Une construction de surfaces de type général, fibrés vectoriels stables sur les surfaces d'Enriques et variétés de Kummer généralisées

Daniel Naie

63822

ORSAY
N d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

par

Daniel Naie

Sujet:

Une construction de surfaces de type général, fibrés vectoriels stables sur les surfaces d'Enriques et variétés de Kummer généralisées

Soutenue le 28 juin 1994 devant la commision d'examen

MM. Joseph Le Potier Président
Arnaud Beauville
Olivier Debarre
Paltin Ionescu
Chris Peters

Abstract

We have constructed surfaces of general type with $p_g = 0$ and $1 \leq K^2 \leq 4$. Such a surface is a double sheeted cover of an Enriques surface. The branch locus consists of a union of smooth disjoint curves. One has positive self-intersection and the others are (-2)-curves. We have computed the fundamental group.

We have studied the special rank two vector bundles over the Enriques surfaces. Such a bundle is the direct image of a line bundle which is not-invariant with respect to the canonical involution of the universal cover. The existence of a special bundle entails an embedding of the Enriques surface in a Grassmannian of lines. The bundle is the pull-back of the dual tautological bundle. In the moduli spaces of stable vector bundles, the special bundles represent the singular points which are rational double points.

For a principally polarised abelian variety A, where θ is the polarisation, we have generalized the notions of Kummer variety and invertible sheaf induced by $\mathcal{O}_A(2\Theta)$. The generalized variety is cut out by the sum of the components equal to zero in $A^{(r)}$. It maps to $\mid r\Theta \mid$ and there exists an isomorphism between the dual projective space of global sections of the introduced sheaf and $\mid r\Theta \mid$ such that the maps involved commute.

Je voudrais remercier Arnaud Beauville, qui m'a introduit dans les sujets traités dans la thèse, en me proposant des problèmes passionants. Les idées qu'il a esquissées pendant nos conversations stimulantes, m'ont aidé à organiser mes recherches et à franchir les points délicats.

Ensuite, je voudrais remercier Joseph Le Potier pour sa lecture critique du manuscrit et pour avoir accepté de présider le jury, Chris Peters pour sa lecture attentive de la thèse, Olivier Debarre et Paltin Ionescu d'avoir accepté d'être membres du jury. Pendant mes études à l'Université de Bucarest, Paltin Ionescu, avec enthousiasme et patience a guidé mes pas de début dans la Géométrie Algébrique.

Je voudrais remercier mes amis pour leurs suggestions mathématiques et aussi pour leurs corrections de mon texte en langue française. C'est grace à eux que les erreurs de langue ne sont pas trop nombreuses; pour celles qui se trouvent encore dans le texte la responsabilité me revient entiérement.

Sommaire

Introduction **3**

1 Surfaces d'Enriques et une construction de surfaces de type général avec $p_g = 0$ **4**

1.1 Préliminaires 4

1.2 Ensembles de (-2)-courbes sur une surface d'Enriques et une construction de surfaces de type général 7

1.3 Le calcul de $\pi_1(Y)$ 15

2 Fibrés vectoriels spéciaux sur les surfaces d'Enriques **20**

2.1 Quelques remarques sur les fibrés spéciaux 21

2.2 Surfaces d'Enriques plongées dans les Grassmanniennes 30

2.3 Les singularités des espaces des modules des fibrés vectoriels stables de rang deux sur les surfaces d'Enriques 36

2.4 Les espaces des modules 1-dimensionels 39

3 Variétés de Kummer généralisées **47**

3.1 Le calcul de la dimension de $H^0(K, \mathcal{F})$ 50

3.2 L'isomorphisme β 55

3.3 L'étude de l'application $\varphi_{\mathcal{F}}$ 57

Introduction

Les trois chapitres de ce travail sont indépendents. Le point de départ a été de regarder les configurations de (-2)-courbes sur les surfaces d'Enriques. On démontre que les seuls revètement doubles d'une surface d'Enriques ramifiés le long des (-2) courbes sont, ou bien des surfaces d'Enriques, le lieu de ramification étant formés par quatre courbes, ou bien des surfaces bielliptiques, le lieu de ramification étant formés par huit courbes. Dans ce dernier cas, on utilise l'information géométrique supplémentaire pour faire une construction de surfaces de type général de genre géométrique nul. Le contenu du premier chapitre[1] développe cette idée.

Ensuite on regarde une question posée par I. Dolgachev et I. Reider dans [12]. Ils se demandaient si les fibrés vectoriels extrémaux de rang deux sur les surfaces d'Enriques, fibrés liés à l'existence de (-2)-cycles effectifs sur les surfaces, pouvaient être obtenus comme des restrictions des fibrés tautologiques de certaines Grassmanniennes. Donnant la réponse positive à cette question on arrive, dans le deuxième chapitre[2], à considérer les fibrés spéciaux sur les surfaces d'Enriques. Un fibreé E est dit spécial si $E \simeq E \otimes [K_S]$.

Les origines du troisième chapitre se trouvent dans une question concernant les espaces des modules des fibrés semi-stables de rang r sur une courbe, question qui m'a été posée par A. Beauville. Un tel espace s'applique rationnellement d'un côté dans l'espace linéaire associé aux fonctions thêta d'ordre r sur la jacobienne et d'un côté dans l'espace linéaire associé au fibré déterminant. Entre ces deux espaces il existe un isomorphisme compatible. Quand le rang est deux, la jacobienne peut être introduite dans le diagramme (elle s'applique sur le lieu singulier de l'espace des modules) en complétant les flèches. La question était si on pouvait compléter le diagramme d'une manière similaire pour un rang arbitraire. La réponse est positive.

Les problèmes considérés enferment l'existence de l'action d'un groupe fini. C'est cette action qui suggère les techniques qui seront utilisées pour les résoudre.

Dans le premier chapitre, les surfaces d'Enriques S considérées, modulo

[1]Paru dans Math.Z. 215, 269-280 (1994), ayant presque la même forme, sous le titre "Surfaces d'Enriques et une construction de surfaces de type général avec $p_g = 0$".

[2]A paraître dans Math.Ann., sous le titre "Special rank two vector bundles over Enriques surfaces".

les singularités, sont le quotient d'une surface abélienne $A = \mathbf{C}/ < 1, \lambda_1 > \times \mathbf{C}/ < 1, \lambda_2 >$ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z/2} \times \mathbf{Z/2}$. La construction de surfaces de type général est faite en prenant le revêtement double ramifié au dessus d'une courbe convenable, choisie en utilisant les fibrations elliptiques induites de A.

Dans le deuxième chapitre, on étudie les fibrés spéciaux de rang deux sur les surfaces d'Enriques. Ils sont des images directes des fibrés en droites sur les revêtements universels, fibrés qui ne sont pas invariants par l'action des involutions naturelles qui agissent sur les revêtements. Cette remarque permet de réduire le problème à l'étude des fibrés en droites.

Dans le dernier chapitre, on généralise un résultat connu pour certaines variétés de Kummer. La variété de Kummer peut être regardée comme le quotient par le groupe symétrique d'ordre deux de la sous-variété du produit $A \times A$ obtenue en considérant que la somme des coordonnées soit nulle.

Pour la généralisation on considère la sous-variété du produit A^r et le groupe symétrique d'ordre r.

1 Surfaces d'Enriques et une construction de surfaces de type général avec $p_g = 0$

Dans ce chapitre nous présentons une construction de surfaces de type général en utilisant une méthode du même type que celle de Todorov dans [33]. Là, Todorov obtient ses surfaces comme revêtements doubles d'une surface de Kummer, le lieu de ramification étant un ensemble de courbes lisses et disjointes, dont une a l'auto-intersection positive et les autres sont de (-2)-courbes. Nous faisons la construction en partant d'une surface d'Enriques. Ensuite, nous évaluons le groupe fondamental pour les surfaces construites.

On doit préciser que la surface avec $K^2 = 4$, a été construite d'une manière analogue par J.H.Keum (cf. [17]). Il donne aussi le calcul de π_1. Les surfaces avec $K^2 = 1$ et 2 ont paru dans les travaux de M. Reid, [29] et [30].

1.1 Préliminaires

Les surfaces considérées sont des surfaces projectives complexes, sauf dans la démonstration du théorème 1.3.1 où l'on considère aussi des revêtements universels.

Une surface lisse est une surface minimale si et seulement si elle ne contient pas de (-1)-courbes. Une surface minimale S est de type général si et seulement si $K_S^2 > 0$ et $K_S \cdot D \geq 0$, quelque soit D un diviseur effectif sur S.

Soient X, S deux surfaces lisses. Un revêtement double ramifié $\pi : X \to S$ est une application finie, génériquement $2 : 1$. L'application π induit une involution sur X. L'ensemble des points fixes de l'action forment une courbe lisse C', le lieu de ramification de π sur X. L'image réduite de C' sur S est une courbe lisse C, non nécessairement connexe, dont la classe dans $\mathrm{Pic}S$ est divisible par deux. On a $C \sim 2B$, de sorte que $\pi^*C = 2C'$ et $\pi^*B \sim C'$.

La surface S étant fixée, la donnée du revêtement double ramifié $\pi : X \to S$ est équivalente à la donnée d'une classe de diviseur $\mathcal{O}_S(B)$ et d'une courbe lisse $C \sim 2B$. On a alors $\pi_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-B)$. Un calcul immédiat (cf.[3]) donne

$$K_X \sim \pi^*K_S + C' \sim \pi^*(K_S + B) \ . \tag{1}$$

On a

$$K_X^2 = 2K_S^2 + 4B \cdot K_S + 2B^2 \tag{2}$$

et en utilisant la formule de Noether

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 2\chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}B \cdot K_S + \frac{1}{2}B^2 \ . \tag{3}$$

Pour évaluer $p_g(X)$, on considère l'action de σ^* sur $H^0(X, \mathcal{O}_X(\pi^*(K_S+B)))$. Elle décompose cet espace des sections dans une somme directe formée par les sous-espaces correspondants à $+1$ et -1. Celui qui correspond à $+1$ est formé par les sections qui sont les images inverses des sections globales de $\mathcal{O}_S(K_S + B)$ sur S. Le sous-espace correspondant à -1 est formé par les sections qui s'annulent sur C', le lieu fixe de σ sur X. Si s_0 représente une section globale de $\mathcal{O}_S(C)$ et qui s'annule sur C, alors $(\pi^*s_0)^{1/2}$ est une section globale de C' sur X. Pour s appartenant au sous-espace anti-invariant de σ, $s/(\pi^*s_0)^{1/2}$ est une section globale de $\pi^*\mathcal{O}_S(K_S)$ d'après (1). Donc ce sous-espace est isomorphe à $H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S))$. On conclut que

$$p_g(X) = p_g(S) + h^0(S, K_S + B) \ . \tag{4}$$

De plus $\pi^* : \mathrm{Pic}S \to \mathrm{Pic}X$ est injectif et $\pi^*D \cdot \pi^*D' = 2D \cdot D'$.

Les (-1)-courbes sur X apparaissent comme les images inverses de (-1)-courbes sur S disjointes du lieu de ramification, ou comme les images inverses réduites de (-2)-courbes sur S contenues dans le lieu de ramification.

Soit $(\mathrm{Tors}S)_2$ le sous-groupe engendré par les éléments de deux torsion de $\mathrm{Pic}S$.

Lemme 1.1.1 *Soient S, X deux surfaces lisses, $(E_j)_{j\in J}$ une famille de courbes lisses et disjointes sur S et $\pi : X \to S$ un revêtement double ramifié le long des E_j. Soient $\zeta : (\mathbf{Z}/2)^J \longrightarrow \mathrm{Pic}S \otimes \mathbf{Z}/2$ l'homomorphisme associé aux E_j et e l'élément de $(\mathbf{Z}/2)^J$ correspondant à $\sum_{j\in J} E_j$. Si $(\mathrm{Tors}S)_2 = 0$, alors $(\mathrm{Tors}X)_2 \simeq \ker\zeta/\,(e\mathbf{Z}/2)$.*

Démonstration. Le résultat est démontré dans [6]. Soit $G \simeq \mathbf{Z}/2$ le groupe (de Galois) du revêtement $X \to S$ et soit la suite exacte de G-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_X(X)^*/\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathrm{Div}X \longrightarrow \mathrm{Pic}X \longrightarrow 0\,.$$

La suite longue de cohomologie donne

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}_X(X)^*/\mathbf{C}^*)^G \longrightarrow (\mathrm{Div}X)^G \longrightarrow (\mathrm{Pic}X)^G \longrightarrow 0\,,$$

et on considère le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_S(S)^*/\mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}S & \longrightarrow & \mathrm{Pic}S & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathcal{M}_X(X)^*/\mathbf{C}^*)^G & \longrightarrow & (\mathrm{Div}X)^G & \longrightarrow & (\mathrm{Pic}X)^G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En appliquant le lemme du serpent, on obtient:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}S \longrightarrow (\mathrm{Pic}X)^G \longrightarrow \frac{(\mathbf{Z}/2)^J}{e\mathbf{Z}/2} \longrightarrow 0$$

et en appliquant, encore une fois, le lemme du serpent à la multiplication par 2 dans cette suite, on obtien le résultat en observant que tout élément d'ordre deux de $\mathrm{Pic}X$ est G-invariant. **Q.E.D.**

Soit G un groupe fini d'homéomorphismes qui agit sur une variété X. Comme dans [2], un élément $g \in G$ est nommé élément elliptique si g a des points fixes sur X. Le sous-groupe elliptique est le sous-groupe distingué engendré par les éléments elliptiques. Par la suite, on utilisera la même notation pour une action et pour l'action induite correspondante.

La proposition suivante est un cas particulier du résultat [1] d'Armstrong:

Proposition 1.1.2 *Soient X et G comme ci-dessus. Si G agit sur X et $\pi_1(X) = 0$, alors $\pi_1(X/G) = G/E$, où E est le sous-groupe elliptique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\pi_1(X/E) = \mathbf{1}$. Par conséquence on suppose que E coincide avec G. Soit x un point sur X et y son image sur X/G. On va noter par p la projection $X \to X/G$. On considère le morphisme de groupes $\varphi : G \to \pi_1(X/G, y)$ défini par $g \in G \mapsto [p \circ \gamma]$, où γ est un chemin de x à $g(x)$.

Le noyau de φ est G tout entier: comme g est elliptique il existe un point x' fixé par g, et on considère $\gamma = g(\overline{xx'})^{-1} \circ \overline{xx'}$.

Le morphisme φ est surjectif: quelque soit un lacet dans Y passant par y, on peut le relever à un chemin dans X avec une extrémité en x et l'autre en un point appartenant à la fibre au dessus de y (cf. [14], page 574). Donc il existe un $g \in G$ correspondant à celui-ci. **Q.E.D.**

Dans la partie 1.3, on utilisera l'invariance suivante qui est bien connue:

Proposition 1.1.3 *Soit P une singularité rationelle sur la surface X_0 et X une résolution minimale. Alors $\pi_1(X_0) = \pi_1(X)$.*

Le théorème d'annulation de Ramanujam sera souvent utilisé (cf. [27]).

Théorème 1.1.4 *Soient S une surface lisse et D un diviseur effectif, 1-connexe et avec $D^2 > 0$, alors $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$.*

1.2 Ensembles de (-2)-courbes sur une surface d'Enriques et une construction de surfaces de type général

Nous voulons décrire les surfaces d'Enriques qui admettent des revêtements doubles ramifiés le long des diviseurs formés par des (-2)-courbes disjointes. En même temps, nous observons l'existence de ces surfaces d'Enriques et en étudiant leurs géométrie nous pouvons faire la construction désirée des surfaces de type général (le théorème 1.2.10).

Soient S une surface minimale d'Enriques et $(E_j)_{j \in J}$ un ensemble non vide de (-2)-courbes disjointes tels que $\sum_{j \in J} E_j \sim 2B$.

Proposition 1.2.1 *Dans les conditions ci-dessus* $\mid J \mid = 4$ *ou* 8.

Démonstration. Soit $\pi : X' \longrightarrow S$ le revêtement double dont le lieu de ramification est $\bigcup_{j\in J} E_j$. Puisque les $\pi^{-1}(E_j)$ sont des (-1)-courbes, on peut considérer le morphisme birationnel $\varepsilon : X' \longrightarrow X$ qui contracte ces courbes. En utilisant les formules (1), on a:

$$K_{X'} = \pi^*(K_S + B) \sim \pi^* K_S + \sum_{j\in J} \pi^{-1}(E_j),$$

donc $\varepsilon^* K_X \sim \pi^* K_S$. Puisque $\varepsilon^* : \mathrm{Pic}X \longrightarrow \mathrm{Pic}X'$ est un morphisme injectif et $\varepsilon^* 2K_X \sim \pi^* 2K_S \sim 0$, on a $2K_X \sim 0$, alors X est une surface minimale avec la dimension de Kodaira égale à zéro. Ensuite

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_X) &= \chi(\mathcal{O}_{X'}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(B \cdot K_S + B^2) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \mid J \mid,\end{aligned}$$

puisque $B^2 = -1/2 \mid J \mid$. On conclut que $\mid J \mid$ est divisible par 4. D'après la classification des invariants numériques des surfaces projectives complexes avec la dimension de Kodaira nulle (cf. [5]), X est soit une surface d'Enriques et alors $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ et $\mid J \mid = 4$, soit une surface bielliptique et alors $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ et $\mid J \mid = 8$. **Q.E.D.**

Nous voulons caractériser plus précisément le cas $\mid J \mid = 8$. Soient donc $\pi : X' \longrightarrow S$ comme ci-dessus, $p : K \longrightarrow S$ le revêtement double canonique, K étant une surface K3 et $A' = K \times_S X'$. On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ K & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

Sur K, il existe seize (-2)-courbes et la construction implique que l'application q est ramifiée exactement le long de ces courbes. Alors (cf. [25]) K est une surface de Kummer et A' est une surface abélienne éclatée dans ses 16 points d'ordre deux. Soit A cette surface. Si on denote par σ l'involution sur X' associée à π et par θ l'involution sur K associée à p, nous avons alors $S = A'/(\sigma, \theta)$ et $X = A/(\theta)$. La classification des surfaces bielliptiques (cf. [5]) implique que soit

$A = C_1 \times C_2$ avec C_k $(k = 1, 2)$ des courbes elliptiques lisses, soit

$A = C_1 \times C_2/(\mathbf{Z}/2)$, $\mathbf{Z}/2$ étant engendré par une translation sur C_2 qui agit aussi par translation sur C_1.

En plus σ est la symétrie $a \mapsto -a$ sur A et θ une symétrie sur C_2 agissant par translation sur C_1.

Par la suite, nous considérons le cas $A = C_1 \times C_2$ (voir la remarque 1.3.5 sur ce point). Nous pouvons supposer $C_k = \mathbf{C}/ < 1, \lambda_k >$ $k = 1, 2$ et choisir les coordonnées z_k sur C_k telles que:

$$\sigma(z_1, z_2) = (-z_1, -z_2) \tag{5}$$
$$\theta(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{\lambda_1}{2}, -z_2 + \frac{\lambda_2}{2}). \tag{6}$$

Le résultat suivant est bien connu, mais sa démonstration va ilustrer comment s'applique la proposition 1.1.2 d'Armstrong. Cette technique sera utilisée dans la partie 1.3.

Lemme 1.2.2 $\pi_1(S) = \mathbf{Z}/2$.

Démonstration. Soient τ_1, τ_2, τ_3 et τ_4 les translations suivantes sur $\mathbf{C}^2$ qui commutent:

$$\begin{array}{lll} \tau_1(z_1, z_2) = (z_1 + 1, z_2) & , & \tau_2(z_1, z_2) = (z_1 + \lambda_1, z_2) \\ \tau_3(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + 1) & , & \tau_4(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + \lambda_2). \end{array} \tag{7}$$

Alors A est la surface abélienne obtenue en considèrant le réseau engendré par les translations $\tau_1, \ldots, \tau_4$. En considérant $(\mathbf{C}^2)'$ le revêtement universel de A' ($\mathbf{C}^2$ éclaté dans une infinité de points), on a

$$(\mathbf{C}^2)' \xrightarrow{r} A' \xrightarrow{q} K \xrightarrow{p} S.$$

L'application r est étale. On se rappelle que l'application q est ramifiée le long de 16 (-2)-courbes sur K et que l'application p est étale. On applique la proposition 1.1.2 pour $q \circ r : (\mathbf{C}^2)' \to K$. Soit H le groupe engendré au niveau de $(\mathbf{C}^2)'$ par $\sigma, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ et τ_4. En utilisant la forme explicite de ces actions, les formules (5), (6) et (7)

$$H = < \sigma, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \mid [\tau_k, \tau_l] = 1, \sigma^2 = 1, [\sigma, \tau_k] = \tau_k^{-2} >,$$

donc $K = A' / < \sigma \mid \sigma^2 = 1 > = (\mathbf{C}^2)'/H$. On observe que $\sigma, \tau_1\sigma, \tau_2\sigma, \tau_3\sigma$ et $\tau_4\sigma$ sont contenues dans le sous-groupe elliptique (par exemple sur $\mathbf{C}^2$, $\tau_1\sigma(z_1, z_2) = (-z_1 + 1, -z_2)$, donc $(1/2, 0)$ est un point fixe pour $\tau_1\sigma$. Au niveau de $(\mathbf{C}^2)'$ la (-1)-courbe correspondante se trouve dans le lieu fixe de $\tau_1\sigma$). Alors $E = H$ et $\pi_1(K) = \mathbf{1}$. Comme K est le revêtement universel de S, $\pi_1(S) = \mathbf{Z}/\mathbf{2}$. **Q.E.D.**

Remarque 1.2.3 La surface $S = (\mathbf{C}^2)'/G$ où G est le groupe engendré par $\sigma, \theta, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ et τ_4.

Les deux projections naturelles au niveau de A' descendent à deux fibrations elliptiques sur $\mathbf{P}^1$, au niveau de K et aussi au niveau de S. Sur S, notons que:

1. Il y a deux pinceaux elliptiques $\mid F_k \mid$ $(k = 1, 2)$, tels que les deux fibres doubles notées par $2D_k, 2D'_k$ $(\sim 2F_k)$ satisfont $D_1 \cdot D_2 = 1$ $(F_1 \cdot F_2 = 4)$. En plus D_k et D'_k sont lisses.

2. Chaque fibration contient deux fibres singulières de type I_0^*:

$$2\Gamma_k + \sum_{j \in J_k} E_j \sim 2\Gamma'_k + \sum_{j \in J'_k} E_j$$

   avec $J_k \bigcup J'_k = J$, une union disjointe. Ces fibres, avec les fibres doubles ci-dessus, sont les seules fibres singulières.

3. $\sum_{j \in J} E_j = 2(F_k - \Gamma_k - \Gamma'_k)$.

4. $K_S \sim D_k - D'_k$.

Pour construire les surfaces de type général avec $p_g = 0$, nous devons trouver une courbe $C' = 2B'$ sur la surface d'Enriques S, telle que $\mid K_S + B' \mid$ soit vide et que $\mid C' \mid$ contienne un élément lisse (cette condition n'est pas absolument nécessaire, mais elle va éclairer la construction).

Soit le système linéaire $| C |=| F_1 + F_2 |$. La courbe C est divisible par deux dans Pic$S$, $C \sim 2(D_1 + D_2)$, mais $K_S + B \sim D_1' + D_2 \geq 0$. D'après la formule du genre (4), nous ne trouvons pas directement la courbe C' dans ce système linéaire, mais des éléments de $| C |$, modifiés par des (-2)-courbes, vont produire des candidats pour la courbe C'.

D'abord, si un élément de $| C |$ rencontre une courbe E_j, il doit la contenir comme une composante, parce que $C \cdot E_j = 0$. Dans ce cas $C \sim Q + \sum_{i \in I} E_i$, avec Q effectif $I \subset J$, et $Q \cdot E_i \neq 0$, $i \in I$.

Théorème 1.2.4 *On peut trouver des sous-ensembles $I \subset J$, tels que $| I |=$ 0, 1, 2 et 3 et dans chaque cas:*

$$Q + \sum_{i \in I} E_i \sim C$$

avec Q lisse. En particulier $Q^2 = 8 - 2 | I |$.

Avant que nous établissions le théorème, nous démontrerons quelques résultats préliminaires. Le théorème de Riemann-Roch et le théorème 1.1.4 impliquent dim$| C |= 4$, puisque $C^2 = 8$. Comme $| F_1 | + F_2 \subset | C |$, le système $| C |$ n'a pas de points fixes et donne une application régulière:

$$\varphi_C : S \to \mathbf{P}^4 .$$

Lemme 1.2.5 $\deg \varphi_C = 2$.

Démonstration. On doit vérifier que $\deg \varphi$ ne peut être ni 1 ni 4. Dans le dernier cas on a

$$2 = \deg \varphi(S) \geq \operatorname{codim} \varphi(S) + 1 = 3 ,$$

d'où une contradiction.

Soit B un élément générique dans $| D_1 + D_2 |$. On a $B^2 = 2$, dim$| B |= 1$ et puisque $D_1 + D_2 \sim D_1' + D_2'$, les points $D_2 \cap D_1'$ et $D_1 \cap D_2'$ sont les seuls points fixes de $| B |$. Alors B est lisse et irréductible de genre géométrique deux. Comme

$$B + K_S \sim (D_1 + D_2) + (D_2' - D_2) \sim D_1 + D_2',$$

en appliquant le théorème 1.1.4, $H^1(S, \mathcal{O}_S(B)) = H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S - B)) = 0$. Alors la restriction de φ à B est donnée par le système linéaire complet

$$\mid C \mid_B \mid = \mid 2(B + K_S) \mid_B \mid = \mid 2K_B \mid .$$

On conclut que $\varphi_C \mid_B = \varphi_{2K_B} : B \to \mathbf{P}^2$ est de degré 2, donc $\deg\varphi \neq 1$. **Q.E.D.**

Lemme 1.2.6 *Soit Γ la composante double d'une fibre singulière, cf. 2. ci-dessus. La restriction de φ_C à Γ est un isomorphisme sur une conique.*

Démonstration. La courbe Γ est rationnelle et $C \cdot \Gamma = 2$. Comme $H^1(S, \mathcal{O}_S(C - \Gamma)) = 0$ et $C \cdot \Gamma = 2$, $\mid C \mid$ découpe sur Γ le système complet associé à $H^0(\mathcal{O}_\Gamma(2))$ et donc l'image de Γ par φ_C est une conique. **Q.E.D.**

Notons que $C \cdot E_j = 0$, donc les E_j sont contractées par φ_C. Soit $P_j = \varphi_C(E_j)$. Sur $\Sigma = \varphi_C(S)$, les quatre coniques qui correspondent aux composantes doubles des fibres singulières, ont, deux par deux, deux points communs parmi les points P_j. De plus, deux coniques qui se coupent, représentent une section hyperplane pour Σ.

Lemme 1.2.7 *Les points P_j sont lisses sur Σ.*

Démonstration. La factorisation de Stein donne

$$\varphi_C : S \longrightarrow S_0 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbf{P}^4$$

où la surface Σ est de degré 4, la première flèche est le morphisme birationnel qui contracte les courbes E_j, la deuxième flèche est un revêtement double ramifié et le diviseur de ramification sur S_0 contient les images des courbes Γ. Les points sur S_0 correspondants aux P_j sont des points doubles rationnels. Comme les P_j, vus dans le lieu de ramification, sont des points doubles, on conclut (cf. [3]), que les P_j sont lisses sur Σ. **Q.E.D.**

Nous allons montrer maintenant qu'il existe des sections hyperplanes de Σ, contenant exactement l points P_j où elles sont lisses ($0 \leq l \leq 3$). Pour $l \leq 2$ l'existence est évidente. Pour $l = 3$, soient Γ_1 et Γ_2 deux composantes doubles telles que les coniques correspondantes sur Σ se coupent.

Lemme 1.2.8 *Il y a une section hyperplane de Σ qui passe par trois points P_j appartenant à $\varphi(\Gamma_1) \cup \varphi(\Gamma_2)$ dont exactement un seul point est commun à ces deux coniques.*

Démonstration. Soient $Q_k = \varphi(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$. Soit L le 2-plan engendré par trois points choisis comme dans l'énoncé de la proposition. Alors, L est contenu dans l'hyperplan de $\mathbf{P}^4$ correspondant à $Q_1 \cup Q_2$ et ne coincide pas avec les deux 2-plans engendrés par les coniques Q_1 et Q_2. Comptant les multiplicités, $\mid \Sigma \cap L \mid = 4$ et le quatrième point doit se trouver sur $Q_1 \cup Q_2$. Il correspond à une direction au point commun aux deux coniques. Evidemment, cette direction est différente des deux tangentes à Q_1 et Q_2. Alors, si on considère les hyperplans qui contiennent L, on a un système linéaire sur Σ de dimension 1, passant par les 'quatre points' de $\Sigma \cap L$. D'après le théorème de Bertini on conclut la proposition. **Q.E.D.**

Remarque 1.2.9 En regardant la démonstration ci-dessus, nous observons que parmi les trois points choisis, il n'y a pas deux situés simultanément à l'intersection de deux coniques $\varphi(\Gamma)$. Nous verrons dans la remarque 1.3.3 que cette condition est nécessaire. Sous ce rapport, dans le cas $\mid I \mid = 2$, les deux points situés sur la section hyperplane cherchée peuvent avoir deux positions différentes:

- ils ne forment pas l'intersection de deux conniques $\varphi(\Gamma)$, ou
- ils se trouvent exactement à l'intersection de deux conniques.

Démonstration du théorème 1.2.4: Soit H une section hyperplane comme dans le lemme 1.2.8. On note par I l'ensemble $\{i \in J \ : \ P_i \in H\}$. Alors,

$$\varphi_C^* H \ = \ Q + \sum_{i \in I} E_i \sim C \ ,$$

où Q est lisse. En particulier $Q \cdot E_i = 2$ et $\mid I \mid = 0, 1, 2$ et 3.

Dans le cas $\mid I \mid = 2$, la remarque ci-dessus implique que les courbes E_i peuvent être: soit des composantes qui ne se trouvent pas simultanément sur deux fibres singulières, soit des composantes communes à deux fibres singulières. **Q.E.D.**

Théorème 1.2.10 *La courbe $C' = Q + \sum_{j\in J-I} E_j$ est divisible par deux. La surface Y, modèle minimal de la surface Y' obtenue comme revêtement double de S ramifié le long de $Q + \sum_{j\in J-I} E_j$, est de type général avec $p_g(Y) = 0$ et $K_Y^2 = 4 - \mid I \mid$.*

Démonstration. Soit $I' = J - I$. On peut écrire

$$\begin{aligned} C' &= Q + \sum_{j\in I'} E_j = C + \sum_{j\in J} E_j - 2\sum_{i\in I} E_i \\ &\sim (F_1 + F_2) + 2(F_1 - \Gamma_1 - \Gamma_1') - 2\sum_{i\in I} E_i \\ &\sim 2(D_1 + D_2 + F_1 - \Gamma_1 - \Gamma_1' - \sum_{i\in I} E_i) \\ &= 2B' \end{aligned}$$

(on a utilisé $\sum_{j\in J} E_j = 2(F_k - \Gamma_k - \Gamma_k')$). Donc C' est divisible par deux. Soit $\pi : Y' \longrightarrow S$ le revêtement double ramifié le long de C' et $\varepsilon : Y' \longrightarrow Y$ le morphisme birationnel qui contracte les (-1)-courbes $\pi^{-1}(E_j)$, $j \in I'$. En utilisant les formules (1), (2) et (3) on obtient

$$\varepsilon^* K_Y \sim \pi^* K_S + \pi^{-1}(Q), \quad K_Y^2 = 4 - \mid I \mid, \quad \chi(\mathcal{O}_Y) = 1\,.$$

Puisque S est une surface minimale, Y est minimale, donc de type général. Pour finir on doit montrer que $p_g(Y) = p_g(Y') = 0$. C'est à dire $\mid K_S + B' \mid = \emptyset$, puisque

$$p_g(Y') = p_g(S) + h^0(K_S + B) = h^0(K_S + B)\ .$$

Supposons que $\mid K_S + B' \mid \neq \emptyset$. Comme $(K_S + B) \cdot E_j = -1$ $(j \in I')$, E_j sont des composantes fixes de $\mid K_S + B' \mid$. La formule explicite de B' donne

$$K_S + B' \sim D_1' + D_2 + F_1 - \Gamma_1 - \Gamma_1' - \sum_{i\in I} E_i.$$

Après la soustraction des E_j , $j \in I'$,

$$D_1' + D_2 + F_1 - \Gamma_1 - \Gamma_1' - \sum_{j\in J} E_j \geq 0.$$

Maintenent, comme

$$(D'_1 + D_2 + F_1 - \Gamma_1 - \Gamma'_1 - \sum_{j\in J} E_j) \cdot \Gamma_1(\text{ou } \Gamma'_1) = -1,$$

Γ_1 et Γ'_1 sont des composantes fixes pour ce diviseur effectif. Donc

$$D'_1 + D_2 + F_1 - 2\Gamma_1 - 2\Gamma'_1 - \sum_{j\in J} E_j \sim D'_1 + D_2 - F_1 \geq 0.$$

On est arrivé à une contradiction puisque $(D'_1 + D_2 - F_1) \cdot F_2 = -2$ et F_2 bouge. **Q.E.D.**

Remarque 1.2.11 Pour les surfaces Y pour lesquelles $K_Y^2 = 2$, 3 ou 4, le système bicanonique est sans points fixes. Puisque $\varepsilon^* 2K_Y \sim \pi^* Q$, il suffit de montrer que le système $\mid Q \mid$ n'a pas de points fixes sur S dans les cas $\mid I \mid = 0, 1$ et 2. Mais ceci est clair si l'on regarde les sections hyperplanes correspondantes sur Σ (on utilise les notations du lemme 1.2.8). Par exemple, dans le cas $\mid I \mid = 2$, les sections hyperplanes de Σ qui passent par les deux points P_i $(i \in I)$, n'ont pas d'autres points fixes puisque la droite déterminée par les P_i $(i \in I)$ ne coupe pas Σ en un autre point.

1.3 Le calcul de $\pi_1(Y)$

Nous voulons déterminer le groupe fondamental des surfaces de type général que nous venons de construire. L'idée du calcul est de relever l'action du groupe G (voir la remarque 1.2.3), qui agisse sur la surface simplement-connexe $\mathbf{C}^2$ en donnant la surface d'Enriques $\mathbf{C}^2/G$, à une surface simplement-connexe U qui s'appplique sur Y. Ensuite, nous utilisons la relation entre les éléments elliptique de cette action et de la première pour que nous puissons appliquer la proposition 1.1.2.

Théorème 1.3.1 *Soit Y une surface construite dans le théorème 1.2.10, alors $\pi_1(Y)$ est égale à*

$$\begin{array}{ccc} G & si & \mid I \mid = 0 \\ (\mathbf{Z}/2)^2 \times \mathbf{Z}/4 & si & \mid I \mid = 1 \\ \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/4 \ \ ou \ \ (\mathbf{Z}/2)^3 & si & \mid I \mid = 2 \\ \mathbf{Z}/4 & si & \mid I \mid = 3, \end{array}$$

où G est un groupe isomorphe à celui donné par la remarque 1.2.3.

Démonstration. Soient $T' = Y' \times_S K$ et $\psi' : Z' \to A'$ le revêtement double ramifié le long de $q^* p^* Q$ (on vérifie aisement que cette courbe est divisible par deux sur A' parce que $q^* p^* E_j$ sont divisible par deux; elles proviennent du lieu de ramification de q sur K). On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & T' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y' \arrow[d, "\pi"] \\ A' \arrow[r, "q"] & K \arrow[r, "p"] & S \end{tikzcd}$$

On conclut que g est ramifié le long de la courbe $f^* \pi^* \sum_{i \in I} E_i$ qui est la somme de $2 \cdot \mid I \mid$ (-4)-courbes sur T', que $\varphi : T' \to K$ est le revêtement double ramifié le long de $p^*(Q + \sum_{j \in J-I} E_j)$ et que $f : T' \to Y'$ est un revêtement double étale. Après la contraction des (-1)-courbes sur T', T est une surface de Todorov (cf. [33]).

On cotracte les courbes rationnelles qui correspondent aux E_j, $j \in J$. D'après le lemme 1.1.3, les groupes fondamentaux sont conservés. On augmente le diagramme en prenant le revêtement universel de A. On a:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & Z_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & T_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y_0 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{C}^2 \arrow[r, "r"] & A \arrow[r, "q"] & K_0 \arrow[r, "p"] & S_0 \end{tikzcd}$$

où $U = \mathbf{C}^2 \times_a Z_0$ et $\gamma : U \to \mathbf{C}^2$ est le revètement double ramifié le long de l'image inverse de Q.

Lemme 1.3.2 *La surface U est simplement-connexe.*

Démonstration. Les lieux de ramification de γ et ψ se correspondent, donc comme r est étale, h est étale. L'application $\psi : Z_0 \to A$ est ramifiée le long de l'image de $q^* p^* Q$ par la contraction $A' \to A$. Cette image est un diviseur ample sur A (c'est pour ça qu'on a contracté les courbes rationelles). Alors le théorème de Cornalba [10], implique:

$$\psi_* : \pi_1(Z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(A) = \mathbf{Z}^4.$$

Au niveau de π_1, ψ_* est un isomorphisme, r_*, h_* sont injectives, γ_* est surjective (γ est ramifiée) et $\pi_1(\mathbf{C}^2) = \mathbf{1}$ donc $\pi_1(U) = \mathbf{1}$. **Q.E.D.**

On se rappele (voir la remarque 1.2.3), que $S_0 = U/G$, où:

$$\begin{aligned} G &= \ < \sigma, \theta, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \mid [\tau_k, \tau_l] = 1, [\sigma, \tau_k] = \tau_k^{-2}, \sigma^2 = 1, \theta^2 = \tau_2, \\ & \quad [\theta, \tau_1] = 1, [\theta, \tau_2] = 1, [\theta, \tau_3] = \tau_3^{-2}, [\theta, \tau_4] = \tau_4^{-2}, [\theta, \sigma] = \tau_2\tau_4 > . \end{aligned}$$

Si on dénote aussi par G le groupe relevé au niveau de U, on a que $Y_0 = U/G$.

• *Le cas* $\mid I \mid = 0$. On a vu que f, g, et h sont étales (f et h par construction et g puisque son lieu de ramification au niveau de T' est $f^*\pi^* \sum_{i \in I} E_i = \emptyset$ si $\mid I \mid = 0$). Alors, comme $\pi_1(U) = \mathbf{1}$, $U \to U/G = Y_0$ représente le revêtement universel de Y_0. Donc $\pi_1(Y_0) = G$.

Pour finir la démonstration on doit estimer le sous-groupe elliptique de G sur U quand $\mid I \mid > 0$. Soit $\omega \in E \subset G$ un élément elliptique sur $\mathbf{C}^2$. Si le lieu fixe de ω rencontre le lieu de ramification de γ, ω est elliptique au niveau de U. Dans une première étape, cette relation entre les éléments elliptiques ne permet que de trouver un sous-groupe de E. En utilisant le lemme 1.1.1 on pourra conclure que ce sous-groupe représent le sous-groupe elliptique tout entier.

• *Le cas* $\mid I \mid = 1$. Soient $[0,0], [\lambda_1/2, \lambda_2/2] \in A$ les deux points d'ordre deux qui se trouvent sur l'image de q^*p^*Q (voir les formules (5) et (6) pour σ et θ). Alors σ et $\tau_2\tau_4\sigma$ sont des éléments elliptique sur $\mathbf{C}^2$ et d'après la remarque ci-dessus, $\sigma, \tau_2\tau_4\sigma \in E$ au niveau de U. En utilisant la proposition 1.1.2, on conclut que $\pi_1(Y_0)$ est un quotien de

$$\begin{aligned} G/(\sigma, \tau_2\tau_4\sigma) &= \ < \ \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta \mid [\tau_k \tau_l] = 1, \\ & \qquad \tau_k = \tau_k^{-1}, \tau_2\tau_4 = 1, \theta^2 = \tau_2, [\theta, \tau_k] = 1 \ > \\ &= \ (\mathbf{Z}/2)^2 \times \mathbf{Z}/4. \end{aligned}$$

On fait les mêmes raisonements pour le groupe H ($K_0 = \mathbf{C}^2/H$ et $T_0 = U/H$). On obtient que $\pi_1(T_0)$ est un quotien du $(\mathbf{Z}/2)^3$. On applique le lemme 1.1.1 au revêtement double $\varphi : T \to K$:

$H^2(K,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{22}$, alors $(\mathrm{Tors}\, K)_2 = 0$,

le lieu de ramification, $p^*Q + \Sigma_{j\in I'} p^*E_j$, contient quinze courbes disjointes: p^*Q et quatorze (-1)-courbes,

$\zeta : (\mathbf{Z/2})^{15} \to \mathrm{Pic}\, K \otimes \mathbf{Z/2}$. Alors $(\mathrm{Tors}\, T)_2 \simeq \ker\zeta/(e\mathbf{Z/2})$ et comme $\pi_1(T_0)$ est un quotien de $(\mathbf{Z/2})^3$, on a que $\dim_{\mathbf{Z/2}}(\ker\zeta) \le 4$.

On fini si on identifie trois éléments dans $\ker\zeta$, tels qu'avec e, ils forment un système linéairement indépendent. Pour ça, on doit regarder plus en detail les pinceaux elliptiques de K. Ils ont chacun quatre fibres singulières de type I_0^*.

Soient $E(\cdot,\cdot)$ les (-2)-courbes qui forment le lieu de ramification de $A' \to K$. Par exemple $q^{-1}E(0,0)$ est la (-1)-courbe qui correspond au point $[0,0]$ sur A. Les éléments

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= E(0,\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{1}{2}) + \\
&\quad E(0,\tfrac{1+\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2}) \\
\Xi_2 &= E(\tfrac{1}{2},0) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2}) + \\
&\quad E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},0) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2}) \\
\Xi_3 &= E(\tfrac{\lambda_1}{2},0) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},0) + E(0,\tfrac{\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{\lambda_2}{2}) + \\
&\quad E(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(\tfrac{1+\lambda_1}{2},\tfrac{1}{2}) + E(0,\tfrac{1+\lambda_2}{2}) + E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+\lambda_2}{2})
\end{aligned}$$

sont divisibles par deux dans Pic$K$ (par example $\Xi_1 \sim p^*(F_1 - 2\Gamma_1)$. Donc ils correspondent dans $\ker\zeta$ aux éléments cherchés.

• *Le cas* $|\ I\ | = 2$. D'après l'observation faite dans la démonstration du théorème 1.2.4, on peut supposer que $[0,0], [\frac{\lambda_1}{2},\frac{\lambda_2}{2}], [\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1+\lambda_1}{2},\frac{1+\lambda_2}{2}]$, ou $[0,0], [\frac{\lambda_1}{2},\frac{\lambda_2}{2}], [\frac{\lambda_1}{2},0]$ et $[0,\frac{\lambda_2}{2}]$ sont les deux points d'ordre deux qui se trouvent sur l'image de q^*p^*Q. Alors $\sigma, \tau_2\tau_4\sigma, \tau_1\tau_3\sigma, \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\sigma$ ou $\sigma, \tau_2\tau_4\sigma, \tau_2\sigma, \tau_4\sigma$ représentent des éléments elliptiques sur $\mathbf{C}^2$ et aussi sur U. On conclut que $\pi_1(Y_0)$ est un qotient de $\mathbf{Z/2}\times\mathbf{Z/4}$ ou de $(\mathbf{Z/2})^3$. Comme pour le cas $|\ I\ | = 1$, on trouve que $\pi_1(T_0) = (\mathbf{Z/2})^2$ et donc le résultat:

$$\pi_1(Y) = \mathbf{Z/2}\times\mathbf{Z/4} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{Z/2})^3.$$

• *Le cas* $| I |= 3$. On peut supposer que $[0,0], [\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}], [\frac{1}{2}, 0], [\frac{1+\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1+\lambda_1}{2}, \frac{1+\lambda_2}{2}]$, sont les points d'ordre deux qui se trouvent sur l'image de q^*p^*Q (voir la remarque 1.2.9). Alors, $\sigma, \tau_2\tau_4\sigma, \tau_1\sigma, \tau_1\tau_2\tau_4\sigma, \tau_1\tau_3\sigma$ et $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\sigma$ sont elliptiques sur $\mathbf{C}^2$ et sur U. Par la même technique on trouve que $\pi_1(Y_0) = < \theta \mid \theta^4 = 1 > = \mathbf{Z}/4$. **Q.E.D.**

Remarque 1.3.3 Nous pouvons préciser le théorème 1.2.4. Dans le cas $| I |= 3$, il n'y a pas deux courbes E_i telles qu'elles soient communes à deux mêmes fibres singulières. Supposons le contraire; alors dans le calcule du groupe fondamental ci-dessus on peut choisir

$$[0,0], [\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}], [\frac{\lambda_1}{2}, 0], [0, \frac{\lambda_2}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [\frac{1+\lambda_1}{2}, \frac{1+\lambda_2}{2}],$$

comme les points d'ordre deux qui se trouvent sur l'image de q^*p^*Q. Les éléments $\sigma, \tau_2\tau_4\sigma, \tau_2\sigma, \tau_4\sigma, \tau_1\tau_3\sigma$ et $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\sigma$ sont elliptiques sur $\mathbf{C}^2$ et U. Donc $\pi_1(Y_0)$ est un qotient de

$$\begin{aligned} & G/(\sigma, \tau_2\tau_4\sigma, \tau_2\sigma, \tau_4\sigma, \tau_1\tau_3\sigma, \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\sigma) \\ & \qquad = < \tau_1, \theta \mid [\tau_1, \theta] = 1, \tau_1^2 = \theta^2 = 1 > \\ & \qquad = \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 \end{aligned}$$

et $\pi_1(T_0)$ est un quotient de $\mathbf{Z}/2$. En faite, $\pi_1(T_0) = \mathbf{Z}/2$ parce que

$$\begin{aligned} \Xi \ = \ & E(\frac{1}{2}, 0) + E(\frac{1+\lambda_1}{2}, 0) + E(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}) + E(\frac{1+\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}) + \\ & E(0, \frac{1}{2}) + E(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{1}{2}) + E(0, \frac{1+\lambda_2}{2}) + E(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{1+\lambda_2}{2}) \end{aligned}$$

est divisible par deux dans Pic$K$ (on applique encore une fois le lemme 1.1.1). Nous sommes arrivé à une contradiction: $\pi_1(Y_0) = \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ (dans [29], M. Reid montre qu'il n'existe pas une surface de type général avec $p_g = 0$, $K^2 = 1$ et le groupe de torsion $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$).

Remarque 1.3.4 Dans [29] Section 2, M.Reid a construit les surfaces de type général avec $p_g = 0$, $K^2 = 1$ et le groupe de torsion $\mathbf{Z}/4$. Il décrit le revêtement étale correspondant à Tors$Y$, plus précisément, son anneau canonique comme le quotient d'un anneau gradué avec des poids et identifie l'anneau canonique de Y avec le sous-anneau invarié par l'action de $\mathbf{Z}/4$ (le théorème 2.2). Il conclut que l'espace des modules est irréductible pour ces surfaces.

Les surfaces que nous avons construites avec $\pi_1(Y) = \mathbf{Z}/\mathbf{4}$ se retrouvent dans la présentation de M. Reid: le produit fibré $T \times_Y T$ représente le revêtement étale correspondant à Tors$Y$.

Remarque 1.3.5 Toutes les constructions et tous les calculs des groupes fondamentaux que nous avons faits dans les sections 1.2 et 1.3, ont eu comme point de départ une surface d'Enriques $S = A'/\,(\sigma, \theta)$. L'application $A' \rightarrow A$ était l'éclatement des points d'ordre deux, avec A une surface abelienne égale à $C_1 \times C_2$. Si nous avions consideéré au début $A = C_1 \times C_2 \ / \ (\mathbf{Z}/\mathbf{2})$, nous aurions obtenu des surfaces de Todorov avec $K^2 = 8 - 2 \mid I \mid$, et π_1 donné par une étude simmilaire avec celui du théorème 1.3.1.

2 Fibrés vectoriels spéciaux de rang deux sur les surfaces d'Enriques

Dans ce chapitre, le but principal est de donner une réponse à la question suivante (voir [12]): Est-ce que tout fibré vectoriel extrémal de rang deux sur une surface d'Enriques est un fibré de *Reye*? Dolgachev et Reider (cf.[12]) ont montré que la restriction du fibré tautologique de la Grassmannienne $G(2,4)$ à une congruence de Reye $S \subset G(2,4)$ est stable. C'est le fibré de Reye de S. Il est extrémal dans le sens qu'il ne varie pas dans son espace des modules. Le carré de la première classe de Chern est 10 et la seconde classe de Chern est 3. Remarquons que la surface S est homologue à $7\sigma' + 3\sigma''$, où σ' et σ'' sont les deux cycles de Schubert de dimension deux dans $G(2,4)$.

Dans [18], Kim a étudié et caractérisé les fibrés extrémaux sur les surfaces d'Enriques. Ils existent sur les surfaces nodales seulement, et ils satisfont $c_1^2 = 4n - 2$ et $c_2 = n$, pour $n \geq 3$.

Dans [9], Conte et Verra ont prouvé qu'une surface d'Enriques générique et nodale, peut être plongée dans une Grassmannienne $G(2, n+1)$, la surface étant homologue à $(3n - 2)\sigma' + n\sigma''$. La restriction du fibré tautologique dualisé à la surface d'Enriques considérée est nommée un fibré de *Reye*.

Nous allons décrire le contenu du chapitre. Dans la partie 2.1, on fait quelques remarques sur les fibré spéciaux sur les surface d'Enriques. On construit aussi des exemples. La caractérisation des fibrés extrémaux, obtenue par Kim dans [18], est redémontrée sous des hypothèses un peu plus fortes (voir la remarque après le théorème 2.1.3). Nous voulons mettre en évidence l'observation clé, présente dans tout le travail: on doit relever les constructions au niveau de la surface K3. Dans la partie suivante, on donne une réponse positive à la question mentionnée ci-dessus et dans la partie 2.3 on montre que les singularités des espaces des modules de fibrés vectoriels stables de rang deux sur une surface d'Enriques sont des points doubles ordinaires. Ces points singuliers sont exactement les classes d'isomorphisme des fibrés spéciaux. Ces espaces des modules ont été etudiés par Kim dans [19]. Dans la dernière partie, on prouve l'assertion suivante: les espaces des modules de dimension un sont birationnellement isomorphes à des courbes de genre arithmétique un.

2.1 Quelques remarques sur les fibrés spéciaux

Soient S une surface d'Enriques sur $\mathbf{C}$ et X le revêtement universel de S, $\pi : X \to S$. On va noter par σ l'involution de X qui induit l'application π.

Tous les fibrés considérés seront holomorphes et sauf mention contraire, ils seront de rang deux. La stabilité sera considérée par rapport à une polarisation fixée, qui ne sera pas toujours spécifiée. Pour un fibré quelconque F, on notera par $\mathcal{F}$ le faisceau des sections holomorphes. Enfin, pour un diviseur quelconque D, on notera par $[D]$ le fibré en droites associé.

Définition 2.1.1 *Un fibré vectoriel simple, E sur S, sera dit spécial si $E \simeq E \otimes [K_S]$, où $[K_S]$ est le fibré en droites canonique de S.*

Proposition 2.1.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i)E est spécial.

ii)Il existe un fibré en droites L sur X qui n'est pas σ-invariant, tel que $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}$.

iii)E est un fibré stable et $H^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \simeq \mathbf{C}$.

Démonstration. C'est un cas particulier d'un résultat obtenu par Takemoto dans [32].

i) $\Rightarrow$ ii) Si E est spécial, le faisceau correspondant $\mathcal{E}$ satisfait $\mathcal{E}(K_S) \simeq \mathcal{E}$. Localement ceci signifie qu'on peut définir une structure de $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(K_S)$-module sur $\mathcal{E}$: en fixant un isomorphisme $u : \mathcal{E}(K_S) \to \mathcal{E}$ la loi de composition est $(a,b)\cdot e = ae + u(b \otimes e)$. Puisque $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(K_S)$, on conclut que $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X. Alors $\pi^*E = L \oplus \sigma^*L$ et un calcul facile donne

$$\mathcal{E}nd\mathcal{E} \simeq \pi_*\mathcal{H}om(\mathcal{L},\mathcal{L}) \oplus \pi_*\mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L},\mathcal{L}). \tag{8}$$

Puisque $H^0(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \simeq \mathbf{C}$ on obtient $H^0(X, \mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L},\mathcal{L})) = 0$, donc L n'est pas σ-invariant.

ii) $\Rightarrow$ iii) On suppose qu'il existe un sous-faisceau inversible $\mathcal{O}_S(D)$ de $\mathcal{E}$ tel que $2D\cdot H \geq c_1(E)\cdot H$, où H représente la polarisation fixée de S. En appliquant π^*, on obtient $\pi^*D\cdot\pi^*H \geq c_1(L)\cdot\pi^*H$. Puisque $\mathcal{O}_X(\pi^*D) \hookrightarrow \mathcal{L}\oplus\sigma^*\mathcal{L}$, on a que $\mathcal{O}_X(\pi^*D)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{L}$ (ou de $\sigma^*\mathcal{L}$), et d'après l'inégalité ci-dessus on obtient un isomorphisme entre $\mathcal{O}_X(\pi^*D)$ et $\mathcal{L}$, ce qui contredit le fait que L n'est pas invariant. Donc E est stable et en utilisant (8) on obtient $H^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \simeq \mathbf{C}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Soit $u : E \to E \otimes [K_S]$ le morphisme qui correspond à 1 dans $H^0(S, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}(K_S))) \simeq H^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \simeq \mathbf{C}$. Il n'est pas trivial et puisque le fibré E est stable, $E\otimes[K_S]$ est aussi stable et on obtient que u est un isomorphisme. **Q.E.D.**

D'après la démonstration, nous voyons que pour E spécial avec $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}$, $\pi^*E = L\oplus\sigma^*L$ et $\pi^*\det E = L\otimes\sigma^*L$. En utilisant les classes de Chern nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \pi^*c_1(E) &= c_1(L) + c_1(\sigma^*L) \\ \pi^*c_2(E) &= c_1(L)\cdot c_1(\sigma^*L). \end{aligned} \tag{9}$$

D'après le théorème de Riemann-Roch pour $\mathcal{E}nd\mathcal{E}$, nous avons

$$h^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = 2k - 2 \tag{10}$$

et

$$c_2(\mathrm{End}E) = 4c_2(E) - c_1^2(E) = 2k, \tag{11}$$

où k est un entier strictement positif.

L'existence d'un fibré vectoriel spécial sur une surface d'Enriques se reflète dans l'existence d'un fibré en droites sur la surface $K3$, fibré qui n'est pas invariant par l'involution. L'étude des fibrés spéciaux est réduite à l'étude des fibrés en droites. Jusqu'à la fin de cette section nous allons essayer d'illustrer cette remarque en construisant des exemples de fibrés vectoriels spéciaux.

Pour commencer, nous considérons le cas des fibrés vectoriels extrémaux. E sera dit extrémal s'il est spécial et si $h^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = 0$. Les fibrés extrémaux sont les fibrés spéciaux pour lesquels $k = 1$ dans la formule (10).

Théorèm 2.1.3 *Si E est un fibré vectoriel extrémal, alors S est nodale et il existe un diviseur D et un cycle nodal R sur S tel que $E \otimes [D]$ soit donné par*

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E}(D) \to \mathcal{O}_S(K_S + R) \to 0\,.$$

Remarque. Dans le travail de Kim [18], E extrémal signifie $h^0(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = h^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = 1$ et $h^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = 0$. Sous ces hypothèses il obtient que E est stable sur une surface d'Enriques.

Démonstration. Soit Λ le réseau $-E_8 \oplus -E_8 \oplus H \oplus H \oplus H$ et ρ l'involution $\rho : \Lambda \to \Lambda$ définie par $\rho(x, y, u, v, w) = (y, x, -u, w, v)$. On va utiliser le résultat suivant (cf. [3], ch.VIII, Lemma 19.1): il existe une isométrie $\phi : H^2(X, \mathbf{Z}) \to \Lambda$ telle que $\phi \circ \sigma^* = \rho \circ \phi$.

Soit $\Lambda^+ = \{\lambda \mid \rho\lambda = \lambda\} \simeq -2E_8 \oplus 2H$. Si $\lambda \in \Lambda^+$, alors $\lambda^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 4)$. Soit $\pi^*E = L \oplus \sigma^*L$ et $\beta = \phi(c_1(L))$. On considère $\alpha = \beta - \rho\beta$. Evidemment $\rho\alpha = -\alpha$ et $\alpha^2 = -4$.

Lemme 2.1.4 *Il existe $\beta_0 \in \phi(\mathrm{Pic}X)$ tel que $\alpha = \beta_0 - \rho\beta_0$ et $\beta_0^2 = -2$.*

Démonstration du lemme. Soit $\alpha = (x, -x, 2z, u, -u)$. On peut supposer que $\beta = (x, 0, z, u, 0)$. On cherche un v tel que $\beta_0 = (x, 0, z, u + v, v)$. Les conditions $\alpha^2 = -4$ et $\beta_0^2 = -2$ donnent $2v^2 + 2uv = z^2$. En utilisant les coordonnées et en considérant $z^2 = 2a, a \in \mathbf{Z}$, on obtient

$$2v_1v_2 + u_1v_2 + u_2v_1 = a.$$

Si u_2 (ou u_1) est impair, on a $v_2 = (-u_2v_1 + a)/(2v_1 + u_1)$ et l'équation peut être résolue. Donc il reste le cas u_1, u_2 pair et a impair. Dans ce cas x doit avoir au moins une coordonnée impaire. Soit x_1 une telle coordonnée. La forme bilinéaire associée à E_8 est représentée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{e_1, \dots, e_8\}$. En cherchant β_0 de la forme $(x + e_4, e_4, z, u + v, v)$, on arrive à la situation a pair. **Q.E.D.**

Fin de la démonstration du théorème. Soit R' un cycle nodal sur X qui correspond à β_0 ou $-\beta_0$. Alors il existe un cycle nodal R sur S tel que $\pi^*(R) = R' + \sigma^* R'$. En utilisant le lemme, on trouve un diviseur D sur S tel que $\pi^*\mathcal{E}(D) = \mathcal{O}_X(R') \oplus \mathcal{O}_X(\sigma^* R')$. L'involution σ agit naturellement sur l'espace des sections globales

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(R') \oplus \mathcal{O}_X(\sigma^* R')) = H^0(X, \mathcal{O}_X(R')) \oplus H^0(X, \mathcal{O}_X(\sigma^* R')) \simeq \mathbf{C}^2 .$$

Cette espace se décompose en somme directe de sous-espaces propres correspondents aux valeures propres 1 et -1. Le sous-espace σ-invariant s'identifie à l'espaces des sections globales de $\mathcal{E}(D)$ et est engendré par la section

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{(s', \sigma^* s')} \mathcal{O}_X(R') \oplus \mathcal{O}_X(\sigma^* R') ,$$

où s' est la section de R'.

Ce générateur est l'image inverse d'une section globale de $\mathcal{E}(D)$, s, et on affirme qu'elle n'a pas de zéros. D'abord le lieu des zéros est de codimension 2. Ci ce n'est pas le cas, soit Z le lieu des zéros de codimension 1. Alors $Z \subset R$ et $Z \cdot (R - Z) \geq 0$ (on raisonne sur s' et $\sigma^* s'$). Comme $\mathcal{E}(D - Z)$ a une section avec le lieu des zéros de codimension deux, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E}(D - Z) \to \mathcal{J}_\xi \otimes \det \mathcal{E}(D - Z) \to 0 .$$

Mais

$$\begin{aligned}
c_1^2(\mathcal{E}(D-Z)) &= (R-2Z)^2 \\
&= (R-Z)^2 - 2(R-Z)\cdot Z + Z^2 \\
&\leq -4
\end{aligned}$$

et $c_2(\mathcal{E}(D-Z)) = \deg \xi \geq 0$, d'où une contradiction puisque

$$c_1^2(\mathcal{E}(D-Z)) - 4c_2(\mathcal{E}(D-Z)) = -2 .$$

Les seuls zéros de s peuvent être isolés et les invariants numériques de $\mathcal{E}(D)$ impliquent que ces zéros n'existent pas. Par conséquence, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E}(D) \to \mathcal{O}_S(M) \to 0 ,$$

avec $c_1(M) = c_1(E \otimes [D])$. Il y a deux possibilités pour M: ou bien $M \sim R$, ou bien $M \sim R + K_S$. En considérant la suite longue de cohomologie, comme $H^0(S, \mathcal{E}(D)) \simeq \mathbf{C}$, on obtient le théorème. **Q.E.D.**

L'exemple suivant est le point de départ de l'étude développée dans [12]. Nous allons donner un autre argument qui sera une illustration de la technique utilisée pour établir le théorème principal dans la partie 2.2.

Exemple 2.1.5 Soient S une congruence de Reye, $S \subset G(2,4) = G(1,\mathbf{P}^3)$, et T le fibré tautologique de $G(2,4)$. Alors $T\mid_S$ est un fibré vectoriel extrémal sur S.

Soit S définie par un espace de quadriques W, de dimension projective trois, et soit $\{Q_1,\ldots,Q_4\}$ une base de W. Pour prouver que S est une surface d'Enriques, nous rappelons l'argument dans [5] page 136. Soit φ_i la forme bilinéaire symétrique associée à la quadrique $Q_i \subset \mathbf{P}^3$. On considère la surface $Y \subset \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 - \Delta$ donnée comme l'intersection complète des quatre $(1,1)$-hypersurfaces $H_1,\ldots,H_4$, où $H_i : \varphi_i(p,q) = 0,\ \ i = 1,\ldots,4$. Y est une surface $K3$ et l'application $\tau : (p,q) \mapsto (q,p)$ représente une involution sans points fixes avec $S = Y/\tau$. Un point de S est une droite $\overline{pq}$ dans $\mathbf{P}^3$ telle que $(p,q) \in Y$.

Soit $X = pr_1 Y \subset \mathbf{P}^3$. L'application $pr_1\mid_Y$ est $1:1$. Si on suppose que $(p,q'), (p,q'') \in Y$, alors quel que soit $q \in \overline{q'q''}$, le point (p,q) est contenu dans Y. Sur S, ceci implique que toutes les droites $\overline{pq}$ se trouvent sur des pinceaux de W. On arrive à une contradiction puisque $\cap_{Q \in W} Q = \emptyset$ et une quadrique lisse qui contient le point p contient exactement deux droites passant par p.

L'involution τ induit une involution σ sur X. Si on dénote par i l'inclusion $X \to \mathbf{P}^3$, alors l'application $(i, i \circ \sigma) : X \to \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ restreinte à son image est l'inverse de $pr_1 \mid_Y$. Donc X est isomorphe à Y et on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{(i, i \circ \sigma)}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 - \Delta \arrow[d, "\psi"] \\
S \arrow[r, "j"] & G(1, \mathbf{P}^3)
\end{tikzcd}$$

Soit T' le fibré tautologique de $\mathbf{P}^3$ et T le fibré tautologique de $G(1, \mathbf{P}^3)$. On dénote par L la restriction de T' à X et par E la restriction de T à S. Alors

$$\begin{aligned}
\pi^* E &= \pi^* \circ j^* T \\
&= (i, i \circ \sigma)^* \circ \psi^* T \\
&= (i, i \circ \sigma)^* T' \oplus T' \\
&= L \oplus \sigma^* L\,.
\end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{E}^{\oplus 2} = \pi_* \pi^* \mathcal{E} = \pi_* \mathcal{L} \oplus \pi_* \sigma^* \mathcal{L}$$

on obtient que $\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{L} = \pi_* \sigma^* \mathcal{L}$ ($\pi_* \mathcal{L}$ est irréductible d'après ce qui suit). On doit montrer que $L \neq \sigma^* L$ et que $c_2(E) = 3$. Pour ceci on rappelle que $S \sim 3\sigma_{1,1} + 7\sigma_{2,0}$ (voir [15] page 748). Puisque $c_1(T)$ est représentée comme classe d'homologie de dimension trois par $\sigma_{1,0}$, on a que $c_1^2(T)$ est représenté par $\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{1,1} + \sigma_{2,0}$ (l'intersection des cycles correspond par la dualité de Poincaré au cup-produit en cohomologie). En prenant l'image inverse par j on obtient

$$c_1^2(E) = c_1^2(T) \mid_S = 10.$$

Ensuite, en utilisant que $c_1^2(L) = 4$, on a que $c_1(L) \cdot c_1(\sigma^* L) = 6$ et donc $c_2(E) = 3$ d'après (9). On conclut que L n'est pas σ-invariant.

Nous revenons au cas général. Soit E un fibré spécial. D'après la formule (11), $c_2(\mathrm{End}E) = 2k$, où k est un entier strictement positif. Quelles sont les valeurs possibles de k? Pour $k = 1$ on a les fibrés extrémaux qui existent sur toutes les surfaces d'Enriques nodales. Le théorème 2.1.3 montre que la réciproque est aussi vraie. Pour les valeurs de k plus grandes que 2, nous allons présenter deux constructions.

•*Première construction.* Si S est une surface d'Enriques avec comme revêtement universel une surface de Kummer, alors quel que soit l'entier $k \geq 2$, il existe un fibré vectoriel spécial E_k sur S avec $c_2(\mathrm{End}E_k) = 2k$.

Pour montrer ceci, soient $E_1', \ldots, E_4', E_1'', \ldots, E_4''$ huit (-2)-courbes sur X, telles que $\sigma^* E_i' = E_i''$ et k un entier plus grand que 2. L'entier k peut être vu comme la somme de quatre carrés $k = \sum_{i=1}^4 a_i^2$. On prend $\mathcal{E}_k = \pi_* \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^4 a_i E_i')$.

•*Seconde construction.* Quel que soit l'entier $k \geq 2$, il existe une surface d'Enriques qui n'est pas nodale et un fibré vectoriel spécial E sur S, tels que $c_2(\mathrm{End}E) = 2k$.

Nous allons utiliser une surface d'Enriques pour laquelle le rang du groupe de Picard de la surface $K3$ correspondante est égale à 11.

Supposons $\mathrm{Pic}X = \pi^* \mathrm{Pic}S \oplus b\mathbf{Z}$ et considérons la suite exacte

$$0 \to \ker(1 - \sigma^*) \to \mathrm{Pic}X \to \mathbf{Z} \simeq \mathrm{Im}(1 - \sigma^*) \to 0.$$

Nous avons $\mathrm{Im}(1 - \sigma^*) = (b - \sigma^* b)\mathbf{Z} = a\mathbf{Z}$ et puisque $b \neq \sigma^* b$, en utilisant le théorème de Hodge d'index, nous obtenons $a^2 = (b - \sigma^* b)^2 < 0$. Comme $b + \sigma^* b \in \pi^* \mathrm{Pic}S$ nous avons $a^2 \equiv 0 \pmod 4$.

Lemme 2.1.6 *Pour chaque entier positif $k \geq 2$ il existe une famille, $\{X_t\}$, de dimension neuf de surfaces $K3$, telle que*

i)$(-2E_8 \oplus 2H \oplus \alpha\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \subset \phi_{t,\mathbf{Q}}(\mathrm{Pic}X_t)$, où α est ρ-anti-invariant, $\alpha^2 = -4k$ et $\alpha = \beta - \rho\beta$.

ii) Chaque élément de la famille $\{X_t\}$ est le revêtement universel d'une surface d'Enriques.

Démonstration. Soit $\alpha \in \Lambda$ donné par

$$\alpha = \Big(\sum_{i \text{ impair}} a_i e_i, - \sum_{i \text{ impair}} a_i e_i,\ 0, f_1 - f_2, -f_1 + f_2 \Big).$$

α est primitif, $\alpha = \beta - \rho\beta$ et

$$\alpha^2 \;=\; -4 \sum_{i \text{ impair}} a_i^2 - 4 = -4k\,. \tag{12}$$

On remarque que l'entier k peut prendre toutes les valeurs positives.

Soit $v_1 = (0,0,f_1+2f_2,0,0)$, $v_2 = (0,0,0,f_1+f_2,-(f_1+f_2))$ et $P_0 = Sp(v_1,v_2)$. P_0 se trouve dans Ω, où Ω est le domaine des périodes. En appliquant la surjectivité de l'application des périodes pour les surfaces $K3$, on obtient une surface de Kummer exeptionelle X_0 et une isométrie ϕ_0 : $H^2(X_0,\mathbf{Z}) \to \Lambda$ telles que $\phi_0((H^{2,0}(X_0)\oplus H^{0,2}(X_0))\cap H^2(X_0,\mathbf{Z})) = P_0$ et $\phi_0 \circ \sigma_0^* = \rho \circ \phi_0$.

Soit $f : X \to B$ la déformation locale universelle de X_0. En réduisant B si nécessaire, on peut choisir un marquage ϕ : $R^2f_*(\mathbf{Z}) \to \Lambda_B$ et donc une application des périodes $p : B \to \Omega$ qui est un isomorphisme local d'après le théorème local de Torelli.

Soit φ le morphisme qui rend commmutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} R^2f_*(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\phi} & \Lambda_B \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\rho_B} \\ R^2f_*(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\phi} & \Lambda_B \end{array}$$

Pour chaque point de B, φ induit une isométrie de Hodge. Puisque $\varphi_0 = \sigma_0^*$ est une isométrie de Hodge effective, il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de 0 tel que φ_t soit une isométrie de Hodge effective pour tout $t \in U$. En utilisant le théorème fort de Torelli, on conclut que quel que soit $t \in U$, il existe un unique automorphisme $\sigma_t : X_t \to X_t$ tel que $\sigma_t^* = \varphi_t$. Puisque φ_t^2 est l'identité en cohomologie, σ_t est une involution.

Pour finir la démonstration, on considère $\Omega' = \{P \mid P \in \Omega, P \subset (\Lambda^+ \oplus \alpha\mathbf{Z})^\perp\}$. Alors $p^{-1}(\Omega') = B'$ correspond à une famille de dimension neuf de surfaces $K3$, $f^{-1}(B') \to B'$ avec $(-2E_8 \oplus 2H \oplus \alpha\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \subset \phi_{t,\mathbf{Q}}(\mathrm{Pic} X_t)$. Ceci implique i).

Pour ii), on doit montrer que pour tout $t \in U \cap B'$ la surface X_t/σ_t est une surface d'Enriques. Il suffit de montrer que σ n'a pas de points fixes isolés. On va obtenir que le lieu fixe de σ est l'ensemble vide. Autrement $S = X/\sigma$ serait une surface rationnelle, minimale donc, puisque le produit d'intersection sur S est pair. Comme $\mathrm{rk}\, H^2(S, \mathbf{Z}) = 10$, on arriverait à une contradiction.

Soit A un point fixe isolé de σ. On peut choisir les coordonnées locales telles que $A = (0,0)$ et $\sigma : (x,y) \mapsto (-x,-y)$. Soit ω une 2-forme holomorphe représentant un générateur pour $H^0(X, \Omega_X^2)$. Localement $\omega = (1+\cdots)dx \wedge dy$, donc $\sigma^*\omega = (1+\cdots)dx \wedge dy$. Mais $\rho \mid P = -id_P$ implique $\sigma^*\omega = -\omega$. D'où une contradiction. **Q.E.D.**

Pour finir la construction on utilise l'assertion suivante: l'élément générique d'une famille de dimension j de surfaces $K3$, a le nombre de Picard égal à $20 - j$. Dans le cas considéré, $j = 9$. En utilisant la formule (12) pour $k \geq 2$, on obtient $\alpha^2 \leq -8$ et on conclut que la surface d'Enriques qui correspond à un élément générique n'est pas nodale.

Pour les résultats généraux concernant les surfaces $K3$, qui ont été utilisés dans ce paragraphe, on renvoie à [35].

Nous allons présenter une version plus classique de la construction ci-dessus pour le cas $k = 2$. L'exemple sera utilisé dans la partie 2.4.

Exemple 2.1.7 Soit $X \subset \mathbf{P}^5$ une surface $K3$ donnée comme l'intersection complète de trois quadriques définies par des équations de la forme

$$\sum_{0 \leq i,j \leq 2} a_{ij} x_i x_j + \sum_{3 \leq i,j \leq 5} b_{ij} x_i x_j = 0.$$

L'application $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_0, x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$ représente une involution sans points fixes sur X. On peut choisir les quadriques telles qu'il existe un fibré vectoriel spécial sur la surface d'Enriques $S = X/\sigma$, avec $c_1^2(E) = 4$ et $c_2(E) = 2$.

Pour voir ceci, soit Π le réseau engendré par les quadriques considérées et Δ la courbe discriminante représentant les quadriques singulières du réseau. Δ est de degré six, étant l'union de deux courbes de degré trois $\Delta = A \cup B$. Elle a, au plus, des points singuliers rationnels doubles: un point lisse correspond à une quadrique de rang cinq et un point singulier à une quadrique de rang quatre. On remarque que X appartient à une famille dépendant de dix paramètres modulo les projectivités de $\mathbf{P}^5$. Génériquement, on peut supposer que A et B sont irréducibles. On interprète un résultat qui se trouve dans [4] Ch.VI, dans le cas particulier considéré. Il existe une correspondance fini à un (modulo les projectivitiés), $X \to \{A \cup B; \varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ où ε_A est un point d'ordre deux dans la variété de Picard de la normalisée de A et de même pour ε_B. En fixant la courbe A avec comme seule singularité un noeud, $a \in A$, et en variant B, on obtient une famille de dimension neuf de surfaces $K3$. L'élément générique a donc le nombre de Picard égal à onze. On a fini, puisque la quadrique Q_a qui correspond à a, est de rang égal à quatre. C'est un cône sur une quadrique non-singulière de dimension deux, avec comme sommet une droite. Les deux familles de 3-plans engendrés par le sommet et les droites qui se trouvent sur la quarique de dimension deux, découpent sur X deux pinceaux elliptiques qui sont échangés par σ. L'intersection de ces deux pinceaux est égale à 4 (deux 3-plans qui se trouvent dans des familles differéntes engendrent un hyperplan dans $\mathbf{P}^5$). Si $\mid F \mid$ est un de ces deux pinceaux, alors on prend E associé à $\pi_*\mathcal{O}_X(F)$.

2.2 Surfaces d'Enriques plongées dans les Grassmanniennes

Nous allons établir le théorème suivant:

Théorème 2.2.1 *Soit S une surface d'Enriques et E un fibré vectoriel spécial sur S. On peut trouver un nombre entier positif n et un plongement de S dans la Grassmannienne $G(2, n+1)$ tels que*

i) Le fibré $E^\vee$, après la tensorisation éventuelle par un fibré en droites, est l'image inverse du fibré tautologique de $G(2, n+1)$.

ii) Si $c_2(\mathrm{End}E) = 2k$, alors

$$S \sim (n-1+k)\sigma_{n-2,n-2} + (3n-3+k)\sigma_{n-1,n-3} ,$$

où σ_{i_1,i_2} sont les cycles de Schubert définis comme ci-dessous. On fixe une filtration $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset \mathbf{C}^{n+1}$ avec $\dim V_\alpha = \alpha$, alors $i_1 \geq i_2$ et

$$\sigma_{i_1,i_2} = \{\Lambda \mid \dim(\Lambda \cap V_{(n+1)-2+j-i_j}) \geq j, j = 1, 2\}$$

Démonstration. On sait que $\pi^*E = L \oplus \sigma^*L$. En considérant H un diviseur très ample sur S, on regarde le fibré $L \otimes [\pi^*H]^{\otimes m}$, où m est un entier positif. Soit Γ une courbe qui correspond à ce fibré en droites. L'entier m sera spécifiée dans un instant tel que $[\Gamma]$ soit très ample. On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(id,\sigma)}"] \arrow[d, "\pi"'] & X \times X \arrow[r, "{(\varphi_\Gamma,\varphi_\Gamma)}"] & \mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V)-\Delta \arrow[d, "\psi"] \\ S \arrow[rr, "j"] & & G(2,V) \end{tikzcd}$$

où $\Gamma^2 = 2n-2$, $V = H^0(X, \mathcal{O}_X(\Gamma))^\vee \simeq \mathbf{C}^{n+1}$ et ψ est donné par

$$(p_1,p_2) \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{le plan engendré par les droites} \\ \text{qui correspondent à } p_1 \text{ et } p_2 \text{ dans } V \end{array} \right\}.$$

Si $(\varphi_\Gamma,\varphi_\Gamma)\circ(id,\sigma) = \varphi$, alors $\psi\circ\varphi$ peut être factorisé par π On dénote par $j : S \to G(2,V)$ l'application induite de S dans la grassmannienne. On va finir la démonstration de i) en deux étapes:
Etape 1. Si T est le fibré tautologique sur $G(2,V)$, alors $j^*T^\vee \simeq E\otimes[H]^{\otimes 2m}$.
Etape 2. Pour $m\geq 2$, en commençant avec L ample, j est un plongement.

Démonstration de l'étape 1. Premièrement on considère le plongement $\varphi_\Gamma : X \to \mathbf{P}(V)$. Si $\{s_0,\ldots,s_n\}$ est une base fixée de V, alors $\varphi_\Gamma : x \mapsto [s_0(x),\ldots,s_n(x)]$. Evidemment $\varphi_\Gamma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-1) = \mathcal{O}_X(-\Gamma)$. Soit T' le fibré en droites qui correspond à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(-1)$. En utilisant la définition de ψ, $\psi^*T = T'\times T'$, donc

$$\begin{aligned} (\psi\circ\varphi)^*T &= \varphi^*(T'\times T') = (id,\sigma)^*([\Gamma]^\vee\times[\Gamma]^\vee) \\ &= [\Gamma]^\vee\oplus\sigma^*[\Gamma]^\vee \simeq (L\oplus\sigma^*L)^\vee\otimes[\pi^*[H]^{\otimes -2m}. \end{aligned}$$

Puisque $(\psi\circ\varphi)^*T$ est σ-invariant et $(L\oplus\sigma^*L)^\vee = \pi^*E^\vee$ on conclut que $E\otimes[H]^{\otimes 2m} = j^*T^\vee$ (E est spécial).

Démonstration de l'étape 2. On veut démontrer que j est un plongement pour $m\geq 2$. Si j n'est pas injective, alors il existe deux point $x,y\in X$, appartenant à des orbites différentes de σ, tels que $\varphi_\Gamma(x)$, $\varphi_\Gamma(\sigma x)$, $\varphi_\Gamma(y)$ et $\varphi_\Gamma(\sigma y)$ soient colinéaires.

Si la différentielle de j n'est pas injective en un point s de S, alors la droite engendrée par $\varphi_\Gamma(x)$ et $\varphi_\Gamma(\sigma x)$ dans $\mathbf{P}(V)$, où $\pi(x) = s$, est une droite tangente à $\varphi_\Gamma(X)$ en $\varphi_\Gamma(x)$. La justification de cette assertion est élémentaire. On doit expliciter quand un vecteur tangent à $\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V)-\Delta$, provenant de X, se trouve dans le noyau de la différentielle de ψ.

Soient $p' = \varphi(x)$, $p'' = \varphi(\sigma x)$ et $\Lambda_0 = \psi(p', p'')$. Alors

$$T_{(p',p'')}(\mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V)) = \mathrm{Hom}(p', V/p') \times \mathrm{Hom}(p'', V/p'')$$
$$T_{\Lambda_0}G(2, V) = \mathrm{Hom}(\Lambda_0, V/\Lambda_0)$$

et $d\psi_{(p',p'')}(\alpha', \alpha'') = \widehat{\alpha'} + \widehat{\alpha''}$, où $\widehat{\alpha'}$ est l'application induite par $V/p' \to V/\Lambda_0$. Par conséquence

$$(\alpha', \alpha'') \mapsto 0 \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}\alpha' \subset \Lambda_0/p' \\ \mathrm{Im}\alpha'' \subset \Lambda_0/p'' \end{array} \right. \tag{13}$$

Soient $v \in T_xX$ et $d\varphi_x(v) = (\alpha', \alpha'')$. On considère le chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $d\gamma/dt\,(0) = v$. On choisit la base de V telle qu'on ait

$$\begin{array}{rcl} (s_0(x), \ldots, s_n(x)) & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ (s_0(\sigma x), \ldots, s_n(\sigma x)) & = & (s_0(\sigma x), 1, \ldots, 0) \end{array}$$

et de plus, dans un voisinage de 0, que

$$(\varphi_\Gamma \circ \gamma)(t) = (1, s_1(\gamma(t)), \ldots, s_n(\gamma(t))) \,.$$

Alors le vecteur tangent α' est donné par

$$\alpha'(1, 0, \ldots, 0) = (ds_{1,x}(v), \ldots, ds_{n,x}(v)) \,,$$

le membre de droite étant interprété comme un élément dans V/p'. Pour que $d\psi_{(p',p'')}$ évaluée en (α', α'') soit nulle, il faut et il suffit, d'après la formule (13), qu'on ait

$$\alpha'(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois}}) = (ds_{1,x}(v), \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1) \text{ fois}}) \,.$$

En somme j n'est pas un plongement en $s \in S$, si et seulement si la droite engendrée par p' et p'' dans $\mathbf{P}(V)$ est une droite tangente à $\varphi_\Gamma(X)$ en $\varphi_\Gamma(x)$.

La démonstration maintenant, est une application d'un résultat de Beltrametti et Sommese (cf. [7]), et du suivant.

Lemme 2.2.2 *Soit x, y, z trois points sur X, le cas y infiniment voisin de x étant possible, et soit ξ un sous-schéma de dimension 0 et de degré 3 tel que le 0-cycle associé soit détérminé par x, y et z. Soit Γ une courbe très ample sur X. Si $h^1(X, \mathcal{J}_\xi(\Gamma)) = 0$, dans le cas x, y, z distincts, les points $\varphi_\Gamma(x), \varphi_\Gamma(y)$ et $\varphi_\Gamma(z)$ ne sont pas colinéaires. Dans le cas y infiniment voisin de x, la droite qui passe par $\varphi_\Gamma(x)$ et $\varphi_\Gamma(z)$ ne contient pas le vecteur tangent en $\varphi_\Gamma(x)$ correspondant à y.*

Démonstration du Lemme. Premièrement on suppose que les points x, y et z sont distincts. La suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_\xi(\Gamma) \to \mathcal{O}_X(\Gamma) \to \mathcal{O}_\xi(\Gamma) \to 0$$

donne en cohomologie

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_\xi(\Gamma)) \to H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma)) \to \mathbf{C}^3 \to 0. \tag{14}$$

Soit l la droite engendrée par $\varphi_\Gamma(x)$ et $\varphi_\Gamma(y)$ dans $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma))^\vee)$. Cette droite correspond au pinceau engendré par les hyperplans $H_x = \{s \mid s(x) = 0\}$ et $H_y = \{s \mid s(y) = 0\}$ dans $H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma))$. Si $\varphi_\Gamma(z) \in l$, alors $H_z = \lambda H_x + \mu H_y$. La codimension de $H^0(\mathcal{J}_\xi(\Gamma))$ dans $H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma))$ est deux, ce qui contredit (14).

Maintenant, on suppose que y est infiniment voisin de x. On doit montrer que la droite qui contient le point $\varphi_\Gamma(x)$ et le vecteur correspondant à y ne contient pas le point $\varphi_\Gamma(z)$. Puisque l'application tangente $d\varphi_{\Gamma,x}$ sépare les vecteurs tangents en x, $H^0(\mathcal{J}_{x,y}(\Gamma))$ représente un sous-espace de codimension deux $W \subset H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma))$. Si $\varphi_\Gamma(z) \in T_{\varphi_\Gamma(x)}\varphi_\Gamma(X)$ représente un vecteur colinéaire au vecteur correspondant à y, alors $W \subset H_z$, donc $H^0(\mathcal{J}_\xi(\Gamma))$ représente l'espace de codimension deux W. Cette conclusion est la suite exacte

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_\xi(\Gamma)) \to H^0(\mathcal{O}_X(\Gamma)) \to \mathbf{C}_x[\varepsilon] \oplus \mathbf{C}_z \to 0$$

donnnent une contradiction. **Q.E.D.**

Fin de la démonstration de l'étape 2. On considère un sous-schéma de dimension zéro $(\xi, \mathcal{O}_\xi)$, comme dans le lemme ci-dessus, tel que $H^1(\mathcal{J}_\xi(\Gamma)) \neq 0$. Pour $m \geq 2$, $\Gamma^2 \geq 13$, donc on peut appliquer le théorème 3.2.1 dans [7]: il existe un diviseur effectif D sur X tel que $\Gamma - 2D$ soit $\mathbf{Q}$-effectif et l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\Gamma \cdot D - 3 \leq D^2 < \frac{\Gamma \cdot D}{2} \leq 3 .$$

En utilisant la parité de la forme d'intersection sur X, on remarque que D^2 peut prendre les valeurs -2, 0 et 2. De plus, dans chacun de ces cas, on arrive à une contradiction.

Si $D^2 = -2$, alors $\Gamma \cdot D$ doit être égal à 1, mais cela est impossible puisque $m \geq 2$.

Si $D^2 = 0$, alors $\Gamma \cdot D$ doit être égal à 3. Puisque X est une surface $K3$, $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq 2$ et $\mid D \mid$ est composeé avec un pinceau n'ayant pas de composantes fixes ni de points base. D'après le théorème de Bertini, un élément générique de ce système linéaire est lisse et donc connexe (la surface n'est pas rationnelle). On obtient que $\mid D \mid$ est un pinceau. Maintenant, comme $\Gamma \cdot D = 3$, on a que $\pi^* H \cdot D = 1$. $\pi^* H$ est une section pour le pinceau $\mid D \mid$, donc l'élément générique de $\mid \pi^* H \mid$ est une courbe rationnelle. Alors l'élément générique de $\mid H \mid$ est une courbe rationnelle. On est arrivé à une contradiction puisqu'on avait supposé que H était très ample sur la surface d'Enriques S.

Si $D^2 = 2$, alors $\Gamma \cdot D$ doit être égal à 5. Si on considère $\Gamma^2 = r$, on arrive à une contradiction en appliquant le théorème de Hodge d'index pour le diviseur $5\Gamma - rD$.

ii) Soit $c_2(\mathrm{End} E) = 2k$. D'après les considérations ci-dessus $\pi^* c_1(E \otimes [H]^{\otimes m}) = c_1(\Gamma) + c_1(\sigma^* \Gamma)$ avec $\Gamma^2 = 2n - 2$. Un calcul facile pour $E \otimes [H]^{\otimes m}$ donne

$$\begin{aligned} c_1^2 &= 4n - 4 + 2k \\ c_2 &= n - 1 + k \end{aligned} \tag{15}$$

(la seconde classe de Chern du fibré End ne change pas quand on tensorise par des fibrés en droites).

Soit $S \sim a\sigma_{n-2,n-2} + b\sigma_{n-1,n-3}$. Puisque le dual de Poincaré de $c_1(T)$ est $\sigma_{1,0}$, la classe de cohomologie de dimension $2n-3$, on obtient que $c_1^2(T)$ est représenté par $\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{1,1} + \sigma_{2,0}$. En prenant l'image inverse par j, on a

$$c_1^2(E \otimes [H]^{\otimes m}) = c_1^2(T) \mid_S = a + b\,. \tag{16}$$

Maintenant

$$\sigma_{1,1} = \{\Lambda \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-1}) \geq 1, \dim(\Lambda \cap V_n) \geq 2\} = \{\Lambda \mid \Lambda \subset V_n\}\,,$$

où $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset V$ est une filtration de $V = \mathbf{C}^{n+1}$. Soit P^n un plan fixé de dimension n dans V. On peut lui associer une section s de $T^\vee$

telle que $ker\, s_\Lambda = \Lambda \cap P^n$. Evidemment $\{s = 0\} = \sigma_{1,1}(P^n)$ et en prenant j^*s on obtient une section de $E \otimes [H]^{\otimes m}$ avec $\deg\{j^*s = 0\} = c_2(E \otimes [H]^{\otimes m})$. Donc

$$c_2(E \otimes [H]^{\otimes m}) = \sigma_{1,1}(P^n) \mid_S = a. \tag{17}$$

En utilisant (15), (16) et (17) on a

$$\begin{cases} a + b & = \quad 4n - 4 + 2k \\ a & = \quad n - 1 + k \end{cases}$$

et donc le résultat. **Q.E.D.**

Le théorème ci-dessus donne une représentation d'une surface d'Enriques S, dotée d'un fibré vectoriel spécial, comme un complexe de droites dans $\mathbf{P}^n$ pour n suffisemment grand. Si nous regardons la relation $[\Gamma] \simeq L \otimes [\pi^* H]^{\otimes m}$ avec $m \geq 2$, nous remarquons que $2n - 2 = \Gamma^2 \geq 38$, donc $n \geq 20$.

Remarque 2.2.3 La surface obtenue en éclatant $n - 1 + k$ points sur S, admet un plongement dans $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{n+1})$.

Soit $S \subset G(2, V)$ et $E^\vee = T \mid_S$ (nous utilisons les notations du théorème 2.2.1). Soit P^n un plan générique de dimension n dans V, tel que l'intersection $\sigma_{1,1}(P^n) \cap S$ soit de dimension zéro. Nous pouvons lui associer une pseudo-section de $\mathbf{P}(E)$ comme suit: $x \mapsto (x, \mathbf{P}(\Lambda_x) \cap \mathbf{P}(P^n)) \in \mathbf{P}(E)$. L'espace $\mathbf{P}(E)$ est vu comme la variété d'incidence

$$\mathbf{P}(E) = \{(x, y) \mid y \in \mathbf{P}(\Lambda_x)\} \subset S \times \mathbf{P}(V).$$

En prenant l'image de la pseudo-section par la projection sur $\mathbf{P}(V)$, nous obtenons une application rationnelle définie sur S et à valeurs dans $\mathbf{P}(V)$. Il suffit de prouver que cette application est birationnelle. Supposons qu'il existe un point tel que sa préimage contienne au moins deux points. Un tel point correspondrait au point d'intersection de deux droites projectives $\mathbf{P}(\Lambda_{x'})$ et $\mathbf{P}(\Lambda_{x''})$. Les quatre points sur la surface X donnés par une telle configuration représentraient un sous-schéma de dimension zéro avec $H^1(\mathcal{J}(\Gamma)) \neq 0$. En appliquant le résultat de Beltrametti et Sommese, nous arrivons à une contradiction pour $n \geq 20$, comme dans la démonstration de l'étape 2 ci-dessus.

Les points éclatés sont les points d'intersection $\sigma_{1,1}(P^n) \cap S$ sur $G(2, V)$.

Dans [8], Brivio étudie les fibrés vectoriels extrémaux avec $c_1^2 = 14$ et $c_2 = 4$. Elle obtient leurs caractérisation en termes du fibré tautologique de la Grassmannienne $G(2,5)$. Après la description des fibrés déterminants associés, elle montre qu'en éclatant la surface d'Enriques en quatre points, celle-ci admet un plongement de degré 10 dans $\mathbf{P}^4$.

2.3 Les singularités des espaces des modules des fibrés vectoriels stables de rang deux sur les surfaces d'Enriques

Soit H une polarisation fixée sur la surface d'Enriques S. Soit $\mathcal{M}(C, c_2, S)$ l'espace des modules des fibrés H-stables de rang deux avec le déterminant, $\det E = [C]$, et la deuxième classe de Chern c_2, où équivalent avec les classes de Chern fixées. On suppose que $\mathcal{M}$ est non-vide. D'après la théorie générale on sait que pour E un fibré H-stable, l'espace tangent Zariski en $[E]$ est isomorphe à $H^1(S, ad\mathcal{E})$ et comme germe, $(\mathcal{M}, [E])$ est isomorphe à $(\kappa^{-1}(0), 0)$, où $ad\mathcal{E}$ est le faisceau des endomorphismes de trace nulle,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{id_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}nd\mathcal{E} \longrightarrow ad\mathcal{E} \longrightarrow 0\ ,$$

et $\kappa : H^1(S, ad\mathcal{E}) \to H^2(S, ad\mathcal{E})$ est l'application de Kuranishi. Le terme de degré deux représente la première obstruction, o_1. En particulier, le cône tangent se plonge dans $o_1^{-1}(0)$.

Puisque S est une surface régulière,

$$h^2(S, ad\,\mathcal{E}) = h^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) = h^0(S, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}(K_S)))$$

quelque soit le fibré vectoriel E dans $\mathcal{M}$ et en plus le cône tangent est égale à $o_1^{-1}(0)$. Si $[E]$ se trouve dans le lieu singulier de $\mathcal{M}$ alors E est un fibré spécial. Nous allons voir que la réciproque est vraie aussi et nous allons caractériser les singularités.

Premièrement, nous remarquons qu'il n'existe qu'un nombre fini de fibrés spéciaux avec les classes de Chern fixés: $E = \pi_* L$, la classe $c_1(L \otimes \sigma^* L)$ est fixée et $c_1(L \otimes \sigma^* L^{\otimes -1}) \in \operatorname{Pic} X$ n'a qu'un nombre fini de possibilités d'après le théorème de Hodge d'index ($L - \sigma^* L$ vit dans un espace euclidien et $0 > (c_1(L) - c_1(\sigma^* L))^2 = \pi^*(c_1(E)^2 - 4\, c_2(E))$).

Théorème 2.3.1 *Le fibré E represent un point singulier de $\mathcal{M}$ si et seulement si E est spécial. De plus, $[E]$ est un point double ordinaire.*

Démonstration. Soit C le cône tangent de $\mathcal{M}$ en $[E]$. On va montrer que C est birationnnellement un cône quadratique non-dégénéré. Le cône quadratique qu'on cherche, sera donné par la première obstruction.

Le cône C est contenu dans $T_{[E]}\mathcal{M}$, l'espace tangent Zariski de $\mathcal{M}$ en $[E]$. On a

$$\dim C = \dim \mathcal{M} = \dim T_{[E]}\mathcal{M} - 1 \ .$$

En utilisant le language des schémas, on peut identifier un vecteur tangent dans C avec une famille de fibrés vectoriels sur S paramétrée par l'anneau local des séries convergentes $\mathbf{C}\{t\}$. Comme $\mathbf{C}\{t\} \subset \mathbf{C}[[t]]$, on considère les familles intermédiaires paramétrées par $\mathbf{C}[[t]]$ et donc par $\mathbf{C}[t]/t^n$, puisque $\mathbf{C}[[t]] = \lim \mathbf{C}[t]/t^n$.

Pour commencer, soit E' une famille paramétrée par $\mathbf{C}[t]/t^2$, une déformation infinitésimalle de E. On dénote $\mathbf{C}[\varepsilon] = \mathbf{C}[t]/t^n$ quand aucune confusion ne sera possible. On a $E = E' \times_{S \times \mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[\varepsilon]} S$ et localement

$$E' \mid U_{\beta\alpha} \times \mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[\varepsilon] \xrightarrow{\psi'_{\alpha\beta}} E' \mid U_{\alpha\beta} \times \mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[\varepsilon] \ .$$

Alors $\psi'_{\alpha\beta}$ est donné par $id + \varepsilon u_{\alpha\beta}$, où $u_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}nd\,\mathcal{E}(U_{\alpha\beta})$. La condition de compatibilité sur $U_{\alpha\beta\gamma}$ implique

$$u_{\alpha\beta} + u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}. \tag{18}$$

Donc $\{u_{\alpha\beta}\}$ represente un 1-cocycle de $\mathcal{E}nd\mathcal{E}$.

En identifiant une famille paramétrée par $\mathbf{C}[\varepsilon]$ avec un vecteur tangent de l'espace $T_{[E]}\mathcal{M}$, on obtient l'application de Kodaira-Spencer

$$T_{[E]}\mathcal{M} \longrightarrow H^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \ .$$

D'une manière analogue, une famille paramétrée par $\mathbf{C}[t]/t^3$ entraine la condition de compatibilité suivante sur $U_{\alpha\beta\gamma}$:

$$(id + \varepsilon u_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 v_{\alpha\beta}) \circ (id + \varepsilon u_{\beta\gamma} + \varepsilon^2 v_{\beta\gamma}) = id + \varepsilon u_{\alpha\gamma} + \varepsilon^2 v_{\alpha\gamma} \ ,$$

où $u_{\alpha\beta}$ et $v_{\alpha\beta}$ sont des sections locales de $\mathcal{E}nd\mathcal{E}$. Le coéficient de ε donne la relation (18) et le coéficient de ε^2 donne

$$u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma} = -(v_{\alpha\beta} + v_{\beta\gamma} - v_{\alpha\gamma}).$$

Donc une famille E' paramétrée par $\mathbf{C}[t]/t^2$ peut être relever à une famille paramétrée par $\mathbf{C}[t]/t^3$ si et seulement si le 1-cocycle $\{u_{\alpha\beta}\}$, représentant E' est dans l'ensemble des zéros de la forme quadratique

$$o_1 : H^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E})$$

définie par $\mathrm{class}\{u_{\alpha\beta}\} \mapsto \mathrm{class}\{u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma}\}$. C'est la première obstruction. Soit C_1 le cône dans $T_{[E]}\mathcal{M}$ defini par $\eta^{-1}(o_1 = 0)$. On conclut qu'un vecteur tangent correspond à une famille paramétrée par $\mathbf{C}[[t]]$ si et seulement si il se trouve dans le sous-cône $C' \subseteq C_1$ obtenu en considèrant toutes les obstructions supérieures. Puisque $C \subseteq C' \subseteq C_1$, si C_1 est un cône quadratique non-dégénéré, le théorème est prouvé puisque $\dim C = \dim C_1$. Donc on doit établir le lemme suivant.

Lemme 2.3.2 *La forme quadratique o_1 est non-dégénérée.*

Démonstration. Soit φ la forme bilinéaire sur $H^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E})$ définie par

$$\varphi(\mathrm{class}\{u_{\alpha\beta}\}, \mathrm{class}\{v_{\alpha\beta}\}) = \mathrm{class}\{u_{\alpha\beta} \circ v_{\beta\gamma}\}.$$

Evidemment $\varphi(u, u) = o_1(u)$.

Pour établir le lemme, on va considérer l'image inverse de φ sur X. Elle va s'identifier à la forme bilinéaire donnée par la dualité de Serre pour $H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \sigma^*\mathcal{L}))$. On va l'étudier en montrant qu'après quelques identifications, elle est une forme bilinéaire symmétrique. Donc φ sera une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. D'après (8),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}nd\mathcal{E} &\simeq \pi_*\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \oplus \pi_*\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \sigma^*\mathcal{L}) \\ &\simeq \pi_*\mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L}, \sigma^*\mathcal{L}) \oplus \pi_*\mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L}, \mathcal{L}) , \end{aligned}$$

et on affirme que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, \mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L}, \mathcal{L})) & \times & H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \sigma^*\mathcal{L})) & \rightarrow & H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) & \times & H^1(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varphi} & H^2(S, \mathcal{E}nd\mathcal{E}) \end{array}$$

Les fléches horizontales sont données par composition et les fléches verticales par π_*. Les dernières sont des isomorphismes. Pour la commutativité, il suffit de choisir un revêtement de X qui correspond à un revêtement de S.

Alors pour les 1-cocycles $\{u_{\alpha\beta}\}$ et $\{v_{\alpha\beta}\}$ of $\mathcal{E}nd\mathcal{E}$, on prend les 1-cocycles $\{\zeta_{\alpha\beta}\}$ et $\{\xi_{\alpha\beta}\}$ de $\mathcal{H}om(\sigma^*\mathcal{L},\mathcal{L})$ et de $\mathcal{H}om(\mathcal{L},\sigma^*\mathcal{L})$ respectivement, tels que $\pi_*\zeta = u$ et $\pi_*\xi = v$ en cohomologie. Localement $u_{\alpha\beta}$ est le morphisme $\zeta_{\alpha\beta}$ de $\mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})$-modules considéré comme morphisme de $\mathcal{O}_S(U_{\alpha\beta})$-modules.

On dénote aussi par φ la forme bilinéaire en haut. Elle correspond à la dualité de Serre sur X, donc elle est nondégénérée. Soit ψ la forme bilinéaire

$$\psi : H^1(X,\mathcal{H}om(\mathcal{L},\sigma^*\mathcal{L})) \times H^1(X,\mathcal{H}om(\mathcal{L},\sigma^*\mathcal{L})) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{H}om(\mathcal{L},\mathcal{L}))$$

définie par $\psi(\zeta',\zeta'') = \varphi(\sigma^*\zeta',\zeta'')$. On peut représenter $\psi(\zeta',\zeta'')$ comme suit: soient $\zeta'_{\alpha\beta}$ et $\zeta''_{\alpha\beta}$ donnés en termes des bases fixées pour $\mathcal{L}(U_{\alpha\beta})$ et $\sigma^*\mathcal{L}(U_{\alpha\beta})$ par $a'_{\alpha\beta}$ et $a''_{\alpha\beta}$. Alors $\psi(\zeta',\zeta'') = \text{class}\{\sigma^*a'_{\alpha\beta}\cdot a''_{\beta\gamma}\}$ et on a

$$\begin{aligned}
&\psi(\zeta',\zeta'') - \psi(\zeta'',\zeta') \\
&= \text{class}\{\sigma^*a'_{\alpha\beta}\cdot a''_{\beta\gamma} - \sigma^*a''_{\alpha\beta}\cdot a'_{\beta\gamma}\} \\
&= \text{class Alt}\{\sigma^*a'_{\alpha\beta}\cdot a''_{\beta\gamma} - \sigma^*a''_{\alpha\beta}\cdot a'_{\beta\gamma}\} \\
&= \text{class}\{\tfrac{1}{2}(\sigma^*a'_{\alpha\beta}\cdot a''_{\beta\gamma} - \sigma^*a''_{\alpha\beta}\cdot a'_{\beta\gamma} - \sigma^*a'_{\beta\gamma}\cdot a''_{\alpha\beta} + \sigma^*a''_{\beta\gamma}\cdot a'_{\alpha\beta})\} \\
&= \sigma^*\text{class}\{\tfrac{1}{2}(\sigma^*a'_{\alpha\beta}\cdot a''_{\beta\gamma} - \sigma^*a''_{\alpha\beta}\cdot a'_{\beta\gamma} - \sigma^*a'_{\beta\gamma}\cdot a''_{\alpha\beta} + \sigma^*a''_{\beta\gamma}\cdot a'_{\alpha\beta})\} \\
&= \sigma^*(\psi(\zeta',\zeta'') - \psi(\zeta'',\zeta')).
\end{aligned}$$

Cela veut dire que $\psi(\zeta',\zeta'') - \psi(\zeta'',\zeta')$ est une classe de cohomologie σ-invariante dans $H^2(X,\mathcal{O}_X) \simeq H^2(X,\mathcal{H}om(\mathcal{L},\mathcal{L}))$, donc elle est la classe nulle. **Q.E.D.**

2.4 Les espaces des modules 1-dimensionels

Nous allons montrer que sur une surface d'Enriques qui n'est pas nodale, un espace des modules des fibrés vectoriels stables de rang deux avec les classes de Chern fixées et de dimension égale à un, s'identifie à une courbe de genre arithmétique un.

Comme dans la partie 2.3, on dénote par $\mathcal{M}(C,c_2,Y)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang deux sur la variété Y, stables par rapport à une polarisation fixée, avec le déterminant $[C]$ et la seconde classe de Chern c_2.

Sur une surface d'Enriques on a

$$\dim T_{[E]}\mathcal{M} = 4c_2(E) - c_1^2(E) - 3 + h^2(\mathcal{E}nd\mathcal{E}) .$$

En utilisant le Théorème 1 dans [19], si $\dim \mathcal{M} = 1$, on peut toujours supposer qu'après une tensorisation convenable[3] on se trouve dans un des deux cas: $c_1^2 = 0$ et $c_2 = 1$, ou $c_1^2 = 4$ et $c_2 = 2$.

• *Le premier cas.* On étudie les espaces des modules des fibrés vectoriels stables de rang deux sur E tels que $c_1^2(E) = 0$ et $c_2(E) = 1$. En prenant le produit tensoriel par des fibrés en droites, on peut supposer que $\det E$ soit un des suivants: le fibré en droites trivial, $[K_S]$ ou $[F']$. Comme d'habitude F' et F'' représentent les deux demi-pinceaux d'un pinceau elliptique sur S.

Lemme 2.4.1 *Il n'existe pas de fibré vectoriel stable de rang deux sur S avec $c_2(E) = 1$ et de déterminant triviale ou isomorphe à $[K_S]$.*

Démonstration. On suppose que E est stable et on dénote $\det E = [C]$ avec C linéairement équivalent à 0 ou à K_S. En appliquant le théorème de Riemann-Roch pour $\mathcal{E}$, on obtient

$$h^0(S, \mathcal{E}) - h^1(S, \mathcal{E}) + h^2(S, \mathcal{E}) = 1 .$$

Si E a une section globale, alors il existe un sous-faisceau iversible $\mathcal{O}_S(D)$ de $\mathcal{E}$ avec D effectif, le lieu des zéros de la section globale. Cela contredit la stabilité de E.

Si $h^2(S, \mathcal{E}) = h^0(S, \mathcal{E}^\vee(K_S)) \geq 1$, alors en utilisant le même argument on obtient que $E^\vee \otimes [K_S]$ n'est pas stable. Mais E stable implique $E^\vee \otimes [K_S]$ stable. D'où une contradiction. **Q.E.D.**

Pour le cas qui reste, nous allons considérer la stabilité par rapport à une polarisation H obtenue comme suit: soit H_0 un diviseur ample, alors on prend $H = H_0 + (H_0 \cdot F')\, F'$. Puisque S n'est pas nodale, pour tout diviseur effectif D, $D \cdot H \geq F' \cdot H$. [4]

Lemme 2.4.2 *L'espace des modules des fibrés vectoriels, E, de rang deux, H-stables avec $\det E = [F']$ et $c_2(E) = 1$, est isomorphe à F''.*

[3] On utilise le fait que pour D effectif, $D^2 > 0$, il existe un demi-pinceau F tel que $D \cdot F \leq D^2$. On se réduit par tensorisations successives avec des pinceaux eliptiques au cas $c_1^2(\det E) = 0$ ou 4.

[4] Apparemment la polarisation H dépend du déterminant, le demi-pinceau, mais d'après [26], on sait que la stabilité sur une surface d'Enriques ne dépend pas de la polarisation.

Démonstration. Puisque chaque point de F'' se trouve en position spéciale par rapport à $| F'' | \sim | F' + K_S |$, on a une correspondance injective: $p \mapsto E(p)$, où $p \in F''$ et $E(p)$ est le fibré vectoriel donné par l'extension

$$0 \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{s} \mathcal{E}(p) \to \mathcal{J}_p(F') \to 0 . \tag{19}$$

L'application s est donnée par la section globale s telle que $\{s = 0\} = p$ (cf. [16]). Le problème est d'établir la stabilité de $E(p)$ et ensuite, de montrer que tous les fibrés vectoriels stables sont de la forme $E(p)$, pour un $p \in F''$.

En supposant que $E = E(p)$ et qu'il n'est pas H-stable, on peut trouver une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{E}(p) \to \mathcal{J}_p(F' - D) \to 0$$

telle que $2D \cdot H \geq F' \cdot H > 0$. En tensorisant par $\mathcal{O}_S(-D)$ on voit que $h^0(S, \mathcal{E}(p)(-D)) \geq 1$. Puisque $-D$ ne peut pas être effectif, en tensorisant la suite exacte (19) par $\mathcal{O}_S(-D)$, on obtient $F' - D \sim C \geq 0$. L'instabilité de E implique $F' \cdot H \geq 2C \cdot H$. C'est en contradiction avec le choix de H.

Soit maintenant E un fibré vectoriel stable avec les classes de Chern comme dans les hypothèses. On veut montrer que E a une section avec des zéros isolés.

En appliquanrt le théorème de Riemann-Roch pour $\mathcal{E}$ on obtient que E a une section global (si $h^2(S, \mathcal{E}) \geq 1$, alors $\mathcal{E}^\vee(K_S)$ a une section global et après la tensorisation de la suite exacte correspondante par $\mathcal{O}_S(K_S)$ et le passage au dual, on obtient $h^0(S, \mathcal{E}) \geq 1$). Donc on peut supposer l'existence de la suite exacte suivante

$$0 \to \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{E} \to \mathcal{J}_\xi(F' - D) \to 0 ,$$

où ξ est un sous-schéma de dimension zéro et D est effectif. Si $D \neq 0$, la stabilité implique $2D \cdot H < F' \cdot H$. Cela est imposible puisque l'intersection de H avec les diviseurs effectifs a un minimum en F'. Donc $D = 0$. **Q.E.D.**

•*Le deuxième cas.* On va considérer l'espace des modules des fibrés vectoriels stables de rang deux, tels que $c_1^2 = 4$ et la seconde classe de Chern soit 2. On dénote par $[C]$ le déterminant. Puisque on a supposé que S n'est pas nodale, C est ample sur S.

Lemme 2.4.3 *Le système linéaire $| C |$ n'a pas de composantes fixes.*

Démonstration. Une composante fixe peut être donnée seulement par un demi-pinceau. Soit E' un demi-pinceau contenu dans $\mid C \mid$. S'il existe un autre demi-pinceau F' contenu dans $\mid C \mid$ avec $E' \cdot F' \neq 0$, alors

$$C \sim D + E' + F' \sim D + 2K_S + E' + F' \sim D + E'' + F'' ,$$

donc E' n'est pas une composante fixe de $\mid C \mid$. L'autre possibilité est $C \sim D + E'$ avec $D \cdot E' = 1$ et $D^2 = 2$. Le fait que C soit ample et le théorème de Riemann-Roch pour $C - 2E'$ impliquent que ce diviseur est effectif. Donc E' ne peut pas être une composante fixe de $\mid C \mid$. **Q.E.D.**

En utilisant la démonstration du lemme on peut faire l'hypotèse suivante: S ne contient pas un pinceau elliptique pour lequel l'intersection avec C soit 2. S'il contenait un tel pinceau, après la tensorisation avec un fibré en droites correspondant à un demi-pinceau, l'espaces des modules devient birationnellement équivalent à un des espaces étudiés dans le premier cas. Géométriquement, l'hypotèse signifie que $\mid C \mid$ n'est pas un système linéaire hyperelliptique sur S, ou ce qui est équivalent, $\mid C \mid$ est sans points base (cf. [11]). Dans la suite nous allons considérer $\mid C \mid$ un système linéaire ample, irréductible, sans points base et avec $C^2 = 4$.

Lemme 2.4.4 *Soit E un fibré vectoriel stable avec* $\det E = [C]$ *et* $c_2(E) = 2$. *E a des sections globales et, en plus, quelle que soit une section globale, ses zéros sont isolés.*

Démonstration. En appliquant le théorème de Riemann-Roch pour $\mathcal{E}$, on trouve que E a des sections globales. On peut donc supposer l'existence de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{E} \to \mathcal{J}_\xi(C - D) \to 0 ,$$

où ξ est un sous-schéma de dimension zéro, D est effectif et

$$D \cdot (C - D) + \deg\xi = 2 . \tag{20}$$

La stabilité de E implique $2D \cdot C < C^2 = 4$, donc $D = 0$ ou $D \cdot C = 1$. La dernière possibilité ne peut pas être réalisée puisque d'après (20), $D^2 = 0$, ce qui signifie que D est un demi-pinceau avec $C \cdot D = 1$. On conclut que toute section globale a les zéros isolés. **Q.E.D.**

Nous allons étudier l'espace des modules $\mathcal{M}(C,2,S)$ en regardant les images inverses des fibrés sur la surface X. Soit $\mathcal{M}(\pi^*C,4,X)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang deux sur X, stables par rapport à π^*C. C'est une variété quasi-projective symplectique de dimension deux avec une involution induite par σ. Alors

$$\pi^* : \mathcal{M}(C,2,S) \to \mathcal{M}(\pi^*C,4,X)$$

est 2 : 1 sur la sous-variété lagrangéenne qui représente le lieu fixe de l'involution induite (voir [19] et [21]).

Puisque $\mid C \mid$ est non-hyperelliptique sur S, le système linéaire complet $\mid \pi^*C \mid$ est non-hyperelliptique sur X. L'application correspondante, définie sur X, est génériquement 1 : 1, de degré 8 et prend ses valeurs dans $\mathbf{P}^5$. Le système linéaire $\mid \pi^*C \mid$ est σ-invariant, donc l'involution σ est induite par une involution linéaire de $\mathbf{P}^5$. Celle-ci doit être de la forme $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mapsto (x_0,x_1,x_2,-x_3,-x_4,-x_5)$ dans un système de coordonnées convenable.

Affirmation. X est le lieu fixe d'un réseau de quadriques Π.

Si ce n'était pas le cas , en utilisant [31], nous remarquons que le lieu fixe W du réseau pourrait être le cône sur le scroll $S_{1,2}$ dans $\mathbf{P}^4$ (le plan projectif eclaté dans un point), ou le plongement de Segre $s : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}^5$. Dans le dernier cas nous choisissons sur W deux droites: P^1 qui correspond à $\mathbf{P}^1 \times *$, et σP^1. Soit P^3 le plan de dimension trois, engendré par P^1 et σP^1). Puisque $\deg W = 3$, il existe une droite L dans W telle qu'on ait $P^3 \cap W = P^1 \cup \sigma P^1 \cup L$. L est σ-invariante donc elle contient un point fixe p. Nous obtenons un plan de dimension deux dans W, σ-invariant, l'image de $\{pr_1 \circ s^{-1}(p)\} \times \mathbf{P}^2$. Un tel plan contient une droite fixe qui intersecte l'image de X dans $\mathbf{P}^5$, d'où une contradiction puisque σ agit librement sur X. Dans le premier cas, le sommet du cône est un point fixe pour l'involution, et par consequence il suffit de trouver une géneratrice σ-invariante. Nous regardons une section hyperplane de W, σ-invariante et qui ne contient pas le sommet. Elle est nécessairement un scroll $S_{1,2}$, et puisque la (-1)-courbe de ce scroll est σ-invariante, nous obtenons la génératrice désirée.

La courbe discriminante $\Delta \subset \Pi$ qui représente les quadriques singulières est de degré 6, étant l'union de deux courbes de genre arithmétique un, $\Delta = A \cup B$.

Soit $\mathcal{M}^0(\pi^*C, 4, X)$ les composentes de $\mathcal{M}(\pi^*C, 4, X)$ qui contiennent au moins un fibré vectoriel qui admet une section globale avec des zéros isolés.

Lemme 2.4.5 *$\mathcal{M}^0(\pi^*C, 4, X)$ est birationnellement isomorphe avec le revêtement double de Π ramifié au dessus de Δ. L'involution induite de σ échange les deux feuilles du revêtement.*

Démonstration. Cette affirmation est faite dans le papier de Mukai [21] et a été généralisée par Tyurin dans [34]. On va se résumer ici à esquisser l'argument.

Quel que soit $p \in \Pi - \Delta$, soit Q_p la quadrique correspondante. On identifie Q_p avec la Grassmannienne $G(2,4)$. Soit T_p le fibré tautologique et V_p le quotient. On a

$$0 \to T_p \to Q_p \times \mathbf{C}^4 \to V_p \to 0 .$$

Les deux points du revêtement double sont représentés par $T_p^\vee \mid_X$ et $V_p \mid_X$.

Premièrement on doit montrer que ces fibrés sont stables et qu'ils sont échangés par l'involution induite par σ. Soit $E_p = T_p^\vee \mid_X$. Soit P^3 un sous-espace de dimension trois dans $\mathbf{C}^4$. Il correspond à un cycle de Schubert de dimension deux $\sigma_{1,1}(P^3) = \{\Lambda \mid \Lambda \subset P^3\}$. On peut lui associer une section s de $T_p^\vee$ telle que $\ker s_\Lambda = \Lambda \cap P^3$. Evidemment $\{s = 0\} = \sigma_{1,1}(P^3)$, représentant un plan de dimension deux dans $\mathbf{P}^5$, et en prenant la restriction à X, on obtient, pour P^3 générique, une section globale de E avec $\deg\{s \mid_X = 0\} = c_2(E_p) = 4$. Si on denote $\xi = \{s \mid_X = 0\}$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{E}_p \to \mathcal{J}_\xi(\pi^*C) \to 0 . \tag{21}$$

En regardant la suite longue de cohomologie, on voit que $h^0(X, \mathcal{E}_p) = 4$. Puisque les 2-plans $\sigma_{1,1}(P^3)$ forment une famille projective de dimension trois, on conclut que la section globale générique de E_p a des zéros isolés. Mais, en fait, quel que soit une section globale de E, ses zéros sont isolés. Un lieu des zéros de dimension un, serait donné par l'intersection de X avec un plan de dimension deux. Puisque X est le lieu fixe d'un réseau de quadrique, cette intersection serait une conique, contredisant le fait que S n'est pas nodale.

Si E_p n'était pas stable, alors il existerait un sous-fibré en droites maximal $[D]$, tel qu'on ait

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{E}_p \to \mathcal{J}_\eta(\pi^*C - D) \to 0 , \tag{22}$$

où $2D \cdot \pi^*C \geq (\pi^*C)^2 = 8$ et $D \cdot (\pi^*C - D) + \deg\eta = 4$. On conclut que $D^2 \geq 0$, donc D est effectif. Ce résultat contredit le fait que toutes les sections globales de E_p ont des zéros isolés.

La stabilité de $V_p \mid_X$ peut être établie d'une manière similaire, en regardant les cylces de Schubert qui correspondent à des droites dans $\mathbf{C}^4$. Pour une telle droite P^1, on a $\sigma_2(P^1) = \{\Lambda \mid \Lambda \supset P^1\}$.

Pour obtenir que $\sigma^* T_p^\vee \mid_X = V_p \mid_X$, il suffit de faire la remarque suivante: sur les quadriques lisses de Π, σ échange les deux familles de 2-plans. En choisissant un système de coordonnées sur $\mathbf{P}^5$ tel que Q_p soit donnée par $x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2 = 0$, les sous-variétés $\{x_0 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_5 = 0\}$ et $\{x_0 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_5 = 0\}$ représentent des plans de dimension deux qui sont échangés par σ.

On va représenter ces fibrés différemment. En suivant Tyurin, on va regarder les courbes lisses $\Gamma \in \mid \pi^*C \mid$ et les sous-schémas de dimension zéro et de degré quatre qui se trouvent sur Γ, étant en position spéciale par rapport à $\mid \pi^*C \mid$ sur X. Les résultats qui se trouvent dans [34] et dont on aura besoin sont les suivants:

1. Soit ξ un sous-schéma en position spéciale par rapport à $\mid \pi^*C \mid$, tel que $h^1(X, \mathcal{J}_\xi(\pi^*C)) = 1$. Alors ξ est en position spéciale dans $\mathbf{P}^5$ par rapport au système linéaire des sections hyperplans, i.e. ξ engendre un plan de dimension deux.

2. Il existe un unique fibré vectoriel $E(\xi, \Gamma)$ sur X tel que

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}(\xi, \Gamma) \to \mathcal{J}_\xi(\pi^*C) \to 0 ,$$

   si et seulement si $h^1(X, \mathcal{J}_\xi(\pi^*C)) = 1$, et $\mid \xi \mid$ est sans points base sur Γ. En plus, $\mid \xi \mid$ est un système linéaire spécial sur Γ et $h^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma \xi) = 2$.

3. Les fibrés vectoriels $E(\xi, \Gamma)$ et $E(\xi', \Gamma)$ sont isomorphes si $\xi \sim \xi'$ sur Γ.

4. Si on suppose que $E(\xi, \Gamma)$ est engendré par des sections globales, alors le dual du noyau de l'application canonique $X \times H^0(X, \mathcal{E}(\xi, \Gamma)) \to E(\xi, \Gamma)$ est $E(K_\Gamma - \xi, \Gamma)$. L'application $X \to G(2,4)$ associée à $E(\xi, \Gamma)$ montre que $E(\xi, \Gamma)$ et $E(K_\Gamma - \xi, \Gamma)$ correspondent au dual du fibré tautologique et respectivement, au quotient V.

Pour finir on doit étudier ce que se passe si $p \in \Delta$ et montrer que $\mathcal{M}^0$ a une seule composante.

D'après 3. ci-dessus, l'égalité $E(\xi,\Gamma) = E(K_\Gamma - \xi, \Gamma)$ est donnée par $2\xi = K_\Gamma$. D'après 2., $\mid \xi \mid$ est un système linéaire spécial sur Γ avec $h^0(\Gamma,\xi) = 2$. On regarde Γ comme une courbe plongée canoniquement dans $\mathbf{P}^4$, donnée par l'espace de quadriques de dimension projective deux, $\pi = \Pi \mid_{\mathbf{P}^4}$. On dénote par δ la courbe discriminante de π (c'est une courbe plane de degré cinq). D'après [4] Proposition 1.2, δ peut avoir au plus des points doubles ordinaires et un point lisse correspond à une quadrique de π avec un seul point singulier. Plus précisément, elle est un cône, Q_p, sur une quadrique non-dégénérée de dimension deux. En utilisant cela, on obtient un pseudo-revêtement double de δ, $\tilde{\delta} \to \delta$. Les deux points qui correspondent à un point lisse p de δ sont donnés par les deux familles de 2-plans sur Q_p.

Soit Θ le diviseur thêta sur $J(\Gamma)$, la Jacobienne de Γ. Le lieu singulier de Θ correspond aux diviseurs spéciaux de degré 4 sur Γ. Puisque Γ n'est pas hyperelliptique, $h^0(\Gamma,\xi) \leq 2$. La multiplicité d'un point qui correspond à ξ sur Θ, est égale à $\dim \mid \xi \mid +1$. On a une identification naturelle

$$\mathbf{P}(T.J(\Gamma)) \simeq \mathbf{P}(H^0(\Gamma,\Omega^1_\Gamma)^\vee) = \mathbf{P}(H^0(\Gamma,K_\Gamma)^\vee) ,$$

où $\mathbf{P}(H^0(\Gamma,K_\Gamma)^\vee) = \mathbf{P}^4$ est l'espace ambient de l'application canonique. Soit $k : \mathrm{Sing}\Theta \to \delta$ l'application qui fait correspondre à un point singulier de Θ le cône tangent projectif. C'est une quadrique dans $\mathbf{P}^4$, de rang inférieur à quatre, engendrée par les 2-plans qui correspondent aux éléments de $\mid \xi \mid$ (cf. [15], Riemann-Kempf singularity theorem). On voit que $\mathrm{Sing}\Theta$ coïncide avec $\tilde{\delta}$: $\mid \xi \mid$ et $\mid K_\Gamma - \xi \mid$ sont appliqués sur la même quadrique, étant découpés par les deux familles de 2-plans de la quadrique. Si $\mid \xi \mid = \mid K_\Gamma - \xi \mid$, alors $k(\mid \xi \mid)$ est une qudrique de rang inférieur ou égal à trois. Donc elle a le rang égal à trois et représente un point singulier sur δ.

Par conséquence, l'égalité $E(\xi,\Gamma) = E(K_\Gamma - \xi,\Gamma)$ est impliquée par l'affirmation suivante: la courbe discriminante δ est singulière et $\mid \xi \mid$ correspond à un point singulier par l'application k.

Pour $p \in \Pi - \Delta$, les deux fibrés vectoriels associés sont différents. On choisit Γ telle que $T_p^\vee \mid_X = E(\xi,\Gamma)$, $V_p \mid_X = E(K_\Gamma - \xi,\Gamma)$ et $\xi = \Gamma \cap \sigma_{1,1}$, $K_\Gamma - \xi = \Gamma \cap \sigma_2$, avec $\sigma_{1,1}$ et σ_2 2-plans dans les deux familles contenues dans Q_p. Pour $\mathbf{P}^4$ un espace projectif contenant $\sigma_{1,1}$ et σ_2, on voit que $k(\mid \xi \mid) = Q_p \cap \mathbf{P}^4$. Puisque $\mathrm{rk}\, Q_p = 6$ et $Q_p \cap \mathbf{P}^4$ contient de 2-plans, son rang est quatre. Donc $\mid \xi \mid \neq \mid K_\Gamma - \xi \mid$.

Pour un point lisse $p \in \Delta$, on considère un hyperplan $\mathbf{P}^4$ tel que $\Gamma = \mathbf{P}^4 \cap X$ soit lisse et $\mathrm{rk}(Q_p \cup \mathbf{P}^4)$ soit 3. On obtient un seul fibré vectoriel dans $\mathcal{M}^0(\pi^*C, 4, X)$.

Pour montrer que $\mathcal{M}^0$ a une seule composante, il suffit de prouver que quelque soit un fibré vectoriel ayant des sections globales avec des zéros isolés, il correspond comme ci-dessus à un point dans Π. Soit E un tel fibré vectoriel et ξ le lieu des zéros d'une section globale avec $\dim \xi = 0$ et $\deg \xi = 4$. ξ est contenu dans un 2-plan P_0. Soit $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ une base de Π, les trois quadriques étant données par les équations F_1, F_2 et respectivement F_3. Soient $f_i = F_i \mid_{P_0}$ les équations des coniques découpées par les Q_i sur P_0. Puisque $\deg \xi = 4$, les coniques données par f_1, f_2 et f_3 engendrent un pinceau, on doit donc avoir une relation non-triviale $\sum \beta_i f_i = 0$. Alors P_0 est contenu dans la quadrique définie par $\sum \beta_i F_i$. **Q.E.D.**

En utilisant les lemmes 2.4.4 et 2.4.5, nous remarquons que $\mathcal{M}(C, 2, S)$ est un pseudo-revêtement double d'une des deux courbes de genre arithmétique un, A or B. En supposant que

$$\pi^* : \mathcal{M}(C, 2, S) \rightarrow A \,,$$

pour $a \in A - B$ un point lisse, $\mathrm{card}\, \pi^{-1}(a) = 2$. Les fibrés vectoriels correspondants sont E et $E \otimes [K_S]$. Pour a un point singulier, $\pi^{-1}(a)$ représente un fibré vectoriel special. On conclut que $\mathcal{M}(C, 2, S)$ est une courbe de genre arithmètique un. Remarquons que $\mathcal{M}(C + K_S, 2, S) \rightarrow B$.

Exemple 2.4.6 Soit S la surface d'Enriques obtenue dans l'exemple 2.1.7. Elle n'est pas nodale et le revêtement universel $X \subset \mathbf{P}^5$ est le lieu fixe d'un espaces de quadriques de dimension projective deux, avec la courbe discriminante $A \cup B$. B est lisse et A a un point double ordinaire a. Sur S il existe un fibré vectoriel spécial E. Alors $\mathcal{M}(\det E, 2, S)$ est un pseudo-revêtement double de A avec E correspondant à a.

3 Variétés de Kummer généralisées

Soient A une variété abélienne principalement polarisée et Θ un diviseur thêta symétrique. Si $\delta : A \rightarrow \mid 2\Theta \mid$ est l'application définie par $\delta(a) = T^*_{-a}\Theta + T^*_a\Theta$, alors il existe un isomorphisme $\beta : | 2\Theta |^{\vee} \rightarrow | 2\Theta |$ qui rend commutatif le diagramme suivant (cf.[24], page 335).

$$\begin{tikzcd}
 & {| 2\Theta |^{\vee}} \arrow[dd, "\beta"] \\
A \arrow[ur, "\varphi_{2\Theta}"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
 & {| 2\Theta |}
\end{tikzcd}$$

Pour décrire l'isomorphisme β il faut qu'on considère la somme $\varsigma : A \times A \longrightarrow A$, la différence $d : A \times A \longrightarrow A$ et une section non-nulle θ, déterminée à une constante près, de $H^0(A, \mathcal{O}(\Theta))$. Puisque d'après le théorème du carré, on a que

$$\begin{aligned}
H^0(A \times A, \mathcal{O}(\varsigma^*\Theta + d^*\Theta)) &\simeq H^0(A \times A, \mathcal{O}(p_1^*2\Theta + p_2^*2\Theta)) \\
&\simeq H^0(A, \mathcal{O}(2\Theta)) \otimes H^0(A, \mathcal{O}(2\Theta)) \,,
\end{aligned}$$

l'élément $\beta'(a, b) = \theta(a+b)\theta(a-b)$ peut être considéré dans $H^0(A, \mathcal{O}(2\Theta)) \otimes H^0(A, \mathcal{O}(2\Theta))$. On démontre qu'il induit une forme bilinéaire non-dégénérée, symétrique ou altérnée suivant la paritée de θ en origine, sur $H^0(A, \mathcal{O}(2\Theta))^{\vee}$. Alors β est donné par cette forme.

Le but de ce travail est de généraliser ce résultat pour le système linéaire $| r\Theta |$. Pour que la généralisation soit transparente, nous allons réécrire le diagramme ci-dessus. D'abord il est invariant par l'action de l'involution naturelle de A, $i(a) = -a$. Donc nous pouvons considérer l'application δ comme étant définie sur la variété de Kummer associée à A, $K = A/(i)$, et l'application induite de $\varphi_{2\Theta}$ comme étant donnée par le faisceau $\mathcal{F} = (\pi_* \mathcal{O}_A(2\Theta))^{S_2}$. Maintenant si nous pensons K comme la sous-variété du produit symétrique $A^{(2)}$, $\{[a_1, a_2] \mid a_1 + a_2 = 0\} \subset A^{(2)}$, le faisceau $\mathcal{F}$ est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{F}} = (\pi_* \mathcal{O}_{A^2}(p_1^*\Theta + p_2^*\Theta))^{S_2}$, où p_j sont les projections de A^2 sur les facteurs et π est le passage au produit symétrique. Il est naturel d'introduire la notion suivante:

Définition. La sous-variété $K = K(r, A)$ du produit symétrique $A^{(r)}$, $r \geq 2$, définie par $\{[a_1, \ldots, a_r] \mid a_1 + \cdots + a_r = 0\}$, sera dite variété de Kummer généralisée associée à A, d'ordre r.

Notations. Toutes les variétés sont définies sur $\mathbf{C}$. Dans le produit direct A^r on considère la sous-variété $X = \{(a_1, \ldots, a_r) \mid a_1 + \cdots + a_r = 0\}$. On a $K = X/\mathcal{S}_r$. On dénote par $\widetilde{\Gamma}$ le diviseur $p_1^*\Theta + \cdots + p_r^*\Theta$ et par Γ sa restriction à X. Pour $a \in A$, $T_a : A \to A$ dénote la translation par a et $\Theta_a = T_a^*\Theta$.

D'après le théorème du carré, nous avons une application régulière $\delta : K \to\mid r\Theta \mid$ définie par $\delta([a_1, \ldots, a_r]) = T_{a_1}^*\Theta + \cdots + T_{a_r}^*\Theta$. En même temps, sur K, il existe un faisceau inversible $\mathcal{F}$ (la démonstration va être donnée dans un instant), tel qu'on ait

$$\pi^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(\Gamma)\,. \tag{23}$$

Notre résultat principal s'énonce comme suit:

Il existe un isomorphisme $\beta : \mathbf{P}(H^0(K, \mathcal{F})^\vee) \to\mid r\Theta \mid$ qui rend comutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{P}(H^0(K,\mathcal{F})^\vee) \arrow[dd, "\beta"] \\
K \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
& \mid r\Theta \mid
\end{tikzcd}$$

Nous ferons la démonstration en deux étapes: d'abord nous évaluerons la dimension de l'espace $H^0(K, \mathcal{F})$. Ensuite nous établirons l'isomorphisme β.

Dans le paragraphe ci-dessus, on a utilisé le fait que le fibré en droites associé à Γ descend à K. Pour justifier l'assertion on remarque qu'il suffit de la prover pour $\widetilde{\Gamma}$. On va appliquer le lemme de descente (cf. [13]): le fibré vectoriel $L = [\widetilde{\Gamma}]$, $\mathcal{S}_r$-invariant sur A^r, descend sur le produit symètrique si et seulement si pour tout point $\tilde{a}$ de A^r, le stabilisateur de $\tilde{a}$ dans $\mathcal{S}_r$ agit trivialement sur la fibre $L_{\tilde{a}}$. La vérification est imédiate si on regarde la fibre $L_{\tilde{a}}$ comme $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{\tilde{a}}/m_{\tilde{a}}\ [s])$, où s correspond à une section locale de L qui est $\mathcal{S}_r$-invariante. En interprétant la limite directe, $(\mathcal{S}_r)_{\tilde{a}}$ opère trivialement sur $\mathcal{O}_{\tilde{a}}/m_{\tilde{a}}$. Il faut voir qu'est ce qui se passe avec s. Soit $\tilde{a} = (a, \ldots, a, a_{j+1}, \ldots, a_r)$ (on suppose que $(\mathcal{S}_r)_{\tilde{a}}$ n'est pas trivial), et on considère le cas quand $a \in \Theta$ et $a_i \in \Theta$ pour $i \in I \subset \{j+1, \ldots, r\}$. Alors on peut choisir les coordonnées locales $w_1, \ldots, w_r$ de $\tilde{a}$ telles que $s = \prod_{k=1}^{j} w_k \cdot \prod_{i \in I} w_i$ et que $(\mathcal{S}_r)_{\tilde{a}}$ échange que les premières j coordonnées. Le stabilisateur agit trivialement sur s.

Donc il existe un faisceau inversible $\widetilde{\mathcal{F}}$ tel que $\pi^*\widetilde{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$. Evidemment, l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est égale au faisceau $\mathcal{F}$ introduit dans (23).

3.1 Le calcul de la dimension de $H^0(K, \mathcal{F})$

Si on regarde la fibration $\varsigma : A^{(r)} \longrightarrow A$ définie par

$$\varsigma([a_1, \ldots, a_r]\ ) = a_1 + \cdots + a_r \ ,$$

on remarque que K représente exactement la fibre au-dessus de $0 \in A$. L'idée du calcul est de trouver un revêtement étale de A tel que la fibration image réciproque soit triviale. En appliquant le théorème de Küneth nous allons obtenir la dimension cherchée.

Lemme 3.1.1 *Si $\varrho_r : A \longrightarrow A$ est la multiplication par r, alors le produit fibré $A^{(r)} \times A$ s'identifie avec $K \times A$. On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K \times A & \xrightarrow{\ \psi\ } & A^{(r)} \\ \Big\downarrow q & & \Big\downarrow \varsigma \\ A & \xrightarrow{\ \varrho_r\ } & A \end{array}$$

où ψ est définie par $([a_1, \ldots, a_r]\ , a) \mapsto [a_1+a, \ldots, a_r+a]$ et q est la projection sur le deuxième facteur.

Démonstration. D'abord, on doit vérifier la commutativité du diagramme ci-dessus. On a

$$\begin{aligned} (\varsigma \circ \psi)([a_1, \ldots, a_r]\ , a) &= \varsigma([a_1 + a, \ldots, a_r + a]) \\ &= (a_1 + a) + \cdots + (a_r + a) \\ &= ra \end{aligned}$$

et aussi

$$(\varrho_r \circ q)([a_1, \ldots, a_r]\ , a) = \varrho_r(a) = ra.$$

Ensuite, il faut que la variété $K \times A$ satisfasse la propriété d'universalité du produit fibré. Soit B une variété quelconque et $f : B \longrightarrow A$, $g : B \longrightarrow A^{(r)}$ deux applications telles que $\varrho_r \circ f = \varsigma \circ g$. Pour $g(b) = [a_1, \ldots, a_r]$, en définissant $h : B \longrightarrow K \times A$ par $h(b) = ([a_1 - f(b), \ldots, a_r - f(b)], f(b))$, on obtient que $f = q \circ h$ et $g = \psi \circ h$. **Q.E.D.**

Le faisceau $\mathcal{F}$ peut être regardé comme l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{F}}$ par $K \longrightarrow K \times A \xrightarrow{\psi} A^{(r)}$, où la première flèche dénote l'isomorphisme sur la fibre $K \times \{0\}$. Il est naturel de se demander qu'elle est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $K \times A$. La réponse est donnée par:

Lemme 3.1.2 *Soit $p : K \times A \longrightarrow K$ la projection sur le deuxième facteur. Sur $K \times A$ on a l'isomorphisme suivant:*

$$\psi^* \widetilde{\mathcal{F}} \simeq p^* \mathcal{F} \otimes q^* \mathcal{O}_A(r\Theta).$$

Démonstration. Puisque $\widetilde{\mathcal{F}} \simeq (\pi_* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}))^{\mathcal{S}_r}$, on raisonne sur le diagramme $\mathcal{S}_r$-invariant

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "Q"'] & A^r \arrow[d, "\Sigma"] \\ A \arrow[r, "\varrho_r"] & A \end{tikzcd}$$

et après on retourne, en prenant le quotient par $\mathcal{S}_r$.

Quelle que soit la fibre $* \times A$ de $X \times A$, le faisceau $\Psi^* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$ restreint à $* \times A$ est isomorphe à $\mathcal{O}_A(r\Theta)$. Pour justifier ceci, on considère $x = (a_1, \ldots, a_r) \in X$ et l'application α, la composition

$$A \xrightarrow{\sim} \{x\} \times A \hookrightarrow X \times A \xrightarrow{\Psi} A^r\,.$$

On a $\alpha(a) = (a_1 + a, \ldots, a_r + a)$ et par conséquent $p_j \circ \alpha : A \to A$ est la translation par a_j, quel que soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. Alors

$$\begin{aligned} \Psi^*(\widetilde{\Gamma}) \mid_{\{x\}\times A} &= \{x\} \times \alpha^* \sum_{j=1}^{r} p_j^* \Theta \\ &= \{x\} \times \sum_{j=1}^{r} \Theta_{a_j} \\ &\sim \{x\} \times r\Theta \,. \end{aligned}$$

D'arès l'assertion ci-dessus, le faisceau $\Psi^* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \otimes \Pi^* \mathcal{O}_A(-r\Theta)$ restreint à $* \times A$, est trivial, donc il est isomorphe à l'image inverse d'un faisceau inversible sur K. Comme la restriction de $\Psi^* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$ à $X \times \{0\}$ est égale à $\mathcal{O}_X(\Gamma)$, on conclut que

$$\Psi^* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \simeq P^* \mathcal{O}_X(\Gamma) \otimes Q^* \mathcal{O}_A(r\Theta)$$

où $P : X \times A \to X$ est la projection sur le premier facteur. **Q.E.D.**

Remarque 3.1.3 La démonstration ci-dessus nous dit que si on considère l'application

$$X \xrightarrow{\sim} X \times \{a\} \longrightarrow X \times A \xrightarrow{\Psi} A^r \,,$$

l'image inverse du diviseur $\widetilde{\Gamma}$ est $(\sum_{j=1}^r p_j^* \Theta_a) \mid_X$, et $\Gamma \sim (\sum_{j=1}^r p_j^* \Theta_a) \mid_X$, quel que soit $a \in A$.

Lemme 3.1.4 $\chi(\mathcal{F}) = r^g$.

Démonstration. D'après le lemme 3.1.2 et le théorème de Küneth, on a que

$$\chi(\psi^* \widetilde{\mathcal{F}}) = \chi(\mathcal{F}) \cdot \chi(\mathcal{O}_A(r\Theta)). \tag{24}$$

Puisque la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{O}_A(r\Theta)$ est égale à r^g, il reste à calculer le membre de gauche. L'application ψ étant un revêtement étale de degré r^{2g}, on a (cf. [23], page 121)

$$\chi(\psi^* \widetilde{\mathcal{F}}) = \deg \psi \cdot \chi(\widetilde{\mathcal{F}}) = r^{2g} \cdot \chi(\widetilde{\mathcal{F}}). \tag{25}$$

Le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ étant isomorphe à la partie $\mathcal{S}_r$-invariant du $\pi_*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$, il est un facteur direct de $\pi_*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$ (pour obtenir la flèche $\pi_*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) = \pi_*\pi^*\widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ on considère une formule trace: s, section locale sur un ouvert $\mathcal{S}_r$-invariant, va en $1/r! \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \sigma s$). $\widetilde{\Gamma}$ est un diviseur thêta sur A^r, donc les groupes supérieurs de cohomologie sont nuls. On conclut que

$$\chi(\widetilde{\mathcal{F}}) = h^0(A^{(r)}, \widetilde{\mathcal{F}}) = 1 ,$$

puisqu'on a l'égalité $h^i(A^{(r)}, \pi_*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})) = h^i(A^r, \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}))$ pour tout $i \geq 0$. **Q.E.D.**

Proposition 3.1.5 $\dim H^0(K, \mathcal{F}) = r^g$.

Démonstration. La caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau $\mathcal{F}$ est égale à r^g, donc il suffit de montrer que les groupes supérieurs de cohomologie sont nuls. Comme dans le lemme précédent, $\mathcal{F}$ est isomorphe à la partie $\mathcal{S}_r$-invariant de $\mathcal{O}_X(\Gamma)$. Le même raisonnement donne alors le résultat, en tenant compte du fait que Γ est ample sur X. **Q.E.D.**

Nous remarquons que la méthode utilisée pour évaluer la dimension de $H^0(K, \mathcal{F})$ peut être utilisée pour évaluer aussi la dimension de l'espace des sections globales de $\mathcal{F}^{\otimes m}$, $m \geq 1$; on a besoin de $\dim H^0(A^{(r)}, \widetilde{\mathcal{F}}^{\otimes m})$. Comme $\pi^*\widetilde{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$, les sections globales de $\widetilde{\mathcal{F}}^{\otimes m}$ sont exactement les sections globales, $\mathcal{S}_r$-invariantes de $\mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma})$. Ceci sugère une autre manière pour exprimer $h^0(K, \mathcal{F}^{\otimes m})$, manière qui ne fait pas appel au résultat (25), assez délicat à prouver. On calcule la multiplicité de la représentation triviale de $\mathcal{S}_r$ sur $H^0(X, m\Gamma)$.

- *Etape 1.* On a l'isomorphisme suivant:

$$\Psi_*\Psi^*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \simeq \bigoplus_{\mathcal{N}^{\otimes r}\simeq\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \otimes \Sigma^*\mathcal{N} .$$

D'après la formule de projection,

$$\Psi_*\Psi^*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \simeq \Psi_*(\Psi^*\mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \otimes \mathcal{O}_{X\times A}) \simeq \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma}) \otimes \Psi_*\mathcal{O}_{X\times A} .$$

Donc il faut interpréter l'image directe du faisceau structurel. Mais $\mathcal{O}_{X\times A} \simeq Q^*\mathcal{O}_A$. Alors

$$\begin{aligned} \Psi_*\mathcal{O}_{X\times A} &\simeq \Psi_*Q^*\mathcal{O}_A \\ &\simeq \Sigma^*(\varrho_r)_*\mathcal{O}_A \\ &\simeq \Sigma^*\bigoplus_{\mathcal{N}^{\otimes r}\simeq\mathcal{O}_A} \mathcal{N} \\ &\simeq \bigoplus_{\mathcal{N}^{\otimes r}\simeq\mathcal{O}_A} \Sigma^*\mathcal{N} . \end{aligned}$$

Le résultat suit.

• *Etape 2.*

$$\dim H^0(K, \mathcal{F}^{\otimes m}) = (\frac{r}{m})^g \binom{m^g + r - 1}{r} .$$

En exprimant $\Psi^* \mathcal{O}_{A^r}(\widetilde{\Gamma})$ comme $P^*\mathcal{O}_X(\Gamma) \otimes Q^*\mathcal{O}_A(r\Theta)$ on observe que l'action de $\mathcal{S}_r$ est triviale sur $Q^*\mathcal{O}_A(r\Theta)$. Ensuite, on a que

$$\begin{aligned} & H^0(X, \mathcal{O}_X(m\Gamma)) \oplus H^0(A, \mathcal{O}_A(mr\Theta)) \\ & \qquad \simeq \; H^0(X \times A, \Psi^*\mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma})) \\ & \qquad \simeq \; H^0(A^r, \Psi_*\Psi^*\mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma})) \\ & \qquad \simeq \; H^0(A^r, \textstyle\bigoplus_{\mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \mathcal{O}_A} \mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma}) \otimes \Sigma^*\mathcal{N}) \\ & \qquad \simeq \; \textstyle\bigoplus_{\mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \mathcal{O}_A} H^0(A^r, \mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma}) \otimes \Sigma^*\mathcal{N}) \\ & \qquad \simeq \; \textstyle\bigoplus_{a \in A_r} T^*_{(a,\ldots,a)} H^0(A^r, \mathcal{O}_{A^r}(m\widetilde{\Gamma})) , \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme provenant du fait que $\Sigma^*\mathcal{N}$ représente une classe $\mathcal{S}_r$-invariante d'ordre r dans $\mathrm{Pic}^0(A^r)$. En conclusion

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m\Gamma)) \oplus H^0(A, \mathcal{O}_A(mr\Theta)) \simeq \textstyle\bigoplus_{a \in A_r} (\bigotimes_1^r H^0(A, \mathcal{O}_A(m\Theta))) , \quad (26)$$

où $\mathcal{S}_r$ agit trivialement sur le deuxième facteur du membre de gauche et en permutant les facteurs dans chaque terme de la somme du membre de droite. En regardant la partie $\mathcal{S}_r$-invariante de cet isomorphisme, on obtient

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m\Gamma))^{\mathcal{S}_r} \oplus H^0(A, \mathcal{O}_A(mr\Theta)) \simeq \textstyle\bigoplus_{a \in A_r} \mathrm{Sym}^r H^0(A, \mathcal{O}_A(m\Theta)) ,$$

où on identifie $(\bigotimes_1^r H^0(A, \mathcal{O}_A(m\Theta)))^{\mathcal{S}_r}$ avec $\mathrm{Sym}^r H^0(A, \mathcal{O}_A(m\Theta))$. Donc

$$\dim H^0(K, \mathcal{F}^{\otimes m}) \cdot (rm)^g = r^{2g} \binom{m^g + r - 1}{r} .$$

Remarque 3.1.6 L'isomorphisme (26) nous permet de décrire la représentation de $\mathcal{S}_r$ sur $H^0(X, \mathcal{O}_X(m\Gamma))$.

Exemple. Pour $r = 3$, soient ρ la représentation de $\mathcal{S}_3$ sur $H^0(X, \mathcal{O}_X(m\Gamma))$ et R celle sur $(\bigotimes_1^3 H^0(A, \mathcal{O}_A(m\Theta))$. On dénote par U, U' et V les représentations triviale, alternée et respectivement normale de $\mathcal{S}_3$. En prenant le caractère de (26) on a que

$$(3m)^g \chi_{\mathrm{U}} \cdot \chi_\rho = 3^{2g} \chi_{\mathrm{R}} .$$

Après un calcul facile pour le caractère de R, on conclut que

$$\begin{aligned}\chi_\rho &= (\frac{3}{m})^g \chi_{\mathrm{R}} \\ &= (\frac{3}{m})^g \left[\binom{m^g+2}{3} \chi_{\mathrm{U}} + \binom{m^g}{3} \chi_{\mathrm{U}'} + 2\binom{m^g+1}{3} \chi_{\mathrm{V}} \right] .\end{aligned}$$

3.2 L'isomorphisme β

Nous allons démontrer le résultat annoncé:

Théorème 3.2.1 *Soit $\delta : K \to \mid r\Theta \mid$ définie par*

$$\delta([a_1, \ldots, a_r]) = \Theta_{a_1} + \cdots \Theta_{a_r} .$$

Il existe un isomorphisme $\beta : \mathbf{P}(H^0(K, \mathcal{F})^\vee) \to \mid r\Theta \mid$ tel que $\delta = \varphi_{\mathcal{F}} \circ \beta$.

Avant de commencer la démonstration, nous rappelons les résultats dans [22], dont nous avons besoin. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur A.

1. On dénote par $A_{\mathcal{L}}$ le sous-groupe de A formé par les points $a \in A$ tels que $T_a^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$. $A_{\mathcal{L}}$ est un groupe d'ordre fini; si $\delta_1 \mid \ldots \mid \delta_g$ représentent les diviseurs élémentaires de $\mathcal{L}$, alors $A_{\mathcal{L}}$ est isomorphe[5] à $G \times \widehat{G}$, où $G = \bigoplus_{i=1}^g \mathbf{Z}/\,\delta_i\mathbf{Z}$ et $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$.

2. Le groupe de Heisenberg associé à $\mathcal{L}$ est le groupe $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ formé par les couples (η, a), où $a \in A_{\mathcal{L}}$ et η est un isomorphisme de $T_a^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$. La loi de composition est définie par $(\eta, a) \circ (\eta', a') = (T_{a'}^*\eta \circ \eta', a + a')$. La projection de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ sur le premier facteur donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{L}) \longrightarrow A_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0. \tag{27}$$

   Le noyau représente les isomorphismes de $\mathcal{L}$ avec lui-même. On démontre que ce noyau est exactement le centre de $\mathcal{H}(\mathcal{L})$.

[5] Ayant le groupe de Heisenberg et le fait que son centre est isomorphe à $\mathbf{C}^*$, voir 2., on introduit sur $A_{\mathcal{L}} \times A_{\mathcal{L}}$ une forme bilinéaire non-dégénérée anti-symétrique $e^{\mathcal{L}}$ définie par $e^{\mathcal{L}}(a,b) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}$, où $\tilde{a}$ est un élément dans $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ au-dessus de a. Les valeurs sont 1 et -1. Alors $A_{\mathcal{L}}$ se décompose en somme directe tel que $e^{\mathcal{L}}$ est identiquement 1 sur les facteurs et donne un accouplement non-dégénéré entre eux. L'isomoprphisme dont on parle, est obtenu en choisissant une identification entre un de deux facteur et G, et ensuite, utilisant $e^{\mathcal{L}}$.

3. Le groupe de Heisenberg associé à $\mathcal{L}$ opère de manière évidente sur l'espace des sections globales de $\mathcal{L}$. Pour $(\eta, a) \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$ et $s \in H^0(A, \mathcal{L})$,

$$(\eta, a) \cdot s = T^*_{-a}\eta^{-1}(s) .$$

Si D est le diviseur associé à la section globale s, alors le diviseur correspondant à $(\eta, a) \cdot s$ est $D + a = D_{-a} = T^*_{-a}D$. On remarque que l'action du centre est celle donnée par son caractère naturel, la multiplication. Ceci implique une partie du résultat:

Proposition(cf. [22],§1) *Le groupe $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ a une unique représentation irréductible telle que le centre agisse par son caractère naturel. De plus, $H^0(A, \mathcal{L})$ est un $\mathcal{H}(\mathcal{L})$-module irréductible.*

On applique ces résultats pour le faisceau $\mathcal{O}_A(r\Theta)$. Le groupe $A_{\mathcal{L}}$ est le sous-groupe des points d'ordre r de A, $A_r \simeq (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^g \times (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^g$. Soit $\mathcal{H} = \mathbf{C}^* \times (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^g \times (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^g$.

Lemme 3.2.2 *Les diviseurs $\Theta_{x_1} + \cdots + \Theta_{x_r}$, avec $(x_1, \ldots, x_r) \in X$ engendrent l'espace projectif $\mathbf{P}(H^0(A, \mathcal{O}_A(r\Theta)))$.*

Démonstration. Puisque $H^0(A, \mathcal{O}_A(r\Theta))$ est une représentation irréductible de $\mathcal{H}(r\Theta)$, en passant à l'espace projectif, on obtient que $\mathbf{P}(H^0(A, \mathcal{O}_A(r\Theta)))$ est une représentation irréductible de A_r. Mais on a vu, cf. 3. ci-dessus, qu'au niveau des diviseurs, l'action de A_r est donnée par translation. Un diviseur de la forme $\Theta_{x_1} + \cdots + \Theta_{x_r}$, avec $(x_1, \ldots, x_r) \in X$ va être appliqué dans un diviseur de la même forme, donc le résultat. Plus précisément, on a montré, par exemple, que les diviseurs $\{r\Theta_a \mid a \in A_r\}$ engendre l'espace des diviseurs r-thêta. **Q.E.D.**

Démonstration du théorème 3.2.1. On va montrer d'abord qu'il existe une application β telle que $\varphi_{\mathcal{F}} \circ \beta = \delta$. D'après le lemme 3.2.2, l'image de δ engendre l'espace $\mid r\Theta \mid$ tout entier et comme les dimensions sont les mêmes, on conclut que β est un isomorphisme. L'existance va être établie dans le lemme suivant au niveau de X puisque la construction est $\mathcal{S}_r$-invariante. **Q.E.D.**

Lemme 3.2.1 *Soit $a \in A$ et H_a le hyperplan dans $\mid r\Theta \mid$ formé par les diviseurs qui contiennent le point a. Alors $\Delta^* H_a \sim \Gamma$.*

Démonstration. Ensemblistement, sur X, on a

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(H_a) &= \{(a_1,\ldots,a_r) \mid a \in \Theta_{a_1} + \cdots \Theta_{a_r}\} \\ &= \{(a_1,\ldots,a_r) \mid \exists j \text{ tel que } a \in \Theta_{a_j}\} \\ &= \{(a_1,\ldots,a_r) \mid \exists j \text{ tel que } a_j \in \Theta_a\} \\ &= (\sum_{j=1}^{r} p_j^*\Theta_a) \mid_X \ .\end{aligned}$$

Puisque $\Delta^* = (\delta \circ \pi)^*$, on a, d'après la remarque 3.1.3, que

$$\Delta^* H_a \sim m\,\Gamma \ ,$$

où m est un entier positif.

On affirme que $m = 1$. L'idée de la démonstration est de se ramener au cas $r = 2$ tout en tenant compte de la multiplicité m. Soit $i : A \longrightarrow X$ l'inclusion $i(a) = (a, -a, 0, \ldots, 0)$. La restriction de l'application Δ est donnée par

$$a \mapsto \Theta_a + \Theta_{-a} + (r-2)\Theta \ .$$

L'image est un sous-espace projectif W, isomorphe à $\mid 2\Theta \mid$. On regarde l'image inverse du diviseur H_a sur A. On a

$$(\Delta \circ i)^* H_a = i^*(m\,(\sum_{j=1}^{r} p_j^*\Theta_a) \mid_X) = m\,(\Theta_{-a} + \Theta_a).$$

Mais $(\Delta \circ i)^* H_a$ peut être obtenu en restreignant l'hyperplan H_a à W et ensuite, en prenant l'image inverse sur A. Puisque la restriction à W est un hyperplan dans W, on conclut que $m = 1$ d'après l'introduction. **Q.E.D.**

3.3 L'étude de l'application $\varphi_{\mathcal{F}}$

Dans cette partie on suppose que sur la variété abélienne A le diviseur Θ est irréductible . Nous allons établir le résultat suivant:

Théorème 3.3.1 *Si Θ est irréductible sur A, alors l'application*

$$\varphi_{\mathcal{F}} : K \longrightarrow \mathbf{P}(H^0(K, \mathcal{F})^\vee) = \mathbf{P}^{r^g - 1}$$

est injective. De plus, elle est un plongement en dehors des points singuliers de la variété de Kummer généralisée K.

Dans le cas particulier $r = 2$, le fait que l'application plonge la variété de Kummer toute entière est bien connu, cf. [20] par exemple. Notre démonstration est inspirée de la même argumentation.

Démonstration. Encore une fois, on va raisonner sur la variété $X \subset A^r$ et ensuite, on va quotienter par $\mathcal{S}_r$. Pour établir l'injectivité de $\varphi_{\mathcal{F}}$, on doit montrer que si $[a'_1, \ldots, a'_r]$ et $[a''_1, \ldots, a''_r]$ sont deux points différents sur K, alors $\varphi_{\mathcal{F}}([a'_1, \ldots, a'_r]) \neq \varphi_{\mathcal{F}}([a''_1, \ldots, a''_r])$. Mais d'après le théorème 3.2.1, il suffit de prover l'assertion pour δ. Si on suppose que

$$\Theta_{a'_1} + \cdots + \Theta_{a'_r} = \Theta_{a''_1} + \cdots + \Theta_{a''_r},$$

puisque le diviseur thêta sur A est irréductible, il existe une permutation σ telle qu'on ait $a''_j = a'_{\sigma j}$, quel que soit $1 \leq j \leq r$. Donc $[a'_1, \ldots, a'_r] = [a''_1, \ldots, a''_r]$.

Pour démontrer que l'application $\varphi_{\mathcal{F}}$ est un plongement en dehors des points singuliers, on considère un point $x = (a_1, \ldots, a_r)$ sur X tel que les facteurs soient différents, et on montre que l'application tangente est injective. Soit donc $v = (v_1, \ldots, v_r) \in TX_x$ un vecteur tangent non nul. Il suffit de trouver un diviseur linéairement équivalent à Γ qui contient x et pour lequel le vecteur v n'est pas tangent. Soit $\tilde{\Gamma}_t = p_1^*\Theta_{t-a_1} + \ldots + p_r^*\Theta_{t-a_1}$, avec $t \in \Theta$. On sait que $\tilde{\Gamma}_t \mid_X \sim \Gamma$, et puisque $a_1 = t - (t - a_1) \in \Theta + (-t + a'_1)$, $x \in \tilde{\Gamma}_t$. D'après les hypothèses faites, on peut préciser que $x \in p_1^*\Theta_{t-a_1}$ et que $x \notin p_j^*\Theta_{t-a_1}$ quel que soit $j \geq 2$. On finit en choisissant un t tel que v_1 ne soit pas tangent à Θ_{t-a_1}. Le choix est possible grâce au lemme suivant. **Q.E.D.**

Lemme 3.3.1 *(cf. [28]) Soient Θ un diviseur ample et irréductible sur A et*

$$\mathcal{G}(\Theta) : \Theta - \mathrm{Sing}\Theta \longrightarrow \mathbf{P}(TA_0^\vee)$$

l'application de Gauss associée à Θ qui fait correspondre à t le projectivisé de $T_{t,*}(T\Theta)_t$. Alors $\mathcal{G}(\Theta)$ est une application dominante.

Démonstration. Premièrement, on doit remarquer que l'image de $\mathcal{G}(\Theta)$ n'est pas contenue dans un hyperplan (si non, l'application de restriction de $H^0(A, \Omega_A^{g-1})$ à $H^0(\Theta, \Omega_\Theta^{g-1})$ aurait un noyau non nul, mais d'après le théorème de la section hyperplane elle doit être injective).

Ensuite, si on suppose que l'application de $\mathcal{G}(\Theta)$ n'est pas dominante, alors les fibres de $\mathcal{G}(\Theta)$ sont de dimension positive. Soit F une composante irréductible d'une fibre générique. Quel que soit $t \in F$, l'espace $T_{t,*}(T\Theta)_t$ est égal à un hyperplan V qui ne dépend pas de t. En particulier $T_{t,*}(TF)_t \subset V$, quel que soit $t \in F$. On considère $L = \mathrm{Vect}\{T_{t,*}(TF)_t \mid t \in F\}$. $L \subset V$ et en même temps, L est égal a l'espace tangent en 0 à la sous-variété abélienne engendrée par F. Puisque les sous-variétés abéliennes sont rigides, on conclut que $L \subset T_{t,*}(T\Theta)_t$ quel que soit $t \in \Theta$. Mais alors, l'image de $\mathcal{G}(\Theta)$ est dégénérée, d'où une contradiction. **Q.E.D.**

References

[1] M. Armstrong: Calculating the fundamental group of an orbit space. Proc. A.M.S. **84**, 267-271 (1982)

[2] R. Barlow: A simply connectsd surface of general type with $p_g = 0$. Invent.Math. **79**, 293-301 (1985)

[3] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: Compact complex surfaces. Springer Berlin 1984

[4] A. Beauville: Variétés de Prym et Jacobiennes intermédiaires. Ann. sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série **10**, 309-391 (1977)

[5] A. Beauville: Surfaces algébriques complexes. Astérisque **54** 1978

[6] A. Beauville: Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans $\mathbf{P}^3$ ($\mu(5) = 31$). Journées de géométrie algébrique d'Angers, juillet 1979, Sijthoff and Noordhoff 1980 Alphen aan den Rijn

[7] M. Beltrametti, A. J. Sommese: Zero cycles and k-th order embeddings of smooth projective surfaces, in Problems in the theory of surfaces and their classification. Symposia Mathematica XXXII, Academic Press, 33-48 (1991)

[8] S. Brivio: Smooth Enriques surfaces in $\mathbf{P}^4$ and exceptional bundles. Math.Z. **213**, 509-521 (1993)

[9] A. Conte, A. Verra: Reye constructions for nodal Enriques surfaces. to appear in Trans. of Am.Math.Soc.

[10] M. Cornalba: Una osservazione sulla topologia dei rivestimenti ciclici di varietà algebriche. Bol. U.M.I. **18-A**, 323-328 (1981)

[11] F. Cossec, I. Dolgacev: Enriques surfaces. Birkhauser 1989

[12] I. Dolgacev, I. Reider: On rank 2 vector bundles with $c_1^2 = 10$ and $c_2 = 3$ on Enriques surfaces, in Algebraic geometry. Chicago 1989 L.N.M. **1479**

[13] J.-M. Drezet, M.S. Narasimhan: Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés stables sur les courbes algébriques. Invent.Math., **97**, 53-94 (1989)

[14] E. E. Floyd: Some characterisations of interior maps. Ann.Math., **51**, 571-575 (1950)

[15] Ph. A. Griffiths, J. Harris: Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons 1978

[16] Ph. A. Griffiths, J. Harris: Residues and zero-cycles on algebraic varieties. Ann. of Math. **108**, 461-505 (1978)

[17] J. H. Keum: Some new surfaces of general type with $p_g = 0$. preprint (1988)

[18] H. Kim. Exceptional bundles on nodal Enriques surfaces. preprint (1991)

[19] H. Kim: Stable vector bundles of rank two over Enriques surfaces. preprint (1992)

[20] H. Lange, M.S. Narasimhan: Squares of ample line bundles on abelian varieties. Expo.Math., **7**, 275-287 (1989)

[21] S. Mukai: Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or a $K3$ surface. Invent.Math. **77**, 101-116 (1984)

[22] D. Mumford: On the equations defining abelian varieties. Invent.Math., **1**, 287-354 (1966)

[23] D. Mumford: Abelian Varieties. Oxford University Press 1970

[24] D. Mumford: Prym varieties I. Contributions to analysis, 287-354 , London New-York, Academic Press, 1974

[25] V. V. Nikulin: On Kummer surfaces. Math.URSS Izvestija **9**, 261-275 (1975)

[26] Z. Qin: Chamber structures of algebraic surfaces with Kodaira dimension 0 and moduli spaces of stable rank two bundles. Math.Z. **207**, 121-136 (1991)

[27] C. P. Ramanujam: Remarks on Kodaira vanishing theorem. J.Indian Math.-Soc. **36**, 41-51 (1972)

[28] Z. Ran: On subvarieties of abelian varieties. Invent.Math., **62**, 459-479 (1981)

[29] M. Reid: Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 1$. J.Fac.Sci.Univ.Kyoto, Sect. 1A **25** (1978)

[30] M. Reid: Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 2$. Unpublished manuscripts and letters

[31] B. Saint-Donat: Projective models of $K3$ surfaces. Am.J. of Math. **96**, 602-639 (1974)

[32] F. Takemoto: Stable vector bundles on algebraic surfaces II. Nagoya Math. J. **52**, 173-195 (1973)

[33] N. A. Todorov: A construction of surfaces with $p_g = 1$, $q = 0$ and $2 \leq K^2 \leq 8$. Counterexemples of the global Torelli theorem. Invent.Math. **63**, 287-304 (1981)

[34] A.N. Tyurin: Special 0-cycles on a polarised $K3$ surface. Math.USSR Izvestyia **30**, 123-143 (1988)

[35] ***: Géométrie des surfaces $K3$: Modules et périodes. Ed. A. Beauville, Astérisque **126** 1985