



**HAL**  
open science

# Unicité du problème de Cauchy. Ensembles nodaux. Régularité des problèmes elliptiques

Luc Robbiano

► **To cite this version:**

Luc Robbiano. Unicité du problème de Cauchy. Ensembles nodaux. Régularité des problèmes elliptiques. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1990. Français. NNT : . tel-04166847

**HAL Id: tel-04166847**

**<https://theses.hal.science/tel-04166847>**

Submitted on 20 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ de PARIS-SUD**

**Centre d'ORSAY**

**THÈSE**

Présentée

Pour obtenir

le Titre de Docteur d'Etat

Spécialité : **Mathématiques**

par

**Luc ROBBIANO**

**SUJET : Unicité du problème de Cauchy. Ensemble nodaux. Régularité des problèmes elliptiques.**

soutenue le **11 Décembre 1990** devant la Commission d'examen

**MM. J.-M. BONY, Président  
S. ALINHAC  
G. LEBEAU  
N. LERNER  
X. SAINT RAYMOND  
J.-C. SAUT  
C. ZUILY**



# Abstract

This thesis is in on three parts.

## 1. Uniqueness in Cauchy's problem

For this problem, the pseudo-convexity is a crucial hypothesis. We study the construct to counterexample when this hypothesis is not verified, or uniqueness with assumption of weak pseudo-convexity.

## 2. Nodal set

We study the Hausdorff dimension and the capacity of nodal set to solutions of elliptic equations. We generalize results known for the laplacian.

## 3. Regularity to elliptic problem

We give results of regularity, in a almost general frame, to solutions of nonlinear elliptic problems with Sobolev critical exponents.

**AMS Subjets classification (1985).** 35 A 07, 35 L 80, 35 R 25, 35 J 20, 35 J 60, 35 B 65.



## Remerciements

*Comment remercier un directeur de thèse ? Par l'impulsion donnée, il influence les travaux futurs de son élève. S. Alinhac a su me donner un sujet convenant à mon goût. Je lui en suis très reconnaissant.*

*Je remercie également les autres membres du jury, G. Lebeau, J.-C. Saut, J.-M. Bony qui a accepté d'être le président, N. Lerner qui a eu la gentillesse de travailler avec moi, X. Saint-Raymond et C. Zuily pour les multiples discussions que nous avons eues.*

*Mes remerciements vont aussi à H. Bahouri, J. Salazar et A. Benmohamed qui, par leur travail, ont contribué à cette thèse.*

*Enfin, je remercie Mesdames Bardot et Bérat qui ont tapé ces articles.*



# Table des Matières

## I. Unicité du problème de Cauchy

1. *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, avec N. Lerner, publié au Journal d'Analyse Mathématique, 44 (1984/85), 32-66.

2. *Sur les conditions de pseudo-convexité et l'unicité du problème de Cauchy*, publié à Indiana University Mathematics Journal 36 (1987), 333-347.

3. *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement hyperboliques*, avec H. Bahouri, publié à Hokkaido Mathematical Journal, 16 (1987), 257-275.

4. *Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques*, à paraître au Communications in Partial Differential Equations.

## II. Ensembles nodaux

1. *Sur les zéros de solutions d'inégalités différentielles elliptiques*, publié au Communication in Partial Differential Equations, 12 (1987), 903-919.

2. *Dimension des zéros d'une solution faible d'un opérateur elliptique*, publié au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 67 (1988), 339-357.

3. *Dimension de Hausdorff et capacité des points singuliers d'une solution d'un opérateur elliptique*, avec J. Salazar, publié au Bulletin des Sciences Mathématiques, 114 (1990), 329-336.

## III. Régularité des problèmes elliptiques

*Exposant critique de Sobolev et régularité des solutions d'équations elliptiques*, avec A. Benmohamed, à paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 7 (1990).





**Unicité du problème de Cauchy.**  
**Ensembles nodaux.**  
**Régularité des problèmes elliptiques.**

**Résumé**

Cette thèse se compose de trois parties. La première traite de l'unicité du problème de Cauchy. La deuxième concerne l'étude des ensembles nodaux des solutions d'équations elliptiques. La troisième est une étude de la régularité des solutions d'équations (et de systèmes) elliptiques avec exposants critiques de Sobolev.

**1. Unicité de Cauchy**

Décrivons tout d'abord le cadre où se situe l'unicité du problème de Cauchy.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $P(x, D_x)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients  $C^\infty$ , on note  $p(x, \xi)$  le symbole principal de  $P$ . Soit  $x_0 \in \Omega$  et une surface  $C^\infty$ ,  $S$  passant par  $x_0$  et définie par  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$  ( $d\varphi(x_0) \neq 0$ ). Le problème s'énonce alors :

$$\text{soit } u \in C^\infty \text{ vérifiant } Pu = 0 \text{ sur } \Omega$$
$$u(x) = 0 \text{ pour } x \in S_- = \{x \in \Omega / \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$$

existe-t-il un voisinage  $\omega$  de  $x_0$  tel que  $u = 0$  sur  $\omega$  ?

Une propriété plus faible appelée unicité compacte est aussi étudiée et s'énonce :

$$\text{soit } u \in C^\infty \text{ vérifiant } Pu = 0 \text{ sur } \Omega$$
$$S_- \subset \mathring{\text{supp}} u \text{ et } S \cap \text{supp } u = \{x_0\}$$

existe-t-il un voisinage  $\omega$  de  $x_0$  tel que  $u = 0$  sur  $\omega$  ?

Les résultats les plus importants pour l'unicité sont ceux de CALDERÓN [8] et ceux de HÖRMANDER [12]. (Voir ZUILY [27] pour trouver la plupart des résultats sur l'unicité.)

Décrivons succinctement le résultat de Hörmander qui généralise celui de Calderón. Notons  $\zeta = \xi + i\gamma d\varphi(x)$ ,  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ , et  $p_\gamma(x, \xi) = (x, \xi + i\gamma d\varphi(x))$ . On dit que  $S$  est strictement pseudo-convexe pour  $P$  si pour tout  $(x, \zeta)$  vérifiant

$$p(x, \zeta) = \{p, \varphi\}(x, \zeta) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \text{si } \gamma = 0 & \quad \Re \{ \bar{p} \{ p, \varphi \} \} (x, \xi) < 0 \\ \text{si } \gamma \neq 0 & \quad \frac{1}{2i\gamma} \{ \bar{p}_\gamma, p_\gamma \} (x, \zeta) < 0 . \end{aligned}$$

En fait cette hypothèse n'est pertinente que si l'on suppose que  $P$  est principalement normal, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{il existe } C > 0, \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |\{p, \bar{p}\}(x, \xi)| \leq C |p| |\xi|^{m-1} \end{aligned}$$

où  $\bar{p}(x, \xi) = \overline{p(x, \xi)}$ .

Dans ce cas quand  $\gamma$  tend vers 0,  $\frac{1}{2i\gamma} \{ \bar{p}_\gamma, p_\gamma \}$  converge vers  $\Re \{ \bar{p}, \{ p, \varphi \} \}$ .

Sous ces deux conditions HÖRMANDER [12] (voir également HÖRMANDER [14], LERNER [15]) a démontré que  $P$  vérifie la propriété du problème de Cauchy par rapport à  $S$ .

Un certain nombre de contre-exemples à l'unicité sont connus, voir par exemple PLIŠ [17], [18], [19], DE GIORGI [10], COHEN [9], HÖRMANDER [12], [13], ALINHAC-BAOUENDI [2], ALINHAC-ZUJLY [3]. ALINHAC [1] a donné les premiers contre-exemples montrant que les hypothèses géométriques de Hörmander sont pratiquement nécessaires. Sans entrer dans les détails, ALINHAC [1] a démontré que l'hypothèse de principale normalité est essentiellement nécessaire. (Voir également [20] et SAINT RAYMOND [23].)

Pour les caractéristiques doubles, il faut distinguer plusieurs cas selon que  $p$  est à coefficients réels ou à coefficients complexes (par exemple  $dp \wedge d\bar{p} \neq 0$ ) et les cas des caractéristiques réelles et complexes (au sens  $\gamma \neq 0$ ). Dans le cas  $p$  réel et avec une caractéristique double réelle ALINHAC [1] a prouvé que la pseudo-convexité est essentiellement nécessaire (voir également SAINT RAYMOND [21] et BAHOURI [4]). Pour  $p$  complexe et une caractéristique double réelle SAINT RAYMOND [22], sous une hypothèse beaucoup plus forte que la négation de la pseudo-convexité, a construit des contre-exemples à l'unicité. Dans I-2 on a prouvé que l'hypothèse de pseudo-convexité est pratiquement nécessaire pour que des problèmes perturbés possèdent l'unicité (on perturbe  $P$  et la surface  $S$ ). En fait ce cas n'est pas encore bien compris. Pour les caractéristiques complexes doubles ALINHAC [1] a construit des contre-exemples à l'unicité. Dans I-2, on a prouvé que si  $p$  est à coefficients analytiques alors on peut se ramener au cas du théorème de Alinhac. Ce qui rend pratiquement nécessaire l'hypothèse de pseudo-convexité dans ce cas.

Il existe néanmoins un certain nombre de cas qui ne sont pas traités par les théorèmes ci-dessus. Dans I-1, on a démontré que pour un opérateur d'ordre 2 à coefficients réels alors

$$p(x, \xi) = \{p, \varphi\}(x, \xi) = 0 \Rightarrow \{p\{p, \varphi\}\}(x, \xi) \leq 0$$

entraîne l'unicité compacte. Sous une hypothèse aussi faible l'unicité n'est pas toujours vraie comme l'a démontré BAHOURI [4].

Dans I-3, on a étudié des opérateurs hyperboliques faibles non effectivement hyperboliques. Dans ce cas les caractéristiques sont doubles mais la situation géométrique est supposée simple (les caractéristiques forment une variété sur laquelle la forme symplectique est de rang constant).

On trouve dans le cas involutif des opérateurs possédant l'unicité mais pour lesquels le problème de Cauchy est mal posé. Dans le cas non involutif la situation est moins claire et on ne démontre que de l'unicité compacte.

L'article I-4 a un rôle à part dans ce contexte. Typiquement on regarde l'unicité pour  $\square + V(x)$ , où  $V$  est  $C^\infty$ , par rapport à une surface  $\varphi(x) = 0$  ( $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ ).  $V$  ne dépend pas du temps et cela permet de se passer d'hypothèse de pseudo-convexité sur  $\varphi$ . Ce résultat s'applique à la théorie du contrôle par l'intermédiaire de la méthode que LIONS [16] a appelé "Hilbert Uniqueness Method".

## 2. Ensembles nodaux

Soit  $M$  une variété riemannienne compacte et  $\Delta$  le laplacien sur  $M$ , si  $u$  est une fonction propre de  $\Delta$  l'ensemble  $\{u = 0\}$  est un ensemble nodal de  $M$ . En fait l'étude réalisée se place dans un cadre un peu plus général. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  un opérateur elliptique (à coefficients Lipschitziens) et soit  $u$  une fonction non nulle (supposée  $C^{1+\delta}$  dans II-1 et  $H^1$  dans II-2 et II-3) vérifiant  $|Au| \leq C(|u| + |\nabla u|)$ .

Dans II-1 et II-2, on démontre que la dimension de Hausdorff de  $\{u = 0\}$  est  $n - 1$  et celle de  $\{u = 0, \nabla u = 0\}$  est  $n - 2$ . L'article II-3 précise que dans ce cas  $\{u = 0\}$  est réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff  $(n - 1)$ -dimensionnelle finie, avec un résultat analogue pour  $\{u = 0, \nabla u = 0\}$ . L'article II-3 est principalement consacré à l'étude de l'ensemble  $\{\nabla u = 0\}$  où  $u$  vérifie

$$|Au| \leq C |\nabla u| .$$

On démontre que  $\{\nabla u = 0\}$  est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff  $(n - 2)$ -dimensionnelle finie. On en déduit que  $\{\nabla u = 0\}$  est de capacité nulle. Cette propriété a permis à SALAZAR [24] d'étendre ses résultats obtenus pour le laplacien. La technique de démonstration repose sur les idées de CAFFARELLI et FRIEDMAN [6] et [7]. (Voir HARDT et SIMON [11] pour des améliorations.)

## 3. Régularité des problèmes elliptiques

Le problème de régularité de solutions de problèmes elliptiques avec exposants critiques de Sobolev intervient naturellement dans des problèmes provenant de la géométrie (voir BREZIS et CORON [5], TRUDINGER [25], WENTE [26]). L'étude de ce type de problèmes nous a amené à considérer la régularité des solutions d'opérateur linéaire d'ordre 2 à coefficients dans des  $L^p$  avec  $p = n$  pour les termes d'ordre 1

et  $p = \frac{n}{2}$  pour les termes d'ordre 0. Les espaces  $L^p$  sont bien adaptés à l'étude des termes non linéaires.

## Bibliographie

- [1] S. ALINHAC : *Non unicité du problème de Cauchy*, Annals of Mathematics, 117 (1983), 77-108.
- [2] S. ALINHAC, S. BAOUENDI : *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Sem. Goulaouic-Schwartz, 1978/79, exposé XXII, (Ecole Polytechnique, Paris).
- [3] S. ALINHAC-C. ZUILY : *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles*, Comm. in P.D.E., 6 (1981), 799-828.
- [4] H. BAHOURI : *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Comm. in P.D.E., 8 (1983), 1521-1547.
- [5] H. BREZIS, J-M. CORON : *Multiple solution of  $H$ -systems and Rellich's conjecture*, C.P.A.M., 37 (1984), 149-187.
- [6] L. CAFFARELLI, A. FRIEDMAN : *The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model*, J. Differential Equations, 32 (1979), 335-356.
- [7] L. CAFFARELLI, A. FRIEDMAN : *Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations*, J. Differential equations, 60 (1985), 420-433.
- [8] A.P. CALDERÓN : *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations*, Amer. J. of Math., 80 (1958), 16-36.
- [9] P. COHEN : *The non uniqueness of the Cauchy problem*, O.N.R. Techn. Report, 93, Stanford 1960.
- [10] E. DE GIORGI : *Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico*, Rendic. di Mat. e della sua Appl., 5ème ser, 14 (1955), 382-387.
- [11] R. HARDT, L. SIMON : *Nodal sets for solutions of elliptic equations*, J. Differential geometry, 30 (1989), 505-522.
- [12] L. HÖRMANDER : *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin 1963.
- [13] L. HÖRMANDER : *Non uniqueness for the Cauchy problem*, Lecture Notes in Math., 459 (1975), 36-72.
- [14] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin 1985.
- [15] N. LERNER : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux*, J. des Math. Pures et Appl., 64 (1985), 1-11.
- [16] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Masson, Paris.
- [17] A. PLIŠ : *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations*, Bull. Acad. Pol. Sci., 2 (1954), 55-57.

- [18] A. PLIŠ : *A smooth linear elliptic differential equation without any solutions in a sphere*, Comm. on Pure and Appl. Math., 14 (1961), 599-617.
- [19] A. PLIŠ : *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation*, Bull. Acad. Pol. Sci., 11 (1963), 95-100.
- [20] L. ROBBIANO : *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, J. of Diff. Equ., 57 (1985), 200-223.
- [21] X. SAINT RAYMOND : *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques*, Comm. Partial Differential Equation, 7 (1982), 559-579.
- [22] X. SAINT RAYMOND : *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 847-858.
- [23] X. SAINT RAYMOND : *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, Enseign. Math., 32 (1986), 1-55.
- [24] J. SALAZAR : Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, 1988.
- [25] N. TRUDINGER : *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, 22 (1968), 265-274.
- [26] H. WENTE : *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl., 26 (1969), 318-344.
- [27] C. ZUILY : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Math 33, Birkhäuser, Boston 1983.



**I**

**UNICITE DU PROBLEME  
DE CAUCHY**





UNICITE DE CAUCHY POUR DES  
OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par

Nicolas LERNER et Luc ROBBIANO



# UNICITE DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

*Par*

NICOLAS LERNER ET LUC ROBBIANO

## Introduction

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'unicité de Cauchy et une condition nécessaire et suffisante d'unicité de Cauchy "compacte" (cf. (0.2)) pour des opérateurs différentiels de type principal à coefficients  $C^\infty$  réels.

Etant donné un opérateur  $P$  et une hypersurface orientée  $S$ ,  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  si les conditions

$$(0.1) \quad \begin{aligned} Pu = 0, \quad \text{supp } u \subset S_+ \\ \text{impliquent } u = 0. \end{aligned}$$

Nous dirons que  $P$  possède l'unicité de Cauchy compacte par rapport à  $S$  si les conditions

$$(0.2) \quad \begin{aligned} Pu = 0, \quad \text{supp } u \subset S_+, \quad \text{supp } u \cap S \text{ compact} \\ \text{impliquent } u = 0 \end{aligned}$$

(cf. le paragraphe 1 pour des définitions précises).

Rappelons brièvement, dans le cadre présent, le résultat de Hörmander ([9] th. 8.9.1) sous l'hypothèse de pseudo-convexité ([9] déf. 8.6.1) (on pourra consulter également Zuily [15]); si les bicaractéristiques (nulles de  $p$ ) tangentes à  $S$  en  $x_0$  sont "strictement convexes tournées vers  $S_-$ ", alors  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$ . Par ailleurs, Alinhac [1] a prouvé que, si en un point  $x_0$  de  $S$ , il existe une bicaractéristique tangente "strictement convexe tournée vers  $S_+$ ", alors on peut trouver  $a \in C^\infty$  telle que  $P + a$  ne possède pas l'unicité de Cauchy.

La condition nécessaire et suffisante utilisée ici pour le problème (0.2) examine la position des bicaractéristiques tangentes à une famille d'hypersurfaces sur tout un ouvert et demande qu'elles soient "tournées vers  $S_-$  au sens large". On dégage ensuite des conditions suffisantes pour le problème (0.1) dans des cas où il n'y a pas "trop" de bicaractéristiques tangentes à un ordre strictement supérieur à deux (cf. également Bahouri [4]).

La méthode employée repose sur un calcul symbolique avec grand paramètre qui

permet d'établir une inégalité de Carleman [6]. Ce point de vue est proche de celui de Treves [13] puis de Menikoff [10] qui utilisent des opérateurs pseudo-différentiels du type  $p(x, D_x - i|D_x|, \varphi'(x))$  ( $p(x, D_x)$  est l'opérateur  $P$ ,  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$  une équation de l'hypersurface); néanmoins, nous avons préféré à la manipulation délicate de tels opérateurs (dont le symbole n'est pas  $C^\infty$  à cause de  $|D_x|$ ) la construction d'un calcul symbolique paramétré.

Nous tenons enfin à remercier Serge Alinhac qui nous a suggéré le corollaire du théorème.

Le plan de l'article est le suivant:

1. Les Resultats Principaux
  - 1.1. Le cadre du problème
  - 1.2. Enoncé des résultats
2. Commentaires
  - 2.1. Invariance des hypothèses
  - 2.2. Position des bicaractéristiques tangentes
  - 2.3. Comparaison avec la pseudo-convexité de Hörmander
  - 2.4. Lien avec le théorème de non unicité d'Alinhac
  - 2.5. Exemples
3. Calcul Symbolique Avec Grand Parametre
  - 3.1. Définition des symboles
  - 3.2. Calcul symbolique
  - 3.3. Continuité  $L^2$
  - 3.4. Inégalité de Gårding
4. Preuve
  - 4.1. Estimation sur les symboles
  - 4.2. Estimation pour  $\|P_\gamma u\|_{L^2} + \|(P_\gamma)^* u\|_{L^2}$
  - 4.3. Estimation de Carleman
  - 4.4. Preuve du corollaire.

## 1. Les resultats principaux

### 1.1. Le cadre du problème

1.1.1. Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients  $C^\infty$  pour la partie principale,  $L_{loc}^\infty$  pour les termes d'ordre inférieur, défini sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , de symbole principal  $p(x, \xi)$ , supposé réel, dont le champ hamiltonien sera noté  $H_p$ .

Soit  $\mathcal{H}$  une famille d'hypersurfaces orientées de  $\Omega$ , i.e., la donnée d'une classe de fonctions  $\varphi \in C^\infty$ , réelles sur  $\Omega$ , de gradient ne s'annulant pas, équivalentes pour la relation

$$(1.1) \quad \varphi \sim \bar{\varphi} \quad \text{qui signifie}$$

pour tout  $x$  de  $\Omega$ , il existe  $\lambda(x) > 0$  tel que  $\tilde{\varphi}'(x) = \lambda(x)\varphi'(x)$  (remarquons que  $\lambda$  est alors nécessairement  $C^\infty$  car  $\varphi'$  ne s'annule pas).

On suppose que  $p$  est de type principal sur  $\Omega$ , i.e.,

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le vecteur } \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi) \text{ ne s'annule pas sur } \Omega \times \mathbf{R}^n \setminus 0. \\ \text{Egalement, on fait l'hypothèse que } \mathcal{H} \text{ est non caractéristique} \\ \text{pour } p, \text{ i.e.,} \end{array} \right.$$

$$(1.3) \quad \{\{p, \varphi\}, \varphi\} \text{ ne s'annule pas sur } \Omega, \text{ ce qui est indépendant} \\ \text{du choix du représentant } \varphi \text{ de } \mathcal{H}.$$

1.1.2. On dira que  $P$  possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à  $\mathcal{H}$  si la propriété suivante est vérifiée.

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } x_0 \in \Omega, \text{ il existe un ouvert } V \subset \Omega, x_0 \in V, \text{ tel que,} \\ \text{pour tout voisinage } W \text{ de } x_0 \text{ inclus dans } V, \text{ si} \\ \qquad \qquad \qquad u \in C^\infty(W), \quad Pu = 0 \quad \text{sur } W, \\ \qquad \qquad \qquad \text{supp } u \subset \{x, \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\} \text{ et en outre} \\ \qquad \qquad \qquad \text{supp } u \cap \{x, \varphi(x) = \varphi(x_0)\} \subset\subset W \text{ (compact inclus dans } W), \\ \text{on obtienne } u = 0 \text{ sur un voisinage de } x_0. \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que cette propriété ne dépend pas du choix du représentant  $\varphi$  de  $\mathcal{H}$ .

On dira que  $P$  possède l'unicité de Cauchy compacte 0-stable relativement à  $\mathcal{H}$  si, pour toute fonction  $a \in C^\infty(\Omega)$ ,  $P + a$  possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à  $\mathcal{H}$ .

1.1.3. Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients  $C^\infty$  pour la partie principale,  $L^\infty$  pour les termes d'ordre inférieur, défini sur un voisinage  $\Omega$  de  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , de symbole principal  $p(x, \xi)$  supposé réel, de type principal en  $x_0$ . Soit  $S$  une hypersurface  $C^\infty$  orientée passant par  $x_0$ , non caractéristique pour  $P$ , i.e.,  $p(x_0, N_0) \neq 0$  où  $N_0$  est un covecteur non nul du conormal à  $S$  en  $x_0$ . On définit également  $S_+ = \{x \in \Omega, \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$ , si  $S = \{x \in \Omega, \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$  ( $\varphi C^\infty$  réelle,  $\varphi'(x_0) \neq 0$  fournissant une équation de l'hypersurface orientée  $S$ ).

1.1.4. On dira que  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  près de  $x_0$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que si

$$u \in C^\infty(V), \quad Pu = 0 \text{ sur } V, \quad \text{supp } u \subset S_+$$

on obtienne  $u = 0$  sur un voisinage de  $x_0$ .

## 1.2. Enoncé des résultats

**Théorème 1.2.1** (*Condition suffisante d'unicité de Cauchy compacte*).

Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  comme dans le paragraphe 1.1.1. On suppose que, pour tout  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$ ,

$$(1.5) \quad p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = 0 \quad \text{implique} \quad H_p^2(\varphi)(x, \xi) \leq 0.$$

Alors,  $P$  possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à  $\mathcal{H}$ .

L'hypothèse (1.5) ne dépend pas du choix du représentant  $\varphi$  de  $\mathcal{H}$  (cf. paragraphe 2).

**Théorème 1.2.2** (*C.N.S. d'unicité de Cauchy compacte*).

Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  comme dans le paragraphe 1.1.1,  $P$  étant à coefficients  $C^\infty$ .

Pour que  $P$  possède l'unicité de Cauchy compacte 0-stable relativement à  $\mathcal{H}$ , il faut et il suffit que (1.5) soit vérifiée.

**Corollaire 1.2.1** (*Condition suffisante d'unicité de Cauchy*).

Soient  $P$  et  $S$  comme dans le paragraphe 1.1.3. Posons,  $S^*(V)$  désignant le fibré en sphère du cotangent  $T^*(V)$ ,

$$(1.6) \quad \Sigma_V = \{(x, \xi) \in S^*(V), p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0\},$$

où  $V$  est un voisinage de  $x_0$ . Alors, il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$  tel que  $\Sigma_{V_0}$  soit une sous-variété de codimension 3 de  $S^*(V)$ . On suppose alors qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$ ,  $V \subset V_0$ , tel que pour tout  $\rho \in \Sigma_V$ ,

$$(1.7) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad H_p^2(\varphi)(\rho) \leq 0, \\ & \text{(ii)} \quad \text{Hess } H_p^2(\varphi)(\rho)|_{\Sigma_V} < 0 \text{ si } H_p^2(\varphi)(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Alors  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  près de  $x_0$  (cf. paragraphe 1.1.4).

## 2. Commentaires

### 2.1. Invariance des hypothèses

#### 2.1.1. Invariance de (1.5).

Supposons que (1.5) soit vérifiée pour un représentant  $\varphi$  de la famille  $\mathcal{H}$  alors elle l'est pour une fonction  $\tilde{\varphi}$  équivalente car,  $\lambda$  étant nécessairement  $C^\infty$ ,  $H_p(\tilde{\varphi}) = \lambda H_p(\varphi)$  et  $H_p^2(\tilde{\varphi}) = \lambda H_p^2(\varphi) + H_p(\lambda)H_p(\varphi)$  avec  $\lambda > 0$ .

#### 2.1.2. Hypothèses du corollaire.

Remarquons que, pour ce corollaire, les données sont un opérateur et une hypersurface et non pas comme précédemment un opérateur et une famille d'hypersurfaces.

#### Lemme 2.1.1.

(a) Il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que  $\Sigma_V$  définie par (1.6) soit une sous-variété de codimension 3 de  $S^*(V)$ .

(b)  $\Sigma_V$  ne dépend que de l'opérateur  $P$  et de l'hypersurface  $S$ .

**Preuve.** Il suffit, pour montrer (a), d'établir que

$$dp \wedge dH_p(\varphi) \wedge d\varphi \wedge \xi \neq 0$$

sur  $\bar{\Sigma}_V = \{(x, \xi) \in V \times \mathbf{R}^n, p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = |\xi|^2 - 1 = 0\}$ . En effet les vecteurs  $p'_\xi, \{p, \varphi\}'_\xi, \xi$  sont indépendants sur  $\bar{\Sigma}_V$  car si

$$\alpha p'_\xi + \beta \{p, \varphi\}'_\xi + \gamma \xi = 0$$

alors

$$\begin{cases} \alpha p'_\xi \cdot \varphi'_x + \beta \{p, \varphi\}'_\xi \cdot \varphi'_x + \gamma \xi \cdot \varphi'_x = 0 \\ \text{et} \\ \alpha p'_\xi \cdot \xi + \beta \{p, \varphi\}'_\xi \cdot \xi + \gamma |\xi|^2 = 0. \end{cases}$$

Or  $p'_\xi \cdot \varphi'_x = \{p, \varphi\}'_\xi = 0 = p = \frac{1}{2} p'_\xi \cdot \xi$ , et en outre  $\{p, \varphi\}'_\xi \cdot \xi = \{p, \varphi\}'_\xi = 0$ , d'où  $\gamma = 0$  car  $\xi \neq 0$  et  $\beta = 0$  car  $p$  est d'ordre 2 non caractéristique, et par suite  $\alpha = 0$  car  $p$  est de type principal en  $x_0$  donc sur un voisinage  $V$  assez petit de  $x_0$ . Par suite, comme  $\varphi = \varphi(x)$ ,  $\varphi'(x_0) \neq 0$  donc  $\varphi'(x) \neq 0$  dans un voisinage de  $x_0$ , on obtient l'indépendance des gradients.

Pour le (b), si  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x_0)$  est une autre équation de  $S$ , comme  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x_0)$  équivaut dans un voisinage de  $x_0$  à  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$  et que, sur  $S$ ,  $\bar{\varphi}'(x) = \lambda(x)\varphi'(x)$ ,  $\lambda \neq 0$ , on obtient le résultat.

Montrons maintenant que l'hypothèse (1.7) ne dépend pas du choix de l'équation de  $S$ . Comme  $\Sigma$  ne dépend que de l'opérateur et de  $S$ , il suffit de prouver que, supposant  $\varphi(x_0) = 0$ ,  $H_p^2(\lambda\varphi) \leq 0$  en tout point de  $\Sigma$  si  $\lambda(x_0) > 0$ . Or  $H_p^2(\lambda\varphi) = \lambda H_p^2(\varphi)$  sur  $\Sigma$  et on obtient (i). En outre si  $H_p^2(\varphi)(\rho) = 0$ ,  $\rho \in \Sigma$  alors

$$\text{Hess } H_p^2(\lambda\varphi)(\rho)_{T_\rho(\Sigma) \times T_\rho(\Sigma)} = \lambda \text{ Hess } H_p^2(\varphi)(\rho)_{T_\rho(\Sigma) \times T_\rho(\Sigma)},$$

car  $(H_p^2(\varphi))(\rho)_{T_\rho(\Sigma)} = 0$  car  $H_p^2(\varphi)(\rho) = 0$  et  $H_p^2(\varphi) \leq 0$  sur  $\Sigma$ .

## 2.2. Position des bicaractéristiques tangentes

Pour les théorèmes, nous avons le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  vérifiant les hypothèses du théorème 1.2.1. Alors pour tout  $x_0 \in \Omega$ ,  $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , si  $p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0$ , la bicaractéristique tangente issue de  $(x_0, \xi_0)$  définie par (2.2) reste localement du "bon côté", i.e., vérifie

$$\varphi(\omega(s)) \leq \varphi(\omega(0)) \quad \text{pour } s \text{ dans un voisinage de } 0_{\mathbf{R}}.$$

En particulier, si une bicaractéristique tangente a un contact d'ordre fini avec une hypersurface de la famille  $\mathcal{H}$ , nécessairement ce contact est d'ordre pair et du "bon côté", i.e.,



$$p(x_0, \xi_0) = H_p^l(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0, \quad 1 \leq l < 2k,$$

et  $H_p^{2k}(x_0, \xi_0) < 0$ .

Il est trivial de remarquer que, réciproquement si on suppose les bicaractéristiques tangentes en "bonne position localement sur tout l'ouvert  $\Omega$ " (i.e., pour tout  $x_0 \in \Omega$ , si  $p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0$ , on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  $|s| < \varepsilon$ ,  $\varphi(\omega(s)) \leq \varphi(\omega(0))$ , où  $\omega$  est définie pour (2.2)), alors l'hypothèse (1.5) est vérifiée.

**Preuve du lemme.** Remarquons tout d'abord que

$$(2.1) \quad dp \wedge d\{p, \varphi\} \neq 0 \quad \text{sur } p = \{p, \varphi\} = 0.$$

En effet, supposant  $\varphi \equiv t$  au voisinage de  $x_0$ ,  $(t, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$  un système de coordonnées centré en  $x_0$  de variables duales  $(\tau, \zeta)$ , on a sur  $p = p'_\tau = 0$

$$d_{\tau, \zeta} p = p'_\zeta \cdot d\zeta,$$

$$d_{\tau, \zeta} p'_\tau = p''_{\tau\zeta} \cdot d\zeta + p''_{\tau\tau} d\tau.$$

Or, comme  $p$  est de type principal on a  $p''_{\tau\tau} \neq 0$ , et comme par ailleurs  $p''_{\tau\tau} \neq 0$  d'après (1.3), on obtient (2.1).

Soit  $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \setminus 0$  avec  $p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0$ . Considérons la bicaractéristique de  $p$  issue de  $(x_0, \xi_0)$ , i.e., la courbe intégrale  $\omega(s)$  du champ hamiltonien de  $p$ ,

$$(2.2) \quad \dot{\omega}(s) = H_p(\omega(s)), \quad \omega(0) = (x_0, \xi_0).$$

Posons  $t(x, \xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$ . Comme  $p$  est de type principal, on a en particulier  $dp \neq 0$ , et on peut écrire dans une carte locale symplectique centrée en  $(x_0, \xi_0)$  (non nécessairement homogène)

$$p = \xi_1, \quad H_p = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (x, y, \xi_1, \eta)$$

étant un système de coordonnées symplectiques.

Or l'hypothèse (1.5) assure que, dans *tout un ouvert*, voisinage de 0, en continuant à noter  $t$  la fonction sur la carte,

$$\xi_1 = \frac{\partial t}{\partial x_1} = 0 \quad \text{implique} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x_1^2} \leq 0.$$

Comme, d'après (2.1), les gradients de  $\xi_1$ ,  $\partial t / \partial x_1$  sont indépendants on a, soit  $\partial^2 t / \partial x_1^2 \neq 0$ , soit  $\partial^2 t / \partial x_1 \partial y_j \neq 0$  pour un  $j$ , soit  $\partial^2 t / \partial x_1 \partial \eta_j$  pour un  $j$ .

Dans le premier cas, on a  $\partial^2 t / \partial x_1^2 < 0$ , cas classique de la pseudo-convexité qui donne bien entendu une bicaractéristique tangente "tournée vers le bas des deux côtés".

(2.3) On peut donc supposer  $\frac{\partial^2 t}{\partial x_1 \partial y_1} \neq 0$ .

Considérons l'équation

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1, 0_{\mathbb{R}^{n-2}}, 0_{\mathbb{R}^k}, 0_{\mathbb{R}^{n-1}}) = 0,$$

que l'on notera simplement

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1) = 0.$$

De (2.3), il vient l'existence d'une fonction  $\theta$ ,  $C^\infty$  réelle définie sur un voisinage de  $0_{\mathbb{R}}$ , telle que

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1) = (y_1 - \theta(x_1))\nu(x_1, y_1), \quad \nu(0, 0) \neq 0, \quad \theta(0) = 0.$$

Dans ces coordonnées, la bicaractéristique est  $(x_1, 0)$ , et on a, comme  $t(0, 0) = 0$ ,

$$t(x_1, 0_{\mathbb{R}^{2n-1}}) = \int_0^{x_1} \frac{\partial t}{\partial x_1}(s, 0) ds = - \int_0^{x_1} \theta(s)\nu(s, 0) ds,$$

et donc, comme  $\theta(0) = 0$ ,

$$(2.4) \quad t(x_1, 0) = - \iint 1_{(0, x_1)}(s) 1_{(0, s)}(u) \theta'(u) \nu(s, 0) du ds.$$

Or (1.5) assure  $-\theta'(x_1)\nu(x_1, \theta(x_1)) \leq 0$ , et supposant  $\nu(0, 0) > 0$  (resp.  $< 0$ ) on a  $\theta'(x_1) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) sur un voisinage de 0. Comme  $|u| \leq |s| \leq |x_1|$  sur l'intégrant de (2.4), on a, pour  $|x_1|$  assez petit,  $\theta'(u) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ )  $\nu(s, 0) > 0$  (resp.  $< 0$ ) et on obtient

$$(2.5) \quad t(x_1, 0) \leq 0, \quad \text{pour } x_1 \text{ dans un voisinage de } 0,$$

ce qui signifie que les bicaractéristiques tangentes sont "tournées vers le bas des deux côtés".

### 2.3. Comparaison avec la pseudo-convexité de Hörmander [9]

(a) Rappelons la conséquence du résultat de Hörmander [9] pour un opérateur  $P$  d'ordre 2 à coefficients  $C^\infty$  réels défini au voisinage de  $x_0$ , de symbole principal  $p$ . On se donne une hypersurface  $C^\infty$  orientée  $S$ , passant par  $x_0$ .

**Théorème** (Hörmander [9]).

On suppose que,  $\varphi$  étant une fonction réelle  $C^\infty$ ,  $\varphi'(x_0) \neq 0$ ,  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$  étant une équation de  $S$ , pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$  tel que

$$(2.7) \quad p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{alors } H_p^2(\varphi)(x_0, \xi_0) < 0.$$

On obtient que  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  près de  $x_0$ , i.e., qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que

$$\begin{aligned} \text{si } u \in C^\infty(V), \quad Pu = 0 \quad \text{sur } V, \\ \text{supp } u \subset \{\varphi(x) \cong \varphi(x_0)\}, \\ \text{alors } u = 0 \quad \text{près de } x_0. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on obtient l'unicité de Cauchy et non pas uniquement l'unicité compacte.

L'hypothèse (2.7) de Hörmander exprime que les bicaractéristiques tangentes à  $S$  au point  $x_0$  sont "tournées vers le bas" avec un contact d'ordre 2.

(b) Il semble impossible en général de faire une hypothèse en un seul point  $x_0$ , dans le cas où il existe des bicaractéristiques tangents ayant un contact d'ordre strictement supérieur à deux. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

Dans  $\mathbf{R}^3$ ,  $x = (t, x_1, x_2)$  de variables duales  $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2)$  on se place au voisinage de  $0 = (0, 0, 0)$  avec  $\varphi \equiv t$ . Posons

$$(2.8) \quad p = \tau^2 + \xi_1 \xi_2 + t(x_1^2 - x_2^4)(\xi_1 - \xi_2)^2 + t\xi_1^2.$$

Cet opérateur est à coefficients  $C^\infty$  réels, d'ordre 2, de type principal, non caractéristique (1.3), et vérifie, pour  $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus 0$ ,

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(0, \xi) = H_p(\varphi)(0, \xi) = 0 \quad \text{implique} \\ H_p^2(\varphi)(0, \xi) < 0 \quad \text{ou} \\ H_p^2(\varphi)(0, \xi) = H_p^3(\varphi)(0, \xi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi)(0, \xi) < 0. \end{array} \right.$$

En effet, le point  $\cdot$  désignant la dérivation le long de la bicaractéristique ((2.2)) on a,

$$\begin{aligned} \dot{i} &= 2\tau, \\ \ddot{i} &= -2[(x_1^2 - x_2^4)(\xi_1 - \xi_2)^2 + \xi_1^2], \\ \dddot{i} &= 2[(4x_2^3 \dot{x}_2 - 2x_1 \dot{x}_1)(\xi_1 - \xi_2)^2 + 2(x_2^4 - x_1^2)(\xi_1 - \xi_2)(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - 2\xi_1 \dot{\xi}_1]. \end{aligned}$$

Pour  $x_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^3 \setminus 0$ ,  $p(x_0, \xi) = H_p(\varphi)(x_0, \xi) = 0$  signifie  $\tau = \xi_1 \xi_2 = 0$ .

Si  $\tau = \xi_2 = 0$ ,  $\xi_1 \neq 0$ , on a  $H_p^2(\varphi) = -2\xi_1^2 < 0$ .

Si  $\tau = \xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 \neq 0$ , on a

$$H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{i} = -4\dot{x}_1^2 \xi_2^2 - 4\dot{\xi}_1^2 = -4\xi_2^4 < 0,$$

d'où (2.9) est vérifié.

Néanmoins, dans tout voisinage de  $(0, 0, 0)$  sur  $S$ , on peut trouver  $x$ ,  $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus 0$  avec

$$p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\varphi)(x, \xi) > 0.$$

Il suffit pour cela de prendre  $\tau = \xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$ ,  $x = (0, 0, \alpha)$ , alors  $H_p^2(\varphi) = 2\alpha^4$ .

#### 2.4. Lien avec le théorème d'Alinhac [1]

Le théorème 2 est en fait une conséquence du théorème 1 (la condition est suffisante) et du théorème d'Alinhac [1] dont nous rappelons l'expression seulement dans la cadre envisagé ici.

#### **Théorème (Alinhac [1]).**

Soit  $P$  un opérateur différentiel à coefficients  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , de symbole principal réel  $p$ , de type principal sur  $\Omega$ . Soit  $S \equiv \{\psi(x) = \psi(x_0)\}$  une hypersurface  $C^\infty$  non caractéristique pour  $p$  passant par  $x_0 \in \Omega$ . Supposons qu'il existe  $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$  tel que

$$p(x_0, \xi_0) = H_p(\psi)(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\psi)(x_0, \xi_0) > 0.$$

Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$ , des fonctions  $a, u \in C^\infty(V)$  avec  $\text{supp } u \subset \{\psi(x) \geq \psi(x_0)\}$  et  $(P + a)u = 0$  sur  $V$ .

Soit alors  $P$  et  $\mathcal{H}$  comme dans le théorème 2, tels qu'il existe  $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \setminus 0$  avec

$$p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\varphi)(x_0, \xi_0) > 0$$

(i.e., (1.5) n'est pas vérifiée).

Posons  $\psi(x) = \varphi(x) - |x - x_0|^4$ . On a

$$\{p, \psi\}(x_0, \xi_0) = \{p, \varphi\}(x_0, \xi_0) = 0$$

et

$$H_p^2(\psi)(x_0, \xi_0) = H_p^2(\varphi)(x_0, \xi_0) > 0.$$

Comme  $\mathcal{H}$  est non caractéristique, l'hypersurface  $S \equiv \psi(x) = \psi(x_0)$  est non caractéristique car

$$\{\{p, \psi\}, \psi\}(x_0, \xi) = \{\{p, \varphi\}, \varphi\}(x_0, \xi) \neq 0.$$

Les hypothèses du théorème d'Alinhac sont donc réalisées pour  $p$  et  $\psi$ . Par suite, il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$ , des fonctions  $a_0, u_0 \in C^\infty(V_0)$ ,  $\text{supp } u_0 \subset \{\psi(x) \geq \psi(x_0)\}$ ,  $(P + a_0)u_0 = 0$  sur  $V_0$ . Donc  $P + a_0$  ne possède pas l'unicité de Cauchy compacte par rapport à  $\mathcal{H}$ . En effet pour tout voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$ , il existe un voisinage  $W = V \cap V_0$ , une fonction  $u_0 \in C^\infty(W)$ ,  $(P + a_0)u_0 = 0$  sur  $W$ ,  $\text{supp } u_0 \subset \{\psi(x) \geq \psi(x_0)\} \subset \{\varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$ , et  $\text{supp } u_0 \cap \{\varphi(x) = \varphi(x_0)\} = \{x_0\} \subset\subset W$ , avec  $u_0 \neq 0$  au voisinage de  $x_0$ .

## 2.5. Exemples

### 2.5.1. Pour l'unicité de Cauchy (Corollaire 1.2.1).

(a) Rappelons que si  $P$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 de type principal à coefficients réels constants dans la partie principale,  $L^\infty$  pour les termes d'ordre inférieur et  $S$  une hypersurface géométriquement convexe non caractéristique pour  $P$  alors  $P$  possède l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  (Treves [12] théorème 5.3, chapitre IV).

(b) Par contre l'opérateur (des ondes)  $D_t^2 + D_{x_1}D_{x_2}$  ne possède pas l'unicité de Cauchy (pour des termes d'ordre inférieur quelconques  $C^\infty$ ) par rapport à la surface d'équation  $t = 0$  (cf. [3], [4], [9] th. 8.9.4).

(c) Soit  $P$  un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^3$  à coefficients  $L^\infty$ , de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + t(x_1^2 + x_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - t^2\xi_1^2,$$

et soit  $S$  l'hypersurface d'équation  $t = 0$ ,  $(t, x_1, x_2)$  étant des coordonnées locales et  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  des variables duales.

Le corollaire 1.2.1 implique l'unicité de Cauchy pour  $P$  par rapport à  $S$  près de  $(0, 0, 0)$ . Remarquons qu'au point  $(0, 0, 0)$  il existe des bicaractéristiques tangentes à  $S$  à l'ordre 4 exactement et qu'un résultat de pseudo-convexité ne peut s'appliquer a priori ici.

(d) Soit  $P$  un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^4$ , à coefficients  $L^\infty$ , de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + t[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2] - t^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2),$$

et soit  $S$  l'hypersurface d'équation  $t = 0$ .

Le corollaire 1.2.1 implique l'unicité de Cauchy pour  $P$  par rapport à  $S$  près de  $(0, 0, 0, 0)$  dans  $\mathbf{R}^4$ . La remarque du (c) est valable ici également.

(e) De manière plus générale, soit  $P$  un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^n$ , à coefficients  $L^\infty$ , de symbole principal

$$p = \tau^2 + \sum_{j=1}^p \xi_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n-1} \xi_j^2 + t \left[ \left( \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 \right) \sum_{j=1}^p \xi_j^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2 \right] + t^2 \langle R(t, x) \xi, \xi \rangle,$$

où  $R(t, x)$  est une matrice  $C^\infty$   $(n-1) \times (n-1)$ .

$P$  vérifie les hypothèses du corollaire 1.2.1 pour l'hypersurface d'équation  $t = 0$ .

### 2.5.2. Pour l'unicité de Cauchy compacte (Th. 1.2.1, 1.2.2).

(a) Un opérateur à coefficients  $L^\infty$  de partie principale  $D_t^2 + D_{x_1}D_{x_2}$  dans  $\mathbf{R}^3$  possède l'unicité de Cauchy compacte par rapport à la famille d'hypersurface  $\mathcal{H}$  données par la fonction  $t$ . Néanmoins cet opérateur (perturbé par une fonction  $a \in C^\infty$ ) ne possède pas l'unicité de Cauchy par rapport à l'hypersurface d'équation  $t = 0$  (cf. le paragraphe précédent 2.5.1 (b)).

(b) Considérons un opérateur  $P$  à coefficients  $L^\infty$ , défini sur un voisinage  $\Omega$  de 0 dans  $\mathbf{R}^4$ , de symbole principal

$$(2.10) \quad p = \tau^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_3^2 + t((1 + x_1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2,$$

les variables de  $\mathbf{R}^4$  étant  $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ , et leurs variables duales  $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Comme  $p$  est de type principal en  $0_{\mathbf{R}^4}$ , on peut choisir  $\Omega$  de sorte que  $p$  soit de type principal sur  $\Omega$ . Soit  $\mathcal{H}$  la famille d'hypersurfaces orientées de  $\Omega$  donnée par  $\varphi \equiv t$ , clairement non caractéristique (1.3) pour  $p$ .

(i) Le symbole  $p$  vérifie les hypothèses du théorème 1.2.1 car si  $p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = 0$ , on a

$$H_p^2(\varphi) = -2L^2 \leq 0 \quad \text{avec } L = (1 + x_1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

(ii) Le symbole  $p$  vérifie, pour  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^4 \setminus 0$ ,  $p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = 0$  implique

$$(H_p^2(\varphi)(x, \xi) < 0) \quad \text{ou} \quad (H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi) < 0)$$

(i.e., les bicaractéristiques tangentes sont tournées du bon côté à un ordre  $\leq 4$ ).

En effet, le point  $\cdot$  désignant la dérivation le long de la bicaractéristique de  $p$

$$\dot{i} = 2\tau,$$

$$\ddot{i} = -2L^2,$$

$$\dddot{i} = -4L\dot{L},$$

$$\ddot{\ddot{i}} = -3\dot{L}^2 - 4L\ddot{L},$$

et par suite si  $p = H_p(\varphi) = 0$ , i.e.,  $\tau = \xi_1 \xi_2 + \xi_3^2 + tL^2 = 0$ , soit  $L \neq 0$  et  $\dot{i} < 0$ , soit  $L = 0$  et  $\ddot{i} = \ddot{\ddot{i}} = 0$  avec  $\ddot{\ddot{\ddot{i}}} < 0$  car alors  $\dot{L} = \xi_2 \xi_1 \neq 0$  (sinon  $\tau = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ).

(iii) En tout point voisin de 0, on peut trouver des bicaractéristiques tangentes à l'ordre 4 exactement, de sorte qu'aucun résultat de stricte-pseudo-convexité n'est applicable ici. En effet pour

$$x = (t, x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

$$\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 1, -\xi_3^2, \xi_3)$$

avec

$$\xi_3^2 - \xi_3 - (1 + x_1) = 0$$

(qui possède des racines réelles en  $\xi_3$  pour  $x_1$  assez petit), on a

$$p = H_p(\varphi) = H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi) < 0.$$

### 3. Calcul symbolique avec grand paramètre

#### 3.1. Définition des symboles

**Définition 3.1.** Soit  $1 \geq \rho > \delta \geq 0$ ,  $m \in \mathbf{R}$ .

(i) On dit que  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ , si:

(a)  $a(x, \xi, \gamma) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$ , où  $I = [1, +\infty[$ ,

(b) pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{N}$ , il existe  $C \geq 0$  tel que: pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$ ,

$$(3.1) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)| \leq C(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}$$

(ii) On dit que  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^{-\infty}$ , si:

(a)  $a(x, \xi, \gamma) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$ ,

(b) pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{N}$ , pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $C \geq 0$ , tel que: pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$ ,

$$(3.2) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)| \leq C(\gamma + |\xi|)^{-N}.$$

Pour  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \gamma}^m$ , on peut définir des semi-normes:

$$(3.3) \quad p_{\alpha, \beta, \lambda}(a) = \sup_{(x, \xi, \gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)}{(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}} \right|$$

pour  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{N}$ .

**Remarque.** Il est important, pour le calcul que nous allons développer, de remarquer que les semi-normes sont indépendantes de  $\gamma$ , et que  $\gamma$  est supérieur à 1.

On dira qu'une famille de symboles  $(a_j)_{j \in \mathcal{J}}$  est bornée, si: pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{N}$ , il existe  $C \geq 0$ , pour tout  $j \in \mathcal{J}$  tel que:

$$p_{\alpha, \beta, \lambda}(a_j) \leq C.$$

**Définition 3.2** (Symboles multiples).

Soit  $1 \geq \rho > \delta \geq 0$ ,  $(m, m', m'') \in \mathbf{R}^3$ . On dit que  $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$  si:

(a)  $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in C^\infty((\mathbf{R}^n)^4 \times I)$ ,

(b) pour tout  $\alpha_1 \in \mathbf{N}^n$ ,  $\alpha_2 \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta_1 \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta_2 \in \mathbf{N}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{N}$ , il existe  $C \geq 0$ , tel que: pour tout  $(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in (\mathbf{R}^n)^4 \times I$ ,

$$\begin{aligned} & |\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_\xi^{\beta_1} \partial_\eta^{\beta_2} \partial_\gamma^\lambda a(x, y, \xi, \eta, \gamma)| \\ & \leq C(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta_1|} (\gamma + |\eta|)^{m' - \rho|\beta_2|} (\gamma + |\xi| + |\eta|)^{m'' + \delta|\alpha_1| + \delta|\alpha_2|}. \end{aligned}$$

**Remarque.** Soit  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ , posons:  $a_\gamma(x, \xi) = a(x, \xi, \gamma)$ , pour chaque  $\gamma \geq 1$  on a  $a_\gamma(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$ .

On rappelle que: pour  $1 \geq \rho > \delta \geq 0$ ,  $m \in \mathbf{R}$ ,  $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$  si:

(a)  $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ ,

(b) pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{N}^n$ , il existe  $C \geq 0$  tel que:  
pour tout  $(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}.$$

Pour tout  $\gamma \geq 1$ , on peut donc définir un opérateur  $A_\gamma$  par la formule:

$$(3.4) \quad A_\gamma u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Pour chaque  $\gamma \geq 1$ ,  $A_\gamma$  opère continûment de:

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n).$$

(3.5) On dira que  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^m)$ .

On notera  $\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma) = a(x, \xi, \gamma)$ .

On démontre facilement les propriétés suivantes:

**Propriétés 3.1.** Soit  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ ,  $b(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m'}$ . On a les propriétés suivantes:

(i)  $(a + b) \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m''}$ ,  $m'' = \text{Sup}(m, m')$ .

(ii)  $ab \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m+m'}$ .

(iii) S'il existe  $C > 0$  tel que, pour tout

$$(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I, \quad |a(x, \xi, \gamma)| \geq C(\gamma + |\xi|)^m$$

alors  $1/a \in \Sigma_{\rho, \delta}^{-m}$ .

(iv) S'il existe  $C > 0$ , tel que, pour tout

$$(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I, \quad a(x, \xi, \gamma) \geq C(\gamma + |\xi|)^m$$

alors  $\sqrt{a} \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m/2}$ .

(v) Pour tout  $s \in \mathbf{R}$ ,  $(\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2} \in \Sigma_{1,0}^s$ .

### 3.2. Calcul symbolique

**Définition 3.3.** Soit  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ , une suite de symboles de  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ .

On dit que  $a_j$  converge vers  $a$  dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$  si:

(i)  $a_j$  converge vers  $a$  simplement,

(ii)  $a_j$  est borné dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ .

### Remarques.

(i) Une telle suite  $(a_j)$  converge vers  $a$  dans  $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$ .

(ii)  $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ .

(iii) Si



$$A_{\gamma}^j u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a_j(x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi;$$

$A_{\gamma}^j u$  converge vers  $A_{\gamma} u$  dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

**Proposition 3.1.**

- (i)  $\Sigma^{-\infty}$  est dense dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ .
- (ii)  $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$  est dense dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ .
- (iii) Soit  $m' > m$ , alors  $\Sigma^{-\infty}$  est dense dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m'}$  pour la topologie des semi-normes de  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m'}$ .
- (iv) Soit  $a_j \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m_j}$ ,  $j \geq 0$ ,  $m_j$  suite décroissante tendant vers  $-\infty$ . Alors il existe  $a \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m_0}$  tel que :

$$a - \sum_{0 \leq j < k} a_j \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m_k}.$$

$a$  est unique modulo  $\Sigma^{-\infty}$ . On dit que  $a$  est la somme asymptotique des  $a_j$ .

On notera  $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ .

**Démonstration.** Pour (i) et (iii) on prend,  $\chi(\xi, \gamma) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ ;  $\chi = 1$  au voisinage de  $(0, 0)$ . On vérifie facilement que la suite  $a_j(x, \xi, \gamma) = \chi(\xi/j, \gamma/j) a(x, \xi, \gamma)$  converge vers  $a$  dans les sens (i) ou (iii).

Pour (ii) on prend,  $\chi(x, \xi, \gamma) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ .  $\chi = 1$  au voisinage de  $(0, 0, 0)$ . On vérifie que la suite

$$a_j(x, \xi, \gamma) = \chi\left(\frac{x}{j}, \frac{\xi}{j}, \frac{\gamma}{j}\right) a(x, \xi, \gamma)$$

converge vers  $a(x, \xi, \gamma)$  dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ .

Pour le (iv), quitte à regrouper des  $a_j$ , on peut supposer que  $m_j$  est strictement décroissante. Dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m_0}$  on a une suite de semi-normes  $(p_{j,k})_{k \in \mathbf{N}}$  où

$$p_{j,k}(a) = \text{Sup}_{|\alpha|+|\beta|+\lambda \leq k} (p_{\alpha, \beta, \lambda}(a))$$

(cf. (3.3)).

On définit  $b_j \in \Sigma^{-\infty}$  tel que:

(a)  $b_j = \chi(\xi/\lambda_j, \gamma/\lambda_j) a_j(x, \xi, \gamma)$  pour une suite  $\lambda_j$ , et  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ ,  $\chi = 1$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

(b) 
$$p_{\nu, \mu}(a_j - b_j) \leq 2^{-j} \text{ pour } \begin{matrix} 0 \leq \nu \leq j-1, \\ 0 \leq \mu \leq j-1. \end{matrix}$$

Posons  $c_k = \sum_{j=0}^k (a_j - b_j)$ . Pour  $(x, \xi, \gamma)$  fixés seul un nombre fini de  $(a_j - b_j)$  sont non nuls. Donc,  $c_k$  converge simplement vers  $a(x, \xi, \gamma)$  soit  $k$  fixé et  $l \geq k$  on a:

$$\begin{aligned} p_{k, \mu}(c_l - c_k) &\leq \sum_{j=k+1}^l p_{k, \mu}(a_j - b_j) \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\mu} p_{k, \mu}(a_j - b_j) + \sum_{j=\mu+1}^l p_{k, \mu}(a_j - b_j) \leq C + 2^{-\mu} \end{aligned}$$

où  $C$  ne dépend pas de  $l$ , donc  $(c_l - c_k)_{l \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^m$ , donc  $a - c_k \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ . En particulier  $(a - c_0) \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$  donc  $a \in \Sigma_{\rho, \delta}^m$ .

$$a - \sum_{0 \leq j < k} a_j = a - c_k + c_k - \sum_{0 \leq j < k} a_j,$$

$$c_k - \sum_{0 \leq j < k} a_j = a_k - \sum_{0 \leq j \leq k} b_j \in \Sigma_{\rho, \delta}^m,$$

ce qui termine la démonstration (l'unicité est triviale).

### **Théorème 3.1.**

(i) Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^m)$ ;  $A_\gamma^*$  désignant l'adjoint formel de  $A_\gamma$ , on a  $A_\gamma^* \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^m)$  et

$$\sigma_{A_\gamma^*} \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}} \partial_{\xi}^{\alpha} \overline{\partial_x^{\alpha} \sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)}.$$

(ii) Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^m)$ ,  $B_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{m'})$ . Alors  $A_\gamma \circ B_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{m+m'})$  et

$$\sigma_{A_\gamma \circ B_\gamma}(x, \xi, \gamma) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma) \partial_x^{\alpha} \sigma_{B_\gamma}(x, \xi, \gamma).$$

Soit  $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in C_0^{\infty}((\mathbb{R}^n)^4 \times I)$  on définit  $\bar{a}(x, \xi, \gamma)$  de la façon suivante:

$$\bar{a}(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint a(x, y, \xi, \eta, \gamma) e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy d\eta.$$

Il est clair que  $C_0^{\infty}((\mathbb{R}^n)^4 \times I)$  est dense dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$ , c'est-à-dire: pour tout  $a \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$ , il existe  $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$  une suite de  $C_0^{\infty}((\mathbb{R}^n)^4 \times I)$  telle que:

(i)  $a_l$  converge simplement vers  $a$ .

(ii)  $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$ .

(La démonstration est identique à la démonstration de la proposition 3.1(ii)).

### **Théorème 3.2 (Contraction des symboles multiples).**

(i) L'application de  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$  dans  $\Sigma_{\rho, \delta}^{m+m'+m''}$  qui à  $a(x, y, \xi, \eta, \gamma)$  associe  $\bar{a}(x, \xi, \gamma)$  est séquentiellement continue.

(ii) Pour tout  $a \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m, m', m''}$ , on peut donc associer  $\bar{a} \in \Sigma_{\rho, \delta}^{m+m'+m''}$ . De plus  $\bar{a}$  admet un développement asymptotique:

$$\bar{a}(x, \xi, \gamma) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^{\alpha} \partial_{\eta}^{\alpha} a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}}.$$

Le théorème 3.1 est une conséquence directe (comme dans le cas des classes  $S_{\rho, \delta}^m$ ) du théorème 3.2.

**Démonstration du théorème 3.2.** On va d'abord démontrer le (i) du théorème 3.2. Dans le calcul qui va suivre il est facile de voir que les constantes ne

dépendent que des semi-normes de  $a$ . La convergence des suites et l'unicité de la limite sont des conséquences du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On rappelle que  $\gamma \geq 1$ . On a:

$$\bar{a}(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint a(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma) e^{-iz\sigma} dz d\sigma.$$

On vérifie facilement que:

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda \bar{a}(x, \xi, \gamma) = \bar{b}(x, \xi, \gamma).$$

où  $b(x, y, \xi, \eta, \gamma)$  est une somme d'éléments de

$$\sum_{\rho, \delta} m - \rho|\beta_1|, m' - \rho|\beta_2|, m'' + \delta|\alpha|$$

avec  $|\beta| = |\beta_1 + \beta_2|$ .

Il suffit donc de prouver qu'il existe  $C$ , dépendant seulement des semi-normes de  $a(x, y, \xi, \eta, \gamma)$ , tel que:

$$|\bar{a}(x, \xi, \gamma)| \leq C(\gamma + |\xi|)^{m+m'+m''}.$$

On pose:

$$(3.6) \quad \langle \gamma; \xi \rangle = (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2},$$

$$(3.7) \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2},$$

$$\Delta_\sigma = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \right)^2.$$

Posons  $L = [1 + \langle \gamma, \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} [1 - \langle \gamma, \xi \rangle^{2\delta} \Delta_\sigma]^k$ . On a:

$$Le^{-iz\sigma} = e^{-iz\sigma}.$$

Donc:

$$\begin{aligned} \bar{a}(x, \xi, \gamma) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint La(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma) e^{-iz\sigma} dz d\sigma \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \beta(x, \xi, \sigma, \gamma) d\sigma, \end{aligned}$$

avec

$$\beta = \int [1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} [1 - \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} \Delta_0]^k (a(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma)) e^{-iz\sigma} dz.$$

En utilisant le fait que pour,  $0 \leq r \leq 2k$ , on a

$$(3.8) \quad \langle \gamma; \xi \rangle^{\delta r} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-\delta r} \leq 1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta k} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|\beta| &\leq \int [1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} \langle \gamma; \xi \rangle^m \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{m'} \\
(3.9) \quad &\times (\langle \gamma; \xi \rangle + \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle)^{m'} (1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta k} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k}) dz, \\
|\beta| &\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{m-\delta n} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{m'} (\langle \gamma; \xi \rangle + \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle)^{m'} (1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta k} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k})
\end{aligned}$$

pour  $k$  suffisamment grand.

Avec  $L' = \langle \sigma \rangle^{-2j} (1 - \Delta_z)^j$  on a :

$$\beta = \int \langle \sigma \rangle^{-2j} (1 - \Delta_z)^j [1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} [1 - \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} \Delta_\sigma]^k (a) e^{-iz\sigma} dz.$$

On démontre facilement que :

$$|\partial_z^\alpha [(1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2)^{-k}]| \leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{-\delta|\alpha|} (1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2)^{-k},$$

d'où, en utilisant (3.8),

$$\begin{aligned}
|\beta| &\leq \int \langle \sigma \rangle^{-2j} (1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2)^{-k} \langle \gamma; \xi \rangle^m \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{m'} \\
&\quad \times (\langle \gamma; \xi + \sigma \rangle + \langle \gamma; \xi \rangle)^{m'+2\delta j} (1 + \langle \xi \rangle^{2\delta k} \langle \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k}) dz, \\
(3.10) \quad |\beta| &\leq C \langle \sigma \rangle^{-2j} \langle \gamma; \xi \rangle^{m-\delta n} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{m'} (\langle \gamma; \xi + \sigma \rangle + \langle \gamma; \xi \rangle)^{m'+2\delta j} \\
&\quad \times (1 + \langle \xi \rangle^{2\delta k} \langle \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k}).
\end{aligned}$$

En utilisant (3.9), (3.10) et pour tout  $t > 0$ ,  $\inf(1, t) \sim (1 + t^{-1})^{-1}$ , on a :

$$\begin{aligned}
|\beta| &\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{m-\delta n} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{m'} (\langle \gamma; \xi \rangle + \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle)^{m'} \\
&\quad \times (1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta k} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k}) \left[ 1 + \frac{\langle \sigma \rangle^{2j}}{(\langle \gamma; \xi + \sigma \rangle + \langle \gamma; \xi \rangle)^{2\delta j}} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

On a

$$\bar{a} = \int_{|\sigma| \geq \langle \gamma; \xi \rangle / 2} \beta d\sigma + \int_{|\sigma| < \langle \gamma; \xi \rangle / 2} \beta d\sigma.$$

Quand  $|\sigma| < \langle \gamma; \xi \rangle / 2$ , on a :  $\langle \gamma; \xi \rangle \sim \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle$ , et donc :

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad \int_{|\sigma| < \langle \gamma; \xi \rangle / 2} |\beta| &\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{m+m'+m'-\delta n} \int_{|\sigma| < \langle \gamma; \xi \rangle / 2} \left( 1 + \frac{\langle \sigma \rangle^{2j}}{\langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta j}} \right)^{-1} d\sigma \\
&\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{m+m'+m'} \int_{|\sigma| < 1/2} (1 + |\sigma|^{2j})^{-1} d\sigma.
\end{aligned}$$

Quand  $|\sigma| \geq \langle \gamma; \xi \rangle / 2$ , en utilisant l'inégalité (de Peetre), pour tout  $(\xi, \sigma, \gamma) \in$

$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$ ,  $s \in \mathbf{R}$ , on a:

$$\langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^s \leq 2^{s/2} \langle \gamma; \xi \rangle^s \langle \sigma \rangle^{|s|},$$

on a:

$$\int_{|\sigma| \geq \langle \gamma; \xi \rangle / 2} |\beta| \leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{m+m'+m''} B,$$

avec

$$\begin{aligned} B &\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{-\delta n} \int_{|\sigma| \geq \langle \gamma; \xi \rangle / 2} \left( 1 + \frac{\langle \gamma; \xi + \sigma \rangle}{\langle \gamma; \xi \rangle} \right)^{m''} \langle \sigma \rangle^{|m'|+2\delta k} [1 + \langle \sigma \rangle^{2j(1-\delta)}]^{-1} d\sigma \\ &\leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{-\delta n} \int_{|\sigma| \geq \langle \gamma; \xi \rangle / 2} |\sigma|^{|m'|+|m''|+2\delta k} \frac{1}{|\sigma|^{2j(1-\delta)}} d\sigma, \end{aligned}$$

et par suite

$$(3.12) \quad B \leq C \langle \gamma; \xi \rangle^{-\delta n + |m'|+|m''|+2\delta k - 2j(1-\delta)} \int_{|\sigma| \geq 1/2} \frac{|\sigma|^{|m'|+|m''|+2\delta k}}{|\sigma|^{2j(1-\delta)}} d\sigma.$$

En regroupant (3.11), (3.12), on trouve que  $\tilde{a}$  est borné par  $\langle \gamma; \xi \rangle^{m+m'+m''}$ .

La démonstration du (ii) n'est pas différente de celle de Unterberger [14] pour les classes  $S_{\rho, \delta}^m$ .

### 3.3. Continuité $L^2$

**Théorème 3.3.** Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^0)$ .

$A_\gamma$  opère continûment de  $L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ . En outre,  $\exists C \geq 0$  indépendant de  $\gamma$ , tel que:

$$\|A_\gamma u\|_0 \leq C \|u\|_0.$$

**Définition 3.4.** Soit  $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ , on note pour  $\gamma \geq 1$ :

$$(3.13) \quad \|u\|_{s, \gamma}^2 = \int (\gamma^2 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

**Théorème 3.4.** Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^m)$ ,  $\exists C \geq 0$  indépendant de  $\gamma$ , tel que:  $\forall u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ :

$$\|A_\gamma u\|_{s-m, \gamma} \leq C \|u\|_{s, \gamma}.$$

**Démonstration du théorème 3.3.** On peut se restreindre à démontrer le théorème 3.3 pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . On va montrer qu'il existe  $B_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^0)$  et  $Q_\gamma \in \text{Op}(\Sigma^{-\infty})$  tels que

$$(3.14) \quad B_\gamma^* B_\gamma + Q_\gamma = M^2 \text{id} - A_\gamma^* A_\gamma,$$

où  $M$  est un réel tel que, pour  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$ ,

$$M^2 \geq |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2 + \varepsilon^2.$$

Notons  $C = M^2 \text{id} - A_\gamma^* A_\gamma$ , on a :

$$\sigma_C(x, \xi, \gamma) = M^2 - |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2 \quad \text{modulo } \Sigma_{\rho, \delta}^{-(\rho-\delta)},$$

posons  $b_0(x, \xi, \gamma) = \sqrt{M^2 - |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2}$ ,  $b_0 \in \Sigma_{\rho, \delta}^0$  (propriétés 3.1(iv)).

Soit  $B_0 \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^0)$  tel que  $\sigma_{B_0} = b_0$ . On a  $B_0^* B_0 = C + C_1$  avec  $C_1 \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-(\rho-\delta)})$  et  $C_1^* = C_1$ .

Par récurrence, supposons qu'on ait,  $B_{j-1}$  et  $C_j$  tels que

$$B_{j-1}^* B_{j-1} = C + C_j,$$

avec  $C_j \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-j(\rho-\delta)})$  et  $C_j^* = C_j$ , et  $B_{j-1} - B_0 \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-(\rho-\delta)})$ .

On cherche  $B_j = B_{j-1} + D_j$ , où  $D_j \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-j(\rho-\delta)})$ , et avec

$$(B_{j-1}^* + D_j^*)(B_{j-1} + D_j) = C + C_{j+1},$$

$$B_{j-1}^* D_j + D_j^* B_{j-1} = -C_j + C_{j+1}.$$

Si on pose  $b_{j-1} = \sigma_{B_{j-1}}$ ,  $d_j = \sigma_{D_j}$ ,  $c_j = \sigma_{C_j}$ , on a modulo  $\Sigma_{\rho, \delta}^{-j+1(\rho-\delta)}$ ,

$$\bar{b}_{j-1} d_j + \bar{d}_j b_{j-1} = -c_j.$$

Posons

$$d_j(x, \xi, \gamma) = -\frac{c_j}{2b_{j-1}} \chi_j((\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}),$$

$$\begin{aligned} \chi_j(t) &= 0 & \text{si } t \leq M_j, \\ &= 1 & \text{si } t \geq 2M_j, \end{aligned}$$

$\chi_j \in C^\infty$ ,  $M_j$  choisi tel que  $b_{j-1}(x, \xi, \gamma) \geq \varepsilon^2/2$  pour  $(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \geq M_j$ .

Soit  $D_j \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-j(\rho-\delta)})$  tel que

$$\sigma_{D_j} = d_j = -\frac{1}{2} \frac{c_j}{b_{j-1}} \chi_j((\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}),$$

alors  $B_j = B_{j-1} + D_j$  vérifie  $B_j^* B_j = C + C_{j+1}$ , avec  $C_{j+1} \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-j+1(\rho-\delta)})$ , avec  $C_j^* = C_j$  et  $B_j - B_0 \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^{-(\rho-\delta)})$ . (On a utilisé le fait que  $c_j = \bar{c}_j + k$  avec  $k \in \Sigma_{\rho, \delta}^{-j+1(\rho-\delta)}$  car  $C_j^* = C_j$ ).

En choisissant  $B_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{\rho, \delta}^0)$  tel que  $\sigma_{B_\gamma} \sim b_0 + d_1 + \dots + d_j + \dots$ , on a

$$B_\gamma^* B_\gamma - M^2 \text{id} + A_\gamma^* A_\gamma \in \Sigma^{-\infty}.$$

Maintenant on déduit de (3.14), pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ,  $0 \leq (B_\gamma^* B_\gamma u, u) =$

$M^2 \|u\|_0^2 - \|A_\gamma u\|_0^2 - (Q_\gamma u, u)$ , donc

$$\|A_\gamma u\|_0^2 \leq M^2 \|u\|_0^2 + \|Q_\gamma u\|_0 \|u\|_0.$$

Or, si

$$Q_\gamma u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} q(x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

on a

$$q \in \Sigma^{-\infty}.$$

En particulier,  $\forall \beta, \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall M \in \mathbb{N}, \exists C_{\alpha, \beta, M} \geq 0, \forall \gamma \geq 1$  tel que, pour tout  $(x, \xi)$ :

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha q(x, \xi, \gamma)| &\leq C_{\alpha, \beta, M} (\gamma + |\xi|)^{-M} \\ &\leq C_{\alpha, \beta, M} (1 + |\xi|)^{-M}, \end{aligned}$$

donc  $q_\gamma(x, \xi) = q(x, \xi, \gamma)$  est une famille bornée dans  $S_{1,0}^0$  d'après le théorème de Calderon-Vaillancourt [5].

Il existe  $C$ , indépendant de  $\gamma$ , tel que

$$\|Q_\gamma u\|_0 \leq C \|u\|_0,$$

ce qui termine la démonstration.

Le théorème 3.4 se déduit aisément du théorème 3.3 en utilisant  $\Lambda_\gamma$  défini par:

$$(3.15) \quad \Lambda_\gamma u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} (\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

**Proposition 3.5** (*Inégalité de Poincaré avec paramètre*).

Soit  $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support dans une boule de rayon  $\delta$ . Pour  $\gamma \geq 1/\delta$  et  $t > s$ , on a:

$$(3.16) \quad \|u\|_{s, \gamma} \leq \delta^{t-s} \|u\|_{t, \gamma}.$$

**Démonstration.** On a  $\|u\|_{s, \gamma}^2 = \int (\gamma^2 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ . Soit  $v$  telle que  $\delta^{-n} v(x/\delta) = u(x)$ , on a  $\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\delta\xi)$ . Alors

$$\|u\|_{s, \gamma}^2 = \int (\gamma^2 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\delta\xi)|^2 d\xi = \delta^{-n} \int \left( \gamma^2 + \left| \frac{\eta}{\delta} \right|^2 \right)^s |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta.$$

D'où

$$(3.17) \quad \|u\|_{s, \gamma}^2 = \delta^{-n-2s} \int ((\gamma\delta)^2 + |\eta|^2)^s |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta;$$

or, on a

$$((\gamma\delta)^2 + |\eta|^2)^s \leq ((\gamma\delta)^2 + |\eta|^2)^t, \quad \text{car } \gamma\delta \geq 1.$$

D'où, en utilisant (3.17),

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 \leq \delta^{-n-2s} \int ((\gamma\delta)^2 + |\eta|^2)^s |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \leq \delta^{-2s+2t} \|u\|_{t,\gamma}^2,$$

ce qui achève la démonstration.

### 3.4. Inégalité de Gårding

**Théorème 3.5 (Inégalité de Gårding précisée).**

Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^m)$ , et  $a(x, \xi, \gamma)$  son symbole, on écrit  $a = a_m + b$  où  $b \in \Sigma_{1,0}^{m-1}$ .

Si  $a_m \geq 0$ , alors:  $\exists C \geq 0$  indépendant de  $\gamma$  tel que:

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$(3.18) \quad \text{Re}(A_\gamma u, u) + C \|u\|_{(m-1)/2,\gamma}^2 \geq 0.$$

Pour la 4ème partie nous avons besoin du corollaire suivant:

**Corollaire 3.5'.** Soit  $A_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^m)$ .  $\exists C \geq 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists C(\varepsilon)$ , tel que,  $\forall u \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ ,

$$(3.19) \quad |\text{Re}(x_j A_\gamma u, u)| \leq C\varepsilon \|u\|_{m/2,\gamma}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{(m-1)/2,\gamma}^2$$

$$(3.20) \quad \|x_j A_\gamma u\|_0 \leq C\varepsilon \|u\|_{m,\gamma} + C(\varepsilon) \|u\|_{m-1/2,\gamma}.$$

**Démonstration du théorème 3.5.** Nous suivons la démonstration de Cordoba–Fefferman [7]. Il est clair qu'on peut supposer  $a = a_m$ .

Posons:

$$\begin{aligned} t(x, y, \xi, \gamma) &= c_0 (|\xi|^2 + \gamma^2)^{n/4} \int e^{-((\xi^2 + \gamma^2)^{1/2}(|x-z|^2 + |y-z|^2))} a(z, \xi, \gamma) dz \\ &= c_0 e^{-\lambda|x-y|^2/2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw, \end{aligned}$$

où on a posé  $\lambda = \sqrt{\gamma^2 + |\xi|^2}$ .

On démontre aisément les lemmes suivants.

**Lemme 3.5 (a).**

$$a(z, \xi, \gamma) = e^{-(|\xi|^2 + \gamma^2)^{1/2}|z|^2} \in \Sigma_{1,1/2}^0.$$

**Lemme 3.5 (b).**

Soit  $a(z, \xi, \gamma) \in \Sigma_{1,0}^m$ . On définit pour  $t \in [0, 1]$ :

$$b_t(z, \xi, \gamma) = (|\xi|^2 + \gamma^2)^{n/4} \int w^a e^{-(|\xi|^2 + \gamma^2)^{1/2}|w|^2} a(z - tw, \xi, \gamma) dw.$$

Alors  $(b_t(z, \xi, \gamma))_{t \in [0,1]}$  est une famille bornée de  $\Sigma_{1,0}^{m-|a|/2}$ .



On peut alors en déduire que:

$$t(x, y, \xi, \gamma) \in \Sigma_{1,1/2}^{m,0,0} \quad (\text{Définition 3.2}).$$

Le théorème 3.2 permet d'associer à  $t(x, y, \xi, \gamma)$  un symbole, et donc un opérateur  $T_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{1,1/2}^m)$ . De plus on a:

$$\begin{aligned} T_\gamma u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} t(x, x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^n i} \int e^{ix\xi} \partial_y \partial_\xi t(x, x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi + R_\gamma u, \end{aligned}$$

où  $R_\gamma \in \text{Op}(\Sigma_{1,1/2}^{m-1})$ .

Traisons la première intégrale, on a:

$$t(x, x, \xi, \gamma) = t_1 + t_2 + t_3,$$

avec

$$\begin{aligned} t_1 &= c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} a(x, \xi, \gamma) dw, \\ t_2 &= c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} w \cdot \partial_x a(x, \xi, \gamma) dw, \\ t_3 &= c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} \int_0^1 (1-s) \partial_x^2 a(x - sw, \xi, \gamma) w^2 ds dw. \end{aligned}$$

On a:

$$t_1 = a(x, \xi, \gamma) c_0 \int e^{-2|\tilde{w}|^2} d\tilde{w} = a(x, \xi, \gamma).$$

En posant  $\tilde{w} = \sqrt{\lambda} w$ , et  $c_0 = (\pi/2)^{-n/2}$ ,

$$t_1 = a(x, \xi, \gamma),$$

$$t_2 = 0 \quad \text{car} \int e^{-\lambda|w|^2} w_j dw = 0,$$

$$t_3 \in \Sigma_{1,0}^{m-1} \quad (\text{il suffit d'appliquer le lemme 3.5 (b)}).$$

Traisons la deuxième intégrale, on a:

$$\begin{aligned} \partial_y t(x, y, \xi, \gamma) &= C_0 \lambda^{n/2+1} (x-z) e^{-\lambda|x-y|^2/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw \\ &+ \frac{C_0}{2} e^{-\lambda|x-\bar{y}|^2/2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} \partial_w a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw, \end{aligned}$$

donc

$$\partial_{\gamma} t(x, x, \xi, \gamma) = \frac{C_0}{2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} \partial_w a(x-w, \xi, \gamma) dw.$$

En appliquant le lemma 3.5 (b), on a:  $\partial_{\gamma} t(x, x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{1,0}^m$ , donc

$$\partial_{\xi} \partial_{\gamma} t(x, x, \xi, \gamma) \in \Sigma_{1,0}^{m-1}.$$

Donc, on a:  $T_{\gamma} u = A_{\gamma} u + R_{\gamma} u$ , avec  $R_{\gamma} \in \text{Op}(\Sigma_{1,1/2}^{m-1})$ . Or

$$\begin{aligned} (T_{\gamma} u, u) &= \int e^{i(x-\gamma.\xi)} c_0 \lambda^{n/2} e^{-\lambda(|x-z|^2 + |y-z|^2)} a(z, \xi, \gamma) u(y) \overline{u(x)} dx dz d\xi dy \\ &= \int c_0 a(z, \xi, \gamma) |Wu(z, \xi, \gamma)|^2 d\xi dz, \end{aligned}$$

où

$$Wu(z, \xi, \gamma) = \lambda^{n/4} \int e^{i(x-z)\xi - \lambda|x-z|^2} \bar{u}(x) dx.$$

Comme dans Cordoba–Fefferman [7],  $W$  est continue de  $L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ .

Par suite  $(T_{\gamma} u, u)$  est positif. Donc,

$$(A_{\gamma} u, u) + (R_{\gamma} u, u) \geq 0.$$

Or

$$(R_{\gamma} u, u) = (\Lambda_{(1-m)\gamma/2} R_{\gamma} u, \Lambda_{(m-1)\gamma/2} u),$$

et

$$\Lambda_{(1-m)\gamma/2} R_{\gamma} \in \text{Op}(\Sigma_{1,1/2}^{(m-1)\gamma/2}).$$

Donc, il existe  $C \geq 0$  indépendant de  $\gamma$ , tel que:

$$C \|u\|_{(m-1)\gamma/2, \gamma} \geq \|R_{\gamma} u\|_0.$$

On a:

$$(A_{\gamma} u, u) + C \|u\|_{(m-1)\gamma/2, \gamma}^2 \geq 0.$$

### Démonstration du corollaire 3.5'.

*Preuve de (3.19).* Soit  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$  vérifiant:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 & \text{si } |x| \leq \frac{3}{2}, \\ &= 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{aligned}$$

On a:

$$\text{Re}(x_j A_{\gamma} u, u) = \text{Re} \left( \chi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) x_j A_{\gamma} u, u \right).$$

On a  $\chi(x/\varepsilon)x_j \in \Sigma_{1,0}^0$ . Posons  $a = \sigma_{A_\gamma}$ . Le symbole de  $\chi(x/\varepsilon)x_j A_\gamma$  est  $\chi(x/\varepsilon)x_j a(x, \xi, \gamma) + r(x, \xi, \gamma)$  avec  $r \in \Sigma_{1,0}^{m-1}$ .

Posons  $b(x, \xi, \gamma) = \chi(x/\varepsilon)x_j a(x, \xi, \gamma)$ . On a, pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I$ ,

$$|b(x, \xi, \gamma)| \leq \frac{3}{2}\varepsilon |a(x, \xi, \gamma)|.$$

Soit  $C > 0$  tel que, pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I$ ,

$$C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geq \frac{3}{2}|a(x, \xi, \gamma)|.$$

On a:

$$b(x, \xi, \gamma) + \varepsilon C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geq 0$$

et

$$-b(x, \xi, \gamma) + \varepsilon C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geq 0.$$

En appliquant le théorème 3.5, on en déduit (3.19).

*Preuve de (3.20).* On a, comme  $u \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ ,  $x_j A_\gamma u = x_j A_\gamma \chi(x/\varepsilon)u$ , et  $x_j A_\gamma \chi(x/\varepsilon)$  est un opérateur  $\in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^m)$ . En effet, si  $a$  est le symbole de  $A$ , et  $a_k$  une suite convergente vers  $a$  dans  $\Sigma_{1,0}^m$ ,  $a_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n} \times I)$ , on a:

$$\begin{aligned} x_j A_\gamma^k \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u &= \int e^{i(x-y)\xi} x_j a_k(x, \xi, \gamma) \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u(y) dy d\xi \\ &= \int e^{i(x-y)\xi} (x_j - y_j) a_k(x, \xi, \gamma) \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u(y) dy d\xi \\ &\quad + \int e^{i(x-y)\xi} a_k(x, \xi, \gamma) y_j \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u(y) dy d\xi \\ &= - \int e^{i(x-y)\xi} D_\xi a_k(x, \xi, \gamma) \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u(y) dy d\xi \\ &\quad + \int e^{i(x-y)\xi} a_k(x, \xi, \gamma) y_j \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u(y) dy d\xi \\ &= B_\gamma^k \circ \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u + A_\gamma^k \circ y_j \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) u, \end{aligned}$$

où  $\sigma_{B_\gamma^k} = -D_\xi a_k$  qui converge dans  $\Sigma_{1,0}^{m-1}$  vers  $-D_\xi a$ . On en déduit que  $x_j A_\gamma \chi(x/\varepsilon) \in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^m)$  et que

$$\sigma_{x_j A_\gamma \chi(x/\varepsilon)}(x, \xi, \gamma) = x_j a(x, \xi, \gamma) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

modulo  $\Sigma_{1,0}^{m-1}$ .

La fin de la démonstration est identique à la démonstration de (3.19).

#### 4. Preuve

En utilisant essentiellement (2.1), on s'inspire de la preuve de [8].

##### 4.1. Estimation sur les symboles

**Lemme 4.1.** Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  comme dans le paragraphe 1.1.1,  $\Omega_1$  un ouvert relativement compact,  $\bar{\Omega}_1$  inclus dans  $\Omega$ ,  $\psi$  une fonction équivalente à  $\varphi$  sur  $\Omega_1$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\chi = 1$  sur  $\bar{\Omega}_1$ .

Posons

$$(4.1) \quad a(x, \xi, \gamma) = \chi(x)p(x, \xi - i\gamma\psi'(x)).$$

Il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in \bar{\Omega}_1$ , pour tout  $(\xi, \Gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$ , on ait

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x, \xi, \Gamma) \right|^2 \geq C(|\xi|^2 + \Gamma^2).$$

**Preuve.** A cause de l'homogénéité de  $a$ , il suffit de montrer que le vecteur  $\partial a(x, \xi, \Gamma)/\partial \xi$  ne s'annule pas sur  $\bar{\Omega}_1 \times S^n$ . Sinon, on pourrait trouver  $(x; \xi, \Gamma) \in \bar{\Omega}_1 \times S^n$  avec

$$(4.3) \quad 0 = \frac{\partial a}{\partial \xi}(x, \xi, \Gamma) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)),$$

et par suite,  $p$  étant homogène de degré 2 ( $\neq 0$ ), on obtiendrait de (4.3)  $p(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = \{p, \psi\}(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = 0$ . Or  $p$  étant de type principal (4.3) implique  $\Gamma \neq 0$ ; par suite,  $\{p, \psi\}$  étant de degré 1, il vient, comme  $p(x, \xi)$  est réel  $\{\{p, \psi\}, \psi\}(x, \xi) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse (1.3) et donne le résultat.

Remarquons que, comme  $p(x, \xi)$  est un symbole réel de degré 2, on obtient, pour  $\psi C^\infty$  réelle, l'identité

$$(4.4) \quad \begin{cases} p(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = j_1(x, \xi, \Gamma) + i\Gamma j_2(x, \xi, \Gamma), & \text{avec} \\ j_1(x, \xi, \Gamma) = p(x, \xi) - \frac{\Gamma^2}{2} \{\{p, \psi\}, \psi\}(x, \xi), \\ j_2(x, \xi, \Gamma) = -\{p, \psi\}(x, \xi). \end{cases}$$

**Lemme 4.2.** Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  vérifiant les hypothèses du théorème 1,  $x_0 \in \Omega$ . Il existe un voisinage  $\Omega_0$  de  $x_0$ ,  $\Omega_0 \subset \Omega$ , une fonction  $C^\infty$  réelle  $\psi$  équivalente à  $\varphi$  sur  $\Omega_0$ , des fonctions réelles  $a(x, \xi, \Gamma)$ ,  $b(x, \xi, \Gamma) \in C^\infty(\Omega_0 \times S^n)$ , des constantes  $C_1, C_2$ , tels que, pour tout  $(x; \xi, \Gamma) \in \Omega_0 \times S^n$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & C_1 |j_1(x, \xi, \Gamma)|^2 + C_2 |j_2(x, \xi, \Gamma)|^2 + a(x, \xi, \Gamma)j_1(x, \xi, \Gamma) \\ & + b(x, \xi, \Gamma)j_2(x, \xi, \Gamma) + \{j_1, j_2\}(x, \xi, \Gamma) \geq 0, \end{aligned}$$

où  $j_1$  et  $j_2$  sont donnés par (4.4).

**Preuve.** Comme  $d\varphi \neq 0$  sur  $\Omega$ , on peut trouver un voisinage relativement compact  $\Omega'$  de  $x_0$  et un système de coordonnées  $(t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ , centré en  $x_0$ , tels que  $\varphi \equiv t$  sur  $\Omega'$ . Posons alors

$$\psi(t, y) = t - \frac{At^2}{2},$$

et

$$\Omega_0 = \Omega' \cap \left\{ (t, y), |t| < \frac{1}{2A} \right\}.$$

On a, utilisant (4.4) et les variables  $x = (y, t)$  de variables duales  $\xi = (\eta, \tau)$ , l'identité

$$(4.6) \quad \begin{aligned} j_1 &= p(y, t, \eta, \tau) - \frac{\Gamma^2}{2} p''_{\tau\tau}(y, t, \eta, \tau)(1 - At)^2, \\ j_2 &= -p'_{\tau}(y, t, \eta, \tau)(1 - At). \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord, qu'en utilisant (2.1), (1.5), on prouve qu'il existe une constante  $C_1$ , indépendante de  $A$ , telle que pour  $(x, \xi) \in \Omega' \times S^{n-1}$ , on ait

$$(4.7) \quad \{p'_{\tau}, p\}(x, \xi) + C_1(|p(x, \xi)| + |p'_{\tau}(x, \xi)|) \geq 0,$$

ce qui donne pour  $(x, \xi) \in \Omega' \times S^{n-1}$  avec  $p'_{\tau}(x, \xi) = 0$ ,

$$(4.8) \quad \{p'_{\tau}, p\}(x, \xi) + C_1|p(x, \xi)| \geq 0,$$

et par homogénéité la même inégalité pour

$$(x, \xi) \in \Omega' \times \mathbf{R}^n \quad \text{si } p'_{\tau}(x, \xi) = 0.$$

De (4.6), il vient l'identité

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \{j_1, j_2\} &= (1 - At)\{p'_{\tau}, p\}(x, \xi) + A(p'_{\tau}(x, \xi))^2 \\ &+ A\Gamma^2(1 - At)^2(p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 + \frac{\Gamma^2}{2}(1 - At)^3\{p''_{\tau\tau}, p'_{\tau}\}(x, \xi). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $(x; \xi, \Gamma) \in \Omega_0 \times S^n$ , il vient,

$$(4.10) \quad j_1(x, \xi, \Gamma) = j_2(x, \xi, \Gamma) = 0 \quad \text{implique} \quad \{j_1, j_2\} \geq 0.$$

En effet, de (4.6), (4.9) il vient pour  $j_1 = j_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \{j_1, j_2\} &= (1 - At)\{p'_{\tau}, p\}(x, \xi) + A\Gamma^2(1 - At)^2(p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 \\ &+ \frac{\Gamma^2}{2}(1 - At)^3\{p''_{\tau\tau}, p'_{\tau}\}(x, \xi), \end{aligned}$$

avec

$$p'_\eta(x, \xi) = 0, \quad p(x, \xi) = \frac{\Gamma^2}{2} p''_{\tau\tau}(x, \xi)(1 - At)^2.$$

D'où, en utilisant (4.8) et la définition de  $\Omega_0$ ,

$$\{j_1, j_2\} \cong -\frac{C_1}{2} |p(x, \xi)| \\ + A \Gamma^2 (1 - At)^2 \left[ (p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 + \frac{1}{2A} (1 - At) \{p''_{\tau\tau}, p'_\eta\}(x, \xi) \right]$$

soit, comme  $j_1 = 0$ ,

$$\{j_1, j_2\} \cong A \Gamma^2 (1 - At)^2 \left[ (p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 - \frac{C_1}{4A} |p''_{\tau\tau}(x, \xi)| + \frac{1 - At}{2A} \{p''_{\tau\tau}, p'_\eta\}(x, \xi) \right],$$

ce qui assure (4.10) pour  $A$  assez grand, car  $(p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 \cong \omega' > 0$  sur l'ouvert relativement compact  $\Omega'$ ,  $\omega'$  étant indépendant de  $A$ , ainsi que  $C_1$ . En outre, des identités (4.6), il vient

$$d_{\xi, \Gamma} j_1 = p'_\eta(x, \xi) d\tau + p'_\eta(x, \xi) d\eta - \Gamma p''_{\tau\tau}(x, \xi) (1 - At)^2 d\Gamma,$$

$$d_{\xi, \Gamma} j_2 = -(1 - At) p''_{\tau\tau}(x, \xi) d\tau - p''_{\tau\tau}(x, \xi) (1 - At) d\eta.$$

Par suite si pour  $(x; \xi, \Gamma) \in \Omega_0 \times S^n$ ,  $j_1(x, \xi, \Gamma) = j_2(x, \xi, \Gamma) = 0$ , on a  $p'_\eta(x, \xi) = 0$ , et donc, comme  $p$  est de type principal  $p'_\eta(x, \xi) \neq 0$ . Or  $p''_{\tau\tau} \neq 0$  (1.3), et on obtient  $d_{\xi, \Gamma} j_1 \wedge d_{\xi, \Gamma} j_2 \neq 0$ , ce qui avec (4.10) prouve le lemme 4.2.

#### 4.2. Estimation pour $\|P_\gamma u\| + \|(P_\gamma)^* u\|$

On s'inspire de la preuve de [8].

**Lemme 4.3.** Soient  $P$ ,  $\mathcal{H}$  comme dans le paragraphe 1.1.1,  $\Omega_1$  un ouvert relativement compact,  $\bar{\Omega}_1$  inclus dans  $\Omega$ ,  $\psi$  une fonction équivalente à  $\varphi$  sur  $\Omega_1$ .

Alors il existe  $\delta_0 > 0$  et une fonction  $C(\delta) > 0$  définie sur  $]0, \delta_0]$ , tendant vers l'infini quand  $\delta$  tend vers 0, tels que pour  $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ , diamètre  $\text{supp } u \leq \delta \leq \delta_0$ ,  $\gamma \cong \delta^{-1}$ ,

$$(4.11) \quad \|P_\gamma u\|_{L^2} + \|(P_\gamma)^* u\|_{L^2} \cong C(\delta) \|u\|_{1, \gamma},$$

où  $P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi}$ ,  $\|u\|_{1, \gamma}$  donné par (3.13).

**Preuve.** Comme les coefficients de  $P$  sont  $L_{loc}^\infty$ , on obtient que  $\bar{\Omega}_1$  est compact inclus dans  $\Omega$ , et qu'il suffit d'établir le lemme avec  $P_\gamma$  remplacé par l'opérateur de symbole  $\chi(x)p(x, \xi - i\gamma\psi'(x))$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\chi = 1$  sur  $\bar{\Omega}_1$ .

Du lemme 4.1, posant  $a(x, \xi, \gamma) = \chi(x)p(x, \xi - i\gamma\psi'(x))$ , il vient l'existence de  $C = C_0 > 0$  telle que pour tout  $(x, \xi, \gamma) \in \bar{\Omega}_1 \times \mathbb{R}^n \times [1, +\infty)$ ,

$$(4.12) \quad \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x, \xi, \gamma) \right|^2 \cong C_0(\gamma^2 + |\xi|^2).$$

Par ailleurs, comme polynôme en  $\xi, \gamma$  de degré 2 à coefficients  $C_0^*$ , il est clair que  $a \in \Sigma_{1,0}^2$  (Déf. (3.1)). Posons  $A = a(x, D_x, \gamma)$ . On a

$$[A, x_j]^* [A, x_j] = x_j [A^*, [A, x_j]] + x_j [A, x_j] A^* + A^* x_j [x_j, A].$$

Par suite, pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , les normes et produits scalaires étant  $L^2$  sauf mention explicite,

$$\|[A, x_j]u\|^2 = (x_j B_2 u, u) + (A^* u, [A, x_j]^* x_j u) + (x_j [x_j, A] u, Au),$$

où  $B_2 \in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^2)$  (3.5).

Par suite, si  $\text{supp } u \subset B(0, \varepsilon) \subset \Omega_1$ , on déduit du corollaire 3.5'

$$\begin{aligned} \|[A, x_j]u\|^2 &\leq C_1 \varepsilon \|u\|_{1,\gamma}^2 + C_2(\varepsilon) \|u\|_{1/2,\gamma}^2 + \varepsilon (\|A^* u\|^2 + \|Au\|^2) \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon} \{ \|[A, x_j]^* x_j u\|^2 + \|x_j [x_j, A] u\|^2 \}, \end{aligned}$$

$C_2(\varepsilon)$  étant a priori non bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0, mais bornée sur tout  $[\alpha, +\infty)$  avec  $\alpha > 0$ .

On obtient alors, réutilisant le corollaire 3.5',

$$\|[A, x_j]u\|^2 \leq \tilde{C}_1 \varepsilon \|u\|_{1,\gamma}^2 + \tilde{C}_2(\varepsilon) \|u\|_{1/2,\gamma}^2 + \varepsilon (\|A^* u\|^2 + \|Au\|^2).$$

Par suite, si  $\text{supp } u \subset B(0, \delta)$ ,  $\delta \leq \varepsilon$ , si  $\gamma \geq \delta^{-1}$ , il vient de (3.16),

$$\|[A, x_j]u\|^2 \leq (\tilde{C}_1 \varepsilon + \tilde{C}_2(\varepsilon) \delta) \|u\|_{a,\gamma}^2 + \varepsilon (\|A^* u\|^2 + \|Au\|^2).$$

Or de l'inégalité (4.12), il vient, en remarquant que le symbole de  $[A, x_j]$  est  $(1/i) \partial a / \partial \xi_j$ ,

$$\sum_{j=1}^n \|[A, x_j]u\|^2 \geq (nC_0 - \delta C_3) \|u\|_{1,\gamma}^2.$$

Finalement, on a, pour  $\text{supp } u \subset B(0, \delta)$ ,  $\delta \leq \varepsilon$ ,  $\gamma \geq \delta^{-1}$ ,

$$\varepsilon (\|Au\|^2 + \|A^* u\|^2) + C\varepsilon \|u\|_{1,\gamma}^2 + C(\varepsilon) \delta \|u\|_{1,\gamma}^2 \geq C_4 \|u\|_{1,\gamma}^2.$$

En outre, on peut supposer  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  avec  $C\varepsilon_0 = C_4/2$ . D'où, on a, pour  $\text{supp } u \subset B(0, \delta)$ ,  $\delta \leq \varepsilon$ ,  $\gamma \delta \geq 1$ ,

$$\|Au\|^2 + \|A^* u\|^2 \geq \left( \frac{C_4}{2} - C(\varepsilon) \delta \right) \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{1,\gamma}^2.$$

On peut supposer, en la majorant éventuellement, que la fonction  $C(\varepsilon)$  est continue et vérifie  $C(\varepsilon) \geq \varepsilon^{-1} C_4/4$ . Soit alors

$$0 < \delta \frac{4}{C_4} \leq \frac{1}{C(\varepsilon_0)}, \quad \frac{C_4}{4\delta} \in [C(\varepsilon_0), +\infty)$$

est une valeur atteinte par  $C$ . Il existe donc  $\varepsilon(\delta)$  avec  $C(\varepsilon(\delta)) \delta 4/C_4 = 1$ , on a

$$1 \geq \varepsilon(\delta)^{-1} \frac{C_4}{4} \delta \frac{4}{C_4}$$

soit  $\delta \leq \varepsilon(\delta)$ .

Par ailleurs

$$\varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

car sinon on pourrait trouver une suite

$$\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \varepsilon(\delta_n) \geq \varepsilon_1 > 0.$$

Par suite  $C(\varepsilon(\delta_n))$  resterait borné et le produit  $C(\varepsilon(\delta_n))\delta_n$  tendrait vers 0, ce qui est impossible car  $C(\varepsilon(\delta))\delta = C_4/4$ .

Finalement, pour  $\delta \leq C_4/4C(\varepsilon_0)$ ,  $\text{supp } u \subset B(0, \delta)$ ,  $\gamma\delta \geq 1$ ,

$$\|Au\|^2 + \|A^*u\|^2 \geq \frac{C_4}{4\varepsilon(\delta)} \|u\|_{1,\gamma}^2, \quad \text{avec } \varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

soit le résultat du lemme.

#### 4.3. Estimation finale

Nous prouvons ici une inégalité de Carleman [6].

**Lemme 4.4.** *Soient  $P$  et  $\mathcal{H}$  comme dans le paragraphe 1.1.1. Pour tout  $x_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage  $V(x_0)$ ,  $C_1, C_2 > 0$ , une constante  $\gamma(x_0) \geq 2$ , tels que, pour tout  $u \in C_0^\infty(V(x_0))$ , pour tout  $\gamma \geq \gamma(x_0)$*

$$(4.13) \quad \|P_\gamma u\| \geq C_1 \|u\|_{1,\gamma} \geq C_2 (\gamma \|u\|_{L^2} + \|u\|_{\mathcal{H}}).$$

**Preuve.** Prolongeant par homogénéité de degré 2 en  $(\xi, \Gamma)$ , l'inégalité (4.5) du lemme 4.2, il vient pour  $\gamma \geq 1$ ,  $x \in \Omega_0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , avec  $\langle \gamma; \xi \rangle^2 = |\xi|^2 + \gamma^2$ ,

$$\begin{aligned} & C_1 \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} |j_1(x, \xi, \gamma)|^2 + C_2 \gamma^{-2} |\gamma j_2(x, \xi, \gamma)|^2 + a \left( x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle} \right) j_1(x, \xi, \gamma) \\ & + \gamma^{-1} b \left( x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle} \right) \langle \gamma; \xi \rangle \gamma j_2(x, \xi, \gamma) + \{j_1, j_2\}(x, \xi, \gamma) \geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gårding précisée (3.18), il vient pour  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ ,

$$\begin{aligned} & (\text{Op}[C_1 \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} |j_1|^2 + C_2 \gamma^{-2} |\gamma j_2|^2 + a_0 j_1 + \gamma^{-1} b_1 \gamma j_2] u, u) \\ & + \gamma^{-1} \|P_\gamma u\|^2 - \gamma^{-1} \|(P_\gamma)^* u\|^2 + C_3 \|u\|_{12,\gamma}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$a_0 = a \left( x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle} \right), \quad b_1 = \langle \gamma; \xi \rangle b \left( x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle} \right).$$



Donc en multipliant par  $\gamma$ , on obtient, posant  $p_\gamma = p(x, \xi - i\gamma\psi'(x))$ ,

$$(4.14) \quad \left( \text{Op} \left[ C_1 \gamma \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} \left| \frac{p_\gamma + \bar{p}_\gamma}{2} \right|^2 + C_2 \gamma^{-1} \left| \frac{p_\gamma - \bar{p}_\gamma}{2i} \right|^2 + a_0 \gamma \frac{p_\gamma + \bar{p}_\gamma}{2} + b_1 \frac{p_\gamma - \bar{p}_\gamma}{2i} \right] u, u \right) + \|P_\gamma u\|^2 - \|(P_\gamma)^* u\|^2 + C_3 \gamma \|u\|_{i/2, \gamma}^2 \geq 0.$$

Or, comme  $a_0 \in \Sigma_{1,0}^0$  (Déf. 3.1), pour  $\alpha > 0$ ,

$$(4.15) \quad \left| \left( \text{Op} \left( a_0 \gamma \frac{p_\gamma + \bar{p}_\gamma}{2} \right) u, u \right) \right| \leq \alpha \|P_\gamma u\|^2 + \alpha \|(P_\gamma)^* u\|^2 + \frac{C_4 \gamma^2}{\alpha} \|u\|^2.$$

De même, comme  $b_1 \in \Sigma_{1,0}^1$ , on a

$$(4.16) \quad \left| \left( \text{Op} \left( b_1 \frac{p_\gamma - \bar{p}_\gamma}{2i} \right) u, u \right) \right| \leq \alpha \|P_\gamma u\|^2 + \alpha \|P_\gamma^* u\|^2 + \frac{C_4}{\alpha} \|u\|_{i, \gamma}^2.$$

De même, on a

$$(4.17) \quad \left| \left( \text{Op} \left( C_1 \gamma \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} \left| \frac{p_\gamma + \bar{p}_\gamma}{2} \right|^2 \right) u, u \right) \right| \leq C_5 \gamma \langle \gamma; \xi \rangle^{-1} \|(P_\gamma + (P_\gamma)^*) u\|^2 + C_6 \gamma \|u\|_{i/2, \gamma}^2$$

ainsi que

$$(4.18) \quad \left| \left( \text{Op} \left( C_2 \gamma^{-1} \left| \frac{p_\gamma - \bar{p}_\gamma}{2i} \right|^2 \right) u, u \right) \right| \leq C_7 \gamma^{-1} \|(P_\gamma - (P_\gamma)^*) u\|^2 + C_8 \gamma \|u\|_{i/2, \gamma}^2,$$

car  $P_\gamma - (P_\gamma)^* = \gamma B_1$ , où  $B_1 \in \text{Op}(\Sigma_{1,0}^1)$ .

Pour  $\alpha = \frac{1}{8}$ , de (4.14), ..., (4.18), il vient

$$\|P_\gamma u\|_0^2 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{C}{\gamma} \right) - \|(P_\gamma)^* u\|^2 \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{C}{\gamma} \right) \geq -C \|u\|_{i, \gamma}^2,$$

d'où pour  $\gamma \geq 2C$ ,

$$7\|P_\gamma u\|^2 - \|(P_\gamma)^* u\|^2 \geq -4C \|u\|_{i, \gamma}^2.$$

Or de (4.11), il vient, pour diamètre  $\text{supp } u \leq \delta \leq \delta_1$ ,  $\gamma\delta \geq 1$ ,

$$\|P_\gamma u\|^2 + \|(P_\gamma)^* u\|^2 \geq \frac{1}{2} C(\delta)^2 \|u\|_{i, \gamma}^2,$$

avec  $\lim_{\delta \rightarrow 0} C(\delta) = +\infty$ .

Par suite, ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités, pour  $\gamma \geq \max(2C, \delta^{-1})$ ,  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ , diamètre  $\text{supp } u \leq \delta \leq \delta_1$ ,

$$\|P_\gamma u\|^2 \geq \frac{1}{8} \left( \frac{C(\delta)^2}{2} - 4C \right) \|u\|_{i, \gamma}^2.$$

Choisissons alors  $\delta_2 \leq \delta_1$  tel que  $C(\delta_1)^2 \geq 8C + 8$ , puis  $\gamma \geq \max(2C, \delta_2^{-1})$ , alors pour  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ , diamètre  $\text{supp } u \leq \delta_2$ ,  $\|P_\gamma u\| \geq \|u\|_{i, \gamma}$ , ce qui achève la preuve du lemme 4.4 duquel on déduit aisément le théorème 1.

#### 4.4. Preuve des corollaires

Dans ce paragraphe, on supposera que le symbole principal de l'opérateur est

$$p = \tau^2 + q(t, x, \xi),$$

où  $(t, x_1, \dots, x_{n-1})$  de variables duales  $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  est un système de coordonnées locales,  $x$  désignant  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , et  $\xi$   $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ,  $q(t, x, \xi)$  étant une forme quadratique en  $\xi$ ,  $C^\infty$  en  $(t, x)$ .

On suppose ici que l'hypersurface  $S$  a pour équation  $t = 0$  et que le point  $x_0$  de  $\mathbf{R}^n$  est  $0_{\mathbf{R}^n}$ .

**Lemme 4.4.1.** *Sous les hypothèses du corollaire 1.2.1, il existe une fonction  $C^\infty$  réelle  $\lambda$  définie au voisinage de  $0_{\mathbf{R}^n}$  avec  $\lambda(0) = 1$ , un voisinage  $V$  de  $0_{\mathbf{R}^n}$  tels que pour  $(x, t; \xi, \tau) \in V \times \mathbf{R}^n$*

$$p(x, t, \xi, \tau) = \{p, t\}(x, t, \xi, \tau) = 0 \quad \text{implique} \quad H_p^2(t\lambda)(x, t, \xi, \tau) \leq 0.$$

**Preuve.** On pose  $q(t, x, \xi) = \langle Q(t, x)\xi, \xi \rangle$ ,  $Q(t, x)$  étant une matrice symétrique  $(n-1) \times (n-1)$  à coefficients  $C^\infty$ . Comme  $p$  est de type principal en 0 on a

$$q'_\xi(0, 0, \xi) = {}^t T_0^{-1} \xi,$$

où  $T_0$  est une matrice inversible  $(n-1) \times (n-1)$ . On pose alors

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(t, x) = 1 + \langle ax, x \rangle - Ct|x|^2, \\ \text{où la forme quadratique } a \text{ est définie par} \\ a = T_0 Q''_{\xi\xi}(0, 0) {}^t T_0, \text{ et } C \text{ une constante } > 0. \end{array} \right.$$

On a

$$(4.20) \quad H_p^2(t\lambda) = \lambda H_p^2(t) + 2H_p(\lambda)H_p(t) + tH_p^2(\lambda).$$

En outre, d'après l'hypothèse (1.7), si  $V$  est un voisinage compact de  $0_{\mathbf{R}^n}$ , l'ensemble des  $(t, x; \xi, \tau) \in S^*(V)$  tels que  $p = \tau = t = |\xi|^2 - 1 = 0 = H_p^2(t)$  est fini et par suite on peut supposer que le seul point  $(t, x)$  pour lequel il y a des bicaractéristiques tangentes à un ordre strictement supérieur à 2 est le point  $(0, 0)$ .

De (4.20), il vient

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t\lambda)) &= \lambda \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t)) + \lambda' H_p(t) \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial t} (H_p(\lambda)) H_p(t) + 2H_p(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} (H_p(t)) \\ &+ H_p^2(\lambda) + t \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(\lambda)). \end{aligned}$$

Soit donc  $\rho_0 = (0, 0; 0, \xi_0)$  un point tel que

$$\tau = q(0, 0, \xi_0) = t = |\xi_0|^2 - 1 = 0 \quad \text{avec } q'_i(0, 0, \xi_0) = 0.$$

On a en outre

$$(4.22) \quad H_p(\lambda) = 2\tau\lambda'_i + q'_\xi \cdot \lambda'_x,$$

et

$$(4.23) \quad \begin{aligned} H_p^2(\lambda) &= 2\tau[2\tau\lambda''_{ii} + q''_{\xi i} \cdot \lambda'_x + q'_\xi \cdot \lambda''_{xi}] \\ &+ q'_\xi \cdot [2\tau\lambda''_{ix} + q''_{\xi x} \cdot \lambda'_x + q'_\xi \cdot \lambda''_{xx}] - q'_i 2\lambda'_i - q'_x \cdot [q''_{\xi\xi} \cdot \lambda'_x]. \end{aligned}$$

Donc comme  $\lambda'_x = \lambda'_i = 0$  en  $(0, 0)$ , il vient de (4.21), (4.22), (4.23)

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t))(\rho_0) + H_p^2(\lambda)(\rho_0),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) &= -2\langle Q''_{ii}(0, 0)\xi_0, \xi_0 \rangle + 2\langle aq'_\xi, q'_\xi \rangle \\ &= \langle [-2Q''_{ii}(0, 0) + 2T_0^{-1}T_0Q''_{ii}(0, 0)T_0^{-1}] \xi_0, \xi_0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

en utilisant (4.19).

En outre si  $X$  est un champ tangent à  $\Sigma$ , comme  $H_p^2(t\lambda) \leq 0$  sur  $\Sigma$  ((4.20)) et que  $H_p^2(t\lambda)(\rho_0) = 0$ , on a  $X(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = 0$ . Calculons, en utilisant (4.21),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_p^2(t))(\rho_0) + 2 \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(\lambda))(\rho_0).$$

Or, en utilisant (4.23), on a

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(\lambda))(\rho_0) = \lambda''_{xx} (q'_\xi)^2 + \lambda''_{xx} (q'_\xi, q''_{\xi i})$$

et par suite

$$(4.24) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_p^2(t\lambda)(\rho_0) = \langle [-2Q''_{ii}(0, 0) + 4\Lambda_1 T_0 Q''_{ii}(0) - 4CT_0^{-1} T_0^{-1}] \xi_0, \xi_0 \rangle,$$

avec  $q''_{\xi i} = \Lambda_1 \xi$  où  $\Lambda_1$  est une matrice  $(n-1) \times (n-1)$ .

Par suite, comme  $|\xi_0| = 1$ , on obtient que

$$(4.25) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \leq \|\Omega_p\| - 4C\|T_0\|^{-2},$$

où  $\|\Omega_p\|$  est la norme de la forme quadratique ne dépendant que de  $p$  donnée par les deux premiers termes dans (4.24).

Par suite, il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , ne dépendant que du jet des coefficients de  $p$  en  $(0, 0)$ , tels que pour  $C \cong C_0$

$$(4.26) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \leq -\varepsilon_0 C.$$

Remarquons que  $\varepsilon_0$  et  $C_0$  ne dépendent pas de la direction  $\xi_0$  mais seulement du point de base.

En outre si  $X$  est un champ unitaire tangent à  $\Sigma$ , on a la majoration

$$(4.27) \quad \left| X \frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \right| \leq C(p),$$

où  $C(p)$  est une constante ne dépendant que de  $p$ . En effet, il suffit de remarquer qu'on ne peut "atteindre"  $\lambda_{xx}$  avec  $X\partial/\partial t$  car le champ  $\partial/\partial t$  est transverse à  $\Sigma$ .

Posant alors

$$X_1 = \tau^2 + q,$$

$$X_2 = 2\tau,$$

$$X_3 = |\xi|^2 - 1,$$

$$X_4 = t,$$

$X_1, \dots, X_{2n}$  un système de coordonnées locales au voisinage de  $\rho_0$ , on examine  $\omega = H_p^2(t\lambda)$ , au voisinage de  $\rho_0$  en des points tels que  $p = H_p(t\lambda) = |\xi|^2 - 1 = 0$ , on a

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \omega(h_1, \dots, h_{2n}) = & + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_4^2}(0) h_4^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_4 \partial X_2}(0) h_4 h_2 \\ & + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_2^2}(0) h_2^2 + 2 \sum_{j \geq 5} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_4 \partial X_j}(0) h_4 h_j + 2 \sum_{j \geq 5} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_2 \partial X_j}(0) h_2 h_j \\ & + \sum_{j, k \geq 5} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_j \partial X_k}(0) h_j h_k + \varepsilon(h) |h|^2, \end{aligned}$$

car  $h_1 = 0 = h_3$  (car  $p = |\xi|^2 - 1 = 0$  au point  $h$ ) et

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = 0.$$

En outre  $H_p(t\lambda) = 0$  et donc  $2\tau\lambda + tH_p(\lambda) = 0$ , et par conséquent,  $h_2 = \alpha(h)h_4$ . On obtient donc que l'expression (4.28) est négative en utilisant (4.26), (4.27) et l'hypothèse (1.7)(ii).

Nous avons donc prouvé que pour tout  $\rho_0$  tel que  $p = H_p(t) = t = |\xi|^2 - 1 = 0 = H_p^2(t)$ , il existe un voisinage  $W$  tel que si  $\rho \in W$  et  $p = H_p(t\lambda) = 0$  alors  $H_p^2(t\lambda)(\rho) \leq 0$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $0_{\mathbb{R}^n}$  tel que pour tout  $y \in V$ , pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$  tel que  $p(y, \eta) = H_p(t\lambda)(y, \eta) = 0$  on ait  $H_p^2(t\lambda)(y, \eta) \leq 0$ .

En effet sinon, on pourrait trouver une suite  $(y_n; \eta_n) = (x_n, t_n; \xi_n, \tau_n)$  avec

$$\begin{array}{l} t_n \rightarrow 0 \\ x_n \rightarrow 0 \end{array} \quad \tau_n^2 + |\xi_n|^2 = 1 \quad \text{telle que}$$

$$p(y_n, \eta_n) = H_p(t\lambda)(y_n, \eta_n) = 0$$

et

$$H_p^2(t\lambda)(y_n, \eta_n) > 0.$$

Or, en extrayant une sous-suite, on peut supposer par compacité que  $(\tau_n, \xi_n) \rightarrow (\tau_0, \xi_0)$ ,  $\tau_0^2 + |\xi_0|^2 = 1$ .

Comme  $H_p(t\lambda) = tH_p(\lambda) + \lambda H_p(t) = 0$ , que  $t_n$  tend vers 0 et  $\lambda$  vers 1, il vient

$$p(0, 0; \xi_0, \tau_0) = H_p(t)(0, 0; \xi_0, \tau_0) = 0,$$

et posant  $\rho_0 = (0, 0; \xi_0, \tau_0)$ , soit  $H_p^2(t)(\rho_0) < 0$  ce qui est impossible, soit on a  $H_p^2(t)(\rho_0) = 0$ .

Or, on a vu que dans un voisinage de  $\rho_0$  si  $p = H_p(t\lambda) = 0$  alors  $H_p^2(t\lambda) \leq 0$ , ce qui contredit  $H_p^2(t\lambda)(y_n, \eta_n) > 0$ . Ceci achève la preuve du lemme 4.4.1.

Par conséquent du lemme 4.4.1 et du théorème 1.2.1, il vient:

il existe un voisinage  $V$  de  $0_{\mathbb{R}^n}$ , tel que pour tout  $u \in C^\infty(V)$  telle que

$$Pu = 0, \quad \text{supp } u \subset \{t\lambda(t, x) \geq 0\},$$

$$\text{supp } u \cap \{t\lambda(t, x) = 0\} \subset\subset V,$$

alors  $u = 0$  sur un voisinage de  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

Or la dernière condition est ici automatiquement vérifiée grâce à la pseudo-convexité sur  $V \setminus \{0\}$ , et on a  $\text{supp } u \cap \{t\lambda(t, x)\} = \{0\}$ . Ceci achève la preuve du corollaire 1.2.1.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983), 77-108.
2. S. Alinhac, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-1983, Exposé III, Ecole Polytechnique, Paris et article à paraître aux Annales de Fourier 1984.
3. S. Alinhac and M. S. Baouendi, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Exposé n° 22 (1979).
4. H. Bahouri, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay), 1982.
5. A. Calderon and R. Vaillancourt, *A class of bounded  $\psi$  do's*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **69** (1972), 1185-1187.
6. T. Carleman, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. Mat. Astr. Fys **26B** (17) (1939), 1-9.

7. A. Cordoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Commun. on PDE **3**(11) (1978), 979–1005.
8. Yu. V. Egorov, *On the solubility of differential equations with simple characteristics*, Russian Math. Surveys **26** (1971), 113–127.
9. L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
10. A. Menikoff, *Carleman estimates for partial differential operators with real coefficients*, Arch. Rat. Mech. Anal. **54** (1974), 118–133.
11. L. Nirenberg, *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equations*, preprint.
12. F. Trèves, *Linear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, London, 1970.
13. F. Trèves, *A link between solvability of pseudo-differential equations and uniqueness in the Cauchy problem*, Am. J. Math. **94** (1972), 267–288.
14. A. Unterberger, *Pseudo-Differential Operators and Applications*, Aarhus Universitet, 1975.
15. C. Zuily, *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Mathematics, Vol. 33.

UNIVERSITÉ PARIS XI  
CENTRE D'ORSAY  
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

(Reçu le 10 janvier 1984)



SUR LES CONDITIONS DE  
PSEUDO-CONVEXITE ET  
L'UNICITE DU PROBLEME  
DE CAUCHY

par

LUC ROBBIANO





# Sur les Conditions de Pseudo-Convexité et l'Unicité du Problème de Cauchy

LUC ROBBIANO

Ce travail fait suite à un résultat dû à Alinhac [1] sur la non unicité du problème de Cauchy. On démontre la nécessité de certaines hypothèses intervenant dans le théorème d'unicité de Hörmander (voir Hörmander [3], [4], Lerner [5], et Zuily [9] pour une étude détaillée de l'unicité).

De façon succincte, les hypothèses du théorème d'unicité sont les suivantes :

(i) L'opérateur  $P$  est principalement normal.

(ii) La surface  $S$  est pseudo-convexe pour  $P$ .

La première hypothèse concerne les racines réelles de  $p$  (où  $p$  est le symbole principal de  $P$ ). La seconde concerne les racines complexes doubles de  $p$  par rapport à  $S$ .

On démontre ici que pour une racine double non réelle ne vérifiant pas (ii)  $P$  n'a pas l'unicité de Cauchy. Ce résultat est obtenu en faisant des hypothèses génériques habituelles dans ce genre de problèmes. On restreint également la classe des problèmes traités, en supposant que le symbole principal de  $P$  est à coefficients analytiques réels (à valeurs complexes). Les cas de non-unicité pour des opérateurs à racine double réelle ont été étudiés par Alinhac [1] et Bahouri [2] pour des opérateurs à symboles réels, et par Saint Raymond [7] pour des opérateurs à symboles complexes.

En corollaire, nous obtenons un résultat de non-unicité pour des opérateurs à racine double réelle, qui n'est prouvé que pour un point voisin, et une surface voisine des données initiales.

## §1. Énoncé des résultats

**1.1. Énoncé du théorème.** Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients  $C^\infty$ , défini dans un voisinage  $\Omega$  de  $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . On suppose que  $p(y, \eta)$ , le symbole principal de  $P$ , est à coefficients analytiques réels de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .

Soit  $S$  une hypersurface  $C^\infty$ , orientée, définie au voisinage de  $y_0$  par l'équation  $\varphi(y) = \varphi(y_0)$  ( $d\varphi(y_0) \neq 0$ ). On suppose que  $S$  est non caractéristique pour  $P$  (i.e.,  $p(y_0, d\varphi(y_0)) \neq 0$ ).

On note  $p_\gamma(y, \eta) = p(y, \eta - i\gamma\varphi'(y))$  et  $\{f, g\}$  le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$ , i.e.,  $\{f, g\}(y, \eta) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g}{\partial \eta_j}$ .

**Théorème 1.** *Supposons qu'il existe  $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  et  $\gamma_0 \in \mathbf{R}^*$  tels que, en notant  $m_0 = (y_0, \eta_0 - i\gamma_0\varphi'(y_0))$ ,*

$$(1) \quad \{\{p, \varphi\}, \varphi\}(m_0) \neq 0.$$

(2) *Les vecteurs  $\operatorname{Re}(p'_\eta(m_0))$  et  $\operatorname{Im}(p'_\eta(m_0))$  sont indépendants.*

$$(3) \quad p(m_0) = \{p, \varphi\}(m_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\gamma_0} \{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(m_0) < 0.$$

*Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $y_0$ , il existe deux fonctions  $C^\infty(V)$ ,  $a(y)$  et  $u(y)$  vérifiant :*

$$\begin{cases} \operatorname{supp} u \subset S_+ = \{y/\varphi(y) \geq \varphi(y_0)\} \\ y_0 \in \operatorname{supp} u \\ Pu + au = 0. \end{cases}$$

### Remarques

- (a) L'hypothèse (1) (au regard de (3)) indique que  $m_0$  est une racine double de l'équation caractéristique. Si  $P$  est d'ordre 2, cela revient à dire que  $S$  est non caractéristique pour  $P$ . C'est une hypothèse générique.
- (b) (2) est aussi une hypothèse générique. Elle est équivalente à :

$$(2') \quad \text{Il existe } j, k \in \{1, \dots, n+1\} \text{ tels que } \operatorname{Im} p'_{\eta_j}(m_0) \overline{p'_{\eta_k}(m_0)} \neq 0.$$

- (c) (3) indique qu'au point  $m_0$  l'opérateur  $P$  ne vérifie pas l'hypothèse de stricte pseudo-convexité pour les caractéristiques complexes de  $P$ .

Cette hypothèse s'énonce ainsi :

Pour tout  $\eta \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}^*$ , si

$$p(y_0, \eta - i\gamma\varphi'(y_0)) = \{p, \varphi\}(y_0, \eta - i\gamma\varphi'(y_0)) = 0.$$

$$\text{alors } \frac{1}{2i\gamma} \{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(y_0, \eta - i\gamma_0\varphi'(y_0)) > 0.$$

Le théorème 1 montre que dans les cas génériques l'hypothèse de pseudo-convexité est nécessaire pour avoir l'unicité de Cauchy.

Ce résultat étend, pour les opérateurs à symbole principal analytique réel, le théorème 3 d'Alinhac [1]. La démonstration du théorème 1 repose sur ce théorème. Nous le citons au paragraphe 2.

- (d) Du théorème 1 on peut se faire une idée des surfaces, ayant même plan tangent, qui n'admettent pas l'unicité de Cauchy. Pour cela, fixons des coordonnées telles que  $y_0 = 0$ , prenons pour surface  $S$ :  $\psi(y) = 0$  où  $\psi(y) = N \cdot y + {}^t y A y + O(|y|^3)$  avec  $N$  un vecteur de  $\mathbf{R}^{n+1}$  fixé et  $A$  une matrice symétrique  $(n+1, n+1)$ .

Les conditions (1), (2) et (3) deviennent respectivement :

$${}^tNP''_{\eta\eta}N \neq 0$$

$(\text{Re } p'_\eta, \text{Im } p'_\eta)$  indépendant

$$p = p'_\eta \cdot N = 0 \text{ et } \frac{1}{\gamma_0} \text{Im}(p'_y \overline{p'_\eta}) < \text{Re } {}^t p'_\eta A \text{Re } p'_\eta + \text{Im } {}^t p'_\eta A \text{Im } p'_\eta.$$

Ces trois conditions sont prises en un point  $m_0 = (0, \eta_0 - i\gamma_0 N)$ .

On remarque que seule la condition (3) dépend de  $A$  et que la quantité  $\text{Re } {}^t p'_\eta A \text{Re } p'_\eta + \text{Im } {}^t p'_\eta A \text{Im } p'_\eta$  ne dépend que de la restriction de  $A$ , considérée comme une forme quadratique, au plan défini par  $(\text{Re } p'_\eta, \text{Im } p'_\eta)$ . En particulier, si  $N$  vérifie (1) et (2)  $p = p'_\eta \cdot N = 0$  au point  $m_0$ , alors il existe des surfaces tangentes au plan  $y \cdot N = 0$  n'admettant pas l'unicité de Cauchy.

**Exemple.** Soit

$$P = D_{y_1}^2 + 2y_3 D_{y_1} D_{y_2} + D_{y_2} D_{y_3} + i[2(1 + y_4) D_{y_1} D_{y_2} + D_{y_2} D_{y_4}]$$

et  $S \equiv y_1 = 0$  dans  $\mathbf{R}^4$ . On prend  $m_0 = (0, 0, 0, 0; -i, 1, -1, 0)$  on a donc  $\gamma_0 = 1$ . (1) et (2) sont vérifiées. On a  $p(m_0) = p'_\eta(m_0) = 0$ . On remarque, qu'ici la condition  $\frac{1}{2i\gamma_0} \{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(m_0) < 0$  est équivalente à  $\text{Im } p'_y(m_0) \overline{p'_\eta(m_0)} < 0$ . On a :

$$\text{Im } p'_y(m_0) \overline{p'_\eta(m_0)} = \text{Im} [2\eta_1 \eta_2 (\overline{\eta_2}) - i2\overline{\eta_1} \eta_2 (-\overline{\eta_2})] \Big|_{m_0} = -4 < 0.$$

On peut donc appliquer le théorème 1.

**1.2. Enoncé du Corollaire.** Avant d'énoncer le corollaire, nous allons définir les voisinages ( $C^2$ ) d'une surface  $S$  au point  $y_0$  de la façon suivante : on choisit des coordonnées locales  $(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$  telles que  $S \equiv t = 0$ .

Les voisinages ( $C^2$ ) de  $S$  au point  $y_0$  sont les ensembles qui contiennent un ensemble  $V_\varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ , du type suivant :

$$V_\varepsilon = \{S' / \text{il existe } \psi(x) \in C^\infty \text{ telle que } S' \equiv t = \psi(x) \text{ avec } \psi(0) = 0; d\psi(0) = 0; |\text{Hess } \psi(x)| < \varepsilon\}.$$

On remarque que les voisinages sont indépendants de la façon de choisir les coordonnées locales.

**Corollaire 2.** Soit  $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$  vérifiant :

(4)  $\{\{p, \varphi\}, \varphi\}(\rho_0) \neq 0.$

(5) Les vecteurs  $\text{Re}(p'_\eta(\rho_0))$  et  $\text{Im}(p'_\eta(\rho_0))$  sont indépendants.

(6) Pour  $\rho = (y, \eta) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$  voisin de  $\rho_0$ ,  $p(\rho) = 0 \Rightarrow \{\overline{p}, p\}(\rho) = 0.$

(7)  $p(\rho_0) = \{p, \varphi\}(\rho_0) = 0$  et  $\text{Re}\{\overline{p}, \{p, \varphi\}\}(\rho_0) > 0.$

Alors dans tout voisinage de  $S$  au point  $y_0$  il existe  $S'$  telle que :

$$S'_+ \subset S_+$$

et pour tout voisinage  $V$  de  $y_0$ , il existe  $y \in V \cap S'$  tel que  $P$  n'a pas l'unicité de Cauchy en  $y$  par rapport à  $S'$ , au sens de la conclusion du théorème 1.

### Remarques

- (a) En fait, comme on le verra dans la démonstration, on peut choisir  $S = S'$  si l'ensemble :

$$\{(y, \eta, \gamma) \in \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbf{R} / \varphi(y) = \varphi(y_0),$$

$$p(y, \eta - i\gamma\varphi'(y)) = \{p, \varphi\}(y, \eta - i\gamma\varphi'(y)) = 0\}$$

contient des points  $(y, \eta, \gamma)$  aussi proches qu'on veut de  $(y_0, \eta_0, 0)$  avec  $\gamma \neq 0$ . Dans ce cas (6) peut être remplacée par

- (6)' Pour  $\rho = (y, \eta) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$  voisin de  $\rho_0$

$$[p(\rho) = 0, \varphi(y) = \varphi(y_0)] \Rightarrow \{\bar{p}, p\}(\rho) = 0.$$

- (b) Les hypothèses (4) et (5) sont les mêmes que les hypothèses (1) et (2) du théorème 1.
- (c) (6) indique que  $P$  est principalement normal. En effet, étant donné (5),  $\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\} = \operatorname{Re}(\bar{a}p)$  au voisinage de  $(y_0, \eta_0)$ . Comme on l'a vu dans l'introduction, c'est une hypothèse qui intervient dans le théorème d'unicité. C'est aussi une hypothèse nécessaire (dans les principaux cas génériques) pour avoir l'unicité. Sur la nécessité de cette hypothèse voir Alinhac [1], Saint Raymond [8], Robbiano [6].
- (d) (7) implique que  $S$  n'est pas pseudo-convexe pour  $P$  en  $\rho_0$ . L'hypothèse de pseudo-convexité est la suivante :

$$\text{pour tout } \eta \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

$$p(y_0, \eta) = \{p, \varphi\}(y_0, \eta) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \{\bar{p}, \{p, \varphi\}\}(y_0, \eta) < 0.$$

Le corollaire 2 montre donc que cette hypothèse est essentiellement nécessaire.

- (e) Ce corollaire est à comparer au théorème de Saint Raymond [7].

En restant dans le cadre des hypothèses (4), (5) et (6) et en supposant de plus que la matrice

$$(8) \quad K = \begin{pmatrix} H_{\operatorname{Re} p}^2 \varphi(\rho_0) & H_{\operatorname{Re} p} H_{\operatorname{Im} p} \varphi(\rho_0) \\ H_{\operatorname{Re} p} H_{\operatorname{Im} p} \varphi(\rho_0) & H_{\operatorname{Im} p}^2 \varphi(\rho_0) \end{pmatrix}$$

est définie positive, alors Saint Raymond montre que  $P$  n'a pas l'unicité de Cauchy en  $y_0$ . Précisons que pour ce théorème  $p$  est seulement à coefficients  $C^\infty$ .

(8) est équivalente à :

- (9)  $K$  a deux valeurs propres strictement positives.

Par contre, (7) est équivalente à :

- (10) la somme des deux valeurs propres de  $K$  est strictement positive.

En conclusion, le théorème de Saint Raymond donne un résultat plus fort dans les cas (9). Par contre, si  $K$  vérifie (10) mais a une valeur propre négative ou nulle, le corollaire 2 est le seul résultat connu.

**Exemple 1.** Soit

$$P = D_{y_1}^2 + 2y_3 D_{y_1} D_{y_2} + 2D_{y_2} D_{y_3} + i[y_4 D_{y_1} D_{y_2} - 2D_{y_2} D_{y_4}]$$

avec  $S \equiv y_1 = 0, y = 0, \eta_0 = (0, 1, 0, 0)$ . (4), (5) et (6) sont vérifiées. On a :

$$p(\rho_0) = \{p, y_1\}(\rho_0) = 0$$

$$\operatorname{Re} \{ \bar{p}\{p, y_1\} \}(\rho_0) = +2.$$

On peut donc appliquer le corollaire. On remarque qu'en prenant

$$y = (0, 0, 0, -2\varepsilon) \quad \text{et} \quad \eta = (i\varepsilon, 1, -\frac{\varepsilon^2}{2}, 0)$$

on a  $p(y, \eta) = \{p, y_1\}(y, \eta) = 0$ . On peut donc appliquer la remarque (a).

**Exemple 2.** Soit

$$P = D_{y_1}^2 + D_{y_2} D_{y_3} - y_1 D_{y_3}^2 + iD_{y_3} D_{y_4}$$

$S \equiv y_1 = 0, y_0 = 0, \eta_0 = (0, 0, 1, 0)$ . (4), (5) et (6) sont vérifiées. On a :  $p(\rho_0) = \{p, y_1\}(\rho_0) = 0$  et  $\operatorname{Re} \{ \bar{p}\{p, y_1\} \}(\rho_0) = +2$ . On peut appliquer le corollaire. Par contre, on ne peut appliquer la remarque (a), en effet  $\{p, y_1\} = 0 \Rightarrow \eta_1 = 0$ .

Remarquons également que pour les deux exemples, on ne peut pas appliquer le théorème de Saint Raymond.

## §2. Démonstrations

### 2.1. Preuve du théorème

(a) *Réduction.* On peut tout d'abord supposer que  $\varphi$  est analytique. En effet, on peut trouver une surface analytique tangente à  $S$  en  $y_0$ , définie par une équation  $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y_0)$  ( $\tilde{\varphi}$  analytique avec  $\tilde{\varphi}(y_0) = \varphi(y_0)$ ,  $d\tilde{\varphi}(y_0) = d\varphi(y_0)$ ) telle que :

$$\{y \mid \tilde{\varphi}(y) \geq \tilde{\varphi}(y_0)\} \subset \{y \mid \varphi(y) \geq \varphi(y_0)\},$$

$\tilde{\varphi}$  vérifiant (1), (2) et (3).

(1) et (2) sont clairement invariantes. Pour vérifier (3) il suffit de prendre  $\tilde{\varphi}$  proche de  $\varphi$  pour que le signe de l'expression soit le même.

En faisant un changement de variable analytique, on se ramène à la situation suivante. On travaille en coordonnées  $(x, t)$ ,  $S$  est définie par l'équation  $t = 0$ , le point  $y_0 = (x_0, t_0) = (0, 0)$ . On suppose aussi qu'on a  $\operatorname{Im} p'_{\xi_n} \overline{p'_{\xi_{n-1}}} \neq 0$  au point  $(0, 0, \xi_0, \tau_0)$ . C'est l'hypothèse (2)' après une éventuelle rotation sur les variables  $x$ .

L'idée de la preuve est la suivante. On va construire une fonction  $\psi(x)$  vérifiant  $\psi(0) = 0$ ,  $d\psi(0) = 0$  et  $\psi(x) \geq 0$ . On pose  $T(x, t) = t - \psi(x)$ .  $\psi$  devra être telle qu'on puisse appliquer le théorème suivant, dû à Alinhac ([1], théorème 3), à l'opérateur  $P$  écrit dans les coordonnées  $T$  et  $X = x$ .

**Théorème 3.** Soit  $P$  un opérateur de symbole principal  $p(x, t, \xi, \tau)$ .

Supposons qu'il existe  $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\tau_0 \in \mathbf{C}$  avec  $\text{Im} \tau_0 < 0$ , tels que, en notant  $m_0 = (0, 0, \xi_0, \tau_0)$  on ait :

$$(11) \quad p(m_0) = p'_\tau(m_0) = 0 \quad p''_{\tau\tau}(m_0) \neq 0.$$

(12) Les vecteurs  $\text{Rep}'_\xi(m_0)$  et  $\text{Imp}'_\xi(m_0)$  sont indépendants.

(13)  $\dot{i} \neq 0$  où le point indique la dérivation le long de la bicaractéristique (complexe) de  $p$  (complexifié) issue de  $m_0$ .

(14) La variété de codimension 2

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^* \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \mid \text{il existe } \tau \in \mathbf{C}, p(x, 0, \xi, \tau) = p'_\tau(x, 0, \xi, \tau) = 0\}$$

contient une variété lagrangienne réelle étalée au-dessus de  $\mathbf{R}_x^n$ , passant par  $(0, \xi_0)$ .

Alors  $P$  n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à  $\{t = 0\}$  au point 0, au sens du théorème 1.

**Remarques.** Parmi les quatre conditions du théorème d'Alinhac, c'est (14) la plus difficile à réaliser. C'est la réalisation de cette condition qui nous oblige ici à supposer que le symbole principal de  $P$  est analytique réel.

On suppose pour la suite que  $\gamma_0 > 0$  (pour pouvoir appliquer le théorème d'Alinhac). On vérifie facilement que si  $m_0 = (y_0, \eta_0 - i\gamma_0\varphi'(y_0))$  vérifie les hypothèses (1), (2) et (3),  $\tilde{m}_0 = (y_0, -\eta_0 + i\gamma_0\varphi'(y_0))$  les vérifie également.

(b) *Construction de la surface et de la lagrangienne.* On fait le changement de variable

$$\begin{cases} X = x \\ T = t - \psi(x). \end{cases}$$

Notons  $(\eta, \zeta)$  les variables duales de  $(X, T)$ , on a :

$$\begin{cases} \xi = \eta - \psi'(x)\zeta \\ \tau = \zeta \end{cases}$$

donc  $\eta = \xi + \psi'(x)\tau$ . On note  $q$  le symbole déduit de  $p$  par ce changement de variable.

Pour simplifier les notations, on remplace  $X$  par  $x$  et  $\zeta$  par  $\tau$ . On a :

$$\begin{aligned} q(x, T, \eta, \tau) &= p(x, T + \psi(x), \eta - \psi'(x) \cdot \tau, \tau) \\ q'_\tau(x, T, \eta, \tau) &= p'_\tau(x, T + \psi(x), \eta - \psi'(x) \cdot \tau, \tau) \\ &\quad - \psi'(x) p'_\xi(x, T + \psi(x), \eta - \psi'(x) \cdot \tau, \tau). \end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème d'Alinhac, il suffit de construire une lagrangienne au-dessus de la surface  $T = 0$ . On cherche donc des fonctions réelles  $\eta(x)$ ,  $\psi(x)$  et une fonction complexe  $\tau(x)$  telles que :

$$(15) \quad q(x, 0, \eta'(x), \tau(x)) = p(x, \psi(x), \eta'(x) - \psi'(x) \cdot \tau(x), \tau(x)) = 0.$$

$$(16) \quad \begin{aligned} q'_\tau(x, 0, \eta'(x), \tau(x)) &= p'_\tau(x, \psi(x), \eta'(x) - \psi'(x) \cdot \tau(x), \tau(x)) \\ &\quad - \psi'(x) \cdot p'_\xi(x, \psi(x), \eta'(x) - \psi'(x) \tau(x), \tau(x)) = 0. \end{aligned}$$

$$(17) \quad \eta'(0) = \xi_0, \quad \tau(0) = \tau_0.$$

$$(18) \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi(x) \geq 0.$$

Pour cela posons :

$$(19) \quad F(x, u, \eta, \sigma, \tau) = p'_\tau(x, u, \eta - \sigma \cdot \tau, \tau) - \sigma p'_\xi(x, u, \eta - \sigma \cdot \tau, \tau)$$

où  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\eta \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}^n$  et  $\tau \in \mathbf{C}$ . On a,

$$F(0, 0, \xi_0, 0, \tau_0) = p'_\tau(0, 0, \xi_0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(0, 0, \xi_0, 0, \tau_0) = p''_{\tau\tau}(0, 0, \xi_0, \tau_0) \neq 0.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites (version holomorphe), il existe au voisinage de  $(0, 0, \xi_0, 0)$  une unique fonction complexe  $\tau(x, u, \eta, \sigma)$  telle que :

$$\tau(0, 0, \xi_0, 0) = \tau_0 \quad \text{et solution de } F(x, u, \eta, \sigma, \tau) = 0.$$

Il suffit maintenant pour résoudre (15) et (16) de trouver des fonctions réelles  $\psi(x)$ ,  $\eta(x)$  telles que :

$$(20) \quad \begin{aligned} p(x, \psi(x), \eta'(x) - \psi'(x) \tau(x, \psi(x), \eta'(x), \psi'(x)), \\ \tau(x, \psi(x), \eta'(x), \psi'(x))) = 0. \end{aligned}$$

**Lemme 4.** Soit une fonction analytique réelle à valeurs complexes  $p(x, u, v, \eta, \sigma)$  définie dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $(x_0, u_0, v_0, \eta_0, \sigma_0)$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $v \in \mathbf{R}$ ,  $\eta \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}^n$ ) telle que :  $p(x_0, u_0, v_0, \eta_0, \sigma_0) = 0$ . Notons  $x = (x', x_n)$ ;  $\eta = (\eta', \eta_n)$ ;  $\sigma = (\sigma', \sigma_n)$ . On suppose que :

$$(21) \quad \text{Im} \overline{p'_{\eta_n}} p'_{\sigma_n}(x_0, u_0, v_0, \eta_0, \sigma_0) \neq 0.$$

Soit des fonction analytiques réelles à valeurs réelles  $\psi_0(x')$ ,  $\eta_0(x')$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \eta'_0(x'_0) &= \eta'_0 & \eta(x'_0) &= u_0 \\ \psi'_0(x'_0) &= \sigma'_0 & \psi_0(x'_0) &= v_0. \end{aligned}$$



Alors il existe des fonctions analytiques réelles  $\psi(x)$ ,  $\eta(x)$  définies au voisinage de  $x_0$  vérifiant :

$$\begin{cases} \eta(x', (x_0)_n) = \eta_0(x') \\ \psi(x', (x_0)_n) = \psi_0(x') \\ p(x, \eta(x), \psi(x), \eta'(x), \psi'(x)) = 0. \end{cases}$$

*Preuve.* Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Kovalewski. On note :

$$p = p_1 + ip_2 \quad \text{où} \quad p_1 = \operatorname{Re} p, \quad p_2 = \operatorname{Im} p.$$

On doit résoudre le système

$$p_j(x, \eta(x), \psi(x), \eta'(x), \psi'(x)) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2$$

avec les données initiales du lemme. Pour cela il suffit d'écrire ce système de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \eta'_{x_n}(x) &= q_1(x, \eta(x), \psi(x), \eta'_{x'}(x), \psi'_{x'}(x)) \\ \psi'_{x_n}(x) &= q_2(x, \eta(x), \psi(x), \eta'_{x'}(x), \psi'_{x'}(x)). \end{aligned}$$

Pour réaliser ceci il suffit que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \eta_n} & \frac{\partial p_1}{\partial \sigma_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \eta_n} & \frac{\partial p_2}{\partial \sigma_n} \end{pmatrix}$$

soit inversible. Ceci est équivalent à  $\operatorname{Im} \overline{p'_{\eta_n}} p'_{\sigma_n} \neq 0$  en  $(x_0, u_0, v_0, \eta_0, \sigma_0)$ . Ce qui est l'hypothèse (21).  $\square$

Pour résoudre (20), appliquons le lemme 4 à la fonction  $G$  définie par :

$$G(x, v, \eta, \sigma) = p(x, v, \eta - \sigma\tau(x, v, \eta, \sigma), \tau(x, v, \eta, \sigma)).$$

On a  $G(0, 0, \xi_0, 0) = p(0, 0, \xi_0, \tau_0) = 0$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_n}(0, 0, \xi_0, 0) = p'_{\xi_n}(0, 0, \xi_0, \tau_0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_n}(0, 0, \xi_n, 0) = -\tau_0 p'_{\xi_n}(0, 0, \xi_0, \tau_0)$$

d'où

$$\operatorname{Im} \overline{G'_{\eta_n}} G'_{\sigma_n} \Big|_{(0, 0, \xi_0, 0)} = -|p'_{\xi_n}(0, 0, \xi_0, \tau_0)|^2 \operatorname{Im} \tau_0 \neq 0.$$

On peut donc appliquer le lemme 4 à  $G$  avec des données sur  $x_n = 0$ . Ces données seront fixées plus loin.

(22) Remarquons qu'on peut aussi appliquer le lemme 4 avec des données sur la surface  $x_{n-1} = 0$ .

On vient de construire des fonctions vérifiant (15), (16), (17), il reste à vérifier (18).

(c) *Calcul de  $\psi''$* . On veut construire une fonction  $\psi(x)$  vérifiant :

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi(x) \geq 0.$$

On pose sur  $x_n = 0$ ,  $\psi(x', 0) = \varepsilon|x'|^2$  avec  $\varepsilon$  positif suffisamment petit. Dérivons par rapport à  $x$  l'équation (15). On obtient :

$$(23) \quad p'_x + \psi' p'_t + (\eta'' - \psi'' \tau) p'_\xi - (\tau)'_x (\psi' - p'_\xi) + (\tau)'_x p'_\tau = 0.$$

Ceci pris en  $(x, \psi(x), \eta'(x) - \psi'(x)\tau(x, \psi(x), \eta'(x), \psi'(x)), \tau(x, \psi(x), \eta'(x), \psi'(x)))$ , et  $(\tau)'_x = \frac{\partial}{\partial x} [\tau(x, \psi(x), \eta'(x), \psi'(x))]$ . En  $x = 0$ , on a ,

$$\psi'(0) = 0, \quad p'_\tau(0, 0, \xi_0, \tau_0) = 0,$$

donc (23) devient :

$$(24) \quad p'_x(0, 0, \xi_0, \tau_0) + (\eta''(0) - \psi''(0)\tau_0) p'_\xi(0, 0, \xi_0, \tau_0) = 0.$$

On a donc pour  $j = 1, \dots, n-1$ ; (on note  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(0) = \psi_{j,k}$  et les expressions sont prises en  $(0, 0, \xi_0, \tau_0)$ )

$$(25) \quad \eta_{n,j} - \psi_{n,j} \tau_0 = - \frac{p'_{x_j} + \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_{k,j} - \tau_0 \psi_{k,j}) p'_{\xi_k}}{p'_{\xi_n}}.$$

En prenant la partie imaginaire de ceci on a :

$$\psi_{n,j} \operatorname{Im} \tau_0 = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left[ \operatorname{Im} (p'_{x_j} \overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{k,j} \operatorname{Im} (p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j} \operatorname{Im} (\tau_0 p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right].$$

Il est facile de choisir  $\eta_{k,j}$  pour  $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$  de sorte que  $\psi_{n,j} = 0$  pour  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  c'est-à-dire :

$$(26) \quad \operatorname{Im} (p'_{x_j} \overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{k,j} \operatorname{Im} (p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j} \operatorname{Im} (\tau_0 p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) = 0.$$

En prenant la partie réelle de (25) on a :

$$(27) \quad \eta_{n,j} \\ = -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left\{ \operatorname{Re}(p'_{x_j} \overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1} [\eta_{k,j} \operatorname{Re}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j} \operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}})] \right\}.$$

Calculons maintenant  $\psi_{n,n}$  on a, d'après (24),

$$\eta_{n,n} - \psi_{n,n} \tau_0 = -\frac{p'_{x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} (\eta_{k,n} - \psi_{k,n} \tau_0) p'_{\xi_k}}{p'_{\xi_n}}.$$

En prenant la partie imaginaire on a :

$$(28) \quad \psi_{n,n} \operatorname{Im} \tau_0 = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left[ \operatorname{Im}(p'_{x_n} \overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{k,n} \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right].$$

Car on a  $\psi_{k,n} = 0$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ .

Calculons en utilisant (26), (27)

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{k,n} \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \\ = -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Re}(p'_{x_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right. \\ \quad + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \eta_{k,j} \operatorname{Re}(p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_n}}) \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \\ \quad \left. - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{k,j} \operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_n}}) \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right] \\ = -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Re}(p'_{x_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right. \\ \quad + \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re}(p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_n}}) [-\operatorname{Im}(p'_{x_j} \overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{k,j} \operatorname{Im}(\tau_0 p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}})] \\ \quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{k,j} \operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_n}}) \operatorname{Im}(p'_{\xi_k} \overline{p'_{\xi_n}}) \right\}.$$

On remarque que  $\text{Im}(z\bar{z}') = \text{Im} z \text{Re} z' - \text{Im} z' \text{Re} z$  donc (29) est égal à, en utilisant le fait que  $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \overline{p'_{\xi_k}} \psi_{k,j} p'_{\xi_j}$  est réelle,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{Im}(p'_{x_k} \overline{p'_{\xi_k}}) - (\text{Im} \tau_0) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \overline{p'_{\xi_k}} \psi_{k,j} p'_{\xi_j}.$$

De ceci et de (28), on déduit que,

$$\psi_{n,n} = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2} \left[ \frac{\text{Im}(p'_x \overline{p'_\xi})}{\text{Im} \tau_0} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \overline{p'_{\xi_k}} \psi_{k,j} p'_{\xi_j} \right].$$

On a  $\frac{\text{Im}(p'_x \overline{p'_\xi})}{\text{Im} \tau_0} > 0$  (hypothèse (3)), en prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit  $\psi_{n,n} > 0$  et donc la matrice  $(\psi_{k,j})_{1 \leq k, j \leq n}$  est définie positive ce qui assure (18).

Pour appliquer le théorème 3 d'Alinhac il suffit de vérifier (13).

(d) *Calcul de  $\ddot{T}(0,0, \xi_0, \tau_0)$ .* On a  $\ddot{T}(0,0, \xi_0, \tau_0) = \{p\{p, T\}\}(0,0, \xi_0, \tau_0)$  avec  $T(x, t) = t - \psi(x)$ .

Calculons en  $(0,0, \xi_0, \tau_0)$ ,

$$\begin{aligned} \{p\{p, \psi\}\} &= \sum_{j=1}^n \{p \cdot p'_{\xi_j}, \psi'_{x_j}\} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p'_{\xi_j}, \psi_{j,k} p'_{\xi_k} && \text{(car } \psi'(0) = 0) \\ &= \frac{1}{\text{Im} \tau_0} \text{Im}(p'_x \overline{p'_\xi}) \frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si

$$\frac{1}{\text{Im} \tau_0} \text{Im}(p'_x \overline{p'_\xi}) \frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} \neq \{p\{p, t\}\}$$

alors en prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit  $\{p\{p, T\}\} \neq 0$ . Sinon, on refait la même construction avec des données sur  $x_{n-1} = 0$ . (on utilise (22)). On pourra appliquer le théorème 3 d'Alinhac sauf si,

$$\frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} = \frac{(p'_{\xi_{n-1}})^2}{|p'_{\xi_{n-1}}|^2}.$$

Ce qui est équivalent à  $\text{Im}(p'_{\xi_n} \overline{p'_{\xi_{n-1}}}) = 0$ . Cela contredit (2)'.  
 On peut donc toujours appliquer le théorème 3 d'Alinhac soit en faisant la construction avec des données sur  $x_n = 0$ , soit avec des données sur  $x_{n-1} = 0$ .  
 Ce qui achève la preuve du théorème 1. □

**§2.2. Preuve du Corollaire 2.** La preuve du corollaire consiste à montrer que les racines doubles de l'équation caractéristique ne restent pas réelles près de  $(y_0, \eta_0)$ , par rapport à une surface "proche" de  $S$ . Il suffit alors de vérifier qu'on peut appliquer le théorème 1.

Deux cas se présentent. Soit l'équation caractéristique admet des racines doubles non réelles près de  $(y_0, \eta_0)$  sur  $S$ . Soit ce n'est pas le cas. On verra alors qu'on peut perturber  $S$  pour se ramener au premier cas.

On va d'abord supposer que la surface  $S$  est définie par  $t = 0$ . Bien entendu l'opérateur  $P$  écrit dans les coordonnées  $(x, t)$  n'a pas forcément un symbole principal analytique réel. Mais ceci est sans importance; quand on aura prouvé que toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, il suffira de revenir aux coordonnées initiales pour conclure.

(a) *Premier cas.* On va supposer qu'il existe une suite  $(x_n, \xi_n, \tau_n)$  telle que  $(x_n, \xi_n, \tau_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (x_0, \xi_0, \tau_0)$ ,  $\text{Im} \tau_n \neq 0$  et  $p(x_n, 0, \xi_n, \tau_n) = p'_\tau(x_n, 0, \xi_n, \tau_n) = 0$ . Pour  $n$  suffisamment grand, les conditions (1) et (2) du théorème 1 sont vérifiées. Il suffit donc de calculer  $\frac{1}{2i\gamma} \{\bar{p}_\gamma, p_\gamma\}$ , c'est-à-dire ici :

$$-\frac{1}{\text{Im} \tau} \text{Im} [p'_x(x, 0, \xi, \tau) \overline{p'_\xi(x, 0, \xi, \tau)}] \quad (\text{car } p'_\tau(x, 0, \xi, \tau) = 0.)$$

On note  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  avec  $\tau_1 = \text{Re} \tau$ ,  $\tau_2 = \text{Im} \tau$ . Les hypothèses (5) et (6) impliquent qu'il existe une fonction  $a(x, \xi, \tau_1)$  (où  $\tau_1 \in \mathbf{R}$ ) telle que :

$$\text{Im} [p'_y(x, 0, \xi, \tau_1) \overline{p'_\eta(x, 0, \xi, \tau_1)}] = \text{Re} [\bar{a}(x, 0, \xi, \tau_1) p(x, 0, \xi, \tau_1)]$$

avec  $y = (x, t)$ ,  $\eta = (\xi, \tau)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} & \text{Im} [p'_y(x, 0, \xi, \tau) \overline{p'_\eta(x, 0, \xi, \tau)}] \\ &= \text{Im} \{ [p'_y(x, 0, \xi, \tau_1) + i\tau_2 p''_{y\tau}(x, 0, \xi, \tau_1) + O(\tau_2^2)] \\ & \quad [p'_\eta(x, 0, \xi, \tau_1) - i\tau_2 \overline{p''_{\eta\tau}(x, 0, \xi, \tau_1)} + O(\tau_2^2)] \} \\ &= \text{Im} [p'_y(x, 0, \xi, \tau_1) \overline{p'_\eta(x, 0, \xi, \tau_1)}] \\ & \quad + \tau_2 \text{Re} [p''_{y\tau} p'_\eta - p'_y \overline{p''_{\eta\tau}}](x, 0, \xi, \tau_1) + O(\tau_2^2) \\ &= \text{Re} (\bar{a}p)(x, 0, \xi, \tau_1) + \tau_2 \text{Re} \{ \bar{p}, \{p, t\} \}(x, 0, \xi, \tau_1) + O(\tau_2^2). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} p(x, 0, \xi, \tau_1) &= p(x, 0, \xi, \tau_1 + i\tau_2) - i\tau_2 p'_\tau(x, 0, \xi, \tau_1 + i\tau_2) + O(\tau_2^2) \\ &= O(\tau_2^2). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\tau_2} \operatorname{Im} [p'_x(x, 0, \xi, \tau) \overline{p'_\xi(x, 0, \xi, \tau)}] \\
 & = -\operatorname{Re} \{ \bar{p}\{p, t\} \}(x_0, 0, \xi_0, \tau_0) \\
 & \quad + O(\tau_2 + |x_0 - x| + |\xi_0 - \xi| + |\tau_0 - \tau_1|).
 \end{aligned}$$

Donc pour  $(x, 0, \xi, \tau)$  suffisamment proche de  $(x_0, 0, \xi_0, \tau_0)$  la condition (3) du théorème 1 est vérifiée.

(b) *Deuxième cas.* On suppose que les racines doubles de l'équation caractéristique par rapport à  $S$  sont réelles. On va montrer que par rapport à une surface  $S'$  l'équation caractéristique admet des racines doubles non réelles.

On fait le changement de variables suivant,

$$\begin{aligned}
 T &= t - \psi(x) \quad \text{avec } \psi(x) \geq 0 \\
 X &= x
 \end{aligned}$$

(on prendra, soit  $\psi \equiv 0$ , soit  $\psi = \varepsilon|x|^2$ ). C'est le changement de variable fait au §2.1b). On pose :

$$\begin{aligned}
 F(x, T, \eta, \sigma, \tau) &= p(x, T, \eta - \sigma\tau, \tau) \\
 G(x, T, \eta, \sigma, \tau) &= p'_\tau(x, T, \eta - \sigma\tau, \tau) - \sigma p'_\xi(x, T, \eta - \sigma\tau, \tau).
 \end{aligned}$$

On considère ces deux fonctions au voisinage de  $x_0 = 0, T_0 = 0, \eta_0 = \xi_0, \sigma_0 = 0, \tau_0$  et on a :

$$\begin{aligned}
 F(0, 0, \xi_0, 0, \tau_0) &= G(0, 0, \xi_0, 0, \tau_0) = 0 \\
 G'_\tau(0, 0, \xi_0, 0, \tau_0) &= p''_{\tau\tau}(0, 0, \xi_0, \tau_0) \neq 0.
 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe au voisinage de  $(0, 0, \xi_0, 0)$  une unique fonction complexe  $\tau(x, T, \eta, \sigma)$  telle que

$$\begin{aligned}
 & G(x, T, \eta, \sigma, \tau(x, T, \eta, \sigma)) = 0 \\
 (30) \quad & \tau(0, 0, \xi_0, 0) = \tau_0.
 \end{aligned}$$

Posons :

$$H(x, T, \eta, \sigma) = F(x, T, \eta, \sigma, \tau(x, T, \eta, \sigma)).$$

On a :

$$H'_\eta(0, 0, \xi_0, 0) = p'_\xi(0, 0, \xi_0, \tau_0).$$

Etant donné (5) on peut, après permutation des variables, supposer

$$\operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}})(0, 0, \xi_0, \tau_0) \neq 0.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites ceci implique qu'il existe, en notant  $\tilde{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ ;  $\check{\eta} = (\eta_3, \dots, \eta_n)$ , au voisinage de  $(0, 0, \check{\xi}_0, 0)$  des fonctions réelles  $\eta_j(x, T, \check{\eta}, \sigma)$ ,  $j = 1, 2$  telles que :

$$(31) \quad H(x, T, \tilde{\eta}(x, T, \check{\eta}, \sigma), \check{\eta}, \sigma) = 0$$

$$\tilde{\eta}(0, 0, \check{\xi}_0, 0) = \check{\xi}_0.$$

On pose :

$$K(x, \check{\eta}) = \tau(x, \psi(x), \tilde{\eta}(x, \psi(x), \check{\eta}, \psi'(x)), \check{\eta}, \psi'(x)).$$

Il reste à prouver que  $K(x, \check{\eta})$  ne reste pas réelle si  $\psi(x) = \varepsilon|x|^2$ , en utilisant le fait que  $K$  reste réelle si  $\psi \equiv 0$ .

Pour simplifier, toutes les expressions sont prises en  $x = 0$ ,  $T = 0$ ,  $\eta = \xi_0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\tau = \tau_0$ . On a :

$$(32) \quad K'_x = \tau'_x + \check{\eta}'_x \tau'_{\check{\eta}} + \psi''_{xx} \check{\eta}'_{\xi} \tau'_{\check{\eta}} + \psi''_{xx} \tau'_{\xi}.$$

En dérivant (30) on a :

$$(33) \quad \begin{cases} p''_{\tau x} + \tau'_x p''_{\tau\tau} = 0 \\ p''_{\tau\xi} + \tau'_\eta p''_{\tau\tau} = 0 \\ -\tau_0 p''_{\tau\xi} + \tau'_\xi p''_{\tau\tau} - p'_\xi = 0. \end{cases}$$

En dérivant (31) on a :

$$(34) \quad \begin{cases} \eta'_{1x} = -\frac{\operatorname{Im}(p'_x \overline{p'_{\xi_2}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}})} \\ \eta'_{2x} = -\frac{\operatorname{Im}(p'_x \overline{p'_{\xi_1}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_2} \overline{p'_{\xi_1}})} \\ \eta'_{1\xi} = \frac{\tau_0 \operatorname{Im}(p'_\xi \overline{p'_{\xi_2}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}})} \\ \eta'_{2\xi} = \frac{\tau_0 \operatorname{Im}(p'_\xi \overline{p'_{\xi_1}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_2} \overline{p'_{\xi_1}})}. \end{cases}$$

On déduit de (32), (33) et (34) que :

$$(35) \quad \begin{aligned} & -K'_x |p''_{\tau\tau}|^2 \operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}}) \\ & = \operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}}) \overline{p''_{\tau\tau}} p''_{\tau x} \\ & \quad - \operatorname{Im}(p'_x \overline{p'_{\xi_2}}) p''_{\tau\xi_1} p''_{\tau\tau} + \operatorname{Im}(p'_x \overline{p'_{\xi_1}}) p''_{\tau\xi_2} \overline{p''_{\tau\tau}} \\ & \quad + \psi''_{xx} (\tau_0 [\operatorname{Im}(p'_\xi \overline{p'_{\xi_2}}) p''_{\tau\xi_1} \overline{p''_{\tau\tau}} - \operatorname{Im}(p'_\xi \overline{p'_{\xi_1}}) p''_{\tau\xi_2} \overline{p''_{\tau\tau}} \\ & \quad - \operatorname{Im}(p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}}) p''_{\tau\tau} p''_{\tau\xi}] - p'_\xi \overline{p''_{\tau\tau}}]. \end{aligned}$$

On sait que  $\text{Im } K'_x = 0$  si  $\psi \equiv 0$  donc la partie imaginaire des trois premiers termes de (35) est nulle. On remarque que :

$$\begin{aligned} \text{Im} (p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_2}}) \text{Im} (p''_{\tau\xi_1} \overline{p''_{\tau\tau}}) - \text{Im} (p'_{\xi_j} \overline{p'_{\xi_1}}) \text{Im} (p''_{\tau\xi_2} \overline{p''_{\tau\tau}}) \\ + \text{Im} (\overline{p''_{\tau\tau}} p''_{\tau\xi_j}) \text{Im} (p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}}) = 0 \end{aligned}$$

pour  $j = 1, 2$ . Par contre  $\text{Im} (p'_{\xi_j} \overline{p''_{\tau\tau}}) \neq 0$  pour  $j = 1$  ou  $j = 2$ . Ceci est impliqué par  $\text{Im} (p'_{\xi_1} \overline{p'_{\xi_2}}) \neq 0$ .

On a donc  $\text{Im } K'_{x_1} \neq 0$  ou  $\text{Im } K'_{x_2} \neq 0$ , si  $\psi(x) = \varepsilon|x|^2$ , ce qui implique que  $K(x, \eta)$  ne reste pas réelle.  $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983), 77–108.
- [2] H. BAHOURI, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1521–1547.
- [3] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer–Verlag, Berlin, 1963.
- [4] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.
- [5] N. LERNER, *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement principalement normaux*, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 1–11.
- [6] L. ROBBIANO, *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, J. Differential Equations **57** (1985), 200–223.
- [7] X. SAINT RAYMOND, *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 847–858.
- [8] X. SAINT RAYMOND, *Unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris **299** (1984), 495–498; Enseign. Math. **32** (1986), 1–55.
- [9] C. ZUILY, *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Math. **33** Birkhäuser, Boston, 1983.

Département de Mathématique  
 Université de Paris–Sud  
 91405 Orsay Cedex, France

Received December 30, 1985.





UNICITE DE CAUCHY POUR DES  
OPERATEURS FAIBLEMENT  
HYPERBOLIQUES

par

H. BAHOURI et Luc ROBBIANO



*With the Authors' Compliments*

**Unicité de Cauchy pour des opérateurs  
faiblement hyperboliques**

H. BAHOURI & L. ROBBIANO  
(Received August 4, 1986)

*Reprinted from Hokkaido Mathematical Journal*  
*Vol. XVI No. 3*

**SAPPORO, JAPAN**

**September 1987**

## Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement hyperboliques

H. BAHOURI & L. ROBBIANO

(Received August 4, 1986)

### 1. INTRODUCTION.

Nous présentons, dans ce travail, deux théorèmes d'unicité locale du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques par rapport à une surface.

L'hyperbolicité par rapport à une surface étant une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé (théorème de Lax-Mizohata), la plupart des résultats, concernant ce type d'opérateurs, traitent à la fois la question de l'existence et celle de l'unicité. (Voir Oleïnik[13], Ivrii-Petkov [8], Hörmander [5], ...).

Dans ce travail, nous avons choisi de nous restreindre à l'étude d'opérateurs  $P(y, D_y)$  ( $y \in \mathbf{R}^{n+1}$ ) non effectivement hyperboliques par rapport à une surface  $S$ . (En ce qui concerne les opérateurs effectivement hyperboliques, on pourra consulter Melrose [12], Iwasaki [9], Ivrii [7]). Plus précisément, nous avons fait sur la partie principale les hypothèses d'Hörmander [5] (voir les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ) et nous nous sommes efforcés d'améliorer les hypothèses portant sur le symbole sous-principal  $p_1^s$  pour avoir l'unicité de Cauchy. Pour cela, nous avons introduit une notion généralisée de «principale normalité» faisant intervenir le symbole total  $p$  et qui, en quelque sorte, signifie que l'Hamiltonien de  $\text{Im } p_1^s$  est orthogonal, pour la forme symplectique  $\sigma$ , à la partie involutive de la variété caractéristique  $\Sigma$ .

La méthode employée dans ce papier repose sur la technique classique des inégalités de Carleman.

### 2. GENERALITES ET NOTATIONS.

#### 2. 1. Invariants.

Dans toute la suite,  $P(y, D_y)$  désigne un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients  $C^\infty$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  et à symbole principal réel  $p_2(y, \eta)$ . Et, nous considérons l'unicité du problème de Cauchy pour l'opérateur  $P$  avec des données initiales sur la surface  $S = \{\varphi(y) = \varphi(y_0)\}$  (où  $y_0$  est un point de  $\Omega$  et  $\varphi$  est une fonction réelle de  $C^\infty(\Omega)$ , telle que  $d\varphi \neq 0$  sur  $\Omega$ ), non caractéristique pour  $P$ .

On écrit  $p(y, \eta)$  le symbole total de  $P(y, D_y)$  (on a donc  $p(y, \eta) = p_2(y, \eta) + p_1(y, \eta) + p_0(y, \eta)$ , où les  $p_j$  sont homogènes de degré  $j$  par rapport à  $\eta$  pour  $j=0, 1, 2$ ). On note par  $p_1^s$  le symbole sousprincipal de  $P$ , défini de la manière suivante :

$$p_1^s(y, \eta) = p_1(y, \eta) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 p_2}{\partial y_j \partial \eta_j}(y, \eta)$$

Et l'on adopte la terminologie suivante :

- Nous disons que  $P$  est un opérateur hyperbolique dans  $\Omega$  par rapport aux surfaces de niveaux de  $\varphi$ , si, pour tout  $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , l'équation en  $\tau$  :

$$p_2(y, \eta + \tau d\varphi(y)) = 0$$

n'admet que des racines réelles lorsque  $d\varphi(y)$  n'est pas parallèle à  $\eta$ .

- Nous disons que  $P$  a l'unicité de Cauchy par rapport à la surface orientée  $S$  près de  $y_0$ , si pour tout voisinage  $V$  suffisamment petit de  $y_0$  il existe un voisinage  $W$  de  $y_0$  dans  $\Omega$ , et pour toute solution  $u \in C^\infty(V)$  du problème :

$$\begin{cases} P(y, D_y)u = 0 & \text{dans } V \\ u|_{\varphi(y) < \varphi(y_0)} = 0 \end{cases}$$

s'annule identiquement dans  $W$ .

- Nous disons que  $P$  a l'unicité de Cauchy compacte par rapport à la surface orientée  $S$  près de  $y_0$  si pour tout voisinage  $V$  suffisamment petit de  $y_0$  il existe un voisinage  $W$  de  $y_0$  dans  $\Omega$ , et pour toute solution  $u \in C^\infty(V)$  du problème :

$$\begin{cases} P(y, D_y)u = 0 & \text{dans } V \\ u|_{\varphi(y) < \varphi(y_0)} = 0 \\ \text{Supp } u \cap S \subset \subset V \end{cases}$$

s'annule identiquement dans  $W$ .

- Enfin, si  $\sigma$  est la 2-forme canonique sur  $T^*(\Omega)$ , nous désignons par  $F_p$  la matrice fondamentale de  $P$  qu'on définit de la manière suivante :

$$\text{pour tout } X, Y \in T(\Omega), \quad \frac{1}{2} \text{Hess } p_2(X, Y) = \sigma(X, F_p Y)$$

et qui est un invariant symplectique aux points  $(y, \eta)$  tels que  $p_2(y, \eta) = d p_2(y, \eta) = 0$ .

## 2. 2. Classification des opérateurs hyperboliques.

Nous rappelons ici la classification des opérateurs hyperboliques donnée dans Hörmander [5]. Cette classification repose sur la nature des valeurs propres de  $F_p$  aux points critiques ( $p_2(y, \eta) = d p_2(y, \eta) = 0$ ). En fait, aux

points critiques,  $F_p$  ne peut admettre plus d'un couple  $(\mu, -\mu)$  de valeurs propres réelles non nulles (cf. Hörmander [5]); les autres valeurs propres sont soit nulles, soit imaginaires pures. D'où la distinction de deux classes :

- Soit il existe un couple  $(\mu, -\mu)$  de valeurs propres réelles non nulles. On dit alors que  $P$  est effectivement hyperbolique.
- Soit toutes les valeurs propres réelles sont nulles. On distingue alors deux cas selon la multiplicité  $d$  de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de  $F_p$  (Hörmander a démontré que  $d=2$  ou 4).

DÉFINITION 2.2.1. Dans le cas non effectivement hyperbolique, en notant par  $i\mu_j$  les valeurs propres de  $F_p$ , on définit la " trace plus " de  $P$  (qu'on écrit  $Tr^+ P$ ) de la manière suivante :

$$Tr^+ P = \sum_{\mu_j > 0} \mu_j.$$

### 2.3. Cadre géométrique.

Soit

$$\Sigma = \{(y, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \setminus 0, p_2(y, \eta) = \{p_2, \varphi\}(y, \eta) = 0\}$$

l'on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- (H<sub>1</sub>)  $\Sigma$  est une variété, le rang du Hessien de  $p_2$  est égal à la codimension de  $\Sigma$  en tout point de  $\Sigma$  et  $\sigma$  est de rang constant sur  $\Sigma$ .
- (H<sub>2</sub>)  $P$  est non effectivement hyperbolique et la multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de  $F_p$  est égale à 2.

**Remarques concernant les hypothèses (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) :**

- (2.3.1) Il est clair que l'hypothèse (H<sub>1</sub>) est symplectiquement invariante.
- (2.3.2) On peut également définir  $\Sigma$  par :

$$\Sigma = \{(y, \eta) \in \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \setminus 0, d p_2(y, \eta) = 0\}.$$

### 2.4. Sous-principale normalité.

DÉFINITION 2.4.1. On dit que  $P$  est « sous-principalement normal » en  $y_0$  ( $y_0 \in \Omega$ ) si pour tout  $X \in T\Sigma \cap T\Sigma^\sigma$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$(2.4.1.) \quad |X \operatorname{Im} p_{i|\Sigma}^s| \leq C |\operatorname{Im} p_{i|\Sigma}^s|$$

près de  $y_0$ , où  $T\Sigma^\sigma$  désigne l'espace orthogonal à  $T\Sigma$  pour la 2-forme symplectique  $\sigma$ .

**Remarque concernant la définition 2.4.1.**

- (2.4.2) Si  $\Sigma$  est définie par  $a_j(y, \eta) = 0, j=1, \dots, k$  ( $d a_j$  linéairement indépendant) alors, en notant  $M = (\{a_i, a_j\})_{1 \leq i, j \leq k}$ , (2.4.1) est

équivalente à

pour tout  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \mathbf{R}^k$  avec  $\alpha \in \text{Ker } M$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\left| \sum_{j=1}^k \alpha_j H_{a_j} \text{Im } p_{1|\Sigma}^s \right| \leq C |\text{Im } p_{1|\Sigma}^s|.$$

C'est une inégalité analogue à celle d'Hörmander [5] définissant la principale normalité d'où notre terminologie.

### 3. RESULTATS.

Dans toute la suite, on suppose que  $P(y, D_y)$  est un opérateur hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de  $\varphi$  vérifiant les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ .

#### 3. 1. Cas involutif.

Dans le théorème qui suit, on supposera que  $\Sigma$  est involutive (ce qui est équivalent au fait que  $\text{Tr}^+ P = 0$ ).

THÉORÈME 3. 1. : *On suppose que :*

- (3. 1)  *$P$  est «sous-principalement normal» au voisinage de  $y_0$ .*
- (3. 2)  *$d \text{Im } p_1^s$  est non nulle et  $\{\text{Im } p_1^s = 0\}$  est une variété transverse à  $\Sigma$ .*
- (3. 3)  *$\text{Re } p_{1|\Sigma \cap \{\text{Im } p_1^s = 0\}}^s = 0$   
au voisinage de  $y_0$ .*

Alors  $P$  a l'unicité de Cauchy par rapport à  $S$  près de  $y_0$ .

#### 3. 2. Cas non involutif.

THÉORÈME 3. 2. : *On suppose que :*

- (3. 1)  *$P$  est «sous-principalement normal» au voisinage de  $y_0$ .*
- (3. 4)  *$\{p_2, \{p_2, \varphi\}\}$  s'annule à l'ordre deux sur  $\Sigma$ .*
- (3. 5) *Il existe une constante  $C > 0$  telle que :*  
 $\text{Tr}^+ P + \text{Re } p_1^s + C |\text{Im } p_1^s| > 0$   
*sur  $\Sigma$  au voisinage de  $y_0$ .*

Alors  $P$  a l'unicité de Cauchy compacte par rapport à  $S$  près de  $y_0$ .

#### 3. 3. Remarques.

##### 1) Invariance.

Compte tenu de la remarque (2. 3. 2), il est clair que les hypothèses (3. 1), (3. 2), (3. 3) et (3. 5) sont invariantes par changements de fonctions  $\varphi$  définissant les mêmes surfaces de niveaux. De plus, pour toute fonction  $\psi$  assez proche de  $\varphi$  dans  $C^2(\Omega)$ , l'opérateur  $P(y, D_y)$  reste hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de  $\psi$  dans  $\Omega$ . Ceci entraîne que les hypothèses



èses du théorème 3.1 sont invariantes par convexification.

2) **Ecriture locale de la «sous-principale normalité».**

Nous rappelons qu'on peut choisir microlocalement des coordonnées symplectiques  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{n+1}$ ,  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^{n+1}$ , étant les variables duales, en sorte que :

$$\Sigma = \{x_1 = \xi_1 = 0, \xi_2 = 0\}$$

(ceci vient du fait que  $\sigma$  est de rang constant sur  $\Sigma$ , voir Grigis [4]).

Et la condition (2.4.1) de «sous-principale normalité» est alors équivalente à :

$$\text{Im } p_1^s = a_1 x_1 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + g(x_2, x_3, \xi_3) \text{ avec } \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \leq C |g|.$$

3) En fait, nous prouverons une version plus générale des théorèmes 3.1 et 3.2. (Voir les théorèmes 4.3.1. et 4.3.2).

4) Il est clair que les hypothèses portant sur le symbole sous-principal dans nos résultats sont plus faibles que celles de Hörmander [5]. Par ailleurs, la version généralisée améliore (dans le cas hyperbolique) les théorèmes d'Alinhac [1], Lascar-Zuily [10], Dehman [2].

5) **Exemples.**

En prenant dans  $\mathbf{R}^3$  :

$$p_2(x, t; \xi, \tau) = \tau^2 - x_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2$$

$p_2$  vérifie  $(H_1)$  et  $(H_2)$  et (3.4) ( $\varphi(x, t) = t$ ,  $y_0 = (0, 0)$ ) et  $\Sigma = \{\tau = x_1 = \xi_1 = 0\}$ . La condition (2.4.1) de principale normalité se traduit, en écrivant :

$\text{Re } p_1^s(x, t; \xi, \tau) = a(x, t) \tau + b(x, t) \xi_1 + c(x, t) \xi_2$  par, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\left| \frac{\partial c}{\partial t}(0, x_2, t) \right| \leq C |c(0, x_2, t)|$$

et la condition (3.5) se traduit, en écrivant :  $\text{Re } p_1^s(x, t; \xi, \tau) = \tilde{a}(x, t) \tau + \tilde{b}(x, t) \xi_1 + \tilde{C}(x, t) \xi_2$  par, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|\xi_2| + \tilde{C}(x, t) \xi_2 + C |c(x, t) \xi_2| > 0$$

près de  $(0, 0)$  pour  $\xi_2 \neq 0$ .

4. **PREUVE DES RESULTATS.**

Dans ce qui suit, nous supposerons choisi un système de coordonnées  $y = (x, t)$  ( $\eta = (\xi, \tau)$ ) en sorte que  $y_0 = (0, 0)$ ,  $\varphi(x, t) = t$  et  $p_2(x, t; \xi, \tau) = \tau^2 - Q_2(x, t; \xi)$ .

#### 4. 1. Préliminaires.

Du théorème 3. 2. 1 d'Hörmander [5], on déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 4. 1. 1.: Soit  $A$  un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 2 dans  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  de symbole classique  $a_2 + a_1 + \dots$  où  $a_j$  est homogène de degré  $j$  et  $a_2 \geq 0$ . On note :

$$\Lambda = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, a_2(x, \xi) = 0\}.$$

On suppose que  $\Lambda$  est une variété  $C^\infty$ , que  $a_2$  est transversalement elliptique à  $\Lambda$  et que  $\sigma$  est de rang constant sur  $\Lambda$ . On peut alors construire des vecteurs  $v_j$  vérifiant les propriétés du théorème 3. 2. 1 [5] avec  $Q = Q_{x, \xi} = \text{Hess } a_2(x, \xi)/2$ . En posant  $L_j(x, \xi) = Q_{x, \xi}(v_j, v)$ , il existe, près de tout point  $\rho_0 \in \Lambda$ , des fonctions réelles homogènes de degré 1 en  $\xi$  :  $q_1(x, \xi), \dots, q_{2k+l}(x, \xi)$  telles que, près de  $\rho_0$  (i. e. dans un voisinage conique de  $\rho$ ) on ait :

$$(4. 1. 1) \quad a_2(x, \beta) = \sum_{j=1}^{2k+l} q_j^2(x, \xi)$$

$$(4. 1. 2) \quad \text{pour } j=1, \dots, k \\ d q_{2j-1}(\rho) = \text{Re } L_j(\rho) \\ d q_{2j}(\rho) = \text{Im } L_j(\rho) \\ \text{pour } j=1, \dots, l \\ d q_{2k+j}(\rho) = L_{k+j}(\rho)$$

pour  $\rho \in \Lambda$  près de  $\rho_0$ .

COROLLAIRE 4. 1. 2.: La décomposition précédente vérifie en plus les deux propriétés suivantes :

$$(4. 1. 3) \quad \text{Pour tout } j=1, \dots, l \text{ et tout } i=1, \dots, 2k+l \quad \{q_{2k+j}, q_i\} = 0 \text{ sur } \Lambda$$

$$(4. 1. 4) \quad \text{La matrice } (\{q_i, q_j\})_{1 \leq i, j \leq 2k} \text{ est inversible.}$$

Hörmander démontre dans le paragraphe 4. 3 [5] un résultat qu'on va citer sous forme de proposition.

PROPOSITION 4. 1. 3.: Soit  $p(x, t; \xi, \tau) = \tau^2 - a(x, t, \xi)$  un symbole d'ordre 2 vérifiant les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ .

Alors il existe un symbole  $b(x, t; \xi)$  d'ordre 1 tel que :

$$(4. 1. 5) \quad \{a, \tau - b\} = R(x, t; \xi) \text{ où } R \text{ s'annule l'ordre 2 sur } \Sigma'.$$

$$(4. 1. 6) \quad b|_{\Sigma'} = 0 \text{ et } \{\tau, b\}|_{\Sigma'} = 0.$$

$$(4. 1. 7) \quad a - b^2 \text{ est transversalement elliptique à } \Sigma' \text{ et } \text{Tr}^+ P = \text{Tr}^+(a - b^2).$$

#### 4. 2. Une propriété de la condition de sous-principale normalité.

PROPOSITION 4. 2. 1.: Soit  $L(x, \xi) \in C^\infty(T^*V \setminus \{0\})$  homogène de degré 1 en  $\rho$ , on suppose que  $L$  vérifie l'hypothèse (2. 4. 1). Alors il existe des fonc-

tions  $L_1(x, \xi)$  et  $L_2(x, \xi) \in C^\infty(T^*V \setminus 0)$  homogène de degré 1 en  $\xi$  telles que :

(4. 2. 1)  $L = L_1 + L_2.$

(4. 2. 2)  $L_{1\Sigma} = 0.$

(4. 2. 3) Pour tout  $X \in T \Sigma^\sigma$ , il existe une constante  $C \geq 0$  telle que :  
 $|X L_{2|\Sigma}| \leq C |L_{2|\Sigma}|.$

**Preuve :** Si on utilise l'écriture du corollaire 4. 1. 3 et celle de la proposition, l'hypothèse se traduit microlocalement par,  
 il existe une constante  $C \geq 0$  telle que :

$$|H_{q_{2k+j}} L_{1\Sigma}| \leq C |L_{1\Sigma}|$$

pour  $j = 1, \dots, l,$

$$\text{et } |H_m L_{1\Sigma}| \leq C |L_{1\Sigma}|.$$

où  $m = \tau - b(x, t, \xi).$

De même (4. 2. 3) devient :

Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que :

(4. 2. 3)'  $|H_{q_j} L_{2|\Sigma}| \leq C |L_{2|\Sigma}|$   
 pour  $j = 1, \dots, 2k + l$   
 $|H_m L_{2|\Sigma}| \leq C |L_{2|\Sigma}|.$

On cherche  $L_1$  sous la forme suivante :

$$L_1 = \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i q_i$$

où les  $\alpha_i$  sont à déterminer et l'on pose  $L_2 = L - L_1$  (ceci assure (4. 2. 1) et (4. 2. 2)).

On cherche  $\alpha_i$  en sorte que pour  $j = 1, \dots, 2k$

(4. 2. 4)  $H_{q_j} L_2 = 0$  sur  $\Sigma$

c'est-à-dire :

(4. 2. 5)  $H_{q_j} L - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i H_{q_i} q_i = 0$  sur  $\Sigma.$

Comme la matrice  $(\{q_j, q_j\})_{1 \leq i, j \leq 2k}$  est inversible, on peut résoudre (4. 2. 5). On remarque maintenant que pour :  $j = 2k + 1, \dots, 2k + l$

$$\begin{aligned} H_{q_j} L_1 &= 0 \\ H_m L_1 &= 0 \end{aligned}$$

sur  $\Sigma$ , donc :

$$|H_{q_j} L_{2|\Sigma}| = |H_{q_j} L_{1|\Sigma}| \leq C |L_{1|\Sigma}| = C |L_{11|\Sigma}|$$

et

$$|H_m L_{11|\Sigma}| = |H_m L_{1|\Sigma}| \leq C |L_{1|\Sigma}| = C |L_{11|\Sigma}|$$

ceci avec (4.2.4) nous donne (4.2.3)'. On a donc démontré la proposition microlocalement.

soit  $\chi_j$  une partition de l'unité homogène de degré 0 telle que, sur support de  $\chi_j$ , on ait  $L_1^j$  vérifiant

$$L_{11|\Sigma}^j = 0$$

et, pour tout  $X \in T \Sigma^\sigma$ , il existe une constante  $C$  positive telle que,

$$|X L - X L^j| \leq C |L| \text{ sur } \Sigma.$$

On pose,

$$L_1 = \sum_j \chi_j L_1^j$$

$$L_2 = L - L_1$$

(4.2.1) et (4.2.3) sont vérifiées.

Et on a,

$$X L_2 = XL - \sum_j \chi_j X L_1^j - \sum_j (X \chi_j) L_1^j.$$

Sur  $\Sigma$  on a,

$$|X L_2| \leq \sum_j |\chi_j| |X L - X L^j|$$

$$\leq \tilde{C} |L|.$$

Pour une constante  $\tilde{C}$  positive.

Ce qui démontre la proposition.

#### 4. 3. Préliminaires à la preuve.

Nous allons énoncer, dans ce paragraphe, deux théorèmes précis d'unicité de Cauchy compact. Pour simplifier les énoncés, on se place en coordonnées locales et on note :

$$\varphi(x, t) = t$$

$$p(x, t, \xi, \tau) = \tau^2 - Q_2(x, t, \xi)$$

$$\operatorname{Re} p_1^s = Q_1$$

$$\operatorname{Im} p_1^s = L = L_1 + L_2$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont donnés par la proposition 4.2.1.

L'énoncé de ces hypothèses sous une forme géométrique est assez délicat

et peu satisfaisant. C'est pourquoi nous avons préféré extraire de ces théorèmes, les théorèmes 3.1 et 3.2.

**THÉORÈME 4.3.1.:** *Nous supposons que  $\Sigma$  est une variété involutive. Nous supposons également que :*

- (4.3.1) *P est sous principalement normal.*
- (4.3.2) *Il existe une fonction  $\alpha(x, t, \xi)$  homogène de degré 0 en  $\xi$  et une constante  $C > 0$  telles que,*  

$$|\{Q_1, L\}_{|\Sigma} + \alpha Q_{1|\Sigma}| \leq C |L_{|\Sigma}|.$$
- (4.3.3) *Il existe une fonction  $\beta(x, t, \xi)$  homogène de degré 0 en  $\xi$  et des constantes positives C et  $\varepsilon$  telles que,*
  - i)  $\beta Q_2 - Q'_{2t} \geq \varepsilon Q_2$
  - ii)  $|Q'_{1t|\Sigma} - \beta Q_{1|\Sigma}| \leq C |L_{|\Sigma}|.$

*Alors P possède la propriété d'unicité compacte.*

**REMARQUE:**  $\Sigma$  étant involutive, il existe des fonctions  $\beta$  vérifiant (4.3.3) i). La condition (4.3.3) peut donc se comprendre ainsi ; parmi les fonctions  $\beta$  vérifiant (4.3.3) i), on pose la condition (4.3.3) ii).

**THÉORÈME 4.3.2.:** *Nous supposons que,*

- (4.3.4) *P est sous principalement normal.*
- (4.3.5) *Il existe une fonctions  $\alpha(x, t, \xi)$  et  $d(x, t, \xi)$  homogènes de degré 0 en  $\xi$  et une constante  $\delta > 0$  telles que,*
  - i)  $e = a Q_2 - Q'_{2t} \geq \delta Q_2.$
  - ii)  $Tr^+ e - a Q_1 + Q'_{1t} + d L > 0$  sur  $\Sigma.$

*Alors P possède la propriété d'unicité compacte.*

**REMARQUE:** (4.3.5) i) impose que  $\partial_t \in T \Sigma$  c'est-à-dire que  $H_{(p, \varphi)} \in T \Sigma$ . Ceci est une condition instable par convexification c'est pourquoi de ce théorème on ne peut déduire qu'un théorème d'unicité compacte.

Preuve du théorème 3.1.: Des hypothèses (3.2) et (3.3), on déduit que,

$$Q_1 = \beta_0 L + \sum_{j=1}^k \beta_j q_j$$

où  $\{q_j = 0\} = \Sigma$  et  $\beta_i$  des fonctions homogènes de degré 0 en  $\xi$ . On a, alors sur  $\Sigma$ ,

$$\{Q_1, L\} = L\{\beta_0, L\}$$

car  $\{q_j, L\}_{|\Sigma} = 0$  (hypothèse (3.1)).

De même sur  $\Sigma$

$$Q'_{1t} = \beta_0 L'_t + \beta'_{0t} L$$

car  $\{\tau, q_j\}_{j \in \Sigma} = 0$  (hypothèse (3.1)).

Or (2.4.1) implique que  $|L'_t| \leq C|L|$  pour une constante  $C$  positive. On a donc (4.3.3) et ii) en prenant  $\beta$  très grand et en utilisant la remarque du théorème 4.3.1.

Preuve du théorème 3.2. : (3.4) implique que  $Q'_{2t}$  s'annule à l'ordre 2 sur  $\Sigma$ .

(4.3.5) i) sera donc vérifiée en prenant  $a$  très grand. Dans ces conditions,

$$Tr^+ e = a(Tr^+ Q_2 + o(1))$$

où  $o(1)$  désigne une fonction qui tend vers 0 quand  $a$  tend vers  $+\infty$ . ( $Tr^+$  est une fonction continue voir Melin [11]).

De (3.5), on démontre qu'il existe une fonction  $d(x, t, \xi)$  homogène de degré 0 en  $\xi$  telle que,

$$(4.3.6) \quad Tr^+ P + d L - Q_1 > 0.$$

En effet, il existe un voisinage  $W$  de  $L=0$  tel que  $Tr^+ P - Q_1 > 0$  sur  $W$ .

Soit  $\chi_1$  (resp.  $\chi_2$ ) une fonction  $C^\infty$  homogène de degré 0, positive vérifiant  $\chi_1 = 1$  sur  $L < 0 \cap \mathbb{C} W$  (resp. sur  $L > 0 \cap \mathbb{C} W$ ) et à support dans  $L < 0$  (resp.  $L > 0$ ). On définit  $d = -C\chi_1 + C\chi_2$ .

On obtient aisément de (3.5) que  $d$  vérifie (4.3.6). On a donc :

$$Tr^+ e - a Q_1 + Q'_{1t} + a d L = a [Tr^+ Q_2 - Q_1 + dL + o(1) + \frac{Q'_1}{a}].$$

Ceci sera strictement positif en prenant  $a$  suffisamment grand et en utilisant (4.3.6). On a aussi utilisé le fait que  $Tr^+ P = Tr^+ Q_2$ . En effet la proposition 4.1.4. est vérifiée en prenant  $b=0$ .

#### 4. 4. Inégalité de Carleman.

THÉORÈME 4.4.1. : *Sous les hypothèses du théorème 4.3.1 ou du théorème 4.3.2, il existe des constantes  $C > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  telles que, pour  $\gamma \geq \gamma_0$*

$$(4.4.1) \quad \|e^{-\gamma t} Pu\|^2 \geq C \gamma \|e^{-\gamma t} D_t u\|^2 + C \gamma^3 \|e^{-\gamma t} u\|^2.$$

D'une telle inégalité de Carleman, on prouve l'unicité compacte pour  $P + a D_t + b$  où  $a$  et  $b$  sont des fonctions complexes.

Modulo des termes d'ordre 0 et des termes de la forme  $a(x, t)D_t$ , on peut écrire l'opérateur  $P$  de la manière suivante,  $P(x, t, D_x, D_t) = D_t^2 - Q_2(x, t, D_x)$

+  $Q_1(x, t, D_x) + i L_1(x, t, D_x) + i L_2(x, t, D_x)$  où  $Q_2(x, t, D_x) = \sum_{j, k=1}^n D_{x_j} a_{jk}(x, t) D_{x_k}$  avec  $(a_{jk})$  une matrice symétrique positive.

$Q_1$  est de la forme,

$$\sum_{j=1}^n D_{x_j} a_j(x, t) + a_j(x, t) D_{x_j}$$

où les fonctions  $a_j(x, t)$  sont réelles.

Après les manipulations de la proposition les symboles  $L_j$  n'ont aucune raison d'être des formes linéaires. On utilise la quantification de Weyl, c'est-à-dire,

$$(4.4.2) \quad L_j(x, t, D_x) u = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} L_j\left(\frac{x+y}{2}, t, \xi\right) u(y, t) dy d\xi.$$

Tout ceci implique que  $Q_2, Q_1, L_1, L_2$  sont des opérateurs formellement auto-adjoints.

Nous allons calculer,

$$I = \|e^{-(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} P u\|^2$$

où  $\mu$  est un grand paramètre positif à choisir.

Posons,

$$u = e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} v$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions  $C^\infty$  à support dans  $|x|^2 < r_0$  et  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $r_0$  et  $t_0$  à choisir.

Notons  $N_\gamma v = e^{-(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} P e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} v$ . Nous avons,

$$\begin{aligned} D_t e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} &= e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} \left[ D_t + \frac{\gamma}{i} (1-\mu t) \right] \\ \left[ D_x, e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_\gamma(x, t, D_x, D_t) &= P(x, t, D_x; D_t + \frac{\gamma}{i} (1-\mu t)) \\ &= D_t^2 + \frac{2}{i} \gamma (1-\mu t) D_t - \gamma^2 (1-\mu t)^2 + \mu \gamma - Q_2(x, t, D_x) \\ &\quad + Q_1(x, t, D_x) + i L_1(x, t, D_x) + i L_2(x, t, D_x). \end{aligned}$$

On note, dans la suite des calculs  $\epsilon$  et  $C$  des constantes positives qui ne dépendent pas de  $\mu$  et  $\gamma$ .  $\epsilon$  sera supposé suffisamment petit et  $C$  suffisamment

grand.

On note,

$$(u, v) = \int u \bar{v} \, dx \, dt$$

$$\|u\|^2 = (u, u).$$

On pose,

$$\tilde{N}_\gamma = N_\gamma - \mu\gamma - i L_1.$$

On a,

$$(4.4.3) \quad \|\tilde{N}_\gamma v\|^2 \leq 2\|N_\gamma v\|^2 + C \mu^2 \gamma^2 \|v\|^2 + C \|L_1 v\|^2.$$

Ecrivons  $\tilde{N}_\gamma = A + B$ , en développant on obtient,

$$\|\tilde{N}_\gamma v\|^2 = \|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2 \operatorname{Re}(Av, Bv)$$

avec

$$A = D_t^2 - \gamma^2(1 - \mu t)^2 - Q_2 + Q_1$$

$$B = -2 \gamma i(1 - \mu t) D_t + i L_2.$$

Calculons  $2 \operatorname{Re}(Av, Bv)$  en intégrant chaque terme par partie.

$$I_1 = 2 \operatorname{Re}(D_t^2 v, -2 \gamma i(1 - \mu t) D_t v)$$

$$I_1 = 2 \gamma \mu \|D_t v\|^2$$

$$I_2 = 2 \operatorname{Re}(-\gamma^2(1 - \mu t)^2 v, -2 \gamma i(1 - \mu t) D_t v)$$

$$I_2 = 6 \gamma^3 \mu \|(1 - \mu t) v\|^2.$$

En prenant  $t_0$  tel que,

$$6(1 - \mu t_0)^2 \geq 5 \text{ c'est-à-dire :}$$

$$t_0 \leq \left(1 - \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \frac{1}{\mu}.$$

On obtient,

$$I_2 \geq 5 \gamma^3 \mu \|v\|^2$$

$$I_3 = 2 \operatorname{Re}(-Q_2 v, -2 \gamma i(1 - \mu t) D_t v)$$

$$I_3 = 2 \gamma \mu (Q_2 v, v) - 2 \gamma (i[D_t, Q_2] v, (1 - \mu t) v)$$

$$I_4 = 2 \operatorname{Re}(Q_1 v, -2 \gamma i(1 - \mu t) D_t v)$$

$$I_4 = 2 \gamma \mu (Q_1 v, v) + 2 \gamma (i[D_t, Q_1] v, (1 - \mu t) v)$$

$$I_5 = 2 \operatorname{Re}(D_t^2 v, i L_2 v) = 2 \operatorname{Re}(D_t v, i[D_t, L_2] v).$$

Calcul du symbole de Weyl de  $i[B_t, L_2]$ .

(4.4.4) REMARQUE. Soient deux opérateurs  $Q$  et  $Q'$  de symbole de Weyl réel,  $Q$  d'ordre  $m$ ,  $Q'$  d'ordre  $m'$ , alors le symbole de Weyl de  $i[Q, Q']$  est



$\{\sigma^w(Q), \sigma^w(Q')\}$  modulo des termes d'ordre  $m + m' - 3$ .

Le symbole de  $i[D_t, L_2]$  est,  $\{\tau, L_2(x, t, \xi)\} = L'_{2t}(x, t, \xi)$ . En appliquant (4.2.3), on déduit que

$$(4.4.5) \quad |L'_{2t}|^2 \leq C L_2^2 + C Q_2.$$

On a d'autre part,

$$(4.4.6) \quad |2 \operatorname{Re}(D_t v, i[D_t, L_2]v)| \leq C \gamma \|D_t v\|^2 + \frac{C}{\gamma} \|[D_t, L]v\|^2.$$

En appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong [3] au symbole,

$$C L_2^2 + C Q_2 - L_{2t}^2.$$

On obtient de (4.4.5) et (4.4.6)

$$|2 \operatorname{Re}(D_t v, i[D_t, L]v)| \leq C \gamma \|D_t v\|^2 + \frac{C}{\gamma} \|L_2 v\|^2 + \frac{C}{\gamma} (Q_2 v, v) + \frac{C}{\gamma} \|v\|^2.$$

En conclusion on a,

$$I_5 \geq -C \gamma \|D_t v\|^2 - \frac{C}{\gamma} \|L_2 v\|^2 - \frac{C}{\gamma} (Q_2 v, v) - \frac{C}{\gamma} \|v\|^2.$$

$$I_6 = 2 \operatorname{Re}(-\gamma^2(1-\mu t)^2 v, i L_2 v) = 0$$

$$I_7 = 2 \operatorname{Re}(-Q_2, i L_2) = (i[L_2, Q_2]v, v).$$

Calcul du symbole de Weyl de  $i[L_2, Q_2]$ .

Le corollaire 4.1.1 permet décrire microlocalement,

$$(4.4.7) \quad Q_2 = \sum_{j=1}^l q_j^2 \text{ avec } |\{q_j, L_2\}| \leq C |L_2| \text{ sur } \Sigma.$$

Globalement on a,

$$Q_2 = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^{lk} (q_j^k)^2 \chi_k^2,$$

où  $\chi_k^2$  est une partition de l'unicité homogène de degré 0 en  $\xi$ . Modulo des termes d'ordre 0, le symbole de Weyl de  $i[L_2, Q_2]$  est,

$$\{L_2, Q_2\} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^{lk} \left[ 2 q_j^k \chi_k^2 \{q_j^k, L_2\} + (q_j^k)^2 \{\chi_k^2, L_2\} \right].$$

Le deuxième terme de la somme est majorée par  $C Q_2$ . On en déduit, en appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong

$$\left| \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^{lk} (Op^w(q_j^k \{\chi_k^2, L_2\})v, v) \right| \leq C (Q_2 v, v) + C \|v\|^2$$

où on a noté  $Op^w(a)$  l'opérateur de symbole  $a$  déduit par la formule (4.4.2).

En ce qui concerne le premier terme on  $a$ , modulo des termes d'ordre 0,

$$Op^w(2 q_j^k \chi_k^2 \{q_j^k, L_2\}) = Op^w(q_j^k \chi_k) Op^w(\chi_k \{q_j^k, L_2\}) \\ + Op^w(\chi_k \{q_j^k, L_2\}) Op^w(q_j^k \chi_k).$$

Donc

$$|(Op^w(2 q_j^k \chi_k^2 \{q_j^k, L_2\}) v, v)| \\ = |2 \operatorname{Re}(Op^w(\chi_k \{q_j^k, L_2\}) v, Op^w(q_j^k \chi_k) v)| \\ + O(\|v\|^2) \leq \varepsilon \gamma \|Op^w(q_j^k \chi_k) v\|^2 \\ + \frac{C}{\gamma} \|Op^w(\chi_k \{q_j^k, L_2\}) v\|^2 + C \|v\|^2.$$

En utilisant (4.2.3), on obtient,

$$|\{q_j^k, L_2\}|^2 \leq C Q_2 + C L_2^2.$$

Ceci permet, en appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong de conclure que,

$$I_7 \geq -\varepsilon \gamma (Q_2 v, v) - \frac{C}{\gamma} \|L_2 v\|^2 - C \gamma \|v\|^2 \\ I_8 = 2 \operatorname{Re}(Q_1 v, i L_2 v) \\ I_8 = (i [Q_1, L_2] v, v).$$

En résumé, on a,

$$(4.4.8) \quad 2 \operatorname{Re}(A v, B v) \geq 2 \gamma \mu \|D_t v\|^2 + 5 \gamma^3 \mu \|v\|^2 \\ + 2 \gamma \mu (Q_2 v, v) - 2 \gamma (i [D_t, Q_2] v, (1 - \mu t) v) \\ + 2 \gamma \mu (Q_1 v, v) + 2 \gamma (i [D_t, Q_1] v, (1 - \mu t) v) \\ + (i [Q_1, L_2] v, v) - R_1$$

$$\text{où } R_1 = C \gamma \|D_t v\|^2 + C \gamma \|v\|^2 + \varepsilon \gamma (Q_2 v, v) + \frac{C}{\gamma} \|L_2 v\|^2.$$

Contrôle de  $\|L_2 v\|^2 / \gamma$ .

En utilisant l'expression  $B$ , on a

$$\frac{\mu}{\gamma} \|L_2 v\|^2 = \frac{\mu}{\gamma} \|[B + 2 \gamma i(1 - \mu t) D_t] v\|^2 \leq \frac{5\mu}{\gamma} \|B v\|^2 + 5 \mu \gamma \|D_t v\|^2.$$

Donc, pour  $\gamma$  suffisamment grand,

$$(4.4.9) \quad \|B v\|^2 \geq \frac{\mu}{5\gamma} \|L_2 v\|^2 - \mu \gamma \|D_t v\|^2.$$

Soit  $k(x, t, \xi)$  un symbole en  $(x, \xi)$  à paramètre  $t$ , homogène de degré 0 en  $\xi$ . On suppose que,

$$(4.4.10) \quad \begin{aligned} \|Op^w(k)\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq \frac{1}{4} \\ \|Op^w(k)^*\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En écrivant  $Q_1$  en fonction de  $A$ , on a,

$$\begin{aligned} &-2 \gamma \mu \operatorname{Re}([Id - Op^w(k)] Q_1 v, v) \\ &= -2 \gamma \mu \operatorname{Re}((Id - Op^w(k)) A v, v) + 2 \gamma \mu \operatorname{Re}([Id - Op^w(k)] D_t^2 v, v) \\ &= -2 \gamma^3 \mu \operatorname{Re}((Id - Op^w(k))(1 - \mu t)^2 v, v) \\ &\quad - 2 \gamma \mu \operatorname{Re}([Id - Op^w(k)] Q_2 v, v) = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}. \end{aligned}$$

On a, grâce à (4.4.10),

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\leq \varepsilon \|A v\|^2 + C \gamma^2 \mu^2 \|v\|^2. \\ \textcircled{2} &= 2 \gamma \mu \|D_t v\|^2 - 2 \gamma \mu (Op^w(k) D_t v, D_t v) \\ &\quad - 2 \gamma \mu ([Op^w(k), D_t] D_t v, v). \end{aligned}$$

$\tau$  étant une forme linéaire le symbole de Weyl de  $[Op^w(k), D_t]$  est exactement (voir Hörmander [6]),  $\frac{1}{i} \{k, \tau\} = i k'_t$ .

On a donc en utilisant (4.4.10),

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\geq \gamma \mu \|D_t v\|^2 - C \mu \gamma \|Op^w(k'_t) v\|^2. \\ \textcircled{3} &\geq \frac{5}{2} \gamma^3 \mu \|v\|^2. \end{aligned}$$

En résumé, on a,

$$(4.4.11) \quad \begin{aligned} &-2 \gamma \mu \operatorname{Re}(Q_1 v, v) \geq -2 \gamma \mu \operatorname{Re}(Op^w(k) Q_1 v, v) \\ &\quad + \gamma \mu \|D_t v\|^2 - \varepsilon \|A v\|^2 - 3 \gamma^3 \mu \|v\|^2 \\ &\quad - C \mu \gamma \|Op^w(k'_t) v\|^2 \\ &\quad - 2 \gamma \mu \operatorname{Re}([Id - Op^w(k)] Q_2 v, v). \end{aligned}$$

Et donc, en utilisant (4.4.8), (4.4.9) et (4.4.11),

$$(4.4.12) \quad \begin{aligned} \|\tilde{N}_\gamma v\|^2 &\geq 2 \gamma \mu \|D_t v\|^2 + 2 \gamma^3 \mu \|v\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu}{5\gamma} \|L_2 v\|^2 + 2 \gamma \mu \operatorname{Re}(Op^w(k) Q_2 v, v) \\ &\quad - 2 \gamma (i[D_t, Q_2] v, (1 - \mu t) v) \\ &\quad - 2 \gamma \mu \operatorname{Re}(Op^w(k) Q_1 v, v) \\ &\quad + 2 \gamma (i[D_t, Q_1] v, (1 - \mu t) v) \\ &\quad + (i[Q_1, L_2] v, v) - R_2 \end{aligned}$$

où  $R_2 = R_1 + C \mu \gamma \|Op^w(k'_t) v\|^2$ .

ler cas :  $Tr^+ Q_2 = 0$ .

Contrôle de  $(i[Q_1, L_2]v, v)$ .

En prolongeant la fonction  $\alpha(x, t, \xi)$ , donnée par (4.3.2) hors de  $\Sigma$  par une fonction homogène de degré 0 en  $\xi$ , on prouve l'inégalité suivante,

$$|[Q_1, L_2] + \alpha Q_1| \leq C|L_2| + C\sqrt{Q_2}.$$

Ecrivons,

$$(4.4.13) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(i[Q_1, L_2]v, v) &= \operatorname{Re}([i[Q_1, L_2] + Op^w(\alpha)Q_1]v, v) \\ &\quad - \operatorname{Re}(Op^w(\alpha)Q_1v, v) \geq -\frac{C}{\gamma}(Q_2v, v) - \frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2 - C\gamma\|v\|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re}(Op^w(\alpha)Q_1v, v). \end{aligned}$$

Contrôle de  $2\gamma(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v)$ .

On prolonge  $\beta(x, t, \xi)$ , la fonction de l'hypothèse (4.3.3), hors de  $\Sigma$  par une fonction homogène de degré 0 en  $\xi$  qu'on note également  $\beta(x, t, \xi)$ . On obtient,

$$|[D_t, Q_1] - \beta Q_1| \leq C|L_2| + C\sqrt{Q_2}.$$

On a, en appliquant le calcul symbolique et l'inégalité de Fefferman-Phong,

$$(4.4.14) \quad \begin{aligned} &2\gamma \operatorname{Re}(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v) \\ &= 2\gamma \operatorname{Re}((1-\mu t)[i[D_t, Q_1] - Op^w(\beta)Q_1]v, v) \\ &\quad + 2\gamma \operatorname{Re}((1-\mu t)Op^w(\beta)Q_1v, v) \\ &\geq -2C\gamma^3\|v\|^2 - \frac{C}{\gamma}(Q_2v, v) - \frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2 \\ &\quad + 2\gamma \operatorname{Re}((1-\mu t)Op^w(\beta)Q_1v, v). \end{aligned}$$

Ecrivons les symboles de Weyl des termes du premier ordre de (4.4.12) en utilisant (4.4.13) et (4.4.14).

On a, modulo des termes d'ordre 0,

$$(4.4.15) \quad -2\gamma\mu k Q_1 + 2\gamma(1-\mu t)\beta Q_1 - \alpha Q_1.$$

Posons

$$(4.4.16) \quad k = \frac{(1-\mu t)}{\mu} \beta - \frac{\alpha}{2\gamma\mu}.$$

De sorte que (4.4.15) est nul. De plus  $\mu k$  est un symbole de  $S_{1,0}^q$  uniformément par rapport à  $t$  et  $\gamma$ .

Donc en prenant  $\mu$  suffisamment grand (4.4.10) sera vérifié.

On vérifie facilement que  $k'$  est un symbole de  $S_{1,0}^q$  uniformément par rapport à  $t$  et  $\gamma$ . Donc

$$(4.4.17) \quad C \mu \gamma \|Op^w(k'_t)v\|^2 \leq C \mu \gamma \|v\|^2.$$

Contrôle des termes du deuxième ordre.

Modulo des termes d'ordre 0 le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de (4.4.12) est,

$$(4.4.18) \quad 2 \gamma \mu k Q_2 - 2 \gamma (1 - \mu t) Q'_{2t} - \varepsilon \gamma Q_2.$$

En utilisant (4.4.16), (4.4.18) devient,

$$(4.4.19) \quad 2 \gamma (1 - \mu t) \beta Q_2 - 2 \gamma (1 - \mu t) Q'_{2t} - \varepsilon \gamma Q_2 - \alpha Q_2 \\ = 2 \gamma (1 - \mu t) \left[ \beta Q_2 - Q'_{2t} - \frac{\varepsilon Q_2}{2(1 - \mu t)} - \frac{\alpha Q_2}{2 \gamma (1 - \mu t)} \right].$$

Il existe une constante positive  $\delta$  telle que,  $\beta Q_2 - Q'_{2t} \geq \delta Q_2$ . (Voir (4.3.3)). L'expression (4.4.19) est donc supérieure à,

$$(4.4.20) \quad 2 \gamma (1 - \mu t) \left[ \delta - \frac{\varepsilon}{2(1 - \mu t)} - \frac{\varepsilon}{2 \gamma (1 - \mu t)} \right] Q_2.$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $\gamma$  suffisamment grand, (4.4.20) est supérieur à  $\gamma \delta Q_2$ .

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Fefferman-Phong pour conclure que,

$$(4.4.21) \quad \|\tilde{N}_\gamma v\|^2 \geq \gamma \mu \|D_t v\|^2 + \gamma^3 \mu \|v\|^2 + \gamma \delta (Q_2 v, v).$$

En utilisant le fait que  $L_1$  s'annule sur  $\Sigma$ , on déduit que,

$$\|N_\gamma v\|^2 \geq \frac{\gamma \mu}{2} \|D_t v\|^2 + \frac{\gamma^3 \mu}{2} \|v\|^2.$$

Ce qui donne de manière classique l'inégalité de Carleman (4.4.1).

2ème cas :  $Tr^+ Q_2 > 0$ .

Utilisons le symbole  $a(x, t, \xi)$  de l'hypothèse (4.3.5), et posons,

$$k(x, t, \xi) = \frac{(1 - \mu t) a(x, t, \xi)}{\mu},$$

de sorte que, comme pour le 1er cas, (4.4.10) est vérifiée et,

$$\|Op^w(k'_t)v\|^2 \leq C \|v\|^2.$$

Le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de l'expression (4.4.12) est, modulo des termes d'ordre 0,

$$(4.4.22) \quad 2 \gamma (1 - \mu t) a Q_2 - 2 \gamma (1 - \mu t) Q'_{2t} - \varepsilon \gamma Q_2.$$

En utilisant (4.3.5), il existe une constante positive  $\delta$  telle que (4.4.22) est supérieure à  $2 \delta \gamma Q_2$ .

Au terme (4.4.12) ajoutons et retranchons

$$2 \gamma \operatorname{Re}((1-\mu t) \operatorname{Op}^w(d(x, t, D_x)) L_2 v, v).$$

Ce terme est majoré par  $C \gamma^3 \|v\|^2 + \frac{C}{\gamma} \|L_2 v\|^2$ , ce qui est contrôlé par

$$\mu \gamma^3 \|v\|^2 + \frac{\mu}{5\gamma} \|L_2 v\|^2$$

si on prend  $\mu$  assez grand.

Nous allons appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander [5] au symbole,

$$\begin{aligned} K = & (1-\mu t) a Q_2 - (1-\mu t) Q'_{2t} - \frac{\varepsilon}{2} Q_2 - \frac{\delta}{2} Q_2 \\ & - (1-\mu t) a Q_1 + (1-\mu t) Q'_{1t} + (1-\mu t) d L_2 + \frac{1}{2\gamma} \{Q_1, L_2\}. \end{aligned}$$

Le terme d'ordre deux de  $K$  est transversalement elliptique à  $\Sigma$  (voir §.2.3) et sa trace plus est,

$$(1-\mu t) \operatorname{Tr}^+ e + |\xi| O(\varepsilon) + |\xi| O(\delta)$$

où  $e$  est donné par (4.3.5).

(En effet la trace plus est une fonction continue, voir Melin [11]).

Donc l'opérateur de symbole  $K$  sera positif (modulo  $C \|v\|^2$ ) si,

$$(4.4.23) \quad \begin{aligned} K_1 = & (1-\mu t) \operatorname{Tr}^+ e + |\xi| Q(\varepsilon) + |\xi| O(\delta) - (1-\mu t) a Q_1 \\ & + (1-\mu t) Q'_{1t} + (1-\mu t) d L_2 + \frac{1}{2\gamma} \{Q_1, L_2\} \geq 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Or de (4.3.5), on déduit

$$\operatorname{Tr}^+ e - a Q_1 + Q'_{1t} + d L_2 > \tilde{\delta} |\xi| \text{ sur } \Sigma,$$

donc

$$K_1 \geq (1-\mu t) \tilde{\delta} |\xi| + |\xi| O(\varepsilon) + |\xi| O(\delta) + \frac{1}{2\gamma} \{Q_1, L_2\}.$$

Si on prend  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , et  $\frac{1}{\gamma}$  suffisamment petit par rapport à  $\tilde{\delta}$ , on aura  $K_1 > 0$ .

On peut donc appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander à  $K$ .

On a donc

$$\|\tilde{N}_\gamma\|^2 \geq \mu \gamma \|D_t v\|^2 + \mu \gamma^3 \|v\|^2 + \delta \gamma (Q_2 v, v).$$

Ce qui est l'inégalité (4.4.21). On achève alors la preuve de (4.4.1) comme pour le premier cas.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] S. ALINHAC : Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels, *Annales de l'Institut de Fourier*, 34 (2) (1984) 89-109.
- [ 2 ] B. DEHMAN : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes, *Journal of Mathematics of Kyoto University* 24 (1984), 453-471.
- [ 3 ] C. FEFFERMAN, D. H. PHONG : On positivity of pseudo-differential operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 75 (10) (1978), 4673-4674.
- [ 4 ] A. GRIGIS : Hypoellipticité et parametrix pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles, *Astérisque* 34-35 (1976), 183-205.
- [ 5 ] L. HÖRMANDER : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, *Journal d'Analyse Math.* 32 (1977), 110-196.
- [ 6 ] L. HÖRMANDER : The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979), 359-443.
- [ 7 ] V. Ia IVRII : Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, *Trudy Moskov. Mat. Obx.* 23 (1976), 3-65, English transl. in *Frans. Moscow. Math. Issue 1* (1978), 1-65.
- [ 8 ] V. Ia. IVRII, V. M. PETKOV : Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations, *Uspehi Mat. Nauk* 29 (5) (1974), 3-70.
- [ 9 ] N. IWASAKI : Cauchy problems for effectively hyperbolic equations,  
(Part 1) *J. Math. Kyoto Univ.* 23 (1983), 503-562.  
(Part 2) *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 20 (1984), 543-584.
- [ 10 ] L. LASCAR, C. ZUILY : Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles, *Duke Math. J.* 49 (1) (1982), 137-162.
- [ 11 ] A. MELIN : Lower bounds for pseudo-differential operators, *Arkiv Får Matematik* 9 (1) (1971), 117-140.
- [ 12 ] R. MELROSE : The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, *Hokkaido Math. J.* 12 (1983), 371-391
- [ 13 ] O. A. OLEÏNIK : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 569-586.

Université de Paris-Sud

**THEOREME D'UNICITE**

**ADAPTE AU CONTROLE DES**

**SOLUTIONS DES PROBLEMES**

**HYPERBOLIQUES**

par

**LUC ROBBIANO**

**A paraître au Communications in Partial Differential Equations.**





**Théorème d'unicité adapté au contrôle  
des solutions des problèmes hyperboliques**

LUC ROBBIANO

UNIVERSITÉ DE PARIS-VAL DE MARNE

U.F.R. DE SCIENCES

AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE

94010 CRETEIL CEDEX

ET

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

91405 ORSAY CEDEX

CNRS ORSAY URA 760

**Résumé.**

On démontre un théorème d'unicité pour les problèmes hyperboliques. Conséquence, on peut toujours, pour un temps suffisamment grand, appliquer la méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method).

**Abstract.**

We prove a uniqueness theorem for hyperbolic problem. This theorem implicate that we always can apply the Hilbert Uniqueness Method.

**Mots clés.**

Unicité, Contrôle.

**Code Matière AMS (1980).**

35 A 07, 35 R 25.

## 0. Introduction.

La méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) développée par J.L. LIONS [7] permet d'étudier le contrôle des solutions d'équations aux dérivées partielles. Notre discussion se bornera au cas des équations hyperboliques. Le contrôle au sens le plus fort, c'est-à-dire l'existence de contrôle pour des données dans des espaces fonctionnels classiques (ici  $L^2 \times H^{-1}$ ) a été résolu par BARDOS, LEBEAU et RAUCH [2]. Mais H.U.M. permet aussi de construire de façon implicite, des espaces de données pour lesquelles il existe un contrôle. Ce résultat repose sur un théorème d'unicité, (voir le théorème 3.1 de Lions). Ce théorème n'est démontré que dans deux cas, pour des opérateurs à coefficients analytiques, c'est alors une conséquence du théorème d'Holmgren et dans le cadre étudié par Bardos, Lebeau et Rauch.

Nous démontrons, ici, ce théorème pour des opérateurs à coefficients peu réguliers. Notre méthode repose sur une idée de RAUCH et TAYLOR [8] reprise également par LERNER [6]. Essentiellement, ces auteurs démontrent le résultat suivant, si  $u(t, x)$  est solution d'une équation hyperbolique  $\left[ D_t^2 - A(x, D_x) \right] u(t, x) = 0$  où  $A$  est elliptique,  $A > 0$  et  $u(t, x) = 0$  pour tout  $x \in B(0, r)$ ,  $r > 0$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  alors  $u = 0$  pour tout  $x$  et  $t$ .

La méthode est la suivante. Ils posent :

$$v_\lambda(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t, x) dt .$$

On a :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad v_\lambda = 0$$

pour  $(t, x) \in \mathbb{R} \times B(0, r)$ .

On applique le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques, on obtient que  $v_\lambda = 0$ , ce qui implique que  $u = 0$  car

$$v_\lambda(0, x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u(t, x) .$$

Notre théorème 1 est une version locale de ce résultat. On pose :

$$v_\lambda(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t, x) dt$$

On a alors :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$$

et

$$v_\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad (t, x) \in ]-T, T[ \times B(0, r) .$$

Ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème d'unicité. Mais on reporte ceci dans une inégalité de Carleman, démontrée par HÖRMANDER [3], ce qui permet de prouver que  $v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$ . En faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini, cela implique que  $u(t_0, x) = 0$ .

Je remercie M. Saut et M. Scheurer pour m'avoir indiqué ce problème.

## 1. Résultats.

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $A(x, D_x)$  un opérateur elliptique

$$A(x, D_x) = \sum_{n \geq i, j \geq 1} a_{i,j}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) D_{x_i} + a_0(x).$$

$(a_{ij}(x))$  est une matrice réelle définie positive, et il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$C_2 |\xi|^2 \geq \sum_{n \geq i, j \geq 1} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_1 |\xi|^2.$$

Les applications  $a_{ij}(x)$  sont  $C^1(\bar{\Omega})$ , il existe donc une constante positive  $C_3$  telle que  $\left| \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x} \right| \leq C_3$  pour  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Les applications  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  appartiennent à  $L^\infty$ .

Soit  $u(t, x)$  vérifiant :

$$D_t^2 u(t, x) - A(x, D_x) u(t, x) = 0$$

pour  $(t, x) \in ]-T, T[ \times \Omega$ .

On suppose que  $u \in H_{loc}^2(]-T, T[ \times \Omega)$  ou que  $u \in C^0(]-T, T[, H_{loc}^1(\Omega)) \cap C^1(]-T, T[, L_{loc}^2(\Omega))$ . On suppose que :

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in ]-T, T[ \times B(x_0, r_0),$$

où  $x_0 \in \Omega$ ,  $r_0 > 0$  et  $B(x_0, r_0) \subset \Omega$ .

On note  $|x - y|$  la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  et  $d(x, y)$  la distance géodésique dans  $\Omega$ , pour la métrique euclidienne.

On note  $D = \text{Sup} \{d(x_0, x), \text{ pour } x \in \Omega\}$ . On suppose que  $D \neq +\infty$ . (Il est facile de construire des ouverts connexes de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  vérifiant  $D = +\infty$ ).

**THÉORÈME 1.** *Il existe un réel  $K$  strictement positif ( $K$  ne dépend que de  $C_1$  et  $C_2$ ) tel que si  $T > KD$  alors*

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in ]-T_1, T_1[ \times \Omega \quad \text{ou } T_1 = T - KD .$$

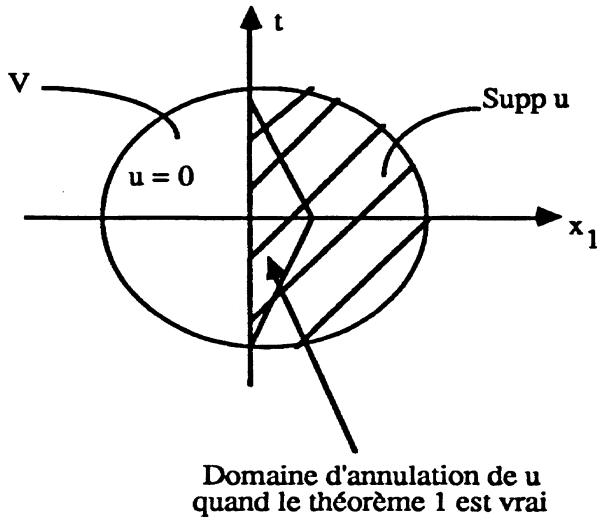
**COMMENTAIRES :**

i) Ce théorème peut être appliqué d'une manière purement locale. Pour  $T$  fixé on peut trouver un domaine de  $]-T, T[ \times \Omega$  sur lequel  $u$  s'annule. En particulier le théorème 1 est faux si  $A$  dépend de  $t$ . En effet, en prenant pour  $A$  le Laplacien positif le théorème d'ALINHAC [1] permet de trouver  $u(t, x)$  et  $a(t, x)$  des fonctions  $C^\infty$  vérifiant :

$$\left[ D_t^2 - \Delta + a(t, x) \right] u(t, x) = 0$$

dans  $V$  un voisinage de  $(t, x) = (0, 0)$  et  $\text{Supp } u = \{x_1 \geq -\delta |x'|^2\} \cap V$ , où  $x = (x, x')$ ,  $\delta > 0$ . Ce qui est contradictoire avec le théorème 1.

On résume la situation dans ce schéma.



ii) Quand  $A$  est à coefficients analytiques, ( $A$  peut alors dépendre de  $t$ ), ce théorème est une conséquence du théorème d'Holmgren. Dans ce cas la constante  $K$  trouvée dans le théorème 1 est bien moins bonne que celle donnée par le théorème d'Holmgren.

iii) Ces deux remarques, et la méthode de démonstration suggèrent que l'analyticité par rapport à  $t$  est la bonne hypothèse pour obtenir le théorème 1.

iv) Ce théorème permet de résoudre un problème posé dans le livre de LAVRENTÈV, ROMANOV et SHISTATSKII [5], étudié par RAUCH et TAYLOR [8] et par LERNER [6]. La question est la suivante : si  $u$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + a(x, y) u = 0 \\ u|_{x < 0} = 0, \end{cases}$$

a-t-on  $u = 0$ ?

Lerner a donné une réponse positive à cette question si les hypothèses sont globales sur  $\mathbb{R}_{(x,y)}^2 \times \mathbb{R}_t$ . Le théorème 1 donne une réponse positive si les hypothèses sont locales en  $(x, y, t)$ .

Ce type de résultat permet d'aborder le problème de détermination d'une source connaissant le signal reçu. Ainsi le cas  $a \equiv 0$  a été étudié par SYMES [9].

### Application au problème du contrôle.

On suppose que  $u(t, x)$  vérifie :

$$(P) \quad \begin{cases} [D_t^2 - A(x, D)] u(t, x) = 0 \text{ sur } ]-\infty, +\infty[ \times \Omega \\ u(0, x) = u^0(x) \text{ avec } u^0 \in H_0^1(\Omega) \\ D_t u(0, x) = u'(x) \text{ avec } u' \in L^2(\Omega) \\ u(t, x) = 0 \text{ sur } ]-\infty, +\infty[ \times \partial\Omega . \end{cases}$$

On a alors  $u \in C^0(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R} \times L^2(\Omega))$ .

$$(H) \quad \begin{cases} \text{On suppose de plus que } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } ]-T, T[ \times \Sigma \text{ où } \Sigma \\ \text{est un ouvert de } \partial\Omega, \text{ et } \frac{\partial}{\partial n} \text{ est la dérivée normale à } \Sigma. \\ \text{On suppose également que } \Sigma \text{ est une hypersurface } C^2. \end{cases}$$

Il existe donc  $x_0 \in \Sigma$  et  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \cap \partial\Omega \subset \Sigma$ . On pose  $\tilde{\Omega} = \Omega \cup B(x_0, r)$  et on prolonge  $u$  sur  $\tilde{\Omega}$  par 0 hors de  $\Omega$ . Notons  $\underline{u}$  ce prolongement. On a :

$$\begin{aligned} (D_t^2 - A) \underline{u} &= 0 \text{ sur } ]-T, T[ \times \tilde{\Omega} \\ \underline{u} &\in C^0(]-T, T[, H_0^1(\tilde{\Omega})) \cap C^1(]-T, T[, L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

et

$$\underline{u} = 0 \text{ sur } ]-T, T[ \times B(x_0, r) .$$

Appelons  $D = \text{Sup} \{d(x_0, x), x \in \tilde{\Omega}\}$ . Ici  $d$  est la distance géodésique sur  $\tilde{\Omega}$ . On suppose  $D < +\infty$ . En appliquant le théorème 1 on obtient le résultat suivant.

**THÉORÈME 2.** *Soit  $u$  une solution de (P), si  $(u, \Omega, \Sigma)$  vérifient (H) alors, si  $T > KD$ ,*

$$u^0 = u^1 = 0 .$$

Ce théorème d'unicité est la première étape pour appliquer la méthode H.U.M. de J.L. LIONS [7].

## 2. Une version locale du théorème d'unicité.

On fait les hypothèses du §.1 sur  $A$ , on suppose que

$$u \in H^2([-T, T] \times B(0, 3r))$$

ou que

$$u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r))), \quad r > 0 \text{ fixé.}$$

LEMME 1. *Il existe une constante strictement positive  $K$  (ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ ) et  $r_0$  (dépendant de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ) telle que si  $(D_t^2 - A)u = 0$  et si*

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in [-T, T] \times B(0, r), \quad \text{pour } r < r_0$$

alors

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } |x| < 2r$$

et

$$|t| < T - Kr .$$

Ce lemme est une version locale affaiblie du théorème 1. La démonstration va comporter plusieurs étapes.

On pose d'abord :

$$v_{a,\lambda}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} u(t, x) dt .$$

$v_{a,\lambda}$  possède plusieurs propriétés, tout d'abord, celle qui permet de conclure à la fin du calcul, c'est-à-dire,

$$v_{a,\lambda}(0, x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u(a, x) \quad \text{si } |a| < T ,$$

et

$$(1) \quad \|v_{a,\lambda}\|_{H^1([-s_0, s_0] \times B(0, 3(r-\delta)))} \leq C \lambda^{1/2} e^{\frac{\lambda}{2} s_0^2} ,$$

$$(2) \quad v_{a,\lambda}(s, x) = 0 \quad \text{pour } x \in B(0, r) .$$

LEMME 2. *Il existe une constante  $C$  (qui dépend de  $u$ ), telle que :*

$$\|Q v_{a,\lambda}\|_{L^2([-s_0, s_0] \times B(0, 3r))} \leq C \lambda^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}[(T-|a|)^2 - s_0^2]}$$

où  $Q = D_t^2 + A(x, D_x)$ .

Dans le cas où  $u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r)))$ , on déduit de ce lemme et du fait que  $v_{a,\lambda} \in H_{loc}^1$  que  $v_{a,\lambda} \in H_{loc}^2$ .

Il suffit d'appliquer, par exemple le théorème 17.2.7 de HÖRMANDER [3] de régularité  $H_{loc}^2$  des fonctions  $u \in H_{loc}^1$  vérifiant  $Bu \in L_{loc}^2$ , où  $B$  est un opérateur elliptique à coefficients Lipschitziens.

PREUVE DU LEMME 2 : Un calcul élémentaire montre que :

$$D_s v_{a,\lambda}(s, x) = i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u dt \\ - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right] .$$

De même

$$D_s^2 v_{a,\lambda}(s, x) = -\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t^2 u(t, x) dt \\ - i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} D_t u(T, x) - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} D_t u(-T, x) \right] \\ - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ -\lambda(is+a-T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \right. \\ \left. - \lambda(is+a+T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right] .$$

La majoration de  $(D_s^2 + A)v_{a,\lambda}$  s'en déduit immédiatement.

Le deuxième ingrédient de la preuve est une inégalité de Carleman précise, ce qui va faire l'objet du lemme suivant pour lequel on pose :

$$\varphi = \frac{s^2 + |x|^2}{2} \quad \text{et} \quad \psi = e^{-\beta\varphi} \quad \beta > 0 .$$

LEMME 3 : (Inégalité de Carleman). *Il existe une constante  $\tilde{K} > 0$  (ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ ) et  $r_0$  (dépendant de  $C_1, C_2$  et  $C_3$ ) telle que si  $\beta \geq \frac{\tilde{K}}{r^2}$  où  $r < r_0$ , il existe  $C > 0$  et  $\gamma_0 > 0$ , telles que pour tout  $\gamma > \gamma_0$  et*

*tout  $w \in H^2$  à support compact dans  $\left\{ (s, x), \frac{r^2}{2} < s^2 + x^2 < 9r^2 \right\}$ , on a*

$$\gamma^{3/2} \|e^{\gamma\psi} w\| \leq C \|e^{\gamma\psi} Qw\| .$$

Ici  $\| \cdot \|$  est la norme dans  $L^2$ .

Ceci est une conséquence du théorème 8.3.1 de HÖRMANDER [3] qu'on va rappeler pour la commodité du lecteur.

THÉORÈME 8.3.1 [3]. *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\psi$  une fonction  $C^\infty(\bar{\Omega})$  vérifiant  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  pour  $x \in \bar{\Omega}$ , et  $P(x, D)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients dans  $L^\infty(\Omega)$ . On suppose de plus que*



les coefficients de la partie principale  $P_m(x, D)$  sont dans  $C^1(\bar{\Omega})$ , et que  $P_m$  est elliptique dans  $\bar{\Omega}$ . Alors si

$$(3) \quad \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta) \overline{\frac{\partial P_m}{\partial \xi_k}(x, \zeta)} + \gamma^{-1} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_m}{\partial x_k}(x, \zeta) \overline{\frac{\partial P_m}{\partial \xi_k}(x, \zeta)} > 0$$

pour  $\zeta = \xi + i\gamma \operatorname{grad} \psi$ , où  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , et  $P_m(x, \xi) = 0$ , il existe des constantes  $C > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  telles que pour  $\gamma > \gamma_0$  on a :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \gamma^{2(m-|\alpha|)-1} \int |D^\alpha u|^2 e^{2\gamma\psi} dx \leq C \int |P(x, D)u|^2 e^{2\gamma\psi} dx$$

quand  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Evidemment on peut remplacer  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  par  $u \in H^m \cap \varepsilon'(\Omega)$  et pour nous  $m = 2$ . Il est probable que pour  $m = 2$ , l'hypothèse  $P_m(x, D)$  à coefficients Lipschitziens suffise.

Il suffit donc pour prouver le lemme de vérifier (3) dans notre cas.

On a :

$$\begin{aligned} \psi' &= -\beta \varphi' e^{-\beta\varphi} \\ \psi'' &= (-\beta \varphi'' + \beta^2 \varphi' {}^t \varphi') e^{-\beta\varphi} . \end{aligned}$$

On pose  $\Gamma = \beta \gamma e^{-\beta\varphi}$ . On a donc  $\zeta = \xi - i\gamma \beta \varphi'_x e^{-\beta\varphi} = \xi - i\Gamma x$  et  $\theta = \tau - i\gamma \beta \varphi'_s e^{-\beta\varphi} = \tau - i\Gamma s$ .

On note  $q(x, \tau, \xi) = \frac{1}{2}(\tau^2 + {}^t \xi A \xi)$  où  $A$  est une matrice qui dépend de  $x$ .  $q(x, \theta, \zeta) = 0$  est équivalent à :

$$(4) \quad \begin{aligned} \tau^2 + {}^t \xi A \xi &= \Gamma^2 [s^2 + {}^t x A x] , \quad \text{et} \\ s\tau + {}^t \xi A x &= 0 \end{aligned}$$

La relation (3) devient, en notant  $\eta = (\tau, \xi)$ ,

$$(5) \quad - \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \zeta) \right|^2 + \beta \left| \varphi' \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \zeta) \right|^2 + \frac{1}{\Gamma} \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} {}^t (\xi - i\Gamma x) \frac{\partial A}{\partial x_k} (\xi - i\Gamma x) \cdot [A(\xi + i\Gamma x)]_k \right] > 0$$

où  $[V]_k$  est la  $k$ -ème coordonnée de  $V$ . Or

$$\left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \xi) \right|^2 = \tau^2 + \Gamma^2 s^2 + {}^t \xi A^2 \xi + \Gamma^2 {}^t x A^2 x$$

$$\begin{aligned} \left| \varphi' \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \zeta) \right|^2 &= (s\tau + {}^t x A \xi)^2 + \Gamma^2 (s^2 + {}^t x A x)^2 \\ &= \Gamma^2 (s^2 + {}^t x A x)^2 \end{aligned}$$

grâce à (4).

Le terme  $\text{Im} [ \ ]$  de (5) est égal à :

$$\sum_{k=1}^n + \frac{1}{2} \left[ {}^t \xi \frac{\partial A}{\partial x_k} \xi - \Gamma^2 x \frac{\partial A}{\partial x_k} x \right] \Gamma [A x]_k + \left[ -\Gamma {}^t x \frac{\partial A}{\partial x_k} \xi \right] [A \xi]_k .$$

De (4) on déduit que :

$$|\xi| \leq C \Gamma \sqrt{\varphi} \quad \text{et} \quad |\tau| \leq C \Gamma \sqrt{\varphi}$$

où  $C$  ne dépend que de  $C_1$  et  $C_2$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma} \text{Im} [ \ ] \right| &\leq C \Gamma^2 \varphi^{3/2} \\ \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \zeta) \right|^2 &\leq \tilde{C} \Gamma^2 \varphi \\ \left| \varphi' \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \theta, \zeta) \right|^2 &\geq c \Gamma^2 \varphi \end{aligned}$$

où  $C$  ne dépend que de  $C_1, C_2, C_3$ ,  $\tilde{C}$  ne dépend que de  $C_1, C_2$  et  $c$  ne dépend que de  $C_1$ .

Donc (5) est impliquée par :

$$c\beta \Gamma^2 \varphi^2 \geq \Gamma^2 \varphi (C + \tilde{C} \varphi^{1/2}) .$$

Si  $r_0$  est assez petit, ( $r_0$  ne dépend que de  $C_1, C_2$  et  $C_3$ ), on a  $\tilde{C} \varphi^{1/2} < \frac{C}{2}$ .

Il suffit donc de prendre  $\beta \geq \frac{\tilde{K}}{r^2}$  où  $\tilde{K}$  ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$  (sur l'ouvert considéré  $\varphi \geq \frac{r^2}{2}$ ).

**PREUVE DU LEMME 1 :** Pour simplifier les notations on note  $v_{a,\lambda} = v_\lambda$ . On applique l'inégalité de Carleman à  $w_\lambda = \chi(2\varphi(s, x)) v_\lambda$  où

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 r^2 \leq \alpha \leq \alpha_2 = \left(\frac{5r}{2}\right)^2 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq (1 - \varepsilon)^2 r^2 \\ & \text{ou } \alpha \geq \alpha_3 = \left(\frac{11r}{4}\right)^2 . \end{cases}$$

On posera  $\alpha_1 = (2r)^2$ . (On a  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ).

On choisit  $\beta = \frac{2\tilde{K}}{r^2}$  et on pose  $\gamma = \nu\lambda$  où  $\nu$  sera choisi ultérieurement.  
On écrit :

$$Qw_\lambda = \chi(2\varphi)Qv_\lambda + [Q, \chi(2\varphi)]v_\lambda .$$

Le lemme 2 et les propriétés de la troncature  $\chi$  impliquent :

$$(6) \quad \|e^{\gamma\psi} \chi(2\varphi)Qv_\lambda\| \leq \lambda^{3/2} C_u e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \lambda(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2} .$$

D'autre part,  $[Q, \chi(2\varphi)]$  est un opérateur d'ordre 1 dont le support des coefficients est inclus dans :

$$\left\{ (s, x) / (1 - \varepsilon)^2 r^2 \leq 2\varphi \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 r^2 \text{ ou } \alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3 \right\} .$$

Si  $\alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3$ , on obtient :

$$e^{\gamma\psi} \leq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2}}} .$$

On déduit des faits précédents, de (1), et de (2) que :

$$(7) \quad \|e^{\gamma\psi} [P, \chi(2\varphi)]v_\lambda\| \leq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2} + \lambda s_0^2}} .$$

De même, si  $\alpha_1 \geq 2\varphi$ , alors :

$$e^{\gamma\psi} \geq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}}} ,$$

ce qui implique :

$$(8) \quad \gamma^{3/2} \|e^{\gamma\psi} w_\lambda\| \geq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}}} \|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} .$$

Les formules (6), (7) et (8) impliquent que :

$$(9) \quad \|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} \leq C_u \lambda^{3/2} \left[ e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2} + \lambda s_0^2} - \nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}}} + e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \lambda(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2} - \nu\lambda e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} \right] .$$

Pour prouver le lemme, il suffit que  $\|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)}$  tende vers 0 quand  $\lambda$  tend vers l'infini. Pour cela, il suffit d'après (9) que

$$(10) \quad \nu e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2}} + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} < 0 \\ \text{et } \nu e^{-\tilde{K}} - (T - |a|)^2 + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} < 0 .$$

Donc, si

$$s_0^2 \left( e^{-\tilde{K}} - e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} \right) < \left( e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} - e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2}} \right) \left[ (T - |a|)^2 - s_0^2 \right] ,$$

on pourra trouver  $\nu$  pour que (10) soit vérifiée. C'est-à-dire, puisque

$$\frac{\alpha_1}{r^2} = 4 , \quad \frac{\alpha_2}{r^2} = \frac{25}{4} \quad \text{et} \quad s_0 = 3r ,$$

$$9r^2 \frac{e^{-\bar{K}} - e^{-4\bar{K}}}{e^{-4\bar{K}} - e^{-\frac{25}{4}\bar{K}}} < (T - |a|)^2 - 9r^2 ,$$

c'est-à-dire  $|a| < T - Kr$  pour un certain  $K$ .

Ce qui achève la preuve du lemme 1.

### 3. Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer le théorème 1, on va construire une suite de boules permettant d'appliquer successivement le lemme 1.

DÉFINITION. On dit qu'une suite de boules  $B(y_j, \delta)$   $j = 0, \dots, N$  est une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  si

$$y_0 = x_0$$

$$x \in B(y_N, 2\delta)$$

$$B(y_{j+1}, \delta) \subset B(y_j, 2\delta) \quad j = 0, \dots, N-1$$

$$B(y_j, 3\delta) \subset \Omega .$$

REMARQUE. S'il existe une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$ , avec  $\delta < r_0$  alors  $u(t, y) = 0$  pour  $y$  près de  $x$  et  $|t| < T - K\delta N$ . Il suffit d'appliquer le lemme 1  $N$  fois.

On va prouver l'assertion suivante : pour tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta < r_0$  et une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  avec  $\delta N \leq D + \varepsilon$ .

Soit  $\Gamma$  un arc joignant  $x_0$  à  $x$  (suffisamment régulier) tel que longueur  $(\Gamma) \leq D + \varepsilon$ . On note  $g$  une paramétrisation de  $\Gamma$

$$g : [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ avec } g(0) = x_0 \text{ et } g(1) = x .$$

Soit  $\mu = \inf_{t \in [0, 1]} d(g(t), \mathbb{C}\Omega)$ , on a  $\mu > 0$ . Pour chaque  $\delta \in ]0, \inf(\frac{\mu}{3}, \delta_0)[$ , on va construire une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  de la manière suivante. On construit par récurrence  $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_N = 1$  en posant si  $\alpha_j \neq 1$

$$\alpha_{j+1} = \sup \left\{ \alpha \in [0, 1], |g(\alpha) - g(\alpha_j)| < \delta \right\} .$$

La suite  $\alpha_j$  est croissante. On va voir que cette procédure s'arrête et que la suite  $\alpha_j$  est strictement croissante. Cela est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 4. Si  $\alpha_j \neq 1$  alors  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| = \delta$ .

PREUVE : On a bien sûr  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \leq \delta$ . D'autre part, par construction de  $\alpha_j$ ,  $\forall \alpha > \alpha_j$   $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha)| \geq \delta$ , donc par continuité de  $g$ ,  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \geq \delta$ .

Supposons que pour tout  $j$   $\alpha_j < 1$  cela implique que  $\alpha_j$  converge donc que  $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})$  tend vers 0. Ce qui contredit le lemme.

On va prouver que  $B(g(\alpha_j), \delta)$   $j = 0, \dots, N - 1$ , est une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$ .

$$1) |x - g(\alpha_{N-1})| = |g(\alpha_N) - g(\alpha_{N-1})| \leq \delta < 2\delta \text{ donc}$$

$$x \in B(g(\alpha_{N-1}), 2\delta) .$$

$$2) \text{ Si } y \in B(g(\alpha_{j+1}), \delta) \text{ } j = 0, \dots, N - 2 \text{ alors}$$

$$|y - g(\alpha_j)| \leq |y - g(\alpha_{j+1})| + |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| < 2\delta .$$

$$\text{Donc } B(g(\alpha_{j+1}), \delta) \subset B(g(\alpha_j), 2\delta).$$

$$3) B(g(\alpha_j), 3\delta) \subset \Omega \text{ car } 3\delta < \mu.$$

Il reste donc à majorer  $\delta(N - 1)$ . On remarque que le segment  $I_j = [g(\alpha_j); g(\alpha_{j+1})]$ ,  $j = 0, \dots, N - 2$  est contenu dans  $\Omega$ . En effet pour  $z \in I_j$  et  $y \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} |z - y| &\geq |g(\alpha_j) - y| - |z - g(\alpha_j)| \\ &\geq \mu - \delta \geq 2\delta > 0 . \end{aligned}$$

On a donc que,  $|g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})|$  est inférieur à la longueur de  $\Gamma$  prise entre  $g(\alpha_j)$  et  $g(\alpha_{j+1})$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-2} |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| &\leq \text{longueur}(\Gamma) \\ &\leq D + \varepsilon . \end{aligned}$$

Le lemme 4 implique que  $\delta(N - 1) \leq D + \varepsilon$ . Ce qui implique le théorème 1.

## Bibliographie

- [1] S. ALINHAC : *Non unicité du problème de Cauchy*, Annals of Mathematics, 117 (1983), 77-108.
- [2] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : Annexe livre de J.L. LIONS [7].
- [3] L. HÖRMANDER : *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.
- [4] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators*, Springer Verlag.
- [5] M.M. LAVRENTÈV, V.G. ROMANOV, S.P. SHISHATSKII : *Ill-posed problems in mathematical physics and analysis*, in "Translations of Mathematical Monograph", Vol. 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [6] N. LERNER : *Uniqueness for an ill-posed problem*, Journal of Differential Equations, 71, (1988), 255-260.
- [7] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, T. 1 : Contrôlabilité exacte, Masson.
- [8] J. RAUCH, M. TAYLOR : *Penetrations in shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems*, Indiana Univ. Math. J., 22, (1972), 277-285.
- [9] W. SYMES : *A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 5, (1983), 131-152.



**II**

**ENSEMBLES NODAUX**





**SUR LES ZEROS DE SOLUTIONS  
D'INEGALITES DIFFERENTIELLES  
ELLIPTIQUES**

par

**LUC ROBBIANO**

**Publié au Communication in Partial Differential Equations, 12 (1987),  
903-919.**



SUR LES ZEROS DE SOLUTIONS D'INEQUALITES DIFFERENTIELLES ELLIPTIQUES.

par

Luc ROBBIANO

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS  
U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES  
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)

Dans ce papier, nous étendons le résultat suivant dû à Caffarelli-Friedman [6].

Soit  $u$  une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  vérifiant :

$$(1) \quad |\Delta u| \leq C(|u| + |\nabla u|)$$

alors l'ensemble  $\{u = 0, \nabla u = 0\}$  est de dimension d'Hausdorff au plus  $m-2$ .

On obtient ici le même résultat en remplaçant le laplacien par un opérateur elliptique d'ordre 2. En corollaire, on obtient, sous les mêmes conditions, que  $\{u = 0\}$  est de dimension d'Hausdorff au plus  $m-1$ .

L'organisation générale de la preuve est la même que celle de Caffarelli-Friedman. L'essentiel de notre travail consiste à prouver qu'une fonction  $u$  vérifiant (1) (avec  $\Delta$  remplacé par un opérateur elliptique d'ordre 2), se décompose en la somme de deux fonctions  $P_n$  et  $\Gamma_m$ , où  $P_n$  est un polynôme homogène de degré  $n$ , solution d'un opérateur elliptique à coefficients constants, et  $\Gamma_n$  s'annule à un ordre strictement supérieur

à  $n$ . Ce résultat est à rapprocher du travail de Bers [4] qui démontre que la solution d'une équation elliptique, soit s'annule à l'ordre infini, soit s'écrit comme une somme d'un polynôme de degré  $n$ , solution de l'opérateur figé au point, plus un reste du même type que le nôtre.

### 1. Enoncé des résultats.

#### 1.1.- Résultats principaux.

Soit  $A(x, \partial_x)$  un opérateur elliptique, d'ordre 2, à coefficients lipschitziens d'un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u$  une application de classe  $C^{1+\delta}(\Omega)$  ( $\delta > 0$ ) vérifiant

Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe une constante  $C > 0$

telle que :

$$(2) \quad |A(x, \partial_x)u| \leq C(|u| + |\nabla u|).$$

On suppose que  $u$  n'est pas identiquement nulle et on note :

$$S = \{x \in \Omega, u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\}$$

et,  $H^k$  la  $k$ -mesure d'Hausdorff.

#### Théorème 1.-

Pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$H^{m-2+\epsilon}(S) = 0.$$

#### Remarques :

a)  $S$  étant un fermé, c'est un ensemble mesurable. Les mesures d'Hausdorff qui sont extérieurement régulières, sont pour un ensemble mesurable, intérieurement régulières. Le théorème est donc de nature locale. Il suffit pour cela d'écrire  $\Omega$  comme une réunion dénombrable de boules.

b) Le théorème est équivalent à :

La dimension d'Hausdorff de  $S$  est inférieur ou égale à  $m-2$ .

L'exemple suivant montre que la dimension est optimale. En effet, prenons  $A = \Delta$  et  $u(x) = x_1^2 - x_2^2$ , on a,  $S = \{x_1 = x_2 = 0\}$ .

c) Dans le cas  $m = 2$ , on démontre que  $S$  est formé de point isolé. La généralisation de ceci serait

$$H^{m-2}(S \cap K) < +\infty, \text{ pour tout compact } K \subset \Omega.$$

Nous ne savons pas si ceci est vrai pour  $m > 2$ .

d) L'hypothèse (2) permet de traiter des problèmes non linéaires de type

$$A(x, \partial_x)u = f(x, u, \nabla u)$$

$$\text{avec } |f(x, u, \nabla u)| \leq C(|u| + |\nabla u|).$$

$f$  peut aussi dépendre de  $\nabla^2 u$ ,  $\nabla^3 u$  etc... du moment que la majoration (2) reste vraie (Voir Caffarelli-Friedman [6] pour des exemples).

Du théorème 1, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.-

Soit  $\tilde{S} = \{x \in \Omega, u(x) = 0\}$ .

Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}) = 0.$$

Remarque :

Ici aussi, dans le cas  $m = 2$ , on peut prouver que  $H^1(\tilde{S} \cap K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ . On ne sait pas généraliser ceci pour  $m > 2$ .

1.2.- Propriété locale de la solution.

On suppose de plus que :

$$A(x, \partial_x) = \Delta + B(x, \partial_x)$$

$$\text{où } B(x, \partial_x) = \sum_{j=1}^m \partial_{x_i} a_{ij}(x) \partial_{x_j} \quad \text{avec } a_{ij}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}^2.$$

On note  $B_1 = \{|x| \leq 1\}$ .

Théorème 3.-

On suppose que  $u(0) = 0$ ,  $\nabla u(0) = 0$  et que  $u$  n'est pas identiquement nulle.

Alors, il existe un entier  $n \geq 2$  tel que

$$u = P_n + \Gamma_n,$$

où  $P_n$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $n$ , non identiquement nul, et  $\Gamma_n$  est une fonction vérifiant :

il existe une constante positive  $C$ , telle que

$$|\Gamma_n(x)| \leq C|x|^{n+\delta/2} \quad \text{sur } B_1$$

$$|\nabla \Gamma_n(x)| \leq C|x|^{n-1+\delta/2} \quad \text{sur } B_1.$$

Remarques :

a) Pour ce théorème, on peut prendre pour  $B$  un opérateur à coefficients  $a_{ij}(x)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

b) Ce théorème est l'analogie du théorème 1.2. de Caffarelli-Friedman [6]. Par contre, nous n'avons pas l'analogie du lemme 1.1. (Essentiellement ce lemme est le suivant. Si  $|\Delta u(x)| \leq C|x|^\beta$ , avec  $\beta$  non entier alors

$$u = P_n + \Gamma_n \quad \text{avec } n = [\beta] + 2,$$

$P_n$  harmonique de degrés  $\leq n$  et  $\Gamma_n$  du même type que celui du théorème 3).

Ceci vient du fait que  $P_n$  appartient au noyau de  $\Delta$  mais pas au noyau de  $A$ .

c) Si  $A$  ne se décompose pas sous la forme  $\Delta + B$ , le théorème 3 reste vrai avec  $P_n(x)$  remplacé par  $P_n(\Lambda x)$  où  $\Lambda$  est une application linéaire bijective de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . En effet, il suffit de figer les coefficients de  $A$  en 0, et on vérifie aisément qu'un opérateur à coefficient constant est un laplacien modulo un changement de variables linéaire.

d) En raffinant la preuve du théorème 3, on peut prouver, si les coefficients de  $A$  sont de classe  $C^\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), que  $u$ , soit se décompose comme dans le théorème, soit s'annule à l'ordre infini au sens,  $u = o(|x|^N)$  pour tout  $N$ . Dans ce cas, on n'a pas de résultat d'unicité forte (il existe des contre-exemples voir Plis [9], Alinhac [1]), on ne peut donc pas éliminer la deuxième éventualité. Ce résultat étend le théorème de Bers [4] à des opérateurs avec des termes d'ordre inférieur à coefficients  $L^\infty$ .

## 2. Preuves.

La preuve du théorème 1 repose sur une décomposition de  $u$  au voisinage des points de  $S$  (voir le théorème 3). On peut la trouver dans Caffarelli-Friedman au § 2 et 3 de [6] (certains détails se trouvent également dans [5]). Nous nous contenterons de démontrer le théorème 3, qui repose sur le lemme suivant.

### Lemme 2.1.-

Sous les hypothèses du théorème 3.

On suppose de plus qu'il existe, un entier  $k \geq 1$ , une constante  $C > 0$  et un réel  $\mu$ ,  $\delta \geq \mu > \frac{\delta}{2}$  tels que

$$(3) \quad |u(x)| \leq C|x|^{k+\mu} \quad \text{sur } B_1$$

$$(4) \quad |\nabla u(x)| \leq C|x|^{k+\mu-1} \quad \text{sur } B_1 .$$



Alors il existe un polynôme harmonique homogène  $P_{k+1}$  de degré  $k+1$ , une fonction  $\Gamma_{k+1}$  et un réel  $\nu$ ,  $\mu > \nu > \frac{\delta}{2}$  tels que

$$u = P_{k+1} + \Gamma_{k+1} \text{ avec}$$

$$(5) \quad |\Gamma_{k+1}(x)| \leq \tilde{C} |x|^{k+1+\nu} \text{ sur } B_1,$$

$$(6) \quad |\nabla \Gamma_{k+1}(x)| \leq \tilde{C} |x|^{k+\nu} \text{ sur } B_1,$$

où  $\tilde{C}$  est une constante positive.

Preuve du théorème 3 :

On démontre le théorème 3 par récurrence sur  $k$ .

Pour  $k = 1$ , les hypothèses du lemme sont vérifiées avec  $\mu = \delta$ .

Il existe donc  $P_2$  et  $\Gamma_2$  vérifiant [5] et [6].

Si  $P_2 \equiv 0$  alors on peut appliquer le lemme 2.1 avec  $k = 2$ . Par récurrence, on démontre donc, soit la conclusion du théorème 3, soit que  $u = O(|x|^N)$  pour tout  $N$ . On applique alors un résultat d'unicité forte (voir Hörmander [8], qui a généralisé les résultats de Cordes [7], Aronszajn [3], Alinhac-Baouendi [2]). On en déduit que  $u \equiv 0$  sur  $B_1$ , ce qui contredit l'hypothèse.

Preuve du lemme 2.1. :

On reprend ici les idées contenues dans Caffarelli-Friedman, en particulier le lemme 3.1 de [5] et le lemme 1.1 de [6].

On se contente de faire un certain nombre de rappels, et on se place dans le cas  $m \geq 3$ . Le cas  $m = 2$  se traite de la même façon, à la différence près que la solution élémentaire du laplacien est  $\frac{1}{2\pi} \text{Log } r$ .

On a :

$$(7) \quad \frac{1}{|x-y|^{m-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) \quad \text{pour } |x| < |y|,$$

où  $\Gamma_n^y(x)$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $n$  en  $x$ , dépendant d'une façon régulière de  $y$ . La convergence est uniforme sur tout compact contenu dans  $|x| < |y|$ . Les dérivées de  $\Gamma_n(x)$  vérifient également ces propriétés. On a :

$$(8) \quad |\nabla_x^k \Gamma_n^y(x)| \leq C |x|^{n-k, m-3+2k} \quad k = 0, 1, 2$$

où la constante  $C$ , ne dépend pas de  $n$ .

La formule de Green permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C_m u(x) &= - \int_{|y|=1} \left[ u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dS_y \\ &\quad - \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \Delta u(y) dy \\ &= - \int_{|y|=1} \left[ u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dS_y - \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \Delta u(y) dy \\ &\quad + \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} B u(y) dy = J_1 - J_2 - J_3. \end{aligned}$$

$$\text{Avec } C_m = \frac{+ 2(m-2)(\pi)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \nu} \text{ est la dérivée dans la direction}$$

de la normale extérieure.

Il est clair qu'il suffit de prouver le lemme 2.1 pour  $|x| \leq C \leq 1$  car  $u \in C^{1+\delta}$ .

Pour traiter  $J_1$ , il suffit de développer  $\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right)$  et  $\frac{1}{|x-y|^{m-2}}$  en série de polynômes harmoniques et de regrouper les termes d'homogénéité inférieure ou égale à  $k+1$  et les termes de degré strictement supérieur à  $k+1$ . Ce terme a d'ailleurs été traité intégralement dans Caffarelli-Friedman [5] pour  $m = 3$ , mais le cas général est similaire.

Traitons le terme  $J_2$  :

$$J_2 = \int_{|y| < 1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y) dy + \int_{\substack{|y| < 1 \\ |y| > \beta(x)}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y) dy = I_1(x) + I_2(x)$$

où  $\beta$  est une constante fixée  $\beta \in ]1, 2[$ .

Contrôle de  $I_1$ .

Les hypothèses (3), (4) et le fait que  $|y| \leq \beta|x|$  montrent que

$$(9) \quad |Au(y)| \leq C|x|^{k+\mu-1}$$

et

$$\int_{\substack{|y| < 1 \\ |y| < \beta|x|}} \frac{dy}{|x-y|^{m-2}} \leq \int_{|x-y| \leq (\beta+1)|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} dy \leq C|x|^2.$$

On a donc

$$|I_1(x)| \leq C|x|^{k+1+\mu}.$$

$I_1$  est un terme de  $\Gamma_{k+1}$  et vérifie (5).

Contrôle des dérivées de  $I_1$ .

On a :

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_i} = \int_{|y| \leq \beta|x|} (m-2) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^m} Au(y) dy + \beta \frac{x_i}{|x|} \int_{|y| = \beta|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y) dS_y$$

$$= I_1' + I_1'' .$$

En traitant le terme  $I_1'$ , comme le terme  $I_1$ , on a

$$|I_1'| \leq C|x|^{k+\mu}$$

ce qui vérifie (6).

Quant à  $I_1''$ , sur  $|y| = \beta|x|$  on a

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq (\beta-1)|x|$$

donc

$$\frac{1}{|x-y|^{m-2}} \leq C \frac{1}{|x|^{m-2}} .$$

On en déduit que :

$$|I_1''| \leq C \frac{|x|^{k+\mu-1}}{|x|^{m-2}} \int_{|y| = \beta|x|} dS_y = C|x|^{k+\mu} .$$

Ceci vérifie (6).

Contrôle de  $I_2(x)$ .

Quand  $|y| > \beta(x)$ , on peut appliquer (7), on a alors

$$I_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_2^n(x) \quad \text{avec}$$

$$I_2^n(x) = \int_{\substack{|y| < 1 \\ |y| > \beta|x|}} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) Au(y) dy .$$

Pour  $n \leq k+1$ , on ajoute à chaque terme

$$I_2^n = \int_{\substack{|y| < 1 \\ |y| < \beta|x|}} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) A dy.$$

On vérifie facilement que le terme ainsi obtenu est un polynôme harmonique de degré  $n$ .

Il suffit de prouver que  $\tilde{I}_2^n$  vérifie (5).

On a :

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_2^n| &\leq C|x|^n \int_{|y| < \beta|x|} |y|^{k-1+\mu-n-m+2} dy \\ &\leq C|x|^n |x|^{k+\mu-n+1} \\ &\leq C|x|^{k+1+\mu}. \end{aligned}$$

$\tilde{I}_2^n$  vérifie donc (5).

On traite les dérivées de la même façon en remarquant que  $\frac{\partial \Gamma_n^y}{\partial x_i}(x)$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $n-1$ . Le terme de bord ne pose pas de problème particulier. On majore alors les dérivées par  $|x|^{k+\mu}$ . Il suffit de prendre  $\nu \leq \mu$  pour que (6) soit vérifiée.

Si  $n > k+1$ , on a :

$$\begin{aligned} |I_2^n| &\leq Cn^{m-3} |x|^n \int_{|y| > \beta|x|} |y|^{k-1+\mu-n-m+2} dy \\ &\leq Cn^{m-3} |x|^{k+\mu+1} (\beta)^{k+\mu-n+1} \end{aligned}$$

où  $C$  ne dépend pas de  $n$ .

Un calcul analogue montre qu'avec une constante  $C$  indépendante de  $n$ , on a :

$$\left| \frac{\partial I_2^n}{\partial x} \right| \leq C n^{m-1} |x|^{k+\mu} \beta^{-n}$$

$\sum_{n=k+2}^{\infty} I_2^n$  vérifie donc (5).

Contrôle de  $J_3$ .

On a  $B = \sum_{i,j=1}^m \partial_{x_i} a_{ij} \partial_{x_j}$  avec  $a_{ij}(0) = 0$ .

On va traiter un terme générique  $\partial_{x_i} a(x) \partial_{x_j}$  avec  $a(0) = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \partial_{y_i} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy &= - \int_{|y|<1} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy \\ &\quad + \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} a(y) \partial_{y_j} u(y) \omega_i \\ &= - \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|>\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy - \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|>\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy \\ &\quad + \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} a(y) \partial_{y_j} u(y) \omega_i = -K_1 - K_2 + K_3 \end{aligned}$$

où  $\omega_i$  est une  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $|y| = 1$ .

Contrôle de  $K_1$ .

$$K_1 = \int_{|y|<\beta|x|} (m-2) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^m} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy.$$

En appliquant (4) et en remarquant que  $|a(y)| \leq C|y|$ , on trouve

$$|K_1| \leq C|x|^{k+\mu} \int_{|x-y|<(\beta+1)|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-1}} dy \leq C|x|^{k+1+\mu}.$$

Donc  $K_1$  vérifie (5).

Contrôle de  $\frac{\partial K_1}{\partial x_\nu}$ .

A priori  $\frac{\partial K_1}{\partial x_\nu}$  n'a de sens que dans les distributions. Cependant

un calcul élémentaire montre que, pour  $|x| < \frac{1}{2}$  et  $M \gg 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial x_\nu} &= \int_{\substack{|y| > \beta|x| \\ M > |x-y|}} g(x,y) a(x) \partial_{x_j} u(x) dy \\ &+ \int_{|y| < \beta|x|} g(x,y) (a(y) \partial_{y_j} u(y) - a(x) \partial_{x_j} u(x)) dy \\ &+ \beta \frac{x_\nu}{|x|} \int_{|y| = \beta|x|} (m-2) \frac{x_i - y_m}{|x-y|^m} a(y) \partial_{y_j} u(y) dS_y \\ &= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\text{où } g(x,y) = (m-2) \left( \frac{\delta_{i\nu}}{|x-y|^m} - \frac{m(x_i - y_i)(x_\nu - y_\nu)}{|x-y|^{m+2}} \right)$$

( $\delta_{ij}$  est le symbole de Krönecker).

Contrôle de  $\textcircled{1}$ .

$$\text{On a } g(x,y) = - \frac{-\partial^2}{\partial x_i \partial x_\nu} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right).$$

On peut donc développer  $g(x,y)$  en polynômes harmoniques, on a :

$$g(x,y) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{|y|^{m-2+n}} \tilde{\Gamma}_{n-2}^y(x)$$

où  $\tilde{\Gamma}_k^y(x)$  est un polynôme harmonique de degré  $k$ . De (8), on déduit que

$$|\tilde{\Gamma}_{n-2}^y(x)| \leq C|x|^{n-2} n^{m+1}.$$

On a donc

$$\left| \int_{\substack{|y| > \beta|x| \\ M > |x-y|}} \frac{\tilde{\Gamma}_{n-2}^y(x)}{|y|^{m-2+n}} dy \right| \leq C|x|^{n-2} n^{m+1} \int_{2M > |y| > \beta|x|} \frac{1}{|y|^{m-2+n}}$$

$$\leq C|x|^{n-2} n^{m+1} \beta^{-n} |x|^{2-n} \quad \text{si } n > 2$$

et  $\leq C \left[ \text{Log } 2M - \text{Log } \beta|x| \right] \quad \text{si } n = 2.$

On en déduit que :

$$| \textcircled{1} | \leq C|x|^{k+\nu} \quad \text{si } \nu < \mu.$$

Contrôle de  $\textcircled{2}$ .

$\forall u \in C^\delta, a \in C^1 \cap C^\delta$ , on a donc

$$|a(y)a_{y_i} u(y) - a(x)a_{x_i} u(x)| \leq C|x-y|^\delta.$$

D'autre part, on a :

$$|a(y)a_{y_i} u(y) - a(x)a_{x_i} u(x)| \leq C|x|^{k+\mu} \quad \text{si } |y| < \beta|x|.$$

Pour  $s \in ]0,1[$ , qu'on fixera plus loin, on a :



$$|a(y)\partial_{y_i} u(y) - a(x)\partial_{x_i} u(x)| \leq C|x|^{k+\mu(1-s)+\delta s}.$$

En reportant dans (2), on a :

$$\begin{aligned} | \textcircled{2} | &\leq C|x|^{(k+\mu)(1-s)} \int_{|y|<\beta|x|} \frac{|x-y|^{\delta s}}{|x-y|^m} dy \\ &\leq C|x|^{(k+\mu)(1-s)+\delta s}. \end{aligned}$$

Choisissons  $s$  de sorte que :

$$(k+\mu)(1-s) = k + v$$

avec 
$$v = \frac{\mu + \frac{\delta}{2}}{2}.$$

$$\text{On a : } s = 1 - \frac{k + \frac{\mu + \frac{\delta}{2}}{2}}{k + v}.$$

$$\text{On a bien } s \in ]0,1[ \text{ et } \mu > v > \frac{\delta}{2}.$$

Contrôle de (3).

$$\begin{aligned} | \textcircled{3} | &\leq C \int_{|y|=\beta|x|} \frac{|y|^{k+\mu}}{|y|^{m-1}} dy \\ &\leq C|x|^{k+\mu} \end{aligned}$$

Ceci vérifie (6).

Contrôle de  $K_2$ .

La méthode est identique à celle utilisée pour le contrôle de  $I_2$ .

Il suffit de développer  $\frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) = + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right)$  en série de polynômes harmoniques.

Contrôle de  $K_3$ .

Le terme se traite comme  $J_2$ .

On a prouvé qu'il existait un polynôme  $P_{k+1}$  de degré  $k+1$ , mais vu l'hypothèse (3),  $P_{k+1}$  est nécessairement homogène de degré  $k+1$ .

#### ANNEXE

----

Preuve du corollaire 2 :

$H^{m-2+\epsilon}(\{u=0, \nabla u=0\}) = 0$  est équivalent du fait qu'il existe  $V_{\eta_j}$  une suite d'ouverts, constitués par la réunion de cubes d'arêtes inférieures à  $\eta_j$  avec  $\eta_j \rightarrow 0$ , telle que

$$S = \{u=0, \nabla u=0\} \subset \bigcap_j V_{\eta_j} \quad \text{et} \quad H^{m-2+\epsilon}(\bigcap_j V_{\eta_j}) = 0.$$

Soit  $\tilde{S}_K = \{u=0\} \cap K$  où  $K$  est un compact de  $\Omega$ . On a  $H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K \setminus V_{\eta_j}) = 0$  car sur le complémentaire de  $V_{\eta_j}$ ,  $S$  est une variété  $C^\delta$  de dimension  $m-1$ .

On a  $\bigcup_j (\tilde{S}_K \setminus V_{\eta_j}) = \tilde{S}_K \setminus \bigcap_j V_{\eta_j}$ , donc

$$H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K \setminus \bigcap_j V_{\eta_j}) \leq \sum_j H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K \setminus V_{\eta_j}) = 0.$$

D'autre part :

$$H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K \setminus \bigcap_j V_{\eta_j}) = H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K) - H^{m-1+\epsilon}(K \cap \bigcap_j V_{\eta_j})$$

donc  $H^{m-1+\epsilon}(\tilde{S}_K) = 0.$

Il suffit de prendre une suite  $K_j$  de compacts telle que  $\bigcup_j K_j = \Omega$  pour conclure.

## BIBLIOGRAPHIE

-----

- [1] S. ALINHAC - Communication personnelle.
- [2] S. ALINHAC - M.S. BAOUENDI - Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities, Amer. J. Math. 102, (1980), 385-393.
- [3] N. WRONSZAJN - A unique continuation of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pures Appl. 36 (1957), 235-249.
- [4] L. BERS - Local behavior of solutions of general linear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 8, (1955), 473-496.
- [5] L.A. CAFFARELLI - A. FRIEDMAN - The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model, J. Differential Equations 32 (1979), 335-356.
- [6] L.A. CAFFARELLI - A. FRIEDMAN - Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations, J. Differential Equations, 60, (1985), 420-433.
- [7] H.O. CORDES - Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Göttingen IIa Math. Phys. Kl. (1956), 239-258.
- [8] L. HORMANDER - Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations, Comm. in Partial Differential Equations, 8, (1983), 21-64.

[9] A. PLIŠ

- On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation, Bull. Acad. Pol. Sci., 11, (1963), 95-100.

Received September, 1986



DIMENSION DES ZEROS  
D'UNE SOLUTION FAIBLE D'UN  
OPERATEUR ELLIPTIQUE

par

LUC ROBBIANO



## DIMENSION DES ZÉROS D'UNE SOLUTION FAIBLE D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE

Par Luc ROBBIANO

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant :

Soit  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$  vérifiant  $|Au| \leq c(|u| + |\nabla u|)$  presque partout, où  $A$  est un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens. Alors l'ensemble sur lequel  $u$  s'annule est de mesure nulle. En fait, on démontre un résultat plus précis (en termes de dimension de Hausdorff) en définissant un représentant judicieux de  $u$ .

Ce résultat repose sur une décomposition de  $u$  en une somme d'un polynôme homogène de degré  $n$  et d'une fonction  $\Gamma$  qui s'annule (en termes de normes  $L^2$ ) à un ordre plus grand que  $n$ . Nous généralisons ici le résultat de [13].

### Introduction

Soit  $u \in H^1(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^m$ ,  $u \equiv 0$ , vérifiant :

$|Au| \leq c(|u| + |\nabla u|)$  presque partout où  $A$  est un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens. On se pose les problèmes suivants :

1° Si la mesure de Lebesgue de l'ensemble où  $u$  s'annule est strictement positive,  $u$  est-elle identiquement nulle ?

2° Plus généralement que peut-on dire sur les mesures de Hausdorff de  $\{u=0\}$ , de  $\{u=0, \nabla u=0\}$ , si on peut définir ces ensembles.

Si on prend pour  $A$  le laplacien et  $u \in C^{1+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , alors Caffarelli et Friedman [5] ont démontré que la dimension d'Hausdorff de  $\{u=0, \nabla u=0\}$  est, au plus,  $m-2$  et on en déduit que la dimension de  $\{u=0\}$  est, au plus,  $m-1$ . Pour un  $A$  général avec  $u \in C^{1+\delta}$ , on a prouvé dans [13] le même résultat.

Pour  $u \in H^1(\Omega)$  solution de  $Au=0$ , Garofalo et Fang Hua Lin [7] ont prouvé que  $u$  est un poids de Muckenhoupt (voir [7] pour un énoncé précis) ce qui implique que la mesure de Lebesgue de  $u=0$  est nulle.

Dans cet article, nous définissons

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y| < r} u(y) dy$$



et

$$\nabla f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y| < r} \nabla u(y) dy$$

où  $|B_r|$  est le volume d'une boule de rayon  $r$ .

On démontre que  $f(x)$  est définie partout et est presque partout égale à  $u(x)$ , que  $\nabla f(x)$  est presque partout égale à  $\nabla u(x)$  et que si  $f(x) = 0$  alors  $\nabla f(x)$  est définie. On démontre alors que  $\{f=0\}$  est, au plus, de dimension de Hausdorff  $m-1$  et que  $\{f=0, \nabla f=0\}$  est, au plus, de dimension  $m-2$ . Toutefois, nos techniques ne sont pas suffisamment précises pour pouvoir majorer respectivement les  $m-1$  et  $m-2$  mesures de Hausdorff de  $\{f=0\}$  et  $\{f=0, \nabla f=0\}$ .

Comme dans Caffarelli-Friedman [5], dont nous nous sommes beaucoup inspiré, ces résultats reposent sur une décomposition de  $u$  en une somme d'un polynôme homogène de degré  $n$  et d'une fonction s'annulant à un ordre supérieur. L'énoncé précis de ce résultat est assez technique. On le trouvera au théorème 1.

Ce type de résultats a déjà été prouvé dans un certain nombre de cas. John [11] a regardé le cas des opérateurs à coefficients analytiques. Bers [3] a traité les opérateurs à coefficients  $C^p$ ,  $p > 0$ . Caffarelli et Friedman [5] ont traité le cas des inéquations différentielles pour un laplacien, résultat que nous avons généralisé dans [13] aux opérateurs elliptiques d'ordre deux. Ces deux derniers résultats sont obtenus pour des fonctions de régularités  $C^{1+\delta}$  avec  $\delta > 0$ . C'est ce dernier point que nous améliorons ici, puisque nous supposons seulement une régularité  $H^1$ .

L'organisation de la preuve est identique à celle de [13]. Les majorations en norme  $L^2$  sont un peu plus délicates à obtenir.

Récemment, Alessandrini-Vessella [15] ont obtenu un résultat similaire à notre théorème 1 pour des solutions d'équations paraboliques.

## 1. Énoncé des résultats

1.1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION. — Soit  $A(x, \partial_x)$  un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens d'un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ). Les coefficients sont réels.

Soit  $u$  une fonction appartenant à  $H_{\text{Loc}}^1(\Omega)$  vérifiant

(1) pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$|A(x, \partial_x)u| \leq C(|u| + |\nabla u|) \text{ presque partout.}$$

On a implicitement supposé que  $A(x, \partial_x)u$  est une fonction mesurable et donc que  $A(x, \partial_x)u$  est localement une fonction appartenant à  $L^2$ . Ces hypothèses permettent d'appliquer un résultat de régularité sur  $u$  (voir par exemple le théorème 17.2.7, Hörmander [9]) et donc  $u$  appartient à  $H_{\text{Loc}}^2(\Omega)$ .

On suppose que l'ensemble où  $u \neq 0$  est de mesure de Lebesgue strictement positive ( $u$  non trivial).

On note  $\Lambda^k$  la  $k$ -mesure de Hausdorff.

THÉORÈME 1. — Soit  $u$  vérifiant (1), alors pour tout  $x \in K$  et pour tout  $\delta < 0$ , il existe un entier  $n \geq 0$ , une matrice  $\Lambda$ , un polynôme harmonique  $P_n$  homogène de degré  $n$  et une fonction  $\Gamma_n$  tels que,

$$u(y) = P_n(\Lambda(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \quad \text{avec } P_n \neq 0$$

$$\left( \int_{|y| \leq R} |\Gamma_n(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{(m/2)+n+1-\delta}$$

$$\left( \int_{|y| \leq R} |\nabla \Gamma_n(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{(m/2)+n-\delta}$$

où  $C$  ne dépend que de  $A, K, n, \delta$  et de la norme de  $u$  dans  $H^2(K)$ .

Remarques. — 1° Supposons  $x=0$  et notons  $A$  la matrice  $(a_{ij}(0))_{1 \leq i, j \leq m}$ ,  $A$  symétrique définie, positive. Soit  $\Lambda$  la matrice vérifiant

$$(2) \quad \Lambda A^t \Lambda = I$$

où  $I$  est la matrice identité.

$\Lambda$  est bien défini modulo une matrice orthogonale c'est-à-dire si  $\tilde{\Lambda}$  vérifie (2) alors  $\tilde{\Lambda} = O\Lambda$  avec  $O^t O = I$ .

Si on pose  $z = \Lambda y$  dans les coordonnées  $z$  l'opérateur  $A(y, \partial y)$  est, en  $O$ , le laplacien. Ceci explique le terme  $\Lambda$  intervenant dans l'énoncé du théorème et le fait que  $P_n$  soit harmonique.

2° Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, ce type de résultats a déjà été obtenu dans un certain nombre de cas par John [11], Bers [3], Caffarelli-Friedmann [5] et Robbiano [13]. La nouveauté est qu'on prouve une sorte de développement de Taylor pour une solution « faible ».

3° On peut se demander si la condition (1) est la plus faible possible pour démontrer un résultat de décomposition. Pour comprendre en quel sens on pourrait améliorer (1), il faut expliquer le mécanisme de la preuve. Il repose sur deux résultats. Le premier est du type suivant, (voir le lemme 3 pour un énoncé précis) si  $u$  vérifie (1) et  $u$  s'annule à l'ordre  $n$  alors  $u$  se décompose en un polynôme homogène plus une fonction qui s'annule à un ordre strictement supérieur à  $n$ . Le deuxième est un résultat d'unicité forte qui permet d'affirmer que si  $u$  s'annule à l'ordre infini alors  $u$  est identiquement nulle. Nous utilisons dans ce papier, le résultat de Hörmander [8] qui généralise des résultats antérieurs de Muller [12], Cordes [6], Aronszajn [2], Aronszajn-Krzywicki-Szarski [14] et Alinhac-Baouendi [1]. Ce résultat n'est cependant pas optimal. Par exemple, pour l'opérateur  $\Delta + V$ , Jerison et Kenig [10] démontrent l'unicité forte si  $V \in L_{Loc}^{m/2}$  (voir pour d'autres conditions l'appendice de Stein de [10] et leur bibliographie).

Nous nous sommes limités à la condition (1), d'une part, parce que le bon cadre pour obtenir l'unicité forte avec des termes dans  $L^q$  ne semble pas complètement dégagé, d'autre part, la preuve du lemme 3 pose des problèmes sous ces hypothèses.

1.2. DIMENSION DES ZÉROS DE  $u$ . — Avant d'énoncer le second théorème, nous allons définir de « bons » représentants pour  $u$  et  $\nabla u$ . Si on note  $C_m$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^m$ , le théorème de différentiation de Lebesgue permet de dire que  $1/C_m R^m \int_{|x-y|<R} u(y) dy$  converge, presque partout vers  $u$ , quand  $R$  tend vers 0. Donc si on note  $f(x)$  cette limite,  $f(x)$  et  $u(x)$  sont égales dans  $L^2$ . D'autre part, on remarque, en appliquant le théorème 1 que  $f(x)$  est définie partout car  $f(x) = P_n^{(x)}(0)$  (le polynôme  $P_n$  donné par le théorème 1 dépend de  $x$ ). De même, si on note

$$\nabla f(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{C_m R^m} \int_{|x-y|<R} \nabla u(y) dy$$

alors  $\nabla f$  est presque partout égale à  $\nabla u$ .  $\nabla f$  n'est pas définie partout, mais si  $f(x) = 0$ ,  $\nabla f(x)$  existe car dans ce cas le  $n$  de  $P_n^x$  est supérieur ou égal à 1. On a donc, dans ce cas,  $\nabla f(x) = \Lambda^x \nabla P_n^{(x)}(0)$ . Nous noterons  $\{x \in K, u(x) = 0\}$  l'ensemble  $\{x \in K, f(x) = 0\}$  de même, nous noterons  $\{x \in K, u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\}$  l'ensemble  $\{x \in K, f(x) = 0, \nabla f(x) = 0\}$ .

THÉORÈME 2. — Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda^{m-1+\varepsilon}(\{x \in \Omega, u(x) = 0\}) &= 0 \\ \Lambda^{m-2+\varepsilon}(\{x \in \Omega, u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\}) &= 0. \end{aligned}$$

Remarques. — 1° En particulier, la mesure de Lebesgue de  $\{x \in \Omega, u(x) = 0\}$  est nulle. Cette mesure ne dépend pas du représentant choisi pour  $u$ . Pour une fonction  $u$  vérifiant l'équation  $Au = 0$  où  $A = \sum_{i,j} \partial_{x_j} a_{ij}(x) \partial_{x_i}$ , ce résultat est une conséquence du résultat de Garofalo-Fang Hua Lin [7].

2° Dans [13], nous avons prouvé le théorème 2 pour des fonctions  $u \in C^{1+\varepsilon}$ . Dans ce cas (il suffit de supposer que  $u$  est un continûment différentiable) les ensembles  $\{x \in \Omega, u(x) = 0\}$  et  $\{x \in \Omega, u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\}$  sont définis sans ambiguïté et correspondent aux définitions que nous avons données plus haut.

## 2. Preuve du théorème de décomposition

Comme indiqué à la remarque du théorème 1, nous nous placerons dans ce paragraphe dans des coordonnées adaptées, de sorte que  $x = 0$ , et

$$A = \Delta + \sum_{i,j=1}^m \partial_{y_i} a_{ij}(y) \partial_{y_j} = \Delta + B$$

avec  $a_{ij}(0) = 0$  et  $a_{ij}$  lipschitzienne, pour  $1 \leq i, j \leq m$ .

LEMME 3. — Soit  $u \in H^2_{\text{Loc}}(\Omega)$  vérifiant (1).

On suppose qu'il existe une constante positive  $C$  et une constante  $\alpha \geq 0$  telles que

$$(3) \quad \left( \int_{|y| < R} |u|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^\alpha$$

$$(4) \quad \left( \int_{|y| < R} |\nabla u|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^\alpha.$$

Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\tilde{C} > 0$ , il existe un polynôme harmonique  $P$  et une fonction  $\Gamma \in H^2$  tels que,  $u = P + \Gamma$  avec

$$(5) \quad \left( \int_{|y| < R} |\Gamma|^2 dy \right)^{1/2} \leq \tilde{C}R^{\alpha+2-\delta}$$

$$(6) \quad \left( \int_{|y| < R} |\nabla \Gamma|^2 dy \right)^{1/2} \leq \tilde{C}R^{\alpha+1-\delta}$$

Remarques. — 1° Si on décompose  $P$  en polygones homogènes de degré  $k$ , (3) à (6) impliquent que  $\alpha + 1 \leq k + (m/2) < \alpha + 2$  si on considère les polynômes d'homogénéité supérieure ou égale à  $\alpha + 2$  comme une partie de  $\Gamma$ .

2° En particulier,  $u$  vérifie toujours

$$\left( \int_{|y| < R} |u|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{m/2}$$

$$\left( \int_{|y| < R} |\nabla u|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{m/2}.$$

3° Le lemme 3 est plus précis que le théorème 1. En effet, vu la remarque 2°,  $u = P + \Gamma$  où  $\Gamma$  vérifie (5) et (6) avec  $\alpha = m/2$  et  $P$  un polynôme d'ordre 1. La fonction  $f$  définie plus haut vérifie  $f(0) = P(0)$  et  $\nabla f(0) = \nabla P(0)$ ; ce qui montre que  $\nabla f$  est défini partout.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit d'appliquer le lemme 3 et, par récurrence, on obtient, soit la conclusion du théorème 1, soit que  $u$  s'annule à l'ordre infini. On applique alors le théorème d'unicité forte (Aronszajn-Krzywicki-Szarski [14] et Hörmander [8], pour éliminer cette éventualité, voir [13] pour un petit peu plus de détail).

Preuve du lemme 3. — La preuve s'inspire de la preuve du lemme 2.1 de [13], ainsi que de Caffarelli-Friedman ([4], [5]). Nous renverrons quelquefois à ces différents articles.

Quitte à faire un changement d'échelle, on suppose que la boule de centre 0 et de rayon 1 est incluse dans  $\Omega$ .

On se place dans le cas  $m \geq 3$  (pour  $m = 2$ , il faut remplacer la solution élémentaire du laplacien par  $(1/2\pi) \text{Log } r$ ).

On a (voir Caffarelli-Friedman [5])

$$(7) \quad \frac{1}{|x-y|^{m-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) \quad \text{pour } |x| < |y|,$$

où  $\Gamma_n^y(x)$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $n$  en  $x$ , dépendant d'une façon régulière de  $y$ . La convergence est uniforme sur tout compact contenu dans  $|x| < |y|$ . Les dérivées vérifient également ces propriétés, et, on a,

$$(8) \quad |\nabla_x^k \Gamma_n^y(x)| \leq C |x|^{n-k} n^{m-3+2k}, \quad k=0, 1, 2$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $n$ .

Pour  $\lambda \in [1/2, 1]$  et  $u$  suffisamment régulière, la formule de Green permet d'écrire

$$C_m u(x) = - \int_{|y|=\lambda} \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) u(y) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dS_y - \int_{|y|<\lambda} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \Delta u(y) dy,$$

où  $S_y$  est la mesure sur  $|y|=\lambda$ .

On intègre de chaque côté par rapport à  $\lambda \in [1/2, 1]$  et on remplace  $\Delta$  par  $A - B$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_m u(x) = & - \int_{1/2 < |y| < 1} \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) u(y) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dy \\ & - \int_{1/2}^1 \left( \int_{|y|<\lambda} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A u(y) dy \right) d\lambda \\ & + \int_{1/2}^1 \left( \int_{|y|<\lambda} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} B u(y) dy \right) d\lambda = -J_1 - J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Avec  $C_m = 2(m-2)(\Pi)^{m/2} / \Gamma(m/2)$  et  $\partial/\partial \nu$  est la dérivée dans la direction de la normale extérieur de la sphère  $|y|=\lambda$ .

Cette dernière expression est parfaitement définie pour  $u \in H^2$ . Il suffit d'appliquer le lemme de Schur.

LEMME DE SCHUR. — Soit  $f(x) = \int K(x, y) g(y) dy$ .

Si

$$\sup_x \int |K(x, y)| dy \leq M \quad \text{et} \quad \sup_y \int |K(x, y)| dx \leq N$$

alors

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{MN} \|g\|_{L^2}.$$

Ce lemme sera constamment appliqué pour démontrer les estimations (5) et (6).

*Contrôle de J<sub>1</sub>.* — On prend  $R < 1/10$  de sorte que pour  $|y| < [1/2, 1] |x| < |y|$ . On développe  $1/|x-y|^{m-2}$  et  $\partial/\partial v(1/|x-y|^{m-2})$  en polynômes harmoniques. On obtient des expressions du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/2 < |y| < 1} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) v(y) dy.$$

Chaque terme est un polynôme harmonique et  $v$  est soit  $u$ , soit  $\partial u/\partial v$ . Il suffit de voir que pour  $n+(m/2) \geq \alpha+2$ , le reste de la série vérifie (5) et (6). Faisons, par exemple, la preuve avec  $v = \partial u/\partial v$ . [Dans l'autre cas  $\Gamma_n^y(x)$  est homogène de degré  $n-1$ .] On a

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} \left( \int_{1/2 < |y| < 1} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) v(y) dy \right)^2 dx \\ \leq C \int_{|x| < R} |x|^{2n_2} 2^{2n+2m} dx \int |v(y)|^2 dy \leq C \frac{R^{2n+m}}{2n+m} 2^{2n+m} \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

La somme pour  $n+(m/2) \geq \alpha+2$  est majorée par

$$C R^{2(\alpha+2)} \|v\|_{L^2}^2 \frac{1}{1-R^2 L^2}.$$

Ce qui vérifie (5) car  $R < 1/10$ . La majoration (6) s'obtient de manière identique.

*Contrôle de J<sub>2</sub>.* — On écrit

$$\begin{aligned} J_2 = \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left( \int_{\substack{|y| < \lambda \\ |y| < \beta|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A u(y) dy \right) d\lambda d\beta \\ + \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left( \int_{\substack{|y| < \lambda \\ |y| > \beta|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A u(y) dy \right) d\lambda d\beta = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

On verra plus tard l'intérêt de l'intégration par rapport à  $\beta$ .

*Contrôle de I<sub>1</sub>.* — On a

$$|I_1(x)| \leq \int_{\substack{|y| < 1 \\ |y| < 3|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} |A u(y)| dy.$$

Donc

$$\int_{|x|<R} |I_1(x)|^2 dx \leq \int \left( \int K(x, y) v(y) dy \right)^2 dx$$

avec

$$K(x, y) = 1_{|x|<R} 1_{|y|<3R} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \quad \text{et} \quad v(y) = 1_{|y|<3R} |A u(y)|.$$

On vérifie que  $\sup_x \int |K(x, y)| dy \leq CR^2$  et que  $\sup_y \int |K(x, y)| dx \leq CR^2$ .

On obtient en appliquant le lemme de Schur, (1), (3), (4) que  $\int_{|x|<R} |I_1(x)|^2 dx \leq CR^{2\alpha+4}$  ce qui donne (5).

Contrôle de  $\partial I_1 / \partial x_i$ . — On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial x_i} &= \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y| \leq \beta |x|} (m-2) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^m} A u(y) dy d\lambda d\beta \\ &\quad + \int_2^3 \int_{1/2}^1 \beta \frac{x_i}{|x|} \int_{|y|=\beta|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A u(y) dS_y d\lambda d\beta = I'_1 + I''_1. \end{aligned}$$

$I''_1$  n'a pas de sens écrit ainsi mais un calcul élémentaire montre que (pour  $|x| < R < 1/10$ )

$$I''_1(x) = \frac{x_i}{|x|^3} \int_{1/2}^1 \int_{2|x| < |y| < 3|x|} \frac{|y|}{|x-y|^{m-2}} A u(y) dy d\lambda.$$

Le terme  $I'_1$  se traite avec le lemme de Schur comme le terme  $I_1$  et on a

$$\int_{|x|<R} |I'_1(x)|^2 dx \leq CR^{2\alpha+2}.$$

Ce qui donne (6). Et on a

$$\int_{|x|<R} |I''_1(x)|^2 dx \leq C \int \left( \int K(x, y) v(y) dy \right)^2 dx$$

avec

$$K(x, y) = \frac{1}{|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} 1_{|x|<R} 1_{2|x| < |y| < 3|x|} \quad \text{et} \quad v(y) = |A u(y)| 1_{|y|<3R}.$$

En appliquant le lemme de Schur, le fait que  $|x| \sim |y| \sim |x-y|$ , et les hypothèses (1), (3), (4), on prouve que  $I''_1(x)$  vérifie (6).

Contrôle de  $I_2$ . — Quand  $|y| > \beta|x| > 2|x|$ , on peut appliquer (7), on a

$$I_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_2^n(x)$$

avec

$$I_2^n = \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left( \int_{\substack{|y| < \lambda \\ |y| > \beta|x|}} \frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-2}} A u(y) dy d\lambda d\beta \right)$$

Pour  $n + (m/2) < \alpha + 2$ , on ajoute à chaque terme  $I_2^n$  le terme

$$\tilde{I}_2^n = \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y| < \beta|x|} \frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-2}} A u(y) dy d\beta$$

Le terme ainsi obtenu est un polynôme harmonique. Il suffit de voir que  $\tilde{I}_2^n(x)$  vérifie (5) et (6).

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |\tilde{I}_2^n(x)|^2 dx &\leq CR^{2n} \int_{|x| < R} \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|A u(y)|}{|y|^{n+m-2}} \right)^2 dx \\ &\leq CR^{2n} \int_{|x| < R} \left( \int_{|y| < 3R} \frac{1}{|y|^{m-\varepsilon}} dy \right) \left( \int_{|y| < 3R} \frac{|A u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\varepsilon}} dy \right) dx \\ &\leq CR^{2n+\varepsilon+m} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{3R/2^{k+1} < |y| \leq 3R/2^k} \frac{|A u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\varepsilon}} dy \\ &\leq CR^{2\alpha+4} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(2n+m-4+\varepsilon-2\alpha)} \\ &\leq CR^{2\alpha+4}. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (1), (3) et (4), on peut choisir  $\varepsilon$  pour que  $n + (m/2) < \alpha + 2 \Rightarrow 2n + m - 4 + \varepsilon - 2\alpha < 0$ .

On a donc prouvé (5).

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}_2^n(x)}{\partial x_i} &= \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y| < \beta|x|} \frac{\partial \Gamma_n^y(x) / \partial x_i}{|y|^{n+m-2}} A u(y) dy d\lambda d\beta \\ &\quad + \int_{1/2}^1 \frac{x_i}{|x|^3} \int_{2|x| < |y| < 3|x|} \frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-3}} A u(y) dy d\lambda. \end{aligned}$$

Le premier terme se traite comme  $\tilde{I}_2^n(x)$  [mise à part que  $\partial \Gamma_n^y(x) / \partial x_i$  est homogène de degré  $n-1$ ]. La norme  $L^2$  au carré, du deuxième terme, sur  $|x| < R$  est majorée par



$$C \int \left( \int K(x, y) v(y) dy \right)^2 dx \text{ où}$$

$$K(x, y) = 1_{2|x| < |y| < 3|x|} 1_{|x| < R} \frac{1}{|y|^{m-1}}$$

$$v(y) = 1_{|y| < 3R} |Au(y)|.$$

Le lemme de Schur, les hypothèses (1), (3), (4) permettent de démontrer (6).

Pour  $n + (m/2) \geq \alpha + 2$ , on a, en appliquant (8)

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |I_2^n(x)|^2 dx &\leq C n^{2(m-3)} \int_{|x| < R} |x|^{2n} \left( \int_{2|x| < |y| < 1} \frac{|Au(y)|}{|y|^{n+m-2}} dy \right)^2 dx \\ &\leq C n^{2(m-3)} \int_{|x| < R} |x|^{2n} \left( \int_{2|x| < |y| < 1} \frac{1}{|y|^{m-\delta}} dy \right) + \left( \int_{2|x| < |y| < 1} \frac{|Au(y)|^2}{|y|^{2n+m-4}} dy \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant (1), (3), (4), on prouve que

$$\begin{aligned} \int_{2|x| < |y| < 1} \frac{|Au(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\delta}} dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}|x| < |y| \leq 2^{k+2}|x|} \frac{|Au(y)|^2}{(2^{k+1}|x|)^{2n+m-4+\delta}} dy \\ &\leq \frac{C}{2^{2n}} |x|^{2\alpha-2n-m+4-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(2n+m-2\alpha-4+\delta)}}. \end{aligned}$$

La série converge et est majorée indépendamment de  $n$  car  $n + (m/2) \geq \alpha + 2$ . On prouve donc que

$$\int_{|x| < R} |I_2^n(x)|^2 dx \leq C \frac{n^{2(m-3)}}{2^{2n}} R^{2\alpha+4-\delta}.$$

Ce qui donne (5) après sommation par rapport à  $n$ . La majoration de  $\partial I_2^n(x)/\partial x$  s'obtient comme celle de  $\partial \tilde{I}_2^n(x)/\partial x$ .

*Contrôle de  $J_3$ .* — On a  $B = \sum_{i,j=1}^m \partial_{x_i} a_{ij} \partial_{x_j}$  avec  $a_{ij}(0) = 0$  et donc  $|a_{ij}(x)| \leq C|x|$ .

On va traiter un terme générique  $\partial_{x_i} a(x) \partial_{x_j}$  avec  $a(0) = 0$  et

$$(9) \quad |a(x)| \leq C|x|.$$

On a, en faisant une intégration par partie

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^1 \left( \int_{|y|<\lambda} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \partial_{y_i} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy d\lambda \right) \\ &= - \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{\substack{|y|<\lambda \\ |y|<\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy d\lambda d\beta \\ & \quad - \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left( \int_{\substack{|y|<\lambda \\ |y|>\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy d\lambda d\beta \right. \\ & \quad \left. + \int_{1/2<|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} a(y) \partial_{y_j} u(y) w_i = -K_1 - K_2 + K_3 \right) \end{aligned}$$

où  $w_i$  est une  $m$ -forme différentielle. Elle ne dépend pas de  $x$ .

Contrôle de  $K_1$ . — On a

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \right) = \frac{x_i - y_i}{|x-y|^m}$$

ce qui est une fonction intégrable

La majoration (5) s'obtient, en utilisant (9), comme celle sur  $I_1$ .

Contrôle de  $\partial K_1 / \partial x_v$ . — Ce terme n'est défini que dans les distributions, mais on montre, en reprenant la formule de [13] que pour  $|x| < 1/5$ ,  $M \gg 1$ , on a presque partout

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial x_v} &= \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{\substack{|y|>\beta|x| \\ M>|x-y|}} g(x, y) a(x) \partial_{x_j} u(x) dy d\lambda d\beta \\ & \quad + \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y|<\beta|x|} g(x, y) [a(y) - a(x)] \partial_{y_j} u(y) dy d\lambda d\beta \\ & \quad + \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y|<\beta|x|} g(x, y) a(x) [\partial_{y_j} u(y) - \partial_{x_j} u(x)] dy d\lambda d\beta \\ & \quad + \int_2^1 \frac{x_v}{|x|^3} \int_{2|x|<|y|<3|x|} |y| (m-2) \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^m} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy d\lambda \\ & = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \end{aligned}$$

où

$$g(x, y) = (m-2) \left( \frac{\delta_{ij}}{|x-y|^m} - \frac{m(x_i - y_i)(x_v - y_v)}{|x-y|^{m-2}} \right).$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Krönecker; on remarque que  $\int_{M>|x-y|>\epsilon} g(x, y) dy = 0$ .

*Contrôle de  $L_1$ .* — On a vu dans [13] qu'on contrôle  $\int_{\substack{|y| > \beta|x| \\ M > |x-y|}} g(x, y) dy$  par  $\text{Log}|x|$

donc, pour tout  $\delta > 0$ , on a presque partout

$$|L_1| \leq C_\delta |r|^{-\delta+1} |\partial_{x_j} u(x)|$$

ceci implique (6).

*Contrôle de  $L_2$ .* — On remarque que  $g(x, y)(a(x) - a(y))$  est une fonction intégrable par rapport à  $x$  (ou  $y$ ), car  $|a(x) - a(y)| \leq C|x - y|$ . On peut donc appliquer le lemme de Schur et ce terme se traite comme  $I_1$ . La majoration (6) en découle.

*Contrôle de  $L_3$ .* — On a

$$|a(x)| \leq C|x| \leq CR$$

$$|g(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|^m}$$

On note  $\partial_{x_j} u(x) = v(x)$ .

On a, presque partout, pour  $|x| \leq R$

$$|L_3| \leq CR \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(y) - v(x)|}{|x-y|^m} dy.$$

L'idée pour contrôler  $L_3$  est d'utiliser d'une part (4) et, d'autre part, la propriété suivante

$$\int \left( \int \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{m+2s}} dy \right) dx < +\infty$$

si  $v \in H^s$  pour  $0 < s < 1$ .

Soit  $p$  et  $q$  tels que  $(1/p) + (1/q) = 1$ ,  $p > 1$  sera choisi plus loin.

On a

$$(11) \quad \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^m} dy \\ \leq \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^{m+\varepsilon q}} dy \right)^{1/q} \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^{m-\varepsilon q}} dy \right)^{1/q}$$

où  $\varepsilon$  sera fixé plus loin.

On a

$$(12) \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{m + \varepsilon q}} dy \leq \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{m + 2\varepsilon q + \varepsilon}} dy \right)^{1/2} \\ \times \left( \int_{|y| < \beta|x|} \frac{1}{|x - y|^{m - \varepsilon}} dy \right)^{1/2} \leq C \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{m + 2\varepsilon q + \varepsilon}} dy \right)^{1/2}.$$

En utilisant (10), (11), (12) et en supposant que  $2\varepsilon q + \varepsilon < 2$ , on a, en appliquant l'inégalité d'Hölder

$$\int_{|x| < R} \left( \int_{|y| \leq 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^m} dy \right)^2 dx \\ \leq C \left( \int_{|x| < R} \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{m - \varepsilon p}} dy \right)^2 dx \right)^{1/p} \\ \leq C \left[ \left( \int_{|x| < R} \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(x)|}{|x - y|^{m - \varepsilon p}} dy \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \int_{|x| < R} \left( \int_{|y| < 3|x|} \frac{|v(y)|}{|x - y|^{m - \varepsilon p}} dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \right]^{2/p} \leq CR^{(2\alpha/p) - 2\varepsilon}.$$

Pour cette dernière inégalité, on a appliqué le lemme de Schur et l'estimation (4). On pose  $p = 1/(1 - \eta)$   $1 > \eta > 0$ . Pour avoir (6), il suffit de prendre  $\eta = \delta/4\alpha$  (pour  $\alpha = 0$ , on prend  $\eta = 1/2$ ) et  $\varepsilon = \inf(\delta/4\alpha, \delta/4)$ , on a alors

$$2\varepsilon q + \varepsilon < 2 \quad \text{et} \quad \eta\alpha + \varepsilon < \delta.$$

Contrôle de  $L_4$ . — On a

$$\int_{|x| < R} |L_4|^2 dx \leq C \int \left( \int K(x, y) v(y) dy \right)^2 dx$$

avec :

$$K(x, y) = 1_{|x| < R} 1_{2|x| < |y| < 3|x|} \frac{1}{|x - y|^{m-1}} \quad \text{et} \quad v(y) = \partial_{y_j} u(y) 1_{|y| < 3R}.$$

En appliquant le lemme de Schur, et l'estimation (4), on obtient la majoration (6).

Contrôle de  $K_2$ . — La méthode est identique à celle utilisée pour le contrôle de  $I_2$ . Il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|x - y|^{m-2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{|x - y|^{m-2}} \right)$$

et de développer ce dernier terme en série de polynômes harmoniques.

Contrôle de  $K_3$ . — Ce terme se traite comme  $J_1$ .

Ce qui achève la preuve du lemme 3.

### 3. Preuve du théorème sur la dimension de Hausdorff

Nous utiliserons un certain nombre de notions se trouvant dans Caffarelli-Friedman ([4], [5]). Pour la clarté de la preuve, nous les rappellerons ici.

Soit  $P_n$  un polynôme harmonique homogène de degré  $n$ , dépendant de  $m$  variables. En un point  $x_0$ , on définit des polynômes  $Q_k$ , homogènes de degré  $k$ , par le développement de Taylor de  $P_n$  au point  $x_0$ , de sorte que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n Q_k(x-x_0).$$

On définit

$$\alpha_m(P_m) = \inf_{|x_0|=1} \max_{0 \leq k \leq m-1} \|Q_k\|_{L^2(B_1)}$$

où  $B_1$  est la boule de centre 0 et de rayon 1.

On démontre (voir la preuve du lemme 5.1 [5]) que si  $\alpha_m(P_n) = 0$  alors dans un système de coordonnées, obtenu par une rotation,  $P_n$  ne dépend au plus que de  $m-1$  variables.

On peut alors définir  $\alpha_{m-1}(P_n)$  dans ces nouvelles coordonnées. Et, par récurrence, on définit  $\alpha_j(P_n)$  pour  $m \geq j \geq 3$ . Dans le cas, où un des  $\alpha_j$  est non nul, on peut définir des  $\alpha_\mu$  pour  $\mu < j$ , voir Caffarelli-Friedman [5], remarque 2.1, mais nous ne les utiliserons pas ici.

Notons  $\Lambda^{x_0}$  le changement de variables qui permet de transformer l'opérateur  $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x_0) \partial_i \partial_j$  en  $\Delta = \sum_{j=1}^m \partial_j^2$ . En tout point  $x_0$ , le théorème 1 permet d'écrire

$$u(x) = P_n^{x_0}(\Lambda^{x_0}(x-x_0)) + \Gamma_n(x-x_0)$$

avec  $\Gamma_n$  vérifiant les estimations

$$(13) \quad \left( \int_{|y| \leq R} |\Gamma_n(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{(m/2)+n+1-\delta}$$

$$(14) \quad \left( \int_{|y| \leq R} |\nabla \Gamma_n(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq CR^{(m/2)+n-\delta}.$$

On définit les ensembles suivants

pour  $n \geq 2, k \geq 3, j \geq 1$

$$A_{n,j,k} = \left\{ x \in \mathbf{K}/u(y) = P_n^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \text{ avec } \Gamma_n \text{ vérifiant (13) et (14),} \right.$$

$$\left. \alpha_\mu(P_n^x) = 0 \text{ pour } \mu > k \text{ et } \alpha_k(P_n^x) \geq \frac{1}{j} \right\};$$

pour  $n \geq 2, j \geq 1$

$$A_{n,j,2} = \left\{ x \in \mathbf{K}/u(y) = P_n^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \text{ avec } \Gamma_n \text{ vérifiant (13) et (14),} \right.$$

$$\left. \alpha_\mu(P_n^x) = 0 \text{ pour } \mu \geq 3 \text{ et } \|P_n^x\|_{L^2(B_1)} \geq \frac{1}{j} \right\};$$

pour  $j \geq 1$

$$A_{1,j,1} = \left\{ x \in \mathbf{K}/u(y) = P_1^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_1(y-x) \text{ avec } \Gamma_1 \text{ vérifiant (13), (14)} \right.$$

$$\left. \text{et } \|P_1^x\|_{L^2(B_1)} \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Il est clair que

$$\{x \in \mathbf{K}/u(x) = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^m A_{n,j,k}$$

et

$$\{x \in \mathbf{K}/u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^m A_{n,j,k}$$

(Les  $A_{n,j,k}$  non définis sont vides.)

Nous allons étudier la géométrie des  $A_{n,j,k}$  dans les trois cas suivants

- 1°  $n = 1$ ;
- 2°  $k \geq 3, n \geq 2$ ;
- 3°  $k = 2, n \geq 2$ .

Nous noterons  $d(x, \Pi)$  la distance de  $x$  à  $\Pi$  où  $\Pi$  est un espace affine.

1°  $n = 1$ .

LEMME 4. — Il existe  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $j$ , il existe des constantes  $C$  et  $C'$  tels que, pour tout  $x_0 \in A_{1,j,1}$ , il existe un espace affine  $\Pi_{x_0}$  de dimension  $m - 1$  tel que

$$(15) \quad C |x - x_0|^{1+\varepsilon} \geq d(x, \Pi_{x_0})$$

pour  $x \in A_{1,j,1}$  et  $|x - x_0| \leq C'$ .

*Preuve.* — On peut supposer que  $x_0 = 0$ ,  $\Lambda^{x_0} = \text{Id}$  et que  $P_n(x) = \alpha x_1$ , où  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . On a  $|\alpha| \geq c_m/j$  et  $u(x) = P_n(x) + \Gamma_n(x)$  avec  $\Gamma_n$  vérifiant (13) et (14).

Soit  $x \in A_{1,j,1}$  et  $\lambda > 1$  qui sera fixé plus loin.

On a  $u(y) = \tilde{P}_1(y-x) + \tilde{\Gamma}_1(y-x)$  en appliquant le théorème 1.

On en déduit que

$$\int_{|x-y| \leq |x_1|^\lambda} |u(y)| dy \leq \left( \int_{|x-y| \leq |x_1|^\lambda} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2} |x|^{\lambda m/2} \leq C |x|^{\lambda + \lambda m}.$$

D'autre part

$$(17) \quad \int_{|x-y| \leq |x_1|^\lambda} |u(y)| dy \geq \int_{|x-y| \leq |x_1|^\lambda} |\alpha y_1| dy - \int_{|y| \leq 2|x|} |\Gamma_1(y)| dy.$$

Si  $|x_1| \leq 1$  et  $|x-y| \leq |x_1|^\lambda$  alors  $|y_1| > |x_1|/2$  donc

$$\int_{|x-y| \leq |x_1|^\lambda} |\alpha| \cdot |y_1| dx \geq C \alpha |x_1|^{\lambda m + 1}.$$

En posant  $\lambda = 1 + (\tilde{\delta}/(1+m))$  où  $\tilde{\delta} = 1 - \delta$ , et en appliquant (13), (16), (17), on déduit que

$$C |x|^{(1+m)\lambda} \geq |\alpha| \cdot |x_1|^{\lambda m + 1},$$

c'est-à-dire avec  $\varepsilon = \tilde{\delta}/m^2 + 2m + \delta m + 1$ ,  $C |x|^{1+\varepsilon} \geq (1/j)^{1/\lambda m + 1} |x_1|$ .

Ce qui prouve (15) avec  $\Pi = \{x_1 = 0\}$ .

2°  $k \geq 3, n \geq 2$ .

LEMME 5. — Soit  $n \geq 2$ , il existe  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $j \geq 1$  et  $k \geq 3$ , il existe des constantes  $C$  et  $C'$  tels que pour tout  $x_0 \in A_{n,j,k}$ , il existe un espace affine  $\Pi_{x_0}$  de dimension  $m - k$  tel que :

$$(18) \quad C |x - x_0|^{1+\varepsilon} \geq d(x, \Pi_{x_0})$$

pour  $x \in A_{n,j,k}$  et  $|x - x_0| \leq C'$ .

*Preuve.* — On peut supposer que  $x_0 = 0$ ,  $\Lambda^{x_0} = \text{Id}$  et que  $P_n(y) = P_n(y_1, \dots, y_k)$  en faisant une rotation. On pose

$$\begin{aligned} y' &= (y_1, \dots, y_k) \\ y'' &= (y_{k+1}, \dots, y_m) \\ \rho &= |x'| \quad \text{avec } x' = (x_1, \dots, x_k) \\ R &= |x|. \end{aligned}$$

On suppose  $\rho \neq 0$  (sinon le lemme est trivialement vérifié).

Le développement de Taylor de  $P_n$  au point  $x$  s'écrit

$$P_n(y) = P_n(y') = \sum_{\mu=0}^n Q_\mu(y' - x').$$

Posons  $\bar{y}' = y'/\rho$  et  $\bar{x}' = x'/\rho$ .

Le développement de Taylor de  $P_n(\bar{y}')$  au point  $\bar{x}'$  s'écrit :

$$P_n(\bar{y}') = \sum_{\mu=0}^n \tilde{Q}_\mu(\bar{y}' - \bar{x}').$$

On en déduit que  $Q_\mu = \rho^{n-\mu} \tilde{Q}_\mu$ . La définition de  $\alpha_{m-k}$  montre qu'il existe  $\mu_0$ ,  $0 \leq \mu_0 \leq n-1$  tel que

$$\|\tilde{Q}_{\mu_0}\|_{L^2(B_1)} \geq \alpha_{m-k}(P_n) \geq \frac{1}{j}.$$

Soit  $\lambda > 1$ , qui sera fixé plus loin, on a, en notant

$$C_{\rho^\lambda}(x) = \left\{ (y', y'') \in \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} |y' - x'| \leq \rho^\lambda \\ |y'' - x''| \leq \rho^\lambda \end{array} \right\}$$

$$\|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} = \left\| \sum_{\mu=0}^n Q_\mu(u) \right\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))}$$

$$\geq C \max_{\mu} \|Q_\mu(u)\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))}.$$

Cette inégalité vient du fait que les  $Q_\mu$  sont harmoniques et que

$$\left\| \sum_{\mu=0}^n Q_\mu \right\|_{L^2(B)}^2 = \sum_{\mu=0}^n \|Q_\mu\|_{L^2(B)}^2$$

où  $B$  est une boule entrée en 0 (voir Caffarelli-Friedman [4]).

On a donc

$$\|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} \geq \rho^{n-\mu_0} \|\tilde{Q}_{\mu_0}\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))}$$

$$\geq \rho^{n-\mu_0} \rho^{\lambda m/2} \frac{\rho^{\lambda \mu_0}}{j}.$$

D'où

$$(19) \quad \|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} \geq \frac{1}{j} \rho^{1+\lambda((m/2)+n-1)}.$$



Ceci est obtenu, d'une part, par homogénéité de  $\tilde{Q}_{\mu_0}$  et, d'autre part, en remarquant que c'est pour  $\mu_0 = n - 1$  que l'expression de droite est la plus petite.

D'autre part

$$u(y) = \tilde{P}_n(\Lambda^x(y-x)) + \tilde{\Gamma}_n(y-x)$$

où  $\tilde{\Gamma}_n$  vérifie (13).

On a :

$$\begin{aligned} \|P^n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} &\leq \|u\|_{L^2(C_{R^\lambda}(x))} + \|\Gamma_n\|_{L^2(B_{CR}(0))} \\ &\leq CR^{\lambda n + (\lambda m/2)} + CR^{n+(m/2)+\tilde{\delta}} \quad \text{avec } \tilde{\delta} = 1 - \delta. \end{aligned}$$

Donc

$$(20) \quad \|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} \leq CR^{n+(m/2)+\tilde{\delta}}.$$

En posant  $\lambda = 1 + \tilde{\delta}/(n + (m/2))$ .

De (19) et (20), on déduit (18).

3°  $R = 2, n \geq 2$ .

LEMME 6. — Pour tout  $n \geq 2$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et des constantes  $C, C'$  tels que pour tout  $x_0 \in A_{n,j,2}$ , il existe un espace affine  $\Pi_{x_0}$  de dimension  $m - 2$  tel que

$$(21) \quad C|x - x_0|^{1+\varepsilon} \geq d(x, \Pi_{x_0})$$

pour  $x \in A_{n,j,2}$  et  $|x - x_0| \leq C'$ .

Preuve. — On suppose comme pour les lemmes précédents que  $x_0 = 0, \Lambda^{x_0} = \text{Id}$  et on suppose que  $P_n(y)$  ne dépend que de  $(y_1, y_2)$ ; après une rotation, on peut donc écrire en coordonnées polaires  $(S, \theta)$  :

$$P_n(y) = \alpha S^n \cos n\theta.$$

On a  $|\nabla P_n(y)| \geq C|\alpha|S^{n-1}$  avec  $|\alpha| \geq C/j$  car  $\|P_n\|_{L^2(B_1)} \geq 1/j$ .

Posons  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  et  $R = |x|$ .

Soit  $\lambda > 1$ , on a

$$(22) \quad \|\nabla P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} \geq \frac{C}{j} \rho^{(\lambda m/2) + n - 1}.$$

D'autre part

$$(23) \quad \begin{aligned} \|\nabla P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(B_{CR^\lambda}(x))} + \|\nabla \Gamma_n\|_{L^2(B_{CR^\lambda}(0))} \\ &\leq CR^{(\lambda m/2) + \lambda(n-1)} + CR^{(m/2) + n - 1 + \tilde{\delta}}, \quad \text{avec } \tilde{\delta} = 1 - \delta. \end{aligned}$$

En posant  $\lambda = 1 + (\tilde{\delta}/(m/2) + n - 1)$ , on déduit de (22) et (23) la formule (21).

Pour finir la preuve, on applique le résultat de Caffarelli-Friedman.

LEMME (Caffarelli-Friedman [5], lemme 3.3). — Soit  $\varepsilon$ ,  $l_0$ ,  $c_0$  des réels positifs et soit  $T$  un ensemble borné vérifiant la condition suivante :

(24) Pour tout cube  $K$  d'arête  $l$  ( $l \leq l_0$ ), l'ensemble  $T \cap K$  est contenu dans un  $2_0 l^{1+\varepsilon}$  voisinage d'un espace affine de dimension  $R$ .

Alors pour tout  $\delta > 0$ ,  $\Lambda^{k+\delta}(T) = 0$ .

Par  $c_0 l^{1+\varepsilon}$  voisinage, on entend l'ensemble des points  $x$  dont la distance à l'espace affine est inférieure à  $c_0 l^{1+\varepsilon}$ . Il est clair que les lemmes 4, 5, 6 impliquent la condition (24) pour chaque  $A_{n,j,k}$  et on en déduit que la dimension de Hausdorff de  $A_{n,j,k}$  est au plus  $m - k$ . Le théorème 2 est donc une conséquence de ce lemme.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI, *Uniqueness for the Characteristic Cauchy Problem and Strong Unique Continuation for Higher Order Partial Differential Inequalities* (Amer. J. Math., vol. 102, 1980, p. 385-393).
- [2] N. ARONSZAJN, *A Unique Continuation of Elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order* (J. Math. Pures Appl., vol. 36, 1957, p. 235-249).
- [3] L. BERS, *Local Behavior of Solutions of General Linear Elliptic Equations* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 8, 1955, p. 473-496).
- [4] L. A. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN, *The Free Boundary in the Thomas-Fermi Atomic Model* (J. Differential Equations, vol. 32, 1979, p. 335-356).
- [5] L. A. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN, *Partial Regularity of Zero-Set of Solutions of Linear and Superlinear Elliptic Equations* (J. Differential Equations, vol. 60, 1985, p. 420-433).
- [6] H. O. CORDES, *Über die bestimmtheit der lösungen elliptischer differentialgleichungen durch anfangsvorgaben* (Nachr. Akad. Göttingen IIa Math. Phys., vol. K1, 1956, p. 239-258).
- [7] N. GAROFALO et FANG HUA LIN, *Monotonicity Properties of Variational Integrals,  $A_p$  Weights and Unique Continuation* (Indiana University Mathematics Journal, vol. 35, 1986, p. 245-268).
- [8] L. HÖRMANDER, *Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations* (Comm. in Partial Differential Equations, vol. 8, 1983, p. 21-64).
- [9] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag.
- [10] D. JERISON et C. E. KENIG (Appendix by E. M. STEIN), *Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues for Schrödinger Operators* (Annals of Mathematics, vol. 121, 1985, p. 463-494).
- [11] F. JOHN, *The Fundamental Solution of Linear Elliptic Differential Equations with Analytic Coefficients* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 3, 1950, p. 273-304).
- [12] C. MULLER, *On the Behavior of the Solution of the Differential Equation  $\Delta u = f(x, u)$  in the Neighborhood of a Point* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 7, 1954, p. 505-515).
- [13] L. ROBBIANO, *Sur les zéros de solutions d'inégalités différentiels elliptiques* (Pub. I.R.M.A., Lille, vol. 4, n° 2, 1986 et Comm. in Partial Differential Equations, vol. 12, 1987, p. 903-919).
- [14] N. ARONSZAJN, A. KRZYWICKI et J. SZARSKI, *An Unique Continuation Theorem for Exterior Differential Forms on Riemann Manifolds* (Arkiv för Matematik, vol. 4, 1963, p. 417-453).
- [15] G. ALESSANDRINI et S. VESSELA, *Local Behavior of Solutions to Parabolic Equations* (Publicazioni dell'istituto di Analisi globale e Applicazioni, vol. 16, 1987).

(Manuscrit reçu en février 1987.)

L. ROBBIANO,  
 Université des Sciences et Techniques  
 de Lille-Flandres-Artois,  
 U.F.R. de Mathématiques  
 pures et appliquées,  
 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex



DIMENSION DE HAUSDORFF ET  
CAPACITE DES POINTS SINGULIERS  
D'UNE SOLUTION D'UN OPERATEUR  
ELLIPTIQUE

par

Luc ROBBIANO et Jorge SALAZAR



## DIMENSION DE HAUSDORFF ET CAPACITÉ DES POINTS SINGULIERS D'UNE SOLUTION D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE

PAR

LUC ROBBIANO et JORGE SALAZAR (\*)

[Université des Sciences et Techniques  
de Lille-Flandres-Artois]  
[Université de Paris-Sud]

RÉSUMÉ. — Soit  $u$  une fonction de  $H^1(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ) non constante, solution de  $|Lu| \leq C|\nabla u|$  presque partout sur  $V(\bar{V} \subset \Omega)$  où  $L$  est un opérateur elliptique et  $C$  une constante positive. Le résultat principal de cet article est le suivant : l'ensemble  $\{\nabla u = 0\}$  est de dimension de Hausdorff au plus égale à  $N-2$  et de capacité newtonnienne nulle.

ABSTRACT. — Take  $U \in H^1(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ) be a solution of  $|LU| \leq C|\nabla U|$  a.e. (here,  $L$  is an elliptic operator). Our main results states that the Hausdorff dimension of the set  $\{\nabla U = 0\}$  is at most  $N-2$  and it is a polar set.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ). Considérons un opérateur elliptique

$$L = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

(\*) Texte présenté par P. MALLIAVIN, reçu janvier 1989.

Classification A.M.S. (MOS) : 35 J 20.

Mots-clés : opérateurs elliptiques, mesures de Hausdorff, capacités.

Luc ROBBIANO, Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, U.F.R. de Mathématiques pures et appliquées, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex, France.

Jorge SALAZAR, Université de Paris-Sud, Bât. n° 425, Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France.

On suppose que les  $a_{ij}$  sont des fonctions lipschitziennes et la matrice  $a_{ij}(x)$  est, en tout  $x \in \Omega$ , une matrice symétrique définie positive.

Soit  $V$  un ouvert relativement compact de  $\Omega$  et soit  $u \in H^1(\Omega)$  non constante. Supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|Lu| \leq C |\nabla u|$  presque partout sur  $V$ . Il est implicite dans cette hypothèse que  $Lu$  est mesurable, ceci implique que  $u$  est en fait une fonction de  $H^2(V)$  (voir HÖRMANDER [7], théorème 17.2.7).

D'après [9], on peut donner un sens ponctuel à  $u(x)$  et  $\nabla u(x)$  sur  $V$ . Rappelons le résultat :

Pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $x \in V$ , il existe un réel  $a_x$ , une matrice symétrique  $\Lambda_x$ , un polynôme harmonique homogène  $P_x \neq 0$  de degré  $n$  ( $n \geq 1$ ), et une fonction  $\Gamma_x \in H^1$  tels que :

$$(1) \quad \begin{aligned} (i) \quad & u(y) = a_x + P_x(\Lambda_x(y-x)) + \Gamma_x(y-x) \\ (ii) \quad & \left( \int_{|y| < r} |\Gamma_x(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq C r^{(N/2)+n+1-\delta} \\ (iii) \quad & \left( \int_{|y| < r} |\nabla \Gamma_x(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq C r^{(N/2)+n-\delta} \end{aligned}$$

où  $C$  ne dépend que de  $L$ ,  $V$ ,  $n$ ,  $\delta$  et de la norme de  $u$  dans  $H^2(\bar{V})$ .

Nous avons, bien sûr,  $u(x) = a_x$  et  $\nabla u(x) = \Lambda_x \nabla_y P_x(0)$  presque partout sur  $V$  (théorème de différentiation de Lebesgue).

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *L'ensemble  $\{x \in V; \nabla u = 0\}$  est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff  $(N-2)$ -dimensionnel finie. Sa dimension de Hausdorff est donc inférieure ou égale à  $N-2$  et de capacité newtonienne nulle.*

*Remarques.* — (a) Du résultat de [9], on déduit simplement que  $\{u=c, \nabla u=0\}$  est de dimension de Hausdorff au plus égale à  $N-2$  quelque soit  $c \in \mathbb{R}$ . Intuitivement,  $\nabla u=0$  contient plus d'équations que nécessaire. Les points génériques sont isolés. En effet, c'est aux points où  $u$  est très dégénérée que l'ensemble  $\{\nabla u=0\}$  est gros. Mais en ces points,  $u$  est comparable à un polynôme harmonique dépendant de deux variables. Ce sont les propriétés de ces polynômes qui expliquent le résultat.

(b) La conclusion (ii) du théorème est très importante pour des problèmes liés à la théorie du potentiel. Dans [10], on utilise ce résultat pour

étendre les propriétés des lignes de Green (courbes intégrales du champ  $\text{Grad } G_x$  où  $G_x$  est la fonction de Green de pôle  $x$ ) (voir [2]) au cadre des opérateurs elliptiques sous forme divergence.

(c) Les techniques utilisées ici s'appliquent aux solutions de  $|Lu| \leq C(|u| + |\nabla u|)$  traitées dans [9] ce qui nous donne les mêmes renseignements supplémentaires concernant la mesure de Hausdorff et la capacité.

Pour les lecteurs qui ne sont pas familiarisé avec les notions de mesures de Hausdorff et de capacité nous renvoyons à [1], [5] et [6].

*Preuve.*

*Notations.* — Soit  $P$  un polynôme harmonique homogène de degré  $n$  défini sur  $\mathbb{R}^N$ . On pose  $\Pi(P) = \{x \in \mathbb{R}^N; x \cdot \nabla P(y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N\}$ .

$\Pi(P)$  est clairement un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$ . Notons  $i(P) = \dim \Pi(P)$ .  $P$  ne dépend que de  $N - i(P)$  variables indépendantes.  $P$  est en fait un polynôme sur  $\Pi(P)^\perp$ .

On note :

$$\alpha(P) = \inf_{|x|=1, x \in \Pi(P)^\perp} \left( \int_{|y|<1} |x \cdot \nabla P(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

*Remarques.* — (a)  $\alpha(P) = 0 \Leftrightarrow i(P) = N \Leftrightarrow n = 0$ .

Donc, comme nous ne considérons que des polynômes harmoniques de degré supérieur ou égale à un, vu la décomposition (1) de  $u$ , on aura  $\alpha(P) > 0$ .

(b)  $i(P) = N - 1 \Leftrightarrow n = 1$ .

En effet, si  $i(P) = N - 1$ ,  $P$  ne dépend que d'une variable, comme  $P$  est harmonique  $n = 1$ .

LEMME 1. — Soit  $P$  un polynôme harmonique homogène de degré  $n \geq 2$ . Alors,

$$\int_{|y-x|<r} |(y-x) \cdot \nabla P(y)|^2 dy \geq (n-1)^2 \rho^2 r^{N+2(n-1)} (\alpha(P))^2$$

où  $\rho = \text{dist}(x, \Pi(P))$ .

*Démonstration.* — Posons  $Q_1(y) = x \cdot \nabla P\{y\}$ .



$Q_1$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $n-1$ . Soit  $Q_2(y) = P(x+y) - Q_1(y)$ . En développant  $P(x+y)$  par la formule de Taylor, on remarque que  $Q_2$  est la somme de polynômes harmoniques homogènes de degré différent de  $n-1$ . Donc  $Q_1$  et  $Q_2$  sont orthogonaux dans  $L^2(B_r)$  où  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < r\}$ .

D'autre part, par l'homogénéité de  $Q_1$ ,

$$(y-x) \cdot \nabla P(y) = (n-1) Q(y-x) + (y-x) \cdot \nabla Q_2(y-x).$$

De plus, par le même argument que ci-dessus,  $Q_1(y)$ ,  $y \cdot \nabla Q_2(y)$  sont orthogonaux dans  $L^2(B_r)$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{|y-x| < r} |(y-x) \cdot \nabla P(y)|^2 dy &\geq (n-1)^2 \int_{|y| < r} |Q_1(y)|^2 dy \\ &= (n-1)^2 r^{N+2(n-1)} \int_{|y| < 1} |Q_1(y)|^2 dy \\ &= (n-1)^2 r^{N+2(n-1)} \rho^2 \int_{|y| < 1} \left| \frac{x''}{\rho} \cdot \nabla P(y) \right|^2 dy \end{aligned}$$

où on a posé  $x = x' + x''$  avec  $x' \in \Pi(P)$  et  $x'' \in \Pi(P)^\perp$  et  $\rho = |x''|$ .

La dernière intégrale est supérieure ou égale à  $(\alpha(P))^2$ , ce qui achève la preuve du lemme 1.

En s'inspirant des idées de CAFFARELLI et FRIEDMAN ([3], [4]) et de ([8] et [9]). Posons

$$A_{n,i,j} = \left\{ x \in V; \text{degré de } P_x = n; i(\Pi_x) = i; \alpha(P_x) \geq \frac{1}{j} \right\}$$

où  $\Pi_x = \Pi(P_x)$  il est clair que

$$\{x \in V; \nabla u(x) = 0\} = \bigcup_{n \geq 2} \bigcup_{i=0}^{N-2} \bigcup_{j \geq 1} A_{n,i,j}.$$

LEMME 2. — Pour  $n, i, j$  fixés, il existe des constantes positives  $\varepsilon(\varepsilon(n))$  et  $C_1(C_1(n, i, j))$  telles que pour tout  $x_0 \in A_{n,i,j}$ , il existe un espace affine  $\Pi_{x_0}$  de dimension  $i$  tels que pour tout  $x \in A_{n,i,j}$ ,

$$C_1 |x - x_0|^{1+\varepsilon} \geq \text{dist}(x, \Pi_{x_0}).$$

*Démonstration.* — On pose  $x_0 = 0$ . On va appliquer la formule (1) de décomposition de  $u$  en 0 et en  $x$ . Avec des notations évidentes,

$$u(y) = u(0) + P(\Lambda y) + \Gamma(y)$$

$$u(y) = u(x) + \tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x)) + \tilde{\Gamma}(y-x).$$

Donc

$$\Lambda(y-x) \cdot \nabla P(\Lambda y) = n \tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x)) + (y-x) \nabla_y \tilde{\Gamma}(y-x) - (y-x) \nabla_y \Gamma(y).$$

Soit  $\lambda > 1$  (qu'on fixera plus bas). On prend la norme  $L^2$  sur  $|y-x| < \rho^\lambda$  avec  $\rho = \text{dist}(x, \Pi_0)$ .

On utilise le lemme 1 pour minorer à gauche par  $(n-1)(1/j) \rho^{1+\lambda((N/2)+n-1)}$ .

A droite, on pose  $|x| = r$ , ( $\rho \leq r$ ) et on majore,

$$\left[ n \int_{|y-x| < \rho^\lambda} |\tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x))|^2 dy \right]^{1/2} \leq C r^{\lambda((N/2)+n)},$$

$$\left[ \int_{|y-x| < \rho^\lambda} |(y-x) \cdot \nabla_y \tilde{\Gamma}(y-x)|^2 dy \right]^{1/2} \leq C r^{\lambda((N/2)+n+1-\delta)}$$

$$\left[ \int_{|y-x| < \rho^\lambda} |(y-x) \cdot \nabla_y \Gamma(y)|^2 dy \right]^{1/2}$$

$$\leq r^\lambda \left[ \int_{|y| < 2r} |\nabla_y \Gamma(y)|^2 dy \right]^{1/2} \leq C r^{\lambda+(N/2)+n-\delta}$$

car  $\lambda > 1 \Rightarrow \{y; |y-x| < \rho^\lambda\} \subset \{y; |y| < 2r\}$ . Donc,

$$\rho^{1+\lambda((N/2)+n-1)} \leq C (r^{\lambda((N/2)+n)} + r^{\lambda+(N/2)+n-\delta})$$

posons

$$\lambda = 1 + \frac{1-\delta}{(N/2)+n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1-\delta}{((N/2)+n-1)((N/2)+n+1-\delta)}$$

ceci donne

$$\rho \leq C_1 r^{1+\varepsilon}.$$

*Démonstration du théorème.* — Fixons  $A_{n,i,j}$  avec  $n \geq 2$ ,  $j \geq 1$  et  $i = N - 2$ . Si  $i < N - 2$ , la mesure de Hausdorff  $(N - 2)$ -dimensionnel est nulle et, par conséquent, la capacité est nulle. Néanmoins, on peut faire le raisonnement qui suit avec  $0 \leq i \leq N - 2$  et trouver que  $A_{n,0,j}$  est composé de points isolés; ce qui est le cas de la dimension 2. Supposons donc  $N \geq 3$ . Nous allons compter le nombre de boules de rayon  $r$  nécessaire pour recouvrir  $A_{n,i,j}$ . Pour cela, nous allons décomposer cet ensemble en un nombre fini de sous-ensembles regroupés suivant la direction des 2-plans associés. Plus précisément :

Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}$  de tous les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de  $\mathbb{R}^N$ .

Pour  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{P}$ , on pose :

$$\text{dist}(\varphi_1, \varphi_2) = \|P_{\varphi_1} - P_{\varphi_2}\| = \sup_{|x|=1} |P_{\varphi_1}(x) - P_{\varphi_2}(x)|$$

où  $P_\varphi$  est la projection orthogonale sur  $\varphi$ . C'est une distance sur  $\mathcal{P}$  adaptée à la topologie naturelle (de grassmaniennes).  $\mathcal{P}$  est un espace compact.

Soit  $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1, \dots, J}$  un recouvrement fini de  $\mathcal{P}$  par des boules de rayon  $\theta$  (à fixer plus bas) et de centre  $\varphi_1, \dots, \varphi_J$ .

Posons

$$A_k = \{x \in A_{n,i,j}; \Pi_x^\perp \in \mathcal{P}_k\}.$$

Nous allons montrer que  $A_k$  est de mesure de Hausdorff  $(N - 2)$ -dimensionnelle finie.

Soit  $B$  la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $r > 0$ , notons

$$B_r = (\varphi_k \cap rB) \times (\varphi_k^\perp \cap rB)$$

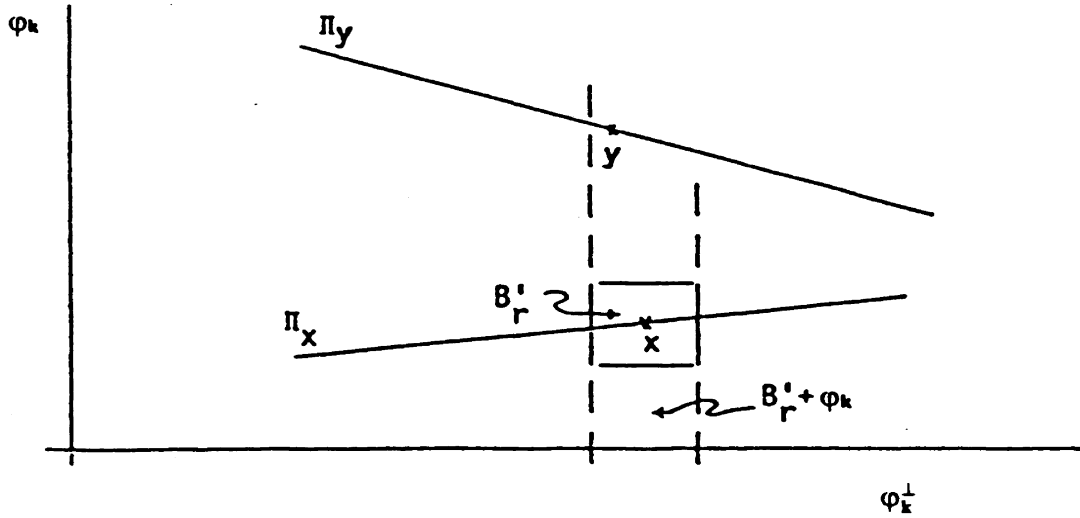
où  $rB = \{rx; x \in B\}$ .

LEMME 3. — *Supposons que  $\theta < 1/3$  et fixons  $r_0 > 0$  assez petit (nous préciserons sa taille plus bas).*

*Alors, quel que soit  $x \in A_k$ , quel que soit  $r \in ]0, r_0[$ ,*

$$B'_{r_0} \cap A_k \cap (B'_r + \varphi_k) \subset B'_r$$

où  $B'_{r_0}$  est une translatée de  $B_{r_0}$  contenant  $x$  et  $B'_r = x + B_r$ . Le schéma est le suivant.



*Démonstration.* — Soit  $y \in A_k \setminus B'_r$  et  $y \in B'_r + \varphi_k$  posons  $y = x + y_1 + y_2$  où  $y_1 \in \varphi_k$  et  $y_2 \in \varphi_k^\perp$  donc,  $|y_1| \geq r$  et  $|y_2| < r$ .

D'après le lemme 2,

$$\begin{aligned} C_1 |y - x|^{1+\epsilon} &\geq \text{dist}(y, \Pi_x) = |P_{\Pi_x^\perp}(x - y)| \\ &\geq |P_{\varphi_k}(y_1 + y_2)| - |P_{\Pi_x^\perp}(y_1 + y_2) - P_{\varphi_k}(y_1 + y_2)| \\ &\geq |y_1| - \text{dist}(\Pi_x^\perp, \varphi_k) \times |x - y| \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) |x - y| \quad \text{car } |x - y| \leq 2|y_1|. \end{aligned}$$

Donc  $|x - y|^\epsilon \geq ((1 - 2\theta)/2 C_1)$ .

Il suffit de prendre  $r_0 < (1/2) ((1 - 2\theta)/2 C_1)^{1/\epsilon}$ .

**LEMME 4.** — *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $r > 0$ , le nombre de boules de rayon  $r$  nécessaire pour recouvrir  $A_k$  soit inférieur à  $C r^{-(N-2)}$ .*

*Démonstration.* — Recouvrons  $A_k$  par un nombre fini de boules de rayon  $r_0$  (lemme 3).

Notons  $B_0$  une telle boule, on peut supposer que 0 est le centre de  $B_0$ . Recouvrons  $\varphi_k^\perp \cap B_0$  par  $C r^{-(N-2)}$  boules de rayon  $r$ . Soit  $B$  une telle boule. D'après le lemme 3, si  $(B + \varphi_k) \cap A_k \cap B_0$  n'est pas vide, cet ensemble est contenu dans  $x + B_{2r}$ .

Quitte à grossir la constante  $C$ , le nombre de boules de rayon  $r$  nécessaire pour recouvrir  $A_k$  est inférieur à  $C r^{-(N-2)}$ .

Le théorème est une conséquence du lemme 4. La capacité est nulle d'après le théorème 1, paragraphe IV de CARLESON [5].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS (D.) et POLKING (J.). — The equivalence of two definitions of capacity, *Proc. of A.M.S.*, vol. 37, 1973, p. 529-534.
- [2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). — Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier de Grenoble*, vol. 3, 1951, p. 199-263.
- [3] CAFFARELLI (L.) et FRIEDMAN (A.). — The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model, *J. Differential Equations*, vol. 32, 1979, p. 335-356.
- [4] CAFFARELLI (L.) et FRIEDMAN (A.). — Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations, *J. Differential Equations*, vol. 60, 1985, p. 420-433.
- [5] CARLESON (L.). — Selected problems on exceptional sets, *Van Nostrand Math. Studies*, vol. 13, 1967.
- [6] CHOQUET (G.). — Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier de Grenoble*, Vol. 5, 1953-1954, p. 131-295.
- [7] HÖRMANDER (L.). — *The analysis of linear partial differential operators*, Springer Verlag.
- [8] ROBBIANO (L.). — Sur les zéros de solutions d'inégalités différentielles elliptiques, *Commun. in Partial Differential Equations*, vol. 12, 1987, p. 903-919.
- [9] ROBBIANO (L.). — Dimension des zéros d'une solution faible d'un opérateur elliptique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 67, 1988, p. 339-357.
- [10] SALAZAR (J.). — *Thèse de Doctorat*, Université de Paris-Sud, 1988.

# **III**

## **REGULARITE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES**



EXPOSANT CRITIQUE DE SOBOLEV

ET REGULARITE DES SOLUTIONS

D'EQUATIONS ELLIPTIQUES

par

A. BENMOHAMED et Luc ROBBIANO

A paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non  
linéaire, 7 (1990).





**PUB. IRMA, LILLE - 1988**

**Vol.16, N° IV**

**Exposant critique de Sobolev  
et régularité des solutions d'équations elliptiques.**

par

**A. BENMOHAMED et L. ROBBIANO**

**Résumé :** Nous étudions la régularité des solutions de problèmes elliptiques avec des termes d'ordre un [resp. zéro] à coefficients dans  $L^n(\mathbf{R}^n)$  [resp.  $L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$ ]. Cela permet de déduire la régularité des solutions de certains problèmes elliptiques non linéaires avec exposant critique de Sobolev.

**CLASSIFICATION A.M.S. (M.O.S.) : 35 B 65 - 35 J 60**

**KEY WORDS :** Opérateurs elliptiques, régularité, exposant critique de Sobolev.

*dépôt du manuscrit le 26 octobre 1988*

## INTRODUCTION

Ce travail a pour but l'étude systématique de la régularité des solutions d'équations elliptiques où interviennent des problèmes liés aux exposants critiques de Sobolev.

Ces problèmes se rencontrent, par exemple, dans les trois équations suivantes :

(1) Métriques conformes.

$$\Delta u = Ru^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

(2) Problème d'école, voir [1] pour un problème voisin.

$$\Delta u = |\nabla u|^{1+2/n}, \quad n \geq 3, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

(3) Surface à courbure moyenne constante.

$$\Delta u = 2H \partial_x u \wedge \partial_y u$$

où  $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  et  $u \in H^1(\mathbf{R}^2)$ .

Ces trois problèmes sont critiques car le gain de régularité des solutions ne s'obtient pas en appliquant seulement l'injection de Sobolev et la régularité des solutions des problèmes elliptiques.

Le premier théorème étudie la régularité des solutions  $u$  de

$$Au = V_1 u + V_2 \nabla u + \sum_{i=1}^n \nu_i \partial_{x_i} (V_3^i u)$$

où  $A$  un opérateur elliptique d'ordre 2.

Ce théorème permet de traiter les exemples (1) et (2) ((1) est bien connu voir Trudinger [12] et Brezis-Kato [5]).

L'exemple (3), dont la régularité des solutions est par ailleurs connue (Wente [13]) ne rentre pas dans le cadre du premier théorème. Néanmoins, la méthode de démonstration s'adapte à ce cas, ce qui fait l'objet du deuxième théorème.

## 1 - Résultats.

## a) Enoncé du théorème 1.

Soit  $A$  un opérateur d'ordre deux mis sous forme divergence

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$$

où  $a_{ij} \in C^s(\Omega)$ ,  $0 < s < 1$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $C^s(\Omega)$  est l'espace de Holder i.e.  $u \in C^s(\Omega)$  si  $u \in L^\infty$  et

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \leq C$$

pour  $x, y \in \Omega$ . On suppose  $A$  elliptique près d'un point  $x_0 \in \Omega$ ,

$$(i.e. \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) \xi_i \xi_j \neq 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Pour  $1 < p < +\infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , on note

$$H^{s,p} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / (1 - \Delta)^{s/2} u \in L^p\}.$$

On dit que  $u \in H_{x_0}^{s,p}$  s'il existe une fonction  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de  $x_0$  telle que  $\chi u \in H^{s,p}$ .

Soit  $u \in H_{x_0}^{1,p}$ ,  $1 < p < +\infty$  vérifiant

$$(4) \quad Au = V_1 u + \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^n \nu_i \partial_i (V_3^i u) + f.$$

Avec  $V_1 \in L_{x_0}^{n/2}$ ,  $V_2^i, V_3^i \in L_{x_0}^n$ ,

$$\nu_i \in Lip \quad e. \quad (\nu_i, \nabla \nu_i \in L^\infty),$$

et  $f \in H_{x_0}^{\sigma-1,p}$  avec  $\sigma < s$ .

(5) On suppose que  $p < n$ .

De plus,

(6) si  $V_1 \neq 0$  ou  $V_2^i \neq 0$  alors  $\frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{p}$ .

(7) si  $V_3^i \neq 0$  alors  $\frac{1+\sigma}{n} < \frac{1}{p}$ .

**Théorème 1.** Soit  $u$  une solution du problème 4) vérifiant les conditions 5), 6) et 7) alors

$$\text{si } V_3^i = 0, u \in H_{x_0}^{1+\sigma,p}$$

$$\text{si } V_3^i \neq 0, u \in H_{x_0}^{1,r}$$

$$\text{avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}.$$

**Remarques :**

1) Les hypothèses très faibles faites sur les fonctions  $V_j^i$  permettent d'appliquer ce théorème à des situations non linéaires avec exposant critique de Sobolev. Par exemple :

$$u \in H_{x_0}^1 (H^1 = H^{1,2}),$$

$$Au = |\nabla u|^{1+\frac{2}{n}} = \sum_{i=1}^n V_i \partial_i u$$

avec  $V_i = |\nabla u|^{\frac{2}{n}-1} \partial_i u$ . On a bien  $V_i \in L_{x_0}^n$ .

2) C'est une généralisation d'un théorème de Brezis et Kato [5]. Ces auteurs se place dans le même cadre que nous mais avec  $V_2^i = V_3^i = 0$ .

3) Notre méthode de démonstration repose sur le calcul pseudo-différentiel ou plutôt le calcul paradifférentiel puisque les coefficients de  $A$  sont peu réguliers. La difficulté essentielle provient de la présence de certains opérateurs à coefficient dans  $L^p$  pour lesquels nous n'avons aucun calcul symbolique ; ce qui, en partie, explique l'absence d'une version microlocale du théorème 1. Cependant, on peut inverser (localement) ces opérateurs, puis étudier l'action, sur les espaces  $H^{s,p}$ , des inverses.

4) Beaucoup de travaux ont été fait sur la régularité (voir par exemple Trudinger [12]) ou sur l'existence (Brezis-Nirenberg [7]) des solutions d'équations du type  $Au = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ . Mais peu de choses semblent connues pour des équations contenant des termes non linéaires d'ordre un avec exposant critique de Sobolev. Ce qui a motivé notre étude est le problème de Plateau qui consiste à résoudre l'équation  $\Delta u = 2Hu'_x \wedge u'_y$  où  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ , avec des conditions au bord de  $\Omega$ , (voir Brezis et Coron [6] et leur bibliographie sur le problème de l'existence). Si  $u \in H^1$  avec les conditions au bord  $C^\infty$  (voir Wente [13], s'appuyant sur un résultat de Morrey [11]) alors  $u \in C^\infty$ .

Le théorème 1 ne s'applique pas à cette équation car l'hypothèse  $p < n$  n'est pas vérifiée (ici  $p = n = 2$ ). Plus précisément, la difficulté est la suivante,  $u'_x \wedge u'_y \in L^1$  donc  $\Delta u \in L^1$ .

De cela on ne peut pas déduire que

$$u \in H^{2,1} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha u \in L^1, |\alpha| \leq 2\}.$$

Cependant, la technique développée pour démontrer le théorème 1 s'adapte à ce cas. Ce qui fait l'objet du théorème 2.

### b) Enoncé du théorème 2.

Soit  $u \in H^1_{(x_0, y_0)}$

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

On appelle  $(x, y)$  les variables de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $A$  un opérateur matricielle d'ordre 2 elliptique près de  $(x_0, y_0)$  où chaque élément de la matrice s'écrit sous formes divergence avec des coefficients  $C^s$  ( $0 < s < 1$ ).

La fonction  $u$  vérifie

$$(8) \quad Au = H(x, y)[\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V] + f$$

où  $V \in H^1_{(x_0, y_0)}$ ,  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \in H^{\sigma-1}_{(x_0, y_0)}$ ,  $\sigma < s$ , et  $H \in Lip$ .

**Théorème 2.** Soit  $u \in H^1_{(x_0, y_0)}$  vérifiant l'équation (8) alors  $u \in H^{1+\sigma'}_{(x_0, y_0)}$ , pour  $\sigma' < \sigma$ .

### Remarques :

1) Bien entendu, l'énoncé de ce théorème est moins satisfaisant que celui du théorème 1. Mais comme il traite un problème géométrique important il nous a semblé intéressant. Il est probable que pour des problèmes voisin le théorème 1 ne s'applique pas mais que la technique de démonstration s'adapte.

2) Les résultats de régularité connus sur le problème de Plateau sont de nature différente. En effet, dans Wente [13], ce sont les points critiques d'une certaine fonctionnelle prise sur un certain espace, qui sont  $C^\infty$  jusqu'au bord si les données sont  $C^\infty$  (et analytiques si les données sont analytiques).

Le théorème 2 est un résultat local, seules les propriétés locales de  $A$ , de  $u$ , de  $V$ , et de  $f$ , interviennent. Ce qui est la situation habituelle pour un problème elliptique.

2 - Résultats préliminaires.

a) Rappels sur les opérateurs paradifférentiels.

Nous allons rappeler quelques résultats classiques.

• Soit  $k > 1$  et soit  $(\psi, \varphi)$  un couple de fonctions de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{supp } \psi \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| \leq 1\}$  et  $\psi(\eta) = 1$  quand  $|\eta| \leq \frac{1}{K}$  et  $\text{supp } \varphi \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{K} \leq |\eta| \leq 2K\}$ .

$(K, \psi, \varphi)$  est une décomposition dyadique de l'unité si :

pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(\eta) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\eta) = 1$ .

• Une classe de symbole

Pour  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $m \in \mathbb{R}$ , on notera par  $\Sigma_\sigma^m$  l'ensemble des fonctions  $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

(9)  $x \mapsto \partial_\eta^\alpha a(x, \eta)$  est une fonction de  $C^\sigma(\mathbb{R}^n)$  ;

(10) Il existe une constante positive  $C^\alpha$  telle que

$$\|\partial_\eta^\alpha a(\cdot, \eta)\|_{C^\sigma} \leq C_\alpha (1 + |\eta|)^{m - |\alpha|}.$$

$\Sigma_\sigma^m$  peut être muni d'une structure d'espace de Fréchet. A cette classe de symbole, on peut associer des opérateurs de  $C_0^\infty$  dans  $\mathcal{D}'$  de la manière suivante.

• Opérateurs para-différentiels et pseudo-différentiels.

Une décomposition dyadique étant choisie. Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$  pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on note par  $T_a$  l'opérateur défini par :

$$(11) \quad T_a u(x) = \sum_K (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta) \hat{u}_k(\eta) d\eta,$$

où 
$$A_{k-N_0}(x, \eta) = \mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k+N_0-1})\mathcal{F}a(\cdot, \eta))(x)$$

et  $N_0$  étant choisi assez grand pour que le spectre de  $x \mapsto \int e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta) \hat{u}_k(\eta) d\eta$  soit dans une couronne de type  $\{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2^{-k}K} \leq |\eta| \leq 2^{k+1}K\}$ .

Les opérateurs  $T_a$  jouissent des propriétés suivantes :

(12)  $T_a$  est un opérateur borné de  $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  avec  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p < +\infty$  dans  $H^{s-m,p}(\mathbb{R}^n)$  avec une norme d'opérateur majorée par une semi-norme de  $a$ .

(13)  $T_a$  dépend du choix de  $N_0$  et de la décomposition dyadique, cependant une modification du choix de  $N_0$  ou de la décomposition pour  $T_a$ , modifie cet opérateur par l'addition d'un opérateur  $\sigma$ -régularisant, c'est-à-dire borné de  $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s-m+\sigma-\varepsilon,p}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , et dont la norme d'opérateur est majorée par une semi-norme de  $a$ . Désormais, nous appellerons opérateur paradifférentiel, tout opérateur qui ne diffère de  $T_a$  que d'un opérateur  $\sigma$ -régularisant.

Les opérateurs paradifférentiels ont été introduit par Bony [3], les propriétés ci-dessus découlent des travaux de Meyer [10], Metivier [9], et Benmohamed [2].

On pourra consulter Bourdaud [4] et Hörmander [8] pour une étude détaillée de ces classes.

Si  $a \in \Sigma_\sigma^m$ , on note par  $a(x, D)$  l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\eta} a(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta \text{ pour } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La différence entre  $a(x, D)$  et  $T_a$  est, dans certains cas, régularisante voir [2].

**Proposition 3.** *Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$  et  $s \in \mathbf{R}$  tels que  $\sigma + s - m > 0$ .  $a(x, D) - T_a$  est un opérateur borné de  $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s',p}(\mathbf{R}^n)$  avec  $1 < p < +\infty$  et  $s' < \min(\sigma, \sigma + s - m)$ .*

Ce qui, dans ces cas, permet de remplacer  $a(x, D)$  par  $T_a + R$ .

En vue d'inverser les opérateurs elliptiques, nous aurons besoin d'un calcul symbolique sur la classe  $\Sigma_\sigma^m$ .

**Proposition 4.** *Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$  et  $b \in \Sigma_\sigma^{m'}$ . Il existe  $C \in \Sigma_\sigma^{m+m'}$  tel que*

$$c - a \# b \in \bigcap_{0 < \varepsilon \leq \sigma - [\sigma]} \Sigma_\varepsilon^{m+m'-\sigma+\varepsilon} \text{ (où } a \# b = \sum_{|\alpha| \leq [\sigma]} \partial_\eta^\alpha a D_x^\alpha b / \alpha!)$$

et  $T_a \circ T_b \equiv T_c$  modulo un opérateur  $\sigma$ -régularisant. On a note par  $[\sigma]$  la partie entière de  $\sigma$ .

Remarquons que si  $0 < \sigma < 1$ ,  $[T_a, T_b] = T_a \circ T_b - T_b \circ T_a$  est un opérateur d'ordre  $m + m'$  et de régularité  $\sigma$ , mais de symbole nul et, par conséquent, il est  $\sigma$ -régularisant.



**Proposition.** Soit  $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  avec  $a \in \Sigma_\sigma^2$ , on suppose que  $a(0, \xi) \neq 0$  pour tout  $\xi \neq 0$ . Il existe alors une fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  égale à 1 au voisinage de zéro et un symbole  $b \in \Sigma_\sigma^{-2}$  tels que

$$T_b \circ T_a \equiv \chi \quad \text{modulo un opérateur } \sigma - \text{régularisant}$$

En tant qu'opérateur,  $\chi$  est définie par  $\chi : u \mapsto \chi \cdot u(x) = \chi(x)u(x)$ .

**b) Réduction du problème.**

Les hypothèses sont locales, pour se placer dans des espaces globaux il suffit de tronquer  $u$  avec une fonction  $\chi \in C_0^\infty$   $\chi$  valant 1 près de  $x_0$ , et de multiplier l'équation (4) par une autre fonction  $C_0^\infty$  a support  $\subset \{\chi = 1\}$  et valant 1 près de  $x_0$ . La forme de l'équation (4) est alors conservée, avec des hypothèses globales sur les  $V$ ,  $u$  et  $f$ .

Nous allons montrer qu'on peut remplacer l'opérateur

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i(a_{ij}(x) \partial_j)$$

par un paradifférentiel de symbole

$$a(x, \xi) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j .$$

En effet,  $a_{i,j} \in \Sigma_\sigma^0$  d'après la proposition 3,  $a_{i,j} - T_{a_{i,j}}$  est borné de  $H^{\sigma,p}$  dans  $H^{\sigma',p}$  pour  $\sigma' < \min(s, \sigma + s)$ .

Pour  $u \in H^{1,p}$ ,  $\partial_j u \in H^{0,p} = L^p$  donc  $a_{i,j} \partial_j u - T_{a_{i,j}} \partial_j u \in H^{\sigma,p}$  pour  $\sigma < s$ . Donc  $\partial_i a_{i,j} \partial_j u - \partial_i T_{a_{i,j}} \partial_j u \in H^{\sigma-1,p}$ . Le calcul symbolique (proposition 4) permet d'écrire  $\partial_i T_{a_{i,j}} \partial_j u = T_{a_{i,j} \xi_i \xi_j} u$  modulo un terme dans  $H^{\sigma-1,p}$ . Donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i(a_{ij}(x) \partial_j u) = T_a u + f .$$

ou  $f \in H^{\sigma-1,p}$  avec  $\sigma < s$  et  $a(x, \xi)$  comme annoncé ci-dessous. Pour finir, nous remplaçons les  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  par  $\tilde{V}_i + \hat{V}_i$  où  $\tilde{V}_1 \in L^{n/2}$  avec  $\|\tilde{V}_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \in L^n$  avec  $\|\tilde{V}_i\|_{L^n} \leq \varepsilon$ ,  $i = 2, 3$  et  $\hat{V}_i \in C_0^\infty$ .

$\varepsilon$  sera choisi au paragraphe 3. On vérifie facilement que les termes provenant de  $\hat{V}_i$  peuvent être incorporés au reste  $f$ .

## 3 - Preuves des théorèmes de régularités.

## a) Preuve du théorème 1.

Après les réductions du paragraphe 2b), la solution  $u$  du problème vérifie l'équation suivante

$$(14) \quad T_a u = V_1 u + \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^n \nu_i (\partial(V_3^i u)) + f$$

où

$$u \in H^{1,p}$$

$$a \in \Sigma_s^2$$

$$V_1 \in L^{n/2} \text{ avec } \|V_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon$$

$$V_2^i, V_3^i \in L^n \text{ avec } \|V_j^i\|_{L^n} \leq \varepsilon, j = 1, 2$$

$$\nu_i \in Lip$$

$$f \in H^{\sigma-1,p} \quad s > \sigma > 0$$

Appelons  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , les opérateurs suivants :

$$Z_1 u = V_1 u$$

$$Z_2 u = \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u$$

$$Z_3 u = \sum_{i=1}^n \nu_i \partial_i (V_3^i u)$$

(15) On a

$$Z_j : H^{1,p} \rightarrow L^q \quad j = 1, 2$$

$$Z_3 : H^{1,p} \rightarrow H^{-1,p}$$

avec  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$ , et des normes opérateurs majorées sur une constante fois  $\varepsilon$ .

En effet :  $u \in H^{1,p} \subset L^{q_1}$  avec  $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ , si  $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$ .

Donc

$$\begin{aligned} \|Z_1 u\|_{L^q} &= \|V_1 u\|_{L^q} \leq \|V_1\|_{L^{n/2}} \|u\|_{L^{q_1}} \\ &\leq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}}. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{n} < \frac{1}{p}; \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1\right)$$

$$\begin{aligned} \|Z_2 u\|_{L^q} &\leq \sum_{i=1}^n \|V_2^i \partial_i u\|_{L^q} \leq \sum_{i=1}^n \|V_2^i\|_{L^n} \|\partial_i u\|_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1\right)$$

$$\begin{aligned} \|Z_3 u\|_{H^{-1,p}} &\leq C \sum_{i=1}^n \partial_i (V_3^i u) \|_{H^{-1,p}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i u\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i\|_{L^n} \|u\|_{L^{q_1}} \\ &\leq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{n} < \frac{1}{p}\right).$$

Soit  $b \in \sum_s^{-2}$  tel que  $T_b T_a = \chi(x) + R$  où  $R : H^{\delta,t} \rightarrow H^{\delta+\sigma,t}$  ( $\sigma < s$ ) pour tout  $\delta \in \mathbf{R}$ ,  $1 < t < +\infty$  et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ .

On applique  $T_b$  à (14), on a :

$$(17) \quad \chi u = T_b Z_1 u + T_b Z_2 u + T_b Z_3 u + h$$

où  $h = T_b f - Ru \in H^{1+\sigma,p}$  car  $f \in H^{\sigma-1,p}$ .

D'après (12), (15) et (16)  $T_b Z_j u \in H^{2,q} \hookrightarrow H^{1,p}$   $j = 1, 2$  et  $T_b Z_3 u \in H^{1,p}$ .

De plus,

$$\|T_b Z\|_{H^{1,p} \rightarrow H^{1,p}} \leq C\varepsilon.$$

On note  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ . L'idée est la suivante ; on a un opérateur  $\chi - T_b Z$  qui envoie  $H^{1,p}$  dans  $H^{1,p}$  avec  $T_b Z$  de norme petite. On va l'inverser avec une série de Neumann,  $\chi$  étant presque l'identité.

D'une façon précise, on pose :

$$\chi u = v \in H^{1,p}$$

(17) devient

$$(18) \quad v - T_b Z v = T_b Z (1 - \chi) u + h$$

avec  $h \in H^{1+\sigma,p}$ .

Il s'ensuit que

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (T_b Z)^k (1 - \chi) u + \sum_{k=0}^{\infty} (T_b Z)^k h.$$

Si  $\varepsilon$  est pris suffisamment petit pour que

$$\|T_b Z\|_{H^{1,p} \rightarrow H^{1,p}} \leq \frac{1}{2}.$$

Commençons par démontrer que le deuxième terme de  $v$  vérifie les affirmations du théorème. On remarque que  $T_b Z_j$  opère de  $H^{1+\sigma,p}$  dans  $H^{1+\sigma,p}$  avec une norme petite si  $j = 1$  ou  $2$  et que  $T_b Z_3$  opère de  $H^{1,r}$  dans  $H^{1,r}$  avec une norme petite. En effet, si  $g$  est dans  $H^{1+\sigma,p}$

$$(19) \quad \begin{aligned} \|T_b Z_1 g\|_{H^{1+\sigma,p}} &\leq C \|T_b Z_1 g\|_{H^{2,\mu}} \\ &\leq C \|V_1 g\|_{L^\mu} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{L^\nu} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma,p}} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1-\sigma}{n}$  et  $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{p} - \frac{1+\sigma}{n}$ .

$$(20) \quad \begin{aligned} \|T_b Z_2 g\|_{H^{1+\sigma,p}} &\leq C \|T_b Z_2 g\|_{H^{2,\mu}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_1^i \partial_i g\|_{L^\mu} \\ &\leq C \varepsilon \|\nabla g\|_{L^r} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\nu}} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma,p}} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}$ .

$$(21) \quad \begin{aligned} \|T_b Z_3 g\|_{H^{1+\nu}} &\leq C \sum_{i=1}^n \|\partial_i (V_3^i g)\|_{H^{-1,r}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i g\|_{L^r} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{L^\nu} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\nu}} \end{aligned}$$

$g \in H^{1+\sigma,p} \subset H^{1,r}$ .

Il reste à traiter le premier terme. On va utiliser le fait que le support de  $1 - \chi$  est loin de  $x_0$ .

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , avec support  $\varphi$  compact dans un ouvert contenu dans  $\{\chi = 1\}$ . De sorte que  $\varphi(1 - \chi) = 0$ .

**Lemme 5.**

$$(22) \quad \varphi T_b = T_b \varphi + R,$$

avec  $R : H^{\delta,t} \rightarrow H^{\delta+2+\sigma,t}$  pour  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $1 < t < \infty$ .

$$(23) \quad \varphi Z_2 = Z_2 \varphi + \tilde{V}_2,$$

avec  $\tilde{V}_2 \in L^n$

$$(24) \quad \varphi Z_3 = Z_3 \varphi + \tilde{V}_3 \text{ avec } \tilde{V}_3 \in L^n.$$

■ (22) résulte de la proposition 4.

$$(23) \quad \varphi Z_2 w - Z_2 \varphi w = - \sum_{i=1}^n V_2^i (\partial_i \varphi) w.$$

$$(24) \quad \varphi Z_3 w - Z_3 \varphi w = - \sum_{i=1}^n \nu_i V_3^i (\partial_i \varphi) w.$$

Avec le  $R$  du (22) du lemme 5 et une fonction  $V \in L^n$ , on a :

$$(25) \quad \varphi (T_b Z)^k = (T_b Z)^k \varphi + \sum_{j=0}^k (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j.$$

On a déjà vérifié voir (17) que

$$\|T_b Z g\|_{H^{1,p}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1,p}},$$

$$\|T_b Z g\|_{H^{1+\sigma,p}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma,p}} \text{ si } V_3^i = 0$$

$$\|T_b Z g\|_{H^{1,p}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1,p}} \text{ si } V_3^i \neq 0,$$

il suffit d'appliquer les majorations suivantes dans (19) et (20),

$$\|g\|_{L^p} \leq C \|g\|_{H^{1,p}}$$

et

$$\|g\|_{H^{1,p}} \leq C \|g\|_{H^{1+\sigma,p}}.$$

On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que tous les  $C \varepsilon \leq \delta$  (on peut prendre  $\delta = \frac{1}{2}$ ).

Si  $V_3^i = 0$ , on a  $\left(\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
 & \| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} \\
 & \leq \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} + \| (T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,q}} + \| (T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{2+\sigma,p}} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| Z (T_b Z)^j g \|_{L^q} + \| V (T_b Z)^j g \|_{L^p} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1,p}} + \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1,p}} ] \quad (\text{voir (15)}) \\
 & \leq C \delta^{k-1} \| g \|_{H^{1,p}}
 \end{aligned}$$

La constante  $C$  ne dépend pas de  $k$ . Si  $V_3^i \neq 0$ , on a de même

$$\begin{aligned}
 & \| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1,r}} \\
 & \leq \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} + \| T_b V (T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| RZ_3 (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma,p}} \\
 & \quad + \| T_b V (T_b Z)^j g \|_{H^{2,p}} + \| R(Z_1 + Z_2) (T_b Z)^j g \|_{H^{2+\sigma,q}} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| Z_3 (T_b Z)^j g \|_{H^{-1,p}} + \| V (T_b Z)^j g \|_{L^p} + \| (Z_1 + Z_2) (T_b Z)^j g \|_{L^q} ] \\
 & \leq C \delta^{k-j-1} \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1,p}} \\
 & \leq C \delta^{k-1} \| g \|_{H^{1,p}} .
 \end{aligned}$$

Or  $C$  ne dépend pas de  $k$ .

En définitive, (18) et (25) donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi (T_b Z)^{k+1} (1 - \chi) u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (T_b Z)^{k-j} [RZ + T_b V] (T_b Z)^j (1 - \chi) u$$

et la norme  $H^{1,\sigma,p}$  (où  $H^{1,r}$  si  $V_3 \neq 0$ ) de cette expression est majorée par

$$C \sum_{k=0}^{\infty} k \delta^k \| u \|_{H^{1,p}} \leq C \| u \|_{H^{1,p}} .$$

## b) Preuve du théorème 2.

Après les réductions du paragraphe 2.b), la solution  $u$  du problème vérifie l'équation suivante :

$$(26) \quad T_a u = 2H(x) (\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V) + f .$$

avec  $f \in H^{\sigma-1}$   $1 > \sigma > 0$ ,  $H \in Lip$ .

On note :

$$(27) \quad Z_d g = \partial_x(g \wedge \partial_y d) - \partial_y(g \wedge \partial_x d).$$

où

$$d \in H^1 \quad d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g \in H^\alpha \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \alpha > 0.$$

On remarque que

$$(28) \quad Z_d g = \partial_x g \wedge \partial_y d - \partial_y g \wedge \partial_x d.$$

si  $\alpha \leq 1$ .

On note

$$V = \tilde{V} + \beta \quad \text{ou} \quad \tilde{V} \in H^1, \|\tilde{V}\|_{H^1} \leq \varepsilon$$

$\varepsilon$  à fixer et  $\beta \in Lip$ .

(26) devient (en remplaçant la notation  $\tilde{V}$  par  $V$ ) :

$$(29) \quad T_a u = H(x) Z_V u + \tilde{f},$$

ou  $\tilde{f} = f + \partial_x u \wedge \partial_y \beta - \partial_y u \wedge \partial_x \beta \in H^{\sigma-1}$ .

**Remarque :** Il est très important pour la preuve du théorème que le second membre soit de la forme  $Z_V u$  de telle façon que  $Z_V$  s'écrive, soit sous la forme (27), soit sous la la forme (28). Ce qu'on va voir dans la preuve du lemme suivant.

**Lemme 6.** (30) Si  $0 < \alpha < 1$   $Z_V : H^\alpha \rightarrow H^{-1,q}$  avec  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .

(31) Si  $1 < \alpha < 2$ ,  $Z_V : H^\alpha \rightarrow L^r$  avec  $\frac{1}{r} = 1 - \frac{\alpha-1}{2}$ .

Dans les deux cas, la norme opérateur de  $Z_V$  est majorée par  $C\varepsilon$ .

■ (30) Prenons la définition (27) de  $Z_V$ ,  $\partial_x V$  et  $\partial_y V \in L^2$  et

$$g \in H^\alpha \hookrightarrow L^\nu \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} > 0$$

donc  $g \wedge \partial_x V \in L^q$  ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ) ; ce qui implique que  $Z_V g \in H^{-1,q}$  et  $\|Z_V g\|_{H^{-1,q}} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$ .

(31) Prenons la définition (28) de  $Z_V$ . On a :

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} V &\in L^2 \\ \partial_{x_i} g &\in H^{\alpha-1} \hookrightarrow L^\nu \text{ avec } \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha-1}{2} \end{aligned}$$

donc  $\partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V \in L^r$  et  $\|Z_V g\|_{L^r} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$ .

Ce qui achève la preuve du lemme.

Soit  $b \in \Sigma_s^{-2}$  tel que  $T_b T_a = \chi + R$ .

On a noté  $\chi$  pour  $\chi \cdot Id$ , et  $R$  est un opérateur :  $H^{\delta,t} \rightarrow H^{\delta+\sigma,t}$  pour  $\delta \in \mathbf{R}$  et  $1 < t < \infty$ .

On applique  $T_b$  à (29), on obtient :

$$\chi u = T_b H Z_V u + h, \text{ où } h = T_b \tilde{f} - Ru \in H^{1+\sigma}, \text{ car } \tilde{f} \in H^{\sigma-1}.$$

On va simplement donner les grandes lignes de la preuve.

Pour  $\alpha < 1$ ,

$$T_b H Z_V : H^\alpha \rightarrow H^{1,q} \hookrightarrow H^\alpha$$

avec  $\|T_b H Z_V\|_{H^\alpha \rightarrow H^\alpha} \leq C\varepsilon$ .

D'autre part :

$$T_b H Z_V : H^{1+\sigma} \rightarrow H^{2,r} \hookrightarrow H^{1+\sigma} \quad \left(\frac{1}{r} = 1 - \frac{\sigma}{2}\right)$$

Pour suivre la preuve du théorème 1, il suffit de contrôler  $\varphi T_b - T_b \varphi$  et  $\varphi Z_V - Z_V \varphi$ .  
 $\varphi$  est la même fonction  $C_0^\infty$  que celle intervenant au théorème 1. ■

**Lemme 7.** (33)  $\varphi T_b - T_b \varphi = R_1$  ou  $R_1 : H^{\delta,t} \rightarrow H^{\delta+1,t}$  pour  $\delta \in \mathbf{R}$   
 $1 < t < +\infty$ .

$$(34) \varphi Z_V - Z_V \varphi = R_2 \text{ où } R : H^\alpha \rightarrow L^q, 0 < \alpha < 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

■ (33) provient du calcul symbolique (proposition 4).

(34) On a :

$$\partial_{x_i}(\varphi g) \wedge \partial_{x_j} V = \varphi \partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V - \partial_{x_i} \varphi (g \wedge \partial_{x_j} V).$$

Donc, la formule (28) donne que

$$\begin{aligned} (\varphi Z_V - Z_V \varphi)g &= \partial_x \varphi (g \wedge \partial_y V) - \partial_y \varphi (g \wedge \partial_x V) \\ &= R_2 g. \end{aligned}$$



$g \in H^\alpha \hookrightarrow L^\nu$ ,  $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . Donc  $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$ . Ce qui achève la preuve du lemme.

Pour finir la preuve comme celle du théorème 1, on obtient une formule similaire à (25), avec un terme

$$(T_b H Z_V)^{k-j-1} [R_1 Z_V + T_b R_2] (T_b H Z_V)^j .$$

Vérifions rapidement que cet opérateur envoie  $H^\alpha$  dans  $H^{\alpha+\sigma}$ .

$$\begin{aligned} H^\alpha &\xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{R_2} L^q \\ L^q &\xrightarrow{T_b} H^{2,q} \subset H^{1+\alpha} \xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{1+\alpha} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ; et

$$\begin{aligned} H^\alpha &\xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{Z_V} H^{-1,q} \\ H^{-1,q} &\xrightarrow{R_1} H^{1+\sigma,q} \subset H^{\alpha+\sigma} \\ H^{\alpha+\sigma} &\xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{\alpha+\sigma} . \end{aligned}$$

Il suffit de poser  $\alpha = 1 + \sigma' - \sigma$  pour démontrer le théorème 2. ■

Bien entendu, le calcul précis des normes opérateurs permet de faire le même raisonnement que pour le théorème 1. Ceci est laissé au lecteur.

## Références bibliographiques

- [1] J. AGUIRRE, M. ESCOBEDO, E. ZUAZUA - Existence de solutions à moyenne donnée pour un problème elliptique dans  $\mathbf{R}^N$ , *C.R.A.S.* **307**, (1988), 463-466.
- [2] A. BENMOHAMED - Espaces de Besov et propagation des singularités des solutions non bornées d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires, *Thèse d'Orsay*.
- [3] J.M. BONY - Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sc. E.N.S.* **14**, (1981), 209-246.
- [4] G. BOURDAUD - Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. in Partial Differential Equations*, **13**, (1988), 1059-1083.
- [5] H. BREZIS - Some variational problems with lack of compactness, *Proc. Sympos. Pure Math.* **45**, (1983), 165-201.
- [6] H. BREZIS - J.M. CORON - Multiple solutions of  $H$ -systems and Rellich's conjecture. *C.P.A.M.* **37**, (1984), 149-187.
- [7] H. BREZIS - L. NIRENBERG - Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *c.P.A.M.* **36**, (1983), 437-477.
- [8] L. HORMANDER - Pseudo-differential operators of type 1,1, *Commun. in Partial Differential Equations*, **13**, (1988), 1085-1111.
- [9] G. METIVIER - Intégrales singulières. *Cours de D.E.A. 1881-1982, Université de Rennes*.
- [10] Y. MEYER - Remarques sur un théorème de J.M. Bony, *Suppl. ai. Rend. del Circolo, Mat. di Palermo. Atti de Seminario di Analisi Armomnica (Pisa, 1980), Serie II.1*, (1981), 1-20.
- [11] C. MORREY - Multiple integrals in the calculus of variations, *Springer Verlag. New York, 1966*.

- [12] N. TRUDINGER - Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. della scuola normale superiore di Pisa*, **22**, (1968), 265-274.
- [13] H. WENTE - An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, **26**, (1969), 318-344.

---

A. B. : Université de Paris-Sud, Bâtiment 425 Mathématiques,  
91 405 - Orsay Cedex (France)  
L. R. : U.F.R. de Mathématiques  
Université de Lille-Flandres-Artois, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex