



HAL
open science

Approche non régulière pour la modélisation des structures élastoplastiques sous impact

Benoît Viano

► **To cite this version:**

Benoît Viano. Approche non régulière pour la modélisation des structures élastoplastiques sous impact. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALI103 . tel-04167098

HAL Id: tel-04167098

<https://theses.hal.science/tel-04167098v1>

Submitted on 20 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : I-MEP2 - Ingénierie - Matériaux, Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés, Production

Spécialité : 2MGE : Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie

Unité de recherche : Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

Approche non régulière pour la modélisation des structures élastoplastiques sous impact

Non-smooth approach for modelling elastoplastic structures under impact

Présentée par :

Benoît VIANO

Direction de thèse :

Vincent ACARY

DIRECTEUR DE RECHERCHE, Université Grenoble Alpes

Directeur de thèse

Franck BOURRIER

CHARGE DE RECHERCHE HDR, Université Grenoble Alpes

Co-encadrant de thèse

Rapporteurs :

Stéphane GRANGE

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, INSA Lyon

Yann MONERIE

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université de Montpellier

Thèse soutenue publiquement le **15 décembre 2022**, devant le jury composé de :

Vincent ACARY

DIRECTEUR DE RECHERCHE, INRIA centre Grenoble-Rhône-Alpes

Directeur de thèse

Stéphane GRANGE

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, INSA Lyon

Rapporteur

Yann MONERIE

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université de Montpellier

Rapporteur

Claire SILVANI

MAITRE DE CONFERENCE, INSA Lyon

Examinatrice

Laurent BAILLET

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Grenoble Alpes

Président

Invités :

Frank BOURRIER

Chargé de Recherche, INRAE



Table des matières

Introduction	13
1 Revue bibliographique et état de l'art	15
1.1 Contexte Général	16
1.2 Contact	17
1.2.1 Introduction	17
1.2.2 Modélisation du contact	18
1.2.3 Méthodes de résolution du contact unilatéral	19
1.2.4 Modélisation de la dynamique avec contact	22
1.2.5 Méthodes numérique pour la dynamique avec contact	24
1.3 Plasticité	28
1.3.1 Introduction	28
1.3.2 Bref historique de la plasticité	29
1.3.3 Méthodes de résolution	32
1.3.4 Applications et approfondissements des formulations variationnelles .	40
1.3.5 Travaux récents sur les formes variationnelles de la plasticité	43
1.4 Couplage plasticité et impact	44
1.5 Conclusion, objectifs et organisation de la thèse	46
2 Formulation en temps continu	49
2.1 Thermodynamique pour la plasticité	50
2.1.1 Généralités	50
2.1.2 Principe des puissances virtuelles	50
2.2 Thermodynamique et matériaux standards généralisés	52
2.2.1 Energie libre et lois d'état	53
2.2.2 Loi de normalité	54
2.3 Prise en compte du contact	58
2.3.1 Précisions sur le principe des puissances virtuelles	58
2.3.2 Contact unilatéral	59
2.4 Discrétisation par éléments finis	61
2.4.1 Définitions et notations	61
2.4.2 Discrétisation des équations élastoplastiques	66
2.4.3 Discrétisation du contact	66
2.5 Dynamique non régulière pour les systèmes discrets	68
2.5.1 Notions de théorie de la mesure	68
2.5.2 Formulation de la dynamique en mesures différentielles	69
2.5.3 Loi d'impact	70
2.6 Bilan énergétique en éléments finis	71
2.7 Système complet plasticité - impact	72

2.7.1	Résumé des développements	72
2.7.2	Changement de variable	73
2.8	Existence et unicité de la solution du système dynamique élastoplastique . . .	73
2.8.1	Forme générale	73
2.8.2	Formulation du système élastoplastique en inclusion différentielle . . .	73
2.8.3	Changement de variable	74
2.9	Exemples 1D	75
2.9.1	Plasticité : Barre en traction - compression	75
2.9.2	Contact : <i>Bouncing ball</i>	79
2.10	Résumé du chapitre	80
3	Algorithme monolithique pour la plasticité et le contact	81
3.1	Schéma de discrétisation temporelle	82
3.1.1	Schema de <i>Moreau-Jean</i>	82
3.1.2	Application au système élastoplastique avec impact	84
3.2	Problème bien posé	86
3.2.1	Equivalence avec un problème de point selle	86
3.2.2	Existence et unicité de la solution	88
3.3	Substitution des relations linéaires	90
3.3.1	Exemple introductif : contact seul	90
3.3.2	Application au système complet	91
3.4	Méthodes de résolution	94
3.4.1	Problème d'optimisation quadratique	94
3.4.2	Cas particulier de C ensemble de relations linéaires	95
3.5	Exemples 1D - suite	97
3.5.1	Plasticité : Barre en traction - compression	97
3.5.2	Contact : <i>Bouncing ball</i>	99
3.6	Propriétés énergétiques du schéma de <i>Moreau-Jean</i>	101
3.6.1	Bilan énergétique discret	101
3.6.2	Propriétés énergétiques	105
3.7	Résumé du chapitre	107
4	Applications 1D	109
4.1	Formulation générale	110
4.1.1	Fonction d'écoulement	110
4.1.2	Formulation de l'élément fini	111
4.2	Validation du modèle élastoplastique	116
4.2.1	Présentation de l'exemple	116
4.2.2	Résultats	118
4.2.3	Conclusion	133
4.3	Poutre élastoplastique impactée	133
4.3.1	Présentation de l'exemple	133
4.3.2	Résultats	134
4.3.3	Conclusion	141
4.4	Etude d'un portique	142
4.4.1	Présentation de l'exemple	142
4.4.2	Résultats	143
4.4.3	Conclusion	150
4.5	Résumé du chapitre	150

Conclusion Générale	153
A Formulation des éléments finis de barre et de poutre	157
A.1 Éléments finis de barre à deux nœuds	157
A.2 Barre à trois nœuds	158
A.3 Poutre à deux nœuds	159
A.4 Passage du repère local au global	160
A.4.1 éléments de poutre	160
B Éléments de thermodynamique	163
B.1 Première loi	163
B.2 Deuxième loi	163
C Notions élémentaires d'analyse convexe	165

Table des figures

1.1	Distance g_N entre deux solides	18
1.2	Contact unilatéral - Conditions de <i>Signorini</i>	19
1.3	Loi de contact unilatéral régularisée	20
1.4	Cônes normaux à un ensemble convexe	23
1.5	Comportements élastoplastiques 1D	29
1.6	Écrouissages isotrope et cinématique	31
1.7	Cônes tangents à un ensemble convexe	36
1.8	Loi de dissipation normale	37
2.1	Exemple barre 1D - Présentation de l'exemple et discrétisation spatiale	75
2.2	Exemple barre 1D - Ensemble C et ses cônes normaux	76
2.3	Exemple <i>bouncing ball</i>	79
3.1	Résultats application élastoplastique	99
3.2	Résultats <i>bouncing ball</i>	101
3.3	<i>bouncing ball</i> - comparaison différents pas de temps et contact compliant . . .	102
4.1	Ensemble C utilisé et ses cônes normaux	111
4.2	Élément fini employé	113
4.3	Modifications de l'ensemble C et variables d'écrouissage	115
4.4	Exemple 1 : Présentation du système étudié	117
4.5	Exemple 1 : Vitesses imposées à l'extrémité libre	117
4.6	Exemple 1 - cas 1 : Déplacements au cours du temps	118
4.7	Exemple 1 - cas 1 : Déformées de la poutre à divers instants	118
4.8	Exemple 1 - cas 1 : Efforts internes au cours du temps	119
4.9	Exemple 1 - cas 1 : Chemins de contraintes aux différents points de Gauss . .	120
4.10	Exemple 1 - cas 1 : Evolution temporelle de $\lambda_{1,3}$	121
4.11	Exemple 1 - cas 2 : Déplacements au cours du temps	122
4.12	Exemple 1 - cas 2 : Déformées de la poutre à divers instants	122
4.13	Exemple 1 - cas 2 : Efforts internes au cours du temps	123
4.14	Exemple 1 - cas 2 : Chemins de contraintes aux différents points de Gauss . .	124
4.15	Exemple 1 - cas 2 : Evolution temporelle de $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{3,3}$ et $\lambda_{4,3}$	125
4.16	Exemple 1 - cas 3 : Déplacements au cours du temps	126
4.17	Exemple 1 - cas 3 : Déformées de la poutre à divers instants	126
4.18	Exemple 1 - cas 3 : Efforts internes au cours du temps	127
4.19	Exemple 1 - cas 3 : Chemins de contraintes à différents points de Gauss . . .	127
4.20	Exemple 1 - cas 3 : Evolution temporelle de $\lambda_{1,3}$ et $\lambda_{1,4}$	128
4.21	Exemple 1 - cas 4 : Déplacements au cours du temps	129
4.22	Exemple 1 - cas 4 : Déformées de la poutre à divers instants	129
4.23	Exemple 1 - cas 4 : Efforts internes au cours du temps	130

4.24	Exemple 1 - cas 4 : Chemins de contraintes aux différents points de Gauss . . .	131
4.25	Exemple 1 - cas 4 : Evolution temporelle de $\lambda_{1,3}$ et $\lambda_{1,4}$	132
4.26	Exemple 2 : Présentation du système étudié	133
4.27	Exemple 2 : Positions au cours du temps	134
4.28	Exemple 2 : Bilan énergétique	136
4.29	Exemple 2 : Variables de contact au cours du temps	137
4.30	Exemple 2 : Convergence des énergies dissipées en fonction de n_{el} et h	139
4.31	Exemple 2 : Convergence de la percussion en fonction de n_{el} et h	140
4.32	Exemple 2 : Fonction d'écoulement au premier point de Gauss lors de la première phase de contact	141
4.33	Exemple 3 : Présentation du système étudié	142
4.34	Exemple 3 : Positions et vitesses de points caractéristiques au cours du temps	144
4.35	Exemple 3 : Répartition de l'énergie en fin de simulation	145
4.36	Exemple 3 : Structure déformée et déformations plastiques ($\nu = 10$)	146
4.37	Exemple 3 : Structure déformée et déformations plastiques ($\nu = 50$)	147
4.38	Exemple 3 : Répartition de l'énergie en fin de simulation pour différents maillages	148
4.39	Exemple 3 : Influence de la masse et de la vitesse initiale du projectile sur les dissipations d'énergie	149
4.40	Exemple 3 : Influence de la masse, de la vitesse initiale du projectile et de la discrétisation spatiale sur les dissipations d'énergie	150
4.41	Exemple 3 : Influence de la masse, de la vitesse initiale du projectile et du pas de temps sur les dissipations d'énergie	151

Résumé

La conception de structures de génie civil de protection contre les chutes de blocs rocheux est une tâche difficile en raison de la complexité des matériaux employés, des déplacements et déformations importantes qui se produisent dans les structures, ainsi que du chargement dynamique induit par l'impact de ces blocs rocheux. Dans l'optique de fournir, à termes, des outils d'aides à la conception de ces structures de protection, ce travail de thèse a pour objectif le développement de modèles numériques capables de simuler la réponse de structures composées de matériaux élastoplastiques lorsqu'elles sont soumises à une charge d'impact, par une approche basée sur la mécanique non régulière.

La plupart des travaux existants qui utilisent la mécanique non régulière portent sur la résolution de problèmes de mécanique du contact et d'impact. Les lois de comportement élastoplastique des matériaux sont généralement modélisées à l'aide de matrices tangentes, résolus par des méthodes numériques qui utilisent des algorithmes du type return map. Néanmoins, certaines approches utilisent des techniques d'optimisation et de programmation mathématique, essentiellement en (quasi-)statique.

Ainsi, l'originalité de l'approche de ce travail réside dans l'utilisation de la mécanique non régulière associée à des méthodes d'optimisation pour résoudre, grâce à un seul algorithme monolithique, la réponse dynamique d'une structure élastoplastique soumise à des impacts.

Le comportement élastoplastique est alors formulé à l'aide de l'inclusion des taux de déformation plastique (et des variables internes d'écrouissage) dans le cône normal à l'ensemble des contraintes admissibles (et des forces thermodynamiques). De manière similaire, le contact est résolu en utilisant une relation de complémentarité entre les forces ou impulsions de réaction et les vitesses relatives au point de contact. Une formulation similaire pour les deux phénomènes est ainsi obtenue.

Suite à la discrétisation par éléments finis, le système est discrétisé en temps à l'aide du schéma de *Moreau-Jean*. Ce choix permet d'assurer la consistance du schéma numérique lorsque les solutions ne sont pas régulières. Ainsi, une formulation discrète unique basée sur des inclusions dans des cônes normaux est obtenue. Cette formulation permet d'utiliser des techniques d'optimisation numérique pour la résolution du système, ce qui peut être effectué grâce au grand nombre de méthodes existantes.

En utilisant un ensemble de contraintes admissibles défini par des contraintes linéaires, le système discret est réécrit sous la forme d'un système de complémentarité linéaire afin d'illustrer l'ensemble des développements à travers trois exemples en plasticité unidimensionnelle. Ces exemples permettent à la fois de valider le modèle élastoplastique, d'étudier les propriétés de l'algorithme développé et de vérifier l'influence des paramètres du modèle. La robustesse et l'efficacité de la méthode sont présentées et une attention particulière est portée au bilan énergétique.

Abstract

The design of civil engineering structures for protection against rockfalls is a difficult task due to the complexity of the materials used, the large displacements and deformations that occur in the structures, as well as the dynamic loading induced by the impact of these rocks. In order to provide, in the long term, tools to assist in the design of these protective structures, this thesis aims to develop numerical models capable of simulating the response of structures composed of elastoplastic materials when subjected to an impact load, using an approach based on non-smooth mechanics.

Most of the existing work using non-smooth mechanics is concerned with solving contact and impact mechanics problems. The material elastoplastic behaviour laws are usually modelled using tangent matrices, solved by numerical methods using return mapping algorithms. However, some approaches use optimisation and mathematical programming techniques, mainly in (quasi-)static.

Thus, the originality of the approach of this work lies in the use of non-smooth mechanics associated with optimisation methods to solve, thanks to a single monolithic algorithm, the dynamic response of an elastoplastic structure subjected to impacts.

The elastoplastic behaviour is then formulated using the inclusion of plastic strain rates (and internal strain hardening variables) in the normal cone to the set of allowable stresses (and thermodynamic forces). Similarly, contact is solved using a complementarity relationship between the reaction forces or impulses and the relative velocities at the point of contact. A similar formulation for both phenomena is thus obtained.

Following the finite element discretisation, the system is discretised in time using the Moreau-Jean scheme. This choice ensures the consistency of the numerical scheme when the solutions are not regular. Thus, a unique discrete formulation based on inclusions in normal cones is obtained. This formulation allows the use of numerical optimisation techniques for the solution of the system, which can be done thanks to the large number of existing methods.

Using a set of admissible stresses defined by linear constraints, the discrete system is rewritten as a linear complementarity system in order to illustrate the developments through three examples in one-dimensional plasticity. These examples are used to validate the elastoplastic model, to study the properties of the developed algorithm and to verify the influence of the model parameters. The robustness and efficiency of the method are presented and particular attention is paid to the energy balance.

Remerciements

« Ça n'a pas du être facile tous les jours » a dit Franck BOURRIER à la fin de la soutenance. Effectivement, c'est le cas, mais j'ai eu la chance de ne jamais perdre ma motivation grâce à lui et à Vincent ACARY, mes deux directeurs de thèse. Durant ces trois années, et malgré les difficultés liées au contexte sanitaire, ils ont toujours été présents et ont accompagné au mieux mon travail.

Merci, à tous les deux, pour votre suivi, vos conseils, votre implication, votre disponibilité, et pour la confiance que vous m'avez accordée.

Cette thèse n'aurait jamais débutée si Églantine BIGOT-DOLL ne m'avait pas fait découvrir la programmation et les expérimentations numériques en architecture, ni si David BERTRAND et Stéphane GRANGE ne m'avaient pas accompagné en parcours recherche durant ma dernière année d'école d'ingénieur. C'est grâce à elle et eux que j'ai pu découvrir le monde de la recherche, sa rigueur et les possibilités qu'il offre.

Merci, à tou.te.s les trois, pour m'avoir transmis vos passions et fait naître en moi l'envie de réaliser ce travail.

Il me faut souligner ma reconnaissance envers Yann MONERIE et Stéphane GRANGE qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail, ainsi qu'envers Claire SILVANI qui a fait partie du jury de soutenance et Laurent BAILLET qui en a été le président.

Merci, à tou.te.s les quatre, pour vos lectures attentives, pour vos remarques, vos conseils et vos retours.

Bien que ces trois années aient été largement réalisées à distance, j'ai pu bénéficier de nombreux échanges et moments agréables avec les membres de l'équipe TRIPOP du centre Inria de Grenoble.

Merci, à vous tou.te.s, pour l'ensemble des discussions, pour le partage de vos connaissances dans vos domaines respectifs de compétences, dont j'ignorais souvent jusqu'à l'existence, pour vos avis tranchés sur la science et ses pratiques. J'espère avoir l'occasion de vous recroiser à l'avenir.

Deux personnes méritent que je m'adresse à elles en particulier. En premier lieu, Diane, pour ta disponibilité, ton aide précieuse, ta connaissance de l'institution et ta joie communicative. En second lieu, Nicholas, pour nos pauses café, ta bonne humeur au bureau, le partage de tes connaissances, de ton expérience et de tes références.

Entre élastoplasticité, contact, formulation de bétons, impression 3D et théories de modèles et représentations en architecture, les discussions avec Victor et Aurélien m'auront permises de prendre du recul sur mes travaux et de replacer la recherche dans un contexte et une réflexion plus globales.

Merci, à tous les deux, d'être sur le même chemin que moi depuis 13 ans, et tous mes vœux de réussite pour vos travaux respectifs à venir.

Pour entrer en thèse, il faut *a minima* cinq ans d'études. Ma famille m'a permise de les effectuer dans les meilleures conditions, tant matérielle qu'affective.

Merci à elle, et à mes parents en particulier, de m'avoir permis d'arriver jusqu'ici. Je mesure la chance que j'ai d'avoir pu m'y consacrer pleinement.

Tout au long de ce travail, tout comme auparavant, j'ai pu compter sur un entourage attentif, compréhensif, fidèle. Je ne me risquerai pas à citer de prénom, de peur d'en oublier, mais tout de même,

Merci, à vous toutes et tous, qui avez rendu mon quotidien meilleur, avant puis pendant ces trois années de travail. Je pense en particulier à Oanell qui m'a forcé à sortir prendre l'air deux fois par jour au moins et qui m'aura permise de maintenir l'équilibre et la régularité du quotidien tout en y apportant sa joie.

Et finalement, il me faut souligner les innombrables adjectifs pouvant s'accorder avec Carolina, qui lui ont permis d'être cette personne qui m'aura fait sourire, m'aura motivé, soutenu et bien plus encore depuis pas mal d'années maintenant.

Merci à toi, pour ta grande contribution à ces trois excellentes années, et ce, même si avec nos travaux, « ça n'a pas [été]facile tous les jours ».

Introduction

Avec le réchauffement climatique, les risques naturels en montagne sont amenés à s'intensifier, tant dans leur occurrence que dans leur intensité. Les enjeux liés à ces risques gravitaires sont décuplés en raison des nombreuses infrastructures et des fortes densités de population présentes dans les vallées.

Dans ces zones montagneuses, les changements globaux en cours conduisent à une augmentation de l'impact des risques naturels. Par exemple, la fonte du permafrost met hors d'usage certaines infrastructures, des pans de falaise s'effondrent ou des coulées de boue et des laves torrentielles entraînent tout sur leur passage, des glissements de terrain ravagent des habitations et des routes. De plus, l'occurrence de plus en plus élevée et l'ampleur grandissante des dégâts causés par ces aléas gravitaires sont susceptibles d'affecter considérablement les populations et les infrastructures de ces territoires.

Parmi tous ces aléas, les chutes de bloc font partie des plus fréquents puisqu'elles peuvent arriver n'importe où dès lors qu'il y a une paroi rocheuse. Ces chutes peuvent aller de quelques pierres comme fréquemment au bord de routes, jusqu'à des morceaux entiers de montagne qui se décrochent (dans le massif du Mont Blanc par exemple, voir à ce propos RAVANEL et DELINE (2008)). Deux types de structures de protection existent : les structures actives qui permettent d'éviter les aléas eux-même (renforcement des pentes, filets appliqués sur des falaises) et les structures passives qui permettent d'arrêter ou de dévier les aléas (murs, merlons, filets, galeries), chacun disposant de ses propres avantages et inconvénients en plus de capacités intrinsèques à leur composition.

Lorsqu'un bloc rocheux tombe, il acquiert une énergie cinétique considérable qu'il faut alors dissiper pour l'arrêter. Des obstacles naturels peuvent être mis à contribution dans cette optique, comme les forêts, mais la plupart du temps il faut utiliser des structures dédiées comme des filets de protection, des parois rigides, des enrochements ou encore des merlons.

En raison de la complexité des phénomènes en jeu, le dimensionnement des structures de protection face aux chutes de blocs rocheux est une tâche délicate. En particulier, ce sont la présence de non-linéarités géométriques et matérielles ainsi que les conditions de chargement spécifiques (impact notamment) et variables qui rendent difficile la conception de ces structures. Pour dimensionner correctement de tels ouvrages, des modèles complexes et calibrés de façon détaillée à l'aide d'études expérimentales sont nécessaires afin d'obtenir des résultats cohérents. La quantification des processus dissipatifs tient donc un rôle prépondérant dans le dimensionnement des ouvrages de protection.

Lors de l'impact d'un bloc rocheux, les matériaux constitutifs des structures de protection subissent des déformations plastiques. Ainsi, les processus de dissipation de l'énergie associés à la plasticité des matériaux sont essentiels autant pour quantifier l'efficacité des structures à dissiper l'énergie des blocs que pour déterminer leur état suite à l'impact.

Ce travail de thèse a donc pour objectif principal le développement de méthodes numériques permettant d'améliorer les outils de dimensionnement des ouvrages de protection

pare-blocs. Il se concentrera sur la modélisation des processus dissipatifs sans toutefois se restreindre à un type de structure de protection en particulier.

Cette thèse propose ainsi une méthode numérique capable de déterminer par le calcul le comportement de ces ouvrages de protection sous impact. Bien que de nombreux travaux aient déjà été menés sur ce sujet, les algorithmes développés proposent, la plupart du temps, de traiter les phénomènes séparément les uns des autres. Les bilans énergétiques, pourtant au cœur de la conception, restent alors approximatifs.

Plus spécifiquement, le sujet de ce travail est le développement d'une méthode permettant de modéliser la réponse dynamique de structures élastoplastiques lors d'impacts de projectiles rigides ou déformables dans le cadre de la mécanique non-régulière. Deux processus principaux et primordiaux sont considérés : les impacts, et les déformations plastiques. Lors d'un impact, les vitesses sont susceptibles de s'inverser instantanément, ce qui justifiera l'utilisation de la mécanique non régulière pour traiter de façon rigoureuse les lois de contact.

Un schéma implicite d'intégration en temps sera utilisé pour la résolution dynamique des équations dans l'optique de pouvoir effectuer des bilans énergétiques fiables sans avoir à utiliser des pas de temps extrêmement fins.

De plus, la formulation commune des phénomènes d'impact et de plasticité, sous forme d'inclusion dans des cônes normaux, permettra de les résoudre simultanément, ce qui s'avérera particulièrement pratique lors de l'étude du schéma numérique.

Le travail s'organise autour de trois grand axes. Il commence par une revue bibliographique qui permet de motiver les choix méthodologiques particuliers (choix de modélisation, méthodes de résolution - chapitre 1). Après cet état de l'art, l'algorithme monolithique de résolution est développé à partir de la formulation continue des équations et de la méthode des éléments finis (chapitre 2) puis de leur discrétisation temporelle (chapitre 3). Enfin, des exemples viennent illustrer les propriétés des développements théoriques effectués et la robustesse de l'algorithme (chapitre 4).

Chapitre 1

Revue bibliographique et état de l'art

Sommaire

1.1	Contexte Général	16
1.2	Contact	17
1.2.1	Introduction	17
1.2.2	Modélisation du contact	18
1.2.2.1	Contact compliant	18
1.2.2.2	Contact unilatéral	19
1.2.3	Méthodes de résolution du contact unilatéral	19
1.2.3.1	Méthode des pénalités	20
1.2.3.2	Méthode des multiplicateurs de <i>Lagrange</i>	21
1.2.3.3	Complémentarité	21
1.2.4	Modélisation de la dynamique avec contact	22
1.2.4.1	Impact	22
1.2.4.2	Dynamique non régulière	23
1.2.5	Méthodes numérique pour la dynamique avec contact	24
1.2.5.1	Méthodes d'intégration temporelle	24
1.2.5.2	Discrétisations spatiales pour le contact	27
1.3	Plasticité	28
1.3.1	Introduction	28
1.3.2	Bref historique de la plasticité	29
1.3.3	Méthodes de résolution	32
1.3.3.1	Méthode du <i>return map</i>	32
1.3.3.2	Méthodes variationnelles pour la plasticité	33
1.3.3.3	Éléments finis	38
1.3.3.4	Méthodes numériques de résolution	39
1.3.4	Applications et approfondissements des formulations variationnelles	40
1.3.4.1	Application théorique des lois de dissipation normale	40
1.3.4.2	Dynamique	41
1.3.4.3	Analyse limite	41
1.3.4.4	Limites des formulations variationnelles en plasticité	41
1.3.4.5	Thermodynamique et méthodes numériques	42
1.3.5	Travaux récents sur les formes variationnelles de la plasticité	43
1.4	Couplage plasticité et impact	44
1.5	Conclusion, objectifs et organisation de la thèse	46

1.1 Contexte Général

Les enjeux soumis aux aléas gravitaires en zones montagneuses sont de nature diverse : enjeux humains, bâti individuel et collectif, réseaux (routier, ferroviaire, par exemple). Parmi les nombreux aléas naturels auxquels ces enjeux doivent faire face (laves torrentielles, coulées de boue, chutes de blocs rocheux, glissements de terrain, séismes entre autre), ce travail se concentre sur les chutes de blocs. Ces événements sont, d'après VOLKWEIN et al. (2011), très rapides et localisés comparativement aux autres aléas. Les infiltrations d'eau, les cycles de gel - dégel, la fonte du permafrost, les racines des végétaux, les activités humaines ou encore les séismes sont autant de phénomènes qui sont susceptibles de décrocher des blocs rocheux et donc d'entraîner leur chute.

Face à ces chutes de blocs, un aléa rocheux est défini pour une zone quelconque par la probabilité sur un intervalle de temps qu'une chute de bloc touche cette zone avec un niveau donné d'intensité (VOLKWEIN et al., 2011). Le risque associé, pour cette zone donnée, est une fonction dépendant à la fois d'un aléa, de la vulnérabilité d'un enjeu et de son niveau d'exposition. L'aléa est classiquement défini comme une fonction dépendant de l'aléa de rupture, qui est la probabilité qu'un bloc se décroche d'une paroi, et de l'aléa de propagation, qui est la probabilité qu'un bloc s'étant détaché atteigne la zone en question. Pour réduire le risque rocheux, il faut donc diminuer les aléas, et réduire la vulnérabilité et l'exposition de la zone.

Pour limiter l'aléa de rupture, il faut utiliser des protections actives comme renforcer des parois et falaises ou mettre en place des filets plaqués sur les parois pour retenir les rochers. Pour faire baisser l'aléa de propagation, des structures permettant de dévier et arrêter les blocs sont utilisées. Pour diminuer la vulnérabilité d'une zone, il est possible de prévoir et concevoir, en fonction du risque défini, les constructions qui vont s'y trouver (structures adaptées à encaisser les aléas en particulier). Enfin, pour limiter le risque d'exposition, il s'agit le plus souvent de décisions politiques visant à réglementer la zone (restrictions d'accès, zones non constructibles, *etc.*).

Cette thèse est orientée vers la réduction de l'aléa de propagation puisqu'elle présente une méthode permettant le dimensionnement de structures passives devant dissiper l'énergie cinétique accumulée par un bloc lors de sa chute. Pour déterminer les niveaux d'énergie à dissiper ainsi que les emplacements stratégiques pour l'édification des ouvrages de protection, les travaux de trajectographie de blocs rocheux sont utilisés (voir par exemple BOURRIER (2008) ou DORREN et al. (2013) pour plus de détails à ce sujet).

En fonction de l'énergie d'impact à dissiper, différentes structures peuvent être utilisées. Pour les faibles énergies d'impact (inférieures à 100 kJ), des barrières rigides sont utilisées (constituées de poteaux et d'un remplissage réalisé avec des poutres espacées, des planches de bois, des plaques de béton). Pour des énergies d'impact allant jusqu'à 250 kJ , des barrières semi-rigides sont employées, constituées de poteaux reliés par des cables tendus permettant d'avoir des grandes déformations. Pour des niveaux d'énergie d'impact pouvant atteindre $10\,000\text{ kJ}$, des filets de protection sont utilisés, équipés de dissipateurs d'énergie (voir par exemple BERTRAND et al. (2012), DI GIACINTO et al. (2020) ou DUGELAS (2020)). Enfin, lorsque l'énergie d'impact est supérieure à $10\,000\text{ kJ}$, des merlons sont utilisés (voir par exemple KANNO et al. (2021) et LAMBERT et BOURRIER (2013)).

Parmi les avantages et des inconvénients de chaque type de structure passive, les faibles coûts et la rapidité de construction caractérisent les barrières, tandis que les merlons ont des performances élevées mais nécessitent de gros travaux de terrassements et une emprise au sol

importante, ce qui conduit à des prix élevés. Il faut souligner aussi la possibilité d'inclure les forêts comme moyen de protection qui, même si elles ne permettent pas toujours d'arrêter un bloc, participent à la dissipation d'une partie de l'énergie, ce qui permet de construire des ouvrages de moindre ampleur (voir par exemple DUPIRE et al. (2016a,b)).

1.2 Contact

1.2.1 Introduction

Lorsqu'un bloc rocheux entre en contact avec le sol ou un ouvrage de protection, il ne peut passer au travers sans engendrer *a minima* une modification des parties impactées. Il faut donc réussir à modéliser l'interaction entre le projectile et le milieu impacté.

Lors de ce phénomène, rien n'empêche le projectile d'être libre de ses mouvements hormis l'interaction avec l'obstacle (par exemple, il peut rebondir et repartir en sens inverse). Il faut donc modéliser le contact de façon unilatérale par opposition au contact bilatéral qui lie tous les mouvements d'un solide à un autre (cas de mécanismes par exemple).

Il est alors nécessaire de satisfaire une condition de non interpénétration entre deux objets, deux solides, deux parties tout en prenant en compte les déformations éventuelles des milieux (élastiques ou plastiques). Par la suite, "corps" ou "objet" est utilisé indifféremment, en gardant à l'esprit qu'il peut s'agir d'un seul et même solide qui voit une de ses parties entrer en contact avec une autre.

Deux solides Ω_1 et Ω_2 sont considérés en mouvement l'un par rapport à l'autre. Deux points $A_1 \in \partial\Omega_1$ et $A_2 \in \partial\Omega_2$ sont définis sur leurs frontières respectives (ces frontières sont considérées lisses, c'est-à-dire qu'elles possèdent chacune une normale unique). Ces deux points sont choisis de façon à minimiser la distance entre les deux solides et peuvent donc bouger à la surface de leurs solides porteurs respectifs. Cette distance signée sera définie afin d'être positive lorsqu'il n'y a pas contact. Si elle est négative, alors il y a une interpénétration entre les corps, configuration qu'il conviendra de détecter et de prévenir en considérant que les deux corps sont en contact.

Lorsque les deux points A_1 et A_2 sont en contact, alors il n'y a plus qu'un unique point A commun et un vecteur normal de direction commune aux deux solides est défini. De plus, puisqu'une direction normale commune a pu être déterminée, alors il est possible de définir un plan tangent commun. Ainsi, les composantes des efforts de contact peuvent être décomposées en une partie normale et une partie tangentielle. Cependant, puisque seul le contact sans frottement est considéré dans ce travail, les composantes tangentielles seront ignorées et seules les composantes normales seront prises en compte.

Détection du contact La détection de ces contacts est le premier point à satisfaire. Il faut souligner que, bien que cette tâche puisse s'avérer complexe suivant les systèmes étudiés, ce point technique n'entre pas dans le cadre de cette thèse. Seuls des cas simples seront étudiés et, pour plus de précisions, il est possible de consulter les méthodes et références proposées dans ACARY et BROGLIATO (2008) ou dans WRIGGERS (2006).

Distance entre les solides Une fois le contact détecté, il faut réussir à satisfaire la condition de non interpénétration entre les objets. Pour cela, la distance signée, dépendante du temps et séparant les deux points candidats au contact (nommée $g_N(t)$) est introduite (voir Figure 1.1). Cette distance doit être positive ou nulle afin de respecter la non-interpénétration des corps :

$$g_N(t) \geq 0 \tag{1.1}$$

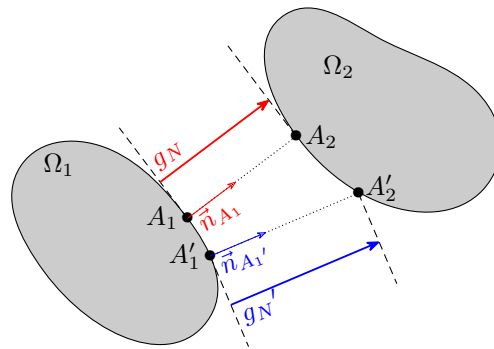


FIGURE 1.1 – Distance g_N entre deux solides Ω_1 et Ω_2 . Les distances sont mesurées suivant les normales aux points du solide Ω_1 . La distance considérée pour définir le contact actif ou non est le minimum des g_N qui correspond ici à la distance suivant la normale au point A_1 .

Cette inéquation est valable pour tout couple de points appartenant à deux solides susceptibles d'entrer en contact. Le signe de cette fonction permet de détecter le contact au travers de la position relative des deux points A_1 et A_2 . Dans le cas où $g_N > 0$, une distance sépare les deux points, si $g_N = 0$, les deux points sont en contact.

Il faut donc réussir à satisfaire cette condition de non interpénétration entre projectile et obstacle au travers de la modélisation du phénomène de contact.

1.2.2 Modélisation du contact

Les modélisation du contact doivent permettre de définir une relation entre les mouvements relatifs des corps (au travers de la distance signée g_N) et les forces de réaction au contact. Deux grands types de modélisation du contact existent : les modélisations compliantes et les modèles de contact unilatéral.

1.2.2.1 Contact compliant

La modélisation compliant du contact (*soft contact*) permet de prendre en compte les déformations locales à l'interface, que ce soient les irrégularités de surface ou l'écrasement localisé des corps. La loi de contact permet en particulier de considérer ces déformations à travers différentes loi de comportement qui peuvent être élastiques ou élastoplastiques, et inclure de la viscosité.

L'interpénétration est autorisée par la loi et permet de prendre en compte ces déformations locales. Il est donc possible d'avoir une distance g_N négative, mais cette valeur doit rester très faible au regard de la dimension des corps et de leurs rigidités. Les forces de réaction sont définies proportionnellement à la valeur de l'interpénétration.

La loi de contact de HERTZ (1882) est un exemple de ce type de modélisation, et la méthode des éléments discrets (CUNDALL et STRACK, 1979) utilise ce modèle.

Afin de modéliser le plus rigoureusement possible le phénomène de contact, les lois d'interaction peuvent être complexes. Par exemple, des modèles complexes existent, prenant en compte de l'amortissement (contact visco-élastique) ou des valeurs de raideur différentes en fonction du mouvement relatif des deux solides (voir par exemple WRIGGERS (2006) pour une définition générale de la méthode, ainsi que FLORES (2015) et FLORES et al. (2011) ou MACHADO et al. (2012)).

1.2.2.2 Contact unilatéral

La modélisation du contact unilatéral (*hard contact*) considère des solides rigides à l'interface, et ne permet aucune interpénétration. Les déformations locales doivent être modélisées par les modélisations des objets eux-mêmes d'après la mécanique des milieux continus. Le problème principal qui se pose avec cette modélisation du contact est de réussir à définir la relation entre les mouvements relatifs, nuls si il y a contact, et les forces de réaction.

SIGNORINI (1959) a proposé une modélisation basée sur des inégalités qui relient les mouvements relatifs et les forces de réaction. Dans le cas où il y a contact, des forces de réaction normale, notées $r_N(t)$, peuvent se développer et sont définies comme étant positives ou nulles :

$$r_N(t) \geq 0 \quad (1.2)$$

avec l'égalité qui est forcément respectée s'il n'y a pas contact et qui peut être valable dans le cas où il y a contact. Ainsi, les différents cas suivants peuvent se produire :

$$\begin{cases} g_N(t) > 0 \implies r_N(t) = 0 & (\text{pas contact}) \\ g_N(t) = 0 \implies r_N(t) \geq 0 & (\text{contact}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Il faut remarquer que le produit de g_N et de r_N est toujours nul et par conséquent, les trois contraintes suivantes sont toujours valides :

$$g_N(t) \geq 0 \quad r_N(t) \geq 0 \quad g_N(t)r_N(t) = 0 \quad \forall t \quad (1.4)$$

Cet ensemble d'équations (1.4) correspond aux conditions de *Signorini* qui forment les équations du contact unilatéral (représentées sur la figure 1.2).

Cependant, avec cette formulation, il faut réussir à déterminer les forces de réaction dans le cas où $g_N = 0$ car la loi n'indique que l'appartenance de la force de réaction à l'ensemble des réels positifs. Le modèle de contact unilatéral a donc la particularité, outre d'avoir un angle qui implique un processus *non lisse* (dérivation et intégration difficiles), d'être multivoque. L'enjeu des méthodes de résolution pour ces problèmes de contact se concentre donc là : trouver comment résoudre les équations modélisant les phénomènes de contact. Il faut trouver un moyen de résoudre ces spécificités, comment traiter ce point singulier afin de déterminer la valeur de la force de réaction lorsqu'il y a contact tout en respectant les conditions de *Signorini* (1.4).

1.2.3 Méthodes de résolution du contact unilatéral

Plusieurs méthodes de résolution existent pour les problèmes de contact unilatéral. Dans l'ouvrage de WRIGGERS (2006) deux en particulier sont citées : la méthode de pénalisation

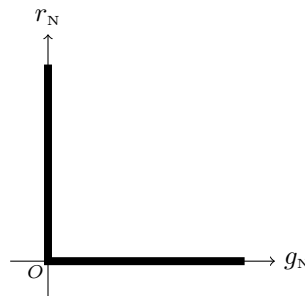


FIGURE 1.2 – Loi de contact unilatéral - Conditions de *Signorini*. Force de réaction $r_N(t)$ en fonction de la distance entre les solides $g_N(t)$

et la méthode des multiplicateurs de *Lagrange*.

1.2.3.1 Méthode des pénalités

Cette méthode permet de régulariser la loi de contact unilatéral en offrant une relation univoque entre la valeur de la fonction $g_N(t)$ et la force de réaction $r_N(t)$ (voir Figure 1.3). Le principe repose sur la pénalisation des positions non autorisées du système, autrement dit dès que $g_N < 0$, au travers de la définition d'une force de réaction reliée à la valeur de g_N . Elle autorise donc les interpénétrations à des fins pratiques pour définir une force de réaction associée. Cette force dépend du paramètre de pénalité k_c , qui peut lui même dépendre de la valeur de g_N . En d'autres termes, cette méthode peut s'assimiler à l'ajout d'un ressort (linéaire ou non) dont la force de rappel est nulle dans le cas où il n'y a pas de contact détecté et supérieure à zéro s'il y a contact.

La méthode des pénalités est très utilisée dans la pratique et par des codes commerciaux de par sa simplicité de mise en œuvre. En revanche, elle se base sur l'utilisation d'un paramètre de raideur qui n'a pas nécessairement d'interprétation physique et qui nécessite un calibrage pour réussir à modéliser correctement le comportement d'un système.

L'ajout d'un terme complètement déterminé et continu dans l'équation de la dynamique ainsi que la loi de contact univoque rendent le champ de vitesse continu et dérivable. Cependant, comme évoqué précédemment, les forces liées au contact sont calculées à partir d'une violation de la contrainte, et donc des positions non possibles sont admises. De fait, en anticipant la discrétisation temporelle nécessaire à la résolution numérique, le pas de temps utilisé devra être petit au regard de la dynamique employée afin que cette interpénétration reste faible.

De plus, il faudra porter attention au mauvais conditionnement du système numérique qui est susceptible d'apparaître lorsque le paramètre k_c tend vers une valeur infinie (la loi régularisée tendant alors vers la loi exacte de *Signorini*). Il faudra donc trouver un juste milieu entre toutes ces contraintes, ce qui rend le calibrage du paramètre de pénalité particulièrement important pour la précision et l'exploitabilité des résultats, en particulier dans le cadre d'analyses pour l'ingénierie.

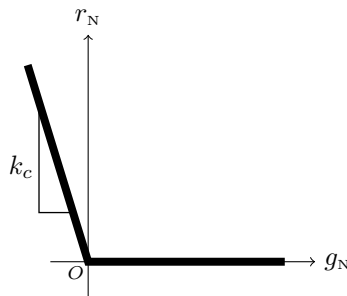


FIGURE 1.3 – Force de réaction en fonction de la distance entre les solides pour la loi de contact unilatéral régularisée (méthode des pénalités). Loi bilinéaire - plus le paramètre de pénalité k_c est important, plus la pente sera forte pour les valeurs négatives de g_N et plus la loi se rapprochera de la loi exacte. La relation est univoque : pour une valeur de la fonction g_N , une seule valeur de force de réaction r_N est possible.

1.2.3.2 Méthode des multiplicateurs de *Lagrange*

Cette méthode correspond à la formulation des conditions de *Signorini* en considérant la force de réaction r_N comme un multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes $g_N \geq 0$. Aucune interpénétration entre les solides en contact n'est possible. Résoudre le contact à l'aide des multiplicateurs de *Lagrange*, c'est alors résoudre le problème de contact unilatéral.

D'après la formulation lagrangienne de la mécanique, une fonctionnelle (le lagrangien) est utilisée afin de déterminer le minimum de l'énergie interne du système étudié par dérivation. Cependant, du fait de l'imposition de la contrainte de non-interpénétration, c'est le minimum de l'énergie tout en ayant la contrainte sur les positions à respecter qui doit être déterminé, ce qui peut être fait en modifiant le lagrangien original par l'ajout d'un terme pénalisant les positions non autorisées (avec une fonction indicatrice par exemple). De façon courante, la fonction $g_N(t)$ est donc la fonction contrainte, et $\lambda_{LM}(t) = r_N$ est le multiplicateur de *Lagrange* associé. Le nombre d'inconnues du système est alors susceptible d'augmenter puisque si un contact est détecté ($g_N(t) \leq 0$), alors il faut déterminer la valeur du multiplicateur $\lambda_{LM}(t)$ qui permet de respecter la contrainte, à l'aide des données du système (forces d'inertie, forces appliquées, amortissement, et variables de position, vitesses et accélération).

En notant \mathcal{L} le lagrangien du système libre (où v représente la vitesse d'une particule et q sa position), alors le lagrangien complet est défini par :

$$\mathcal{L}_{LM}(q(t), v(t), \lambda_{LM}) = \mathcal{L}(q(t), v(t)) - \lambda_{LM} g_N(q(t)) \quad (1.5)$$

et il s'agira alors de trouver le minimum de ce nouveau lagrangien incluant les contraintes dues au contact.

Deux problèmes susceptibles d'arriver avec cette méthode sont à souligner afin de les garder à l'esprit en vue de les résoudre. En premier lieu, il faut bien noter que cette méthode, bien que robuste, augmente considérablement la taille du système à résoudre en introduisant de nombreuses inconnues supplémentaires (une par contrainte active). En second lieu, des erreurs énergétiques en temps discret suivant le schéma d'intégration temporelle utilisé peuvent apparaître et il conviendra de les anticiper ou de les prendre en compte lors de l'analyse des résultats (voir à ce propos VERPEAUX et CHARRAS (2003)).

Cette méthode est fréquemment utilisée et étudiée dans des travaux récents. Par exemple, il est possible de citer ZENG et al. (2018) qui étudient le comportement dynamique d'un pont lorsqu'un train passe dessus (contact rail-roue), WEYLER et al. (2012) qui comparent la méthode des pénalités à celle des multiplicateurs de *Lagrange*, ou encore FRANCESCHINI et al. (2022) qui étudient une méthode de pré-conditionnement du problème sans laquelle il n'est pas ou difficilement inversible.

1.2.3.3 Complémentarité

Suivant la méthode de LAGRANGE, lors de l'ajout de la fonction indicatrice au lagrangien en vue de pénaliser les positions non autorisées, la dérivation amène à une forme de sous-différentielle qui est équivalente à une forme de complémentarité qui reformule les conditions de *Signorini* (1.4) :

$$0 \leq g_N(t) \perp r_N(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (1.6)$$

Le signe \perp précise que le produit des deux variables est nul. L'utilisation de ce symbole d'orthogonalité peut facilement se comprendre de deux façons. La première vient du fait qu'en analyse vectorielle, deux vecteurs orthogonaux ont leur produit scalaire nul, ce qui est le cas ici (et qui prendra tout son sens par la suite lors des discrétisations spatiales lorsque g_N et r_N deviendront des vecteurs pouvant contenir les informations de plusieurs points candidats

au contact). La seconde raison est illustrée par la Figure 1.2 qui représente la loi de contact réelle et sur laquelle nous voyons clairement l'angle droit formé par les deux demi-droites de valeurs possibles.

Cette formulation peut être associée à une équation permettant de relier les positions et les vitesses aux forces de réaction, en particulier à l'aide de l'équation de la dynamique, et conduire à la formation de système de complémentarité, linéaires ou non. Cette méthode sera en particulier utilisée dans la suite de la thèse.

1.2.4 Modélisation de la dynamique avec contact

Une fois le contact modélisé et disposant de méthodes de résolution, il faut inclure cette formulation dans les équations du mouvement ou de la dynamique. L'objet de ce paragraphe est de présenter quelques méthodes permettant d'inclure les modèles de contact dans les systèmes dynamiques.

1.2.4.1 Impact

Loi d'impact régularisée Dans le cas de l'utilisation de modèles de contacts régularisés, il suffit d'ajouter aux forces appliquées au système le terme r_N provenant de la loi de contact qui à toute valeur $g_N(t)$ associe une force de réaction unique.

Par exemple, pour la loi définie dans la figure 1.3, ce terme vaut :

$$r_N(t) = \begin{cases} k_c g_N(t) & \text{si } g_N(t) < 0 \\ 0 & \text{si } g_N(t) \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

De façon générale, il faut noter $k_c(g_N(t))$ pour souligner la dépendance possible du paramètre de pénalisation aux valeurs d'interpénétration, ce qui n'est pas le cas ici. Connaissant cette valeur $r_N(t)$, le système dynamique peut être résolu de façon classique comme un système continu, sans singularités.

Lois d'impact rigide Dans le cas du contact unilatéral non régularisé, les lois d'impact sont plus complexes à introduire dans la dynamique.

La loi d'impact de *Newton* indique que la vitesse juste après l'impact (à l'instant t^+) est égale à la vitesse juste avant (instant t^-) réduite d'un facteur e , appelé coefficient de restitution et permettant de rendre compte des dissipations au contact ($e \in [0, 1]$) :

$$v_N(t^+) = -e v_N(t^-) \quad \text{si } g_N(t) = 0 \quad (1.8)$$

D'autres lois, telles que celle de *Poisson* qui prend en compte la phase de compression et celle de décompression, ou la méthode du coefficient de restitution énergétique (reliant les énergies cinétiques avant et après contact) existent (voir GLOCKER (2004), GLOCKER (2001), BOULANGER (1939) ou encore STRONGE (1994, 2004)).

L'utilisation de ces lois mène à une difficulté majeure : la présence de sauts de vitesse. En effet, (1.8) indique une inversion du signe de la vitesse relative entre les solides à l'instant du contact. Ce changement de signe a lieu de façon instantanée : il y a donc un saut de vitesse qui implique que l'accélération, définie comme la dérivée temporelle de la vitesse, n'est plus définie au sens usuel mais qu'elle correspond à une impulsion. Cette particularité rend complexe la modélisation des problèmes de contact unilatéral, et il est possible, entre autre, d'utiliser la dynamique non régulière pour résoudre le système dynamique associé.

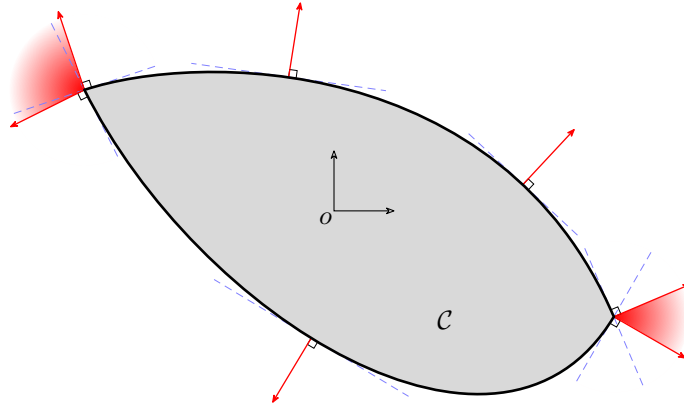


FIGURE 1.4 – Représentation de plusieurs cônes normaux à l'ensemble C convexe. Lorsque en un point, la frontière de C est régulière, le plan tangent en ce point (trait discontinu) et le cône normal (flèche rouge) sont uniques. Si la frontière de C est singulière (angles ici), les tangentes sont multiples et le cône normal est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ces tangentes (surfaces dégradées rouges).

1.2.4.2 Dynamique non régulière

Cette méthode, développée par MOREAU (1983, 1988), se base sur les notions de mesures différentielles afin de prendre en compte à la fois les parties de mécanique régulière (hors contact) et les singularités (en particulier sauts de vitesses à l'impact et accélérations usuelles non définies dans ce cas).

Cette formulation est le point de départ de la méthode *Nonsmooth contact dynamics* (NSCD), utilisée dans cette thèse et qui sera développée par la suite.

En notant q les positions et en définissant l'ensemble des configurations admissibles du système $\mathcal{C}(t)$ (variable au cours du temps) par :

$$\mathcal{C}(t) = \{q(t), g_N(q) \geq 0\} \quad (1.9)$$

ainsi que le cône normal à un ensemble C par :

$$N_C(x) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid s^\top(y - x) \leq 0 \quad \forall y \in C\} \quad (1.10)$$

alors l'opposé des efforts de réaction est défini comme appartenant au cône normal à l'ensemble $\mathcal{C}(t)$ (voir figure 1.4) :

$$-r_N(t) \in N_{\mathcal{C}(t)}(q(t)) \quad (1.11)$$

Cette forme est équivalente à (1.6) avec la fonction $g_N(t)$ incluse dans la définition de l'ensemble des positions admissibles \mathcal{C} . Dès lors, à l'aide des notions de fonctions à variation bornée (qui permettent de définir une limite à droite et une limite à gauche d'un point non différentiable) et de théorie de la mesure, MOREAU utilise son processus de balayage (*sweeping process*, voir MOREAU (1971b, 1972)) afin de reformuler les conditions de *Signorini* non plus en fonction des positions mais des vitesses.

À l'aide de la loi d'impact de *Newton*, il est alors possible de réécrire l'inclusion (1.11) en vitesses et non plus en positions dans le cas où la fonction $g_N(t)$ est inférieure ou égale à 0. Réécrite sous forme de conditions de complémentarité, cette inclusion prend la forme :

$$0 \leq v_N^+(t) + ev_N^-(t) \perp di_N(t) \geq 0 \quad \text{si } g_N(t) \leq 0 \quad (1.12)$$

où $v_N^-(t)$ et $v_N^+(t)$ sont les vitesses relatives entre les solides juste avant et juste après l'impact, et $e \in [0, 1]$ est le coefficient de restitution nécessaire numériquement qui permet de prendre en compte une dissipation de l'énergie au contact. Ce paramètre devra être calibré pour modéliser de façon fidèle des comportements de structure sous impact pour l'ingénierie.

1.2.5 Méthodes numérique pour la dynamique avec contact

Hormis pour de rares cas académiques, résoudre les modélisations mathématiques des problèmes de mécanique implique de faire appel à des méthodes numériques de résolution, que ce soit dans le temps ou dans l'espace. Une discrétisation spatiale et temporelle du problème doit alors être effectuée, et il faut choisir une ou plusieurs méthodes de résolution et schémas numériques adaptés au phénomène à modéliser.

Ce paragraphe est dédié à la présentation de certaines de ces méthodes numériques de manière générale, en mettant l'accent sur celles qui permettent de traiter du contact et, de façon anticipée, de l'élastoplasticité.

1.2.5.1 Méthodes d'intégration temporelle

Les méthodes de modélisation et de résolution présentées jusqu'ici sont écrites en temps continu, pour tout instant t . L'instant t est défini comme appartenant à un intervalle commençant à $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et allant jusqu'à un instant $t_{fin} > t_0$. Ainsi, $t \in [t_0, t_{fin}]$ et t peut prendre n'importe quelle valeur dans cet intervalle.

Résoudre un problème de mécanique revient à résoudre une équation différentielle à valeurs initiales de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\square}(t) = f(\square, t) \\ \square(t_0) = \square_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

où f est une fonction à définir en fonction du problème à modéliser et dont la forme intégrale est donnée par :

$$\square(t_{k+1}) - \square(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\square(t), t) dt \quad (1.14)$$

Cependant, hormis dans quelques rares cas académiques pour lesquels une solution analytique existe, il faudra passer par une discrétisation temporelle et utiliser un schéma numérique qui permettront de résoudre l'équation (1.13) pas à pas en calculant une approximation de cette fonction à chacun des instants discrets t_k .

L'intervalle de définition de t est donc discrétisé en un nombre fini de valeurs séparées par un pas de temps noté h . Ce pas de temps peut être variable, mais par simplicité de présentation, il sera considéré constant dans la suite du travail (sauf mention contraire). Suite à cette discrétisation, $t \in \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{fin}\}$ et le pas de temps est défini par $h = t_{k+1} - t_k$.

A un instant donné t_k , chaque approximation des fonctions du système est notée \square_k et définie par :

$$\square_k \approx \square(t_k) \quad (1.15)$$

et les conditions initiales sont connues et définies par $\square_0 = \square(t = 0) = a$ avec a donné.

Les méthodes de résolution peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\square_{k+1} = \square_k + h\phi(\square(t), f(\square, t), t) \quad (1.16)$$

et permettent de calculer la valeur \square_{k+1} de proche en proche. Suivant la forme de la fonction ϕ , divers schémas sont obtenus, en particulier :

- Le schéma d'*Euler* explicite pour $\phi = f(\square_k, t_k)$
- Le schéma d'*Euler* implicite pour $\phi = f(\square_{k+1}, t_{k+1})$
- Le schéma de *Cranck-Nicholson* (implicite) pour $\phi = 1/2 (f(\square_k, t_k) + f(\square_{k+1}, t_{k+1}))$

Schémas explicites Les méthodes qui découlent des schémas explicites (ϕ ne dépend pas des valeurs à l'instant inconnu t_{k+1}) permettent de résoudre directement les équations de la dynamique, sans avoir à faire appel à la résolution d'un système (parfois non linéaire) à chaque pas de temps. Elles sont stables sous conditions et leurs propriétés de stabilité dépendent du pas de temps choisi. De plus, ces schémas créent numériquement de l'énergie, ce qui peut conduire à la divergence des résultats, d'où l'importance d'avoir un pas de temps très faibles.

De fait, ces méthodes sont bien adaptées aux problèmes de dynamique rapide qui par nature nécessitent de petits pas de temps pour capturer leur comportement. En particulier, elles conviennent bien aux modèles qui ont de grandes raideurs au contact (modèles compliantes et méthode des pénalités en particulier) pour limiter les interpénétrations ou les violations des conditions de *Signorini*, et qui nécessitent donc de petits pas de temps. La résolution à chaque instant t_k est donc plus simple et plus rapide avec les schémas explicites, mais la taille du pas de temps impose de très nombreux calculs.

Schémas implicites Dans le cas des schémas implicites (ϕ dépend entre autre des valeurs à l'instant inconnu t_{k+1}), le terme inconnu \square_{k+1} apparaît de part et d'autre de l'égalité dans (1.16), ce qui peut compliquer la résolution des équations dans les cas non linéaires (itérations nécessaires au sein du pas de temps, souvent effectuées avec l'algorithme de *Newton-Raphson*). Ces méthodes sont performantes et robustes car elles sont le plus souvent stables sans condition (en particulier, elles dissipent virtuellement de l'énergie ce qui, bien qu'altérant les résultats, conduit à améliorer cette stabilité).

L'un des grands avantages de ce type de méthode est de n'imposer aucune restriction sur le pas de temps h dans des cas linéaires. Ce type de schéma est donc en particulier adapté pour des dynamiques lentes ou des structures à faibles fréquences propres. De fait, il est possible d'avoir moins de pas de temps à calculer pour couvrir une durée donnée de simulation, mais chaque étape de calcul peut être plus complexe et plus longue à résoudre.

Cependant, en cas de grandes variabilités des champs inconnus au cours d'un pas de temps, il convient de réduire h pour être plus précis et ne pas rater des événements particuliers, comme ce peut être le cas avec les problèmes de contact.

θ -méthode La méthode de *Cranck-Nicholson* correspond à une combinaison linéaire précise des schémas d'*Euler* qu'il est possible de généraliser à l'aide d'un paramètre $\theta \in [0, 1]$ (pour le schéma de *Cranck-Nicholson*, $\theta = 1/2$ et pour les schémas d'*Euler* explicite et implicite, $\theta = 0$ et $\theta = 1$ respectivement). Il est ainsi possible d'accéder aux valeurs des variables en dehors des instants de discrétisation. La fonction ϕ est donnée par $\phi = \theta f(\square_k, t_k) + (1 - \theta) f(\square_{k+1}, t_{k+1})$ et les valeurs en $t_{k+\theta}$ pour la variable quelconque \square sont définies par :

$$\square_{k+\theta} = \theta \square_{k+1} + (1 - \theta) \square_k \quad (1.17)$$

En utilisant cette définition, le schéma numérique de la θ -méthode appliqué aux variables

mécaniques de vitesses v et de position q est alors :

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + hv_{k+\theta} \\ v_{k+1} = v_k + hf(q_{k+\theta}, t_{k+\theta}) \\ v_{k+\theta} = \theta v_{k+1} + (1 - \theta)v_k \\ q_0, v_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (1.18)$$

Contrairement au schéma d'*Euler* explicite qui crée virtuellement de l'énergie ou au schéma d'*Euler* implicite qui en dissipe virtuellement, l'utilisation de la θ -méthode permet d'obtenir une conservation numérique de l'énergie (voir paragraphe 3.6), et c'est là l'une des raisons qui fait que cette méthode est utilisée dans le schéma de *Moreau-Jean*.

Schéma de *Moreau-Jean* Une restriction majeure se pose avec les méthodes présentées jusqu'ici : v doit être différentiable sur chaque pas de temps. Or ce n'est pas forcément le cas, tout particulièrement si des impacts ont lieu. Plutôt que d'utiliser une méthode permettant de régulariser le problème, ce paragraphe présente le schéma numérique temporel utilisé dans la méthode *non-smooth contact dynamics* (NSCD) qui permet de prendre en compte les sauts de vitesses lors des impacts.

ACARY et BROGLIATO (2008) indiquent que pour la mécanique non régulière, 2 types de schémas sont possibles : les schémas type *event driven* et les type *event capturing* (ou *time stepping*). Dans le second cas, les singularités ayant lieu au cours d'un pas de temps sont prises en compte et un schéma numérique d'ordre faible est possible. Les conditions de *Signorini* pouvant s'écrire sous la forme de conditions de complémentarité, il est possible de passer d'un pas de temps k au suivant à l'aide de méthodes d'optimisation.

Le schéma de *Moreau-Jean* (JEAN, 1999 ; MOREAU, 1988) est un schéma de type time stepping. La formulation de la dynamique à l'aide de mesures différentielles permet en effet de résoudre les équations constitutives même si des impacts ont lieu durant un pas de temps. En ce sens, ces discontinuités ne sont pas parfaitement localisées : si h est grand, un contact sera détecté et pris en compte dans les calculs, mais on ne saura pas à quel instant du pas de temps il a eu lieu. La seule solution pour pallier à ce problème de localisation temporelle sera de réduire ce pas de temps, mais ce sera la seule justification de l'intérêt de cette réduction vis à vis du phénomène d'impact puisque les résultats seront tout de même valides vis à vis des équations d'équilibre et de la conservation énergétique quel que soit h .

Ce schéma numérique fait appel au processus de rafle de MOREAU ("sweeping process", voir MOREAU (1971b, 1972)) et il est basé sur la θ -méthode en considérant, sauf mention contraire pour des cas particuliers, $\theta = 1/2$. Ce choix de paramètre permet au schéma d'avoir des bonnes propriétés en terme de conservation énergétiques (voir ACARY (2016)).

Il permet de reformuler les problèmes de mécanique générale, et de contact en particulier, écrits en mécanique non lisse sous forme de problèmes d'optimisation (avec ou sans contraintes) pour la résolution. Ce problème sera non convexe si les problèmes de frottement sont considérés, mais dans le cadre de ce travail, seuls les cas convexes seront pris en compte, avec comme avantage le large panel de méthodes de résolutions existantes.

La mécanique non lisse associée au schéma de *Moreau-Jean* permet de définir la méthode *non-smooth contact dynamics* (NSCD) qui sera utilisée dans la suite des développements.

MOREAU a utilisé dès le début des années 1990 cette méthode pour modéliser et simuler le comportement de matériaux granulaires (MOREAU, 1994, 2002 ; MOREAU et JEAN, 1996). Ces travaux sont toujours d'actualité et font toujours l'objet de nombreuses publications (BARBOTEU et DUMONT, 2018 ; KLEINERT et al., 2017). Cette méthode NSCD permet ainsi de déterminer des écoulements granulaires, des répartitions de contraintes et des chemins de

forces dans un milieu (ballast de voies de chemins de fer ou essais biaxiaux par exemple) et peut être basée sur des grains de forme complexe. Cependant, la modélisation d'un très grand nombre de solides est extrêmement coûteuse en calculs et il faut des méthodes de résolution efficaces (en plus d'algorithmes de détection de contact performants) pour résoudre de tels problèmes. Diverses méthodes existent, plus ou moins adaptées en fonction de la formulation mathématique adoptée pour décrire le contact, présentées dans le chapitre de ACARY et al. (2018). En pratique, des logiciels de recherche font appel à la méthode NSCD pour résoudre les problèmes de contact. En particulier, il peut être fait mention des logiciels LMGC90 (voir DUBOIS et al. (2011)) Siconos (voir ACARY et al. (2019)) ou encore Chrono (voir TASORA et al. (2016)).

Cependant, la méthode NSCD n'a pas été utilisée que pour les matériaux granulaires et, parmi les autres applications, l'étude des maçonneries est très fréquente (voir par exemple BEATINI et al. (2017), ACARY (2001), RAFIEE et al. (2008) ou LANCIONI et al. (2016)). Enfin, des applications plus éloignées du génie civil ou de la mécanique existent (voir par exemple SÁNCHEZ et al. (2021) à propos de la modélisation de l'évolution d'un agrégat d'astéroïdes en mouvements, ou JEBRANE et al. (2019) qui modélisent des mouvements de foule dense lors de mouvements de panique).

1.2.5.2 Discrétisations spatiales pour le contact

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles de la mécanique, des méthodes comme celles des différences finies, des volumes finis ou encore des éléments finis existent. Cette dernière, comme les précédentes, s'appuie sur un maillage de la géométrie mais est la plus employée dans les domaines du génie civil et de la mécanique du solide.

La modélisation du contact est fréquemment réalisée à l'aide de méthodes particulières comme la DEM (méthode des éléments discrets, CUNDALL et STRACK (1979)), la MPM (méthode des points matériels, voir SULSKY et al. (1994) et SULSKY et al. (1995)) ou encore la méthode PFEM (particle finite element method, IDELSOHN et al. (2004) et OÑATE et al. (2004)).

La méthode des éléments discrets, plus ancienne, est fréquemment employée en mécanique du contact, et en particulier dans le cadre des aléas gravitaires, que ce soit pour de la trajectographie de blocs durant leur chute (BOURRIER, 2008) ou pour modéliser des ouvrages de protection (BERTRAND et al., 2012; DUGELAS, 2020). Cette méthode utilise les modèles de contact compliant : elle considère des particules rigides mais déformables localement aux contacts. Une loi régularisée de contact, parfois complexe (raideurs, non linéarités), permet de relier la valeur de l'interpénétration avec la force de réaction entre les particules.

Cependant, la méthode des éléments finis (MEF), en plus de permettre la modélisation du contact régularisé, permet de modéliser avec plus de précision les lois de comportement des solides et de prendre en compte d'autres modélisations complémentaires, en particulier la dynamique non régulière.

Cette méthode, présente dans l'essentiel des travaux cités, sera utilisée dans ce travail pour ses facultés à modéliser les comportements élastoplastiques des solides et pour la possibilité de prendre en compte le contact. Le développement de cette méthode sera présenté au paragraphe 2.4, mais il est possible de se reporter à des ouvrages de référence tels que ceux de BATHE (2014), de DHATT et al. (2012) ou encore de FELIPPA (2004) pour la formulation générale de la méthode et le développement avancé de ses concepts.

Suite à la discrétisation spatiale, il faut réussir à détecter les contacts à partir des données nodales. Dans le cas le plus simple, en ne considérant que les composantes normales du contact, il est possible de spécifier à l'avance quels sont les couples de nœuds susceptibles d'entrer en contact et il reste à vérifier les distances entre les nœuds de chacun de ces couples

au cours du temps. Les conditions de *Signorini* (1.6) sont alors à satisfaire quel que soit l'instant t pour chaque couple défini.

Cependant, en général, connaître à l'avance ces nœuds n'est pas possible et, de plus, les maillages ne coïncideront pas de façon systématique. Il y a alors la possibilité d'utiliser des méthodes plus complexes et avancées, comme celles qui permettent de remailler les zones en contact afin de faire coïncider les nœuds (WRIGGERS, 2006), celles qui sont basées sur des segments qui relient les nœuds de maillage (SIMO et al., 1985), celles qui permettent de résoudre le système malgré des maillages qui ne coïncident pas, grâce à de nouvelles formulations variationnelles en particulier (WRIGGERS et ZAVARISE, 2008), celles qui s'appuient sur plusieurs grilles de maillage (KOTHARI et KRAUSE, 2022) ou encore l'utilisation d'éléments finis spécifiques, les éléments *mortar* (PUSO et LAURSEN, 2004).

1.3 Plasticité

1.3.1 Introduction

Le phénomène de plasticité s'intéresse aux déformations irréversibles dans un système matériel. Il dépend fortement des propriétés des matériaux, qui permettent de définir les lois de comportement qui les régissent en vue de leur modélisation. Un géomateriau, un acier ou un matériau composite ne se comporteront pas de la même façon. Par exemple, deux grandes familles de matériaux existent : les fragiles, qui atteignent rapidement la rupture une fois la contrainte maximum admissible atteinte, et les ductiles, qui vont se déformer de façon beaucoup plus importante. Il est donc nécessaire de caractériser ces comportements, en particulier au travers d'essais (de traction ou triaxial par exemple). Dans la suite du document, seuls les matériaux ductiles sont considérés (sauf mention contraire).

De plus, pour un même matériau, suivant les sollicitations subies (vitesses de déformations ou d'application des charges, intensité de ces sollicitations), il peut rester dans le domaine élastique et ainsi il peut se passer de l'analyse plastique, ou dépasser cette limite d'élasticité (notée σ_Y et déterminée expérimentalement), de façon contrôlée ou non. La mise en forme par emboutissage par exemple consiste à déformer une pièce originale en appliquant des forces extérieures suffisamment élevées pour déformer définitivement cette pièce. Sa déformation plastique est donc contrôlée. En revanche, ce n'est pas le cas lorsque la structure d'un véhicule se déforme au cours d'un choc puisque les déformations plastiques n'ont alors d'autre but que de dissiper un maximum d'énergie en vue de protéger les usagers.

Pour modéliser le comportement élastoplastique, en plus du tenseur des contraintes (noté $\boldsymbol{\sigma}$), il faudra utiliser des variables additionnelles qui permettront de prendre en compte les déformations irréversibles et les dissipations d'énergie qui en découlent. Ces variables, notées \mathbf{a} , seront détaillées plus loin (en particulier les paramètres d'écrouissage). Deux lois sont alors à considérer pour modéliser ce phénomène de plasticité :

- la loi d'écoulement $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t), \sigma_Y)$ (aussi appelée *surface de charge*) qui définit en tout point $x \in \Omega$ le contour de l'ensemble convexe¹ des contraintes admissibles $C(t)$. Ainsi, à tout instant, $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t), \sigma_Y) \leq 0$ et l'égalité a lieu dans le cas où le comportement est plastique.
- la loi de comportement (élasto)(visco)plastique qui définit la façon dont se comportera le matériau à la fois dans les domaines élastique et plastique.

La dépendance au temps de cette fonction de charge se fait à travers la dépendance de ses paramètres, et ainsi on ne note pas le temps dans les variables de la fonction de charge².

1. Un ensemble C convexe est défini par : $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$

2. De façon générale, seules les variables directement utiles à la compréhension des équations (en particulier,

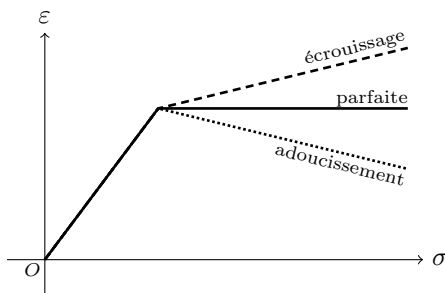


FIGURE 1.5 – Différents types de comportements élastoplastiques pour des lois unidimensionnelles

Les lois de comportement les plus simples permettent de modéliser la plasticité parfaite (aucune augmentation de contrainte n'est possible aux endroits où cette limite est atteinte même si la déformation augmente - dans ce cas, l'ensemble $C(t)$ est fixe), la plasticité avec écrouissage positif (augmentation possible de la contrainte si il y a augmentation de la déformation), ou l'adoucissement/écrouissage négatif (contrainte susceptible de diminuer lorsque la déformation augmente). La figure 1.5 présente ces trois types de comportement dans le cas unidimensionnel pour des lois bi-linéaires. Mais ces lois peuvent être plus complexes, en particulier en prenant en compte des lois multi-linéaires ou en introduisant des non-linéarités, de la viscosité, l'influence de la vitesse de déformation, *etc.* tout comme il est possible de définir des lois d'élasticité non linéaires (même si la loi de *Hooke*, modélisant l'élasticité linéaire, est la plus utilisée).

Comme précédemment évoqué, ces lois dépendent d'un matériau et sont déterminées par des essais. Leur complexité sera alors dépendante de l'objectif recherché lors de la simulation. Par exemple, pour étudier une structure dans son ensemble, considérer une loi simplifiée sera suffisant, puis une loi plus complète lors de l'étude de points particuliers de cette structure (assemblages, voisinage de l'application des forces, localisation pré-déterminée de la plasticité entre autre). En effet, une loi plus précise sera plus complexe à mettre en œuvre et certainement plus coûteuse en ressources tout en rendant plus difficile l'interprétation des résultats : elle sera réservée à des cas spécifiques.

Enfin, un parallèle peut être effectué avec les lois de contact puisqu'il peut arriver que les lois de comportement soient multivoques et posent ainsi des problèmes de résolution suivant le sens de résolution. C'est par exemple le cas en plasticité parfaite puisqu'à la contrainte limite σ_Y est associée une infinité de valeurs de déformations.

Dans le présent travail, il ne sera pas fait mention de la construction de ces lois. Seules des lois existantes seront utilisées, et en particulier des lois simples et sans prendre en compte ni la viscosité, ni l'influence des vitesses de déformation pour modéliser le comportement élastoplastique (sauf mention contraire).

1.3.2 Bref historique de la plasticité

L'étude de la plasticité³ a commencé avec les travaux de TRESCA qui s'intéressait, fin XIX^e, à la plasticité des métaux. Il a repris des travaux antérieurs, en particulier des bases de COULOMB, en vue de pouvoir prédire les conditions pour lesquelles des déformations plastiques allaient apparaître. Il a formulé un premier critère d'écoulement plastique délimitant

la charge limite) seront notées, souvent sans noter ni la position x ni le temps t .

3. L'essentiel des considérations historiques est tiré de (BRUHNS, 2020) auquel on peut se référer pour plus de détails.

l'ensemble des contraintes admissibles, toujours utilisé aujourd'hui (appelé critère de *Tresca*).

C'est aussi à cette époque que l'on remarque, pour les métaux, l'indépendance du phénomène de plasticité vis à vis des contraintes hydrostatiques, c'est à dire que des déformations irréversibles ne peuvent qu'avoir lieu sans modification du volume. Cette propriété est valable tant que les valeurs de pression sont modérées car, si cette pression hydrostatique augmente ou diminue trop, un changement de phase ou une réorganisation des cristaux peut survenir. De plus, ce n'est pas le cas pour tous les matériaux : cette propriété se vérifie bien pour les métaux par exemple (qui constituaient le sujet de base pour les premiers travaux sur la plasticité), mais n'est plus valable dès lors que l'on est en présence de matériaux cohésifs (sols, géomatériaux).

Les travaux qui suivirent s'intéressèrent à la détermination de ces ensembles des contraintes admissibles de façon plus précise. En particulier, les travaux de MAXWELL, VON MISES et PRANDTL ont finalement été regroupés pour créer une nouvelle définition de surface de plasticité pour les métaux : le critère de *von Mises*.

A partir des travaux de HAAR et VON KÁRMÁN, HENCKY, qui travaillait sur l'explication du critère de *von Mises*, a proposé en 1924 une première loi constitutive du comportement élastoplastique en utilisant les multiplicateurs de *Lagrange* pour respecter la condition $\mathcal{Y} \leq 0$ (en l'occurrence, \mathcal{Y} est la fonction d'écoulement de *von Mises*) tout en considérant un problème d'extrémum d'énergie. Il en résulte que le module de cisaillement G du matériau est réduit par le multiplicateur, et donc que ce matériau devient moins raide. Cette loi ne permet que de modéliser des cas particuliers de plasticité comme HILL le montrera un demi siècle plus tard, mais elle a le mérite de permettre de modéliser pour la première fois un comportement élastoplastique.

Outre la séparation de la déformation en une partie élastique et une partie plastique, PRANDTL et REUSS, cette même année, introduisent la séparation du taux de déformation élastique et plastique. Ainsi, ils définissent une nouvelle loi constitutive basée sur l'évolution des déformations (plastiques en particulier), en introduisant la notion de multiplicateur plastique. Suite à des développements durant plusieurs années, cette formulation permet de prendre en compte les fonctions d'écoulement de *Tresca* et de *von Mises*. De plus, plusieurs autres chercheurs et ingénieurs se penchent sur cette formulation afin de la généraliser, de préciser qu'elle permet de modéliser aussi bien l'élastoplasticité que l'élasticité durant les phases de décharge. C'est le cas de GEIRINGER et PRAGER (1934) et de GEIRINGER (1937) qui, en 1935, ont introduit la notion de potentiel d'écoulement plastique \mathcal{G} qui doit aussi être nul pour que de la plasticité apparaisse (notion déjà évoquée par VON MISES en 1928). Cette nouvelle loi constitutive est une loi incrémentale dans le sens où elle fait intervenir les vitesses de déformation, contrairement à la loi de *Hencky* qui est qualifiée de théorie de la déformation (*deformation theory*) ou de loi de contrainte-déformation finie (*finite stress-strain law*).

Maintenant que le potentiel d'écoulement plastique \mathcal{G} est identifié, il faudra prendre garde à ne pas le confondre avec la loi d'écoulement \mathcal{Y} . Le cas le plus simple reste cependant de supposer que les deux sont identiques, ce qui fonctionne bien dans de nombreux cas, comme pour les métaux par exemple. Il s'agit de ce que l'on nomme la plasticité associée, et il y a une règle de normalité entre le taux de déformation plastique et l'ensemble des contraintes admissibles qui est établie :

$$\dot{\epsilon}^p(t) = \lambda \frac{\partial \mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})}{\partial \boldsymbol{\sigma}(t)} \quad \text{si } \mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = 0 \quad (1.19)$$

Le taux de déformation plastique est ainsi défini comme colinéaire à la normale à l'ensemble des contraintes admissibles, avec le multiplicateur λ qui définit son intensité. Cette notion peut s'écrire en termes de sous-différentiel ainsi qu'en inclusion dans des cônes normaux afin

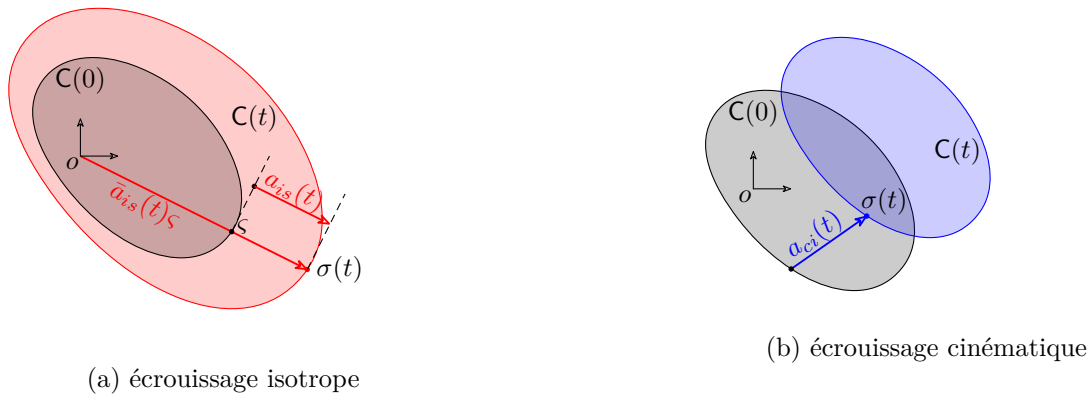


FIGURE 1.6 – Deux principaux types d'érouissage. L'érouissage isotrope (a) correspond à une dilatation de l'ensemble des contraintes admissibles initial $C(0)$ par le facteur \bar{a}_{is} (peut aussi être défini par une variable a_{is} qui définit l'expansion du domaine initial suivant une direction donnée), et l'érouissage cinématique (b) correspond à la translation de cet ensemble $C(0)$ par un vecteur a_{ci} .

d'étendre cette définitions aux ensembles C non réguliers. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la loi d'écoulement et le potentiel d'écoulement plastique ne sont pas équivalents, la relation de normalité à la surface de charge est perdue et la loi sera alors dite non associée. Ce type de loi est tout particulièrement valable pour les géomatériaux du fait de leur dépendance à la pression hydrostatique.

Il est intéressant de noter tout de suite un premier point important concernant l'équation (1.19) : la variable λ est appelée *multiplicateur plastique*⁴ et permet donc de définir la valeur du taux de déformation plastique. Cette variable est nulle dans le cas où il n'y a pas de modification de la déformation plastique et qu'elle est définie supérieure à zéro dans le cas contraire puisque le signe de $\dot{\epsilon}^p(t)$ est donné par la différentiation de la fonction de charge. De plus, il faut rappeler que cette fonction \mathcal{Y} est nulle dans le cas où il y a développement de déformations plastique et inférieure à zéro sinon. Ainsi, de façon similaire au problème de contact, ces restrictions sont réécrites sous la forme d'un ensemble de conditions de complémentarité :

$$\lambda(t) \geq 0 \quad ; \quad \mathcal{Y}(t) \leq 0 \quad ; \quad \lambda(t)\mathcal{Y}(t) = 0 \quad (1.20)$$

Au début des années 30, la prise en compte de l'érouissage est au coeur de nombreux travaux de recherche. En modifiant la fonction d'écoulement, c'est l'érouissage isotrope qui a été pris en compte en premier par ODQVIST (1933), PRAGER (1935) et SCHMIDT (1932) (1935). Il s'agit de la dilatation de l'ensemble des contraintes admissibles C (Voir figure 1.6a). Mais cette description n'est pas assez complète pour définir les comportements, par exemple l'effet *Bauschinger* (modification anisotrope de la surface de plasticité) n'est pas pris en compte et donc il est difficile de modéliser la fatigue du matériau suite à des cycles de chargement/déchargement. L'érouissage cinématique, qui correspond à une translation de l'espace des contraintes admissibles C (voir 1.6b), est alors introduit, en premier par REUSS puis popularisé par PRAGER (1935, 1949). MELAN (1938) a défini une équation d'évolution pour l'érouissage cinématique en introduisant une variable décroissance (et son taux de variation) dont la variable représentant les forces associées entrera dans les variables $\mathbf{a}(x, t)$ de la fonction de charge \mathcal{Y} . Cette formulation sera améliorée l'année suivante par ZIEGLER dont nous reparlerons des travaux plus loin.

4. La notation $\dot{\lambda}$ est fréquemment utilisée dans la littérature

Cependant, il est à l'époque toujours très compliqué de résoudre des équations aux dérivées partielles sauf pour des cas très simple, faisant appel à des hypothèses simplificatrices fortes. Cette formulation incrémentale de *Prandtl-Reuss* ne trouve donc finalement que peu d'applications au départ.

Au début des années 50, deux lois constitutives étaient donc disponibles : celle de *Henky* et celle de *Prandtl-Reuss*, toutes deux liées aux critères de plasticité de *von Mises* ou de *Tresca*. HILL (1950) a montré que ces deux théories, bien qu'ayant des fondements et un fonctionnement différents, sont équivalentes sous certaines conditions, en particulier sous l'hypothèse des petites déformations. Des erreurs peuvent être relevées dans la première théorie, comme ce fut montré par MORRISON et SHEPHERD (1950) qui, en travaillant sur un tube en alliage d'acier et d'aluminium auquel on appliquait de la tension et de la torsion, ont montré l'adéquation des résultats expérimentaux et théoriques dans le cas de l'utilisation de la loi de *Prandtl-Reuss* mais pas pour la loi de *Henky*.

En particulier, la formulation de *Prandtl-Reuss* est bien plus robuste et permet de prendre en compte des phénomènes plus complexes comme des cycles de chargement - déchargement successifs ainsi que l'érouissage, et ce, de façon plus générale, sans restriction particulière sur la règle d'écoulement utilisée. Ce travail de comparaison, et d'amélioration de la théorie sera poursuivi par HILL (1950) puis par BELL et KHAN (1980).

À partir de toutes ces considérations de début de siècle, ces concepts peuvent être développés avec de plus en plus de précision. Un intérêt tout particulier est porté aux méthodes de résolution, avec les avancées mathématiques, l'arrivée du calcul informatique et de la méthode des éléments finis. En plus de formuler des lois constitutives et des fonctions d'écoulement plus complexes et précises, des recherches sur les méthodes de résolution de ces problèmes de plasticité sont entrepris.

La suite de la présentation se basera sur la formulation incrémentale de la plasticité puisqu'elle est parfaitement adaptée aux méthodes numériques de résolution après discrétisation temporelle.

1.3.3 Méthodes de résolution

L'enjeu principal des problèmes de plasticité est la difficulté de leur résolution du fait d'équations aux dérivées partielles complexes et non linéaires. Il faut donc faire appel à des méthodes numériques. Les schémas d'intégration temporels définis à la partie 1.2.5.1 s'appliquent de façon similaire aux problèmes généraux de mécanique pour la résolution des problèmes d'évolution. Cependant, peu de travaux s'intéressent aux sollicitations dynamiques, du moins dans le cadre de l'analyse des structures élasto-plastiques. L'essentiel des études est basé sur des analyses quasi-statiques pour lesquelles les termes inertiels sont négligés, en appliquant les sollicitations suffisamment lentement pour que l'énergie cinétique soit faible devant l'énergie de déformation. Les méthodes de résolution des problèmes de plasticité doivent alors permettre de déterminer le taux de déformation plastique et les contraintes associées, ainsi que les éventuelles valeurs associées aux différents types d'érouissage.

1.3.3.1 Méthode du *return map*

La méthode du *return map* est certainement la méthode de résolution la plus utilisée tant en recherche que dans des logiciels orientés applications (génie mécanique, génie civil). Elle est basée sur la résolution au niveau local des équations constitutives de la plasticité à chaque pas de temps ou incrément de charge, (par exemple à l'aide d'algorithmes de *Newton-Raphson*), puis au niveau global des équations d'équilibre ou du mouvement.

L'origine de cette méthode remonte à 1963 avec les travaux de WILKINS (1963), puis avec KRIEG et KRIEG (1977) avec la notion de *radial return*. Quelques années plus tard, SIMO et ses co-auteurs ont étendu cette méthode à des cas plus généraux, en particulier à la plasticité non associée. C'est la méthode plus générale qui sera nommée *return map*, présentée dans SIMO et TAYLOR (1985). Ce papier est fondateur pour tous les travaux qui vont suivre et qui s'appuient sur cette méthode de résolution. D'autres articles du même auteur étendent ce principe et l'approfondissent (SIMO et al. (1988), SIMO et ORTIZ (1985) et SIMO et TAYLOR (1986) ainsi que le livre SIMO et HUGHES (1998)).

Le principe général de cette méthode est un schéma prédicteur-correcteur, c'est à dire que pour chaque pas de temps ou incrément de charge un calcul élastique test est effectué, puis il faut vérifier si la fonction d'écoulement est enfreinte. Si oui, alors les contraintes sont projetées sur la frontière de $C(t)$ afin que le critère sur la fonction de charge soit respecté ($\mathcal{Y} = 0$). Enfin, toutes les variables qui en découlent (dont les déformations) sont actualisées. Cette méthode est basée sur un algorithme d'intégration en temps de type *Euler* implicite, algorithme stable en particulier pour l'utilisation du critère de *von Mises* comme l'ont montré ORTIZ et POPOV (1985).

Au départ, cet algorithme a été développé pour la plasticité des métaux, d'où ses grandes performances dans ce domaine. Depuis, des méthodes dérivées sont apparues pour des matériaux différents comme pour les géomatériaux, les sols, les bétons (voir par exemple BORJA et al. (2003), BORJA (1991), BORJA et LEE (1990) et DE BORST et GROEN (2000) ou, dans le cas de lois constitutives complexes, PEREZ-FOGUET et al. (2001)). Il faut noter aussi que cet algorithme peut s'appliquer aux problèmes de contact comme dans PARASKEVOPOULOS et al. (2020).

CHRISTENSEN (2002a) a montré que la méthode du *return map* est équivalente, sous certaines conditions précises sur certains paramètres, à utiliser une méthode de *Newton* non lisse de résolution pour les équations constitutives de l'élastoplasticité. Le *return map* est donc un cas particulier de méthodes de *Newton* non-lisse. Ces dernières constituent donc une formulation plus générale de l'élastoplasticité.

1.3.3.2 Méthodes variationnelles pour la plasticité

Bien que la méthode du *return map* qui vient d'être présentée soit la plus célèbre, d'autres moyens de résoudre les problèmes de plasticité existent. En particulier, à l'aide de certaines hypothèses, il est possible de résoudre à la fois les équations constitutives et celles d'équilibre au niveau global à l'aide de formulations variationnelles, comme comme de façon classique en élasticité. Il faut alors s'attarder un peu plus sur ce principe puisque c'est cette formulation qui est utilisée dans la suite de la thèse.

Travaux pionniers Les réflexions sur les possibilités d'écrire une forme variationnelle pour la plasticité datent de la fin des années 40 et du début des années 50, avec en particulier les notions de *upper bound* (borne supérieure) et *lower bound* (borne inférieure) introduites par HODGE et PRAGER (1948) pour les matériaux avec écrouissage. Ces bornes permettent d'encadrer la solution par la recherche d'un côté du champs de contraintes réel (borne inférieure) et de l'autre par le champs de déformations réel (borne supérieure). Ces formulations ont été reprises par HILL (1950), dont le principe de travail plastique maximal constitue une base de travail pour les formulations à venir. Ce principe est défini par l'inéquation :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) \geq \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in C(t) \quad (1.21)$$

Dans le cas de la recherche de la borne inférieure, il faut considérer un ensemble de champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles (respectant à la fois les équations

d'équilibre et les lois constitutives des matériaux) en tout point du solide. Or le principe du travail maximal (équation (1.21)) précise que le travail des forces extérieures appliquées conduisant à un état de contraintes quelconque du champs précédemment défini sera inférieur ou égal au travail réel. Le champ de contrainte réel est donc le champ qui maximisera ce travail. Le problème revient alors à rechercher ce maximum, donc à un problème d'optimisation.

Dans le cas de la recherche de la borne supérieure, il faut chercher dans un ensemble de champs de déplacements cinématiquement admissible et plastiquement compatible le champ de déplacements réel. Or, sachant que l'énergie dissipée par déformation plastique est supérieure ou égale au travail des forces extérieures, alors le champs de déformation réel sera celui qui minimise cette énergie dissipée et le problème se ramène alors à la recherche du minimum d'une fonctionnelle à définir.

Dans le cas où \mathcal{C} est convexe et de la plasticité associée, il y a égalité entre les deux bornes et la valeur réelle, mais du fait des hypothèses de modélisations, il s'agit de chercher un encadrement de la solution, ou parfois même uniquement l'une ou l'autre des bornes. Dans ce cas, outre l'intuition plus aisée pour imaginer un champ de déplacement cinématiquement admissible pour en tirer un champ de déformation, il est plus sécuritaire de rechercher la borne supérieure qui va majorer les effets mécaniques et donc offrir plus de sécurité lors du dimensionnement.

Les formes variationnelles sont donc toutes indiquées dans la recherche de ces bornes (recherche d'optimum et présence de champs virtuels). De plus, dans le cas de la plasticité, il est aussi possible de chercher ces bornes en termes d'incrément ou de taux de déformation ou de contrainte, et ces théorèmes peuvent être étendus à la plasticité avec écrouissage (HILL, 1950), ce qui là aussi se prête tout particulièrement bien aux résolutions numériques à l'aide de méthodes d'optimisation.

Développement des formes variationnelles Ces formes variationnelles sont assez tôt abordées en Italie par CERADINI (1966) qui propose pour un principe de maximisation d'énergie en vue de la résolution numérique de problèmes de plasticité parfaite, ainsi que dans les travaux de MAIER et CAPURSO qui voient la possibilité de résoudre les équations constitutives de la plasticité à l'aide de leur formulation en tant que "non-linear mathematical program" (CAPURSO et MAIER (1970) et MAIER (1968a,b, 1969)).

Comme apparaissent à cette époque des algorithmes de résolution de problèmes de minimisation (sous contrainte), alors MAIER et ses co-auteurs ont cherché à écrire le problème associé à la plasticité sous une forme adaptée à la résolution numérique. En effet, puisque l'on cherche le champ de contrainte σ qui maximise une énergie sous les contraintes définies par (1.20), alors à l'aide de ces conditions de KKT, on peut écrire le problème associé afin de le résoudre numériquement. Mais bien qu'ayant à disposition des méthodes de résolution efficaces, il fallait tout de même faire face à des difficultés pour construire le modèle (durée d'exécution, mémoire nécessaire, etc). Ces problèmes rendent, à l'époque, ces avancées peu applicables en pratique.

Si l'on regarde un peu plus en détail l'article (MAIER, 1968a), qui traite de la forme d'un tel problème en plasticité parfaite et en le formulant d'emblée de façon discrète en espace à l'aide de la forme matricielle associée à la méthode des éléments finis, on a un problème de minimisation sous contrainte de la forme :

$$\min\{\psi(\lambda) \mid \lambda \geq 0\} \quad (1.22)$$

avec la fonction objectif convexe $\psi(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^\top A\lambda - \lambda^\top a$ (voir l'article pour la définition de la matrice A qui est positive semidefinie et du vecteur a) et où λ correspond au multiplicateur

plastique. On retrouve alors la forme de la méthode des multiplicateurs de *Lagrange* dans laquelle le rôle du multiplicateur de *Lagrange* est joué par le multiplicateur plastique. MAIER montre ensuite que cette fonctionnelle est équivalente à $\psi(\lambda, \sigma, \varepsilon^p) = \lambda^\top \mathcal{Y} - \frac{1}{2} \sigma^\top \varepsilon^p$, forme correspondante à un problème de minimisation à résoudre sous les contraintes de KKT (1.20). Dans l'article, cette formulation est étendue aux cas avec écrouissage, puis le problème est défini de façon incrémentale.

Plusieurs années plus tard, ces développements sont repris et approfondis en vue d'applications plus complexes. En particulier, l'utilisation d'ensembles de contraintes admissibles plus complexes (multilinéaires, non linéaires) ou de lois d'écrouissages non linéaires est permis grâce à l'utilisation de méthodes d'optimisation mises en œuvre (voir CARINI (1996), COMI et al. (1991) et ROMANO et al. (1993)). Enfin, ORTIZ et STAINIER (1999) utilisent ces formes variationnelles (minimisation en particulier) en les généralisant pour des matériaux plus complexes incluant la plasticité mais aussi des comportements visqueux ou des lois quelconques d'écrouissage.

Travaux de Moreau ZIEGLER (1958, 1962) reprend les considérations variationnelles pour la plasticité dans ses travaux sur lesquels MOREAU s'appuiera, en particulier à partir de 1966 avec la notion de surpotentiel ou pseudo - potentiel (MOREAU, 1966, 1970, 1971a). Cette notion nouvelle est introduite puisque la plasticité est un phénomène dissipatif et que par conséquent, les potentiels ne sont plus applicables. De plus, la règle d'écoulement plastique ne définit plus forcément une relation univoque entre les contraintes et les déformations (par exemple, dans le cadre de la plasticité parfaite unidimensionnelle, il y a une infinité de déformations possibles lorsque la contrainte atteint sa valeur limite).

MOREAU étudie, en se basant sur l'hypothèse d'une loi de normalité et sur la convexité de la surface de charge, l'existence d'un potentiel de dissipation au travers de ses lois de résistance et de ses fonctions de résistance qui représentent des phénomènes dissipatifs.

Pour présenter rapidement cette idée, une relation de résistance \mathcal{R} définie entre deux variables duales (par exemple une vitesse $v \in \mathbb{R}^n$ et une force subie $f \in \mathbb{R}^n$ par un solide) implique que la puissance développée par ces forces soit négative ou nulle. Dans ce cas, il existe une fonction $\phi \in \mathbb{R}$, convexe et semicontinue inférieurement (s.c.i.)⁵, liant les forces et les vitesses par la relation :

$$-f \in \partial\phi(v) \tag{1.23}$$

La fonction ϕ est la fonction de résistance de la loi \mathcal{R} et $\partial\phi(v)$ est le sous différentiel de la fonction de résistance ϕ au point v ⁶). Comme cette fonction est convexe, sa fonction polaire ϕ^* est définie par :

$$v \in \partial\phi^*(-f) \tag{1.24}$$

Dans le cas de la plasticité, les contraintes et les déformations forment deux espaces vectoriels en dualité. Les vitesses v de ces lois de résistance peuvent être associées à un taux de déformation (plastique) $\dot{\varepsilon}^p$, et les forces f à l'opposé du tenseur des contraintes σ . Le principe du travail maximal de *Hill* est alors retrouvé (équation (1.21)) pour le cas des matériaux parfaitement plastiques dans le cadre de la plasticité associée. L'état de contraintes recherché

5. Une fonction convexe $f \in \mathbb{R}^n$ est dite s.c.i. sur un ensemble E si son épigraphe $\text{epi } f$ est fermé, c'est à dire si on a l'ensemble défini par $\forall \mu \in \mathbb{R}, \{x \in E \mid f(x) \leq \mu\}$ qui est fermé. Voir MOREAU (1966)

6. Le sous différentiel $\partial f(x)$ d'une fonction $f \in \mathbb{R}^n$ convexe et s.c.i. est l'ensemble des sous-gradients $p_\partial \in \mathbb{R}^n$ de f en x tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad f(y) \geq f(x) + p_\partial^\top (y - x)$, ce qui peut se voir comme sa dérivée si la fonction est différentiable. Ces sous-gradients minorent f sur son intervalle de définition. Voir MOREAU (1966)

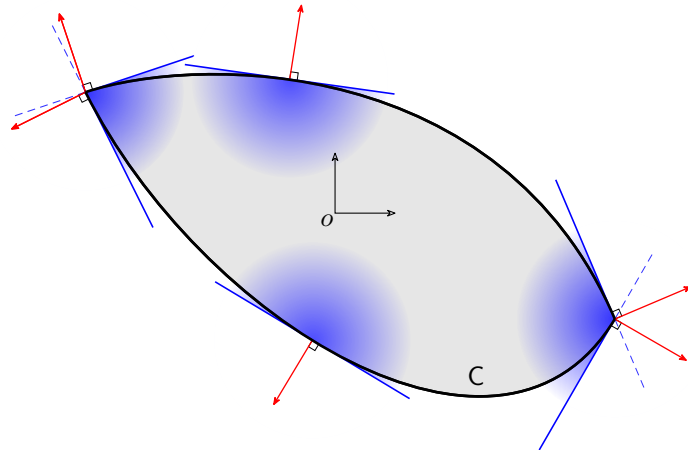


FIGURE 1.7 – Ensemble convexe C entièrement contenu dans le cône tangent à chacun des points de sa frontière. Pour 4 points de cette frontière, le cône tangent est représenté par les zones en dégradés bleu. Ces cônes sont définis par les plans tangents en ces points (lignes bleues).

parmi l'ensemble des contraintes admissibles est celui qui maximise le travail plastique (lien avec la recherche de borne inférieure) :

De façon plus générale, Moreau a précisé que cette formulation (1.21) est équivalente à l'inclusion différentielle :

$$-\dot{\epsilon}^p \in \partial\Psi_C(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.25)$$

avec Ψ_C la fonction indicatrice de l'ensemble C ⁷. Puisque cet ensemble est convexe et non vide, alors la forme (1.25) peut être reformulée en disant que l'opposé du taux de déformation plastique appartient au cône normal à l'ensemble des contraintes admissibles pris au point des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$-\dot{\epsilon}^p \in N_C(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.26)$$

et le même type de formulation que pour les problèmes de contact est retrouvée, ce qui sera particulièrement intéressant au moment de formuler les problèmes couplés. Cette inclusion s'explique par le fait qu'un ensemble convexe est entièrement contenu dans son cône tangent défini en chaque point de son pourtour (si cet ensemble est *lisse* au point considéré il est tout entier du même côté de son plan tangent) (voir figure 1.7). De fait, lorsque $\mathcal{Y} < 0$, alors $\boldsymbol{\sigma}$ est à l'intérieur de C et son cône normal est réduit à 0, donc il n'y a pas de modification de la déformation plastique. En revanche, lorsque $\mathcal{Y} = 0$, alors $\boldsymbol{\sigma}$ est sur le bord de l'ensemble C . Dans ce cas, en considérant n'importe quelle contrainte admissible $\boldsymbol{\sigma}^* \in C$, le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}$ avec un vecteur quelconque appartenant au cône normal à l'ensemble convexe pris au même point sera négatif (figure 1.8), ce qui revient à l'équation (1.21).

La loi de normalité de la plasticité est donc écrite sous la forme d'une inclusion dans un cône normal. L'avantage de cette formulation est de pouvoir être utilisée en cas de normales multiples, celles-ci définissant alors le cône normal aux points où la surface de charge est non

7. La fonction indicatrice d'un ensemble convexe C se définit comme :

$$\Psi_C(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(t) \end{cases}$$

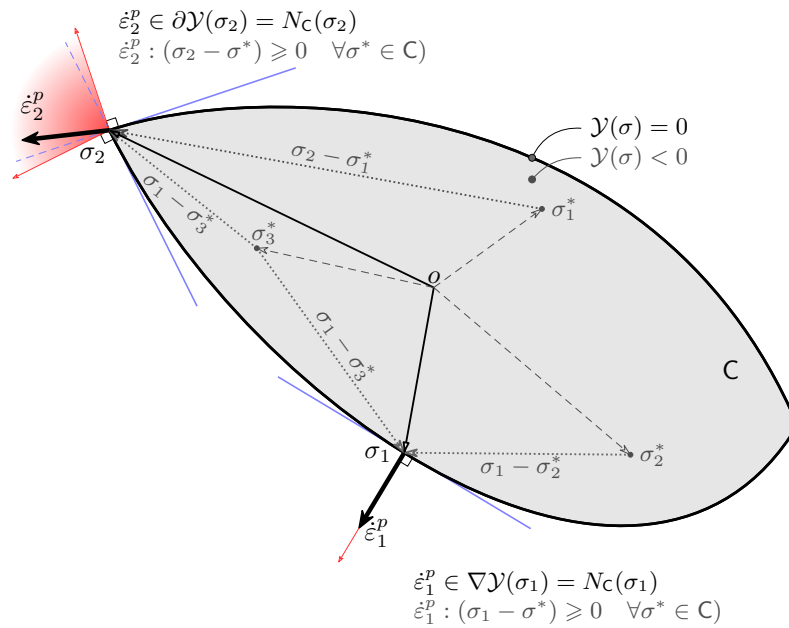


FIGURE 1.8 – Domaine élastique convexe C et représentation des vecteurs $\dot{\varepsilon}_i^p$ lorsque $\mathcal{Y}(\sigma_i) = 0$. En chaque point de la frontière de C , le vecteur $\dot{\varepsilon}_i^p$ appartient au cône normal à cet ensemble au point σ_i ($\dot{\varepsilon}_i^p \in N_C(\sigma_i)$). Pour $i = 1$, la normale est unique car \mathcal{Y} est différentiable, et pour $i = 2$, il faut faire appel au sous-différentiel car \mathcal{Y} forme un angle. Quel que soit le vecteur σ^* considéré, l'équation (1.21) est valable.

dérivable, comme ce peut être le cas avec le critère de plasticité de *Tresca* dans les angles (en 2D) ou sur les arêtes (en 3D).

Moreau a développé plus en avant ces notions au cours d'autres travaux comme dans MOREAU (1971c) où il étudie l'évolution temporelle ou incrémentale du problème de plasticité, dans MOREAU (1973), vaste article sur les propriétés de problèmes de mécanique incluant la plasticité, ou encore dans MOREAU (1976) où il détaille la construction du problème élastoplastique en utilisant ces notions d'inclusions différentielles.

Dans ces travaux, les principes de la thermodynamique commencent à être pris en compte, en particulier les aspects liés à la seconde loi, relative aux processus dissipatifs. En effet, lorsque Moreau utilise ses notions de lois et fonctions de résistance comme phénomènes dissipatifs, l'idée rejoint la non-réversibilité de tels phénomènes induite par la seconde loi de la thermodynamique. Ces principes thermodynamiques seront d'ailleurs de plus en plus utilisés, sous l'hypothèse des petites déformations en particulier, comme par exemple dans des travaux tels que ceux de LUBLINER (1972), ZIEGLER (1962), KESTIN et al. (1970) et ZIEGLER et WEHRLI (1987), voire plus récemment avec MAUGIN (1992) qui rassemble ces considérations appliquées à la plasticité et à la fracture. Dans ses travaux, COLLINS s'applique à formuler ces principes thermodynamiques pour les géomatériaux, donc pour la plasticité non-associée⁸ (COLLINS et HOULSBY (1997), COLLINS et KELLY (2002)).

L'ensemble des contraintes (et forces d'érouissage) admissibles étant amené à évoluer au cours du temps, il peut paraître opportun d'associer les formulations pour la plasticité qui viennent d'être présentées au processus de balayage précédemment évoqué (paragraphe 1.2.5.1) en vue de la résolution numérique des problèmes de plasticité, ce qui, là encore, permettra

8. Voir partie 1.3.4.4

d'aller vers une formulation commune de la plasticité et du contact.

1.3.3.3 Éléments finis

Comme précisé à la partie 1.2.5.2, la méthode des éléments finis est utilisée en tant que méthode de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, en association avec le schéma d'intégration temporelle de *Moreau-Jean* (même si d'autres schémas peuvent être utilisés). Connue depuis longtemps en mécanique (voir l'ouvrage de ZIENKIEWICZ et CHEUNG (1967)), les problèmes de plasticité n'ont pas mis longtemps avant d'être traités avec cette méthode qui a ouvert de nouveaux horizons pour les applications de tous les développements théoriques antérieurs (voir l'un des premiers articles à ce sujet, de MARCAL et KING (1967)).

Cette méthode permet dans sa formulation générale la plus classique de déterminer les champs de déplacement puis d'en tirer les champs qui en dérivent (déformations et contraintes, en particulier). Cependant, du fait d'un choix de fonctions d'interpolation, il est possible de se retrouver avec des résultats parfois difficilement exploitables. C'est couramment le cas par exemple puisque le champ de déplacement est continu entre deux éléments mais pas ceux de contrainte et de déformation (éléments barre à 2 nœuds ou triangulaire à 3 nœuds par exemple). Mais cette approximation reste négligeable, tout particulièrement lorsque la densité du maillage va augmenter.

Ces constats sont susceptibles de poser des problèmes en plasticité puisque des effets très localisés peuvent apparaître, et des propriétés fortes du modèle impliquent des variables très fortement approximées. Il faut donc chercher à pallier ce problème, ce qui peut se faire en raffinant considérablement le maillage, mais au risque d'obtenir alors des systèmes avec un très grand nombre d'inconnues à résoudre. Il y a aussi la possibilité d'augmenter l'ordre des éléments afin d'augmenter la précision lors de l'approximation interne, mais les discontinuités inter-éléments persisteront.

Une troisième possibilité pour améliorer la précision des résultats, en particulier lors de l'étude des phénomènes de plasticité, est de formuler de nouveaux éléments finis spécifiques à ce type d'étude. Il y a alors la possibilité de les formuler non pas en déplacement mais en contrainte, comme dans KRABBENHØFT et DAMKILDE (2003), mais ce sont les éléments finis mixtes qui seront les plus adéquats, c'est-à-dire qu'ils sont formulés de façon à déterminer plusieurs champs à la fois.

Les plus connus sont certainement les éléments mixte déplacement-contrainte qui assurent la continuité inter-élément des deux champs. KRABBENHØFT les utilise fréquemment dans ses travaux, en particulier dans KRABBENHØFT et al. (2007a, 2012). Pour plus de précisions et une vision plus générale de ce sujet, il est possible de se référer à NODARGI (2019) qui dresse un état de l'art de ces formulations d'éléments finis pour la plasticité de structures bi-dimensionnelles en petites déformations. En particulier, cet article présente la principale fonctionnelle utilisée pour la formulation d'éléments mixtes (celle de *Hu-Washizu*), précise les espaces d'interpolation (puisque ce ne sont pas nécessairement les mêmes pour les différents champs), se penche sur les méthodes de résolution et compare les résultats sur des cas d'étude. Lors de ces applications numériques, il est clairement visible que même si les résultats se rapprochent à mesure que le maillage se raffine, les éléments mixtes sont plus précis pour des maillages plus grossiers que les éléments finis classiques formulés en déplacement (éléments quadrangulaires à 4 et 8 nœuds ; les éléments à 8 nœuds sont plus précis que ceux à 4).

Dans ce travail de thèse cependant, seuls des éléments formulés en déplacement seront utilisés pour illustrer les développements effectués, mais en augmentant leur ordre dans certains cas (voir chapitre 4).

1.3.3.4 Méthodes numériques de résolution

Suivant les inéquations variationnelles qui découlent du principe de dissipation maximum de *Hill*, l'objectif est de déterminer à partir d'équations générales (potentiels, équations du mouvement) des variables appartenant à un ensemble donné $((\sigma, a) \in C)$, ce qui revient à satisfaire au minimum la condition $\mathcal{Y}(\sigma, a) \geq 0$.

Des formes prises par les fonction d'écoulement \mathcal{Y} dépendront la difficulté des problèmes à résoudre et le choix des méthodes de résolution. Dans les cas les plus simples, en supposant l'ensemble C (multi)linéaire, la formulation du problème sous la forme d'un problème de complémentarité linéaire est envisageable, mais il s'agit là d'une méthode particulière de problèmes d'optimisation, et il existe de nombreuses méthodes générales permettant de résoudre les problèmes de programmation mathématique (*mathematical programming*). En plasticité, ce type de problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \max_{\sigma, a} \quad & \sigma^\top \dot{\varepsilon}^p + a^\top \dot{\alpha} \\ \text{s.c.} \quad & \mathcal{Y}(\sigma, a) \leq 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

qui décrit la recherche du maximum du travail de dissipation plastique tout en respectant le signe de la fonction d'écoulement.

Durant les deux dernières décennies, KRABBENHØFT a beaucoup travaillé sur ces méthodes de résolution pour la plasticité en s'intéressant à diverses méthodes d'optimisation, ainsi que sur les problèmes de plasticité non associée pour les géomatériaux. Au début des années 2000, la méthode existante du simplexe étant complexe et longue à converger et par conséquent pas utilisée en plasticité, il s'intéresse alors aux méthodes du type *point intérieur*. Ce type d'algorithme est proposé par DIKIN (1967) puis repris plus tard par KARMARKAR (1984) pour l'optimisation linéaire et permet de résoudre aisément les formulations proposées par CAPURSO et MAIER (1970) et MAIER (1968a,b). Quelques travaux utilisaient déjà cette méthode, comme ceux de XIAOMING et al. (2001) ou de ZHANG et al. (2002), mais ces méthodes restaient peu connues.

KRABBENHØFT et DAMKILDE (2003) proposent alors d'appliquer ce type de méthode à l'analyse limite pour des formulations linéaires, puis KRABBENHØFT et al. (2007b) étendent ce principe aux problèmes d'optimisation sous contrainte non linéaire. Le problème général (1.27) doit alors être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \max_{\sigma, a} \quad & \sigma^\top \dot{\varepsilon}^p + a^\top \dot{\alpha} + \mu \log(s) \\ \text{s.c.} \quad & \mathcal{Y}(\sigma, a) + s = 0 \end{aligned} \tag{1.28}$$

où μ est le paramètre barrière (positif) de la fonction barrière logarithmique $\mu \log(s)$ ajoutée à la fonction à maximiser de (1.27), et s est la variable d'écart (*slack variable* en anglais) qui permet de transformer la contrainte d'inégalité en une contrainte d'égalité. Pour plus de détails sur ces méthodes de points intérieurs, il est possible de se reporter à l'ouvrage de TERLAKY (1996).

Au milieu des années 2000, la programmation cônica a commencé à être utilisée pour la résolution de problèmes de plasticité, comme avec BISBOS et al. (2005) ou MAKRODIMOPOULOS (2006) bien que les problèmes traités dans ces travaux ne nécessitent pas spécifiquement cette formulation. MAKRODIMOPOULOS et MARTIN (2005a,b) utilisent la programmation cônica quadratique (*second order cone programming*, SOCP) pour des problèmes plus complexes, mais toujours en optimisation linéaire.

KRABBENHØFT et al. (2007a) proposent une formulation sous ce formalisme en vue de résoudre en plasticité parfaite des problèmes d'analyse limite pour des fonctions d'écoulement

telles que celles de *Drucker-Prager* ou de *Mohr-Coulomb*, fonctions délimitant des ensembles C coniques.

Dans l'article de KRABBENHØFT (2009), l'auteur développe une inéquation variationnelle pour la plasticité qui peut être résolu avec des méthodes de projection (*closest point method* en particulier) ou avec des méthodes SOCP après reformulation en un problème incrémental. Ces méthodes seront à nouveau employées dans de nombreux travaux traitant de plasticité non associée, en particulier dans KRABBENHØFT et LYAMIN (2012), KRABBENHØFT et al. (2012) et YONEKURA et KANNO (2012).

Ainsi, de nombreuses méthodes permettant la résolution des problèmes d'élastoplasticité formulés à l'aide d'inéquations variationnelles existent et ont été éprouvées. La résolution de ce type de problème ne pose dès lors pas de soucis majeur, du moins sous l'hypothèse de convexité et de dissipation normale.

1.3.4 Applications et approfondissements des formulations variationnelles

1.3.4.1 Application théorique des lois de dissipation normale

Les inégalités variationnelles pour la plasticité, ainsi que les formes d'optimisation qui leur sont associées, ont donc fourni un nouveau cadre d'étude et de développement pour certains travaux de recherches sur les problèmes de plasticité. En particulier, les *Matériaux Standards Généralisés* (MSG) sont une notion issue directement des lois de normalité. En développement depuis deux ans par NGUYEN et HALPHEN (1973), NGUYEN (1973) et NGUYEN et BUI (1974), ils ont été formalisés dans l'article de HALPHEN et NGUYEN (1975). Les deux auteurs ont repris les travaux et l'approche de MOREAU et précisent que "*l'hypothèse de dissipativité normale fournit une méthode de construction systématique des lois constitutives simples*", ce qui constitue l'un des principaux avantages : simplifier la formulation de la plasticité normale.

En reprenant donc l'hypothèse de dissipativité normale de MOREAU (1.23) qui précise l'existence d'un potentiel de dissipation ϕ permettant de lier les vitesses généralisées aux forces thermodynamiques associées *via* un sous gradient, un MSG est défini comme

un matériau élastoviscoplastique et élastoplastique à déformation plastique instantanée pour lequel il existe une famille de paramètres internes (α_j) telle que si \mathcal{A}_j désigne la force associée par la relation $\mathcal{A}_j = -\partial\Phi/\partial\alpha_j$ (avec Φ l'énergie libre spécifique) l'hypothèse de dissipativité normale [...] soit vérifiée.

Deux idées principales se dégagent donc de ce travail : la notion de variable interne pour des processus dissipatifs (comme les lois de plasticité, la fracture), et l'existence de deux (pseudo)potentiels, un élastique et un de dissipation.

Ces deux notions offrent la possibilité de formuler simplement des lois de comportement pour des matériaux respectant l'hypothèse de dissipativité normale afin de résoudre simultanément les équations constitutives de la plasticité et les équations d'équilibre ou du mouvement. Cette résolution peut en particulier s'effectuer à l'aide de méthodes d'optimisation sur des ensembles convexes.

Parmi les autres points intéressants de cet article majeur, il faut relever en particulier la formulation de lois d'évolution, l'extension du principe du travail plastique maximal de Hill à une forme avec écrouissage, ou encore la preuve de l'unicité du champ de contrainte et de celui de paramètres internes pour le problème d'évolution.

Il est cependant important de noter qu'il existe des restrictions et des impossibilités avec cette formulation de dissipation normale. En particulier, l'ensemble des contraintes admissibles sera forcément convexe, et il faut obligatoirement avoir une loi de normalité ce qui implique l'impossibilité d'utiliser cette méthode pour traiter de la plasticité non associée

(perte de la normalité) ou de l'adoucissement (écrouissage négatif). C'est donc une formulation très performante pour des matériaux spécifiques comme l'acier ou les métaux, mais la liste est restreinte. Cependant, des travaux plus récents ont réussi à trouver des solutions à ce problème et à retrouver la normalité ou la convexité à l'aide d'outils mathématiques adaptés (voir partie 1.3.4.4).

Suite à ces travaux, NGUYEN (1977) a proposé une méthode itérative de résolution pour les problèmes d'élastoplasticité de ces MSG. A l'aide des travaux de MOREAU (processus de balayage en particulier, voir MOREAU (1973)), il propose une méthode implicite de projection permettant de respecter strictement la contrainte $\sigma(t) \in C(t)$, dont les performances sont renforcées par la preuve de convergence dans le cas des matériaux à écrouissage positif.

1.3.4.2 Dynamique

Dans les années 70 et 90, avec MAIER en particulier, de nombreuses investigations sont menées autour des méthodes d'optimisation pour la plasticité (voir paragraphe 1.3.3.2), et certains de ces travaux orientaient leurs sujets sur des considérations réellement dynamique, en prenant en compte les effets d'inertie, comme dans CORRADI (1976), MAIER et CORRADI (1974), MAIER et VITIELLO (1974), CAPURSO (1975) ou CORRADI et NOVA (1974). Cependant, il n'y a que peu de travaux en dynamique avec la plasticité formulée à l'aide de formulations variationnelles.

1.3.4.3 Analyse limite

L'une des principales applications de l'écriture des problèmes de plasticité sous forme d'inéquations variationnelles est certainement l'analyse limite, développée par PRAGER et HODGE (1951). Le cours de SALENCON (1983) constitue un ouvrage de référence pour cette méthode qui permet de déterminer le chargement maximal qu'une structure soumise à un chargement de direction \bar{F} est susceptible de supporter avant sa ruine (développement de mécanismes, perte de stabilité, non respect du signe de la fonction d'écoulement) tout en décrivant l'évolution non linéaire des matériaux constituant les diverses parties de cette structure.

Les travaux de KRABBENHØFT et DAMKILDE (2001, 2003) et KRABBENHØFT et al. (2005) s'intéressent à la résolutions des problèmes d'analyse limite à l'aide de formulations par éléments finis adaptés ainsi qu'avec des méthodes d'optimisation (non linéaires).

1.3.4.4 Limites des formulations variationnelles en plasticité

Suite à la présentation des principales utilisations et des avantages majeurs des inéquations variationnelles pour la plasticité, en association avec l'hypothèse de dissipativité normale et avec la convexité de l'ensemble des contraintes admissibles C , il faut souligner que tous les matériaux ne suivent pas ce type de règle et que, par conséquent, de nombreuses propriétés du modèle mathématique ne sont plus valables (en particulier l'unicité de la solution).

C'est le cas pour les géomatériaux (roches ou béton) pour lesquels la loi de normalité n'est plus applicable. Ils obéissent à des lois de comportement de type *Drucker-Prager* ou *Mohr-Coulomb*, fonctions d'écoulements faisant intervenir directement des paramètres tels que les angles de frottement, des coefficients de friction ou de dilatation, ainsi que la pression hydrostatique dont dépendra alors la limite d'élasticité.

Réduction du domaine élastique Parmi les travaux déjà évoqués, le papier de MAIER (1969) traite de l'adaptation élastoplastique pour des lois d'écoulement associées et non associées. En considérant de la plasticité parfaite et une fonction de charge multilinéaire (ensemble

C polygonal), l'auteur définit la notion de *domaine élastique réduit* inclu dans C. NAYROLES et WEICHERT (1993) ont élargis ce concept qu'ils ont renommé *sanctuaire plastique*. Peu après, CORIGLIANO et al. (1995) et PYCKO et MAIER (1995). Cette formulation est aussi utilisée pour des problèmes de contact frottant par WALKER et LEINE (2019) qui formulent le problème de contact frottant non associé à l'aide de l'utilisation d'un premier ensemble pour les forces de friction admissibles appelé « réservoir de forces » et d'un second pour les directions de glissement.

Bipotential Dans un compte rendu de l'académie des sciences, DE SAXCÉ (1992) introduit la notion de *bipotential*. Il s'agit de généraliser le principe de dissipation normale à l'aide d'une relation implicite entre les variables classiquement utilisées en plasticité $\dot{\epsilon}^p$ et σ en étendant l'inégalité de *Fenchel*. DE SAXCÉ précise que

L'idée de base consiste à conserver le concept-clé de dissipation normale mais sous forme affaiblie où la loi constitutive est mise sous forme d'une relation implicite.

Un bipotentiel b est donc défini comme une fonction convexe pour l'une des deux variables lorsque l'autre est fixée. Ce bipotentiel b vérifie alors que, quel que soit le couple $(\dot{\epsilon}^{p*}, \sigma^*)$ statiquement, cinématiquement et plastiquement admissible, $b(\dot{\epsilon}^{p*}, \sigma^*) \geq \dot{\epsilon}^{p*} \cdot \sigma^*$. Un couple solution $(\dot{\epsilon}^p, \sigma)$ vérifie la loi de comportement et satisfait cette égalité. Dans ce cas, il y a deux inclusions qui sont valables : d'une part, $\dot{\epsilon}^p \in \partial b / \partial \sigma$ et, d'autre part, $\sigma \in \partial b / \partial \dot{\epsilon}^p$.

Les matériaux qui obéissent à ce type de loi constitutive sont appelés *matériaux standards implicites* (MSI). Ils permettent d'étendre le principe des matériaux standards généralisés présentés précédemment. Ces MSI sont donc un cas particulier de MSI).

En choisissant un potentiel d'écoulement \mathcal{G} qui possède les propriétés d'un bipotentiel (comme c'est le cas dans DE SAXCÉ et al. (2000), DE SAXCÉ (1992) et DE SAXCÉ et BOUSSHINE (2002)), la formulation en dissipation normale est retrouvée sous certaines conditions, ce qui permet finalement de résoudre le problème.

Cette méthode a été utilisée dans divers travaux et pour plusieurs applications. Outre son emploi dans diverses recherches sur l'élastoplasticité, tel que son application au critère de plasticité de *Drucker-Prager* (BOUSSHINE et al., 2001, 2003; HJIAJ et al., 2003) ou aux problèmes d'adaptation élastoplastique (BOUBY et al., 2006; BOUBY, 2006; BOUSSHINE et al., 2003), elle a été utilisée pour les problèmes de contact frottants. Ces lois sont non associées (frottement de *Coulomb*) et les MSI ont été proposés à cet effet (DE SAXCÉ et FENG, 1991). C'est donc naturellement que le bipotentiel a été repris pour retrouver la loi de normalité en vue de résoudre des problèmes de contact frottant, unilatéral ou non (DE SAXCÉ, 1992; HJIAJ et al., 2002). Enfin, cette méthode a été employée pour résoudre des problèmes de contact (frottant) avec impact ACARY et BROGLIATO (2008) et MAGNAIN et al. (2005), ce qui ouvre le champ à des formulations communes de plasticité et de problèmes de contact et d'impacts à l'aide de cette méthode.

1.3.4.5 Thermodynamique et méthodes numériques

Dans ses travaux, KRABBENHØFT cherche souvent à résoudre les problèmes de plasticité à l'aide d'inégalités variationnelles et s'attache donc à trouver de nouvelles façons de formuler les problèmes qui y sont liés. Il s'appuie entre autre sur les études thermodynamiques liées à ces processus de plasticité des sols qui fait perdre la loi de normalité, comme dans les travaux de COLLINS et HOULSBY (1997) ou de COLLINS et KELLY (2002).

Dans KRABBENHØFT et al. (2012), le problème non-associé est exprimé de façon associée en utilisant le processus mécanique de frottement. Ce principe est utilisé pour résoudre des problèmes de localisation de déformations plastiques tels que des bandes de cisaillement à

l'aide des formulations variationnelles et de méthodes d'optimisation. Puisque les phénomènes en jeux sont très localisés, la question de la dépendance au maillage est aussi approchée.

Enfin, KRABBENHØFT et LYAMIN (2012) appliquent au modèle *cam clay modifié* leurs recherches et méthodes numériques antérieures. Ainsi, ils formulent les lois constitutives à l'aide d'inégalités variationnelles et, après discrétisation, ils cherchent à trouver une formulation qui soit adaptée aux méthodes d'optimisation. Ils soulignent cependant dans cet article les deux principaux avantages des inégalités variationnelles pour la plasticité. D'une part, il y a la résolution simultanée des lois constitutives des matériaux et des équations d'équilibre sans avoir à faire des aller-retours entre les deux formulations (étape globale avec l'équation du mouvement, puis étape locale avec les équations constitutives du matériau). D'autre part, il y a la possibilité de traiter simplement les éventuels points singuliers des fonctions de charges (sommet du cône de *Drucker-Prager* ou intersection des plans de *Tresca* par exemple) grâce à la formulation en sous-différentiel.

1.3.5 Travaux récents sur les formes variationnelles de la plasticité

Pour terminer cette section sur la plasticité, quelques travaux plus récents sont présentés, tout particulièrement les travaux s'intéressant aux formes variationnelles et aux méthodes de résolution qui y sont liées.

En premier, l'article de FRANCFORT (2018), faisant parti d'une série d'articles hommages à J. J. MOREAU traite de plasticité non associée appliquée aux modèles de *Drucker-Prager* et de *Armstrong-Frederick* (il est possible de l'étendre à d'autres lois comme le modèle *Cam Clay* par exemple). La convexité de la formulation est retrouvée suite à l'ajout d'une variable interne dans le potentiel de dissipation.

HOULSBY (2019) mêle thermodynamique et géomatériaux et fait référence à des travaux déjà connus en élastoplasticité de matériaux frictionnels granulaires (donc nécessitant des lois de plasticité non-associées) et pouvant présenter de la dilatation (perte de convexité), mais traite le problème cette fois en faisant appel à l'hyperélasticité.

SAMANIEGO et al. (2021) se basent sur les MSG et passent en revue différentes méthodes existantes pour formuler les problèmes dissipatifs sous formes variationnelles, en s'intéressant tout particulièrement à la localisation des déformations. Ce papier est très orienté vers la mécanique de la fracture, mais il traite tout de même de la plasticité dans le cadre de l'approche des valeurs limites afin de localiser les endroits où ces processus dissipatifs sont susceptibles d'apparaître. Sur ces effets localisés, correspondant à une concentration de contrainte ou de déformation, il est intéressant de regarder aussi l'article de SABET et DE BORST (2019) dans lequel la dépendance de la réponse numérique au maillage dans le cas de processus dissipatifs est analysée et illustrée (peu d'influence pour la non associativité, mais très forte dans le cas de l'adoucissement). DE BORST et DURETZ (2020) s'intéressent aussi à ce type de questionnements à partir de différents modèles d'élastoplasticité de roches et sols qui sont comparés sous chargement dynamiques.

Cette comparaison est effectuée entre des modèles à différentes échelles, des plus grandes, pour modéliser la lithosphère et les mouvements de la croûte terrestre, aux plus raisonnables, pour des lois de comportement qui entrent plus dans le cadre de notre travail et de l'ingénierie géotechnique. Ici encore la localisation des contraintes est étudiée pour prédire la fracture. Mais le point à retenir est certainement l'utilisation de la viscosité afin de retrouver le caractère bien posé du problème dans un cadre de plasticité avec adoucissement (utilisation du modèle rhéologique d'élasto-viscoplasticité, c'est-à-dire un ressort placé en série *a minima* avec un bloc amortisseur - patin glissant en parallèle). De façon générale, DE BORST s'intéresse beaucoup à ces problèmes de dépendance au maillage et tente de les limiter en vue d'applications à la géologie ou la géotechnique à plus ou moins grande échelle.

Quelques publications reviennent sur les méthodes de résolutions comme celle de EL BOUSTANI et al. (2020b) qui utilise les formulations variationnelles et résout le système à l'aide d'un algorithme de point intérieur issu des travaux de KRABBENHØFT. Ce papier est une application directe des travaux théoriques et d'optimisation à un problème d'ingénierie des structures : le dimensionnement d'assemblages en acier transmettant des moments, dont les résultats sont comparés à ceux issus d'un code de calcul du commerce afin de prouver son efficacité. Ce travail se base sur l'analyse limite en considérant un matériau du type MSG et en utilisant le critère de *von Mises*, autrement dit des méthodes classiques de la théorie de l'élastoplasticité, mais formulées et résolues par une approche moins commune de la plasticité sous formes variationnelles tout en y apportant une nouveauté et une amélioration en termes de méthodologie de résolution.

Pour finir, les articles de CLEJA-TIGOIU et STOICUTA (2019) et de ULLOA et al. (2021) reprennent des considérations assez générales vues jusqu'ici, mais montrent l'intérêt toujours présent pour le sujet de recherche des formes variationnelles pour la plasticité. Le premier papier reprend les formulations variationnelles pour la plasticité associée en l'appliquant au modèle d'érouissage de *Armstrong-Frederick* et compare les résultats obtenus avec ceux issus du *return map*. Le second reprend les raisonnements récents pour la plasticité non associée et en tire, à l'aide des formulations variationnelles, une forme énergétique permettant de retrouver le caractère associatif avant de l'appliquer au modèle de *Drucker-Prager* avec érouissage (les résultats énergétiques et dus au phénomène d'érouissage sont étudiés dans les exemples d'application).

1.4 Couplage plasticité et impact

De nombreux travaux utilisant à la fois les phénomènes de contact et de plasticité existent (pour les crash tests ou la mise en forme, voir la publication récente de VOLK et al. (2019) dresse un état de l'art de méthodes de modélisations pour la mise en forme de pièces métalliques). Cependant, comme évoqué au fil des revues bibliographiques spécifiques au contact et à la plasticité, il existe de très nombreuses façons de modéliser et de résoudre ces problèmes, et toutes ne se combinent pas parfaitement entre elles.

Dans les pratiques en ingénierie, les logiciels du commerce permettent de résoudre ces problèmes de couplages (les crash-test pour voiture en sont certainement un des exemples les plus évidents). Cependant, ces études sont très largement menées avec des schémas explicites, en utilisant la méthode des pénalités pour le contact et le principe du return-map pour la plasticité, utilisées l'une après l'autre. Bien que ces formulations soient fiables, éprouvées et robustes, elles donnent lieu à des biais et des contraintes d'utilisation (mauvais bilan énergétique, interpénétrations, pas de temps très petit par exemple).

S'intéresser d'avantage à ce qui existe en recherche (pour le ouvrages de protection ou non) sur le couplage entre phénomènes de contact unilatéral et/ou de plasticité formulée à l'aide de méthodes variationnelles permettra de dégager des pistes de travail pour cette thèse.

risques naturels Pour revenir aux motivations de la thèse, certains travaux développent des aspects théoriques et des méthodes adaptées aux ouvrages de protection face à des risques gravitaires. A ce sujet l'article de BERTRAND et al. (2012) s'intéresse aux filets pare pierre métallique, en regardant d'abord à différentes échelles les composants avant de modéliser l'ensemble d'une structure et de comparer les résultats expérimentaux et numériques. L'objectif est de calibrer un modèle, à travers une étude paramétrique, en vue d'obtenir un moyen de dimensionnement fiable pour de telles structures. Les articles de GENTILINI et al. (2013) et de DI GIACINTO et al. (2020) étudient aussi des structures de protection, conçues en y intégrant

des dispositifs spécifiques de dissipation d'énergie. Il s'agit d'éléments métalliques qui vont se déformer dans le domaine plastique et en grandes déformation. L'un des objectifs de ces travaux est alors de réussir à modéliser ces comportement en tenant compte du contact lors des déformations. Enfin, l'article de SU et al. (2021) s'intéresse à des structures en gabion. Les auteurs mènent une étude paramétrique sur la forme des éléments qui remplissent la structure et sur la contrainte de confinement de l'ouvrage face à une énergie d'impact donnée.

Risques sismiques Parmi ces travaux, certains étudient de façon approfondie les paramètres internes de modèles théoriques développés pour le génie parasismique. C'est par exemple le cas de LO FEUDO et al. (2022) qui s'intéressent aux amortisseurs non-linéaires en tête de structures de bâtiment afin absorber l'énergie sismique. Ils regardent l'influence de la durée d'impact de la masse aux extrémités de l'amortisseur sur les résultats d'énergie dissipée (frottements négligés). Cette durée est en réalité nulle, mais du fait de modèles type pénalités, un temps de contact est induit. Cette différence a une forte influence sur la description mécanique de l'amortisseur et son comportement dynamique. Mais cette durée de contact n'est pas la seule donnée qui fasse varier les résultats puisque la vitesse d'impact ou encore les conditions initiales influent fortement. En guise d'ouverture, une modélisation plus précise est suggérée, prenant en compte plus de paramètres pour améliorer les modélisations (comme le frottement interne de l'amortisseur).

Un autre sujet d'étude lié à la fois au domaine sismique et aux deux phénomènes de contact et de plasticité est l'entrechoquement de bâtiments durant un séisme. Les oscillations de bâtiments adjacents peut impliquer qu'ils s'entrechoquent et que, de fait, les structures plastifient ou s'endommagent et donc que leur réponse dynamique soit modifiée. La thèse de LANGLADE (2021) étudie le comportement de structures adjacentes lors de séisme (contact avec la méthode NSCD) et compare les résultats de structures élastiques et élastoplastiques. Dans KAZEMI et al. (2021), la modélisation du contact est régularisée et la plasticité se développe dans des rotules plastiques dont l'emplacement aux extrémité des éléments de poutre est spécifié à l'avance. D'autres travaux, comme ceux de JANKOWSKI, traitent de ces phénomènes, parfois en considérant des modèles élastoplastiques et parfois avec de l'endommagement (voir par exemple JANKOWSKI (2009) ou JANKOWSKI et MAHMOUD (2015)).

Méthodes de résolution Comme pour l'étude séparée du contact et de la plasticité, des travaux portant sur les méthodes de résolution sont largement présents.

EL BOUSTANI et al. (2020b) s'intéressent ainsi à formuler le problème incrémental d'analyse limite et du contact à l'aide d'une méthode d'optimisation (point intérieur). Ils formulent le problème de plasticité pour les bornes supérieures et inférieures avec des éléments finis basés respectivement sur le champ de déplacement et sur le champ de contrainte, et parviennent à étudier la convergence des deux bornes pour adapter le maillage si nécessaire. En plus de l'algorithme de résolution, un gros travail sur les éléments finis est donc mené, dans la continuité de l'article de EL BOUSTANI et al. (2020a). Les résultats sont comparés à ceux issus d'un code commercial en s'appuyant sur un exemple de liaison encastrée boulonnée transmettant le moment entre deux éléments de structure en acier. Le contact est pris en compte pour les parties en compression entre les deux poutres et pour les boulons, mais aucun impact n'est considéré. Même si l'exemple présenté est complet et intéressant, c'est bien le développement théorique pour construire le modèle qui constitue la contribution majeure de ce travail.

Dans le même esprit, en vue de traiter des problèmes non réguliers, CHRISTENSEN propose des algorithmes basés sur des méthodes de *Newton* modifiées (semi-lisse et non-lisse) pour traiter des problèmes d'élastoplasticité (dans CHRISTENSEN (2002a)) ou d'élastoplasticité et de contact (CHRISTENSEN, 2002b). Les processus non-lisses de contact frottant (pas d'impact)

et éventuellement de plasticité sont donc traités par une méthode classique de résolution de problèmes non-linéaires adaptée.

Pour les contacts frottants, XIAOMING et al. (2001) propose une méthode incrémentale (en quasi-statique) pour résoudre à la fois les équations de l'élastoplasticité et du contact à l'aide de méthodes de programmation quadratique. ZHANG et al. (2004) incluent une loi de contact avec de la friction orthotrope. Des méthodes itératives et d'optimisation sont utilisées pour résoudre ces problèmes pour finalement arriver à formuler un problème de complémentarité linéaire, puis à le résoudre en le transformant en un problème régulier.

Ces problèmes de complémentarité linéaire sont aussi utilisés par KHAN et al. (2013) pour résoudre des problèmes de poutres rigides-plastiques impactées. L'impact a lieu au milieu d'une poutre simplement appuyée en ne considérant d'abord que le moment fléchissant puis l'effort tranchant en plus pour définir le critère d'écoulement. L'impact est modélisé de façon approchée en considérant une vitesse initiale nulle partout sauf à l'endroit impacté. Cette méthode considère d'après la loi d'impact de *Newton* que tout ou partie la quantité de mouvement a été transférée et qu'il n'y aura pas de multiples impacts. Le problème établi, il est formulé sous forme de LCP afin d'être résolu à l'aide de l'algorithme de *Lemke*. Dans la continuité, KHAN et al. (2021) modifient cet algorithme de résolution pour étudier la réponse rigide-plastique de structures faites de barres ou de poutres, mais pas nécessairement soumises à un impact.

Dans ses travaux, HENG et ses co-auteurs forment les problèmes couplés de contact et de plasticité d'une façon nouvelle. En effet, HENG et al. (2016) présentent un modèle simplifié pour étudier la dynamique d'une poutre soumise à un effort axial et à un impact transversal (comme ce peut être le cas d'un poteau impacté par un véhicule). Le modèle est simplifié puisque les auteurs utilisent des barres rigides et localisent à l'avance les déformations plastiques aux extrémités des éléments du modèle discret (en tête et pied de poteau et au point d'impact). Ces points spécifiques où se concentrent les degrés de liberté sont modélisés, comme les conditions aux limites, avec des ressorts élastoplastiques et éventuellement une masse ponctuelle. Le problème est formulé en plasticité associée et fait appel à la méthode du *return map* et à l'algorithme de *Moreau-Jean* pour étudier la validité des hypothèses adoptées (comme l'énergie introduite ou l'influence des masses ponctuelles).

Dans un second article, HENG et al. (2017) reprennent les mêmes principes pour développer un modèle d'abord soumis à une force externe pour suivre son évolution élastoplastique en fonction de la force appliquée, puis son comportement sous impact en réduisant le précédent modèle à un système à un seul degré de liberté possédant une rigidité équivalente. Ils tentent alors de prédire les déplacements maximums nécessaires pour absorber l'énergie introduite.

1.5 Conclusion, objectifs et organisation de la thèse

En conclusion La vulnérabilité d'une zone vis à vis des risques de chutes de blocs rocheux peut être diminuée par l'utilisation de structures de protections.

Pour étudier ces structures, il est donc primordial, entre autre, de modéliser convenablement les impacts et les phénomènes dissipatifs comme la plasticité. Ce chapitre a servi à dresser un état de l'art des travaux existant pour chacun de ces deux phénomènes puis sur ceux qui les couplent.

Les méthodes qui régularisent la loi de contact sont courantes mais induisent des problèmes inhérents à leurs hypothèses et formulation : paramètre non physique, interpénétrations, problèmes de conditionnement des systèmes entre autre. Pour ce travail, le choix est alors fait d'utiliser la méthode NSCD qui permet grâce à la mécanique non régulière de respecter plus strictement la loi d'impact à l'aide d'outils issus de l'optimisation. De plus, l'utilisation

du schéma implicite de *Moreau-Jean* permet de disposer d'un schéma numérique performant et aux propriétés énergétiques intéressantes, ce qui est tout particulièrement avantageux lors de l'étude de processus dissipatifs.

Pour la plasticité, à l'inverse de la plupart des travaux, utiliser les inégalités variationnelles pour modéliser le phénomène permet d'éviter de formuler une matrice tangente à chaque itération, et d'arriver à une forme de minimisation d'un problème en programmation mathématique. De plus, parmi les recherches récentes liées à la plasticité sous forme variationnelle, il y a un grand intérêt porté sur les méthodes numériques, en particulier sur les algorithmes de résolution (optimisation).

Les deux phénomènes de contact et de plasticité peuvent alors être proposés sous un même formalisme. Pourtant, bien que de nombreux travaux prenant ces deux aspects en compte existent, aucun n'a encore, à notre connaissance, utilisé ces deux méthodes simultanément en dynamique et avec impacts.

En effet, la plupart de ces travaux considèrent des contacts établis et peu d'entre eux s'intéressent aux impacts. De plus, lorsque c'est le cas, ces impacts sont souvent pris en compte au travers de méthodes approchées permettant de ne pas considérer l'impactant mais juste ses effets, voir de revenir à une évolution quasi-statique. En pratique, du fait de l'utilisation presque exclusive de méthodes d'intégration explicites, les modèles développés ou utilisés ne bénéficient pas de propriétés énergétiques satisfaisantes. Par conséquent, même si une attention particulière est portée sur les paramètres du schéma numérique et que les résultats sont exploitables, des erreurs subsistent et peuvent être dommageables lors d'études de phénomènes dissipatifs. Enfin, la formulation du problème de plasticité est largement séparée de la formulation du contact alors que des cadres mathématiques communs existent.

Ces cadres communs sont d'ailleurs la raison pour laquelle les travaux de KHAN sont à souligner puisque les problèmes de complémentarité linéaire permettent de formuler les deux phénomènes de contact et plasticité lorsque les lois constitutives des matériaux et les critères d'écoulement le permettent (même si les travaux cités n'exploitent pas cette propriété puisque l'impact est simplifié). De même, les publications de HENG sont à retenir car les problèmes sont formulés en dynamique et bénéficient, grâce au schéma de *Moreau-Jean*, d'un bilan énergétique satisfaisante, même si la résolution entre le contact et la plasticité n'est pas commune.

L'objectif de la thèse est alors de proposer une formulation qui permette de prendre en compte le contact et la plasticité au sein d'un seule et même algorithme. Pour cela, les deux phénomènes seront énoncés de manière similaire au travers d'inclusions dans des cônes normaux à un ensemble convexe, et ils seront alors résolus simultanément à l'aide de méthodes d'optimisation.

Un cadre d'étude en dynamique, et non pas en (quasi-)statique, sera privilégiée afin de réellement capturer le comportement sous impact tout en améliorant la robustesse de l'algorithme (simulations quasi-statiques possibles), en travaillant en contraintes plutôt qu'en déplacements (avantage pour la plasticité) et en pouvant vérifier des résultats mathématiques (existence, unicité des solutions en particulier). Les considérations thermodynamiques seront utilisées et, associé au schéma d'intégration temporelle de *Moreau-Jean* qui permet de conserver numériquement les quantités d'énergie, et permettra alors de quantifier les processus dissipatifs convenablement.

L'organisation du travail se développera alors autour de trois chapitres. Dans un premier temps, après quelques rappels de thermodynamique, le premier chapitre aboutira à une formulation continue des systèmes mécaniques et des phénomènes de contact et de plasticité.

Cette formulation y sera discrétisée spatialement à l'aide de la méthode des éléments finis, ce qui amènera à formuler un système complet.

Dans un second temps, une fois le schéma d'intégration temporelle présenté, ce système sera discrétisé en temps, ses propriétés seront étudiées, et le bilan énergétique dressé.

Enfin, dans un troisième temps, les possibilités offertes par cet algorithme sont présentées à travers plusieurs exemples qui mettront l'accent sur les différentes propriétés intrinsèques à la formulation et au cadre adopté.

Le travail se terminera alors avec une dernière partie en guise de conclusion qui s'efforcera de reprendre l'essentiel du travail et d'esquisser les voies d'approfondissement envisageables.

Chapitre 2

Formulation en temps continu

Sommaire

2.1	Thermodynamique pour la plasticité	50
2.1.1	Généralités	50
2.1.2	Principe des puissances virtuelles	50
2.2	Thermodynamique et matériaux standards généralisés	52
2.2.1	Energie libre et lois d'état	53
2.2.2	Loi de normalité	54
2.3	Prise en compte du contact	58
2.3.1	Précisions sur le principe des puissances virtuelles	58
2.3.2	Contact unilatéral	59
2.3.2.1	Vitesse relative et puissance des forces de contact	59
2.3.2.2	Conditions de <i>Signorini</i>	59
2.3.2.3	Conditions de <i>Signorini</i> en vitesse	60
2.4	Discrétisation par éléments finis	61
2.4.1	Définitions et notations	61
2.4.2	Discrétisation des équations élastoplastiques	66
2.4.3	Discrétisation du contact	66
2.5	Dynamique non régulière pour les systèmes discrets	68
2.5.1	Notions de théorie de la mesure	68
2.5.2	Formulation de la dynamique en mesures différentielles	69
2.5.3	Loi d'impact	70
2.6	Bilan énergétique en éléments finis	71
2.7	Système complet plasticité - impact	72
2.7.1	Résumé des développements	72
2.7.2	Changement de variable	73
2.8	Existence et unicité de la solution du système dynamique élastoplastique	73
2.8.1	Forme générale	73
2.8.2	Formulation du système élastoplastique en inclusion différentielle	73
2.8.3	Changement de variable	74
2.9	Exemples 1D	75
2.9.1	Plasticité : Barre en traction - compression	75
2.9.2	Contact : <i>Bouncing ball</i>	79
2.10	Résumé du chapitre	80

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir un système d'équations en temps continu qui prenne en compte les équations de la dynamique classique, les lois constitutives de la plasticité et les lois d'impact dans un formalisme commun. En premier lieu le cadre thermodynamique utilisé est présenté ainsi que les hypothèses générales considérées, avant de développer la construction des lois constitutives de la plasticité en s'appuyant à la fois sur les hypothèses des matériaux standards généralisés et sur la formulation en inclusion dans des cônes normaux. Ensuite, la discrétisation spatiale du système obtenu sera effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis. Enfin, les contacts et impacts seront introduits pour finalement arriver à un système complet incluant contact et plasticité.

2.1 Thermodynamique pour la plasticité

2.1.1 Généralités

La thermodynamique s'intéresse à la dépendance de systèmes physiques par rapport à la température. Dans cette thèse, ces considérations thermiques ne seront pas traitées, mais le formalisme offert par ce cadre très général permet de modéliser des transformations irréversibles en tant que processus dissipatifs, ce qui est particulièrement adapté aux déformations plastiques.

Cette théorie physique est basée sur quatre principes, mais seulement deux seront utilisés ici. La première loi de la thermodynamique précise un équilibre énergétique en indiquant qu'au cours de la transformation d'un système fermé, la variation de son énergie interne est égale à la somme de la puissance des efforts mécaniques extérieurs (à distance et en contact) et de la puissance calorifique extérieurs (rayonnement et conduction). La seconde loi, elle, s'intéresse aux processus dissipatifs et indique qu'au cours d'une transformation thermodynamique, il ne peut y avoir que création ou conservation de l'entropie (ce qui, respectivement, correspond à une transformation irréversible ou réversible). Elle servira ici à décrire les processus dissipatifs liés aux déformations plastiques irréversibles.

La thermodynamique fait appel à des *potentiels thermodynamiques*. Ce sont des fonctions d'état qui permettent de déterminer l'équilibre et l'évolution d'un système à un instant donné, peu importe son historique.

Enfin, deux hypothèses importantes quant aux considérations thermiques restent à préciser. Premièrement, toutes les transformations seront isothermes, c'est-à-dire que la température n'évoluera pas dans le temps, et deuxièmement, ces transformations seront adiabatiques, autrement dit qu'il n'y aura pas d'échanges thermiques avec le milieu extérieur. Ainsi, les variations d'énergie en jeu (conservation, dissipation) ne tiendront pas compte des termes liés à la thermique.

A partir du principe des puissances virtuelles qui permet de définir les différentes puissances en jeu, le système mécanique et les définitions thermodynamiques peuvent alors être développées et conduire à la formulation de l'élastoplasticité associée.

2.1.2 Principe des puissances virtuelles

Enoncé du principe Un corps matériel $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est considéré, et sa frontière est notée $\partial\Omega$. Cette frontière est décomposée en une partie à laquelle des efforts extérieurs sont appliqués,

notée $\partial\Omega_\sigma$, et une partie à laquelle des déplacements sont imposés, notée $\partial\Omega_u$. De plus, $x \in \Omega$ est un point de Ω et t un instant donné, appartenant à un intervalle de temps tel que $t \in [0, T]$.

En mécanique, le principe des puissances virtuelles appliqué à un corps Ω indique que quel que soit le champs de vitesses virtuelles cinématiquement admissible $\mathbf{v}^*(x, t)$, la puissance virtuelle des forces d'inertie du système considéré est égale à la somme des puissance des forces appliquées au système (forces internes et externes). Cela se traduit par :

$$\mathcal{P}_{inertie}^*(t) = \mathcal{P}_{vol}^*(t) + \mathcal{P}_{int}^*(t) + \mathcal{P}_{ext\ tot}^*(t) \quad \forall \mathbf{v}^*(x, t) \quad (2.1)$$

avec $\mathcal{P}_{inertie}^*$ la puissance virtuelle des forces d'inertie, \mathcal{P}_{vol}^* la puissance virtuelle des forces de volumes, et \mathcal{P}_{int}^* et $\mathcal{P}_{ext\ tot}^*$ les puissances virtuelles des efforts internes et externes respectivement. Les efforts de contact ne seront définis que dans la partie 2.3 et, en attendant, les efforts qui en résultent seront inclus dans les efforts externes, d'où la dénomination d'efforts externes totaux.

Définition des puissances De façon classique, les différents termes de (2.1) sont définis par :

$$\mathcal{P}_{inertie}^*(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(x, t) dx \quad (2.2)$$

avec $\mathbf{v}(x, t)$ le champ de vitesses et $\rho(x, t)$ la masse volumique du matériau. Les forces de volume sont notées $\mathbf{f}(x, t)$ ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_{vol}^*(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \mathbf{f}(x, t) dx \quad (2.3)$$

Pour définir la puissance virtuelle des efforts intérieurs, le tenseur des contraintes de *Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}(x, t) \in T_2^d$ (symétrique d'ordre 2) est utilisé ainsi que le tenseur des taux de déformations virtuelles (dépendant des vitesses virtuelles) $\mathbf{D}^*(x, t) \in T_2^d$. Ces deux tenseurs sont en dualité à travers la relation (voir (NAYROLES, 2011)) :

$$\mathcal{P}_{int}^*(t) = - \int_{\Omega} \mathbf{D}^*(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) dx \quad (2.4)$$

Enfin, en notant $\mathbf{t}_{ext\ tot}(s, x)$ les forces externes totales qui s'appliquent sur $\partial\Omega_\sigma$ (et qui seront par la suite décomposées en forces externes appliquées et forces de contact), la puissance virtuelle de ces efforts est définie par :

$$\mathcal{P}_{ext\ tot}^*(t) = \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \mathbf{t}_{ext\ tot}(x, t) ds \quad (2.5)$$

En choisissant le champ de vitesses virtuelles tel que $\mathbf{v}^*(x, t) = \mathbf{v}(x, t)$ (avec \mathbf{v} le champ de vitesses réelles), alors la puissance des forces d'inertie se reformule :

$$\mathcal{P}_{inertie}(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) dx \quad (2.6)$$

Le dernier terme de cette équation correspond à la variation temporelle de l'énergie cinétique \mathcal{T} du système. Il vient alors :

$$\dot{\mathcal{T}}(t) = \mathcal{P}_{vol}(t) + \mathcal{P}_{int}(t) + \mathcal{P}_{ext\ tot}(t) \quad (2.7)$$

Pour raccourcir les notations, les puissances (virtuelles ou non) des forces de volume $\mathcal{P}_{vol}(t)$ et extérieures $\mathcal{P}_{ext\ tot}(t)$ seront regroupées sous une unique puissance $\mathcal{P}_{app\ tot}(t)$ des forces appliquées au système $f_{app\ tot}(t)$:

$$\mathcal{P}_{app\ tot}(t) = \mathcal{P}_{vol}(t) + \mathcal{P}_{ext\ tot}(t) \quad (2.8)$$

L'équation (2.7) devient alors :

$$\dot{\mathcal{T}}(t) = \mathcal{P}_{app\ tot}(t) + \mathcal{P}_{int}(t) \quad (2.9)$$

2.2 Thermodynamique et matériaux standards généralisés

Hypothèse des petites perturbations Pour la suite du travail, l'hypothèse des petites perturbations est considérée. Le tenseur des déformations se réduit ainsi à sa partie linéaire. Il est noté $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) \in T_2^d$ et défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla^\top(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u}) \right) \quad (2.10)$$

où ∇ est le symbole du gradient. Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}(x, t)$ devient :

$$\mathbf{D}(x, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) \quad (2.11)$$

De plus, comme évoqué lors de la présentation de la littérature liée à la plasticité, le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ainsi que leurs taux de variation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$) peut être décomposé en deux parties : l'une élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ (réversible) et l'autre plastique (irréversible) $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(x, t) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(x, t) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \quad (2.12)$$

Dissipation intrinsèque et énergie libre La dissipation intrinsèque par unité de masse est définie par (voir l'annexe B) :

$$d(x, t) = \mathbf{D}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \rho(x)\dot{\psi}_m(x, t) \geq 0 \quad (2.13)$$

avec ψ_m l'énergie libre de *Helmholtz* locale par unité de masse et $\rho(x)$ la masse volumique du matériau au point x . En utilisant la séparation en déformation élastique et plastique (2.12) dans l'inégalité (2.13), cette dissipation devient :

$$\begin{aligned} d(x, t) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \rho(x)\dot{\psi}_m(x, t) \\ &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \rho(x)\dot{\psi}_m(x, t) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'énergie libre par unité de volume $\psi(x, t)$ et sa variation temporelle sont définies par :

$$\psi(x, t) = \rho(x)\psi_m(x, t) \quad \dot{\psi}(x, t) = \rho(x)\dot{\psi}_m(x, t) \quad (2.15)$$

et l'inégalité de *Clausius-Duhem* (2.14) se réécrit :

$$d(x, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \dot{\psi}(x, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \dot{\psi}(x, t) \geq 0 \quad (2.16)$$

La dissipation totale intrinsèque $\mathcal{D}(t)$ et l'énergie libre totale $\Psi(t)$ sont définies respectivement à partir des expressions (2.16) et (2.15) par :

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} d(x, t) dx \quad (2.17a) \quad \Psi(t) = \int_{\Omega} \psi(x, t) dx \quad (2.17b)$$

Reformulation de la puissance des efforts intérieurs D'après l'équation (2.4) qui définit la puissance des efforts internes, en prenant le champ de taux de déformations réel en petites déformations :

$$\mathcal{P}_{int}(t) = - \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) dx \quad (2.18)$$

L'équation n'est pas modifiée en ajoutant puis en soustrayant $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{int}(t) &= - \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \dot{\psi}(x, t) + \dot{\psi}(x, t) \, dx \\
 &= - \int_{\Omega} d(x, t) + \dot{\psi}(x, t) \, dx \\
 &= - \int_{\Omega} d(x, t) \, d\omega - \int_{\Omega} \dot{\psi}(x, t) \, dx
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

En utilisant les définitions de (2.17), la puissance des efforts intérieurs se reformule :

$$\mathcal{P}_{int}(t) = -\mathcal{D}(t) - \dot{\Psi}(t) \tag{2.20}$$

et la première loi de la thermodynamique définie dans (B.3) devient alors

$$\dot{\mathcal{T}}(t) + \mathcal{D}(t) + \dot{\Psi}(t) = \mathcal{P}_{app\,tot}(t) \tag{2.21}$$

2.2.1 Énergie libre et lois d'état

Définition de l'énergie libre Pour développer la mise en équation de la plasticité, il est considéré que l'intégralité de l'état thermodynamique en tout point et à tout instant sera déterminé par deux variables d'état : la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e(x, t)$ et une variable $\boldsymbol{\alpha}(x, t) \in T_1$ qui est un tenseur d'ordre 1 fonction de paramètres internes du matériau et définissant son état d'érouissage.

L'énergie libre par unité de volume ψ , qui est un potentiel thermodynamique, permet donc de définir l'état thermodynamique local du matériau. Une autre hypothèse considérée est que cette énergie est composée d'une partie élastique et d'une partie plastique :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^{pl}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.22}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et $\boldsymbol{\alpha}$ qui dépendent de x et de t . Du fait de ce découplage, la variation temporelle de cette énergie libre est donnée par :

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \dot{\psi}^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \dot{\psi}^{pl}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) + \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \tag{2.23}$$

Cette définition de la variation de l'énergie libre est injectée dans l'inégalité de *Clausius-Duhem* (2.16) :

$$\begin{aligned}
 d(x, t) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \left(\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) + \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \right) \\
 &= \left(\boldsymbol{\sigma}(x, t) - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) + \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Reformulation de la dissipation Suivant l'hypothèse de (2.22), le tenseur d'ordre 3 des contraintes est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \tag{2.25}$$

et le tenseur d'ordre 1 des forces thermodynamiques liées aux variables internes α est défini par :

$$\mathbf{a}(x, t) = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.26)$$

La dissipation par unité de volume définie dans l'équation (2.24) peut alors être réduite à :

$$d(x, t) = \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) - \mathbf{a}(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \geq 0 \quad (2.27)$$

puisque la première parenthèse de la seconde ligne de (2.24) s'annule. De fait, en l'absence de déformations plastiques et d'érouissage, la dissipation $d(x, t)$ est nulle, ce qui est cohérent avec les exigences thermodynamiques.

Définition des potentiels De façon usuelle, les potentiels thermodynamiques sont définis comme des potentiels quadratiques par :

$$\psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e(x, t) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e(x, t) \quad (2.28a) \quad \psi^{pl}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}(x, t) \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x, t) \quad (2.28b)$$

où $\mathbf{E} \in T_4^d$ est le tenseur symétrique d'ordre 4 d'élasticité, et $\mathbf{D} \in T_2^d$ est le tenseur symétrique d'ordre 2 permettant de relier les forces d'érouissage aux paramètres internes (pour plus de clarté dans les équations, la dépendance à x de ces tenseurs sera omise, ainsi que celle au temps qui n'a pas de réelle utilité sous l'hypothèse des petites déformations étant donné que ces tenseurs sont constants).

En utilisant (2.28a) dans (2.25), ainsi que (2.28b) dans (2.26), une relation linéaire est obtenue entre les contraintes et les déformations élastiques d'une part, ainsi qu'entre les forces d'érouissages et les paramètres internes d'autre part :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e(x, t) \quad (2.29a) \quad \mathbf{a}(x, t) = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x, t) \quad (2.29b)$$

Ces équations (2.29) dérivent des potentiels thermodynamiques (2.28) et constituent les lois d'état du système.

2.2.2 Loi de normalité

Les lois d'état (2.29) et le potentiel thermodynamique permettent de connaître l'état du système en tout point et à tout instant. En revanche, l'évolution de ces variables et donc du système n'est pas précisée dans ces lois.

Il faut donc préciser l'évolution temporelle des lois d'état, qui doit respecter la seconde loi de la thermodynamique, en respectant en particulier la positivité de la dissipation intrinsèque définie dans (2.27).

Pour ce faire, l'ensemble des contraintes et des forces d'érouissage admissibles $C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ est défini comme :

$$C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \in T_2^d \times T_1 \mid \mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \leq 0\} \quad (2.30)$$

où $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ est la fonction d'écoulement qui délimite l'ensemble C . Cet ensemble est supposé convexe, fermé et contenir l'origine.

Travaux de Moreau Suivant les travaux de MOREAU (1970, 1973, 1976), l'existence d'un pseudo-potentiel $\phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ régulier est supposée. De celui-ci dérivent les variations de déformations plastique ainsi que les variations des paramètres internes :

$$d(x, t) = \frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) + \frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \geq 0 \quad (2.31)$$

ce qui permet d'écrire, par analogie avec (2.27) :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (2.32a) \quad \mathbf{a}(x, t) = -\frac{\partial \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}} \quad (2.32b)$$

Puisque ϕ est convexe, la transformée de *Legendre-Fenchel* permet de définir sa fonction conjuguée ϕ^* , appelée potentiel de dissipation, qui possède les mêmes caractéristiques de convexité que ϕ . Ainsi, à l'aide du principe de dualité contraintes-déformations :

$$d(x, t) = \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \frac{\partial \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a}(x, t) \cdot \frac{\partial \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \geq 0 \quad (2.33)$$

et on choisit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) = \frac{\partial \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.34a) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) = -\frac{\partial \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \quad (2.34b)$$

Les équations (2.32) et (2.34) constituent les règles de dissipation normale. Ces notions peuvent être étendues aux ensembles non différentiables au sens usuel à l'aide de la notion de sous-différentiel. De façon générale, le sous-différentiel d'une fonction est l'ensemble des sous-gradients d'une fonction f au point x et noté $\partial f(x)$. Le sous gradient $y \in E^*$ de la fonction f au point $x \in E$ est, lui, défini par :

$$\forall x' \in E, \quad f(x') - f(x) \geq y \cdot (x' - x) \quad (2.35)$$

Les équations (2.32) et (2.34), dans le cas où ϕ n'est pas régulier, sont alors réécrites de façon plus générale sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (2.36a) \quad \mathbf{a}(x, t) = -\partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (2.36b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \quad (2.37a) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) = -\partial_{\mathbf{a}} \phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \quad (2.37b)$$

Définition du potentiel de dissipation Il reste à déterminer ce potentiel de dissipation. Dans le cas de la plasticité associée utilisée dans les GSM (HALPHEN et NGUYEN, 1975) :

$$\phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) := \Psi_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \quad (2.38)$$

où $\Psi_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ est la fonction indicatrice de l'ensemble \mathbf{C} , définie par :

$$\Psi_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \in \mathbf{C} \\ +\infty & \text{si } (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \notin \mathbf{C} \end{cases} \quad (2.39)$$

Remarque 1. D'après MOREAU (1973), la fonction polaire $\Psi_{\mathcal{C}}^*$ de la fonction indicatrice $\Psi_{\mathcal{C}}$ est définie par :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{C}}^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) &= \sup[\boldsymbol{\sigma}(x, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) - \mathbf{a}(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) - \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})] \\ &= \sup_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}} [\boldsymbol{\sigma}(x, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) - \mathbf{a}(x, t) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t)]\end{aligned}\quad (2.40)$$

La seconde ligne est obtenue en utilisant le fait que $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = 0$ puisque $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{a} appartiennent à l'ensemble \mathcal{C} . Cette seconde ligne reprend le principe du travail plastique maximal de HILL (1948, 1950).

Application du potentiel de dissipation Dans un premier temps, le cas de la plasticité parfaite est envisagé. En partant de la définition du travail plastique maximal de Hill (voir page 33) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C} \quad (2.41)$$

Sachant que $\boldsymbol{\sigma}(x, t) \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) \in \mathcal{C}$, donc que $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) = \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t)) = 0$, alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) + \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) \leq \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t)) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C} \quad (2.42)$$

Cette équation reprend la définition du sous gradient appliquée à la fonction $\Psi_{\mathcal{C}}$ donnée par l'équation (2.35), et donc $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t)$ est un sous gradient de la fonction indicatrice de \mathcal{C} pris en $\boldsymbol{\sigma}$. Dans le cas où ce sous gradient est multiple, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ appartiendra au sous-différentiel de la fonction indicatrice :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \in \partial\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) \quad (2.43)$$

Réciproquement, écrire (2.43) revient à dire que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t)$ est un sous gradient de $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t))$, donc que :

$$\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t)) \geq \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C} \quad (2.44)$$

Comme d'une part $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t)) = 0$ suivant l'hypothèse de la définition du sous gradient $\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C}$, et d'autre part $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) = 0$ suivant l'hypothèse $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}$, alors (2.44) s'écrit :

$$0 \geq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C} \quad (2.45)$$

ce qui revient à (2.41). Donc le principe de dissipation maximale de Hill (2.41) est équivalent à l'inclusion (2.43).

Or l'ensemble \mathcal{C} est convexe, donc le sous-différentiel de sa fonction indicatrice en $\boldsymbol{\sigma}$ est égal au cône normal à \mathcal{C} pris en $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \in N_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t)) \quad (2.46)$$

En considérant maintenant la plasticité avec écrouissage, la formulation du principe du travail plastique maximum (2.41) est étendue :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \cdot (\mathbf{a}^*(x, t) - \mathbf{a}(x, t)) \leq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \in \mathcal{C} \quad (2.47)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \cdot (\mathbf{a}(x, t) - \mathbf{a}^*(x, t)) \leq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \in \mathcal{C} \quad (2.48)$$

ce qui amène en ajoutant les fonctions indicatrices $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t))$ et $\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t), \mathbf{a}^*(x, t))$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) : (\boldsymbol{\sigma}^*(x, t) - \boldsymbol{\sigma}(x, t)) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \cdot (\mathbf{a}(x, t) - \mathbf{a}^*(x, t)) + \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t)) \leq \Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}^*(x, t), \mathbf{a}^*(x, t)) \quad (2.49)$$

Ainsi, comme précédemment, l'inéquation variationnelle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \end{pmatrix} \in \partial\Psi_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(x, t) \\ \mathbf{a}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

est obtenue et donc finalement il vient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \end{pmatrix} \in N_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(x, t) \\ \mathbf{a}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Cette équation représente la loi d'évolution des variables de plasticité au travers d'une règle de normalité.

Résumé : L'ensemble des contraintes et des forces d'écroûissage admissibles \mathbf{C} est défini convexe, fermé et contenant l'origine. Un pseudo potentiel de dissipation permettant de caractériser l'évolution des variables internes de plasticité (taux de déformation plastique et des paramètres d'écroûissage) est considéré. Suivant cette hypothèse de dissipation normale et à l'aide d'outils d'analyse convexe, l'évolution des variables internes est définie au travers de l'inclusion dans le cône normal à l'ensemble \mathbf{C} (équation (2.51)). Cette formulation assure la positivité de la dissipation intrinsèque \mathcal{D} .

En plus de satisfaire les équations d'équilibre ou de la dynamique, il faut donc satisfaire les équations constitutives de l'élastoplasticité du matériau (de type MSG) au travers du système d'équations reprenant les lois d'état et d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(x, t) = \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(x, t) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) = \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{a}}(x, t) \\ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t) \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}(x, t) \end{pmatrix} \in N_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(x, t) \\ \mathbf{a}(x, t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.52)$$

Reformulation en système de complémentarité L'inclusion dans le cône normal de l'équation (2.52) peut être reformulée en utilisant une définition du cône normal à un ensemble. Pour cela, il faut considérer un ensemble convexe C défini par $C = \{x, f(x) \geq 0\}$ où f sont des fonctions qui délimitent l'ensemble C . Le cône normal à cet ensemble au point x est alors :

$$N_C(x) = \{s, s = -\nabla_x f(x)\lambda, \lambda \geq 0, f(x) \geq 0, \lambda f(x) = 0\} \quad (2.53)$$

Cette définition du cône normal est valable lorsque les fonctions f satisfont des contraintes de qualification, c'est à dire dont les gradients ne sont pas nuls et linéairement indépendants (voir ACARY et al. (2004, section 2.3)).

A l'aide de cette définition, la relation d'équivalence suivante entre inclusion dans un cône normal et système de complémentarité est obtenue :

$$-y \in N_C(x) \iff \begin{cases} y = \nabla_x(f(x))\lambda \\ 0 \leq \lambda \perp f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Pour appliquer ces relations au problème de plasticité qui vient d'être défini, il faut procéder à quelques modifications. Tout d'abord, il faut effectuer un changement de variable pour retrouver le signe moins dans le membre de gauche de l'inclusion : $\mathbf{z}(x, t) = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(x, t)$.

Deuxièmement, on pose $f(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t)) = -\mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t))$ afin de définir l'ensemble \mathbf{C} par une fonction supérieure ou égale à 0. Pour plus de clarté, l'écriture de la fonction f est abrégée en posant $f(\boldsymbol{\sigma}(x, t), \mathbf{a}(x, t)) = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ de même que pour les différentes variables, les dépendances à la position x et au temps t sont omises. Ainsi, l'ensemble des contraintes et forces d'érouissage admissible \mathbf{C} est défini par :

$$\mathbf{C} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}), f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \geq 0\} \quad (2.55)$$

et l'on peut en tirer :

$$-\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} \in N_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mathbf{z} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \lambda \\ \boldsymbol{\alpha} = \nabla_{\mathbf{a}} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \lambda \\ 0 \leq \lambda \perp f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \geq 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Suivant la forme de la fonction d'écoulement \mathcal{Y} , le système de complémentarité à droite de cette équivalence sera ou non linéaire. De ces propriétés dépendront le choix de méthodes de résolution, soit en conservant l'inclusion dans des cônes, soit en passant aux systèmes de complémentarité.

Remarque 2. *En utilisant les variables originales et en considérant que la fonction \mathcal{Y} est régulière, le système (2.56) est :*

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} \in N_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \lambda \\ \boldsymbol{\alpha} = -\nabla_{\mathbf{a}} \mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \lambda \\ 0 \leq \lambda \perp -\mathcal{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \geq 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Cette équation est équivalente à la formulation classique des lois d'écoulement en plasticité associée, comme celle présentée dans la Box 2.1 « Classical Rate-Independent Plasticity » de SIMO et HUGHES (1998).

2.3 Prise en compte du contact

2.3.1 Précisions sur le principe des puissances virtuelles

Jusqu'ici, les phénomènes de contact et d'impact étaient inclus dans les forces externes $\mathbf{t}_{ext\ tot}(x, t)$ définies sur la frontière du système dans l'équation (2.5). Ces forces externes sont alors décomposées en la somme des forces externes appliquées \mathbf{t}_{ext} et des forces de contact \mathbf{r} :

$$\mathbf{t}_{ext\ tot}(x, t) = \mathbf{t}_{ext}(x, t) + \mathbf{r}(x, t) \quad (2.58)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs totaux se décompose donc en une puissance virtuelle des forces appliquées et une puissance virtuelle des forces de contact :

$$\mathcal{P}_{ext\ tot}^*(t) = \mathcal{P}_{ext}^*(t) + \mathcal{P}_{contact}^*(t) \quad (2.59)$$

La puissance virtuelle des forces extérieures appliquées est :

$$\mathcal{P}_{ext}^*(t) = \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \mathbf{t}_{ext}(x, t) \, ds \quad (2.60)$$

La puissance virtuelle des forces de contact est :

$$\mathcal{P}_{contact}^*(t) = \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \mathbf{r}(x, t) \, ds \quad (2.61)$$

Le principe des puissances virtuelles défini dans l'équation (2.1) devient :

$$\mathcal{P}_{inertie}^*(t) = \mathcal{P}_{vol}^*(t) + \mathcal{P}_{int}^*(t) + \mathcal{P}_{ext}^*(t) + \mathcal{P}_{contact}^*(t) \quad \forall \mathbf{v}^*(x, t) \quad (2.62)$$

La première loi de la thermodynamique (équation (2.21)) se reformule également à l'aide de la puissance des forces de contact :

$$\dot{\mathcal{T}}(t) + \mathcal{D}(t) + \dot{\Psi}(t) = \mathcal{P}_{app}(t) + \mathcal{P}_{contact}(t) \quad (2.63)$$

2.3.2 Contact unilatéral

2.3.2.1 Vitesse relative et puissance des forces de contact

Comme évoqué dans le premier chapitre, seul les composantes normales pour les problèmes de contact unilatéral sont considérées. La suite du développement se base sur ce qui a été présenté dans les sections 1.2.2.2 et 1.2.4.2.

La fonction $g_N(x, t)$ qui donne la distance suivant la normale sortante entre deux points de la frontière $\partial\Omega_c$ du système susceptible d'entrer en contact est supposée connue (cette partie de frontière est incluse dans celle à laquelle on applique des efforts extérieurs : $\partial\Omega_c \subset \partial\Omega_\sigma$). Par simplicité, l'expression de $g_N(x, t)$ ne dépendra pas explicitement du temps. Il est alors possible, à partir de cette fonction, de définir la vitesse relative $v_N(x, t)$ entre les deux solides en dérivant par rapport au temps cette fonction :

$$v_N(x, t) = \frac{dg_N(x, t)}{dt} = \nabla_x g_N(x, t) \cdot \mathbf{v}(x, t) \quad (2.64)$$

L'opérateur $\mathbf{H}(x)$ est alors introduit et défini comme le gradient par rapport à x de la fonction $g_N(x, t)$:

$$\mathbf{H}(x) := \nabla_x g_N(x, t) \quad (2.65)$$

L'expression reliant les vitesses relatives normales aux vitesses généralisées est alors :

$$v_N(x, t) = \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{v}(x, t) \quad (2.66)$$

L'équation (2.61) donne la puissance virtuelle des forces de contact généralisées \mathbf{r} . Il y a donc dualité entre les vitesses et ces forces de contact, dualité qui se retrouve dans les contributions normales de ces valeurs :

$$\mathcal{P}_{contact}^*(t) = \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{v}^*(x, t) \cdot \mathbf{r}(x, t) ds = \int_{\partial\Omega_c} v_N^*(x, t) r_N(x, t) ds \quad (2.67)$$

d'où il est obtenu, en utilisant (2.66) :

$$\mathbf{r}(x, t) = \mathbf{H}(x) r_N(x, t) \quad (2.68)$$

Cet opérateur \mathbf{H} permet ainsi d'une part de passer des vitesses globales aux vitesses locales, et d'autre part de passer des forces de réaction locales aux forces globales.

2.3.2.2 Conditions de *Signorini*

Les conditions de *Signorini* présentées au paragraphe 1.2.2.2 précisent que :

$$g_N(x, t) \geq 0 \quad r_N(x, t) \geq 0 \quad \text{et} \quad g_N(x, t) r_N(x, t) = 0 \quad (2.69)$$

ce qui revient à écrire la relation de complémentarité :

$$0 \leq g_N(x, t) \perp r_N(x, t) \geq 0 \quad (2.70)$$

MOREAU (1985) montre que cette formulation est équivalente à dire que l'opposé des forces de réactions normales est inclu dans le sous différentiel de la fonction indicatrice à \mathbb{R}^+ pris en la valeur de $g_N(x, t)$:

$$0 \leq g_N(x, t) \perp r_N(x, t) \geq 0 \iff -r_N(x, t) \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t)) \quad (2.71)$$

Une autre manière d'écrire ces conditions de *Signorini* est de remarquer que, comme présenté dans la partie sur la plasticité (voir paragraphe 2.2.2, page 56), puisque \mathbb{R}^+ est un ensemble convexe non vide, alors le sous-différentiel de la fonction indicatrice de cet ensemble est égal à son cône normal. Ainsi :

$$-r_N(x, t) \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t)) \iff -r_N(x, t) \in N_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t)) \quad (2.72)$$

avec

$$\partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t)) = N_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N(x, t) > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } g_N(x, t) = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

2.3.2.3 Conditions de *Signorini* en vitesse

Il est possible de formuler les conditions de *Signorini* non plus en fonction des positions et distances entre solides mais en fonction des vitesses relatives entre ces solides.

Pour cela, le processus de raffle du second ordre de *Moreau* est utilisé (second order sweeping process, voir ACARY et BROGLIATO (2008) et MOREAU (1971b, 1972) et il vient alors :

$$-r_N(x, t) \in N_{T_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t))}(v_N(x, t)) \quad (2.74)$$

où $T_{\mathbb{R}^+}(g_N(x, t))$ est le cône tangent à \mathbb{R}^+ . Un cône tangent à un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ pris en $x \in \mathcal{C}$, noté $T_{\mathcal{C}}(x)$, est défini par :

$$T_{\mathcal{C}}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid x + td \in \mathcal{C} \quad \forall t > 0, t \text{ petit}\} \quad (2.75)$$

De plus, le cône tangent est le polaire du cône normal, et il peut se définir à partir de ce dernier :

$$T_{\mathcal{C}}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid s \cdot d \leq 0 \quad \forall s \in N_{\mathcal{C}}(x)\} \quad (2.76)$$

Les conditions de complémentarité (2.70) sont alors reformulées en vitesse sous condition :

$$\begin{cases} 0 \leq r_N(x, t) \perp v_N(x, t) \geq 0 & \text{si } g_N(x, t) = 0 \\ r_N(x, t) = 0 & \text{si } g_N(x, t) > 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

Puissance des efforts de contact L'équation (2.77) indique que, toujours et en tout point, le produit de la force de réaction normale par la vitesse relative normale est nul. Il en résulte que, lorsque les champs sont continus et différentiables, la puissance réelle des forces de contact est toujours nulle, ce qui implique que le phénomène de contact n'a aucun effet sur l'équilibre énergétique (ni dissipation, ni création d'énergie) :

$$\mathcal{P}_{contact}(t) = \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{r}(x, t) ds = \int_{\partial\Omega_c} v_N(x, t)r_N(x, t) ds = 0 \quad (2.78)$$

2.4 Discrétisation par éléments finis

Dans le premier chapitre, la discrétisation par éléments finis a déjà été évoquée. En particulier, la possibilité d'utiliser des éléments mixtes en contrainte et déplacements afin d'améliorer les résultats liés à la plasticité, ou encore des éléments permettant d'améliorer la détection du contact avec maillage.

Dans cette thèse, les enjeux de cette discrétisation ne sont pas au cœur des préoccupations qui pourraient, à elles seules, occuper plusieurs années de travail. C'est donc une discrétisation classique à un seul champ qui sera utilisée ainsi que du contact nœud à nœud qui considère connus à l'avance ceux qui sont susceptibles d'entrer en contact.

Hormis certaines spécificités propres à la plasticité et au contact, l'essentiel des développements suivants sont issus de BATHE (2014), DHATT et al. (2012) et FELIPPA (2004) et peuvent trouver un approfondissement dans ces ouvrages de référence.

2.4.1 Définitions et notations

Discrétisation du champ de déplacement Un corps ou une structure est discrétisée en un nombre n_{el} d'éléments. Chaque élément est repéré à l'aide d'un indice $el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket$ et l'ensemble possède n degrés de liberté.

Le champ de déplacement de l'élément el est donné par :

$$u_{el}(x, t) = \bar{N}_{el}(x)u_{el}(t) = N_{el}(x)u(t) \quad (2.79)$$

où $u_{el}(t) \in \mathbb{R}^{d_u}$ est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément (d_u est le nombre de degrés de libertés de l'élément el), et où $u(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des déplacements nodaux de la structure entière.

Les matrices \bar{N}_{el} et N_{el} contiennent les fonctions de forme de l'élément considéré. La différence entre les deux réside dans leurs dimensions puisque la première est réduite au nombre de degrés de libertés de l'élément tandis que la seconde est enrichie de termes nuls pour atteindre la dimension du nombre de degrés de liberté total du système.

Il faut bien garder à l'esprit que le vecteur u n'est pas la simple concaténation des vecteurs u_{el} de chaque élément, mais qu'il est issu du processus d'assemblage (un nœud appartenant souvent à plusieurs éléments). Cet assemblage est fait à partir d'un opérateur propre à chaque élément A_{el} tel que :

$$u_{el}(t) = A_{el}u(t) \quad (2.80)$$

Avec cet opérateur, les matrices des fonctions de forme $\bar{N}_{el}(x)$ et $N_{el}(x)$ peuvent être liées en utilisant (2.79) et (2.80) :

$$u_{el}(x, t) = \bar{N}_{el}(x)u_{el}(t) = \bar{N}_{el}(x)A_{el}u = N_{el}(x)u(t) \quad (2.81)$$

ce qui donne finalement :

$$N_{el}(x) = \bar{N}_{el}(x)A_{el} \quad (2.82)$$

Pour plus de clarté dans les écritures et ne pas surcharger les équations, l'utilisation sans l'opérateur d'assemblage est préférée.

De façon similaire à (2.79), le champ de vitesse, dérivée temporelle du champ de déplacement, est discrétisé. Comme les fonctions de forme ne varient pas au cours du temps :

$$v_{el}(x, t) = \bar{N}_{el}(x)v_{el}(t) = N_{el}(x)v(t) \quad (2.83)$$

avec $v_{el} \in \mathbb{R}^{d_u}$ le vecteur des vitesses nodales de l'élément, $v \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des vitesses nodales de la structure entière, et la relation $v_{el}(t) = A_{el}v(t)$

Enfin, le vecteur des déformations pour un élément donné $\varepsilon_{el}(x, t) \in \mathbb{R}^{d_\varepsilon}$ est défini par :

$$\varepsilon_{el}(x, t) = \bar{B}_{el}(x)u_{el}(t) = B_{el}(x)u(t) \quad (2.84)$$

$B_{el}(x) \in \mathbb{R}^{d_\varepsilon \times d_u}$ est la matrice des dérivées des fonctions de formes N_{el} par rapport à x .

Remarque 3. *Le tenseur des déformations au point x , noté $\varepsilon_{el}(x, t)$, est représenté à l'aide de la notation de Voigt. Pour rappel, à l'aide de cette notation et en petites déformations, le tenseur des contraintes est représenté sous forme vectorielle en omettant les dépendances à x et à t par :*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

et le tenseur des déformations par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

De manière similaire à (2.82), les matrices des dérivées des fonctions de forme sont liées par :

$$B_{el}(x) = \bar{B}_{el}(x)A_{el} \quad (2.87)$$

Enfin, la discrétisation des taux de déformation est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_{el}(x, t) = \bar{B}_{el}(x)v_{el}(t) = B_{el}(x)v(t) \quad (2.88)$$

Discrétisation des puissances Chacune des puissances virtuelles de l'équation (2.1) est définie pour chacun des éléments individuellement, et les caractéristiques du matériaux sont considérées constantes au sein du même élément. En premier lieu, la puissance virtuelle des forces d'inertie (2.2) est discrétisée au niveau élémentaire :

$$\mathcal{P}_{inertie}^* = \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} v^*(t)^\top N_{el}^\top(x) N_{el}(x) \dot{v}(t) dx = v^*(t)^\top \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} N_{el}^\top(x) N_{el}(x) dx \dot{v}(t) \quad (2.89)$$

L'intégrale correspond à la définition classique de la matrice de masse consistante élémentaire $M_{el} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, considérée fixe au cours du temps :

$$M_{el} = \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} N_{el}^\top(x) N_{el}(x) dx \quad (2.90)$$

Et ainsi :

$$\mathcal{P}_{inertie\ el}^* = v^*(t)^\top M_{el} \dot{v}(t) \quad (2.91)$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs (2.4) s'exprime par :

$$\mathcal{P}_{int\ el}^* = - \int_{\Omega_{el}} \tilde{\varepsilon}^*(x, t)^\top \sigma(x, t) \, dx = - \int_{\Omega_{el}} v^*(t)^\top B_{el}^\top(x) \sigma(x, t) \, dx = -v^*(t)^\top \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) \sigma(x, t) \, dx \quad (2.92)$$

En regroupant l'intégrale dans le vecteur des forces internes $f_{int\ el}(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{P}_{int\ el}^* = -v^*(t)^\top f_{int\ el}(t) \quad \text{avec } f_{int\ el}(t) = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) \sigma(x, t) \, dx \quad (2.93)$$

La puissance virtuelle des forces de volume (2.3) devient :

$$\mathcal{P}_{vol\ el}^* = \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} v^*(t)^\top N_{el}^\top(x) f(x, t) \, dx = v^*(t)^\top \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} N_{el}^\top(x) f(x, t) \, dx \quad (2.94)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs (2.5) est, elle, donnée par :

$$\mathcal{P}_{ext\ el}^* = \int_{\partial\Omega_{el}} v^*(t)^\top N_{el}^\top(x) \tau(x, t) \, ds = v^*(t)^\top \int_{\partial\Omega_{el}} N_{el}^\top(x) \tau(x, t) \, ds \quad (2.95)$$

En notant $f_{ext\ el}(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des forces externes (de contact et à distance) regroupant les intégrales de (2.94) et (2.95) :

$$f_{ext\ el}(t) = \int_{\Omega_{el}} \rho_{el} N_{el}^\top(x) f(x, t) \, dx + \int_{\partial\Omega_{el}} N_{el}^\top(x) \tau(x, t) \, ds \quad (2.96)$$

Enfin, la puissance virtuelle des efforts de contact (2.67) est donnée par :

$$\mathcal{P}_{cont\ el}^* = \int_{\partial\Omega_{el}} v^*(t)^\top N_{el}^\top(x) r(x, t) \, ds = v^*(t)^\top \int_{\partial\Omega_{el}} N_{el}^\top(x) r(x, t) \, ds \quad (2.97)$$

L'intégrale est incluse dans la variable $r_{cont, el}(t) \in \mathbb{R}^n$, ce qui donne :

$$\mathcal{P}_{cont\ el}^* = v^*(t)^\top r_{cont\ el}(t) \quad \text{avec } r_{cont\ el}(t) = \int_{\partial\Omega_{el}} N_{el}^\top(x) r(x, t) \, ds \quad (2.98)$$

Ainsi, le principe des puissances virtuelles (2.1) s'écrit pour chaque élément sous forme discrétisée à l'aide de (2.91), (2.93), (2.95) et (2.97) sous la forme :

$$v^*(t)^\top M_{el} \dot{v}(t) = -v^*(t)^\top f_{int\ el}(t) + v^*(t)^\top f_{ext\ el}(t) + v^*(t)^\top r_{cont\ el}(t) \quad (2.99)$$

qui devient, en simplifiant par le vecteur des vitesses virtuelles présent dans chaque membre :

$$M_{el} \dot{v}(t) + f_{int\ el}(t) = f_{ext\ el}(t) + r_{cont\ el}(t) \quad (2.100)$$

Assemblage Il reste à assembler chacune de ces composantes élémentaires afin d'obtenir le système complet. Suivant les choix précédents, les contributions élémentaires ont déjà la dimension du système complet. Ainsi, il suffit de sommer chaque matrice ou vecteur élémentaire pour procéder à l'assemblage :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{el=1}^{n_{el}} M_{el} \\ f_{int}(t) &= \sum_{el=1}^{n_{el}} f_{int\ el}(t) \\ f_{ext}(t) &= \sum_{el=1}^{n_{el}} f_{ext\ el}(t) \\ r_{cont}(t) &= \sum_{el=1}^{n_{el}} r_{cont\ el}(t) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Le système complet d'équations d'équilibre de la dynamique à chaque instant est donc :

$$M\dot{v}(t) + f_{int}(t) = f_{ext}(t) + r_{cont}(t) \quad (2.102)$$

Remarque 4. En élasticité linéaire, le vecteur des forces internes $f_{int}(t)$ est souvent formulé à l'aide de la matrice de rigidité $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Cette matrice s'exprime en transformant la contrainte $\sigma(x, t)$ à l'aide de la loi d'élasticité :

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) \quad (2.103)$$

où $E \in \mathbb{R}^{d_\varepsilon \times d_\varepsilon}$ est la matrice d'élasticité obtenue en transformant le tenseur d'élasticité \mathbf{E} , de façon cohérente avec la notation de Voigt utilisée. Au niveau élémentaire, cela donne :

$$f_{int\ el}(t) = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) \sigma(x, t) dx = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) E \varepsilon(x, t) dx = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) E B_{el}(x) dx u(t) = K_{el} u(t) \quad (2.104)$$

avec

$$K_{el} = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^\top(x) E B_{el}(x) dx \quad (2.105)$$

La formulation globale est obtenue par assemblage des matrices K_{el} de manière similaire à la matrice de masse :

$$K = \sum_{el=1}^{n_{el}} K_{el} \quad (2.106)$$

ce qui permet d'obtenir la formulation classique en éléments finis de l'équation de la dynamique :

$$M\dot{v}(t) + Ku(t) = f_{ext}(t) \quad (2.107)$$

Remarque 5. Lors de la résolution des problèmes d'élasto-plasticité en utilisant la méthode du return map, cette matrice de raideur K joue un rôle central : elle sera modifiée en fonction de la valeur de la fonction d'écoulement et de la contrainte test et sera alors nommée matrice de raideur tangente (voir SIMO et HUGHES (1998)).

Intégration numérique Les intégrales sont réalisées à l'aide de la méthode de Gauss. Cette méthode permet une intégration exacte de polynômes de degré $2n_g - 1$ avec n_g points d'intégration, nommés points de Gauss. La formulation générale est :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k f(x_k) \quad (2.108)$$

Le nombre et la position des points de Gauss x_k ainsi que le poids ω_k associé à chacun d'eux sont propres à chaque élément (en particulier, ces valeurs dépendent du degré des fonctions de forme de ces éléments).

L'intégration amenant la matrice de masse M et le vecteur des forces externes $f_{ext}(t)$ au travers des matrices et vecteurs élémentaires est traitée de façon classique. En revanche, l'intégration menant au vecteur des forces internes mérite un peu de d'attention.

Comme par la suite les valeurs de contraintes et de déformations (totale, élastique, plastique) vont jouer un rôle central, il faut chercher à conserver l'une de ces variables dans la formulation discrète. Au niveau élémentaire, les forces internes sont données par une relation linéaire par rapport à la contrainte. En utilisant un vecteur des contraintes discrètes, une forme linéaire est obtenue en le multipliant par une matrice qui sera nommée matrice d'équilibre.

La quadrature de Gauss est alors utilisée pour calculer l'intégrale conduisant au vecteur des forces internes à un élément comportant $n_{el,g}$ points de Gauss :

$$f_{int, el}(t) = \sum_{g=1}^{n_{el,g}} \omega_g B_{el}^\top(x_g) \sigma_{el}(x_g) = \sum_{g=1}^{n_{el,g}} \sqrt{\omega_g} B_{el}^\top(x_g) \sqrt{\omega_g} \sigma_{el}(x_g) \quad (2.109)$$

où $x_g \in \mathbb{R}^d$ est la position du point de Gauss g (avec $g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket$), et ω_g est le poids (positif) associé à ce point de quadrature. Le vecteur des déformations à chaque point de Gauss est défini par :

$$\varepsilon_{el,g}(t) = B_{el,g} u(t) \quad , \quad \text{avec } \varepsilon_{el,g}(t) := \varepsilon_{el}(x_g, t) \text{ et } B_{el,g}(t) := B_{el}(x_g, t) \quad (2.110)$$

avec $B_{el,g} \in \mathbb{R}^{n_g, \varepsilon \times n}$. Toujours pour simplifier les notations, les valeurs de déformation à chaque point de Gauss seront stockées dans un même vecteur colonne en les multipliant par la racine carrée du poids affecté au point Gauss correspondant :

$$\varepsilon_{el} = \text{col}(\sqrt{\omega_g} \varepsilon_{el,g} \quad , \quad g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket) \text{ et } \varepsilon = \text{col}(\varepsilon_{el} \quad , \quad el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (2.111)$$

De même, B_{el} est défini par :

$$B_{el} = \text{col}(\sqrt{\omega_g} B_{el,g} \quad , \quad g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket) \text{ et } B = \sum_{el=1}^{n_{el}} B_{el} \quad (2.112)$$

En résumé la construction des équations (2.84) et (2.88) après discrétisation est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{el}(t) &= B_{el} u(t) & \varepsilon(t) &= B u(t) \\ \dot{\varepsilon}_{el}(t) &= B_{el} v(t) & \dot{\varepsilon}(t) &= B v(t) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Finalement, les contraintes sont discrétisées de la même façon que les déformations à chaque point de Gauss :

$$\sigma_{el} = \text{col}(\sqrt{\omega_g} \sigma_{el,g} \quad , \quad g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket) \text{ et } \sigma = \text{col}(\sigma_{el} \quad , \quad el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (2.114)$$

où $\sigma_{el,g} = \sigma_{el}(x_g)$.

Les valeurs des contraintes et des déformations à chaque point de Gauss de toute la structure sont donc accessibles au travers des vecteurs σ et ε . Ces vecteurs et les matrices B_{el} et B sont formulées de façon à permettre l'intégration numérique suivant la quadrature de Gauss simplement *via* des multiplications matricielles.

Finalement, le vecteur des forces internes par élément défini dans (2.109) est obtenu :

$$f_{int, el}(t) = B_{el}^\top \sigma_{el}(t) \quad (2.115)$$

Le vecteur des forces internes pour l'ensemble du système est donné en sommant les contributions élémentaires, ce qui revient au produit matriciel de la matrice d'équilibre globale par le vecteur des contraintes complet :

$$f_{int}(t) = \sum_{el=1}^{n_{el}} f_{int, el}(t) = B^\top \sigma(t) \quad (2.116)$$

Remarque 6. Les vecteurs des contraintes et des déformations contiennent des valeurs multipliées par un facteur égal à la racine carrée du poids affecté à chaque point de Gauss. C'est une formulation pratique puisque la matrice d'équilibre de la structure est le même opérateur

que la matrice permettant de relier déformation et déplacement comme dans la méthode de force couramment employée (voir à ce propos PELLEGRINO (1993)).

Dans ce cas, lors de l'exploitation des résultats, il faut soit modifier les valeurs de contraintes et de déformations en fonction des poids affectés à chaque point d'intégration, soit adapter en conséquences les données liées (la fonction d'écoulement tout particulièrement).

Il est également possible d'introduire une matrice diagonale contenant le poids de Gauss à multiplier au produit de B par $\sigma(t)$ pour obtenir la valeur de l'intégrale dans l'équation de la dynamique. Cela permet d'obtenir directement, sans mise à l'échelle, les valeurs de déformation et de contrainte aux points de Gauss.

2.4.2 Discrétisation des équations élastoplastiques

Suivant le système (2.52), les déformations sont divisées en une partie élastique et une partie plastique, et des variables additionnelles non discrétisées jusqu'ici sont utilisées pour la plasticité. Puisque la discrétisation qui vient d'être proposée donne accès aux valeurs de contraintes et de déformations aux points de Gauss, les lois de l'élastoplasticité seront exprimées en ces mêmes points. C'est donc uniquement en des localisations précises que les équations constitutives de la plasticité seront vérifiées.

Chacune des deux composantes de déformations est discrétisée à l'aide des vecteurs de déformation élastique $\varepsilon^e(t) \in \mathbb{R}^{n_{g,\varepsilon}}$ et plastique $\varepsilon^p(t) \in \mathbb{R}^{n_{g,\varepsilon}}$ obtenus suivant le même processus de discrétisation et de formulation que pour la déformation totale $\varepsilon(t)$ présenté de (2.110) à (2.113). En particulier, elles sont aussi mis à l'échelle avec le facteur de la racine carrée du poids de l'intégration numérique. Le tenseur d'élasticité \mathbf{E} est représenté par une matrice d'élasticité $E \in \mathbb{R}^{n_{g,\varepsilon} \times n_{g,\varepsilon}}$.

De façon similaire, les forces d'écrouissages $\mathbf{a}(t)$ et les variables internes associées $\mathbf{\alpha}(t)$ sont exprimées par deux vecteurs colonnes contenant leurs valeurs à chaque point de Gauss $a(t) \in \mathbb{R}^{n_{g,\alpha}}$ et $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{n_{g,\alpha}}$. Le tenseur \mathbf{D} est transformé en une matrice d'écrouissage $D \in \mathbb{R}^{n_{g,\alpha} \times n_{g,\alpha}}$ comme pour la matrice d'élasticité.

$$a_{el} = \text{col}(\sqrt{\omega_g} a_{el,g}, g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket) \text{ et } a = \text{col}(a_{el}, el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (2.117)$$

$$\alpha_{el} = \text{col}(\sqrt{\omega_g} \alpha_{el,g}, g \in \llbracket 1, n_{el,g} \rrbracket) \text{ et } \alpha = \text{col}(\alpha_{el}, el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (2.118)$$

Les taux de variation des variables sont des vecteurs de même dimension et obtenus de façon similaire.

L'inclusion dans le cône normal ne se fait dorénavant plus en tout point $x \in \Omega$ mais à chaque point de Gauss du système. Le système élastoplastique discret est alors :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^e(t) + \dot{\varepsilon}^p(t) \\ \dot{\sigma}(t) = E \dot{\varepsilon}^e(t) \\ \dot{\alpha}(t) = D \dot{a}(t) \\ \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^p(t) \\ -\dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} \in N_C \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.119)$$

2.4.3 Discrétisation du contact

Comme évoqué au paragraphe 1.2.5.2, la discrétisation des conditions de contact est un sujet complexe. En plus de travaux existants à ce sujet en termes de maillages ou de méthodes de résolution pour le contact, on peut évoquer les éléments finis "de mortier" (mortar finite elements), présentés entre autre dans BELGACEM et al. (1998), PUSO et LAURSEN

(2004) ou WRIGGERS (2006), qui permettent de résoudre les problèmes de contact à l'aide de multiplicateurs de *Lagrange* pour deux sous domaines dont le maillage ne coïncide pas.

Ces sujets, qui peuvent être très complexes et font l'objet de nombreux travaux de recherche, ne sont pas un enjeu dans la thèse. Il ne sera question ici que du contact normal, en considérant du contact nœud à nœud. Cette hypothèse sera en particulier valide puisque l'hypothèse des petites perturbations est utilisée.

Les conditions de *Signorini* seront donc appliquées à un ensemble discret de nœuds de la surface du système maillé. Cet ensemble de nœuds susceptibles d'entrer en contact deux à deux sera prédéfini.

Les contacts probables sont déterminés à l'avance. Le numéro de chaque contact associant les nœuds deux à deux est repéré par l'exposant $\chi \in \llbracket 1, n_c \rrbracket$ où n_c désigne le nombre de contacts potentiels prédéfinis. Une fonction de distance normale entre les deux nœuds g_N^χ est donc définie, dépendant des positions $q(t)$ à un instant donné des nœuds en question. Ces positions sont elles même dépendantes des positions initiales $q(t=0)$ (fixes) et des déplacements $u(t)$, donc la fonction distance dépend de ces déplacements et $g_N^\chi(u(t))$ désigne la distance normale séparant les deux nœuds en jeu pour le contact χ . Pour chacun de ces contacts potentiels, il faudra toujours respecter :

$$g_N^\chi(u(t)) \geq 0 \quad \forall \chi \in \llbracket 1, n_c \rrbracket \quad (2.120)$$

Dans (2.64), la vitesse relative normale entre deux points est définie comme la dérivée temporelle de la fonction distance normale. Cette définition est utilisée pour avoir la vitesse relative entre deux nœuds de contact potentiel :

$$v_N^\chi(t) = \frac{d}{dt} g_N^\chi(u(t)) = \nabla_u^\top (g_N^\chi(u(t))) v(t) \quad (2.121)$$

De plus, dans (2.65), le gradient de la fonction distance est défini comme étant un opérateur $\mathbf{H}(x)$ qui devient, une fois discrétisé pour chaque contact, $H^\chi(u(t)) \in \mathbb{R}^n(u(t))$ ce qui permet de relier le champ de vitesse global à la vitesse relative entre les deux nœuds du contact potentiel χ :

$$v_N^\chi(t) = H^{\chi \top} (u(t)) v(t) \quad (2.122)$$

La matrice $H^\chi(u(t))$ est fonction du déplacement car elle est susceptible d'être modifiée suivant la configuration du système. Dans le cas présent, puisque les nœuds candidats au contact sont précisés à l'avance, rien n'oblige à préciser cette dépendance, et il sera noté H^χ .

Toutes les vitesses relatives normales sont alors collectées dans le vecteur colonne $v_N(t) = \text{col}(v_N^\chi, \chi \in \llbracket 1, n_c \rrbracket) \in \mathbb{R}^{n_c}$ et à l'aide de la juxtaposition de chaque matrice H^χ dans la matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times n_c}(u(t))$, il vient :

$$v_N(t) = H^\top v(t) \quad (2.123)$$

De manière similaire à la collecte de ces vitesses relatives, avec la définition de (2.68), la dualité permet de définir la relation pour le contact χ entre le vecteur des forces de contact généralisées $r_{cont}^\chi(t)$ et la force de réaction normale $r_N^\chi(t)$ par :

$$r_{cont}^\chi(t) = H^\chi r_N^\chi(t) \quad (2.124)$$

En collectant les forces de réaction normales dans le vecteur colonne $r_{cont}(t) = \text{col}(r_N^\chi, \chi \in \llbracket 1, n_c \rrbracket) \in \mathbb{R}^n$:

$$r_{cont}(t) = H r_N(t) \quad (2.125)$$

À l'aide de cette discrétisation des variables de contact et des hypothèses adoptées, l'inclusion différentielle reliant les forces de contact normales aux vitesses relatives normales définie dans l'équation (2.74) est donnée par :

$$-r_N(t) \in N_{T_{\mathbb{R}_+^m}(g_N(t))}(v_N(t)) \quad (2.126)$$

Pour chaque couple de nœuds candidats au contact, cette inclusion doit être vérifiée.

2.5 Dynamique non régulière pour les systèmes discrets

À l'aide de la discrétisation du contact sous contraintes unilatérales qui vient d'être présentée, l'équation discrète du mouvement (2.102) lorsqu'il n'y a pas d'impact (contact possible) s'écrit en fonction des forces de réaction normales :

$$M\dot{v}(t) + B^\top \sigma(t) = f_{ext}(t) + Hr_N(t) \quad (2.127)$$

Cette équation (2.127) suppose que les vitesses soient continuellement dérivables. Or ce n'est pas toujours le cas, en particulier lorsqu'un impact se produit. En effet, comme le système peut être sujet à des sauts de vitesse, le fait qu'il y ait, suite à la discrétisation classique par éléments finis, des masses finies associées à chaque degré de liberté, conduit à la possibilité d'avoir des percussions dans la dynamique. Il faut donc dorénavant réussir à prendre en compte ces éventuels sauts de vitesse.

Le cadre de la mécanique non lisse (ou non régulière) est alors adopté afin de tenir compte des discontinuités de vitesse au moment des impacts. Dans ce cas, les forces de réaction associées r_N , définies par dualité, sont aussi susceptibles de contenir des percussions.

Pour résoudre le problème, les développements de *Moreau* autour de la mécanique non régulière seront utilisés au travers de la formulation en mesures différentielles de l'équation du mouvement.

2.5.1 Notions de théorie de la mesure

La vitesse est considérée comme une fonction à variation bornée : elle admet une limite à droite et une limite à gauche, qui ne sont pas forcément les mêmes (si c'est le cas, alors la fonction est continue). Quel que soit l'instant t considéré, il existe une vitesse à gauche *juste avant* notée $v^-(t)$ et une vitesse à droite *juste après* $v^+(t)$. La plupart du temps, ces deux valeurs sont égales mais lorsque le saut de vitesse a lieu, elles sont différentes. Dès lors, l'accélération au sens classique du terme ne peut plus être définie mais elle est alors envisagée comme une mesure différentielle dv associée à la vitesse v .

Toute mesure différentielle est constituée de la somme de trois termes : une partie continue, une partie impulsive, et une partie singulière qui sera négligée. Ainsi, la mesure différentielle des vitesses dv est donnée par :

$$dv = \gamma dt + (v^+ - v^-) d\nu + dv_s \quad (2.128)$$

avec γ l'accélération classique, $d\nu$ la mesure atomique définie à partir de mesures de *Dirac* et dv_s la partie singulière négligée.

Remarque 7. *Si la vitesse est continue, alors la partie impulsive est nulle puisque les limites à droite et à gauche sont égales. La définition classique de l'accélération est alors retrouvée :*

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (2.129)$$

Les vitesses seront définies comme des fonctions à variations bornées continues à droite. Ainsi, à tout instant t :

$$v^+(x, t) = \dot{q}^+(x, t) \quad (2.130)$$

avec $q(x, t)$ la position de la particule x à l'instant t qui est une fonction absolument continue (il est impossible de passer instantanément d'un endroit à un autre). La position à un instant donné est alors déterminée par :

$$q(x, t) = q(x, t_0) + \int_{t_0}^t v^+(x, t) dt \quad (2.131)$$

Avec la discrétisation spatiale du paragraphe précédent, cette équation (ainsi que les définitions qui viennent d'être données) est toujours valide et devient :

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t v^+(t) dt \quad (2.132)$$

avec $q(t) \in \mathbb{R}^n$

L'accélération est définie presque tout le temps sauf lorsqu'il y a une discontinuité. Ce sera alors la mesure dv qui sera utilisée de manière générale pour l'exprimer puisque grâce à (2.128), cette valeur est exprimée quel que soit l'instant t et elle est égale à l'accélération classique s'il n'y a aucun saut dans les vitesses.

Les forces de réaction ne sont pas continues non plus. En effet, lorsque deux corps entrent en contact, il peut y avoir une percussion lorsque l'impact se produit, et une valeur de réaction continue si le contact est maintenu. De manière similaire à la vitesse, la mesure différentielle d'impact di est définie par :

$$di = f_c dt + p d\nu + di_s \quad (2.133)$$

avec f_c la force de contact continue et dérivable par rapport au temps (cas du contact établi par exemple), p qui est la percussion de contact et di_s la partie singulière négligée.

2.5.2 Formulation de la dynamique en mesures différentielles

Il est supposée que l'ensemble des variables du système n'ont qu'une densité définie par rapport à la mesure de *Lebesgue* (autrement dit que leurs parties impulsives sont nulles) hormis les champs de vitesse et de forces de contact (cette hypothèse non intuitive mériterait une réelle discussion mais qui sortirait du cadre de ce travail, elle sera donc admise). Avec les décompositions qui viennent d'être présentées de ces deux champs, et qui s'appliquent aussi à leurs projections locales, l'équation (2.127) est reformulée en mesures :

$$M dv + B^\top \sigma(t) dt = f_{ext}(t) dt + H di_N \quad (2.134)$$

À partir de cette formulation, deux cas peuvent être envisagés :

- soit tous les champs sont réguliers (comme c'est le cas entre deux impacts). Dans ce cas, $r_N(t)$ correspond à la densité de di_N par rapport à la mesure de *Lebesgue*, autrement dit sa partie continue $f_c(t) dt$. L'équation (2.134) est alors équivalente à l'équation (2.127), ce qui sera presque toujours vrai puisque les instants d'impact sont très localisés dans le temps.
- soit le système est considéré aux instants d'impact qui seront notés t_i . Ce sont alors les parties impulsives des mesures qui gouvernent l'équation (2.134) et l'équation d'impact est obtenue après simplification par $d\nu$:

$$M(v^+(t_i) - v^-(t_i)) = H p_{N,i} \quad (2.135)$$

2.5.3 Loi d'impact

Pour résoudre le système lors de l'impact avec la nouvelle inconnue de percussion $p_{N,i}$, il faut faire appel à une loi d'impact. Celle-ci doit permettre de préciser l'évolution des variables d'impact. Parmi les lois d'impact les plus connues, il faut citer celle de *Newton* et celle de *Poisson*. La première permet de relier directement les vitesses avant et après l'impact pour en déduire ensuite l'impulsion, en introduisant la notion de coefficient de restitution e . La seconde décompose le contact en une période de compression et une période de décompression, avec pour chacune d'elles une expression différente de l'impulsion. En fonction des valeurs de coefficients de restitution dans l'une ou l'autre des lois, des équivalences peuvent être trouvées. Pour plus de détails sur ces deux lois et leurs similitudes, il faut se référer à GLOCKER (2004). Une troisième alternative connue est d'utiliser le coefficient de restitution énergétique de BOULANGER (1939), dont le carré est défini comme le rapport de l'énergie de déformation élastique rendue lors de la phase de décompression du contact par l'énergie de déformation absorbée durant la phase de compression. Ce coefficient a été notamment repris dans les travaux de STRONGE (1994, 2004, par exemple).

Dans ce travail, c'est la loi d'impact de *Newton* qui est utilisée et qui est appliquée à chaque contact χ lorsque la distance entre les deux nœuds en question est nulle ($g_N^\chi(t) = 0$). Cette loi indique que la vitesse normale relative s'inverse instantanément, autrement dit que $v_N^{\chi-}(t_i)$ est l'opposé de $v_N^{\chi+}(t_i)$. Cette définition est complétée par l'introduction d'un coefficient de restitution $e \in [0, 1]$ permettant de modéliser une dissipation énergétique au contact. La vitesse normale relative après le contact est donc égale à la part e de la vitesse normale relative avant le contact : $v_N^{\chi+}(t_i) = -ev_N^{\chi-}(t_i)$.

De plus, la condition de contact définie par la distance nulle entre deux nœuds est renforcée en regardant leur vitesse normale relative juste avant l'impact $v_N^{\chi-}(t_i)$. En effet, si cette vitesse est positive, alors les deux nœuds sont en train de s'éloigner l'un de l'autre, et il ne faut alors pas appliquer la loi d'impact (qui aurait pour effet d'attirer les deux nœuds l'un vers l'autre).

La loi d'impact de *Newton* est donc définie par :

$$v_N^{\chi+}(t_i) = -ev_N^{\chi-}(t_i) \quad \text{si } g_N^\chi(t_i) = 0 \quad \text{et} \quad v_N^{\chi-}(t_i) \leq 0 \quad (2.136)$$

Remarque 8. *Le coefficient de restitution e est un paramètre qui décrit le comportement de la loi d'impact en termes de dissipation énergétique.*

Il peut être différent pour chaque contact χ et pour chaque instant t . Pour être plus précis, il faudrait noter $e^\chi(t)$. Il sera cependant considéré constant à la fois dans l'espace et dans le temps par simplicité, et la notation e sera utilisée

Si $e = 0$, la vitesse normale relative après impact est nulle. L'énergie cinétique associée à ces vitesses relatives sera donc totalement dissipée. En revanche, lorsque $e = 1$, c'est l'inverse : les deux vitesses normales relatives sont parfaitement opposées et toute l'énergie cinétique est conservée.

Le choix de ce coefficient de restitution sera en partie discuté au paragraphe 4.3.2 pour voir son influence au sein d'un système discret. Cependant, il peut être un paramètre à calibrer expérimentalement pour permettre la simulation de problèmes d'ingénierie de façon précise (voir par exemple LANGLADE (2021))

Reformulation de l'inclusion différentielle de contact A l'aide de cette loi de contact, et en se référant aux travaux de JEAN et MOREAU (1992), MABROUK (1998) et MOREAU (1988), l'inclusion (2.126) est reformulée en mesures avec la loi d'impact mais aussi :

$$-di_N(t) \in N_{T_{\mathbb{R}^m_+}(g_N(t))}(v_N^+(t) + ev_N^-(t)) \quad (2.137)$$

À la place du cône normal pris à la valeur de la vitesse normale relative, c'est la valeur d'une vitesse moyenne pondérée des vitesses avant et après l'impact, réécrite sous la forme de la somme des vitesses normales relatives à droite et à gauche de l'instant t_i , qui est utilisée après avoir été définie à l'aide de la loi d'impact.

Il est aussi possible suivant le même principe de reformuler les conditions de complémentarité (2.77) en mesures :

$$0 \leq v_N^+(t) + e v_N^-(t) \perp d i_N(t) \geq 0 \quad \text{si } g_N(u(t_i)) = 0 \quad \text{et } v_N^{\chi-}(t_i) \leq 0 \quad (2.138)$$

2.6 Bilan énergétique en éléments finis

Comme vu dans l'équation (2.20), la puissance des efforts internes est égale à l'opposé de la somme de la dissipation plastique et du taux variation d'énergie libre potentielle :

$$\mathcal{P}_{int}(t) = -\mathcal{D}(t) - \dot{\Psi}(t) \quad (2.139)$$

De plus, en notant que cette puissance des efforts internes est égale à l'opposé de l'énergie mécanique interne (B.5), et en séparant la puissance des efforts appliqués de la puissance des efforts de contact d'après (2.59), l'équation (2.9) devient :

$$\dot{\mathcal{T}} - \mathcal{P}_{int} = \dot{\mathcal{T}} + \mathcal{D}(t) + \dot{\Psi}(t) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{contact} \quad (2.140)$$

Ce bilan énergétique issu des première et seconde lois de la thermodynamique est vérifié à chaque instant t . Il s'écrit pour le système discrétisé par éléments finis :

$$d(\mathbb{T}(t) + \Psi(t)) = -\mathcal{D}(t) dt + \mathcal{P}_{ext}(t) dt + d\mathcal{P}_{cont}(t) \quad (2.141)$$

soit, en regroupant l'énergie cinétique \mathbb{T} et l'énergie potentielle Ψ dans le même terme d'énergie mécanique totale \mathbb{E} :

$$d\mathbb{E}(t) = -\mathcal{D}(t) dt + \mathcal{P}_{ext}(t) dt + d\mathcal{P}_{cont}(t) \quad (2.142)$$

La valeur de l'énergie cinétique \mathbb{T} issue du système discret (voir paragraphe 2.4.1) vaut, après assemblage des contributions élémentaires de chaque élément :

$$\mathbb{T}(t) = \frac{1}{2} v(t)^\top M v(t) \quad (2.143)$$

Cette énergie étant fonction de la vitesse elle-même considérée comme fonction continue à droite, la même hypothèse est portée sur l'énergie cinétique qui est aussi envisagée comme une fonction continue à droite, ce qui donne $\mathbb{T}(t) = \mathbb{T}^+(t)$.

De même, avec la discrétisation des équations de l'élastoplasticité (paragraphe 2.4.2) et les définitions du paragraphe 2.2.1, les termes de dissipation et d'énergie potentielle sont discrétisés. L'énergie potentielle devient :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^e{}^\top(t) E \varepsilon^e(t) + \frac{1}{2} \alpha^\top(t) D \alpha(t) \quad (2.144)$$

ou de manière équivalente :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \sigma^\top(t) \varepsilon^e(t) + \frac{1}{2} a^\top(t) \alpha(t) \quad (2.145)$$

La dissipation devient :

$$\mathcal{D} = \sigma(t)^\top \dot{\varepsilon}^e(t) + \sigma(t)^\top \dot{\varepsilon}^p(t) - \dot{\Psi} \quad (2.146)$$

et finalement, puisque $\dot{\Psi} = \sigma(t)^\top \dot{\varepsilon}^e(t) + a(t)^\top \dot{\alpha}(t)$:

$$D = \sigma(t)^\top \dot{\varepsilon}^p(t) - a(t)^\top \dot{\alpha}(t) \quad (2.147)$$

La valeur discrète de la puissance des efforts extérieurs est définie à l'aide des définitions du paragraphe 2.4.2 par :

$$P_{ext}(t) = f_{ext}^\top(t)v(t) \quad (2.148)$$

Enfin, pour le contact, la partie continue a une puissance nulle puisque s'il y a contact, la vitesse relative est nulle (dans ce cas, il est possible qu'il y ait une force de réaction) et s'il n'y a pas contact, c'est la force de réaction qui est nulle. Pour la puissance de la partie impulsive, il faut se placer dans le cadre de la dynamique non régulière (voir paragraphe 2.5). Comme il y a des masses finies, des percussions sont susceptibles d'avoir lieu et dans le cas où un impact apparaît, la puissance de l'impulsion de réaction est donnée par (voir ACARY (2016)) :

$$dP_{impact}(t) = \frac{1}{2}(v_N^+(t) + v_N^-(t)) di_N \quad (2.149)$$

Tous les termes de l'équation (2.142) sont alors développés et le bilan s'exprime par :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}v(t)^\top Mv(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^e{}^\top(t)E\varepsilon^e + \frac{1}{2}\alpha^\top(t)D\alpha(t)\right) &= -\sigma(t)^\top \dot{\varepsilon}^p(t) dt + a(t)^\top \dot{\alpha}(t) dt \\ &\quad + f_{ext}^\top(t)v(t) dt + \frac{1}{2}(v_N^+(t) + v_N^-(t)) di_N \end{aligned} \quad (2.150)$$

2.7 Système complet plasticité - impact

2.7.1 Résumé des développements

La formulation des phénomènes de plasticité et de contact dans un cadre totalement continu vient d'être présentée ainsi que la discrétisation spatiale des équations, ce qui a permis d'apporter des précisions sur les équations du contact ainsi que sur la validité du bilan énergétique. L'ensemble de ces considérations se résume dans le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} M dv + B^\top \sigma(t) dt = f_{ext}(t) dt + H di_N \\ \dot{u}(t) = v(t) \\ \dot{\sigma}(t) = E\dot{\varepsilon}^e(t) = E(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^p(t)) \\ \dot{a}(t) = D\dot{\alpha}(t) \\ \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^p(t) \\ -\dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} \in N_C \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \\ v_N(t) = H^\top v(t) \\ -di_N(t) \in N_{T_{\mathbb{R}^m_+}(g_N(t))}(v_N^+(t) + ev_N^-(t)) \end{array} \right. \quad (2.151)$$

Dans ce système, la première ligne est l'équation de la dynamique formulée en mesures afin de prendre en compte les non-régularités au contact (partie 2.5). La seconde ligne permet de déterminer les positions à partir des vitesses. Les lignes 3 et 4 reprennent les équations constitutives de la plasticité et la cinquième ligne la loi d'évolution des variables internes caractéristiques de la plasticité (voir partie 2.4.2). Enfin, les deux dernières lignes correspondent aux équations du contact en dynamique non régulière et avec la loi d'impact de *Newton* (la

sixième ligne présente le lien entre les vitesses généralisées et les vitesses normales relatives au contact (partie 2.4.3) tandis que la septième propose l'évolution des variables duales de contact que sont les vitesses normales relatives et les forces de réactions (*c.f.* partie 2.5)).

2.7.2 Changement de variable

Dans (2.151), l'inclusion du taux de deformation plastique dans le cône normal à l'ensemble des contraintes admissibles n'est pas précédée du signe moins. Or, la forme générale d'une inclusion différentielle contient ce signe. Un changement de variable est donc opéré en posant $z(t) = -\dot{\varepsilon}^p(t)$. L'inclusion du taux de déformation plastique devient alors :

$$z(t) = -\dot{\varepsilon}^p(t) = S\dot{\sigma}(t) - \dot{\varepsilon}(t) \quad \text{et} \quad -z(t) \in N_C(\sigma(t)) \quad (2.152)$$

où $S = E^{-1}$. Pour avoir une formulation similaire, on opère un second changement de variable en posant $y(t) = \dot{a}(t)$. Le système (2.151) devient alors :

$$\begin{cases} M dv + B^\top \sigma(t) dt = f_{ext}(t) dt + H di_N \\ \dot{u}(t) = v(t) \\ \dot{\sigma}(t) = E\dot{\varepsilon}^e(t) = E(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^p(t)) = E(\dot{\varepsilon}(t) + z(t)) \\ \dot{a}(t) = D\dot{\alpha}(t) = Dy(t) \\ - \begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in N_C \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \\ v_N(t) = H^\top v(t) \\ - di_N(t) \in N_{T_{\mathbb{R}^m_+}(g_N(t))}(v_N^+(t) + ev_N^-(t)) \end{cases} \quad (2.153)$$

2.8 Existence et unicité de la solution du système dynamique élastoplastique

2.8.1 Forme générale

L'ensemble de définition d'une fonction quelconque g est noté D_g . Considérons l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} -(\dot{x}(t) + f(x(t))) \in \partial\varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.154)$$

Sous les hypothèses suivantes :

- $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, propre et fermée
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction Lipschitzienne
- $0 \in D_{\partial\varphi}$, et $-f(0) \in \partial\varphi(0)$,

alors quel que soit $x_0 \in D_{\partial\varphi}$, il existe un unique vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ solution de l'inclusion différentielle (2.154) (voir l'ouvrage de BREZIS (1973))

2.8.2 Formulation du système élastoplastique en inclusion différentielle

En négligeant le contact, la première ligne de (2.153) s'écrit en passant tous les termes du même côté de l'égalité :

$$-(M\dot{v}(t) + B^\top \sigma(t) - F_{ext}(t)) = 0 \quad (2.155)$$

Or 0 est le cône normal à l'ensemble des réels \mathbb{R}^n pris en n'importe quel point, la vitesse en particulier :

$$0 = N_{\mathbb{R}^n}(v(t)) \quad (2.156)$$

et l'équation de la dynamique (2.155) peut donc être écrite comme une inclusion différentielle :

$$-(M\dot{v}(t) + B^\top \sigma(t) - F_{ext}(t)) \in N_{\mathbb{R}}(v(t)) \quad (2.157)$$

L'équation de la dynamique et les équations de la plasticité peuvent donc être écrites sous un même formalisme en remplaçant $\dot{\varepsilon}^p$ (ou z) et α par leur définition issue des troisième et quatrième lignes de (2.151) :

$$\begin{pmatrix} -z(t) \\ -\dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S\dot{\sigma}(t) + Bv(t) \\ -D^{-1}\dot{a}(t) \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \quad (2.158)$$

Les deux équations (2.157) et (2.158) peuvent ainsi être écrites sous forme matricielle :

$$-\left(\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\sigma}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B^\top & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \sigma(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{ext}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \in N_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}} \left(\begin{bmatrix} v(t) \\ \sigma(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \right) \quad (2.159)$$

Le vecteur des inconnues $\bar{x}(t)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\bar{x}}(t)$ sont définis comme étant :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \sigma(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\sigma}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

En posant :

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -D^{-1} \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & B^\top & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} -F_{ext}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

alors l'équation (2.159) s'écrit :

$$-(\bar{H}\dot{\bar{x}}(t) + \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{a}(t)) \in N_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(\bar{x}) \quad (2.162)$$

Comme les ensembles \mathbb{R}^n et \mathbb{C} sont convexes et non vides, alors $N_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}} = \partial\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}$:

$$-(\bar{H}\dot{\bar{x}}(t) + \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{a}(t)) \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(\bar{x}) \quad (2.163)$$

2.8.3 Changement de variable

La fonction indicatrice satisfait les conditions énoncées au paragraphe 2.8.1 pour qu'il y ait existence et unicité de la solution de l'équation (2.154). Il faut donc réussir à exprimer l'équation (2.163) sous la forme générale de (2.154). Pour cela, un changement de variable est effectué :

$$\bar{H} = R^2 \quad , \quad R = R^\top \quad \text{et} \quad \bar{x}(t) = R^{-1}x(t) \quad (2.164)$$

ce qui est faisable car \bar{H} est définie positive. (2.163) devient :

$$-(R\dot{x}(t) + \bar{A}R^{-1}x(t) + \bar{a}(t)) \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(R^{-1}x(t)) \quad (2.165)$$

Chaque membre est ensuite multiplié par R^{-1} :

$$-\left(\dot{\mathbf{x}}(t) + R^{-1}\bar{A}R^{-1}\mathbf{x}(t) + R^{-1}\bar{a}(t)\right) \in R^{-1}\partial\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(R^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.166)$$

Or, en considérant la fonction $\phi(\mathbf{x}) = (\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}} \circ R^{-1})(\mathbf{x}) = \Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(R^{-1}\mathbf{x})$, alors son sous différentiel est donné par $\partial\phi(\mathbf{x}) = R^{-1\top}\partial\Psi_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}}(R^{-1}\mathbf{x})$, et puisque $R^{-1\top} = R^{-1}$, alors :

$$-\left(\dot{\mathbf{x}}(t) + R^{-1}\bar{A}R^{-1}\mathbf{x}(t) + R^{-1}\bar{a}(t)\right) \in \partial\phi(\mathbf{x}) \quad (2.167)$$

Cette équation a la même forme que (2.154) et, en choisissant des conditions initiales $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$, il y a existence et unicité de la solution $\bar{x}(t)$.

2.9 Exemples 1D

2.9.1 Plasticité : Barre en traction - compression

Présentation de l'exemple Pour illustrer les développements liés à la plasticité, un exemple unidimensionnel est présenté dans cette section.

Une barre élastoplastique de section A (en m^2), de longueur L (en m), de masse volumique ρ (en kg/m^3) et de module d'Young E (en MPa) est considérée. L'une de ses extrémités est bloquée et une force ou un déplacement est appliqué à l'autre extrémité.

Dans une barre de ce type et en quasi-statique, la déformation ε et la contrainte σ sont uniformes tout le long de la fibre moyenne et en n'importe quel point des sections. La dépendance de ces valeurs à leur position ne sera donc pas exprimée et une seule valeur calculée en n'importe quel point suffisamment loin des points d'application des forces permet de déterminer le comportement de l'ensemble de la barre. Cependant, cette approximation n'est valable que pour une simulation (quasi-)statique. En effet, si des aspects dynamiques sont considérés, il y a des trains d'onde qui se déplacent le long de la barre, et ces valeurs de contraintes et de déformation ne sont plus identiques en tout point. Il faut donc une application lente des forces ou déplacements imposés. La déformation totale est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \frac{u_1(t) - u_0(t)}{L} = \frac{u_1(t)}{L} \quad (2.168)$$

puisque $u_0 = 0$ quel que soit t . La contrainte est reliée à la déformation élastique ε^e par la relation classique en élasticité linéaire $\sigma(t) = E\varepsilon^e(t)$.

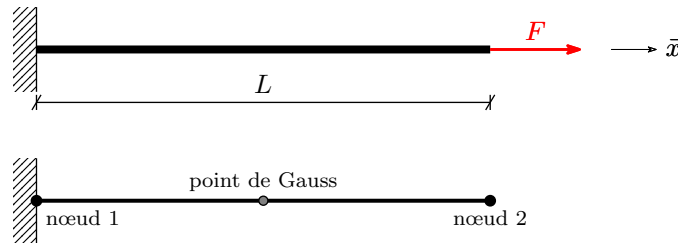


FIGURE 2.1 – Barre élastoplastique de longueur L fixée à une extrémité (nœud 1 du maillage éléments finis) et soumise à une force F à son extrémité libre (nœud 2 du maillage). Un seul élément est utilisé car l'analyse est quasi statique donc les contraintes et les déformations sont constantes tout au long de la barre et exprimées à l'unique point de Gauss situé au milieu de l'élément fini.

Ensemble des contraintes et forces d'écroissage admissibles Sans considérer d'écroissage dans un premier temps, l'ensemble des contraintes admissibles est l'ensemble des contraintes comprises entre $-\sigma_Y^0$ et σ_Y^0 . Deux équations doivent donc toujours être respectées : $\sigma(t) \geq -\sigma_Y^0$ d'une part et $\sigma(t) \leq \sigma_Y^0$ d'autre part. La fonction d'écoulement $\mathcal{Y}(t)$ est donc définie par les deux équations :

$$-\mathcal{Y}(t) = f(t) = \begin{cases} \sigma(t) + \sigma_Y^0 \geq 0 \\ -\sigma(t) + \sigma_Y^0 \geq 0 \end{cases} \quad (2.169)$$

L'ensemble C est alors défini par :

$$C(t) = \{\sigma(t) \mid f_i(t) \geq 0, i = 1, 2\} \quad (2.170)$$

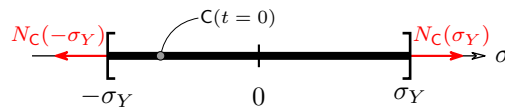


FIGURE 2.2 – Ensemble des contraintes admissibles $C = [-\sigma_Y, \sigma_Y]$ et visualisation de ses cônes normaux aux bornes de l'intervalle : $N_C(-\sigma_Y) = \mathbb{R}_-$ et $N_C(\sigma_Y) = \mathbb{R}_+$.

En considérant ensuite l'écroissage isotrope qui dilate l'ensemble initial C^0 par un coefficient $c(t)$ tel que $C(t) = c(t)C^0$ (avec $c(t)$ fonction de $a_{iso}(t)$ et $c(t) \geq 1$), l'ensemble des contraintes admissibles s'exprime comme l'ensemble des contraintes comprises entre $-\sigma_Y^0 - a_{iso}(t)$ et $\sigma_Y^0 + a_{iso}(t)$ avec $a_{iso}(t)$ la force d'écroissage isotrope. La fonction d'écoulement (2.169) devient :

$$-\mathcal{Y}(t) = f(t) = \begin{cases} \sigma(t) + (\sigma_Y^0 + a_{iso}(t)) \geq 0 \\ -\sigma(t) + (\sigma_Y^0 + a_{iso}(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (2.171)$$

En ajoutant de l'écroissage cinématique qui correspond à une translation de l'ensemble C^0 par un vecteur $a_{cin}(t)$, cette fonction $f(t)$ devient :

$$-\mathcal{Y}(t) = f(t) = \begin{cases} \sigma(t) + a_{cin}(t) + (\sigma_Y^0 + a_{iso}(t)) \geq 0 \\ -\sigma(t) - a_{cin}(t) + (\sigma_Y^0 + a_{iso}(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (2.172)$$

Précisions sur les forces d'écroissage Les forces d'écroissage sont reliées aux variables internes d'écroissage par :

$$a_{cin}(t) = K\alpha_{cin}(t) \quad \text{et} \quad a_{iso}(t) = H\alpha_{iso}(t) \quad (2.173)$$

Le modèle le plus simple d'écroissage cinématique est considéré dans cet exemple : l'écroissage cinématique linéaire (ou loi de *Prager*), défini par

$$a_{cin}(t) = K\varepsilon^p(t) \quad (2.174)$$

En comparant cette loi à (2.173), il vient que la variable interne d'écroissage cinématique est égale à la déformation plastique :

$$\alpha_{cin}(t) = \varepsilon^p(t) \quad (2.175)$$

En ce qui concerne l'écouissage isotrope, l'hypothèse la plus simple et la plus courante de considérer que le coefficient de dilatation $c(t)$ varie de façon linéaire avec les déformations plastiques cumulées $\varepsilon_c^p(t)$ qui sont définies par :

$$\varepsilon_c^p(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p(s)| ds \quad (2.176)$$

Pour formuler cette relation il faut exprimer la contrainte limite de deux manières différentes : $\sigma_Y(t) = \sigma_Y^0 + a_{iso}(t)$ s'écrit aussi $\sigma_Y(t) = c(t)\sigma_Y^0$. Donc l'égalité suivante est valide :

$$\sigma_Y^0 + a_{iso}(t) = c(t)\sigma_Y^0 \quad (2.177)$$

ce qui donne finalement :

$$c(t) = 1 + \frac{1}{\sigma_Y^0} a_{iso}(t) = 1 + \frac{K}{\sigma_Y^0} \alpha_{iso}(t) \quad (2.178)$$

Puisque d'une part $c(t)$ dépend des déformations plastiques cumulées et que d'autre part, $c(t)$ dépend temporellement uniquement de $\alpha_{iso}(t)$, alors il est possible de relier la variable interne d'écouissage isotrope aux déformations plastiques cumulées définies dans (2.176) :

$$\alpha_{iso}(t) = \varepsilon_c^p(t) \quad (2.179)$$

En reprenant la loi d'élasticité et les développements des variables d'écouissage, et en considérant leur variation temporelle, l'ensemble d'équations suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = E(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^p(t)) \\ \dot{a}_{cin}(t) = K\dot{\alpha}_{cin}(t) = K\dot{\varepsilon}^p(t) \\ \dot{a}_{iso}(t) = H\dot{\alpha}_{iso}(t) = H\dot{\varepsilon}_c^p(t) = H|\dot{\varepsilon}^p(t)| \end{cases} \quad (2.180)$$

ou encore, en regroupant les forces d'écouissage :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = E(\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^p(t)) \\ \dot{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}_{cin}(t) \\ \dot{a}_{iso}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{cin}(t) \\ \dot{\alpha}_{iso}(t) \end{pmatrix} = D\dot{\alpha}(t) \end{cases} \quad (2.181)$$

Formulation de la loi d'évolution En rappelant que $z(t) = -\dot{\varepsilon}^p(t)$ et que $y(t) = \dot{a}(t)$, le cône normal à l'ensemble des contraintes et forces d'écouissage admissibles est défini par (voir paragraphe 2.2.2) :

$$N_C(\sigma, a) = \left\{ z, y \mid \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = - \sum_i \nabla_{\sigma, a}^\top f_i(\sigma, a) \lambda_i, \lambda_i \geq 0, \lambda_i^\top f_i(\sigma, a) = 0, i = 1, 2 \right\} \quad (2.182)$$

Définir la fonction d'écouement $f(t)$ sous forme matricielle aide à développer cette formulation :

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sigma(t) + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} a(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_Y \geq 0 \quad (2.183)$$

ou, en nommant les matrices :

$$f(t) = J_\sigma^\top \sigma(t) + J_a^\top a(t) + \kappa_Y \geq 0 \quad (2.184)$$

Les gradients de cette fonction sont donc :

$$\nabla_{\sigma} f(t) = J_{\sigma}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_a f(t) = J_a^{\top} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

Finalement, la loi d'évolution s'écrit, en notant $\lambda(t)^{\top} = [\lambda_1(t) \ \lambda_2(t)]$:

$$\begin{cases} z(t) = -J_{\sigma}\lambda(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \\ y(t) = -J_a\lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \\ -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \end{pmatrix} \\ 0 \leq f(t) \perp \lambda(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.186)$$

et doit être valide à chaque instant t .

Discrétisation éléments finis Les vecteurs des déplacements, vitesses et forces nodales sont :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f_{ext}(t) = \begin{bmatrix} f_{ext,1}(t) \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

Puisque les valeurs de contraintes et de déformations sont identiques en tout point de la barre et que l'on se place en considérations quasi-statiques (vitesses de déformation lentes), l'utilisation d'un seul élément est suffisant. Les matrices élémentaires et globales sont donc les mêmes. La matrice des fonctions de forme considérée est :

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

Comme ces fonctions de forme sont linéaires, l'utilisation d'un seul point de Gauss est suffisant pour l'intégration numérique. Celui-ci est placé au milieu de la poutre, et le poids associé est $\omega_g = 2$. La matrice des dérivées des fonctions de forme est alors :

$$B = \sqrt{2} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

Les contraintes et les déformations s'exprimant aux points de Gauss, ces valeurs sont alors scalaires.

Les matrices d'élasticité C et d'écrouissage D sont définies par (voir (2.181)) :

$$C = [E] \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \quad (2.190)$$

Enfin, bien qu'une matrice de masse consistante permette une répartition plus homogène des masses discrètes, une matrice de masse diagonale est préférée puisque, étant donné la simplicité de la discrétisation spatiale et l'application lente des efforts, il est inutile de complexifier le calcul. Donc

$$M = \rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

Le système complet à résoudre pour cet exemple est :

$$\begin{cases} M\dot{v}(t) + B^\top \sigma(t) = f_{ext}(t) \\ C^{-1}\dot{\sigma}(t) = Bv(t) - \dot{\varepsilon}^P(t) = Bv(t) + z(t) \\ D^{-1}\dot{a}(t) = \dot{a}(t) = y(t) \\ -\mathcal{Y}(t) = f(t) = J_\sigma^\top \sigma(t) + J_a^\top a(t) + \kappa_Y \geq 0 \\ \begin{cases} z(t) = -J_\sigma \lambda(t) \\ y(t) = -J_a \lambda(t) \\ 0 \leq f(t) \perp \lambda(t) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.192)$$

2.9.2 Contact : *Bouncing ball*

Pour le contact, l'exemple d'une bille infiniment rigide tombant sur un sol infiniment rigide lui aussi est présenté. Cet exemple est couramment utilisé pour présenter les phénomènes de contact. La figure 2.3 présente le système : une bille de rayon b et de masse m est soumise à la gravité g , et ses propriétés de vitesse, position son définies à son centre de gravité. Elle est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur $u(0) = u_0$ (au centre de gravité). La distance g_N séparant le bas de la bille du sol est alors donnée par $g_N(t) = u(t) - b$.

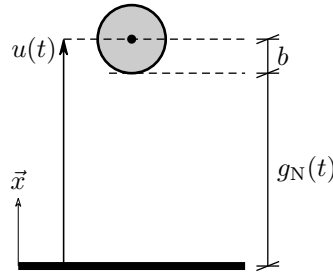


FIGURE 2.3 – Bille infiniment rigide de masse m et de rayon b tombant sur un sol infiniment rigide.

Dans cet exemple simple, la matrice H est réduite à une valeur scalaire car il n'y a qu'un degré de liberté. Les vitesses $v(t)$ et les vitesses normales relatives entre la bille et le sol $v_N(t)$ sont donc égales, ainsi que pour les forces de réaction $r(t) = r_N(t)$. Le système (2.153) se réduit à :

$$\begin{cases} m dv = f_{ext}(t) dt + di \\ \dot{u}(t) = v(t) \\ -di(t) \in N_{T_{\mathbb{R}_+^m}(g_N(t))}(v^+(t) + ev^-(t)) \end{cases} \quad (2.193)$$

avec $f_{ext}(t) = -mg$. La première ligne de ce système permet d'exprimer di en fonction des autres variables, ce qui amène :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = v(t) \\ -(m dv + mg dt) \in N_{T_{\mathbb{R}_+^m}(g_N(t))}(v^+(t) + ev^-(t)) \end{cases} \quad (2.194)$$

Dans le cas où $g_N(t) > 0$, il n'y a pas d'impact. Le cône normal $N_{T_{\mathbb{R}_+^m}(g_N(t))}(v^+(t) + ev^-(t))$

est réduit à 0 et le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = v(t) \\ -(m dv - f_{ext}(t) dt) \in 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{u}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = -mg \end{cases} \quad (2.195)$$

En revanche, si $g_N(t) = 0$ (et si $v_N \leq 0$, il y a contact et dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = v(t) \\ -m(v^+(t)v^-(t) \in \partial\Psi_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{v^+(t) + ev^-(t)}{1+e} \right) \end{cases} \quad (2.196)$$

Avec $\Psi_{\mathbb{R}_+}$ la fonction indicatrice de l'ensemble des réels positifs ou nuls, et $e \in [0, 1]$ le coefficient de restitution. Pour plus de détails sur ces développements, voir ACARY et BROGLIATO (2008, section 1.4). L'inclusion de la seconde ligne de ce système est équivalente à la loi d'impact de *Newton* définie à l'équation (2.136).

2.10 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, les lois de la thermodynamique ont été appliquées au problème de plasticité. En particulier, l'inégalité de *Clausius-Duhem* qui traduit les phénomènes dissipatifs a été formulée à l'aide des variables d'état ε^e et α (2.13).

Les travaux de *Moreau* sur les lois et fonctions de résistance, appliquées dans le cadre des matériaux standards généralisés, permettent d'écrire les lois d'évolution des paramètres internes (taux de déformation plastique et des variables d'écrouissage) à l'aide de la loi de normalité (2.51). La formulation d'une loi de comportement élastoplastique est ainsi établie, permettant de définir l'état et l'évolution temporelle du matériau.

Le contact est pris en compte à l'aide des conditions de *Signorini*. *Moreau* reformule ces conditions sous la forme d'une inclusion différentielle en vitesse (2.74) pour une meilleure définition du problème. Il en ressort que les forces de contact et d'impact ne travaillent pas car la puissance développée par ces forces est nulle (2.78). Le contact n'a donc aucune influence sur les bilans énergétiques en temps continu s'il n'y a pas de percussions.

Les équations de la dynamique et constitutives des matériaux ont ensuite été discrétisées à l'aide de la méthode des éléments finis. Le système obtenu, de dimension finie, implique des masses finies aux nœuds et, dans le cas du contact, des percussions et des sauts de vitesse peuvent exister. La dynamique non régulière est alors employée avec la possibilité de prendre en compte des impulsions au contact (2.137).

Finalement, un système général est présenté, formulé en mesures, reprenant l'ensemble des développements précédents sous forme discrétisée (équation (2.151)). C'est là une partie de la contribution de ce travail de thèse : ce chapitre a permis d'écrire dans un même système et sous le même formalisme (inclusion dans des cônes normaux) les équations constitutives de la plasticité et les équations du contact. Grâce à cette formulation, il est alors possible de proposer un algorithme qui résoudra simultanément les deux phénomènes, sans avoir recours à des itérations entre chaque modélisation.

Chapitre 3

Algorithme monolithique pour la plasticité et le contact

Sommaire

3.1	Schéma de discrétisation temporelle	82
3.1.1	Schema de <i>Moreau-Jean</i>	82
3.1.2	Application au système élastoplastique avec impact	84
3.2	Problème bien posé	86
3.2.1	Equivalence avec un problème de point selle	86
3.2.2	Existence et unicité de la solution	88
3.3	Substitution des relations linéaires	90
3.3.1	Exemple introductif : contact seul	90
3.3.2	Application au système complet	91
3.3.2.1	Réduction par rapport à la plasticité	91
3.3.2.2	Réduction par rapport au contact	92
3.3.2.3	Synthèse des substitutions	92
3.3.2.4	Caractère bien posé du problème	93
3.4	Méthodes de résolution	94
3.4.1	Problème d'optimisation quadratique	94
3.4.2	Cas particulier de C ensemble de relations linéaires	95
3.4.2.1	Formulation de la fonction d'écoulement	95
3.4.2.2	Reformulation du problème en LCP	96
3.5	Exemples 1D - suite	97
3.5.1	Plasticité : Barre en traction - compression	97
3.5.1.1	Discrétisation temporelle et algorithme	97
3.5.1.2	Simulation	98
3.5.2	Contact : <i>Bouncing ball</i>	99
3.5.2.1	Discrétisation temporelle et algorithme	99
3.5.2.2	Simulation	100
3.6	Propriétés énergétiques du schéma de <i>Moreau-Jean</i>	101
3.6.1	Bilan énergétique discret	101
3.6.2	Propriétés énergétiques	105
3.7	Résumé du chapitre	107

Ce second chapitre de développement est dédié à la résolution numérique du problème décrit au chapitre 2. Un algorithme monolithique permettant de résoudre simultanément le contact et la plasticité est développé. Pour cela, il faut *a minima* proposer un schéma de discrétisation temporelle puis l'appliquer au système continu, avant de vérifier que le problème discret possède bien une unique solution. Ensuite, les méthodes de résolution seront proposées et une reformulation du problème présentée en vue de sa résolution. Enfin, des cas particuliers de formulation seront envisagés et les propriétés énergétiques du schéma seront mises en avant.

3.1 Schéma de discrétisation temporelle

3.1.1 Schéma de *Moreau-Jean*

Le système mécanique dynamique générique à conditions initiales discret en espace suivant est considéré :

$$\begin{cases} M dv = F(t, q, v) + dr \\ v(t) = \dot{q}^+(t) \\ q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $F \in \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de masse.

Les positions $q(t)$, connues à l'instant initial $t = 0$, sont données à un instant $t \in]0, T]$ par :

$$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds \quad (3.2)$$

En utilisant un instant intermédiaire $t' \in]0, T]$, cette équation (3.2) s'écrit aussi :

$$q(t) = q(t') + \int_{t'}^t v(s) ds \quad (3.3)$$

L'intervalle de temps $[0, T]$ est alors discrétisé en un nombre fini d'intervalles de temps. Ces pas de temps, notés h , correspondent au temps entre deux instants successifs $h = t_{k+1} - t_k$. Ils peuvent être variables, mais sauf mention contraire, seront considérés constants dans la suite du travail. De plus, pour n'importe quelle variable \square , son approximation discrète à un instant t_k sera notée $\square(t_k) = \square_k$. Suite à cette discrétisation, dans le cas de variables non continues (comme la vitesse v), la valeur à un instant t_k est définie par la limite à droite à cet instant : $v_k = \dot{q}^+(t_k)$. L'équation (3.3) se réécrit alors :

$$q_{k+1} = q_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) dt \quad (3.4)$$

En vue de résoudre pas à pas la première ligne de l'équation (3.1), l'évolution au cours d'un intervalle de temps $]t_k, t_{k+1}]$ de cette équation (écrite en terme de mesures différentielles) est donnée par :

$$\int_{]t_k, t_{k+1}] } M dv = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t, q, v) dt + \int_{]t_k, t_{k+1}] } dr \quad (3.5)$$

Intégration des termes non réguliers Pour l'intégration du terme d'inertie, comme la matrice de masse ne varie pas au cours du temps, elle est placée avant l'intégrale. L'intégration de dv sur l'intervalle de temps ne pose alors plus de soucis et conduit au même résultat indépendamment de la partie considérée, qu'elle soit continue ou impulsive :

$$\int_{]t_k, t_{k+1}] } M dv = M \int_{]t_k, t_{k+1}] } dv = M(v_{k+1} - v_k) \quad (3.6)$$

La valeur moyenne sur un pas de temps de la force de réaction r_{k+1} est donnée durant les phases de contact régulier par :

$$r_{k+1} = \frac{1}{h} \int_{]t_k, t_{k+1}] } dr \quad (3.7)$$

Cependant, lorsque survient un impact, si le pas de temps h tend vers zéro alors cette force de réaction tend vers l'infini. Ainsi, en vue de conserver la consistance du schéma numérique en présence de l'impact, c'est l'impulsion de réaction p_{k+1} qui est conservée comme variable principale du problème :

$$\int_{]t_k, t_{k+1}] } dr = p_{k+1} \quad (3.8)$$

Cette nouvelle variable remplace donc la force de réaction et permet de conserver une valeur bornée tout en prenant en compte d'éventuels impacts multiples au sein d'un même pas de temps. Elle est donc mise en dualité avec les vitesses relatives dans le cadre de la loi d'impact définie au paragraphe 2.5.3.

Intégration des termes non impulsifs Les parties non impulsives de l'équation du mouvement sont intégrées à l'aide de la méthode du point intermédiaire (θ -méthode). Pour n'importe quelle variable générique \square , sa valeur entre deux instants t_k et t_{k+1} est définie par une approximation linéaire :

$$\square_{k+\theta} = \theta \square_{k+1} + (1 - \theta) \square_k \quad (3.9)$$

avec $\theta \in [0, 1]$. En notant $F_k = F(t_k, q_k, \dot{q}_k)$, l'intégrale de la fonction continue F devient :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t, q, v) dt = h F_{k+\theta} = h(\theta F_{k+1} + (1 - \theta) F_k) \quad (3.10)$$

La position en fin de pas de temps est donnée par :

$$q_{k+1} = q_k + h v_{k+\theta} \quad (3.11)$$

Equation du mouvement discrétisée L'équation (3.5) s'écrit donc sous forme discrétisée en temps à l'aide des équations (3.6), (3.8) et (3.10). En y ajoutant la relation entre les vitesses et les positions (3.11) ainsi que le principe de la θ -méthode (3.9), le schéma d'intégration se résume par les équations :

$$\begin{aligned} M(v_{k+1} - v_k) &= h F_{k+\theta} + p_{k+1} \\ q_{k+1} &= q_k + h v_{k+\theta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Remarques sur le schéma Le choix du paramètre θ est important puisqu'il conditionne de nombreuses propriétés dans le cas du système régulier. Lorsque $\theta = 1/2$, le schéma est d'ordre 2. Lorsque $\theta = 0$, le schéma d'*Euler* explicite est obtenu, et lorsque $\theta = 1$, un schéma d'*Euler* implicite est retrouvé.

Dès lors que $\theta \geq 1/2$, le schéma est stable, en particulier car il dissipe de l'énergie (le pas de temps h n'a alors plus d'importance sur la stabilité). Cela permet de faire des simulations quasi-statiques en choisissant $\theta = 1$ et en prenant un grand pas de temps h (voir le paragraphe 3.5.1 et l'exemple 1 du chapitre 4). Dans le cas où $\theta = 1/2$, alors le schéma ne dissipe aucune énergie numériquement, ce qui permet d'effectuer des analyses précises de dissipations (voir (ACARY, 2016) et l'analyse des propriétés énergétiques du schéma au paragraphe 3.6)

3.1.2 Application au système élastoplastique avec impact

Discrétisation de l'équation du mouvement du système Dans le système général (3.1), la fonction $F(t, q, \dot{q})$ est générique et prend en compte les forces internes et externes appliquées au système. Le problème présenté dans l'équation (2.151) permet de préciser cette fonction F :

$$F(t, q, \dot{q}) = f_{ext}(t) dt - B^\top \sigma(t) dt \quad (3.13)$$

La première ligne de l'équation (3.12) donne donc l'équation discrète du mouvement :

$$M(v_{k+1} - v_k) + hB^\top \sigma_{k+\theta} = hf_{ext, k+\theta} + p_{k+1} \quad (3.14)$$

Discrétisation des lois d'état du système Les équations d'état du système peuvent être écrites à n'importe quel instant. Elles seront ici écrites en $t_{k+\theta}$ pour obtenir le même instant de discrétisation que dans l'équation de la dynamique (3.14).

La relation contraintes-déformations s'écrit sous forme discrète :

$$\dot{\sigma}_{k+\theta} = E\dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e = E(\dot{\varepsilon}_{k+\theta} - \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^p) \quad (3.15)$$

En notant l'inverse de la matrice d'élasticité $S = E^{-1}$ et en utilisant la θ -méthode qui précise $\sigma_{k+1} = \sigma_k + h\dot{\sigma}_{k+\theta}$, il vient :

$$S(\sigma_{k+1} - \sigma_k) = h\dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e = h\dot{\varepsilon}_{k+\theta} - h\dot{\varepsilon}_{k+\theta}^p \quad (3.16)$$

De plus, par la discrétisation éléments finis, $\dot{\varepsilon}_{k+\theta} = Bv_{k+\theta}$, et en utilisant le changement de variable défini équation (2.152), alors :

$$S(\sigma_{k+1} - \sigma_k) = hBv_{k+\theta} + hz_{k+\theta} \quad (3.17)$$

Pour la relation entre variables internes et forces d'érouissage, l'équation est :

$$\dot{a}_{k+\theta} = D\dot{\alpha}_{k+\theta} \quad (3.18)$$

À l'aide de la θ -méthode et avec la relation $\dot{\alpha}_{k+\theta} = y_{k+\theta}$ (voir page 73), le taux de variation des forces d'érouissage s'écrit :

$$D^{-1}(a_{k+1} - a_k) = hy_{k+\theta} \quad (3.19)$$

Discrétisation des lois d'évolution de la plasticité En ce qui concerne les lois d'évolution, elles ne s'expriment pas au même instant pour le contact et la plasticité. L'inclusion de la plasticité est écrite comme pour les lois d'état à l'instant $t_{k+\theta}$:

$$-\begin{pmatrix} z_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} \end{pmatrix} \in N_C \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Ce choix permet de bénéficier des propriétés énergétiques du schéma de *Moreau-Jean* (voir paragraphe 3.6).

Discretisation de la loi d'évolution du contact La fonction distance g_N^χ est évaluée en fin de pas de temps pour chaque contact χ en vue d'appliquer ou non la loi d'impact lors du pas de temps suivant. En effet, le principe de construction du schéma de *Moreau-Jean* impose un caractère complètement implicite, détail indispensable pour respecter les contraintes en positions (caractère de « time stepping » du schéma).

Pour qu'un contact soit actif il faut, d'une part, que les deux objets candidats soient en contact (voire même qu'il y ait une interpénétration du fait de la discrétisation temporelle, *c.f.* remarque 9), donc que la fonction distance normale g_N soit négative ou nulle et, d'autre part, que les deux objets soient en train de se rapprocher ou immobiles l'un par rapport à l'autre, donc que leur vitesse relative soit inférieure ou nulle.

L'ensemble des contacts actifs peut ainsi être défini pour limiter le nombre d'inclusions de contact à satisfaire. Pour cela, l'ensemble des contacts actifs déterminé en fin de pas de temps k et noté \mathcal{I}_k est défini par :

$$\mathcal{I}_k = \{\chi \mid g_{N,k}^\chi \leq 0 \text{ et } v_{N,k}^\chi \leq 0\} \quad (3.21)$$

avec $v_{N,k}^\chi = H^{\chi \top} v_k$. La loi d'impact pour chaque contact actif χ s'écrit alors :

$$\begin{cases} -(v_{N,k+1}^\chi + e v_{N,k}^\chi) \in N_{\mathbb{R}_+}(p_{N,k+1}^\chi) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_k \\ p_{N,k+1}^\chi = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.22)$$

avec $v_{N,k+1}^\chi = H^{\chi \top} v_{k+1}$ et $H^\chi \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Pour l'ensemble des contacts actifs, les vecteurs $v_{N,k+1} \in \mathbb{R}^m$ et $p_{N,k+1} \in \mathbb{R}^m$ (avec m le nombre de contacts actifs, *i.e.* $m = \text{card}(\mathcal{I}_k)$ et donc variable au cours du temps) regroupent l'ensemble des vitesses et forces d'impulsion relatives des contributions de chaque contact actif :

$$v_{N,k+1} = \text{col}(v_{N,k+1}^\chi, \chi \in \mathcal{I}_k) \quad p_{N,k+1} = \text{col}(p_{N,k+1}^\chi, \chi \in \mathcal{I}_k) \quad (3.23)$$

et donc, en fin de pas de temps suivant l'équation (3.8), l'inclusion du contact après prise en compte de la loi d'impact s'écrit :

$$-(v_{N,k+1} + e v_{N,k}) \in N_{\mathbb{R}_+^m}(p_{N,k+1}) \quad (3.24)$$

L'opérateur $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ utilisé pour relier $v_{N,k+1}$ à v_{k+1} et $p_{N,k+1}$ à p_{k+1} est maintenant défini par la juxtaposition des opérateurs H^χ des contacts actifs uniquement :

$$H^\top = \text{col}(H^{\chi \top}, \chi \in \mathcal{I}_k) \quad v_{N,k+1} = H^\top v_{k+1} \quad p_{k+1} = H p_{N,k+1} \quad (3.25)$$

Résumé et remarques L'intégralité du système défini dans (2.153) est donc discrétisée en temps à l'aide du schéma de *Moreau-Jean* et en faisant appel à la θ -méthode. En compilant les différentes discrétisations effectuées (en particulier les résultats (3.14), (3.17), (3.19), (3.20) et (3.24)), le système complet s'écrit :

$$\begin{cases} M(v_{k+1} - v_k) + hB^\top \sigma_{k+\theta} = h f_{ext,k+\theta} + H p_{N,k+1} \\ q_{k+1} = q_k + h v_{k+\theta} \\ S(\sigma_{k+1} - \sigma_k) = h B v_{k+\theta} + h z_{k+\theta} \\ D^{-1}(a_{k+1} - a_k) = h y_{k+\theta} \\ v_{N,k+1} = H^\top v_{k+1} \\ - \begin{pmatrix} z_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} \\ v_{N,k+1} + e v_{N,k} \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^m} \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.26)$$

3.2. Problème bien posé

Dans ce système, les positions (ou les déplacements) ne sont que des variables secondaires et la dynamique peut ne s'écrire qu'en vitesses. La seconde ligne est alors facultative et peut être résolue en tant que post-traitement des résultats.

De plus, à l'aide de la θ -méthode, pour n'importe quelle variable \square :

$$\square_{k+\theta} - \square_k = \theta \square_{k+1} + (1 - \theta) \square_k - \square_k = \theta(\square_{k+1} - \square_k) \quad (3.27)$$

et il pourra s'avérer utile d'écrire le système discret avec les vitesses et les contraintes directement à l'instant $t_{k+\theta}$:

$$\begin{cases} M(v_{k+\theta} - v_k) + h\theta B^\top \sigma_{k+\theta} = h\theta f_{ext, k+\theta} + \theta H p_{N, k+1} \\ S(\sigma_{k+\theta} - \sigma_k) = h\theta B v_{k+\theta} + h\theta z_{k+\theta} \\ D^{-1}(a_{k+\theta} - a_k) = h\theta y_{k+\theta} \\ v_{N, k+1} = H^\top v_{k+1} \\ - \begin{pmatrix} z_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} \\ v_{N, k+1} + e v_{N, k} \end{pmatrix} \in N_{C \times \mathbb{R}_+^m} \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N, k+1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.28)$$

La discrétisation temporelle permet donc de passer d'un système différentiel impliquant des fonctions et leurs dérivées à un système entièrement défini par les valeurs inconnues des fonctions en $t_{k+\theta}$ et t_{k+1} .

Remarque 9. Suite à la discrétisation temporelle, la fonction distance g_N est évaluée de manière discrète en temps, ce qui a pour effet de potentiellement générer une interpénétration. Plusieurs possibilités sont envisageables pour faire face à ce problème, comme par exemple l'utilisation d'un petit pas de temps h qui limitera ces interpénétrations à de très petites valeurs (mais augmente de façon non forcément nécessaire le coût de calcul), ou encore l'utilisation d'une prédiction de g_N en fonction des positions et vitesses connues en t_k (ce qui peut limiter les interpénétrations, voire même activer un contact avant que celui-ci n'ait réellement lieu). Il existe aussi des schémas qui permettent de respecter à la fois les conditions sur les vitesses et sur les positions comme celui proposé par BRÜLS et al. (2014).

3.2 Problème bien posé

Le caractère bien posé du problème, c'est à dire l'existence et l'unicité de la solution est ici rapidement étudié afin de montrer la pertinence de l'algorithme proposé.

3.2.1 Equivalence avec un problème de point selle

Pour vérifier si le système (3.28) est bien posé, c'est-à-dire qu'il possède une solution unique, il faut montrer qu'il peut être issu d'un problème plus général. Les problèmes de plasticité peuvent couramment être formulés comme des problèmes de point selle en cherchant le maximum de la fonction par rapport aux contraintes et le minimum par rapport aux vitesses

(voir (KRABBENHØFT, 2009)). Ce problème de point selle est ici défini par :

$$\begin{aligned}
 \min_{v_{k+\theta}, \dot{\varepsilon}_{k+\theta}} \max_{\sigma_{k+\theta}, a_{k+\theta}} & \frac{1}{2}(v_{k+\theta} - v_k)^\top M(v_{k+\theta} - v_k) - \frac{1}{2}(\sigma_{k+\theta} - \sigma_k)^\top S(\sigma_{k+\theta} - \sigma_k) \\
 & - \frac{1}{2}(a_{k+\theta} - a_k)^\top D^{-1}(a_{k+\theta} - a_k) + h\theta \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^\top \sigma_{k+\theta} - h\theta f_{\text{ext},k+\theta}^\top v_{k+\theta} \\
 \text{s.c.} & Bv_{k+\theta} = \dot{\varepsilon}_{k+\theta} \\
 & \theta v_{N,k+1} = H^\top v_{k+\theta} - (1-\theta)v_{N,k} \\
 & \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ v_{N,k+1} + ev_{N,k} \end{pmatrix} \in \mathbf{C} \times \mathbb{R}_+^m
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pour montrer que la solution de ce problème d'optimisation correspond à la solution du système (3.28), il faut utiliser le lagrangien de la fonction dont on cherche les points selles. Pour formuler cette fonction, il faut ajouter les contraintes du problème d'optimisation à respecter à la fonction dont l'optimum est recherché. Ces contraintes sont ajoutées à l'aide des multiplicateurs de *Lagrange* pour les contraintes d'égalité et de la fonction indicatrice des ensembles pour les inclusions. Pour simplifier les notations, les variables $(v_{k+\theta}, \dot{\varepsilon}_{k+\theta}, v_{N,k+1}, \sigma_{k+\theta}, a_{k+\theta}, \lambda_{k+\theta}, \mu_{k+\theta})$ seront notées $(v, \dot{\varepsilon}, v_N, \sigma, a, \lambda, \mu)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(v, \dot{\varepsilon}, v_N, \sigma, a, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2}(v - v_k)^\top M(v - v_k) - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_k)^\top S(\sigma - \sigma_k) - \frac{1}{2}(a - a_k)^\top D^{-1}(a - a_k) \\
 &+ h\theta \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^\top \sigma_{k+\theta} - h\theta f_{\text{ext},k+\theta}^\top v + \lambda^\top (Bv - \dot{\varepsilon}) + \mu^\top (\theta v_N - H^\top v + (1-\theta)v_{N,k}) \\
 &- h\theta \Psi_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix} + \theta^2 \Psi_{\mathbb{R}_+^m}(v_N + ev_{N,k}).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Chacune des dérivées par rapport aux variables principales du problème doit s'annuler pour obtenir la condition d'optimalité (le point selle). En calculant le gradient de ce lagrangien par rapport à chacune des variables, il vient :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_v \mathcal{L} :) & 0 = M(v - v_k) - h\theta f_{\text{ext},k+1}^\top + \lambda^\top B - H\mu \\
 (\nabla_{\dot{\varepsilon}} \mathcal{L} :) & 0 = h\theta \sigma - \lambda \\
 (\partial_{v_N} \mathcal{L} :) & 0 \in \theta \mu + \theta^2 \partial \Psi_{\mathbb{R}_+^m}(v_N + ev_{N,k}) \\
 (\partial_\sigma \mathcal{L} :) & 0 \in -S(\sigma - \sigma_k) + h\theta \dot{\varepsilon} - h\theta \partial_\sigma \Psi_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix} \\
 (\partial_a \mathcal{L} :) & 0 \in -D^{-1}(a - a_k) - h\theta \partial_a \Psi_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix} \\
 (\nabla_\lambda \mathcal{L} :) & 0 = Bv - \dot{\varepsilon} \\
 (\nabla_\mu \mathcal{L} :) & 0 = \theta v_N - H^\top v + (1-\theta)v_{N,k}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ces gradients sont calculés en terme de sous-différentiel de la fonction \mathcal{L} par rapport à chacune des variables, mais dans le cas où ce sous-différentiel $\partial_\square \mathcal{L}$ est réduit au gradient habituel de la fonction, la notation ∇_\square a été utilisée.

La seconde ligne donne la valeur du multiplicateur $\lambda = h\theta \sigma$ qui pourra être remplacé dans la première ligne. La troisième ligne définit l'inclusion du multiplicateur $-\mu \in \theta \partial \Psi(v_N + ev_{N,k})$:

ce multiplicateur peut alors s'assimiler, à θ près, à l'impulsion au contact $\mu = \theta p_N$. Cette valeur sera aussi introduite par la suite dans la première ligne. La quatrième ligne peut être réorganisée sous la forme $-S(\sigma - \sigma_k) + h\theta\dot{\varepsilon} \in h\theta\partial_\sigma\Psi_C\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ a \end{smallmatrix}\right)$. Or, puisque $S(\sigma - \sigma_k) - h\theta\dot{\varepsilon} = -h\theta\dot{\varepsilon}^p = h\theta z$, cette quatrième ligne devient $-z \in \partial_\sigma\Psi_C\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ a \end{smallmatrix}\right)$. De la même façon, la cinquième ligne est modifiée et en utilisant la relation $D^{-1}(a - a_k) = \dot{\alpha} = y$, l'inclusion s'écrit $-y \in \partial_a\Psi_C\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ a \end{smallmatrix}\right)$. Les deux dernières lignes permettent de définir les contraintes appliquées au système en termes de définitions de variables.

Les trois inclusions qui viennent d'être présentées peuvent se regrouper au sein d'une seule :

$$-\begin{pmatrix} z \\ y \\ p_N \end{pmatrix} \in \partial\Psi_{C \times \mathbb{R}_+^m}\left(\begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ v_N + ev_{N,k} \end{pmatrix}\right) \quad (3.32)$$

En précisant les relations utilisées entre σ et z d'une part et a et y d'autre part, puis en remplaçant $\dot{\varepsilon}$ par Bv suivant la sixième ligne, et enfin en remplaçant les multiplicateurs λ et μ dans le gradient de \mathcal{L} par rapport à v , le système d'équations (3.31) des conditions d'optimalité du lagrangien associé au problème de point selle (3.29) devient :

$$\begin{cases} M(v - v_k) + h\theta B^\top \sigma = h\theta f_{\text{ext},k+1}^\top + \theta H p_N \\ S(\sigma - \sigma_k) - h\theta Bv = h\theta z \\ D^{-1}(a - a_k) = h\theta y \\ \theta v_N = H^\top v - (1 - \theta)v_{N,k} \\ -\begin{pmatrix} z \\ y \\ p_N \end{pmatrix} \in \partial\Psi_{C \times \mathbb{R}_+^m}\left(\begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ v_N + ev_{N,k} \end{pmatrix}\right) \end{cases} \quad (3.33)$$

Ce système correspond à celui défini dans (3.28), ce qui montre qu'une solution de ce système (3.33) est aussi une solution du problème de point selle (3.29).

3.2.2 Existence et unicité de la solution

Lagrangien réduit Le lagrangien (3.30) peut être simplifié et réduit en substituant, suivant les contraintes d'égalité du problème initial de point selle, $\dot{\varepsilon}^\top$ par $v^\top B^\top$, ainsi que θv_N par $H^\top v - (1 - \theta)v_{N,k}$. Ce nouveau lagrangien $\bar{\mathcal{L}}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(v, \sigma, a) &= \frac{1}{2}(v - v_k)^\top M(v - v_k) - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_k)^\top S(\sigma - \sigma_k) - \frac{1}{2}(a - a_k)^\top D^{-1}(a - a_k) \\ &\quad + h\theta v^\top B^\top \sigma - h\theta f_{\text{ext},k+\theta}^\top v - h\theta\Psi_C\left(\begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix}\right) + \theta\Psi_{\mathbb{R}_+^m}(H^\top v + (\theta(1 + e) - 1)v_{N,k}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Les conditions d'optimalité de ce nouveau lagrangien sont données par :

$$\begin{aligned}
 (\partial_v \bar{\mathcal{L}} :) \quad 0 &= M(v - v_k) - h\theta f_{\text{ext},k+1}^\top + h\theta B^\top \sigma + \theta \partial_v \Psi_{\mathbb{R}_+^m}(H^\top v + (\theta(1+e) - 1)v_{N,k}) \\
 (\partial_\sigma \bar{\mathcal{L}} :) \quad 0 &\in -S(\sigma - \sigma_k) + h\theta Bv - h\theta \partial_\sigma \Psi_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix} \\
 (\partial_a \bar{\mathcal{L}} :) \quad 0 &\in -D^{-1}(a - a_k) - h\theta \partial_a \Psi_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Existence de la solution Les matrices M , S et D sont considérées définies positives. Cette hypothèse est toujours vraie pour la matrice de masse M qui l'est par définition en suivant la discrétisation par éléments finis, et pour S , l'inverse de la matrice d'élasticité (en restant en petites déformations). Pour la matrice d'écroissage D , il faudra prendre les précautions nécessaires pour que l'hypothèse soit vérifiée (voir remarque 10).

Suivant cette hypothèse, le lagrangien $\bar{\mathcal{L}}$ est une fonction convexe par rapport à la variable de vitesse v , et concave par rapport aux variables de contrainte et de forces d'écroissage σ et a .

Les ensembles \mathbb{C} et \mathbb{R}_+^m ne sont pas vides. En faisant l'hypothèse que les contraintes de qualification pour (v^0, σ^0, a^0) définies par :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ a^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \\ H^\top v^0 + (\theta(1+e) - 1)v_{N,k} \in \mathbb{R}_+^m \end{cases} \tag{3.36}$$

sont satisfaites, alors le lagrangien $\bar{\mathcal{L}}$ est doublement coercif, c'est-à-dire que, dans un premier temps, en fixant $(\sigma^0, a^0)^\top$, la limite de $\bar{\mathcal{L}}$ tend vers plus l'infini lorsque la norme de v tend vers plus l'infini (avec $H^\top v^0 + (\theta(1+e) - 1)v_{N,k} \geq 0$), et dans un second temps, en fixant v^0 , la limite de $\bar{\mathcal{L}}$ tend vers moins l'infini lorsque la norme de $(\sigma^0, a^0)^\top$ tend vers l'infini (avec $(\sigma^0, a^0)^\top \in \mathbb{C}$) :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \bar{\mathcal{L}}(v, \sigma^0, a^0) = +\infty, \quad \lim_{\|(\sigma, a)^\top\| \rightarrow +\infty} \bar{\mathcal{L}}(v^0, \sigma, a) = -\infty \tag{3.37}$$

En considérant les hypothèses qui viennent d'être présentées, il est possible d'appliquer le théorème VII.4.3.1 de (HIRIART-URRUTY et LEMARÉCHAL, 1993a) qui précise que, sous ces hypothèses, le lagrangien $\bar{\mathcal{L}}$ possède un ensemble convexe, compact et non vide de solution.

Unicité de la solution Comme la matrice de masse M est définie positive par construction, $\bar{\mathcal{L}}$ est strictement convexe par rapport à v (quel que soit $(\sigma, a)^\top \in \mathbb{C}$). De même, comme les matrices S et D sont définies positives, $\bar{\mathcal{L}}$ est strictement concave par rapport à $(\sigma, a)^\top$ (quel que soit $H^\top v^0 + (\theta(1+e) - 1)v_{N,k} \geq 0$).

Cette stricte convexité d'une part, et stricte concavité d'autre part, implique l'unicité de la solution.

Remarque 10. La définition de la matrice d'écroissage D est importante puisque pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, elle doit être définie positive.

Cette hypothèse implique en particulier de considérer de l'écroissage positif. Dans le cas de plasticité avec adoucissement, il faudra étudier plus précisément le système pour s'assurer de l'existence du résultat.

Pour la plasticité parfaite, le problème est réduit avec la suppression de toutes les équations et de tous les termes fonction des paramètres d'écroissage pour retrouver de façon similaire le résultat présenté.

3.3 Substitution des relations linéaires

Bien qu'il soit possible de résoudre directement le problème général de point selle (3.29) à l'aide de techniques d'optimisation, une autre méthode sera préférée ici. Les relations linéaires des lignes 2, 3 et 4 du système (3.28) permettent de réduire le nombre d'inconnues du système.

3.3.1 Exemple introductif : contact seul

Le traitement du contact suivant les méthodes de dynamique non-lisse est l'exemple sur lequel se base l'idée de réduction du nombre de variables. En reprenant le système général discrétisé en temps (3.12) et en y ajoutant l'inclusion du contact (3.24) ainsi que les relations entre vitesses et vitesses relatives normales au contact (2.123) et entre forces de réaction et forces de réactions normales (2.125) (appliquée aux impulsions), le système s'écrit (en omettant, pour plus de clarté, les deux lignes définissant l'évolution des positions et de la θ -méthode) :

$$\begin{cases} M(v_{k+1} - v_k) = hF_{k+\theta} + p_{k+1} \\ v_{N,k+1} = H^\top v_{k+1} & p_{k+1} = Hp_{N,k+1} \\ -(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) \in N_{\mathbb{R}^m} + (p_{N,k+1}) \end{cases} \quad (3.38)$$

La première ligne peut alors être réécrite en y incluant la seconde ligne :

$$\begin{aligned} M(v_{k+1} - v_k) &= hF_{k+\theta} + Hp_{N,k+1} \\ Mv_{k+1} &= hF_{k+\theta} + Mv_k + Hp_{N,k+1} \\ v_{k+1} &= hM^{-1}F_{k+\theta} + v_k + M^{-1}Hp_{N,k+1} \\ v_{N,k+1} &= hH^\top M^{-1}F_{k+\theta} + v_{N,k} + H^\top M^{-1}Hp_{N,k+1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

ce qui fournit une relation entre les vitesses et les impulsions normales. En ajoutant $ev_{N,k}$ de chaque côté, c'est une relation entre les deux variables de l'inclusion différentielle (troisième ligne de (3.32)) qui est obtenue :

$$v_{N,k+1} + ev_{N,k} = hH^\top M^{-1}F_{k+\theta} + (1+e)v_{N,k} + H^\top M^{-1}Hp_{N,k+1} \quad (3.40)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$v_{N,k+1} + ev_{N,k} = v_{N,k+1}^{free} + Wp_{N,k+1} \quad (3.41)$$

avec $v_{N,k+1}^{free}$ la vitesse libre en l'absence d'impact définie par $v_{N,k+1}^{free} = hH^\top M^{-1}F_{k+\theta} + (1+e)v_{N,k}$, et $W = H^\top M^{-1}H$ l'opérateur de *Delassus*, qui correspond à la projection de la matrice de masse dans l'espace des contacts. Cet opérateur permet, d'après MOREAU (2000), de « [décrire] l'inertie du système telle qu'on la voit depuis le point de contact ».

A l'aide de cette relation linéaire entre les variables de l'inclusion différentielle, l'ensemble du problème ne dépend plus que de l'inconnue d'impulsion normale $p_{N,k+1}$.

Remarque 11. *Il est possible de reformuler l'inclusion différentielle, en reprenant les conditions de complémentarité définies dans (2.77) entre $v_{N,k+1} + ev_{N,k}$ et $p_{N,k+1}$. Le système s'écrit :*

$$\begin{cases} v_{N,k+1} + ev_{N,k} = v_{N,k+1}^{free} + Wp_{N,k+1} \\ 0 \leq v_{N,k+1} + ev_{N,k} \perp p_{N,k+1} \geq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Un système de complémentarité linéaire étant défini par :

$$\begin{cases} w = Mz + q \\ 0 \leq w \perp q \geq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Or comme la première ligne de (3.42) définit une relation linéaire entre les deux variables en complémentarité, alors le système (3.42) correspond à un système de complémentarité linéaire. Pour le résoudre, de nombreux algorithmes existent (par exemple l'algorithme de Lemke qui sera utilisé dans les exemples du chapitre 4). Pour plus de détails à propos des problèmes de complémentarité linéaire, voir COTTLE et al. (1992).

3.3.2 Application au système complet

3.3.2.1 Réduction par rapport à la plasticité

Le système (3.28) peut se résumer aux seules variables primaires inconnues choisies : les contraintes $\sigma_{k+\theta}$, les forces d'érouissage $a_{k+\theta}$ et les impulsions normales au contact $p_{N,k+1}$.

La troisième ligne de ce système (3.28) permet d'exprimer le taux de déformation plastique en fonction des contraintes et des vitesses :

$$h\theta z_{k+\theta} = S(\sigma_{k+\theta} - \sigma_k) - h\theta B v_{k+\theta} \quad (3.44)$$

La première ligne permet d'exprimer les vitesses en fonction des contraintes $\sigma_{k+\theta}$ et des forces d'impulsion normales $p_{N,k+1}$:

$$\begin{aligned} M(v_{k+\theta} - v_k) + h\theta B^\top \sigma_{k+\theta} &= h\theta f_{ext,k+\theta} + \theta H p_{N,k+1} \\ v_{k+\theta} &= h\theta M^{-1} f_{ext,k+\theta} - h\theta M^{-1} B^\top \sigma_{k+\theta} + v_k + \theta M^{-1} H p_{N,k+1} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Cette expression de la vitesse est ensuite introduite dans (3.44) :

$$\begin{aligned} h\theta z_{k+\theta} &= S(\sigma_{k+\theta} - \sigma_k) - h\theta B (h\theta M^{-1} f_{ext,k+\theta} - h\theta M^{-1} B^\top \sigma_{k+\theta} + v_k + \theta M^{-1} H p_{N,k+1}) \\ &= S\sigma_{k+\theta} - S\sigma_k - h^2\theta^2 B M^{-1} f_{ext,k+\theta} + h^2\theta^2 B M^{-1} B^\top \sigma_{k+\theta} - h\theta B v_k - h\theta^2 B M^{-1} H p_{N,k+1} \\ &= (S + h^2\theta^2 B M^{-1} B^\top) \sigma_{k+\theta} - h\theta^2 B M^{-1} H p_{N,k+1} - S\sigma_k - h^2\theta^2 B M^{-1} f_{ext,k+\theta} - h\theta B v_k \end{aligned} \quad (3.46)$$

La dernière ligne de ce développement peut être synthétisée sous la forme sous forme réduite :

$$h\theta z_{k+\theta} = \underbrace{(S + h^2\theta^2 B M^{-1} B^\top)}_U \sigma_{k+\theta} - \underbrace{(h\theta^2 B M^{-1} H)}_V p_{N,k+1} + s_{k+\theta} \quad (3.47)$$

avec

$$s_{k+\theta} = -S\sigma_k - h^2\theta^2 B M^{-1} f_{ext,k+\theta} - h\theta B v_k = -S\sigma_k - h\theta B (h\theta M^{-1} f_{ext,k+\theta} + v_k) \quad (3.48)$$

soit finalement :

$$h\theta z_{k+\theta} = U \sigma_{k+\theta} - V p_{N,k+1} + s_{k+\theta} \quad (3.49)$$

Cette équation permet de substituer la variable de taux de déformation plastique $z_{k+\theta}$ par son expression qui est fonction des variables primaires choisies.

De même, il est possible d'exprimer la variable interne d'érouissage $\alpha_{k+\theta}$ en fonction des variables primaires. La troisième ligne du système (3.28) suffit et exprime directement cette

relation puisque ces variables d'écroissance ne sont pas liées aux autres variables. La force d'écroissance $a_{k+\theta}$ permet donc d'exprimer $\alpha_{k+\theta}$ par :

$$h\theta y_{k+\theta} = D^{-1}a_{k+\theta} - D^{-1}a_k \quad (3.50)$$

Ainsi, l'inclusion différentielle de la plasticité peut être exprimée uniquement avec les variables primaires choisies $\sigma_{k+\theta}$, $a_{k+\theta}$ et $p_{N,k+1}$.

3.3.2.2 Réduction par rapport au contact

Pour exprimer l'inclusion différentielle du contact en fonction des variables primaires, il faut faire apparaître la variable $v_{N,k+1} + ev_{N,k}$ et l'exprimer en fonction des variables primaires.

Suivant le principe présenté dans le paragraphe précédent (3.3.1), la première ligne du système (3.26) permet d'exprimer v_{k+1} en fonction de $\sigma_{k+\theta}$ et de $p_{N,k+1}$:

$$\begin{aligned} M(v_{k+1} - v_k) + hB^\top \sigma_{k+\theta} &= hf_{ext,k+\theta} + Hp_{N,k+1} \\ v_{k+1} &= -hM^{-1}B^\top \sigma_{k+\theta} + hM^{-1}f_{ext,k+\theta} + v_k + M^{-1}Hp_{N,k+1} \end{aligned} \quad (3.51)$$

En multipliant chaque côté par H^\top , il vient :

$$v_{N,k+1} = -hH^\top M^{-1}B^\top \sigma_{k+\theta} + hH^\top M^{-1}f_{ext,k+\theta} + v_{N,k} + H^\top M^{-1}Hp_{N,k+1} \quad (3.52)$$

et il reste à ajouter $ev_{N,k}$ pour avoir l'expression de $v_{N,k+1} + ev_{N,k}$ en fonction des variables primaires. En réorganisant, alors :

$$v_{N,k+1} + ev_{N,k} = -hH^\top M^{-1}B^\top \sigma_{k+\theta} + H^\top M^{-1}Hp_{N,k+1} + hH^\top M^{-1}f_{ext,k+\theta} + (1+e)v_{N,k} \quad (3.53)$$

Comme la multiplication par un scalaire positif préserve une inclusion dans un cône normal, alors en vue d'obtenir une formulation similaire au terme V défini équation (3.47), chaque côté est multiplié par θ^2 :

$$\theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) = -\underbrace{h\theta^2 H^\top M^{-1} B^\top}_{V^\top} \sigma_{k+\theta} + \underbrace{\theta^2 H^\top M^{-1} H}_{W} p_{N,k+1} + r_{k+\theta} \quad (3.54)$$

avec $r = h\theta^2 H^\top M^{-1} f_{ext,k+\theta} + (1+e)\theta^2 v_{N,k}$. Finalement, l'expression recherchée est formalisée par :

$$\theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) = -V^\top \sigma_{k+\theta} + W p_{N,k+1} + r_{k+\theta} \quad (3.55)$$

3.3.2.3 Synthèse des substitutions

L'inclusion différentielle du système (3.28) est, en y incluant $h\theta$ pour les variables de plasticité $z_{k+\theta}$ et $y_{k+\theta}$ ainsi que θ^2 pour le contact suivant (3.55) :

$$-\begin{pmatrix} h\theta z_{k+\theta} \\ h\theta y_{k+\theta} \\ \theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m+}} \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

A l'aide des équations (3.49), (3.50) et (3.55), cette inclusion s'écrit en inversant les lignes :

$$-\begin{pmatrix} U\sigma_{k+\theta} - Vp_{N,k+1} + s_{k+\theta} \\ D^{-1}a_{k+\theta} - D^{-1}a_k \\ -V^\top \sigma_{k+\theta} + Wp_{N,k+1} + r_{k+\theta} \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{m+}} \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

et elle peut être écrite sous forme matricielle :

$$- \left(Q \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} + p \right) \in N_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^m} + \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

où la matrice Q et le vecteur p sont définis par :

$$Q = \begin{bmatrix} U & 0 & -V \\ 0 & D^{-1} & 0 \\ -V^\top & 0 & W \end{bmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} s_{k+\theta} \\ -D^{-1}a_k \\ r_{k+\theta} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

3.3.2.4 Caractère bien posé du problème

Il faut regarder les propriétés de la matrice Q afin de vérifier que cette nouvelle formulation possède bien une unique solution. Pour cela, plusieurs hypothèses sont nécessaires. Tout d'abord, les matrices M et S sont définies positives. Ensuite, il faut que la matrice d'écroissage D soit aussi une matrice définie positive, ce qui implique que seul de l'écroissage strictement positif soit considéré. Enfin, la matrice H doit être de rang plein afin que l'opérateur de *Delassus* $W = \theta^2 H^\top M^{-1} H$ soit une matrice définie positive (cette propriété est classiquement vérifiée avec la discrétisation par éléments finis).

Avec ces propriétés, la matrice Q définie dans l'équation (3.59) peut se réécrire :

$$Q = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & W \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} h\theta^2 B M^{-1} B^\top & 0 & -\theta^2 B M^{-1} H \\ 0 & 0 & 0 \\ -\theta^2 H^\top M^{-1} B^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Ainsi, dès lors que le pas de temps h est suffisamment petit, la matrice Q est une matrice définie positive et résoudre l'inéquation variationnelle (3.58) est équivalent à résoudre le problème d'optimisation quadratique strictement convexe suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, a, p_N} \quad & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix} + p^\top \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Remarque 12. *En considérant le problème en plasticité parfaite, la matrice d'écroissage D est nulle. Dans ce cas, les forces d'écroissage a et les variables internes associées α n'évolueront pas. Pour conserver la stricte convexité du problème, il faut alors réduire les matrices et les vecteurs en supprimant les lignes et colonnes associées pour ne conserver que celles qui sont liées à $\sigma_{k+\theta}$ et à $p_{N,k+1}$. En posant alors :*

$$Q = \begin{bmatrix} U & -V \\ -V^\top & W \end{bmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} s_{k+\theta} \\ r_{k+\theta} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

le problème d'optimisation quadratique convexe à résoudre est réduit à :

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, p_N} \quad & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma \\ p_N \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \sigma \\ p_N \end{pmatrix} + p^\top \begin{pmatrix} \sigma \\ p_N \end{pmatrix} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{pmatrix} \sigma \\ p_N \end{pmatrix} \in \mathbf{C} \times \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \tag{3.63}$$

et l'existence et l'unicité de la solution sont toujours assurées.

En résumé, si la matrice H est de rang plein, que le pas de temps h est petit et que la matrice d'érouissage D correspond à de l'érouissage positif au travers d'une matrice symétrique définie positive ou dans le cas de la plasticité parfaite (avec réduction du système et pas de recherche de valeurs de $a_{k+\theta}$), il y a unicité de la solution du problème d'optimisation (3.61) qui correspond au système initial (3.26) après substitution des relations linéaires entre les variables.

3.4 Méthodes de résolution

3.4.1 Problème d'optimisation quadratique

Il a été prouvé que le problème discret initialement présenté dans (3.26) possède une solution unique. Suite à la réduction du nombre d'inconnues à l'aide de substitutions par les relations linéaires entre les variables, le problème a été formulé sous la forme d'une inclusion (équation (3.58)). Puis, à l'aide d'hypothèses qu'il conviendra de respecter, cette inclusion a été présentée comme équivalente à un problème d'optimisation quadratique possédant lui aussi une solution unique.

Tout comme il est possible de résoudre directement le problème de point selle présenté paragraphe 3.2.1, il est aussi envisageable de résoudre directement le problème d'optimisation quadratique (3.61) sous contraintes à l'aide de l'une des nombreuses méthodes existantes (algorithmes de point intérieur, proximal, méthodes de *Newton* non lisse ou semi-lisse en particulier).

Dans le cas de la plasticité, l'ensemble des contraintes et forces d'érouissage admissibles \mathbf{C} est fini et peut être représenté par un ensemble d'inégalités qui forment la fonction d'écoulement \mathcal{Y} . Afin de conserver le formalisme, la fonction $f = -\mathcal{Y} \geq 0$ sera utilisée pour définir l'ensemble \mathbf{C} de manière analogue à (2.30) :

$$\mathbf{C} = \{(\sigma, a) \mid f(\sigma, a) \geq 0\} \tag{3.64}$$

La fonction f est un vecteur colonne contenant l'ensemble des fonctions représentant le contour de l'ensemble \mathbf{C} et chacune de ses composantes doit être positive. Sous ces conditions sur l'ensemble \mathbf{C} , le problème d'optimisation (3.61) peut se reformuler :

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, a, p_N} \quad & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix}^\top Q \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix} + p^\top \begin{pmatrix} \sigma \\ a \\ p_N \end{pmatrix} \\ \text{s.c.} \quad & f(\sigma, a) \geq 0 \\ & p_N \geq 0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Dans le cas de la plasticité en quasi-statique, ces méthodes ont déjà été utilisées et éprouvées. C'est le cas de KANNO (2020) qui utilise un algorithme de gradient proximal, de KRABBENHØFT et al. (2007b) avec un algorithme de point intérieur, de TANGARAMVONG et al. (2012) avec des méthodes de complémentarité ou encore de CHRISTENSEN (2002a) avec une méthode de *Newton* non-lisse. Il faut aussi souligner CHRISTENSEN (2002b) étend son article précédent au cas du contact et du comportement plastique à l'aide d'une méthode de *Newton* semi-lisse.

Remarque 13. *Dans certains cas, l'ensemble C a la structure d'un cône convexe (comme c'est le cas pour les géomatériaux avec les critères de plasticité usuels de DRUCKER-PRAGER ou de MOHR-COULOMB. Dans ce cas, la formulation de cet ensemble sous la forme du vecteur f comme dans (3.64) est complexe puisque des fonctions non différentiables sont obtenues.*

Cependant, la plupart des critères courants peuvent être formulés en tant que problèmes coniques du second ordre ou de problèmes coniques symétriques, et ainsi il est possible d'utiliser les outils de résolution appropriés pour ce type de problème comme la programmation conique du second ordre utilisée en plasticité par KRABBENHØFT et al. (2007a) ou encore par YONEKURA et KANNO (2012).

3.4.2 Cas particulier de C ensemble de relations linéaires

Dans le cas où l'ensemble C est fini et défini par un ensemble de relations linéaires, il est possible de formuler le problème de plasticité sous forme d'un problème de complémentarité linéaire comme la présentation faite pour le contact dans la remarque 11. Ainsi, c'est l'inclusion différentielle (3.58) synthétisant l'ensemble du problème qui peut être réécrite sous forme de LCP.

3.4.2.1 Formulation de la fonction d'écoulement

L'ensemble C est donc considéré complètement représenté par n_y fonctions réunies dans le vecteur f (opposé de la fonction d'écoulement \mathcal{Y}) telles que $f_i \geq 0$ (avec $i \in \llbracket 1, n_y \rrbracket$). En considérant f dérivable et de gradient non nul, le cône normal à C s'écrit :

$$N_C(\sigma, a) = \left\{ z, y \mid \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = -\nabla_{\sigma, a}^\top f(\sigma, a) \lambda, \lambda \geq 0, \lambda^\top f(\sigma, a) = 0 \right\} \quad (3.66)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$N_C(\sigma, a) = \left\{ z, y \mid \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = -\sum_i \nabla_{\sigma, a}^\top f_i(\sigma, a) \lambda_i, \lambda_i \geq 0, \lambda_i^\top f_i(\sigma, a) = 0, i \in \llbracket 1, n_f \rrbracket \right\} \quad (3.67)$$

La règle d'écoulement (3.20), qu'il convient de rappeler :

$$-\begin{pmatrix} z_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} \end{pmatrix} \in N_C \begin{pmatrix} \sigma_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

s'écrit alors sous la forme de conditions de complémentarité :

$$\begin{cases} z_{k+\theta} = \nabla_\sigma^\top f(\sigma, a)_{k+\theta} \lambda_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} = \nabla_a^\top f(\sigma, a)_{k+\theta} \lambda_{k+\theta} \\ 0 \leq \lambda_{k+\theta} \perp f(\sigma, a)_{k+\theta} \geq 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Cette équation correspond à la forme classique de la loi d'écoulement en plasticité associée. Le vecteur des multiplicateurs plastiques $\lambda \in \mathbb{R}^{n_{g,\varepsilon}}$ est donc mis en complémentarité avec la loi d'écoulement. Afin d'obtenir un système de complémentarité linéaire, il faut réussir à trouver une relation linéaire entre $\lambda_{k+\theta}$ et $f(\sigma, a)_{k+\theta}$ afin d'obtenir un système de la forme de l'équation type (3.43).

Pour cela, comme la fonction d'écoulement est linéaire, son gradient est constant en tout point et au cours du temps. Sous forme matricielle, ces gradients seront notés :

$$J_\sigma = \nabla_\sigma^\top f(\sigma, a) \quad \text{et} \quad J_a = \nabla_a^\top f(\sigma, a) \quad (3.70)$$

La fonction d'écoulement s'écrit alors sous la forme :

$$- \mathcal{Y}(\sigma, a)_{k+\theta} = f(\sigma, a)_{k+\theta} = J_\sigma^\top \sigma_{k+\theta} + J_a^\top a_{k+\theta} + \kappa_Y \quad (3.71)$$

avec $\kappa_Y \in \mathbb{R}^{n_{g,\varepsilon}}$ le vecteur contenant les contraintes limites aux points de Gauss.

3.4.2.2 Reformulation du problème en LCP

Pour reformuler le problème en LCP, les variables inconnues $\sigma_{k+\theta}$ et $a_{k+\theta}$ sont remplacées par $\lambda_{k+\theta}$ puisque c'est cette dernière qui est en complémentarité avec la fonction d'écoulement. La première étape de la reformulation est donc d'exprimer $\sigma_{k+\theta}$ et $a_{k+\theta}$ en fonction de $\lambda_{k+\theta}$.

Avec les définitions matricielles de (3.70), l'équation (3.69) des conditions de complémentarité se réécrit :

$$\begin{cases} z_{k+\theta} = J_\sigma \lambda_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} = J_a \lambda_{k+\theta} \\ 0 \leq \lambda_{k+\theta} \perp f(\sigma, a)_{k+\theta} \geq 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Les variables $z_{k+\theta}$ et $y_{k+\theta}$ sont substituées dans les équations (3.50) et (3.49) et il vient alors :

$$\begin{aligned} h\theta J_\sigma \lambda_{k+\theta} &= U \sigma_{k+\theta} - V p_{N, k+1} + s_{k+\theta} \\ h\theta J_a \lambda_{k+\theta} &= D^{-1} a_{k+\theta} - D^{-1} a_k \end{aligned} \quad (3.73)$$

et donc $\sigma_{k+\theta}$ et $a_{k+\theta}$ s'expriment en fonction de $\lambda_{k+\theta}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{k+\theta} &= h\theta U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} + U^{-1} V p_{N, k+1} - U^{-1} s_{k+\theta} \\ a_{k+\theta} &= h\theta D J_a \lambda_{k+\theta} + a_k \end{aligned} \quad (3.74)$$

La variable $p_{N, k+1}$ est conservée dans l'expression de $\sigma_{k+\theta}$ puisque c'est l'une des deux inconnues en complémentarité dans le cadre du contact.

Ces valeurs sont ensuite introduites dans l'équation de la fonction de charge (3.71) :

$$\begin{aligned} f(\lambda_{k+\theta}, p_{N, k+1}) &= J_\sigma^\top (h\theta U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} + U^{-1} V p_{N, k+1} - U^{-1} s_{k+\theta}) + J_a^\top (h\theta D J_a \lambda_{k+\theta} + a_k) + \kappa_Y \\ &= h\theta J_\sigma^\top U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} + J_\sigma^\top U^{-1} V p_{N, k+1} - J_\sigma^\top U^{-1} s_{k+\theta} + h\theta J_a^\top D J_a \lambda_{k+\theta} + J_a^\top a_k + \kappa_Y \\ &= h\theta \left(J_\sigma^\top U^{-1} J_\sigma + J_a^\top D J_a \right) \lambda_{k+\theta} + J_\sigma^\top U^{-1} V p_{N, k+1} - J_\sigma^\top U^{-1} s_{k+\theta} + J_a^\top a_k + \kappa_Y \end{aligned} \quad (3.75)$$

Afin d'exprimer l'équation du contact à l'aide des contraintes, il faut maintenant remplacer $\sigma_{k+\theta}$ dans (3.55) par sa définition issue de (3.74) :

$$\begin{aligned}
 \theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) &= -V^\top (h\theta U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} + U^{-1} V p_{N,k+1} - U^{-1} s_{k+\theta}) + W p_{N,k+1} + r_{k+\theta} \\
 &= -h\theta V^\top U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} - V^\top U^{-1} V p_{N,k+1} + V^\top U^{-1} s_{k+\theta} + W p_{N,k+1} + r_{k+\theta} \\
 &= -h\theta V^\top U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} + (W - V^\top U^{-1} V) p_{N,k+1} + V^\top U^{-1} s_{k+\theta} + r_{k+\theta}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Le système est donc réduit aux couples de variables $\lambda_{k+\theta}$ et $p_{N,k+1}$ d'une part, et $f(\lambda_{k+\theta}, p_{N,k+1})$ et $\theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k})$ d'autre part, ces deux couples étant en complémentarité l'un avec l'autre. Les dernières lignes de (3.75) et de (3.76) permettent d'obtenir la relation linéaire entre les deux couples de variables. En effet, en posant :

$$L = \begin{bmatrix} J_\sigma^\top U^{-1} J_\sigma + J_a^\top D J_a & J_\sigma^\top U^{-1} V \\ -V^\top U^{-1} J_\sigma & W - V^\top U^{-1} V \end{bmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} -J_\sigma^\top U^{-1} s_{k+\theta} + J_a^\top a_k + \kappa_Y \\ V^\top U^{-1} s_{k+\theta} + r_{k+\theta} \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

alors les équations (3.75) et (3.76) permettent d'écrire le LCP suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f_{k+\theta} \\ \theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} h\theta \lambda_{k+\theta} \\ p_{N,k+1} \end{pmatrix} + q \\ 0 \leq h\theta \lambda_{k+\theta} \perp f_{k+\theta} \geq 0 \\ 0 \leq \theta^2(v_{N,k+1} + ev_{N,k}) \perp p_{N,k+1} \geq 0 \end{cases} \tag{3.78}$$

3.5 Exemples 1D - suite

3.5.1 Plasticité : Barre en traction - compression

3.5.1.1 Discrétisation temporelle et algorithme

En reprenant l'exemple présenté dans au paragraphe 2.9.1, la discrétisation du système (2.192) donne :

$$\begin{cases} M(v_{k+1} - v_k) + hB^\top \sigma_{k+\theta} = h f_{ext\ k+\theta} \\ C^{-1}(\sigma_{k+1} - \sigma_k) = hB v_{k+\theta} - h z_{k+\theta} \\ D^{-1}(a_{k+1} - a) = h y_{k+\theta} \\ -\mathcal{Y}_{k+\theta} = f_{k+\theta} = J_\sigma^\top \sigma_{k+\theta} + J_a^\top a_{k+\theta} + \kappa_Y \geq 0 \\ \begin{cases} z_{k+\theta} = -J_\sigma \lambda_{k+\theta} \\ y_{k+\theta} = -J_a \lambda_{k+\theta} \\ 0 \leq f_{k+\theta} \perp \lambda_{k+\theta} \geq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.79}$$

La matrice L et le vecteur q définis dans (3.77) sont réduits à :

$$L = [J_\sigma^\top U^{-1} J_\sigma + J_a^\top D J_a] \quad q = (-J_\sigma^\top U^{-1} s_{k+\theta} + J_a^\top a_k + \kappa_Y) \tag{3.80}$$

où $s_{k+\theta}$ est défini par (3.48), et le LCP (3.78) devient :

$$\begin{cases} f_{k+\theta} = h\theta L \lambda_{k+\theta} + q \\ 0 \leq h\theta \lambda_{k+\theta} \perp f_{k+\theta} \geq 0 \end{cases} \tag{3.81}$$

ALGORITHME 1 : Exemple 1D barre élastoplastique en quasi-statique

-
- (i) Saisie des données
 - pour la barre : E, A, ρ, L et σ_Y
 - pour le maillage : $n_{el} = 1$
 - conditions aux limites (déplacement nul au nœud 1)
 - pour la résolution numérique : k_{fin}, h et θ
 - (ii) Construction des matrices B, M, C et D
 - (iii) Construction des opérateurs :
 - J_σ et J_a
 - $U = C^{-1} + h^2\theta^2 BM^{-1}B^\top$
 - $L = -J_\sigma^\top U^{-1}J_\sigma - J_a^\top DJ_a$
 - (iv) Initialisation : $k = 0$
 - définition de $u(t_0) = u_{ini}, v(t_0) = v_{ini}$ et $f_{ext}(t_0) = F_{ext\ ini}$
 - (v) Pour chaque itération $k = \llbracket 0, k_{fin} \rrbracket$:
 - (v-i) construction de $s_{k+\theta}$ puis de q
 - (v-ii) résolution du LCP (3.81) qui fournit $f_{k+\theta}$ et $h\theta\lambda_{k+\theta}$
 - (v-iii) calcul des variables du système à $t_{k+\theta}$:
 - $\dot{\varepsilon}_{k+\theta}^p = -J_\sigma \lambda_{k+\theta}$
 - $\dot{\alpha}_{k+\theta} = J_a \lambda_{k+\theta}$
 - $\sigma_{k+\theta} = -h\theta U^{-1} J_\sigma \lambda_{k+\theta} - U^{-1} s_{k+\theta}$
 - $a_{k+\theta} = -h\theta U^{-1} J_a \lambda_{k+\theta} + a_k$
 - $v_{k+\theta} = h\theta f_{ext\ k+\theta} - h\theta M^{-1} B^\top \sigma_{k+\theta} + v_k$
 - (v-iv) calcul des variables du système à t_{k+1} : σ_{k+1}, a_{k+1}
et v_{k+1} suivant la forme $\square_{k+1} = (\square_{k+\theta} - (1 - \theta)\square_k)/\theta$
 - (v-v) $k = k + 1$
-

Une fois ces matrices et vecteurs définis, il est possible d'utiliser l'ALGORITHME 1 pour effectuer une simulation.

3.5.1.2 Simulation

L'ALGORITHME 1 a donc été utilisé pour simuler un cycle de charge-décharge-charge d'une barre de 1 mètre de long et de section carrée de $1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Cette barre est en acier de module d'Young $E = 210\text{ GPa}$, de masse volumique $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$, de limite d'élasticité $\sigma_Y = 150\text{ MPa}$ et de modules d'érouissage $K = 21\,000\text{ MPa}$ et $H = 2\,100\text{ MPa}$.

Les forces sont imposées suivant une vitesse de chargement de 1 kN/s , ce qui revient à une vitesse de déplacement du nœud libre (v_2) durant les phases élastiques de 0.0476 mm/s . En utilisant un pas de temps assez grand ($h = 0.01\text{ s}$) et en choisissant $\theta = 1$, les termes d'inertie deviennent négligeables et la simulation est quasi-statique.

Suivant la figure 3.1a, la force augmente de 1 kN/s durant les 20 premières secondes, puis diminue à la même vitesse durant les 50 secondes suivantes avant de réaugmenter jusqu'à la fin de la simulation (soit durant 100 secondes).

La figure 3.1c montre les déplacements u_2 non linéaires de l'extrémité libre de la barre au cours du temps. La vitesse de déplacement augmente lors des phases plastiques. La figure 3.1b montre la courbe de la relation contrainte-déformation dans la barre : lors de la première

charge, dès que la contrainte atteint la contrainte limite, la relation n'est plus linéaire. Enfin, la figure 3.1d montre l'activation des multiplicateurs plastiques λ au cours du temps : lors de la première charge, le premier multiplicateur (λ_1) est activé puis, lors de la décharge, l'autre limite de l'ensemble C est atteinte donc c'est le second multiplicateur (λ_2) qui est activé. Enfin, lors de la recharge, c'est à nouveau λ_1 qui est activé.

A travers cet exemple d'application, la formulation d'un essai de traction-compression simplifié a été présentée en détails et un algorithme détaillé simple permet de simuler l'essai quasi-statique. Le chapitre 4 présentera des applications plus poussées de cet algorithme.

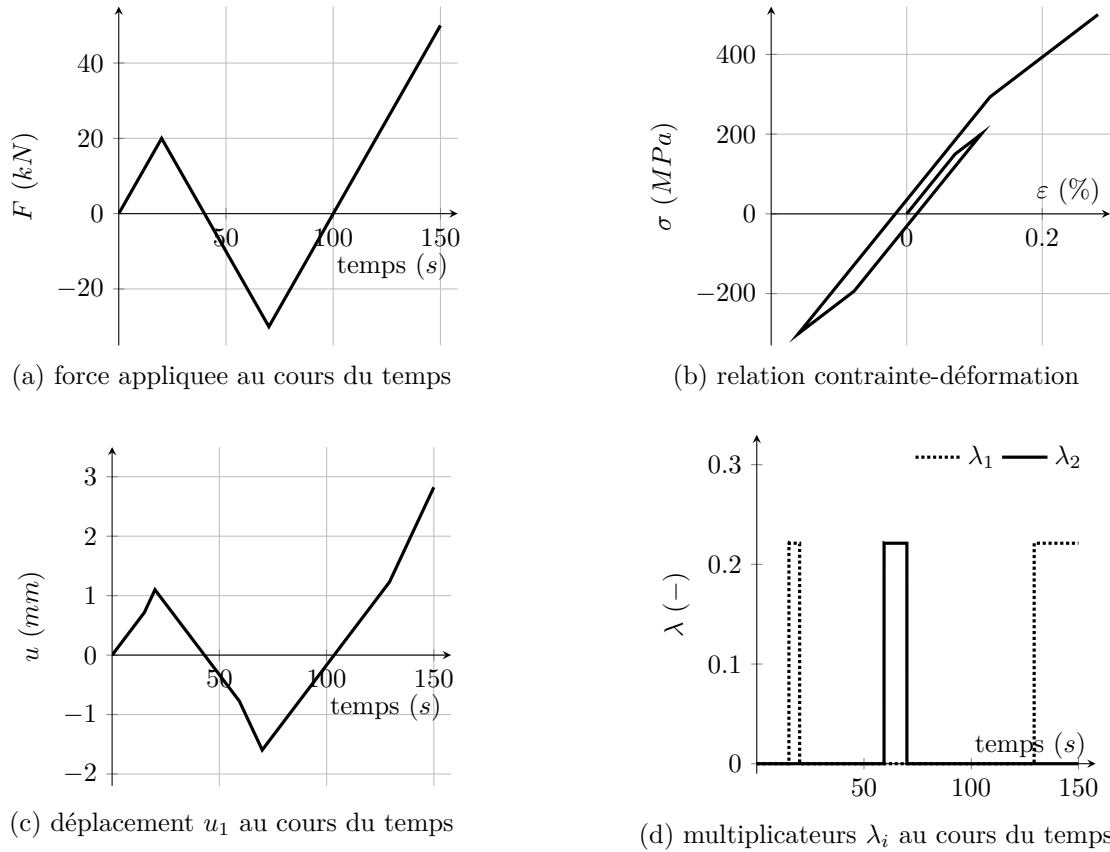


FIGURE 3.1 – Résultats de la simulation de l'exemple 1D élastoplastique. Les efforts sont appliqués lentement pour avoir un cas de charge quasi-statique.

3.5.2 Contact : *Bouncing ball*

3.5.2.1 Discrétisation temporelle et algorithme

Le système dynamique décrit dans (2.193) après discrétisation temporelle suivant (3.38) devient :

$$\begin{cases} m(v_{k+1} - v_k) = -hmg + p_{N,k+1} \\ u_{k+1} = u_k + hv_{k+\theta} \\ g_{N,k+1} = u_{k+1} - b \\ -(v_{k+1} + ev_k) \in N_{\mathbb{R}^m} + (p_{N,k+1}) \end{cases} \quad (3.82)$$

Suivant la remarque 11, ce système est reformulé sous la forme d'un LCP dans le cas où il y a contact. A partir de la première ligne de (3.82), la relation linéaire entre les variables en

ALGORITHME 2 : Exemple *bouncing ball*

-
- (i) Saisie des données
 - pour la bille : m, b
 - pour la constante de gravité : g
 - pour la résolution numérique : k_{fin}, e, h et θ
 - (ii) Initialisation : $k = 0$
 - définition de $u_0 = u_{ini} \geq b, v_0 = v_{ini}$ et $f_{ext} = -mg$
 - calcul de $g_{N0} = u_0 - b$
 - (iii) Pour chaque itération $k = \llbracket 0, k_{fin} \rrbracket$:
 - (iii-i) si $g_{Nk} > 0$:
 - calcul de $v_{k+1} = v_k - hg$
 - (iii-ii) sinon :
 - calcul de $v_{k+1}^{free} = -hg + (1 + e)v_k$:
 - résolution du LCP (3.42) qui fournit $v_{k+1} + ev_k$ et p_{k+1}
 - calcul de v_{k+1}
 - mise à jour de la position $u_{k+1} = u_k + hv_{k+\theta}$
 - calcul de $g_{Nk+1} = u_{k+1} - b$
 - (iii-iii) $k = k + 1$
-

complémentarité du LCP est établie :

$$\begin{aligned}
 v_{k+1} &= v_k - hg + \frac{1}{m}p_{Nk+1} \\
 v_{k+1} + ev_k &= (1 + e)v_k - hg + \frac{1}{m}p_{Nk+1} \\
 v_{k+1} + ev_k &= v_{k+1}^{free} + Wp_{N,k+1}
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

avec

$$v_{k+1}^{free} = (1 + e)v_k - hg \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{m} \tag{3.84}$$

Le système (3.82) devient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 m(v_{k+1} - v_k) = -hmg + p_{Nk+1} \\
 u_{k+1} = u_k + hv_{k+\theta} \\
 g_{Nk+1} = u_{k+1} - b \\
 p_{N,k+1} = 0 \quad \text{si } g_{Nk} > 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 v_{k+1} + ev_k = v_{k+1}^{free} + Wp_{N,k+1} \\
 0 \leq v_{N,k+1} + ev_{N,k} \perp p_{N,k+1} \geq 0
 \end{array} \right. \quad \text{si } g_{Nk} \leq 0
 \end{array} \right. \tag{3.85}$$

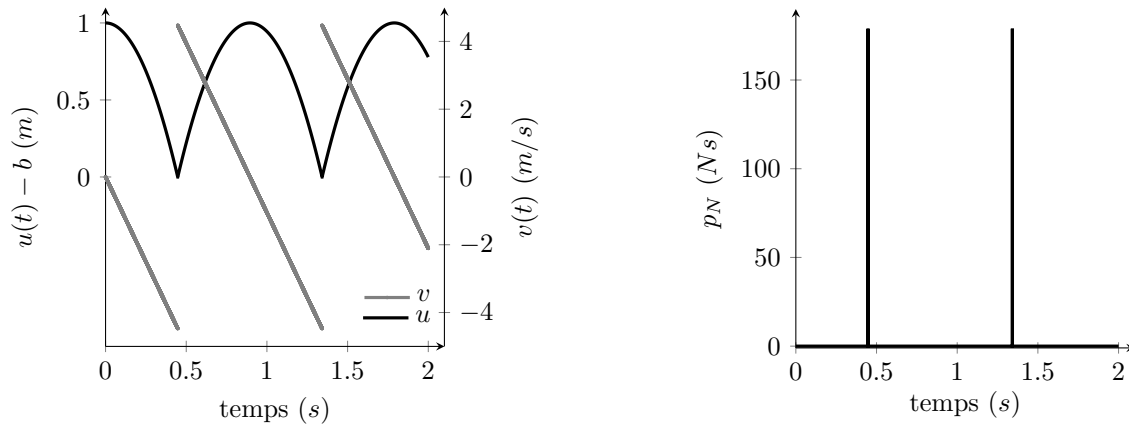
L'ALGORITHME 2 permet ainsi de simuler les rebonds d'une bille indéformable sur un sol rigide.

3.5.2.2 Simulation

Une simulation a été effectuée suivant l'ALGORITHME 2 pour une bille de masse $m = 20 \text{ kg}$ et de rayon $b = 0.1 \text{ m}$ (la gravité est prise à $g = 10 \text{ m/s}^2$). La bille chute d'une position initiale $u_0 = 1.1 \text{ m}$ sans vitesse initiale ($v_0 = 0 \text{ m/s}$).

Le coefficient de restitution est $e = 1$, la loi de contact ne dissipe ainsi aucune énergie. Le pas de temps est pris tel que $h = 10^{-4} s$, et enfin, $\theta = 1$.

La figure 3.2a présente la position du bas de la bille au cours du temps : ses rebonds sont observables et du fait du choix $e = 1$, la bille remonte à la même altitude qu'au départ. Sur cette figure, la vitesse verticale au cours du temps de la bille est aussi présentée, et il faut remarquer le saut de vitesse lors de l'impact. Aux instants de ces sauts, il y a présence d'une impulsion de réaction (figure 3.2b).



(a) position du bas de la bille et vitesse au cours du temps

(b) impulsions de réaction p_N au cours du temps

FIGURE 3.2 – Résultats de la simulation de la *bouncing ball*

Même si le choix du pas de temps h a peu d'influence sur les résultats de la dynamique, une valeur trop importante ne permet pas de capturer correctement l'instant d'impact lors de la détection du contact, et des interpénétrations non négligeables peuvent apparaître (voir sur la figure 3.3a où lorsque $h = 1.10^{-2} s$, le bas de la bille passe en dessous de 0 et un décalage apparaît, alors que pour les deux valeurs de pas de temps plus fines, les positions coïncident).

Enfin, la simulation est comparée avec le modélisation régularisée du contact unilatéral à l'aide de la méthode des pénalités¹ (voir paragraphe 1.2.3.1). La figure 3.3b montre que cette régularisation du contact fait que les vitesses ne s'inversent plus instantanément mais qu'elles sont continues, et il est visible que plus le paramètre de pénalité k_c est élevé, plus le résultat est proche de la méthode NSCD.

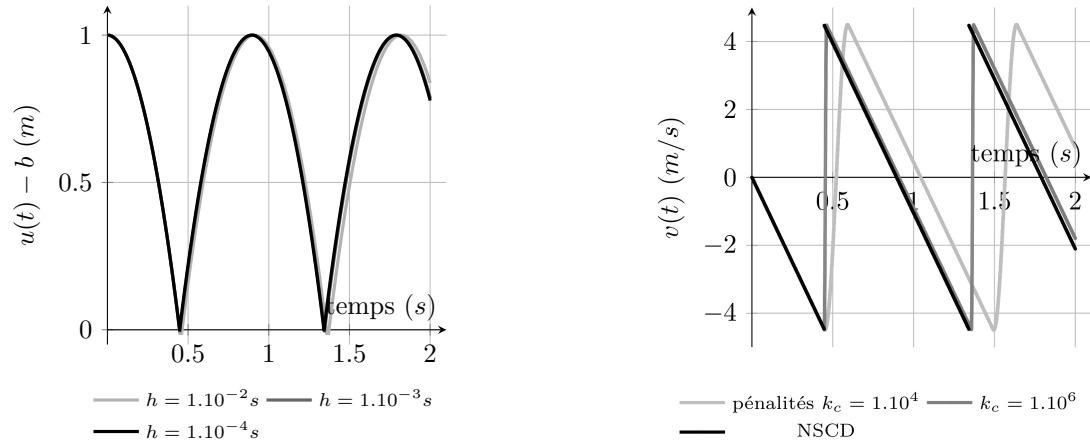
3.6 Propriétés énergétiques du schéma de *Moreau-Jean*

3.6.1 Bilan énergétique discret

Comme évoqué au paragraphe 3.1.1 page 83, le schéma de *Moreau-Jean* utilisé pour la discrétisation temporelle bénéficie d'excellentes propriétés énergétiques. L'objet de cette section est de les présenter, de les étudier et de les commenter. Une part importante de cette discussion est issue de (ACARY, 2016).

Il faut donc vérifier que le schéma permette d'obtenir une approximation consistante du travail de la dissipation plastique, et réussir à exprimer l'énergie qu'il dissipe afin de dresser un bilan énergétique fiable de l'analyse des processus dissipatifs.

1. Dans le cas de la loi de contact régularisée, les paramètres utilisés sont $\theta = 0.5$ et $h = 1.10^{-5} s$.


 (a) NSCD pour différentes valeurs de pas de temps h

 (b) NSCD vs méthode des pénalités pour différentes valeurs de paramètre de pénalité k_c

 FIGURE 3.3 – Comparaison de la simulation de la *bouncing ball* en NSCD avec différents pas de temps, et entre la méthode NSCD et le contact compliant pour différentes valeurs de raideur de contact k_c .

Suivant le développement du bilan énergétique discrétisé en espace dans le paragraphe 2.6, l'équation (2.150) fait intervenir des variations de quantités d'énergie et donc induit une conservation de la quantité d'énergie présente à l'instant initial au travers d'une partie interne et d'une partie dissipée.

L'évolution de la quantité d'énergie mécanique totale $dE(t) = d(\mathbb{T}(t) + \Psi(t))$ au cours d'un pas de temps est donnée par la différence de cette quantité entre l'instant final t_{k+1} et l'instant initial t_k :

$$\Delta E_k^{k+1} = \Delta(\mathbb{T} + \Psi)_k^{k+1} = \Delta \mathbb{T}_k^{k+1} + \Delta \Psi_k^{k+1} \quad (3.86)$$

Le développement des variations au cours du pas de temps des énergies cinétique et potentielle permet d'exprimer le bilan discret en énergie à l'aide des inconnues calculées à chaque pas de temps, et donc d'analyser les dissipations.

Variation de \mathbb{T} A l'aide de la propriété de symétrie sur la matrice de masse $M = M^\top$, le terme de l'énergie cinétique devient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbb{T}_k^{k+1} &= \mathbb{T}_{k+1} - \mathbb{T}_k \\ &= \frac{1}{2} v_{k+1}^\top M v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^\top M v_k \\ &= \frac{1}{2} (v_{k+1} + v_k)^\top M (v_{k+1} - v_k) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Or, d'après la définition de la θ -méthode dans l'équation (3.9), il est possible de reformuler l'expression de $v_{k+\theta}$:

$$\begin{aligned}
 v_{k+\theta} &= \theta v_{k+1} + (1 - \theta)v_k \\
 &= \theta v_{k+1} + v_k - \theta v_k + \frac{1}{2}v_{k+1} - \frac{1}{2}v_{k+1} \\
 &= \theta(v_{k+1} - v_k) + \frac{1}{2}(v_{k+1} + v_k) - \frac{1}{2}(v_{k+1} - v_k) \\
 &= \frac{1}{2}(v_{k+1} + v_k) - \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(v_{k+1} - v_k)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

ce qui donne finalement, en réorganisant :

$$\frac{1}{2}(v_{k+1} + v_k) = v_{k+\theta} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(v_{k+1} - v_k) \tag{3.89}$$

En introduisant ce résultat dans (3.87), il vient :

$$\Delta \mathbf{T}_k^{k+1} = v_{k+\theta}^\top M(v_{k+1} - v_k) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(v_{k+1} - v_k)^\top M(v_{k+1} - v_k) \tag{3.90}$$

Puis, en définissant la norme $\|v_{k+1} - v_k\|_M = (v_{k+1} - v_k)^\top M(v_{k+1} - v_k)$, alors la variation discrète de l'énergie cinétique devient :

$$\Delta \mathbf{T}_k^{k+1} = v_{k+\theta}^\top M(v_{k+1} - v_k) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|v_{k+1} - v_k\|_M \tag{3.91}$$

et, à l'aide de la première ligne du système (3.26) (équation de la dynamique discrète) on obtient finalement :

$$\Delta \mathbf{T}_k^{k+1} = v_{k+\theta}^\top \left(hF_{ext,k+\theta} - hB^\top \sigma_{k+\theta} + Hp_{N,k+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|v_{k+1} - v_k\|_M \tag{3.92}$$

Cette équation permet de calculer la variation de l'énergie cinétique au cours d'un pas de temps à l'aide des valeurs obtenues lors de la résolution du système (3.26)

Variation de Ψ Suivant le même principe que pour l'énergie cinétique, la variation de l'énergie potentielle est développée. Comme d'après les hypothèses adoptées $E = E^\top$ et $D = D^\top$, alors :

$$\begin{aligned}
 \Delta \Psi_k^{k+1} &= \Psi_{k+1} - \Psi_k \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{k+1}^e{}^\top E \varepsilon_{k+1}^e - \frac{1}{2} \varepsilon_k^e{}^\top E \varepsilon_k^e + \frac{1}{2} \alpha_{k+1}^\top D \alpha_{k+1} - \frac{1}{2} \alpha_k^\top D \alpha_k \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{k+1}^e + \varepsilon_k^e)^\top E (\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) + \frac{1}{2} (\alpha_{k+1} + \alpha_k)^\top D (\alpha_{k+1} - \alpha_k)
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

D'après le même raisonnement que dans l'équation (3.88) pour obtenir (3.89), il vient :

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_{k+1}^e + \varepsilon_k^e) = \varepsilon_{k+\theta}^e + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) (\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} (\alpha_{k+1} + \alpha_k) = \alpha_{k+\theta} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \tag{3.94}$$

En insérant ces résultats dans (3.93), il vient :

$$\begin{aligned}
 \Delta\Psi_k^{k+1} &= \left(\varepsilon_{k+\theta}^e + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) \right)^\top E(\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) + \\
 &\quad \left(\alpha_{k+\theta} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right)^\top D(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) (\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e)^\top E(\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{2} - \theta\right) (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^\top D(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + \\
 &\quad \varepsilon_{k+\theta}^{e\top} E(\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e) + \alpha_{k+\theta}^\top D(\alpha_{k+1} - \alpha_k)
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

En définissant là encore les normes suivantes : $\|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E = (\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e)^\top E(\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e)$ ainsi que $\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D = (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^\top D(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$, et en se souvenant de la relation générale $\square_{k+1} = \square_k + h\square_{k+\theta}$, alors :

$$\Delta\Psi_k^{k+1} = \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D + h\sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e + ha_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta} \tag{3.96}$$

Expression du bilan énergétique En revenant à l'équation (3.86) et en y remplaçant $\Delta\mathbb{T}_k^{k+1}$ par (3.92) et $\Delta\Psi_k^{k+1}$ par (3.96) :

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k^{k+1} &= v_{k+\theta}^\top (hF_{ext,k+\theta} - hB^\top \sigma_{k+\theta} + Hp_{N,k+1}) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|v_{k+1} - v_k\|_M \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D + h\sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e + ha_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta}
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

soit, en factorisant par $1/2 - \theta$ tous les termes avec les normes :

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k^{k+1} &= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right) \\
 &\quad + v_{k+\theta}^\top (hF_{ext,k+\theta} - hB^\top \sigma_{k+\theta} + Hp_{N,k+1}) + h\sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e + ha_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Définition discrète des travaux Le travail des forces extérieures au cours d'un pas de temps, noté $W_{\text{ext } k}^{k+1}$, est défini par l'intégrale de la puissance des forces externes entre t_k et t_{k+1} . A partir de (2.148) qui définit cette puissance, $W_{\text{ext } k}^{k+1}$ est approximé par la θ -méthode, ce qui donne :

$$W_{\text{ext } k}^{k+1} = hv_{k+\theta}^\top f_{ext,k+\theta} \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{ext}(t) dt \tag{3.99}$$

De même, le travail des efforts dissipés W_p^{k+1} est défini par l'intégrale au cours du pas de temps de la dissipation $D(t)$ (équation (2.147)) approximée par la θ -méthode :

$$W_p^{k+1} = h\sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^p - ha_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta} = -h\sigma_{k+\theta}^\top z_{k+\theta} - ha_{k+\theta}^\top y_{k+\theta} \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} D(t) dt \tag{3.100}$$

Enfin, le travail des forces de contact au cours du pas de temps est défini par l'intégrale entre t_k et t_{k+1} de l'impulsion d'impact (équation (2.149)), approximée par :

$$W_c^{k+1} = v_{N,k+\theta}^\top p_{N,k+1} \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} dP_{impact}(t) \tag{3.101}$$

Conclusion sur le bilan énergétique discret En développant l'équation (3.98), les expressions des travaux qui viennent d'être définis apparaissent :

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k^{k+1} &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right) \\
 &\quad + h v_{k+\theta}^\top F_{ext,k+\theta} - h v_{k+\theta}^\top B^\top \sigma_{k+\theta} + v_{k+\theta}^\top H p_{N,k+1} + h \sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e + h a_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right) \\
 &\quad + W_{ext\ k}^{k+1} - h \sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta} + h \sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^e + h a_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta} + v_{k+\theta}^\top H p_{N,k+1} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right) \\
 &\quad + W_{ext\ k}^{k+1} - h \sigma_{k+\theta}^\top \dot{\varepsilon}_{k+\theta}^p + h a_{k+\theta}^\top \dot{\alpha}_{k+\theta} + W_c\ k^{k+1} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right) \\
 &\quad + W_{ext\ k}^{k+1} - W_p\ k^{k+1} + W_c\ k^{k+1}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Finalement, le bilan énergétique est défini par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k^{k+1} - W_{ext\ k}^{k+1} &= -W_p\ k^{k+1} + W_c\ k^{k+1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \left(\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D \right)
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

3.6.2 Propriétés énergétiques

Signe de $W_p\ k^{k+1}$ La loi d'écoulement définie par l'inclusion (3.68) impose que la dissipation plastique soit positive, et donc que le travail de ces forces dissipatives présenté dans (3.99) soit lui aussi positif :

$$W_p\ k^{k+1} \geq 0 \tag{3.104}$$

Signe de $W_c\ k^{k+1}$ Il ne peut y avoir de dissipation au contact que lorsque la loi d'impact est active. Si ce n'est pas le cas, $p_N = 0$ et donc $W_c\ k^{k+1} = 0$.

En partant de la définition du travail des forces de contact dans l'équation (3.101), et en utilisant la loi d'impact qui définit $v_{N,k+1} = -e v_{N,k}$, alors il vient :

$$\begin{aligned}
 W_c\ k^{k+1} &= v_{N,k+\theta}^\top p_{N,k+1} \\
 &= (\theta v_{N,k+1} + (1-\theta)v_{N,k}) p_{N,k+1} \\
 &= (-\theta e v_{N,k} + (1-\theta)v_{N,k}) p_{N,k+1} \\
 &= (1-\theta(1+e)) v_{N,k} p_{N,k+1}
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Or, juste avant le contact, les deux parties se rapprochent et donc $v_{N,k} \leq 0$. De même, l'impulsion de réaction est une valeur positive d'après les conditions de *Signorini*, donc $p_{N,k+1} \geq 0$. Le produit $v_{N,k} p_{N,k+1}$ est donc négatif ou nul. Pour conserver une signification physique, le travail des forces d'impact ne doit pas générer d'énergie. Il faut donc respecter :

$$W_c\ k^{k+1} \leq 0 \tag{3.106}$$

et pour cela, il faut impérativement que dans la dernière ligne de (3.105) :

$$1 - \theta(1 + e) \geq 0 \quad (3.107)$$

Comme le coefficient de restitution e est un paramètre permettant de calibrer le modèle (pouvant être obtenu expérimentalement) son choix est limité et il faut alors exprimer une condition sur le choix de θ en fonction de e pour respecter le signe :

$$\theta \leq \frac{1}{1 + e} \quad (3.108)$$

Remarque 14. *Dans les cas multi-contacts, il est possible que le coefficient de restitution soit différent d'un couple χ de nœuds en contact à un autre. Dans ce cas, le coefficient de restitution de l'équation (3.108) sera le maximum de tous les coefficients de restitution considérés dans le modèle : $e = \max e^X$.*

Dissipation numérique Sous la condition (3.108), d'après les équations (3.104) et (3.106) :

$$-W_p^{k+1} + W_c^{k+1} \leq 0 \quad (3.109)$$

Afin que le schéma numérique soit inconditionnellement stable grâce aux diverses dissipations énergétique, la seconde ligne de (3.103) doit être négative.

$$\left(\frac{1}{2} - \theta\right) (\|v_{k+1} - v_k\|_M + \|\varepsilon_{k+1}^e - \varepsilon_k^e\|_E + \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\|_D) \leq 0 \quad (3.110)$$

Ce terme correspond à la dissipation numérique introduite par le schéma. Puisque la seconde parenthèse est la somme de normes, alors elle est positive. Le signe de cette contribution au bilan énergétique dépend donc uniquement du signe de $(1/2) - \theta$. Il faut ainsi respecter :

$$\frac{1}{2} - \theta \leq 0 \quad (3.111)$$

ce qui fournit une nouvelle condition sur le paramètre θ :

$$\frac{1}{2} \leq \theta \quad (3.112)$$

Conditions sur θ En regroupant les conditions sur le paramètre θ définies par les équations (3.108) et (3.112) ainsi que la définition du schéma numérique qui précise que $\theta \in [0, 1]$, la dissipation énergétique au contact ainsi que la stabilité du schéma numérique sont assurées. La condition unique encadrant la valeur de θ est :

$$0 < \frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{1 + e} \leq 1 \quad (3.113)$$

Et cette condition permet d'écrire :

$$\Delta E_k^{k+1} - W_{\text{ext } k}^{k+1} \leq 0 \quad (3.114)$$

ce qui permet de respecter les lois de la thermodynamique selon lesquelles un système ne peut que conserver ou perdre de l'énergie.

Remarque 15. *En choisissant $\theta = 1/2$, l'équation (3.113) est respectée quel que soit le coefficient de restitution $e \in [0, 1]$. De plus, dans ce cas, la dissipation due au schéma numérique définie dans (3.110) est nulle ($1/2 - \theta = 0$) ce qui implique que le schéma est conservatif : aucune énergie n'est dissipée artificiellement, seuls les phénomènes de contact et de plasticité sont susceptibles de dissiper de l'énergie.*

L'étude des quantités d'énergie dissipées par plasticité et par contact se trouve facilitée par ce choix, mais des problèmes de vibration peuvent apparaître puisque le système n'est pas du tout amorti.

Remarque 16. *En posant $\theta = 1$, l'équation (3.113) impose $e = 0$ et donc un contact purement plastique. Dans ce cas, $v_{N,k+1} = 0$ ce qui implique que toute l'énergie cinétique associée aux nœuds en contact est dissipée. Donc, en plus de la dissipation au contact, le schéma dissipe le maximum possible d'énergie.*

Ce choix sera donc particulièrement recommandé dans des études quasi-statiques car le système sera stabilisé grâce à la perte d'énergie liée aux schémas numériques.

3.7 Résumé du chapitre

Ce chapitre a permis de présenter la résolution numérique du problème d'impact et de plasticité. Tout d'abord, la discrétisation temporelle du système, basée sur le schéma numérique de *Moreau-Jean*, a été mise en œuvre (équation (3.28)). La preuve qu'une unique solution à ce problème existe a été ensuite montrée au paragraphe 3.2.2.

Sur cette base, un problème réduit a été proposé dans l'équation (3.58) après substitution des variables par des relations linéaires. Le caractère bien posé de ce nouveau problème a été prouvé page 94.

C'est ce problème réduit qui doit être résolu, et des méthodes de résolution existantes ont été évoquées. Le cas particulier où l'ensemble des contraintes admissibles est défini par des relations linéaires a été approfondi puisque un système de complémentarité linéaire peut alors être développé (équation (3.77)). Dans ce cas la plasticité et le contact sont mis sous la même forme et couplés à l'aide de l'opérateur V .

Enfin, l'analyse du bilan énergétique du problème discret a été présentée. Ce bilan discret est synthétisé dans l'équation (3.103). Les propriétés de ce bilan ont été discutées, tout particulièrement la stabilité de l'algorithme lorsque le paramètre θ respecte la condition définie équation (3.113) ainsi que la préservation numérique de l'énergie lorsque $\theta = 1/2$ (voir remarque 15).

Chapitre 4

Applications 1D

Sommaire

4.1	Formulation générale	110
4.1.1	Fonction d'écoulement	110
4.1.2	Formulation de l'élément fini	111
4.1.2.1	Forme générale	111
4.1.2.2	Formulation des variables élastoplastiques	114
4.2	Validation du modèle élastoplastique	116
4.2.1	Présentation de l'exemple	116
4.2.2	Résultats	118
4.2.2.1	Cas de charge 1	118
4.2.2.2	Cas de charge 2	122
4.2.2.3	Cas de charge 3	126
4.2.2.4	Cas de charge 4	129
4.2.3	Conclusion	133
4.3	Poutre élastoplastique impactée	133
4.3.1	Présentation de l'exemple	133
4.3.2	Résultats	134
4.3.3	Conclusion	141
4.4	Etude d'un portique	142
4.4.1	Présentation de l'exemple	142
4.4.2	Résultats	143
4.4.2.1	Influence du choix du type de plasticité	143
4.4.2.2	Influence de la vitesse et de la masse du projectile	145
4.4.2.3	Influence des discrétisations	148
4.4.3	Conclusion	150
4.5	Résumé du chapitre	150

Ce chapitre a pour objectif d'illustrer les développements présentés dans les deux chapitres précédents. La validité du modèle élastoplastique (plasticité associée, plasticité parfaite et écrouissage), la résolution simultanée du contact et de la plasticité ainsi que les bilans énergétiques sont illustrés à travers trois exemples.

Le cas où l'ensemble C est défini par des relations linéaires est considéré afin de formuler les problèmes sous forme de systèmes de complémentarité linéaire suivant les développements du paragraphe 3.4.2.

Des éléments de poutre en petites déformations sont utilisés, et la plasticité est basée sur les contraintes généralisées, autrement dit, les efforts normaux et moments fléchissants, intervenant toutes les deux dans la fonction d'écoulement.

L'ensemble des simulations est réalisé à l'aide de scripts écrits en *Python*. La résolution des LCP est effectuée à l'aide de l'algorithme de *Lemke* implémenté dans le solveur issu du logiciel open source *Siconos* (voir ACARY et al. (2019)).

4.1 Formulation générale

Dans cette partie destinée à présenter l'élément fini employé ainsi que la fonction d'écoulement choisie, la dépendance au temps des variables n'est pas indiquée pour plus de simplicité de lecture.

Les exemples présentés par la suite sont tous constitués de poutres élastoplastiques permettant de reprendre à la fois des efforts axiaux (efforts normaux) et des efforts transversaux (moments fléchissants). Ces deux types d'efforts internes sont appelés « contraintes généralisées » et permettent de définir la fonction d'écoulement.

4.1.1 Fonction d'écoulement

Interaction effort normal - moment fléchissant En un point donné, les contraintes généralisées, dépendant à la fois du matériau et des caractéristiques géométriques, délimitent le domaine d'élasticité C . Ces valeurs seront notées n_p pour l'effort normal maximum, et m_p pour le moment fléchissant maximum, appelé moment plastique. Cependant, un moment fléchissant induit des déformations longitudinales dans une poutre, qui s'ajoutent aux effets de l'effort normal.

DUAN et CHEN (1990) proposent une fonction d'écoulement permettant de prendre en compte l'interaction entre les deux types d'efforts internes, pour des poutres de sections possédant au moins deux axes de symétrie.

Un paramètre β permet d'affiner cette fonction suivant le type de section considérée :

$$\frac{m}{m_p} + \left(\frac{n}{n_p}\right)^\beta = 1 \quad (4.1)$$

avec par exemple $\beta = 2$ pour une section pleine rectangulaire, $\beta = 2.1$ pour une section pleine circulaire ou encore $\beta = 1.75$ pour une section mince circulaire. HENG et al. (2016) utilisent cette formulation pour leurs travaux sur des poutres élastoplastiques impactées et précisent qu'il faut bien faire attention à préserver la convexité de la fonction d'écoulement en choisissant $\beta \geq 0$. Dans le cas présent, suivant ce papier de HENG et al., afin d'avoir des fonctions d'écoulement linéaires, le cas où $\beta = 1$ est considéré et conduit à l'inégalité :

$$\frac{|m|}{m_p} + \frac{|n|}{n_p} \leq 1 \quad (4.2)$$

Cette équation est valable en considérant que les limites de plasticité sont égales en valeur absolue quel que soit le signe des efforts (limite en traction égale à celle en compression pour l'effort normal, et, pour le moment fléchissant, même valeur quel que soit le signe de la rotation).

L'équation (4.2) définit les valeurs admissibles en l'absence d'écroûissage pour les contraintes généralisées n et m en un point donné et à un instant donné. En ce point et à cet instant, l'ensemble des contraintes admissibles C est délimité par quatre droites (voir la figure 4.1 pour la représentation de la surface de plasticité initiale en un point donné).

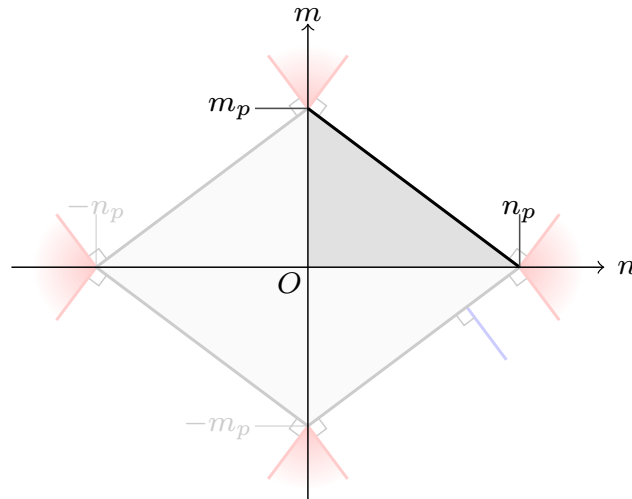


FIGURE 4.1 – Représentation de l'ensemble des contraintes admissibles C dans le plan des contraintes généralisées (n, m) , ainsi que des cônes normaux en rouge aux singularités et en bleu aux endroits différentiables.

4.1.2 Formulation de l'élément fini

4.1.2.1 Forme générale

Présentation de l'élément Dans les exemples qui suivent, des éléments capables de résister aux efforts axiaux de traction/compression et aux efforts transversaux de flexion sont utilisés.

Pour ne pas complexifier le modèle numérique, ce qui rendrait plus complexe l'illustration des développements précédents, des poutres d'*Euler - Bernoulli* sont utilisées pour modéliser les déplacements transversaux. Les sections droites restent donc planes et perpendiculaires à la fibre moyenne après déformation.

Le repère local est défini avec \vec{x} suivant l'axe de l'élément, \vec{y} dans sa hauteur, et \vec{z} dans son épaisseur. Les calculs seront en deux dimensions et s'il est nécessaire de continuer à préciser les axes pour les déplacements qui s'effectuent dans le plan vertical de la poutre, il est possible de s'affranchir de l'indice z pour repérer les rotations qui ont lieu autour de l'axe \vec{z} en vue d'alléger les notations.

Les contraintes et les déformations qui seront utilisées sont les variables généralisées. Ainsi, en une section d'abscisse x donnée, vis à vis des efforts axiaux, la contrainte est équivalente à l'effort normal $n(x)$, et la déformation au taux d'allongement $\varepsilon_n(x)$. Dans le cas des efforts transversaux, le moment fléchissant $m(x)$ correspond à la contrainte, et la courbure $\varepsilon_m(x)$ est équivalente à la déformation. La loi d'élasticité s'écrit alors :

$$n(x) = EA\varepsilon_n^e(x) \quad m(x) = EI\varepsilon_m^e(x) \quad (4.3)$$

avec les trois variables E (module d'Young), A (aire de la section) et I (moment d'inertie de la section) considérées constantes le long d'un élément.

Précision sur la formulation en traction-compression Un élément de barre en traction - compression classique est défini avec deux nœuds (un à chaque extrémité) portant chacun un degré de liberté dans le repère local. Ils sont donc formulés avec des fonctions de forme linéaires et les contraintes et déformations associées sont par conséquent constantes tout du long de l'élément (exprimées en un seul point de Gauss au milieu de l'élément).

Lorsque l'étude des efforts normaux et des moments fléchissants se fait indépendamment, l'utilisation de cette formulation n'est pas problématique. En revanche, la fonction d'écoulement fait intervenir chacun de ces efforts simultanément et, en cas de déformations plastiques et en fonction du chemin de charge suivi, les valeurs d'efforts internes sont modifiées. D'après la formulation éléments finis, cette fonction d'écoulement s'exprime aux points de Gauss et suggère ainsi que les efforts doivent pouvoir être modifiés à ces points spécifiques. Or, avec la formulation classique, ce n'est pas le cas : il faut pouvoir exprimer les efforts normaux indépendamment pour chaque point de quadrature considéré.

Ainsi, ce sont des élément quadratiques à 3 nœuds (et 3 degrés de liberté en repère local) qui sont utilisés pour l'étude des efforts longitudinaux, ce qui permet d'avoir des valeurs distinctes d'effort normal au sein d'un même élément.

Éléments réel et de référence Pour simplifier les intégrations numériques, chaque élément de la structure réelle est ramenée à un élément de référence commun. Dans le repère local d'un élément, une section de l'élément réel est repérée par son abscisse $x \in [0, L_{el}]$, et à cette section correspond une section de l'élément de référence repérée par l'abscisse $\xi \in [-1, 1]$. Le changement de variable entre ces deux éléments reliant les variables x et ξ est défini par :

$$\xi = \frac{2x}{L_{el}} - 1 \quad (4.4)$$

L'utilisation d'une matrice de rotation permettra ensuite de passer de ce repère local au repère global en fonction de l'angle Θ défini Figure 4.2.

Degrés de liberté Puisque la formulation couple les efforts axiaux et les efforts transversaux, l'élément complet possède, en repère local, 7 degrés de liberté : 3 déplacements longitudinaux, 2 transversaux et deux rotations (voir Figure 4.2). Le vecteur des déplacements nodaux pour un élément est alors :

$$u_{el} = \left[u_{x,1} \quad u_{y,1} \quad \beta_1 \quad u_{x,3} \quad u_{x,2} \quad u_{y,2} \quad \beta_2 \right]^T \quad (4.5)$$

Matrices des fonctions de forme et de ses dérivées Suivant les développements présentés dans l'annexe A, la matrice N_{el} des fonctions de forme d'un élément est :

$$N_{el}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2}(1-\xi) & 0 & 0 & 1-\xi^2 & \frac{\xi}{2}(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) & \frac{L_{el}}{8}(1-\xi^2)(1-\xi) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) & \frac{L_{el}}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Du fait de l'utilisation de deux points de Gauss pour l'intégration numérique de l'équation d'équilibre, les poids associés à chacun de ces points est $\omega_g = 1$ et donc tous les termes $\sqrt{\omega_g}$ de la matrice B , définie au paragraphe 2.4.1, sont égaux à 1. Il n'y a donc aucune mise à

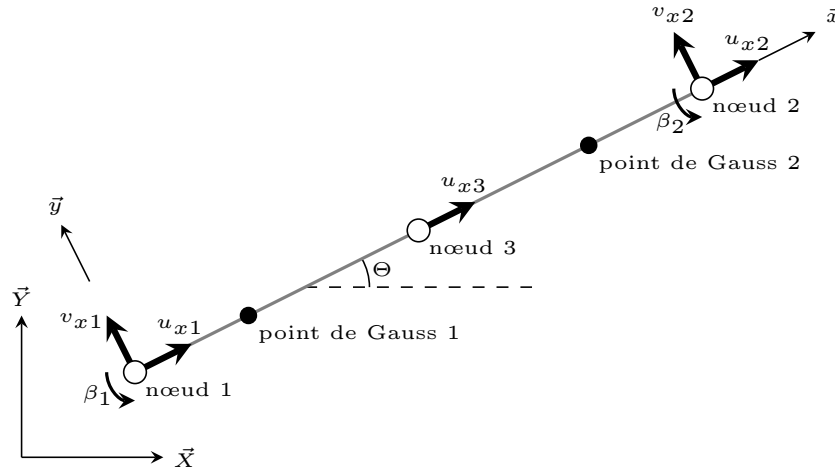


FIGURE 4.2 – Illustration de l'élément de poutre utilisé. Description des degrés de liberté de l'élément suivant son repère local, et orientation Θ par rapport au repère global.

l'échelle des contraintes ou des déformations à effectuer. La matrice des dérivées des fonctions de forme est donc :

$$B_{el}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \xi & 0 & 0 & -2\xi & \frac{1}{2} + \xi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\xi}{L_{el}^2} & \frac{3\xi - 1}{L_{el}} & 0 & 0 & -\frac{6\xi}{L_{el}^2} & \frac{3\xi + 1}{L_{el}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Contraintes et déformations La relation contraintes - déformations élastiques généralisées présentée dans l'équation (4.3) s'écrit sous forme discrétisée :

$$\sigma_{el} = \begin{bmatrix} n_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = C_{el} \varepsilon_{el}^e = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{n,1}^e \\ \varepsilon_{m,1}^e \\ \varepsilon_{n,2}^e \\ \varepsilon_{m,2}^e \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où l'indice $g \in \{1, 2\}$ désigne le point de Gauss considéré. Comme $\varepsilon_{el} = B_{el} u_{el}$ (avec B_{el} défini dans (2.112) et $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$), alors il est possible d'exprimer directement les efforts normaux et les moments fléchissants aux deux points de Gauss à partir des déplacements nodaux.

Matrice de masse La matrice de masse de l'élément est donnée par l'intégrale suivante :

$$M_{el} = \rho A \int_0^{L_{el}} N_{el}^\top(x) N_{el}(x) dx = \rho A \frac{L_{el}}{2} \int_{-1}^1 N_{el}^\top(\xi) N_{el}(\xi) d\xi \quad (4.9)$$

ce qui donne finalement la matrice :

$$M_{el} = \frac{\rho A L_{el}}{420} \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 & 28 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_e & 0 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 28 & 0 & 0 & 224 & 28 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 28 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_e & 0 & 0 & 156 & -22L_e \\ 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

avec ρ la masse volumique du matériau constitutif de l'élément.

Le choix a été fait de conserver les matrices de masses consistantes et non diagonales afin de mieux caractériser la répartition des masses, en particulier lors des analyses dynamiques. Pour plus de précisions sur la construction de ces matrices, il est possible de se reporter à l'article de FELIPPA, GUO et PARK (2015).

4.1.2.2 Formulation des variables élastoplastiques

Fonction d'écoulement aux points de Gauss Suivant la discrétisation par éléments finis, il faut que la fonction d'écoulement en chaque point de Gauss g d'un élément el , notée $\mathcal{Y}_{el,g}$ soit négative ou nulle. De plus, la fonction d'écoulement \mathcal{Y}_{el} de l'élément el est le vecteur colonne des fonctions d'écoulement à chacun de ses points de Gauss, et pour l'ensemble de la structure, la fonction d'écoulement complète \mathcal{Y} est le vecteur colonne des fonctions d'écoulement des différents éléments :

$$\mathcal{Y}_{el} = \text{col}(\mathcal{Y}_{el,g}, g = 1, 2) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \text{col}(\mathcal{Y}_{el}, el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (4.11)$$

Fonction d'écoulement en plasticité parfaite L'équation (4.2), valable en plasticité parfaite, peut donc s'écrire en un point de Gauss à l'aide des 4 fonctions suivantes délimitant l'ensemble des contraintes admissibles :

$$\mathcal{Y}_{el,g} = \begin{cases} \frac{n_{el,g}}{n_{p,el}} + \frac{m_{el,g}}{m_{p,el}} - 1 \leq 0 \\ -\frac{n_{p,el}}{n_{el,g}} + \frac{m_{p,el}}{m_{el,g}} - 1 \leq 0 \\ \frac{n_{p,el}}{n_{el,g}} - \frac{m_{p,el}}{m_{el,g}} - 1 \leq 0 \\ \frac{n_{p,el}}{n_{el,g}} - \frac{m_{p,el}}{m_{el,g}} - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Il faut ajouter à cette formulation les termes liés à l'écroutissage. Pour clarifier le développement, seule la première ligne de (4.12) (qui correspond au quart supérieur droit de la représentation graphique 4.3a) est développée et les indices el correspondant à l'élément et g au point de Gauss seront ignorés. Jusqu'à mention contraire, \mathcal{Y} désigne donc la première équation de la fonction d'écoulement associée à un point de Gauss donné de cet élément.

Développement de la première équation pour l'écroutissage En premier lieu, l'écroutissage cinématique qui déplace la courbe suivant une translation de vecteur $[a_{ci,n} \ a_{ci,m}]^T$ est considéré. La figure 4.3b illustre ce processus. La pente de la droite est conservée, mais son ordonnée à l'origine est modifiée. Cette nouvelle valeur, notée m_p^{ci} , est définie par $m_p^{ci} = m_p + a_{ci,m} + a_{ci,n} \frac{m_p}{n_p}$. La fonction d'écoulement associée à cette première limite devient donc :

$$\mathcal{Y}_{ci} = \frac{m}{m_p} + \frac{n}{n_p} - \frac{a_{ci,n}}{n_p} - \frac{a_{ci,m}}{m_p} - 1 \leq 0 \quad (4.13)$$

Ensuite, en considérant l'écroutissage isotrope, un seul paramètre d'écroutissage est nécessaire : a_{is} . Sur la figure 4.3c, ce nouveau processus est illustré. Là encore la pente de la droite est conservée, mais l'ordonnée à l'origine modifiée. Cette nouvelle ordonnée est définie par : $m_p^{is} = m_p + a_{is} = c m_p$ avec $c \geq 1$ (en supposant de l'écroutissage positif ou nul) le coefficient de dilatation, ce qui implique que $a_{is} \geq 0$. La fonction d'écoulement associée à cette première limite devient donc :

$$\mathcal{Y}_{is} = \frac{m}{m_p} + \frac{n}{n_p} - \frac{a_{is}}{m_p} - 1 \leq 0 \quad (4.14)$$

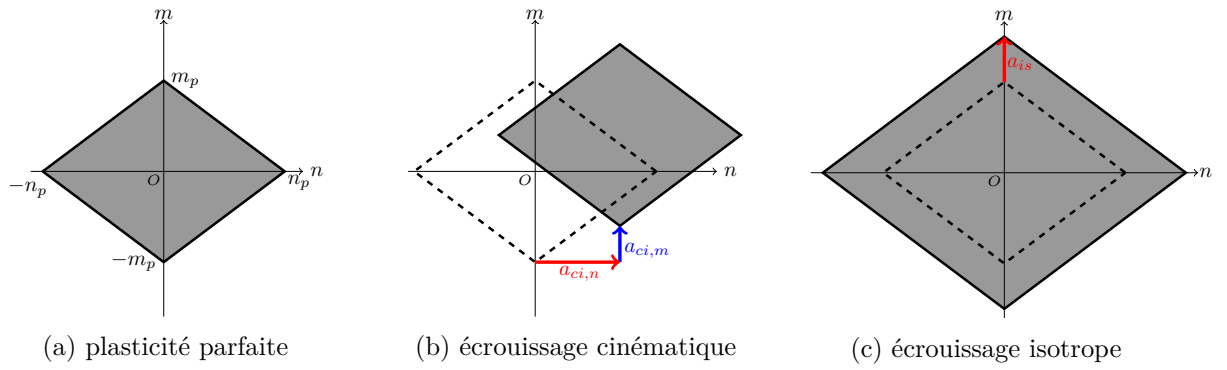


FIGURE 4.3 – Représentation de l'ensemble des contraintes admissibles dans le plan des contraintes généralisées (n, m) suivant diverses configurations : plasticité parfaite (a), écoulement cinématique (b), et écoulement isotrope (c). Dans le premier cas, l'ensemble \mathcal{C} ne varie pas. Dans les deux autres cas, l'ensemble initial est représenté en trait pointillé et l'ensemble après écoulement en trait continu, ainsi que les vecteurs d'écrouissage associés a_{ci} et a_{is}

En regroupant les deux types d'écrouissage définis dans les équations (4.13) et (4.14) au sein de la même équation, la fonction d'écoulement complète est obtenue :

$$\mathcal{Y} = \frac{m}{m_p} + \frac{n}{n_p} - \frac{a_{ci,n}}{n_p} - \frac{a_{ci,m}}{m_p} - \frac{a_{is}}{m_p} - 1 \leq 0 \quad (4.15)$$

Fonction d'écoulement complète Le développement présenté pour la première des 4 fonctions qui composent $\mathcal{Y}_{el,g}$ (équation (4.12)) est appliqué aux trois restantes et, suivant l'équation (3.71), les matrices J_σ , J_a et κ_Y sont alors définies par :

$$J_\sigma^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{-n_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{n_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{-n_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{n_p} & \frac{1}{m_p} \end{bmatrix} \quad J_a^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_p} & \frac{1}{m_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{-n_p} & \frac{1}{m_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{n_p} & \frac{1}{m_p} & \frac{1}{m_p} \\ \frac{1}{-n_p} & \frac{1}{m_p} & \frac{1}{m_p} \end{bmatrix} \quad \kappa_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

et la fonction d'écoulement au point de Gauss g d'un élément el s'écrit alors :

$$-\mathcal{Y}_{el,g} = f_{el,g} = J_{\sigma,el}^\top \sigma_{el,g} + J_{a,el}^\top a_{el,g} + \kappa_{Y,el} \geq 0 \quad (4.17)$$

avec $\sigma_{el,g} = [n_{el,g} \ m_{el,g}]^\top$ et $a_{el,g} = [a_{el,g,ki,n} \ a_{el,g,ki,m} \ a_{el,g,is}]^\top$

Matrice d'écrouissage Afin de prendre en compte à la fois l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope, il faut 3 variables d'écrouissage par point de Gauss. Le vecteur des contraintes généralisées pour un élément et pour la structure complète est défini par l'équation (2.114) (sans avoir besoin des termes $\sqrt{\omega_g}$ puisque $\omega_g = 1$) et, de la même manière, les vecteurs a_{el} des forces d'écrouissage par élément et a complet pour tout le système sont définis par :

$$a_{el} = \text{col}(a_{el,g}, g = 1, 2) \quad \text{et} \quad a = \text{col}(a_{el}, el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (4.18)$$

Pour un élément suivant la formulation présentée au paragraphe précédent (4.1.2) ayant un module d'érouissage cinématique H_{ci} et un module d'érouissage isotrope H_{is} , sa matrice d'érouissage D_{el} est définie par :

$$D_{el} = \begin{bmatrix} H_{ci}A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{ci}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{is}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{ci}A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{ci}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{is}I \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

où pour rappel, A est l'aire de la section et I son moment d'inertie, constants sur l'élément.

Multiplicateur plastique Pour finir cette présentation de la fonction d'écoulement, il reste à préciser que le multiplicateur plastique λ , utilisé dans le LCP (3.78) et en complémentarité avec la fonction f , a une valeur associée à chacune des fonctions composant f à chaque point de Gauss. Ainsi, les vecteurs à chaque point de Gauss, par élément et complet des multiplicateurs plastiques sont :

$$\lambda_{el,g} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^\top, \quad \lambda_{el} = \text{col}(\lambda_{el,g}, g = 1, 2) \quad \text{et} \quad \lambda = \text{col}(\lambda_{el}, el \in \llbracket 1, n_{el} \rrbracket) \quad (4.20)$$

4.2 Validation du modèle élastoplastique

Le premier exemple permet de valider le modèle élastoplastique en vérifiant l'évolution temporelle des différentes variables et la réponse d'une structure simple lors d'un chargement quasi-statique. Les parties liées à l'impact et au contact ne sont pas prises en compte dans cette illustration.

4.2.1 Présentation de l'exemple

La structure La structure considérée dans cet exemple est une poutre en console à laquelle sont imposés des déplacements à son extrémité libre.

Puisque l'analyse est menée en quasi statique, alors l'utilisation d'un nombre restreint d'éléments suffit à avoir une représentation du comportement de la poutre. La poutre de longueur L est alors discrétisée en 4 éléments finis de poutre élastoplastiques suivant la formulation proposée au paragraphe 4.1. Cela permet d'avoir $n_g = 8$ points de Gauss auxquels les efforts normaux et les moments seront directement accessibles et où les équations constitutives de l'élasto-plasticité seront résolues.

La figure 4.4 représente le système discret employé, et le tableau 4.1 résume les propriétés géométriques de la poutre ainsi que les données du matériau utilisé.

L (m)	0.8	I (m ⁴)	$0.0283 \cdot 10^{-6}$
A (m ²)	$0.22 \cdot 10^{-3}$	E (MPa)	$210000 \cdot 10^6$
H_{ci} (MPa)	$E/10 = 21000 \cdot 10^6$	H_{is} (MPa)	$E/100 = 2100 \cdot 10^6$
n_p (N)	33000	m_p (Nm)	283.5
ρ (kg/m ³)	7701		

TABLE 4.1 – Propriétés de la structure (géométriques et matériau) de l'exemple 1.

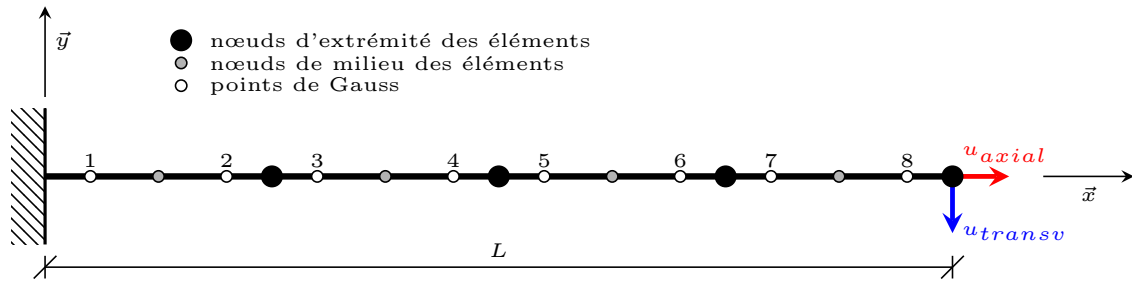


FIGURE 4.4 – Exemple 1 : Poutre en console discrétisée en 4 éléments finis, soumise aux déplacements u_{axial} and u_{transv} à l'extrémité libre. Les numéros correspondent aux références pour les points de Gauss.

Paramètres de simulation Afin d'avoir des résultats exploitables en quasi-statique, il faut que le schéma numérique dissipe de l'énergie pour que le système soit amorti rapidement. Ainsi, suivant les discussions énergétiques de la partie 3.6, le paramètre $\theta = 1$ est choisi pour dissiper de l'énergie, en association avec un pas de temps $h = 0.01s$ (limite le nombre d'instant de calcul k tout en permettant de capturer les déformations plastiques). Les vitesses de déplacement devront être faibles au regard de ce pas de temps afin que les hypothèses quasi-statiques soient valables et que l'approximation de la solution temporelle soit correcte.

Configurations du chargement Puisque la formulation proposée dans les chapitres précédents inclut la dynamique, il est possible de formuler le chargement quasi-statique à l'aide de vitesses de déplacement imposées, qui doivent être faibles pour que les termes d'inertie soient négligeables. Elles seront alors notées v_{axial} et v_{transv} .

Quatre configurations de chargement du système sont réalisées. Dans les trois premiers cas, une vitesse axiale et une transversale sont appliquées simultanément, et dans le quatrième cas, elles le se sont successivement avec d'abord une vitesse transversale puis une axiale (voir la figure 4.5).

Cependant, bien que les cas 1, 2 et 3 suivent le type de chargement, leur comportement est différent en fonction du trajet suivi (comportement et vitesses d'applications différentes). Dans les cas 1 et 3, la plasticité parfaite est utilisée (tout comme elle le sera dans le cas numéro 4) et dans le second cas, la plasticité avec écrouissage est employée.

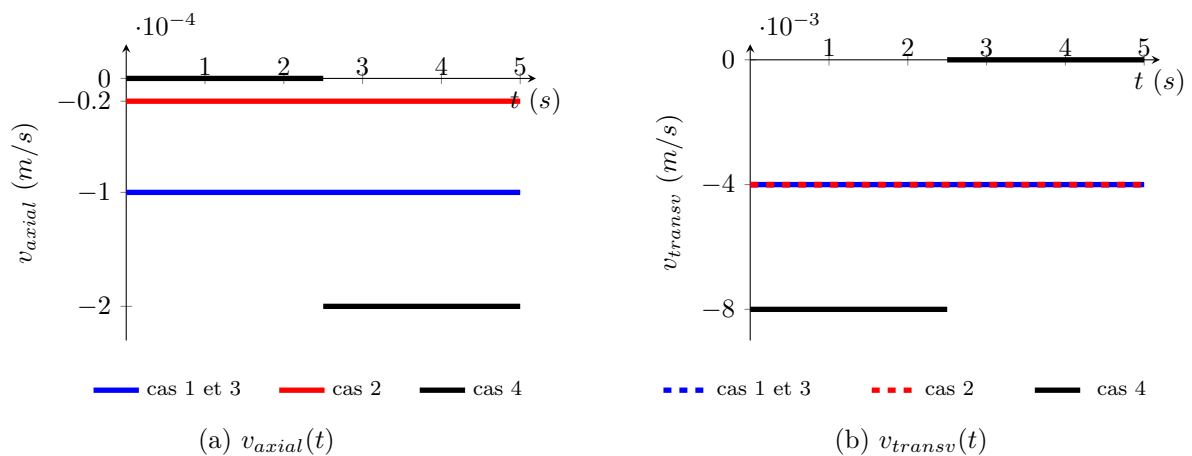


FIGURE 4.5 – Exemple 1 : Evolution temporelle des vitesses axiales v_{axial} et transversales v_{transv} imposées à l'extrémité libre de la poutre (nœud 5) dans les quatre cas de charge.

4.2.2 Résultats

4.2.2.1 Cas de charge 1

Dans le premier exemple, une vitesse axiale $v_{axial} = -1.10^{-4} \text{ m/s}$ et une vitesse transversale $v_{transv} = -4.10^{-3} \text{ m/s}$ sont appliquées à l'extrémité libre tout au long des 5 secondes de la simulation (voir la figure 4.5). La poutre subit ainsi une déflexion et un raccourcissement non linéaires au cours du temps pour les nœuds libres (voir Figures 4.6 et 4.7).

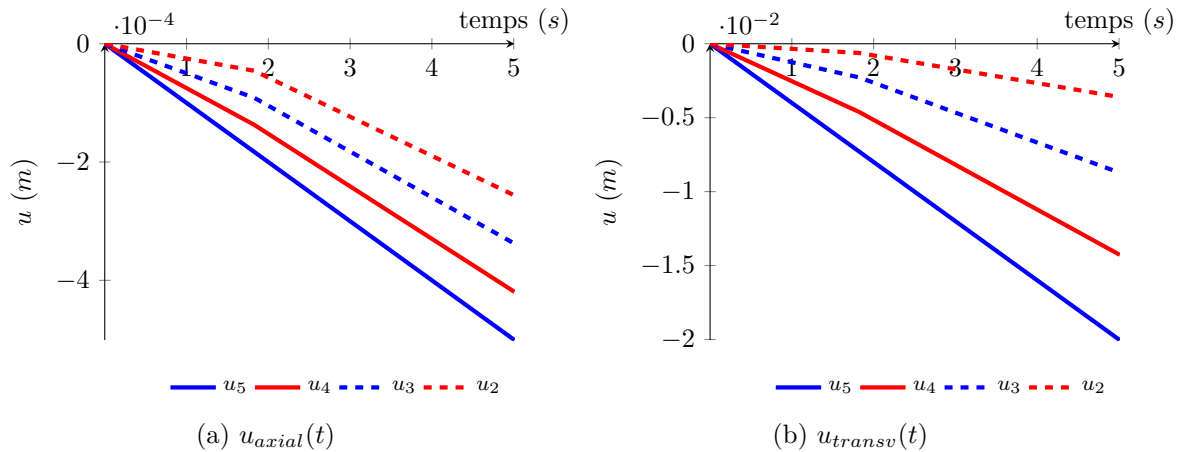


FIGURE 4.6 – Exemple 1, cas 1 : Evolution des déplacements longitudinaux u_{axial} et transversaux u_{transv} au cours du temps des nœuds dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5 et bloqués au nœud 1 non représenté).

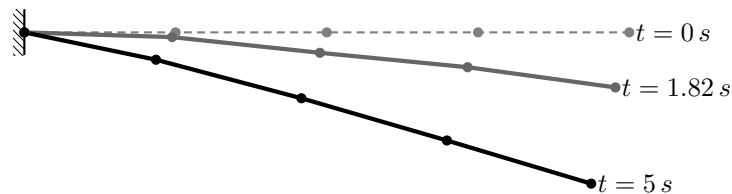


FIGURE 4.7 – Exemple 1, cas 1 : Déformées amplifiées de la poutre (10 fois transversalement, 100 fois longitudinalement) dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5).

Aux différents points de Gauss, les efforts normaux n_g et les moments fléchissants m_g augmentent linéairement (voir la figure 4.8) jusqu'à ce que le critère d'écoulement soit atteint au point de Gauss numéro 1 ($\mathcal{Y}_1 = 0$) à l'instant $t = 1.84 \text{ s}$ (voir Figure 4.9a) puisque c'est à cet endroit que le moment est le plus important.

Dès que ce critère d'écoulement est atteint, des déformations plastiques au premier point de Gauss se développent. Comme c'est la limite du quart inférieur droit de l'ensemble C (voir la figure 4.9) qui est atteinte, le troisième multiplicateur plastique associé au premier point de Gauss $\lambda_{1,3}$ évolue (voir Figure 4.10). Sa valeur s'établit à une valeur constante puisqu'il définit une vitesse de déformation plastique liée à la vitesse de déplacement imposée qui est elle-même constante.

Les vitesses de déplacement continuent à être imposées à l'extrémité libre même après le développement de la première rotule plastique. Cependant, pour respecter le critère d'écoulement, les efforts internes évoluent différemment : les efforts normaux continuent à augmenter

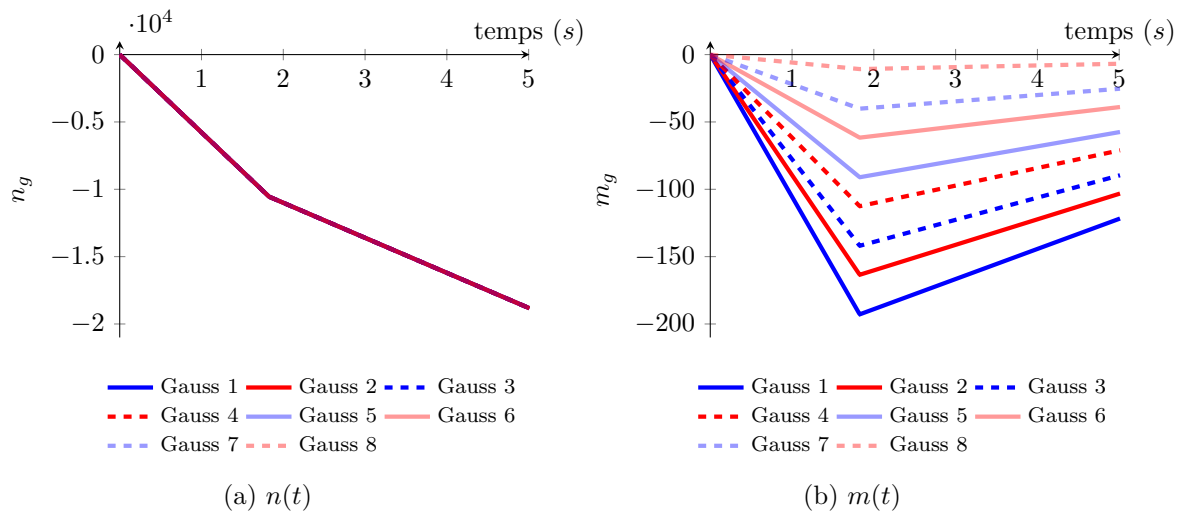


FIGURE 4.8 – Exemple 1, cas 1 : Evolution des efforts normaux n_g et des moments fléchissants m_g aux 8 points de Gauss d’une poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite.

mais plus lentement (Figure 4.8a), tandis que les moments fléchissant voient leur valeur diminuer (en absolu) afin de respecter le critère d’écoulement (Figure 4.8b). Cette évolution correspond au chemin de contrainte observé sur les différentes courbes de la figure 4.9.

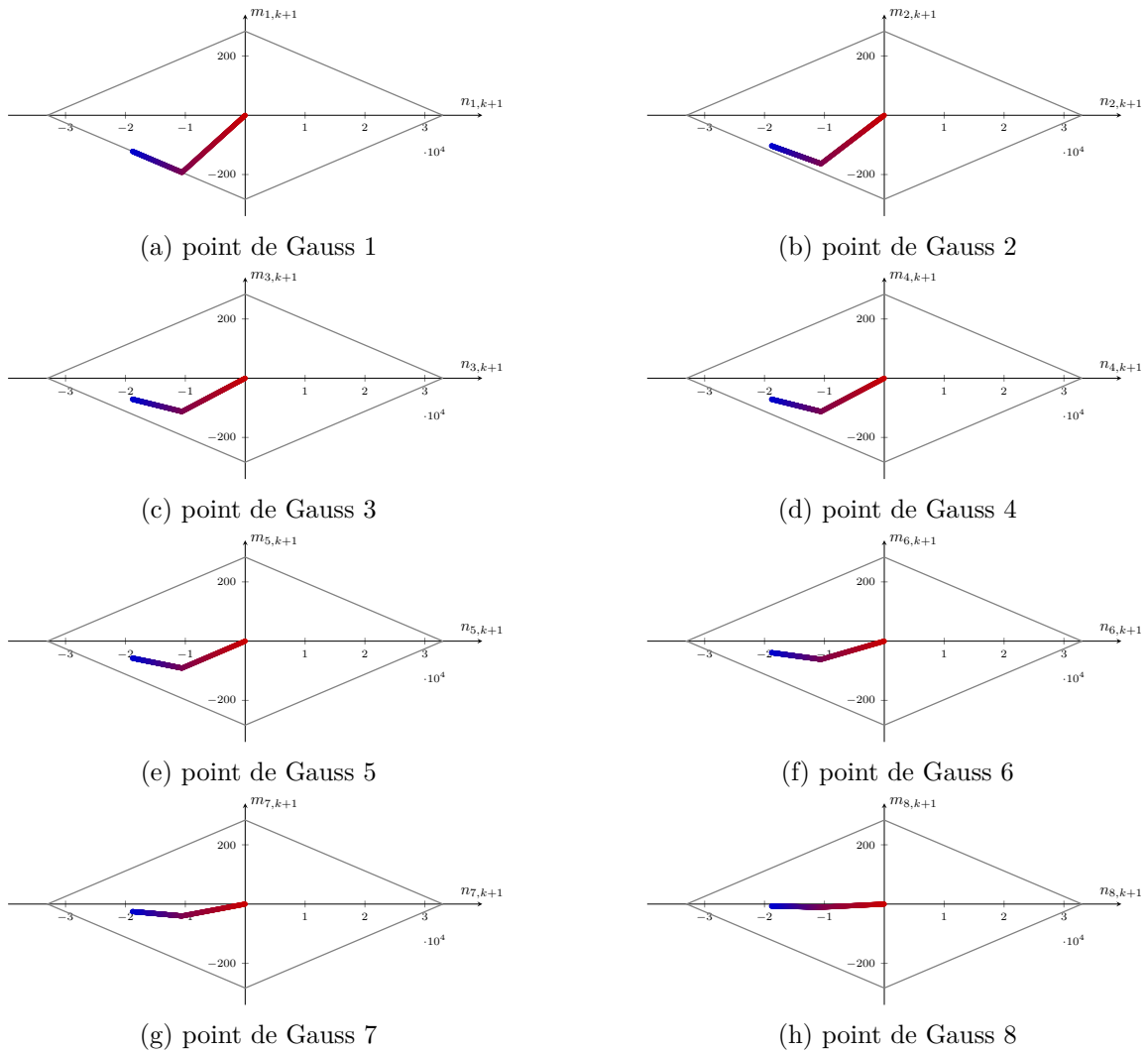


FIGURE 4.9 – Exemple 1, cas 1 : Chemin de contraintes (moment fléchissant en fonction de l'effort normal dans le plan effort normal - moment fléchissant), pour chaque point de Gauss de la poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite. La forme losange correspond à la fonction d'écoulement qui délimite l'ensemble des contraintes admissibles C .

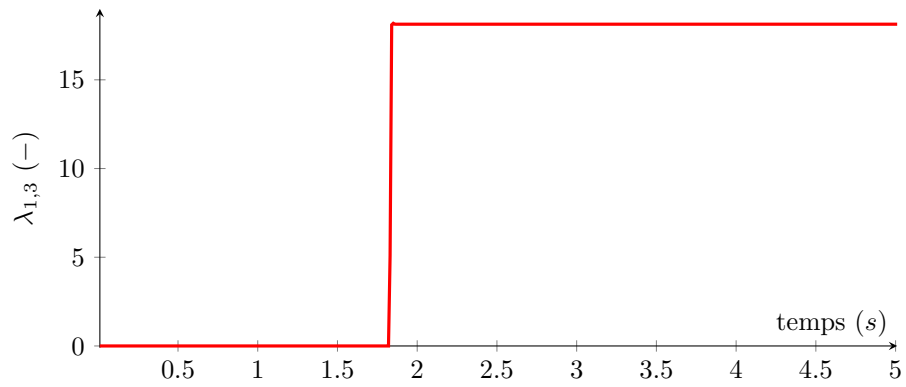


FIGURE 4.10 – Exemple 1, cas 1 : Evolution temporelle du multiplicateur plastique $\lambda_{1,3}$ correspondant à l’activation de la troisième fonction linéaire délimitant C au premier point de Gauss de la poutre soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite

4.2.2.2 Cas de charge 2

Le second cas est similaire au premier mais le comportement élastoplastique avec écrouissage est utilisé. Ainsi, il n'y a pas de rotule plastique et les efforts internes continuent à pouvoir augmenter même lorsque des déformations plastiques apparaissent. Les déplacements des différents nœuds sont présentés sur la figure 4.11.

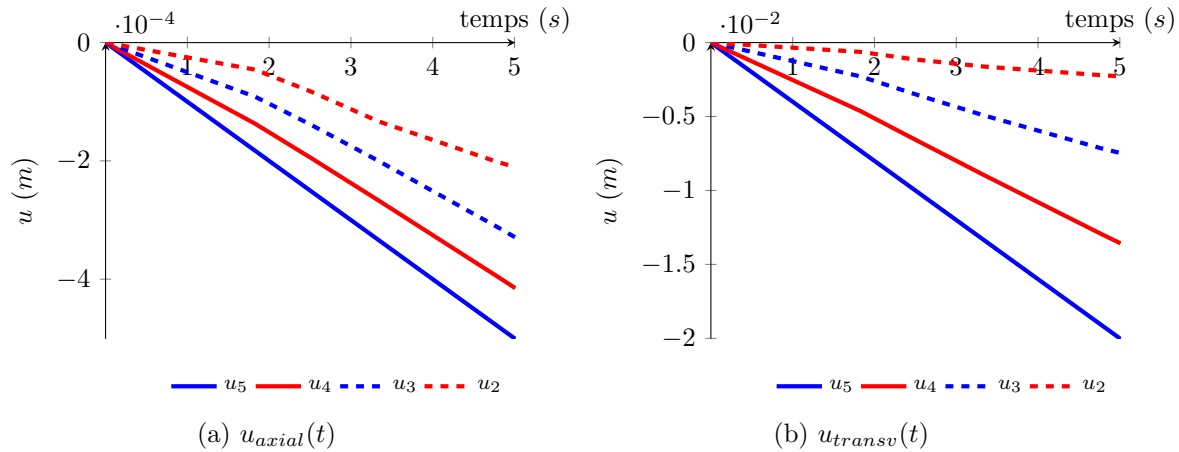


FIGURE 4.11 – Exemple 1, cas 2 : Evolution des déplacements longitudinaux u_{axial} et transversaux u_{transv} au cours du temps des nœuds dans le cas de la plasticité avec écrouissage (déplacements imposés au nœud 5 et bloqués au nœud 1 non représenté).

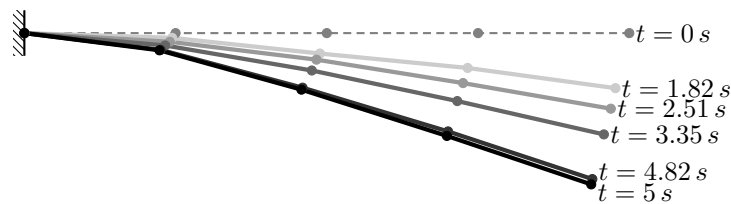


FIGURE 4.12 – Exemple 1, cas 2 : Déformées amplifiées de la poutre (10 fois transversalement, 100 fois longitudinalement) dans le cas de la plasticité avec écrouissage (déplacements imposés au nœud 5).

Suivant les deux types d'écrouissages, cinématique et isotrope, l'ensemble des contraintes admissibles C se déplace et se dilate, phénomène qui peut être observé sur la figure 4.14.

Lorsque le critère d'écoulement est atteint au premier point de Gauss, au même instant que lors du premier cas de charge, les déformations plastiques apparaissent. L'évolution des efforts internes est alors plus lente, mais les moments fléchissants continuent d'augmenter du fait du déplacement et de l'agrandissement de l'ensemble C (voir la figure 4.13). Le critère d'écoulement est alors atteint au second point de Gauss, ce qui a pour effet de réduire encore les vitesses d'évolution des efforts internes, et ainsi de suite pour les différents points de quadrature au fur et à mesure du chargement (voir la figure 4.12 pour les déformées avant qu'un nouveau point de Gauss n'atteigne le limite d'élasticité). Cependant, sur la figure 4.13b, après que le critère de plasticité ait été atteint pour les 3 premiers points de Gauss, les coefficients d'écrouissages ne sont pas assez élevés pour que des efforts supplémentaires puissent être appliqués et, de façon similaire au premier cas, les moments fléchissants diminuent.

Enfin, il faut remarquer que les multiplicateurs plastiques évoluent au cours du temps. En premier lieu, le troisième multiplicateur plastique du point de Gauss numéro 1 $\lambda_{1,3}$ est activé,

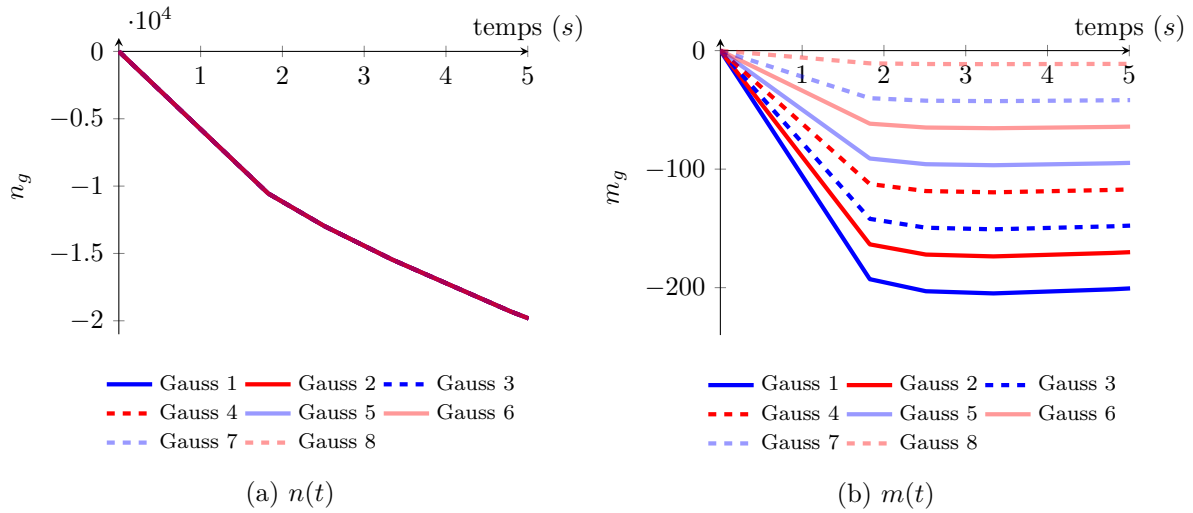


FIGURE 4.13 – Exemple 1, cas 2 : Evolution des efforts normaux n_g et des moments fléchissants m_g aux 8 points de Gauss d'une poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité avec écrouissage cinématique et isotrope.

puis, lorsque le critère de plasticité est atteint au second point de Gauss, le troisième multiplicateur du second point augmente en même temps que celui du premier point diminue¹. Ce phénomène se répète à chaque fois que la limite d'élasticité est atteinte en un nouveau point de Gauss (voir la figure 4.15). Les déformations plastiques se répartissent ainsi entre les différents points ayant plastifié.

1. Les valeurs sensiblement égales des différents multiplicateurs après que chaque nouveau point de Gauss ait atteint la limite d'élasticité est un résultat qui reste une question ouverte : est-ce un hasard, ou les déformations plastiques se répartissent de manière similaire à chaque point sur la limite de C ?

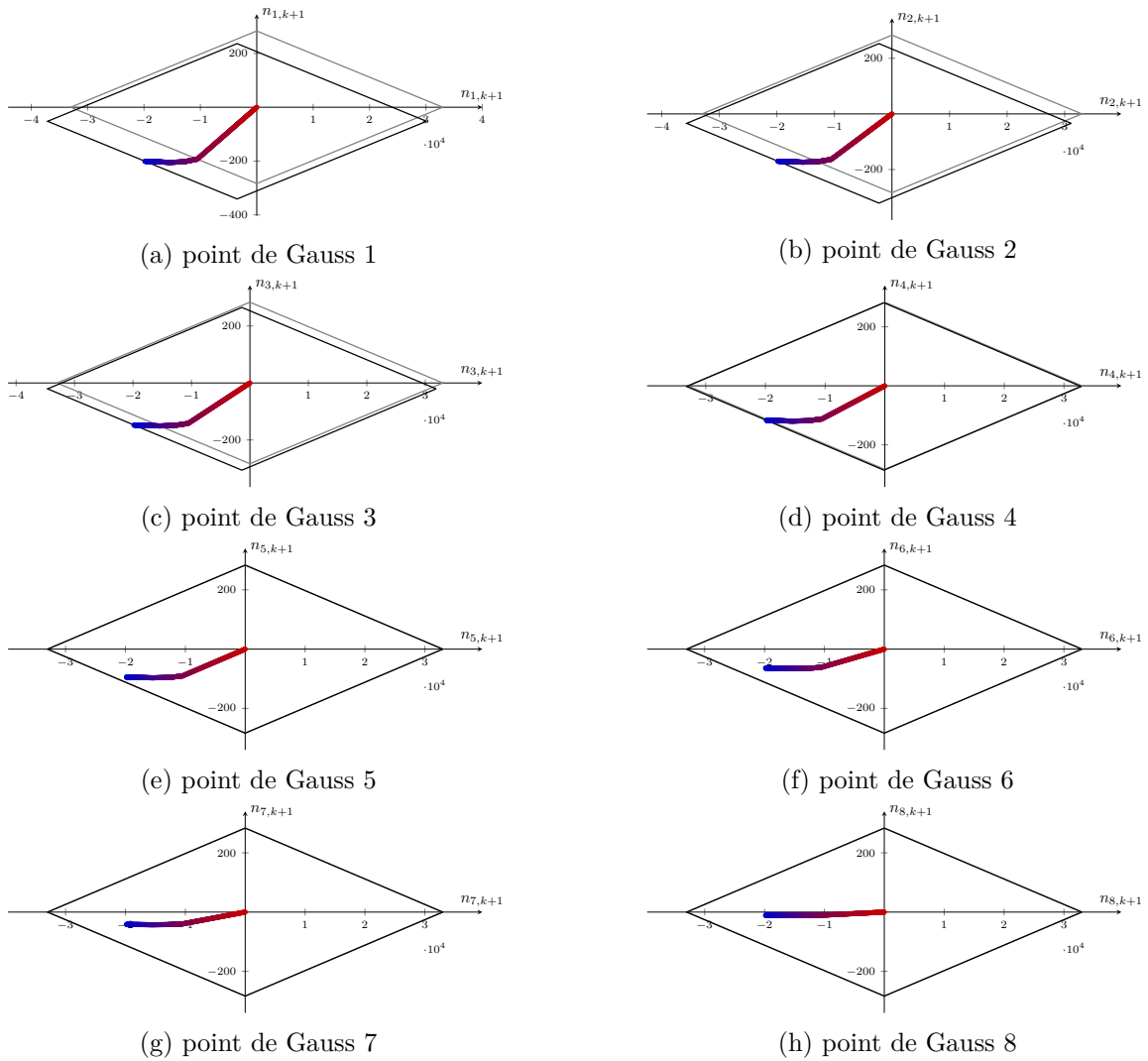


FIGURE 4.14 – Exemple 1, cas 2 : Chemin de contraintes (moment fléchissant en fonction de l’effort normal dans le plan effort normal - moment fléchissant), pour chaque point de Gauss de la poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité avec écrouissage (cinématique et isotrope). La forme losange grise correspond à la fonction d’écoulement initiale qui délimite l’ensemble des contraintes admissibles $C(t = 0)$ et le losange noir délimite l’ensemble des contraintes admissibles final, après écrouissage.

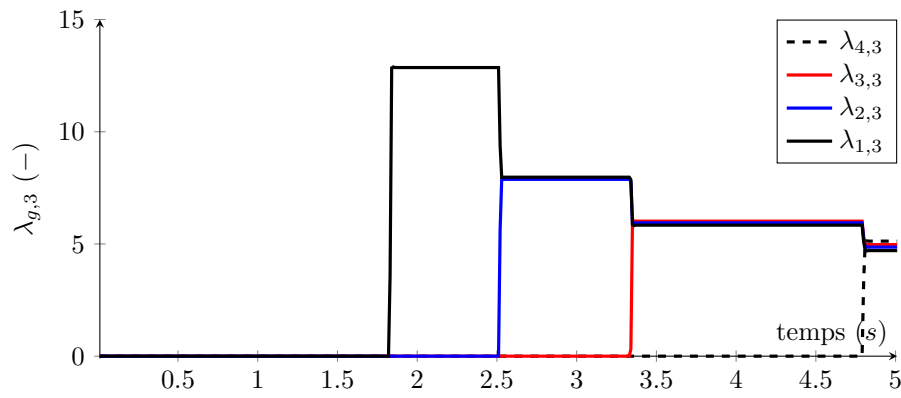


FIGURE 4.15 – Exemple 1, cas 2 : Evolution temporelle des multiplicateur plastique $\lambda_{g,3}$ correspondant à l'activation de la troisième fonction linéaire délimitant $C(t)$ aux 4 premiers points de Gauss de la poutre soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité avec écrouissage (cinématique et isotrope)

4.2.2.3 Cas de charge 3

Ce cas de charge reprend le cas 1, mais la vitesse de déplacement axiale est réduite et choisie telle que $v_{axial} = -2.10^{-5} \text{ m/s}$ (voir figure 4.5). Outre l'ampleur des déplacements des différents nœuds qui est réduite, ces résultats sont très différents en termes de chemin suivi (voir Figure 4.16).

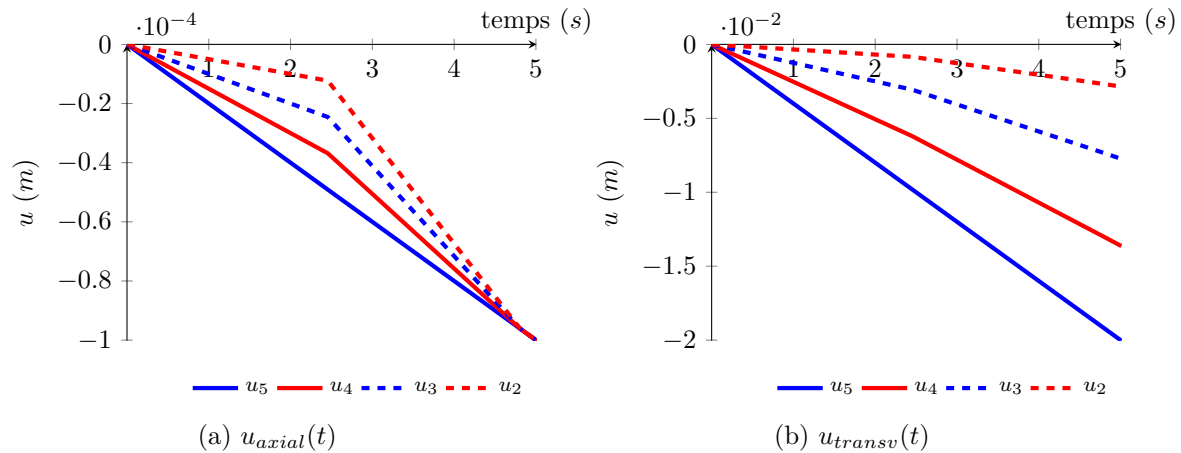


FIGURE 4.16 – Exemple 1, cas 3 : Evolution des déplacements longitudinaux u_{axial} et transversaux u_{transv} au cours du temps des nœuds dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5 et bloqués au nœud 1 non représenté).

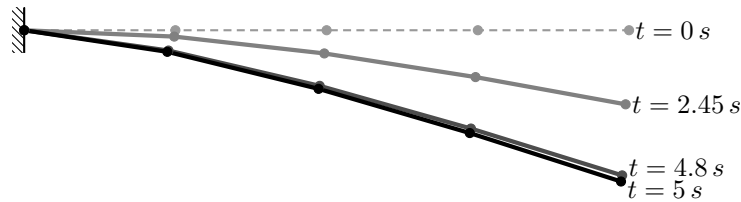


FIGURE 4.17 – Exemple 1, cas 3 : Déformées amplifiées de la poutre (10 fois transversalement, 100 fois longitudinalement) dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5).

Cette réduction de la vitesse de déplacement fait que la poutre est moins comprimée et, lorsque le premier point de Gauss atteint la limite d'élasticité, alors une rotule plastique est créée. Cependant, l'évolution des efforts internes diffère puisque c'est ici l'effort normal qui diminue pendant que le moment fléchissant continue à augmenter (voir la figure 4.18).

Le chemin de contrainte s'inverse donc par rapport au cas 1 (voir figure 4.19). A mesure que les déformations plastiques se développent, l'effort normal diminue jusqu'à devenir nul tandis que le moment fléchissant continue à augmenter jusqu'à ce que $m_1 = m_p$ (angle inférieur de l'ensemble C). A partir de là, bien qu'une vitesse de déplacement continue à être imposée, plus aucun effort interne n'est en mesure d'augmenter et toutes les déformations sont plastiques.

Lorsque le critère d'écoulement est atteint, comme dans le premier cas, le multiplicateur plastique $\lambda_{1,3}$ est activé. Cependant, lorsque la contrainte arrive dans l'angle de C, un second multiplicateur plastique $\lambda_{1,4}$ est également activé car l'angle est l'intersection de la troisième et de la quatrième fonctions d'écoulement (voir figure 4.20).

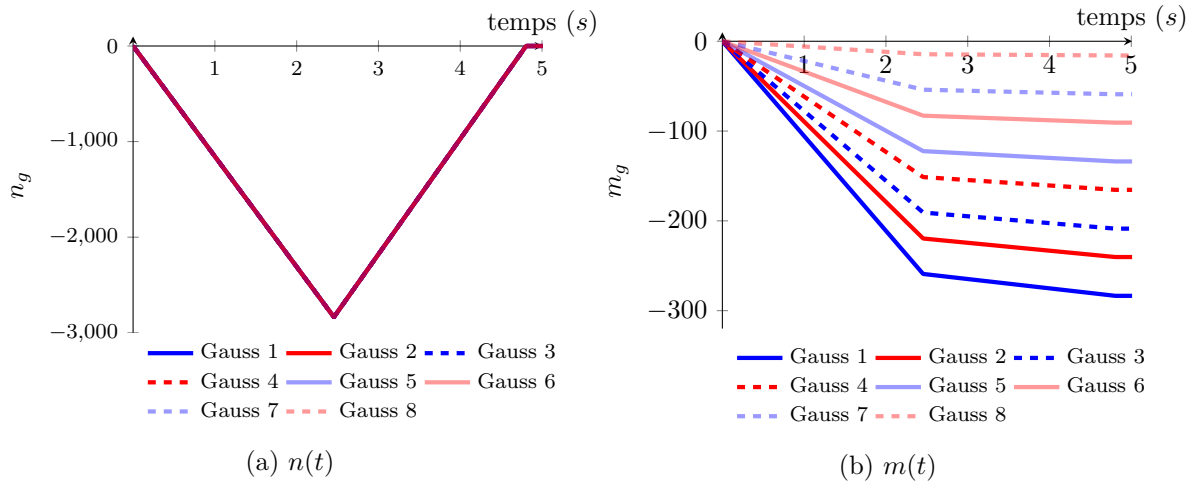


FIGURE 4.18 – Exemple 1, cas 3 : Evolution des efforts normaux n_g et des moments fléchissants m_g aux 8 points de Gauss d’une poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite.

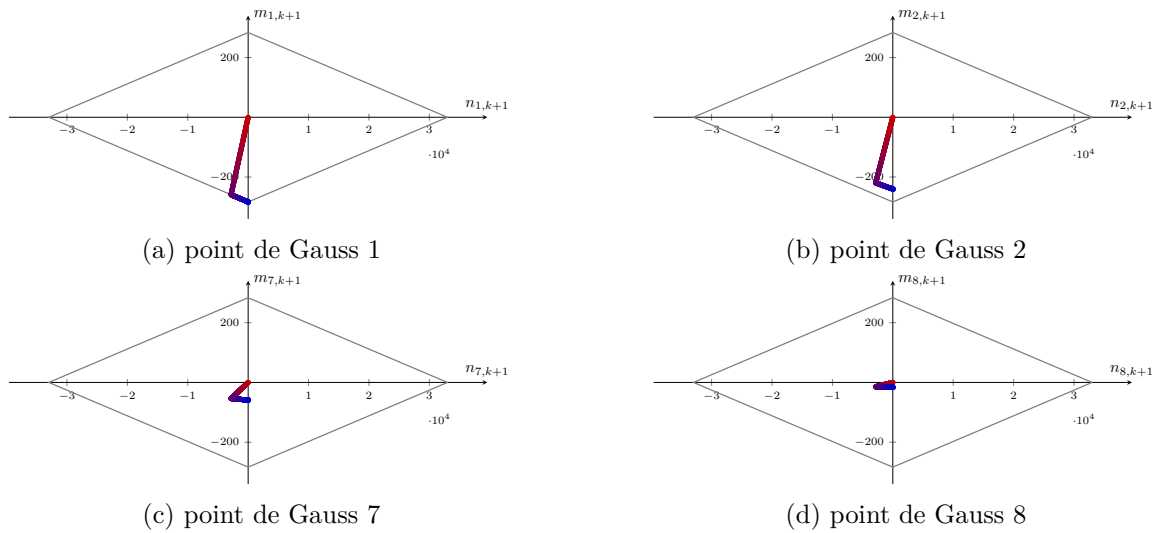


FIGURE 4.19 – Exemple 1, cas 3 : Chemin de contraintes (moment fléchissant en fonction de l’effort normal dans le plan effort normal - moment fléchissant), pour les deux premiers et les deux derniers point de Gauss de la poutre en console soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite. La forme losange correspond à la fonction d’écoulement qui délimite l’ensemble des contraintes admissibles C.

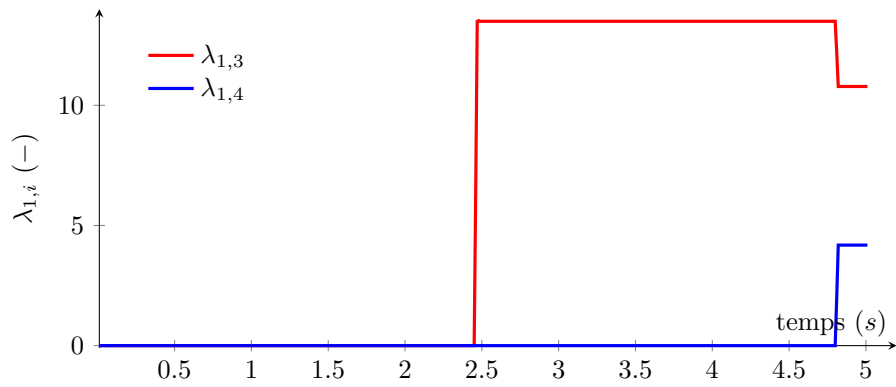


FIGURE 4.20 – Exemple 1, cas 3 : Evolution temporelle des multiplicateurs plastiques $\lambda_{1,3}$ et $\lambda_{1,4}$ correspondant à l'activation des troisième et quatrième fonctions linéaires délimitant C au premier point de Gauss de la poutre soumise simultanément à un déplacement transversal et à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite.

4.2.2.4 Cas de charge 4

Le quatrième et dernier cas envisagé suit un chemin de charge différent : durant la première moitié de la simulation (jusqu'à $t = 2.5s$), uniquement une vitesse de déplacement $v_{transv} = -8.10^{-3} m/s$ est appliquée puis, durant une seconde phase allant de $t = 2.5 s$ à la fin ($t = 5 s$), $v_{transv} = 0 m/s$ pendant qu'une vitesse axiale $v_{axial} = -2.10^{-4} m/s$ est appliquée (voir Figure 4.5). Les déplacements des différents nœuds sont montrés sur la figure 4.21.

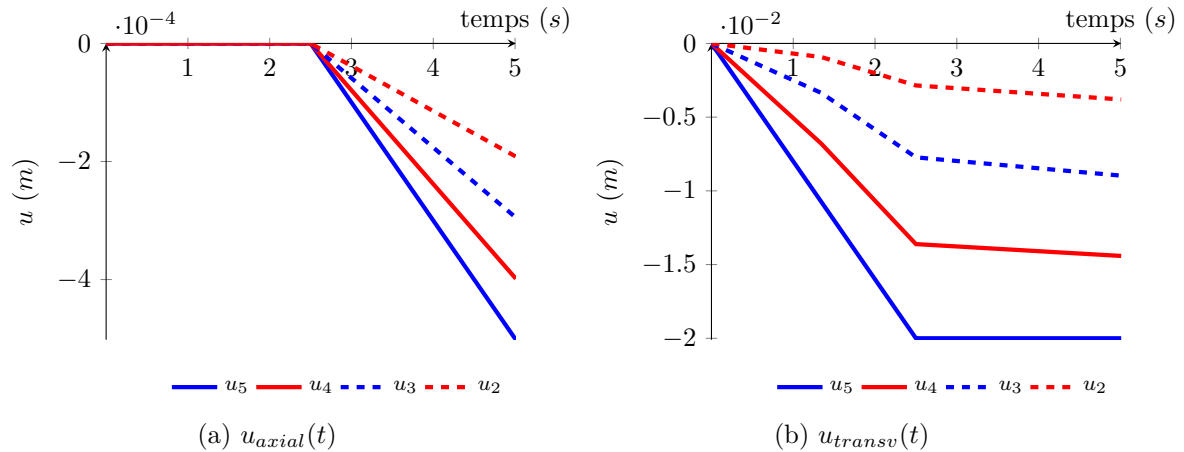


FIGURE 4.21 – Exemple 1, cas 4 : Evolution des déplacements longitudinaux u_{axial} et transversaux u_{transv} au cours du temps des nœuds dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5 et bloqués au nœud 1 non représenté).

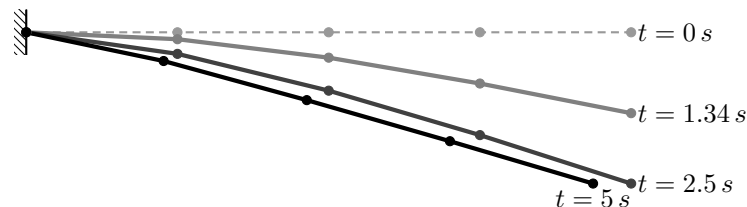


FIGURE 4.22 – Exemple 1, cas 4 : Déformées amplifiées de la poutre (10 fois transversalement, 100 fois longitudinalement) dans le cas de la plasticité parfaite (déplacements imposés au nœud 5).

Suivant ce chargement, le moment fléchissant au premier point de Gauss atteint le moment plastique à $t = 1.34 s$. Puisqu'à cet instant il n'y a pas d'effort normal, le critère d'écoulement est atteint alors que la contrainte est située dans le coin inférieur de l'ensemble C, limité à cet endroit par les troisième et quatrième fonctions délimitant C (voir la figure 4.24a). Les multiplicateurs $\lambda_{1,3}$ et $\lambda_{1,4}$ sont donc activés simultanément et ont la même valeur (voir la figure 4.25). Il y a alors formation d'une rotule plastique au premier point de Gauss, aucun moment supplémentaire ne peut être ajouté. Ainsi, bien que l'extrémité de la poutre continue à se déplacer, toutes les déformations sont plastiques et localisées à ce premier point de Gauss et les moments fléchissants à chaque point de Gauss restent constants jusqu'à la fin de la première phase de chargement (voir la figure 4.23 et les déformées associées Figure 4.22).

Lors de la seconde phase de chargement, la poutre est comprimée. La fonction d'écoulement étant déjà atteinte, il est impossible d'ajouter de nouveaux efforts internes sans modifier les moments fléchissants (il y a alors mouvement de corps rigide et une relaxation des efforts

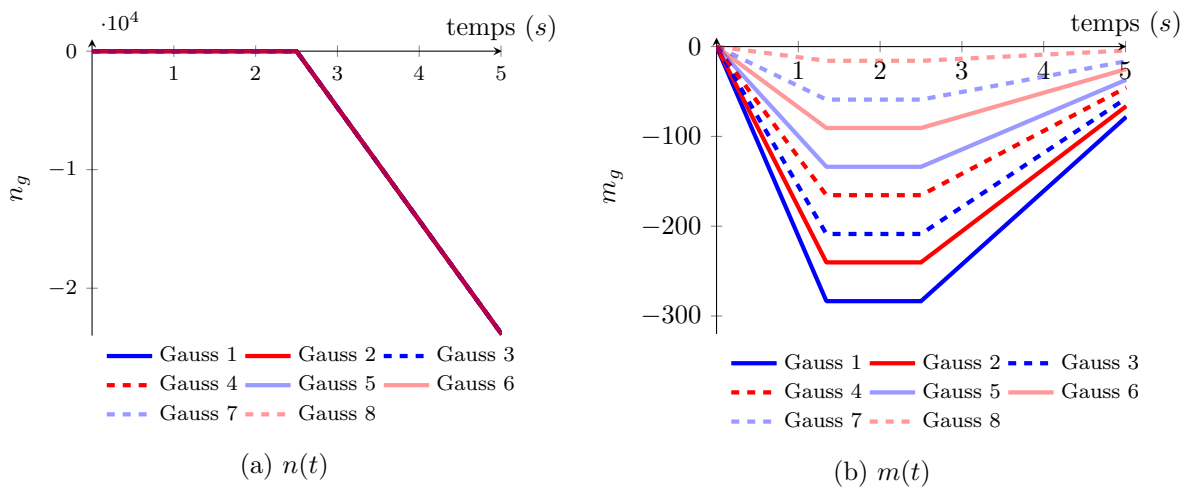


FIGURE 4.23 – Exemple 1, cas 4 : Evolution des efforts normaux n_g et des moments fléchissants m_g aux 8 points de Gauss d’une poutre en console soumise successivement à un déplacement transversal puis à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite.

internes : ce résultat est imposé par la formulation de la loi d’écoulement qui ne représente pas une loi réelle mais un cas d’étude menant à ces résultats contre intuitifs). Une baisse de ces derniers est alors observée durant l’augmentation de l’effort normal (Figure 4.23). Le multiplicateur $\lambda_{1,4}$ s’annule en même temps que $\lambda_{1,3}$ est modifié puisque, dorénavant, seule la troisième contrainte est active (Figure 4.25).

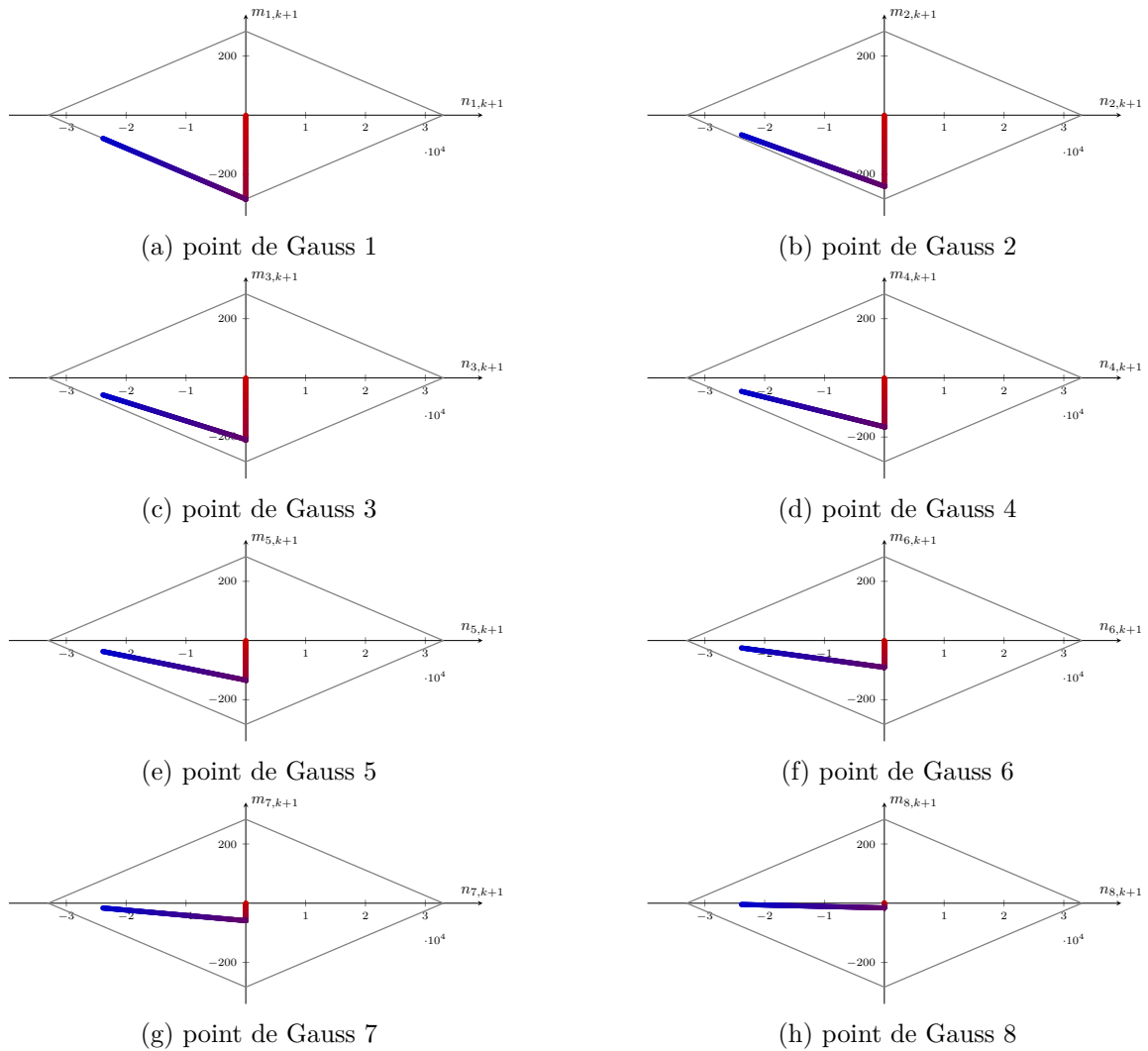


FIGURE 4.24 – Exemple 1, cas 4 : Chemin de contraintes (moment fléchissant en fonction de l'effort normal dans le plan effort normal - moment fléchissant), pour chaque point de Gauss de la poutre en console soumise successivement à un déplacement transversal puis à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite. La forme losange correspond à la fonction d'écoulement qui délimite l'ensemble des contraintes admissibles C .

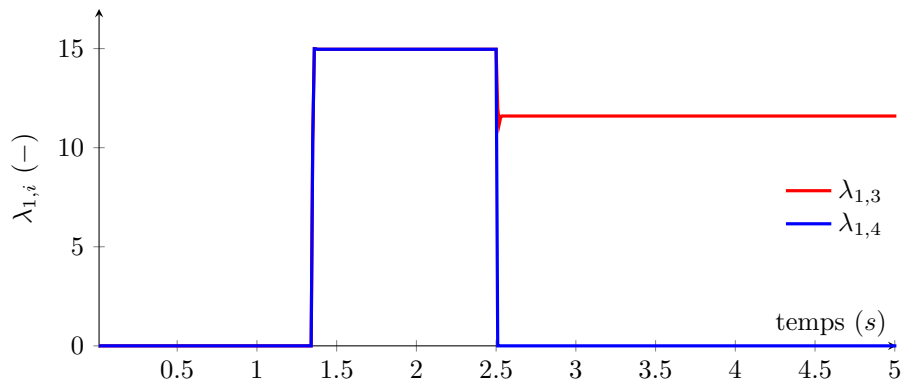


FIGURE 4.25 – Exemple 1, cas 4 : Evolution temporelle des multiplicateurs plastiques $\lambda_{1,3}$ et $\lambda_{1,4}$ correspondant à l'activation des troisième et quatrième fonctions linéaires délimitant C au premier point de Gauss de la poutre soumise successivement à un déplacement transversal puis à un déplacement axial, dans le cas de la plasticité parfaite.

4.2.3 Conclusion

Ce premier exemple a permis de montrer les possibilités offertes par la formulation proposée de l'élastoplasticité. En particulier, il faut souligner la possibilité de résoudre des problèmes quasi-statiques en choisissant des paramètres numériques assurant une grande dissipation énergétique, ainsi que la possibilité de résoudre des problèmes de plasticité parfaite (le caractère bien posé du calcul est conservé même en cas de présence de rotules plastiques grâce à la régularisation de la dynamique).

Il faut noter que l'évolution des efforts internes (efforts normaux et moments fléchissants) est liée à la formulation de la fonction d'écoulement qui délimite C . Ce critère, de forme losange, ne reflète peut être pas le comportement physique des poutres métalliques lors de grands écoulements plastiques, mais il permet d'illustrer clairement le fonctionnement de l'algorithme développé (une fonction d'écoulement elliptique ou superélliptique aurait donné des évolutions différentes).

Cet exemple illustre donc la capacité de l'approche proposée à respecter la fonction d'écoulement plastique pouvant comporter des points singuliers, et ce, quel que soit le cas de chargement et la loi de comportement employée.

4.3 Poutre élastoplastique impactée

Le second exemple permet d'illustrer la pertinence de la formulation pour la prise en compte conjointe de la plasticité et de l'impact. Le bilan énergétique du système sera effectué, en regardant en particulier l'évolution de la dissipation d'énergie en fonction des paramètres du schéma numérique.

4.3.1 Présentation de l'exemple

Géométrie et matériaux L'objet de cet exemple est une poutre élastoplastique (avec écrouissage) en console impactée à son extrémité libre par un projectile sphérique indéformable (voir Figure 4.26).

La poutre est discrétisée en 100 éléments afin de pouvoir suivre les effets dynamiques. Le projectile, dont le point le plus bas est situé à une distance $q_{proj} = g_N = 1m$ au dessus de la poutre, est aligné avec l'extrémité de la poutre afin que le contact nœud à nœud ait bien lieu. Ce projectile de masse m_{proj} ne possède qu'un degré de liberté précisant sa position verticale, qui ne devra jamais être inférieure à la position verticale de l'extrémité de la poutre. La matrice des relations cinématiques H est alors un vecteur colonne de dimension 404 rempli de zéros hormis aux degrés de liberté des nœuds candidats au contact : -1 pour le degré de liberté du déplacement vertical du nœud de l'extrémité de la poutre, et 1 pour le degré de liberté du projectile. Le tableau 4.2 résume toutes les propriétés géométriques et matérielles utilisées dans cet exemple.

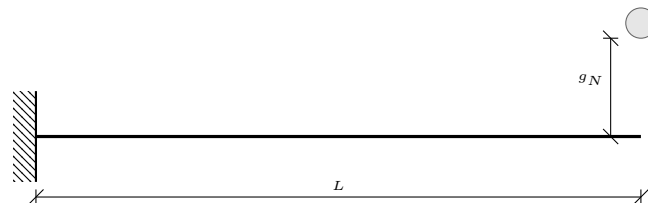


FIGURE 4.26 – Exemple 2 : Modèle de la poutre en console impactée.

4.3. Poutre élastoplastique impactée

L (m)	3	I (m^4)	$8.643 \cdot 10^{-6}$
A (m^2)	$3.4 \cdot 10^{-3}$	E (MPa)	210000
H_{ci} (MPa)	$21000 \cdot 10^6$	H_{is} (MPa)	$2100 \cdot 10^6$
n_p (N)	799000	m_p (Nm)	33840
ρ (kg/m^3)	7701		
m_{ball} (kg)	250	$q_{y\ ball}(t=0)$ (m)	1

TABLE 4.2 – Exemple 2 : Caractéristiques du modèle

Il convient de préciser que la masse de la poutre est utilisée pour construire la matrice de masse M dont dépendent les termes d'inertie. En revanche, le poids propre de la poutre n'est pas pris en compte afin de se concentrer sur les effets de l'impact du projectile. Ce dernier est quant à lui soumis à la gravité.

Paramètres de simulation Le coefficient de restitution, dont l'importance du choix sera discuté dans cet exemple, est choisi tel que $e = 0$ afin de mettre en avant les dissipations possibles lors des impacts et de conserver les contacts fermés dans les cas où les efforts le permettent.

Le paramètre θ du schéma numérique est choisi suivant (3.113) égal à $1/2$ afin de limiter la dissipation d'énergie liée au schéma numérique.

Enfin, le pas de temps h doit être largement inférieur à la période propre de vibration de la poutre afin de pouvoir observer correctement les vibrations. Comme la période de vibration de flexion est $T_{transv} = 0.06s$, h est choisi comme inférieur au vingtième de cette période, soit $h \leq 3 \cdot 10^{-3} s$. Afin de capturer correctement l'instant d'impact et de limiter les interpénétrations, ce pas de temps est encore réduit et pris comme étant $h = 10^{-4} s$.

4.3.2 Résultats

Résultats généraux La figure 4.27 présente les positions verticales du dernier nœud de la poutre et du point inférieur du projectile au cours du temps. Après une période de chute libre de ce dernier, une première période d'interaction est observée à l'issue de laquelle le projectile repart vers le haut pendant que la poutre oscille suivant sa période propre T_{transv} . Finalement, une seconde période d'interaction a lieu en fin de simulation.

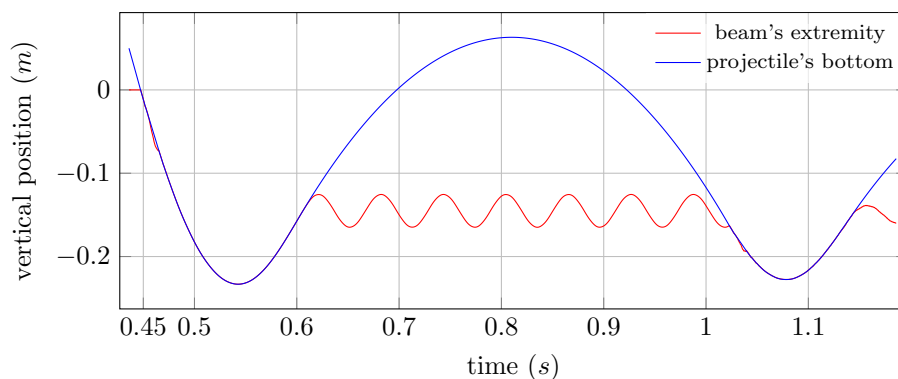


FIGURE 4.27 – Exemple 2 : Positions verticales de l'extrémité libre de la poutre et du point inférieur du projectile au cours du temps.

Les impulsions appliquées au projectile et au nœud de la poutre pendant la première

période d'interaction induisent le rebond du projectile et la flexion de la poutre. A l'issue de cette première phase, les oscillations libres de la poutre ne s'effectuent pas autour de zéro, mais autour d'une valeur négative, signe que la position d'équilibre de la poutre a été modifiée suite à l'impact avec une dissipation d'énergie due au développement de déformations plastiques.

En regardant plus en détail ce qui se passe, lorsque le projectile impacte la poutre, une première période caractérisée par une succession de courtes interactions entre le projectile et la poutre est observée (zone bleu clair sur la figure 4.29). Comme le coefficient de restitution e a été fixé à une valeur nulle, chaque interaction s'étale sur quelques pas de temps. Il faut cependant noter que, si e avait été fixé à une valeur non nulle, chaque interaction n'aurait duré qu'un seul pas de temps. L'apparition et la durée de cette phase de transition est liée à la rigidité de la poutre. Vient ensuite une seconde phase plus longue de contact permanent entre la poutre et le projectile (zone bleue sur la figure 4.29). Pendant cette phase, la vitesse relative est nulle alors que l'impulsion est toujours supérieure à zéro (Figure 4.29), comme spécifié dans la condition de complémentarité (équation (3.78)). De plus, la légère interpénétration visible sur la figure 4.27 est aussi liée aux conditions de complémentarité discrétisées, ainsi qu'à la taille du pas de temps (si h avait été réduit, cette interpénétration serait moindre). Ensuite, une nouvelle phase de transition très courte apparaît (zone rouge sur la figure 4.29) durant laquelle quelques interactions très rapides ont lieu, avant que le projectile ne reparte vers le haut pour une période de chute libre avec vitesse initiale pendant que la poutre oscille autour de sa nouvelle position d'équilibre. Finalement, une seconde phase d'interaction arrive en fin de simulation (zone rouge clair sur la figure 4.29), similaire à la première durant laquelle on observe de multiples impacts entre la poutre et le projectile.

Transferts et dissipation d'énergie Pour ce paragraphe, le bilan énergétique du système complet (poutre et projectile) est étudié. Sur la figure 4.28, il est clairement visible que le travail des forces externes $W_{ext\ 0}^{k+1}$ est égal à la somme de l'énergie mécanique E_{k+1} , de la dissipation plastique $W_p\ 0^{k+1}$ et de la dissipation à l'impact $W_c\ 0^{k+1}$. Ainsi, l'équation (3.103) est vérifiée et illustre que, puisque $\theta = 1/2$, il n'y a pas de dissipation numérique.

Durant la simulation, puisque les efforts de gravité n'ont pas été appliqués à la poutre, la valeur du travail des forces externes $W_{ext\ 0}^{k+1}$ ne varie qu'en fonction de la position verticale du projectile. Ainsi, avant le premier impact, le travail des forces externes $W_{ext\ 0}^{k+1}$ est égal à l'énergie cinétique du projectile.

Lorsque le projectile et la poutre entrent en contact, la dissipation d'énergie est observée suite à l'apparition de déformations plastiques ($W_p\ 0^{k+1}$) et aux multiples contacts successifs ($W_c\ 0^{k+1}$). Il faut noter que du fait de la formulation sans amortissement du système et puisque le schéma ne dissipe aucune énergie, des vibrations à haute fréquence sont observées. A partir du moment où le contact est établi (voir la figure 4.27 - zone bleu clair), la vitesse relative entre le projectile et la poutre est nulle et il n'y a donc plus que les déformations plastiques qui continuent à dissiper l'énergie initiale du projectile. Cette valeur de dissipation $W_p\ 0^{k+1}$ continue d'augmenter jusqu'à ce que le projectile ait atteint son point le plus bas.

Quelques impacts se produisent durant la période de transition entre la fin du contact permanent et la séparation de la poutre et du projectile à l'issue de la première phase d'interaction, mais avec des vitesses relatives très faibles. La dissipation associée est donc également très faible et non visible sur la figure 4.28.

Finalement, lorsque la seconde phase d'interaction débute, le même processus de dissipation entre en jeu. Cependant, hormis lors du premier impact pour lequel les vitesses relatives sont élevées, la dissipation au contact s'effectue de manière progressive et implique une plus grande quantité d'énergie dissipée par ce moyen que durant la première interaction. Ce résultat, peu intuitif, est expliqué par la succession de nombreux impacts à cause des vibrations

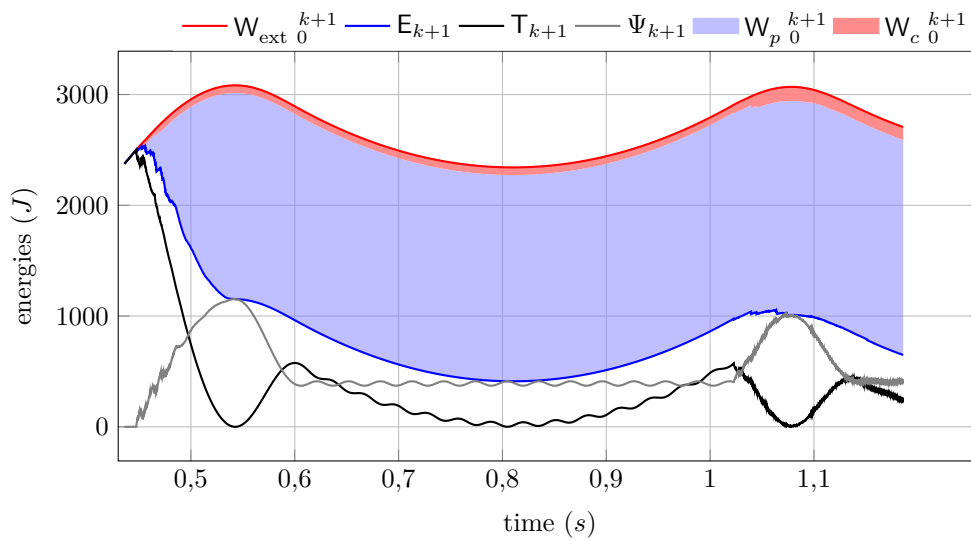
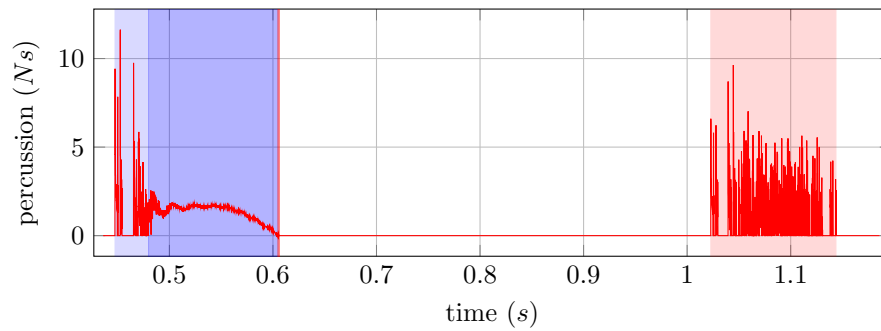


FIGURE 4.28 – Exemple 2 : Energies dissipées et présentes dans le système au cours du temps (projectile et poutre). Le travail des forces externes $W_{ext\ 0}^{k+1}$ est égal à la somme de l'énergie mécanique E_{k+1} , de la dissipation plastique W_p^{k+1} et de la dissipation au contact W_c^{k+1} . De plus, l'énergie mécanique E_{k+1} est composée par la somme de l'énergie cinétique T_{k+1} et de l'énergie libre de déformation Ψ_{k+1} .

du système non amorti qui impliquent de nombreux incréments de dissipation (cette propriété numérique est discutée au paragraphe suivant, Influence des discrétisations spatiale et temporelle). En revanche, les dissipations plastiques sont très faibles en comparaison avec la première période d'interaction (la zone colorée rouge n'augmente que très peu de taille). Ceci s'explique par le fait que l'essentiel de l'énergie cinétique initiale du projectile a été dissipé et que la poutre est capable d'emmagasiner sous forme de déformations élastiques la majeure partie de ce qui reste.



(a) Percussion en fonction du temps

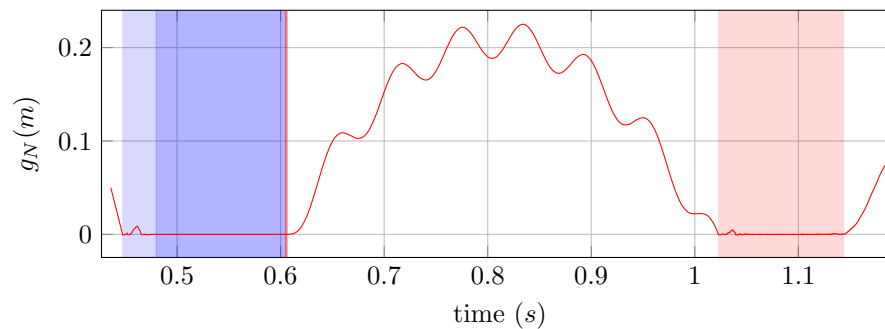
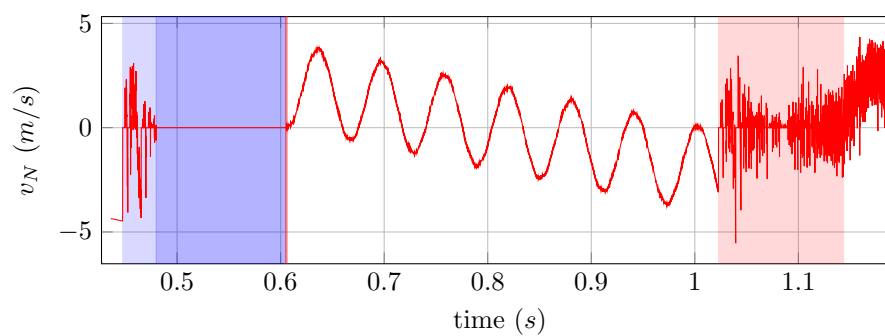

 (b) Distance relative g_N en fonction du temps

 (c) Vitesse relative v_N en fonction du temps

FIGURE 4.29 – Exemple 2 : Quantités impliquées dans l'interaction entre le projectile et l'extrémité libre de la poutre. La dissipation du contact se produit lorsque le contact s'active (plusieurs fois pendant la première phase de transition (zone bleu clair)), mais est nulle lorsque le contact reste actif (zone bleu).

Influence des discrétisations spatiale et temporelle Pour étudier l'influence des discrétisations spatiale et temporelles sur les dissipations énergétiques, seule une partie réduite de la simulation est utilisée (cette restriction est nécessaire afin de pouvoir effectuer les calculs avec à la fois un pas de temps très fin et un grand nombre d'éléments dans le maillage tout en conservant des temps de calcul raisonnables).

Dans un premier temps, c'est une partie de la période de transition (bleu clair sur la figure 4.29) qui est étudiée, depuis l'instant initial de la simulation jusqu'à $t = 0.457$ s.

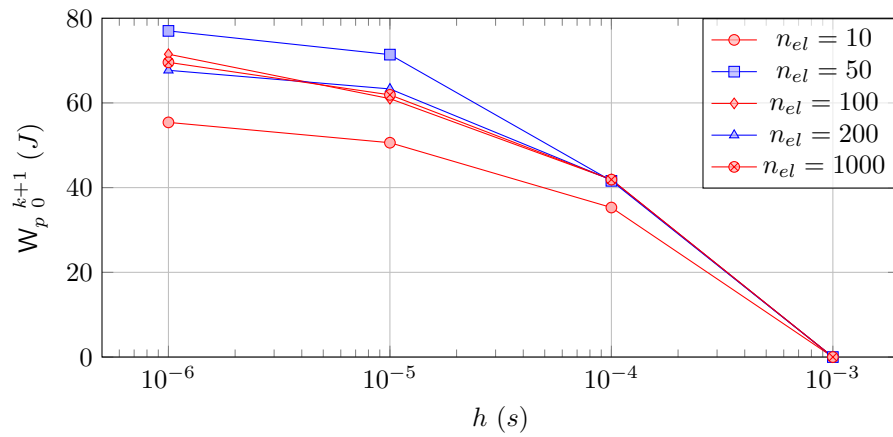
Sur cet intervalle de temps, une tendance générale semble se dessiner avec l'augmentation de la dissipation plastique lorsque le pas de temps diminue, de façon individualisée pour chaque raffinement de maillage. Cette dissipation semble être influencée par le maillage qui, lorsque le nombre d'éléments atteint 100, donne des résultats similaires pour chaque pas de temps envisagé (voir Figure 4.30a). Le nombre total de points de Gauss qui augmente avec le nombre d'éléments peut être responsable d'une meilleure estimation des déformations plastiques et donc modifier légèrement la quantité totale d'énergie dissipée par plasticité sur cet intervalle de temps. Mais de façon générale, dès lors que le maillage est suffisamment fin, seul le pas de temps permet d'affiner la précision des dissipations énergétique par plasticité.

De même, lorsque le pas de temps diminue, il semble y avoir convergence des résultats pour l'énergie dissipée au contact. Les courbes pour chaque nombre d'élément montrent la même tendance lorsque le pas de temps diminue : l'énergie dissipée par contact diminue aussi. Le pas de temps a donc une influence sur ce résultat avec une convergence lorsque h diminue, mais ces courbes ne montrent pas clairement de dépendance au maillage dès lors que le nombre d'éléments dépasse 100.

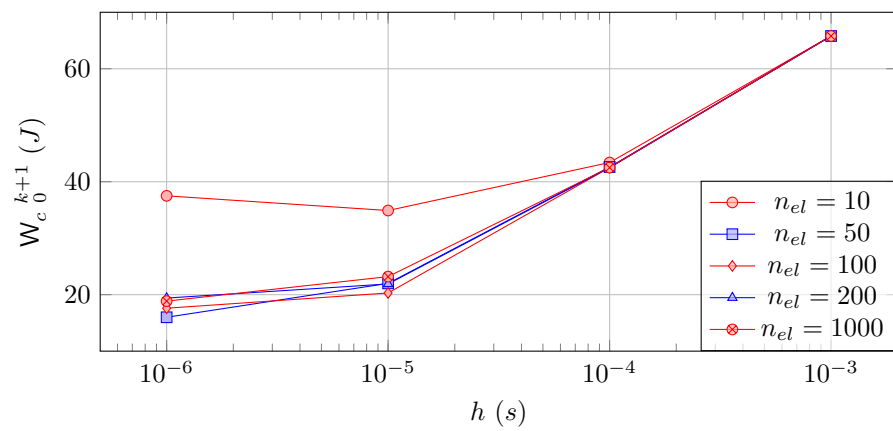
Ainsi, afin de regarder plus précisément la dépendance au maillage, seule la valeur de la première percussion (directement liée à la dissipation au contact par l'équation (3.101)) est maintenant étudiée, sur un seul pas de temps afin de pouvoir affiner davantage les discrétisations (Figure 4.31). Il est alors clairement observable que la valeur de cette percussion diminue avec le pas de temps jusqu'à une valeur convergée différente pour chaque raffinement de discrétisation spatiale.

Cette valeur convergée est d'ailleurs de plus en plus faible à mesure que le nombre d'éléments augmente (et la valeur convergée n'est d'ailleurs pas atteinte pour la discrétisation la plus fine en espace et en temps). Donc, lorsque le système tend à se rapprocher d'un système continu élastique classique (sans non régularités de contact), la percussion tend à disparaître, ce qui peut être mis en relation avec les questions ouvertes sur l'existence ou non de percussions dans les configurations de poutres impactées pour des modèles continus (voir travaux de CHATTERJEE (2004) ou de BHATTACHARJEE et CHATTERJEE (2018) par exemple).

Ainsi, lorsque le système tend vers le modèle continu, la percussion tend à disparaître. Le sens et l'utilité du coefficient de restitution e peuvent être remis en question puisqu'il n'y a aucune dissipation au contact. De même, le sens physique de cette dissipation au contact obtenue numériquement est à envisager comme un artefact numérique, mais qui reste limité au regard des quantités d'énergie dissipées.



(a) Dissipation plastique



(b) Dissipation au contact

FIGURE 4.30 – Exemple 2 : Analyse de convergence des énergies dissipées à l'issue de la première phase de contact (à $t = 0.457$ s, voir zone bleu claire sur la Figure 4.29). L'énergie dissipée pour différents nombres d'éléments est tracée en fonction de la taille du pas de temps h .

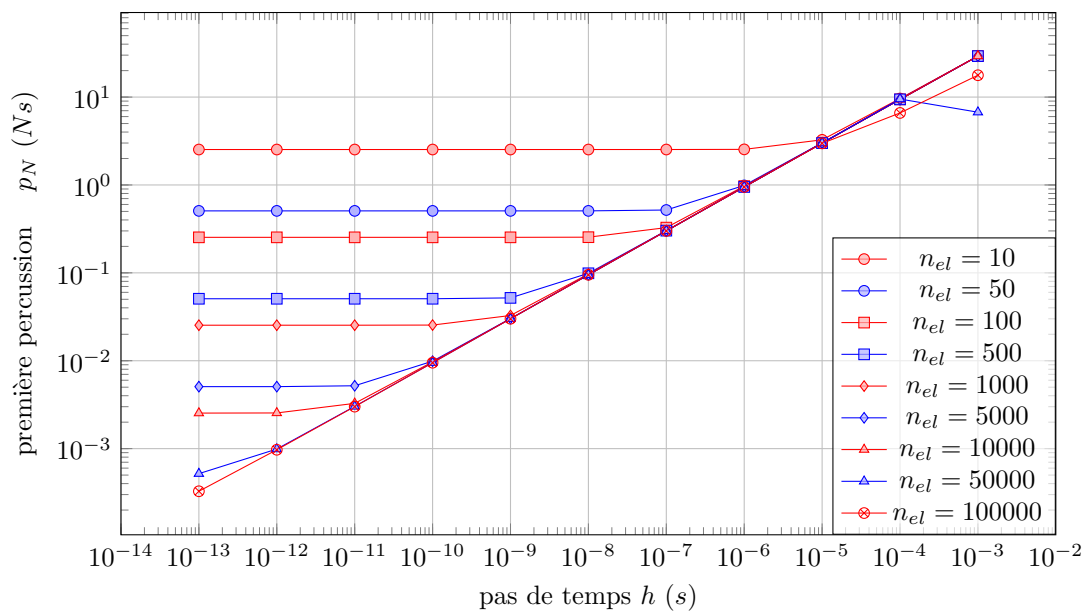


FIGURE 4.31 – Exemple 2 : Valeur de la première percussion p_N lorsque le projectile entre en contact avec l'extrémité libre de la poutre en fonction de la taille du pas de temps h pour différents raffinements de maillage.

Choix de θ pour la plasticité **A FAIRE ET REFAIRE :) :**

Le choix de $\theta = 0.5$ permet de préserver les propriétés énergétiques du schéma numérique. Dans ce cas, en résolvant l'ensemble des équations à l'instant $t_{k+\theta}$, le critère de plasticité est respecté au milieu du pas de temps. Cependant, ce critère n'est vérifié et n'est valable qu'à cet instant. Le post traitement de ce résultat pour obtenir la valeur du critère ou des efforts internes à d'autres instants est susceptible de dépasser la valeur limite de plasticité. Des oscillations de contraintes autour de la contrainte limite peuvent arriver.

Ces oscillations sont visibles sur la courbe rouge de la figure 4.32 qui trace les résultats à la fin de chaque pas de temps (en t_{k+1}) déterminés à partir du post traitement des valeurs à l'instant $t_{k+\theta}$: les valeurs oscillent autour du moment de flexion limite m_p . Issues directement de la résolution numérique, les valeurs en $t_{k+\theta}$, tracées avec la courbe bleue, ne dépassent jamais la valeur du moment plastique.

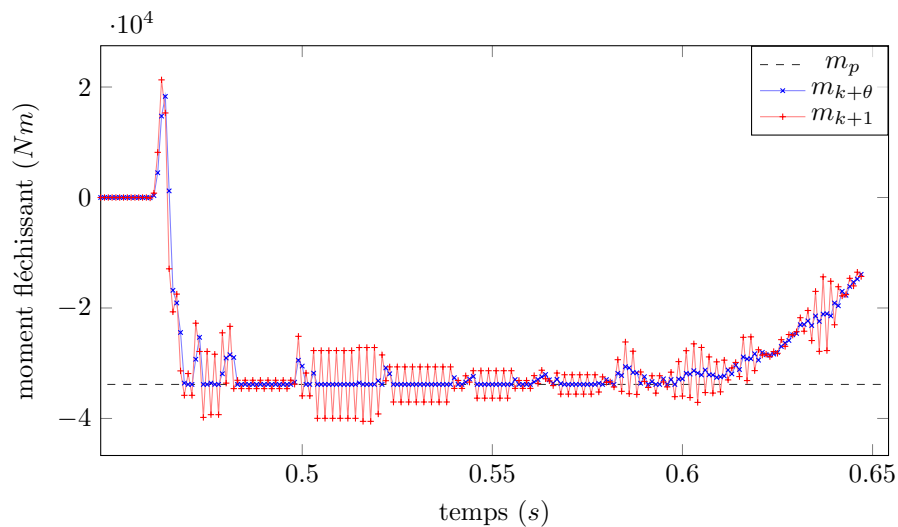


FIGURE 4.32 – Exemple 2 : Moments fléchissants en fonction du temps lorsque $\theta = 1/2$ dans le cas de la plasticité parfaite (zoom sur le début de la simulation, de $t = 0.447$ s à $t = 0.647$ s). Les valeurs issues directement des calculs en $t_{k+\theta}$ respectent toujours la limite imposée par le moment plastique de la poutre m_p . Pour les valeurs tracées à l'aide de la θ -méthode en t_{k+1} (fin de chaque pas de temps), les valeurs de moments fléchissants oscillent autour de m_p . Noter que le pas de temps est pris à $h = 10^{-3}$ s pour mieux voir les oscillations qui sont réduites lorsque le pas de temps baisse.

4.3.3 Conclusion

Cet exemple a permis de valider le bon fonctionnement de l'algorithme monolithique de résolution de la plasticité et du contact.

L'étude du bilan énergétique, ainsi que des transferts et des dissipations d'énergie montre la performance du schéma de discrétisation temporelle dans la modélisation des systèmes dynamiques puisqu'il n'y a aucune dissipation numérique suivant les hypothèses adoptées pour les travaux des forces externes, de dissipation plastique et de contact.

Le choix du nombre d'éléments et de la taille du pas de temps influe peu sur les dissipations d'énergie dues à la plasticité tandis que les dissipations dues au contact varient fortement avec les paramètres de discrétisation, même si les quantités d'énergie dissipée au contact sont bien inférieures à celles dissipées par plasticité.

Enfin, lorsque le système discret tend à se rapprocher d'un modèle continu (en espace et en temps), la percussion semble disparaître et le coefficient de restitution e n'a plus d'influence sur les résultats.

4.4 Etude d'un portique

Ce troisième exemple permet d'illustrer l'intérêt de la résolution simultanée du contact et de la plasticité au sein d'un algorithme monolithique. En particulier, les répartitions des différentes dissipations et des déformations seront menées à l'aide de l'analyse d'une structure destinée à arrêter un projectile.

4.4.1 Présentation de l'exemple

Géométrie et matériaux La structure considérée est un portique rectangulaire de 2 mètres de hauteur pour 3 mètres de largeur, encadrée à ses deux extrémités (voir la figure 4.33). Cette structure, composée de poutrelles en acier S355 (masse volumique $\rho = 7701 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, module d'Young $E = 210\,000 \text{ MPa}$, module d'écroissage cinématique $H_{cin} = 21\,000 \text{ MPa}$ et module d'écroissage isotrope $H_{iso} = 2\,100 \text{ MPa}$, donc l'effort normal plastique vaut $n_p = 3.3 \text{ MN}$ et le moment plastique $m_p = 0.6 \text{ MNm}$) du type HEB300 (aire de la section $A = 14.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, inertie $I = 252 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$), est impactée sur son poteau de gauche à 0.67 m de sa base par un projectile sphérique indéformable d'une tonne, arrivant avec une vitesse horizontale $v_{impact} = 6 \text{ m/s}^{-1}$ (sauf mention contraire).

Les caractéristiques du système sont résumées dans le tableau 4.3. La gravité n'est pas appliquée en tant que force externe au système afin de bien cibler l'analyse sur les transferts d'énergie entre le projectile et la structure.

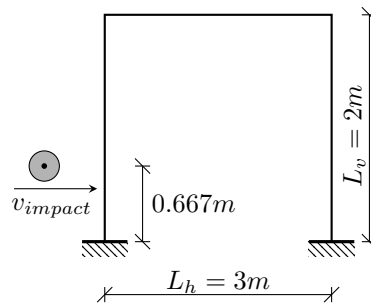


FIGURE 4.33 – Exemple 3 : Représentation schématique du système étudié.

$E \text{ (MPa)}$	210 000	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7701
$H_{cin} \text{ (MPa)}$	$E/10 = 21000$	$H_{iso} \text{ (MPa)}$	2100
$A \text{ (m}^2\text{)}$	$14.9 \cdot 10^{-3}$	$I \text{ (m}^4\text{)}$	$252 \cdot 10^{-6}$
$n_p \text{ (MN)}$	5.3	$m_p \text{ (MNm)}$	0.60
$n_{el,v}$	30	$n_{el,h}$	60
$m_{proj} \text{ (kg)}$	1000	$v_{impact} \text{ (m/s}^{-1}\text{)}$	6

TABLE 4.3 – Exemple 3 : Caractéristiques du système général

Paramètres de la simulation Les poteaux sont discrétisés de façon courante en $n_{el,v} = 30$ éléments et la poutre horizontale en $n_{el,h} = 60$ éléments. Un nombre plus restreint d'éléments aurait suffi à caractériser les dissipations plastiques, mais n'aurait pas permis de modéliser correctement la dynamique de la structure car la répartition spatiale de la masse des éléments aurait été insuffisante. La discrétisation des poteaux et de la poutre peut s'écrire de manière plus générale avec :

$$n_{el,v} = 3\iota \quad \text{et} \quad n_{el,h} = 6\iota \quad (4.21)$$

où $\iota = 10$ est un paramètre permettant de raffiner le maillage. Afin d'étudier l'influence du maillage, il est susceptible d'être modifié.

Comme pour le second exemple, afin de capturer correctement les phénomènes d'impact, le pas de temps est choisi de manière à être inférieur au vingtième de la période propre de vibration de la structure. Cette période étant de 0.014 s , le pas de temps est fixé à $h = 1 \cdot 10^{-5}\text{ s}$. Le paramètre du schéma numérique est $\theta = 1/2$ pour éviter les dissipations numériques et le coefficient de restitution est $e = 0$ afin de conserver une dissipation au contact, suivant les discussions de l'exemple 2.

4.4.2 Résultats

4.4.2.1 Influence du choix du type de plasticité

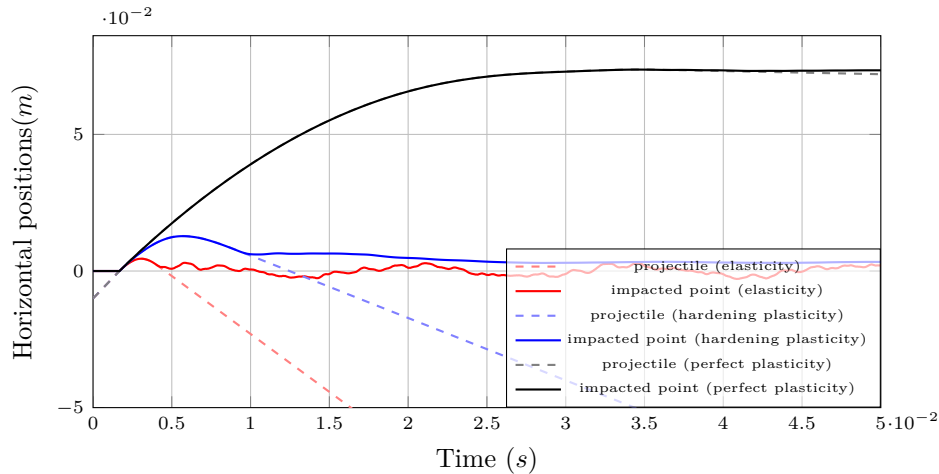
Le choix de la modélisation du comportement du matériau a une influence sur les résultats qu'il convient de d'analyser (quantité d'énergie dissipée, localisation des déformations plastiques). En se basant sur des comparaisons entre la structure en élasticité linéaire, dans le cas de la plasticité parfaite et en plasticité avec écrouissage, des différences en termes de déplacements, de vitesses et de dissipation d'énergie sont observées.

En considérant en premier lieu un comportement élastique de la structure (limite d'élasticité repoussée à l'infini), l'impact entraîne un transfert d'énergie cinétique important du projectile vers la structure (voir Figure 4.35). Après une phase de contact d'une durée d'environ 0.3 s (courbes rouges sur la figure 4.34a), le projectile repart en sens opposé avec une vitesse après rebond égale à -5.9 m s^{-1} (courbe rouge sur la figure 4.34b), ce qui correspond à 71% de la vitesse d'impact. Seule une partie restreinte de l'énergie est dissipée au point de contact (2% de l'énergie d'impact - Figure 4.35). Par conséquent, l'énergie transférée à la structure (48% de l'énergie d'impact) se traduit principalement par une oscillation non amortie du cadre.

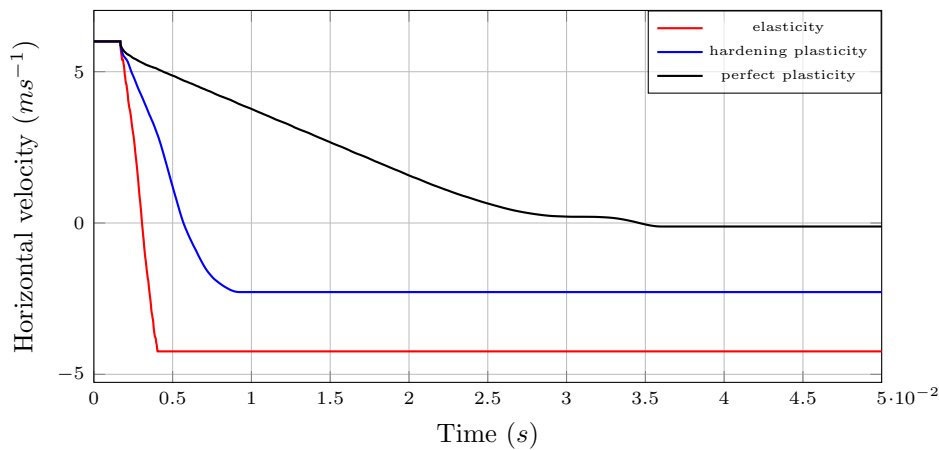
Dans le cas où le matériau de la structure est considéré parfaitement plastique dans la modélisation, la majeure partie de l'énergie du projectile est transférée à la structure et la vitesse du projectile est presque nulle après l'impact ($-0,6\text{ m s}^{-1}$, soit seulement 7,1% de la vitesse d'impact). L'énergie d'impact transmise à la structure est principalement dissipée par les déformations plastiques dans la structure (90% de l'énergie d'impact dissipée par ce moyen), tandis qu'une petite quantité reste présente dans la structure sous forme d'oscillations élastiques (8% de l'énergie d'impact). La part d'énergie dissipée au contact est similaire à l'énergie dissipée pour une structure élastique (2% de l'énergie d'impact).

La modélisation prenant en compte l'écrouissage du matériau ne modifie que faiblement la réponse de la structure par rapport au cas de la plasticité parfaite. Une quantité d'énergie légèrement plus faible est dissipée par les déformations plastiques (86% de l'énergie d'impact), ce qui se traduit par une plus grande vitesse du projectile après impact ($-1,7\text{ m/s}$, soit 21% de la vitesse d'impact). L'énergie mécanique de la structure après impact et l'énergie dissipée au contact (respectivement 8% et 2% de l'énergie d'impact) sont du même ordre de grandeur que dans le cas de la plasticité parfaite. Seule la dissipation plastique est diminuée, ce qui réduit d'autant moins l'énergie cinétique du projectile.

4.4. Etude d'un portique



(a) Positions horizontales au cours du temps du point de droite du projectile et du point impacté de la structure dans les trois cas étudiés.



(b) Vitesses horizontales au cours du temps du projectile dans les 3 cas étudiés.

FIGURE 4.34 – Exemple 3 : Positions et vitesses au cours du temps. Chaque résultat est donné pour les trois configurations proposées (élasticité, plasticité parfaite et plasticité avec écrouissage). En plasticité, la structure oscille autour d'une position d'équilibre déplacée : elle a bien dissipé l'énergie initiale du projectile. Dans le cas de la plasticité parfaite, le projectile est quasiment stoppé, la structure joue donc son rôle.

En revanche, les localisations des déformations plastiques au sein de la structure sont sensiblement différentes (voir Figure 4.36). Dans le cas de la plasticité parfaite, des rotules plastiques très localisées se développent auprès du point de contact, des extrémités encastrées et des connexions entre les poteaux et la poutre, et les déformations plastiques y sont élevées. Dans le cas de où l'écrouissage est pris en compte, les déformations plastiques sont moindres et beaucoup plus largement distribuées mais toujours autour des mêmes points spécifiques de la structure. Ce résultat semble être cohérent avec les résultats de KHAN et al. (2021) : même si le système n'est pas exactement le même, il est similaire et l'emplacement des déformations plastiques est cohérent.

Ces mêmes résultats sont retrouvés lorsque la discrétisation spatiale augmente. Les simulations ont été effectuées en utilisant $\iota = 50$, et les résultats en termes de localisation des efforts sont similaires, en particulier la localisation et l'intensité des rotules plastiques dans

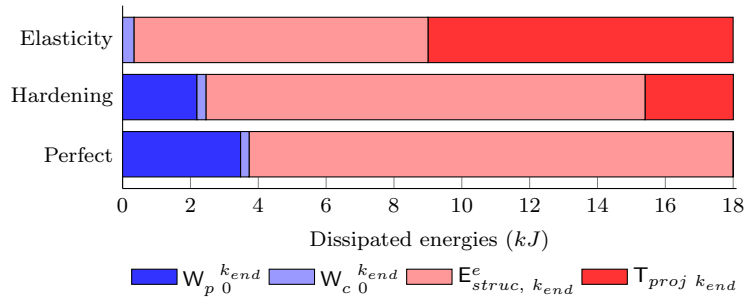


FIGURE 4.35 – Exemple 3 : Répartition à l’issue de la simulation de l’énergie cinétique initiale du projectile. La longueur totale des barres correspond à cette énergie d’impact (34.7 kJ). La dissipation au contact est presque la même dans les 3 cas (voir commentaires exemple 2). Dans les deux cas de plasticité, la structure emmagasine environ la même quantité d’énergie bien qu’une grande part de l’énergie initiale soit dissipée, mais la structure dans le cas de la plasticité parfaite dissipe plus d’énergie.

le cas de la plasticité parfaite. Le maillage plus fin implique un comportement dynamique légèrement différent et est donc à l’origine des éléments isolés ayant plastifié, qui ne sont pas forcément au même emplacement dans les deux cas (par exemple sur la poutre dans les cas de plasticité avec écrouissage, visible sur les figures 4.36b et 4.37b).

De plus, cette discrétisation spatiale n’a pas de réelle influence sur les résultats en terme d’énergie dissipée. La figure 4.38 montre pour $\iota = 5, 10$ et 50 la répartition de l’énergie cinétique initiale du projectile en fin de simulation dans le cas de la plasticité parfaite et avec écrouissage. Ces résultats sont très proches : en plasticité parfaite, qui est le cas avec le plus de différence lorsque ι varie, le tableau 4.4 résume les parts d’énergie dissipée à la fin de la simulation par contact et par plasticité. Ces résultats peuvent clairement être considérés comme similaires, étant donné que les différences sont de l’ordre de 0.2% .

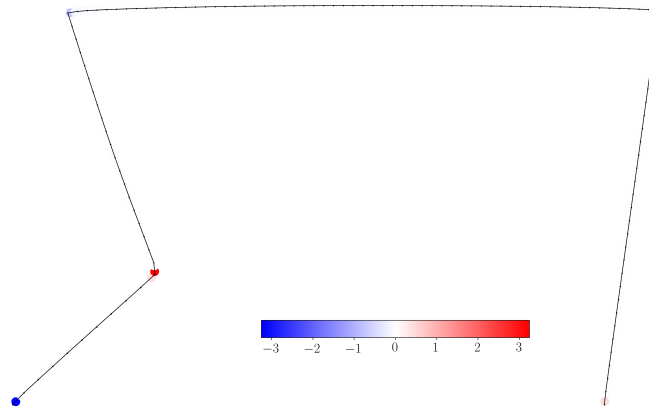
dissipation	contact	plasticité
$\iota = 5$	2.12%	88.01%
$\iota = 10$	2.01%	88.01%
$\iota = 50$	2.33%	88.27%

TABLE 4.4 – Exemple 3 : Part de l’énergie cinétique initiale du projectile dissipée au contact et par plasticité à l’issue de la simulation dans le cas de la plasticité parfaite pour différentes valeurs de ι .

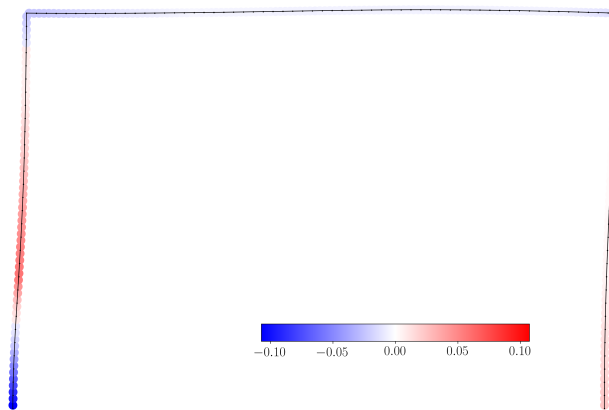
4.4.2.2 Influence de la vitesse et de la masse du projectile

Selon la définition de l’exemple, le projectile d’une tonne arrive sur le portique avec une vitesse de 6 m/s , ce qui fait que l’énergie d’impact, son énergie cinétique, est de 18 kJ . Cependant, ce niveau d’énergie peut être obtenu suivant plusieurs combinaisons de masses et de vitesses du projectile. C’est donc l’influence de la composition de cette énergie d’impact sur les niveaux de dissipations d’énergie qui va être observée ici.

Plusieurs simulations en plasticité avec écrouissage ont été effectuées pour différents niveaux d’énergie cinétique initiale du projectile (de 0.5 kJ à 18 kJ). Dans un premier temps, la masse du projectile est fixée et sa vitesse adaptée pour atteindre le niveau d’énergie souhaité, et dans un second temps, c’est la vitesse qui est fixée et la masse adaptée. Trois cas pour



(a) Plasticité parfaite

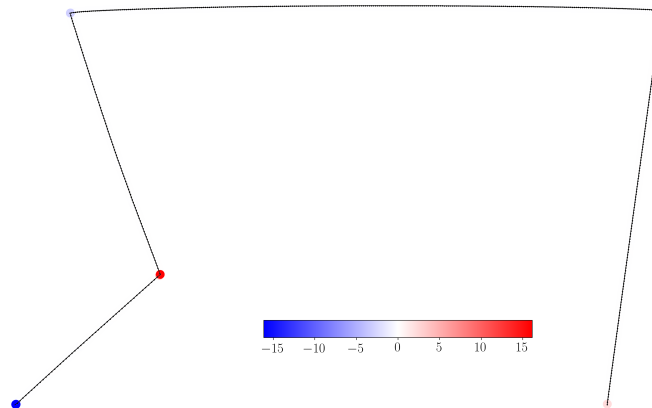


(b) Plasticité écrouissage

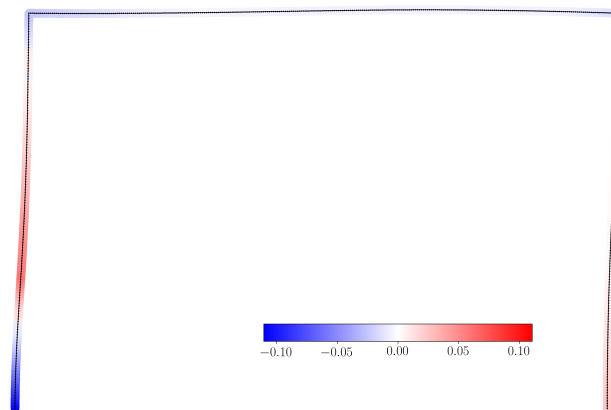
FIGURE 4.36 – Exemple 3 : Structures plastiques en fin de simulation ($\iota = 10$, déplacements amplifiés 10 fois) avec la valeur absolue maximum de la déformation plastique ε_m^p la plus importante dans chaque élément en gradient de couleur (les éléments sans déformation plastique sont en gris clair).

chacun des deux principes ont été envisagés, en fixant la masse du projectile successivement à 1000 kg , 600 kg puis 250 kg , puis sa vitesse à 8 m/s , 6 m/s puis 4 m/s . Le tableau 4.5 indique, pour chaque niveau d'énergie cinétique initiale du projectile, sa vitesse lorsque la masse est fixée, ainsi que sa masse lorsque sa vitesse est fixée.

Il faut remarquer que, quel que soit la composition de l'énergie cinétique initiale du projectile, la dissipation plastique évolue de la même manière et suivant des valeurs très proches, les deux étant liées par un processus de transfert d'énergie. La composition de l'énergie d'impact n'a donc pas de réelle influence sur ce résultat (voir la figure 4.39a). La



(a) Plasticité parfaite



(b) Plasticité écouvissage

FIGURE 4.37 – Exemple 3 : Structures plastiques en fin de simulation ($t = 50$, déplacements amplifiés 10 fois) avec la valeur absolue maximum de la déformation plastique ε_m^p la plus importante dans chaque élément en gradient de couleur (les éléments en gris clair n'ont pas de courbure plastique).

partie non linéaire pour les faibles niveaux d'énergie d'impact est due au fait qu'il n'y a aucune plastification lorsque cette énergie est faible puis qu'il y a une période de transition durant laquelle les déformations plastiques restent limitées avant de réellement se développer.

En revanche, dans le cas de la dissipation au contact, deux grandes tendances se dégagent. D'un côté, si la masse est la même pour chaque niveau d'énergie d'impact, alors la dissipation au contact augmente de façon linéaire avec l'énergie cinétique initiale du projectile (courbes rouges sur la figure 4.39b). De l'autre côté, si la vitesse est la même pour les différents calculs, alors la dissipation au contact reste la même dès lors la phase de transition entre élasticité et

4.4. Etude d'un portique

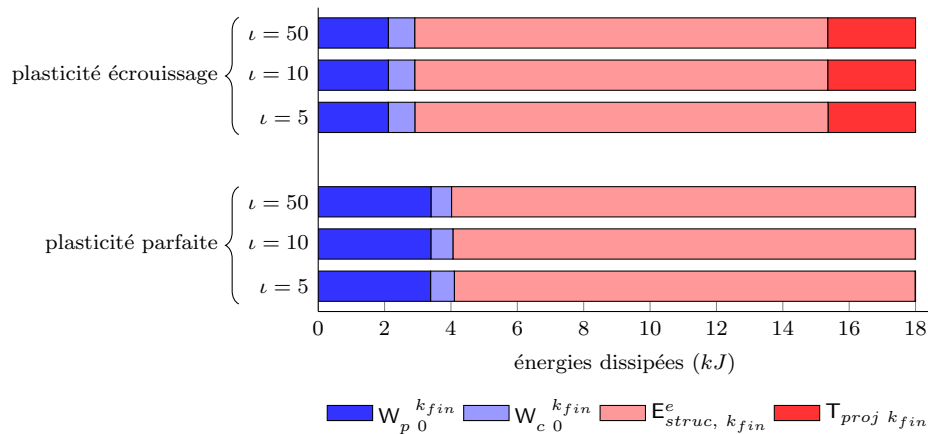


FIGURE 4.38 – Exemple 3 : Répartition à l'issue de la simulation pour différentes valeurs de ι de l'énergie cinétique initiale du projectile. La longueur totale des barres correspond à cette énergie d'impact (34.7 kJ). La discrétisation n'a presque aucune influence sur les résultats lorsqu'elle reste dans des valeurs utilisables en pratique (voir commentaires exemple 2).

Energie d'impact (kJ)	0.5	2	4.5	8	12.5	18	24.5	32
$v_{\text{impact}} (\text{ms}^{-1}) (m_{\text{proj}} = 1000\text{kg})$	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_{\text{impact}} (\text{ms}^{-1}) (m_{\text{proj}} = 600\text{kg})$	1.29	2.58	3.87	5.16	6.45	7.75	9.04	10.33
$v_{\text{impact}} (\text{ms}^{-1}) (m_{\text{proj}} = 250\text{kg})$	2	4	6	8	10	12	14	16
$m_{\text{proj}} (\text{kg}) (v_{\text{impact}} = 8\text{ms}^{-1})$	15.63	62.5	140.63	250	390.63	562.5	765.63.11	1000
$m_{\text{proj}} (\text{kg}) (v_{\text{impact}} = 6\text{ms}^{-1})$	27.78	111.11	250	444.44	694.44	1000	1361.11	1777.78
$m_{\text{proj}} (\text{kg}) (v_{\text{impact}} = 4\text{ms}^{-1})$	62.5	250	562.5	1000	1562.5	2250	3062.5	4000

TABLE 4.5 – Exemple 3 : Energie cinétiques initiales du projectile, vitesses du projectile pour les différentes masses fixées et masses du projectile pour les différentes vitesses fixées.

plasticité passée, quelle que soit l'énergie d'impact (courbes bleues sur la figure 4.39b).

Il faut aussi noter que plus la vitesse initiale du projectile est élevée, plus la dissipation sera importante tandis que la masse n'a pas d'influence sur ce résultat. Cette remarque est cohérente avec la définition du travail des forces de contact, d'où provient la dissipation au contact, qui fait directement intervenir les vitesses mais indirectement les masses (qui, elles, n'interviennent qu'au travers de la dynamique). Ce résultat est valable du fait du choix d'utiliser un coefficient de restitution cinétique (suivant la loi d'impact de Newton). Cependant, l'utilisation d'un coefficient de restitution énergétique (voir BOULANGER (1939)) serait certainement plus performant (mais complexe à mettre en place pour des structures déformables) car la dissipation à l'impact ne dépendrait pas de la vitesse et de la masse du projectile, mais seulement de son énergie cinétique.

Malgré ces différences notables de la dissipation au contact, l'influence de cette dissipation reste limitée sur la dissipation totale puisqu'elle est uniquement de l'ordre du dixième des dissipations plastiques.

4.4.2.3 Influence des discrétisations

Discrétisation spatiale Puisque la masse du projectile n'a pas d'influence sur les résultats de dissipation, il est intéressant de regarder l'influence du maillage qui modifie les masses discrètes au point d'impact. Trois valeurs de ι ont été envisagées ($\iota = 5, 10$ et 20) en fixant d'une part la masse du projectile à $m_{\text{proj}} = 1000\text{ kg}$ et d'autre part sa vitesse initiale à $v_{\text{impact}} = 6\text{ m/s}$. Afin de conserver des temps de calcul raisonnables, le pas de temps a été

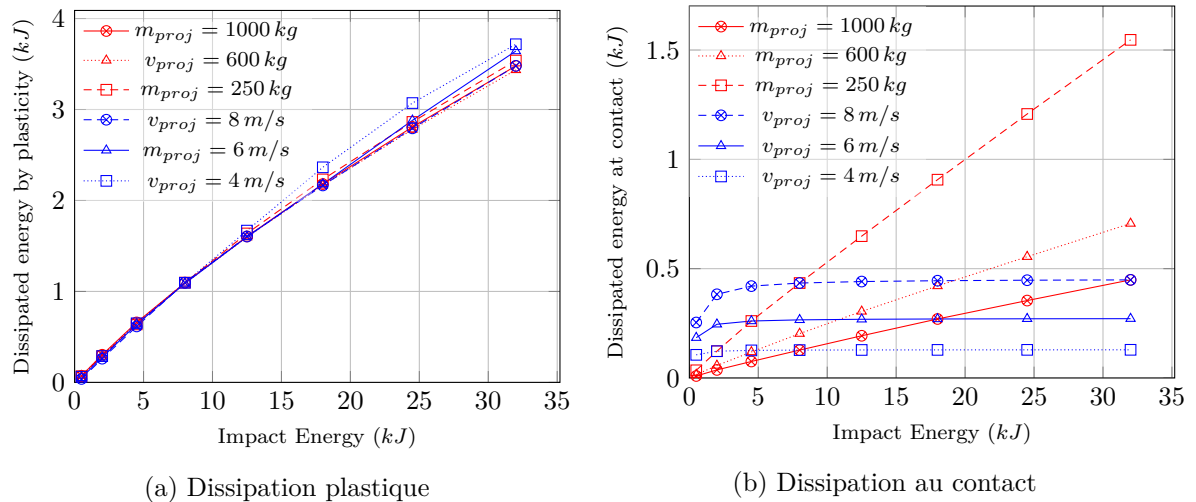


FIGURE 4.39 – Exemple 3 : Energies dissipées par plasticité et au contact à l’issue de la simulation, en fonction de l’énergie cinétique initiale du projectile pour chaque composition de cette énergie. Les résultats sont similaires pour la dissipation plastique, mais une différence existe pour la dissipation au contact qui est d’autant plus importante que la vitesse du projectile est élevée. Cependant, ces variations de dissipation au contact n’ont pas beaucoup d’influence sur la dissipation totale qui est essentiellement plastique (voir la figure 4.35)

choisi tel que $h = 1 \cdot 10^{-4} s$.

Les résultats présentés sur la figure 4.40 montrent que le raffinement du maillage n’a que très peu d’influence sur les résultats de dissipation, les légères différences étant dues à la réponse dynamique du système.

Ce résultat ne permettent pas de corroborer les conclusions de l’exemple 2, mais cette différence s’explique par le fait que le pas de temps employé et les différentes discrétisations spatiales choisies ne permettent pas de faire apparaître une convergence des résultats. Les percussions se situent dans la partie non convergée de la figure 4.31 et il faudrait à la fois augmenter significativement le nombre d’éléments tout en réduisant le pas de temps pour voir une influence sur les résultats.

Discrétisation temporelle En revenant au maillage initial ($\iota = 10$), l’influence du pas de temps h est maintenant regardée (voir Figure 4.41). Afin de rester dans des coûts de calcul raisonnables, les pas de temps envisagés resteront supérieurs à $2 \cdot 10^{-7} s$ tout en ne passant pas au dessus de $10^{-4} s$ pour respecter la dynamique de la structure.

Dans le cas où le projectile de $1000 kg$ a une énergie cinétique initiale de $34.4 kJ$, le contact dissipe $1.996 kJ$ lorsque $h = 10^{-4} s$ contre $0.223 kJ$ lorsque $h = 2 \cdot 10^{-7} s$, soit une différence de $1.743 kJ$. Cette différence représente 5% de l’énergie d’impact, mais une variation de 88.7% de l’énergie maximum dissipée au contact, ce qui fait varier fortement le résultat de façon relative. Suivant la même logique pour la dissipation plastique, $27.964 kJ$ sont dissipés lorsque $h = 2 \cdot 10^{-7} s$ contre $25.729 kJ$ quand $h = 10^{-4} s$. La différence de $2.235 kJ$ est du même ordre de grandeur que pour la dissipation au contact (6% de l’énergie cinétique initiale), mais ne représente que 8% de la dissipation plastique maximale, ce qui est relativement peu.

Donc le raffinement du pas de temps permet de réduire les dissipations au contact, ce qui est cohérent avec les discussions de l’exemple 2 (voir la figure 4.30, tout en augmentant la dissipation plastique, donc l’énergie totale dissipée reste la même.

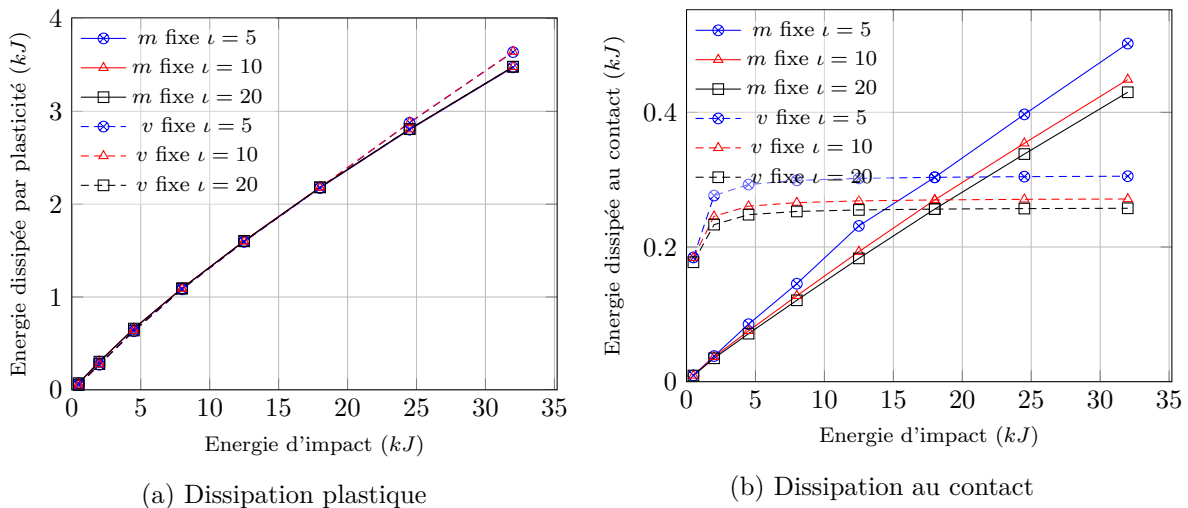


FIGURE 4.40 – Exemple 3 : Energies dissipées par plasticité et au contact à l'issue de la simulation, en fonction de l'énergie cinétique initiale du projectile pour chaque valeur de ν (avec $h = 10^{-4}$ s). Les résultats sont similaires dans les trois configuration, le maillage n'a qu'une influence limitée sur les dissipations. (masse fixe à 1000 kg et vitesse fixe à 6 m/s).

4.4.3 Conclusion

Ce troisième exemple a permis d'illustrer l'application de l'algorithme proposé dans ce travail à un cas pratique. La structure proposée a pour objectif de dissiper l'énergie cinétique initiale d'un projectile lorsque les deux entrent en contact.

Dès lors que la plasticité est introduite dans la modélisation, plus de 80% de cette énergie est dissipée par plasticité. Le contact dissipe également une petite part de cette énergie (autour de 2%) et la structure absorbe une part de cette énergie sous forme d'oscillations élastiques. Comme le système est non amorti, ni à l'aide d'un terme d'amortissement, ni numériquement, ces oscillations ne diminuent pas avec le temps et une part de l'énergie est stockée dans le portique sous forme d'énergie mécanique.

La modélisation du comportement du matériau a une forte influence sur les résultats de dissipation plastique car la quantité d'énergie dissipée est différente entre l'utilisation d'un matériau parfaitement plastique et d'un autre avec écrouissage. Il faut donc calibrer les lois et déterminer celle qui est la plus adaptée pour une utilisation en pratique.

Les choix effectués pour définir l'énergie cinétique initiale du projectile ont aussi une influence sur le résultat. En particulier sa vitesse initiale puisque de celle-ci dépend la dissipation au contact. En revanche, ni la masse du projectile, ni la finesse de la discrétisation spatiale n'ont d'influence sur les quantités d'énergie dissipée. Ces conclusions sont valables dans le cas où le nombre d'éléments utilisable en pratique est restreint. Si la discrétisation pouvait être affinée, les mêmes résultats qu'à l'exemple 2 seraient retrouvés. Enfin, le pas de temps a une influence sur les dissipations plastiques et au contact prises individuellement, mais pas sur le résultat total d'énergie dissipée, ce qui est, cette fois-ci, cohérent avec les remarques de l'exemple 2.

4.5 Résumé du chapitre

Ce chapitre d'application a permis de mettre en œuvre le travail développé dans les chapitres 2 et 3. En utilisant des éléments finis résistant à la fois aux efforts axiaux et aux

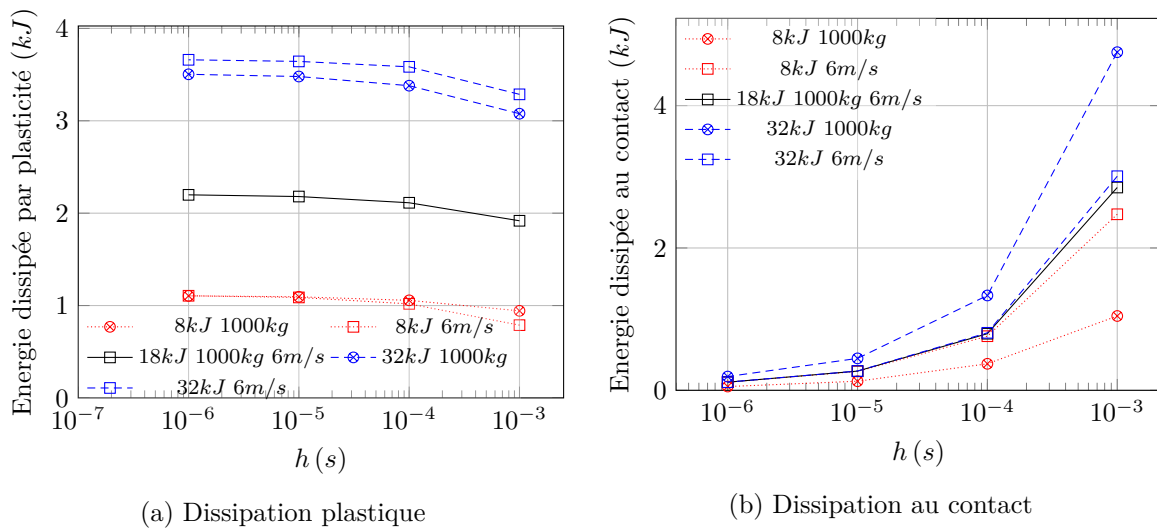


FIGURE 4.41 – Exemple 3 : Energies dissipées par plasticité et au contact à l'issue de la simulation, en fonction du pas de temps h considéré (échelle logarithmique pour h) pour différents niveaux d'énergie d'impact (8, 18 et 32 kJ). Les courbes rouges (en pointillés) sont les simulations effectuées avec 8 kJ en énergie d'impact, celles en bleu (traits discontinus) sont effectués avec 32 kJ, et celle en noir (trait continu) dans le cas commun (18 kJ).

déformations transversales, ainsi qu'un matériau élastoplastique couplant ces deux efforts au travers d'un ensemble de contraintes admissibles défini par des relations linéaires, le problème a pu être écrit sous forme de LCP suivant les développements du paragraphe 3.4.2.

Le premier exemple a permis de valider la formulation du modèle élastoplastique à l'aide de l'étude quasi-statique d'une poutre en console soumise à des déplacements imposés à son extrémité libre. L'évolution des contraintes en plasticité parfaite et en prenant en compte l'écroutissement a été observée, de même que l'influence des vitesses de chargement sur le chemin de contrainte. Enfin, le cas où la contrainte se situe dans un angle de l'ensemble C avant de s'en éloigner a été considéré et n'a posé aucun problème à l'algorithme sans avoir à régulariser la formulation.

Le second exemple a permis de valider l'algorithme monolithique pour la résolution simultanée de l'impact et de la plasticité. Les performances en terme de bilan énergétique ont été observées ainsi que l'influence des discrétisations temporelles et spatiale. Bien qu'une convergence des résultats soit observée, la discussion renvoie aux questions ouvertes portant sur la présence ou non d'impulsions dans une poutre continue impactée. En dernier lieu, le respect du critère d'écoulement au cours du temps a été observé.

Enfin, le troisième exemple est un cas pratique d'utilisation de l'algorithme développé. La structure étudiée a pour objectif d'arrêter un projectile. La plasticité permet de dissiper 80% à 90% de l'énergie cinétique initiale du projectile (suivant les choix de modélisation), ce qui montre que le travail développé est pleinement exploitable, dès lors qu'il sera couplé à des lois de comportement permettant de décrire correctement le comportement des matériaux utilisés. En effet, dans le cadre de cette étude théorique, des différences certaines surviennent entre la modélisation dans le cas de la plasticité parfaite et l'utilisation d'un matériau avec écroutissement. De plus, la modélisation du projectile a une influence sur le résultat puisque pour un niveau d'énergie cinétique donné, plus sa vitesse sera élevée, plus la dissipation à l'impact sera importante. Bien que cette valeur soit faible au regard de la dissipation plastique (au maximum de l'ordre du dixième), il faudra toutefois y prêter attention pour qu'elle ne de-

vienne pas non négligeable. En pratique, la convergence à zéro de la dissipation au contact est difficile à obtenir et à montrer car il n'est pas possible d'utiliser ni un nombre suffisant d'éléments ni un pas de temps suffisamment fin pour obtenir une valeur de percussion convergée. Le raffinement du pas de temps h permet de diminuer la dissipation au contact, comme montré et discuté là encore à l'exemple 2, mais la dissipation plastique semble augmenter d'autant, ce qui n'affecte pas la quantité totale d'énergie dissipée.

L'ensemble de ces applications à des cas simples a donc permis de vérifier le bon fonctionnement des développements théoriques, d'effectuer des analyses de convergence et de sensibilité au choix des paramètres. Il est donc pleinement opérationnel.

Conclusion Générale

Ce travail de thèse propose un algorithme monolithique de résolution de l'élastoplasticité et du contact. Cette formulation permet d'avoir un outil robuste qui peut être utilisé en association avec de nombreuses méthodes numériques de résolution existantes (détection de contacts, résolution de problèmes d'optimisation entre autres choses) tout en prenant en compte de façon précise l'interaction entre différents objets et en proposant un bilan énergétique rigoureux, élément essentiel pour l'étude de phénomènes dissipatifs. Dans la pratique, cela permet de poser une base solide pour le développement d'outils de dimensionnement efficaces d'ouvrages de protection face à des chutes de blocs rocheux.

L'étude bibliographique a mis en évidence le fait que, lorsque le contact et la plasticité sont traités dans les mêmes simulations, ces dernières sont le plus souvent effectuées dans un cadre quasi-statique et les forces de contact ou d'impact sont approchées par une force équivalente statique à déterminer. Or, la prise en compte des interactions peut être effectuée, de façon plus précise en vue de l'étude des impacts sur des structures élastoplastiques, à l'aide de la méthode *Non-Smooth Contact Dynamics* (NSCD) développée par JEAN et MOREAU (1985).

Par ailleurs, suite aux avancées de MAIER dans les années 1970, des travaux plus récents développent la mise en équation de la plasticité suivant des inégalités variationnelles respectant le principe du travail plastique maximal défini par HILL (1950). En particulier, les travaux de KRABBENHØFT (2009) et KRABBENHØFT et DAMKILDE (2003) s'inscrivent dans cette démarche et utilisent des méthodes d'optimisation pour résoudre les systèmes formulés.

Ainsi, l'utilisation de méthodes variationnelles pour la mise en équation des phénomènes de contact et de plasticité laisse envisager la possibilité de les formuler conjointement. Cette formulation n'a, à notre connaissance, jamais été proposée, bien que lorsque ces méthodes sont utilisées séparément, la littérature ait apporté les preuves de leurs performances.

Dans cette thèse, les équations constitutives et les lois d'évolution de l'élastoplasticité sont fondées sur les concepts thermodynamiques inhérents aux processus dissipatifs, ainsi que sur le principe de la dissipation maximale de HILL. Cette écriture correspond à une forme variationnelle qui est équivalente à l'inclusion de la variation temporelle de déformations plastique dans le cône normal à l'ensemble des contraintes admissibles C (considéré convexe et contenant l'origine). Grâce à cette inclusion, des ensembles C non réguliers peuvent être considérés. Si l'on se réfère aux travaux de MOREAU (1985, en particulier) dans lesquels les conditions de contact unilatéral sont écrites sous la forme de cônes normaux à l'ensemble des positions admissibles du système, les équations du contact et de la plasticité ont une forme commune. Après une discrétisation spatiale effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis, un système dynamique est proposé, prenant en compte le contact et la plasticité sous forme d'inclusion dans des cônes normaux (2.153). Le résultat d'existence et d'unicité de la solution est démontré pour l'élastoplasticité en dynamique.

Le système est ensuite discrétisé temporellement (3.26) à l'aide de l'algorithme de *Moreau-Jean* qui permet de prendre en compte les sauts de vitesse qui peuvent avoir lieu au cours d'un pas de temps pour un système discret en espace (algorithme de type *time-stepping*). Après avoir montré que ce système discret est équivalent à la recherche sous contrainte du point selle d'une fonction donnée, la preuve est apportée que sous écrouissage positif ou nul, la solution existe et est unique.

Le système discret est ensuite reformulé par substitutions linéaires de ses différentes équations en un problème d'optimisation quadratique sous contrainte (3.61) qui possède une solution unique sous conditions d'écrouissage positif et d'un pas de temps suffisamment petit.

Il est alors possible de faire appel aux nombreuses méthodes de résolution des problèmes de programmation mathématique pour déterminer la solution (algorithmes de points intérieurs, programmation conique, *etc.*). Le choix de la méthode est à déterminer en fonction de la forme de l'ensemble des contraintes admissibles. Parmi ces méthodes de résolution, dans le cas où \mathbf{C} est défini par des contraintes linéaires, il est possible de reformuler le problème d'optimisation quadratique en un problème de complémentarité linéaire (LCP). La complémentarité est définie, d'une part, pour la plasticité entre l'opposé de la fonction d'écoulement et le multiplicateur plastique, et, d'autre part pour le contact (s'il est actif, dans le cas où la fonction g_N est négative), entre l'impulsion de réaction et la somme des vitesses relatives en début et en fin de pas de temps (cette dernière étant réduite du coefficient de restitution e).

Les propriétés énergétiques du schéma ont été étudiées. Le choix du paramètre θ dans le respect des conditions définies dans l'équation (3.113) permet d'avoir un schéma numérique implicite stable (il ne crée pas d'énergie numériquement). De plus, si $\theta = 1/2$, le bilan énergétique discret est composé uniquement des termes permettant d'approcher les travaux des efforts sans aucun terme de dissipation numérique, ce qui est particulièrement intéressant pour l'analyse de phénomènes dissipatifs. En revanche, puisque les impacts sont susceptibles d'activer des modes de vibrations à hautes fréquences, ce choix a l'inconvénient d'approximer un système qui n'est pas amorti et ces vibrations peuvent parasiter les résultats.

Après ces développements théoriques, trois exemples d'application sont proposés. Ils utilisent des éléments finis unidimensionnels de poutre prenant en compte à la fois l'effort normal et le moment fléchissant. Un ensemble de contraintes admissibles \mathbf{C} délimité par 4 relations linéaires qui prennent en compte à la fois sur l'effort normal et le moment fléchissant est défini, ce qui permet d'utiliser la formulation du système sous forme de LCP.

Le premier exemple permet de valider le modèle élastoplastique à l'aide de l'étude quasi-statique d'une poutre en console soumise à différents chemins de charge par des déplacements imposés. Le second exemple illustre l'utilisation de l'algorithme développé au travers du cas simple d'une bille impactant l'extrémité d'une poutre en console. Le bilan énergétique au cours du temps est étudié (en particulier les quantités d'énergie dissipées). L'influence de paramètres tels que le pas de temps et le nombre d'éléments est étudiée et permet de questionner la signification du coefficient de restitution lorsque le système tend vers un modèle continu en temps et en espace, ce qui demeure d'ailleurs une question ouverte dans la littérature. Enfin, le troisième exemple, un portique encastré impacté, s'intéresse à l'influence de la loi de comportement du matériau (élasticité, élastoplasticité parfaite ou avec écrouissage), en particulier sur la répartition des déformations plastiques dans la structure. L'influence de la masse et de la vitesse du projectile est aussi étudiée et montre leur faible incidence sur les quantités d'énergies dissipées.

Ces trois exemples ont donc permis de montrer les avantages et le fonctionnement de la formulation proposée dans ce travail de thèse, et d'envisager différentes voies d'approfondis-

sement.

A court terme, plusieurs points seraient à développer. En premier lieu, des exemples avec des éléments finis bi-dimensionnels (voire tri-dimensionnels) pourraient être envisagés afin de pouvoir utiliser des fonctions d'écoulement plus réalistes (comme le critère de *von Mises*). Dans cette optique, le cas où le projectile viendrait \tilde{A} entrer en contact avec plusieurs noeuds de la structure serait aussi intéressant pour ne pas localiser les impacts en un seul point de la structure.

Le travail développé dans cette thèse constitue donc une base théorique qui, comme la formulation et la méthode de résolution proposées sont génériques, permet d'envisager le développement d'applications futures plus complexes. Dans cette optique, les prototypes fonctionnels développés en python dans le cadre de la thèse gagneraient à être réécrits dans un autre langage de programmation pour plus de rapidité d'exécution. De plus, l'intégration dans ce code d'autres algorithmes de résolution de problèmes d'optimisation permettrait de traiter des exemples plus généraux, en particulier les cas où l'ensemble des contraintes admissibles n'est pas défini par des relations linéaires.

Quelques pistes d'approfondissement du travail sur un temps plus long peuvent également être envisagées en vue d'une application aux ouvrages de protection contre les chutes de blocs rocheux. Afin de modéliser des structures plus complexes, comme des murs en béton ou des talus, constitués de géomatériaux soumis à des lois de plasticité non-associées, l'utilisation de méthodes de modélisation et de résolution adaptées à ces matériaux est à envisager. La méthode du bi-potential de DE SAXCÉ est envisageable pour conserver les formes variationnelles de la plasticité, ou encore l'utilisation d'un potentiel de dissipation dépendant de l'état du matériau, obtenu à partir d'une généralisation du principe de dissipation maximal comme dans le récent travail de ULLOA et al. (2021). Pour aller encore plus loin, la plasticité avec adoucissement peut être envisagée pour modéliser des merlons, mais les résultats d'existence et d'unicité de la solution ne seront plus valables et il faudra alors faire une étude mathématique approfondie du modèle pour vérifier ces propriétés. Il serait aussi intéressant d'utiliser des modèles mécaniques formulés en grandes déformations afin de modéliser des structures telles que des barrières souples ou des filets ou des forêts de protection. Enfin, le couplage entre la modélisation proposée ici et des modèles de propagation de blocs rocheux serait l'aboutissement du transfert de ces travaux de recherche dans le domaine des risques rocheux. Ce couplage permettrait en effet d'évaluer pour des cas précis et réels les performances d'un ouvrage face à la chute d'un bloc après qu'il ait à la fois acquis de l'énergie cinétique durant sa chute et perdu de l'énergie suite aux différentes interactions avec le terrain le long duquel il dévale. Dans ce cas, la prise en compte du frottement pour l'interaction entre le bloc et la structure semble importante puisque le rocher est en rotation et qu'il est rugueux. Ce phénomène supplémentaire, qui se formule lui aussi suivant les travaux de *Moreau* sous la forme d'une inclusion de cône, ne devrait pas poser de problème d'insertion dans l'algorithme développé ici, étant donné le grand nombre de travaux existants sur le sujet. L'algorithme développé pose donc les bases de méthodes de dimensionnement robustes et fiables permettant de quantifier précisément les performances d'un ouvrage de protection.

Annexe A

Formulation des éléments finis de barre et de poutre

Cette annexe rappelle rapidement les principales matrices utiles pour les éléments finis employés dans le chapitre 4 du travail. Les éléments sont formulés en contraintes généralisées, c'est à dire que les contraintes considérées sont les efforts normaux n et les moments fléchissants m .

Le vecteur des déplacements dans le repère local de l'élément est noté \bar{u} (par opposition à u qui est le vecteur déplacement en repère global). C'est dans ce repère local que sont formulés les éléments.

Un élément donné el a une longueur L_{el} , une section A , une inertie I , et une masse volumique ρ . La position d'une section de cet élément est repérée par $x \in [0, L_{el}]$. L'élément de référence a une longueur 2 et une section de cet élément est repérée par $\xi \in [-1, 1]$. Le changement de variable reliant x et ξ est :

$$\xi = \frac{2}{L_{el}}x - 1 \quad (\text{A.1})$$

A.1 Eléments finis de barre à deux nœuds

Uniquement des déplacements longitudinaux dans le repère local. Donc vecteur des déplacements :

$$\bar{u}_{el} = [\bar{u}_{x,1} \quad \bar{u}_{x,2}]^T \quad (\text{A.2})$$

Dans le repère local de l'élément de référence, la matrice $N(x)$ des fonctions de forme est :

$$N_{el,n}(x) = \left[1 - \frac{x}{L_{el}} \quad \frac{x}{L_{el}} \right] \quad (\text{A.3})$$

qu'il suffit de dériver une fois pour obtenir la matrice B reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$B_{el,n} = \frac{dN(x)}{dx} = \frac{1}{L_{el}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Avec le degré 1 des fonctions de B , interpolation avec 1 seul point de Gauss. Les fonctions B étant constantes, les valeurs de contraintes $\sigma_{el,n} = n_1$ et déformations $\varepsilon_{n,1}$ sont constantes tout au long de l'élément. La relation effort normal - déformation longitudinale est alors une relation scalaire :

$$n_1 = C_{el,n}\varepsilon_{el,n} = EA\varepsilon_{n,1} \quad (\text{A.5})$$

avec n et $\varepsilon_{n,g}$ qui correspondent respectivement à l'effort normal et à la déformation longitudinale au point de Gauss.

La matrice de masse $M_{el,n}$ est donnée par :

$$M_{el,n} = \frac{\rho AL_{el}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Il arrive que la matrice de masse diagonale $M_{diag\,el,n}$ soit employée. Elle affecte la moitié de la masse de l'élément à chacun des deux nœuds et elle est donnée par :

$$M_{diag\,el,n} = \frac{\rho AL_{el}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Pour formuler des éléments couplant efforts normaux et moments fléchissant, il est utile de formuler les matrices à l'aide de l'élément de référence. La matrice des fonctions de formes $N(\xi)$ est alors :

$$N_{el,n}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

La même matrice B que dans l'équation (A.4) :

$$B = \frac{dN(\xi)}{dx} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L_{el}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Pour cette formulation, un seul point de Gauss est suffisant pour l'intégration numérique. Sa position est $\xi_1 = 0$ et le poids associé est $\omega_1 = 2$

A.2 Barre à trois nœuds

L'élément de barre à 3 nœuds possède le vecteur des déplacements :

$$\bar{u}_{el} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{x,1} & \bar{u}_{x,3} & \bar{u}_{x,2} \end{bmatrix}^\top \quad (\text{A.10})$$

où le nœud 3 correspond au nœud intermédiaire ajouté au milieu de l'élément. Cet élément est directement formulé à l'aide de l'élément de référence décrit pour la barre à deux nœuds. La matrice des fonctions de forme est :

$$N_{el,n}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2}(1-\xi) & 1-\xi^2 & \frac{\xi}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

qu'il suffit de dériver une fois pour obtenir la matrice $B(\xi)$ reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$B_{el,n}(\xi) = \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \xi & -2\xi & \frac{1}{2} + \xi \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Pour l'intégration numérique à l'aide de la quadrature de Gauss, il faut 2 points d'intégration. Les positions de ces points sur l'élément de référence sont $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ et $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$ et les poids associés sont $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 1$.

Comme il y a deux points de Gauss pour chaque élément, les contraintes et les déformations sont des vecteurs de dimension 2 et ces valeurs varient linéairement le long de l'élément. De façon similaire à (A.5), la relation effort normal n - déformation longitudinale ε_n est :

$$\sigma_{el,n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = C_{el,n} \varepsilon_{el,n} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{n,1} \\ \varepsilon_{n,2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

La matrice de masse $M_{el,n}$ de ce type d'élément est :

$$M_{el,n} = \frac{\rho AL_{el}}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

La matrice de masse diagonale $M_{diag\,el,n}$ affecte $1/6^{\text{ème}}$ de la masse à chacun des nœuds d'extrémité 1 et 2, et les $2/3$ restants au nœud intermédiaire 3. Elle est donnée par :

$$M_{diag\,el,n} = \frac{\rho AL_{el}}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A.3 Poutre à deux nœuds

L'élément de poutre à deux nœuds possède le vecteur des déplacements suivants :

$$\bar{u}_{el} = [\bar{u}_{y,1} \quad \beta_1 \quad \bar{u}_{y,2} \quad \beta_2]^\top \quad (\text{A.16})$$

En repère local, la matrice des fonctions de formes est :

$$N_{el,m}\xi = \left[\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad \frac{L_{el}}{8}(1-\xi^2)(1-\xi) \quad \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad \frac{L_{el}}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi) \right] \quad (\text{A.17})$$

Les équations des poutres d'*Euler-Bernoulli* relient les moments à la courbure qui est la dérivée seconde des déplacements. Ainsi la première dérivée de la matrice N est :

$$\frac{dN(\xi)}{dx} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L_{el}} \frac{dN(\xi)}{d\xi} \quad (\text{A.18})$$

puis au second ordre :

$$B(\xi) = \frac{d^2N(\xi)}{dx^2} = \frac{d(2/L_{el})}{dx} \frac{dN(\xi)}{d\xi} + \frac{2}{L_{el}} \frac{d}{dx} \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \frac{4}{L_{el}^2} \frac{d^2N(\xi)}{d\xi^2} \quad (\text{A.19})$$

et donc finalement la matrice B est définie par :

$$B(\xi) = \frac{1}{L_{el}} \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{L_{el}} & 3\xi - 1 & -6\frac{\xi}{L_{el}} & 3\xi + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Pour l'intégration numérique, comme pour les barres à 3 nœuds, il faut 2 points d'intégration. Les positions de ces points sur l'élément de référence sont donc là aussi $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ et $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$ et les poids associés sont $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 1$.

Comme il y a deux points de Gauss pour chaque élément, les contraintes et les déformations sont des vecteurs de dimension 2. De façon similaire à (A.5), la relation moment fléchissant - courbure est :

$$\sigma_{el,m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = C_{el,m} \varepsilon_{el,m} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{m,1} \\ \varepsilon_{m,2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

avec m et $\varepsilon_{m,g}$ qui correspondent respectivement au moment fléchissant et à la courbure au point de Gauss g

La matrice de masse $M_{el,m}$ de ce type d'élément est :

$$M_{el,m} = \frac{\rho AL_{el}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_{el} & 54 & -13L_{el} \\ 22L_{el} & 4L_{el}^2 & 13L_{el} & -3L_{el}^2 \\ 54 & 13L_{el} & 156 & -22L_{el} \\ -13L_{el} & -3L_{el}^2 & -22L_{el} & 4L_{el}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Pour la matrice de masse diagonale, il faut affecter la moitié de la masse de l'élément à chacun des deux nœuds d'extrémité pour les déplacements transversaux, mais pour la contribution des rotations de chaque nœud, la question reste ouverte. Il faut se référer à l'article de FELIPPA et al. (2015) qui discute cette définition afin d'obtenir la forme diagonale de la matrice de masse des éléments de poutre.

A.4 Passage du repère local au global

Pour passer des repères locaux aux repères globaux, il faut utiliser une matrice de rotation notée R . Elle permet de relier le vecteur des déplacements locaux \bar{u} au vecteur des déplacements globaux u :

$$\bar{u}_{el} = R u_{el} \quad (\text{A.23})$$

L'angle entre les repères globaux et locaux est noté Θ dans la suite.

A.4.1 éléments de poutre

Barres à 2 nœuds

Le vecteur des déplacements globaux u est :

$$u_{el} = [u_{x,1} \ u_{y,1} \ u_{x,2} \ u_{y,2}]^T \quad (\text{A.24})$$

et il est lié au vecteur local défini dans (A.2) par la matrice R :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Barres à 3 nœuds

Le vecteur des déplacements globaux u est :

$$u_{el} = [u_{x,1} \ u_{y,1} \ u_{x,3} \ u_{y,3} \ u_{x,2} \ u_{y,2}]^T \quad (\text{A.26})$$

et il est lié au vecteur local défini dans (A.10) par la matrice R :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Poutre à 2 nœuds

Le vecteur des déplacements globaux u est :

$$u_{el} = [u_{x,1} \quad u_{y,1} \quad \beta_1 \quad u_{x,2} \quad u_{y,2} \quad \beta_2]^\top \quad (\text{A.28})$$

et il est lié au vecteur local défini dans (A.16) par la matrice R :

$$R = \begin{bmatrix} -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Annexe B

Eléments de thermodynamique

B.1 Première loi

La première loi de la thermodynamique s'écrit de façon générale :

$$\dot{\mathcal{T}}(t) + \dot{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{P}_{app\ tot}(t) + \dot{\mathcal{Q}}(t) \quad (\text{B.1})$$

avec $\dot{\mathcal{E}}(t)$ la variation temporelle de l'énergie totale interne du système et $\dot{\mathcal{Q}}(t)$ la quantité de chaleur acquise ou perdue par le système.

Dans ce travail, toutes les transformations sont considérées adiabatiques, c'est-à-dire qu'elles s'effectuent sans échange de chaleur. Cela se traduit par :

$$\dot{\mathcal{Q}}(t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

L'équation (B.1) devient alors :

$$\dot{\mathcal{T}}(t) + \dot{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{P}_{app\ tot}(t) \quad (\text{B.3})$$

En introduisant (2.9) dans (B.3), il vient :

$$\mathcal{P}_{app\ tot}(t) + \mathcal{P}_{int}(t) + \dot{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{P}_{app\ tot}(t) \quad (\text{B.4})$$

et donc finalement, la variation temporelle de l'énergie interne du système est égale à l'opposé de la puissance des efforts internes :

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = -\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{D}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) \, dx \quad (\text{B.5})$$

B.2 Deuxième loi

La seconde loi indique qu'un système fermé ne peut que conserver ou perdre de l'énergie. Cette dissipation est caractérisée par la création (ou la conservation) de l'entropie globale du système \mathcal{N} . Comme les transformations sont ici considérées adiabatique et isotherme, la variation temporelle de l'entropie est donnée par :

$$\dot{\mathcal{N}} = \int_{\Omega} \rho \dot{\eta}(x, t) \, dx \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

avec $\eta(x, t)$ l'entropie spécifique par unité de masse. Puisque (B.6) est vraie pour tout sous domaine de Ω , alors cette création ou conservation d'entropie est aussi valable en chaque point $x \in \Omega$:

$$\rho \dot{\eta}(x, t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{B.7})$$

Dans le cas d'une transformation réversible, c'est l'égalité qui est vérifiée puisqu'il n'y a aucune création d'entropie. En revanche, si la transformation est irréversible, alors ce sera l'inégalité qui adviendra et il y aura création d'entropie.

Une nouvelle fonction d'état est alors introduite (ainsi que sa dérivée temporelle), fonction de l'entropie : c'est l'énergie libre de *Helmholtz* locale par unité de masse ψ_m :

$$\psi_m(x, t) = e(x, t) - \eta(x, t)\theta(x, t) \quad (\text{B.8a}) \quad \dot{\psi}_m(x, t) = \dot{e}(x, t) - \dot{\eta}(x, t)\theta(x, t) - \eta(x, t)\dot{\theta}(x, t) \quad (\text{B.8b})$$

où θ est la température et e est l'énergie interne par unité de masse, reliée à l'énergie interne \mathcal{E} définie dans l'équation (B.5) ainsi qu'à sa dérivée temporelle par (la masse volumique est considérée constante dans le temps en anticipant l'hypothèse des petites déformations) :

$$\mathcal{E}(x, t) = \int_{\Omega} \rho(x)e(x, t) \, dx \quad (\text{B.9a}) \quad \dot{\mathcal{E}}(x, t) = \int_{\Omega} \rho(x)\dot{e}(x, t) \, dx \quad (\text{B.9b})$$

Cette énergie libre est aussi une fonction d'état extensive. La variation de ce potentiel thermodynamique permet de déterminer le travail fourni par le système fermé à température constante (transformation isotherme, donc $\dot{\theta} = 0$ en tout point et à tout instant). L'équation (B.8b) devient ainsi :

$$\dot{\psi}_m(x, t) = \dot{e}(x, t) - \dot{\eta}(x, t)\theta(x, t) \quad (\text{B.10})$$

De là, $\dot{\eta}$ devient :

$$\dot{\eta}(x, t) = \frac{1}{\theta(x, t)} \left(\dot{e}(x, t) - \dot{\psi}_m(x, t) \right) \quad (\text{B.11})$$

et en insérant cette valeur dans (B.7), la variation d'entropie locale s'exprime :

$$\rho(x)\dot{\eta}(x, t) = \frac{1}{\theta(x, t)}\rho(x, t) \left(\dot{e}(x, t) - \dot{\psi}_m(x, t) \right) \geq 0 \quad (\text{B.12})$$

La température étant une variable positive ou nulle, multiplier par θ ne change pas le signe de l'inégalité, et donc :

$$\rho(x)\dot{\eta}(x, t) = \rho(x) \left(\dot{e}(x, t) - \dot{\psi}_m(x, t) \right) \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

Des équations (B.9b) et (B.5), il est déduit que :

$$\rho(x)\dot{e}(x, t) = \mathbf{D}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) \quad (\text{B.14})$$

et en injectant cette expression dans l'équation (B.13), l'inégalité de *Clausius-Duhem* est obtenue, sous sa forme restreinte au problème de mécanique avec transformations isothermes et adiabatiques. La dissipation intrinsèque par unité de masse $d(x, t)$ est alors introduite et définie par :

$$d(x, t) = \rho(x)\dot{\eta}(x, t) = \mathbf{D}(x, t) : \boldsymbol{\sigma}(x, t) - \rho(x)\dot{\psi}_m(x, t) \geq 0 \quad (\text{B.15})$$

Annexe C

Notions élémentaires d'analyse convexe

Quelques notions d'analyse convexe, directement ou indirectement évoquées dans le travail, sont présentées. Ces définitions sont issues de ACARY (2021) et, pour plus de détails, il est possible de se référer à HIRIART-URRUTY et LEMARÉCHAL (1993a,b) ou ROCKAFELLAR et WETS (1998).

Définition : Ensemble convexe

Un ensemble $C \in \mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tout x et y appartenant à C et pour tout α entre 0 et 1, le point $(1 - \alpha)x + \alpha y$ est aussi dans C :

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x \in C, \forall y \in C, (1 - \alpha)x + \alpha y \in C \quad (\text{C.1})$$

Cela revient à dire que le segment reliant n'importe quel couple de points de C est entièrement compris dans C . En particulier, \mathbb{R}^n est convexe.

Définition : Fonction convexe

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ est convexe si :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (\text{C.2})$$

Définition : Fonction propre convexe

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ est une fonction propre convexe si elle est convexe et qu'elle n'est pas constante égale à $+\infty$ (autrement dit, si $f \not\equiv +\infty$)

Définition : Domaine d'une fonction convexe

Le domaine d'une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$, noté $D(f)$, est défini par l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que f est inférieure à $+\infty$:

$$D(f) = \{ x \mid f(x) < +\infty \} \quad (\text{C.3})$$

Définition : Epigraphe d'une fonction

L'épigraphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ (non nécessairement convexe), noté epi_f , est constitué par l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels y est supérieur à $f(x)$:

$$\text{epi}_f = \{ (x, y) \mid y \geq f(x) \} \quad (\text{C.4})$$

Ce sont donc tous les points situés sur ou au dessus du graphe de f .
Il faut noter qu'une fonction f est convexe si son épigraphe est convexe.

Définition : Fonction semi-continue inférieurement

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si son épigraphe epi_f est fermé.

Définition : Sous-gradient d'une fonction convexe

Un vecteur $p \in \mathbb{R}^n$ est appelé sous-gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ au point x si :

$$f(y) \geq f(x) + p^\top(y - x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{C.5}$$

Dans le cas où la fonction f est différentiable, le sous-gradient de f correspond au gradient de f (dans le cas scalaire, p correspond à la pente de la fonction au point x).

Définition : Sous-différentiel d'une fonction convexe

Le sous différentiel d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ au point x , noté $\partial f(x)$, est l'ensemble de ses sous-gradients $p \in \mathbb{R}^n$ au point x :

$$\partial f(x) = \{ p \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + p^\top(y - x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \} \tag{C.6}$$

- Le sous-différentiel est un ensemble fermé et convexe.
- Si la fonction f est propre, un sous-différentiel existe toujours.
- Le sous-différentiel peut être un ensemble vide.
- Le domaine du sous différentiel est l'ensemble des x pour lesquels $\partial f(x)$ n'est pas un ensemble vide : $D(\partial f(x)) = \{ x \mid \partial f(x) \neq \emptyset \}$

Définition : Fonction indicatrice d'un ensemble convexe

La fonction indicatrice d'un ensemble convexe non vide C au point x , notée $\Psi_C(x)$, prend la valeur 0 si x appartient à l'ensemble C , et la valeur $+\infty$ sinon :

$$\Psi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases} \tag{C.7}$$

Cette fonction est convexe car son épigraphe est convexe.

Définition : Cône normal à un ensemble convexe

le cône normal d'un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$ au point x , noté $N_C(x)$, est défini par :

$$N_C(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid s^\top(y - x) \leq 0 \quad \forall y \in C \} \tag{C.8}$$

Par convention, $x \notin C \rightarrow N_C(x) = \emptyset$. De plus, si x est à l'intérieur de C , $N_C(x) = \{0\}$.
Si la frontière de C est différentiable (lisse), le cône normal est égal à la normale à C en x .
Dans le cas où C est convexe non vide : $\partial \Psi_C(x) = N_C(x)$.

Bibliographie

- ACARY, Vincent (2001). « Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés ». Thèse de doct. Marseille : Aix-Marseille II - Ecole supérieure de mécanique de Marseille.
- (2016). « Energy Conservation and Dissipation Properties of Time-Integration Methods for Nonsmooth Elastodynamics with Contact ». In : *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 96.5, p. 585-603. ISSN : 1521-4001. DOI : 10.1002/zamm.201400231.
- (2021). *Introduction to Nonsmooth Dynamical Systems Lecture 1. Introduction and Motivations*. Ensimag.
- ACARY, Vincent, Maurice BRÉMOND et Olivier HUBER (2018). « On Solving Contact Problems with Coulomb Friction : Formulations and Numerical Comparisons ». In : *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics - Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Springer International Publishing, p. 375-457. ISBN : 978-3-319-75971-5.
- ACARY, Vincent et Bernard BROGLIATO (jan. 2008). *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in Mechanics and Electronics*. Springer. ISBN : 978-3-540-75392-6.
- ACARY, Vincent et al. (2004). *On the Equivalence Between Complementarity Systems, Projected Systems and Unilateral Differential Inclusions*. Rapp. tech. RR-5107. Inria.
- ACARY, Vincent et al. (nov. 2019). *An Introduction to Siconos*.
- BARBOTEU, Mikaël et Serge DUMONT (mar. 2018). « A Primal-Dual Active Set Method for Solving Multi-Rigid-Body Dynamic Contact Problems ». In : *Mathematics and Mechanics of Solids* 23.3, p. 489-503. ISSN : 1081-2865. DOI : 10.1177/1081286517733505.
- BATHE, Klaus-Jürgen, éd. (2014). *Finite Element Procedures*. 2nd edition. Watertown, MA : K.J. Bathe. ISBN : 978-0-9790049-5-7.
- BEATINI, Valentina, Gianni ROYER-CARFAGNI et Alessandro TASORA (juil. 2017). « A Regularized Non-Smooth Contact Dynamics Approach for Architectural Masonry Structures ». In : *Computers & Structures* 187, p. 88-100. ISSN : 0045-7949. DOI : 10.1016/j.compstruc.2017.02.002.

- BELGACEM, F. B., P. HILD et P. LABORDE (août 1998). « The Mortar Finite Element Method for Contact Problems ». In : *Mathematical and Computer Modelling*. Recent Advances in Contact Mechanics 28.4, p. 263-271. ISSN : 0895-7177. DOI : 10.1016/S0895-7177(98)00121-6.
- BELL, James F. et Akhtar S. KHAN (jan. 1980). « Finite Plastic Strain in Annealed Copper during Non-Proportional Loading ». In : *International Journal of Solids and Structures* 16.8, p. 683-693. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(80)90009-8.
- BERTRAND, D. et al. (sept. 2012). « Full-Scale Dynamic Analysis of an Innovative Rockfall Fence Under Impact Using the Discrete Element Method : From the Local Scale to the Structure Scale ». In : *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45.5, p. 885-900. ISSN : 1434-453X. DOI : 10.1007/s00603-012-0222-5.
- BHATTACHARJEE, Arindam et Anindya CHATTERJEE (sept. 2018). « Transverse Impact of a Hertzian Body with an Infinitely Long Euler-Bernoulli Beam ». In : *Journal of Sound and Vibration* 429, p. 147-161. ISSN : 0022-460X. DOI : 10.1016/j.jsv.2018.04.040.
- BISBOS, C. D., A. MAKRODIMOPOULOS et P. M. PARDALOS (fév. 2005). « Second-Order Cone Programming Approaches to Static Shakedown Analysis in Steel Plasticity ». In : *Optimization Methods and Software* 20.1, p. 25-52. ISSN : 1055-6788. DOI : 10.1080/1055678042000216003.
- BORJA, Ronaldo, Kossi SAMA et Pablo SANZ (fév. 2003). « On the Numerical Integration of Three-Invariant Elastoplastic Constitutive Models ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - COMPUT METHOD APPL MECH ENG* 192. DOI : 10.1016/S0045-7825(02)00620-5.
- BORJA, Ronaldo I. (juil. 1991). « Cam-Clay Plasticity, Part 2 : Implicit Integration of Constitutive Equation Based on a Nonlinear Elastic Stress Predictor ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 88.2, p. 225-240. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(91)90256-6.
- BORJA, Ronaldo I. et Seung R. LEE (jan. 1990). « Cam-Clay Plasticity, Part 1 : Implicit Integration of Elasto-Plastic Constitutive Relations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 78.1, p. 49-72. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(90)90152-C.
- BOUBY, C., G. DE SAXCÉ et J. -B. TRITSCH (mai 2006). « A Comparison between Analytical Calculations of the Shakedown Load by the Bipotential Approach and Step-by-Step Computations for Elastoplastic Materials with Nonlinear Kinematic Hardening ». In : *International Journal of Solids and Structures* 43.9, p. 2670-2692. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.042.
- BOUBY, Céline (juil. 2006). « Adaptation élastoplastique de structures sous chargements variables avec règle d'écroûissage cinématique non linéaire et non associée ». Thèse de doct. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I.

- BOULANGER, G. (1939). « Sur le choc avec frottement des corps non parfaitement élastiques ». In : *Revue Scientifique* 77, p. 325-327.
- BOURRIER, Franck (nov. 2008). « Modélisation de l'impact d'un bloc rocheux sur un terrain naturel, application à la trajectographie des chutes de blocs ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, p. 251.
- BOUSSHINE, L., A. CHAABA et G. DE SAXCÉ (jan. 2001). « Softening in Stress–Strain Curve for Drucker–Prager Non-Associated Plasticity ». In : *International Journal of Plasticity* 17.1, p. 21-46. ISSN : 0749-6419. DOI : 10.1016/S0749-6419(00)00017-6.
- BOUSSHINE, L., A. CHAABA et G. De SAXCE (2003). « A New Approach to Shakedown Analysis for Non-Standard Elastoplastic Material by the Bipotential ». In : *International Journal of Plasticity* 19.5, p. 583-598. ISSN : 0749-6419.
- BREZIS, H. (jan. 1973). *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. T. 5. Notas de Matemática. Amsterdam : North-Holland Mathematics Studies. ISBN : 978-0-08-087116-5.
- BRUHNS, Otto T. (2020). « History of Plasticity ». In : *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Sous la dir. d'Holm ALTENBACH et Andreas OCHSNER. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 1129-1190. ISBN : 978-3-662-55771-6. DOI : 10.1007/978-3-662-55771-6_281.
- BRÜLS, Olivier, Vincent ACARY et Alberto CARDONA (nov. 2014). « Simultaneous Enforcement of Constraints at Position and Velocity Levels in the Nonsmooth Generalized- α Scheme ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281, p. 131. DOI : 10.1016/j.cma.2014.07.025.
- CAPURSO, M. (avr. 1975). « Extended Displacement Bound Theorems for Continua Subjected to Dynamic Loading ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23.2, p. 113-122. ISSN : 0022-5096. DOI : 10.1016/0022-5096(75)90020-4.
- CAPURSO, Michele et Giulio MAIER (juin 1970). « Incremental Elastoplastic Analysis and Quadratic Optimization ». In : *Meccanica* 5.2, p. 107-116. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02134214.
- CARINI, Angelo (jan. 1996). « Colonnetti's Minimum Principle Extension to Generally Non-Linear Materials ». In : *International Journal of Solids and Structures* 33.1, p. 121-144. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(95)00026-7.
- CERADINI, Giulio (déc. 1966). « A Maximum Principle for the Analysis of Elastic-Plastic Systems ». In : *Meccanica* 1.3, p. 77-82. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02126938.
- CHATTERJEE, Anindya (mai 2004). « The Short-Time Impulse Response of Euler-Bernoulli Beams ». In : *Journal of Applied Mechanics* 71.2, p. 208-218. ISSN : 0021-8936. DOI : 10.1115/1.1667531.

- CHRISTENSEN, Peter W. (jan. 2002a). « A Nonsmooth Newton Method for Elastoplastic Problems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.11, p. 1189-1219. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(01)00321-8.
- (avr. 2002b). « A Semi-Smooth Newton Method for Elasto-Plastic Contact Problems ». In : *International Journal of Solids and Structures* 39.8, p. 2323-2341. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/S0020-7683(02)00086-0.
- CLEJA-TIGOIU, S. et N. E. STOICUTA (juin 2019). « Variational Inequality in Classical Plasticity. Applications to Armstrong-Frederick Elasto-Plastic Model ». In : *Computers & Mathematics with Applications. Mathematical Analysis with Applications to Mechanics, Dedicated to Professor Mircea T. Sofonea on the Occasion of His 60th Birthday*. 77.11, p. 2953-2970. ISSN : 0898-1221. DOI : 10.1016/j.camwa.2018.08.070.
- COLLINS, I. F. et G. T. HOULSBY (sept. 1997). « Application of Thermomechanical Principles to the Modelling of Geotechnical Materials ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 453.1964, p. 1975-2001. DOI : 10.1098/rspa.1997.0107.
- COLLINS, I. F. et P. A. KELLY (sept. 2002). « A Thermomechanical Analysis of a Family of Soil Models ». In : *Géotechnique* 52.7, p. 507-518. ISSN : 0016-8505. DOI : 10.1680/geot.2002.52.7.507.
- COMI, C., A. CORIGLIANO et G. MAIER (1991). « Extremum Properties of Finite-Step Solutions in Elastoplasticity with Nonlinear Mixed Hardening ». In : DOI : 10.1016/0020-7683(91)90094-V.
- CORIGLIANO, Alberto, Giulio MAIER et Slawomir PYCKO (nov. 1995). « Dynamic Shakedown Analysis and Bounds for Elastoplastic Structures with Nonassociative, Internal Variable Constitutive Laws ». In : *International Journal of Solids and Structures* 32.21, p. 3145-3166. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(94)00265-X.
- CORRADI, L. (avr. 1976). « Mathematical Programming Methods for Displacement Bounds in Elasto-Plastic Dynamics ». In : *Nuclear Engineering and Design* 37.1, p. 161-177. ISSN : 0029-5493. DOI : 10.1016/0029-5493(76)90059-5.
- CORRADI, Leone et Roberto NOVA (1974). « A Comparative Study of Bounding Techniques in Dynamic Shakedown of Elasto-Plastic Structures ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 3.2, p. 139-155. ISSN : 1096-9845. DOI : 10.1002/eqe.4290030204.
- COTTLE, Richard W., Jong-Shi PANG et Richard E. STONE (jan. 1992). *The Linear Complementarity Problem*. SIAM. ISBN : 978-0-89871-900-0.
- CUNDALL, P. A. et O. D. L. STRACK (mar. 1979). « A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies ». In : *Géotechnique* 29.1, p. 47-65. ISSN : 0016-8505. DOI : 10.1680/geot.1979.29.1.47.
- DE BORST, R. et A.E. GROEN (2000). « Computational Strategies for Standard Soil Plasticity ». In : *Modeling in Geomechanics*, p. 25-30.

- DE BORST, René et Thibault DURETZ (avr. 2020). « On Viscoelastic Regularisation of Strain-Softening Rocks and Soils ». In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 44.6, p. 890. DOI : 10.1002/nag.3046.
- DE SAXCÉ, G. et Z. Q. FENG (jan. 1991). « New Inequality and Functional for Contact with Friction : The Implicit Standard Material Approach* ». In : *Mechanics of Structures and Machines* 19.3, p. 301-325. ISSN : 0890-5452. DOI : 10.1080/08905459108905146.
- DE SAXCÉ, G., J.-B. TRITSCH et M. HJIAJ (2000). « Shakedown of Elastic-Plastic Structures with Non Linear Kinematical Hardening by the Bipotential Approach ». In : *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads : Theory and Engineering Applications*. Sous la dir. de Dieter WEICHERT et Giulio MAIER. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 167-182. ISBN : 978-94-010-9421-4. DOI : 10.1007/978-94-010-9421-4_11.
- DE SAXCÉ, Gery (jan. 1992). « Une Generalisation de l'inegalite de Fenchel et Ses Applications Aux Lois Constitutives ». In : *C.R. Acad. Sci. Paris* 314.
- DE SAXCÉ, Géry et Lahbib BOUSSHINE (2002). « Implicit Standard Materials ». In : *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads : Direct Analysis Methods*. Sous la dir. de Dieter WEICHERT et Giulio MAIER. International Centre for Mechanical Sciences. Vienna : Springer, p. 59-76. ISBN : 978-3-7091-2558-8. DOI : 10.1007/978-3-7091-2558-8_4.
- DHATT, Gouri, Emmanuel LEFRANÇOIS et Gilbert TOUZOT (déc. 2012). *Finite Element Method*. John Wiley & Sons. ISBN : 978-1-118-56970-2.
- DI GIACINTO, Danilo et al. (déc. 2020). « A Novel Steel Damping System for Rockfall Protection Galleries ». In : *Journal of Constructional Steel Research* 175, p. 106360. ISSN : 0143-974X. DOI : 10.1016/j.jcsr.2020.106360.
- DIKIN, I. I. (1967). « Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming ». In : *Soviet Mathematics. Doklady* 8, p. 674-675. ISSN : 0197-6788.
- DORREN, Luuk et al. (mar. 2013). « Methods for Predicting Rockfall Trajectories and Run-out Zones ». In : *Rockfall Engineering*, p. 143-173. ISBN : 978-1-84821-256-5. DOI : 10.1002/9781118601532.ch5.
- DUAN, Lian et Wai-Fah CHEN (avr. 1990). « A Yield Surface Equation for Doubly Symmetrical Sections ». In : *Engineering Structures* 12.2, p. 114-119. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/0141-0296(90)90016-L.
- DUBOIS, Frédéric et al. (mai 2011). « LMGC90 ». In : *10e Colloque National En Calcul Des Structures*. Giens, France, Clé USB.
- DUGELAS, Loic (2020). « Stratégies Probabilistes Appliquées à La Modélisation Numérique Discrète : Le Cas Des Filets Pare-Pierres ». In : p. 177.

- DUPIRE, S. et al. (août 2016a). « Novel Quantitative Indicators to Characterize the Protective Effect of Mountain Forests against Rockfall ». In : *Ecological Indicators* 67, p. 98-107. ISSN : 1470-160X. DOI : 10.1016/j.ecolind.2016.02.023.
- (déc. 2016b). « The Protective Effect of Forests against Rockfalls across the French Alps : Influence of Forest Diversity ». In : *Forest Ecology and Management* 382, p. 269-279. ISSN : 0378-1127. DOI : 10.1016/j.foreco.2016.10.020.
- EL BOUSTANI, Chadi et al. (avr. 2020a). « Dual Finite-Element Analysis Using Second-Order Cone Programming for Structures Including Contact ». In : *Engineering Structures* 208, p. 109892. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2019.109892.
- (oct. 2020b). « Elastoplastic and Limit Analysis of 3D Steel Assemblies Using Second-Order Cone Programming and Dual Finite-Elements ». In : *Engineering Structures* 221, p. 111041. DOI : 10.1016/j.engstruct.2020.111041.
- FELIPPA, Carlos A. (2004). *Introduction to Finite Element Methods*. University of Colorado.
- FELIPPA, Carlos A., Qiong GUO et K. C. PARK (jan. 2015). « Mass Matrix Templates : General Description and 1D Examples ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 22.1, p. 1-65. ISSN : 1886-1784. DOI : 10.1007/s11831-014-9108-x.
- FLORES, Paulo (sept. 2015). *Contact-Impact Analysis in Multibody Systems Based on the Nonsmooth Dynamics Approach*. Rapp. tech. DOI : 10.13140/RG.2.1.5059.6327.
- FLORES, Paulo et al. (mar. 2011). « On the Continuous Contact Force Models for Soft Materials in Multibody Dynamics ». In : *Multibody System Dynamics* 25.3, p. 357-375. ISSN : 1384-5640, 1573-272X. DOI : 10.1007/s11044-010-9237-4.
- FRANCESCHINI, Andrea et al. (mar. 2022). « A Reverse Augmented Constraint Preconditioner for Lagrange Multiplier Methods in Contact Mechanics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 392, p. 114632. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2022.114632.
- FRANCFORT, Gilles A. (mar. 2018). « Recovering Convexity in Non-Associated Plasticity ». In : *Comptes Rendus Mécanique. The Legacy of Jean-Jacques Moreau in Mechanics / L'héritage de Jean-Jacques Moreau En Mécanique* 346.3, p. 198-205. ISSN : 1631-0721. DOI : 10.1016/j.crme.2017.12.005.
- GEIRINGER, Hilda (1937). *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*. Gauthier-Villars.
- GEIRINGER, Hilda et Willy PRAGER (1934). « Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand ». In : *Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften : Dreizehnter Band*. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 310-363. ISBN : 978-3-642-94250-1. DOI : 10.1007/978-3-642-94250-1_7.
- GENTILINI, C. et al. (mai 2013). « Design of Falling Rock Protection Barriers Using Numerical Models ». In : *Engineering Structures*. Engineering Structures : Modelling and

- Computations (Special Issue IASS-IACM 2012) 50, p. 96-106. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2012.07.008.
- GLOCKER, Christoph (2001). *Set-Valued Force Laws : Dynamics of Non-Smooth Systems*. ISBN : 978-3-540-44479-4 978-3-642-53595-6.
- (2004). « Newton's and Poisson's Impact Law for the Non-Convex Case of Reentrant Corners ». In : *Complementarity, Duality and Symmetry in Nonlinear Mechanics*. T. 6. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 101-125. ISBN : 978-94-015-7119-7 978-90-481-9577-0. DOI : 10.1007/978-90-481-9577-0_6.
- HALPHEN, Bernard et Quoc Son NGUYEN (jan. 1975). « Sur Les Matériaux Standard Généralisés ». In : *Journal de Mécanique* 14, p. 39-63.
- HENG, Piseth et al. (nov. 2016). « A Simplified Model for Nonlinear Dynamic Analysis of Steel Column Subjected to Impact ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 86, p. 37-54. ISSN : 0020-7462. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.07.005.
- (déc. 2017). « An Enhanced SDOF Model to Predict the Behaviour of a Steel Column Impacted by a Rigid Body ». In : *Engineering Structures* 152, p. 771-789. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2017.08.061.
- HERTZ, Heinrich (jan. 1882). « Ueber die Berührung fester elastischer Körper. » In : 1882.92, p. 156-171. ISSN : 1435-5345. DOI : 10.1515/crll.1882.92.156.
- HILL, Rodney (jan. 1948). « A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1.1, p. 18-28. ISSN : 0033-5614. DOI : 10.1093/qjmam/1.1.18.
- (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Oxford. ISBN : 0-19-850367-9.
- HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste et Claude LEMARÉCHAL (1993a). *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Sous la dir. de M. ARTIN et al. T. 305. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. ISBN : 978-3-642-08161-3 978-3-662-02796-7. DOI : 10.1007/978-3-662-02796-7.
- (1993b). *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*. Sous la dir. de M. ARTIN et al. T. 305. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. ISBN : 978-3-642-08161-3 978-3-662-02796-7. DOI : 10.1007/978-3-662-02796-7.
- HJIAJ, M., J. FORTIN et G. DE SAXCE (juin 2003). « A Complete Stress Update Algorithm for the Non-Associated Drucker-Prager Model Including Treatment of the Apex ». In : *International Journal of Engineering Science* 41.10, p. 1109-1143. ISSN : 0020-7225. DOI : 10.1016/S0020-7225(02)00376-2.
- HJIAJ, Mohammed, Géry DE SAXCÉ et Zenon MRÓZ (jan. 2002). « A Variational Inequality-Based Formulation of the Frictional Contact Law with a Non-Associated Sliding Rule ».

- In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21.1, p. 49-59. ISSN : 0997-7538. DOI : 10.1016/S0997-7538(01)01183-4.
- HODGE, P. et W. PRAGER (1948). « A Variational Principle for Plastic Materials with Strain-Hardening ». In : *Journal of Mathematics and Physics* 27.1-4, p. 1-10. ISSN : 1467-9590. DOI : 10.1002/sapm19482711.
- HOULSBY, Guy T. (2019). « Frictional Plasticity in a Convex Analytical Setting ». In : *Open Geomechanics* 1, p. 1-10. DOI : 10.5802/ogeo.2.
- IDELSOHN, S.r., E. OÑATE et F. Del PIN (2004). « The Particle Finite Element Method : A Powerful Tool to Solve Incompressible Flows with Free-Surfaces and Breaking Waves ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61.7, p. 964-989. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1096.
- JANKOWSKI, Robert (août 2009). « Non-Linear FEM Analysis of Earthquake-Induced Pounding between the Main Building and the Stairway Tower of the Olive View Hospital ». In : *Engineering Structures* 31.8, p. 1851-1864. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2009.03.024.
- JANKOWSKI, Robert et Sayed MAHMOUD (2015). *Earthquake-Induced Structural Pounding*. GeoPlanet : Earth and Planetary Sciences. Cham : Springer International Publishing. ISBN : 978-3-319-16323-9 978-3-319-16324-6. DOI : 10.1007/978-3-319-16324-6.
- JEAN, M. (juil. 1999). « The Non-Smooth Contact Dynamics Method ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3, p. 235-257. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(98)00383-1.
- JEAN, Michel et Jean Jacques MOREAU (juin 1985). « Dynamics in the Presence of Unilateral Contacts and Dry Friction : A Numerical Approach ». In : *Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis*. Unilateral Problems in Structural Analysis, 2 : Proceedings of the Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis. Prescudin, Italy : Springer, p. 151-196.
- (1992). « Unilaterality and Dry Friction in the Dynamics of Rigid Body Collections ». In : *1st Contact Mechanics International Symposium*. Lausanne, p. 31-38.
- JEBRANE, A. et al. (oct. 2019). « Estimating Contact Forces and Pressure in a Dense Crowd : Microscopic and Macroscopic Models ». In : *Applied Mathematical Modelling* 74, p. 409-421. ISSN : 0307-904X. DOI : 10.1016/j.apm.2019.04.062.
- KANNO, Hasuka et al. (avr. 2021). « A Computational Design Optimization Method for Rockfall Protection Embankments ». In : *Engineering Geology* 284, p. 105920. ISSN : 0013-7952. DOI : 10.1016/j.enggeo.2020.105920.
- KANNO, Yoshihiro (juil. 2020). « A Note on a Family of Proximal Gradient Methods for Quasi-Static Incremental Problems in Elastoplastic Analysis ». In : *Theoretical and Applied Mechanics Letters* 10.5, p. 315-320. ISSN : 2095-0349. DOI : 10.1016/j.taml.2020.01.044.

- KARMAKAR, N. (déc. 1984). « A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming ». In : *Combinatorica* 4.4, p. 373-395. ISSN : 1439-6912. DOI : 10.1007/BF02579150.
- KAZEMI, F., M. MIARI et R. JANKOWSKI (jan. 2021). « Investigating the Effects of Structural Pounding on the Seismic Performance of Adjacent RC and Steel MRFs ». In : *Bulletin of Earthquake Engineering* 19.1, p. 317-343. ISSN : 1573-1456. DOI : 10.1007/s10518-020-00985-y.
- KESTIN, J. et al. (1970). *Paradoxes in the Application of Thermodynamics to Strained Solids*.
- KHAN, Azam, David Lloyd SMITH et Bassam A IZZUDDIN (mai 2013). « Investigation of Rigid-Plastic Beams Subjected to Impact Using Linear Complementarity ». In : *Engineering Structures. Engineering Structures : Modelling and Computations (Special Issue IASS-IACM 2012)* 50, p. 137-148. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2012.12.005.
- KHAN, Azam et al. (nov. 2021). « A Modified Lemke Algorithm for Dynamic Rigid Plastic Response of Skeletal Structures ». In : *Computers & Structures* 256, p. 106638. ISSN : 0045-7949. DOI : 10.1016/j.compstruc.2021.106638.
- KLEINERT, Jan, Bernd SIMEON et Klaus DRESSLER (mai 2017). « Nonsmooth Contact Dynamics for the Large-Scale Simulation of Granular Material ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics. Selected Papers from NUMDIFF-14* 316, p. 345-357. ISSN : 0377-0427. DOI : 10.1016/j.cam.2016.09.037.
- KOTHARI, Hardik et Rolf KRAUSE (mar. 2022). « A Generalized Multigrid Method for Solving Contact Problems in Lagrange Multiplier Based Unfitted Finite Element Method ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 392, p. 114630. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2022.114630.
- KRABBENHØFT, K. et A. V. LYAMIN (fév. 2012). « Computational Cam Clay Plasticity Using Second-Order Cone Programming ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212, p. 239-249. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2011.11.006.
- KRABBENHØFT, K., A. V. LYAMIN et S. W. SLOAN (mar. 2007a). « Formulation and Solution of Some Plasticity Problems as Conic Programs ». In : *International Journal of Solids and Structures* 44.5, p. 1533-1549. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.036.
- KRABBENHØFT, K. et al. (2012). « Associated Computational Plasticity Schemes for Non-associated Frictional Materials ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90.9, p. 1089-1117. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.3358.
- KRABBENHØFT, Kristian (fév. 2009). « A Variational Principle of Elastoplasticity and Its Application to the Modeling of Frictional Materials ». In : *International Journal of Solids and Structures* 46.3, p. 464-479. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.020.
- KRABBENHØFT, Kristian et Lars DAMKILDE (jan. 2001). « Limit Analysis Based on Lower-Bound Solutions and Nonlinear Yield Criteria ». In : p. 117-129. DOI : 10.4203/ccp.65.5.1.

- KRABBENHØFT, Kristian et Lars DAMKILDE (2003). « A General Non-Linear Optimization Algorithm for Lower Bound Limit Analysis ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56.2, p. 165-184. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.551.
- KRABBENHØFT, Kristian et al. (2005). « A New Discontinuous Upper Bound Limit Analysis Formulation ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63.7, p. 1069-1088. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1314.
- KRABBENHØFT, Kristian et al. (2007b). « An Interior-Point Algorithm for Elastoplasticity ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.3, p. 592-626. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1771.
- KRIEG, R. D. et D. B. KRIEG (nov. 1977). « Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model ». In : *Journal of Pressure Vessel Technology* 99.4, p. 510-515. ISSN : 0094-9930. DOI : 10.1115/1.3454568.
- LAMBERT, S. et F. BOURRIER (fév. 2013). « Design of Rockfall Protection Embankments : A Review ». In : *Engineering Geology* 154, p. 77-88. ISSN : 0013-7952. DOI : 10.1016/j.enggeo.2012.12.012.
- LANCIONI, Giovanni et al. (juil. 2016). « Seismic Vulnerability of Ancient Stone Arches by Using a Numerical Model Based on the Non-Smooth Contact Dynamics Method ». In : *Engineering Structures* 119, p. 110-121. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2016.04.001.
- LANGLADE, Thomas (oct. 2021). « Vulnerability and Risk Analyzes of Structures Subjected to Earthquake-Induced Building Pounding with a Non-Smooth Contact Dynamics Method ». Thèse de doct. Université de Lyon.
- LO FEUDO, S. et al. (mai 2022). « Finite Contact Duration Modeling of a Vibro-Impact Nonlinear Energy Sink to Protect a Civil Engineering Frame Structure against Seismic Events ». In : *Engineering Structures* 259, p. 114137. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2022.114137.
- LUBLINER, J. (juin 1972). « On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 7.3, p. 237-254. ISSN : 0020-7462. DOI : 10.1016/0020-7462(72)90048-0.
- MABROUK, Mongi (sept. 1998). « A Unified Variational Model for the Dynamics of Perfect Unilateral Constraints ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 17.5, p. 819-842. ISSN : 0997-7538. DOI : 10.1016/S0997-7538(98)80007-7.
- MACHADO, Margarida et al. (juil. 2012). « Compliant Contact Force Models in Multibody Dynamics : Evolution of the Hertz Contact Theory ». In : *Mechanism and Machine Theory* 53, p. 99-121. ISSN : 0094-114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2012.02.010.
- MAGNAIN, Benoit, Zhi-Qiang FENG et Jean-Michel CROS (mai 2005). « Extension de La Méthode Du Bi-Potentiel à l'analyse Des Problèmes d'impact ». In : *7e Colloque National En Calcul Des Structures*. Giens, France : CSMA.

- MAIER, Giulio (juin 1968a). « A Quadratic Programming Approach for Certain Classes of Non Linear Structural Problems ». In : *Meccanica* 3.2, p. 121-130. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02129011.
- (déc. 1968b). « Quadratic Programming and Theory of Elastic-Perfectly Plastic Structures ». In : *Meccanica* 3.4, p. 265-273. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02186946.
- (sept. 1969). « Shakedown Theory in Perfect Elastoplasticity with Associated and Non-associated Flow-Laws : A Finite Element, Linear Programming Approach ». In : *Meccanica* 4.3, p. 250-260. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02133439.
- MAIER, Giulio et Leone CORRADI (mar. 1974). « Upper Bounds on Dynamic Deformations of Elastoplastic Continua ». In : *Meccanica* 9.1, p. 30-35. ISSN : 1572-9648. DOI : 10.1007/BF02154419.
- MAIER, Giulio et E VITIELLO (1974). « Bounds to Plastic Strains and Displacements in Dynamic Shakedown of Work-Hardening Structures ». In : *Journal of Applied Mechanics* 41.2, p. 434-440.
- MAKRODIMOPOULOS, Athanasios (jan. 2006). « Computational Formulation of Shakedown Analysis as a Conic Quadratic Optimization Problem ». In : *Mechanics Research Communications* 33.1, p. 72-83. ISSN : 0093-6413. DOI : 10.1016/j.mechrescom.2004.10.014.
- MAKRODIMOPOULOS, Athanasios et Chris MARTIN (jan. 2005a). « A Novel Formulation of Upper Bound Limit Analysis as a Second-Order Cone Programming Problem ». In :
- (jan. 2005b). « Limit Analysis Using Large-Scale SOCP Optimization ». In :
- MARCAL, P. et I. KING (1967). « Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method ». In : DOI : 10.1016/0020-7403(67)90004-5.
- MAUGIN, Gerard A. (1992). *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press. ISBN : 978-0-521-39476-5. DOI : 10.1017/CB09781139172400.
- MELAN, Ernst (avr. 1938). « Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums ». In : *Ingenieur-Archiv* 9.2, p. 116-126. ISSN : 1432-0681. DOI : 10.1007/BF02084409.
- MOREAU, J. J. (1985). « Standard Inelastic Shocks and the Dynamics of Unilateral Constraints ». In : *Unilateral Problems in Structural Analysis*. Sous la dir. de Gianpietro DEL PIERO et Franco MACERI. International Centre for Mechanical Sciences. Vienna : Springer, p. 173-221. ISBN : 978-3-7091-2632-5. DOI : 10.1007/978-3-7091-2632-5_9.
- MOREAU, Jean Jacques (1966). « Fonctionnelles convexes ». In : *Séminaire Jean Leray* 2, p. 1-108.
- (1970). « Sur Les Lois de Frottement, de Plasticité et de Viscosité ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 271, p. 608-611.

- MOREAU, Jean Jacques (1971a). *Fonctions de Résistance et Fonctions de Dissipation*.
- (1971b). *Rafle Par Un Convexe Variable (Première Partie)*.
- (1971c). « Sur l'évolution d'un Système Élasto-Visco-Plastique ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 273, p. 118-121.
- (1972). *Rafle Par Un Convexe Variable (Deuxième Partie)*.
- (1973). « On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity ». In : *New Variational Techniques in Mathematical Physics*. Sous la dir. de CAPRIZ et al. Springer.
- (1976). « Application of Convex Analysis to the Treatment of Elastoplastic Systems ». In : *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*. Sous la dir. de Paul GERMAIN et Bernard NAYROLES. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, p. 56-89. ISBN : 978-3-540-38165-5. DOI : 10.1007/BFb0088746.
- (1983). « Liaisons Unilatérales sans Frottement et Chocs Inélastiques ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. II 296, p. 1473-1476.
- (1988). « Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics ». In : *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Sous la dir. de Jean Jacques MOREAU et P. D. PANAGIOTOPOULOS. International Centre for Mechanical Sciences. Vienna : Springer, p. 1-82. ISBN : 978-3-7091-2624-0. DOI : 10.1007/978-3-7091-2624-0_1.
- (1994). « Some Numerical Methods in Multibody Dynamics : Application to Granular Materials ». In : *European Journal of Mechanics* 13.4, p. 93-114.
- (jan. 2000). « Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides ». In : *Revue Européenne des Éléments Finis* 9.1-3, p. 9-28. ISSN : 1250-6559. DOI : 10.1080/12506559.2000.10511427.
- (2002). « Numerical Dynamics of Granular Materials ». In : *Contact Mechanics*. Sous la dir. de João A. C. MARTINS et Manuel D. P. Monteiro MARQUES. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 1-16. ISBN : 978-94-017-1154-8. DOI : 10.1007/978-94-017-1154-8_1.
- MOREAU, Jean Jacques et Michel JEAN (1996). « Numerical Treatment of Contact and Friction : The Contact Dynamics Method ». In : *Engineering Systems Design and Analysis Conference*. New York, p. 201-208.
- MORRISON, J. L. M. et W. M. SHEPHERD (juin 1950). « An Experimental Investigation of Plastic Stress—Strain Relations ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 163.1, p. 1-17. ISSN : 0020-3483. DOI : 10.1243/PIME_PROC_1950_163_007_02.
- NAYROLES, Bernard (2011). *Mécanique des structures et dualité*.

- NAYROLES, Bernard et Dieter WEICHERT (1993). « La Notion de Sanctuaire d'élasticité et d'adaptation Des Structures ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 2^e sér. 316, p. 1493-1498.
- NGUYEN, Quoc (jan. 1977). « On the Elastic Plastic Initial-Value Problem and Its Numerical Integration ». In : *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11, p. 817-832.
- NGUYEN, Quoc et H.D. BUI (jan. 1974). « Sur Les Matériaux Élastoplastiques à Écrouissage Positif Ou Négatif ». In : *Journal de Mécanique*.
- NGUYEN, Quoc Son (mai 1973). « Matériaux élasto-visco-plastiques et élastoplastiques à potentiel généralisé ». In : *Compte rendu hebdomadaire de l'Académie des sciences* 277.7, p. 915-918.
- NGUYEN, Quoc Son et Bernard HALPHEN (août 1973). « Sur les lois de comportement élasto-viscoplastique à potentiel généralisé ». In : *Compte rendu hebdomadaire de l'Académie des sciences* 277.7, p. 319-322.
- NODARGI, Nicola A. (sept. 2019). « An Overview of Mixed Finite Elements for the Analysis of Inelastic Bidimensional Structures ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 26.4, p. 1117-1151. ISSN : 1886-1784. DOI : 10.1007/s11831-018-9293-0.
- ODQVIST, F. K. G. (1933). « Die Verfestigung von Flußeisenähnlichen Körpern. Ein Beitrag Zur Plastizitätstheorie ». In : *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 13.5, p. 360-363. ISSN : 1521-4001. DOI : 10.1002/zamm.19330130505.
- OÑATE, E. et al. (sept. 2004). « The Particle Finite Element Method — an Overview ». In : *International Journal of Computational Methods* 01.02, p. 267-307. ISSN : 0219-8762. DOI : 10.1142/S0219876204000204.
- ORTIZ, M. et E. P. POPOV (1985). « Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.9, p. 1561-1576. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620210902.
- ORTIZ, M. et L. STAINIER (avr. 1999). « The Variational Formulation of Viscoplastic Constitutive Updates ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 171.3, p. 419-444. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(98)00219-9.
- PARASKEVOPOULOS, E., P. PASSAS et S. NATSIAVAS (oct. 2020). « A Novel Return Map in Non-Flat Configuration Spaces Of Multibody Systems with Impact ». In : *International Journal of Solids and Structures* 202, p. 822-834. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2020.06.045.
- PELLEGRINO, S. (jan. 1993). « Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium Matrix ». In : *International Journal of Solids and Structures* 30.21, p. 3025-3035. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(93)90210-X.

- PEREZ-FOGUET, Agusti, Antonio RODRIGUEZ-FERRAN et Antonio HUERTA (juin 2001). « Consistent Tangent Matrices for Substepping Schemes ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.35, p. 4627-4647. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(00)00336-4.
- PRAGER, William (1935). « Der Einfluß Der Verformung Auf Die Fließbedingung Zähplastischer Körper ». In : *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 15.1-2, p. 76-80. ISSN : 1521-4001. DOI : 10.1002/zamm.19350150116.
- (mar. 1949). « Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity ». In : *Journal of Applied Physics* 20.3, p. 235-241. ISSN : 0021-8979. DOI : 10.1063/1.1698348.
- PRAGER, William et Philip Gibson HODGE (1951). *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York : Wiley.
- PUSO, Michael A. et Tod A. LAURSEN (fév. 2004). « A Mortar Segment-to-Segment Contact Method for Large Deformation Solid Mechanics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.6, p. 601-629. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2003.10.010.
- PYCKO, S. et G. MAIER (1995). « Shakedown Theorems for Some Classes of Nonassociative Hardening Elastic-Plastic Material Models ». In : DOI : 10.1016/S0749-6419(95)00004-6.
- RAFIEE, Ali, Marc VINCHES et Claude BOHATIER (déc. 2008). « Modelling and Analysis of the Nîmes Arena and the Arles Aqueduct Subjected to a Seismic Loading, Using the Non-Smooth Contact Dynamics Method ». In : *Engineering Structures* 30.12, p. 3457-3467. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2008.05.018.
- RAVANEL, Ludovic et Philip DELINE (déc. 2008). « La face ouest des Drus (massif du Mont-Blanc) : évolution de l'instabilité d'une paroi rocheuse dans la haute montagne alpine depuis la fin du petit âge glaciaire ». In : *Géomorphologie : relief, processus, environnement* 14.4, p. 261-272. ISSN : 1266-5304. DOI : 10.4000/geomorphologie.7444.
- ROCKAFELLAR, R. Tyrrell et Roger J. B. WETS (1998). *Variational Analysis*. Sous la dir. de M. BERGER et al. T. 317. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer. ISBN : 978-3-540-62772-2 978-3-642-02431-3. DOI : 10.1007/978-3-642-02431-3.
- ROMANO, G., L. ROSATI et F. MAROTTI DE SCIARRA (jan. 1993). « A Variational Theory for Finite-Step Elasto-Plastic Problems ». In : *International Journal of Solids and Structures* 30.17, p. 2317-2334. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/0020-7683(93)90120-V.
- SABET, Sepideh Alizadeh et René DE BORST (2019). « Structural Softening, Mesh Dependence, and Regularisation in Non-Associated Plastic Flow ». In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 43.13, p. 2170-2183. ISSN : 1096-9853. DOI : 10.1002/nag.2973.

- SALENCON, Jean (juin 1983). *Calcul à La Rupture et Analyse Limite*. ISBN : 978-2-85978-059-3.
- SAMANIEGO, Esteban et al. (mai 2021). « Variational Modelling of Strain Localization in Solids : A Computational Mechanics Point of View ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 28.3, p. 1183-1203. ISSN : 1886-1784. DOI : 10.1007/s11831-020-09410-8.
- SÁNCHEZ, Paul et al. (juil. 2021). « A Contact Dynamics Code Implementation for the Simulation of Asteroid Evolution and Regolith in the Asteroid Environment ». In : *Icarus* 363, p. 114441. ISSN : 0019-1035. DOI : 10.1016/j.icarus.2021.114441.
- SCHMIDT, R. (juin 1932). « Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet ». In : *Ingenieur-Archiv* 3.3, p. 215-235. ISSN : 1432-0681. DOI : 10.1007/BF02079970.
- SIGNORINI, Antonio (1959). « Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata ». In : *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*. 5^e sér. 18.
- SIMO, J. C. et T. J. R. HUGHES (1998). *Computational Inelasticity*. Springer Science & Business Media. ISBN : 978-0-387-22763-4.
- SIMO, J. C., J. G. KENNEDY et S. GOVINDJEE (1988). « Non-Smooth Multisurface Plasticity and Viscoplasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26.10, p. 2161-2185. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620261003.
- SIMO, J. C. et M. ORTIZ (juin 1985). « A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49.2, p. 221-245. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(85)90061-1.
- SIMO, J. C. et R. L. TAYLOR (fév. 1985). « Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 48.1, p. 101-118. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(85)90070-2.
- (1986). « A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22.3, p. 649-670. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620220310.
- SIMO, Juan C., Peter WRIGGERS et Robert L. TAYLOR (août 1985). « A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50.2, p. 163-180. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(85)90088-X.
- STRONGE, W. J. (sept. 1994). « Swerve During Three-Dimensional Impact of Rough Rigid Bodies ». In : *Journal of Applied Mechanics* 61.3, p. 605-611. ISSN : 0021-8936. DOI : 10.1115/1.2901502.

- STRONGE, W. J. (mar. 2004). *Impact Mechanics*. Cambridge University Press. ISBN : 978-0-521-60289-1.
- SU, Y. et al. (mar. 2021). « Towards Realistic Simulations of the Impact Dynamics of Boulders on Rock-Filled Gabion : Combined Effects of Rock Shapes and Their Crushing Strength ». In : *Engineering Geology* 283, p. 106026. ISSN : 0013-7952. DOI : 10.1016/j.enggeo.2021.106026.
- SULSKY, D., Z. CHEN et H. L. SCHREYER (sept. 1994). « A Particle Method for History-Dependent Materials ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 118.1, p. 179-196. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/0045-7825(94)90112-0.
- SULSKY, Deborah, Shi-Jian ZHOU et Howard L. SCHREYER (mai 1995). « Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics ». In : *Computer Physics Communications*. Particle Simulation Methods 87.1, p. 236-252. ISSN : 0010-4655. DOI : 10.1016/0010-4655(94)00170-7.
- TANGARAMVONG, S., F. TIN-LOI et Ch. SONG (2012). « A Direct Complementarity Approach for the Elastoplastic Analysis of Plane Stress and Plane Strain Structures ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90.7, p. 838-866. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.3346.
- TASORA, Alessandro et al. (2016). « Chrono : An Open Source Multi-physics Dynamics Engine ». In : *High Performance Computing in Science and Engineering*. Sous la dir. de Tomáš KOZUBEK et al. T. 9611. Cham : Springer International Publishing, p. 19-49. ISBN : 978-3-319-40360-1 978-3-319-40361-8. DOI : 10.1007/978-3-319-40361-8_2.
- TERLAKY, Tamás (1996). *Interior Point Methods of Mathematical Programming*. First. T. 5. Applied Optimization. New York : Springer. ISBN : 978-0-7923-4201-4.
- ULLOA, Jacinto et al. (mai 2021). « On the Variational Modeling of Non-Associative Plasticity ». In : *International Journal of Solids and Structures* 217-218, p. 272-296. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2020.10.027.
- VERPEAUX, Pierre et Thierry CHARRAS (2003). « Dynamique du solide : Modification du schéma de Newmark aux cas nonlinéaires ». In : *Computational Structural Mechanics Association*. Giens.
- VOLK, Wolfram et al. (jan. 2019). « Models and Modelling for Process Limits in Metal Forming ». In : *CIRP Annals* 68.2, p. 775-798. ISSN : 0007-8506. DOI : 10.1016/j.cirp.2019.05.007.
- VOLKWEIN, A. et al. (sept. 2011). « Rockfall Characterisation and Structural Protection – a Review ». In : *Natural Hazards and Earth System Sciences* 11.9, p. 2617-2651. ISSN : 1561-8633. DOI : 10.5194/nhess-11-2617-2011.
- WALKER, S. V. et R. I. LEINE (avr. 2019). « Set-Valued Anisotropic Dry Friction Laws : Formulation, Experimental Verification and Instability Phenomenon ». In : *Nonlinear Dynamics* 96.2, p. 885-920. ISSN : 1573-269X. DOI : 10.1007/s11071-019-04829-6.

- WEYLER, R. et al. (jan. 2012). « On the Contact Domain Method : A Comparison of Penalty and Lagrange Multiplier Implementations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Special Issue on Advances in Computational Methods in Contact Mechanics 205–208, p. 68-82. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2011.01.011.
- WILKINS, M. L. (jan. 1963). *Calculation of Elastic-Plastic Flow*. Rapp. tech. UCRL-7322(Rev.1). California Univ., Livermore. Lawrence Radiation Lab.
- WRIGGERS, P. (2006). *Computational Contact Mechanics*. 2nd ed. Berlin ; New York : Springer. ISBN : 978-3-540-32608-3.
- WRIGGERS, Peter et Giorgio ZAVARISE (fév. 2008). « A Formulation for Frictionless Contact Problems Using a Weak Form Introduced by Nitsche ». In : *Computational Mechanics* 41, p. 407-420. DOI : 10.1007/s00466-007-0196-4.
- XIAOMING, Guo, Zhang ROULEI et She YINGHE (nov. 2001). « On the Mathematical Modeling for Elastoplastic Contact Problem and Its Solution by Quadratic Programming ». In : *International Journal of Solids and Structures* 38.44, p. 8133-8150. ISSN : 0020-7683. DOI : 10.1016/S0020-7683(00)00413-3.
- YONEKURA, Kazuo et Yoshihiro KANNO (juin 2012). « Second-Order Cone Programming with Warm Start for Elastoplastic Analysis with von Mises Yield Criterion ». In : *Optimization and Engineering* 13.2, p. 181-218. ISSN : 1573-2924. DOI : 10.1007/s11081-011-9144-4.
- ZENG, Qing, Charikleia D. STOURA et Elias G. DIMITRAKOPOULOS (août 2018). « A Localized Lagrange Multipliers Approach for the Problem of Vehicle-Bridge-Interaction ». In : *Engineering Structures* 168, p. 82-92. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2018.04.040.
- ZHANG, H. W. et al. (déc. 2002). « Quadratic Programming Method in Numerical Simulation of Metal Forming Process ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.49, p. 5555-5578. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/S0045-7825(02)00462-0.
- ZHANG, H. W. et al. (juin 2004). « A New Algorithm for Numerical Solution of 3D Elastoplastic Contact Problems with Orthotropic Friction Law ». In : *Computational Mechanics* 34.1, p. 1-14. ISSN : 1432-0924. DOI : 10.1007/s00466-004-0548-2.
- ZIEGLER, Hans (mar. 1958). « An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and Its Significance for Rheological Problems ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 9.5, p. 748-763. ISSN : 1420-9039. DOI : 10.1007/BF02424793.
- (1962). *Some Extremum Principles in Irreversible Thermodynamics, with Application to Continuum Mechanics*. Swiss Federal Institute of Technology.
- ZIEGLER, Hans et Christoph WEHRLI (jan. 1987). « The Derivation of Constitutive Relations from the Free Energy and the Dissipation Function ». In : *Advances in Applied Mechanics*. Sous la dir. de Theodore Y. WU et John W. HUTCHINSON. T. 25. Elsevier, p. 183-238. DOI : 10.1016/S0065-2156(08)70278-3.

ZIENKIEWICZ, O. C. et Y. K. CHEUNG (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics : Numerical Solution of Problems in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill.