Modélisation et interprétation des variations rapides du champ magnétique de la Terre

Guillaume Ropp

▶ **To cite this version:**

Guillaume Ropp. Modélisation et interprétation des variations rapides du champ magnétique de la Terre. Autre. Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7357 . tel-04190102

HAL Id: tel-04190102
https://theses.hal.science/tel-04190102

Submitted on 29 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse préparée
à l'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS
Université de Paris
École doctorale STEP'UP - ED N° 560
IPGP - équipe de Géomagnétisme

Modélisation et interprétations des variations rapides du champ magnétique de la Terre

par Guillaume Ropp

présentée et soutenue publiquement le
10 décembre 2021

Thèse de doctorat de Sciences de la Terre et de l'Environnement
dirigée par Vincent Lesur

devant un jury composé de :

Erwan Thébault Directeur de recherche CNRS (Université de Clermont Auvergne)	Rapporteur
Mioara Mandea Physicienne CNAP, Responsable Programme « Terre Solide » (CNES, Paris)	Rapportrice
Marianne Greff Professeur (Université de Paris, IPGP)	Examinatrice
Nicolas Gillet Chargé de recherche CNRS (Université Grenobles-Alpes)	Examinateur
Maria Alexandra Pais Professeur adjoint (Université de Coimbra, Portugal)	Examinatrice
Vincent Lesur Physicien CNAP (Université de Paris, IPGP)	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Vincent Lesur pour sa patience, mise à rude épreuve durant cette course de longue haleine. Je le remercie pour son accompagnement, son encadrement attentionné et sa pédagogie, mais aussi pour sa capacité à s'adapter à ma façon de travailler, ou du moins à s'en accommoder dans la mesure du possible.

J'adresse des remerciements particuliers à Alexandre Fournier qui m'a mis sur la voie de cette thèse, d'abord par son cours de master qui a éveillé mon intérêt pour la discipline, puis en m'orientant dans ma recherche de stage, alors que je n'avais jamais envisagé de travailler sur le champ magnétique en arrivant à l'IPGP. Merci à lui également pour ses conseils au cours de ces 4 années.

Merci à Julien Baerenzung et à Matthias Holschneider pour leur accueil à Potsdam et pour ce que j'y ai appris.

Merci à Thomas pour ses conseils et son soutien en fin de rédaction.

Je remercie également Olivier, Thomas et Alex qui m'ont accompagné dans mes premiers pas en tant qu'enseignant. Cette activité a été importante pour moi pendant ces trois ans, et l'exercer à leurs côtés a été un vrai plaisir.

Merci à toutes les autres personnes dont l'apport à cette thèse aura été déterminant, par les discussions, les cafés, les repas, les bières aux Arènes et au Baker (et de temps en temps ailleurs). Vous vous reconnaîtrez et je ne voudrais pas risquer d'oublier quelqu'un, alors je ne nommerai pas tout le monde. Une pensée particulière, quand même, pour Simon qui m'a accompagné depuis Lyon et pendant mes années à Paris ; pour Alice et Manon avec qui j'ai traversé l'année de Master avant de me lancer dans cette aventure ; pour Delphine, Marie et toute la bande du 1er qui ont

rendu la vie à l'IPGP si agréable, et enfin pour Martin et Roxane qui se sont grandement investi pour me soutenir et m'aider pendant la fin de cette thèse et sans qui elle aurait été beaucoup plus difficile.

Enfin, un grand merci à ma famille, dont le soutien inconditionnel et sur tous les plans a été tout simplement indispensable pendant toutes ces années.

« Il y a des décennies pendant lesquelles rien ne se passe ; et il y a des semaines où des décennies se produisent »

Vladimir Lénine, qui écrivait sans doute un manuscrit de thèse

Résumé

Le champ magnétique de la Terre est principalement généré et entretenu par les mouvements de convection ayant cours dans son noyau externe, liquide et conducteur, grâce au phénomène d'induction magnétique. À ce phénomène viennent s'ajouter d'autres sources de champ magnétique, telles que les courants électriques circulant dans l'ionosphère et la magnétosphère et ceux induits dans la croûte et le manteau, ou encore l'aimantation rémanente des roches de la croûte terrestre. Nombre de ces sources sont aujourd'hui bien connues grâce à des mesures de champ magnétique continues et précises, réalisées à la surface de la Terre dans les observatoires et en orbite basse à bord de satellites, ainsi qu'aux méthodes de modélisation modernes. La structure du champ du noyau notamment est bien comprise, ainsi que ses variations décennales. Les variations plus rapides, de l'ordre de l'année, restent en revanche difficilement accessibles, car la séparation des différentes sources est plus difficile à ces échelles. L'objectif de ce travail est de répondre à ce problème en construisant une série temporelle décrivant les variations du champ magnétique du noyau sur une période de 20 ans, de 2000 à 2020, avec un pas de temps de 3 mois. Nous cherchons également à retrouver à travers les données l'évolution de l'écoulement à la surface du noyau externe, responsable des variations du champ magnétique. Nous utilisons une approche séquentielle d'assimilation des données magnétiques, basée sur un filtre de Kalman lissé et une forte information a priori sur la structure des sources modélisées. Celles-ci incluent le champ du noyau et sa variation séculaire, le champ lithosphérique, les champs externes et les champs induits dans le manteau, ainsi que l'écoulement. Les données utilisées sont compilées à partir des données satellites des missions Champ (2000-2010) et Swarm (2013 à aujourd'hui), et l'ensemble des données d'observatoires terrestres disponibles sur la période. L'information a priori utilisée pour le champ du noyau et sa variation ainsi que pour l'écoulement est dérivée de résultats d'expériences de dynamos numériques. Le travail se divise en deux parties : la première consiste à calculer un modèle incluant uniquement les sources de champ magnétique, excluant l'écoulement. Ce dernier peut alors être calculé à partir du champ magnétique et de la variation séculaire obtenus. Dans la deuxième partie, nous effectuons l'estimation de l'écoulement conjointement à celle des sources magnétiques. La co-estimation de l'écoulement permet de mieux le décrire, notamment en introduisant dans le calcul l'effet des corrélations entre écoulement et champ magnétique. Une des qualités de cette approche est de pouvoir offrir en sortie des barres d'erreurs réalistes pour toutes les sources modélisées, indiquant notamment l'apport de l'analyse des données sur l'information a priori utilisée. Les résultats obtenus pour le champ du noyau, la variation séculaire et l'écoulement sont cohérents avec les connaissances actuelles et montrent la validité de l'approche. On observe de plus dans nos séries temporelles de

nouvelles variations, notamment aux petites et moyennes échelles spatiales. Des phénomènes périodiques intéressants sont observés dans les variations de l'écoulement, qui sont cependant marquées par d'importantes barres d'erreurs. Cependant, il faut pour conclure sur la nature des variations observées que le paramétrage des sources soit complet ; ainsi, il est possible d'interpréter ces variations comme des signaux provenant effectivement du noyau, ou comme des signaux étrangers au signal du noyau, non pris en compte car inconnus. L'affinage de ce paramétrage, et notamment celui des phénomènes d'induction par les champs externes dans le manteau et dans le noyau, devrait permettre de produire des résultats plus fiables. Cela permettrait d'accéder à une meilleure connaissance des phénomènes transitoires ou périodiques rapides ayant cours dans le noyau externe de la Terre.

Mots clés : Géomagnétisme, champ du noyau, dynamique du noyau liquide, problème inverse

Abstract

The Earth's magnetic field is mainly generated and sustained by the convective motion of Earth's liquid, conductive external core through magnetic induction. Other sources of magnetic fields add to the core field, such as electric currents flowing in the ionosphere and magnetosphere, those induced in the mantle and crust, and the persistent magnetisation of the lithosphere. Many of these sources are well known nowadays, thanks to precise and continuous magnetic measurements produced by magnetic ground observatories, or low orbit satellites, associated with modern assimilation methods. The core field in particular is well understood, along with its decadal evolution. Faster variations of the order of the year, however, remain hard to access, as separating the different sources becomes more challenging at these time scales. The goal of this study is to address this issue, by building a time series of core field and secular variation models, spanning 2000 to 2020 with a 3 months time step. We also aim at modelling the flow at the Earth's core surface, as it is responsible for the observed core field variations. We use a sequential approach for the assimilation of magnetic data, based on a Kalman filter and smoother, as well as strong prior information on the modelled sources. These include the core field and secular variation, the lithospheric field, fields of external origin and those induced in the mantle, as well as the surface core flow. Our data set includes satellite data from the Champ mission (2000-2010), the Swarm mission (2013- ongoing), and ground observatory data covering the whole period. Prior information for the core field, secular variation and core surface flow is derived from the output of numerical dynamo experiments. The study is divided in two parts : in the first, we build a model including only the magnetic field sources, therefore excluding the core flow. The latter can be computed by inversion of the core field and secular variation obtained through the process. In a second part, we compute the core surface flow along with the magnetic sources. The co-estimation of the flow allows us to improve its estimation, notably through the accounting of cross-correlations between the flow and magnetic field. One of the characteristics of this approach is to yield realistic error statistics as an output, which allow us to estimate the information gained through data analysis, as compared to prior information. The results obtained for the core field, secular variation and core flow are consistent with current knowledge, which validates our approach. We also observe new, interesting features in the time variations of the secular variation, especially at medium and small spatial scales. We notice periodic features in the core flow time series, although with high error bars. However, interpretation of these results as actual core field features requires a complete and fully accurate parameterisation of the sources. Signals observed in the core field might be interpreted as actual core features as well as other, un-modelled phenomena that leak into the core signal. Refi-

ning the source parameterisation should allow for more reliable results. In particular, fields created by currents induced in the mantle and core by external fields need to be better addressed. This would lead to a better understanding of the transient and periodic, fast phenomena that occur in the Earth's external core.

Keywords : Geomagnetism, core field, core flow dynamics, inverse problem

Table des matières

Introduction **13**

1 Le champ magnétique Terrestre : sources et mesures **17**
1.1 Les sources du champ magnétique 18
1.1.1 La géodynamo 18
1.1.2 Les sources externes 20
1.1.3 Les autres contributions internes 23
1.2 Mesures et données du champ magnétique 25
1.2.1 Premières mesures du champ magnétique 26
1.2.2 Observatoires magnétiques terrestres 26
1.2.3 Mesures par satellites 28

2 Modélisation du champ magnétique : méthodes et modèles **31**
2.1 Modélisation du champ magnétique 32
2.2 Description du champ magnétique : principes mathématiques 34
2.2.1 Description spatiale du champ 34
2.2.2 Modélisation des variations temporelles 35
2.3 Méthodes de modélisation 37
2.3.1 Chaos 37
2.3.2 Le Modèle Complet du champ magnétique 39
2.3.3 Cov-Obs 40

3 Données **43**
3.1 Données disponibles 44
3.2 Sélection des données 44

3.3 Variance des données 47

4 Modélisation séquentielle du champ magnétique 49
4.1 Paramétrage 50
4.1.1 Paramétrage en temps 50
4.1.2 Paramétrage des sources 50
4.2 Modélisation 53
4.2.1 Analyse 54
4.2.2 Prédiction 55
4.2.3 Lissage 56
4.3 Résultats 56
4.3.1 Résidus 57
4.3.2 Modèles 59
4.3.3 Temps caractéristiques 60
4.4 Modèle candidat pour l'IGRF 13 64

5 Estimation et co-estimation de l'écoulement 67
5.1 Inversion de l'écoulement à partir des séries de champ magnétique et de variation séculaire 68
5.1.1 Méthode 68
5.1.2 Résultats 71
5.2 Co-estimation de l'écoulement et du champ magnétique 76
5.2.1 Méthode 76
5.2.2 Résultats 78
5.2.3 Discussion 84

Conclusion 85

Annexes 89
Article publié : Ropp et al. (2020) 89
Annexe : Opérateur de prédiction et matrice de covariance de l'erreur de prédiction associée 105

Introduction

Le champ magnétique de la Terre est un phénomène physique qui se manifeste et qui est mesurable en tout point de l'espace, dans une zone délimitée autour de la Terre. Il est produit par un ensemble de sources diverses, qu'on répartit habituellement entre les sources d'origine "interne" (situées à la surface de la Terre ou au-dessous) et les sources dites "externes". Ainsi, toute mesure de ce champ magnétique est le résultat des contributions de l'ensemble de ces sources. La localisation des principales sources est représentée schématiquement sur la figure 1.

Elles sont issues de phénomènes physiques très différents, et présentent donc des structures spatiales et des variations temporelles très diverses. Parmi les sources internes, on trouve la source principale du champ magnétique terrestre : la géodynamo. Des mouvements de convection turbulents agitent le noyau externe, liquide de la Terre, composé majoritairement de fer (*Fluid Core* sur la figure 1). La géodynamo, ou dynamo terrestre, est le mécanisme par lequel ces mouvements entretiennent et modifient un champ magnétique qu'on appellera ici le champ du noyau. Ces mouvements de fluide évoluent sur des échelles de temps allant de l'ordre du million d'années (pour les inversions par exemple) voire plus, à celui de l'année ou au dessous. Cela signifie qu'il est possible en principe d'observer des variations du champ magnétique de la Terre à des échelles de temps tout aussi variées. Cette relation entre champ et écoulement dans le noyau implique aussi qu'il est théoriquement possible d'accéder au champ de vitesse à la surface du noyau externe à partir de l'observation du champ magnétique. Les variations lentes (de l'ordre du million d'années au siècle) sont aujourd'hui assez bien connues, quoique souvent difficiles à documenter par la difficulté d'accès et d'exploitation des données. Il est nécessaire pour y accéder de s'intéresser à l'aimantation des roches (sédiments, roches volcaniques, ...) ou à des objets archéologiques, ce qui relève des domaines du paléomagnétisme et de l'archéomagnétisme. Un exemple bien connu est la mise en évidence des inversions du champ magnétique

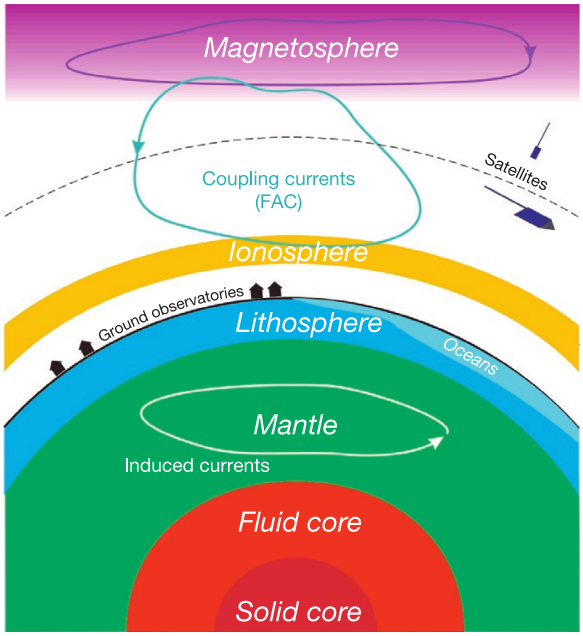

FIGURE 1 – Représentation schématique de l'origine des principales sources de champ magnétique mesurables à la surface de la Terre. Figure tirée de Hulot et al. (2007)

par l'étude de l'aimantation des roches basaltiques du plancher océanique (Gee and Kent, 2007). Les variations plus rapides (de la décennie à la seconde) du champ total (c'est à dire la somme des différentes contributions) sont aujourd'hui bien connues, grâce à des méthodes de mesure modernes très précises, et grâce à des mesures effectuées en continu à de nombreux endroits du globe – via les observatoires terrestres, et depuis l'orbite basse, via les missions satellites. Les signaux issus des différentes sources présentent des caractéristiques qui sont souvent distinguables, et on peut alors les séparer en filtrant le signal mesuré par échelle de temps ou d'espace. Cependant, lorsque les échelles se chevauchent comme cela peut être le cas pour les plus petites échelles de temps du champ du noyau, il est nécessaire de disposer d'une information supplémentaire et plus précise sur la morphologie des sources modélisées, qui peut être dérivée de considérations théoriques. C'est l'objet principal du travail présenté ici.

L'objectif de cette thèse est de modéliser les variations inter-annuelles du champ du noyau. Nous proposons une méthode qui permet la séparation des différentes contributions du champ total avec une résolution temporelle de l'ordre de l'année, par assimilation séquentielle des données magnétiques. Nous visons également à modéliser le champ de vitesse à la surface du noyau externe, dans le but de mettre en évidence des éléments de la dynamique rapide de cet écoulement. Ce manuscrit décrit les

principes et la mise en place de cette méthode et en rapporte les résultats. Dans le chapitre 1, nous listons et décrivons plus en détail les principales sources externes et internes du signal magnétique mesurable à la surface de la Terre. Il est nécessaire de connaître les morphologies de ces différentes sources, leurs intensités, et les vitesses de leurs évolutions temporelles respectives afin d'être capable de les séparer et d'isoler celle qui nous intéresse – ici le champ du noyau.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les méthodes les plus courantes pour modéliser le champ magnétique. Les choix de représentation mathématique du champ magnétique en espace et en temps ont une grande influence sur la capacité des modèles à rendre compte des caractéristiques des signaux réels. En particulier, la recherche d'une résolution temporelle plus importante, qui reproduise fidèlement les variations rapides du champ du noyau représente actuellement un défi. Dans les chapitres 3 et 4 nous décrivons la méthode proposée dans ce travail ainsi que les données utilisées pour la construction de notre modèle. Le chapitre 5 poursuit l'analyse en s'intéressant à la modélisation de l'écoulement à la surface du noyau, et cela par deux approches : l'estimation du champ de vitesse à partir des modèles de champ magnétique calculés dans le chapitre 4, puis le calcul conjoint du champ magnétique et de l'écoulement ; on parle alors de co-estimation. Dans cette seconde approche, le fait de calculer l'écoulement à partir des données magnétiques doit apporter une contrainte supplémentaire sur le calcul du champ magnétique, et donc affiner l'estimation de ce dernier. Enfin, nous concluons sur les apports de cette méthode, sur ses limites actuelles et les futures développements nécessaires.

Chapitre 1. Le champ magnétique Terrestre : sources et mesures

Ce chapitre présente d'abord les principales contributions au champ magnétique de la Terre, tel que mesuré à sa surface (section 1.1). Les phénomènes leur donnant naissance, leur localisation et leurs caractéristiques sont décrites. On abordera dans un premier temps le champ du noyau, généré par la dynamo terrestre, puis les autres contributions : les champs magnétosphériques, ionosphériques, le champ lithosphérique, et d'autres contributions mineures internes. Le chapitre aborde ensuite la question de l'observation du champ magnétique terrestre (section 1.2) : depuis quand et comment le mesure-t-on, comment ces mesures ont-elles évolué, et quels outils avons-nous à notre disposition aujourd'hui ? Comment cela a-t-il influencé notre connaissance du champ magnétique et notre capacité à le modéliser ?

1.1 Les sources du champ magnétique

1.1.1 La géodynamo

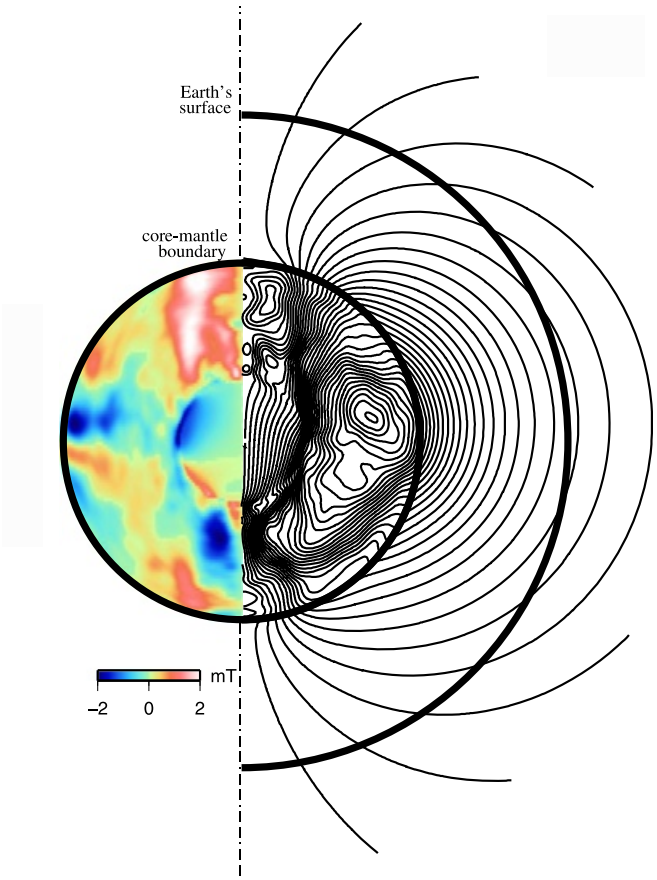

FIGURE 1.1 – Représentation du modèle de champ du noyau de Fournier et al. (2015). En couleur (partie gauche) : composante toroïdale ou azimutale du champ magnétique à l'intérieure du noyau. Lignes de champ : lignes du champ poloïdal dans et à l'extérieur du noyau. Figure : Fournier et al. (2015)

La part principale du champ magnétique terrestre est constamment entretenue par l'effet dynamo, un phénomène qui a cours dans le noyau externe de la Terre. Le noyau externe est une zone du globe située directement en bas du manteau terrestre, et qui entoure une graine solide, le noyau interne. Il est délimité en haut par la limite noyau-manteau aussi appelée discontinuité de Gutenberg ou *Core-Mantle Boundary* (CMB) en anglais, et en bas par la discontinuité de Lehmann, ou *Inner Core Boundary* (ICB). Composé majoritairement de fer liquide (Jones, 2015 ; Olson, 2015), il est

agité de mouvements turbulents, entretenus par deux moteurs : la convection thermique et la convection chimique. La convection thermique est due à la différence de température entre ses limites (refroidissement séculaire par la surface du noyau, et réchauffement dû à la chaleur latente de cristallisation de la graine). Ce gradient de température cause une instabilité, qui se résout dans le régime terrestre par le déclenchement d'un écoulement convectif. La convection chimique fonctionne de manière similaire, et trouve son origine dans l'injection d'éléments légers due à la cristallisation de la graine (Jones, 2015). En présence d'un champ magnétique pré-existant, le déplacement de fluide conducteur génère des courants électriques, qui donnent eux-même lieu à un champ magnétique. Ce phénomène est dû au couplage entre courants et champ magnétique prévu par les équations de la magnétohydrodynamique, dont les principes et l'application à la géodynamo sont décrits notamment par Roberts (2015).

De ce phénomène résulte la présence d'un champ global principalement dipolaire, dont l'intensité varie d'environ 25 000 à 70 000 nT à la surface de la Terre. Les lignes de champ caractéristiques du champ du noyau sont représentées sur la figure 1.1. Si sa structure est globalement dipolaire, des écarts au dipôle plus ou moins importants existent à différentes échelles. Comme on l'observe sur la figure 1.1, le dipôle est visible à grande distance du noyau, mais est dominé par des structures complexes de petite échelle à mesure qu'on se rapproche de la surface du noyau. Les pôles ne sont pas rigoureusement ceux d'un dipôle géométrique, mais peuvent se déplacer indépendamment l'un de l'autre. Le pôle Nord notamment, est connu pour sa dérive, particulièrement importante ces dernières années (Livermore et al., 2020). La composante dipolaire du champ magnétique dans son ensemble connaît également une décroissance continue, instable et peu prédictible car soumise à la dynamique chaotique de la géodynamo (Finlay et al., 2016 ; Gubbins et al., 2006). Outre les variations du quasi-dipôle, le champ du noyau est également agité par des variations locales et globales, qui peuvent être relativement stables dans le temps, comme l'anomalie de l'atlantique Sud décrite notamment par Finlay et al. (2020), ou être des phénomènes transitoires comme les secousses d'accélération ou *jerks* (Chulliat and Maus, 2014) ou bien encore périodiques, comme les ondes de torsion (Cox et al., 2014). Les phénomènes ondulatoires rapides ayant cours dans le noyau sont un objet d'étude actuel, aussi bien dans le domaine de la simulation numérique que dans celui de l'assimilation de données (Gillet et al., 2010). Mais le champ observé à la surface de la Terre ne varie pas que sous l'effet de la dynamique du noyau liquide. L'interaction du champ global avec l'environnement proche de la Terre donne lieu à de nombreuses sources de signaux, internes et externes. Celles-ci sont abordées dans les sections suivantes.

1.1.2 Les sources externes

Les sources externes sont définies ici comme les phénomènes produisant un champ magnétique et ayant cours au dessus de la surface de la Terre. Ils résultent essentiellement de courants circulant dans la magnétosphère et dans l'ionosphère.

1.1.2.1 La magnétosphère

La magnétosphère est une zone de l'espace située au-delà de l'ionosphère. C'est la première zone dans laquelle le champ magnétique mesurable est dominé par le champ terrestre lorsqu'on s'approche de la Terre. Elle est délimitée par la magnétopause, comme schématisé sur la partie gauche de la figure 1.2, qui représente sa structure globale, à grande échelle.

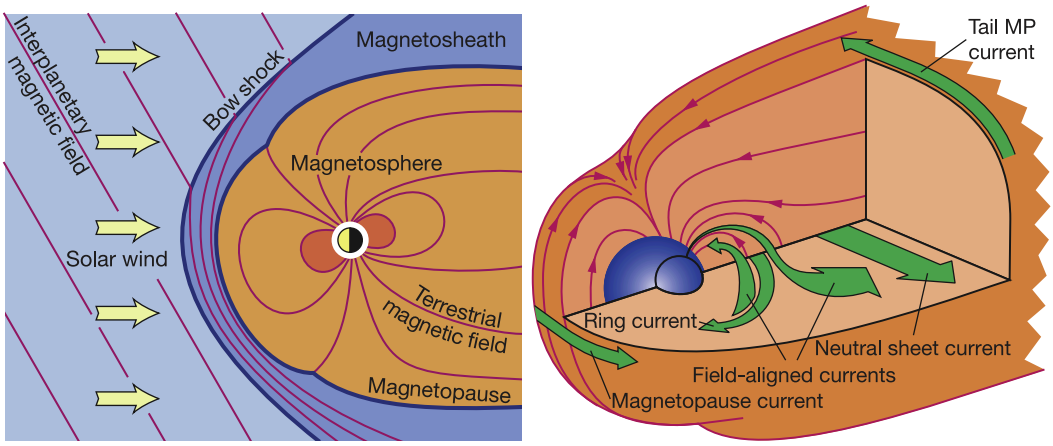

FIGURE 1.2 – Figure de gauche : Structure à grande échelle de la magnétosphère et schéma de l'interaction avec le vent solaire. Le courant annulaire est compris dans la zone orange foncé directement adjacente à la Terre. Figure de droite : Schématisation des principaux systèmes de courants ayant cours dans la magnétosphère : courant de la magnétopause, courant annulaire, courants alignés (ou courants de Birkeland), courants de queue de la magnétopause et les courants de la couche neutre associés. Figures tirées de Baumjohann and Nakamura (2007).

Au-delà de cette limite, le champ magnétique terrestre n'est plus mesurable et le champ interplanétaire domine. Ce dernier est principalement constitué par un champ porté par le vent solaire, un flux de plasma (principalement des électrons et protons, et en moindre quantité de l'hélium) éjecté à une vitesse de plusieurs centaines de km/s de la couronne solaire. Il transporte avec lui des lignes de champ qui déforment le champ magnétique terrestre en arrivant à son contact. Celui-ci adopte alors une structure asymétrique entre la partie qui fait face au Soleil, compressée par l'interaction avec le

vent solaire, et la queue qui s'étend à plusieurs dizaines de rayons terrestres à l'opposé du Soleil (Baumjohann and Nakamura, 2007) (voir figure 1.2).

Le système vent solaire-magnétosphère-ionosphère donne lieu à de nombreux couplages et phénomènes d'échelles spatiales et temporelles variables (Ganushkina et al., 2018). Les principaux systèmes de courant circulant dans la magnétosphère sont schématisés sur la partie droite de la figure 1.2. La plupart de ces phénomènes se voient fortement perturbés lors de pics d'activité solaire. Ainsi l'observation du champ interne se fait préférentiellement lors des périodes calme.

La déformation des lignes de champ du dipôle par l'interaction avec le vent solaire crée un flux magnétique, qui induit des courants que l'ont appelle courants de la magnétopause (*magnetopause current* sur la partie droite de la figure 1.2). Les courants de queue, *tail current* et *cross-tail current*, se manifestent du côté nuit.

Lorsque le champ magnétique interplanétaire (IMF) arrive au contact de la magnétosphère, s'il est dirigé dans le sens nord-sud, il peut se connecter avec les lignes de champ terrestre fermées, ce qui a pour effet de les ouvrir et de les étirer en les entraînant vers la queue. Les lignes de champ se recombinent ensuite à l'arrière de la magnétosphère. La ligne ainsi recombinée se relâche et revient sur la position du dipôle, transportant avec elle du plasma. Ce transport de plasma équivaut dans le référentiel de la Terre à un champ électrique. Le courant annulaire est généré par la dérive de particules extraites du vent solaire et piégées le long des lignes de champ du dipôle. Il est présent dans une région située entre 4 et 6 rayons terrestres. Il possède comme axe de rotation l'axe du dipôle magnétique principal. Ce courant génère un champ magnétique de direction opposée à la composante nord-sud du champ terrestre, qui se voit donc atténuée aux basses latitudes. On rend compte de cette atténuation grâce à l'indice Dst, calculé à partir des mesures de 4 observatoires terrestres situés entre +40° et -40° de latitude. L'indice Dst est défini initialement par Sugiura (1964) et a été utilisé par Langel (1985) et Langel and Estes (1985b) pour la modélisation du champ externe proche et de son champ induit. L'indice Dst est calculé par le *World Data Center (WDC) for Geomagnetism*[1] de l'université de Kyoto et distribué en collaboration avec l'ISGI (*International Service of Geomagnetic Indices*[2]. Lors d'un pic d'activité solaire, une plus grande quantité de particules sont injectées dans le courant annulaire, ce qui intensifie l'effet négatif sur la composante nord-sud du champ terrestre.

La magnétosphère et l'ionosphère interagissent via certains phénomènes de couplages. Les courants alignés ou courants de Birkeland (*field-aligned currents* en anglais) apparaissent près des pôles. Ils assurent un couplage énergétique entre la magnétosphère et l'ionosphère et circulent le long des lignes de champ (voir figure 1.2).

1. http ://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/
2. http ://isgi.unistra.fr/indices_dst.php

1.1.2.2 L'ionosphère

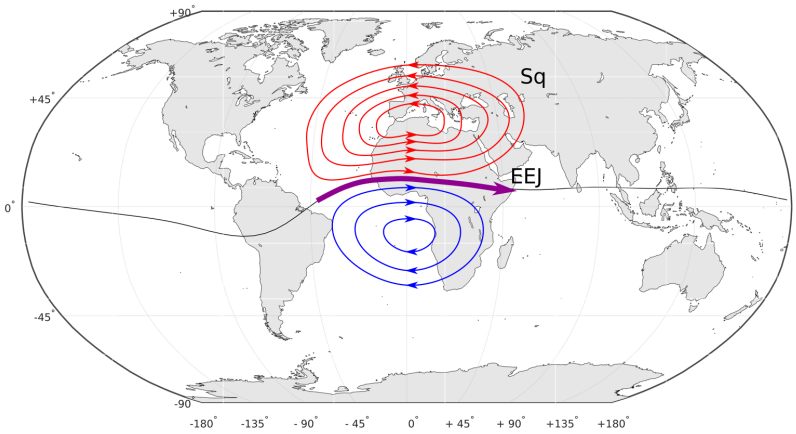

FIGURE 1.3 – Représentation schématique de la circulation des courants Sq dans chacun des hémisphères, et de l'électrojet équatorial (EEJ), en partie couplé à ces courants. Figure proposée par Fillion (2020)

L'atmosphère terrestre est ionisée sous l'effet de la lumière ultra-violette provenant du Soleil. Lorsqu'elle est suffisamment dense, les collision fréquentes entre particules permettent la recombinaison des ions en molécules neutres. Au-delà de 80km cependant (Baumjohann and Nakamura, 2007), la faible densité de l'atmosphère rend ces collisions trop rares, et l'ionisation devient persistante, donnant naissance à l'ionosphère. Cette portion de l'atmosphère est subdivisée en plusieurs sous-couches dont les réponses à l'ionisation solaire sont variables. La plus haute couche de l'ionosphère est appelée la couche F. Elle est ionisée en permanence mais voit son épaisseur augmenter durant le jour. La couche E, située en dessous, est la plus basse couche significativement ionisée. Sa concentration en ions baisse significativement durant la nuit. La couche D est la plus basse couche de l'ionosphère. Elle n'est que faiblement ionisée (les atomes neutres y sont bien plus nombreux que les ions) et disparaît quasi-totalement durant la nuit. Ainsi, observer le champ magnétique de nuit permet de s'affranchir d'une grande partie des perturbations engendrées par l'activité magnétique de l'ionosphère. Les quelques perturbations rémanentes sont en générale suffisamment localisées et rapides pour ne pas interférer avec l'observation du champ principal aux latitudes moyennes et basses. Cependant, certains systèmes de courants de grande échelle créent des signaux importants, qui doivent être traités afin de les séparer du champ interne.

La dynamique de la région E de l'ionosphère est soumise à la circulation atmosphérique. Elle est animée par ses propres vents qui circulent indépendamment des

effets magnétiques. De plus le contact entre cette région et les couches supérieures de l'atmosphère non-ionisée entraîne un couplage entre leurs mouvements respectifs. Les mouvements relatifs entre les ions et les électrons de la couche E générés par ces vents et par ce couplage créent un effet dynamo qui produit plusieurs courants, aux latitudes moyennes et basses. Le courant Sq, pour *Solar quiet*, est un système de courants dominant les moyennes latitudes. Il se manifeste par deux vortex de sens opposés, l'un dans l'hémisphère nord (sens anti-horaire) et l'autre dans le sud (sens horaire) comme représenté sur la figure 1.3. Dans la continuité des courants Sq, il existe au niveau de l'équateur un courant de plus forte amplitude, l'électrojet équatorial (EEJ), se déplaçant d'ouest en est. Ces courants sont surtout visibles du côté jour et varient fortement au cours de la journée (Yamazaki and Maute, 2018). L'électrojet équatorial a pour effet d'affaiblir la composante horizontale du champ magnétique terrestre autour de l'équateur. On note aussi la présence de deux électrojets polaires, des courants horizontaux qui circulent à une altitude d'environ 100km, autour des deux pôles magnétiques. Ils sont les systèmes de courant dominants aux pôles et sont fortement affectés par l'activité solaire.

1.1.3 Les autres contributions internes

Nous avons vu que la majeure partie du champ magnétique observable est générée par le noyau, et qu'à ce signal se superposent de nombreuses contributions externes, issues de l'ionosphère et de la magnétosphère. D'autres contributions trouvent cependant leur origine au niveau de la surface de la Terre ou au-dessous. Elles sont dues à l'aimantation des roches de la croûte, à l'induction de courants dans le manteau par les champs externes, ou encore à la circulation de courants océaniques.

Champ océanique

Le caractère hautement conducteur de l'eau salée permet aux océans d'interagir avec le champ magnétique terrestre. Une conséquence bien connue de cette interaction est le signal des marées océaniques. Les marées occasionnent un déplacement d'eau par rapport au champ global. Cela génère des courants électriques, qui génèrent à leur tour un champ magnétique, de façon analogue à l'effet dynamo ayant lieu dans le noyau ou dans l'ionosphère. Le signal correspondant est observable et peut être extrait des données magnétiques mesurées par satellite, comme l'a montré Tyler et al. (2003). Assez faible (de l'ordre du nT à la surface), sa structure et sa périodicité régulières permettent de le séparer du champ principal.

Champ lithosphérique

Le champ lithosphérique n'est quant à lui pas dû à des courants électriques mais à l'aimantation permanente des roches de la croûte. Les propriétés magnétiques de ces roches ferro- et ferri-magnétiques permettent la conservation d'un champ magnétique par aimantation, ainsi que l'induction de champs par couplage avec un champ extérieur. Ces propriétés sont conservées tant que les matériaux se trouvent en dessous de leur température de Curie, au dessus de laquelle l'agitation thermique détruit l'ordre magnétique. On définit donc comme profondeur de Curie la profondeur à laquelle les propriétés magnétiques de la croûte et du manteau supérieur disparaissent. Cette profondeur varie fortement en fonction de la position, et correspond en général approximativement à l'épaisseur de la croûte ou légèrement en-dessous : 30-40km sous les continents, 5km sous la croûte océanique. Le champ lithosphérique s'est donc construit au cours de l'histoire géologique de la Terre. En conséquence, il évolue essentiellement sur des échelles de temps très longues, et cette évolution n'apparaît pas dans les données que nous utilisons (Thébault et al., 2010). Sa structure est également caractérisée par une contribution importante des échelles spatiales plus petites, très variées et difficiles à caractériser. Du fait de cette structure en petites échelles, ce champ subit une atténuation forte avec l'altitude. Son intensité, de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de nT, varie fortement autour du globe, sous l'effet des propriétés locales de la croûte et du manteau supérieur. Certaines de ces variations peuvent fortement perturber l'observation du champ global, comme par exemple dans la région de Koursk en Russie, où un important gisement de fer est à l'origine d'une anomalie importante du champ magnétique, de l'ordre de plusieurs dizaines de μT (Jankowski and Sucksdorff, 1996 ; Taylor and Frawley, 1987).

La figure 1.4 présente une carte de la composante radiale du champ lithosphérique tel qu'observé en orbite basse (à 6671.2 km, altitude de l'orbite du satellite Champ).

Champs induits

Les structures magnétiques de grande échelle générées dans la magnétosphère peuvent être "vues" par la partie interne de la Terre (manteau, noyau). Les variations de ces champs peuvent donc induire des courants dans les parties conductrices de la croûte, des océans, du manteau ainsi que dans le noyau de la Terre. Ces courants génèrent alors des champs magnétiques secondaires qui peuvent être perçus comme des champs internes. La prise en compte de ces champs est nécessaire à la compréhension complète du champ du noyau. Cependant, leur modélisation exacte requiert une connaissance préalable de leur source (champs magnétosphériques) ainsi que des propriétés conductrices du milieu qui leur donne naissance. En l'occurrence, la struc-

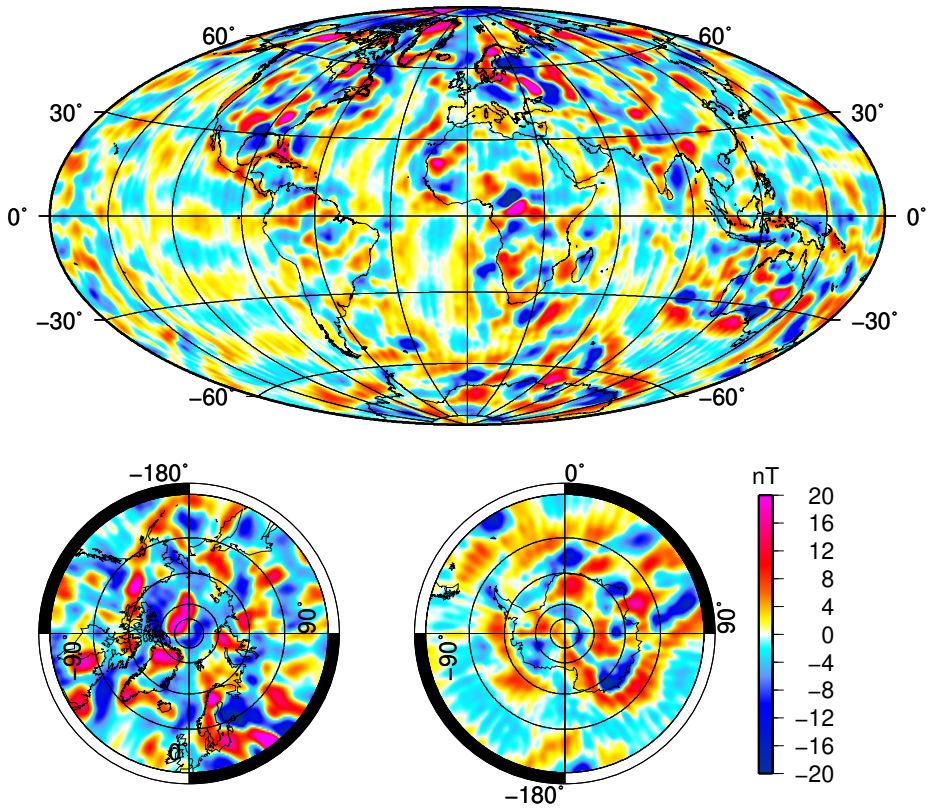

FIGURE 1.4 – Carte de la composante haut-bas du champ lithosphérique observé en orbite basse (6671.2 km). Modèle et figure de Lesur et al. (2013).

ture de la conductivité du manteau est très mal connue, rendant difficile une telle analyse.

1.2 Mesures et données du champ magnétique

Le champ magnétique se manifeste comme un champ vectoriel mesurable en tout point de l'espace. Sa mesure s'est développée tout au long de l'histoire, via des méthodes aussi diverses que les besoins auxquels elle peut répondre.

Une donnée magnétique peut se présenter de différentes manières. La connaissance d'un champ vectoriel en un point nécessite celle de ses 3 composantes dans une base choisie. On peut par exemple décomposer le vecteur champ dans la base Nord, Est, Centre, (souvent notée X,Y,Z) c'est à dire la valeur du champ dans les directions Sud-Nord, Ouest-Est et vers le centre de la Terre, respectivement. Une base plus utilisée historiquement est la base cylindrique, composée par la déclinaison – c'est à dire

l'angle formé entre la composante horizontale et le nord géographique, la composante horizontale elle-même et la composante centre à nouveau. On peut également mesurer la déclinaison, l'inclinaison (angle formé entre le vecteur et le plan horizontal, et positif vers le bas) et l'intensité absolue.

1.2.1 Premières mesures du champ magnétique

L'instrument de mesure de champ magnétique le plus connu et le plus présent dans la vie courante est la boussole. Une boussole est, schématiquement, composée d'un aimant capable de tourner librement sur un axe situé à mi-chemin entre ses pôles. Placé à l'horizontale, l'aimant s'aligne alors avec les lignes de champ locales. En supposant que le champ magnétique est principalement dipolaire, ce dispositif permet d'obtenir la position approximative du nord et du sud magnétiques, et donc de s'orienter géographiquement. Cette propriété est connue depuis longtemps et des traces d'usage du compas pour la navigation sont retrouvés jusqu'au 12e siècle en Europe, et possiblement plus tôt en Asie. Elle a été utilisée très largement et pendant longtemps par les navigateurs pour s'orienter en mer.

En réalité, la boussole est sensible à l'orientation de la composante horizontale du champ magnétique, avec laquelle elle s'aligne. Elle permet ainsi de mesurer la déclinaison locale du champ magnétique, en comparant l'orientation de l'aimant avec la position du nord géographique. Cette déclinaison se représente facilement en "projetant" les lignes de champ sur une carte.

Les mesures de déclinaisons ont donc été les premières réalisées, et son observation a permis la découverte du champ magnétique. L'inclinaison, ignorée pendant longtemps, a toutefois été mesurée dès le 16e siècle, à l'aide d'un instrument similaire à la boussole : une aiguille pivotant verticalement dans le plan aligné avec l'axe Nord-Sud.

L'expérience de l'aiguille pivotant verticalement a permis de constater les variations d'intensité du champ. En effet, lorsqu'elle est hors de sa position d'équilibre, l'aiguille oscille avec une période qui dépend de l'intensité du champ magnétique local. Cependant, ce n'est qu'en 1832 que Carl Friedrich Gauss utilisera cette propriété pour effectuer les premières mesures d'intensité absolue.

Gauss sera aussi le précurseur de la modélisation du champ magnétique, avec la mise au point de la méthode des moindres carrés, encore utilisée aujourd'hui dans de nombreux domaines scientifiques.

1.2.2 Observatoires magnétiques terrestres

Les premiers observatoires magnétiques permanents, enregistrant de façon plus ou moins régulière des données de déclinaison ont existé au 17e siècle. C'est dans les années 1830 qu'un premier réseau organisé d'observatoires sera mis en place par K. F.

Gauss et Alexander von Humboldt. Il produira des données continues, utilisées pour produire les premiers modèles globaux du champ magnétique terrestre. Les mesures reposent sur des méthodes analogiques, le plus souvent basées sur les oscillations d'un aimant.

Aujourd'hui, de nombreux observatoires situés autour du monde enregistrent en continu des données. Le nombre d'observatoires a augmenté progressivement jusqu'à la deuxième moitié du 20e siècle, où leur expansion rapide ainsi que l'arrivée de méthodes de mesures plus précises marquent le début du réseau d'observatoires moderne.

Les instruments de mesure utilisés aujourd'hui permettent d'obtenir avec une grande précision des données scalaires et vectorielles. Les mesures scalaires se font en général à l'aide d'un magnétomètre à proton. Cet instrument est sensible à l'intensité de tout champ dans lequel il est plongé, permettant une mesure absolue de la force totale du champ magnétique. Les mesures vectorielles sont réalisées à l'aide d'un instrument tri-axial à vanne de flux. Cet instrument est sensible à l'intensité du champ, mais projeté sur un axe spécifique.

Les observatoires produisent 3 types de données : les données scalaires et vectorielles relatives, qui sont acquises en continu de manière automatisée, ainsi que la ligne de base vectorielle, acquise manuellement. En effet un calibrage manuel est nécessaire afin d'obtenir une mesure vectorielle absolue. Une mesure absolue est donc réalisée régulièrement par un opérateur pour constituer la ligne de base. Elle permet à posteriori d'ajuster les données vectorielles relatives afin de reconstituer une série temporelle de données vectorielles définitives. Il est nécessaire d'isoler les observatoires des sources de perturbation d'origine humaine afin qu'ils ne mesurent que le champ magnétique naturel.

Des observatoires sont opérés par de multiples institutions dans le monde entier. Ils sont cependant associés au sein de réseaux permettant de compiler et traiter les données avec des bases communes, ce qui facilite leur utilisation pour des applications scientifiques. Cela implique la standardisation des formats et des méthodes de mesures.

Le réseau INTERMAGNET met à disposition en temps réel des données vectorielles brutes, rassemblées à partir des contributions de nombreux observatoires (environ 150 observatoires actifs) autour du monde. Il est possible d'accéder à des données brutes, quasi-définitives (ajustées en utilisant les mesures de ligne de base sur un mois) et définitives (ajustées en utilisant l'ensemble des mesures de ligne de base de l'année passée). Les données d'observatoires sont également collectées par les World Data Center (WDC), comme par exemple celui qui est géré pas le British Geological Survey à Édimbourg.

1.2.3 Mesures par satellites

L'arrivée des satellites dans le panel d'instruments disponibles a permis de faire d'énormes progrès dans l'observation du champ magnétique. La première mesure du champ magnétique en orbite a été réalisée par le satellite Sputnik 3 en 1958, et coïncide donc avec la première mise en orbite d'un satellite. Dès lors, la plupart des satellites lancés par les différentes agences spatiales du monde ont porté avec eux un magnétomètre, quoique souvent rudimentaire. Ces instruments ne sont pas conçus pour acquérir des données dans un but de modélisation, et sont en conséquent rarement adaptés et calibrés pour cela. Il existe cependant un certain nombre de missions spatiales conçues spécifiquement pour la mesure du champ magnétique terrestre, et apportant donc des données de haute qualité et de haute résolution.

Parmis cet ensemble de satellites, 3 missions d'orbite basse : OGO-2 (1965) , OGO-4 (1967) et OGO-6 (1969), aussi appelées POGO (Polar Orbiting Geophysical Observatory) ont permis l'observation et l'étude du champ magnétique. La faible précision des données de positionnement des satellites, implique que les modèles utilisant ces données sont accompagnés d'erreurs importantes. Cependant, un traitement a posteriori de ces données a permis une exploitation correcte de cette information, comme l'a notamment proposé Stockmann et al. (2015).

La mission Magsat (*Magnetic Field Satellite*) est la première mission dédiée à la modélisation du champ magnétique (Langel et al., 1982). Elle fut lancée en octobre 1979 par la NASA en collaboration avec l'Institut d'études géologiques des États-Unis (USGS). Le satellite Magsat est équipé d'un magnétomètre vectoriel, permettant de mesurer séparément chaque composante du champ magnétique, ainsi que d'un magnétomètre scalaire absolu. Le satellite Magsat est resté en orbite d'octobre 1979 à juin 1980.

Le satellite danois Oersted (nommé d'après le physicien danois Hans Christian Ørsted) constitue la deuxième mission spatiale d'ampleur visant à mesurer le champ magnétique de la Terre depuis son orbite. Il fut lancé en février 1999 sous la tutelle de l'Institut Danois de Météorologie et a continué à produire des données magnétiques pendant plusieurs années.

Le satellite SAC-C, lancé par une mission conjointe de l'agence spatiale argentine (CONAE) avec la NASA, fournit également des mesures du champ magnétique utilisée en modélisation (Olsen et al., 2006).

Le satellite Champ (*Challenging Minisatellite Payload*), lancé par le DLR (*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt*) et le GFZ (*GeoForschungsZentrum*) en Allemagne, en juillet 2000, est resté en orbite jusqu'à septembre 2010 (Maus, 2007 ; Wardinski and Holme, 2003). Champ embarque un magnétomètre fluxgate FGM pour les mesures vectorielles, et un magnétomètre Overhauser OVM pour les mesures scalaires. Un récepteur GPS, un réflecteur Laser et un accéléromètre permettent de

connaître la position du satellite avec précision.

La mission Swarm de l'Agense Spatiale Européenne (ESA) est la dernière en date à avoir été lancée (Olsen, N. et al., 2013). Elle est composée de 3 satellites, lancés en novembre 2013, et qui sont toujours en orbite. Les 3 satellites, Alpha, Bravo et Charlie, sont sur 2 orbites différentes. Alpha et Charlie se suivent sur une orbite basse (462 km au lancement), tandis que Bravo orbite sur une trajectoire plus élevée (510 km au lancement). La présence de ces deux orbites différentes permet une meilleure couverture spatiale, utile pour l'investigation du champ interne. De plus la disposition en 3 dimension des satellites présente également de nombreux avantages pour l'étude des champs externes. Les 3 satellites sont identiques, et embarquent les même instruments. Ils sont équipés d'un magnétomètre vectoriel (VFM - *Vector Field Magnetometer*) et scalaire (ASM - *Absolute Scalar Magnetometer*). Ils embarquent également d'autres instruments tel qu'un instrument de mesure du champ électrique ou de la densité ionique. Leur position est mesurée grâce à des récepteurs GPS et un réflecteur Laser, assistés par un accéléromètre.

Certains satellites qui ne sont pas destinés à la mesure du champ magnétique sont tout de même exploités actuellement pour effectuer de telles mesures. Cela nécessite cependant une calibration particulière des données, ce qui demande un important travail de traitement. Le satellite CryoSat-2, lancé en avril 2010 par l'ESA, a pour objectif la surveillance de l'évolution des calottes glacières. Il est également équipé de magnétomètres vectoriels servant à la navigation. Les données issues de ces mesures ont été traitées par Olsen et al. (2020) afin de combler l'intervalle de temps entre les missions Champ et Swarm, durant lequel aucune donnée satellite n'est disponible.

Les jeux de données utilisés dans le travail présenté ici sont décrits dans le chapitre 3. Ils sont construits à partir des mesures satellites des missions Champ et Swarm, ainsi des données d'observatoires terrestres et couvrent la période qui s'étend de début 2000 à fin 2020.

Chapitre 2. Modélisation du champ magnétique : méthodes et modèles

Ce chapitre décrit certaines des méthodes générales utilisées pour modéliser la structure spatiale et les variations temporelles du champ magnétique, ainsi que quelques grandes familles de modèles qui en font l'application. Le choix des méthodes employées a un impact important sur la capacité des modèles produits à rendre compte des variations temporelles et de la structure spatiale des champs modélisés. La construction d'un modèle de champ magnétique nécessite donc de sélectionner une approche pertinente en fonction de l'objectif visé. Le traitement préalables des données ainsi que la nature et le nombre des sources de champ inclues dans le modèle influent également sur le résultat. Il est possible de retirer du jeu de données les signaux correspondant à une ou plusieurs sources qui ne sont pas considérées comme d'intérêt (retrait des champs externes par filtrage en temps, retrait d'un modèle pré-existant, ...). Nous présentons donc dans la seconde section quelques unes des approches concrètes utilisées pour modéliser le champ magnétique de la Terre, et en particulier le champ du noyau. Nous décrivons plus en détail certains modèles de référence en matière de modélisation du champ interne, tels que le modèle Chaos, le Modèle Cmplet (*Comprehensive Model*) et le modèle Cov-Obs. Le modèle Chaos est utilisé à titre de référence dans les chapitres suivants pour estimer la qualité des résultats obtenus et présentés dans cette étude.

2.1 Modélisation du champ magnétique

La modélisation du champ magnétique consiste en la séparation des nombreuses sources, présentées dans le chapitre , qui contribuent aux mesures réalisées au voisinage de la surface de la Terre. Ces différentes sources se manifestent à des échelles de temps et d'espace différentes, du fait des nombreux et divers phénomènes physiques qui leur donnent naissance. La figure 2.1 (partie gauche) schématise la répartition spatio-temporelle des variations pour les principales sources. Cette vision qualitative permet de constater les différences et les recouvrements qui existent entre les domaines des diverses sources.

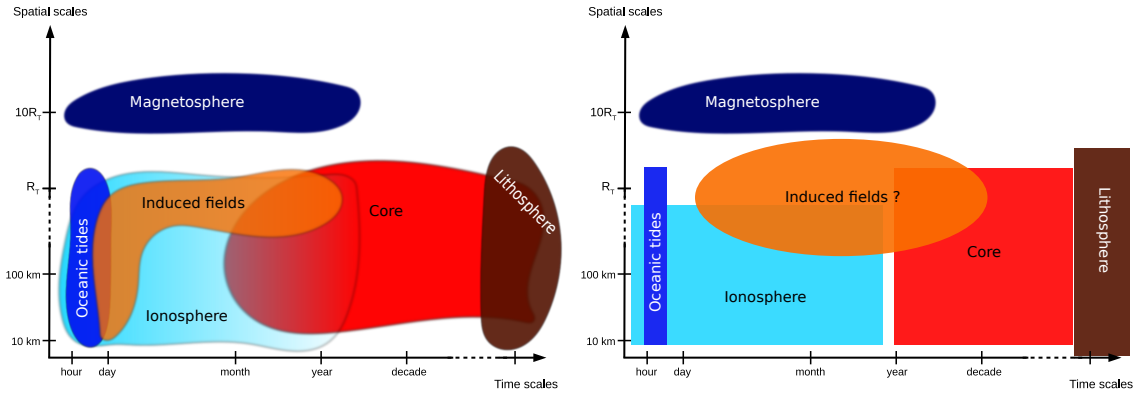

FIGURE 2.1 – Représentation schématique des domaines spatio-temporels des principales zones d'origine des signaux magnétiques observables à la surface de la Terre. À gauche : les recouvrements entre les différentes sources dans la réalité sont importants, mais ce schéma ne représente pas : les différences d'altitude (différentiation par les harmoniques sphériques) et d'intensité (signaux ionosphériques et océaniques plus faibles). À droite : en tenant compte des méthodes de séparation existantes, et si l'on s'intéresse aux échelles de temps de l'ordre de l'année (i.e. on considère le champ lithosphérique constant), les différents domaines sont en partie séparés. Les champs induits restent cependant un obstacle pour l'isolation du signal provenant du noyau. Il faut noter que le domaine des champs induits est ici représenté de manière arbitraire ; en effet plusieurs phénomènes sont sans doute négligés, n'étant pas identifiés ou bien connus.

Différentes méthodes existent pour réaliser la séparation des signaux magnétiques, dont la sélection des données. En effet, certains signaux peuvent être éliminés par une sélection appropriée des données en fonction de l'heure locale et de la position (Thomson and Lesur (2006)). Les courants ionosphériques, par exemple, se manifestent essentiellement du côté jour où l'ionosphère est éclairée. L'utilisation de données acquises

exclusivement du côté nuit permet donc de filtrer ces signaux. Une sélection selon des indices quantifiant les perturbations dues à l'activité solaire permet également de filtrer l'effet de certains courants sur le champ mesuré. Dans cet objectif, l'indice Dst (Sugiura (1964), Langel and Estes (1985a)) est calculé à partir de 4 stations situées à des latitudes comprises entre -40° et 40° et permet de rendre compte de l'impact du vent solaire sur le courant annulaire.

On peut également procéder à la différentiation entre sources internes et sources externes, via la décomposition en harmoniques sphériques. Cette méthode mathématique développée par Gauss (1838) permet d'analyser le signal observé comme le résultat d'une somme de sources trouvant leur origine à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère de référence (Olsen et al. (2010a)). Les champs magnétosphériques, par exemple, sont générés à grande échelle et à distance de la surface terrestre. Leur domaine, indépendamment de leurs variations temporelles, permet de les distinguer des sources internes (tache bleue marine figure 2.1 gauche et droite). Certaines sources ne peuvent cependant pas être strictement séparées du champ du noyau par discrimination spatiale, comme le champ lithosphérique et certains champs externes proches, perçus comme internes par les satellites en orbite basse ($\sim$ 400 km). La figure 2.2 montre la répartition d'énergie en fonction de l'échelle spatiale pour deux sources : le champ du noyau et le champ lithosphérique. Les structures très spécifiques de ces deux spectres permettent une séparation du champ statique à grand et petite échelle. Cependant, on s'aperçoit également qu'il existe un recouvrement entre ces spectres ; le champ du noyau domine à grand échelle, mais se trouve dominé par le champ lithosphérique à petite échelle, en particulier à partir des degrés harmonique 13 à 16, zone dans laquelle il est difficile de discriminer entre les deux sources (Thébault et al. (2010)).

Un troisième outil utilisé est la séparation des sources en temps. Les sources évoluent à des échelles de temps spécifiques. D'une manière générale, les champs externes connaissent des évolution rapides par rapport à l'échelle annuelle (Yamazaki and Maute, 2018). Le champ lithosphérique lui n'évolue significativement que sur des échelles de temps géologiques, le rendant quasi-statique dans le cadre de notre étude (Thébault et al. (2010)). Le problème de la séparation temporelle peut être notamment géré à travers une régularisation en temps des signaux correspondant aux sources internes (voir par exemple Finlay et al. (2020) ; Lesur et al. (2011) ; Lesur et al. (2008)). La partie droite de la figure 2.1 montre une représentation des domaines "séparés" des différentes sources que ces approches usuelles permettent de distinguer. Cette séparation reste cependant imparfaite à ce jour, notamment dans le cadre de la modélisation du champ du noyau. La principale raison de cette difficulté est la gestion des variations du champ magnétosphérique et leur impact sur le champ interne, ce qu'on appelle communément les champs induits (Finlay et al., 2016). Ces champs induits recouvrent partiellement le champ généré par la géodynamo, nous

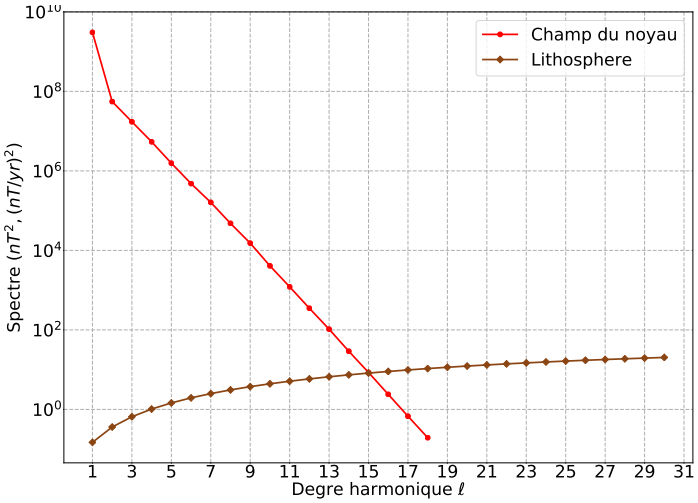

FIGURE 2.2 – Spectres d'énergie spatiaux (énergie en fonction du degré harmonique) pour le champ du noyau (marqueurs ronds, couleur rouge) et le champ lithosphérique (marqueurs diamants, couleur brune). Les spectres représentés sont calculés à partir de la variance du modèle a priori utilisé dans notre étude.

empêchant d'accéder à certains éléments de la dynamique du noyau externe.

2.2 Description du champ magnétique : principes mathématiques

2.2.1 Description spatiale du champ

On représente généralement la structure spatiale du champ sur une sphère de rayon donné de deux façon : en utilisant directement une représentation spatiale en chaque point d'une grille donnée, ou dans le domaine spectral via une décomposition en harmoniques sphériques. La représentation spectrale est aujourd'hui la plus courante pour le champ interne. C'est celle que nous utilisons dans cette étude, et celle qui est présentée dans cette section.

Le champ magnétique, ainsi que ses dérivées temporelles successives (variation et accélération séculaires) est un champ vectoriel défini dans tout l'espace par trois composantes. En l'absence de sources, un champ magnétique $\mathbf{B}$ dérive d'un potentiel Φ vérifiant l'équation de Laplace :

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi, \tag{2.1}$$

avec

$$\Delta\Phi = 0, \tag{2.2}$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient, et Δ l'opérateur laplacien. Il existe des fonctions de base, solutions de l'équation de Laplace sur une sphère, permettant de décrire un champ vérifiant cette équation avec un minimum de paramètres. Ces fonctions sont les harmoniques sphériques, notées Y_ℓ^m. Le potentiel s'exprime dans la base des harmoniques sphériques, lorsqu'on l'observe depuis l'extérieur d'une sphère de rayon a contenant la source (i.e. source interne), en un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\Phi_i(r, \theta, \varphi) = a \sum_{\ell,m}^{L} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \phi_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta, \varphi). \tag{2.3}$$

De même, si la source se trouve à l'extérieure de la sphère et l'observation est faite de l'intérieur (i.e. source externe) :

$$\Phi_e(r, \theta, \varphi) = a \sum_{\ell,m}^{L} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \phi_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta, \varphi). \tag{2.4}$$

Les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques $\phi_{\ell,m}$ sont appelés coefficients de Gauss. Leur connaissance permet donc la représentation du champ en tout point de l'espace. Cependant, la complexité des variations spatiales représentables ainsi dépend du degré maximal L utilisé (c'est à dire du nombre de coefficients de Gauss utilisés).

2.2.2 Modélisation des variations temporelles

Nous décrivons dans cette section différentes méthodes utilisées pour modéliser les variations temporelles d'un champ magnétique. Nous abordons d'abord les deux approches les plus courantes, les splines et les séries de Taylor, utilisées en général pour décrire les variations du champ interne. Nous abordons ensuite le cas des sources dépendant d'un indice mesurable ainsi que celles paramétrées selon des coordonnées spatiales variables.

2.2.2.1 Splines

Une approche courante de la modélisation des variations temporelles du champ magnétique terrestre est l'interpolation par des splines. Une spline est une fonction, définie sur un intervalle sur lequel sont définis un certain nombre de nœuds. Sur chaque sous-intervalle séparant les nœuds, la fonction est équivalente à un polynôme

d'un certain degré. De plus, on impose à la fonction des conditions de continuité à chaque nœud. Les splines sont ainsi caractérisées par le nombre de nœuds utilisés, leur espacement, et les degrés des polynômes décrivant la fonction sur chaque morceau. Cette approche permet une description globale d'une fonction sur un intervalle de temps donné qui peut être de grande taille, en assurant une variation continue de cette fonction. Dans le cadre de la modélisation du champ magnétique en particulier, on décrira par exemple les variations temporelles de chaque coefficient de Gauss par une décomposition en fonctions de bases, qui sont des combinaisons linéaires de splines. Les B-splines sont couramment utilisées en géomagnétisme (Jackson and Finlay, 2015). Les paramètres du modèle sont alors les coefficients attribués à chaque fonction de base. Ils permettent de décrire la fonction sur l'ensemble de l'intervalle considéré. Afin d'augmenter la résolution (donc la fidélité de l'approximation), il faut augmenter le nombre de nœuds ou le degré des polynômes entre chaque nœud. Ainsi, l'utilisation des splines sur un grand intervalle revient vite à faire intervenir de très nombreux paramètres.

2.2.2.2 Séries de Taylor

Il est également possible de modéliser les variations temporelles du champ en utilisant un développement de Taylor. Le développement de Taylor permet d'estimer la valeur d'une fonction à un instant $t + \delta t$ grâce à la connaissance de sa valeur, ainsi que celle de ses dérivées successives à l'instant t. La précision de cette approche dépend du nombre de dérivées modélisées, et croît lorsque δt diminue. La valeur de la fonction (et de ses dérivées) est alors estimée à chaque nœud d'une grille temporelle définie. Le nombre de nœuds dépend du pas de temps. Pour augmenter la résolution, il faut, comme dans l'approche par les splines, augmenter le nombre de nœuds et donc diminuer le pas de temps, ce qui améliore également la fidélité de l'approximation. En géomagnétisme, on modélise généralement la première dérivée du champ magnétique (variation séculaire) et parfois la seconde (accélération séculaire). Dans le cadre de la décomposition en harmoniques sphériques, ce sont les coefficients de Gauss qui sont donc estimés via un développement de Taylor à l'intérieur de chaque intervalle de la grille. Les valeurs des dérivées successives d'un coefficient g_ℓ^m sont connues à une série d'instants t_k répartis sur une grille $[t_0, t_1, \ldots, t_N]$ et le champ s'exprime entre les nœuds t_k :

$$g_\ell^m(t_k + \delta t) = g_\ell^m(t_k) + \delta t \frac{dg_\ell^m}{dt}(t_k) + \frac{\delta t^2}{2}\frac{d^2 g_\ell^m}{dt^2}(t_k) + \frac{\delta t^3}{6}\frac{d^3 g_\ell^m}{dt^3}(t_k) + \ldots$$

avec $\delta t \in [t_k, t_{k+1}]$

Cette approche laisse beaucoup de liberté aux variations du champ modélisé, n'imposant aucune continuité entre chaque intervalle, au contraire des splines.

2.2.2.3 Variation indexée et coordonnées variables

Les variations d'une source de champ magnétique peuvent aussi êtres modélisées au travers de paramètres constants, pondérés par des indices variables. Par exemple, certains signaux correspondent à des phénomènes connus et suivis à l'aide d'indices construits à partir de mesures (tel que l'indice Dst pour le courant annulaire). Le paramètre estimé dans le modèle est alors un facteur qui mesure l'effet du phénomène sur la donnée observée. Ce facteur est estimé à chaque pas de temps dans l'approche séquentielle, et la source correspondante est calculée à partir du facteur et de l'indice. Les champs induits par les variations du courant annulaire et de l'IMF sont représentés ainsi dans la méthode présentée ici.

On peut également modéliser un champ magnétique constant dans un système de coordonnées qui varie dans le temps par rapport au référentiel terrestre, et dont les variations sont connues. Par exemple, le système de coordonnées SM (*Solar Magnetic*/Solaire Magnétique) a sa composante z alignée avec celle du dipôle magnétique terrestre. On peut donc représenter dans ce système de coordonnées un champ externe dont la structure évolue avec le dipôle.

2.3 Méthodes de modélisation

2.3.1 Chaos

Le modèle Chaos est décrit pour la première fois par Olsen et al. (2006). Il décrit alors le champ interne (sans distinction particulière du noyau) jusqu'au degré harmonique 50, et la variation séculaire jusqu'au degré 18. Il couvre une durée de 6.5 ans (de mars 1999 à décembre 2005) et se base exclusivement sur les données satellites issues des missions Ørsted, Champ et SAC-C. La variation temporelle du champ interne est représentée via des B-splines d'ordre 4 avec un intervalle d'un an entre les nœuds. Les champs externes sont également modélisés via un potentiel qui décrit : les champs proches jusqu'au degré harmonique 2 et leur variation jusqu'au degré 1 (coordonnées SM), les champs lointains lointains (coordonnées GSM) jusqu'aux degré 2, les signaux induits par la variation du courant annulaire, indexée sur le Dst, ainsi que les champs induits par les oscillations de l'axe du dipôle magnétique par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Chaos inclut également l'estimation des paramètres d'orientation des instruments de mesure à bord des satellites, qui permet la transformation des coordonnées de la mesure dans le référentiel absolu du satellite. Une alternative à cette approche est de calculer la transformation des coordonnées en utilisant un modèle de champ pré-établi. Les données subissent une sélection classique basée sur les indices mesurant l'activité magnétique, les perturbations des champs externes difficiles à maîtriser telles que l'activité ionosphérique diurne et les courants alignés. Les

paramètres du modèle sont estimés via une méthode de moindres carrés itérative, avec une pondération selon les poids de Huber. La deuxième version, Chaos 2 (Olsen et al., 2009), suit essentiellement le même processus pour la période 1997.0-2009.5, en augmentant le degré harmonique maximal du champ interne à 60. Des données d'observatoires terrestres sont utilisées sous forme de différences annuelles pour étendre le modèle avant 1999. De plus le paramétrage en temps du champ du noyau est affiné : Chaos 2 décrit ses variations jusqu'au degré 20, à travers des splines d'ordre 5 et des nœuds espacés de 6 mois. La variation séculaire subit une régularisation, via la minimisation de la dérivée seconde du champ du noyau. Chaos 3 (Olsen et al., 2010c) introduit des splines d'ordre 6 et une régularisation différente, en l'appliquant également à la troisième dérivée temporelle du champ du noyau. L'intensité moyennée sur l'ensemble de la période (sur toute la surface du noyau) de la troisième dérivée est minimisée. La dérivée seconde n'est contrainte qu'aux bornes de l'intervalle de temps (1997 et 2010). Chaos 4 (Olsen et al., 2010b), établi à partir de 14 années de données satellites, introduit un paramétrage du champ interne jusqu'au degré 100. Le champs lithosphérique est régularisé à partir du degré 85. Ce modèle est construit à partir d'un modèle de paramétrage identique à Chaos 3, utilisant un jeu de données mis à jour, et un autre sous-modèle décrivant uniquement le champ lithosphérique jusqu'au degré 100, construit grâce à des données satellites de basse altitude (mission CHAMP). Une autre nouveauté introduite dans cette édition est l'utilisation de l'indice RC pour paramétrer le courant annulaire, palliant ainsi l'instabilité de ligne de base de l'indice Dst (Olsen et al., 2005b). Chaos 5 (Finlay et al., 2015) et Chaos 6 (Finlay et al., 2017) étendent le modèle en incorporant les dernières données de la mission Swarm, ainsi que d'observatoires terrestres. La dernière version du modèle, Chaos 7 (Finlay et al., 2020), inclut un paramétrage plus complexe en tenant compte des champs induits dans les océans et la Terre interne par les variations du champ magnétique de la magnétosphère. La régularisation importante appliquée par les modèles Chaos aux dérivées seconde et troisième du champ interne lisse fortement les variations des coefficients de degré harmonique élevé. Pour résoudre ce problème, Chaos 7 introduit une nouvelle régularisation dépendante du degré harmonique, avec une décroissance du facteur de régularisation lorsque le degré harmonique augmente. Le modèle Chaos capte fidèlement la structure spatiale du champ magnétique, avec un excellent fit aux données. Il démontre notamment sa capacité à capter des phénomènes précis et rapides tels que les secousses magnétiques (Finlay et al., 2017), ou encore l'évolution de l'anomalie de l'atlantique sud, très bien décrite par Chaos 7 (Finlay et al., 2020).

La première édition de Chaos a participé à mettre en évidence la possibilité d'obtenir des modèle de variation séculaire précis pour les grandes échelles. De tels résultats ont été également produit par la série de modèle GRIMM (Lesur et al., 2011 ; Lesur et al., 2008) basée sur les données satellitaires CHAMP et les moyennes horaires des

observatoirs terrestres. Lesur et al. (2010) propose également déjà de contraindre le champ magnétique à la limite noyau-manteau (CMB) en utilisant la co-estimation de l'écoulement de surface du noyau, avec des contraintes qui lissent son comportement en temps et en espace. Ces résultats montrent qu'il est possible de contraindre la variation séculaire via l'équation d'induction à flux gelé, et que cela produit des résultats fiables y compris pour l'accélération séculaire (dérivée seconde du champ interne).

2.3.2 Le Modèle Complet du champ magnétique

Le modèle CM (*Comprehensive Model*), proposé initialement par Sabaka and Baldwin (1993), et régulièrement mis à jour (voir Sabaka et al. (2002), Sabaka et al. (2004), Sabaka et al. (2015) et Sabaka et al. (2018)) jusqu'à sa dernière version, le CM6 (Sabaka et al., 2020) vise à modéliser l'ensemble des contributions du champ magnétique de façon continue sur la période 1999-2019.5 (pour CM6). Cette approche propose d'aller plus loin dans la séparation des différentes contributions au champ magnétique, en incluant plus de sources dans son paramétrage, permettant en principe un meilleur rendu du champ interne et de ses variations. Les sources paramétrées incluent le champ du noyau et le champ lithosphérique ainsi que la variation séculaire, les signaux des marées océaniques, et enfin les champs ionosphériques et magnétosphériques. Comme dans le cas de Chaos, les angles d'Euler permettant d'aligner les instruments de mesure avec le référentiel des satellites sont estimés lors du processus d'assimilation des données. L'estimation des paramètres se fait via un processus de moindres carrés non linéaire de Gauss-Newton (Sabaka et al., 2018). Une particularité de cette approche, qui la distingue nettement des approches plus classiques, est l'utilisation de données de jour, qui n'est possible qu'à condition de modéliser les effets importants des champs ionosphériques. Le modèle CM6 impose une série de contrainte sur les moyennes quadratiques de différentes composantes externes et internes du champ magnétique. Il contraint notamment la dérivée troisième du champ interne à la CMB sur l'ensemble de la période. La version CIY4 (Sabaka et al., 2018) contraint également la dérivée seconde du champ interne à la CMB. Le modèle CM6 montre des structures spatiales spécifiques, notamment sur les termes zonaux, qui présentent des caractéristiques inédites (à comparaison du modèle Chaos utilisé comme référence). La séparation explicite des champs induits fait apparaître des éléments particuliers, non observés dans les modèles Chaos. Notamment, la variabilité temporelle des coefficients zonaux (1,0) et (3,0) du champ interne et de sa variation est nettement différente. Sabaka et al. (2020) attribue ces différences au paramétrage des champs induits et des effets ionosphériques. Cela montre l'importance de la séparation des sources magnétiques dans l'étude de la variation séculaire.

2.3.3 Cov-Obs

La famille de modèles COV-OBS représentée par COV-OBS (Gillet et al., 2013), COV-OBS.x1 (Gillet et al., 2015a) et COV-OBS.x2 (Huder et al., 2020) propose une approche différente pour la modélisation du champ magnétique sur la période 1838-2012 (COV-OBS) et 1840-2020 (COV-OBS.x1). Plutôt que l'utilisation de contraintes minimisant les structures spatiales et/ou temporelles des champs modélisés, Gillet et al. (2013) propose l'utilisation d'une approche Bayésienne. Une distribution Gaussienne (définie par une moyenne nulle et une matrice de covariance) a priori des valeurs des paramètres est mise à jour par l'assimilation des données. Cette méthode se rapproche de celle qui est décrite dans ce manuscrit. Le paramétrage diffère en revanche de celui utilisé dans notre étude, puisque les variations temporelles du champ interne sont modélisées via des B-splines d'ordre 4, avec des nœuds espacés de 2 ans. Dans COV-OBS, le champs externe est paramétré par ses composantes dipolaires uniquement, accompagné du champ induit correspondant dans le noyau. La solution est calculée comme la distribution Gaussienne (sous forme d'une moyenne et une matrice de covariance) de paramètres minimisant une fonction de coût qui inclut l'écart aux données et à la distribution a priori, via une méthode itérative de Newton. L'information a priori est définie par une fonction de corrélation temporelle, spécifiquement calculée pour chaque coefficient de Gauss, et aucune corrélation entre coefficients de degrés et d'ordres différents n'est considérée. Les temps caractéristiques qui interviennent dans le calcul de ces corrélations sont issus des statistiques du modèle gufm-sat (Finlay et al., 2012) issu de données satellites (Champ, Ørsted et SAC-C).

Gillet et al. (2015b) propose également un calcul d'écoulement de surface du noyau basé sur l'inversion d'ensembles de modèles de champ du noyau et de variation séculaire. Ce travail produit des ensembles d'écoulements qui présentent des variations temporelles intéressantes. En particulier, ils présentent des périodicités de l'ordre de 6 ans qui pressentent la présence de phénomènes ondulatoires tels que des ondes de torsion dans le noyau (Cox et al., 2014). La capacité de ces modèles à correspondre à un témoin observable, la variation de durée du jour (voir chapitre 5 pour une description de cette analyse), est notamment encourageante. Ces résultats montrent que l'approche proposée par Gillet et al. (2013) est une piste valable pour la recherche de signaux inter-annuels dans la dynamique du noyau, à travers les données magnétiques satellitaires.

Le travail décrit dans cette thèse se distingue des approches les plus courantes par deux aspects : l'utilisation d'une expansion de Taylor plutôt que de splines, et l'utilisation d'une approche Bayésienne avec une forte information a priori plutôt que d'une régularisation. L'assimilation de données est réalisé grâce à un filtre de Kalman (Kalman, 1960). L'approche par une expansion de Taylor permet de représenter des

variations brusques que la continuité des splines ne permet pas. Cela ne constitue pas en soi une garantie d'obtenir des variations plus fiables, mains certains phénomènes rapides peuvent voir leur représentation facilitée. De plus, l'approche séquentielle permise par l'expansion de Taylor est commode, au vu du grand nombre de paramètres impliqués dans la réalisation du modèle (plusieurs milliers par pas de temps de 3 mois). Le filtre de Kalman a déjà été utilisé en modélisation du champ magnétique, notamment par Gillet et al. (2015a) ou précédemment par Beggan and Whaler (2009). Dans les exemples cités, un filtre de Kalman d'ensemble (Evensen, 2003) est utilisé, par opposition au travail présenté ici ou des distributions théoriques sont calculées à travers leur moyenne et leur covariance. Ces travaux montrent qu'il est possible d'utiliser le filtre de Kalman d'ensemble pour représenter le champ magnétique du noyau et ses variations, mais aussi pour prédire son évolution à court terme. Un autre avantage du filtre de Kalman est de permettre une représentation de l'incertitude sur le modèle, par analyse de la covariance de l'ensemble de modèles. Bien que les différentes méthodes citée – expansion de Taylor et splines, approche Bayésienne et régularisation – puissent se recouper sur le plan mathématique, elles sont issues de philosophies différentes et ont une influence sur la nature des résultats obtenus. En effet, l'intérêt principal de l'utilisation de l'information a priori dans une approche Bayésienne est de donner une mesure précise et réaliste des statistiques d'erreur associées au calcul des paramètres. Plus qu'un modèle de champ magnétique, ce qui est calculé est une mesure de ce que l'analyse des données apporte comme information par rapport à l'information préalable.

Chapitre 3. Données

Les modèles de champ magnétique modernes se basent sur l'utilisation des données satellitaires et d'observatoires terrestres. Les données satellitaires permettent de remonter jusqu'au début des années 2000 (excepté pour Magsat qui remonte à 1979 pour une courte durée). Ces données de grande qualité et de haute résolution temporelle permettent l'observation des variations les plus rapides du champ magnétique. Les observatoires fournissent des jeux de données continus et de qualité depuis les années 1950. Ce chapitre présente les ensembles de données utilisées dans cette étude, ainsi que les critères de sélection qui leur ont été appliquées.

3.1 Données disponibles

Dans le cadre de ce travail, nous utilisons les séries de données des mission Champ (Maus, 2007 ; Wardinski and Holme, 2003) et Swarm (Olsen, N. et al., 2013), ainsi que les données d'observatoires terrestres disponibles pour la période. Le jeu de données d'observatoires utilisé couvre l'intégralité de la période étudiée, tandis que les données satellitaires sont interrompues entre les missions Champ et Swarm. La mission Champ fournit un jeu de données s'étalant de septembre 2000 à août 2010. Les données issues des satellites Swarm sont quant à elles disponibles depuis novembre 2013. Les données vectorielles de niveau 1b des satellites Swarm A et Swarm B sont utilisées dans leur version 0500. Swarm C n'est pas exploité, car son observation du signal du noyau est similaire à celle de Swarm A et n'apporte pas d'information supplémentaire, dans la mesure où nous n'utilisons pas les gradients de champ magnétique Est-Ouest comme le permet la configuration des satellites Swarm (Olsen et al., 2015 ; Thébault et al., 2016). Les données d'observatoires sont issues d'un travail de compilation et de prétraitement réalisé par Macmillan and Olsen (2013), et réunissent les mesures d'un peu moins de 200 observatoires. Les observatoires ayant fourni des données utilisées sur la période étudiée sont représentés sur la carte en figure 3.1. Ils recouvrent inégalement la surface du globe, avec une concentration importante en Europe, et naturellement une plus faible densité dans les océans. Cette répartition inégale montre l'un des avantages des données satellitaires, qui offrent elles une couverture quasi totale de la surface terrestre. Cependant, les observatoires fournissent quant à eux une couverture totale en temps local à un emplacement donné, ce qui permet une meilleure couverture de certaines variations des champs externes.

Seules les données vectorielles sont exploitées. Originalement décomposés dans le référentiel Nord-Est-Centre (NEC), les vecteurs sont soit conservés dans ce référentiel si les mesures sont effectuées à haute latitude, soit transformés dans le référentiel Solaire magnétique (SM) si les mesures proviennent des latitudes moyennes et basses. À cette fin, on distingue donc les données en fonction de leur latitude magnétique. Les données moyenne latitude (ML), sont issues de mesures réalisées entre -55° et +55° de latitude, tandis que les données haute latitude (HL) sont issues des mesures réalisées à une latitude absolue de plus de 55°. les données satellitaires sont sélectionnées avec une fréquence temporelle de l'ordre de la minute. Les données d'observatoires sont des moyennes horaires.

3.2 Sélection des données

Les données sont sélectionnées selon des critères relativement légers. L'objectif de cette sélection est de s'affranchir de l'influence de certains phénomènes, essentielle-

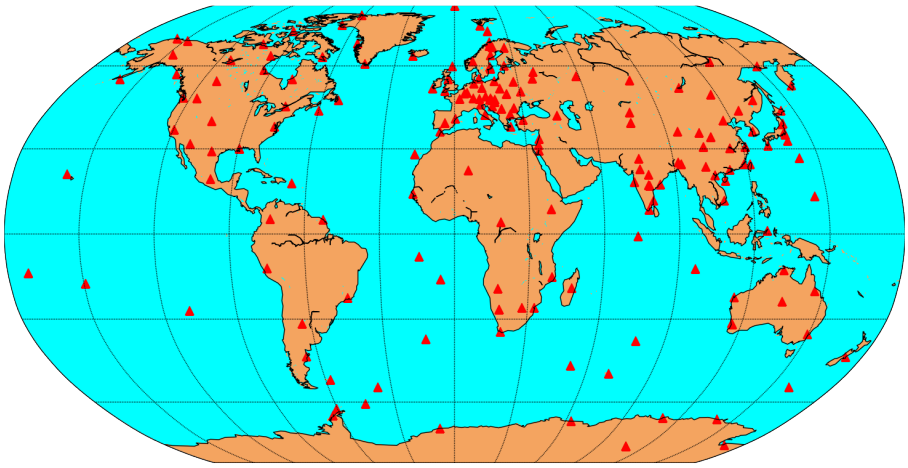

FIGURE 3.1 – Carte de localisation des observatoires magnétiques terrestres fournissant des données sur l'ensemble de la période étudiée.

ment externes, dont les signaux sont considérés comme du bruit dans le cadre de cette étude. Les critères de sélection sont récapitulés dans le tableau 3.1

La figure 3.2 montre la distribution du nombre de données au cours du temps résultant du processus de sélection. Chaque barre correspond à un pas de temps de 3 mois. Le nombre de données par pas de temps varie fortement, restant de l'ordre de la centaine de milliers de points. Le nombre de données vectorielles sur l'ensemble de la période est de 6 122 190 , soit 18 366 570 points de donnée au total. La période située entre Champ et Swarm est dépourvue de données satellitaires dans cette étude. Récemment, les travaux de Olsen et al. (2020) ont permis de pallier ce manque qui produit un effet visible sur les résultats.

Sélection en temps local

Les données satellitaires ML ainsi que l'ensemble des données observatoire ne sont utilisées que lorsqu'elles sont acquises de nuit (c'est à dire lorsque l'ionosphère n'est pas éclairée), afin de s'affranchir de l'essentiel des effets ionosphériques engendrés par l'interaction avec le rayonnement solaire (bien qu'un système de courant secondaire reste présent durant la nuit, voir Olsen et al. (2005a)). La sélection est faite selon l'heure locale : les données sont sélectionnées entre 23h00 et 5h00. Une sélection supplémentaire est appliquée afin d'assurer que l'ionosphère ne soit pas éclairée par le soleil, malgré la sélection en heure locale.

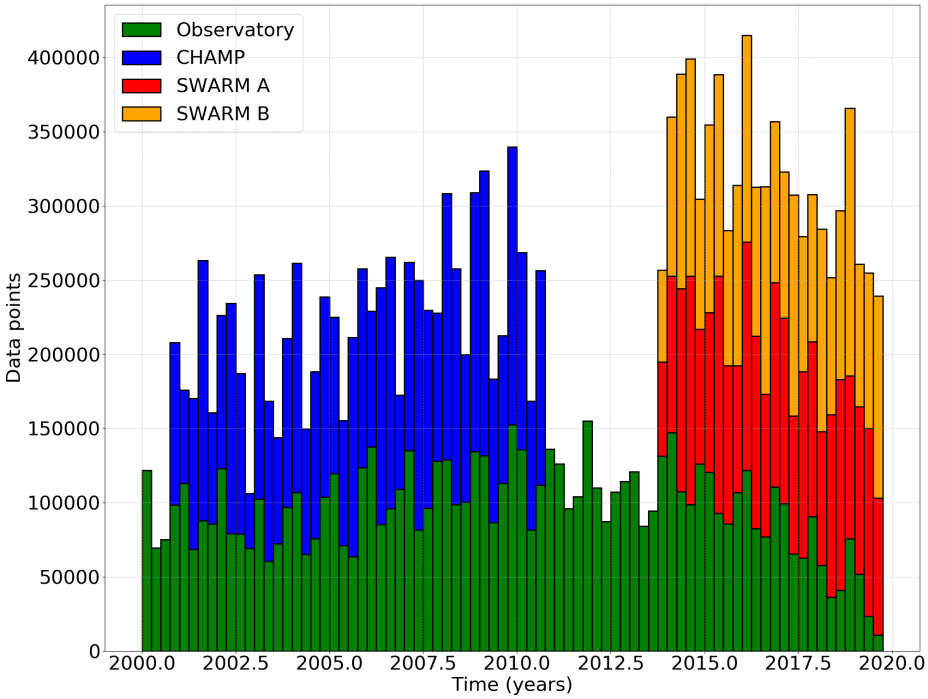

FIGURE 3.2 – Nombre de données utilisées à chaque pas de temps en fonction de l'instrument d'origine. En vert : les données d'observatoires. En bleu les données issues de la mission Champ. En rouge et orange, les données issues de la mission Swarm (resp. Swarm A et Swarm B). Chaque barre représente un pas de temps (3 mois).

Sélection selon le Dst et l'IMF

Afin d'exclure les périodes de forte activité solaire, et les perturbations qu'elles engendrent sur les mesures magnétiques, une sélection est faite en utilisant l'indice Dst. Celui-ci est calculé à partir des mesures de 4 stations d'observation. Il permet de rendre compte de l'effet des orages solaires sur le courant annulaire, qui vient lui-même affecter, essentiellement, la composante nord-sud du champ terrestre. On sélectionne ainsi les données lorsque la valeur du Dst est comprise entre -30 et 30 nT pour les données satellitaires, et -30 et 10 nT pour les données d'observatoires (Lesur et al., 2010).

Les données sont également sélectionnées en fonction de la valeur de la composante verticale de l'IMF. Lorsque l'IMF est dirigé nord-sud, la recombinaison des lignes de champ au contact du vent solaire induit une perturbation du champ magnétique. Pour l'éviter, les données sont sélectionnées lorsque la composante verticale de l'IMF est positive (i.e. lorsque l'IMF est dirigé sud-nord).

Cette sélection est héritée de celle choisie par Lesur et al. (2010), tout comme le choix de paramétrage des coordonnées des points de données. Ce paramétrage diffère de l'approche de Chaos où les angles d'Euler décrivant l'orientation des vecteurs données sont estimés lors de l'analyse.

3.3 Variance des données

Les variances attribuées à chaque donnée sont résumées dans le tableau 3.2. Elles sont basées sur des valeurs typiques d'écart à la donnée (misfit) observées dans des études précédentes (Lesur et al., 2015). Elles incluent le bruit des instruments, faible, ainsi que d'éventuels signaux non modélisés résiduels. L'influence des champs externes sur le misfit est important aux hautes latitudes, résultant en des variances nettement plus importantes pour les données satellitaires HL. Les données étant vectorielles, les variances sont données pour chaque composante X,Y et Z dans le référentiel NEC ou SM le cas échéant.

Seules les variances sont utilisées, et non les covariances car aucune corrélation entre les points de données, ou entre les composantes d'un même vecteur donnée n'est prise en compte. Initialement, l'inverse de la variance est utilisée pour pondérer un point de donnée. Ce poids est ensuite réévalué via un processus de pondération d'Huber classique (Huber, 1981).

Mag. Latitude	$\lvert$mag. lat.$\rvert \geq 55°$			$\lvert$mag. lat.$\rvert \leq 55°$		
Data type	Swarm	Champ	Obs.	Swarm	Champ	Obs.
Time sampling	60 s	60 s	1 h	30 s	20 s	1 h
Local time	–	–	–	23 :00 – 5 :00	23 :00 – 5 :00	23 :00 – 5 :00
Dst	$[-30:30]$ nT	$[-30:30]$ nT	$[-30:10]$ nT	$[-30:30]$ nT	$[-30:30]$ nT	$[-30:10]$ nT
IMF	$B_z^{\text{IMF}} > 0$	$B_z^{\text{IMF}} > 0$	$B_z^{\text{IMF}} > 0$	$B_z^{\text{IMF}} > 0$	$B_z^{\text{IMF}} > 0$	$B_z^{\text{IMF}} > 0$
Sunlit area excl.	No	No	Yes	Yes	Yes	Yes
N_v	1,104,672	637,561	906,513	822,246	1,004,634	1,646,564

TABLE 3.1 – Critères de sélection pour les données satellitaires (Champ et Swarm) ainsi que pour les données d'observatoires.

Component / Data type	Satellite data		Observatory data	
	ML	HL	ML	HL
X	$v = 9\,\mathrm{nT}^2$	$v = 100\,\mathrm{nT}^2$	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 36nT^2$
Y	$v = 9\,\mathrm{nT}^2$	$v = 81\,\mathrm{nT}^2$	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 25\,\mathrm{nT}^2$
Z	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 81\,\mathrm{nT}^2$	$v = 25\,\mathrm{nT}^2$	$v = 36\,\mathrm{nT}^2$

TABLE 3.2 – Variances attribuées aux données en fonction de leur catégorisation (instrument, latitude, composante vectorielle). Les données sont pondérées par l'inverse de leur variance, avant de subir un processus de pondération d'Huber (*Huber weighting*). Ces valeurs incluent des signaux inconnus et non pris en compte ainsi que le bruit des instruments.

Chapitre 4. Modélisation séquentielle du champ magnétique

La méthode permettant l'inversion des données magnétiques pour estimer le champ du noyau et sa variation séculaire a été décrite dans l'article Ropp et al. (2020), qui fait partie de la publication groupée réalisée à l'occasion de la sortie de l'IGRF 13. Nous reprenons dans ce chapitre les points essentiels de cette description. Nous y décrivons ensuite quelques éléments de résultats, mettant en valeur les apports de notre méthode à la description des variations du champ interne.

4.1 Paramétrage

4.1.1 Paramétrage en temps

Notre modèle est construit comme une série de modèles fixés, ou snapshots, répartis sur une grille temporelle régulière couvrant l'ensemble de la période 2000-2020, avec un pas de temps de 3 mois. Le choix du pas de temps est motivé par l'objectif d'obtenir la résolution temporelle la plus fine possible. La contrainte qui limite ce choix est la résolution de la variation séculaire comme une variable indépendante calculée directement à partir des données – et non par dérivation du champ magnétique. Aucune étude quantitative n'a été réalisée pour estimé une valeur optimale du pas de temps, ce choix étant fixé de façon heuristique. La valeur choisie est amenée à évoluer en fonction des futurs résultats obtenus, et pourrait notamment être revue à la baisse avec une meilleure prise en charge des autres sources. Avec un tel pas de temps, les périodes de 6 mois minimum peuvent être atteintes en théorie, d'après le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (Shannon, 1984). On verra que les résultats de notre étude restent cependant éloignés de ce domaine de fréquence pour se limiter aux périodes de l'ordre de l'année.

La grille temporelle est matérialisée par $N_t + 1$ noeuds, notés t_k, de sorte que $t_k = k\Delta t$, pour $k = 0, \ldots, N_t$. Pour un instant t_k, un snapshot est construit en utilisant les données situées dans l'intervalle $[t_k; t_{k+1}]$. Au sein d'un snapshot, les différentes sources sont décrites par une série de paramètres, en fonction du type de représentation choisie. Ces paramètres ont une valeur constante sur l'intervalle de temps, mais peuvent décrire les variations temporelles de la source concernée le cas échéant. Le champ magnétique du noyau en particulier, connu à un instant donné de l'intervalle, peut être extrapolé à tout instant par expansion de Taylor d'ordre 1 (seule la dérivée première est modélisée). Dans le cas des champs externes, le paramétrage en temps se fait à travers des paramètres externes, construits à travers des mesures, tels que l'indice Dst ou la valeur de l'IMF, ou encore à travers leur représentation spatial, dans des systèmes de coordonnées variables. Ce paramétrage est détaillé dans la section suivante.

4.1.2 Paramétrage des sources

L'ensemble des sources, à l'exception de l'offset des observatoires terrestres, sont paramétrées via une décomposition en harmoniques sphériques. Le champ mesuré en un point de l'espace (r, θ, φ) à un instant t est relié à l'ensemble des paramètres estimés par l'équation 4.3. Le modèle est estimé pour l'instant t_k, on définit donc $t = t_k + \delta t$ avec $\delta t < \Delta t$. Les différents g_ℓ^m et q_ℓ^m dénotent les coefficients des différents champs internes et externes, respectivement. Le rayon de référence pour le

développement en harmoniques sphériques, a, est le rayon terrestre habituellement utilisé en géomagnétisme $a = 6371.2\,\mathrm{km}$. Le symbole $\sum_{\ell,m}$ représente la double somme $\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=-\ell}^{\ell}$, avec L le degré harmonique maximal utilisé. Les $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell+1}(\theta,\varphi)$ et $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta,\varphi)$ sont les vecteurs harmoniques sphériques définis par :

$$\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell+1}(\theta,\varphi) = -a\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell+2}\nabla\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} Y^m_\ell(\theta,\varphi)\right) \tag{4.1}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta,\varphi) = -a\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell-1}\nabla\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \quad Y^m_\ell(\theta,\varphi)\right) \tag{4.2}$$

où ∇ est l'opérateur nabla. Les $Y^m_\ell(\theta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques réelles normalisées par la semi-normalisation de Schmidt, habituellement utilisées en géomagnétisme. Les ordres positifs ($m \geq 0$) sont associés aux termes en $\cos(m\theta)$,et les ordres négatifs ($m < 0$) sont associés aux termes en $\sin(|m|\theta)$. Les harmoniques vectorielles $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{SM},\varphi_{SM})$ (resp. $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{GSM},\varphi_{GSM})$) sont des vecteurs dans le référentiel SM (resp. GSM).

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(r,\theta,\varphi,t) = &\sum_{\ell,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+2}\left[\,{}^{\mathrm{C}}g^m_{\ell,k} + {}^{\mathrm{L}}g^m_{\ell,k} + \delta t\,{}^{\mathrm{C}}\dot{g}^m_{\ell,k}\,\right]\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell+1}(\theta,\varphi)\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+2}\left[\,{}^{\mathrm{I}}g^m_{\ell,k} + \delta t\,{}^{\mathrm{I}}\dot{g}^m_{\ell,k} + {}^{\mathrm{I_{st}}}g^m_{\ell,k}\,\mathrm{I_{st}}(t)\,\right]\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell+1}(\theta,\varphi)\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell-1}{}^{\mathrm{G}}q^m_{\ell,k}\,\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{GSM},\varphi_{GSM})\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell-1}\left[\,{}^{\mathrm{S}}q^m_{\ell,k} + {}^{\mathrm{I}}q^m_{\ell,k}\,B^{\mathrm{IMF}}_y(t) + {}^{\mathrm{E_{st}}}q^m_{\ell,k}\,E_{st}(t)\,\right]\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{SM},\varphi_{SM})\\
&+\sum_{i\in\mathcal{I}_{obs}}\delta(r-r_i,\theta-\theta_i,\varphi-\varphi_i)\,\mathbf{O}_{i,k}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Référentiels SM et GSM

Nous décrivons ici les deux systèmes de coordonnées mentionnés ci-dessus. Le système SM, pour *Solar Magnetic* est un référentiel géocentrique dont l'axe Z est aligné avec celui du dipôle magnétique terrestre, et son axe Y est orthogonal à l'axe Terre-Soleil. Il est préférentiellement utilisé pour décrire des phénomènes dont la géométrie est dominée par le dipôle magnétique terrestre. Le système GSM (*Geocentric Solar Magnetospheric*) a son axe X aligné avec l'axe Terre-Soleil, et son axe Z est la

projection de l'axe Z du dipôle magnétique sur le plan orthogonal à l'axe X. Il est approprié pour représenter des champs fortement marqués par le champ interplanétaire, notamment dans le nez de la magnétosphère.

Source	L_i, L_a	Time scale	Prior	Nb. of par.	Coef.
Static core field	1, 18	$\tilde{\tau}_\ell^c = 415/\ell$ yr	$R = 3000$ km $S = 2 \cdot 10^9$ nT^2	360	${}^{\mathrm{C}}g_\ell^m$
Core SV	1, 18	$\tilde{\tau}_\ell^{sv} = 11$ yr	$R = 3500$ km $S = 1.5 \cdot 10^4$ (nT/yr)^2	360	${}^{\mathrm{C}}\dot{g}_\ell^m$
Lithospheric field	15, 30	$\tau^{lt} = 10^6$ yr	$R = 6280$ km $S = 2.7 \cdot 10^{-2}$ nT^2	736	${}^{\mathrm{L}}g_\ell^m$
Induced field	1, 6	$\tau^I < \Delta t$	–	48	${}^{\mathrm{I}}g_\ell^m$
Induced field variation	1, 6	$\tau^{\partial_t I} < \Delta t$	–	48	${}^{\mathrm{I}}\dot{g}_\ell^m$
GSM ext. field	1, 3	$\tau^{GSM} < \Delta t$	$R = 1.6 \cdot 10^4$ km $S = 5.4 \cdot 10^3$ nT^2	15	${}^{\mathrm{G}}q_\ell^m$
SM ext. field	1, 3	$\tau^{SM} < \Delta t$	$R = 6900$ km $S = 3.56$ nT^2	15	${}^{\mathrm{S}}q_\ell^m$
I_{st} indexed field	1, 3	$\tau^{Ist} < \Delta t$	$R = 2537$ km $S = 1.0$	15	${}^{\mathrm{I}_{\mathrm{st}}}g_\ell^m$
E_{st} indexed field	1, 3	$\tau^{Est} < \Delta t$	$R = 1.6 \cdot 10^4$ km $S = 5.4$	15	${}^{\mathrm{E}_{\mathrm{st}}}q_\ell^m$
B_y^{IMF} indexed field	1, 3	$\tau^{IMF} < \Delta t$	$R = 6900$ km $S = 0.1$	15	${}^{\mathrm{I}}q_\ell^m$
Obs. offset	Non SH	$\tau^{lt} = 10^6$ yr	–	3×200	$\mathbf{O}_i$

TABLE 4.1 – Résumé des sources modélisées et de leurs paramètres et caractéristiques pertinentes. De gauche à droite : nom de la source, degré harmonique minimum (L_i) et maximum (L_a), échelle de temps, rayon et facteur d'échelle pour le prior HS, nombre total de paramètres, notations des coefficients utilisées dans l'equation (4.3). Δt est égal à 3 mois. Les valeurs de R et S ne sont pas définies pour le champ induit et sa variation.

Champ du noyau et variation séculaire

Le champ du noyau, généré par la dynamo, est représenté par les paramètres ${}^{\mathrm{C}}g_{\ell,k}^m$ et sa dérivée temporelle première par les paramètres ${}^{\mathrm{C}}\dot{g}_{\ell,k}^m$. Les deux sont modélisés jusqu'au degré harmonique 18.

Champ lithosphérique

Le champ lithosphérique est modélisé pour les degrés 15 à 30. Ses paramètres sont les ${}^{\mathrm{L}}g_{\ell,k}^m$ Au delà du degré 30, un modèle de champ lithosphérique est soustrait jusqu'au degré 120 (Lesur et al., 2013).

Champs induits

La partie interne du champ induit par les variations du courant annulaire, indexé par l'indice I_{st}, est représentée par les paramètres ${}^{\mathrm{Ist}}g^m_{\ell,k}$. Nous modélisons également une source qui a pour objectif de tenir compte des champs induits dans le noyau par des courants générés dans la magnétosphère. Avec une période de l'ordre de 6 mois, ce signal a été identifié comme le résultat de l'induction d'un champ magnétique par des courants générés par la magnétosphère. Sa séparation se fait cependant de façon essentiellement empirique, en construisant un prior à partir de la partie résiduelle du signal original, après soustraction d'un modèle lissé. Une analyse plus complète de ces signaux devrait permettre de proposer dans le futur un paramétrage physique plutôt que seulement empirique. Ce signal est modélisé avec sa variation temporelle, à travers les paramètres ${}^{\mathrm{I}}g^m_\ell$ et ${}^{\mathrm{I}}\dot{g}^m_\ell$.

Champs externes

Les champs externes sont exprimés dans les systèmes de coordonnées magnétique solaire (SM) – paramètres ${}^{\mathrm{S}}q^m_{\ell,k}$ – et magnétosphérique (GSM), dont les paramètres sont les ${}^{\mathrm{G}}q^m_{\ell,k}$. Ces coordonnées sont notées $(\theta_{SM}, \varphi_{SM})$ et $(\theta_{GSM}, \varphi_{GSM})$, respectivement. Leur position est donc déterminée à chaque pas de temps, à partir de la position du dipôle déterminée grâce au modèle IGRF. La partie externe du champ généré par les variations du courant annulaire, indexée par E_{st} est également estimée, à travers les paramètres ${}^{\mathrm{Est}}q^m_\ell$. Enfin, le champ indexé sur la composante y de l'IMF est paramétré dans le système de coordonnées SM et représenté par les ${}^{\mathrm{I}}q^m_{\ell,k}$.

Offset des données d'observatoires

Chaque observatoire enregistre les données magnétiques avec un décalage constant par rapport au champ principal, dû à des effets de leur environnement local. Nous cherchons à corriger la contribution des données de chaque observatoire en estimant ce décalage, ou offset. Cet offset est estimé comme un champ local, vectoriel dans le référentiel NEC, c'est à dire dans le même référentiel que les données. $\mathbf{O}_i = \left(O^i_x, O^i_y, O^i_z\right)$ dénotent l'offset lithosphérique à l'observatoire numéro i, avec $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ les coordonnées respectives de l'observatoire.

4.2 Modélisation

Les modèles calculés sont plus exactement des distributions de modèles, supposées gaussiennes. Ces distributions sont décrites par une densité de probabilité, définie par une valeur moyenne et une covariance, et notée $\mathcal{N}(\mathbf{m}_k, \mathbf{C}_k)$, ou k désigne l'indice

de l'intervalle de temps $[t_k : t_{k+1}]$, $\mathbf{m}_k$ le modèle moyen de la distribution, et $\mathbf{C}_k$ la covariance de la distribution. Le modèle moyen est un vecteur de taille N_m contenant les paramètres de toutes les sources modélisées, et $\mathbf{C}_k$ est une matrice de taille $N_m \times N_m$.

Le filtre de Kalman (Kalman, 1960) repose sur 3 étapes ; l'analyse, la prédiction et le lissage. L'objectif de l'analyse est d'estimer les paramètres du modèle à dans un intervalle de temps par assimilation des données collectées à l'intérieur de cet intervalle. Le modèle ainsi calculé est utilisé pour estimer son évolution au prochain pas de temps, via l'étape de prédiction. Lorsque l'ensemble de la série temporelle est construite, un lissage arrière est appliqué, afin de contraindre chaque époque par la connaissance des époques ultérieures.

4.2.1 Analyse

La relation entre les données et les paramètres du modèle, décrite par l'équation 4.3, est exprimée sous forme matricielle par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m}_k + \mathbf{e} \tag{4.4}$$

où $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire dérivé de l'équation 4.3, $\mathbf{m}_k$ est un vecteur qui contient les paramètres du modèle, et $\mathbf{d}$ est le vecteur contenant les données, avec $\mathbf{e}$ l'erreur correspondante. L'erreur sur les données $\mathbf{e}$ est une distribution gaussienne de moyenne nulle, et dont la covariance est une matrice diagonale contenant les variances respectives de chaque type de données. Ces variances sont données dans le tableau 3.2.

L'étape d'analyse consiste à estimer les paramètres magnétiques de toutes les sources par l'inversion des données collectées dans un intervalle de temps $[t_k; t_{k+1}]$. Lors de cette étape on calcule l'écart entre un modèle a priori et le modèle qui décrit le mieux les données observées. Cet écart est contraint par la covariance du modèle a priori. La covariance a posteriori permet d'estimer l'apport d'information de la donnée, en mesurant son écart avec la covariance a priori. La solution au pas de temps t_k s'exprime ainsi :

(4.5)

$$\mathbf{m}_k = \widetilde{\mathbf{m}}_k + \left(\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{C}}_k^{-1}\right)^{-1} \mathbf{A}^t\mathbf{W}_j(\mathbf{d} - \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{m}}_k) \tag{4.6}$$

pour le modèle moyen $\mathbf{m}_k$, et

$$\mathbf{C}_k = \left(\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{C}}_k^{-1}\right)^{-1} \tag{4.7}$$

pour $\mathbf{C}_k$, la matrice de covariance de la distribution de modèles à l'instant t_k. $\mathbf{W}_j$ est la matrice de poids, calculée à chaque itération à partir des poids d'Huber et des

variances a priori des données. $\widetilde{\mathbf{m}}_k$ et $\widetilde{\mathbf{C}}_k$ désignent le modèle moyen et la matrice de covariance de la distribution de modèles a priori. L'information a priori est fournie à travers une distribution de modèles préalable, décrivant le comportement attendu des sources modélisées. Elle est prédite à chaque pas de temps à partir du résultat de l'analyse précédente. Pour le premier pas de temps, le modèle a priori est une distribution de moyenne nulle, associée à une matrice de covariance qui peut contraindre l'énergie associée aux différentes échelles spatiales, ainsi que les corrélations entre les différentes échelles. Cette information peut être élaborée de plusieurs façons. Deux approches sont étudiées ici : la première consiste à construire analytiquement l'information sur le spectre énergétique des différentes sources modélisées. Cette approche est détaillée dans Ropp et al. (2020) et basée sur la méthode décrite par Holschneider et al. (2016). La deuxième consiste à utiliser les résultats d'expériences de dynamo numériques pour construire une matrice de covariance rendant compte des statistiques des champs modélisés. Le modèle utilisé, Coupled Earth, est développé par Aubert et al. (2013). 9000 snapshots sont extraits d'une série temporelle de modèles issus d'une simulation de dynamo numérique. Une matrice de covariance est construite à partir de ces snapshots, qui est ensuite utilisée pour décrire la distribution de modèles a priori.

Deux séries de modèles sont dérivées, qui diffèrent uniquement par le prior utilisé pour le champ du noyau et celui de la SV : l'une utilise le prior de type 'Holschneider' (HS), l'autre le prior de type Couple Earth (CE).

4.2.2 Prédiction

La prédiction permet, en partant du modèle calculé au temps t_k, d'extrapoler sa moyenne et sa covariance afin de construire le modèle a priori au prochain pas de temps, t_{k+1}. Le prior est une distribution gaussienne de modèles à l'instar de la solution. La prédiction se base sur l'hypothèse que le modèle est une variable vectorielle aléatoire, évoluant comme un processus stationnaire de premier ordre. Lors de la prédiction, une erreur est introduite, de moyenne nulle et dont la covariance dépend de la physique du champ concerné. Ainsi, la définition de l'opérateur de prédiction et de l'erreur associée est importante pour que l'étape de prédiction soit physiquement réaliste. Pour toutes les sources à l'exception du champ du noyau et de la variation séculaire, l'évolution des paramètres est celle d'un processus auto-régressif d'ordre 1. Cette évolution est caractérisée par une échelle temporelle spécifique. Si ce temps caractéristique est inférieur au pas de temps, l'évolution est entièrement contrôlée par le bruit, et donc par l'information a priori (voir Ropp et al. (2020)). Sinon, l'influence du modèle précédent dans le calcul du prior décroît exponentiellement avec l'augmentation du pas de temps (voir Ropp et al. (2020)).

$$\widetilde{\mathbf{m}}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{m}_k + \mathbf{w} \tag{4.8}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_\mathbf{w}, \tag{4.9}$$

où $\widetilde{\mathbf{m}}_{k+1}$,$\widetilde{\mathbf{C}}_{k+1}$ représentent la distribution (moyenne et covariance) de modèle a priori utilisée à l'instant t_{k+1}. $\mathbf{C}_k$ est la matrice de covariance de la distribution de modèle à l'instant t_k Ces équations font intervenir un bruit aléatoire, caractérisé par une moyenne $\mathbf{w}$ et une covariance $\mathbf{C}_\mathbf{w}$. La moyenne $\mathbf{w}$ est égale à zéro, et le calcul de $\mathbf{C}_\mathbf{w}$ dépend de la physique de la source modélisée. Les calculs de l'opérateur $\mathbf{P}$ et de $\mathbf{C}_\mathbf{w}$ sont détaillés dans Ropp et al. (2020).

4.2.3 Lissage

L'étape de prédiction permet de contrôler l'assimilation des données en forçant le modèle calculé à rester réaliste au vu de l'information déjà acquise. De la même façon, on peut utiliser l'information acquise a posteriori pour contraindre le modèle à un instant donné. Le lissage est basé sur l'équation de prédiction, qui peut être vue comme son problème direct. On calcule le modèle moyen $\mathbf{m}_k^s$ et sa covariance $\mathbf{C}_k^s$ définitifs à partir de $\mathbf{m}_{k+1}^s$ et $\mathbf{C}_{k+1}^s$ – l'exposant $\cdot^s$ indiquant que le lissage a été appliqué. Ce processus est réalisé sur toute la série temporelle en partant du dernier pas de temps. Ainsi un modèle à l'instant k est contraint par tous les modèles d'instant $k' > k$. On calcul la série temporelle lissée selon :

$$\mathbf{m}_k^s = \mathbf{m}_k + \mathbf{G}_k\left(\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{P}\mathbf{m}_k\right) \tag{4.10}$$

$$\mathbf{C}_k^s = \mathbf{C}_k - \mathbf{G}_k\left(\mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_{\mathbf{w}_k} - \mathbf{C}_{k+1}^s\right)\mathbf{G}_k^t \tag{4.11}$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{P}^t\left(\mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_\mathbf{w}\right)^{-1} \tag{4.12}$$

où $\mathbf{m}_k^s$ et $\mathbf{C}_k^s$ (resp. $\mathbf{m}_{k+1}^s$ et $\mathbf{C}_{k+1}^s$) désignent les modèles lissés à l'instant t_k (resp. t_{k+1}). $\mathbf{P}$ est l'opérateur de prédiction définit en section 4.2.2.

4.3 Résultats

Les modèles de champ du noyau et de variation séculaire obtenus sont présentés ici. Les résultats sont décrits par des distributions gaussiennes de modèles, caractérisées chacune par une moyenne et une covariance. On rappelle que deux séries de modèles sont calculées, utilisant les deux types d'information a priori (HS et CE) pour le noyau et la SV. Lorsque les deux modèles ne sont pas comparés, le modèle présenté est toujours le modèle CE. Notons que les différences entre les deux modèles sont en général peu significatives.

Nous abordons d'abord la question des résidus de la comparaison du modèle aux données. Globalement, l'adéquation du modèle aux données est acceptable, tombant dans l'intervalle d'erreur attendu ($\sim 2-3$ nT). Des variations apparaissent au cours de la période étudiée, essentiellement dues à des différences dans le type de données utilisées, ou à des évènements spatiaux mal contraints. Nous présentons ensuite les modèles de champ obtenus en comparant leurs caractéristiques en espace à celles d'un modèle obtenu via une méthode classique et éprouvée, en l'occurrence le modèle Chaos 6 (Finlay et al., 2017). Nos modèles montrent une adéquation correcte avec ce modèle de référence, présentant l'essentiel des éléments de grandes échelles connus dans la structure du champ magnétique et de sa variation séculaire. Des différences apparaissent cependant, notamment dans la variation de structures plus localisées, comme le montre l'analyse temporelle. Nous nous intéressons enfin aux variations temporelles de nos séries de variations séculaires. Nous présentons les caractéristiques temporelles inédites observées dans nos résultats, et nous en proposons une interprétation en termes de dynamique du champ magnétique. Nous soulignons également les limites de cette approche et comment elles se traduisent dans nos résultats.

4.3.1 Résidus

Nous présentons ici l'écart aux données du modèle 'brut' calculé après analyse des données, c'est à dire avant lissage. La figure 4.1 montre la répartition de l'ensemble des résidus en fonction de la colatitude pour les données satellitaires, sur l'ensemble de la période. L'écart aux données augmente nettement au passage aux hautes latitudes. Le tableau 4.2 montre de surcroît que les résidus sont plus éloignés de l'écart-type a priori pour les haute latitudes. Cet a priori est donc visiblement sous-estimé, et peut indiquer la présence de signaux non modélisés. La figure 4.2 montre l'évolution en temps des résidus pour les données d'observatoire aux latitudes moyennes et faibles. Le graphique de droite effectue un zoom sur une période ou une partie des résidus présente un décalage anormal aux alentours de 2010, qui diminue pour disparaître peu après 2013. Cette anomalie est issue de l'observatoire TND situé à Manado en Indonésie. Elle est imputée à une erreur soudaine de ligne de base pour l'observatoire concerné à cette époque, probablement due à une changement soudain dans l'environnement de l'observatoire. Une telle variation n'est pas prévue par notre paramétrage mais son impact sur le résultat est contrebalancé par les poids de Huber. Cet observatoire devrait être considéré comme un observatoire différent à partir du moment ou sa ligne de base se décale fortement, afin de ne pas créer ce décalage entre donnée et modèle.

	Donnée satellitaire		Données d'observatoires	
	ML	HL	ML	HL
X	$\sigma_{\text{dat}} = 3\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 3.96\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 2.95\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 10\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 42.55\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 17.54\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 4\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 5.04\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 3.81\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 6\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 26.00\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 8.57\,\text{nT}$
Y	$\sigma_{\text{dat}} = 3\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 4.61\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 3.10\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 9\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 46.42\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 16.47\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 4\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 5.56\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 4.00\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 5\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 17.41\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 7.55\,\text{nT}$
Z	$\sigma_{\text{dat}} = 4\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 5.91\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 4.50\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 9\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 20.94\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 12.58\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 5\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 6.36\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 4.99\,\text{nT}$	$\sigma_{\text{dat}} = 6\,\text{nT}$ $\sigma_{\text{r}} = 26.57\,\text{nT}$ $\sigma_{5\sigma} = 9.36\,\text{nT}$

TABLE 4.2 – Comparaison des écarts-types attribués a priori aux différents types de données (σ_{dat}) avec l'écart-type des résidus (σ_{r}) ainsi que l'écart type des résidus inférieurs à $5\sigma_{\text{dat}}$. Ces deux dernières valeurs diffèrent nettement pour les données de haute latitude, indiquant la présence importante d'outliers.

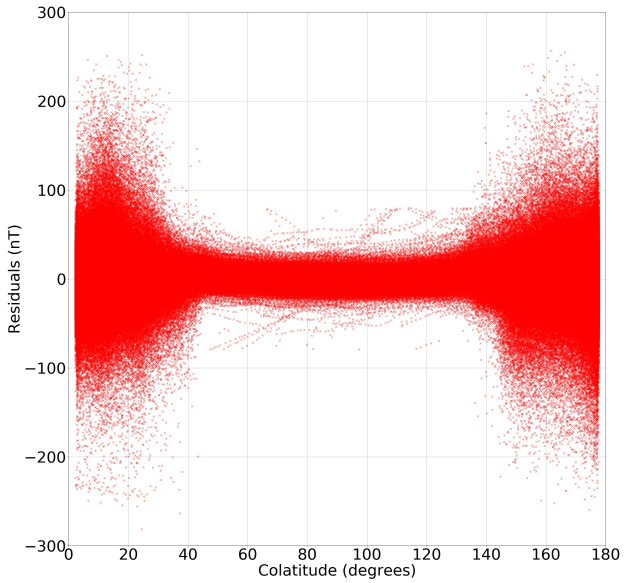

FIGURE 4.1 – Résidus des données satellitaires sur l'ensemble de la période, en fonction de la colatitude. Composante radiale.

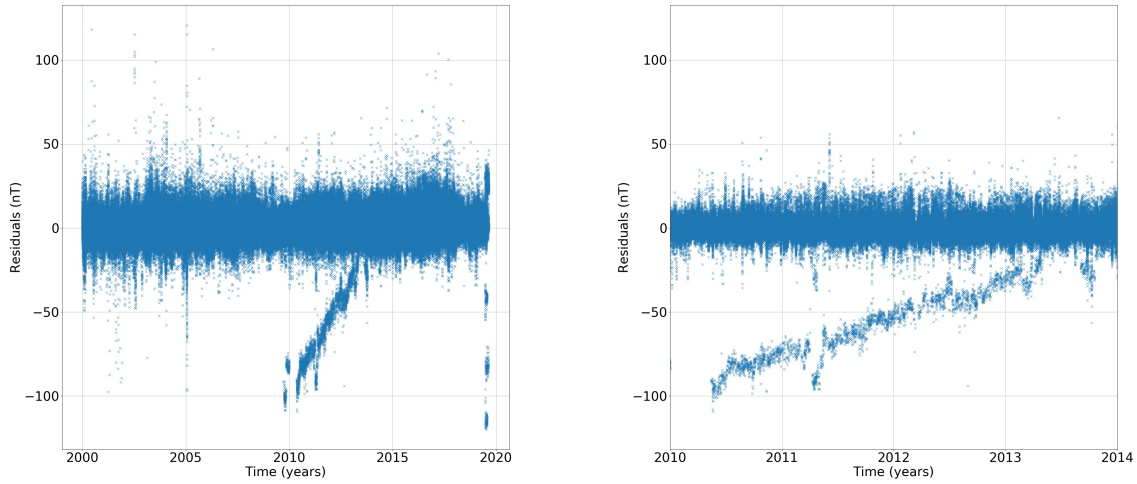

FIGURE 4.2 – Résidus des données d'observatoires terrestres en fonction du temps. Composante radiale, à l'exclusion des hautes latitudes. A gauche : période complète (2000-2020). A droite : zoom sur la période 2010-2014. On observe une dérive de l'un des observatoires.

4.3.2 Modèles

Nous présentons en figure 4.3 des cartes du champ du noyau et de sa variation séculaire à la CMB. Les modèles sont tronqués au degré harmonique 13. Ils présentent les caractéristiques habituelles observées dans les modèles connus aux bas degrés. L'analyse spectrale de la variation séculaire (figure 4.4) présente toutefois une déviation avec le prior et le modèle Chaos à partir du degré 14. La déviation avec Chaos s'explique par le fort lissage qui caractérise ce modèle aux petites échelles spatiales. Ces petites échelles présentent ainsi une faible variabilité, mais les variations observés sont obtenues avec une faible erreur. À l'inverse, notre modèle peut présenter de fortes variations, qui s'accompagnent de barres d'erreur importantes. La déviation avec l'énergie imposée par le prior peut quant à elle indiquer la présence de signaux non modélisés mais présents dans les données, qui sont interprétés comme un signal du noyau. Il est impossible en l'état de trancher sur cette hypothèse. Les résultats présentés dans Ropp et al. (2020) montrent déjà une adéquation correcte de la variation séculaire obtenue avec celle de Chaos-6. Les séries temporelles de quelques coefficients de Gauss y sont également présentées. Nous nous concentrons ici sur les implications de ces variations, notamment l'accélération séculaire et le temps caractéristique de variation de la SV. Le champ du noyau et la variation séculaire ne

présentent pas d'évolution significative de grande échelle ou de forte intensité sur la période de 20 ans étudiée. Cependant, des variations sensibles sont bien observées à différentes échelles, décrites dans Ropp et al. (2020). Elles sont visibles dans les cartes d'accélération présentées en figure 4.5. Ces cartes d'accélération sont représentées à la surface de la Terre et calculées à partir de modèles tronqués au degré 13. Elles représentent l'accélération du champ du noyau, dérivée à partir de la variation séculaire, à différentes époques séparées d'une année. On y retrouve les pics d'accélération caractéristiques des secousses magnétiques (*geomagnetic jerks*) bien connus et décrits notamment par Courtillot et al. (1978), ou plus récemment par Chulliat and Maus (2014) et Lesur et al. (2008), en 2005-2006 et 2008-2009.

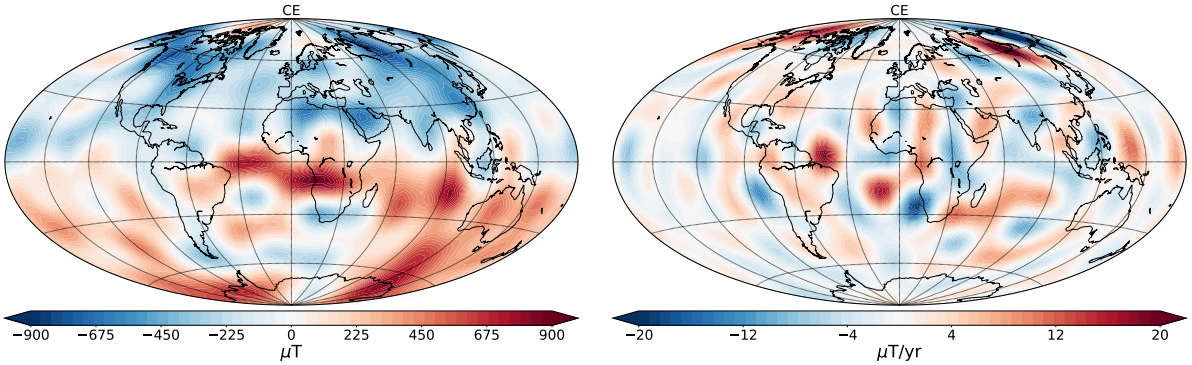

FIGURE 4.3 – Cartes du champ du noyau (gauche) et de la variation séculaire (droite) en 2019.5, calculées à parti de modèles tronqués au degré harmonique 13 et représentées à la surface du noyau externe (CMB).

4.3.3 Temps caractéristiques

Nous abordons dans cette section le calcul et l'analyse des échelles de temps caractéristique d'évolution de la variation séculaire. Cette valeur, interprétée comme le temps de corrélation du signal observé (Christensen et al., 2012), nous donne une indication sur la vitesse à laquelle des changements significatifs se produisent au sein du champ magnétique. Nous nous intéressons particulièrement à l'échelle de temps caractéristique de l'accélération, qui régit donc l'évolution de la variation séculaire.

Ce temps est calculé par le rapport des distributions spectrales d'énergies de la variation séculaire sur l'accélération, qui s'expriment :

$$E_{SV}(\ell) = (\ell+1)\sum_{m=-\ell}^{\ell}(\dot{g}_\ell^m)^2 \tag{4.13}$$

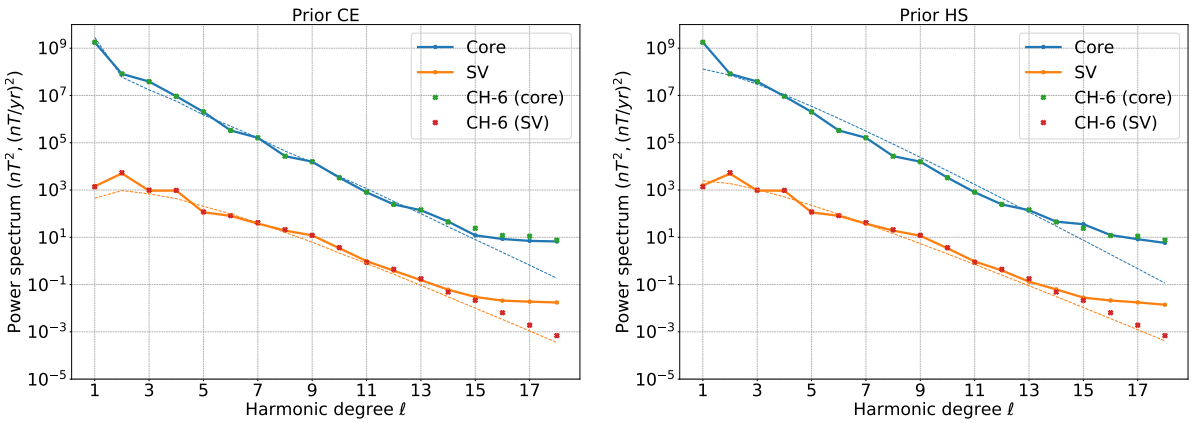

FIGURE 4.4 – Distribution spectrale d'énergie en fonction du degré harmonique en 2019.5, à la surface de la Terre ($r = 6371.2\,\mathrm{km}$). Modèle utilisant le prior CE (gauche) et HS (droite). En bleu, le spectre du champ du noyau, en orange le spectre de la variation séculaire. En lignes pointillées, le spectre d'énergie de la matrice de covariance décrivant le prior. Les croix indiquent les niveaux d'énergie correspondant au modèle Chaos-6 (en vert le champ du noyau, en rouge la variation séculaire).

pour la variation séculaire, et pour l'accélération :

$$E_{SA}(\ell) = (\ell+1)\sum_{m=-\ell}^{\ell}(\ddot{g}_\ell^m)^2 \tag{4.14}$$

et le temps caractéristique s'exprime comme

$$\tau_{SA}(\ell) = \sqrt{\frac{E_{SV}(\ell)}{E_{SA}(\ell)}} \tag{4.15}$$

Une valeur élevée indique donc une prédominance de la variation séculaire sur l'accélération, et donc une évolution lente de la SV. Une valeur faible indique une forte accélération, et donc des variations locales importantes de la SV.

Récemment, la plupart des modèles produits montrent des échelles de temps similaires à ce que les dynamo numériques ont pu montrer, c'est à dire un temps de l'ordre de 100 ans qui décroît avec l'échelle spatiale (donc avec le degré harmonique croissant) pour la variation séculaire, et un temps de l'ordre de 10 ans pour l'accélération, indépendant du degré harmonique (Christensen et al., 2012). Cependant, les temps observés sur les résultats de Coupled Earth (Aubert, 2013) ne montrent pas un temps indépendant du degré (voir figure 4.6) mais une décroissance de τ_{SA} avec le degré harmonique, et nos résultats indiquent une dépendance encore toute à fait

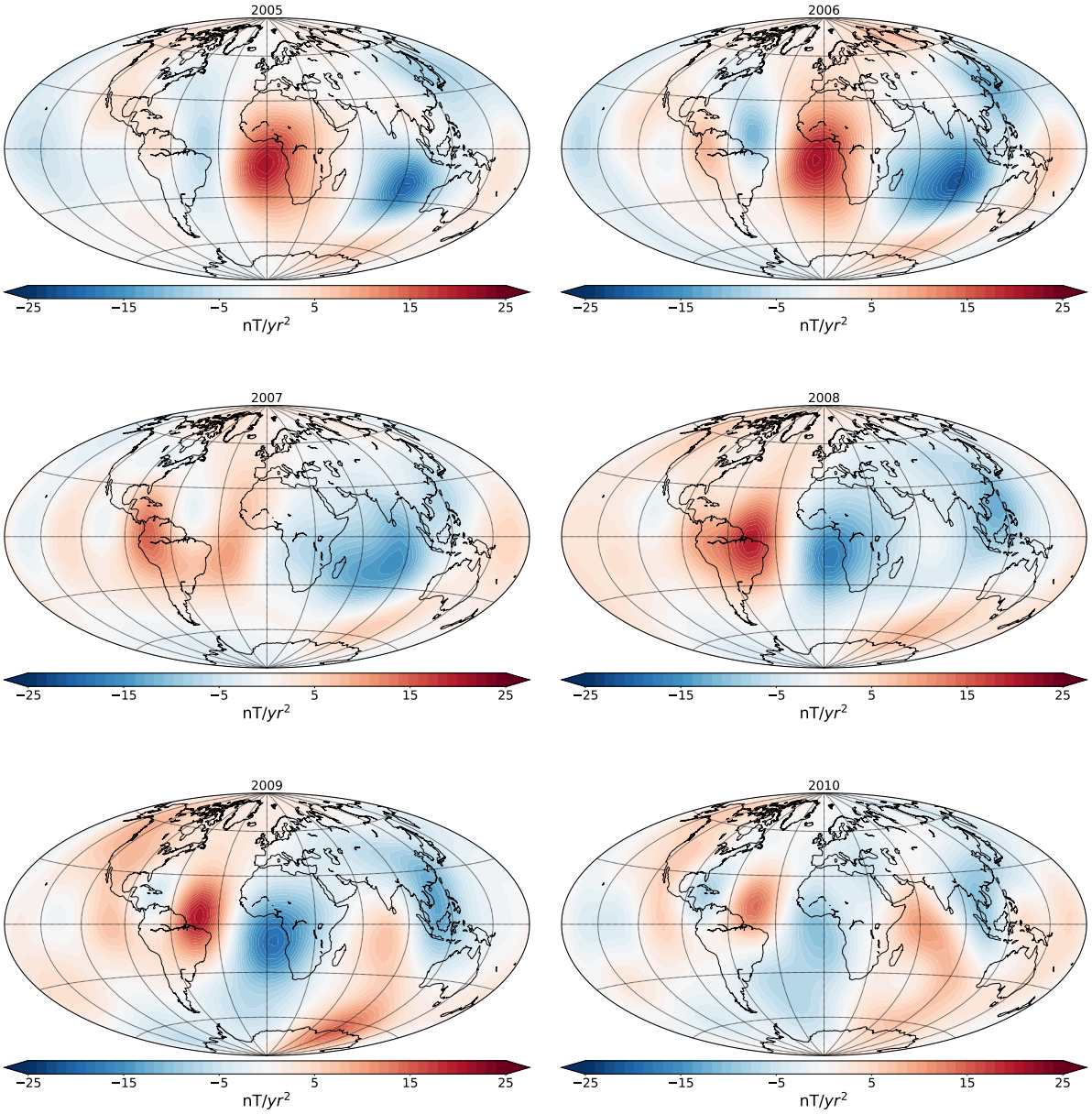

FIGURE 4.5 – Composante radiale de l'accélération du champ du noyau à la surface de la Terre, calculée à partir de modèles tronqués au degré 13 chaque année entre 2005 et 2010.

différente. La figure 4.6 présente l'évolution du temps caractéristique en fonction du degré harmonique ℓ.

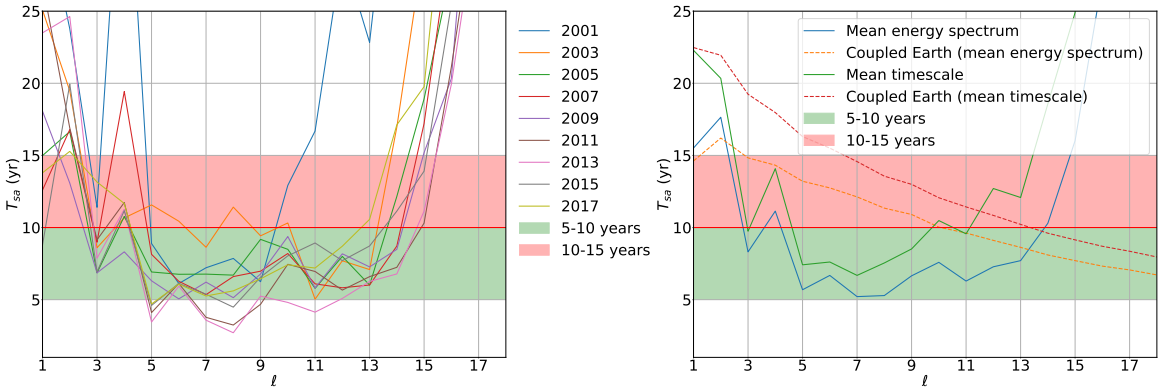

FIGURE 4.6 – Temps caractéristique τ_{SA} en fonction du degré harmonique. A gauche : représentation à différentes époques. A droite : deux valeurs moyennes, accompagnées du temps caractéristique tiré du modèle de dynamo numérique Coupled Earth. Plage en vert : temps de 5 à 10 ans. Plage en rouge : 10 à 15 ans.

Sur la figure de gauche, la relation entre τ_{SA} et ℓ est représentée pour différents snapshots, à 2 ans d'écart. A droite, on représente une moyenne calculée de deux manières différentes. Dans le premier cas, la moyenne est faite sur les temps calculés à chaque époque (courbe verte). Dans le deuxième cas, le temps est calculé à partir d'un spectre d'énergie moyen sur la période. On représente également le temps caractéristique du modèle Coupled Earth (Aubert, 2013) (moyenne des temps en rouge, moyenne des spectres en orange), utilisé pour construire l'information a priori dans notre processus de modélisation. L'interprétation de ces résultats qui suit ne dépend pas particulièrement de la métrique utilisée. Des plages de temps sont indiquées en surligné pour les temps de 5 à 10 ans (vert) et 10 à 15 ans (rouge).

On remarque d'abord la différence importante de morphologie entre le temps caractéristique de notre modèle et celui du prior (à droite de la figure 4.6). Au lieu de la décroissance régulière du temps caractéristique avec le degré harmonique observée au niveau du prior, on observe des variations en 3 phases : entre les degrés 1 et 5, une forte décroissance ; Entre les degrés 5 ou 6 et 13, une courbe relativement plate, stabilisée autour des 6-7 ans. Après le degré 13, une très forte croissance du τ_{SA} clairement instable et probablement peu fiable. A noter qu'à ces degrés, les coefficients de la variation séculaire connaissent des variations caractérisées par des barres d'erreurs importantes, et que la faible résolution des variations du champ sur les intervalles de temps utilisés ne permet pas d'obtenir une accélération conséquente. On note également qu'aux extrémités de la période étudiée, le temps caractéristique se comporte de façon plus instable, les périodes extrêmes étant assez mal résolues dans notre modèle (2001 visible sur le graphe de gauche, figure 4.6).

Ces résultats sont à comparer avec les échelles de temps habituellement considérées

pour l'évolution de la variation séculaire. On considère habituellement que la valeur de cette échelle se trouve entre 10 et 15 ans, avec notamment la valeur de 11 ans proposée par Christensen et al. (2012). Cependant, les résultats obtenus suggèrent que cette valeur est surestimée. Pour les degrés $\ell = 5$ à 13), les valeurs sont en accord avec les résultats des simulations numériques de géodynamo les plus récentes réalisées par Aubert (2018), Aubert and Gillet (2021). La question de savoir lesquelles de ces valeurs correspondent à des phénomènes transitoires ou périodiques (tels que des ondes de torsion par exemple), et lesquelles sont introduites par des signaux non désirés (extérieurs au signal du noyau, tels que des champs induits non paramétrés) repose sur la certitude que le modèle du noyau est bien séparé des autres signaux. La cassure observée au degré 6 coïncide avec le degré maximal auquel sont paramétrés les champs induits, ce qui incite à la prudence quand à l'interprétation de ces résultats, a fortiori en sachant que ce paramétrage est essentiellement empirique. Cependant, l'évolution des résultats obtenus par les dynamos numériques les plus récentes est encourageante pour l'interprétation de ces résultats comme des phénomènes issus de la dynamique du noyau.

Sur les variations temporelles des échelles de temps de l'accélération, on peut relever un pic au degré harmonique 4 en 2007. En observant les variations par degré, on observe une soudaine diminution du temps caractéristique des degrés 2 à 6, qui s'atténue ensuite fortement pour les degrés supérieurs. Cela concorde avec le pic d'accélération observé à ce moment là (Chulliat and Maus, 2014), le pic dans l'échelle de temps, particulièrement visible pour le degré 4 étant du à la diminution soudaine de l'accélération qui suit la secousse. Sur les degrés inférieurs et essentiellement sur le dipôle, on voit apparaître un pic important en 2010. Comme pour d'autres phénomènes observés dans cette période, ce pic est attribuable à la disparition des données satellitaires à ce moment, qui perturbe fortement notre processus.

Les résultats observés, bien qu'ils nécessitent de la prudence dans leur interprétation, sont encourageants pour la capacité de notre procédé à reproduire les variations rapides du champ du noyau. Ils montrent que cette capacité dépend fortement de la qualité du paramétrage des sources en amont, et de la maîtrise de la physique sous-jacente à ce paramétrage. Le chapitre suivant décrit le prolongement de cet effort, avec l'interprétation des modèles décrits ici via le calculs d'écoulements, et l'application de notre approche à la co-estimation de l'écoulement.

4.4 Modèle candidat pour l'IGRF 13

Le travail de modélisation présenté ici a servi à élaborer un candidat pour la construction du modèle de champ magnétique de référence IGRF (*International Geo-*

magnetic Reference Field) 13 (Alken et al., 2021). L'Institut de Physique du Globe de Paris a proposé dans ce cadre trois produits : un modèle de champ magnétique définitif pour l'année 2015, le DGRF ou *Definitive Geomagnetic Reference Field* (Vigneron et al., 2021), un modèle de champ magnétique pour l'année 2020, l'IGRF (Ropp et al., 2020), et un modèle de variation séculaire pour la période 2020-2025 (Fournier et al., 2021).

Le modèle construit pour le candidat IGRF-13 repose sur la méthode présentée ici et décrite dans Ropp et al. (2020), mais diffère sur plusieurs points :

— La période utilisée est réduite à 2013.5-2019.5, se limitant à l'ère des données satellitaires Swarm disponibles à ce moment.
— Le pas de temps utilisé est d'un an
— La gestion des champs induits est différente : leur prior est calculé en utilisant la méthode dite 'HS' décrite dans Ropp et al. (2020), en utilisant des paramètres R et S fixés à 2200 km et 1.10^{-3} respectivement.

L'évaluation des modèles candidats, décrite par Alken et al. (2020), a déterminé que les candidats étaient de bonne qualité, et proposaient une description fiable du champ magnétique, comme le montre la figure 4.7 qui présente l'écart moyen quadratique de chaque candidat au modèle médian (partie gauche) et le degré de corrélation de chaque candidat au modèle médian (partie droite). Le degré de corrélation est très satisfaisant (>0.97) pour tous les candidats jusqu'au degré 13, et notre candidat (ligne pointillée rouge) présente un écart moyen satisfaisant, de l'ordre de $1\,\mathrm{nT}^2$ ou moins après le degré 2.

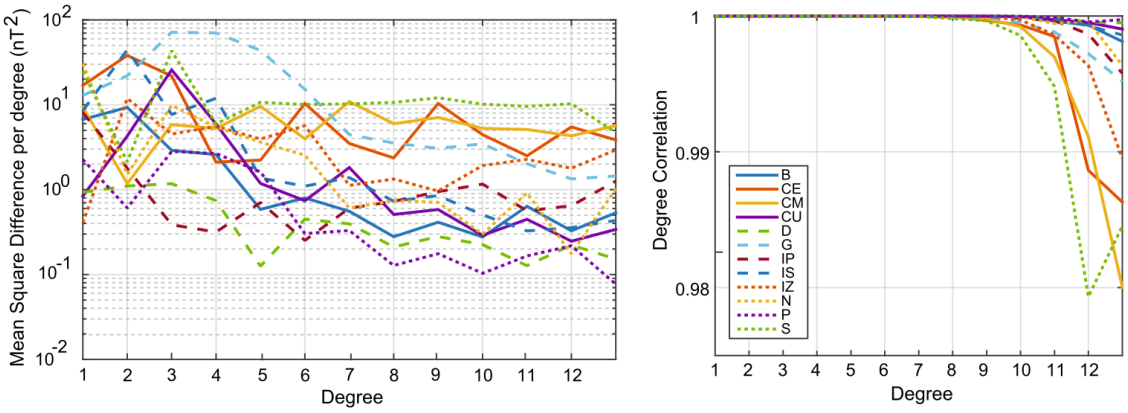

FIGURE 4.7 –
Gauche : Écart quadratique moyen des candidats IGRF-13 au modèle médian. Droite : degré de corrélation des candidats IGRF-13 au modèle médian. Figure de Alken et al. (2020).

Chapitre 5. Estimation et co-estimation de l'écoulement

L'observation du champ magnétique et de sa variation séculaire à la surface de la Terre permet d'accéder à l'écoulement ayant cours à la surface du noyau liquide. Nous présentons ici deux approches de ce problème. La première consiste à utiliser les séries de modèles de champ magnétique du noyau et de sa variation séculaire pour calculer l'écoulement à la surface du noyau par une inversion. La deuxième consiste à résoudre un problème unique, qui combine l'estimation des paramètres du champ magnétique par la donnée, et l'estimation des paramètres de l'écoulement par l'équation d'induction. La variation séculaire intervient quant à elle dans les deux parties. Dans les deux cas, l'estimation de l'écoulement repose sur l'hypothèse que le champ magnétique est bien connu dans l'intervalle de temps considéré. Nous présentons dans les sections suivantes les deux approches et leurs résultats respectifs.

5.1 Inversion de l'écoulement à partir des séries de champ magnétique et de variation séculaire

Cette section présente une approche séquentielle de l'inversion d'écoulements de surface dans le noyau liquide à partir de séries de champ magnétique du noyau et de sa variation séculaire, dans l'approximation de flux gelé.

5.1.1 Méthode

La variation séculaire observée est le résultat de l'advection d'un champ magnétique existant par l'écoulement du liquide composant le noyau externe, ainsi que de la diffusion magnétique associée à cette advection. Dans sa forme complète, l'équation d'induction qui lie écoulement d'un liquide conducteur, champ magnétique et dérivée temporelle du champ magnétique s'écrit (Roberts, 2015) :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \tag{5.1}$$

où $\mathbf{B}$ est le champ magnétique, $\mathbf{U}$ le champ de vitesse du fluide et η est la diffusivité magnétique du milieu. La variation séculaire du champ géomagnétique observée est donc le résultat de ces deux phénomènes. L'approximation du flux gelé consiste à supposer que l'effet de la diffusion magnétique ne se fait ressentir que sur des échelles de temps longues devant les intervalles étudiés. Ainsi on peut considérer que la variation observée n'est due qu'à l'advection. Dans ce cas la diffusion peut être soit intégrée dans le bilan d'erreur associé à la variation séculaire, soit entièrement négligée.

5.1.1.1 Équation d'induction et paramétrage

Nous rappelons l'équation d'induction dans l'approximation de flux gelé :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \tag{5.2}$$

Où $\mathbf{B}$ est le vecteur champ magnétique du noyau, et $\mathbf{U}$ est le champ de vitesse à l'intérieur du noyau. L'interface entre le bas du manteau et la surface du noyau externe présente un saut de conductivité (Roberts, 2015). Les équations de continuité du champ magnétique à travers une telle interface ne permettent de propager que la composante radiale du champ. Rigoureusement, la couche supérieure du noyau liquide doit être soumise à un champ de vitesse nul, du fait de la rigidité du manteau et de la contrainte de non-glissement qui s'applique à l'interface liquide-solide. Cependant, on ignore ici cette couche limite pour s'intéresser à la première couche d'écoulement libre

dans le noyau (Jault and Le Mouël, 1991). La contrainte imposée par la rigidité du manteau nous permet de réduire le problème à un écoulement en deux dimensions : sa composante radiale est considérée comme nulle. Il est possible d'exprimer l'équation d'induction pour la composante radiale du champ magnétique et de sa variation :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (B_r \mathbf{U}_H). \tag{5.3}$$

L'écoulement, supposé incompressible, peut être décomposé en une partie toroïdale et une partie poloïdale dans une approche classique (Holme, 2007). Chaque partie de l'écoulement est paramétrée et traitée indépendamment.

$$\mathbf{U}_H(\theta, \varphi) = \nabla_H \times (\hat{\mathbf{r}} T) + \nabla_H S \tag{5.4}$$

où S et T sont les potentiels liés à la partie poloïdale (resp. toroïdale) de l'écoulement. Comme dans le cas du champ magnétique, nous travaillons dans l'espace des harmoniques sphériques, les paramètres estimés sont donc les coefficients de Gauss des potentiels de vitesse. Pour le paramétrage temporel, une grille temporelle identique à celle de la série de modèles de champ est utilisée. Les coefficients de Gauss des parties toroïdale et poloïdale sont notés t_ℓ^m et s_ℓ^m respectivement. L'expression de l'équation d'induction s'exprime dans le domaine des harmoniques sphériques de cette façon :

$$\dot{g}_\ell^{m,s} = \frac{2\ell+1}{8\pi c(\ell+1)} \sum_{\ell'',m''} s_{\ell''}^{m''} \sum_{\ell',m'} (\ell'+1) g_{\ell'}^{m'} \left[\ell(\ell+1) + \ell''(\ell''+1) - \ell'(\ell'+1)\right] G^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''} \tag{5.5}$$

et

$$\dot{g}_\ell^{m,t} = \frac{2\ell+1}{4\pi c(\ell+1)} \sum_{\ell'',m''} t_{\ell''}^{m''} \sum_{\ell',m'} (\ell'+1) g_{\ell'}^{m'} E^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''}, \tag{5.6}$$

où les $\dot{g}_\ell^{m,t}$ (resp. $\dot{g}_\ell^{m,s}$) sont les coefficients de Gauss de la contribution de l'écoulement toroïdal (resp. poloïdal) à la variation séculaire. Les fonctions $E^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''}$ and $G^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''}$ sont les intégrales d'Elsasser et de Gaunt, définies comme :

$$G^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''} = \int_{\Omega_c} d\omega \; Y_\ell^m Y_{\ell'}^{m'} Y_{\ell''}^{m''}$$

et

$$E^{\ell,m}_{\ell',m',\ell'',m''} = -\int_{\Omega_c} d\omega \; \left(\nabla_H Y_{\ell'}^{m'} \cdot \nabla_H \times \left(\hat{\mathbf{r}} Y_{\ell''}^{m''}\right)\right) Y_\ell^m.$$

Les paramètres du champ du noyau sont ici considérés comme connus, et ne sont donc pas des paramètres à estimer dans l'inversion. La variation séculaire et le champ

magnétique sont exprimés jusqu'au degré harmonique 13. Ainsi on peut définir un opérateur linéaire qui relie la variation séculaire à l'écoulement, et qui dépend du champ magnétique à l'instant considéré.

Sous forme matricielle, on note :

$$\mathbf{b} = (g_\ell^m)_{\ell,m} \ , \quad \dot{\mathbf{b}} = (\dot{g}_\ell^m)_{\ell,m}$$
$$\mathbf{u}_s = (s_\ell^m)_{\ell,m} \ , \quad \mathbf{u}_t = (t_\ell^m)_{\ell,m}$$

les vecteurs contenant les paramètres du champ du noyau, de la variation séculaire, de l'écoulement poloïdal et de l'écoulement toroïdal respectivement. On note également $\mathbf{u}$ le vecteur contenant les deux parties de l'écoulement, et $\mathbf{H_b}$ l'opérateur linéaire reliant ce dernier à la variation séculaire par la relation :

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{H_b u} + \boldsymbol{\epsilon}_s. \tag{5.7}$$

Notons que cette relation peut s'écrire de façon équivalente :

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{H_u b} + \boldsymbol{\epsilon}_s, \tag{5.8}$$

où l'opérateur dépend de l'écoulement, et le champ magnétique joue le rôle de la variable. On fait apparaître dans ces relations l'erreur $\boldsymbol{\epsilon}_s$, qui rend compte de l'incertitude sur la variation séculaire, de l'effet de la diffusion, et de l'effet de la troncature des développements harmoniques des champs.

5.1.1.2 Erreur et covariances

Comme dans le chapitre précédent, les paramètres estimés sont représentés par des ensembles statistiques, décrits par une distribution normale, et donc une valeur moyenne et une matrice de covariance. L'erreur globale sur l'équation directe (équation 5.7) résulte de l'incertitude sur la variation séculaire, de l'erreur de troncature, ainsi que l'erreur due à l'approximation du flux gelé – c'est à dire le fait de négliger la diffusion. Il faut également considérer l'incertitude sur le champ du noyau. L'information a priori sur l'écoulement est également caractérisée par une distribution normale, de moyenne nulle et dont la covariance rend compte des statistiques attendues pour le modèle calculé. Nous détaillons ici le calcul de l'erreur due à l'approximation du champ du noyau. Nous proposons pour cela une approche décrite initialement dans Lesur et al. (2015). Elle consiste à considérer la relation 5.8, dans laquelle on suppose une connaissance exacte de l'écoulement, et dont on peut dériver la covariance de la variation séculaire selon le schéma suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{g}}}^0 = \mathbf{C}_{\epsilon_s} \\ \\ \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{g}}}^k = \mathbf{H}_{\mathbf{u}_k} \mathbf{C}_\mathbf{g} \ \mathbf{H}_{\mathbf{u}_k}^T + \mathbf{C}_{\epsilon_s} \ , \quad k \geq 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

où $\mathbf{u}_k$ est l'écoulement calculé à chaque itération.

La matrice de covariance d'erreur initiale est la diagonale de la covariance de la variation séculaire. On ajuste cette erreur à partir de l'équation d'induction 5.8, dans laquelle l'incertitude sur le champ magnétique apparaît. En choisissant d'écrire cette dernière relation jusqu'à un degré plus élevé que celui auquel on connaît le champ, on peut également obtenir une estimation de l'incertitude due à la troncature. En effet l'expression 5.9 fait apparaître les statistiques du champ magnétique via la matrice $\mathbf{C_g}$, qui peut être extrapolée jusqu'à un degré supérieur sans pour autant y connaître le champ moyen lui-même. Seules ses statistiques d'erreur sont nécessaires. Ce processus est dépendant de la connaissance de l'écoulement via la matrice $\mathbf{H_u}$. Il est donc nécessaire de le répéter plusieurs fois pour approcher une estimation satisfaisante de l'erreur. En pratique, le résultat semble converger rapidement au bout de quelques itérations. Trois itérations sont conservées pour produire le résultat présenté ici. Notons que le choix effectué ici est d'ignorer la diffusion, au vu du faible pas de temps utilisé.

5.1.1.3 Inversion

La solution au problème inverse définit par la relation 5.7 se calcule par méthode des moindres carrés comme :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_p + \mathbf{C}_\mathbf{u}^p \, \mathbf{H}_\mathbf{b}^T \left(\mathbf{H_b} \, \mathbf{C}_\mathbf{u}^p \, \mathbf{H}_\mathbf{b}^T + \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{g}}}^k \right)^{-1} \left(\dot{\mathbf{b}} - \mathbf{H_b} \, \mathbf{u}_p \right) \tag{5.10}$$

pour l'écoulement moyen, et

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{C}_\mathbf{u}^p - \mathbf{C}_\mathbf{u}^p \, \mathbf{H}_\mathbf{b}^T \left(\mathbf{H_b} \, \mathbf{C}_\mathbf{u}^p \, \mathbf{H}_\mathbf{b}^T + \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{g}}}^k \right)^{-1} \mathbf{C}_\mathbf{u}^p \, \mathbf{H}_\mathbf{b}^T \tag{5.11}$$

pour sa covariance. $\mathbf{u}_p$ est le vecteur moyen et $\mathbf{C}_\mathbf{u}^p$ la matrice de covariance de la distribution de modèles a priori. Dans l'application présentée ici, la moyenne est nulle, et la covariance est dérivée d'expériences de dynamo du modèle Coupled Earth, menée par Aubert et al. (2013). Le même prior est utilisé à chaque pas de temps. Le prior est construit de façon analogue à celui utilisé pour le champ du noyau et la variation séculaire lors de l'assimilation des données magnétiques décrite dans le chapitre 4. Nous avons dérivé des modèles d'écoulement en partant de deux formes différentes du prior : l'une où l'on ne conserve que la partie diagonale des matrices de covariance (information sur l'énergie uniquement), et l'autre où l'on conserve l'intégralité de la matrice (information sur la structure spatiale via les corrélations entre coefficients de Gauss de degrés et d'ordres différents).

5.1.2 Résultats

La figure 5.1 montre des cartes de l'écoulement obtenu à une date, 2016, pour chacun des modèles produits.

Les écoulements possèdent une structure classique, produisant le gyre central est-ouest bien connu, qui constitue leur structure principale. On note que l'écoulement calculé à partir d'un prior complet diffère nettement de celui qui n'utilise que l'information diagonale. La répartition de l'énergie n'est pas la même : lorsqu'on utilise la matrice complète, on retrouve légèrement moins d'énergie dans l'écoulement du gyre central, et plus dans des structures de taille inférieure comme l'écoulement rotationnel observé sous le continent africain (figure 5.1).

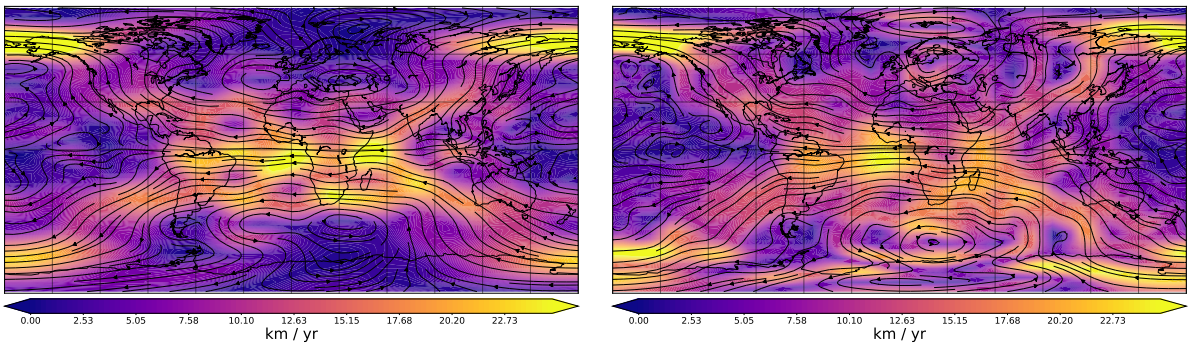

FIGURE 5.1 – Cartes du champ de vitesse à la surface du noyau (CMB) en 2016.0. Comparaison des modèles utilisant le prior diagonal (gauche) et complet (droite). Des différences apparaissent dans la répartition des échelles spatiales. La direction de l'écoulement est indiquée par les lignes fléchées, la vitesse absolue par la couleur.

Cela souligne un résultat important de cette étude : l'écoulement calculé est très proche du prior utilisé, bien qu'il ne reproduise pas totalement sa structure. Sauf indication contraire et lorsque les deux modèles sont comparés, on présente par la suite les résultats concernant le modèle utilisant le prior complet. Les priors utilisés présentent un spectre relativement plat, avec beaucoup d'énergie aux échelles moyennes et petites. Cependant, l'écoulement obtenu possède une distribution spectrale d'énergie plus décroissante, à fortiori pour l'écoulement poloïdal, comme le montre la figure 5.2 qui présente la distribution spectrale d'énergie à deux dates pour les deux parties de l'écoulement.

La figure 5.4 montre l'évolution de la forme de l'écoulement sur la période étudiée. Les grandes structures, les plus visibles, ne varient pas significativement sur cette durée. Cependant des variations relatives sont observables. Les séries temporelles des coefficients de Gauss présentent des variations temporelles intéressantes à des périodes de l'ordre de quelques années. Nous proposons ici une façon de comparer nos résultats avec une donnée observable et indépendante : la variation de la durée du jour. Les échanges de moment d'inertie entre le noyau et le manteau provoqués par les mouvements zonaux de la couche supérieure du noyau liquide affectent la

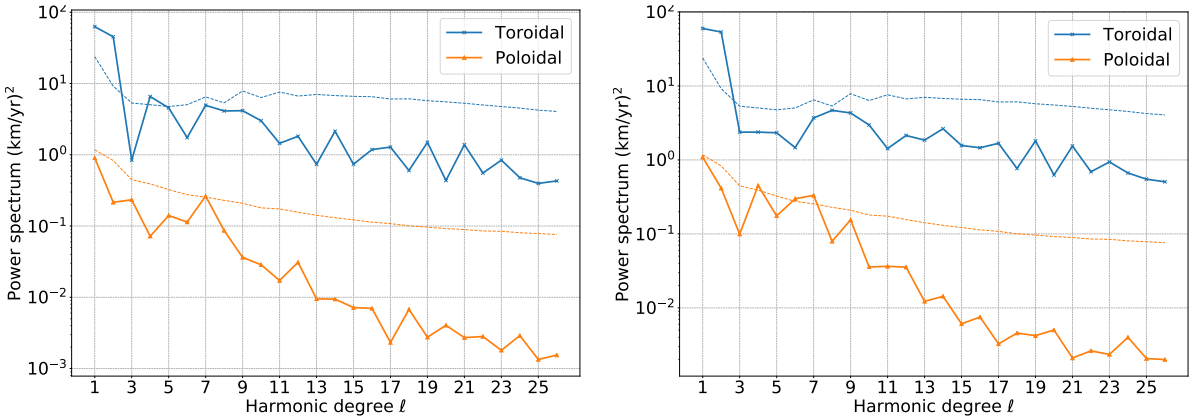

FIGURE 5.2 – Distribution spectrale d'énergie pour les deux parties – toroïdale (en bleu) et poloïdale (en orange) – de l'écoulement à deux époques ; 2006 (gauche) et 2016 (droite). L'énergie de la matrice de covariance du prior est représentée en lignes pointillées.

rotation de la Terre et peuvent donc influencer la durée du jour solaire. Cela découle de la contrainte de conservation du moment cinétique global (c'est à dire du système Terre dans son ensemble), qui implique qu'un changement de moment angulaire dans le noyau doit se reporter sur le moment angulaire du manteau. Cet aspect de la dynamique du noyau a été décrit et étudié à plusieurs reprises, voir notamment Jault and Le Mouël (1989), Jackson (1997) et Asari et al. (2009). Il nous permet de comparer la variabilité de l'écoulement obtenu (et à travers lui, de la variation séculaire) avec une donnée indépendant de la mesure du champ magnétique, ce qui en fait une analyse de valeur. Nous comparons dans la figure 5.3 les données de variation de la longueur du jour, nettoyées des effets déjà connus, comme les marées solides et les contributions atmosphériques, avec la contribution théorique de l'écoulement de surface du noyau. Celle-ci est calculée à partir de la formule suivante, utilisant les coefficients de Gauss principaux de l'écoulement toroïdal zonal (t_1^0 et t_3^0) (Asari et al., 2009).

$$\Delta\mathrm{LOD} = 1.138 \times \left(t_1^0 + \frac{12}{7} t_3^0 \right) \mathrm{ms} \tag{5.12}$$

Les deux figures montrent les séries temporelles des deux grandeurs brutes d'une part, et après filtrage d'autre part. On applique un filtre passe-bande (filtre de Butterworth) isolant la partie du signal de période comprise entre 4 et 10 ans. L'analyse des séries temporelles montre un accord partiel avec les données, suggérant qu'une partie au moins du signal observé puisse être effectivement expliquée par les mouvements zonaux dans l'écoulement du noyau. Après filtrage entre 4 et 10 ans, on observe que les séries présentent une amplitude comparable, et s'accordent sur les variations

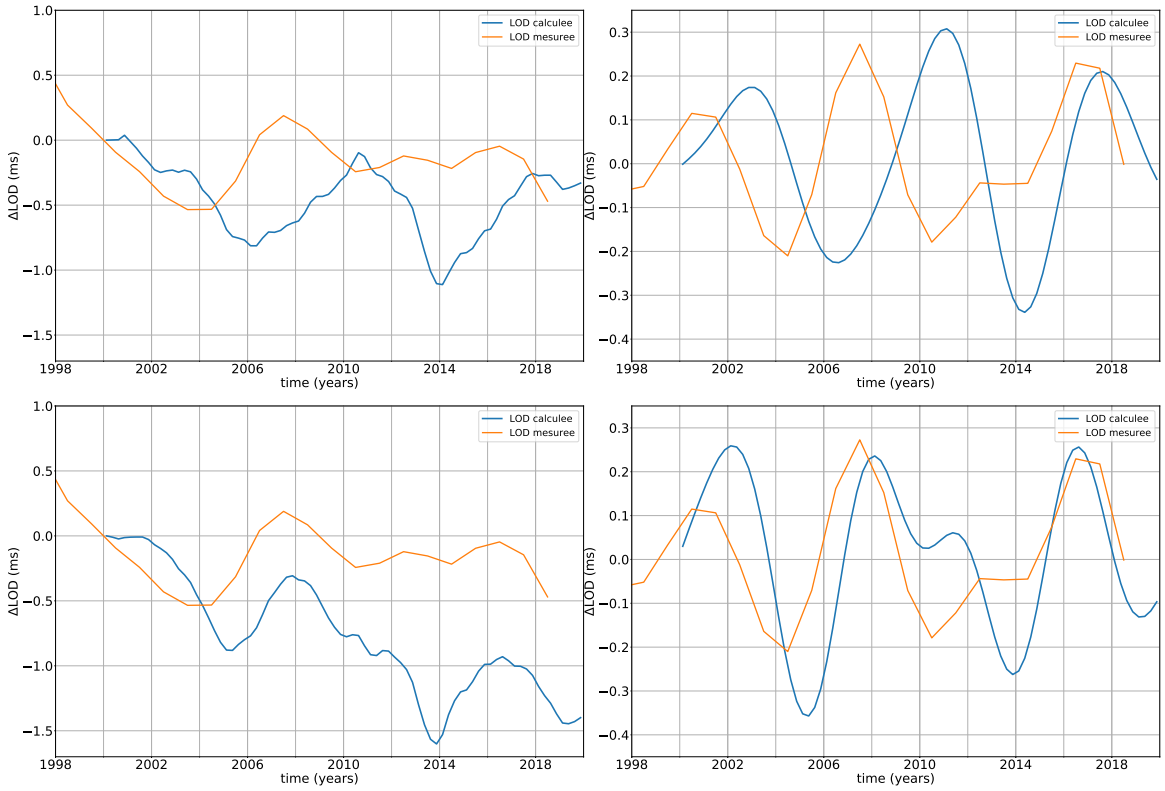

FIGURE 5.3 – Séries temporelles de variation de durée du jour supposée due à l'interaction noyau-manteau (en bleu), comparée aux données de variation de durée du jour observée et nettoyée des effets déjà connus (orange). A gauche : signaux bruts. A droite : signaux filtrés par un passe bande entre 4 et 10 ans. En haut : modèle d'écoulement utilisant le prior diagonal. En bas : modèle d'écoulement utilisant le prior complet.

de période proche de 5 ans. Les coefficients intervenant dans ce calcul sont supposés porter la marque de la présence d'ondes de torsion dans le noyau (Cox et al., 2014 ; Gillet et al., 2010,1). Les bornes de périodes 4 et 10 ans sont choisies car c'est la zone spectrale dans laquelle les variations de l'écoulement zonal sont significatives vis à vis de l'écoulement non zonal. Ainsi c'est là que l'on espère le plus probablement trouver les variations périodiques des coefficients t_1^0 et t_3^0. On note un déphasage net entre le cas du modèle calculé en utilisant un prior diagonal et celui utilisant le prior complet. Celui-ci est en opposition de phase avec la série de données. Le modèle utilisant le prior complet présente des oscillations plus en phase avec les données. Dans les deux cas, l'énergie du signal filtré est comparable à celle des données de variation de durée du jour. Il semble donc que la contrainte du prior sur la structure de l'écoulement (i.e.

les cross-corrélations) joue un rôle important dans la reproduction de ses variations temporelles.

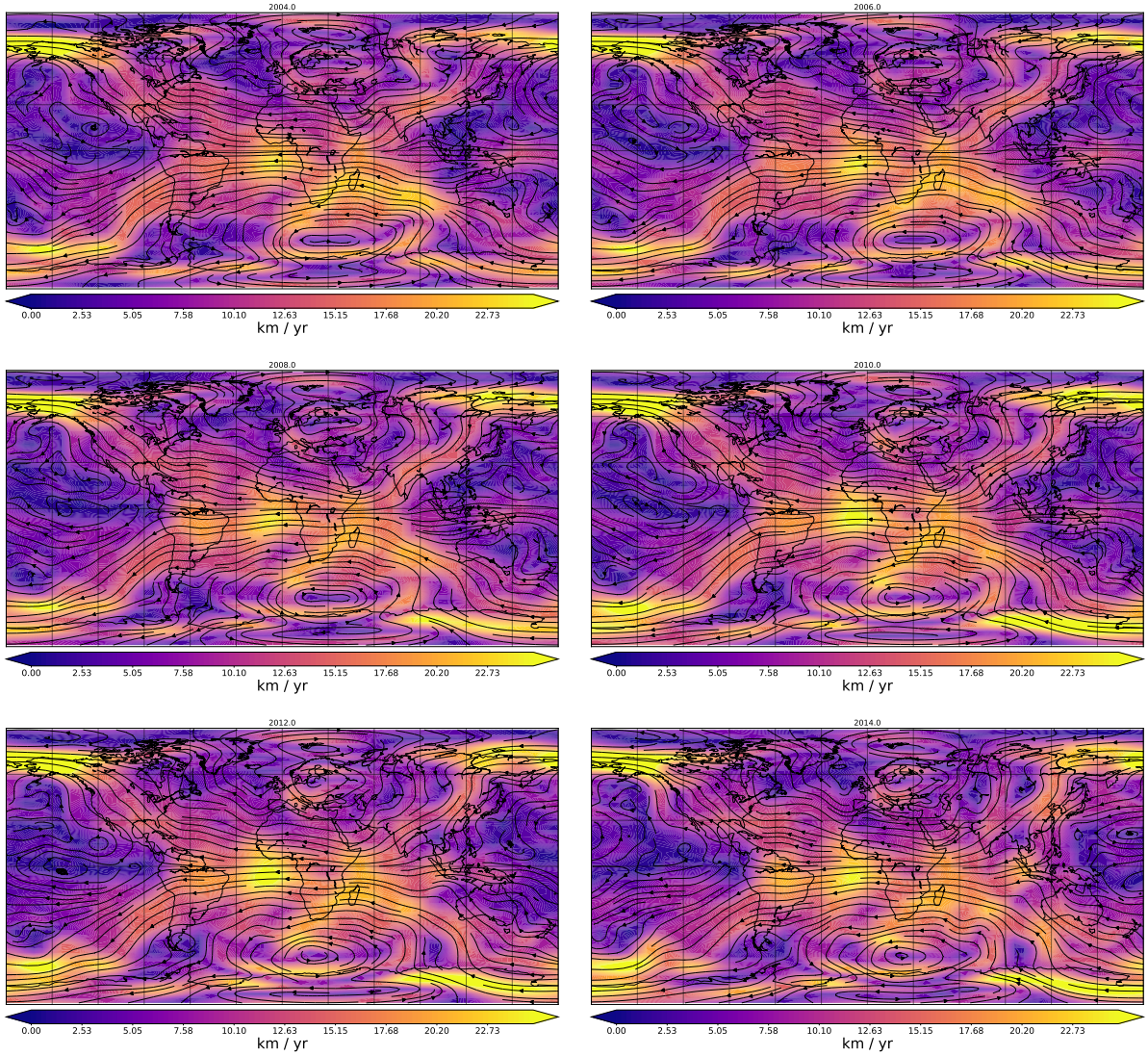

FIGURE 5.4 – Cartes du champ de vitesse à la surface du noyau (CMB) à six dates (2004, 2006, 2008, 2010, 2012 et 2014). La direction de l'écoulement est indiquée par les lignes fléchées, la vitesse absolue par la couleur.

5.2 Co-estimation de l'écoulement et du champ magnétique

Dans la section précédente, la variation séculaire est considérée comme une donnée (accompagnée de son incertitude) et utilisée pour estimer l'écoulement de surface du noyau. Le champ magnétique est lui considéré comme un paramètre parfaitement connu, une approximation qui est corrigée lors du calcul de l'erreur sur la variation séculaire. Ainsi le calcul de l'écoulement consiste en une analyse des résultat de l'assimilation des données magnétiques décrite au chapitre 4. Il est cependant possible de co-estimer directement à partir des données magnétiques, et le champ du noyau, sa variation et les autres sources magnétiques, et l'écoulement de surface du noyau. Cela permet principalement de tenir compte des corrélations entre écoulement et champ magnétique pour l'estimation de l'écoulement, mais aussi en principe d'obtenir un ajustement de la variation séculaire. En effet, celle-ci est considérée comme un paramètre dans l'équation d'induction, et peut donc être influencée par le calcul de l'écoulement. Le champ magnétique statique est lui toujours considéré comme connu dans l'équation d'induction.

5.2.1 Méthode

L'assimilation des données pour l'estimation des paramètres magnétiques reste identique à ce qui est décrit dans le chapitre 4. Nous détaillons ici les modifications nécessaires à la co-estimation de l'écoulement. L'équation d'induction 5.7 se réécrit afin d'adapter la forme du problème :

$$\mathbf{0} = -\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{H_b u} + \boldsymbol{\epsilon}_s. \tag{5.13}$$

Le problème direct s'exprime donc par le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \mathbf{A_d m} + \boldsymbol{\epsilon}_d, \\ \\ 0 = -\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{H_b u} + \boldsymbol{\epsilon}_s, \end{cases} \tag{5.14}$$

où la première ligne est celle décrite dans l'équation 4.4. $\mathbf{A_d}$ est l'opérateur reliant les paramètres des sources magnétiques (vecteur $\mathbf{m}$) aux données (vecteur $\mathbf{d}$), auxquelles on associe l'erreur $\boldsymbol{\epsilon}_d$. Le problème est résolu en un seul bloc, décrit par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \dot{\mathbf{A}}_c & \mathbf{A}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{sv} & \mathbf{0} & \mathbf{H_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} \\ \mathbf{m}_e \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_d \\ \boldsymbol{\epsilon}_s \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

où $\mathbf{m}_e$ désigne le vecteur des paramètres de toutes les sources magnétiques à l'exception des champs du noyau. La matrice $\mathbf{A_d}$ se décompose en $\mathbf{A}_c$, $\dot{\mathbf{A}}_c$ et $\mathbf{A}_e$, qui désignent respectivement les matrices blocs associées au champ du noyau, la variation séculaire, et l'ensemble des autres sources magnétiques. Le vecteur $\mathbf{m}$ se décompose de même en $\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}$ et $\mathbf{m}_e$, respectivement. Le système est ensuite résolu via une recherche de moindres carrés, de manière analogue à ce qui est décrit dans le chapitre 4. La résolution, faite de manière séquentielle avec le même pas de temps de 3 mois, s'appuie sur un filtre de Kalman avec lissage. Deux aspects nécessitent notre attention : la définition du prior pour l'écoulement, et le calcul des statistiques de l'erreur ϵ_s.

5.2.1.1 Modèle a priori

Le modèle d'écoulement a priori est calculé à chaque pas de temps par propagation du modèle du pas de temps précédent selon un processus AR1. L'échelle de temps qui intervient dans la propagation est de 11 ans, basée sur l'échelle de temps considérée pour la variation séculaire (Christensen et al., 2012). Il faut noter que dans cette étude, la propagation de la variation séculaire est indépendante de celle de l'écoulement en ce qui concerne les moyennes de distributions de modèles. La matrice de covariance, en revanche fait intervenir les corrélations entre les différentes sources qui apparaissent donc dans l'information a priori. Le processus pourrait être mis à jour en utilisant l'équation d'induction pour propager la variation séculaire. Cette approche, qui fait intervenir des problèmes de non linéarité, n'est pas abordée ici.

Le prior initial sur l'écoulement est décrit par une distribution de moyenne nulle, et de covariance dérivée des expériences de dynamo numériques Coupled Earth (Aubert et al., 2013). Nous utilisons une série de 9000 échantillons d'une série temporelles produite par le modèle Coupled Earth pour construire une matrice de covariance, qui tient compte des corrélations entre coefficients de l'écoulement (y compris entre écoulements poloïdal et toroïdal). Cette approche est analogue à celle utilisée pour construire les priors du champ du noyau et de la variation séculaire, décrite dans le chapitre 4 et dans Ropp et al. (2020).

5.2.1.2 Calcul de l'erreur

L'équation d'induction décrite en 5.13 et 5.14 fait intervenir différentes sources d'erreur : l'approximation de flux gelé (négligence de la diffusion), erreur de troncature du développement en harmoniques sphériques, et erreur sur le champ magnétique (considéré comme un paramètre connu). L'erreur sur l'équation d'induction est calculée de façon itérative, comme dans le cas de l'inversion d'écoulements. On ajuste l'erreur due à l'incertitude sur la variation séculaire (covariance de la distribution de paramètres de variation séculaire obtenue) par l'erreur de troncature, basée sur l'équa-

tion d'induction 5.8. Ce processus est détaillé dans la section 5.1.1. Les itérations sont confondues avec le calcul des poids d'Huber. Il faut noter que dans l'application du processus présenté ici, nous ne tenons pas compte de l'incertitude due à la diffusion.

5.2.2 Résultats

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus par la méthode de co-estimation. Nous présentons d'abord les caractéristiques globales des modèles d'écoulements, puis nous analysons leurs variations temporelles via les deux outils utilisés précédemment ; la variation de la durée du jour, et l'étude des temps caractéristiques.

5.2.2.1 Modèles d'écoulement

L'écoulement présente une structure très marquée par les petites échelles spatiales, comme le montrent les spectres de la figure 5.5 et les cartes d'écoulement de la figure 5.7. Le gyre est-ouest reste cependant dominant dans la dynamique de l'écoulement.

On remarque que cette distribution d'énergie reste proche de celle du prior, bien plus nettement que dans les résultats présentés en section 5.1.

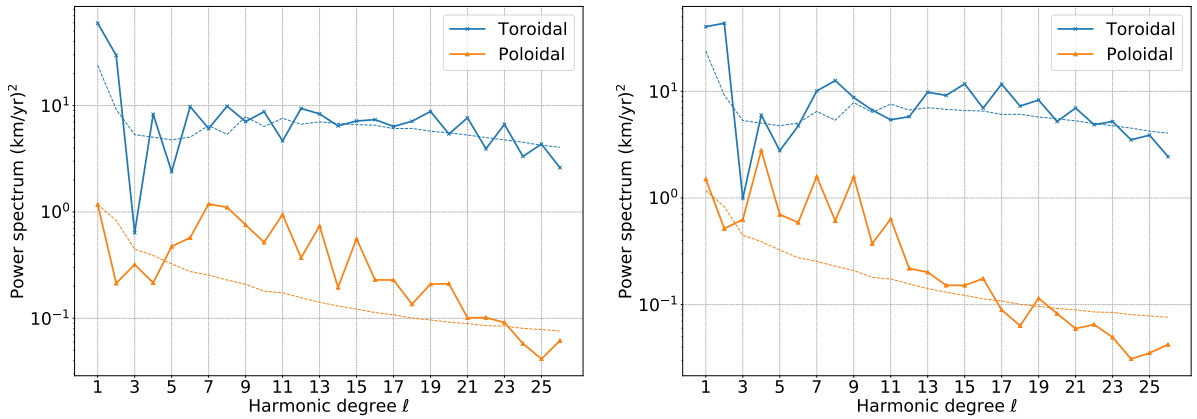

FIGURE 5.5 – Distribution spectrale d'énergie pour les deux parties – toroïdale et poloïdale – de l'écoulement à deux époques ; 2006 (gauche) et 2016 (droite). L'énergie de la matrice de covariance du prior est représentée en lignes pointillées.

Les séries temporelles présentées en figure 5.6 montrent une importante variabilité des coefficients de Gauss des deux parties de l'écoulement. On observe une anomalie sur les premiers points de la série temporelle du coefficient t_1^0 (en haut à gauche de la figure 5.6). Elle correspond aux premières itérations, où aucune donnée satellitaire n'est disponible, bien que sa cause soit inconnue. L'écoulement poloïdal, peu influent

sur l'écoulement global, est cependant marqué par d'importantes variations à différentes échelles (voir figure 5.5), ce qui se traduit par une variation des structures non zonales (turbulences) dans les zones de faible écoulement. L'écoulement toroïdal présente un spectre assez régulier à partir des degrés 4-5, avec beaucoup d'énergie dans les termes de degré 1 et 2, et une forte diminution de l'énergie au degré 3. Les composantes zonales présentent une forte variabilité, indiquant possiblement la propagation d'ondes magnétohydrodynamiques dans le noyau externe. Il est cependant nécessaire d'en vérifier la présence. Nous proposons une analyse de cet écoulement basée sur l'analyse des séries temporelles des composants zonaux principaux t_1^0 et t_3^0.

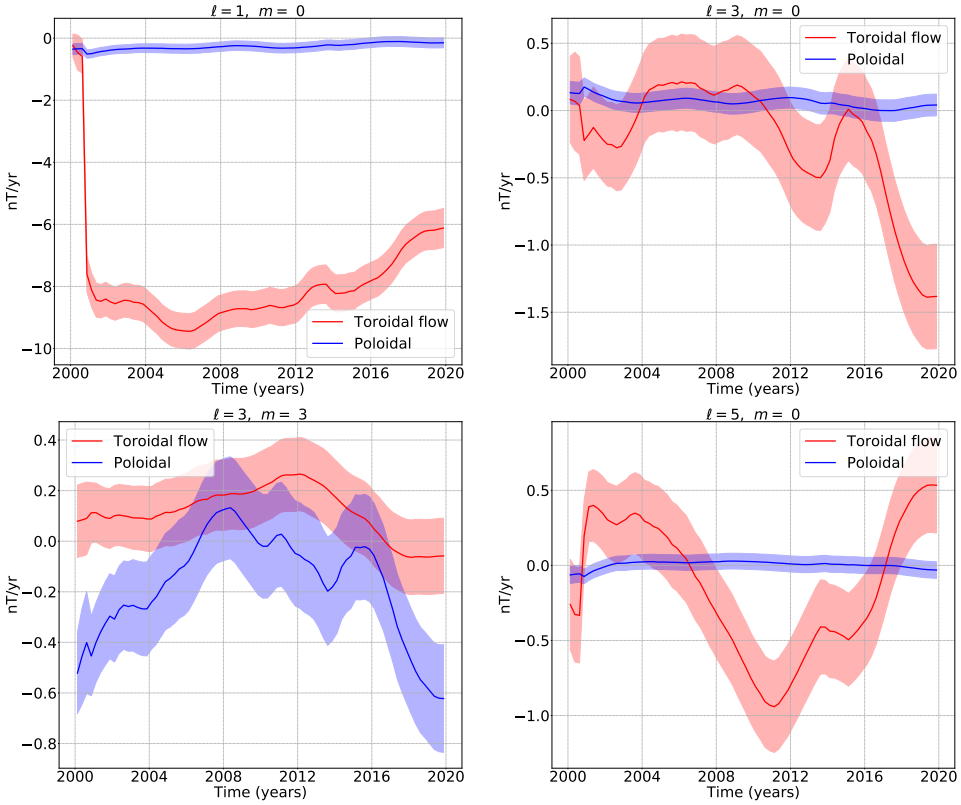

FIGURE 5.6 – Évolution temporelle des coefficients de Gauss de l'écoulement toroïdal (rouge) et poloïdal (bleu). Degrés et ordre (1,0, (3,0), (3,3) et (5,0) de gauche à droite et de bas en haut.

5.2.2.2 Variation de la durée du jour

Comme dans la section précédente, on compare les coefficients (1,0) et (3,0) aux données réelles issues de l'observation de la variation de durée du jour solaire. La

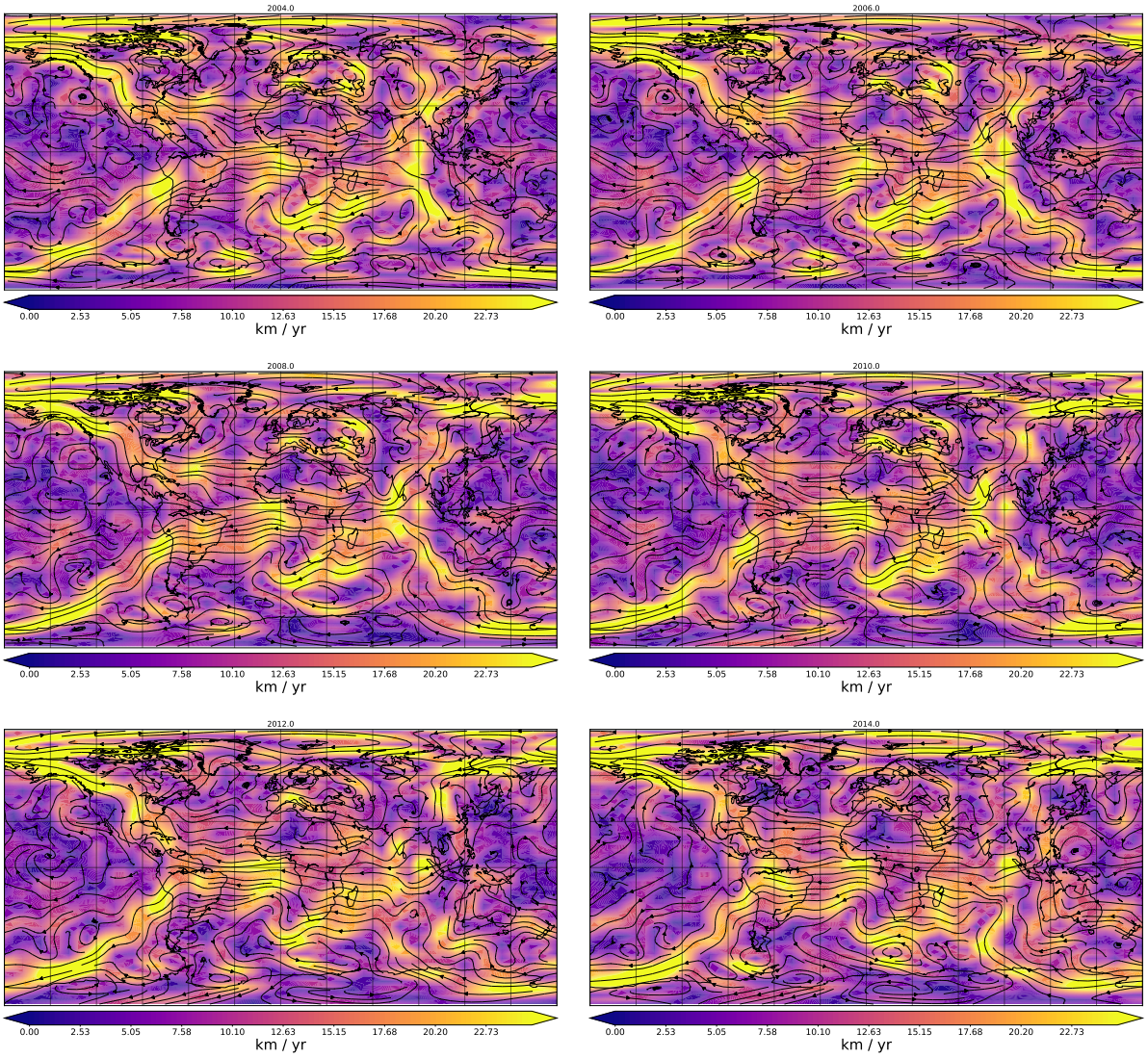

FIGURE 5.7 – Représentation de l'écoulement co-estimé. Cartes du champ de vitesse à la surface du noyau (CMB) aux dates 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014. La direction de l'écoulement est indiquée par les lignes fléchées, la vitesse absolue par la couleur.

figure 5.8 présente les séries temporelles de durée du jour mesurée (nettoyée des effets déjà connus) et calculée (les barres d'erreurs sont représentées à 1 sigma près). A gauche est représentée la série brute avec un offset arbitraire qui permet d'ajuster les deux séries temporelles à 0 en 2001.5 (choisi par commodité), et à droite est affichée la série filtrée (même filtre que dans la section précédente) entre 4 et 10 ans. Une périodicité de l'ordre de 5 ans semble apparaître, bien que l'importance des barres

d'erreur et la faible longueur de la période étudiée rende difficile une conclusion sur la nature des oscillations observées. L'adéquation avec la variation de durée du jour observée n'est pas évidente. Les barres d'erreurs indiquées sont en principe réalistes. On observe cependant qu'elles sont importantes et que la plupart des variations inter-annuelles observées sont comprises dedans. Cela signifie que si l'écoulement moyen connaît des variations intéressantes, d'autres écoulements probables peuvent s'écarter de ce modèle et ne pas présenter de telles variations à ces amplitudes.

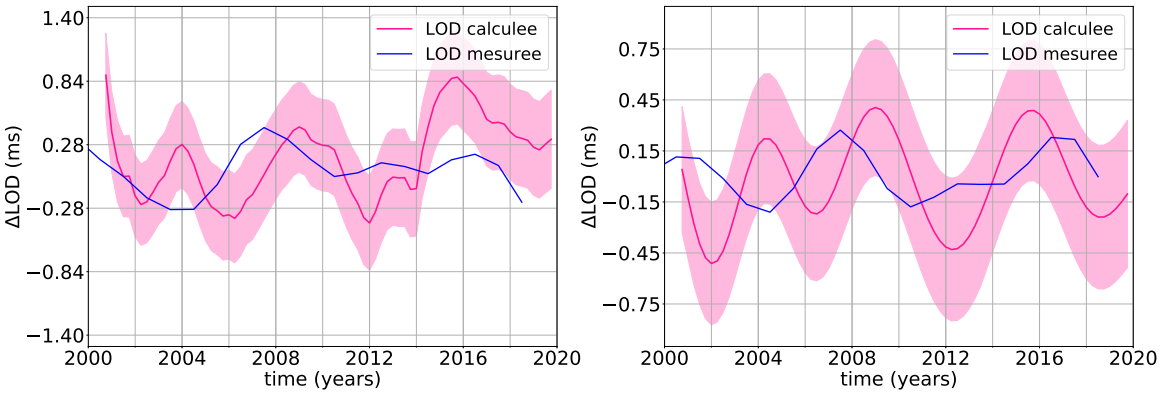

FIGURE 5.8 – Série temporelle de variation de durée du jour observée (bleu) et calculée avec ses barres d'erreur (1 sigma) (rose). A gauche ; séries brutes, ajustées à 0 en 2001.5. A droite : séries filtrées entre 4 et 10 ans.

5.2.2.3 Temps caractéristiques

De manière analogue à ce qui est présenté dans la section 4.3.3 pour la variation séculaire, nous nous intéressons au temps caractéristique de l'accélération de l'écoulement toroïdal. Il est calculé pour chaque degré harmonique comme :

$$T_{tor}(\ell) = \sqrt{\frac{\sum_m |t_\ell^m|^2}{\sum_m |\dot{t}_\ell^m|^2}} \tag{5.16}$$

L'évolution de T_{tor} en fonction du degré harmonique est présentée en figure 5.9, pour différentes époques indiquées, ainsi que pour la moyenne sur l'ensemble de la période étudiée. Les temps caractéristiques varient fortement avec le temps pour tous les degrés harmoniques, mais sont relativement peu dépendant du degré au-delà du degré harmonique 6. Pour les degrés inférieurs, on note : une très grande variabilité pour les degrés 1 et 2, avec des valeurs pouvant atteindre plusieurs siècles pour le degré 1 (non visible sur la figure) et plusieurs décennies pour le degré 2. Des valeurs plus regroupées pour le degré 3, qui présente en outre un temps caractéristique inférieur,

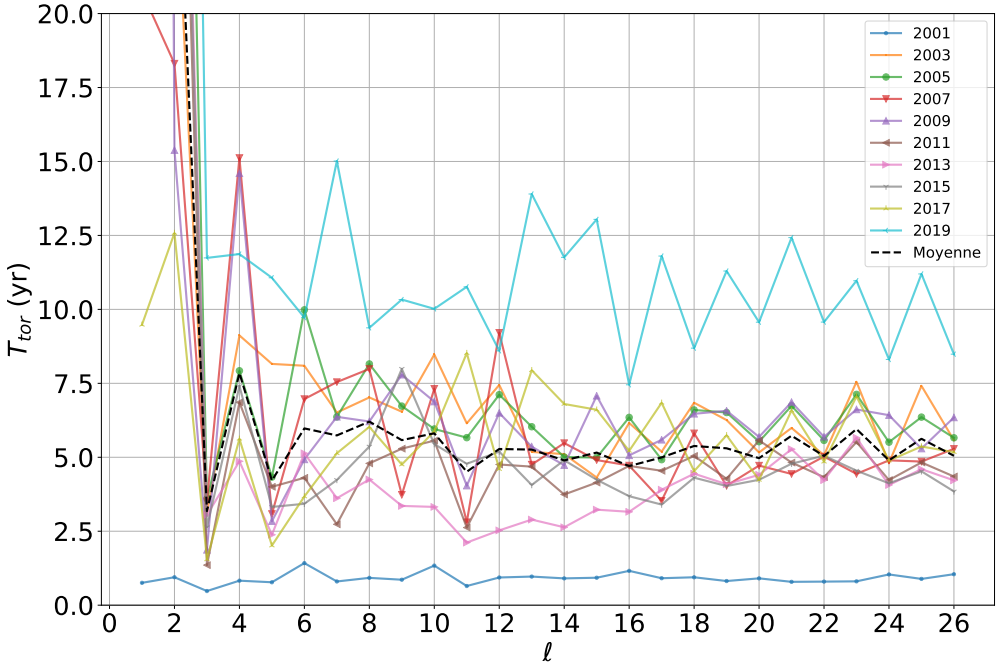

FIGURE 5.9 – Temps caractéristique T_{tor} en fonction du degré harmonique à différentes époques. En ligne noire pointillée : moyenne de l'ensemble des temps caractéristiques sur la période étudiée. Les degrés 1 et 2 ne sont pas entièrement représentés. A titre indicatif, T_{tor} s'élève jusqu'à plusieurs siècles pour le degré harmonique 1, et à plusieurs décennies pour le degré 2.

approchant les 3 ans. De nombreuses valeurs s'approchent de 3, voir de 2.5 ans., et la tendance générale place ces valeurs en dessous de ce qu'on observait pour l'accélération du champ magnétique (figure 4.6). Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure ou l'accélération séculaire ne résulte pas entièrement de la dérivée temporelle du champ de vitesse, mais également de l'advection de la variation séculaire. On note enfin que ces temps sont, comme pour la variation séculaire, très inférieurs au temps a priori – qui intervient dans la prédiction et le lissage – de 11 ans.

5.2.2.4 Variation séculaire

Enfin, on peut noter que les résultats obtenus pour le champ magnétique et la variation séculaires sont similaires à ceux présentés dans le chapitre 4. La figure 5.10 présente les séries temporelles de quelques coefficients zonaux de la variation

séculaire, en comparant les deux modèles. Si des différences sont visibles, elles ne sont pas importantes et de plus restent très largement contenues dans les barres d'erreurs.

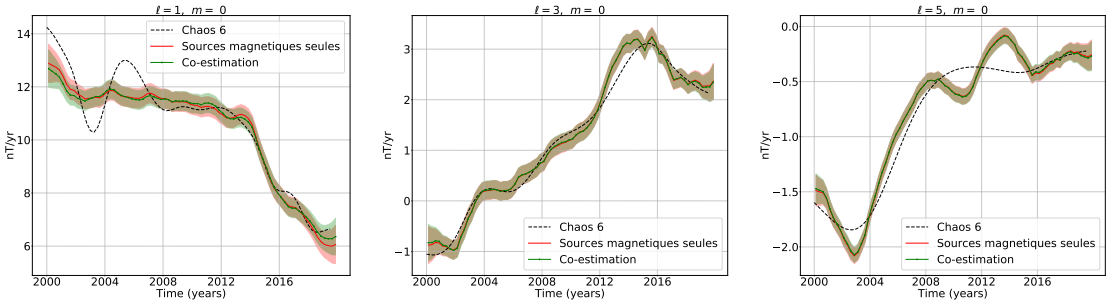

FIGURE 5.10 – Évolution temporelle des coefficients de Gauss zonaux de degrés 1,3 et 5 (de gauche à droite de la variations séculaire, pour le modèle décrit dans le chapitre 4 (en rouge), utilisant le prior Coupled Earth (CE), et le modèle faisant intervenir la co-estimation de l'écoulement (en vert). Chaos 6 est également représenté (lignes pointillées noires). Aucune différence significative n'apparaît dans les séries temporelles des coefficients de Gauss moyens, ni dans les barres d'erreur.

La figure 5.11 est le pendant de la figure 4.6 présentée dans le chapitre 4, et présente les temps caractéristiques de l'accélération du champ magnétique à plusieurs époques, et moyennés de deux façons (moyenne des temps, et moyenne des énergies) pour le modèle co-estimé. Le calcul de ces temps est détaillé dans la section 4.3.3.

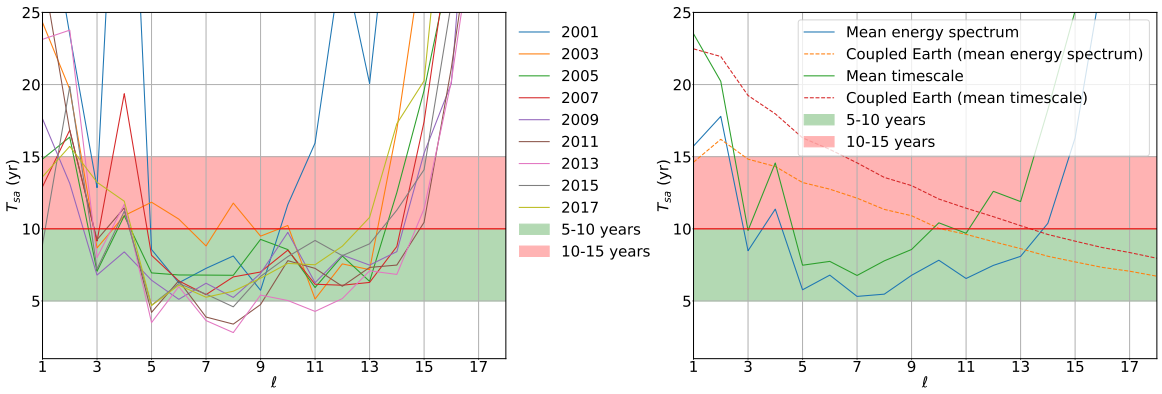

FIGURE 5.11 – Temps caractéristique τ_{SA} en fonction du degré harmonique. A gauche : représentation à différentes époques. A droite : deux valeurs moyennes, accompagnées du temps caractéristique tiré du modèles de dynamo numérique Coupled Earth

Ils ne présentent pas non plus de différence notable avec ceux présentés dans le chapitre précédent. L'influence de la co-estimation sur la variation séculaire n'est

donc pas significative, et ne produit pas d'éléments nouveaux particuliers dans ses variations temporelles.

5.2.3 Discussion

Nous discutons dans cette section du bénéfice de l'approche avec co-estimation pour le calcul du champ magnétique, de l'écoulement et de la variation séculaire. On note que la co-estimation a peu d'influence sur l'estimation des paramètres de la variation séculaire. Notre intérêt se porte donc sur l'importance de cette approche pour le calcul de l'écoulement à la surface du noyau externe de la Terre. La co-estimation permet d'introduire dans le calcul de l'écoulement la corrélation entre les paramètres de ce dernier et ceux des autres sources, en particulier le champ du noyau et la variation séculaire. Par opposition, dans l'inversion simple de l'écoulement, les covariances sont considérées séparément les unes des autres. Cela permet également d'obtenir en sortie des barres d'erreurs, et des covariances sur les paramètres de l'écoulement qui sont réalistes. Cependant on observe que ces barres d'erreurs sont importantes, rendant difficile une conclusion sur les phénomènes éventuellement détectés dans nos séries temporelles. La co-estimation reste cohérente avec les résultats obtenus lors de l'inversion simple, et suggère au moins que l'observation via les données de phénomènes périodiques dans la dynamique du noyau est possible. Il faut également garder à l'esprit que la longueur de la période étudiée n'est pas idéale pour l'observation de phénomènes périodiques de l'ordre de 5 ans.

Une des difficultés de l'intégration de l'écoulement dans le procédé est la gestion de la non linéarité de l'équation d'induction. Celle-ci fait intervenir le produit du champ magnétique avec l'écoulement. Il ne peut donc rigoureusement pas y avoir de relation linéaire liant les paramètres du modèle. Cependant la conservation de la linéarité est indispensable, dans la mesure ou notre procédé est calibré pour obtenir en sortie des distributions gaussiennes de modèles. Pour pallier ce problème, le champ magnétique est considéré comme connu lors de l'estimation des paramètres de l'écoulement. Cette hypothèse doit être contrebalancée par la prise en compte de l'erreur sur le champ magnétique. Le choix de la méthode de linéarisation, et par là du traitement de l'erreur sur l'équation d'induction est important, et les résultats obtenus pour l'écoulement y sont très sensibles. Ce procédé présente ainsi une certaine simplicité dans sa mise en place, mais requiert un ajustement précis des différentes étapes et des paramètres impliqués pour obtenir un résultat stable et le plus fiable possible.

Conclusion

La modélisation du champ magnétique terrestre est un exercice complexe, de mieux en mieux maîtrisé grâce aux méthodes d'acquisition de données et de modélisation modernes. Elle nécessite la séparation des différentes sources contribuant aux mesures effectuées en surface. Cependant il reste difficile de séparer ces sources lorsque leurs échelles temporelles et spatiales se chevauchent. Cela nécessite de mieux connaître au préalable la structure des signaux recherchés. En particulier, les variations inter-annuelles du champ du noyau sont difficiles à extraire des données magnétiques disponibles. Nous avons proposé ici une approche originale de ce problème. Nous construisons, via une méthode séquentielle d'assimilation de données magnétiques, basée sur un filtre de Kalman et une information a priori forte, une série temporelle de modèles du champ magnétique généré par le noyau, ainsi que de sa dérivée première. Nous sommes à même de produire des modèles de champ interne et de variation séculaire qui sont cohérents avec les connaissances actuelles, et présentent les caractéristiques spatiales et temporelles principales qui font consensus. Nos résultats montrent aussi l'émergence de nouvelles variations, aux périodes de l'ordre de quelques années (autour des 5 ans) et en particulier aux petites échelles. L'analyse de ces résultats par inversion de l'écoulement de surface du noyau externe montre également des résultats intéressants : des périodicités de l'ordre de 5 ans sont visibles sur les moyennes statistiques des termes zonaux de l'écoulement, indiquant la propagation éventuelle de phénomènes ondulatoires à l'intérieur du noyau. Nous proposons également une méthode qui permet la co-estimation de cet écoulement dans un processus similaire à celui utilisé pour le calcul des modèles de champ magnétique. Ce procédé permet d'une part de mieux contraindre l'estimation de la variation séculaire grâce à l'équation la liant à l'écoulement, mais également de faire intervenir dans le calcul des écoulements les corrélations entre ceux-ci et la variation séculaire. Cela doit permettre d'obtenir un écoulement réaliste, accompagné de barres d'erreurs fiables. Nous

observons que l'effet de la co-estimation sur la variation séculaire est minime. À nouveau, on observe des périodicités intéressantes dans les séries d'écoulements, en accord avec des mesures observables, comme la variation de la durée du jour imputable aux échanges de moment cinétique entre noyau et manteau. Ainsi, les résultats obtenus suggèrent que des phénomènes transitoires ou périodiques peuvent être détectés grâce aux données magnétiques, accompagnées d'une connaissance préalable et précise de la physique gouvernant la dynamo terrestre. Ce procédé permet en outre d'estimer, via des barres d'erreur réalistes, la quantité d'information apportée par l'analyse des données, et la capacité de notre paramétrage à séparer et rendre fidèlement les différents signaux. Les barres d'erreurs importantes obtenues nous empêchent néanmoins de conclure rigoureusement que les variations observées correspondent effectivement aux phénomènes attendus, tels que des ondes magnétiques (ondes d'Alfvén par exemple) se propageant dans le noyau. De plus, la faible longueur de la période étudiée (20 ans) rend difficile l'analyse de phénomènes périodiques de l'ordre de 5 ans. Il est cependant tout à fait réaliste, au vu des ces résultats, d'envisager que ces phénomènes soient présents et puissent être observés clairement, moyennant l'étude d'un jeu de données plus étendu. Afin de poursuivre cet effort et de lever au moins partiellement cette incertitude, un affinage du procédé est nécessaire. Le premier levier disponible est le paramétrage des différentes sources. Celui-ci peut être affiné, notamment l'effet des champs induits par les courants magnétosphériques, qui se confond à certaines échelles avec le signal interne issu du noyau. Un paramétrage empirique a été utilisé, mais peut être remplacé par un paramétrage physique basé sur la relation entre champs externes, courants magnétosphériques, et champs induits subséquents. Un autre levier est la gestion de l'erreur. Celle-ci se divise en deux points : la propagation de la covariance de l'information a priori qui donne leur variabilité aux paramètres, et la gestion de l'erreur sur l'équation d'induction. La propagation de l'erreur sur la variation séculaire et l'écoulement lors de l'étape de prédiction du filtre de Kalman peut être couplée en utilisant l'équation d'induction. Cette équation n'étant pas linéaire, un processus de linéarisation doit être choisi. L'erreur sur l'équation d'induction est ici traitée de manière simple, en prenant en compte l'erreur de troncature via un processus itératif. Un élément absent de ce traitement est la diffusion ; sa prise en compte en tant qu'incertitude ne semble pas produire de résultats significativement différents, mais une prochaine étape pourrait consister à l'inclure dans le paramétrage du modèle. Cela implique des modifications conséquentes des bilans d'erreur et des étapes de prédiction et de lissage. Il n'est pas certain non plus que la diffusion soit aisément définie sur les intervalles de temps courts utilisés (3 mois ici). Enfin il faut noter que les résultats obtenus sont très dépendants de l'information a priori utilisée. Cette information doit donc être fiable et physiquement réaliste. Il semble cependant qu'avec les récents progrès de la modélisation numérique de la dynamo en régime quasi-terrestre, on puisse aujourd'hui obtenir des statistiques réalistes via ces

dynamos numériques, et que cette approche soit aujourd'hui la bonne pour aborder notre problème.

Annexes

Article publié : Ropp et al. (2020)

Nous repportons ici l'article publié par Ropp et al. (2020) qui décrit la méthode employée dans le chapitre 4. Cet article est disponible en libre accès au lien suivant : https ://doi.org/10.1186/s40623-020-01230-1.

L'annexe détaille la construction de l'opérateur de prédiction utilisé lors de l'étape éponyme du filtre de Kalman, et celle de la matrice de covariance de l'erreur associée à la prédiction. Elle est référencée dans l'article comme "Annexe S1".

Ropp *et al. Earth, Planets and Space* (2020) 72:153
https://doi.org/10.1186/s40623-020-01230-1

Earth, Planets and Space

FULL PAPER Open Access

Sequential modelling of the Earth's core magnetic field

Guillaume Ropp[1*], Vincent Lesur[1], Julien Baerenzung[2] and Matthias Holschneider[2]

Abstract

We describe a new, original approach to the modelling of the Earth's magnetic field. The overall objective of this study is to reliably render fast variations of the core field and its secular variation. This method combines a sequential modelling approach, a Kalman filter, and a correlation-based modelling step. Sources that most significantly contribute to the field measured at the surface of the Earth are modelled. Their separation is based on strong prior information on their spatial and temporal behaviours. We obtain a time series of model distributions which display behaviours similar to those of recent models based on more classic approaches, particularly at large temporal and spatial scales. Interesting new features and periodicities are visible in our models at smaller time and spatial scales. An important aspect of our method is to yield reliable error bars for all model parameters. These errors, however, are only as reliable as the description of the different sources and the prior information used are realistic. Finally, we used a slightly different version of our method to produce candidate models for the thirteenth edition of the International Geomagnetic Reference Field.

Keywords: Geomagnetic field, Secular variation, Kalman filter, IGRF

Introduction

The magnetic field surrounding the Earth is sustained by—and constantly evolving due to—the motions in the Earth's liquid outer core. It has been observed and studied for centuries, and recent evolution in both technological and mathematical methods has allowed us to understand more and more of its dynamics. Although studies of ancient variations of the geomagnetic field must rely on archeomagnetic and paleomagnetic data which are sparse and thus give only access to long time scales, the study of recent changes relies on a worldwide, dense data distribution, and efficient data acquisition platforms. With the significant increase of the number of magnetic observatories since the 1950s and the launch of several magnetic satellite missions in the last two decades, a continuous set of high quality data has allowed a deeper insight into the magnetic field evolution.

The field measured at the surface of the Earth results from the contributions of numerous sources, that must be separated in order to access their individual variations. We are particularly interested in those of the core field, i.e. the field generated in the liquid outer core of the Earth. One obstacle to progress in this domain is the presence of fields generated by phenomena such as the interactions between the core field and charged particles in the thermosphere, where ionospheric currents flow, and in the magnetosphere. These generate currents that in turn produce signals—the so-called external fields—that contribute to the measured magnetic field. They evolve on time scales ranging from seconds to years and these variations induce currents in the Earth's core, mantle, lithosphere and oceans that also generate magnetic signals. Separating all these contributions from the core field requires an adequate handling of data and has long been an important obstacle to the development of high-resolution core field models. In the past decades, however, the geomagnetic modelling community has been able to build better,

*Correspondence: ropp@ipgp.fr
[1] Université de Paris, Institut de physique du globe de Paris, CNRS, 75005 Paris, France
Full list of author information is available at the end of the article

Springer Open

© The Author(s) 2020. This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

more accurate models of the core field and its secular variation (SV). The separation of the different sources is now well controlled, with some remaining difficulties, especially at high latitudes. Modern models—e.g. the GRIMM (Lesur et al. 2015) or, more recently, the Chaos-6 model (Finlay et al. 2016), both of which use splines of order 6 for their time evolution—separate well contributions from the core and external sources. They are typically able to render short core field time scales, although with a precision depending on the spatial scales—e.g. small spherical harmonics degrees have a resolution of the order of 2 years. Besides using splines, sequential approaches have also been used. For example, the POMME model (Chulliat and Maus 2014) uses a 3-year sliding time window, but its time resolution remains of the same order.

In this paper, we describe an original method for modelling the Earth's magnetic field. Our aim is to build a high-resolution times series of field models over the satellite era by separating most external and internal sources at small time scales. In order to achieve this, all modelled sources must be described as reliably as possible. This implies that the models contain a large amount of parameters, leading to very large models and considerable computation times, as soon as the field is modelled for more than a few months. To overcome this problem, we use a Kalman filter process to generate a time series of snapshot models. Each snapshot model covers only a given time period, of about 3 months (or 12 months for the parent model of our IGRF-13 candidate). This reduces the amount of data analysed for a single inversion, so we need to add strong and reliable prior information on the spatial behaviour of the modelled sources, in order to further constrain our problem. The Kalman filter is a 3-step process. In the first step—the analysis, an a priori information on the field is updated through a correlation-based data assimilation method described in Holschneider et al. (2016). In this latter work, the spatial correlations of the different signals are described in the spherical harmonics (SH) domain and then used in the spatial domain to constrain the inversion process. Here, we have a similar approach, but we remain in the SH domain. Then, the information gained by the analysis at a given time step is used to predict an estimate of the field at the next time step, which serves as a new prior. When the whole time period is covered, a backward smoothing is applied. The evolution in time is not directly parameterised—e.g. through splines—but is a consequence of the analysis, prediction and smoothing steps. The Kalman filter has already been used, noticeably by Lesur et al. (2017), but no smoothing was applied there. Gillet et al. (2015) and Beggan and Whaler (2009) also proposed an implementation of the Kalman filter for geomagnetic modelling. The Kalman filter has also been used to compute core field and core surface flow models in geomagnetic modelling. Barrois et al. (2018) describe an application of the Kalman filter to the estimation of the surface core flow. Baerenzung et al. (2018) use a full Ensemble Kalman filter to simulate the evolution of an ensemble of flow models, along with its statistical properties. None of these approaches have attempted to apply the Kalman filter to the modelling of all major sources as presented here.

The remaining of the paper is organised as follows: the first section describes the data sets used and the selection criteria applied to filter them. Then, the composition of the model and the parameterisation of each included source is detailed. Next, each of the three steps of the Kalman filter is described. In the Results section, we present our model time series, spanning 2000.0 to 2019.75. Via different representations, we assess the reliability of our method by comparing the resulting models to the Chaos-6 models, and discuss the features that characterise our models. We show how our approach can bring new insight on the core field secular variation. Before concluding, the application of this methodology in deriving candidates for the thirteenth edition of the International Geomagnetic Reference Field (IGRF) is detailed (see Thébault et al. (2015) for the preceding edition of the IGRF).

Data

The data set used for our modelling is compiled from ground observatory and satellite data, and is made up exclusively of vector magnetic data. It covers a period of 20 years, from 2000.0 to 2020.0. The observatory data set is built using hourly means from all available ground observatories from 2000.0 to 2020.0, reprocessed according to Macmillan and Olsen (2013), so that it covers this time period continuously. Satellite data are compiled from the Champ and Swarm missions data sets. The Champ data covers a time period ranging from Sept. 2000 to Aug. 2010. A gap of about 3 years in satellite data separates the Champ and Swarm missions. The Swarm data set spans Nov. 2013 to the end of 2020. It includes the latest available versions (0505, 0506 and 0507) of level-1b vectorial data files in December 2019 from the Swarm A (Alpha) and B (Bravo) satellites. Swarm C (Charlie) data were not used, as their information content on the core field is very similar to that of satellite A. We distinguish between "high latitude" (HL) data, with absolute magnetic latitudes above 55°, and "medium-to-low

latitude" (ML) data, of absolute magnetic latitudes below 55°. HL data are handled in the usual North, East, Centre (NEC) reference frame, whereas ML data are used in a Solar Magnetic (SM) reference frame, reducing this way the correlations between vector data component errors (Lesur et al. 2008). All data are originally taken in the NEC reference frame.

Data selection

We apply an overall light selection on the data set [see Thomson and Lesur (2007)]. The selection criteria for all types of data are detailed in Table 1. Different criteria apply for HL and ML data. ML data are taken only inside the 23:00–5:00 local time window, while HL data are selected for all local times. Different time samplings are set for ML and HL data, to compensate for the higher data density at high latitudes due to the nearly sun-synchronous satellite orbits (see Table 1). Data are also selected for a limited range of values of the D_{st} index, and for positive values of the z component of the interplanetary magnetic field (IMF). Finally, observatory and ML satellite data are selected only if they are located in a non-sunlit area.

We define N_v and N_d, the number of selected vector data, and the total number of selected data, respectively ($N_d = 3 \times N_v$).

Data weights

The variances attributed to each type of data are given in Table 2. X,Y and Z are the coordinates in the NEC reference frame for HL data, and the SM frame for the ML data. In this study, data errors are assumed to be uncorrelated, so the time and spatial covariance is set to zero between different data samples. Similarly, the errors of the different data vector components are assumed to be uncorrelated. The inverse of the variances are used to weight the data.

Table 2 Data variances for each type and component in NEC coordinates (HL) or SM coordinates (ML)

Component/ data type	Satellite data		Observatory data	
	ML	HL	ML	HL
X	$v = 9\,\mathrm{nT}^2$	$v = 100\,\mathrm{nT}^2$	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 36\,\mathrm{nT}^2$
Y	$v = 9\,\mathrm{nT}^2$	$v = 81\,\mathrm{nT}^2$	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 25\,\mathrm{nT}^2$
Z	$v = 16\,\mathrm{nT}^2$	$v = 81\mathrm{nT}^2$	$v = 25\,\mathrm{nT}^2$	$v = 36\,\mathrm{nT}^2$

Data are initially weighted by the inverse of their variance, before undergoing an iterative Huber-weighting process. These values aim at including unknown signals as well as instrument noise. They correspond to typical level of data misfit in prior studies [see e.g. (Lesur et al. 2015)]

Model parametrisation

To parameterise the model in time, we introduced a grid over the time period 2000.0–2020.0, composed from $N_t + 1$ knots denoted t_k, such that $t_k = t_0 + k\Delta t$, for $k = 0 \ldots, N_t$, with $\Delta t = 365.25/4$ days (i.e. roughly 3 months) and t_0 corresponding to decimal year 2000.0. It results that $N_t = 80$. A discrete time series of N_t snapshot models is computed over the whole time period.

One snapshot model is constructed for time t_k using data from the time interval $[t_k; t_{k+1}]$. In this time interval, the model includes multiple internal and external sources, nearly all of which are parameterised through spherical harmonics (SH). Internal sources include the static core field and its secular variation (up to SH degree 18) and the lithospheric field (for SH degrees 15 to 30). They also include internal fields induced by magnetospheric currents that evolve on time scales up to a few months, along with their variations (up to SH degree 6), and the internal part of the D_{st} indexed field, which is denoted I_{st} (up to SH degree 3). Including this dependance to I_{st} allows to track as fast as hourly variations of the induced fields. A known lithospheric field model (Lesur et al. 2013), computed from SH coefficients of degrees 30 to 120, is subtracted from the data. External sources include the outer magnetospheric field in Geocentric Solar Magnetic (GSM) coordinates, the inner magnetospheric field in Solar Magnetic (SM) coordinates, a time varying field indexed on the E_{st}—the external part of the D_{st} (in SM coordinates)—and another one indexed on hourly mean values of the Y component of the interplanetary magnetic field (IMF), in SM coordinates. All these sources are modelled for

Table 1 Selection criteria for satellite (Champ and Swarm) and ground observatory data

Mag. latitude	|mag. lat.| ≥ 55°			|mag. lat.| ≤ 55°		
Data type	Swarm	Champ	Obs.	Swarm	Champ	Obs.
Time sampling	60 s	60 s	1 h	30 s	20 s	1 h
Local time	–	–	–	23:00–5:00	23:00–5:00	23:00–5:00
D_{st}	[−30 : 30] nT	[−30 : 30] nT	[−30 : 10] nT	[−30 : 30] nT	[−30 : 30] nT	[−30 : 10] nT
IMF	$B_z^{IMF} > 0$	$B_z^{IMF} > 0$	$B_z^{IMF} > 0$	$B_z^{IMF} > 0$	$B_z^{IMF} > 0$	$B_z^{IMF} > 0$
Sunlit area excl.	No	No	Yes	Yes	Yes	Yes
N_v	1,104,672	637,561	906,513	822,246	1,004,634	1,646,564

SH degrees 1 to 3. For each ground observatory, local static contributions are modelled by 3 constant values, one for each vector direction. All modelled sources, along with their characteristics, are listed in Table 3. Note that the separation of the D_{st} in I_{st} and E_{st}, its internal and external components, respectively, is part of the data preprocessing [see Maus and Weidelt (2004)].

The equation linking the model parameters to the value of the field $\mathbf{B}$ at a point (r, θ, φ, t) in spherical coordinates (i.e. radius, colatitude and longitude), and time $t = t_k + \delta t$, with $\delta t < \Delta t$, is given in Eq. (1),

where the various g_ℓ^m and q_ℓ^m are the model parameters for internal and external sources, respectively. The sources and coefficients are listed in Table 3. $\mathbf{O}_i = \left(O_x^i, O_y^i, O_z^i\right)$ is the crustal offset at the location of observatory i, with $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ the respective observatory spherical coordinates. The $(\theta_{\mathrm{SM}}, \varphi_{\mathrm{SM}})$ (resp. $(\theta_{\mathrm{GSM}}, \varphi_{\mathrm{GSM}})$) are the coordinates in the SM (resp. GSM) system of coordinates. The reference radius for the SH development, denoted a, is set to the usual Earth's surface radius, $a = 6371.2$ km. The symbol $\sum_{\ell,m}$ stands for the double sum $\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=-\ell}^{\ell}$, with L the maximal SH degree considered. The $\mathbf{Y}_{\ell,\ell+1}^m$ and $\hat{\mathbf{Y}}_{\ell,\ell-1}^m$ are the vector spherical harmonics defined by:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(r,\theta,\varphi,t) = &\sum_{\ell,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+2}\left[{}^{\mathrm{C}}g_{\ell,k}^m + {}^{\mathrm{L}}g_{\ell,k}^m + \delta t\,{}^{\mathrm{C}}\dot{g}_{\ell,k}^m\right]\hat{\mathbf{Y}}_{\ell,\ell+1}^m(\theta,\varphi)\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+2}\left[{}^{\mathrm{I}}g_{\ell,k}^m + \delta t\,{}^{\mathrm{I}}\dot{g}_{\ell,k}^m + {}^{\mathrm{I_{st}}}g_{\ell,k}^m\,\mathrm{I_{st}(t)}\right]\hat{\mathbf{Y}}_{\ell,\ell+1}^m(\theta,\varphi)\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell-1}{}^{\mathrm{G}}q_{\ell,k}^m\,\hat{\mathbf{Y}}_{\ell,\ell-1}^m(\theta_{\mathrm{GSM}},\varphi_{\mathrm{GSM}})\\
&+\sum_{\ell,m}\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell-1}\left[{}^{\mathrm{S}}q_{\ell,k}^m + {}^{\mathrm{I}}q_{\ell,k}^m\,B_y^{\mathrm{IMF}}(t) + {}^{\mathrm{E_{st}}}q_{\ell,k}^m\,E_{\mathrm{st}}(t)\right]\hat{\mathbf{Y}}_{\ell,\ell-1}^m(\theta_{\mathrm{SM}},\varphi_{\mathrm{SM}})\\
&+\sum_{i\in\mathcal{I}_{obs}}\delta(r-r_i,\theta-\theta_i,\varphi-\varphi_i)\,\mathbf{O}_{i,k},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Table 3 Summary of all modelled sources with relevant parameters and prior information values

Source	L_i, L_a	Time scale	Prior	Nb. of par.	Coef.
Static core field	1, 18	$\tilde{\tau}_\ell^c = 415/\ell$ year	$R = 3000$ km $S = 2 \cdot 10^9$ nT^2	360	${}^{\mathrm{C}}g_\ell^m$
Core SV	1, 18	$\tilde{\tau}_\ell^{sv} = 11$ year	$R = 3500$ km $S = 1.5 \cdot 10^4$ (nT/year)^2	360	${}^{\mathrm{C}}\dot{g}_\ell^m$
Lithospheric field	15, 30	$\tau^{lt} = 10^6$ year	$R = 6280$ km $S = 2.7 \cdot 10^{-2}$ nT^2	736	${}^{\mathrm{L}}g_\ell^m$
Induced field	1, 6	$\tau^{I} < \Delta t$	–	48	${}^{\mathrm{I}}g_\ell^m$
Induced field variation	1, 6	$\tau^{\partial_t I} < \Delta t$	–	48	${}^{\mathrm{I}}\dot{g}_\ell^m$
GSM ext. field	1, 3	$\tau^{\mathrm{GSM}} < \Delta t$	$R = 1.6 \cdot 10^4$ km $S = 5.4 \cdot 10^3$ nT^2	15	${}^{\mathrm{G}}q_\ell^m$
SM ext. field	1, 3	$\tau^{\mathrm{SM}} < \Delta t$	$R = 6900$ km $S = 3.56$ nT^2	15	${}^{\mathrm{S}}q_\ell^m$
I_{st} indexed field	1, 3	$\tau^{\mathrm{Ist}} < \Delta t$	$R = 2537$ km $S = 1.0$	15	${}^{\mathrm{I_{st}}}g_\ell^m$
E_{st} indexed field	1, 3	$\tau^{\mathrm{Est}} < \Delta t$	$R = 1.6 \cdot 10^4$ km $S = 5.4$	15	${}^{\mathrm{E_{st}}}q_\ell^m$
B_y^{IMF} indexed field	1, 3	$\tau^{\mathrm{IMF}} < \Delta t$	$R = 6900$ km $S = 0.1$	15	${}^{\mathrm{I}}q_\ell^m$
Obs. offset	Non SH	$\tau^{lt} = 10^6$ year	–	3×200	$\mathbf{O}_i$

From left to right: name of the source, minimum (L_i) and maximum (L_a) harmonic degrees (when relevant), time scale, radius and scale for the HS prior (see "Analysis step" section), total number of parameters, and coefficient notation used in Eq. (1). Δt is set to 3 months in this study. No R and S values are given for the induced field and its variation. See "Analysis step" section for the construction of the statistics for these latter contributions

$$\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell+1}(\theta,\varphi) = -a\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell+2}\nabla\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} Y^m_\ell(\theta,\varphi)\right), \tag{2}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta,\varphi) = -a\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell-1}\nabla\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} Y^m_\ell(\theta,\varphi)\right), \tag{3}$$

where ∇ is the gradient operator. The $Y^m_\ell(\theta,\varphi)$ are the Schmidt semi-normalised real spherical harmonics usually employed in geomagnetism. Positive orders ($m \geq 0$) are associated with $\cos(m\theta)$ terms, and negative orders ($m < 0$) are associated with $\sin(|m|\theta)$ terms. The vector harmonics $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{\mathrm{SM}},\varphi_{\mathrm{SM}})$ (resp. $\hat{\mathbf{Y}}^m_{\ell,\ell-1}(\theta_{\mathrm{GSM}},\varphi_{\mathrm{GSM}})$) are vectors in the SM (resp. GSM) system of coordinates.

Modelling method

The models we compute are model distributions that we assume to be Gaussian, a property which is required for the Kalman filter framework. Each distribution is described by the normal probability density function (*pdf*) $\mathcal{N}(\mathbf{m}_k, \mathbf{C}_k)$, where k is the index for the time interval $[t_k : t_{k+1}]$, $\mathbf{m}_k$ is the mean model, and $\mathbf{C}_k$ is the covariance of the model distribution. The mean model $\mathbf{m}_k$ is a N_m-sized vector containing the mean values of the model parameters ($N_m = 2227$, see Table 3) and $\mathbf{C}_k$ is a $N_m \times N_m$ matrix. The Gaussian nature of the distribution is preserved through the whole process, since all operations applied are linear.

Our modelling approach relies on a Kalman filter (Kalman 1960), a 3-step process where data assimilation relies on a correlation-based technique (Holschneider et al. 2016). The first step of the process is to model the magnetic field from a subset of data spanning the time interval $[t_k; t_{k+1}]$, through a re-weighted least square process (hereinafter the analysis step). The model thus obtained is used to predict the model for the next time interval, through an extrapolation of its mean and covariance (hereinafter the prediction step). When the full time series is built, a backward smoothing is applied, in order to constrain each model but the last with information from posterior time intervals (hereinafter the smoothing step). Each one of these three steps is described below.

Analysis step

The data available in the time interval $[t_k, t_{k+1}]$ are gathered in a vector $\mathbf{d}_k$. The model parameters and the data are linked by a linear operator $\mathbf{A}_k$, and the uncertainty on the data is accounted for by an error vector $\mathbf{e}_k$. The elements of $\mathbf{A}_k$ are directly derived from Eq. (1).

To lighten notations, the index k is dropped for $\mathbf{d}$, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{e}$ as it does not impede the understanding of the equations. Therefore, the relation between the data and mean model is

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m}_k + \mathbf{e}. \tag{4}$$

The error $\mathbf{e}$ is a zero mean multivariate random variable with a distribution described by a *pdf* $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. $\boldsymbol{\Sigma}$ is a diagonal matrix, its elements being the data variances given in Table 2.

Equation (4) is solved for the mean model $\mathbf{m}_k$ and covariance $\mathbf{C}_k$ via a re-weighted least-square (RLS) process using Huber weights (Huber 1981). The solution is

$$\mathbf{m}_k = \tilde{\mathbf{m}}_k + \left(\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{C}}_k^{-1}\right)^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j(\mathbf{d} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{m}}_k), \tag{5}$$

$$\mathbf{C}_k = \left(\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{C}}_k^{-1}\right)^{-1}, \tag{6}$$

where the weight matrix is $\mathbf{W}_j = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}_j\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$, and j denotes the index of the iterations. $\mathbf{W}_j$ is updated at each of the 3 iterative steps of the RLS process. $\mathbf{U}_0 = \mathbf{I_d}$, and $\mathbf{U}_j$ for $j > 0$ is the diagonal matrix for Huber weights. The super-script t denotes the transpose.

In Eqs. (5) and (6), the prior mean model $\tilde{\mathbf{m}}_k$ and its prior covariance $\tilde{\mathbf{C}}_k$ are updated according to the information extracted from the data, to give the posterior mean model $\mathbf{m}_k$ and covariance $\mathbf{C}_k$. This prior model distribution $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_k, \tilde{\mathbf{C}}_k)$ describes what we know of the model before assimilation of the data. It is, for all time steps but the first, derived from the previous time step posterior model distribution through the prediction process that is described below. However, the prior distribution $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_0, \tilde{\mathbf{C}}_0)$ for time interval $[t_0 : t_1]$ needs to be defined.

The initial mean prior model is null: $\tilde{\mathbf{m}}_0 = 0$. This means we allow for each parameter to vary around zero, in a range characterised by the variances and covariances given in the matrix $\tilde{\mathbf{C}}_0$.

Regarding its structure, $\tilde{\mathbf{C}}_0$ is a block diagonal matrix, with one block for the core field and SV, and one block for each of the other sources.

Regarding the construction of the different matrix blocks (designated as covariance blocks in the following), two possibilities are investigated. The first possibility is to use the Holschneider et al. (2016) type of prior that consists in information on the energy spectrum of each modelled source. For each contribution, this spectrum is defined by a scaling S, and a radius R. The value of S is set either empirically, or by optimisation, or alternatively by using the actual spectrum of the source if it is known. R is the radius at which the spectrum of the source is flat. The values of R and S are given for all modelled sources in Table 3. The resulting covariance block is diagonal, containing the respective a priori variances of each model parameter. The variances $v^{n_s}_\ell$, where n_s refers to the source type (i.e. core,

SV, etc.) and ℓ is the spherical harmonics degree, are defined as

$$\nu_\ell^{n_s,int} = S^{n_s}\left(\frac{a}{R^{n_s}}\right)^{2\ell+4}, \tag{7}$$

$$\nu_\ell^{n_s,ext} = S^{n_s}\left(\frac{R^{n_s}}{a}\right)^{2\ell}, \tag{8}$$

for internal and external sources, respectively.

Note that for a given SH degree ℓ, variances do not depend on the SH order m. The initial variance for observatory offsets is set to $1000\,\mathrm{nT}^2$ for all observatories.

The second possibility is to derive covariance information from a range of parameter samples. We used this approach for the core and induced fields. For the core field and SV, Gauss coefficient samples were obtained from numerical dynamo runs, of the *Coupled Earth* model described by Aubert (2013). Nine thousand samples were taken for each Gauss coefficient, and variance and covariances derived from them. This yields a block containing variances and covariances for both the core field and SV, as well as the cross-covariances between the two sources. For the induced field, we built the prior through an empirical approach. We first built a model where all ${}^{\mathrm{I}}g_\ell^m$ and ${}^{\mathrm{I}}\dot{g}_\ell^m$ were imposed to take zero values. This resulted in very noisy core and SV time series of Gauss coefficients. These time series were smoothed using a 2-years averaging window, sliding with time. The residuals of this smoothing process were used to derive variances for the ${}^{\mathrm{I}}g_\ell^m$ and ${}^{\mathrm{I}}\dot{g}_\ell^m$ Gauss coefficients. Given the simplicity of this ad hoc process, no covariance terms were calculated. The corresponding covariance block is therefore diagonal. It should be noted that these matrices concern only the spatial correlations of the core and induced fields, and do not affect their time dependance, which is handled separately (via the prediction and smoothing).

In this work, two series of model distributions were derived. Both series are parameterised in the same way and are using the same data and the same prior, except for the core field and SV. The HS series uses the Holschneider et al. (2016) type of prior information for the core field and its secular variation, whereas the CE series use the statistics derived from the *Coupled Earth* model for these two contributions.

Prediction step

The prediction step defines the prior model distribution $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{m}}_{k+1}, \tilde{\mathbf{C}}_{k+1})$ at time t_{k+1} from the posterior model distribution $\mathcal{N}(\mathbf{m}_k, \mathbf{C}_k)$ at time t_k. The prediction is based on the assumption that the model is a multivariate random variable with stationary second order statistics. It evolves according to

$$\tilde{\mathbf{m}}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{m}_k + \mathbf{w}, \tag{9}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_\mathbf{w}, \tag{10}$$

where $\mathbf{P}$ is the prediction operator. Since this prediction step is not exact, an error term is introduced. This term is also a multivariate random variable normally distributed: $\mathcal{N}(\mathbf{w}, \mathbf{C}_\mathbf{w})$. The mean of the error is null: $\mathbf{w} = 0$, but its covariance matrix $\mathbf{C}_\mathbf{w}$ depends, as the operator $\mathbf{P}$, on the physics governing the evolution of the different sources. In particular, for all the sources, but the core field and its secular variation, it is assumed that the parameters evolve in time as auto-regressive processes of order 1 (AR1). For such processes a single parameter g with a timescale τ evolves following:

$$g_{k+1} = \alpha g_k + \omega, \tag{11}$$

where α is defined by:

$$\alpha = \begin{cases} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} & \text{for } \tau > \Delta t \\ 0 & \text{for } \tau < \Delta t \end{cases} \tag{12}$$

The timescale τ for the different sources is specified in Table 3. The prediction error ω is a random variable with zero mean. The requirement that the statistics of the parameter g are stationary over time defines the variance ν_ω of ω. Assuming the parameter g has a variance ν_g constant in time, i.e. ν_g is the corresponding diagonal element on $\tilde{\mathbf{C}}_0$, then the variance of ω is $\nu_\omega = \nu_g(1-\alpha^2)$. For external sources, the timescales are smaller than the time step Δt. Therefore, $\alpha = 0$ and the predicted parameter has, as ω, a zero mean and a variance $\nu_\omega = \nu_g$. On the contrary, for the lithospheric field, the prediction is strongly dependent on the precedent state, $\alpha \simeq 1$ and the variance of ω is $\nu_\omega \simeq 0$.

For the core field and secular variation, the evolution of a given coefficient is given through the coupled set of equations:

$$g_{\ell,k+1}^m = \alpha_\ell\left(g_{\ell,k}^m + \Delta t\, \dot{g}_{\ell,k}^m\right) + \omega_c, \tag{13}$$

$$\dot{g}_{\ell,k+1}^m = \dot{\alpha}_\ell\, \dot{g}_{\ell,k}^m + \dot{\omega}_c, \tag{14}$$

where ω_c and $\dot{\omega}_c$ are the errors. These errors have, to the first order, amplitudes proportional to the coefficient accelerations $\ddot{g}_\ell^m$. As in the case of AR1 processes, we assume that the errors have zero means, and we set $\dot{\omega}_c$ (resp. ω_c) variances to $\nu_{\dot{\omega}_c} = \nu_{\dot{g}_\ell^m}(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}})^2$ (resp.

$\nu_{\omega_c} = \nu_{\dot{g}_\ell^m}(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}})^2(\frac{\Delta t}{2})^2)$, where $\tilde{\tau}_{sa}$ is the timescale for acceleration. The value of $\tilde{\tau}_{sa}$ is known to be around 11 years up to spherical harmonics degree 13 (Christensen et al. 2012), and we used this same value up to degree 18. $\nu_{\dot{g}_\ell^m}$ is the known variance of the secular variation Gauss coefficient $\dot{g}_\ell^m$—i.e. a diagonal element of the $\tilde{\mathbf{C}}_0$ matrix. From there, the stationary hypothesis defines the α_ℓ and $\dot{\alpha}_\ell$:

$$\begin{aligned}\alpha_\ell &= \sqrt{\frac{\nu_{g_\ell^m} - \nu_{\dot{g}_\ell^m}(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}})^2(\frac{\Delta t}{2})^2}{\nu_{g_\ell^m} + \nu_{\dot{g}_\ell^m}\Delta t^2}} \simeq \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}})^2(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sv}})^2}{1+(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sv}})^2}} \\ \dot{\alpha}_\ell &= \sqrt{1-(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}})^2},\end{aligned} \tag{15}$$

where $\nu_{g_\ell^m}$ is the variance of the core field Gauss coefficient g_ℓ^m as estimated in $\tilde{\mathbf{C}}_0$. $\tilde{\tau}_{sv}$ is the timescale for the secular variation. Note that we used in this work the definition of α_ℓ that does not involve $\tilde{\tau}_{sv}$. As an indication, $\tilde{\tau}_{sv} \simeq 415/\ell$ is in the range of acceptable values for Chaos [see Christensen et al. (2012)]. In Additional file 1: Appendix S1, more details are given on the way the α, α_ℓ and $\dot{\alpha}_\ell$ values are derived. The exact construction of the matrices $\mathbf{P}$ and $\mathbf{C_w}$ is also detailed.

Smoothing

The result of the process presented above is a time series of model distributions $\mathcal{N}(\mathbf{m}_k, \mathbf{C}_k)$ for $k = 0, \ldots, N_t$. The final model distributions are smoothed versions of this time series. The smoothing consists in re-computing the model at a time step k by using the information provided by the data analysed at every time step $k' > k$. The smoothed model distributions are identified with a upper script ^{s}: $\mathcal{N}(\mathbf{m}_k^s, \mathbf{C}_k^s)$. This smoothing is achieved through the following equations (Anderson and Moore (1979), Rauch et al. (1965)) for the mean and covariance of the smoothed model at time t_k, respectively:

$$\mathbf{m}_k^s = \mathbf{m}_k + \mathbf{G}_k\left(\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{P}\mathbf{m}_k\right), \tag{16}$$

$$\mathbf{C}_k^s = \mathbf{C}_k - \mathbf{G}_k\left(\mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_{\mathbf{w}_k} - \mathbf{C}_{k+1}^s\right)\mathbf{G}_k^t, \tag{17}$$

where the matrix $\mathbf{G}_k$ is defined by

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{P}^t\left(\mathbf{P}\mathbf{C}_k\mathbf{P}^t + \mathbf{C}_\mathbf{w}\right)^{-1} \tag{18}$$

and $\mathbf{P}$ and $\mathbf{C_w}$ are, respectively, the prediction operator and covariance matrix introduced in the previous section. These equations are similar to Eqs. (5) and (6), as they give the solution $\mathbf{m}_k^s$ of the inverse problem set by Eq. (9), where $\mathbf{m}_{k+1}^s$ defines the data.

Results

We present the results of the process described above applied to our data set. We recall that the full output is described by a series of mean models and covariances, each pair defining a normal distribution of models. Strictly speaking, a single model would have to be randomly drawn from this ensemble. Here, we systematically use the series of mean models for our representations. When specified, the mean models are presented with a $\pm 2\sigma$ wide error range. We recall also that two series of model distributions have been derived, the HS and CE series, that differ only by the prior information used for the core field and secular variation statistics. Through this section, our results are compared with the Chaos-6 model (Finlay et al. 2016) in its version Chaos-6-×9.

For each time interval $[t_k, t_{k+1}]$ the normalised misfit to the data is defined by:

$$\mathcal{R}_k = \sqrt{\frac{1}{N_d}(\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}_k)^t\mathbf{W}_i(\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}_k)}, \tag{19}$$

where $\mathbf{W}_i$ is defined in "Analysis step" section. The values of $\mathcal{R}_k$ are in the range $[0.98, 1.92]$ nT for both CE and HS models, depending essentially on the type of data available during this time interval. Over the whole time period, the mean of the misfits for both models is 1.44 nT. It shows that our models achieve a fairly good fit to the data. These values are estimated after the analysis process, but before the smoothing steps. The misfit after smoothing is not reported here as its estimation requires adjusting other contributions to the geomagnetic field such as external and induced fields.

In Fig. 1, the CE and HS model core field radial components are plotted at the core–mantle boundary (CMB) for year 2019.5. The field models are truncated at degree 14. Figure 2 displays the radial components of the SV of the same two models at the CMB. The Chaos-6 SV model is also displayed. All three are truncated at degree 14. Both CE and HS models are quite consistent with Chaos-6, although some differences appear in small-scale features, over the Pacific or Indian oceans, for example. Some noticeable and interesting differences can be highlighted at other time periods. Concerning the core field, the largest differences occur at the poles, where they rarely exceed ±10nT at the Earth's surface, when satellite data are available. Secular variation differences occur mostly during years 2010 to 2014. They are characterised by localised maxima in the Indian Ocean, as shown in Fig. 3. These maxima change signs between 2011.75 and 2013.75 suggesting a spike of acceleration in the HS/CE models during this period of time. Otherwise, SV radial

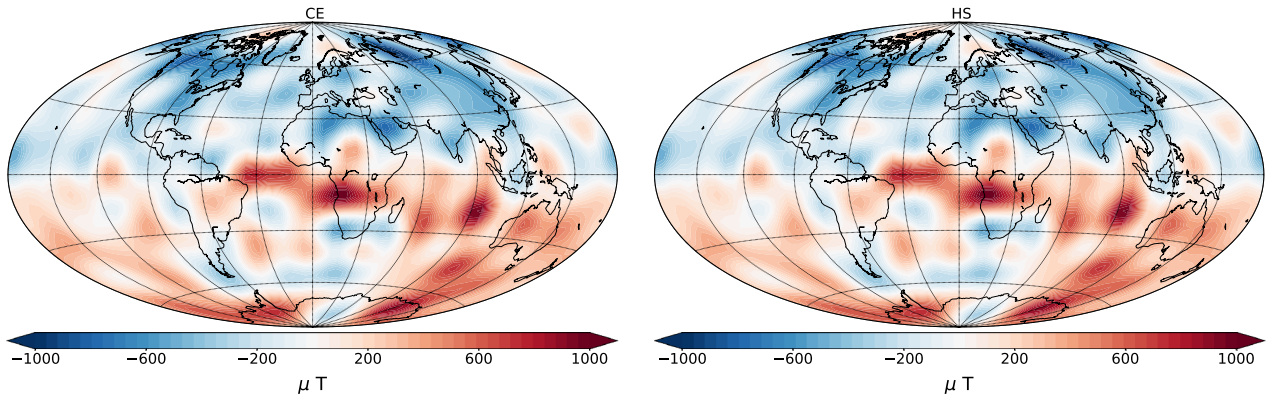

Fig. 1 Maps of the radial component of the core field at the core–mantle boundary (CMB) at year 2019.5. The CE model (on the left) is compared with the HS model (right). Models have been truncated at harmonic degree 14

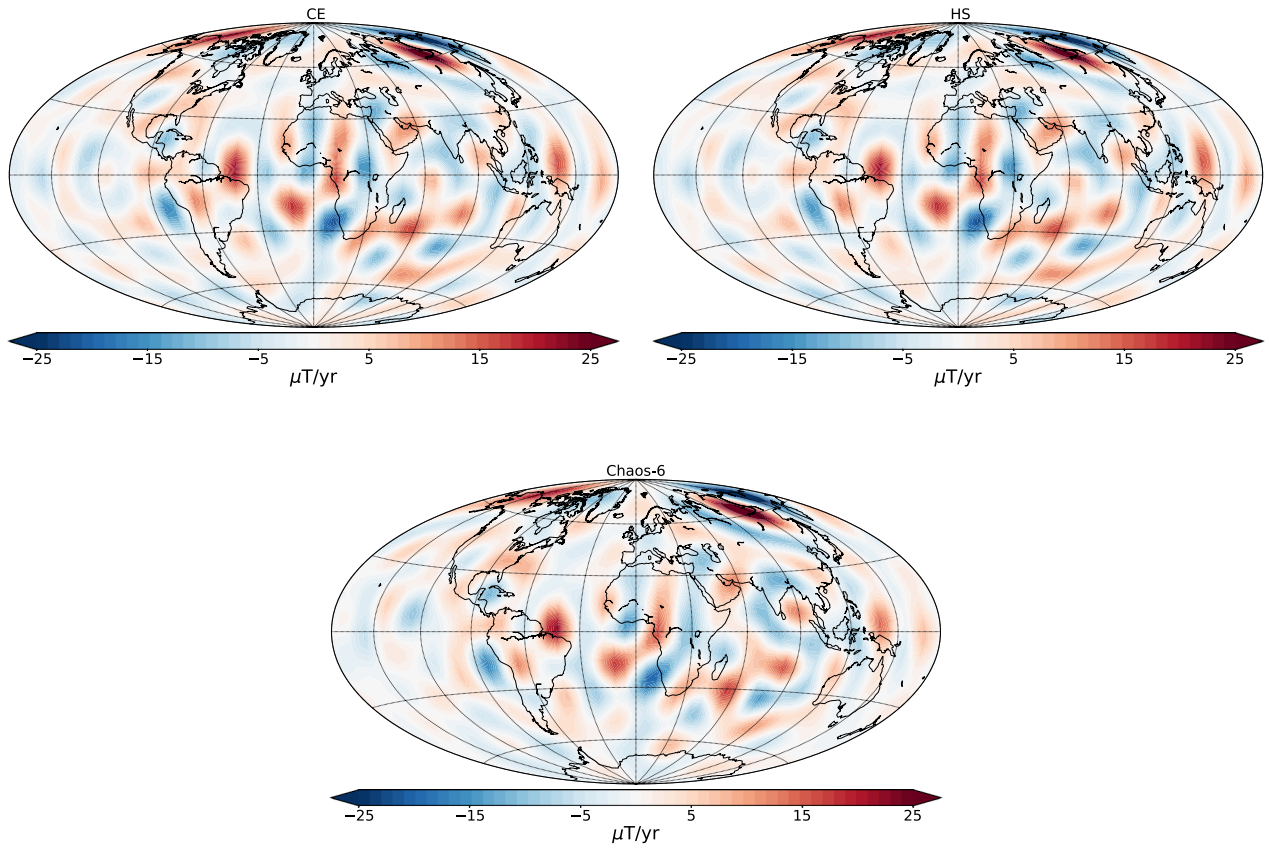

Fig. 2 Maps of the radial component of the SV field at the core–mantle boundary (CMB) at year 2019.5. The CE model (on the left) is compared with the HS model (right) and the Chaos-6 model (bottom). Models have been truncated at harmonic degree 14

component differences are mostly contained inside a ±5nT/year interval. The maps shown in Fig. 3 do not include the HS model, for which the results described above are also valid. All models are truncated at degree 12.

Figure 4 displays the spherical harmonics power spectra of the calculated core field and SV (HS on the left, CE on the right) for year 2019.5. The crosses picture the Chaos-6 power spectra, and the spectra of the prior are displayed in dotted lines. These spectra show the

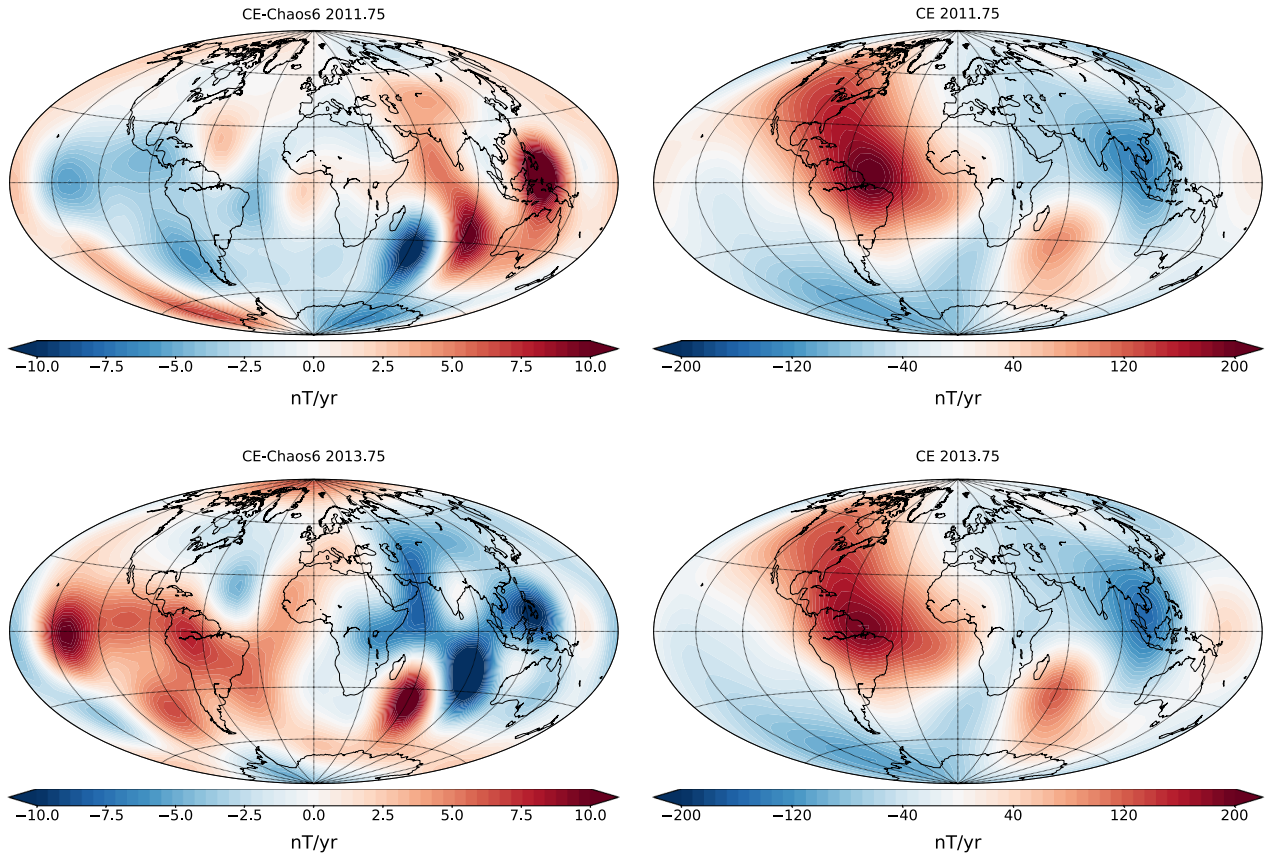

Fig. 3 On the left: maps of the difference (Chaos-6)-(CE), radial comp. of the SV, at the Earth's Surface, for years 2011.75 (top) and 2013.75 (bottom). On the right: maps of the corresponding SV radial component for the CE model, at the same epochs. Local positive and negative maxima in 2011.75 change sign in 2013.75. This is the signature of a spike of acceleration between these two epochs. Models are truncated at degree 12

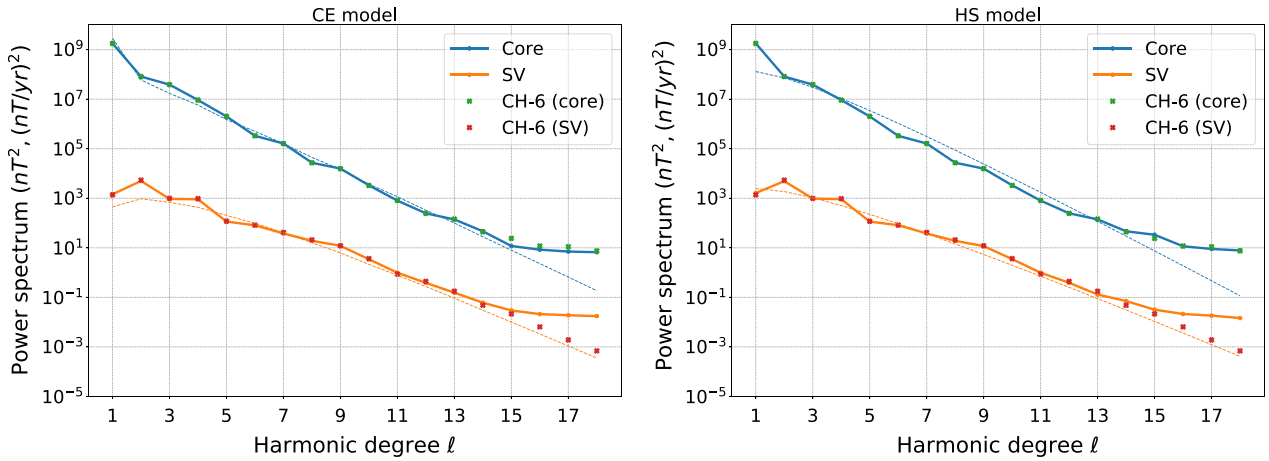

Fig. 4 Power spectra are displayed for the core field and secular variation for harmonic degrees 1 to 18, for epoch 2019.5. Left: CE model. Right: HS model. The blue line is the power spectrum of the core field. The orange line is the power spectrum of the SV. The dotted lines represent the power spectra of the respective priors. The green and red crosses represent the power spectra of the core field and SV, respectively, for Chaos-6. The spectra of the lithospheric field, at SH degree greater than 14, is not displayed

general agreement of both HS and CE model core field with those obtained by other modellers, but they have too much energy at small scales compared to the prior (from degree 14 for the SV, degree 15 for the core field). As a simple, first analysis, this suggests either that our priors are poor—e.g. too small for some Gauss coefficients of the lithospheric field, or that there are some un-modelled signals in the data at these wavelengths. This excess of energy probably results from a combination of the two hypotheses. To discriminate between them would require a more thorough analysis of the results, focusing on the output distributions of the core field Gauss coefficients, their variances and possible covariances with other contributions. The conclusions of this analysis are not yet completely clear. However, it suggests that sources (e.g. small-scale induced signals and high latitude ionospheric contributions) are missing in our description of the observed signal. In favour of the first hypothesis, the CE distribution of models is closer to the prior at earlier epochs (not shown) and keeps closer to the prior at later epochs. This highlights the importance of cross-correlations, which are absent from the HS prior information.

In Fig. 5, we compare the time series for several SH coefficients of the secular variation models before and after the Kalman smoothing step (see the process description in "Modelling method" section). Results are shown for both CE and HS secular variation models. The non-smoothed time series present a time lag, as compared to the smoothed and Chaos-6 time series, which agree on the general trend of the variation for most large-scale coefficients. This lag results from the difficulty to resolve the secular variation within a single time step, using mainly information from the past—thanks to the prediction step, but very little information from the future, as only 3 months worth of data are used. It leads to an underestimation of the secular variation when the acceleration is positive, and an overestimation when the acceleration is negative. The smoothing step clearly alleviates this time lag.

Figure 6 displays the time series of CE and HS secular variations compared with Chaos-6 for some low SH degrees. The variations are overall compatible with Chaos-6. Major differences can appear during the time period 2010–2014, because of the lack of satellite data combined with radically different ways of handling ground observatory data. The bottom part of the figure displays the Fourier Transform (FT) spectra of the time series to which a linear trend has been first removed to avoid spectral leakage.

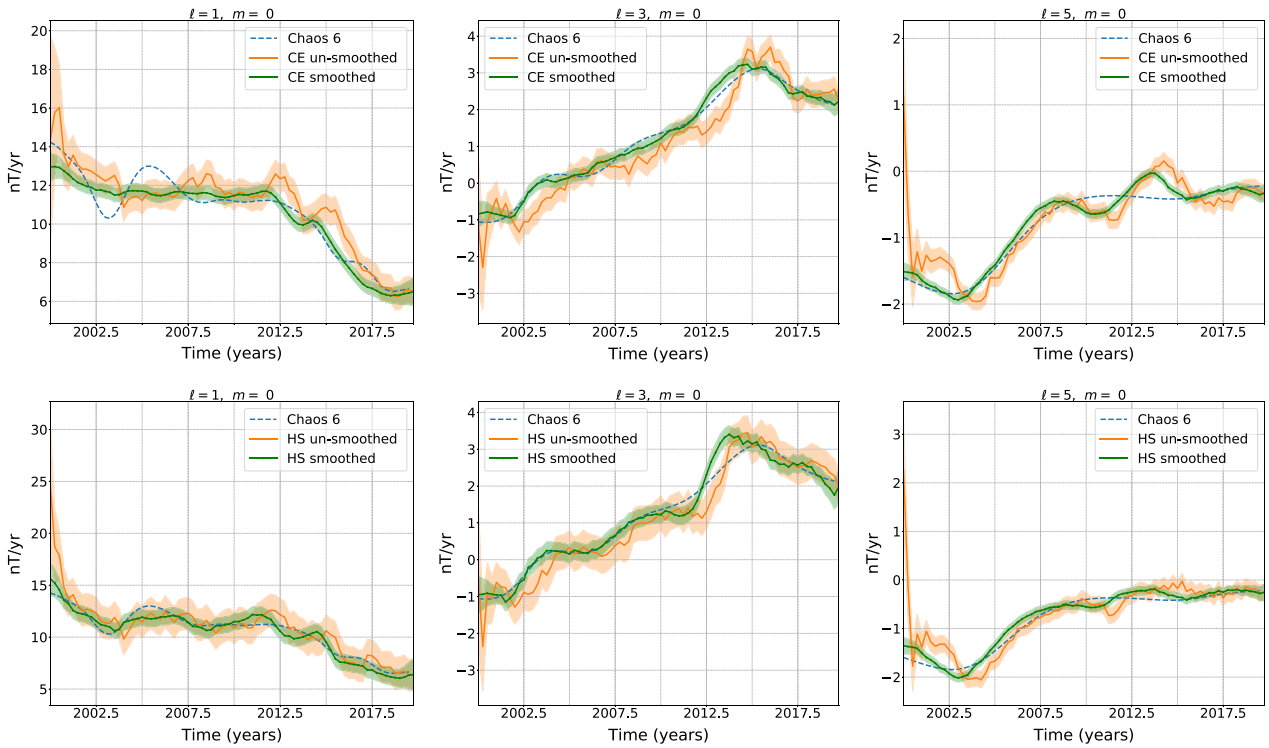

Fig. 5 Times series for SV Gauss coefficients of degrees 1, 3, 5 and order 0. The times series span 2000 to 2019.75. The dotted blue lines represent the Chaos-6-×9 model. The orange line represents the MCM model before the smoothing operation. The green line represents the final model, after smoothing. Both series are presented within a 2σ interval. Top: CE series. Bottom: HS series

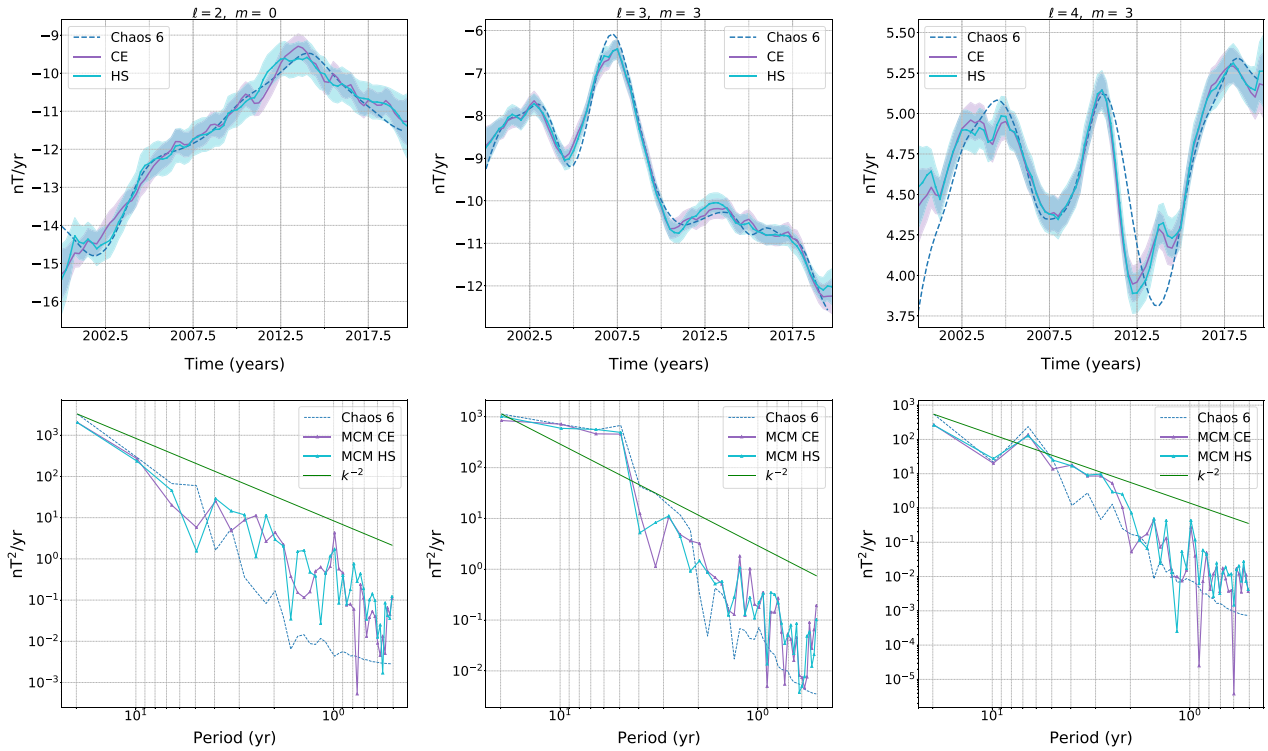

Fig. 6 Output time series are displayed for SV Gauss coefficients of degrees and orders (2,0), (3,3) and (4,3). Top: Times series of the coefficients, spanning 2000 to 2019.75. The blue dotted line represents the Chaos-6-×9 model. The purple and cyan blue lines, respectively, represent the CE and HS model. Both CE and HS series are presented within a 2σ interval. Bottom: time spectra of the corresponding SV Gauss coefficients with the same colour code. In green: the k^{-2} slope, where k is the frequency, i.e. one over the period

Coefficients time series (and their Fourier spectra) are displayed for higher SH degrees (i.e. lower spatial scales), in Figs. 7 and 8. At these spatial scales, the SV models sometimes present very different behaviours. The Fourier spectra of several Gauss coefficients show significant periodicities of 4 to 6 years (e.g. for $\dot{g}_6^1$ and $\dot{g}_6^6$ at 5 years). Higher degree Gauss coefficients show various peaks in their Fourier spectra, such as $\dot{g}_7^0$, which presents very strong variations between 4 and 10 years, or $\dot{g}_8^1$ with peaks at 3 and 4 years. Chaos-6 is systematically and strongly smoothed, with little energy for periods under 5 years. This most certainly results from the temporal smoothing used in the process leading to this latter model. It contrasts with the approach used here where the time scales controlling the temporal behaviour of the core field are set to realistic values. However, although our HS and CE models present more energy at periods under 5 years, they are not free of anomalous features. The high variability of the Fourier spectra at small time scales is probably a signature of noise (or unidentified contributions) affecting the models. For example, the periodicity observed in some coefficients (e.g. $\dot{g}_7^0$ in Fig. 8) might be explained by an incorrect separation of some ionospheric fields with the core field. This is a significant risk, considering that satellites see ionospheric fields as internal sources. These ionospheric fields could be co-estimated in the future, using a suitable parametrisation and proper prior information. Furthermore the ad hoc way in which we handled the induced fields has smoothed out short time variations of the core field Gauss coefficients, but did not allow a clear separation of core and induced field signals for periodicity longer than 2 years. To progress in this matter, it should be assessed whether the amplitude of the estimated induced fields is physically plausible, considering the mantle conductivity and external fields amplitudes. In particular, harmonics of the 11 years solar cycle (e.g. 5 years periodicity) are often more pronounced in our models than, e.g. in CHAOS-6. This is visible, for example, in the ${}^{\mathrm{C}}\dot{g}_1^0$ time series of the HS model, but not in the CE model or the Chaos-6 model.

To test the coherency of our models, we compared the modelled SV time series (HS and CE SV) to the variations of the modelled core field time series. For this purpose, we computed a SV series by finite differences of the mean core field model series (referred to as the FD SV). The coherency between both the CE and HS SV series and the FD SV series was verified by evaluating the power

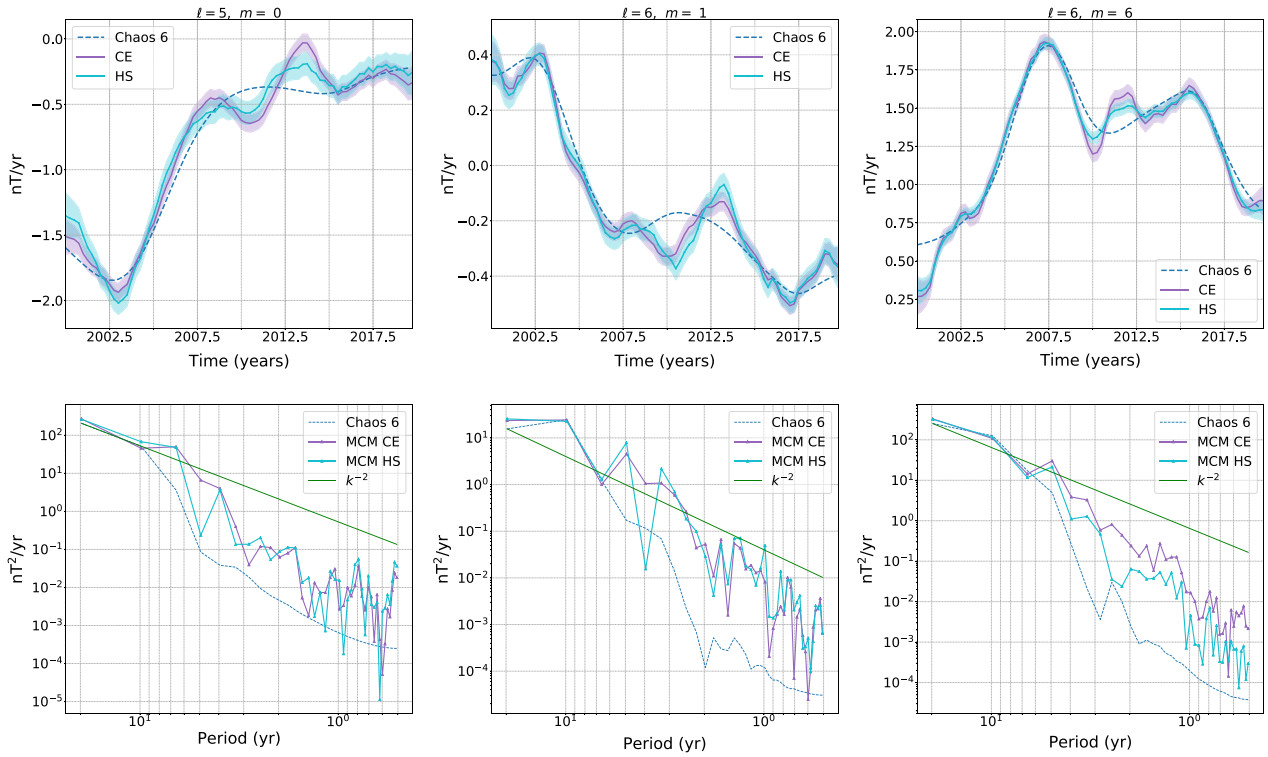

Fig. 7 Output time series are displayed for SV Gauss coefficients of degrees and orders (5,0), (6,1) and (6,6). Top: Times series of the coefficients, spanning 2000 to 2019.75. The blue dotted line represents the Chaos-6-×9 model. The purple and cyan blue lines, respectively, represent the CE and HS model. Both CE and HS series are presented within a 2σ interval. Bottom: Time spectra of the corresponding SV Gauss coefficients with the same colour code. In green: the k^{-2} slope, where k is the frequency, i.e. one over the period

spectra of their respective differences. The residuals of this comparison have a total energy of less than 0.03% of the total energy of the SV spectrum, for both CE and HS models. The difference between the FD SV and the CE or HS SV is most important where the secular variation presents steep slopes.

Finally, we would like to point out that, because there is no smooth parametrisation in time—such as splines would provide—in our model, the core field secular acceleration cannot be derived in a robust way directly from our mean SV Gauss coefficient series. If, for further analysis, a core field acceleration model is required, it is recommended to pick a SV Gauss coefficient series in the model distribution such that the derived acceleration varies smoothly in time, rather than using the mean SV.

Discussion

The results presented in the previous section show that the core field and secular variation general features are well recovered through the process presented. Some difficulties have been identified, e.g. extracting information on the secular acceleration requires further processing of the derived series of snapshots. There are nonetheless technical advantages in using a sequential modelling approach over more classical methods, such as, for example, the relatively light computing power requirements. However, the main motivation for applying this method is first to extract from the data better models through the information provided by the prior, and second to have, as an output, reliable estimates of the model uncertainties. We discuss in the following these two points.

The spatial prior information for a time interval $[t_k, t_{k+1}]$ is provided to the model through the covariance matrix $\tilde{\mathbf{C}}_k$ in Eq. (5). This matrix cannot be singular because it would imply that some parts of the model are perfectly known, an hypothesis that we reject by imposing a minimum variance to all eigenvectors of the matrix. However, in the same equation the matrix $\mathbf{A}^t\mathbf{W}_j\mathbf{A}$ can be singular when the data set cannot resolve the model and the spatial prior information has an important role in this case. The prior information on the temporal behaviour of the model components intervene in the prediction part of the Kalman filter through the definition of the α_ℓ and $\dot{\alpha}_\ell$ in Eq. (9). They influence the output of the model as soon as they differ from unity. It follows that in our core field model, the prior information plays an important

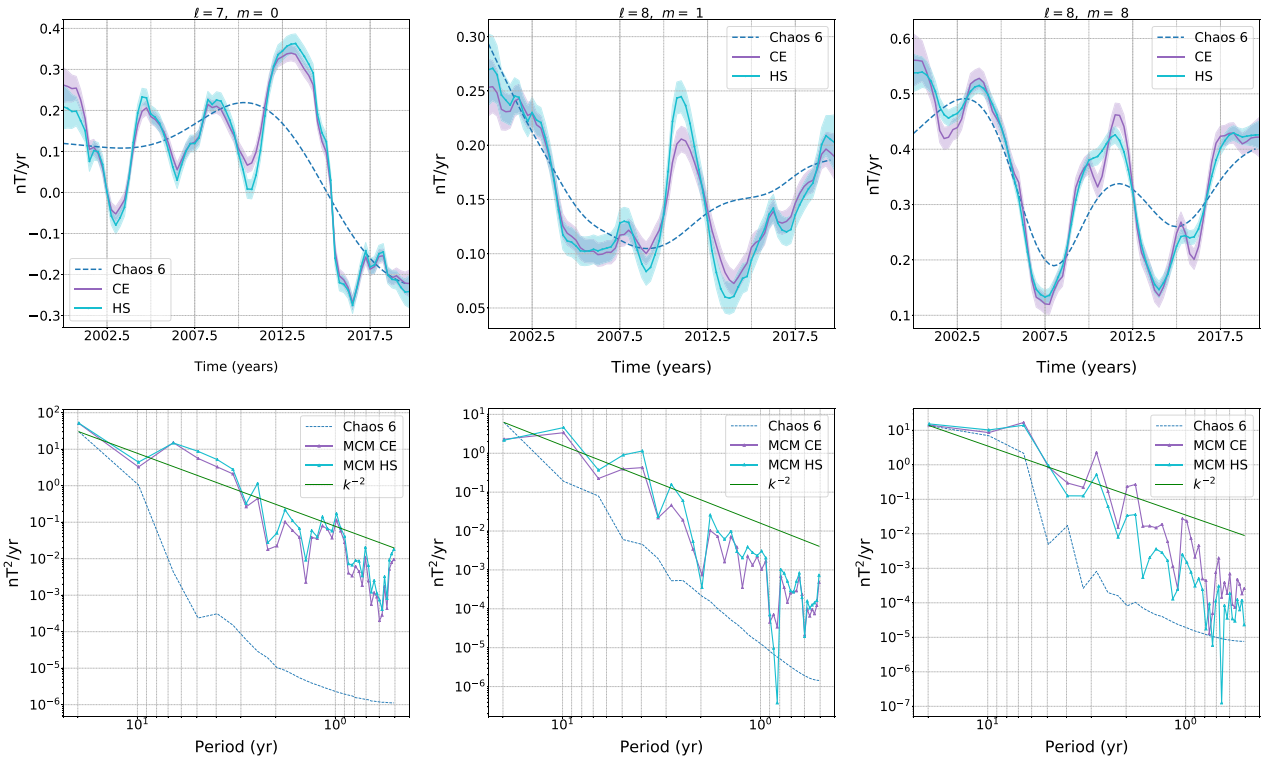

Fig. 8 Output time series are displayed for SV Gauss coefficients of degrees and orders (7,0), (8,1) and (8,8). Top: Times series of the coefficients, spanning 2000 to 2019.75. The blue dotted line represents the Chaos-6-×9 model. The purple and cyan blue lines, respectively, represent the CE and HS model. Both CE and HS series are presented within a 2σ interval. Bottom: time spectra of the corresponding SV Gauss coefficients with the same colour code. In green: the k^{-2} slope, where k is the frequency, i.e. one over the period

role in the definition of the small scales of the secular variation, and in the separation of core and induced field contributions.

We point out that the HS and CE models differ only by the spatial prior information. It is therefore the spatial prior information that leads to different temporal behaviour for the HS and CE Gauss coefficients of the secular variation, for intermediate-to-high SH degrees as shown in Figs. 7 and 8. In contrast, both the spatial and temporal prior information influence the deviations of the Chaos-6 SV model from our model series. At these spatial scales, and for a given SH degree, the HS and CE prior variances are very similar. The observed differences are therefore mainly due to the covariance between coefficients of different degree and order. These covariances are present only in the initial prior of the CE model. In particular, covariances between well resolved large scales and poorly defined small scales can be responsible for observed differences. As long as the information carried by the *Coupled Earth* dynamo model outputs is correct, there is no reason to believe less in the variations of the SV Gauss coefficient distributions of our CE models than in those of our HS or Chaos-6 models. Of course, the spread of the model distributions, characterised by the variance values, plays an important role, and it is worth studying what influences these values. The example of the induced fields is here particularly instructive.

The first point to notice is that if the contribution of the induced field is neglected, the output variances of the core field distributions are particularly small. In that case, of course, the induced field signals are partly described by the core field model, the noise, and possibly spread over other components of the model. The prior information we can provide to separate them from the core field is extremely limited, particularly regarding their low frequency components. We used here the fact that they are potential fields of internal origins, with small amplitudes. This information is not sufficient to separate them from the core contributions, and when co-estimated, the output variances of the latter increase considerably. However, we also assumed that the induced fields over a 3-months period are uncorrelated to the induced field of the next time period (whereas the core field components are strongly correlated in time). It is this characteristic, although not entirely valid, that allows an acceptable separation of the two contributions

in our model. In principle, it should be possible to use our knowledge of the deep mantle conductivity and the external fields behaviours to improve the separation.

Through this example, it is clear that a contribution which is not described in the model "leaks" inside other modelled contributions. These model components may then present spurious behaviours and small variances. As another example, the lithospheric field contribution at SH degrees lower than 15 cannot be distinguished from the static core field, and trying to model it would again increase the variance of the core field model. In contrast, the tidal signals separate well from the other components because of their well defined periodicities in time. When un-modelled they are likely to remain in the noise, whereas trying to co-estimate them should not increase the variances of the core field model. Overall, the core field model we obtained is probably not completely free of induced field contributions, it also certainly describes the small SH degree lithospheric field, some ionospheric fields, and possibly unexpected other minor, more or less static contributions. Nonetheless, while improvements are possible, our field model provides a good description of the main field, together with an estimation of its variance, that is probably slightly under-estimated.

Candidate models to the IGRF

The models presented here have contributed to set two independent contributions to the IGRF-13: the IPGP candidate to the IGRF main field 2020, and the Japanese team candidate to the IGRF predictive secular variation (Minami et al. 2020). In both cases, the data selection criteria were those described in the first section, but Swarm-B satellite data were not used.

Regarding the contribution of the Japanese candidate, the model is nearly the same as the HS model presented here with a data set including data only up to 2019.5. The scaling and reference radius used for the different covariance matrices were those of Table 3. The obtained core field and secular variation components of the model were then used as input data to the En4dVar assimilation process that led ultimately to a prediction of the mean SV over 2020–2025—see Minami et al. (2020) for details on this assimilation process.

For the IPGP main field model, the general scheme for deriving the candidate is the same as the CE model presented here, but with a data set reduced to 2013.5–2019.5 and a Kalman time step set to a year. In total only 6 time steps had to be done. This length of the Kalman step insures robust estimations of the secular variation and reduces significantly the contribution of the induced field components that required to be modelled. The scaling and radius parameter were the same as in Table 3 except for the ${}^{\mathrm{I}}g_\ell^m$ and ${}^{\mathrm{I}}\dot{g}_\ell^m$. Their radii R were set to 2200 km and their S values to $1 \cdot 10^{-3}$. From the main field model and its SV derived this way for 2019.0, the main field was linearly extrapolated to 2020.0 giving a main field candidate not much different from other candidates, although with generally slightly lesser energy.

Conclusion

In this paper, we have presented a sequential approach to core field modelling based on a combination of a Kalman filter and a correlation-based modelling method. We aim at modelling separately most major sources contributing to the observed Geomagnetic field. The separation of these different contributions relies on a strong prior information on their spatial and temporal behaviours. We built a sequence of snapshot models constituting a time series that spans 2000.0 to 2019.75, using data from 2000.0 to 2020.0.

Our model time series present mean values that are generally in agreement with recent, reliable models such as the Chaos-6 model (Finlay et al. 2016).

Nonetheless, the results suggest that more temporal variability exists in the small spatial scales of the core field compared to what is shown by classic modelling techniques. In particular, several Gauss coefficient time series present significant periodicities at time scales ranging from 3 to 10 years that are absent in the Chaos-6 time series. This technique offers the further advantage to give reasonably good estimates of the Gauss coefficients variances, provided that the separation of the different sources is appropriately handled. Our main field and SV models, as it is, probably yield slightly underestimated variances for their Gauss coefficients.

The idea behind the method presented in this paper is that, starting from a prior information on the behaviour of the different sources contributing to the magnetic field, we seek to improve this information through the analysis of data. This knowledge comes in the posterior model distribution, via the Gauss coefficients mean values and variances, that are reduced through the process. This can come, however, at the cost of increasing covariances between model coefficients, due to the incomplete separation of sources. The parametrisation of the modelled sources, and the tuning of their associated prior information is therefore the backbone of this technique. As further work is achieved for this purpose, the produced models should provide more precise and reliable information on the dynamics of the core field. The setup described in this paper, used with a different time step, has allowed the production of a candidate model for the IGRF-13.

Supplementary information

Supplementary information accompanies this paper at https://doi.org/10.1186/s40623-020-01230-1.

Additional file 1: Appendix S1. This appendix gives details on the construction of the projection operator and of the error covariance matrix used in the Kalman filter. These are defined in section Prediction Step.

Abbreviations

SV: secular variation; IGRF: International Geomagnetic Reference Field; IGRF-13: thirteenth edition of the IGRF; ML: medium-to-low latitudes; HL: high latitudes; IMF: interplanetary magnetic field; NEC: North East Centre (reference frame); SM: solar magnetic (reference frame); SH: spherical harmonics; GSM: geocentric solar magnetic (reference frame); HS: series of models using the Holschneider et al. (2016) type of prior for the core and SV fields; CE: series of models using the prior derived from the *Coupled Earth* model; AR1: auto-regressive (process) of order 1; CMB: core–mantle boundary; FD SV: secular variation computed from the core field series by finite differences; IPGP: Institut de Physique du Globe de Paris.

Acknowledgements

The authors acknowledge ESA for the provision of Swarm data and the GFZ for the provision of Champ data. S. Macmillan, the World Data Center for Geomagnetism (Edinburgh), INTERMAGNET, and all the staff operating magnetic observatories around the world are acknowledged for the preparation and provision of the observatory data sets. J. Aubert is ackowledged for the provision of *Coupled Earth* snapshot models. This is IPGP contribution: 4156.

Authors' contributions

GR and VL wrote the manuscript and produced the models presented here. VL and MH coordinated the study and designed the original method used. JB contributed to the theoretical development and implementation of the Kalman filter. All authors participated in the discussion and commented on the manuscript. All authors read and approved the final manuscript.

Funding

This research was supported by CNES in the context of the "Suivi et exploitation de la mission Swarm" project and by ESA (contract 4000109587/13/I-NB Swarm ESL/SW-CO-DTU-GS-010). The study was also partly supported by the PRC JSPS CNRS Bilateral Joint Research Project "Forecasting the geomagnetic secular variation based on data assimilation". The contribution from MH and JB was supported by the DFG in the context of the SPP 1788 "Dynamic Earth". The DAAD supported GR for a 2 months stay at the University of Potsdam (Research Grants—Short-Term Grants, 2019 (57442045)).

Data availability statement

Observatory data are available at ftp://ftp.nerc-murchison.ac.uk/geomag/Swarm/AUX_OBS/. Champ data are available on the GFZ data center at https://isdc.gfz-potsdam.de/champ-isdc/access-to-the-champ-data/. Swarm data are available on the ESA data center at https://earth.esa.int/web/guest/swarm/data-access.
The coefficients of the models presented are available upon request.

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

Author details

[1] Université de Paris, Institut de physique du globe de Paris, CNRS, 75005 Paris, France. [2] Institute for Mathematics, University of Potsdam, Potsdam , Germany.

Received: 19 March 2020 Accepted: 8 July 2020
Published online: 21 October 2020

References

Anderson BD, Moore JB (1979) Optimal filtering. Information and system sciences series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs

Aubert J (2013) Flow thoughout the earth's core inverted from geomagnetic observations and numerical dynamo models. Geophys J Int. https://doi.org/10.1093/gji/ggs051

Baerenzung J, Holschneider M, Wicht J, Sanchez S, Lesur V (2018) Modeling and predicting the short term evolution of the geomagnetic field. J Geophys Res Solid Earth. https://doi.org/10.1029/2017JB015115

Barrois O, Hammer M, Finlay C, Martin Y, Gillet N (2018) Assimilation of ground and satellite magnetic measurements: inference of core surface magnetic and velocity field changes. Geophys J Int 215(1):695–712

Beggan CD, Whaler KA (2009) Forecasting change of the magnetic field using core surface flows and ensemble kalman filtering. Geophys. Res. Lett. 36(18). https://doi.org/10.1029/2009GL039927

Christensen U, Wardinski I, Lesur V (2012) Time scales of geomagnetic secular acceleration in satellite field models and geodynamo models. Geophys J Int 190:243–254. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2012.05508.x

Chulliat A, Maus S (2014) Geomagnetic secular acceleration, jerks, and localized standing wave at the core surface from, 2000 to 2010. J Geophys Res (Solid Earth). https://doi.org/10.1002/2013JB010604

Finlay CC, Olsen N, Kotsiaros S, Gillet N, Tøffner-Clausen L (2016) Recent geomagnetic secular variation from swarm and ground observatories as estimated in the CHAOS-6 geomagnetic field model. Earth Planets Space 68:112. https://doi.org/10.1186/s40623-016-0486-1

Gillet N, Barrois O, Finlay CC (2015) Stochastic forecasting of the geomagnetic field from the cov-obs.x1 geomagnetic field model, and candidate models for igrf-12. Earth Planets Space 67(1):1–14

Holschneider M, Lesur V, Mauerberger S, Baerenzung J (2016) Correlation based modelling and separation of geomagnetic field components. J Geophys Res Solid Earth 121:3142–3160. https://doi.org/10.1002/2015JB012629

Huber PJ (1981) Robust statistics. Wiley, New York

Kalman RE (1960) A new approach to linear filtering and prediction problems. J Basic Eng 82:35–45. https://doi.org/10.1115/1.3662552

Lesur V, Wardinski I, Rother M, Mandea M (2008) GRIMM—The GFZ reference internal magnetic model based on vector satellite and observatory data. Geophys J Int 173(2):382–394. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.03724.x

Lesur V, Rother M, Vervelidou F, Hamoudi M, Thébault E (2013) Post-processing scheme for modeling the lithospheric magnetic field. Solid Earth 4:105–118. https://doi.org/10.5194/sed-4-105-2013

Lesur V, Whaler K, Wardinski I (2015) Are geomagnetic data consistent with stably stratified flow at the core-mantle boundary? Geophys J Int 201(2):929–946. https://doi.org/10.1093/gji/ggv031

Lesur V, Wardinski I, Baerenzung J, Holschneider M (2017) On the frequency spectra of the core magnetic field Gauss coefficients. Phys Earth Plan Int. https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.05.017

Lesur V, Rother M, Wardinski I, Schachtschneider R, Hamoudi M, Chambodut A (June 2015) Parent magnetic field models for the igrf-12 gfz-candidates. *Earth, Planets and Space*, 67(87), https://doi.org/10.1186/s40623-015-0239-6

Macmillan S, Olsen N (2013) Observatory data and the swarm mission. Earth Planets Space 65(11):1355–1362. https://doi.org/10.5047/eps.2013.07.011

Maus S, Weidelt P (2004) Separating the magnetospheric disturbance magnetic field into external and transient internal contributions using a 1D conductivity model of the Earth. Geophys Res Lett 31:L12614. https://doi.org/10.1029/2004GL020232

Minami T, Nakano S, Lesur V, Takahashi F, Matsushima M, Shimizu H, Nakashima R, Taniguchi H, Toh H (2020) A candidate secular variation model for igrf-13 based on mhd dynamo simulation and data assimilation, en4dvar. Earth Planets Space. https://doi.org/10.1186/s40623-020-01253-8

Rauch HE, Tung F, Striebel CT (1965) Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. AIAA J 3(8):1445–1450. https://doi.org/10.2514/3.3166

Thébault et al (2015) International geomagnetic reference field: the twelfth generation. Earth Planets Space 67:79. https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9

Thomson AWP, Lesur V (2007) An improved geomagnetic data selection algorithm for global geomagnetic field modelling. Geophys J Int 169:951–963. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03354.x

Publisher's Note

Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Annexe : Opérateur de prédiction et matrice de covariance de l'erreur de prédiction associée

Appendix A. The prediction operator and associated error covariance matrix

The core field and secular variation evolve according to

$$g^m_{\ell,k+1} = \alpha_\ell \left(g^m_{\ell,k} + \Delta t \dot{g}^m_{\ell,k} \right) + \omega_c \tag{A.1}$$

$$\dot{g}^m_{\ell,k+1} = \dot{\alpha}_\ell \, \dot{g}^m_{\ell,k} + \dot{\omega}_c \tag{A.2}$$

where ω_c and $\dot{\omega}_c$ are zero mean errors. To the first order their variances, v_{ω_c} and $\dot{v}_{\omega_c}$ respectively, are proportional to that of the coefficients of the secular acceleration, $\ddot{g}^m_\ell$: $v_{\omega_c} = \frac{\Delta t^4}{4} \, \ddot{v}_{g^m_\ell}$ and $\dot{v}_{\omega_c} = \Delta t^2 \, \ddot{v}_{g^m_\ell}$. Unfortunately, the variance of the secular acceleration coefficients, $\ddot{v}_{g^m_\ell}$, is not part of the priors we set. To circumvent this difficulty, we define a time scale $\tilde{\tau}_{sa} = \sqrt{\frac{\dot{v}^0_{g^m_\ell}}{\ddot{v}_{g^m_\ell}}}$, where $\dot{v}^0_{g^m_\ell}$ is the prior variance of the secular variation coefficients. This definition differs from the usual τ_{sa} time scale definition (see e.g. – Christensen et al. (2012)). Nonetheless we assume that $\tilde{\tau}_{sa}$ takes similar values, which are around 10-15 years up to spherical harmonics degree 13 and get smaller for higher spherical harmonics degrees (Christensen et al. 2012). Therefore we set $\tilde{\tau}_{sa} = 11$years, independently of the spherical harmonics degree, even if we know that this value is likely too large for the largest spherical harmonics degrees of our secular variation model. Similarly we defined $\tilde{\tau}_{sv} = \sqrt{\frac{v^0_{g^m_\ell}}{\dot{v}^0_{g^m_\ell}}}$ where $v^0_{g^m_\ell}$ is the prior variance of the core field coefficients. With these definitions, the variances v_{ω_c} and $\dot{v}_{\omega_c}$ reduces to:

$$v_{\omega_c} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sv}} \right)^2 \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}} \right)^2 v^0_{g^m_\ell}$$

and

$$\dot{v}_{\omega_c} = \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}} \right)^2 \dot{v}^0_{g^m_\ell},$$

respectively.

We turn now to the estimation of the α_ℓ and $\dot{\alpha}_\ell$ values in equations (A.1), (A.2). Starting with the core field evolution, we compute α_ℓ from eq. (A.1) and from the stationary hypothesis. The latter implies that the variance $v_{g^m_\ell}$ is independent of time. Therefore equation (A.1) gives:

$$v^0_{g^m_\ell} = \alpha_l^2 \left(v^0_{g^m_\ell} + \Delta t^2 v^0_{\dot{g}^m_\ell} \right) + v_{\omega_c}, \tag{A.3}$$

and therefore:

$$\alpha_\ell = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sv}} \right)^2 \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sv}} \right)^2}}. \tag{A.4}$$

Now, for the evolution of the SV, we evaluate the value of $\dot{\alpha}_\ell$ from eq. (A.2), and with the stationary hypothesis it gives:

$$\dot{v}^0_{g^m_\ell} = \dot{\alpha}_l^2 \, \dot{v}^0_{g^m_\ell} + \dot{v}_{\omega_c},$$

leading to

$$\dot{\alpha}_\ell = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}}\right)^2}. \tag{A.5}$$

It is now possible to describe precisely the prediction operator $\mathbf{P}$. This operator can be presented as a block diagonal matrix, where there is a single block for the core and its SV, and a block for each of the other individual sources. These individual sources evolve as an AR1 process (see section Prediction step). Therefore the blocks are diagonal and their diagonal coefficients are the α from equation (11).

For the core field and secular variation block, we define 4 diagonal sub-blocks: $\mathbf{P}^{cc}$, $\mathbf{P}^{ss}$, $\mathbf{P}^{cs}$ and $\mathbf{P}^{sc}$, such that the block can be presented as:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^{cc} & \mathbf{P}^{cs} \\ \mathbf{P}^{sc} & \mathbf{P}^{ss} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{P}^{cc}$ (reps. $\mathbf{P}^{ss}$) relates the core field coefficients (resp. secular variation coefficients) at time step k to those at time step $k+1$. Similarly, $\mathbf{P}^{sc}$ (reps. $\mathbf{P}^{cs}$) relates the core field coefficients (resp. secular variation coefficients) at time step k to those of the secular variation (resp. core field) at time step $k+1$. The diagonal elements of $\mathbf{P}^{cc}$ are the α_ℓ from eq. (A.1) and those of $\mathbf{P}^{ss}$ are the $\dot{\alpha}_\ell$ from eq. (A.2). $\mathbf{P}^{sc}$ is an empty sub-block, and $\mathbf{P}^{cs}$ diagonal elements are $(\Delta t \, \alpha_\ell)$ as it can be derived from equation (A.1).

We explicit the error covariance matrix $\mathbf{C_w}$, which has also a block diagonal structure. It is composed of one block matrix for each source. For all sources, we introduce the diagonal matrix $\mathbf{D}^{n_s}$ where n_s designates the source. The diagonal terms of $\mathbf{D}^{n_s}$, $d_i^{n_s}$ are defined as follows:

$$\begin{aligned} d_i^{cc} &= \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2}{\tilde{\tau}_{sa}} && \text{for the core} \\ d_i^{ss} &= \frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{sa}} && \text{for the SV} \\ d_i^{n_s} &= \sqrt{1-\alpha_{n_s}^2} && \text{for all the other sources} \end{aligned} \tag{A.6}$$

where Δt is the time step, $\tilde{\tau}_{sa}$ is the time scale defined above, and α_{n_s} is the factor governing the evolution of AR1 processes, defined in eq. (12). The superscripts cc and ss designates the core field and SV respectively. The superscript n_s stands for any of the other sources, that we recall evolve like AR1 processes (eq. (11)).

We also denote $\widetilde{\mathbf{C}}_0^{n_s}$ the block of $\widetilde{\mathbf{C}}_0$ corresponding to the source n_s. We recall that $\widetilde{\mathbf{C}}_0$ is introduced in

section Analysis step. It contains the prior information on the spatial behaviour of every source modelled, through block matrices that can be diagonals (for all sources in the case of the HS model) or full (for the core field and SV in the case of the CE model).

For source n_s, the corresponding block of $\mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{n_s}$ is therefore:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{cc} &= \mathbf{D}^{cc}\,\widetilde{\mathbf{C}}_0^{ss}(\mathbf{D}^{cc})^t \qquad \text{for the core} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{ss} &= \mathbf{D}^{ss}\,\widetilde{\mathbf{C}}_0^{ss}(\mathbf{D}^{ss})^t \qquad \text{for the SV} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{w}}^{n_s} &= \mathbf{D}^{n_s}\,\widetilde{\mathbf{C}}_0^{n_s}(\mathbf{D}^{n_s})^t \qquad \text{for all the other sources} \end{aligned} \tag{A.7}$$

where the super-script t denotes the transpose.

Références

Alken, P., Thebault, E., Beggan, C., Aubert, J., Baerenzung, J., Brown, W., Califf, S., Chulliat, A., Cox, G., Finlay, C., Fournier, A., Gillet, N., Hammer, M., Holschneider, M., Hulot, G., Korte, M., Lesur, V., Livermore, P., Lowes, F., and Wardinski, I. (2020). Evaluation of candidate models for the 13th generation international geomagnetic reference field.

Alken, P., Thebault, E., Beggan, C., and Nosé, M. (2021). Special issue "international geomagnetic reference field : the thirteenth generation". Earth, Planets and Space, 74.

Asari, S., Shimizu, H., and Utada, H. (2009). Robust and less robust features in the tangential geostrophy core flows. 178(2) :678–692.

Aubert, J. (2013). Flow thoughout the earth's core inverted from geomagnetic observations and numerical dynamo models. Geophys. J. Int.

Aubert, J. (2018). Geomagnetic acceleration and rapid hydromagnetic wave dynamics in advanced numerical simulations of the geodynamo. Geophys. J. Int., 214 :531–547.

Aubert, J., Finlay, C. C., and Fournier, A. (2013). Bottom-up control of geomagnetic secular variation by the earth's inner core. Nature, 502 :219–223.

Aubert, J. and Gillet, N. (2021). The interplay of fast waves and slow convection in geodynamo simulations nearing Earth's core conditions. Geophysical Journal International, 225(3) :1854–1873.

Baumjohann, W. and Nakamura, R. (2007). Magnetospheric Contributions to the Terrestrial Magnetic Field, volume 5, pages 77–92.

Beggan, C. D. and Whaler, K. A. (2009). Forecasting change of the magnetic field using core surface flows and ensemble kalman filtering. Geophys. Res. Lett., 36(18).

Christensen, U., Wardinski, I., and Lesur, V. (2012). Time scales of geomagnetic

secular acceleration in satellite field models and geodynamo models. Geophys J. Int., 190 :243–254.

Chulliat, A. and Maus, S. (2014). Geomagnetic secular acceleration, jerks, and localized standing wave at the core surface from 2000 to 2010. Journal of Geophysical Research (Solid Earth).

Courtillot, V., Ducruix, J., and Le Mouël, J.-L. (1978). Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. D, 287 :1095–1098.

Cox, G. A., Livermore, P. W., and Mound, J. E. (2014). Forward models of torsional waves : dispersion and geometric effects. Geophysical Journal International, 196(3) :1311–1329.

Evensen, G. (2003). The ensemble Kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. Ocean Dynamics, 53 :343–367.

Fillion, M. (2020). Étude et modélisation des courants électriques circulant dans la région F de l'ionosphère. PhD thesis, Université de Paris, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris.

Finlay, C., Aubert, J., and Gillet, N. (2016). Gyre-driven decay of the earth's magnetic dipole. Nature communications, 7 :10422.

Finlay, C., Jackson, A., Gillet, N., and Olsen, N. (2012). Core surface magnetic field evolution 2000-2010. Geophys. J. Int., 189(2) :761–781.

Finlay, C., Kloss, C., Olsen, N., Hammer, M., Tøffner-Clausen, L., Grayver, A., and Kuvshinov, A. (2020). The chaos-7 geomagnetic field model and observed changes in the south atlantic anomaly. Earth, Planets and Space, 72.

Finlay, C., Olsen, N., and Toeffner-Clausen, L. (2015). DTU candidate field models for IGRF-12 and the CHAOS-5 geomagnetic field model. Earth, Planets and Space, 67(114).

Finlay, C. C., Lesur, V., Thébault, E., Vervelidou, F., Morschhauser, A., and Shore, R. (2017). Challenges handling magnetospheric and ionospheric signals in internal geomagnetic field modelling. Space Science Reviews, 206 :157–189.

Finlay, C. C., Olsen, N., Kotsiaros, S., Gillet, N., and Tøffner-Clausen, L. (2016). Recent geomagnetic secular variation from swarm and ground observatories as estimated in the CHAOS-6 geomagnetic field model. Earth Planets and Space, page 68 :112.

Fournier, A., Auber, J., and Thébault, E. (2015). A candidate secular variation model for igrf-12 based on swarm data and inverse geodynamo modelling. Earth Planets Space, page 67 :81.

Fournier, A., Aubert, J., Lesur, V., and Ropp, G. (2021). A secular variation candidate model for igrf-13 based on swarm data and ensemble inverse geodynamo modelling. Earth, Planets and Space, 73.

Ganushkina, N. Y., Liemohn, M. W., and Dubyagin, S. (2018). Current systems in

the earth's magnetosphere. Reviews of Geophysics, 56(2) :309–332.

Gauss, C. F. (1838). Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838. Göttingen & Leipzig.

Gee, J. and Kent, D. (2007). 5.12 - source of oceanic magnetic anomalies and the geomagnetic polarity timescale. In Schubert, G., editor, Treatise on Geophysics (Second Edition), pages 419–460. Elsevier, Oxford, second edition edition.

Gillet, N., Barrois, O., and Finlay, C. C. (2015a). Stochastic forecasting of the geomagnetic field from the cov-obs.x1 geomagnetic field model, and candidate models for igrf-12. Earth Planets and Space, 67(1) :1–14.

Gillet, N., Jault, D., Daix Canet, E., and Fournier, A. (2010). Fast torsional waves and strong magnetic field within the earth's core. Nature, 465 :74–7.

Gillet, N., Jault, D., Finlay, C., and Olsen, N. (2013). Stochastic modelling of the Earth's magnetic field : inversion for covariances over the observatory era. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 14(4) :766–786.

Gillet, N., Jault, D., and Finlay, C. C. (2015b). Planetary gyre, time-dependent eddies, torsional waves and equatorial jets at the Earth's core surface. J. Geophys. Res. (Solid Earth), 120(6) :3991–4013.

Gubbins, D., Jones, A., and Finlay, C. (2006). Fall in Earth's magnetic field is erratic. Science, 312 :900–902.

Holme, R. (2007). Large-scale flow in the core. In Olson, P., editor, Treatise on Geophysics, volume 8. Elsevier Ltd., Amsterdam.

Holschneider, M., Lesur, V., Mauerberger, S., and Baerenzung, J. (2016). Correlation based modelling and separation of geomagnetic field components. J. Geophys. Res. Solid Earth, 121 :3142–3160.

Huber, P. (1981). Robust Statistics. John Wiley & Sons.

Huder, L., Gillet, N., Finlay, C., Hammer, M., and Tchoungui, H. (2020). Cov-obs.x2 : 180 years of geomagnetic field evolution from ground-based and satellite observations. Earth, Planets and Space, 72.

Hulot, G., Olsen, N., and Sabaka, T. J. (2007). The present field, volume 5 of Treatise in Geophysics, Geomagnetism. Elsevier Ltd., Amsterdam.

Jackson, A. (1997). Time-dependency of tangentially geostrophic core surface motions. Phys. Earth Planet. Inter., 103 :293–311.

Jackson, A. and Finlay, C. (2015). 5.05 - geomagnetic secular variation and its applications to the core. In Schubert, G., editor, Treatise on Geophysics (Second Edition), pages 137–184. Elsevier, Oxford, second edition edition.

Jankowski, J. and Sucksdorff, C. (1996). IAGA guide for magnetic measurements and observatory practice. IAGA.

Jault, D. and Le Mouël, J. L. (1989). The topographic torque associated with a tangentially geostrophic motion at the core surface and inferences on flow inside the core. Geophys. & Astrophys. Fluid Dyn., 48 :273–296.

Jault, D. and Le Mouël, J. L. (1991). Physical properties at the top of the core and core surface motions. Phys. Earth Planet. Inter., 68 :76–84.

Jones, C. (2015). 8.05 - thermal and compositional convection in the outer core. In Schubert, G., editor, Treatise on Geophysics (Second Edition), pages 115–159. Elsevier, Oxford, second edition edition.

Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Journal of Basic Engineering, 82 :35–45.

Langel, R. A. (1985). Introduction to the special issue : A perspective on Magsat results. J. geophys. Res., 90 :2441–2444.

Langel, R. A. and Estes, R. H. (1985a). Large-scale, near-Earth magnetic fields from external sources and the corresponding induced internal field. J. geophys. Res., 90 :2487–2494.

Langel, R. A. and Estes, R. H. (1985b). The near-Earth magnetic field at 1980 determined from Magsat data. J. geophys. Res., 90 :2495–2509.

Langel, R. A., Ousley, G., Berbert, J., Murphy, J., and Settle, M. (1982). The Magsat mission. Geophys. Res. Lett., 9 :243–245.

Lesur, V., Olsen, N., and Thomson, A. (2010). Geomagnetic core field models in the satellite era. In Mandea, M. and Korte, M., editors, Geomagnetic Observations and Models, volume 5 of IAGA book series, chapter 11, pages 277–294. Springer.

Lesur, V., Rother, M., Vervelidou, F., Hamoudi, M., and Thébault, E. (2013). Post-processing scheme for modeling the lithospheric magnetic field. Solid Earth, 4 :105–118.

Lesur, V., Rother, M., Wardinski, I., Luehr, H., Michaelis, I., and Rauberg, J. (2011). GRIMM-2 : The parent magnetic field model for an IGRF candidate model. In Muench, U. and Dransch, W., editors, Geotechnologien Science Report, volume 17 of Observation of the System Earth from Space. Geotechnologien.

Lesur, V., Rother, M., Wardinski, I., Schachtschneider, R., Hamoudi, M., and Chambodut, A. (2015). Parent magnetic field models for the igrf-12 gfz-candidates. Earth, Planets and Space, 67(87).

Lesur, V., Wardinski, I., Asari, S., Minchev, B., and Mandea, M. (2010). Modelling the Earth's core magnetic field under flow constraints. Earth, Planets and Space, 62 :503–516.

Lesur, V., Wardinski, I., Rother, M., and Mandea, M. (2008). GRIMM - The GFZ Reference Internal Magnetic Model based on vector satellite and observatory data. Geophys. J. Int., 173(2) :382–394.

Lesur, V., Whaler, K., and Wardinski, I. (2015). Are geomagnetic data consistent with stably stratified flow at the core-mantle boundary ? Geophys. J. Int., 201(2) :929 – 946.

Livermore, P., Finlay, C., and Bayliff, M. (2020). Recent north magnetic pole acceleration towards siberia caused by flux lobe elongation. Nature Geoscience,

13 :1–5.

Macmillan, S. and Olsen, N. (2013). Observatory data and the swarm mission. Earth, Planets and Space, 65(11) :1355–1362.

Maus, S. (2007). CHAMP magnetic mission. In Gubbins, D. and Herrero-Bervera, E., editors, Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism. Springer, Heidelberg.

Olsen, N., Albini, G., Bouffard, J., Parrinello, T., and Tøffner-Clausen, L. (2020). Magnetic observations from cryosat-2 : calibration and processing of satellite platform magnetometer data. Earth Planets and Space, 72 :48.

Olsen, N., Glassmeier, K.-H., and Jia, X. (2010a). Separation of the magnetic field into external and internal parts. Space Science Reviews, 152 :135–157.

Olsen, N., Hulot, G., Lesur, V., Finlay, C., Beggan, C., Chulliat, A., Sabaka, T. J., Floberghagen, R., Friis-Christensen, E., Haagmans, R., Kotsiaros, S., Luehr, H., TøffnerClausen, L., and Vigneron, P. (2015). The swarm initial field model for the 2014 geomagnetic field. Geophys. Res. Lett., 42.

Olsen, N., Lowes, F., and Sabaka, T. (2005a). Ionospheric and induced field leakage in geomagnetic field models, and derivation of candidate models for DGRF 1995 and DGRF 2000. Earth Planet Space, 57 :1191–1196.

Olsen, N., Lühr, H., Sabaka, T., Mandea, M., Rother, M., Tøffner-Clausen, L., and Choi, S. (2006). CHAOS – A model of the Earth's magnetic field derived from CHAMP, Oersted, and SAC-C magnetic satellite data. Geophys. J. Int., 166(1) :67–75.

Olsen, N., Lühr, H., T. Sabaka, T., Michaelis, I., Rauberg, J., and Tøffner-Clausen, L. (2010b). Chaos-4 – a high-resolution geomagnetic field model derived from low-altitude champ data. In AGU Fall Meeting, number Poster GP21A-0992, San Francisco.

Olsen, N., Mandea, M., Sabaka, T., and Tøffner-Clausen, L. (2010c). The chaos-3 geomagnetic field model and candidates for the 11th generation igrf. Earth Planets Space, 62 :719–727.

Olsen, N., Mandea, M., Sabaka, T. J., and Tøffner-Clausen, L. (2009). CHAOS-2 – a geomagnetic field model derived from one decade of continuous satellite data. Geophys. J. Int., 179(3) :1477–1487.

Olsen, N., Sabaka, T., and Lowes, F. (2005b). New parameterisation of external and induced fields in geomagnetic field modelling, and a candidate model for IGRF 2005. Earth Planets, and Space, 57 :1141–1149.

Olsen, N. et al. (2013). The swarm satellite constellation application and research facility (scarf) and swarm data products. Earth, Planets and Space, 65(11) :1189–1200.

Olson, P. (2015). 8.01 - core dynamics : An introduction and overview. In Schubert, G., editor, Treatise on Geophysics (Second Edition), pages 1–25. Elsevier,

Oxford, second edition edition.

Roberts, P. (2015). 8.03 - theory of the geodynamo. pages 57–90.

Ropp, G., Lesur, V., Baerenzung, J., and Holschneider, M. (2020). Sequential modelling of the Earth's core magnetic field. Earth, Planets and Space. Under review.

Sabaka, T. and Baldwin, R. (1993). Modeling the Sq magnetic field from POGO and Magsat satellite and contemporaneous hourly observatory data : Phase I. Contract report HSTX 9302, Hughes STX Corp. for NASA/GSFC Contract NAS5-31 760.

Sabaka, T. J., Olsen, N., and Langel, R. A. (2002). A comprehensive model of the quiet-time, near-Earth magnetic field : phase 3. Geophys. J. Int., 151 :32–68.

Sabaka, T. J., Olsen, N., and Purucker, M. E. (2004). Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data. Geophys. J. Int., 159 :521–547.

Sabaka, T. J., Olsen, N., Tyler, R. H., and Kuvshinov, A. (2015). CM5, a pre-Swarm comprehensive geomagnetic field model derived from over 12 yr of CHAMP, Ørsted, SAC-C and observatory data. Geophys. J. Int., 200(3) :1596–1626.

Sabaka, T. J., Tøffner-Clausen, L., Olsen, N., and Finlay, C. (2018). A comprehensive model of earth's magnetic field determined from 4 years of swarm satellite observations. Earth, Planets and Space, 70.

Sabaka, T. J., Tøffner-Clausen, L., Olsen, N., and Finlay, C. (2020). Cm6 : a comprehensive geomagnetic field model derived from both champ and swarm satellite observations. Earth, Planets and Space, 72.

Shannon, C. (1984). Communication in the presence of noise. Proceedings of the IEEE, 72(9) :1192–1201.

Stockmann, R., Christiansen, F., Olsen, N., and Jackson, A. (2015). Pogo satellite orbit corrections : an opportunity to improve the quality of the geomagnetic field measurements ? Earth, Planets and Space, 67(102).

Sugiura, M. (1964). Hourly values of equatorial Dst for the International Geophysical Year. Annals International Geophysical Year, 35 :9.

Taylor, P. T. and Frawley, J. J. (1987). Magsat anomaly data over the kursk region, u.s.s.r. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 45(3) :255–265.

Thébault, E., Purucker, M., Whaler, K., Langlais, B., and Sabaka, T. (2010). The magnetic field of the earth's lithosphere. Space Science Reviews, 155 :95–127.

Thébault, E., Vigneron, P., Langlais, B., and Hulot, G. (2016). A swarm lithospheric magnetic field model to sh degree 80. Earth, Planets and Space, 68(1) :126.

Thomson, A. and Lesur, V. (2006). Core and Lithosphere Magnetic Field Model BGS/G/L/0706. Geophys. J. Int., in review.

Tyler, R., Maus, S., and Lühr, H. (2003). Satellite observations of magnetic fields due to ocean tidal flow. Science, 299 :239–241.

Vigneron, P., Hulot, G., Leger, J.-M., and Jager, T. (2021). Using improved swarm's experimental absolute vector mode data to produce a candidate definitive geomagnetic reference field (dgrf) 2015.0 model. Earth, Planets and Space, 73 :197.

Wardinski, I. and Holme, R. (2003). Decadal and Subdecadal Secular Variation of Main Geomagnetic Field. In Reigber C, Lühr H, S. P., editor, First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies, pages 226 – 232, Berlin, Heidelberg, New–York. Springer-Verlag.

Yamazaki, Y. and Maute, A. (2018). Sq and eej—a review on the daily variation of the geomagnetic field caused by ionospheric dynamo currents. pages 307–413.