



HAL
open science

Modèles 3D hybrides pour les machines électriques

Théo Carpi

► **To cite this version:**

Théo Carpi. Modèles 3D hybrides pour les machines électriques. Autre. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2021. Français. NNT : 2021INPT0034 . tel-04170590

HAL Id: tel-04170590

<https://theses.hal.science/tel-04170590v1>

Submitted on 25 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Génie Électrique

Présentée et soutenue par :

M. THÉO CARPI

le jeudi 1 avril 2021

Titre :

Modèles 3D hybrides pour les machines électriques

Ecole doctorale :

Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEETS)

Unité de recherche :

Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE)

Directeur(s) de Thèse :

M. YVAN LEFEVRE

Rapporteurs :

M. DANIEL MATT, UNIVERSITE MONTPELLIER 2

M. GEORGES BARAKAT, UNIVERSITE DU HAVRE

Membre(s) du jury :

M. CHRISTOPHE ESPANET, UNIVERSITE DE FRANCHE COMTE, Président

M. JEAN-FRANCOIS LLIBRE, UNIVERSITE TOULOUSE 2, Membre

MME MAYA HAGE HASSAN, CENTRALESUPELEC GIF SUR YVETTE, Membre

M. NELSON SADOWSKI, UNIV.FED.DE SANTA CATARINA FLORIANOPOLIS, Membre

M. YVAN LEFEVRE, UNIVERSITE TOULOUSE 2, Membre

Remerciements

Ces travaux de thèse se sont déroulés au sein du groupe GREM3 (Groupe de Recherche en Electrodynamique) au Laboratoire LAPLACE. Je tiens à remercier en premier lieu Yvan Lefèvre et Carole Hénaux pour m'avoir offert l'opportunité de travailler sur ce sujet de thèse parfaitement adapté à ce que je recherchais.

Un grand merci à Yvan Lefèvre, mon directeur de thèse, avec qui j'ai énormément appris. Ce fut un plaisir de travailler à tes côtés pendant 3 ans sur ce nouveau concept de machine auquel j'ai tout de suite accroché. Tu m'as transmis un peu de ta vision des machines et cela me sera plus que bénéfique pour la suite de ma carrière. Je tiens également à remercier Jean-François Llibre qui m'a co-dirigé pendant la seconde moitié de ma thèse. La qualité de son encadrement et le temps qu'il a pu se dégager furent extrêmement bénéfiques. Merci également à Dominique Harribey pour son savoir-faire et sa bonne humeur. Sa contribution sur le développement de la machine toroïdale fut indéniable.

Merci à Toulouse Tech Transfert, et plus particulièrement Louison Maechler et Vincent Chaudon pour leur collaboration aboutissant à un brevet.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury Georges Barakat, Daniel Matt, Christophe Espanet, Nelson Sadowski et Maya Hage Hassan qui ont apporté un regard extérieur très enrichissant aux travaux menés dans cette thèse. Je remercie plus particulièrement Nelson Sadowski pour m'avoir accueilli au Laboratoire GRUCAD de Florianópolis au Brésil pour une mission de deux mois. Je garderai à jamais un excellent souvenir de ces deux mois passés là-bas.

Je remercie toute l'équipe GREM3 pour leur accueil chaleureux et la bonne ambiance qui y règne. Je remercie également mes collègues doctorants et plus particulièrement Youness et Maxime, avec qui j'ai pu partager rires, boulot ou encore enseignements. Merci à Robin et Jonathan, mes potes de l'n7 avec qui je me suis lancé et dans cette aventure.

Un grand merci à mes amis et toute ma famille sans qui je n'aurai pu traverser toutes ces années d'études.

Un immense merci à mes parents, comptables hors pairs qui ont géré mon compte en banque de main de maître pendant ces trois années marquées par un revenu dérisoire. Merci Père de m'avoir transmis cette fabuleuse passion pour le football qui fut une source d'inspiration inépuisable pour venir à bout de ce sujet difficile mais passionnant. Merci Mère pour ces repas du dimanche exquis qui furent et qui sont encore une source d'énergie d'une puissance inégalée.

Enfin, merci à ma sœur Pauline a.k.a « Paul Scholes » pour m'avoir permis de réviser les cours de l'N7 pendant ma thèse et ainsi rattraper les innombrables cours manqués pendant ma formation d'ingénieur. En outre, ses conseils avisés en matière de conversion électromécanique m'ont guidé et ont sans nul doute contribué à l'élaboration de la machine de demain.

Résumé

Dans le domaine des actionneurs électriques dédiés aux systèmes embarqués, l'augmentation de la densité de puissance ou de la puissance spécifique est devenue un enjeu primordial. En termes de couple spécifique, les machines électriques offrant les meilleures performances sont les machines à aimants permanents, qui sont l'objet d'étude de ce manuscrit.

Parmi les axes possibles d'amélioration des machines électriques, l'augmentation de la surface d'interaction entre l'onde de champ magnétique rotorique et l'onde de densité de courant surfacique statorique permet d'envisager un gain important en termes de couple spécifique. Dans ce but, nous avons pensé à une nouvelle configuration géométrique de machine, qui théoriquement tire 100% du cuivre présent pour générer un couple. Cette machine présente une géométrie toroïdale et constitue l'objet d'étude de cette thèse. Ainsi, nous nous attacherons à l'élaboration du modèle de cette nouvelle machine dans le but d'étudier ses performances et de les comparer aux configurations de machines déjà existantes. Pour y aboutir, nous étudierons préalablement ce qui se fait en termes de modélisation analytique dans la littérature. Ainsi, nous chercherons à élaborer une méthode de modélisation commune à toutes ces configurations géométriques y compris la nouvelle topologie toroïdale afin de pouvoir les comparer sous les mêmes hypothèses mathématiques.

Dans ce but, une méthode de modélisation hybride liant la méthode analytique à la méthode des différences finies a été développée pour modéliser en trois dimensions les machines électriques. L'objectif de cette modélisation est de rester simple au niveau de la complexité du développement et du temps de calcul afin de les intégrer dans des algorithmes de dimensionnement/optimisation. Cette méthode sera validée par éléments finis et expérimentalement sur le cas d'une machine à flux axial avant d'être utilisée pour modéliser la nouvelle configuration de machine proposée dans cette thèse.

Abstract

In the field of electric actuators dedicated to embedded systems, increasing power density has become a major challenge. In terms of torque mass ratio, the electrical machines offering the best performance are permanent magnet machines, which are the focus of this manuscript. However, on all existing machines, the presence of heads winding on which no torque is produced can be noticed, in addition, the production of heat over them is associated with a loss in the overall power balance.

Among the possible areas for improvement of electrical machines, increasing the interaction area between the rotor magnetic field and the stator current density enables a significant gain in terms of torque mass ratio. To this end, we have thought of a new machine structure, which theoretically draws 100% of the copper present in the machine to generate torque. This machine has a toroidal structure and is the subject of this research. Thus, we will focus on the elaboration of the model of this new machine structure in order to study its performances and to compare them to the already existing machine structures. In order to achieve this goal, we will first investigate what is done in terms of analytical modeling on existing machines. Thus, we will seek to develop a modeling method common to all these machines including the proposed new structure in order to be able to compare them under the same mathematical assumptions.

For this purpose, a hybrid modeling method linking the analytical method to the finite difference method has been developed to model in three dimensions electric machines. The goal of this modeling is to remain relatively simple in terms of complexity and computation time in order to integrate them into sizing/optimization algorithms. This method will be developed and validated by finite elements and experimentally on the case of an axial flux machine before being used to model the new machine structure proposed in this thesis.

Table des Matières

Résumé.....	7
Abstract.....	9
Table des Matières	11
Introduction Générale	15
Chapitre 1 Introduction à la modélisation analytique des machines électriques	21
1.1 Introduction	22
1.2 Méthodologie de modélisation	22
1.2.1 Description mathématiques des sources	23
1.2.1 Conditions de passage et conditions aux limites	26
1.2.2 Méthode de calcul du couple	28
1.2.3 Interprétation qualitative des machines sous forme d'onde	32
1.2.4 Structure toroïdale	34
1.3 Coordonnées curvilignes orthogonales	35
1.3.1 Définitions	36
1.3.2 Opérateurs différentiels	37
1.4 Séparation des variables	39
1.4.1 Séparation simple	40
1.4.2 R-séparation.....	42
1.4.3 Application au cas toroïdal trivial	44
1.4.4 Nouveau repère toroïdal R-séparable	46
1.5 Conclusion.....	47
Chapitre 2 Modélisation analytique en deux dimensions	49
2.1 Introduction	50
2.2 Etat de l'art de la modélisation en deux dimensions	50
2.2.1 Machine linéaire dans le repère cartésien.....	51
2.2.2 Machine à flux radial.....	58

2.2.3 Machine tubulaire	63
2.2.4 Machine à flux axial.....	67
2.3 Modèle de dimensionnement de la machine toroïdale	70
2.3.1 Méthode unifiée de dimensionnement	71
2.3.2 Extension du modèle unifié à la machine tubulaire	72
2.3.3 Comparaison des performances	83
2.4 Conclusion	93
Chapitre 3 Modélisation Hybride en 3 Dimensions	95
3.1 Introduction.....	96
3.2 Etat de l'art de la modélisation analytique du champ magnétique à vide dans les machines à flux axial.....	96
3.3 Méthode de modélisation hybride en 3 dimensions	100
3.3.1 Définition du problème	100
3.3.2 Application de la méthode de séparation des variables	105
3.3.3 Application de la méthode des différences finies	107
3.4 Calcul du couple statique et de la force électromotrice	111
3.5 Validation par éléments finis	112
3.6 Généralisation de la forme d'aimants	118
3.6.1 Modélisation d'une forme d'aimant quelconque	118
3.6.2 Application au cas d'aimants cylindriques	123
3.6.3 Validation expérimentale	127
3.7 Conclusion	133
Chapitre 4 Modélisation Hybride en 3 Dimensions de la machine toroïdale	135
4.1 Introduction.....	136
4.2 Système de coordonnées toroïdales R-séparable.....	136
4.2.1 Caractéristiques du système de coordonnées toroïdales	136
4.2.2 Séparation des variables en coordonnées toroïdales	138
4.2.3 Nouvelle machine toroïdale	140
4.3 Calcul du champ magnétique à vide	141
4.3.1 Définition du problème	141
4.3.2 Modèle hybride 1D	144
4.3.3 Modèle 2D.....	149
4.4 Validation par éléments finis	161

4.5 Conclusion.....	167
Conclusion Générale.....	169
Annexe : Calcul de la série de Fourier de deux variables.....	173
Bibliographie	177
Table des Figures	183
Liste des Tableaux	187

Introduction Générale

Dans le domaine des machines électriques tournantes, l'augmentation de la densité de puissance (W/m^3) ou de la puissance spécifique (W/kg) est devenue un enjeu primordial notamment dans le domaine des transports, aussi bien aérien que routier [1]. En termes de couple spécifique (N.m/kg), les machines électriques offrant les meilleures performances sont les machines à aimant permanents, qui sont l'objet d'étude de ce manuscrit.

Pour une machine synchrone à pôles lisses à flux radial, le couple est proportionnel au champ magnétique d'entrefer, à la charge linéique et à la surface d'alésage du stator [2]. La surface d'alésage peut être considérée comme une surface où interagit l'onde de champ magnétique produit par le rotor et l'onde de densité de courant surfacique produit par les courants statoriques [1]. La recherche de l'augmentation du couple spécifique peut être vue comme la recherche de l'augmentation de cette surface d'interaction à masse constante.

Si on s'intéresse de plus près à l'évolution des configurations géométriques des machines à aimant permanents, on constate une évolution dans ce sens. En effet, les machines conventionnelles à flux radial ont d'abord évolué de la configuration mono-entrefer vers la configuration poly-entrefers [3] [4]. Ainsi, comparativement à la machine à mono-entrefer, la surface d'interaction est doublée. Sur la Figure 0-1 on peut voir que deux types de bobinage sont utilisés : soit on utilise deux fois le bobinage classique réparti ou dentaire (Figure 0-1 (b)), soit un bobinage en anneau Gramme (Figure 0-1 (a)). Ce dernier est appelé plus communément dans la littérature récente bobinage toroïdal. Cette topologie double entrefer a également été déclinée sur les machines tubulaires afin d'augmenter la force générée [5], [6].

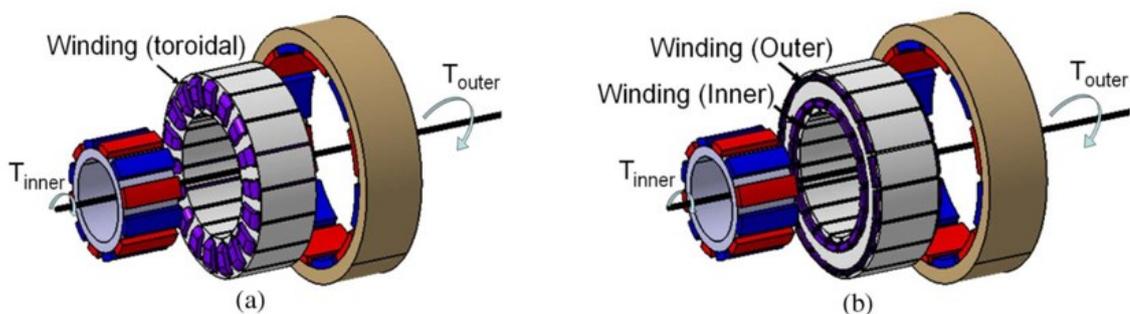


Figure 0-1 : Vue éclatée du bobinage (a) toroïdal et (b) radial de la machine à double rotor comprenant 12 pôles au rotor et 18 encoches au stator [3]

Dès leur apparition les machines à flux axial, intéressantes de par leur structure compacte [7], sont majoritairement conçues avec un double-entrefer. Cependant, cette machine s'est vue déclinée sous plusieurs topologies comme on peut le voir sur la Figure 0-2. Les types YASA et TORUS sont les plus connus et permettent d'augmenter considérablement la puissance spécifique [8], [9].

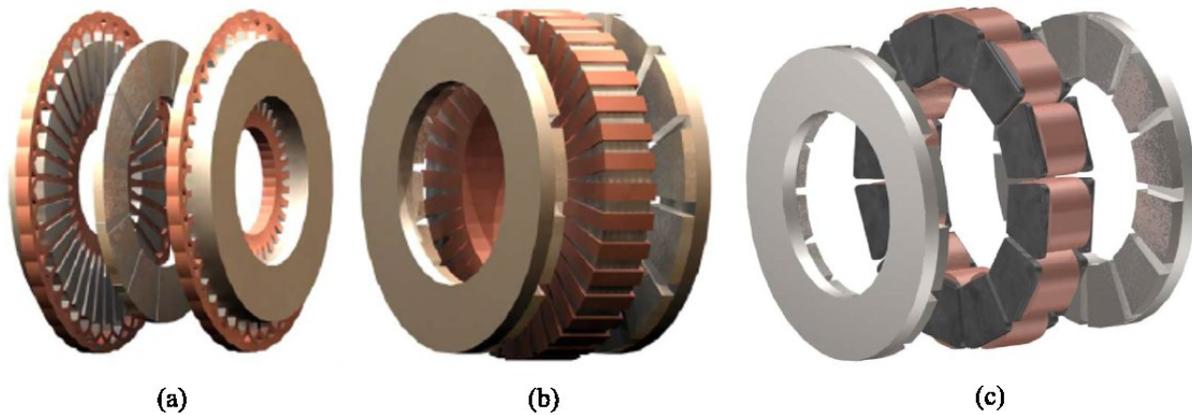


Figure 0-2 : Machines à flux axial à rotor interne (a), de type TORUS (b) et de type YASA (c) [9]

Enfin, si on regarde de plus près les machines à flux radial à double entrefer ainsi que la machine à flux axial de type TORUS, nous retrouvons le même type de bobinage en anneau Gramme dit toroïdal, où les bobinages sont enroulés autour d'un tore de section rectangulaire. Il est donc possible de combiner les configurations géométriques radiales et axiales pour augmenter encore plus la surface d'interaction. Ce type de machine est appelé machine hybride à flux radial et axial. Elle a été illustrée dans [10] (cf. Figure 0-3) et [11] (cf. Figure 0-4). Cet assemblage n'est possible qu'avec un bobinage toroïdal. En effet, les conducteurs sont bobinés radialement et rebouclés axialement, rendant possible la création d'une force dans la direction azimutale sur une grande partie de la surface de cuivre disponible. Tout autre bobinage, par exemple ceux des Figure 0-1 (b) et Figure 0-2 (c) ne permettent pas cet assemblage hybride.

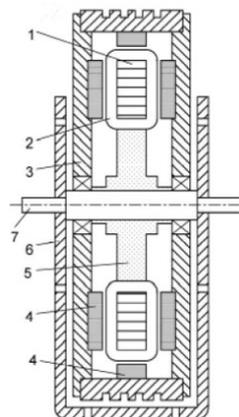


Figure 0-3 : Machine hybride à flux radial et axial : 1 - stator, 2 – enroulements stator, 3 - rotor, 4 – aimant permanent, 5 - résine, 6 - châssis, 7 - arbre [10]

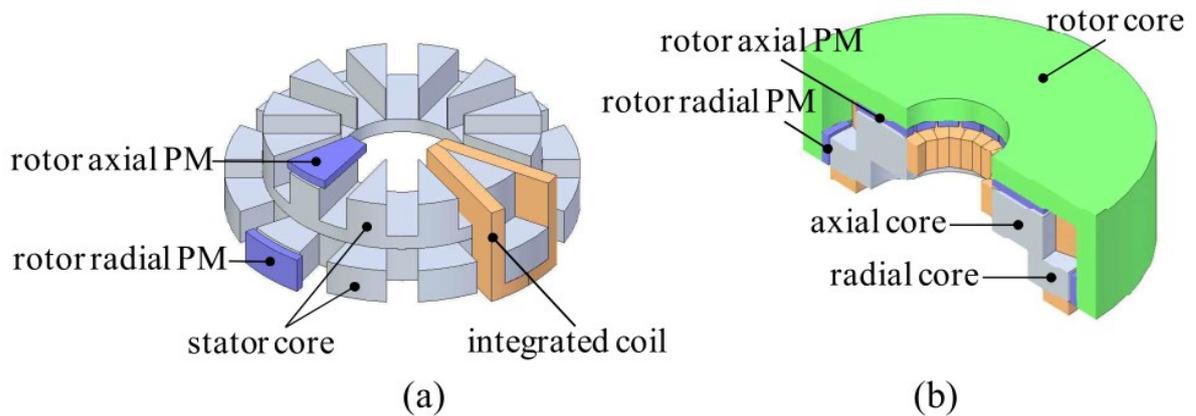


Figure 0-4 : Structure de la machine hybride : (a) assemblage de la structure, (b) vue en coupe [11]

Cette évolution des machines qui tend vers une meilleure utilisation du cuivre nous a amené à penser à une nouvelle configuration géométrique de machine. Cette machine présente une configuration toroïdale et constitue l'objet d'étude de cette thèse.

La machine toroïdale idéale à aimants permanents est représentée sur la Figure 0-5. Le rotor est constitué d'un noyau ferromagnétique toroïdal sur lequel sont placés les aimants permanents de forme toroïdale également. Les aimants orientés alternativement sont représentés en rouge et bleu. Le stator est constitué d'un tore creux, il est représenté en transparence afin de voir l'intérieur de la machine. Enfin les conducteurs sont positionnés sur la surface intérieure du stator. La machine représentée est dite « idéale » puisque le mouvement du rotor ne peut être récupéré.

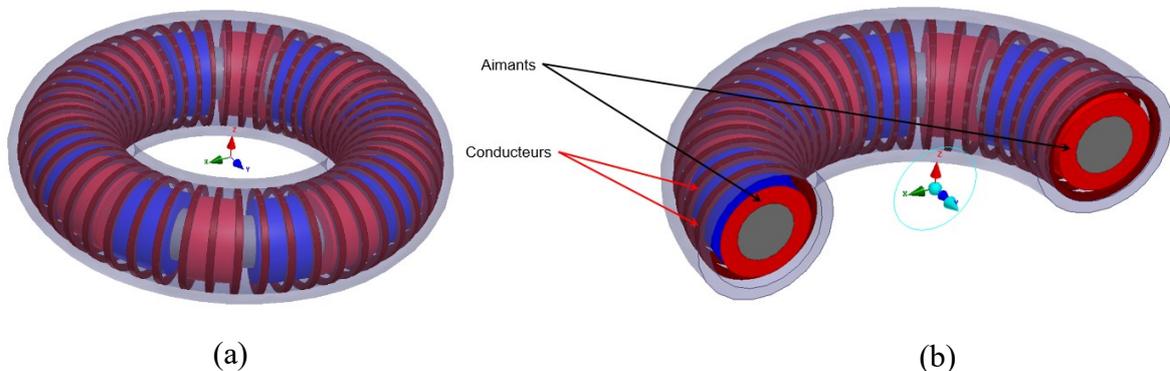


Figure 0-5 : Représentation 3D théorique de la machine torique idéale (a) vue complète, (b) vue en coupe

Dans un souci de conception, il faudrait inclure une ouverture au niveau du stator extérieur permettant de récupérer le mouvement comme illustré en Figure 0-6. Dans ce cas la machine est dite « réelle ». La machine idéale permet la création d'un couple sur 100% du cuivre disponible. La machine réelle aurait donc un comportement dégradé par rapport à la machine étudiée ici. Par conséquent, le but de l'étude est d'évaluer le gain en puissance spécifique de cette machine par rapport aux autres configurations de machines existantes. Ces travaux de thèse se concentrent sur l'élaboration du modèle analytique du champ magnétique de la ma-

chine toroïdale idéale et du modèle pour évaluer son couple. Pour comparer les performances de cette machine aux machines existantes, il est intéressant de trouver une méthode de modélisation unifiée à tous types de machines. Ce qui permettra de faire une comparaison crédible de leurs performances.

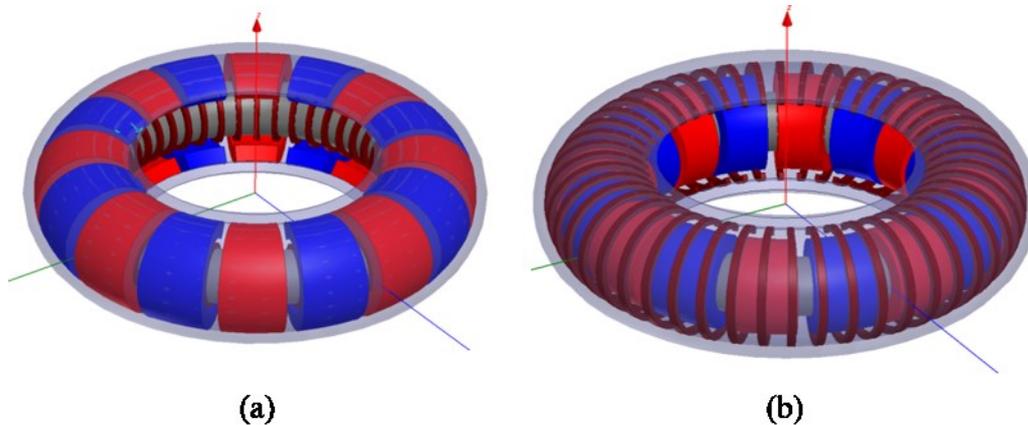


Figure 0-6 : Représentation de la machine toroïdale réelle dans deux configurations : (a) rotor extérieur, (b) rotor intérieur

Afin de mettre en œuvre le modèle de cette nouvelle machine, nous avons étudié ce qui se fait en termes de modélisation analytique du champ magnétique des machines existantes.

La modélisation des machines électriques repose sur la résolution des équations de Maxwell régissant le comportement de l'électromagnétisme. La méthode de séparation des variables est la plus utilisée. Elle repose sur un principe simple qui est de supposer la solution comme étant le produit de trois fonctions dépendant chacune d'une seule variable du système de coordonnées considéré. Le spectre de ce manuscrit se limite à cette méthode de résolution pour la simplicité de son principe de base et son adaptabilité à un grand nombre de systèmes de coordonnées [12]. Cette méthode très répandue en 2D devient plus complexe en 3D, ce qui est le cas de la machine à flux axial et de la machine toroïdale.

Les machines électriques existent avec ou sans encoches et peuvent également présenter une saillance au niveau du rotor. Des modèles analytiques précis de ces machines existent [13], [14] mais sont très lourds pour être utilisés dans le cadre d'un dimensionnement. Cette thèse est consacrée à la modélisation des machines sans encoches. Par ailleurs, moyennant certaines hypothèses, il est possible de modéliser sans encoches une machine qui initialement en présente en utilisant le coefficient de Carter [15], ce qui permet un dimensionnement pour un cahier des charges donné. Ainsi, on se limitera à la modélisation des machines sans encoches à aimants permanents en surface. On s'attachera à établir des modèles rapides et simples dans le but de les utiliser pour dimensionner les machines. Si besoin, cette étude peut être complétée par une analyse plus poussée via un logiciel de simulation numérique par éléments finis pour étudier plus en détail les aspects dont le modèle ne tient pas compte.

Ce manuscrit est scindé en quatre parties.

Le premier chapitre constitue une introduction aux outils mathématiques qui serviront à établir les modèles analytiques du champ magnétique dans les machines étudiées dans ce manuscrit. La méthode d'évaluation du couple propre à ces machines est explicitée.

Le deuxième chapitre s'attache à présenter ce qui existe en matière de modélisation analytique du champ magnétique en deux dimensions des machines électriques illustrant les principes mathématiques exposés dans le premier chapitre. Sous certaines hypothèses les machines à flux axial peuvent être modélisées aussi en 2D. De même, un premier modèle de la machine toroïdal est présenté. La dernière partie du chapitre est consacrée à la modélisation unifiée de ces différentes machines dans le but de comparer leurs performances pour un cahier des charges donné.

Le troisième chapitre présente un nouveau modèle hybride du champ magnétique dans les machines à flux axial. Ce modèle répond aux contraintes de simplicité de modélisation et de temps de calcul rapide. Les résultats de cette méthode sont comparés aux résultats de simulations numériques par éléments finis et aux résultats de mesures effectuées sur un prototype monté sur un banc expérimental.

Enfin le quatrième et dernier chapitre est dédié à l'établissement du modèle du champ magnétique en trois dimensions de la machine toroïdale. Pour ce faire, un système de coordonnées particulier est utilisé. Ce modèle étant complètement nouveau, il ne peut pas s'appuyer sur des résultats issus de la littérature, un soin particulier à la validation de ce modèle est donc apporté.

Chapitre 1

Introduction à la modélisation analytique des machines électriques

Table des matières du chapitre 1 :

Chapitre 1	Introduction à la modélisation analytique des machines électriques	21
1.1	Introduction	22
1.2	Méthodologie de modélisation	22
1.2.1	Description mathématiques des sources	23
1.2.1	Conditions de passage et conditions aux limites	26
1.2.2	Méthode de calcul du couple	28
1.2.3	Interprétation qualitative des machines sous forme d'onde	32
1.2.4	Structure toroïdale	34
1.3	Coordonnées curvilignes orthogonales	35
1.3.1	Définitions	36
1.3.2	Opérateurs différentiels	37
1.4	Séparation des variables	39
1.4.1	Séparation simple	40
1.4.2	R-séparation.....	42
1.4.3	Application au cas toroïdal trivial	44
1.4.4	Nouveau repère toroïdal R-séparable	46
1.5	Conclusion.....	47

1.1 Introduction

L'étude des machines électriques est multi-physique. Elle lie l'électromagnétisme, la mécanique et la thermique. Leur étude est donc complexe et nécessite souvent le recours à la modélisation numérique généralement par éléments finis. Or, cette méthode requiert un temps de calcul conséquent et s'adapte mal à la comparaison des performances de machines électriques de configurations différentes.

Le couple est une des principales grandeurs qui permettent de dimensionner les machines électriques. La méthode du tenseur de Maxwell est généralement appliquée pour calculer le couple d'une machine à partir du champ magnétique total dans l'entrefer. Dans une première partie on va décrire les sources de champ magnétique dans une machine synchrone avec des aimants permanents aimantés en surface. Ceci nous conduit à retrouver, à partir du tenseur de Maxwell, une méthode de calcul du couple à l'aide uniquement du champ magnétique à vide et de la distribution des densités de courants surfacique équivalentes.

Il est donc proposé ici d'élaborer des modèles analytiques du champ magnétique à vide. Du fait de la diversité des configurations géométriques des machines électriques il est quasiment obligatoire d'élaborer un modèle pour chacune d'elles. L'intérêt de trouver une approche unifiée prend d'autant plus de sens.

La modélisation analytique du champ magnétique à vide repose sur des principes mathématiques. Ce chapitre introductif présentera donc les concepts utilisés dans ces travaux et constitue une première étape vers l'approche unifiée recherchée.

La méthode de séparation des variables est appliquée pour modéliser analytiquement le champ magnétique. Cette méthode simple sur le principe, permet de résoudre les équations de Laplace ou de Poisson. Ces équations font intervenir des opérateurs mathématiques s'exprimant de façon différente suivant le système de coordonnées adapté à la configuration de la machine étudiée.

Afin de modéliser la machine toroïdale, le recours aux coordonnées toroïdales est indispensable. Les grands principes de coordonnées curvilignes orthogonales sont donc présentés. Enfin, les conditions d'application de la méthode de séparation des variables sont rappelées.

1.2 Méthodologie de modélisation

Cette section est consacrée à la méthode proposée pour évaluer le couple dans les machines synchrones à aimants permanents en surface avec ou sans encoches. La méthode est explicitée dans le cas de la machine à flux radial. Les paramètres qui définissent sa géométrie sont : R_{int} et R_{ext} , les rayons intérieur et extérieur de la machine, R_r le rayon du rotor, R_a le rayon des aimants, R_s le rayon d'alésage et début du stator, R_c le rayon définissant le début de la culasse et L_m la longueur axiale (Figure 1-1).

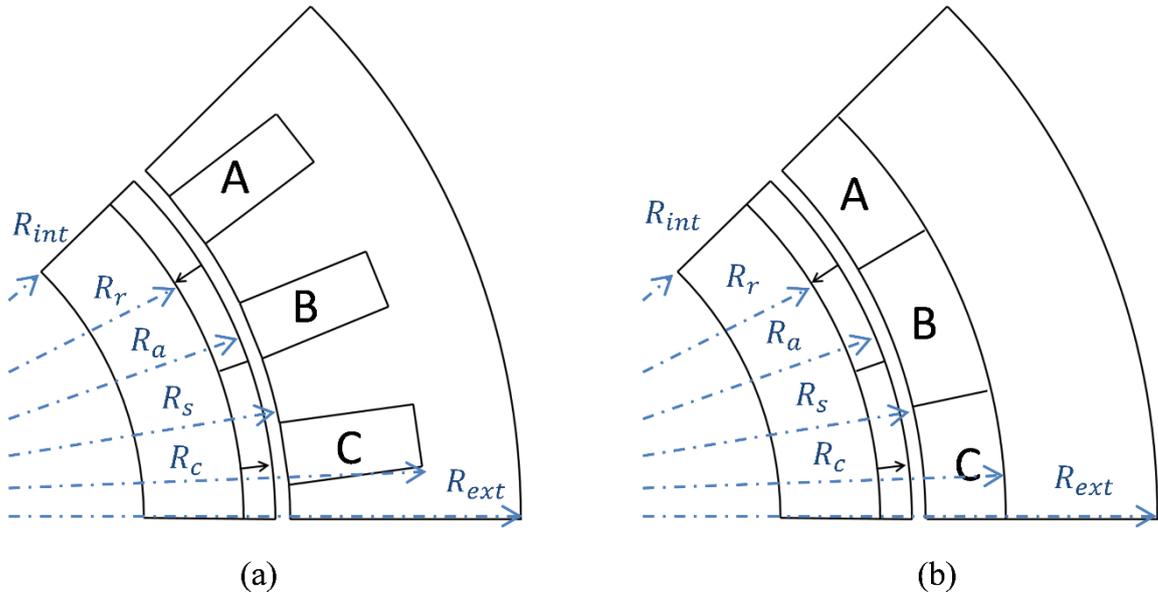


Figure 1-1 : Schéma représentatif d'une paire de pôles de la machine à flux radial avec encoches (a) ou sans encoches (b)

La méthode conventionnelle utilisée pour calculer le couple d'une machine fait appel au tenseur de Maxwell qui s'exprime en fonction du champ magnétique total dans l'entrefer. Le champ magnétique total est le champ résultant des champs produits par les aimants au rotor et par les courants au stator. Le couple s'exerçant sur le rotor d'une machine est donné par :

$$\gamma_{em} = \iint_{\Sigma} R_s \cdot B_r \cdot H_{\theta} \cdot dS \quad (1.1)$$

où γ_{em} est le couple électromagnétique de la machine s'exerçant sur le rotor, B_r la composante radiale du champ magnétique dans l'entrefer, H_{θ} la composante azimutale du champ d'excitation magnétique dans l'entrefer et Σ est la surface cylindrique au rayon d'alésage R_s du stator. Il faut donc envisager un modèle pour chaque source de champ si on considère la méthode du tenseur de Maxwell [14].

1.2.1 Description mathématiques des sources

Le champ magnétique dans les machines électriques est régi par les équations de Maxwell. Les équations de la magnétostatique suffisent à notre étude :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.3)$$

où \mathbf{B} représente le champ magnétique, \mathbf{H} le champ d'excitation magnétique, et \mathbf{j} la densité volumique de courant. Dans la suite du manuscrit, les vecteurs seront représentés en gras. Ici, \mathbf{j} représente donc les courants des phases A, B et C du stator. Les lois constitutives des milieux magnétiques imposent :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (1.4)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique de l'air, μ_r la perméabilité relative du milieu considéré et \mathbf{M} est l'aimantation du milieu considérée non nulle dans le cas des aimants permanents.

Les sources de champs magnétiques des machines électriques sont donc modélisées par les grandeurs \mathbf{j} dans le cas des courants et \mathbf{M} dans le cas des aimants. Le domaine d'étude dans lequel est résolu les équations du champ est constitué de régions qui sont des milieux dans lesquels les propriétés des matériaux sont homogènes. Les régions à considérer sont : la culasse rotorique et la culasse statorique, les aimants permanents, l'entrefer, les conducteurs et les encoches s'il y en a.

Du fait de la périodicité induite par l'alternance des pôles et du bobinage, les termes sources peuvent être modélisés à l'aide de fonctions périodiques décomposables en séries de Fourier comme celles montrées sur la Figure 1-2 où $C_k(\theta)$ est la densité linéique de conducteurs, $M(\theta)$ est l'aimantation des aimants permanents et θ est la coordonnée azimutale du repère cylindrique.

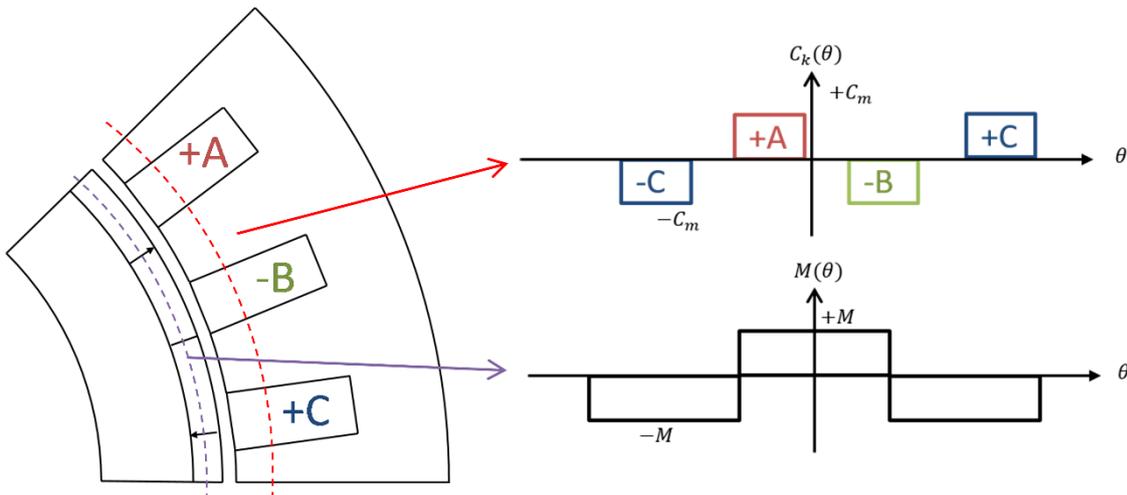


Figure 1-2 : Fonctions périodiques pour modéliser les sources de champ magnétique dans la machine à flux radial

▪ Définition de la source de champ inducteur

L'aimantation est purement radiale sur la Figure 1-2. Si on généralise à n'importe quelle distribution d'aimantation on peut écrire :

$$M_r = \sum_{n=0}^{\infty} M_{rc_n} \cdot \cos np\theta + \sum_{n=0}^{\infty} M_{rs_n} \cdot \sin np\theta \quad (1.5)$$

$$M_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta c_n} \cdot \cos np\theta + \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta s_n} \cdot \sin np\theta \quad (1.6)$$

où M_r et M_θ sont les composantes radiale et azimutale de l'aimantation. Cette description est valable pour $r \in [R_r, R_a]$. Il est donc possible de cette manière de prendre en compte n'importe quelle distribution d'aimants, par exemple les aimants permanents distribués en réseau de type Halbach.

L'arc polaire α_p est défini comme le rapport entre l'angle d'ouverture d'un pôle et le pas polaire π/p . Il est égal à 1 sur la Figure 1-2. La zone des aimants comprise entre R_r et R_a est donc constituée uniquement d'aimants permanents, on peut alors modéliser cette région avec la perméabilité relative du matériau considérée μ_r . Or dans le cas où il est inférieur à 1, du fait de la présence d'air entre les aimants dans la zone $[R_r, R_a]$, la rupture de perméabilité impose de distinguer les régions au sein de cette zone. La perméabilité des aimants permanents étant proche de celle de l'air, dans la suite du manuscrit elles sont supposées égales $\mu_{aimant} = \mu_{air}$.

▪ *Définition de la source de champ de réaction d'induit*

Concernant la modélisation des courants, on calcule d'abord la distribution linéique de conducteurs pour chaque phase [16]. Elle a été utilisée pour calculer la distribution de densité de courant volumique $\mathbf{j}(\theta, t)$ dans une machine sans encoches [17]. La distribution linéique de conducteurs de chaque phase $i = A, B$ ou C peut s'écrire sous la forme :

$$C_i(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{ic_n} \cdot \cos np\theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_{is_n} \cdot \sin np\theta \quad (1.7)$$

Cette description est valable pour $r \in [R_s, R_c]$, C_{ic_n} et C_{is_n} sont les coefficients de la série de Fourier de la phase i à calculer en fonction de la forme d'onde de la Figure 1-2. Cette méthode est applicable à n'importe quel type de bobinage [16].

Dans l'optique d'évaluer le couple moyen d'une machine, la modélisation du champ magnétique dans les machines avec encoches, peut s'effectuer en utilisant le coefficient de Carter pour se ramener à une machine sans encoches. Dans ce cas, il est possible de passer d'une distribution de densité volumique de courant à une distribution de densité surfacique de courant [16], positionnée au niveau du rayon d'alésage R_s , par la relation (1.8).

$$K(\theta, t) = \sum_{i=1}^{i=q} C_i(\theta) I_i(t) \quad (1.8)$$

où $I_i(t)$ est le courant d'alimentation de la phase i et q le nombre de phases de la machine considérée.

Note importante, la définition de la distribution de densité surfacique de courant doit respecter la condition :

$$\text{div } \mathbf{K} = 0 \quad (1.9)$$

Cette condition est vérifiée naturellement pour la machine à flux radial. Il faut en tenir compte pour d'autres configurations de machine, comme pour la machine à flux axial [18].

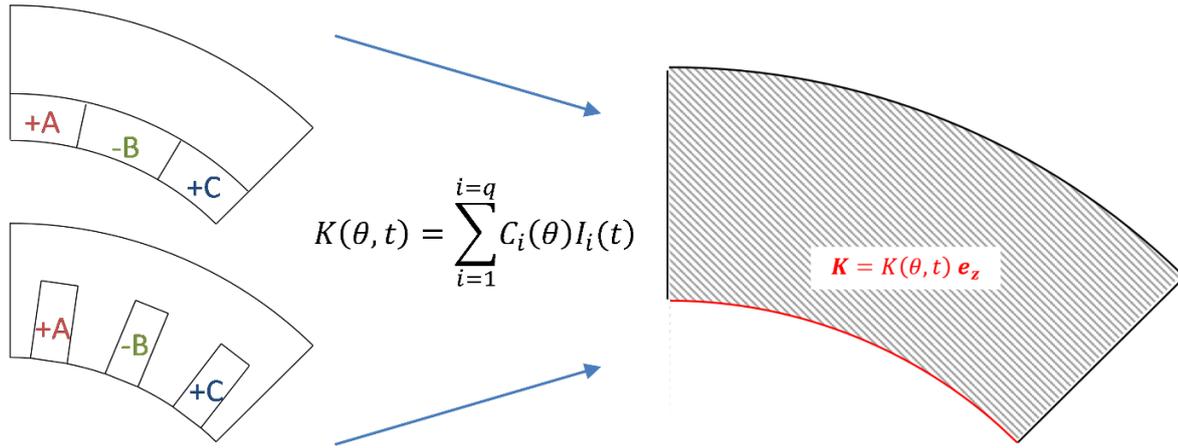


Figure 1-3 : Modélisation de la densité surfacique de courant

1.2.1 Conditions de passage et conditions aux limites

Considérons le problème magnétostatique de la Figure 1-4. Le domaine d'étude Ω est constitué des régions Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 . On considère généralement que le champ magnétique à l'extérieur du domaine d'étude est nul. En un élément de surface $d\mathbf{S}$, à la frontière du domaine Ω , le flux sortant est nul, donc :

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.10)$$

où \mathbf{n} est la normale à la frontière. Le champ magnétique est donc tangential à la frontière.

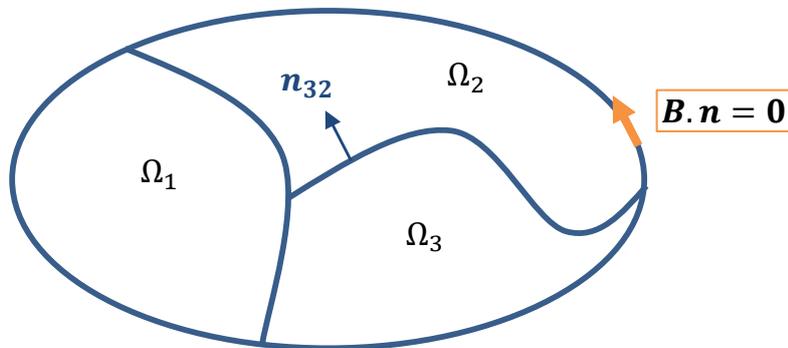


Figure 1-4 : Domaine d'étude et sous domaines associés

Les équations de Maxwell (1.2) et (1.3) et la loi constitutive des milieux magnétiques (1.4) régissent le comportement magnétique dans les différentes régions Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 . Les conditions de passage permettent de relier le champ magnétique d'une région à l'autre. Pour une interface surfacique Σ_{ij} entre deux régions Ω_i et Ω_j , les conditions de passage sont données par les équations suivantes [19] :

$$\begin{cases} (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \\ (\mathbf{H}_j - \mathbf{H}_i) \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{k}_{sij} \end{cases} \quad (1.11)$$

où \mathbf{B}_i et \mathbf{H}_i sont respectivement le champ magnétique et le champ d'excitation magnétique dans la région i , \mathbf{n}_{ij} la normale à l'interface Σ_{ij} de i vers j et $\mathbf{k}_{s_{ij}}$ est la densité surfacique de courant de l'interface Σ_{ij} . Il y a donc continuité de la composante normale du champ magnétique à l'interface entre deux milieux et discontinuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique dans le cas où l'interface présente une distribution surfacique de courant. La prise en compte des courants sous forme de densité surfacique de courant \mathbf{K} intervient donc dans la modélisation en tant que condition de passage là où la prise en compte sous forme de densité volumique de courant \mathbf{j} intervient dans la loi d'Ampère (1.3).

Dans le cas d'une interface air fer représentée sur la Figure 1-5, sans densité surfacique de courant, les conditions de passage (1.11) deviennent :

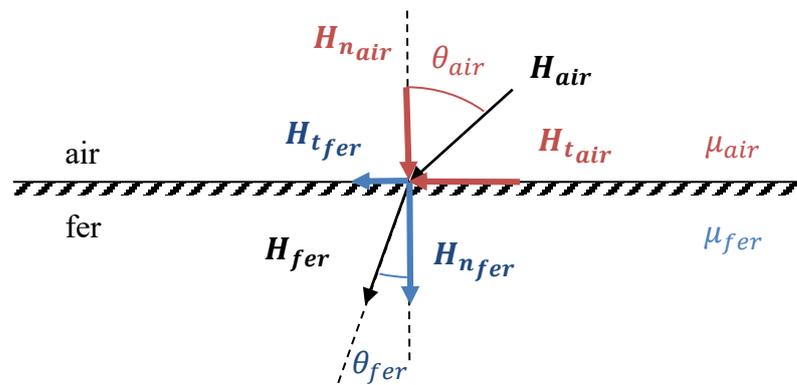


Figure 1-5 : condition de passage à l'interface air-fer

$$\begin{cases} B_{n_{air}} = B_{n_{fer}} \\ H_{t_{air}} = H_{t_{fer}} \end{cases} \quad (1.12)$$

D'après le schéma 1-5, on peut écrire :

$$\tan \theta_{air} = H_{t_{air}}/H_{n_{air}} \quad \text{et} \quad \tan \theta_{fer} = H_{t_{fer}}/H_{n_{fer}} \quad (1.13)$$

Soit :

$$\frac{\tan \theta_{air}}{\tan \theta_{fer}} = \frac{H_{n_{fer}}}{H_{n_{air}}} \quad (1.14)$$

La loi constitutive des milieux magnétiques (1.4) permet finalement d'écrire :

$$\frac{\tan \theta_{air}}{\tan \theta_{fer}} = \frac{\mu_{air}}{\mu_{fer}} \quad (1.15)$$

La perméabilité magnétique du fer étant très grande devant celle de l'air, on peut considérer que $\theta_{air} = 0^\circ$. Plus généralement, si la perméabilité est infinie d'un côté, θ est nul de l'autre côté. Cela se traduit par un champ d'excitation magnétique normal à l'interface. Cette condi-

tion de passage peut être prise en tant que condition limite pour s'affranchir de l'étude du champ magnétique dans les culasses de la machine :

$$H_t = 0 \quad (1.16)$$

Nous avons vu que l'utilisation du coefficient de Carter permet de ne pas considérer le champ magnétique dans les encoches statoriques. Considérer la perméabilité du fer infinie permet de ne pas prendre en compte le champ magnétique dans les culasses et ainsi limiter le domaine d'étude aux aimants permanents et à l'entrefer. Ainsi, le nombre de régions à considérer a été réduit grâce à :

- l'utilisation du coefficient de Carter qui permet de ne pas prendre en compte les encoches,
- la formulation en densité surfacique de courant \mathbf{K} qui permet de prendre en compte les courants sous forme de conditions aux limites au lieu d'être terme source dans la loi d'Ampère,
- l'hypothèse d'une perméabilité du fer infinie qui permet de ne pas prendre en compte le champ magnétique dans les culasses.

1.2.2 Méthode de calcul du couple

Nous avons vu que le couple est calculé par la méthode du tenseur de Maxwell (1.1). Or cette méthode nécessite d'établir les expressions du champ induit et du champ inducteur. Il est cependant possible de se limiter à l'étude du champ inducteur grâce aux hypothèses présentées précédemment. Cela a été démontré dans [16], nous rappelons ici le raisonnement de façon plus générale.

Si on néglige la saturation des matériaux magnétiques, on peut décomposer le champ magnétique dans l'entrefer comme la somme du champ produit par les aimants et du champ produit par les courants :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c \quad (1.17)$$

où \mathbf{B}_a est le champ magnétique produit par les aimants seuls (Figure 1-6 (a)) et \mathbf{B}_c est le champ magnétique produit par les courants seuls (Figure 1-6 (b)). En insérant (1.17) dans la l'expression du couple appliqué au rotor (1.1) on aboutit à :

$$\gamma_{em} = \iint_{\Sigma_{alésage}} R_s \cdot [B_{r_a} \cdot H_{\theta_a} + B_{r_a} \cdot H_{\theta_c} + B_{r_c} \cdot H_{\theta_a} + B_{r_c} \cdot H_{\theta_c}] \cdot dS \quad (1.18)$$

Dans le cas du calcul du champ inducteur, à l'interface entrefer-fer, autrement dit sur $\Sigma_{alésage}$, le champ magnétique est normal et sa composante tangentielle est nulle:

$$H_t = H_{\theta_a} = 0 \quad (1.19)$$

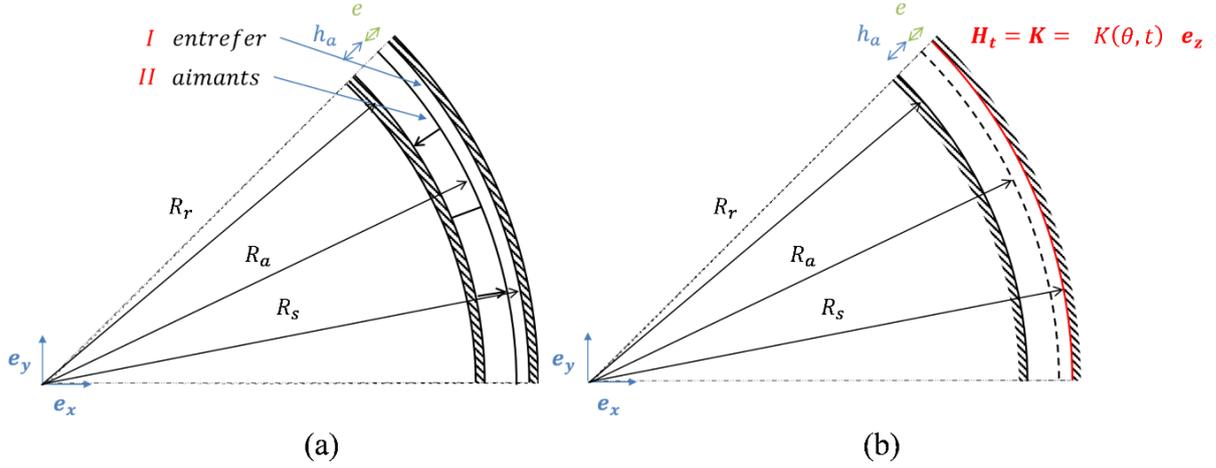


Figure 1-6 : Schéma représentatif du calcul du champ inducteur (a) et du champ induit (b) dans le cas d'une machine à flux radial

Le premier terme et le troisième terme de (1.18) sont donc nuls. Le quatrième terme symbolise les interactions des courants entre eux. Ces interactions s'annulent mutuellement entre elles et le quatrième terme est nul.

Dans le cas du calcul du champ produit par les courants, à l'interface entrefer-fer, autrement dit sur $\Sigma_{\text{alésage}}$, la condition aux limites suivante s'applique (cf. 1.2.1) :

$$(\mathbf{H}_{fer} - \mathbf{H}_{air}) \times \mathbf{e}_r = \mathbf{K} \quad (1.20)$$

En négligeant H_{fer} dû à la perméabilité infinie du fer il vient :

$$H_{t_{air}} = H_{t_c} = -K(\theta, t) \quad (1.21)$$

L'équation du couple s'exerçant sur le rotor (1.18) se réduit alors au deuxième terme et on peut écrire :

$$\gamma_{em} = - \iint_{\Sigma_{\text{alésage}}} R_s \cdot B_{r_a} \cdot K(\theta, t) \cdot dS \quad (1.22)$$

où B_{r_a} est le champ magnétique radial produit par les aimants au rayon d'alésage.

On peut donc calculer le couple à l'aide du champ magnétique inducteur et de la prise en compte des courants sous la forme d'une distribution de densité surfacique de courant. C'est la méthode qui sera adoptée dans la suite du manuscrit. Nous nous concentrerons donc sur la méthode de modélisation analytique du champ inducteur dans les machines électriques à aimants permanents dans le but d'identifier une méthode de modélisation applicable aux différentes configurations existantes (linéaire, radiale, axiale ou tubulaire) et également à la nouvelle machine toroïdale idéale proposée.

On peut aussi calculer le couple s'exerçant sur le stator par la loi de Laplace. En effet, si on considère l'action d'un champ magnétique \mathbf{B} sur une portion élémentaire $R_s d\theta$ de conducteur de longueur L_m égale à la longueur du stator et parcourue par un courant dI , la loi de Laplace donne l'expression de la force exercée sur la portion de conducteur :

$$d\mathbf{F} = L_m dI \mathbf{e}_z \times \mathbf{B} \quad (1.23)$$

En remarquant qu'une distribution de courant ne peut pas exercer de force globale ou de couple sur elle-même, le champ magnétique à considérer dans (1.23) est le champ produit par les aimants \mathbf{B}_a . Le courant dI peut être calculé à l'aide de la distribution surfacique de courant à l'angle θ de la portion considérée :

$$dI = K(\theta, t) R_s d\theta \quad (1.24)$$

En insérant cette relation dans (1.23) :

$$dF = L_m \cdot R_s \cdot K(\theta, t) \cdot B_{r_a} \cdot d\theta \quad (1.25)$$

où dF est la force élémentaire portée par \mathbf{e}_θ , B_{r_a} est le champ magnétique radial produit par les aimants au niveau de la portion de conducteur considérée. Le couple élémentaire se déduit de la force par la formule du bras de levier, on a donc :

$$d\gamma_{laplace} = L_m R_s^2 \cdot K(\theta, t) \cdot B_{r_a} \cdot d\theta \quad (1.26)$$

En intégrant sur la surface d'alésage, le couple s'exerçant sur le stator est donc :

$$\gamma_{laplace} = \iint_{\Sigma_{alésage}} R_s \cdot B_{r_a} \cdot K(\theta, t) \cdot dS \quad (1.27)$$

où $dS = L_m R_s d\theta$. Ce couple exercé sur le stator est opposé au couple s'exerçant sur le rotor donné par le tenseur de Maxwell (1.22). Les deux méthodes de calcul sont donc équivalentes sous les hypothèses considérées.

Cette méthode a fait ses preuves pour le dimensionnement de machine à flux radial à encoches [1], [20], validant ainsi l'utilisation du coefficient de Carter et la modélisation des sources de courant de cette manière.

En revanche, le recours à cette méthode pour modéliser les vraies machines sans encoches ne donne pas de résultats satisfaisants. En effet, réduire l'épaisseur du bobinage sans encoches à une densité superficielle infiniment mince induit un écart trop important avec la réalité due à la variation du champ magnétique selon l'épaisseur du bobinage [21]. La méthode de calcul du couple est applicable à condition de considérer dans ce cas la densité volumique de courant dans le bobinage :

$$\gamma_{em} = - \iiint_{V_{bobinage}} r \cdot B_{r_a} \cdot j(\theta, t) \cdot dS \quad (1.28)$$

La Figure 1-7 résume les deux méthodes de calcul du couple qui s'exerce sur le rotor en considérant soit une densité surfacique de courant soit une densité volumique de courant. Ainsi, seule la modélisation analytique du champ produit par les aimants permanents est nécessaire pour évaluer le couple.

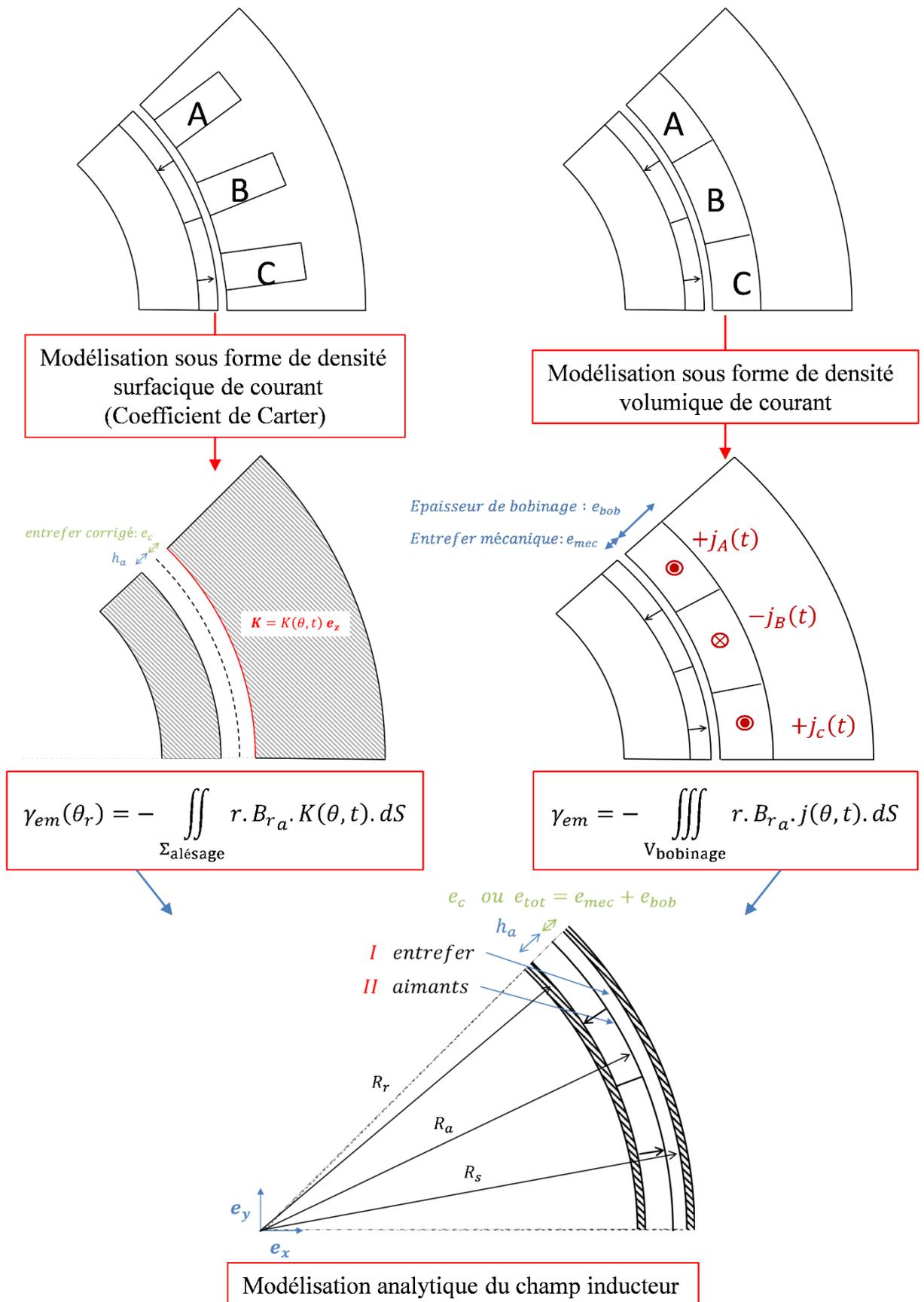


Figure 1-7 : Résumé de la méthode de calcul du couple par modélisation analytique du champ magnétique dans les machines électriques

1.2.3 Interprétation qualitative des machines sous forme d'onde

Du fait de la périodicité de la distribution des sources, nous pouvons faire l'hypothèse que le champ magnétique au rayon d'alésage et la distribution surfacique de courant sont des ondes sinusoïdales [22]. Cela revient à considérer uniquement le fondamental du développement précédent. Nous considérons les machines synchrones à aimants permanents, les deux ondes ont donc la même période temporelle. Toujours dans le but d'illustrer notre propos, considérons le cas des machines à flux radial :

$$\mathbf{B}_r = B_m \cos(p\theta - \omega t + \alpha) \mathbf{e}_r \quad (1.29)$$

$$\mathbf{K} = K_m \cos(p\theta - \omega t) \mathbf{e}_z \quad (1.30)$$

où \mathbf{B}_r est la composante radiale du champ magnétique produit par les aimants au niveau du rayon d'alésage, \mathbf{K} est la distribution surfacique de courant, ω est la pulsation électrique des courants d'alimentation et α le déphasage entre les deux ondes.

Le calcul du couple de la section précédente appliquée au cas considéré donne :

$$C = \pi R_s^2 \cdot L_m \cdot K_m \cdot B_m \cdot \cos(\alpha) \quad (1.31)$$

où R_s est le rayon d'alésage. La partie droite de la Figure 1-8 illustre les ondes dans le cas où la machine possède 1 paire de pôles.

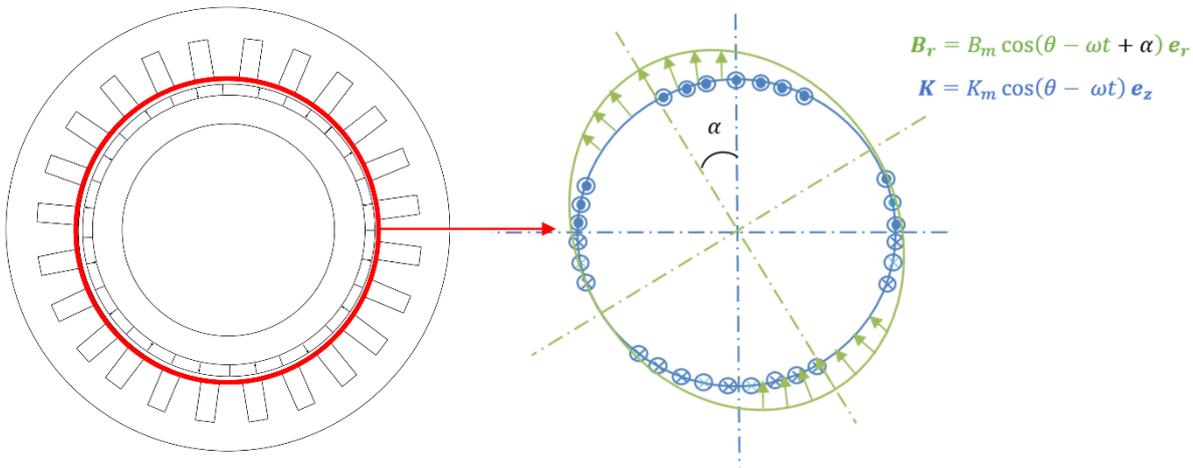


Figure 1-8 : Modélisation sous forme d'ondes de la machine à flux radial

Dans le cas où le déphasage est non nul, $\alpha \neq 0$, des forces de sens opposé sont générées du fait de l'inversion du signe du courant mais non de celui du champ. Le couple s'en retrouve diminué. La Figure 1-9 illustre ce phénomène. Dans le cas de la Figure 1-10, l'onde de courant et l'onde de champ magnétique sont en phase et changent de signe en même temps. Ainsi les forces élémentaires de Laplace sont toutes orientées suivant $+\mathbf{e}_\theta$ et contribuent donc toutes dans le même sens. Le calcul montre que l'on obtient un couple maximum dans le cas où les deux ondes sont en phase.

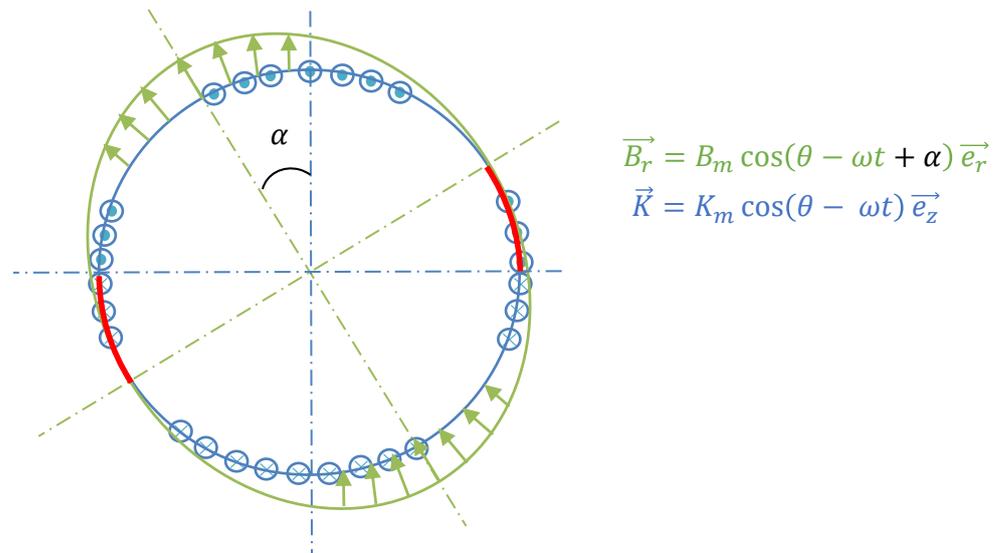


Figure 1-9 : Onde de Champ magnétique et de courant pour $p=1$ et pour un déphasage α entre les deux ondes

Le cas étudié considère deux ondes purement sinusoïdales. Cependant, en extrapolant ce principe à des signaux contenant des harmoniques, cet exemple révèle l'éventuelle existence de couples résistants dus aux changements de signes non simultanés des ondes de courant et de champ magnétique.

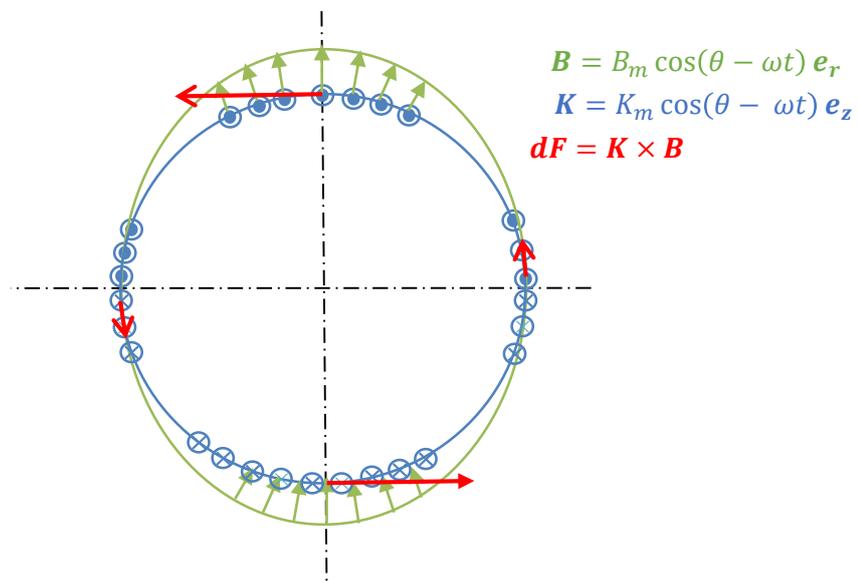


Figure 1-10 : Onde de Champ magnétique et de courant pour $p=1$ et sans déphasage entre les deux ondes

Nous effectuerons des dimensionnements à couple maximum qui correspondent au cas des ondes en phase. Nous verrons par la suite comment tirer parti de tout le cuivre disponible dans la machine pour produire un couple utile grâce à la nouvelle géométrie toroïdale proposée. On s'affranchira de l'étude temporelle et on considérera les ondes de la forme suivante :

$$\mathbf{B}_r = B_m \cos(p\theta) \mathbf{e}_r \quad (1.32)$$

$$\mathbf{K} = K_m \cos(p\theta) \mathbf{e}_z \quad (1.33)$$

$$C = \pi R_s^2 \cdot L_m \cdot K_m \cdot B_m \quad (1.34)$$

1.2.4 Structure toroïdale

La Figure 1-11 présente la machine toroïdale en coupe 2D dans le système de coordonnées toroïdal trivial :

$$\begin{cases} x = (R + r \cdot \cos \theta) \cdot \cos \varphi \\ y = (R + r \cdot \cos \theta) \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (1.35)$$

La machine toroïdale envisagée est constituée d'un tore externe creux constituant le stator et d'un tore interne constituant le rotor. Les aimants permanents sont une portion de tore suivant les trois coordonnées (r, θ, φ) . On peut envisager un stator externe et un rotor interne ou inversement. La distribution surfacique de courant est placée sur la surface intérieure du tore externe et les conducteurs sont bobinés suivant \mathbf{e}_θ . Une spire est donc schématisée par un cercle dans un plan à φ constant. Les aimants permanents sont positionnés en surface du tore interne de façon à obtenir un champ magnétique \mathbf{B} suivant \mathbf{e}_r et sont placés avec des aimantations alternées périodiquement suivant \mathbf{e}_φ .

On obtient donc une force de Laplace portée par \mathbf{e}_φ , qui s'applique sur la totalité d'une spire. La longueur active est désormais maximisée et est égale à la longueur d'une spire et il n'y a pas de têtes de bobines.

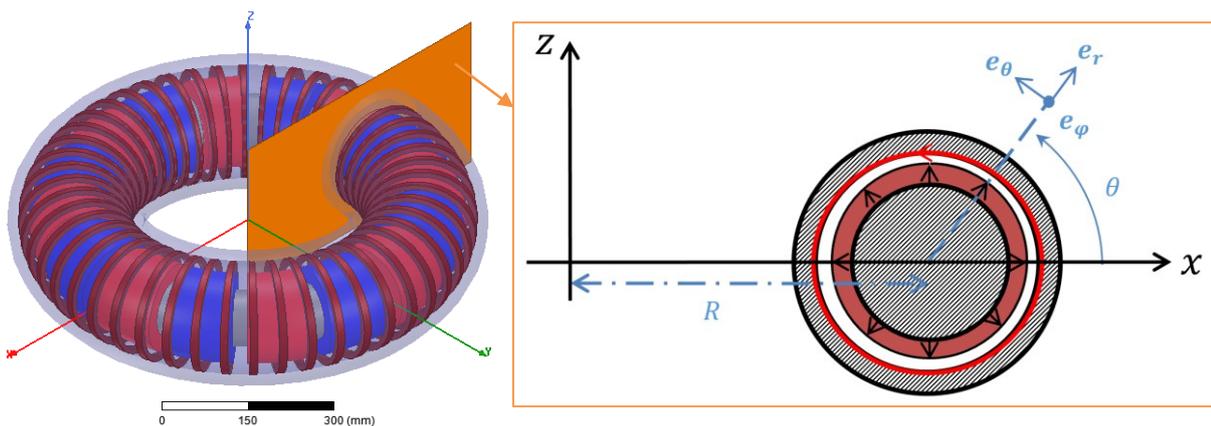


Figure 1-11 : Représentation de la machine toroïdale idéale dans son système de coordonnées (r, θ, φ)

Afin d'envisager sa fabrication, il est obligatoire d'intégrer une ouverture au stator pour avoir accès au mouvement généré. Cette ouverture diminue la surface d'interaction champ-

courant entre la distribution du courant et le champ magnétique inducteur. Ce qui implique un comportement dégradé vis-à-vis de la machine idéale. L'ouverture doit donc être aussi petite que possible. Elle sera déterminée par les contraintes mécaniques liées à la technologie de fabrication de la machine (Figure 1-12).

On ne prendra pas en compte cette ouverture dans la modélisation proposée dans ces travaux. Nous nous concentrons sur la modélisation analytique du champ magnétique de la machine toroïdale car elle n'a jamais été faite.

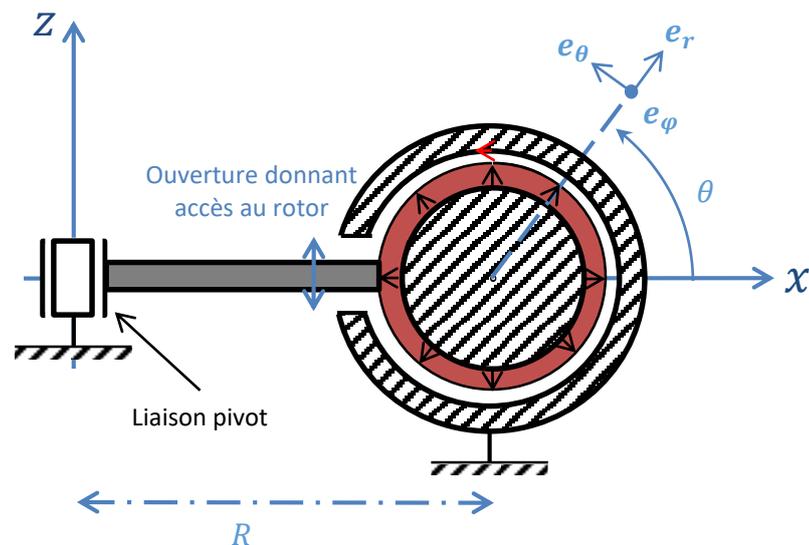


Figure 1-12 : Idée de conception de la machine toroïdale

Dans cette première sous partie, nous avons vu la méthodologie d'obtention du couple d'une machine à partir de la modélisation analytique du champ inducteur. Le cas de la machine à flux radial a été pris en exemple mais cette méthode est généralisable à toute machine. L'analyse qualitative sous forme d'ondes des machines a permis de justifier l'intérêt de la machine toroïdale.

Nous passons désormais à la modélisation analytique du champ inducteur par méthode de séparation des variables. Afin de généraliser le propos à toute configuration géométrique, nous devons au préalable rappeler les coordonnées curvilignes orthogonales. Cela permettra d'envisager des modélisations dans les repères cartésien (machine linéaire), cylindrique (machine à flux radial, machine à flux axial et machine tubulaire) et enfin toroïdal.

1.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Même si la méthode de séparation des variables est très utilisée dans la modélisation analytique des machines électriques, le besoin de l'appliquer à une topologie nouvelle nous impose de revenir à certaines bases mathématiques. Dans cette sous partie nous rappelons les principes de coordonnées curvilignes orthogonales.

1.3.1 Définitions

Le cas des coordonnées curvilignes orthogonales est un cas particulier des coordonnées curvilignes. Les coordonnées curvilignes orthogonales sont détaillées dans [12] et [23], les notations utilisées sont celles de [12].

Soit un repère cartésien $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, un point M de l'espace repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad (1.36)$$

Soit un système de coordonnées curvilignes quelconque (u_1, u_2, u_3) , les coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction des nouvelles coordonnées par :

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3), \quad x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3), \quad x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3) \quad (1.37)$$

De même, on peut définir les fonctions suivantes :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) \quad (1.38)$$

Ces dernières équations définissent les équations cartésiennes des surfaces iso-coordonnée. La Figure 1-13 illustre les surfaces iso-coordonnée au voisinage d'un point M . Par définition d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales, les tangentes aux lignes de coordonnées passant par M sont orthogonales entre elles.

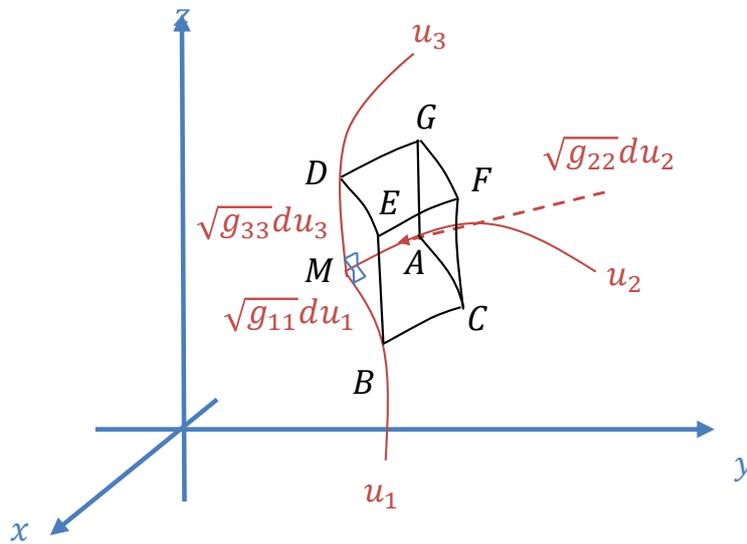


Figure 1-13 : Représentation schématique d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales quelconque [23]

On a ainsi un repère orthogonal local naturel $(M, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ où :

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} \quad (1.39)$$

Dans le repère cartésien, un élément de longueur ds est donnée par :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \quad (1.40)$$

Cet élément de longueur s'écrit dans le repère local naturel :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii} du_i^2 \quad (1.41)$$

Avec :

$$g_{ii} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right)^2 = r_i^2 \quad (1.42)$$

Les coefficients g_{ii} sont les diagonales du tenseur métrique du système de coordonnées considéré (u_1, u_2, u_3) . Dans l'équation (1.41) on reconnaît les distances infinitésimales $r_1 du_1$, $r_2 du_2$ et $r_3 du_3$. On peut en déduire la formule d'un élément d'aire u_1 - u_2 par exemple :

$$dA_{12} = [r_1 du_1] \cdot [r_2 du_2] = r_1 r_2 du_1 \cdot du_2 \quad (1.43)$$

De même, l'élément de volume est exprimé par, g étant le déterminant du tenseur métrique:

$$dV = (g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33})^{1/2} du_1 \cdot du_2 \cdot du_3 = \sqrt{g} \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot du_3 \quad (1.44)$$

1.3.2 Opérateurs différentiels

Afin de déterminer les opérateurs gradient, divergence, rotationnel et laplacien, considérons une fonction scalaire $\Omega(x, y, z)$ et une fonction vectorielle $\mathbf{A}(x, y, z)$. Ces fonctions peuvent aussi être exprimées en fonction des coordonnées curvilignes : $\Omega(u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$.

En tout point M , on définit une base locale orthonormée $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, avec :

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \mathbf{r}_k \quad (1.45)$$

Pour faciliter les calculs et les interprétations, les vecteurs sont repérés dans cette base :

$$\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) \mathbf{a}_i \quad (1.46)$$

La composante du gradient $\mathbf{grad} \Omega$ dans la direction de u_1 , autrement dit MB sur la Figure 1-14, représente la variation de Ω pour un déplacement d'une unité de longueur :

$$\text{grad}_{u_1}\Omega = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_1}, \quad \text{grad}_{u_2}\Omega = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_2}, \quad \text{grad}_{u_3}\Omega = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_3} \quad (1.47)$$

On peut ainsi exprimer le gradient dans la base locale orthonormée par :

$$\mathbf{grad}\Omega = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial\Omega}{\partial u_i}\mathbf{a}_i \quad (1.48)$$

Pour le calcul de la divergence de \mathbf{A} , le théorème d'Ostrogradsky donne :

$$\iiint_V \text{div}\mathbf{A} d\tau = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.49)$$

Cette formule signifie que la divergence du vecteur \mathbf{A} sur une unité de volume $d\tau$ est égale au flux sortant de ce volume élémentaire. En appliquant cette formule pour calculer le flux de \mathbf{A} aux surfaces $BCFE$ et $MAGD$ et en faisant la différence, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\sqrt{g_{22}g_{33}} \cdot A_1) \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot du_3 \quad (1.50)$$

En réalisant la même opération pour les autres faces, on obtient finalement :

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\sqrt{g_{22}g_{33}} A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{g_{11}g_{33}} A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{g_{22}g_{11}} A_3) \right] \quad (1.51)$$

Soit :

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} A_i \right) \quad (1.52)$$

L'expression du rotationnel se déduit de la formule de Stokes :

$$\iint_S \mathbf{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{M} \quad (1.53)$$

La circulation d'un vecteur le long d'un contour C est égale au flux de son rotationnel à travers la surface définie par le contour. Appliqué au cas de la Figure 1-14, on obtient respectivement les circulations le long de MA , AG , GD , DM :

$$\int_M^A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{M} = \sqrt{g_{22}} \cdot A_2 du_2 \quad (1.54)$$

$$\int_A^G \mathbf{A} \cdot d\mathbf{M} = \sqrt{g_{33}} \cdot A_3 du_3 + \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}A_3)}{\partial u_2} du_2 \cdot du_3 \quad (1.55)$$

$$\int_G^D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{M} = -\sqrt{g_{22}} \cdot A_2 du_2 - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}A_2)}{\partial u_3} du_3 \cdot du_2 \quad (1.56)$$

$$\int_D^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{M} = -\sqrt{g_{33}} \cdot A_3 du_3 \quad (1.57)$$

La somme des circulations est donc égale au produit de la composante $rot_{u_1} \mathbf{A}$ par la surface $MAGD$:

$$rot_{u_1} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \left[\frac{\partial(\sqrt{g_{33}}A_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}A_2)}{\partial u_3} \right] \quad (1.58)$$

On effectue la même opération pour les composantes suivant u_2 et u_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{A} = g^{-1/2} & \left\{ \mathbf{a}_1 \sqrt{g_{11}} \left[\frac{\partial(\sqrt{g_{33}}A_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(\sqrt{g_{22}}A_2)}{\partial u_3} \right] \right. \\ & + \mathbf{a}_2 \sqrt{g_{22}} \left[\frac{\partial(\sqrt{g_{11}}A_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(\sqrt{g_{33}}A_3)}{\partial u_1} \right] \\ & \left. + \mathbf{a}_3 \sqrt{g_{33}} \left[\frac{\partial(\sqrt{g_{22}}A_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}}A_1)}{\partial u_2} \right] \right\} \quad (1.59) \end{aligned}$$

Enfin, le laplacien est défini par :

$$\Delta \Omega = \mathit{div} \mathbf{grad} \Omega \quad (1.60)$$

Ce qui donne :

$$\Delta \Omega = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial \Omega}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1.61)$$

1.4 Séparation des variables

Afin de modéliser le champ magnétique produit par les aimants permanents, on se place en circuit ouvert, c'est-à-dire que les bobinages ne sont pas alimentés. Dans ce cas, les équations du champ magnétique (1.2) et (1.3) deviennent :

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.62)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (1.63)$$

La loi constitutive des milieux magnétique (1.4) n'est pas impactée et reste :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (1.64)$$

La résolution analytique des équations de Maxwell impose de passer en formulation de potentiel, permettant ainsi de combiner les équations (1.62) et (1.63). Deux méthodes sont possibles. La première consiste à faire appel au potentiel vecteur. Le fait que la divergence de \mathbf{B} soit nulle permet d'écrire qu'il existe un potentiel \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (1.65)$$

Ici, \mathbf{A} est un vecteur et possède 3 composantes. Etant donné le caractère 3D du champ dans la machine toroïdale, cela nécessiterait le calcul de ces 3 composantes. Il existe une autre formulation permise par ces équations. En effet, l'équation (1.63) permet d'écrire qu'il existe un potentiel scalaire magnétique Ω tel que :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad} \Omega \quad (1.66)$$

Son utilisation permet de réduire le nombre d'inconnues dans le cas tridimensionnel, contrairement au cas bidimensionnel où le potentiel vecteur n'a qu'une composante. Dans ce manuscrit, nous choisissons donc la formulation en potentiel scalaire magnétique.

La combinaison des équations (1.62), (1.63) et (1.66) donne :

$$\Delta \Omega = \mathbf{div} \mathbf{M} \quad (1.67)$$

Nous aboutissons à une équation de Poisson pour calculer le champ magnétique à vide. La méthode de séparation des variables est très répandue dans la résolution de telles équations, elle est applicable à un très grand nombre de systèmes de coordonnées [12]. Nous présentons dans la section suivante ses principes généraux et ses conditions d'application.

1.4.1 Séparation simple

La méthode de séparation des variables permet de passer d'une équation aux dérivées partielles, que l'on ne sait pas résoudre analytiquement, à des équations différentielles ordinaires qui peuvent être résolues analytiquement.

Le principe de la méthode de séparation des variables est de considérer la solution comme le produit de fonctions dépendant uniquement d'une variable. Cela permet de transformer le laplacien (1.67) en une somme de termes, chacun contenant uniquement des dérivées selon une des coordonnées du repère considéré. Ainsi on peut remplacer les ∂ (d ronds) des dérivées partielles par des d (d droits) des dérivées simples. Isoler un de ces termes permet de considérer les deux autres constants et permet d'obtenir une équation différentielle ordinaire sur une des variables du repère. La constante est alors appelée constante de séparation, ce processus peut être réitéré sur les deux autres composantes, aboutissant à une « séparation » des variables.

Le but de cette section est d'appliquer ce principe au cas général des coordonnées curvilignes pour établir les conditions de séparabilité en vue d'appliquer cette méthode à la machine toroïdale.

La méthode de séparation des variables et ses conditions d'application sont présentées dans [24] et [25]. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la démonstration mathématique mais certains principes doivent être rappelés pour mieux appliquer la méthode.

La méthode de séparation des variables permet d'obtenir la forme de la solution du laplacien (1.67) qu'on peut écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} \right) = 0 \quad (1.68)$$

Une équation est séparable simplement si la solution Ω peut se mettre sous la forme :

$$\Omega = U_1(u_1) \cdot U_2(u_2) \cdot U_3(u_3) \quad (1.69)$$

Supposons que ce soit le cas, en insérant (1.62) dans (1.61) et en divisant par $U_1(u_1) \cdot U_2(u_2) \cdot U_3(u_3)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{U_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} \frac{dU_i}{du_i} \right) = 0 \quad (1.70)$$

Afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire, il faut « séparer » les variables de chaque terme de (1.70), et ainsi obtenir trois termes chacun dépendant des dérivées d'une seule et unique coordonnée. Le point bloquant provient du coefficient \sqrt{g}/g_{ii} qui empêche le passage aux dérivées droites. Une condition nécessaire de séparabilité est donc :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} = f_1(u_1) \cdot F_1(u_2, u_3) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} = f_2(u_2) \cdot F_2(u_1, u_3) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} = f_3(u_3) \cdot F_3(u_1, u_2) \end{cases} \quad (1.71)$$

Si cette condition est satisfaite, en l'introduisant dans (1.70), on obtient :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{U_i} \frac{d}{du_i} \left(f_i \frac{dU_i}{du_i} \right) = 0 \quad (1.72)$$

Le passage aux dérivées droites est obtenu mais les équations ne sont pas séparées. On introduit ici le déterminant de Stäckel afin de faciliter les calculs :

$$S = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(u_1) & \Phi_{12}(u_1) & \Phi_{13}(u_1) \\ \Phi_{21}(u_2) & \Phi_{22}(u_2) & \Phi_{23}(u_2) \\ \Phi_{31}(u_3) & \Phi_{32}(u_3) & \Phi_{33}(u_3) \end{vmatrix} \quad (1.73)$$

$$S = \sum_{i=1}^3 \Phi_{i1}(u_i) \cdot M_i$$

où M_i est le cofacteur de l'élément $\Phi_{i1}(u_i)$. Les Φ_{ij} sont des fonctions de u_i seulement. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la séparation simple du laplacien dans un repère orthogonal sont [24] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} = \frac{M_k}{M_i} \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} = \left[\prod_{k=1}^3 f_k(u_k) \right] \cdot M_i \end{array} \right. \quad (1.74)$$

Les quantités g_{ii} et f_i dépendent du système de coordonnées. Le choix des fonctions Φ_{ij} est arbitraire mais est lié aux coordonnées par les équations et sont déterminées de sorte que les conditions (1.74) soient satisfaites. Une fois ces conditions satisfaites, on aboutit à la séparation suivante pour chaque coordonnée u_i :

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{du_i} \left(f_i \frac{dU_i}{du_i} \right) + U_i \cdot \sum_{j=2}^3 \alpha_j \cdot \Phi_{ij}(u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.75)$$

où les α_j sont les constantes de séparation, $\alpha_1 = 0$ dans le cas du laplacien [24].

1.4.2 R-séparation

Quand la séparation simple n'est pas possible, il est possible de recourir à une autre technique de séparation des variables, la R-séparation. On dit qu'un système de coordonnées est R-séparable, si la solution peut se mettre sous la forme :

$$\Omega = \frac{U_1(u_1) \cdot U_2(u_2) \cdot U_3(u_3)}{R(u_1, u_2, u_3)} \quad (1.76)$$

L'ajout d'une fonction R quelconque permet d'élargir la technique de séparation des variables là où la séparation simple n'est pas possible. Il faut alors trouver une fonction R non-nulle qui vérifie les conditions de R-séparabilité définies dans [24] et qui permet la séparation en 3 équations différentielles ordinaires. Afin d'établir les conditions permettant la R-séparabilité, substituer (1.76) dans le laplacien donne :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{U_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{dU_i}{du_i} - \frac{U_i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial u_i} \right) \right) = 0 \quad (1.77)$$

où $R(u_1, u_2, u_3)$ est une fonction à définir plus tard. Afin de se ramener à une condition de séparabilité, il faut isoler $\partial R / \partial u_i$ de U_i . Pour cela, il est nécessaire que :

$$\frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} = R^2 f_i F_i \quad (1.78)$$

En insérant dans l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{U_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\begin{matrix} R f_i \cdot \frac{dU_i}{du_i} \\ A \end{matrix} - \begin{matrix} f_i U_i \frac{\partial R}{\partial u_i} \\ B \end{matrix} \right) = 0 \quad (1.79)$$

Chaque terme A et B donne après dérivation :

$$A = f_i \frac{\partial R}{\partial u_i} \frac{dU_i}{du_i} + R \frac{df_i}{du_i} \frac{dU_i}{du_i} + R f_i \cdot \frac{d^2 U_i}{du_i^2} \quad (1.80)$$

$$B = f_i \frac{dU_i}{du_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial u_i} + U_i \frac{df_i}{du_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial u_i} + U_i f_i \frac{d^2 R}{du_i^2} \quad (1.81)$$

Finalement, après simplifications puis en factorisant, (1.79) devient :

$$\sum_{i=1}^3 F_i \left(\frac{R}{U_i} \frac{d}{du_i} \left(f_i \cdot \frac{dU_i}{du_i} \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} \left(f_i \frac{\partial R}{\partial u_i} \right) \right) = 0 \quad (1.82)$$

Soit une fonction arbitraire $Q(u_1, u_2, u_3)$, en multipliant par RQ l'expression (1.82), puis, en rassemblant tous les termes non souhaités empêchant la séparation dans la constante α_1 , on obtient :

$$R^2 Q \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{U_i} \frac{d}{du_i} \left(f_i \cdot \frac{dU_i}{du_i} \right) + \sqrt{g} \alpha_1 = 0 \quad (1.83)$$

$$\alpha_1 = -\frac{RQ}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(f_i \frac{\partial R}{\partial u_i} \right) \quad (1.84)$$

La suite de la démonstration est donnée dans [24]. Les conditions nécessaires et suffisantes de R-séparabilité de l'équation de Laplace sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{g_{ii} f_{ii}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(f_i \frac{\partial R}{\partial u_i} \right) + R \frac{\alpha_1}{Q} = 0 \\ g_{ii} - Q \frac{S}{M_{i1}} = 0 \\ \frac{\sqrt{g}}{QS} - \left[\prod_{i=1}^3 f_i(u_i) \right] \cdot R^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.85)$$

S représente toujours le déterminant de la matrice de Stäckel et $Q(u_1, u_2, u_3)$ est une autre fonction arbitraire à déterminer d'après les conditions de séparation. On aboutit alors à la séparation suivante, identique à la séparation simple :

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{du_i} \left(f_i \frac{dU_i}{du_i} \right) + U_i \cdot \sum_{j=2}^3 \alpha_j \cdot \Phi_{ij}(u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.86)$$

1.4.3 Application au cas toroïdal trivial

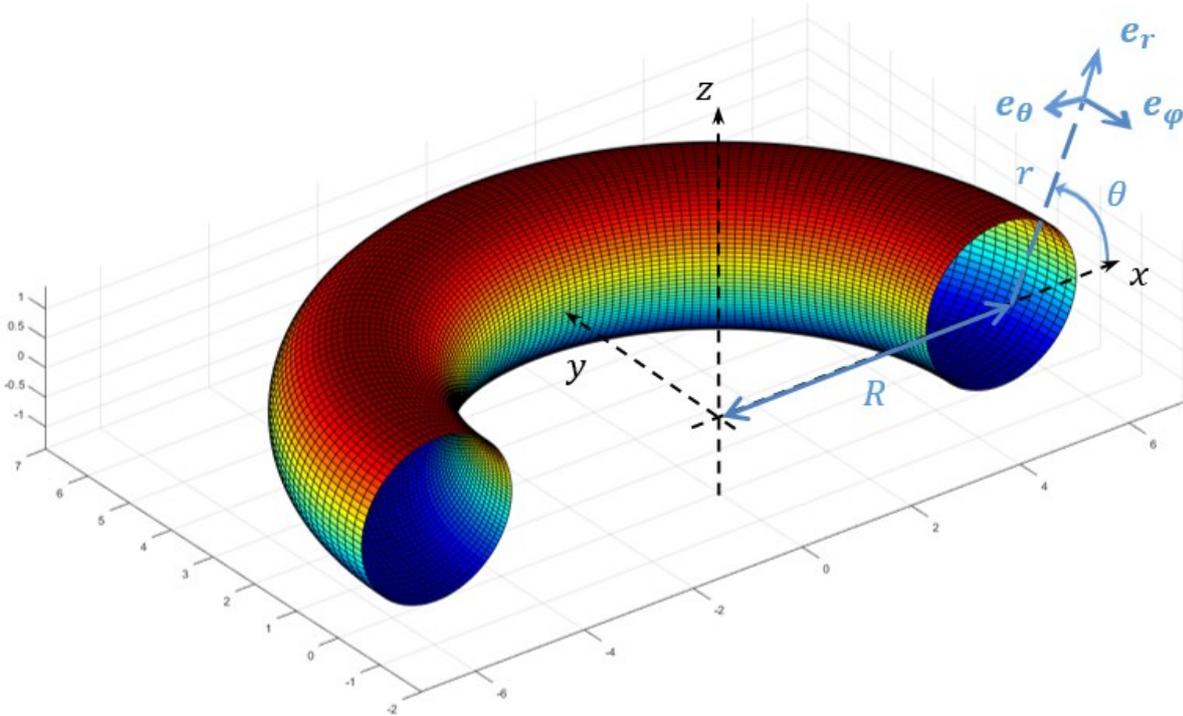


Figure 1-14 : Coordonnées toroïdales triviales

Les équations de la section 1.3 sont appliquées au cas des coordonnées toroïdales triviales. La Figure 1-14 montre le système de coordonnées (r, θ, φ) où R est le grand rayon du tore. Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) s'expriment en fonction des coordonnées toroïdales :

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (1.87)$$

Les coefficients métriques sont :

$$\begin{cases} g_{rr} = 1 \\ g_{\theta\theta} = r^2 \\ g_{\varphi\varphi} = (R + r \cos \theta)^2 \end{cases} \quad (1.88)$$

$$\text{D'où : } g = r^2 \cdot (R + r \cos \theta)^2$$

Les expressions de l'aire élémentaire et du volume élémentaire du tore sont :

$$dA = (g_{22} \cdot g_{33})^{1/2} du_2 \cdot du_3 = r \cdot (R + r \cos \theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (1.89)$$

$$dV = g^{1/2} \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot du_3 = r \cdot (R + r \cos \theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (1.90)$$

Les expressions des opérateurs différentiels donnent quant à eux :

$$\text{grad}_r \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta \Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi = \frac{1}{(R + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \quad (1.91)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r(R+r.\cos\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.(R+r.\cos\theta).A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} ((R+r.\cos\theta).A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r.A_\varphi) \right] \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = r(R+r.\cos\theta) & \left\{ \mathbf{a}_1 \left[\frac{\partial((R+r.\cos\theta).A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial \varphi} \right] \right. \\ & + \mathbf{a}_2 r \left[\frac{\partial((R+r.\cos\theta)A_r)}{\partial u_\varphi} - \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ & \left. + \mathbf{a}_3 (R+r.\cos\theta) \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Omega = \frac{1}{r.(R+r.\cos\theta)} & \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r.(R+r.\cos\theta) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{(R+r.\cos\theta)}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r}{(R+r.\cos\theta)} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.94)$$

La première condition nécessaire de séparabilité simple (1.71) est que les termes intervenant dans le laplacien soient exprimables par un produit de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{g_{rr}} = r.(R+r.\cos\theta) = f_r(r).F_r(\theta, \varphi) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{\theta\theta}} = \frac{R+r.\cos\theta}{r} = f_\theta(\theta).F_\theta(r, \varphi) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{r}{R+r.\cos\theta} = f_\varphi(\varphi).F_\varphi(r, \theta) \end{cases} \quad (1.95)$$

Il est impossible de mettre les termes sous la forme d'un même produit en raison du terme $R+r.\cos\theta$. Ainsi, la séparabilité simple n'est pas possible pour le système de coordonnées toroïdal trivial. De même, l'ajout d'une fonction $R(r, \theta, \varphi)$ ne permet également pas de séparation, il est impossible de satisfaire la première condition de R-séparabilité (1.78) :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{g_{rr}} = r.(R+r.\cos\theta) = R^2 f_r(r).F_r(\theta, \varphi) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{\theta\theta}} = \frac{R+r.\cos\theta}{r} = R^2 f_\theta(\theta).F_\theta(r, \varphi) \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{r}{R+r.\cos\theta} = R^2 f_\varphi(\varphi).F_\varphi(r, \theta) \end{cases} \quad (1.96)$$

La modélisation par séparation de variable dans le repère toroïdal trivial n'est donc pas possible.

1.4.4 Nouveau repère toroïdal R-séparable

Dans [12], qui recense un grand nombre de systèmes de coordonnées permettant la méthode de riabes, on trouve un nouveau repère toroïdal R-séparable. En notant ch et sh les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, ce repère est défini par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x = \frac{a sh \eta}{ch \eta - \cos \theta} \cos \psi \\ y = \frac{a sh \eta}{ch \eta - \cos \theta} \sin \psi \\ z = \frac{a \sin \theta}{ch \eta - \cos \theta} \end{cases} \quad (1.97)$$

Pour compléter cette partie, un rappel sommaire des principaux résultats est fait. Un développement plus détaillé sera fait au chapitre 4.

Les composantes du tenseur métrique et le laplacien sont dans ce cas :

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = \frac{a^2}{(ch \eta - \cos \theta)^2} \\ g_{33} = \frac{a^2 \cdot sh^2 \eta}{(ch \eta - \cos \theta)^2} \end{cases} \quad (1.98)$$

$$D'où : \sqrt{g} = \frac{a^3 \cdot sh \eta}{(ch \eta - \cos \theta)^3}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Omega = & \frac{(ch \eta - \cos \theta)^3}{a^2 sh \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{sh \eta}{(ch \eta - \cos \theta)} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + sh \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{(ch \eta - \cos \theta)} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + \frac{(ch \eta - \cos \theta)^2}{a^2 sh^2 \eta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} \end{aligned} \quad (1.99)$$

La R-séparation est ici possible avec un terme $R(\eta, \theta) = (ch \eta - \cos \theta)^{-1/2}$ [24] :

$$\Omega(\eta, \theta, \psi) = (ch \eta - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \cdot H(\eta) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Psi(\psi) \quad (1.100)$$

Les trois équations différentielles ordinaires séparées permises par cette méthode sont :

$$\begin{cases} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \coth \eta \frac{dH}{d\eta} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{sh^2 \eta} \right) H = 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \alpha_2 \Theta = 0 \\ \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha_3 \Psi = 0 \end{cases} \quad (1.101)$$

où α_2 et α_3 sont les constantes de séparation. La modélisation analytique par méthode de séparation des variables en coordonnées toroïdales est donc permise et nous pouvons envisager la modélisation de la machine toroïdale idéale dans ce système de coordonnées.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre a permis de présenter la méthode de modélisation des machines électriques utilisée dans ces travaux de thèse. En partant de la méthode du tenseur de Maxwell ou de l'expression de la force de Laplace, on montre que le couple peut être calculé à partir du champ magnétique produit par les aimants permanents et la distribution des courants.

L'utilisation du coefficient de Carter permet de s'affranchir de la modélisation des encoches. Dans les travaux qui seront présentés par la suite, on étudie les machines synchrones à aimants permanents sans saillance au rotor et on opte pour décrire les courants par une distribution de densité de courant surfacique localisée sur la surface d'alésage du stator. Ainsi, la méthode de calcul du couple pour une machine avec ou sans encoches se fait à partir de la modélisation analytique du champ inducteur.

Nous nous bornons donc à déterminer une méthode de modélisation du champ à vide des machines à aimants permanents sans encoches et sans saillances au rotor afin de l'appliquer aux machines existantes et à la nouvelle machine toroïdale idéale en vue de comparer leurs performances.

La modélisation du champ inducteur passe par la résolution des équations de Maxwell. Nous avons choisi une formulation en potentiel scalaire magnétique. Notre but étant d'élaborer des modèles simples et rapides, nous avons opté pour la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation de Poisson. Elle repose sur un principe simple et est applicable à un grand nombre de systèmes de coordonnées. Seulement, son application au cas du repère toroïdal trivial dans lequel nous avons dessiné la nouvelle machine est impossible. Il faut faire appel à un système de coordonnées toroïdal qui n'est pas simplement séparable mais R-séparable.

Nous nous intéressons dans le prochain chapitre aux modèles analytiques 2D du champ magnétique à vide des machines électriques. Ceci permet d'appliquer les concepts de modélisation présentés dans ce premier chapitre et d'étudier les modélisations 2D existantes dans la littérature.

Chapitre 2

Modélisation analytique en deux dimensions

Table des matières du chapitre 2 :

Chapitre 2	Modélisation analytique en deux dimensions	49
2.1	Introduction	50
2.2	Etat de l'art de la modélisation en deux dimensions	50
2.2.1	Machine linéaire dans le repère cartésien	51
2.2.2	Machine à flux radial	58
2.2.3	Machine tubulaire	63
2.2.4	Machine à flux axial	67
2.3	Modèle de dimensionnement de la machine toroïdale	70
2.3.1	Méthode unifiée de dimensionnement	71
2.3.2	Extension du modèle unifié à la machine tubulaire	72
2.3.3	Comparaison des performances	83
2.4	Conclusion	93

2.1 Introduction

Le chapitre 1 a introduit la méthode de calcul du couple des machines synchrones à aimants permanents montés en surface. Les modélisations se limiteront donc ici au calcul du champ magnétique en circuit ouvert. Ce chapitre servira à la fois d'illustration des concepts présentés précédemment ainsi que d'état de l'art de ce qui se fait actuellement sur la modélisation du champ magnétique par méthode de séparation des variables en 2D.

Les modélisations 2D du champ magnétique de différentes configurations géométriques de machines sont présentées. Une modélisation 2D dans des configurations géométriques de machine nécessitant normalement une modélisation 3D est développée. Ces différentes approches vont nous permettre de dégager une démarche unifiée pour les chapitres suivants.

Pour donner une première justification à la recherche proposée, nous allons évaluer les performances de la machine toroïdale avec un modèle simplifié. Pour cela, nous allons utiliser un modèle de dimensionnement de machine développé pour les machines à flux radial et à flux axial avec des ondes de champ magnétique et de densité de courant surfacique sinusoïdales. Pour évaluer le couple de la machine toroïdale, nous utilisons une machine de configuration géométrique proche : la machine tubulaire. Le modèle de dimensionnement choisi est donc appliqué à la machine tubulaire.

De ce fait, nous disposons donc d'outils de dimensionnement unifié pour comparer les performances de la machine à flux radial, de la machine à flux axial et de la machine toroïdale approchée par une machine tubulaire. A partir de ces outils, une méthode de comparaison des performances de ces machines est proposée. Les systèmes embarqués ont comme objectif l'amélioration du couple spécifique qui constitue donc un des critères pour comparer les machines.

2.2 Etat de l'art de la modélisation en deux dimensions

La section 2.2 présente les modèles établis par la méthode de séparation des variables pour différentes topologies de machines synchrones à aimants permanents. Les topologies suivantes seront étudiées :

- le moteur linéaire dans le repère cartésien,
- le moteur tubulaire dans le repère cylindrique,
- le moteur à entrefer radial dans le repère cylindrique,
- le moteur à entrefer axial dans le repère cylindrique.

L'état de l'art de ces différentes modélisations aura pour objectif l'illustration des principes mathématiques définis au chapitre 1 et permettra d'identifier potentiellement une méthode de modélisation unifiée applicable à chaque machine.

2.2.1 Machine linéaire dans le repère cartésien

- *Définition du problème*

Le cas le plus simple consiste à modéliser le champ magnétique des aimants dans une machine linéaire dessinée dans le repère cartésien. Cette résolution a été proposée dans [26]. Soit la configuration schématisée Figure 2-1, les aimants permanents sont orientés alternativement, la géométrie est répétée périodiquement suivant e_x .

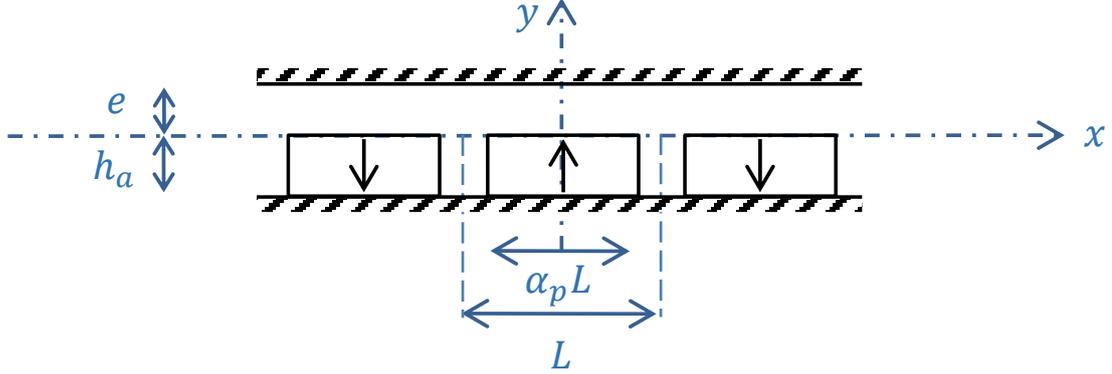


Figure 2-1 : Géométrie et paramètres du problème

Comme montré dans [26], on peut réduire le domaine d'étude à l'aimant et l'entrefer. On considère que de part et d'autre du domaine d'étude il y a un milieu ferromagnétique de perméabilité infinie (μ_{fer} étant très grand, il est considéré comme infini pour notre problème). La composante tangentielle du champ d'excitation magnétique sur les interfaces aimant-fer et air-fer, \mathbf{H}_t est nulle (cf. section 1.2.2). Le domaine d'étude comporte donc deux milieux : les aimants ($y < 0$) et l'entrefer ($y > 0$).

Seconde hypothèse, les perméabilités de l'air et des aimants étant très proches, on suppose que : $\mu_{aimant} = \mu_{air} = \mu_0$. On écrit les équations de Maxwell dans l'aimant et l'entrefer dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires. N'ayant aucune distribution surfacique de courant, elles deviennent :

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathit{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

De plus les lois constitutives des milieux nous donnent dans l'aimant et l'entrefer :

$$\mathbf{B}_a = \mu_0(\mathbf{H}_a + \mathbf{M}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}_e = \mu_0 \mathbf{H}_e \quad (2.4)$$

où \mathbf{B}_e et \mathbf{H}_e sont respectivement le champ magnétique et le champ d'excitation magnétique dans l'entrefer et \mathbf{B}_a et \mathbf{H}_a , le champ magnétique et le champ d'excitation magnétique dans

les aimants. \mathbf{M} est l'aimantation et s'exprime par $\mathbf{M} = M(x)\mathbf{e}_y$, M en fonction de x étant représentée Figure 2-2 :

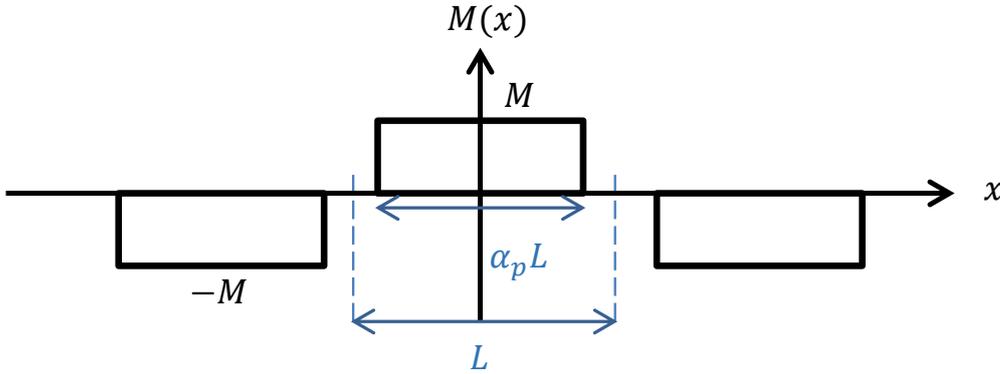


Figure 2-2 : Aimantation en fonction de x

La fonction M peut se décomposer en série de Fourier. Le calcul de ses coefficients nous donne la décomposition suivante :

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{L} x \quad (2.5)$$

$$\text{Avec } M_n = \frac{4M}{(2n+1)\pi} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \alpha_p \right]$$

L'équation (2.2) nous permet d'introduire le potentiel scalaire Ω tel que $\mathbf{H} = -\mathbf{grad} \Omega$, où Ω est une fonction de x et y . En combinant ce résultat aux équations (2.1), (2.3) et (2.4) et comme \mathbf{M} est uniforme (sa divergence est nulle), on obtient l'équation aux dérivées partielles, valable dans les aimants et l'entrefer :

$$\Delta \Omega = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

▪ Méthode de séparation des variables

Afin de résoudre le laplacien, on applique la méthode de séparation des variables [27]. On pose alors la fonction Ω sous la forme du produit d'une fonction dépendant uniquement de x et d'une fonction dépendant uniquement de y :

$$\Omega(x, y) = f(x) \cdot g(y) \quad (2.7)$$

En remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles, on aboutit à deux équations différentielles ordinaires :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = \pm m^2 \quad (2.8)$$

où $\pm m^2$ est appelée la constante de séparation. Le signe peut être choisi ici positif ou négatif. Si on le choisit positif, la résolution des équations différentielles ordinaires sur f et g nous donnent comme solution une combinaison linéaire des fonctions ch et sh pour f , et une combinaison linéaire des fonctions cos et sin pour g (2.9) et inversement si on le choisit négatif (2.10).

$$\begin{cases} f(x) = c_1 \cdot ch(mx) + c_2 \cdot sh(mx) \\ g(y) = c_3 \cdot cos(my) + c_4 \cdot sin(my) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} f(x) = c_1 \cdot cos(mx) + c_2 \cdot sin(mx) \\ g(y) = c_3 \cdot ch(my) + c_4 \cdot sh(my) \end{cases} \quad (2.10)$$

Or, la périodicité de notre problème nous impose une constante de séparation négative pour avoir une dépendance périodique en x . En effet, la géométrie de la distribution des aimants nous amène à choisir une solution pour Ω de la même forme que M . On a donc $c_2 = 0$ et $m = \frac{(2n+1)\pi}{L}$ par identification. Par principe de superposition, on peut sommer toutes les solutions précédentes pour aboutir à une solution Ω de la forme :

$$\Omega(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n ch(my) + b_n sh(my)] \cdot cos(mx) \quad (2.11)$$

avec :

$$m = \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad (2.12)$$

A y fixé, Ω est, tout comme M , une série de Fourier en x . La forme de cette solution est valable pour chaque milieu mais n'est pas égale dans les deux. Les solutions pour les aimants et l'entrefer s'écrivent donc respectivement :

$$\Omega_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_a} ch(my) + b_{n_a} sh(my)] \cdot cos(mx) \quad (2.13)$$

$$\Omega_e(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_e} ch(my) + b_{n_e} sh(my)] \cdot cos(mx) \quad (2.14)$$

▪ Détermination de la solution finale

Il reste à déterminer les coefficients des deux solutions. Pour cela on applique les conditions de passage et les conditions aux limites données section 1.2.2 au problème traité ici. On obtient les équations :

$$H_{x_a}(x, -h_a) = 0 \quad (2.15)$$

Conditions limites :

$$H_{x_e}(x, e) = 0 \quad (2.16)$$

$$H_{x_a}(x, 0) = H_{x_e}(x, 0) \quad (2.17)$$

Conditions de passage :

$$B_{y_a}(x, 0) = B_{y_e}(x, 0) \quad (2.18)$$

Les deux conditions aux limites (2.15) et (2.16) nous donnent, sachant que $H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$:

$$\begin{cases} a_{n_a} \operatorname{ch}(mh_a) - b_{n_a} \operatorname{sh}(mh_a) = 0 \\ a_{n_e} \operatorname{ch}(me) + b_{n_e} \operatorname{sh}(me) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

soit :

$$\begin{cases} a_{n_a} = b_{n_a} \operatorname{th}(mh_a) \\ a_{n_e} = -b_{n_e} \operatorname{th}(me) \end{cases} \quad (2.20)$$

Les expressions des potentiels scalaires (2.13) et (2.14) deviennent alors :

$$\Omega_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n_a} \frac{\operatorname{sh}(m(y + h_a))}{\operatorname{ch}(mh_a)} \cdot \cos(mx) \quad (2.21)$$

$$\Omega_e(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n_e} \frac{\operatorname{sh}(m(y - e))}{\operatorname{ch}(me)} \cdot \cos(mx) \quad (2.22)$$

Il reste à utiliser les conditions de passage à l'interface aimant-entrefer. On écrit l'équation (2.18) avec l'aide des lois constitutives des milieux sous la forme suivante :

$$B_{y_a}(x, 0) = B_{y_e}(x, 0) \Leftrightarrow \mu_0[H_{y_a}(x, 0) + M(x)] = \mu_0 H_{y_e}(x, 0) \quad (2.23)$$

Les équations (2.17) et (2.23) issues des conditions de passage donnent alors respectivement :

$$H_{x_a}(x, 0) = H_{x_e}(x, 0) \quad (2.24)$$

$$H_{y_e}(x, 0) - H_{y_a}(x, 0) = M(x) \quad (2.25)$$

Avec la continuité de la composante tangentielle (2.24) et les nouvelles expressions des potentiels scalaires (2.21) et (2.22) on obtient :

$$b_{n_a} \frac{\operatorname{sh}(mh_a)}{\operatorname{ch}(mh_a)} = -b_{n_e} \frac{\operatorname{sh}(me)}{\operatorname{ch}(me)} \quad (2.26)$$

Et donc :

$$b_{n_e} = -b_{n_a} \frac{\text{th}(mh_a)}{\text{th}(me)} \quad (2.27)$$

On constate que la continuité de la composante normale du champ (2.25) nous impose de poser au départ une solution de la même forme que la fonction M . En combinant cette équation au résultat précédent (2.27), à l'expression des potentiels scalaires (2.21) et (2.22) et à l'expression (2.5) de M , on en déduit l'expression des coefficients b_{n_a} :

$$b_{n_a} = \frac{M_n}{m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\text{th}(mh_a)}{\text{th}(me)}} \quad (2.28)$$

Les expressions finales du potentiel scalaire dans les aimants et l'entrefer une fois simplifiées sont :

$$\Omega_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{m} \cdot \frac{\text{sh}(me)}{\text{sh}(m(e + h_a))} \cdot \text{sh}(m(y + h_a)) \cdot \cos(mx) \quad (2.29)$$

$$\Omega_e(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{m} \frac{\text{sh}(mh_a)}{\text{sh}(m(e + h_a))} \cdot \text{sh}(m(y - e)) \cdot \cos(mx) \quad (2.30)$$

Les composantes axiales et tangentielles du champ magnétique dans l'entrefer peuvent ensuite être aisément calculées grâce à (2.4) avec m donné en (2.12).

▪ *Comparaison avec les éléments finis :*

La comparaison est faite via le logiciel de simulation FEMM [28]. Les paramètres d'entrées sont les suivants :

- $L = 5$ cm
- $e = 1$ cm
- $h_a = 3$ cm
- $\alpha_p = 0.8$
- $M = H_c$ avec $H_c = 772$ kA/m valeur issue de la librairie de matériaux FEMM pour le type d'aimant choisi, ici SmCo (27 MGOe).

Les dimensions sont choisies arbitrairement et n'ont pour but que l'illustration de la méthode et la validation du modèle. Suivant x , le problème est limité par une condition aux limites de périodicité, seulement trois pôles sont représentés. Pour se placer sous les mêmes hypothèses que la résolution analytique, on fixe $\mu_{aimant} = \mu_{air} = \mu_0$ et on met en place les mêmes conditions aux limites ($H_t = 0$) en $y = e$ et $y = -h_a$.

Une information importante tirée de cette étude concerne le nombre d'harmoniques. Le tracé de la solution analytique ne peut pas se faire avec un nombre infini d'harmoniques d'une part mais, d'autre part, le nombre d'harmoniques est limité par le calcul numérique. En effet,

lorsque des solutions font intervenir des fonctions hyperboliques, on constate qu'à partir d'un certain rang, le logiciel de calcul numérique, ici Matlab, approxime certains calculs à l'infini ou à 0. Ceci a pour conséquence de créer des formes indéterminées et de rendre le calcul impossible. Le meilleur résultat est obtenu avec 188 harmoniques. Les résultats analytiques pour ce nombre d'harmoniques ainsi que les simulations sous FEMM sont présentés en Figures 2-3 à 2-8.

Le temps de calcul est de 0.1 seconde pour la solution analytique et de 1.0 seconde pour la simulation par éléments finis.

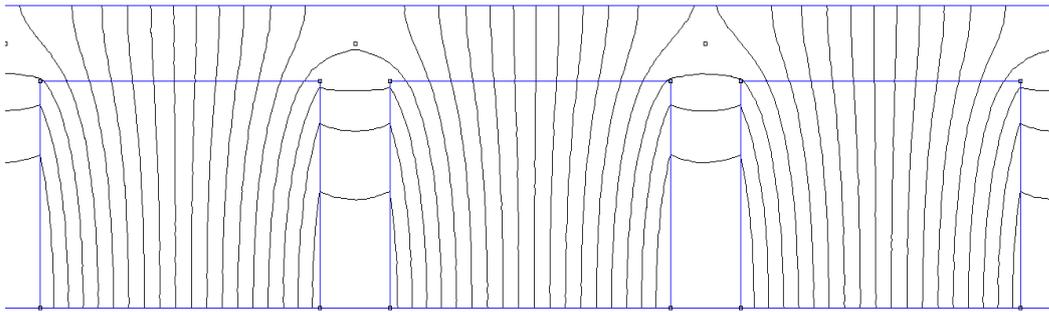


Figure 2-3 : Lignes de champ de la solution par éléments finis (tracé sous FEMM)

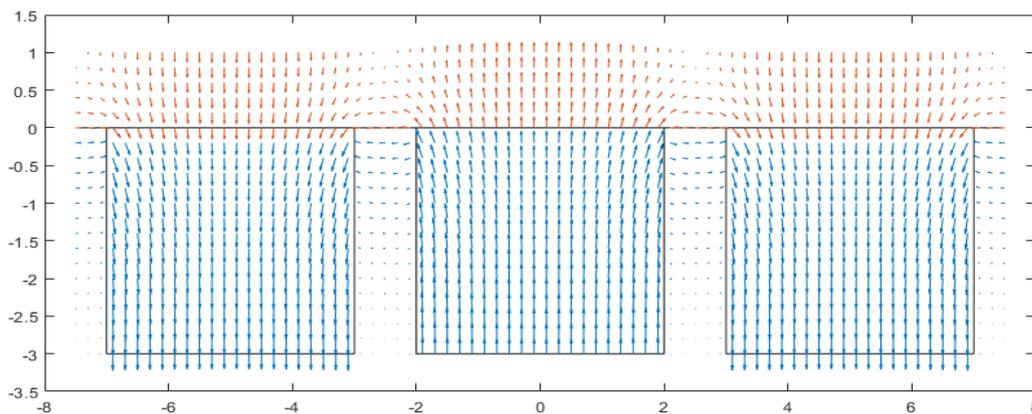


Figure 2-4 : Direction du champ pour la solution analytique (tracé sous MATLAB)

Les Figures 2-3 et 2-4 permettent de comparer la forme des lignes de champ pour les deux méthodes de calcul sur une longueur permettant de visualiser trois aimants permanents. L'allure des lignes de champ sont sensiblement identiques. Pour avoir une idée plus précise, on trace les composantes normale et tangentielle de \mathbf{B} sur une période en fonction de x pour $y = e/2$ et on calcule l'erreur en pourcentage entre les deux méthodes le long de cette ligne.

Ces résultats sont illustrés Figures 2-5 et 2-6. On obtient une erreur d'environ 2% au maximum validant ainsi la modélisation. Si nous traçons la forme d'onde de l'aimantation du modèle analytique Figure 2-7, on constate que le signal n'est pas parfaitement carré. Un plus grand nombre d'harmoniques pourrait éventuellement améliorer le taux d'erreur entre les deux méthodes de calcul.

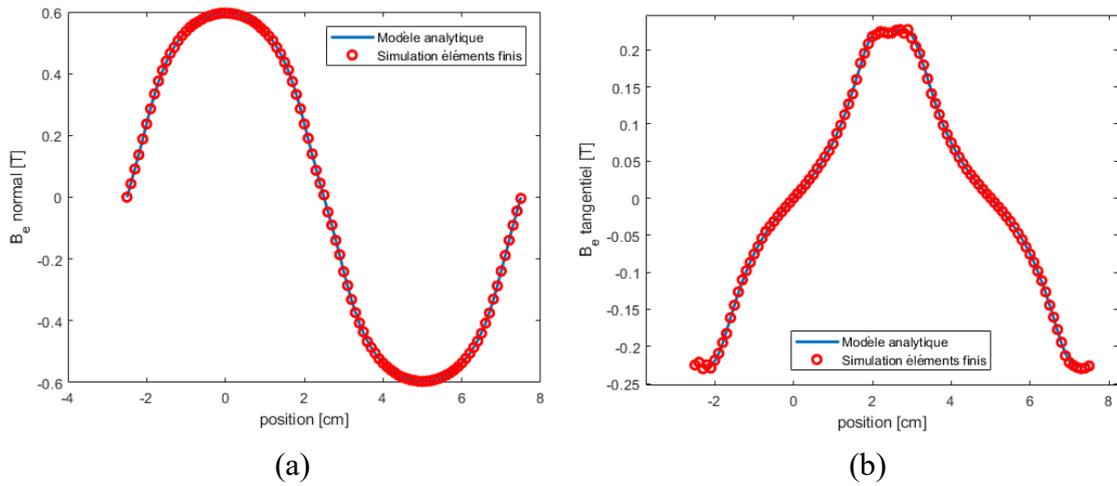


Figure 2-5 : Champ magnétique normale (a) et tangentielle (b) en fonction de x pour $y=e/2$.

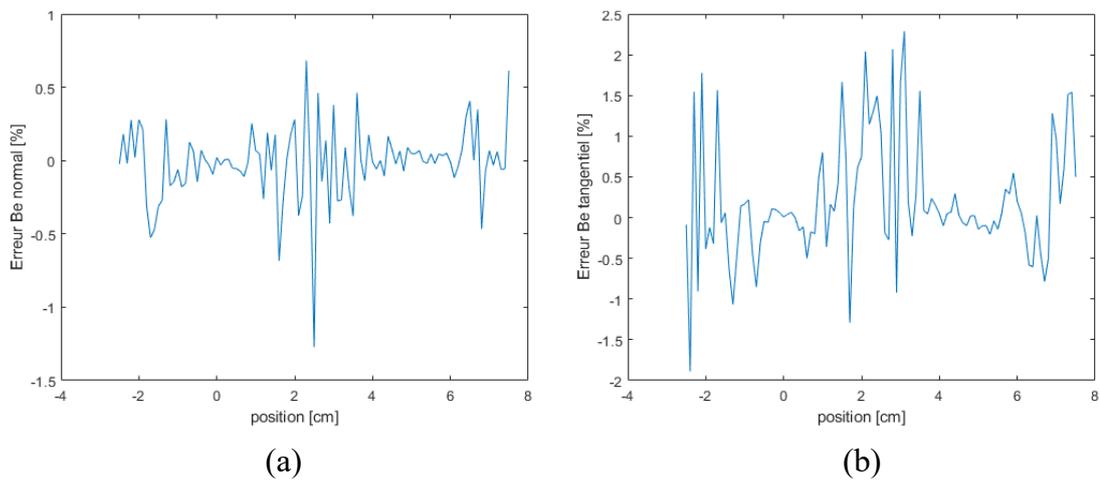


Figure 2-6 : Erreur normale (a) et tangentielle (b) en fonction de x pour $y=e/2$

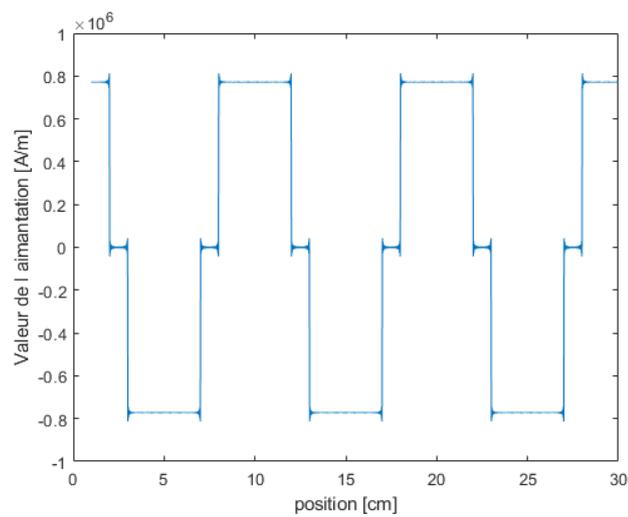


Figure 2-7 : Aimantation en fonction de x pour 188 harmoniques

Il est également intéressant de vérifier la continuité de la composante normale du champ \mathbf{B} à l'interface aimant-entrefer. La Figure 2-8 trace l'évolution de la composante normale du modèle analytique de \mathbf{B} en fonction de y pour $x = 0$ (l'axe de l'aimant central). La ligne rouge représente l'interface aimant-entrefer en $y = 0$.

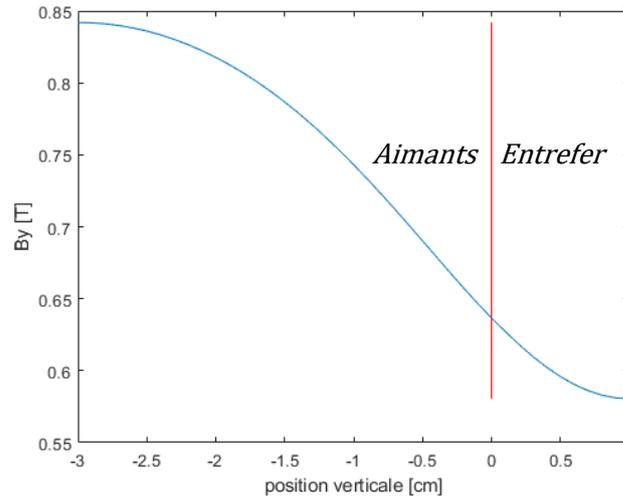


Figure 2-8 : Continuité de la composante B_y à l'interface aimant-entrefer

2.2.2 Machine à flux radial

La machine à flux radial est illustrée en 2D en Figure 2-9. Le modèle de la machine à flux radial sans encoches a été développé dans [29] et [30].

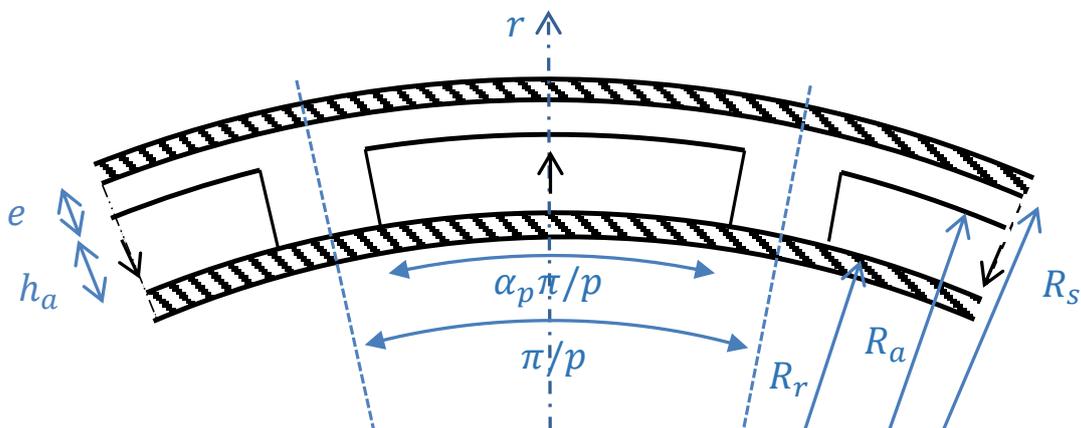


Figure 2-9 : Géométrie du moteur à entrefer radial

Le système de coordonnées choisi ici est le système de coordonnées cylindriques. La géométrie du problème présente une invariance par rotation suivant z . L'aimantation devient alors $\mathbf{M} = M(\theta)\mathbf{e}_r$:

$$M(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos(2n+1)p\theta \quad (2.31)$$

$$\text{Avec, } M_n = \frac{4M}{(2n+1)\pi} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\alpha_p\right)$$

où α_p est l'arc polaire définissant l'angle d'ouverture de l'aimant, compris entre 0 et 1. Les équations de Maxwell restent les mêmes que vues précédemment mais du fait du système de coordonnées cylindriques, la divergence de \mathbf{M} n'est plus nulle dans les aimants :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= -\text{grad } \Omega \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dans les milieux on a toujours :

$$\mathbf{B}_a = \mu_0(\mathbf{H}_a + \mathbf{M}) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{B}_e = \mu_0\mathbf{H}_e \quad (2.35)$$

D'où :

$$\Delta\Omega = \begin{cases} 0 & \text{dans l'entrefer} \\ \text{div } \mathbf{M} & \text{dans les aimants} \end{cases} \quad (2.36)$$

Contrairement au cas cartésien, l'apparition du second membre nous impose donc de trouver une solution particulière pour compléter la solution homogène.

- *Méthode de séparation des variables*

Le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.37)$$

On applique de nouveau la méthode de séparation des variables [27] pour résoudre l'équation homogène. On pose cette fois Ω sous la forme du produit d'une fonction f dépendant uniquement de r et d'une fonction g dépendant uniquement de θ . En remplaçant dans (2.37), on obtient :

$$\frac{r^2}{f} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = m^2 \quad (2.38)$$

La constante de séparation est choisie positive pour respecter la périodicité du problème suivant θ et ainsi obtenir une fonction g en cosinus. La solution de l'équation en f donne comme solution une combinaison linéaire des fonctions $r \rightarrow r^m$ et $r \rightarrow r^{-m}$ [23] :

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot r^m + b_n \cdot r^{-m}] \cdot \cos(m\theta), \quad m = (2n + 1)p \quad (2.39)$$

▪ *Solution particulière*

Dans l'entrefer la solution homogène (2.39) est la solution finale. Mais dans les aimants, il faut compléter cette solution par une solution particulière vérifiant l'équation avec second membre. Pour cela on évalue la divergence de \mathbf{M} :

$$\text{div } \mathbf{M} = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{M_r}{r} \quad (2.40)$$

On cherche donc une solution particulière vérifiant :

$$\frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \theta^2} = \frac{M_r}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos(2n + 1)p\theta \quad (2.41)$$

On choisit une solution de la forme :

$$\Omega_p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_1 \cdot r \cdot \cos m\theta \quad (2.42)$$

En substituant (2.42) dans (2.41), on obtient la valeur de C_1 :

$$C_1 = \frac{M_n}{1 - m^2} \quad (2.43)$$

Cette expression est valide pour $m \neq 1$, le cas $m = 1$ est traité dans [30] mais ne sera pas traité ici, le nombre de paires de pôles des machines étant généralement > 1 . Les expressions des potentiels scalaires dans les aimants et l'entrefer deviennent respectivement :

$$\Omega_a(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_a} \cdot r^m + b_{n_a} \cdot r^{-m}] \cdot \cos m\theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_1 \cdot r \cdot \cos m\theta \quad (2.44)$$

$$\Omega_e(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_e} \cdot r^m + b_{n_e} \cdot r^{-m}] \cdot \cos m\theta \quad (2.45)$$

Reste donc à déterminer les quatre coefficients à l'aide des conditions de passage et des conditions aux limites.

▪ *Détermination de la solution finale*

Les conditions de passage et conditions aux limites détaillées section 1.2.2 sont appliquées au cas de la machine à flux radial, ce qui donne :

$$H_{\theta_a}(R_r, \theta) = 0 \quad (2.46)$$

Conditions limites :

$$H_{\theta_e}(R_s, \theta) = 0 \quad (2.47)$$

$$H_{\theta_a}(R_a, \theta) = H_{\theta_e}(R_a, \theta) \quad (2.48)$$

Conditions de passage :

$$B_{r_a}(R_a, \theta) = B_{r_e}(R_a, \theta) \quad (2.49)$$

Ce qui amène, à l'aide des lois constitutives des milieux magnétiques, à un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$CL: \begin{cases} \left. \frac{\partial \Omega_a}{\partial \theta} \right|_{r=R_r} = 0 \\ \left. \frac{\partial \Omega_e}{\partial \theta} \right|_{r=R_s} = 0 \end{cases} \quad CP: \begin{cases} \left. \frac{\partial \Omega_e}{\partial \theta} \right|_{r=R_a} = \left. \frac{\partial \Omega_a}{\partial \theta} \right|_{r=R_a} \\ \left. \frac{\partial \Omega_a}{\partial r} \right|_{r=R_a} - \left. \frac{\partial \Omega_e}{\partial r} \right|_{r=R_a} = M(\theta) \end{cases} \quad (2.50)$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} a_{n_a} \cdot R_r^m + b_{n_a} \cdot R_r^{-m} + C_1 \cdot R_r = 0 \\ a_{n_e} \cdot R_s^m + b_{n_e} \cdot R_s^{-m} = 0 \\ a_{n_e} \cdot R_a^m + b_{n_e} \cdot R_a^{-m} = a_{n_a} \cdot R_a^m + b_{n_a} \cdot R_a^{-m} + C_1 \cdot R_a \\ m \cdot [a_{n_a} \cdot R_a^{m-1} - b_{n_a} \cdot R_a^{-m-1}] + C_1 - m \cdot [a_{n_e} \cdot R_a^{m-1} - b_{n_e} \cdot R_a^{-m-1}] = M_n \end{cases} \quad (2.51)$$

Le système précédent permet le calcul des coefficients du potentiel scalaire magnétique puis des différentes composantes du champ magnétique.

▪ *Comparaison avec le calcul par éléments finis*

Les paramètres sont les même que précédemment en y ajoutant les données suivantes :

- $R_r = 10 \text{ cm}$
- $R_a = R_r + h_a$
- $R_s = R_a + e$

Les résultats des calculs analytiques et ceux obtenus par simulation sous FEMM [28] sont présentés des Figures 2-10 à 2-12. L'allure des lignes de champs est cohérente pour ce modèle également. Les erreurs et temps de calcul sont similaires au problème précédent. La différence majeure avec le modèle établi en cartésien réside dans l'utilisation des fonctions $r \mapsto r^m$ et $r \mapsto r^{-m}$ à la place des fonctions hyperboliques. De plus, dans ce repère, l'apparition d'un second membre dans l'équation aux dérivées partielles a nécessité l'ajout d'une solution particulière.

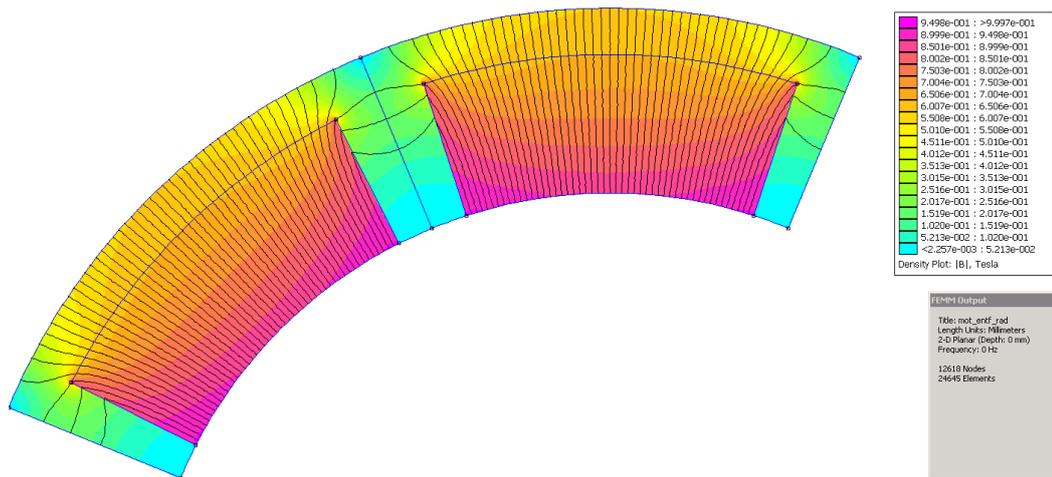


Figure 2-10 : Lignes de champs obtenues par éléments finis

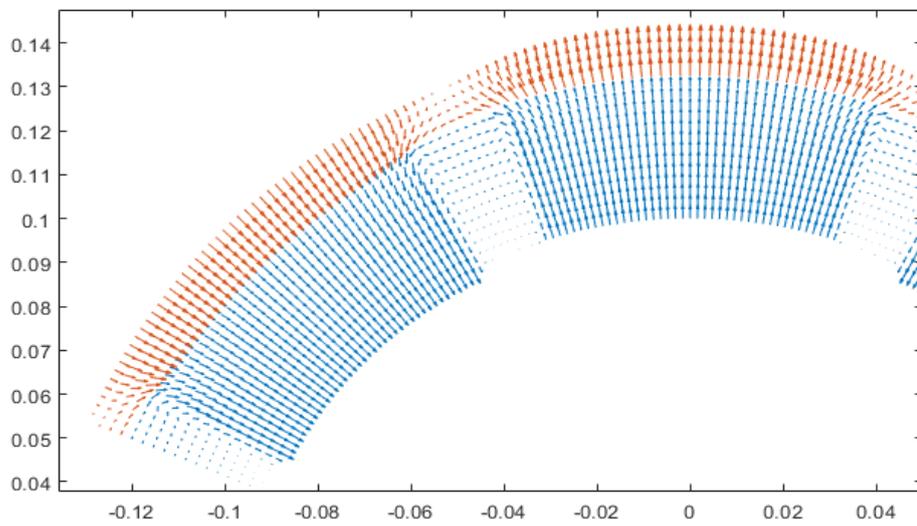


Figure 2-11 : Lignes de champs obtenues par calcul analytique

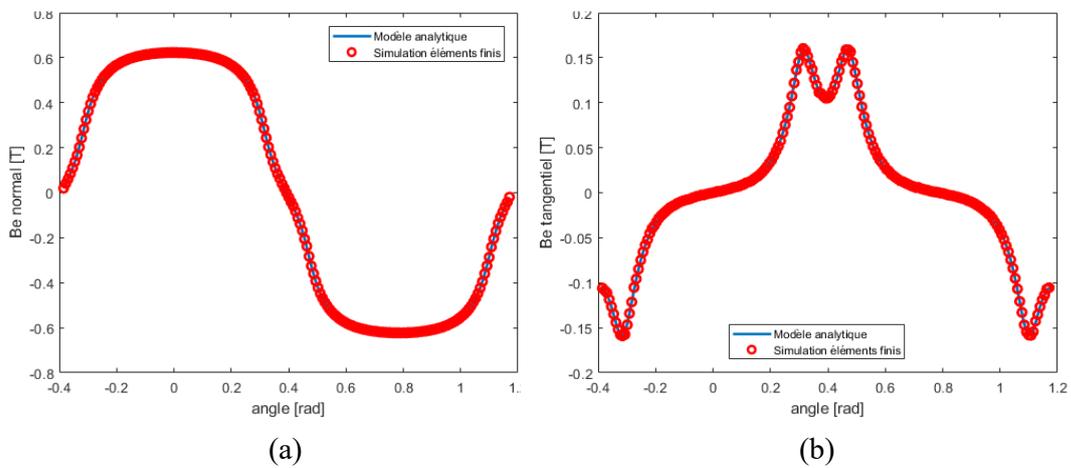


Figure 2-12 : Comparaison des composantes radiales (a) et tangentielles (b) du champ magnétique pour $r = R_a + e/2$

2.2.3 Machine tubulaire

La partie mobile de cette machine se déplace linéairement le long de son axe Oz. Les aimants sont aimantés radialement mais cette fois l'alternance des paires de pôles se fait suivant l'axe z. Ce modèle a été développé dans [31].

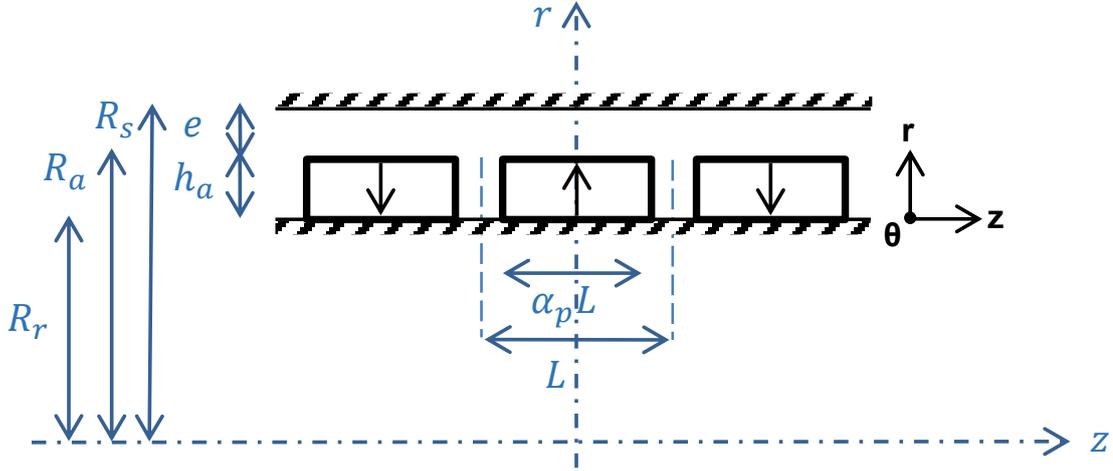


Figure 2-13 : Géométrie de la machine linéaire tubulaire

Le problème présente une invariance par rotation suivant θ . L'aimantation devient alors $\mathbf{M} = M(z)\mathbf{e}_r$:

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{L} z \quad (2.52)$$

Le calcul des coefficients est identique au cas traité section 2.2.1. Les équations de Maxwell restent les mêmes mais du fait du système de coordonnées cylindriques, la divergence de \mathbf{M} n'est plus nulle dans les aimants :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.53)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Omega$$

Combiné aux lois constitutives des milieux magnétiques on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\Delta \Omega = \begin{cases} 0 & \text{dans l'entrefer} \\ \operatorname{div} \mathbf{M} & \text{dans les aimants} \end{cases} \quad (2.55)$$

Là encore, la présence d'un second membre impose la recherche d'une solution particulière.

- *Méthode de séparation des variables*

Le laplacien en coordonnées cylindriques dans le plan (r, z) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (2.56)$$

On applique de nouveau la méthode de séparation des variables [27] pour résoudre l'équation homogène. On pose cette fois Ω sous la forme du produit d'une fonction f dépendant uniquement de r et d'une fonction g dépendant uniquement de z . En remplaçant dans (2.56), on obtient :

$$\frac{1}{f} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^2} = m^2 \quad (2.57)$$

la constante de séparation est choisie positive pour respecter la périodicité du problème suivant z et ainsi obtenir une fonction g en cosinus. L'équation en f est une équation différentielle de Bessel qui nous donne comme solution une combinaison linéaire des fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèces d'ordre 0 [23] :

$$\Omega(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot I_0(mr) + b_n \cdot K_0(mr)] \cdot \cos mz, \quad m = (2n + 1) \frac{\pi}{L} \quad (2.58)$$

- *Solution particulière*

Dans l'entrefer la solution homogène (2.58) est la solution totale. Mais dans les aimants, il faut compléter cette solution par une solution particulière vérifiant l'équation avec second membre. Pour cela on évalue la divergence de \mathbf{M} :

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{M_r}{r} \quad (2.59)$$

La recherche d'une solution particulière de cette équation n'est pas intuitive. C'est pourquoi [31] propose une alternative en réécrivant l'aimantation comme le produit d'une fonction dépendante uniquement de r et d'une fonction dépendante uniquement de z . \mathbf{M} se réécrit alors :

$$\mathbf{M}(z) = h(r) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos \frac{(2n + 1)\pi}{L} z, \quad h(r) = \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r \right) \quad (2.60)$$

Cette modification du terme source induit généralement une erreur inférieure à 1% en considérant les moteurs les plus couramment utilisés [31], ce qui est acceptable. La fonction $h(r)$ est choisie de sorte à faiblement altérer l'aimantation. Les coefficients c_1 et c_2 sont ainsi choisis de sorte à obtenir $h(R_r) = 1$ et $h(R_a) = 1$. Soit : $c_1 = \frac{R_r R_a}{R_r + R_a}$ et $c_2 = \frac{1}{R_r + R_a}$. La forme de h pour ces coefficients est illustrée en Figure 2-14.

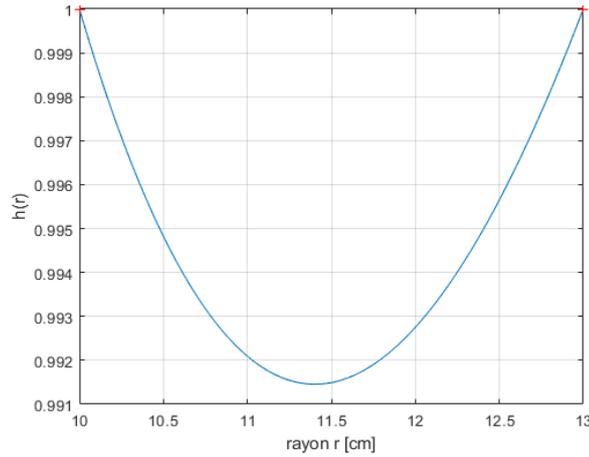


Figure 2-14 : Tracé de h en fonction de r pour $R_r = 10$ cm et $R_a = 13$ cm

Dans l'expression de la divergence de l'aimantation, le terme dérivé par rapport au rayon n n'est plus nul :

$$\operatorname{div} M = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r}{r} \quad (2.61)$$

Cette méthode permet alors d'obtenir une solution particulière de la forme :

$$\Omega_p = -2c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{m^2} \cos mz \quad (2.62)$$

Les potentiels scalaires dans les aimants et l'entrefer s'expriment donc par :

$$\Omega_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_a} \cdot I_0(mr) + b_{n_a} \cdot K_0(mr)] \cdot \cos mz - 2c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{m^2} \cos mz \quad (2.63)$$

$$\Omega_e(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_e} \cdot I_0(mr) + b_{n_e} \cdot K_0(mr)] \cdot \cos mz \quad (2.64)$$

▪ Détermination de la solution finale

Il reste à déterminer les coefficients des séries précédentes. Pour cela on applique les conditions de passage et les conditions aux limites (section 1.2.2) suivant la nouvelle géométrie du problème :

$$H_{z_a}(R_r, \theta) = 0 \quad (2.65)$$

Conditions limites :

$$H_{z_e}(R_s, \theta) = 0 \quad (2.66)$$

$$H_{z_a}(R_a, \theta) = H_{z_e}(R_a, \theta) \quad (2.67)$$

Conditions de passage :

$$B_{r_a}(R_a, \theta) = B_{r_e}(R_a, \theta) \quad (2.68)$$

Ce qui amène, à l'aide des lois constitutives des milieux magnétiques, à un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_a}{\partial z} \Big|_{r=R_r} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial z} \Big|_{r=R_s} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial z} \Big|_{r=R_a} = \frac{\partial \Omega_a}{\partial z} \Big|_{r=R_a} \\ \frac{\partial \Omega_a}{\partial r} \Big|_{r=R_a} - \frac{\partial \Omega_e}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = M(r,z) \Big|_{r=R_a} \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n_a} \cdot I_0(m R_r) + b_{n_a} \cdot K_0(m R_r) - 2c_2 \frac{M_n}{m^2} = 0 \\ a_{n_e} \cdot I_0(m R_s) + b_{n_e} \cdot K_0(m R_s) = 0 \\ a_{n_e} \cdot I_0(m R_a) + b_{n_e} \cdot K_0(m R_a) = a_{n_a} \cdot I_0(m R_a) + b_{n_a} \cdot K_0(m R_a) - 2c_2 \frac{M_n}{m^2} \\ m[a_{n_a} \cdot I_1(m R_a) - b_{n_a} \cdot K_1(m R_a)] + C_1 - m[a_{n_e} \cdot I_1(m R_a) - b_{n_e} \cdot K_1(m R_a)] = M_n \end{array} \right. \quad (2.70)$$

La résolution du système (2.70) permet d'obtenir les expressions des coefficients et finalement les différentes composantes du champ magnétique.

▪ Comparaison aux éléments finis

Les paramètres d'entrées sont les mêmes que précédemment. Les résultats de la simulation FEMM [28] sont présentés des Figures 2-15 à 2-17. Dans le cas de la machine tubulaire, nous avons pu constater l'apparition des fonctions de Bessel pour la solution dans la direction radiale. Le temps de calcul et la précision sont toujours similaires à ce qui a été détaillé précédemment.

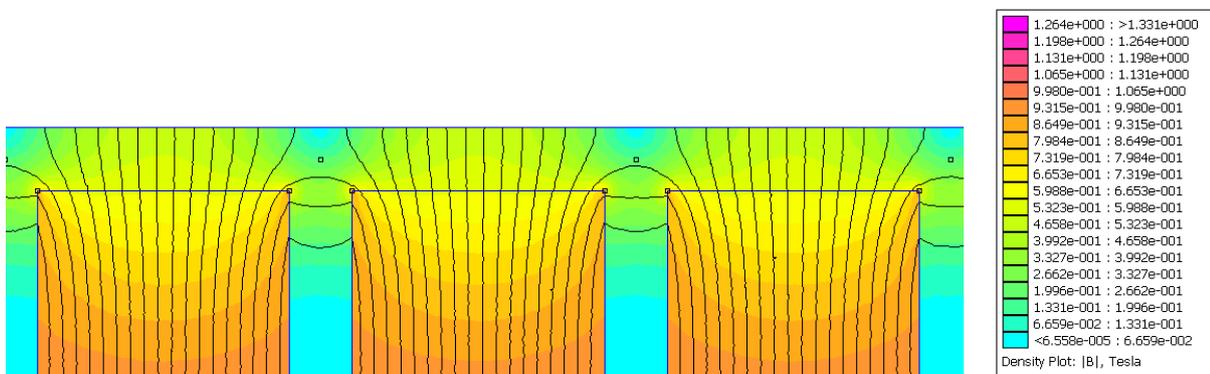


Figure 2-15 : Lignes de champs obtenues par simulation par éléments finis

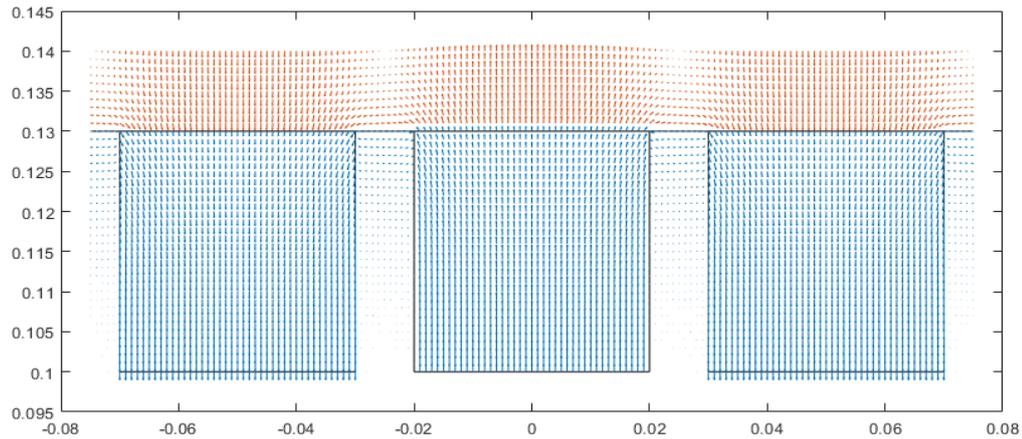


Figure 2-16 : Lignes de champ obtenues par calcul analytique

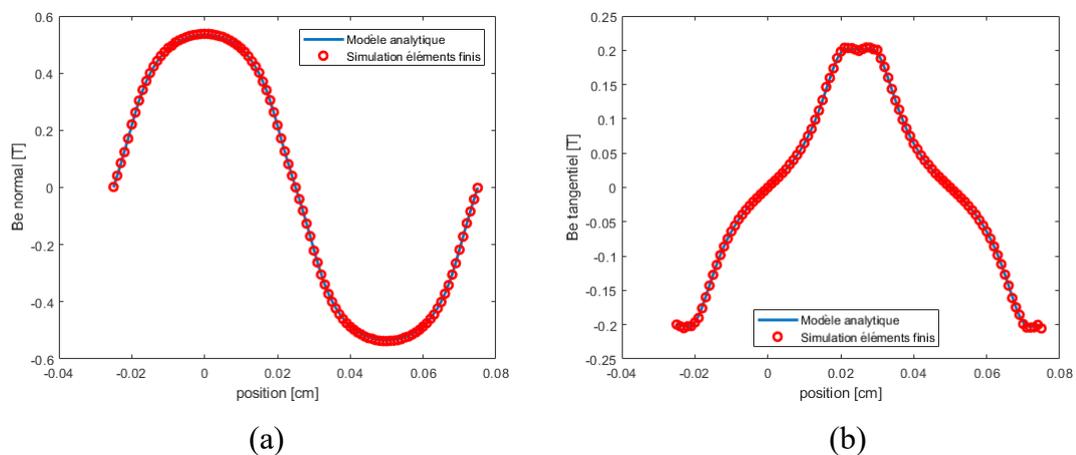


Figure 2-17 : Tracé de la composante normale et tangentielle de B pour $r = R_a + e/2$

2.2.4 Machine à flux axial

Comme nous l'avons vu en introduction, la machine à flux axial offre plus de possibilités structurelles (TORUS, YASA par exemple) que les machines conventionnelles à flux radial. Ceci est rendu possible par le caractère tridimensionnel du champ magnétique dans cette machine, permettant des chemins de flux différents au sein du stator [32]. Par rapport aux machines présentées précédemment, la machine à flux axial ne présente pas d'invariance, ce qui impose une étude en 3 dimensions du champ magnétique. Le caractère 3D de cette modélisation rend le calcul plus lourd que dans le cas 2D dû à la présence d'un plus grand nombre de régions à distinguer, ce qui conduit à plus de conditions de passages et donc plus d'équations à résoudre.

Cependant, plusieurs modélisations ont été proposées à partir d'une résolution 2D analytique [33]–[36]. Ils reposent sur la modélisation analytique faite dans un plan de coupe cylindrique à un rayon r donné, comme illustré Figure 2-18. Regardons de plus près cette résolution.

Soit le problème de la Figure 2-18, l'aimantation s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{M} = M(\theta)\mathbf{e}_z = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cdot \cos[(2n+1)p\theta] \mathbf{e}_z \quad (2.71)$$

$$\text{Avec } M_n = \frac{4M}{(2n+1)\pi} \sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}\alpha_p]$$

Les équations de Maxwell réécrites avec les conditions définies ci-dessus aboutissent au laplacien homogène dans l'entrefer et dans les aimants du fait de la divergence nulle de \mathbf{M} :

$$\Delta\Omega = 0 \quad (2.72)$$

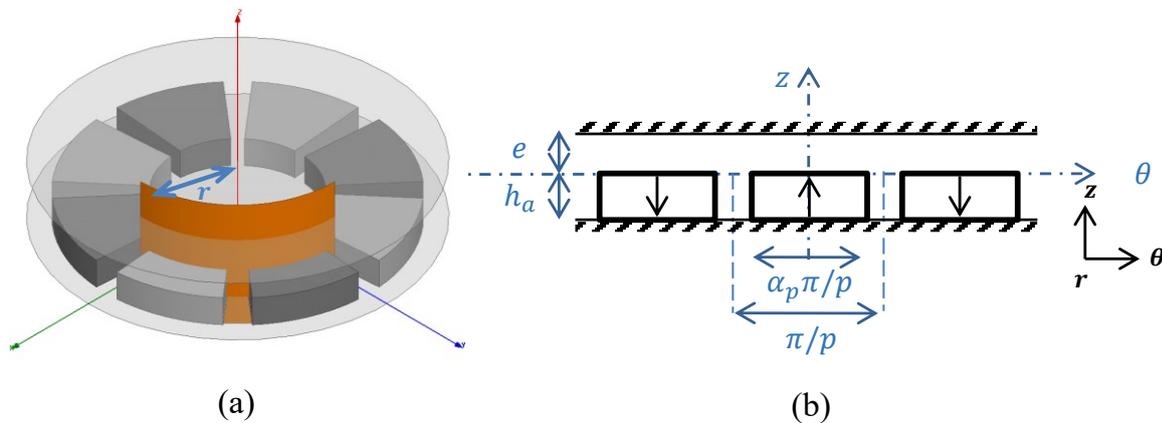


Figure 2-18 : vue en 3D de la machine à flux axial (a) ainsi que la coupe à rayon donné utilisée pour la modélisation en 2D

▪ Méthode de séparation des variables

Le laplacien en coordonnées cylindriques avec une indépendance vis-à-vis du rayon s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (2.73)$$

On applique de nouveau la méthode de séparation des variables [27] pour résoudre l'équation homogène. On pose ici Ω sous la forme du produit d'une fonction f dépendant uniquement de θ et d'une fonction g dépendant uniquement de z . En remplaçant dans (2.73), on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\theta^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^2} = m^2 \quad (2.74)$$

On constate que la solution dépend toujours de r . On aura donc une solution finale paramétrée par la position radiale de la coupe cylindrique. On réécrit les équations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\theta^2} = -m^2 \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^2} = \frac{m^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\theta) = c_1 \cdot \cos(m\theta) + c_2 \cdot \sin(m\theta) \\ g(z) = c_3 \cdot \text{ch}\left(\frac{mz}{r}\right) + c_4 \cdot \text{sh}\left(\frac{mz}{r}\right) \end{cases} \quad (2.75)$$

On intègre la constante r à la solution en z de façon à conserver une solution en θ conforme à la source \mathbf{M} . La solution générale s'écrit alors dans les deux milieux [37]:

$$\Omega_a(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_a} \text{ch}\left(\frac{mz}{r}\right) + b_{n_a} \text{sh}\left(\frac{mz}{r}\right)] \cdot \cos(m\theta), \quad m = (2n + 1)p \quad (2.76)$$

$$\Omega_e(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n_e} \text{ch}\left(\frac{mz}{r}\right) + b_{n_e} \text{sh}\left(\frac{mz}{r}\right)] \cdot \cos(m\theta), \quad m = (2n + 1)p \quad (2.77)$$

▪ Détermination de la solution finale

Le problème est similaire à celui présenté pour la machine linéaire, et les calculs sont les mêmes en remplaçant x par θ , y par z et m par $\frac{m}{r}$. Les conditions aux limites et conditions de passage appliquées au problème donnent :

$$H_{\theta_a}(\theta, -h_a) = 0 \quad (2.78)$$

Conditions limites :

$$H_{\theta_e}(\theta, e) = 0 \quad (2.79)$$

$$H_{\theta_a}(\theta, 0) = H_{\theta_e}(\theta, 0) \quad (2.80)$$

Conditions de passage :

$$B_{z_a}(\theta, 0) = B_{z_e}(\theta, 0) \quad (2.81)$$

Les expressions finales du potentiel scalaire dans les aimants et l'entrefer une fois simplifiées sont :

$$\Omega_a(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r \cdot M_n}{m} \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{me}{r}\right)}{\text{sh}\left(\frac{m(e+h_a)}{r}\right)} \cdot \text{sh}\left(\frac{m(z+h_a)}{r}\right) \cdot \cos(m\theta) \quad (2.82)$$

$$\Omega_e(\theta, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r \cdot M_n}{m} \frac{\text{sh}\left(\frac{mh_a}{r}\right)}{\text{sh}\left(\frac{m(e+h_a)}{r}\right)} \cdot \text{sh}\left(\frac{m(z-e)}{r}\right) \cdot \cos(m\theta) \quad (2.83)$$

Des expressions précédentes on peut en déduire le champ magnétique dans les différentes régions. Ce modèle est identique au modèle cartésien à ceci près que m est remplacé par m/r , il n'est donc pas validé ici.

Des modèles appelés quasi-3D enrichissent ces modèles 2D d'une dépendance radiale afin de mieux rendre compte de l'aspect 3D. Par exemple, la solution 2D est multipliée par une fonction dépendante de r déterminée par simulation numérique en éléments finis [37].

En conclusion de la section 2.2, on peut dire que la méthode de séparation des variables fonctionne très bien dans le cas 2D, en termes de temps de calcul et de simplicité dans la mise en œuvre.

Toutes les solutions présentent une certaine similitude due à l'alternance des aimantations. Ce sont des fonctions périodiques qui peuvent être décomposées en une série de Fourier suivant la coordonnée qui décrit cette alternance. Nous avons donc une première unification permise par la description en série de Fourier.

Les coefficients de cette série de Fourier dépendent de l'autre coordonnée et sont régis par une équation différentielle qui varie selon la configuration géométrique de la machine considérée. En outre, la présence d'un second membre non nul de cette équation différentielle conduit à la recherche d'une solution particulière qui peut s'avérer difficile. L'unification d'une démarche systématique permettant de trouver ces coefficients serait donc intéressante. Celle-ci sera proposée dans le chapitre 3 dans le cas de la modélisation analytique en 3D du champ magnétique de la machine à flux axial.

2.3 Modèle de dimensionnement de la machine toroïdale

Récemment, ont été développés des machines à aimants permanents en surface disposés en réseau Halbach [38]. Les réseaux Halbach permettent d'obtenir des niveaux de champ magnétique d'entrefer très élevés, ceci peut favoriser l'obtention de machines avec un couple mécanique très élevé. De plus, ces réseaux Halbach permettent d'obtenir une onde sinusoïdale du champ magnétique d'entrefer. La méthode d'évaluation du couple montrée section 1.2.3 montre que pour tirer la meilleure partie d'une telle onde il faut avoir une onde de densité de courant surfacique sinusoïdale et en phase avec l'onde de champ magnétique.

Dans [18] nous avons développé une méthode unifiée de dimensionnement pour les machines à flux axial et à flux radial avec des ondes de champ magnétique et de densité de courant purement sinusoïdales.

Ainsi, cette section propose d'appliquer cette méthode de dimensionnement au cas de la machine tubulaire, en première approximation de la machine toroïdale. Après avoir décrit comment la machine toroïdale est approchée à une machine tubulaire, les grandes étapes de la méthode unifiée de dimensionnement sont rappelées et appliquées au cas de la machine tubulaire. Une fois l'algorithme établi pour les trois types de machines : radiale, axiale et tubulaire, nous comparons ces trois types de machines pour trois cahiers des charges donnés afin de démontrer, par cette méthode, le gain attendu de la nouvelle configuration de machine proposée dans cette thèse.

2.3.1 Méthode unifiée de dimensionnement

La méthode unifiée de dimensionnement [18] pour les machines à flux axial et à flux radial (Figure 2-19) repose sur une approche de dimensionnement développé dans [20]. Dans cette approche, un modèle très simplifié a été utilisé pour calculer les dimensions du rotor. Dans [18], du fait que l'onde de champ magnétique est sinusoïdale, le modèle analytique du champ magnétique inducteur utilisant la méthode développée précédemment est utilisé pour calculer l'épaisseur des aimants permanents. De plus, un modèle analytique du champ magnétique de la réaction d'induit a pu être associé pour tenir compte du champ total de l'entrefer. Ceci permet de calculer les épaisseurs des culasses et des dents de manière précise et donc d'obtenir in fine des dimensions plus conformes à la réalité. Les mêmes équations de dimensionnement et le même type de modèle analytique du champ magnétique sont donc appliqués à chaque machine, permettant une comparaison soumise aux mêmes hypothèses.

Les équations de dimensionnement sont établies à partir des spécifications du cahier des charges et des niveaux technologiques à disposition pour le dimensionnement de la machine considérée [1], [2], [20]. Ces spécifications peuvent être thermiques (par exemple l'échauffement maximal admissible par les bobinages), mécaniques (puissance mécanique désirée ou vitesse de rotation nominale), magnétiques (champ magnétique maximal au niveau du rayon d'alésage, défini par le matériau utilisé par les aimants permanents), ou encore géométriques (comme le nombre de paires de pôles ou le coefficient de forme de la machine).

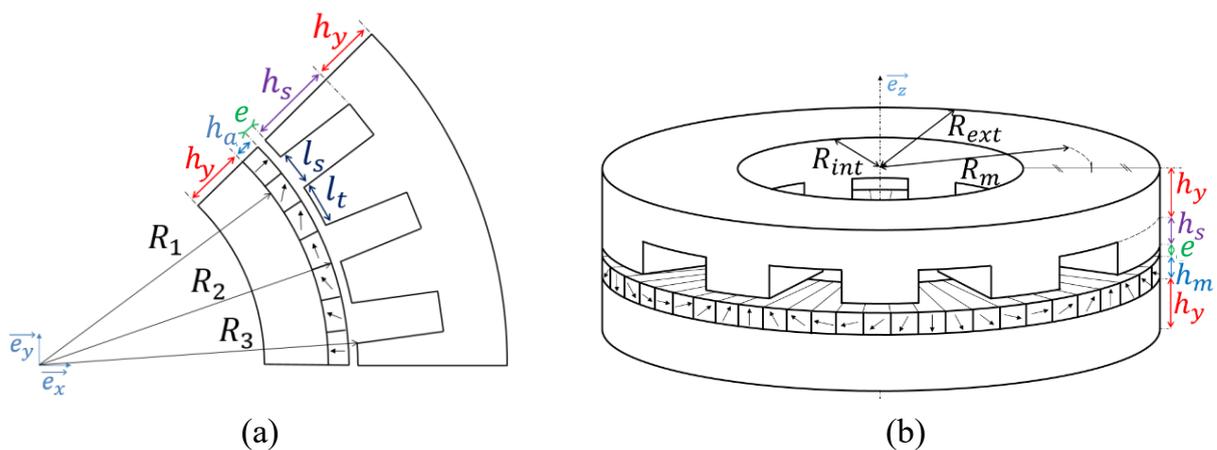


Figure 2-19 : Schémas de la machine à flux radial (a) et flux axial (b) [18]

L'ensemble des données d'entrées sont rassemblées dans le Tableau 2-1. En sortie sont calculées les dimensions géométriques de chaque machine permettant le calcul de la masse et donc la comparaison du couple massique.

Notons que les topologies de machines à flux axial sont très variées, celles des machines à flux radial le sont également mais dans une moindre mesure (cf. introduction générale). Ici sont étudiées les machines mono-entrefer. Cette première étude de comparaison entre ma-

chines pourra être enrichie des diverses configurations existantes de machines à flux axial ou radial (non effectué dans ce manuscrit).

Nous allons étendre ce modèle unifié à la machine tubulaire.

Spécifications mécaniques	Spécifications thermiques
Puissance mécanique de la machine, P_m	Température ambiante (C°), T_{amb}
Vitesse de rotation nominale (tr/min), N	Echauffement admissible des bobinages (C°), ΔT
Niveau technologique choisi pour la machine	Paramètres géométriques fixés
Pression tangentielle, σ	Nombre de paires de pôles, p
Champ magnétique maximale dans l'entrefer, B_M	Coefficient de forme, λ
Densité de courant, j_{rms}	Epaisseur d'entrefer, e
Champ magnétique maximale dans les dents B_t et la culasse B_y	Coefficients de têtes de bobines, k_{wh}
	Coefficient de remplissage des encoches, k_{fill}

Tableau 2-1 : Données d'entrées de l'algorithme de dimensionnement unifié [18]

2.3.2 Extension du modèle unifié à la machine tubulaire

2.3.2.1 Machine tubulaire comme approximation de la machine toroïdale

La machine tubulaire à aimants permanents est représentée en vue globale ainsi qu'en coupe sur la Figure 2-20. Les aimants permanents sont aimantés radialement. L'alternance des pôles se fait selon la direction axiale de la machine. La distribution de densité surfacique de courant est localisée sur la surface interne du stator. La longueur axiale d'un pôle est notée L tandis que la longueur totale de la machine est notée $L_m = 2pL$.

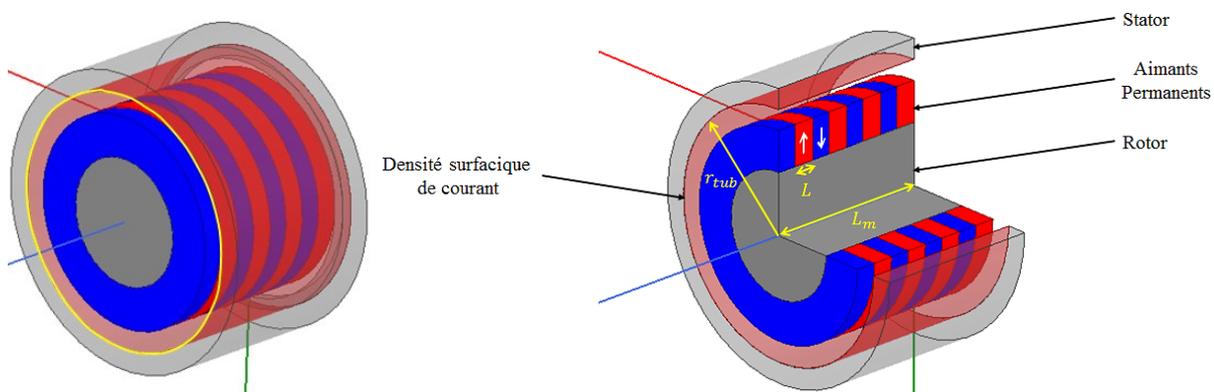


Figure 2-20 : Vue 3D (a) et vue en coupe (b) de la machine tubulaire considérée.

Leurs géométries étant relativement semblables, on peut assimiler la machine toroïdale idéale à une machine tubulaire si on considère que la longueur L_m de la machine tubulaire est égale au périmètre de la machine toroïdale $2\pi R_{tore}$, comme illustré Figure 2-21. La longueur angulaire d'un pôle de la machine torique $\pi R_{tore}/p$ est donc assimilée à la longueur d'un pôle de la machine tubulaire L ; et le rayon d'alésage de la machine tubulaire r_{tub} est égal au rayon d'alésage de la machine toroïdale r_{tore} . Cette approximation nous permet dans cette section de comparer la configuration toroïdale aux configurations axiales et radiales en négligeant l'impact de la rotation autour de l'axe z de la machine toroïdale.

Le mouvement de la partie mobile de la machine tubulaire est linéaire et non rotatif contrairement aux machines à flux axial et radial. La force produite par la machine tubulaire est donc ramenée au grand rayon R_{tore} de la machine toroïdale pour en déduire le couple et donc « simuler » son comportement dans le cas d'un mouvement rotatif.

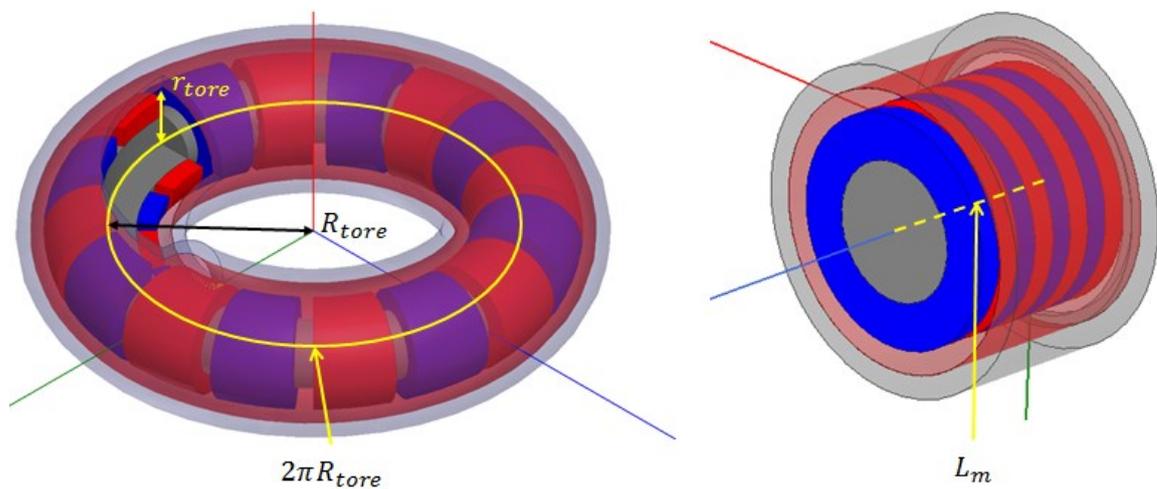


Figure 2-21 : La machine tubulaire comme approximation de la machine toroïdale

2.3.2.2 Equations de dimensionnement

La méthode unifiée de dimensionnement [18] utilise la modélisation sous forme d'ondes présentée section 1.2.4. Ainsi, le champ magnétique dans l'entrefer produit par les aimants (champ inducteur) et la densité surfacique de courant (champ de réaction d'induit) sont considérées comme deux ondes sinusoïdales en phases (position de couple maximum) et positionnées au niveau du rayon d'alésage du stator :

$$B(z, t) = B_m \cos\left(\frac{\pi}{L}z - \omega t\right) \quad (2.84)$$

$$K(z, t) = K_m \cos\left(\frac{\pi}{L}z - \omega t\right) \quad (2.85)$$

où L est la longueur d'un pôle, B_m et K_m sont les amplitudes de chaque onde définies par le niveau de technologie du cahier des charges. La valeur de B_m dépend du matériau choisi pour les aimants permanents et de l'épaisseur d'entrefer permis par le niveau technologique. On peut par exemple envisager un champ maximal dans l'entrefer $B_m = 1 T$. Cette donnée est ensuite utilisée en entrée de l'algorithme de dimensionnement. Elle définit l'amplitude de l'onde de champ inducteur de l'équation (2.84). \mathbf{B} et \mathbf{K} sont respectivement portés par \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ dans le cas de la machine tubulaire. Les ondes étant en phase, nous choisissons l'instant $t = 0$ pour la suite du développement.

La modélisation sous forme de densité surfacique de courant d'un bobinage à encoches est rendue possible par l'utilisation du coefficient de Carter (section 1.2.3). Cette modélisation sous forme d'ondes est intéressante pour la comparaison entre machines car n'importe quel bobinage peut être ramené à une distribution surfacique. Les topologies de machines étant différentes, il est complexe d'imposer le même bobinage à chaque machine. L'utilisation de la distribution surfacique permet donc de s'affranchir de cette difficulté.

Les ondes étant supposées sinusoïdales, les modèles analytiques du champ inducteur et induit sont donc appliqués au premier ordre. De plus, la distribution d'aimants Halbach est celle qui permet le mieux de se rapprocher d'un champ sinusoïdal dans l'entrefer, elle est prise en compte ici de manière idéale.

▪ Expression du couple

Passons aux équations de dimensionnement selon le principe appliqué dans [18]. La première équation à établir est celle du couple, en passant d'abord par le calcul de la force de la machine tubulaire. La loi de Laplace permet d'écrire :

$$F = \int_0^{L_m} \int_0^{2\pi} B_m K_m \cos^2\left(\frac{\pi}{L} z\right) \cdot r_{tub} d\theta \cdot dz \quad (2.86)$$

soit :

$$F = B_{rms} K_{rms} \cdot 2\pi r_{tub} \cdot L_m \quad (2.87)$$

où B_{rms} et K_{rms} sont les valeurs efficaces des ondes définies précédemment (2.84) et (2.85). Ce produit définit la pression tangentielle appliquée au rotor $\sigma = B_{rms} K_{rms}$. Le rayon d'alésage de la machine tubulaire r_{tub} est défini Figure 2-20. Dans (2.87) on reconnaît l'expression de la surface du rotor de la machine tubulaire (à l'entrefer près). Si on ramène cette force à un couple pour un rayon donné R_{tore} , on obtient :

$$T = R_{tore} \cdot B_{rms} K_{rms} \cdot 2\pi r_{tub} \cdot L_m \quad (2.88)$$

En remplaçant L_m par les dimensions de la machine toroïdale on obtient :

$$T = 4\pi^2 r_{tub} R_{tore}^2 \cdot B_{rms} K_{rms} \quad (2.89)$$

on retrouve bien l'expression de l'aire d'un tore : $4\pi^2 r_{tub} R_{tore}$. En posant le coefficient de forme de la machine toroïdale $\lambda = r_{tub}/R_{tore}$, on a :

$$T = 4\pi^2 \lambda \cdot R_{tore}^3 \cdot B_{rms} K_{rms} = R_{tore} \cdot S_{act} \cdot \sigma \quad (2.90)$$

où $S_{act} = 4\pi^2 \lambda R_{tore}^2$ est la surface active de la machine toroïdale.

▪ Expression des pertes joules

La définition de la charge linéique dans le cas de la machine tubulaire donne :

$$A_{rms} = \frac{q N_w I_{rms}}{L_m} \quad (2.91)$$

où q est le nombre de phases, N_w le nombre de conducteurs par phase et I_{rms} la valeur efficace du courant d'alimentation. Par analogie, on obtient dans le cas de la machine toroïdale :

$$A_{rms} = \frac{q N_w I_{rms}}{2\pi R_{tore}} \quad (2.92)$$

La charge linéique A_{rms} est liée à la densité surfacique de courant K_{rms} par la relation :

$$K_{rms} = k_w A_{rms} \quad (2.93)$$

où k_w est le coefficient de bobinage défini dans [39]. La résistance est donnée par la relation suivante où $L_{conducteur}$ est la longueur d'une spire dans le cas de la machine tubulaire et ρ_{Cu} est la résistivité du cuivre à la température du bobinage (illustrée en Figure 2-22) :

$$R_s = \rho_{Cu} \frac{L_{conducteur}}{S_{conducteur}} N_w \quad (2.94)$$

Les pertes joules sont données par :

$$P_j = q \cdot R_s \cdot I_{rms}^2 \quad (2.95)$$

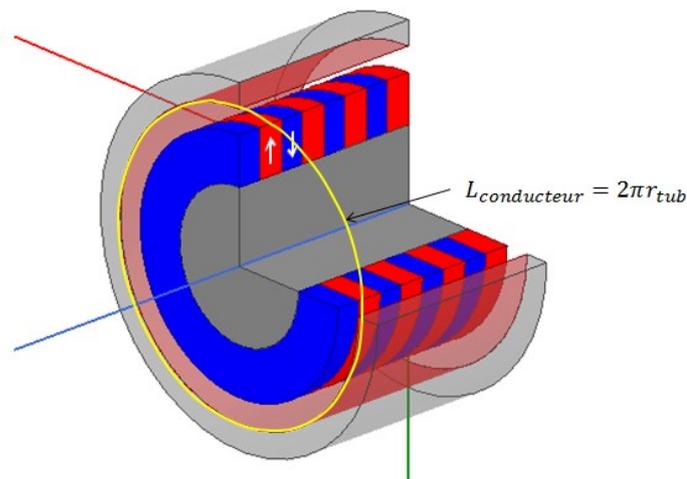


Figure 2-22 : Schéma de la longueur d'une spire dans le cas de la machine tubulaire

En utilisant la relation (2.94), il vient :

$$P_j = q \cdot \rho_{Cu} \cdot \frac{2\pi r_{tub}}{S_{conducteur}} N_w \cdot I_{rms} \cdot I_{rms} \quad (2.96)$$

ramenées à un tore, on a :

$$P_j = \rho_{Cu} \cdot 4\pi^2 \lambda R_{tore}^2 \cdot A_{rms} \cdot j_{rms} = \rho_{Cu} \cdot S_{act} \cdot A_{rms} \cdot j_{rms} \quad (2.97)$$

Notons ici que dans le cas d'une machine tubulaire et dans le cas de la machine toroïdale idéale, le coefficient de têtes de bobines k_{wh} n'apparaît pas car il est égal à 1. Dans le cas axial et radial, ce coefficient est > 1 ce qui indique potentiellement des pertes plus élevées que pour la machine tubulaire. Le calcul des pertes fer est également ajouté selon la formule de Bertotti.

▪ Dimensionnement des parties ferromagnétiques

La définition sous forme d'ondes sinusoïdales des sources aimants et courants, définies par les équations (2.84) et (2.85), permet de considérer que le champ total est également sinusoïdal :

$$B_{total}(z, t) = B_{m_{tot}} \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (2.98)$$

L'amplitude du champ magnétique total est calculé à partir de l'amplitude du champ inducteur imposée par le cahier des charges B_m et de l'amplitude du champ magnétique de réaction d'induit $B_{m_{induit}}$ déduite du calcul analytique de la section 2.3.2.4. Les champs magnétiques inducteur et induit étant en quadrature de phase, on obtient :

$$B_{m_{tot}} = \sqrt{B_m^2 + B_{m_{induit}}^2} \quad (2.99)$$

Le calcul du flux généré par pôle (2.100) permet de déterminer les flux qui vont circuler dans la machine et donc les dimensions des différentes parties ferromagnétiques.

$$\Phi_p = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} B_{m_{tot}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) \cdot r_{tub} d\theta \cdot dz \quad (2.100)$$

Le calcul donne :

$$\Phi_p = 4 \cdot r_{tub} L \cdot B_{m_{tot}} \quad (2.101)$$

Sachant que $\frac{\pi}{p} R_{tore}$ correspond à la longueur L , on a dans le cas toroïdal :

$$\Phi_p = \frac{4\pi r_{tore} R_{tore}}{p} \cdot B_{m_{tot}} \quad (2.102)$$

La Figure 2-23 illustre le passage du flux polaire Φ_p et du flux de la culasse stator Φ_{y_s} et du flux de la culasse rotor Φ_{y_r} dans la machine. Ainsi, on en déduit l'expression de Φ_{y_s} en fonction de B_{y_s} et S_{y_s} tout d'abord, ensuite en fonction de Φ_p et enfin grâce à la conservation du flux :

$$\Phi_{y_s} = B_{y_s} \cdot \left(\pi(r_{tub} + h_s + h_{y_s})^2 - \pi(r_{tub} + h_s)^2 \right) \quad (2.103)$$

$$\text{et } \Phi_{y_s} = \frac{\Phi_p}{2} \quad (2.104)$$

où B_{y_s} est le champ magnétique moyen de la culasse stator à ne pas dépasser, h_{y_s} la hauteur de la culasse stator et h_s la hauteur d'encoche.

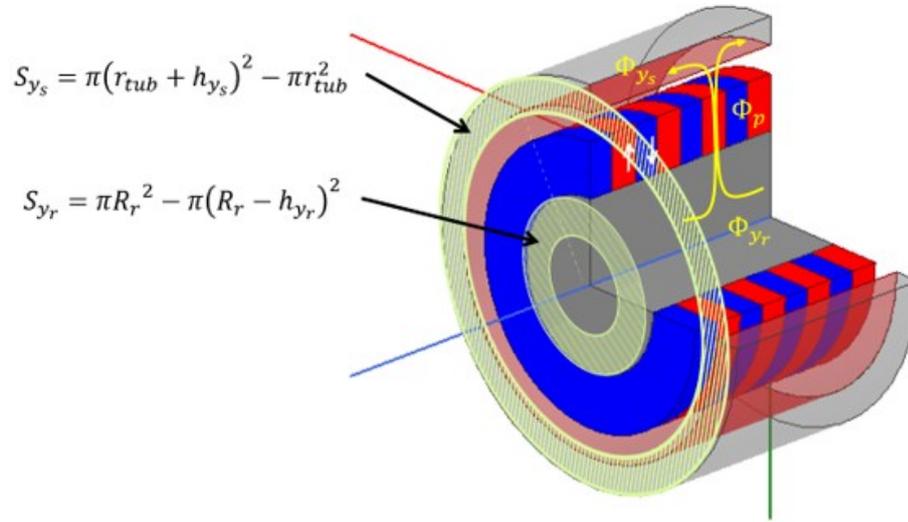


Figure 2-23 : Schéma présentant la circulation du flux dans la culasse stator et rotor

On obtient ainsi l'équation de dimensionnement de la hauteur de culasse.

$$h_{y_s} (h_{y_s} + 2(r_{tub} + h_s)) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_s}} = \frac{4 \cdot r_{tub} L \cdot B_{m_{tot}}}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_s}} \quad (2.105)$$

Cette équation donne dans le cas toroïdal :

$$h_{y_s} (h_{y_s} + 2(r_{tore} + h_s)) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_s}} = \frac{2r_{tore} R_{tore} B_{m_{tot}}}{p B_{y_s}} \quad (2.106)$$

Le même raisonnement peut être appliqué pour le dimensionnement de la culasse rotor h_{y_r} :

$$h_{y_r} (-h_{y_r} + 2R_1) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_r}} = \frac{4 \cdot r_{tub} L \cdot B_{m_{tot}}}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_r}} \quad (2.107)$$

où R_1 est le rayon externe de la culasse rotorique. Soit pour le tore :

$$h_{y_r}(-h_{y_r} + 2R_1) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{y_r}} = \frac{2r_{tore}R_{tore}B_{m_{tot}}}{p B_{y_r}} \quad (2.108)$$

Déterminons désormais la largeur d'encoche. La Figure 2-24 schématise une dent et ses dimensions.

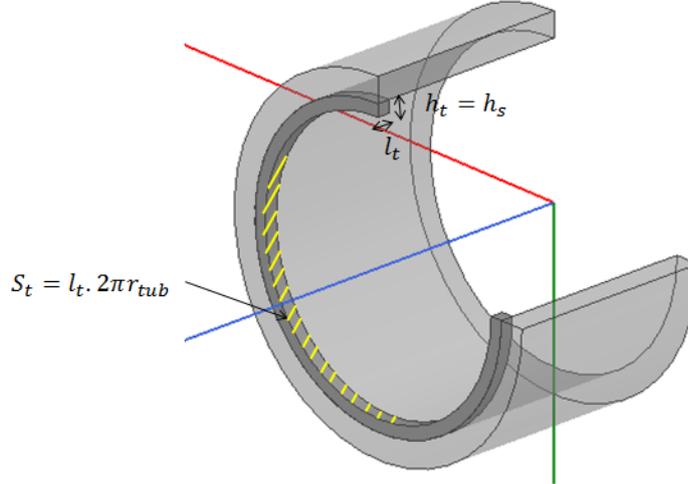


Figure 2-24 : Schéma représentant une dent ainsi que ses dimensions

Le flux passant par l'ensemble des N_t dents est :

$$\Phi_t = N_t \cdot l_t \cdot 2\pi \cdot r_{tub} \cdot B_t \quad (2.109)$$

où B_t est le champ maximal permis dans les dents. En considérant que le flux des pôles passe en totalité par les dents il vient :

$$l_t = \frac{2 \cdot L_m \cdot B_{m_{tot}}}{\pi N_t \cdot B_t} \quad (2.110)$$

pour un tore on a :

$$l_t = \frac{4 \cdot R_{tore} \cdot B_{m_{tot}}}{N_t \cdot B_t} \quad (2.111)$$

Pour déterminer la hauteur d'encoche, nous passons par l'équilibre des densités de courant :

$$q \cdot N_w \cdot I_{rms} = N_{slot} \cdot I_{slot} = N_{slot} \cdot k_{fill} \cdot S_{slot} \cdot j_{rms} \quad (2.112)$$

où $S_{slot} = h_s \cdot l_s$ est la section de l'encoche, k_{fill} le coefficient de remplissage et N_{slot} le nombre d'encoches. Or la charge linéique impose :

$$q \cdot N_w \cdot I_{rms} = A_{rms} \cdot L_m \quad (2.113)$$

On déduit donc l'équation de dimensionnement de la hauteur d'encoche :

$$h_s = \frac{A_{rms} \cdot L_m}{N_{slot} k_{fill} l_s j_{rms}} \quad (2.114)$$

soit pour un tore :

$$h_s = \frac{A_{rms} \cdot 2\pi \cdot R_{tore}}{N_{slot} k_{fill} l_s j_{rms}} \quad (2.115)$$

L'ensemble des équations de dimensionnement ont été exprimées sur la même méthode que [18]. Reste à déterminer la hauteur d'aimant à l'aide du calcul du champ inducteur et du calcul du champ de réaction d'induit pour permettre le calcul du champ total.

2.3.2.3 Calcul du champ inducteur

▪ Définition du problème

Le problème traité ici est le même que celui détaillé en section 2.2.3 mais au premier ordre, c'est-à-dire en ne considérant que le fondamental. De plus, ce cas présente une distribution Halbach qui nécessite l'ajout d'une composante suivant e_θ de l'aimantation. Le système de coordonnées choisi ici est le système de coordonnées cylindriques et la géométrie du problème présente une invariance par rotation suivant θ .

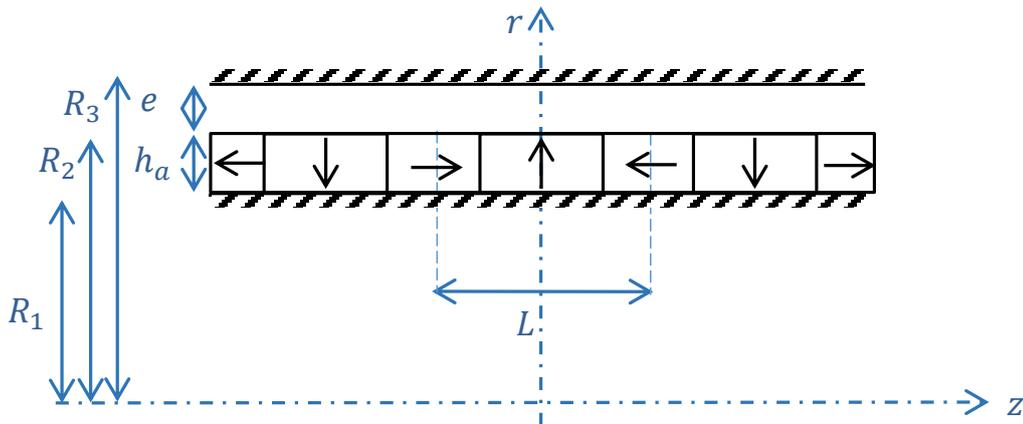


Figure 2-25 : Schéma représentant la géométrie du problème destiné au calcul du champ inducteur

La distribution d'aimants Halbach est choisie idéale :

$$\mathbf{M}(z) = M \cdot \cos \frac{\pi}{L} z \cdot \mathbf{e}_r - M \cdot \sin \frac{\pi}{L} z \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (2.116)$$

Les équations de Maxwell donnent en circuit ouvert les équations aux dérivées partielles suivantes sur le potentiel scalaire magnétique Ω :

$$\Delta \Omega = \begin{cases} 0 & \text{dans l'entrefer} \\ \text{div } \mathbf{M} & \text{dans les aimants} \end{cases} \quad (2.117)$$

La méthode de séparation des variables est appliquée de la même manière que dans la section 2.2.3 mais au premier ordre. On obtient une solution sinusoïdale ne faisant pas intervenir la description en série de Fourier.

$$\Omega(r, z) = [a \cdot I_0(mr) + b \cdot K_0(mr)] \cdot \cos(mz), \quad m = \frac{\pi}{L} \quad (2.118)$$

La présence d'un second membre impose la présence d'une solution particulière à ajouter à la solution homogène (2.118). Nous utilisons la même méthode que [31], l'aimantation se réécrit alors :

$$\mathbf{M}(r, z) = \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r \right) \cdot M \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) \mathbf{e}_r - M \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right) \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (2.119)$$

avec $c_1 = \frac{R_r R_a}{R_r + R_a}$ et $c_2 = \frac{1}{R_r + R_a}$ (cf. 2.2.3). Il vient la solution particulière suivante :

$$\Omega_p = \left(-2c_2 \frac{M}{m^2} + \frac{M}{m} \right) \cos(mz) \quad (2.120)$$

Les potentiels scalaires dans les aimants et l'entrefer s'expriment donc par :

$$\Omega_a(r, z) = [a_a \cdot I_0(mr) + b_a \cdot K_0(mr)] \cdot \cos(mz) + \left(-2c_2 \frac{M}{m^2} + \frac{M}{m} \right) \cos(mz) \quad (2.121)$$

$$\Omega_e(r, z) = [a_e \cdot I_0(mr) + b_e \cdot K_0(mr)] \cdot \cos(mz) \quad (2.122)$$

On applique les conditions de passage et conditions aux limites générales (section 1.2.2) au problème traité pour déterminer les coefficients des formes (2.121) et (2.122).

$$H_{z_a}(R_r, z) = 0 \quad (2.123)$$

Conditions limites :

$$H_{z_e}(R_s, z) = 0 \quad (2.124)$$

$$H_{z_a}(R_a, z) = H_{z_e}(R_a, z) \quad (2.125)$$

Conditions de passage :

$$B_{r_a}(R_a, z) = B_{r_e}(R_a, z) \quad (2.126)$$

Ce qui amène, à l'aide des lois constitutives des milieux magnétiques, à un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_a}{\partial z} \Big|_{r=R_r} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial z} \Big|_{r=R_s} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial z} \Big|_{r=R_a} = \frac{\partial \Omega_a}{\partial z} \Big|_{r=R_a} \\ \frac{\partial \Omega_a}{\partial r} \Big|_{r=R_a} - \frac{\partial \Omega_e}{\partial r} \Big|_{r=R_a} = M(r, z) \Big|_{r=R_a} \end{array} \right. \quad (2.127)$$

Soit le système à résoudre :

$$\begin{cases} a_a \cdot I_0(m R_r) + b_a \cdot K_0(m R_r) + \left(-2c_2 \frac{M}{m^2} + \frac{M}{m}\right) = 0 \\ a_e \cdot I_0(m R_s) + b_e \cdot K_0(m R_s) = 0 \\ a_e \cdot I_0(m R_a) + b_e \cdot K_0(m R_a) = a_a \cdot I_0(m R_a) + b_a \cdot K_0(m R_a) + \left(-2c_2 \frac{M}{m^2} + \frac{M}{m}\right) \\ m[a_a \cdot I_1(m R_a) - b_a \cdot K_1(m R_a)] - m[a_e \cdot I_1(m R_a) - b_e \cdot K_1(m R_a)] = M \end{cases} \quad (2.128)$$

La résolution du système conduit à l'expression de la composante B_r dans l'entrefer :

$$B_{r_e}(r, z) = -\mu_0 \text{grad}_r \Omega_e = \frac{\mu_0 M [K_0(m R_s) \cdot I_1(m, r) + I_0(m, R_s) \cdot K_1(m, r)] \cdot D \cdot \cos(mz)}{[K_1(m R_a) I_0(m R_a) + I_1(m R_a) K_0(m R_a)] [K_0(m R_s) I_0(m R_r) - I_0(m R_s) K_0(m R_r)]} \quad (2.129)$$

$$D = (C_1 \cdot K_1(m R_a) - K_0(m R_r)) I_0(m R_a) - (C_1 \cdot K_1(m R_a) - K_0(m R_a)) I_0(m R_r) + (K_0(m R_a) - K_0(m R_r)) \cdot C_1 \cdot I_1(m R_a)$$

$$C_1 = \left(-2c_2 \frac{M}{m^2} + \frac{M}{m}\right)$$

Nous obtenons une solution de la forme suivante :

$$B(r, z) = B_M(r) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (2.130)$$

Afin de déterminer la hauteur d'aimant h_a nécessaire pour obtenir un champ magnétique maximal de B_m au niveau du rayon d'alésage $r = R_3$, il suffit de résoudre l'équation suivante sur l'inconnue h_a :

$$B_M(R_3) = B_m \quad (2.131)$$

2.3.2.4 Calcul du champ induit

▪ Définition du problème

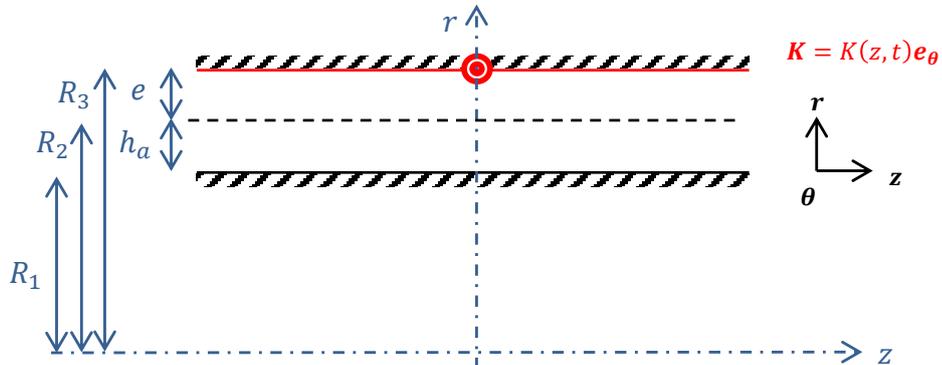


Figure 2-26 : Géométrie du problème destiné au calcul de la réaction d'induit

Pour calculer le champ magnétique produit par la réaction d'induit, les aimants permanents sont retirés de l'étude. La perméabilité des aimants étant considérée comme égale à celle de l'air, il n'y a qu'une seule région à considérer. Le problème est toujours formulé en potentiel scalaire. La source est ici la densité surfacique de courant \mathbf{K} . La densité volumique de courant \mathbf{j} est donc nulle et les équations de Maxwell donnent alors :

$$\Delta\Omega = 0 \quad (2.132)$$

La méthode de séparation des variables permet d'aboutir à la forme de la solution :

$$\Omega(r, z) = [a \cdot I_0(mr) + b \cdot K_0(mr)] \cdot \sin(mz), \quad m = \frac{\pi}{L} \quad (2.133)$$

On applique les conditions aux limites afin de déterminer les coefficients de (2.133) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Omega}{\partial z} \Big|_{r=R_r} = 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial z} \Big|_{r=R_s} = K_M \cos\left(\frac{\pi}{L}z\right) \end{array} \right. \quad (2.134)$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n_a} \cdot I_0(m R_r) + b_{n_a} \cdot K_0(m R_r) = 0 \\ a_{n_e} \cdot I_0(m R_s) + b_{n_e} \cdot K_0(m R_s) = \frac{K_M}{m} \end{array} \right. \quad (2.135)$$

La résolution du système conduit à l'expression du potentiel scalaire magnétique :

$$\Omega(r, z) = \frac{K_M}{m} \cdot \frac{-K_0(m \cdot R_r) \cdot I_0(mr) + I_0(m \cdot R_r) \cdot K_0(mr)}{K_0(m \cdot R_s) \cdot I_0(mR_r) + I_0(m \cdot R_s) \cdot K_0(mR_r)} \cdot \sin(mz) \quad (2.136)$$

La composante radiale du champ magnétique B_r en est ensuite déduite :

$$B_r(r, z) = \mu_0 \cdot K_M \cdot \frac{-K_0(m \cdot R_r) \cdot I_1(mr) - I_0(m \cdot R_r) \cdot K_1(mr)}{K_0(m \cdot R_s) \cdot I_0(mR_r) + I_0(m \cdot R_s) \cdot K_0(mR_r)} \cdot \sin(mz) \quad (2.137)$$

L'expression (2.137) prise au rayon d'alésage permet le calcul du champ total nécessaire au dimensionnement des parties ferromagnétiques.

Le calcul du champ inducteur, du champ de la réaction d'induit et les équations de dimensionnement ont été établies pour la machine à flux radial et la machine à flux axial dans [18]. L'ensemble des équations de dimensionnement est désormais établi pour les trois types de machines : machine à flux radial, machine à flux axial et machine tubulaire en approximation à la machine toroïdale.

Le Tableau 2-2 récapitule l'ensemble des équations importantes de dimensionnement pour les trois machines considérées. Le dimensionnement simultané de ces trois machines à partir d'un même cahier des charges va permettre la comparaison de leurs performances.

Paramètre	RFM	AFM	TFM
λ	L/R_3	$(R_{ext} - R_{int})/R_m$	r_{tore}/R_{tore}
S_{act}	$2\pi\lambda R_3^2$	$2\pi\lambda R_m^2$	$4\pi^2\lambda R_{tore}^2$
T	$S_{act}R_3\sigma$	$S_{act}R_m\sigma$	$S_{act}R_{tore}\sigma$
ϕ_p	$2LR_3B_{TM}/p$	$2 \cdot I_{rbm} \cdot B_{TM}/p \cdot B_M$	$\frac{4\pi r_{tore} R_{tore}}{p} \cdot B_{m_{tot}}$
h_{ys}	$\phi_p/2\lambda R_3 B_{ys}$	$\phi_p/2\lambda R_m B_{ys}$	$h_{ys}(h_{ys} + 2(r_{tore} + h_s)) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{ys}}$
h_{yr}			$h_{yr}(-h_{yr} + 2R_1) = \frac{\Phi_p}{2 \cdot \pi \cdot B_{yr}}$
h_s	$S_{act}A_{rms}/N_s l_s L k_{fill} j_{rms}$	$S_{act}A_{rms}/N_s A_s k_{fill} j_{rms}$	$\frac{A_{rms} \cdot 2\pi \cdot R_{tore}}{N_{slot} k_{fill} l_s j_{rms}}$
τ_{slot}	$N_s l_s / 2\pi R_3$	$N_s A_s / S_{act}$	$N_s l_s / 2\pi r_{tore}$
P_j	$\rho_{Cu} S_{act} k_{wh} A_{rms} j_{rms}$	$\rho_{Cu} S_{act} k_{wh} A_{rms} j_{rms}$	$\rho_{Cu} \cdot S_{act} \cdot A_{rms} \cdot j_{rms}$

Tableau 2-2 : Récapitulatif des équations de dimensionnement des trois types de machine considérés

Les variables des colonnes RFM et AFM utilisées dans le Tableau 2-2 sont données dans [18].

2.3.3 Comparaison des performances

2.3.3.1 Définition du cahier des charges

Les paramètres d'entrées de l'algorithme de dimensionnement sont donnés dans le Tableau 2-3. Ce sont ces paramètres que nous allons régler pour faire respecter à chaque machine le cahier des charges qui sera introduit par la suite. Les grandeurs définissant les contraintes thermiques et mécaniques existent en nombre pour les machines à flux radial [20], mais peu sont répertoriées pour les machines à flux axial qui sont récentes. Cette section explique donc les choix qui ont été faits pour établir un dimensionnement cohérent pour les trois types de machines.

Les comparaisons sont effectuées sur trois cahiers des charges distincts. Les puissances mécaniques seront comprises entre 0,7 MW et 1 MW, soit des applications forte puissance, là où nous pensons que la configuration toroïdale peut présenter un gain significatif. Les champs magnétiques maximaux dans les culasses et le champ rémanent des aimants permanents seront fixés pour les trois machines, autrement dit, les mêmes matériaux sont utilisés. De même nous choisissons de fixer la pression tangentielle à des valeurs classiquement définies pour les machines radiales [20].

Paramètre	Symbole	Unité
Vitesse de rotation nominale	N	tr/min
Puissance mécanique	P_{mec}	MW
Champ maximal dans l'entrefer	B_m	T
Pression tangentielle	σ	Pa
Densité de courant volumique	j_{rms}	A/m ²
Champ maximal dans la culasse stator	B_{y_s}	T
Champ maximal dans la culasse rotor	B_{y_r}	T
Champ maximal dans les dents	B_t	T
Nombre de paires de pôles	p	
Champ rémanent des aimants permanents	J	T
Coefficient de forme de la machine	λ	
Epaisseur d'entrefer	e	mm

Tableau 2-3 : Paramètres d'entrées de l'algorithme de dimensionnement

Afin de minimiser l'impact des pertes fer au rotor, il a été choisi de travailler à basse vitesse. D'autre part, les contraintes mécaniques jouent un rôle majeur dans le dimensionnement. Le plus souvent, cette contrainte mécanique a pour conséquence une vitesse linéaire limite en périphérie du rotor, afin de limiter les efforts dus au mouvement de rotation [40], [41]. Ces deux contraintes nous ont conduit à l'idée d'imposer une vitesse linéaire en périphérie à peu près égale pour les trois machines et correspondant à un fonctionnement en basse vitesse (30m/s, 50m/s et 70m/s). La vitesse linéaire étant un paramètre de sortie de l'algorithme de dimensionnement, il faut régler les paramètres d'entrées du Tableau 2-3 pour obtenir en sortie une vitesse linéaire égale à la valeur imposée. Les paramètres non contraints qui seront potentiellement différents pour chaque machine sont :

- la vitesse de rotation nominale N ,
- le nombre de paires de pôles p ,
- le facteur de forme λ de chaque machine.

La pression tangentielle est aussi définie par des contraintes mécaniques. Elle est donc fixée à une même valeur pour chaque machine pour une vitesse linéaire donnée. Mais cette valeur est différente pour chaque vitesse linéaire, afin de balayer un spectre plus large de contraintes mécaniques. Les valeurs de pressions tangentielles choisies sont là encore issues des dimensionnements des machines à flux radial [20].

Concernant l'aspect magnétique, le champ magnétique imposé dans l'entrefer B_m impacte l'épaisseur d'aimant. Elle est déterminée à partir d'une équation algébrique (2.131). Suivant la valeur de B_m , cette équation peut avoir zéro solution, une solution ou deux solutions. La valeur de B_m imposée est choisie de manière à avoir au moins une solution. S'il existe deux solutions, on choisit toujours la plus grande de manière à assurer une certaine sécurité vis-à-vis d'éventuels phénomènes de démagnétisation.

L'aspect thermique joue un rôle majeur dans les valeurs permises de la charge linéique et de la densité de courant. Mieux une machine évacue la chaleur, plus elle peut admettre un courant important qui permet donc une production de couple plus conséquente. C'est une part non négligeable pour la comparaison du couple spécifique. Pour modéliser cet aspect, une étude thermique simple a été réalisée.

Si on reprend la formule des pertes joules généralisée à chaque machine, on a :

$$P_j = k_{wh} \cdot \rho_{cu} \cdot S_{act} \cdot A_{rms} \cdot j_{rms} \quad (2.138)$$

où k_{wh} est le coefficient de têtes de bobines de chaque machine, ρ_{cu} la résistivité du cuivre et S_{act} la surface définie par l'alésage du stator où siège la production de chaleur. La chaleur s'évacue par la surface extérieure de chaque machine, on peut donc poser :

$$Q = h_{cv} \cdot \Delta T \cdot S_{ext} \quad (2.139)$$

où h_{cv} est le coefficient de transfert convectif dont la valeur dépend du type de refroidissement, S_{ext} est la surface extérieure de la machine considérée à travers laquelle la chaleur s'évacue et $\Delta T = T_{ext} - T_{amb}$ représente l'échauffement de la surface extérieure de la machine. En régime permanent à l'équilibre thermique, si on néglige les pertes fer, on a :

$$P_j = Q \quad (2.140)$$

L'échauffement du moteur a donc pour expression :

$$h_{cv} \cdot \Delta T = k_{wh} \cdot \rho_{cu} \cdot A_{rms} \cdot j_{rms} \frac{S_{act}}{S_{ext}} \quad (2.141)$$

Finalement, plus le rapport S_{act}/S_{ext} est petit, plus la machine évacue efficacement la chaleur et plus le courant peut être augmenté par rapport aux autres machines pour au final obtenir un même échauffement de bobinage. Ainsi, une fois toutes les étapes précédentes satisfaites, le courant d'alimentation de chaque machine est modulé pour obtenir au final un coefficient $h_{cv} \cdot \Delta T$ égal entre chaque configuration étudiée. Considérer constant le produit $h_{cv} \cdot \Delta T$ permet de s'affranchir de l'étude du système de refroidissement et de supposer une efficacité identique pour chaque machine. Notons par ailleurs que le coefficient de têtes de bobines pour les machines à flux radial et axial a été calculé dans le cas où la machine présente une encoche par pôle et par phase.

2.3.3.2 Résultats

Les résultats de simulation sont présentés dans les Tableaux 2-4 à 2-9. Les résultats du dimensionnement à $v_{lin} = 30$ m/s sont donnés Tableaux 2-4 et 2-5, ceux du dimensionnement à $v_{lin} = 50$ m/s sont donnés dans les Tableaux 2-6 et 2-7 et les résultats du dimensionnement à $v_{lin} = 70$ m/s sont rassemblés dans les Tableaux 2-8 et 2-9. Le premier Tableau illustre les paramètres d'entrées qui ont permis de respecter les conditions imposées précédemment tandis que le deuxième Tableau présente les paramètres de sorties. Le dimension-

nement à 70 m/s commence à s'éloigner du fonctionnement à basse vitesse mais permet tout de même une comparaison sur une plage plus large de contraintes mécaniques.

Le dimensionnement de l'ensemble des machines est établi à partir de modèles simplifiés mais permettant de tenir compte des aspects mécaniques, thermiques et magnétiques. Les mêmes hypothèses sont appliquées à chaque machine. Ainsi, l'approche unifiée permet une comparaison pertinente des performances des configurations étudiées. De plus, cette approche s'inscrit dans l'idée principale du manuscrit qui est de modéliser par une méthode rapide et simple les machines électriques.

La machine à flux radiale est nommée RFM, la machine à flux axial AFM et la machine toroïdale idéale est appelée TFM. Les pertes fer au rotor sont négligées, P_{fer} représente donc les pertes fer au stator. La longueur principale de la machine à flux axial est définie comme étant sa hauteur totale $h_{tot} = 2h_y + h_s + e + h_a$.

Les valeurs d'entrées choisies sont très optimistes notamment la pression tangentielle ou encore les champs de saturation dans les culasses et dents. Ceci explique les valeurs de sorties relativement importantes du couple et de la puissance spécifiques, en ajoutant le fait que la masse calculée est seulement celle des parties actives des différentes machines considérées.

Paramètres d'entrées			RFM	AFM	TFM
Vitesse de rotation nominale	N	tr/min	900	600	900
Puissance mécanique	P_{mec}	MW	0.7	0.7	0.7
Champ rémanent des aimants permanents	J	T		1.1	
Champ maximal dans l'entrefer	B_m	T	$1.2 * J$	$1.1 * J$	$1.095 * J$
Pression tangentielle	σ	Pa		50000	
Densité de courant volumique	j_{rms}	A/m ²	$7.00.10^6$	$4.60.10^6$	$1.08.10^7$
Champ maximal dans la culasse stator	B_{y_s}	T		1.6	
Champ maximal dans la culasse rotor	B_{y_r}	T		1.9	
Champ maximal dans les dents	B_t	T		1.6	
Nombre de paires de pôles	p		16	16	16
Coefficient de forme de la machine	λ		0.6	0.5	0.181
Epaisseur d'entrefer	e	mm		1	

Tableau 2-4 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 30$ m/s

Paramètres de sorties du dimensionnement			Gain de TFM %				
Structure de machine		RFM	AFM	TFM	Ecart	%	
Puissance spécifique SP	W/kg	2497.1	1572.5	2889.9	392.8	15.73%	
Couple spécifique ST	Nm/kg	26.49	25.02	30.66	4.168	15.73%	
Pertes joules P_j	W	6309.9	6104.1	9791.7			
Pertes fer P_{fer}	W	4268.2	4046.8	3586.8			
Pertes totales P_{tot}	W	10578	10151	13378			
rendement		0.9851	0.9857	0.9813			
Masses	$M_{aimants}$	kg	52.14	68.25	53.99		
	M_{rotor}	kg	113.88	164.18	105.28		
	M_{dents}	kg	51.54	93.18	44.52		
	$M_{culasse\ stator}$	kg	73.89	95.93	60.89		
	M_{stator}	kg	166.45	280.97	136.94		
	M_{cuivre}	kg	41.00	91.84	31.52		
	M_{moteur}	kg	280.32	445.15	242.22	-38.1	-8.56%
Hauteur de culasse stator h_{y_s}	m	0.0188	0.0211	0.0095			
Hauteur de culasse rotor h_{y_r}	m	0.0158	0.0177	0.0303			
Epaisseur d'aimants h_a	m	0.0147	0.0152	0.0144			
Hauteur d'encoche h_s	m	0.0275	0.0421	0.0178			
Rayon d'alésage	m	0.3402	0.4139	0.0498			
Longueur principale (L_m, h_{tot}, R_{tore})	m	0.204	0.0551	0.275			
Coefficient têtes de bobines k_{wh}		1.35	1.42	1			
Ratio S_{act}/S_{ext}		0.84	1.14	0.65			
Echauffement des bobinages $h_{cv} \cdot \Delta T$	W/m ²	12129	12430	11690			
Charge linéique A_{rms}	A/m	54662	59631	59903			
Densité de courant surfacique K_{rms}	A/m	53569	58439	58705			
Vitesse linéaire maximale v_{lin}	m/s	31.97	32.51	30.51			

Tableau 2-5 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 30$ m/s

Paramètres d'entrées			RFM	AFM	TFM
Vitesse de rotation nominale	N	tr/min	2500	1500	2450
Puissance mécanique	P_{mec}	MW	1	1	1
Champ maximal dans l'entrefer	B_m	T	$1.18 * J$	$1.18 * J$	$1.08 * J$
Pression tangentielle	σ	Pa		30000	
Densité de courant volumique	j_{rms}	A/m ²	$7.00.10^6$	$8.15.10^6$	$1.14.10^7$
Champ maximal dans la culasse stator	B_{y_s}	T		1.6	
Champ maximal dans la culasse rotor	B_{y_r}	T		1.9	
Champ maximal dans les dents	B_t	T		1.6	
Nombre de paires de pôles	p		15	18	14
Champ rémanente des aimants permanents	J	T		1.1	
Coefficient de forme de la machine	λ		0.53	0.9	0.18
Épaisseur d'entrefer	e	mm		1	

Tableau 2-6 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 50$ m/s

Paramètres de sorties du dimensionnement			Gain de TFM %				
Structure de machine		RFM	AFM	TFM	Ecart	%	
Puissance spécifique SP	W/kg	2339.9	1921.5	2776.2	436.3	18.65%	
Couple spécifique ST	Nm/kg	20.31	22.37	22.09	-0.28	-1.27%	
Pertes joules P_j	W	5958.8	8811.4	9196.9			
Pertes fer P_{fer}	W	7803	7673.7	6537.9			
Pertes totales P_{tot}	W	13762	16485	15735			
rendement		0.9864	0.9837	0.9845			
Masses	$M_{aimants}$	kg	88.99	129.5	90.82		
	M_{rotor}	kg	207.83	275.08	187.29		
	M_{dents}	kg	45.23	57.58	33.71		
	$M_{culasse\ stator}$	kg	135.59	145.53	114.56		
	M_{stator}	kg	219.55	245.34	172.92		
	M_{cuivre}	kg	38.72	42.24	24.65		
	M_{moteur}	kg	427.37	520.42	360.21	-67.16	-12.90%
Hauteur de culasse stator h_{y_s}	m	0.024	0.0185	0.0138			
Hauteur de culasse rotor h_{y_r}	m	0.0202	0.0155	0.0365			
Épaisseur d'aimants h_a	m	0.0167	0.0164	0.0162			
Hauteur d'encoche h_s	m	0.0164	0.0141	0.0101			
Rayon d'alésage	m	0.442	0.409	0.0601			
Longueur principale (L_m, h_{tot}, R_{tore})	m	0.234	0.0515	0.334			
Coefficient têtes de bobines k_{wh}		1.39	1.19	1			
Ratio S_{act}/S_{ext}		0.89	0.87	0.71			
Echauffement des bobinages $h_{cv} \cdot \Delta T$	W/m ²	8114.3	7939.1	8281.4			
Charge linéique A_{rms}	A/m	33353	33353	36441			
Densité de courant surfacique K_{rms}	A/m	32686	32686	35712			
Vitesse linéaire maximale v_{lin}	m/s	50.90	50.98	49.43			

Tableau 2-7 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 50$ m/s

Paramètres d'entrées			AFM	RFM	TFM
Vitesse de rotation nominale	N	tr/min	2500	1500	2400
Puissance mécanique	P_{mec}	MW	1	1	1
Champ maximal dans l'entrefer	B_m	T	$1.22 * J$	$1.13 * J$	$1.08 * J$
Pression tangentielle	σ	Pa		40000	
Densité de courant volumique	j_{rms}	A/m ²	$7.00.10^6$	$5.25.10^6$	$1.00.10^7$
Champ maximal dans la culasse stator	B_{y_s}	T		1.6	
Champ maximal dans la culasse rotor	B_{y_r}	T		1.9	
Champ maximal dans les dents	B_t	T		1.6	
Nombre de paires de pôles	p		16	18	16
Champ rémanent des aimants permanents	J	T		1.1	
Coefficient de forme de la machine	λ		0.8	0.7	0.17
Epaisseur d'entrefer	e	mm		1	

Tableau 2-8 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 70$ m/s

Paramètres de sorties du dimensionnement				Gain de TFM %			
Structure de machine		RFM	AFM	TFM	Ecart	%	
Puissance spécifique SP	W/kg	5628.2	3677.8	6539.2	911	16.19%	
Couple spécifique ST	Nm/kg	21.50	23.40	26.01	2.60	11.13%	
Pertes joules P_j	W	3758.5	4223.3	5512.3			
Pertes fer P_{fer}	W	10668	9243.6	8398.3			
Pertes totales P_{tot}	W	14427	13467	13911			
rendement		0.9857	0.9868	0.9863			
Masses	$M_{aimants}$	kg	36.26	49.30	34.34		
	M_{rotor}	kg	73.85	106.94	66.026		
	M_{dents}	kg	34.24	58.53	28.48		
	$M_{culasse\ stator}$	kg	45.16	57.65	37.63		
	M_{stator}	kg	103.83	164.96	86.90		
	M_{cuivre}	kg	24.42	48.79	20.79		
	M_{moteur}	kg	177.68	271.9	152.92	-24.76	-9.11%
Hauteur de culasse stator h_{y_s}	m	0.0140	0.0143	0.0078			
Hauteur de culasse rotor h_{y_r}	m	0.0118	0.0121	0.0266			
Epaisseur d'aimants h_a	m	0.0125	0.0123	0.0123			
Hauteur d'encoche h_s	m	0.0220	0.0293	0.0154			
Rayon d'alésage	m	0.2668	0.3308	0.0418			
Longueur principale (L_m, h_{tot}, R_{tore})	m	0.2135	0.0398	0.2456			
Coefficient têtes de bobines k_{wh}	A/m	1.245	1.249	1			
Ratio S_{act}/S_{ext}		0.85	1.02	0.64			
Echauffement des bobinages $h_{cv} \cdot \Delta T$	W/m ²	8913.3	8754.2	8746.1			
Charge linéique A_{rms}	A/m	43013	46438	48588			
Densité de courant surfacique K_{rms}	A/m	42152	45510	47617			
Vitesse linéaire maximale v_{lin}	m/s	69.59	70.14	71.98			

Tableau 2-9 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 70$ m/s

Le premier dimensionnement est effectué à 30 m/s et la puissance mécanique est fixée à 0.7 MW. Ce dimensionnement est celui qui représente le mieux le fonctionnement à basse vitesse. Premier constat, la machine toroïdale présente un gain au niveau de la puissance massique et du couple massique de 15% par rapport à la machine radiale. Ce gain correspond à une masse diminuée de quasiment 9%. Ces premiers résultats confirment l'idée selon laquelle la machine toroïdale idéale offre un meilleur couple spécifique en améliorant l'utilisation du cuivre. Ceci peut s'expliquer par un meilleur refroidissement au vu du ratio S_{act}/S_{ext} effectivement en faveur de la TFM. La densité volumique de courant j_{rms} d'entrée est donc plus élevée pour la machine toroïdale, pour au final obtenir un échauffement des bobinages sensiblement identique entre les trois machines.

Le deuxième dimensionnement est réalisé à $v_{lin} = 50$ m/s et $P_{mec} = 1$ MW. Ici, nous obtenons un gain de 18% en puissance spécifique contre une baisse de 1.27% en couple spécifique. Contrairement au cas précédent, les vitesses de rotation d'entrées présentent de plus gros écarts pour ce deuxième dimensionnement. La puissance mécanique étant constante, les écarts de vitesse nominale d'entrée entraînent un écart important au niveau du couple imposé à la machine, ayant pour conséquence un déséquilibre des résultats entre le couple et la puissance spécifique de sortie. On constate tout de même un gain sur la masse de quasiment 13% en faveur de la machine toroïdale.

Le dernier dimensionnement a été effectué à $v_{lin} = 70$ m/s et $P_{mec} = 1$ MW. Dans ce cas, la disparité des vitesses d'entrée se fait moins ressentir sur les résultats. Les gains respectifs sur le couple et la puissance spécifique sont de 16% et 11%, soit une réduction de masse de 9%. Le ratio S_{act}/S_{ext} est toujours meilleur pour la machine toroïdale. Ces résultats corroborent les conclusions énoncées précédemment.

L'approximation de la machine toroïdale idéale à une machine tubulaire a permis de montrer sur quelques dimensionnements que la recherche d'une meilleure utilisation du cuivre a bien un impact positif sur le couple spécifique. Ces résultats sont bien évidemment soumis à la validité de l'hypothèse disant que le dimensionnement tubulaire est suffisamment proche du dimensionnement toroïdal. De plus, une méthode similaire a déjà été appliquée pour modéliser la machine à flux axial [33][34], où la modélisation 2D dans le plan de coupe cylindrique de la machine à flux axial est résolue dans le repère cartésien à la place du repère cylindrique.

Enfin, les résultats montrent que la configuration toroïdale permet un gain significatif de par la création d'un couple sur la totalité de la spire et également l'avantage géométrique permettant une meilleure évacuation des pertes.

2.3.3.3 Validation

Les équations de dimensionnement ont été validées pour le cas de la machine à flux radial [20]. La même méthode a été appliquée au cas de la machine à flux axial dans [18] et dans ce manuscrit au cas de la machine tubulaire. Cette méthode de modélisation est utilisée ici pour comparer les machines et prouver le gain de performances de la machine toroïdale. La validation sur un dimensionnement réel de machine n'est pas l'objet de ces travaux. Afin de valider les résultats précédents, la même méthode de validation partielle que dans [18] est utilisée.

Elle consiste à vérifier le calcul de la hauteur d'aimant fait à partir du modèle analytique du champ inducteur (section 2.3.2.3). Plus précisément, nous vérifierons que la hauteur d'aimant h_a donnée par l'algorithme produit, au niveau du rayon d'alésage, un champ magnétique dont l'amplitude atteint bien la valeur spécifiée B_m . Cela valide ainsi le fait que la distribution d'aimants en réseau Halbach génère bien le flux inducteur souhaité dans la machine.

La validation est faite par éléments finis via le logiciel FEMM [28]. La distribution d'aimants en réseau Halbach utilisée pour la modélisation est considérée idéale. Nous prendrons, pour la validation, une distribution constituée de sept segments par pôle. La validation est effectuée uniquement pour le dimensionnement, à $v_{lin} = 30$ m/s.

Un pôle est modélisé sous FEMM en axisymétrique afin de calculer le champ magnétique au rayon d'alésage de la machine tubulaire avec les dimensions géométriques du dimensionnement à $v_{lin} = 30$ m/s Tableau 2-4. Le problème et son maillage sont illustrés Figure 2-27.

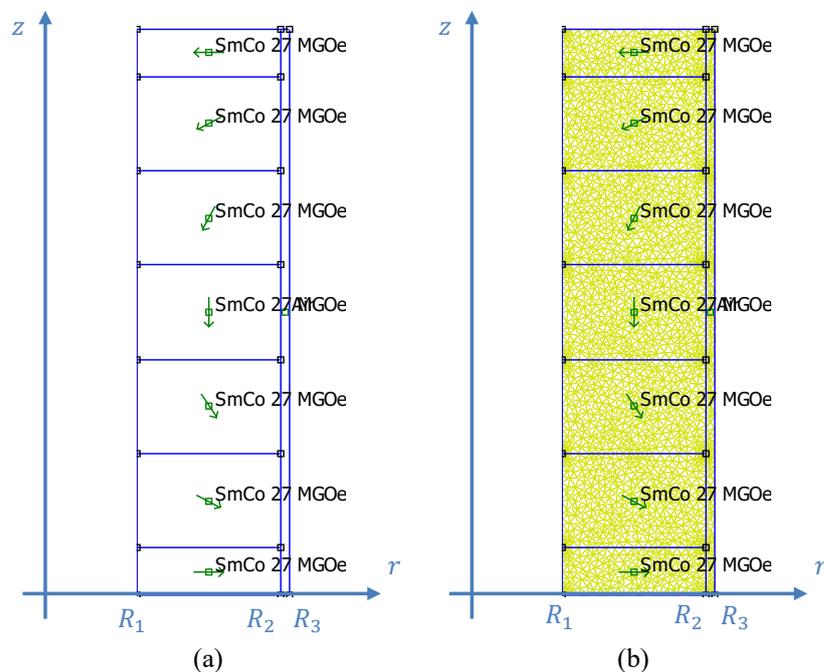


Figure 2-27 : Géométrie d'un pôle de la machine tubulaire (a) et son maillage (b)

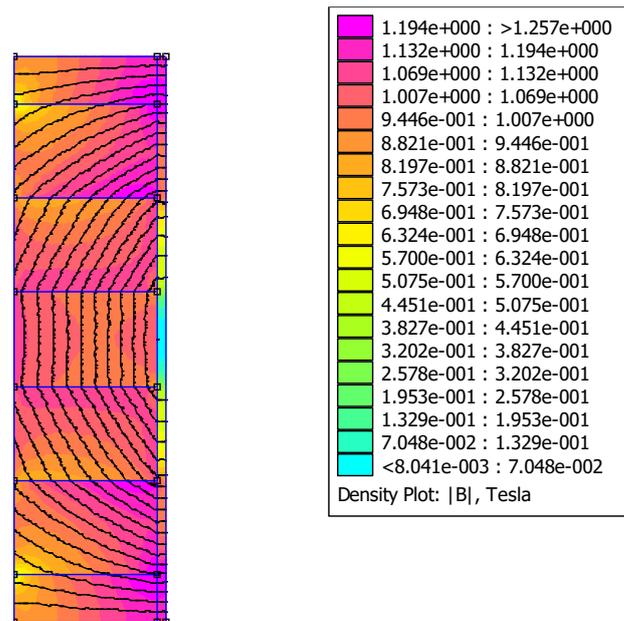


Figure 2-28 : Résultat de simulation du champ inducteur de la machine tubulaire.

Le maximum du champ magnétique dans l'entrefer doit être égal à la valeur spécifiée dans le Tableau 2-4, soit :

$$B_m = 1.095 * J = 1.2045 \text{ T} \quad (2.142)$$

Le résultat de la simulation est présenté en Figure 2-28. On trace en Figure 2-29 la composante radiale du champ magnétique au rayon d'alésage $B_r(R_3, z)$ sur un quart de pôle afin de calculer son amplitude et de comparer sa valeur à celle spécifiée. On obtient une amplitude de 1.2043 T soit une erreur de 0.5% ce qui valide les équations de dimensionnement.

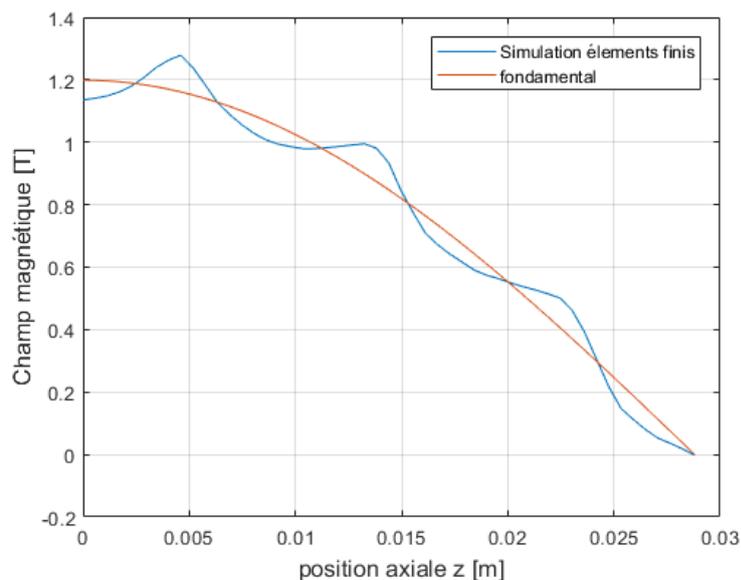


Figure 2-29 : Champ magnétique radial au rayon d'alésage en fonction de la position axiale

2.4 Conclusion

Ce chapitre a permis d'illustrer les principes mathématiques nécessaires à l'établissement des modèles du champ magnétique dans les machines. Les modèles de différentes configurations géométriques ont été présentés permettant d'observer une grande similitude permise notamment par la description des sources en série de Fourier. Nous avons donc une première unification des modèles analytiques du champ magnétique permise par la description en série de Fourier.

Ces modèles 2D analytiques ont permis d'établir une méthode de dimensionnement appliquée à trois types de machines : radiale, axiale et tubulaire, cette dernière pour approximer la machine toroïdale. Cette méthode unifiée appliquée à un même cahier des charges a ensuite permis de mettre en avant les avantages de la nouvelle machine proposée et de montrer un gain intéressant au niveau de la masse et donc du couple massique. Ce gain aux alentours de 10% au niveau de la masse et de 15% au niveau du couple massique permet de justifier la poursuite des travaux de recherche sur cette nouvelle configuration.

Reste désormais à établir un modèle analytique 3D du champ magnétique à vide de la machine toroïdale. Préalablement, le prochain chapitre porte sur la modélisation 3D de la machine à flux axial avec pour but de dégager une méthode généralisable à toutes configurations.

Chapitre 3

Modélisation Hybride en 3 Dimensions

Table des matières du Chapitre 3 :

Chapitre 3	Modélisation Hybride en 3 Dimensions.....	95
3.1	Introduction	96
3.2	Etat de l'art de la modélisation analytique du champ magnétique à vide dans les machines à flux axial	96
3.3	Méthode de modélisation hybride en 3 dimensions	100
3.3.1	Définition du problème.....	100
3.3.2	Application de la méthode de séparation des variables.....	105
3.3.3	Application de la méthode des différences finies	107
3.4	Calcul du couple statique et de la force électromotrice	111
3.5	Validation par éléments finis.....	112
3.6	Généralisation de la forme d'aimants.....	118
3.6.1	Modélisation d'une forme d'aimant quelconque.....	118
3.6.2	Application au cas d'aimants cylindriques	123
3.6.3	Validation expérimentale.....	127
3.7	Conclusion.....	133

3.1 Introduction

Le chapitre précédent présente la modélisation analytique 2D du champ magnétique à vide des machines synchrones à aimants permanents sans saillance au rotor et sans encoches par méthode de séparation des variables. Les machines linéaires, tubulaires et à flux radial présentent une invariance par translation ou par rotation de la géométrie, des propriétés magnétiques et de l'aimantation des aimants permanents permettant la réduction du problème à un problème 2D. En revanche, les machines à flux axial ne présentent pas d'axes d'invariance par translation ou rotation. Ceci empêche une modélisation du champ magnétique en 2D.

Dans les méthodes par séparation de variables en 2D la solution peut être considérée comme une série de solutions élémentaires. En 2D, une solution élémentaire est le produit de deux fonctions la première est fonction d'une coordonnée de position du repère et l'autre fonction de l'autre coordonnée. Comme les machines étudiées présentent une périodicité spatiale le long d'un des axes de coordonnées, la première fonction est une fonction trigonométrique en sinus ou cosinus. La deuxième fonction est une fonction solution d'une équation différentielle. Le type de cette fonction change suivant la configuration géométrique de la machine. Dans le cas de la machine linéaire par exemple la deuxième fonction est une fonction hyperbolique, dans le cas de la machine tubulaire, une fonction de Bessel. De plus suivant la configuration géométrique, à cette deuxième fonction il faut ajouter une fonction particulière.

Ce chapitre est dédié à l'élaboration d'un modèle appelé modèle hybride car il associe le modèle analytique par méthode de séparation des variables à un modèle numérique en différences finies. Ce modèle est généralisable à toutes les configurations géométriques de machines présentant une périodicité géométrique et des propriétés magnétiques suivant un ou deux axes de coordonnées. Nous allons l'appliquer à la modélisation du champ magnétique à vide de la machine à flux axial.

3.2 Etat de l'art de la modélisation analytique du champ magnétique à vide dans les machines à flux axial

Hormis l'existence des modèles dits quasi-3D basés sur une modélisation 2D [33]–[37] vus au chapitre précédent, il existe, dans la littérature, des modèles analytiques en trois dimensions de machine à flux axial à aimants permanents. [42] a établi un modèle 3D en faisant appel à la description en série de Fourier ainsi que la transformation de Hankel, qui s'éloigne donc de ce que nous proposons dans ce chapitre. [43], [44] et [45] modélisent également la machine à flux axial à aimants permanents sans encoches en faisant appel à la méthode de variables. Ils proposent un modèle 3D purement analytique.

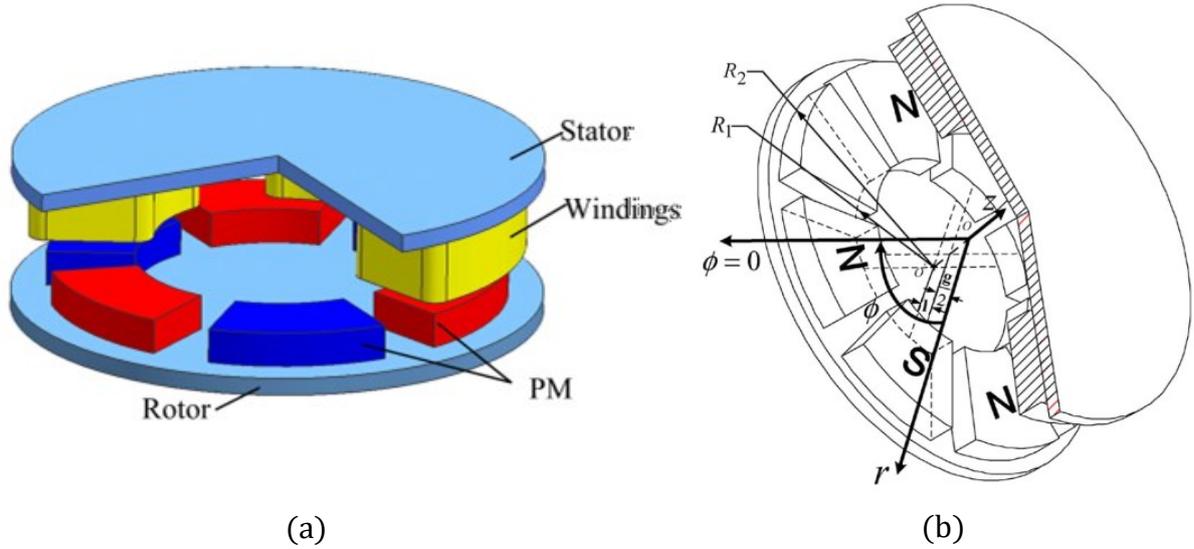


Figure 3-1 : Schéma de la machine à flux axiale traitée dans (a) [44] et (b) [43]

Pour analyser leurs méthodes, partons de l'équation aux dérivées partielles issue des équations de Maxwell. Le problème est formulé en terme de potentiel scalaire magnétique Ω :

$$\Delta\Omega = \text{div } \mathbf{M} \quad (3.1)$$

Suivant la méthode de séparation des variables, la forme de la solution élémentaire est [12] :

$$\Omega(r, \theta, z) = f(r).g(\theta).h(z) \quad (3.2)$$

En remplaçant dans l'équation de Poisson (3.1), on obtient :

$$\frac{1}{f} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0 \quad (3.3)$$

En isolant les termes en z , en θ puis en r on obtient trois équations différentielles :

$$-\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \mu \quad (3.5)$$

$$\left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] - \left(\lambda + \frac{\mu}{r^2} \right) f = 0 \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) est une équation différentielle de Bessel. A partir de là, les solutions possibles dépendent du signe des constantes de séparation μ et λ , jusque-là appartenant à \mathbb{R} . Cependant, la description en série de Fourier de l'aimantation suivant la direction de l'alternance des pôles impose de choisir une solution en θ sinusoïdale, μ doit donc être choisie positive et identifiée à la périodicité du terme source $\mu = m^2 = (n.p)^2$.

- Cas 1 : $\mu = m^2$ et $\lambda = -k^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0 \\ \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = k^2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} f(r) = c_1 \cdot J_m(kr) + c_2 \cdot Y_m(kr) \\ h(z) = c_3 \cdot \text{ch}(kz) + c_4 \cdot \text{sh}(kz) \end{cases} \quad (3.7)$$

- Cas 2 : $\mu = m^2$ et $\lambda = k^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0 \\ -\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = k^2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} f(r) = c_1 \cdot I_m(kr) + c_2 \cdot K_m(kr) \\ h(z) = c_3 \cdot \cos(kz) + c_4 \cdot \sin(kz) \end{cases} \quad (3.8)$$

Si la constante est positive (3.7), f est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèces, si la constante est choisie négative (3.8) on a alors les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce. Ainsi, la forme de ces solutions sommées sur l'indice n , par principe de superposition donnent un potentiel scalaire sous la forme d'une série de Fourier en θ pour un r et z donné :

$$\Omega(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [a_n \cdot J_m(kr) + b_n \cdot Y_m(kr)] \cdot [c_n \cdot \text{ch}(kz) + d_n \cdot \text{sh}(kz)] \cdot \cos(m\theta) \quad (3.9)$$

$$\Omega(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [a_n \cdot I_m(kr) + b_n \cdot K_m(kr)] \cdot [c_n \cdot \cos(kz) + d_n \cdot \sin(kz)] \cdot \cos(m\theta) \quad (3.10)$$

La résolution par séparation des variables en trois dimensions introduit une deuxième constante de séparation k par rapport à la résolution 2D. La périodicité en θ permet, par identification à la description des sources, de discrétiser la constante m afin d'obtenir une solution en série de Fourier par rapport à θ . En revanche, nous n'avons à ce stade aucune information sur k , ce qui fait toute la difficulté du problème 3D. Le développement effectué dans les articles [44] et [45] proposent deux solutions différentes à partir de ce point du raisonnement.

[43] propose de résoudre le problème en faisant appel à une description en série de Fourier-Bessel suivant la coordonnée r du terme source, i.e. de l'aimantation \mathbf{M} .

$$M(r, \theta) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \int_0^{\infty} M_n \cdot J_{np}(kr) \cos(np\theta) dk \quad (3.11)$$

Les coefficients M_n sont ensuite calculés par la transformée de Hankel. Cela est rendu possible de par les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Bessel [43]. Il est possible de les

utiliser de la même manière que les fonctions sinusoïdales dans le cas des séries de Fourier. Le potentiel scalaire magnétique est ici de la forme :

$$\Omega = - \sum_{n=1,3} \int_0^{\infty} A_n \cdot J_{np}(kr) \cdot \cos(np\theta) \cdot \text{sh}(kz) \cdot dk \quad (3.12)$$

On reconnaît ici la solution du cas 1 (3.9) détaillé précédemment avec la présence des fonction hyperboliques sh suivant z . Grâce à l'utilisation des séries de Fourier Bessel, la constante de séparation k est ici intégrée de $[0, \infty]$ en supposant que les conditions aux limites de champ normal s'étendent infiniment suivant r . Les coefficients A_n sont ensuite déterminés grâce aux conditions limites et conditions de passage pour chaque région considérée.

L'avantage de cette méthode de résolution est qu'il n'y a que deux régions à considérer, celle des aimants et de l'entrefer, limitant le nombre d'interfaces et de conditions aux limites. Cependant le niveau de complexité des fonctions de Bessel couplée à la description en série de Fourier-Bessel en fait un modèle difficile à manipuler et à implémenter dans un algorithme d'optimisation par exemple.

[44] résout le problème d'une autre manière, au lieu de proposer une description en série de Fourier-Bessel comme l'article précédent, la méthode des images est utilisée afin d'étendre le problème dans la direction axiale. La méthode des images rend alors possible la description des sources en une double série de Fourier suivant les coordonnées axiales et azimutales.

$$M_z(\theta, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} \cos(np\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_{n0} \cos(np\theta) \quad (3.13)$$

Cette description est valable quelque soit θ et z et pour $r \in [R_{int}, R_{ext}]$. R_{int} et R_{ext} étant les rayons internes et externes des aimants permanents. Il y a donc 3 régions à considérer, la région des aimants et l'air devant et derrière les aimants dans la direction radiale. Ainsi, la méthode de séparation des variables est appliquée suivant le cas 2 (3.10) et la forme de la solution devient :

$$\Omega(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot I_m(kr) + b_n \cdot K_m(kr)] \cdot \cos(kz) \cdot \cos(np\theta) \quad (3.14)$$

La forme de la solution semble dans ce cas plus conventionnelle que celle de l'article précédent. Cependant, du fait de la présence de 3 régions, le calcul des coefficients (deux pour chaque région, soit un total de six) est beaucoup plus lourd et l'expression finale du champ magnétique à vide est extrêmement longue.

Le chapitre 2 met en évidence les points communs existants dans les développements analytiques des modèles des différentes topologies de machine mais aussi leurs différences. La périodicité de la disposition des pôles unifie la méthode par l'utilisation de la série de Fourier. D'autre part, la recherche des fonctions propres, solutions de l'équation homogène aboutit à

des solutions différentes dans les autres directions là où la périodicité est absente. La recherche de solution particulière, si nécessaire, est un obstacle supplémentaire à l'unification de la méthode. Cela impose l'utilisation d'un modèle unique à chaque machine.

Le passage au 3D complexifie davantage le problème. Dans le cas de la machine à flux axial, la recherche de solution particulière n'est pas nécessaire si les pôles sont orientés axialement, cependant la méthode de séparation nécessite l'introduction d'une deuxième constante de séparation afin de proposer une forme de solution suivant chaque coordonnée du repère considéré. Une des deux constantes est identifiée à la périodicité des pôles, déjà présente dans le cas 2D. L'autre constante, arbitraire est un obstacle à l'avancée du problème. Elle nécessite le recours à de nouveaux principes mathématiques [42] et [43] pour aboutir à une solution. La solution proposée dans [44] est intéressante car elle permet l'introduction d'une périodicité suivant une deuxième coordonnée du repère considéré par la méthode des images. Cette double périodicité est donc modélisable par série de Fourier, unifiant la méthode dans deux des trois directions de la résolution en 3D.

Nous proposons dans ce chapitre une méthode hybride se basant sur la double périodicité permise par la méthode des images [44]. Une méthode des différences finies est ensuite introduite afin d'obtenir la solution dans la troisième et dernière direction du système de coordonnées choisi. La méthode des différences finies est simple à développer dans le cas 1D et s'applique à tout système de coordonnées. Nous pouvons ainsi envisager son application à tout type de machine. Nous proposons, dans ce chapitre de développer et valider cette méthode sur le cas de la machine à flux axial.

3.3 Méthode de modélisation hybride en 3 dimensions

3.3.1 Définition du problème

La méthode développée dans cette section a fait l'objet d'un article [46]. Elle est développée plus en détail ici. Considérons le cas simple d'une machine à flux axial à aimants permanents comportant un seul entrefer, c'est-à-dire un rotor et un stator. Les aimants sont une portion radiale, angulaire et axiale d'un cylindre.

Cette forme d'aimant est appelée forme « trapèze » et est la plus simple à modéliser car elle est définie comme un segment radial, angulaire et axial du repère cylindrique. Cela permet de délimiter la zone des aimants par des surfaces iso-coordonnées, permettant une facile description mathématique du problème. Nous considérerons ici des aimants aimantés axialement. La Figure 3-2 illustre le problème ainsi que ses principales dimensions. Notons que l'entrefer contient également la dimension axiale des bobines $e = e_{mec} + e_{bob}$ afin d'effectuer ultérieurement les calculs de couple statique et de force électromotrice (cf. section 1.2.3).

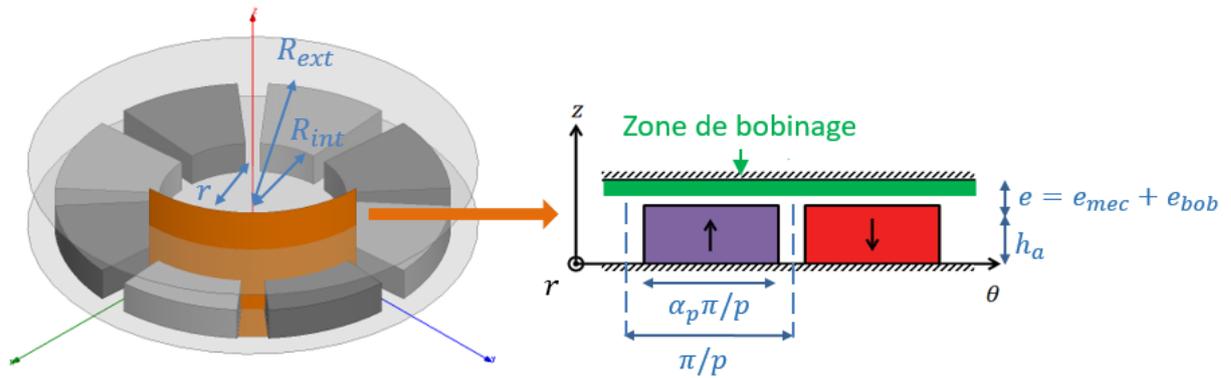


Figure 3-2 : Schéma de la machine et vue en coupe cylindrique d'une paire de pôles

Le nombre de régions à considérer est beaucoup plus important que dans le cas de la modélisation en 2D pour lequel il n'y a que deux régions à considérer. Les régions sont délimitées par les surfaces iso-coordonnées du repère cylindrique (cf. section 1.2.1). Par conséquent, plus le nombre de régions à considérer est élevé, plus la complexité du problème augmente. Il est donc primordial de réduire au maximum le nombre de régions à considérer avant d'entamer le calcul 3D. Les hypothèses suivantes sont donc établies :

- La perméabilité des aimants est considérée égale à celle de l'air donc μ_0 . Dans la zone des aimants ($0 \leq z \leq h_a$ sur la Figure 3-2), les aimants permanents et l'air peuvent donc être considérés comme un seul et même milieu.
- Les interfaces avec le fer sont remplacées par des conditions aux limites de flux normal, représentés en bleu sur la Figure 3-3. Le fer n'est pas considéré dans l'étude.
- Le champ magnétique à l'intérieur proche de l'axe et à l'extérieur sont négligés. Le problème est donc limité radialement par deux conditions aux limites de flux parallèle sur les deux surfaces cylindriques (en $r = R_0$ et $r = R_1$) présentées en rouge sur la Figure 3-3.

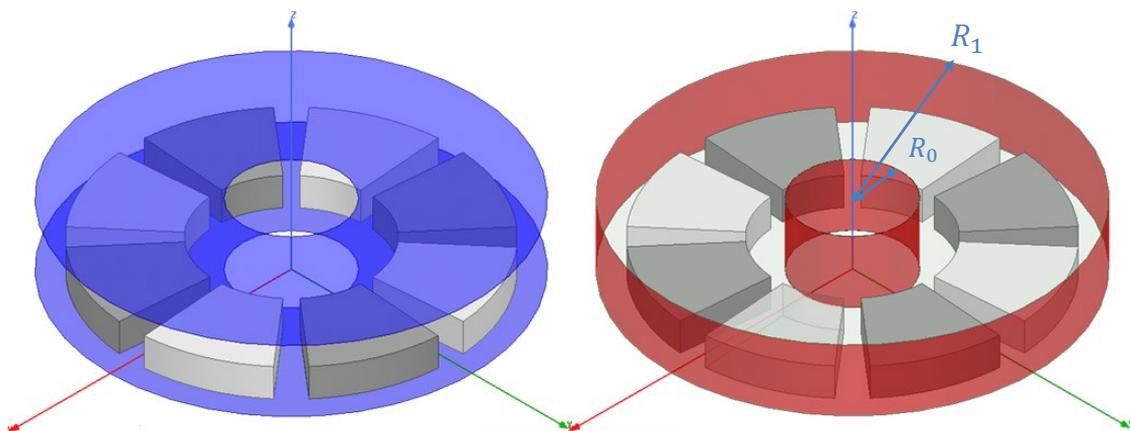


Figure 3-3 : Conditions aux limites de flux normal (bleu) et conditions aux limites de flux tangentiel (rouge)

A ce stade, il y a donc 4 régions à considérer : la zone des aimants (région *II*), l'entrefer au-dessus des aimants (région *IV*) mais également l'entrefer devant et derrière les aimants dans la direction radiale (respectivement régions *III* et *I*) comme illustré Figure 3-4, ce qui donne cinq interfaces et quatre conditions aux limites. Dans ce cas, il faudrait alors établir une forme de solution pour chacune de ces régions et calculer leurs coefficients en appliquant les équations issues des conditions de passage et conditions aux limites, ce qui rend le calcul très lourd comparé au cas en deux dimensions. Il est cependant possible de réduire le nombre de régions grâce à la méthode des images.

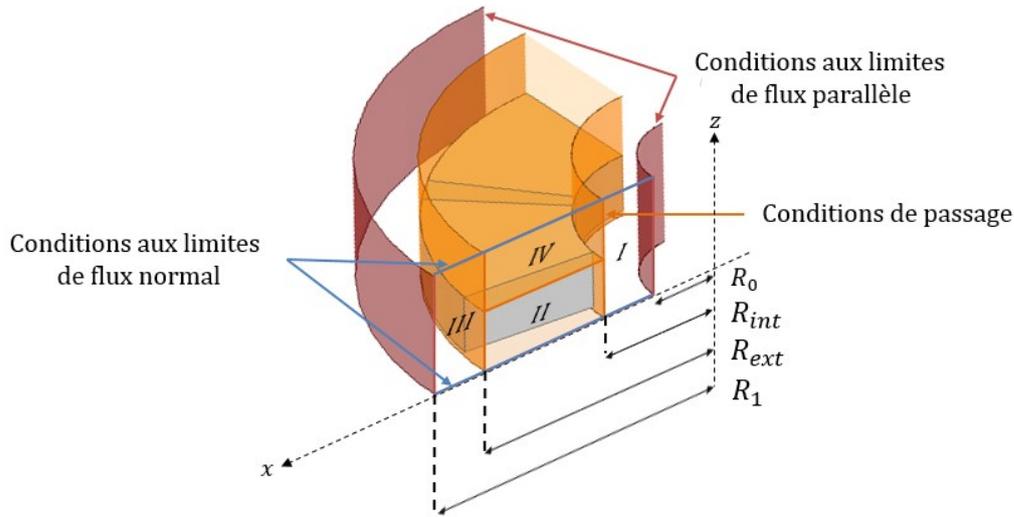


Figure 3-4 : Représentation en 3 dimensions des régions à considérer

La méthode des images est utilisée ici de la même façon que dans [44]. Elle consiste à considérer un nouveau problème équivalent dans lequel les conditions de flux normal sont remplacées par une disposition symétrique des sources (ici les aimants permanents) par rapport au plan sur lequel est appliquée la condition aux limites (i.e. les plans $z = 0$ et $z = h_a + e$). Nous obtenons alors un nouveau problème étendu dans la direction axiale dont la solution est exactement la même que celle du problème initial. La Figure 3-5 illustre la méthode appliquée au cas traité ici.

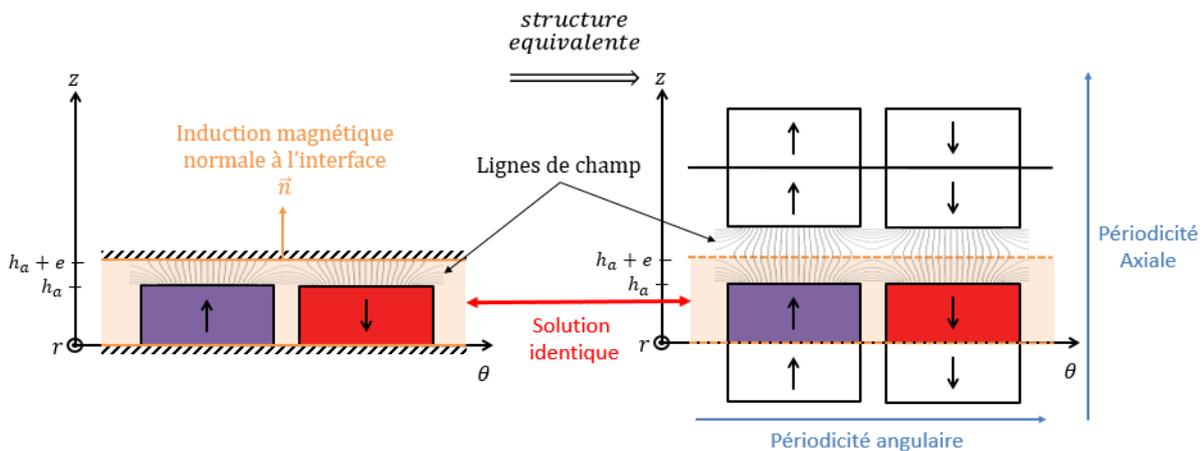


Figure 3-5 : Principe de la méthode des images appliquée à la machine à flux axial

Le positionnement symétrique des aimants par rapport à la surface sur laquelle est appliquée initialement la condition aux limites permet de conserver un flux normal à cette surface dans le nouveau problème. Ainsi, le nouveau problème présente exactement la même solution dans la zone définie initialement. De plus, du fait de la présence de deux conditions de flux normal, cette nouvelle géométrie peut être répétée indéfiniment dans la direction axiale. Plus précisément, l'image par rapport au plan $z = 0$ peut elle-même être répétée par rapport au plan $z = h_a + e$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une répétition périodique de la source initiale.

La périodicité axiale induite par la méthode des images vient s'ajouter à la périodicité angulaire déjà existante. Cette double périodicité peut être modélisée par une double série de Fourier suivant les coordonnées θ et z . On écrit donc l'aimantation (purement axiale ici) des aimants permanents sous la forme :

$$M_z(\theta, z) = \sum_n \sum_k M_{nk} \cos(np\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) \quad (3.15)$$

où M_{nk} sont les coefficients de la série de Fourier à calculer suivant les formes d'ondes de la Figure 3-7, n et k sont les rangs d'harmoniques respectivement dans la direction θ et z , p est le nombre de paires de pôles et π/τ est la demi période de l'aimantation dans la direction axiale (avec $\tau = h_a + e$). Cette modélisation permet donc à elle seule de décrire le comportement des sources dans les régions *II*, région des aimants permanents et *IV*, région de l'entrefer au-dessus des aimants.

Modéliser l'aimantation sous la forme d'une double série de Fourier dans les directions axiales et azimutales permet donc d'unifier les régions *II* et *IV* (désormais appelée région *II*) et ainsi de réduire le nombre de régions à considérer de 4 à 3, et le nombre de conditions de passage de 5 à 2 comme illustré Figure 3-6.

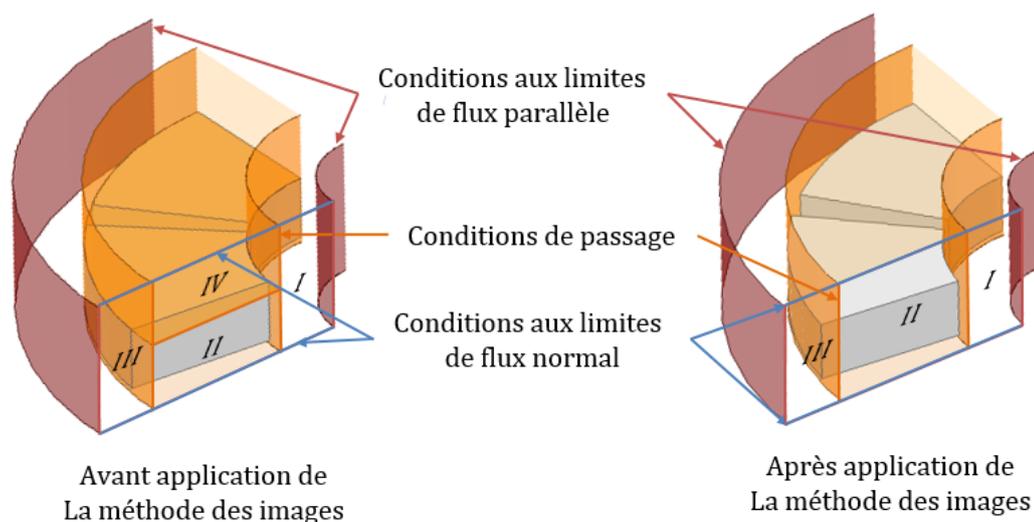


Figure 3-6 : Réduction du nombre de régions après application de la méthode des images

Le calcul des coefficients M_{nk} se fait par l'intermédiaire des formes d'ondes $M_z(\theta)$ et $M_z(z)$ présentées Figure 3-7. Cette description est valable dans toute la région II. La forme d'onde $M_z(z)$ de la Figure 3-7 est tracée suivant une ligne axiale traversant un pôle orienté suivant $+e_z$. Si nous prenons un pôle sud les créneaux sont identiques à ceux de la Figure 3-7 mais négatifs et si cette ligne est placée entre deux pôles alors $M_z(z) = 0, \forall z$.

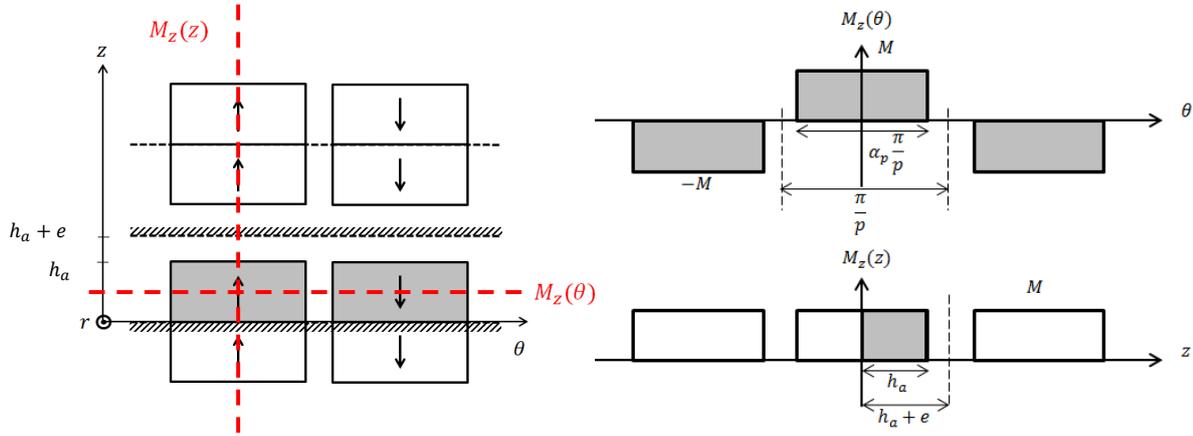


Figure 3-7 : Formes d'ondes de l'aimantation dans la région II

Le calcul des coefficients est détaillé en Annexe. L'expression finale de l'aimantation est :

$$M_z(\theta, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} \cos(np\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_{n0} \cos(np\theta) \quad (3.16)$$

$$M_{nk} = \frac{8M}{nk\pi^2} \sin(k\pi\alpha_q) \sin\left(\frac{n\alpha_p\pi}{2}\right) \quad (3.17)$$

$$M_{n0} = \alpha_q \frac{4M}{n\pi} \sin\left(\frac{n\alpha_p\pi}{2}\right) \quad (3.18)$$

où α_p est l'arc polaire, $\alpha_q = h_a/(h_a + e)$ est l'équivalent de l'arc polaire dans la direction axiale défini suite à l'application de la méthode des images et M est l'aimantation des aimants permanents.

S'assurer de l'exactitude du calcul de la double série de Fourier est primordial avant de se lancer dans la résolution des équations de Maxwell pour éviter toute erreur de calcul. Pour ce faire, il est possible de tracer l'expression (3.16) sur une surface cylindrique pour un rayon donné dans la région II ($R_{int} < r < R_{ext}$). Considérons, pour cette validation seulement, que l'aimantation des aimants permanents est égale à l'unité. Nous obtenons alors le tracé en 3D de la Figure 3-8 dans lequel l'axe x et y de la Figure représentent respectivement l'axe des θ et l'axe des z de notre problème en 3D. L'axe z de la Figure représente la valeur de l'aimantation, 1 pour un pôle nord et -1 pour un pôle sud en fonction de la position angulaire et axiale sur la surface cylindrique considérée. Le résultat est tracé pour 1000 harmoniques afin d'avoir un signal proche du signal carré.

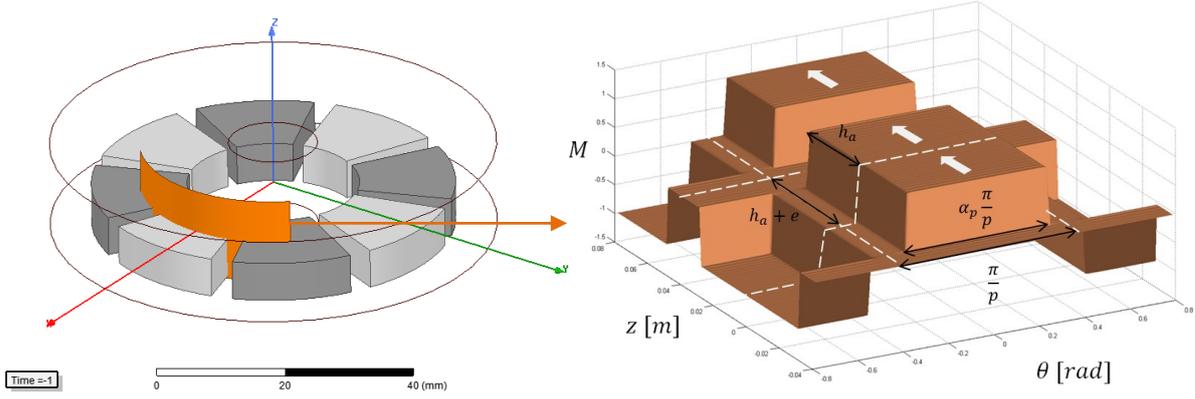


Figure 3-8 : Aimantation en fonction de θ et z pour $M = 1$

Les hypothèses du problème étant posées et les sources étant modélisées proprement, la résolution de l'équation de Poisson par la méthode de séparation des variables en 3D peut désormais être appliquée.

Une implication majeure de la méthode des images est qu'à partir de la définition initiale d'une machine à flux axial, l'extension du problème dans la direction axiale permet finalement de modéliser des machines poly-entrefer. Il suffit donc de considérer la solution pour $z \in [0, h_a + e]$ pour une machine mono-entrefer et la solution dans l'intervalle $z \in [0, 2(h_a + e)]$ dans le cas d'une machine double-entrefer.

3.3.2 Application de la méthode de séparation des variables

Nous cherchons à modéliser le champ magnétique produit par les aimants permanents en circuit ouvert. L'équation aux dérivées partielles est :

$$\Delta\Omega = \begin{cases} 0 & \text{dans } I \text{ et } III \\ \text{div } \mathbf{M} & \text{dans } II \end{cases} \quad (3.19)$$

L'aimantation n'ayant qu'une composante axiale, le second membre développé donne :

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{\tau}\right) M_{nk} \cdot \cos(np\theta) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) \quad (3.20)$$

où $\tau = h_a + e$. Le laplacien ou l'équation de Poisson (3.19) peuvent alors être écrit dans les régions respectives :

$$\frac{\partial^2 \Omega^{I,III}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega^{I,III}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega^{I,III}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega^{I,III}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega^{II}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega^{II}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega^{II}}{\partial z^2} = \frac{\partial M_z}{\partial z} \quad (3.22)$$

Nous appliquons une séparation simple dans le cas du repère cylindrique, le potentiel scalaire s'écrit :

$$\Omega(r, \theta, z) = f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(z) \quad (3.23)$$

En insérant la forme séparée (3.23) dans le laplacien (3.19) nous aboutissons à une équation différentielle ordinaire pour chaque fonction f , g et h :

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] - \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{r^2} \right) \cdot f = 0 \\ \frac{d^2 g}{d\theta^2} = -\alpha_1 \cdot g \\ \frac{d^2 h}{dz^2} = -\alpha_2 \cdot h \end{cases} \quad (3.24)$$

où α_1 et α_2 sont les constantes de séparations qui peuvent être choisies positives ou négatives. Leur signe est choisi de sorte que la forme de la solution soit la même que celle de la source, ici de l'aimantation des aimants. Nous souhaitons que les fonctions g et h soient sinusoïdales, les constantes de séparation sont donc choisies positives. Classiquement, les solutions de chaque fonction sont [12] :

$$\begin{cases} f : r \rightarrow A \cdot I_{\alpha_1}(\alpha_2 r) + B \cdot K_{\alpha_1}(\alpha_2 r) \\ g : \theta \rightarrow C \cdot \cos(\alpha_1 \theta) + D \cdot \sin(\alpha_1 \theta) \\ h : z \rightarrow E \cdot \cos(\alpha_2 z) + F \cdot \sin(\alpha_2 z) \end{cases} \quad (3.25)$$

où A, B, C, D, E et F sont des constantes arbitraires. $I_{\alpha_1}(\alpha_2 r)$ et $K_{\alpha_1}(\alpha_2 r)$ sont des fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce d'ordre α_1 . Le développement est jusqu'ici identique aux modèles purement analytiques développés dans [43], [44].

Pour généraliser la méthode de séparation des variables, nous proposons de résoudre l'équation différentielle définissant la fonction f par la méthode des différences finies. Le laplacien nous impose de choisir le potentiel scalaire magnétique sous la même forme que le terme source, ainsi nous fixons $D = 0$ et $E = 0$ et les constantes de séparation α_1 et α_2 sont identifiées respectivement à $n \cdot p$ et $k\pi/\tau$. Le principe de superposition permet de sommer toutes les solutions existantes sur n et k pour obtenir une solution de la forme :

$$\Omega(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{nk}(r) \cos(np\theta) \sin\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \quad (3.26)$$

Le terme $f(r)$ de l'équation (3.24) a été renommé $\omega_{nk}(r)$ après application du principe de superposition et représente les coefficients de la série de Fourier dépendant de r et du rang d'harmonique (n, k) . Un terme supplémentaire ω_{n0} devrait être ajouté pour respecter la forme des sources. Cependant, seule la composante axiale B_z du champ magnétique à vide est considérée ici pour les calculs ultérieurs du couple et de la force électromotrice. Ainsi, ce terme indépendant de z disparaît d'après la loi constitutive des matériaux magnétiques en raison de la dérivée suivant la coordonnée axiale :

$$B_z = \mu_0 \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial z} + M_z \right) \quad (3.27)$$

3.3.3 Application de la méthode des différences finies

La forme de la solution issue de la méthode de séparation des variables conserve les solutions en θ et z . Nous devons désormais calculer la fonction ω_{nk} par la méthode des différences finies. Pour ce faire, il faut établir une nouvelle équation différentielle sur ω_{nk} . En insérant la forme de la solution (3.26) dans le laplacien défini dans chaque région (3.21) et (3.22), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \omega_{nk}^{I,III}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{nk}^{I,III}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{nk}^{I,III} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2 \omega_{nk}^{II}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{nk}^{II}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{nk}^{II} = -M_{nk} \frac{k\pi}{\tau} \quad (3.29)$$

Il y a donc $n \times k$ équations à résoudre pour chaque région I, II et III. Pour chaque couple (n, k) , une méthode des différences finies à pas variable est appliquée pour $R_1 \geq r \geq R_0$ comme illustré Figure 3-9.

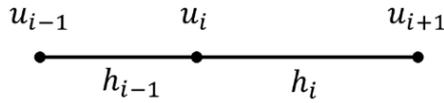


Figure 3-9 : Schéma de principe de la discrétisation à pas variable dans la numérotation globale

Les formules de Taylor au second ordre sont appliquées au cas du pas variable pour calculer les dérivées de la nouvelle inconnue ω_{nk} :

$$\left(\frac{d\omega_{nk}}{dr} \right)_i = \frac{h_{i-1}^2 u_{i-1} - (h_{i-1}^2 - h_i^2) u_i + h_i^2 u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{d^2 \omega_{nk}}{dr^2} \right)_i = 2 \frac{h_{i-1} u_{i-1} - (h_{i-1} - h_i) u_i + h_i u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (3.31)$$

où u_i est la valeur de ω_{nk} pour $r = r_i$ et h_i est le pas de discrétisation entre r_i et r_{i+1} . Les équations (3.28) et (3.29) ainsi que la discrétisation proposée en (3.30) et (3.31) peuvent être traduites en une équation matricielle pour $R_{int} \geq r \geq R_0$, $R_{ext} \geq r \geq R_{int}$ et $R_1 \geq r \geq R_{ext}$.

$$\begin{cases} A_{nk}^I \cdot v_{nk}^I = B_{nk}^I \\ A_{nk}^{II} \cdot v_{nk}^{II} = B_{nk}^{II} \\ A_{nk}^{III} \cdot v_{nk}^{III} = B_{nk}^{III} \end{cases} \quad (3.32)$$

où v_{nk} est le vecteur contenant les valeurs de ω_{nk} en chaque point du problème discrétisé radialement, A_{nk} est la matrice contenant les coefficients calculés grâce aux formules de Taylor, et B_{nk} le vecteur représentant le second membre de l'équation différentielle (3.28) et (3.29).

Chaque région est liée à une condition de passage ou une condition limite rappelée ci-dessous et illustrée Figure 3-10. Dans le cas général, à l'interface entre deux milieux i et j elles s'écrivent :

$$\text{Condition aux limites : } H_r = 0 \quad (3.33)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \\ (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j) \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.34)$$

où \mathbf{n}_{ij} est la normale à l'interface ij de i vers j .

A l'aide de la loi constitutive des milieux magnétiques, liant le champ magnétique \mathbf{B} et le champ d'excitation magnétique \mathbf{H} , on peut écrire :

$$H_r = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_r^I|_{r=R_0} = 0 \\ H_r^{III}|_{r=R_1} = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

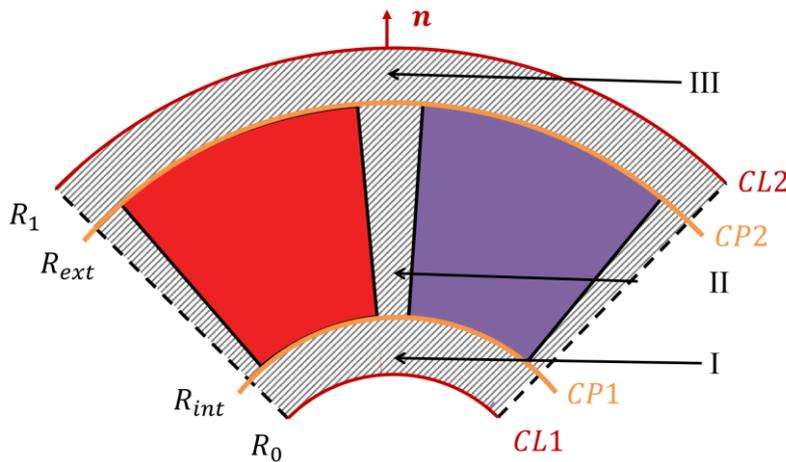


Figure 3-10 : Conditions aux limites (rouge) et conditions de passage (orange) entre les différentes régions.

$$(\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_r^I|_{r=R_{int}} = H_r^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_r^{II}|_{r=R_{ext}} = H_r^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$(\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j) \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} H_\theta^I|_{r=R_{int}} = H_\theta^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_z^I|_{r=R_{int}} = H_z^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_\theta^{II}|_{r=R_{ext}} = H_\theta^{III}|_{r=R_{ext}} \\ H_z^{II}|_{r=R_{ext}} = H_z^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \quad (3.37)$$

Les équations sont écrites pour chaque interface. Il est à noter que la continuité de la composante tangentielle à l'interface se décline en deux équations distinctes en θ et z . La composante M_r est nulle ici, d'où dans l'équation (3.36), on peut exprimer la continuité du champ magnétique par la continuité du champ d'excitation magnétique car la perméabilité de l'aimant est supposée égale à celle de l'air.

A l'aide de la définition du potentiel scalaire magnétique liant le champ d'excitation magnétique H au potentiel scalaire magnétique Ω et de la forme de la solution (3.26) qui permet de relier Ω à ω_{nk} on peut réécrire ces conditions de passage et conditions aux limites (3.35) à (3.37) sous leurs formes analytiques pour chaque couple (n, k) :

$$\begin{cases} H_r^I|_{r=R_0} = 0 \\ H_r^{III}|_{r=R_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\omega_{nk}^I}{dr}|_{r=R_0} = 0 \\ \frac{d\omega_{nk}^{III}}{dr}|_{r=R_1} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} H_r^I|_{r=R_{int}} = H_r^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_r^{II}|_{r=R_{ext}} = H_r^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\omega_{nk}^I}{dr}|_{r=R_{int}} = \frac{d\omega_{nk}^{II}}{dr}|_{r=R_{int}} \\ \frac{d\omega_{nk}^{II}}{dr}|_{r=R_{ext}} = \frac{d\omega_{nk}^{III}}{dr}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} H_\theta^I|_{r=R_{int}} = H_\theta^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_z^I|_{r=R_{int}} = H_z^{II}|_{r=R_{int}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{nk}^I|_{r=R_{int}} = \omega_{nk}^{II}|_{r=R_{int}} \\ \omega_{nk}^I|_{r=R_{int}} = \omega_{nk}^{II}|_{r=R_{int}} \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} H_\theta^{II}|_{r=R_{ext}} = H_\theta^{III}|_{r=R_{ext}} \\ H_z^{II}|_{r=R_{ext}} = H_z^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{nk}^{II}|_{r=R_{ext}} = \omega_{nk}^{III}|_{r=R_{ext}} \\ \omega_{nk}^{II}|_{r=R_{ext}} = \omega_{nk}^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \quad (3.41)$$

Les deux équations (3.40) et (3.41) issues de la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique H aboutissent finalement à la même équation sur ω_{nk} et imposent la continuité de la fonction ω_{nk} à l'interface entre les régions I/II et II/III . Les conditions de passage et aux limites (3.38) et (3.39) sont ensuite discrétisées pour donner :

$$\begin{cases} CL1 : r = R_0 \\ CP1 : r = R_{int} \\ CP2 : r = R_{ext} \\ CL2 : r = R_1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^I - u_{i-1}^I}{h_{i-1}} = 0 \\ \frac{u_i^I - u_{i-1}^I}{h_{i-1}} = \frac{u_{i+1}^{II} - u_i^{II}}{h_i} \\ \frac{u_i^{II} - u_{i-1}^{II}}{h_{i-1}} = \frac{u_{i+1}^{III} - u_i^{III}}{h_i} \\ \frac{u_i^{III} - u_{i-1}^{III}}{h_{i-1}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Les équations matricielles établies dans chaque région et les conditions de passage et aux limites discrétisées (3.42) peuvent être rassemblées sous une seule et même équation matricielle :

3.4 Calcul du couple statique et de la force électromotrice

La méthode proposée permet de déterminer le couple statique et la force électromotrice à partir de la composante axiale du champ magnétique et ce pour n'importe quel bobinage (cf. section 1.2.2). Dans une machine à flux axial, les portions de conducteurs utiles à la création de l'effort sont positionnées radialement. C'est pourquoi ils sont considérés ici comme des segments radiaux placés au centre de gravité de la bobine en $z = h_a + e - e_{bob}/2$ et entre les rayons r_1 et r_2 comme montré Figure 3-12, où e_{bob} est l'épaisseur des bobines dans la direction axiale.

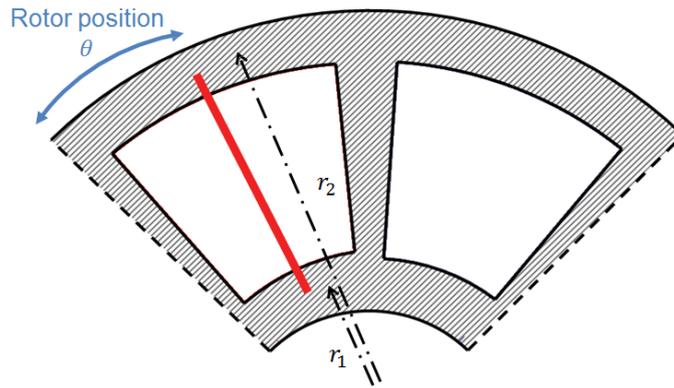


Figure 3-12 : Représentation d'un conducteur en fonction de sa position angulaire

Au lieu de considérer le volume total du conducteur et la densité volumique de courant \mathbf{j} traversant comme présenté section 1.2.2, nous proposons une méthode simplifiée. Les conducteurs sont considérés ici comme des fils sans épaisseur. Calculons d'abord le couple et la force électromotrice sur un unique conducteur filamenteux. La force électromotrice représente le taux de variation azimutale du champ magnétique le long du conducteur. Ainsi, on peut calculer la force électromotrice générée sur un conducteur élémentaire en fonction de la position relative du rotor par rapport au stator grâce à l'expression :

$$e_{\text{élémentaire}}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} r \cdot \Omega_{\text{rotor}} \cdot B_z(r, \theta, h_a + e - e_{bob}/2) \cdot dr \quad (3.46)$$

où, Ω_{rotor} est la vitesse mécanique du rotor. De même, le couple produit sur un conducteur élémentaire, à courant et à nombre de conducteurs unitaire est donné par la force de Laplace :

$$C_{\text{élémentaire}}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} r \cdot B_z(r, \theta, h_a + e - e_{bob}/2) \cdot dr \quad (3.47)$$

Le calcul du couple statique et de la force électromotrice élémentaire font appel tous deux à la même intégrale. On peut donc définir une fonction élémentaire commune qui, une fois calculée, rend le calcul pour le bobinage complet plus aisé :

$$f_{\text{élémentaire}}(\theta) = \int_{r_1}^{r_2} r \cdot B_z(r, \theta, h_a + e - e_{bob}/2) \cdot dr \quad (3.48)$$

Cette fonction est le calcul de base à effectuer sur un conducteur élémentaire pour ensuite déduire les valeurs de couple et de force électromotrice de la machine en fonction du nombre de conducteurs par pôle et par phase n_c , du courant I_k dans chaque phase k , et de la vitesse de rotation du rotor Ω_{rotor} . Par exemple, considérons le bobinage triphasé donné en Figure 3-13 comprenant une encoche par pôle et par phase.

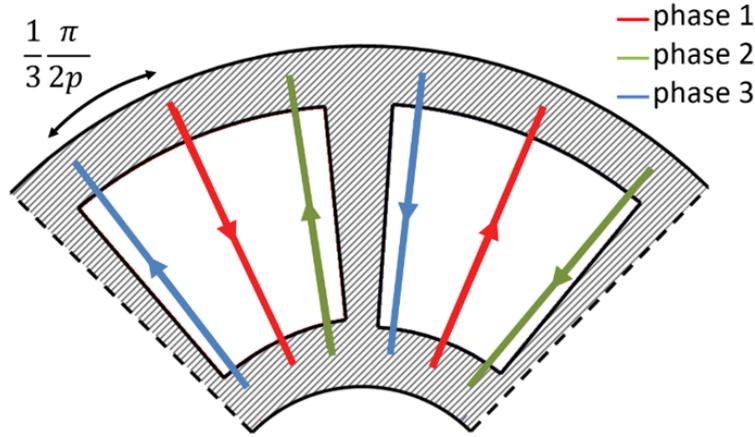


Figure 3-13 : Conducteurs allers (A_k) et retour (R_k) d'un bobinage triphasé donné

On peut ainsi calculer les forces électromotrices et couple statique produits sur chaque conducteur aller et retour de la phase k , nommé respectivement A_k et R_k en fonction de la position relative du rotor par rapport au stator θ . La force électromotrice totale sur la phase k est alors donnée par l'expression :

$$e_{tot_k}(\theta) = p \cdot n_c \cdot (e_{A_k}(\theta) - e_{R_k}(\theta)) \quad (3.49)$$

où $e_{A_k}(\theta)$ et $e_{R_k}(\theta)$ sont les forces électromotrices générés respectivement sur le conducteur aller et le conducteur retour de la phase k , n_c est le nombre de conducteurs par pôle et par phase et p est le nombre de paires de pôles de la machine AFPM.

Le couple généré sur la phase k est calculé de la façon suivante :

$$C_k(\theta) = p \cdot n_c \cdot (I_k \cdot C_{A_k}(\theta) - I_k \cdot C_{R_k}(\theta)) \quad (3.50)$$

où I_k est le courant parcouru dans la phase k , $C_{A_k}(\theta)$ et $C_{R_k}(\theta)$ sont les couples élémentaires calculés sur les conducteurs allers et retours de la phase k en fonction de θ (la position relative du rotor par rapport au stator). Le couple appliqué sur l'ensemble du bobinage est donc la somme des couples générés sur chaque phase.

3.5 Validation par éléments finis

Afin de valider le modèle hybride ainsi proposé, comparons-le à une simulation par éléments finis formulée en terme de potentiel scalaire magnétique. La simulation est réalisée

sous Ansys Emag 3D [47]. Le but étant de comparer les deux méthodes de calcul, la simulation par éléments finis est soumise aux mêmes hypothèses que le modèle analytique, à savoir :

- La perméabilité des aimants est considérée égale à celle de l'air donc μ_0 .
- Les interfaces avec le fer sont remplacées par des conditions aux limites de flux normal sur les plans $z = 0$ et $z = h_a + e$.
- Le problème est limité radialement par deux conditions aux limites de flux parallèle sur deux surfaces cylindriques en $r = R_0$ et $r = R_1$.

Les paramètres d'entrées des deux méthodes de calcul sont rassemblés dans le Tableau 3-1. La Figure 3-14 présente la géométrie du problème ainsi que son maillage. Le maillage est réalisé de sorte que les nœuds soient positionnés régulièrement suivant le système de coordonnées cylindriques, ainsi les points de comparaison entre les deux modèles correspondront aux valeurs du potentiel à des nœuds du maillage et non à des valeurs interpolées.

Paramètre	Symbole	Value
Champ rémanent des aimants permanents	B_r	1.29 T
Hauteur d'aimant	h_a	5 mm
Entrefer total	e	6 mm
Rayon interne du problème	R_0	10 mm
Rayon externe du problème	R_1	32 mm
Rayon intérieur des aimants permanents	R_{int}	13.5 mm
Rayon extérieur des aimants permanents	R_{ext}	28.5 mm
Nombre de paires de pôles	p	4
Arc polaire	α_p	0.8
Vitesse de rotation nominale	N	1500 tr/min
Nombre de conducteurs par phase	n_c	12
Courant maximal	I_M	2 A

Tableau 3-1 : Paramètres d'entrées utilisés pour la validation du modèle

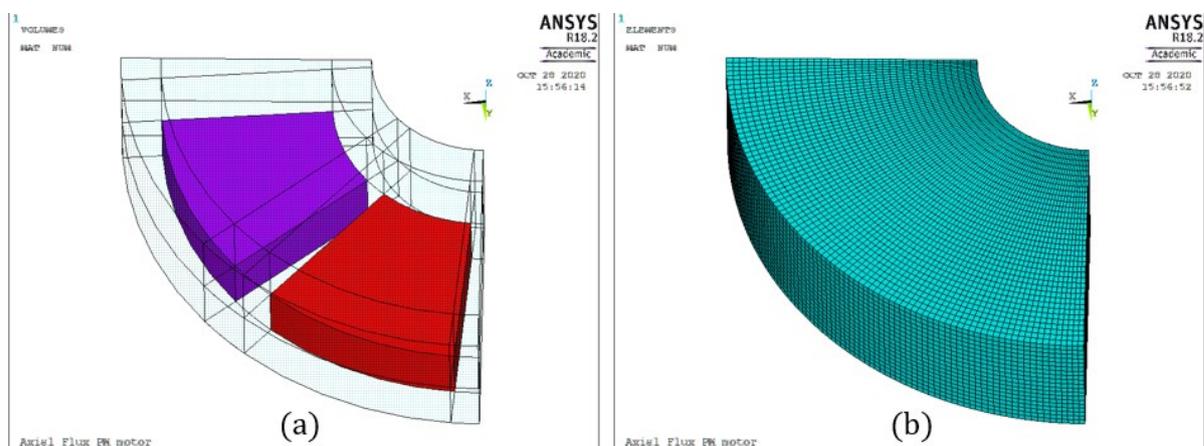


Figure 3-14 : (a) Représentation en 3D du problème résolu sous Ansys Emag, (b) Représentation en 3D du maillage utilisé

Les paramètres d'entrées sont également appliqués au modèle hybride. Les résultats sont présentés pour 16 harmoniques. Afin de donner un aperçu de la solution calculée par la modélisation hybride, la Figure 3-15 montre la composante axiale du champ magnétique généré par 3 pôles au milieu de l'entrefer sur le plan $z = h_a + e/2$ et la Figure 3-16 le champ magnétique au milieu de la région des aimants permanents sur le plan $z = h_a/2$. L'aimantation des aimants est une fonction présentant des créneaux, par conséquent elle requiert beaucoup d'harmoniques pour décrire le signal exact, c'est ce qui explique les ondulations présentes dans la région des aimants. Le champ magnétique est calculé pour $z \in [0, h_a + e]$ donc dans la région des aimants permanents et de l'entrefer dans le but de réaliser une évaluation complète du modèle proposé.

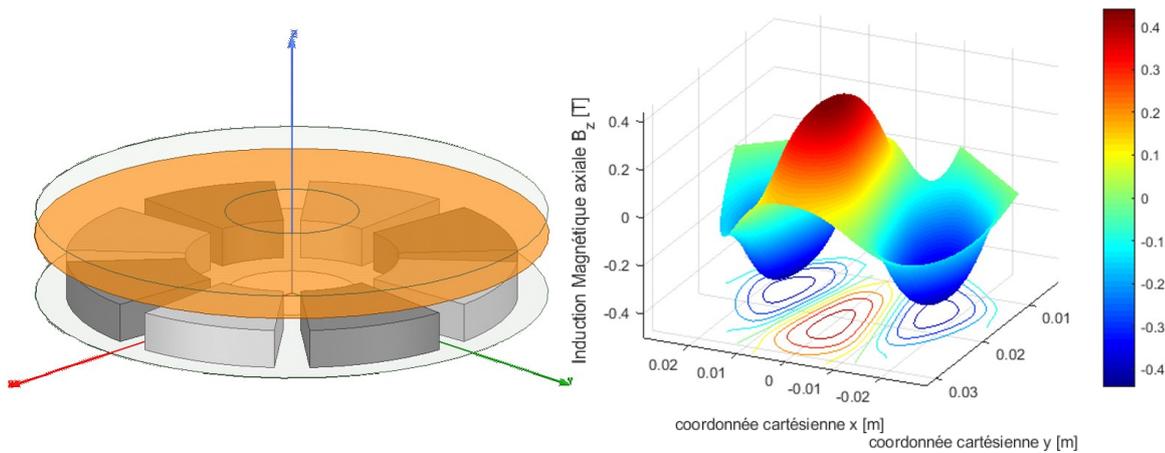


Figure 3-15 : Composante axiale du champ magnétique sur le plan $z = h_a + e/2$

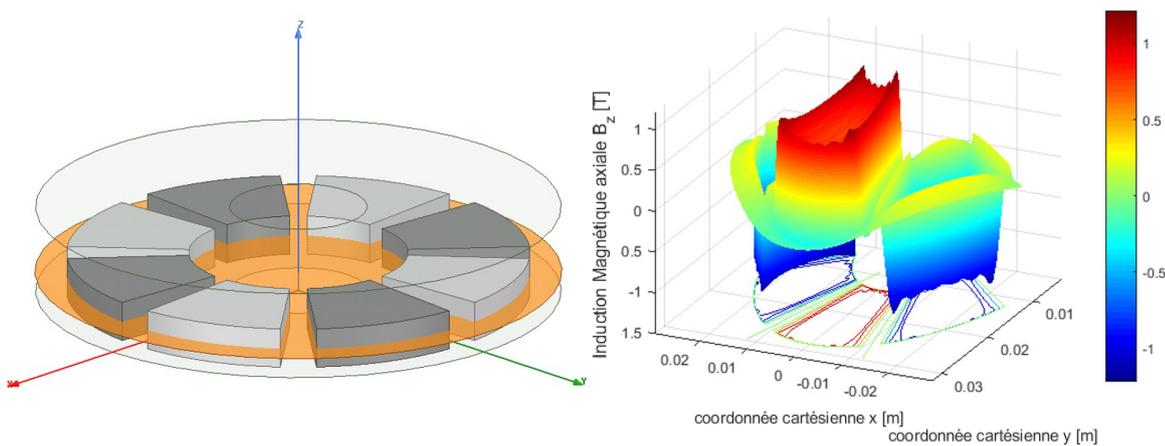


Figure 3-16 : Composante axiale du champ magnétique sur le plan $z = h_a/2$

Nous comparons les résultats sur une ligne radiale à $z = h_a + e/2$ et $\theta = 0$, une courbe circulaire à $r = R_{int} + 0.8.(R_{ext} - R_{int})$ et $z = h_a + e/2$ et une ligne axiale à $r = R_{int} + 0.8.(R_{ext} - R_{int})$ et $\theta = 0$. Ces résultats sont rassemblés sur les Figures 3-17 à 3-19.

L'erreur quadratique moyenne entre le modèle et la simulation par éléments finis est calculée pour chaque tracé. Elle est respectivement de 1.4%, 1.6% et 4.6% pour chaque coordonnée r , θ et z . L'erreur est plus importante suivant la coordonnée axiale. Or, nous avons vu sur la

Figure 3-16 que la forme d'onde nécessite un grand nombre d'harmoniques dû à son allure carrée dans la région des aimants, ce qui n'est pas le cas de l'entrefer.

Le tracé de la Figure 3-19 traverse à la fois la région des aimants et de l'entrefer, ainsi, en ne considérant que l'entrefer, qui porte notre attention ici, l'erreur est de 1.5%.

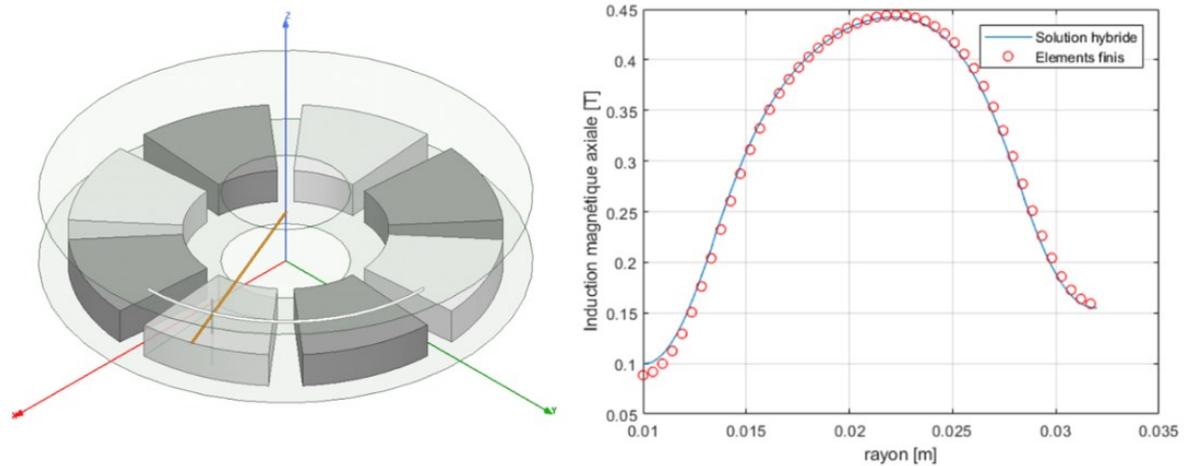


Figure 3-17 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée r

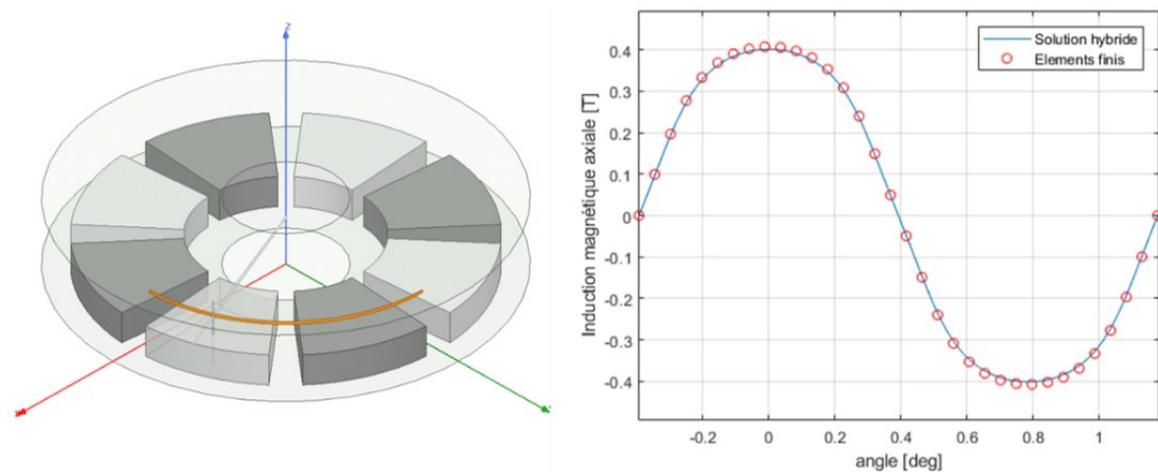


Figure 3-18 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée θ

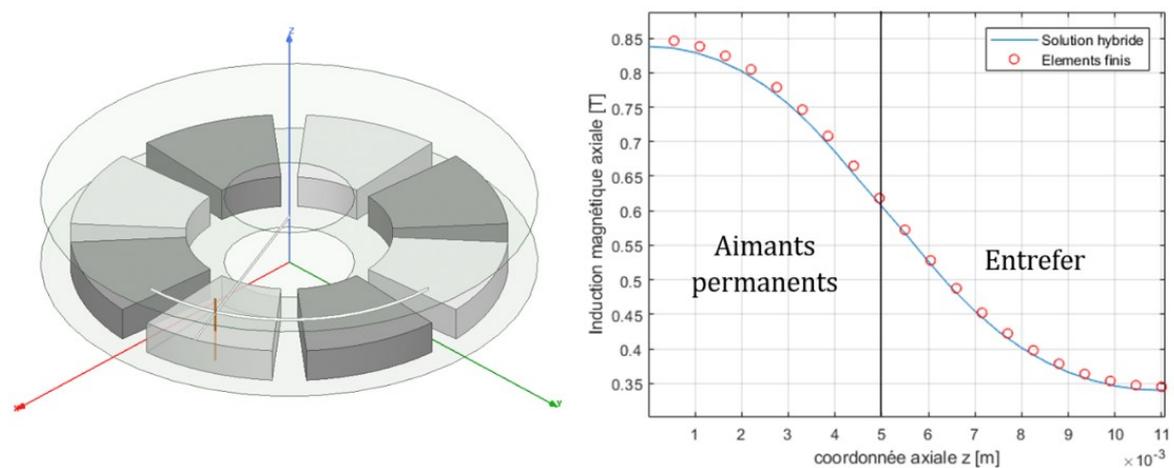


Figure 3-19 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée z

Nous comparons par la suite les résultats obtenus pour le couple et la force électromotrice à partir du champ magnétique calculé respectivement par modélisation hybride et par éléments finis. Cette comparaison peut se faire pour n'importe quel bobinage. Nous présentons ici la comparaison faite à l'aide du bobinage de la Figure 3-20 (b). Il s'agit d'un bobinage triphasé à une encoche par pôle et par phase utilisé dans le cadre d'un prototype de machine à flux axial sans encoche à double-entrefer pour drone. Chaque portion radiale des bobines est approximée à un fil parcourue par le courant total de cette portion de façon à pouvoir appliquer la méthode de calcul développée section 3.4.

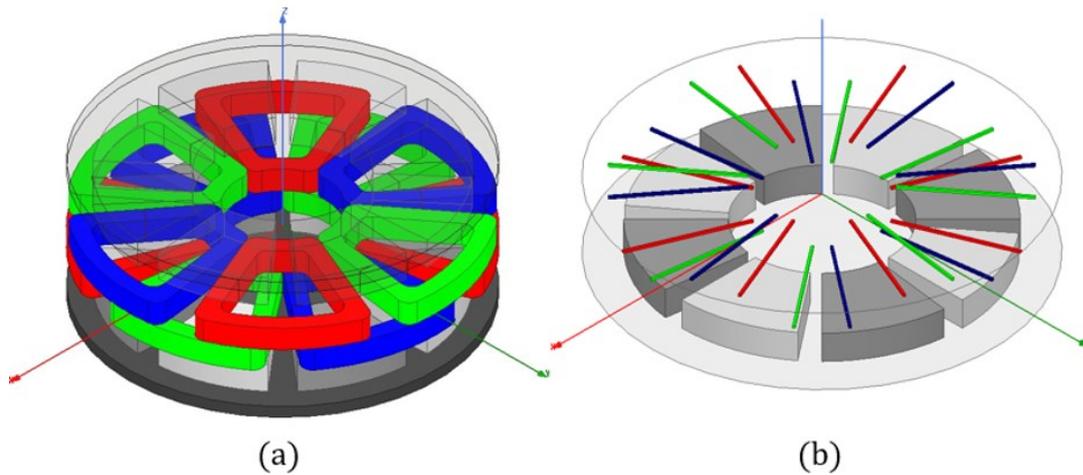


Figure 3-20 : Bobinage triphasé (a) ramené à des phases concentrées en un fil (b).

Comme précisé dans le Tableau 3-1, le couple statique et la force électromotrice sont calculés pour une amplitude de courant de 2A et une vitesse de rotation de 1500 tr/min. Les formes d'ondes en fonction de la position relative du rotor par rapport au stator θ sont présentées Figure 3-21.

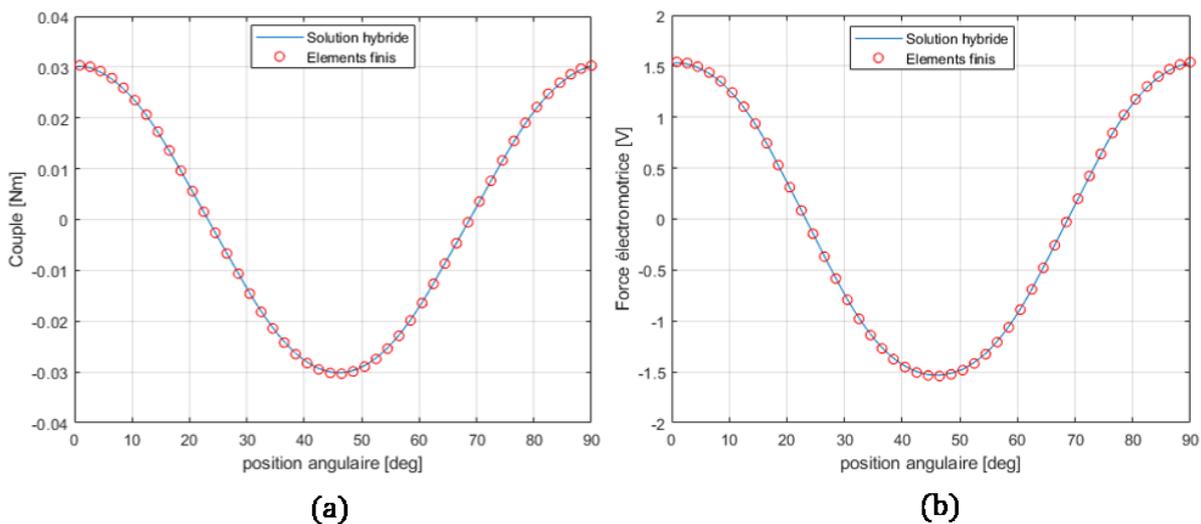


Figure 3-21 : Formes d'ondes du couple statique et de la force électromotrice

Les erreurs quadratiques moyennes sur ces deux tracés sont de 0.7% et 0.4% respectivement pour la force électromotrice et le couple statique. Ces erreurs sont directement reliées aux erreurs sur le champ magnétique calculée précédemment, mais fournissent un point de comparaison supplémentaire puisque ces grandeurs sont calculées au plan $z = h_a + e$.

Les erreurs présentées étant faibles, nous pouvons donc dire que la modèle hybride développé ici donne des résultats très proches de ceux obtenus par simulations numériques.

Le modèle hybride comporte plusieurs boucles imbriquées, ainsi le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre d'harmoniques. Il est donc important de garder un nombre d'harmoniques relativement faible pour conserver un temps de calcul court. D'autre part, plus le rang d'harmonique est faible, plus l'erreur est grande. Il y a donc un compromis à effectuer entre précision et temps de calcul pour utiliser ce modèle de façon optimale. Etudions le temps de calcul et l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'harmoniques. L'ordinateur est équipé d'un processeur Intel 3.6 GHz avec 16 Go de mémoire RAM. Chaque problème est discrétisé de façon à obtenir un nombre de nœuds identiques : 1 894 053. La simulation numérique par éléments finis dure 27 secondes. L'erreur quadratique et le temps de calcul sont donnés en Figure 3-22.

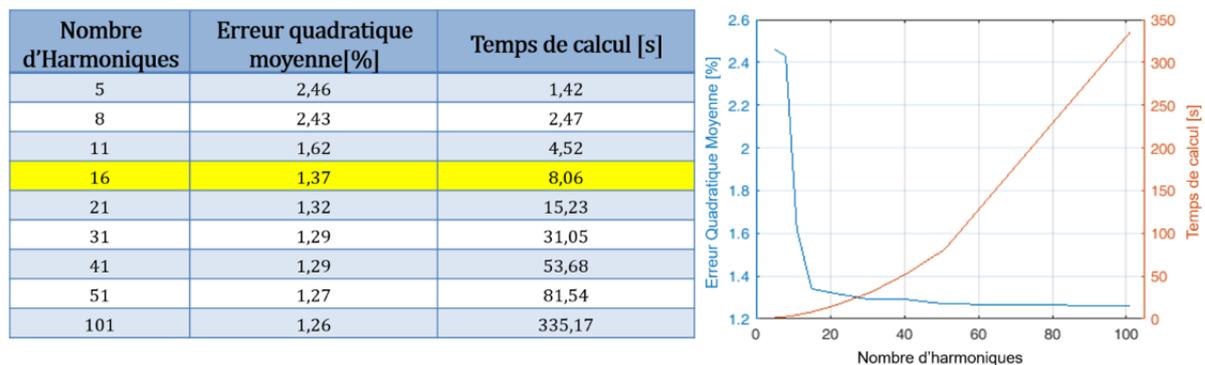


Figure 3-22 : Temps de calcul et erreur quadratique en fonction du nombre d'harmoniques

La Figure 3-22 présente les chiffres de précision suivant la coordonnée radiale r , la plus influencée par le nombre d'harmoniques. Les erreurs et temps de calcul pour un nombre d'harmoniques inférieur à 5 ne sont pas présentés car non pertinents, le signal ne contenant pas assez d'harmoniques. Nous pouvons constater la présence d'un palier au-delà de 16 harmoniques. Il n'est donc pas nécessaire, tout du moins pour ce problème, d'aller au-delà en termes d'harmoniques. Ce palier correspondant à un temps de calcul de 8 secondes où le modèle est plus rapide que la simulation par éléments finis. C'est un temps de calcul acceptable en vue de son insertion dans un algorithme de dimensionnement, d'autant plus qu'il peut certainement être optimisé en jouant sur le nombre d'harmoniques et en ne considérant que l'entrefer ou encore en optimisant le nombre de nœuds utiles à la description du problème.

Le modèle hybride 3D proposé ici permet donc de prédire le champ magnétique à vide, le couple statique et la force électromotrice de façon efficace. Ce modèle est ainsi validé dans le cas de la machine à flux axial. L'utilisation de la méthode des différences finies en lieu et place de la fonction f issue de la méthode de séparation des variables est généralisable à toute configuration géométrique de machine. La méthode des différences finies en 1D est relativement simple et permet un développement rapide. Il s'agit là d'une première preuve de la pertinence de ce modèle hybride et permet d'envisager son application à d'autres configurations géométriques de machines électriques. L'unification recherchée est donc atteinte.

Cette généralisation permet de modéliser avec flexibilité le champ magnétique à vide d'une grande variété de machines à flux axial : poly-entrefer, distribution en réseau Halbach. Cependant, ces avantages sont également des caractéristiques des modèles déjà existants [43]–[45]. La partie suivante présente un degré de liberté supplémentaire offert par le modèle hybride, il s'agit de la généralisation de la forme des aimants.

3.6 Généralisation de la forme d'aimants

Il existe une grande variété de machines à flux axial comprenant une grande diversité de forme d'aimants permanents et de bobinages [48]–[50]. La forme des aimants peut varier tant pour des raisons de coût que pour des raisons de performances. Nous proposons ici, une généralisation de la forme des aimants à partir du modèle hybride établi précédemment. A notre connaissance, la prise en compte des formes des aimants n'a pas encore été faite avec les modèles analytiques en 3D du champ magnétique.

3.6.1 Modélisation d'une forme d'aimant quelconque

▪ *Définition du problème*

Le modèle développé dans cette section reprend les mêmes étapes que celles détaillées précédemment. Il est également soumis aux mêmes hypothèses :

- La perméabilité des aimants permanents est égale à celle de l'air μ_0 .
- Les interfaces avec le fer sont remplacées par des conditions aux limites de flux normal.
- Le problème est délimité radialement par des conditions aux limites de flux tangentiel.
- La méthode des images est également appliquée ici. Les conditions aux limites de flux normal sont remplacées par une répétition périodique des aimants permanents dans la direction axiale. Il y a donc une double périodicité axiale et angulaire de la distribution des aimants.

Considérons la forme d'aimant quelconque de la Figure 3-23 vue de dessus. Cette forme quelconque peut être paramétrée par une variation radiale de l'arc polaire $\alpha_p(r)$ (constant dans le modèle précédent) et l'ajout d'un déphasage $\beta(r)$ représentant le déphasage entre

l'axe radial central de l'aimant et la position centrale d'une tranche au rayon r . La fonction $\beta(r)$ permet de prendre en compte l'aspect asymétrique de la forme de l'aimant.

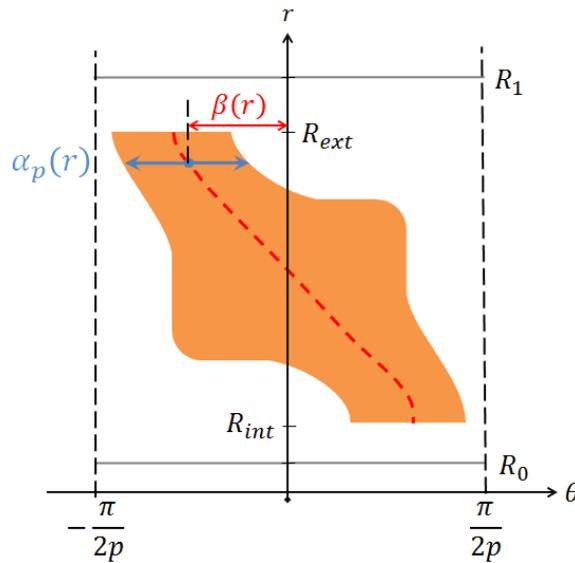


Figure 3-23 : Paramétrisation d'une forme d'aimant quelconque

Il est donc possible de définir l'aimantation axiale de l'aimant M_z en fonction des deux paramètres définis précédemment sous la forme :

$$M_z(r, \theta, z) = \sum_n \sum_k M_{nk}(r) \cos(np\theta + \beta(r)) \cos\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \quad (3.51)$$

où $M_{nk}(r)$ sont les coefficients de la série de Fourier à déterminer en fonction de $\alpha_p(r)$ et $\beta(r)$, p est le nombre de paires de pôles et $\tau = h_a + e$. La Figure 3-24 représente la dépendance angulaire et axiale de l'aimantation.

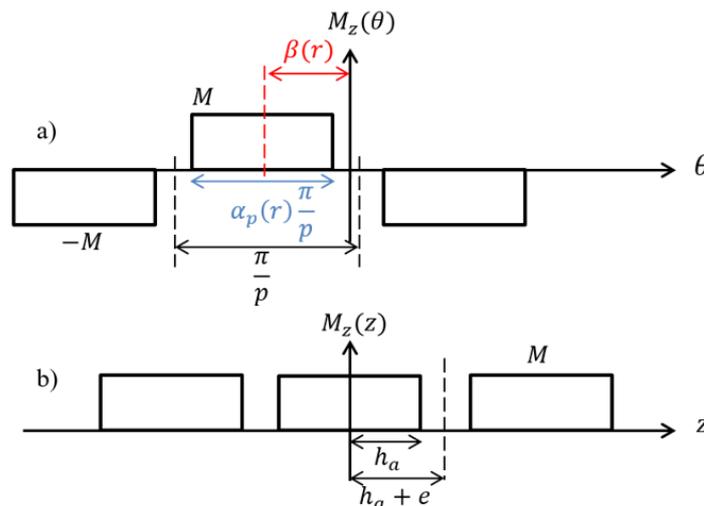


Figure 3-24 : Formes d'ondes de l'aimantation en fonction de θ et z

Grâce à la description en double série de Fourier, il y a 3 régions à considérer séparées par des surfaces cylindriques. Afin de faciliter la résolution du problème, la série de Fourier dé-

crite avec un cosinus et un déphasage β est à la place décrite en termes de fonctions cosinus et sinus :

$$M_z(r, \theta, z) = \sum_n \sum_k M_{c_{nk}}(r) \cos(np\theta) \cos\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) + \sum_n \sum_k M_{s_{nk}}(r) \sin(np\theta) \cos\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \quad (3.52)$$

▪ *Application de la séparation des variables*

La combinaison des équations de maxwell dans le cas d'un circuit ouvert permet d'aboutir à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{dans I et III} \\ \text{div } \mathbf{M} & \text{dans II} \end{cases} \quad (3.53)$$

Le second membre s'écrit :

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} = \sum_n \sum_k -\frac{k\pi}{\tau} M_{c_{nk}}(r) \cos(np\theta) \sin\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) + \sum_n \sum_k -\frac{k\pi}{\tau} M_{s_{nk}}(r) \sin(np\theta) \sin\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \quad (3.54)$$

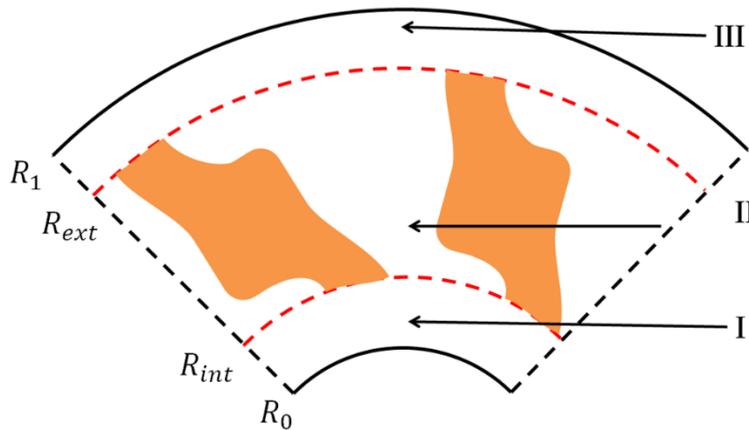


Figure 3-25 : Différentes régions du problème considéré

La méthode de séparation des variables est appliquée de la même manière que précédemment. Le potentiel scalaire magnétique Ω est pris comme le produit de trois fonctions f , g et h chacune dépendant respectivement d'une coordonnée du repère cylindrique r , θ et z . Après avoir inséré cette forme dans le laplacien, nous obtenons trois équations différentielles ordinaires sur chacune des fonctions (3.55). Les constantes de séparation sont choisies positives

de façon à obtenir des fonctions sinusoïdales suivant les coordonnées angulaires et azimutales, ainsi la solution est de la même forme que le terme source.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] - \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{r^2} \right) \cdot f = 0 \\ \frac{d^2 g}{d\theta^2} = -\alpha_1 \cdot g \\ \frac{d^2 h}{dz^2} = -\alpha_2 \cdot h \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} f : r \rightarrow A. I_{\alpha_1}(\alpha_2 r) + B. K_{\alpha_1}(\alpha_2 r) \\ g : \theta \rightarrow C. \cos(\alpha_1 \theta) + D. \sin(\alpha_1 \theta) \\ h : z \rightarrow E. \cos(\alpha_2 z) + F. \sin(\alpha_2 z) \end{cases} \quad (3.55)$$

La fonction f est conservée inconnue, la constante E est choisie nulle pour coller à la forme de l'aimantation. Après application du principe de superposition, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Omega(r, \theta, z) = & \sum_n \sum_k \omega_{c_{nk}}(r) \cos(np\theta) \sin\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \\ & + \sum_n \sum_k \omega_{s_{nk}}(r) \sin(np\theta) \sin\left(\frac{k\pi}{\tau} z\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

où la fonction f est renommée en $\omega_{c_{nk}}$ et $\omega_{s_{nk}}$ qui sont les coefficients respectivement des séries de Fourier en cosinus et sinus dépendant des rangs d'harmoniques n et k et du rayon r . np et $k\pi/\tau$ sont respectivement les périodicités dans la direction angulaire et axiale.

▪ Méthode des différences finies

Nous cherchons désormais à résoudre $\omega_{c_{nk}}$ et $\omega_{s_{nk}}$ par différences finies. Pour obtenir une équation différentielle sur ces nouvelles inconnues, on insère la forme de la solution (3.56) dans l'équation aux dérivées partielles initiale (3.53). L'unicité de la description en série de Fourier conduit à une équation différentielle pour chaque inconnue et pour chaque région considérée (Figure 3-25) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega_{c_{nk}}^I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{c_{nk}}^I}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{c_{nk}}^I = 0 \\ \frac{d^2 \omega_{c_{nk}}^{II}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{c_{nk}}^{II}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{c_{nk}}^{II} = -M_{c_{nk}} \frac{k\pi}{\tau} \\ \frac{d^2 \omega_{c_{nk}}^{III}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{c_{nk}}^{III}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{c_{nk}}^{III} = 0 \end{array} \right. \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \omega_{s_{nk}}^I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{s_{nk}}^I}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{s_{nk}}^I = 0 \\ \frac{d^2 \omega_{s_{nk}}^{II}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{s_{nk}}^{II}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{s_{nk}}^{II} = -M_{s_{nk}} \frac{k\pi}{\tau} \\ \frac{d^2 \omega_{s_{nk}}^{III}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_{s_{nk}}^{III}}{dr} - \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} + \frac{n^2 p^2}{r^2} \right) \omega_{s_{nk}}^{III} = 0 \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Il y a donc $n \times k$ équations différentielle à résoudre par différences finies pour chaque région et pour chaque inconnue $\omega_{c_{nk}}$ et $\omega_{s_{nk}}$. La généralisation de la forme de l'aimant revient à appliquer la même méthode de résolution que celle développée précédemment mais le calcul est effectué à la fois pour les coefficients de la fonction cosinus et de la fonction sinus. Il y a donc deux fois plus d'équations à résoudre, cependant, la complexité du problème reste relativement du même niveau.

▪ Différences finies

Le problème est maintenant abordé sous l'angle des différences finies, reprenons le cas d'une discrétisation à pas variable utilisée pour le modèle hybride initial. Les formules de Taylor au deuxième ordre permettent le calcul des différentes dérivées de $\omega_{c_{nk}}$ et $\omega_{s_{nk}}$:

$$\left(\frac{d\omega}{dr}\right)_i = \frac{h_{i-1}^2 u_{i-1} - (h_{i-1}^2 - h_i^2)u_i + h_i^2 u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (3.59)$$

$$\left(\frac{d^2\omega}{dr^2}\right)_i = 2 \frac{h_{i-1} u_{i-1} - (h_{i-1} - h_i)u_i + h_i u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (3.60)$$

où ω représente $\omega_{c_{nk}}$ ou $\omega_{s_{nk}}$, u_i est la valeur de $\omega_{c_{nk}}$ ou $\omega_{s_{nk}}$ pour $r = r_i$ et h_i est le pas de discrétisation entre r_i et r_{i+1} . Ces équations peuvent être traduites en équations matricielles pour $R_{int} \geq r \geq R_0$, $R_{ext} \geq r \geq R_{int}$ et $R_1 \geq r \geq R_{ext}$.

$$\begin{cases} A_{c_{nk}}^I \cdot v_{c_{nk}}^I = B_{c_{nk}}^I \\ A_{c_{nk}}^{II} \cdot v_{c_{nk}}^{II} = B_{c_{nk}}^{II} \\ A_{c_{nk}}^{III} \cdot v_{c_{nk}}^{III} = B_{c_{nk}}^{III} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A_{s_{nk}}^I \cdot v_{s_{nk}}^I = B_{s_{nk}}^I \\ A_{s_{nk}}^{II} \cdot v_{s_{nk}}^{II} = B_{s_{nk}}^{II} \\ A_{s_{nk}}^{III} \cdot v_{s_{nk}}^{III} = B_{s_{nk}}^{III} \end{cases} \quad (3.61)$$

où v_{nk} est le vecteur contenant les valeurs de ω_{nk} en chaque point du problème discrétisé radialement, A_{nk} est la matrice contenant les coefficients calculés grâce aux formules de Taylor, et B_{nk} le vecteur représentant le second membre de l'équation différentielle (3.57) et (3.58).

Les systèmes matriciels de chaque région sont reliés par les conditions aux limites et conditions de passages suivantes :

$$\text{Conditions aux limites : } \begin{cases} B_r^I|_{r=R_0} = 0 \\ B_r^{III}|_{r=R_1} = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} B_r^I|_{r=R_{int}} = B_r^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_\theta^I|_{r=R_{int}} = H_\theta^{II}|_{r=R_{int}} \\ H_z^I|_{r=R_{int}} = H_z^{II}|_{r=R_{int}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B_r^{II}|_{r=R_{ext}} = B_r^{III}|_{r=R_{ext}} \\ H_\theta^{II}|_{r=R_{ext}} = H_\theta^{III}|_{r=R_{ext}} \\ H_z^{II}|_{r=R_{ext}} = H_z^{III}|_{r=R_{ext}} \end{cases} \quad (3.63)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique H_t conduit à la continuité des fonctions $\omega_{c_{nk}}$ et $\omega_{s_{nk}}$, tandis que la continuité de la composante normale du champ magnétique B_r conduit à la continuité de $\partial\omega_{c_{nk}}/\partial r$ et $\partial\omega_{s_{nk}}/\partial r$.

L'ajout des conditions d'interface et des conditions aux limites donne un système matriciel pour chaque rang d'harmonique regroupant toutes les équations mentionnées précédemment :

$$A_{c_{nk}} \cdot v_{c_{nk}} = B_{c_{nk}} \quad (3.64)$$

$$A_{s_{nk}} \cdot v_{s_{nk}} = B_{s_{nk}} \quad (3.65)$$

Chaque système inversible permet de calculer les solutions $v_{c_{nk}}$ et $v_{s_{nk}}$. L'expression finale de la composante axiale du champ magnétique est déduite de la loi constitutive des milieux magnétiques et de la solution hybride du potentiel scalaire magnétique Ω :

$$B_z(r_i, \theta, z) = -\mu_0 \left[\sum_n \sum_k v_{c_{nk}} \cdot \cos(np\theta) \cdot \frac{k\pi}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) + \sum_n \sum_k v_{s_{nk}} \cdot \sin(np\theta) \cdot \frac{k\pi}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) + M_z(r_i, \theta, z) \right] \quad (3.66)$$

La méthode générale étant désormais développée, elle est dans la section suivante appliquée au cas des aimants permanents de forme cylindrique.

3.6.2 Application au cas d'aimants cylindriques

Nous appliquons la méthode développée pour un prototype de machine à flux axial mono-entrefer pour drone, illustrée en Figure 3-26, sans encoches et comprenant des aimants permanents de forme cylindrique. Cette forme est souvent utilisée dans les machines à flux axial [48]–[50].

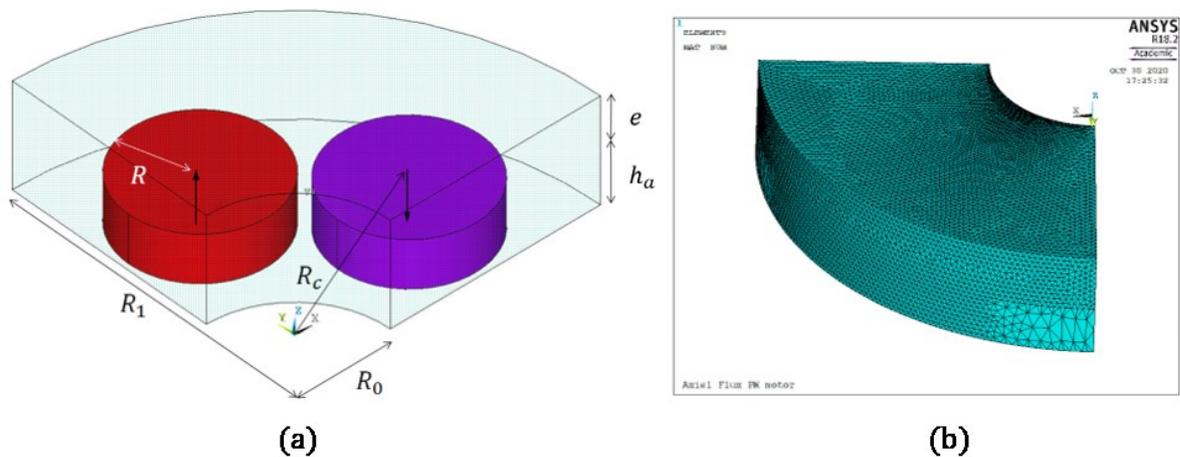


Figure 3-26 : Représentation en 3 dimensions du problème traité (a) et de son maillage (b)

Les aimants présentent une symétrie par rapport à une droite radiale passant par leur centre. La fonction $\beta(r)$ est nulle dans ce cas (Figure 3-23). La description en série de Fourier de l'aimantation est donc réduite à l'expression suivante :

$$M_z(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk}(r) \cos(np\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\tau}z\right) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_{n0}(r) \cos(np\theta) \quad (3.67)$$

$$M_{nk}(r) = \frac{8M}{nk\pi^2} \sin\left(k\pi \frac{h_m}{\tau}\right) \sin\left(\frac{n\alpha_p(r)\pi}{2}\right) \quad (3.68)$$

$$M_{n0}(r) = \frac{h_a}{\tau} \frac{4M}{n\pi} \sin\left(\frac{n\alpha_p(r)\pi}{2}\right)$$

Le schéma de la Figure 3-27 permet de lier l'arc polaire au rayon r ainsi que les autres paramètres de la machine de façon à dessiner une forme circulaire :

$$\alpha_p(r) = a \cos\left(\frac{R_c^2 + r^2 - R^2}{2 \cdot R_c \cdot r}\right) / \left(\frac{\pi}{2p}\right) \quad (3.69)$$

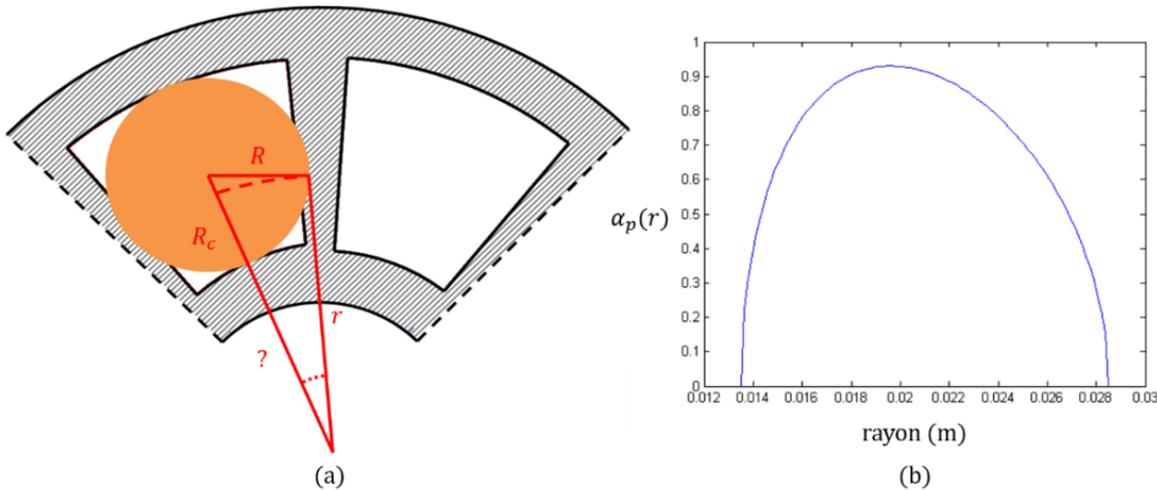


Figure 3-27 : Modification de la forme d'aimant (a) en jouant sur $\alpha_p(r)$ (b)

R_c est la position radiale du centre de l'aimant et R le rayon de l'aimant cylindrique. La formule établie permet de créer une forme circulaire exacte à partir de la forme initiale en « trapèze ».

Les paramètres de la machine sont donnés dans le Tableau 3-2. La validation par éléments finis se fait toujours sous Ansys Emag [47]. Les hypothèses du modèle sont également appliquées à la simulation. La Figure 3-26 présente le problème ainsi que le maillage de l'étude numérique. Le modèle hybride est toujours calculé pour 16 harmoniques.

Pour valider le fonctionnement de la fonction $\alpha_p(r)$, la Figure 3-28 présente les tracés du champ magnétique sur le plan $z = h_a/2$ dans le cas des aimants « trapèzes » et des aimants cylindriques.

Étudions l'erreur quadratique moyenne entre le modèle et le calcul par éléments finis sur 3 lignes radiales, à des angles différents : $\theta = 0^\circ$, $\theta = 5.5^\circ$ et $\theta = 7.5^\circ$ et au milieu de l'entrefer. Elle est d'environ 1.3% pour chaque tracé de la Figure 3-29.

Paramètre	Symbole	Valeur
Aimantation de l'aimant (Rémanence de l'aimant)	M (B_r)	1.026 MA/m 1.29 T
Hauteur d'aimant	h_a	5 mm
Entrefer total	e	6 mm
Rayon minimum du domaine	R_0	10 mm
Rayon maximum du domaine	R_1	32 mm
Position du centre de l'aimant	R_c	21.06 mm
Rayon des aimants	R	7.5 mm
Nombre de paires de pôles	p	4

Tableau 3-2 : Paramètres de la machine à flux axial considérée

Enfin, étudions l'erreur sur des tracés dépendant de l'angle, pour 3 rayons $r_1 = R_{int} + 0.1(R_{ext} - R_{int})$, $r_2 = R_{int} + 0.5(R_{ext} - R_{int})$ et $r_3 = R_{int} + 0.8(R_{ext} - R_{int})$. L'erreur est d'environ 1.6% sur chacun des tracés de la Figure 3-30.

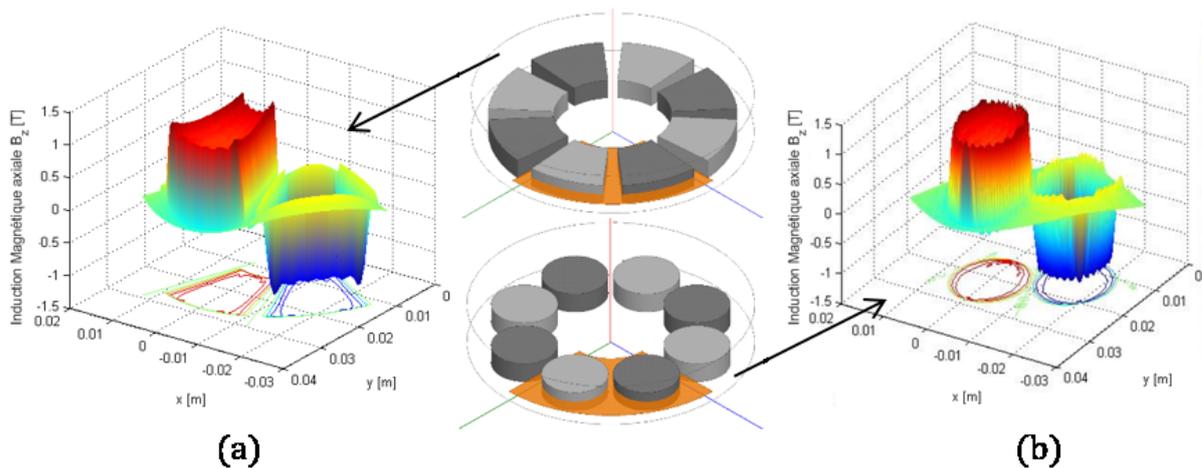


Figure 3-28 : Champ magnétique sur le plan $z = h_a/2$ dans le cas d'aimants (a) « trapèzes » et (b) cylindriques

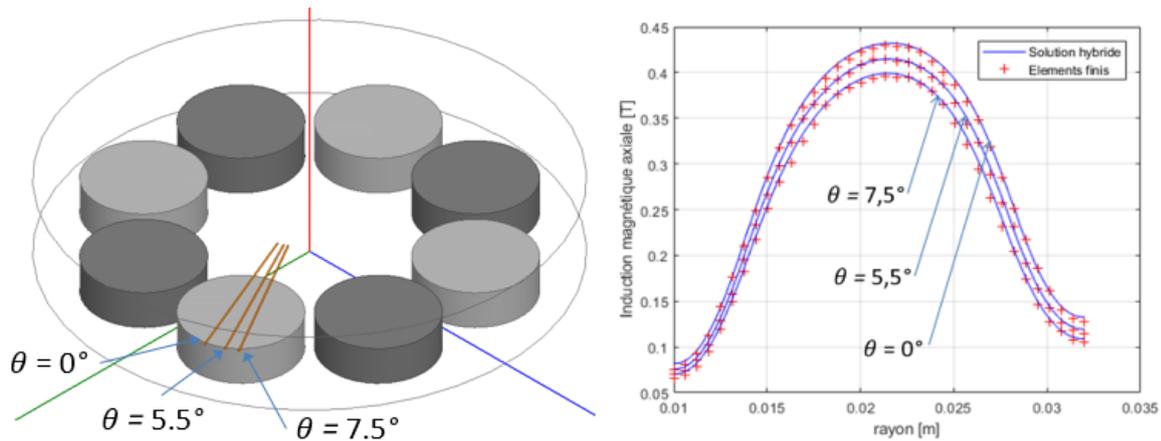


Figure 3-29 : Tracés du champ magnétique sur le plan $z = h_a + e/2$ pour trois angles $\theta = 0^\circ$, $\theta = 5.5^\circ$ et $\theta = 7.5^\circ$

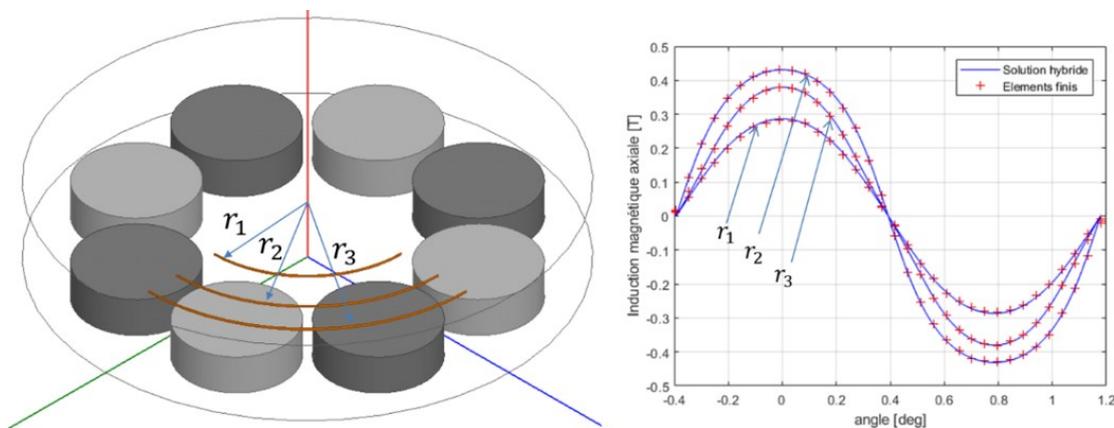


Figure 3-30 : Tracés du champ magnétique sur le plan $z = h_a + e/2$ pour trois rayons r_1 , r_2 et r_3 .

L'ensemble des résultats valide la méthode de modification de la forme des aimants permanents. Les résultats du modèle hybride sont calculés sur une grille comportant 141 points, 91 points et 221 points respectivement dans les directions radiale, azimutale et axiale. Le nombre total de points de calcul est alors de 2 087 787 dans le volume considéré.

Le matériel informatique utilisé est le même que précédemment. Le temps de calcul pour 16 harmoniques est de 39 secondes pour générer la solution complète. Sachant que le calcul de la solution finale n'a pas été optimisé, ce temps est environ 5 fois plus important que le temps de calcul pour le modèle de la machine à flux axial à aimants de forme trapézoïdale. L'analyse par éléments finis a mis 43 secondes pour 461 994 nœuds dans le même volume.

Si on calcule le champ magnétique uniquement dans l'entrefer utile au calcul du couple, le temps de calcul passe à 11 secondes, ce qui reste un temps de calcul correct.

L'analyse détaillée du temps de calcul et de l'erreur quadratique moyenne est donnée dans le graphique de la Figure 3-31. Nous pouvons constater que l'erreur en fonction de chaque coordonnée du repère cylindrique semble présenter un palier au-delà d'un certain rang. Nous pouvons également noter que là encore, une bonne précision peut être atteinte pour un nombre d'harmoniques relativement faible.

Le développement du modèle hybride généralisé à n'importe quelle forme d'aimant permanent permet de mettre en avant un avantage majeur dans la modélisation des machines à flux axial par rapport aux modèles 3D purement analytiques. Cette méthode de modélisation est donc applicable à un très grand nombre de machines à flux axial.

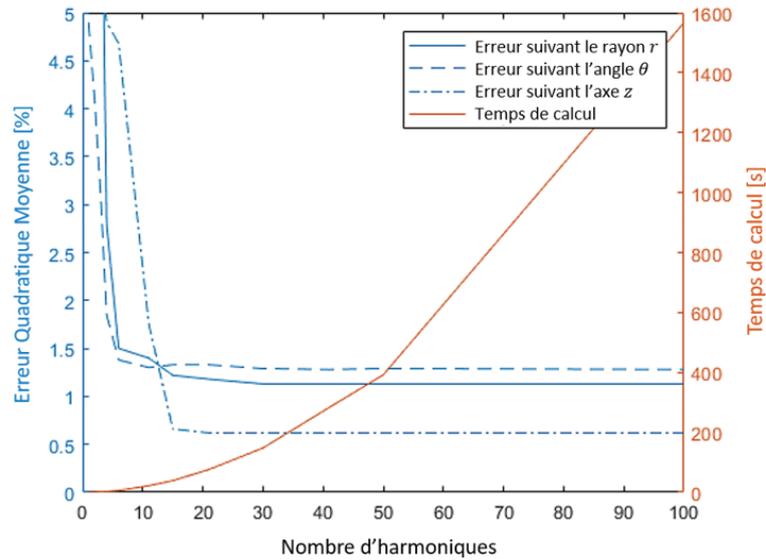


Figure 3-31 : Précision et temps de calcul en fonction du nombre d'harmoniques

3.6.3 Validation expérimentale

Cette section est dédiée à la validation expérimentale du modèle hybride. Nous appliquons le modèle au cas d'un prototype de machine à flux axial à aimants permanents sans encoches et possédant un bobinage triphasé. Les aimants permanents sont de forme cylindrique, de cette façon nous validons à la fois le modèle, la méthode de calcul de couple et de force électromotrice et la généralisation de la forme d'aimant. Le prototype est présenté Figure 3-32.

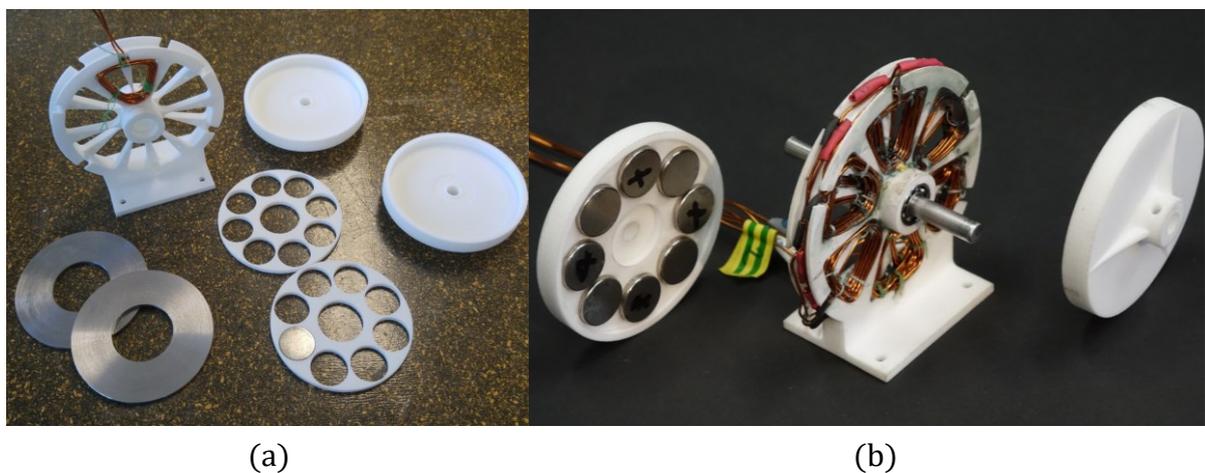


Figure 3-32 : Moteur de drone avant assemblage (a) et assemblé (b)

Le moteur est constitué de deux rotors, comprenant les aimants cylindriques collés sur un disque en fer constituant la culasse rotor. Les dimensions de la machine étudiée sont données dans le Tableau 3-3. Le moteur est placé sur un banc de test comprenant un capteur d'effort (Figure 3-33). Ainsi, deux essais sont réalisés :

- un essai à vide permettant la mesure et le tracé de la force électromotrice,
- un essai en charge permettant la mesure du couple statique.

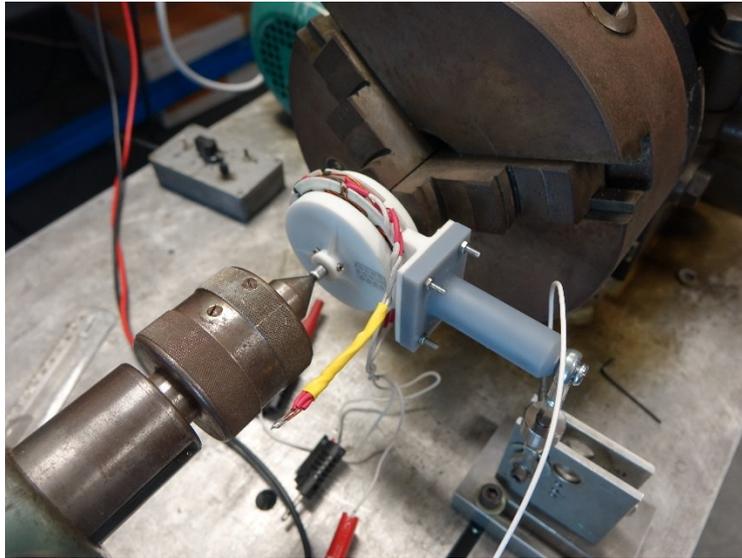


Figure 3-33 : Banc de test utilisé pour la validation expérimentale

Paramètre	Symbole	Value
Champ rémanent des aimants permanents	B_r	1.345 T
Hauteur d'aimant	h_a	3 mm
Entrefer mécanique	e	1 mm
Epaisseur axiale des bobines	e_{bob}	4 mm
Epaisseur axiale de la culasse rotor	e_{fer}	2 mm
Rayon interne de la culasse rotor	$R_{f_{int}}$	10 mm
Rayon externe de la culasse rotor	$R_{f_{ext}}$	32.5 mm
Rayon interne du problème	R_0	10 mm
Rayon externe du problème	R_1	32 mm
Rayon intérieur des aimants permanents	R_{int}	13.5 mm
Rayon extérieur des aimants permanents	R_{ext}	28.5 mm
Nombre de paires de pôles	p	4
Nombre de conducteurs par bobine	n_c	12

Tableau 3-3 : Dimensions de la machine à flux axial étudiée

Pour caractériser la machine, nous calculons les coefficients k_t et k_e de la machine à partir des résultats d'essais. Ces coefficients sont définis par les relations de proportionnalité entre couple et courant d'une part pour k_t et, d'autre part, entre force électromotrice et vitesse de rotation pour k_e .

$$C = k_t \cdot I \quad (3.70)$$

$$E = k_e \cdot \Omega \quad (3.71)$$

où C est le couple, I la valeur efficace courant, E la valeur efficace de la force électromotrice à vide dans une phase et Ω la vitesse de rotation du moteur.

La puissance électromagnétique P_{em} peut s'exprimer :

$$P_{em} = C \cdot \Omega = k_t I \Omega \quad (3.72)$$

La puissance électromagnétique peut s'exprimer également, au calage optimal :

$$P_{em} = 3EI = 3k_e \Omega I \quad (3.73)$$

La combinaison des équations (3.72) et (3.73) donne le rapport théorique entre k_t et k_e dans le cas considéré.

$$\frac{k_t}{k_e} = 3 \quad (3.74)$$

▪ Essai à vide :

Pour cet essai à vide, le moteur est entraîné en rotation aux alentours de 3000 tr/min. Nous relevons la tension entre phases et visualisons la forme d'onde de la tension à l'oscilloscope Figure 3-34.

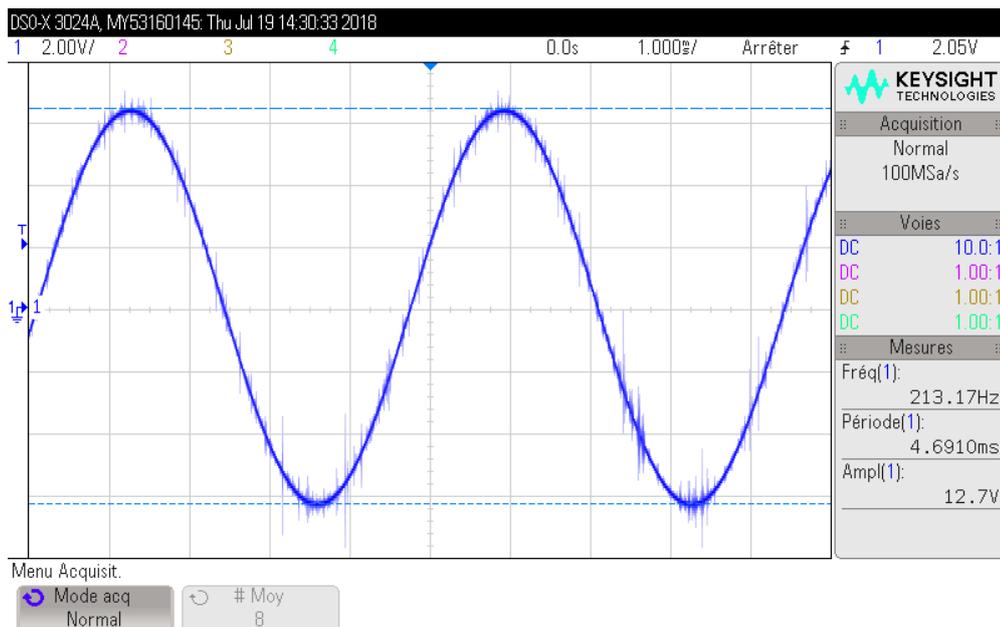


Figure 3-34 : Forme d'onde de la tension entre phases lors de l'essai à vide

La tension relevée possède une allure sinusoïdale, elle est donc destinée à être alimentée par une alimentation sinusoïdale également.

Les relations $f = pN/60$ et $\Omega = 2\pi N/60$ permettent de déduire la vitesse de rotation en rad/s depuis la fréquence du signal. La valeur crête à crête de la tension U_{cc} est relevée à l'oscilloscope afin de calculer la force électromotrice ainsi que la valeur de k_e . Les résultats sont rassemblés dans le Tableau 3-4.

Essai à vide	
Vitesse de rotation en tr/min	$N = 3197$ tr/m
Vitesse de rotation en rad/sec	$\Omega = 334.85$ rad/s
Force électromotrice	$E = \frac{U_{cc}}{2 \cdot \sqrt{2} \sqrt{3}} = 2.592$ V
Coefficient k_e	0.00774 Vs/rad

Tableau 3-4 : Résultats de mesures des deux essais à vide

La valeur expérimentale de l'amplitude de la force électromotrices est comparée au modèle hybride. Pour cela, le calcul de force électromotrice est effectué selon la méthode vue dans la section 3.4 pour la vitesse de l'essai à vide. De la Figure 3-35, nous obtenons une force électromotrice d'amplitude 3.62 V soit une erreur de 1.2 % avec la valeur trouvée expérimentalement.

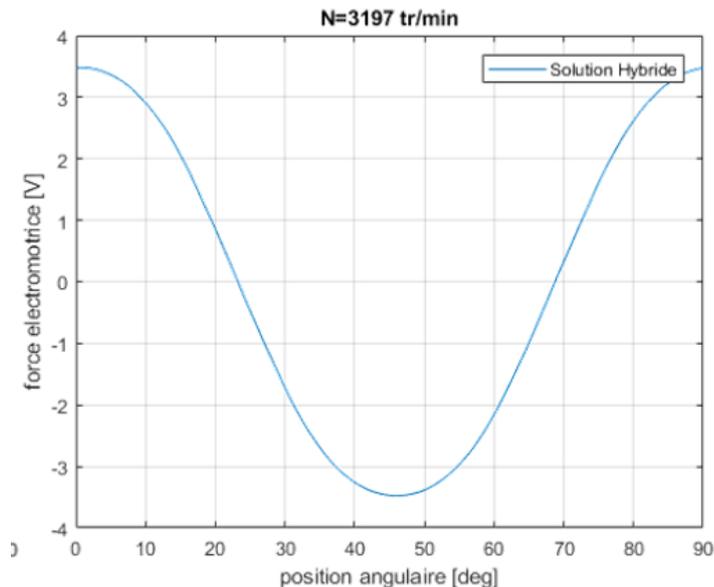


Figure 3-35 : Tracé de force électromotrice en fonction de la position angulaire issu du modèle hybride à une vitesse de rotation $N = 3197$ tr/mn

▪ *Mesure du couple statique*

Le but de cet essai est de mesurer le couple statique de la machine pour différentes valeurs de courant afin de les comparer d'une part au modèle théorique et d'autre part de tracer la courbe $C(I)$ pour déterminer le coefficient k_t de la machine.

Pour réaliser cet essai, la machine à flux axial est entraînée en rotation lente. Le couple est mesuré à partir d'un capteur de force positionné à une longueur $L = 114$ mm de l'axe de rotation. La sensibilité du capteur est de 2,5 N/V. On a donc un coefficient de conversion entre le couple mesuré et la tension mesurée de :

$$0,114 \times \frac{25}{10} = 0.285 \text{ Nm/V} \quad (3.75)$$

Le courant d'alimentation est continu. Afin de simuler le fonctionnement normal du moteur alimenté en triphasé, nous réalisons le montage suivant (illustré Figure 3-36) :

- 2 phases alimentées en série
- la 1^{ère} phase voit le courant $+I_{DC}$
- la 2^{ème} phase voit le courant $-I_{DC}$

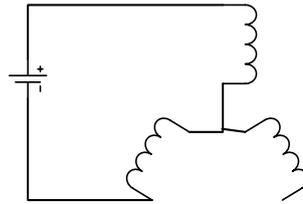


Figure 3-36 : Schéma d'alimentation des phases

Ce montage correspond à un instant donné du fonctionnement en triphasé comme montré Figure 3-38. Ainsi, le courant d'alimentation continu I_{DC} correspond à une fraction de l'amplitude de l'alimentation sinusoïdale \hat{I} :

$$I_{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{I} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} I \quad (3.76)$$

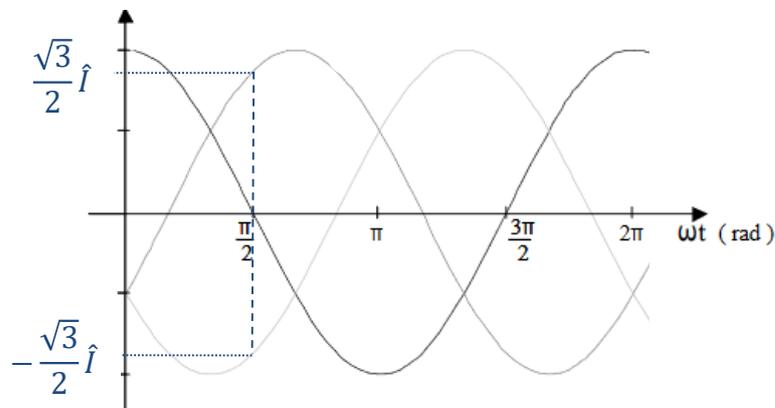


Figure 3-37 : Instant choisi du fonctionnement en triphasé pour réaliser l'essai en continu

Les mesures de couples sont effectuées pour les courants d'alimentation continus suivants $I_{DC} = 2A$ 5A 7.5A et 10A. Un exemple de forme d'onde de l'image en tension du couple statique mesuré en fonction du temps est donné Figure 3-38. Le tracé étant bruité et non parfaitement symétrique, un post-traitement numérique lui est appliqué afin de s'affranchir de ces imprécisions de mesures.

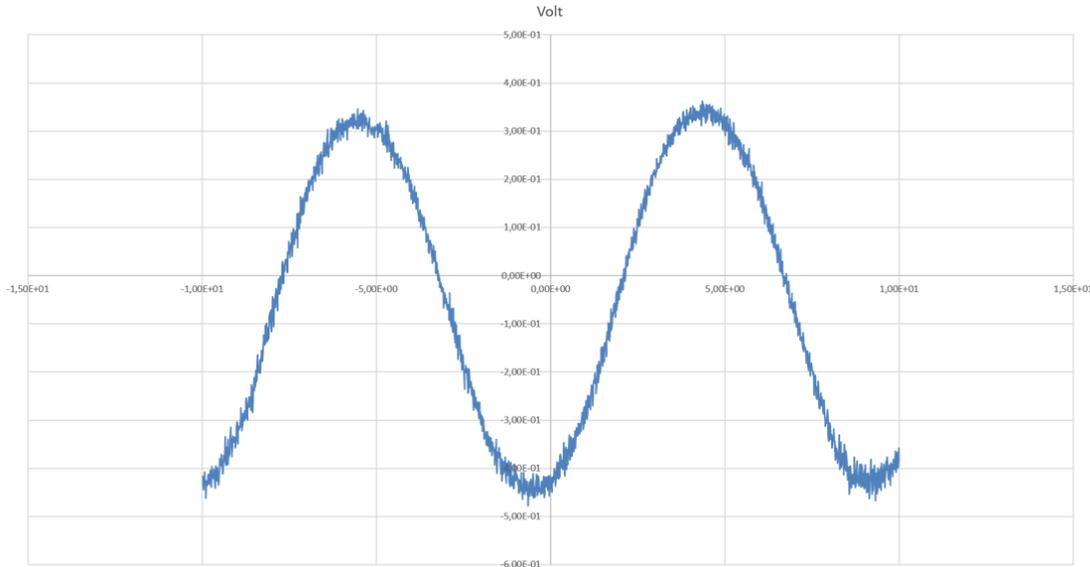


Figure 3-38 : Exemple de forme d'onde de l'image en tension du couple mesuré en fonction du temps, ici pour un courant de phase de 10A dans le cas du montage 1.

D'autre part, le couple statique est également calculé par l'intermédiaire du modèle hybride. L'erreur entre les amplitudes maximales du couple statique mesuré expérimentalement et calculé par le modèle peut ainsi être estimée. L'ensemble des résultats sont donnés dans le Tableau 3-5. La valeur de k_t est également calculée en chaque point à titre indicatif pour comparer sa stabilité par rapport à la valeur issue du tracé $C(I)$.

I_{DC} (A)	3	5	7,5	10
I (A)	2.45	4.08	6.12	8.17
$\Delta V_{\text{capteur}}$ (V)	0.4113	0.6678	1.0078	1.3517
C expérimental (Nm)	0.0586	0.0952	0.1436	0.1926
k_t	0.0239	0.0233	0.0234	0.0236
C modèle (Nm)	0.0579	0.0966	0.1449	0.1931
Erreur (%)	1.2	1.5	0.9	0.3

Tableau 3-5 : Ensemble des résultats expérimentaux dans le cas du montage 2

où $\Delta V_{\text{capteur}}$ représente la valeur crête à crête du signal récupéré à l'oscilloscope. Les erreurs sont très faibles entre modèle hybride et mesures expérimentales.

Nous obtenons pour k_t une valeur de 0.023 Nm/A et une valeur mesurée $k_e = 0.00774$ Vs/rad, on trouve bien (3.74). L'ensemble des résultats valident la pertinence des essais réalisés et, de surcroît valident également le modèle hybride.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que la modélisation des machines électriques nécessitant une étude en trois dimensions était bien plus complexe que le cas en deux dimensions. Un modèle du champ magnétique à vide de la machine à flux axial sans saillance au rotor associant la méthode de séparation des variables à la méthode différences finies a été développé. Ce modèle présente un temps de calcul très acceptable pour le dimensionnement des machines et est applicable à un grand nombre de configurations de machines à flux axial existantes.

Les résultats du modèle développé ont été comparés aux résultats de simulations numériques par éléments finis et à des mesures faites sur un prototype de machine à flux axial monté sur un banc expérimental. Les résultats sont en bon accord vis-à-vis des résultats des simulations numériques et des mesures. Les temps de calcul sont très acceptables et permettent d'envisager son utilisation pour le dimensionnement de machines à flux axial par variations paramétriques ou à l'aide d'algorithmes d'optimisation.

Le modèle hybride développé répond bien à l'objectif de modèle simple et rapide pour dimensionner les machines. Premièrement, l'utilisation de la méthode des différences finies permet de s'affranchir de l'étude des fonctions propres spécifiques à chaque configuration de machine. Deuxièmement, il permet de s'affranchir de la recherche d'une solution particulière ; recherche pouvant là aussi nécessiter de lourds développements spécifiques à chaque configuration. Enfin la prise en compte de la forme des aimants montre la flexibilité du modèle hybride.

Dans le prochain chapitre le modèle hybride de la nouvelle machine toroïdale sera développé dans un repère toroïdal R-séparable.

Chapitre 4

Modélisation Hybride en 3 Dimensions de la machine toroïdale

Table des matières du Chapitre 4 :

Chapitre 4	Modélisation Hybride en 3 Dimensions de la machine toroïdale	135
4.1	Introduction.....	136
4.2	Système de coordonnées toroïdales R-séparable.....	136
4.2.1	Caractéristiques du système de coordonnées toroïdales.....	136
4.2.2	Séparation des variables en coordonnées toroïdales	138
4.2.3	Nouvelle machine toroïdale.....	140
4.3	Calcul du champ magnétique à vide.....	141
4.3.1	Définition du problème.....	141
4.3.2	Modèle hybride 1D.....	144
4.3.3	Modèle 2D.....	149
4.4	Validation par éléments finis.....	161
4.5	Conclusion.....	167

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 que la méthode de séparation des variables ne pouvait pas être appliquée au cas du système de coordonnées toroïdal trivial, rendant impossible la modélisation de la machine toroïdale suivant notre approche unifiée de modélisation. Une modélisation en 2D de la machine tubulaire comme approximation de la machine toroïdale a été proposée au chapitre 2. Le chapitre 3 a permis d'établir un modèle hybride 3D de la machine à flux axial combinant la modélisation analytique par méthode de séparation des variables à la méthode des différences finies.

Afin d'établir un modèle analytique en 3D de la machine toroïdale, il faut faire appel à un système de coordonnées toroïdal R-séparable. L'obtention d'un tel modèle démontrerait alors la flexibilité du concept de modèle hybride et l'idée d'unification, objectif de cette thèse. La machine toroïdale décrite dans ce système de coordonnées est légèrement différente de celle décrite dans le système trivial. Ce chapitre commence donc par la présentation du système de coordonnées, puis la description de la nouvelle machine dans ce système.

Même si on adapte la configuration de la nouvelle machine dans ce système, l'établissement d'un modèle le plus simplifié possible nécessitera la formulation d'hypothèses. Bien que la littérature fasse état de résolutions d'équations aux dérivées partielles dans ce système de coordonnées [12], [51]–[53], ces résolutions portent sur le champ électrostatique et non le champ magnétique. L'établissement du modèle ne peut donc se référer à un travail antérieur.

La validation des résultats par simulation numérique par éléments finis est donc une étape nécessaire. Or dans les codes de calcul par éléments finis le repère toroïdal ne fait pas parti des repères de travail offerts à l'utilisateur pour faciliter la description de la géométrie ou de l'aimantation. Ainsi, devant ces difficultés de mise en œuvre, le modèle numérique par éléments finis ne peut être une référence mais sera quand même établi. Pour pallier à l'absence de modèle de référence, un deuxième modèle hybride nécessitant beaucoup moins d'hypothèses sera mis au point. Les résultats obtenus à l'aide de ces trois modèles seront comparés.

4.2 Système de coordonnées toroïdales R-séparable

4.2.1 Caractéristiques du système de coordonnées toroïdales

Dans [12] est présenté le système de coordonnées toroïdales applicable à notre problème de machine toroïdale. L'expression des coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des nouvelles coordonnées (η, θ, ψ) est la suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{a \operatorname{sh} \eta}{\Delta} \cos \psi \\ y = \frac{a \operatorname{sh} \eta}{\Delta} \sin \psi \\ z = \frac{a \sin \theta}{\Delta} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\Delta = \operatorname{ch} \eta - \cos \theta$ est introduit pour simplifier les écritures. Les surfaces à iso-coordonnées sont illustrées Figure 4-1. Les surfaces iso η sont des tores, les surfaces iso θ sont des sphères et les surfaces iso ψ sont des plans.

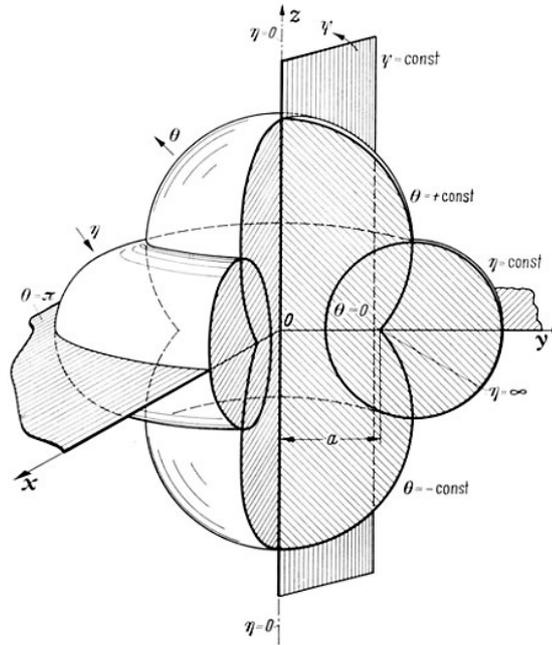


Figure 4-1 : Surfaces à iso coordonnée du système de coordonnées toroïdales [12]

Le schéma Figure 4-2 dans le plan Oxz permet de mieux comprendre ce système de coordonnées. Les sphères iso θ passent par le point de coordonnées $(x = a, z = 0)$, la coordonnée η parcourt la sphère en se rapprochant de ce point lorsque $\eta \rightarrow \infty$. La coordonnée peut être apparentée au rayon interne du tore. A $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, la sphère devient le plan Oxy privé du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon a . Pour $0 < \theta < \pi$, le centre et le rayon de la sphère se déplacent de façon à parcourir la moitié supérieure du tore en passant toujours par le point $(x = a, z = 0)$ jusqu'à arriver au disque de centre $(0, 0)$ et de rayon a pour $\theta = \pi$. De même, pour $\pi < \theta < 2\pi$, la sphère parcourt la moitié inférieure du tore. Ainsi, la coordonnée θ peut être assimilée à la position angulaire à l'intérieur du tore.

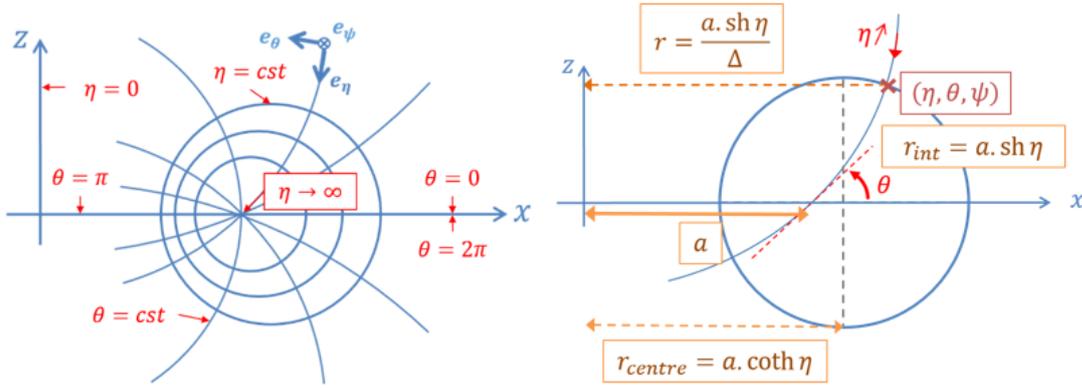


Figure 4-2 : Comportement des coordonnées toroïdales dans le plan Oxz

Dans [51], une explication détaillée de ce système de coordonnées montre que ψ étant l'angle azimutal, la distance r à l'axe z peut s'écrire :

$$r = \frac{a}{\Delta} \text{sh } \eta \quad (4.2)$$

Dans l'intervalle $\eta \geq 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ et $0 \leq \psi < 2\pi$, il peut être montré que :

$$r^2 + z^2 + a^2 = 2a^2\Delta^{-1} \text{ch } \eta = 2ar \text{coth } \eta \quad (4.3)$$

De cette équation est déduit :

$$(r - a \text{coth } \eta)^2 + z^2 = a^2 / \text{sh}^2 \eta \quad (4.4)$$

Ainsi, pour tout η fixé, l'équation (4.4) est celle d'un cercle de centre ($r = a \text{coth } \eta, z = 0$) dans tout plan azimutal, donc d'un tore d'axe z dans l'espace. Lorsque $\eta \rightarrow \infty$, ce tore est réduit au cercle de rayon a et de centre l'origine dans le plan Oxy aussi appelé le cercle de référence. Si $\eta \rightarrow 0$ le rayon du tore devient très grand au point de coïncider avec l'axe z .

Dans (4.3), le terme $2a^2\Delta^{-1} \text{ch } \eta$ peut-être réécrit $2a^2 + 2az \cot \theta$ (sachant que : $z = \frac{a \sin \theta}{\Delta}$). Si bien que les surfaces iso θ sont données par l'équation :

$$r^2 + (z - a \cdot \cot \theta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.5)$$

Dans tout plan azimutal, il s'agit d'un cercle de centre ($r = 0, z = a \cdot \cot \theta$) et de rayon $r = \frac{a}{|\sin \theta|}$. Dans l'espace, ce sont donc des sphères d'axe z .

4.2.2 Séparation des variables en coordonnées toroïdales

Les solutions du laplacien par séparations des variables sont données dans [12]. Les opérateurs vectoriels dans ce nouveau système de coordonnées sont également présentés et nous seront utiles par la suite :

$$\text{grad } \Omega = \frac{\Delta}{a} \left[\mathbf{e}_\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{\text{sh } \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} \right] \quad (4.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\Delta^3}{a \operatorname{sh} \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\operatorname{sh} \eta}{\Delta^2} E_\eta \right) + \operatorname{sh} \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E_\theta}{\Delta^2} \right) \right] + \frac{\Delta}{a \operatorname{sh} \eta} \frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \quad (4.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\Delta^2}{a \operatorname{sh} \eta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\psi \operatorname{sh} \eta \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{E_\eta}{\Delta} & \frac{E_\theta}{\Delta} & \frac{E_\psi \operatorname{sh} \eta}{\Delta} \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta^3}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\operatorname{sh} \eta}{\Delta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + \operatorname{sh} \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} \quad (4.9)$$

où \mathbf{e}_η , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_ψ sont les vecteurs unitaires du repère local. La séparation simple sous la forme $\Omega = H(\eta) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Psi(\psi)$ n'est pas possible dans ce système de coordonnées. Comme présenté dans [1], il faut procéder à une R-séparation de la manière suivante :

$$\Omega = \sqrt{\Delta} \cdot H(\eta) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Psi(\psi) \quad (4.10)$$

La séparation donne dans le cas général les équations différentielles ordinaires suivantes pour chaque fonction H , Θ et Ψ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \coth \eta \frac{dH}{d\eta} + \left(\frac{1}{4} - \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\operatorname{sh}^2 \eta} \right) H = 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \alpha_2 \Theta = 0 \\ \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha_3 \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

A partir de ce point, plusieurs valeurs sont possibles pour les constantes de séparation α_2 et α_3 :

- **1^{er} cas** : $\alpha_2 = p^2$ et $\alpha_3 = q^2$

L'équation différentielle en H peut s'écrire :

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 H}{d\eta^2} + 2\xi \frac{dH}{d\eta} - \left[\frac{q^2}{\xi^2 - 1} + \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \right] H = 0, \text{ avec } \xi = \operatorname{ch} \eta \quad (4.12)$$

Les solutions de cette équation sont les polynômes associés de Legendre de première et de seconde espèces :

$$H(\eta) = A_1 \mathcal{P}_{p-\frac{1}{2}}^q(\operatorname{ch} \eta) + B_1 \mathcal{Q}_{p-\frac{1}{2}}^q(\operatorname{ch} \eta) \quad (4.13)$$

Les équations différentielles en Θ et Ψ donnent quant à elles :

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \alpha_2 \Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_2 \sin p\theta + B_2 \cos p\theta \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + \alpha_3\Psi = 0 \Rightarrow \Psi(\psi) = A_3 \sin q\psi + B_3 \cos q\psi \quad (4.15)$$

- **2^{ème} cas** : $\alpha_2 = p^2$ et $\alpha_3 = 0$

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2H}{d\eta^2} + 2\xi \frac{dH}{d\eta} - \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)H = 0, \text{ avec } \xi = \text{ch } \eta \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow H(\eta) = A_1 \mathcal{P}_{p-\frac{1}{2}}(\text{ch } \eta) + B_1 \mathcal{Q}_{p-\frac{1}{2}}(\text{ch } \eta)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \alpha_2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_2 \sin p\theta + B_2 \cos p\theta \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} = 0 \Rightarrow \Psi(\psi) = A_3 + B_3\psi \quad (4.18)$$

- **3^{ème} cas** : $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2H}{d\eta^2} + 2\xi \frac{dH}{d\eta} - \frac{1}{4}H = 0, \text{ avec } \xi = \cosh \eta \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow H(\eta) = A_1 \mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + B_1 \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_2 + B_2\theta \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} = 0 \Rightarrow \Psi(\psi) = A_3 + B_3\psi \quad (4.21)$$

Le cas où Ω est indépendant de ψ est également présenté dans [12], les solutions en H et Θ sont celles données dans le cas n°2.

4.2.3 Nouvelle machine toroïdale

Dans le chapitre 2 nous avons décrit une machine dans le système trivial de coordonnées toroïdales où tous les tores sont concentriques comme le montre la Figure 4-3 (a). La nouvelle machine est adaptée au système de coordonnées R-séparable. L'alternance des pôles se fait toujours dans la direction azimutale, mais les tores ne sont plus concentriques comme le montre la Figure 4-3 (b). Dans le système trivial les régions comme les aimants permanents, les culasses sont délimitées par des surfaces iso r . Leur épaisseur « radiale » est constante (Figure 4-3 (a)). Dans le système R-séparable, ces mêmes régions sont délimitées par des surfaces iso η . Leur épaisseur « radiale » n'est pas constante (Figure 4-3 (b)). De même l'aimantation des aimants permanents qui était « radiale » suivant \mathbf{e}_r dans le système trivial se fait suivant \mathbf{e}_η dans le système R-séparable.

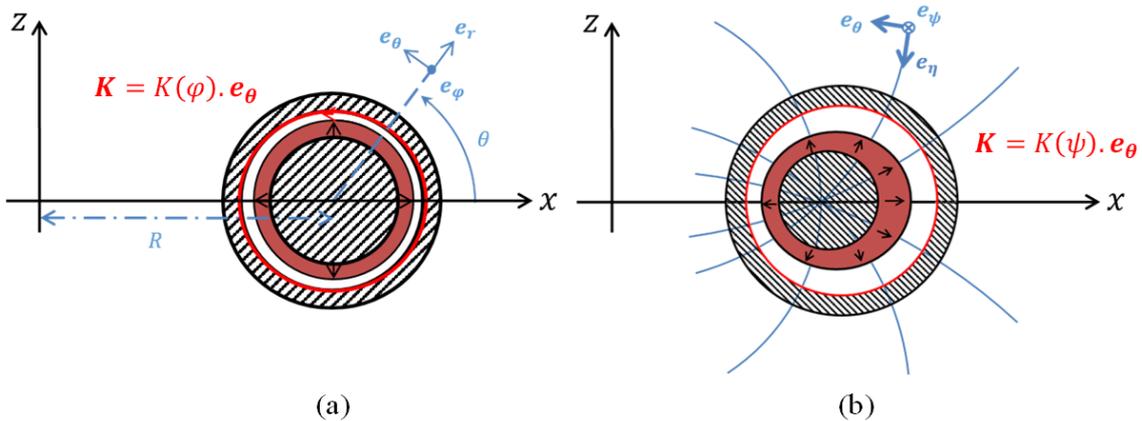


Figure 4-3 : Vues en coupe de la machine toroïdale dans le système trivial (a), et dans le système R -séparable (b)

4.3 Calcul du champ magnétique à vide

4.3.1 Définition du problème

Comme dans les exemples précédents, le domaine d'étude est constitué de l'entrefer et des aimants permanents et on considère que la perméabilité de ces deux milieux est celle du vide. Le champ magnétique \mathbf{B} à vide dans ces régions est régi par les équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.22)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

où \mathbf{H} est le champ d'excitation magnétique et \mathbf{j} le vecteur densité de courant nul ici. Le rotationnel de \mathbf{H} étant nul, on peut introduire le potentiel scalaire magnétique Ω :

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Omega \quad (4.24)$$

Les lois constitutives des milieux magnétiques nous permettent ensuite de relier les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} et donc de relier directement le champ \mathbf{B} au potentiel scalaire magnétique :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.25)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et \mathbf{M} le vecteur magnétisation magnétique dans le cas où le milieu considéré est aimanté.

Le problème est donc celui illustré Figure 4-4. Seul le champ produit par les aimants est considéré. Le problème consiste donc en un tore intérieur en fer sur lequel sont posés les aimants permanents et d'un tore creux extérieur en fer laissant la place à un entrefer toroïdal entre lui et les aimants.

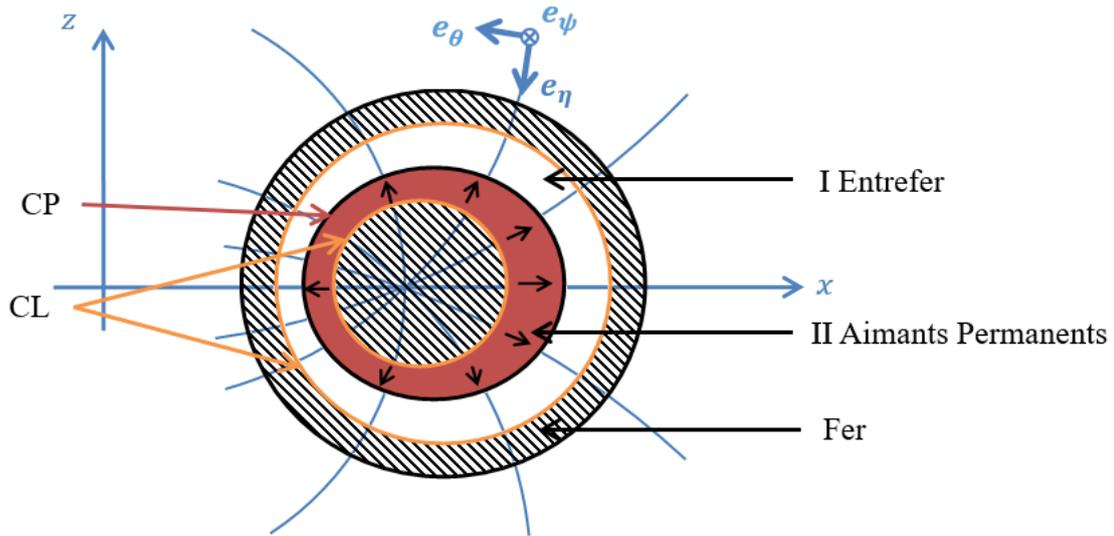


Figure 4-4 : Schéma en coupe de la machine toroïdale considérée

L'aimantation est orientée suivant e_η , l'alternance des pôles se fait suivant e_ψ , le vecteur magnétisation peut donc s'écrire :

$$\mathbf{M} = -M_\eta(\psi) \cdot \mathbf{e}_\eta = - \sum M_n \cdot \cos(np\psi) \cdot \mathbf{e}_\eta \quad (4.26)$$

Les coefficients se calculent d'après la forme d'onde de la Figure 4-5.

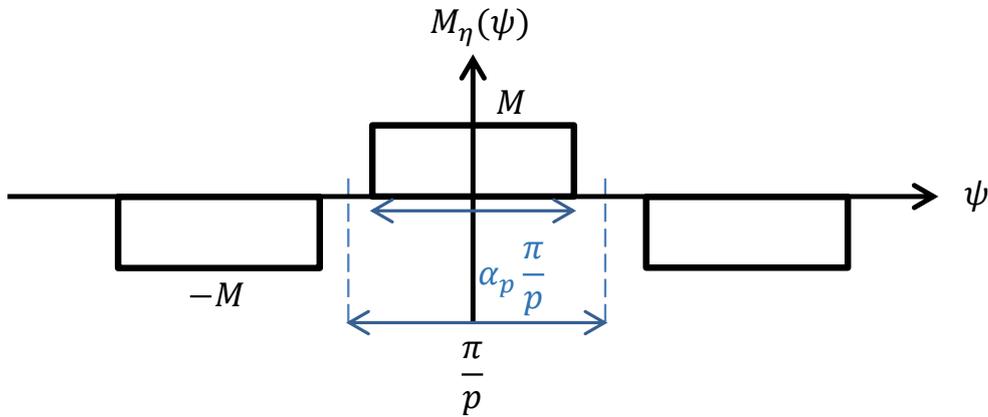


Figure 4-5 : Forme d'onde de l'aimantation en fonction de ψ

Le fer étant considéré de perméabilité infinie, il ne sera pas considéré et sera donc remplacé par une condition aux limites de champ $\mathbf{B} = B_\eta \mathbf{e}_\eta$ normal au niveau des tores correspondant au rotor et stator. Le problème est donc réduit à l'étude du milieu aimanté et de l'entrefer.

La combinaison des équations de Maxwell ainsi que la formulation en potentiel scalaire magnétique nous amène à l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta\Omega = \text{div } \mathbf{M} \quad (4.27)$$

La divergence non nulle de l'aimantation imposerait dans le cas d'une résolution purement analytique, la recherche d'une solution particulière, qui plus est dans le système R-séparable. Le modèle hybride permet donc un gain de temps considérable car il évite une telle recherche, déjà complexe dans le système cylindrique comme nous avons pu le voir au chapitre 2.

- *Méthode de séparation des variables et forme de la solution*

Dans le système de coordonnées toroïdales, le laplacien et la divergence sont donnés par :

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta^3}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\operatorname{sh} \eta}{\Delta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + \operatorname{sh} \eta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) \right\} + \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = - \frac{(1 - \operatorname{sh}^2 \eta) - \operatorname{ch} \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \operatorname{sh} \eta} \cdot M_\eta(\psi) \quad (4.29)$$

A partir de (4.26) et (4.29) on peut dire que le second membre de l'équation de Poisson (4.27) est une série de Fourier suivant la coordonnée azimutale ψ . La forme de la solution issue de la méthode de séparation des variables (4.10) est de la même forme que le second membre de cette équation. La fonction Ψ de (4.11) est donc une fonction périodique de ψ décrite par une série de Fourier. A partir de ce point, deux approches de modélisation peuvent être envisagées.

La première est de supposer que la fonction Θ est constante, autrement dit, la constante de séparation α_2 est imposée nulle dans (4.11). Ce cas n'est pas répertorié dans la littérature [2]. Ce chapitre s'attache donc à valider cette hypothèse forte. Ce modèle est appelée modèle hybride 1D car il fait appel à une méthode de différences finies 1D pour déterminer la fonction H à partir de l'équation différentielle qui la définit dans (4.11). C'est le concept de modèle hybride développé au chapitre 3.

La deuxième forme de solution alternative proposée repose sur le fait que non seulement H mais aussi Θ sont inconnues. Les équations qui régissent ces deux fonctions dans (4.11) sont résolues par la méthode des différences finies 2D, suivant η et θ . L'avantage de cette méthode est qu'elle ne pose pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction Θ . Cela permet ainsi d'étudier la validité de l'hypothèse faite sur le modèle hybride 1D. Elle offre également une alternative de modélisation au cas où l'hypothèse 1D se révélerait inexacte. Ce modèle est appelé modèle hybride 2D.

4.3.2 Modèle hybride 1D

- *Justification de la forme de la solution*

Le milieu aimanté est décrit par la série de Fourier donnée par l'équation (4.26). C'est une série de Fourier à une variable. La solution de l'équation en Θ donnée dans [12] est une combinaison linéaire des fonctions cos et sin. La forme de la solution doit être la même que celle du terme source afin de satisfaire la continuité de la composante normale du champ magnétique à l'interface entre les aimants et l'entrefer. Ainsi, conserver ces fonctions sinusoïdales dans la forme finale conduirait à une double série de Fourier en θ et ψ , ce qui posera un problème au moment de gérer la continuité de la composante normale.

On souhaite obtenir une solution sous la forme suivante :

$$\Omega = \sqrt{\Delta} \cdot H(\eta) \cdot C \cdot \Psi(\psi) \quad (4.30)$$

La fonction Θ se veut donc constante égale à C , ce qui revient à considérer que la constante de séparation $\alpha_2 = 0$ dans le développement issu de [12], mais ce cas n'y est pas exposé. Nous traitons ce cas en partant du cas général issu de [12] et en proposant une méthode de résolution spécifique. Le cas 1 de la section 4.2.2 avec $\alpha_2 = 0$ donne :

$$\begin{cases} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \coth \eta \frac{dH}{d\eta} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha_3}{\sinh^2 \eta} \right) H = 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \\ \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha_3 \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

La fonction H est conservée inconnue d'après le principe du modèle hybride. Son équation différentielle est résolue par la méthode des différences finies 1D dans la direction η . Les deux autres équations donnent quant à elles les solutions :

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_2 \theta + B_2 \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha_3 \Psi = 0 \Rightarrow \Psi(\psi) = A_3 \sin q\psi + B_3 \cos q\psi \quad (4.33)$$

La constante A_2 est donc choisie nulle. Par principe de superposition, on obtient :

$$\Omega = \sqrt{\Delta} \cdot \sum \omega_n(\eta) \cdot \cos(n\psi) \quad (4.34)$$

La fonction H est renommée ω_n et représente donc les coefficients de la série de Fourier dépendant de η et intègre la constante B_2 issue de la solution en Θ .

La forme de cette solution peut être interprétée de la manière suivante : il y a une invariance du terme source suivant θ . Pourtant on constate bien que l'entrefer et l'épaisseur d'aimant ne sont pas constants. Il y a donc invariance du terme source mais non de la géométrie du problème suivant θ . Cette invariance du terme source a conduit à l'idée de poser une fonction constante en θ suite à l'application de la méthode de séparation des variables. Du fait de la R-séparation, et du terme R dépendant de θ , cette hypothèse ne veut pas dire que la solution finale est invariante en θ mais que toute la dépendance suivant cette coordonnée est portée par le terme provenant de la R-séparation.

▪ *Méthode des différences finies 1D*

Afin de résoudre le problème, il est nécessaire d'avoir une équation différentielle sur la nouvelle inconnue ω_n . Pour cela, on insère la forme de la solution (4.34) dans l'équation aux dérivées partielles initiales (4.27).

$$\Omega = \sqrt{\Delta} \cdot \sum \omega_n(\eta) \cdot \cos(np\psi) \rightarrow \Delta\Omega = \begin{cases} \text{div } \mathbf{M} & \text{dans les aimants} \\ 0 & \text{dans l'entrefer} \end{cases} \quad (4.35)$$

Les expressions de la divergence (4.7) et du laplacien (4.9) permettent de réécrire de l'équation différentielle (4.35) de la forme :

$$\begin{aligned} \text{sh } \eta \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} \right) + \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{\text{sh } \eta \sin \theta}{\Delta} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{sh}^2 \eta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} \\ = -\frac{a}{\Delta} \left(\text{ch } \eta - \frac{2 \text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) M_\eta(\psi) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les dérivées respectives de Ω en η , θ et ψ sont exprimées en fonction de $\omega_n(\eta)$ et de ses dérivées. Afin de simplifier les expressions :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \sum \left[\frac{\text{sh } \eta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) + \sqrt{\Delta} \frac{d\omega_n}{d\eta} \right] \cos(np\psi) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} = \sum \left[\frac{\text{ch } \eta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) - \frac{\text{sh}^2 \eta}{4\Delta^{3/2}} \omega_n(\eta) + \frac{\text{sh } \eta}{\sqrt{\Delta}} \frac{d\omega_n}{d\eta} + \sqrt{\Delta} \frac{d^2 \omega_n}{d\eta^2} \right] \cos(np\psi) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \sum \left[\frac{\sin \theta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) \right] \cos(np\psi) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} = \sum \left[\left(\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{\sin^2 \theta}{4\Delta^{3/2}} \right) \omega_n(\eta) \right] \cos(np\psi) \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} = \sqrt{\Delta} \cdot \sum (-n^2 p^2) \cdot \omega_n(\eta) \cdot \cos(np\psi) \quad (4.41)$$

Ainsi, l'expression du laplacien en fonction de $\omega_n(\eta)$ donne :

$$\begin{aligned} \sum \left[\text{sh } \eta \sqrt{\Delta} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\text{sh}^2 \eta}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\Delta} \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) \right) \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \left\{ \text{sh } \eta \left(\frac{\text{ch } \eta}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{\text{sh}^2 \eta}{4\Delta^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin^2 \theta}{4\Delta^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\Delta}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sinh \eta}{2\sqrt{\Delta}} \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh}^2 \eta}{\Delta} - \frac{\sin^2 \theta}{\Delta} \right) - \frac{n^2 p^2 \sqrt{\Delta}}{\text{sh}^2 \eta} \right\} \omega_n \right] \cos(np\psi) \end{aligned} \quad (4.42)$$

L'équation différentielle sur le potentiel scalaire magnétique $\Delta\Omega = \text{div } \mathbf{M}$ conduit ainsi à une égalité sur les coefficients de la série de Fourier du premier et du second membre :

$$\begin{aligned} \sum \left[\text{sh } \eta \sqrt{\Delta} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\text{sh}^2 \eta}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\Delta} \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) \right) \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \left\{ \text{sh } \eta \left(\frac{\text{ch } \eta}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{\text{sh}^2 \eta}{4\Delta^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin^2 \theta}{4\Delta^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\Delta}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sinh \eta}{2\sqrt{\Delta}} \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh}^2 \eta}{\Delta} - \frac{\sin^2 \theta}{\Delta} \right) - \frac{n^2 p^2 \sqrt{\Delta}}{\text{sh}^2 \eta} \right\} \omega_n \right] \cos(np\psi) \\ = -\frac{a}{\Delta} \left(\text{ch } \eta - \frac{2 \text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) \cdot \sum M_n \cdot \cos(np\psi) \end{aligned} \quad (4.43)$$

L'équation à résoudre par différences finies portant sur les coefficients $\omega_n(\eta)$ après simplification est donc la suivante :

$$\text{sh } \eta \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \text{ch } \eta \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \left(\frac{1}{4} - \frac{n^2 p^2}{\text{sh}^2 \eta} \right) \omega_n = -\frac{a}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left(\text{ch } \eta - \frac{2 \text{sh}^2 \eta}{\Delta} \right) M_n \quad (4.44)$$

en divisant par $\text{sh } \eta$, on retrouve l'équation différentielle issue du cas général (4.31).

Le problème est ensuite discrétisé suivant e_η comme sur la Figure 4-6. L'approximation de Taylor au second ordre est utilisée pour calculer les dérivées de ω_n .

$$\left(\frac{d\omega_n}{d\eta} \right)_i = \frac{h_{i-1}^2 u_{i-1} - (h_{i-1}^2 - h_i^2) u_i + h_i^2 u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (4.45)$$

$$\left(\frac{d^2 \omega_n}{d\eta^2} \right)_i = 2 \frac{h_{i-1} u_{i-1} - (h_{i-1} - h_i) u_i + h_i u_{i+1}}{h_i h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (4.46)$$

où les u_i sont les valeurs de la fonction ω_n aux points η_i et h_i sont les pas variables entre chaque points. Les équations différentielles dans l'entrefer (indice e) et les aimants (indice a) sont donc traduites en équation matricielles :

$$\begin{cases} A_n^a \cdot v_n^a = B_n^a \\ A_n^e \cdot v_n^e = B_n^e \end{cases} \quad (4.47)$$

Les $A_n(i, j)$ sont les coefficients calculés grâce au membre de gauche de l'équation différentielle (4.44) avec l'expression des dérivées discrétisées (4.45) et (4.46). v_n est le vecteur représentant l'inconnue ω_n discrétisée et les $B_n(i)$ sont exprimés grâce au membre de droite de l'équation différentielle (4.44).

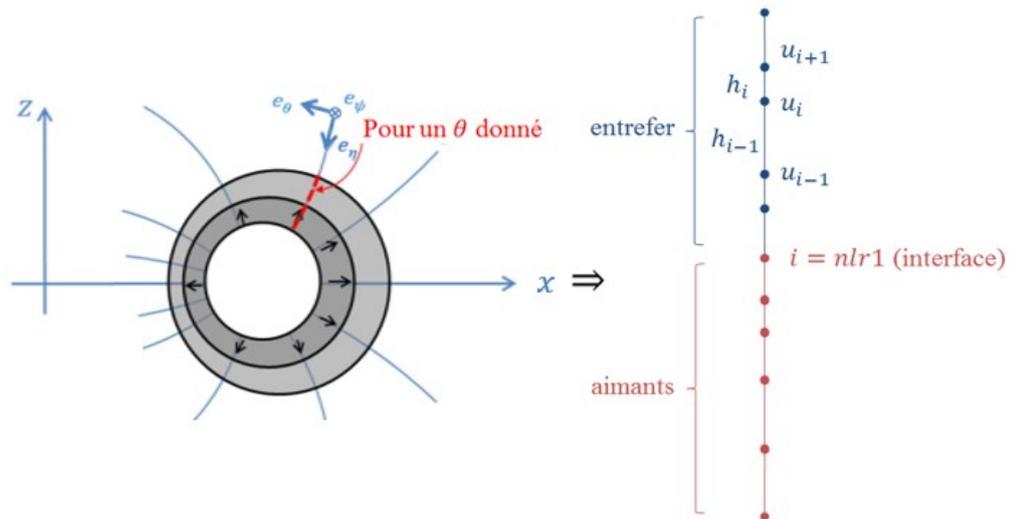


Figure 4-6 : Schéma de la discrétisation du problème

- *Conditions de passage et conditions aux limites*

Les conditions aux limites et conditions de passage, s'écrivent dans le cas général :

$$\text{Condition aux limites : } H_t = 0 \quad (4.48)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}) \times \mathbf{n} = \mathbf{k}_{sI,II} \\ (\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.49)$$

Appliqué au problème, les équations précédentes donnent :

$$\text{Conditions aux limites : } \begin{cases} H_\psi = 0 \\ H_\theta = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_e) \times \mathbf{e}_\eta = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_e) \cdot \mathbf{e}_\eta = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

Les projections conduisent à :

$$CL1 : \begin{cases} H_{\theta_a}(\eta_r) = 0 \\ H_{\psi_a}(\eta_r) = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

$$CL2 : \begin{cases} H_{\theta_e}(\eta_s) = 0 \\ H_{\psi_e}(\eta_s) = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

$$CP1 : \begin{cases} H_{\theta_a}(\eta_a) = H_{\theta_e}(\eta_a) \\ H_{\psi_a}(\eta_a) = H_{\psi_e}(\eta_a) \end{cases} \quad (4.54)$$

$$CP2 : H_{\eta_a}(\eta_a) + M_\eta(\psi) = H_{\eta_e}(\eta_a) \quad (4.55)$$

où η_s et η_r sont les coordonnées correspondantes respectivement au rayon d'alésage stator et au rayon du rotor. Pour déterminer le champ d'excitation magnétique \mathbf{H} il faut calculer le gradient de Ω (4.24). L'expression (4.6) exprimée en fonction de la nouvelle inconnue ω_n pour chaque composante suivant η, θ, ψ devient :

$$\mathbf{grad} \Omega = \frac{\Delta}{a} [\mathbf{grad}_\eta \Omega \cdot \mathbf{e}_\eta + \mathbf{grad}_\theta \Omega \cdot \mathbf{e}_\theta + \mathbf{grad}_\psi \Omega \cdot \mathbf{e}_\psi] \quad (4.56)$$

avec :

$$\mathbf{grad}_\eta \Omega = \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \left[\frac{\text{sh } \eta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) + \sqrt{\Delta} \frac{d\omega_n}{d\eta} \right] \cos(n\psi) \quad (4.57)$$

$$\mathbf{grad}_\theta \Omega = \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \left[\frac{\sin \theta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) \right] \cos(n\psi) \quad (4.58)$$

$$\mathbf{grad}_\psi \Omega = \frac{\Delta}{a \cdot \text{sh } \eta} \sqrt{\Delta} \cdot \sum (-np) \cdot \omega_n(\eta) \cdot \sin(n\psi) \quad (4.59)$$

Ainsi, les conditions aux limites et de passage deviennent respectivement :

$$\omega_n^a |_{\eta_r} = 0 \quad (4.60)$$

$$\omega_n^e |_{\eta_s} = 0 \quad (4.61)$$

$$\omega_n^a \Big|_{\eta_a} = \omega_n^e \Big|_{\eta_a} \quad (4.62)$$

$$-\frac{d\omega_n^a}{d\eta} \Big|_{\eta_a} - \frac{a}{\Delta^{\frac{3}{2}}} M_n = -\frac{d\omega_n^e}{d\eta} \Big|_{\eta_a} \quad (4.63)$$

Les deux équations données pour chaque condition CL1, CL2 et CP1 sont identiques, les conditions aux limites et de passage à discrétiser sont donc réduites aux quatre équations ci-dessus.

$$\text{pour } i = 1 \text{ et } i = n, \quad u_i^{a,e} = 0 \quad (4.64)$$

$$\text{pour } i = nlr1, \quad \begin{cases} u_i^a = u_i^e \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} = -\frac{a}{\Delta^{\frac{3}{2}}} M_n \end{cases} \quad (4.65)$$

On peut ainsi compléter les équations différentielles discrétisées dans les deux milieux par les équations issues des conditions aux limites et conditions de passage afin d'obtenir un unique système matriciel permettant la résolution par différences finies :

$$A_n \cdot v_n = B_n \quad (4.66)$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & A_n^a & & & \\ h_i/h_i h_{i-1} & -(h_i + h_{i+1})/h_i h_{i-1} & h_{i-1}/h_i h_{i-1} & & \\ & & & A_n^e & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

où la ligne médiane de la matrice correspond à l'interface aimant-entrefer. On peut enfin retrouver les composantes du champ magnétique \mathbf{B} à partir du potentiel scalaire magnétique résolu par différences finies (4.24 et 4.25) :

$$B_\eta = -\mu_0 \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \left[\frac{\text{sh } \eta}{2 \cdot \sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) + \sqrt{\Delta} \cdot \frac{d\omega_n}{d\eta} \right] \cdot \cos(np\psi) - \mu_0 \cdot M_\eta(\psi) \quad (4.68)$$

$$B_\theta = -\mu_0 \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \left[\frac{\sin \theta}{2\sqrt{\Delta}} \omega_n(\eta) \right] \cdot \cos(np\psi) \quad (4.69)$$

$$B_\psi = \mu_0 \frac{\Delta^{3/2}}{a \cdot \text{sh } \eta} \cdot \sum np \cdot \omega_n(\eta) \cdot \sin(np\psi) \quad (4.70)$$

où les termes $\omega_n(\eta)$ et $\partial\omega_n/\partial\eta$ sont calculés à partir de la solution v_n obtenue par différence finie. La dérivée $\partial\omega_n/\partial\eta$ peut-être calculée grâce à une dérivée à droite, à gauche ou bien une dérivée centrée.

4.3.3 Modèle 2D

Le problème discrétisé en (η, θ) ainsi que les conditions aux limites sont schématisés sur la Figure 4-7.

En termes de coordonnées toroïdales, le laplacien et la divergence donnent respectivement :

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta^3}{a^2 \text{sh } \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\text{sh } \eta}{\Delta} \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \right) + \text{sh } \eta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} \right) \right\} + \frac{\Delta^2}{a^2 \text{sh}^2 \eta} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\psi^2} \quad (4.71)$$

$$\text{div } \mathbf{M} = -\frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch } \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh } \eta} \cdot M_\eta(\psi) \quad (4.72)$$

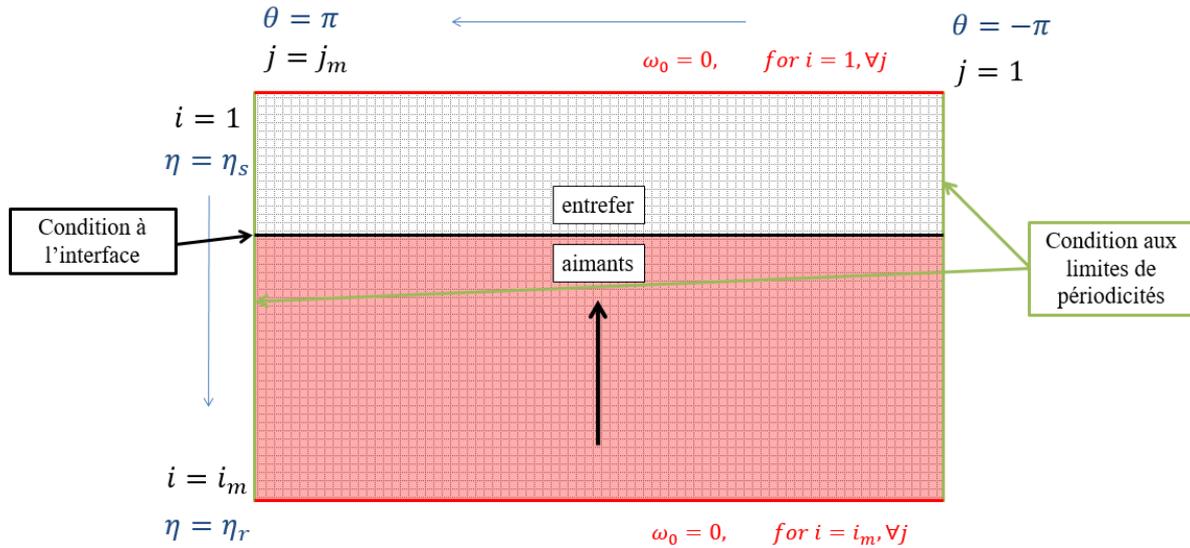


Figure 4-7 : Domaine d'étude de la méthode des différences finies 2D dans le plan (η, θ)

▪ Forme de la solution

Du cas général donné dans [12], on considère la solution en ψ et on conserve les fonctions H et Θ inconnues afin de réaliser une méthode des différences finies 2D suivant les coordonnées η et θ . Par principe de superposition, on peut poser la solution Ω de la même forme que le terme source :

$$\Omega = \sum \omega_n(\eta, \theta) \cdot \cos(np\psi) \quad (4.73)$$

Afin d'avoir l'équation qui régit le fonction ω_n , on insère la forme de la solution (4.74) dans l'équation aux dérivées partielles initiales (4.27).

$$\Omega = \sum \omega_n(\eta, \theta) \cdot \cos(np\psi) \rightarrow \Delta\Omega = \begin{cases} \text{div } \mathbf{M} & \text{dans les aimants} \\ 0 & \text{dans l'entrefer} \end{cases} \quad (4.74)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sum \left[\frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \right. \\ \left. - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \text{sh}^2 \eta} \omega_n \right] \cdot \cos(np\psi) \\ = - \frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch } \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh } \eta} \sum M_n \cdot \cos(np\psi) \end{aligned} \quad (4.75)$$

On aboutit donc à l'équation aux dérivées partielles sur les coefficients $\omega_n(\eta, \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \\ - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \omega_n = - \frac{(1 - \operatorname{sh}^2 \eta) - \operatorname{ch} \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \operatorname{sh} \eta} M_n \end{aligned} \quad (4.76)$$

Le problème est ensuite discrétisé suivant \mathbf{e}_η et \mathbf{e}_θ comme sur la Figure 4-8. L'approximation de Taylor au second ordre est utilisée pour calculer les dérivées de ω_n , En prenant pour référence la valeur ω_0 de la fonction ω_n au point de coordonnées (η_i, θ_i) :

$$\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} \right)_0 = \frac{h_4}{h_2(h_4 + h_2)} \omega_2 - \frac{h_4 - h_2}{h_2 h_4} \omega_0 - \frac{h_2}{h_4(h_4 + h_2)} \omega_4 \quad (4.77)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} \right)_0 = \frac{2}{h_2(h_4 + h_2)} \omega_2 - \frac{2}{h_2 h_4} \omega_0 + \frac{2}{h_4(h_4 + h_2)} \omega_4 \quad (4.78)$$

$$\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \right)_0 = \frac{h_3}{h_1(h_3 + h_1)} \omega_1 - \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3} \omega_0 - \frac{h_1}{h_3(h_3 + h_1)} \omega_3 \quad (4.79)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} \right)_0 = \frac{2}{h_1(h_3 + h_1)} \omega_1 - \frac{2}{h_1 h_3} \omega_0 + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \omega_3 \quad (4.80)$$

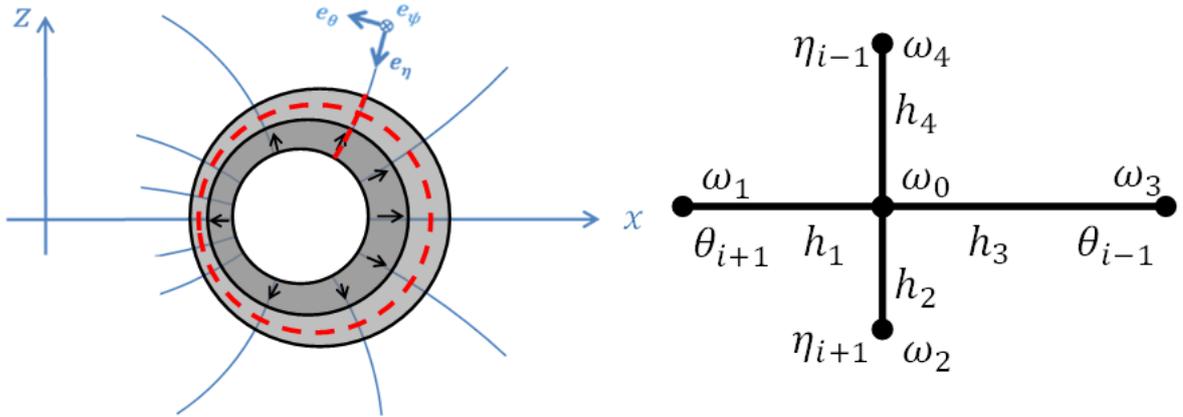


Figure 4-8 : Schéma de la discrétisation du problème

Les conditions aux limites et conditions de passage, s'écrivent dans le cas général :

$$\text{Condition aux limites : } H_t = 0 \quad (4.81)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

Appliqué au problème, les équations précédentes donnent :

$$\text{Condition aux limites : } H_\theta = 0 \text{ et } H_\psi = 0 \quad (4.83)$$

$$\text{Conditions de passage : } \begin{cases} (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}) \times \mathbf{e}_\eta = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}) \cdot \mathbf{e}_\eta = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Les projections conduisent à :

$$CL1 : \begin{cases} H_{\theta_a}(\eta_r) = 0 \\ H_{\psi_a}(\eta_r) = 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

$$CL2 : \begin{cases} H_{\theta_e}(\eta_s) = 0 \\ H_{\psi_e}(\eta_s) = 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

$$CP1 : \begin{cases} H_{\theta_a}(\eta_a) = H_{\theta_e}(\eta_a) \\ H_{\psi_a}(\eta_a) = H_{\psi_e}(\eta_a) \end{cases} \quad (4.87)$$

$$CP2 : H_{\eta_a}(\eta_a) + M_\eta(\psi) = H_{\eta_e}(\eta_a) \quad (4.88)$$

Traduit en potentiel scalaire magnétique on a :

$$CL1 : \begin{cases} -\frac{\partial \Omega_a}{\partial \theta} \Big|_{\eta_r} = 0 \\ -\frac{\partial \Omega_a}{\partial \psi} \Big|_{\eta_r} = 0 \end{cases} \quad (4.89)$$

$$CL2 : \begin{cases} -\frac{\partial \Omega_e}{\partial \theta} \Big|_{\eta_s} = 0 \\ -\frac{\partial \Omega_e}{\partial \psi} \Big|_{\eta_s} = 0 \end{cases} \quad (4.90)$$

$$CP1 : \begin{cases} -\frac{\partial \Omega_a}{\partial \theta} \Big|_{\eta_a} = -\frac{\partial \Omega_e}{\partial \theta} \Big|_{\eta_a} \\ -\frac{\partial \Omega_a}{\partial \psi} \Big|_{\eta_a} = -\frac{\partial \Omega_e}{\partial \psi} \Big|_{\eta_a} \end{cases} \quad (4.91)$$

$$CP2 : -\frac{\Delta}{a} \frac{\partial \Omega_a}{\partial \eta} \Big|_{\eta_a} - M_n = -\frac{\Delta}{a} \frac{\partial \Omega_e}{\partial \eta} \Big|_{\eta_a} \quad (4.92)$$

Soit :

$$CL1 : \begin{cases} \frac{\partial \omega_n^a}{\partial \theta} \Big|_{\eta_r} = 0 \\ \omega_n^a \Big|_{\eta_r} = 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$CL2 : \begin{cases} \frac{\partial \omega_n^e}{\partial \theta} \Big|_{\eta_s} = 0 \\ \omega_n^e \Big|_{\eta_s} = 0 \end{cases} \quad (4.94)$$

$$CP1 : \begin{cases} \left. \frac{\partial \omega_n^a}{\partial \theta} \right|_{\eta_a} = \left. \frac{\partial \omega_n^e}{\partial \theta} \right|_{\eta_a} \\ \left. \omega_n^a \right|_{\eta_a} = \left. \omega_n^e \right|_{\eta_a} \end{cases} \quad (4.95)$$

$$CP2 : -\frac{\Delta}{a} \left. \frac{\partial \omega_n^a}{\partial \eta} \right|_{\eta_a} - M_n = -\frac{\Delta}{a} \left. \frac{\partial \omega_n^e}{\partial \eta} \right|_{\eta_a} \quad (4.96)$$

Les deux équations énoncées pour les CL1, CL2 et CP1 sont identiques, une seule peut être conservée. Ainsi, les conditions aux limites et de passage peuvent se résumer à :

$$\omega_n^a|_{\eta_r} = 0 \quad (4.97)$$

$$\omega_n^e|_{\eta_s} = 0 \quad (4.98)$$

$$\omega_n^a|_{\eta_a} = \omega_n^e|_{\eta_a} \quad (4.99)$$

$$-\frac{\partial \omega_n^a}{\partial \eta}|_{\eta_a} - \frac{a}{\Delta} M_n = -\frac{\partial \omega_n^e}{\partial \eta}|_{\eta_a} \quad (4.100)$$

▪ Discrétisation

Les formules de Taylor donnant les valeurs des dérivées sont rappelées en suivant :

$$\left(\frac{d\omega_n}{d\eta} \right)_0 = \frac{h_4}{h_2(h_4 + h_2)} \omega_2 - \frac{h_4 - h_2}{h_2 h_4} \omega_0 - \frac{h_2}{h_4(h_4 + h_2)} \omega_4 \quad (4.101)$$

$$\left(\frac{d^2\omega_n}{d\eta^2} \right)_0 = \frac{2}{h_2(h_4 + h_2)} \omega_2 - \frac{2}{h_2 h_4} \omega_0 + \frac{2}{h_4(h_4 + h_2)} \omega_4 \quad (4.102)$$

$$\left(\frac{d\omega_n}{d\theta} \right)_0 = \frac{h_3}{h_1(h_3 + h_1)} \omega_1 - \frac{h_3 - h_1}{h_1 h_3} \omega_0 - \frac{h_1}{h_3(h_3 + h_1)} \omega_3 \quad (4.103)$$

$$\left(\frac{d^2\omega_n}{d\theta^2} \right)_0 = \frac{2}{h_1(h_3 + h_1)} \omega_1 - \frac{2}{h_1 h_3} \omega_0 + \frac{2}{h_3(h_3 + h_1)} \omega_3 \quad (4.104)$$

Ainsi, la discrétisation peut s'écrire :

$$\left(\frac{d^2\omega_n}{d\eta^2} \right)_0 = a_2 \omega_2 + a_0 \omega_0 + a_4 \omega_4 \quad (4.105)$$

$$\left(\frac{d\omega_n}{d\eta} \right)_0 = b_2 \omega_2 + b_0 \omega_0 + b_4 \omega_4 \quad (4.106)$$

$$\left(\frac{d^2\omega_n}{d\theta^2}\right)_0 = c_1\omega_1 + c_0\omega_0 + c_3\omega_3 \quad (4.107)$$

$$\left(\frac{d\omega_n}{d\theta}\right)_0 = d_1\omega_1 + d_0\omega_0 + d_3\omega_3 \quad (4.108)$$

où :

$$a_2 = \frac{2}{h_2(h_4 + h_2)}, a_0 = -\frac{2}{h_2h_4}, a_4 = \frac{2}{h_4(h_4 + h_2)} \quad (4.109)$$

$$b_2 = \frac{h_4}{h_2(h_4 + h_2)}, b_0 = -\frac{h_4 - h_2}{h_2h_4}, b_4 = -\frac{h_2}{h_4(h_4 + h_2)} \quad (4.110)$$

$$c_1 = \frac{2}{h_1(h_3 + h_1)}, c_0 = -\frac{2}{h_1h_3}, c_3 = \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)} \quad (4.111)$$

$$d_1 = \frac{h_3}{h_1(h_3 + h_1)}, d_0 = -\frac{h_3 - h_1}{h_1h_3}, d_3 = -\frac{h_1}{h_3(h_3 + h_1)} \quad (4.112)$$

▪ *Construction du cœur de la matrice A*

La construction du cœur de la matrice A s'effectue par l'intermédiaire de la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles sur les coefficients de la série de Fourier du potentiel scalaire magnétique. Les formules de Taylor discrétisées (4.105 à 4.112) sont utilisées en référence au schéma de discrétisation présenté Figure 4-9.

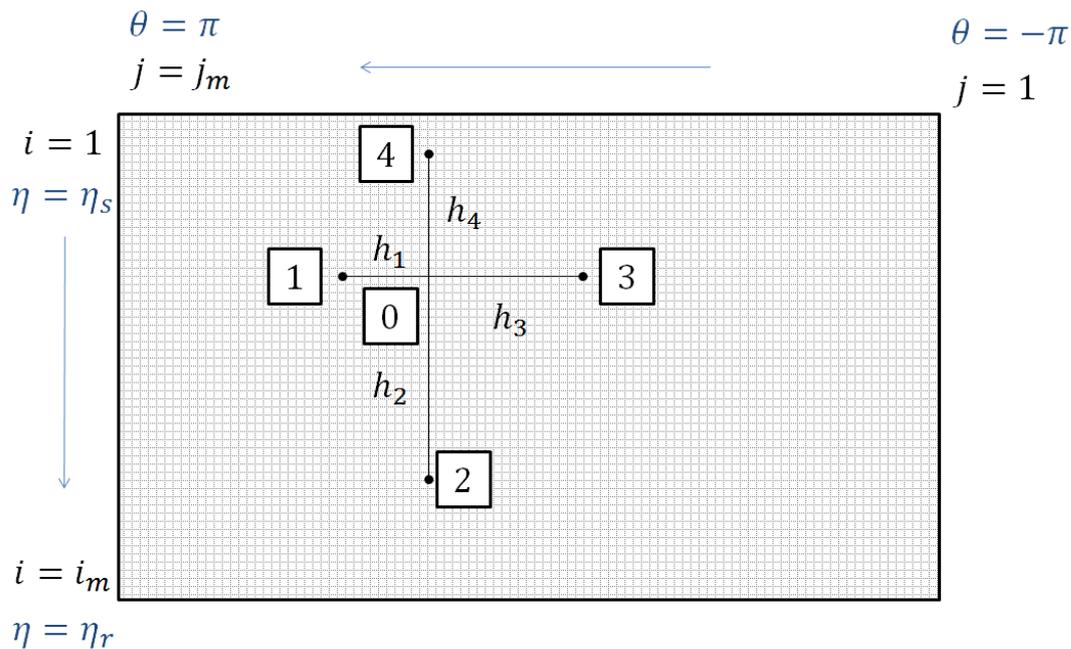


Figure 4-9 : Schéma de la discrétisation et numérotation locale

L'indice i correspondant à l'interface aimant-entrefer est appelé n_{lr1} . L'équation aux dérivées partielles à résoudre par différences finies est l'équation (4.76) qui est rappelée ici pour faciliter la compréhension de la suite :

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \\ & - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \omega_n = - \frac{(1 - \operatorname{sh}^2 \eta) - \operatorname{ch} \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \operatorname{sh} \eta} M_n \end{aligned} \quad (4.113)$$

On a donc pour $j = [2 : j_m - 1]$ et $i = [2 : i_m - 1] \setminus \{n_{lr1}\}$, les numéros de nœuds suivants :

$$n_0 = (j - 1) * i_m + i \quad (4.114)$$

$$n_1 = j * i_m + i \quad (4.115)$$

$$n_2 = (j - 1) * i_m + i + 1 \quad (4.116)$$

$$n_3 = (j - 2) * i_m + i \quad (4.117)$$

$$n_4 = (j - 1) * i_m + i - 1 \quad (4.118)$$

Et la matrice A correspondante :

$$\begin{aligned} A(n_0, n_0) &= \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot b_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_0 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_0 \\ & - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$A(n_0, n_1) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_1 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_1 \quad (4.120)$$

$$A(n_0, n_2) = \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot b_2 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_2 \quad (4.121)$$

$$A(n_0, n_3) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_3 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_3 \quad (4.122)$$

$$A(n_0, n_4) = \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot b_4 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_4 \quad (4.123)$$

$$B(n_0) = \begin{cases} -\frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch} \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh} \eta} M_n & \text{si } i > nlr1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.124)$$

▪ *Conditions aux limites :*

Les conditions aux limites s'écrivent avec des dérivées au premier ordre. La Figure 4-10 montre le placement des points pour les deux conditions aux limites en $\eta = \eta_r$ soit $i = i_m$ et $\eta = \eta_s$ soit $i = 1$. Les conditions aux limites sont :

$$\omega_n^a|_{\eta_r} = 0 \quad (4.125)$$

$$\omega_n^e|_{\eta_s} = 0 \quad (4.126)$$

En termes de différences finies on a donc :

$$\text{pour } i = 1, \forall j = 0 : \quad \omega_0 = 0 \quad (4.127)$$

$$\text{pour } i = i_m, \forall j = 0 : \quad \omega_0 = 0 \quad (4.128)$$

On a donc pour $j = [1 : j_m]$ et $i = 1$ et $i = i_m$, les coefficients de la matrice A suivants :

$$A(n_0, n_0) = 1, \quad \text{avec } n_0 = (j - 1) * i_m + i \quad (4.129)$$

$$B(n_0) = 0, \quad \text{avec } n_0 = (j - 1) * i_m + i \quad (4.130)$$

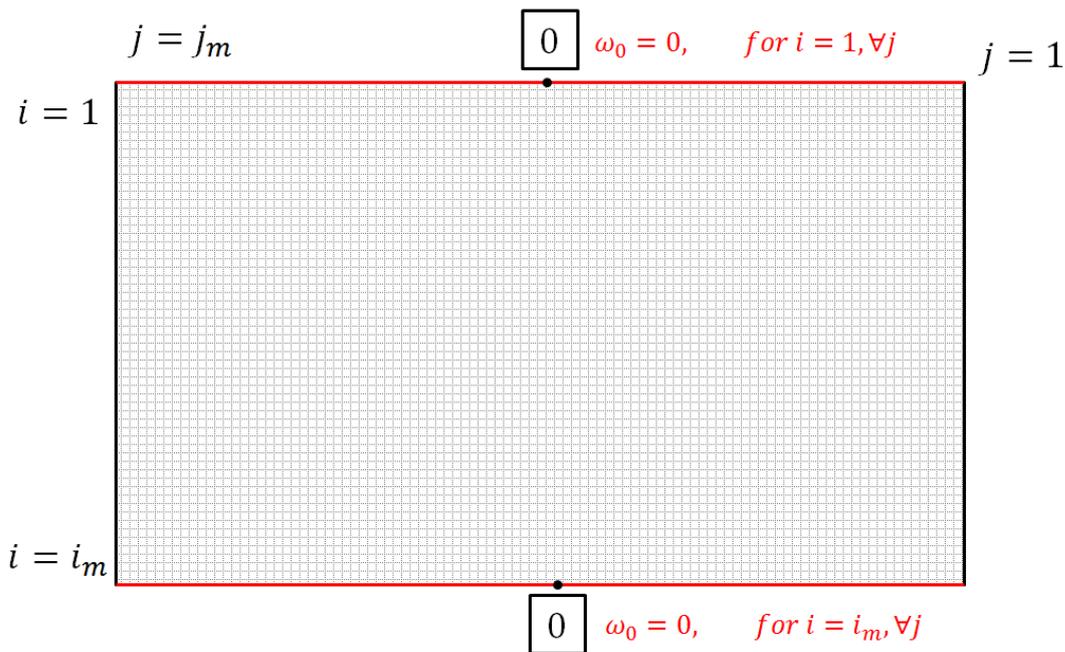


Figure 4-10 : Schéma de principe des conditions aux limites

▪ *Conditions de passage :*

La condition de passage énoncée précédemment est :

$$\omega_n^a \Big|_{\eta_a} = \omega_n^e \Big|_{\eta_a} \quad (4.131)$$

$$-\frac{\partial \omega_n^a}{\partial \eta} \Big|_{\eta_a} - \frac{a}{\Delta} M_n = -\frac{\partial \omega_n^e}{\partial \eta} \Big|_{\eta_a} \quad (4.132)$$

La première condition nous impose un u_0 identique dans le milieu aimanté et l'entrefer. La deuxième équation est la continuité de la composante normale du champ \mathbf{B} . La discrétisation nous donne :

$$-\frac{\Delta \omega_2 - \omega_0}{a h_2} - M_n = -\frac{\Delta \omega_0 - \omega_4}{a h_4} \quad (4.133)$$

Soit :

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{h_2} - \frac{\omega_0 - \omega_4}{h_4} = -\frac{a}{\Delta} M_n \quad (4.134)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\omega_2}{h_2} - \frac{h_2 + h_4}{h_2 h_4} \omega_0 + \frac{\omega_4}{h_4} = -\frac{a}{\Delta} M_n \quad (4.135)$$

Ceci est appliqué pour tous les nœuds n_0 , n_2 et n_4 et ce pour $i = nlr1$ et $\forall j$, comme illustré en Figure 4-11.

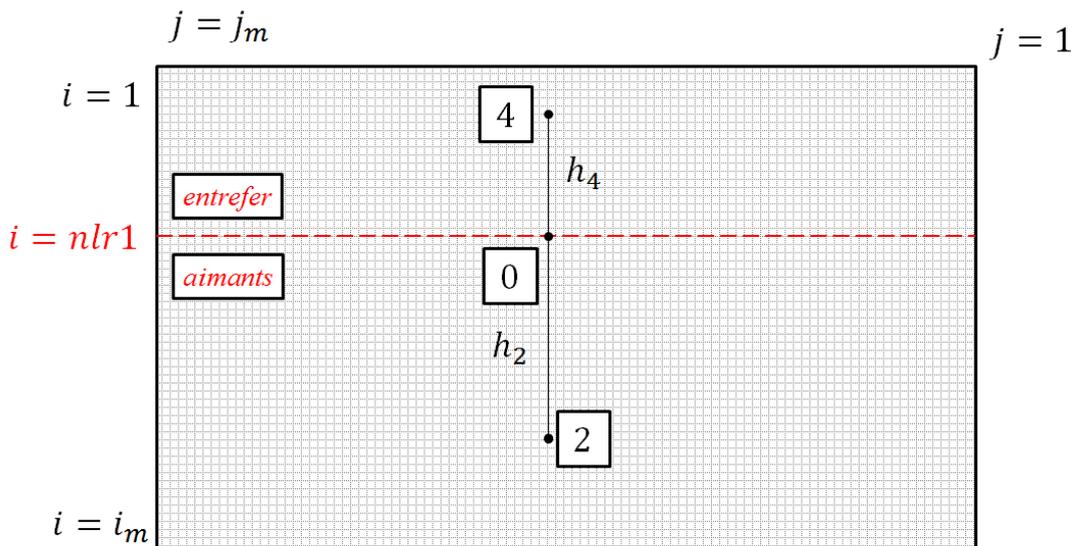


Figure 4-11 : Schéma de principe des conditions de passage

▪ *Condition de périodicité*

La condition de périodicité consiste à imposer la continuité en θ entre les points $\theta = -\pi$ (pour $j = 1$) et $\theta = \pi - pas$ (pour $j = j_m$). Où *pas* est le pas de discrétisation suivant la coordonnée θ . Le schéma de principe est présenté en Figure 4-12.

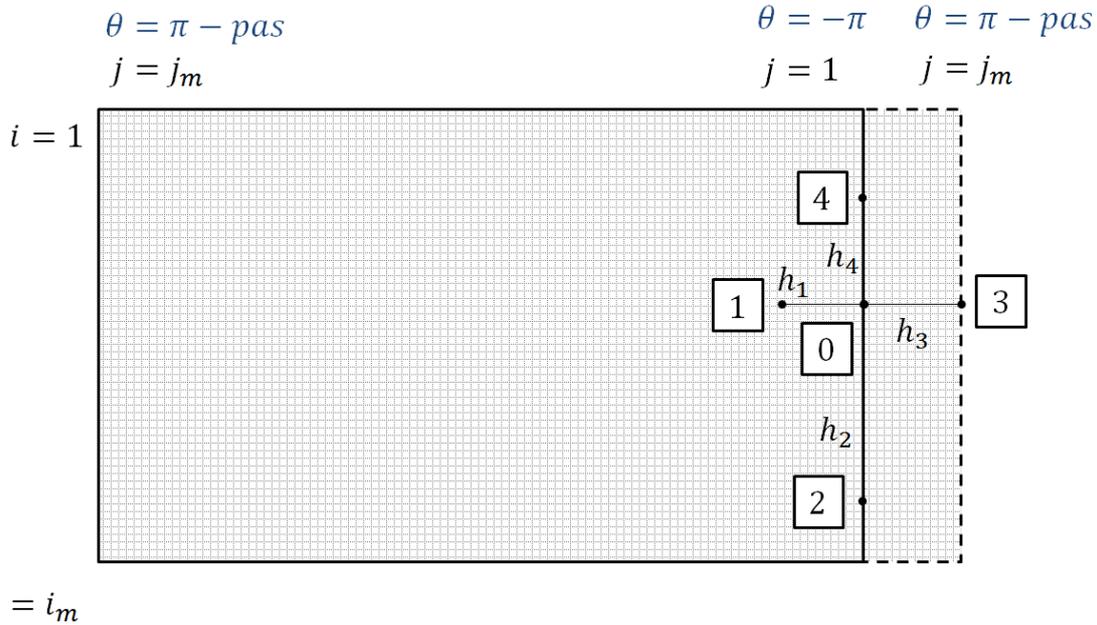


Figure 4-12 : Schéma de principe de la condition de périodicité en $\theta = -\pi$

Cette condition de périodicité se traduit par la même construction que le cœur de la matrice décrite précédemment mais avec le premier point qui doit être relié au dernier. L'équation aux dérivées partielles discrétisée énoncée précédemment (4.76) nous permet de remplir la matrice A. Elle est redonnée ci-dessous pour illustrer la suite des calculs.

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \\ & - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \omega_n = - \frac{(1 - \operatorname{sh}^2 \eta) - \operatorname{ch} \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \operatorname{sh} \eta} M_n \end{aligned} \quad (4.136)$$

On a donc pour $j = 1$ et $i = [2 : i_m - 1] \setminus \{nlr1\}$, les numéros de nœuds suivants :

$$\begin{aligned} A(n_0, n_0) = & \frac{(1 - \operatorname{ch} \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \operatorname{sh} \eta} \cdot b_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_0 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_0 \\ & - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$A(n_0, n_1) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_1 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_1 \quad (4.138)$$

$$A(n_0, n_2) = \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot b_2 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_2 \quad (4.139)$$

$$A(n_0, n_3) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_3 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_3 \quad (4.140)$$

$$A(n_0, n_4) = \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot b_4 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_4 \quad (4.141)$$

$$B(n_0) = \begin{cases} -\frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch } \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh } \eta} M_n & \text{si } i > nlr1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.142)$$

La continuité a été réalisée pour la première colonne ($i = [1: i_m], j = 1$), il faut remplir de la même manière les indices correspondant à la dernière colonne ($i = [1: i_m], j = j_m - 1$).

L'équation aux dérivées partielles discrétisée énoncée précédemment (4.76) nous permet de remplir la matrice A. Elle est redonnée ci-dessous pour illustrer la suite des calculs.

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \\ & - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \text{sh}^2 \eta} \omega_n = -\frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch } \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh } \eta} M_n \end{aligned} \quad (4.143)$$

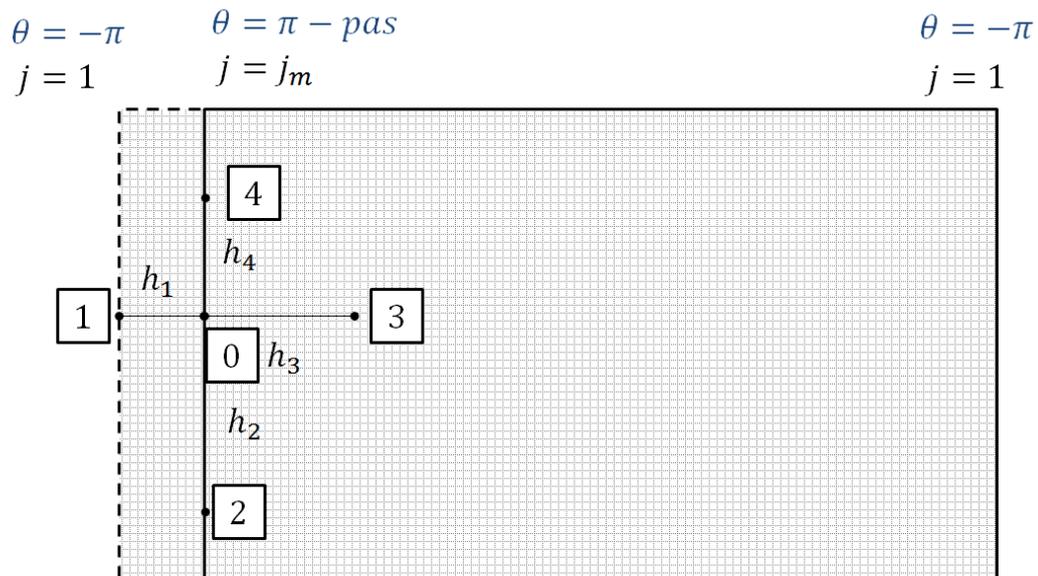


Figure 4-13 : Schéma de principe de la condition de périodicité en $\theta = \pi$

On a donc pour $j = j_m$ et $i = [2 : i_m - 1] \setminus \{nlr1\}$, les numéros de nœuds suivants :

$$n_0 = (j - 1) * i_m + i \quad (4.144)$$

$$n_1 = i \quad (4.145)$$

$$n_2 = (j - 1) * i_m + i + 1 \quad (4.146)$$

$$n_3 = (j - 2) * i_m + i \quad (4.147)$$

$$n_4 = (j - 1) * i_m + i - 1 \quad (4.148)$$

Le point 1 est donc celui positionné sur la colonne $j = 1$. La matrice A correspondante dont les coefficients sont calculés avec $h_1 = h_\theta(1)$ est alors :

$$A(n_0, n_0) = \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot b_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_0 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_0 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_0 - n^2 p^2 \cdot \frac{\Delta^2}{a^2 \text{sh}^2 \eta} \quad (4.149)$$

$$A(n_0, n_1) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_1 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_1 \quad (4.150)$$

$$A(n_0, n_2) = \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot b_2 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_2 \quad (4.151)$$

$$A(n_0, n_3) = \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot c_3 - \frac{\Delta \cdot \sin \theta}{a^2} d_3 \quad (4.152)$$

$$A(n_0, n_4) = \frac{(1 - \text{ch } \eta \cos \theta) \cdot \Delta}{a^2 \text{sh } \eta} \cdot b_4 + \frac{\Delta^2}{a^2} \cdot a_4 \quad (4.153)$$

$$B(n_0) = \begin{cases} -\frac{(1 - \text{sh}^2 \eta) - \text{ch } \eta \cdot \cos \theta}{a \cdot \text{sh } \eta} M_n & \text{si } i > nlr1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.154)$$

Les conditions aux limites, conditions de passage et conditions de périodicité viennent compléter la matrice remplie grâce à la discrétisation de la nouvelle inconnue ω_n . La solution peut désormais être calculée.

- *Solution*

Une fois les matrices A et B complétées, la solution du problème vient naturellement en résolvant le système suivant pour chaque rang d'harmonique n :

$$A.U = B \quad (4.155)$$

Ainsi, le potentiel scalaire magnétique Ω peut s'écrire en fonction de la matrice solution U :

$$\Omega = \sum U. \cos(np\psi) \quad (4.156)$$

La solution est donc discrète suivant η et θ et continue en ψ . Les 3 composantes du champ \mathbf{B} sont ensuite déduites de la loi constitutive des milieux magnétiques liant \mathbf{B} et \mathbf{H} et donc Ω .

$$B_\eta = -\mu_0 \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \frac{\partial \omega_n(\eta, \theta)}{\partial \eta} \cdot \cos(np\psi) - \mu_0 M_\eta(\psi) \quad (4.157)$$

$$B_\theta = -\mu_0 \frac{\Delta}{a} \cdot \sum \frac{\partial \omega_n(\eta, \theta)}{\partial \theta} \cdot \cos(np\psi) \quad (4.158)$$

$$B_\psi = \mu_0 \cdot \frac{\Delta}{a \cdot \text{sh } \eta} \cdot \sum \frac{\partial \omega_n(\eta, \theta)}{\partial \eta} \cdot (np) \cdot \sin(np\psi) \quad (4.159)$$

Le gradient en coordonnées toroïdales fait intervenir les dérivées partielles suivant chacune des 3 coordonnées η, θ et ψ . Il faut donc calculer le gradient numérique de la solution discrète U suivant η et θ afin d'aboutir au résultat souhaité.

4.4 Validation par éléments finis

- *Modèle éléments finis*

Dans le but de valider les modèles hybrides 1D et 2D du champ magnétique à vide présentés précédemment, ils sont comparés à une simulation numérique par éléments finis sous ANSYS Electronics Desktop [54].

Les symétries du problème permettent de modéliser sur un quart de pôle (Figure 4-14). Ceci permet de réduire le temps de calcul. Le domaine d'étude est réduit à un pôle grâce aux plans de symétries (η, θ) passant entre deux pôles successifs. Puis, il est réduit à un demi pôle grâce au plan de symétrie (x, y) . Enfin, il est réduit à un quart de pôle grâce au plan de symétrie (η, θ) coupant le pôle en son milieu. Les conditions limites correspondant à ce domaine réduit sont illustrées Figure 4-14.

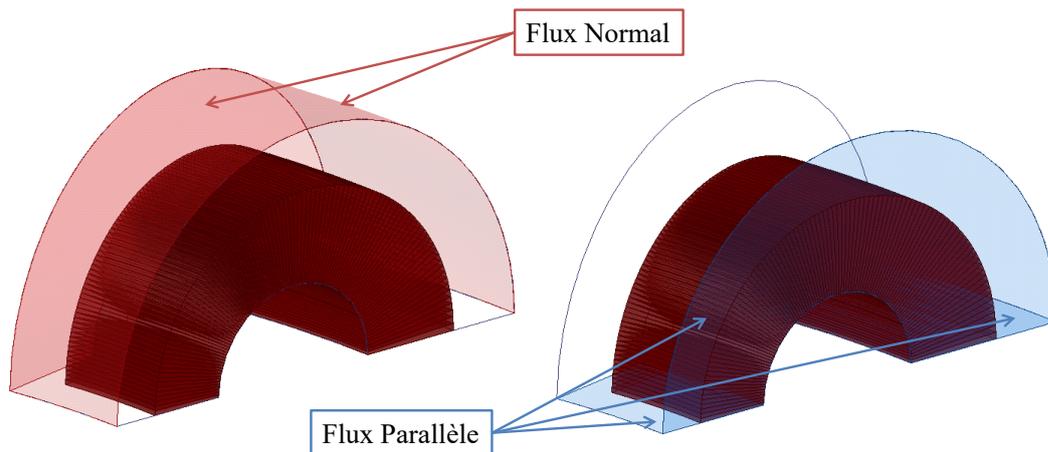


Figure 4-14 : Conditions aux limites utilisées dans la simulation éléments finis

Afin de modéliser par éléments finis le problème traité, il faut appliquer une aimantation suivant le système de coordonnées toroïdal et plus précisément suivant e_η dans notre cas. Or, ce système n'est pas un repère de travail du logiciel ANSYS Electronics Desktop [54]. Il est tout de même possible de s'en rapprocher. Pour rappel, on a vu dans la Figure 4-2 que la coordonnée η se déplace le long des sphères dessinées par les surfaces à $\theta = cste$. Ainsi, pour une sphère donnée, la direction e_η du repère toroïdal est la même que la direction e_θ du repère sphérique dont l'origine est positionnée en $(r = 0, z = a \cdot \cot \theta)$. Il est donc possible de découper l'aimant par une suite de sphères de centre $(r = 0, z = a \cdot \cot \theta)$ et de rayon $r = \frac{a}{|\sin \theta|}$ séparées par un intervalle $\Delta\theta$, comme illustré Figure 4-15.

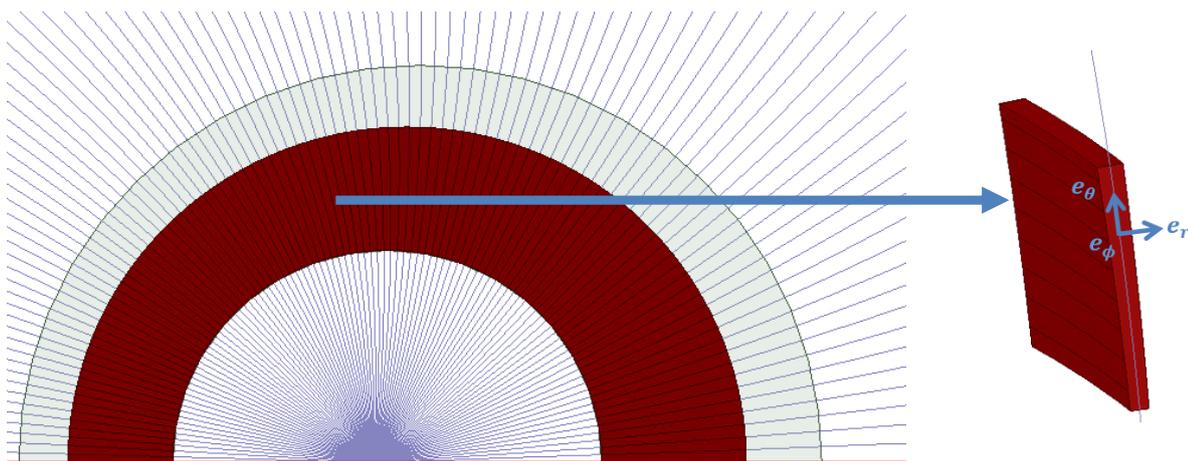


Figure 4-15 : Découpage de l'aimant en portions sphériques

Ainsi, à chaque portion est attribuée une aimantation suivant e_θ d'un repère sphérique propre à chaque portion. Chaque repère est positionné de façon à ce que l'aimantation soit exacte au milieu de chaque portion. De part et d'autre du milieu, l'aimantation diffère légèrement de l'aimantation toroïdale théorique. Cette simulation par éléments finis est donc légè-

rement éloignée de la réalité mais le nombre de portions est choisi de sorte à minimiser cette erreur. On peut donc la considérer quand même comme une référence pour la validation du modèle.

Il a été choisi de découper l'aimant en 101 portions, afin de se rapprocher suffisamment d'une aimantation parfaitement toroïdale. Un nombre impair de portions est choisi de sorte que la courbe permettant de valider le modèle suivant e_η passe parfaitement au milieu d'une portion d'aimant, là où l'approximation de l'aimantation toroïdale à une aimantation sphérique est exacte.

Afin de valider le modèle, la composante B_η du champ magnétique, celle permettant la production du couple, est comparée à celle simulée numériquement par éléments finis sur trois chemins différents. Ces chemins sont choisis de façon à comparer la composante B_η relativement à chaque coordonnée η , θ et ψ . Le premier chemin étudie la validité du modèle suivant la coordonnée η , à $\theta = \pi/2$ et $\psi = 0$ (l'origine des ψ étant choisie au milieu d'un pôle). Le second chemin étudie quant à lui la dépendance en θ , à $\eta = \eta_{gap_{moy}}$ et $\psi = 0$, où $\eta_{gap_{moy}} = \text{asinh } R_0 / (R_a/2 + R_s/2)$ correspondant à l'entrefer moyen. Le dernier chemin étudie la dépendance en ψ à $\eta = \eta_{gap_{moy}}$ et $\theta = \pi/2$. La Figure 4-16 illustre les différents chemins.

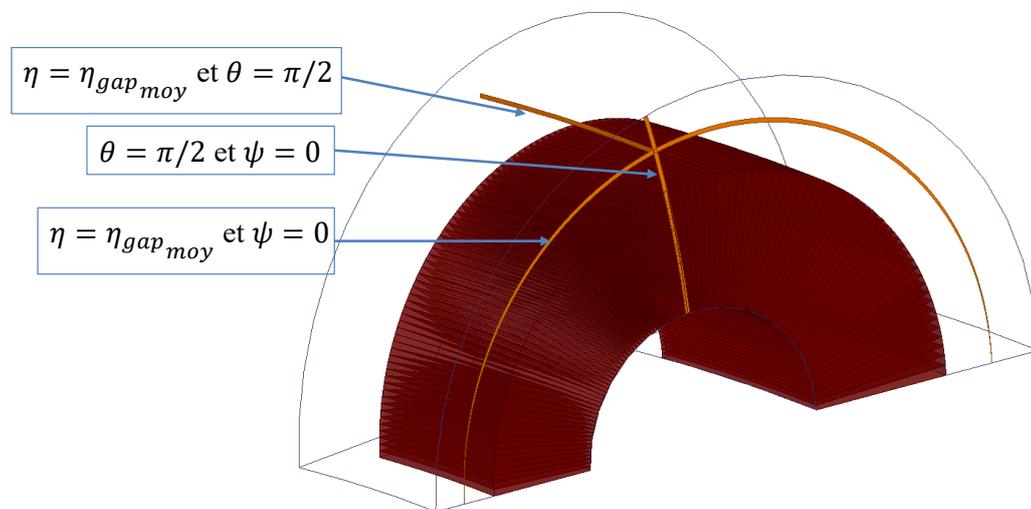


Figure 4-16 : Modélisation du quart de pôle sous Ansys Maxwell

■ Comparaison des résultats

Chaque méthode de calcul a été détaillée ainsi que le processus de validation par éléments finis. Afin de comparer les trois méthodes de calcul, les trois modèles sont appliqués à un même jeu de valeurs géométriques d'entrée. Ces valeurs sont issues du dimensionnement établi au chapitre 2 et sont données dans le Tableau 4-1. La Figure 4-17 illustre la géométrie ainsi que son maillage.

Paramètre	Symbole	Valeur
Grand rayon du tore	R_0	275 mm
Hauteur d'aimant	h_a	14.4 mm
Entrefer	e	1 mm
Rayon rotor	R_r	34.4 mm
Rayon aimants	R_a	48.8 mm
Rayon d'alésage	R_s	49.8 mm
Champ rémanent	J	1.1 T
Aimantation rémanente	M	$8.753 \cdot 10^5$ A/m

Tableau 4-1 : Paramètres de la machine toroïdale

Les modèles développés précédemment font intervenir une série de Fourier suivant ψ . Ainsi, les deux modèles hybrides sont appliqués pour un nombre d'harmoniques égal à 15. Le nombre d'harmoniques joue sur la qualité du signal final. Plus l'allure suivant ψ de la composante B_η se rapproche d'un signal carré, plus il nécessitera d'harmoniques pour se rapprocher du signal réel. Cependant, augmenter le nombre d'harmoniques augmente également le temps de calcul. On choisira donc un compromis entre temps de calcul et précision du résultat. Afin de mettre en évidence ce phénomène, les modèles 1D et 2D sont également calculés pour 35 harmoniques.

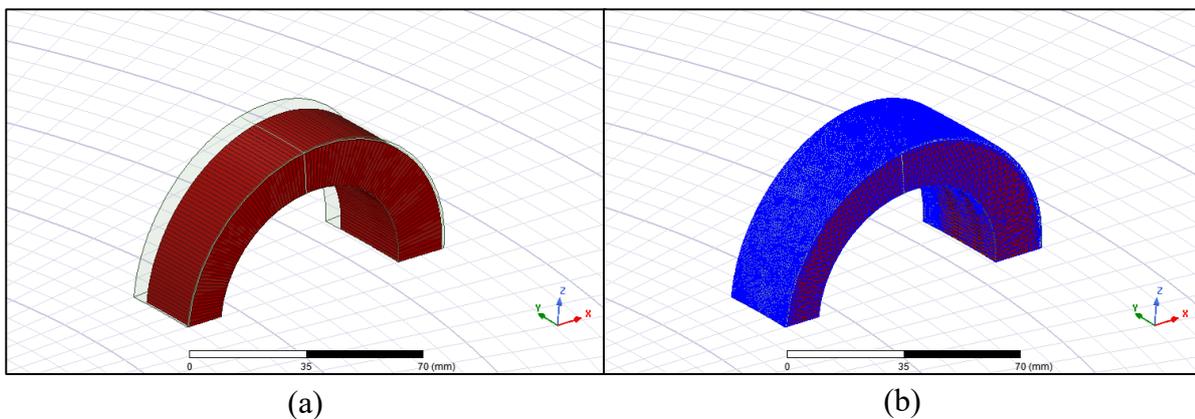


Figure 4-17 : Vue 3D du quart de pôle simulé sous Ansys Maxwell (a) ainsi que son maillage (b)

Les Figures 4-18 à 4-20 présentent les résultats des trois méthodes de calcul sur les trois chemins choisis pour la comparaison et ce pour 15 harmoniques. On constate une bonne concordance des résultats entre les trois méthodes. L'erreur quadratique moyenne entre les modèles 1D/2D, 1D/FEA et 2D/FEA sont répertoriées dans le Tableau 4-2. Tous les calculs ont été exécutés sur un PC équipé d'un processeur Intel Core i7-8650U, 1.90-2.11GHz avec 32Go de mémoire Ram. Les informations relatives au temps de calcul sont rassemblées dans le Tableau 4-3.

Les erreurs quadratiques sont faibles entre les différents modèles ce qui valide les différentes méthodes développées dans ce chapitre. Cette triple comparaison permet donc de valider à la fois :

- l'hypothèse faite pour l'établissement du modèle 1D,
- la possibilité d'utiliser la méthode hybride qui fait appel à une différence finie 2D,
- mais aussi le découpage de l'aimant toroïdal en portions et de l'approximation faite à une aimantation sphérique pour chaque portion dans le calcul par éléments finis.

La dépendance en ψ est sensiblement affectée par le nombre d'harmoniques. En effet, comme énoncé précédemment, plus on se rapproche d'un signal carré, plus le nombre d'harmoniques requis pour décrire précisément le signal est important. Le nombre d'harmoniques influe tout de même mais dans une moindre mesure pour les signaux suivants η et θ . Les résultats présentés portent sur l'étude du champ magnétique produite par les aimants permanents, de cette étude peut être déduit le couple statique et la fem pour un bobinage donné selon la méthode présentée au chapitre 1.

Erreur RMS	Modèle 1D/2D		Modèle 1D /FEA		Modèle 2D/FEA	
	15 h	35 h	15h	35h	15h	35h
Suivant η	0.47 %	0.47%	1.12 %	0.53%	0.72 %	0.45%
Suivant θ	0.54 %	0.56 %	0.87 %	0.40 %	0.43%	0.52%
Suivant ψ	0.82 %	0.89 %	4.61 %	1.39 %	4.54%	1.16%

Tableau 4-2 : Erreurs quadratiques moyennes entre chacun des modèles

	Modèle 1D		Modèle 2D		FEA
	15	35	15	35	
Nombre d'harmoniques					
Nombre de mailles	4 876 200		4 876 200		3 685 455
Temps de calcul	17s	39s	7min41s	15min02s	4h04min42s

Tableau 4-3 : Comparaison des temps de calcul entre les différentes méthodes

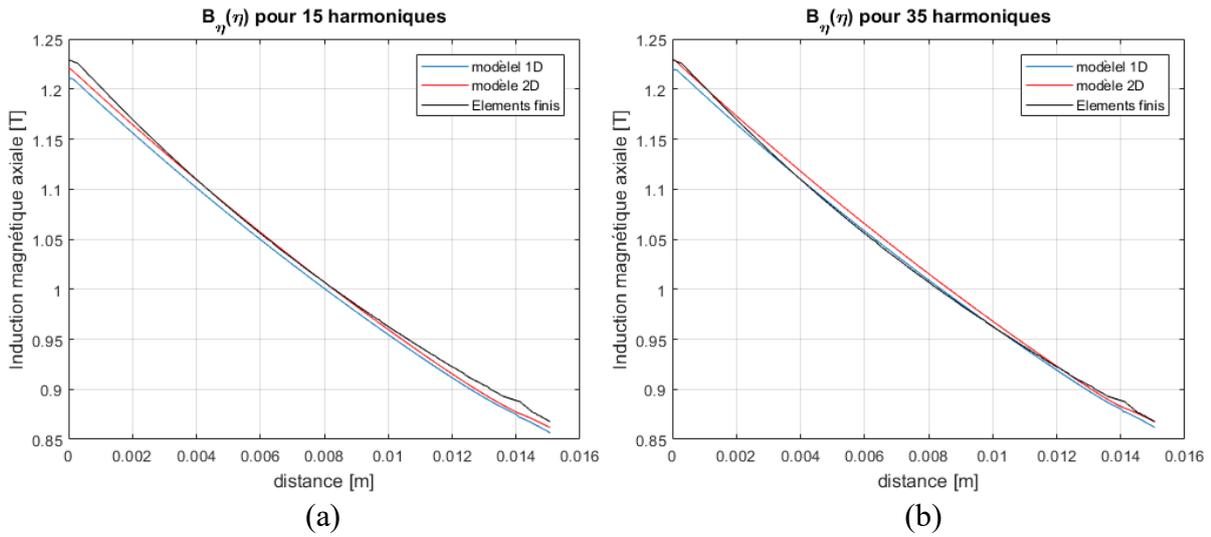


Figure 4-18 : Composante B_η suivant η : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques

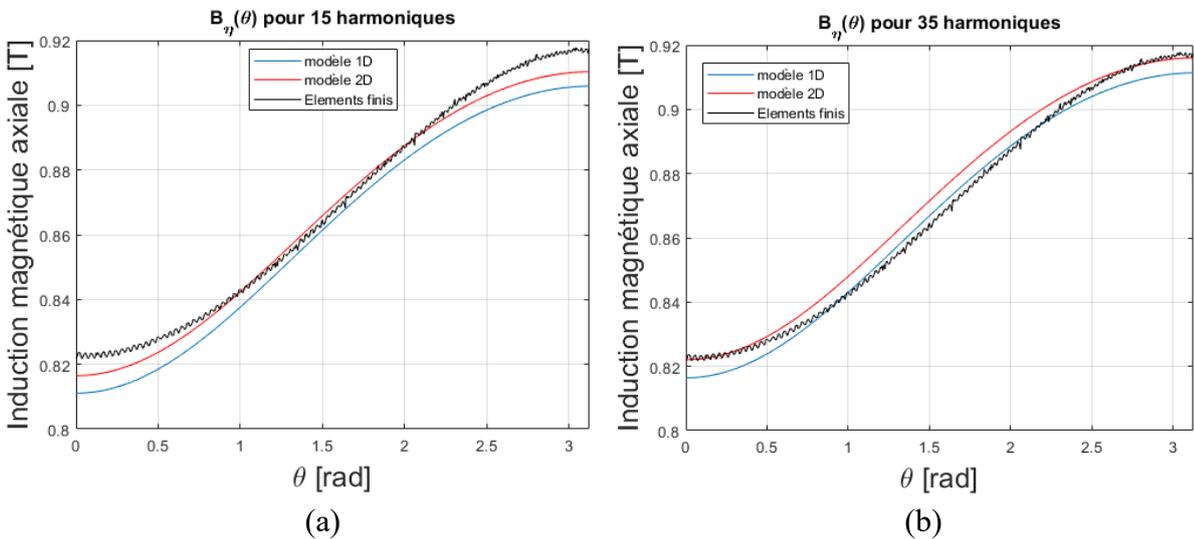


Figure 4-19 : Composante B_η suivant θ : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques

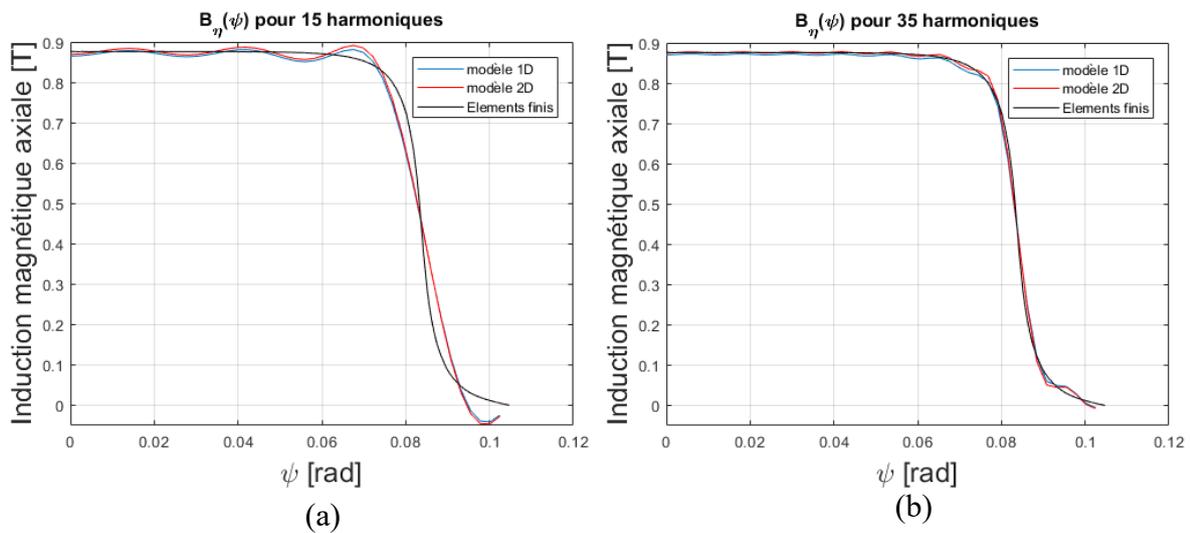


Figure 4-20 : Composante B_η suivant ψ : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques

4.5 Conclusion

Le concept de modèle hybride développé au chapitre 3 est appliqué ici au cas du repère toroïdal. Deux modèles ont été développés, l'un faisant appel à une méthode de différences finies en 1D, et l'autre en 2D. Les bons résultats obtenus montrent que le concept offre une adaptabilité pour l'appliquer à de nombreux cas de configurations géométriques de machines.

En effet, au chapitre précédent, elle a été appliquée au cas de la machine à flux axial et a permis de modéliser un grand nombre de ses aspects géométriques. Dans ce chapitre, elle a permis l'obtention d'une solution rapide dans un système R-séparable et présentant un second membre non nul. Et ce, en ayant recours soit à un modèle 1D soumis à d'hypothèses simplificatrices fortes, soit à un modèle 2D soumis à moins d'hypothèses mais plus consommateur au niveau du temps de calcul. Ce passage à la méthode de différences finies en 2D permet d'envisager de traiter des cas qui ne sont pas faisables avec la méthode en 1D et est une preuve supplémentaire de flexibilité. Le modèle hybride respecte donc l'objectif fixé de modèle unifié de calcul.

Ce chapitre clos l'étude théorique de la machine toroïdale idéale proposée dans cette thèse. L'aspect conception et l'étude de faisabilité de la machine toroïdale ont permis de déposer un brevet suite aux résultats encourageants du chapitre 2. Le point majeur restant à accomplir est l'étude des performances de la machine réelle qui a donc un comportement dégradé vis-à-vis de la machine idéale.

L'élaboration de ce modèle ouvre plusieurs portes pour continuer les travaux de cette thèse. On pourrait envisager :

- la comparaison des performances de la machine dessinée dans ce système toroïdal R-séparable avec une machine dessinée dans le système toroïdal trivial. Cette étude doit cependant être menée par simulations numériques en éléments finis,
- la comparaison avec les performances d'une machine toroïdale approximée à une machine tubulaire.

Conclusion Générale

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine des machines électriques dédiées aux systèmes embarqués où l'augmentation de la densité de puissance ou de la puissance spécifique est devenue un enjeu majeur. Dans ce cadre, nous avons pu constater que les configurations géométriques de machines à aimants permanents ont évolué et se sont diversifiées dans le sens de l'augmentation d'interaction entre le champ inducteur et les courants, interaction à l'origine du couple. Ainsi, si cette surface d'interaction augmentée, le couple augmente pour une masse de conducteur et d'aimant donnée, répondant alors aux contraintes toujours plus importantes de couple spécifique des systèmes embarqués. De cette analyse est née l'idée d'une nouvelle configuration de machine théorique présentant une géométrie toroïdale.

La version « idéale » de cette machine n'est cependant pas manufacturable. Pour récupérer le mouvement du rotor une ouverture doit être pratiquée dans sa version dite « réelle ». Cette ouverture peut dégrader les performances théoriques.

Si le couple spécifique de la machine idéale est suffisamment élevé, la conception et l'étude de la machine réelle pourront être envisagées dans les années à venir. La première problématique est donc la modélisation de la machine toroïdale qui est non référencée dans la littérature au moment de l'écriture de ce manuscrit. La deuxième problématique est la comparaison de ses performances aux machines tournantes les plus utilisées actuellement : la machine à flux radial et la machine à flux axial. Une méthode de dimensionnement unifiée doit donc être élaborée pour proposer une comparaison pertinente.

Ces deux problématiques ont conduit à axer ces travaux de recherche sur la modélisation analytique du champ magnétique à vide des machines synchrones à aimant permanents sans saillance au rotor. Les machines à flux radial conventionnelles permettent une modélisation 2D. Cependant, les machines à flux axial imposent une modélisation 3D, tout comme la nouvelle machine à flux toroïdal proposée dans cette thèse. Nous avons donc cherché à identifier une méthode de modélisation applicable à toutes configurations géométriques de machines synchrones à aimants permanents en vue de les dimensionner à partir d'un même cahier des charges et de les comparer à partir d'un même jeu de paramètres d'entrées et sous les mêmes hypothèses de modélisation.

Afin de modéliser ces différentes topologies de machines, les équations du champ magnétique à vide de ces machines doivent être résolues analytiquement. Pour cela, la méthode de séparation des variables, applicable à un grand nombre de systèmes de coordonnées et donc à différentes configurations de machine est utilisée.

Le premier chapitre développe les grands principes utilisés tout au long du manuscrit. La modélisation analytique par la méthode de séparation de variables offre une rapidité de calcul la rendant plus appropriée au dimensionnement que l'utilisation de la modélisation numérique par éléments finis. Les grands principes des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales sont rappelés permettant d'expliquer les conditions d'application de la méthode de séparation des variables. Ces principes sont appliqués d'abord au cas du repère toroïdal trivial conventionnellement utilisé et montrent que la méthode de séparation des variables ne s'applique pas à ce repère. Un nouveau repère toroïdal, où la R-séparation des variables est possible, est donc proposé.

Le chapitre 2 présente l'état de l'art de la modélisation analytique du champ à vide dans les machines existantes en se focalisant d'abord sur les modélisations en deux dimensions. Les modélisations du champ à vide des machines linéaires et tubulaires ainsi que celle des machines à flux radial et à flux axial y sont détaillées. Bien que la modélisation de machine à flux axial nécessite une étude 3D, sous certaines hypothèses, la modélisation 2D peut s'y appliquer.

Ces modélisations 2D ont permis d'appliquer une méthode de dimensionnement, initialement développée pour la machine à flux radial, aux machines tubulaires et aux machines à flux axial sous un même développement analytique unifié. La machine tubulaire présente une géométrie très proche de la machine toroïdale idéale. Sous certaines hypothèses on peut approximer le champ magnétique et ainsi le couple de la configuration toroïdale par ceux de la configuration tubulaire.

La méthode unifiée de dimensionnement appliquée aux machines à flux radial, axial et toroïdal sous hypothèses 2D a permis une première comparaison des performances des machines étudiées. Trois dimensionnements ont été réalisés, à basse vitesse et forte puissance. Les résultats ont pu démontrer un gain de l'ordre de 10% en masse, et de 15% en couple spécifique de la machine toroïdale devant les machines axiales et radiales. Ces premiers résultats encourageants permettent donc de considérer plus sérieusement la topologie présentée dans cette thèse et justifie la poursuite des travaux.

Des modèles analytiques 3D de la machine à flux axial existent et témoignent de la difficulté d'appliquer la méthode de séparation de variables au cas tridimensionnel. Une méthode alternative de résolution a alors été proposée au chapitre 3. Il s'agit d'une modélisation hybride liant la modélisation analytique par méthode de séparation des variables à la méthode des différences finies. L'utilisation d'une méthode en différences finies 1D permet de généraliser la méthode à un très grand nombre de machines axiales existantes. Afin d'illustrer notre propos, nous avons proposé, à partir de ce modèle, la prise en compte d'une forme quelconque d'aimant permanent. La méthode a ensuite été validée à la fois par simulations numériques à l'aide d'un code de calcul élément finis et par des mesures de couple sur un banc expérimental.

Le dernier chapitre est consacré au modèle de la machine toroïdale idéale. Le chapitre 1 a démontré l'impossibilité de modélisation dans le repère toroïdal trivial. Il faut donc faire appel au système R-séparable dans lequel la géométrie de la machine est légèrement modifiée.

Une fois le repère présenté ainsi que la nouvelle topologie associée, le modèle est établi en se basant sur la méthode hybride développée et validée au chapitre 3.

Cependant le modèle nécessite le recours à une hypothèse forte sur la forme de la solution. Cette hypothèse forte et le peu de références sur la modélisation analytique du champ à vide des machines électriques dans ce repère toroïdal impose une validation rigoureuse. C'est pourquoi nous avons choisi de développer un deuxième modèle hybride faisant appel à la méthode des différences finies en 2D et s'affranchissant de l'hypothèse forte du modèle 1D.

Les résultats des deux modèles hybrides sont comparés aux résultats de simulations numériques par éléments finis. Dans ces modèles analytiques hybrides, les aimantations et les interfaces de milieux sont décrites de façon simple et naturelle dans le repère toroïdal. Finalement, les deux méthodes sont comparées à une simulation par éléments finis. L'absence du repère toroïdal utilisé dans les codes de calcul par éléments finis impose là aussi certaines hypothèses sur l'aimantation, justifiant d'autant plus la comparaison entre trois modèles. Les résultats montrent une bonne concordance entre les trois méthodes, validant mutuellement les trois modèles : le modèle hybride avec une méthode différences finies 1D, le modèle hybride avec différences finies en 2D et les éléments finis. Le dernier modèle développé avec une méthode en différences finies 2D prouve l'adaptabilité du concept de modèle hybride développé dans ce manuscrit.

Finalement, ces travaux de thèse partant initialement d'un aspect structurel sur les machines électriques se sont focalisés sur la modélisation analytique du champ à vide dans les machines synchrones à aimants permanents de configurations géométriques différentes. Les nouvelles machines demandant une analyse 3D ont conduit à l'élaboration d'une nouvelle méthode hybride liant à la fois la modélisation analytique par séparation de variables et la méthode des différences finies. Elle offre un temps de calcul performant comparé aux modèles numériques par éléments finis. Elle est plus généralisable à toutes les configurations géométriques qu'un développement purement analytique en 3D.

Les premiers résultats très encourageants sur les performances de la topologie toroïdale sont tout de même soumis à de futurs travaux à mener. La première repose sur les résultats du chapitre 2 soumis à la validité de l'approximation de la machine toroïdale à la machine tubulaire. La machine toroïdale a été déclinée sous deux formes distinctes, celle dessinée dans le repère trivial et celle dessinée dans le repère toroïdal R-séparable. Cela impose donc de comparer ces trois structures afin d'en quantifier les écarts.

Le manuscrit se borne à l'étude de la machine idéale. La machine réelle présente une ouverture pour récupérer le mouvement du rotor. Cette ouverture doit rester aussi petite que possible pour se rapprocher au maximum de la configuration idéale. Cela pose donc des problématiques de conception qui n'ont pas été présentées dans cette thèse mais qui ont tout de même été étudiées et ont abouti à la rédaction d'un brevet.

En plus de cette ouverture, la réalisation de toutes les pièces présente un enjeu a priori insurmontable actuellement. On pense qu'une réalisation par segments et assemblage pourrait être possible à termes à condition d'abord de bien définir les segments élémentaires de base, ensuite de développer des techniques spécifiques de fabrication de ces segments et enfin de concevoir de nouvelles techniques pour les assembler. Le développement des techniques d'impression 3D [55], [56] peut contribuer à faciliter une telle recherche.

Au moment de l'écriture de cette thèse des chercheurs canadiens [57] ont évalué par simulations numériques à l'aide d'un code de calcul par éléments finis 3D les performances d'une machine toroïdale réelle. Le couple calculé est supérieur de 30 à 40% par rapport à ceux d'une machine à flux radial, d'une machine à flux axial de type YASA ou d'une machine à flux axial de type TORUS évaluées dans les mêmes conditions. Ces résultats associés aux nôtres montrent l'intérêt de faire des recherches pour une première réalisation de ce type machine pour en évaluer expérimentalement les performances.

Annexe : Calcul de la série de Fourier de deux variables

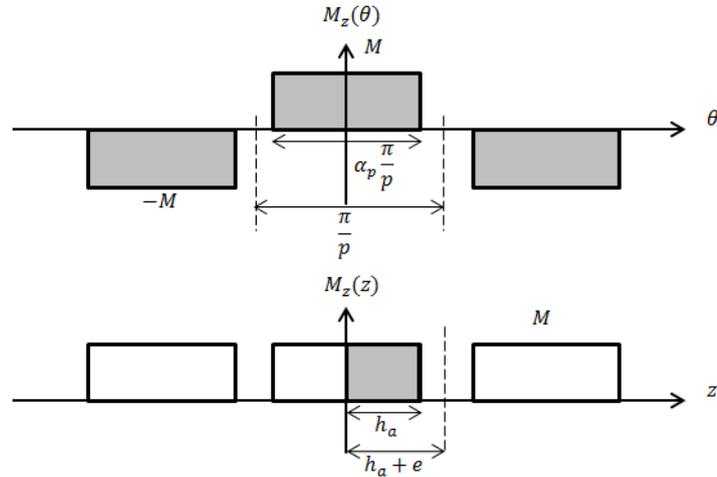


Figure 5-0-1 : Aimantation en fonction de θ et z

On écrit M_z sous la forme d'une double série de Fourier en θ et z donc les coefficients M_{nk} sont à déduire des formes d'ondes de la Fig. 5.

$$M_z(\theta, z) = \sum_n \sum_k M_{nk} \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \quad (5.1)$$

Orthogonalité des fonctions sinusoïdales :

Soit $C_t(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues, T -périodiques de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Et le produit scalaire associé $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cdot g(t) \cdot dt$

La famille $\{(t \rightarrow \cos n\omega t)_{n \in \mathbb{N}}, (t \rightarrow \sin n\omega t)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$ est orthogonale pour le produit scalaire considéré.

Démonstration :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t \cdot dt = 0 \text{ si } n \neq m$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \cdot dt = 0 \text{ si } n \neq m$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos n\omega t \cdot \sin m\omega t \cdot dt = 0 \text{ si } n \neq m$$

Les deux applications considérées sont donc 2 à 2 orthogonales.

On utilise donc l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales pour en déduire l'expression des coefficients de la série de Fourier. Pour un couple $(k', n') \in \mathbb{N}^*$ donné, on intègre

l'équation (5.1) sur une période dans les directions axiales et angulaires de la manière suivante :

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos n'p\theta \cdot \cos \frac{k'\pi}{\tau} z \, dz \cdot d\theta$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \left(\sum_n \sum_k M_{nk} \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \right) \cdot \cos n'p\theta \cdot \cos \frac{k'\pi}{\tau} z \cdot dz \cdot d\theta$$
(5.2)

Le membre de droite est donc différent de 0 seulement si $(n', k') = (n, k)$. C'est donc le cas considéré désormais. On admet que l'intégrale d'une somme infinie est égale à la somme de l'intégrale, ainsi on obtient :

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \, dz \cdot d\theta$$

$$= M_{nk} \cdot \int_{-\tau}^{\tau} \cos^2 \frac{k\pi}{\tau} z \cdot dz \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \cos^2 np\theta \cdot d\theta$$
(5.3)

Soit :

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \, dz \cdot d\theta = M_{nk} \cdot \frac{\pi}{p} \cdot \tau$$
(5.4)

La parité de $M_z(\theta, z)$ nous permet d'écrire :

$$4 \int_0^{\tau} \int_0^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \, dz \cdot d\theta = M_{nk} \cdot \frac{\pi}{p} \cdot \tau$$
(5.5)

On découpe ensuite l'intervalle d'intégration sur des segments où la valeur de $M_z(\theta, z)$ est connue :

$$\int_0^{\alpha_q \tau} \int_0^{\alpha_p \frac{\pi}{p}} M \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \cdot dz d\theta - \int_0^{\alpha_q \tau} \int_{(1-\frac{\alpha_p}{2})\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z \cdot dz d\theta$$

$$= M_{nk} \cdot \frac{\pi \tau}{4 \cdot p}$$
(5.6)

Ainsi :

$$M \left(\int_0^{\alpha_q \tau} \cos \frac{k\pi}{\tau} z dz \cdot \int_0^{\alpha_p \frac{\pi}{2p}} \cos np\theta d\theta - \int_0^{\alpha_q \tau} \cos \frac{k\pi}{\tau} z dz \cdot \int_{(1-\frac{\alpha_p}{2})\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \cos np\theta d\theta \right) \quad (5.7)$$

$$= M_{nk} \cdot \frac{\pi\tau}{4p}$$

Chaque intégrale est calculée séparément :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\alpha_q \tau} \cos \frac{k\pi}{\tau} z dz & 2 &= \int_0^{\alpha_p \frac{\pi}{2p}} \cos np\theta d\theta & 3 &= \int_{(1-\frac{\alpha_p}{2})\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \cos np\theta d\theta \\ 1 &= \left[\frac{\tau}{k\pi} \cdot \sin \frac{k\pi}{\tau} z \right]_0^{\alpha_q \tau} & 2 &= \left[\frac{1}{np} \cdot \sin np\theta \right]_0^{\alpha_p \frac{\pi}{2p}} & 3 &= \left[\frac{1}{np} \cdot \sin np\theta \right]_{(1-\frac{\alpha_p}{2})\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \\ 1 &= \frac{\tau}{k\pi} \cdot \sin k\pi\alpha_q & 2 &= \frac{1}{np} \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p & 3 &= \frac{1}{np} \left(\sin n\pi - \sin n\pi \left(1 - \frac{\alpha_p}{2} \right) \right) \\ & & & & 3 &= \frac{1}{np} \cos n\pi \sin \frac{\alpha_p}{2} n\pi \end{aligned} \quad (5.8)$$

Les équations (5.7) et (5.8) donnent alors :

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\tau}{k\pi} \cdot \sin k\pi\alpha_q \cdot \frac{1}{np} \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p - \frac{\tau}{k\pi} \cdot \sin k\pi\alpha_q \cdot \frac{1}{np} \cos n\pi \cos \frac{\alpha_p}{2} n\pi \right) \\ = M_{nk} \cdot \frac{\pi\tau}{4p} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Soit :

$$M_{nk} = \frac{4M}{nk\pi^2} \cdot \sin k\pi\alpha_q \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p (1 - \cos n\pi) \quad (5.10)$$

Or $(1 - \cos n\pi)$ vaut 2 si n est impair et 0 si n est pair, donc :

$$M_{nk(n \text{ impair})} = \frac{8M}{nk\pi^2} \cdot \sin k\pi\alpha_q \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p \quad (5.11)$$

$M_z(\theta)$ ne présente pas de valeur moyenne, cependant $M_z(z)$ oui, on calcule alors le terme pour $k = 0$, on projette donc uniquement sur des fonctions sinusoïdales en θ :

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos n'\theta \cdot dz \cdot d\theta \quad (5.12)$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \left(\sum_n M_{n0} \cos np\theta \right) \cdot \cos n'p\theta \cdot dz \cdot d\theta$$

Le calcul se développe de la même façon que précédemment, le terme de droite est différent de 0 seulement si $n = n'$:

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos n'p\theta \cdot dz \cdot d\theta = \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_{n0} \cdot \cos^2 np\theta \cdot dz \cdot d\theta \quad (5.13)$$

Le second membre se calcule facilement :

$$\int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} M_z(\theta, z) \cdot \cos n'p\theta \cdot dz \cdot d\theta = \frac{2\tau\pi}{p} M_{n0} \quad (5.14)$$

Le premier membre quant à lui donne :

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^{\alpha_q \tau} \int_0^{\frac{\alpha_p \pi}{p}} M \cdot \cos np\theta \cdot dz \cdot d\theta + 4 \int_0^{\alpha_q \tau} \int_{(1-\frac{\alpha_p}{2})\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} -M \cdot \cos np\theta \cdot d\theta \cdot dz \\ & = M_{n0} \cdot \frac{\pi}{p} \cdot 2\tau \end{aligned} \quad (5.15)$$

Soit :

$$4M \left(\alpha_q \tau \cdot \frac{1}{np} \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p - \alpha_q \tau \cdot \frac{1}{np} \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p \cdot \cos n\pi \right) = M_{n0} \cdot \frac{\pi}{p} \cdot 2\tau \quad (5.16)$$

Finalement :

$$M_{n0(n \text{ impair})} = \alpha_q \frac{4M}{nk\pi^2} \cdot \sin n \frac{\pi}{2} \alpha_p \quad (5.17)$$

L'expression de l'aimantation en fonction de θ et z est donc :

$$M_z(\theta, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} \cos np\theta \cdot \cos \frac{k\pi}{\tau} z + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_{n0} \cos np\theta \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} M_{nk} = \frac{8M}{nk\pi^2} \sin k\pi \alpha_q \sin \frac{n\alpha_p \pi}{2} \\ M_{n0} = \alpha_q \frac{4M}{n\pi} \sin \frac{n\alpha_p \pi}{2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Bibliographie

- [1] S. Touhami, « Analytical Sizing Models to Assess the Performances of High Specific Power Electric Motors for Hybrid Aircraft », 2020.
- [2] J. Pyrhonen, T. Jokinen, et V. Hrabovcova, *Design of rotating electrical machines*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] Y.-H. Yeh, M.-F. Hsieh, et D. G. Dorrell, « Different Arrangements for Dual-Rotor Dual-Output Radial-Flux Motors », *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 48, n° 2, p. 612-622, mars 2012, doi: 10.1109/TIA.2011.2180495.
- [4] Ronghai Qu, M. Aydin, et T. A. Lipo, « Performance comparison of dual-rotor radial-flux and axial-flux permanent-magnet BLDC machines », in *IEEE International Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03.*, Madison, WI, USA, 2003, vol. 3, p. 1948-1954, doi: 10.1109/IEMDC.2003.1210718.
- [5] A. Musolino, R. Rizzo, et E. Tripodi, « The Double-Sided Tubular Linear Induction Motor and Its Possible Use in the Electromagnetic Aircraft Launch System », *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 41, n° 5, p. 1193-1200, mai 2013, doi: 10.1109/TPS.2013.2244915.
- [6] V. Consolo, A. Musolino, R. Rizzo, et L. Sani, « Design of a Dual Halbach Array Tubular Linear Motor for Long Stroke and Large Force », in *2020 International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Gothenburg, août 2020, p. 647-653, doi: 10.1109/ICEM49940.2020.9270700.
- [7] M. Aydin, S. Huang, et T. A. Lipo, « AXIAL FLUX PERMANENT MAGNET DISC MACHINES: A REVIEW », p. 13.
- [8] Surong Huang, M. Aydin, et T. A. Lipo, « TORUS concept machines: pre-prototyping design assessment for two major topologies », in *Conference Record of the 2001 IEEE Industry Applications Conference. 36th IAS Annual Meeting (Cat. No.01CH37248)*, Chicago, IL, USA, 2001, vol. 3, p. 1619-1625, doi: 10.1109/IAS.2001.955751.
- [9] T. J. Woolmer et M. D. McCulloch, « Analysis of the Yokeless And Segmented Armature Machine », in *2007 IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, Antalya, Turkey, mai 2007, p. 704-708, doi: 10.1109/IEMDC.2007.382753.
- [10] « Towards optimisation of the disc-type brushless dc motor by changing the stator core structure », *ICEM 2000: international conference on electrical machines (Espoo, 28-30 August 2000).*, 2000.
- [11] Jung Moo Seo, Jong-Suk Ro, Se-Hyun Rhyu, In-Soung Jung, et Hyun-Kyo Jung, « Novel Hybrid Radial and Axial Flux Permanent-Magnet Machine Using Integrated Windings for High-Power Density », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, n° 3, p. 1-4, mars 2015, doi: 10.1109/TMAG.2014.2344044.
- [12] P. Moon et D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971.

- [13] F. Dubas et C. Espanet, « Analytical Solution of the Magnetic Field in Permanent-Magnet Motors Taking Into Account Slotting Effect: No-Load Vector Potential and Flux Density Calculation », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, n° 5, p. 2097-2109, mai 2009, doi: 10.1109/TMAG.2009.2013245.
- [14] T. Lubin, S. Mezani, et A. Rezzoug, « 2-D Exact Analytical Model for Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors With Semi-Closed Slots », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, n° 2, p. 479-492, févr. 2011, doi: 10.1109/TMAG.2010.2095874.
- [15] J. R. Hendershot et T. J. E. Miller, *Design of brushless permanent-magnet machines*. Motor Design Books, 2010.
- [16] D. Jarrot, « Contribution au développement d'outils de conception de machines synchrones à aimants permanents en vue de l'intégration convertisseur-machine. Etude des machines électriques double étoile à coupleur magnétique intégré pour une application aéronautique », 2016.
- [17] B. Nogarede, M. Lajoie-Mazenc, et B. Davat, « Modélisation analytique des machines à aimants à induit sans encoches », *Rev. Phys. Appl. (Paris)*, vol. 25, n° 7, p. 707-720, 1990, doi: 10.1051/rphysap:01990002507070700.
- [18] T. Carpi, M. Bonnet, S. Touhami, Y. Lefevre, et J. F. Llibre, « Unified Sizing Model Approach for Radial and Axial Flux Permanent Magnet Machines », in *2020 International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Gothenburg, août 2020, p. 359-365, doi: 10.1109/ICEM49940.2020.9271014.
- [19] J. P. A. Bastos et N. Sadowski, *Electromagnetic modeling by finite element methods*. CRC press, 2003.
- [20] Y. Lefevre, S. El-Aabid, J.-F. Llibre, C. Henaux, et S. Touhami, « Performance assessment tool based on loadability concepts », *JAE*, vol. 59, n° 2, p. 687-694, mars 2019, doi: 10.3233/JAE-171059.
- [21] B. Nogarède, « Etude de moteurs sans encoches à aimants permanents de forte puissance à basse vitesse », 1990.
- [22] J. L. Kirtley, A. Banerjee, et S. Englebretson, « Motors for Ship Propulsion », *Proc. IEEE*, vol. 103, n° 12, p. 2320-2332, déc. 2015, doi: 10.1109/JPROC.2015.2487044.
- [23] A. Angot, *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Masson, 1972.
- [24] P. Moon et D. Eberle Spencer, « Separability conditions for the laplace and Helmholtz equations », *Journal of the Franklin Institute*, vol. 253, n° 6, p. 585-600, juin 1952, doi: 10.1016/0016-0032(52)90682-0.
- [25] P. Moon et D. E. Spencer, « Separability in a class of coordinate systems », *Journal of the Franklin Institute*, vol. 254, n° 3, p. 227-242, sept. 1952, doi: 10.1016/0016-0032(52)90460-2.

-
- [26] G. Qishan et G. Hongzhan, « Air Gap Field for Pm Electric Machines », *Electric Machines & Power Systems*, vol. 10, n° 5-6, p. 459-470, janv. 1985, doi: 10.1080/07313568508909147.
- [27] R. Haberman, *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5th Edition. Pearson.
- [28] D. Meeker, « Finite element method magnetics ». FEMM, 2010.
- [29] A. Rahideh et T. Korakianitis, « Analytical Armature Reaction Field Distribution of Slotless Brushless Machines With Inset Permanent Magnets », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, n° 7, p. 2178-2191, juill. 2012, doi: 10.1109/TMAG.2012.2183608.
- [30] Z. Q. Zhu, D. Howe, E. Bolte, et B. Ackermann, « Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet dc Motors, Part I: Open-circuit Field », *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. 29, n° 1, p. 12, 1993.
- [31] N. Bianchi, « Analytical field computation of a tubular permanent-magnet linear motor », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, n° 5, p. 3798-3801, sept. 2000, doi: 10.1109/20.908373.
- [32] F. Giulii Capponi, G. De Donato, et F. Caricchi, « Recent Advances in Axial-Flux Permanent-Magnet Machine Technology », *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 48, n° 6, p. 2190-2205, nov. 2012, doi: 10.1109/TIA.2012.2226854.
- [33] P. Furlani, « A Method for Predicting the Field in Permanent- Magnet Axial-Field Motors », p. 6.
- [34] T. F. Chan, L. L. Lai, et Shuming Xie, « Field Computation for an Axial Flux Permanent-Magnet Synchronous Generator », *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 24, n° 1, p. 1-11, mars 2009, doi: 10.1109/TEC.2008.2011830.
- [35] S.-Y. Sung, J.-H. Jeong, Y.-S. Park, J.-Y. Choi, et S.-M. Jang, « Improved Analytical Modeling of Axial Flux Machine With a Double-Sided Permanent Magnet Rotor and Slotless Stator Based on an Analytical Method », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, n° 11, p. 2945-2948, nov. 2012, doi: 10.1109/TMAG.2012.2203112.
- [36] A. Parviainen, M. Niemela, et J. Pyrhonen, « Modeling of Axial Flux Permanent-Magnet Machines », *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 40, n° 5, p. 1333-1340, sept. 2004, doi: 10.1109/TIA.2004.834086.
- [37] H. Tiegna, Y. Amara, et G. Barakat, « A New Quasi-3-D Analytical Model of Axial Flux Permanent Magnet Machines », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, n° 2, p. 817-820, févr. 2014, doi: 10.1109/TMAG.2013.2285739.
- [38] R. Bjørk, A. Smith, et C. R. H. Bahl, « Analysis of the magnetic field, force, and torque for two-dimensional Halbach cylinders », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 322, n° 1, p. 133-141, janv. 2010, doi: 10.1016/j.jmmm.2009.08.044.
- [39] G. R. Slemon, « On the design of high-performance surface-mounted PM motors », *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 30, n° 1, p. 134-140, févr. 1994, doi: 10.1109/28.273631.

- [40] D. Gerada, A. Mebarki, N. L. Brown, C. Gerada, A. Cavagnino, et A. Boglietti, « High-Speed Electrical Machines: Technologies, Trends, and Developments », *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, n° 6, p. 2946-2959, juin 2014, doi: 10.1109/TIE.2013.2286777.
- [41] A. Tenconi, « Electrical Machines for High-Speed Applications: Design Considerations and Tradeoffs », *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, vol. 61, n° 6, p. 8, 2014.
- [42] Y. Zhilichev, « Calculation of 3D Magnetic Field Disc Type Micromotors by Integral Transform Method », *IEEE Trans. Magn.*, 1996.
- [43] Y. Huang, B. Ge, J. Dong, H. Lin, J. Zhu, et Y. Guo, « 3-D Analytical Modeling of No-Load Magnetic Field of Ironless Axial Flux Permanent Magnet Machine », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, n° 11, p. 2929-2932, nov. 2012, doi: 10.1109/TMAG.2012.2194699.
- [44] P. Jin *et al.*, « 3-D Analytical Magnetic Field Analysis of Axial Flux Permanent-Magnet Machine », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, n° 11, p. 1-4, nov. 2014, doi: 10.1109/TMAG.2014.2323573.
- [45] P. Jin, Y. Yuan, Q. Xu, S. Fang, H. Lin, et S. L. Ho, « Analysis of Axial-Flux Halbach Permanent-Magnet Machine », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, n° 11, p. 1-4, nov. 2015, doi: 10.1109/TMAG.2015.2449352.
- [46] T. Carpi, Y. Lefevre, et C. Henaux, « Hybrid Modeling Method of Magnetic Field of Axial Flux Permanent Magnet Machine », in *2018 XIII International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Alexandroupoli, sept. 2018, p. 766-772, doi: 10.1109/ICELMACH.2018.8506756.
- [47] « ANSYS Mechanical APDL Low Frequency Electromagnetic Analysis 215 Guide ». Release 17.2, août 2016.
- [48] L. del Ferraro, R. Terrigi, et F. G. Capponi, « Coil and Magnet Shape Optimization of an Ironless AFPM Machine by Means of 3D FEA », in *2007 IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, Antalya, Turkey, mai 2007, p. 927-931, doi: 10.1109/IEMDC.2007.382798.
- [49] M. Shokri, N. Rostami, V. Behjat, J. Pyrhonen, et M. Rostami, « Comparison of Performance Characteristics of Axial-Flux Permanent-Magnet Synchronous Machine With Different Magnet Shapes », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, n° 12, p. 1-6, déc. 2015, doi: 10.1109/TMAG.2015.2460217.
- [50] M. Gulec et M. Aydin, « Magnet asymmetry in reduction of cogging torque for integer slot axial flux permanent magnet motors », *IET Electric Power Applications*, vol. 8, n° 5, p. 189-198, mai 2014, doi: 10.1049/iet-epa.2013.0256.
- [51] M. Andrews, « Alternative separation of Laplace's equation in toroidal coordinates and its application to electrostatics », *Journal of Electrostatics*, vol. 64, n° 10, p. 664-672, sept. 2006, doi: 10.1016/j.elstat.2005.11.005.
- [52] G. J. Buck, « Force-Free Magnetic-Field Solution in Toroidal Coordinates », *Journal of Applied Physics*, vol. 36, n° 7, p. 2231-2235, juill. 1965, doi: 10.1063/1.1714456.

-
- [53] M. Majic, « Electrostatic T-matrix for a torus on bases of toroidal and spherical harmonics », *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 235, p. 287-299, sept. 2019, doi: 10.1016/j.jqsrt.2019.07.010.
- [54] ANSYS Corp. *ANSYS Electronics Desktop*. 2017.
- [55] K. V. Wong et A. Hernandez, « A Review of Additive Manufacturing », *ISRN Mechanical Engineering*, vol. 2012, p. 1-10, août 2012, doi: 10.5402/2012/208760.
- [56] W. Liang, L. Raymond, et J. Rivas, « 3-D-Printed Air-Core Inductors for High-Frequency Power Converters », *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 31, n° 1, p. 52-64, janv. 2016, doi: 10.1109/TPEL.2015.2441005.
- [57] M. Ibrahim, F. Bernier, et J.-M. Lamarre, « A Novel Toroidal Permanent Magnet Motor Structure with High Torque Density and Enhanced Cooling », in *2020 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Detroit, MI, USA, oct. 2020, p. 4044-4049, doi: 10.1109/ECCE44975.2020.9235406.

Table des Figures

Figure 0-1 : Vue éclatée du bobinage (a) toroïdal et (b) radial de la machine à double rotor comprenant 12 pôles au rotor et 18 encoches au stator [3]	15
Figure 0-2 : Machines à flux axial à rotor interne (a), de type TORUS (b) et de type YASA (c) [9]	16
Figure 0-3 : Machine hybride à flux radial et axial : 1 - stator, 2 – enroulements stator, 3 - rotor, 4 – aimant permanent, 5 - résine, 6 - châssis, 7 - arbre [10].....	16
Figure 0-4 : Structure de la machine hybride : (a) assemblage de la structure, (b) vue en coupe [11]	17
Figure 0-5 : Représentation 3D théorique de la machine torique idéale (a) vue complète, (b) vue en coupe	17
Figure 0-6 : Représentation de la machine torique réelle dans deux configurations : (a) rotor extérieur, (b) rotor intérieur	18
Figure 1-1 : Schéma représentatif d'une paire de pôles de la machine à flux radial avec encoches (a) ou sans encoches (b).....	23
Figure 1-2 : Fonctions périodiques pour modéliser les sources de champ magnétique dans la machine à flux radial	24
Figure 1-3 : Modélisation de la densité surfacique de courant.....	26
Figure 1-4 : Domaine d'étude et sous domaines associés	26
Figure 1-5 : condition de passage à l'interface air-fer.....	27
Figure 1-6 : Schéma représentatif du calcul du champ inducteur (a) et du champ induit (b) dans le cas d'une machine à flux radial	29
Figure 1-7 : Résumé de la méthode de calcul du couple par modélisation analytique du champ magnétique dans les machines électriques	31
Figure 1-8 : Modélisation sous forme d'ondes de la machine à flux radial	32
Figure 1-9 : Onde de Champ magnétique et de courant pour $p=1$ et pour un déphasage α entre les deux ondes.....	33
Figure 1-10 : Onde de Champ magnétique et de courant pour $p=1$ et sans déphasage entre les deux ondes	33
Figure 1-11 : Représentation de la machine toroïdale idéale dans son système de coordonnées r, θ, φ	34
Figure 1-12 : Idée de conception de la machine toroïdale.....	35
Figure 1-13 : Représentation schématique d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales quelconque [23]	36
Figure 1-14 : Coordonnées toroïdales triviales	44
Figure 2-1 : Géométrie et paramètres du problème	51
Figure 2-2 : Aimantation en fonction de x	52

Figure 2-3 : Lignes de champ de la solution par éléments finis (tracé sous FEMM)	56
Figure 2-4 : Direction du champ pour la solution analytique (tracé sous MATLAB).....	56
Figure 2-5 : Champ magnétique normale (a) et tangentielle (b) en fonction de x pour $y=e/2$.	57
Figure 2-6 : Erreur normale (a) et tangentielle (b) en fonction de x pour $y=e/2$	57
Figure 2-7 : Aimantation en fonction de x pour 188 harmoniques.....	57
Figure 2-8 : Continuité de la composante B_y à l'interface aimant-entrefer	58
Figure 2-9 : Géométrie du moteur à entrefer radial	58
Figure 2-10 : Lignes de champs obtenues par éléments finis	62
Figure 2-11 : Lignes de champs obtenues par calcul analytique	62
Figure 2-12 : Comparaison des composantes radiales (a) et tangentielles (b) du champ magnétique pour $r = R_a + e/2$	62
Figure 2-13 : Géométrie de la machine linéaire tubulaire	63
Figure 2-14 : Tracé de h en fonction de r pour $R_r = 10 \text{ cm}$ et $R_a = 13 \text{ cm}$	65
Figure 2-15 : Lignes de champs obtenues par simulation par éléments finis	66
Figure 2-16 : Lignes de champ obtenues par calcul analytique.....	67
Figure 2-17 : <i>Tracé de la composante normale et tangentielle de B pour $r = R_a + e/2$</i>	67
Figure 2-18 : vue en 3D de la machine à flux axial (a) ainsi que la coupe à rayon donné utilisée pour la modélisation en 2D.....	68
Figure 2-19 : Schémas de la machine à flux radial (a) et flux axial (b) [18].....	71
Figure 2-20 : Vue 3D (a) et vue en coupe (b) de la machine tubulaire considérée.....	72
Figure 2-21 : La machine tubulaire comme approximation de la machine toroïdale	73
Figure 2-22 : Schéma de la longueur d'une spire dans le cas de la machine tubulaire.....	75
Figure 2-23 : Schéma présentant la circulation du flux dans la culasse stator et rotor.....	77
Figure 2-24 : Schéma représentant une dent ainsi que ses dimensions	78
Figure 2-25 : Schéma représentant la géométrie du problème destiné au calcul du champ inducteur.....	79
Figure 2-26 : Géométrie du problème destiné au calcul de la réaction d'induit.....	81
Figure 2-27 : Géométrie d'un pôle de la machine tubulaire (a) et son maillage (b).....	91
Figure 2-28 : Résultat de simulation du champ inducteur de la machine tubulaire.....	92
Figure 2-29 : Champ magnétique radial au rayon d'alésage en fonction de la position axiale	92
Figure 3-1 : Schéma de la machine à flux axiale traitée dans (a) [44] et (b) [43]	97
Figure 3-2 : Schéma de la machine et vue en coupe cylindrique d'une paire de pôles	101
Figure 3-3 : Conditions aux limites de flux normal (bleu) et conditions aux limites de flux tangentiel (rouge).....	101
Figure 3-4 : Représentation en 3 dimensions des régions à considérer	102
Figure 3-5 : Principe de la méthode des images appliquée à la machine à flux axial.....	102
Figure 3-6 : Réduction du nombre de régions après application de la méthode des images .	103
Figure 3-7 : Formes d'ondes de l'aimantation dans la région II	104
Figure 3-8 : Aimantation en fonction de θ et z pour $M = 1$	105

Figure 3-9 : Schéma de principe de la discrétisation à pas variable dans la numérotation globale	107
Figure 3-10 : Conditions aux limites (rouge) et conditions de passage (orange) entre les différentes régions.	108
Figure 3-11 : La composante axiale du champ magnétique continue sur les surfaces cylindriques et discrétisées radialement	110
Figure 3-12 : Représentation d'un conducteur en fonction de sa position angulaire	111
Figure 3-13 : Conducteurs allers (Ak) et retour (Rk) d'un bobinage triphasé donné	112
Figure 3-14 :(a) Représentation en 3D du problème résolu sous Ansys Emag, (b) Représentation en 3D du maillage utilisé	113
Figure 3-15 : Composante axiale du champ magnétique sur le plan $z = ha + e/2$	114
Figure 3-16 : Composante axiale du champ magnétique sur le plan $z = ha/2$	114
Figure 3-17 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée r	115
Figure 3-18 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée θ	115
Figure 3-19 : Composante axiale du champ magnétique en fonction de la coordonnée z	115
Figure 3-20 : Bobinage triphasé (a) ramené à des phases concentrées en un fil (b).	116
Figure 3-21 : Formes d'ondes du couple statique et de la force électromotrice	116
Figure 3-22 : Temps de calcul et erreur quadratique en fonction du nombre d'harmoniques	117
Figure 3-23 : Paramétrisation d'une forme d'aimant quelconque	119
Figure 3-24 : Formes d'ondes de l'aimantation en fonction de θ et z	119
Figure 3-25 : Différentes régions du problème considéré	120
Figure 3-26 : Représentation en 3 dimensions du problème traité (a) et de son maillage (b)	123
Figure 3-27 : Modification de la forme d'aimant (a) en jouant sur α_{pr} (b)	124
Figure 3-28 : Champ magnétique sur le plan $z = ha/2$ dans le cas d'aimans (a) « trapèzes » et (b) cylindriques	125
Figure 3-29 : Tracés du champ magnétique sur le plan $z = ha + e/2$ pour trois angles $\theta = 0^\circ$, $\theta = 5.5^\circ$ et $\theta = 7.5^\circ$	126
Figure 3-30 : Tracés du champ magnétique sur le plan $z = ha + e/2$ pour trois rayons r_1 , r_2 et r_3	126
Figure 3-31 : Précision et temps de calcul en fonction du nombre d'harmoniques	127
Figure 3-32 : Moteur de drone avant assemblage (a) et assemblé (b)	127
Figure 3-33 : Banc de test utilisé pour la validation expérimentale	128
Figure 3-34 : Forme d'onde de la tension entre phases lors de l'essai à vide	129
Figure 3-35 : Tracé de force électromotrice en fonction de la position angulaire issu du modèle hybride à une vitesse de rotation $N = 3197 \text{ tr/mn}$	130
Figure 3-36 : Schéma d'alimentation des phases	131
Figure 3-37 : Instant choisi du fonctionnement en triphasé pour réaliser l'essai en continu	131
Figure 3-38 : Exemple de forme d'onde de l'image en tension du couple mesuré en fonction du temps, ici pour un courant de phase de 10A dans le cas du montage 1	132
Figure 4-1 : Surfaces à iso coordonnée du système de coordonnées toroïdales [12]	137

Figure 4-2 : Comportement des coordonnées toroïdales dans le plan Oxz.....	138
Figure 4-3 : Vues en coupe de la machine toroïdale dans le système trivial (a), et dans le système R-séparable (b).....	141
Figure 4-4 : Schéma en coupe de la machine toroïdale considérée	142
Figure 4-5 : Forme d'onde de l'aimantation en fonction de ψ	142
Figure 4-6 : Schéma de la discrétisation du problème	147
Figure 4-7 : Domaine d'étude de la méthode des différences finies 2D dans le plan η, θ	150
Figure 4-8 : Schéma de la discrétisation du problème	151
Figure 4-9 : Schéma de la discrétisation et numérotation locale	154
Figure 4-10 : Schéma de principe des conditions aux limites.....	156
Figure 4-11 : Schéma de principe des conditions de passage	157
Figure 4-12 : Schéma de principe de la condition de périodicité en $\theta = -\pi$	158
Figure 4-13 : Schéma de principe de la condition de périodicité en $\theta = \pi$	159
Figure 4-14 : Conditions aux limites utilisées dans la simulation éléments finis.....	162
Figure 4-15 : Découpage de l'aimant en portions sphériques.....	162
Figure 4-16 : Modélisation du quart de pôle sous Ansys Maxwell	163
Figure 4-17 : Vue 3D du quart de pôle simulé sous Ansys Maxwell (a) ainsi que son maillage (b).....	164
Figure 4-18 : Composante B_η suivant η : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques.....	166
Figure 4-19 : Composante B_η suivant θ : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques	166
Figure 4-20 : Composante B_η suivant ψ : (a) 15 harmoniques (b) 35 harmoniques.....	166
Figure 5-0-1 : Aimantation en fonction de θ et z	173

Liste des Tableaux

Tableau 2-1 : Données d'entrées de l'algorithme de dimensionnement unifié [18]	72
Tableau 2-2 : Récapitulatif des équations de dimensionnement des trois types de machine considérés	83
Tableau 2-3 : Paramètres d'entrées de l'algorithme de dimensionnement.....	84
Tableau 2-4 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 30 \text{ m/s}$	87
Tableau 2-5 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 30 \text{ m/s}$	87
Tableau 2-6 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 50 \text{ m/s}$	88
Tableau 2-7 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 50 \text{ m/s}$	88
Tableau 2-8 : Paramètres d'entrées du dimensionnement à $v_{lin} = 70 \text{ m/s}$	89
Tableau 2-9 : Paramètres de sorties du dimensionnement pour $v_{lin} = 70 \text{ m/s}$	89
Tableau 3-1 : Paramètres d'entrées utilisés pour la validation du modèle	113
Tableau 3-2 : Paramètres de la machine à flux axial considérée.....	125
Tableau 3-3 : Dimensions de la machine à flux axial étudiée	128
Tableau 3-4 : Résultats de mesures des deux essais à vide	130
Tableau 3-5 : Ensemble des résultats expérimentaux dans le cas du montage 2.....	132
Tableau 4-1 : Paramètres de la machine toroïdale.....	164
Tableau 4-2 : Erreurs quadratiques moyennes entre chacun des modèles	165
Tableau 4-3 : Comparaison des temps de calcul entre les différentes méthodes	165