



**HAL**  
open science

## Paires duales réductives en caractéristique deux

Laure Blasco

► **To cite this version:**

Laure Blasco. Paires duales réductives en caractéristique deux. Mathématiques [math]. Université Paris-Sud, 1991. Français. NNT: . tel-04167044

**HAL Id: tel-04167044**

**<https://theses.hal.science/tel-04167044>**

Submitted on 20 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

6352

ORSAY  
n° d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

# THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCE

Spécialité: Mathématiques

PAR

Laure BLASCO

SUJET: PAIRES DUALES REDUCTIVES EN CARACTERISTIQUE DEUX.

soutenue le 13 février 1991 devant la Commission d'examen

MM. Laurent CLOZEL Président

Paul GERARDIN

Guy HENNIART

M<sup>me</sup> Colette MOEGLIN

M<sup>me</sup> Marie-France VIGNERAS



**Abstract :**

Over a local field of characteristic two, A. Weil has defined the metaplectic group as an extension of a group called "pseudosymplectique". However, the pairs of reductive subgroups  $(G, G')$  of this group, dual in the sense that  $G$  and  $G'$  are each others centralizers, had not been classified. A complete classification is established here, as well as the triviality of the metaplectic extension restricted to these subgroups.



Pour m'avoir accompagnée sur le terrain des formes automorphes en faisant preuve tant de clairvoyance scientifique que de chaleur et de diligence au quotidien, je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à Guy Henniart.

Colette Mœglin a régulièrement témoigné son intérêt pour cette recherche. Elle a gracieusement accepté, avec Marie-France Vignéras, le dur travail de lecture critique du manuscrit. Je les remercie vivement.

Ma reconnaissance va également à Laurent Clozel et Paul Gérardin qui se sont penchés sur ces résultats.

Que tous les participants du séminaire "Groupes réductifs et formes automorphes" (Paris VII) qui ont accueilli mes premiers exposés émus, trouvent ici les marques de ma sympathie, ainsi que tous ceux qui, au hasard d'une rencontre, m'ont aidée ou encouragée.

Je remercie Mesdames Le Bronnec et Bonnardel de leur gentillesse et de leur patience compte tenu des exigences d'une typographie mathématique.



## Introduction

Analysant les travaux de C.L. Siegel sur les formes quadratiques, A. Weil montre, en 1964, le rôle capital que joue dans la théorie des fonctions thêta, une représentation unitaire (projective) du groupe dit pseudosymplectique [W].

Poursuivant dans cette voie, R. Howe propose une théorie générale [H.R.], qui explique la dualité entre certains groupes classiques, dualité mise en évidence par de nombreux auteurs. R. Howe introduit la notion de paires duales réductives (c'est-à-dire de paires  $(G, G')$  de sous-groupes réductifs, duales au sens où  $G$  et  $G'$  sont les commutants l'un de l'autre) et définit une correspondance entre certaines représentations projectives irréductibles de ces sous-groupes à l'aide de la représentation de Weil.

Cette théorie, développée sur les corps de caractéristique nulle ou impaire, peut-elle être élargie à des corps de caractéristique paire ?

Répondre à cette question nécessite de revenir à l'article d'A. Weil [W]. Il apparaît alors que le groupe pseudosymplectique n'est plus isomorphe au groupe symplectique mais est une extension d'un groupe orthogonal.

Plus précisément, considérons un corps  $F$  de caractéristique 2, fini ou local, et  $W$  un espace vectoriel sur  $F$  muni d'une forme quadratique  $Q$ , non dégénérée et non déficiente, d'indice quelconque (I.1.1) (A. Weil s'intéresse au cas d'indice maximal). Notons  $O(Q)$  le groupe des isométries de  $(W, Q)$ . Le groupe pseudosymplectique est alors une extension de  $O(Q)$  par le module  $\mathcal{Q}_a(W)$  des formes quadratiques additives définies sur  $W$ . Cette extension est, en général, non triviale (I.1.3).

Nous remarquons que l'existence de formes quadratiques additives non nulles est propre à la caractéristique deux. Elle est source de nouveaux problèmes pour la recherche des paires duales et pour l'étude de l'extension métaplectique.

Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2. Le groupe pseudosymplectique au-dessus de  $O(Q)$  défini précédemment, est formé d'automorphismes d'un groupe d'Heisenberg (I.1.2), triviaux sur le centre. Par le théorème de Stone-Von Neumann, encore valable sous nos hypothèses (annexe 1), nous construisons l'extension métaplectique (I.2.1). Celle-ci présente deux particularités (que nous mettons en évidence sur sa restriction au sous-groupe  $\mathcal{Q}_a(W)$  (I.1.1)) : être d'ordre exactement 2 que  $F$  soit fini ou local ; avoir des éléments qui ne commutent pas quand bien même leurs projections commuteraient dans le groupe pseudosymplectique.

Dans l'étape suivante, nous classifions les paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.1 et 2). Elles sont de la forme : deux groupes linéaires ou un groupe symplectique et un groupe orthogonal ou deux groupes unitaires ou encore, une des deux paires duales triviales. Nous reconnaissons là les différentes "familles" obtenues pour les autres caractéristiques. Par ailleurs, quand cela doit être précisé, nous décrivons les sous-groupes du groupe pseudosymplectique qui interviennent (§ 2.1 proposition c).



Mais, revenons à la démonstration établissant la classification. Dans un premier temps, nous avons recherché les paires duales réductives de  $O(Q)$  par des méthodes communes aux autres caractéristiques [M.V.W] (II.1). Nous abandonnons ensuite ces méthodes pour décrire à partir de la classification obtenue, un procédé qui nous permet de construire des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.2.3 et 2.4). Nous en dressons la liste (§ 2.1 proposition c). Est-elle complète?

Le vérifier exige la connaissance de certaines propriétés des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (§2.1 théorème a). De ces propriétés et du lemme 2.5, nous déduisons, pour chaque paire duale réductrice non triviale  $(G, G')$  du groupe pseudosymplectique, l'existence d'une paire duale réductrice  $(K, K')$  déjà répertoriée telle que les projections de  $K$  et  $K'$  sur  $O(Q)$  contiennent celles de  $G$  et  $G'$  respectivement : de là, via le corollaire 2.1.b, l'exhaustivité de la liste établie (§2.1 théorème d).

Le dernier paragraphe traite de la restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives. Cette restriction est toujours scindée (sauf au-dessus des paires duales triviales).

Il apparaît en outre, que les images réciproques des composantes d'une paire duale non triviale commutent dans l'extension métaplectique. Ainsi donc, nous pouvons étendre la conjecture locale de Howe au cas de caractéristique deux et retrouver des situations connues.

## I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

§ 1. Groupes pseudosymplectiques	5
1.1. Formes quadratiques en caractéristique 2	
1.2. Groupes d'Heisenberg	
1.3. Groupe pseudosymplectique	
§ 2. Groupe métaplectique : cas fini ou local	16
2.1. Définition	
2.2. Modèles de la représentation métaplectique	
2.3. Lemmes	
2.4. Démonstration de la proposition 2.1.	
Annexe 1. Sur le théorème de Stone-Von Neumann	28

## II. PAIRES DUALES RÉDUCTIVES DU GROUPE PSEUDO-SYMPLECTIQUE

§ 1. Paires duales réductives de $O(Q)$	30
1.1. Généralités et classification	
1.2. Lemme	
1.3. Lemme "géométrique"	
1.4. Paires duales relativement réductives et irréductibles de type hermitien (type I)	
1.5. Paires duales relativement réductives et irréductibles de type linéaire (type II)	
§ 2. Paires duales réductives du groupe pseudosymplectique	44
2.1. Réduction du problème	
2.2. Démonstration du théorème 2.1.a	
2.3. Relèvements de $SpW_1$ , $U(W_1)$ et $GL(X_1)$ à $PsB$	
2.4. Calcul des commutants et bicommutants	
2.5. Démonstration du théorème 2.1.d	

<b>§ 3. Restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives</b>	58
3.1. Réduction du problème	
3.2. Scindage au-dessus des composantes des paires duales	
<b>Annexe 2. Calculs de premiers groupes de cohomologie</b>	64
A.1. Généralités	
A.2. Cas du groupe linéaire	
A.3. Cas d'un groupe unitaire	
A.4. Cas du groupe symplectique	
<b>Bibliographie</b>	77

NOTATIONS : Soit  $F$  un corps commutatif de caractéristique 2, fini ou local dans le chapitre II. On note  $F^2$  le sous-corps de  $F$  formé des carrés de  $F$ ; si  $F$  est local,  $\mathcal{O}_F$  désigne l'anneau des entiers de  $F$  et  $\mathfrak{p}_F$  son idéal maximal.

Soit  $\psi$  un caractère additif, non trivial de  $F$ .

On considère un espace vectoriel sur  $F$ ,  $W$ , de dimension finie et muni d'une forme quadratique  $Q$  dont la forme alternée associée est notée  $\langle, \rangle$ .

$\delta_{i,j}$  désigne le symbole de Kronecker.

## I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

### § 1. Groupes pseudosymplectiques

#### 1.1. Formes quadratiques en caractéristique deux [D.J]

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $F$ .

Une *forme quadratique*  $q$  sur  $V$  est une application de  $V$  dans  $F$  définie à l'aide d'une forme bilinéaire  $b$  par :  $q(v) = b(v, v)$ ,  $v \in V$ . Une forme bilinéaire alternée, notée  $(,)$ , lui est associée de la façon suivante :

$$\text{pour tout } (v, v') \in V^2, \quad (v, v') = q(v + v') + q(v) + q(v') = b(v, v') + b(v', v).$$

Ces trois objets ne se définissent pas l'un l'autre. D'une part, deux formes quadratiques  $q$  et  $q'$  ont la même forme alternée associée si et seulement si  $q + q'$  est additive; d'autre part, deux formes bilinéaires  $b$  et  $b'$  définissent la même forme quadratique si et seulement si la forme bilinéaire  $b + b'$  est alternée.

On note  $\mathcal{Q}(V)$  l'ensemble des formes quadratiques sur  $V$ ,  $\mathcal{Q}_a(V)$  le sous-ensemble des formes quadratiques additives sur  $V$  et  $\mathcal{Q}_a^2(V)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{Q}_a(V)$  formé des formes quadratiques additives dont les valeurs sont des carrés de  $F$ .

Soit  $q \in \mathcal{Q}(V)$  et  $(,)$  la forme alternée associée. Un sous-espace vectoriel  $X$  de  $V$  est *isotrope* si l'intersection de  $X$  et son orthogonal  $X^\perp$  n'est pas nulle. Si, en outre,  $X$  est contenu dans  $X^\perp$ ,  $X$  est dit *totalelement isotrope*. Un sous-espace vectoriel  $X$ , totalelement isotrope et sur lequel  $q$  est nulle, est dit *singulier*.

Un sous-espace vectoriel de  $V$  est *hyperbolique* s'il admet une *base hyperbolique*  $(e_1, \dots, e_p, e_{-1}, \dots, e_{-p})$  c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} (e_i, e_j) &= \delta_{i, -j} \quad \text{pour tout } i, j \in \{-p, \dots, -1, 1, \dots, p\} \\ \text{et } q(e_i) &= 0 \quad \text{pour tout } i \in \{-p, \dots, -1, 1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Une base ne vérifiant que la première condition est dite *symplectique*.

On suppose que  $q$  est *non dégénérée et non défective* (i.e. la forme  $(,)$  est non dégénérée).

Alors si  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  totalelement isotrope, il existe, pour toute base  $(e_i)_{i \in I}$  de  $X$ , des vecteurs  $(e_{-i})_{i \in I}$  de  $V$  tels que

$$(e_i, e_{-j}) = \delta_{i, j} \quad \text{pour tout } i, j \in I.$$

Si, de plus,  $X$  est singulier, on peut choisir les vecteurs  $(e_{-i})_{i \in I}$  singuliers [D.J p. 34]. Ainsi, si  $X$  est un sous-espace vectoriel singulier de  $V$ , de dimension maximale, il existe un

sous-espace vectoriel  $Y$  de  $V$ , de même dimension que  $X$ , tel que  $X \oplus Y$  soit hyperbolique. Alors,  $(X \oplus Y)^\perp$  est un sous-espace vectoriel sans éléments singuliers et  $V$  se décompose en somme orthogonale

$$V = (X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^\perp.$$

La dimension de  $X$  s'appelle *l'indice de  $q$*  et est notée  $\nu(q)$ .

### 1.2. Le groupe d'Heisenberg

Soit  $Q$  une forme quadratique sur  $W$ , non dégénérée et non défective. Alors  $W$  est de dimension paire notée  $2n$ . On note  $\langle, \rangle$  la forme alternée de  $Q$ .

Pour toute forme bilinéaire  $B$  définissant  $Q$ , on définit un groupe d'Heisenberg  $H(B)$  par [W §31] :

$$H(B) = W \times F$$

muni de la loi

$$(w, t), (w', t') \in H(B), (w, t)(w', t') = (w + w', t + t' + B(w, w')).$$

Si  $B'$  est une autre forme bilinéaire définissant  $Q$ , on définit de même le groupe d'Heisenberg  $H(B')$ . Soit  $q$  une forme quadratique dont la forme alternée est  $B + B'$ . Posons  $\alpha_q(w, t) = (w, t + q(w))$ ,  $(w, t) \in H(B)$ . Alors,  $\alpha_q$  est un isomorphisme entre  $H(B)$  et  $H(B')$ .

Supposons que  $F$  est fini ou local.

D'après le théorème de Stone-Von Neumann (cf. annexe 1), il existe une représentation, unique à isomorphisme près,  $(\rho_\psi, \mathcal{V})$  du groupe d'Heisenberg  $H(B)$ , lisse, irréductible telle que

$$\rho_\psi((0, t)) = \psi(t)id_{\mathcal{V}}, \quad t \in F.$$

*Modèles de la représentation métaplectique  $\rho_\psi$  de  $H(B)$  ( $F$  fini ou local).*

1. Soient  $W = X \oplus Y$  une *polarisation complète* de  $W$  (i.e.  $X$  et  $Y$  sont des sous-espaces vectoriels totalement isotropes, de dimension maximale) et  $\psi_X$  un caractère du sous-groupe  $X \times F$  de  $H(B)$  prolongeant  $\psi$ .

On définit le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  par :

- si  $F$  est fini,  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  est formé des fonctions  $\phi$  sur  $H(B)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$(1) \quad \forall x \in X, \forall t \in F, \forall h \in H(B) \quad \phi((x, t)h) = \psi_X((x, t))\phi(h)$$

- si  $F$  est local,  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  est formé des fonctions  $\phi : H(B) \rightarrow \mathbb{C}$  localement constantes, à support compact modulo  $X \times F$ , vérifiant (1).

Le groupe  $H(B)$  agit sur  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  par translation à droite. La représentation  $(\rho_\psi, \mathcal{H}(X, \psi_X))$  de  $H(B)$  ainsi obtenue est un modèle de  $\rho_\psi$ .

De plus,  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  est isomorphe au  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}(Y)$  des fonctions de  $Y$  dans  $\mathbb{C}$ , si  $F$  est fini et, au  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}(Y)$  des fonctions de  $Y$  dans  $\mathbb{C}$ , localement constantes à support compact, si  $F$  est local.

On a alors, pour tout  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $t \in F$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$ ,

$$\rho_\psi((x+y, t))\varphi(y') = \psi(t + \langle y', x \rangle + B(x+y', y))\psi_X((x, 0))\varphi(y+y'), \quad y' \in Y.$$

2. On suppose que  $F$  est local.

Soit  $L$  un réseau de  $W$ . On définit le réseau  $L^*$  par

$$L^* = \{w \in W \mid \forall \ell \in L, \langle \ell, w \rangle \in \mathcal{E}_\psi\}$$

où  $\mathcal{E}_\psi$  est le plus grand sous  $\mathcal{O}_F$ -module contenu dans  $\text{Ker } \psi$ . On suppose  $L = L^*$ . En remplaçant  $X \times F$  par  $L \times F$  dans le modèle précédent, on obtient un nouveau modèle de  $\rho_\psi$ .

### 1.3. Groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$

Pour toute forme bilinéaire  $B$  définissant  $Q$ , on définit le groupe pseudosymplectique,  $PsB$  par [W §31]

$$PsB = \{(\sigma, f) \in O(Q) \times \mathcal{Q}(W) \mid f(w+w') + f(w) + f(w') = B(\sigma w, \sigma w') + B(w, w')\}$$

avec la loi :  $(\sigma, f)(\sigma', f') = (\sigma\sigma', f \cdot \sigma' + f')$

où  $f \cdot \sigma'$  désigne la forme quadratique  $w \mapsto f(\sigma'w)$ .

Le groupe  $PsB$  agit sur  $H(B)$  par

$$(\sigma, f) \cdot (w, t) = (\sigma w, t + f(w)), \quad (\sigma, f) \in PsB, \quad (w, t) \in H(B).$$

Il apparaît donc comme un sous-groupe (en général propre) du groupe des automorphismes du groupe d'Heisenberg  $H(B)$  qui agissent trivialement sur le centre.

**PROPOSITION a.** — *Tous les groupes pseudosymplectiques au-dessus de  $O(Q)$  sont isomorphes.*

En effet, soient  $B$  et  $B'$  deux formes bilinéaires définissant  $Q$ . Alors  $B+B'$  est alternée, et, pour toute forme quadratique  $q$  dont la forme alternée associée est  $B+B'$ , on note  $\beta_q$  l'application définie par :  $\beta_q(\sigma, f) = (\sigma, f + q \cdot \sigma + q)$ . C'est un isomorphisme de  $PsB$  dans  $PsB'$ .

On note  $\mathcal{I}(B, B')$  l'ensemble de tels isomorphismes.

PROPOSITION b. — Soit  $B$  une forme bilinéaire définissant  $Q$ . La suite

$$(*) \quad 1 \longrightarrow Q_a(W) \longrightarrow PsB \longrightarrow O(Q) \longrightarrow 1$$

est exacte, scindée si et seulement si  $n = 1$  ou  $n = 2$  et  $F = F_2$ .

Dans les cas où la suite  $(*)$  est scindée, toutes les sections sont conjuguées sous  $Q_a(W)$ .

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration de cette proposition.

La projection de  $PsB$  sur  $O(Q)$  est surjective et son noyau est  $\{(id, f) \in PsB\} = \{(id, f), f \in Q_a(W)\}$  d'où l'exactitude de la suite  $(*)$ .

Supposons la suite  $(*)$  scindée. Soit  $s$  une section.

Si  $a \in W$  est non singulier, on note  $t_a$  la transvection orthogonale de vecteur  $a$

$$t_a(w) = w + \frac{\langle w, a \rangle}{Q(a)} \cdot a, \quad w \in W.$$

Soit  $(t_a, q_a) = s(t_a)$ . Alors, la forme alternée associée à  $q_a$  est

$$(2) \quad (w, w') \longmapsto \frac{B(w, a)B(a, w') + B(a, w)B(w', a)}{Q(a)}.$$

Comme  $t_a$  est d'ordre 2,  $s(t_a)$  également, d'où

$$Q_a \cdot t_a + q_a = 0$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\langle w, a \rangle^2}{Q(a)^2} (q_a(a) + Q(a)) = 0$$

pour tout  $w \in W$ , d'où

$$(3) \quad q_a(a) = Q(a).$$

De plus, si  $a$  et  $b$  sont non singuliers, non colinéaires et orthogonaux,  $t_a$  et  $t_b$  commutent d'où

$$s(t_a)s(t_b) = s(t_b)s(t_a)$$

ce qui équivaut à

$$q_a \cdot t_b + q_b = q_b \cdot t_a + q_a,$$

ou encore

$$(4) \quad \frac{\langle w, a \rangle^2}{Q(a)^2} q_b(a) = \frac{\langle w, b \rangle^2}{Q(b)^2} q_a(b)$$

pour tout  $w \in W$ .

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $n \geq 2$  et  $F \neq \mathbb{F}_2$ , il existe  $a, b$  deux vecteurs non singuliers, non colinéaires et orthogonaux entre eux. Il existe donc un vecteur  $w_0$  de  $W$  orthogonal à  $a$  et non à  $b$ . Par (4) appliqué à  $w = w_0$ , on a :

$$(5) \quad q_a(b) = 0.$$

Puisque  $F \neq \mathbb{F}_2$ , on peut supposer que  $Q(a) \neq Q(b)$ . Le raisonnement précédent avec  $a$  et  $a + b$  au lieu de  $a$  et  $b$  montre que :  $q_a(a + b) = 0$ .

Or

$$q_a(a + b) = q_a(a) + q_a(b) = Q(a) \neq 0$$

d'après (3) et (5).

La suite (\*) n'est donc pas scindée dans ce cas.

**2<sup>ème</sup> cas :** Si  $n \geq 3$  et  $F = \mathbb{F}_2$ , il existe trois vecteurs indépendants  $a, b, c$ , deux à deux orthogonaux et tels que

$$Q(a) = Q(b) = Q(c) = 1.$$

Par (3),  $q_a(a) = 1$ .

Par (4) appliqué successivement à  $a$  et  $b$ ,  $a$  et  $c$ ,  $a$  et  $a + b + c$ , on obtient

$$q_a(b) = q_a(c) = q_a(a + b + c) = 0.$$

Or,  $q_a(a + b + c) = q_a(a) = 1$ .

La suite (\*) n'est pas scindée dans ce cas.

Dans les autres cas, on montre que la suite (\*) est scindée en déterminant une section  $s$  de  $O(Q)$  dans un groupe pseudosymplectique  $PsB$  de notre choix grâce à la proposition a.

Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, e_{-1}, \dots, e_n\}$  une base symplectique de  $W$  (cf. §1.1).

A chaque élément  $\sigma$  de  $O(Q)$ , de matrice  $\begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$  on associe un entier  $D(\sigma)$ , appelé invariant de Dickson, et défini par :

$$D(\sigma) = \sum_{i,j} (Q(e_j)a_{ij}b_{ij} + Q(e_{-j})c_{ij}d_{ij} + b_{ij}c_{ij}).$$

L'application  $D : \sigma \longrightarrow D(\sigma)$  est un homomorphisme de groupes de  $O(Q)$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On note  $O^+(Q)$  son noyau et  $O^-(Q)$  l'ensemble des éléments de  $O(Q)$  pour lesquels  $D$  prend la valeur 1. Le groupe  $O(Q)$  est réunion disjointe de  $O^+(Q)$  et  $O^-(Q)$ .

**3<sup>ème</sup> cas :** Si  $n = 1$ , l'indice  $\nu$  de  $Q$  est 0 ou 1.

Si  $\nu = 0$  (resp.  $\nu = 1$ ), soit  $(e_1, e_{-1})$  une base de  $W$  telle que

$$\langle e_1, e_{-1} \rangle = 1$$

(respectivement,  $(e_1, e_{-1})$  est une base hyperbolique de  $W$ ).



On choisit  $B$  ainsi :

$$B(xe_1 + ye_{-1}, x'e_1 + y'e_{-1}) = xx'Q(e_1) + xy' + yy'Q(e_{-1}).$$

Alors, l'application  $s : O(Q) \longrightarrow PsB$  définie par

$$\begin{aligned} s(\sigma) &= (\sigma, 0), \quad \sigma \in O^+(Q) \\ \text{et } s(\sigma) &= (\sigma, Q), \quad \sigma \in O^-(Q) \end{aligned}$$

est une section.

En effet, les éléments  $s(\sigma)$  sont bien dans  $PsB$  : Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $O(Q)$  exprimé dans la base  $(e_1, e_{-1})$ . Alors :

$$(6) \quad \begin{cases} Q(\sigma e_1) = Q(e_1) & \text{i.e. } a^2Q(e_1) + ac + c^2Q(e_{-1}) = Q(e_1) \\ Q(\sigma e_{-1}) = Q(e_{-1}) & \text{i.e. } b^2Q(e_1) + bd + d^2Q(e_{-1}) = Q(e_{-1}) \\ \text{et } ad + bc = 1. \end{cases}$$

Calculons

$$\begin{aligned} & B(\sigma(xe_1 + ye_{-1}), \sigma(x'e_1 + y'e_{-1})) + B(xe_1 + ye_{-1}, x'e_1 + y'e_{-1}) \\ &= (ax + by)(ax' + by')Q(e_1) + (ax + by)(cx' + dy') + (cx + dy)(cx' + dy')Q(e_{-1}) \\ & \quad + xx'Q(e_1) + xy' + yy'Q(e_{-1}) \\ &= xx'[a^2Q(e_1) + ac + c^2Q(e_{-1}) + Q(e_1)] + xy'[abQ(e_1) + ad + cdQ(e_{-1}) + 1] \\ & \quad + yx'[baQ(e_1) + bc + cdQ(e_{-1})] + yy'[b^2Q(e_1) + bd + d^2Q(e_{-1}) + Q(e_{-1})] \\ &= (xy' + yx')[abQ(e_1) + bc + cdQ(e_{-1})] \quad \text{par (6)} \\ &= (xy' + yx') \cdot D(\sigma) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \in O^+(Q) \\ xy' + yx' & \text{si } \sigma \in O^-(Q). \end{cases} \end{aligned}$$

L'application  $s$  est bien à valeurs dans  $PsB$ .

De plus, si  $\sigma \in O(Q)$ ,  $\sigma' \in O(Q)$  on a :

$$\begin{aligned} s(\sigma)s(\sigma') &= \begin{cases} (\sigma\sigma', Q) & \text{si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ ne sont pas dans la même composante} \\ & \text{connexe de } O(Q) \\ (\sigma\sigma', 0) & \text{si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ sont dans la même composante connexe} \end{cases} \\ &= s(\sigma\sigma') \end{aligned}$$

Donc,  $s$  est une section.

**4<sup>ème</sup> cas :** Si  $n = 2$ ,  $\nu = 2$  et  $F = \mathbf{F}_2$ , on identifie  $W$  à l'espace vectoriel  $\mathcal{M}(2, \mathbf{F}_2)$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbf{F}_2$  et  $Q$  est la forme quadratique  $Q(m) = \det m$ ,  $m \in W$ .

On choisit la forme bilinéaire  $B$  suivante :

$$\text{si } m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } m' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ alors } B(m, m') = ad' + bc'.$$

Le groupe  $O^+(Q)$  s'identifie au groupe  $SL(2, \mathbf{F}_2) \times SL(2, \mathbf{F}_2)$  agissant sur  $W$  par :

$$(g_1, g_2) \cdot m = g_1 m g_2^{-1}$$

On considère les éléments de  $PsB$  suivants : soit  $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$$s_1 = \left( \sigma_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, id \right), q_1(m) = cd \right) \quad s'_1 = \left( \sigma'_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, id \right), q'_1(m) = ab \right)$$

$$s_2 = \left( \sigma_2 = \left( id, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), q_2(m) = a^2 + c^2 \right) \quad s'_2 = \left( \sigma'_2 = \left( id, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right), q'_2(m) = b^2 + d^2 \right)$$

et  $t = (\tau, q(m) = bc + a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$  où  $\tau(m) = {}^t m$ .

LEMME. —

1) L'homomorphisme  $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$  défini par :

$$i(\sigma_j) = s_j, \quad i(\sigma'_j) = s'_j, \quad j = 1, 2$$

est un relèvement de  $O^+(Q)$  dans  $PsB$ .

2)  $i$  se prolonge en un relèvement de  $O(Q)$  dans  $PsB$  en posant  $i(\tau) = t$ .

*Démonstration :* Pour la première affirmation, il suffit de vérifier que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$C.1 \quad s_1^2 = s_2^2 = s'_1{}^2 = s'_2{}^2 = (id, 0)$$

$$C.2 \quad s_i s'_i s_i = s'_i s_i s'_i \text{ pour } i = 1, 2$$

$$C.3 \quad g_1 g_2 = g_2 g_1 \text{ pour } g_i = s_i \text{ ou } s'_i, i = 1, 2.$$

En effet,  $SL(2, \mathbf{F}_2)$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .

Pour la deuxième affirmation, il suffit de vérifier que :

$$C.4 \quad t^2 = (id, 0)$$

$$C.5 \quad t s_1 t = s'_2 \text{ et } t s'_1 t = s_2.$$

Vérification de C.1. On remarque que  $q_i$  (resp.  $q'_i$ ) est invariante sous  $\sigma_i$  (resp.  $\sigma'_i$ ) : le résultat est clair.

Vérification de C.2. Calculons  $(q_i \cdot \sigma'_i \sigma_i + q'_i \cdot \sigma_i + q_i)(m)$

$$\text{pour } i = 1, \quad q_1(\sigma'_1 \sigma_1 m) + q'_1(\sigma_1 m) + q_1(m) = ab + (a+c)(b+d) + cd$$

$$= q'_1(m) + q_1(\sigma'_1 m) + q_1(\sigma_1 \sigma'_1 m)$$

$$\text{pour } i = 2, \quad q_2(\sigma'_2 \sigma_2 m) + q'_2(\sigma_2 m) + q_2(m) = (b^2 + d^2) + ((a+b)^2 + (c+d)^2) + (a^2 + c^2)$$

$$= q'_2(m) + q_2(\sigma'_2 m) + q_2(\sigma_2 \sigma'_2 m).$$

La condition C.2 est satisfaite.

Vérification de C.3. On traite le cas où  $g_1 = s_1$  et  $g_2 = s_2$ ; les autres sont semblables.

On doit comparer  $q_1 \cdot \sigma_2 + q_2$  et  $q_2 \cdot \sigma_1 + q_1$ .

$$\text{On a } q_1 \cdot \sigma_2(m) + q_2(m) = c(c+d) + a^2 + c^2 = cd + a^2$$

$$\text{et } q_2 \cdot \sigma_1(m) + q_1(m) = (a+c)^2 + c^2 + cd = cd + a^2$$

d'où  $q_1 \cdot \sigma_2 + q_2 = q_2 \cdot \sigma_1 + q_1$ .

La condition C.4 est immédiate et C.5 se vérifie comme précédemment.  $\square$

La suite (\*) est donc scindée.

5<sup>ème</sup> et dernier cas : Si  $n = 2$ ,  $\nu = 1$  et  $F = \mathbf{F}_2$ .

Soient  $\xi$  un générateur de  $\mathbf{F}_4$  sur  $\mathbf{F}_2$  et  $\bar{\phantom{x}}$  l'élément non trivial de  $\text{Gal}(\mathbf{F}_4|\mathbf{F}_2)$ . Tout élément  $\alpha$  de  $\mathbf{F}_4$  s'écrit :

$$\alpha = z + \xi t, \quad z, t \in \mathbf{F}_2.$$

On identifie  $W$  à  $\{m = \begin{pmatrix} x & \bar{\alpha} \\ \alpha & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{F}_2 \text{ et } \alpha \in \mathbf{F}_4\}$ . Alors  $Q(m) = \det m$ ,  $m \in W$  et  $O^+(Q)$  s'identifie à  $SL_2(\mathbf{F}_4)$  agissant sur  $W$  par :

$$g \in SL_2(\mathbf{F}_4), \quad m \in W, \quad g \cdot m = gm\bar{g}^t.$$

On prend la forme bilinéaire  $B$  égale à :

$$\text{si } m = \begin{pmatrix} x & \overline{z + \xi t} \\ z + \xi t & y \end{pmatrix}, \quad m' = \begin{pmatrix} x' & \overline{z' + \xi t'} \\ z' + \xi t' & y' \end{pmatrix}, \quad B(m, m') = xy' + zz' + zt' + tt'.$$

On considère les éléments de  $PsB$  suivants :

pour  $\lambda = \lambda_1 + \xi \lambda_2 \in \mathbf{F}_4^\times$ ,

$$s_\lambda = \left( \sigma_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + \xi \lambda_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_\lambda(m) = (\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_1 yt + y^2 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 t^2 \right)$$

pour  $\mu \in \mathbf{F}_4^\times$ ,  $d_\mu = \left( \delta_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}, 0 \right)$  et  $w = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q \right)$ .

LEMME. — L'homomorphisme  $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$  défini par

$$\begin{aligned} i(\sigma_\lambda) &= s_\lambda, & \lambda \in \mathbf{F}_4^\times \\ i(\delta_\mu) &= d_\mu, & \mu \in \mathbf{F}_4^\times \\ i\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= w \end{aligned}$$

est un relèvement de  $O^+(Q)$  dans  $PsB$ .

De plus,  $i$  se prolonge en un relèvement de  $O(Q)$  dans  $PsB$  en posant

$$i(\tau) = (\tau, q_\tau(m) = zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2) \quad \text{où } \tau \cdot m = {}^t m.$$

*Démonstration* : Les éléments  $\sigma_\lambda$ ,  $\delta_\mu$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\tau$  engendrent  $O(Q)$  et  $i$  est bien défini si les relations suivantes sont satisfaites [D.E] :

$$R.1 \quad w d_\lambda = d_{\lambda^{-1}} w, \quad \lambda \in \mathbf{F}_4^\times$$

$$R.2 \quad w^2 = (id, 0)$$

$$R.3 \quad w s_\lambda w = d_{\lambda^{-1}} s_\lambda w s_{\lambda^{-1}}, \quad \lambda \in \mathbf{F}_4^\times$$

$$R.4 \quad d_\lambda d_\mu = d_{\lambda\mu}, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbf{F}_4^\times$$

$$R.5 \quad s_\lambda s_\mu = s_{\lambda\mu}, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \mathbf{F}_4^\times$$

$$R.6 \quad i(\tau)^2 = (id, 0)$$

$$R.7 \quad i(\tau) g i(\tau) = i(\tau \sigma \tau) \quad \text{où } g = (\sigma, q) \text{ est } s_\lambda, d_\mu \text{ ou } w, \lambda, \mu \in \mathbf{F}_4^\times.$$

L'homomorphisme  $i$  est alors injectif.

Les relations (R.1), (R.2) et (R.4) sont claires. Pour (R.3), on calcule les formes quadratiques obtenues dans chaque membre. A droite, on a

$$\begin{aligned} & q_\lambda \cdot w s_{\lambda^{-1}}(m) + Q(\sigma_{\lambda^{-1}} m) + q_{\lambda^{-1}}(m) \\ &= q_\lambda \left( \begin{pmatrix} y & z+t+(\lambda_1+\lambda_2)y+\xi(t+\lambda_2y) \\ z+t+(\lambda_1+\lambda_2)y+\xi(t+\lambda_2y) & x+\lambda_1z+\lambda_2t+y \end{pmatrix} \right) \\ & \quad + Q(m) + q_{\bar{\lambda}}(m) \\ &= [(\lambda_1+\lambda_2)xz + \lambda_2xt + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)(zt+yx) + \lambda_1zy + (\lambda_1+\lambda_2)ty \\ & \quad + x^2 + \lambda_1(\lambda_2+1)z^2 + \lambda_2(1+\lambda_1)t^2 + y^2] + \\ & \quad [xy + z^2 + zt + t^2] + [\lambda_1yz + (\lambda_1+\lambda_2)yt + y^2 + (\lambda_1+\lambda_2)z^2 + \lambda_2t^2] \\ &= (\lambda_1+\lambda_2)xz + \lambda_2xt + x^2 + \lambda_1z^2 + (\lambda_1+\lambda_2)t^2 \end{aligned}$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 & \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{F}_4^\times \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 + 1 = \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

A gauche, on a :  $Q \cdot \sigma_\lambda w + q_\lambda \cdot w + Q = q_\lambda \cdot w$  et

$$q_\lambda \cdot w(m) = (\lambda_1 + \lambda_2)xz + \lambda_2xt + x^2 + \lambda_1z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)t^2.$$

On fait de même pour (R.5) :

$$\begin{aligned} q_\lambda \cdot \sigma_\mu(m) + q_\mu(m) &= [(\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_1yt + \lambda_1z^2 + \lambda_2t^2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 1)y^2] \\ &\quad + (\mu_1 + \mu_2)yz + \mu_1yt + y^2 + \mu_1z^2 + \mu_2t^2 \\ &= (\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)yz + (\lambda_1 + \mu_1)yt + (\lambda_1 + \mu_1)z^2 \\ &\quad + (\lambda_2 + \mu_2)t^2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)y^2 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = \mu \\ q_{\lambda+\mu}(m) & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ car } \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = \lambda_2 + \mu_2. \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (R.6) est claire. Reste à examiner (R.7).

Si  $g = s_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} q_\tau \cdot \sigma_\lambda \tau(m) + q_\lambda(\tau m) + q_\tau(m) &= [zt + \lambda_2zy + \lambda_1ty + x^2 + (1 + \lambda_2)z^2 + (1 + \lambda_1)t^2 \\ &\quad + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2)y^2] \\ &\quad + [(\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_2yt + \lambda_1z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)t^2 + y^2] \\ &\quad + [zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2] \\ &= \lambda_1zy + (\lambda_1 + \lambda_2)ty + (\lambda_1 + \lambda_2)z^2 + \lambda_2t^2 + y^2 = q_{\bar{\lambda}}(m). \end{aligned}$$

Or

$$i(\tau)s_\lambda i(\tau) = s_{\bar{\lambda}}.$$

Si  $g = d_\lambda$ ,  $\tau d_\lambda \tau$  est égal à  $d_{\lambda^{-1}}$  et la forme quadratique de  $i(\tau)d_\lambda i(\tau)$  est

$$\begin{aligned} &[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)zt + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)t^2 + x^2 + y^2] \\ &\quad + zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2 = 0. \end{aligned}$$

Si  $g = w$  alors  $\tau w \tau$  est égal à  $w$  et la forme quadratique de  $i(\tau)w i(\tau)$  est

$$(zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2) + Q(x, z, t, y) + zt + y^2 + z^2 + t^2 + x^2 = Q(m).$$

Les relations (R.7) sont bien satisfaites.

Ceci termine la démonstration du lemme.

Pour compléter la preuve de la proposition, il reste à montrer l'unicité (à conjugaison près par un élément de  $\mathcal{Q}_a(W)$ ) de la section dans les cas 3, 4 et 5, c'est-à-dire la nullité de  $H^1(O(Q), \mathcal{Q}_a(W))$  ou encore, celle de  $H^1(O(Q), W)$  puisque celui-là est isomorphe à un produit de  $[F : F^2]$  copies de celui-ci (cf. II.2.2).

Dans le cas 4, c'est un résultat de H. Pollatsek [P., théorème 4.5].

Dans les autres cas, il suffit que  $H^1(O^+(Q), W)$  soit nul d'après la suite de Hochschild-Serre [Annexe 2, proposition A.1]. Or,  $O^+(Q)$  est isomorphe à  $F^\times$  quand  $n = \nu = 1$ , à  $U(1, E)$  où  $E$  est une extension quadratique de  $F$  muni de l'involution canonique quand  $n = 1$  et  $\nu = 0$  (cf. § 2.4 cas 2), et à  $SL(2, \mathbb{F}_4)$  quand  $n = 2$ ,  $\nu = 1$  et  $F = \mathbb{F}_2$ . Alors,  $H^1(O^+(Q), W)$  est nul d'après les calculs effectués dans l'annexe 2 (proposition A.2, corollaire A.2 et proposition A.3).

La proposition est maintenant entièrement établie.

## § 2. Groupe métaplectique : cas fini ou local

2.1. Soit  $(\rho_\psi, \mathcal{V})$  la représentation métaplectique de  $H(B)$ .

A tout  $s$  de  $PsB$ , on associe la représentation  $(\rho_\psi^s, \mathcal{V})$  de  $H(B)$  définie par :

$$\rho_\psi^s(h) = \rho_\psi(sh), \quad h \in H(B).$$

C'est une représentation lisse, irréductible et, pour tout  $t \in F$ ,

$$\rho_\psi^s((0, t)) = \psi(t)id_{\mathcal{V}}.$$

Par le théorème de Stone-Von Neumann,  $\rho_\psi$  et  $\rho_\psi^s$  sont isomorphes. On construit ainsi une représentation projective  $\bar{\omega}_\psi$  de  $PsB$ .

Il existe alors une extension de  $PsB$  par  $\mathbb{C}^\times$ , notée  $\widetilde{PsB}$ , et une représentation  $(\omega_\psi, \mathcal{V})$  de  $\widetilde{PsB}$  telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \widetilde{PsB} & \xrightarrow{p} & PsB & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \downarrow \omega_\psi & & \downarrow \bar{\omega}_\psi & & \\ & & & & GL\mathcal{V} & \longrightarrow & PGL\mathcal{V} & & \end{array}$$

$\widetilde{PsB}$  est l'extension métaplectique de  $PsB$  et  $\omega_\psi$  sa représentation métaplectique.

*Remarques :*

1. A priori, l'extension métaplectique dépend du caractère  $\psi$  fixé. On n'abordera pas, ici, le problème de l'unicité de cette extension.

2. S'il existe deux isomorphismes  $\alpha : H(B) \xrightarrow{\sim} H(B')$  et  $\beta : PsB \xrightarrow{\sim} PsB'$  tels que :

$$(7) \quad \forall h \in H(B), \quad \forall s \in PsB, \quad \alpha(sh) = (\beta s)(\alpha(h))$$

alors  $\beta$  se relève en un isomorphisme de  $\widetilde{PsB}$  dans  $\widetilde{PsB}'$ .

En particulier, si  $B$  et  $B'$  définissent la même forme quadratique, les isomorphismes  $\alpha_q$  et  $\beta_q$  définis respectivement aux paragraphes 1.2 et 1.3 vérifient (7) :  $\widetilde{PsB}$  et  $\widetilde{PsB}'$  sont isomorphes.

De même, si  $B' = \lambda B$ ,  $\lambda \in F^\times$ , alors  $\widetilde{PsB}'$ , défini relativement au caractère  $\psi_\lambda : x \rightarrow \psi(\lambda x)$  est isomorphe à  $\widetilde{PsB}$ .

PROPOSITION. —

a L'extension métaplectique n'est pas triviale et contient un sous-groupe  $\widehat{PsB}$  tel que la restriction de  $p$  à ce sous-groupe soit surjective de noyau  $\{\pm 1\}$ .

*b* Dans les cas où  $PsB$  contient un sous-groupe isomorphe à  $O(Q)$ , la restriction de l'extension métaplectique à ce sous-groupe est scindée si et seulement si

$$\begin{cases} n = 1 \\ \text{ou } n = \nu = 2 \text{ et } F = \mathbf{F}_2. \end{cases}$$

Pour établir ce résultat, on décrit différents modèles de la représentation métaplectique en 2.2 et, en 2.3, on examine une situation produit. La proposition principale est prouvée en 2.4.

## 2.2. Modèles de la représentation métaplectique

On reprend les notations du § 1.2.

### a. Modèle de Schrödinger

Soit  $s = (\sigma, f)$  un élément de  $PsB$ . On suppose que, dans une polarisation complète de  $(W, \langle, \rangle)$ ,  $W = X \oplus Y$ ,  $\sigma$  s'écrit  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ .

Sur  $X \cap \sigma X$ , l'application  $x \rightarrow \psi_X(x \cdot s^{-1}x)\psi(Q(x))$  est un caractère. Il existe un élément  $w_s$  de  $W$  tel que

$$(8) \quad \psi_X(x)\psi_X(s^{-1}x)\psi(Q(x)) = \psi(\langle x, w_s \rangle), \quad x \in X \cap \sigma X.$$

On définit un automorphisme  $M(s)$  de  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  par

$$M(s)\phi(h) = \begin{cases} |\alpha|^{1/2}\phi(s^{-1}(w_s h)) & \text{si } \sigma \text{ stabilise } X \\ \int_{X/X \cap \sigma X} \psi(Q(x))\psi_X(x)\phi(s^{-1}(w_s x h))|\gamma'|^{1/2}dx & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\gamma' : X/\text{Ker } \gamma \rightarrow (X/\delta \text{Ker } \gamma)^*$  est l'isomorphisme induit par  $\gamma$ ,  $dx$  est une mesure de Haar sur  $X/X \cap \sigma X$ , et  $w_s$  un vecteur de  $W$  satisfaisant (8).

Un choix différent de  $w_s$  peut changer  $M(s)$  en  $-M(s)$ .

On vérifie que  $(s, M(s))$  appartient à  $PsB$ , par une méthode analogue à [P.P § 1].

On note  $\Lambda(W) = \{(X, \psi_X) \text{ où } X \text{ est un lagrangien de } W \text{ et } \psi_X \text{ un caractère sur } X \times F \text{ prolongeant } \psi\}$ .

Le groupe  $PsB$  agit sur  $\Lambda(W)$  par :  $s = (\sigma, f) \in PsB, (X, \psi_X) \in \Lambda(W)$ ,

$$(\sigma, f) \cdot (X, \psi_X) = (\sigma X, \psi_X \circ s^{-1}).$$

On fixe  $(X_0, \psi_0) \in \Lambda(W)$  et on désigne par  $\Lambda^0(W)$  l'orbite sous  $PsB$  de  $(X_0, \psi_0)$ .

Pour deux lagrangiens  $X$  et  $Y$ , on note  $A_{YX}$  l'isomorphisme de  $X/X \cap Y$  sur  $(Y/X \cap Y)^*$  induit par celui de  $W$  sur  $W^*$ .

Soient  $dx$  et  $dy$  des mesures de Haar sur  $X$  et  $Y$ ,  $dt$  une mesure de Haar sur  $X \cap Y$ . On note  $d\dot{x}$  et  $d\dot{y}$  les mesures de Haar quotients sur  $X/X \cap Y$  et  $Y/X \cap Y$ , et,  $|A_{YX}|$  le module de  $A_{YX}$  par rapport à  $d\dot{x}$  et la mesure duale de  $d\dot{y}$  [P.P 1.1].



Pour deux éléments  $(X, \psi_X)$  et  $(Y, \psi_Y)$  de  $\Lambda^0(W)$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{F}_{Y, \psi_Y; X, \psi_X}$  de la façon suivante :

l'application  $x \mapsto \psi_X(x)^{-1} \psi_Y(x)$  définit un caractère sur  $X \cap Y$ . Il existe donc  $w \in W$  (défini modulo  $X + Y$ ) tel que

$$\psi_X(x)^{-1} \psi_Y(x) = \psi(\langle w, x \rangle) \quad \text{pour tout } x \in X \cap Y.$$

Alors, pour  $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$ ,

$$\mathcal{F}_{Y, \psi_Y; X, \psi_X} \phi(h) = \int_{Y/X \cap Y} \psi_Y^{-1}(y) \phi(w \cdot y \cdot h) |A_{YX}|^{1/2} dy.$$

Soient  $X_1$  un supplémentaire de  $X \cap Y$  dans  $X$  et  $Y_1$  un supplémentaire de  $X \cap Y$  dans  $Y$ . Alors,  $X_1 \oplus Y_1$  est non isotrope et son orthogonal  $(X_1 \oplus Y_1)^\perp$  contient  $X \cap Y$ . On note  $V$  un supplémentaire de  $X \cap Y$  dans  $(X_1 \oplus Y_1)^\perp$ . Ainsi,

$$W = X_1 \oplus X \cap Y \oplus Y_1 \oplus V,$$

$$Y/X \cap Y \simeq Y_1,$$

et

$$H(B)/X \times F \simeq Y_1 \oplus V.$$

Pour  $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$ ,  $\phi|_{Y_1 \oplus V} \in \mathcal{S}(Y_1 \oplus V)$  et un calcul simple donne :

$$h = (x_1 + u + y_1 + v, t)$$

où  $x_1 \in X_1$ ,  $u \in X \cap Y$ ,  $y_1 \in Y_1$ ,  $v \in V$  et  $t \in F$ ,

$$\mathcal{F}_{Y, \psi_Y; X, \psi_X} \phi(h) = \psi(t + B(y_1, x_1 + u + v) + B(x_1 + u, v) + \langle w, x_1 + u \rangle) \psi_Y(y_1)$$

$$\int_{Y_1} \psi(\langle x_1, y \rangle) \psi_Y^{-1}(y) \psi(B(y, v)) \cdot \phi(w(y + v)) |A_{YX}|^{1/2} dy.$$

L'opérateur  $\mathcal{F}_{Y, \psi_Y; X, \psi_X}$  est donc un opérateur de transformation de Fourier : il est continu de  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  dans  $\mathcal{H}(Y, \psi_Y)$  et inversible.

Soit  $s = (\sigma, f) \in PsB$ . Il définit une application de  $\mathcal{H}(X, \psi_X)$  dans  $\mathcal{H}(\sigma X, \psi_X \circ s^{-1})$  par :  $\phi \mapsto \phi^s$  où  $\phi^s(h) = \phi(s^{-1}h)$ .

Alors, pour  $\phi \in \mathcal{H}(X_0, \psi_0)$ , on a :

$$M(s)\phi = \mathcal{F}_{X_0, \psi_0; \sigma X_0, \psi_0 \circ s^{-1}} \phi^s = (\mathcal{F}_{\sigma^{-1} X_0, \psi_0 \circ s; X_0, \psi_0} \phi)^s.$$

L'opérateur  $M(s)$  est donc un automorphisme de  $\mathcal{H}(X_0, \psi_0)$ .

Il reste à vérifier que  $M(s)$  entrelace les représentations  $\rho$  et  $\rho^s$  : pour tout  $h \in H(B)$ ,

$$\begin{aligned} M(s)\rho(h) &= s \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1} X_0, \psi_0 \circ s; X_0, \psi_0} \circ \rho(h) = s \circ \rho(h) \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1} X_0, \psi_0 \circ s; X_0, \psi_0} \\ &= \rho(sh) \circ s \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1} X_0, \psi_0 \circ s; X_0, \psi_0} = \rho(sh) \cdot M(s) \end{aligned}$$

□

Examinons la restriction de l'extension métaplectique à certains sous-groupes de  $PsB$ .

1. **Cas où  $Q$  est déployée [W].** On choisit  $X$  et  $Y$  singuliers et  $B$  définie par :  
 $B(x + y, x' + y') = \langle x, y' \rangle$ ,  $x, x' \in X$ ,  $y, y' \in Y$ .

Si  $s = \left( \begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}, f \right)$  où  $\alpha \in GL(X)$  et  $f|_X = 0$ ,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2} \psi(f(\alpha^*y) + B(u\alpha^*y, y))\varphi(\alpha^*y), \quad y \in Y, \quad \varphi \in \mathcal{S}(Y).$$

Si  $s = \left( \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{*-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, Q \right)$  où  $\gamma : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = \int_X \psi(\langle y, x \rangle) \varphi(\gamma^{-1}x) |\gamma|^{1/2} dx.$$

*L'extension métaplectique restreinte au sous-groupe de  $PsB$  formé des éléments du premier type est scindée.*

2. **Cas du sous-groupe  $Q_a(W)$  de  $PsB$**

Soit  $s = (id, f)$  un élément de  $PsB$ . Il existe un unique  $y_0 \in Y$  tel que

$$\forall x \in X, \quad \psi \circ f(x) = \psi(\langle x, y_0 \rangle).$$

Alors, si  $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$ , on a, pour tout  $y \in Y$ ,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = \psi(f(y + y_0) + B(y_0, y))\varphi(y + y_0).$$

On en déduit que si  $s' = (\sigma', f')$  et que  $y'_0$  est défini comme précédemment, alors

$$\begin{aligned} \omega_\psi(s)\omega_\psi(s')\varphi(y) &= \psi(B(y_0, y) + f(y + y_0))\psi(B(y'_0, y + y_0) \\ &\quad + f'(y + y'_0 + y_0))\varphi(y + y_0 + y'_0) \\ &= \psi(B(y'_0, y_0) + f(y'_0))\omega_\psi(ss')\varphi(y). \end{aligned}$$

Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de  $Q_a(W)$ , alors pour tout  $s = (id, f)$ ,  $s' = (id, f')$  de  $PsB$ ,

$$\omega_\psi(s)\omega_\psi(s') = \omega_\psi(s')\omega_\psi(s)$$

$$\text{i.e.} \quad \psi \circ f(y'_0) = \psi \circ f'(y_0).$$

Or,  $y_0$  (resp.  $y'_0$ ) ne détermine  $f$  (resp.  $f'$ ) que sur  $X$ . On peut trouver deux éléments  $s$  et  $s'$  de  $Q_a(W)$  pour lesquels cette égalité n'est pas satisfaite.

*L'extension métaplectique restreinte à  $Q_a(W)$  n'est pas scindée.*

#### b. Modèles latticiels

Soit  $F$  un corps local et  $\mathcal{E}_\psi$  le conducteur de  $\psi$  :  $\mathcal{E}_\psi = \mathfrak{p}_F^r$ ,  $r \in \mathbf{Z}$ . On suppose qu'il existe un réseau  $L$  dans  $W$ , autodual relativement à  $\psi$  et  $\langle, \rangle$ . En remplaçant  $X$  par  $L$  dans  $\underline{a}$ , on obtient un nouveau modèle de la représentation de Weil, dit modèle latticiel.

En général, si  $L'$  est un réseau, le *stabilisateur  $K$  de  $L'$*  est le sous-groupe de  $PsB$  formé des éléments  $(\sigma, f)$  tels que :

$$i) \quad \sigma L' = L'$$

ii) pour tout  $\ell \in L'$ ,  $f(\ell) \in \mathfrak{p}^{2\lfloor r/2 \rfloor}$  où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la partie entière.

### 3. Cas du stabilisateur $K$ d'un réseau $L$ autodual

Dans ce cas,  $r$  est nécessairement pair.

On suppose, en outre, que la restriction de  $B$  à  $L \times L$  est à valeurs dans  $\mathcal{E}_\psi$  et on prolonge trivialement  $\psi$  sur  $L \times F$ . On note  $\psi_L$  le caractère de  $L \times F$  ainsi obtenu.

Pour tout  $s = (\sigma, f) \in K$ , le caractère  $\ell \mapsto \psi_L(\ell)^{-1}\psi_L(s^{-1}\ell)$  est trivial. D'où si  $\phi \in \mathcal{H}(L, \psi_L)$ ,

$$M(s)\phi(h) = \phi(s^{-1}h), \quad h \in H(B).$$

Par conséquent,  $\tilde{P}_s B$  est scindée au-dessus de  $K$ .

c. Supposons que  $F$  soit fini. Soit  $(\rho, \mathcal{V})$  un modèle de la représentation métaplectique de  $H(B)$ .

Il est alors facile d'exprimer la représentation de Weil de  $P_s B$  en fonction de  $(\rho, \mathcal{V})$ , pour certains éléments de  $P_s B$ .

LEMME. — Soit  $s = (\sigma, f) \in P_s B$ . On suppose que  $f = 0$  sur  $\text{Ker}(1 + \sigma)$ . Soit  $M(s)$  l'opérateur de  $\mathcal{V}$  dans lui-même défini par : pour tout  $v \in \mathcal{V}$ ,

$$M(s)v = \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v.$$

Alors  $(s, M(s))$  est un élément de  $\tilde{P}_s B$ .

*Démonstration* : Soit  $s \in P_s B$ . L'opérateur  $M(s)$  est une somme finie d'éléments de  $\mathcal{V}$  donc il est bien défini, à valeurs dans  $\mathcal{V}$ .

Pour montrer que  $M(s)$  est inversible, on calcule le produit  $M(s^{-1})M(s)$  : soit  $v \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} M(s^{-1})M(s)v &= \sum_{w, w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v \\ &= \sum_{w, w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(sw)\rho(w^{-1})v \\ &= \sum_{w, w' \in W} \psi(B(w', w) + \langle w, \sigma(w + w') \rangle)\rho(w'^{-1})\rho(w^{-1})\rho(s(w + w'))v \\ &= \sum_{w, w' \in W} \psi(\langle w, w' \rangle + \langle w, \sigma(w + w') \rangle)\rho((w + w')^{-1})\rho(s(w + w'))v \\ &= \sum_{w' \in W} \left( \sum_{w \in W} \psi(\langle w, w' + \sigma w' \rangle) \right) \rho(w'^{-1})\rho(sw')v \end{aligned}$$

L'homomorphisme  $w \mapsto \psi(\langle w, w' + \sigma w' \rangle)$  est un caractère de  $W$ , trivial si et seulement si  $w' \in \text{Ker}(1 + \sigma)$ . Donc

$$\begin{aligned} M(s^{-1})M(s)v &= |W| \cdot \sum_{w' \in \text{Ker}(1 + \sigma)} \rho(w'^{-1})\rho(w', f(w'))v = |W| \sum_{w' \in \text{Ker}(1 + \sigma)} \psi(f(w')) \cdot v \\ &= c \cdot v, \quad c \in \mathbb{C}^\times \end{aligned}$$

Donc,  $M(s)$  est inversible.

Il ne reste plus qu'à prouver que  $M(s)$  entrelace les représentations  $(\rho, \mathcal{V})$  et  $(\rho^s, \mathcal{V})$ . Soit  $(w_0, t_0) \in H(B)$ ,  $v \in \mathcal{V}$ .

$$\begin{aligned} M(s)\rho(w_0, t_0)v &= \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)\rho(w_0)v = \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(sw)^{-1}\rho(w + w_0, B(w, w_0)) \\ &= \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(s(w + w_0))^{-1}\rho(w_0, B(w + w_0, w_0)) \\ &= \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(sw_0(sw)^{-1})\rho(w)v = \rho(s(w_0, t_0))M(s)v. \end{aligned}$$

□

**2.3.** Supposons que  $(V, b)$  soit la somme orthogonale de  $(V_1, b_1)$  et  $(V_2, b_2)$  c'est-à-dire  $V = V_1 \oplus V_2$  et

$$b(w_1 + w_2, w'_1 + w'_2) = b_1(w_1, w'_1) + b_2(w_2, w'_2), \quad w_i, w'_i \in W_i$$

et que la forme quadratique  $q_i$  définie par  $b_i$  soit non dégénérée et non défective. Alors

$$j : \begin{cases} H(b_1) \times H(b_2) & \longrightarrow H(b) \\ ((w_1, t_1), (w_2, t_2)) & \longmapsto (w_1 + w_2, t_1 + t_2) \end{cases}$$

est surjective de noyau  $\{((0, t), (0, t)), t \in F\}$

Soit  $(\rho_i, \psi, \mathcal{V}_i)$  un modèle de la représentation métaplectique de  $H(b_i)$  et  $\rho_\psi$  la représentation métaplectique de  $H(b)$  dans  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_2$ . Alors,  $\rho_\psi \circ j$  est équivalente à  $\rho_{1, \psi} \otimes \rho_{2, \psi}$ .

L'application

$$\begin{cases} (Psb_1 \times GL(\mathcal{V}_1)) \times (Psb_2 \times GL(\mathcal{V}_2)) & \longrightarrow Psb \times GL(\mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_2) \\ (((\sigma_1, f_1), S_1), ((\sigma_2, f_2), S_2)) & \longmapsto ((\sigma_1 \oplus \sigma_2, f_1 \oplus f_2), S_1 \otimes S_2) \end{cases}$$

définit un homomorphisme  $\tilde{j} : \widetilde{Psb}_1 \times \widetilde{Psb}_2 \longrightarrow \widetilde{Psb}$ , de noyau

$$\left\{ \left( ((id, 0), zI), ((id, 0), z^{-1}I) \right), z \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

et  $\omega_\psi \circ \tilde{j}$  est équivalente à  $\omega_{1, \psi} \otimes \omega_{2, \psi}$ .

On en déduit les résultats suivants :

**LEMME 2.3a.** — Si  $G$  est un sous-groupe de  $Psb$  isomorphe à  $G_1 \times G_2$  dans  $Psb_1 \times Psb_2$  et si l'image réciproque de  $G_i$  dans  $\widetilde{Psb}_i$  est scindée pour  $i = 1, 2$ , alors l'image réciproque de  $G$  dans  $\widetilde{Psb}$  est scindée.

LEMME 2.3b. — Soit  $H_1$  un sous-groupe de  $Psb_1$ . Il s'identifie au sous-groupe  $H = \{(\sigma \oplus id_{V_2}, f \oplus 0), (\sigma, f) \in H\}$  de  $Psb$ . Si l'image réciproque de  $H$  dans  $\widetilde{Psb}$  est scindée, alors l'image réciproque de  $H_1$  dans  $\widetilde{Psb}_1$  est scindée.

LEMME 2.3c. — Soit  $C$  (resp.  $c_1, c_2$ ) le cocycle de l'extension métaplectique  $\widetilde{Psb}$  (resp.  $\widetilde{Psb}_1, \widetilde{Psb}_2$ ). Pour  $s_i, s'_i \in Psb_i, i = 1, 2$ , on a :

$$C(s_1 \oplus s_2, s'_1 \oplus s'_2) = c_1(s_1, s'_1) \cdot c_2(s_2, s'_2).$$

#### 2.4. Démonstration de la proposition 2.1

La première assertion de a. est une conséquence immédiate de 2.2.2. Pour la deuxième, considérons l'espace  $(V, b)$  somme orthogonale de deux copies de  $(W, B)$  et identifions  $Psb$  au sous-groupe  $\{(s, s), s \in Psb\}$  de  $Psb \times Psb$ .

Soit  $X_0 = \{(w, w), w \in W\}$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Il est singulier de dimension celle de  $W$ . Il existe donc un sous-espace vectoriel  $Y_0$  de  $V$ , singulier et de même dimension que  $X_0$  tel que  $V = X_0 \oplus Y_0$  soit une polarisation complète de  $V$ . On se trouve donc dans le cas décrit en 2.2.1.

De plus, si  $(\sigma, f)$  est un élément de  $Psb$ , son image dans  $Psb$  stabilise  $X_0$  et  $(f \oplus f)|_{X_0}$  est nulle. Par le premier résultat de 2.2.1, l'image réciproque de  $Psb$  dans  $\widetilde{Psb}$  est scindée et la restriction du cocycle  $C$  de l'extension  $\widetilde{Psb}$  à  $Psb$  est égale à 1.

Soit  $c$  le cocycle de  $\widetilde{Psb}$ . Par le lemme 2.3.c, pour tout  $s, s'$  de  $Psb$

$$c^2(s, s') = C(s \oplus s, s' \oplus s') = 1.$$

D'où  $c$  est à valeurs dans  $\{\pm 1\}$ .

On a donc établi le a de la proposition. Pour le b, on étudie successivement les différents cas. Pour ce faire, on reprend les notations du § 1.3.

**Cas 1 :**  $n = \nu = 1$ .

Pour tout élément  $\sigma$  de  $O(Q)$ , on définit l'opérateur  $\omega_\psi(\sigma)$  de  $\mathcal{S}(Y)$  par :

$$\text{si } \sigma \in O^+(Q) \text{ i.e. } \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times, \omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi(\alpha y), \varphi \in \mathcal{S}(Y);$$

$$\text{si } \sigma \in O^-(Q) \text{ i.e. } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times, \omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi^*(\alpha^{-1}y), \varphi \in \mathcal{S}(Y),$$

où  $\varphi^*$  désigne la transformée de Fourier de  $\varphi$  par rapport à la mesure autoduale.

LEMME. —  $\{(\sigma, \omega_\psi(\sigma)), \sigma \in O(Q)\}$  est un sous-groupe de  $\widetilde{Psb}$ .

La démonstration est immédiate.

La restriction de  $\widetilde{Psb}$  à  $O(Q)$  est triviale.

**Cas 2** :  $n = 1$ ,  $\nu = 0$ .

Soit  $(e, f)$  une base de  $W$  telle que  $\langle e, f \rangle = Q(e)$  et  $\xi$  une racine de l'équation

$$x^2 + x + \frac{Q(f)}{Q(e)} = 0.$$

La racine  $\xi$  n'est pas un élément de  $F$  sinon le vecteur  $\xi e + f$  serait singulier. On pose  $E = F(\xi)$  l'extension quadratique séparable de  $F$  engendrée par  $\xi$ . Alors,  $W$  s'identifie à  $E$  (en tant que  $F$ -espace vectoriel) par  $\varphi$  :

$$\varphi : W \longrightarrow E \text{ est } F\text{-linéaire et } \varphi(e) = 1, \varphi(f) = \xi.$$

Soit  $Q'$  la forme quadratique sur  $E$  définie par :

$$Q'(x) = Q(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in E.$$

On a :

$$Q'(x) = Q(e) \cdot N_{E|F}x, \quad x \in E.$$

D'où

$$O(Q) \simeq O(Q') = O(N_{E|F}) \simeq E^1 \rtimes \text{Gal}(E|F)$$

où

$$E^1 = \{x \in E | N_{E|F}x = 1\} \quad \text{et} \quad \text{Gal}(E|F) = \{id, \tau\}.$$

En particulier,  $O^+(Q) \simeq E^1$ .

On peut donc supposer que  $W = E$  et  $Q = N_{E|F}$ . On note  $\delta$  la norme de  $\xi$ . On choisit la forme bilinéaire  $B$  donnée par :

$$B(x + \xi y, x' + \xi y') = xx' + xy' + \delta yy', \quad x, x', y, y' \in F.$$

i) Si  $F$  est fini,  $O^+(Q)$  s'identifie au groupe unitaire  $U$  de la forme hermitienne  $(,)$  définie sur  $E$ , espace vectoriel sur  $(E, \tau)$ , par :

$$(x, y) = \tau(x)y, \quad x, y \in E.$$

Par le théorème 3.3 de [G],  $\widetilde{P}sB$  est scindée au-dessus de  $O^+(Q)$ . Soit  $s \longmapsto (s, r(s))$  une section.

De plus, il existe un élément de  $\widetilde{P}sB$  au-dessus de  $t = (\tau, Q)$ , noté  $(t, r(\tau))$ , tel que  $r(\tau)^2 = I$ .

Pour que  $\widetilde{P}sB$  soit scindée, il faut et il suffit que :

$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad r(\tau)r(\sigma)r(\tau) = r(\tau\sigma\tau).$$

Or, ces deux opérateurs ne diffèrent que d'un scalaire multiplicatif. Ceci équivaut donc à :

$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad \text{tr}(r(\tau)r(\sigma)r(\tau)) = \text{tr}(r(\tau\sigma\tau))$$

$$\text{i.e. (9)} \quad \forall \sigma \in O^+(Q), \quad \chi(\sigma) = \chi(\tau\sigma\tau)$$

où  $\chi$  désigne le caractère de la représentation de Weil de  $U$ . Le calcul de  $\chi$ , pour les éléments semi-simples de  $U$ , a été effectué par P. Gérardin [G. Cor. 4.8.2] et donne, dans notre cas :

$$\chi(\sigma) = -1 \text{ pour tout } \sigma \in U \setminus \{id\}.$$

L'assertion (9) est alors claire, et  $\widetilde{P}_s B$  est scindée au-dessus de  $O(Q)$ .

On suppose maintenant que  $F$  est local. On note  $\mathfrak{p}_F$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_F$  et  $\pi_F$  une uniformisante. Le conducteur de  $\psi$  est  $\mathfrak{p}_F^r$  où  $r = 2s$  ou  $2s + 1$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ .

On choisit  $\xi$  tel que  $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F + \xi\mathcal{O}_F$ . Alors,  $O(Q)$  est contenu dans le stabilisateur  $K$  du réseau  $L = \mathfrak{p}_F^s + \xi\mathfrak{p}_F^s$ . Deux cas se présentent :

ii)  $L$  est autodual (i.e.  $r$  est pair). On vérifie que  $\psi \circ B$  est trivial sur  $L \times L$ . D'après § 2.3.3,  $\widetilde{P}_s B$  est scindée au-dessus de  $K$  donc de  $O(Q)$ .

iii)  $L$  n'est pas autodual (i.e.  $r$  est impair). On construit un nouveau modèle de la représentation de Weil de  $P_s B$  permettant d'utiliser les résultats de i) [Wa].

*Construction du modèle.* :

On remarque que  $L^* = \mathfrak{p}L \subset L$ . On considère  $V = L/L^*$ . C'est un espace vectoriel sur le corps résiduel  $k_F$  de  $F$ . On munit  $V$  d'une forme bilinéaire  $b$  définie par :

$$b(\bar{\ell}, \bar{\ell}') = B(\pi^{-s}\ell, \pi^{-s}\ell') \text{ mod } \mathfrak{p}_F$$

où  $\bar{\ell}$  est l'image de  $\ell \in L$  par la projection  $L \rightarrow L/L^*$ .

Soit  $H(b)$  le groupe d'Heisenberg "associé" et  $(\rho_\chi, \mathcal{S})$  un modèle de la représentation métaplectique de  $H(b)$  pour le caractère  $\chi$  de  $k_F$  :

$$\chi(\bar{x}) = \psi(\pi^{2s}x), \quad x \in \mathcal{O}_F \text{ et } \bar{x} \text{ son image dans } k_F.$$

( $\chi$  n'est pas trivial).

Soit  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel des fonctions  $\phi : H(B) \rightarrow \mathcal{S}$  telles que :

i)  $\phi$  est localement constante à support compact modulo  $F$

ii)  $\phi((\ell, t)h) = \psi(t)\rho_\chi(\bar{\ell})\phi(h)$  pour  $\ell \in L$ ,  $t \in F$  et  $h \in H(b)$ .

Le groupe  $H(B)$  agit sur  $\mathcal{V}$  par translation à droite.

LEMME. — *La représentation  $(\rho, \mathcal{V})$  ainsi obtenue est la représentation métaplectique de  $H(B)$ .*

*Démonstration* :  $(\rho, \mathcal{V})$  est lisse et vérifie la condition sur l'action du centre.

Pour que  $(\rho, \mathcal{V})$  soit un modèle de la représentation métaplectique de  $H(B)$ , il faut et il suffit qu'elle soit irréductible.

Considérons l'application de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{S}$  qui à  $\phi \in \mathcal{V}$  associe  $\phi(0)$ . C'est un homomorphisme de  $L \times F$ -modules. Si  $\mathcal{V}'$  est un  $H(B)$ -sous-module de  $\mathcal{V}$ , il est également un  $L \times F$  sous-module. L'image  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{V}'$  dans  $\mathcal{S}$  est donc un sous-module de  $\mathcal{S}$ . Comme  $\mathcal{S}$  est irréductible,  $\mathcal{S}'$  est  $\{0\}$  ou  $\mathcal{S}$ .

Or toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{V}$  est entièrement déterminée par  $\phi(0)$  sous l'action de  $H(B)$ . Ainsi,  $\mathcal{V}'$  est  $\{0\}$  ou  $\mathcal{V}$ . La représentation  $(\rho, \mathcal{V})$  est bien irréductible.  $\square$

Soit  $s = (\sigma, f)$  un élément de  $K$ . Il induit un automorphisme  $(\bar{\sigma}, \bar{f})$  de  $H(b)$  par :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(\ell + L^*) &= \bar{\sigma}\ell \\ \bar{f}(\ell + L^*) &= \overline{f(\pi^{-s}\ell)} \end{cases}$$

L'automorphisme  $(\bar{\sigma}, \bar{f})$  est un élément du groupe pseudosymplectique  $Psb$ .

Soit  $(\omega_x, \mathcal{S})$  la représentation métaplectique de  $Psb$  et posons :

$$s = (\sigma, f) \in K, \phi \in \mathcal{V}, M(s)\phi(h) = \omega_x(\bar{s})(\phi(s^{-1}h)).$$

LEMME. — Soit  $s \in K$ . Le couple  $(s, M(s))$  est un élément de  $\widetilde{P}sB$ .

Si  $s \in O(Q) \subset K$ , alors  $\bar{s}$  appartient au groupe orthogonal  $O(q)$  de la forme quadratique  $q$  définie par  $b$ . L'analyse dans i) du cas où  $F$  est fini assure l'existence d'une section  $r_x$  de  $\widetilde{P}sB$  au-dessus de  $O(q)$  :

$$r_x : \bar{s} \in O(q) \longmapsto (\bar{s}, r_x(\bar{s})).$$

L'homomorphisme  $s \longmapsto (s, r(s))$  de  $O(Q)$  dans  $P_sB$  défini par :

$$r(s)\phi(h) = r_x(\bar{s})\phi(s^{-1}h), \quad \phi \in \mathcal{V},$$

est une section de  $\widetilde{P}sB$  au-dessus de  $O(Q)$ .

cas 3 :  $n = \nu = 2$  et  $F = \mathbf{F}_2$

On construit une section de  $\widetilde{P}sB$  au-dessus de  $O(Q)$ .

Pour ce faire, on reprend la description de la situation faite au § 1.3. On introduit alors, les notations suivantes :

$$- X \text{ est le sous-espace vectoriel de } W \text{ défini par : } X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in W \right\},$$



-  $Y$  est le sous-espace vectoriel de  $W$  défini par :  $Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \right\}$ .

Alors  $X \oplus Y$  est une polarisation complète de  $W$  en espaces singuliers.

-  $(\rho, \mathcal{S}(Y))$  un modèle de la représentation métaplectique de  $H(B)$ .

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$ ,

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, t_0\right)\varphi(a, b) = \psi(t_0 + ad_0 + bc_0)\varphi(a + a_0, b + b_0).$$

En choisissant une base de  $\mathcal{S}(Y)$ , on exprime  $\rho$  à l'aide de matrices. Soit  $\varphi_0$  [resp.  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ] la fonction de  $\mathcal{S}(Y)$  prenant la valeur 1 en  $(0, 0)$  [resp.  $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ ] et s'annulant partout ailleurs.

Le système  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  est une base de  $\mathcal{S}(Y)$  dans laquelle la matrice de  $\rho(h)$ ,  $h \in H(B)$ , est :

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c+d) \end{pmatrix} \quad \text{si } h = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \psi(d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c) \\ 0 & 0 & \psi(c+d) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } h = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(d) \\ \psi(c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(c+d) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } h = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \psi(d) & 0 \\ 0 & \psi(c) & 0 & 0 \\ \psi(c+d) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } h = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

Pour chaque élément  $g = s_1, s'_1, s_2, s'_2$  ou  $t$ , on détermine les matrices  $M_g$  de  $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$  telles que

$$M_g \rho(h) = \rho(gh) M_g, \quad \text{pour tout } h \in H(B).$$

On obtient :

$$\text{si } g = s_1, \quad M_{s_1} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si } g = s'_1, \quad M_{s'_1} = \alpha' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha' \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si } g = s_2, \quad M_{s_2} = \beta/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si } g = s'_2, \quad M_{s'_2} = \beta' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta' \in \mathbb{C}^\times$$

$$\text{si } g = t, \quad M_t = \frac{i\gamma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C}^\times$$

Les conditions C.1 et C.4 déterminent  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  et  $\gamma$  au signe près. Les conditions C.2 donnent le signe de  $\alpha'$  et  $\beta'$  en fonction de celui de  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement, tandis que les conditions C.5 donnent le signe de  $\beta$  en fonction de celui de  $\alpha$ . On obtient :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \pm 1 \\ \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

On vérifie que les conditions C.3 sont satisfaites.

Ainsi,  $\widetilde{P_s B}$  est scindée au-dessus de  $O(Q)$ .

**Cas 4 :**  $n = 2$ ,  $\nu = 1$  et  $F = \mathbb{F}_2$

On reprend les notations de 1.3.

Supposons que la restriction de  $\widetilde{P_s B}$  à  $O(Q)$  soit scindée. Soit  $r$  une section de  $\widetilde{P_s B}$  au-dessus de  $O(Q)$ .

Considérons le sous-groupe  $H$  de  $O(Q)$  formé des éléments  $id$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\xi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $(e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0)$  un élément de  $H(B)$ . Alors, pour tout  $\sigma \in H \setminus \{id\}$ ,

$$\sigma(e_1, 0) = (e_1, 1).$$

Comme  $(\sigma, r(\sigma))$  est un élément de  $\widetilde{P_s B}$ , on a :

$$r(\sigma)\rho((e_1, 0)) = \rho((e_1, 1))r(\sigma) = \psi(1)\rho((e_1, 0))r(\sigma).$$

De plus,  $\sigma = \sigma'\sigma''$  avec  $\{\sigma, \sigma', \sigma''\} = H \setminus \{id\}$  d'où

$$r(\sigma) = r(\sigma')r(\sigma'')$$

et

$$\begin{aligned} r(\sigma)\rho((e_1, 0)) &= r(\sigma')r(\sigma'')\rho((e_1, 0)) = \psi(1)r(\sigma')\rho((e_1, 0))r(\sigma'') \\ &= \rho((e_1, 0))r(\sigma')r(\sigma'') = \rho((e_1, 0))r(\sigma). \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  est le caractère non trivial de  $\mathbf{F}_2$ , on obtient une contradiction.

La restriction de  $\widetilde{P_s B}$  à  $O(Q)$  n'est pas triviale.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

### Annexe 1. Sur le théorème de Stone-Von Neumann

Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème de Stone-Von Neumann pour un groupe d'Heisenberg  $H(B)$  sur un corps fini ou local  $F$  de caractéristique 2.

Pour ce faire, il suffit de modifier quelques points de la démonstration exposée dans [M.V.W., Ch. 2] dans les cas de caractéristique nulle ou impaire. Nous allons préciser ces points.

**ENONCÉ du THÉOREME.** — *A isomorphisme près, il existe une et une seule représentation  $(\rho, \mathcal{V})$  de  $H(B)$ , lisse et irréductible, telle que, pour tout  $t \in F$ ,*

$$\rho((0, t)) = \psi(t)id_{\mathcal{V}}.$$

La démonstration de l'existence d'une telle représentation est en tout point semblable à celle de [M.V.W., Ch. 2, I.3] (il suffit de remarquer que  $\delta(-a) = \delta(a)^{-1}$  : en caractéristique 2, cela donne  $\delta(a) \cdot (0, Q(a))$ ).

On déduit l'unicité de cette représentation des deux lemmes suivants.

Notons  $S(H(B), \psi)$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions  $f : H(B) \rightarrow \mathbf{C}$ , localement constantes à support compact modulo  $F$  et telles que, pour tout  $h \in H(B)$ , tout  $t \in F$ ,

$$f(h(0, t)) = \psi(t)f(h).$$

Notons  $\rho_d$  (resp.  $\rho_g$ ) la représentation de  $H(B)$  dans  $S(H(B), \psi)$  par translations à droite (resp. à gauche).

LEMME a. — Si  $(\rho, \mathcal{V})$  est une représentation vérifiant les conditions du théorème, alors  $\rho$  s'identifie à une sous-représentation de  $\rho_d$ .

Soit  $(\rho, \mathcal{S}(Y))$  le modèle décrit en 1.2.1.

LEMME b. — La représentation  $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$  est isotypique de composante irréductible  $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ .

*Démonstration du lemme a :* Soit  $(\rho, \mathcal{V})$  une représentation vérifiant les conditions du théorème et  $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$  sa contragrédiente. Pour  $v \in \mathcal{V}$  et  $v^\vee \in \mathcal{V}^\vee$ , notons  $f_{v^\vee, v}$  le coefficient défini par :  $f_{v^\vee, v}(h) = v^\vee(\rho(h)v)$ ,  $h \in H(B)$ .

Montrons que  $f_{v^\vee, v} \in \mathcal{S}(H, \psi)$ . Il suffit de voir que  $f_{v^\vee, v}$  est à support compact modulo  $F$ .

Soit  $w \in W$  tel que  $f_{v^\vee, v}((w, 0)) \neq 0$  et  $L$  un sous-groupe ouvert compact de  $W$  tel que  $v$  et  $v^\vee$  soient invariants sous  $L \times \{0\}$ . Alors  $L$  contient un sous-groupe  $L'$  tel que  $\psi \circ Q|_{L'}$  soit trivial. Pour tout  $\ell \in L'$ , on a

$$f_{v^\vee, v}((w, 0)) = v^\vee(\rho((w, 0))v) = v^\vee(\rho((w, 0)(\ell, 0))) = \psi(\langle w, \ell \rangle) f_{v^\vee, v}((w, 0)).$$

Donc  $\psi(\langle w, \ell \rangle) = 1$  i.e.  $w \in L'^*$  qui est compact.

Ainsi, on définit une application linéaire de  $\mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{V}$  dans  $\mathcal{S}(H(B), \psi)$  qui entrelace les représentations  $\rho^\vee \otimes \rho$  et  $\rho_g \times \rho_d$ . Si  $v^\vee \neq 0$ , cette application identifie  $(\rho, \mathcal{V})$  à une sous-représentation irréductible de  $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$ .  $\square$

*Démonstration du lemme b :* Il existe une dualité entre  $\mathcal{S}(X)$  et  $\mathcal{S}(Y)$  définie par :

$$\langle v', v \rangle = \int_{X \times Y} v'(x)v(y)\psi(\langle x, y \rangle) dx dy$$

pour  $v' \in \mathcal{S}(X)$ ,  $v \in \mathcal{S}(Y)$  et où l'on a fixé des mesures de Haar sur  $X \times Y$ . Ainsi,  $\mathcal{S}(Y)^\vee$  s'identifie à  $\mathcal{S}(X)$  : la représentation  $(\rho^\vee, \mathcal{S}(Y)^\vee)$  s'identifie à une représentation  $\rho'$  dans  $\mathcal{S}(X)$ . Comme précédemment, il existe une application  $\mathcal{F} : (v', v) \mapsto f_{v', v}$  de  $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$  dans  $\mathcal{S}(H(B), \psi)$  qui entrelace les représentations  $\rho' \otimes \rho$  et  $\rho_g \times \rho_d$ . Or, pour tous  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ ,

$$f_{v', v}((x_0 + y_0, 0)) = \psi(B(y_0, x_0) + Q(y_0))\psi_X((x_0, 0)).$$

$$\int_{X \times Y} v'(x)v(y)\psi(B(y, y_0) + \langle x, y \rangle)\psi(\langle x + y, x_0 + y_0 \rangle) dx dy.$$

Après identification de  $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$  et  $\mathcal{S}(H, \psi)$  avec  $\mathcal{S}(W)$ ,  $\mathcal{F}$  devient essentiellement une transformée de Fourier :  $\mathcal{F}$  est donc inversible. D'où  $\rho' \otimes \rho$  est isomorphe à  $\rho_g \times \rho_d$ . Comme  $\rho$  est irréductible,  $\rho_d$  est isomorphe à une somme directe de représentations isomorphes à  $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ .  $\square$

## II. PAIRES DUALES RÉDUCTIVES DU GROUPE PSEUDOSYMPLECTIQUE

*Désormais  $F$  désigne un corps fini ou local.*

### § 1. Paires duales réductives de $O(Q)$

#### 1.1. Généralités et classification

Soit  $(H, H')$  une paire duale de  $O(Q)$ .

#### DÉFINITIONS

1. La paire  $(H, H')$  est *réductive* si  $W$  est  $HH'F$  absolument semi-simple.  
Si  $W$  n'est que  $HH'F$ -semi-simple, la paire  $(H, H')$  est dite *relativement réductive*.
2. La paire  $(H, H')$  est *irréductible* si l'action de  $HH'$  sur  $W$  ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de  $W$ .
3. La paire  $(H, H')$  est produit des paires duales  $(H_i, H'_i)$ ,  $i = 1, 2$  si  $H$  (resp.  $H'$ ) s'identifie à  $H_1 \times H_2$  (resp.  $H'_1 \times H'_2$ ) et qu'il existe une décomposition en somme orthogonale de  $W$ ,  $W = W_1 \oplus W_2$  telle que, pour  $i = 1, 2$ ,  $(H_i, H'_i)$  soit une paire duale de  $O(Q|_{W_i})$ .

*Remarque* : Comme  $W$  est de dimension finie sur  $F$ ,  $W$  est  $HH'F$  absolument semi-simple si et seulement si le centre du corps commutant de tout sous-module simple de  $W$  est une extension séparable de  $F$  [B., § 7 n° 5 prop. 7 et 6].

**PROPRIÉTÉ.** — *Toute paire duale réductive [resp. relativement réductive] est produit de paires duales réductives [resp. relativement réductives] et irréductibles.*

*Démonstration* [cf. M.V.W. Ch. 1] :

Soit  $(H, H')$  une paire duale. Si elle n'est pas irréductible, il existe une décomposition en somme orthogonale de  $W$ ,  $W = W_1 \oplus W_2$ , stable sous  $HH'$ .

*i)* Le groupe  $H$  (resp.  $H'$ ) s'identifie à un produit  $H_1 \times H_2$  (resp.  $H'_1 \times H'_2$ ) où  $H_i$  (resp.  $H'_i$ ) est un sous-groupe de  $O(Q|_{W_i})$ .

En effet, posons  $H_i = \{\sigma|_{W_i}, \sigma \in H\}$ ,  $i = 1, 2$  et considérons l'homomorphisme  $\iota$  de  $H$  dans  $H_1 \times H_2$  défini par :  $\iota(\sigma) = (\sigma|_{W_1}, \sigma|_{W_2})$ ,  $\sigma \in H$ . Il est injectif. De plus, si  $(\sigma_1, \sigma_2) \in H_1 \times H_2$ , l'élément  $\sigma$  de  $O(Q)$  défini par

$$\sigma(w_1 + w_2) = \sigma_1(w_1) + \sigma_2(w_2), \quad w = w_1 + w_2 \in W, \quad w_i \in W_i,$$

commute avec  $H'$ , donc il appartient au bicommutant de  $H$  c'est-à-dire à  $H$  lui-même. Ainsi,  $\iota$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $H_1 \times H_2$ .

De même,  $H' \simeq H'_1 \times H'_2$ .

ii) LEMME. — Soit  $G$  un groupe,  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes tels que  $G_1 \times G_2 \subset G$ . Soient  $K = K_1 \times K_2$  et  $K' = K'_1 \times K'_2$  deux sous-groupes de  $G$ ,  $K_i, K'_i \subset G_i$ . Si  $(K, K')$  est une paire duale de  $G$  alors  $(K_i, K'_i)$  est une paire duale de  $G_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Si, de plus,  $(K, K')$  est relativement réductive (resp. réductive),  $(K_i, K'_i)$  l'est aussi.

Calculons le commutant de  $K_1$  dans  $G_1$ . Soit  $k'$  un élément de ce commutant. On prolonge trivialement  $k'$  à  $G_1 \times G_2$ . Alors  $k'$  commute avec  $K$  dans  $G$  i.e.  $k' \in K'$ . Donc  $k' \in K'_1$ . Le commutant de  $K_1$  dans  $G_1$ , qui contient  $K'_1$ , est donc contenu dans  $K'_1$ . Il est donc égal à  $K'_1$ .

On montre de même que le commutant de  $K'_1$  (resp.  $K_2, K'_2$ ) est  $K_1$  (resp.  $K'_2, K_2$ ). La paire  $(K_i, K'_i)$  est une paire duale de  $G_i$ .

La deuxième assertion du lemme est claire.

On déduit du lemme la propriété.

Ainsi, il suffit de déterminer les paires duales réductives et irréductibles.

#### *Exemples de paires duales relativement réductives et irréductibles*

1. Soit  $W_1$  (resp.  $W_2$ ) un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme alternée  $\langle, \rangle_1$  (resp.  $\langle, \rangle_2$ ) non dégénérée. Prenons  $W' = W_1 \otimes_F W_2$  avec la forme quadratique  $Q'$  définie par :

$$Q'(w_1 \otimes w_2) = 0,$$

et la forme alternée associée à  $Q'$  est

$$\langle w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2 \rangle = \langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w_2, w'_2 \rangle_2, \quad w_i, w'_i \in W_i.$$

Nécessairement,  $n = \frac{\dim W'}{2}$  est pair et  $\nu = n$ .

La paire  $(SpW_1, SpW_2)$  est duale, réductive et irréductible dans  $O(Q')$ .

2. Soit  $D$  une extension quadratique de  $F$  ou un corps de quaternions sur  $F$ , muni de l'involution canonique.

Soit  $W_1$  (resp.  $W_2$ ) un  $D$ -espace vectoriel à droite (resp. à gauche), de dimension finie, muni d'une forme hermitienne  $\langle, \rangle_1$  (resp.  $\langle, \rangle_2$ ) non dégénérée telle que :  $\langle w_1, w_1 \rangle_1 \in F$ ,  $w_1 \in W_1$  (resp.  $\langle w_2, w_2 \rangle_2 \in F$ ,  $w_2 \in W_2$ ).

Prenons  $W'' = W_1 \otimes_D W_2$  avec la forme quadratique  $Q''$  définie par :

$$Q''(w_1 \otimes w_2) = \langle w_1, w_1 \rangle_1 \cdot \langle w_2, w_2 \rangle_2, \quad w_i \in W_i$$

et la forme alternée associée à  $Q''$  est :

$$\langle w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2 \rangle = \text{tr}_{D|F}(\langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2).$$

Alors,  $(U(W_1), U(W_2))$  est une paire duale réductive, irréductible de  $O(Q'')$ .

3. Soit  $D$  un corps dont le centre  $E$  contient  $F$ . Soit  $W'''$  un  $F$ -espace vectoriel muni d'une forme alternée  $\langle, \rangle$ . Soit  $W''' = X \oplus Y$  une polarisation complète de  $W'''$ . On définit la forme quadratique  $Q'''$  dont la forme alternée associée est  $\langle, \rangle$  par :

$$Q'''(x) = Q'''(y) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X, y \in Y.$$

Pour toute décomposition de  $X$  en produit tensoriel,  $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$ , de  $D$ -espaces vectoriels  $X_1$  et  $X_2$ , les sous-groupes  $GLX_1$  et  $GLX_2$  définissent une paire duale relativement réductible, irréductible de  $O(Q''')$ , sauf si  $F = \mathbf{F}_2$ , et  $\dim_F X_i \leq 2$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Cette paire est réductible si et seulement si  $E$  est une extension séparable de  $F$ .

4. Soit  $E$  une extension séparable (resp. séparable ou inséparable) de  $F$  et  $t : E \rightarrow F$  un  $F$ -homomorphisme tel que la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto t(xy)$  soit non dégénérée. On suppose que  $W$  est aussi un  $E$ -espace vectoriel. Soit  $q$  une forme quadratique sur le  $E$ -espace vectoriel  $W$  telle que

$$t \circ q = Q.$$

Les paires duales réductibles (resp. relativement réductibles) précédentes dans  $O(q)$  sont des paires duales réductibles (resp. relativement réductibles) de  $O(Q)$ .

5. La paire duale triviale  $(\{id\}, O(Q))$ .

PROPOSITION. — Soit  $(H, H')$  une paire duale réductible (resp. relativement réductible) et irréductible de  $O(Q)$ . Alors,  $(H, H')$  est l'une des paires suivantes :

1. Avec les notations de l'exemple 1, si  $W$  est identifié à  $W'$  et que  $Q$  est égale à  $Q'$ , la paire  $(SpW_1, SpW_2)$ .

2. Avec les notations de l'exemple 2, si  $W$  est identifié à  $W''$  et que  $Q$  est égale à  $Q''$ , la paire  $(U(W_1), U(W_2))$ .

3. Avec les notations de l'exemple 3, si le centre de  $D$  est une extension séparable (resp. quelconque) de  $F$ , que  $W$  est identifié à  $W'''$  et que  $Q$  est égale à  $Q'''$ , la paire  $(GL X_1, GL X_2)$  sauf si  $F = \mathbf{F}_2$  et  $\dim_F X_i \leq 2$ ,  $i = 1$  ou  $2$ .

4. Les paires obtenues par restriction des scalaires comme dans l'exemple 4.

5. La paire duale triviale  $(O(Q), \{id\})$ .

Remarque : Si  $Q$  est déficiente, les paires duales réductibles (resp. relativement réductibles) de  $O(Q)$  sont en bijection avec les paires duales réductibles (resp. relativement réductibles) de  $O(Q|_{W_1})$  où  $W_1$  est un supplémentaire de  $W^\perp$  dans  $W$ .

Dans la suite du paragraphe, on établit cette proposition.

On note  $Z_G(H)$  le commutant de  $H$  dans  $G$ .

La démonstration se déroule ainsi. Dans un premier temps, on détermine les paires duales irréductibles et relativement réductibles. Pour ce faire, on montre d'abord deux lemmes (§ 1.2 et § 1.3) puis on différencie deux types de paires duales  $(H, H')$  :

1. celles dont l'action de  $HH'F$  est irréductible (§ 1.4), dites de type hermitien (ou de type I).

2. celles dont l'action de  $HH'F$  est réductible (§ 1.5), dites de type linéaire (ou de type II).

Dans un deuxième temps, on extrait de la liste obtenue les paires duales réductibles.

**1.2 LEMME.** — Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $F$  muni d'une forme bilinéaire  $(,)$  ou d'une forme quadratique  $q$  et  $U(V)$  son groupe d'isométries.

1. Si  $(H, H')$  est une paire duale de  $U(V)$  et si  $V$  est  $HH'F$  simple, alors il existe une décomposition de  $V$  en produit tensoriel

$$V \simeq V_1 \otimes_D V_2$$

où  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est un espace vectoriel à droite (resp. à gauche) sur un corps  $D$  contenant  $F$  dans son centre, telle que  $H = \text{End}_D V_1 \cap U(V)$  et  $H' = \text{End}_D V_2 \cap U(V)$ .

2. Si, en outre, la forme bilinéaire  $(,)$  est non dégénérée,  $D$  est muni d'une involution  $\tau$  et les espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  possèdent une structure hermitienne déterminée à similitude près par celle de  $V$ .

*Démonstration* [M.V.W Ch. 1] :

Par hypothèse,  $V$  est  $HH'F$ -simple. Comme  $H$  et  $H'$  commutent,  $V$  est  $H'F$ -semi-simple et isotypique :  $V = mV'$  où  $V'$  est  $H'F$ -simple.

Par conséquent, la sous-algèbre  $B = \text{End}_{H'F} V$  de  $\text{End}_F V$  est simple.

Par le théorème du bicommutant [B],  $B$  est égale au commutant de  $B' = \text{End}_{BF} V$ . D'où  $B = \text{End}_{B'F} V = \text{End}_{H'F} V$ . De même,  $B' = \text{End}_{BF} V = \text{End}_{HF} V$ .

Les algèbres  $B$  et  $B'$  agissent semi-simplement sur  $V$  donc  $(B, B')$  est une paire duale réductrice de  $\text{End}_F V$  [M.V.W ch. 1 §18]. Elle est irréductible car  $B$  et  $B'$  contiennent respectivement  $H$  et  $H'$  et  $(H, H')$  est nécessairement irréductible.

Ainsi, la paire duale  $(B, B')$  correspond à une décomposition en produit tensoriel de  $V$  :  $V \simeq V_1 \otimes_D V_2$  où  $D = \text{End}_{H'F} V'$  est un corps contenant  $F$  dans son centre. De plus,  $B = \text{End}_D V_1$  et  $B' = \text{End}_D V_2$ .

Montrons que  $H = \text{End}_D V_1 \cap U(V)$ . Le groupe  $H$  est contenu dans  $B$  et  $U(V)$  donc

$$H \subset \text{End}_D V_1 \cap U(V).$$

De plus,  $B \cap U(V)$  est un sous-groupe de  $U(V)$  qui commute avec  $H'$ . Donc

$$B \cap U(V) \subset Z_{U(V)} H' = H$$

d'où l'égalité voulue. On montre de même que  $H' = \text{End}_D V_2 \cap U(V)$ . La première partie du lemme est donc démontrée.

On suppose désormais que  $(,)$  est non dégénérée. Alors,  $(,)$  définit une involution  $\iota$  sur  $\text{End}_F V$  qui laisse stable  $H$  et  $H'$ . Comme  $B$  et  $B'$  sont les commutants de  $H'$  et  $H$  respectivement dans  $\text{End}_F V$ ,  $B = \text{End}_D V_1$  et  $B' = \text{End}_D V_2$  sont stables sous  $\iota$ . Il s'en suit que  $D$  est muni d'une involution  $\tau$  [S.W. Ch. 8, cor. 8.3] et que les espaces  $V_i$  possèdent une structure hermitienne, définie à similitude près par celle de  $V$  [S.W Ch. 8 §7]. Ceci termine la démonstration du lemme.



### 1.3. Un lemme géométrique

Soit  $D$  un corps contenant  $F$  dans son centre et muni d'une involution  $\tau$ . On suppose, en outre, que  $D$  est de dimension finie sur son centre. Soit  $V$  un espace vectoriel à droite sur  $D$  muni d'une forme hermitienne *tracique* (i.e. ses valeurs sur les couples  $(v, v)$ ,  $v$  parcourant  $V$ , appartiennent à  $\{d + \tau(d), d \in D\}$ ) ou d'une forme alternée ou d'une forme quadratique  $q$ , non dégénérée et non défective. Dans les deux derniers cas,  $\tau$  est triviale.

On note  $U(V)$  son groupe d'isométries.

LEMME. — *Le commutant de  $U(V)$  dans  $\text{End}_F V$  est isomorphe à  $F_2[X]/X^2$  si  $V$  est orthogonal hyperbolique de dimension 2 sur  $F_2$  et est isomorphe à  $D$  sinon.*

*Démonstration :*

1° On rappelle [D.J] qu'une *quasi-symétrie de vecteur  $a$* , non isotrope, est une isométrie de  $V$  qui laisse invariant point par point l'orthogonal de  $a$  et laisse globalement invariante la droite engendrée par  $a$ . Le rapport  $\alpha$  d'une quasi-symétrie vérifie :  $\alpha \cdot \tau(\alpha) = 1$ .

Une *transvection* est une isométrie de  $V$  de la forme :

$$\text{pour tout } v \in V, v \longmapsto v + a \cdot \alpha \langle a, v \rangle, \alpha \in D \text{ tel que } \tau(\alpha) = \alpha$$

( $a$  nécessairement isotrope. Dans le cas orthogonal,  $a$  est non singulier et  $\alpha = q(a)^{-1}$ ).

Un élément  $\sigma$  de  $Z_{\text{End}_F V}(U(V))$  commute avec toutes les quasi-symétries et toutes les transvections de  $U(V)$ .

2° Supposons  $V$  non orthogonal; alors  $\sigma$  laisse stables toutes les droites de  $V$ .

Par conséquent, si  $\dim_D V \geq 2$ , il existe  $\alpha \in D$  tel que

$$\sigma v = v\alpha \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc,  $\sigma$  est une homothétie, et  $Z_{\text{End}_F V}(U(V)) \simeq D$ .

Si  $\dim_D V = 1$ , alors  $V$  s'identifie à  $D$  et la forme  $(,)$  est donnée par :

$$\forall d_1, d_2 \in D, (d_1, d_2) = \tau(d_1)ad_2 \quad \text{où } a \in \{d + \tau(d), d \in D\}.$$

Comme  $D$  est de dimension finie sur son centre  $F'$ ,  $D$  est commutatif ou un corps de quaternions :  $a$  est un élément de  $F'$  et  $U(V)$  s'identifie à  $D^1 = \{d \in D | \tau(d)d = 1\}$ .

Soit  $E$  le sous-corps engendré par  $D^1$  et  $F$ . Pour que  $D$  soit le commutant de  $U(V)$  dans  $\text{End}_F V$ , il faut et il suffit que  $E = D$  [M.V.W p. 20].

Le corps  $D$  est un  $E$ -espace vectoriel.

Si  $D$  est commutatif, montrons que  $\dim_E D = 1$  [Wa]. Pour tout  $d \in D$ ,  $d^{-1}\tau(d)$  est un élément de  $D^1$  donc de  $E$ . Il existe donc  $k \in E$  tel que  $\tau(d) = dk$ . Si  $\dim_E D \geq 2$ , alors  $k$  est indépendant de  $d$ . En prenant,  $d = 1$ , on trouve  $k = 1$  d'où  $\tau = id$  ce qui est exclu. Par conséquent,  $\dim_E D = 1$  i.e.  $D = E$ .

Si  $D$  est un corps de quaternions et si  $(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est une base standard de  $D$  sur  $F'$  [S.W p. 314], on considère les sous-corps commutatifs  $K_i = F'(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Alors,  $E$  contient les sous-corps  $E_i$  de  $D$  engendrés respectivement par  $\{d \in K_i | \tau(d)d = 1\}$  et  $F$ . Comme  $K_i$  est commutatif,  $K_i = E_i$  et  $E \supset \bigcup_i K_i$ . D'où  $E \supset D$  et, par suite,  $E = D$ .

Dans ce cas,  $Z_{\text{End}_F W}(U(W)) \simeq D$ .

3° Supposons  $V$  orthogonal; alors  $D$  est commutatif. On note  $\nu(q)$  l'indice de  $q$ .

Un élément  $\sigma$  de  $Z_{\text{End}_F V}(O(q))$  commute avec toutes les transvections orthogonales et laisse donc invariante toutes les droites régulières. Si  $V_1$  est un  $D$ -espace vectoriel sans éléments singuliers non nuls, alors  $\sigma|_{V_1}$  est une homothétie :  $\sigma|_{V_1} = \alpha \text{id}_{V_1}$ ,  $\alpha \in D$ .

• Donc si  $\nu(q) = 0$ ,  $\sigma \in \text{Did}$  et  $Z_{\text{End}_F V}(O(q)) \simeq D$ .

• Supposons  $0 < \nu(q) < n$  et décomposons  $V$  en  $V = H \oplus H^\perp$  où  $H$  est hyperbolique de dimension maximale  $2\nu(q)$ .

Comme  $H^\perp$  est alors sans éléments singuliers,  $\sigma|_{H^\perp}$  est une homothétie. Soit  $z \in H^\perp \setminus \{0\}$ . Pour tout  $h \in H$  singulier,  $q(z+h) = q(z) \neq 0$ . Il existe donc  $\lambda_h \in D^\times$  tel que  $\sigma(z+h) = (z+h)\lambda_h$  et par le théorème de Witt [D.J.], il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u(z+h) = z$ .

Les endomorphismes  $\sigma$  et  $u$  commutent donc : pour tout  $h \in H$  singulier,

$$\begin{aligned} u\sigma(z+h) &= \sigma u(z+h) = \sigma z \\ &= u(z+h)\lambda_h = z\lambda_h. \end{aligned}$$

Donc,  $\lambda_h = \lambda$  ne dépend pas de  $h$  et  $\sigma(h) = h\lambda$  pour tout  $h \in H$  singulier. Comme tout élément de  $H$  est somme d'éléments singuliers,  $\sigma|_H$  est  $\lambda \text{id}_H$  et  $\sigma|_{H^\perp} = \lambda \text{id}_{H^\perp}$ . Ainsi,  $\sigma$  est une homothétie.

$$Z_{\text{End}_F V}(O(q)) \simeq D.$$

Supposons désormais  $\nu(q) = n$ .

• Si  $n > 1$  et  $D \neq \mathbf{F}_2$ , soit  $\{e_i, e_{-i}; i = 1, \dots, n\}$  une base hyperbolique. Le vecteur  $e_1 + e_{-1}$  est non singulier donc :  $\sigma(e_1 + e_{-1}) = (e_1 + e_{-1})\lambda$ ,  $\lambda \in D$ . Soit  $z$  un vecteur non singulier dans l'orthogonal  $H$  de  $e_1$  et  $e_{-1}$  tel que  $q(z) \neq 1$ .

Alors  $e_1 + e_{-1} + z$  est non singulier : il existe  $\lambda_z \in D$  tel que

$$\sigma(e_1 + e_{-1} + z) = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

ce qui équivaut à

$$(e_1 + e_{-1})\lambda + \sigma z = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

d'où

$$\lambda = \lambda_z \text{ et } \sigma z = z\lambda.$$

Si  $z \in H$  est singulier,  $z$  s'écrit comme somme de deux éléments de  $H$  non singuliers :  $z = z_1 + z_2$  tels que  $q(z_i) \neq 1$ ,  $i = 1, 2$ .

D'après, ce qui précède,  $\sigma z = z\lambda$ .

Ainsi,  $\sigma$  restreint à l'orthogonal de  $e_1$  et  $e_{-1}$  est une homothétie. Par le même raisonnement à partir de  $e_2$  et  $e_{-2}$ , on conclut que  $\sigma \in \text{Did}$ .

• Si  $n > 1$  et  $D = \mathbb{F}_2$ , il suffit de montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{F}_2$  tel que pour tout  $i$ ,  $\sigma e_i = e_i \lambda$ .

Pour  $i > 1$ , on considère les vecteurs non singuliers  $e_1 + e_{-1}$ ,  $e_1 + e_{-1} + e_i$  et  $e_1 + e_{-1} + e_{-i}$ . Il existe  $\lambda$ ,  $\lambda_i$  et  $\lambda_{-i}$  tels que

$$\begin{aligned}\sigma(e_1 + e_{-1}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda \\ \sigma(e_1 + e_{-1} + e_i) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_i + e_i\lambda_i \\ \sigma(e_1 + e_{-1} + e_{-i}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_{-i} + e_{-i}\lambda_{-i}\end{aligned}$$

d'où  $\sigma(e_i + e_{-i}) = (e_i + e_{-i})(\lambda_i + \lambda_{-i}) + e_i\lambda_i + e_{-i}\lambda_{-i}$ .

Or  $\sigma(e_i + e_{-i})$  est colinéaire à  $e_i + e_{-i}$  donc  $\lambda_i = \lambda_{-i}$ .

De plus, il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u(e_i + e_{-i}) = e_1 + e_{-1}$ . D'où  $\lambda_i = \lambda$ . En faisant de même avec  $e_2$  et  $e_{-2}$ , on obtient :  $\sigma \in \text{Did}$ .

Il reste le cas où  $n = 1 = \nu(q)$ .

• Si  $D = \mathbb{F}_2$ , un simple calcul montre que

$$Z_{\text{End}_F V}(O(q)) = \left\{ 0, id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et cet anneau est isomorphe à  $\mathbb{F}_2[X]/X^2$ .

Si  $D \neq \mathbb{F}_2$ . Soit  $(e, f)$  une base hyperbolique de  $V$ .

Soient  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $q(z_1) = q(z_2) = \alpha \neq 0$ . Comme  $z_1$  et  $z_2$  sont réguliers, il existe  $\mu_1, \mu_2 \in D$ , tels que  $\sigma z_1 = z_1 \mu_1$ ,  $\sigma z_2 = z_2 \mu_2$ . Par le théorème de Witt, il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u z_1 = z_2$ . D'où

$$z_2 \mu_2 = \sigma z_2 = u \sigma z_1 = z_2 \mu_1 \implies \mu_2 = \mu_1.$$

Pour tout  $\alpha$ , il existe  $\mu_\alpha \in D$  tel que, pour tout  $z \in V$ , tel que  $q(z) = \alpha$ ,  $\sigma z = z \mu_\alpha$ .

• Si  $D = \mathbb{F}_4$  et que  $\alpha \notin \mathbb{F}_2$ ,  $q(e\alpha + f(1 + \alpha)) = 1$ . D'où

$$\sigma(e\alpha + f(1 + \alpha)) = (e\alpha + f(1 + \alpha))\mu_1$$

ce qui équivaut à

$$\sigma(e + f)\alpha + \sigma(f) = (e + f)\mu_1\alpha + f\mu_1$$

d'où  $\sigma(f) = f\mu_1$  et, par suite,  $\sigma(e) = e\mu_1$ . D'où  $\sigma = \mu_1 id$ .

• Sinon, soit  $\alpha \in D^\times$ . Il existe  $\alpha_1, \alpha_2 \in D^\times$  tel que

$$\begin{cases} \alpha_i \neq 0 \text{ et } 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 1 \neq 0 \\ \alpha_1(\alpha_2 + 1) = \alpha \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sigma(e + f) &= \sigma(e\alpha_1 + f(1 + \alpha_2)) + \sigma(e(\alpha_1 + 1) + f\alpha_2) \\ \iff (e + f)\mu_1 &= (e\alpha_1 + (1 + \alpha_2))\mu_\alpha + (e(\alpha_1 + 1) + f\alpha_2)\mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2} \\ \iff \mu_1 &= \mu_\alpha\alpha_1 + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}(\alpha_1 + 1) = \mu_\alpha(1 + \alpha_2) + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}\alpha_2 \\ &\text{d'où } \mu_1 = \mu_\alpha. \end{aligned}$$

Donc, pour tout élément  $z$  régulier,  $\sigma z = \mu_1 z$ . On en déduit que  $\sigma$  est  $\mu_1 id$ .

Ainsi s'achève la démonstration du lemme.

*Remarque* : L'hypothèse sur la dimension de  $D$  sur  $F'$  n'intervient que dans le calcul du commutant du groupe unitaire sur un espace vectoriel de dimension 1.

#### 1.4. Paires duales relativement réductives irréductibles de type hermitien.

Dans ce paragraphe,  $W$  est  $HH'F$ -simple.

D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition en produit tensoriel de  $W$ ,

$$W \simeq W_1 \otimes_D W_2$$

où  $D$  est un corps muni d'une involution  $\tau$ ,  $W_i$  est un  $D$ -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne  $\langle, \rangle$ , telle que  $H = \text{End}_D W_1 \cap O(Q)$  et  $H' = \text{End}_D W_2 \cap O(Q)$ . Grâce à la classification des involutions [M.V.W Ch. 1], on identifie  $(D, \tau)$ . Cela peut être :

- a  $F$  et l'involution triviale,
- b une extension quadratique séparable  $F'$  de  $F$  et l'involution définie par l'élément non trivial de  $\text{Gal}(F'/F)$ ,
- c un corps de quaternions sur  $F$  et l'involution canonique,
- d un des trois cas précédents où  $F$  est remplacée par une extension finie  $E$  de  $F$ .

Dans les cas a, b, c, la trace réduite  $tr_{D|F}$  de  $D$  sur  $F$  définit une forme bilinéaire non dégénérée par :  $(d, d') \mapsto tr_{D|F}(dd')$ .

Dans le cas d, on considère  $t \subset \text{Hom}_F(E, F) \setminus \{0\}$  et la trace réduite  $tr_{D|E}$  de  $D$  sur  $E$ . Alors  $t \circ tr_{D|E}$  définit une forme bilinéaire non dégénérée comme précédemment.

On note  $t_{D|F}$  l'homomorphisme  $tr_{D|F}$  ou  $t \circ tr_{D|E}$  selon les cas.

i) On définit alors une forme bilinéaire  $\ll, \gg$  sur  $W_1 \otimes_D W_2$  par :

$$\ll w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2 \gg = t_{D|F}(\langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2), \quad w_i, w'_i \in W_i.$$

Les formes bilinéaires  $\langle, \rangle$  et  $\ll, \gg$  définissent des involutions sur  $\text{End}_F W$ . Par le théorème de Skolem-Noether [S.W. Ch. 8, th. 4.2], ces dernières diffèrent d'un automorphisme intérieur. De plus, elles coïncident sur  $\text{End}_D W_1$  et  $\text{End}_D W_2$ . Nécessairement,

cet automorphisme intérieur est défini par un élément du centre de  $D$ . Quitte à modifier les formes  $\langle, \rangle_i$  par un élément du centre de  $D$ , on peut supposer que la forme alternée  $\langle, \rangle$  est égale à  $\ll, \gg$ . Les formes hermitiennes  $\langle, \rangle_i$  sont nécessairement non dégénérées comme  $\langle, \rangle$ . De plus,  $H = \text{End}_D W_1 \cap O(Q) = U(W_1) \cap O(Q)$  et  $H' = U(W_2) \cap O(Q)$ .

ii) *Identification de  $\langle, \rangle_1$  et  $\langle, \rangle_2$*

On étudie chaque cas séparément :

- *Cas a.* Comme  $\langle, \rangle$  est alternée, il en va de même d'une des formes  $\langle, \rangle_i$ . Par exemple,  $\langle, \rangle_1$  est alternée. Alors,  $\langle, \rangle_2$  est symétrique.

Soit  $V = \{v \in W_2, \langle v, v \rangle_2 = 0\}$ . Le sous-espace vectoriel  $W_1 \otimes_F V$  est un sous-espace vectoriel de  $W$   $HH'F$ -stable. Donc,  $W_1 \otimes_F V$  est 0 ou  $W$ .

Si  $W_1 \otimes_F V = 0$  i.e.  $V = 0$ , alors  $U(W_2)$  est réduit à  $\{id\}$  (car  $u(w_2) + w_2 \in V$  pour tout  $w_2 \in W_2$  et tout  $u \in U(W_2)$ ) d'où  $H' = \{id\}$ . On n'obtient pas de paire duale non triviale.

Si  $W_1 \otimes_F V = W$  i.e.  $V = W_2$ ,  $\langle, \rangle_2$  est alternée.

Dans ce cas, les formes  $\langle, \rangle_i$  sont alternées.

- *Cas b.* Toute forme hermitienne  $\langle, \rangle_i$  définie sur  $W_i$  est tracique. La forme  $(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) \mapsto \text{tr}_{F'/F}(\langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2)$  est donc alternée. Aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire.

- *Cas c.* Considérons le sous-espace vectoriel  $V_1$  de  $W_1$  formé des vecteurs  $w_1$  de  $W_1$  tels que  $\langle w_1, w_1 \rangle_1$  soit une trace de  $D$  (i.e.  $\langle w_1, w_1 \rangle_1 \in F$ ). Alors  $V_1 \otimes_F W_2$  est  $HH'F$ -stable :  $V_1 \otimes_F W_2$  est donc  $\{0\}$  ou  $W$ .

Dans le premier cas,  $U(W_1)$  est réduit à l'identité [D.J2] : on n'obtient pas de paire duale non triviale.

On s'intéresse donc au deuxième cas c'est-à-dire le cas où  $\langle, \rangle_1$  est tracique. Pour des raisons analogues, seul le cas où  $\langle, \rangle_2$  est tracique peut fournir une paire duale non triviale.

Quand  $\langle, \rangle_1$  et  $\langle, \rangle_2$  sont traciques, on vérifie comme précédemment, que la forme  $\langle, \rangle$  est bien alternée.

Les formes hermitiennes  $\langle, \rangle_i$  sont donc traciques.

- *Cas d.* On a alors

$$\langle w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2 \rangle = t \circ \text{tr}_{D|E}(\langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2).$$

Prouvons qu'elle est alternée si et seulement si

$$(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) \mapsto \text{tr}_{D|E}(\langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2)$$

est alternée.

Il suffit de montrer que si  $(,)$  est une forme bilinéaire  $HH'$ -invariante sur le  $E$ -espace vectoriel  $W$  telle que  $t \circ (,)$  soit alternée, alors  $(,)$  est alternée.

Nécessairement,  $(,)$  est symétrique. Soit  $V$  le sous- $E$ -espace vectoriel de  $W$  formé des vecteurs  $v$  tels que  $(v, v) = 0$ . Ce sous-espace est stable sous  $HH'$ . L'hypothèse sur l'action de  $HH'F$  sur  $W$  implique que  $V$  est  $\{0\}$  ou  $W$ .

Si  $V = \{0\}$ , le groupe des isométries de  $(,)$  est réduit à l'identité car, pour tout élément  $\sigma$  de ce groupe et tout vecteur  $w$  de  $W$ ,  $\sigma w + w$  appartient à  $V$ . Par conséquent,  $H = H' = \{id\}$  : ceci ne convient pas.

Donc  $V = W$  c'est-à-dire  $(,)$  est alternée.

On obtient les mêmes résultats que précédemment.

### iii) Identification de $H$ et $H'$ .

LEMME. — Il existe une unique forme quadratique  $q$  dont la forme alternée est  $\langle, \rangle$  et telle que  $U(W_i) \subset O(q)$  pour  $i = 1$  ou  $2$ .

*Démonstration* : — Existence de  $q$ .

On détermine une forme quadratique  $q$  vérifiant les hypothèses voulues dans les cas a, b, c, d. Comme  $q$  est "associée" à  $\langle, \rangle$ , il suffit de la déterminer sur les  $w_1 \otimes w_2$ ,  $w_1 \otimes w_2 \in W_1 \otimes_D W_2$ .

Cas a :  $q(w_1 \otimes w_2) = 0$  pour tout  $w_1 \otimes w_2 \in W$

Cas b et c :  $q(w_1 \otimes w_2) = \langle w_1, w_1 \rangle_1 \langle w_2, w_2 \rangle_2$

Cas d :  $q(w_1 \otimes w_2) = t \circ q'(w_1 \otimes w_2)$  où  $q'$  est l'une des formes quadratiques précédentes sur  $E$ .

Vérifions que  $U(W_i) \subset O(q)$ . Il est clair que  $U(W_i)$  est formé d'isométries de  $\langle, \rangle$ . Il suffit donc de montrer que, pour tout  $u \in U(W_i)$ ,  $w_1 \otimes w_2 \in W$ ,

$$q(u(w_1 \otimes w_2)) = q(w_1 \otimes w_2).$$

Les trois premiers cas sont clairs. Le dernier est une conséquence des précédents.

La forme quadratique  $q$  existe donc.

— Unicité de  $q$ .

Soit  $q'$  une autre forme quadratique sur  $W$  ayant les mêmes propriétés que  $q$ . Alors  $U(W_i)$  est contenu dans  $O(q) \cap O(q')$ , donc dans  $O(q + q')$ . Or,  $q + q'$  est additive et définit une forme semi-linéaire de  $V$  dans  $F$ . Si  $q + q'$  est non nulle, son noyau  $\text{Ker}(q + q')$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous  $O(q + q')$  donc sous  $HH'$ . Puisque  $(H, H')$  est de type hermitien,  $\text{Ker}(q + q')$  est nul. Alors  $O(q + q')$  est  $\{id\}$  (car, pour tout  $\sigma \in O(q + q')$ , pour tout  $v \in V$ ,  $\sigma v + v \in \text{Ker}(q + q')$ ). D'où  $H = H' = \{id\}$  ce qui est impossible. La forme quadratique  $q + q'$  est donc nulle.

La forme  $q$  est donc unique et le lemme est démontré.

On en déduit :

LEMME. — Si  $(H, H')$  est une paire duale de type hermitien de  $O(Q)$ , alors  $Q$  est la forme quadratique du lemme précédent. Par conséquent,  $H = U(W_1)$  et  $H' = U(W_2)$ .

La démonstration est analogue à la précédente où  $Q$  remplace  $q'$  : en effet,  $H$  et  $H'$  sont contenus dans  $O(Q)$  et  $O(q)$  donc dans  $O(Q + q)$ .

La deuxième assertion est immédiate d'après i).

Ainsi, les paires duales relativement réductives de type hermitien sont parmi les paires :

$\underline{a}$  ( $SpW_1, SpW_2$ ) où  $W_i$  est un  $F$ -espace vectoriel muni d'une forme alternée  $\langle, \rangle_i$  non dégénérée;

$\underline{b}$  ( $U(W_1), U(W_2)$ ) où  $W_i$  est un  $F'$ -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne  $\langle, \rangle_i$  non dégénérée et  $F'$  une extension quadratique séparable de  $F$  muni de l'involution  $\tau \in \text{Gal}(F'/F) \setminus \{id\}$ ;

$\underline{c}$  ( $U(W_1), U(W_2)$ ) où  $W_i$  est un  $D$ -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne tracique  $\langle, \rangle_i$  non dégénérée, et  $D$  est un corps de quaternions sur  $F$  muni de l'involution canonique;

$\underline{d}$  l'une des trois précédentes où  $F$  est remplacé par  $E$ , extension finie de  $F$ ; à condition que  $W_1 \otimes W_2 \simeq W$  et la forme quadratique associée aux formes  $\langle, \rangle_i$  soit  $Q$ .

Il reste à s'assurer que ce sont bien des paires duales relativement réductives. On considère la sous-algèbre  $A$  de  $\text{End}_F W$  engendrée par  $U(W_1)$ . Dans les trois premiers cas,  $A$  est contenue dans  $\text{End}_F W_1$  et son commutant dans  $\text{End}_F W_1$  est  $D$  par le lemme 1.3.

Dans le dernier cas,  $A$  est contenue dans  $\text{End}_E W_1$  et son commutant dans  $\text{End}_E W_1$  est encore  $D$  par le lemme 1.3.

Par le théorème du bicommutant,  $A = \text{End}_D W_1$ . D'où

$$Z_{\text{End}_F W}(A) = \text{End}_D W_2$$

$$\text{et } Z_{O(Q)}(U(W_1)) = \text{End}_D W_2 \cap O(Q) = U(W_2).$$

De même, le commutant de  $U(W_2)$  est  $U(W_1)$ . On obtient bien des paires duales relativement réductives.

### 1.5. Paires duales relativement réductives de type linéaire.

On suppose maintenant que  $W$  n'est pas  $HH'F$ -simple.

Par hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel propre  $V$  de  $W$   $HH'F$ -stable. Comme  $(H, H')$  est irréductible,  $V$  est nécessairement isotrope. Posons  $X = V \cap V^\perp$ . Alors  $X$  est stable sous  $HH'$  et est totalement isotrope. De même,  $X^\perp$  est stable sous  $HH'$ . Soit  $Y$  un supplémentaire de  $X^\perp$  dans  $W$  stable sous  $HH'$ . Alors  $X \oplus Y$  est stable sous  $HH'$ , et est non isotrope. L'espace vectoriel  $W$  se décompose en  $(X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^\perp$ , qui est stable sous  $HH'$ . Comme  $(H, H')$  est irréductible,  $(X \oplus Y)^\perp$  est nul. D'où  $W = X \oplus Y$  et  $\dim X = \dim Y = n$ . Montrons que  $Y$  est totalement isotrope.

Le sous-espace  $Y$  est nécessairement isotrope sinon  $W = Y \oplus Y^\perp$  et  $Y, Y^\perp$  sont  $HH'F$ -stables :  $(H, H')$  n'est pas irréductible.

Alors  $Y \cap Y^\perp$  est un sous-espace vectoriel non nul, totalement isotrope et invariant sous  $HH'$ . En remplaçant  $X$  par  $Y \cap Y^\perp$  dans le raisonnement précédent, on montre que  $\dim Y \cap Y^\perp = n = \dim Y$  d'où  $Y = Y^\perp$ .

Il existe donc une polarisation complète de  $(W, \langle, \rangle)$  stable sous  $HH'$ . Les groupes  $H$  et  $H'$  s'identifient à des sous-groupes de  $GLX$ . L'irréductibilité de  $(H, H')$  exige que  $X$  ne possède pas de sous-espace vectoriel propre stable sous  $HH'$ . En particulier,  $X' = \{x \in X, Q(x) = 0\}$  étant un sous-espace vectoriel stable sous  $HH'$ , est  $\{0\}$  ou  $X$ .

Si  $X' = \{0\}$ , un élément  $u$  de  $HH'$  est trivial sur  $X$  (car  $u(x) - x \in X$  est singulier) donc aussi sur  $Y$  :  $H = H' = \{id\}$ . Ce n'est pas une paire duale.

Si  $X' = X$ ,  $Q$  est déployée et  $(H, H')$  s'identifie à une paire duale irréductible de  $GLX$ . D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition de  $X$  en produit tensoriel

$$X \simeq X_1 \otimes_D X_2$$

où  $X_i$  est un  $D$ -espace vectoriel et  $D$  un corps contenant  $F$  dans son centre, telle que

$$H = \text{End}_D X_1 \cap GL_D X = GL_D X_1 \quad \text{et} \quad H' = \text{End}_D X_2 \cap GLX = GL_D X_2.$$

Réciproquement, supposons que  $Q$  soit déployée et  $H = GL_D X_1$ ,  $H' = GL_D X_2$  pour une décomposition en produit tensoriel d'un sous-espace vectoriel singulier  $X$ , de dimension maximale.

Déterminons le commutant  $Z_{O(Q)}(H)$  de  $H$  dans  $O(Q)$ .

LEMME. — Avec les notations précédentes, le commutant de  $H$  est :

$$\begin{cases} O(Q) & \text{si } F = \mathbf{F}_2 \quad \text{et} \quad \dim_F X_1 = 1 \\ Sp_D(X_2 + X_2^*) & \text{si } F = \mathbf{F}_2 \quad \text{et} \quad \dim_F X_1 = 2 \\ GL_D(X_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration* : L'action de  $H$  sur  $W$  définit une représentation semi-simple de  $H$  dans  $W$ . On a

$$W \simeq m_2 X_1 \oplus m_2 X_1^*$$

où  $X_1$  est la représentation naturelle de  $GL_D X_1$  dans  $X_1$ ,  $X_1^*$  sa contragrédiente et  $m_2 = \dim_D X_2$ .

Un élément  $g$  de  $Z_{O(Q)}(H)$  est un isomorphisme de cette représentation dans elle-même.

Si  $X_1$  et  $X_1^*$  ne sont pas isomorphes,  $g$  laisse stable les composantes  $m_2 X_1$  et  $m_2 X_1^*$ . L'élément  $g$  est donc un élément de  $GLX \subset O(Q)$ . D'où

$$Z_{O(Q)}(H) = Z_{GLX}(H) = H'.$$

Si  $X_1$  et  $X_1^*$  sont isomorphes et si  $\tau$  est un isomorphisme entre  $X_1$  et  $X_1^*$  alors, pour tout  $\lambda \in F^\times$ , on a

$$\tau \circ \lambda id = \lambda^{-1} id \circ \tau.$$



Donc tout élément de  $F^\times$  est de carré 1. Le corps  $F$  est nécessairement  $F_2$ .

On suppose donc  $F = F_2$  et on pose

$$m_1 = \dim_D X_1, \quad d = [D : F_2] \quad \text{et} \quad K = F_2^{\times m_1 d}.$$

Le groupe  $K$  s'injecte dans  $GL_D X_1 \simeq GL(m_1, F_2^d)$ . Les restrictions de  $X_1$  et  $X_1^*$  à  $K$  sont encore isomorphes. Soit  $\bar{F}_2$  une clôture algébrique de  $F_2$ .

Comme  $X_1$  est isomorphe à  $X_1^*$ ,  $X_1 \otimes_{F_2} \bar{F}_2$  est isomorphe à  $X_1^* \otimes_{F_2} \bar{F}_2$ . Maintenant,  $X_1 \otimes_{F_2} \bar{F}_2$  est une somme de caractères  $\sigma$  de  $K$  et  $X_1^*$  est nécessairement la somme des  $\sigma^{-1}$ . Il existe donc un entier  $r$ ,  $0 \leq r < m_1 d$  tel que, pour tout  $x \in K$ ,  $x^{2^r+1} = 1$ , c'est-à-dire que  $2^{m_1 d} - 1$  divise  $2^r + 1$ . D'où  $m_1 d = 1$  ou  $2$ ,

i.e.  $D = F_2$  et  $\dim_{F_2} X_1 = 1$  ou  $2$  ou bien  $D = F_4$  et  $\dim_{F_2} X_1 = 2$ .

Étudions donc ces trois cas :

- Quand  $D = F_2$  et  $\dim_{F_2} X_1 = 1$ ,  $H$  est  $\{id\}$  d'où  $H' = O(Q)$ .

- Quand  $D = F_2$  et  $\dim_{F_2} X_1 = 2$ ,  $X_1$  et  $X_1^*$  sont isomorphes et  $W$  s'identifie, comme  $H$ -module à

$$W \simeq X_1 \otimes_{F_2} (X_2 \oplus X_2^*)$$

L'espace vectoriel  $X_2 \oplus X_2^*$  est muni d'une forme alternée et  $H = GL(2, F_2) = Sp(2, F_2)$ . Le commutant de  $H$  dans  $O(Q)$  est donc  $Sp(X_2 \oplus X_2^*)$  d'après l'étude du paragraphe précédent.

- Quand  $D = F_4$  et  $\dim_{F_2} X_1 = 2$ , on considère un espace vectoriel  $V$  sur  $F_4$  de dimension 2, muni de la forme quadratique  $q$ , non dégénérée, non défective d'indice 1. En choisissant une base hyperbolique  $(e, f)$  de  $V$ , on identifie  $H$  au sous-groupe de  $O(q)$  formé des  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in F_4^\times$ . Or  $O(q)$  est  $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in F_4^\times \right\}$  donc  $H \simeq O^+(q)$ .

Le commutant de  $H$  contient donc  $Sp_{F_4}(X_2 \oplus X_2^*)$ .

Réciproquement, soit  $(e_1, \dots, e_{m_2})$  une base de  $X_2$  sur  $F_4$  et  $(e_{-1}, \dots, e_{-m_2})$  la base duale dans  $X_2^*$ .

On considère la base hyperbolique  $(e_i, \xi e_i, \xi e_{-i}, e_{-i})$  de  $W$  sur  $F_2$ .

Soit  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On note  $A_\alpha$  (resp.  $A_{\alpha^{-1}} = A_\alpha^{-1}$ ) la matrice  $2m_2 \times 2m_2$ , diagonale par blocs dont les  $m_2$  blocs sont égaux à  $\alpha$  (resp.  $\alpha^{-1}$ ).

En tant que sous-groupe de  $O(Q)$ ,  $F_4^\times$  s'identifie à

$$\left\{ id, \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{\alpha^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{\alpha^{-1}}^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $O(Q)$  qui commute avec  $F_4^\times$ . Alors

$$(10) \quad ad^* + cb^* = id$$

et

$$(11) \quad \begin{cases} A_\alpha a = a A_\alpha & {}^t A_\alpha^{-1} c = c A_\alpha \\ A_\alpha b = b {}^t A_\alpha^{-1} & {}^t A_\alpha^{-1} d = d {}^t A_\alpha^{-1} \end{cases}$$

En décomposant  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  en blocs  $2 \times 2$  :  $a = (a_{ij})$ ,  $b = (b_{ij})$ ,  $c = (c_{ij})$ ,  $d = (d_{ij})$ , (11) équivaut à : pour tout  $(i, j)$

- 1)  $a_{ij}$  et  $d_{ij}$  appartiennent à  $\{0, id, \alpha, \alpha^{-1}\}$ ,
- 2)  $b_{ij}$  et  $c_{ij}$  appartiennent à  $\left\{0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ .

Ainsi, pour tout  $(i, j)$ ,  $a_{ij}$  est une application  $\mathbf{F}_2$ -linéaire de  $\mathbf{F}_4 e_j$  dans  $\mathbf{F}_4 e_i$  telle que  $a_{ij}(e_j) = 0$  ou  $e_i$  ou  $\xi e_i$  ou  $\bar{\xi} e_i$  et  $a_{ij}(\xi e_j) = 0$  ou  $\xi e_i$  ou  $\bar{\xi} e_i$  ou  $e_i$  respectivement. Donc  $a_{ij}$  est la multiplication par un élément de  $\mathbf{F}_4$ .

De même,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  et  $d_{ij}$  sont des multiplications par un élément de  $\mathbf{F}_4$ .

Ainsi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont à coefficients dans  $\mathbf{F}_4$  et (10) implique que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_{\mathbf{F}_4}(X_2 \oplus X_2^*).$$

Les résultats du lemme sont donc démontrés.

On en déduit que  $(GL_D X_1, GL_D X_2)$  est une paire duale relativement réductive de  $O(Q)$  sauf si  $F = \mathbf{F}_2$  et  $\dim_{\mathbf{F}_2} X_i \leq 2$ ,  $i = 1$  ou  $2$ .

On connaît désormais toutes les paires duales relativement réductives et irréductibles de  $O(Q)$ . On reconnaît celles qui sont réductives grâce à la remarque 1.1.

Ceci termine la démonstration de la proposition 1.1.

*Remarque* : Il est clair que, si  $(H, H')$  est une paire duale réductive de  $O(Q)$ , les groupes  $H$  et  $H'$  sont réductifs.

Si  $(H, H')$  est une paire duale de  $O(Q)$ , telle que  $H$  et  $H'$  soient réductifs, alors  $(H, H')$  est relativement réductive.

En effet, l'hypothèse " $W$   $HH'F$ -semi-simple" n'intervient, dans la démonstration précédente, que pour déterminer les paires duales de type linéaire. Dans ce cas, un argument analogue à celui de [M.V.W. Ch. I, 19] utilisant l'hypothèse " $H$  et  $H'$  réductifs" fournit le même résultat.

## § 2. Paires duales réductives du groupe pseudosymplectique

Afin de développer une théorie analogue à celle de R. Howe en caractéristique différente de deux, il nous faut déterminer les paires duales réductives d'un groupe pseudosymplectique (cf. I).

Ce paragraphe est consacré à la résolution de ce problème.

### 2.1. Réduction du problème

Les notations sont celles du § I.1.

Soit  $(G, G')$  une paire duale de  $PsB$ . On note  $\overline{G}$  (resp.  $\overline{G}'$ ) la projection de  $G$  (resp.  $G'$ ) sur  $O(Q)$ .

DÉFINITIONS :

La paire duale  $(G, G')$  est *réductive* si  $W$  est  $\overline{G}\overline{G}'F$  absolument semi-simple.

La paire  $(G, G')$  est *irréductible* s'il n'existe pas de décomposition de  $W$  en somme orthogonale stable sous  $\overline{G}\overline{G}'$ .

PROPRIÉTÉS. —

a. Toute paire duale (resp. paire duale réductive) est produit de paires duales (resp. réductives et) irréductibles de  $PsB$ .

b. Restriction des scalaires : Soit  $E$  une extension séparable de  $F$ . Soit  $t : E \rightarrow F$  un homomorphisme  $F$ -linéaire tel que la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto t(xy)$  soit non dégénérée. Supposons  $W$  muni d'une structure de  $E$ -espace vectoriel et soient  $Q'$  une  $E$ -forme quadratique sur  $W$  et  $B'$  une forme bilinéaire définissant  $Q'$  telles que

$$t \circ Q' = Q \quad \text{et} \quad t \circ B' = B.$$

Si  $(G, G')$  est une paire duale réductive et irréductible, non triviale de  $PsB'$  alors  $(G, G')$  est une paire duale réductive et irréductible de  $PsB$ .

*Démonstration de a.* : Soit  $(G, G')$  une paire duale de  $PsB$ . Si elle n'est pas irréductible, on considère une décomposition de  $W$  en somme orthogonale stable sous  $\overline{G}\overline{G}'$  :  $W = W_1 \oplus W_2$ .

Pour  $i = 1, 2$ , on note  $B_i$  la restriction de  $B$  à  $W_i \times W_i$ ,  $Q_i$  celle de  $Q$  à  $W_i$  et  $PsB_i$  le groupe pseudosymplectique au-dessus de  $O(Q_i)$  relatif à  $B_i$ .

Soit  $G_i = \{(\sigma|_{W_i}, f|_{W_i}), (\sigma, f) \in G\}$  et  $G'_i = \{(\sigma|_{W_i}, f|_{W_i}), (\sigma, f) \in G'\}$ ,  $i = 1, 2$ . Alors  $G$  (resp.  $G'$ ) s'identifie à  $G_1 \times G_2$  (resp.  $G'_1 \times G'_2$ ).

Par le lemme 1.1,  $(G_i, G'_i)$  est une paire duale de  $PsB_i$  et  $(G, G')$  est produit de  $(G_1, G'_1)$  et  $(G_2, G'_2)$ .

De plus, si  $(G, G')$  est réductive alors  $W_i$  est  $\overline{G}_i\overline{G}'_iF$  absolument semi-simple :  $(G_i, G'_i)$  est une paire duale réductive de  $PsB_i$ .

En itérant, on montre la propriété a.

*Démonstration de b.* : Comme  $E$  est séparable, l'application  $F$ -linéaire de  $\mathcal{Q}_a(W_E)$  dans  $\mathcal{Q}_a(W_F)$  définie par :

$$f \in \mathcal{Q}_a(W_E) \mapsto t \circ f \in \mathcal{Q}_a(W_F)$$

est un isomorphisme. Le groupe  $PsB'$  s'identifie à un sous-groupe de  $PsB$  par :  
 $(\sigma, f) \mapsto (\sigma, t \circ f)$ .

Soit  $(G, G')$  une paire duale réductive de  $PsB'$ . Montrons que le commutant de  $G$  dans  $PsB$  est encore  $G'$ .

En effet, si  $(\sigma', f')$  est un élément du commutant de  $G$  dans  $PsB$ ,  $\sigma'$  est  $E$ -linéaire (prop. 1.1). Soit  $(\sigma', f'_0)$  un relèvement de  $\sigma'$  à  $PsB'$ . Alors  $t \circ f'_0 + f'$  est additive, et d'après ce qui précède, il existe  $f_a \in \mathcal{Q}_a(W_E)$  telle que

$$t \circ f'_0 + f' = t \circ f_a \quad \text{i.e.} \quad f' = t \circ (f'_0 + f_a)$$

L'élément  $(\sigma', f'_0 + f_a)$  appartient donc au commutant de  $G$  dans  $PsB'$  c'est-à-dire  $G'$ .  $\square$

Les paires duales, réductives et irréductibles de  $PsB$  sont liées à celles de  $O(Q)$  par le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.1a.** — *Soit  $(G, G')$  une paire duale réductive et irréductible de  $PsB$ .*

*i) Ou bien,  $(G, G')$  est triviale c'est-à-dire de la forme  $(\{(id, 0)\}, PsB)$  ou quand  $W$  est un plan hyperbolique,  $(\mathcal{Q}_a(W), \mathcal{Q}_a(W))$  ;*

*ou bien,  $G$  et  $G'$  sont isomorphes à des sous-groupes de  $O(Q)$ .*

*ii) Il existe une paire duale, relativement réductive et irréductible de  $O(Q)$ , notée  $(H, H')$ , telle que :*

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H'.$$

*iii) On suppose que  $(G, G')$  n'est pas triviale. Alors,  $H^1(\overline{GG}', \mathcal{Q}_a(W)) = 0$ .*

**COROLLAIRE 2.1b.** — *Si  $(K, K')$  est une paire duale, réductive et irréductible de  $PsB$  alors toute paire duale réductive et irréductible, non triviale,  $(G, G')$  telle que*

$$\overline{G} \subset \overline{K} \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset \overline{K}'$$

*est de la forme :  $G = sKs^{-1}$ ,  $G' = sK's^{-1}$  pour un  $s \in \mathcal{Q}_a(W)$ .*

On construit alors des paires duales réductives et irréductibles de  $PsB$  obtenues en relevant les paires duales réductives, non triviales, et irréductibles de  $O(Q)$ .

Soit  $H$  une composante d'une telle paire duale. On identifie "suffisamment" de sous-groupes  $K$  de  $PsB$  isomorphes à  $H$  (§2.3). En calculant les commutant et bicommutant dans  $PsB$  de chaque groupe ainsi obtenu (§2.4), on démontre le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.1c.** — *Les paires suivantes sont duales, réductives, irréductibles et non triviales dans  $PsB$  :*

1. Avec les notations de l'exemple 1 §1.1, si  $W$  est identifié à  $W'$  et que  $Q = Q'$ ,
  - a. la paire  $(SpW_1, SpW_2)$  si  $W_i$  est un  $F_2$ -espace vectoriel de dimension 2,  $i = 1$  ou 2.

b. Sinon, la paire  $(SpW_1, O(q_2))$  où  $q_2$  est une forme quadratique sur  $W_2$  dont la forme alternée est  $\langle, \rangle_2$ .

Alors,  $B$  est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire  $B'$  définie par :

$$B'(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) = b_1(w_1, w'_1) \langle w_2, w'_2 \rangle_2, \quad w_i, w'_i \in W_i,$$

où  $b_1$  est une forme bilinéaire définissant  $\langle, \rangle_1$ .

De plus,  $SpW_1$  et  $O(q_2)$  [resp.  $SpW_2$ ] désignent les images respectives de

$$G = \{(\sigma \otimes_F id_{W_2}, f_\sigma) \in PsB' | \sigma \in SpW_1$$

$$\text{et } f_\sigma(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, \bar{w}_1))q_2(w_2)\}$$

$$\text{et } G' = \{(id_{W_1} \otimes_F \sigma, 0), \sigma \in O(q_2)\} \text{ [resp. } G' = \{(id_{W_1} \otimes_F \sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}]$$

par un élément de  $\mathcal{I}(B', B)$  (cf. p. 7).

2. Avec les notations de l'exemple 2 § 1.1, si  $W$  est identifié à  $W''$  et que  $Q = Q''$ , la paire  $(U(W_1), U(W_2))$ .

Alors  $B$  est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire  $B''$  définie par

$$B''(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) = tr_{D|F}(\xi \langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2)$$

où  $\xi$  est un générateur d'une extension quadratique séparable de  $F$  contenue dans  $D$ .

Les groupes  $U(W_1)$  et  $U(W_2)$  sont les images respectives de

$$G = \{(\sigma \otimes_D id_{W_2}, 0), \sigma \in U(W_1)\} \quad \text{et} \quad G' = \{(id_{W_1} \otimes_D \sigma, 0), \sigma \in U(W_2)\}$$

par un isomorphisme de  $\mathcal{I}(B'', B)$ .

3. Avec les notations de l'exemple 3 § 1.1, si  $W$  est identifié à  $W'''$ , que le centre de  $D$  est une extension séparable de  $F$  et que  $Q = Q'''$ , la paire  $(GL_D X_1, GL_D X_2)$  sauf si  $F = \mathbb{F}_2$  et  $\dim_F X_i \leq 2$  pour  $i = 1$  ou  $2$ .

Alors, notons  $Y$  un sous-espace vectoriel singulier de dimension  $\nu$ , supplémentaire à  $X$  et  $B'''$  la forme bilinéaire définie par :

$$B'''(x + y, x' + y') = \langle x, y' \rangle, \quad x, x' \in X, \quad y, y' \in Y.$$

La forme  $B + B'''$  est alternée et  $GL_D X_1, GL_D X_2$  désignent les images respectives de

$$G = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \sigma \otimes_D id_{X_2} & 0 \\ 0 & {}^t\sigma^{-1} \otimes_D id_{X_2} \end{pmatrix}, 0 \right), \sigma \in GL_D X_1 \right\}$$

$$G' = \left\{ \left( \begin{pmatrix} id_{X_1} \otimes_D \sigma & 0 \\ 0 & id_{X_1} \otimes_D {}^t\sigma^{-1} \end{pmatrix}, 0 \right), \sigma \in GL_D X_2 \right\}$$

par un isomorphisme de  $\mathcal{I}(B''', B)$ .

4. Les paires précédentes dans un groupe pseudosymplectique  $P\mathfrak{S}$ , défini sur une extension finie séparable  $E$  de  $F$ .

**THÉOREME 2.1d.** — *Si  $(G, G')$  est une paire duale, réductive et irréductible de  $PsB$  alors  $(G, G')$  est triviale ou apparaît dans la liste précédente.*

## 2.2. Démonstration du théorème 2.1a et de son corollaire

i) On démontre tout d'abord le

LEMME. —

1. *Si  $K$  est un sous-groupe de  $PsB$ ,  $K \cap Q_a(W)$  est un sous-groupe distingué de  $K$  et un sous- $\overline{K}$ -module de  $Q_a(W)$ .*

2. *Si un sous-groupe  $K'$  de  $PsB$  commute avec  $K$ , alors  $\overline{K}'$  est contenu dans  $\bigcap_{f_a \in K \cap Q_a(W)} O(f_a)$  et  $K \cap Q_a(W)$  est un sous  $\overline{K}\overline{K}'$ -module de  $Q_a(W)$ . Si, en outre,  $(K, K')$  est une paire duale,  $K \cap Q_a(W)$ ,  $K' \cap Q_a(W)$  et  $KK' \cap Q_a(W)$  sont des  $\overline{K}\overline{K}'F$ -modules.*

En effet,  $K \cap Q_a(W)$  est un sous-groupe distingué de  $K$  car  $Q_a(W)$  est distingué dans  $PsB$ .

De plus, le conjugué de  $(id, f_a) \in K \cap Q_a(W)$  par  $(\sigma, f) \in K$  est  $(id, f_a \cdot \sigma)$  qui est encore dans  $K \cap Q_a(W)$  :  $K \cap Q_a(W)$  est un sous  $\overline{K}$ -module de  $Q_a(W)$ .

Soit  $(\sigma', f') \in K'$ . Si  $(id, f_a) \in K$ ,  $(\sigma', f')$  commute avec  $(id, f_a)$  i.e.

$$f_a \cdot \sigma' = f_a$$

donc  $\overline{K}' \subset \bigcap O(f_a)$ , où  $f_a$  parcourt  $Q_a(W) \cap K$ .

Par conséquent,  $K \cap Q_a(W)$  est stable sous l'action de  $\overline{K}\overline{K}'$  i.e.  $K \cap Q_a(W)$  est un  $\overline{K}\overline{K}'$ -module.

On suppose que  $(K, K')$  est une paire duale. Si  $\lambda \in F$  et  $f \in K \cap Q_a(W)$ ,  $(id, \lambda f)$  commute encore avec  $K'$  :  $(id, \lambda f)$  est un élément de  $Q_a(W) \cap K$ . Donc  $K \cap Q_a(W)$  est un  $\overline{K}\overline{K}'F$ -module. De même,  $K' \cap Q_a(W)$  et  $KK' \cap Q_a(W)$  possèdent une structure de  $\overline{K}\overline{K}'F$ -modules.  $\square$

Soit  $(G, G')$  une paire duale réductive et irréductible de  $PsB$ . On remarque que les sous- $\overline{G}\overline{G}'F^2$ -modules de  $Q_a(W)$  sont en bijection avec les sous- $\overline{G}\overline{G}'F$ -modules de  $W$  ou  $W \oplus W$  suivant que  $F$  est fini ou local. Cette correspondance est donnée par :

$$(16) \quad \begin{array}{l} \text{si } F \text{ est fini,} \\ \text{si } F \text{ est local,} \end{array} \quad \begin{cases} Q_a(W) \longrightarrow W \\ f \longmapsto v \text{ tel que } f(w) = \langle w, v \rangle^2 \text{ pour } w \in W \\ \\ Q_a(W) \longrightarrow W \oplus W \\ f \longmapsto v_1 + v_2 \text{ tel que } f(w) = \langle w, v_1 \rangle^2 + \pi_F \langle w, v_2 \rangle^2 \\ \text{pour } w \in W. \end{cases}$$

D'après le lemme précédent,  $GG' \cap \mathcal{Q}_a(W)$  est un sous  $\overline{G} \overline{G}' F$ -module de  $\mathcal{Q}_a(W)$ . S'il est nul,  $G$  et  $G'$  sont isomorphes à des sous-groupes de  $O(Q)$ .

Sinon,  $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$  ou  $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$  n'est pas nul, par exemple  $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ . Alors  $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$  contient un sous- $\overline{G} \overline{G}' F^2$ -module simple de  $\mathcal{Q}_a(W)$ , formé de formes quadratiques additives invariantes sous  $\overline{G}'$ . Par (16), ce sous-module correspond à un sous- $\overline{G} \overline{G}' F$ -module simple  $N$ , de  $W$  ou  $W \oplus W$ , selon que  $F$  est fini ou local, formé d'éléments invariants sous  $\overline{G}'$ .

Si  $W$  est  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple alors  $N$  est isomorphe à  $W$  et  $\overline{G}'$  est trivial. Si  $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$  est nul,  $(G, G')$  est la paire  $(PsB, \{(id, 0)\})$ . Sinon, par le même raisonnement, on montre que  $\overline{G}$  est  $\{id\}$ . La paire  $(G, G')$  est donc une paire duale du groupe abélien  $\mathcal{Q}_a(W)$  donc  $G = G' = \mathcal{Q}_a(W)$ . Elle est irréductible si et seulement si  $W$  est un plan (sinon  $W$  est somme orthogonale de plans stables sous  $\overline{G} \overline{G}' = \{id\}$ ).

Si  $W$  n'est pas  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple, il existe un sous-espace vectoriel  $X$ , de  $W$ , non nul, stable sous  $\overline{G} \overline{G}'$ . Quitte à considérer  $X \cap X^\perp$  au lieu de  $X$ , on peut supposer que  $X$  est totalement isotrope. Par le même raisonnement qu'en 1.5, on prouve que  $\overline{G}$  et  $\overline{G}'$  s'identifient à des sous-groupes de  $GLX$ , qui commutent entre eux et que  $X$  est de dimension maximale. Comme  $(G, G')$  est irréductible,  $X$  est  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple. Par conséquent,  $W$  est somme de composantes simples  $X$  ou  $X^*$ .

Ceci entraîne que tout élément de  $\overline{G}'$  est trivial sur  $X$  ou  $X^*$ . Donc,  $\overline{G}'$  est réduit à  $\{id\}$ . On conclut comme au cas précédent.

ii) On différencie deux cas selon que  $W$  est ou n'est pas  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple.

*Premier cas* :  $W$  est  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple :

$(Z_{O(Q)} Z_{O(Q)}(\overline{G}), Z_{O(Q)}(\overline{G}))$  est une paire duale de  $O(Q)$  telle que

$$\overline{G} \subset Z_{O(Q)} Z_{O(Q)}(\overline{G}) \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset Z_{O(Q)}(\overline{G}).$$

Elle est donc irréductible, de type hermitien donc relativement réductive (cf. § 1.5). Cette paire duale convient.

*Deuxième cas* :  $W$  n'est pas  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple. D'après i), il existe un sous-espace vectoriel  $X$ , totalement isotrope de dimension maximale,  $\overline{G} \overline{G}' F$ -stable et  $\overline{G} \overline{G}' F$ -simple. Donc,  $X$  est singulier ou de dimension 1 et non singulier.

Dans le premier cas, il existe une décomposition de  $X$  en produit tensoriel,  $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$ ,  $D$  contenant  $F$  dans son centre, telle que

$$\overline{G} \subset GL_D X_1, \quad \overline{G}' \subset GL_D X_2.$$

Si  $(GL_D X_1, GL_D X_2)$  est une paire duale, elle convient. Sinon, on prend  $H = Sp(2, \mathbf{F}_2)$  et  $H' = Sp(n, \mathbf{F}_2)$  (cf. § 1.5).

Dans le deuxième cas,  $\overline{G} \overline{G}'$  est réduit à  $\{id\}$ . La paire duale réductive triviale convient.

iii) On note  $(H, H')$  une paire duale relativement réductive et irréductible de  $O(Q)$  telle que

$$\bar{G} \subset H \quad \text{et} \quad \bar{G}' \subset H'.$$

LEMME a. — Si le centre de  $\bar{G} \bar{G}'$  n'est pas trivial, alors  $H^1(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) = 0$ .

En effet, le centre de  $\bar{G} \bar{G}'$  est contenu dans celui de  $HH'$  : il est formé d'homothéties centrales. Le raisonnement du lemme A.2a montre que

$$H^1(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) = 0.$$

On suppose désormais que le centre de  $\bar{G} \bar{G}'$  (qui est aussi celui de  $\bar{G}$  et  $\bar{G}'$ ) est trivial.

LEMME b. — En tant que groupes,  $H^1(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \simeq (H^1(\bar{G}, W))^{\bar{G}'} [F:F^2]$ .

*Démonstration* : On applique la suite de Hochschild-Serre au groupe  $\bar{G} \bar{G}'$  et à son sous-groupe distingué  $\bar{G}$  (prop. A.1) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(\bar{G}', \mathcal{Q}_a(W))^{\bar{G}} &\longrightarrow H^1(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \xrightarrow{r} \\ &H^1(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\bar{G}'} \longrightarrow H^2(\bar{G}', \mathcal{Q}_a(W))^{\bar{G}} \end{aligned}$$

où l'action de  $\bar{G}'$  sur  $H^1(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))$  est donnée par :

si  $\sigma' \in \bar{G}'$  et  $d \in \text{Der}(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))$  alors  $\sigma' \cdot d$  est l'image de la dérivation  $\sigma \mapsto (d(\sigma)) \cdot \sigma'$  dans  $H^1(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))$  ;

et où  $r$  est l'homomorphisme induit par la restriction :

$$\sigma \in \text{Der}(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \mapsto \delta_{|\bar{G}} \in \text{Der}(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W)).$$

Or, pour toute forme quadratique  $f$  de  $\mathcal{Q}_a(W)^{\bar{G}}$ ,  $(id, f)$  commute avec  $G$  donc appartient à  $G'$  : par  $i$ ),  $\mathcal{Q}_a(W)^{\bar{G}}$  est nul. D'où

$$H^1(\bar{G} \bar{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \simeq H^1(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\bar{G}'}$$

De plus,  $\mathcal{Q}_a(W) \simeq W$  ou  $W \oplus W$  selon que  $F$  est parfait ou non, et  $\bar{G} \bar{G}'$  respecte cette décomposition, donc :

$$H^1(\bar{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\bar{G}'} \simeq (H^1(\bar{G}, W))^{\bar{G}'} [F:F^2].$$

□



Montrons donc que  $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$  est nul. On distingue deux cas suivant le type de  $(H, H')$ .

1.  $(H, H')$  est de type hermitien : il existe une décomposition de  $W$  en produit tensoriel hermitien :  $W \simeq W_1 \otimes_D W_2$  telle que

$$\overline{G} \subset H = U(W_1),$$

$$\overline{G}' \subset H' = U(W_2).$$

D'où,

$$H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1 \otimes_D W_2)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1) \otimes_D W_2^{\overline{G}'}$$

On conclut par :

LEMME c. —  $W_2^{\overline{G}'} = \{0\}$ .

*Démonstration* : Il suffit de remarquer que :

– l'irréductibilité de  $(G, G')$  implique que  $\overline{G}'$  ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de  $W_2$ .

– l'action de  $\overline{G}'$  sur  $W_2$  est semi-simple.

Si  $W_2^{\overline{G}'}$  est non nul, un raisonnement analogue à celui du §1.5 démontre l'existence d'une polarisation complète de  $W_2$  stable sous  $\overline{G}'$  :  $W_2 = X_2 \oplus Y_2$ , où  $X_2 \subset W_2^{\overline{G}'}$ . En outre, tout élément  $\sigma'$  de  $\overline{G}'$  agit trivialement sur  $X_2$ , donc sur  $W_2$ . Par conséquent,  $G'$  est  $\{(id, 0)\}$  ce qui est exclu.  $\square$

2.  $(H, H')$  est de type linéaire : soit  $X \oplus Y$  une polarisation complète de  $W$  stable sous  $\overline{G} \overline{G}'$ . Alors,  $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$  s'identifie à deux copies de  $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'}$ . Comme précédemment, il existe une décomposition en produit tensoriel de  $X$  :  $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$  telle que  $\overline{G} \subset GL_D X_1$ ,  $\overline{G}' \subset GL_D X_2$ .

Donc

$$H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, X_1) \otimes_D X_2^{\overline{G}'}$$

L'irréductibilité de  $(G, G')$  implique que  $X_2^{\overline{G}'}$  est nul ou  $X_2$ .

Si  $X_2^{\overline{G}'} = X_2$ ,  $G' = \{(id, 0)\}$ . Ce cas est exclu.

Si  $X_2^{\overline{G}'} = 0$  alors  $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} = \{0\}$ .

Ceci termine la démonstration du théorème.

*Démonstration du corollaire* :

S'il existe  $s \in \mathcal{Q}_a(W)$  tel que  $G \subset sKs^{-1}$  et  $G' \subset sK's^{-1}$  alors  $G = sKs^{-1}$  et  $G' = sK's^{-1}$  (car  $(G, G')$  est une paire duale).

Par hypothèse, tout élément  $g$  de  $\overline{G} \overline{G}'$  s'écrit :  $g = k \cdot (id, \delta(g))$ ,  $k \in KK'$ ,  $\delta(g) \in \mathcal{Q}_a(W)$ . Alors  $\delta$  définit une dérivation sur  $\overline{G} \overline{G}'$  à valeurs dans  $\mathcal{Q}_a(W)$ . Par le théorème précédent (iii),  $\delta$  est nécessairement intérieure : il existe  $f \in \mathcal{Q}_a(W)$  telle que :

$$\forall \sigma \in \overline{G} \overline{G}', \quad \delta(\sigma) = f \cdot (\sigma + 1).$$

Alors  $s = (id, f)$  convient.  $\square$

Compte tenu de la propriété 2.1b, on ne considère désormais que des paires duales réductives, irréductibles, non triviales et qui ne sont pas obtenues par restriction des scalaires.

### 2.3. Relèvements de $SpW_1$ , $U(W_1)$ et $GLX_1$ à $PsB$

On reprend les notations du paragraphe 1.1.

PROPOSITION. — Soit  $H$  un membre d'une paire duale réductrice, irréductible, non triviale de  $O(Q)$ .

1. Il existe un relèvement de  $H$  à  $PsB$ . Ce relèvement est unique à conjugaison près par un élément de  $\mathcal{Q}_a(W)$  sauf si  $H$  est symplectique ou isomorphe à  $GL(3, \mathbb{F}_2)$ , et peut être, si  $H$  est unitaire sur un corps de quaternions.

2. Les relèvements de  $H = SpW_1$  dans  $PsB$  sont (à conjugaison près par un élément de  $\mathcal{Q}_a(W)$ ) paramétrés par les  $[F : F^2]$ -uplets  $(q_{2,i})_{i \in I}$  de formes quadratiques sur  $W_2$  dont la forme alternée associée est  $\langle, \rangle_2$ , de la façon suivante :

supposons que  $B(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) = b_1(w_1, w'_1) \langle w_2, w'_2 \rangle_2$  où  $b_1(w_1, w'_1) + b_1(w'_1, w_1) = \langle w_1, w'_1 \rangle_1$ .

$$Sp_{(q_{2,i})_{i \in I}} W_1 = \{(\sigma \otimes_F id, f_\sigma) \in PsB \mid \sigma \in SpW_1, \text{ et} \\ f_\sigma(w_1 \otimes w_2) = \sum_{i \in I} p_i(b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1)) q_{2,i}(w_2)\}$$

où  $|I| = [F : F^2]$ ,  $(\varepsilon_i)_{i \in I}$  est une base de  $F$  sur  $F^2$  et  $p_i$  la projection :  $p_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j} \varepsilon_i$ .

3. Les relèvements de  $H = GL(3, \mathbb{F}_2)$  sont paramétrés (à conjugaison près par un élément de  $\mathcal{Q}_a(W)$ ) par les couples de formes quadratiques additives  $\mathcal{Q}_a(X) \times \mathcal{Q}_a(Y)$  :

$$GL_{q,q'}(3, \mathbb{F}_2) = \{(\sigma, f_a) \in PsB \mid \sigma \in GL(3, \mathbb{F}_2) \text{ et} \\ f_a(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2) = \langle y_1, d_{X_1} \sigma^{-1} \rangle^2 q(x_2) + \langle x_1, d_{Y_1} {}^t \sigma \rangle^2 q'(y_2)\}$$

où  $d_{X_1}$  et  $d_{Y_1}$  sont définies au paragraphe A.2.

Remarque : Cet énoncé contient plus de renseignements que nécessaire. Seule l'existence de ces relèvements est utilisée par la suite.

Suit la démonstration de la proposition :

*Existence de relèvements :*

Dans le cas 2, on vérifie aussitôt que les groupes  $Sp_{(q_{2,i})_{i \in I}} W_1$  sont des sous-groupes de  $PsB$ .

Dans les autres cas, on choisit  $B$  de la façon suivante :

Si  $H$  est linéaire,  $B(x + y, x' + y') = \langle x, y' \rangle$ ,  $x, x' \in X$ ,  $y, y' \in Y$ .

Si  $H$  est unitaire,  $B(w_1 \otimes_D w_2, w'_1 \otimes_D w'_2) = tr_{D|F}(\xi \langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle w'_2, w_2 \rangle_2)$

où  $\xi$  désigne un générateur d'une extension quadratique séparable contenue dans  $D$ .

Alors,  $\{(\sigma, 0), \sigma \in H\}$  est un relèvement de  $H$  à  $PsB$ .

*Exhaustivité* : On compte les relèvements de  $H$  à l'aide de  $H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$ .

- Cas hermitien : En tant que groupes,

$$\begin{aligned} H^1(H, \mathcal{Q}_a(W)) &\simeq H^1(H, W)^{[F:F^2]} \simeq H^1(H, W_1 \otimes_D W_2)^{[F:F^2]} \\ &\simeq (H^1(H, W_1) \otimes_D W_2)^{[F:F^2]} \text{ car } W_2^H = W_2 \\ &\simeq H^1(H, W_1) \otimes_D \mathcal{Q}_a(W_2). \end{aligned}$$

Or, on connaît  $H^1(H, W_1)$  (cf. § A.3 et A.4).

Si  $H$  est unitaire sur un corps commutatif  $H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$  est donc trivial : le relèvement de  $H$  à  $PsB$  est bien unique.

Si  $H$  est symplectique, l'isomorphisme de groupes entre  $H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$  et  $H^1(H, W_1) \otimes_F \mathcal{Q}_a(W_2)$  est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H^1(H, W_1) \otimes_F \mathcal{Q}_a(W_2) & \longrightarrow H^1(H, \mathcal{Q}_a(W)) \\ \delta \otimes f & \longmapsto D \text{ où } (D\sigma)(\sum_k w_1^k \otimes w_2^k) \\ & = \sum_k \langle w_1^k, \delta\sigma^{-1} \rangle_1^2 \cdot f(w_2^k) \end{array} \right.$$

avec  $\sigma \in H$ ,  $w_i^k \in W_i$ .

On identifie  $H^1(H, W_1) \otimes_F \mathcal{Q}_a(W_2)$  à  $\mathcal{Q}_a(W_2)^{[F:F^2]}$  en choisissant la base  $(\delta_i)_{i \in I}$  de  $H^1(H, W_1)$  (cf. § A.4).

De plus,  $\mathcal{Q}_a(W_2)^{[F:F^2]}$  est en bijection avec les  $[F : F^2]$ -uplets d'éléments de  $\mathcal{Q}(W)$  dont la forme alternée associée est donnée, par exemple  $\langle, \rangle_2$ .

On a alors le paramétrage voulu.

- Cas linéaire. On procède comme précédemment :

$$\begin{aligned} H^1(H, \mathcal{Q}_a(W)) &\simeq H^1(H, W)^{[F:F^2]} \simeq H^1(H, X_1 \otimes_D X_2 \oplus Y_1 \otimes_D Y_2)^{[F:F^2]} \\ &\simeq (H^1(H, X_1 \otimes_D X_2) \oplus H^1(H, Y_1 \otimes_D Y_2))^{[F:F^2]} \end{aligned}$$

car  $H$  stabilise  $X_1 \otimes_D X_2$  et  $Y_1 \otimes_D Y_2$  d'où

$$H^1(H, \mathcal{Q}_a(W)) \simeq H^1(H, X_1) \otimes_D \mathcal{Q}_a(X_2) \oplus H^1(H, Y_1) \otimes_D \mathcal{Q}_a(Y_2).$$

Si  $H \neq GL(3, \mathbb{F}_2)$ ,  $H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$  est donc nul, (cf. § A.2).

Si  $H = GL(3, \mathbb{F}_2)$ ,  $H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$  s'identifie à  $\mathcal{Q}_a(X_2) \oplus \mathcal{Q}_a(Y_2)$  par :

$$(f, f') \in \mathcal{Q}_a(X_2) \times \mathcal{Q}_a(Y_2) \longrightarrow D \in H^1(H, \mathcal{Q}_a(W))$$

où, pour tout  $\sigma \in H$ , tout  $x_i^k \in X_i$ ,  $y_i^k \in Y_i$ ,

$$D\sigma(\sum_k x_1^k \otimes x_2^k + y_1^k \otimes y_2^k) = \sum_k (\langle y_1^k, d_{X_1} \sigma^{-1} \rangle^2 f(x_2^k) + \langle x_1^k, d_{Y_1} \sigma \rangle^2 f'(y_2^k)).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition.

#### 2.4. Calculs des commutants et bicommutants

On différencie trois cas selon la nature de  $G$  : unitaire, symplectique ou linéaire. Les définitions de  $B$  dans les différents cas sont celles du paragraphe 2.3. Dans le cas où  $G$  est symplectique,  $B$  dépend du choix de  $b_1$  : pour faciliter les calculs, on choisit  $b_1$  définissant la forme quadratique  $q_1$  du lemme a § A.4.

Les notations sont empruntées au paragraphe 1. On note  $G'$  le commutant de  $G$  dans  $PsB$ .

*Cas unitaire* :  $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in U(W_1)\}$ . Soit  $(\sigma', f') \in G'$ . Comme  $\overline{G}' \subset U(W_2)$ ,  $f'$  est nécessairement additive et invariante sous  $\overline{G}$ .

Soit  $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$  une base orthogonale de  $W_1$  et  $s_i$  une quasi-symétrie de vecteur  $e_i$ . Puisque  $(\sigma', f')$  commute avec  $s_i$ , on obtient :

$$f'((s_i + id)e_i \otimes w) = 0 \text{ pour tout } w \in W_2$$

$$\iff f'(e_i \otimes w) = 0, \text{ pour tout } w \in W_2 \text{ car } (s_i + id)e_i \text{ est non nul, colinéaire à } e_i$$

$$\iff f' = 0 \text{ sur } W.$$

Ainsi  $G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in U(W_2)\}$ .

Par symétrie des rôles de  $G$  et  $G'$ , le bicommutant de  $G'$  est  $G$  :  $(G, G')$  est une paire duale de  $PsB$ .

Supposons qu'il existe un sous-groupe isomorphe à un groupe unitaire qui n'est pas conjugué à  $G$  par un élément de  $Q_a(W)$ . Par le corollaire 2.1.b, ce groupe ne peut pas être une composante d'une paire duale réductrice et irréductible de  $PsB$ .

*Cas symplectique* : On étudie, tout d'abord le cas où  $G = Sp_{q_2, q_2} W_1$ . Alors  $\overline{G}'$  est contenu dans  $SpW_2$ . Soit  $(\sigma', f') \in G'$ . Alors

$$(17) \quad f' \text{ est additive car } G' \subset PsB,$$

$$(18) \quad f' + f_\sigma \cdot \sigma' = f_\sigma + f' \cdot \sigma \text{ pour tout } (\sigma, f_\sigma) \in G$$

i.e.  $f'((\sigma + 1)w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))(q_2(\sigma' w_2) + q_2(w_2))$ ,  $w_i \in W_i$ ,  $\sigma \in SpW_1$ .

En particulier, si  $\sigma \in O(q_1) \subset SpW_1$

$$f'((\sigma + id)w_1 \otimes w_2) = 0.$$

Par choix de  $q_1$ ,  $O(q_1)$  contient un élément  $\sigma$  tel que  $(\sigma + id)$  soit inversible. Donc  $f' = 0$ .

• Si  $F \neq \mathbf{F}_2$  ou  $\dim_F W_1 > 2$ , il existe un élément  $\sigma \in SpW_1$ , n'appartenant pas à  $O(q_1)$ . On déduit alors de (18) que  $\sigma' \in O(q_2)$ .

Ainsi  $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\} \subset G' : G' = \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\}$ .

- Si  $F = \mathbf{F}_2$ , et  $\dim_F W_1 = 2$ ,  $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma \in SpW_2\} \subset G'$ , donc

$$G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}.$$

Calculons  $G''$ , le commutant de  $G'$ .

- Si  $F \neq \mathbf{F}_2$  ou  $\dim_F W_1 > 2$ ,  $\overline{G''}$  est contenu dans  $Z_{O(Q)}(O(q_2))$ . On déduit du lemme 1.3 que

$$Z_{O(Q)}(O(q_2)) \begin{cases} = SpW_1 & \text{si } (W_2, q_2) \text{ n'est pas un plan hyperbolique sur } \mathbf{F}_2; \\ \text{contient } SpW_1 \text{ et } O(q_2) & \text{si } (W_2, q_2) \text{ est un plan hyperbolique sur } \mathbf{F}_2. \end{cases}$$

Dans le premier cas, on déduit que  $\overline{G''} = SpW_1$ . Soit  $(\sigma, f) \in G''$ . Alors

$$f = f_\sigma + f_a, \quad f_a \in \mathcal{Q}_a(W_1)$$

$$\text{et } f_a \cdot \sigma' = f_a \text{ pour tout } \sigma' \in O(q_2) \text{ i.e. } f_a = 0.$$

Donc,  $G'' = \{(\sigma, f_\sigma), \sigma \in SpW_1\} = G$ .

La paire  $(G, G')$  est duale.

Dans le deuxième cas,  $G''$  contient  $G$  et  $O(q_2)$ . De plus,  $O(q_2)$  permute les deux copies de  $W_1$  : il n'est donc pas contenu dans  $G$ . Ainsi

$$G'' \supsetneq G$$

et on n'obtient pas de paire duale.

- Si  $F = \mathbf{F}_2$  et  $\dim W_1 = 2$ ,  $G' = SpW_2$  a pour commutant  $O(q_1)$  et  $O(q_1) = SpW_1$  d'où  $(SpW_1, SpW_2)$  est une paire duale.

On a donc les paires duales :

$$(Sp_{q_2}W_1, O(q_2)) \quad \text{où } W_1 \text{ n'est pas un } \mathbf{F}_2\text{-espace vectoriel de dimension 2} \\ \text{et } (W, q_2) \text{ n'est pas un plan hyperbolique sur } \mathbf{F}_2$$

$$(Sp_{q_2}W_1, SpW_2) \quad \text{où } W_1 \text{ est un } \mathbf{F}_2\text{-espace vectoriel de dimension 2.}$$

On étudie maintenant le cas où  $G = Sp_{q_{2,1}, q_{2,2}}W_1$  où  $q_{2,1} \neq q_{2,2}$  ( $F$  est local).

*Remarque* : Soit  $i$  un relèvement de  $SpW_1$  à  $PsB$ . Le groupe  $SpW_1$  contient  $O(q_1)$  et la restriction d'une dérivation sur  $SpW_1$  à  $O(q_1)$  est intérieure (cf. § A.4). L'image par  $i$  de  $O(q_1)$  est à conjugaison près par un élément de  $\mathcal{Q}_a(W)$ , le sous-groupe  $\{(\sigma, f_\sigma) \in PsB, \sigma \in O(q_1)\}$ . Il suffit donc de considérer les relèvements  $i$  tels que  $i(O(q_1)) = \{(\sigma, f_\sigma) \in PsB, \sigma \in O(q_1)\}$ .

Ainsi,  $G'$  est contenu dans le commutant de  $O(q_1) = \{(\sigma, f_\sigma), \sigma \in O(q_1)\}$  qui, d'après ce qui précède est  $Sp_0W_2 = \{(\sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}$ .

Soit  $(\sigma', 0) \in G'$ . Alors  $f_\sigma = f_\sigma \cdot \sigma'$  pour tout  $(\sigma, f_\sigma) \in G$ , c'est-à-dire

$$\sum_{i=1,2} p_i(q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1))(q_{2,i}(\sigma' w_2) + q_{2,i}(w_2)) = 0$$

pour tout  $\sigma \in SpW_1$ ,  $w_i \in W_i$ .

On peut choisir  $w_1 \in W_1$  et  $\sigma \in SpW_1$  pour que  $q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1) \in F^2 \setminus \{0\}$  ou  $\pi_F F^2 \setminus \{0\}$  (car  $q_1$  est déployée). D'où les deux conditions :

$$q_{2,i}(\sigma' w_2) = q_{2,i}(w_2), \quad w_2 \in W_2, \quad i = 1, 2.$$

Par conséquent,

$$(\sigma', 0) \in O(q_{2,1}) \cap O(q_{2,2}) \quad \text{et} \quad G' = O(q_{2,1}) \cap O(q_{2,2}).$$

Le bicommutant  $G''$  de  $G$  contient le commutant de  $O(q_{2,1})$  et  $O(q_{2,2})$ , c'est-à-dire  $Sp_{q_{2,1}, q_{2,1}} W_1$  et  $Sp_{q_{2,2}, q_{2,2}} W_1$  d'où

$$(id, (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1)) \cdot (q_{2,1} + q_{2,2})(w_2)) \in G'', \quad \sigma \in SpW_1$$

et  $G'' \neq G$ .

Le groupe  $G$  n'est pas une composante d'une paire duale.

*Cas linéaire* : Soit  $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in GL_D X_1\}$ . Alors  $\overline{G}'$  est contenu dans  $GL_D X_2$ . Donc  $(\sigma, f) \in G'$  si et seulement si

$$\begin{cases} \sigma \in GL_D X_2 \\ f \text{ est additive et invariante sous } \overline{G}. \end{cases}$$

Or  $\overline{G}$  agit transitivement sur  $X_1$  et  $X_1^*$ . La forme quadratique  $f$  est donc nulle sur chaque copie de  $X_1 \oplus X_1^*$  donc  $f$  est nulle sur  $W$ . D'où

$$G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in GL_D X_2\}.$$

Par symétrie, le commutant de  $G'$  est  $G$ . On obtient donc une paire duale de  $PsB$  sous les hypothèses de la proposition 1.1.

Si  $G = GL_{q,q'}(3, F_2)$ ,  $q \neq q'$ ,  $G$  ne peut être une composante d'une paire duale réductrice et irréductible, par le corollaire 2.1.b.

La proposition 2.1c est la synthèse des résultats obtenus au § 2.4.

### 2.5. Démonstration du théorème 2.1d

On peut supposer que  $(G, G')$  est une paire réductrice et irréductible non triviale de  $PsB$ .

Soit  $(H, H')$  une paire duale réductrice de  $O(Q)$  telle que :

$$\overline{G}' \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H' \quad (\text{théorème 2.1a.ii}).$$

Si  $(H, H')$  n'est pas  $(SpW_1, SpW_2)$  alors par le corollaire 2.1b,  $(G, G')$  est un des relèvements de  $(H, H')$  à  $PsB$  décrits dans la proposition 2.1c.

On suppose donc que  $H = SpW_1$  et  $H' = SpW_2$ . Grâce au corollaire 2.1b, il suffit d'établir le

LEMME. — Si  $\overline{G} \subset H$  et  $\overline{G}' \subset H'$ , alors  $\overline{G} \subset O(q_1)$  ou  $\overline{G}' \subset O(q_2)$  pour une certaine forme quadratique  $q_i$  sur  $W_i$ , dont la forme alternée associée est  $\langle, \rangle_i$ .

*Démonstration* : Montrons d'abord que  $SpW_2 = \bigcup_q O(q)$  où  $q$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{E}$  des formes quadratiques sur  $W_2$  dont la forme alternée est  $\langle, \rangle_2$ .

Soit  $\sigma \in SpW_2$ . On choisit une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $W_2$  telle que  $(e_{r+1}, \dots, e_m)$  soit une base de  $\text{Ker}(1 + \sigma)$ . La matrice de  $(\sigma - id)$  dans cette base est de la forme

$$m = \left( \underbrace{\Sigma}_r \mid \underbrace{0}_{m-r} \right) \quad \text{où } \Sigma \text{ est une matrice } m \times r \text{ de rang } r.$$

On note  $\Sigma_2$  la matrice obtenue à partir de  $\Sigma$  en élevant chaque coefficient au carré. Alors,  $\Sigma_2$  est de même rang  $r$  que  $\Sigma$  puisque, pour toute matrice carrée  $M$ , on a

$$\det M_2 = (\det M)^2.$$

Si  $q \in \mathcal{E}$ ,  $q$  est invariante sous  $\sigma$  si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad q(\sigma e_i) = q(e_i)$$

$$\text{i.e. } {}^t\Sigma_2 \cdot \begin{pmatrix} q(e_1) \\ \vdots \\ q(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \quad \text{où les } \alpha_i \text{ ne dépendent que de } \sigma.$$

Or, le système

$${}^t\Sigma_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$

possède au moins une solution : il existe donc  $q \in \mathcal{E}$  telle que  $\sigma \in O(q)$ .

D'où,  $SpW_2 \subset \bigcup_{q \in \mathcal{E}} O(q)$ . L'inclusion inverse étant claire, on a l'égalité.

Ainsi,  $\overline{G}' = \bigcup_{q \in \mathcal{E}} \overline{G}'_q$  avec  $\overline{G}'_q = \overline{G}' \cap O(q)$ .

Quitte à transporter la situation par un isomorphisme convenable, on peut supposer  $B = b_1 \langle, \rangle_2$  où  $b_1$  est une forme bilinéaire définissant  $\langle, \rangle_1$ .

Soit  $q \in \mathcal{E}$ . Alors,  $O(q)$  se relève à  $PsB$  par :  $\sigma \mapsto (\sigma, 0)$ . Ce relèvement se prolonge à  $SpW_1 O(q)$  par :

$$\sigma \in SpW_1 \mapsto (\sigma, f_{q,\sigma}) \in PsB \quad \text{où } f_{q,\sigma}(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))q(w_2).$$

Pour chaque  $q \in \mathcal{E}$ , on définit donc une dérivation  $d_q$  de  $\overline{G} \overline{G}'_q$  à coefficients dans  $\mathcal{Q}_a(W)$ .

Soit  $\delta_q$  son image dans  $H^1(\overline{G} \overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W))$ . Par la proposition A.1 appliquée à  $\overline{G} \overline{G}'_q$  et son sous-groupe  $\overline{G}'_q$ ,

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}'_q}) \longrightarrow H^1(\overline{G} \overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W)) \longrightarrow H^1(\overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}} = 0.$$

Ainsi,  $\delta_{q|\overline{G}}$  est à coefficients dans  $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}'}$  : il en est de même pour  $d_{q|\overline{G}}$ .

Fixons une forme quadratique  $q$  de  $\mathcal{E}$ .

Considérons une autre forme quadratique  $q'$  de  $\mathcal{E}$  et  $d_{q'}$  la dérivation de  $\overline{G}^{\overline{G}'}$ , définie comme précédemment. Pour tout  $\sigma \in \overline{G}$ ,

$$\begin{aligned} (d_q + d_{q'}) (\sigma) &= f_{q,\sigma} + f_{q',\sigma} \\ \iff d_q(\sigma) + f_{q,\sigma} &= d_{q'}(\sigma) + f_{q',\sigma} \end{aligned}$$

Le membre de droite est invariant sous  $\overline{G}'$ . D'où, pour tout  $\sigma \in \overline{G}$ , et toute forme quadratique  $q'$  de  $\mathcal{E}$ , la forme quadratique  $d_q(\sigma) + f_{q,\sigma}$  est invariante sous  $\overline{G}'$  : elle est donc invariante sous  $\overline{G}$ .

Si  $\overline{G}$  conserve la forme quadratique  $q_1 : w_1 \mapsto b_1(w_1, w_1)$  alors

$$\overline{G} \subset O(q_1).$$

Sinon, il existe  $\sigma \in \overline{G}$  et  $w_1 \in W_1$  tels que

$$q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1) \neq 0.$$

Alors, la forme quadratique définie sur  $W_2$  par

$$q_2(w_2) = \frac{1}{q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1)} d_q(\sigma)(w_1 \otimes w_2) + q(w_2), \quad w_2 \in W_2,$$

est un élément de  $\mathcal{E}$ , invariant sous  $\overline{G}'$  i.e.  $\overline{G}' \subset O(q_2)$ . □



### § 3. Restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives

Si  $G$  est un sous-groupe de  $PsB$ , on note  $\tilde{G}$  son image réciproque dans  $\tilde{PsB}$ .

#### 3.1. Réductions du problème

i) D'après l'étude faite au paragraphe I § 2, l'extension métaplectique n'est pas scindée au-dessus des paires duales triviales.

ii) Supposons que  $(G, G')$  soit une paire duale réductives, obtenue par restriction des scalaires. Il existe donc une extension convenable  $E$  de  $F$ , un homomorphisme  $tr : E \rightarrow F$  tels que :

- la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto tr(xy)$  soit non dégénérée.
- $W$  est muni d'une structure de  $E$ -espace vectoriel et d'une forme bilinéaire  $B_E$  telle que  $tr \circ B_E = B$ .

Soit  $\psi_E$  le caractère de  $E$  défini par  $\psi_E = \psi \circ tr$ . Alors

$$\psi_E \circ B_E = \psi \circ B$$

et en utilisant le modèle décrit en I § 2.2, on montre que :

$$r_{\psi_E} = r_{\psi}|_{PsB_E}$$

où  $r_{\psi_E}$  (resp.  $r_{\psi}$ ) est la représentation métaplectique de  $PsB_E$  (resp.  $PsB$ ) relativement au caractère  $\psi_E$  (resp.  $\psi$ ).

*Démonstration :* On définit le caractère  $\psi_{X,E}$  du sous-groupe  $X \times E$  de  $H(B_E)$  par :

$$\begin{aligned} \psi_{X,E}((x, 0)) &= \psi_X((x, 0)) \quad \text{pour tout } x \in X \\ \text{et } \psi_{X,E}((0, t)) &= \psi_E(t) \quad \text{pour tout } t \in E. \end{aligned}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(X, \psi_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(X, \psi_{X,E}) \\ \phi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \phi' \text{ telle que } \phi'(x + y, t) = \phi(x + y, trt) \end{array} \right.$$

On note  $i$  cet isomorphisme. Il entrelace les représentations  $r_{\psi}|_{PsB_E}$  et  $r_{\psi_E}$ .

En effet, soit  $s = (\sigma, f) \in PsB_E$ . On note  $s' = (\sigma, trf)$  son image dans  $PsB$ . On a :

$$\begin{aligned} \{w_s \in W / \forall x \in X \cap \sigma X, \psi_{X,E}(x)\psi_{X,E}(s^{-1}x)\psi_E(B_E(x, x)) &= \psi_E(\langle x, w_s \rangle)\} \\ = \{w_{s'} \in W / \forall x \in X \cap \sigma X, \psi_X(x)\psi_X(s'^{-1}x)\psi_X(B(x, x)) &= \psi(\langle x, w_{s'} \rangle)\}. \end{aligned}$$

D'où si  $\sigma \in StabX$ , pour tout  $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$ , tout  $h \in H(B_E)$ ,

$$r_{\psi_E}(s)i(\phi)(h) = i(\phi)(s^{-1}(w_s h)) = \phi(s'^{-1}(w_s(w, trt))) = i(r_{\psi}(s')\phi)(h).$$

Si  $\sigma \notin \text{Stab} X$ , pour tout  $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$ , pour tout  $h \in H(B_E)$ , un calcul analogue montre que :  $r_{\psi_E}(s)(i(\phi))(h) = i(r_{\psi}(s')\phi)(h)$ .

Ainsi

$$r_{\psi_E} \circ i = i \circ r_{\psi|_{PsB_E}}.$$

Par conséquent, si l'image réciproque de  $GG'$  dans  $\widetilde{PsB}_E$  est scindée, elle l'est encore dans  $\widetilde{PsB}$ .

Les cas où  $E = F$  suffisent.

On ne considère donc que les paires duales réductives et irréductibles, non triviales et non obtenues par restriction des scalaires. On les regarde dans un groupe pseudosymplectique  $PsB$  de notre choix, le résultat étant indépendant de ce choix. On prend, dans chaque cas, la forme bilinéaire  $B$  définie au paragraphe 2.4.

iii) La dernière réduction se fait grâce au

LEMME. — Soient  $K$  et  $K'$  deux sous-groupes de  $PsB$ . On suppose que

1)  $K$  et  $K'$  commutent,

2) pour tout élément  $(\sigma, f) \in K$ , la restriction de  $\psi \circ f$  à  $\text{Ker}(id + \sigma)$  est triviale.

Alors  $\widetilde{K}$  et  $\widetilde{K}'$  commutent dans  $\widetilde{PsB}$ .

Si  $(G, G')$  est une paire duale réductrice, irréductible, non triviale, alors  $G$  et  $G'$  vérifient les hypothèses du lemme. En effet, par le choix de  $B$ , l'un au moins des deux groupes, par exemple  $G$  est de la forme  $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in \overline{G}\}$ . La condition 2 est satisfaite ainsi que la première.

Ainsi  $\widetilde{G}$  et  $\widetilde{G}'$  commutent dans  $\widetilde{PsB}$ . Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de  $G$  et de  $G'$ , alors elle l'est au-dessus de  $GG'$ .

Il suffit donc d'étudier la restriction de l'extension métaplectique au-dessus de chaque composante.

Auparavant, démontrons le lemme ci-dessus. La démonstration est semblable à celle des autres caractéristiques [M.V.W Ch. II].

Dans un premier temps, on définit pour chaque élément  $s$  de  $PsB$  satisfaisant la deuxième hypothèse, un élément  $M$  tel que  $(s, M) \in \widetilde{PsB}$ .

Dans un deuxième temps, on montre que si  $s'$  est un élément de  $PsB$  qui commute avec  $s$  alors un élément de  $\widetilde{PsB}$  au-dessus de  $s'$  commute avec  $(s, M)$ . D'où, le lemme précédent.

Soit  $s = (\sigma, f) \in PsB$  tel que  $\psi \circ f = 1$  sur  $\text{Ker}(id + \sigma)$ .

Alors, la fonction  $w \mapsto \psi(Q(w) + f(w) + B(\sigma w, w))$  est constante sur les classes modulo  $\text{Ker}(id + \sigma)$ . On définit  $M$  comme suit.

Soit  $dw$  une mesure de Haar sur l'espace vectoriel  $W/\text{Ker}(id + \sigma)$ .

– Si  $F$  est fini

$$M \cdot v = \int_{W/\text{Ker}(1+\sigma)} \psi(Q(w) + \langle \sigma w, w \rangle) \rho_{\psi}((s + id)w) \cdot v dw, \quad v \in \mathcal{V}$$

où  $(s + id)w$  désigne l'élément  $s(w, 0) \cdot (w, 0)$  de  $H(B)$ .

- Si  $F$  est local, pour un réseau  $L$  de  $W/\text{Ker}(id + \sigma)$ , on définit

$$M_L v = \int_L \psi(Q(w) + \langle \sigma w, w \rangle) \rho_\psi((s + id)w) \cdot v dw, v \in \mathcal{V}$$

Pour tout  $v$ , il existe un réseau  $L_v$  de  $W/\text{Ker}(id + \sigma)$  tel que pour tout réseau  $L$  contenant  $L_v$ ,  $M_L v$  est indépendant de  $L$ . Soit  $M$  cet élément.

Tout le reste de la démonstration se déroule comme dans [M.V.W Ch II].

### 3.2. Scindage au-dessus des composantes des paires duales

*Cas de  $GLX_1$  et  $GLX_2$ .*

On est alors dans la situation décrite en I §2.2.1. Les groupes  $GLX_1$  et  $GLX_2$  sont des sous-groupes de  $GLX$  et  $\widetilde{PsB}$  est scindée au-dessus de  $GLX$  donc également au-dessus de ces sous-groupes.

*Cas de  $SpW_1$  et  $O(q_2)$ .*

Comme précédemment,  $O(q_2)$  est un sous-groupe de  $GLX$ . L'extension métaplectique est scindée sur  $O(q_2)$ . Le même argument est valable pour montrer que la restriction de  $\widetilde{PsB}$  à  $\widetilde{SpW}_1$  est scindée quand  $q_2$  est déployée.

En effet, il suffit de considérer le groupe pseudosymplectique  $PsB'$  où

$$B'(w_1 \otimes w_2, w'_1 \otimes w'_2) = \langle w_1, w'_1 \rangle_1 \langle x_2, y'_2 \rangle_2$$

avec  $X_2 \oplus Y_2 = W_2$  une polarisation complète en espaces singuliers,

$$w_2 = x_2 + y_2 \text{ et } w'_2 = x'_2 + y'_2, x_2, x'_2 \in X_2, y_2, y'_2 \in Y_2.$$

Alors,  $X' = W_1 \otimes_F X_2$  est singulier et il existe un isomorphisme entre  $PsB$  et  $PsB'$  tel que l'image de  $SpW_1$  soit contenue dans  $GLX'$ .

Si  $q_2$  n'est pas déployée, on considère l'espace vectoriel quadratique  $W'_2$ , somme orthogonale de deux copies de  $W_2$ , muni de la forme quadratique déployée  $q'_2$  telle que, pour tout  $(w, w') \in W'_2$ ,  $q'_2(w, w') = q_2(w) + q_2(w') = b_2(w, w) + b_2(w', w')$ . Le groupe  $SpW_1$  se plonge dans  $Ps(\langle, \rangle_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$  en prolongeant chaque élément par  $(id, 0)$  sur le deuxième facteur. D'après ce qui précède, l'image réciproque de  $SpW_1$ , dans  $\widetilde{Ps}(\langle, \rangle_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$  est scindée et par le lemme I 2.3b, l'extension métaplectique  $\widetilde{PsB}$  au-dessus de  $SpW_1$  est encore scindée.

Dans tous les cas, la restriction de l'extension métaplectique à  $SpW_1$ ,  $O(q_2)$  et  $SpW_2$  est scindée.

*Cas de  $U(W_1)$  et  $U(W_2)$*

Quand  $F$  est fini, cette question a été étudiée par P. Gérardin [G] : l'extension métaplectique restreinte à  $U(W_i)$  est scindée.

On suppose donc que  $F$  est un corps local et on se ramène au cas où  $W_1$  est un plan hermitien hyperbolique sur une extension quadratique  $F'$  de  $F$  et  $W_2$  est de dimension 1.

i)  $W_2$  est un  $D$ -espace vectoriel muni d'une forme hermitienne non dégénérée. L'existence d'une base orthogonale et le lemme I.2.3a permettent de supposer que  $\dim_D W_2 = 1$ .

ii) Supposons que  $D$  soit un corps de quaternions sur  $F$ . Alors  $W_2$  s'identifie à  $D$  muni de la forme hermitienne :  $\langle d, d' \rangle_2 = \overline{d}ad'$  où  $a \in F$ .

Le corps  $D$  s'écrit :

$$D = F(\xi_1) + F(\xi_1)\xi_2$$

où  $\xi_1$  engendre une extension quadratique séparable de  $F$  notée  $F'$ , et  $\xi_2$  engendre une extension inséparable, quadratique de  $F$ .

Soit  $p : \begin{cases} D & \longrightarrow F' \\ x + y\xi_2 & \longmapsto x \end{cases}$ . L'espace vectoriel  $(W_1, p(\langle, \rangle_1 a))$  est un espace vectoriel hermitien sur  $F'$  noté  $W'$ . On a

$$\langle, \rangle = \text{tr}_{F'|F} p(\langle, \rangle_1 a)$$

$$\text{et } U(W_1) \subset U(W') \subset P_s B.$$

S'il existe une section de  $U(W')$  dans  $\tilde{U}(W')$ , alors sa restriction à  $U(W_1)$  définit une section de  $U(W_1)$  dans  $\tilde{U}(W_1)$  : il suffit donc de montrer que  $\tilde{U}(W')$  est scindée au-dessus de  $U(W')$ .

On suppose désormais que  $D = F'$  est une extension quadratique séparable de  $F$ .

iii) En considérant l'espace vectoriel  $W_1 \oplus W_1$  muni de la forme hermitienne

$$\ll (w, w'), (v, v') \gg = \langle w, v \rangle_1 + \langle w', v' \rangle_1, \quad w, w', v, v' \in W_1$$

et à l'aide du lemme I.2.3b, on se restreint au cas où  $W_1$  est hermitien hyperbolique.

Supposons que  $W_1$  soit de dimension supérieure ou égale à 4. Alors  $SU(W_1)$  est le groupe des commutateurs de  $U(W_1)$  [D.J, p 47-48] et  $H^1(SU(W_1), \mathbb{C}^\times)$  est donc trivial. On applique alors la suite de Hochschild-Serre à  $U(W_1)$  est son sous-groupe distingué  $SU(W_1)$  :

$$0 \longrightarrow H^2(F'^1, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(U(W_1), \mathbb{C}^\times) \longrightarrow H^2(SU(W_1), \mathbb{C}^\times).$$

L'homomorphisme d'inflation est :  $\chi \longmapsto \chi \circ (\text{dét}, \text{dét})$ . Or, par le théorème 9.5 de [P.R],  $SU(W_1)$  n'a pas d'extension d'ordre 2. Il existe donc un élément  $\chi$  de  $H^2(F'^1, \mathbb{C}^\times)$  tel que le cocycle  $c$  de  $\tilde{U}(W_1)$  s'écrive :  $c(\sigma, \sigma') = \chi(\text{dét } \sigma, \text{dét } \sigma')$ , pour tout  $\sigma, \sigma'$  de  $U(W_1)$ . Considérons  $V$  un plan hyperbolique contenu dans  $W_1$ . Le groupe  $U(V)$  s'identifie à un sous-groupe de  $U(W_1)$  en prolongeant trivialement chaque élément et la restriction de  $\tilde{U}(W_1)$  à  $U(V)$  est isomorphe à  $\tilde{U}(V)$ .

Si  $\tilde{U}(V)$  est triviale alors, pour tout  $\sigma, \sigma'$  de  $U(V)$ ,

$$c(\sigma, \sigma') = 1 \quad \text{i.e. } \chi(\text{dét } \sigma, \text{dét } \sigma') = 1$$

d'où,  $\chi$  est trivial. Par suite,  $c$  est trivial.

Il reste à prouver que  $\tilde{U}(W_1)$  est scindée quand  $W_1$  est un plan hermitien hyperbolique.

iv) On est donc dans le cas où

$$W \simeq W_1 \otimes_{F'} F' \simeq W_1$$

et  $B(w_1, w'_1) = \text{tr}_{F'|F}(\xi < w_1, w'_1 > a_1)$ ,  $a_1 \in F$  et  $(1, \xi)$  est une base de  $F'$  sur  $F$ .

Quitte à transformer  $\xi$  en  $\xi a_1$ , on peut supposer  $a_1 = 1$ .

Le groupe  $U(W_1)$  s'identifie au sous-groupe de  $GL(2, F')$  engendré par  $SL(2, F)$  et

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}, d \in F'^* \right\}.$$

Pour que  $\tilde{U}(W_1)$  soit scindée, il suffit que le cocycle métaplectique  $c$  soit trivial sur  $SL(2, F) \times SL(2, F)$ ,  $M \times M$ ,  $SL(2, F) \times M$  et  $M \times SL(2, F)$ .

Soit  $(e, f)$  une base hyperbolique de  $W_1$  sur  $F'$ . On note  $\delta$  la norme de  $\xi$ . Dans la base  $(e, \xi e, \xi f, f)$ ,  $B$  s'écrit

$$B((x_i), (x'_i)) = x_1 x'_4 + x_4 x'_1 + \delta(x_2 x'_3 + x'_2 x_3) + x'_2 x_4 + x'_1 x_3$$

où

$$(x_i) \text{ représente } (x_1 + \xi x_2)e + (x_4 + \xi x_3)f,$$

$$(x'_i) \text{ représente } (x'_1 + \xi x'_2)e + (x'_4 + \xi x'_3)f.$$

On considère  $B'$  définie par :  $B'((x_i), (x'_i)) = x'_1 x_3 + x'_2 x_4$  et la forme quadratique  $q : q((x_i)) = x_1 x_4 + \delta x_2 x_3$ . La forme quadratique  $q$ , étant associée à  $B + B'$ , définit un isomorphisme entre  $PsB$  et  $PsB'$ .

L'image de  $U(W_1)$  dans  $PsB'$  est  $\{(\sigma, q \cdot \sigma + q), \sigma \in U(W_1)\}$ .

En particulier, si  $\sigma \in M$ ,  $\sigma$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ b\delta & a+b & & \\ & 0 & a+b/n & \delta b/n \\ & & b/n & a/n \end{pmatrix}$$

où  $n = a^2 + ab + \delta b^2$  et  $q \cdot \sigma + q$  est nulle.

Donc,  $M$  est contenu dans  $GLX$  où  $X$  est l'espace vectoriel singulier engendré par  $e$  et  $\xi e$ . On sait alors que  $c$  est trivial sur  $M \times M$  (I. §2.2.1).

Par [P.R. th. 9.4],  $SL(2, F)$  n'a pas d'extension d'ordre 2 :  $\widetilde{SL}(2, F)$  est nécessairement triviale.

Calculons  $c(s, s')$  et  $c(s', s)$  pour  $s \in M$  et  $s' \in SL_2(F)$  à partir des formules de  $r_\psi$  données en (I §2.2). Pour ce faire, on choisit  $\psi_X$  trivial sur  $X$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble

$$\left\{ s, s', ss', s's \mid s = \left( \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, 0 \right), \alpha \in F'^* \right.$$

$$\left. \text{et } s' = \left( \sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, f_{\sigma'} \right) \right\}.$$

Pour tout  $s'' = (\sigma'', f'')$  de  $\mathcal{E}$ ,  $X \cap \sigma'' X$  est  $\{0\}$  ou  $X$ , on définit  $w_{s''}$  par :

$$\begin{cases} w_{s''} = 0 & \text{si } X \cap \sigma'' X = \{0\} \\ w_{s''} \in Y & \text{si } X \cap \sigma'' X = X \end{cases} .$$

Soit  $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$ ,

$$\begin{aligned} r_\psi(s)r_\psi(s')\phi(h) &= r_\psi(s) \int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'} x h)) |c| dx \\ &= |\alpha|^{1/2} \int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'} x) \cdot (ss')^{-1} h) |c| dx \\ &= |\alpha|^{1/2} \int_X \phi((ss')^{-1}(sw_{s'} \cdot \sigma x \cdot h)) |c| dx \\ &= \int_X \phi((ss')^{-1}(sw_{s'} \cdot x \cdot h)) |\alpha|^{-1/2} |c| dx = r_\psi(ss')\phi(h) \end{aligned}$$

d'où  $c(s, s') = 1$ .

De même,

$$\begin{aligned} r_\psi(s')r_\psi(s)\phi(h) &= |\alpha|^{1/2} r_\psi(s')\phi(s^{-1}h) = \int_X \phi(s^{-1}s'^{-1}(w_{s'} x h)) |c| |\alpha|^{1/2} dx \\ &= r(s's)\phi(h) \end{aligned}$$

d'où  $c(s', s) = 1$ .

Donc,  $\tilde{U}(W_1)$  est scindée.

On a donc montré :

**PROPOSITION.** — *La restriction de l'extension métaplectique à toute paire duale réductive, irréductible, non triviale, est scindée.*

## Annexe 2. Calcul des premiers groupes de cohomologie de certains groupes classiques à coefficients dans leurs modules standard.

### A.1. Généralités.

On suit la présentation de [N. Ch. I § 3].

Soient  $G$  un groupe et  $V$  un  $G$ -module à gauche. Le premier groupe de cohomologie de  $G$  à coefficients dans  $V$  est défini comme suit : une *dérivation* (ou *1-cocycle*) de  $G$  dans  $V$  est une fonction  $\delta : G \rightarrow V$  telle que, pour tout  $g, g' \in G$ ,  $\delta gg' = \delta g + g\delta g'$ .

Les dérivations de  $G$  dans  $V$  forment un groupe noté  $\text{Der}(G, V)$ . Ce dernier contient un sous-groupe distingué  $\text{Int}(G, V)$  formé des *dérivations intérieures* (ou *1-cobord*) de  $G$  dans  $V$  c'est-à-dire des fonctions  $\delta : G \rightarrow V$  de la forme :  $\delta g = (g - id)v$ ,  $v \in V$ . Par définition,  $H^1(G, V) = \text{Der}(G, V) / \text{Int}(G, V)$ .

On note  $V^G$  l'ensemble des éléments de  $V$  invariants sous  $G$ .

PROPOSITION [S]. — Si  $G'$  est un sous-groupe distingué de  $G$  et  $V$  un  $G$ -module alors la suite

$$0 \rightarrow H^1(G/G', V^{G'}) \rightarrow H^1(G, V) \rightarrow H^1(G', V)^{G/G'} \rightarrow H^2(G/G', V^{G'})$$

est exacte.

On considère, désormais, un des trois cas particuliers suivants : soit  $K$  un corps de caractéristique 2,  $k$  son centre.

- 1)  $G$  est un groupe linéaire et  $V$  est son module standard i.e.

$$G \simeq GL(m, K) \text{ et } V \simeq K^m, m \in \mathbf{N}^*.$$

- 2)  $G$  est un groupe symplectique (alors  $K = k$ ) et  $V$  son module standard i.e.

$$G \simeq Sp(2m, k) \text{ et } V \simeq k^{2m}, m \in \mathbf{N}^*.$$

- 3)  $G$  est un groupe unitaire et  $V$  son module standard :

$$G \simeq U(m, K) \text{ et } V \simeq K^m.$$

Dans le dernier cas, on suppose  $K$  commutatif.

Alors  $H^1(G, V)$  est muni d'une structure de  $K$ -espace vectoriel et est donc déterminé par la donnée d'une base.

Les méthodes utilisées sont empruntées à H. Pollatsek [P]. On généralise ses résultats aux groupes symplectiques sur des corps non parfaits et aux groupes unitaires. D'après H. Pollatsek, le cas des groupes linéaires est étudié par Higman [H].

### A.2. Cas linéaire.

On examine, ici, le premier cas où  $G$  est un groupe linéaire.

PROPOSITION. —  $H^1(GL(m, K), K^m)$  est nul sauf si  $m = 3$  et  $K = \mathbb{F}_2$ .  
L'espace vectoriel  $H^1(GL(3, \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2^3)$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{F}_2$ .

Démonstration :

LEMME a. — Si le centre  $Z(G)$  de  $G$  n'est pas réduit à  $\{id\}$  alors  $H^1(Z(G), V)$  est nul.

En effet, soient  $g$  et  $g'$  deux éléments de  $Z(G)$ . La relation  $gg' = g'g$  implique que

$$\delta gg' = \delta g'g$$

ce qui équivaut à  $(g - id)\delta g' = (g' - id)\delta g$ .

Or  $Z(G)$  est  $k^*id$ . Si  $g$  et  $g'$  sont distincts de  $id$ , alors  $g - id$  et  $g' - id$  sont inversibles et

$$(g - id)^{-1}\delta g = (g' - id)^{-1}\delta g' \text{ pour tout } g, g' \in Z(G) \setminus \{id\}.$$

Il existe donc  $v \in V$  tel que  $\delta g = (g - id)v$  pour tout  $g \in Z(G)$  :  $\delta$  est intérieure et  $H^1(Z(G), V) = 0$ .

On applique alors la proposition A.1, avec  $G' = Z(G)$  et on déduit que  $H^1(G, V)$  est isomorphe à  $H^1(G/Z(G), V^{Z(G)})$ . Or  $V^{Z(G)} = 0$ . Donc  $H^1(G, V) = 0$  dès que  $Z(G) \neq \{id\}$  i.e.  $k \neq \mathbb{F}_2$ .

Etudions maintenant le cas où  $k = \mathbb{F}_2$ . Si  $K = \mathbb{F}_2$ ,  $G$  est égal à  $SL(m, \mathbb{F}_2)$ . Sinon, par la proposition A.1, la nullité de  $H^1(SL(m, K), V)$  entraîne celle de  $H^1(G, V)$ . Calculons donc le premier groupe de cohomologie de  $G' = SL(m, K)$  à coefficients dans  $V$ .

On note

- $(e_1, \dots, e_m)$  une base de  $V$  sur  $K$ ,
- $I = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2 \mid i \neq j\}$ ,
- pour  $(i, j) \in I$ ,  $E_{ij}$  l'élément de  $G$  tel que  $E_{ij}(e_k) = \delta_{k,je_i}$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , et  $B_{ij}(\lambda) = id + \lambda E_{ij}$ ,  $\lambda \in K^*$ .

PROPOSITION b [D.E]. — Le groupe  $G'$  est engendré par les éléments  $B_{ij}(\lambda)$ ,  $(i, j) \in I$ ,  $\lambda \in K^*$ . Ces derniers sont soumis aux relations :

- (i)  $B_{ij}^2(\lambda) = id$  et  $B_{ij}(\lambda)B_{ij}(\mu) = B_{ij}(\lambda + \mu)$  pour tout  $\lambda, \mu$  de  $K^*$ ,  $\lambda \neq \mu$ .
- (ii)  $B_{ij}(\lambda)$  commute avec  $B_{k\ell}(\mu)$  pour tout  $k \neq j$  et  $\ell \neq i, k$ ; tout  $\lambda$  et  $\mu$  de  $K^*$ .
- (iii)  $(B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))^2 = B_{ik}(\lambda\mu)$ ,  $i, j, k$  deux à deux distincts,  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $K^*$ .
- (iv)  $B_{ij}(\lambda)B_{ji}(\mu)B_{ij}(\nu) = B_{ji}(\mu\nu\kappa^{-1})B_{ij}(\kappa)B_{ji}(\lambda\mu\kappa^{-1})$  pour tout  $(i, j) \in I$ ,  $(\lambda, \mu, \nu) \in K^{*3}$  tel que  $\kappa = \lambda + \mu + \lambda\mu\nu \neq 0$ .

De plus, si  $m = 3$  et  $K = \mathbb{F}_2$ , ces relations caractérisent  $SL(3, \mathbb{F}_2)$  à isomorphisme près.



LEMME c. — Une dérivation  $\delta : G' \rightarrow V$  est déterminée par ses valeurs sur les générateurs  $B_{ij}(\lambda)$ .

Si  $m \neq 3$  ou  $K \neq \mathbb{F}_2$ , il existe  $m$  constantes dans  $K$ ,  $\alpha_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , telles que pour tout couple  $(i, j)$  de  $I$ , tout  $\lambda \in K^*$ ,  $\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j \lambda e_i$ .

Si  $m = 3$  et  $K = \mathbb{F}_2$ , il existe  $m(m-1) + 1$  constantes dans  $\mathbb{F}_2$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $(i, j) \in I$ , et  $\beta$ , telles que pour tout  $(i, j) \in I$ ,  $\alpha_{ik} + \alpha_{jk} = \beta$  et  $\delta B_{ij} = \alpha_{ij} e_i + \beta e_k$  où  $k$  est distinct de  $i$  et  $j$ .

*Démonstration* : Soient  $\delta \in \text{Der}(G', V)$  et  $B_{ij}(\lambda)$  un générateur de  $G'$ . La relation (i) implique que

$$\delta B_{ij}^2(\lambda) = \lambda E_{ij} \delta B_{ij}(\lambda) = 0 \iff \delta B_{ij}(\lambda) \in \text{Ker } E_{ij}.$$

La  $j^{\text{e}}$  coordonnée de  $\delta B_{ij}(\lambda)$  est donc nulle.

Supposons d'abord  $m = 2$ . Alors  $\delta B_{ij}(\lambda)$  est donc colinéaire à  $e_i$  :

$$\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j(\lambda) e_i, \quad \alpha_j : K^* \rightarrow K.$$

Si  $K = \mathbb{F}_2$ ,  $\alpha_j$  est une constante et le lemme est démontré.

Si  $K \neq \mathbb{F}_2$ , on considère la relation (iv) : soit  $\lambda, \mu, \nu \in K$  tels que  $\kappa = \lambda\mu\nu + \lambda + \nu \neq 0$ .

Alors,

$$\begin{aligned} & \delta B_{ij}(\lambda) B_{ji}(\mu) B_{ij}(\nu) \\ &= \delta B_{ij}(\lambda) + (1 + \lambda E_{ij}) \delta B_{ji}(\mu) + (1 + \lambda E_{ij})(1 + \mu E_{ji}) \delta B_{ij} \\ &= [\alpha_j(\lambda) + \alpha_j(\nu) + \alpha_i(\mu)\lambda + \alpha_j(\nu)\mu\lambda] e_i + [\alpha_i(\mu) + \alpha_j(\nu)\mu] e_j. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \delta B_{ji}(\mu\nu\kappa^{-1}) B_{ij}(\kappa) B_{ji}(\lambda\mu\kappa^{-1}) &= [\alpha_j(\kappa) + \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1})\kappa] e_i + [\alpha_i(\mu\nu\kappa^{-1}) + \\ & \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1}) + \alpha_j(\kappa)\kappa^{-1}\nu\mu + \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1})\nu\mu] e_j. \end{aligned}$$

Si  $\mu = \nu = 1$  alors  $\kappa = 1$  et (iv) implique

$$(12) \quad \alpha_i(\lambda) + \alpha_j(\lambda) = \alpha_i(1)\lambda + \alpha_j(1)\lambda.$$

Si  $\lambda = \mu = 1$ ,  $\nu \neq 1$ , alors  $\kappa = \nu$  et (iv) implique

$$\alpha_i(\nu^{-1}) + \alpha_i(\nu^{-1})\nu = 0$$

d'où  $\alpha_i(\nu) = 0$  pour tout  $\nu \neq 1$  et tout  $i$ .

Par (i),  $\alpha_i$  est additive. Donc,  $\alpha_i(1) = 0$ . L'application  $\alpha_i$  est constante, égale à 0.

Le lemme est donc démontré pour  $m = 2$ .

On suppose dorénavant  $m \geq 3$ . On considère alors la relation (ii). On obtient

$$\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda) \delta B_{k\ell}(\mu) = \delta B_{k\ell}(\mu) + B_{k\ell}(\mu) \delta B_{ij}(\lambda)$$

ce qui équivaut à  $\lambda E_{ij} \delta B_{k\ell}(\mu) = \mu E_{k\ell} \delta B_{ij}(\lambda)$  pour tout  $k \neq i, j$ ,  $\ell \neq i, k$  et  $\lambda, \mu \in K^*$ .  
Or l'image de  $E_{ij}$  est engendrée par  $e_i$  tandis que celle de  $E_{k\ell}$  est engendrée par  $e_k$  d'où

$$\delta B_{ij}(\lambda) \in \text{Ker } E_{k\ell} \text{ pour tout } k \neq i, j, \ell \neq i, k$$

i.e.  $\delta B_{ij}(\lambda)$  est combinaison linéaire de  $e_i$  et  $e_k$  pour tout  $k \neq i, j$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \text{si } m > 3, \delta B_{ij}(\lambda) \text{ est colinéaire à } e_i : \delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}(\lambda)e_i \\ \text{si } m = 3, \delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}(\lambda)e_i + \beta_{ij}(\lambda)e_k \end{cases}$$

où  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont des fonctions de  $K^*$  dans  $K$ .

On sépare les deux cas :

**1<sup>er</sup> cas** :  $m > 3$ . Montrons que les fonctions  $\alpha_{ij}$  sont de la forme  $\alpha_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}\lambda$ ,  $\alpha_{ij} \in K$ .

Pour ce faire, soit  $(i, j, k) \in \{1, \dots, m\}^3$  tous distincts. La relation (iii) affirme que :

$$\delta(B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))^2 = \delta B_{ik}(\lambda\mu), \lambda, \mu \in K^*.$$

$$\iff (1 + B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))(\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda)\delta B_{jk}(\mu)) = \delta B_{ik}(\lambda\mu)$$

$$\iff (\mu E_{jk} + \lambda E_{ij} + \lambda\mu E_{ik})[(\alpha_{ij}(\lambda) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda)e_i + \alpha_{jk}(\mu)e_j] = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i$$

$$\iff \alpha_{jk}(\mu)\lambda e_i = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i.$$

En prenant  $\mu = 1$ ,  $\lambda \in K^*$ ,  $\alpha_{jk}(1)\lambda = \alpha_{ik}(\lambda)$  pour tout  $i, j \neq k$ . On pose  $\alpha_{jk}(1) = \alpha_{ik}$ . Alors, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $\alpha_j \in K$  tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_j$ .

La démonstration de la première assertion du lemme est terminée.

**2<sup>ème</sup> cas** :  $m=3$ . Si  $i, j, k, \lambda$  et  $\mu$  sont comme précédemment, alors,

$$\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda)\delta B_{jk}(\mu) = [\alpha_{ij}(\lambda) + \beta_{jk}(\mu) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda]e_i + \alpha_{jk}(\mu)e_j + \beta_{ij}(\lambda)e_k$$

et (iii) équivaut à

$$(\alpha_{jk}(\mu)\lambda + \beta_{ij}(\lambda)\mu)e_i + \beta_{ij}(\lambda)\mu e_j = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i + \beta_{ik}(\lambda\mu)e_j$$

$$\iff (13) \quad \begin{cases} \beta_{ik}(\lambda) = \beta_{ij}(1)\lambda \\ \alpha_{ik}(\lambda\mu) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda = \beta_{ij}(\lambda)\mu\lambda \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_{ij}(\lambda) = \beta_i\lambda, \beta_i \in K \\ \alpha_{ik}(\lambda) + \alpha_{jk}(1)\lambda = \beta_i\lambda^2. \end{cases}$$

$$\text{Pour } \lambda = \mu, \alpha_{ik}(\lambda^2) = \alpha_{jk}(\lambda)\lambda + \beta_i\lambda^3 = (\alpha_{ik}(1)\lambda + \beta_j\lambda^2)\lambda + \beta_i\lambda^3 \\ = \alpha_{jk}(\lambda^2) + \beta_i\lambda^2 = (\alpha_{ik}(1)\lambda^2 + \beta_j\lambda^4) + \beta_i\lambda^2$$

d'où

$$\beta_j(1 + \lambda)\lambda^3 = \beta_i(1 + \lambda)\lambda^2 .$$

Si  $K \neq \mathbb{F}_2$  alors,  $\beta_j = \beta_i = 0$  pour tout  $i, j$ , et on conclut comme au cas précédent.

Si  $K = \mathbb{F}_2$ , (13) s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \beta_{ik} = \beta_{ij} \\ \alpha_{ik} + \alpha_{jk} = \beta_{ij}. \end{cases}$$

Comme  $\alpha_{ik} + \alpha_{jk}$  est symétrique en  $i$  et  $j$ , on a  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ . En combinant avec la première équation, on montre que tous les  $\beta_{ij}$  sont égaux entre eux. Il existe donc  $\beta \in \mathbb{F}_2$ , tel que pour tout  $(i, j) \in I$ ,

$$(14) \quad \beta = \alpha_{ik} + \alpha_{jk} \text{ et } \delta\beta_{ij} = \alpha_{ij}e_i + \beta e_k \text{ où } \{i, j\} \cup \{k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Il reste à examiner (iv) :

$$\delta B_{ij}B_{ji} = \delta\beta_{ij} + B_{ij}\delta B_{ji} = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})e_i + \alpha_{ji}e_j$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta B_{ij}B_{ji}B_{ij} &= \delta B_{ij}B_{ji} + B_{ij}B_{ji}\delta B_{ij} = \delta B_{ji} + B_{ji}\delta B_{ij}B_{ji} = \delta B_{ji}B_{ij}B_{ji} \\ &\iff (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})e_i + \alpha_{ji}e_j + \alpha_{ij}e_j + \beta e_k = \beta e_k + (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})(e_i + e_j). \end{aligned}$$

On n'obtient aucune condition supplémentaire. Pour toute valeur de  $\beta$ , les relations (14) définissent une dérivation de  $\text{Der}(G', V)$ .

Le lemme est entièrement établi.

*Conséquences* : 1. Si  $m > 3$  ou  $m = 3$  et  $K \neq \mathbb{F}_2$ , on définit  $v \in V$  par  $v = \sum_j \alpha_j e_j$  où

les  $\alpha_j$  sont déterminés par le lemme c.

Pour tout  $(i, j) \in I$ , pour tout  $\lambda \in K^*$ ,  $\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j \lambda e_i = (B_{ij}(\lambda) - 1)v$ .

Donc,  $\delta$  est intérieure et  $H^1(G', V)$  est nul.

2. Si  $m = 3$  et  $K = \mathbb{F}_2$ ,  $\beta$  est égal à 0 ou 1. La dérivation  $\delta$  est intérieure si et seulement si  $\beta = 0$ . D'où

$$H^1(G', V) \simeq \mathbb{F}_2.$$

□

Dans la suite, on note  $d_V$  l'élément non nul de  $H^1(G, V)$ .

**COROLLAIRE.** — Pour tout corps  $K$ , tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $H^1(SL(m, K), K^m)$  est nul sauf si  $K = \mathbb{F}_2$  et  $m = 3$ . De plus,  $H^1(SL(3, \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2^3)$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{F}_2$ .

### A.3. Cas unitaire.

Le corps commutatif  $K$  est muni d'une involution  $\tau$ . Soit  $V = K^m$  le  $K$ -espace vectoriel à droite de dimension  $m$  muni d'une forme sesquilinéaire  $\langle, \rangle$ , linéaire en la deuxième variable, tracique, non dégénérée et telle que

$$\langle w, w' \rangle = \tau(\langle w', w \rangle).$$

PROPOSITION. —  $H^1(U(m, K), K^m) = 0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .

En effet, le centre  $Z(U(m, K))$  de  $U(m, K)$  est non trivial, formé des homothéties unitaires. Par le lemme A.2.a,  $H^1(Z(U(m, K)), K^m)$  est nul. On conclut, alors, grâce à la proposition A.1.

#### A.4. Cas symplectique.

On examine le cas où  $G$  est un groupe symplectique.

Soit  $k^2$  le corps formé par les carrés de  $k$ . On suppose que  $k$  admet une base  $(\varepsilon_i)_{i \in I}$  sur  $k^2$ ,  $I$  contenant 0 (on prend  $\varepsilon_0 = 1$ ).

Soient  $V = X \oplus Y$  une polarisation complète de  $V$  et  $(e_1, \dots, e_m, e_{-1}, \dots, e_{-m})$  une base symplectique de  $V$  sur  $k$  adaptée à cette polarisation.

On note pour tout  $i \in I$ ,  $p_i$  la  $i^e$  fonction coordonnée :  $p_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ ,  $j \in I$ .

LEMME a. — Soit  $q$  une forme quadratique sur  $V$  dont la forme alternée associée est  $\langle, \rangle$ . Pour  $i \in I$ , on définit l'application  $\delta_i : SpV \rightarrow V$  par :

$$\forall g \in SpV, \forall v \in V, \langle \delta_i g, gv \rangle = \sqrt{p_i(q(gv) + q(v))}.$$

Alors  $\delta_i \in \text{Der}(SpV, V)$  et son image dans  $H^1(G, V)$  est indépendante du choix de  $q$ .

De plus,  $\{\delta_i, i \in I\}$  est un système libre dans  $H^1(G, V)$  si et seulement si  $k \neq \mathbb{F}_2$  ou  $m \neq 1$ .

Si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $\delta_i$  est intérieure.

Démonstration : Soit  $i \in I$  fixé et  $g \in SpV$ . L'application  $v \mapsto \sqrt{p_i(q(gv) + q(v))}$  est une forme linéaire sur  $V$ . Il existe donc un unique vecteur  $w_g$  de  $V$  tel que

$$\langle w_g, v \rangle = \sqrt{p_i(q(gv) + q(v))}.$$

Alors  $\delta_i g = gw_g$  :  $\delta_i$  est bien définie sur  $SpV$ . De plus, si  $g$  et  $g'$  sont des éléments de  $SpV$ , alors pour tout  $v$

$$\langle \delta_i gg', gg'v \rangle = \sqrt{p_i(q(gg'v) + q(v))}.$$

Or  $q(gg'v) + q(v) = q(g(g'v)) + q(g'v) + q(g'v) + q(v)$

d'où

$$\langle \delta_i gg', gg'v \rangle = \langle \delta_i g, gg'v \rangle + \langle \delta_i g', g'v \rangle = \langle \delta_i g + g\delta_i g', gg'v \rangle$$

i.e.

$$\delta_i gg' = \delta_i g + g\delta_i g'.$$

L'application  $\delta$  est un élément de  $\text{Der}(G, V)$ .

Considérons une autre forme quadratique  $q'$  dont la forme alternée est  $\langle, \rangle$ . Elle définit par le procédé précédent, une dérivation  $\delta'_i$ . Comme  $q + q'$  est additive, l'application

$v \mapsto \sqrt{p_i((q+q')(v))}$  est linéaire. Il existe  $v_o \in V$  tel que  $\sqrt{p_i((q+q')(v))} = \langle v, v_o \rangle$  pour tout  $v \in V$ .

D'où

$$\begin{aligned} \langle (\delta_i + \delta'_i)(g), gv \rangle &= \langle v_o, gv \rangle + \langle v_o, v \rangle = \langle gv_o + v_o, gv \rangle \\ \text{i.e. } (\delta_i + \delta'_i)(g) &= (g + id)v_o \text{ pour tout } g \in G. \end{aligned}$$

La dérivation  $\delta_i + \delta'_i$  est donc intérieure :  $\delta_i$  ne dépend donc pas du choix de  $q$ .

Désormais, on choisit  $q$  comme suit :

si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $q$  est la forme quadratique d'indice 0 ;

si  $k = \mathbb{F}_2$  ou  $m \neq 1$ ,  $q$  est la forme quadratique déployée.

On déduit alors la deuxième assertion du lemme a de :

LEMME b. — *Toute dérivation intérieure de  $SpV$ , nulle sur  $O(q)$ , est nulle partout.*

Admettons le lemme b pour l'instant.

Toute combinaison linéaire finie de  $\delta_i$ ,  $\sum_{i \in I'} \alpha_i \delta_i$ , est nulle sur  $O(q)$ . Si elle est intérieure, par le lemme b, elle est donc nulle partout :  $\forall g \in SpV, \sum_{i \in I'} \alpha_i \delta_i g = 0$ .

Si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $SpV = O(q)$  d'où  $\delta_i$  est intérieure.

Si  $k \neq \mathbb{F}_2$  ou  $m \neq 1$ , on considère les transvections. Si  $t$  est une transvection de vecteur  $a$ , alors

$$\langle \delta_i t, tv \rangle = \langle a, v \rangle \sqrt{p_i(1+q(a))} \text{ pour tout } i \in I'.$$

Si  $I'$  contient 0, en prenant  $a$  singulier non nul, on obtient :  $\sum_{i \in I'} \alpha_i \delta_i = 0$  d'où  $\alpha_o a = 0$

i.e.  $\alpha_o = 0$ .

On peut donc supposer que  $0 \notin I'$ .

Pour tout  $j \in I'$ , on considère  $a_j = e_1 + \varepsilon_j e_{-1}$  et  $t_j$  la transvection de vecteur  $a_j$ .

Pour tout  $i \in I'$ ,

$$\delta_i t_j = \sqrt{p_i(1+q(a_j))} \cdot a_j = \delta_{i,j} a_j$$

d'où

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i \delta_i = 0 \implies \forall j \in I', \sum_{i \in I'} \alpha_i \delta_i t_j = 0 \implies \forall j \in I', \alpha_j = 0.$$

Toute combinaison linéaire finie nulle de  $\delta_i$ , a tous ses coefficients nuls. La famille  $\{\delta_i, i \in I\}$  est un système libre.

Il reste à prouver le lemme b. Si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $SpV = O(q)$  et le résultat est clair.

Si  $k \neq \mathbb{F}_2$  ou  $m \neq 1$ , soit  $\delta \in \text{Int}(SpV, V)$  : il existe  $v_o \in V$  tel que

$$\forall g \in SpV, \delta g = (g - id)v_o.$$

Il suffit de montrer que  $O(q)$  contient un élément  $t$  tel que  $t + id$  soit inversible car, si un tel  $t$  existe

$$\delta|_{O(q)} = 0 \implies \delta t = 0 = (t + id)v_o \implies v_o = 0$$

donc  $\delta = 0$  sur  $SpV$ .

Construisons  $t$ . Grâce aux hypothèses sur  $k$  et  $m$ ,  $V$  contient une base  $(v_1, \dots, v_{2n})$  telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ ,  $q(v_i) = 1$ .

Soit  $t_i$  la transvection orthogonale de vecteur  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 2n\}$ .

Alors  $t = \prod_{i=1}^{2n} t_i$  appartient à  $O(q)$  et  $t + id$  est inversible.  $\square$

*Quelques calculs sur les  $\delta_i$*

On suppose  $k \neq \mathbf{F}_2$  ou  $m \neq 1$ . Soit  $W = X \oplus Y$  une polarisation complète de  $W$  en espaces singuliers pour  $q$ . Soit  $P \subset SpV$  le stabilisateur de  $X$ . Le groupe  $P$  est un sous-groupe parabolique. On note  ${}^uP$  son radical unipotent,  $L$  un sous-groupe de Lévi tel que  $L {}^uP = P$ . Soit  $J \in SpV$  défini par :  $J(e_k) = e_{-k}$ ,  $J(e_{-k}) = e_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

LEMME c. — Pour tout  $i \in I$ ,  $\delta_i|_L = 0$  et  $\delta_i J = 0$ .

Si  $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP$  et  $u = (u_{k\ell})$  alors  $\delta_i B = \sum_{k=1}^m \sqrt{p_i(u_{kk})} e_k$ .

*Démonstration* : Soit  $g \in L$ . Alors  $gX = X$  et  $gY = Y$  donc  $q(gx) = q(x) = 0$ , pour tout  $x \in X$  et  $q(gy) = q(y) = 0$  pour tout  $y \in Y$ . Donc  $\delta_i g \in X^\perp \cap Y^\perp = X \cap Y = \{0\}$ .

La dérivation  $\delta_i$  est nulle sur  $L$ .

De même,  $J$  permute  $X$  et  $Y$  donc  $q(Jv) = q(v) = 0$  pour  $v \in X \cup Y$  et  $\delta_i J \in X^\perp \cap Y^\perp = \{0\}$ .

Soit  $B$  comme dans l'énoncé. Pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\langle \delta_i B, B e_k \rangle = \langle \delta_i B, e_k \rangle = 0 \text{ car } q(B e_k) = q(e_k) = 0$$

donc  $\delta_i B \in X$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \langle \delta_i B, B e_{-k} \rangle &= \langle \delta_i B, e_{-k} \rangle = \sqrt{p_i(q(B e_{-k}) + q(e_{-k}))} \\ &= \sqrt{p_i[q(e_{-k}) + q(u e_{-k}) + \langle e_{-k}, u e_{-k} \rangle + q(e_{-k})]} \\ &= \sqrt{p_i(u_{kk})} \end{aligned}$$

d'où  $\delta_i B = \sum_{k=1}^m \sqrt{p_i(u_{kk})} e_k$ .  $\square$

PROPOSITION. — Si  $k = \mathbf{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $H^1(SpV, V)$  est trivial.

Si  $k \neq \mathbf{F}_2$  ou  $m \neq 1$ ,  $H^1(SpV, V)$  est un  $k$ -espace vectoriel admettant  $\{\delta_i, i \in I\}$  comme base.

*Démonstration* : [due à H. Pollatsek quand  $m \geq 4$ ,  $F$  parfait].

Si  $k = \mathbf{F}_2$  et  $m = 1$ ,  $SpV = GL(V)$  et le résultat a été établi au § A.2.

On suppose donc  $k \neq \mathbf{F}_2$  ou  $m \neq 1$ . Il suffit de montrer que  $\{\delta_i, i \in I\}$  est une famille génératrice de  $H^1(SpV, V)$ .

Le groupe  $SpV$  est engendré par  $L$ ,  $\{id, J\}$  et  ${}^uP$ . On étudie successivement les restrictions d'une dérivation  $\delta$  à l'un de ces sous-groupes.

i) *Restriction à  $L$ .*

LEMME d. — Si  $k = \mathbf{F}_2$  ou  $m \neq 3$ ,  $H^1(L, V)$  est triviale.

Si  $k = \mathbf{F}_2$  et  $m = 3$ ,  $H^1(L, V)$  contient quatre éléments distincts.

*Démonstration* : Les éléments de  $L$  sont de la forme  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}$  où  $\alpha \in GLX$

et  $\alpha^*$  désigne l'isomorphisme de  $Y$  dans  $Y$ , dual de  $\alpha$ .

On écrit  $\delta$  sous la forme  $\delta A = x(A) + y(A)$  où  $x : L \rightarrow X$  et  $y : L \rightarrow Y$ .

Alors, puisque  $\delta \in \text{Der}(L, V)$ ,

$$\begin{cases} x(AA') = x(A) + Ax(A') \\ y(AA') = y(A) + Ay(A') \end{cases}$$

et  $x, y$  définissent des éléments de  $\text{Der}(GLX, X)$  et  $\text{Der}(GLY, Y)$  respectivement.

Si  $k \neq \mathbf{F}_2$  ou  $m \neq 3$ , on en déduit que  $x$  et  $y$  sont intérieures : il existe  $u \in X, v \in Y$  tels que  $x(A) = (\alpha + id)u$ ,  $y(A) = (\alpha^{*-1} + id)v$  d'où  $\delta A = (A + id)(u + v)$ . La dérivation  $\delta$  appartient à  $\text{Int}(L, V)$ .

Si  $k = \mathbf{F}_2$  et  $m = 3$ ,  $H^1(GLX, X) = \{0, d_X\}$  et  $H^1(GLY, Y) = \{0, d_Y\}$  (§ A.2) donc

$$\delta A = 0, d_X(\alpha), d_Y(\alpha^{*-1}) \text{ ou } d_X(\alpha) + d_Y(\alpha^{*-1}).$$

Ces dérivations sont toutes distinctes sinon  $d_X$  ou  $d_Y$  serait intérieure. Ceci établit le lemme d.

ii) COROLLAIRE. — Soit  $\delta \in H^1(SpV, V)$ . La restriction de  $\delta$  à  $\{1, J\}$  est intérieure.

*Démonstration* : Supposons d'abord que  $\delta|_L$  est intérieure. Quitte à lui ajouter un élément de  $\text{Int}(G, V)$ , on peut supposer  $\delta|_L = 0$ .

Alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} J = J \begin{pmatrix} \alpha^{*-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ pour tout } \alpha \in GLX$$

d'où  $\delta J = 0$ .

Ensuite, supposons que  $\delta|_L$  ne soit pas intérieure sur  $L$  ( $k = \mathbf{F}_2$  et  $m = 3$ ). Puisque  $J$  est d'ordre 2,  $\delta J$  est un vecteur de  $\text{Ker}(id + J)$  : il existe  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{F}_2^3$  tels que

$$\delta J = \sum_{i=1}^3 \gamma_i (e_i + e_{-i}).$$

Avec les notations du paragraphe A.2, on considère

$$A = \begin{pmatrix} B_{ij}(1) & 0 \\ 0 & B_{ji}(1) \end{pmatrix} \in L : \delta A = \alpha_{ij}e_i + \beta e_k + \alpha_{ji}e_{-j} + \beta' e_{-k} \text{ avec } \beta, \beta' \in \mathbb{F}_2$$

et  $A' = \begin{pmatrix} B_{ji}(1) & 0 \\ 0 & B_{ij}(1) \end{pmatrix} \in L : \delta A' = \alpha_{ji}e_j + \beta e_k + \alpha_{ij}e_{-i} + \beta' e_{-k} \text{ avec } \beta, \beta' \in \mathbb{F}_2.$

Alors  $AJ = JA'$  d'où  $\delta A + J\delta A' = (A + id)\delta J$

$$\begin{aligned} &\iff (\beta + \beta')(e_k + e_{-k}) = \gamma_j e_i + \gamma_i e_{-j} \\ &\iff \beta + \beta' = \gamma_j = \gamma_i = 0 \text{ pour tout } i, j \\ &\text{donc } \delta J = 0. \end{aligned}$$

*Remarque* : On a montré, en plus, que si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 3$ , seules les images des dérivations 0 et  $d_X \oplus d_Y$  dans  $H^1(L, V)$  peuvent se prolonger à  $SpV$ .

iii) *Restriction à  ${}^uP$ .*

Soit  $\mathcal{S}$  le groupe additif des matrices  $m \times m$  symétriques. Le sous-groupe  ${}^uP$  s'identifie à  $\mathcal{S}$  par  $u \in \mathcal{S} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP.$

En particulier,  ${}^uP$  est abélien.

LEMME e. — Soit  $\delta \in H^1(SpV, V)$ ,  $\delta|_{{}^uP}$  est additive et son image est contenue dans  $X$ .

*Démonstration* : On pose, pour tout  $B \in {}^uP$ ,  $\delta(B) = x(B) + y(B)$  où  $x : {}^uP \rightarrow X$  et  $y : {}^uP \rightarrow Y$ .

Alors, si  $B$  et  $B'$  appartiennent à  ${}^uP$ ,

$$(15) \quad \delta BB' = \delta B + B\delta B' \iff \begin{cases} x(BB') = x(B) + x(B') + By(B') \\ y(BB') = y(B) + y(B'). \end{cases}$$

En prenant  $B = B'$ , (15) implique que  $By(B) = 0$ .

Si  $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $u$  inversible,  $y(B) = 0$ .

Si  $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $u$  quelconque, on considère  $B' \in {}^uP$  avec  $u'$  inversible.

Comme  $BB' = B'B$ ,  $u'y(B) = uy(B') = 0$  d'où  $y(B) = 0$  pour tout  $B \in {}^uP$ , i.e.  $\delta = x$ . L'image de  $\delta$  est donc contenue dans  $X$  et, par (15),

$$\delta BB' = \delta B + \delta B'.$$

□

LEMME f. — Si  $k = \mathbb{F}_2$  et  $m = 3$ , seul l'élément trivial de  $H^1(L, V)$  se prolonge en un élément de  $H^1(G, V)$ .



*Démonstration* : Soit  $\delta \in H^1(L, V)$  se prolongeant en une dérivation sur  $SpV$ .

Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & E'_{ij} + E'_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP$  où  $E'_{ij}(e_k) = \delta_{k,j}e_i$ , et  $A = \begin{pmatrix} B_{k\ell}(1) & 0 \\ 0 & B_{\ell k}(1) \end{pmatrix} \in L$ .

Si  $AB = BA$  alors  $\begin{pmatrix} 0 & E'_{ij} + E'_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta A = \begin{pmatrix} E_{k\ell} & 0 \\ 0 & E_{\ell k} \end{pmatrix} \delta B = E_{k\ell} \delta B$ .

Or  $A$  commute avec  $B$  si  $\ell \neq i, j$  donc  $E_{k\ell} \delta B = \beta_{\ell k}$  ou si  $(k, \ell) = (j, i)$  donc  $E_{ji} \delta B = \alpha_{ij} e_j$  ou si  $(k, \ell) = (i, j)$  donc  $E_{ij} \delta B = \alpha_{ji} e_i$  (cf. notations § A.2).

D'où  $\delta B = \alpha_{ij} e_i + \alpha_{ji} e_j + \beta_{\ell k}$ .

Si  $(k, \ell) = (k, i)$  alors  $AB = B \begin{pmatrix} 1 & E'_{kj} + E'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} 0 & E'_{kj} + E'_{jk} + E'_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta A = (1 + A) \delta B + \delta \begin{pmatrix} 1 & E'_{kj} + E'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire  $\beta_{ei} + \alpha_{ik} e_j + \beta_{ek} = \alpha_{ij} e_k + (\alpha_{kj} e_k + \alpha_{jk} e_j + \beta_{ei}) = \beta_{ei} + \alpha_{jk} e_j + \beta_{ek}$ . Donc,  $\alpha_{ik} + \alpha_{jk} = 0$  i.e.  $\beta = 0$ .

Ainsi  $\delta$  est intérieure sur  $L$ .  $\square$

On reprend l'étude de la restriction d'un élément  $\delta \in H^1(SpV, V)$  à  ${}^uP$ . On suppose que  $\delta$  est nulle sur  $L$  et  $\{1, J\}$ .

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$  le sous-groupe de  $\mathcal{S}$  formé des matrices alternées et  $\mathcal{D}$  celui formé des matrices diagonales. On note encore  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{D}$  leurs images dans  ${}^uP$ . Alors

$$\delta|_{{}^uP} = \delta|_{\mathcal{A}} + \delta|_{\mathcal{D}}.$$

LEMME g. — Si  $\mathcal{A}$  est non nul (i.e.  $m > 1$ ), la restriction de  $\delta$  à  $\mathcal{A}$  est nulle.

*Démonstration* : Soient  $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$  et  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} \in L$ . Alors

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta\alpha^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

d'où

$$\alpha.\delta B = \delta \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta\alpha^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier si  $\beta = bE'_{12} + bE'_{21}$ ,  $b \in k^\times$  et si  $\alpha$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m = 3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & \alpha' \end{pmatrix} \text{ si } m \geq 4$$



Puis, en prenant  $\alpha \in GL(X)$  tel que  $\alpha(e_j) = e_j$  si  $j \neq i$  et  $\alpha(e_i) = \lambda e_i$ , on montre que  $\lambda a(b) = a(\lambda^2 b)$  pour tout  $\lambda \in k^*$ .

Ainsi, si  $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^u P$ ,  $\beta$  s'écrit  $\beta = \beta_o + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$  où  $\beta_o \in \mathcal{A}$  et  $\lambda_i \in k$ ,

et il existe un sous-ensemble fini  $I'$  de  $I$  tel que

$$\delta B = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in I'} \sqrt{p_j(\lambda_i)} a(\varepsilon_j) e_i = \sum_{j \in I'} a(\varepsilon_j) \sum_{i=1}^m \sqrt{p_j(\lambda_i)} e_i = \sum_{j \in I'} a(\varepsilon_j) \delta_j(B)$$

d'après le lemme c.

Le lemme h est donc démontré.

On conclut de cette étude, que, si  $\delta \in H^1(SpV, V)$ , il existe des constantes  $a_i$ ,  $i \in I$ , telles que  $\delta$  coïncide avec  $\sum_{i \in I} a_i \delta_i$  sur  $L$ ,  $\{1, J\}$  et  ${}^u P$ . D'où

$$\delta = \sum_{i \in I} a_i \delta_i .$$

La famille  $\{\delta_i, i \in I\}$  est une famille génératrice de  $H^1(SpV, V)$ .

La proposition est donc établie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [B] N. BOURBAKI. — *Algèbre*, Ch. 8, Hermann, Paris.
- [D.E] E. DICKSON. — *The abstract form of the special linear homogeneous group in an arbitrary field*, Collected papers, Vol. 6, 127-131.
- [D.J] J. DIEUDONNÉ. — *La géométrie des groupes classiques*, Springer, (1971).
- [D.J2] J. DIEUDONNÉ. — *On the structure of unitary groups II*, Amer. J. of Math. 75, (1973), 665-678.
- [G] P. GÉRARDIN. — *Weil representations associated to finite fields*, J. of Algebra 46, (1977), 54-101.
- [H] D.G. HIGMAN. — *Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces*, Illinois J. Math. Vol. 6, (1962), 434-446.
- [H.R] R. HOWE. —  *$\theta$ -series and invariant theory*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sym. in Pure Math. XXXIII, AMS 1979, 275-286.
- [M.V.W] C. MÆGLIN, M.-F. VIGNÉRAS et J.-L. WALDSPURGER. — *Correspondances de Howe sur un corps  $p$ -adique*, Springer, LN 1291.
- [N] J. NEUKIRCH. — *Class field Theory*, Springer, (1986).
- [P.P] P. PERRIN. — *Représentation de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique*, Springer LN 880, 370-407.
- [P] H. POLLATSEK. — *First cohomology groups of some linear groups over fields of characteristic two*, Illinois J. of Math. 15, (1971), 393-417.
- [P.R] G. PRASAD et M.S. RAGHUNATHAN. — *Topological central extensions of semi-simple groups over local fields*, Ann. of Math. 119, (1984), 143-201.
- [S.W] W. SCHARLAU. — *Quadratic and hermitian forms*, Springer-Verlag, (1985).
- [S] J.-P. SERRE. — *Cohomologie des extensions de groupes*, C.R.A.S. Paris 231, (1950), 643-646.
- [Wa] J.-L. WALDSPURGER. — *Notes manuscrites d'un cours à Paris VII en 1989*.
- [W] A. WEIL. — *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111, (1964), 143-211.