HAL open science

Les analogues classiques de la mécanique quantique et la dualité onde-particule

Pierre Jamet

▶ To cite this version:

Pierre Jamet. Les analogues classiques de la mécanique quantique et la dualité onde-particule. Physique [physics]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2023. Français. NNT : 2023GRALY027 . tel-04166865

HAL Id: tel-04166865

https://theses.hal.science/tel-04166865v1

Submitted on 20 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École Doctorale : Physique
Spécialité : Physique Théorique
Unité de recherche : Institut Néel

Les analogues classiques de la mécanique quantique et la dualité onde-particule

Classical analogs of quantum mechanics and wave-particle duality

Présentée par :

Pierre Jamet

Direction de thèse :

Dr Aurélien Drezet — Directeur de thèse
Chargé de recherche – CNRS délégation Alpes
Institut Néel

Rapporteurs :

Dr Cyriaque Genet
Directeur de recherche – CNRS délégation Alsace
Institut de Science et d'Ingérierie Supramoléculaires

Pr Thomas Durt
Professeur – École Centrale de Marseille – Institut Fresnel

Thèse soutenue publiquement le **28 mars 2023**, devant le jury composé de :

Dr Aurélien Drezet — Directeur de thèse
Chargé de recherche – CNRS délégation Alpes
Institut Néel

Pr Aurélien Barrau — Président
Professeur des universités – Université Grenoble Alpes
Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie

Pr Thomas Durt — Rapporteur
Professeur – École Centrale de Marseille – Institut Fresnel

Dr Cyriaque Genet — Rapporteur
Directeur de recherche – CNRS délégation Alsace
Institut de Science et d'Ingénierie Supramoléculaires

Dre Anna Minguzzi — Examinatrice
Directrice de recherche – CNRS délégation Alpes
Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés

À ma grand-mère.

The pursuit of knowledge is without end,
for knowledge is never a thing complete.

Elden Ring

Table des matières

Table des matières vii

Table des figures xi

Conventions et notations xiii

Remerciements xv

Introduction xvii

I Des anciennes aux nouvelles théories quantiques 1

1 La théorie des quanta 3
1.1 La physique en 1900 et le problème du corps noir . . . 3
1.1.1 La loi de Rayleigh-Jeans . . . 5
1.1.2 La loi de Wien . . . 6
1.2 Le quantum d'énergie et la loi de Planck . . . 7
1.3 L'atome de Bohr-Sommerfeld . . . 10
1.4 La dualité onde-particule de Louis de Broglie . . . 15
1.4.1 Synchronisation relativiste et onde de phase . . . 15
1.4.2 La théorie de la double solution . . . 18

2 La mécanique quantique moderne 21
2.1 Les différents formalismes . . . 21
2.1.1 La formulation matricielle . . . 21
2.1.2 La théorie ondulatoire de Schrödinger . . . 25
2.1.3 La mécanique quantique . . . 28
2.1.4 La théorie quantique des champs . . . 29
2.2 Les inégalités de Bell et la question de la localité . . . 31
2.2.1 Les variables cachées . . . 33
2.2.2 La localité . . . 34
2.2.3 L'indépendance statistique et la causalité . . . 35
2.2.4 Sur la différence entre superdéterminisme et acausalité . . . 38
2.3 Interprétations alternatives et analogues . . . 40
2.3.1 La mécanique bohmienne . . . 40
2.3.2 Quelques analogies hydrodynamiques . . . 43

II Modèles mécaniques de systèmes et phénomènes quantiques 45

3 Modèle mécanique de la dualité onde-particule 47
3.1 Description du système 47
3.1.1 Obtention des équations du mouvement 48
3.1.2 Discussion 50
3.2 Résolution des équations 50
3.3 Le régime de la transparence comme dualité onde-particule 54
3.3.1 La génération et l'évolution du champ 54
3.3.2 La solution tachyonique symétrique 57

4 Modèle classique et relativiste d'un atome 61
4.1 La condition de périodicité 62
4.2 L'atome 64
4.2.1 Action du système 64
4.2.2 Équations du mouvement complètes 66
4.3 Solutions du système en transparence 67
4.3.1 La dynamique corpusculaire autour du noyau 70
4.3.2 Les solutions du champ en trois dimensions 73

5 Champ et particule plongés dans un champ magnétique 81
5.1 L'effet Zeeman 82
5.1.1 La dynamique de la particule 82
5.1.2 Le théorème de Larmor 83
5.1.3 Les solutions approchées pour le champ 87
5.2 L'effet Landau 88
5.2.1 Le mouvement de la particule 88
5.2.2 L'expression du champ scalaire massif 89

III Extensions et interprétations 93

6 Dualité onde-particule basée sur l'acausalité 95
6.1 Une résolution acausale de l'équation d'onde 95
6.1.1 Fonctions de Green pour l'équation d'onde : approche intuitive . . 95
6.1.2 Champ créé par une source harmonique 100
6.2 Résolution générale par les propagateurs avancé et retardé 101
6.2.1 Développement des fonctions de Green sur une base générale de modes spatiaux 102
6.2.2 Retour sur la particule au repos 104
6.3 Modèle atomique acausal 104
6.3.1 Particule en mouvement uniforme sur un cercle 104
6.3.2 Mouvement dans un potentiel central et propagateurs de Coulomb 107
6.3.3 Le champ acausal créé par une source ponctuelle sur une orbite . . 109

7 L'horloge interne et l'onde pilote en cinq dimensions 115
7.1 Éléments introductifs 115
7.1.1 Reformulation géométrique du modèle de dualité onde-particule . 116
7.1.2 Remarques sur la nature de la cinquième coordonnée : l'importance de la correspondance action-phase dans la théorie quantique 119
7.1.3 La théorie de Kaluza-Klein 122

7.2 Équations du mouvement en géométrie à cinq dimensions 124

Annexes **129**

A Équations d'Euler-Lagrange et principe de moindre action **129**
A.1 Lagrangien ponctuel 130
A.2 Densité lagrangienne 131
A.3 Mécanique lagrangienne covariante 131

B Simulation numérique du système corde-masselotte **133**
B.1 Structure de la simulation 133
B.2 Spécificités et fonctionnement du programme 135

Conclusion **137**

Bibliographie **141**

Table des figures

1.1 Intensité lumineuse du corps noir à différentes températures 4
1.2 Intensité lumineuse du corps noir selon différentes lois 7
1.3 Ellipses d'intégration sous l'hypothèse de Planck 9
1.4 Trajectoires du modèle de Bohr-Sommerfeld pour l'hydrogène 12
1.5 Référentiel de Sommerfeld 14
1.6 Structure fine des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène 15

2.1 Illustration de l'intégrale de chemin 30
2.2 Schéma idéalisé des expériences d'Alain Aspect 32
2.3 Cône de lumière et découpage de l'espace-temps 36
2.4 Illustration des transformations de Lorentz 37
2.5 Boucle temporelle élémentaire 38
2.6 Expérience des doubles fentes en mécanique bohmienne 42
2.7 Modèle hydrodynamique de dualité onde-particule 44

3.1 Schéma du modèle 1D corde-masselotte 48
3.2 Le régime de transparence pour un bradyon sur une corde vibrante 56
3.3 Le régime de transparence pour un tachyon sur une corde vibrante 58

4.1 Modèle atomique de de Broglie 63
4.2 Représentation schématique du champ électronique dans l'atome 69
4.3 Carte du champ dans le plan x–y pour $n = 1$ 75
4.4 Carte du champ dans le plan x–y pour $n = 2$ 76
4.5 Carte du champ dans le plan x–y pour $n = 3$ 77
4.6 Carte du champ dans le plan x–z pour $n = 1$ 77
4.7 Représentation 3D du champ pour $n = 1$ 78

5.1 Changement de référentiel du théorème de Larmor 86

6.1 Choix de contours pour l'intégration de la fonction de Green 98
6.2 Réflexion d'un propagateur sur un potentiel 108
6.3 Champ acausal pour un mouvement circulaire uniforme avec $\alpha = \frac{1}{10}$ . . . 110
6.4 Champ acausal pour un mouvement circulaire uniforme avec $\alpha = \frac{9}{10}$ . . . 111

7.1 Représentation de la cinquième dimension circulaire 116
7.2 Modes d'oscillation du rayon de la cinquième dimension 119

A.1 Variation de l'action autour d'une trajectoire physique 130

Conventions et notations

Constantes fondamentales et systèmes d'unités

Les cinq constantes fondamentales

Nom	Symbole	Valeur USI
Vitesse de la lumière	c	$2.998 \times 10^{+08}\ m \cdot s^{-1}$
Constante de Planck réduite	$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
Contante gravitationnelle	G	$6.674 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Constante de Boltzman	k_B	$1.381 \times 10^{-23}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Constante de Coulomb	K	$8.988 \times 10^{+09}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot C^{-2}$

sont fixées à une valeur unité dans notre système d'unités naturelles.

Notation covariante et somme d'Einstein

Les indices grecs $\alpha, \beta \ldots$ varient de 0 à 3 et représentent l'espace-temps à quatre dimensions, tandis que les indices latins minuscules $a, b \ldots$ seront utilisés pour le sous-espace à trois dimensions et varient donc de 1 à 3 : $(x^0, x^i) \equiv (t, \vec{\boldsymbol{x}})$. Enfin, des indices latins en capitales minuscules A, B ... seront mentionnés pour introduire une cinquième dimension, et varieront alors de 0 à 4.

Nous nous placerons systématiquement dans une métrique de signature (+ - - -), avec un tenseur métrique de Minkowski

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein de l'École Doctorale de Physique de l'Université Grenoble Alpes ainsi que de l'Institut Néel. Je souhaite donc, en premier lieu, remercier les structures et personnes qui m'ont permis de le mener à bien. Parmi eux, le directeur de cette thèse, Aurélien Drezet, mérite une reconnaissance toute particulière. Il m'a en effet magistralement encadré et accompagné tout au long de cette aventure ; les très nombreuses discussions que nous avons menées ont, sans le moindre doute, eu un impact immense et indélébile sur ma vision de la science et de la recherche dans son ensemble. Je souhaite donc le remercier de m'avoir fait évoluer, tant scientifiquement qu'humainement.

Une thèse est, pour moi, un travail certes scientifique mais aussi extrêmement personnel. Elle constitue une occasion unique de forger sa pensée scientifique et philosophique, par une démarche de recherche mais aussi par de nombreux échanges dépassant largement le cadre de la science. Pour cette raison, je remercie également tous ceux avec qui j'ai pu échanger, sur les sujets qui seront présentés ici ou sur d'autres éléments qui en sont très éloignés, et qui m'ont suivi de près ou de loin pendant ces trois années. Je ne pourrai pas faire, ici, une liste exhaustive de ces personnes, et me contenterai donc de ces mots : merci à tous !

On oublie facilement que ce travail, comme n'importe quelle recherche, aurait été impossible sans la multitude de scientifiques qui nous ont précédés. Qu'ils soient aujourd'hui célèbres ou non, ces noms de l'histoire des sciences constituent, pour moi, une source intarissable d'inspiration. Certains d'entre eux apparaîtront à de multiples reprises tout au long de cette thèse, ce qui témoignera, une fois de plus, de l'influence qu'ils ont eu sur mon travail et ma pensée. Je dois remercier trois d'entre eux en particulier : Albert Einstein, Louis de Broglie et Richard Feynman. J'ai eu un plaisir immense à lire leurs travaux, découvrir et comprendre leurs idées, m'émerveiller de les retrouver dans des détails insoupçonnés de l'histoire de leurs disciplines. Mais c'est, une fois de plus, autant leurs qualités scientifiques qu'humaines qui m'ont profondément marqué. Je souhaite que chacun puisse, à son niveau, faire l'expérience de rencontrer ces grand esprits, et j'espère moi-même avoir de nombreuses autres occasions de les retrouver.

Introduction

Nous sommes à la fin des années 1920 ; Louis de Broglie a présenté, seulement quelques années plus tôt, sa très célèbre thèse intitulée *Recherches sur la théorie des quanta*. Dans le cadre de cette dernière, il a introduit une notion tout à fait nouvelle en physique, déjà pressentie, entre autres, par Albert Einstein et Max Planck, la dualité onde-particule. Cette spécificité des objets microscopiques, comme les photons et les électrons, peut être utilisée pour expliquer certains comportements nouveaux ou inexpliqués, auxquels la mécanique classique n'est pas capable de donner du sens. Louis de Broglie ne s'arrête pas ici, cependant, et amorce le développement d'un tout nouveau formalisme pour décrire le monde de l'infiniment petit, la mécanique ondulatoire. Cette dernière est bien moins connue que sa « relation du quantum » pour laquelle il obtiendra, en 1929, le prix Nobel de physique ; elle sera, au fil des mois et années, raffinée et étendue, pour culminer en l'élaboration d'un programme de recherche, qu'il nommera théorie de la double solution. Cette approche, fortement héritée des méthodes et philosophies classiques et mécanistes, jusqu'ici majoritaires en physique, vise à redonner une explication entièrement déterministe des phénomènes physiques, et à en déduire les dynamiques étranges des nouvelles particules microscopiques. Malheureusement, elle sera délaissée par la communauté et, pendant quelques décennies, par Louis de Broglie lui-même, en faveur d'un autre formalisme, la mécanique quantique, et de la philosophie associée, que l'on connaît sous l'appellation « École de Copenhague ». Cet abandon fait suite, entre autres, à quelques difficultés formelles dans le traitement des équations et de leurs solutions, mais aussi à une dynamique favorisant les idées d'un groupe majoritaire de physiciens centré autour de cette école de pensée, au détriment d'autres comme Louis de Broglie, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, et de leurs idées.

L'intérêt concernant les idées fondatrices de la dualité onde-particule et de la double solution ressurgit, néanmoins, dans la seconde moitié du XXe siècle puis, plus récemment, au début du XXIe. On voit d'abord apparaître une nouvelle théorie, créée en 1952 par David Bohm, qui permet, si l'on accepte d'introduire des interactions instantanées entre deux objets distants, de reproduire exactement les résultats de la mécanique quantique, *via* un mécanisme de guidage des particules par une onde pilote. Dans le même temps, Louis de Broglie reprend ses travaux de la fin des années 1920, et tente à nouveau de construire sa théorie rêvée de la double solution. Tous ces efforts seront, une nouvelle fois, grandement ralentis, lorsqu'en 1962, John Bell publie un théorème qui laisse entrevoir une possibilité de discriminer expérimentalement la mécanique quantique des théories alternatives, par une violation ou non d'inégalités logiques et mathématiques. La confirmation de la violation de ces inégalités par Alain Aspect au début des années 1980, nous force, une nouvelle fois, à reconsidérer très sérieusement nos approches philosophiques et nos interprétations de la physique microscopique. La situation est, cependant, bien plus complexe qu'il n'y paraît : si le théorème de Bell permet, en effet, de fortement contraindre les possibilités que nous avons d'interpréter les phénomènes quantiques, il n'enterre par pour autant toute plausibilité d'avoir, un jour, une théorie alternative. Un nouveau sursaut d'intérêt apparaît ainsi, par un tout autre chemin, celui des systèmes hydrodynamiques analogues. Yves Couder et

son équipe découvrent par hasard, en 2005, que des systèmes, pourtant macroscopiques, peuvent présenter des propriétés tout à fait analogues aux particules quantiques. De petites gouttes, rebondissant à la surface d'un bain mis en vibration, présentent des dynamiques remarquables que l'on pensait alors réservées aux objets microscopiques. Ces expériences enclanchent une nouvelle vague de recherches sur la dualité onde-particule, les théories d'ondes pilotes et, de manière générale, les théories de Louis de Broglie et David Bohm. C'est dans ce contexte que le présent travail voit le jour, avec pour objectif de développer un nouveau système analogue qui, idéalement, serait plus proche de la description théorique imaginée vers 1925 par Louis de Broglie. Pour ce faire, nous faisons le choix, ici, de repartir plus rigoureusement des idées originelles de Louis de Broglie, considérant qu'il n'était peut-être pas judicieux de les abandonner si tôt. Cette volonté nous amènera à reconsidérer et étendre notre approche à plusieurs reprises et, finalement, nous verrons qu'il est possible d'imaginer de nombreuses voies pour une description classique et mécanique des phénomènes quantiques.

Après avoir présenté, dans les deux premiers chapitres, l'histoire et le contexte des idées évoquées ici, nous discuterons de divers modèles qui constituent la seconde partie de ce manuscrit. Le chapitre 3 propose un analogue mécanique unidimensionnel de la dualité onde-particule, basé sur un système couplé d'une corde vibrante et d'une masselotte [33]. Nous y découvrirons une dynamique très particulière, dans un régime que l'on nommera « transparence », pour lequel les mouvements d'une onde et d'une particule sont intimement reliés, de sorte qu'il devient impossible de les discerner l'un de l'autre. On montre ainsi, qu'il est possible d'avoir une particule en mouvement uniforme, accompagnée d'une onde que l'on peut séparer en deux composantes, l'une se déplaçant à la vitesse de la particule et l'autre oscillant en phase avec elle. Nous étendrons cette approche à trois dimensions d'espace, dans le chapitre 4, en y ajoutant par ailleurs des forces électromagnétiques, le tout dans un formalisme relativiste entièrement covariant [57]. Ceci forme, par conséquent, un premier modèle d'atome, qui reproduit les premières approches quantiques de Niels Bohr et Arnold Sommerfeld. Quelques résultats intéressants seront discutés dans le chapitre 5, montrant comment obtenir une quantification azimutale de l'énergie d'un atome en présence d'un champ magnétique uniforme [58], nommée effet Zeeman. Dans la troisième et dernière partie de ce manuscrit, nous explorerons enfin quelques possibilités de reformulation de nos modèles, basées respectivement sur l'utilisation d'ondes symétriques en temps pour le chapitre 6, et l'introduction d'une cinquième dimension pour le chapitre 7. En plus de fournir un langage naturel pour la dualité onde-particule, ces deux derniers points ont de nombreuses implications dans d'autres champs de la physique et de la philosophie, notamment pour les questions en lien avec les inégalités de Bell ou l'unification des champs classiques.

Première partie

Des anciennes aux nouvelles théories quantiques

Chapitre 1

La théorie des quanta

Introduction

Le vingtième siècle fut un tournant majeur dans l'histoire de la physique, d'un côté du fait du nombre monumental de découvertes réalisées en un temps record, et de l'autre par les diverses révolutions conceptuelles que ces découvertes ont engendrées. Bien plus que la science seule, la physique de cette époque a affecté la pensée humaine dans son ensemble sur différents axes, parmi les experts de ces domaines, les philosophes, mais aussi tout le reste de la société. Nous découvrons par exemple progressivement le monde microscopique, descendant rapidement en taille jusqu'à l'échelle des atomes et plus bas encore, ainsi que le monde macroscopique dont les dimensions vertigineuses nous épatent encore ; mais également la relativité, la nature dynamique de l'espace-temps, l'univers en tant qu'objet, et bien entendu la mécanique quantique et toute l'apparente étrangeté qui l'accompagne. C'est ce dernier sujet qui nous intéresse tout particulièrement dans ce manuscrit. Nous verrons ainsi comment s'est construite la première révolution quantique de 1900 jusque dans les années 1920, et comment elle a permis d'apporter des réponses et d'amener de grandes découvertes sur la physique des objets microscopiques et la structure de la matière. L'ensemble de ces découvertes et théories du premier quart du vingtième siècle est nommée théorie des quanta, et a par la suite évolué à partir de la fin des années 1920 jusqu'à aujourd'hui vers le formalisme moderne de la mécanique quantique.

1.1 La physique en 1900 et le problème du corps noir

Bien que le développement de la théorie des quanta trouve plus d'une origine dans la physique du début du XXe siècle, nous nous concentrerons ici sur l'un seulement des phénomènes inexpliqués de l'époque, à savoir le rayonnement du corps noir, et ce pour deux raisons. D'abord, on peut bien entendu l'identifier comme l'un des précurseurs de la théorie quantique, c'est d'ailleurs lui qui a amené à introduire l'hypothèse de quantification et il est à ce titre l'un de ses piliers, tant au niveau conceptuel qu'historique. D'autre part, c'est probablement le phénomène qui illustre et identifie le mieux la notion qui sera au centre du travail présenté dans ce manuscrit, la dualité onde-particule, et ce peut-être plus encore que l'expérience des fentes de Young qui est souvent enseignée aujourd'hui comme le point de départ de la mécanique quantique. Il est en effet remarquable que la génèse de la théorie quantique se trouve dans l'étude de phénomènes thermodynamiques, c'est-à-dire de grandeurs physiques macroscopiques, plutôt que dans la recherche réelle d'objets microscopiques qui sont pourtant le cœur du sujet de cette théorie. Cela n'est pas nécessairement étonnant, et traduit le fait que les propriétés microscopiques ont un effet mesurable au sein des comportements collectifs.

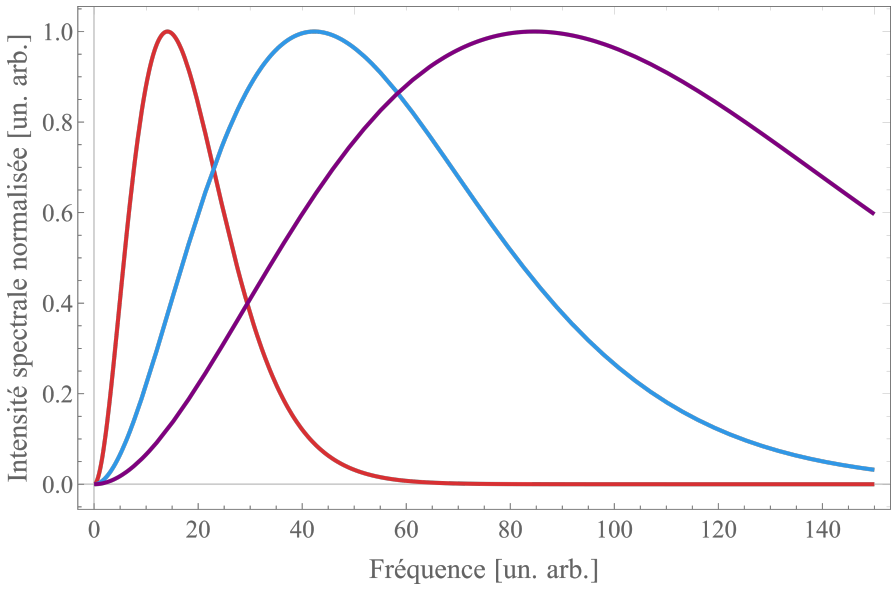


FIGURE 1.1 – Courbes calculées de l'intensité lumineuse d'un corps noir normalisée par rapport au maximum d'émission en fonction de la fréquence à différentes températures. La température augmente à mesure que le maximum d'émission se déplace vers les fréquences élevées, la position de ce dernier étant donné par la loi de déplacement de Wien $\omega_{\text{max.}} = T/(2\pi\sigma_{\text{W}})$ avec σ_{W} la constante de Wien.

L'une des questions qui a troublé les physiciens au cours du XIXe siècle a été de savoir quelle est la couleur de la lumière émise par un objet chauffé à une température donnée. Cette question, au delà de présenter un intérêt scientifique pour la compréhension du lien entre la matière et les phénomènes de rayonnement, était évidemment fortement motivée par des intérêts industriels. C'était tout particulièrement le cas en Allemagne où l'industrialisation massive avant le début de la Grande Guerre de 1914 a poussé de très nombreux scientifiques à étudier des sujets en lien avec les grands défis industriels, et explique par ailleurs pourquoi, comme nous nous en rendrons compte par la suite, beaucoup des scientifiques travaillant sur le sujet étaient d'origine germanique. La question qui a préoccupé ces savants était de mieux comprendre la nature et les spécificités du rayonnement thermique, comme par exemple celui des ampoules à incandescence. En effet, nous savons qu'un tel objet émettra d'abord de la lumière dans le domaine infrarouge, puis rouge si la température augmente, et enfin blanche si l'on poursuit le processus. En réalité bien sûr il ne s'agit pas d'une seule couleur qui est émise mais de tout un spectre qui est illustré sur la figure 1.1, comme en témoignerait également sa séparation par un prisme. On l'observe et l'interprète par sa forme et en particulier par la présence d'un maximum d'émission dans ce spectre comme favorisant une fréquence en particulier. Plus précisément, nous ne nous intéressons qu'à la lumière émise par l'objet à cause de sa température, et pas à toute autre source existante. Le système généralement considéré est ainsi une cavité entièrement fermée, isolée optiquement de l'extérieur et maintenue à une température T, au sein de laquelle nous trouverons à l'équilibre thermique un rayonnement dont nous savons grâce à la loi du rayonnement de Kirchhoff qu'il est indépendant de toute propriété de la cavité et ne dépend que de la température T. Différentes approches que nous développerons ont été considérées, mais il s'est avéré qu'aucune d'elles ne pouvait complètement accomoder les observations expérimentales. Nous verrons que ces approches ont, de plus, mis en évidence un conflit conceptuel entre les théories de l'époque, l'électromagnétisme d'un côté et les théories atomique et moléculaire de l'autre.

1.1.1 La loi de Rayleigh-Jeans

La première approche que nous allons considérer pour résoudre ce problème consiste à faire l'inventaire des rayonnements électromagnétiques présents au sein d'une boîte cubique de dimension L [1]. Prenons pour cela un champ électrique

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{E}}_0 e^{i(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}-\omega t)}, \tag{1.1}$$

solution d'une équation d'onde

$$\partial_t^2 \vec{\boldsymbol{E}}(t,\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \vec{\boldsymbol{E}}(t,\vec{\boldsymbol{x}}). \tag{1.2}$$

La condition que le champ doit s'annuler sur les parois de la boîte, c'est-à-dire en $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = L$, $y = L$ et $z = L$ impose une restriction sur les valeurs possibles du vecteur d'onde

$$\vec{\boldsymbol{k}} = \frac{\pi}{L}(n_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + n_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + n_z\hat{\boldsymbol{e}}_z), \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Cela nous donne, après calcul de l'équation d'onde pour cette solution spécifique, la relation de quantification pour les modes de fréquence ω

$$\omega^2 = k^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right). \tag{1.4}$$

L'écart fréquentiel entre deux modes est simplement donné par

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L}, \tag{1.5}$$

ce qui signifie qu'il y a un mode de vibration par unité de « volume fréquentiel »

$$\Delta\Omega = (\Delta\omega)^3 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3. \tag{1.6}$$

La densité fréquentielle de modes, notée $N(\omega)$, est reliée au nombre de modes $N(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$ qui s'obtient simplement en prenant le rapport du « volume » occupé par cet intervalle d'épaisseur $\mathrm{d}\omega$ par le volume d'un mode $\Delta\Omega$. Toutes les fréquences $\omega_{x,y,z}$ étant strictement positives, cela correspond à un octet seulement d'un anneau d'épaisseur $\mathrm{d}\omega$ entourant la sphère de rayon ω. Enfin, il nous faut tenir compte du fait qu'une onde électromagnétique peut présenter deux types de polarisations – par exemple verticale ou horizontale – pour chaque fréquence, c'est-à-dire qu'il faut compter chaque mode deux fois. On obtient ainsi au final

$$N(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\left(\frac{1}{8}4\pi\omega^2\mathrm{d}\omega\right)\frac{1}{\Delta\Omega} = \frac{L^3}{\pi^2}\omega^2\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{1.7}$$

Ce terme sera commun à toutes les approches, puisqu'il apparaîtra dès lors que l'on considère un rayonnement. Si l'on souhaite maintenant calculer une quantité, par exemple la densité spectrale d'énergie, il nous faut une hypothèse sur la répartition de cette énergie parmi les différentes fréquences, comme nous allons le voir.

Si l'on suppose vraie la loi d'équipartition de l'énergie, à savoir que chaque mode de vibration reçoit une quantité d'énergie égale à la température T, on peut déduire l'expression

1. Nous travaillons ici et pour le reste de ce chapitre en unités naturelles de Planck, on a donc $c = \hbar = k_B = 1$

de la distribution spectrale de la densité d'énergie – par unité de volume et par stéradian – qui est

$$B(\omega, T)\,\mathrm{d}\omega = \frac{T}{4\pi^3}\omega^2\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{1.8}$$

Ceci définit la loi de Rayleigh-Jeans introduite d'abord par Lord John W. Rayleigh en 1900 pour la dépendance en ω^2 [76] puis reprise en 1905 avec James Jeans pour spécifier les constantes exactes de la loi [77]. Cette dernière est représentée sur la Figure 1.2, et souvent écrite en faisant usage de la longueur d'onde au lieu de la fréquence ou plusation [2], il vient facilement

$$B(\lambda, T) = \frac{4T}{\lambda^4}. \tag{1.9}$$

On constate en particulier que bien que la loi s'accorde avec les observations aux faibles fréquences, la densité d'énergie pour les hautes fréquences ainsi que l'énergie totale contenue dans la boîte divergent toutes deux. Ce problème d'infini, ainsi que l'incompatibilité avec les observations expérimentales réalisées à la fin du XIXe siècle, porte le nom de « catastrophe ultraviolette », et était un signal fort de l'impossibilité d'avoir une explication ondulatoire du rayonnement de corps noir.

1.1.2 La loi de Wien

Dès 1896, une première approche pour calculer la distribution spectrale d'énergie pour un corps noir a été présentée par Wilhelm Wien [95]. Au lieu de considérer le rayonnement présent dans une boîte, Wien propose de s'intéresser à la source du rayonnement, c'est-à-dire à un gaz chauffé, à condition de ne pas tenir compte des émissions dues à d'autres phénomènes que thermiques (par exemple électriques ou chimiques). Cette approche se base bien entendu sur la loi de Kirchhoff pour le rayonnement thermique, stipulant que la distribution fréquentielle de ce dernier ne dépend pas de la nature de l'espèce émettrice – ni de sa phase solide ou gazeuse – mais uniquement de la température [61].

Considérons ainsi un gaz, composé d'une seule espèce moléculaire monoatomique pour simplifier, ou dont un seul des constituants intervient dans l'émission du rayonnement thermique. Ce gaz doit satisfaire à la loi de Maxwell sur la distribution des vitesses, c'est-à-dire que d'une part la température est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ce gaz

$$T \propto \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle v^2 \right\rangle, \tag{1.10}$$

et d'autre part le nombre de molécules dont la vitesse est comprise entre v et $v + \mathrm{d}v$ est donné par

$$N(v)\,\mathrm{d}v \propto v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}\,\mathrm{d}v\,. \tag{1.11}$$

La constante α est déduite de la relation

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}\alpha^2, \tag{1.12}$$

dont on extrait ainsi également la relation de proportionnalité

$$T \propto \alpha^2. \tag{1.13}$$

Wien fait alors l'hypothèse que chaque molécule émet des vibrations lumineuses d'une fréquence qui ne dépend que de sa vitesse ou, à l'inverse, que la vitesse v d'une molécule donnée est déterminée par une fonction de la fréquence du rayonnement émis. Ainsi, en

2. On écrit en particulier $B(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda = B(\omega, T)\,\mathrm{d}\omega$.

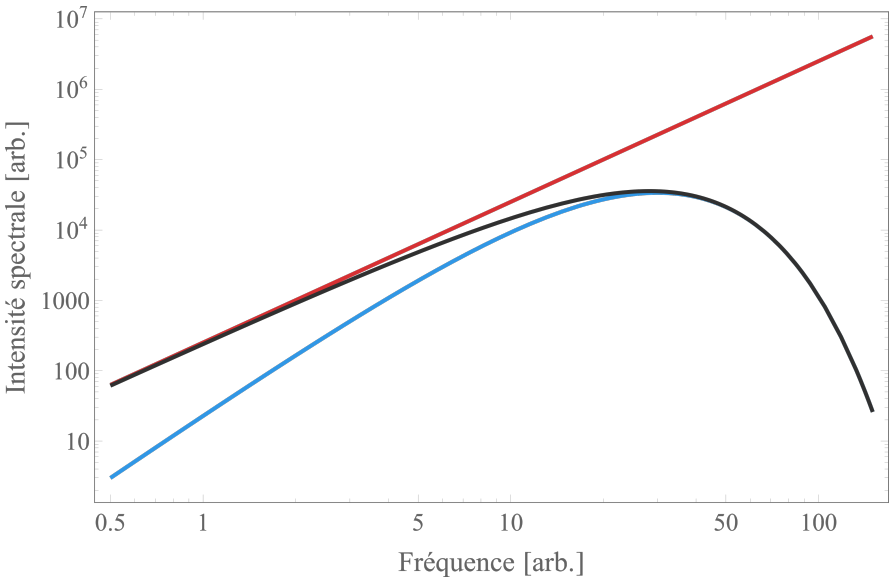


FIGURE 1.2 – Distribution calculée de l'intensité spectrale du corps noir par la loi de Wien en bleu, la loi de Rayleigh-Jeans en rouge, et la loi de Planck en noir.

utilisant toutes ces relations et en particulier la formule (1.11) pour la distribution des vitesses (et donc des fréquences), l'énergie associée au rayonnement de fréquence comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$ s'écrit

$$f(\omega)e^{-\frac{f(\omega)}{T}} \tag{1.14}$$

où f est une fonction à déterminer.

Il existe par ailleurs une autre loi, également découverte par Wien quelques années auparavant [94], énonçant d'une part que la position ω_{max} du maximum d'émission est proportionnelle à T, et d'autre part que la distribution spectrale d'énergie doit s'écrire

$$B(\omega, T) \propto \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right). \tag{1.15}$$

En combinant cette relation avec la distribution spectrale de modes (1.7) déjà obtenue dans la section précédente ainsi que l'énergie associée à chacun des modes (1.14), on déduit très rapidement que $f(\omega) = \alpha\omega$, et il vient

$$B(\omega, T) = \alpha \frac{\omega^3}{4\pi^3} e^{-\alpha\frac{\omega}{T}}. \tag{1.16}$$

La constante α n'est à ce stade pas connue, mais on peut montrer qu'elle est égale à 1 dans notre système d'unités, en accord avec la distribution de Planck qui sera présentée dans la prochaine section.

La distribution spectrale par Wien est également incompatible avec l'expérience, cette fois à de faibles fréquences.

1.2 Le quantum d'énergie et la loi de Planck

C'est en 1900 que Max PLANCK résout enfin le problème du rayonnement du corps noir. Il parvient à unifier les deux approches contradictoires de Rayleigh-Jeans et Wien en obtenant une formule pour la distribution spectrale de l'énergie qui reproduit correctement les deux limites haute température/basse fréquence (Rayleigh-Jeans) et basse température/haute fréquence (Wien) [72].

Planck propose d'utiliser une nouvelle expression pour la fonction recherchée,

$$B(\omega, T) = \frac{\omega^3}{4\pi^3} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}, \tag{1.17}$$

car il observe que cette fonction respecte les deux limites décrites plus haut :

$$\lim_{\omega/T \to 0} B(\omega, T) = \frac{T}{4\pi^3} \omega^2, \tag{1.18}$$

$$\lim_{\omega/T \to \infty} B(\omega, T) = \frac{\omega^3}{4\pi^3} e^{-\frac{\omega}{T}}. \tag{1.19}$$

Obtenir une telle fonction n'est cependant pas suffisant, et Planck s'attaque dès lors à l'expliquer, lui donner une raison physique, dans ce qu'il appellera plus tard un « acte de désespoir ». La solution, qui est aujourd'hui très bien connue, est de considérer que l'énergie, par analogie avec la matière, est constituée d'éléments indivisibles : des atomes d'énergie ou *quanta* [73]. Dans le cas de la lumière, on peut considérer que les ondes sont émises par les vibrations de la matière, c'est-à-dire d'une collection de systèmes oscillants dont l'énergie s'écrit

$$E = \alpha p^2 + \beta q^2 = n\varepsilon, \tag{1.20}$$

avec ε le quantum d'énergie, et n un entier naturel limitant les valeurs accessibles pour E. La statistique de Boltzmann fait dès lors usage de cette nouvelle expression, par exemple pour calculer l'énergie moyenne

$$\langle E \rangle = \frac{\iint n\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{T}} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q}{\iint e^{-\frac{n\varepsilon}{T}} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{T}}}. \tag{1.21}$$

En effet les intégrales, initialement réalisées sur la totalité de l'espace des phases, doivent désormais se limiter à l'ensemble des ellipses d'énergie constante représentées sur la Figure 1.3 associées aux seules énergies autorisées, c'est-à-dire que l'on réalise désormais une somme sur n. Ces sommes peuvent facilement être résolues, et on obtient

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1} = T \times f\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) \tag{1.22}$$

avec

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}. \tag{1.23}$$

Par comparaison avec les différentes limites mentionnées précédemment, on voit que le quantum d'énergie est relié à la fréquence du rayonnement associé :

$$\varepsilon = \omega. \tag{1.24}$$

Cette fonction f joue le rôle d'un coefficient qui modifie la relation d'équipartition de l'énergie utilisée précedemment, où chaque mode de vibration ne contribue plus une énergie T mais une quantité qui dépend, en plus de sa température, de sa fréquence. Ce simple changement $T \to Tf(\omega/T)$ modifie l'équation (1.8)

$$B(\omega, T) = \frac{\omega^3}{4\pi^3} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}, \tag{1.25}$$

qui est bien la forme recherchée.

Ce résultat nous confirme que, bien que le rayonnement contenu dans la boîte soit toujours considéré comme une onde électromagnétique – comme nous l'avons fait pour

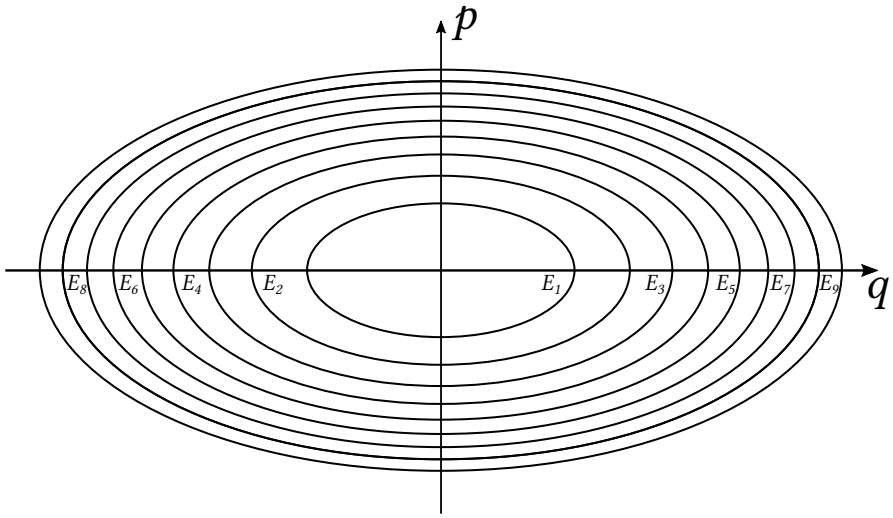


FIGURE 1.3 – Chemins d'intégration sous l'hypothèse de Planck dans l'espace des phases (q, p). Chaque ellipse a une énergie constante $E_n = n\varepsilon = n\omega$.

démontrer la loi de Rayleigh-Jeans –, chaque onde d'énergie $E = n\omega$ doit cependant être vue comme une collection de n quanta d'énergie ω, c'est-à-dire véritablement d'atomes énergétiques. La loi de Planck, représentée sur la Figure 1.2 et comparée aux lois de Rayleigh et Wien, nous montre bien que le rayonnement réel est à mi-chemin entre deux visions. Il ne s'agit pas non plus, comme on peut souvent l'entendre en particulier dans le cas des fentes de Young, d'un « choix » contextuel de la lumière de se comporter comme une onde ou une particule. Il s'agit bien là d'un nouveau type d'objet qui, lorsque sa fréquence devient très grande devant sa température, agit comme un gaz moléculaire ; et à l'inverse, si la fréquence devient très faible devant la température, comme un continuum de vibrations propres. Mais cet objet n'est jamais uniquement l'un ou l'autre, ce ne sont que des cas limites idéalisés à l'infini.

Quelques années plus tard en 1905, Albert EINSTEIN apporte quelques précisions ainsi que sa propre interprétation à la notion de quantum d'énergie [36]. En effet Planck lui-même n'a, à l'origine, pas beaucoup insisté sur la pertinence physique de son hypothèse de quantification, se concentrant plutôt sur la validité mathématique et l'accord expérimental de sa fonction. Néanmoins, il semble important de considérer les implications d'une telle hypothèse. Si toute l'énergie d'une onde est contenue dans un paquet indivisible, cet objet doit nécessairement être localisé spatialement en une particule, le photon. Cela entre évidemment en contradiction avec l'électromagnétisme ondulatoire et en particulier des disciplines comme l'optique, mais Einstein propose que ces dernières ne sont qu'une observation statistique d'un phénomène plus granulaire. Il éclaircit plus encore ces questions dans un article en 1909 [37], en regardant la variance des fluctuations de la distribution spectrale du rayonnement. Cette dernière s'écrit comme la somme de deux termes

$$(\Delta B(\omega, T))^2 = \left\langle B(\omega, T)^2 \right\rangle - \left\langle B(\omega, T) \right\rangle^2 = \omega B(\omega, T) + \frac{\pi^2}{\omega^2} B(\omega, T)^2. \tag{1.26}$$

Le second terme peut être obtenu par une approche purement ondulatoire, l'autre en considérant une distribution poissonienne de corpuscules d'énergie ω, chacun des deux termes dominant l'autre dans les régimes à très haute ou très basse énergie. Nous ne détaillerons pas plus les calculs, mais ce merveilleux résultat montre bien, encore une fois, que ces deux comportements coexistent au sein de la loi du rayonnement de Planck, et donc du rayonnement du corps noir. On comprendra bien plus tard, notamment avec de Broglie, l'importance de

cette dualité entre onde et particule.

Un dernier point particulièrement intéressant peut encore être extrait de cette loi du corps noir, si l'on regarde la limite basse énergie de l'énergie moyenne à un ordre supérieur :

$$\frac{\omega}{e^{\frac{\omega}{T}}-1} \approx \frac{\omega}{\frac{\omega}{T}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{T^2}} \approx T\Big(1-\frac{\omega}{2T}\Big) = T - \frac{1}{2}\omega. \tag{1.27}$$

En d'autres termes, si l'on remplace l'énergie E_n d'un mode par la nouvelle expression

$$E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{1.28}$$

de sorte que l'énergie moyenne calculée selon (1.21) devient

$$\langle E\rangle = \frac{\omega}{e^{\frac{\omega}{T}}-1} + \frac{\omega}{2}, \tag{1.29}$$

et plus encore la distribution spectrale d'énergie est modifiée par l'adjonction du nouveau terme comme suit :

$$B(\omega,T) = \frac{\omega^3}{4\pi^3}\left(\frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}}-1}+\frac{1}{2}\right), \tag{1.30}$$

on obtient un meilleur accord avec la loi de Rayleigh-Jeans et l'équipartition à basse énergie. Cette formule correspond à la seconde théorie de Planck développée à partir de 1911 [74], dont la dérivation originelle est un peu plus rigoureuse que l'argument présenté ici.

Ce nouveau terme, caractérisé par sa nature demi-entière, est connu sous le nom d'énergie de point zéro, et sera obtenu à de multiples reprises, d'abord dans le cadre de la résolution du problème de l'oscillateur harmonique quantique, puis plus généralement en théorie quantique des champs ; il est aujourd'hui l'un des éléments les plus cruciaux des théories quantiques, et avait déjà été perçu très tôt par Planck puis avait suscité l'intérêt d'autres scientifiques comme Albert Einstein et Otto Stern [41].

1.3 L'atome de Bohr-Sommerfeld

Nous avons à notre disposition tous les prérequis pour aborder les contributions de Louis de Broglie à la théorie des quanta, mais allons cependant faire un détour historique qui s'avèrera utile à la fois pour mieux comprendre la pertinence des travaux de de Broglie, ainsi que pour les autres questions présentées dans ce manuscrit. Ce détour porte sur les modèles atomiques du début du xxe siècle, et plus précisément sur la recherche d'une explication des raies spectrales des gaz moléculaires ou atomiques.

Suite aux expériences dirigées par Ernest Rutherford prouvant l'existence au sein de la matière d'un objet chargé positivement, de très grande masse et de très petite dimension, puis à la publication en 1911 d'un article interprétant ce résultat à l'aide d'un modèle atomique planétaire (déjà proposé par Joseph Larmor en 1897 [65]), la recherche d'une théorie expliquant la structure de la matière se fait plus vive. Bien qu'extrêmement élégant et simple, le modèle de Rutherford ne fonctionne malheureusement pas car il implique une instabilité des électrons orbitant autour du noyau atomique ; l'instabilité et le rayonnement associé ne sont simplement pas observés. Deux ans plus tard, un nouvel article est publié par Niels Bohr [6] qui parvient, à l'aide d'un nouveau postulat, à résoudre le problème de la stabilité, expliquer les raies spectrales d'émission des atomes, et accélérer grandement la marche vers le développement de la mécanique quantique.

Dans une continuité remarquable avec l'esprit des théories de Planck et Einstein, Bohr réalise qu'il est nécessaire d'abandonner les idées classiques newtoniennes pour traiter le cas de l'atome. Il propose deux hypothèses de départ pour construire sa théorie atomique :

I. l'énergie d'un atome ne peut prendre que des valeurs discrètes E_n pour $n \in \mathbb{N}$.
II. la variation d'énergie d'un atome ne peut se faire qu'entre deux valeurs autorisées de l'énergie, et est accompagnée de l'émission ou l'absorption d'une onde lumineuse dont la fréquence est égale à l'écart entre les énergies considérées.

Sous ces hypothèses, la stabilité de l'atome est assurée sans pour autant être expliquée, puisque l'électron est contraint à se déplacer sur des ellipses orbitales d'énergie constante.

Par ailleurs, il a été vérifié expérimentalement que les lignes spectrales dans le cas de l'atome d'hydrogène correspondent à l'émission ou l'absorption d'un rayonnement dont l'énergie est

$$E = 2\pi R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.31}$$

avec R la constante de Rydberg. Selon les deux hypothèses de Bohr, on voit que les niveaux d'énergie pour l'atome d'hydrogène sont tout simplement

$$E_n = -\frac{2\pi R}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.32}$$

et que le rayonnement coïncide donc avec la transition du niveau n vers le niveau m ou inversement. À l'aide d'autres considérations mécaniques, en particulier sur l'énergie associée à un mouvement keplerien, Bohr montre également que la constante de Rydberg peut être déduite des constantes physiques fondamentales et est donnée par

$$R = \frac{m_e \alpha^2}{4\pi}, \tag{1.33}$$

avec m_e la masse de l'électron et $\alpha = e^2/(4\pi)$ la constante de structure fine. On peut également déduire la valeur du rayon de l'orbite associée à une énergie E_n, c'est-à-dire au niveau indexé n,

$$r_n = \frac{1}{m_e \alpha} n^2. \tag{1.34}$$

Il est intéressant de noter que cette condition de quantification sur l'énergie est tout à fait équivalente à une même condition sur le moment cinétique de l'électron, à savoir

$$L_n = \oint_{\text{orbite}} \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = n. \tag{1.35}$$

La particularité de cette nouvelle condition est qu'elle ne fait plus intervenir aucun des paramètres spécifiques au système considéré, par exemple la masse de l'électron ou la constante de structure fine ; en d'autres termes, dès lors que l'on a un mouvement dans un potentiel central – et peut-être plus généralement encore – appliquer cette condition sur un modèle ou une théorie classique permet d'en obtenir la version quantique microscopique.

C'est justement ce que William Wilson et Arnold Sommerfeld remarquent dans les années qui suivent la publication de l'article de Bohr, et ils proposent indépendamment en 1915 et 1916 une généralisation afin de pouvoir expliquer la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène, révélée en présence d'un champ magnétique [80, 97]. Leur proposition est connue aujourd'hui sous le nom de condition de Wilson-Sommerfeld, et consiste à appliquer cette quantification sur toutes les variables indépendantes q_i et leurs moments conjugués p_i

$$J_i = \oint_{\text{orbite}} p_i \, \mathrm{d}q_i = n_i. \tag{1.36}$$

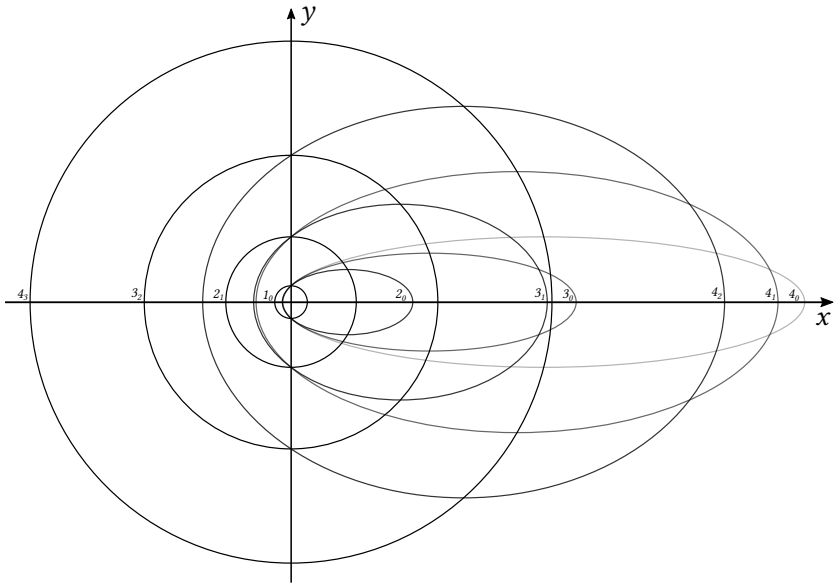


FIGURE 1.4 – Trajectoires elliptiques indexées n_l représentant la structure fine des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sous la condition de quantification de Wilson-Sommerfeld. La direction du grand axe est choisie arbitrairement.

Plus particulièrement dans le cas présent, les coordonnées qui nous intéressent sont le rayon r et l'angle azimutal φ de la trajectoire, et on a donc deux intégrales

$$J_\varphi = \int_0^{2\pi} p_\varphi \, \mathrm{d}\varphi = n_\varphi, \tag{1.37}$$

$$J_r = \oint p_r \, \mathrm{d}r = n_r. \tag{1.38}$$

On montre que les relations (1.31) et (1.32) restent valables en première approximation, avec un nombre quantique n, le nombre quantique principal de l'atome de Bohr, qui vaut

$$n = n_\varphi + n_r. \tag{1.39}$$

L'électron décrit ainsi des ellipses au lieu de cercles (voir Figure 1.4), mais dont l'énergie reste la même pour une même valeur de n, de sorte que l'on n'observe à ce stade aucune différence dans les spectres atomiques. On utilisera plus généralement une notation utilisant un nombre quantique $l = n_\varphi - 1$ variant de 0 à $n - 1$, de sorte que les niveaux d'énergie seront caractérisés par le symbole n_l.

En réalité, il existe des corrections relativistes qui ont été également obtenues par Sommerfeld [81] (pp. 251–256), et qui donnent les niveaux d'énergie associés au couple n, l brisant la dégénérescence sur l :

$$E_{nl} = m_e \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n-(l+1)\left(1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{(l+1)^2}}\right)}}}. \tag{1.40}$$

Pour de faibles valeurs de α, ou de grandes valeurs des nombres quantiques (limite classique), on peut faire des approximations de cette énergie

$$E_{nl} \approx m_e \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{1}{8}\frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{4n}{l+1} - 3\right)\right], \tag{1.41}$$

et l'on retrouve bien la limite non relativiste au deuxième ordre en α de la formule (1.32). Par ailleurs dans le cas particulier des mouvements circulaires $n = l + 1$ la correction relativiste se simplifie grandement :

$$E_{n,n-1} = m_e\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}}. \tag{1.42}$$

En pratique, ces corrections relativistes ont un effet négligeable, et l'on peut considérer en première approximation que tous les niveaux de même n ont la même énergie. Ces relations joueront un grand rôle dans ce travail, et nous les rencontrerons à nouveau dans la suite.

Jusqu'ici nous avons obtenu toutes nos relations sur les caractéristiques du mouvement dans le plan de l'orbite : les mouvements dans un champ de force central sont nécessairement planaires, et il n'existe aucune manière de justifier l'utilisation de plus de deux dimensions pour les décrire. Néanmoins, s'il existe quelque part un axe définissant une direction privilégiée, il devient possible d'étudier, en plus du mouvement dans le plan, l'inclinaison du plan lui-même par rapport à cet axe. C'est particulièrement le cas lorsque l'on applique à l'atome une force externe, par exemple électro- ou magnétostatique. Nous pouvons dès lors introduire une troisième condition de quantification associée à la troisième dimension ou, en coordonnées sphériques, à l'angle zénithal θ. Ainsi, on doit avoir ce qui suit :

$$\oint p_\theta \, \mathrm{d}\theta = n_\theta. \tag{1.43}$$

De manière alternative, on peut introduire un autre nombre quantique $m = n_\psi l/(l + 1)$, que l'on appelle nombre quantique magnétique, associé à l'angle ψ projeté sur le plan équatorial du repère sphérique défini par l'axe z privilégié. Ce nombre est complémentaire de n_θ de la manière suivante :

$$n_\varphi = n_\psi + n_\theta, \tag{1.44}$$

et l'on a géométriquement la relation

$$\cos\alpha = \frac{p_\psi}{p_\varphi} = \frac{m}{l}, \quad -l \leq m \leq l, \tag{1.45}$$

où α est l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à l'axe z. De cette manière, on constate que l'on a également une quantification de l'orientation de l'orbite.

Bien entendu il est très important de signaler que cette quantification magnétique n'a de sens que s'il existe une force externe à symétrie axiale, force qui, d'autre part, ne doit pas être trop intense de sorte à ne pas briser la nature keplerienne du système. La force de choix est une force magnétique due par exemple à un champ magnétostatique uniforme d'intensité B, qui aura pour effet, au premier ordre, de modifier les niveaux d'énergie atomiques en brisant la dégénérescence en m comme suit :

$$E_{nlm} \approx E_{nl} + m\omega_L, \tag{1.46}$$

avec

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m_e} \tag{1.47}$$

la fréquence dite de Larmor que nous démontrerons et étudierons dans la suite de ce document. Ce phénomène porte le nom d'effet Zeeman, et nous l'étudierons plus en détails dans un prochain chapitre. Un résumé de toutes les contributions aux niveaux d'énergie E_{nlm} de l'atome d'hydrogène est présenté sur la Figure 1.6. Notons que cette figure, bien

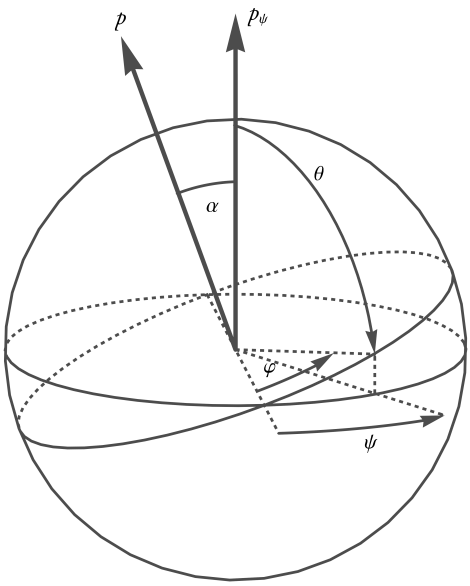


FIGURE 1.5 – Référentiel et angles utilisés pour définir les conditions de quantification de Sommerfeld.

que très proche de la réalité expérimentale, ne fonctionne pas pour certains atomes. Selon l'effet Zeeman normal, chaque niveau d'énergie n_l doit se séparer, sous champ magnétique, en $2l+1$ sous-niveaux, c'est-à-dire un nombre impair. Or il se trouve que dans certains cas, c'est un nombre pair de sous-niveaux que l'on observe, comme si le nombre quantique l était demi-entier – ce phénomène porte le nom d'effet Zeeman anomal. Il faudra attendre 1925 pour que Samuel GOUDSMIT et George UHLENBECK proposent une solution au problème [88]. L'idée, alors, est de considérer qu'en plus du moment cinétique orbital caractérisé par les nombres quantiques habituels, il existe un moment cinétique intrinsèque dit de *spin*, de norme s et de projection m_s qui peut être demi-entier. L'énergie sera alors déterminée par la somme vectorielle des deux moments cinétiques, associée à un nombre quantique j désignant le moment cinétique total. Ce *spin* est historiquement considéré comme une rotation de l'électron sur lui-même, mais il devient rapidement clair que cette représentation est incompatible avec l'idée d'un moment cinétique demi-entier, et l'on arrête alors de chercher à l'expliquer mécaniquement [3].

Pour conclure, le développement de modèles atomiques quantiques, en plus d'avoir apporté une explication théorique aux observations des raies spectrales, a permis à Wilson et Sommerfeld d'introduire en physique une notion essentielle : la quantification de l'action sur un chemin fermé. Cette idée sera cruciale dans les années et décennies qui suivront, et amènera entre autres les théories de de Broglie dont nous discuterons dans la prochaine section, le très fameux principe d'indétermination de Heisenberg ainsi que l'électrodynamique quantique de Feynman, qui seront tous deux abordés au prochain chapitre. Il est intéressant de noter l'importance que prend l'action au fil des années puisqu'elle nous permettra, comme nous allons le voir, de reformuler de manière simple et élégante certains des éléments de la théorie des quanta et, plus tard, de la mécanique quantique.

3. Une représentation naïve est celle d'une sphère solide en rotation. Mais associer un moment cinétique demi-entier à cet objet impliquerait que sa vitesse de rotation serait supérieure à la vitesse de la lumière, c'est pourquoi cette approche a été abandonnée.

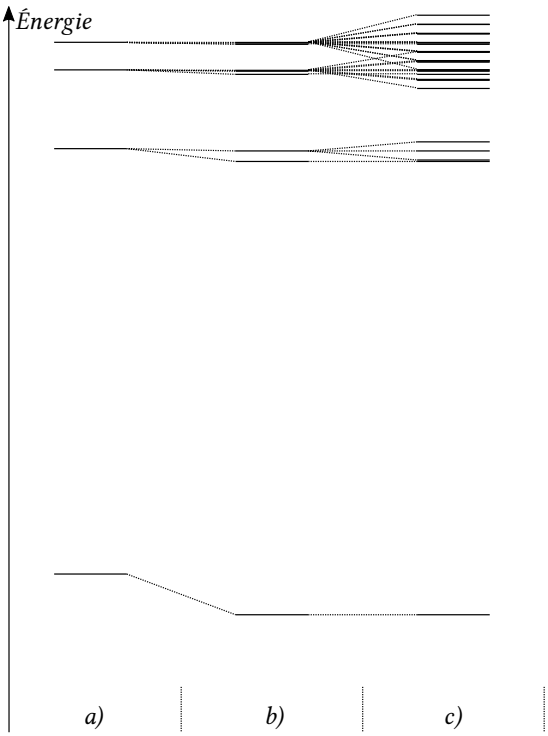


FIGURE 1.6 – Levées de dégénérescence successives des premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Les échelles ne sont pas respectées. a) Modèle de Bohr. b) Quantification azimutale de Wilson-Sommerfeld avec corrections relativistes. c) Effet Zeeman normal.

1.4 La dualité onde-particule de Louis DE BROGLIE

En 1924, Louis DE BROGLIE publie sa thèse intitulée *Recherches sur la théorie des Quanta* dans laquelle il développe une approche permettant de retrouver les résultats de la théorie quantique à partir d'une hypothèse élémentaire. Cette découverte lui vaudra le prix Nobel de physique cinq années plus tard en 1929, et nous allons ici introduire et détailler certains des éléments majeurs de son travail.

La motivation principale de de Broglie vient du constat qu'il existe deux conceptions de la nature, l'une ondulatoire (optique, électromagnétisme…) et l'autre corpusculaire (mécanique newtonienne, relativité…). Or, nous l'avons vu dans les précédentes sections, la physique du début du XXe siècle a mis en lumière des comportements hybrides de la matière, comme par exemple dans le rayonnement du corps noir mais aussi, comme l'ont identifié Einstein et d'autres, au sein d'autres phénomènes comme par exemple les émissions atomique, photoélectrique, ou les expériences d'interférences et diffraction sur faisceaux lumineux de faible intensité – c'est-à-dire quasiment sur photons uniques [4]. L'objectif est ainsi d'unifier ces deux descriptions *a priori* incompatibles sous un seul objet, permettant ainsi d'octroyer, même aux particules isolées, des propriétés ondulatoires à grande échelle ; et à l'inverse une localité même aux ondes étendues.

1.4.1 Synchronisation relativiste et onde de phase

Le point de départ majeur dans la conception de de Broglie est la théorie de la relativité d'Einstein et, en particulier, d'une part la très fameuse relation d'équivalence énergie-masse

4. Les expériences de ce type sur des électrons ou des photons uniques n'arriveront que bien plus tard et ne faisaient donc pas partie du contexte scientifique de l'époque.

d'Einstein

$$\begin{aligned} \text{énergie} &= \text{masse} \times (\text{vitesse de la lumière})^2, \text{ ou} \\ E &= m \times c^2, \end{aligned} \tag{1.48}$$

et d'autre part la relation d'Einstein-Planck ou relation du quantum discutée précédemment

$$\begin{aligned} \text{énergie} &= \text{quantum d'action} \times \text{fréquence}, \text{ ou} \\ E &= h \times \nu. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Partant de ces deux relations, de Broglie postule qu'il existe en chaque objet de masse propre m_0 (associée au *morceau* d'énergie E_0) un phénomène périodique de fréquence propre ν_0 tel que

$$h\nu_0 = m_0 c^2. \tag{1.50}$$

Cette simple hypothèse est la plus importante de tout ce manuscrit et, sans aucun doute, celle qu'il faut impérativement retenir plus qu'aucune autre. En effet, nous constaterons au fil des pages qu'elle pourrait peut-être permettre à elle seule d'expliquer toute la mécanique quantique. Il semble malheureusement que cette intuition primitive de de Broglie ait été oubliée en faveur de ses conséquences que nous allons maintenant explorer. En regardant comment ces fréquences sont transformées sous un changement de référentiel défini par un boost de Lorentz de $\mathcal{R}_0$ (le référentiel propre) vers $\mathcal{R}$ (le référentiel en mouvement ou référentiel du laboratoire), on constate que d'un côté la fréquence $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ apparaît comme

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-v^2}, \tag{1.51}$$

là où l'énergie $E = \omega$ devient

$$\omega = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1.52}$$

Il y a donc une incompatibilité entre ces deux approches pourtant équivalentes, que de Broglie résout par l'introduction d'une seconde hypothèse : il apparaît dans le référentiel $\mathcal{R}$ une onde de fréquence ω se propageant à la vitesse $v_\varphi = 1/v$, qui est à tout instant en phase avec le phénomène périodique de fréquence ω_0 (ou ω_1 dans le référentiel $\mathcal{R}$) de l'objet se déplaçant à la vitesse v. Cette propriété apparaît de manière simple et élégante en regardant comment ont évolué les phases de ces deux phénomènes périodiques entre les temps $t = 0$ et $t = T$. D'un côté, l'objet s'est déplacé vers la nouvelle position $x = vt$ et sa phase, telle qu'elle est observée dans $\mathcal{R}$, est devenue

$$\omega_1 t = \omega_0\sqrt{1-v^2}\frac{x}{v}; \tag{1.53}$$

de l'autre la phase de l'onde de fréquence ω définie par

$$e^{i\omega(t-vx)} \tag{1.54}$$

a aussi évolué :

$$\omega(t-vx) = \omega\Big(\frac{x}{v} - vx\Big) = \omega_0\sqrt{1-v^2}\frac{x}{v}. \tag{1.55}$$

Ces deux quantités (1.53) et (1.55) étant égales, on voit que la propriété d'accord des phases entre l'objet et l'onde est respectée comme annoncé. La particularité de cette onde, comme on peut le voir grace à sa forme particulière, est d'être ce que l'on appelle une onde de phase, qui se propage à une vitesse supraluminique $v_\varphi = 1/v > 1$. On résume les deux hypothèses de de Broglie ainsi :

I. chaque morceau d'énergie, par exemple une particule, possède un phénomène périodique interne ou intrinsèque dont la fréquence propre est directement reliée à la masse propre, ou de manière équivalente à l'énergie propre associée $\omega_0 = m_0 = E_0$;
II. ce phénomène périodique est associé, dans un référentiel externe, à une onde de phase de fréquence $\omega = \omega_0/\sqrt{1-v^2}$ se propageant à la vitesse $v_\varphi = 1/v$ dans la même direction que l'objet, ayant lui-même une vitesse relative v par rapport à l'observateur.

Ayant déjà établi le lien étroit entre un phénomène périodique mobile et sa synchronisation avec une onde de phase, Louis DE BROGLIE a poursuivi son travail sur la dualité onde-particule en obtenant une autre relation très élémentaire qui généralise la relation d'Einstein-Planck (1.49) à des quadrivecteurs relativistes :

$$(E, \vec{\boldsymbol{p}}) = \hbar(\omega, \vec{\boldsymbol{k}}). \tag{1.56}$$

La première relation $E = \omega$ est connue, et la nouveauté est l'égalité entre la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{p}}$ et le vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ de l'onde de phase ; c'est pour sa nouveauté que cette relation est souvent le seul point retenu des travaux de de Broglie, et malheureusement dissocié de la notion de quadrivecteur pourtant plus élégante, ainsi que de l'idée d'onde pilote que nous verrons après. Pour l'atteindre, de Broglie se place dans un contexte plus général de mouvements non linéaires, et postule une équivalence entre le principe de moindre action pour la particule et le principe de Fermat pour l'onde de phase associée. Ce faisant, il déduit assez simplement que la trajectoire de la particule – c'est-à-dire sa ligne d'Univers – et le rayon de l'onde sont identiques. Plus généralement, c'est l'ensemble des trajectoires accessibles à la particule qui sont égales aux rayons de l'onde. Ceci forme la base d'une théorie dite d'onde pilote : soit une onde de phase que l'on laisse évoluer, et une particule couplée à cette onde par un processus de synchronisation entre son horloge interne et la vibration de l'onde ; la particule suivra naturellement le chemin des rayons de l'onde, acquérant ainsi un comportement ondulatoire en désaccord avec la mécanique classique, mais permettant de reproduire la dynamique quantique. Selon cette idée, et pour un électron par exemple, on voit qu'apparaîssent entre autres des phénomènes de diffraction ou d'interférences qui résultent d'une force de guidage exercée par l'onde sur la particule, bien que cette dernière suive toujours les principes de la mécanique newtonnienne. C'est l'introduction de cette nouvelle force quantique, que l'on peut imaginer négligeable dans la limite classique (si les énergies en jeu sont très grandes par exemple), qui est responsable de la déviation par rapport à la physique connue, plutôt qu'une modification intrinsèque de la nature de la particule.

Il est important de noter la spécificité de l'approche de de Broglie par rapport à d'autres comme celle de Bohm, puisqu'il se distance du formalisme de la mécanique newtonnienne. Comme nous l'avons dit, deux ingrédients sont nécessaires : d'abord une onde ψ, dont la dynamique est régie par une équation de Klein-Gordon (ou Schrödinger dans la limite non relativiste), et surtout une équation de guidage pour la particule de la forme

$$m\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} S, \tag{1.57}$$

où S est la phase d'une onde de la forme ρe^{iS}. Cela signifie que la dynamique est déterminée par la vitesse de la particule plutôt que par son accélération, comme c'était le cas en mécanique classique. Ainsi, et contrairement à Bohm dans sa théorie de 1952, de Broglie ne considère jamais réellement la force quantique mentionnée précédemment, bien qu'il fut le premier à l'introduire en 1927 [25]. Plus généralement, de Broglie travaille à partir de l'idée d'une équivalence ou unification entre les deux principes de minimisation

qui régissent respectivement les dynamiques des corps matériels et des ondes, à savoir le principe de moindre action d'un côté (ou principe de Maupertuis sous sa forme à énergie constante), et le principe de Fermat de l'autre. Ce faisant, et en définissant un Lagrangien pour le système, il est possible, comme nous l'avons écrit plus haut, d'avoir une formulation totalement covariante du problème, avec notamment un quadri-vecteur impulsion défini par

$$p_\mu = \partial_\mu \phi, \tag{1.58}$$

avec ϕ la phase de l'onde.

De Broglie continue de développer de nombreux exemples à partir de ses idées, spécifiquement en présence de champs électromagnétiques, mais nous n'y passerons pas plus de temps pour l'instant.

1.4.2 La théorie de la double solution

Bien que très satisfaisante, l'association entre l'horloge interne et l'onde de phase, dont la théorie de l'onde pilote découle, paraît encore un peu trop artificielle et incomplète, voire manque d'élégance. C'est ce constat que fait Louis de Broglie, décidant alors de chercher à généraliser son résultat pour tenter d'unifier plus profondément les notions d'onde et de particule, de sorte qu'il ne s'agirait plus de deux objets distincts mais de deux aspects insécables d'un même phénomène. C'est ainsi que nait l'idée d'une théorie de la double solution, « double » ayant plusieurs interprétations que nous verrons apparaître ; la première, qui est évidente, est celle d'une solution pour moitié corpusculaire et pour moitié ondulatoire.

Nous ne rentrerons pas trop dans les détails de son approche historique, puisqu'elle s'est malheureusement avérée être sans issue et que, par ailleurs, l'objectif de ce manuscrit est justement de tenter d'emmener plus loin l'idée de la double solution. Néanmoins, quelques éléments qualitatifs peuvent s'avérer très intéressants et utiles pour introduire le sujet. Dès le départ, de Broglie s'est rendu compte qu'une onde de phase ne peut pas exister indépendamment d'un phénomène plus général ; cela signifie que l'onde de phase est l'un seulement des deux aspects d'une onde physique, l'autre étant nommé onde de groupe. Là où l'onde de phase se déplace à une vitesse supraluminique, l'onde de groupe a, quant à elle, une vitesse tout à fait inférieure à c et, mieux encore dans le cas de l'onde pilote, une vitesse qui est égale à la vitesse de la particule. C'est aussi la composante de l'onde qui transporte l'énergie. On peut dès lors imaginer que cette onde de groupe, si elle est capable de respecter certaines propriétés, pourrait en fait être associée à la particule elle-même. Il apparaît malheureusement quelques difficultés, la plus importante étant de pouvoir obtenir une onde de groupe extrêmement localisée (presque singulière). La solution la plus naturelle serait probablement le passage à une équation d'onde non linéaire, qui permettrait l'apparition de solitons.

Pour résumer, une théorie de la double solution ferait disparaître de la physique la notion de particule ponctuelle, et serait constituée de la superposition de deux phénomènes :

I. une onde de phase très étendue, se déplaçant à vitesse $v_\varphi = 1/v$, et représentant la généralisation à grande distance de l'horloge interne. C'est elle qui serait responsable du « guidage » de l'énergie, ainsi que des phénomènes ondulatoires comme la diffraction et des interactions à grande distance.
II. une onde de groupe très localisée, se déplaçant à vitesse $v_g = v$, et représentant la répartition de l'énergie de la particule. C'est elle qui serait responsable des visions corpusculaires de la matière, par exemple des mesures de particules uniques ou des traces dans les chambres à brouillard, puisque c'est en elle que se situe toute l'énergie de l'onde pouvant être transferée lors d'une mesure.

On constate enfin que les idées de Louis de Broglie sur la dualité onde-particule, et en particulier sur sa théorie de la double solution, sont très proches de celles d'Albert Einstein présentées plus tôt dans le cas des fluctuations dans le rayonnement du corps noir. La philosophie mécanique et réaliste de ces deux personnages est très évidente, et il est naturel qu'Einstein ait porté beaucoup d'intérêt aux travaux de de Broglie, et qu'à l'inverse de Broglie se soit inspiré de ceux d'Einstein.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons esquissé le contexte historique, depuis les travaux sur la thermodynamique du corps noir jusqu'aux balbutiements de la théorie des quanta, culminant aux travaux de Louis de Broglie sur la dualité onde-particule et les théories de l'onde pilote et de la double solution. Tous ces éléments trouveront leur importance au cours de ce manuscrit, qui consistera à poursuivre les travaux de de Broglie et, en particulier, les dernières idées mentionnées ici. Nous avons également tenté de mettre en lumière quelques unes des approches plus synthétiques de la physique de cette époque, passant majoritairement par l'étude d'une grandeur physique nommée action, qui semble être un point central – parfois explicite, parfois plus discret – dans les traitements présentés dans ce document.

La découverte de la théorie des quanta a été extrêmement tumultueuse, ainsi de nombreux scientifiques ont été oubliés ou omis, mais aussi certains phénomènes également très intéressants qui auraient tous mérité une plus grande place. L'une des approches pour le développement de la théorie des quanta se concentre plus encore que nous l'avons fait sur les questions thermodynamiques avec, notamment, l'étude des invariants adiabatiques, qui permettent de donner une unicité élégante à toutes les découvertes de ce début de siècle. Nous n'avons malheureusement pas pu évoquer ces aspects, par souci de temps et pour éviter de trop nous écarter du sujet principal ; il n'en reste néanmoins que ces approches sont très probablement nécessaires pour mieux comprendre et appréhender toute cette physique. De nombreux ouvrages en font une synthèse [10, 81, 83, 87], et chacun pourra y trouver nombre d'éléments intéressants et éclairants.

Chapitre 2

La mécanique quantique moderne

Introduction

Suite aux développements initiés par l'étude des quanta et de la mécanique ondulatoire, un tournant majeur a marqué le développement de la théorie quantique, pour culminer jusqu'au formalisme que l'on nomme, aujourd'hui, mécanique quantique. Les années 1920 ont ainsi été témoin d'une transition majeure dans la philosophie scientifique dominante, et l'on s'est alors écarté des visions historiques très mécaniques de la physique, pour évoluer vers une interprétation dite de l'école de Copenhague, dont les fondateurs sont, notamment, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Pascual Jordan et Max Born. La première partie de ce chapitre sera donc dédiée à une exploration historique de l'arrivée de ce nouveau courant de pensée dont on pourra, alors, espérer mieux comprendre les origines. Dans un second temps, nous discuterons d'un événement scientifique majeur de la seconde moitié du xx^e^siècle, la publication par John Bell de son théorème éponyme ; ce dernier fut une autre des contributions les plus importantes dans l'abandon, presque définitif, des anciennes interprétations.

Pour conclure cette partie, nous parlerons brièvement de la mécanique bohmienne, héritière des idées de Louis de Broglie, ainsi que d'expériences plus récentes reproduisant, à l'échelle macroscopique, certains des phénomènes quantiques.

2.1 Les différents formalismes

2.1.1 La formulation matricielle

À la fin de l'année 1925, en parallèle des travaux de Louis de Broglie sur la mécanique ondulatoire, une nouvelle approche se dessine suite aux travaux pionniers de Werner Heisenberg [54], inspirés par les idées de Niels Bohr datant d'une décennie. Il s'agit d'un nouveau formalisme, non plus basé sur la notion d'ondes ou de particules, mais sur des objets décrits sous forme de matrices, et qui constitue l'origine de ce que l'on nomme aujourd'hui « mécanique quantique ».

Il faut se souvenir que la théorie des quanta et, de manière générale, les nouveaux phénomènes microscopiques, sont basés les propriétés d'émission et d'absorption lumineuses de différentes substances. En effet, qu'il s'agisse du rayonnement thermique du corps noir ou des raies spectrales atomiques et moléculaires, la question était de savoir comment et sous quelle forme est émise la lumière par la matière. Heisenberg fait, en 1925, la proposition suivante : puisque nous savons, depuis Planck et Bohr, que seuls des niveaux discrets d'énergie sont accessibles, il paraît inutile et illogique de chercher à utiliser des grandeurs qu'il sera, de toute manière, impossible à observer. Heisenberg se concentre sur le cas des

émissions atomiques, et fait le choix de décrire le mouvement périodique q_ϵ de l'électron à une énergie ϵ comme une série de Fourier

$$q_\epsilon = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q_{\epsilon,r} e^{i\omega_\epsilon t}. \tag{2.1}$$

Puisque q_ϵ doit représenter un mouvement physique, et pour assurer que cette quantité soit donc bien réelle, on est amené à choisir

$$q_{\epsilon,-r} = q^*_{\epsilon,r}. \tag{2.2}$$

De manière tout à fait équivalente, et plutôt que d'utiliser des fonctions telles que q_ε, nous pouvons dire que l'ensemble des coefficients de Fourier, pour l'ensemble des énergies accessibles à l'électron, est un objet décrivant totalement et tout aussi justement le système – nous pouvons facilement passer de l'une à l'autre des descriptions. Ainsi, nous avons

$$\mathbb{q} = \left\{ q_{nm} e^{i\omega_{nm} t} \right\}, \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.3}$$

qui représente l'ensemble des états possibles d'un atome, ou même, l'ensemble des transitions possibles de n vers m associées à une émission lumineuse observable. C'est bien ce second point de vue qui nous intéresse puisque, comme nous l'avons dit, nous mesurons l'atome exclusivement par la lumière qu'il nous envoie, c'est-à-dire par les transitions. Ce nouvel objet $\mathbb{q}$ peut, dès lors, être notre nouveau sujet d'étude, à condition de définir de nouvelles règles de manipulation. En particulier, si nous prenons une autre quantité

$$\mathbb{p} = \left\{ p_{nm} e^{i\omega_{nm} t} \right\}, \tag{2.4}$$

et en utilisant le fait que l'énergie d'un rayonnement ω_{nm} est égale à la différence des énergies des niveaux de la transition comme énoncé par Bohr

$$\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m, \tag{2.5}$$

on en déduit très rapidement les règles de multiplication

$$\mathbb{p}\mathbb{q} = \left\{ \sum_k p_{nk} q_{km} e^{i\omega_{nm} t} \right\}, \tag{2.6}$$

$$\mathbb{q}\mathbb{p} = \left\{ \sum_k q_{nk} p_{km} e^{i\omega_{nm} t} \right\}. \tag{2.7}$$

On remarque d'une part que le produit de deux de ces objets n'est, généralement, pas commutatif $\mathbb{p}\mathbb{q} \neq \mathbb{q}\mathbb{p}$; mais plus encore, ces règles de calcul sont équivalentes à l'algèbre matricielle. Ainsi nous pouvons maintenant, mais nous ne le ferons pas ici, écrire toutes les opérations élémentaires qui seraient utiles.

La matrice hamiltonienne et la résolution de phénomènes physiques

Ce formalisme reste, à ce stade, bien abstrait et sans grande utilité, mais il est possible d'aller bien plus loin. Prenons par exemple le cas de mécanique hamiltonienne, c'est-à-dire d'un système caractérisé par une fonction de Hamilton $H(q, p)$ dont on peut extraire la dynamique physique (p, q). Nous pouvons transcrire un tel problème dans le formalisme matriciel

$$\mathbb{H}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \frac{1}{2m}\mathbb{p}^2 + V(\mathbb{q}). \tag{2.8}$$

On montre en particulier que ce problème sera défini par la relation

$$\mathbb{p}\mathbb{q} - \mathbb{q}\mathbb{p} = \frac{\hbar}{i}\mathbb{1}, \tag{2.9}$$

avec $\mathbb{1} = \{\delta_{nm}\}$, et que la matrice hamiltonienne est diagonale

$$\mathbb{H} = \{H_{nn}\} \tag{2.10}$$

avec $\hbar\omega_{nm} = H_{nn} - H_{mm}$.

Paul Dirac reformulera plus rigoureusement en 1926 [29], et dans les années qui suivront, ces mathématiques. Il introduit notamment très rapidement la notion de crochet de Poisson de la mécanique hamiltonienne sur les matrices, et définit le commutateur $[\mathbb{p}, \mathbb{q}]$ de deux matrices $\mathbb{p}$ et $\mathbb{q}$ selon

$$\mathbb{p}\mathbb{q} - \mathbb{q}\mathbb{p} = -i\hbar[\mathbb{q}, \mathbb{p}], \tag{2.11}$$

de sorte que l'on a ici

$$[\mathbb{q}, \mathbb{p}] = \mathbb{1}. \tag{2.12}$$

Quoiqu'il en soit, on peut montrer dès lors, en décomposant une fonction $f(\mathbb{q}, \mathbb{p})$ sur une base polynomiale, que l'on a les relations de commutations avec cette fonction

$$[\mathbb{f}, \mathbb{p}] = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{q}}, \quad \text{et} \quad [\mathbb{q}, \mathbb{f}] = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{p}}. \tag{2.13}$$

Par ailleurs, la nature de la fonction hamiltonienne impose que, si la matrice $\mathbb{H}$ est diagonale, on a

$$[\mathbb{g}, \mathbb{H}] = \dot{\mathbb{g}}. \tag{2.14}$$

On retrouve alors les mêmes résultats qu'en mécanique classique, à savoir pour les variables conjuguées $\mathbb{q}, \mathbb{p}$ et la matrice hamiltonienne $\mathbb{H}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$

$$\dot{\mathbb{q}} = [\mathbb{q}, \mathbb{H}] = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbb{p}}, \quad \text{et} \quad \dot{\mathbb{p}} = [\mathbb{p}, \mathbb{H}] = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbb{q}}. \tag{2.15}$$

Ce faisant, nous pouvons chercher à résoudre des problèmes pour un Hamiltonien donné, par exemple avec un potentiel quadratique

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2}\mathbb{p}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\mathbb{q}^2. \tag{2.16}$$

On en déduit naturellement une équation harmonique pour la coordonnée $\mathbb{q}$,

$$\ddot{\mathbb{q}} + \omega_0^2\mathbb{q} = 0, \tag{2.17}$$

ce qui signifie que les fréquences ω_{nm}, et donc les écarts absolus d'énergie entre deux niveaux n et m, sont égaux à la fréquence ω_0

$$\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m = \pm\omega_0. \tag{2.18}$$

Ainsi, nous savons que le spectre énergétique de $\mathbb{H}$ sera constitué d'une série de niveaux régulièrement espacés d'une énergie $\hbar\omega_0$, et donc l'énergie d'un niveau n est

$$H_n = (n + \alpha)\hbar\omega_0. \tag{2.19}$$

Nous notons deux points importants. D'abord, il est tout à fait possible d'avoir des énergies négatives, c'est-à-dire que rien n'interdit, à ce stade, d'avoir des valeurs de n négatives. D'autre part, il existe une constante α, égale ou supérieure à 0 et strictement inférieure à 1 [1], qui constitue un paramètre libre associé à l'énergie de l'état $n = 0$. En effet, si la nature du problème spécifie que les fréquences doivent être régulièrement espacées, ainsi que la valeur de l'écart dont il est question, rien ne contraint la valeur absolue de l'énergie. C'est le choix de α qui fixera une origine, que l'on appelle « niveau fondamental » pour les raisons qui vont suivre.

Nous pouvons réintroduire la relation de commutation des matrices $\mathbb{p}$ et $\mathbb{q}$, qui nous dit que la matrice résultante doit être diagonale et d'amplitude unité, soit

$$(\mathbb{p}\mathbb{q} - \mathbb{q}\mathbb{p})_{nn} = \sum_k (\dot{q}_{nk} q_{kn} - q_{nk} \dot{q}_{kn}) = -i\hbar, \tag{2.20}$$

et il vient

$$|q_{n,n+1}|^2 - |q_{n-1,n}|^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\omega_0}. \tag{2.21}$$

De même, le calcul de $\mathbb{H}$, dont la diagonale nn vaut $(n+\alpha)\hbar\omega_0$ nous donne

$$|q_{n,n+1}|^2 + |q_{n-1,n}|^2 = (n+\alpha)\frac{\hbar}{\omega_0}. \tag{2.22}$$

Combiner ces deux équations fait apparaître une relation de récurrence pour les coordonnées q_{nm}

$$|q_{n,n+1}|^2 = \frac{\hbar}{2\omega_0}\left(n + \alpha + \frac{1}{2}\right). \tag{2.23}$$

Intéressons-nous tout particulièrement au cas $n = -1$, définissant

$$|q_{-1,0}|^2 = \frac{\hbar}{2\omega_0}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{2.24}$$

Il est d'abord très clair que, puisque le membre de gauche ne peut en aucun cas être négatif, la valeur de la constante α doit être d'au moins un demi. Cela signifie que, si l'on interprète n comme le nombre de quanta d'énergie $\pm\omega_0$, il doit nécessairement subsister une énergie dite « de point zéro » en l'absence de tout quantum, puisque seules les valeurs entières de α permettent une situation dans laquelle l'un des niveaux présente une énergie nulle. Par ailleurs, nous voyons qu'un cas particulier apparaît si $\alpha = \frac{1}{2}$, dans lequel la coordonnée $q_{-1,0}$ ainsi que, par récurrence, toutes les coordonnées ayant un indice négatif, sont nulles. Souvenons-nous que les coordonnéees q_{nm}, associées à la différence d'énergie ω_{nm}, correspondent à des transitions du niveau n vers le niveau m. On interprète souvent ces coordonnées comme des amplitudes de transition, dont le module au carré représente la probabilité de passer d'un état n à un état m [2]. Sous cette vision, le fait que les coordonnées soient nulles pour des valeurs de n négatives signifie qu'il est impossible d'atteindre ces états ; ou, en d'autres termes, que ces états n'existent pas. Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ a donc pour conséquence de prévenir l'existence d'états d'énergie négative pour l'oscillateur harmonique quantique, et le spectre énergétique est alors défini par

$$H_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.25}$$

1. Toute valeur de α inférieure à 0 ou supérieure à 1 constitue un cas déjà considéré par la contrainte $0 \leq \alpha < 1$, puisqu'il suffit de décaler toutes les énergies d'une quantité proportionnelle à $\hbar\omega_0$ pour retrouver exactement le même résultat.

En conclusion, si nous avons de bonnes raisons d'imposer ce choix bien particulier, nous obtenons un spectre d'énergies strictement positives et qui, peu communément, est défini de manière absolue. Cette dernière caractéristique est extrêmement inhabituelle en physique, puisque les quantités mesurables sont systématiquement définies comme des écarts par rapport à une référence arbitraire. C'est d'ailleurs ce qui apparaît si nous choisissons une autre valeur de α, puisque toutes les autres possibilités sont entièrement équivalentes les unes aux autres et ne peuvent donc pas définir de référence énergétique absolue. Nous concluons cette discussion en remarquant que le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ n'est pas nouveau, puisque nous l'avions déjà évoqué au chapitre 1 lorsque nous avons parlé de la seconde théorie de Planck, qui avait introduit la même énergie de point zéro demi-entière [74]. En comparant ces deux approches, nous voyons qu'elles font toutes deux appel à une prescription sur l'inexistence des états d'énergie négative. Il semblerait donc à ce stade que l'existence d'une énergie de point zéro soit étroitement liée avec cette condition, mais qu'elle n'ait plus lieu d'être si nous autorisons des énergies négatives, peut-être sous forme d'antiparticules.

Le principe d'incertitude

Dans un autre article de 1927 [55], rapidement suivi et explicité par Earle Hesse Kennard [60] puis Hermann Weyl [90], Werner Heisenberg esquisse un résultat qui restera célèbre et central dans l'interprétation de la mécanique quantique : le principe d'incertitude [2]. La discussion qui va suivre fait intervenir implicitement la notion d'opérateur que nous n'avons pas encore évoquée, mais nous reviendrons dessus à deux reprises pour préciser ce qui sera dit ici. Prenons une particule quantique, par exemple un électron qui, sous une vision mécanique, est caractérisé par ses degrés de liberté, c'est-à-dire sa position et sa quantité de mouvement. Ces derniers sont, comme nous l'avons vu, représentés par les matrices $\mathbb{q}$ et $\mathbb{p}$. Ces deux objets peuvent être interprétés comme la collection des grandeurs associées pouvant être mesurées, et nous pouvons combiner de telles mesures par un produit de matrices. Ainsi, le produit $\mathbb{p}\mathbb{q}$ sera vu communément comme la succession d'une mesure de position puis d'une mesure de quantité de mouvement. Cependant, nous avons vu que les matrices $\mathbb{q}\mathbb{p}$ et $\mathbb{p}\mathbb{q}$ ne commutent pas, c'est-à-dire que ces deux combinaisons d'opérations ne sont pas égales et diffèrent d'une quantité proportionnelle à $i\hbar$. En d'autres termes, la mesure de position suivie de la mesure de quantité de mouvement ne donne pas le même résultat que la réalisation des mêmes deux mesures dans un ordre opposé. Cela implique, et nous le comprendrons mieux après nous être intéressés aux formalismes de Schrödinger et Dirac, que l'électron dont il est question ne peut avoir simultanément une position et une quantité de mouvement bien définies.

2.1.2 La théorie ondulatoire de Schrödinger

La formulation d'Erwin Schrödinger de la théorie des quanta n'est pas, à proprement parler, un élément de la mécanique quantique moderne. Cette dernière a, en effet, été principalement basée sur l'algèbre matricielle que nous venons d'aborder. C'est en fait Paul Dirac qui a, plus tard, rassemblé ces deux approches sous un même formalisme. La mécanique quantique est cependant bien plus ancrée dans la philosophie d'Heisenberg, qui a évoluée en ce que l'on appelle l'interprétation de Copenhague, que dans la vision purement ondulatoire de Schrödinger que nous allons aborder maintenant.

2. On tend aujourd'hui à privilégier le nom « relations d'indétermination », mais nous ferons le choix dans ce travail de conserver l'appellation historique. L'idée d'indétermination est en effet très proche philosophiquement de l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, mais n'est pas nécessaire dans une vision mécanique, ou plus généralement, dans toute approche faisant intervenir des variables x et p bien définies.

Schrödinger a cherché à se débarasser entièrement de l'idée de particules, et à faire une description exclusivement ondulatoire des objets microscopiques. Il est arrivé, en parallèle de Louis DE BROGLIE, à une équation d'onde non-relativiste ne présentant plus le caractère localisé que cherchait de Broglie avec sa double solution ; c'est-à-dire que l'onde ψ, solution de son équation, trouverait sa correspondance uniquement dans l'onde de phase de la mécanique ondulatoire. L'équation de Schrödinger, très célèbre, prend la forme suivante :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial t} = H\psi(t,\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{\boldsymbol{x}}) + V(\vec{\boldsymbol{x}})\psi(t,\vec{\boldsymbol{x}}). \tag{2.26}$$

Nous pouvons résoudre cette équation, en particulier dans le cas d'un potentiel harmonique $V(x) = m\omega_0^2x^2$. Nous cherchons pour cela un régime stationnaire $\psi(t,x) = \phi(x)e^{-i\omega t}$ à une dimension spatiale, possédant une énergie bien définie $E = \hbar\omega$, et devons donc résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \big(2mE - m^2\omega_0^2x^2\big)\phi(x) = 0. \tag{2.27}$$

Les solutions d'une telle équation peuvent être obtenues en fonction des polynomes de Hermite $H_n(x)$ (*cf.* [64] pp. 85–88), en imposant qu'elles doivent être de module intégrable, c'est-à-dire tendre suffisamment rapidement vers zéro à l'infini, pour représenter des solutions physiques. Il vient

$$\phi(x) = \mathrm{C^{te}}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega_0}{\hbar}x^2}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

avec une énergie $E_n = \big(n + \frac{1}{2}\big)\hbar\omega_0$. Nous retrouvons donc bien le même résultat que l'approche d'Heisenberg, mais pouvons noter une spécificité importante. Nous n'avons pas le choix, ici, de la valeur de l'énergie de point zéro E_0. En effet, il n'existe pas de solutions correctement bornées pour des énergies négatives ; ces dernières présenteront la plupart du temps des divergences et asymétries incompatibles avec nos conditions. Cela signifie qu'il est nécessaire d'imposer l'inexistence d'états d'énergie négative, ce qui, comme nous l'avons vu dans la section précédente, implique que $q_{-1,0} = 0$ et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Cependant, nous pouvons insister, une fois de plus, sur le caractère non relativiste de l'équation d'onde considérée. Les énergies négatives ou, ainsi qu'on les interprète aujourd'hui, les antiparticules, n'apparaîssent que dans un formalisme relativiste. À ce titre, il n'est donc pas étonnant d'observer une interdiction de ces états. Schrödinger fut, par ailleurs, le premier à montrer, en 1926, que son interprétation ondulatoire était tout à fait équivalente à l'approche matricielle d'Heisenberg, Born et Jordan, ce qui explique naturellement que l'on obtient le même résultat [79]. De même, l'article « La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement », publié en 1927 par Louis DE BROGLIE [27], permet à ce dernier d'établir le lien entre sa propre théorie et celle de Schrödinger. Pour cela, de Broglie propose une équation d'onde relativiste, que l'on reconnaît aujourd'hui comme une équation de Klein-Gordon, et à partir de laquelle l'équation de Schrödinger peut être obtenue comme une limite non relativiste.

Remarquons enfin la particularité de la solution de Schrödinger : nous avons ici une solution ondulatoire qui est localisée au sein d'une fonction gaussienne. Cela a bien évidemment été immédiatement d'un grand intérêt puisque, sans nécessairement le vouloir, l'onde de Schrödinger réintroduit une forme de localisation de l'énergie. Néanmoins, l'oscillateur harmonique a ceci de particulier qu'il est le seul cas ne faisant intervenir aucune dispersion, ce qui n'est aucunement une propriété générale de l'équation de Schrödinger ni de ses solutions. Ainsi, si nous préparons une onde gaussienne avec une extension spatiale caractéristique l_0 et la laissons évoluer librement, elle tendra à s'uniformiser avec le temps,

de sorte que la longueur de l'extension spatiale deviendra supérieure à la longueur initiale l_0 et continuera de s'accroître. D'ailleurs, si nous reprenons la relation de de Broglie $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$, c'est-à-dire le lien de variables conjugées entre la position et la quantité de mouvement au sein d'une onde $e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} = e^{i\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}{\hbar}}$, il est possible d'écrire l'onde de Schrödinger également dans l'espace des $\vec{\boldsymbol{p}}$ à l'aide d'une transformation de Fourier. En écrivant donc, pour une situation un peu idéalisée d'une particule libre, une onde spatiale gaussienne

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{2.29}$$

avec σ_x une longueur caractéristique dénotant l'extension spatiale de l'onde, nous avons, de même, l'onde $\tilde{\phi}$ en espace de Fourier

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \tilde{\phi}_0 e^{-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}}, \tag{2.30}$$

avec

$$\sigma_p = \frac{\hbar}{\sigma_x}. \tag{2.31}$$

Ainsi, si nous avons une distribution spatiale de l'onde autour d'une position donnée, cette même onde doit présenter une distribution impulsionnelle autour d'une quantité de mouvement donnée. Plus important encore, l'extension spatiale σ_x, qui peut être vue comme l'incertitude sur la valeur précise de la position, est reliée à une même extension impulsionnelle σ_p par l'intermédiaire de la constante de Planck réduite $\hbar$. Ce point est en fait la traduction, dans le langage des ondes, du principe d'incertitude de Heisenberg que nous avons évoqué précédemment. En effet, si l'extension spatiale σ_x diminue, c'est-à-dire que l'on acquiert une précision plus grande sur la mesure de la position, l'extension impulsionnelle σ_p, et donc l'incertitude sur une mesure de la quantité de mouvement, doit être modifiée comme l'inverse de σ_x et donc nécessairement augmenter. Mais nous voyons bien que ce principe d'incertitude, que l'on obtient plus rigoureusement sous la forme de l'inégalité

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2.32}$$

n'a rien de propre à la mécanique quantique, mais est plutôt une propriété de toute onde, qu'elle soit acoustique, mécanique, électromagnétique, gravitationnelle ou, ici, matérielle. En effet, dès lors qu'un objet a une extension spatiale et est décrit sous la forme d'une onde, il existe une quantité conjuguée, que l'on peut appeler quantité de mouvement, satisfaisant l'inégalité (2.32). Cela se comprend si l'on regarde l'onde comme une collection des positions possibles, qui peuvent chacune évoluer différemment de leurs voisines. De cette façon, la vitesse et la quantité de mouvement de l'ensemble est difficile à définir. Cette explication mécanique un peu naïve ne rend pas justice à l'importance du principe d'incertitude dans la mécanique quantique, mais nous permet néanmoins d'insister sur le fait que ce dernier découle de la nature ondulatoire des objets considérés, plutôt que d'une certaine propriété propre aux objets microscopiques. Nous voyons une fois de plus que la dualité onde-particule est peut-être le seul élément qu'il est nécessaire d'invoquer pour expliquer toute l'étrangeté quantique, comme l'avait souligné Louis de Broglie avec sa mécanique ondulatoire. Et nous insistons une fois de plus sur l'importance de l'approche de de Broglie, qui est parvenu à expliquer mécaniquement cette dualité, sur laquelle nous reviendrons à de nombreuses reprises dans ce travail.

2.1.3 La mécanique quantique

John von Neumann [89] puis Paul Dirac [30, 31] réalisent, dans les années qui suivent les publications mentionnées jusqu'ici, un grand travail d'unification des différents formalismes sous un même langage, dont le résultat est aujourd'hui le plus communément enseigné. Nous resterons brefs sur cette axiomatisation ainsi que toute la théorie qui en découle, en profitant néanmoins de cette occasion pour résoudre une dernière fois le problème de l'oscillateur harmonique. Ainsi que nous l'avons évoqué, les matrices de Heisenberg deviennent des opérateurs agissant sur des vecteurs d'état notés $|\psi\rangle$ ainsi que leurs transconjugués $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$, et le lien est fait avec la mécanique de Schrödinger par la relation suivante

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle\,, \tag{2.33}$$

où les vecteurs $|x\rangle$ satisfont $\mathbb{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$, avec $\mathbb{x}$ l'opérateur position. On utilisera cependant rarement la représentation spatiale de la fonction d'onde et, en ce sens, la mécanique quantique moderne est basée bien plus sur les idées de Heisenberg que celles d'une mécanique ondulatoire, qu'elle suive l'approche de Schrödinger ou celle de de Broglie.

On réécrit l'équation hamiltonienne pour un état stationnaire sous la forme

$$\mathbb{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,, \tag{2.34}$$

c'est-à-dire que l'on cherche les vecteurs propres $|n\rangle$ de la matrice $\mathbb{H}$. On peut définir deux opérateurs $\mathbb{a}^\dagger$ et $\mathbb{a}$, dits de « création » et « annihilation », reliés aux opérateurs $\mathbb{p}$ et $\mathbb{x}$ par

$$\mathbb{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\mathbb{a}^\dagger + \mathbb{a}) \tag{2.35}$$

$$\mathbb{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\mathbb{a}^\dagger - \mathbb{a}). \tag{2.36}$$

Connaissant l'expression de la matrice $\mathbb{H}$, nous pouvons la développer comme une combinaison de ces nouveaux objets, qui ont des propriétés très intéressantes et utiles. Les opérateurs $\mathbb{a}$ et $\mathbb{a}^\dagger$ agissent en effet sur les états propres $|n\rangle$ de l'opérateur hamiltonien $\mathbb{H}$, c'est-à-dire des états d'énergie E_n, de la manière suivante :

$$\mathbb{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{2.37}$$

$$\mathbb{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,. \tag{2.38}$$

On peut déduire de là, un opérateur $\mathbb{n}$ duquel les états $|n\rangle$ sont des vecteurs propres

$$\mathbb{n}\,|n\rangle = \mathbb{a}^\dagger\mathbb{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \tag{2.39}$$

et nous avons par ailleurs la relation de commutation

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\mathbb{a}, \mathbb{a}^\dagger\right] = [\mathbb{q}, \mathbb{p}] = \mathbb{a}\mathbb{a}^\dagger - \mathbb{n} = \mathbb{1}. \tag{2.40}$$

En reprenant l'expression de l'opérateur hamiltonien, et après un peu d'algèbre, nous obtenons

$$\mathbb{H}\,|n\rangle = \hbar\omega_0\left(\mathbb{n} + \frac{\mathbb{1}}{2}\right)|n\rangle\,, \tag{2.41}$$

d'où l'on tire une troisième fois l'expression bien connue des niveaux d'énergie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0. \tag{2.42}$$

Malheureusement, nous voyons bien qu'en dépit de sa justesse et sa simplicité remarquables, le formalisme de Dirac nous a emmenés bien loin des considérations et des idées qui ont, quelques années plus tôt, donné naissance à la théorie des quanta. Pire encore, si la fonction d'onde de Schrödinger conserve une place importante dans la visualisation des solutions, ainsi que dans l'enseignement, la mécanique ondulatoire de de Broglie a, elle, entièrement disparu. Nous allons revenir plus longuement sur les raisons et conséquences de cet abandon, mais nous passerons quelques instants avant cela, sur la théorie quantique des champs, et en particulier l'approche de Richard Feynman, qui a implicitement ramené des visions ondulatoires dans le domaine quantique.

Un dernier postulat majeur de la mécanique quantique, proposé par Max Born en 1926 [9], doit être évoqué ; c'est en effet lui qui introduit, dans la théorie quantique, un autre élément très important pour l'interprétation physique : la notion de probabilités. La proposition de Born est la suivante : la fonction d'onde $\psi(t, \vec{\boldsymbol{x}})$, solution de l'équation de Schrödinger, représente une amplitude de probabilité, de sorte que la fonction densité de probabilité du système quantique est donnée par le module au carré de ψ

$$p(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = |\psi(t, \vec{\boldsymbol{x}})|^2. \tag{2.43}$$

De cette manière, on introduit pour la première fois en physique une notion de probabilité intrinsèque ; c'est-à-dire que le caractère probabiliste d'une mesure $\mathbb{m}$ n'est pas une conséquence de la statistique, mais une propriété élémentaire du système et de la mesure. Cela signifie que si l'opérateur $\mathbb{m}$ possède un ensemble de vecteurs propres $|i\rangle$, chacun associé à une valeur propre λ_i, l'application de $\mathbb{m}$ sur un état $|\psi(t)\rangle$ donnera, au hasard, l'une des valeurs λ_i, et transformera ψ vers le vecteur $|i\rangle$ associé. La probabilité d'obtenir λ_i parmi l'ensemble des possibilités sera donnée par

$$P_i(t) = |\langle\psi(t)|i\rangle|^2. \tag{2.44}$$

L'interprétation de la fonction d'onde ψ comme représentant la probabilité de présence de la particule n'a, pour autant, aucune nécessité d'être étrange ou fondamentale. Il est même possible d'obtenir un comportement similaire dans des systèmes mécaniques, bien que cela introduise d'autres difficultés. Prenons par exemple le cas d'une onde dans une cavité linéaire, par exemple une corde vibrante de longueur L, pour laquelle on impose un mode stationnaire d'oscillation. Le champ, sinusoïdal, présentera ainsi des nœuds dont l'amplitude d'oscillation est nulle, et ventres dont l'amplitude est maximale. Nous imaginons maintenant introduire quelque part un objet, qui interagit avec le champ proportionnellement au gradient de ce dernier ; la force sur l'objet sera donc proportionnelle à un terme également sinusoïdal, et il y aura ainsi des positions pour lesquelles l'objet ne subit plus aucune force et peut donc être stable. Ces positions sont, statistiquement, les points où il est le plus probable de mesurer l'objet après l'avoir laissé évolué, si nous ne connaissons pas ses conditions initiales. Cette remarque est importante car nous allons nous-mêmes utiliser de telles forces tout au long des prochains chapitres. Il sera alors utile de garder en tête la question suivante : est-ce que, d'une partie ou propriété du champ, l'on peut tirer une fonction qui sera identique à la répartition statistique d'un objet après de nombreuses expériences, définissant ainsi la probabilité de mesurer l'objet ? En d'autres termes, il sera important, lorsque c'est envisageable, de considérer la possibilité d'extraire mécaniquement la règle de Born.

2.1.4 La théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs n'est pas un formalisme de la mécanique quantique à proprement parler, mais mérite que l'on s'y attarde car elle est, comme nous allons nous en

rendre compte, étroitement liée aux idées de Louis de Broglie. Richard Feynman publie, entre 1948 et 1949, une série d'articles [45, 46, 47] dans lesquels il développe une nouvelle approche pour résoudre le problème de l'électrodynamique quantique, basée sur la notion d'intégrale de chemin, introduite dans sa thèse de 1942 [44]. Plutôt que de donner les détails techniques de cette théorie, nous allons nous concentrer sur une approche plus intuitive basée sur la figure 2.1, présentée par Feynman lui-même dans son livre *Lumière et matière* [48].

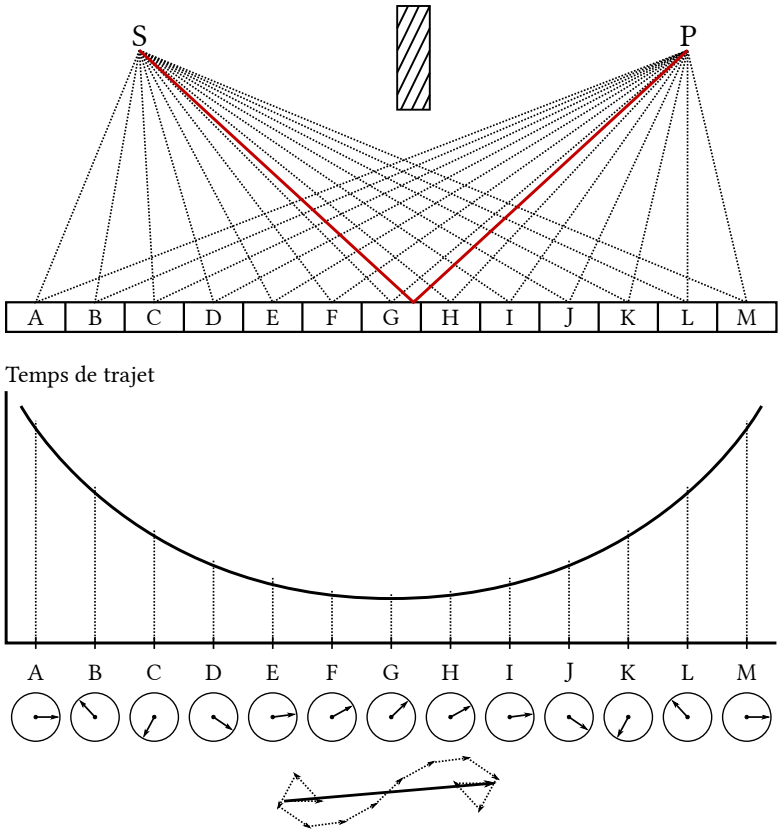


Figure 2.1 – Illustration de l'intégrale de chemin dans l'électrodynamique quantique de Feynman. Une source S émet des particules que l'on détecte en P après diffusion sur une surface. Chaque trajectoire de S vers P est considérée, et lui est associée une amplitude complexe dépendant de l'action pour cette trajectoire. L'amplitude finale est donnée par la somme de toutes les amplitudes individuelles, et son module est proportionnel à l'intensité observée en P.

L'idée est la suivante : trouver une version quantique du principe de moindre action, qui le remplacerait à l'échelle microscopique, mais y serait équivalent à l'échelle macroscopique. Ainsi, Feynman propose qu'au lieu de suivre un chemin bien défini qui minimise l'action, une particule quantique aura accès à toutes les trajectoires reliant la source à la destination, même si certaines ne sont pas physiques au sens macroscopique. Néanmoins, ces trajectoires interféreront les unes avec les autres de sorte que, en moyenne, les trajectoires seront d'autant plus favorisées qu'elles se situeront proches de la trajectoire classique, c'est-à-dire celle qui minimise l'action. Ainsi, à chaque trajectoire n de S vers P envisagée est associée un vecteur de même taille, mais tourné d'un angle correspondant au temps de trajet associé, c'est-à-dire un nombre complexe $z_n \sim e^{i\tau_n}$. Ce nombre correspond bien entendu à l'horloge de Louis de Broglie, intégrée sur le trajet ; et puisque le temps propre est, pour une particule relativiste, relié à l'action $S_n = -m \int \mathrm{d}\tau$, l'argument de l'exponentielle sera identifié à l'action. L'intensité finale au point P est donnée par la somme de tous ces vecteurs, donc

des nombres complexes z_n,

$$K(P,S) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \sum_{\text{chemins } n} e^{iS_n}. \tag{2.45}$$

Le module du vecteur final correspond à l'intensité récupérée en P, qui peut être grande ou petite selon les interférences ayant eu lieu ; la constante est là pour assurer la normalisation de l'intensité totale entre S et P. Le grand intérêt de cette formulation est qu'elle a pour conséquence le principe de moindre action, dont la trajectoire associée est représentée en rouge sur la figure 2.1. En effet, on comprend facilement que plus l'action varie rapidement entre deux trajectoires, plus la somme des amplitudes associées aura de chances d'être nulle. À l'inverse, les trajectoires dont l'action est proche d'un extremum, auront une contribution bien plus importante dans la norme de K car, leur variation n'étant pas si rapide, elles auront tendance à se renforcer. En d'autres termes, ce sont les trajectoires dont l'écart $\delta S \approx 0$ qui interféreront le moins et, pour peu que cet extremum de l'action soit très piqué, c'est une situation tout à fait équivalente au principe de moindre action.

L'utilisation de l'exponentiation complexe sur l'action peut paraître nébuleuse ou même arbitraire, mais c'est en réalité un procédé qui est profondément ancré dans la dualité onde-particule de Louis de Broglie, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. On a donc là l'une des briques fondamentales d'une mécanique ondulatoire, et la théorie quantique des champs identifie effectivement les particules libres à des ondes monochromatiques. De plus, l'idée que toutes les trajectoires sont explorées simultanément et interfèrent entre elles, ou alternativement que les particules connaissent à l'avance l'état de l'espace tout entier, est une manière d'amener une forme de non-localité dans cette mécanique ondulatoire, qui est très importante pour le passage à une formulation quantique, comme nous en discuterons dans la section qui suit. Bien entendu, nous restons ici très qualitatifs. Mais, comme nous n'avons pas réellement besoin d'être mathématiquement rigoureux sur ce point pour le reste du travail présenté dans cette thèse, nous pouvons nous concentrer sur l'intuition et l'interprétation de cette théorie, ainsi que de son lien avec les divers éléments étudiés comme l'horloge interne et l'action.

2.2 Les inégalités de Bell et la question de la localité

Il ne fait aucun doute que la mécanique quantique est une théorie merveilleuse par la justesse de ses résultats. Il est souvent dit d'elle qu'elle est la théorie physique la plus fructueuse de l'histoire, ayant apporté le plus de prédictions avec la plus grande des précisions, et que toutes les expériences ayant été menées pour tenter de l'invalider, ou simplement de constater son incomplétude, ont échoué. Cette prodigieuse théorie est également à l'origine de la majeure partie des grandes avancées et inventions technologiques du vingtième siècle et, aujourd'hui encore, est le moteur de futurs développements. Il ne fait donc aucun doute que cette mécanique quantique est remarquable par sa portée et sa précision, et ce n'est pas, ou plus, ce qui est remis en question. Les débats portent en réalité majoritairement sur une chose bien plus fondamentale, l'aspect philosophique de cette théorie, ce que l'on décrit communément comme son interprétation. En effet, la théorie physique et mathématique laisse planer un doute quant à la nature des objets et phénomènes qu'elle décrit, ainsi que leur origine ou leur raison. Cela est devenu particulièrement apparent dans le cadre des fameux débats entre Albert Einstein et Niels Bohr à partir des années 1930, qui ont culminé en 1964 avec l'apparition du théorème de Bell, et sa vérification expérimentale entre 1980 et 1982 par Alain Aspect (voir figure 2.2 et [1]). Cette question semble, en revanche, ne

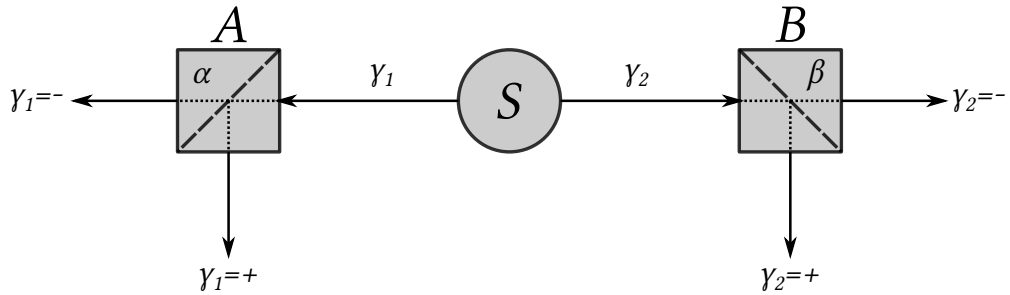


FIGURE 2.2 – Schéma expérimental idéalisé des expériences d'Alain ASPECT, basé sur la proposition de Bell. Une source S émet des photons intriqués (leurs polarisations relatives sont parfaitement définies par le processus d'émission) qui sont envoyés chacun sur un séparateur de polarisation A ou B, paramétrés dans des configurations d'orientation angulaire, repsectivement α et β. On mesure les corrélations entre les états $+$ et $-$, c'est-à-dire $P(\gamma_1 = \pm, \gamma_2 = \pm|\alpha, \beta)$, et on vérifie que ces probabilités violent les inégalités de Bell. On assure également qu'aucune communication locale et causale n'a eu lieu, en choisissant les configurations α et β en dehors de leurs cônes de lumière respectifs.

pas relever du domaine de la physique et n'être qu'un problème philosophique ou métaphysique ; faut-il alors s'en soucier ? Même si le fait de favoriser une interprétation par rapport à une autre ne changera effectivement rien au fait que le formalisme standard fonctionne si bien, qu'il nous est, pour l'instant au moins, impossible de le réfuter, il n'est pas exclu que l'apparition d'un nouveau formalisme, basé sur d'autres principes philosophiques ou physiques, puisse prédire davantage de phénomènes quantiques, soit encore non observés, soit à ce jour inexpliqués. D'autre part, cette observation ne se limite pas à la mécanique quantique ; en effet comme nous le verrons, il est tout à fait possible que certaines des hypothèses propres aux diverses interprétations quantiques aient un impact sur le reste de la physique si l'on choisit de les prendre au sérieux, ce qui pourrait ainsi engendrer des découvertes également dans des branches éloignées de cette science. Ainsi ces questions ont leur place dans la recherche et ce, même s'il n'est pas certain qu'elles apporteront des méthodes plus efficaces ou plus justes pour calculer des phénomènes.

Malgré l'arrivée – ou plutôt la popularité – relativement tardive de ces nouvelles interprétations, et très tôt dans le développement de la mécanique quantique, nombre de scientifiques émettaient déjà des doutes quant à certains résultats ou hypothèses de la théorie quantique. De nombreuses objections ont été soulevées, principalement concernant la manifeste non-localité des phénomènes qu'elle décrit, dont on ne peut se défaire qu'en abandonnant un concept que l'on peut résumer par « réalisme ».

Nous allons préciser toutes ces notions comme l'a fait John BELL en 1964 lorsqu'il a publié son très fameux théorème [4]. L'objectif de Bell était de donner un cadre mathématique très précis pour éclaircir ces débats philosophiques, qui reposaient alors principalement sur des expériences de pensée. Il propose ainsi trois hypothèses pour la physique, qui constituaient un cadre pour toutes les théories classiques, à partir desquelles il obtient une inégalité. Tout phénomène qui respecte ces hypothèses doit également respecter ces inégalités et, inversement, tout phénomène qui viole les inégalités doit également violer l'une, au moins, des hypothèses.

Ces trois hypothèses sont les suivantes :

1. il existe des variables cachées ; c'est ce qu'on entend par « réalisme », à savoir le fait que les objets étudiés possèdent des propriétés, mesurables ou non, qui les caractérisent entièrement. Une grande partie de la mécanique quantique, dans son interprétation standard, considère justement que certaines des propriétés de l'objet ne préexistent pas à la mesure, et sont ainsi créées lors de l'interaction de manière pro-

babiliste ; c'est la réduction du paquet d'onde. Cela fait évidemment écho aux idées de Niels Bohr et Werner Heisenberg dont nous avons parlé depuis le chapitre 1.

ii. la physique est locale ; c'est-à-dire que les interactions ont lieu à vitesse finie d'une part et, d'autre part, à vitesse toujours plus petite que c, la vitesse de la lumière. Dans les termes de la relativité restreinte, deux événements causalement reliés sont nécessairement dans leurs cônes de lumière respectifs, et l'intervalle les séparant de type temps.

iii. il y a une indépendance statistique entre l'objet et l'appareil de mesure ; c'est à dire que l'état de l'appareil de mesure n'a aucune influence sur, ni aucune corrélation avec, l'état du système mesuré.

Afin de mieux appréhender ces trois points, nous allons les détailler individuellement dans le but d'identifier les raisons qui nous poussent à les introduire, mais aussi leurs relations aux différentes interprétations, leurs limites et les critiques qu'on peut en faire. Cependant, il s'agit d'un sujet extrêmement complexe qu'il est aisé de mal interpréter ou comprendre, ainsi que vaste ; les paragraphes qui suivent n'ont donc pas vocation à être exhaustifs mais à donner un rapide tour d'horizon pour mieux saisir le contexte du problème, qu'il conviendra d'approfondir. Par ailleurs, puisque le choix d'une interprétation est, à ce stade, principalement philosophique, il est clair que les discussions et critiques que l'on porte à l'un ou l'autre des points dont on peut discuter, seront très personnelles et subjectives.

2.2.1 Les variables cachées

La mécanique quantique, dans sa formulation moderne, fait disparaître presque entièrement l'idée que les objets physiques possèdent des propriétés. En effet, tous les systèmes sont maintenant décrits par une fonction d'onde $\psi(t, x)$ ou, de manière équivalente, un vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$, dont le module au carré représente la densité de probabilité de présence de l'objet. Non seulement la notion de position devient incertaine, mais plus fondamentalement elle ne sera déterminée que lors d'une mesure, et ne préexiste pas à cette dernière, c'est ce qu'on appelle la réduction du paquet d'onde. Ceci mélange les postulats que Born et Heisenberg ont introduit explicitement, à savoir qu'il faut cesser de décrire les mesures qui ne sont pas observables, et que la Nature choisira au hasard, lors d'une mesure, l'un des états accessibles au système.

Une particule, représentée par une fonction d'onde $\psi(t, x)$, évoluera donc dans le temps selon l'équation de Schrödinger jusqu'à une mesure puis, à l'instant t_0 précédant cette mesure, aura une fonction d'onde associée $\psi_0(x) = \psi(t_0, x)$. Ce que l'on est capable de dire avant la mesure est que la particule a une probabilité $|\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ d'être mesurée entre les positions x et $x + \mathrm{d}x$; mais, dans l'interprétation standard, la particule en question n'a pas de position à cet instant, ce n'est pas uniquement qu'on ne la connaît pas. C'est le processus de la mesure qui va réduire la fonction d'onde à une simple distribution de Dirac autour de la position mesurée : $\psi_0(x) \underset{\text{mesure}}{\longrightarrow} \delta(x - x_{\text{mesuré}})$. Un point très important dans ce formalisme de la mécanique quantique est que la fonction d'onde n'est pas un objet vivant dans notre espace, ce n'est pas un objet mesurable, et il n'a pas vocation à *être* le système qu'il représente, mais simplement à correctement expliquer les expériences. Cette distinction est cruciale et nous y reviendrons plus tard.

Cette vision de la physique est très contraire à tout ce qui s'est fait auparavant dans l'histoire de la science, et déplaisait à un grand nombre de scientifiques. De grands débats ont eu lieu à ce sujet au cours du xxe siècle, opposant, entre autres, Albert Einstein et Niels Bohr, dans des confrontations d'idées aujourd'hui célèbres. À ce jour, c'est la vision de Copenhague, c'est-à-dire notamment celle de Bohr, qui est la plus communément admise,

probablement parce que c'est aussi celle qui est majoritairement enseignée, bien qu'une lecture historique montre que la situation est nettement plus complexe[3]. La conclusion de cette passionnante histoire est qu'aujourd'hui, cette vision du monde est celle qui est utilisée par défaut, les autres n'étant que marginalement préférées. Une grande part de la communauté tient cependant à préserver un réalisme dans la physique, c'est-à-dire que les objets que nous étudions existent bien et ont des propriétés bien définies, même si nous n'y avons pas forcément accès : les variables cachées. La question des probabilités et de l'indétermination des systèmes peut alors devenir une conséquence purement statistique et ne plus être un aspect fondamental de la physique, comme nous l'avons illustré à la fin de notre discussion sur la règle de Born.

Si les objets d'étude de la physique ne possèdent pas de réalité fondamentale, toute science tend alors à n'avoir plus qu'une vocation applicative, de sorte que la quête de connaissance et de compréhension de l'Univers se transforme en une collecte de savoirs techniques, très utiles, mais ne répondant à aucune question fondamentale ou philosophique sur la nature des choses. Bien sûr, des tentatives très intéressantes d'allier indétermination au sens de l'École de Copenhague et réalisme scientifique sont nées dès les premiers débats sur le sujet ; mais nous nous intéressons, dans ce manuscrit, à des modèles mécaniques pour lesquels il ne fait aucun doute que les objets sont bien définis à tout moment de leur existence ; ainsi l'hypothèse des variables cachées nous est absolument indispensable.

2.2.2 La localité

La notion de localité, bien qu'assez récente, fait aujourd'hui partie intégrante de toute la physique classique. Avant même l'article fondateur d'Einstein de 1905 sur la relativité restreinte, Hendrik Lorentz, Henri Poincaré et bien d'autres [75], considéraient déjà la possibilité que toutes les forces et interactions doivent être exprimées sous une forme analogue à l'électromagnétisme, c'est-à-dire en termes d'ondes ; on évoquait ainsi dès lors l'idée d'ondes gravitationnelles, bien avant l'arrivée de la relativité générale en 1915. Ces idées traduisaient une volonté forte de faire disparaître de la physique la notion d'action instantanée à distance qui, comme on le sait, est constitutive de la mécanique newtonienne. Il n'y a que peu de doutes concernant la motivation cachée derrière ces travaux : on cherchait alors une description mécanique, incluant une propagation, de toutes les interactions. C'est d'ailleurs pour cela que l'éther luminifère avait été introduit, afin d'expliquer mécaniquement la propagation des ondes lumineuses, avant d'être retiré par la suite. Aujourd'hui, nous savons bien que cette propagation à vitesse finie des interactions est essentielle ; et même les approches plus récentes qui tentent de ramener une description des forces par des actions à distance doivent utiliser des durées avancées et retardées pour les caractériser, c'est-à-dire que ces interactions ne sont de toute manière plus instantanées [67].

La symétrie des équations de l'électromagnétisme est celle correspondant aux transformations de Lorentz, c'est-à-dire au groupe de Poincaré ; on n'a donc pas le choix, si l'on considère vrai le principe de relativité – c'est-à-dire que les lois de la physique sont indépendantes du référentiel –, d'utiliser une telle structure de transformation, au moins pour la description de l'électromagnétisme. Plus généralement, on montre [68, 84] que, dès que l'on fait certaines hypothèses de symétrie – en particulier sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace-temps[4] justifiées par les observations cosmologiques –, l'ensemble des formes de

3. On pourra lire en particulier le livre *Quantum Theory at the Crossroads* de Guido Bacciagaluppi et Antony Valentini [3], qui constitue un rapport et une analyse du cinquième congrès Solvay de 1927, ayant marqué un tournant dans le développment de la théorie quantique ; c'est notamment à partir de ce moment que les points de vue de Louis de Broglie et Albert Einstein ont commencé à être abandonnés.

4. Il est très intéressant de noter qu'une homogénéité de l'espace-temps, couplée à une isotropie de l'espace seulement, implique nécessairement une isotropie du temps également ; c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir de

transformations de coordonnées pour réaliser des changements de référentiels devient très restreint. On est contraint à devoir utiliser, soit des transformations de Galilée, impliquant des interactions instantanées à distance comme dans la théorie de Newton, soit des transformations de Lorentz et donc une vitesse limite infranchissable, que l'on identifie naturellement à la vitesse de la lumière, ou de tout objet de masse nulle. Serait-il néanmoins possible de considérer des événements se situant en dehors du cône de lumière, à condition qu'ils ne le traversent pas ? C'est en effet possible, et on appelle de tels objets des tachyons [84], mais leur introduction devient extrêmement coûteuse. Regardons, pour nous en convaincre, le cas d'un changement de référentiel de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ défini par les transformations de Lorentz et, en particulier, la coordonnée temps dans $\mathcal{R}'$

$$t' = \gamma(t - vx). \tag{2.46}$$

Nous avons alors deux situations, selon que l'événement dans $\mathcal{R}$ se situe, ou non, à l'intérieur du cône de lumière. Étudions les implications de chacune des situations en nous appuyant sur la figure 2.3.

i) Considérons le cas $|t| > |x|$, c'est-à-dire que l'événement est dans le cône de lumière, avec $t > 0$ pour le cône de lumière futur et $t < 0$ pour le cône de lumière passé. Dans ce cas, puisque $|v| < 1$, on montre que t' est nécessairement du même signe que t, c'est-à-dire que l'ordre causal de deux événements sera indépendant du référentiel. En effet, le signe du ratio t'/t est défini par la différence $1 - vx/t$ et, selon les deux conditions sur les valeurs absolues de t, x et v mentionnées plus haut, cette différence sera toujours positive.

ii) À l'inverse, le cas $|t| < |x|$ signifie que l'événement est en dehors du cône de lumière. Le ratio t'/t peut alors, dans certains cas, devenir négatif, si vx/t devient supérieur à 1. En d'autres termes, il est possible de trouver un changement de référentiel tel que deux événements inversent leur ordre d'occurence dans le temps.

Cette discussion nous montre, qualitativement, que supprimer la condition de localité dans le cadre de la relativité restreinte a pour autre conséquence de supprimer le principe de causalité, c'est-à-dire de rendre impossible la définition d'un ordre causal entre des événements. On constate donc bien que la seconde hypothèse de Bell est très forte et, selon l'importance des deux autres, n'est pas celle dont il faut privilégier la suppression ; ou, du moins, il est difficile de s'en séparer.

2.2.3 L'indépendance statistique et la causalité

Même si l'on considère que les deux directions temporelles sont autorisées, il reste une différence très marquée entre la dimension temporelle et les dimensions spatiales. Si un objet a, à un moment donné, une direction donnée, il devra la conserver pendant toute son existence. Pour nous en convaincre, étudions la quadrivitesse d'une particule, donnée en deux dimensions par

$$u = (\gamma, \gamma v) \tag{2.47}$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ le facteur de Lorentz et v la vitesse de la particule dans le référentiel d'observation. Alternativement, on peut s'intéresser au quadrivecteur énergie-quantité de mouvement qui s'écrit

$$p = (\gamma m, \gamma m v) \tag{2.48}$$

avec m la masse de la particule. Cependant, peu importe l'objet que l'on considère, la seule variable dynamique est évidemment la vitesse relative v entre les deux référentiels, et c'est uniquement sur elle que l'on peut jouer pour modifier les propriétés de la particule. Si la

distinction entre les deux directions passée et future du temps.

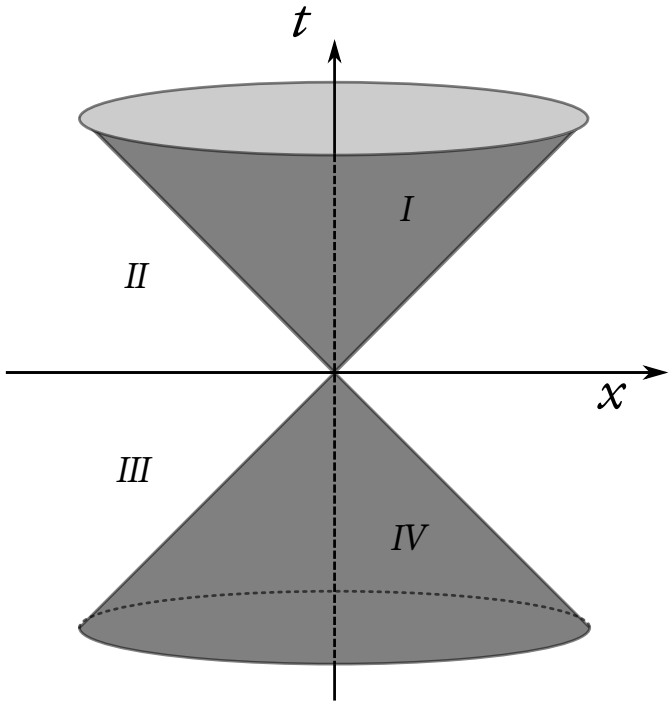


FIGURE 2.3 – Cône de lumière de la théorie de la relativité restreinte, découpant l'espace-temps en quatre régions. I et IV : intérieur des cônes de lumière futur et passé, représentant des interactions locales et respectivement causales ou rétrocausales. II et III : extérieur des cônes de lumière futur et passé, représentant des interactions non-locales, et respectivement causales ou rétrocausales.

vitesse tend vers zéro, c'est-à-dire que l'on se retrouve dans le référentiel de la particule, sa quadrivitesse devient

$$u \to (1, 0), \tag{2.49}$$

alors que si la vitesse tend vers ± 1, on a

$$u \to (+\infty, \pm\infty). \tag{2.50}$$

La figure 2.4 résume ces possibilités : on transforme les composantes temporelle et spatiale continûment de sorte qu'un point (t, x), dans le référentiel $\mathcal{R}$, reste à tout instant sur une même hyperbole, et se déplace le long de cette courbe d'une distance définie par la valeur de v, le paramètre de la transformation. On obtient ainsi le point (t', x') dans le référentiel $\mathcal{R}'$. On voit d'abord qu'il existe une différence de nature très importante entre les dimensions temporelle et spatiale, la composante de la quadrivitesse de la première ne peut pas changer de signe, puisque les hyperboles situées à l'intérieur du cône de lumière ne traversent jamais l'axe $t = 0$, alors que les hyperboles extérieures y sont autorisées. On peut essayer d'interpréter la composante temporelle de u comme une sorte de « vitesse temporelle », un terme qui a peu de sens mais cherche à exprimer la notion de différence de perception des durées entre deux référentiels. Cela signifie qu'un observateur voit les durées de la particule plus grandes d'un facteur γ par rapport aux siennes, et le signe de cette vitesse déterminerait le « sens du temps », c'est-à-dire si la particule va dans le même sens ou dans un sens opposé à l'observateur. Ainsi, alors qu'il est possible pour la particule de changer de direction dans l'espace en inversant le signe de v, cela n'est pas vrai pour la partie temporelle : une particule ne peut pas changer de direction dans le temps. Cela signifie deux choses, d'abord que l'on peut très bien préparer un nombre de particules avec un signe de u^0 positif ou négatif et, deuxièmement, que ces particules garderont leur nature causale

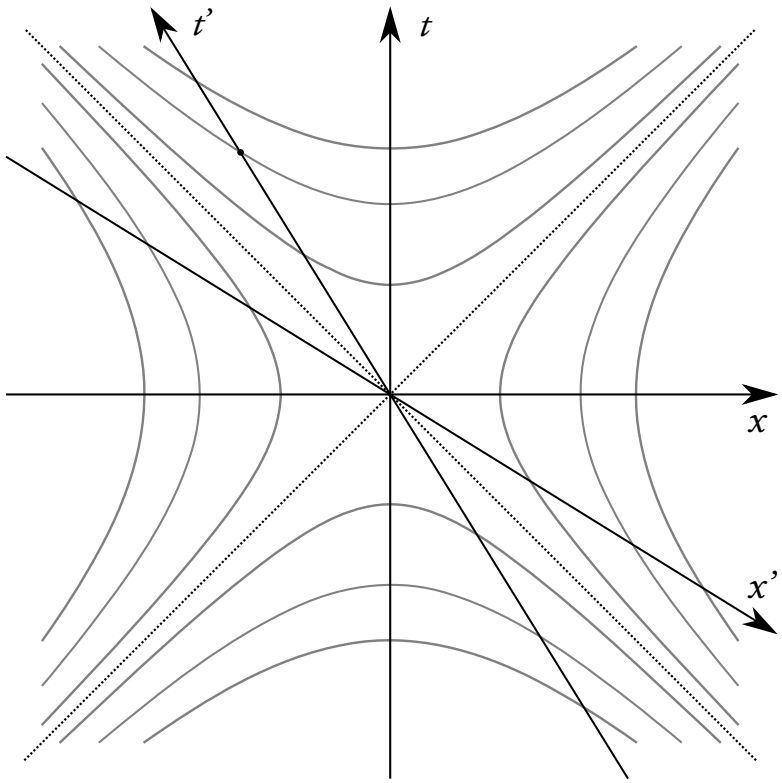


FIGURE 2.4 – Illustration des transformations de Lorentz. On transforme un point d'un référentiel à un autre en le déplaçant le long d'une hyperbole définie par la condition $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

ou rétrocausale tout au long de leur existence. Cela supprime au passage toute possibilité d'une boucle temporelle pour une particule donnée, bien que les boucles puissent exister si plusieurs particules ou des interactions sont en jeu comme nous le verrons juste après. Ces remarques ne sont vraies qu'à la condition que l'objet étudié soit bien un quadrivecteur, c'est-à-dire que sa norme soit un invariant des transformations. Si l'on autorise une particule à changer de masse propre, il devient alors possible, pour elle, de traverser le cône de lumière et, de manière générale, d'explorer tout le plan (t, x). Nous pourrons en particulier dire que la condition $x > t$ est équivalente à avoir une masse imaginaire. Ainsi, si nous faisons varier la masse selon

$$m(\theta) = m_0 e^{i\theta}, \tag{2.51}$$

avec θ un paramètre quelconque, nous obtiendrons une trajectoire dans l'espace-temps, paramétrisée par θ, qui dessinera une boucle. Cette possiblité de laisser varier la masse est justement l'une des manières d'interpréter les phénomènes quantiques, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, puisque l'on pourra réécrire les nouveaux termes sous la forme de forces ; ces forces acquéreront éventuellement un caractère non-local selon les libertés de variation qu'on leur accorde.

Nous avons évoqué l'impossibilité d'obtenir, pour une particule isolée, une boucle temporelle ; néanmoins, cela n'est plus le cas en présence d'interactions. Considérons la situation suivante : une particule est créée au point spatio-temporel A et détruite en B, « puis » laisse sa place à une particule de causalité inversée en B et remontant jusqu'en A [5]. Cette seconde particule pourrait affecter la première, qui ensuite affecterait la seconde, on a donc bien une boucle temporelle. Mais, de manière très intéressante, de telles situations ont déjà été

5. Pour des conditions de conservation du quadrivecteur énergie-quantité de mouvement, la seconde particule doit être réfléchie sur un point intermédiaire C.

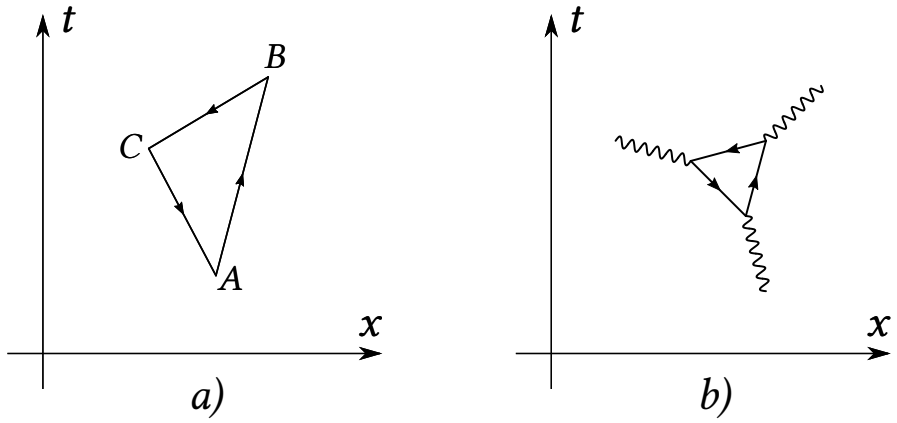


FIGURE 2.5 – Boucle temporelle élémentaire. a) Représentation classique. b) Diagramme de Feynman associé.

considérées, étudiées, et même résolues dans l'histoire de la physique ! Il s'agit bien sûr de la théorie quantique des champs, et plus particulièrement des boucles dans les diagrammes de Feynman. L'identification entre ces deux situations est représentée sur la figure 2.5. Il s'agit bien dans les deux cas d'une boucle temporelle, mais nous ne la considérons jamais comme telle en théorie quantique des champs, en la cachant sous l'idée de processus « virtuels », c'est-à-dire qui ne constituent pas des situations physiques. Et pourtant, ce sont ces boucles qui sont responsables de certaines corrections comme les effets Casimir et Hawking par exemple, ou bien du décalage de Lamb, et qui, en réalité, étaient historiquement considérées comme réelles. On peut donc espérer utiliser les mêmes méthodes de renormalisation pour les résoudre qu'en électrodynamique quantique. Malgré cela, la résolution des boucles temporelles est extrêmement complexe et problématique. La difficulté pourrait provenir du fait que nos outils mathématiques, en particulier les intégrales, n'y sont pas adaptés. On peut suggérer par exemple la régularisation zeta [32], qui fait usage d'un prolongement analytique pour remplacer certaines quantités infinies par des valeurs finies, que l'on peut accepter comme étant mathématiquement correctes.

2.2.4 Sur la différence entre superdéterminisme et acausalité

Nous l'avons dit, la question de la suppression de l'indépendance statistique peut être expliquée par l'utilisation de l'une de deux hypothèses *a priori* équivalentes : le superdéterminisme d'un côté et l'acausalité de l'autre. Nous avons ainsi mentionné l'apparente identité entre ces deux idées, et nous sommes, dans la précédente section, concentrés en particulier sur la suppression de la causalité, car il est plus facile dans discuter. Mais il convient d'être plus précis et de spécifier les similarités et différences entre ces aspects. Ce sont deux sujets bien entendu très complexes qui mériteraient chacun un ouvrage entier, mais nous pouvons au moins tracer quelques pistes de réflexion.

Le superdéterminisme évoque l'idée que les systèmes étudiés – ainsi que ceux qui ne sont alors, à tort, pas étudiés – ne sont pas isolés du reste de l'univers, et plus spécifiquement qu'un processus, en général inconnu, les a reliés dans l'arbre des causes et conséquences. Pour illustrer cela, prenons le cas d'un cristal nous permettant d'émettre des photons uniques lorsqu'il est excité, ainsi qu'un détecteur de photons, par exemple un photomultiplicateur. Dans une description classique de la mécanique quantique à variables cachées, ce photon pourrait se voir attribuer un certain nombre de propriétés à sa création, de manière aléatoire pour celles qui nous intéressent. Afin de pouvoir mesurer ces propriétés, nous allons rajouter dans notre système des éléments permettant de les sélectionner, par exemple avec des filtres pola-

risants. Or tous les éléments utilisés pour cette expérience existent depuis bien longtemps, et ont donc intéragi continuellement avec le reste de l'univers. En particulier, il est tout à fait possible d'imaginer une quantité inconnue qui influe à la fois sur l'émission du photon et sur sa sélection jusqu'à sa détection. En d'autres termes, le résultat de l'expérience n'est pas seulement déterminé par un certain nombre de variables cachées de l'objet étudié, mais aussi par une foule d'interactions, potentiellement avec des quantités également inconnues, depuis les premiers instants de l'Univers. Ainsi, notre apparente incapacité à connaître l'état de l'objet avant la mesure ou le résultat de la mesure lui-même, n'est pas une caractéristique fondamentale des systèmes quantiques mais provient de nos connaissances lacunaires de l'Univers dans son ensemble. Cette explication est certes convaincante, surtout lorsque l'on a en tête son lien avec la notion de chaos, mais pose plusieurs problèmes.

Si ces influences sont si complexes qu'il nous est impossible de les connaître, ni même d'espérer identifier leur source, comment ces sujets peuvent-ils s'inscrire dans un cadre scientifique ? Il est vrai que nous pourrions en théorie falsifier cette hypothèse, mais en pratique cela semble encore une fois impossible. Il faudrait pour cela isoler totalement le système pendant une durée très grande et si, alors, les phénomènes quantiques survivent, on pourrait inévitablement soulever des arguments réthoriques : le système n'a pas été suffisamment bien isolé, ou pendant suffisamment longtemps. Puisque l'univers est trop complexe et chaotique pour le connaître entièrement et précisément, il n'est même plus nécessaire d'identifier les causes pour objecter à un résultat d'expérience, et il suffit de dire qu'il existe une raison ou une cause sans même devoir tenter de l'expliciter. Cela semble donc être une voie sans issue pour la science ; l'hypothèse du superdéterminisme n'est en pratique pas empiriquement falsifiable, puisqu'il sera toujours possible de réfuter des résultats expérimentaux en invoquant une influence plus lointaine ou plus obscure. Il faut bien sûr nuancer la situation, ce que nous venons de décrire serait une des versions les plus extrêmes du superdéterminisme et une multitude d'autres interprétations existent, néanmoins cette idée de causes inconnues, et impossibles à connaître, restera la plupart du temps centrale.

L'acausalité propose, quant à elle, que le futur a une influence sur le passé, et que c'est ce qui explique notre méconnaissance du système. Si nous reprenons l'exemple simpliste du photon, cela signifierait que ce dernier est, à tout instant de l'expérience, en interaction avec des événements futurs et passés, en particulier sa création et sa détection [15]. Ainsi, si rien dans le processus d'émission ne semble contraindre la valeur de sa polarisation par exemple, et si cela apparaît comme purement aléatoire, il existe en réalité une influence du processus de détection sur la détermination de ses propriétés. Cette explication est, du point de vue d'un observateur causal comme un être humain, totalement équivalente au superdéterminisme : il existe une cause, ou plutôt une explication totalement déterministe, qui nous est cependant inaccessible et donne un apparent indéterminisme. Mais, indépendamment de l'observateur, tout devient clair et toute la méconnaissance du système disparaît. Si nous possédions une théorie basée sur cette hypothèse d'acausalité, il nous serait possible de faire des prédictions précises puisque les explications des phénomènes font appel uniquement à des processus simples et élémentaires, plutôt qu'au chaos. L'acausalité implique donc le superdéterminisme pour un observateur causal. Il reste bien sûr que, même si l'acausalité peut être plus satisfaisante que le superdéterminisme dans sa manière d'expliquer les processus physiques, et d'étudier le comment et le pourquoi, la connaissance des conditions dans le futur est *a priori* tout aussi problématique. Les motivations à l'utilisation de l'acausalité plutôt que le superdéterminisme, ou même la non localité, se trouvent ailleurs dans la physique. En effet, si le superdéterminisme avait, à ce jour, pour vocation de n'être qu'une solution face au problème posé par la violation des inégalités de Bell, l'acausalité touche à des sujets très variés dans différentes branches de la science et pour divers phénomènes.

Cette hypothèse a donc des objectifs et des origines multiples qui ne font que renforcer l'idée de la favoriser face aux autres alternatives, ou au moins sa concurrente directe.

2.3 Interprétations alternatives et analogues

Nous passerons rapidement sur deux sujets centraux dans le contexte de ce travail. L'un est une réinterprétation de la mécanique quantique inspirée de l'approche de Louis de Broglie, réalisée à la moitié du xx^e^siècle, tandis que l'autre, bien plus récente, est un analogue macroscopique de la dualité onde-particule qui a présenté des résultats très prometteurs au début de ce nouveau siècle.

2.3.1 La mécanique bohmienne

En 1952, David Bohm redécouvre les travaux de Louis de Broglie et propose une nouvelle interprétation de la théorie quantique basée sur les idées d'ondes pilotes. Il part pour cela de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2\psi}{2m} + V\psi, \tag{2.52}$$

avec une onde ψ écrite sous forme polaire

$$\psi = Re^{iS}, \tag{2.53}$$

R et S étant deux fonctions réelles de l'espace-temps. En injectant cette forme de ψ dans l'équation d'onde, puis en séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient un système de deux équations

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Big(R\nabla^2 S + 2\vec{\boldsymbol{\nabla}}R\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}S\Big), \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{(\vec{\boldsymbol{\nabla}}S)^2}{2m} + V - \frac{1}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right). \tag{2.55}$$

Selon la règle de Born mentionnée plus haut, le module au carré de ψ, c'est-à-dire R^2, correspond à la densité de probabilité que l'on notera ρ. Par ailleurs, Louis de Broglie avait, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, identifié le gradient de la phase de l'onde $\vec{\boldsymbol{\nabla}}S$ avec la quantité de mouvement d'une particule $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$, de sorte que l'équation (2.54) peut s'écrire également sous la forme d'une équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}} = 0, \tag{2.56}$$

avec $\vec{\boldsymbol{j}} = \rho\vec{\boldsymbol{v}}$ le courant de probabilités associé au mouvement de la particule. L'équation (2.55) est, quant à elle, une équation d'Hamilton-Jacobi que nous pouvons écrire

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H, \tag{2.57}$$

avec H la fonction hamiltonienne qui s'écrit ici, en introduisant également la condition de de Broglie,

$$H = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + U. \tag{2.58}$$

$U = V + Q$ est un potentiel qui inclut le potentiel classique V, mais également un nouveau potentiel Q qui dépend de la fonction R, c'est-à-dire de l'amplitude de probabilité, selon

$$Q = -\frac{1}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}. \tag{2.59}$$

Ce faisant la particule, dont le mouvement est guidé par la phase de l'onde ψ, s'écartera de sa dynamique classique dans le potentiel V par l'effet du potentiel quantique Q, qui lui communiquera de fait le caractère probabiliste, ou plutôt statistique, de la fonction d'onde ψ. Notons bien que, dans cette théorie, la particule possède une position et une trajectoire bien définies par ses conditions initiales, le prix à payer étant la non-localité manifeste de la force quantique dérivant du potentiel Q.

Une procédure tout à fait identique peut être réalisée dans un formalisme relativiste, c'est-à-dire en utilisant l'équation de Klein-Gordon à la place de l'équation de Schrödinger, avec un quadrivecteur potentiel $(A^\mu) = (V, \vec{\boldsymbol{A}})$ [28]. On déduit alors un système d'équations

$$(\partial S + qA)^2 = m_0^2 + Q_{\text{rel.}} \tag{2.60}$$

$$\partial\big[R^2(\partial S + eA)\big] = 0, \tag{2.61}$$

où q est la charge de couplage avec le quadrivecteur potentiel A, et m_0 la masse de l'onde ψ. Le potentiel quantique Q acquiert une nouvelle forme qui nécessitera, sans surprise, de remplacer le Laplacien par un d'Alembertien,

$$Q_{\text{rel.}} = \frac{\partial^2 R}{R}. \tag{2.62}$$

Les relations de de Broglie sont également modifiées de manière très élégante dans ce formalisme covariant, et on obtient en particulier le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial t} + qV \\ -\vec{\boldsymbol{\nabla}} S + q\vec{\boldsymbol{A}} \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

et la vitesse est donnée par

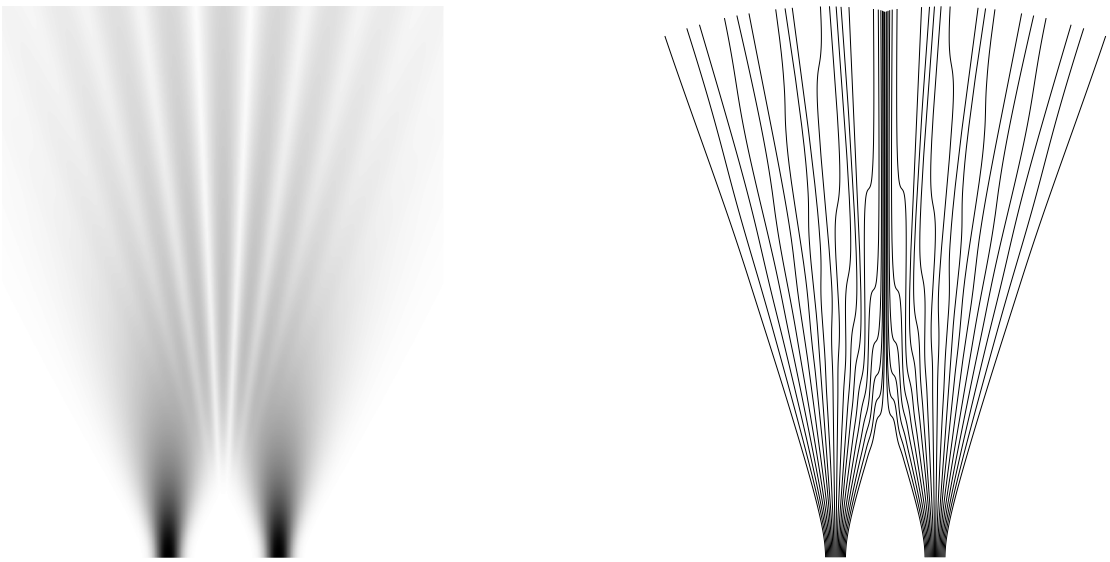
$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{E} = -\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}} S - q\vec{\boldsymbol{A}}}{\frac{\partial S}{\partial t} + qV}. \tag{2.64}$$

Dès le milieu des années 1920, Louis de Broglie proposait, comme nous l'avons déjà évoqué, une théorie nommée « double solution », comme extension de sa théorie d'onde pilote [28]. La théorie de Bohm ne considère pas cette extension et se concentre sur la forme la plus basique du modèle ; de Broglie avait, par ailleurs, rapidement abandonné sa nouvelle approche, en raison des nombreuses difficultés qu'il avait rencontrées. Il reprendra néanmoins ces idées dans la seconde moitié du xxe siècle, et jusqu'à la fin de sa vie, pour tenter de les développer rigoureusement. On peut distinguer trois tentatives successives. La première, sur laquelle nous travaillerons au chapitre 6, utilise des solutions symétriques en temps de l'équation de d'Alembert homogène

$$\Box u = 0, \tag{2.65}$$

que l'on peut écrire schématiquement sous la forme

$$u \sim e^{-i\omega t}\frac{\cos(\omega r)}{r}, \tag{2.66}$$



(a) Champ et figure d'interférences. (b) Trajectoires bohmiennes associées.

FIGURE 2.6 – Expérience des doubles fentes de Young dans le contexte et sous le formalisme de la mécanique bohmienne. Les conditions initiales d'une particule déterminent sa trajectoire, et la répartition statistique de ces dernières suit la règle de Born. On remarque en particulier que les particules ne traversent jamais la ligne médiane, de sorte que la mesure de leur position permet de déterminer par quelle fente elles sont passées. Pour un calcul historique, voir [71].

c'est-à-dire un terme de phase $e^{-i\omega t}$, couplé à une enveloppe oscillante dont l'amplitude décroît en $1/r$, à la manière des champs monopolaires électriques ou gravitationnels. Très rapidement, il s'intéresse plus particulièrement à l'équation de Klein-Gordon

$$\Box u + \omega_0^2 u = 0, \tag{2.67}$$

de sorte que le champ u possède maintenant une masse pour mieux représenter les particules. Cette nouvelle équation admet, elle aussi, des solutions de la forme

$$u \sim e^{-i\omega t}\frac{1}{r}. \tag{2.68}$$

Ces deux solutions ont l'intérêt de présenter deux ingrédients, un terme de phase $e^{-i\omega t}$ ainsi qu'une localisation de l'énergie centrée, par exemple, autour de la position d'une particule, et décroîssant rapidement en $1/r$. Par la suite, une troisième voie sera retenue par de Broglie, celle d'un champ s'exprimant comme la somme d'un terme linéaire v s'apparentant à l'onde de Schrödinger, et un terme non linéaire w représentant la particule

$$u = v + w. \tag{2.69}$$

Cela signifie qu'il est nécessaire de modifier l'équation d'onde pour y inclure des non-linéarités, qui seront naturellement difficiles à traiter ; la possibilité de représenter des particules comme des solitons dans un champ est, néanmoins, très intriguante. Dans ce travail, nous reprendrons la première approche, c'est-à-dire celle utilisant l'équation de d'Alembert, et montrerons qu'il est tout à fait possible de la rendre fonctionnelle malgré les difficultés. L'un des intérêts de l'équation de d'Alembert est qu'elle a le potentiel d'être bien plus générale qu'une équation de Klein-Gordon. En effet, cette dernière doit introduire une masse ω_0, qui sera responsable de la différentiation des particules. L'équation de d'Alembert ne

fait, quant à elle, aucune distinction entre les particules ; elle peut, néanmoins, faire émerger une masse effective $m \sim \sqrt{(\partial S)^2}$ sur l'onde de groupe, c'est-à-dire sur la répartition de l'énergie dans le champ, à l'instar de ce que nous avons vu dans le formalisme bohmien. Nous insistons bien sur le fait que cette onde n'est pas physique, et que l'équation d'onde de Klein-Gordon résultante n'est pas fondamentale, mais bien effective. Nous reviendrons sur tous ces points tout au long de ce document.

2.3.2 Quelques analogies hydrodynamiques

Bien plus récemment, des expériences macroscopiques ont ravivé beaucoup d'intérêt pour les interprétations mécaniques de la théorie quantique. En 2005 [16], et dans les années qui suivent, l'équipe de Yves Couder découvre qu'un système constitué d'une goutte, rebondissant sur un bain vibrant, présente des propriétés rappelant très fortement de nombreux aspects de la mécanique quantique. On voit par exemple apparaître des mouvements rectilignes ou orbitaux de la goutte [17], de la diffraction et des interférences [18], de l'effet tunnel [34], une quantification de certains mouvements circulaires, suivant les mêmes règles que pour les électrons orbitant dans un champ magnétique [35], et même une distribution statistique très proche de celle de la foncion d'onde de Schrödinger dans une cavité [53].

Ces expériences très fructueuses constituent un candidat très sérieux de dualité onde-particule macroscopique, basée sur un formalisme d'onde pilote. En effet, la goutte va, en rebondissant sur la surface du liquide, générer des ondes ; ces ondes affecteront en retour la goutte, qui pourra alors acquérir une dynamique en partie ondulatoire sous certaines conditions de couplage fort entre les deux objets. On voit par ailleurs que l'ingrédient essentiel de la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie, l'horloge interne, peut être associée aux oscillations verticales de la position de la goutte. Néanmoins, une différence majeure est présente : contrairement à l'approche de de Broglie, la goutte n'est pas en interaction constante avec le champ. Cette différence sera l'un des points distinguant le travail présenté ici, qui cherchera à se rapprocher le plus possible de l'intuition de de Broglie.

Ces analogues hydrodynamiques posent, en revanche, de sérieuses questions vis-à-vis du théorème de Bell. On a en effet, ici, un modèle respectant toutes les hypothèses de Bell, c'est-à-dire qu'il est réaliste, local et causal, et ne peut donc *a priori* pas violer les inégalités comme le fait la mécanique quantique. Cela pourraît donc très certainement constituer l'une des sources d'écarts par rapport aux expériences quantiques, dont certains sont déjà observés dans la distribution des motifs d'interférences notamment. Quoiqu'il en soit, ces expériences sont un très bon élément de comparaison pour notre travail, et l'on espère que de plus amples recherches seront menées pour mieux comprendre le lien qu'ont ces approches entre-elles, ainsi qu'avec la mécanique quantique.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de voir comment est arrivée l'interprétation de Copenhague, aujourd'hui dominante, dans la mécanique quantique. Elle est en effet basée sur l'abandon, dans nos théories et objets mathématiques, de toute quantité qui n'est pas observable. Par exemple, si nous savons, par nos observations, qu'un atome ne peut émettre de rayonnements que par une règle simple de différence d'énergie entre deux niveaux quantifiés, on cesse alors de considérer tout état du système qui ne correspondrait pas à l'un de ces niveaux d'énergie. Ce faisant, on abandonne l'idée de répondre au « pourquoi » des phénomènes, c'est-à-dire expliquer par quel processus un objet physique est tel qu'il est. On comprend ainsi bien mieux les débats tournant autour des inégalités de Bell, que nous avons également présentées, et en particulier sur la notion de réalisme.

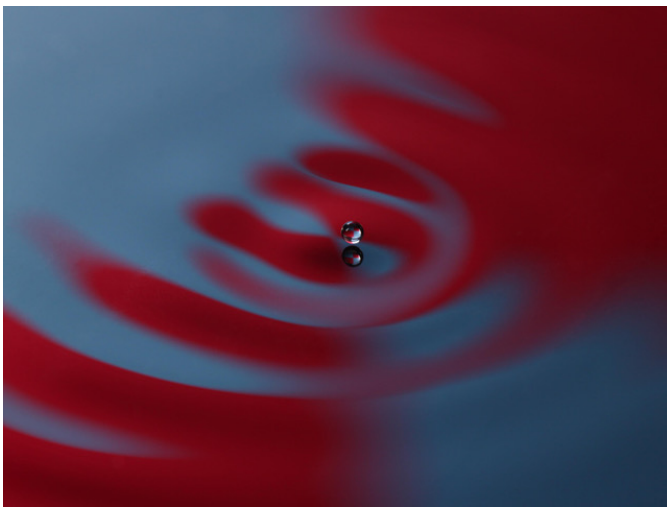


FIGURE 2.7 – Photographie de la goutte rebondissant sur le bain vibrant, qui génère une onde pilote autour d'elle [13]. Un tel système constitue un modèle hydrodynamique de dualité onde-particule.

À l'inverse, nous avons vu que cette approche n'est pas la seule voie que l'on puisse considérer, et nous avons en particulier évoqué la mécanique bohmienne, ou théorie de de Broglie-Bohm, qui fait le pari de se séparer de la localité des interactions, pour permettre à une onde, analogue à la fonction d'onde de Schrödinger, de guider les particules le long de chemins qui dévient des trajectoires classiques. Enfin, une dernière approche assez peu étudiée consiste à abandonner, sous une forme ou une autre, le principe de causalité, c'est-à-dire le fait que les causes et conséquences sont toujours ordonnées de la même manière sur l'axe des temps. Nous regarderons justement plus en détail cette dernière hypothèse dans la troisième partie de ce manuscrit. L'un des objectifs de ce travail est de pouvoir retrouver une description mécanique, chère à de Broglie, Einstein, et bien d'autres scientifiques du début du XXe siècle, qui pourra constituer un analogue de la mécanique quantique, voire une nouvelle interprétation alternative.

Deuxième partie

Modèles mécaniques de systèmes et phénomènes quantiques

Chapitre 3

Modèle mécanique de la dualité onde-particule

Introduction

Ayant réussi à nous situer dans le contexte historique et scientifique, nous allons, dans ce chapitre, développer un premier modèle simple de dualité onde-particule. L'objectif, ici, est de repartir d'une part des idées portées par Louis de Broglie dans les années 1920, en particulier celles qu'il a développées dans sa thèse de doctorat [21] ainsi que les divers articles et ouvrages qui l'ont entourée [20, 23, 24, 26], et en s'inspirant d'autre part d'un article récent de Christian Borghesi [8], afin de reconstruire un modèle classique, local et réaliste, d'une particule guidée par une onde pilote et pouvant ainsi reproduire certains des résultats de la théorie des quanta. Plus encore qu'un modèle de dualité onde-particule, nous cherchons à nous inspirer plus fortement de l'idée d'une théorie de la double solution, avec une onde de groupe pouvant représenter la particule. Le modèle que nous allons développer comporte cependant, comme nous le verrons par la suite, des différences avec ceux développés en particulier par de Broglie et Bohm. En effet, ces écarts permettent de traiter différemment certaines des difficultés rencontrées, ce qui mène naturellement à une résolution des problèmes de localité et variables cachées souvent qualifiée de « conspiration ». Au delà de ces spécificités, il existe également des limitations que nous devrons résoudre dans les chapitres suivants afin d'obtenir un modèle cohérent, mais nous choisissons dans un premier temps de nous limiter à un cas incomplet mais simple, de manière à démontrer la faisabilité de cette famille de modèles. Ces approximations et restrictions seront mentionnées au fur et à mesure de leur apparition, et nous en discuterons en conclusion du développement.

3.1 Description du système

Le système étudié consiste en deux éléments représentés sur la figure 3.1, d'une part une corde élastique de longueur infinie et de masse linéique λ, tendue avec une tension constante T le long de l'axe x, et d'autre part une masselotte ponctuelle de masse m_p située sur la corde à une position $x = x_\mathrm{p}$. La corde présente des oscillations transverses dans la direction z, représentées par un champ scalaire réel $u(t, x)$, tandis que la masselotte peut se déplacer sans frottement le long de x, tout en restant à tout instant en contact avec la corde, c'est-à-dire que sa position verticale z_p sera donnée par

$$z_\mathrm{p}(t) = u(t, x_\mathrm{p}(t)). \tag{3.1}$$

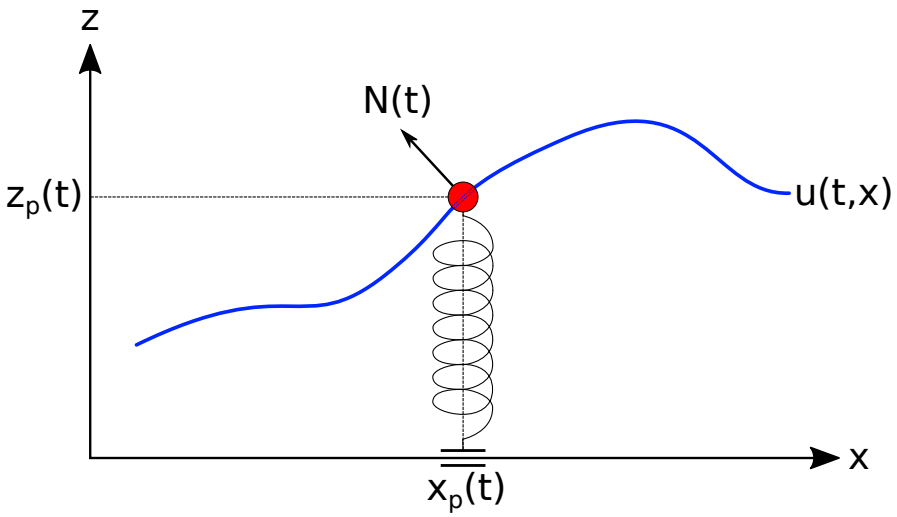


FIGURE 3.1 – Schéma du système 1D constitué d'une corde vibrante en bleu qui sera le support d'une onde $u(t,x)$, d'une masselotte en rouge de coordonnées $(x_\mathrm{p}(t), z_\mathrm{p}(t))$ glissant sans frottement sur la corde, et de la force de rappel harmonique représentée par un ressort.

Enfin, pour intégrer à ce système l'intuition de Louis DE BROGLIE décrite précédemment, nous rajoutons à la masselotte une force de rappel harmonique de pulsation propre ω_p, pouvant être par exemple représentée mécaniquement par un ressort, qui jouera alors le rôle d'horloge interne pour la particule. Très naturellement, cette horloge se couplera aux oscillations du champ, de sorte que nous pourrons espérer retrouver les résultats de de Broglie concernant la dualité onde-particule, le champ u remplaçant ici l'onde de phase de sa théorie de l'onde pilote.

La corde exerce sur la masselotte une force de réaction $\vec{\boldsymbol{N}}(t)$ normale à la corde au point x_p qui pourra être approximée comme verticale dans la limite des petites amplitudes d'oscillations. La force de rappel exercée par le ressort sur la masse elle-même tendra à combattre la force $\vec{\boldsymbol{N}}$ si cette dernière éloigne la masselotte de sa position de repos, et il sera alors possible d'observer un rayonnement de la masselotte dans le champ u. Enfin, nous nous limitons à ce stade à une approximation non relativiste justifiée par la nature mécanique de ce système. Pour étendre ce dernier au cas d'une particule comme un électron, il sera bien entendu nécessaire de tenir compte des effets relativistes, ce que nous ferons par la suite.

3.1.1 Obtention des équations du mouvement

Afin d'obtenir les équations du mouvement pour les différents éléments du système, nous choisissons d'utiliser un formalisme lagrangien en partant de l'action A du système, définie par

$$A = \int \mathrm{d}t\, L_\mathrm{p} + \int \mathrm{d}t\, L_\mathrm{int.} + \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L}_\mathrm{c} \tag{3.2}$$

où L_p, $L_\mathrm{int.}$ et $\mathcal{L}_\mathrm{c}$ sont respectivement les Lagrangiens de la particule et d'interaction entre la particule et le champ, et la densité lagrangienne du champ. La stationnarisation de cette action $\delta A = 0$ nous amènera aux équations d'Euler-Lagrange puis aux équations du mouvement pour u, x_p et z_p. Le détail du calcul des équations d'Euler-Lagrange à partir du principe variationnel et de la stationnarisation de l'action pourra être trouvé en annexe A.

Lagrangien de la particule

Si nous plaçons les positions de repos du ressort et de la corde en $z = 0$, de sorte que la particule sera toujours ramenée vers cette ligne, nous pouvons écrire le potentiel dû au ressort de raideur k_p

$$V(z_\mathrm{p}) = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} \omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p}^2 \tag{3.3}$$

avec $k_\mathrm{p} = m_\mathrm{p}\omega_\mathrm{p}^2$. En prenant d'autre part l'énergie cinétique non-relativiste de la masselotte, nous en déduisons son Lagrangien

$$L_\mathrm{p}(t, z_\mathrm{p}, v_\mathrm{p}) = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v_\mathrm{p}^2 - \frac{1}{2} m_\mathrm{p} \omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p}^2 \tag{3.4}$$

où l'on a introduit la vitesse $v_\mathrm{p} = \left|\vec{\boldsymbol{v}}_\mathrm{p}\right| = \left|v_{\mathrm{p},x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_{\mathrm{p},z}\hat{\boldsymbol{e}}_z\right|$. L'application du principe variationnel de Lagrange sur ce Lagrangien seul nous donne très rapidement les équations du mouvement pour x_p et z_p en l'absence du champ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_\mathrm{p}}{\partial \dot{x}_\mathrm{p}} - \frac{\partial L_\mathrm{p}}{\partial x_\mathrm{p}} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_\mathrm{p}}{\partial \dot{z}_\mathrm{p}} - \frac{\partial L_\mathrm{p}}{\partial z_\mathrm{p}} = 0 \tag{3.6}$$

ou encore

$$m_\mathrm{p}\ddot{x}_\mathrm{p} = 0 \tag{3.7}$$

$$m_\mathrm{p}\left(\ddot{z}_\mathrm{p} + \omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p}\right) = 0 \tag{3.8}$$

qui sont les équations de Newton habituelles pour une particule n'étant soumise qu'à une force de rappel harmonique dans une direction : on observe un mouvement uniforme selon x et un mouvement harmonique selon z.

Densité lagrangienne du champ

La densité lagrangienne du champ $\mathcal{L}_\mathrm{c}$ peut être obtenue dans la limite des petites amplitudes d'oscillation en considérant un continuum de ressorts de raideur constante [1], et est donnée par

$$\mathcal{L}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2. \tag{3.9}$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \tag{3.10}$$

nous donnent de la même manière une équation de d'Alembert sans terme source pour u en l'absence de la masselotte

$$\partial_t^2 u(t,x) - c^2\partial_x^2 u(t,x) = \Box u(t,x) = 0 \tag{3.11}$$

avec $c = \sqrt{T/\lambda}$ la vitesse des ondes transverses sur la corde.

1. Voir annexe.

Lagrangien d'interaction

Enfin, le Lagrangien d'interaction peut être écrit en introduisant un multiplicateur de Lagrange N qui se trouvera être identifié à la force de réaction du champ sur la particule

$$L_{\text{int.}} = N(t)\big(z_{\text{p}}(t) - u(t, x_{\text{p}}(t))\big) \tag{3.12}$$

ce qui, après dérivation sur N, fait apparaître à nouveau la contrainte holonome discutée précédemment

$$z_{\text{p}}(t) = u(t, x_{\text{p}}(t)). \tag{3.13}$$

Si nous considérons ces trois Lagrangiens en même temps dans l'action totale (3.2), les équations homogènes sont transformées par l'introduction de termes sources obtenus en dérivant le lagrangien (3.12) par rapport à u et z_{p}, et nous obtenons ainsi un système d'équations différentielles couplées

$$m_{\text{p}}\ddot{x}_{\text{p}}(t) = -\partial_x u(t,x)|_{x=x_{\text{p}}(t)}\, N(t) \tag{3.14}$$

$$m_{\text{p}}\ddot{z}_{\text{p}}(t) = N(t) - m_{\text{p}}\omega_{\text{p}}^2 z_{\text{p}}(t) \tag{3.15}$$

$$\Box u(t,x) = -\frac{N(t)}{T}\delta(x - x_{\text{p}}(t)). \tag{3.16}$$

3.1.2 Discussion

Tout d'abord il nous est possible d'éliminer la force $N(t)$ si nous le souhaitons, de sorte que nous obtenons pour $x_{\text{p}}(t)$

$$\ddot{x}_{\text{p}}(t) = -\partial_x u(t,x)|_{x=x_{\text{p}}(t)} \left(\ddot{z}_{\text{p}}(t) + \omega_{\text{p}}^2 z_{\text{p}}(t)\right) \tag{3.17}$$

et de la même manière pour $u(t,x)$

$$\Box u(t,x) = -m_{\text{p}}\frac{\ddot{z}_{\text{p}}(t) + \omega_{\text{p}}^2 z_{\text{p}}(t)}{T}\delta(x - x_{\text{p}}(t)). \tag{3.18}$$

Cependant, nous n'utiliserons pas ces autres formes pour les équations car elles ne s'avèrent pas pratiques à l'utilisation et, comme nous le verrons, nous étudierons des situations dans lesquelles les équations sont dans tous les cas découplées et où le problème ne se pose donc pas. Cette expression pour l'équation sur x_{p} permet néanmoins de constater que la dynamique horizontale de la particule est en apparence indépendante de sa masse m_{p}.

Il est d'autre part entièrement possible de généraliser ou complexifier plus encore le modèle, en particulier en ce qui concerne le champ u. En effet, nous pouvons par exemple considérer un champ scalaire massique pour u, c'est-à-dire que l'équation d'onde deviendra une équation de Klein-Gordon, et les fréquences du champ seront modifiées selon $\omega^2 \to \omega^2 - \omega_0^2$, avec ω_0 la masse du champ u.

3.2 Résolution des équations

Nous nous intéresserons dans la suite de ce document à un régime en particulier, caractérisé par la condition $N(t) = 0$, c'est-à-dire pour lequel la force de réaction du champ sur la masse s'annule à tout temps. En effet, dans un tel cas, les équations du mouvement

perdent toutes leurs termes source et nous retrouvons un ensemble d'équations différentielles homogènes non couplées :

$$\ddot{x}_{\mathrm{p}}(t) = 0 \tag{3.19}$$

$$\ddot{z}_{\mathrm{p}}(t) = -\omega_{\mathrm{p}}^2 z_{\mathrm{p}}(t) \tag{3.20}$$

$$\Box u(t,x) = 0. \tag{3.21}$$

Nous appelons ce régime « transparence » [33] ou encore « symbiose » [8], car le champ et la particule évoluent chacun sans perturber la dynamique de l'autre. Il est très important de noter que le champ et la particule ne sont pas pour autant découplés ; en effet même si la force de réaction N est nulle, la contrainte holonome est toujours en place et implique donc que les dynamiques de ces deux objets sont étroitement liées, comme nous allons le voir. L'absence d'interaction a donc pour effet d'amener une corrélation parfaite entre ces deux dynamiques, et de les rendre stables. En particulier, nous obtenons un mouvement à vitesse constante selon x – réminiscent des idées de de Broglie, un mouvement harmonique selon z, et une évolution homogène du champ u. Il nous aurait été possible de choisir n'importe lequel de ces résultats comme hypothèse de départ à la place du choix $N(t) = 0$, ce qui peut être plus ou moins pertinent selon l'interprétation que nous faisons d'une telle dynamique. Quoiqu'il en soit, ce régime semble caractéristique d'une forme de dualité onde-particule, comme nous le verrons et discuterons par la suite, après avoir résolu ces équations.

Concentrons-nous dans un premier temps sur la particule avant de chercher les solutions pour le champ. Nous voyons d'une part que nous avons un mouvement à vitesse constante v_{p} pour x_{p} :

$$x_{\mathrm{p}}(t) = v_{\mathrm{p}} t + x_{\mathrm{p,i}} \tag{3.22}$$

où $x_{\mathrm{p,i}}$ est la position initiale de la masselotte au temps $t = 0$, tandis que pour z_{p} nous obtenons

$$z_{\mathrm{p}}(t) = z_0 \cos\left(\omega_{\mathrm{p}} t + \varphi\right) \tag{3.23}$$

avec z_0 et φ respectivement l'amplitude d'oscillation ainsi que la phase à $t = 0$, qui seront toutes deux contraintes par une autre équation. Ainsi, la particule se déplace uniformément selon l'axe x, tout en oscillant verticalement à la pulsation ω_{p}.

Le champ admet également diverses solutions, qui s'écrivent sous la forme

$$u(t,x) = f\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + g\Big(t + \frac{x}{c}\Big) \tag{3.24}$$

avec f et g deux fonctions très générales. Intuitivement, cela signifie que la solution générale peut s'écrire comme la superposition de deux ondes se propageant l'une dans la direction $+x$, l'autre $-x$. Mais bien entendu, nous avons à ce stade peu de contraintes sur ces fonctions, et il nous est en particulier possible de considérer des cas où $g = 0$. Il nous suffit alors d'appliquer de nouveau la condition holonome qui relie le champ et la particule, c'est à dire

$$u(t, x_{\mathrm{p}}(t)) = f\left(t - \frac{x_{\mathrm{p}}(t)}{c}\right) = z_{\mathrm{p}}(t) = A\cos\left(\omega_{\mathrm{p}} t + \varphi\right). \tag{3.25}$$

Il vient très rapidement que

$$f\Big(t\Big(1 - \frac{v_{\mathrm{p}}}{c}\Big) - \frac{x_{0,\mathrm{i}}}{c}\Big) = z_0 \cos\left(\omega_{\mathrm{p}} t + \varphi\right) \tag{3.26}$$

et donc au final

$$f(t) = z_0 \cos\left[\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{1 - \frac{v_{\mathrm{p}}}{c}}\Big(t + \frac{x_{\mathrm{p,i}}}{c}\Big) + \varphi\right]. \tag{3.27}$$

Il serait évidemment possible de faire le même développement pour le cas $f = 0$ et $g \neq 0$, et nous obtiendrions une solution symétrique où l'on devrait échanger les signes devant certains termes, le reste de la discussion restant cependant identique. Cette solution correspond à une onde monochromatique de pulsation $\omega_\mathrm{p}/(1 - v_\mathrm{p}/c)$ se déplaçant avec une vitesse c dans la direction $+x$, tandis que la particule se déplace, comme nous l'avons dit, à vitesse constante sur cette onde. Afin de préserver la contrainte holonome $z = u$, nous voyons qu'il est nécessaire d'ajuster la fréquence du champ en fonction du rapport des vitesses de l'onde et de la particule. Ceci correspond très simplement à un décalage Doppler des fréquences : en effet, si nous imaginons que c'est la masse qui est source de ce champ – puisque ce dernier est en phase avec le mouvement de la particule en sa position – la fréquence de l'onde émise dans la direction de son mouvement sera d'autant plus élevée qu'elle se déplacera rapidement. Inversement, si nous avions considéré la solution g, les fréquences auraient été abaissées d'un facteur $1/(1 + v_\mathrm{p}/c)$. Nous constatons d'autre part qu'il existe une divergence pour les solutions f lorsque v_p tend vers c, c'est à dire lorsque la particule atteind le mur du son. Cette observation aura son importance par la suite, nous ferons cependant deux remarques à ce stade.

I. Cette divergence, ainsi que la forme même du facteur $1/(1-v_\mathrm{p}/c)$, est très réminiscente de ce que l'on peut observer en relativité restreinte lorsque les objets tendent vers la vitesse de la lumière. Ceci n'est pas une surprise, si l'on regarde plus en détails le développement de la relativité restreinte et le rôle qu'y ont joué les ondes électromagnétiques. Malgré l'absence de tout traitement relativiste pour la particule dans nos équations, il apparaît très naturellement une sorte de relativité analogue dans laquelle la corde, c'est à dire le champ, prend le rôle de l'espace-temps, et la vitesse des ondes sur cette corde joue le rôle de vitesse limite.

II. Cette analogie a bien évidemment ses limites, en particulier la vitesse c introduit ici une singularité et non une réelle limite physique ; nous pouvons ainsi tout à fait avoir des objets qui la dépassent et sont ainsi « supraluminiques » – en réalité supersoniques –, ou même traversent le mur du son. Malgré ces différences, ces analogues restent très intéressants et pourraient même permettre d'étudier indirectement le comportement d'objets supraluminiques, les tachyons. Ils sont aujourd'hui des sujets d'étude très actifs, notamment pour la création de trous noirs acoustiques.

Cette solution pour la transparence est intéressante, mais nous souhaitons étudier un cas un peu plus général, qui nous rapprochera en même temps des idées d'une théorie de la double solution de Louis de Broglie, ainsi que du travail développé dans les prochains chapitres.

Ainsi, nous cherchons un champ u qui apparaîtrait stationnaire dans le référentiel de la particule, c'est-à-dire dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à vitesse v_p par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Les transformations de Galilée

$$t' = t \tag{3.28}$$

$$x' = x - vt \tag{3.29}$$

ne permettent malheureusement pas une telle stationarisation du champ. Ceci se comprend relativement simplement pour diverses raisons : en effet, d'une part les équations d'onde de type d'Alembert sont fondamentalement relativistes. Leur symétrie est lorentzienne, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes sous transformation de Lorentz (et non de Galilée), ce qui bien entendu va se traduire sur les solutions elles-mêmes. L'autre point est que cette stationnarisation est faite, comme nous l'avons discuté précédemment, dans le but de synchroniser des horloges ; or, cette procédure est également l'une des idées fondatrices de la relativité restreinte. Ce second argument est mathématiquement moins fort que le premier, mais permet

d'apporter une dimension plus intuitive : la synchronisation à distance nécessite la propagation d'une information or, sur une corde comme dans l'espace-temps, cette propagation ne peut se faire qu'à vitesse finie c.

Ainsi, une transformation de Lorentz de la forme

$$t' = \gamma_{\mathrm{p}}\Big(t - \frac{v_{\mathrm{p}}}{c^2}x\Big) \tag{3.30}$$

$$x' = \gamma_{\mathrm{p}}\big(x - v_{\mathrm{p}}t\big), \tag{3.31}$$

avec γ_{p} le facteur de Lorentz pour la particule défini comme

$$\gamma_{\mathrm{p}} = \gamma(v_{\mathrm{p}}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\mathrm{p}}^2}{c^2}}}, \tag{3.32}$$

permet de stationnariser le champ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Il faut cependant alors réfléchir à la nature de ce référentiel, et plusieurs pistes s'offrent à nous. La particule étant définie comme parfaitement newtonienne, on peut considérer que les coordonnées t' et x' ne sont qu'un artifice mathématique nous permettant d'obtenir le résultat désiré, mais qu'elles ne représentent rien de physique. Il est bien entendu également possible de considérer cette nécessité d'avoir des transformations de Lorentz comme un symptôme d'un problème beaucoup plus profond dans ce type de modèles. En effet, nous essayons de coupler une particule newtonnienne avec un champ solution de l'équation de d'Alembert qui est, et nous n'avons pas le choix sur ce point, fondamentalement relativiste. En poursuivant dans cette voie il faudra donc s'attendre à voir apparaître d'autres incohérences de ce type ; ceci ne pourra se résoudre, comme nous le verrons au prochain chapitre, que par un formalisme entièrement relativiste. Pour l'heure cependant, un tel formalisme n'est pas adapté à la nature du problème que nous considérons, et nous avons tout à fait le droit de ne regarder ces transformations de Lorentz que comme un outil mathématique pour arriver au résultat attendu : ces coordonnées (t', x') n'ont en réalité aucune nécessité de représenter des quantités physiques.

Nous cherchons donc une solution dans le référentiel en mouvement $\mathcal{R}'$ sous la forme $u'(t', x') = f(t')g(x')$, de sorte que l'on peut séparer le temps et l'espace dans le d'Alembertien

$$\Box' u' = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t'^2}g - f\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x'^2} = 0 \tag{3.33}$$

et le transformer en un système de deux équations

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t'^2} + \omega'^2 f = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2}g = 0 \tag{3.35}$$

avec ω' une constante. Les deux fonctions f et g étant manifestement harmoniques, nous obtenons très simplement

$$u'(t', x') = u_0 \cos\left(\omega' t' + \eta\right) \cos\left(\frac{\omega'}{c}x' + \xi\right), \tag{3.36}$$

et si nous revenons dans le référentiel du laboratoire

$$u(t, x) = u_0 \cos\left[\omega'\gamma_{\mathrm{p}}\Big(t - \frac{v_{\mathrm{p}}}{c^2}x\Big) + \eta\right] \cos\left[\omega'\gamma_{\mathrm{p}}\left(\frac{x - v_{\mathrm{p}}t}{c}\right) + \xi\right]. \tag{3.37}$$

De même que dans le cas précédent, nous pouvons déterminer les différentes constantes ω', u_0, η et ξ en imposant la contrainte holonome, et donc en calculant le champ à la position de la particule

$$u(t, x_\mathrm{p} = v_\mathrm{p} t + x_\mathrm{p,i}) = u_0 \cos\left(\frac{\omega'}{\gamma_\mathrm{p}} t + \eta - \frac{\omega' \gamma_\mathrm{p} x_\mathrm{p,i} v_\mathrm{p}}{c^2}\right) \cos\left(\frac{\omega'}{c} \gamma_\mathrm{p} x_\mathrm{p,i} + \xi\right) \tag{3.38}$$

puis en comparant cette expression avec l'équation (3.23), nous en déduisons la phase

$$\varphi = \eta - \frac{\omega' \gamma_\mathrm{p} x_\mathrm{p,i} v_\mathrm{p}}{c^2}, \tag{3.39}$$

l'amplitude

$$z_0 = u_0 \cos\left(\frac{\omega'}{c} \gamma_\mathrm{p} x_\mathrm{p,i} + \xi\right) \tag{3.40}$$

et surtout la fréquence

$$\omega_\mathrm{p} = \frac{\omega'}{\gamma_\mathrm{p}}. \tag{3.41}$$

Ce dernier résultat en particulier est en désaccord avec celui obtenu par de Broglie, $\omega_\mathrm{p} = \omega'$. Ceci s'explique une fois de plus par la nature mixte relativiste et newtonienne de ce modèle, et est un problème qui pourra être simplement résolu. Il est intéressant de noter par ailleurs que seule cette expression sera modifiée lors du passage à un formalisme entièrement relativiste, nous pourrions donc reprendre la condition d'accord des phases de de Broglie comme étant notre hypothèse de départ, et obtiendrions alors nécessairement les transformations de coordonnées relativistes. Quoiqu'il en soit, nous voyons qu'il est possible de retrouver cette relation centrale de la théorie des quanta par des considérations entièrement mécaniques. Cela met en évidence une fois de plus que la condition d'harmonie des phases, ou dit autrement de synchronisation à distance des horloges, est un élément très important de ces théories. Nous constatons également que la théorie des quanta, et par extension la mécanique quantique, puise ses origines dans la théorie de la relativité et n'est peut-être que l'intégration de la dualité onde-particule en son sein. En effet nous verrons dans la prochaine section et surtout les prochains chapitres, que cette seule relation entre les fréquences du champ et de la particule peut être choisie comme étant l'origine et la cause d'un grand nombre de phénomènes quantiques, ce qu'avait justement identifié de Broglie.

3.3 Le régime de la transparence comme dualité onde-particule

3.3.1 La génération et l'évolution du champ

Si nous souhaitons réaliser en laboratoire une expérience reproduisant ce modèle, comment pourrions-nous générer le champ adéquat ? La réponse est extrêmement simple et se trouve dans l'équation (3.24). En effet, même s'il serait possible de générer directement le champ modulé (3.37), nous pouvons garder à l'esprit que les solutions propres de l'équation de d'Alembert sont en réalité deux ondes monochromatiques contre-propagatives. En particulier, dans le référentiel de la particule $\mathcal{R}'$, ces deux ondes ont pour fréquence ω', et on a

$$u'(t', x') = \frac{B}{2}\left\{\cos\left[\omega'\left(t' + \frac{x'}{c}\right) + \eta + \xi\right] + \cos\left[\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \eta - \xi\right]\right\}, \tag{3.42}$$

ou encore dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

$$u(t, x) = \frac{B}{2}\left\{\cos\left[\omega'\gamma_\mathrm{p}\left(1 - \frac{v_\mathrm{p}}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right) + \eta + \xi\right] + \cos\left[\omega'\gamma_\mathrm{p}\left(1 + \frac{v_\mathrm{p}}{c}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right) + \eta - \xi\right]\right\}. \tag{3.43}$$

Nous avons donc bien ici un champ u exprimé sous la forme de la somme de deux ondes contrepropagatives $u = u_+ + u_-$, chacune des deux fréquences $\omega_\pm$ associées aux ondes $u_\pm$ ayant subi un décalage Doppler approprié

$$\omega_\pm = \frac{1 \pm \frac{v_\mathrm{p}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\mathrm{p}}{c}\right)^2}}\omega'. \tag{3.44}$$

Cette approche est très utile pour permettre de générer expérimentalement le champ u, mais présente une autre propriété qu'il est très intéressant d'étudier, et sur laquelle nous reviendrons à plusieurs reprises. En imaginant qu'un tel champ accompagne effectivement le mouvement de chaque particule, comme le propose de Broglie, il est apparent qu'un problème de causalité survient. En effet, comment expliquer que la source du champ, située à l'infini, connaisse à l'avance les bonnes amplitude, fréquence et phase pour accomoder le mouvement de la particule et ses caractéristiques ? Puisqu'ici le modèle est mécanique, donc entièrement local, et que par ailleurs nous imposons une hypothèse de causalité, il ne reste à notre disposition qu'une forme de superdéterminisme. Cette particularité de notre modèle est souvent surnommée « conspiration », pour mettre en avant la nature suspecte de cette synchronisation à distance. D'autres versions du superdéterminisme apparaîssent sous d'autres noms dans des modèles équivalents, par exemple dans les analogues hydrodynamiques où l'idée d'une « mémoire » est évoquée. Quoiqu'il en soit, il est important de noter que cette nature superdéterministe semble être commune à toutes les approches mécaniques de la dualité onde-particule et de la théorie quantique, bien qu'étant rarement explicite.

Pour revenir au sujet de notre modèle, regardons la forme du champ prédite à deux instants proches sur la figure 3.2. L'onde de phase de de Broglie, ici de grande longueur d'onde, a été mise en évidence par rapport au champ total et à l'onde de groupe. Les flèches représentant la position d'un objet donné à deux instants différents nous confirment que la vitesse de l'onde de phase est très élevée comparée à celle de l'onde de groupe ou, de manière équivalente, de la particule. Souvenons-nous que l'onde qui transporte l'énergie est l'onde de groupe, autrement dit la répartition de l'énergie est modulée par cette dernière. Nous sommes encore loin d'une singularité dans le champ à la position de la particule, mais la forme présente ici peut déjà y laisser penser. En particulier, il est intéressant de voir que nous pourrions placer un grand nombre de particules identiques sur ce même champ, approche qu'avait par ailleurs considérée de Broglie dans son traitement du corps noir. En des termes modernes, nous avons donc un système qui permet de mettre en place une statistique bosonique, ou du moins y laisse penser. Nous ne nous attarderons pas plus sur ces aspects dans le cas de ce modèle simpliste, mais quelques questions s'offrent dès lors à nous. Ayant ici un champ scalaire, il semble naturel qu'il fasse apparaître des comportements de nature bosonique. Serait-il alors possible d'obtenir un modèle mécanique se rapprochant d'une statistique fermionique, c'est-à-dire représentant des spineurs ; et, si oui, comment procéder pour le mettre en œuvre ? Un spineur pouvant être construit à partir de deux champs scalaires, nous pouvons imaginer qu'un mouvement de la corde dans une direction y normale à z et x puisse suffire. Il est plus probable qu'un système constitué d'une masselotte couplée à deux cordes vibrantes présente de meilleures propriétés fermioniques. Quoiqu'il en soit, nous verrons dans le dernier chapitre de cette thèse qu'il devient très simple et intuitif d'effectuer cette généralisation à l'aide d'un modèle plus général et complexe que celui étudié présentement.

Nous pouvons maintenant examiner plus en détails la seule onde de phase, qui selon de Broglie est l'objet d'importance dans la détermination de la dynamique de la particule.

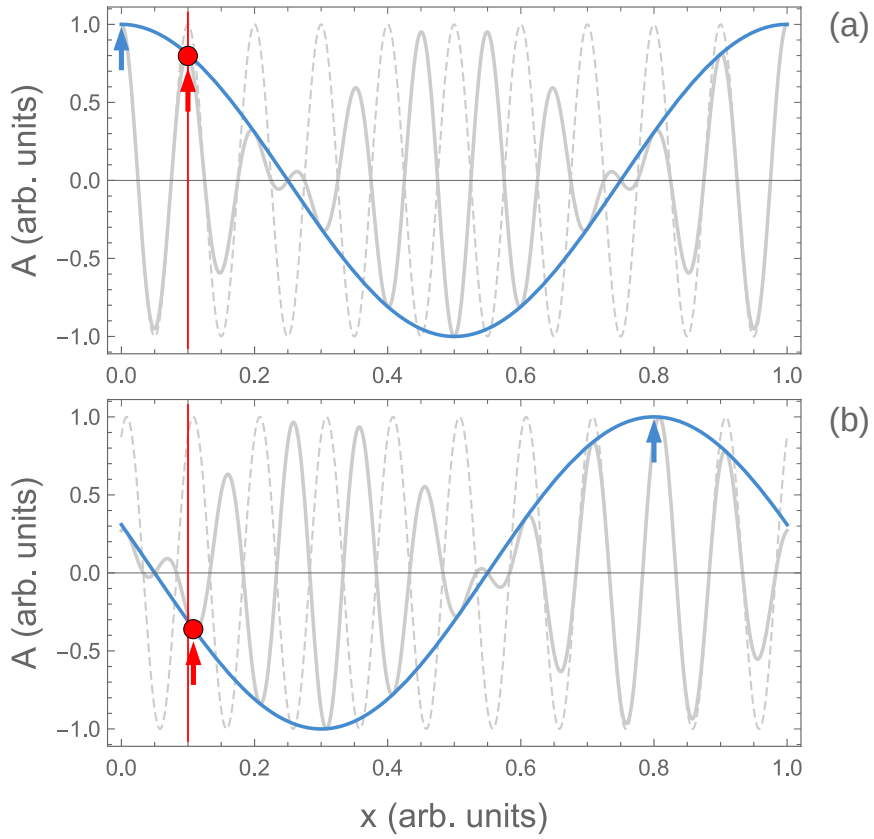


FIGURE 3.2 – Le régime de la transparence pour une particule (cercle rouge) de vitesse $v_\mathrm{p} = 0.1\ c$, et de position initiale $x_{\mathrm{p},i} = 0.1\ L$. L et c sont fixés arbitrairement à une valeur unité par simplicité et en toute généralité. Le champ total est représenté en trait épais gris, l'onde de groupe par la ligne brisée grise et l'onde de phase par le trait plein bleu. Les deux images (a) et (b) ont été prises à deux instants légèrement différents, et des flèches indicatrices des positions d'un même point du champ (point de phase pour la flèche bleue, particule/point de l'onde de groupe pour la flèche rouge) ont été ajoutées pour aider la lecture.

La phase de cette « onde » s'écrit dans les référentiels $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$:

$$S(t', x') = \omega' t' + \eta = \omega t - kx + \eta = S(t, x), \tag{3.45}$$

avec $\omega = \omega' \gamma_\mathrm{p}$ et $k = \omega v_\mathrm{p}/c$. Les quantités ω et k sont par ailleurs reliées par la relation de dispersion

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega'^2}{c^2}, \tag{3.46}$$

que l'on reconnaît comme étant celle d'une solution ψ de l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\psi(t, x) = -\frac{\omega'^2}{c^2}\psi(t, x) \tag{3.47}$$

avec

$$\psi(t, x) = \psi_0 e^{iS(t,x)}. \tag{3.48}$$

Ce point est extrêmement important, puisqu'il traduit la nature de cette onde de phase ψ. On peut, autant qu'on le souhaite, la considérer comme une onde élémentaire de masse $m \sim \omega'$ se propageant selon une équation d'onde de type Klein-Gordon. Ce faisant, on laisse de côté l'onde de groupe, et seules la particule et son onde pilote ψ subsistent. Ce

que montre ce chapitre, c'est qu'une telle onde ne peut pas, en revanche, avoir d'existence intrinsèque, c'est-à-dire indépendante d'une onde de groupe ou d'un champ total. Ce que l'on entend par là, est qu'il ne s'agit pas d'une onde physique, mécanique, ou classique, du simple fait qu'elle se propage à une vitesse différente de – et supérieure à – c. Bien sûr, on peut considérer qu'il s'agit d'un nouveau type d'objet, comme le fait par exemple la mécanique bohmienne ou même, dans une moindre mesure, la mécanique de Schrödinger ; il n'est cependant nullement nécessaire d'y recourir pour observer des phénomènes quantiques comme on pourrait le penser au premier abord. Une onde purement classique et mécanique, comme celle se propageant sur une corde vibrante, peut faire émerger une onde de phase ψ qui jouera le rôle d'onde pilote de de Broglie, à la condition que l'on impose une contrainte de synchronisation comme la condition holonome (3.1) présentée ici. Si l'on souhaite développer des analogues mécaniques de la théorie quantique, ou bien utiliser des objets déjà existants comme par exemple le champ électromagnétique pour prédire de nouveaux phénomènes, c'est probablement la solution qu'il faut favoriser.

3.3.2 La solution tachyonique symétrique

Il existe une solution totalement symétrique à celle présentée plus haut pour la dynamique de ce système. En effet, puisque nous avons un modèle mécanique et newtonien où la vitesse c représente la vitesse du son plutôt que celle de la lumière, il est tout à fait possible en théorie de préparer une masselotte supersonique. En revanche, et manière analogue à la théorie de la relativité, cela ne veut pas dire que ladite particule peut traverser le mur du son ; on s'attendra d'ailleurs à ce que cette limite reste inviolable à la condition que toutes les interactions et forces restent internes au système – c'est-à-dire qu'elles ne proviennent que du rayonnement de la particule dans le champ et de la réaction de ce dernier. Néanmoins, puisque nous pouvons imposer des conditions initiales supersoniques, un tel modèle devient un terrain d'étude particulièrement intéressant pour la relativité elle-même, et en particulier pour les particules hypothétiques nommées *tachyons*.

Pour traiter mathématiquement ces objets, une astuce consiste à inverser les rôles du temps et de l'espace, c'est-à-dire d'appliquer une symétrie miroir sur l'espace-temps par rapport au cône de lumière. Les transformations de Lorentz (3.30) et (3.31) deviennent pour une particule ayant une vitesse $w_\mathrm{p} > c$:

$$t' = \frac{1}{c}\Gamma_\mathrm{p}\big(w_\mathrm{p}t - x\big) \tag{3.49}$$

$$x' = c\Gamma_\mathrm{p}\Big(\frac{w_\mathrm{p}}{c^2}x - t\Big), \tag{3.50}$$

avec un nouveau facteur de Lorentz [2]

$$\Gamma_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{\frac{w_\mathrm{p}^2}{c^2} - 1}}. \tag{3.51}$$

En procédant de la même manière que dans la section précédente, on déduit le champ u associé à ce tachyon sous sa forme de produit

$$u(t,x) = B\cos\left[-\frac{\omega'}{\Gamma_\mathrm{p}}(x - w_\mathrm{p}t) + \eta\right]\cos\left[-\omega'\Gamma_\mathrm{p}\Big(t - \frac{w_\mathrm{p}}{c^2}x\Big) + \xi\right] \tag{3.52}$$

Le point le plus intéressant de ce développement est que le champ total se trouve en réalité être identique au cas *bradyonique* (subsonique) d'une particule se déplaçant à une

2. Il s'agit du facteur de Lorentz habituel qui devient imaginaire si la vitesse est supérieure à c. On le transforme pour conserver un terme réel, en sortant le i qui sera injecté ailleurs : $\sqrt{1-a} = i\sqrt{a-1}$.

vitesse $v_\mathrm{p} = c^2/w_\mathrm{p}$. Ce sont les deux composantes de groupe et de phase qui sont échangées, de sorte que l'énergie se déplace à vitesse $w_\mathrm{p} > c$ au travers d'une onde de grande longueur d'onde, tandis que la phase, de petite longueur d'onde, se déplace à la vitesse $v_\mathrm{p} < c$, comme illustré sur la figure 3.3. Si, par ailleurs, la particule tachyonique possède une fréquence propre Ω_p, nous déduisons sa relation avec la fréquence du champ comme précédemment

$$\Omega_\mathrm{p} = \frac{\omega'}{\Gamma_\mathrm{p}} = \frac{\omega'}{\gamma_\mathrm{p}}\frac{c}{v_\mathrm{p}}, \tag{3.53}$$

d'où

$$\Omega_\mathrm{p} = \omega_\mathrm{p}\frac{c}{v_\mathrm{p}} = \omega_\mathrm{p}\frac{\gamma_\mathrm{p}}{\Gamma_\mathrm{p}} > \omega_\mathrm{p}. \tag{3.54}$$

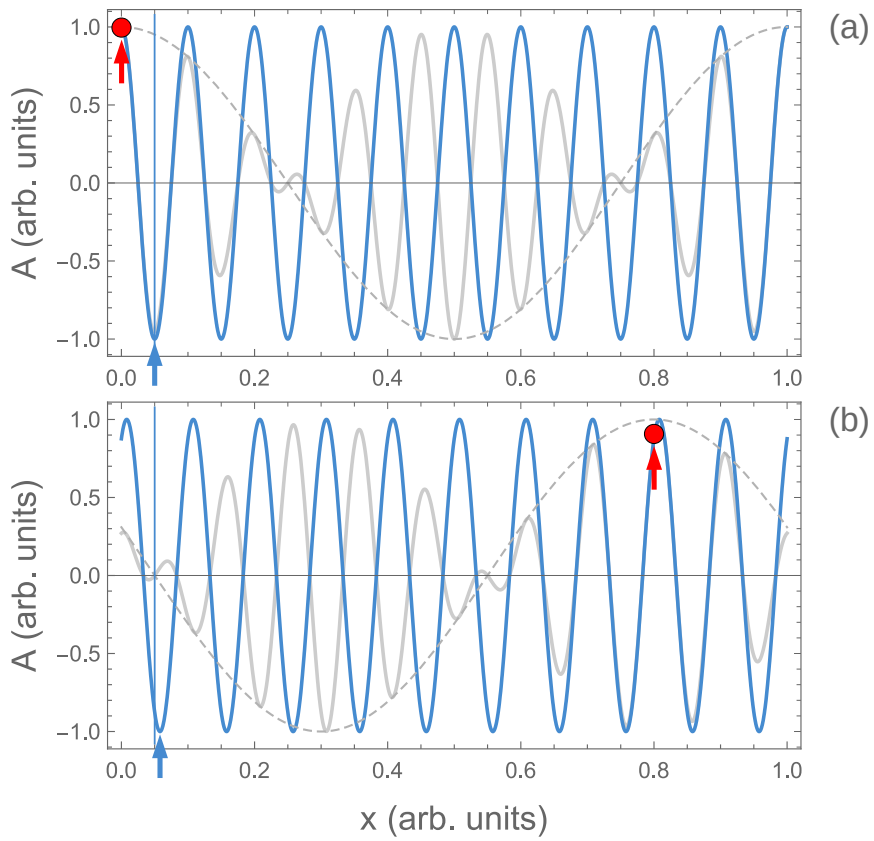


FIGURE 3.3 – Le régime de la transparence pour une particule (cercle rouge) de vitesse $w_\mathrm{p} = 10\ c$, et de position initiale $X_{\mathrm{p},i} = 0.1\ L$. L et c sont fixés arbitrairement à une valeur unité par simplicité et en toute généralité. Le champ total est représenté en trait épais gris, l'onde de groupe par la ligne brisée grise et l'onde de phase par le trait plein bleu. Les deux images (a) et (b) ont été prises à deux instants légèrement différents, et des flèches indicatrices des positions d'un même point du champ (point de phase pour la flèche bleue, particule/point de l'onde de groupe pour la flèche rouge) ont été ajoutées pour aider la lecture.

Malgré la similarité et la symétrie entre ces deux solutions, il existe quelques différences dont la plus notable apparaît lorsque, comme précédemment, nous écrivons la relation de dispersion de l'onde de phase :

$$\frac{\Omega^2}{c^2} - K^2 = \frac{\Omega'^2}{c^2} \tag{3.55}$$

et l'équation du mouvement associée

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\Psi(t,x) = +\frac{\Omega'^2}{c^2}\Psi(t,x). \tag{3.56}$$

On constate que le terme de droite a changé de signe, impliquant qu'une manière équivalente de traiter ce cas est de considérer que la masse du champ est désormais purement imaginaire $\tilde{\Omega}' = i\Omega'$. Cela fait sens puisque si nous reprenons notre transformation de Lorentz modifiée

$$\Omega = \frac{\Omega'}{\Gamma_{\mathrm{p}}} = \frac{\Omega'}{\sqrt{\frac{w_{\mathrm{p}}^2}{c^2} - 1}} = \frac{i\tilde{\Omega}'}{i\sqrt{1 - \frac{w_{\mathrm{p}}^2}{c^2}}} = \frac{\tilde{\Omega}'}{\gamma_{\mathrm{p}}}, \tag{3.57}$$

on retrouve bien une transformation de Lorentz habituelle avec une « masse effective » $\tilde{\Omega}'$ satisfaisant l'équation de Klein-Gordon pour Ψ :

$$\Box\Psi = -\frac{\tilde{\Omega}'^2}{c^2}\Psi. \tag{3.58}$$

Tous ces points sont bien connus dès lors que l'on traite des tachyons, mais il est intéressant de pouvoir les étudier ici.

Un dernier point à mentionner est la possibilité, comme pour les bradyons, de superposer plusieurs tachyons sur un même champ. Cela n'apporte rien de nouveau, mais on peut immédiatement se demander s'il est possible de superposer un mélange de bradyons et tachyons. Puisque le champ est dans tous les cas identique, et que nous sommes par ailleurs dans le régime de transparence, il n'existe aucune objection à cette possibilité. Comment apparaîtrait un tel système pour un observateur externe ? Nous aurions, comme nous l'avons dit, un champ total modulé, avec des particules oscillant en phase avec l'onde de phase, et qui se déplaceraient uniformément avec l'onde de groupe. De plus, certaines particules supersoniques oscilleraient en phase avec l'onde de groupe, et se déplaceraient uniformément avec l'onde de phase. La distinction phase/groupe ne fait évidemment aucun sens pour un tel mélange, l'onde de groupe de l'un étant l'onde de phase de l'autre ; mais si nous associions arbitrairement un nom à chacune des ondes, par exemple en mettant en avant les bradyons, alors le comportement tachyonique nous apparaîtrait un peu curieux de ce point de vue asymétrique.

Conclusion

Nous sommes parvenus à élaborer un modèle mécanique, potentiellement réalisable en laboratoire, de la dualité onde-particule. Il s'agit d'une théorie de type onde pilote, qui se rapproche cependant plus de la théorie de la double solution imaginée par Louis de Broglie. Nous avons en effet deux phénomènes ondulatoires présents dans ce système :

i. une onde de phase qui sera responsable des interactions à distance de la particule *via* la synchronisation de son horloge interne avec ce phénomène. Elle est de nature supraluminique et pourra potentiellement induire des interactions et couplages d'apparence non locale, qui proviennent en réalité d'une forme de superdéterminisme comme nous l'avons discuté.
ii. une onde de groupe représentant la répartition spatio-temporelle de l'énergie du champ, qui se déplace à la même vitesse et dans la même direction que la particule et pouvant ainsi être confondue avec cette dernière. Néanmoins, il ne nous est pas possible dans un tel modèle de créer une onde de groupe localisée autour d'un seul point, et nous observons à la place une infinité de ventres pouvant accomoder autant de particules identiques.

Il est très important de noter que ces deux ondes sont réellement inséparables, l'une ne peut pas exister en l'absence de l'autre. Ce point est crucial puisque même si l'onde de phase seule pourrait suffir pour expliquer les phénomènes quantiques, il ne s'agit pas d'une onde physique ayant une existence propre et elle ne peut donc pas être utilisée pour construire un

modèle mécanique. Il semble bien que l'intuition de de Broglie lorsqu'il a proposé sa théorie de la double solution était fondée : deux ondes pourraient être nécessaires pour réconcilier les théories classiques et quantiques.

Revenons également sur un point que nous avons mentionné plus tôt. Cette dynamique uniforme est basée sur un régime bien particulier que nous nommons transparence et qui est caractérisé par l'absence stricte de toute interaction entre le champ et la particule. Nous avions brièvement remarqué que cette absence d'interaction ne signifie pas pour autant un découplage de ces deux objets. En effet, la contrainte holonome est toujours présente et c'est justement elle qui nous permet d'appliquer la transparence. Il est clair que, à l'inverse d'un découplage, cette situation implique plutôt un couplage parfait, c'est-à-dire que l'onde et la particule ont chacune des paramètres accomodant parfaitement leurs dynamiques respectives. En ce sens, les deux objets deviennent inséparables, et on peut introduire sans trop d'effort le concept de dualité pour les décrire : il est impossible, si l'on maintient la transparence, de distinguer l'onde de la particule. Évidemment, cette remarque pose très fortement la question de la sortie de la transparence qui est un sujet très complexe méritant d'être exploré en détail. On espère que des travaux seront menés dans cette direction pour exlporer cette question ; ils permettront, sans aucun doute, d'éclaircir beaucoup de points actuellement laissés en suspens. Enfin, dans cette optique, un programme de simulation numérique a été développé dans le cadre du travail exposé dans ce chapitre, qui permet de calculer les solutions du système d'équations complet, c'est-à-dire même hors transparence, et qui est présenté en annexe B. Ce programme n'a pour l'instant été utilisé que dans le cadre de la transparence, mais nous pouvons espérer qu'une résolution numérique de situations plus complexes puisse apporter plus d'indications quant à la stabilité et la dynamique du système.

Chapitre 4

Modèle classique et relativiste d'un atome

Introduction

Le modèle mécanique développé au chapitre 3 est capable de reproduire la dualité onde-particule, idée fondamentale dans la théorie des quanta, et nous souhaitons dès lors utiliser ce même modèle pour obtenir nombre des résultats majeurs du début du vingtième siècle concernant la physique microscopique. En effet, ces résultats et les théories les accompagnant ont beau lui avoir été antérieurs, Louis de Broglie a pu donner pour la première fois une explication élémentaire et universelle de ces phénomènes – comme nous en avons discuté avec l'introduction des horloges internes et de la dualité onde-particule. Plus spécifiquement, il est parvenu à leur donner une cause commune ; ainsi nous pouvons espérer, ayant nous-même obtenu indépendament cette même cause, retrouver à notre tour les différents phénomènes quantiques.

L'extension la plus naturelle de notre modèle est de considérer qu'au lieu de conditions de bord à l'infini, nous disposons désormais de conditions de bord périodiques. En d'autres termes, la trajectoire du point matériel est bouclée, comme le serait la trajectoire classique d'un électron autour du noyau d'un atome. Nous construirons ainsi très rapidement dans un premier temps une modification naïve de notre système unidimensionnel avec de telles conditions périodiques. Nous discuterons brièvement de quelques uns des résultats qui apparaissent, ainsi que des limites de cette description. La nécessité de généraliser cette approche apparaîtra rapidement comme très évidente ; en particulier il nous faudra nous placer dans un espace à trois dimensions pour pouvoir décrire des mouvements et interactions transverses à la trajectoire, mais également le faire dans un formalisme complètement relativiste sans quoi nous ne pourrions avoir de résultats totalement cohérents [1]. Enfin, nous choisirons d'ajouter un potentiel électromagnétique externe [2], dernier ingrédient qui nous permettra de retrouver les résultats des modèles atomiques de Niels Bohr, Arnold Sommerfeld, et Louis de Broglie. Il sera même possible, avec ce modèle, d'observer et étudier d'autres phénomènes comme la quantification de Landau, l'effet Zeeman normal ou même, peut-être, commencer à percevoir la notion de *spin*.

1. Rappelons qu'au début du vingtième siècle les physiciens se sont rapidement rendus compte que dans le cas de l'atome d'hydrogène par exemple, les vitesses de l'électron autour du noyau sont relativistes. Par ailleurs, nous avons déjà constaté les problèmes d'un modèle hybride mêlant des objets newtoniens et d'autres lorentziens.

2. Externe au point matériel, c'est-à-dire à l'électron, mais pouvant provenir par exemple du noyau atomique.

4.1 La condition de périodicité

Considérons dans un premier temps le cas d'un système unidimensionnel, mais possédant une condition de périodicité de longueur L de sorte que le champ est contraint par la relation

$$u_\pm(t,x) = u_\pm(t,x+L) \tag{4.1}$$

Il est important de noter que cette condition s'applique sur les deux composantes contre-propagatives du champ séparément, et par extension sur le champ total, mais pas sur les ondes de phase et de groupe qui apparaissent dans la décomposition en produit, ces dernières pouvant être périodiques sur une longueur $2L$. Nous reprenons l'expression du champ (3.43) obtenue précédemment dont nous déduisons, en appliquant la contrainte (4.1), les relations suivantes :

$$\omega_+(t+x+L) = \omega_+(t+x) + 2\pi n_+ \tag{4.2}$$
$$\omega_-(t-x-L) = \omega_-(t-x) + 2\pi n_-. \tag{4.3}$$

Les fréquences $\omega_\pm$ sont donc naturellement quantifiées à l'aide des nombres $n_\pm \in \mathbb{Z}$ selon

$$\omega_\pm = \gamma_\mathrm{p}(1 \pm v_\mathrm{p})\omega' = \pm\frac{2\pi n_\pm}{L}. \tag{4.4}$$

On peut immédiatement extraire de cette relation la vitesse v_p de la particule, ce qui nous donne

$$v_\mathrm{p} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{n_+ + n_-}{n_+ - n_-} \in \mathbb{Q}. \tag{4.5}$$

La vitesse est donc quantifiée, pas de la manière habituelle – c'est-à-dire par un nombre entier n – mais par le rapport de deux nombres que nous appellerons $N = \frac{n_+ + n_-}{2}$ et $\delta = \frac{n_+ - n_-}{2}$. En fait, ces nombres sont directement reliés aux composantes des ondes de groupe et de phase, avec

$$\omega = \gamma_\mathrm{p}\omega' = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = \frac{\pi(n_+ + n_-)}{L} = \frac{2\pi N}{L} \tag{4.6}$$

pour la fréquence de l'onde de phase, et pour le vecteur d'onde

$$k = \gamma_\mathrm{p}\omega' v_\mathrm{p} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = \frac{\pi(n_+ - n_-)}{L} = \frac{2\pi\delta}{L}. \tag{4.7}$$

Autrement dit, les ondes de phase et de groupe sont toutes deux quantifiées, respectivement par les nombres N et δ, nombres qui peuvent cependant prendre des valeurs demi-entières, rendant ces ondes périodiques sur une longueur $2L$. Cela traduit encore une fois la nature fictive de cette décomposition, qui causera des problèmes dès que nous chercherons à ne considérer, par exemple, que l'onde de phase dans la dynamique du système.

Comme toujours, l'introduction d'une particule et de son horloge interne causera une égalité entre les quadrivecteurs p^μ et k^μ, de sorte que l'énergie et la quantité de mouvement de la particule seront elles-mêmes quantifiées en retour. Par ailleurs, si nous écrivons le moment cinétique J sur cette orbite, nous avons

$$J = \oint p\,\mathrm{d}l = 2\pi\delta, \quad \delta \in \mathbb{Z}/2. \tag{4.8}$$

Comme nous l'avions suggéré, la quantification du moment cinétique de la particule apparaît d'elle-même, puisqu'elle est directement reliée à la quantification du vecteur d'onde de

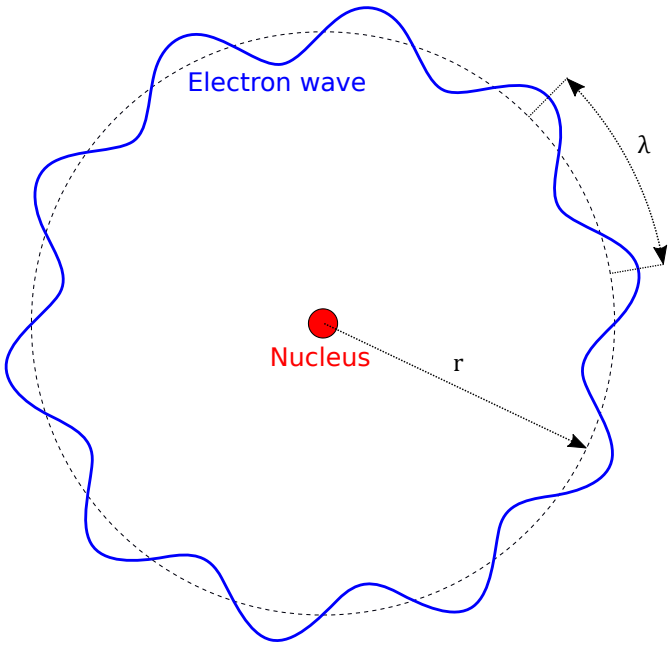


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du modèle atomique unidimensionnel de de Broglie. L'onde électronique (onde de phase) est représentée en bleu et s'étend le long de l'orbite en pointillés. Sa longueur d'onde doit être un sous-multiple de la longueur de l'orbite pour respecter la condition de périodicité et assurer la continuité du champ.

l'onde de phase. Cependant, nous observons ici qu'apparaît un double recouvrement, avec la possibilité de valeurs demi-entières pour le moment cinétique. Cela n'est pas sans rappeler la notion de spin demi-entier, mais ce n'est pas *a priori* une propriété qui fait du sens dans un tel modèle mécanique. Nous pourrons rajouter une contrainte pour nous assurer de ne traiter que le cas de valeurs entières, en gardant pour plus tard la discussion sur le spin. Ce modèle étant de toute manière seulement temporaire, il est préférable d'attendre de voir si cet aspect subsiste avec une description plus complète. Par ailleurs, si nous choisissons d'exprimer la quantification en fonction d'un nombre $l = 2\delta$, la nature demi-entière disparaît. Il n'est donc pas certain que cette spécificité ait un sens selon notre manière de la considérer.

Quoiqu'il en soit, ces résultats rappellent très fortement l'approche de de Broglie pour résoudre le problème de l'atome [20]. On pourra se référer à son livre *Ondes et mouvements* [24] pour plus de détails sur son approche. Nous obtenons, comme lui, une quantification du moment cinétique par des principes purement mécaniques, et non comme un postulat. Ces idées sont illustrées sur la figure 4.1. Une fois de plus, la spécificité d'un modèle comme le nôtre, et plus généralement de toute théorie de type double solution, est que l'énergie n'est pas uniformément répartie dans le champ. Ce dernier est donc en apparence différent, et peut même présenter des propriétés impossibles à atteindre par une théorie d'onde pilote, comme la demi-quantification des ondes de groupe et de phase. Le modèle présenté ici n'est par contre pas encore satisfaisant, pour plusieurs raisons. D'abord, comme nous l'avons évoqué à de nombreuses reprises, il est important d'avoir des objets complètement relativistes pour éviter certaines difficultés, incohérences ou incompatibilités entre un champ covariant et une particule newtonienne. De plus, nous avons astreint la particule à se déplacer le long d'une orbite prédéfinie. Nous obtenons des règles de quantification ainsi qu'un mouvement uniforme sur cette trajectoire, mais il serait préférable d'avoir une justification physique de la forme de la trajectoire elle-même. Pour cela, nous devons passer à un modèle à trois dimensions spatiales, ce qui nous demandera un dernier ajout en retour. Le noyau atomique n'a pas encore été considéré ici, or c'est lui qui est responsable

du mouvement de l'électron. Il est donc important d'introduire un champ électrostatique pour représenter son interaction avec l'électron, ce qui aura l'avantage de nous amener dans un modèle keplerien avec des forces centrales.

4.2 L'atome

Comme nous l'avons dit, il est très important de passer à une formulation explicitement relativiste, contrairement à ce qui a été fait au chapitre 3. Cela aura pour conséquence de rendre les diverses expressions, pour les dynamiques du champ et de la particule, cohérentes entre elles, ainsi que d'avoir des objets mathématiques sous une forme covariante bien plus pratique à utiliser et élégante.

4.2.1 Action du système

Nous construisons notre nouveau modèle à partir de l'action relativiste I définie par

$$\begin{aligned} I = &- \int \left[m_\mathrm{p} - \frac{1}{2} m_\mathrm{p} \sigma \Big(\big|\dot{z}_\mathrm{p}(\tau)\big|^2 - \omega_\mathrm{p}^2 \big|z_\mathrm{p}(\tau)\big|^2 \Big) + e A_\mu(x_\mathrm{p}(\tau)) \dot{x}_\mathrm{p}^\mu(\tau) \right] \mathrm{d}\tau \\ &+ \int \left\{ \mathcal{N}(\tau) \big[z_\mathrm{p}(\tau) - u(\tau, x_\mathrm{p}(\tau)) \big]^* + \mathcal{N}^*(\tau) \big[z_\mathrm{p}(\tau) - u(\tau, x_\mathrm{p}(\tau)) \big] \right\} \mathrm{d}\tau \\ &+ T \int (D^\mu u)(D_\mu u)^* \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Bien que la complexité de son expression ait augmenté, nous reconnaissons immédiatement la structure de l'action étudiée au précédent chapitre ; nous avons en effet séparé sur trois lignes, pour plus de clarté, les différents Lagrangiens de la particule, d'interaction, et du champ. Regardons comment il nous est possible d'obtenir de telles expressions.

La densité lagrangienne du champ

Nous nous remémorons la densité lagrangienne pour le champ u définie dans le modèle unidimensionnel par la relation (3.9), que nous pouvons réécrire sous sa forme covariante

$$\mathcal{L}_\mathrm{c} = \frac{1}{2} \lambda (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} T (\partial_x)^2 = \frac{1}{2} T (\partial_\mu u)(\partial^\mu u), \tag{4.10}$$

avec $\lambda/T = 1/c^2 = 1$ dans notre système d'unités. Ceci constitue notre base formelle, mais il nous faut également considérer l'effet de la présence du noyau atomique, c'est-à-dire d'un champ électromagnétique, sur le champ u. Nous savons qu'en formalisme covariant, et pour tenir compte de la présence d'un champ de jauge $A_\mu(x)$, il nous suffit de remplacer la dérivée simple et habituelle ∂_μ par une nouvelle dérivée D_μ, appelée dérivée covariante, et définie par

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x). \tag{4.11}$$

Ce nouvel opérateur D a la particularité de dépendre du point spatio-temporel où il est appliqué $D_\mu \equiv D_\mu(x)$ mais permet, ce faisant, de tenir compte en toute généralité d'un quadrivecteur potentiel ayant la forme que l'on souhaite. Nous pourrions immédiatement remplacer les dérivées dans l'expression de $\mathcal{L}_c$ par ces nouveaux opérateurs, mais la présence de l'unité imaginaire i rendrait son expression complexe, et nécessiterait un changement de l'interprétation que l'on fait de l'action. Bien que ce soit un chemin que l'on pourrait souhaiter suivre, nous préférons ici conserver ces quantités réelles et modifions donc le produit scalaire $(\partial u)^2$ par une notation tout à fait équivalente, utilisant une quantité complexe

covariante (ou contravariante) et sa quantité conjugée contravariante (respectivement covariante), de sorte qu'au final, nous avons

$$\mathcal{L}_{\mathrm{c}} = T[(\partial_\mu + iqA_\mu(x))u(x)][(\partial^\mu - iqA^\mu(x))u^*(x)] = T(D_\mu u)(D^\mu u)^*. \tag{4.12}$$

La nouveauté, comme nous le constatons, est que le champ u devient sous ce formalisme un champ scalaire complexe de charge électrique q ; ou, de manière équivalente, nous passons d'un champ scalaire à deux champs u et u^* conjugués. Cette nécessité d'avoir un champ complexe va fortement nous contraindre sur les autres quantités, en particulier sur z_{p} qui devra à son tour devenir complexe pour permettre de maintenir la contrainte holonome.

Le Lagrangien de la particule

Comme pour le champ, nous pouvons nous inspirer de ce qui a été fait au chaptire précédent et en particulier de l'expression du Lagrangien (3.4) dont nous obtiendrons une forme en accord avec la théorie de la relativité. Avant de poursuivre, nous devons néanmoins mentionner que la nature de la coordonnée z_{p} va devoir changer. En effet, puisque nous évoluons maintenant dans un espace-temps 1+3 D complet, il n'est plus possible de voir z_{p} mécaniquement comme une oscillation transverse. À la place, nous dirons qu'il s'agit désormais d'un degré de liberté interne à la particule, bien plus proche de la notion d'horloge interne.

Nous avons d'abord un Lagrangien inertiel ne dépendant, en temps propre, que de la masse de la particule m_{p}. À cela nous ajoutons aussi un lagrangien harmonique pour la coordonnée interne z_{p}, en prenant bien garde d'utiliser son module au carré puisqu'il s'agit d'un nombre complexe, et dont nous choisissons la forme pour retrouver la dynamique souhaitée. Enfin, la particule chargée se couple localement au champ de jauge $A_\mu(x)$ par le biais sa quadrivitesse $\dot{x}^\mu_{\mathrm{p}}$ et de sa charge électrique e. Il vient donc au final

$$L_{\mathrm{p}}(\tau) = -m_{\mathrm{p}} + \frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}\sigma\Big(\big|\dot{z}_{\mathrm{p}}\big|^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2\big|z_{\mathrm{p}}\big|^2\Big) - eA_\mu\dot{x}^\mu_{\mathrm{p}}. \tag{4.13}$$

Puisque la composante électromagnétique ne dépend pas de la masse de l'objet, il est très intéressant de voir que nous pouvons injecter tout ce qui concerne la coordonnée z dans une masse effective

$$m_{\mathrm{p,eff.}}(\tau) = m_{\mathrm{p}}\left[1 - \frac{1}{2}\sigma\Big(\big|\dot{z}_{\mathrm{p}}(\tau)\big|^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2\big|z_{\mathrm{p}}(\tau)\big|^2\Big)\right] \tag{4.14}$$

et revenir ainsi à une description d'une particule relativiste effective se déplaçant dans l'espace-temps habituel, mais dont les variations de la masse induiront en retour des modifications de ses trajectoires. Ceci constitue une autre manière très élégante de modifier les dynamiques newtonienne ou einsteinienne, et nous espérons que la spécification d'une masse effective convenable permettra, à l'instar de l'introduction d'un potentiel quantique, de voir apparaître de nouvelles forces fictives pouvant modéliser les dynamiques quantiques, comme cela avait été développé par Louis de Broglie [25].

Enfin, notons que nous avons ici écrit le Lagrangien en temps propre τ. Il est bien entendu possible de spécifier un autre axe temporel ; par exemple en prenant en toute généralité une nouvelle coordonnée temporelle λ, nous avons

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\gamma_\lambda}. \tag{4.15}$$

On prendra bien garde à modifier les différentielles ainsi que les dérivées, et l'on pourra par la suite choisir un référentiel donné en spécifiant λ, par exemple pour le référentiel du laboratoire si $\lambda = t$, nous avons avec $(\mathrm{d}x^\mu \,/\, \mathrm{d}t) = (1, \vec{\boldsymbol{v}})$

$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\boldsymbol{v}}^2}}, \tag{4.16}$$

on retrouve bien le facteur de Lorentz habituel. Nous mentionnons enfin la présence de la pulsation propre de la particule ω_p, ainsi que d'un facteur multiplicatif σ qui quantifie l'impact de l'inertie sur l'horloge interne et vice-versa, ou simplement le couplage entre les deux.

Le Lagrangien d'interaction

Comme nous l'avons vu sur les deux précédents exemples, le passage à ce nouveau modèle se fait par la transformation de nos quantités vers un formalisme covariant, ainsi que la généralisation à des grandeurs complexes. Le Lagrangien d'interaction ne déroge pas à cette règle, et nous voyons apparaître la somme de deux termes conjugués, ce qui fait intervenir deux multiplicateurs de Lagrange $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ qui ne sont, bien entendu, pas indépendants l'un de l'autre. Cela amène en retour deux contraintes holonomes, l'une sur $(z-u)$ et l'autre sur $(z-u)^*$. En fait, cette action I nous donnera à chaque fois un couple de quantités conjugées, c'est-à-dire que lorsque nous obtiendrons les équations du mouvement dans la prochaine section, nous verrons aussi apparaître un autre système d'équations tout à fait équivalent qui est le complexe conjugué du premier. Nous avons donc ici pour le Lagrangien d'interaction

$$L_\mathrm{int}(\tau) = \mathcal{N}^*(\tau)(z_\mathrm{p} - u(x_\mathrm{p}(\tau))) + \text{c.c.} = 2\Re\big[\mathcal{N}^*(\tau)(z_\mathrm{p} - u(x_\mathrm{p}(\tau)))\big], \tag{4.17}$$

et nous pourrons également changer aisément de référentiel à l'aide de λ.

4.2.2 Équations du mouvement complètes

La procédure pour obtenir les équations du mouvement à partir de l'action I définie plus haut est identique à celle du modèle du chapitre 3, et fait donc intervenir les équations d'Euler-Lagrange, cette fois en formalisme covariant. En utilisant la notation simplifiée faisant usage du symbole $'$ pour dénoter la dérivée totale par rapport à λ, nous obtenons

I. pour $\mathcal{N}(\lambda)$

$$z_\mathrm{p}(\lambda) = u(x_\mathrm{p}(\lambda)) \tag{4.18}$$

II. pour $z_\mathrm{p}(\lambda)$

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{p} \sigma \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\frac{z'_\mathrm{p}(\lambda)}{\sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2}} \right) + \omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p}(\lambda) \sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2} \right] = \mathcal{N}(\lambda) \sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2} \tag{4.19}$$

III. pour $x_\mathrm{p}(\lambda)$

$$\begin{aligned} &\frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left[\left(1 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\left| z'_\mathrm{p}(\lambda) \right|^2}{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2} + \omega_\mathrm{p}^2 \left| z_\mathrm{p}(\lambda) \right|^2 \right) \right) \frac{x'_{\mathrm{p},\mu}}{\sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2}} \right] \\ &\qquad = \mathcal{N}^*(\lambda) \partial_\mu u(x_\mathrm{p}(\lambda)) + \mathcal{N}(\lambda) \partial_\mu u^*(x_\mathrm{p}(\lambda)) + e F_{\mu\nu}(x_\mathrm{p}(\lambda)) \frac{x'^\nu_\mathrm{p}(\lambda)}{\sqrt{(x'_\mathrm{p}(\lambda))^2}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

IV. pour $u(x)$

$$D_\mu D^\mu u(x) = -\int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\mathcal{N}(\lambda)}{T} \sqrt{(x'_{\mathrm{p}}(\lambda))^2} \delta^4\big(x - x_{\mathrm{p}}(\lambda)\big) \tag{4.21}$$

ainsi que toutes les mêmes équations sur les quantités conjuguées.

Ce système d'équations présente évidemment une complexité accrue par rapport au précédent, mais est surtout extrêmement chargé du fait de sa nature relativiste d'une part, et du nombre de variables et paramètres indépendants d'autre part. Nous avons choisi de l'écrire sous sa forme la plus complète dans un premier temps, de sorte à bien mettre en évidence toutes les dépendances qui pourraient autrement rester implicites. Il est néanmoins possible de le dégager et l'analyser qualitativement en raccourcissant certaines notations ou en choisissant un référentiel approprié, ce que nous allons maintenant faire sur quelques exemples.

L'équation sur x_{p} est particulièrement intéressante lorsque l'on considère l'introduction de la masse effective, puisque nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big(\gamma_{\mathrm{p}}(\lambda) m_{\mathrm{p,eff.}}(\lambda) x'_{\mathrm{p},\mu}\Big) = 2\Re\left[\frac{\mathcal{N}^*(\lambda)}{\gamma_{\mathrm{p}}} \partial_\mu u(x_{\mathrm{p}}(\lambda))\right] + eF_{\mu\nu}(x_{\mathrm{p}}(\lambda)) x'^{\nu}_{\mathrm{p}}(\lambda) \tag{4.22}$$

et retrouvons ainsi une forme très familière d'une particule de masse variable dont la variation de la quantité de mouvement relativiste est pilotée pour une part par le gradient d'un champ scalaire u, ainsi que par l'interaction avec un champ électromagnétique *via* son tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$. Ce second terme devient bien entendu, dans la limite relativiste, la forme bien connue des forces de Lorentz. On peut ainsi schématiser cette équation sous la forme

$$\dot{p}_\mu \sim \partial_\mu \Phi + \frac{e}{m} F_{\mu\nu} p^\nu. \tag{4.23}$$

Le champ suit quant à lui très clairement une équation de d'Alembert en dérivées covariantes et avec terme source. Comme pour le modèle 1D, nous pourrions obtenir pour u une équation de Klein-Gordon avec terme source

$$\big(D^2 + \omega_0^2\big) u = -\frac{1}{T} \int \mathrm{d}\lambda \, \frac{\mathcal{N}}{\gamma_{\mathrm{p}}} \delta^4(x - x_{\mathrm{p}}) \tag{4.24}$$

en ajoutant un terme de masse $-\omega_0^2 u u^*$ dans la densité lagrangienne du champ.

Enfin, l'équation sur z_{p} est celle d'un oscillateur mécanique relativiste forcé, et l'on a en particulier dans le référentiel propre de la particule

$$\ddot{z}_{\mathrm{p}} + \omega_{\mathrm{p}}^2 z_{\mathrm{p}} = f(\tau). \tag{4.25}$$

Nous retrouvons bien le système d'équations du chapitre précédent, la différence majeure étant l'ajout d'effets dus au quadripotentiel électromagnétique par la dérivée covariante pour u, et par le tenseur électromagnétique pour x ; z n'est pas directement affectée par ce champ.

4.3 Solutions du système en transparence

La résolution des équations du mouvement devient elle aussi beaucoup plus complexe, même en transparence, mais il reste possible de trouver des solutions analytiques que nous allons maintenant détailler. Nous recherchons comme toujours des solutions telles que, le long de la trajectoire, la particule voit une onde stationnaire. Dans le cas d'un mouvement

circulaire dans un potentiel central, nous pouvons réduire le problème au cas unidimensionnel le long de l'orbite de rayon r_p et nous avons toujours deux ondes

$$u_\pm(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2} u_0 e^{i(k_\pm r_\mathrm{p}\varphi - \omega_\pm t)}, \tag{4.26}$$

avec φ l'angle azimutal en coordonnées sphériques. Les nombres d'onde $k_\pm$ sont contraints par la condition de périodicité du champ, et doivent alors s'écrire

$$k_\pm = \pm \frac{m_\pm}{r_\mathrm{p}}, \quad m_\pm \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Ainsi nous avons pour le champ total sur l'orbite, somme de u_+ et u_-, l'expression

$$u(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = u_0 e^{i(k r_\mathrm{p}\varphi - \omega t)} \cos\left(\frac{k_+ + k_-}{2} r_\mathrm{p}\varphi - \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right), \tag{4.28}$$

où l'on a défini le nombre d'onde k et la pulsation ω de l'onde de phase par

$$k = \frac{k_+ - k_-}{2}, \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}. \tag{4.29}$$

Nous avions précédemment la relation de dispersion $k_\pm = \omega_\pm$, et c'est ici que le modèle atomique va s'écarter de ce que nous avons vu. En effet, la présence d'un potentiel électrostatique dû au noyau devra affecter cette relation, et nous faisons l'hypothèse que des perturbations $\varepsilon_\pm$ apparaîssent de la manière suivante :

$$k_\pm = \omega_\pm + \varepsilon_\pm, \tag{4.30}$$

sans spécifier leur forme exacte pour l'instant.

Le champ total u le long de la trajectoire peut alors être réécrit à l'aide de ces nouvelles quantités

$$u(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = u_0 e^{i(k r_\mathrm{p}\varphi - \omega t)} \cos\left[(\omega + \varepsilon)\left(r_\mathrm{p}\varphi - \frac{k - \eta}{\omega + \varepsilon} t\right)\right], \tag{4.31}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{2}, \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2}, \tag{4.32}$$

et est représenté sur la figure 4.2. Pour comparaison, nous savons que la phase d'une onde de groupe s'écrira sous la forme

$$\omega_g(x - v_g t), \tag{4.33}$$

et nous pouvons ainsi identifier le terme devant t à la vitesse de groupe de l'onde u, c'est-à-dire

$$v_g = \frac{k - \eta}{\omega + \varepsilon}. \tag{4.34}$$

Cela n'est pas sans rappeler l'expression de la vitesse de la particule en présence d'un quadripotentiel

$$v_\mathrm{p} = \frac{p_\mathrm{p} - eA_\varphi}{E_\mathrm{p} - eV}, \tag{4.35}$$

avec V et A_φ le potentiel scalaire et la composante azimutale du potentiel vecteur respectivement. La relation de de Broglie $(E_\mathrm{p}, p_\mathrm{p}) = (\omega, k)$ nous incite à identifier les perturbations ε et η à ces potentiels, qui se réduisent en l'absence de tout potentiel vecteur à

$$\varepsilon = -eV, \quad \text{et} \quad \eta = 0. \tag{4.36}$$

Nous avons donc

$$p_{\mathrm{p}} = k = \frac{m_+ - m_-}{2r_{\mathrm{p}}} = \frac{n}{r_{\mathrm{p}}} \tag{4.37}$$

$$E_{\mathrm{p}} = \omega = \frac{m_+ + m_-}{2r_{\mathrm{p}}} + eV = \frac{N}{r_{\mathrm{p}}} + eV \tag{4.38}$$

avec deux nombres n et N tels que

$$m_\pm = N \pm n. \tag{4.39}$$

On voit immédiatement que le nombre n est identifié au moment cinétique :

$$J = \oint p_{\mathrm{p}} \mathrm{d}l = \oint p_{\mathrm{p}} r_{\mathrm{p}} \mathrm{d}\varphi = 2\pi n, \tag{4.40}$$

et l'on retrouve bien la condition de quantification historique pour l'atome.

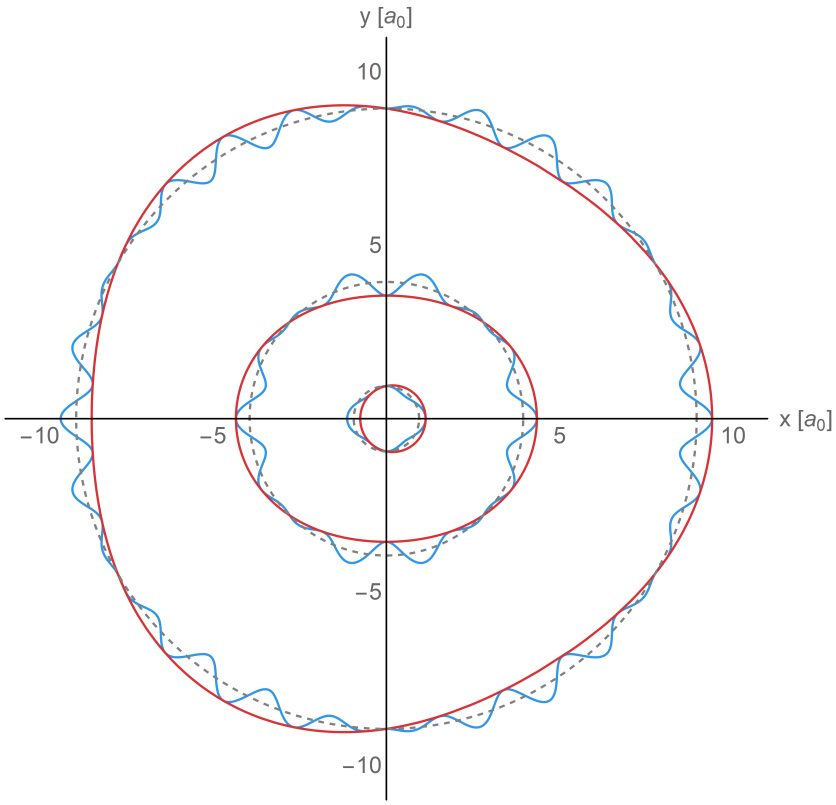


FIGURE 4.2 – Illustration du champ le long des orbites en pointillés correspondant aux trois premiers niveaux d'énergie. Le champ total est dessiné en bleu, tandis que l'onde de phase est en rouge. Les axes x et y définissent le plan de l'orbite, et les distances sont normalisées par rapport au rayon de Bohr a_0.

En réalité la condition de de Broglie peut, pour plus de généralité, faire intervenir un nombre sans dimension b qui joue le rôle de rapport de proportionnalité entre les quantités corpusculaires et ondulatoires

$$(E_{\mathrm{p}}, p_{\mathrm{p}}) = b(\omega, k), \quad b \in \mathbb{R}. \tag{4.41}$$

Ce nombre peut avoir son importance puisque, comme nous l'avons vu, les nombres quantiques n et N peuvent prendre des valeurs demi-entières au lieu d'être entières comme

suggéré dans le modèle de Bohr-Sommerfeld. Cela permet à notre modèle de produire une dynamique plus riche, mais nous pouvons utiliser b pour ajuster ces caractéristiques. Ainsi, une valeur de $b = 2$ nous donnera

$$n = b\frac{m_+ - m_-}{2} = m_+ - m_- \in \mathbb{Z}. \tag{4.42}$$

C'est sur ce cas que nous nous concentrerons puisqu'il fait plus de sens mécaniquement et est dans le même temps comparable aux résultats historiques, mais nous reviendrons à quelques moments sur les possibilités offertes par notre modèle et les contraintes que ce choix de valeur de b peut engendrer.

4.3.1 La dynamique corpusculaire autour du noyau

Après avoir développé ces quelques généralités sur notre système, nous pouvons reprendre les équations du mouvement pour le cas $\mathcal{N} = 0$, et en particulier celles pour la particule. Nous commençons par regarder l'équation sur z_p qui devient dans le référentiel propre

$$\ddot{z}_\mathrm{p} + \omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p} = 0. \tag{4.43}$$

Autrement dit nous avons comme d'habitude un mouvement harmonique selon z à la fréquence propre de la particule ω_p dans son référentiel. Cela nous permet de grandement simplifier le reste des équations puisque la masse effective devient constante

$$m_\mathrm{p,eff.} = m_\mathrm{p}\Big(1 + \sigma\omega_\mathrm{p}^2 z_\mathrm{p,0}^2\Big) \tag{4.44}$$

avec $z_\mathrm{p,0} \in \mathbb{R}$ l'amplitude du mouvement selon z. Nous en déduisons l'équation pour $\vec{\boldsymbol{x}}_\mathrm{p}$ qui s'écrit, en présence d'un potentiel coulombien $V(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{e}{4\pi r}$,

$$m_\mathrm{p,eff.}\ddot{\vec{\boldsymbol{x}}}_\mathrm{p} = e\vec{\boldsymbol{\nabla}}V = -\frac{\alpha}{r_\mathrm{p}^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{4.45}$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$ la constante de structure fine et $e < 0$ la charge de l'électron. Dans le référentiel du laboratoire, cette équation s'écrit de manière équivalente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\gamma m_\mathrm{p,eff.}\vec{\boldsymbol{v}}_\mathrm{p}\big) = -\gamma m_\mathrm{p,eff.}\frac{v_\mathrm{p}^2}{r_\mathrm{p}}\hat{\boldsymbol{e}}_r = -\frac{\alpha}{r_\mathrm{p}^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{4.46}$$

d'où l'on tire

$$\gamma m_\mathrm{p,eff.} v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p} = \alpha \tag{4.47}$$

sachant que l'accélération centripète est donnée par $a = -v^2/r$. Nous avons par ailleurs la relation (1.35) sur le moment cinétique $J = 2\pi n$ de la particule, qui nous donne avec l'expression pour p_p

$$\gamma m_\mathrm{p,eff.} v_\mathrm{p} r_\mathrm{p} = n. \tag{4.48}$$

En combinant ces deux équations, il vient d'abord

$$v_n = \frac{\alpha}{n}, \tag{4.49}$$

puis

$$r_n = \frac{n^2}{\gamma\alpha m_\mathrm{eff}} = \frac{n^2}{\alpha m_\mathrm{eff.}}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} \tag{4.50}$$

et enfin

$$E_n = \gamma m_{\text{eff.}} - \frac{\alpha}{r_n} = m_{\text{eff.}}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}}, \tag{4.51}$$

en accord avec l'expression présentée au chapitre 1 dans le cadre du modèle de Sommerfeld [80]. Nous avons, dans ces trois expressions, supprimé l'indice p pour alléger les notations, et l'avons éventuellement remplacé par l'indice n lorsque c'était opportun afin de correctement y associer une orbite donnée.

Quelques remarques peuvent être faites sur ces relations. Nous constatons d'abord qu'il existe une première contrainte bien connue sur α pour satisfaire à la relativité, à savoir

$$\alpha < 1. \tag{4.52}$$

Cela signifie qu'au delà de cette valeur, il peut ne pas exister d'orbites stables pour toutes les valeurs de n, ce qui correspond à des cas où le potentiel électrostatique devient trop élevé : la force centripète exercée par le noyau accélérerait l'électron au delà de la vitesse de la lumière. Cette situation fait évidemment penser à des trous noirs, ici électriques plutôt que gravitationnels, où la vitesse communiquée à un objet par le biais d'une interaction devient tellement grande qu'elle dépasserait la vitesse limite qui lui est permise.
Si nous reprenons les relations de de Broglie, nous pouvons aussi réécrire les fréquences caractéristiques de l'onde $\omega_\pm$ à l'aide des quelques paramètres nouvellement introduits, on obtient en particulier

$$\begin{aligned}\omega_\pm = \omega \pm k \mp \varepsilon &= m_{\text{eff.}}\left(\frac{1}{\gamma} \pm \gamma\frac{\alpha}{n} \mp \gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{m_{\text{eff.}}}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}}\left[1 \pm \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{n^2}(1 \pm 1)\right].\end{aligned} \tag{4.53}$$

Nous avons également une correction relativiste sur les différentes quantités, et en particulier sur l'énergie E_n. La forme de cette correction est en parfait accord avec celle présentée dans le cas du modèle de Sommerfeld au chaptire 1, dans la limite où les orbites correspondent à des mouvements de moment cinétique maximal. Bien sûr, cela correspond à des orbites circulaires, qui étaient une hypothèse de départ. Dans la limite non relativiste, c'est-à-dire si $\alpha/n \ll 1$, nous retrouvons sans surprise l'expression de Bohr

$$E_n = m_{\text{eff}} - \frac{\alpha^2 m_{\text{eff.}}}{2n^2}, \tag{4.54}$$

avec notre masse effective prenant la place de la masse de l'électron.

Pour conclure cette partie, il nous reste à écrire le Lagrangien de la particule (4.13) en spécifiant les termes pour l'atome et le régime de la transparence :

$$L_n(t) = -m_{\text{eff.}}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} + \frac{\alpha}{r_n}. \tag{4.55}$$

On sait par ailleurs que le Lagrangien peut s'exprimer grâce à la transformation de Legendre [3]

$$L_n = p_n v_n - E_n, \tag{4.56}$$

3. Cette transformation établit le lien entre les formulations lagrangienne et hamiltonienne de la physique : $H(t;q,p) + L(t;q,\dot{q}) = p\dot{q}$.

ce que l'on va évidemment associer à l'onde par la relation

$$L_n \equiv k_n v_n - \omega_n \tag{4.57}$$

qui correspond au terme de phase du champ u. Ainsi, comme prévu, le Lagrangien d'une particule est associé à la phase instantanée d'une onde plane ; dit autrement, l'action d'une particule le long d'une trajectoire est égale à la phase accumulée par une onde sur le rayon associé. Comme nous avons, par ailleurs, un lien étroit entre cette onde de phase et la dynamique de l'horloge interne pour la particule, nous pouvons égaler les deux quantités

$$z_0 e^{-i\omega_\mathrm{p}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}t} = u_0 e^{iL_n t}. \tag{4.58}$$

Ainsi, les modules et arguments de chaque côté de cette équation doivent être égaux, ce qui nous permet de déduire des contraintes importantes entre les caractéristiques des objets et de leur dynamique, d'abord

$$z_0 = u_0, \tag{4.59}$$

mais surtout

$$\omega_\mathrm{p} = m_\mathrm{eff.}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2 - \alpha^2}\right). \tag{4.60}$$

Souvenons nous que les éléments fondamentaux de ce modèle sont la masse propre m_p, la fréquence propre ω_p, ainsi que terme de couplage σ, ce qui nous permet d'exprimer plus généralement la relation

$$z_0^2 = \frac{1}{\sigma m_\mathrm{p}\omega_\mathrm{p}^2}\left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2-\alpha^2}} - m_\mathrm{p}\right), \tag{4.61}$$

déterminant ainsi le dernier des paramètres dynamiques, l'amplitude du mouvement selon z.

Ce modèle étant très riche, il est tout à fait possible de poursuivre l'analyse de ces différents résultats. Comme nous l'avons vu, combiner différentes relations, l'une associée à la particule et l'autre à l'onde par exemple, constitue une astuce permettant d'obtenir de très nombreux outils d'étude et de discussion. Par exemple, les deux expressions pour l'énergie (4.38) et (4.51) font sortir une relation entre la constante de structure fine α et les nombres quantiques du champ

$$\alpha = \frac{n^2}{N^2} = \frac{1}{2}\frac{(m_+ - m_-)^2}{m_+ + m_-}. \tag{4.62}$$

Cela signifie que la charge électrique est quantifiée dans notre modèle, à l'aide de deux nombres $m_\pm$ ou n et N. Ces deux derniers nombres étant associés, pour le premier, aux caractéristiques ondulatoires par l'onde de phase et, pour l'autre, aux caractéristiques corpusculaires par l'onde de groupe, on constate que la constante de structure fine joue le rôle ici d'un paramètre permettant de changer d'échelle d'énergie : basse ou haute énergie associée respectivement aux ondes et aux particules. En effet, pour avoir un niveau fondamental d'énergie $n = 1$, avec $\alpha \approx 1/137$, nous voyons qu'il est nécessaire d'avoir $N = 137 \gg n$. Le paramètre b dont nous avons discuté brièvement précédemment peut aussi être introduit et constituer l'une des manières d'ajuster la valeur de la constante α. Ce paramètre ne joue aucun rôle dans la dynamique du système, mais apparaît à divers endroits, comme par exemple dans les relations (4.58) et (4.62) qui deviennent

$$z_0 e^{i-\omega_\mathrm{p}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}} = u_0 e^{i\frac{L_n}{b}t} \tag{4.63}$$

et

$$\alpha = \frac{b}{2}\frac{(m_+ - m_-)^2}{m_+ + m_-}. \tag{4.64}$$

Si l'on ajuste la valeur numérique de α à l'aide d'une petite quantité $\xi \approx 3.6 \times 10^{-2}$ telle que $\alpha^{-1} = 137 + \xi$, définissant une légère modification de b autour de sa valeur unité, on obtient $b \approx 1 - 3 \times 10^{-4}$. Il n'existe malheureusement aucune manière de prédire la valeur de b autrement que par un ajustement par rapport à la valeur mesurée de la constante de structure fine, mais la liberté apportée par ce modèle peut néanmoins être très bénéfique de ce point de vue.

4.3.2 Les solutions du champ en trois dimensions

Ayant déjà exprimé le champ u le long de la trajectoire de sorte qu'il autorise un régime de transparence, nous souhaiterions maintenant déterminer son expression dans tout l'espace. L'équation de d'Alembert en présence d'un potentiel coulombien est complexe, mais il est malgré tout possible de la résoudre comme nous allons le voir. Nous partons de l'expression de u comme la superposition des deux modes contre-propagatifs u_+ et u_-, chacun étant un mode propre de l'équation de d'Alembert (4.21) sans terme source

$$u_\pm(x) = \phi_\pm(\vec{\boldsymbol{r}})e^{-i\omega_\pm t}. \tag{4.65}$$

En spécifiant l'expression de la dérivée covariante D_μ, et en injectant ces solutions, nous obtenons pour la fonction spatiale

$$\left[\left(\omega_\pm + \frac{q}{e}\frac{\alpha}{r}\right)^2 + \nabla^2\right]\phi_\pm(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \tag{4.66}$$

avec q/e le rapport de la charge du champ à celle du noyau. Par la suite, nous imposerons $q = e$ pour plus de simplicité, mais il est tout à fait possible de poursuivre les calculs avec une autre valeur. Nous cherchons des modes propres spatiaux en coordonnées sphériques (r, θ, φ), qui s'écrivent donc

$$\phi_\pm(\vec{\boldsymbol{r}}) = A_\pm R_{l_\pm}(r) Y_{l_\pm, \pm m_\pm}(\theta, \varphi), \tag{4.67}$$

où les $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ sont les harmoniques sphériques bien connues :

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{4.68}$$

avec $P_l^m(x)$ les polynomes de Legendre et $|m| < l$. On peut ainsi extraire l'équation sur la partie radiale du champ

$$\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) - \frac{l_\pm(l_\pm + 1) - \alpha^2}{r^2} + 2\frac{\alpha\omega_\pm}{r} + \omega_\pm^2\right)R_{l_\pm}(r) = 0. \tag{4.69}$$

Cette équation a des solutions bien connues (voir [64] p. 146)

$$R_{l'_\pm}(r) = e^{i\omega_\pm r} r^{l'_\pm} M(l'_\pm + 1 - i\alpha, 2(l'_\pm + 1), -2i\omega_\pm r), \tag{4.70}$$

avec un nouveau nombre quantique l' défini par

$$l_\pm(l_\pm + 1) - \alpha^2 = l'_\pm(l'_\pm + 1), \tag{4.71}$$

et la fonction hypergéométrique confluente de Kummer $M(a, b, z) = {}_1F_1\,(a, b, z)$ solution régulière de

$$z\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}z^2} + (b - z)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} - a = 0. \tag{4.72}$$

Ainsi, à partir des deux solutions $u_\pm$ s'écrivant

$$u_\pm(x) = A_\pm R_{l'_\pm}(r) P_{l_\pm}^{\pm m_\pm}(\cos\theta) e^{i(\pm m_\pm \varphi - \omega_\pm t)}, \tag{4.73}$$

nous pouvons reconstruire le champ total et, en réintroduisant la contrainte holonome, déterminer les valeurs des constantes $A_\pm$ sur une orbite donnée

$$A_\pm R_{l'_\pm}(r_n) P_{l_\pm}^{\pm m_\pm}(0) = \frac{u_0}{2} = \frac{z_0}{2}. \tag{4.74}$$

Le champ sur la trajectoire de la particule s'écrit finalement

$$u\Big(t, r_n, \frac{\pi}{2}, \varphi\Big) = z_0 e^{i(n\varphi - \frac{N-\alpha}{r_n} t)} \cos\left(N r_n \varphi - n t\right), \tag{4.75}$$

en accord avec les précédentes sections.

Avant de visualiser enfin le champ, quelques remarques s'offrent à nous. Pour commencer, nous avons écrit ces solutions dans le cas particulier où les charges électriques du champ et du noyau sont égales $|e| = |q|$. Ce n'est bien entendu pas une nécessité, et l'on peut généraliser ce résultat en introduisant une nouvelle constante $\beta = (qe)/(4\pi) = q\alpha/e$. Il faudra alors remplacer les α par des β dans l'expression de u, mais seule la partie radiale sera modifiée. En effet, le champ sur l'orbite de la particule $u(t, r_n, \pi/2, \varphi)$ conservera α dans le terme de phase. Cela signifie également que l'on peut tout à fait considérer un champ scalaire de charge nulle $q = 0$, c'est-à-dire réel, auquel cas il ne serait pas affecté par le potentiel généré par le noyau. Dans une telle situation, la partie radiale sera modifiée selon

$$R_{l_\pm}(r) = e^{i\omega_\pm r} r^{l_\pm} M(l_\pm + 1, 2(l_\pm + 1), -2i\omega_\pm r) = \frac{1}{(2\omega_\pm)^{l_\pm}} \frac{(2l_\pm + 1)!}{l_\pm!} j_{l_\pm}(\omega_\pm r), \tag{4.76}$$

avec $j_l(x)$ les fonctions de Bessel sphériques de première espèce. Cette solution, plus simple, est également compatible avec le régime de la transparence pour un mouvement circulaire uniforme de l'électron.

Enfin, comme pour le cas unidimensionnel, nous pouvons choisir d'utiliser un champ non seulement chargé, mais aussi massif, suivant alors une équation de Klein-Gordon. La partie radiale est à nouveau modifiée par la présence du terme de masse ω_0 dans l'équation du mouvement, et les solutions libres s'écrivent

$$R_{l'_\pm}(r) = e^{i\tilde{\omega}_\pm r} r^{l'_\pm} M(l'_\pm + 1 - i\tilde{\beta}, 2(l'_\pm + 1), -2i\tilde{\omega}_\pm r), \tag{4.77}$$

avec

$$\tilde{\omega}_\pm = \sqrt{\omega_\pm^2 - \omega_0^2}, \quad \text{et} \quad \tilde{\beta} = \beta \frac{\omega_\pm}{\tilde{\omega}_\pm}. \tag{4.78}$$

Nous avons donc ici la forme la plus générale des solutions pour un champ scalaire. Nous nous concentrerons sur la première version obtenue, mais il est tout à fait possible d'utiliser celle-ci à la place, bien que les différences seront très probablement minimes.

Examinons maintenant la forme spatiale du champ u. Nous regardons pour commencer le cas du premier niveau d'énergie de l'atome sur la figure 4.3. Ce que nous observons sur cette image est la répartition spatiale de l'onde de groupe, c'est-à-dire de l'énergie du champ u, l'onde de phase n'y apparaît pas. Ainsi, on constate que le champ est relativement localisé aux alentours de l'orbite de la particule représentée en noir. Il est en effet nul sur le noyau, et s'éteint progressivement à mesure que le rayon augmente. Cela peut se confirmer

mathématiquement en écrivant la limite asymptotique à grande distance de la fonction radiale (voir [64] p. 148) :

$$R_{l'_\pm} \approx C_{l'_\pm} \frac{\sin\left(\omega_\pm r - \frac{\pi}{2} l'_\pm + \delta_{l'_\pm}\right)}{\omega_\pm r}, \tag{4.79}$$

avec $\delta_{l'_\pm} = \beta \ln(2\omega_\pm r) \arg\left(\Gamma(2l'_\pm + 2)\right)$, et $C_{l'_\pm}$ une constante qu'il est possible de calculer. Ainsi nous avons effectivement des oscillations du terme en sinus, mais dont l'amplitude décroît en $1/r$ à grande distance. Nous observons également que l'onde de groupe présente des lobes d'intensité plus grande, et des zones d'extinction, qui peuvent laisser penser à des zones privilégiées pour la position de la particule. En effet, ces zones de forte intensité correspondent à des oscillations temporelles du champ proches de leur amplitude maximale u_0. Comme la particule oscille elle aussi avec une amplitude $z_0 = u_0$, il est préférable pour elle de se situer dans l'une de ces zones de forte intensité, ce qui peut également expliquer qu'il s'agit de la répartition de l'énergie. On observe déjà ici une forme de quantification des positions au sein de l'orbite et, pourquoi pas, une sélection du nombre d'électrons qu'il est possible de mettre en transparence sur une même orbite sans qu'ils s'affectent l'un l'autre. Enfin, si la particule sélectionne préférentiellement les points de forte amplitude dans l'onde de groupe, on peut se demander s'il nous est possible, de ce fait, de retrouver la règle de Born reliant une densité de probabilitié à l'amplitude du champ. Malheureusement, cette question ne pourra trouver de réponse que lorsque nous disposerons d'une solution dynamique complète, ne se limitant pas au cas du régime stationnaire et de la transparence. Ces points restent fortement spéculatifs, et une étude plus générale de la dynamique du système hors transparence serait nécessaire pour y répondre, mais il s'agit d'éléments très curieux et méritant certainement d'être discutés plus en profondeur.

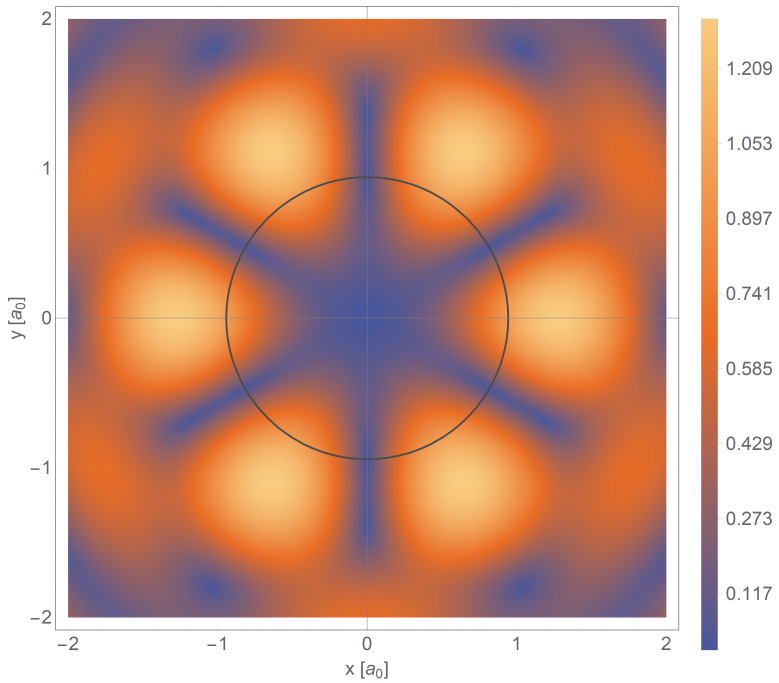


FIGURE 4.3 – Carte de l'intensité $|u(t = 0, r, \theta = \pi/2, \varphi)|$ du champ dans le plan équatorial x–y de l'orbite. Les distances sont normalisées par rapport au rayon de Bohr $a_0 = 1/(m_{\text{eff.}}\alpha)$, et l'intensité par rapport à $u(0, r_1, \pi/2, 0)$. Un cercle noir représentant la trajectoire réelle de la particule a été ajouté. Les nombres quantiques ont été choisis à des valeurs $m_\pm = 3 \pm 1$ pour obtenir $n = 1$ et $N = 3$.

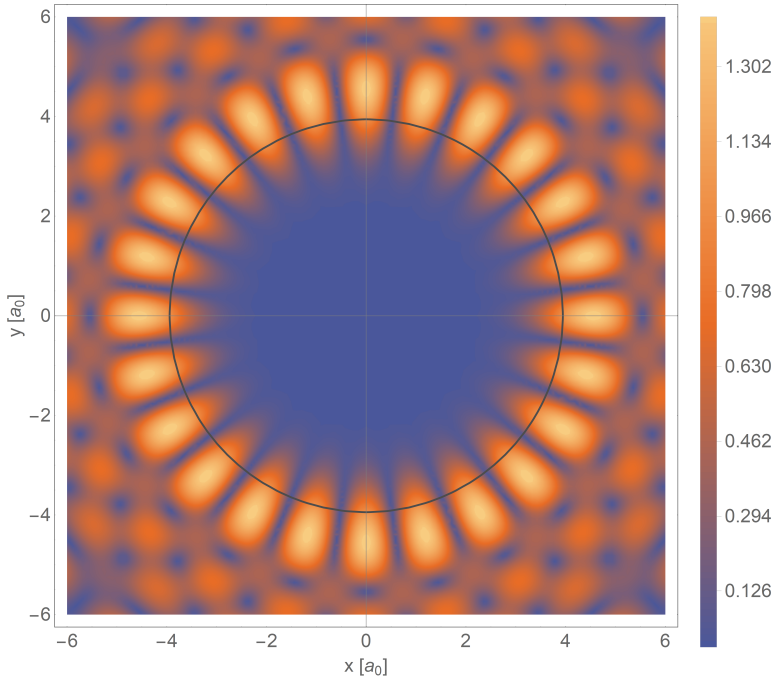


FIGURE 4.4 – Même représentation que la figure 4.3, mais pour des valeurs des nombres quantiques $m_\pm = 12 \pm 2$, $n = 2$ et $N = 12$.

Les mêmes cartes pour les niveaux $n = 2$ et $n = 3$ sont représentées sur les figures 4.4 et 4.5. On y constate un comportement identique, avec un champ essentiellement concentré autour des orbites ainsi que des lobes dont le nombre croît fortement avec n.

Cette répartition spatiale se confirme lorsque l'on regarde une même carte pour le niveau $n = 1$, mais dans un plan x–z sectionnant l'orbite, sur la figure 4.6. Ici, nous voyons très nettement que le champ est concentré autour de la trajectoire de la particule et est très faible ou négligeable ailleurs. Cela est dû à la nature des polynômes de Legengre $P_l^m(\cos\theta)$ qui introduisent un angle d'ouverture très bien défini autour de $\theta = \pi/2$.

Pour conclure sur la visualisation du champ, nous pouvons présenter une représentation 3D de son intensité sur la figure 4.7. Comme prévu, le champ est principalement concentré dans un tore entourant l'orbite classique de la particule, et nous observons des fluctuations également le long de cette orbite donnant naissance aux lobes discutés précédemment. Il est remarquable qu'un modèle mécanique, comme celui développé ici, puisse produire des images rappelant autant les orbitales atomiques de la mécanique quantique. Bien sûr, cela n'est pas une surprise si l'on observe que nous utilisons les mêmes objets mathématiques, mais cela montre une fois de plus que, si nous faisons abstraction des différences évidentes entre les solutions de ces deux approches, une grande proximité existe. Ces résultats sont très prometteurs et encourageants pour la recherche de théories classiques pouvant proposer une alternative à la formulation orthodoxe de la mécanique quantique.

Conclusion

Nous sommes parvenus, dans ce chapitre, à étendre notre modèle classique du chapitre 3 en le réécrivant dans un espace à trois dimensions spatiales, sous un formalisme relativiste, et en introduisant un quadripotentiel électromagnétique. Ce faisant, nous avons retrouvé les résultats de la théorie des quanta, et plus particulièrement de Niels BOHR et Arnold SOMMERFELD, concernant l'atome d'hydrogène. Quelques points noirs subsistent malgré tout

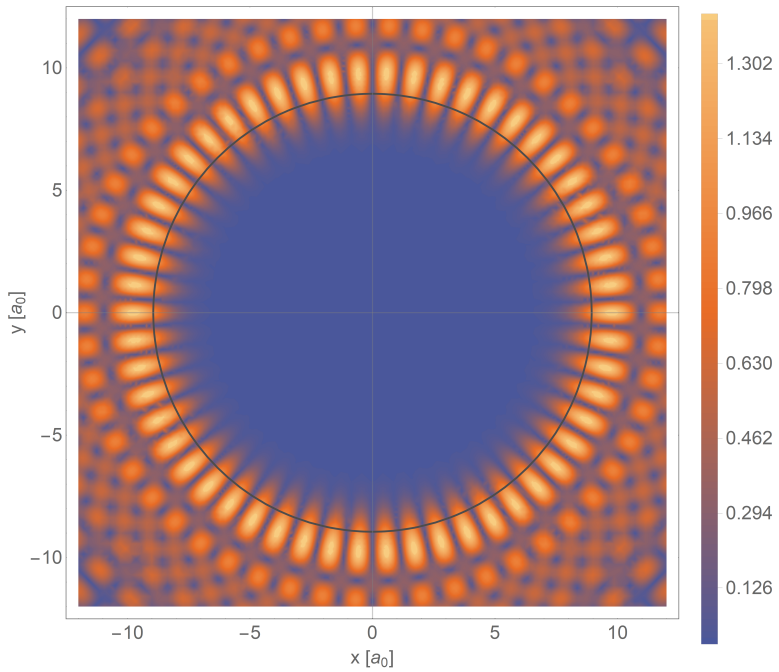


FIGURE 4.5 – Même représentation que la figure 4.3, mais pour des valeurs des nombres quantiques $m_\pm = 27 \pm 3$, $n = 3$ et $N = 27$.

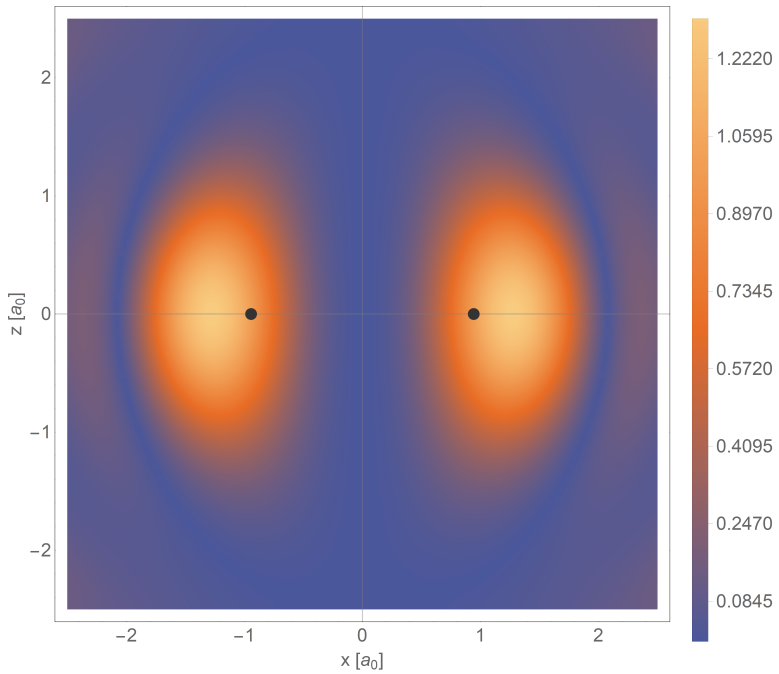


FIGURE 4.6 – Même carte que la figure 4.3, mais dans le plan x–z normal à l'orbite. Cette dernière est ainsi représentée par deux points noirs en $x = \pm r_1$.

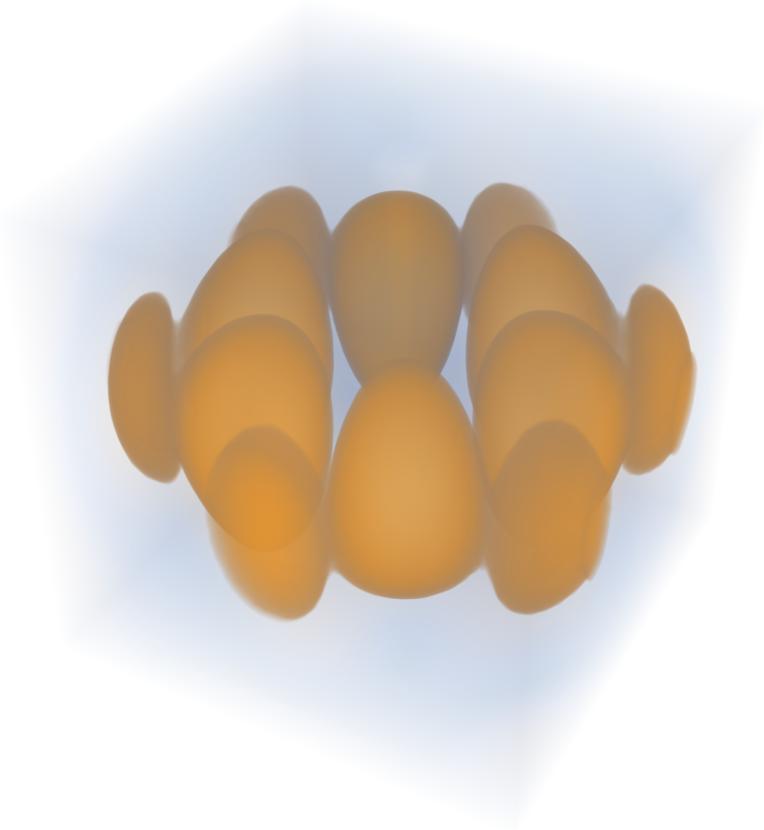


FIGURE 4.7 – Représentation tri-dimensionnelle de l'intensité du champ pour le premier niveau d'énergie de l'atome d'hydrogène.

dans cette discussion. Le premier d'entre eux est hérité du précédent modèle, et concerne de nouveau la conspiration. Nous avons ici deux ondes contre-propagatives, mais cette fois-ci l'une est émise du centre atomique $r = 0$ vers l'extérieur, et l'autre de l'infini, en plus de présenter une rotation selon l'angle φ. Cette configuration est encore plus déroutante que celle des ondes venant toutes deux de l'infini, et pose une fois de plus la question de leur nature et de leur origine. Il nous faudra attendre le chapitre 6 pour tenter de lever le voile sur ce mystère.

Deux autres problèmes liés cette fois aux solutions elles-mêmes sont apparents. Le premier est la restriction que nous imposons sur les orbites circulaires. Il est malheureusement impossible dans notre cas de considérer des mouvements kepleriens plus généraux, car la vitesse doit nécessairement être une constante du mouvement. En effet le facteur de Lorentz γ_n déterminant la vitesse v_n peut être exprimé en combinant les équations 4.55 et 4.58

$$\gamma_n = \frac{E_n}{2m_{\text{eff.}}} + \frac{1}{2m_{\text{eff.}}}\sqrt{(E_n^2 - 4m_{\text{eff.}})\big(\omega_{\text{p}} - m_{\text{eff.}}\big)}, \tag{4.80}$$

et il ne dépend manifestement que de constantes du mouvement. Ceci implique bien que le facteur de Lorentz et, par extension, la vitesse orbitale de l'électron, sont aussi des constantes du mouvement, les rendant incompatibles avec des orbites kepleriennes elliptiques. Par ailleurs, il existe une orbite circulaire qu'il est impossible d'atteindre alors qu'elle est prédite par la mécanique quantique standard. En effet, le cas $n = 0$, c'est-à-dire de moment cinétique nul correspondant aux orbitales atomiques s, est pathologique ici : il impliquerait qu'aucun mouvement de l'électron n'a lieu autour du noyau, ce qui est évidemment impossible à réaliser. Ce dernier aspect n'est pas spécifique à notre modèle, et se retrouvera naturellement dans toute approche mécanique impliquant un mouvement de l'électron

dans l'atome ; il sera probablement nécessaire de trouver une solution à ce problème qui pourrait être commune à toutes les théories mécaniques de l'atome quantique.

Chapitre 5

Champ et particule plongés dans un champ magnétique

Introduction

Nous avons, au cours des deux précédents chapitres, développé notre modèle de dualité onde-particule dans différents cas. Il nous a été possible de considérer le cas d'un champ unidimensionnel, tridimensionnel pour l'atome, d'une particule relativiste, d'un champ massif ou non et chargé ou non, ainsi que diverses limites. Le dernier élément que nous n'avons pas traité extensivement est le quadripotentiel électromagnétique dans lequel est plongé le système. Nous avons considéré le cas d'un potentiel électrostatique créé par le noyau, car il était naturellement nécessaire pour concevoir un atome ; mais il nous faut garder en tête que, du point de vue de la particule et du champ, ce potentiel est externe au système. D'autres potentiels plus généraux peuvent être appliqués et celui qui nous intéresse, dans ce chapitre, est un potentiel vecteur associé à un champ magnétique uniforme et constant.

En effet, et bien avant le développement des nouveaux modèles atomiques de la théorie des quanta, diverses expériences ont été réalisées – en particulier par Michael Faraday en 1862 [1] et Pieter Zeeman en 1897 [98] – sur l'effet des champs magnétiques sur les raies d'émission de substances moléculaires et atomiques. Bien que Faraday n'ait pas réussi à mettre en œuvre une telle expérience avec succès, elle fut finalement réalisée 35 ans plus tard par Zeeman, qui constata l'élargissement des raies spectrales. Il parvint, en utilisant la merveilleuse théorie de Lorentz [70], à expliquer cet élargissement par une modification de la fréquence des oscillateurs qui étaient, à l'époque, imaginés comme responsables des émissions lumineuses. Avec l'arrivée de la théorie quantique et l'augmentation de la précision des mesures, on comprend que l'élargissement des raies initialement observé est en réalité une multiplication et une séparation de raies ou, en termes usuels, une levée de dégénérescence des énergies atomiques. Ce phénomène porte aujourd'hui le nom d'effet Zeeman.

Nous allons donc suivre ce même parcours, en appliquant à notre système un champ magnétique externe que l'on choisira uniforme dans l'espace-temps. Nous étudierons dans un premier temps le cas de l'atome, c'est-à-dire de l'effet Zeeman, mais aussi le même phénomène en l'absence de noyau atomique et donc de potentiel coulombien, que l'on appelle effet Landau.

1. Il s'agit de la dernière expérience réalisée par Faraday, dans laquelle il n'a pu observer aucun effet du champ magnétique sur les raies spectrales. Les détails se trouvent à la dernière page (p. 465) du volume 7 de son journal [43], un paragraphe de quelques lignes concluant quarante ans de recherche.

5.1 L'effet Zeeman

5.1.1 La dynamique de la particule

Puisque nous avons précédemment développé un modèle très général, et seulement ensuite spécifié des cas particuliers, nous aurons très peu de travail à faire pour résoudre ce problème. En effet, au lieu d'avoir un quadripotentiel $(A^\mu) = (V(r), \vec{\mathbf{0}})$ dont la composante spatiale est nulle, nous allons introduire un potentiel vecteur dont la forme sera choisie pour retrouver un champ magnétique uniforme orienté selon un axe z, $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Un tel champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur [2]

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}B\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, \tag{5.1}$$

avec ρ le rayon projeté dans le plan azimutal, c'est-à-dire la coordonnée radiale en symétrie cylindrique. Ici, notre champ magnétique sera toujours normal au plan de l'orbite $z = 0$ pour des raisons que nous détaillerons plus tard ; ainsi les rayons ρ et $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ seront confondus pour la particule et nous pourrons interchanger ces deux notations. Nous pouvons écrire le terme de force de Lorentz $eF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu_{\mathrm{p}}$ dans l'équation du mouvement (4.22) qui devient, pour ce potentiel

$$-\gamma m_{\text{eff.}}\frac{v^2}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} + evB. \tag{5.2}$$

Par ailleurs, nous avons le moment cinétique orbital donné par l'intégrale

$$J = \oint \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \oint \left(\gamma m_{\text{eff.}}\vec{\boldsymbol{v}} + e\vec{\boldsymbol{A}}\right) \cdot r\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = 2\pi r\left(\gamma m_{\text{eff.}}v + \frac{1}{2}eBr\right) = 2\pi n, \tag{5.3}$$

où l'on prendra garde que nous avons transformé les ρ en r, selon ce qui a été dit plus haut. Comme au chapitre 3, nous pouvons combiner ces deux relations et, en introduisant une fréquence

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m_{\text{eff.}}}, \tag{5.4}$$

obtenons

$$v_n = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{1 - \frac{m_{\text{eff.}}\omega_L r_n^2}{n}}. \tag{5.5}$$

De la même manière, une équation de degré 4 sur r_n peut être écrite en combinant ces mêmes équations

$$(m_{\text{eff.}}\omega_L)^2 r_n^4 + m_{\text{eff.}}\alpha r_n - n^2 = 0, \tag{5.6}$$

et on peut la résoudre pour obtenir la valeur de r_n puis la vitesse v_n associée. Dans le cas de champs magnétiques de faible intensité, qui est l'approximation que nous considérons ici, nous trouvons une solution approchée pour r_n à l'aide d'un développement autour de la solution sans champ magnétique $r_n^{(0)} = a_0 n^2$, ce qui nous donne

$$r_n \approx \frac{n^2}{m_{\text{eff.}}\alpha}\left(1 - (m_{\text{eff.}}\omega_L)^2\frac{n^6}{(m_{\text{eff.}}\alpha)^2}\right). \tag{5.7}$$

Le champ magnétique aura pour effet de diminuer légèrement le rayon de l'orbite, mais au premier ordre en B – c'est-à-dire en ω_L –, nous pourrons le considérer égal à sa valeur $r_n^{(0)}$. En injectant ce résultat dans l'expression de la vitesse, nous obtenons au premier ordre

$$v_n \approx \frac{\alpha}{n}\left(1 + (m_{\text{eff.}}\omega_L)\frac{n^3}{(m_{\text{eff.}}\alpha)^2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \omega_L r_n^{(0)}. \tag{5.8}$$

2. $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$.

La vitesse au premier ordre est donc le résultat d'une déviation par rapport à $v_n^{(0)} = \alpha/n$ par un terme $\omega_L r_n^{(0)}$ que l'on interprète comme une vitesse d'entraînement. Nous comprendrons plus profondément cette remarque dans la prochaine section, en constatant que la pulsation ω_L, associée au champ magnétique, peut être également comprise comme la vitesse angulaire d'un changement de référentiel et donc la source de forces d'inertie. Enfin, en combinant les expressions pour v_n et r_n, nous trouvons l'énergie E_n associée au premier ordre

$$E_n \approx m_{\text{eff.}} + \frac{1}{2} m_{\text{eff.}} v_n^2 - \frac{\alpha}{r_n} \approx m_{\text{eff.}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}\right) + n\omega_L. \tag{5.9}$$

Le premier terme correspond à la limite non-relativiste de l'énergie à l'ordre zéro obtenue dans le cas de l'atome, c'est-à-dire la formule de Bohr, et le second au décalage linéaire Zeeman bien connu :

$$E_n \approx E_n^{(0)} + n\omega_L = E_n^{(0)} - L_z \frac{eB}{2m_{\text{eff.}}}, \tag{5.10}$$

avec $L_z \equiv n$ le moment cinétique de la particule projeté sur l'axe du champ magnétique, ici z. Nous avons donc bien une levée de dégénérescence des niveaux d'énergie selon la valeur du moment cinétique ; en particulier, nous constatons une distinction entre les mouvements horaires $L_z < 0$ et anti-horaires $L_z > 0$, qui résulte de la symétrie brisée par l'introduction d'une direction privilégiée *via* le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$. Il est important de noter que nous ne travaillons ici qu'avec des orbites circulaires, ainsi nous avons toujours un moment cinétique maximal selon l'axe privilégié z, $|L_z| = |L|$. Dans ce cas, chaque niveau d'énergie $E_n^{(0)}$ de l'atome sera séparé en deux nouveaux niveaux $E_n^{(0)} \pm |n|\omega_L$, plutôt que $2n+1$ comme c'est le cas avec des orbites elliptiques, situation qui a été illustrée sur la figure 1.6. Il s'agit d'une limitation de ce modèle que nous avons déjà évoquée et qu'il serait intéressant de résoudre ; mais cela ne sera pas abordé dans ce travail.

5.1.2 Le théorème de Larmor

La résolution des équations pour le champ est, comme on peut s'en douter, très difficile. Nous avions déjà des équations de degré quatre pour la dynamique de la particule, et on peut imaginer toute la complexité qui apparaît dans l'équation de d'Alembert si nous ajoutons un nouveau terme, qui n'a par ailleurs pas une symétrie sphérique comme le reste de l'équation. Il existe cependant, si l'on accepte de travailler sous une approximation de faibles champs magnétiques, une astuce nous permettant d'obtenir des solutions approchées, un peu comme nous l'avons fait pour la particule. En effet, nous avions évoqué, dans le cas de cette dernière, la possibilité d'interpréter le terme magnétique comme une vitesse d'entraînement, causée par un changement de référentiel. Cette remarque n'était pas un hasard, puisqu'il existe effectivement un théorème, le théorème de Larmor, qui stipule que les effets d'un champ magnétique uniforme sont, au premier ordre, égaux aux effets d'inertie de Coriolis d'un changement de référentiel [66]. Nous allons voir, dans ce chapitre, une première démonstration de ce théorème dans le cas du mouvement newtonien de la particule, pour bien le comprendre ; puis nous appliquerons ce même théorème au champ scalaire afin d'obtenir également les solutions approximatives recherchées : la possibilité d'utiliser le théorème de Larmor sur une équation d'onde étant bien moins connue.

Champ magnétique et force de Coriolis sur une particule chargée

Nous souhaitons étudier les effets d'un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ sur une particule de masse m_{p} et de charge électrique e dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, par exemple le référentiel du

laboratoire. Pour pouvoir traiter ce problème plus facilement, nous choisissons de regarder quelles sont les forces subies par la particule dans un référentiel $\mathcal{R}$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}'$ avec un axe et une vitesse angulaire définis par le vecteur $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Dans un tel référentiel, tout objet subit des forces d'inertie, c'est-à-dire des forces causées par l'accélération centrifuge du mouvement de rotation, dont l'expression est

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{in.}} = -2m_{\text{p}}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} - m_{\text{p}}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\text{p}}). \tag{5.11}$$

Par ailleurs, notre particule subit une force d'origine magnétique dans tout référentiel, qui s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{mag.}} = e\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} \times \vec{\boldsymbol{B}}. \tag{5.12}$$

Ainsi, il vient pour la force totale exprimée dans $\mathcal{R}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{mag.}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{in.}} = e\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} \times \vec{\boldsymbol{B}} - 2m_{\text{p}}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} - m_{\text{p}}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{\text{p}}). \tag{5.13}$$

Nous voyons d'abord que le dernier terme est d'ordre supérieur en ω, nous choisissons donc de nous placer dans une limite où il devient négligeable et nous pouvons le supprimer. D'autre part, si nous intervertissons les vecteurs $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}}$ dans le produit vectoriel, nous voyons apparaître une chose tout à fait remarquable

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} \times \left(e\vec{\boldsymbol{B}} + 2m_{\text{p}}\vec{\boldsymbol{\omega}}\right). \tag{5.14}$$

Ainsi, nous pouvons annuler le terme entre parenthèses, et par extension la force résultante sur la particule, en choisssant un référentiel $\mathcal{R}$ tel que

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{e\vec{\boldsymbol{B}}}{2m_{\text{p}}}. \tag{5.15}$$

En d'autres termes, si nous observons la particule dans un référentiel dont la rotation s'effectue autour de l'axe défini par le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$, et dont la fréquence de rotation est judicieusement choisie à la valeur $\omega_L = \left|-eB/(2m_{\text{p}})\right|$ [3], la particule apparaîtra dans ce référentiel comme n'ayant aucune force appliquée sur elle.

Une autre manière de décrire ce phénomène, et c'est cette approche qui nous intéresse et que nous conserverons pour le reste de ce manuscrit, est de considérer une particule qui, dans un référentiel fictif, ne subit aucune force. Si nous voulons maintenant regarder les effets d'un champ magnétique sur elle, nous pouvons réaliser à la place un changement de référentiel défini par un vecteur $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ possédant les caractéristiques développées au paragraphe précédent. Les procédures qui consistent à simuler ou annuler les effets d'un champ magnétique par un changement de référentiel sont remarquables par leur utilité puisqu'il est souvent beaucoup plus simple de résoudre la dynamique en l'absence de force, et c'est justement ce que nous allons faire par la suite. Nous devons rappeler néanmoins que tout ceci ne fonctionne qu'au premier ordre en ω, c'est-à-dire si les fréquences, ou de manière équivalente les champs magnétiques en jeu, sont faibles ; à des ordres plus grands, un changement de référentiel plus général et complexe qu'une simple rotation serait nécessaire pour compenser les nouveaux termes par des forces d'inertie.

Avant de passer à la suite, nous pouvons signaler que l'équivalence entre des forces d'inertie, c'est-à-dire dues à une accélération, et un champ de force, n'est pas sans rappeler

3. Notons qu'à l'origine et comme nous l'avons montré ici, il s'agit d'une relation vectorielle. Souvent, nous introduisons directement la pulsation de Larmor ω_L sans la valeur absolue, alors qu'elle est définie positive ; il faut alors s'assurer qu'un changement de signe est remplacé par un changement de sens de rotation.

les principes de la relativité générale, dont la première remarque que l'on en fait est souvent que la force de gravitation est identique à une accélération. On peut alors se demander si un formalisme géométrique de notre système permettrait une description et une résolution plus élégantes du problème. Nous reviendrons sur ce sujet à la fin de ce chapitre et mentionnerons les diverses possibilités qui s'offrent à nous.

Le théorème de Larmor appliqué à un champ scalaire

Il est possible d'obtenir la même équivalence pour un champ et son équation d'onde en suivant une procédure tout à fait similaire. Nous souhaitons obtenir les solutions de l'équation de d'Alembert homogène avec dérivées coraviantes pour un potentiel vecteur $\vec{\boldsymbol{A}} = A_\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{1}{2} B\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ et un potentiel de Coulomb $V = -\frac{e}{r}$

$$\left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)^2 u - \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{1}{2} eB\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\right)^2 u = 0. \tag{5.16}$$

Considérons un changement de référentiel (voir figure 5.1) vers $\mathcal{R}'$ défini par une rotation autour de l'axe z, c'est-à-dire dans la direction φ, avec une fréquence ω_L

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \rho' &= \rho \\ z' &= z \\ \varphi' &= \varphi - \omega_L t. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Seule la dérivée temporelle est affectée par un tel changement de référentiel, et la nouvelle dérivée $\partial_{t'}$ s'écrit [4]

$$\partial_{t'} = \partial_t + \omega_L \partial_\varphi, \tag{5.18}$$

tandis que $\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\vec{\boldsymbol{x}}'} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\vec{\boldsymbol{x}}}$. Si nous développons le premier terme de l'équation d'onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$, nous obtenons

$$\left(\partial_{t'} - i\frac{\alpha}{r'}\right)^2 u = \left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r} + \omega_L\partial_\varphi\right)^2 u = \left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)^2 u + 2\omega_L(\partial_\varphi u)\left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)u + \mathcal{O}(\omega_L^2). \tag{5.19}$$

Par ailleurs, nous supposons une solution harmonique pour u :

$$u(x) = f(\vec{\boldsymbol{x}})e^{-i\omega t}, \tag{5.20}$$

telle que le terme radial est négligeable devant la fréquence caractéristique du champ $\alpha/r \ll \omega$. Cela nous permet d'écrire l'approximation

$$\left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)u(x) \approx -i\omega u(x) \equiv -im_{\text{eff.}}u(x), \tag{5.21}$$

où nous avons explicitement introduit l'équivalence entre l'énergie du champ ω et la masse de la particule associée $m_{\text{eff.}}$. Cette équivalence n'est présente que parce que nous travaillons sur des solutions de dualité onde-particule, et nous pourrions continuer le développement sans l'imposer, mais nous choisissons de le faire malgré tout, afin de retrouver la forme connue et déjà évoquée de la pulsation de Larmor, comme nous le verrons juste après. Nous avons maintenant tous les éléments pour écrire l'expression de la partie temporelle du d'Alembertien

$$(\partial_t - i\frac{\alpha}{r} + \omega_L\partial_\varphi)^2 \approx \left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)^2 u - 2i\omega_L m_{\text{eff.}}\partial_\varphi u + \mathcal{O}(\omega_L^2) \approx 0. \tag{5.22}$$

4. On a $\partial_t u' = \partial_{t'}u' + \frac{\partial\varphi'(t)}{\partial t}\partial_{\varphi'}u'$.

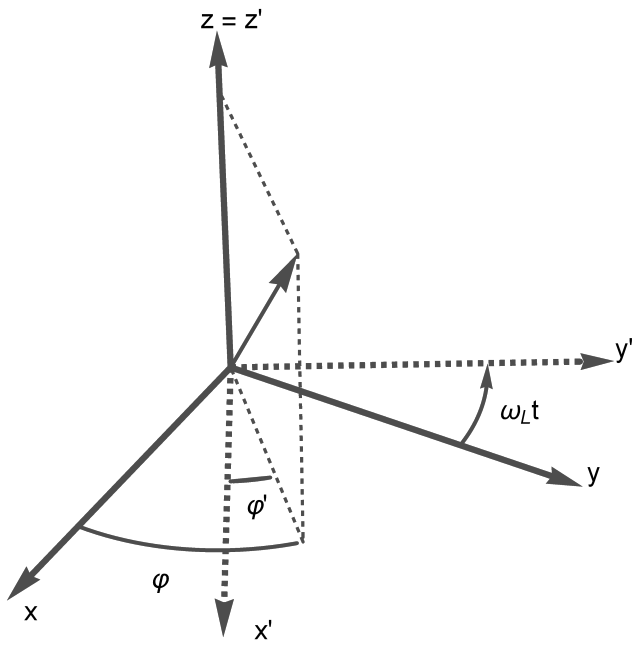


FIGURE 5.1 – Illustration du changement de référentiel utilisé pour le théorème de Larmor. Le plan équatorial x, y est tourné d'un angle $\omega_L t$ en fonction du temps, et seule la coordonnée φ est affectée.

La partie spatiale se développe aussi très facilement au premier ordre en B, et nous avons

$$\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{1}{2}eB\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\right)^2 u = \nabla^2 u - ieB\partial_\varphi u + \mathcal{O}(B^2). \tag{5.23}$$

Ainsi, nous écrivons le d'Alembertien total dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$(D')^2 u' = \left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)^2 u - \nabla^2 u - i(eB + 2\omega_L m_{\text{eff.}})\partial_\varphi u + \mathcal{O}(B^2) + \mathcal{O}(\omega^2) \approx 0. \tag{5.24}$$

Comme pour la particule, nous pouvons supprimer la contribution magnétique au premier ordre par un choix adapté de la fréquence de rotation ω_L, qui se trouve être égale à celle de la particule grâce à notre choix d'équivalence entre ω et $m_{\text{eff.}}$.

Pour résumer, nous calculons, dans un premier temps, les solutions du champ u à l'équation de d'Alembert homogène sans champ magnétique

$$\left(\partial_t - i\frac{\alpha}{r}\right)^2 u - \nabla^2 u = 0, \tag{5.25}$$

que nous avions déjà obtenues au chapitre précédent puisqu'il s'agit simplement de l'équation pour un atome. Pour obtenir la contribution du champ magnétique, nous réalisons un changement de référentiel $\varphi' = \varphi - \omega_L t$, et le champ résultant sera, en première approximation, équivalent à la solution recherchée. Le grand intérêt de cette approche est que la variable φ apparaît systématiquement comme une phase $e^{im\varphi}$ dans nos solutions, rendant le changement de référentiel trivial.

5.1.3 Les solutions approchées pour le champ

Puisque la phase des ondes $u_\pm$ le long de l'orbite dans le référentiel sans champ magnétique est donnée par

$$\pm m_\pm \varphi' - \omega_\pm t', \tag{5.26}$$

on l'obtient très simplement après changement de référentiel sous la forme

$$\pm m_\pm \varphi - (\omega_\pm \pm m_\pm \omega_L)t = \pm m_\pm \varphi - \omega'_\pm t. \tag{5.27}$$

Ainsi, comme pour la particule, l'énergie de chaque onde du champ est modifiée par l'ajout d'un terme proportionnel à la fréquence de Larmor, et l'énergie du champ total s'exprime toujours comme la demi-somme

$$\omega_n = \frac{\omega'_+ + \omega'_-}{2} = \omega_n^{(0)} + n\omega_L, \tag{5.28}$$

avec

$$n = \frac{m_+ - m_-}{2} \tag{5.29}$$

et $\omega_n^{(0)}$ l'énergie du champ de l'atome sans champ magnétique.

Comme nous l'avons démontré, le champ en présence d'un champ magnétique uniforme sera donné par la même expression (4.73) que celle obtenue au chapitre précédent, à la différence près que la fréquence du champ sera modifiée par l'introduction d'une correction linéaire $\pm m_\pm \omega_L$. Plus particulièrement, nous pouvons écrire le champ le long de la trajectoire qui nous intéresse

$$u\left(t, r_n, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = u_0 e^{i(n\varphi - (\omega_n^{(0)} + n\omega_L))t} \cos\left[(\omega_n^{(0)} + n\omega_L + \varepsilon)\left(r_n\varphi - \frac{k_n - \eta}{\omega_n^{(0)} + n\omega_L + \varepsilon} t\right)\right]. \tag{5.30}$$

La relation de de Broglie $p_n = k_n$ nous permet une fois de plus de confirmer l'équivalence entre les grandeurs associées à la particule et à l'onde, et en particulier le terme correctif $n\omega_L$ pour l'énergie de chacune, puisqu'*a priori* les nombres quantiques n'ont pas de raison d'être identiques, et nous aurions pu rendre cette différence explicite avec un $\tilde{n}$ pour le champ par exemple, pour finalement remarquer et imposer que $\tilde{n} = n$. Souvenons-nous enfin de l'équivalence imposée entre la vitesse de la particule et la vitesse de groupe de l'onde

$$v_n = \frac{p_n - eA_\varphi}{E_n - eV} \equiv v_\mathrm{g} = \frac{k - \eta}{\omega + \varepsilon}, \tag{5.31}$$

dont nous retirons d'une part les relations de dispersion pour les ondes $u_\pm$

$$k_\pm = \omega_\pm \pm \frac{\alpha}{r_n} + \frac{1}{2} eBr_n, \tag{5.32}$$

et déduisons d'autre part une expression pour les vitesses

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{g} \approx \frac{n}{N}\left(1 + \frac{m_{\mathrm{eff}.\omega_L} r_n^{(0)}}{n}\right) + \mathcal{O}(B^2). \tag{5.33}$$

En injectant l'équation (5.8) obtenue précédemment, on exprime une nouvelle fois une relation sur la constante de structure fine

$$\alpha \approx \frac{n^2}{N} + \mathcal{O}(B^2) = \alpha_0 + \mathcal{O}(B^2) \tag{5.34}$$

avec α_0 la valeur obtenue en l'absence de champ magnétique. Ceci nous permet de formuler une autre possibilité pour justifier l'écart de la valeur α mesurée expérimentalement par rapport aux valeurs permises par notre modèle : il pourrait s'agir d'effets du champ magnétique au second ordre. Bien sûr, cette vision n'est pas très crédible puisque la même valeur expérimentale est mesurée en l'absence de tout effet magnétique, mais elle est suffisamment intéressante pour être mentionnée. Enfin, nous utilisons une procédure tout à fait identique au chapitre précédent, en égalant le Lagrangien de la particule

$$L_{\mathrm{p}} = -m_{\text{eff.}}\sqrt{1-v_n^2} + \frac{\alpha}{r_n} + \frac{1}{2}eBr_nv_n \tag{5.35}$$

avec la phase de l'onde u le long de la trajectoire $k_nv_n - \omega_n$ pour en déduire l'expression de la pulsation propre de la particule

$$\omega_{\mathrm{p}} = m_{\text{eff.}} - \left(\frac{\alpha}{r_n} + \frac{1}{2}eBv_nr_n\right)\frac{1}{\sqrt{1-v_n^2}} \tag{5.36}$$

et, par extension, la valeur de l'amplitude z_0 du mouvement harmonique de la particule.

Ainsi, nous avons une nouvelle fois complètement déterminé les paramètres de la dynamique, et nous savons d'ores et déjà qu'elle sera, au premier ordre, la même que celle de l'atome sans champ magnétique mais avec l'ajout d'une précession de tous les objets autour de l'axe z à la fréquence ω_L.

5.2 L'effet Landau

L'effet Landau est très similaire à l'effet Zeeman et son traitement ne nous sera pas étranger. Il s'agit en effet de la situation d'une particule en mouvement circulaire uniforme, soumise également à un champ magnétique constant, mais en dehors de tout potentiel coulombien. Il faut donc assurer la trajectoire de la particule par d'autres moyens, par exemple un confinement magnétique, mais une quantification de l'énergie apparaîtra aussi, bien qu'elle présentera une petite différence avec celle de Zeeman. Par chance, il nous sera possible d'obtenir des solutions analytiques et nous n'aurons pas à faire d'approximation. En revanche, et pour assurer la cohérence de certains résultats que nous regarderons plus tard, nous devons faire le choix de considérer, cette fois, un champ scalaire massif. La différence avec le modèle précédent apparaît donc dans l'action du champ, qui est maintenant donnée par

$$\int \mathrm{d}^4x\left[(Du)(Du)^* - \omega_0^2uu^*\right], \tag{5.37}$$

mais, comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, l'impact de l'ajout de cette masse ω_0 sera minime.

5.2.1 Le mouvement de la particule

Comme évoqué, la particule suit un mouvement circulaire dont nous ne pouvons questionner l'origine, mais qui respecte des équations presque identiques, à savoir, pour l'accélération relativiste avec force magnétique de Lorentz $eF_\mu\nu x'^{,\nu}$

$$-\gamma m_{\text{eff.}}\frac{v^2}{r} = evB, \tag{5.38}$$

et pour le moment cinétique $L = \oint \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

$$\gamma m_{\text{eff.}}v + \frac{1}{2}eBr = \frac{n}{r}. \tag{5.39}$$

On obtient sans difficulté la vitesse de la particule

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_{\text{eff.}}}{4n\omega_L}}}, \tag{5.40}$$

le rayon de son orbite

$$\rho_n = \sqrt{\frac{n}{m_{\text{eff.}}\omega_L}} \tag{5.41}$$

ainsi que son énergie

$$E_n = m_{\text{eff.}}\sqrt{1 + 4\frac{n\omega_L}{m_{\text{eff.}}}}. \tag{5.42}$$

Puisque le champ magnétique est ici la seule source d'une force affectant la dynamique, il est évident que nous ne pouvons pas la considérer comme une perturbation, ce que l'on constate très clairement dans ces expressions, et en particulier celle du rayon. L'énergie relativiste peut cependant toujours être développée comme une perturbation par rapport à l'énergie de masse si celle-ci est grande, ce qui nous donne en faible champ

$$E_n \approx m_{\text{eff.}} + 2n\omega_L. \tag{5.43}$$

Cette relation nous permet de constater immédiatement qu'une autre fréquence que celle de Larmor est en jeu ici, il s'agit de la fréquence de Landau qui vaut le double de celle de Larmor. Nous garderons nos expressions en terme de ω_L par cohérence et uniformité avec ce qui a été précédement fait, mais cette différence est un point très curieux et important. Quoiqu'il en soit, une dépendance linéaire en B et n apparaît au premier ordre comme pour l'effet Zeeman, et l'on observera donc un spectre énergétique très similaire.

5.2.2 L'expression du champ scalaire massif

Comme nous l'avons dit, nous étudions cette fois-ci un champ scalaire de masse ω_0, c'est-à-dire qu'il suit une équation de Klein-Gordon plutôt que d'Alembert

$$(D^2 + \omega_0^2)u(x) = 0. \tag{5.44}$$

Notre symétrie est maintenant entièrement cylindrique, nous pouvons donc développer cette équation dans ce système de coordonnées (t, ρ, φ, z)

$$-\partial_t^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho u) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2 u + \partial_z^2 u - ieB\partial_\varphi u - \frac{1}{4}e^2B^2\rho^2 u = \omega_0^2 u \tag{5.45}$$

avec comme toujours une séparation des variables

$$u(t, \rho, \varphi, z) = R(\rho)e^{ik_z + m_\varphi - \omega t}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{5.46}$$

Le changement de variable radiale $\xi = -\frac{1}{2}eB\rho^2$ simplifie grandement l'équation sur R

$$\xi R''(\xi) + R'(\xi) + R(\xi)\left(\beta - \frac{\xi}{4} - \frac{m^2}{4\xi}\right) = 0 \tag{5.47}$$

avec

$$\beta = -\frac{\omega^2 - \omega_0^2 - k_z^2}{2eB} - \frac{m}{2} \tag{5.48}$$

une constante. Cette équation admet de nouveau des solutions de la forme

$$R(\xi) = Ce^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{\frac{|m|}{2}}{}_1F_1\left(-\left(\beta - \frac{|m|+1}{2}\right), |m|+1, \xi\right) \tag{5.49}$$

avec C une constante de normalisation et ${}_1F_1(a,b,z)$ la fonction hypergéométrique confluente solution de l'équation (4.72) introduite au chapitre précédent. Alternativement, les fonctions de Whittaker $\mathcal{M}_{\kappa,\mu}(z)$ peuvent être utiles pour exprimer cette fonction radiale

$$R(\xi) = C\sqrt{\xi}\mathcal{M}_{\beta,\frac{|m|}{2}}(\xi). \tag{5.50}$$

En appliquant une nouvelle fois la contrainte holonome sous sa forme (4.74) sur les deux modes contre-propagatifs $u_\pm$, nous pourrons extraire l'expression du champ le long de la trajectoire et, ainsi, la fréquence ω de l'onde totale. Une autre condition est présente pour assurer que la fonction radiale est partout finie : la quantité $\beta - (|m|+1)/2$ doit être égale à un entier $n_\rho \in \mathbb{N}$ qui correspondra à une quantification radiale dépendante de la quantification angulaire en m (voir [64] p. 527). Connaissant l'expression de β, on peut en déduire la valeur de l'énergie $\omega_\pm$

$$\omega_\pm = \sqrt{\omega_0^2 - 2eB\left(n_{\rho_\pm} + \frac{|m_\pm| + m_\pm + 1}{2}\right) + k_{z_\pm}^2}. \tag{5.51}$$

En nous concentrant sur des mouvements planaires avec $k_{z_\pm} = 0$ plutôt que des mouvements hélicoïdaux, et sachant que les nombres m_+ et m_- sont définis respectivement positif et négatif, nous avons finalement l'énergie totale du champ

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = \frac{1}{2}\omega_0\left[\sqrt{1 - \frac{2eB}{\omega_0^2}\left(n_{\rho_+} + m_+ + \frac{1}{2}\right)} + \sqrt{1 - \frac{2eB}{\omega_0^2}\left(n_{\rho_-} + \frac{1}{2}\right)}\right] \tag{5.52}$$

dont l'approximation sous faible champ $-eB/\omega_0^2 \ll 1$ est

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{eB}{\omega_0}\frac{n_{\rho_+} + n_{\rho_-} + m_+ + 1}{2}. \tag{5.53}$$

Cette approximation n'est bien sûr possible que si le champ scalaire est effectivement massif, ce qui justifie notre choix d'une équation de Klein-Gordon plutôt de d'Alembert. Sans masse, la dynamique est bien sûr toujours valable mais il devient compliqué d'appliquer la dualité onde-particule et retrouver la quantification de Landau. En effet, si nous imposons la condition que les masses du champ et de la particule sont égales $\omega_0 = m_{\text{eff.}}$, l'approximation de l'énergie devient la relation de Landau

$$\omega \approx \omega_0 + 2n\omega_L = m_{\text{eff.}} + 2n\omega_L \tag{5.54}$$

avec le nombre quantique

$$n = \frac{m_+ - m_-}{2} = \frac{n_{\rho_+} + n_{\rho_-} + m_+ + 1}{2}. \tag{5.55}$$

L'approche de l'effet Landau fait donc émerger plus encore que pour l'atome la contrainte forte entre notre champ et notre particule, dont les masses et nombres quantiques doivent être égaux, et nous montre, une fois de plus, que cette dualité où le champ et la particule ne forment qu'un même objet est extrêmement centrale dans notre modèle.

Conclusion

Au dela de la possibilité de reproduire les quantifications de Zeeman et Landau, le point le plus intéressant développé dans ce chapitre est très probablement l'utilisation du théorème

de Larmor, c'est-à-dire de l'équivalence entre les effets d'un potentiel électromagnétique et un changement de référentiel. En plus d'être un outil très pratique pour résoudre des problèmes initialement complexes, cette approche ouvre deux perspectives. D'abord, si nous prenons plus au sérieux ce théorème, il s'agit d'une piste intéressante pour appliquer un analogue du champ magnétique sur un objet macroscopique, comme cela a déjà été fait dans des expériences d'hydrodynamique [49]. Plus encore, on peut se demander s'il est possible de généraliser cette équivalence entre force et changement de référentiel à tout quadripotentiel afin de traiter des situations plus complexes. C'est en fait exactement ce que fait la relativité générale pour la gravitation, et il nous faudrait donc utiliser un même formalisme, c'est-à-dire avoir une sorte d'équivalence entre la dérivée covariante de notre équation d'onde et celle de la relativité, que l'on pourrait illustrer par

$$\partial_\mu + iqA_\mu \sim \partial_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu \tag{5.56}$$

où $\tilde{\Gamma}_\mu$ serait obtenu par une contraction ou opération encore inconnue sur la connexion de Levi-Civita

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\,\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{5.57}$$

avec $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique. Diverses approches ont déjà été explorées en ce sens, et l'une d'elles sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce manuscrit, nommée théorie de Kaluza-Klein, est parvenue à une telle unification au prix de l'introduction d'une cinquième dimension à l'espace-temps. En effet, il n'est pas possible de décrire à la fois la gravitation de la relativité générale et l'électromagnétisme sous un même tenseur métrique en quatre dimensions [5]. En revanche, il est clair qu'il existe un lien très fort entre les forces résultant d'interactions, et celles dites « d'inertie », que l'on décrit souvent comme fictives par opposition aux premières, et qui résultent d'un changement de référentiel. Quoiqu'il en soit, cette idée est particulièrement intéressante puisqu'elle nous permettrait de reprendre nos équations pour décrire tous les potentiels externes comme une combinaison de forces d'inertie de Coriolis et centrifuge.

5. Diverses approches existent, néanmoins, en plus de la théorie de Kaluza-Klein, dont beaucoup ont été explorées par Einstein lui-même. Voir [50, 51] pour une revue des tentatives de théories des champ unifiés.

Troisième partie

Extensions et interprétations

Chapitre 6

Dualité onde-particule basée sur l'acausalité

Introduction

Le chapitre 2 nous a permis de discuter des diverses possibilités qui nous sont offertes pour satisfaire aux inégalités de Bell. Il faut comprendre ce choix comme une ligne directrice pour des formulations alternatives de la mécanique quantique, même si les phénomènes d'apparence non locale n'interviennent pas nécessairement partout. Nous avons également vu dans les modèles développés tout au long de la partie II que c'est l'hypothèse d'indépendance statistique qui devrait être abandonnée si l'on souhaite avoir une description mécanique et classique de la théorie quantique. Néanmoins, ces modèles n'ont fait intervenir jusqu'ici que des aspects bien particuliers que nous avons identifiés comme des formes de superdéterminisme. Il existe pourtant une alternative à ce superdéterminisme pour l'abandon de la troisième hypothèse de Bell : la suppression de l'hypothèse de causalité. Nous verrons au cours de ce chapitre comment transformer notre modèle dans cette voie, et quelles conséquences un tel choix peut avoir. Nous constaterons, au delà de la reproduction de la mécanique quantique, que le choix d'une approche dite acausale, autrement appelée de causalité symétrique ou double [1], a l'avantage de donner une description beaucoup plus élégante, robuste, et explicative des divers ingrédients du modèle, dans une forte continuité de l'esprit de Louis de Broglie. Ce dernier a, en effet, lui-même considéré des approches faisant intervenir des solutions symétriques pour la double solution [22, 24], avant de finalement les abandonner. Nous proposons, ici, de repartir une nouvelle fois de ses intuitions originelles.

6.1 Une résolution acausale de l'équation d'onde

6.1.1 Fonctions de Green pour l'équation d'onde : approche intuitive

Nous allons détailler ici l'ajout et la définition des fonctions de Green pour notre problème, car cette procédure n'est pas uniquement mathématique mais apporte également des discussions importantes et intéressantes sur les problèmes que nous traitons dans ce chapitre, à savoir les questions touchant à la causalité. Nous choisissons dans un premier

1. Étant un sujet peu souvent considéré, la terminologie est assez mal uniformisée. Nous parlons, ici, d'acausalité au sens de ce qui a été dit au chapitre 2, c'est-à-dire d'une absence de direction temporelle privilégiée pour les divers phénomènes. On disposera donc d'une superposition de deux solutions, l'une de causalité standard, et l'autre de causalité rétrograde, réintroduisant de ce fait la symétrie temporelle explicite des équations d'onde.

temps de nous limiter à un cas simple qui a l'intérêt d'être plus facile à comprendre et visualiser, mais une procédure plus générale sera utilisée par la suite.

Prenons l'équation de d'Alembert à $1+3$ dimensions avec terme source $f(t,\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\left(\partial_t^2 - \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2\right)u(t,\vec{\boldsymbol{r}}) = f(t,\vec{\boldsymbol{r}}). \tag{6.1}$$

Les solutions u peuvent s'écrire de manière générale comme

$$u(x) = u^{(0)}(x) + \int \mathrm{d}^4x_0\, G(x;x_0)f(x_0) \tag{6.2}$$

avec $u^{(0)}$ une solution de l'équation homogène sans terme source et $G(x;x_0)$ la fonction de Green définie pour tout opérateur différentiel $\mathcal{D}$ par

$$\mathcal{D}G(x;x_0) = \delta^4(x-x_0). \tag{6.3}$$

Les fonctions de Green sont particulièrement intéressantes car elles définissent la réaction d'un système à une excitation impulsionnelle. Autrement dit, et pour illustrer ceci de manière intuitive, comme il est possible d'écrire toute fonction comme une somme (en général infinie) d'impulsions ponctuelles $f(x) = \int \mathrm{d}x_0\, f(x_0)\delta(x-x_0)$, le champ résultant d'une telle fonction sera en retour la somme des réactions à chacune des impulsions, expliquant, de fait, la forme de la solution (6.2). On module en chaque point source de l'espace x_0 la réponse impulsionnelle $G(x;x_0)$ propagée jusqu'au point d'intérêt x par l'intensité de la source $f(x_0)$ au point x_0. Nous nous intéressons ici au cas de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire que les fonctions de Green qui nous intéressent sont solutions de

$$\partial_t^2 G(t,\vec{\boldsymbol{r}};t_0,\vec{\boldsymbol{r}}_0) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 G(t,\vec{\boldsymbol{r}};t_0,\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \delta(t-t_0)\delta^3(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0). \tag{6.4}$$

Il sera plus simple, pour nous, de résoudre cette équation en passant en espace de Fourier, sachant que les transformations vers cet espace sont définies par

$$G(t,\vec{\boldsymbol{r}};t_0,\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}}\, \tilde{G}(\omega,\vec{\boldsymbol{k}})e^{-i(\omega(t-t_0)-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0))} \tag{6.5}$$

et que par ailleurs

$$\delta(t-t_0)\delta^3(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}}\, e^{-i(\omega(t-t_0)-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0))}. \tag{6.6}$$

En injectant ces deux expressions dans l'équation (6.4), on obtient assez simplement, après quelques manipulations algébriques, l'expression de la fonction de Green en espace de Fourier

$$\tilde{G}(\omega,\vec{\boldsymbol{k}}) = \frac{-1}{\omega^2-k^2} = \frac{-1}{(\omega-k)(\omega+k)} \tag{6.7}$$

avec $k = \left|\vec{\boldsymbol{k}}\right|$. Afin d'obtenir cette fonction en espace réel, nous allons devoir réaliser les deux intégrations sur ω et $\vec{\boldsymbol{k}}$ de l'équation (6.5). L'intégration sur ω

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{-1}{(\omega-k)(\omega+k)}e^{-i\omega(t-t_0)} \tag{6.8}$$

est problématique car la fonction à intégrer présente deux pôles en $\omega = \pm k$, mais nous pouvons malgré tout résoudre cette intégrale en passant dans le plan complexe. À ce stade,

nous allons devoir prendre quelques précautions afin d'assurer la validité du résultat, et nous verrons que ces précautions vont nous amener à devoir faire des choix concernant la causalité. L'intégrale sur un contour orienté et fermé Γ est nulle pour toute fonction holomorphe $f(z)$, comme énoncé par le théorème intégral de Cauchy

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{6.9}$$

Toutefois, si la fonction f présente n pôles z_k à l'intérieur du contour, alors l'intégrale n'est pas nulle mais est donnée par la somme des résidus en ces pôles

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(f(z))\mathrm{Ind}_\Gamma(z_k), \tag{6.10}$$

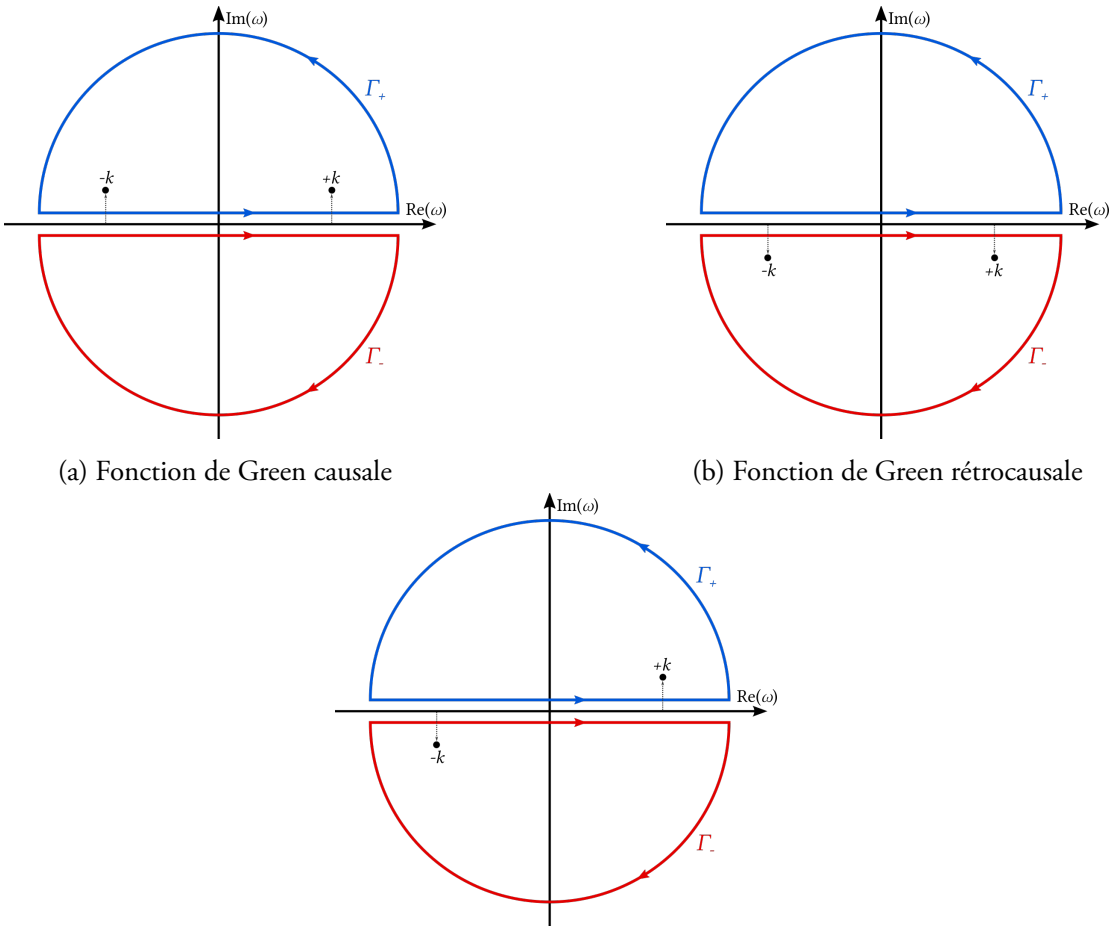
avec $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_k)$ le nombre de tours du contour Γ autour du pôle z_k, positif si ces tours sont réalisés dans le sens direct, négatif sinon. Nous avons alors deux choix de contours représentés sur la figure 6.1, l'un se refermant dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ en sens direct noté Γ_+, l'autre dans le demi-plan inférieur $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ en sens indirect noté Γ_-. Pour choisir le bon contour, nous réécrivons $\omega = \mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)$ de sorte qu'une partie de l'exponentielle dans l'intégrale (6.8) va devenir réelle, à savoir $e^{-\mathrm{Im}(\omega)(t-t_0)}$. Si nous souhaitons pouvoir égaler l'intégrale sur l'axe réel avec l'intégrale sur l'un des deux contours $\Gamma_\pm$, il faut que l'intégrale sur l'un ou l'autre des demi-cercles soit nulle, ce qui sera le cas si l'argument de l'exponentielle est négatif et qu'elle s'annule donc lorsque $|\mathrm{Im}(\omega)| \to \infty$. Ainsi deux cas de figure apparaissent :

I. si $t - t_0 > 0$, nous devons choisir $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ et donc utiliser le contour Γ_+.
II. si $t - t_0 < 0$, nous devons choisir $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ et donc utiliser le contour Γ_-.

Rappelons-nous que t_0 est le point temporel associé à l'émission de l'impulsion, et t le point associé à la réponse du champ face à l'excitation. Sachant cela, nous voyons comment ce choix de contour devient lié à la causalité : Γ_+ sera associé à des propagations du passé vers le futur, et nous donnera une fonction de Green G_+ que l'on qualifie de retardée ou causale, tandis que Γ_- sera associé à des propagations inverses, du futur vers le passé, et nous donnera une fonction de Green G_- que l'on appelle cette fois avancée ou rétrocausale.

Il reste une dernière étape avant de pouvoir obtenir le résultat de l'intégrale (6.8). Nous avons correctement refermé les contours dans les bons demi-plans, mais les pôles sont toujours situés sur le contour et sont ainsi problématiques. Pour résoudre cette difficulté, nous allons déplacer les pôles (ou de manière équivalente les contours) d'une distance infinitésimale. Un nouveau choix s'offre donc à nous, de quel côté de l'axe réel faut-il réaliser cette opération ? C'est notre hypothèse concernant la causalité qui contraindra ce choix, illustré également par la figure 6.1 :

I. si nous voulons n'avoir que des solutions causales ou retardées, nous déplacerons les deux pôles de sorte qu'ils soient situés à l'intérieur du contour Γ_+, ainsi la fonction de Green G_- sera nulle. C'est le choix le plus communément fait en physique.
II. si nous voulons n'avoir que des solutions rétrocausales ou avancées, nous déplacerons les deux pôles de l'autre côté de l'axe réel afin qu'ils soient dans le contour Γ_-, et la fonction de Green G_+ sera nulle.
III. une dernière possibilité consiste à déplacer chacun des pôles d'un côté différent de l'axe, par exemple en associant les fréquences positives et donc le pôle en $+k$ aux propagations causales, et les fréquences négatives ainsi que le pôle $-k$ aux propagations rétrocausales. C'est ce choix que nous allons faire dans la suite de ce document, et nous y reviendrons pour le spécifier. Notons que cette approche n'est, au final, qu'une combinaison des deux précédentes, et que nous pourrons donc traiter les $G_\pm$ séparément dans la plupart des cas.



(a) Fonction de Green causale

(b) Fonction de Green rétrocausale

(c) Fonction de Green acausale

FIGURE 6.1 – Illustration des choix de contours possibles pour l'intégration de la fonction de Green selon l'hypothèse de causalité.

Nous obtenons ainsi les deux solutions G_+ et G_- de notre intégrale par le théorème des résidus

$$\tilde{G}_\pm(t, t_0, k) = \pm i \,\mathrm{Res}_{\pm k}\, \tilde{G}(\omega, \vec{\boldsymbol{k}}) e^{-i\omega(t-t_0)} = i \frac{e^{\mp ik(t-t_0)}}{2k} \tag{6.11}$$

qui se sommeront pour nous donner la fonction de Green totale.

Il ne nous reste ainsi plus qu'à intégrer ces fonctions sur $\vec{\boldsymbol{k}}$ pour finalement obtenir les fonctions de Green dans l'espace réel

$$G_\pm(t, \vec{\boldsymbol{r}}; t_0, \vec{\boldsymbol{r}}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}}\, \tilde{G}(t, t_0, k) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}. \tag{6.12}$$

Réécrivons pour cela l'élément de volume en coordonnées sphériques $\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}} = k^2\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}(\cos\theta)\, \mathrm{d}\varphi$ ainsi que le produit scalaire $\vec{\boldsymbol{k}} \cdot (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) = k|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0| \cos\theta$, ce qui nous donne

$$G_\pm(t, \vec{\boldsymbol{r}}; t_0, \vec{\boldsymbol{r}}_0) = \frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}k \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, k e^{\mp ik(t-t_0)} e^{ik|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|\cos\theta} \tag{6.13}$$

et après intégration sur $\cos\theta$ et φ il vient

$$G_\pm(t, \vec{\boldsymbol{r}}; t_0, \vec{\boldsymbol{r}}_0) = \frac{1}{8\pi^2|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}k \left\{ e^{-ik(\pm(t-t_0)-k|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|)} - e^{-ik(\pm(t-t_0)+k|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|)} \right\}. \tag{6.14}$$

On reconnaît évidemment la transformée d'un delta de Dirac [2], et il vient

$$G_{\pm}(t,\vec{\boldsymbol{r}};t_0,\vec{\boldsymbol{r}}_0)=\frac{1}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}\{\delta(t-t_0\mp|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|)-\delta(t-t_0\pm|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|)\}. \quad (6.15)$$

Le second delta dans cette expression sera toujours nul. En effet les propagateurs G_+ et G_- sont définis tels que $t-t_0>0$ et $t-t_0<0$ respectivement, ce qui implique que l'argument du delta est toujours strictement positif et n'est donc jamais nul. Les fonctions de Green avancée et retardée s'expriment au final

$$G_{\pm}(t,\vec{\boldsymbol{r}};t_0,\vec{\boldsymbol{r}}_0)=\frac{\delta(t-t_0\mp|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|)}{4\pi|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}. \quad (6.16)$$

Avec cette solution en main, nous pourrrons appliquer notre hypothèse de causalité pour obtenir l'expression du champ. Comme nous l'avons évoqué, nous favoriserons une solution dite acausale, c'est-à-dire que le propagateur final sera donné par la demi-somme

$$G(x;x_0)=\frac{G_+(x;x_0)+G_-(x;x_0)}{2}. \quad (6.17)$$

Cependant, une autre possibilité nous est apparente et aura une grande utilité pour reproduire un régime de transparence. Nous savons que chacune des solutions G_+ et G_- ainsi que leur demi-somme est solution de l'équation avec terme source

$$\Box G_+(x;x_0)=\Box G_-(x;x_0)=\Box\left(\frac{G_++G_-}{2}\right)=\delta^4(x-x_0), \quad (6.18)$$

mais en les soustrayant, nous obtenons un cas tout aussi intéressant puisqu'il s'agit d'une solution à l'équation homogène

$$\Box\left(\frac{G_+-G_-}{2}\right)=0. \quad (6.19)$$

Comme nous le savons, c'est cette forme de solutions que nous recherchons dans le cas de la transparence, et nous choisirons, par la suite, de l'utiliser à la place du propagateur acausal. Gardons en tête cependant que cette fonction n'est pas une fonction de Green mais une sorte d'objet hybride permettant d'obtenir des solutions à l'équation homogène, il faudrait ainsi la noter $G_0(x;x_0)$ mais nous omettrons cet indice la plupart du temps pour plus de simplicité. Une dernière conséquence extrêmement intéressante liée à cette remarque apparaît, lorsque nous nous souvenons que la solution générale pour l'équation d'onde est donnée par la superposition d'une solution homogène et d'une solution particulière de l'équation avec terme source. De fait, nous pourrions superposer la solution homogène donnée par G_0 avec la solution acausale G :

$$u(x)=\int \mathrm{d}^4x_0\, G_0(x;x_0)f(x_0)+\int \mathrm{d}^4x_0\, G(x;x_0)f(x_0)=\int \mathrm{d}^4x_0\, G_+(x;x_0)f(x_0) \quad (6.20)$$

et nous aurions un champ résultant qui nous apparaîtrait comme exclusivement retardé, bien que ses composantes soient individuellement acausales. Si l'on a comme objectif de ramener à tout prix une causalité unique, c'est une solution qui présente un intérêt très grand et a, d'ailleurs, été considérée par John Wheeler et Richard Feynman dans leur théorie de l'absorbeur [91]. En revanche, le prix à payer est important puisque, sans surprise, il

2. L'intégrale ici n'est pas réalisée sur tout l'axe réel, mais peut montrer facilement à l'aide de quelques changements de variables ou des transformées de Laplace que c'est équivalent.

est nécessaire d'introduire un superdéterminisme : le champ homogène a été soigneusement choisi par l'Univers pour compenser exactement la composante avancée émise par la source. C'est, une fois de plus, une illustration remarquable du lien étroit qui existe entre acausalité et superdéterminisme, ainsi que de la nécessité d'avoir l'un des deux pour ce genre de théories.

Comme nous l'avons dit, nous nous concentrerons maintenant sur l'étude de la solution homogène isolée G_0 pour recréer la transparence.

6.1.2 Champ créé par une source harmonique

Source immobile

Ayant à notre disposition les fonctions de Green pour l'équation de d'Alembert, nous pouvons étudier diverses solutions et commencerons en particulier par considérer le cas d'un phaseur de fréquence ω_0 situé en $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\mathbf{0}}$

$$f(t, \vec{\boldsymbol{r}}) = g e^{-i\omega_0 t} \delta^3(\vec{\boldsymbol{r}}), \tag{6.21}$$

avec g une constante de couplage. Le champ homogène acausal associé à cette source est obtenu simplement par intégration avec la demi-différence des propagateurs retardé et avancé

$$u(t, \vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{g}{4\pi} \int \mathrm{d}t_0 \, \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{r}}_0 \, e^{-i\omega t_0} \frac{\delta(t - t_0 - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|) - \delta(t - t_0 + |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|} \delta^3(\vec{\boldsymbol{r}}_0) \tag{6.22}$$

$$= \frac{g}{4\pi} \int \mathrm{d}t_0 \, e^{-i\omega_0 t_0} \frac{\delta(t - t_0 - r) - \delta(t - t_0 + r)}{r} \tag{6.23}$$

$$= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-i\omega_0(t-r)} - e^{-i\omega_0(t+r)}}{r} \tag{6.24}$$

ce qui nous donne au final

$$u(t, \vec{\boldsymbol{r}}) = ig \frac{\sin(\omega_0 r)}{4\pi r} e^{-i\omega_0 t}. \tag{6.25}$$

Cette solution est extrêmement intéressante et constitue la base des discussions et développements qui vont suivre. En effet, par comparaison avec le précédent modèle, nous avons ici aussi un champ de type double solution, avec d'une part une onde de phase $e^{-i\omega t}$, et d'autre part une onde de groupe en $\omega \mathrm{sinc}(\omega r)$. Cette onde de groupe a aussi la particularité d'être centrée autour de la particule, et de décroître en amplitude en $1/r$ lorsque l'on s'éloigne de cette dernière, à la manière des champs électrostatiques ou gravitationnels classiques bien connus. Par ailleurs, si nous nous étions intéressés à la solution inhomogène de l'équation d'onde, le sinus serait devenu un cosinus et le champ créé par la particule aurait présenté une divergence à l'origine. C'est une autre des raisons pour lesquelles nous choisissons d'étudier la demi-différence, mais notons bien que cette divergence n'est pas un mal en soi, puisqu'elle est probablement symptomatique de la nature ponctuelle de notre particule. Dans tous les cas, nous voyons qu'il n'est jamais très difficile de jongler entre ces deux solutions, et nous pourrons revenir sur notre décision si nous en avons besoin.

Source en mouvement uniforme

Pour traiter le cas d'une particule à vitesse constante, il nous suffit de procéder à un changement de référentiel, en partant de la solution (6.25) et en la réécrivant dans un nouveau référentiel $\mathcal{R}'$ à vitesse constante v selon un axe particulier, par exemple ici $+z$ en

coordonnées cylindriques. Comme nous le savons, un tel changement est réalisé à l'aide des transformations de Lorentz définies par

$$t' = \gamma(t - vz) \tag{6.26}$$
$$z' = \gamma(z - vt) \tag{6.27}$$
$$\rho' = \rho \tag{6.28}$$
$$\varphi' = \varphi, \tag{6.29}$$

où seules la direction temporelle et celle spatiale dans la direction du mouvement sont affectées. Le champ s'écrira donc désormais indépendament de φ

$$u(t', \rho', z') = ig\frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{\rho^2 + \frac{(z-vt)^2}{1-v^2}}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \frac{(z-vt)^2}{1-v^2}}}e^{-i\omega_0\gamma(t-vz)}. \tag{6.30}$$

Nous avons un intérêt à bien comprendre cette solution, puisque ce sera plus ou moins elle qui sera appliquée le long de la trajectoire de la particule, bien que d'autres effets doivent évidemment apparaître en raison de la circularité du mouvement. Réécrivons particulièrement ce champ en $t = 0$ pour supprimer quelques termes

$$u(t', \rho', z') = ig\frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{\rho^2 + (\gamma vz)^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\gamma vz)^2}}e^{i\gamma\omega_0 vz} \tag{6.31}$$

afin d'en sortir quelques remarques. Naturellement, on observe une modification uniquement selon l'axe du mouvement z :

$$ig\frac{\sin(\omega_0|\gamma vz|)}{|\gamma vz|}, \tag{6.32}$$

et le champ dans le plan $z = 0$, c'est-à-dire selon la variable ρ, est inchangé :

$$ig\frac{\sin(\omega_0\rho)}{\rho}. \tag{6.33}$$

À mesure que la vitesse v augmente et se rapproche de 1, le champ va nous sembler se concentrer de plus en plus autour de $z = 0$: la symétrie sphérique initiale va être applatie dans la direction z et, à la limite $v \to 1$, tout se passe comme si aucune partie de l'énergie n'était rayonnée dans la direction du mouvement mais qu'elle l'était uniquement dans le plan normal à ce dernier. Ce point sera très important pour comprendre certaines figures que nous aborderons en fin de chapitre, et nous le résumerons en disant qu'une source relativiste d'un champ émet préférentiellement ce dernier dans des directions normales à son mouvement, et presque exclusivement dans ces directions si la vitesse de la source est ultra-relativiste. Évidemment ceci n'est qu'une observation faite depuis le référentiel que nous avons choisi, la particule ne voit rien de tout cela dans son référentiel propre.

6.2 Résolution générale par les propagateurs avancé et retardé

Pour traiter de situations complexes, il nous faudra faire usage d'un formalisme plus général et complet que nous allons présenter maintenant. Nous constaterons par ailleurs que ce formalisme est, en présence d'interactions notamment, très similaire à celui développé dans la théorie quantique de l'électrodynamique, et en particulier avec les idées portées par Richard Feynman [45, 46, 47].

6.2.1 Développement des fonctions de Green sur une base générale de modes spatiaux

Nous repartons comme précédemment d'une équation de d'Alembert, avec un terme source ponctuel au point spatio-temporel x_0

$$\Box G(x, x_0) = \delta^4(x - x_0), \tag{6.34}$$

sur laquelle on réalise une transformation de Fourier temporelle afin de décomposer la fonction de Green G sur une base de modes de fréquence ω

$$G(x, x_0) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) e^{-i\omega(t-t_0)}. \tag{6.35}$$

De cette façon, et en injectant cette expression dans l'équation 6.34, nous extrayons une équation de Helmholtz pour les fonctions G_ω

$$\nabla^2 G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) + \omega^2 G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = -\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0). \tag{6.36}$$

Il nous est possible de décomposer également ces fonctions spatiales sur une base de modes propres λ

$$G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = \sum_\lambda c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}), \tag{6.37}$$

avec $\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})$ les fonctions spatiales associées à chacun des modes, et $c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0)$ les coefficients de normalisation de cette décomposition. Contrairement à la section précédente, nous ne spécifions pas pour l'instant la forme des fonctions ϕ : il peut s'agir bien entendu d'ondes planes mais aussi d'autres fonctions mieux adaptées à un autre système de coordonnées. Néanmoins, nous imposons la condition que les modes ϕ_λ doivent former une base orthonormée, c'est-à-dire qu'ils satisfont la relation

$$\int \phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_{\lambda'}(\vec{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{6.38}$$

avec $\delta_{\lambda\lambda'}$ le symbole de Kronecker qui vaut 0 tout le temps sauf si λ et λ' sont égaux. Nous choisirons à partir de maintenant des modes qui sont solutions de l'équation

$$\nabla^2\phi_\lambda + \omega_\lambda^2\phi_\lambda = 0 \tag{6.39}$$

avec ω_λ une valeur propre associée au mode propre λ, de sorte qu'en développant le laplacien [3] de G_ω

$$\nabla^2 G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = \nabla^2 \sum_\lambda c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\sum_\lambda c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\omega_\lambda^2\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}), \tag{6.40}$$

ce qui nous permet de simplifier l'équation sur G_ω

$$\sum_\lambda (\omega^2 - \omega_\lambda^2)c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0). \tag{6.41}$$

Nous disposons enfin d'une relation de fermeture

$$\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}') = \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}') \tag{6.42}$$

3. Le Laplacien est associé à l'espace des $\vec{\boldsymbol{x}}$: $\nabla^2 \equiv \nabla^2_{\vec{\boldsymbol{x}}}$, il n'affecte donc pas les fonctions de $\vec{\boldsymbol{x}}_0$.

dont on peut déduire aisément les coefficients c_λ

$$c_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}_0) = -\phi^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0), \tag{6.43}$$

et ainsi les fonctions G_ω s'écrivent au final

$$G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = -\sum_\lambda \frac{\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0)}{\omega^2 - \omega_\lambda^2}. \tag{6.44}$$

Remarquons que ces fonctions sont de nouveau singulières en $\omega = \pm\omega_\lambda$, et qu'il nous faut donc traiter ces pôles en ajustant notre contour d'intégration. Plutôt que de refaire une analyse graphique de ce traitement, nous allons utiliser une astuce qui consiste à ajouter un infinitésimal imaginaire $i\varepsilon$ à la variable ω, définissant ainsi selon le signe qui lui est associé les deux solutions avancée et retardée

$$G_\omega^{\text{ret.}/\text{av.}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = -\sum_\lambda \frac{\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0)}{(\omega \pm i\varepsilon)^2 - \omega_\lambda^2}. \tag{6.45}$$

Le dénominateur, qui est le point problématique de ces fonctions, peut être estimé par le développement suivant :

$$\frac{1}{(\omega \pm i\varepsilon)^2 - \omega_\lambda^2} \approx \frac{1}{\omega^2 - \omega_\lambda^2 \pm 2i\varepsilon\omega} = P\left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_\lambda^2}\right] \mp i\pi\delta(\omega^2 - \omega_\lambda^2), \tag{6.46}$$

avec $P[f(x)]$ la valeur principale de la fonction f. Le δ de Dirac a par ailleurs la propriété de combinaison avec une fonction :

$$\delta(f(x)) = \sum_{\text{zéros } x_0 \text{ de } f} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \tag{6.47}$$

qui nous donne

$$\delta(\omega^2 - \omega_\lambda^2) = \frac{1}{2|\omega_\lambda|}[\delta(\omega - \omega_\lambda) + \delta(\omega + \omega_\lambda)]. \tag{6.48}$$

Ainsi, sachant que les fréquences ω_λ sont définies positives, nous obtenons pour le propagateur recherché

$$G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) = \frac{G_\omega^{\text{ret.}} - G_\omega^{\text{av.}}}{2} = -\sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\frac{\pi}{2i\omega_\lambda}[\delta(\omega - \omega_\lambda) + \delta(\omega + \omega_\lambda)], \tag{6.49}$$

et il vient après intégration sur ω pour repasser en espace réel

$$G(x, x_0) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} G_\omega(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0) e^{-i\omega(t-t_0)} = \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\frac{e^{i\omega_\lambda(t-t_0)} + e^{-i\omega_\lambda(t-t_0)}}{4i\omega_\lambda}. \tag{6.50}$$

Dès lors, nous pourrons obtenir le champ créé par une source par la méthode de Green habituelle ; il nous suffira de spécifier une base ϕ_λ respectant les quelques conditions mentionnées précédemment.

6.2.2 Retour sur la particule au repos

Nous pouvons comparer la solution obtenue par cette méthode avec celle développée précédemment ; pour cela nous utilisons une particule source de deux champs avancé et retardé décrite par un phaseur de pulsation ω_0 localisé en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$

$$f(x_0) = g e^{-i\omega_0 t_0} \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}_0). \tag{6.51}$$

La seule dépendance temporelle provient de l'exponentielle complexe, de sorte que l'intégration sur t_0 devient

$$\int \mathrm{d}t_0\, e^{-i\omega_0 t_0} e^{\pm i\omega_\lambda (t-t_0)} = 2\pi e^{\pm i\omega_\lambda t} \frac{\delta(\omega_0 \pm \omega_\lambda)}{\omega_\lambda}. \tag{6.52}$$

Comme d'autre part les fréquences ω_0 et ω_λ sont définies positives, seul l'un des $\delta(\omega_0 \pm \omega_\lambda)$ est non nul, et il vient donc

$$G(x, x_0) = i\pi^2 e^{-i\omega_0 t} \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}) \phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0) 2\pi \frac{\delta(\omega_0 - \omega_\lambda)}{\omega_\lambda}. \tag{6.53}$$

Nous n'avons maintenant plus qu'à définir la base spatiale de notre choix, ici des ondes planes à trois dimensions

$$\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{e^{i\vec{\boldsymbol{k}}_\lambda \cdot \vec{\boldsymbol{x}}}}{\sqrt{V}}, \quad \phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_0) \equiv \phi_\lambda^*(\vec{\mathbf{0}}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{6.54}$$

avec $\vec{\boldsymbol{k}}_\lambda \equiv \vec{\boldsymbol{k}}$ le continuum des vecteurs d'onde possibles, et V une constante de normalisation représentant un volume. Ainsi pour obtenir le champ total $u(x)$, nous intégrons sur ces valeurs de $\vec{\boldsymbol{k}}$

$$u(x) = \frac{ig\pi}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^3} \frac{V}{V} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} e^{-i\omega_0 t} \delta(k - \omega_0), \tag{6.55}$$

d'où l'on tire très rapidement le résultat final

$$u(t, r) = \frac{ig}{4\pi} e^{-i\omega_0 t} \frac{\sin(\omega_0 r)}{r}, \tag{6.56}$$

en accord avec ce que nous avions déjà obtenu.

6.3 Modèle atomique acausal

6.3.1 Particule en mouvement uniforme sur un cercle

Choix d'une base spatiale appropriée

Pour traiter les mouvements à symétrie sphérique qui nous intéressent, nous allons choisir une nouvelle base de modes spatiaux bien plus adaptée qui sera très familière :

$$\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}}) = \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{6.57}$$

avec j_l les fonctions de Bessel sphériques de première espèce [4] et Y_{lm} les harmoniques sphériques. Ces dernières ont une propriété d'orthogonalité que nous recherchons

$$\oint \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{6.58}$$

et de même les fonctions de Bessel shpériques satisfont la relation

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^2\omega\omega'\frac{2}{\pi}j_l(\omega r)j_l(\omega' r) = \delta(\omega-\omega'). \tag{6.59}$$

Nous avons ainsi l'orthogonalité recherchée entre nos modes ϕ_λ afin qu'ils forment une base

$$\int \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}}\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi^*_{\lambda'}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \delta_{\lambda\lambda'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(\omega-\omega'). \tag{6.60}$$

De cette manière, toute fonction peut être décomposée comme une somme de ces nouvelles fonctions ϕ_λ, et en particulier pour une fonction radiale $A_l(r)$, nous avons

$$A_l(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, \omega A_l(\omega)j_l(\omega r) \tag{6.61}$$

avec les $A_l(\omega)$ des coefficients en espace réciproque donnés par

$$A_l(\omega) = \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^2 A_l(r)j_l(\omega r). \tag{6.62}$$

Nous pouvons reprendre une dernière fois le cas de la particule au repos pour vérifier la cohérence de notre résultat. Comme nous l'avons vu, le champ total est donné par l'intégration [5]

$$u(x) = ig\frac{\pi}{2}\sum_\lambda \frac{\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})\phi^*_\lambda(\vec{\boldsymbol{0}})}{\omega_\lambda}e^{-i\omega_0 t}\delta(\omega_\lambda-\omega_0), \tag{6.63}$$

et plus particulièrement la somme sur les modes λ se décompose dans ce cas en

$$\frac{2}{\pi}e^{-i\omega_0 t}\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta_0,\varphi_0)\int_0^{+\infty} \mathrm{d}k\, kj_l(kr)j_l(0)\delta(k-\omega_0). \tag{6.64}$$

On sait également que $j_l(0)$ n'est non nul que lorsque $l=0$, ce qui implique également que $m=0$. Ainsi la somme sur l et m ne fait intervenir que les harmoniques sphériques indexées 00, qui sont des fonctions constantes de valeur

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \tag{6.65}$$

d'où

$$u(x) = ig\frac{\omega_0}{4\pi}e^{-i\omega_0 t}j_0(\omega_0 r)j_0(0). \tag{6.66}$$

La fonction $j_0(x)$ est égale au sinus cardinal de x, et est donc égale à l'unité en 0, il vient au final

$$u(x) = ig\frac{\sin(\omega_0 r)}{4\pi r}e^{-i\omega_0 t}, \tag{6.67}$$

nous retrouvons une fois de plus le même résultat.

4. Ce choix est la conséquence d'avoir privilégié la demi-différence des propagateurs retardé et avancé. En effet, la demi-somme nous aurait imposé les fonctions de Bessel de deuxième espèce $y_l(x)$, qui sont singulières en 0 comme l'est la fonction $\cos(x)/x$ par rapport au $\sin(x)/x$. Par ailleurs, si nous choisissons uniquement la solution avancée ou retardée, plutôt que la combinaison des deux, la base à privilégier fait intervenir les fonctions de Hankel $h_l^\pm = j_l \pm iy_l$, et l'on remarquera pour ces fonctions, le nombre imaginaire i qui est lui-même relié à la phase relative de $\pi/2$ entre le cosinus et le sinus.

5. La somme sur λ cache bien une intégration si les λ sont associés à une variable continue, comme l'est la fréquence ici.

Champ créé par une particule en mouvement circulaire uniforme

Nous arrivons enfin au développement et résultat principaux de ce chapitre. Nous avons à notre disposition une méthode basée sur les fonctions de Green décomposées sur une base de modes spatiaux, ainsi qu'un choix de base adapté à la symétrie du problème. Nous allons par avance indexer toutes les quantités relatives au mouvement de la particule avec un n. Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par la dépendance temporelle de la variable angulaire φ_n de la particule définie par

$$\varphi_n(t) = \frac{v_n}{\rho_n} t, \tag{6.68}$$

avec v_n sa vitesse tangentielle et ρ_n le rayon de l'orbite considérée. L'action d'une telle particule est donnée par

$$S_n(t) = L_n t = \big(\gamma m v_n^2 - E_n\big) t. \tag{6.69}$$

Ce faisant, le champ u créé par cette particule est donné par

$$u(x) = ig\frac{\pi}{2}\sum_\lambda \frac{\phi_\lambda(\vec{\boldsymbol{x}})}{2\pi\omega_\lambda}\int \mathrm{d}t_n\,\sqrt{1-v_n^2}\phi_\lambda^*(\vec{\boldsymbol{x}}_n(t_n))\big[e^{-i\omega_\lambda(t-t_n)} + e^{i\omega_\lambda(t-t_n)}\big]e^{iS(\vec{\boldsymbol{x}}_n(t_n),t_n)}. \tag{6.70}$$

Nous devons cette fois réaliser l'intégration sur t_n avec des quantités dépendant de cette variable, il faut pour cela expliciter ces dépendances avant de continuer. Comme le nombre de terme en jeu dans ce développement est devenu très grand, nous allons choisir d'en garder certains de côté lorsqu'ils n'ont aucun impact sur l'étape du développement ; il faut prendre garde de ne pas oublier de les réintroduire. Trois termes ont une dépendance en t_n :

I. les deux exponentielles $e^{\pm ik(t-t_n)}$ que nous rassemblerons sous un même terme avec un argument signé $\pm$.
II. l'harmonique sphérique $Y_{lm}^*(\theta_n, \varphi_n(t_n))$, qui se développe en $P_l^m(\cos\theta_n)e^{-im\varphi_n(t_n)}$, avec par ailleurs $\varphi_n(t_n) = \frac{v_n}{\rho_n}t_n$, nous mettrons de côté les fonctions P_l^m.
III. l'exponentielle complexe de l'action, cette dernière ayant une dépendance linéaire en t_n puisque la vitesse tangentielle et l'énergie sont toutes deux des constantes du mouvement ; nous écrirons donc ce terme $e^{iL_n t_n}$.

Les deux intégrations temporelles que nous devons réaliser s'écrivent donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_n\, e^{\pm ikt} e^{-i\left(m\frac{v_n}{\rho_n} + L_n \pm k\right)t_n} = 2\pi e^{\pm ikt}\delta\left(L_n - m\frac{v_n}{\rho_n} \mp k\right). \tag{6.71}$$

Comme d'habitude, nous procéderons ensuite à une intégration sur $k > 0$, qui supprimera nécessairement l'un des deux deltas de Dirac associés aux $e^{\pm ikt}$ puisque le terme $L_n - m\frac{v_n}{\rho_n}$ sera toujours défini soit positif soit négatif pour un mouvement donné. Il faudra alors remplacer tous les k dans l'expression du champ par

$$\chi_n = \left|L_n - m\frac{v_n}{\rho_n}\right|. \tag{6.72}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter la forme finale du champ, qui s'écrit

$$u(t,r,\theta,\varphi) = ig\sqrt{1-v_n^2}e^{iL_n t}\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta_n,\varphi_n(t))\chi_n j_l(\chi_n r) j_l(\chi_n r_n). \tag{6.73}$$

Nous dédierons une section de ce chapitre à des remarques sur cette expression, et les figures que l'on peut en tirer, mais avant de le faire il reste un point qui a été éludé jusqu'ici.

6.3.2 Mouvement dans un potentiel central et propagateurs de Coulomb

Un ingrédient majeur a été omis dans tout ce développement du mouvement circulaire, il s'agit bien entendu du potentiel coulombien lui-même responsable de l'apparition d'orbites, et qui affectera également le champ comme nous l'avons montré au chapitre 4. Malheureusement, la réintroduction du potentiel va nous causer beaucoup de soucis, car il n'existe pas de solutions analytiques pour les propagateurs de cette équation d'onde. Regardons malgré tout ce qu'il nous est possible de faire, et prenons pour cela l'équation complète

$$D^2u(x) = f(x), \tag{6.74}$$

avec f un terme source que nous gardons quelconque pour l'instant. Nous l'avons déjà vu, le formalisme de Green nous permet d'étudier la réponse impulsionnelle d'un champ solution de cette équation, c'est-à-dire qu'une fonction de Green $D(x;x_0)$ pour notre nouvel opérateur est solution de

$$(\partial + ieA)^2 D(x;x_0) = \delta^4(x - x_0). \tag{6.75}$$

Nous pouvons choisir de développer l'opérateur entre parenthèses pour ne garder dans le membre de gauche que la dérivée habituelle, c'est-à-dire le d'Alembertien

$$\partial^2 D(x;x_0) = \delta^4(x-x_0) - e^2A^2(x)D(x;x_0) - 2ieA(x)\partial D(x;x_0) - ie(\partial A(x))D(x;x_0) \tag{6.76}$$

que l'on condense sous la forme

$$\Box D(x;x_0) = \mathcal{F}_x D(x;x_0) + \delta^4(x - x_0). \tag{6.77}$$

On a introduit pour cela un nouvel opérateur $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathcal{F}_x = -e^2A^2 - 2ieA\partial - ie(\partial A). \tag{6.78}$$

Nous disposons par ailleurs de la fonction de Green D^0 pour l'équation de d'Alembert sans potentiels

$$\Box D^0(x;x_0) = \delta^4(x - x_0) \tag{6.79}$$

et il vient en l'injectant dans l'équation (6.78)

$$\Box(D - D^0) = \mathcal{F}_x D. \tag{6.80}$$

En d'autres termes, la différence $D - D^0$ est à son tour solution d'une équation que l'on peut traiter par la méthode de Green, où $\mathcal{F}_x D$ joue le rôle d'une source, et l'on obtient simplement une sorte de formule de récurrence

$$D(x;x_0) = D^0(x;x_0) + \int \mathrm{d}^4x_1\, D^0(x;x_1)\mathcal{F}_{x_1}D(x_1;x_0) = D^0(x;x_0) + D^{\text{ref.}}(x;x_0). \tag{6.81}$$

Pour résumer, le propagateur total pour l'équation d'onde est donné par la somme d'un propagateur de l'équation homogène, c'est-à-dire s'étant déplacé du point x_0 au point x « en ligne droite », et d'un propagateur réfléchi qui a rebondi sur les zones de potentiel $A(x)$ et a donc réalisé le chemin de x_0 à x en passant par une série de points intermédiaires $x_1, x_2, x_3, \ldots$ caractérisant le nombre de réflexions succcessives, comme représenté sur la figure 6.2. Mathématiquement, on utilise la relation de récurrence (6.81) pour obtenir une

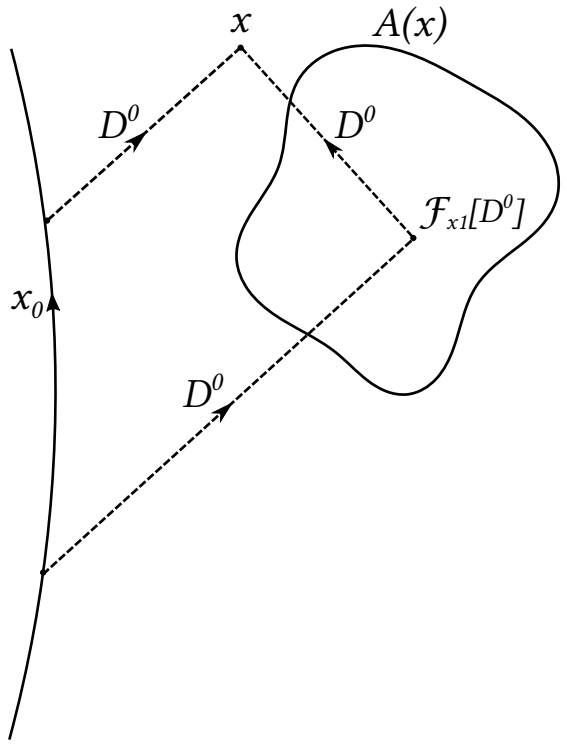


FIGURE 6.2 – Illustration des propagateurs de l'équation d'onde en présence d'une zone de potentiel $A(x)$. Le champ total en x est obtenu par la somme d'une propagation directe $D^0(x;x_0)$ depuis la source x_0 et d'un champ réfléchi $D^{\text{ref.}}(x;x_0) = D^0(x;x_1)\mathcal{F}_{x_1}D^0(x_1;x_0)$ combinant une propagation de x_0 vers un point intermédiaire x_1, une interaction avec le potentiel $\mathcal{F}_{x_1}$ en x_1, et une ultime propagation de x_1 vers x. Le champ réfléchi $D^{\text{ref.}}$ est en réalité constitué d'une somme infinie de champs associés à n réflexions sur le potentiel. Dans le cas d'un propagateur acausal, il existe également une propagation rétrocausale provenant d'une position x_0 future.

série d'intégrales d'ordre de plus en plus élevé

$$\begin{aligned} D(x;x_0) &= D^0(x;x_0) \\ &\quad + \int \mathrm{d}^4x_1\, D^0(x;x_1)\mathcal{F}_{x_1}D^0(x_1;x_0) \\ &\quad + \int\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\, D^0(x;x_2)\mathcal{F}_{x_2}D^0(x_2;x_1)\mathcal{F}_{x_1}D^0(x_1;x_0) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{6.82}$$

Si l'on regarde en particulier la troisième ligne de cette relation, on peut la traduire par la succession des événements suivants :

I. une propagation homogène de la source en x_0 au point intermédiaire x_1,
II. une interaction avec le potentiel en x_1,
III. une nouvelle propagation homogène de x_1 jusqu'à x_2,
IV. une dernière interaction avec le potentiel en x_2,
V. une propagation homogène de x_2 jusqu'au point recherché x,

et bien entendu seuls le point final x est fixe, on intègre sur l'ensemble des points intermédiaires x_i pour compter tous les endroits où le potentiel $A(x)$ est présent et a pu avoir un impact sur le champ, puis il faudra de nouveau intégrer sur tous les points x_0 correspondant à une source possible du champ final u.

Puisqu'il s'agit d'un développement perturbatif, nous pouvons ignorer les termes d'ordre supérieur si l'opérateur $\mathcal{F}$ est petit, puisqu'il apparaîtra à la puissance n pour l'ordre n.

Dans le cas de l'atome, deux éléments entrent en jeu. D'abord le potentiel est en $1/r$ et est donc très localisé en plus de décroître très rapidement à mesure que l'on s'éloigne du noyau. D'autre part la charge électrique e intervient dans l'expression de $\mathcal{F}$, et elle est petite devant 1. Nous ferons donc l'hypothèse que les perturbations liées à la présence du potentiel électrostatique sont négligeables, ou du moins sont suffisamment petites pour ne pas modifier de manière significative les solutions obtenues précédemment. On s'attend évidemment à voir apparaître des déviations, mais les remarques qualitatives que nous allons faire maintenant sur la forme du champ hors potentiel resteront valables pour le vrai atome.

6.3.3 Le champ acausal créé par une source ponctuelle sur une orbite

Le calcul numérique des solutions de l'équation (6.73) présente de nombreuses difficultés qui auront un impact très important sur le temps de calcul. D'abord, nous avons une double somme infinie sur les modes l, m, et pour chaque mode les différentes fonctions en jeu sont elles-mêmes données par des sommes infinies, il faut donc faire le choix de ne calculer qu'un nombre donné de termes en vérifiant, au préalable, que les termes suivants ont bien un poids négligeable dans le champ total. D'abord, la fonction de Bessel sphérique j_l peut être obtenue par la somme

$$j_l(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(l+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+l}. \tag{6.83}$$

On voit que la fonction j_l sera rapidement étoufée par le dénominateur faisant intervenir une factorielle qui vaudra au moins $l!$. Comme par ailleurs la factorielle a une croissance plus rapide que la croissance exponentielle des termes x^l, notre expression convergera toujours rapidement, et d'autant plus vite si on se situe à des rayons suffisamment petits [6]. Comme nous avons un produit de deux fonctions de même ordre l, cette remarque est d'autant plus vraie, et nous n'aurons pas la nécessité de calculer beaucoup de termes pour avoir un résultat au moins qualitativement correct. Le même constat ne peut être fait pour les harmoniques sphériques ; en effet, la normalisation de ces fonctions ne tendra pas à réduire la contribution des termes d'ordre plus important, et il faudra s'attendre à voir substister assez longtemps des artéfacts dans la forme angulaire de nos solutions, qui seront malgré tout ultimement impactées aussi par la normalisation des fonctions de Bessel.

Une première représentation du champ est faite sur la figure 6.3. Nous avons choisi ici une valeur de la constante de structure fine $\alpha = 1/10$, et de manière générale de moduler la valeur de cette constante pour obtenir différents résultats : les figures pour $\alpha \approx 1/137$ sont peu intéressantes pour observer et comprendre les structures et la manière dont est créé le champ. Comme nous l'avions déjà mentionné dans le cas du modèle atomique du chapitre 4, cette constante joue le rôle d'un facteur d'échelle entre les ondes de groupe et de phase, on obtient donc un écart trop important dans les dimensions des structures des divers éléments. Par ailleurs, rappelons-nous que le choix de la constante de structure fine affectera de manière homogène tous les autres paramètres, et en particulier la vitesse, le point important étant que tous ces paramètres évolueront de concert en respectant les règles données par les lois physiques. Quoiqu'il en soit, nous observons sur la figure 6.3 une image remarquable qui est en parfait accord avec nos discussions précédentes. L'électron, en orbite autour du centre atomique, génère autour de lui un champ à symétrie sphérique et, puisque

6. Le rapport de deux fonctions j_l et j_{l+1} peut être approximé qualitativement par $j_{l+1}(x)/j_l(x) \sim x/l$, autrement dit il existera toujours un ordre l au delà duquel les termes successifs deviennent de plus en plus petits ; et plus x est petit, moins l'on aura besoin de calculer de termes. Ce raisonnement est bien entendu également valable pour la somme interne sur m.

sa vitesse est relativement faible, le champ se déplace avec l'électron sans subir de déformation majeure. En effet, la vitesse de l'électron étant très faible devant celle des ondes, le champ a le temps de se propager et s'homogénéiser avant que l'électron n'ait pu se déplacer suffisamment loin pour causer une différence importante. Par analogie avec les processus éponymes en thermodynamique, on pourrait qualifier un tel régime de « quasi statique ». Une autre propriété remarquable de ce champ est qu'il semble très proche d'une fonction de Bessel sphérique $j_0(\omega_0|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|)$ alors qu'il est constitué en théorie d'une somme infinie de fonctions $j_l(\chi_l r)$ et $j_l(\chi_l r_0)$, dont chacun des termes est modulé par une combinaison complexe d'un coefficient de normalisation et d'harmoniques sphériques. Pourtant, ce résultat fait énormément de sens et on s'attendait bien à retrouver une fonction j_0 centrée autour de la position de la particule : c'était la solution pour une particule en mouvement uniforme et, en négligeant les effets causés par la circularité du mouvement ainsi que les corrections relativistes, nous pouvons faire l'approximation qu'il s'agit localement d'un mouvement uniforme. De plus importants effets devraient apparaître à mesure que la constante de structure fine – et donc la vitesse – augmente.

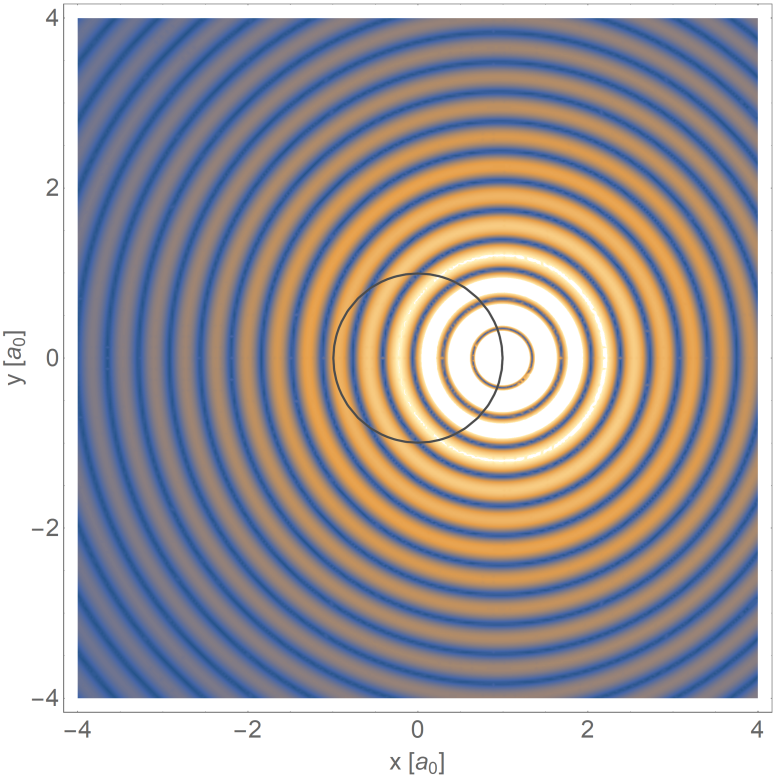


FIGURE 6.3 – Premier niveau d'énergie du champ acausal homogène créé par une source ponctuelle en mouvement circulaire uniforme avec une constante de structure fine $\alpha = \frac{1}{10}$. L'orbite de la particule source est représentée en noir, et la particule elle-même est située au centre de plus haute intensité du motif (en $y = 0$).

La figure 6.4, obtenue pour une valeur $\alpha = 0.9$, c'est-à-dire une particule relativiste[7], est encore plus intéressante et confirme notre dernier point. Cette fois-ci, l'électron est suffisamment véloce pour que le champ n'ait pas le temps de s'uniformiser. La vitesse est même suffisamment importante pour qu'un autre motif très net apparaisse à la place. Pour tenter de comprendre ce motif, revenons une nouvelle fois sur le cas de la particule en mouvement uniforme. Nous avions évoqué le fait que, si la vitesse se rapproche de 1, le champ se concentre dans un plan normal au mouvement. Ainsi, nous pouvons visualiser

7. Rappelons que la vitesse orbitale de l'électron est donné par $v_n = \alpha/n$. Puisque nous considérons ici le premier niveau d'énergie de l'atome, la vitesse v_1 est bien relativiste.

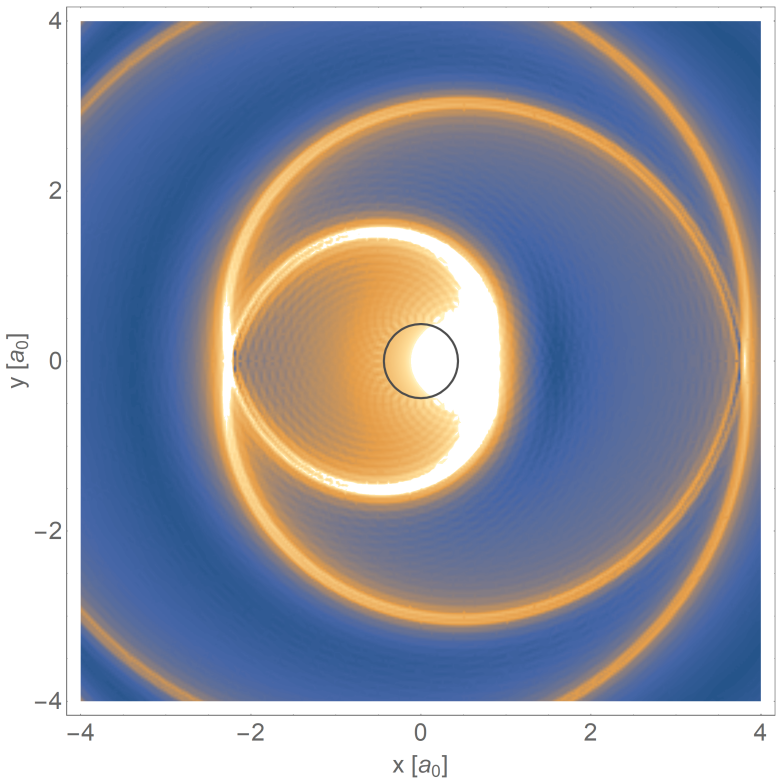


FIGURE 6.4 – Premier niveau d'énergie du champ acausal homogène créé par une source ponctuelle en mouvement circulaire uniforme avec une constante de structure fine $\alpha = \frac{9}{10}$. L'orbite de la particule source est représentée en noir, et la particule elle-même est située en $y = 0$ sur cette orbite.

l'électron comme rayonnant toute son énergie radialement, à la manière d'un phare. Un petit paquet d'énergie émis pendant un temps très court dt va donc être éjecté radialement à la vitesse de groupe v_{g}, et sa position radiale sera sa seule coordonnée qui évoluera dans le temps et sera donnée par l'équation

$$r(t) = r_0 + v_{\mathrm{g}} t, \tag{6.84}$$

où r_0 est son rayon d'émission, c'est-à-dire le rayon de l'orbite. Par ailleurs, la source de lumière, qui continue d'émettre, orbite à une fréquence angulaire ω, et sa position angulaire à l'instant t est donc donnée par

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0. \tag{6.85}$$

En combinant ces deux équations paramétriques, nous obtenons la relation

$$r(\theta) = \frac{v_{\mathrm{g}}}{\omega}(\theta - \theta_0) + r_0, \tag{6.86}$$

qui est la forme polaire de l'équation d'une spirale d'Archimède. Ce qui est vrai pour le champ retardé l'est évidemment aussi pour le champ avancé, le symétrique temporel de cette spirale, c'est-à-dire une spirale émise par une source orbitant dans l'autre sens, sera également présente. Nous comprenons donc maintenant le motif qui apparaît ici, il s'agit de deux spirales, l'une avancée et l'autre retardée, émises depuis l'électron source en orbite. L'épaisseur des bras de cette spirale sera bien entendu reliée à la vitesse orbitale de l'électron : plus ce dernier va vite, plus la spirale sera finement dessinée. Nous insistons fortement, néanmoins, sur le fait que cette discussion est extrêmement qualitative, et qu'il

est difficile d'expliquer exactement les mécaniques à l'œuvre. De fait, même si la raison que nous proposons pour justifier l'apparition de spirales est plutôt convaincante, les divers arguments qui sont invoqués peuvent être parfois approximatifs. Un dernier point doit être évoqué au sujet de la convergence de notre solution numérique. Nous remarquons en effet sur cette figure un certain nombre de motifs de très petite longueur d'onde, et avec des symétries très particulières, qui ne sont pas physiques mais sont des artéfacts causés par la présence des harmoniques sphériques comme nous l'avions mentionné au début de cette section. Cela signifie que nous ne sommes pas allés à un ordre suffisamment grand dans notre développement, en raison du temps de calcul que cela aurait nécessité, mais il ne faut pas oublier que ces effets disparaissent bien entendu à l'infini. Malgré cela, il remarquable qu'une expression comme l'équation 6.73, très difficile à lire, interpréter, et calculer, puisse nous donner des images aussi incroyables et qui sont par ailleurs très faciles à interpréter par notre seule intuition. Ce conflit entre la complexité des développements mathématiques et la simplicité des résultats qu'ils engendrent ne cessera jamais d'émerveiller.

Conclusion

Plusieurs approches visant à introduire dans les théories une hypothèse de causalité rétrograde en plus de la solution retardée habituelle ont été étudiées au cours de l'histoire de la physique [8]. L'objectif est bien souvent de rendre manifeste la symétrie temporelle intrinsèque des équations de la dynamique, mais peut avoir d'autres utilités. En effet, considérons par exemple le cas d'un électron en orbite autour d'un noyau, qui constituerait un modèle purement keplerien de l'atome. L'électron étant chargé et donc source de son propre champ électromagnétique, nous pouvons calculer le champ rayonné, et plus particulièrement lorsqu'il est en mouvement, ici circulaire. Ces solutions sont obtenues à l'aide des potentiels de Liénard et Wiechert [69, 93], mais un problème apparaît : si l'électron rayonne et perd de l'énergie, la force de recul associée perturbera son orbite et il finira par s'effondrer sur le noyau. On dit aujourd'hui que ce problème d'instabilité est résolu par la mécanique quantique, et en particulier l'hypothèse de Bohr, mais il existe bien d'autres manières d'approcher le problème. Nous avons vu au cours de ce manuscrit qu'il était possible de reproduire une stabilité atomique même sans imposer la condition que l'électron ne peut atteindre que certains niveaux d'énergie bien définis. Historiquement, on a pu considérer une approche également mécanique pour assurer une stabilité, en utilisant à la fois les potentiels retardés et avancés de Liénard-Wiechert. Si le potentiel retardé correspond à un rayonnement de l'électron vers l'extérieur et donc une perte d'énergie, le potentiel avancé est alors un rayonnement absorbé par l'électron depuis l'extérieur et un gain d'énergie. La symétrie totale entre ces deux types de solutions permet d'annuler complètement les rayonnements dus à l'accélération, ainsi que les forces d'Abraham-Lorentz associées.

Dans un deuxième temps, nous voyons que des solutions acausales ont une apparence très singulière. En effet, malgré notre utilisation d'une équation d'onde totalement linéaire, nous voyons qu'il existe des solutions stables, non homogènes dans l'espace – voire localisées –, et non dispersives. C'est-à-dire que nous obtenons des sortes de solitons, et ce même sans aucune non-linéarité. Souvenons-nous que Louis de Broglie a cherché à expliquer l'existence des particules dans sa théorie de la double solution par l'introduction de non-linéarités très localisées ; nous voyons ici qu'une solution très élémentaire est capable de renouer avec cette idée. Comme nous l'avons dit en introduction, de Broglie avait lui-même utilisé des ondes symétriques – et donc linéaires ; il a historiquement étudié les solutions de l'équation de d'Alembert comme nous l'avons fait, puis a favorisé l'équation de Klein-Gordon qui lui

8. On s'intéressera par exemple à [15, 19, 91].

semblait préférable, pour finalement abandonner l'idée. À la lumière de ce qui a été développé dans ce chapitre, nous voyons que son intuition initiale est, en fait, très fructueuse, et mérite d'être plus largement explorée. Bien sûr, la question pourraît se poser de savoir si nous pouvons étendre une telle approche à des équations d'ondes non-linéaires. Bien que rien ne s'y oppose, il reste vrai qu'une telle extension serait extrêmement problématique et difficile à résoudre. La raison est qu'avec les équations que nous avons considérées jusqu'ici, nous pouvons appliquer le principe de superposition et ainsi introduire séparément les solutions avancée et retardée. Dans une théorie non-linéaire, cela n'est plus possible et des interactions problématiques du fait de leur causalité vont apparaître, introduisant d'éventuels paradoxes. Cela ne signifie absolument pas qu'il nous est impossible de le faire, mais plutôt que nous ne pourrons pas espérer réaliser un traitement aussi simple que ce qui a été fait ici. Il est également probable que des outils mathématiques nouveaux et différents soient nécessaires pour traiter rigoureusement ce problème, ainsi que nous l'avions évoqué au chapitre 2.

Néanmoins, la résolution présentée dans ce chapitre est remarquable, et nous montre bien que l'acausalité est une alternative sérieuse aux autres approches quantiques, pour peu que l'on accepte de supprimer l'idée d'une flèche du temps unique. Par ailleurs, nous voyons qu'un développement perturbatif est possible lorsque l'on introduit de nouvelles interactions avec l'extérieur, et que le degré de la perturbation est directement associé au nombre d'interactions successives qu'il faut considérer. Même si nous ne les avons jamais dessinés explicitement, nous sommes bien entendu dans des situations qui pourraient être représentées très simplement par des diagrammes de Feynman, la figure 6.2 en étant déjà très proche. Nous revenons pour conclure sur les deux types de solutions que nous avons pu atteindre : homogène et inhomogène. Nous avons privilégié la première pour plusieurs raisons. D'abord, elle nous a permis de reproduire le régime de la transparence qui avait un grand intérêt pour nous, et c'est par ailleurs une solution méconnue qui est peu souvent évoquée et méritait d'être étudiée. Elle permet également, comme l'ont fait John Wheeler et Richard Feynman, de récupérer un champ total entièrement retardé si nous la superposons avec sa version inhomogène. Enfin, il est important de souligner une nouvelle fois que, bien que l'autre solution soit singulière à l'origine, ce n'est pas pour autant nécessairement problématique. Cette singularité est effectivement le symptôme de la nature ponctuelle de la particule, comme c'est le cas également pour les champs électro- et gravitostatiques. Dans ces deux cas, nous savons que si nous passons à une densité de charge étendue, par exemple un fluide réparti de manière homogène dans une boule de rayon a, le champ résultant en $1/r^2$ à l'extérieur de la boule devient linéaire en r à l'intérieur. Une future étape de ce développement consisterait donc, par exemple, à regarder une source étendue $f(x) \sim e^{-i\omega_0 t}\Pi\left(\frac{r}{a}\right)$, ou même une distribution gaussienne ou lorentzienne. Nous pourrions dans le même temps favoriser cette fois l'usage de la solution avec la vraie fonction de Green, c'est-à-dire la demi-somme, qui serait sans le moindre doute très intéressante également.

Chapitre 7

L'horloge interne et l'onde pilote en cinq dimensions

Introduction

Si le chapitre précédent avait pour but de reprendre les équations du mouvement pour en extraire la dynamique par une méthode à la fois plus cohérente et générale que celle utilisée jusqu'alors, le présent se concentrera, de manière équivalente, sur une nouvelle approche pour obtenir les équations de la dynamique, basée sur des principes plus élémentaires. Les développements présentés dans cette troisième partie s'inscrivent tous deux dans une recherche d'éclaircissement de certains points, et en particulier de la nature des objets que nous avons été amenés à introduire et manipuler. En effet, nous avons évoqué, de nombreuses fois déjà, les idées de Louis de Broglie, et plus particulièrement son approche qui consitait à tenter d'expliquer les nouveaux phénomènes quantiques, en combinant un maximum d'intuition et de réalisme physique avec un minimum de nouveaux concepts greffés à la théorie de manière *ad hoc*. Nous avons cependant énoncé jusqu'ici deux postulats, l'un sur l'existence d'un mouvement périodique interne $z_{\mathrm{p}}(t)$ pour la particule, l'autre sur l'existence d'un champ scalaire $u(x)$, qui en l'état ne sont pas expliqués de manière satisfaisante. Nous allons explorer ici une nouvelle piste, qui permettrait d'utiliser une hypothèse unique et peut-être plus élémentaire, pour faire émerger ces deux phénomènes. Cette hypothèse porte sur l'existence d'une cinquième dimension en plus des quatre utilisées habituellement pour décrire l'espace-temps dans les théories relativistes et, plus généralement, de faire une description entièrement géométrique de notre système, à l'instar de la relativité générale et en accord avec cette dernière. Il se trouve que, comme nous l'avons déjà mentionné très rapidement à la fin du chapitre 5, l'introduction d'une cinquième dimension n'est pas une idée nouvelle et a déjà étudiée au cours du XXe siècle, notamment dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein. Nous aborderons donc également cette théorie, ainsi que le lien qu'elle a entretenu avec le développement de la mécanique quantique au fil des années. Les développements présentés dans ce chapitre forment, en grande partie, une ébauche d'un nouveau modèle ; à ce titre, rien n'est définitif et une exploration plus rigoureuse et profonde des possibilités qui nous sont offertes est nécessaire. Nous préciserons ainsi les points qui ne sont pas encore tout à fait satisfaisants, ainsi que quelques pistes pour le futur.

7.1 Éléments introductifs

Avant de développer les équations du mouvement et tenter d'obtenir un système d'équations équivalent à celui étudié précédemment, il est judicieux de passer en revue certains des arguments et motivations pour réaliser ce passage à cinq dimensions d'espace-temps. En ef-

fet, l'introduction d'une nouvelle dimension peut, à première vue, paraître absurde car elle semble en désaccord avec notre expérience et nos observations. Néanmoins, nous allons voir qu'une telle idée peut devenir plutôt naturelle et élégante au regard de certains arguments tirés de notre modèle ; et, d'autre part, nous verrons qu'il est possible de la réconcilier avec notre expérience, ainsi que de la mettre en relation avec d'autres approches développées dans les années 1920. De même que le travail d'Albert EINSTEIN a permis, au début du siècle précédent, de réconcilier l'apparente différence entre l'espace tridimensionnel dont nous sommes familiers et le temps, il nous sera peut-être possible de relier cet espace-temps à quatre dimensions avec un autre élément de la physique, que l'on interprétera comme un nouveau degré de liberté spatio-temporel.

7.1.1 Reformulation géométrique du modèle de dualité onde-particule

Nous partons dans un premier temps du point de vue de la particule, et de la recherche d'une interprétation pour son « horloge interne ». La dynamique que nous avons étudiée pour la particule, au travers des différents modèles, est celle d'un mouvement uniforme à vitesse constante dans l'espace-temps, combiné à l'oscillation harmonique de ce que nous avons nommé un degré de liberté interne

$$z_{\mathrm{p}}(\tau) = z_0 e^{-i\omega_{\mathrm{p}}\tau}. \tag{7.1}$$

La question que nous nous posons est de savoir s'il est possible de considérer l'oscillation selon z comme un mouvement uniforme également, afin de l'unifier avec la théorie de de Broglie. Cette proposition est tout à fait réalisable si nous réinterprétons z_{p} comme la coordonnée curviligne représentant un point sur un cercle de rayon ρ, comme illustré sur la figure 7.1, de sorte qu'une autre paramétrisation faisant intervenir une coordonnée angulaire ξ_{p} est possible

$$z_{\mathrm{p}} = \rho e^{-i\xi_{\mathrm{p}}}, \tag{7.2}$$

où ξ_{p} devra varier linéairement avec le temps pour reproduire le mouvement harmonique

$$\xi_{\mathrm{p}}(\tau) = \omega_{\mathrm{p}}\tau. \tag{7.3}$$

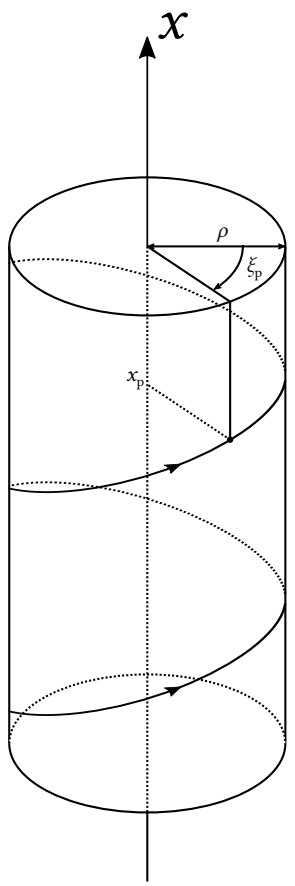


FIGURE 7.1 – Représentation de la cinquième dimension s'enroulant autour d'un des axes de l'espace-temps habituel. Le mouvement hélicoïdal de la particule ainsi que les coordonnées de cette dernière sont indiqués.

L'intérêt d'un tel changement est double. D'abord, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, cela nous donne la possibilité de généraliser l'approche relativiste que nous avons considérée précédemment, avec un nouveau système de coordonnées plus général représenté par le 5-vecteur, ou quinque-vecteur,

$$(x^{\mathrm{I}}) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^i \\ x^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{x}} \\ \xi \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

où l'on introduit en notation covariante, en plus des indices latins $a = 1\ldots3$ et grecs $\alpha = 0\ldots3$ utilisés jusqu'ici, des indices latins en lettres capitales minuscules $\mathrm{A} = 0\ldots4$

permettant d'inclure la nouvelle dimension $x^4 = \xi$. À partir de là, nous pouvons construire divers quinquevecteurs, notamment la quinquevitesse de la particule

$$(u_{\mathrm{p}}^{\mathrm{I}}) = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ v_{\mathrm{p}} \\ \omega'_{\mathrm{p}} \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

avec β un nouveau facteur de Lorentz dont on donnera la définition plus tard. On voit qu'une description très élégante de la particule comme se déplaçant à vitesse constante dans le temps, l'espace, et la cinquième dimension, est tout à fait possible en étant représentée de cette manière ; cela fera de plus apparaître la fréquence de de Broglie $\omega'_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}}\sqrt{1-v^2}$ en dehors du référentiel propre de la particule.

Un point très important est à noter : cette nouvelle dimension ne ressemble pas aux autres, du fait qu'elle n'est pas linéaire mais circulaire. Cette condition est à prendre au sérieux et a de nombreuses implications dont nous discuterons plus tard ; de plus, elle rend l'extension depuis le formalisme de la relativité générale moins directe et évidente qu'elle n'aurait pu l'être autrement. Pour nous représenter à quoi un tel espace-temps pourrait ressembler, il va être important, au moins dans un premier temps, de nous restreindre à un cas plus simple d'une géométrie à $1+1+1$ dimensions, c'est à dire une dimension temporelle linéaire, une dimension spatiale linéaire également et, enfin, une dimension circulaire dont la nature spatiale ou temporelle restera indéterminée pour l'instant. Ainsi, nos coordonnées seront, dans un référentiel quelconque,

$$(x^{\mathrm{I}}) = \begin{pmatrix} t \\ x \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

ξ est ici bien entendu une variable angulaire caractérisant la position le long du cercle, mais pour manipuler des distances dimensionnellement équivalentes au temps et à l'espace, il nous faut introduire également un rayon ρ caractérisant la taille de cette dimension, c'est à dire sa dimension caractéristique ou encore son rayon de courbure. Cette quantité ρ ne joue pas ici le rôle de coordonnée comme ce serait le cas dans un repère cylindrique – car tout objet est astreint à se déplacer le long du cercle mais jamais dans la direction du vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ –, mais s'apparenterait plutôt à la vitesse de la lumière c qui permet de convertir les coordonnées temporelles en coordonnées spatiales et inversement. Nous pouvons enfin mentionner que les géodésiques dans un tel espace sont des spirales s'enroulant autour de la direction de l'axe x, et disposeront donc d'une chiralité positive ou négative selon le signe de la fréquence ω_{p}. Ayant ainsi correctement défini le système de coordonnées, nous pouvons très naturellement en déduire un élément de longueur minkowskien

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 + \varepsilon\rho^2\,\mathrm{d}\xi^2 \tag{7.7}$$

et la métrique associée

$$(f_{\mathrm{IJ}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\rho^2 \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ définira la signature de la nouvelle dimension, et donc sa nature temporelle si $\varepsilon = +1$, ou spatiale si $\varepsilon = -1$. Le quinquevecteur position covariant sera donné par la contraction du vecteur contravariant x_{J} avec le tenseur métrique f_{IJ},

$$(x_{\mathrm{I}}) = (f_{\mathrm{IJ}}x^{\mathrm{J}}) = \begin{pmatrix} t \\ -x \\ \varepsilon\rho^2\xi \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

Nous pouvons remarquer que cette métrique ressemble très fortement à une métrique en coordonnées cylindriques comme nous l'avons mentionné précédemment, la différence étant que le rayon ρ est ici « fixé » et ne joue aucun rôle comme coordonnée. Ces différents éléments nous serviront de base pour développer les différentes équations du mouvement dans un formalisme géométrique. Nous pouvons aussi définir enfin le nouveau facteur de Lorentz

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{f_{\mathrm{AB}}\dot{x}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{A}}\dot{x}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{B}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{p}}^2 + \varepsilon\rho^2\omega_{\mathrm{p}}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{p}}^2 + \varepsilon\rho^2\omega_{\mathrm{p}}^2(1 - v_{\mathrm{p}}^2)}}, \tag{7.10}$$

ou, en réintroduisant le facteur de Lorentz en quatre dimensions $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_{\mathrm{p}}^2}$,

$$\beta = \gamma\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\rho^2\omega_{\mathrm{p}}^2}} \tag{7.11}$$

Cette expression pose bien entendu la question de la vitesse limite autorisée pour v_{p}, qui ne sera plus fixée à l'unité et dépendra même de ε, ρ, et ω_{p}, question à laquelle nous ne pouvons pas répondre pour l'instant.

Il nous reste, à ce stade, à incorporer le champ dans ce nouveau formalisme et, comme nous allons le voir, cela peut se faire très simplement et naturellement. Un formalisme géométrique est très propice à la description de champs et d'ondes comme des déformations de la géométrie, c'est-à-dire des contractions et dilatations des distances (temporelles ou spatiales). Ainsi, nous pouvons imaginer qu'il existe, en plus des ondes gravitationnelles habituelles, des déformations scalaires de cette nouvelle dimension. La solution pour une telle description consiste à dire, que les distances sur le cercle vont être agrandies ou rétrécies par le passage d'une onde, ce que nous pouvons traduire mathématiquement en laissant varier le rayon de courbure $\rho \to \rho(t, x, \xi)$. En effet, la distance réelle parcourue par un objet suivant un mouvement $\xi_{\mathrm{p}}(\tau)$ est obtenue par multiplication de ξ_{p} avec le rayon ρ, et sera donc affectée de cette manière. Il faut alors faire attention, car il est aisé de méprendre ρ pour une dimension supplémentaire puisque nous semblons réintroduire ce degré de liberté dans la dynamique, mais ce n'est pas le cas. De la même manière que les ondes gravitationnelles sont des déformations de l'espace-temps 4D dans l'espace-temps 4D lui-même, qui n'invoquent pas de dimensions supplémentaires, la quantité ρ, ainsi que sa variation dans l'espace ou le temps, ne sont que la mise en équation des propriétés géométriques de la dimension ξ que sont sa circularité et sa contraction ou dilatation scalaire. Notre métrique dynamique s'écrira donc

$$f(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\rho(t, x, \xi)^2 \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

et c'est sur cet objet que nous travaillerons dans la section 2.

Nous ajoutons une dernière remarque concernant ce champ ρ. Si sa dépendance en t et x traduit une déformation homogène de toute la dimension, la dépendance en ξ est plus complexe, car elle représente une modulation du rayon en fonction de l'angle considéré ; l'un des modes d'une telle déformation est représenté sur la figure 7.2. Par ailleurs, nous pouvons nous limiter, si nous le souhaitons, à des déformations uniquement homogènes, c'est-à-dire un rayon ρ dépendant uniquement de t et x mais pas de ξ. On nomme communément ce cas particulier la « condition cylindrique », afin de traduire le fait qu'une hypersurface $(t = t_0, x = x_0)$ donnée conserve toujours la même forme circulaire. Cette

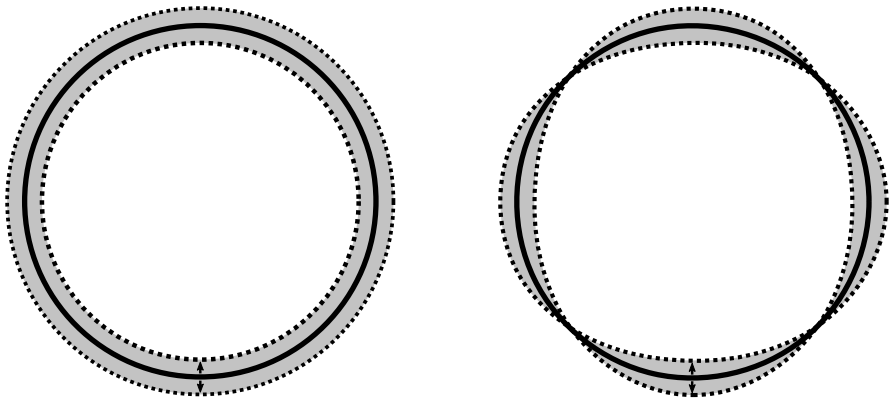


FIGURE 7.2 – Modes d'oscillation du rayon ρ de la cinquième dimension. À gauche : déformation homogène indépendante de ξ. À droite : déformation dépendante de ξ.

condition est très souvent appliquée dans les théories de ce type ; mais comme nous n'avons pour l'instant aucune raison de le faire, nous choisirons de garder, à ce stade, la possibilité d'une dépendance en ξ. Dans le cas le plus général, nous aurons même une combinaison de déformations homogènes et inhomogènes, la seconde n'étant pas nécessairement un mode propre de vibration mais pouvant aussi être un simple pic d'amplitude autour de la particule. Les possibilités qui nous sont offertes sont donc bien diverses et complexes, et il sera nécessaire de poursuivre le développement avant de pouvoir y voir plus clair.

7.1.2 Remarques sur la nature de la cinquième coordonnée : l'importance de la correspondance action-phase dans la théorie quantique

Quelques points méritent d'être discutés avant de poursuivre les calculs et peuvent permettre, par ailleurs, de mieux appréhender les objets et concepts que nous introduisons ici. La nouveauté la plus importante est, bien évidemment, la circularité de la dimension. En effet, Louis DE BROGLIE avait eu l'intuition d'introduire son horloge interne qui, bien plus qu'une simple manière d'observer le temps propre d'une particule à distance, portait en elle une nature périodique fondamentale et cruciale. Nous avons effectivement vu, au cours de l'histoire de la mécanique ondulatoire, que l'identification de l'action, qui dirige les dynamiques corpusculaires, avec une phase, elle-même caractéristique des phénomènes périodiques et ondulatoires, était centrale. Ainsi, au lieu d'étudier directement l'action $S(x)$ pour en déduire par exemple les équations de Lagrange, nous étudions son exponentielle complexe $e^{iS(x)}$. Il ne peut plus être nié aujourd'hui que cette forme mathématique est nécessaire, et nous la rencontrons partout dès que l'on traite de physique quantique. Par exemple, la théorie de l'électrodynamique quantique de Richard FEYNMAN que nous avons évoquée au chapitre 2 est basée sur le calcul de la quantité

$$K(b,a) = \mathrm{C^{te}} \sum_{\text{chemins de a vers b}} e^{iS(x)} \tag{7.13}$$

dont le module au carré représente la probabilité pour une particule d'aller de a vers b. Feynman en avait d'ailleurs donné une description très visuelle que nous avons pu étudier sur la figure 2.1, et qui faisait un usage très explicite des horloges de de Broglie. La mécanique bohmienne fait usage, elle aussi, de l'action $S(x)$, en l'identifiant à la phase de la fonction d'onde de Schrödinger

$$\psi(x) = R(x)e^{iS(x)}. \tag{7.14}$$

Le lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique paraît donc se trouver dans l'utilisation de cette exponentielle complexe ; mais elle semble pour l'instant avoir toujours

été introduite à la main et reste bien mystérieuse. Pourtant, quelques éléments tendent à éclaircir ce point. D'abord, la procédure imaginée par Louis de Broglie, visant à sychroniser le temps propre d'une particule avec son environnement *via* la correspondance entre son « horloge interne » et une onde de phase, est centrale et fait, bien entendu, intervenir cette exponentielle. Mais, nous l'avons dit, rien ne justifie ni n'impose *a priori* que le temps propre de la particule doive manifester sous la forme d'une horloge ou d'une onde ; nous aurions peut-être pu trouver une autre procédure ayant le même résultat. Nous voyons ici que l'introduction de la cinquième dimension conduit naturellement à la forme proposée par de Broglie. Dans notre cas, l'exponentiation complexe n'est plus seulement caractéristique de la présence d'une onde, mais a aussi pour rôle de réaliser la correspondance entre les nombres réels et complexes de module unité, c'est-à-dire que c'est la fonction qui a pour propriété de permettre la circularisation d'une dimension ; il est donc nécessaire qu'elle soit présente dans notre formalisme. Reprenons l'élément de longueur $\mathrm{d}\sigma$, en d'autres termes le temps propre, dans notre espace à cinq dimensions

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{p}}{}^2 = \mathrm{d}t_{\mathrm{p}}{}^2 - \mathrm{d}x_{\mathrm{p}}{}^2 + \varepsilon\rho^2\,\mathrm{d}\xi_{\mathrm{p}}{}^2 = \mathrm{d}\tau_{\mathrm{p}}{}^2 + \varepsilon\rho^2\,\mathrm{d}\xi_{\mathrm{p}}{}^2\,. \tag{7.15}$$

L'action d'une particule relativiste est donnée par l'intégrale de son temps propre

$$S(x_{\mathrm{p}}) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int \mathrm{d}\sigma = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int \sqrt{1 + \varepsilon\rho^2\xi_{\mathrm{p}}'^2}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{p}} \tag{7.16}$$

or, comme la valeur de ρ sera très petite devant 1 pour assurer que la nouvelle dimension soit invisible à notre échelle, on peut supposer que l'action à cinq dimensions sera approximativement égale, au premier ordre, à celle du sous-espace à quatre dimensions

$$S(x_{\mathrm{p}}) \approx \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int \mathrm{d}\tau_{\mathrm{p}}\,. \tag{7.17}$$

Plus rigoureusement nous avons, de toute façon, une identification entre ξ et l'action à quatre dimensions $S^{(4)}(x)$. Si nous reprenons maintenant la coordonnée curviligne z_{p}, qui est l'objet que nous pouvons étudier dans notre sous-espace, dans le cas d'un mouvement à vitesse uniforme $\xi_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}}\tau_{\mathrm{p}}$, nous pouvons l'écrire

$$z_{\mathrm{p}} = z_0 e^{i\xi_{\mathrm{p}}} = z_0 e^{i\omega_{\mathrm{p}}\tau_{\mathrm{p}}} \approx z_0 e^{i\frac{\omega_{\mathrm{p}} S(x_{\mathrm{p}})}{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}}\,. \tag{7.18}$$

Nous pouvons maintenant appliquer la procédure de de Broglie et constater que z_{p} se comporte, à distance et après synchronisation, comme une onde u

$$u(x) = \rho(x) e^{i\frac{\omega_{\mathrm{p}} S(x)}{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}}\,. \tag{7.19}$$

On peut imaginer cette onde u comme une représentation de la particule, et en particulier de son mouvement selon ξ, telle qu'elle apparaît à tout temps et dans tout l'espace. On voit déjà que l'on retrouve la forme (7.14), et que l'on peut donc s'attendre à un comportement similaire à la fonction d'onde. Notons que u n'a aucune nécessité d'être une onde physique mais peut n'être qu'une abstraction délocalisée d'une particule sous hypothèse de synchronisation. Les deux éléments qui importent ici sont $\rho(x)$ et $S(x = x_{\mathrm{p}})$, respectivement l'onde effectivement produite par la particule comme une déformation de l'espace-temps et l'action de la particule sur sa trajectoire.

Pour finir, nous allons tenter, comme l'avait fait de Broglie, de trouver une relation entre les caractéristiques de la particule et de l'onde de phase. Nous cherchons donc une égalité de la forme

$$p^{\mathrm{A}} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} k^{\mathrm{A}}, \tag{7.20}$$

où p^{A} et k^{A} sont respectivement les quinquevecteurs de la quantité de mouvement et de l'onde. La quantité de mouvement s'écrit bien entendu

$$(p^{\text{A}}) = m(u^{\text{A}}) = m\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{p}} \\ \omega'_{\text{p}} \end{pmatrix}, \tag{7.21}$$

avec m la 5-masse, donnée par la norme $m = p^{\text{A}}p_{\text{A}}$, et β le facteur de Lorentz à cinq dimensions. On montre facilement que m est reliée à la 4-masse m_0 habituelle par la relation

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\rho^2\omega_{\text{p}}^2}} = \frac{\beta}{\gamma} \tag{7.22}$$

et en particulier dans l'approximation $\rho << 1$, on obtient

$$\frac{m_0}{m} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\rho^2\omega_{\text{p}}^2. \tag{7.23}$$

Si nous écrivons maintenant une onde plane sous la forme

$$e^{-i(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}} + \varepsilon q\xi)}, \tag{7.24}$$

nous identifierons cette nouvelle quantité q avec la cinquième composante du quinquevecteur impulsion

$$\text{C}^{\text{te}}q = \beta m\omega'_{\text{p}} = \frac{\beta}{\gamma}m\omega_{\text{p}} = m_0\omega_{\text{p}}. \tag{7.25}$$

L'extension de la relation de de Broglie à cinq dimensions est particulièrement importante. En effet, il semble exister une symétrie fondamentale dans la physique, nommée symétrie CPT, qui énonce que les lois de la physique microscopique sont invariantes sous inversion combinée du temps, de l'espace, et de la charge électrique [1]. Sachant cela, il est très étrange qu'une dinstinction existe entre l'espace-temps d'un côté, et la charge de l'autre. En ce sens, nous pouvons imaginer une manière un peu plus uniforme de présenter le théorème CPT dans le cadre d'un espace à cinq dimensions. Pour cela, nous dirons que la physique est invariante sous l'inversion du quinquevecteur spatio-temporel (x^{A}) :

$$(x^{\text{A}}) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{x}} \\ \xi \end{pmatrix} \underset{\text{CPT}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -t \\ -\vec{\boldsymbol{x}} \\ -\xi \end{pmatrix} = -(x^{\text{A}}) \tag{7.26}$$

De plus, de la même manière que l'on interprête parfois l'inversion du temps comme un changement de signe de l'énergie ou de la fréquence, nous pourrons voir l'inversion de la cinquième coordonnée ξ comme un changement de signe de la charge électrique q, et ainsi revenir à l'énoncé d'origine de la symétrie C. Cette équivalence apparaît en fait très naturellement à l'instant où l'on introduit une onde ; ces dernières s'écriront en effet

$$e^{-i(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}} + \varepsilon q\xi)} = e^{-ik_{\text{A}}x^{\text{A}}} \tag{7.27}$$

et l'on voit que la charge électrique q agit comme le moment associé à la coordonnée ξ, à l'instar de la fréquence et du vecteur d'onde. Dans un second temps, la relation de de

1. En physique classique, situation dans laquelle nous nous plaçons, la symétrie C revient à inverser le signe de la charge électrique. En mécanique quantique, il faut plus rigoureusement transformer les particules en antiparticules en inversant toutes les charges, c'est-à-dire également celles reliées aux autres interactions.

Broglie rendra aussi compte d'une équivalence entre la charge électrique et la fréquence de rotation dans la cinquième dimension. On a donc le quinquevecteur

$$(k^{\mathrm{A}}) = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{\boldsymbol{k}} \\ q \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} E \\ \vec{\boldsymbol{p}} \\ p^4 \end{pmatrix} = (p^{\mathrm{A}}), \tag{7.28}$$

et cette proportionnalité constituera la relation fondamentale de la dualité onde-particule à cinq dimensions. On peut insister en particulier sur la relation

$$\omega_{\mathrm{p}} = \frac{q}{m_0}, \tag{7.29}$$

nous permettant ainsi de définir la vitesse dans la cinquième dimension en fonction des grandeurs connues de la particule considérée.

7.1.3 La théorie de Kaluza-Klein

L'extension de la relativité – restreinte ou générale – à cinq dimensions n'est, comme nous l'avons déjà dit, pas nouvelle. Notre objectif était ici de donner une interprétation intuitive et mécanique aux propriétés nécessaires pour réaliser une dualité onde particule, mais d'autres raisons avaient historiquement motivé l'introduction d'une nouvelle dimension. En effet, un physicien allemand du nom de Theodor Kaluza propose, dès 1921, une telle extension [59]. Son objectif, faisant suite à l'apparition d'une formulation géométrique de la théorie de la gravitation, de faire de l'électromagnétisme une théorie également géométrique. Plus encore, il s'agissait de décrire la gravitation et l'électromagnétisme comme des déformations tout à fait équivalentes d'un objet unique. Il est vite devenu apparent que cette unification ne pouvait avoir rigoureusement lieu que sous une hypothèse : l'objet en question est un tenseur métrique correspondant à un espace quinquedimensionnel. S'il est effectivement possible, dans certains cas particuliers ou sous certaines approximations, d'établir une correspondance entre les forces électromagnétiques et gravitationnelles [2], il n'est malheureusement pas possible de le faire en toute généralité. Nous ne ferons pas ici une démonstration exhaustive de la théorie de Kaluza, ni des conséquences ou généralisations qui en découlent, mais mentionnerons malgré tout quelques points.

Le point de départ de la formulation de Kaluza est la remarque que l'expression des connexions affines de la relativité générale ressemble très fortement à celle du tenseur de champ de l'électromagnétisme covariant

$$2\Gamma_{\mu\rho\nu} = \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \longleftrightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \tag{7.30}$$

Cela se confirme à l'instant où l'on rajoute à tous nos objets une cinquième composante, indexée 4, et que l'on fait par ailleurs l'hypothèse que la métrique est indépendante de cette coordonnée $\partial_4 g_{\mu\nu} = 0$. Sous ces deux hypothèses il vient très rapidement que l'une des connexions s'écrit

$$2\Gamma_{4\mu\nu} = \partial_\mu g_{4\nu} - \partial_\nu g_{4\mu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \tag{7.31}$$

Ce faisant, Kaluza identifie l'une des composantes de la métrique avec le quadrivecteur potentiel électromagnétique $g_{4\mu} = A_\mu$.

Quelques années plus tard, en 1926, Oskar Klein poursuit la théorie de Kaluza et y ajoute une condition qui nous apparaîtra très familière : la cinquième dimension est, selon

2. Nous avons discuté de l'un de ces exemples au chapitre 5 avec le théorème de Larmor.

lui, circulaire [62, 63]. Son travail sera repris de nombreuses fois, en particulier en 1938 par Albert Einstein et Peter Bergmann qui tenteront d'y apporter une plus profonde interprétation physique [40]. Klein précise la forme de la composante 44 du tenseur métrique $g_{44} = \phi^2$ de sorte que l'élément de longueur associé à cette dimension s'apparentera bien à celui d'un cercle $\mathrm{d}l = \phi\,\mathrm{d}x^4$. On reconnait dans ce ϕ le champ ρ que nous avons nous-même supposé par une méthode légèrement différente. Partant de là, Klein trouve une expression particulière pour la métrique faisant intervenir ce nouveau champ, nommé *dilaton* ou *radion* :

$$(f_{\text{AB}}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \phi^2 A_\mu A_\nu & -\phi^2 A_\mu \\ -\phi^2 A_\nu & -\phi^2 \end{pmatrix}. \tag{7.32}$$

Le nouvel élément de longueur $\mathrm{d}\sigma$ d'une telle métrique est relié à celui de la métrique de la relativité générale $\mathrm{d}s$ par l'ajout d'un nouveau terme « angulaire » :

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 - \phi^2\,\mathrm{d}\theta^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu - \phi^2\big(A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}x^5\big)^2. \tag{7.33}$$

On obtient à partir d'ici deux groupes d'équation. Le premier s'écrit

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2}\phi^2 S^{\mu\nu} = 0 \tag{7.34}$$

avec S le tenseur énergie-impulsion électromagnétique, et le second

$$\frac{\partial\sqrt{|f|}F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{7.35}$$

Un choix judicieux de normalisation pour la dimension ϕ ainsi que les potentiels A permet de retrouver exactement, dans le système (7.34), les équations de champ d'Einstein en présence d'un champ électromagnétique. Cela aura pour effet de relier la normalisation des potentiels A, c'est-à-dire caractéristique de l'interaction électromagnétique, avec la constante d'Einstein $\kappa = 8\pi G/c^4$, caractéristique de l'interaction gravitationnelle, au travers de la taille de la dimension ϕ. Cette relation entre ϕ, la constante de gravitation universelle G, et la constante de Coulomb K, doit cependant faire intervenir une quatrième constante encore indéterminée pour contraindre complètement le système. Si l'on choisit par exemple d'utiliser la constante de Planck h, ϕ prendra sans surprise une valeur de l'ordre de la longueur de Planck [3], justifiant au passage l'absence d'observation macroscopique de la cinquième dimension. À l'inverse, une spécification de ϕ par d'autres moyens permettrait de définir la constante de Planck, et donc l'échelle des phénomènes quantiques.

De la même manière, les équations (7.35) sont les équations de Maxwell de l'électromagnétisme covariant dans le vide. Ainsi, et de manière remarquable, nous voyons que la théorie de Kaluza-Klein réussit son pari d'unifier électromagnétisme et gravitation sous un même formalisme géométrique. Enfin, la condition cylindrique qui avait été imposée par Kaluza pour assurer que la physique dans notre sous-espace de dimension quatre resterait inchangée n'a plus de nécessité d'être présente, puisque la circularité de la dimension y est tout à fait équivalente.

La théorie de la cinquième dimension a donc bien des avantages. Elle permet, comme nous l'avons vu, de réaliser l'unification des théories classiques de la gravitation et de l'électrodynamique. Par ailleurs, la taille extrêmement petite de la nouvelle dimension – qui est nécessaire pour assurer que la physique macroscopique se situera dans un sous-espace à quatre dimensions et restera inchangée – pourrait établir un lien avec l'échelle caractéristique des phénomènes quantiques. Ce formalisme fait également disparaître totalement la

3. Différentes approches proposent différentes valeurs, légèrement supérieures ou inférieures à la longueur de Planck.

notion de force de la physique, en se concentrant sur une équation géodésique unique pour les particules

$$\delta \int \mathrm{d}\sigma = \delta \int \sqrt{f_{\mathrm{AB}} u^{\mathrm{A}} u^{\mathrm{B}}}\, \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{7.36}$$

Dans son article de 1926, Oskar Klein choisit également d'utiliser sa théorie pour un point qui nous intéresse tout particulièrement : retrouver la dualité onde-particule et les équations de la mécanique ondulatoire. Il sera très rapidement suivi par Louis de Broglie lui-même, qui obtiendra également une équation d'ondes formant la base d'une dualité onde-particule à cinq dimensions quelques mois plus tard, en 1927 [26].

Nous mettrons maintenant de côté les aspects électromagnétiques et gravitationnels, ainsi que la théorie de Kaluza-Klein, qui dépassent de très loin le cadre du travail présenté dans ce manuscrit. Bien sûr, ce sont des éléments extrêmement intéressants, et qu'il est nécessaire de garder en tête, ne serait-ce que pour motiver l'introduction d'une cinquième dimension. Nous nous concentrerons néanmoins sur notre propre approche de ce sujet, afin de tenter d'obtenir des équations pour la dualité onde-particule et, peut-être, retrouver l'un ou l'autre des résultats des théories d'ondes pilotes.

7.2 Équations du mouvement en géométrie à cinq dimensions

À partir du tenseur métrique défini par la relation (7.12) nous voulons déduire, d'une part les équations d'Einstein, c'est à dire une équation d'onde pour le champ $\rho(t, x, \xi)$, ainsi que les équations géodésiques pour les coordonnées d'une particule $(\tau, x_{\mathrm{p}}(\tau), \xi_{\mathrm{p}}(\tau))$. Nous commençons par écrire les connexions de Levi-Civita associées à notre métrique cylindrique

$$\Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A\,B}} = \frac{1}{2} f^{\mathrm{CD}} (f_{\mathrm{AD,B}} + f_{\mathrm{BD,A}} - f_{\mathrm{AB,D}}) \tag{7.37}$$

dont on écrit les différentes composantes

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\,\nu} = 0 \tag{7.38}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\xi\,\nu} = 0 \tag{7.39}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\mu\,\nu} = 0 \tag{7.40}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\xi\,\xi} = -\varepsilon \rho f^{\mu\nu} \partial_\nu \rho \tag{7.41}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\,\mu} = \frac{1}{\rho} \partial_\mu \rho \tag{7.42}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\xi\,\xi} = \frac{1}{\rho} \partial_\xi \rho \tag{7.43}$$

L'étape suivante consiste à écrire le tenseur de Ricci à partir des connexions et de leurs dérivées :

$$R_{\mathrm{AB}} = \Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A\,B,C}} - \Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A\,C,B}} + \Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C\,D}} \Gamma^{\mathrm{D}}_{\mathrm{A\,B}} - \Gamma^{\mathrm{D}}_{\mathrm{A\,C}} \Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B\,D}} \tag{7.44}$$

qui donne

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma^{\xi}_{\mu\,\xi,\nu} - \Gamma^{\xi}_{\mu\,\xi} \Gamma^{\xi}_{\nu\,\xi} = -\frac{1}{\rho} \partial_\mu \partial_\nu \rho \tag{7.45}$$

$$R_{\mu\xi} = 0 \tag{7.46}$$

$$R_{\xi\xi} = \Gamma^{\mu}_{\xi\,\xi,\mu} - \Gamma^{\mu}_{\xi\,\xi} \Gamma^{\xi}_{\xi\,\mu} = -\varepsilon \rho \partial_\mu \partial^\mu \rho \tag{7.47}$$

De manière très intéressante, nous voyons que la dépendance en ξ de ρ n'apporte rien de plus pour les équations de champ et n'apparaîtra plus à ce stade du développement. Nous la retrouverons lorsque nous étudierons la dynamique de la particule, mais pour l'instant nous avons une équivalence totale avec un champ ne dépendant que des dimensions t et x. Cela signifie que la condition cylindrique dont nous avons discuté précédemment s'impose d'elle-même, et que seules des déformations homogènes sont accessibles dans le cas étudié ici.

Nous déduisons du tenseur R_{AB} le scalaire de Ricci :

$$R = R_{\text{A}}^{\text{A}} = f^{\text{AB}} R_{\text{AB}} = f^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + f^{\xi\xi} R_{\xi\xi} \tag{7.48}$$

qui donne

$$R = -\frac{2}{\rho}\partial_\mu \partial^\mu \rho = -2\frac{\Box\rho}{\rho} \tag{7.49}$$

Cette expression pour la courbure est absolument remarquable. En effet, on retrouve ici la forme du potentiel quantique relativiste dans l'approche bohmienne, et l'on espère immédiatement pouvoir le mettre à profit dans une théorie d'onde pilote.

Enfin, nous combinons ces différents éléments pour écrire le tenseur d'Einstein :

$$G_{\text{AB}} = R_{\text{AB}} - \frac{1}{2} R f_{\text{AB}} \tag{7.50}$$

donc

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho}\big(f_{\mu\nu}\partial^2\rho - \partial_\mu\partial_\nu\rho\big), \tag{7.51}$$

$$G_{\mu\xi} = 0, \tag{7.52}$$

$$G_{\xi\xi} = 0. \tag{7.53}$$

Dès lors, nous pouvons utiliser ces objets pour imposer des équations d'Einstein, par exemple libres

$$G_{\text{AB}} = 0, \tag{7.54}$$

mais nous faisons face à un problème. Un tel système n'admet, en effet, que des solutions triviales pour lesquelle ρ est constant, qui ne nous intéressent donc pas en l'état. Néanmoins, le calcul de la trace de G nous donne un aperçu de l'équation d'onde qui régirait la dynamique de ρ à savoir, pour un champ libre,

$$\frac{\Box\rho}{\rho} = 0, \tag{7.55}$$

ce qui, une fois de plus, est très prometteur si l'on considère notre objectif d'une théorie d'onde pilote, ainsi que les discussions que nous avons déjà eues tout au long de ce document. L'ajout d'un tenseur énergie-quantité de mouvement pour la matière est également difficile. On pourrait proposer diverses formes, par analogie avec les théories relativistes connues, par exemple

$$T^{\text{AB}} = \frac{m}{\sqrt{|f|}} \int \mathrm{d}\sigma u_{\text{p}}^{\text{A}} u_{\text{p}}^{\text{B}} \delta^4(x - x_{\text{p}}) = \beta \frac{m}{\rho} \dot{x}_{\text{p}}^{\text{A}} \dot{x}_{\text{p}}^{\text{B}} \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\text{p}}). \tag{7.56}$$

Avec ce tenseur, on réécrit l'équation $G_{\text{A}}^{\text{A}} = \kappa T_{\text{A}}^{\text{A}}$ sous la forme

$$\Box\rho = \kappa m_0 \sqrt{1 - v_{\text{p}}^2}\, \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\text{p}}), \tag{7.57}$$

qui rappelle fortement l'équation relativiste (4.21) sur le champ u, obtenue au chapitre 4.

Nous n'avons pas encore de développement ni de solution définitifs pour cette approche ; ce travail devra être poursuivi, en explorant éventuellement d'autres directions. Par exemple, on peut imaginer que l'association de l'onde pilote avec une variation du rayon ρ ne soit finalement pas la plus adaptée : pour retrouver plus exactement la même forme de champ que celle utilisée dans les précédents chapitres, nous aurions plutôt besoin d'un champ de phase complexe, qu'il est plus difficile d'interpréter géométriquement. De la même manière, un développement des équations géodésiques, c'est-à-dire des équations fondées sur la stationnarisation de l'action

$$\delta\left\{-m\int\sqrt{f_{\mathrm{AB}}u^{\mathrm{A}}u^{\mathrm{B}}}\mathrm{d}\sigma\right\}=0, \tag{7.58}$$

sera nécessaire pour obtenir l'équation de guidage faisant intervenir, nous l'espérons, une nouvelle force pouvant s'apparenter au potentiel quantique. À terme, nous voudrons également réintroduire les effets gravitationnels et électromagnétiques au sein de la métrique, qui pourront peut-être résoudre eux-mêmes certaines des difficultés que nous avons rencontrées, notamment sur la constance de ρ. Il faudra néanmoins s'attendre à devoir manipuler un système d'équations bien plus complexe que tout ce qui a été fait jusqu'ici. S'il n'est pas encore certain que l'on puisse aisément s'émanciper des difficultés qui sont apparues, notamment d'obtenir des solutions triviales pour le champ, il reste que nombre des éléments déjà obtenus semblent très prometteurs, au regard de ce que nous avons déjà pu voir, dans les précédents chapitres et dans celui-ci, concernant la dualité onde-particule.

Conclusion

Nous avons pu constater dans ce chapitre que, bien qu'étant *a priori* un peu étrange voire absurde, l'introduction d'une cinquième dimension dans le cadre de la relativité constitue une manière extrêmement naturelle d'expliquer et interpréter nombre des éléments qui ont été développés tout au long de ce manuscrit ainsi que, de manière plus générale, les idées de Louis de Broglie. En effet, nous disposons avec ce formalisme d'une description très élégante et intuitive de divers objets et propriétés, notamment l'horloge interne, l'exponentiation complexe de l'action, ou les ondes de phase et de groupe pour en citer quelques uns. Cette approche nous donne aussi la possibilité de renouer avec la nature profondément relativiste initialement introduite par Louis de Broglie. Il subsite encore quelques points parfois problématiques, dont il sera nécessaire de s'occuper ; nous avons évoqué par exemple la difficulté de trouver des solutions non triviales, qui ne nécessiteraient pas d'imposer un champ ρ constant. Pour autant, des équations très familières des théories d'onde pilote sont apparues, et cela constitue en soi une movitavion supplémentaire de poursuivre ce travail.

Il existe très certainement de nombreuses autres manières d'aborder le problème, en particulier sur l'interprétation des différentes ondes, et ce qui a été présenté dans ce chapitre ne constitue qu'une première tentative de donner du sens à de telles approches. De même, il n'est pas nécessaire que la nouvelle dimension soit strictement analogue au temps et à l'espace, c'est-à-dire qu'elle peut former une variable accolée à notre espace physique, que l'on traiterait comme un espace fibré en utilisant l'approche d'Élie Cartan [14]. Malgré cela, nous préférons, comme Albert Einstein et Peter Bergmann par exemple [40], aborder cette dimension comme de même nature que l'espace et le temps, à la différence qu'elle présente une circularité nouvelle. Quoiqu'il en soit, nous pouvons imaginer avec espoir une théorie rassemblant les idées des chapitres 6 et 7, qui constituerait un langage naturel pour une dualité onde-particule mécanique et relativiste.

Annexes

Annexe A

Équations d'Euler-Lagrange et principe de moindre action

Nombre des développements mathématiques présentés dans ce travail sont basés sur l'utilisation d'un principe variationnel – consistant à imposer une stationnarisation de l'action –, et les équations d'Euler-Lagrange associées. Nous allons ici, dérouler brièvement ces équations pour divers objets, en donnant par endroits quelques précisions qui peuvent s'avérer utiles à la lecture des chapitres du présent manuscrit. Ces développements peuvent être trouvés dans de nombreux ouvrages, articles ou cours, mais il est intéressant de les avoir sous la main en annexe de ce document, à la fois pour rendre claires les notations et conventions que nous utilisons, et pour toute personne qui n'aurait pas connaissance de ces mathématiques. Nous verrons plus particulièrement trois formalismes légèrement différents ; les deux premiers correspondent au développement classique, c'est-à-dire newtonien, qui a été utilisé dans le chapitre 3. Le dernier est une généralisation, dite « covariante », dans le langage naturel de la théorie de la relativité, que l'on a utilisé dans toute la suite du manuscrit.

Les équations dont il est question, sont basées sur un célèbre principe introduit pour la première fois par Pierre Louis Moreau de Maupertuis en 1744 [1], que l'on nomme principe de moindre action ou, plus rigoureusement, principe de stationnarisation de l'action. Selon ce principe, il existe une quantité S qui sera stationnaire pour toute trajectoire physique d'un système de A vers B, ce que l'on traduit par l'équation

$$\delta S_{AB} = 0, \tag{A.1}$$

où le δ représente une petite variation de la trajectoire en gardant A et B fixes (voir figure A.1). La nature de cette fonction mathématique S n'est pas encore explicitée, mais l'on sait qu'elle doit, pour la lumière par exemple, se réduire au calcul du temps de trajet du rayon lumineux, afin de retrouver le principe de moindre temps de Pierre de Fermat, énoncé près d'un siècle auparavant. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, c'est encore un siècle et demi plus tard, que Louis de Broglie unifiera définitivement ces deux principes en 1924, amorçant ainsi la création de sa mécanique ondulatoire, puis de la mécanique quantique. Maupertuis définissait l'action, pour un objet, comme le produit de sa masse, par sa vitesse et par l'espace, c'est-à-dire

$$S_{AB} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{p}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\,, \tag{A.2}$$

1. Différents textes historiques sont disponibles, notamment une discussion par Leonhard Euler, sur la parternité de ce principe [42], datant de 1753. Il s'agit d'un document passionnant qui, bien que difficile à lire, permet de bien saisir la génèse et le contexte de l'idée de Maupertuis, dans les mots et la philosophie de l'époque.

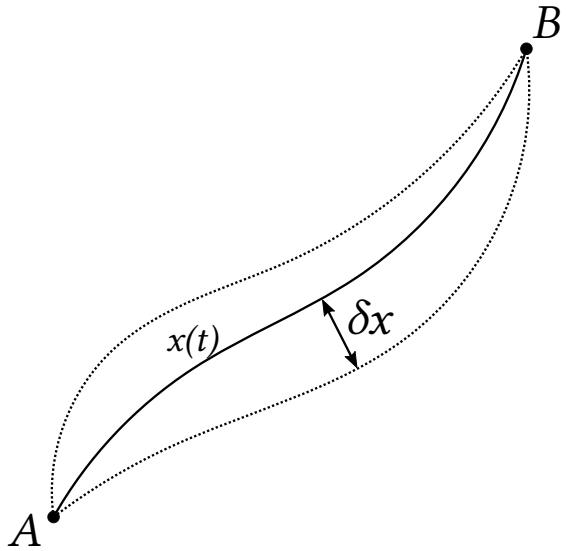


FIGURE A.1 – Petite variation δx autour de la trajectoire physique $x(t)$, se traduisant par une variation δS de l'action associée. On doit avoir, selon le principe de moindre action, $\delta S = 0$.

avec $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$ la quantité de mouvement classique. Cette expression, bien que très intéressante sur de nombreux aspects, n'est qu'un cas particulier d'un cas plus général défini plus tard par Joseph-Louis LAGRANGE, puis William Rowan HAMILTON, dans lequel on définit l'action par l'intégrale d'une nouvelle fonction $L(t; x, v)$

$$S_{AB} = \int_A^B L(t; x, v)\,\mathrm{d}t\,. \tag{A.3}$$

Cette fonction L, le Lagrangien, est l'objet que nous utilisons aujourd'hui pour résoudre les problèmes de variations.

A.1 Lagrangien ponctuel

Si nous prenons le problème variationnel décrit plus haut, en faisant usage de la fonction de Lagrange L, nous écrivons

$$0 = \delta \int L(t; x(t), v(t))\,\mathrm{d}t = \int \delta L\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial v}\delta v \right\}. \tag{A.4}$$

Sachant que $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, et en intervertissant la variation δ avec la dérivée, il vient

$$\int \mathrm{d}t\, \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = \int d\left[\frac{\partial L}{\partial v}\delta x\right] - \int \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\delta x. \tag{A.5}$$

Le premier terme nécessite d'évaluer l'intégrande aux points A et B ; or ces derniers sont fixes, de sorte que δx vaut 0 en ces points et, par extension, l'intégrale également. On déduit donc

$$\delta S = \delta \int \mathrm{d}t\, L(t; x(t), v(t)) = \int \mathrm{d}t \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) \right\}\delta x = 0. \tag{A.6}$$

Pour que cette expression soit nulle quelque soit la variation δx considérée, le terme entre accolades doit être nul, et l'on tire bien l'équation d'Euler-Lagrange à une dimension

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{A.7}$$

Remarquons qu'il existe un lien entre les expressions lagrangienne et maupertuisienne de l'action, en utilisant la transformation de Legendre

$$L = pv - H. \tag{A.8}$$

En injectant cette expression dans l'intégrale, nous obtenons

$$\delta \int L \,\mathrm{d}t = \delta \int pv \,\mathrm{d}t - \delta \int H \,\mathrm{d}t = \delta \int p \,\mathrm{d}x - \delta \int H \,\mathrm{d}t \,, \tag{A.9}$$

qui nous redonne bien le principe de Maupertuis si H, c'est-à-dire l'énergie, est constante ; cela explique donc, en quoi le principe de Maupertuis est un cas particulier du principe de moindre action plus général. Sachant, par ailleurs, que $p = mv$ et $H = \frac{1}{2}mv^2 + V$, on obtient immédiatement l'expression d'un Lagrangien classique

$$L = mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 - V = \frac{1}{2}mv^2 - V, \tag{A.10}$$

c'est-à-dire la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Cette fonction est assez étrange, et difficile à interpréter physiquement, mais le passage à son expression relativiste, et en particulier au formalisme géométrique de la relativité générale, permettra de bien mieux la comprendre.

A.2 Densité lagrangienne

Le principe de moindre action pour un champ $u(t, \vec{\boldsymbol{x}})$ est très analogue à ce qui vient d'être fait et n'est, ainsi, pas beaucoup plus compliqué. Au lieu d'un Lagrangien L, on utilise une densité lagrangienne $\mathcal{L}$ que l'on intègre sur tout l'espace et le temps

$$\delta S = \delta \int \mathrm{d}t \iiint \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(t, \vec{\boldsymbol{x}}; u, \partial_t u, \vec{\boldsymbol{\nabla}} u) = 0. \tag{A.11}$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}$ se déduisent ainsi, de la même manière,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}\right) + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\boldsymbol{\nabla}} u)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}. \tag{A.12}$$

A.3 Mécanique lagrangienne covariante

La formulation covariante de la mécanique, principalement associée à la théorie de la relativité, est très appropriée pour les équations de Lagrange. En effet, puisque l'on n'a plus de séparation du temps et de l'espace, on peut réécrire la variation l'action une ultime fois pour un champ u

$$\delta S = \delta \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(x^\mu; u, \partial_\mu u) = 0, \tag{A.13}$$

avec $\partial_\mu u = \frac{\partial u}{\partial x^\mu}$; et les équations s'écrivent, à leur tour,

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, \tag{A.14}$$

qui est la forme condensée de l'équation précédente.

Dans le cas d'un lagrangien ponctuel, il est intéressant de paramétriser la trajectoire, non pas par le temps du laboratoire t, ni par le temps propre τ, mais par une coordonnée tout à fait générale λ. On a ainsi, un nouveau Lagrangien relativiste $L(\lambda; x^\mu, v^\mu)$

$$L(\lambda; x^\mu, v^\mu) = -(m+V)\sqrt{v^2}, \tag{A.15}$$

avec $v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ et $v^2 = v^\mu v_\mu$, ainsi que des équations associées

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}. \tag{A.16}$$

Cela nous emmène vers la théorie de la relativité générale, dans laquelle le Lagrangien n'est plus une fonction dont la nature nous échappe, mais simplement une représentation de la géométrie qui, une fois intégrée, nous donne la distance parcourue dans l'espace-temps le long d'une trajectoire. Le principe de moindre action devient, alors, un principe géodésique, c'est-à-dire un principe de stationnarisation des distances relativistes :

$$\delta S = \delta \int m\,\mathrm{d}s = \delta \int m\sqrt{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu} = 0. \tag{A.17}$$

Notons enfin, qu'une version alternative de la mécanique lagrangienne existe, basée sur la fonction de Hamilton H introduite plus haut. L'un des problèmes de l'interprétation lagrangienne est qu'il nous faut connaître à la fois l'état initial x_A et l'état final x_B de l'objet dont on cherche la dynamique. Cela pose, bien entendu, de sérieuses questions concernant la causalité, dont la profondeur est entièrement révélée par l'interprétation de Richard Feynman, présentée au chapitre 2. Selon lui, et en ses propres termes, on peut interpréter un objet comme « reniflant » tout l'espace pour s'assurer de sélectionner et suivre la bonne trajectoire. Il doit ainsi, soit connaître à l'avance la structure de tout l'espace et des potentiels y résidant, soit être capable de les observer instantanément à distance. Cela fait bien évidemment écho au problème présenté par John Bell dont nous avons discuté au chapitre 2, et le problème de la localité ou causalité ne se limite donc pas strictement à la mécanique quantique. En revanche, on peut choisir d'utiliser une formulation dite hamiltonienne qui, au lieu de spécifier les coordonnées initiale et finale, utilise la coordonnée initiale x_A et la vitesse en ce même point v_A – donc, par extension, la valeur de l'action S au point A –, puis les laisse évoluer selon l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(t, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{\nabla}} S), \tag{A.18}$$

avec $\vec{\boldsymbol{\nabla}} S = m\vec{\boldsymbol{v}}$. L'approche hamiltonienne devient explicitement causale, sélectionnant une flèche du temps ; elle brise, par ailleurs, la symétrie entre l'espace et le temps, et n'est donc pas adaptée à une formulation relativiste, basée sur des équations covariantes. Pour suivre la philosophie et l'intuition, entre autres, d'Einstein, de Broglie et Feynman, nous privilégierons la mécanique lagrangienne, qui semble être le formalisme naturel pour la relativité, les champs et, dans le chapitre 6, l'acausalité.

Annexe B

Simulation numérique du système corde-masselotte

Le chapitre 3 a explicité le développement d'un modèle unidimensionnel de dualité onde-particule, basé sur les dynamiques couplées d'une corde vibrante et d'une masselotte, cette dernière disposant, de plus, d'une force de rappel harmonique. Ce système est régi par un ensemble de trois équations non-linéaires couplées

$$m_{\mathrm{p}}\ddot{x}_{\mathrm{p}}(t) = -\partial_x u(t,x)|_{x=x_{\mathrm{p}}(t)}\, N(t), \tag{B.1}$$

$$m_{\mathrm{p}}\ddot{z}_{\mathrm{p}}(t) = N(t) - m_{\mathrm{p}}\omega_{\mathrm{p}}^2 z_{\mathrm{p}}(t), \tag{B.2}$$

$$\Box u(t,x) = -\frac{N(t)}{T}\delta(x - x_{\mathrm{p}}(t)). \tag{B.3}$$

Nous nous sommes intéressés, en particulier, à la dynamique en transparence, c'est-à-dire lorsque la force $N(t)$ est nulle et les équations homogènes, mais avons suggéré que des résultats très intéressants pourraient survenir en dehors de ce régime bien particulier. Malheureusement, le système est très complexe à résoudre analytiquement, et un programme de simulation en `C++` a été développé pour pallier cette difficulté.

B.1 Structure de la simulation

Notre problème étant basé sur un système d'équations différentielles, nous pouvons transformer ces dernières à l'aide d'une discrétisation du temps et de l'espace, afin de les adapter au calcul numérique. La dérivée première par rapport à une variable v d'une quantité $u(v)$ est définie par la limite

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{u(v+\Delta v) - u(v)}{\Delta v}. \tag{B.4}$$

On extrait ainsi la valeur de la fonction u, au premier ordre, au pas Δv suivant, en réarrangeant cette expression

$$u(v+\Delta v) \approx u(v) + \Delta v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}. \tag{B.5}$$

Par récurrence, et connaissant les conditions initiales $u(v_0)$ ainsi que l'expression de la dérivée $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$, nous pouvons ainsi balayer toutes les valeurs de v. De la même manière, la dérivée seconde s'obtient par

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{u(v+\Delta v) - 2u(v) + u(v-\Delta v)}{\Delta v^2}, \tag{B.6}$$

et il vient

$$u(v+\Delta v) \approx 2u(v) - u(v-\Delta v) + \Delta v^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}v^2}. \tag{B.7}$$

Puisque notre système est défini par des dérivées secondes, c'est cette deuxième expression que nous utiliserons principalement. La difficulté résidera dans la définition des conditions initiales ; nous devrons, en particulier, faire une hypothèse raisonnable sur la valeur de $u(v_0 - \Delta v)$, connaissant $u(v_0)$.

Nous passons maintenant à une représentation discrète du temps et de l'espace, avec des pas valant respectivement Δt et Δx. Les coordonnées t et x sont maintenant remplacées par des entiers i, j tels que $t = i\Delta t$ et $x = j\Delta x$. On indexe ainsi le les variables dymaniques par ces nombres :

$$u(t,x) \longrightarrow u_{i,j} \tag{B.8}$$

$$x_\mathrm{p}(t) \longrightarrow x_i \tag{B.9}$$

$$z_\mathrm{p}(t) \longrightarrow z_i \tag{B.10}$$

Par ailleurs, la position $x_i = k\Delta x$ peut être associée à un autre entier k, qui représentera la position de la particule sur le maillage, et dépendra aussi du temps i. En tenant également compte de la contrainte holonome qui impose que la coordonnée z est égale à la valeur du champ u à la position de la particule, on a la relation

$$z_i = u_{i,k} \tag{B.11}$$

et l'on se débarassera ainsi de cette variable.

Ayant tous ces éléments en main, il devient possible de réécrire les équations sous leur forme discrète. Commençons par nous intéresser à l'évolution du champ

$$\begin{aligned} u(t+\Delta t, x) &= 2u(t,x) - u(t-\Delta t, x) + \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= 2u(t,x) - u(t-\Delta t, x) + \Delta t^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{N(t)}{T}\delta(x - x_\mathrm{p}(t)) \right\} \end{aligned} \tag{B.12}$$

Nous savons exprimer la dérivée spatiale, et la force $N(t)$ est donnée directement par

$$N(t) = m_\mathrm{p}(\ddot{z}(t) + \omega_\mathrm{p}^2 z_p(t)) = m_\mathrm{p}\left(\frac{\partial^2 u(t, x_\mathrm{p}(t))}{\partial t^2} + \omega_\mathrm{p}^2 u(t, x_\mathrm{p}(t)) \right). \tag{B.13}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u(t+\Delta t, x) - 2u(t,x) + u(t-\Delta t, x)}{\Delta t^2} \right) \left(1 + \frac{m_\mathrm{p}}{T}\delta(x - x_\mathrm{p}(t)) \right) \\ &= \left(\frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t,x) + u(t, x-\Delta x)}{\Delta x^2} \right) - \frac{m_\mathrm{p}\omega_\mathrm{p}^2}{T} u(t,x)\delta(x - x_\mathrm{p}(t)). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Pour passer à une forme discrète, il nous faut donner une expression à la distribution delta de Dirac, et nous choisissons

$$\delta(x - x_\mathrm{p}(t)) \longrightarrow \frac{\delta_{j,k}}{\Delta x}, \tag{B.15}$$

avec $\delta_{j,k}$ le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $j = k$, et 0 sinon. Cette expression nous permet de conserver une propriété importante du delta, à savoir sa normalisation à l'unité,

indépendante du pas d'espace choisi. Il ne nous reste maintenant plus qu'à réarranger les différents termes et réaliser le passage aux variables discrètes, ce qui nous donne

$$u_{i+1,j} = 2u_{i,j} - u_{i-1,j} + \frac{1}{1+\frac{m}{\lambda\Delta x}\delta_{j,k}}\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left\{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} - \frac{m\omega^2}{\lambda}u_{i,j}\Delta x\delta_{j,k}\right\}, \tag{B.16}$$

avec $\lambda = T$ la densité linéique de la corde dans un système d'unités tel que $c = 1$. Portons notre attention un instant sur le ratio $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ qui apparaît comme facteur dans le membre de droite. Pour avoir une stabilité, il est nécessaire que ce ratio soit inférieur ou égal à 1. Cela s'explique relativement intuitivement pour la raison suivante : il s'agit, en quelque sorte, de la vitesse de propagation des solutions numériques (ou plutôt de son inverse), qui doit être plus petite que la vitesse de propagation des ondes physiques sur la corde, que nous avons fixée à 1. Si la vitesse $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est supérieure à c, nous verrons apparaître une instabilité des solutions. À l'inverse, si elle est inférieure, le calcul sera stable mais des erreurs numériques apparaîtront, puisque les ondes numériques ne se comportent pas comme des ondes physiques. La situation idéale est évidemment celle pour laquelle la vitesse de propagation numérique est égale à c, qui nous donne en théorie des solutions exactes, et l'on choisira de s'en rapprocher le plus possible. Il faudra malgré tout prendre garde à choisir une valeur très légèrement inférieure et, de fait, accepter de petites erreurs numériques, car la sensibilité autour de 1 est très grande.

De la même manière, nous obtenons l'équation discrète pour x, où nous avons utilisé une expression symétrique pour le gradient de u en doublant l'intervalle sur lequel il est calculé

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x+\Delta x) - u(t, x-\Delta x)}{2\Delta x}, \tag{B.17}$$

et il vient

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2\Delta x}\left\{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k} + \Delta t^2\omega^2 u_{i,k}\right\}. \tag{B.18}$$

En imposant des conditions initiales connues pour le champ $u_{0,j}$, la particule x_0, ainsi que les dérivées associées $\partial(u_{0,j})$, $\dot{x}_0$, nous disposons alors d'une évolution complète du système dans le temps.

B.2 Spécificités et fonctionnement du programme

Pour prévoir le traitement d'une grande variété de situations, ce programme a été écrit de manière modulaire en tirant parti de la programmation orienté objet. Diverses fonctions sont accessibles :

- spécification des paramètres globaux de la simulation comme les pas de temps et d'espace, ou la durée de la simulation.
- choix d'une corde infinie ou bouclée, avec les conditions de bord appropriées.
- instanciation de la masselotte qui permettra, à terme, de placer plus d'une particule sur un même champ.
- enregistrement de toutes les données dynamiques dans un fichier `.csv`.
- calcul des énergies associées au champ et à la particule.

Une animation a été créée à partir des données simulées par ce code, pour des conditions initiales correspondant à la transparence, mais en utilisant le système complet d'équations, c'est-à-dire en tenant compte des diverses forces et rayonnements. Le fichier vidéo associé est disponible en annexe de ce manuscrit. Sont représentés dans cette animation :

— en rouge, la particule.
— en bleu, le champ total.
— en jaune, l'onde de groupe.
— en vert, l'onde de phase.

On observe une dynamique en parfait accord avec ce qui a été présenté analytiquement dans le chapitre 3, pour laquelle les erreurs numériques et l'instabilité sont minimes. Pour rappel, cela correspond à un mouvement à vitesse constante de la particule, coinjointement à la propagation de l'onde de groupe, ainsi qu'une oscillation harmonique sychronisée avec l'onde de phase. Compte tenu des généralisations du modèle qui ont été proposées dans la suite de ce travail, nous n'avons pas pu utiliser cette simulation du modèle unidimensionnel autant que nous aurions voulu. Néanmoins, elle sera très intéressante pour une future étude de la dynamique en dehors de la transparence, qui dépasse le cadre du travail présenté ici.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce manuscrit nous ont fait naviguer, au travers des différents chapitres, dans l'histoire de la physique du siècle précédent. Nous avons pu tisser des liens entre les considérations classiques ou mécaniques, qui guidaient le développement de la science du début du vingtième siècle, et les approches plus contemporaines, qui constituent cette révolution conceptuelle ayant donné naissance aux multiples théories quantiques. En premier lieu, le développement de la théorie des quanta, dans le premier quart du XXe siècle, a amené certains des concepts fondamentaux de la physique microscopique, culminant en l'introduction par Louis de Broglie de l'idée de dualité onde-particule commune à tous les objets. C'est un fait qui est aujourd'hui souvent oublié, mais il nous est devenu apparent que cette notion est étroitement reliée aux travaux d'Albert Einstein ; la dualité onde-particule possède donc une nature intrinsèquement relativiste [1] et, par extension, l'essence de la théorie quantique peut se trouver au sein de la théorie de la relativité. Il est alors très surprenant de constater comment la mécanique quantique, dans ses formulation et interprétation modernes, s'est progressivement détachée de ce qui en était pourtant un pilier fondateur. Aujourd'hui encore, l'une des alternatives que l'on peut présenter comme plus mécanique, « réaliste » et fidèle aux idées de Louis de Broglie, la mécanique bohmienne, doit présenter un caractère explicitement non-local, c'est-à-dire en forte tension avec le principe de localité de la relativité. Ces points guident, aujourd'hui, nombre de discussions et débats sur la nature et l'interprétation des phénomènes microscopiques.

Un premier modèle simplifié, présenté dans le chapitre 3 et dont l'intérêt était de pouvoir être reproduit expérimentalement ou numériquement, a mis en lumière un cadre possible pour un analogue mécanique de la dualité onde-particule. Nous avons vu comment une particule, fortement inspirée des idées de Louis de Broglie avec son horloge interne, peut être mise en interaction avec un champ unidimensionnel pour donner naissance à un mouvement uniforme. Pour obtenir une telle dynamique, la solution consiste à former ce champ à l'aide de deux ondes contre-propagatives, chacune ayant une fréquence ajustée aux paramètres de la particule. On obtient alors un champ modulé, qui peut être de nouveau séparé en une onde de phase et une onde de groupe ; la première est en permanence synchronisée avec l'oscillation de la particule, tandis que la seconde se déplace à la même vitesse que cette dernière. On peut alors, si on le souhaite, oublier la particule et proposer que l'objet quantique est entièrement décrit par le champ. En effet, l'onde de groupe qui correspond également à la répartition spatio-temporelle de l'énergie, présente un caractère local tout à fait intéressant pour retrouver un aspect corpusculaire au sein d'un phénomène ondulatoire. Ce point n'est pas sans rappeler l'onde de Schrödinger ainsi que la règle de Born, qui relie la probabilité de mesurer une particule en un point, avec l'amplitude de la fonction d'onde. Plus qu'une théorie d'onde pilote, cette situation est étroitement reliée à la théorie de la double solution de de Broglie, une approche qu'il a proposée très rapidement après 1925 mais qui n'a, malheureusement, pas reçu toute l'attention qu'elle aurait pu mériter. Comme nous l'avons mentionné – et cette remarque s'applique à tous les modèles présentés

1. Au minimum, elle est historiquement profondément ancrée dans la relativité restreinte.

ici –, il sera très important d'étudier la dynamique en dehors du régime de la transparence, qui sera *a priori* chaotique mais pourrait, malgré tout, présenter une stabilité de certaines solutions, des transitions entre niveaux énergétiques et des interactions entre plusieurs particules. Tous ces éléments sont passionnants, mais il faudra parvenir à manipuler un système d'équations non linéaires ; on pourra s'appuyer sur des solutions numériques, comme celles obtenues à l'aide du programme de simulation développé en annexe B. Même si elle a été réalisée dans une approximation qui ne tient pas compte de toute la complexité accessible par les équations en jeu, cette première approche a ouvert diverses voies de recherche et mis en lumière un régime remarquable, qui constitue une nouvelle solution très prometteuse de la dualité onde-particule.

Quelques difficultés sont néanmoins apparues lors du développement des équations et de leurs solutions ; elles étaient causées, pour la plupart, par un manque de cohérence entre l'équation d'onde intrinsèquement lorentzienne, c'est-à-dire relativiste, et les équations de Newton galiléennes. Pour résoudre ce problème, nous avons étudié dans les chapitres 4 et 5 une seconde approche basée sur un formalisme rigoureusement relativiste, duquel nous avons de nouveau extrait le même régime de transparence qui avait été obtenu précédemment. En faisant usage de la facilité que l'on a à introduire des forces électromagnétiques externes dans un formalisme covariant, nous sommes également parvenus à trouver des solutions en symétrie sphérique, que l'on a pu identifier aux modèles atomiques historiques de Niels Bohr et Arnold Sommerfeld. Ce faisant, une quantification de l'énergie identique aux résultats de la mécanique quantique a été obtenue, ainsi qu'une séparation de ces niveaux sous l'effet d'un champ magnétique uniforme en accord avec l'effet Zeeman normal. Nous avons cependant pu montrer que les approches mécaniques de l'atome quantique semblent toutes présenter une difficulté majeure pour l'interprétation de certains niveaux d'énergie, correspondant aux orbitales s. De telles orbitales prédisent, si l'on a une particule localisée, que la vitesse de cette dernière doit être nulle. C'est probablement sur ce point que devront se concentrer les futures recherches de modélisations atomiques.

Deux autres éléments sont cependant restés nébuleux tout au long de la seconde partie ; nous avons par conséquent exploré deux nouvelles approches, dans la troisième partie du manuscrit, pour tenter de les éclaircir. Une spécificité importante des modèles à la fois mécaniques et locaux est la nécessité d'utiliser une forme de superdéterminisme, que nous qualifions souvent sous l'appellation de « conspiration ». Ce terme traduit une propriété très singulière du système, demandant au champ de connaître à l'avance et infiniment loin les bonnes caractéristiques à avoir pour accomoder un mouvement donné d'une particule. Nous pouvons nous affranchir du superdéterminisme en écrivant le champ, non pas comme une somme de deux ondes contre-propagatives venant de l'infini, mais de deux ondes de causalité opposée, centrées sur la particule. Cette solution symétrique en temps, que nous avons qualifiée « d'acausale », s'inscrit très naturellement dans un contexte scientifique mélangeant la théorie de l'absorbeur de Wheeler-Feynman et des discussions sur le théorème de Bell. On obtient alors la superposition de deux rayonnements, l'un convergent et l'autre divergent, qui forment ensemble une structure stable, réminiscente de phénomène non-linéaires comme les solitons. C'est un sujet très vaste et dépassant le cadre de la mécanique quantique, qui avait d'ailleurs très rapidement été considéré par Louis de Broglie lui-même, mais qui présente des caractéristiques très élégantes et intéressantes pour notre problème. De manière plus générale, les techniques qui doivent être mises en œuvre pour résoudre un problème sans direction causale pourront présenter un grand intérêt mathématique, par exemple en optique, dans des systèmes analogues ou dans la résolution des boucles des diagrammes de Feynman. En parallèle, des questions peuvent être soulevées sur la nature des ondes que nous considérons, ainsi que de l'horloge interne de la particule, nécessaires à l'élaboration d'une dualité. Nous avons alors esquissé un autre modèle théorique,

basé sur l'utilisation d'une cinquième dimension dans l'espace-temps, qui apparaît aussi très prometteur. Il devient en effet très naturel, dans ce cadre, d'expliquer tous les ingrédients des théories d'onde pilote ou de double solution. La circularité de la nouvelle dimension permet d'éclaircir et prédire le lien entre l'onde de phase et l'action de la particule, tandis que la théorie de Kaluza-Klein unifie les interactions gravitationnelle et électromagnétique classiques. Dans ce formalisme, tout mouvement, aussi complexe soit-il, peut être déduit d'une géodésique dans un espace courbe, alors que les champs sont compris comme une courbure de l'espace lui-même. Ces deux points, l'acausalité et la cinquième dimension, mériteront d'être plus largement approfondis, et l'on espère que les quelques intuitions que l'on peut avoir à leur égard s'avéreront fructueuses.

Cette thèse a présenté, dans l'ensemble, une dimension historique et philosophique très forte. Bien que cela ne soit pas propre aux discussions menées ici, les questions qui ont été soulevées sont étroitement liées à la notion d'interprétation de la mécanique quantique, et en particulier aux trois hypothèses de Bell que sont l'existence de variables cachées, la localité et la causalité. Nous avons pu faire l'usage et mélanger des approches très mécanistes de la physique, qui caractérisaient bien souvent les réflexions du début du XXe siècle, avec des considérations plus contemporaines et un contexte ayant bien évolué depuis les travaux fondateurs de la mécanique quantique. Le regain d'intérêt récent concernant les idées de Louis de Broglie et David Bohm, ainsi que la découverte de systèmes macroscopiques analogues aux objets quantiques, nous placent au sein d'une époque réellement passionnante pour la compréhension du monde microscopique. Nous voyons, par ailleurs, comment l'étude de ces modèles et phénomènes nous amène à sonder d'autres sujets parfois bien éloignés, comme la théorie de la relativité générale ou la nature du temps et sa symétrie en physique. Cette science ne cessera jamais de nous émerveiller.

Bibliographie

[1] Alain Aspect. Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics. *Physical Review D*, 14(8) :1944-1951, 1976.
doi : 10.1103/PhysRevD.14.1944.

[2] Ian Atchison, David MacManus et Thomas Snyder. Understanding Heisenberg's "magical" paper of July 1925 : A new look at the calculational details. *American Journal of Physics*, 72(11) :1370-1379, 2004.
doi : 10.1119/1.1775243.

[3] Guido Bacciagaluppi et Antony Valentini. *Quantum Theory at the Crossroads*. Cambridge University Press, 2009. isbn : 978-3-5403-2665-6.
arXiv : quant-ph/0609184.

[4] John S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3) :195-200, 1964.
doi : 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

[5] David Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I. *Physical Review*, 85(2) :166-179, 1952.
doi : 10.1103/PhysRev.85.166.

[6] Niels Bohr. On the Constitution of Atoms and Molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(151) :1-25, 1913.

[7] Ludwig Boltzmann. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie. *Annalen der Physik*, 258(6) :291-294, 1884.
doi : 10.1002/andp.18842580616.

[8] Christian Borghesi. Dualité onde-corpuscule formée par une masselotte oscillante dans un milieu élastique : étude théorique et similitudes quantiques. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :161-196, 2017.

[9] Max Born. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, 37(12) :863-867, 1926.
doi : 10.1007/BF01397477.

[10] Léon Brillouin. *La théorie des quanta et l'atome de Bohr*, tome 2 de *Conférences-rapports de documentation sur la physique*. Les Presses Universitaires de France, 1922.

[11] Léon Brillouin. La nouvelle mécanique atomique. *Le Journal de Physique et le Radium*, 7(5) :135-160, 1926.
doi : 10.1051/jphysrad:0192600705013500.

[12] Lowell S. Brown. Classical Limit of the Hydrogen Atom. *American Journal of Physics*, 41(525), 1973.

[13] John W. M. Bush. Pilot-Wave Hydrodynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47(1) :269-292, 2015.
doi : 10.1146/annurev-fluid-010814-014506.

[14] Élie Cartan. *La géométrie des espaces de Riemann*, numéro 9 in Mémorial des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, 1925.
url : http://www.numdam.org/item/MSM_1925__9__1_0/.

[15] Olivier Costa de Beauregard. Un problème Brûlant : le paradoxe des corrélations à distance d'Einstein. *Diogène*, 110, 1980.

[16] Y. Couder, E. Fort, C.-H. Gautier et A. Boudaoud. From Bouncing to Floating : Noncoalescence of Drops on a Fluid Bath. *Physical Review Letters*, 94(17) :177801, 2005.
doi : 10.1103/PhysRevLett.94.177801.

[17] Y. Couder, S. Protière, E. Fort et A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437 :208, 2005.
doi : 10.1038/437208a.

[18] Yves Couder et Emmanuel Fort. Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale. *Physical Review Letters*, 97(15) :154101, 2006.
doi : 10.1103/PhysRevLett.97.154101.

[19] John G. Cramer. The transactional interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 58(3) :647-687, 1986.
doi : 10.1103/RevModPhys.58.647.

[20] Louis de Broglie. Ondes et quanta. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 177 :507-510, 1923.

[21] Louis de Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Thèse de doctorat, Hors université, 1924.

[22] Louis de Broglie. Sur la fréquence propre de l'électron. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 180(1) :498-500, 1925.

[23] Louis de Broglie. Les principes de la nouvelle mécanique ondulatoire. *Le Journal de Physique et le Radium*, 7(11) :272-274, 1926.

[24] Louis de Broglie. *Ondes et mouvements*. Gauthier-Villars, 1926. isbn : 978-2-87647-041-5.

[25] Louis de Broglie. Corpuscules et ondes Ψ. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 185 :1118-1119, 1927.

[26] Louis de Broglie. L'univers à cinq dimensions et la mécanique ondulatoire. *Le Journal de Physique et le Radium*, 8(2) :65-73, 1927.

[27] Louis de Broglie. La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *Le Journal de Physique et le Radium*, 8(5) :225-241, 1927.
doi : 10.1051/jphysrad:0192700805022500.

[28] Louis de Broglie. *L'interprétation de la mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution*. Il Corso Academic Press, 1971.

[29] Paul Dirac. Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society A*, 110(755) :561-576, 1926.
doi : 10.1098/rspa.1926.0034.

[30] Paul Dirac. *The principles of quantum mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1930.
isbn : 978-0-1985-2011-5.

[31] Paul Dirac. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35(3) :416-418, 1939.
doi : 10.1017/S0305004100021162.

[32] J. S. Dowker et Raymond Critchley. Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space. *Physical Review D*, 13 :3224-3232, 12, 1976.
doi : 10.1103/PhysRevD.13.3224.

[33] Aurélien Drezet, Pierre Jamet, Donatien Bertschy, Arnaud Ralko et Cédric Poulain. Mechanical analog of quantum bradyons and tachyons. *Physical Review E*, 102 :052206, 5, 2020.
doi : 10.1103/PhysRevE.102.052206.

[34] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy et Y. Couder. Unpredictable Tunneling of a Classical Wave-Particle Association. *Physical Review Letters*, 102(24) :240401, 2009.
doi : 10.1103/PhysRevLett.102.240401.

[35] A. Eddi, J. Moukhtar, S. Perrard, E. Fort et Y. Couder. Level Splitting at Macroscopic Scale. *Physical Review Letters*, 108(26) :264503, 2012.
doi : 10.1103/PhysRevLett.108.264503.

[36] Albert Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 17(6) :132-148, 1905.
doi : 10.1002/andp.19053220607. trad. dans [83].

[37] Albert Einstein. Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, 10(22) :817-825, 1909.
doi : 10.1002/phbl.19690250902.

[38] Albert Einstein. Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. *Deutsche Physikalische Gesellschaft Verhandlungen*, 19, 1917. Trad. dans [39] p. 434.

[39] Albert Einstein. *The Berlin Years : Writings, 1914–1917*, tome 6 de *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press, 1997. isbn : 978-0-6910-1734-1.

[40] Albert Einstein et Peter Bergmann. On a generalization of Kaluza's theory of electricity. *Annals of Mathematics*, 39(3) :683-701, 1938.
doi : 10.2307/1968642.

[41] Albert Einstein et Otto Stern. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt. *Annalen der Physik*, 345(3) :551-560, 1913.
doi : 10.1002/andp.19133450309.

[42] Leonhard Euler. Sur le principe de la moindre action. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 7 :199-218, 1753.

[43] Michael Faraday. *Faraday's diary*. G. Bell and sons, London, 1936. isbn : 978-0-9819-0837-3.

[44] Richard Phillips Feynman. *The principle of least action in quantum mechanics*. Thèse de doctorat, Université de Princeton, 1942.

[45] Richard Phillips Feynman. A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics. *Physical Review*, 74 :939-946, 8, 1948.
doi : 10.1103/PhysRev.74.1430.

[46] Richard Phillips Feynman. Space-Time Appproach to Quantum Electrodynamics. *Physical Review*, 76 :769-789, 6, 1949.
doi : 10.1103/PhysRev.76.769.

[47] Richard Phillips Feynman. The Theory of Positrons. *Physical Review*, 76 :749-759, 6, 1949.
doi : 10.1103/PhysRev.76.749.

[48] Richard Phillips Feynman. *Lumière et matière. Une étrange histoire*, numéro 86 in Points Sciences. Seuil, Paris, 1992. isbn : 978-2-0201-4758-3.

[49] Emmanuel Fort, Antonin Eddi, Arezki Boudaoud, Julien Moukhtar et Yves Couder. Path-memory induced quantization of classical orbits. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(41) :17515-17520, 2010.
doi : 10.1073/pnas.1007386107.

[50] Hubert Goenner. On the History of Unified Field Theory. *Living Reviews in Relativity*, 7(2), 2004.
doi : 10.12942/lrr-2004-2.

[51] Hubert Goenner. On the History of Unified Field Theory. Part II. (ca. 1930 – ca. 1965). *Living Reviews in Relativity*, 17(5), 2014.
doi : 10.12942/lrr-2014-5.

[52] Lucien Hardy. Quantum Mechanics, Local Realistic Theories, and Lorentz-Invariant Realistic Theories. *Physical Review Letters*, 68(20) :2981-2984, 1992.
doi : 10.1103/PhysRevLett.68.2981.

[53] Daniel M. Harris, Julien Moukhtar, Emmanuel Fort, Yves Couder et John W. M. Bush. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. *Physical Review E*, 88(1) :011001, 2013.
doi : 10.1103/PhysRevE.88.011001.

[54] Werner Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33 :879-893, 1925.
doi : 10.1007/BF01328377.

[55] Werner Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3–4) :172-198, 1927.
doi : 10.1007/BF01397280.

[56] Fred Hoyle et Jayant Narlikar. Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 67(1) :113-155, 1995.
doi : 10.1103/RevModPhys.67.113.

[57] Pierre Jamet et Aurélien Drezet. A mechanical analog of Bohr's atom based on de Broglie's double-solution approach. *Chaos*, 31(10) :103120, 2021.
doi : 10.1063/5.0067545.

[58] Pierre Jamet et Aurélien Drezet. A classical analog of the quantum Zeeman effect. *Chaos*, 32(10) :033101, 2022.
doi : 10.1063/5.0081254.

[59] Theodor Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte Preußische Akademie der Wissenschaften* :966-972, 1921. On the problem of unity in physics.

[60] Earle Hesse Kennard. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik*, 44(4–5) :326-352, 1927.
doi : 10.1007/BF01391200.

[61] Gustav Kirchhoff. On the relation between the radiating and absorbing powers of different bodies for light and heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 20(130) :1-21, 1860.
doi : 10.1080/14786446008642901.

[62] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A*, 37(12) :895-906, 1926.

[63] Oskar Klein. The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law. *Nature*, 118(2971) :516, 1926.
doi : 10.1038/118516a0.

[64] Lev Landau et Evguéni Lifshitz. *Mécanique Quantique. Théorie non relativiste*, tome 3 de *Physique Théorique*. Mir, Moscou, 1970. isbn : 5-0300-0199-9.

[65] Joseph Larmor. A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. A, 190 :205-300, 1897.
doi : 10.1098/rsta.1894.0012.

[66] Joseph Larmor. On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(271) :503-512, 1897.
doi : 10.1080/14786449708621095.

[67] Dustin Lazarovici. Against fields. *European Journal for Philosophy of Science*, 8 :145-170, 2018.
doi : 10.1007/s13194-017-0179-z.

[68] Jean-Marc Lévy-Leblond. One more derivation of the Lorentz transformation. *American Journal of Physics*, 44(3) :271-277, 1976.
doi : 10.1119/1.10490.

[69] Alfred-Marie Liénard. Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque. *L'Éclairage Électrique*, 16(27,28,29) :5-14, 53-59, 106-112, 1898.

[70] Hendrik Antoon Lorentz. *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*. B. G. Teubner et G. E. Stechert, Leipzig et New York, 1916.

[71] C. Philippidis, C. Dewdney et B. J. Hiley. Quantum Interference and the Quantum Potential. *Il Nuovo Cimento B*, 52(1) :15-28, 1979.
doi : 10.1007/BF02743566.

[72] Max Planck. Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2(13) :202-204, 1900.
doi : 10.1007/978-3-663-13885-3_15. trad. dans [83] pp. 79–81.

[73] Max Planck. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2(17) :237-245, 1900. trad. dans [83] p. 82.

[74] Max Planck. Eine neue Strahlunghypothese. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 13(3) :138-148, 1911.

[75] Henri Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 140(1) :1504-1508, 1905.
url : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k30949/f1596.item.

[76] John William Strutt Rayleigh. Remarks upon the law of complete radiation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 49(301) :539-540, 1900.
doi : 10.1080/14786440009463878.

[77] John William Strutt Rayleigh. The dynamical theory of gases and radiation. *Nature*, 72(1865) :54-55, 1905.
doi : 10.1038/072101d0.

[78] Erwin Schrödinger. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review*, 28(6) :1049-1070, 1926.
doi : 10.1103/PhysRev.28.1049.

[79] Erwin Schrödinger. Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem. *Annalen der Physik*, 384(8) :734-756, 1926.
doi : 10.1002/andp.19263840804.

[80] Arnold Sommerfeld. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. *Annalen der Physik*, 356(17) :1-94, 1916.
doi : 10.1002/andp.19163561702.

[81] Arnold Sommerfeld. *La constitution de l'atome et les raies spectrales*. Librairie scientifique Albert Blanchard, 1923.

[82] Josef Stefan. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften : Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 79 :391-428, 1879.

[83] Dirk ter Haar. *Old Quantum Theory*. Pergamon Press, 1967. isbn : 978-1-4831-5196-0.

[84] Yakov Petrovich Terletskii. *Paradoxes in the theory of relativity*. Plenum Press, New York, 1968. isbn : 978-1-4899-2676-0.

[85] Jakob Petrovich Terletsky. Le principe de causalité et le second principe de la thermodynamique. *Le Journal de Physique et le Radium*, 21(10) :681-684, 1960.
doi : 10.1051/jphysrad:019600021010068100.

[86] Jakob Petrovich Terletsky. Masses propres positives, négatives et imaginaires. *Le Journal de Physique et le Radium*, 23(11) :910-920, 1962.
doi : 10.1051/jphysrad:019620023011091000.

[87] Sin-Itiro Tomonaga. *Old Quantum Theory*, tome 1 de *Quantum Mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.

[88] George Uhlenbeck et Samuel Goudsmit. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. *Nature*, 117 :265-265, 1926.
doi : 10.1038/117264a0.

[89] John von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. J. Springer, Berlin, 1932. isbn : 978-3-6426-1409-5.

[90] Hermann Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Hirzel, Leipzig, 1928.

[91] John Archibald Wheeler et Richard Phillips Feynman. Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. *Reviews of Modern Physics*, 17(2–3) :157-168, 1945.
doi : 10.1103/RevModPhys.17.157.

[92] John Archibald Wheeler et Richard Phillips Feynman. Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action. *Reviews of Modern Physics*, 21(3) :425-433, 1949.
doi : 10.1103/RevModPhys.21.425.

[93] Emil Wiechert. Elektrodynamische Elementargesetze. *Annalen der Physik*, 309(4) :667-689, 1901.
doi : 10.1002/andp.19013090403.

[94] Wilhelm Wien. *Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie*. In *Von Kirchhoff bis Planck : Theorie der Wärmestrahlung in historisch-kritischer Darstellung*. Hans-Georg Schöpf, éditeur. Vieweg+Teubner Verlag, 1878, pages 156-165.
doi : 10.1007/978-3-663-13885-3_12.

[95] Wilhelm Wien. On the division of energy in the emission-spectrum of a black body. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(262) :214-220, 1897.
doi : 10.1080/14786449708620983.

[96] William Wilson. The quantum theory of radiation and line spectra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 29(174) :795-802, 1915.
doi : 10.1080/14786440608635362.

[97] William Wilson. The quantum of action. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 31(182) :156-162, 1916.
doi : 10.1080/14786440208635487.

[98] Pieter Zeeman. On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance. *The London, Endinburgh, and Dublin Philosophical Magazine*, 43 :226-239, 1897.
doi : 10.1080/14786449708620985.

Résumé

La notion de dualité onde-particule a été centrale dans le développement de la mécanique quantique. Introduite principalement par Louis de Broglie dans sa thèse de 1924, elle a permis à ce dernier d'ébaucher une nouvelle théorie pour décrire le monde microscopique : la mécanique ondulatoire. Néanmoins, cette description mécanique ainsi que sa forme plus rigoureuse, nommée théorie de la double solution, ont été rapidement abandonnées en raison de leur complexité, en faveur du formalisme quantique moderne et de l'interprétation de l'École de Copenhague.

Un regain d'intérêt pour ces questions est survenu au cours des deux dernières décennies, qui ont vu apparaître des expériences mettant en œuvre de possibles analogues macroscopiques de la mécanique quantique. On pense en particulier aux expériences de Yves Couder de 2005, ayant permis de reproduire une forme de dualité onde-particule, ainsi que les phénomènes quantiques associés. L'objectif de cette thèse est donc double : d'une part, construire un modèle analogue de la dualité onde-particule, qui sera entièrement classique et mécanique et, d'autre part, utiliser ce modèle pour poursuivre les travaux de Louis de Broglie sur la mécanique ondulatoire, en cherchant à construire une théorie d'onde pilote couplant deux ondes à une particule.

Nous explorerons ainsi, à la fois les considérations mécaniques d'un tel modèle et les généralisations et abstractions nécessaires pour appliquer ce modèle macroscopique à l'échelle des particules quantiques. Ce second point nous permettra d'aborder des discussions plus fondamentales, sur la question de l'interprétation de la mécanique quantique, dans le contexte du théorème de Bell, des expériences d'Aspect, ainsi que de la théorie de de Broglie-Bohm.

Abstract

Wave-particle duality has been a central idea for the development of quantum mechanics. Initially introduced by Louis de Broglie in his Ph.D. thesis of 1924, it allowed him to sketch a new theory of the microscopic world : wave mechanics. However, this mechanical description and its more rigorous form, the double solution theory, were soon abandoned because of their apparent complexity, in favor of the modern quantum formalism and the associated Copenhagen interpretation.

Interest in these questions was renewed in the last two decades, as experiments were performed on macroscopic systems that could be seen as analogs of quantum mechanics. Yves Couder's experiments of 2005 were integral in this, showing that it was indeed possible to reproduce a form of wave-particle duality at the macroscopic scale as well as the associated quantum phenomena. The goal of this thesis is thus twofold : first to create a classical and mechanical analog of wave-particle duality, and then to use this model in order to continue Louis de Broglie's work on wave mechanics, building at the same time a pilot-wave theory coupling two waves to a particle.

We will thus exlore the mechanical aspects of such a macroscopic model, as well as the generalizations and abstractions necessary to apply it to quantum particles. In doing so, we will we able to discuss more fundamental notions on the interpretation of quantum mechanics, including Bell's theorem, Aspect's experiments and the de Broglie-Bohm theory.