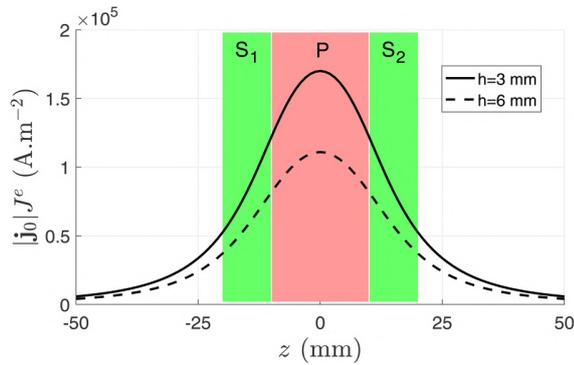


FIG. 2. Evolution of the dimensional unperturbed current density with the axial position for two inclusion depths, as obtained from Eqs. (2) and (3). $R = 12.5$ mm, $\omega = 2\pi \times 1000$ rad s⁻¹, $I^e = 0.17$ A. The zones P, S1, and S2 denote the primary and secondary coil positions.

the whole volume and its normal component at the inclusion boundary is $\mathcal{O}(S_\omega^2) \ll 1$.

The solution of Eq. (5) is

$$A_\alpha^1(\mathbf{r}) \times S_\omega = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_b} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}'). \quad (6)$$

The perturbation of the vector potential is obtained from the distribution of the non-perturbed eddy-current field \mathbf{j}_0 at the location of the inclusion. A similar approach is developed in order to analyze the perturbation of the Lorentz force due to an insulating defect in a conducting medium.¹⁵ An example of $|\mathbf{j}_0|(z)$, where z is the axial coordinate, is displayed in Fig. 2 for two different depths h and for a given pulsation. Here, the non-perturbed current density $|\mathbf{j}_0|$ is given in SI units. As expected, $|\mathbf{j}_0(z)|$ is maximum at the center of

the P coil for both depths and decreases by a factor ~ 2 at the center of the two S coils. We note that the major part of the electromagnetic energy is localized in the liquid metal just under the three coils. As the liquid metal flows, the inclusion crosses the ECFM and sees the \mathbf{j}_0 distribution corresponding to its depth position. Then, the ECFM monitors the perturbation of the eddy-currents during the inclusion displacement.

III. EXPERIMENTAL SETUP

In order to validate the perturbation model for one inclusion, we design a specific experimental setup with an ECFM as depicted in Fig. 1. The three coils have the same radius $R_S = 35$ mm and a length of 20 mm (P) and 10 mm (S1 and S2). For all the experiments, the phase and intensity of \mathbf{j}^e are imposed using a transconductance amplifier. The ECFM is translated at a constant velocity U varying between 1 and 10³ mm/s ($Re_m \leq 0.025$), around a ceramic tube (MacorTM) containing a static liquid metal (galinstan GaInSn, $\sigma = 3.46 \times 10^6$ S/m, diameter $2R = 25$ mm). The non-conducting inclusion is a polymer bead (Visijet[®] M3 Crystal) of various radii ($R_b = 1, 1.5, 2,$ and 2.5 mm) made by 3D printing (3D Systems ProJet 3500 HD with a precision of ± 0.025 mm). The beads are fixed at different depths ($h = 3$ and 6 ± 0.25 mm) with a thin thread of diameter $50 \mu\text{m}$ (Fig. 3). The perturbation of the voltage difference between S1 and S2 caused by the inclusion, ΔV_α , is obtained by demodulation of the AC voltage signal using a lock-in amplifier (HF2LI-MF Zurich Instruments). The values of ΔV_α are then averaged over ten acquisitions with a standard deviation of $\sim 2 \mu\text{V}$. We observe that the measured signal is sensitive to the presence of the inclusion for the whole ranges of frequency (between 5×10^2 and 2×10^4 Hz), inclusion size R_b , and position h . The study in frequency points out that the model is valid only at low frequencies, typically between 5×10^2 and 2×10^3 Hz, in agreement with the model hypothesis. In this frequency range, the skin depth varies between 12.1 and 6.1 mm. With these values, we find $S_\omega/Re_m \geq 3$ and $S_\omega \leq 0.3$; hence, the assumption $Re_m \ll S_\omega \ll 1$ is verified except for large beads and high frequencies.

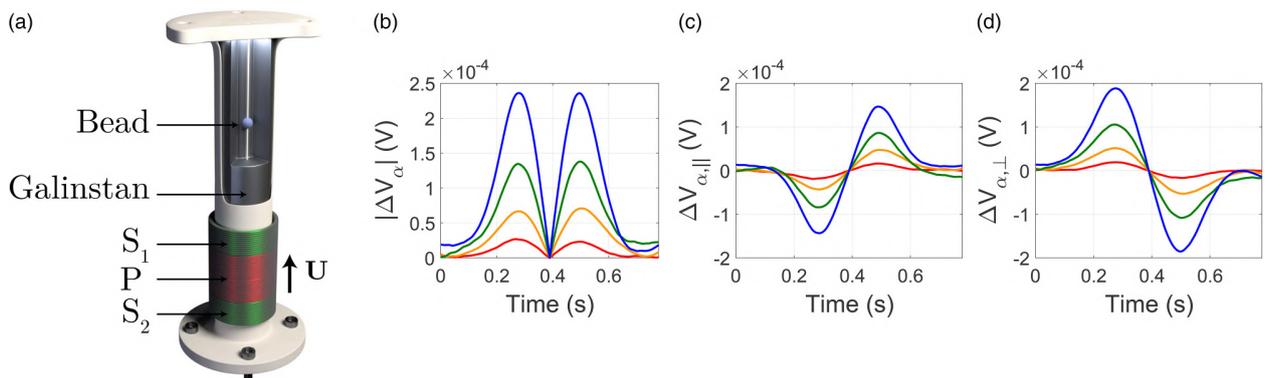


FIG. 3. (a) Experimental ECFM (S1-P-S2) device in translation at constant velocity U around the tube of galinstan. (b)–(d) Modulus, in-phase, and in-quadrature components of ΔV_α for different bead diameters (red curves 2 mm, yellow curves 3 mm, green curves 4 mm, blue curves 5 mm). Bead distance to the wall $h = 3$ mm. Frequency 1000 Hz. Translation velocity $U = 100$ mm s⁻¹.

Figure 3 depicts the demodulated signals of ΔV_α (modulus, in-phase, and in-quadrature components with respect to the phase reference of \mathbf{j}^e), versus the transit time of the bead through the ECFM, for various R_b (here, U , ω , and h are fixed). We recall that the existence of both in-phase and in-quadrature components is a direct consequence of the phase shift of the base field \mathbf{A}_0 [Eqs. (2) and (3)]. The curves present two extrema located approximately at the limits between the primary and the secondary coils. When the bead is at the middle of P, ΔV_α is zero. Furthermore, the signal amplitude increases by one decade when R_b changes from 1 to 2.5 mm. This last result shows that the ECFM device is very sensitive to the bead volume. In addition, as observed previously, all the experiments confirm that ΔV_α is independent of U at small Re_m .^{3,4}

IV. RESULTS AND DISCUSSION

By applying the Faraday law on the perturbed potential \mathbf{A}_α^1 in Eq. (6), one can predict the dimensional induced voltage difference ΔV_α

$$\frac{\Delta V_\alpha}{\mu_0 \omega J^e R_b^3} = \sum_{N_s} \frac{d}{dt} \left\{ \oint_{S_2} \mathbf{A}_\alpha^1 \cdot d\mathbf{r} - \oint_{S_1} \mathbf{A}_\alpha^1 \cdot d\mathbf{r} \right\}, \quad (7)$$

where the contour integrals correspond to 1 turn of S1 and S2 and N_s is the number of turns of the two secondary coils. Figure 4 compares the model and experiments for two bead positions, $h = 3$ and 6 mm, with $R_b = 1.5$ mm, at 1000 Hz. The exact solutions of Eqs. (5) and (6) are compared with an approximated solution of \mathbf{A}_α^1 in which $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \approx \text{cst}$ in Eq. (6). In this approximation, the value of $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$ is taken at the location of the inclusion center. The uncertainties on the geometrical parameters R , R_b , and h are an

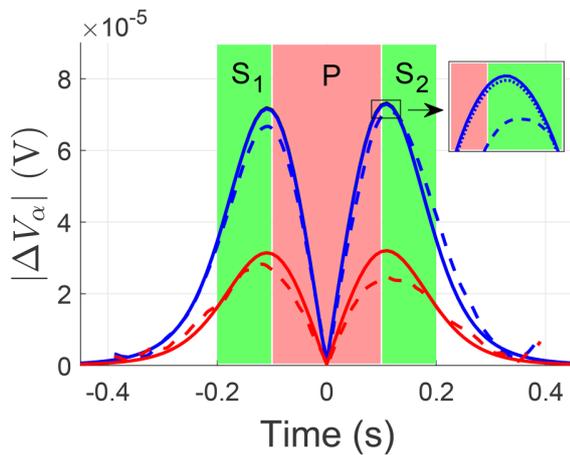


FIG. 4. Comparison between the model (continuous lines) and experiments (dashed lines): modulus of ΔV_α versus time for a 3 mm bead diameter at two different depths: $h = 3$ mm blue curves and $h = 6$ mm red curves. Frequency 1000 Hz, translation velocity $U = 100 \text{ mm s}^{-1}$. Inlet: zoom of the model solutions (continuous line: uniform distribution of \mathbf{j}_0 , dotted line: exact solutions).

important cause of deviation between the theoretical and experimental values of $|\Delta V_\alpha|$. Within the limit of the measurement uncertainties, we observe a good agreement between the experiments and the model, for both exact and approximated solutions. The experimental results in Figs. 3 and 4 exhibit a slight dissymmetry of the two $|\Delta V_\alpha|$ peaks due to the accuracy of the physical parameters mentioned above responsible for the uncertainty of the experimental $\Delta V_\alpha = 0$ line position.

As expected from the assumptions of the model ($S_\omega \ll 1$), we find that the model deviates from the experimental results for a large bead radius ($R_b > 2$ mm) and a high frequency (over 2000 Hz). Henceforth, the hypothesis of a current density \mathbf{j}_0 uniformly distributed in V_b gives a very good approximation of ΔV_α . Within this assumption, Eq. (6) simply becomes $\mathbf{A}_\alpha^1(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{j}_0}{3|\mathbf{r}|}$, where \mathbf{r} is now the vector position in the whole space from the inclusion center. For one turn of S1 or S2, the circulation of \mathbf{A}_α^1 in Eq. (7) is then

$$\oint \mathbf{A}_\alpha^1 \cdot d\mathbf{r} \approx \frac{\Lambda}{6} |\mathbf{j}_0| \{2E(\pi, m) + (m^2 - 2)F(\pi, m)\}, \quad (8)$$

where $F(\pi, m)$ and $E(\pi, m)$ are the complete elliptic integrals of the first and second kind,¹⁴ with $m^2 = \frac{4R_s^2}{\rho \Lambda^2}$ and $\Lambda^2 = \frac{[(R_s + \rho)^2 + \xi^2]}{\rho^2}$. The radial position of the bead center in the tube is $\rho = R - h$, and the axial distance between the bead center and the plane containing the coil turn is ξ . Incorporating Eq. (8) in Eq. (7), the right-hand side of Eq. (7) is a function of ω , h , and z . Note that the ω dependence is contained only in $|\mathbf{j}_0|$.

We define ΔV_α^* as the maximum value of ΔV_α reached when the z -position of the bead is approximately at the limit between the primary and the secondary coils. At this position, we introduce the parameter $\Upsilon_\alpha = \Delta V_\alpha^* / \mu_0 \omega J^e = R_b^3 f_\omega(h)$, where the dimensionless function $f_\omega(h)$ is the maximum value of the sum in Eq. (7). Figure 5 displays $f_\omega(h)$ for the geometry of our experimental setup at different frequencies. It is seen that the function $f_\omega(h)$ decreases

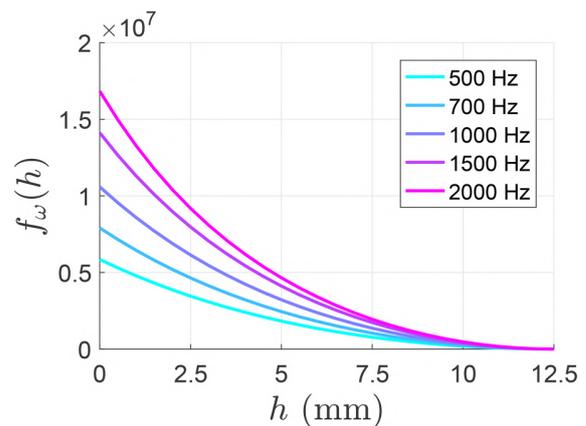


FIG. 5. Graph of the function $f_\omega(h)$ from Eqs. (7) and (8) for various frequencies.

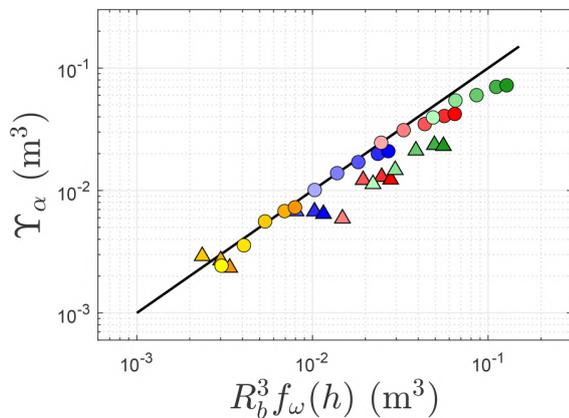


FIG. 6. Master curve $\Upsilon_\alpha = \Delta V_\alpha^* / \mu_0 \omega J^e$ versus $R_b^3 f_\omega(h)$. Comparison between the model (continuous line) and experiments (points) for various R_b : 1 mm (yellow), 1.5 mm (blue), 2 mm (red), and 2.5 mm (green). The bead depth is depicted by circles ($h = 3$ mm) and triangles ($h = 6$ mm). For each bead, the color lightness corresponds to the AC frequency of the measurements, from light (500 Hz) to dark (2000 Hz).

with h and vanishes at the center of the tube ($h = R$), where $\mathbf{j}_0 = \mathbf{0}$. Figure 6 compares the theoretical values of Υ_α predicted by the model with those of experiments. For $h = 3$ mm, the measurements correctly follow the relation $\Upsilon_\alpha = R_b^3 f_\omega(h)$. On the other hand, for $h = 6$ mm, the measurements slightly deviate from the previous relation. For a fixed bead depth h , an increase in frequency or bead volume also leads to a deviation of the experimental data from the model prediction. Indeed, as R_b , h , and ω increase, the induction term $nS_\omega \partial \mathbf{A}_\alpha / \partial t$ in Eq. (4) becomes non-negligible compared with the Laplacian term $\nabla^2 \mathbf{A}_\alpha$. In this case, the eddy-current perturbation is responsible for a spatial decay of \mathbf{A}_α , resulting in a

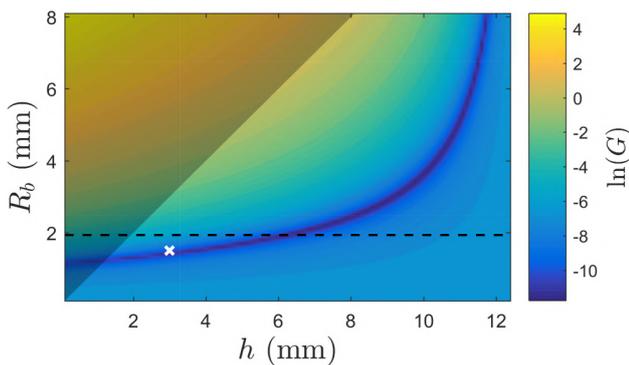


FIG. 7. Contour of the objective function $G(h, R_b) = \sum_i [\Upsilon_{\alpha,i}^{exp} - \Upsilon_{\alpha,i}^{th}(h, R_b)]^2$, where the i index corresponds to the AC frequency ω_i . The cross indicates the experimental value of (R_b, h) . The shaded zone corresponds to $R_b > h$, and the dashed line depicts the limit of the model assumption $S_\omega = 0.1$ for a frequency of 2000 Hz.

lower value of ΔV_α . As a consequence, the model overestimates Υ_α for high R_b , h , and ω and gives an upper limit of the experimental data.

Finally, if one wants to determine R_b and h from experiments by the inverse method, one can show that R_b and h are linked by a unique relation obtained by least squares minimization of the difference between experimental and theoretical ΔV_α at various ω . This property results from the self-similarity in R_b^3 and h of the solutions of the model. As an example, Fig. 7 displays the curve of this relation in the contour graph of the objective function for the experimental data obtained with $R_b = 1.5$ mm and $h = 3$ mm. We observe that the experimental (R_b, h) value belongs to the minimum $R_b - h$ curve within the limit of the model assumption ($S_\omega \ll 1$) and the geometrical constraint ($R_b < h$). Hence, a reasonable estimation of R_b can be determined from “blind” measurements of ΔV_α at different frequencies, but the value of R_b can be characterized precisely if h is known.

V. CONCLUSION

In this article, we have presented a perturbation model of the vector potential due to a non-conducting inclusion in a liquid metal flow. The perturbation is calculated from the solution of the unperturbed current density \mathbf{j}_0 taken at the center of the inclusion and distributed all over the inclusion volume. The main assumption of the model is $Re_m \ll S_\omega \ll 1$, corresponding to small values of R_b , h , and ω . We designed a specific experimental setup in order to validate the model and we observed a good agreement within the limit of the hypothesis. An inverse approach shows that a good order of magnitude of R_b can be determined from experiments at various frequencies. This work points out that inductive effects should be taken into account for the study of two-phase liquid metal flows at higher frequencies. Finally, this model could be extended to calculate the response of a distribution of dilute inclusions. The approach developed in this article will be of direct interest for the detection of bubbles in the metallurgy process and in nuclear safety design for sodium-cooled fast reactors.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge G. Eheses at IMFT Toulouse for his technical assistance. This work has been financially supported by CEA Cadarache.

REFERENCES

- 1N. Terzija, W. Yin, G. Gerbeth, F. Stefani, K. Timmel, T. Wondrak, and A. Peyton, *Meas. Sci. Technol.* **22**, 015501 (2011).
- 2R. Moreau, Z. Tao, and X. Wang, *Appl. Phys. Lett.* **109**, 024104 (2016).
- 3M. Kumar, Ph. Tordjeman, W. Bergez, and M. Cavaro, *Rev. Sci. Instrum.* **86** (10), 106104 (2015).
- 4M. Kumar, W. Bergez, Ph. Tordjeman, R. Arinero, and K. Paumel, *J. Appl. Phys.* **119**, 185105 (2016).
- 5J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover Publications, New York, 1954).
- 6J. R. Bowler, S. A. Jenkins, L. D. Sabbagh, and H. A. Sabbagh, *J. Appl. Phys.* **70**, 1107 (1991).
- 7S. Schwarz and J. Fröhlich, *Int. J. Multiphas. Flow* **62**, 134 (2014).
- 8J. Zhang, M.-J. Ni, and R. Moreau, *Phys. Fluids* **28**, 032101 (2016).

⁹Z. Lyu, T. Boeck, C. Karcher, and A. Thess, *Magnetohydrodynamics* **53**, 653 (2017).

¹⁰J. A. Shercliff, *The Theory of Electromagnetic Flow-Measurement* (Cambridge University Press, Cambridge, 1962).

¹¹R. Moreau, *Magnetohydrodynamics* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).

¹²C. Dodd and W. Deeds, *J. Appl. Phys.* **39**(6), 2829 (1968).

¹³M. Hirayama, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **24**(5), 2021–2030 (1977).

¹⁴M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1964).

¹⁵E.-M. Dolker, R. Schmidt, K. Weise, B. Petkovic, M. Ziolkowski, H. Brauer, and J. Hauelsen, *IEEE Trans. Magn.* **54**, 6200105 (2018).

ANNEXE C

PUBLICATION : EXPERIMENTAL STUDY OF BUBBLE DETECTION IN LIQUID ME- TAL

EXPERIMENTAL STUDY OF BUBBLE DETECTION IN LIQUID METAL

*R. Guichou*¹, *P. Tordjeman*¹, *W. Bergez*¹, *R. Zamansky*¹, *K. Paumel*²

¹ *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse,
CNRS-INPT-UPS, Toulouse, France*

² *CEA, DEN, Cadarache, STCP/LIET, F13108 St Paul lez Durance, France*

Bubble detection in liquid metal is an important issue for various technological applications. For instance, in the framework of Sodium Fast Reactors design, the presence of gas in the sodium flow of the primary and secondary loops is an issue of crucial importance for safety and reliability. Here, the two main gas measurement methods in sodium are ultrasonic testing and eddy-current testing; we investigate the second method in our study. In a first approach, we have performed experiments with liquid metal galinstan containing insulating spherical beads of millimeter size. The liquid metal is probed with an Eddy-current Flowmeter (ECFM) in order to detect the beads and characterize their diameter and position. Results show that the signal measured by the ECFM is correlated with the effect of these parameters. Finally, an analytical model is proposed and compared to the experimental results.

Introduction. Bubble detection and characterization in opaque media, such as liquid metals, is an open subject of research, which finds applications in several industrial domains from the nuclear energy in the Sodium Fast Reactors (SFR) to the metallurgy. In the SFRs, the liquid sodium is used as a coolant of the nuclear core, and the presence of bubbles in the flow could indicate a leak occurring in the sodium–gas exchanger between the secondary and the tertiary circuit. Due to the physical properties of sodium, two measurement methods distinguish themselves for the gas detection: the eddy-current method which is the principle we investigated, and Ultrasonic testing. Eddy-current testing is commonly used for the detection of superficial defects in metallic bodies. Besides, flowmetry with eddy currents has already been implemented successfully for various liquid metals [1], [2], [3].

The main objective of the study is to develop a robust method to detect inclusions, such as bubbles or impurities, in liquid metals with the aid of an Eddy-Current Flowmeter (ECFM). In this paper, we also present models that have been developed to understand and analyze the measured signals. These models are based on a perturbative approach of the magnetic flux due to the two-phase liquid metal at small skin depths ($\delta = 1/\sqrt{\mu\sigma\pi f} \ll D$) and low magnetic Reynolds number ($Rm = \mu\sigma U\delta \ll 1$), where μ is the magnetic permeability, σ is the electrical conductivity, f is the frequency, D is the characteristic length of the flow and U the flow velocity. A perturbative model has already been developed in [4], [5]. It states that the total magnetic flux ϕ in the two-phase liquid can be expanded at first order in the flow velocity U and void fraction α : $\phi \approx \phi_0 + \phi_U + \phi_\alpha$, where ϕ_0 is the flux in the absence of motion and due to Faraday effects, ϕ_U is the flux due to motion effects, and ϕ_α is the perturbation of the flux due to the dispersed phase.

In the first section, we present the experimental setup consisting of a tube of liquid metal (galinstan) containing insulating beads arranged with known position and diameters. An ECFM translates along the tube to probe the liquid metal. The frequency range of the current supplying the ECFM is between 1000 Hz and 3000 Hz ($Rm \ll 1$ and $4.8 < \delta < 8.3$ mm). In the second section, we study the ECFM response by varying the current frequency f , the ECFM velocity U and

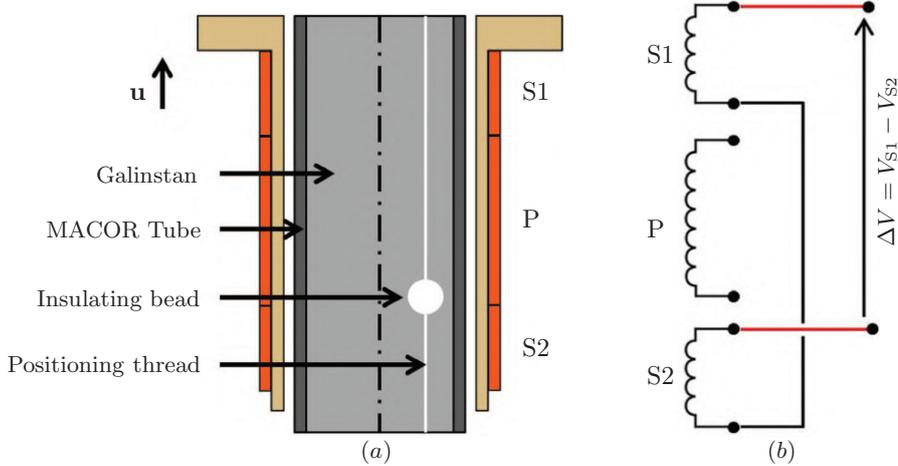


Fig. 1. (a) Explanatory layout of the ECFM. (b) ECFM wiring diagram.

the bead diameter D (the bead position is fixed). In the third section, we propose an analytical model of the perturbation of the magnetic field by one bead and compare it with the experimental results.

1. Experimental setup. The setup (Fig. 1a) consists of a vertical tube made from non-conducting non-ferromagnetic Macor ceramic tube (inner diameter 25 mm, outer diameter 29 mm) containing a static two-phase liquid metal: galinstan (alloy of Gallium, Indium and Tin). Spherical beads (with four diameters of 2, 3, 4 and 5 mm) made of polymer material by 3D printing are disposed in the galinstan. The radial position of the beads is fixed with a thread (diameter $50 \mu\text{m}$) at three different distances from the axis of the tube (3.5, 6.5 or 9.5 mm). Each tube contains one thread at a given position, where two beads of different diameters are stuck at a distance of 90 mm one to the other, in order to avoid the overlap effect on the ECFM signal. A control tube containing only galinstan is used as a reference to enlighten the influence of the beads on the measurements.

The ECFM is composed of three coaxial coils mounted on a PEEK polymer ring (inner diameter 31 mm, outer diameter 35 mm): a primary coil P (length 20 mm, inner diameter 35 mm) and two secondary coils S1 and S2 (length 10 mm, diameter 35 mm) on either sides (Fig. 1b). Each coil is composed of two layers of winding (copper wire of 0.4 mm in diameter).

The ECFM is fixed to an uniaxial displacement controller piloted by the computer 2 (Fig. 2) and translates vertically along the tube at velocities from 1 mm/s to 1000 mm/s. Hence (by referential change), the ECFM probes a two-phase plug-flow. For each measurement, the ECFM is translated back and forth several times.

A lock-in amplifier piloted by the computer 1 (Fig. 2) generates AC signals of given frequency (1000 to 3000 Hz) and voltage (1 V). The transconductance amplifier produces an AC output current i_0 of constant amplitude (0.5 A) supplied to the primary coil P. The generated magnetic field produced by the coil P induces eddy currents inside the galinstan, whose distribution is modified by the motion of the liquid metal and by the presence of the insulating beads. The total magnetic flux induces an e.m.f. in the secondary coils S1 and S2. The voltage difference $\Delta V = V_{S2} - V_{S1}$ between the two secondary coils is measured and amplitude-demodulated by a lock-in amplifier with i_0 as the phase reference. We note the

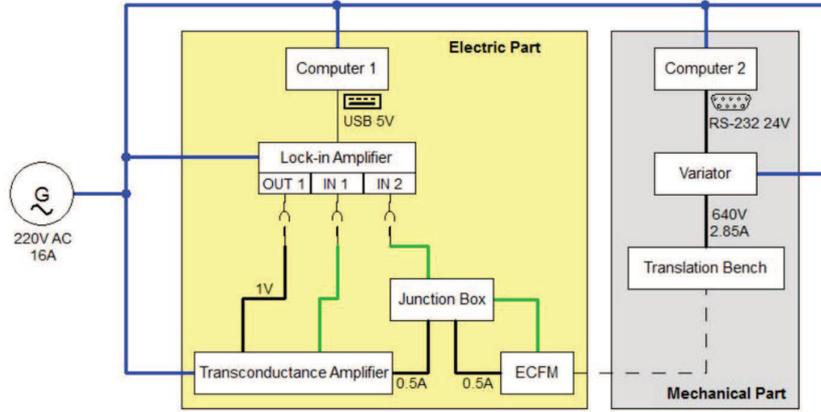


Fig. 2. Functional scheme of the experimental setup.

in-phase component ΔV_{\parallel} and the quadrature component ΔV_{\perp} . We note also the module $|\Delta V| = \sqrt{(\Delta V_{\parallel})^2 + (\Delta V_{\perp})^2}$ and the phase $\Theta = \arctan(\Delta V_{\perp}/\Delta V_{\parallel})$.

2. Experimental results. Typical demodulated signals of the ECFM are depicted in Fig. 3, where the bead diameter is 5 mm and the current frequency is 2000 Hz for the whole velocity range. The ECFM position coordinate corresponds to the middle of the primary coil. The measured voltage is the voltage difference between the two secondary coils (in-phase and quadrature components). The reproductivity of the results has been tested by measuring the signal for several translations of the ECFM and the mean standard deviation is below $2 \mu V$, which is much smaller than ΔV (~ 1 mV).

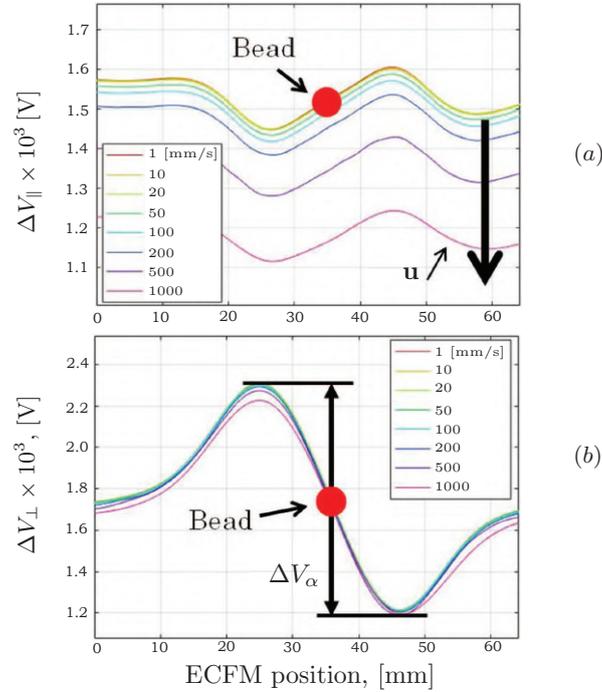


Fig. 3. Demodulated signal: (a) in-phase ΔV_{\parallel} and (b) quadrature ΔV_{\perp} components vs. ECFM position (frequency $f = 2000$ Hz, bead radial position $r = 9.5$ mm).

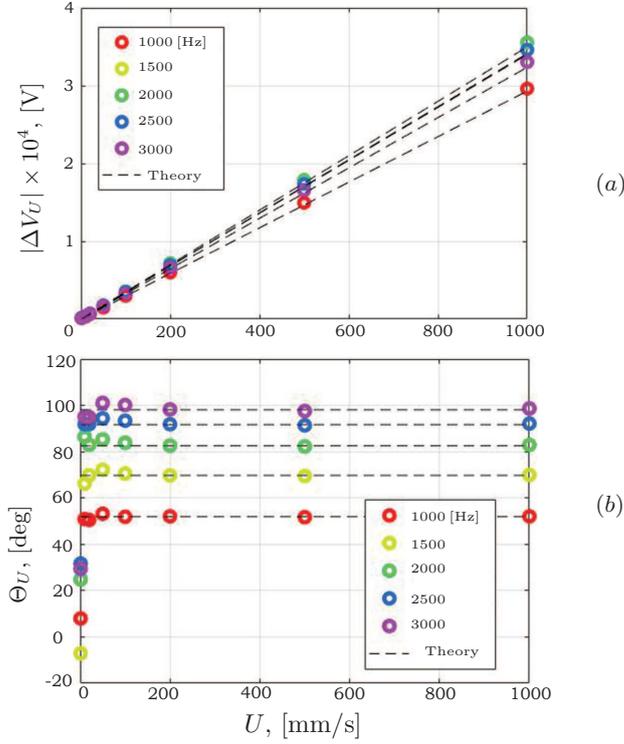


Fig. 4. (a) Module $|\Delta V_U|$ and (b) phase Θ_U vs. ECFM velocity U .

At 1 mm/s and without bead, the induction due to motion is negligible, and we have $\Delta V_{\parallel} \approx \Delta V_{0,\parallel}$ and $\Delta V_{\perp} \approx \Delta V_{0,\perp}$. It can be noticed that $\Delta V_{0,\parallel}$ and $\Delta V_{0,\perp}$ should be zero for an ideal ECFM. The Lorentz induction in the galinstan, due to its motion, manifests itself in two offsets $\Delta V_{U,\parallel}$ and $\Delta V_{U,\perp}$. The presence of the bead manifests itself by an oscillation of the amplitudes $\Delta V_{\alpha,\parallel}$ and $\Delta V_{\alpha,\perp}$ centered at the bead position (at 35 mm in Fig. 3).

Fig. 4 depicts the variations of $|\Delta V_U|$ and Θ_U versus the ECFM velocity for the tube without beads. The module $|\Delta V_U|$ varies linearly with velocity, which is in agreement with [3]. The phase Θ_U is invariant for a velocity larger than 20 mm/s. For a velocity smaller than this value, the voltage offset measurement is subject to larger uncertainties due to its small value.

The frequency effect is shown in Fig. 5 for the same tube. The module increases with f up to a maximum occurring at 2000 Hz independent of the velocity. The phase Θ_U increases monotonically with frequency for the whole range of velocities.

The bead effects are illustrated in Fig. 6 to Fig. 8. Fig. 6 depicts $|\Delta V_{\alpha}|$ and Θ_{α} versus the velocity U for a bead of 5 mm in diameter. As in [3], we observe that $|\Delta V_{\alpha}|$ and Θ_{α} approximately do not depend on the velocity. This result is fundamental to decouple the velocity effects and the void fraction effects and is the basis for bubble detection [3]. On the contrary, the oscillation amplitude depends strongly on the frequency, as it is shown in Fig. 7 for a velocity of 1 mm/s. As the frequency rises, $|\Delta V_{\alpha}|$ increases as a consequence of the intensification of the current density in the galinstan (Faraday induction law). On the other hand, Θ_{α} decreases with frequency for the whole range of bead diameters.

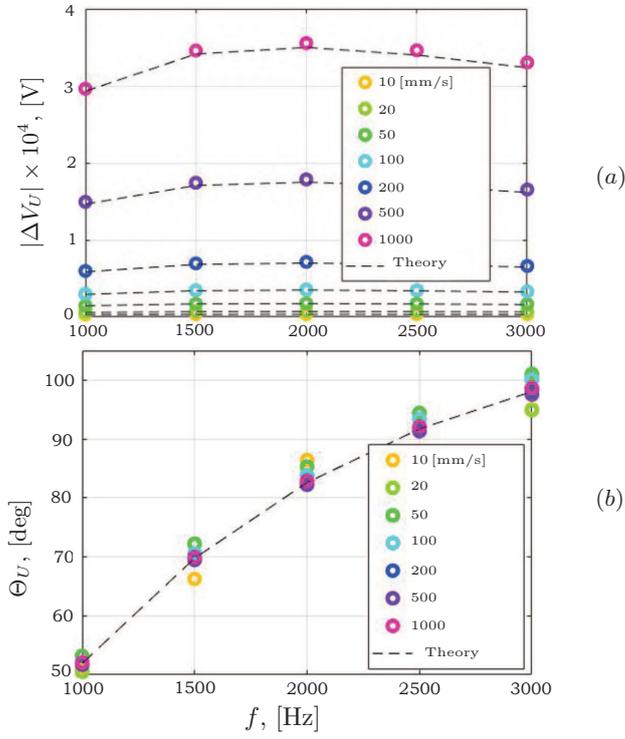


Fig. 5. (a) Module $|\Delta V_U|$ and (b) phase Θ_U vs. frequency f .

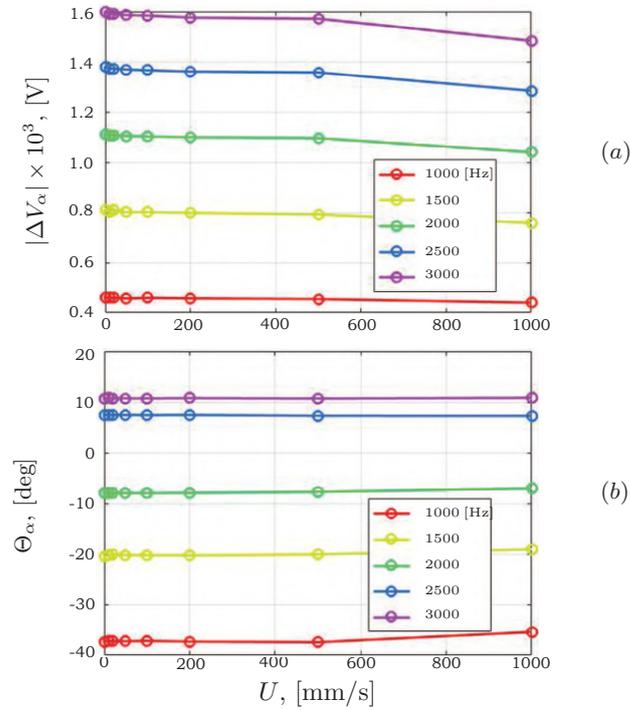


Fig. 6. (a) Module $|\Delta V_\alpha|$ and (b) phase Θ_α vs. ECFM velocity U (bead diameter $D = 5$ mm).

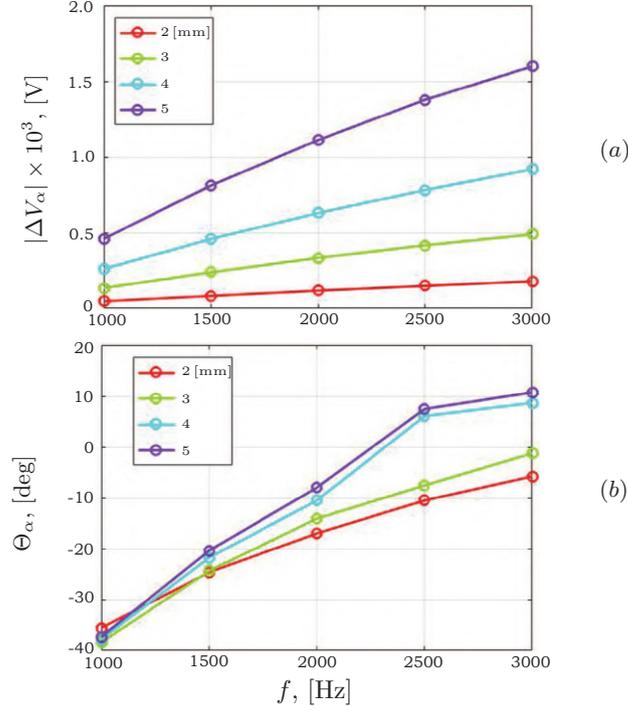


Fig. 7. (a) Module $|\Delta V_\alpha|$ and (b) phase Θ_α vs. frequency f ($U = 1$ mm/s).

Fig. 8 depicts $|\Delta V_\alpha|$ and Θ_α of the oscillation amplitude versus the bead volume for a velocity of 1 mm/s. $|\Delta V_\alpha|$ increases with the volume of the bead. The phase Θ_α of the oscillation decreases as the bead volume increases, and this decrease is even more important as the frequency increases.

3. Discussion.

3.1. Analytical solution for a single phase flow. The analytical solution of a coil surrounding a static metal cylinder can be found in [6]. Here, we extend the solution to the case of a coil crossed by single-phase liquid metal in stationary motion. The current in the primary coil (and, therefore, the vector potential \mathbf{A}) is taken as a sinusoidal function of the time $i_0 = i'_0 e^{j\omega t}$, where ω is the pulsation. The induction equation of the vector potential is nondimensionalized with the diameter of the metal cylinder D as the spatial unit and $1/\omega$ as the time unit. The nondimensional induction equation of the vector potential \mathbf{A} in the metal is given by

$$\Omega_D \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A} + \text{Rm} [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})], \quad (1)$$

where $\Omega_D = \mu_0 \sigma \omega D^2$ is the dimensionless frequency, $\text{Rm} = \mu_0 \sigma U_0 D$ is the magnetic Reynolds number, with μ_0 being the vacuum permeability, σ is the electrical conductivity of the metal, and U_0 is the characteristic velocity of the flow.

As the vector potential is sinusoidal versus time, we have

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = j \mathbf{A}.$$

It is assumed that the ECFM crossed by the single phase flow is axially symmetric. The current crossing the primary coil is then strictly orthoradial and the vector

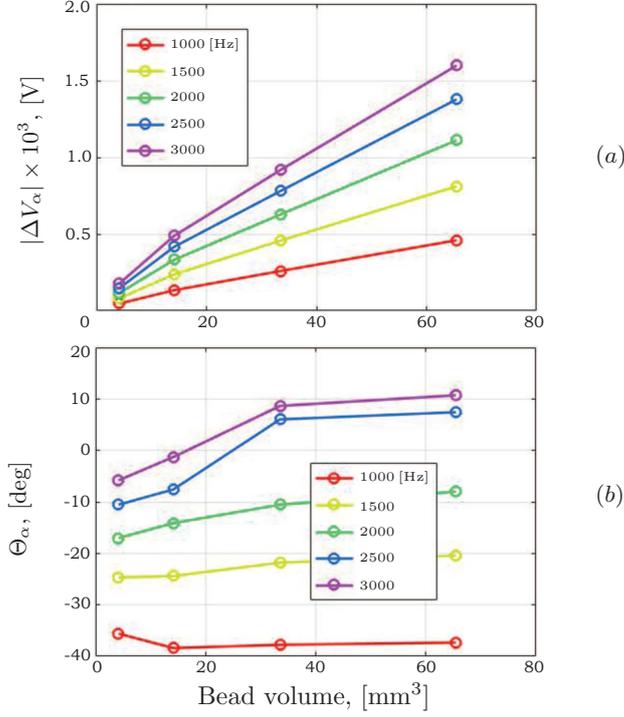


Fig. 8. (a) Module $|\Delta V_\alpha|$. (b) Phase Θ_α . $|\Delta V_\alpha|$ and Θ_α vs. bead volume ($U = 1$ mm/s).

potential has a single nonzero component in the θ cylindrical coordinate noted $A = A(r, z)$. The spatial Fourier transform in the z -coordinate of Eq. (1) expanded in the θ coordinate leads to

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial r} - \frac{\tilde{A}}{r^2} - (2\pi\zeta)^2 \tilde{A} + j2\pi\zeta \text{Rm} \tilde{A} - j\Omega_D \tilde{A} = 0, \quad (2)$$

where $\tilde{A} = \tilde{A}(r, \zeta)$ is the Fourier transform of $A(r, z)$ along the z -coordinate and ζ is the spatial frequency. Eq. (2) is a modified Bessel equation of the first order regarding the r -variable. The exact solution of \tilde{A} is obtained for each ζ :

$$\tilde{A}(r, \zeta) = C_1(\zeta) I_1(r, \zeta) + C_2(\zeta) K_1(r, \zeta), \quad (3)$$

where $C_1(\zeta)$ and $C_2(\zeta)$ are the coefficients determined by the boundary conditions, and $I_1(r, \zeta)$ and $K_1(r, \zeta)$ are the modified Bessel functions of the first and second kind, respectively. The vector potential $A(r, z)$ is then obtained using the inverse Fourier transform. The current density in the metal is deduced by Ohm's law and the voltage induced in the secondary coils is known by Faraday's law.

The term $j2\pi\zeta \text{Rm} \tilde{A}$ in Eq. (2) corresponds to the Lorentz induction due to the motion of the metal. The term $-j\Omega_D \tilde{A}$ in Eq. (2) corresponds to the Faraday induction due to the time variations of the field. One can see that both Faraday and Lorentz induction terms have only an imaginary part. Therefore, the vector potential \mathbf{A} in the metal is phase-shifted relative to the current i_0 , which explains the phase shifts in Fig. 5. As $\text{Rm} \ll 1$, the Lorentz induction plays barely on the phase shift. This explains why Θ_U is not dependent on the velocity in Fig. 4 and Fig. 5. Moreover, the lower the frequency, the lower the Faraday induction and the lower the phase shift (with regard to the reference signal). With the reference

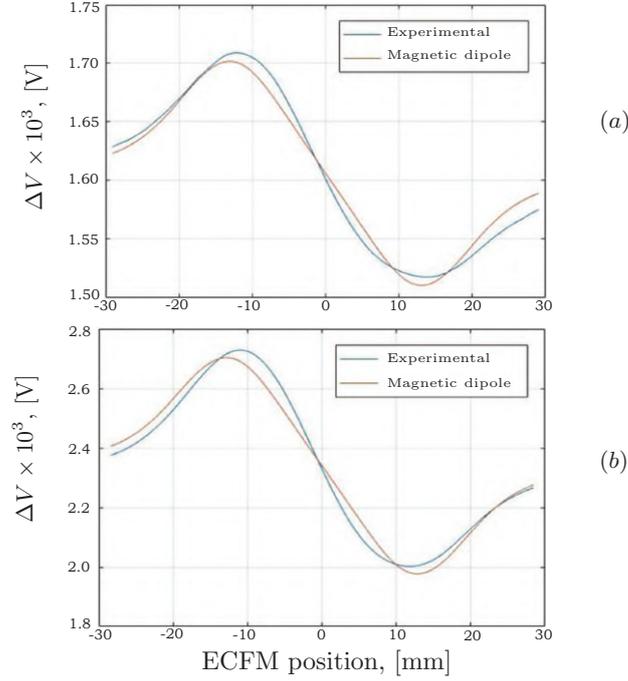


Fig. 9. (a) $f = 1000$ Hz. (b) $f = 2000$ Hz. Bead perturbations observed in the measured signal (bead diameter 5 mm, ECFM velocity 1 mm/s, frequency 1000 Hz and 2000 Hz, bead center-wall distance 3 mm).

signal (current in the primary coil) being a cosine, the phase shift Θ_U shall equal to 0 as the frequency tends to zero, which seems to be the case in experimental results (up to the limit of the frequency range).

3.2. Theoretical model of the bead perturbation. To account for the effect of the bead, we propose to mimic its presence by a magnetic dipole oriented along the z -axis with a magnetic moment m . The moment is an empirical function of the bead diameter D , the distance h between the bead and the wall and the frequency f , on the one hand, and of the spatial distribution of the current density $j(z)$ in the metal (known from the analytical solution), on the other hand. For the fixed D , h and f , the dependence of the moment m with $j(z)$ observed in the experiments can be approximated by a square root function

$$m(z) = C(D, h, f) \sqrt{\frac{j(z)}{j(z=0)}}. \quad (4)$$

Fig. 9 shows the perturbation observed in the measured signal and the perturbation due to a magnetic dipole for a bead of 5 mm in diameter with its center at 3 mm to the wall, at a velocity of 1 mm/s, at a frequency of 1000 Hz (left) and 2000 Hz (right).

4. Conclusions. In this paper, the ability of the eddy-current flowmeter to detect an inclusion in the form of an insulating bead inside a liquid metal has been attested by the experiment. A parametric study has been performed varying the size of the inclusion, the excitation frequency of the the eddy-current flowmeter and the relative motion of the liquid metal to the eddy-current flowmeter. The signal response to the motion versus the velocity follows a linear trend, which

is in agreement with the literature and with the analytical solution. The signal response to the passing of a bead appears to be invariant versus velocity but highly dependent on the frequency and inclusion size. A theoretical solution for the vector potential in a moving liquid metal (plug flow) subject to an AC magnetic field has been developed. The effect of a non-conducting particle is modeled by a magnetic dipole advected by the flow. The intensity of the dipole varies with the square root of the local current density at the position of the particle. This simple model can be interesting to simulate the effect of several bubbles in a more complex flow. It remains to correlate the magnetic moment with the geometrical parameters.

Acknowledgements. The project is funded by the French Atomic Energy Commission (CEA). The authors greatly acknowledge the help of Gregory Ehses and Hervé Ayroles for the development of the experimental setup.

References

- [1] R.C. BAKER. Electromagnetic flowmeters for fast reactors. *Progress in Nuclear Energy*, vol. 1 (1977), pp. 41–61.
- [2] S. SURESHKUMAR, M. SABIH, S. NARMADHA *et al.* Utilization of eddy current flow meter for sodium flow measurement in FBRs. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 265 (2013), pp. 1223–1231.
- [3] T. GUNDRUM, P. BÜTTNER, A. PEYTON, B. DEKDOUK, T. WONDRAK, AND S. ECKERT. Contactless inductive bubble detection in a liquid metal column. In: *Proc. the 8th Conference on Electromagnetic Processing of Materials (EPM2015)* (October 2015, Cannes, France).
- [4] M. KUMAR, W. BERGEZ, PH. TORDJEMAN, M. CAVARO. Void effects on eddy current distortion in two-phase liquid metal. *Review of Scientific Instruments*, American Institute of Physics, vol. 86 (2015), no. 10, pp. 06104.
- [5] M. KUMAR, W. BERGEZ, PH. TORDJEMAN, R. ARINERO, AND K. PAUMEL. Magnetic flux distortion in two-phase liquid metal flow: model experiment. *Journal of Applied Physics*, vol. 119 (2016), no. 118.
- [6] C.V. DODD, AND W.E. DEEDS. Analytical solutions to eddy-current probe coil problems. *Journal of Applied Physics*, vol. 39 (1968), no. 6.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Kumar. *Magnetic flux distorsion in two-phase liquid metal flow*. PhD thesis, 2016. Thèse de doctorat dirigée par Tordjeman, Philippe et Bergez, Wladimir Dynamique des fluides Toulouse, INPT 2016.
- [2] H. Lehde and W. Lang. Device for measuring rate of fluid flow, 1948. US Patent 2,435,043.
- [3] J. A. Shercliff. *The Theory of Electromagnetic Flow-Measurement*. Cambridge University Press, 1962.
- [4] C. C. Feng, W. E. Deeds, and C. V. Dodd. Analysis of eddy-current flowmeters. *Journal of Applied Physics*, 46(7) :2935–2940, 1975.
- [5] H. L. Libby and J. D. Jensen. Feasibility study of probe-type liquid metal flowmeters for FTR subassemblies. Technical report, Battelle-Northwest, Richland, Wash. Pacific Northwest Lab., 1969.
- [6] T. J. Costello, R. L. Laubham, W. R. Miller, and C. R. Smith. FFTF probe-type eddy-current flowmeter : Wet versus dry performance evaluation in sodium. *Nuclear Technology*, 19(3) :174–180, 1973.
- [7] C. V. Dodd and W. E. Deeds. Analytical solutions to eddy-current probe-coil problems. *Journal of Applied Physics*, 39(6) :2829–2838, 1968.
- [8] M. Hirayama. Theoretical model of an eddy-current flowsensor. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 24(5) :2021–2030, 1977.
- [9] D. E. Wiegand. Summary of an analysis of the eddy-current flowmeter. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 15(1) :28–36, 1968.
- [10] A. H. Kahn and L. C. Phillips. Development in the theory and analysis of eddy current sensing of velocity in liquid metals. *Research in Nondestructive Evaluation*, 4(4) :237–248, 1992.
- [11] P. V. Evans. *Fast Breeder Reactors : Proceedings of the London Conference on Fast Breeder Reactors Organized by the British Nuclear Energy Society 17Th–19Th May 1966*. 1966.
- [12] R. C. Baker. Electromagnetic flowmeters for fast reactors. *Progress in Nuclear Energy*, 1(1) :41–61, 1977.
- [13] S. Sureshkumar, M. Sabih, S. Narmadha, N. Ravichandran, R. Dhanasekharan, C. Meikandamurthy, G. Padmakumar, R. Vijayashree, V. Prakash, and K.K. Rajan. Utilization of eddy current flow meter for sodium flow measurement in FBRs. *Nuclear Engineering and Design*, 265 :1223–1231, 2013.

- [14] J. Brewer, R. A. Jaross, and R. L. Brown. Eddy-current probe-type sodium flowsensor for FFTF reactor fuel channel flow monitoring. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 18(1) :372–377, 1971.
- [15] D. E. Wiegand and C. W. Michels. Performance tests on an eddy-current flowmeter. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 16(1) :192–195, 1969.
- [16] M. Kumar, W. Bergez, P. Tordjeman, R. Arinero, and K. Paumel. Magnetic flux distortion in two-phase liquid metal flow : Model experiment. *Journal of Applied Physics*, 119 :185105, 2016.
- [17] P. Sharma, S. Sureshkumar, B. K. Nashine, R. Veerasamy, B. Krishnakumar, P. Kalyanasundaram, and G. Vaidyanathan. Development, computer simulation and performance testing in sodium of an eddy current flowmeter. *Annals of Nuclear Energy*, 37(3) :332–338, 2010.
- [18] D. E. Wiegand. The eddy-current flowmeter : An analysis giving performance characteristics and preferred operating conditions. Technical Report ANL-7554, Argonne National Lab., Ill., 1969.
- [19] A. Dohi, M. Oda, and S. Iida. Development of an in-core flow meter for the LMFBR. Technical Report. CONF-760503–P2, Proceedings of the international conference on liquid technology in energy production, 1976.
- [20] R. Veerasamy, S. Sureshkumar, C. Asokane, N. S. Sivakumar, G. Padmakumar, S. Dash, B. Sreedhar, S. Chandramouli, K. Gurumoorthi, and G. Vaidyanathan. Eddy current flow sensor development and testing for LMFBR sodium pumps. Technical report, The Proceedings of the International Conference on Nuclear Engineering, 2007.
- [21] G. F. Popper, D. E. Wiegand, and M. C. Glass. Summary review of flowmeters suitable for measuring sodium flow at temperatures up to 1200°F in the Fast Flux Test Facility (FFTF). Technical Report ANL-7340, Argonne National Lab., Ill., 1967.
- [22] J. Priede, D. Buchenau, and G. Gerbeth. Contactless electromagnetic phase-shift flowmeter for liquid metals. *Measurement Science and Technology*, 22 :055402, 2011.
- [23] D. Buchenau, S. Eckert, G. Gerbeth, R. Stieglitz, and M. Dierckx. Measurement technique developments for LBE flows. *Journal of Nuclear Materials*, 415(3) :396–403, 2011. Proceedings of the International DEMETRA Workshop on Development and Assessment of Structural Materials and Heavy Liquid Metal Technologies for Transmutation Systems.
- [24] C. H. Scheibelhut. Instrumentation and control activities at Argonne. Annual report for period ending June 30, 1971. Technical Report ANL-7905, Argonne National Lab., Ill., 1971.
- [25] R. Krafft, J. Hemp, and M.L. Sanderson. Investigation into the use of the electromagnetic flowmeter for two-phase flow measurements. Technical report., IEE Colloquium on Advances in Sensors for Fluid Flow Measurement, 1996.
- [26] K. Nakamoto, S. Tamura, K. Ishii, H. Kuwahara, N. Ohyama, and T. Muramatsu. Application of an eddy-current type flowmeter to void detection at the LMFBR core exit. *Nuclear Engineering and Design*, 82(2) :393–404, 1984.
- [27] R. Ramakrishna. Detection of void in sodium cooled fast reactors using eddy current based technique. In *Proceedings of the twenty-fifth national seminar and international exhibition on non destructive evaluation-NDE for make in India : abstracts*, 2015.

- [28] N. Terzija, W. Yin, G. Gerbeth, F. Stefani, K. Timmel, T. Wondrak, and A. Peyton. Electromagnetic inspection of a two-phase flow of GaInSn and argon. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(1) :10–16, 2011.
- [29] L. E. Franks. *Signal Theory (Information theory series)*. Hardcover, 1969.
- [30] X. Ma, S. Higson, A. Lyons, and A. J. Peyton. Development of a fast electromagnetic induction tomography system for metal process applications. *Proc. 4th World Congress on Industrial Process Tomography (WCIPT4)*, Aizu, Japan, pages 196–201, 2005.
- [31] M. Ratajczak, D. Hernández, T. Richter, D. Otte, D. Buchenau, N. Krauter, and T. Wondrak. Measurement techniques for liquid metals. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 228 :12–23, 2017.
- [32] Z. Lyu, N. Tran, T. Boeck, and C. Karcher. Electromagnetic interaction between a rising spherical particle in a conducting liquid and a localized magnetic field. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 228(1) :012025, 2017.
- [33] N. Terzija, W. Yin, G. Gerbeth, F. Stefani, K. Timmel, T. Wondrak, and A. Peyton. Electromagnetic inspection of a two-phase flow of GaInSn and argon. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(1), 2011.
- [34] P. C. Sabatier. *Scattering : scattering and inverse scattering in pure and applied science*, volume 1. Academic Pr, 2002.
- [35] W. Lord and R. Palanisamy. Development of theoretical models for nondestructive testing eddy-current phenomena. In *Eddy-Current Characterization of Materials and Structures*. ASTM International, 1981.
- [36] J. García-Martín, J. Gómez-Gil, and E. Vázquez-Sánchez. Non-destructive techniques based on eddy current testing. *Sensors*, 11(3) :2525–2565, 2011.
- [37] E. E. Kriezis, T. D. Tsiboukis, S. M. Panas, and J. A. Tegopoulos. Eddy currents : theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(10) :1559–1589, Oct 1992.
- [38] T. Morisue and M. Fukumi. 3-D eddy current calculations using the magnetic vector potential. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 24 :106–109, 1988.
- [39] B. A. Auld, F. Muennemann, and D. K. Winslow. Eddy current probe response to open and closed surface flaws. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 2(1) :1–21, 1981.
- [40] M. L. Burrows. *A Theory of Eddy-current Flaw Detection*. University of Michigan, 1964.
- [41] C. V. Dodd, J. W. Luquire, W. E. Deeds, and W. G. Spoeri. Some eddy-current problems and their integral solutions.
- [42] A. J. M. Zaman, S. A Long, C. G. Gardner, and W. F. Richards. The change in impedance of a single-turn coil due to a flaw in a coaxial conducting cylinder. In *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, pages 1219–1236. Springer, 1983.
- [43] A. M. Lewis, D. H. Michael, M. C. Lugg, and R. Collins. Thin-skin electromagnetic fields around surface-breaking cracks in metals. *Journal of Applied Physics*, 64(8) :3777–3784, 1988.
- [44] A. H. Kahn, R. Spal, and A. Feldman. Eddy-current losses due to a surface crack in conducting material. *Journal of Applied Physics*, 48(11) :4454–4459, 1977.

- [45] C. T. Tai. *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*. IEEE Press, 1994.
- [46] J. R. Bowler, S. A. Jenkins, L. D. Sabbagh, and H. A. Sabbagh. Eddy-current probe impedance due to a volumetric flaw. *Journal of Applied Physics*, 70(3) :1107–1114, 1991.
- [47] V. Monebhurrun, D. Lesselier, and B. Duchêne. Evaluation of a 3-D bounded defect in the wall of a metal tube at eddy current frequencies : The direct problem. *Journal of electromagnetic waves and applications*, 12(3) :315–347, 1998.
- [48] Y. Yoshida and J. R. Bowler. Vector potential integral formulation for eddy-current probe response to cracks. *IEEE transactions on magnetics*, 36(2) :461–469, 2000.
- [49] S. J. Norton and J. R. Bowler. Theory of eddy current inversion. *Journal of Applied Physics*, 73(2) :501–512, 1993.
- [50] T. P. Theodoulidis, C. S. Antonopoulos, and E. E. Kriezis. Analytical solution for the eddy current problem inside a conducting cylinder using the second order magnetic vector potential. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 14(4) :45–48, 1995.
- [51] R. Turton and O. Levenspiel. A short note on the drag correlation for spheres. *Powder Technology*, 47(1) :83–86, 1986.
- [52] J. Delacroix and L. Davoust. Drag upon a sphere suspended in a low magnetic-reynolds number MHD channel flow. *Phys. Rev. Fluids*, 3 :123701, Dec 2018.
- [53] F. M. White. *Fluid Mechanics, Seventh Edition*. McGraw-Hill Higher Education, 2011.
- [54] I. Paraschivoiu, M. Prud'homme, L. Robillard, and P. Vasseur. *Mécanique des fluides*. Presses internationales polytechniques, 2004.
- [55] P. Peronneau. Vélocimétrie doppler ultrasonore applications à l'expérimentation et au diagnostic. *La Houille Blanche*, (3-4) :157–164, 1978.
- [56] D. Brito, P. Cardin, H.-C. Nataf, and G. Marolleau. Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 91(1-3) :77–98, 1995.
- [57] Y. Takeda. Instantaneous velocity profile measurement by ultrasonic doppler method. *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, 38(1) :8–16, 1995.
- [58] D. Brito, H.-C. Nataf, P. Cardin, J. Aubert, and J.-P. Masson. Ultrasonic doppler velocimetry in liquid gallium. *Experiments in fluids*, 31(6) :653–663, 2001.
- [59] H. Reichardt. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 31 :208–219, 1951.
- [60] BIPM. JCGM 200 : 2008 Vocabulaire international de métrologie - Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM). *Int. Organization for Standardization Geneva ISBN*, 3(104) :90006–5, 2008.
- [61] E. B. Rosa. The self-inductance of a coil of any length wound with any number of layers of wire. *Bulletin of the NBS*, 4(3), 1907.

- [62] L. Lorenz. Ueber die fortpflanzung der electricität. *Annalen der Physik*, 243(6) :161–193, 1879.
- [63] E. Durand. *Magnétostatique*. masson, 1968.
- [64] M. V. Zagarola and A. J. Smits. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 373 :33–79, 1998.
- [65] V. Sobolev. Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. 2011.
- [66] H.C. Hamaker. The London—van der Waals attraction between spherical particles. *Physica*, 4(10) :1058–1072, 1937.
- [67] M. Abramovitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1964.
- [68] H. P. W. Gottlieb. On the general solution of the vector helmholtz equation in cylindrical polar coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(5) :1628–1629, 1987.
- [69] K. Atkinson and L. F. Shampine. Solving fredholm integral equations of the second kind in. *Matlab, ACM Trans. Math. Software*, 2008.
- [70] H. L. Libby. *Introduction to electromagnetic nondestructive test methods*. Krieger, 1971.
- [71] C. C. Biddle. Theory of eddy currents for nondestructive testing. 1976.
- [72] R. Bowers. Magnetic susceptibility of sodium metal. *Phys. Rev.*, 100 :1141–1144, 1955.
- [73] W. H. Hayt and J. A. Buck. *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill Higher Education, 2011.
- [74] I. Vágó. On the interface and boundary conditions of electromagnetic fields. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering (Archives)*, 38(2) :79–94.
- [75] R. Moreau. *Magnetohydrodynamics*. Springer Science + Business Media, B.V., 1990.